Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

21 Novembre 2022

Esercizio 9.1. Studiare il carattere delle seguenti serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)^2$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n+1}\right)$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n-1}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos n-1}{n(n+1)^2}$

Soluzione

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)^2$

Prima di tutto verifichiamo la condizione necessaria di convergenza:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)^2 = 0$$

Siccome il criterio è verificato e la serie è a termini positivi, è possibile appplicare il criterio del confronto. Siccome la funzione seno è limitata, possiamo stimare

$$a_n = \left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)^2 \le \frac{1}{n^2}$$

Di conseguenza, per il criterio del confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ converge } \implies \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)^2 \text{ converge}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n+1}\right)$

La condizione necessaria è verificata e, siccome $0 \le \dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{1+n}\right) \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, la serie è a termini positivi, per cui è possibile applicare il criterio del confronto asintotico.

$$\frac{1}{n}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Di conseguenza, siccome la serie armonica generalizzata converge con $\alpha > 1$, la serie converge.

*Trascrizione a cura di Davide Borra

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

La serie è a termini positivi ed è rispettata la condizione necessaria. È quindi possibile applicare il criterio della radice n-esima.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}$$

Di conseguenza per il criterio della radice n-esima, la serie converge.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ La serie è a termini positivi ed è rispettata la condizione necessaria. È quindi possibile applicare il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot \cancel{2^n}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = 0$$

Di conseguenza per il criterio del rapporto la serie converge.

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n-1}$

La condizione necessaria è verificata. Osserviamo che valutare la convergenza assoluta non fornisce informazioni sufficienti per valutare il carattere della serie perché non si riesce a valutare il valore di $\cos(n\pi)$. È invece interessante osservare che

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases} = (-1)^n$$

Di conseguenza possiamo riscrivere la serie come una serie a segni alterni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n-1}}_{:=b_n}$$

Verifichiamo le ipotesi del criterio di Leibniz:

- $(b_n)_n$ decrescente? Sì. $\dfrac{1}{x}$ è decrescente per $x > 0$.
- $b_n > 0 \forall n$? Sì. $\dfrac{1}{x}x > 0 \quad \forall x > 0$.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$? Sì.

Di conseguenza la serie converge per il criterio di Leibniz. Non converge assolutamente perchè è asintotica alla serie armonica $\sum_n \frac{1}{n}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos n - 1}{n(n+1)^2}$

La condizione necessaria è verificata. Studiamo l'assoluta convergenza.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|2\cos n - 1|}{n(n+1)^2}$$

Applichiamo il criterio del confronto

$$|2\cos n - 1| \le 2|\cos n| + 1 \le 3$$

Di conseguenza

$$0 \le |a_n| \le \frac{3}{n(n+1)^2} \sim \frac{3}{n^3}$$

Di conseguenza per il criterio del confronto (asintotico) converge assolutamente, quindi converge.

Esercizio 9.2. Studiare il carattere delle serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+n^\alpha}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^\alpha}{\alpha^n+1} \quad (\alpha > 0)$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{3^n+3n}$

Soluzione

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+n^{\alpha}}$ La condizione necessaria è verificata. Osserviamo che il numeratore $n+1 \sim n$. Per quanto riguarda il denominatore

$$n^2 + n^{\alpha} \sim \begin{cases} n^2 & \text{se } \alpha < 2 \\ 2n^2 \text{ se } \alpha = 2 \\ n^{\alpha} \text{ se } \alpha > 2 \end{cases}$$

Studiamo ora la convergenza

(a) Caso $\alpha < 2$ (analogamente $\alpha = 2$):

$$a_n = \frac{n}{n^2 + n^{\alpha}} \sim \frac{n}{n^2} \sim \frac{1}{n}$$

La serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

(b) Caso $\alpha > 2$

$$a_n = \frac{n}{n^2 + n^{\alpha}} \sim \frac{n}{n^{\alpha}} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Siccome $\alpha > 2$ per ipotesi, $\alpha - 1 > 1$. La serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{\alpha^n + 1} \quad (\alpha > 0)$

Studiamo come si comporta il denominatore al variare di α:

$$\alpha^n + 1 \sim \begin{cases} \alpha^n & \text{se } \alpha > 1 \\ 2 & \text{se } \alpha = 1 \\ 1 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Di consegnenza

$$a_n = \frac{n^{\alpha}}{\alpha^n + 1} \sim \begin{cases} \alpha^n & \text{se } \alpha > 1 \\ 2 & \text{se } \alpha = 1 \\ 1 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Se $\alpha \leq 1$ la condizione necessaria non è rispettata. Se $\alpha > 1$ la serie converge per il criterio della radice n-esima.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{3^n + 3n}$

$$a_n \sim \frac{\alpha^{2n}}{3^n} = \frac{(\alpha^2)^n}{3^n} = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^n$$

È una serie geometrica che converge se la ragione è minore di 1.

$$\frac{\alpha}{3} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$$

Esercizio 9.3. Determinare gli intervalli di convergenza delle seguenti serie di potenze.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(x+1)^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{n+1}$

Soluzione

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \implies R = 1$$

La serie converge se $|x| < 1$. Rimangono da studiare i casi $x = 1$ e $x = -1$:

- Se $x = 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge per il criterio di Leibniz.
- Se $x = -1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{(-1)^{2n}}(-1)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n}$ diverge perchè è la serie armonica a meno di un segno.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(x+1)^n$
Poniamo $y := x + 1$

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4}{n^2}} \implies R = \frac{1}{l} = 1$$

La serie converge se

$$-1 < y < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x + 1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 0$$

Rimangono da verificare gli estremi

- Se $x = -2$, la serie $\displaystyle\sum_n (-1)^n \frac{4}{n^2}$ converge assolutamente per confronto con la serie armonica generalizzata.
- Se $x = 0$, la serie $\displaystyle\sum_n \frac{4}{n^2}$ converge per confronto con la serie armonica generalizzata.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{n+1}$

Poniamo $y := \dfrac{x+1}{x-1}$ e $s := n + 1$ La serie si riscrive equivalentemente come $\displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s^2} y^s$

$$l = \lim_{s\to+\infty} \sqrt[s]{|a_s|} = \lim_{s\to+\infty} \sqrt[s]{\frac{1}{s^2}} = 1 \implies R = 1$$

La serie converge se

$$-1 < y < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} > -1 \\ \dfrac{x+1}{x-1} < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1-x+1}{x-1} < 0 \\ \dfrac{x+x+1-1}{x-1} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} < 0 \\ \dfrac{2x}{x-1} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < 0 \vee x > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x < 0$$

Rimangono da studiare gli estremi:

$$y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$y = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-1} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = 0}$$

Studiamo quindi la convergebnza quando $x = 0$. La serie diventa

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s^2}(-1)^s$$

che converge assolutamente per confronto con la serie armonica generalizzata. Di conseguenza la serie data converge se e solo se $x \leq 0$.

Esercizio 9.4. Studiare il carattere delle seguenti serie

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1-\operatorname{sen} n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n+7}\right)\right)^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n+2^n}{\beta^n+4^n} \qquad (\beta \geq 0)$

Soluzione

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1-\operatorname{sen} n}$
Non è rispettata la condizione necessaria:

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n+7}\right)\right)^n$

$$\frac{n+1}{n+7} \sim 1 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n+7}\right) \sim \operatorname{sen}(1) \quad \Longrightarrow \quad \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n+7}\right)\right)^n \sim \operatorname{sen}^n(1)$$

Si tratta quindi di una serie geometrica con ragione $\operatorname{sen}(1) < 1$ che quindi converge.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n+2^n}{\beta^n+4^n} \qquad (\beta \geq 0)$
Studiamo separatamente numeratore e denominatore al variare di β

$$\beta^n + 2^n \sim \begin{cases} \beta^n & \text{se } \beta > 2 \\ 2^{n+1} & \text{se } \beta = 2 \\ 2^n & \text{se } \beta < 2 \end{cases}$$

$$\beta^n + 4^n \sim \begin{cases} \beta^n & \text{se } \beta > 4 \\ 2 \cdot 4^n & \text{se } \beta = 4 \\ 4^n & \text{se } \beta < 2 \end{cases}$$

Quindi

$$a_n \sim \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } \beta < 2 \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } \beta = 2 \\ \left(\frac{\beta}{4}\right)^n & \text{se } 2 < \beta < 4 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \beta = 4 \\ 1 & \text{se } \beta > 4 \end{cases}$$

Nei casi in cui $\beta < 4$ la serie è asintotica ad una serie geometrica di ragione < 1, quindi convergente.
Nei casi in cui $\beta \geq 4$ non è rispettata la condizione necessaria, quindi la serie non converge.