AMS Frequency Moments: F_0 ed F_1

Data Mining & Machine Learning - A.A. 2023/2024

Autore: Davide Cantoro
Email: davide.cantoro@studenti.unisalento.it

Repository GitHub: AMS_Frequency_Moments_F0_F1
Versione Markdown (per una lettura più scorrevole): RELAZIONE.md

Abstract

Il seguente documento è tratto da un analisi del paper di Alon, Matias, e Szegedy, "The Space Complexity of Approximating the Frequency Moments" [1], che introduce un algoritmo di approssimazione dei momenti di frequenza F_k. In questa relazione, viene proposto uno pseudocodice per l'algoritmo AMS, seguido da una sua implementazione in C.

L'attenzione è stata concentrata sui momenti di frequenza ordine k pari a 0 e 1, ossia F_0 e F_1 che rappresentano rispettivamente il numero di elementi distinti e la lunghezza di uno stream.

Introduzione

L'obiettivo dell'algoritmo AMS consiste nel fornire una stima accurata di F_k usando un approccio randomizzato.
Questa metodologia è stata pensata per poter lavorare su uno stream di dati, caratterizzato dall'avere dimensioni enormi, potenzialmente infinite. In questi contesti è impraticabile andare a tenere traccia di ogni elemento dello stream, rendendo necessaria l'uso di tecniche di stima per calcolare i momenti di frequenza.

L'algoritmo AMS è noto per l'efficienza sull'uso di memoria e per introdurre un approccio probabilistico per il calcolo dei momenti di frequenza F_k.

Sia $A = (a_1, a_2, ..., a_m)$ una sequenza di m elementi, con $a_i \in N = \{1, 2, ..., n\}$.
Denotiamo con m_i le occorrenze i-esime nella sequenza A.

Il momento di frequenza di ordine k è definito da $F_k = \sum_{i=1}^{n} m_i^k$, dove m_i è il numero di occorrenze di i nella sequenza. F_k è definito come la somma k-esime potenze dei conteggi m_i.

Struttura della Relazione

- Teoria ed Algoritmi: Introduzione dei concetti fondamentali dei metodi di frequenza, seguito da una descrizione dell'algoritmo AMS.
- Implementazione: Descrizione dell'implementazione in C dell'algoritmo AMS relativi ad F_0 ed F_1.
    - Implementazione dell'algoritmo AMS per F_0 con la tecnica di Median of Means.
- Simulazione, risultati e conclusioni.

Estimating F_k

Per stimare F_k: sia estratto un numero casuale a_p della sequenza, dove l'indice p è scelto in maniera casuale e uniforme tra gli indici $1, ..., m$. Possiamo quindi definire r come segue.

Sia $r = |\{q : q \geq p, a_q = a_p\}|$ il numero di occorrenze di a_p in A, a partire da un indice p in poi.

Definiamo la variabile casuale $X = m(r^k - (r-1)^k)$, dove m corrisponde alla lunghezza della sequenza.

Nel caso in cui m sia sconosciuta è necessario l'uso di un approccio differente: all'arrivo di a_m (elemento m-esimo della sequenza), viene eseguito un rimpiazzo ad a_p con probabilità $1/m$. In caso di rimpiazzo r viene impostato ad 1, altrimenti viene incrementato se $a_m = a_p$.

Come dimostrato da Alon et al. [1], si ha che:
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} m_i^k = F_k$
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ dove $E(X^2) \leq kF_1F_{2k-1}$.
Questi risultati sono imporatnti in quanto ci assicurano che in media l'algoritmo produce risultati accurati, anche per k di molto grande.

Algoritmo

PSEUDOCODE

Procedimento per una singola variabile X.

Case: m known

```
AMS_Frequency_Moment_m_known(A, k, m): # A stream, k moment order, m length
                                       of the stream
  initialize...
  p <- rand uniform (1,m)
  r <- 1
  q <- p + 1

  # procedure...
  while(steam, starting from q)
    if(a_q == a_p)
      r <- r +1
    q <- q + 1
  end while
  compute X = m(r^k - (r-1)^k)
  return X
```

Case: m unknown

```
AMS_Frequency_Moment(A, k): # A stream, k moment order
  # initialize...
  r <- 1
  a_p <- A[0]
  m <- 1

  # procedure...
  while stream do:
      pick random number in U(0,1)
      if random number < 1 / m: # with prob. 1/m accept replacement
          a_p <- A[m]
          r <- 1
      else if A[m] == a_p:  # increase r
          r <- r + 1
      end if
      m <- m + 1 # update m
  end while
  X <- m * (r^k - (r - 1)^k)  # compute X
  return X
```

Input file e premesse

Lo stream utilizzato dai programmi *ams_f0* ed *ams_f1* è stato generato tramite il programma "generate_stream", disponibile nella directory "stream_generator".

I programmi *ams_f0* ed *ams_f1* sono stati testati e progettati per funzionare con un file di input contenente una serie di numeri interi e non negativi, ognuno disposto su una riga e separata da un punto e virgola. È inoltre disponibile uno script di utility denominato "pulizia_stream.sh" che consente la rimozione di tutti i caratteri ad esclusione dei caratteri non numerici e del carattere separatore.

Esempio del formato del file di input:

```
11;
11;
19;
97;
8;
52;
54;
```

Makefile

Per semplificare la compilazione dei programmi, è stato progettato un **Makefile**, i comandi disponibili sono "make" ed "make clean".

Script di Pulizia (pulizia_stream.sh)

Lo script di pulizia è stato pensato per facilitare la fase preliminare della preparazione del file di input.

Uso dello script: ./pulizia_stream.sh [file_input] [file_output]

- Se non vengono passati argomenti, verranno utilizzati dei valori di default per file_input e file_output
- Se viene passato un solo argomento, verrà usato lo stesso argomento sia come file_input che come file_output
- Se vengono passati due argomenti, verranno utilizzati come file_input e file_output rispettivamente
- Viene inoltre effettuato un controllo sul numero di argomenti, il numero degli argomenti deve essere <= 2

Stream generator

Per generare lo stream utilizzato in questo lavoro è stato implementato in C++ un **generatore di numeri pseudo-casuali**. Questo generatore, disponibile nella directory "stream_generator", si occupa inoltre del salvataggio dello stream in formato CSV, con possibilità di salvare l'output anche in altre estensioni.

Nella stessa directory sono presenti due script di utility scritti in bash: "test_generatore.sh" e

"controllo_input.sh". Questi script hanno lo scopo di testare le combinazioni di input disponibili, verificando sia il corretto funzionamento delle opzioni disponibili che il corretto funzionamento dei meccanismi di controllo dell'input inserito da utente.

Le distribuzioni implementate per la generazione dei numeri sono le seguenti:

- uniforme
- esponenziale
- poisson

Usage

Il programma dispone di un opzione di usage, richiamabile tramite l'opzione -h, che stampa il seguente messaggio.

```
Utilizzo: ./generate_stream [-d distribuzione] [-l lambda] [-a min] [-b max]
                            [-n lunghezza] [-f file]
Il seguente programma genera uno stream di numeri pseudo-casuali,
     salvando il risultato in un file in formato CSV.
ATTENZIONE: Il seguente programma fornisce in output un file CSV di
    numeri interi, quindi per conservare le cifre decimali bisogna
    utilizzare l'opzione x
Le opzioni disponibili sono le seguenti:
  -h                Messaggio di aiuto
  -d distribuzione  Permette di specificare una distribuzione da usare: uniforme,
                                    esponenziale, poisson. Default = uniforme
  -l lambda         Permette di specificare il parametro lambda usato per le
                           distribuzioni esponenziale e Poisson. Default = 10
  -a min            Permette di specificare il limite inferiore per la
                                       distribuzione uniforme. Default = 0
  -b max            Permette di specificare il limite superiore per la
                                       distribuzione uniforme. Default = 100
  -n lunghezza      Permette di specificare la lunghezza dello stream.Default=200
  -x cifre          Permette di specificare il numero di cifre decimali da
                                                  mantenere. Default = 0
  -f file           Permette di specificare il nome del file CSV fino ad un
                                    massimo di 49 caratteri. Default = stream
  -e estensione     Permette di specificare l'estensione del file fino ad un
                                    massimo di 4 caratteri. Default = CSV
  NOTA - caratteri non accettati: spazi, stringhe vuote, stringhe con solo spazi,
                         caratteri speciali diversi da virgola, trattino e punto
```

Implementazione

La libreria getopt è stata utilizzata in modo da permettere l'utilizzo delle opzioni.

La funzione err_sys è stata implementata per gestire gli errori. Tale funzione ha lo scopo di mostrare a schermo un messaggio di errore descrittivo e di terminare l'esecuzione del programma.

Le funzioni "uniforme" e "esponenziale" sono state adattate per generare numeri interi. Il numero generato viene moltiplicato per 10^x, dove x è uno dei parametri modificabili, e successivamente troncato.

Sono stati eseguiti i seguenti controlli sull'input inserito dall'utente:

- Verificare che dopo i numeri (a, b, lambda, x ed n) non siano presenti lettere o altri caratteri non validi
- Verificare che la lunghezza dello stream e x siano un numeri interi e positivi
- Controllare che a,b e lambda siano numeri decimali positivi
- Verificare che i numeri decimali e interi (a, b, lambda, x e n) siano inferiori al valore massimo possibile.
- Controllare che b sia maggiore di a
- Verificare che l'input relativo alla distribuzione sia troncato per accettare massimo 12 caratteri
- Verificare che il nome del file sia più corto di 50 caratteri e che non contenga spazi, stringhe vuote, stringhe con solo spazi e caratteri speciali diversi da virgola, trattino e punto
- Controllare che il nome dell'estensione sia più corto di 5 caratteri

Implementazione della generazione dello stream:

```
// ---------------------- PSEUDO NUMBER GENERATOR ----------------------
int uniforme(std::default_random_engine& generator, double a, double b, int x) {
    std::uniform_real_distribution<double> distribuzione(a, b);
    double numero = distribuzione(generator);
    return static_cast<int>(numero * std::pow(10, x));
}

int esponenziale(std::default_random_engine& generator, double lambda, int x) {
    std::exponential_distribution<double> distribuzione(lambda);
    double numero = distribuzione(generator);
    return static_cast<int>(numero * std::pow(10, x));
}


double poisson(std::default_random_engine& generator, double lambda) {
    std::poisson_distribution<int> distribuzione(lambda);
    return distribuzione(generator);
}
```

```
// --- GENERAZIONE STREAM ---
for (int i = 0; i < n; i++) {
    switch (distribuzione) {
        case UNIFORME:
            // genero numero e salvo su file
            file << uniforme(generator, a, b, x) << "\n";
            break;
        case ESPONENZIALE:
            file << esponenziale(generator, lambda, x) << "\n";
            break;
        case POISSON:
            file << poisson(generator, lambda) << "\n";
            break;

    }
}
```

Momento k=0 0: F_0

Il momento di frequenza di ordine 0, ossia F_0, corrisponde al numero di elementi distinti di uno stream.
Alon et al., [1] per tale implementazione propone una modifica dell'algoritmo Flajolet-Martin [2] per calcolare F_0. La modifica consiste nell'introduzione di randomicità mediante l'uso di una funzione hash lineare del tipo $h(x) = ax + b$, permettendo di ottenere una stima F_0 utilizzando solo O(log n) bit di memoria per contenere l'informazione.

Sia definito il campo $F = GF(2^d)$, dove d è il più grande intero t.c. $2^d > n$. Siano a, b due numeri casuali definiti in F, si computi $z_i = a * a_i + b$, con prodotto e somma riferiti al campo F. La funzione z così definita fornisce un mapping pairwise independent [1].

Per ogni valore z_i viene determinato il numero di trailing 0s, denotato con $r(z)$. Sia R il massimo valore di r_i, dove $r_i = r(z_i)$.

L'output dell'algoritmo è dato da $Y = 2^R$.

Pseudocode

```
AMS_Frequency_Moment_0(A): # A stream
  // initialize...
  a, b random chosen

  // procedure...
  R <- (- inf)
  while(stream)
    z_i <- z(a_i)
    r_i <- r(z_i)
    R <- Max(r_i,R)
  end
  return 2^R

define z: z=a*x+b
define r: r calculate number of trailing 0s
```

Output

Il programma offre diverse opzioni di output:

- Stampa a schermo dei risultati, è possibile disabilitare questa opzione
- Salvataggio in un file in formato csv

AVVERTENZA: Il programma non crea automaticamente il file csv su cui salvare i risultati, pertanto bisogna assicurarsi dell'effettiva presenza del file.

L'output del programma consiste in una rappresentazione eelle seguenti variabili: stima del momento di ordine 0 e tempo di esecuzione in secondi dell'algoritmo.

File csv:

```
algoritmo,stima,esecuzione
ams,128,0.000087
```

Output del terminale:

```
AMS Frequency Moments - momento di ordine 0
Distinct item stimati: 128
Tempo di esecuzione: 0.000087 [s]
```

Usage

Il programma dispone di un opzione di usage, richiamabile tramite l'opzione -h, che stampa il seguente messaggio.

```
Utilizzo: ./ams_f0 [-f nome_file] [-p path] [-o output_file]
            [-d path_output_file] [-s separatore] [-q] [-h] [-n iterazioni]
Il seguente programma utilizza l'algoritmo AMS per stimare calcolare il
    numero di F0, il risultato verrà poi salvato in un file in formato CSV.
Le opzioni disponibili sono le seguenti:
  -h                   Messaggio di aiuto
  -f nome_file         Permette di specificare il nome del file da utilizzare
                                                      per il calcolo di F0.
  -p path              Permette di specificare il percorso del file da utilizzare
                                                      per il calcolo di F0.
  -o output_file       Permette di specificare il nome del file da utilizzare
                                                      per salvare i risultati.
  -d output_path       Permette di specificare il percorso in cui si trova il
                                                           file di output.
  -s separatore        Permette di specificare il carattere di separazione degli
                                      elementi utilizzati nel file di input.
  -q                   L'opzione quiet permette di sopprimere l'output a schermo.
ATTENZIONE: Il programma non crea in automatico il file di output, quindi
                        bisogna assicurarsi in anticipo della sua presenza.
```

Implementazione

La funzione err_sys è stata implementata per gestire gli errori. Tale funzione ha lo scopo di mostrare a schermo un messaggio di errore descrittivo e di terminare l'esecuzione del programma.

Il punto centrale dell'elaborazione dello stream avviene nel ciclo while. In questa fase l'algoritmo esamina e processa ogni elemento dello stream andando a calcolare il valore di R.

```
sprintf(formato_input, "%%d%c", separatore);
delta_t = -clock();

while (fscanf(file, formato_input, &a_i) == 1){   // lettura per riga
    if (a_i >= 0 && a_i <= INT_MAX) {     //  controllo validità valore
        z_i = z_hash(a, a_i, b);
        r_i = trailing_0s(z_i);
        R = max(R,r_i);
    } else {
        printf("Errore: Letto valore sconosciuto, il valore letto verrà
                                                              scartato");
    }
}

delta_t += clock();
delta_t = delta_t / CLOCKS_PER_SEC;  // tempo di esecuzione in secondi
// elevamento a potenza usando shift a sinistra di R posizioni
distinct_item_estimate = 1 << R;
```

Per il calcolo di 2^R si è utilizzato lo shift a sinistra, invece dell'utilizzo della libreria math. Questa opzione è stato resa possibile in quanto R è un numero intero (non negativo) e distinct_item_estimate è una potenza di due.

Per l'implementazione completa, si rimanda ad "ams_f0.c".

Controllo input utente

Per il controllo dell'input inserito da utente è stato fatto uso delle espressioni regolari in modo da limitare i caratteri inseribili.

Espressione regolare per i filename: `"^[a-zA-Z0-9_.-\\ ]+$"`
Espressione regolare per i path: `"^[a-zA-Z0-9_.-/\\ ]+$"`

```c
// utilizzo di strncpy per limitare i caratteri
strncpy(filename, optarg, MAXLENGTH - 1);
filename[MAXLENGTH - 1] = '\0';

// compilazione espressione
int result_compilazione_f = regcomp(&regex_function_filename, regex_filename,
                                                              REG_EXTENDED);
if (result_compilazione_f) {
  char error_mex[20],error_mex_output[100];
  regerror(result_compilazione_f, &regex_function_filename, error_mex,
                                                    sizeof(error_mex));
  sprintf(error_mex_output, "Errore durante la compilazione della regex
                                        per il filename: %s\t", error_mex);
  regfree(&regex_function_filename);
  err_sys(error_mex_output);
}

// controllo espressione regolare
int result_controllo_regex_f = regexec(regex_function_filename, optarg, 0,
                                                                NULL, 0);
if (result_controllo_regex_f){
 char error_mex[20],error_mex_output[100];
 regerror(result_controllo_regex_f, regex_function_filename, error_mex,
                                                    sizeof(error_mex));
 sprintf(error_mex_output, "Errore durante il controllodella regex per il
                                                filename: %s\t", error_mex);
 regfree(&regex_function_filename);
 err_sys(error_mex_output);
}

regfree(&regex_function_filename);  // libero memoria filename regex
```

Trailing 0s

La seguente funzione implementata in c calcola il numero di trailing 0s di un dato numero in input.
La funzione accetta solo valori interi non negativi.

La funzione incrementa un contatore "zeros" finchè il bit meno significativo è 0, restituendo

così il numero di trailing 0s.

```
int trailing_0s(int a_i) {

    int zeros = 0;
    while ((a_i & 1) == 0) {    // finchè il bit meno significativo è 0
        zeros++;    // counter trailing_0s
        a_i = a_i >> 1; // applico l'operazione bit a bit di spostamento a
                                        //          destra di 1 posizione
    }
    return zeros;
}
```

Hash function z

La funzione hash $z_i = a * a_i + b$ è stata implementata come segue

```
srand(3454256);  // seed
a = rand() % 9 + 1;  // [0;9]
b = rand() % 9 + 1;  // [0;9]
```

```
int z_hash(int a, int x, int b) {
    return a*x + b;
}
```

Migliorare la stima di F_0 tramite Median of Means

Per migliorare la stima di F_0 è possibile utilizzare la tecnica "Median of Means". Questa tecnica consiste nell'eseguire l'algoritmo con multiple funzioni hash, raggrupparne i risultati, calcolare la media e infine selzionare la mediana come stima finale.

Parametri usati nell'implementazione

- R: array contenente il numero massimo di trailing 0s per ogni funzione hash.
- a,b: array contenente i valori di a e b per ogni funzione hash.
- NHASH: numero di funzioni hash
- GROUHASH: numero di gruppi

Nell'implementazione sono state utilizzate 10 funzioni hash (NHASH) suddivise in 5 gruppi (GROUHASH).

L'implementazione è analoga alla precedente implementazione di F_0, con l'unica differente che ora R non è più un singolo valore ma corrisponde ad un array che memorizza il numero massimo di trailing 0s per ogni funzione hash.

```
while (fscanf(file, formato_input, &a_i) == 1) {
    if (a_i >= 0 && a_i <= INT_MAX) {
        for (int i = 0; i < NHASH; i++) {

            z_i = z_hash(a[i], a_i, b[i]);
            r_i = trailing_0s(z_i);
            R[i] = max(R[i], r_i);

        }
    }
}
```

Dopo aver determinato R, si passa al calcolo della stima.

Per calcolare la stima degli elementi distinti, si raggruppano i risultati in un numero di gruppi determinato da NHASH / GROUHASH, successivamente si calcola la media per ciascun gruppo.
Una volta colcolate le medie di ogni gruppo, si procede al calcolo della mediana delle medie, in modo da avere una stima finale degli elementi distinti.

```
for (int i = 0; i < NHASH; i++) {
    d_i_estimates[i] = 1 << R[i];
}

for (int i = 0; i < NHASH / GROUHASH; i++) {
    double sum = 0.0;
    for (int j = 0; j < GROUHASH; j++) {
        sum += d_i_estimates[i * GROUHASH + j];
    }
    means[i] = sum / GROUHASH;
}

double distinct_item_estimate = median(means, NHASH / GROUHASH);
```

Momento k=1: F_1

Il momento di frequenza di ordine k pari a 1 (F_1) corrisponde alla lunghezza dello Stream, ossia alla somma di tutte le frequenze degli elementi distinti.

Ricordando la definizione di X trattata prima: $X = m(r^k - (r-1)^k)$

Per il caso particolare di k=1, questa formula si riconduce ad un conteggio degli elementi dello stream. Di conseguenza, è sufficiente utilizzare un singolo contatore per tenere traccia della lunghezza di uno stream.

L'algoritmo utilizza un approccio probabolistico per stimare F_1: un elemento dello stream viene accettato con probabilità pari ad 1/m, con m = contatore della lunghezza dello stream, in questo caso viene incrementato il conteggio di m.

```
#include <stdlib.h>
unsigned int seed = 3454256;
srand(seed);

int m = 1;

sprintf(formato_input, "%%d%c", separatore);

delta_t = -clock();
while (fscanf(file, formato_input, &a_i) == 1){
  double p_i = (double)rand() / RAND_MAX;
  if (rand_num < 1.0 / m) {
    if (a_i >= 0 && a_i <= INT_MAX) { // se l'elemento è valido
        m++;
    } else {
        printf("Errore: Letto valore sconosciuto, il valore letto verrà
                                                                scartato");
    }
  }
}

delta_t += clock();
```

Come *ams_f0*, questa implementazione di ams_f1 implementa gli stessi controlli sull'input dell'utente.

Per l'implementazione completa, si rimanda ad *ams_f1.c*.

Output

ams_f1 offre le medesime opzioni di output di *ams_f0*:

- Stampa a schermo dei risultati, è possibile disabilitare questa opzione
- Salvataggio in un file in formato csv

AVVERTENZA: Il programma non crea automaticamente il file csv su cui salvare i risultati, pertanto bisogna assicurarsi dell'effettiva presenza del file.

L'output del programma consiste in una rappresentazione eelle seguenti variabili: stima del

momento di ordine 0 e tempo di esecuzione in secondi dell'algoritmo.

File csv:

```
algoritmo,stima,esecuzione
ams,157,0.000746
```

Output del terminale:

```
AMS Frequency Moments - momento di ordine 1
Lunghezza dello stream stimata: 157
Tempo di esecuzione: 0.000746 [s]
```

Usage

Il programma dispone di un opzione di usage, richiamabile tramite l'opzione -h, che stampa il seguente messaggio.

```
Utilizzo: ./ams_f1 [-f nome_file] [-p path] [-o output_file]
            [-d path_output_file] [-s separatore] [-q] [-h] [-n iterazioni]
Il seguente programma utilizza l'algoritmo AMS per stimare calcolare il numero
            di F1, il risultato verrà poi salvato in un file in formato CSV.
Le opzioni disponibili sono le seguenti:
  -h                   Messaggio di aiuto
  -f nome_file         Permette di specificare il nome del file da utilizzare
                                                        per il calcolo di F1.
  -p path              Permette di specificare il percorso del file da
                                        utilizzare per il calcolo di F1.
  -o output_file       Permette di specificare il nome del file da utilizzare
                                             per salvare i risultati.
  -d output_path       Permette di specificare il percorso in cui si trova
                                                    il file di output.
  -s separatore        Permette di specificare il carattere di separazione
                                  degli elementi utilizzati nel file di input.
  -q                   L'opzione quiet permette di sopprimere l'output a schermo.
ATTENZIONE: Il programma non crea in automatico il file di output, quindi
                           bisogna assicurarsi in anticipo della sua presenza.
```

Simulazione

L'obiettivo della simulazione consiste nel valutare le prestazioni degli algoritmi implementati, andando ad enfatizzare principalmente la memoria utilizzata, dato che l'algoritmo AMS si focalizza maggiormente sul risparmio di memoria.

La simulazione prevede l'esecuzione dei programmi con input di diversa dimensione (1000, 5000, 10000, 25000 e 50000 elementi) utilizzando diverse distribuzioni:

- Poisson con λ = 75, in modo da garantire un sufficiente numero di valori distinti.
- Esponenziale con λ = 1, i valori ottenuti sono moltiplicati per 10^3 prima di convertirli in interi, in modo da adattarsi meglio alla stima.
- Uniforme tra 0 e 200.

Per ciascun input, ogni algoritmo è stato eseguito 100 volte. Successivamente, sono state calcolate le mediane dei risultati in modo da ottenere delle stime più accurate.

Le metriche raccolte sono:

- Stima di F_k.
- Tempo di esecuzione (in secondi).
- Maximum RSS: Maximum Resident Set Size, ossia la massima memoria utilizzata dal programma.

Premesse
Per acquisire le informazioni necessarie circa le prestazioni dei programmi è stato fatto uso gnu-time (su mac).
Quindi, per eseguire la simulazione su mac è necessario installare gnu-time, per rendere disponibili informazioni come ‘Maximum resident set size’.

```
brew install gnu-time
```

Per avere delle metriche di confronto, sono stati implementati delle versioni naive degli algoritmi *ams_f0* ed *ans_f1*. Queste implementazioni utilizzano approcci più "naive" per il calcolo di F_0 ed F_1. Si basano sull'utilizzo di contatori senza particolare attenzione all'ottimizzazione della memoria utilizzata, andando di conseguenza ad utilizzare pi risorse rispetto alle loro varianti AMS.

I risultati dell'esperimento sono stati analizzati e visualizzati mediante l'utilizzo di notebook python. Questi notebook sono disponibili sia nella directory del progetto che su Kaggle o GitHub.

Macchina di test
L'esperimento è stato eseguito su un MacBook Pro con chip M3 Pro e 18 GB di RAM, SO: macOS Sonoma 14.6.1

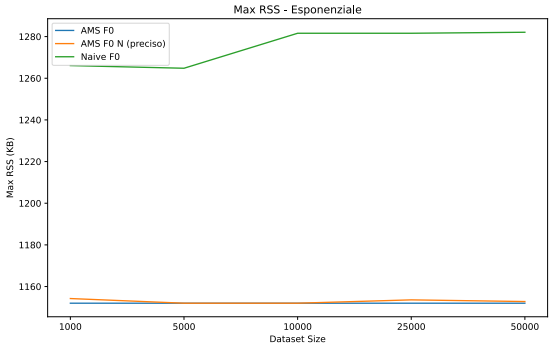
F0

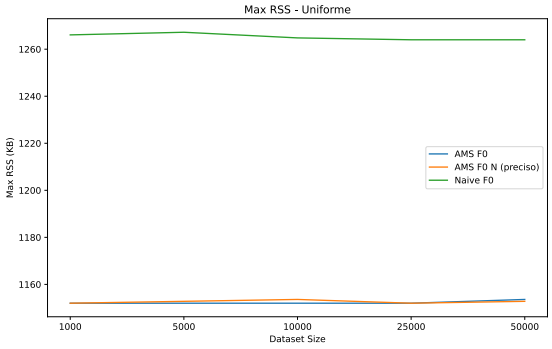
Maximum RSS

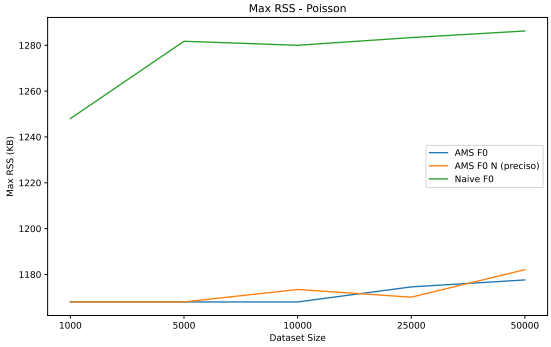
Gli algoritmi *ams_f0* e la sua variante precisa *ams_f0_n*, mostrano il comportamento atteso sull'utilizzo di memoria, con la variante Naive che presenta un utilizzo di memoria maggiore rispetto alle varianti AMS.
L'implementazione *ams_f0_n* (variamte più precisa di *ams_f0* tramite l'utilizzo della tecnica di Median of Means) riesce a mantenere un utilizzo di memoria simile rispetto alla sua variante standard.

Max RSS medi sono:

- ams_f0: 1152.1493 KB
- ams_f0_n: 1152.6186 KB
- naive_f0: 1256.7679 KB



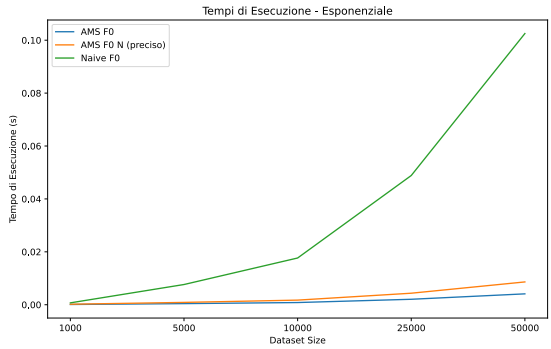


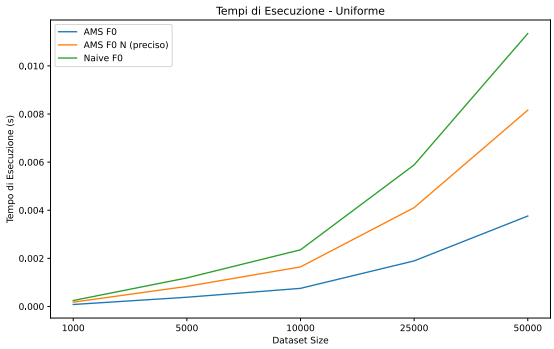


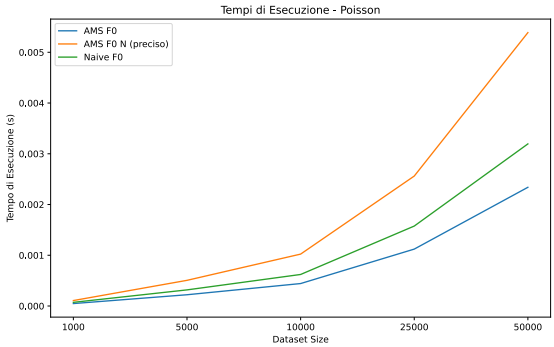
Tempi di esecuzione

Come atteso, l'implementazione ams risulta essere la variante più veloce mentre l'implementazione naive risulta essere la più lenta, ad eccezzione della distribuzione di poisson.

Nella ceso della distribuzione di poisson, i valori tendono ad essere concentrati su un intervallo ristretto ma con una varianza elevata. Per questo, *ams_f0_n* risulta essere la più lenta in questo caso, in quanto per via dell'elevata variabilità della distribuzione l'algoritmo deve gestire più collisioni aumentando così il tempo di esecuzione.

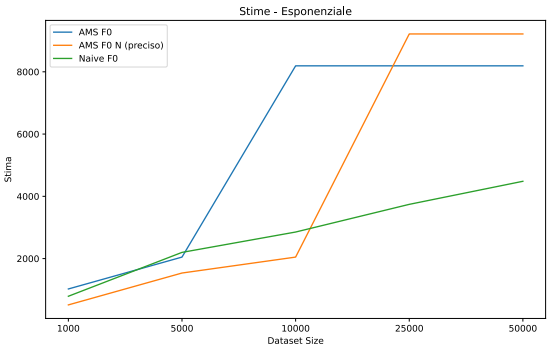


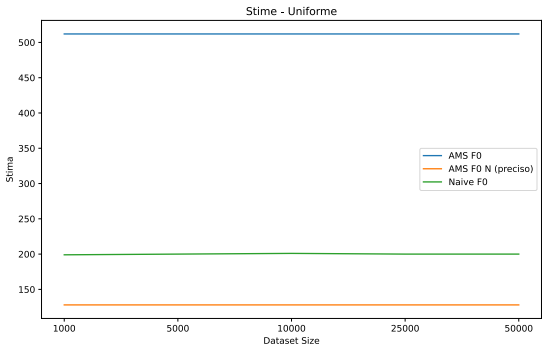


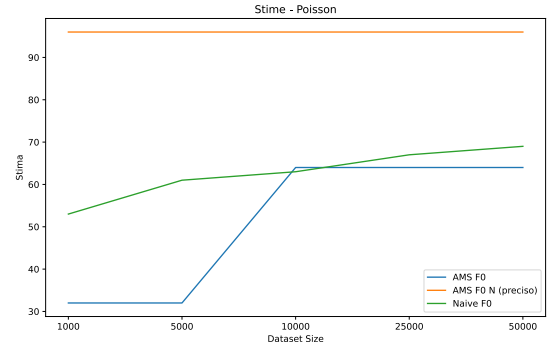


Stime

L'algoritmo naive, dato l'utilizzo di semplici contatori, fornisce delle stime reali di F_0. In dataset com una bassa variabilità della distribuzione, l'algoritmo *ams_f0_n* fornisce delle stime più precise di *ams_f0*. Tuttavia, questo beneficio viene a mancare nel caso di distribuzioni con una variabilità elevata.

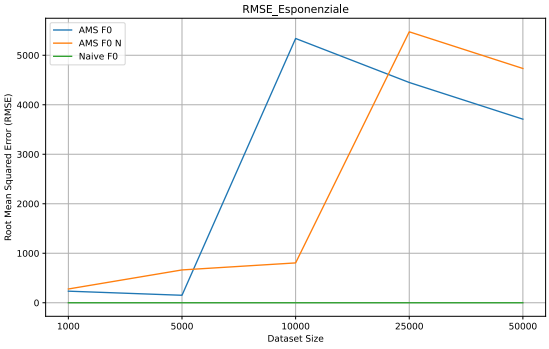


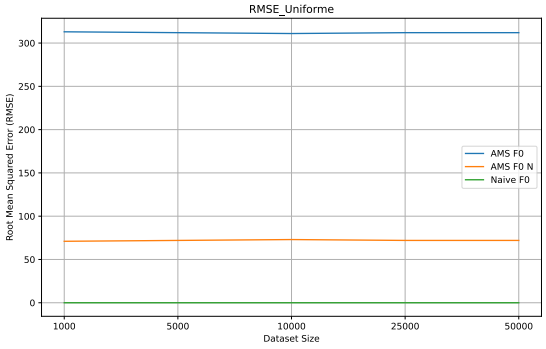


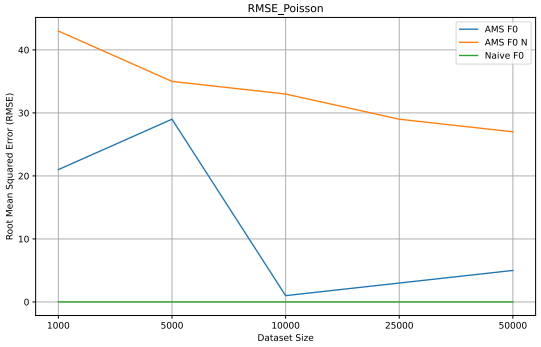


RMSE

I plot per il calcolo del RMSE sono disponibili su Colab.







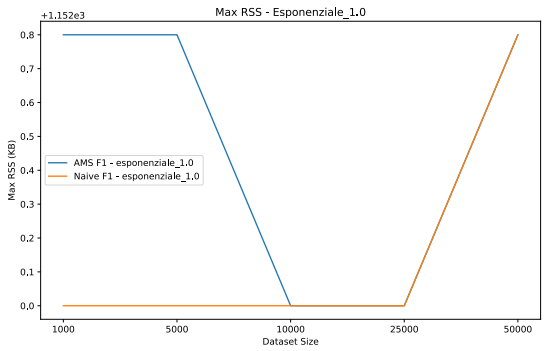
Dataset	AMS F0 Stima	AMS F0 RMSE	AMS F0 N Stima	AMS F0 N RMSE	Naive F0 Stima
Poisson 1000	53	21.0	50	43.0	53
Poisson 5000	59	29.0	55	35.0	61
Poisson 10000	64	1.0	62	33.0	63
Poisson 25000	65	3.0	66	29.0	67
Poisson 50000	69	5.0	67	27.0	69
Uniforme 1000	191	313.0	195	71.0	199
Uniforme 5000	187	312.0	193	72.0	200
Uniforme 10000	183	311.0	192	73.0	201
Uniforme 25000	188	312.0	193	72.0	200
Uniforme 50000	186	312.0	193	72.0	200
Esponenziale	520	234.0	486	278.0	790

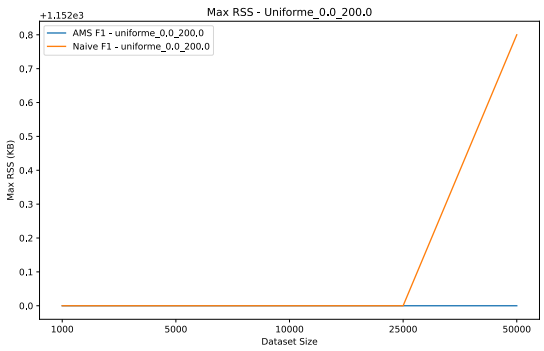
Dataset	AMS F0 Stima	AMS F0 RMSE	AMS F0 N Stima	AMS F0 N RMSE	Naive F0 Stima
1000					
Esponenziale 5000	1189	151.0	1734	663.0	2199
Esponenziale 10000	4115	5339.0	3547	805.0	2853
Esponenziale 25000	22351	4450.0	14939	5474.0	3742
Esponenziale 50000	13748	3709.0	16402	4733.0	4483

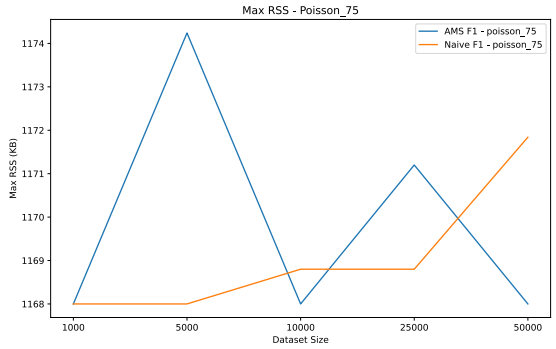
F1

Maximum RSS

La memoria utilizzata dall'implementazione AMS risulta essere simile all'implementazione naive, mostrando solo un leggero miglioramento per il dataset con maggiori dimensioni. Questo per risultato è in parte dovuto all'overhead di sistema ed ai bassi valori di input size. Per via delle basse dimensioni dei dati di input, l'overhead di sistema va a mascherare gli effettivi benefici dell'implementazione AMS.



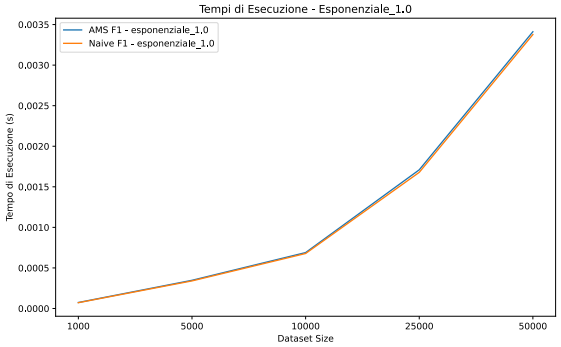


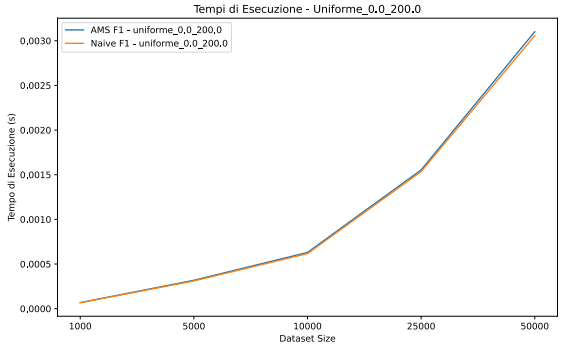


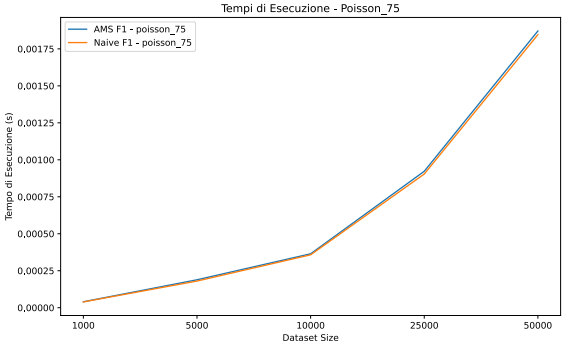
Per valutare l'effettiva bontà dell'algoritmo andiamo a considerare la memoria utilizzata considerando solo le variabili utilizzate per rappresentare la stima. Supponiamo che la lunghezza dello stream sia 10^9. L'algoritmo naive andrà ad utilizzare $10^9 * 4byte = 4GB$ di memoria.
L'implementazione *ams_f1*, invece, utilizza $log_2(10^9) \approx 30bit = 4byte$ di memoria, poichè la memoria richiesta cresce in maniera logaritmica rispetto alla lunghezza dello stream.

Tempi di esecuzione

L'implementazione AMS risulta avere tempi di esecuzioni in linea con l'implementazione naive. Questo risultato è in linea con le aspettative, in quanto AMS è progettato per fornire stime approssimative, che non richiedono il conteggio esplicito di ogni occorrenza, non introducendo quindi tempi di esecuzioni elevati.







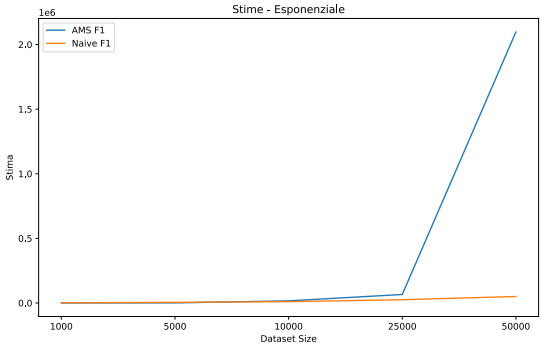
Stime

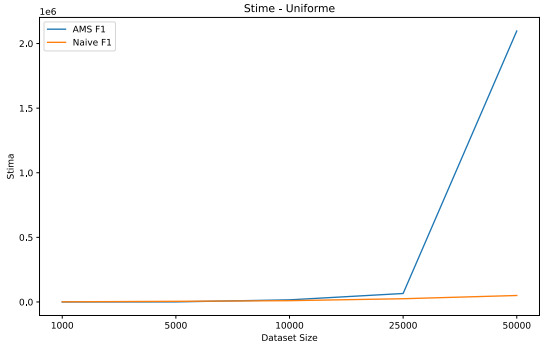
Come per Naive F0, anche Naive F1 fornisce una stima esatta di F_1, in quanto l'alggoritmo conta direttamente la frequenza di ogni elemento nello stream.
Invece, l'algoritmo AMS utilizza un approccio di campionamento probabilistico, che introduce ovviamente un certo errore nel calcolo della stima.

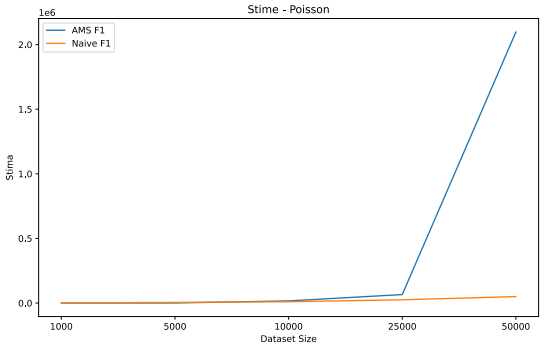
Durante l'implementaizione di AMS è emerso una problematica riguardante le stime per uno stream di piccole dimensioni, cioè il fatto che usare $\frac{1}{m}$ come frequenza di campionamento porta ad un aggiornamento troppo rapido del valore di m, portando ad un grande errore nelle stime. Questo errore teoricamente, si riduce all'aumentare della dimensione del stream, ma nel contesto della simulazione svolta, questo errore si è rivelato essere troppo grande per poter essere ignorato. Di conseguenza, per diminuire questo errore, è stato necessario modificare la frequenza di campionamento come segue:

> $p_i < \frac{1}{2m^3}$

Con questa modifica, la condizione di aggiornamento di m diventa più stringente, portando ad un aggiornamento più lento e un conseguente errore contenuto cosiderado la dimensione dello stream utilizzata nell'esperimento. Tuttavia, è importante sottolinare che questa modifica è stata applicata solo per via dalla natura dello stream preso in considerazione. In uno scenario applicativo reale, con stream di elevate dimensioni, queste restrizioni potrebbero non essere necessarie.







Dataset	AMS F1 Stima	Naive F1 Stima
Poisson 1000	128.0	1000.0
Poisson 5000	512.0	5000.0
Poisson 10000	16384.0	10000.0
Poisson 25000	65536.0	25000.0
Poisson 50000	2097152.0	50000.0
Uniforme 1000	128.0	1000.0
Uniforme 5000	512.0	5000.0
Uniforme 10000	16384.0	10000.0
Uniforme 25000	65536.0	25000.0
Uniforme 50000	2097152.0	50000.0
Esponenziale 1000	128.0	1000.0
Esponenziale 5000	512.0	5000.0

Dataset	AMS F1 Stima	Naive F1 Stima
Esponenziale 10000	16384.0	10000.0
Esponenziale 25000	65536.0	25000.0
Esponenziale 50000	2097152.0	50000.0

Lunghezza Stream	Potenza di 2 più vicina
1000	512 (2^9) e 1024 (2^{10})
5000	4096 (2^{12}) e 8192 (2^{13})
10000	8192 (2^{13}) e 16384 (2^{14})
25000	16384 (2^{14}) e 32768 (2^{15})
50000	32768 (2^{15}) e 65536 (2^{16})

Conclusioni e Potenziali Sviluppi futuri

In questo lavoro sono state esplorate diverse implementazioni dell'algoritmo AMS Frequency Moments, in particolare per il calcolo di F_0 ed F_1.
I risultati delle simulazioni mostrano che le varianti *ams_f0* ed *ams_f0_n*, che implementa la tecnica di Median of Means, riescono a mantenere un consumo di risorse basso. Tuttavia, le stime si sono dimostrate imprecise nel caso in cui la distribuzione dei dati di input presentino un elevata variabilità.

Per quanto riguarda *ams_f1*, sebbene i tempi di esecuzione siano simili alla variante naive, la variante ams mostra un leggero miglioramento in termini di memoria.

I risultati ottenuti mostrano diverse aree in cui è possibile migliorare e approfondire il lavoro svolto, offrendo diversi spunti per approfondire ulteriormente la tematica affrontata.

1. Migliorare la stima per distribuzioni ad elevata variabilità: esplorare tecniche e implementazioni avanzate per andare a gestire al meglio questa casistica.
2. Valutarne il comportamento per stream di enormi dimensioni: analizzarne il comportamento in queste condizioni è utile per far emergere ulteriori limiti

dell'implementazione e valutarne al meglio la scalabilità.

3. Parallelizzazione e Scalabilità: valutare la parallelizzazione dell'algoritmo potrebbe offrire significativi vantaggi in termini di stima e scalabilità o permettere la gestione di più stream in contemporanea.
4. Applicazione in contesti reali: analizzare il comportamento degli algoritmi in un contesto reale è utile per farne esaltare le criticità e opportunità di miglioramento.

Bibliografia

[1] Alon, N., Matias, Y., & Szegedy, M. (1999). The Space Complexity of Approximating the Frequency Moments. *Journal of Computer and System Sciences, 58*(1), 137-147. https://doi.org/10.1006/jcss.1997.1545

[2] P. Flajolet and G. N. Martin, "Probabilistic counting," 24th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1983), Tucson, AZ, USA, 1983, pp. 76-82, doi: 10.1109/SFCS.1983.46.