

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

07 Dicembre 2022

Esercizio 11.1. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e S_β l'area del sottografico associato alla funzione $f(x) = x^2 + \beta$ dove $x \in [-2, 2]$.

Soluzione Dobbiamo distinguere tre casi:

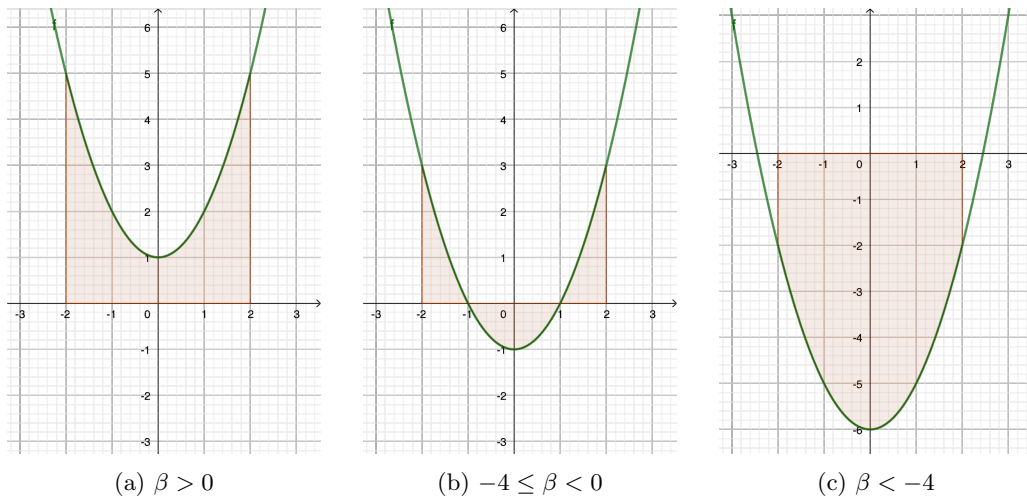


Figura 1

- $\beta \geq 0$ In questo caso la parabola si trova sempre sopra l'asse x (Figura 1a).

$$S_\beta = \int_{-2}^2 (x^2 + \beta) dx.$$

- Analizziamo ora quando la parabola interseca l'asse x in due punti interni all'intervallo $[-2, 2]$ (Figura 1b)

$$\begin{aligned} x^2 + \beta = 0 &\Leftrightarrow x^2 = -\beta \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\beta} \\ \Rightarrow \exists x \in [-2, 2] : f(x) = 0 &\Leftrightarrow -\beta \leq 4 \Leftrightarrow \beta \geq -4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, quando $-4 \leq \beta < 0$

$$S_\beta = \int_{-2}^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^{-\sqrt{-\beta}} (x^2 + \beta) dx - \int_{-\sqrt{-\beta}}^{\sqrt{-\beta}} (x^2 + \beta) dx + \int_{\sqrt{-\beta}}^2 (x^2 + \beta) dx.$$

- Rimane il caso in cui la parabola si trova sempre sotto l'asse x in $[-2, 2]$, ovvero quando $\beta < -4$ (Figura 1c), in cui si ha

$$S_\beta = - \int_{-2}^2 (x^2 + \beta) dx.$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

Esercizio 11.2. Determinare l'area della regione di piano compresa tra $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$ e le rette $x = 0$ e $x = \pi$.

Soluzione Prima di tutto determiniamo l'intersezione di f e g su $[0, \pi]$:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

Abbiamo quindi che $f(x) \geq g(x)$ su $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e che $f(x) \leq g(x)$ su $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$. Di conseguenza

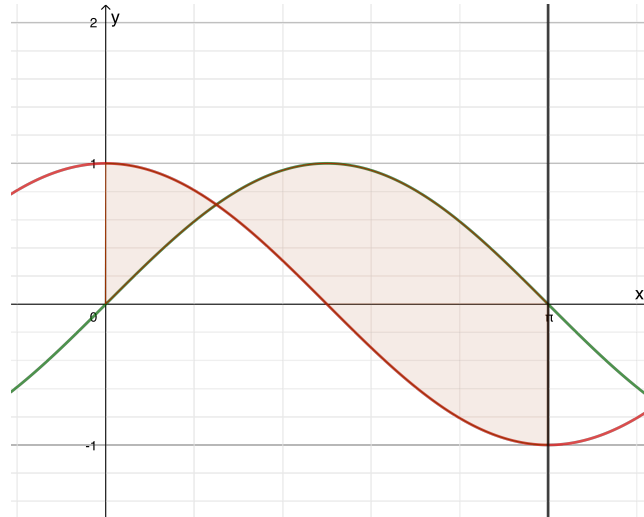


Figura 2: In rosso il grafico di f , in verde il grafico di g . L'intersezione si ha per $x = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \right) - \left(0 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 11.3. Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx \quad \text{b) } \int_9^{16} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 3\sqrt{x} + 2} dx \quad \text{c) } \int_0^{e^{-\frac{1}{e}}} \sqrt{4 + x^2} dx \quad \text{d) } \int \frac{1}{1 + \sin x} dx.$$

Soluzione

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + 2 \int_1^2 x^{-\frac{5}{3}} dx = \left[\log x - 3x^{-\frac{2}{3}} \right]_1^2 = \log 2 - 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} + 3.$$

b) $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2} dx$

Risolviamo per sostituzione: sia $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$. Modifichiamo di conseguenza gli estremi di integrazione: $x_0 = 9 \Rightarrow t_0 = 3$ e $x_1 = 16 \Rightarrow t_1 = 4$

$$\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2} dx = \int_3^4 \frac{t-3}{t^2-3t+2} 2tdt = 2 \int_3^4 \frac{t^2-3t+2-2}{t^2-3t+2} dt = 2 \int_3^4 dt - 4 \int_3^4 \frac{1}{t^2-3t+2} dt$$

Adesso scomponiamo la frazione con il metodo dei fratti semplici

$$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{(t-2)(t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+B(t-2)}{(t-2)(t-1)} = \frac{(A+B)t-(A+2B)}{(t-2)(t-1)},$$

da cui

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B=1 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} 2 \int_3^4 dt - 4 \int_3^4 \frac{1}{t^2-3t+2} dt &= 2 - 4 \left(\int_3^4 \frac{1}{t-2} dt - \int_3^4 \frac{1}{t-1} dt \right) = 2 - 4 [\log |t-2| - \log |t-1|]_3^4 = \\ &= 2 - 4 \log 2 + 4 \log 3 - 4 \log 2 = 2 + 4 \log \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

c) $\int_0^{e-\frac{1}{e}} \sqrt{4+x^2} dx$ Quando si presentano situazioni del genere è utile sostituire applicando le relazioni tra seno e coseno o tra seno e coseno iperbolici. In particolare se si presenta $\sqrt{1-x^2}$ è utile sostituire ricordando che $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, mentre se si presenta $\sqrt{1+x^2}$ è utile sostituire ricordando che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. In questo caso sostituiamo $x = 2 \sinh t$, quindi $dx = 2 \cosh t dt$. Di conseguenza gli estremi di integrazione diventano $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^{e-\frac{1}{e}} \sqrt{4+x^2} dx &= 4 \int_0^1 \sqrt{4+4\sinh^2 t} \cdot 2 \cosh t dt = 4 \int_0^1 \sqrt{\cosh^2 t} \cosh t dt = \int_0^1 \cosh^2 t dt = \\ &= 4 \int_0^1 \cosh t \cosh t dt = 4 \left(\left[\sinh t \cosh t \right]_0^1 - \int_0^1 \sinh^2 t dt \right) = \\ &= 4 \int_0^1 \cosh t \cosh t dt = 4 \left(\left[\sinh t \cosh t \right]_0^1 - \int_0^1 (\cosh^2 t - 1) dt \right) = \\ &= 4 \left(\left[\sinh t \cosh t \right]_0^1 + \int_0^1 dt - \int_0^1 \cosh^2 t dt \right). \end{aligned}$$

Risulta quindi

$$8 \int_0^1 \cosh^2 t dt = 4 \left[\sinh t \cosh t + t \right]_0^1.$$

Concludiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{e+\frac{1}{e}} \sqrt{4+x^2} dx &= 4 \int_0^1 \cosh^2 t dt \cdot 2 \left[\sinh t \cosh t + t \right]_0^1 = 2 \left(\frac{e-\frac{1}{e}}{2} \cdot \frac{1e+\frac{1}{e}}{2} + 1 \right) = \\ &= \frac{e^2 - e^{-2}}{2} + 2 = \sinh 2 + 2 \end{aligned}$$

d) $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$

Per risolvere questo tipo di integrale bisogna utilizzare le formule parametriche di seno e coseno: sia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, allora si ha $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Inoltre $x = 2 \operatorname{arctg} t$ e $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Infatti

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \sin x$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sin x} dx &\stackrel{t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2(1+t^2)}{(2t+1+t^2)(1+t^2)} dt = \\ &= \int \frac{2}{(1+t)^2} dt = -\frac{2}{1+t} + c \Big|_{t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + c \end{aligned}$$

Esercizio 11.4. Studiare la convergenza di $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt[4]{1-x}} dx$.

Soluzione Chiamiamo $f(x)$ la funzione integranda. Osserviamo che $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ e positiva. Inoltre osserviamo che per $x \rightarrow 0^+$, $\sin x \sim x$ e $\sqrt[4]{1-x} \sim 1$, quindi $f(x) \sim \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. È perciò possibile estendere con continuità la funzione f in 0 con $\tilde{f}(0) = 0$, per cui $f \in \mathcal{R}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$. Per $x \rightarrow 1^-$ osserviamo che $f(x) \sim \frac{\sin 1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{\sin 1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$. Poiché $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}} dx$ converge, allora per il teorema del confronto asintotico, anche $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$ converge. Di conseguenza $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt[4]{1-x}} dx$ converge.

Esercizio 11.5. Determinare per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (4+9x)^{\beta+1}} dx$$

converge e calcolarne il valore con $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 0$.

Soluzione Chiamiamo $f(x)$ la funzione integranda. Abbiamo $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$ e positiva.

Per $x \rightarrow 0^+$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$, quindi per il teorema del confronto asintotico l'integrale dato converge se e solo se $\alpha < 1$.

Per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha (9x)^{\beta+1}} = \frac{1}{9^{\beta+1} x^{\alpha+\beta+1}}$. Affinché l'integrale converga su $[1, +\infty[$ deve essere $\alpha + \beta + 1 > 1$, ovvero $-\beta < \alpha$.

Di conseguenza l'integrale dato converge se e solo se $-\beta < \alpha < 1$.

Calcoliamo ora il valore dell'integrale nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx + \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx \end{aligned}$$

Per procedere al calcolo ci serve una primitiva di f . Sostituiamo ponendo $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2t dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx &= \int \frac{1}{t(4+9t^2)} 2t dt = 2 \int \frac{1}{4+9t^2} dt = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{9}{4}t^2} dt = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{2} t \right) + c = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{2} \sqrt{x} \right) + c \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx + \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{2} \sqrt{x} \right) \right]_{\delta}^1 + \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{2} \sqrt{x} \right) \right]_1^h = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\delta} \right) \right] + \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{2} \sqrt{h} \right) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} \right] = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Esercizio 11.6. Studiare la convergenza di $\int_1^2 \frac{1 - \cos(x-1)}{(x^2-1)^\alpha(2-x)^{3-\alpha}} dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Soluzione Riscriviamo l'integrale equivalentemente e sostituiamo $x-1=t$, $t=x+1$, $dx=dt$

$$\int_1^2 \frac{1 - \cos(x-1)}{(x^2-1)^\alpha(2-x)^{3-\alpha}} dx = \int_1^2 \frac{1 - \cos(x-1)}{(x-1)^\alpha(x+1)^\alpha(2-x)^{3-\alpha}} dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{(t)^\alpha(t+2)^\alpha(1-t)^{3-\alpha}} dt$$

Chiamiamo $f(t)$ la funzione integranda

- Per $t \rightarrow 0^+$

$$f(t) \sim \frac{1 - \cos t}{t^\alpha} \cdot \frac{1}{2^\alpha}$$

Sviluppiamo il coseno

$$\frac{1 - \cos t}{t^\alpha} = \frac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^\alpha} \sim \frac{1}{2t^{\alpha-2}}$$

L'integrale converge se e solo se $\alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 3$.

- Per $t \rightarrow 1^-$ osserviamo che $1 - \cos t$, t^α e $(t+2)^\alpha$ non influiscono se non per costanti, quindi a meno di costanti

$$f(t) \sim \frac{1}{(1-t)^{3-\alpha}}$$

e l'integrale $\int_{\frac{1}{2}}^t f(t) dt$ converge se e solo se $3 - \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$.

Di conseguenza l'integrale converge se e solo se

$$2 < \alpha < 3.$$