

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica  
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023  
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi\*

12 Dicembre 2022

**Esercizio 12.1.** Siano  $f(s) = \frac{e^{-|s|} - 1}{s(s+1)}$  e  $F(x) = \int_0^x f(s)ds$

- a) Studiare  $f(s)$
- b) Determinare  $\text{dom } F$
- c) Determinare  $G_F$

*Soluzione*

- (a) Studiare  $f(s)$

$$f(s) = \begin{cases} \frac{e^{-s} - 1}{s(s+1)} & \text{se } s > 0 \\ \frac{s(s+1)}{e^s - 1} & \text{se } s < 0 \wedge s \neq -1 \end{cases}$$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$
- Segno di  $f$ :

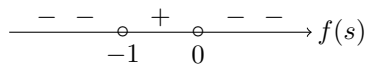
$$e^{-|s|} - 1 \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$s(s+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s < -1 \vee s > 0.$$

Quindi

$$f(s) > 0 \text{ se } -1 < s < 0$$

$$f(s) < 0 \text{ se } s < -1 \vee s > 0$$



- Limiti

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(s) = 0^-$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = 0^+$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) = \left[ \frac{1 - \frac{1}{e}}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} f(s) = \left[ \frac{1 - \frac{1}{e}}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s(s+1)} \stackrel{LN}{=} 1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{-s} - 1}{s(s+1)} \stackrel{LN}{=} -1$$

---

\*Trascrizione a cura di Davide Borra

- Derivata di  $f$

$$f'(s) = \begin{cases} \frac{-e^{-s}(s^2 + 3s + 1) + (2s + 1)}{s^2(s + 1)^2} & \text{se } s > 0 \\ \frac{e^s(s^2 - s - 1) + (2s + 1)}{s^2(s + 1)^2} & \text{se } s < 0 \wedge s \neq -1 \end{cases}$$

– se  $s > 0$

$$f'(s) > 0 \Leftrightarrow -e^{-s}(s^2 + 3s + 1) + (2s + 1) > 0 \Leftrightarrow \frac{s^2 + 3s + 1}{2s + 1} < e^s$$

Ora basta osservare che  $e^s > s + 1 > \frac{s^2 + 3s + 1}{2s + 1}$ .

– se  $s < 0 \wedge s \neq -1$  studiamo separatamente i due casi

\*  $-1 < s < 0$

$$f'(s) < 0 \Leftrightarrow e^s(s^2 - s - 1) + (2s + 1) < 0$$

Poiché  $e^s < 1$ , abbiamo che

$$e^s(s^2 - s - 1) < (s^2 - s - 1).$$

Risulta quindi

$$e^s(s^2 - s - 1) + (2s + 1) < \underbrace{(s^2 - s - 1) + (2s + 1)}_{s(s+1)}$$

che è sempre negativo in  $]0, 1[$ .

\*  $s < -1$

$$f'(s) < 0 \Leftrightarrow e^s(s^2 - s - 1) + (2s + 1) < 0 \Leftrightarrow -\frac{s^2 - s - 1}{2s + 1} < e^{-s}$$

Ora basta osservare che

$$e^{-s} > -s + 1 > -\frac{s^2 - s - 1}{2s + 1}.$$

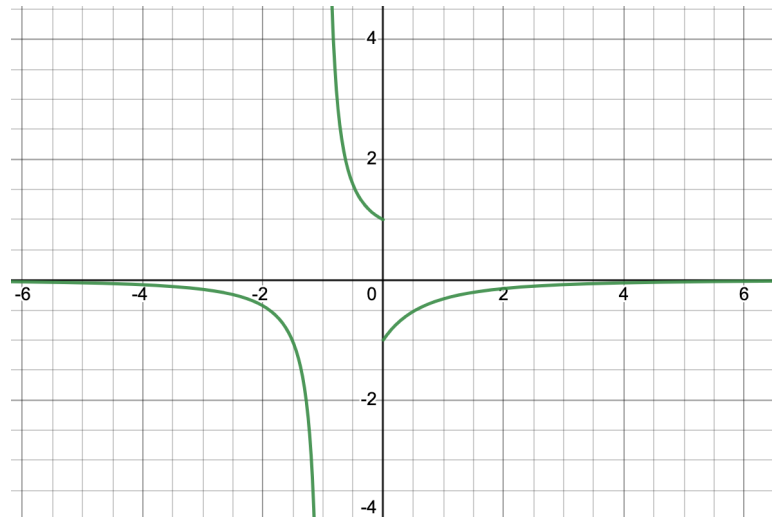


Figura 1

- (b) Determinare  $\text{dom } F$ .

Osserviamo che  $0 \in \text{dom } F$  in quanto  $F(0) = \int_0^0 f(s)ds$

- se  $x \in ]0, +\infty[$

$$f(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} -1$$

e la funzione è continua in  $]0, +\infty[$ , per cui  $f \in \mathcal{R}([0, \omega]), \forall \omega > 0$ , e quindi  $f \in \mathcal{R}(]0, +\infty[) \subset \text{dom } F$

- se  $x \in ]-1, 0[$   
 $f(s)$  è continua in  $] -1, 0[$  e  $f(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^-} 1$ , per cui  $f \in \mathcal{R}([a, 0]) \forall a \in ]-1, 0[$ . Dobbiamo controllare se l'integrale converge in  $-1$

$$\int_0^{-1} f(s) ds = \int_0^{-1} \frac{e^s - 1}{s(s+1)} ds$$

per  $s \rightarrow -1^+$  si ha

$$\frac{e^s - 1}{s(s+1)} \sim \frac{\frac{1}{e} - 1}{-1(s+1)} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \left(\frac{1}{s+1}\right)$$

quindi l'integrale diverge negativamente per il criterio del confronto asintotico, da cui

$$]-\infty, -1] \not\subseteq \text{dom } F$$

Abbiamo quindi che  $\text{dom } F = ]-1; +\infty[$ .

(c) Determinare  $G_F$ .

Per definizione di funzione integrale sappiamo che  $F(0) = 0$ , inoltre per il teorema fondamentale del calcolo

$$F'(x) = f(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ < 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$F''(x) = f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Per il corollario di Lagrange

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = F'_+(0)$$

per cui in  $x = 0$  il grafico della funzione  $F$  presenta un punto angoloso. Siamo quindi in grado di determinare il grafico di  $F$  (Figura 2):

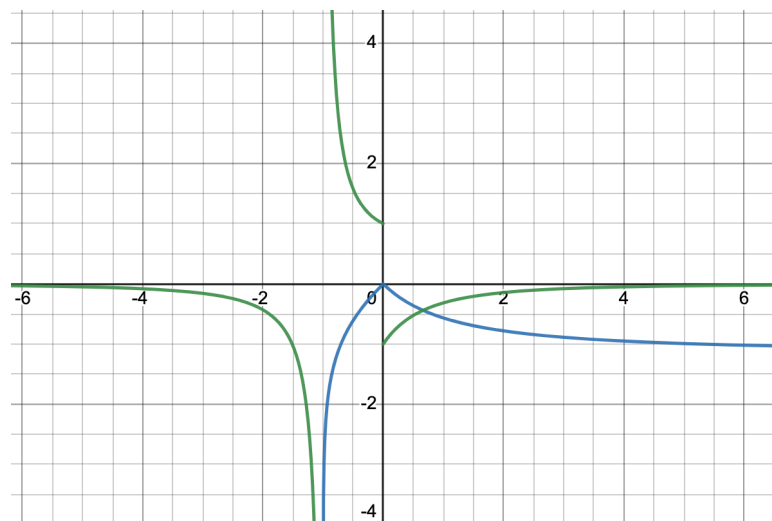


Figura 2

Ricordiamo la definizione di convessità

**DEF (Convessità).** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  si dice convessa se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2, \quad f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

**Esercizio 12.2.** Dimostrare che una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa se e solo se vale la seguente disuguaglianza

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

### Soluzione

*Dimostrazione.*

• “ $\Rightarrow$ ”

Prendo  $x \in [x_1, x_2]$ , allora posso scrivere  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ , con  $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_1) = \\ &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(1 - \lambda)(x_2 - x_1) = f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1))(1 - \lambda) = \\ &= \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \end{aligned}$$

• “ $\Leftarrow$ ”

Prendo  $x \in [x_1, x_2]$ , allora posso scrivere  $x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2$ . Pongo  $\lambda := \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in [0, 1]$ .

Allora  $1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) \\ \Rightarrow f(x) &\leq f(x_1) + \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} - 1\right)f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1). \end{aligned}$$

QED

**Esercizio 12.3.** Provare che  $f(x) = x^2$  è strettamente convessa.

### Soluzione

*Dimostrazione.* Dobbiamo provare che

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)^2 &< \lambda x_1^2 + (1 - \lambda)x_2^2 \Leftrightarrow \\ x_1^2 \lambda(\lambda - 1) + x_2^2((1 - \lambda)^2 - (1 - \lambda)) + 2\lambda(1 - \lambda)x_1x_2 &< 0 \Leftrightarrow \\ \lambda(\lambda - 1)[x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2] &< 0 \\ \lambda(\lambda - 1)(x_1 - x_2)^2 &< 0 \end{aligned}$$

che è verificato  $\forall \lambda \in ]0, 1[, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ .

QED

**Esercizio 12.4.** Dimostrare che  $\forall a, b \geq 0, \forall p \in \mathbb{R}, p \geq 1$  vale

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

### Soluzione

*Dimostrazione.* Per  $p = 1$  la proprietà è ovvia. Se  $a = 0$  o  $b = 0$  la disuguaglianza è soddisfatta. Siano  $a, b > 0, p > 1$ . Pongo  $f(t) = t^p$ , che è una funzione convessa su  $[0, +\infty[$  poiché  $f''(t) = p(p - 1)t^{p-2} > 0$  su  $]0, +\infty[$ . Scelgo inoltre  $x_1 = a$  e  $x_2 = b$ . Nella definizione precedente dell'Esercizio 12.2, si ha

$$(\lambda a + (1 - \lambda)b)^p \leq \lambda a^p + (1 - \lambda)b^p$$

Scegliendo  $\lambda = \frac{1}{2}$  si ottiene

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p (a + b)^p \leq \left(\frac{1}{2}\right)(a^p + b^p)$$

e quindi

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

QED

**Esercizio 12.5.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile, si dimostri che  $f$  è convessa se e solo se

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y).$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Se  $x = y$  non c'è nulla da provare. Siano  $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$  e sia  $\lambda \in ]0, 1[$ . Abbiamo

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Risulta

$$\begin{aligned} -f(y) + f(y + \lambda(x - y)) &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - f(y) \Leftrightarrow \\ \frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda} &\leq \frac{\lambda(f(x) - f(y))}{\lambda} \Leftrightarrow \\ (x - y) \frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda(x - y)} &\leq f(x) - f(y) \end{aligned}$$

Passando al limite per  $\lambda \rightarrow 0^+$ , dalla derivabilità di  $f$  segue

$$(x - y)f'(y) \leq f(x) - f(y)$$

ossia

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y).$$

Per l'arbitrarietà di  $x, y \in \mathbb{R}$ , la dimostrazione è conclusa.

QED

**Esercizio 12.6.** Disuguaglianza di Young. Siano  $p, q \in ]1; +\infty[$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dimostrare che  $\forall a, b \geq 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Il caso  $a = 0$  o  $b = 0$  è banale, mentre il caso  $p, q = 2$  segue dal quadrato di binomio. Siano  $f(t) = \log(t)$ , e  $t_1 = a^p, t_2 = b^q, \lambda = \frac{1}{p}, 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ . Allora sfruttando il fatto che la funzione  $f$  è concava possiamo scrivere

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q)$$

da cui

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

ne segue che

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

QED

**Esercizio 12.7.** Disuguaglianza di Hölder.

Siano  $p, q \in ]1; +\infty[$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dimostrare che  $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  con  $a_i, b_i \geq 0 \forall i$  vale che

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Se  $a_i = 0 \forall i$  oppure  $b_i = 0 \forall i$  la disuguaglianza è ovvia. Supponiamo che  $a_i \neq 0$  per qualche  $i$  e  $b_i \neq 0$  per qualche  $i$ . Poniamo  $x_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$  e  $y_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ , allora segue che  $x_i, y_i \geq 0 \forall i$ .

Per la disuguaglianza di Young  $\forall i = 1, \dots, n$  si ha

$$x_i y_i \leq \frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q \right) = \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} = 1$$

Da

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{b_i}{\left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

segue allora

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

QED

**Corollario** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Siano  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  con  $a_i, b_i \geq 0 \forall i$ , allora

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Esercizio 12.8.** Disuguaglianza di Jensen. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  convessa. Sia  $g \in \mathcal{R}([a, b])$ , allora

$$f\left(\int_a^b g(x) dx\right) \leq \int_a^b f(g(x)) dx$$

dove

$$\int_a^b g(t) dt := \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt.$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Usando la caratterizzazione della convessità presentata precedentemente, nel caso  $f$  derivabile (Esercizio 12.5),  $\forall x \in [a, b]$

$$f(g(x)) \geq f\left(\int_a^b g(t) dt\right) + f'\left(\int_a^b g(t) dt\right) \left(g(x) - \int_a^b g(t) dt\right)$$

Sfruttando la monotonia dell'integrale, integrando su  $[a, b]$ , si ha

$$\int_a^b f(g(x)) dx \geq (b-a) f\left(\int_a^b g(t) dt\right) + f'\left(\int_a^b g(t) dt\right) \left(\int_a^b g(x) dx - \int_a^b g(t) dt\right),$$

cioè

$$\int_a^b f(g(x)) dx \geq (b-a) f\left(\int_a^b g(t) dt\right)$$

Dividendo entrambi i membri per  $(b-a)$  si ottiene la tesi.

QED

**Esercizio 12.9.** Disuguaglianza di Young generalizzata. Siano  $p_1, \dots, p_n \in ]1; +\infty[$  tali che  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$

Dimostrare che

$$\prod_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p_i}}{p_i} \quad \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, a_i \geq 0 \forall i$$

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Definiamo due nuove funzioni:  $f(t) = \log(t)$  su  $]0, +\infty[$  e  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = \begin{cases} a_1^{p_1} & \text{se } t \in ]x_0, x_1[ \\ a_2^{p_2} & \text{se } t \in ]x_1, x_2[ \\ \vdots & \\ a_n^{p_n} & \text{se } t \in ]x_{n-1}, x_n[ \end{cases}$$

dove  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$  e  $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{p_i}$ .

Siccome il logaritmo è una funzione concava, la disuguaglianza di Jensen si scrive  $\forall g \in \mathcal{R}([0, 1])$  come

$$f\left(\int_0^1 g(x) \, dx\right) \geq \int_0^1 f(g(x)) \, dx$$

Risulta allora per la funzione definita sopra

$$\log\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p_i}}{p_i}\right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \log(a_i^{p_i}) = \sum_{i=1}^n \log(a_i) = \log \prod_{i=1}^n a_i$$

Passando all'esponenziale si ha la tesi.

QED