Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

14 Novembre 2022

Esercizio 8.1. Calcolare i seguenti limiti con il teorema di de l'Hôpital:

(a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos^3 x - 1}{\log(1+2x)\cosh(x^3)}$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log(\log(x+1))}{\log x}$

Soluzione

(a) Verifichiamo le ipotesi:

- $f(x) = \cos^3 x - 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$
- $g(x) = \log(1+2x)\cosh(x^3) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$
- $g'(x) = \dfrac{2}{1+2x}\cosh x^3 + 3x^2 \sinh x^3 \log(1+2x)$. Siccome $g(0) = 2$, per il teorema della permanenza del segno $\exists b \in \mathbb{R}_{>0} : \forall x \in]0, b[, g'(x) > 0$

È quindi possibile applicare il teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^3 x - 1}{\log(1+2x)\cosh(x^3)} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-3\operatorname{sen} x \cos^2 x}{\frac{2}{1+2x}\cosh x^3 + 3x^2 \sinh x^3 \log(1+2x)} = 0$$

(b) Verifichiamo le ipotesi:

- $f(x) = \log(\log(x+1)) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$
- $g(x) = \log x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$
- $g'(x) \neq 0$ in un intorno destro di 0, infatti $g'(x) = \dfrac{1}{x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\log(x+1))}{\log x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{\log(x+1)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1}\cdot \underbrace{\frac{x}{\log(1+x)}}_{\to 1}$$

Esercizio 8.2. Calcolare il polinomio di Taylor con resto di Peano di

(a) $\log x$ di ordine 3 in $x_0 = 2$

(b) $\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) + \log(1 + \operatorname{arctg} x)$ di ordine 3 in $x_0 = 0$

Soluzione

(a) Abbiamo due modi: il primo applicando la formula di Taylor mentre il secondo cercando di ricondurci agli sviluppi noti.

Modo 1:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} \qquad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f^{(3)}(x) = +\frac{2}{x^3}$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

$$\begin{aligned}\log x &= \log 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4\cdot 2!}(x-2)^2 + \frac{1}{4\cdot 3!}(x-2)^3 + o((x-2)^3) = \\ &= \log(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + o((x-2)^3) = \\ &= \log 2 - \frac{11}{16} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o((x-2)^3)\end{aligned}$$

Modo 2:

$$f(x) = \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

Devo riuscire a ricondurmici:

$$\log(x) = \log(\frac{x}{2}\cdot 2) = \log 2 + \log\frac{x}{2} = \log 2 + \log\left(1 + \left(\frac{x}{2}-1\right)\right)$$

Da cui

$$\log x = \log 2 + \left(\frac{x}{2}-1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)^3 + o\left(\left(\frac{x}{2}-1\right)^3\right)$$

(b) Poniamo $t = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{arctg}(x)$. In un intorno di 0, sia $\operatorname{tg} x$ che $\operatorname{arctg} x$ tendono a 0, quindi anche t e y. Utilizzando gli sviluppi fondamentali

$$\operatorname{sen} t + \log(1+y) = \left[t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right] + \left[y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)\right]$$

Adesso sviluppiamo anche t e y:

$$t = \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad y = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) + \log(1 + \operatorname{arctg} x) = \\ &= \left[\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3}{6} + o\left(\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3\right)\right] + \\ &+ \left[\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3}{3} + o\left(\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3\right)\right] = \\ &= 2x + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\end{aligned}$$

Esercizio 8.3. Calcolare i seguenti limiti utilizzando gli sviluppi di Taylor:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \log(1-x)}{\operatorname{tg} x - x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen}^2\sqrt{x} - \operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

Soluzione