Ex0: a mano

Exercice 11

1. Soit $k \geq 1$. On a que $\mathbb{P}\{X = k\}\mathbb{P}\{Y = k\} = p^2(1-p)^{2k-2}$.

2. On peut écrire $\{X = Y\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{\{X = k\} \cap \{Y = k\}\}$. C'est une union disjointe, donc en passant aux probabilités, on a que $\mathbb{P}\{X = Y\} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{\{X = k\} \cap \{Y = k\}\}$. Or X et Y sont indépendantes, ce qui nous permet d'utiliser la question précédente pour avoir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X = Y\} &= \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k-2} = \frac{p^2}{(1-p)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k} \\ &= \frac{p^2}{(1-p)^2}\left(\frac{1}{1-(1-p)^2} - 1\right) = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.\end{aligned}$$

3. On peut écrire que $\{Y > X\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{\{X = k\} \cap \{Y \geq k+1\}\}$. C'est une union disjointe, donc, en utilisant aussi l'indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}\{Y > X\} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{X = k\}\mathbb{P}\{Y \geq k+1\} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{X = k\}(1 - \mathbb{P}\{Y \leq k\}).$$

Or, on a aussi que $\{Y \leq k\} = \bigcup_{l=1}^{k} \{Y = l\}$. C'est une union disjointe, donc $\mathbb{P}\{Y \leq k\} = \sum_{l=1}^{k} \mathbb{P}\{Y = l\} = 1 - (1-p)^k$. D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y > X\} &= p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}(1-p)^k = p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k-2} \\ &= \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-(1-p)^2} - 1\right) = \frac{1-p}{2-p}.\end{aligned}$$

Pour calculer $\mathbb{P}\{\min(X,Y) \leq m\}$, on écrit que, par indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\min(X,Y) \leq m\} &= 1 - \mathbb{P}\{\min(X,Y) > m\} = 1 - \mathbb{P}\{X > m\}\mathbb{P}\{Y > m\} \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}\{X \leq m\})(1 - \mathbb{P}\{Y \leq m\}).\end{aligned}$$

Or on a déjà calculé précédemment $\mathbb{P}\{Y \leq k\}$, et comme X et Y ont même loi, alors

$$\mathbb{P}\{\min(X,Y) \leq m\} = 1 - (1-p)^{2m}.$$

Exercice 12

Montrons d'une part que $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a que $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \times \frac{(n-1)!}{\lambda^{n-1}}e^{\lambda} = \frac{\lambda}{n}$, d'où le résultat.

D'autre part, montrons $(ii) \Rightarrow (i)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\frac{p_n}{p_0} = \frac{p_n}{p_{n-1}} \times \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \times \ldots \times \frac{p_1}{p_0} = \frac{\lambda^n}{n!}$ donc $p_n = p_0 . \frac{\lambda^n}{n!}$. Or, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} p_0 \frac{\lambda^n}{n!} = 1 = p_0 e^{\lambda}$. Donc $p_0 = e^{-\lambda}$. Donc pour tout entier naturel n, $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ et donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 13

1. (a) La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10, p)$.

(b) Comme $X \sim \mathcal{B}(10,p)$, alors il existe des variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_{10}$ indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ telles que $X = \sum_{i=1}^{10} Y_i$. Or l'espérance de Y_i est $\mathbb{E}[Y_i] = 0 \times \mathbb{P}\{Y_i = 0\} + 1 \times \mathbb{P}\{Y_i = 1\} = p$ pour tout i.

Donc $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{E}[Y_i] = 10p = 10 \times 0,75 = 7,5$. Le tireur va donc, en moyenne, toucher la cible entre 7 et 8 fois.

2. (a) Soient $Z_1,\dots,Z_{10}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}\{Z_i = 1\} = 0,75$ et $\mathbb{P}\{Z_i = -2\} = 0,25$ pour tout i. Alors $Y = \sum_{i=1}^{10} Z_i$. On a alors que $\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{E}[Z_i]$. Or l'espérance de Z_i est $\mathbb{E}[Z_i] = 1 \times \mathbb{P}\{Z_i = 1\} - 2 \times \mathbb{P}\{Z_i = -2\} = 0,75 - 2 \times 0,25 = 0,25$ pour tout i. Donc $\mathbb{E}[Y] = 10 \times 0,25 = 2,5$.

(b) Pour que le jeu soit équitable (i.e. $\mathbb{E}[Y] = 0$), il faudrait que $10(1 \times \mathbb{P}\{Z_1 = 1\} + v \times \mathbb{P}\{Z_1 = v\}) = 0$, ce qui est équivalent à dire que $0,75 + 0,25v = 0 \Leftrightarrow v = -3$. Il faudrait donc qu'il perde 3 €.

Ex1

Exercice 14

find PDF

1. Soit h continue bornée.

— On a que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(\mathrm{e}^X)] &= \int_{\mathbb{R}} h(\mathrm{e}^x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} h(y)\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}\,\mathrm{d}y \text{ par le changement de variable } y = \mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

Donc e^X a pour densité $f_{\mathrm{e}^X} : y \mapsto \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln y)^2}{2}\right)\mathbb{1}_{]0;+\infty[}(y)$.

— On a que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(|X|)] &= \int_{\mathbb{R}} h(|x|)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} h(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}_-} h(-x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{\mathbb{R}_+} h(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Donc $|X|$ a pour densité $f_{|X|} : y \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(y)$.

— On a que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X^2)] &= \int_{\mathbb{R}} h(x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} h(y)\frac{1}{2\sqrt{2y\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y \text{ par le changement de variable } y = x^2.\end{aligned}$$

Donc X^2 a pour densité $f_{X^2} : y \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2y\pi}}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\mathbb{1}_{]0;+\infty[}(y)$.

2. — On a que

find E

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{e}^X] &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[x^2-2x]}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[(x-1)^2-1]}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\mathrm{e}}.\end{aligned}}$$

De plus,

$$\mathbb{E}[e^{2X}] = \int_{\mathbb{R}} e^{2x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2}[x^2-4x]}}{\sqrt{2\pi}} \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2}[(x-2)^2-4]}}{\sqrt{2\pi}} \, dx = e^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, dx = e^2.$$

Donc $\mathbb{V}(e^X) = \mathbb{E}[e^{2X}] - \mathbb{E}[e^X]^2 = e^2 - e$.

— On a que

$$\mathbb{E}[|X|] = 2 \int_{\mathbb{R}_+} x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Comme $X \sim \mathcal{N}(0;1)$, alors $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}[X] = 1$. Donc $\mathbb{V}(|X|) = 1 - \frac{4}{2\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi}$.

— On a déjà $\mathbb{E}[X^2] = 1$. Pour avoir $\mathbb{E}[X^4]$, on va utiliser la fonction caractéristique. Par le théorème de dérivation de Lebesgue, Φ_X est $\mathcal{C}^\infty$ et $\Phi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$. D'où $\Phi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$ et donc $\mathbb{E}[X^k] = (-i)^k \Phi^{(k)}(0)$.

Un calcul similaire aux précédents donne que $\Phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Par exemple, $\Phi'(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}}$ et $-i\Phi'(0) = 0 = \mathbb{E}[X]$. Donc, comme $\Phi^{(4)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(t^4 - 3t^2 - 3t + 3)$, on a alors que $\mathbb{E}[X^4] = 3$. Donc $\mathbb{V}(X^2) = 3 - 1 = 2$.

3. On peut déjà remarquer que pour tout n impair, $f : x \mapsto x^n \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ est une fonction impaire, et donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle. On en conclut que tous les moments d'ordre impair de X sont nuls.
Soit maintenant m_{2k} le moment d'ordre $2k$ de X, pour $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$m_{2k} = \int_{\mathbb{R}} x^{2k-1} \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, dx = (2k-1) m_{2k-2}$$

en utilisant une intégration par parties. Donc pour tout entier naturel non nul k,

$$m_{2k} = (2k-1) \times (2k-3) \times \ldots \times 1 = \frac{(2k)!}{2k \times (2k-2) \times (2k-4) \times \ldots \times 2} = \frac{(2k)!}{2^k [k \times (k-1) \times \ldots \times 1]} = \frac{(2k)!}{2^k . k!}.$$

Exercice 15

~~Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors la fonction de répartition $F_{\ln|X|}$ de $\ln|X|$ s'écrit $F_{\ln|X|}(t) = \mathbb{P}\{\ln|X| \leq t\} = \mathbb{P}\{|X| \leq e^t\} = \mathbb{P}\{-e^t \leq X \leq e^t\} = F_X(e^t) - F_X(-e^t)$.~~

~~Calculons maintenant F_X : $\mathbb{P}\{X \leq t\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}\right) = F_X(t)$. Il vient donc que $F_{\ln|X|}(t) = \frac{1}{\pi}(\arctan(e^t) - \arctan(-e^t))$. Donc, il suffit de dériver cette fonction pour avoir la densité $f_{\ln|X|}$ voulue : $f_{\ln|X|}(t) = \frac{2}{\pi} . \frac{e^t}{1+e^{2t}}$.~~

Exercice 20 Ex2

Soient C le centre du CD et X la distance de C à la lame la plus proche (en dehors de celle sur laquelle C se trouve). On a que X suit une loi $\mathcal{U}\left(\left[0; \frac{D}{2}\right]\right)$.

Soit E l'événement « le CD tombe à cheval sur deux lames ». Cet événement E se réalise lorsque $X \in \left[0; \frac{d}{2}\right]$. Donc $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left\{X \in \left[0; \frac{d}{2}\right]\right\} = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{2}{D}\,\mathrm{d}x = \frac{d}{D}$.