

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica  
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023  
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi\*

03 Ottobre 2022

**Esercizio 3.1.** Determinare gli estremi inferiore e superiore ed eventuali massimi e minimi dei seguenti insiemi

- (a)  $A = \left\{ \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$   
(b)  $B = \left\{ 2(-1)^n - \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$   
(c)  $C = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m \right\}$

*Soluzione*

(a)

**Osservazione.** Possiamo riscrivere  $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ .

Se calcoliamo alcuni elementi dell'insieme  $A = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$  ci accorgiamo che sono tutti compresi in  $[0, 1[$ .

**Estremo inferiore:** siccome  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{n}{n+1} \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Inoltre  $0 \in A$ , per cui si ha che  $\inf A = 0$  e  $\min A = 0$ .

**Estremo superiore:** Dobbiamo dimostrare che  $\sup A = 1$

- $1 \geq 1 - \frac{1}{n+1}$  perché  $\frac{1}{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Dobbiamo provare che  $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n+1} \geq 1 - \varepsilon$ . Fissiamo  $\varepsilon$  e cerchiamo  $n$ :

$$\frac{n}{n+1} \geq 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$(n+1)\varepsilon \geq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$n\varepsilon \geq 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$n \geq \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$$

Se  $\varepsilon \geq 1$ , la disequazione è sempre verificata perché il numeratore diventa negativo.

Se  $\varepsilon < 1$  basta scegliere un numero naturale  $n > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$ .

Questo dimostra che  $\sup A = 1$ . L'insieme non ammette massimo perché  $1 \notin A$ .

(b) Separiamo i casi in cui  $n$  è pari da quelli in cui  $n$  è dispari:

$$B = \underbrace{\left\{ 2 - \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ pari} \right\}}_{B'} \cup \underbrace{\left\{ -2 - \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ dispari} \right\}}_{B''}$$

---

\*Trascrizione a cura di Davide Borra e Matilde Calabri

**Osservazione.** È un'unione disgiunta, cioè  $\forall x \in B', y \in B'', y < 0 < x$ , infatti

$$2 - \frac{1}{2n} > 0 \quad e \quad -2 - \frac{1}{2n} < 0$$

Da questo si ottiene che  $\sup B = \sup B'$  e  $\inf B = \inf B''$

**Estremo superiore:**

**Osservazione.** In  $B'$  gli elementi si avvicinano a 2 quando  $n$  cresce perché  $\frac{1}{2n}$  diventa sempre più piccolo.

La dimostrazione è analoga a quella del  $\sup A$ .

**Estremo inferiore:**

Calcoliamo alcuni degli elementi di  $B = \left\{-\frac{5}{2}, -\frac{13}{6}, \dots\right\}$ . Si nota che all'aumentare di  $n$  gli elementi di  $B''$  crescono, di conseguenza si ha  $\inf B = \min B'' = -\frac{5}{2}$ .

(c) **Estremo superiore:**

**Osservazione.** Se pongo  $m = 1$ , ottengo  $\mathbb{N}_{\geq 2}$ . Di conseguenza  $\mathbb{N}_{\geq 2} \subseteq C$ . Da questo si ricava che  $\sup C \geq \sup \mathbb{N}_{\geq 2}$ , da cui (siccome  $\sup \mathbb{N}_{\geq 2} = +\infty$ ),

$$\sup C = +\infty$$

**Estremo inferiore:**

Scelgo  $m = n + 1$ , ottengo  $D = \left\{\frac{n+1}{n}, n \neq 0\right\} \subseteq C$ . Analogamente a quanto fatto nel punto (a) è possibile dimostrare che  $\inf D = 1$ . Inoltre siccome  $D \subseteq C$ , si ha  $\inf D \geq \inf C \Rightarrow \inf C \leq 1$ . Inoltre sappiamo che  $\forall n > m, \frac{n}{m} > 1$ , di conseguenza  $\inf C \geq 1$ . Siccome  $\inf C \geq 1$  e  $\inf C \leq 1$ , si ha  $\inf C = 1$ .

**Esercizio 3.2.** Risolvere in  $\mathbb{C}$  le seguenti equazioni:

- (a)  $\frac{1}{|z| \cdot \bar{z}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$
- (b)  $\bar{z}(\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z) = z$
- (c)  $2z^2 + \bar{z} = -1$

*Soluzione*

(a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z| \cdot \bar{z}} &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \\ \frac{1}{||z| \cdot \bar{z}|} &= \left| \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right| \end{aligned}$$

Analizzo la prima parte dell'equazione

$$\frac{1}{||z| \cdot \bar{z}|} = \frac{1}{|z| \cdot ||z||} = \frac{1}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Torno all'equazione originale

$$\frac{1}{\bar{z}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

Analizzo la prima parte dell'equazione

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{z \cdot \bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$$

Ritorno all'equazione originale

$$z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

(b)  $\bar{z}(\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z) = z$

Utilizzo la forma algebrica ( $z = a + ib$ )

$$\begin{aligned}(a - ib)(b - a) &= a + ib \Leftrightarrow \\ a(b - a) + ib(a - b) &= a + ib \Leftrightarrow \\ \begin{cases} a(b - a) = a \\ b(a - b) = b \end{cases}\end{aligned}$$

Distinguo due casi:

Caso  $a = 0$

$$\begin{cases} \forall b \\ -b^2 = b \Leftrightarrow b(b + 1) = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0, z_2 = -i \end{cases}$$

Caso  $a \neq 0$

$$\begin{cases} b - a = 1 \Leftrightarrow a - b = -1 \\ -b = b \Leftrightarrow b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1 \Leftrightarrow z_3 = -1$$

(c)  $2z^2 + \bar{z} = -1$

Utilizzo la forma algebrica ( $z = a + ib$ )

$$\begin{aligned}2(a + ib)(a + ib) + (a - ib) &= -1 \Leftrightarrow 2a^2 - 2b^2 + 4abi + a - ib = -1 \\ \begin{cases} 2a^2 - 2b^2 + a = -1 \\ 4ab - b = 0 \Leftrightarrow b(4a - 1) = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Distinguo due casi

Caso  $b = 0$

$$\begin{cases} 2a^2 + a + 1 = 0 \\ \forall a \end{cases} \Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{4} \Leftrightarrow \nexists a$$

Se  $b=0$  non abbiamo soluzioni

Caso  $b \neq 0$

Dalla seconda equazione ottengo che  $a = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{16} - 2b^2 + \frac{1}{4} = -1 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -b^2 = -\frac{11}{16} \Leftrightarrow b = \pm \frac{\sqrt{11}}{4}$$

Otengo quindi le soluzioni  $z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{11}}{4}$

**Esercizio 3.3.** Si considerino le funzioni  $f, g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definite come

$$f(z) = z + z_0, \quad \text{con } z_0 \in \mathbb{C} \text{ fissato}$$

$$g(z) = iz$$

$$h(z) = z^2$$

e gli insiemi

$$A = \{z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \text{ e } 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$$

$$B = \left\{z : |z| \leq 2, \arg z \in \left[\frac{3}{8}\pi, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

$$C = \{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$$

Rappresentare  $f(A), g(B), h(B), h(C)$ .

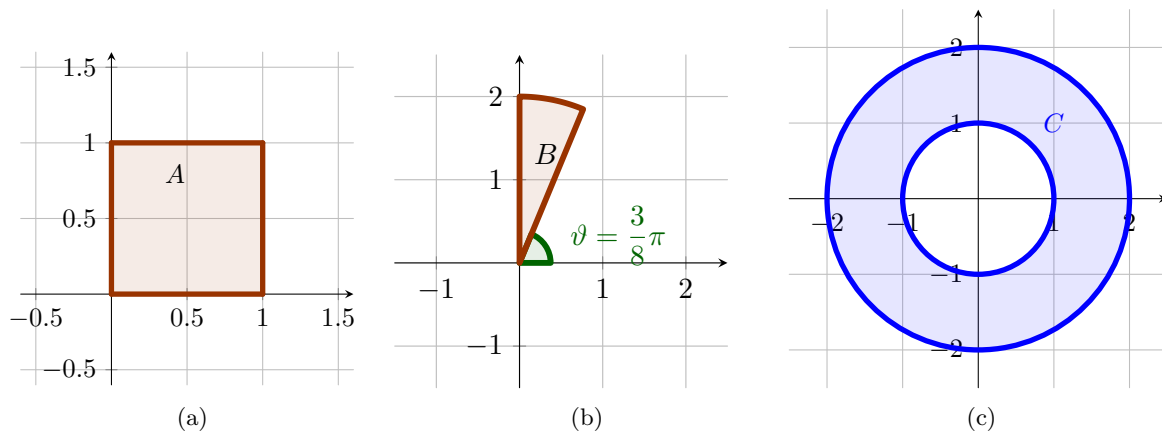


Figura 1

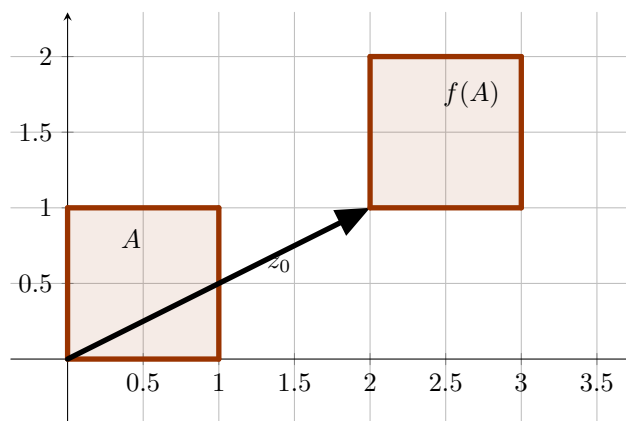


Figura 2

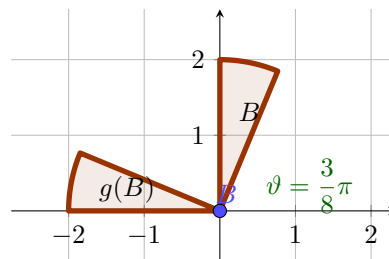


Figura 3

*Soluzione* Prima di tutto rappresentiamo gli insiemi  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (Vedi Figura 1). Per come funziona la somma in  $C$  (metodo punta-coda), sommare  $z_0$  ad ogni punto dell'intervallo  $A$  è come applicare alla rappresentazione dell'insieme una traslazione di vettore  $v$  (Figura 2).

Consideriamo un numero complesso  $z$  in forma trigonometrica  $z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$ . Il numero complesso  $iz$  è

$$iz = |i||z| \left( \cos \left( \arg z + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \arg z + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Quindi è come se fosse stata applicata all'insieme una rotazione di  $\frac{\pi}{2}$  (Figura 3). Analogamente si ha che siccome

$$z^2 = |z|^2(\cos(2 \arg z) + i \sin(2 \arg z))$$

Il raggio del settore circolare  $h(B)$  è 4 e l'angolo è in  $\left] \frac{3}{4}\pi, \pi \right[$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo che l'insieme

$$S = \left\{ z : |z| \leq 4 \text{ e } \arg z \in \left] \frac{3}{4}\pi, \pi \right[ \right\}$$

coincide con  $h(B)$ . Per quanto detto in precedenza  $h(b) \subseteq S$ , quindi rimane da dimostrare che  $h(b) \supseteq S$ . Sia  $z \in S : z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ , bisogna dimostrare che  $\exists w \in B : w^2 = z$ . Scegliamo

$$w = \sqrt{\rho} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2} \right)$$

, per il quale vale  $h(w) = z$ . Di conseguenza  $z \in h(B)$ , per cui  $h(B) = S$ .

QED

Analogamente si dimostra che  $h(C) = \{z : 1 \leq |z| \leq 4\}$  (Figura 4).

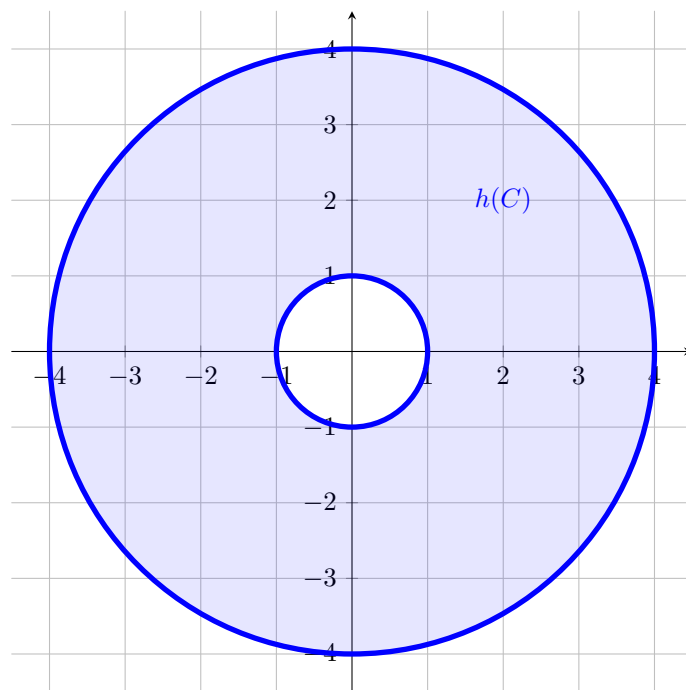


Figura 4

**Esercizio 3.4.** Rappresentare i seguenti insiemi in  $\mathbb{C}$

- (a)  $A = \left\{ z : \frac{|z-1|}{|z+1|} = 1 \right\}$   
 (b)  $B = \{z : |z-i-2| < |z+2|, |z| \geq 1\}$

*Soluzione*

- (a)  $|z+1| \neq 0 \Leftrightarrow z+1 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq -1$   
 $A = \{z \neq -1 : |z-1| = |z+1|\}$   $|z+1| = |z-(-1)| \Leftrightarrow |z-(-1)| = |z-1|$   
 $|z-(-1)| = \text{distanza da } -1, |z-1| = \text{distanza da } 1$  (Figura 5a)  
 (b)  $|z-(i+2)| < |z-(-2)|$   
 Distanza da  $i+2 < \text{distanza da } -2$  (Figura 5b)

**Esercizio 3.5.** Dimostrare le seguenti disuguaglianze (con  $a, b > 0$ ).

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \underset{(i)}{\leq} \sqrt{ab} \underset{(ii)}{\leq} \frac{a+b}{2} \underset{(iii)}{\leq} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

*Soluzione*

- (i) Riscriviamo il primo membro come

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

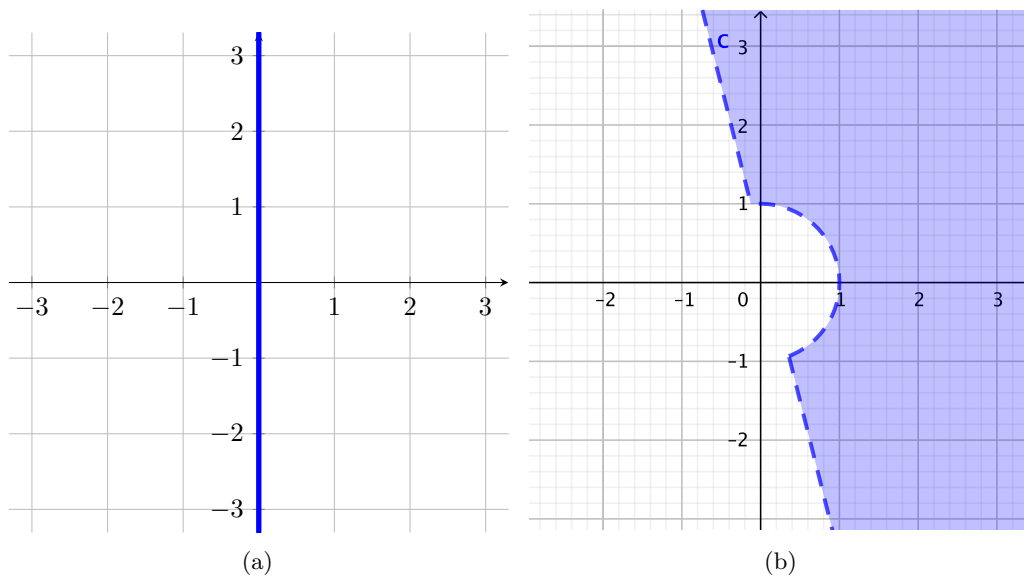


Figura 5

Dobbiamo dimostrare che  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Abbiamo dimostrato che la (i) è equivalente alla (ii), procediamo quindi alla dimostrazione di quest'ultima.

(ii)

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad ab \leq \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}ab \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{1}{2}ab \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

(iii) Dobbiamo dimostrare che  $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

**Lemma** (Disuguaglianza di Young). *Siano  $a, b, \varepsilon > 0$ , allora si ha che*

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$$