Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

12 Dicembre 2022

Esercizio 12.1. Siano $f(s) = \dfrac{e^{-|s|}-1}{s(s+1)}$ e $F(x) = \int_0^x f(s)ds$

a) Studiare $f(s)$
b) Determinare $\operatorname{dom} F$
c) Determinare G_F

Soluzione

(a) Studiare $f(s)$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
- Segno di f:

$$e^{-|s|} - 1 \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$s(s+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s < 1 \vee s > 0$$

Quindi

$$f(s) > 0 \text{ se } -1 < s < 0$$

$$f(s) < 0 \text{ se } s < 0 \vee s > -1$$

- Limiti

$$\lim_{s \to -\infty} f(s) = 0^-$$

$$\lim_{s \to 1^-} f(s) = \left[\frac{1 - \frac{1}{e}}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{s \to 1^+} f(s) = \left[\frac{1 - \frac{1}{e}}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{s \to 0^-} f(s) = \lim_{s \to 0} \frac{e^s - 1}{s(s+1)} \overset{LN}{=} 1$$

$$\lim_{s \to 0^+} f(s) = \lim_{s \to 0} \frac{e^{-s} - 1}{s(s+1)} \overset{LN}{=} -1$$

- Derivata di f

$$f'(s) = \begin{cases} \dfrac{-e^{-s}(s^2+3s+1)+(2s+1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s > 0 \\ \dfrac{e^s(s^2-s-1)+(2s+1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

– se $s > 0$

$$f'(s) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -e^{-s}(s^2+3s+1)+(2s+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s^2+3s+1}{2s+1} < e^s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} \quad \Leftrightarrow$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

In quanto il denominatore è sempre positivo. Effettuando la divisione tra i polinomi

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} + \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{2s+1} > 0 \quad \forall s > 0$$

In quanto somma di quantità positive.

– se $s < 0$ studiamo separatamente i due casi

* $-1 < s < 0$

$$f'(s) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^s(s^2 - s - 1) + (2s+1) < 0$$

Osserviamo che

$$e^s(s^2 - s - 1) < (s^2 - s - 1) \quad \Leftrightarrow \quad e^s(s^2 - s - 1) + (2s+1) < \underbrace{(s^2 - s - 1) + (s2 + 1)}_{s(s-1)}$$

che è sempre negativo in $]0, 1[$

* $s < 0$

$$f'(s) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^s(s^2 - s - 1) + (2s+1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{s^2 - s - 1}{2s+1} < e^{-s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < s^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4s(2s+1)} \right) + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-s)^n}{n!}$$

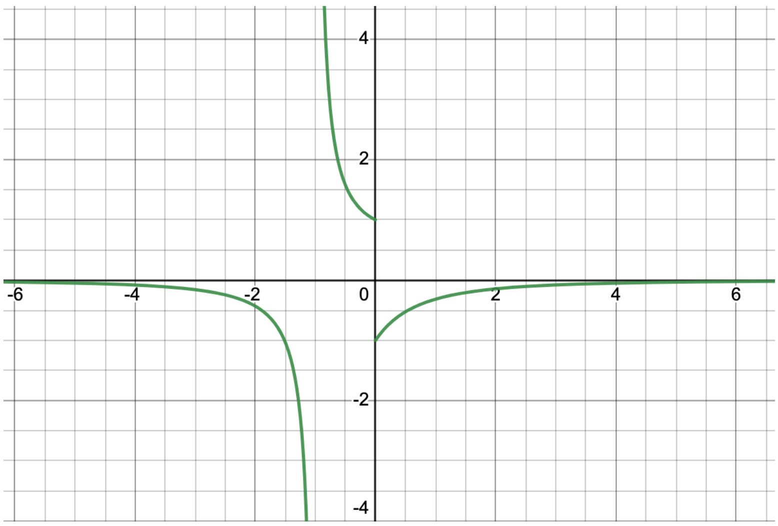

Figura 1

(b) Determinare $\operatorname{dom} F$ Osserviamo che $0 \in \operatorname{dom} f$, in quanto $F(0) = \int_0^0 f(s)ds$

- se $x \in]0, +\infty[$

$$f(s) \underset{s \to 0^+}{\longrightarrow} -1 \quad f(s) \underset{s \to 0^-}{\longrightarrow} 1$$

e la funzione è limitata in $]0, +\infty[$, per cui $f \in \mathcal{R}(]0, +\infty[)$

- se $x \in]-1, 0[$
$f(s)$ è continua in $]-1, 0[$ e $f(s) \underset{s \to 0^-}{\longrightarrow} 1$, per cui l'integrale converge $\forall x \in [a, 0[$ con $a \in]-1, 0[$.
Dobbiamo controllare se converge in -1

$$\int_0^{-1} f(s)ds = \int_0^{-1} \frac{e^s - 1}{s(s+1)} ds$$

per $s \to -1$ si ha

$$\frac{e^s - 1}{s(s+1)} \sim \frac{\frac{1}{e} - 1}{-1(s+1)} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

quindi l'integrale diverge negativamente per il criterio del confronto asintitico, da cui

$$]-\infty, -1] \not\subseteq \operatorname{dom} F$$

Abbiamo quindi che $\operatorname{dom} F =]-1; +\infty[$

(c) Determinare G_F

Per definizione di funzione integrale sappiamo che $F(0) = 0$, inoltre per il teorema fondamentale del calcolo

$$F'(x) = f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$F''(x) = f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Per il corollario di Lagrange

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = F'_+(0)$$

per cui in $x = 0$ la funzione presenta un punto angoloso. Siamo quindi in grado di determinare il grafico di F (Figura **??**fig:1.2)):

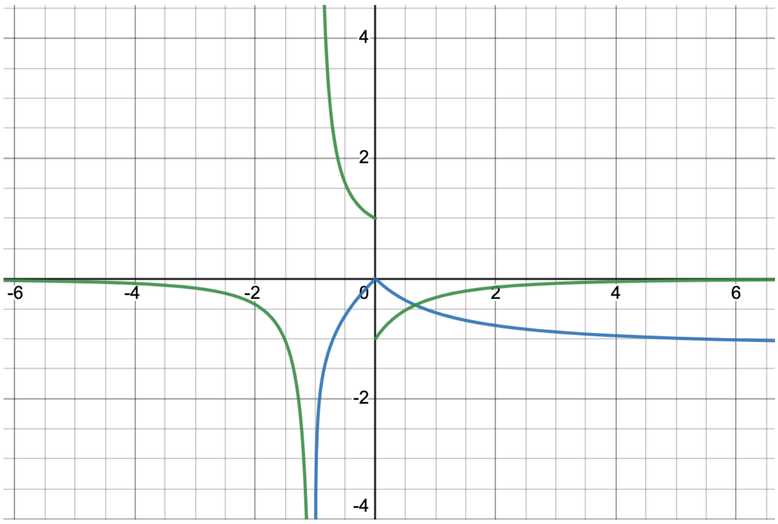

Figura 2

Ricordiamo la definizione di convessità

DEF (Convessità)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f si dice convessa se e solo se*

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \qquad f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Esercizio 12.2. Dimostrare che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se vale la seguente disuguaglianza

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

Soluzione

Dimostrazione.

- "$\Rightarrow$" Prendo $x \in [x_1, x_2]$
- "$\Leftarrow$"

QED