Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

12 Dicembre 2022

Esercizio 12.1. Siano $f(s) = \dfrac{e^{-|s|}-1}{s(s+1)}$ e $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)ds$

a) Studiare $f(s)$
b) Determinare $\operatorname{dom} F$
c) Determinare G_F

Soluzione

(a) Studiare $f(s)$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
- Segno di f:

$$e^{-|s|} - 1 \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$s(s+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s < 1 \vee s > 0$$

Quindi

$$f(s) > 0 \text{ se } -1 < s < 0$$

$$f(s) < 0 \text{ se } s < 0 \vee s > -1$$

- Limiti

$$\lim_{s\to-\infty} f(s) = 0^-$$

$$\lim_{s\to1^-} f(s) = \left[\frac{1-\frac{1}{e}}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{s\to1^+} f(s) = \left[\frac{1-\frac{1}{e}}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{s\to0^-} f(s) = \lim_{s\to0} \frac{e^s-1}{s(s+1)} \overset{LN}{=} 1$$

$$\lim_{s\to0^+} f(s) = \lim_{s\to0} \frac{e^{-s}-1}{s(s+1)} \overset{LN}{=} -1$$

- Derivata di f

$$f'(s) = \begin{cases} \dfrac{-e^{-s}(s^2+3s+1)+(2s+1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s > 0 \\ \dfrac{e^{s}(s^2-s-1)+(2s+1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

– se $s > 0$

$$f'(s) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -e^{-s}(s^2+3s+1)+(2s+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s^2+3s+1}{2s+1} < e^s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} \quad \Leftrightarrow$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

In quanto il denominatore è sempre positivo. Effettuando la divisione tra i polinomi

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} + \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{2s+1} > 0 \quad \forall s > 0$$

In quanto somma di quantità positive.

– se $s < 0$ studiamo separatamente i due casi

* $-1 < s < 0$

$$f'(s) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^s(s^2 - s - 1) + (2s+1) < 0$$

Osserviamo che

$$e^s(s^2 - s - 1) < (s^2 - s - 1) \quad \Leftrightarrow \quad e^s(s^2 - s - 1) + (2s+1) < \underbrace{(s^2 - s - 1) + (s2+1)}_{s(s-1)}$$

che è sempre negativo in $]0, 1[$

* $s < 0$

$$f'(s) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^s(s^2 - s - 1) + (2s+1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{s^2 - s - 1}{2s+1} < e^{-s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < s^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4s(2s+1)} \right) + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-s)^n}{n!}$$

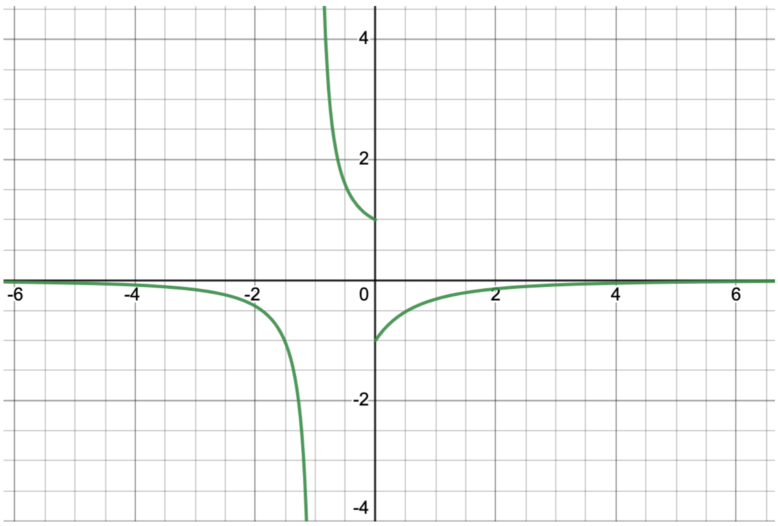

Figura 1

(b) Determinare $\operatorname{dom} F$ Osserviamo che $0 \in \operatorname{dom} f$, in quanto $F(0) = \int_0^0 f(s)ds$

- se $x \in]0, +\infty[$

$$f(s) \underset{s \to 0^+}{\longrightarrow} -1 \quad f(s) \underset{s \to 0^-}{\longrightarrow} 1$$

e la funzione è limitata in $]0, +\infty[$, per cui $f \in \mathcal{R}(]0, +\infty[)$

- se $x \in]-1, 0[$
$f(s)$ è continua in $]-1, 0[$ e $f(s) \underset{s \to 0^-}{\longrightarrow} 1$, per cui l'integrale converge $\forall x \in [a, 0[$ con $a \in]-1, 0[$.
Dobbiamo controllare se converge in -1

$$\int_0^{-1} f(s)ds = \int_0^{-1} \frac{e^s - 1}{s(s+1)} ds$$

per $s \to -1$ si ha

$$\frac{e^s - 1}{s(s+1)} \sim \frac{\frac{1}{e} - 1}{-1(s+1)} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

quindi l'integrale diverge negativamente per il criterio del confronto asintitico, da cui

$$]-\infty, -1] \nsubseteq \operatorname{dom} F$$

Abbiamo quindi che $\operatorname{dom} F =]-1; +\infty[$

(c) Determinare G_F
Per definizione di funzione integrale sappiamo che $F(0) = 0$, inoltre per il teorema fondamentale del calcolo

$$F'(x) = f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$F''(x) = f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Per il corollario di Lagrange

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = F'_+(0)$$

per cui in $x = 0$ la funzione presenta un punto angoloso. Siamo quindi in grado di determinare il grafico di F (Figura **??**fig:1.2)):

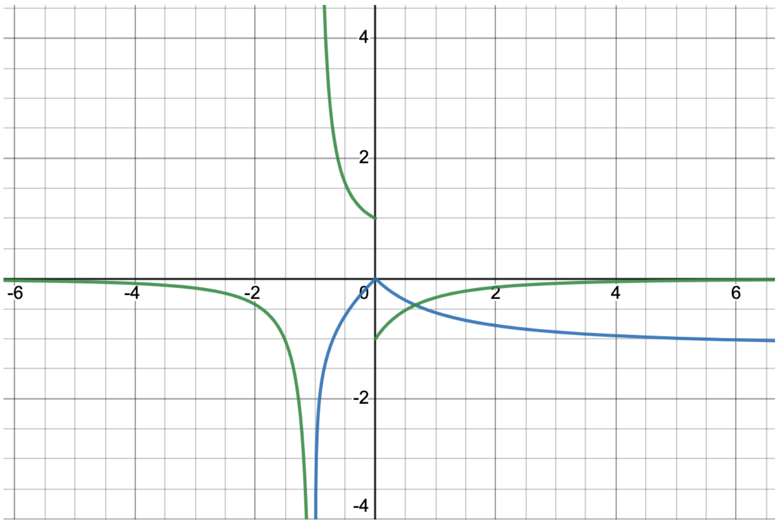

Figura 2

Ricordiamo la definizione di convessità

DEF (Convessità)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f si dice convessa se e solo se*

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \qquad f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Esercizio 12.2. Dimostrare che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se vale la seguente disuguaglianza

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

Soluzione

Dimostrazione.

- “$\Rightarrow$”
Prendo $x \in [x_1, x_2]$, allora posso scrivere $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, con $\lambda \in [0, 1]$

$$f(x) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq f(x_1)\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1}(\lambda x_1 - (1 - \lambda x_2 - x_1)) =$$

$$= f(x_1)\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1}(1 - \lambda)(x_2 - x_1) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

- "$\Leftarrow$"
  Prendo $x \in [x_1, x_2]$, allora posso scrivere $x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2$. Pongo $\lambda := \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in [0, 1]$.
  Allora $1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in [0, 1]$

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$$\implies f(x) - f(x_1) \leq (\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} - 1) f(x_1) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

QED

Esercizio 12.3. Provare che $f(x) = x^2$ è strettamente convessa.

Soluzione

Dimostrazione.

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \qquad \forall \lambda \in [0, 1] \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2)^2 < \lambda x_1^2 + (1 - \lambda) x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 \lambda(\lambda - 1) + x_2^2((1 - \lambda)^2 - (1 - \lambda)) + 2\lambda(1 - \lambda) x_1 x_2 < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda(\lambda - 1)[x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2] = \lambda(\lambda - 1)(x_1 - x_2)^2 < 0$$

che è verificato $\forall \lambda \in [0, 1] \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. QED

Esercizio 12.4. Dimostrare che $\forall a, b \geq 0$ vale che

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

Soluzione

Dimostrazione. Pongo $f(t) = t^p$, che è convessa. Scelgo inoltre $x_1 = a$ e $x_2 = b$. Per la caratterizzazione precedente

$$(\lambda a + (1 - \lambda) b)^p \leq \lambda a^p + (1 - \lambda) b^p$$

Scegliendo $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p (a + b)^p \leq \left(\frac{1}{2}\right) (a^p + b^p) \quad \Leftrightarrow$$

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

QED

Esercizio 12.5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, si dimostri che f è convessa se e solo se

$$f(x) \leq f(y) + f'(y)(x - y)$$

.

Soluzione

Soluzione

Dimostrazione. Per quanto detto prima,

$$\frac{f(\lambda x + (1 - \lambda) y) - f(y)}{\lambda} \leq \frac{\lambda(f(x) - f(y))}{\lambda} \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Allora, facendo tendere λ a 0 il secondo membro tende a

$$\frac{f(\lambda x + (1 - \lambda) y) - f(y)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} f'(y)(x - y) \quad \Leftrightarrow$$

Pongo $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z)$$

$$f(y) \geq f(z) + f'(z)(y - z)$$

QED

Esercizio 12.6. *Disuguaglianza di Young.* Siano $p, q \in]1; +\infty[$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dimostrare che

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Soluzione

Dimostrazione. Il caso $a = b = 0$ è banale, mentre il caso $p, q = 2$ segue dal quadrato di binomio. Sia $f(t) = \log(t)$, e $t_1 = a^p, t_2 = b^p, \lambda = \frac{1}{p}, 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ Allora

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \quad \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}\right) \geq \log(a) + \log(b) = \log(ab) \quad \Leftrightarrow$$

QED

Esercizio 12.7. *Disuguaglianza di Hölder.* Siano $p, q \in]1; +\infty[$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dimostrare che $\forall (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in$ $\mathbb{R}^n$ con $a_i, b_i \geq 0 \forall i$ vale che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Soluzione

Dimostrazione. Poniamo $x_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ e $y_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, allora segue che $x_i, y_i > 0\ \forall i$.

Per la disuguaglianza di Young

$$x_i y_i \leq \frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{p} y_i^p$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{p} y_i^p\right) = \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} = 1$$

QED

Corollario (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)**.** *Siano* $\forall (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *con* $a_i, b_i \geq 0 \forall i$, *allora*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Esercizio 12.8. *Disuguaglianza di Jensen.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ convessa. Sia $g \in \mathcal{R}(]a, b[)$, allora

$$f\left({}_a^b g(x)\right) \leq_a^b f \circ g(x) dx$$

dove

$${}_a^b f(t) dt := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Soluzione

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\begin{cases} x & \longmapsto & g(x) \\ y & \longmapsto & {}_a^b g(tdt) \end{cases}$$

Consideriamo la caratterizzazione della convessità presentata precedentemente, allora siccome f è convessa

$$f(g(x)) \geq f\left({}^b_a(g(t)dt)\right) + f'\left({}^b_a g(t)dt\right)\left(g(t) -^b_a g(t)dt\right)$$

$$\begin{aligned}
{}^b_a f(g(x)) &\geq^b_a \left[f\left({}^b_a(g(t)dt)\right) + f'\left({}^b_a g(t)dt\right)\left(g(t) -^b_a g(t)dt\right)\right] dx = \\
&= f\left({}^b_a g(t)dt\right) + f'\left({}^b_a g(t)dt\right)^b_a \left(g(x) -^b_a g(t)dt\right) dx = \\
&= f\left({}^b_a g(t)dt\right) + f'\left({}^b_a g(t)dt\right)\left[{}^b_a g(x)dx -^b_a g(t)dt\right] \\
&\implies {}^b_a (f \circ g)(x)dx \geq f({}^b_a g(t)dt)
\end{aligned}$$

QED

Esercizio 12.9. *Disuguaglianza di Young generalizzata.* Siano $p_1, \dots, p_n \in]1; +\infty[$ tali che $\dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_n} = 1$

Dimostrare che

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^p}{p_i}$$

Soluzione

Dimostrazione. Definiamo due nuove funzioni: $f(t) = \log(t)$ e

$$g(t) = \begin{cases} a_0^{p_0} & \text{se } x \in]0, p_0[\\ a_1^{p_1} & \text{se } x \in]p_0, p_1[\\ \vdots & \\ a_n^{p_n} & \text{se } x \in]p_{n-1}, p_n[\end{cases}$$

Siccome il logaritmo è una funzione concava

$$f\left({}^1_0 g(x)dx\right) \geq^1_0 f(\circ g)(x)dx \quad \Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{p_i}}{p_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{p_i} \frac{1}{p_i} \log(a_i^{p_i}) = \sum_{i=1}^{n} \log(a_i) = \log \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Passando all'esponenziale si ha la tesi. QED