# Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
# CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
# Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

12 Dicembre 2022

**Esercizio 12.1.** Siano $f(s) = \dfrac{e^{-|s|} - 1}{s(s+1)}$ e $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)ds$

a) Studiare $f(s)$
b) Determinare $\operatorname{dom} F$
c) Determinare $G_F$

*Soluzione*

(a) Studiare $f(s)$

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{e^{-s} - 1}{s(s+1)} & \text{se } s > 0 \\ \dfrac{e^{s} - 1}{s(s+1)} & \text{se } s < 0 \wedge s \neq -1 \end{cases}$$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
- Segno di $f$:

$$e^{-|s|} - 1 \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$s(s+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s < -1 \vee s > 0.$$

Quindi

$$f(s) > 0 \text{ se } -1 < s < 0$$

$$f(s) < 0 \text{ se } s < -1 \vee s > 0$$

$$\begin{array}{ccccc} - \; - & & + & & - \; - \\ \hline & -1 & & 0 & \end{array} \longrightarrow f(s)$$

- Limiti

$$\lim_{s \to -\infty} f(s) = 0^-$$

$$\lim_{s \to +\infty} f(s) = 0^+$$

$$\lim_{s \to 1^-} f(s) = \left[\frac{1 - \frac{1}{e}}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{s \to 1^+} f(s) = \left[\frac{1 - \frac{1}{e}}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{s \to 0^-} f(s) = \lim_{s \to 0} \frac{e^s - 1}{s(s+1)} \overset{LN}{=} 1$$

$$\lim_{s \to 0^+} f(s) = \lim_{s \to 0} \frac{e^{-s} - 1}{s(s+1)} \overset{LN}{=} -1$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

- Derivata di $f$

$$f'(s) = \begin{cases} \dfrac{-e^{-s}(s^2+3s+1)+(2s+1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s > 0 \\ \dfrac{e^{s}(s^2-s-1)+(2s+1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s < 0 \wedge s \neq -1 \end{cases}$$

  – se $s > 0$

$$f'(s) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -e^{-s}(s^2+3s+1)+(2s+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s^2+3s+1}{2s+1} < e^s$$

  Ora basta osservare ceh $e^s > s+1 > \dfrac{s^2+3s+1}{2s+1}$.

  – se $s < 0 \wedge s \neq -1$ studiamo separatamente i due casi

  * $-1 < s < 0$

$$f'(s) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^s(s^2-s-1)+(2s+1) < 0$$

  Osserviamo che

$$e^s(s^2-s-1) < (s^2-s-1) \quad \Leftrightarrow \quad e^s(s^2-s-1)+(2s+1) < \underbrace{(s^2-s-1)+(s2+1)}_{s(s-1)}$$

  che è sempre negativo in $]0,1[$

  * $s < 0$

$$f'(s) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^s(s^2-s-1)+(2s+1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{s^2-s-1}{2s+1} < e^{-s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < s^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4s(2s+1)}\right) + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-s)^n}{n!}$$

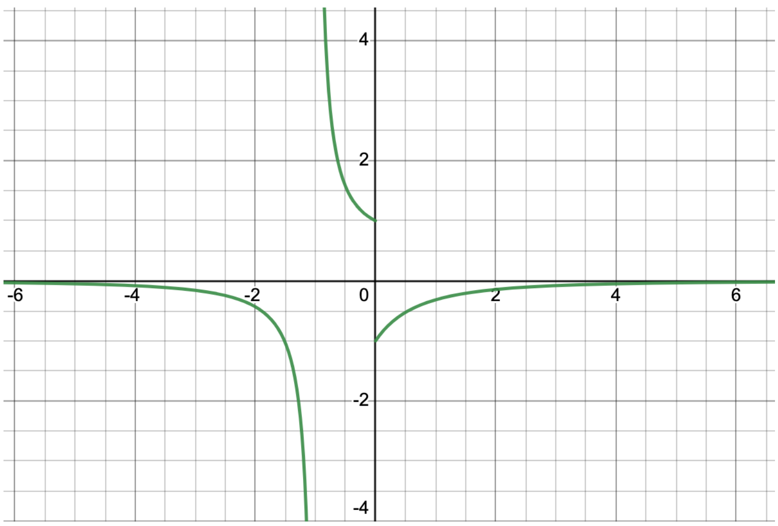


Figura 1

(b) Determinare dom $F$ Osserviamo che $0 \in \operatorname{dom} f$, in quanto $F(0) = \int_0^0 f(s)ds$

- se $x \in ]0,+\infty[$

$$f(s) \underset{s\to 0^+}{\longrightarrow} -1 \quad f(s) \underset{s\to 0^-}{\longrightarrow} 1$$

  e la funzione è limitata in $]0,+\infty[$, per cui $f \in \mathcal{R}(]0,+\infty[)$

- se $x \in ]-1,0[$
  $f(s)$ è continua in $]-1,0[$ e $f(s) \underset{s\to 0^-}{\longrightarrow} 1$, per cui l'integrale converge $\forall x \in [a,0[$ con $a \in ]-1,0[$.
  Dobbiamo controllare se converge in $-1$

$$\int_0^{-1} f(s)ds = \int_0^{-1} \frac{e^s-1}{s(s+1)} ds$$

per $s \to -1$ si ha

$$\frac{e^s - 1}{s(s+1)} \sim \frac{\frac{1}{e} - 1}{-1(s+1)} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

quindi l'integrale diverge negativamente per il criterio del confronto asintitico, da cui

$$]-\infty, -1] \nsubseteq \operatorname{dom} F$$

Abbiamo quindi che $\operatorname{dom} F = ]-1; +\infty[$

(c) Determinare $G_F$
Per definizione di funzione integrale sappiamo che $F(0) = 0$, inoltre per il teorema fondamentale del calcolo

$$F'(x) = f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$F''(x) = f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Per il corollario di Lagrange

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = F'_+(0)$$

per cui in $x = 0$ la funzione presenta un punto angoloso. Siamo quindi in grado di determinare il grafico di $F$ (Figura **??**fig:1.2)):

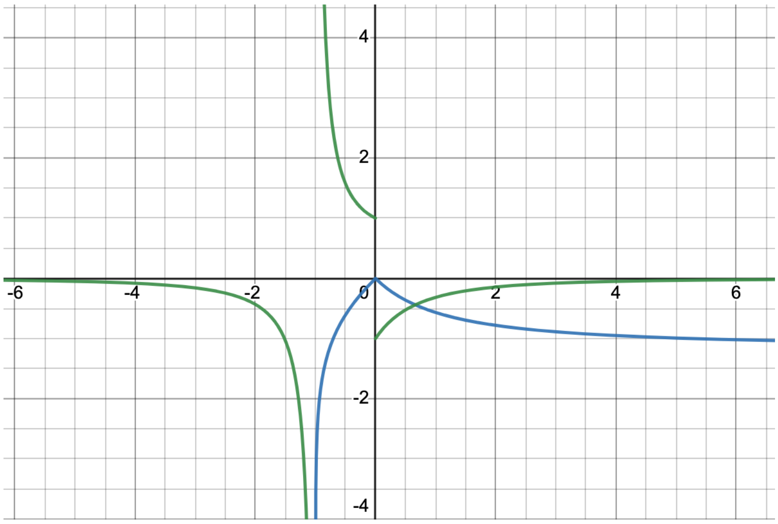


Figura 2

Ricordiamo la definizione di convessità

**DEF** (Convessità)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f$ si dice convessa se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \qquad f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

**Esercizio 12.2.** Dimostrare che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se vale la seguente disuguaglianza

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.*

- "$\Rightarrow$"
  Prendo $x \in [x_1, x_2]$, allora posso scrivere $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, con $\lambda \in [0,1]$

$$f(x) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq f(x_1)\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1}(\lambda x_1 - (1 - \lambda x_2 - x_1)) =$$

$$= f(x_1)\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1}(1-\lambda)(x_2 - x_1) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

- "$\Leftarrow$"
  Prendo $x \in [x_1, x_2]$, allora posso scrivere $x = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2$. Pongo $\lambda := \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in [0,1]$.
  Allora $1 - \lambda = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in [0,1]$

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

$$\implies f(x) - f(x_1) \leq (\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} - 1)f(x_1) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

QED

**Esercizio 12.3.** Provare che $f(x) = x^2$ è strettamente convessa.

*Soluzione*

*Dimostrazione.*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \qquad \forall \lambda \in [0,1] \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 < \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$x_1^2 \lambda(\lambda - 1) + x_2^2((1-\lambda)^2 - (1-\lambda)) + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 < 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\lambda(\lambda-1)[x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2] = \lambda(\lambda-1)(x_1 - x_2)^2 < 0$$

che è verificato $\forall \lambda \in [0,1] \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. QED

**Esercizio 12.4.** Dimostrare che $\forall a, b \geq 0$ vale che

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Pongo $f(t) = t^p$, che è convessa. Scelgo inoltre $x_1 = a$ e $x_2 = b$. Per la caratterizzazione precedente

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^p \leq \lambda a^p + (1-\lambda)b^p$$

Scegliendo $\lambda = \dfrac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p (a+b)^p \leq \left(\frac{1}{2}\right)(a^p + b^p) \quad \Leftrightarrow$$
$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

QED

**Esercizio 12.5.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, si dimostri che $f$ è convessa se e solo se

$$f(x) \leq f(y) + f'(y)(x - y)$$

.

*Soluzione*

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Per quanto detto prima,

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(y)}{\lambda} \leq \frac{\lambda(f(x) - f(y))}{\lambda} \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Allora, facendo tendere $\lambda$ a 0 il secondo membro tende a

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(y)}{\lambda} \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} f'(y)(x-y) \quad \Leftrightarrow$$

Pongo $z = \lambda x + (1-\lambda)y$

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z)$$
$$f(y) \geq f(z) + f'(z)(y-z)$$

QED

**Esercizio 12.6.** *Disuguaglianza di Young.* Siano $p, q \in ]1; +\infty[$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dimostrare che

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

## *Soluzione*

*Dimostrazione.* Il caso $a = b = 0$ è banale, mentre il caso $p, q = 2$ segue dal quadrato di binomio. Sia $f(t) = \log(t)$, e $t_1 = a^p, t_2 = b^p, \lambda = \frac{1}{p}, 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ Allora

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \quad \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}\right) \geq \log(a) + \log(b) = \log(ab) \quad \Leftrightarrow$$

QED

**Esercizio 12.7.** *Disuguaglianza di Hölder.* Siano $p, q \in ]1; +\infty[$ tali che $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Dimostrare che $\forall (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_i, b_i \geq 0 \forall i$ vale che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

## *Soluzione*

*Dimostrazione.* Poniamo $x_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ e $y_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, allora segue che $x_i, y_i > 0 \ \forall i$.

Per la disuguaglianza di Young

$$x_i y_i \leq \frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{p} y_i^p$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{p} y_i^p\right) = \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} = 1$$

QED

**Corollario** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)**.** *Siano* $\forall (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *con* $a_i, b_i \geq 0 \forall i$*, allora*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

**Esercizio 12.8.** *Disuguaglianza di Jensen.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ convessa. Sia $g \in \mathcal{R}(]a, b[)$, allora

$$f\left(\fint_a^b g(x)\right) \leq \fint_a^b f \circ g(x)dx$$

dove

$$\fint_a^b f(t)dt := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Consideriamo la funzione

$$\begin{cases} x \longmapsto & g(x) \\ y \longmapsto & \fint_a^b g(tdt) \end{cases}$$

Consideriamo la caratterizzazione della convessità presentata precedentemente, allora siccome $f$ è convessa

$$f(g(x)) \geq f\left(\fint_a^b (g(t)dt)\right) + f'\left(\fint_a^b g(t)dt\right)\left(g(t) - \fint_a^b g(t)dt\right)$$

$$\begin{aligned}\fint_a^b f(g(x)) \geq \fint_a^b &\left[f\left(\fint_a^b (g(t)dt)\right) + f'\left(\fint_a^b g(t)dt\right)\left(g(t) - \fint_a^b g(t)dt\right)\right]dx = \\ &= f\left(\fint_a^b g(t)dt\right) + f'\left(\fint_a^b g(t)dt\right)\fint_a^b\left(g(x) - \fint_a^b g(t)dt\right)dx = \\ &= f\left(\fint_a^b g(t)dt\right) + f'\left(\fint_a^b g(t)dt\right)\left[\fint_a^b g(x)dx - \fint_a^b g(t)dt\right] \\ &\implies \fint_a^b (f \circ g)(x)dx \geq f(\fint_a^b g(t)dt)\end{aligned}$$

QED

**Esercizio 12.9.** *Disuguaglianza di Young generalizzata.* Siano $p_1, \ldots, p_n \in ]1; +\infty[$ tali che $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$
Dimostrare che

$$\prod_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{p_i}$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Definiamo due nuove funzioni: $f(t) = \log(t)$ e

$$g(t) = \begin{cases} a_0^{p_0} & \text{se } x \in ]0, p_0[ \\ a_1^{p_1} & \text{se } x \in ]p_0, p_1[ \\ \vdots & \\ a_n^{p_n} & \text{se } x \in ]p_{n-1}, p_n[ \end{cases}$$

Siccome il logaritmo è una funzione concava

$$f\left(\fint_0^1 g(x)dx\right) \geq \fint_0^1 f(\circ g)(x)dx \quad \Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p_i}}{p_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{p_i} \frac{1}{p_i}\log(a_i^{p_i}) = \sum_{i=1}^n \log(a_i) = \log\prod_{i=1}^n a_i$$

Passando all'esponenziale si ha la tesi. QED