

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023

Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

14 Novembre 2022

Esercizio 8.1. Calcolare i seguenti limiti con il teorema di de l'Hôpital:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^3 x - 1}{\log(1 + 2x) \cosh(x^3)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\log(x + 1))}{\log x}$

Soluzione

(a) Verifichiamo le ipotesi:

- $f(x) = \cos^3 x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
- $g(x) = \log(1 + 2x) \cosh(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
- $g'(x) = \frac{2}{1 + 2x} \cosh x^3 + 3x^2 \sinh x^3 \log(1 + 2x)$. Siccome $g(0) = 2$, per il teorema della permanenza del segno $\exists b \in \mathbb{R}_{>0} : \forall x \in]0, b[, g'(x) > 0$

È quindi possibile applicare il teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^3 x - 1}{\log(1 + 2x) \cosh(x^3)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3 \sin x \cos^2 x}{\frac{2}{1+2x} \cosh x^3 + 3x^2 \sinh x^3 \log(1 + 2x)} = 0$$

(b) Verifichiamo le ipotesi:

- $f(x) = \log(\log(x + 1)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
- $g(x) = \log x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
- $g'(x) \neq 0$ in un intorno destro di 0, infatti $g'(x) = \frac{1}{x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\log(x + 1))}{\log x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{\log(x+1)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} \cdot \underbrace{\frac{x}{\log(1+x)}}_{\rightarrow 1}$$

Esercizio 8.2. Calcolare il polinomio di Taylor con resto di Peano di

- (a) $\log x$ di ordine 3 in $x_0 = 2$
(b) $\sin(\operatorname{tg} x) + \log(1 + \operatorname{arctg} x)$ di ordine 3 in $x_0 = 0$

Soluzione

- (a) Abbiamo due modi: il primo applicando la formula di Taylor mentre il secondo cercando di ricondurci agli sviluppi noti.

Modo 1:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f^{(3)}(x) = +\frac{2}{x^3}$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

$$\begin{aligned}\log x &= \log 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4 \cdot 2!}(x-2)^2 + \frac{1}{4 \cdot 3!}(x-2)^3 + o((x-2)^3) = \\ &= \log(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + o((x-2)^3) = \\ &= \log 2 - \frac{11}{16} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o((x-2)^3)\end{aligned}$$

Modo 2:

$$f(x) = \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

Devo riuscire a ricondurmici:

$$\log(x) = \log\left(\frac{x}{2} \cdot 2\right) = \log 2 + \log \frac{x}{2} = \log 2 + \log\left(1 + \left(\frac{x}{2} - 1\right)\right)$$

Da cui

$$\log x = \log 2 + \left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 1\right)^3 + o\left(\left(\frac{x}{2} - 1\right)^3\right)$$

- (b) Poniamo $t = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{arctg} x$. In un intorno di 0, sia $\operatorname{tg} x$ che $\operatorname{arctg} x$ tendono a 0, quindi anche t e y . Utilizzando gli sviluppi fondamentali

$$\operatorname{sen} t + \log(1+y) = \left[t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right] + \left[y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)\right]$$

Adesso sviluppiamo anche t e y :

$$t = \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad y = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) + \log(1 + \operatorname{arctg} x) &= \\ &= \left[\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3}{6} + o\left(\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3\right)\right] + \\ &+ \left[\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3}{3} + o\left(\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3\right)\right] = \\ &= 2x + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\end{aligned}$$

Esercizio 8.3. Calcolare i seguenti limiti utilizzando gli sviluppi di Taylor:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \log(1-x)}{\operatorname{tg} x - x}$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen}^2 \sqrt{x} - \operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

Soluzione

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$
 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \Rightarrow e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)$
 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

Per eliminare la forma indeterminata espando fino al quarto ordine:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{3}{2}x^2}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{11}{24} \cdot \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} + \frac{o(x^4)}{\cancel{x^4}} = \frac{11}{24}\end{aligned}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \log(1 - x)}{\operatorname{tg} x - x}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log(1 + (-x)) = -x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ Sostituisco gli sviluppi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \log(1 - x)}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x + o(x)) - 1 - (-x + o(x))}{(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + o(x)}{x^3 + o(x^3)} = +\infty$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^2 \sqrt{x} - \sin^2 x}{x^2}$$

$$\text{Proviamo a sviluppare al primo ordine: } \sin x = x + o(x) \Rightarrow \sin \sqrt{x} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (\sqrt{x} + o(\sqrt{x}))^2 - (x + o(x))^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^2} = ?$$

$$\text{Il primo ordine non è sufficiente: } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x) \Rightarrow \sin \sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x^3}}{3!} + o(x^{\frac{3}{2}})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^2 \sqrt{x} - \sin^2 x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x^3}}{3!} + o(x^{\frac{3}{2}})\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x)\right)^2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x + \frac{\sqrt{x^6}}{36} - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} + o(x^6)\right)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{3} - x^2 + \overbrace{\frac{x^3}{36}}^{o(x^2)} + o(x^3)}{x^2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 8.4. Dimostrare che $\sin \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$

Soluzione Sviluppiamo con il polinomio di Taylor con resto di Lagrange

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin^{(4)}(c)}{4!} x^4 \quad (\text{con } c \in \left[0, \frac{1}{n}\right])$$

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \underbrace{\frac{\sin^{(4)}(c)}{n^4 4!}}_{>0} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}$$

Basta quindi dimostrare che

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} > \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 6n^2 - n - 1 > 0 \Leftrightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \rangle$$

$$\begin{cases} n < -\frac{1}{3} \vee n > \frac{1}{2} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow n \geq 1$$

QED

Esercizio 8.5. Calcolare \sqrt{e} con 4 cifre decimali di precisione.

Soluzione Sappiamo che

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dove e^c è la derivata $n+1$ -esima di e^x calcolata in $x = c$. In particolare

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (1)$$

Adesso dobbiamo stabilire per quale valore di n l'errore non influenza le prime 4 cifre del risultato. Osserviamo che $e < 3$ e $c < \frac{1}{2}$ quindi $e^c < \sqrt{3} < 2$:

$$\frac{e^c}{(n+1)!2^{n+1}} < \frac{2}{(n+1)} = \frac{1}{2^n(n+1)!} < \frac{1}{10^5}$$

$$10^5 < (n+1)!2^n \Rightarrow n \geq 6$$

Sostituendo ora n nella (1) si ricava il valore cercato

Esercizio 8.6. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)^n$ converge e determinarne il valore.

Soluzione Osserviamo che si tratta di una serie geometrica di ragione $q := \frac{2+\alpha}{1-\alpha}$. Quindi $\sum_n q^n$ è

- convergente se $|q| < 1$
- divergente se $q \geq 1$
- indeterminata se $q \leq 1$

Si tratta quindi di risolvere $\left|\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right| < 1$ e si ottiene che la serie è

- convergente se $\alpha < -\frac{1}{2}$
- divergente se $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$
- indeterminata se $\alpha > 1$

Inoltre se la serie converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2+\alpha}{1-\alpha}} = \frac{\alpha-1}{2\alpha+1}$$

Esercizio 8.7. Calcolare

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Soluzione

- Cerchiamo di riscrivere la serie per ricondurci a qualcosa di noto

$$a_n := \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n+1}}{(n+1)\cancel{n}!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

Si nota quindi che si tratta di una serie telescopica, per cui si ha che

$$s_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(N+1)!}$$

Da cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1 \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(N+1)!} = 1$$

- Cerchiamo di riscrivere la serie per ricondurci a qualcosa di noto

$$a_n := \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)A + nB}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Di conseguenza riscrivo la serie e mi accorgo che si tratta di una serie telescopica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$