

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023

Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

24 Ottobre 2022

Esercizio 6.1. Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{(1 - \cos x)^3}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n}{3+n} \right)^{n^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3x} \right)^{\frac{1}{\log(2x)}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Soluzione

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{(1 - \cos x)^3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x^6}{(1 - \cos x)^3}}_{\rightarrow \frac{1}{8}} \cdot \underbrace{\frac{x^4}{x^6}}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n}{3+n} \right)^{n^2} = [1^\infty] = 0^+$$

$$\left(\frac{1+n}{3+n} \right)^{n^2} = \left(\frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})^n}{\cancel{n}(1+\frac{3}{n})^n} \right)^n \rightarrow \left(\frac{1}{e^2} \right)^n \rightarrow 0^+$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3x} \right)^{\frac{1}{\log(2x)}} = [0^0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log\left(\frac{1}{3x}\right) \frac{1}{\log(2x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-\log(3x)}{\log(2x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\log 3 + \log x}{\log 2 + \log x}} = e^{-1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = e^{\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{2}} = \sqrt{6}$$

$$\left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\log\left(\frac{2^x + 3^x}{2}\right) \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log\left(\frac{2^x + 3^x}{2}\right)} = e^{\frac{\overbrace{\log\left(1 + \frac{2^x + 3^x}{2} - 1\right)}^{\rightarrow 1}}{\frac{2^x + 3^x}{2} - 1} \cdot \frac{\overbrace{\frac{2^x + 3^x}{2} - 1}^{\rightarrow \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{2}}}{x}} \rightarrow e^{\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{2}}$$

$$\frac{\frac{2^x + 3^x}{2} - 1}{x} = \frac{2^x - 1}{\underbrace{2x}_{\rightarrow \log 2}} + \frac{3^x - 1}{\underbrace{2x}_{\rightarrow \log 3}} \rightarrow \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{2}$$

Esercizio 6.2. Calcolare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}^2 2x - \sin^2 2x}{x^\gamma}$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+x^\gamma}{2+x} \right)^x$$

Soluzione

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x}{x^\gamma}$$

- Se $\gamma = 0$, si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x = 0$
- Se $\gamma < 0$, si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\gamma} (\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x) = 0$
- Se $\gamma > 0$, si ha una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0} \right]$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x}{x^\gamma} &= \frac{\operatorname{sen}^2 2x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)}{x^\gamma} = \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^\gamma} \underbrace{\left(\frac{1 - \cos^2 2x}{\cos^2 2x} \right)}_{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 2x \operatorname{tg}^2 2x}{x^\gamma} = \\ &= \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \right)}_1 \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \right)}_1 \cdot 16x^{4-\gamma} \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x}{x^\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma < 4 \\ 16 & \text{se } \gamma = 4 \\ +\infty & \text{se } \gamma > 4 \end{cases}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+x^\gamma}{2+x} \right)^x$$

- Se $\gamma < 1$ domina il denominatore, quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+x^\gamma}{2+x} \right)^x = 0$
- Se $\gamma > 1$ domina il numeratore, quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+x^\gamma}{2+x} \right)^x = +\infty$
- Se $\gamma = 1$, si ha una forma di indecisione

$$\left(\frac{3+x}{2+x} \right)^x = \left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}} \right)^x = \frac{\left(1+\frac{3}{x} \right)^x}{\left(1+\frac{2}{x} \right)^x} \rightarrow \frac{e^3}{e^2} = e$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+x^\gamma}{2+x} \right)^x = \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma < 1 \\ e & \text{se } \gamma = 1 \\ +\infty & \text{se } \gamma > 1 \end{cases}$$

Esercizio 6.3. Sia $(a_n)_n$ una successione definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \sqrt{1+a_n} \end{cases}$$

Dimostrare che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ finito e calcolarlo.

Soluzione Per dimostrare che esiste limite basta dimostrare che la successione è monotona. Prima di tutto facciamoci un'idea di quale possa essere la monotonia, magari calcolando i primi termini

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a_1 < a_2$$

Potrebbe essere crescente? Dimostriamolo per induzione:

- Passo base: $a_1 \leq a_2 \Leftrightarrow a_1 = 1 \quad a_2 = \sqrt{2}$
- Passo induttivo: $a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+a_{n+1}} \geq \sqrt{1+a_n} \Leftrightarrow \sqrt{1+a_{n+1}} \geq \sqrt{1+a_n} \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$$

La funzione è effettivamente crescente, quindi per il teorema dell'esistenza del limite per successioni monotone, $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Per dimostrare che il limite è finito, bisogna dimostrare che $(a_n)_n$ è limitata. Siccome è crescente, è limitata inferiormente. Dimostriamo che è limitata superiormente, ovvero che $\exists M : a_n \leq M \forall n$. Dato un $M \geq 1$ arbitrario, provare che

$$\forall n, a_n \leq M$$

. Usiamo il principio di induzione:

- Passo base: $(n = 1) \quad a_1 \leq M \Leftrightarrow a_1 = 1 \leq M$
- Passo induttivo: $a_n \leq M \Rightarrow a_{n+1} \leq M$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+a_n} \leq M \Leftrightarrow 1+a_n \leq M^2 \Leftrightarrow a_n \leq M^2 - 1$$

Ci basta quindi dimostrare che $a_n \leq M \Rightarrow a_n \leq M^2 - 1$. Basta scegliere un qualsiasi M tale che $M \leq M^2 - 1$, ad esempio $M = 2$.

Di conseguenza la successione è limitata superiormente e 2 è un suo maggiorante, per cui $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ finito.

Osservazione. L'insieme degli M che abbiamo appena individuato è un insieme dei maggioranti di $(a_n)_n$, ma non è detto che siano tutti i maggioranti.

Calcoliamo quindi il limite. Se esiste (devo averlo dimostrato precedentemente!)

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} \\ a_{n+1} &= \sqrt{1+a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l = \sqrt{1+l} \xrightarrow{l \geq 0} l^2 = 1+l \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow l &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1,6180339887 \dots = \varphi \\ -0,6180339887 \dots = \Phi \end{array} \right\rangle \\ & l = \varphi \end{aligned}$$

Esercizio 6.4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} & \text{se } x > 0 \\ ke^x - 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Determinare k affinché f sia continua su tutto \mathbb{R} .

Soluzione La funzione è continua in $\mathbb{R} \setminus 0$ in quanto i tratti sono ottenuti come somma, prodotto e composizione di funzioni continue. Studiamo quindi la continuità in $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ke^x - 2) = k - 2 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} = 2$$

$$\frac{\sin x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} = \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot x \cdot \frac{1}{x(\sqrt{x+1}-1)} \rightarrow \frac{x^2(\sqrt{x+1}+1)}{x^2+1-1} = \sqrt{x+1}+1 \rightarrow 2$$

Impongo che $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$k - 2 = 2 \Rightarrow k = 4$$

Esercizio 6.5.

- Sia $f(x) = x^5 + 2x^3 - 2$. Dimostrare che $\exists! x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$ e determinare un intervallo $]a, b[$ con $b - a \leq \frac{1}{4}$ tale che $x_0 \in]a, b[$
- Sia $f(x) = x^3 + x + 1$ su \mathbb{R} . Dimostrare che f è invertibile e calcolare $\lim_{y \rightarrow \infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right)$.
- Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dimostrare che se $\exists]a, b[\subseteq \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[$ t.c. $f|_{]a, b[\setminus x_0} > 0$

Soluzione

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, inoltre f è continua e $\exists a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, di conseguenza per il teorema dell'esistenza degli zeri, $\exists x_0 f(x_0) = 0$. inoltre f è strettamente crescente in quanto somma di funzioni strettamente crescenti, quindi $\exists! x_0 : f(x_0) = 0$. Per trovare l'intervallo andiamo per tentativi:

$$f(0) = -2 \qquad f(1) = 1$$

Adesso calcolo $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} + \frac{1}{4} - 2 = -\frac{55}{32}$. Siccome $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, lo zero si trova tra $\frac{1}{2}$ e 1. Calcolo quindi $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{941}{1024}$. L'intervallo che cercavamo è quindi $\left]\frac{3}{4}, 1\right[$.

- (b) È iniettiva perché è strettamente monotona in quanto somma di funzioni strettamente monotone. È inoltre suriettiva in quanto continua e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (per il teorema dei valori intermedi $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$). Di conseguenza è biiettiva e quindi invertibile su \mathbb{R} .

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right) = f^{-1}\left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{3y}{y+4}\right) = f^{-1}(3) = 1$$

Infatti siccome f è continua e definita su un intervallo, anche la sua inversa è continua.

- (c) Le tempistiche della lezione non hanno permesso lo svolgimento di questo punto.