Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

03 Ottobre 2022

Esercizio 3.1. Determinare gli estremi inferiore e superiore ed eventuali massimi e minimi dei seguenti insiemi

(a) $A = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

(b) $B = \left\{2(-1)^n - \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

(c) $C = \left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m\right\}$

Soluzione

(a)

Osservazione. *Possiamo riscrivere* $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Se calcoliamo alciuni elementi dell'insieme $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$ ci accorgiamo che sono tutti compresi in $[0, 1[$.

Estremo inferiore: siccome $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{n+1} >= 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre $0 \in A$, per cui si ha che $\inf A = 0$ e $\min A = 0$.

Estremo superiore: Dobbiamo dimostrare che $\sup A = 1$

- $1 \geq 1 - \frac{1}{n+1}$ perché $\frac{1}{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Dobbiamo provare che $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n+1} \geq 1 - \varepsilon$. Fissiamo ε e cerchiamo n:

$$\frac{n}{n+1} \geq 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\cancel{1} - \frac{1}{n+1} = \cancel{1} - \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$(n+1)\varepsilon \geq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$n\varepsilon \geq 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$n \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Se $\varepsilon \geq 1$, la disequazione è sempre verificata perché il numeratore diventa negativo.
Se $varepsilon < 1$ basta scegliere un numero naturale $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.
Questo dimostra che $\sup A = 1$. L'insieme non ammette massimo perché $1 \notin A$.

(b) Separiamo i casi in cui n è pari da quelli in cui n è dispari:

$$B = \underbrace{\left\{2 - \frac{1}{2n}, \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ pari}\right\}}_{B'} \cup \underbrace{\left\{-2 - \frac{1}{2n}, \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ dispari}\right\}}_{B''}$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra e Matilde Calabri

Osservazione. *È un'unione disgiunta, cioè* $\forall x \in B', y \in B'', y < 0 < x$, *infatti*

$$2 - \frac{1}{2n} > 0 \quad e \quad -2 - \frac{1}{2n} < 0$$

Da questo si ottiene che $\sup B = \sup B'$ *e* $\inf B = \inf B''$

Estremo superiore:

Osservazione. *In* B' *gli elementi si avvicinano a 2 quando* n *cresce perché* $\frac{1}{2n}$ *diventa sempre più piccolo.*

La dimostrazione è analoga a quella del $\sup A$.
Estremo inferiore:
Calcoliamo alcuni degli elementi di $B = \left\{-\frac{5}{2}, -\frac{13}{6}, \dots\right\}$. Si nota che all'aumentare di n gli elementi di B'' crescono, di conseguenza si ha $\inf B = \min B'' = -\frac{5}{2}$.

(c) **Estremo superiore:**

Osservazione. *Se pongo* $m = 1$, *ottengo* $\mathbb{N}_{\geq 2}$. *Di conseguenza* $\mathbb{N}_{\geq 2} \subseteq C$. *Da questo si ricava che* $\sup C \geq \sup \mathbb{N}_{\geq 2}$, *da cui (siccome* $\sup \mathbb{N}_{\geq 2} = +\infty$*),*

$$\sup C = +\infty$$

Estremo inferiore:
Scelgo $m = n + 1$, ottengo $D = \left\{\frac{n+1}{n}, n \neq 0\right\} \subseteq C$. Analogamente a quanto fatto nel punto (a) è possibile dimostrare che $\inf D = 1$. Inoltre siccome $D \subseteq C$, si ha $\inf D \geq \inf C \Rightarrow \inf C \leq 1$. Inoltre sappiamo che $\forall n > m, \frac{n}{m} >$, di conseguenza $\inf C \geq 1$. Siccome $\inf C \geq 1$ e $\inf C \leq 1$, si ha $\inf C = 1$.

Esercizio 3.2. Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

(a) $\frac{1}{|z| \cdot \overline{z}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$

(b) $\overline{z}(\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z) = z$

(c) $z^3 = 1$

(d) $2z^2 + \overline{z} = -1$

Soluzione Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Mauris vel augue imperdiet, molestie mauris non, euismod nunc. Cras finibus sit amet ipsum sit amet placerat. Etiam in pulvinar risus. Aliquam sed feugiat magna, ac dapibus velit. Pellentesque vestibulum fermentum leo, sit amet hendrerit nisl tempor sed. Cras quis enim et urna faucibus venenatis at ac nulla. Mauris ac egestas lorem. Aenean mollis, libero ac sollicitudin faucibus, erat nunc ultricies odio, nec vehicula nisl purus tincidunt tellus. Maecenas interdum blandit dui, in luctus ipsum posuere vitae. Pellentesque ac accumsan velit, non accumsan odio. Vivamus aliquet cursus velit at rhoncus. Donec laoreet pellentesque accumsan. Aliquam pulvinar ac massa sit amet pulvinar. Duis tristique, magna ut blandit congue, erat ligula dignissim turpis, vel pharetra lectus massa faucibus nisl.Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Mauris vel augue imperdiet, molestie mauris non, euismod nunc. Cras finibus sit amet ipsum sit amet placerat. Etiam in pulvinar risus. Aliquam sed feugiat magna, ac dapibus velit. Pellentesque vestibulum fermentum leo, sit amet hendrerit nisl tempor sed. Cras quis enim et urna faucibus venenatis at ac nulla. Mauris ac egestas lorem. Aenean mollis, libero ac sollicitudin faucibus, erat nunc ultricies odio, nec vehicula nisl purus tincidunt tellus. Maecenas interdum blandit dui, in luctus ipsum posuere vitae. Pellentesque ac accumsan velit, non accumsan odio. Vivamus aliquet cursus velit at rhoncus. Donec laoreet pellentesque accumsan. Aliquam pulvinar ac massa sit amet pulvinar. Duis tristique, magna ut blandit congue, erat ligula dignissim turpis, vel pharetra lectus massa faucibus nisl.

Esercizio 3.3. Si considerino le funzioni $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definite come

$$f(z) = z + z_0, \quad \text{con } z_0 \in \mathbb{C} \text{ fissato}$$

$$g(z) = iz$$

$$h(z) = z^2$$

e gli insiemi

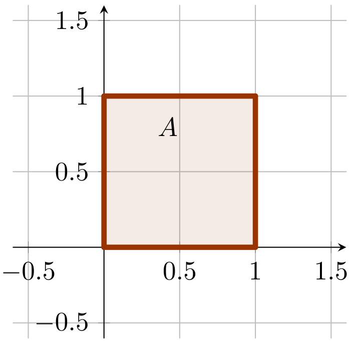
$$A = \{z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \text{ e } 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$$

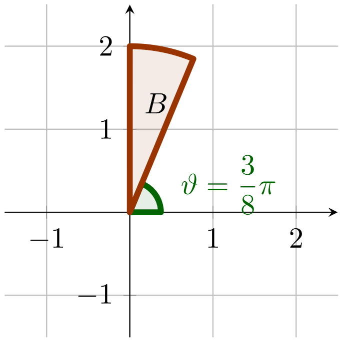
$$B = \left\{z : |z| \leq 2, \arg z \in \left]\frac{3}{8}\pi, \frac{\pi}{2}\right[\right\}$$

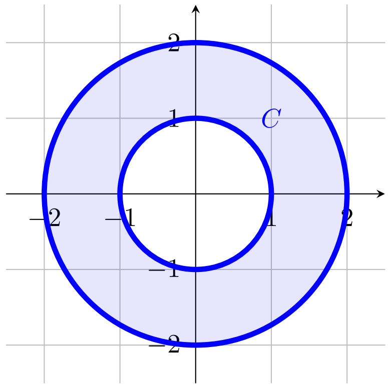
$$C = \{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$$

Rappresentare $f(A), g(B), h(B), h(C)$.

Soluzione Prima di tutto rappresentiamo gli insiemi A, B, C. Per come funziona la somma in C (metodo

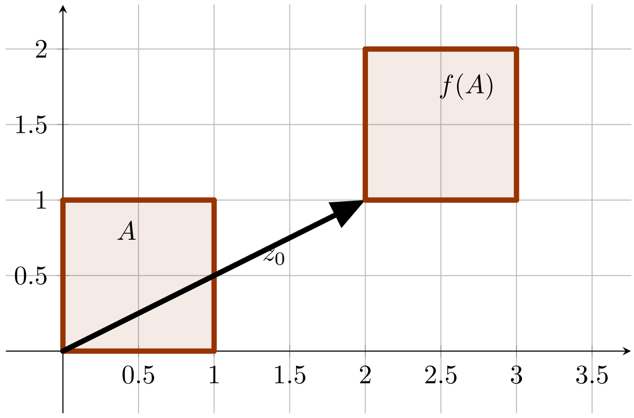






punta-coda), sommare z_0 ad ogni punto dell'intervallo A è come applicare alla rappresentazione dell'insieme una traslazione di vettore v.

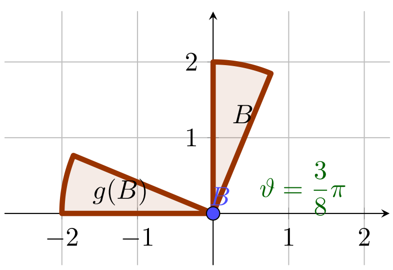
Consideriamo un numero complesso z in forma trigonometrica $z = |z|(\cos(\arg z) + i \operatorname{sen}(\arg z))$. Il numero



complesso iz è

$$iz = |i||z| \left(\cos\left(\arg z + \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\arg z + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Quindi è come se fosse stata applicata all'insieme una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ Analogamente si ha che siccome



$$z^2 = |z|^2(\cos(2\arg z) + i \operatorname{sen}(2\arg z))$$

Il raggio del settore circolare $h(B)$ è 4 e l'angolo è in $\left]\frac{3}{4}\pi, \pi\right[$

Dimostrazione. Dimostriamo che l'insieme

$$S = \left\{ z : |z| \leq 4 \text{ e } \arg z \in \left] \frac{3}{4}\pi, \pi \right[\right\}$$

coincide con $h(B)$. Per quanto detto in precedenza $h(b) \subseteq S$, quindi rimane da dimostrare che $h(b) \supseteq S$. Sia $z \in S : z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$, bisogna dimostrare che $\exists w \in B : w^2 = z$. Scegliamo

$$w = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\right)$$

, per il quale vale $h(w) = z$. Di conseguenza $z \in h(B)$, per cui $h(B) = S$. QED

Analogamente si dimostra che $h(C) = \{z : 1 \leq |z| \leq 4\}$.