Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

12 Dicembre 2022

Esercizio 12.1. Siano $f(s) = \dfrac{e^{-|s|}-1}{s(s+1)}$ e $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)ds$

a) Studiare $f(s)$
b) Determinare $\operatorname{dom} F$
c) Determinare G_F

Soluzione

(a) Studiare $f(s)$

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{e^{-s}-1}{s(s+1)} & \text{se } s > 0 \\ \dfrac{e^{s}-1}{s(s+1)} & \text{se } s < 0 \wedge s \neq -1 \end{cases}$$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
- Segno di f:

$$e^{-|s|} - 1 \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$s(s+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s < -1 \vee s > 0.$$

Quindi

$$f(s) > 0 \text{ se } -1 < s < 0$$

$$f(s) < 0 \text{ se } s < -1 \vee s > 0$$

$$-\ -\ \underset{-1}{\circ}\ +\ \underset{0}{\circ}\ -\ - \longrightarrow f(s)$$

- Limiti

$$\lim_{s\to-\infty} f(s) = 0^-$$

$$\lim_{s\to+\infty} f(s) = 0^+$$

$$\lim_{s\to1^-} f(s) = \left[\frac{1-\frac{1}{e}}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{s\to1^+} f(s) = \left[\frac{1-\frac{1}{e}}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{s\to0^-} f(s) = \lim_{s\to0} \frac{e^s-1}{s(s+1)} \overset{LN}{=} 1$$

$$\lim_{s\to0^+} f(s) = \lim_{s\to0} \frac{e^{-s}-1}{s(s+1)} \overset{LN}{=} -1$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

- Derivata di f

$$f'(s) = \begin{cases} \dfrac{-e^{-s}(s^2+3s+1)+(2s+1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s>0 \\ \dfrac{e^{s}(s^2-s-1)+(2s+1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s<0 \wedge s\neq -1 \end{cases}$$

  – se $s>0$

$$f'(s)>0 \quad\Leftrightarrow\quad -e^{-s}(s^2+3s+1)+(2s+1)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{s^2+3s+1}{2s+1}<e^s$$

  Ora basta osservare ceh $e^s > s+1 > \dfrac{s^2+3s+1}{2s+1}$.

  – se $s<0 \wedge s\neq -1$ studiamo separatamente i due casi

  * $-1<s<0$

$$f'(s)<0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{s}(s^2-s-1)+(2s+1)<0$$

  Poiché $e^s<1$, abbiamo che

$$e^s(s^2-s-1)<(s^2-s-1).$$

  Risulta quindi

$$e^s(s^2-s-1)+(2s+1)<\underbrace{(s^2-s-1)+(2s+1)}_{s(s+1)}$$

  che è sempre negativo in $]0,1[$.

  * $s<-1$

$$f'(s)<0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{s}(s^2-s-1)+(2s+1)<0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{s^2-s-1}{2s+1}<e^{-s}$$

  Ora basta osservare che

$$e^{-s}>-s+1>-\frac{s^2-s-1}{2s+1}.$$

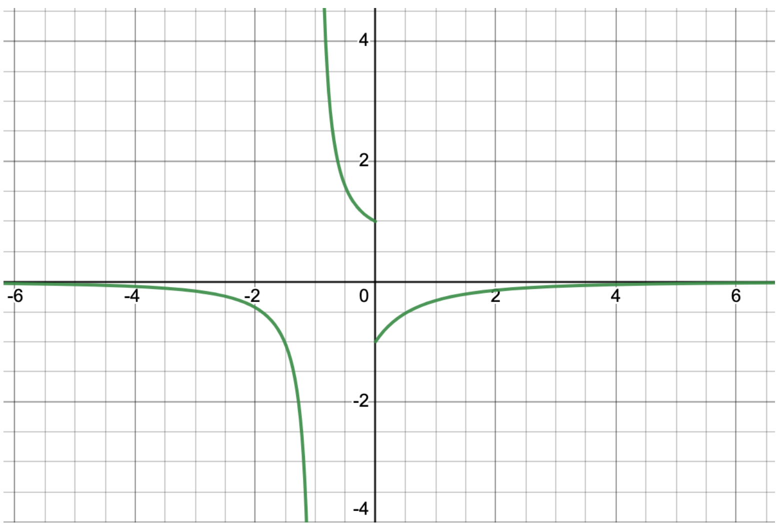

Figura 1

(b) Determinare dom F.

Osserviamo che $0\in \operatorname{dom} F$ in quanto $F(0)=\displaystyle\int_0^0 f(s)ds$

- se $x\in]0,+\infty[$

$$f(s) \underset{s\to 0^+}{\longrightarrow} -1$$

  e la funzione è continua in $]0,+\infty[$, per cui $f\in\mathcal{R}([0,\omega]), \forall\omega>0$, e quindi $]0,+\infty[\subset \operatorname{dom} F$.

- se $x \in]-1, 0[$
  $f(s)$ è continua in $]-1, 0[$ e $f(s) \underset{s\to 0^-}{\longrightarrow} 1$, per cui $f \in \mathcal{R}([a, 0])$ $\forall a \in]-1, 0[$. Dobbiamo controllare se l'integrale converge in -1
  $$\int_0^{-1} f(s)ds = \int_0^{-1} \frac{e^s - 1}{s(s+1)} ds$$
  per $s \to -1^+$ si ha
  $$\frac{e^s - 1}{s(s+1)} \sim \frac{\frac{1}{e} - 1}{-1(s+1)} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)$$
  quindi l'integrale diverge negativamente per il criterio del confronto asintotico, da cui
  $$]-\infty, -1] \not\subseteq \operatorname{dom} F$$

Abbiamo quindi che $\operatorname{dom} F =]-1; +\infty[$.

(c) Determinare G_F.
Per definizione di funzione integrale sappiamo che $F(0) = 0$, inoltre per il teorema fondamentale del calcolo
$$F'(x) = f(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ < 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
$$F''(x) = f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
Per il corollario di Lagrange
$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = F'_+(0)$$
per cui in $x = 0$ il grafico della funzione F presenta un punto angoloso. Siamo quindi in grado di determinare il grafico di F (Figura 2):

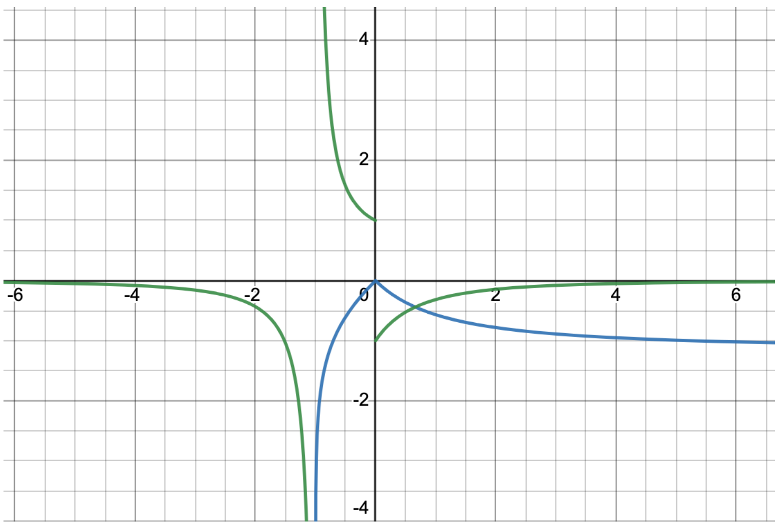

Figura 2

Ricordiamo la definizione di convessità

DEF (Convessità)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f si dice convessa se e solo se
$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2, \qquad f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall x \in [x_1, x_2]$$

Esercizio 12.2. Dimostrare che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se vale la seguente disuguaglianza
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

Soluzione

Dimostrazione.

- "$\Rightarrow$"
  Prendo $x \in [x_1, x_2]$, allora posso scrivere $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, con $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1) = \\ &= f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\cancel{x_2-x_1}}(1-\lambda)\cancel{(x_2-x_1)} = f(x_1) + (f(x_2)-f(x_1))(1-\lambda) = \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \end{aligned}$$

- "$\Leftarrow$"
  Prendo $x \in [x_1, x_2]$, allora posso scrivere $x = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2$. Pongo $\lambda := \frac{x_2-x}{x_2-x_1} \in [0,1]$.
  Allora $1-\lambda = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \in [0,1]$

$$f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

$$\Longrightarrow \; f(x) \le f(x_1) + (\frac{x_2-x}{x_2-x_1} - 1)f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

QED

Esercizio 12.3. Provare che $f(x) = x^2$ è strettamente convessa.

Soluzione

Dimostrazione. Dobbiamo provare che

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \qquad \forall \lambda \in]0,1[\quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2.$$

Osserviamo che

$$\begin{gathered} (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 < \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 \quad \Leftrightarrow \\ x_1^2\lambda(\lambda-1) + x_2^2((1-\lambda)^2 - (1-\lambda)) + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 < 0 \quad \Leftrightarrow \\ \lambda(\lambda-1)[x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2] < 0 \\ \lambda(\lambda-1)(x_1-x_2)^2 < 0 \end{gathered}$$

che è verificato $\forall \lambda \in]0,1[, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x \neq x_1$. QED

Esercizio 12.4. Dimostrare che $\forall a, b \ge 0, \forall p \in \mathbb{R}, p \ge 1$ vale

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Soluzione

Dimostrazione. Per $p = 1$ la proprietà è ovvia. Se $a = 0$ o $b = 0$ la disuguaglianza è soddisfatta. Siano $a, b > 0$, $p > 1$. Pongo $f(t) = t^p$, che è una funzione convessa su $[0, +\infty[$ poiché $f''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$ su $]0, +\infty[$.Scelgo inoltre $x_1 = a$ e $x_2 = b$. Nella definizione precedente dell'Esercizio 12.2, si ha

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^p \le \lambda a^p + (1-\lambda)b^p$$

Scegliendo $\lambda = \frac{1}{2}$ si ottiene

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p (a+b)^p \le \left(\frac{1}{2}\right)(a^p + b^p).$$

e quindi

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

QED

Esercizio 12.5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, si dimostri che f è convessa se e solo se $\forall y \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione

Dimostrazione. Se $x = y$ non c'è nulla da provare. Siano $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ e sia $\lambda \in]0,1]$. Abbiamo

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Risulta

$$\begin{aligned} -f(y) + f(y + \lambda(x-y)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(y) \quad &\Leftrightarrow \\ \frac{f(y+\lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda} \leq \frac{\cancel{\lambda}(f(x)-f(y))}{\cancel{\lambda}} \quad &\Leftrightarrow \\ (x-y)\frac{f(y+\lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda(x-y)} \leq f(x) - f(y) \end{aligned}$$

Passando al limite per $\lambda \to 0^+$, dalla derivabilità di f segue

$$(x-y)f'(y) \leq f(x) - f(y)$$

ossia

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y).$$

Per l'arbitrarietà di $x, y \in \mathbb{R}$, la dimostrazione è conclusa. QED

Esercizio 12.6. *Disuguaglianza di Young.* Siano $p, q \in]1; +\infty[$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dimostrare che $\forall a, b \geq 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Soluzione

Dimostrazione. Il caso $a = 0$ o $b = 0$ è banale, mentre il caso $p, q = 2$ segue dal quadrato di binomio. Siano allora $a, b > 0$.Siano $f(t) = \log(t)$, e $t_1 = a^p, t_2 = b^q, \lambda = \frac{1}{p}, 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. Allora sfruttando il fatto che la funzione f è concava possiamo scrivere

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q)$$

da cui

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

ne segue che

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

QED

Esercizio 12.7. *Disuguaglianza di Hölder.*

Siano $p, q \in]1; +\infty[$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dimostrare che $\forall (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_i, b_i \geq 0$ $\forall i$ vale che

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Soluzione

Dimostrazione. Se $a_i = 0\ \forall i$ oppure $b_i = 0\ \forall i$ la disuguaglianza è ovvia. Supponiamo che $a_i \neq 0$ per qualche i e $b_i \neq 0$ per qualche i. Poniamo $x_i = \dfrac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ e $y_i = \dfrac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, allora segue che $x_i, y_i \geq 0\ \forall i$.
Per la disuguaglianza di Young $\forall i = 1, \dots, n$ si ha

$$x_i y_i \leq \frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q.$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q \right) = \frac{1}{p} \frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q} = 1.$$

Da

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(\sum_{j=1}^n a_j^p)^{\frac{1}{p}}} \frac{b_i}{(\sum_{j=1}^n b_j^q)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

segue allora

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

QED

Corollario (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Siano* $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *con* $a_i, b_i \geq 0\quad \forall i$*, allora*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esercizio 12.8. *Disuguaglianza di Jensen.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ convessa. Sia $g \in \mathcal{R}([a, b])$, allora

$$f \left(⨍_a^b g(x)\, \mathrm{d}x \right) \leq ⨍_a^b f(g(x)) dx$$

dove

$$⨍_a^b g(t) dt := \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt.$$

Soluzione

Dimostrazione. Usando la caratterizzazione della convessità presentata precedentemente, nel caso f derivabile (Esercizio 12.5), $\forall x \in [a, b]$

$$f(g(x)) \geq f \left(⨍_a^b g(t) dt \right) + f' \left(⨍_a^b g(t) dt \right) \left(g(x) - ⨍_a^b g(t) dt \right)$$

Sfruttando la monotonia dell'integrale, integrando su $[a, b]$, si ha

$$\int_a^b f(g(x))\, \mathrm{d}x \geq (b-a) f \left(⨍_a^b g(t)\, \mathrm{d}t \right) + f' \left(⨍_a^b g(t)\, \mathrm{d}t \right) \left(\int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t \right),$$

cioè

$$\int_a^b f(g(x))\, \mathrm{d}x \geq (b-a) f \left(⨍_a^b g(t)\, \mathrm{d}t \right).$$

Dividendo entrambi i membri per $(b-a)$ si ottiene la tesi. QED

Esercizio 12.9. *Disuguaglianza di Young generalizzata.* Siano $p_1, \dots, p_n \in]1; +\infty[$ tali che $\dfrac{1}{p_1} + \dots + \dfrac{1}{p_n} = 1$.
Dimostrare che

$$\prod_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{p_i} \qquad \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, a_i \geq 0\ \forall i.$$

Soluzione Definiamo due nuove funzioni: $f(t) = \log(t)$ su $]0, +\infty[$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(t) = \begin{cases} a_1^{p_1} & \text{se } t \in [x_0, x_1[\\ a_2^{p_2} & \text{se } t \in [x_1, x_2[\\ \vdots & \\ a_n^{p_n} & \text{se } t \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

dove $x_0 = 0 < x_1 < x_< \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ e $x_i - x_{i-1} = \dfrac{1}{p_i}$.
Siccome il logaritmo è una funzione concava, la disuguaglianza di Jensen si scrive $\forall g \in \mathcal{R}([0,1])$ come

$$f\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right) \geq \int_0^1 f(g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Risulta allora per la funzioni f e g definite sopra

$$\log\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{p_i}}{p_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{p_i} \frac{1}{p_i} \log(a_i^{p_i}) = \sum_{i=1}^{n} \log(a_i) = \log \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Passando all'esponenziale si ha la tesi.

QED