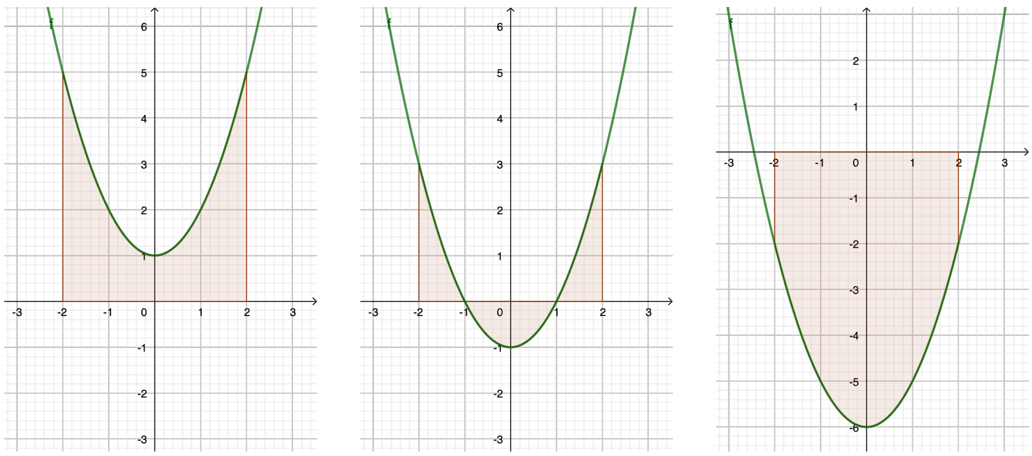
Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

07 Dicembre 2022

Esercizio 11.1. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e S_β l'area del sottografico associato alla funzione $f(x) = x^2 + \beta$ dove $x \in [-2, 2]$.

Soluzione Dobbiamo distinguere tre casi:



(a) $\beta > 0$ (b) $-4 \leq \beta < 0$ (c) $\beta < -4$

Figura 1

- $\beta \geq 0$ In questo caso la parabola si trova sempre sopra l'asse x (Figura 1a).

$$S_\beta = \int_{-2}^{2} (x^2 + \beta) dx$$

- Analizziamo ora quando la parabola interseca l'asse x in due punti interni all'intervallo $[-2, 2]$ (Figura 1b)

$$x^2 + \beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -\beta \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\beta}$$
$$\Longrightarrow \exists x \in [-2, 2] \ : \ f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow -\beta \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad \beta \geq -4$$

Di conseguenza, quando $-4 \leq \beta < 0$

$$S_\beta = \int_{-2}^{2} |f(x)| dx = \int_{-2}^{-\sqrt{-\beta}} (x^2 + \beta) dx + \int_{-\sqrt{-\beta}}^{\sqrt{-\beta}} (x^2 + \beta) dx + \int_{\sqrt{-\beta}}^{2} (x^2 + \beta) dx$$

- Rimane il caso in cui la parabola si trova sempre sotto l'asse x in $[-2, 2]$, ovvero quando $\beta < 4$ (Figura 1c), in cui si ha

$$S_\beta = -\int_{-2}^{2} (x^2 + \beta) dx$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

Esercizio 11.2. Determinare l'area della regione di piano compresa tra $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$ e le rette $x = 0$ e $x = \pi$

Soluzione Prima di tutto determiniamo l'intersezione:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$$

Abbiamo quindi che $f(x) \geq g(x)$ su $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e che $f(x) \leq g(x)$ su $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ Di conseguenza

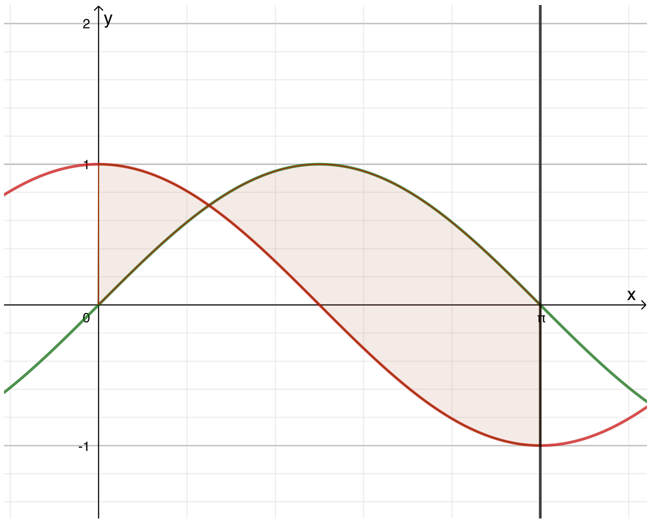


Figura 2

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx = [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\operatorname{sen} x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1\right) - \left(\frac{0 - 1 - \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Esercizio 11.3. Calcolare i seguenti integrali

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$ b) $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 3\sqrt{x} + 2}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{e - \frac{1}{e}} \sqrt{4 - x^2}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}dx$

Soluzione