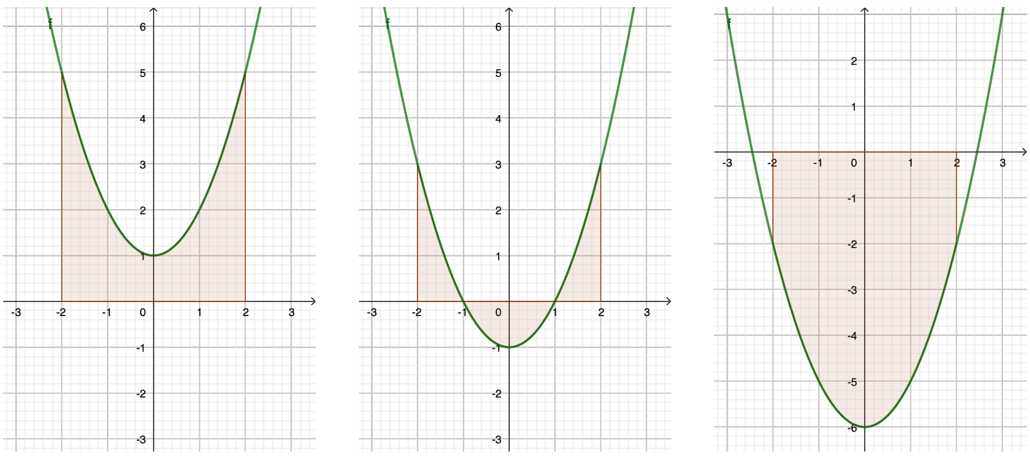
Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

07 Dicembre 2022

Esercizio 11.1. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e S_β l'area del sottografico associato alla funzione $f(x) = x^2 + \beta$ dove $x \in [-2, 2]$.

Soluzione Dobbiamo distinguere tre casi:



(a) $\beta > 0$ (b) $-4 \le \beta < 0$ (c) $\beta < -4$

Figura 1

- $\beta \ge 0$ In questo caso la parabola si trova sempre sopra l'asse x (Figura 1a).

$$S_\beta = \int_{-2}^{2} (x^2 + \beta) dx.$$

- Analizziamo ora quando la parabola interseca l'asse x in due punti interni all'intervallo $[-2, 2]$ (Figura 1b)

$$x^2 + \beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -\beta \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\beta}$$
$$\implies \exists x \in [-2, 2] \ : \ f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow -\beta \le 4 \quad \Leftrightarrow \quad \beta \ge -4$$

Di conseguenza, quando $-4 \le \beta < 0$

$$S_\beta = \int_{-2}^{2} |f(x)| dx = \int_{-2}^{-\sqrt{-\beta}} (x^2 + \beta) dx - \int_{-\sqrt{-\beta}}^{\sqrt{-\beta}} (x^2 + \beta) dx + \int_{\sqrt{-\beta}}^{2} (x^2 + \beta) dx.$$

- Rimane il caso in cui la parabola si trova sempre sotto l'asse x in $[-2, 2]$, ovvero quando $\beta < 4$ (Figura 1c), in cui si ha

$$S_\beta = -\int_{-2}^{2} (x^2 + \beta) dx.$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

Esercizio 11.2. Determinare l'area della regione di piano compresa tra $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$ e le rette $x = 0$ e $x = \pi$.

Soluzione Prima di tutto determiniamo l'intersezione di f e g su $[0, \pi]$:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Abbiamo quindi che $f(x) \geq g(x)$ su $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e che $f(x) \leq g(x)$ su $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$. Di conseguenza

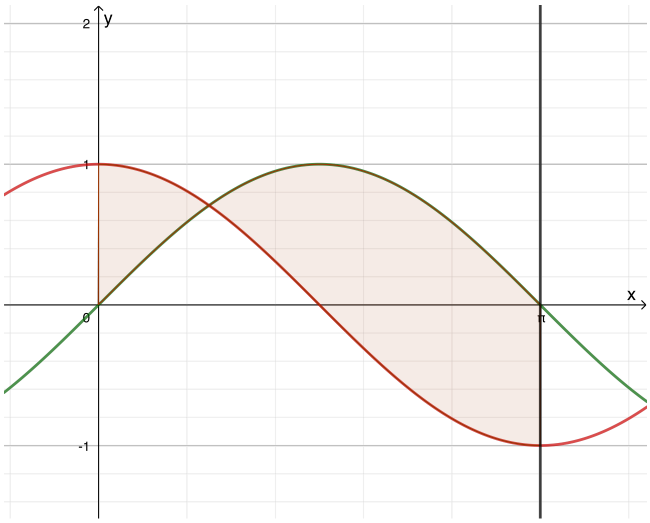


Figura 2: In rosso il grafico di f, in verde il grafico di g. L'intersezione si ha per $x = \frac{\pi}{4}$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx = [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\operatorname{sen} x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1\right) - \left(0 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Esercizio 11.3. Calcolare i seguenti integrali definiti

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx$ b) $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 3\sqrt{x} + 2} dx$ c) $\displaystyle\int_0^{e - \frac{1}{e}} \sqrt{4 + x^2} dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} dx$.

Soluzione

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + 2\int_1^2 x^{-\frac{5}{3}} dx = \left[\log x - 3x^{-\frac{2}{3}}\right]_1^2 = \log 2 - 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} + 3.$

b) $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2}dx$
Risolviamo per sostituzione: sia $t=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x=t^2 \quad \Rightarrow dx = 2tdt$. Modifichiamo di conseguenza gli estremi di integrazione: $x_0 = 9 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 3$ e $x_1 = 16 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 4$

$$\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2}dx = \int_3^4 \frac{t-3}{t^2-3t+2}2tdt = 2\int_3^4 \frac{t^2-3t+2-2}{t^2-3t+2}dt = 2\int_3^4 dt - 4\int_3^4 \frac{1}{t^2-3t+2}dt$$

Adesso scomponiamo la frazione con il metodo dei fratti semplici

$$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{(t-2)(t-1)} = \frac{A}{t-2}+\frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+B(t-2)}{(t-2)(t-1)} = \frac{(A+B)t-(A+2B)}{(t-2)(t-1)},$$

da cui

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2B=-1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=-B=1 \\ B=-1 \end{cases} \quad .$$

Quindi

$$2\int_3^4 dt - 4\int_3^4 \frac{1}{t^2-3t+2}dt = 2-4\left(\int_3^4 \frac{1}{t-2}dt - \int_3^4 \frac{1}{t-1}dt\right) = 2-4\left[\log|t-2|-\log|t-1|\right]_3^4 =$$
$$= 2-4\log 2+4\log 3-4\log 2 = 2+4\log\frac{3}{4}.$$

c) $\displaystyle\int_0^{e-\frac{1}{e}} \sqrt{4+x^2}dx$
Quando si presentano situazioni del genere è utile sostituire applicando le relazioni tra seno e coseno o tra seno e coseno iperbolici. In particolare se si presenta $\sqrt{1-x^2}$ è utile sostituire ricordando che $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, mentre se si presenta $\sqrt{1+x^2}$ è utile sostituire ricordando che $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$. In questo caso sostituiamo $x = 2\operatorname{senh} t$, quindi $dx = 2\cosh t dt$. Di conseguenza gli estremi di integrazione diventano $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$.

$$\int_0^{e-\frac{1}{e}} \sqrt{4+x^2}dx = 4\int_0^1 \sqrt{4+4\operatorname{senh}^2 t}\cdot 2\cosh t dt = 4\int_0^1 \sqrt{\cosh^2 t}\cosh t dt = 4\int_0^1 \cosh^2 t dt =$$
$$= 4\int_0^1 \cosh t \cosh t dt = 4\left(\Big[\operatorname{senh} t\cosh t\Big]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{senh}^2 t dt\right) =$$
$$= 4\int_0^1 \cosh t \cosh t dt = 4\left(\Big[\operatorname{senh} t\cosh t\Big]_0^1 - \int_0^1 (\cosh^2 t - 1) dt\right) =$$
$$= 4\left(\Big[\operatorname{senh} t\cosh t\Big]_0^1 + \int_0^1 dt - \int_0^1 \cosh^2 t dt\right).$$

Risulta quindi

$$8\int_0^1 \cosh^2 t dt = 4\Big[\operatorname{senh} t\cosh t + t\Big]_0^1.$$

Concludiamo

$$\int_0^{e+\frac{1}{e}} \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = 2\Big[\operatorname{senh} t\cosh t + t\Big]_0^1 = 2\left(\frac{e-\frac{1}{e}}{2}\cdot\frac{e+\frac{1}{e}}{2}+1\right) =$$
$$= \frac{e^2-e^{-2}}{2}+2 = \operatorname{senh} 2 + 2.$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}dx$
Per risolvere questo tipo di integrale bisogna utilizzare le formule parametriche di seno e coseno: sia $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, allora si ha $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Inoltre $x = 2\operatorname{arctg} t$ e $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$. Infatti

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \operatorname{sen} x.$$

Di conseguenza

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}dx \underset{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2\cancel{(1+t^2)}}{(2t+1+t^2)\cancel{(1+t^2)}}dt =$$
$$= \int \frac{2}{(1+t)^2}dt = -\frac{2}{1+t}+c\bigg|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+c.$$

Esercizio 11.4. Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}\sqrt[4]{1-x}}dx$.

Soluzione Chiamiamo $f(x)$ la funzione integranda. Osserviamo che $f \in \mathcal{C}^0(]0,1[)$ e positiva. Inoltre osserviamo che per $x \to 0^+$, $\operatorname{sen} x \sim x$ e $\sqrt[4]{1-x} \sim 1$, quindi $f(x) \sim \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. È perciò possibile estendere con continuità la funzione f in 0 con $\tilde{f}(0) = 0$, per cui $f \in \mathcal{R}\left(\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\right)$. Per $x \to 1^-$ osserviamo che $f(x) \sim \dfrac{\operatorname{sen} 1}{\sqrt[4]{1-x}} = \dfrac{\operatorname{sen} 1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$. Poiché $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}x$ converge, allora per il teorema del confronto asintotico, anche $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Di conseguenza $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}\sqrt[4]{1-x}}\,\mathrm{d}x$ converge.

Esercizio 11.5. Determinare per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(4+9x)^{\beta+1}}dx$$

converge e calcolarne il valore con $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $\beta = 0$.

Soluzione Chiamiamo $f(x)$ la funzione integranda. Abbiamo $f \in \mathcal{C}^0\,(]0,+\infty[)$ e positiva.
Per $x \to 0^+$ si ha $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$, quindi per il teorema del confronto asintotico l'integrale dato converge se e solo se $\alpha < 1$.
Per $x \to +\infty$ $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\alpha(9x)^{\beta+1}} = \dfrac{1}{9^{\beta+1}x^{\alpha+\beta+1}}$. Affinché l'integrale converga su $[1,+\infty[$ deve essere $\alpha+\beta+1 > 1$, ovvero $-\beta < \alpha$.
Di conseguenza l'integrale dato converge se e solo se $-\beta < \alpha < 1$.
Calcoliamo ora il valore dell'integrale nel caso $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $\beta = 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx =$$
$$= \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx + \lim_{h\to+\infty}\int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx.$$

Per procedere al calcolo ci serve una primitiva di f. Sostituiamo ponendo $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx = \int \frac{1}{t(4+9t^2)}2tdt = 2\int \frac{1}{4+9t^2}dt = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{9}{4}t^2}dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}t\right)+c =$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)+c$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx &= \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx + \lim_{h\to+\infty}\int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx = \\ &= \lim_{\delta\to 0^+}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)\right]_\delta^1 + \lim_{h\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)\right]_1^h = \\ &= \lim_{\delta\to 0^+}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\delta}\right)\right] + \lim_{h\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\sqrt{h}\right) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right] = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Esercizio 11.6. Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_1^2 \frac{1-\cos(x-1)}{(x^2-1)^\alpha(2-x)^{3-\alpha}}dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione Riscriviamo l'integrale equivalentemente e sostituiamo $x-1=t$, $t=x+1$, $dx=dt$

$$\int_1^2 \frac{1-\cos(x-1)}{(x^2-1)^\alpha(2-x)^{3-\alpha}}dx = \int_1^2 \frac{1-\cos(x-1)}{(x-1)^\alpha(x+1)^\alpha(2-x)^{3-\alpha}}dx = \int_0^1 \frac{1-\cos t}{(t)^\alpha(t+2)^\alpha(1-t)^{3-\alpha}}dt$$

Chiamiamo $f(t)$ la funzione integranda.

- Per $t\to 0^+$
$$f(t) \sim \frac{1-\cos t}{t^\alpha}\cdot\frac{1}{2^\alpha}.$$
Sviluppiamo il coseno
$$\frac{1-\cos t}{t^\alpha} = \frac{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^\alpha} \sim \frac{1}{2t^{\alpha-2}}.$$
L'integrale converge se e solo se $\alpha - 2 < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha < 3$.
- Per $t\to 1^-$ osserviamo che $1-\cos t$, t^α e $(t+2)^\alpha$ non influiscono se non per costanti, quindi a meno di costanti
$$f(t) \sim \frac{1}{(1-t)^{3-\alpha}}$$
e l'integrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$ converge se e solo se $3-\alpha < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha > 2$.

Di conseguenza l'integrale converge se e solo se

$$2 < \alpha < 3.$$