

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica  
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023  
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi\*

12 Dicembre 2022

**Esercizio 12.1.** Siano  $f(s) = \frac{e^{-|s|} - 1}{s(s+1)}$  e  $F(x) = \int_0^x f(s)ds$

- a) Studiare  $f(s)$
- b) Determinare  $\text{dom } F$
- c) Determinare  $G_F$

*Soluzione*

- (a) Studiare  $f(s)$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$
- Segno di  $f$ :

$$e^{-|s|} - 1 \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$
$$s(s+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s < -1 \vee s > 0$$

Quindi

$$f(s) > 0 \text{ se } -1 < s < 0$$
$$f(s) < 0 \text{ se } s < -1 \vee s > 0$$

- Limiti

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(s) = 0^-$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) = \left[ \frac{1 - \frac{1}{e}}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} f(s) = \left[ \frac{1 - \frac{1}{e}}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s(s+1)} \stackrel{LN}{=} 1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{-s} - 1}{s(s+1)} \stackrel{LN}{=} -1$$

- Derivata di  $f$

$$f'(s) = \begin{cases} \frac{-e^{-s}(s^2 + 3s + 1) + (2s + 1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s > 0 \\ \frac{e^s(s^2 - s - 1) + (2s + 1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

– se  $s > 0$

$$f'(s) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -e^{-s}(s^2 + 3s + 1) + (2s + 1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s^2 + 3s + 1}{2s + 1} < e^s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} \quad \Leftrightarrow$$

---

\*Trascrizione a cura di Davide Borra

In quanto il denominatore è sempre positivo. Effettuando la divisione tra i polinomi

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} + \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{2s+1} > 0 \quad \forall s > 0$$

In quanto somma di quantità positive.

– se  $s < 0$  studiamo separatamente i due casi

\*  $-1 < s < 0$

$$f'(s) < 0 \Leftrightarrow e^s(s^2 - s - 1) + (2s + 1) < 0$$

Osserviamo che

$$e^s(s^2 - s - 1) < (s^2 - s - 1) \Leftrightarrow e^s(s^2 - s - 1) + (2s + 1) < \underbrace{(s^2 - s - 1) + (2s + 1)}_{s(s-1)}$$

che è sempre negativo in  $]0, 1[$

\*  $s < 0$

$$f'(s) < 0 \Leftrightarrow e^s(s^2 - s - 1) + (2s + 1) < 0 \Leftrightarrow -\frac{s^2 - s - 1}{2s + 1} < e^{-s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < s^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4s(2s+1)} \right) + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-s)^n}{n!}$$

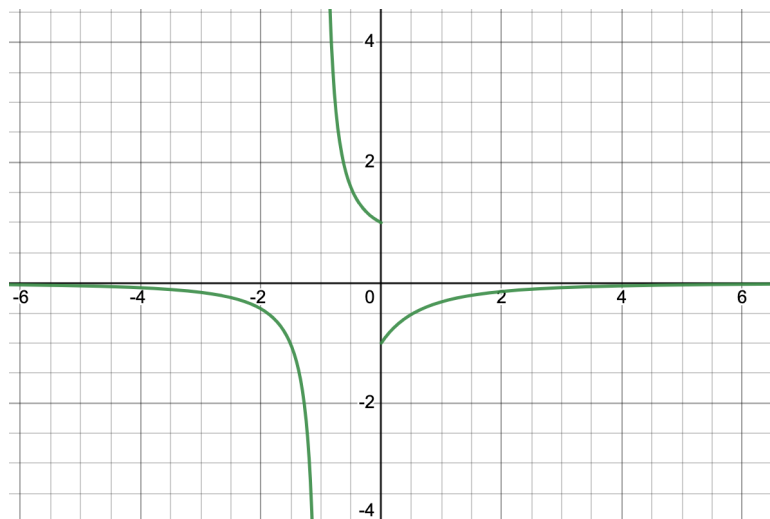


Figura 1

(b) Determinare dom  $F$  Osserviamo che  $0 \in \text{dom } f$ , in quanto  $F(0) = \int_0^0 f(s)ds$

- se  $x \in ]0, +\infty[$

$$f(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} -1 \quad f(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^-} 1$$

e la funzione è limitata in  $]0, +\infty[$ , per cui  $f \in \mathcal{R}(]0, +\infty[)$

- se  $x \in ]-1, 0[$

$f(s)$  è continua in  $] -1, 0[$  e  $f(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^-} 1$ , per cui l'integrale converge  $\forall x \in [a, 0[$  con  $a \in ] -1, 0[$ .

Dobbiamo controllare se converge in  $-1$

$$\int_0^{-1} f(s)ds = \int_0^{-1} \frac{e^s - 1}{s(s+1)} ds$$

per  $s \rightarrow -1$  si ha

$$\frac{e^s - 1}{s(s+1)} \sim \frac{\frac{1}{e} - 1}{-1(s+1)} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \left(\frac{1}{s+1}\right)$$

quindi l'integrale diverge negativamente per il criterio del confronto asintotico, da cui

$$]-\infty, -1] \not\subset \text{dom } F$$

Abbiamo quindi che  $\text{dom } F = ]-1; +\infty[$

(c) Determinare  $G_F$

Per definizione di funzione integrale sappiamo che  $F(0) = 0$ , inoltre per il teorema fondamentale del calcolo

$$F'(x) = f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$F''(x) = f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Per il corollario di Lagrange

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = F'_+(0)$$

per cui in  $x = 0$  la funzione presenta un punto angoloso. Siamo quindi in grado di determinare il grafico di  $F$  (Figura ??fig:1.2)):

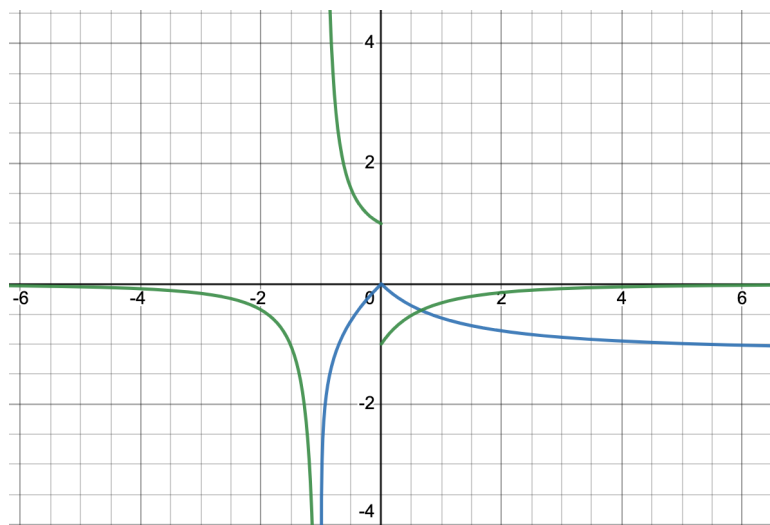


Figura 2

Ricordiamo la definizione di convessità

**DEF** (Convessità). Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  si dice convessa se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

**Esercizio 12.2.** Dimostrare che una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa se e solo se vale la seguente disuguaglianza

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.*

• “ $\Rightarrow$ ”

Prendo  $x \in [x_1, x_2]$ , allora posso scrivere  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ , con  $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq f(x_1) \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} (\lambda x_1 - (1 - \lambda)x_2 - x_1)) = \\ &= f(x_1) \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} (1 - \lambda)(x_2 - x_1) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \end{aligned}$$

• “ $\Leftarrow$ ”

Prendo  $x \in [x_1, x_2]$ , allora posso scrivere  $x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2$ . Pongo  $\lambda := \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in [0, 1]$ .

Allora  $1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in [0, 1]$

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_1) \leq \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} - 1\right)f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

QED

**Esercizio 12.3.** Provare che  $f(x) = x^2$  è strettamente convessa.

*Soluzione*

*Dimostrazione.*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1] \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)^2 < \lambda x_1^2 + (1 - \lambda)x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2\lambda(\lambda - 1) + x_2^2((1 - \lambda)^2 - (1 - \lambda)) + 2\lambda(1 - \lambda)x_1x_2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(\lambda - 1)[x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2] = \lambda(\lambda - 1)(x_1 - x_2)^2 < 0$$

che è verificato  $\forall \lambda \in [0, 1] \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .

QED

**Esercizio 12.4.** Dimostrare che  $\forall a, b \geq 0$  vale che

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Pongo  $f(t) = t^p$ , che è convessa. Scelgo inoltre  $x_1 = a$  e  $x_2 = b$ . Per la caratterizzazione precedente

$$(\lambda a + (1 - \lambda)b)^p \leq \lambda a^p + (1 - \lambda)b^p$$

Scegliendo  $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p (a + b)^p \leq \left(\frac{1}{2}\right)(a^p + b^p) \Leftrightarrow$$

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

QED

**Esercizio 12.5.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile, si dimostri che  $f$  è convessa se e solo se

$$f(x) \leq f(y) + f'(y)(x - y)$$

.

*Soluzione*

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Per quanto detto prima,

$$\frac{f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(y)}{\lambda} \leq \frac{\lambda(f(x) - f(y))}{\lambda} \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Allora, facendo tendere  $\lambda$  a 0 il secondo membro tende a

$$\frac{f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(y)}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} f'(y)(x - y) \Leftrightarrow$$

Pongo  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z)$$

$$f(y) \geq f(z) + f'(z)(y - z)$$

QED

**Esercizio 12.6.** *Disuguaglianza di Young.* Siano  $p, q \in ]1; +\infty[$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dimostrare che

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Il caso  $a = b = 0$  è banale, mentre il caso  $p, q = 2$  segue dal quadrato di binomio. Sia  $f(t) = \log(t)$ , e  $t_1 = a^p, t_2 = b^q, \lambda = \frac{1}{p}, 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ . Allora

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \log(a) + \log(b) = \log(ab) \Leftrightarrow$$

QED

**Esercizio 12.7.** *Disuguaglianza di Hölder.* Siano  $p, q \in ]1; +\infty[$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dimostrare che  $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  con  $a_i, b_i \geq 0 \forall i$  vale che

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Poniamo  $x_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$  e  $y_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ , allora segue che  $x_i, y_i > 0 \forall i$ .

Per la disuguaglianza di Young

$$x_i y_i \leq \frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q\right) = \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} = 1$$

QED

**Corollario** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz). Siano  $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  con  $a_i, b_i \geq 0 \forall i$ , allora

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

**Esercizio 12.8.** *Disuguaglianza di Jensen.* Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R})$  convessa. Sia  $g \in \mathcal{R}(]a, b[)$ , allora

$$f\left(\int_a^b g(x) dx\right) \leq \int_a^b f \circ g(x) dx$$

dove

$$\int_a^b f(t) dt := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Consideriamo la funzione

$$\begin{cases} x \mapsto g(x) \\ y \mapsto \int_a^b g(t)dt \end{cases}$$

Consideriamo la caratterizzazione della convessità presentata precedentemente, allora siccome  $f$  è convessa

$$\begin{aligned} f(g(x)) &\geq f\left(\int_a^b g(t)dt\right) + f'\left(\int_a^b g(t)dt\right)\left(g(x) - \int_a^b g(t)dt\right) \\ \int_a^b f(g(x)) &\geq \int_a^b \left[ f\left(\int_a^b g(t)dt\right) + f'\left(\int_a^b g(t)dt\right)\left(g(x) - \int_a^b g(t)dt\right) \right] dx = \\ &= f\left(\int_a^b g(t)dt\right) + f'\left(\int_a^b g(t)dt\right) \int_a^b \left(g(x) - \int_a^b g(t)dt\right) dx = \\ &= f\left(\int_a^b g(t)dt\right) + f'\left(\int_a^b g(t)dt\right) \left[ \int_a^b g(x)dx - \int_a^b g(t)dt \right] \\ &\implies \int_a^b (f \circ g)(x)dx \geq f\left(\int_a^b g(t)dt\right) \end{aligned}$$

QED

**Esercizio 12.9.** *Disuguaglianza di Young generalizzata.* Siano  $p_1, \dots, p_n \in ]1; +\infty[$  tali che  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$

Dimostrare che

$$\prod_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p_i}}{p_i}$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Definiamo due nuove funzioni:  $f(t) = \log(t)$  e

$$g(t) = \begin{cases} a_0^{p_0} & \text{se } x \in ]0, p_0[ \\ a_1^{p_1} & \text{se } x \in ]p_0, p_1[ \\ \vdots & \\ a_n^{p_n} & \text{se } x \in ]p_{n-1}, p_n[ \end{cases}$$

Siccome il logaritmo è una funzione concava

$$\begin{aligned} f\left(\int_0^1 g(x)dx\right) &\geq \int_0^1 f(\circ g)(x)dx \Leftrightarrow \\ f\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p_i}}{p_i}\right) &\geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \log(a_i^{p_i}) = \sum_{i=1}^n \log(a_i) = \log \prod_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

Passando all'esponenziale si ha la tesi.

QED