Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

19 Dicembre 2022

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esercizio 13.1. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Soluzione Osserviamo che ogni soluzione y sarà $y(x) \neq 0 \ \forall x$. Allora

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y'y = -x$$

Abbiamo un'equazione differenziale a variabili separabili. Integrando si ha

$$\int y'y \, \mathrm{d}x = -\int x \, \mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \int y \, \mathrm{d}y = -\int x \, \mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \sqrt{-x^2 + c} \quad \vee \quad y = -\sqrt{-x^2 + c} \quad \text{con } -\sqrt{c} \leq x \leq \sqrt{c}, \quad c \geq 0.$$

Per risolvere il problema di Cauchy impongo $y(0) = 1$, quindi

$$\pm\sqrt{c} = 1 \implies c = 1.$$

Scegliamo la soluzione con segno positivo (deve soddisfare $y(0) = 1 > 0$), per cui la soluzione al problema di Cauchy dato è la funzione $y :]-1, 1[\to \mathbb{R} \quad y(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Esercizio 13.2. Determinare l'integrale generale di

$$(x^2 + 1)y' + y^2 = 0$$

e risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x^2 + 1)y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione Dobbiamo riportarci alla forma $\dfrac{y'}{g(y)} = h(x)$, ma per farlo dobbiamo poter dividere per y. Cerchamo quindi le soluzioni banali: Supponiamo y costante, allora $y' = 0$, di conseguenza

$$y^2 \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \equiv 0$$

Abbiamo che $y = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale data, ma non soluzione del problema di Cauchy. Tutte le altre soluzioni non si annullano mai per il teorema di Cauchy.
Possiamo quindi procedere

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{1 + x^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y'}{y^2} \, \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y^2} \, \mathrm{d}y = -\operatorname{arctg} x + c \quad \Leftrightarrow$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

$$-\frac{1}{y} = -\operatorname{arctg} x + c \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x + c} \qquad y : \mathbb{R} \setminus \{\operatorname{tg} c\} \to \mathbb{R}.$$

Per risolvere il PdC imponiamo la condizione iniziale.

$$1 = \frac{1}{\operatorname{arctg} 0 + c} \quad \Leftrightarrow \quad c = 1 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x + 1} \text{ con } x \in \mathbb{R} \setminus \{\operatorname{tg}(-1)\}.$$

Siccome la soluzione al problema di Cauchy è definita su un intervallo, che deve contenere lo 0 e $\operatorname{tg}(-1) < 0$, scelgo l'intervallo $x > \operatorname{tg}(-1)$.

Esercizio 13.3. Trovare l'integrale generale di

$$y' = xy^2$$

e risolvere i problemi di Cauchy con

a) $y(0) = 1$ b) $y(0) = -1$.

Soluzione Troviamo la soluzione banale $y = 0$, quindi è lecito assumere per le altre soluzioni $y \neq 0$

$$\int \frac{y'}{y^2}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{2}{x^2 + 2c}.$$

Per determinare il dominio dobbiamo separare i tre casi

$$\operatorname{dom} y = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } c > 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } c = 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}\} & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

Infine

(a) Imponiamo la condizione $y(0) = 1$. Allora $1 = -\frac{2}{2c} \quad \Leftrightarrow \quad c = -1$. La soluzione e quindi definita sull'intervallo $]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$

(b) Imponiamo la condizione $y(0) = -1$ e si ha $c = 1$. Quindi la soluzione y è definita su $\mathbb{R}$.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Ricorda In generale, data l'equazione differenziale $y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x), b(x) \in \mathcal{C}^0(I)$, I intervallo, il suo integrale generale è una funzione del tipo

$$y(x) = e^{A(x)} \left(c + \int b(x) e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x \right),$$

dove $A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 13.4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione Riscriviamo l'equazione differenziale nella forma $y' = a(x)y + b(x)$, dove $a(x) = 1$ e $b(x) = 1$. Poichè $A(x) = \int 1\,\mathrm{d}x = x$, la formula sopra ci dà

$$y(x) = e^x \left(c + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x \right) = e^x \left(c + (-e^{-x}) \right) = ce^x - 1.$$

Impongo la condizione $y(0) = 0$. Allora

$$y(0) = c - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = e^x - 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$

è la soluzione del problema di Cauchy dato.

Esercizio 13.5. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\operatorname{sen} x)\, y + \operatorname{sen}(2x) \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Soluzione Abbiamo un'equazione differenziale lineare del 1° ordine con $a(x) = \operatorname{sen} x$ e $b(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Ora

$$a(x) = \operatorname{sen} x \qquad \Longrightarrow \qquad A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x.$$

L'integrale generale si ricava quindi da

$$y(x) = e^{-\cos x}\left(c + \int \operatorname{sen}(2x)e^{\cos x}\,\mathrm{d}x\right).$$

Ora

$$\int \operatorname{sen}(2x)e^{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int 2\cos x \operatorname{sen} x e^{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Pongo $t = \cos x$, quindi $\mathrm{d}t = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$;

$$\int 2\cos x \operatorname{sen} x e^{\cos x}\,\mathrm{d}x \underset{t=\cos x}{=} -2\int te^t\,\mathrm{d}t = -2\left(te^t - \int e^t\,\mathrm{d}t\right) = -2\left(te^t - e^t\right) = -2e^{\cos x}\cos x + 2e^{\cos x}$$

Allora l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = e^{-\cos x}\left(c + 2e^{\cos x} - 2\cos x e^{\cos x}\right) = ce^{-\cos x} + 2 - 2\cos x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo le condizioni $y(0) = -2$ e otteniamo

$$ce^{-1} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad c = -2e.$$

Esercizio 13.6. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 x \log x^2 \\ y(1) = \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione Cerchiamo la soluzione banale. Se $y' \equiv 0$, allora $y \equiv 0$. Essa è soluzione del problema di Cauchy se $\lambda = 0$. Per trovare le altre soluzioni è quindi lecito assumere $y \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 0$. Abbiamo

$$\frac{y'}{y^2} = x\log x^2$$

$$\int \frac{y'}{y^2}\,\mathrm{d}x = \int x\log x^2\,\mathrm{d}x \underset{\text{pongo } t=x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\int \log t\,\mathrm{d}t.$$

Ora

$$\int \log t\,\mathrm{d}t = t\log t - \int \frac{t}{t}\,\mathrm{d}t = t(\log t - 1);$$

ricordando che $t = x^2$ si ottiene infine

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2\log x^2 - \frac{1}{2}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2\log x^2 - \frac{1}{2}x^2 + c}.$$

Per risolvere il problema di Cauchy imponiamo $y(1) = \lambda$:

$$\lambda = -\frac{1}{c - \frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - c = \frac{1}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda}.$$