Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

07 Novembre 2022

Passaggi per lo studio di una funzione $g(x)$

1. Dominio naturale
2. Simmetrie (pari/dispari)
3. Segno di $g(x)$
4. Limiti agli estremi del dominio e asintoti
5. Continuità
6. Derivabilità
7. Punti critici e segno di $g'(x)$
8. Convessità e derivata seconda
9. Esistenza di massimo e minimo globali da ricercare tra
   - punti critici
   - punti di non derivabilità
   - estremi del dominio

Esercizio 7.1. Studiare la funzione $g(x) = e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$, calcolare inoltre l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $P(2, g(2))$. Si consideri successivamente $g|_{]1,+\infty[}$ $:]1,+\infty[\to]e,+\infty[$: si dimostri che è invertibile e si calcoli $(g^{-1})'(e^3)$.

Soluzione

1. Dominio naturale: $\operatorname{dom} g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. Simmetrie (pari/dispari):
   Il dominio è asimmetrico rispetto allo 0 quindi non presenta simmetrie (né pari né dispari).
3. Segno di $g(x)$:
   $g(x) > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} g$, inoltre l'argomento dell'esponenziale è sempre non negativo, quindi $g(x) \geq e$ e $g(x))1$ quando $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ (minimo globale).
4. Limiti agli estremi del dominio e asintoti Riscriviamo la funzione sciogliendo il modulo per capire meglio l'andamento:
$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{x+1}{x-1}} & x \leq 1 \vee x > 1 \\ e^{\frac{x+1}{1-x}} & -1 < x < 1 \end{cases}$$
   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} = e^-$
   Infatti per $x \to -\infty$ si ha $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} < 1$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

$\lim_{x\to+\infty} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} = e^{+}$ (analogamente)
Quindi $y = e$ è un asintoto orizzontale.
$\lim_{x\to 1^-} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to 1^+} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} = +\infty$ $\qquad$ Quindi $x = 1$ è un asintoto verticale.

5. Continuità: g è continua su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
6. Derivabilità: g è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
   Siano $f(x) := \dfrac{x+1}{x-1}$, $A :=]-\infty; -1] \cup]1, +\infty[$ e $B :=] - 1, 1[$, allora
$$g(x) = \begin{cases} e^{f(x)} & x \in A \\ e^{-f(x)} & x \in B \end{cases}$$
   - su A
     $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$
$$g'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} e^{f(x)}$$
   - su B
$$g'(x) = -e^{-f(x)} f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{-f(x)}$$
   Per il corollario di Lagrange
$$g'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} g'(x) = -\frac{1}{2} \qquad g'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} g'(x) = \frac{1}{2}$$
   Quindi la funzione presenta un punto angoloso, per cui non è derivabile.
7. Punti critici e segno di $g'(x)$
$$g' < 0 \text{ su } A \quad \text{e} \quad g' > 0 \text{ su } B$$
   Quindi f è crescente in A e decrescente in B. Inoltre $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi f non presenta punti critici.
8. Convessità e derivata seconda
   - Su A
$$g''(x) = (e^{f(x)})' \cdot f'(x) + e^{f(x)} \cdot f''(x) = e^{f(x)} \cdot (f(x))^2 + e^{f(x)} \cdot f''(x) = e^{f(x)}((f'(x))^2 + f''(x))$$
   - Su B
$$g''(x) = (e^{-f(x)})' \cdot f'(x) - e^{-f(x)} \cdot f''(x) = e^{-f(x)} \cdot (f(x))^2 - e^{f(x)} \cdot f''(x) = -e^{f(x)}((f'(x))^2 - f''(x))$$
$$f''(x) = 3(x-1)^{-3} = \frac{4}{(x+1)^3}$$
$$(f'(x))^2 + f''(x) = \frac{4}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{\cancel{4} + 4x - \cancel{4}}{(x-1)^4} = \frac{4x}{(x-1)^4}$$
$$(f'(x))^2 - f''(x) = \frac{4}{(x-1)^4} - \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{4 + -x + 4}{(x-1)^4} = 4\frac{2-x}{(x-1)^4}$$
   Su A la funzione è concava per $x < -1$ e convessa per $x > 1$, mentre su B la funzione è sempre convessa.
9. Esistenza di massimo e minimo globali:
   La funzione presenta un minimo globale in $x = -1$, mentre non presenta massimi globali.
$$\inf_{\mathbb{R}\setminus\{1\}} g = \min_{\mathbb{R}\setminus\{1\}} g = 1$$
$$\sup_{\mathbb{R}\setminus\{1\}} g = +\infty \qquad \nexists \max_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$$

Calcoliamo la retta τ tangente al grafico di g nel punto $P(2, g(2))$.

$$\tau(x) - g(2) = g'(2)(x-2)$$

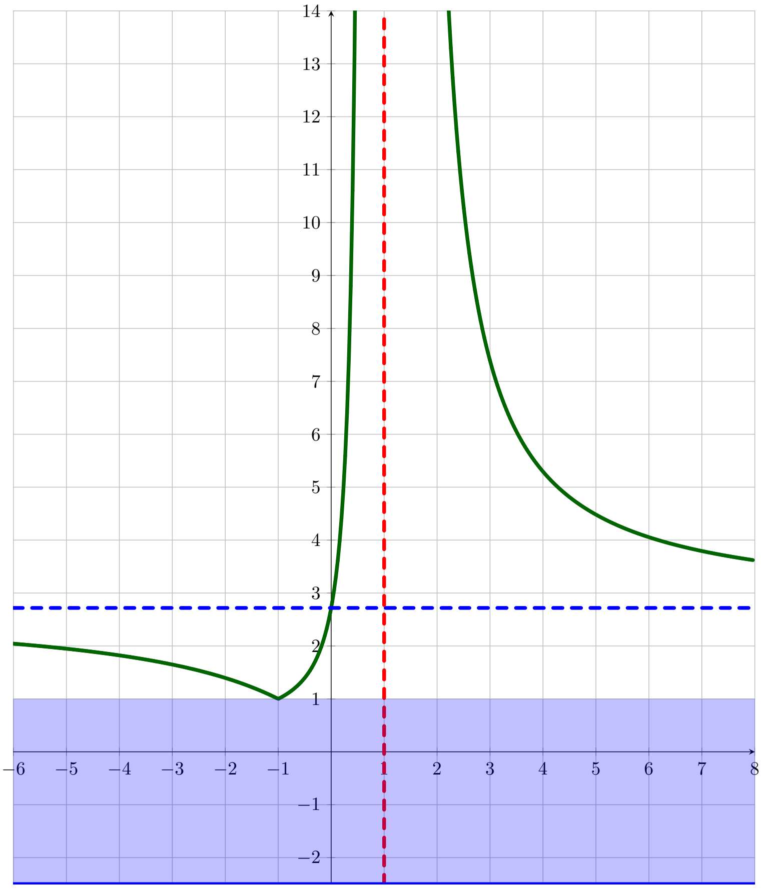
$$\tau(x) = g(2) + g'(2)(x-2)$$

Consideriamo ora $g|_{]1,+\infty[} :]1,+\infty[\to]e,+\infty[$. Siccome è monotona (come dimostrato precedentemente), è iniettiva. Inoltre il codominio è l'immagine, per cui è suriettiva. Di conseguenza è invertibile.

$$\exists g^{-1} :]e,+\infty[\to]1,+\infty[$$

Per calcolare il valore di $(g^{-1})'(e^3)$ applichiamo il teorema della derivata della funzione inversa, per cui si ha (siccome $g^{-1}(e^3) = 2$)

$$(g^{-1})'(e^3) = \frac{1}{g'(2)}$$



Esercizio 7.2. Sia $g(x) = |x-1|e^{-\alpha x}$ $(\alpha > 0)$. Fornire un grafico qualitativo di g e dire per quali valori di α la funzione $g|_{[0,+\infty[}$ ha un massimo assoluto in $x = 0$.

Soluzione Procediamo con lo studio della funzione g.

1. Dominio naturale: $\operatorname{dom} g = \mathbb{R} \quad \forall \alpha > 0$
2. Simmetrie (pari/dispari)

$$\begin{aligned} f(-x) = |-x-1|e^{\alpha x} &\neq f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

   Né pari né dispari.

3. Segno di $g(x)$ Siccome è un prodotto di fattori sempre non negativi,

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Inoltre si ha $g(x) = 0 \iff x = 1$, quindi $x = 1$ è un punto di minimo assoluto per il grafico di $g(x)$.

4. Limiti agli estremi del dominio e asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} |x-1|e^{-\alpha x} = [0\cdot\infty] = 0^+ \qquad (y=0 \text{ asintoto orizzontale destro})$$

$$\lim_{x\to-\infty} |x-1|e^{-\alpha x} = +\infty$$

5. Continuità: la funzione è continua si $\mathbb{R}$.
6. Derivabilità Sciogliamo il modulo

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Calcolo ora la derivata

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} - \alpha(x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x > 1 \\ -(e^{-\alpha x} - \alpha(x-1)e^{-\alpha x}) & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\alpha x}(1-\alpha x+\alpha) & \text{se } x > 1 \\ e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Per il corollario di Lagrange

$$g'_+(1) = \lim_{x\to1^+} e^{-\alpha x}(1-\alpha x+\alpha) = e^{-\alpha}$$

$$g'_+(1) = \lim_{x\to1^+} e^{-\alpha x}(\alpha x-\alpha-1) = -e^{-\alpha}$$

g non è quindi derivabile il $x=1$, ma presenta un punto angoloso.

7. Punti critici e segno di $g'(x)$
   - Se $x > 1$
   $$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-\alpha x+\alpha > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1+\alpha}{\alpha} = 1+\frac{1}{\alpha}$$
   - Se $x < 1$
   $$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha x-\alpha-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1+\alpha}{\alpha} = 1+\frac{1}{\alpha}$$

   La funzione è crescente in $]1, 1+\frac{1}{\alpha}[$ e decrescente in $]1+\frac{1}{\alpha}, +\infty[\cup]-\infty, 1[$. Ha inoltre un massimo relativo in $1+\frac{1}{\alpha}$

8. Convessità e derivata seconda
   - Se $x > 1$
   $$g''(x) = -\alpha e^{-\alpha x}(1-\alpha x+\alpha) - \alpha e^{-\alpha x} = \alpha e^{-\alpha x}(\alpha x-\alpha-2)$$
   $$g''(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha x > \alpha+2 \Leftrightarrow x > \frac{2+\alpha}{\alpha} = 1+\frac{2}{\alpha}$$
   - Se $x < 1$
   $$g''(x) = +\alpha e^{-\alpha x}(1-\alpha x+\alpha) + \alpha e^{-\alpha x} = -\alpha e^{-\alpha x}(\alpha x-\alpha-2)$$
   $$g''(x) > 0 \Leftrightarrow -\alpha x > \alpha+2 \Leftrightarrow x < \frac{2+\alpha}{\alpha} = 1+\frac{2}{\alpha}$$

   La funzione é convessa in $]1, 1+\frac{2}{\alpha}[$ e concava altrove. Presenta un flesso in $1+\frac{2}{\alpha}$

9. Esistenza di massimo e minimo globali:
   La funzione presenta un minimo globale in $P(1,0)$ e non presenta massimi globali.

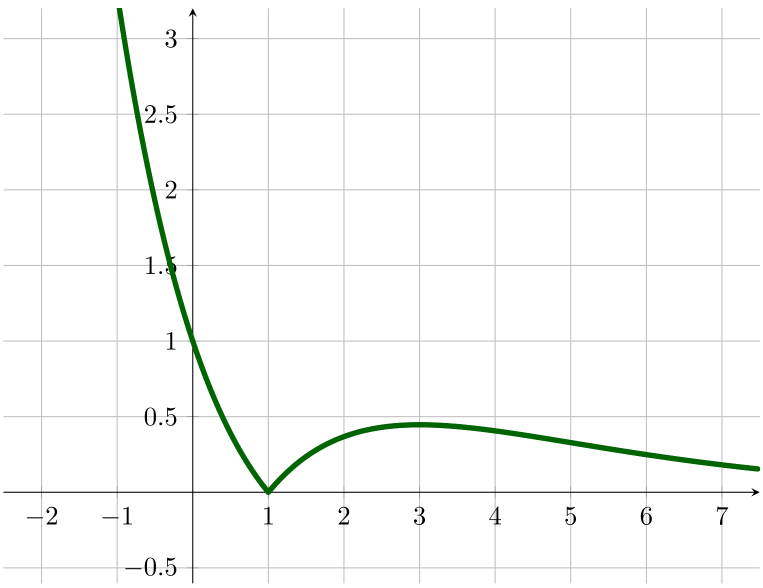
Determiniamo ora per quali α la funzione $g|_{[0,+\infty[}$ ha un massimo assoluto in $x=0$. Si tratta quindi di risolvere in α la disequazione

$$g(0) \geq \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$g(0) = 1 \qquad g\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha-1}$$

$$1 \geq \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha-1} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\alpha-1} \leq \alpha$$

Questa disequazione non può essere risolta analiticamente, bisogna quindi determinare un intervallo in cui si trova α per via grafica e poi risolvere numericamente mediante, ad esempio, il metodo di bisezione.



La funzione studiata con $\alpha = \dfrac{1}{2}$