Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

28 Novembre 2022

Esercizio 10.1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata tali che

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$$

Dimostrare che g è Riemann integrabile e che $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Soluzione

Ricorda (linearità dell'integrale) $\varphi, \psi \in \mathcal{R}([a, b])$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)dx = \alpha \int_a^b \varphi dx + \beta \int_a^b \psi dx$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $f(x_0) > g(x_0)$. Definiamo

$$h(x) := f(x) - g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0 \\ f(x_0) - g(x_0) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

e dimostriamo che h è Riemann integrabile. Equivalentemente dimostriamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \mathcal{D} : S(\mathcal{D}, h) - s(\mathcal{D}, h) < \varepsilon$$

Fissiamo ε e definiamo

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{a, x_0 - \frac{\epsilon}{4h(x_0)}, x_0 + \frac{\epsilon}{4h(x_0)}, b\right\}$$

Si ottiene che

$$s(\mathcal{D}_\varepsilon, h) = 0$$

infatti l'inf di qualsiasi intervallo è 0. Si ha inoltre che

$$S(\mathcal{D}_\epsilon, h) = \cancel{(x_1 - a) \sup_{[a,x_1]} f}(x_2 - x_1)(h(x_0)) + \cancel{(b - x_2) \sup_{[x_2,b]} f} = (x_1 - x_2)(h(x_0)) =$$

$$= \left[\cancel{x_0} + \frac{\varepsilon}{4h(x_0)} - x_0 + \frac{\varepsilon}{4h(x_0)}\right] h(x_0) = h(x_0)\frac{\varepsilon}{2h(x_0)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

h è quindi Riemann integrabile, di conseguenza per linearità $g = f - h$ è Riemann integrabile. Rimane ora da dimostrare che $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$. Dimostriamo equivalentemente che $\displaystyle\int_a^b h(x)dx = 0$. Osserviamo che le somme inferiori sono sempre 0, mentre le somme superiori risultano $\dfrac{\varepsilon}{2}$, quindi facendo tendere ε a 0 si ottiene che

$$0 = s(\mathcal{D}) \leq \int_a^b h(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b h(x)dx = 0$$

QED

*Trascrizione a cura di Davide Borra

Esercizio 10.2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Dimostrare che se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$, allora $f(x) = 0$ ovunque.

Soluzione

Dimostrazione. Si procede per assurdo: supponiamo che $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$. In particolare $f(x_0) > 0$ per ipotesi. Per il teorema della permanenza del segno

$$\exists \delta > 0 : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a, b] \wedge f(x) > 0 \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

. Per lo spezzamento si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx$$

Perchè gli altri due integrali sono non negativi per ipotesi.

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx = \sup s(\mathcal{D}, f) \geq 2\delta \inf_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} f = 2\delta \inf_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} f > 0$$

Assurdo QED

Esercizio 10.3. Scrivere i primi due termini dello sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ della funzione

$$g(x) = \int_{x^3}^{-x^2} e^{-t^2} dt$$

E determinare per quali α reali

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 0$$

Soluzione Definiamo

$$f(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Da cui

$$g(x) = \int_{x^3}^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{-x^2} e^{-t^2} dt = -\int_0^{x^3} e^{-t^2} dt + \int_0^{-x^2} e^{-t^2} dt = f(-x^2) - f(x^3)$$

Di conseguenza per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$g'(x) = f'(-x^2)(-2x) - f'(x^3)(3x^2) = -2xe^{-x^4} - 3x^2e^{-x^6}$$

$$\implies g'(0) = 0$$

$$g''(x) = -2e^{-x^4} + 8x^4e^{-x^4} - 6xe^{-x^6} + 18x^7e^{-x^6}$$

$$\implies g''(x) = -2$$

Inoltre

$$g(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$$

Di conseguenza si ha

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = -x^2 + o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \left(-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} x^{2-\alpha} \left(-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 2$$

Esercizio 10.4. Sia

$$g(x) = \int_0^{x^2} \cos(2t)dt$$

(a) trovare i punti critici di $g(x)$;

(b) calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-x^2}{x^6}$$

Soluzione

(a) Sia $f(x) = \int_0^x \cos(2t)dt \implies g(x) = f(x^2)$. Di conseguenza $g'(x) = 2xf'(x) = 2xcos(2x^2)$. x è punto critico $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee cos(2x^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}} \quad (k \in \mathbb{N})$$

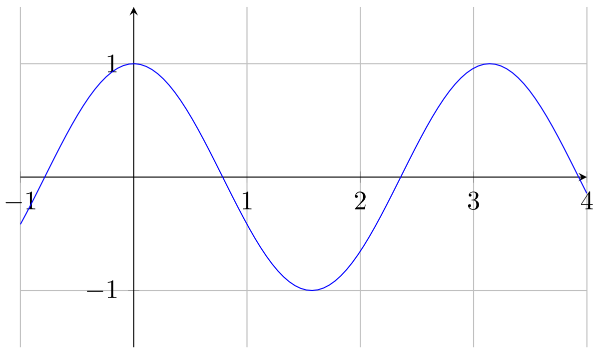
(b)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-x^2}{x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{g'(x)-2x}{6x^5} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cos(2x^2)-2x}{6x^5} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x^2)-1}{4x^4}\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

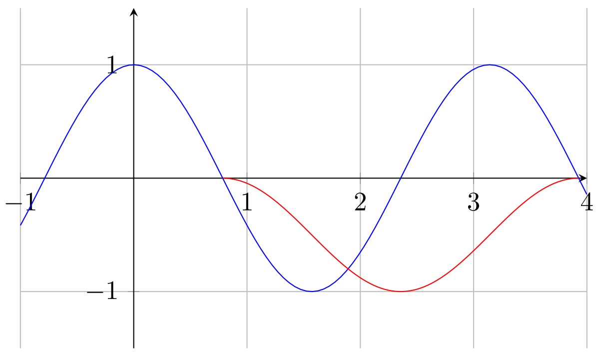
Esercizio 10.5. Studiare qualitativamente

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \cos(2t)dt$$

Soluzione Cominciamo rappresentando $\cos 2x$ Prima di tutto osserviamo che la funzione integrale ha



una radice in $x = \frac{\pi}{4}$. Inoltre, spostandosi verso destra, tra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ l'area è negativa e *sempre più grande*. Di conseguenza la funzione integrale sarà decrescente e concava. Tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{4}\pi$ l'area sarà negativa (funzione integrale decrescente) e *sempre più piccola* (convessa). Analogamente negli altri intervalli. Siamo così in grado di disegnare $F(x)$ in $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$. Siccome la funzione è periodica siamo quindi in grado di disegnare F su tutto $\mathbb{R}$.



Esercizio 10.6. Calcolare i seguenti integrali indefiniti

a) $\displaystyle\int \frac{3-4x}{1+x^2}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$ c) $\displaystyle\int \sqrt[3]{2x+1}dx$

d) $\displaystyle\int 6x\,\mathrm{sen}(-3x^2-2)dx$ e) $\displaystyle\int 3xe^{x^2}dx$

Soluzione

a) $$\int \frac{3-4x}{1+x^2}dx = 3\int \frac{1}{1+x^2}dx - 4\int \frac{x}{1+x^2}dx = 3\,\mathrm{arctg}\,x - 2\int \frac{2x}{1+x^2}dx =$$
$$= 3\,\mathrm{arctg}\,x - 2\int \log'(1+x^2)2xdx = 3\,\mathrm{arctg}\,x - 2\int (\log(1+x^3))'dx = 3\,\mathrm{arctg}\,x - 2\log(1+x^2) + c$$

b) $$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{arcsen}'(log(x))dx = \int (\mathrm{arcsen}(\log x))'dx = \mathrm{arcsen}\log x + c$$

c) $$\int \sqrt[3]{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{4}{3}}\cdot 34 + c = \frac{8}{3}\sqrt[3]{(2x+1)^4} + c$$

d) $$\int 6x\,\mathrm{sen}(-3x^2-2)dx = \int (-6x)(-\mathrm{sen}(-3x^2-2)dx = \cos(-3x^2-2) + c$$

e) $$\int 3xe^{x^2}dx = \frac{3}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{3}{2}e^{x^2} + c$$

Primitive elementari

Funzione	**Primitiva**
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$a^x \quad (a > 0 \wedge a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\log a}$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arccos x$