

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

19 Dicembre 2022

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esercizio 13.1. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Soluzione Osserviamo che ogni soluzione y sarà $y(x) \neq 0 \forall x$. Allora

$$y' = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow y'y = -x$$

Abbiamo un'equazione differenziale a variabili separabili. Integrando si ha

$$\begin{aligned} \int y'y \, dx &= - \int x \, dx \Leftrightarrow \int y \, dy = - \int x \, dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y(x) = \sqrt{-x^2 + c} \vee y = -\sqrt{-x^2 + c} \quad \text{con } -\sqrt{c} \leq x \leq \sqrt{c}, \quad c \geq 0 \end{aligned}$$

Per risolvere il problema di Cauchy impongo $y(0) = 1$, quindi

$$\pm\sqrt{c} = 1 \implies c = 1$$

Scegliendo la soluzione con segno positivo (deve soddisfare $y(0) = 1 > 0$), per cui la soluzione al problema di Cauchy dato è la funzione $y :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \quad y(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Esercizio 13.2. Determinare l'integrale generale di

$$(x^2 + 1)y' + y^2 = 0$$

e risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x^2 + 1)y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione Dobbiamo riportarci alla forma $\frac{y'}{g(y)} = h(x)$, ma per farlo dobbiamo poter dividere per y . Cerchiamo quindi le soluzioni banali: Supponiamo y costante, allora $y' = 0$, di conseguenza

$$y^2 \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv 0$$

Abbiamo che $y = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale data, ma non soluzione del problema di Cauchy. Tutte le altre soluzioni non si annullano mai per il teorema di Cauchy. Possiamo quindi procedere

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{y'}{y^2} \, dx = - \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} \, dy = -\arctg x + c \Leftrightarrow$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

$$-\frac{1}{y} = -\arctg x + c \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{\arctg x + c} \quad y: \mathbb{R} \setminus \{\operatorname{tg} c\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Per risolvere il PdC imponiamo la condizione iniziale.

$$1 = \frac{1}{\arctg 0 + c} \Leftrightarrow c = 1 \implies y(x) = \frac{1}{\arctg x + 1} \text{ con } x \in \mathbb{R} \setminus \{\operatorname{tg}(-1)\}$$

Siccome la soluzione al problema di Cauchy è definita su un intervallo, che deve contenere lo 0 e $\operatorname{tg}(-1) < 0$, scelgo l'intervallo $x > \operatorname{tg}(-1)$.

Esercizio 13.3. Trovare l'integrale generale di

$$y' = xy^2$$

e risolvere i problemi di Cauchy con

a) $y(0) = 1$

b) $y(0) = -1$.

Soluzione Troviamo la soluzione banale $y = 0$, quindi è lecito assumere per le altre soluzioni $y \neq 0$

$$\int \frac{y'}{y^2} dx = \int x dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow y = -\frac{2}{x^2 + 2c}$$

Per determinare il dominio dobbiamo separare i tre casi

$$\operatorname{dom} y = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } c > 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } c = 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}\} & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

Infine

- (a) Imponiamo la condizione $y(0) = 1$. Allora $1 = -\frac{2}{2c} \Leftrightarrow c = -1$. La soluzione è quindi definita sull'intervallo $] -\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$
- (b) Imponiamo la condizione $y(0) = -1$ e si ha $c = 1$. Quindi la soluzione y è definita su \mathbb{R} .

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Ricorda In generale, data l'equazione differenziale $y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x), b(x) \in \mathcal{C}^0(I)$, I intervallo, il suo integrale generale è una funzione del tipo

$$y(x) = e^{A(x)} \left(c + \int b(x)e^{-A(x)} dx \right),$$

dove $A(x) = \int a(x) dx$

Esercizio 13.4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione Riscriviamo l'equazione differenziale nella forma $y' = a(x)y + b(x)$, dove $a(x) = 1$ e $b(x) = 1$.

Poichè $A(x) = \int 1 dx = x$, la formula sopra ci dà

$$y(x) = e^x \left(c + \int e^{-x} dx \right) = e^x (c + (-e^{-x})) = ce^x - 1.$$

Impongo la condizione $y(0) = 0$. Allora

$$y(0) = c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = 1 \implies y(x) = e^x - 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

è la soluzione del problema di Cauchy dato.

Esercizio 13.5. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\sin x) y + \sin(2x) \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Soluzione Abbiamo un'equazione differenziale lineare del 1° ordine con $a(x) = \sin x$ e $b(x) = \sin(2x)$.
Ora

$$a(x) = \sin x \implies A(x) = \int a(x) dx = \int \sin x dx = -\cos x$$

L'integrale generale si ricava quindi da

$$y(x) = e^{-\cos x} \left(c + \int \sin(2x) e^{\cos x} dx \right).$$

Ora

$$\int \sin(2x) e^{\cos x} dx = \int 2 \cos x \sin x e^{\cos x} dx.$$

Pongo $t = \cos x$, quindi $dt = -\sin x dx$;

$$\int_2 \cos x \sin x e^{\cos x} dx \underset{t=\cos x}{=} -2 \int t e^t dt = -2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = -2 (t e^t - e^t) = -2 e^{\cos x} \cos x + 2 e^{\cos x}$$

Allora l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = e^{-\cos x} (c + 2e^{\cos x} - 2 \cos x e^{\cos x}) = c e^{-\cos x} + 2 - 2 \cos x, c \in \mathbb{R}$$

Imponiamo le condizioni $y(0) = -2$ e otteniamo

$$c e^{-1} = -2 \iff c = -2e.$$

Esercizio 13.6. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 x \log x^2 \\ y(1) = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Soluzione Cerchiamo la soluzione banale. Se $y' \equiv 0$, allora $y \equiv 0$. Essa è soluzione del problema di Cauchy se $\lambda = 0$. Per trovare le altre soluzioni è quindi lecito assumere $y \neq 0$ e $\lambda \neq 0$. Abbiamo

$$\frac{y'}{y^2} = x \log x^2$$

$$\int \frac{y'}{y^2} dx = \int x \log x^2 dx \underset{\text{pongo } t=x^2 \Rightarrow dt=2x dx}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \int \log t dt.$$

Ora

$$\int \log t dt = t \log t - \int \frac{t}{t} dt = t(\log t - 1);$$

ricordando che $t = x^2$ si ottiene infine

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2} x^2 \log x^2 - \frac{1}{2} x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = -\frac{1}{\frac{1}{2} x^2 \log x^2 - \frac{1}{2} x^2 + c}.$$

Per risolvere il problema di Cauchy imponiamo $y(1) = \lambda$:

$$\lambda = -\frac{1}{c - \frac{1}{2}} \iff \frac{1}{2} - c = \frac{1}{\lambda} \iff c = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda}.$$