Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

03 Ottobre 2022

.

Esercizio 3.1. Determinare gli estremi inferiore e superiore ed eventuali massimi e minimi dei seguenti insiemi

(a) $A = \left\{\dfrac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

(b) $B = \left\{2(-1)^n - \dfrac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

(c) $C = \left\{\dfrac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m\right\}$

Soluzione

(a)

Osservazione. *Possiamo riscrivere* $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Se calcoliamo alciuni elementi dell'insieme $A = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dots\right\}$ ci accorgiamo che sono tutti compresi in $[0, 1[$.

Estremo inferiore: siccome $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n}{n+1} \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre $0 \in A$, per cui si ha che $\inf A = 0$ e $\min A = 0$.

Estremo superiore: Dobbiamo dimostrare che $\sup A = 1$

- $1 \geq 1 - \dfrac{1}{n+1}$ perché $\dfrac{1}{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Dobbiamo provare che $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \dfrac{n}{n+1} \geq 1 - \varepsilon$. Fissiamo ε e cerchiamo n:

$$\frac{n}{n+1} \geq 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\cancel{1} - \frac{1}{n+1} = \cancel{1} - \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$(n+1)\varepsilon \geq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$n\varepsilon \geq 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$n \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Se $\varepsilon \geq 1$, la disequazione è sempre verificata perché il numeratore diventa negativo.
Se $\varepsilon < 1$ basta scegliere un numero naturale $n > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.
Questo dimostra che $\sup A = 1$. L'insieme non ammette massimo perché $1 \notin A$.

(b) Separiamo i casi in cui n è pari da quelli in cui n è dispari:

$$B = \underbrace{\left\{2 - \frac{1}{2n}, \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ pari}\right\}}_{B'} \cup \underbrace{\left\{-2 - \frac{1}{2n}, \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ dispari}\right\}}_{B''}$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra e Matilde Calabri

Osservazione. *È un'unione disgiunta, cioè* $\forall x \in B', y \in B'', y < 0 < x$*, infatti*

$$2 - \frac{1}{2n} > 0 \quad e \quad -2 - \frac{1}{2n} < 0$$

Da questo si ottiene che $\sup B = \sup B'$ *e* $\inf B = \inf B''$

Estremo superiore:

Osservazione. *In* B' *gli elementi si avvicinano a 2 quando* n *cresce perché* $\frac{1}{2n}$ *diventa sempre più piccolo.*

La dimostrazione è analoga a quella del $\sup A$.
Estremo inferiore:
Calcoliamo alcuni degli elementi di $B = \left\{-\frac{5}{2}, -\frac{13}{6}, \dots\right\}$. Si nota che all'aumentare di n gli elementi di B'' crescono, di conseguenza si ha $\inf B = \min B'' = -\frac{5}{2}$.

(c) **Estremo superiore:**

Osservazione. *Se pongo* $m = 1$*, ottengo* $\mathbb{N}_{\geq 2}$*. Di conseguenza* $\mathbb{N}_{\geq 2} \subseteq C$*. Da questo si ricava che* $\sup C \geq \sup \mathbb{N}_{\geq 2}$*, da cui (siccome* $\sup \mathbb{N}_{\geq 2} = +\infty$*),*

$$\sup C = +\infty$$

Estremo inferiore:
Scelgo $m = n + 1$, ottengo $D = \left\{\frac{n+1}{n}, n \neq 0\right\} \subseteq C$. Analogamente a quanto fatto nel punto (a) è possibile dimostrare che $\inf D = 1$. Inoltre siccome $D \subseteq C$, si ha $\inf D \geq \inf C \Rightarrow \inf C \leq 1$. Inoltre sappiamo che $\forall n > m, \frac{n}{m} > 1$, di conseguenza $\inf C \geq 1$. Siccome $\inf C \geq 1$ e $\inf C \leq 1$, si ha $\inf C = 1$.

Esercizio 3.2. Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

(a) $\frac{1}{|z| \cdot \overline{z}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$

(b) $\overline{z}(\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z) = z$

(c) $2z^2 + \overline{z} = -1$

Soluzione

(a)

$$\frac{1}{|z| \cdot \overline{z}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{||z| \cdot \overline{z}|} = |\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}|$$

Analizzo la prima parte dell'equazione

$$\frac{1}{||z| \cdot \overline{z}} = \frac{1}{|z| \cdot ||\overline{z}||} = \frac{1}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Torno all'equazione originale

$$\frac{1}{\overline{z}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$

Analizzo la prima parte dell'equazione

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{z \cdot \overline{z}} = \frac{z}{|z|^2}$$

Ritorno all'equazione originale e sfrutto il fatto che $|z| = 1$

$$z = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$

(b) $\overline{z}(\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z) = z$
Utilizzo la forma algebrica ($z = a + ib$)

$$(a - ib)(b - a) = a + ib \quad \Leftrightarrow$$

$$a(b - a) + ib(a - b) = a + ib \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a(b-a) = a \\ b(a-b) = b \end{cases}$$

Distinguo due casi:
Caso $a = 0$

$$\begin{cases} \forall b \\ -b^2 = b \Leftrightarrow b(b+1) = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0, z_2 = -i \end{cases}$$

Caso $a \neq 0$

$$\begin{cases} b - a = 1 \Leftrightarrow a - b = -1 \\ -b = b \Leftrightarrow b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow a = -1 \Leftrightarrow z_3 = -1$$

(c) $2z^2 + \overline{z} = -1$
Utilizzo la forma algebrica ($z = a + ib$)

$$2(a + ib)(a + ib) + (a - ib) = -1 \Leftrightarrow 2a^2 - 2b^2 + 4abi + a - ib = -1$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 2b^2 + a = -1 \\ 4ab - b = 0 \Leftrightarrow b(4a - 1) = 0 \end{cases}$$

Distinguo due casi
Caso $b = 0$

$$\begin{cases} 2a^2 + a + 1 = 0 \\ \forall a \end{cases} \quad \Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4} \Leftrightarrow \nexists a$$

Se b=0 non abbiamo soluzioni
Caso $b \neq 0$
Dalla seconda equazione ottengo che $a = \dfrac{1}{4}$

$$\begin{cases} 2 \cdot \dfrac{1}{16} - 2b^2 + \dfrac{1}{4} = -1 \\ a = \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \Leftrightarrow -b^2 = -\frac{11}{16} \Leftrightarrow b = \pm\frac{\sqrt{11}}{4}$$

Ottengo quindi le soluzioni $z_{1,2} = \dfrac{1}{4} \pm \dfrac{\sqrt{11}}{4}$

Esercizio 3.3. Si considerino le funzioni $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definite come

$$f(z) = z + z_0, \quad \text{con } z_0 \in \mathbb{C} \text{ fissato}$$

$$g(z) = iz$$

$$h(z) = z^2$$

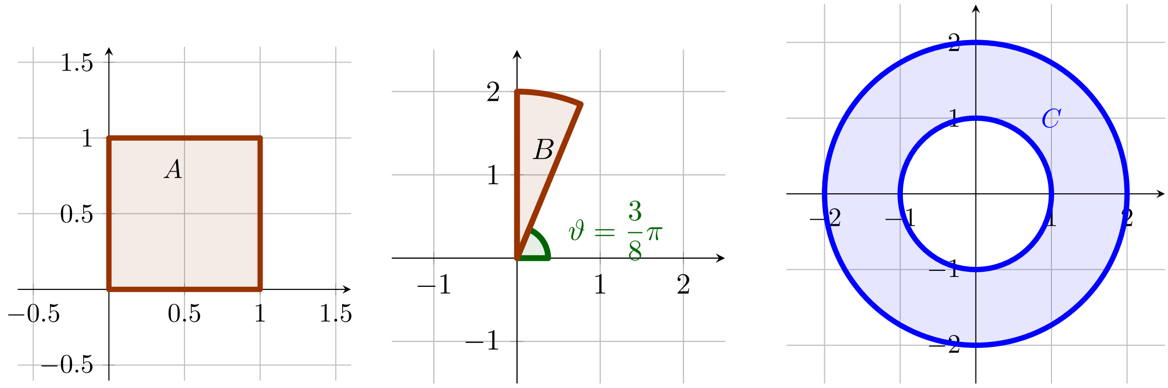
e gli insiemi

$$A = \{z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \text{ e } 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$$

$$B = \left\{z : |z| \leq 2, \arg z \in \left]\frac{3}{8}\pi, \frac{\pi}{2}\right[\right\}$$

$$C = \{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$$

Rappresentare $f(A), g(B), h(B), h(C)$.



(a) (b) (c)

Figura 1

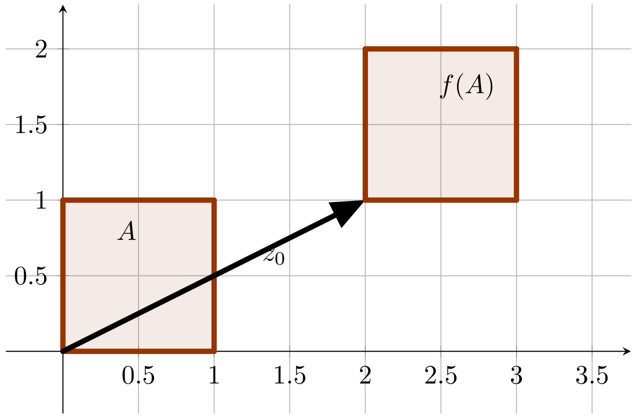


Figura 2

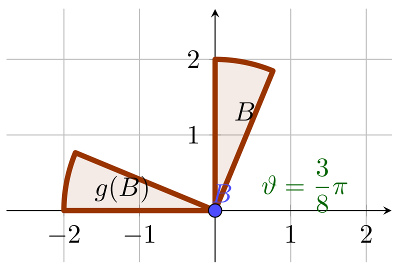


Figura 3

Soluzione Prima di tutto rappresentiamo gli insiemi A, B, C (Vedi Figura 1). Per come funziona la somma in C (metodo punta-coda), sommare z_0 ad ogni punto dell'intervallo A è come applicare alla rappresentazione dell'insieme una traslazione di vettore v (Figura 2).

Consideriamo un numero complesso z in forma trigonometrica $z = |z|(\cos(\arg z) + i \operatorname{sen}(\arg z))$. Il numero complesso iz è

$$iz = |i||z| \left(\cos \left(\arg z + \frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\arg z + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Quindi è come se fosse stata applicata all'insieme una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ (Figura 3). Analogamente si ha che siccome

$$z^2 = |z|^2 (\cos(2 \arg z) + i \operatorname{sen}(2 \arg z)$$

Il raggio del settore circolare $h(B)$ è 4 e l'angolo è in $\left] \frac{3}{4}\pi, \pi \right[$.

Dimostrazione. Dimostriamo che l'insieme

$$S = \left\{ z : |z| \leq 4 \text{ e } \arg z \in \left] \frac{3}{4}\pi, \pi \right[\right\}$$

coincide con $h(B)$. Per quanto detto in precedenza $h(b) \subseteq S$, quindi rimane da dimostrare che $h(b) \supseteq S$. Sia $z \in S : z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$, bisogna dimostrare che $\exists w \in B : w^2 = z$. Scegliamo

$$w = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\right)$$

, per il quale vale $h(w) = z$. Di conseguenza $z \in h(B)$, per cui $h(B) = S$.

QED

Analogamente si dimostra che $h(C) = \{z : 1 \leq |z| \leq 4\}$ (Figura 4).

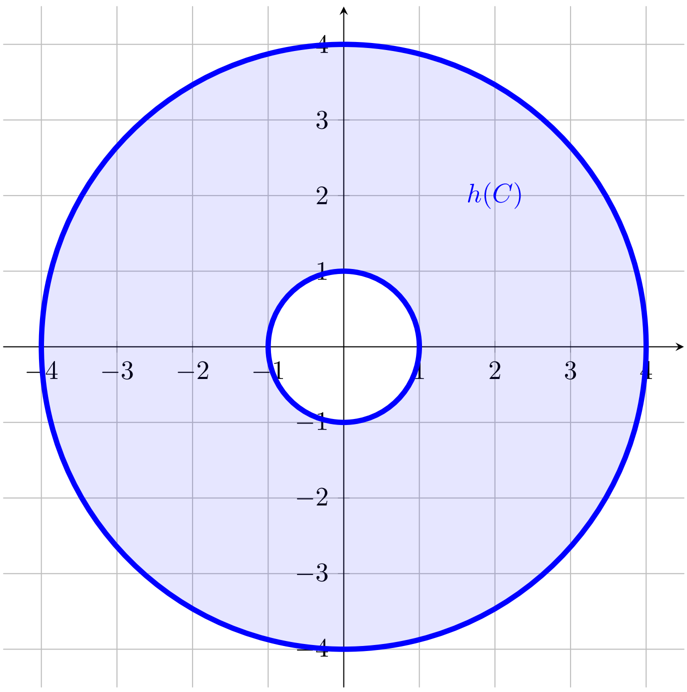


Figura 4

Esercizio 3.4. Rappresentare i seguenti insiemi in $\mathbb{C}$

(a) $A = \left\{z : \dfrac{|z-1|}{|z+1|} = 1\right\}$

(b) $B = \{z : |z - i - 2| < |z + 2|, |z| \geq 1\}$

Soluzione

(a) $|z+1| \neq 0 \Leftrightarrow z+1 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq -1$
$A = \{z \neq -1 : |z-1| = |z+1|\}$ $|z+1| = |z-(-1)| \Leftrightarrow |z-(-1)| = |z-1|$
$|z-(-1)| =$ distanza da -1, $|z-1| =$ distanza da 1 (Figura 5a)

(b) $|z - (i+2)| < |z - (-2)|$
Distanza da $i+2 <$ distanza da -2 (Figura 5b)

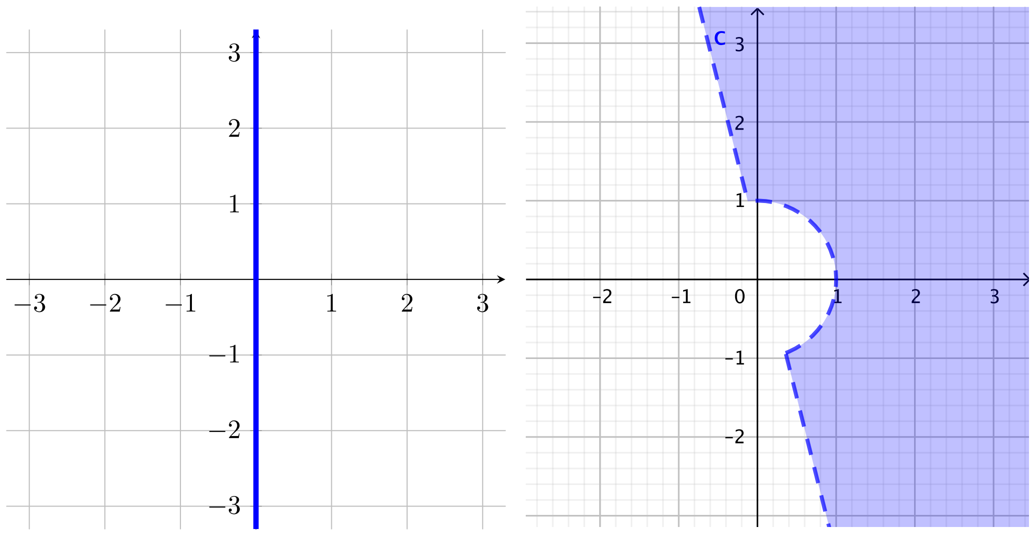
Esercizio 3.5. Dimostrare le seguenti disuguaglianze (con $a, b > 0$).

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \underset{(i)}{\leq} \sqrt{ab} \underset{(ii)}{\leq} \frac{a+b}{2} \underset{(iii)}{\leq} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Soluzione

(i) Riscriviamo il primo membro come

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$



(a) (b)

Figura 5

Dobbiamo dimostrare che $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Abbiamo dimostrato che la (i) è equivalente alla (ii), procediamo quindi alla dimostrazione di quest'ultima.

(ii)

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad ab \leq \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}ab \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{1}{2}ab \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

(iii) Dobbiamo dimostrare che $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

Lemma (Disuguaglianza di Young)**.** *Siano $a, b, \varepsilon > 0$, allora si ha che*

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$$