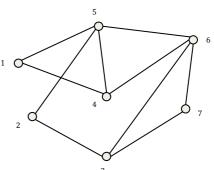
## OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA

## prova scritta del 6 febbraio 2015

- 1. Dire se il grafo qui a destra ammette o no una colorazione  $\chi: V \to \{\text{rosso, verde, blu}\}.$
- **2.** Costruire un insieme di disequazioni lineari fra *N* variabili le cui soluzioni in {0, 1}<sup>N</sup> definiscono la colorazione richiesta al punto 1. Dire come varia il numero *N* delle variabili scelte al crescere del numero dei vertici.



- 3. Quale delle seguenti affermazioni è vera e quale falsa?
  - a) Un matroide grafico può sempre essere rappresentato come un matroide vettoriale, e viceversa
  - b) Gli elementi massimali di un matroide partizione sono foreste ricoprenti di un grafo bipartito
  - c) Gli alberi ricoprenti un ciclo di *n* nodi e *n* archi sono in numero esponenziale in *n*
  - d) Gli alberi ricoprenti un grafo completo di *n* nodi sono in numero superiore a *n*!
  - e) Una base per un insieme V di vettori di IR<sup>n</sup> è un sottoinsieme di V formato da n vettori linearmente indipendenti
  - f) L'algoritmo Greedy garantisce un'approssimazione finita dell'ottimo di un generico problema di 0-1 KNAPSACK
  - g) Una matrice totalmente unimodulare deve necessariamente avere non più di due elementi pari a 1 per ciascuna riga (o colonna)
  - h) La matrice di incidenza fra archi e clique di un grafo simmetrico è totalmente unimodulare

vero	falso
vero	falso

4. Risolvere mediante programmazione dinamica il problema

min 
$$3x_1 + 5x_2 + 1x_3 + 2x_4$$
  
 $5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ge 11$   
 $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ , interi

specificando il DAG utilizzato per la soluzione.

5. Una macchina utensile deve eseguire una lavorazione su ciascuno dei 10 pezzi di un certo insieme P. La lavorazione del pezzo i ∈ P richiede la presenza sulla macchina di un certo insieme T<sub>i</sub> ⊆ {a, b, c, ...} di utensili. I vettori caratteristici degli insiemi T<sub>i</sub> sono dati dalle colonne della tabella a fianco. Cambiare un utensile richiede un tempo unitario, per cui ad esempio per passare dalla lavorazione del pezzo 1 a quella del pezzo 3 sono necessarie 2 unità di tempo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
а	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
b	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
С	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0
d	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
e	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0

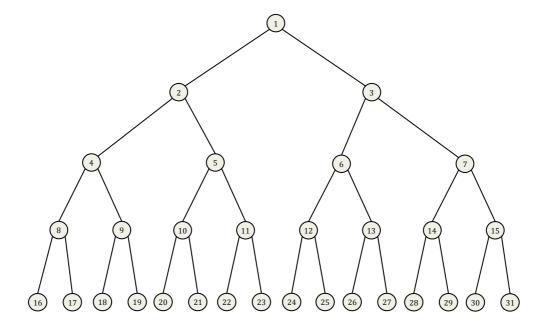
Formulare il problema di determinare la sequenza di lavorazione più breve. Suggerire un'euristica di soluzione specificando se (ed eventualmente perché) questa sia in grado di determinare una soluzione ε-approssimata.

**6.** Risolvete via branch-and-bound il seguente problema di 0-1 knapsack:

$$\max 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 9 x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

Usate lo schema di dicotomia mostrato in figura per mostrare:

- a) Una soluzione greedy calcolata alla radice (nodo 1), e il suo valore (che rappresenta una prima limitazione inferiore all'ottimo intero);
- b) Le limitazioni superiori  $z_k$  calcolate per rilassamento lineare in ciascun nodo k;
- c) La variabile scelta in ciascun branch;
- d) I valori a cui questa variabile è fissata a destra e a sinistra;
- e) I nodi chiusi per inammissibilità o per ottimalità.



7. Si vuole disporre il maggior numero possibile di cavalli sulla scacchiera 4x4 disegnata a lato in modo tale che nessun cavallo minacci nessun altro (nel senso del gioco degli scacchi). Formulate il problema come massimo insieme stabile su un grafo opportuno. Disegnate il grafo e descrivetene le proprietà salienti, specificando quali di queste possono eventualmente contribuire a ridurre la complessità del problema.

