Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

19 Dicembre 2022

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esercizio 13.1. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione Troviamo l'integrale generale:

$$\Leftrightarrow \quad y'y = -x \quad \Leftrightarrow \quad \int y'y \,\mathrm{d}x = -\int x \,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \int y \,\mathrm{d}y = -\int x \,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \sqrt{-x^2 + c} \quad \vee \quad y = -\sqrt{-x^2+c} \quad \text{con } -\sqrt{c} \le x \le \sqrt{c}, c \ge 0$$

Per risolvere il problema di Cauchy impongo $y(0) = 1$, quindi

$$\pm\sqrt{c} = 1 \implies c = 1$$

Scegliendo la soluzione con segno positivo, per cui la soluzione al problema di Cauchy è la funzione $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Esercizio 13.2. Determinare l'integrale generale di

$$(x^2 + 1)y' + y^2 = 0$$

e risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x^2 + 1)y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione Dobbiamo riportarci alla forma $\dfrac{y'}{g(y)} = h(x)$, ma per farlo dobbiamo poter dividere per y. Cerchamo quindi le soluzioni banali: Supponiamo y costante, allora $y' = 0$, di conseguenza

$$y^2 \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \equiv 0$$

Possiamo quindi procedere

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{y'}{y^2} \,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y^2} \,\mathrm{d}y = -\operatorname{arctg} x + c \quad \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{y} = -\operatorname{arctg} x + c \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x + c} \qquad y : \mathbb{R} \setminus \{\operatorname{tg} c\} \to \mathbb{R}$$

Per risolvere il PdC imponiamo la condizione iniziale.

$$1 = \frac{1}{\operatorname{arctg} 0 + c} \quad \Leftrightarrow \quad c = 1 \quad \implies \quad y(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x + 1}$$

Siccome la soluzione al problema di Cauchy è definita su un intervallo, che deve contenere lo 0 e $\operatorname{tg}(-1) < 0$, scelgo l'intervallo $x > \operatorname{tg}(-1)$.

*Trascrizione a cura di Davide Borra

Esercizio 13.3. trovare l'integrale generale di

$$y' = xy^2$$

e risolvere i problemi di Cauchy con

a) $y(0) = 1$ b) $y(0) = -1$

Soluzione Troviamo la soluione banale $y = 0$, quindi è lecito assumere per le altre soluzioni $y \neq 0$

$$\int \frac{y'}{y^2}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{2}{x^2 + 2c}$$

Per determinare il dominio dobbiamo separare i tre casi

$$\operatorname{dom} y = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } c > 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } c = 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}\} & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

- Imponiamo la condizione $1 = -\dfrac{2}{2c} \quad \Leftrightarrow \quad c = -1$. La soluzione e quindi definita sull'intervallo $[-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}]$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Ricorda In generale, data l'equazione differenziale $y' = a(x)y + b(x)$, il suo integrale generale è una funzione del tipo

$$y = e^{A(x)}\left(c + \int b(x)e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x\right)$$

Dove $A(x) = \displaystyle\int a(x)\,\mathrm{d}x$

Esercizio 13.4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione Riscriviamo nella forma $y' = a(x)y + b(x)$, dove $a(x) = 1$ e $b(x) = 1$:

$$y' = y + 1$$

$$A(x) = \int 1\,\mathrm{d}x = x$$

$$y(x) = e^x\left(c + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = e^x\left(c + e^{-x}(-e^{-x})\right) = ce^x - 1$$

Impongo la condizione

$$y(0) = c - 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = e^x - 1 \qquad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Esercizio 13.5. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\operatorname{sen} x)\, y + \operatorname{sen}(2x) \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Soluzione

$$a(x) = \operatorname{sen} x \quad \Longrightarrow \quad A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$b(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

L'integrale generale si ricava quindi da

$$y = e^{\operatorname{sen} x}\left(c + \int \operatorname{sen}(2x)e^{\cos x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\int \operatorname{sen}(2x)e^{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int 2\cos x \operatorname{sen} x e^{\cos x}\,\mathrm{d}x =$$

Pongo $t = \cos x$, quindi $\mathrm{d}t = -\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t$

$$-2\int te^t\,\mathrm{d}t = -2\left(te^t - \int e^t\,\mathrm{d}t\right) = -2\left(te^t - e^t\right) = -2e^{\cos x}\cos x + 2e^{\cos x}$$

$$y(x) = e^{-\cos x}\left(c + 2e^{\cos x} - 2\cos x e^{\cos x}\right) = ce^{-\cos x} + 2 - 2\cos x$$

Imponiamo le condizioni $y(0) = -2$

$$ce^{-1} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad c = -2e$$

Esercizio 13.6. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 x \log x^2 \\ y(1) = \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione Cerchiamo la soluzione banale. Se $y' \equiv 0$, allora $y \equiv 0$. È soluzione del problema di Cauchy se $\lambda = 0$. Per trovare le altre soluzioni è quindi lecito assumere quindi $y \not\equiv 0$ e $\lambda \neq 0$

$$\frac{y'}{y} = x\log x^2$$

$$\int \frac{y'}{y^2}\,\mathrm{d}x = \int x\log x^2 x\,\mathrm{d}x \underset{\text{pongo } t=x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\int \log t\,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow$$

$$\int \log t\,\mathrm{d}t = t\log t - \int \frac{t}{t}\,\mathrm{d}t = t(\log t - 1)$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2\log x^2 - \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2\log x^2 - \frac{1}{2}x^2 + c}$$

Per risolvere il problema di Cauchy imponiamo $y(1) = \lambda$

$$\lambda = -\frac{1}{c - \frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - c = \frac{1}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda}$$