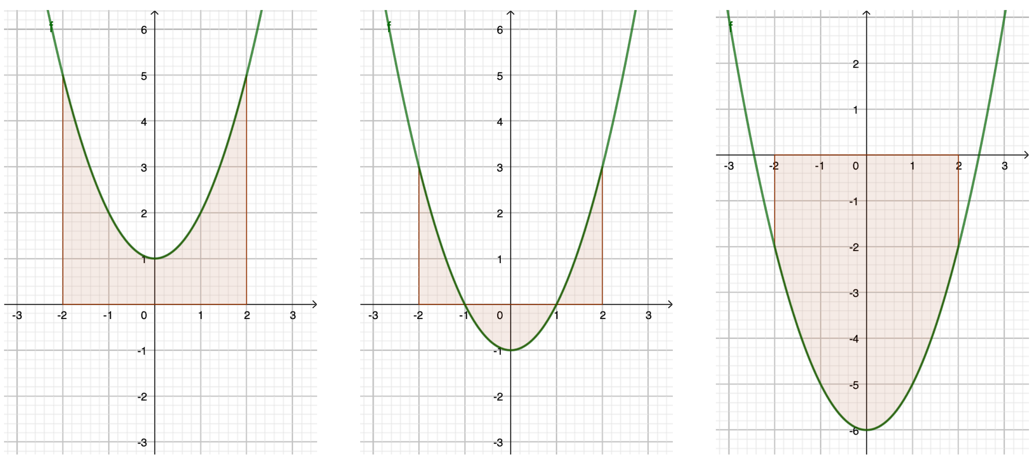
Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi[*]

07 Dicembre 2022

Esercizio 11.1. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e S_β l'area del sottografico associato alla funzione $f(x) = x^2 + \beta$ dove $x \in [-2, 2]$.

Soluzione Dobbiamo distinguere tre casi:



(a) $\beta > 0$ (b) $-4 \leq \beta < 0$ (c) $\beta < -4$

Figura 1

- $\beta \geq 0$ In questo caso la parabola si trova sempre sopra l'asse x (Figura 1a).

$$S_\beta = \int_{-2}^{2} (x^2 + \beta) dx$$

- Analizziamo ora quando la parabola interseca l'asse x in due punti interni all'intervallo $[-2, 2]$ (Figura 1b)

$$x^2 + \beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -\beta \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\beta}$$

$$\implies \exists x \in [-2, 2] \ : \ f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow -\beta \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad \beta \geq -4$$

Di conseguenza, quando $-4 \leq \beta < 0$

$$S_\beta = \int_{-2}^{2} |f(x)| dx = \int_{-2}^{-\sqrt{-\beta}} (x^2 + \beta) dx + \int_{-\sqrt{-\beta}}^{\sqrt{-\beta}} (x^2 + \beta) dx + \int_{\sqrt{-\beta}}^{2} (x^2 + \beta) dx$$

- Rimane il caso in cui la parabola si trova sempre sotto l'asse x in $[-2, 2]$, ovvero quando $\beta < 4$ (Figura 1c), in cui si ha

$$S_\beta = -\int_{-2}^{2} (x^2 + \beta) dx$$

[*]Trascrizione a cura di Davide Borra

Esercizio 11.2. Determinare l'area della regione di piano compresa tra $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$ e le rette $x = 0$ e $x = \pi$

Soluzione Prima di tutto determiniamo l'intersezione:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$$

Abbiamo quindi che $f(x) \geq g(x)$ su $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e che $f(x) \leq g(x)$ su $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ Di conseguenza

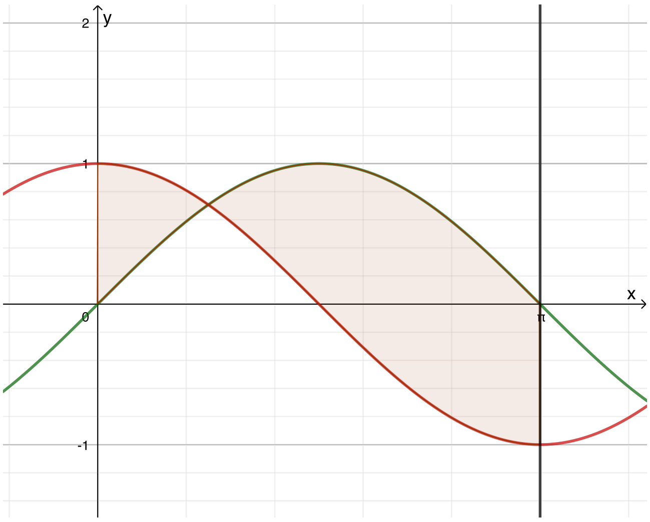


Figura 2

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx = [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\operatorname{sen} x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1\right) - \left(\frac{0 - 1 - \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Esercizio 11.3. Calcolare i seguenti integrali

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx$ b) $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 3\sqrt{x} + 2} dx$ c) $\displaystyle\int_0^{e - \frac{1}{e}} \sqrt{4 - x^2} dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} dx$

Soluzione

a) $$\int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + 2\int_1^2 x^{-\frac{5}{3}} dx = \left[\log x - 3x^{-\frac{2}{3}}\right]_1^2 = \log 2 - 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} + 3$$

b) $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2}dx$

Risolviamo per sostituzione: sia $t=\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x=t^2 \quad \Rightarrow dx=2tdt$. Modifichiamo di conseguenza gli estremi di integrazione: $x_0=9 \quad \Leftrightarrow \quad t_0=3$ e $x_1=16 \quad \Leftrightarrow \quad t_1=4$

$$\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2}dx = \int_3^4 \frac{t-3}{t^2-3t+2}2tdt = 2\int_3^4 \frac{t^2-3t+2-2}{t^2-3t+2}dt = 2\int_3^4 dt - 4\int_3^4 \frac{1}{t^2-3t+2}dt$$

Adesso scomponiamo la frazione con il metodo dei fratti semplici

$$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{(t-2)(t-1)} = \frac{A}{t-2}+\frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+B(t-2)}{(t-2)(t-1)} = \frac{(A+B)t-(A+2B)}{(t-2)(t-1)}$$

Da cui

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2b=-1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=-B=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Quindi

$$2\int_3^4 dt - 4\int_3^4 \frac{1}{t^2-3t+2}dt = 2-\left(\int_3^4 \frac{1}{t-2}dt - \int_3^4 \frac{1}{t-1}dt\right) = 2-4\left[\log|t-2|-\log|t-1|\right]_3^4 =$$

$$= 2-4\log 2+4\log 3-4\log 2$$

c) $\displaystyle\int_0^{e-\frac{1}{e}} \sqrt{4-x^2}dx$ Quando si presentano situazioni del genere è utile sostituire applicando le relazioni tra seno e coseno o tra seno e coseno iperbolici. In particolare se si presenta $\sqrt{1-x^2}$ è utile sostituire ricordando che $\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x=1$, mentre se si presenta $\sqrt{1+x^2}$ è utile sostituire ricordando che $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x=1$. In questo caso sostituiamo $x=2\operatorname{senh} t$, quindi $dx=2\cosh t dt$. Di conseguenza gli estremi di integrazione diventano $t_0=0$ e $t_1=1$.

$$\int_0^{e-\frac{1}{e}} \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^1 \sqrt{4+4\operatorname{senh}^2 t}\cdot 2\cosh t dt = 4\int_0^1 \sqrt{\cosh^2 t}\cosh t dt = \int_0^1 \cosh^2 t dt =$$

$$= 4\int_0^1 \cosh t\cosh t dt = 4\left(\Big[\operatorname{senh} t\cosh t\Big]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{senh}^2 t dt\right) =$$

$$= 4\int_0^1 \cosh t\cosh t dt = 4\left(\Big[\operatorname{senh} t\cosh t\Big]_0^1 - \int_0^1 (\cosh^2 t-1)dt\right) =$$

$$= 4\left(\Big[\operatorname{senh} t\cosh t\Big]_0^1 + \int_0^1 dt - \int_0^1 \cosh^2 t dt\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$8\int_0^1 \cosh^2 t dt = 4\Big[\operatorname{senh} t\cosh t + t\Big]_0^1$$

$$\Updownarrow$$

$$4\int_0^{e-\frac{1}{e}} \sqrt{4-x^2}dx = 2\int_0^1 \cosh^2 t dt = 4\Big[\operatorname{senh} t\cosh t + t\Big]_0^1 = 2\left(\frac{e-\frac{1}{e}}{2}+\frac{1+\frac{1}{e}}{2}-1+1\right) = 2e$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}dx$
Per risolvere questo tipo di integrali bisogna utilizzare le formule parametriche per seno e coseno: sia $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, allora si ha $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Inoltre $x = \operatorname{arctg} t$ e $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$. Infatti

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \operatorname{sen} x$$

Di conseguenza

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2(1+t^2)}{(2t+1+t^2)(1+t^2)}dt =$$
$$= \int \frac{2}{1+t^2}dt = -\frac{2}{1+t^2}+c = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+c$$

Esercizio 11.4. Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}\sqrt[4]{1-x}}dx$

Soluzione Chiamiamo $f(x)$ la funzione integranda. Osserviamo che $f \in \mathcal{C}^0(]0,1[)$. Inoltre osserviamo che per $x \to 0$, $\operatorname{sen} x \sim x$ e $\sqrt[4]{1-x} \sim 1$, quindi $f(x) \sim \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. È perciò possibile estendere con continuità la funzione in 0 con $\tilde{f}(0) = 0$, per cui $f \in \mathcal{R}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$. Per $x \to 1$ osserviamo che $f(x) \sim \frac{\operatorname{sen} 1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\operatorname{sen} 1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$. Poiché $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$ converge, allora per il teorema del confronto e del confronto asintotico, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$ converge. Di conseguenza $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}\sqrt[4]{1-x}}dx$ converge.

Esercizio 11.5. Determinare per quali $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(4+9x)^{\beta+1}}dx$$

converge e calcolarne il valore con $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 0$.

Soluzione Chiamiamo $f(x)$ la funzione integranda.
Per $x \to 0$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$, quindi per il teorema del confronto asintotico l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$.
Per $x \to +\infty$ $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha(9x)^{\beta+1}} = \frac{1}{9^{\beta+1}x^{\alpha+\beta+1}}$. Affinché l'integrale converga $\alpha+\beta+1 > 1$, ovvero $-\beta < \alpha$.
Di conseguenza l'integrale converge se e solo se $-\beta < \alpha < 1$.
Calcoliamo ora il valore dell'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx =$$
$$= \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx + \lim_{h\to+\infty}\int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx$$

Per procedere al calcolo ci serve una primitiva di f. Sostituiamo ponendo $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx = \int \frac{1}{t(4+9t^2)}2tdt = 2\int \frac{1}{4+9t^2}dt = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{9}{4}t^2}dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}t\right)+c =$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)+c$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx + \lim_{h\to+\infty}\int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx =$$
$$= \lim_{\delta\to 0^+}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)\right]_\delta^1 + \lim_{h\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)\right]_1^h =$$
$$= \lim_{\delta\to 0^+}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\delta}\right)\right] + \lim_{h\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\sqrt{h}\right) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right] = \frac{\pi}{6}$$

Esercizio 11.6. Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_1^2 \frac{1-\cos x}{(x^2-1)^\alpha(2-x)^{3-\alpha}}dx$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$

Soluzione Riscriviamo l'integrale equivalentemente e sostituiamo $x-1=t$, $t=x+1$, $dx=dt$

$$\int_1^2 \frac{1-\cos x}{(x^2-1)^\alpha(2-x)^{3-\alpha}}dx = \int_1^2 \frac{1-\cos x}{(x-1)^\alpha(x+1)^\alpha(2-x)^{3-\alpha}}dx = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{(t)^\alpha(t+2)^\alpha(1-t)^{3-\alpha}}dx$$

Chiamiamo $f(t)$ la funzione integranda

- In $t=0$
$$f(t)\sim\frac{1-\cos t}{t^\alpha}\cdot\frac{1}{2^\alpha}$$
Sviluppiamo il coseno
$$\frac{1-\cos t}{t^\alpha} = \frac{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^2t^{\alpha-2}} \sim \frac{2}{t^{\alpha 2}}$$
L'integrale converge se e solo se $\alpha-2<1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha<3$
- In $t=1$ osserviamo che $1-\cos t$, t e $t+1$ non influiscono se non per costanti, quindi
$$f(t)\sim\frac{1}{(1-t)^{3-\alpha}}$$
che converge se e solo se $3-\alpha<1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha>2$

Di conseguenza l'integrale converge se e solo se

$$2<\alpha<3$$