Università di Pisa

L'Equazione di Hamilton-Jacobi e il legame con la Meccanica Quantistica

Davide Chiego

14 Settembre 2023

Dipartimento di Fisica 'Enrico Fermi'
Università di Pisa
Relatore: Prof. D'Elia Massimo

Trasformazioni Canoniche

Una trasformazione nello spazio delle fasi

$$\begin{aligned} q_i &\to Q_i = Q_i(q, p, t) \\ p_i &\to P_i = P_i(q, p, t) \end{aligned}$$

è detta **canonica** se

$$\exists K(Q, P, t) \qquad t.c. \qquad \begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases} \qquad \forall i$$

Alla luce del principio di Hamilton (formulato nello spazio delle fasi)

$$\delta S[q(t), p(t)] = \delta \int_{t_A}^{t_B} \left(p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)\right) dt = 0$$

si mostra che ([1])

$$p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{dF}{dt}$$

dove F (nota come **funzione generatrice** della trasformazione) deve essere derivabile almeno due volte nelle coordinate (q o Q) e nei momenti (p o P).

L'evoluzione temporale finita

([4]) La trasformazione

$$q(t), p(t) \longrightarrow \begin{cases} Q = q(t=0) = q_0 \\ P = p(t=0) = p_0 \end{cases} \qquad \text{è canonica se } K(Q,P,t) \equiv 0$$

Per una funzione generatrice della forma $F = F_2(q, p_0, t)$

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \underbrace{\dot{p}_{0,i}}_{=0} \frac{\partial F_2}{\partial p_{0,i}} + \dot{q}_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

si ha

$$p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) = \frac{dF_2}{dt} \implies \boxed{p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}} \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

per cui infine

$$H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{!} \quad \frac{dF_2}{dt} = \dot{q}_i \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial q_i}}_{p_i} + \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial t}}_{-H} \equiv L(q, \dot{q}, t) \implies \boxed{F_2(q, t; p_0) = S_c[q(t)] + c_{q,t}}$$

Energia costante, separabilità e oscillatore armonico classico

Per i sistemi meccanici monodimensionali che realizzano

$$-\frac{\partial S_c}{\partial t} = H = \frac{p_c^2(x)}{2m} + V(x) \equiv E \qquad \forall t$$

possiamo cercare una soluzione della forma

$$S_c(x,t;E) = \underbrace{W_c(x;E)}_{\substack{\text{funzione}\\ \text{caratteristica}}} - Et \implies p_c(x) = \frac{\partial W_c}{\partial x} \implies \boxed{S_c(x,t;E) = \int^x p_c(x)dx - Et + c}$$

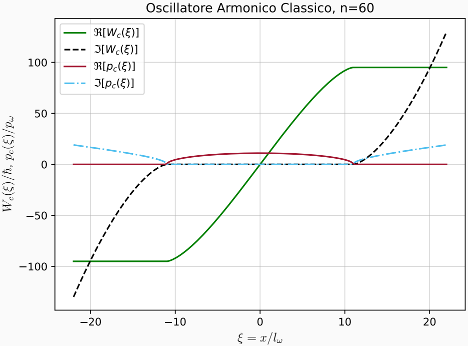
Per l'oscillatore armonico consideriamo

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

$$l_\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \qquad p_\omega = \frac{\hbar}{l_\omega}$$

$$p_c(\xi) = p_\omega\sqrt{2n+1}\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{2n+1}}$$

$$W_c(\xi) = \hbar\int_{\tilde{\xi}}^{\xi} \frac{p_c(s)}{p_\omega}ds + W_c(\tilde{\xi}) \longrightarrow$$



Inserendo la *ansatz* $\psi_E(x,t) = A\, e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t;E)}$ nell'equazione di Schrödinger, per hamiltoniani $\hat{H}$ non dipendenti dal tempo:

$$S(x,t;E) = W(x;E) - Et \implies \boxed{\frac{p_f^2}{2m} + V(x) - \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial p_f}{\partial x} = E} \qquad p_f(x;E) = \frac{dW}{dx}$$

punto di partenza per il metodo WKB.

Questo problema può anche essere risolto esattamente:
(torniamo all'oscillatore armonico)

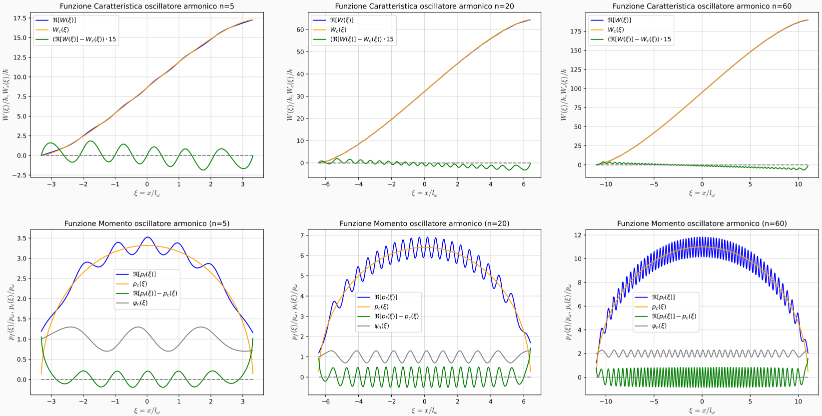
1. Per via analitica ([3]) (equazione di Riccati)

$$p_{f,n}(\xi) = \tilde{p}_{f,n}(\xi) - i\hbar\frac{d}{d\xi}\log\left(\int^{\xi}\frac{\exp(s^2)}{H_n^2(s)}ds\right) \qquad \tilde{p}_{f,n}^{h.o.}(\xi) = ip_\omega\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\log(H_n(\xi))\right)$$

2. Per via numerica ([2]): $W = \underbrace{\Re[W]}_{X} + i\,\underbrace{\Im[W]}_{Y}$ $\Downarrow$

$$\implies \begin{cases} 2X'\cdot X''' = 4\left(2n+1-\xi^2\right)X'^2 + 3X''^2 - 4X'^4 \\ Y(\xi) = \hbar\log\left(\sqrt{|X'(\xi)|}\right) \end{cases} \implies \boxed{\psi_E(x) = \frac{A}{\sqrt{|X'(x)|}}e^{\frac{i}{\hbar}X(x)}}$$

Risultati grafici e limite classico



Conclusioni

- Il limite di **grandi numeri quantici** $E_{n+1} - E_n \ll \mathcal{O}(E_n) \iff \hbar \ll \frac{\mathcal{O}(E_n)}{\omega}$ consente di visualizzare graficamente il senso del limite classico in termini delle soluzioni esatte dell'equazione "quantistica" di Hamilton-Jacobi;
- Le soluzioni p_f e W, risolvono esattamente il problema quantistico nella regione classicamente accessibile al moto (ed anche altrove [3], [2]); le autofunzioni sono scrivibili in una forma **WKB-like** e ciò conferma la corrispondenza $X(\xi)$ <-> $W_C(\xi)$ e $X'(\xi)$ <-> $W_c'(\xi) = p_c(\xi)$, che sappiamo essere soddisfatta nel limite semiclassico.

Referenze

M. D'Elia.
Lezioni di Meccanica Classica.
Pisa University Press, 2020.

M. Girard.
Numerical solutions of the quantum hamilton-jacobi equation and exact wkb-like representation of one-dimensional wave functions.
2014.

M. Girard.
Analytical solutions of the quantum hamilton-jacobi equation and exact wkb-like representation of one-dimensional wave functions.
2015.

H. Goldstein, C.Poole, and J.Safko.
Meccanica Classica.
Zanichelli, 2005.