Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript DGL 1.

1 Existenz-und Eindeutigkeitssätze

Sei $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $F : B \to \mathbb{R}^n\,, (t, \mathbf{x}) \mapsto F(t, \mathbf{x})$ eine stetige Funktion.

Definition 1. Sei U eine offene Teilmenge von B. Wenn eine Konstante $L \geq 0$ gibt, so dass

$$||F(t, \mathbf{v}) - F(t, \mathbf{u})|| \leq L \cdot ||\mathbf{v} - \mathbf{u}|| \qquad \forall (t, \mathbf{v}), (t, \mathbf{u}) \in U$$

gilt, sagt man dass die Funktion F auf U *Lipschitz-stetig bezüglich* $\mathbf{x}$ ist.
Wenn es um jeden Punkt $(t, \mathbf{x}) \in B$ eine Umgebung $U \subseteq B$, auf der F Lipschitz-stetig bzgl. $\mathbf{x}$ ist, heißt F *lokal Lipschitz-stetig bezüglich* $\mathbf{x}$.

Satz 2. *Wenn die Funktion $F : B \to \mathbb{R}^n$ nach der Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ stetig partiell differenzierbar ist, ist Fauf B lokal Lipschitz-stetig bzgl.* $\mathbf{x}$.

Satz 3 (Picard-Lindelöf)**.** *Sei $F : B \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl.* $\mathbf{x}$.
Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, \mathbf{x}_0) \in B$ genau eine maximale Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ (I offen, $t_0 \in I$) des AWP

$$\mathbf{x}' = F(t, \mathbf{x})\,, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0} \tag{1}$$

Bemerkung 4.
a) Eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ des AWP heißt *maximal*, wenn es keine Lösung $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ des AWP (1) gibt, mit $I \subset \tilde{I}$.

b) Wenn $F : B \to \mathbb{R}^n$ nur stetig ist, besitzt das AWP eine Lösung (Satz von Peano), aber diese ist nicht unbedingt eindeutig; z.B. $y' = \sqrt[3]{y^2}\,, y(0) = 0$ hat unendliche viele Lösungen.

Satz 5 (Linear beschränkte rechte Seite)**.** *Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $t_0 \in J$.*
Die Abbildung $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich $\mathbf{x}$.
Wenn es stetige Funktionen $\alpha, \beta : J \to [0, +\infty)$ gibt, so dass

$$||F(t, \mathbf{x})|| \leq \alpha(t) \cdot ||\mathbf{x}|| + \beta(t) \qquad \forall t \in J, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

gilt, dann existiert eine eindeutige Lösung von dem AWP (1) auf ganz J.

Bemerkung 6. Falls $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich $\mathbf{x}$ auf $J \times \mathbb{R}^n$ ist, existiert eine eindeutige Lösung des AWP (1) auf J.

Satz 7 (Randverhalten maximaler Lösungen)**.** *Sei $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des AWP (1). Falls $b < \infty$ ist, gibt es genau zwei Möglichkeiten:*

- *entweder ist $\varphi(t)$ auf dem Intervall $[t_0, b)$ unbeschränkt:* $\lim_{t \to b^-} |\varphi(t)| = \infty$*;*
- *oder der Rand ∂B von B ist nichtleer und es gilt* $\lim_{t \to b^-} \text{Abstand}((t, \varphi(t)), \partial B) = 0$.

Eine änliche Aussage gilt falls $a > -\infty$.

Bemerkung 8. Sei $F\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige und Lipschitz-stetige Funktion, und sei $\varphi\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der *autonomen* DGL $\mathbf{x}(t)' = F(\mathbf{x}(t))$. Falls der Grenzwert $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) =: \gamma \in \mathbb{R}^n$ existiert, ist γ eine konstante Lösung der DGL, d.h.$F(\gamma) = 0$.

2 Eindimensionale Lösungsverfahren

Sei $F : G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine stetige und lokal Lipschitz-stetige bzgl. x Abbildung und betrachte das Anfangswertproblem

$$x' = F(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \,. \tag{2}$$

Trennung der Variablen.

Wenn man F als Produkt $F(t,x) = g(t) \cdot h(x)$ mit stetigen Funktionen g, h darstellen kann, bekommt man die Differentialgleichung

$$x'(t) = g(t) \cdot h(x(t)) \,.$$

Falls $h(x_0) = 0$ hat das AWP die konstante Lösungen: $x(t) \equiv x_0$.
Falls $h(x_0) \neq 0$ ergibt sich durch "Bruchrechnung" eine Trennung der Variablen:

$$\frac{1}{h(x(t))} \cdot x'(t) = g(t) \,.$$

Sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ und G eine von g, so ist

$$H(x(t)) = G(t) + c \,, \qquad \text{wobei } c := H(x_0) - G(t_0) \,.$$

Wegen $H'(x(t)) = \dfrac{1}{h(x(t))} \neq 0$ kann man diese Gleichung lokal nach x auflösen und erhält die Lösung

$$x(t) = H^{-1}(G(t) + H(x_0) - G(t_0)) \,.$$

Variation der Konstanten.

Wenn man F als $F(t,x) = g(t) \cdot x + h(t)$ mit stetigen Funktionen $g, h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ darstellen kann, bekommt man die inhomogene lineare Differentialgleichung $x' = g(t) \cdot x + h(t)$.
Man löst man erst mit Trennung der Variablen die zugehörige homogene DGL $x' = g(t) \cdot x$:

$$x(t) = C \cdot e^{G(t)} \,, \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \,,$$

wobei G eine Stammfunktion zu g ist.
Um eine Lösungen der inhomogene Gleichung $y' = g \cdot y + h$ zu finden, macht man den Ansatz

$$x = C(t) \cdot e^{G(t)} \,,$$

den man als *Variation der Konstanten* bezeichnet. Es ist

$$x' = C'e^G + Cge^G = gx + C'e^G \qquad \Longrightarrow \qquad C' = he^{-G}$$

Man bestimmt die gesucht Funktion $C : I \to \mathbb{R}$ als Stammfunktion von he^{-G}.
Die maximale Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$ des AWP (2) ist dann durch die Formel

$$\phi(t) = e^{G(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s) e^{-G(s)} ds \right)$$

gegeben.

Picard-Lindelöf Iterationsverfahren

Sei φ_0 die konstante Funktion $\varphi_0(t) = x_0$ und

$$\varphi_k(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_{k-1}(s)) ds \,.$$

Dann konvergiert die Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf einer Umgebung von t_0 gleichmäßig gegen die Lösung des AWP (2).