Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

30 Settembre 2022

Esercizio 2.1. Verificare suriettività e iniettività delle seguenti funzioni

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+4}, & x < 0 \end{cases}$

Soluzione

(a) Iniettività: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \vee \underbrace{xy = 1}_{\text{non iniettiva}}$

Suriettività: fissato un $y \in \mathbb{R}$ (codominio), dobbiamo verificare se esiste un $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che verfica $y = f(x)$.

$$y = x + \frac{1}{x}$$
$$x^2 + 1 = xy$$

Non ammette soluzioni per $y = 0$. La funzione non è suriettiva.

Lemma (dei cassetti). *Siano A, B insiemi finiti e $f : A \to B$, allora f è suriettiva se e solo se è iniettiva.*

(b) Iniettività:

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-y}{1+y}$$
$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{y-1}{1+y} = 0$$
$$\frac{1+y-x-xy+y-1+xy-x}{(1+x)(1+y)} = 0$$
$$2\frac{y-x}{(1+x)(1+y)} = 0$$
$$y = x$$

da cui $f(x)$ è iniettiva.
Suriettività:

$$\frac{1-x}{1+x} = y$$
$$1 - x = y(1+x)$$
$$1 - x = y + xy$$
$$1 - y = x + xy$$
$$1 - y = x(1+y)$$
$$\text{Se } y \neq -1 \quad \Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$$
$$\text{Se } y = -1 \quad \Rightarrow 2 = 0 \Leftrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra e Matilde Calabri

Osservazione. *Se restringo il codominio la funzione è suriettiva, quindi è anche biiettiva, per cui ammette inversa:*

$$f^{-1}(x) = \frac{1-y}{1+y}$$

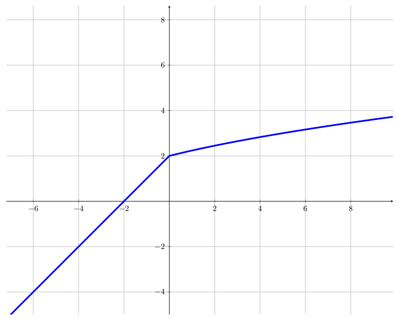
(c) Se $a = 0$, $f(x) = b$, ovvero una retta orizzontale, né iniettiva né suriettiva.
Se $a \neq 0$, $f(x) = b$, si ha una funzione biiettiva.

(d) Iniettività:

Osservazione. $\begin{array}{ll} f(z) < 2 & \textit{se } z < 0 \\ f(z) > 2 & \textit{se } z > 0 \end{array}$

Se $f(x) = f(y)$, si hanno tre casi:

- $x = y = 0$
- $x, y < 0, x + 2 = y + 2 \Leftrightarrow x = y$
- $x, y > 0, \sqrt{x+4} = \sqrt{y+4} \Leftrightarrow x = y$



Da cui la funzione è iniettiva
Suriettività: sia $y \in \mathbb{R}$, se $y \leq 2$

$$x + 2 = y \Leftrightarrow x = \underbrace{y-2}_{\leq 0}$$

se $y > 2$

$$\sqrt{x+4} = y \Leftrightarrow x = \underbrace{y^2-4}_{\geq 0}$$

Allora la funzione è suriettiva.

Esercizio 2.2. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases} \qquad g(x) = \log(|x| - 1)$$

Calcolare $f \circ g$ e $g \circ f$.

Soluzione

$$f \circ g = f(g(x)) = \begin{cases} \sqrt{\log(|x|-1)+1}, & \log(|x|-1) \geq -1 \\ \log^2(|x|-1), & \log(|x|-1) < -1 \end{cases}$$

Risolvo la disequazione $\log(|x| - 1) + 1 \geq -1$

$$|x| - 1 \geq \frac{1}{e}$$

$$x \leq -1 - \frac{1}{e} \vee x \geq 1 + \frac{1}{e}$$

Da cui

$$f \circ g = f(g(x)) = \begin{cases} \sqrt{\log(|x|-1)+1}, & x \in \left]-\infty, -1-\frac{1}{e}\right] \cup \left[1+\frac{1}{e}, +\infty\right[\\ \log^2(|x|-1), & x \in \left]-1-\frac{1}{e}, 1+\frac{1}{e}\right[\setminus [-1, 1] \end{cases}$$

— — —

$$g \circ f = g(f(x)) = \log(|f(x)| - 1)$$

Bisogna imporre che $|f(x)|-1 > 0$, il che si ha quando $x \in \mathbb{R}\setminus[-1, 0]$.