

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica  
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023  
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi\*

07 Dicembre 2022

**Esercizio 11.1.** Siano  $\beta \in \mathbb{R}$  e  $S_\beta$  l'area del sottografico associato alla funzione  $f(x) = x^2 + \beta$  dove  $x \in [-2, 2]$ .

*Soluzione* Dobbiamo distinguere tre casi:

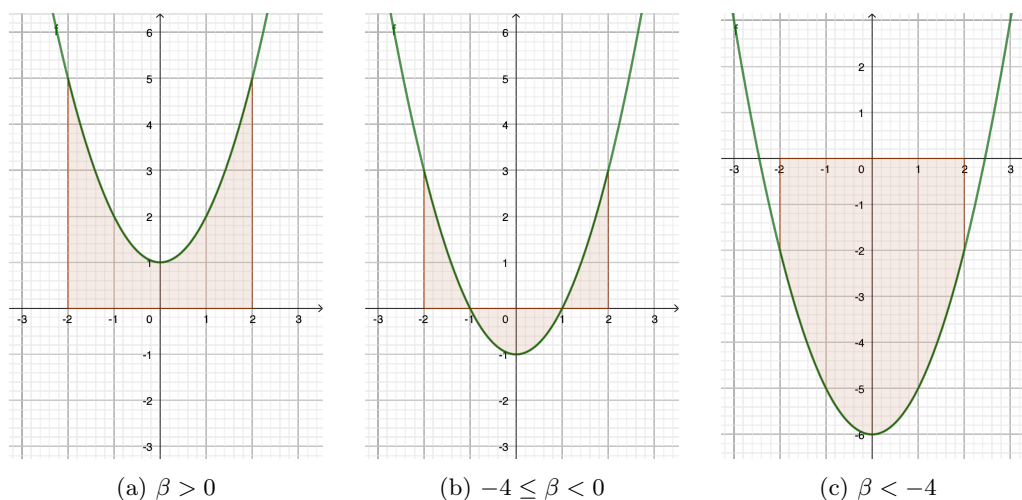


Figura 1

- $\beta \geq 0$  In questo caso la parabola si trova sempre sopra l'asse  $x$  (Figura 1a).

$$S_\beta = \int_{-2}^2 (x^2 + \beta) dx$$

- Analizziamo ora quando la parabola interseca l'asse  $x$  in due punti interni all'intervallo  $[-2, 2]$  (Figura 1b)

$$\begin{aligned} x^2 + \beta &= 0 \Leftrightarrow x^2 = -\beta \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\beta} \\ \Rightarrow \exists x \in [-2, 2] : f(x) &= 0 \Leftrightarrow -\beta \leq 4 \Leftrightarrow \beta \geq -4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, quando  $-4 \leq \beta < 0$

$$S_\beta = \int_{-2}^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^{-\sqrt{-\beta}} (x^2 + \beta) dx + \int_{-\sqrt{-\beta}}^{\sqrt{-\beta}} (x^2 + \beta) dx + \int_{\sqrt{-\beta}}^2 (x^2 + \beta) dx$$

- Rimane il caso in cui la parabola si trova sempre sotto l'asse  $x$  in  $[-2, 2]$ , ovvero quando  $\beta < -4$  (Figura 1c), in cui si ha

$$S_\beta = - \int_{-2}^2 (x^2 + \beta) dx$$

---

\*Trascrizione a cura di Davide Borra

**Esercizio 11.2.** Determinare l'area della regione di piano compresa tra  $f(x) = \cos x$  e  $g(x) = \sin x$  e le rette  $x = 0$  e  $x = \pi$

*Soluzione* Prima di tutto determiniamo l'intersezione:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Abbiamo quindi che  $f(x) \geq g(x)$  su  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  e che  $f(x) \leq g(x)$  su  $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$  Di conseguenza

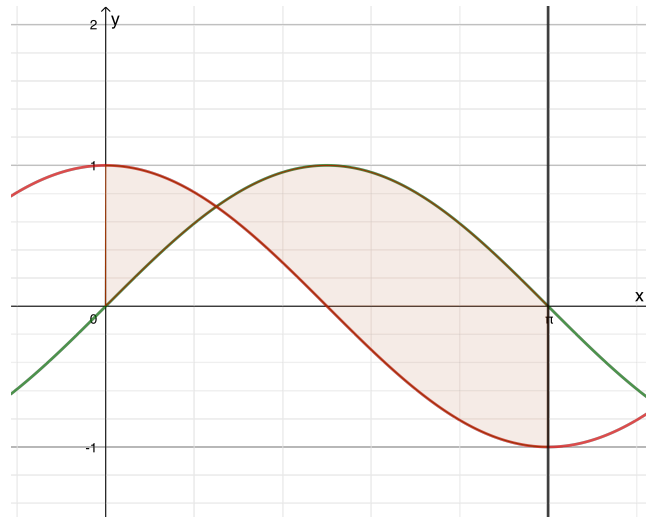


Figura 2

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \right) - \left( \frac{0 - 1 - \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

**Esercizio 11.3.** Calcolare i seguenti integrali

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx \quad \text{b) } \int_9^{16} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 3\sqrt{x} + 2} dx \quad \text{c) } \int_0^{e^{-\frac{1}{e}}} \sqrt{4 - x^2} dx \quad \text{d) } \int \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

*Soluzione*

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + 2 \int_1^2 x^{-\frac{5}{3}} dx = [\log x - 3x^{-\frac{2}{3}}]_1^2 = \log 2 - 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} + 3$$

b)  $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2} dx$

Risolviamo per sostituzione: sia  $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$ . Modifichiamo di conseguenza gli estremi di integrazione:  $x_0 = 9 \Leftrightarrow t_0 = 3$  e  $x_1 = 16 \Leftrightarrow t_1 = 4$

$$\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2} dx = \int_3^4 \frac{t-3}{t^2-3t+2} 2tdt = 2 \int_3^4 \frac{t^2-3t+2-2}{t^2-3t+2} dt = 2 \int_3^4 dt - 4 \int_3^4 \frac{1}{t^2-3t+2} dt$$

Adesso scomponiamo la frazione con il metodo dei fratti semplici

$$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{(t-2)(t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+B(t-2)}{(t-2)(t-1)} = \frac{(A+B)t-(A+2B)}{(t-2)(t-1)}$$

Da cui

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} 2 \int_3^4 dt - 4 \int_3^4 \frac{1}{t^2-3t+2} dt &= 2 - \left( \int_3^4 \frac{1}{t-2} dt - \int_3^4 \frac{1}{t-1} dt \right) = 2 - 4 [\log |t-2| - \log |t-1|]_3^4 = \\ &= 2 - 4 \log 2 + 4 \log 3 - 4 \log 2 \end{aligned}$$

c)  $\int_0^{e-\frac{1}{e}} \sqrt{4-x^2} dx$  Quando si presentano situazioni del genere è utile sostituire applicando le relazioni tra seno e coseno o tra seno e coseno iperbolici. In particolare se si presenta  $\sqrt{1-x^2}$  è utile sostituire ricordando che  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , mentre se si presenta  $\sqrt{1+x^2}$  è utile sostituire ricordando che  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ . In questo caso sostituiamo  $x = 2 \sinh t$ , quindi  $dx = 2 \cosh t dt$ . Di conseguenza gli estremi di integrazione diventano  $t_0 = 0$  e  $t_1 = 1$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{e-\frac{1}{e}} \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{4+4\sinh^2 t} \cdot 2 \cosh t dt = 4 \int_0^1 \sqrt{\cosh^2 t} \cosh t dt = \int_0^1 \cosh^2 t dt = \\ &= 4 \int_0^1 \cosh t \cosh t dt = 4 \left( \left[ \sinh t \cosh t \right]_0^1 - \int_0^1 \sinh^2 t dt \right) = \\ &= 4 \int_0^1 \cosh t \cosh t dt = 4 \left( \left[ \sinh t \cosh t \right]_0^1 - \int_0^1 (\cosh^2 t - 1) dt \right) = \\ &= 4 \left( \left[ \sinh t \cosh t \right]_0^1 + \int_0^1 dt - \int_0^1 \cosh^2 t dt \right) \end{aligned}$$

$\Updownarrow$

$$8 \int_0^1 \cosh^2 t dt = 4 \left[ \sinh t \cosh t + t \right]_0^1$$

$\Updownarrow$

$$4 \int_0^{e-\frac{1}{e}} \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int_0^1 \cosh^2 t dt = 4 \left[ \sinh t \cosh t + t \right]_0^1 = 2 \left( \frac{e-\frac{1}{e}}{2} + \frac{1+\frac{1}{e}}{2} - 1 + 1 \right) = 2e$$

d)  $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$

Per risolvere questo tipo di integrali bisogna utilizzare le formule parametriche per seno e coseno: sia  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , allora si ha  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  e  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ . Inoltre  $x = \operatorname{arctg} t$  e  $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ . Infatti

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \sin x$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2(1+t^2)}{(2t+1+t^2)(1+t^2)} dt = \\ &= \int \frac{2}{1+t^2} dt = -\frac{2}{1+t^2} + c = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + c \end{aligned}$$

**Esercizio 11.4.** Studiare la convergenza di  $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt[4]{1-x}} dx$

*Soluzione* Chiamiamo  $f(x)$  la funzione integranda. Osserviamo che  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ . Inoltre osserviamo che per  $x \rightarrow 0$ ,  $\sin x \sim x$  e  $\sqrt[4]{1-x} \sim 1$ , quindi  $f(x) \sim \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ . È perciò possibile estendere con continuità la funzione in 0 con  $\tilde{f}(0) = 0$ , per cui  $f \in \mathcal{R}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ . Per  $x \rightarrow 1$  osserviamo che  $f(x) \sim \frac{\sin 1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sin 1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$ . Poiché  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}} dx$  converge, allora per il teorema del confronto e del confronto asintotico,  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$  converge. Di conseguenza  $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt[4]{1-x}} dx$  converge.

**Esercizio 11.5.** Determinare per quali  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (4+9x)^{\beta+1}} dx$$

converge e calcolarne il valore con  $\alpha = \frac{1}{2}$  e  $\beta = 0$ .

*Soluzione* Chiamiamo  $f(x)$  la funzione integranda.

Per  $x \rightarrow 0$  si ha  $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ , quindi per il teorema del confronto asintotico l'integrale converge se e solo se  $\alpha < 1$ .

Per  $x \rightarrow +\infty$   $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha (9x)^{\beta+1}} = \frac{1}{9^{\beta+1} x^{\alpha+\beta+1}}$ . Affinché l'integrale converga  $\alpha + \beta + 1 > 1$ , ovvero  $-\beta < \alpha$ .

Di conseguenza l'integrale converge se e solo se  $-\beta < \alpha < 1$ .

Calcoliamo ora il valore dell'integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx + \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx \end{aligned}$$

Per procedere al calcolo ci serve una primitiva di  $f$ . Sostituiamo ponendo  $t = \sqrt{x}$ ,  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx &= \int \frac{1}{t(4+9t^2)} 2t dt = 2 \int \frac{1}{4+9t^2} dt = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{9}{4}t^2} dt = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{3}{2} t \right) + c = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{3}{2} \sqrt{x} \right) + c \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx + \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{3}{2} \sqrt{x} \right) \right]_{\delta}^1 + \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{3}{2} \sqrt{x} \right) \right]_1^h = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\delta} \right) \right] + \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{3}{2} \sqrt{h} \right) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} \right] = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

**Esercizio 11.6.** Studiare la convergenza di  $\int_1^2 \frac{1 - \cos x}{(x^2 - 1)^{\alpha}(2 - x)^{3-\alpha}} dx$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$

*Soluzione* Riscriviamo l'integrale equivalentemente e sostituiamo  $x - 1 = t$ ,  $t = x + 1$ ,  $dx = dt$

$$\int_1^2 \frac{1 - \cos x}{(x^2 - 1)^{\alpha}(2 - x)^{3-\alpha}} dx = \int_1^2 \frac{1 - \cos x}{(x - 1)^{\alpha}(x + 1)^{\alpha}(2 - x)^{3-\alpha}} dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{(t)^{\alpha}(t + 2)^{\alpha}(1 - t)^{3-\alpha}} dx$$

Chiamiamo  $f(t)$  la funzione integranda

- In  $t = 0$

$$f(t) \sim \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha}} \cdot \frac{1}{2^{\alpha}}$$

Sviluppiamo il coseno

$$\frac{1 - \cos t}{t^{\alpha}} = \frac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2 t^{\alpha-2}} \sim \frac{2}{t^{\alpha 2}}$$

L'integrale converge se e solo se  $\alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 3$

- In  $t = 1$  osserviamo che  $1 - \cos t$ ,  $t$  e  $t + 1$  non influiscono se non per costanti, quindi

$$f(t) \sim \frac{1}{(1 - t)^{3-\alpha}}$$

che converge se e solo se  $3 - \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$

Di conseguenza l'integrale converge se e solo se

$$2 < \alpha < 3$$