

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023

Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

10 Ottobre 2022

Esercizio 1.1. Risolvere le seguenti equazioni/sistemi di equazioni in \mathbb{C} :

(a) $z^6 + i\bar{z}^3 = 0$

(b) $z^2 - (3+i)z + 2 = 0$

(c) $\begin{cases} \bar{z}^2 - 2w^2 + 2 = 0 \\ \bar{w}^2 - z = 0 \end{cases}$

Soluzione (a) $z^6 + i\bar{z}^3 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -i\bar{z}^3 \xrightarrow{\text{passo ai moduli}} |z|^6 = |-i\bar{z}^3|$
Siccome il modulo distribuisce sul prodotto e $|-i| = 1$ si ha

$$|z|^6 = |z|^3 \Leftrightarrow |z|^3(|z|^3 - 1) = 0$$

$$|z| = 0 \quad \text{o} \quad |z| = 1$$

- Caso $|z| = 0$, si ha $z = 0$
- Caso $|z| = 1$, si ha

$$\cancel{z^3} \cdot z^6 = -i\bar{\cancel{z^3}} \cdot \cancel{z^3} \Leftrightarrow z^9 = -i(|z|^2)^3 \Leftrightarrow z = \sqrt[9]{-i}$$

Da cui, per la formula di De Moivre

$$z_k = e^{i\left(\frac{3}{18}\pi + \frac{2}{9}k\pi\right)}$$

(b) In questo caso basta applicare la risolvente di secondo grado:

$$z_{1,2} = \frac{3+i \pm \sqrt{(3+i)^2 - 8}}{2} = \frac{3+i \pm \sqrt{9-1+6i-8}}{2} = \frac{3+i \pm \sqrt{6i}}{2} = \frac{3+i \pm \sqrt{6}\sqrt{i}}{2}$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$\pm\sqrt{6}\sqrt{i} = \pm\sqrt{6} \left[\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \right] = \pm(\sqrt{3} + \sqrt{3}i)$$

N.B.: uno dei due \pm è ridondante

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}i$$

(c) Il sistema può essere risolto in due modi: ponendo $z = a + ib$ e $w = c + id$, oppure osservando le equazioni e provando a sostituire in modo “furbo”.

Noto che nella prima equazione è presente w^2 , mentre nella seconda è presente \bar{w}^2 . Passo quindi al coniugato nella II e isolo w^2 .

$$\begin{cases} \bar{z}^2 - 2w^2 + 2 = 0 \\ w^2 = \bar{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}^2 - 2\bar{z} + 2 = 0 \\ w^2 = \bar{z} \end{cases}$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

Risolvero ora la I per \bar{z} :

$$\bar{z} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

Da cui $z = -1 \mp i$ Ora ricavo w in entrambi i casi:

$$\begin{cases} \bar{z} = 1 - i \\ w^2 = \bar{z} \end{cases} \cup \begin{cases} \bar{z} = 1 + i \\ w^2 = \bar{z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \bar{z} = 1 - i \\ w = \sqrt{\bar{z}} \end{cases} \cup \begin{cases} \bar{z} = 1 + i \\ w = \sqrt{\bar{z}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$w = \sqrt{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2}e^{i(k\pi - \frac{\pi}{8})} \cup w = \sqrt{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2}e^{i(\frac{\pi}{8} + k\pi)}$$

Esercizio 1.2. Calcolare \inf , \sup , \min , \max delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad D = \mathbb{R}$

(b) $g(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad D = \mathbb{R}$

(c) $h(x) = \arccos x - \arcsin x \quad D = [-1, 1]$

Soluzione (a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$

Siccome è una potenza pari di un polinomio, $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, da cui $\inf_{\mathbb{R}} f \geq 0$. Inoltre $f(\pm 1) = 0$, quindi si ha

$$\inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = 0$$

Ora dimostriamo che $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$, ovvero che $\forall M \geq 0 \exists x \in \mathbb{R} : f(x) > M$. Fissiamo $M > 0$ e cerchiamo $x \in \mathbb{R}$ tale che $(x^2 - 1)^2 > M$. Consideriamo

$$x^2 > \sqrt{M} + 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{\sqrt{M} + 1}$$

Di conseguenza $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$ e $\nexists \max_{\mathbb{R}} f$

(b) $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Osservazione.

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 & \text{se } x \geq 0 \\ g(x) \leq 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -g(x)$$

La funzione è dispari, quindi è simmetrica rispetto all'origine degli assi. Di conseguenza $\sup_{\mathbb{R}} f =$

$$\sup_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f = -\inf_{\mathbb{R}} f = -\inf_{\mathbb{R}_{\leq 0}} f$$

Come li troviamo (senza derivate)?

Sappiamo che $g(1) = \frac{1}{2}$, dobbiamo provare che $g(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+1} &= \frac{x + x^2 + 1 - x - x^2 - 1 + x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x-x^2+2x-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = \\ &= 1 - \frac{x}{x^2+1} - \underbrace{\frac{(x-1)^2}{x^2+1}}_{\geq 0} \leq 1 - \frac{x}{x^2+1} \\ \frac{x}{x^2+1} &\leq 1 - \frac{x}{x^2+1} \\ 2\frac{x}{x^2+1} &\leq 1 \\ \frac{x}{x^2+1} &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

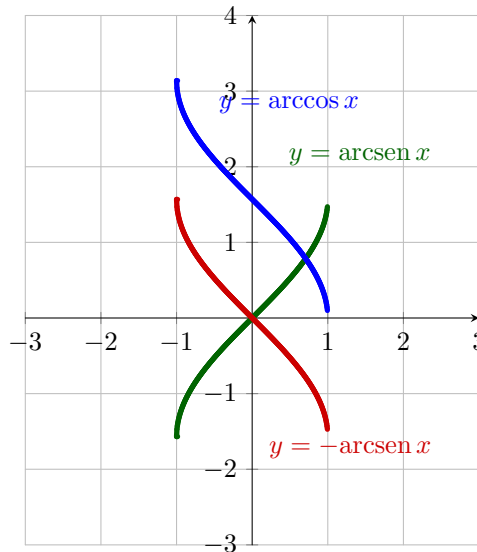


Figura 1

- (c) Rappresentiamo la funzione $h(x) = \arccos x - \arcsen x$ (Figura 1)

Osserviamo che sia $\arccos x$ che $-\arcsen x$ hanno minimo in $x = 1$, quindi

$$\inf_D h = \min_D h = h(1) = \arccos 1 - \arcsen 1 = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Infatti } \underbrace{\arccos x}_{\geq 0} - \underbrace{\arcsen x}_{\substack{\geq \frac{\pi}{2} \\ \geq -\frac{\pi}{2}}} \geq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Analogamente si dimostra che } \sup_D h = \max_D h = \frac{3}{2}\pi$$

DEF (Limite finito). Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Esercizio 1.3. Dimostrare i seguenti limiti

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$
- (c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = -4$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
 - i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$
 - ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Soluzione (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |\sin x| < \varepsilon \quad \forall x \in]-\delta, \delta[$.

Ricordiamo che per le proprietà del seno, $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$. Fisso ε e pongo $\delta = \varepsilon$. Siccome $|\sin x| \leq |x|$, allora

$$|x| < \delta \implies |\sin x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |\cos x - 1| < \varepsilon \quad \forall x \in]-\delta, \delta[$$

$$|\cos x - 1| = 1 - \cos x = 1 - \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2} \leq 2\left|\frac{x}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}|x|^2$$

$$|\cos x - 1| = \frac{1}{2}|x|^2$$

Voglio avere $|\cos x - 1| < \varepsilon$, quindi pongo $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, allora

$$|\cos x - 1| = \frac{1}{2}|x|^2 \leq \frac{1}{2}|\delta|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon}^2 = \varepsilon$$

(c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = -4$

Osservazione. la funzione non è definita in $x = -1$, ma la definizione di limite non considera il valore della funzione in quel punto, quindi posso scomporre il denominatore e semplificare:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= (x - 3)(x + 1) \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 3)\cancel{(x + 1)}}{\cancel{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 3 = -4 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - 3 + 4| < \varepsilon \quad \forall x \in]-1 - \delta, -1 + \delta[, x \neq -1 \\ |x - 1| &\leq \varepsilon \quad \text{pongo } \delta = \varepsilon \quad |x - 1| \leq \delta \end{aligned}$$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Ricordando che $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Consideriamo $x > 0$:

$$\frac{\sin x}{x} \leq \frac{x}{x} = 1$$

Consideriamo $x < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \frac{-\sin x}{-x} \leq 1 \\ \implies \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\sin x}{x} &\leq 1 \end{aligned}$$

Considero ora il seguente grafico, in cui $PB = \sin x$, $PA = x$, $TA = \tan x$ per definizioni di seno, radiante e tangente.

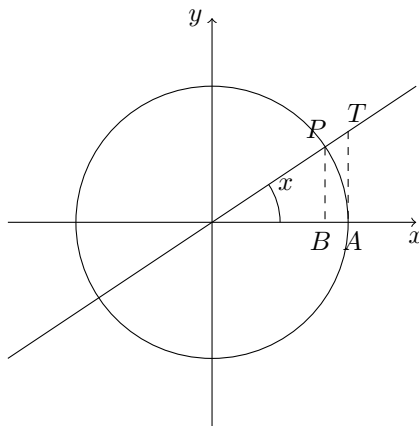


Figura 2

Considero $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (la dimostrazione si ripete analogamente per $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$). Si ha

$$0 \leq \sin x \leq x \leq \tan x$$

$$\frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \cos x$$

Passo ai reciproci

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ per il teorema del confronto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$