

Metodi Analitici

Davide Marchesi
A.A. 2021-2022

Contents

1	ODE	4
1.1	Esempi, Terminologia e Definizioni	4
1.2	Problema di Cauchy	7
1.3	Sistemi di ODE del 1 Ordine	9
2	Partial Differential Equations	11
2.1	Modelli Matematici	11
2.2	Derivazione dell'equazione di Diffusione	12
2.2.1	Proprietà e Problemi Ben posti	14
2.2.2	Unicità	15
2.2.3	Soluzione per Separazione delle Variabili	18
2.2.4	Proprietà della Soluzione dell'equazione di Diffusione [caso 1d]	24
2.2.5	Equazione di Diff. con Conservazione della Massa	26
2.3	Equazione di Laplace e Poisson	27
2.3.1	Problemi ben posti e Unicità	28
2.3.2	Laplaciano in Coordinate Polari	30
2.3.3	Altri Problemi con le Coordinate Polari	34
2.3.4	Proprietà delle Funzioni Armoniche	35
3	Introduzione ai F.E.M.	38
3.1	Soluzioni deboli (o variazionali) di PDE - 1d	38
3.2	Onde Trasversali in una Corda Tesa	43
3.2.1	Generalizzazione delle Equazioni Viste finora	46
3.3	Spazi di Hilbert	46
3.3.1	Completezza	47
3.3.2	Spazi con Prodotto Scalare	49
3.3.3	Teorema di Lax-Milgram	52
3.3.4	Spazi di Sobolev e Derivate Deboli	54
3.3.5	Formulazione Debole (o Variazionale) per Problemi Differenziali	55
3.4	Approccio ai Problemi Differenziali	56
3.4.1	Problema di Neumann	58
3.4.2	Problema Misto Dirichlet-Neumann	60
3.4.3	Riassunto delle leggi Utilizzate	61

List of Figures

1	soluzione del modello Verhulst	4
2	modello del pendolo	5
3	Grafici del modello SIR al variare dei coefficienti α, β	5
4	∞ soluzioni del pennello di Peano	7
5	Volume equazione di diffusione	13
6	Estensione della funzione $g(x)$ in serie di Fourier	20
7	Distribuzione di T a regime	23
8	Prolungamento in serie di Fourier di funzione discontinua a tratti	24
9	Modello di diffusione/trasporto (es. inquinante in un fiume)	26
10	Problema di Neumann in coordinate polari	34
11	Corona circolare in coordinate polari	34
12	Semicerchio in coordinate polari	34
13	Visualizzazione grafica dimostrazione principio del max.	36
14	Molteplicità delle soluzioni $u(x)$	39
15	Visualizzazione $h(x)$ e $v(x)$	41
16	Visualizzazione limite delta di Dirac	42
17	Visualizzazione onde trasversali	43
18	Formulazione di D'Alembert	46
19	Esempio per la completezza	48
20	Esempio per la completezza	49
21	Visualizzazione del teorema della proiezione	50
22	Integrale di Lebesgue	51

1 ODE

1.1 Esempi, Terminologia e Definizioni

Le Equazioni Differenziali Ordinarie (anche dette ODE) sono utilizzate in molti ambiti, da quello economico, passando a quello biologico, fino ad arrivare a quello medico, per descrivere vari tipi di fenomeni matematico-scientifici. Vediamone ora qualche esempio :

- **Malthus** , Dinamica delle popolazioni.

Siano : $N(t)$ gli individui della popolazione al tempo t , λ il tasso di natalità (ind. per unità di tempo), μ il tasso di mortalità (ind. per unità di tempo), $\varepsilon = \lambda - \mu$ il potenziale biologico. Il modello sarà allora :

$$\begin{cases} N'(t) = \varepsilon N(t); N(0) = N_0. \end{cases}$$

La soluzione sarà allora : $N(t) = N_0 e^{\varepsilon t}$.

- **Verhulst** , Modello Logistico.

Modello per cui si va a migliorare il modello di Malthus per la popolazione. Qui si ipotizza che una popolazione più numerosa comporti minori risorse, e di conseguenza faccia scendere il potenziale biologico. Si stima con una costante k la capacità dell'ambiente di sostenere la popolazione. Si ha allora :

$$\begin{cases} N'(t) = \varepsilon(1 - \frac{N(t)}{k})N(t) & \varepsilon > 0, k > 0, N(0) = N_0. \end{cases}$$

Soluzione : $N(t) = \frac{kN_0 e^{\varepsilon t}}{k - N_0 + N_0 e^{\varepsilon t}}$.

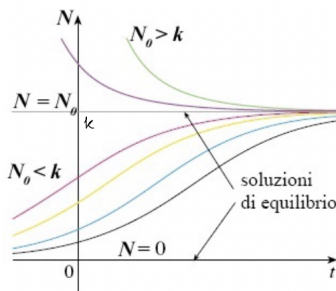


Figure 1: soluzione del modello Verhulst

- **Lotka-Volterra** , Modello preda-predatore.

Siano : $x(t)$ le prede , $y(t)$ i predatori. Allora il tasso relativo di crescita delle prede (in assenza di predatori) è a (costante), ma in presenza dei predatori decresce come by ; Al contrario i predatori decrescono in assenza di prede con costante c , ma cresce linearmente con le prede dx . Si ha allora :

$$\begin{cases} x' = (a - by)x; y' = (dx - c)y; C.I. \end{cases}$$

- **Caduta libera di un Corpo.**

$$\begin{cases} y'' = -g; y'(0) = v_0; y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si ottiene : $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

- **Osc. Armonico** , modello applicabile anche ad un sistema vibrante o ad un circuito LCR.

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0; y'(0) = v_0; y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si ottiene allora : $y'' + 2hy' + \omega^2 y = f(t)$.

(Nel caso di LCR : $LI'' + RI' + C^{-1}I = f(t)$).

- **Pendolo .**

Abbiamo le due equazioni :

$$\begin{cases} F_{px} = -mg \sin \theta; F_{py} = -mg \cos \theta. \end{cases}$$

Essendo poi : $F = ma$, e $mL\theta'' = -mg \sin \theta$;

E ancora : $\theta'' = -k \sin \theta$, e $k = \frac{m}{L}$.

Per piccole oscillazioni possiamo linearizzare il problema : $\sin \theta \sim \frac{x}{L} = \theta$.

(In caso contrario il problema è non lineare).

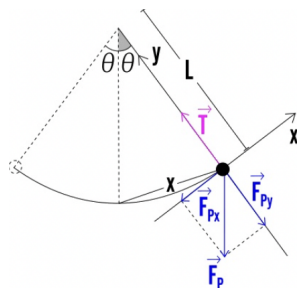


Figure 2: modello del pendolo

- **SIR** , Modello epidemiologico.

Poniamo : $S(t)$ suscettibili (non ancora infetti che lo possono essere), $I(t)$ infettivi, $R(t)$ rimossi (guariti e quindi immuni oppure morti). Per formulare il problema si fanno le seguenti ipotesi :

1. Ogni individuo si stima entri in contatto con mediamente βN individui, che quindi danno una probabilità non nulla di infettarli;
2. Il tasso di guarigione o morte è α (nell'unità di tempo);
3. $S(t) + I(t) + R(t) = N_0$;
4. Un caso passa da suscettibile a infettivo e da infettivo a rimosso .

Otteniamo allora il sistema :

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta IS; \\ I'(t) = \beta IS - \alpha I; \\ R'(t) = \alpha I; \\ C.I. \end{cases}$$

Vediamo graficamente le situazioni possibili con diverse costanti :

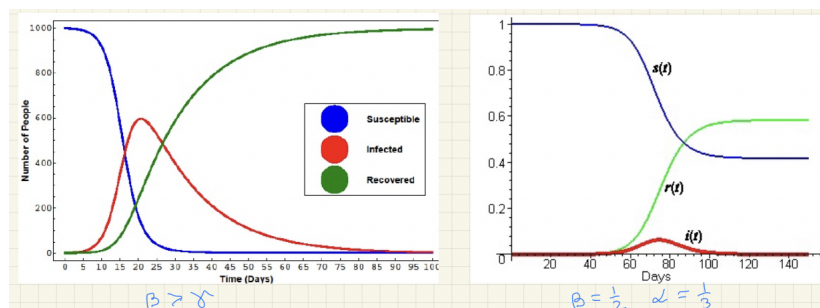


Figure 3: Grafici del modello SIR al variare dei coefficienti α, β

Concentriamoci ora su *Terminologia e Definizioni*.

Esprimiamo l'equazione differenziale ordinaria di ordine n come :

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad \text{t.c. } F : U(\subseteq \mathbb{R}^{n+2}) \mapsto \mathbb{R}$$

Con $y = y(t)$ funzione incognita.

Se possiamo esplicitare l'equazione rispetto alla derivata di ordine massimo, otteniamo allora la cosiddetta *Forma Normale* :

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad \text{t.c. } f : D(\subseteq \mathbb{R}^{n+1}) \mapsto \mathbb{R}$$

Forma Lineare : $a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = b(t)$;

Forma Autonoma : F non dipende esplicitamente da t , ma solo attraverso y, y', \dots .

Si dice **Soluzione** o **Integrale** dell'equazione , una funzione $\phi = \phi(t)$, definita e derivabile n -volte in $I \subseteq \mathbb{R}$, t.c. :

$$(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)) \in D$$

E che se si sostituisce $\phi(t)$ a y nell'ODE si ottiene identità $\forall t \in I$, cioè :

$$\phi^{(n)}(t) = f(t, \phi(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)) \quad t \in I$$

Sistemi di ODE Nei sistemi di ODE, come nel caso delle equazioni numeriche, l'ordine di un sistema è il prodotto degli ordini delle equazioni che lo costituiscono. Vedremo il caso particolarmente importante di sistemi formati da n equazioni del 1 ordine in forma normale, quindi con n funzioni incognite $(y_1(t), \dots, y_n(t))$, ovvero :

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)); \\ \dots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)). \end{cases}$$

Questo sistema potrebbe essere espresso anche in forma vettoriale esprimendolo come :

$$\bar{Y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)); \bar{F} = (f_1, \dots, f_n).$$

Il sistema allora diventerebbe : $\bar{Y}'(t) = \bar{F}(t, \bar{Y})$.

(La definizione di soluzione rimane analoga al caso dell'equazione).

Definiamo *Integrale Generale* l'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale; in generale è una famiglia dipendente da 1 o più parametri.

Noi ci concentreremo prevalentemente sullo studio di equazioni con condizioni aggiuntive (Al Contorno).

Per questo tipo di problemi allora, cercheremo i Pb. Ben Posti, ovvero quei problemi t.c. :

- \exists la soluzione ;
- La soluzione è unica ;
- La soluzione è stabile (dip. continua dai parametri) .

1.2 Problema di Cauchy

Guardiamo allora l'enunciato del Problema di Cauchy.

Problema di Cauchy : Per equazioni di ordine n cerchiamo quella soluzione $\phi \in \mathbb{C}^n(I)$, ovvero derivabile n -volte con continuità in I , che soddisfi il seguente sistema :

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)); \\ y(t_0) = \alpha_0; \\ y'(t_0) = \alpha_1; \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}. \end{cases}$$

Con : $t \in I \supset (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Ci chiediamo ora se il Pb. di Cauchy sia ben posto.

Al momento ci occupiamo dell'esistenza e unicità per le equazioni del 1 ordine.

Prendiamo come esempio la funzione che descrive il cosiddetto *Pennello di Peano* :

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}; y(0) = 0.$$

Si ha che : $\int \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy = \int dt + c \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = t + c$.

Cioè $y = (t + c)^3$; Considerando c avremo allora infinite soluzioni :

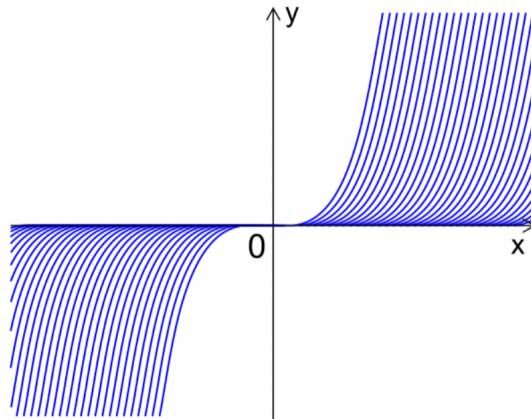


Figure 4: ∞ soluzioni del pennello di Peano

Facciamo ora delle osservazioni a riguardo :

- Oss.1 In questo esempio la funzione considerata è continua ;
- Oss.2 Se il problema di Cauchy è $y(0) = a \neq 0$, per $c = \sqrt[3]{a}$ unica soluzione ;
- Oss.3 Ho gli stessi problemi di non unicità per $y(t_0) = 0 \forall t_0 \in \mathbb{R}$. Quindi il problema è in $y = 0$, in quanto in questo punto la funzione risulta essere sì continua, ma non derivabile.

Guardiamo allora le condizioni che devo avere su f affinché il problema sia ben posto.

Che condizioni devo avere su f affinché si abbia unicità?

Definizione 1 $f : I(\subseteq \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ è detta **Lipschitziana** (che abbrevieremo d'ora in poi con Lip.) in I se $\exists L$, detta costante di Lip., t.c. :

$$\forall y, z \in I \quad \left| \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \right| \leq L$$

Il significato è che quindi i rapporti incrementali siano limitati (condizione più debole della derivazione).

Vediamo degli esempi di funzioni :

1. $f(y) = |y|$ è Lip. con $L = 1$;
2. Se f è derivabile con derivata limitata, allora f è Lip. con $L = \max|f'(y)|$ (consegua dal th. del valor medio) ;
3. $f(y) = y^{\frac{2}{3}}$ è Lip. in $[\epsilon, +\infty)$ o in $(-\infty, -\epsilon]$, $\forall \epsilon > 0$, ma non in $I \ni 0$.

(Oss. Potremmo affermare che una funzione $f(y)$ è Lip. per valori grandi di y se il grafico sta sotto una retta di coefficiente angolare $\pm L$).

Definizione 2 $f = f(t, y)$, $f : D(\subseteq \mathbb{R}^2) \mapsto \mathbb{R}$ è Lip. in D rispetto a y , uniformemente in t , se $\exists L$ t.c. :

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z| \quad \forall (t, y), (t, z) \in D$$

Definizione 3 $f = f(t, y)$ è localmente Lip. in D rispetto a y , uniformemente in t , se ogni punto $(t, y) \in D$ ha un intorno in cui è Lip. (L può dipendere dal punto).

Guardando un esempio :

$$f(t, y) = \frac{|y|^\alpha}{1 + t^2} \quad \alpha > 0$$

- Per $\alpha > 1$ f è localmente Lip. in \mathbb{R}^2 ;
- Per $\alpha = 1$ f è Lip. in \mathbb{R}^2 . Infatti :

$$|f(t, y) - f(t, z)| = \left| \frac{|y| - |z|}{1 + t^2} \right| \leq ||y| - |z|| \leq |y - z|$$

- Per $0 < \alpha < 1$, f è localmente Lip. in $\mathbb{R}^2 - \{y = 0\}$.

(Oss. Se $\exists \frac{\partial f}{\partial y}$ e $|\frac{\partial f}{\partial y}| \leq L$, dal th. del valor medio f è Lip. con costante L , in y , e uniformemente rispetto a t).

A questo punto abbiamo gli strumenti per enunciare il Th. di esistenza e unicità per il Pb. di Cauchy per equazioni del 1 ordine, ovvero :

$$\begin{cases} y' = f(t, y); \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Th. di Esistenza e Unicità Locale : Sia $f : D \mapsto \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Se :

- f è continua in D ;
- f è localmente Lip. in D , rispetto a y , uniformemente in t ;

Allora $\forall (t_0, y_0) \in D \exists I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, intervallo in cui è definita la soluzione del Problema di Cauchy $y = \phi(t)$, che risulta essere unica (Ogni altra soluzione coincide con ϕ nell'intersezione degli intervalli).

(Oss. se vale solo la prima ipotesi c'è esistenza ma non necessariamente unicità).

La dimostrazione non viene fatta, accenniamo solo al fatto che si basa sull'equivalenza tra :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y); \\ y(t_0) = y_0; \end{cases} \iff y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Guardiamo ora invece due esempi :

Es.1 Si consideri :

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t); \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Si può allora dimostrare che vale il teorema di esistenza e unicità locale per $D = I \times \mathbb{R}$, dove I è l'intervallo in cui $a(t)$ e $b(t)$ sono continue. Vediamo la dimostrazione :

$f(t, y) = a(t)y + b(t)$, prendiamo $(t_0, y_0) \in D$.

Sia $I' = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset I$. Allora in I' si ha $|a(t)| \leq M$.
 Presi $(t, y), (t, z) \in I' \times \mathbb{R}$, si ha :

$$\begin{aligned} |f(t, y) - f(t, z)| &= |a(t)(y - z)| \\ &\leq M|y - z| \quad \Rightarrow \quad \text{Lip. con } L = M \end{aligned}$$

Es.2 Si consideri :

$$\begin{cases} y' = y(t)h(y); \\ y(t_0, y_0) \end{cases}$$

Si può dimostrare che vale il teorema di esistenza e unicità locale in $D = I \times J$ dove $g(t)$ è continua in I e $h(y)$ è continua e Lip. in J . Vediamo la dimostrazione :

Essa è analoga a quella vista sopra, con $f(t, y) = g(t)h(y)$.

Prendiamo $h \in C^1(I)$ e $(t_0, y_0) \in D$, allora esistono I', J' intervalli chiusi, con $I' \subset I$ e $J' \subset J$. Si ha poi $|g(t)| \leq M$ in I' , e $|h(y)| \leq K$ in J' . Presi poi $(t, y), (t, z)$ in $I' \times J'$:

$$\begin{aligned} |f(t, y) - f(t, z)| &= |g(t)[h(y) - h(z)]| \leq M|h(y) - h(z)| \\ &\leq M \cdot K|y - z| \quad \Rightarrow \quad \text{Lip. con } L = MK \end{aligned}$$

1.3 Sistemi di ODE del 1 Ordine

Possiamo definire un sistema di ODE del 1 ordine nel seguente modo :

$$\begin{cases} \bar{Y}' = \bar{F}(t, \bar{Y}) \\ \bar{Y} = \bar{Y}(t) : I \mapsto \mathbb{R}^n; \bar{Y}(t_0) = \bar{Y}_0 \quad \bar{Y}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

La definizione di Lip. risulta essere analoga, ma ovviamente estesa al caso vettoriale : Definiamo Lip. in $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ rispetto a \bar{Y} , uniformemente in t , se $\exists L$ t.c. :

$$\|\bar{F}(t, \bar{Y}) - \bar{F}(t, \bar{Z})\| \leq L\|\bar{Y} - \bar{Z}\|$$

\forall coppie $(t, \bar{Y}), (t, \bar{Z}) \in D$, dove $\|\cdot\|$ indica la norma o modulo di un vettore.

(Proprietà : $\bar{F} = (f_1, \dots, f_n)$ è Lip. \iff $\text{lo sono anche } f_1, \dots, f_n$).

Guardiamo degli esempi :

Es.3 Consideriamo :

$$\bar{F}(t, \bar{Y}) = (y, \log t, \sqrt{y_1^2 + y_2^2})$$

E' localmente Lip. in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 = D$.

Poniamo : $f_1(t, y_1, y_2) = y_1 \log t$ $f_2(t, y_1, y_2) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$;

E ancora : $\bar{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ e $\bar{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} |f_1(t, \bar{Y}) - f_1(t, \bar{Z})| &= |\log t| |y_1 - z_1| \leq |\log t| \|\bar{Y} - \bar{Z}\| \\ &\leq M \|\bar{Y} - \bar{Z}\| \text{ se } t \in [a, b] \subset \mathbb{R}^+; \end{aligned}$$

$$|f_2(t, \bar{Y}) - f_2(t, \bar{Z})| = |\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - \sqrt{z_1^2 + z_2^2}| = ||\bar{Y}| - |\bar{Z}|| \leq \|\bar{Y} - \bar{Z}\|$$

$$\|\bar{F}(t, \bar{Y}) - \bar{F}(t, \bar{Z})\| \leq \sqrt{M^2 \|\bar{Y} - \bar{Z}\|^2 + \|\bar{Y} - \bar{Z}\|^2} = \sqrt{M^2 + 1} \|\bar{Y} - \bar{Z}\|$$

Th. di Esistenza e unicità locale : Sia $\bar{F} : D \mapsto \mathbb{R}^n$ con $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto. Allora se :

- \bar{F} è continua in D ;

- \bar{F} è localmente Lip. in D , rispetto a \bar{Y} , uniformemente in t ;

Allora $\forall (t_0, \bar{Y}_0) \in D$, $\exists I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ in cui è definita soluzione del problema di Cauchy $\bar{Y} = \bar{\phi}(t)$ (unica nel senso che ogni altra soluzione coincide con $\bar{\phi}$ nell'intersezione degli intervalli; si noti inoltre che se ho solo la prima ipotesi verificata, allora c'è esistenza ma non necessariamente unicità). (Esempio preda predatore).

Osserviamo ora il problema di Cauchy per ODE di ordine n in forma normale :

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)); \\ y(t_0) = \alpha_0; \\ y'(t_0) = \alpha_1; \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

Con $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ e $t \in I \supset (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Possiamo trasformare il problema di Cauchy per ODE di ordine n in un sistema di n equazioni in n incognite. Vediamo come :

Sia : $\bar{Y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$;

Poniamo allora : $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$; E ricaviamo il sistema :

$$\begin{cases} y'_1 = y_2; \\ y'_2 = y_3; \\ \dots \\ y'_{n-1} = y_n; \\ y'_n = f(t, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Con le condizioni di Cauchy che diventano : $y_1(t_0) = \alpha_0, \dots, y_n(t_0) = \alpha_{n-1}$.

(*Oss.* La soluzione dell'equazione differenziale in forma normale, è la prima componente della soluzione vettoriale vista qui sopra; Inoltre si sottolinea come esista una ed una sola soluzione all'equazione in forma normale, se e solo se esiste una ed una sola soluzione al sistema differenziale creato; Infine vediamo come le prime $n - 1$ componenti siano Lip. : è sufficiente chiedere f Lip.).

Facciamo un esempio di come trasformare un'equazione differenziale in un sistema di ODE di ordine 1 :

$$y''' = \sqrt{y'^2 + y''^2 + t^2} + \cos(y + t)$$

Si pongono allora : $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y''$. Si ottiene il sistema :

$$\begin{cases} y'_1 = y_2; \\ y'_2 = y_3; \\ y'_3 = \sqrt{y_2^2 + y_3^2 + t^2} + \cos(y_1 + t). \end{cases}$$

Da cui la risoluzione dell'equazione passa quindi per la risoluzione del sistema.

2 Partial Differential Equations

2.1 Modelli Matematici

I modelli matematici non sono altro che un insieme di equazioni e/o relazioni matematiche che descrivono un fenomeno catturandone le caratteristiche essenziali e la cui soluzione permette di controllare/prevederne lo sviluppo. Essi sono ovviamente utilizzati in moltissimi ambiti (STEM e non) come ad esempio: fisica, chimica, ma anche finanza, medicina, biologia, sport,... Come avviene la validazione di un modello matematico? Anzitutto bisogna osservare a livello teorico che il modello sia ben posto, ovvero che la soluzione esista, sia unica e sia stabile.

Fatto ciò il modello viene simulato numericamente, e di conseguenza se funziona, si dice che è stato validato sperimentalmente.

Gli esempi pratici delle simulazioni numeriche sono vari : studio della circolazione sanguigna nel corpo, progettazione di un mezzo (come una barca), studio sulla diffusione di un inquinante, e così via...

I modelli matematici sono generalmente costruiti a partire da 2 'mattoni' :

- **Leggi di carattere Generale** , ovvero leggi che non dipendono dal problema specifico che stiamo trattando (ex. leggi di conservazione di massa, di energia,...);
- **Relazioni Costitutive** , ovvero relazioni strettamente dipendenti dal problema che stiamo trattando (ex. la 'Legge di Hook' per una determinata molla, la 'Legge di Fourier' per la diffusione del calore,...).

Molto spesso un modello matematico risulta essere una equazione o un sistema di equazioni alle derivate parziali (in più variabili, come spazio, tempo,...).

In generale, una funzione incognita di più variabili, con x variabile spaziale fino a 3 dimensioni, e t variabile temporale, la scriveremo come :

$$F(t, x, y, z, u, u_t, u_x, \dots, u_{tt}, u_{tx}, \dots, u_{t\dots t}^{(k)}, \dots) = 0$$

E diamo anche qualche definizione :

- '*Ordine*' = massimo ordine di derivazione che appare in F (non tutte le variabili devono essere derivate per essere la funzione di un determinato ordine, ne basta una).
- '*Lineare*' = F è lineare in ' n ' e tutte le sue derivate (in poche parole deve essere una combinazione lineare di esse).

Vediamo ora alcuni esempi:

1. **Trasporto** : $u_t + \bar{V}(\bar{x}, t) \cdot \nabla_x u = 0$, è una equazione lineare del 1° Ordine che mi descrive ad esempio il trasporto di una sostanza in un fluido (come per esempio un inquinante), dove \bar{V} è la velocità della corrente, e $u = u(\bar{x}, t)$ è la concentrazione;
2. **Diffusione del Calore** : $u_t - D\Delta_x u = 0$ con $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), $t \in \mathbb{R}^+$ (del 2° ordine lineare) e con $\Delta_x u = \partial_{x_1 x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n x_n}^2$ operatore di Laplace, anche detto 'Laplaciano'. Essa mi descrive ad esempio la diffusione del calore in un corpo in diverse dimensioni;
3. **Laplace** : $\Delta u = 0$, equazione del 2° ordine lineare con $u = u(\bar{x})$, e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Essa mi descrive ad esempio il potenziale elettrostatico di un determinato corpo a regime, oppure della temperatura (in particolare l'equazione di Laplace se uguagliata ad una funzione ' f ' prende il nome di **Equazione di Poisson** : $\Delta u = f$);
4. **Onde** : $u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0$, equazione lineare del 2° ordine con $u = u(\bar{x}, t)$, e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), $t \in \mathbb{R}^+$. Essa rappresenta la propagazione di onde trasversali di piccola ampiezza ($n = 1$), delle membrane ($n = 2$), oppure delle onde sonore/elettromagnetiche ($n = 3$);

5. **Piastra Vibrante** : $u_{tt} - \Delta_x^2 u = 0$ equazione lineare del 4° ordine dove $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$. Essa rappresenta le piccole vibrazioni di una piastra omogenea ed isotropa;
6. **Kortevæg De Vries** : $u_t + cuu_x + U_{xxx} = 0$, equazione non lineare del 3° ordine con $u = u(\bar{x}, t)$ $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Essa descrive il caso di un problema non lineare legato allo studio di onde di superficie in acqua bassa, e che descrive la formazione di 'solitoni';
7. **Mezzi Porosi** : $u_t = k \operatorname{div}(u^\gamma \nabla u)$, equazione lineare del 2° ordine non-lineare con $k > 0, \gamma > 1, u = u(\bar{x}, t), \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, che descrive fenomeni di filtrazione dei fluidi (ad es. di acqua nel sottosuolo);
8. **Navier-Stokes** :
$$\begin{cases} \bar{u}_t + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \bar{u}; \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0; \end{cases}$$
 Sistema che mi descrive il moto di un fluido viscoso, omogeneo, incomprimibile (condizione incomprimibilità: $\operatorname{div} \bar{u} = 0$);

Che cosa si intende per *Problemi Ben Posti*?

Si intende che, essendo che una sola equazione ha infinite soluzioni, sono necessarie ulteriori informazioni per far sì che esista un'unica soluzione, per predire un comportamento o l'evoluzione di un fenomeno.

Tipicamente queste condizioni sono *Condizioni Iniziali* (CI), ovvero condizioni ad un certo istante di tempo t_0 , oppure delle *Condizioni al Contorno* (CC), ovvero sul bordo del dominio che stiamo considerando.

La *Teoria* si occuperà allora principalmente di studiare condizioni sul problema affinché esso abbia queste 3 caratteristiche (che lo riconducono alla 'buona posizione'): esista almeno una soluzione; la soluzione sia unica; ci sia dipendenza continua della soluzione dai dati (ovvero sia stabile).

Seppur esistano dei casi notevoli che possono essere risolti analiticamente, oggi la teoria è stata definitivamente soppiantata dalle soluzioni numeriche.

In particolare vedremo :

- *Eq. diffusione-Laplace/Poisson*, se siano problemi ben posti ed alcuni casi particolari, proprietà particolari delle soluzioni, stabilità delle soluzioni;
- *Eq. delle Onde*, cenni generali;
- *Eq. lin. del 2 ordine*, cenni su queste generiche funzioni;
- *Soluzioni variazionali*, formulazione debole (trattando essenzialmente il caso stazionario bi-dimensionale come se fosse una estensione delle soluzioni delle derivate parziali).

(L'unicità sarà osservata per tutti i problemi, per quanto invece riguarda l'esistenza, la vedremo solo per alcuni per costruzione e/o per casi particolari, così come solo per alcuni casi sarà osservata la stabilità).

2.2 Derivazione dell'equazione di Diffusione

Vedremo principalmente il modello per la diffusione del calore (non sarebbe l'unica applicazione). Vedremo la soluzione più generale in 3D (quindi in \mathbb{R}^3).

Le Ipotesi semplificative che facciamo sono :

- Corpo Rigido;
- Corpo Omogeneo ed Isotropo;
- Densità costante;

- Consideriamo che ci sia diffusione all'interno, ma che possa ricevere energia dall'esterno da fonti esogene (correnti, reazioni chimiche, irraggiamento,...), senza però preoccuparci della loro caratterizzazione e raggruppandole in un termine r (r = tasso di calore per unità di massa dall'esterno).

Procediamo prendendo un volume infinitesimo del corpo (non ne tocca il bordo), dove consideriamo ν la normale alla superficie (V = elemento di volume infinitesimo, invece ∂V = superficie dell'elemento infinitesimo).

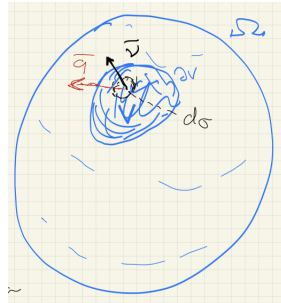


Figure 5: Volume equazione di diffusione

★ Legge di carattere generale

Conservazione dell'energia : il tasso di variazione dell'energia in V è uguale al flusso di calore attraverso al bordo ∂V al quale va aggiunto il tasso di calore fornito dalle sorgenti r . Definiamo allora :

$e = e(\bar{x}, t)$ energia interna del corpo,

l'energia in V è : $\int_V e(\bar{x}, t) \rho d\bar{x}$,

ed il tasso di variazione : $\frac{d}{dt} \int_V e(\bar{x}, t) \rho d\bar{x} = \int_V e_t \rho d\bar{x}$.

Descritta la variazione, introduciamo il flusso di calore \bar{q} , che sarà uguale alla direzione del flusso, ed alla sua velocità (\bar{q} è quindi una variabile vettoriale).

Considerando allora l'elemento di area $\partial\sigma$ con versore $\partial\nu$, la velocità con cui si fornirà calore sarà:

$$\bar{q} \cdot \partial\nu d\sigma$$

Da cui si ricava il flusso di calore del volumetto V :

$$-\int_{\partial V} \bar{q} \cdot \partial\nu d\sigma = -\int_V \operatorname{div} \bar{q} d\bar{x}$$

A cui aggiungendo le fonti esterne r , si ricava infine :

$$\int_V e_t \rho d\bar{x} = -\int_V \operatorname{div} \bar{q} d\bar{x} + \int_V r \rho d\bar{x}$$

Oss : Essendo che V è arbitrario in Σ (dove Σ indica la totalità del volume), allora vale senza integrale in Σ .

Si può vedere facilmente la dimostrazione che:

$$\text{Se } \int_{B_r(\bar{x}_0)} f(\bar{x}) d\bar{x} = 0, \quad f \in \mathbb{C}^0(\Sigma), \quad \forall B_r(\bar{x}_0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r\} \subset \Sigma,$$

Allora $f \equiv 0$ in Σ aperto.

Infatti se prendiamo $\bar{x}_0 \in \Sigma$ per r sufficientemente piccolo, $B_r(\bar{x}_0) \subset \Sigma$. (Per passaggi completi vedi il corollario 1.2 della dispensa 1). Quindi possiamo scrivere:

$$e_t \rho = -\operatorname{div} \bar{q} + r \rho$$

A questo punto aggiungiamo le

★ **Leggi Costitutive :**

- *Fourier* , il flusso è proporzionale al gradiente di temperatura ed è diretto da pti più caldi a pti più freddi, ovvero $\bar{q} = -k\nabla\theta$, con $\theta = \theta(\bar{x}, t)$ temperatura del corpo, e k conduttività termica caratteristica del materiale;
- *Energia Interna prop. alla T* , ovvero $e = c\theta$, con c calore specifico del materiale.

Queste condizioni, sostituendole, fanno sì che si abbia:

$$\begin{aligned}e_t\rho &= -\operatorname{div} \bar{q} + r\rho \\ \rho c\theta_t &= k\Delta\theta + r\rho \\ \theta_t &= \frac{k}{\rho c}\Delta\theta + \frac{r}{c} \\ \theta_t - D\Delta\theta &= f.\end{aligned}$$

Possiamo poi vedere i casi particolari di:

- $n = 1$, ovvero $\theta_t - D\theta_{xx} = f$;
- $n = 2$, ovvero $\theta_t - D\delta\theta = f$;

2.2.1 Proprietà e Problemi Ben posti

Principio di Sovrapposizione : $u_t - D\Delta u = f$, dove l'operatore di Diffusione (anche detto di Fourier) lineare, è tale che

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \rightarrow [\partial_t - D\Delta_x] \rightarrow \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$$

Con la condizione particolare che se l'equazione è omogenea ($f = 0$), l'insieme delle soluzioni di $u_t - D\Delta u = 0$ è spazio vettoriale.

Più in generale vale a dire che:

$$u(\bar{x}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) u_k(\bar{x}, t)$$

dove u_k è soluzione e $g(k) \rightarrow 0$ abbastanza rapidamente, allora $u(\bar{x}, t)$ è soluzione.

Vediamo ora l'esempio di un problema ben posto con $d = 1$, quindi in 1 **dimensione**. Si ha : $u_t - Du_{xx} = f$ $x \in (0, L)$ $t \in \mathbb{R}^+$, e si vuole studiare l'evoluzione della temperatura in tutti i punti (essenzialmente stiamo trattando una sbarra posta sull'asse x , che inizia in 0 e finisce in L).

Che condizioni devo porre?

→ Vedere la distribuzione della temperatura all'istante iniziale (Pb. di Cauchy), ovvero $u(x, 0) = g(x)$ $x \in [0, L]$ (solo questo però non basta!);

→ Condizione di temperatura controllata (Pb. di Dirichlet), ovvero

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \quad t \in [0, T].$$

→ Flusso agli estremi controllato (Pb. di Neumann) , ovvero

$$\begin{aligned} \text{In } x = 0 & \quad -ku_x(0, t) = C(t); \\ \text{In } x = L & \quad ku_x(L, t) = N(t). \end{aligned}$$

→ Radiazione (Pb. di Robin) , ovvero

$$\begin{aligned} -ku_x(0, t) &= \gamma(U - u(0, t)); \\ ku_x(L, t) &= \gamma(u(L, t) - U). \end{aligned}$$

→ Posso infine porre condizioni differenti all'estremo di dx e sx.

(Queste condizioni non vanno adottate tutte ovviamente, ma scegliere quelle più utili e consone al nostro problema in considerazione per completare le condizioni oltre a quella di *Cauchy*, che è sempre necessaria per ottenere la soluzione).

Quanto fatto in questo esempio per una dimensione, può essere ampliato su più dimensioni; guardando ora $d = 2, 3$, quindi bi- o tri-dimensionale

$$u_t - D\Delta u = f(x, t), \quad \text{definito in } \Sigma \text{ per } t \in (0, T],$$

con $\Sigma \in \mathbb{R}^{2(o3)}$ dominio aperto-connesso con $\partial\Sigma$ Regolare.

Dove si pone:

→ Problema di Cauchy , $u(\bar{x}, 0) = g(\bar{x}) \quad \bar{x} \in \bar{\Sigma}$;

A cui naturalmente si deve aggiungere una condizione al contorno tra

→ Dirichlet , $u(\bar{\sigma}, t) = a(\bar{\sigma}, t) \quad \bar{\sigma} \in \partial\Sigma$;

→ Neumann , $-\bar{q} \cdot \bar{\nu} = k\nabla \bar{u} \cdot \bar{\nu} = k\partial_{\bar{\nu}} u(\bar{\sigma}, t) = b(\bar{\sigma}, t)$;

→ Robin, $-\bar{q} \cdot \bar{n}u = \gamma(U - u) \Rightarrow \partial_{\gamma} u(\bar{\sigma}, t) + \alpha u(\bar{\sigma}, t) = \beta(\bar{\sigma}, t)$ con $\alpha > 0$;

→ Misto, dove possiamo scrivere $\partial\Sigma = \partial_D\Sigma \cup \partial_N\Sigma$ con $\partial_D\Sigma \cap \partial_N\Sigma = \emptyset$, e con $\partial_D\Sigma$ e $\partial_N\Sigma$ non vuoti;

2.2.2 Unicità

Considerando l'unicità cerchiamo soluzioni classiche, ovvero tutte le derivate sono 'coinvolte' in una funzione continua, e quindi

$$u \in \mathbb{C}^{2,1}(\Sigma \times (0, T))$$

Che significa che 2 derivate in \bar{x} e 1 in t sono continue all'interno, ed infine bisogna porre che

$$u \in \mathbb{C}^0(\bar{\Sigma} \times [0, T])$$

(Fare attenzione che una funzione continua all'interno, non è necessariamente continua sulla frontiera).

Oss : Per tutte le condizioni al contorno che abbiamo visto, vale il '*principio di Sovrapposizione*'.

Questa condizione ha una importante implicazione, ovvero che se le soluzioni u_1 e u_2 sono soluzioni dello *stesso problema* (con quindi anche gli stessi dati), la loro differenza $\tilde{u}(\bar{x}, t) = u^{(1)}(\bar{x}, t) - u^{(2)}(\bar{x}, t)$, risulterà essere soluzione del problema completamente omogeneo.

$$\text{Esempio per (CD): } \begin{cases} \tilde{u}_t - D\delta\tilde{u} = 0 & \Sigma \times (0, T]; \\ \tilde{u}(\bar{x}, 0) = 0 & \Sigma; \\ \tilde{u}(\bar{\sigma}, t) = 0 & \partial\Sigma \times (0, T]. \end{cases}$$

(Ed analogamente per (CN), (CR), (CM)).

Chiamiamo ora (CB) un generico problema di Cauchy-bordo (condizione al bordo generica),

$$\text{in generale : } \begin{cases} u_t - D\Delta u = f & \Sigma \times (0, T]; \\ u(\bar{x}, 0) = g & \bar{\Sigma}; \\ +C.C. \text{ tale che} & \partial\Sigma \times (0, T]. \end{cases}$$

Proposizione : Un problema (CB), ammette al più una soluzione \forall scelte dei dati *se e solo se* il problema corrispondente ha solo la soluzione identicamente nulla ($\text{sol} \equiv 0$).

Guardandone la dimostrazione :

\Rightarrow è ovvio;

\Leftarrow Se per un certo Pb. (CB) due soluzioni $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$, allora $\tilde{u} = u^{(1)} - u^{(2)}$ è soluzione del problema omogeneo, ma allora $\tilde{u} \equiv 0$, cioè $u^{(1)} = u^{(2)}$.

Quindi si ricava:

Th : UNICITA' per Pb. Omogeneo

Il (CB) omogeneo ammette solo la soluzione $\equiv 0$.

Oss. il teorema della divergenza è analogo al teorema fondamentale del calcolo integrale, in \mathbb{R}^d .

Infatti:

- \mathbb{R} ,

$$\text{div } f = \frac{df}{dx} = f'(x);$$

Con $\partial\Sigma = \{a, b\}$ e $\nu = -1$ in a , e $\nu = 1$ in b ;

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a);$$

Per l'int. per parti $(fg)' = f'g + fg'$;

$$\text{Che integrata risulta dare : } \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx;$$

Arrivando così al *Th. Fondamentale del calcolo Integrale* :

$$\underline{\int_a^b f'g dx = - \int_a^b fg' dx + (fg)|_a^b.}$$

- \mathbb{R}^d ,

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div} \bar{F} d\bar{x} = \int_{\partial\Sigma} \bar{F} \cdot \bar{\nu} d\bar{\sigma};$$

Osservando il caso di funzione scalare (quindi t.c. $\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$) :

$$\operatorname{div}(g\bar{F}) = \nabla g \cdot \bar{F} + g \operatorname{div} \bar{F};$$

$$\text{Che integrata risulta dare : } \int_{\Sigma} \operatorname{div}(g\bar{F}) d\bar{x} = \int_{\Sigma} \bar{F} \cdot \nabla g d\bar{x} + \int_{\Sigma} g \operatorname{div} \bar{F};$$

Da cui si ottiene il *Th. della Divergenza* :

$$\int_{\Sigma} g \operatorname{div} \bar{F} = \int_{\partial\Sigma} g \bar{F} \cdot \bar{\nu} d\bar{x} - \int_{\Sigma} \bar{F} \cdot \nabla g d\bar{x}.$$

Visto il teorema di integrazione per parti in \mathbb{R}^d , riprendiamo il teorema di unicità per il problema omogeneo.

Abbiamo visto che dimostrare l'unicità del problema significa dimostrare l'unicità del generico problema omogeneo (CBO), per cui ora scriviamo la dimostrazione :

$$(\text{CBO}) \quad \begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 & \Sigma \times (0, T]; \\ u(\bar{x}, 0) = 0 & \Sigma; \\ \text{condiz. al bordo} \equiv 0 & \partial\Sigma \times (0, T]; \end{cases}$$

Allora moltiplichiamo per u l'equazione, ed integriamo su Σ in $d\bar{x}$

$$\int_{\Sigma} u_t u d\bar{x} = \int_{\Sigma} Du \Delta u d\bar{x}$$

Proseguiamo chiamando il termine a sx dell'uguale come 'I', e quello a dx dell'uguale come 'II', e scriviamo allora:

$$I = \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2) d\bar{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} u^2(\bar{x}, t) d\bar{x};$$

$$\text{Con } \int_{\Sigma} u^2(\bar{x}, t) d\bar{x} = E(t) \quad \text{Energia al tempo } t \geq 0;$$

$$II = D \int_{\Sigma} u \operatorname{div} (\nabla u) d\bar{x};$$

Da cui per il Th. di integrazione per parti si ricava che :

$$II = D \int_{\partial\Sigma} u \partial_{\gamma} u d\bar{\sigma} - \int_{\Sigma} \|\nabla u\|^2 d\bar{x};$$

Per il problema di Neumann, Dirichlet, e misto dei due, l'integrale su $\partial\Sigma$ è tale da essere equivalente a $u \partial_{\gamma} u \equiv 0$.

Per Robin invece esso è $\partial_{\gamma} u = -\alpha u$ con $\alpha > 0$, allora si ricava che $u \partial_{\gamma} u = -\alpha u^2 \leq 0$. A questo punto però anche il secondo termine di II (quello con all'interno la norma), essendo sempre definito positivo, avendo un meno davanti darà un contributo negativo, e ciò porta a $II \leq 0$.

Essendo allora $II \leq 0$, dall'uguaglianza $I = II$, si ricava che anche $I \leq 0$, ed in definitiva che : $E'(t) \leq 0$.

Abbiamo usato finora le CC e le equazioni, ma non la condizione iniziale, che ora osserviamo :

$$E(0) = \int_{\Sigma} [u(x, 0)]^2 d\bar{x} = 0;$$

Ci troviamo allora davanti ad una funzione maggiore o uguale a zero, che non può mai crescere (derivata prima ≤ 0), e che parte da 0, allora avremo una funzione identicamente

nulla $E(t) = 0$, ovvero $\int_S \text{div} u^2 d\bar{x}$. Quindi $u^2 \equiv 0$, e $u(\bar{x}, t) \equiv 0$ come volevasi dimostrare.
(oss. La divergenza ci rappresenta una sorta di densità locale di flusso).

2.2.3 Soluzione per Separazione delle Variabili

Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet con Dirichlet omogeneo e dati omogenei (Cauchy la consideriamo genericamente anche non omogenea).

1-d, come detto con $f \equiv 0$ e dati di Dirichlet $\equiv 0$.

Consideriamo una sbarra di lunghezza $L = \pi$ per facilità di calcoli, quindi si avrà :

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & (0, \pi) \times (0, T] \\ u(x, 0) = g(x) & [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in (0, T) \end{cases}$$

Con le condizioni che $g \in C^0([0, \pi])$ e g sia continua agli estremi $g(0) = g(\pi) = 0$.

Andiamo allora inizialmente a trovare funzioni che formino una soluzione data solo dal prodotto tra una funzione della x ed una della t , che vedremo poi solo successivamente essere delle soluzioni generali del nostro problema.

- 1°step, Cerchiamo soluzioni della forma $v(x, t) = X(x)T(t)$, con

$$v_t = X(x)T'(t) \quad \text{e} \quad v_{xx} = X''(x)T(t)$$

Sostituiamo all'equazione

$$X(x)T'(t) = DX''(x)T(t)$$

(Supponendo il prodotto delle equazioni diverso da zero per rispettare la cond. di Cauchy).

A questo punto dividiamo per $DX(x)T(t)$, ed otteniamo :

$$\frac{T'(t)}{DT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda(x, t)$$

Dove il termine di sinistra dipende solo dalla t , e quello di destra solo dalla x , quindi la funzione generica λ non può dipendere nè dall'uno, nè dall'altro, e dovrà essere necessariamente costante.

- 2°step, Risolvere le due equazioni :

$$T'(t) = D\lambda T(t);$$

$$T(t) = \gamma e^{D\lambda t}. \quad (\text{con } \gamma \text{ costante arbitraria})$$

Ed allo stesso tempo

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

$$X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \text{ e } X(\pi) = 0$$

$$\begin{cases} X'' = \lambda x; \\ X(0) = X(\pi) = 0; \end{cases}$$

Particolare problema in X , chiamato problema ai limiti, dove quindi il valore della funzione non è all'istante iniziale, ma su più punti (non sempre ammette soluzione).

Cerchiamo di risolverla (ODE Lineare del 2° ordine a coeff. costanti) seguendo i 3 possibili casi ($u^2 = \lambda$) :

i) $\lambda > 0$ $u_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$, 2 rad. reali distinte.

Allora : $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$;

ed imponendo le condizioni $X(0) = X(\pi) = 0$ otteniamo :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ e^{\sqrt{\lambda}\pi} C_1 + e^{-\sqrt{\lambda}\pi} C_2 = 0; \end{cases} \quad \text{ovvero un sistema } 2 \times 2 \text{ con determinante t.c.}$$

$$e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi} \neq 0 \quad \text{per } \lambda > 0$$

Ciò sta a significare che per il teorema di Cramer esiste un'unica soluzione $C_1 = C_2 = 0$, quindi $X(x) \equiv 0$, soluzione banale (in inglese detta '*trivial solution*'), che non ci interessa.

ii) $\lambda = 0$ $u_{1,2} = 0$;

Quindi : $X'' = 0$, $X(x) = C_1 x + C_2$;

Ed imponendo le condizioni $X(0) = X(\pi) = 0$, si ottiene :

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1 \pi + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0, \quad \text{Non interessante, trivial solution.}$$

iii) $\lambda = -\omega^2 < 0$ $u_{1,2} = \pm i\omega$ radici complesse coniugate;

Allora : $X(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$;

Dove imponendo $X(0) = X(\pi) = 0$, si ha che :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ C_1 \cos \omega \pi + C_2 \sin \omega \pi = 0 \Rightarrow \sin \omega \pi = 0 \end{cases} \text{ Se } C_2 \neq 0, \text{ ovvero no sol. ban..}$$

Ciò è possibile se $\omega = n \in \mathbb{N}$.

Quindi possiamo dire di aver trovato ∞ soluzioni non banali del tipo :

$$X_n(x) = C_n \sin(nx) \quad \text{con } n \in \mathbb{N};$$

Che corrispondono a $\lambda_n = -n^2$ unici valori per cui esistono soluzioni non banali. Tornando alla soluzione del problema, ricaviamo che :

$$T_n(t) = \gamma_n e^{-Dn^2 t}$$

Quindi le infinite soluzioni saranno :

$$v_n(x, t) = b_n e^{-n^2 D t} \sin nx$$

Con $b_n = \gamma_n c_n$, e che soddisfano :

$$\begin{cases} (v_n)_t - D(v_n)_{xx} = 0 & (0, \pi) \times (0, T]; \\ v_n(0, t) = v_n(\pi, t) = 0 & t \in (0, T]; \end{cases}$$

(Nb. Mi manca però ancora la condizione di Cauchy, che ancora in generale non è soddisfatta.)

Oss. :

$$v^{(N)}(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{-n^2 D t} \sin nx;$$

E' ancora soluzione dello stesso problema (per princ. di sovrapposizione), e

$$v^{(N)}(x, 0) = \sum_{n=1}^N b_n \sin nx;$$

Quindi se $g(x)$ è un polinomio trigonometrico in soli seni ($g(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \sin nx$), ottengo la soluzione uguagliando i coefficienti ($\alpha_n = b_n$), ed inoltre questa soluzione è unica come già sappiamo.

Guardando l'esempio :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (0, \pi) \times (0, T] \\ u(x, 0) = 2 \sin 2x - \sin 3x & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in [0, T] \end{cases}$$

Sono nella situazione in cui $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $b_3 = -1$. Quindi la soluzione unica è

$$u(x, t) = 2e^{-4t} \sin 2x - e^{-9t} \sin 3x$$

Ci chiediamo allora cosa fare se $g(x)$ non è un polinomio trigonometrico in soli seni.

- 3°step , Se non funzionano combinazioni lineari finite, proviamo con combinazioni lineari infinite, ovvero proviamo ad utilizzare le '**Serie di Fourier**' (perchè usano termini trigonometrici).

Proviamo allora a scrivere $g(x)$ come serie di Fourier in soli seni. Ciò è possibile solo quando la funzione è periodica (condizione per scrivere la serie di Fourier) e dispari (condizione affinché la serie sia di soli seni).

Estendiamo allora la nostra funzione $g(x)$ ad una $\tilde{g}(x)$, t.c. quest'ultima sia dispari e periodica con periodo 2π .

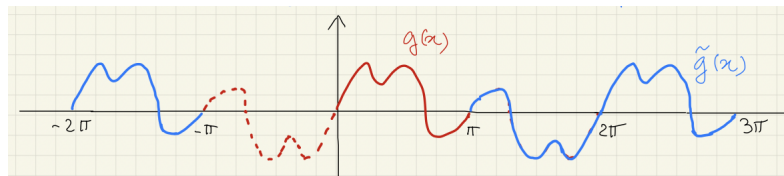


Figure 6: Estensione della funzione $g(x)$ in serie di Fourier

Quindi possiamo scrivere che :

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx$$

Dove ricordiamo che :

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx dx$$

(quest'ultima uguaglianza poichè $\tilde{g}(x)$ dispari, e $\tilde{g}(x) = g(x)$ in $[0, \pi]$).

La candidata soluzione allora sarà :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n^2 Dt} \sin nx$$

Affinchè però questa sia effettivamente una funzione, devo verificarne la convergenza, e la continuità di questa convergenza.

In termini matematici tocca verificare che :

$$u \in \mathbb{C}^{2,1}((0, \pi) \times (0, T)) \cap \mathbb{C}^0([0, \pi] \times [0, T]);$$

e che sia soluzione effettiva dell'equazione, cioè che

$$u_t - Du_{xx} = 0 \quad \text{e} \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0;$$

Ed infine sarà da dimostrare che

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = g(x)$$

Dalla dispensa 1, sappiamo che possiamo verificare che una serie converge ad una funzione continua nel momento in cui può essere maggiorata (*Th. di Weierstrass*).

Allora si può facilmente osservare che la serie converge nel momento in cui abbiamo $t > 0$, in quanto la serie è maggiorata da una esponenziale negativa, infatti :

$$\beta_n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty \quad \text{quindi per } n > N, \quad |\beta_n| < 1;$$

E si può quindi maggiorare la serie con :

$$|\beta_n e^{-n^2 Dt} \sin nx| \leq |\beta_n (\frac{1}{e^{nDt_0}})^n| \leq (\frac{1}{e^{Dt\sigma}})^n = q^n$$

(dove la prima disuguaglianza è dovuta al fatto che il val. ass. del 'sin' è maggiorato da 1, la seconda dal fatto che $n > N$, ed infine abbiamo il termine q che ci sta semplicemente ad indicare una serie generica convergente ($q < 1$)).

Inoltre usando il criterio del rapporto si può osservare che questa serie converga a zero anche se derivata un numero indefinito di volte; infatti si noti come derivando la serie si otterrebbe sempre la stessa serie iniziale, moltiplicata per una potenza di n sempre maggiorabile (genericamente $n^H (\frac{1}{e^{Dt_0}})^n$) moltiplicata alternativamente a 'sin' e 'cos'. Ciò allora implica che

$$u(x, t) \in \mathbb{C}^\infty([0, T] \times (0, +\infty));$$

Ovvero che l'equazione di Diffusione abbia un effetto regolarizzante portando ad appartenere ad una classe di funzioni \mathbb{C}^∞ .

Oss.1 Posso trattare una sbarra di lunghezza qualsiasi ($L \neq \pi$), tutto sarà uguale per sep. delle variabili tranne che $X(0) = X(L) = 0$ dove troverò che $\lambda = -\omega^2 < 0$, quindi

$$\omega = \frac{n\pi}{L} \quad \text{e} \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

e \tilde{g} sarà dispari e periodica di periodo $2L$.

Guardando ora un esempio :

$$\begin{cases} u_t - 2uxx = 0 & (0, 1) \times (0, +\infty); \\ u(x, 0) = x(1-x) & x \in [0, 1]; \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \in (0, +\infty); \end{cases}$$

Cerco allora soluzioni del tipo $v(x, t) = X(x)T(t)$, e sostituendo per $X(x)T(t) \neq 0$, si ottiene :

$$\frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Da cui si ottiene :

$$\begin{aligned} T'(t) &= 2\lambda T(t) \quad \Rightarrow \quad T(t) = e^{2\lambda t}; \\ X''(x) &= \lambda X(x) \quad \text{CON } X(0) = X(1) = 0 \quad \underline{\text{(importante)}}; \end{aligned}$$

Da queste condizioni si ricava che :

- i) Per $\lambda > 0$, come visto sopra si hanno solo sol. ban.;
- ii) Per $\lambda = 0$, come visto sopra si hanno solo sol. ban.;

iii) Per $\lambda = -\omega^2 < 0$, si ottiene :

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow C_1 = 0; \\ X(1) = 0 &\Rightarrow C_2 \sin \omega = 0 \Rightarrow \omega = n\pi; \end{aligned}$$

E quindi si ricava che :

$$\begin{aligned} X_n &= c_n \sin n\pi x; \\ T_n &= \gamma_n e^{-2(n\pi)^2 t}; \\ \lambda &= -n^2 \pi^2; \\ v_n(x, t) &= b_n e^{-2(n\pi)^2 t} \sin n\pi x \end{aligned}$$

Da cui :

$$u(x, t) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-2n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x;$$

E voglio :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x = x(1-x);$$

A questo punto sviluppiamo in serie di Fourier di soli sin l'estensione periodica dispari di $x(1-x)$ (che ricordiamo dover avere periodo $2L$, quindi in questo caso 2)

Si arriva allora a definire :

$$\beta_n = \frac{4[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^3}$$

(sviluppata a partire da $\beta_n = 2 \int_0^1 x(1-x) \sin n\pi x dx$)

Che nel caso di n -pari sarà uguale a zero, e nel caso di n -dispari sarà uguale a $\frac{8}{(n\pi)^3}$.

Quindi :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{[(2k+1)\pi]^3} e^{-2(2k+1)^2 \pi^2 t} \sin(2k+1)\pi x;$$

Oss.2 Per tutte le soluzioni $v_n(x, t)$ abbiamo visto che il limite per $t \rightarrow \infty$ è sempre 0, sia che parliamo di combinazioni lineari di esse (ovviamente), sia che stiamo trattando delle serie (per la sommatoria in n di... vale infatti il teorema di scambio di lim e \sum [come possiamo vedere dalla dispensa]). Ciò rispetta la realtà fisica dell'avvenimento, in quanto ci aspettiamo i pti più caldi di un corpo tendano a raffreddarsi e viceversa. (Il fatto che per $t \rightarrow \infty$ sia ammesso il limite e che sia zero è volendo dimostrabile.)

Oss.3 Problema di Dirichlet non nullo ma costante, ovvero con dato al bordo $\neq 0$, quindi t.c. :

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & (0, L) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) & [0, L] \\ u(0, t) = a & u(L, t) = b \times [0, +\infty) \end{cases}$$

(In questo caso affinché vi sia soluzione in \mathbb{C}^0 dovrò avere la funzione $g(x)$ continua in $[a, b]$ e con $g(0) = a$ e $g(L) = b$). Si osservi che quindi è come se avessimo gli estremi a due temperature differenti, una più alta ed una più bassa, ci aspettiamo allora che per $t \rightarrow \infty$, e quindi a regime, ci sia una distribuzione lineare.

Che sarà del tipo $r(x) = \frac{b-a}{L}x + a$.

Consideriamo allora di sottrarre la soluzione con distribuzione per far sì che tendendo ad infinito tenda ad un valore L .



Figure 7: Distribuzione di T a regime

Poniamo allora $v(x, t) = u(x, t) - r(x)$, che per il principio di Sovrapposizione soddisfa :

$$\begin{cases} v_t - Dv_{xx} = 0; \\ v(x, 0) = g(x) - r(x) = \hat{g}(x); \\ v(0, t) = v(L, t) = 0; \end{cases}$$

Quindi potrò risolvere il tutto per separazione delle variabili, ed una volta trovato v potrò ricavare u tramite :

$$u(x, t) = v(x, t) + r(x);$$

Oss.4 In realtà possiamo notare come nel procedimento di separazione delle variabili non abbiamo utilizzato la continuità di $g(x)$, e nemmeno le condizioni agli estremi, se non per garantire la sua sviluppabilità in serie di Fourier; quest'ultimo fatto è però possibile anche se la funzione è meno regolare. Un esempio concreto di ciò è la sviluppabilità di una generica funzione g con un n° finito di discontinuità a salto (materialmente è come se un corpo fosse definito da due temperature differenti delimitate bene a livello spaziale). Eccone un esempio :

Consideriamo una barra divisa a metà da due temperature differenti t.c.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (0, \pi) \times (0, T); \\ u(x, 0) = g(x) & [0, \pi]; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & [0, +\infty]; \end{cases}$$

Dove si ha che : $g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{\pi}{2}]; \\ 0 & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]; \end{cases}$

Usando come fatto finora la separazione delle variabili si ricaverebbe :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

Dove :

$$\begin{aligned} b_n = \beta_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx g(x) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx dx = \\ &= -\frac{2}{\pi n} \cos nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{2}{\pi n} [\cos n \frac{\pi}{2} - 1] \end{aligned}$$

Che alla fine di tutto sarà (essendo $\cos n \frac{\pi}{2} = 0$ per n dispari):

$$\begin{aligned} \text{Per } n \text{ Dispari} &\Rightarrow \frac{2}{\pi n}; \\ \text{Per } n = 2k &\Rightarrow -\frac{1}{\pi} [\cos k\pi - 1] = \frac{1}{\pi} [1 - (-1)^k] \end{aligned}$$

Essendo poi dalla teoria di Fourier che :

$$\bar{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sin nx$$

Allora $\bar{g}(x)$ sarà pari a $\tilde{g}(x)$ dove \tilde{g} è continua, e pari a $\frac{\tilde{g}(x^-) + \tilde{g}(x^+)}{2}$ dove essa ha discontinuità a salto. Quindi nel nostro esempio avremo discontinuità in $(0,0)$ ed in $(0, \frac{\pi}{2})$.

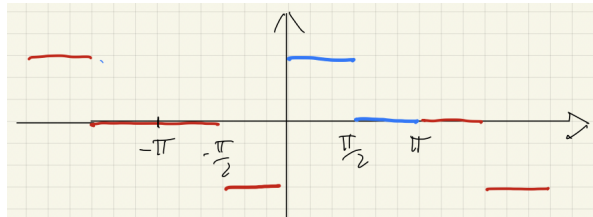


Figure 8: Prolungamento in serie di Fourier di funzione discontinua a tratti

Detto tutto ciò avremo quindi in $[0, \pi]$:

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi); \\ 0 & x = 0, \pi; \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

(Precisiamo in oltre che la funzione sarà continua in (x, t) in $[0, \pi] \times (0, T]$).

Oss.5 Problema di Neumann

In questo caso la differenza risiede nel fatto che otteniamo cos invece di sin (infatti dobbiamo avere $u_x = 0$ in 0 e L); Oltre a ciò avrò anche delle soluzioni costanti (non solo trivial solutions) per $\lambda = 0$. Notare che questa risoluzione deve avere $g(x)$ pari e periodica.

Oss.6 Equazione non Omogenea

Si può risolvere per separazione di variabili anch'essa, però nel solo caso particolare in cui la funzione $f(x, t)$ sia tale da essere il prodotto di una sola funzione di x per una sola funzione di t .

2.2.4 Proprietà della Soluzione dell'equazione di Diffusione [caso 1d]

Consideriamo il '**Principio del Massimo**' e '**Stabilità**'.

Prendiamo $u(\bar{x}, t)$ definita in $\bar{\Omega} \times [0, T]$ (soluzione equazione di diffusione).

Dato un problema di (CD), allora Cauchy assegna 'u' sulla faccia inferiore, mentre Dirichlet assegna valori sulla frontiera di $\Omega \quad \forall t$, quindi sulla superficie laterale del cilindroide.

Chiamiamo allora il cilindroide come $Q_T = \Omega \times (0, T)$;

Dirichlet mi definisce le condizioni sulla sola frontiera parabolica (non su tutta la frontiera), ovvero :

$$\partial_p Q_T = \Omega \times t = 0 \cup \partial\Omega \times [0, T];$$

Che viene definita *frontiera parabolica*, e dove quindi con Cauchy-Dirichlet assegnamo valori. In questo modo determino valori di u all'interno di Q_T e per $t = T$. Consideriamo ora il problema di (CD) in condizioni omogenee, ovvero senza alcun tipo di sorgente di calore (più in generale fonti esogene); in questo caso la '*Le Legge di Fourier*' suggerisce che max. e min. siano sulla frontiera parabolica (Nb. questo è un teorema generale).

Quanto detto sopra è il '**Principio del Massimo-Minimo**', che ora dimostriamo :

Sia $\omega \in \mathbb{C}^{2,1}(Q_T) \cap \mathbb{C}^0(\bar{Q}_T)$ t.c.

$$\omega_t - D\Delta\omega = q \leq 0;$$

Oss. Essendo che $q \leq 0$ allora significa che abbiamo qualcosa che sottrae calore, allora :

$$\max_{\bar{Q}_T} \omega(\bar{x}, t) = \max_{\partial_p Q_T} \omega(\bar{x}, t);$$

In particolare se $q \equiv 0$ valgono entrambe le forme del teorema.

Guardando la dimostrazione, supponendo che $q < 0$, per assurdo se la tesi fosse falsa, il pto di $\max (\bar{x}_0, t_0) \in Q_T$ oppure $\in \Omega \times t = T$ (che chiamiamo rispettivamente primo e secondo caso [I e II]).

- I) $(\bar{x}_0, t_0) \in Q_T$ pto di \max , allora dal 'Th. di Fermat' si avrebbe che $\omega_t(\bar{x}_0, t_0) = 0$, essendo il pto interno ed essendo $\omega \in \mathbb{C}^1$ rispetto a t . Però $\omega \in \mathbb{C}^2$ in \bar{x} , ed il '*Criterio dell'Hessiana*' mi dice che $H_{\bar{x}}\omega(\bar{x}_0, t_0)$ è definita o semi-definita negativa, ovvero che i suoi autovalori λ_i sono ≤ 0 ; quindi, poichè :

$$\sum_{\lambda=1}^n \lambda_i = Tr H_{\bar{x}}\omega(\bar{x}_0, t_0) \leq 0;$$

Si ha che $Tr H_{\bar{x}}\omega = \Delta\omega$, e quindi :

$$Tr H_{\bar{x}}\omega(\bar{x}_0, t_0) = \Delta\omega(\bar{x}_0, t_0) \leq 0;$$

Da cui infine :

$$\omega_t(\bar{x}_0, t_0) - D\Delta\omega(\bar{x}_0, t_0) \geq 0;$$

Che contraddice il fatto che $q < 0$ (Ipotesi iniziale).

- II) Se il pto di \max è (\bar{x}_0, T) , allora ho che $\omega_t(\bar{x}_0, T) \geq 0$ e ancora che $\Delta\omega(\bar{x}_0, T) \leq 0$, che implica :

$$\omega_t(\bar{x}_0, T) - D\Delta\omega(\bar{x}_0, T) \geq 0;$$

Che non fa altro che contraddirmi l'ipotesi iniziale di $q < 0$.

Quindi vediamo come in entrambi i casi venga contraddetta l'ipotesi iniziale di $q < 0$ (se si fosse dovuto dimostrare per $q \leq 0$ avremmo dovuto fare un po' più di lavoro, usando una soluzione perturbata). Guardiamo ora i vari Corollari : *Corollario 1*, Se $\omega \in \mathbb{C}^{2,1}(Q_T) \cap \mathbb{C}^0(\bar{Q}_T)$ e se $u_t - D\Delta u = 0$ in Q_T , allora si ha che :

$$\min_{\partial_p Q_T} u(\bar{x}, t) \leq u(\bar{x}, t) \leq \max_{\partial_p Q_T} u(\bar{x}, t);$$

E quindi che :

$$|\omega(x, t)| \leq \max_{\partial_p Q_T} |\omega| \quad \forall (x, t) \in Q_T;$$

Quindi questo corollario mi dà unicità per (CD), perchè mi dà unicità per problemi con dati tutti omogenei (formulazione alternativa dell'unicità per il problema di (CD)). In poche parole il corollario ci dice che :

$$0 \leq u(\bar{x}, t) \leq 0 \quad \text{ovvero che} \quad u(\bar{x}, t) \equiv 0$$

Corollario 2, siano $v, w \in \mathbb{C}^{2,1}(Q_T) \cap \mathbb{C}^0(\bar{Q}_T)$ e $v_t - D\Delta v = f_1$ e $w_t - D\Delta w = f_2$, con f_1, f_2 limitate in Q_T , allora ricavo che :

- a) Se $v \geq w$ su $\partial_p Q_T$ e $f_1 \geq f_2$ in Q_T , allora $v \geq w$ su tutto \bar{Q}_T ;

- b) $\max |v - w| \leq \max_{\partial_p Q_T} |u - w| + T \max_{Q_T} |f_1 - f_2|$;

In questo caso possiamo fare delle osservazioni : b) mi dà stabilità per (CD), infatti supponendo che :

$$\begin{aligned} v(\bar{x}, 0) &= g_1, \quad \omega(\bar{x}, 0) = g_2, \quad \text{t.c. } \max_{\Omega} |g_1 - g_2| \leq \epsilon \\ &\text{e che } f_1, f_2 \quad \text{t.c. } \max_{\bar{Q}_T} |f_1 - f_2| \leq \epsilon \\ &\text{e che } h_1, h_2 \quad \text{t.c. } |h_1 - h_2|_{\partial\Omega \times (0, T)} \leq \epsilon \end{aligned}$$

Allora si ricava che :

$$|v - \omega| \leq \epsilon + T\epsilon = (1 + T)\epsilon \quad \text{in } \bar{Q}_T$$

A cui quindi si arriva alla condizione di stabilità.

2.2.5 Equazione di Diff. con Conservazione della Massa

Problema utilizzato per studiare la diffusione/trasporto. Usiamo un modello per ‘Concentrazione’, ovvero :

$C = C(x, t_0)$, che dimensionalmente risulta essere massa/lunghezza.

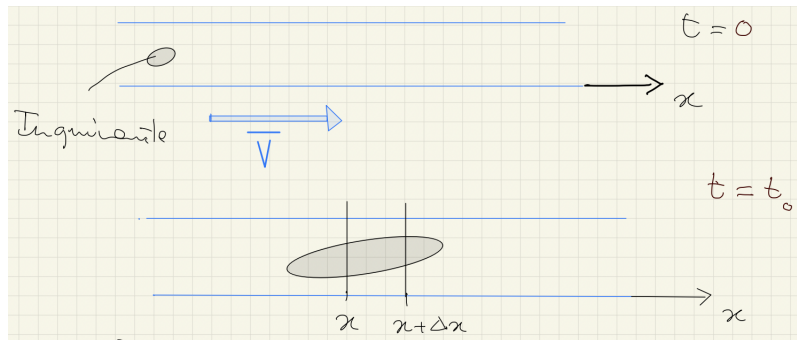


Figure 9: Modello di diffusione/trasporto (es. inquinante in un fiume)

Osservando la ‘*Conservazione della Massa*’, sappiamo che il tasso di variazione della massa corrisponde al suo flusso attraverso gli estremi.

Individuiamo il tasso di variazione :

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} C(y, t) dy = \int_x^{x+\Delta x} C_t(x, t) dx$$

Dove il primo termine a sx ci identifica la massa in $[x, x + \Delta x]$ al variare di t . Chiamiamo allora $q = q(x, t)$ la massa che vi entra attraverso x .

E troviamo in questo modo il flusso netto :

$$q(x, t) - q(x + \Delta x, t);$$

Che risulta rispondere all’equazione :

$$\int_x^{x+\Delta x} C_t(y, t) dy = q(x, t) - q(x + \Delta x, t);$$

Dividendo per Δx e facendo $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ ricaviamo :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} C_t(y, t) dy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q(x, t) - q(x + \Delta x, t)}{\Delta x}$$

E quindi alla fine si giunge alla forma :

$$\underline{C_t(x, t) = -q_x}$$

Aggiungiamo ora le Leggi Costitutive relative a trasporto e diffusione.

- *Legge del Trasporto*, si ha che $q(x, t) = Vc(x, t)$ (dove V è una costante che ci rappresenta la velocità dell’acqua);

- *Legge di Fick (o di diffusione)*, in questo caso si ha che il flusso avviene da punti a concentrazione più alta verso punti a concentrazione più bassa, ed è come 'proporzionale alla differenza di concentrazione', ovvero si ha che (supponendo che k sia una costante) :

$$q(x, t) = -kC_x(x, t)$$

Oss.1 Questa legge risulta essere analoga a quella di Fourier nel caso di diffusione della temperatura :

$$C_t(x, t) = kC_{xx}(x, t) - VC_x(x, t)$$

Che può dunque essere interpretata come una equazione di diffusione/trasporto con rispettivamente al secondo membro il primo termine (C_{xx}) ci rappresenta una diffusione del secondo ordine, mentre il secondo termine (C_x) ci rappresenta un trasporto del primo ordine.

Oss.2 La soluzione C può essere messa in relazione con la soluzione di equazione di sola diffusione, cioè :

$$\omega(x, t) = e^{\alpha t + \beta x} C(x, t)$$

soddisfa $\omega_t = k\omega_{xx}$ scegliendo rispettivamente

$$\alpha = \frac{V^2}{\Delta k}, \quad \beta = -\frac{V}{2k}$$

e quindi si ha che

$$C(x, t) = e^{-\alpha t - \beta x} \omega(x, t)$$

Oss.3 La concentrazione dell'inquinante può decrescere per effetto ad esempio della decomposizione biologica, e ciò si può aggiungere nell'equazione con un termine $-\gamma C$, ovvero :

$$C_t = kC_{xx} - VC_x - \gamma C$$

Che chiamiamo **Equazione di Diffusione-Trasporto-Reazione**. (La relazione può anche essere modificata per trasformare il termine di trasporto in termine di sorgente).

2.3 Equazione di Laplace e Poisson

L'equazione di Laplace è un'equazione stazionaria, non ha termini legati al tempo. Come già visto è definita come :

$$\Delta u = 0, \quad \text{Laplace}$$

$$\Delta u = f, \quad \text{Poisson}$$

Definite in un Insieme aperto, connesso e limitato in \mathbb{R}^n , con $n = 2, 3$.

Per $n = 1$ si ha che $u'' = 0$ o $u'' = f$ in $(0, L)$.

In generale si ottiene l'equazione stazionaria per esempio per la distribuzione di temperatura in un corpo a regime (o in equilibrio) omogeneo e isotropo, senza fonti esogene (Laplace), o con fonti indipendenti dal tempo.

Inoltre l'equazione delle onde del tipo

$$u_{tt} - k\Delta u = 0;$$

Che per $t \rightarrow \infty$, con l'equazione di Laplace, e condizioni al contorno della membrana, mi dà per un corpo (bi o tri- dimensionale) perfettamente elastico, la posizione della membrana (in condizioni di equilibrio).

L'equazione di Laplace mi indica anche il Potenziale di velocità di un fluido omogeneo ad esempio; l'equazione di Poisson invece si sposa con la teoria dei campi conservativi (elettrico, magnetico, gravitazionale,...).

Facendone un esempio, consideriamo il campo elettrico in 3 dimensioni, in un insieme Ω fissato. Allora come ben sappiamo $\text{div} \vec{E}$ mi dà la distribuzione delle cariche elettriche. Se u ne è il potenziale, ovvero se $\nabla u = -\vec{E}$, si ottiene che :

$$\Delta u = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

(Con ρ densità elettrica ed ε costante dielettrica)

Dove se il campo è generato da cariche esterne ad Ω , allora si ottiene che $\Delta u = 0$.

Def Se u soddisfa $\Delta u = 0$ in Ω , allora si dice che è **armonica** in Ω .

Un esempio sono le funzioni lineari in \mathbb{R}^2 , che risultano essere armoniche.

In generale la condizione che si deve avere in \mathbb{R}^2 per essere armoniche è che:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{xx} = -u_{yy};$$

degli esempi sono i seguenti :

$$u(x, y) = e^x \sin y; u(x, y) = x^2 - y^2; u(x, y) = xy;$$

Nb. l'operatore Δ è di tipo lineare, quindi possiamo costruire altre funzioni combinando quelle elencate tra di loro.

2.3.1 Problemi ben posti e Unicità

Si consideri :

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n;$$

Ci aspettiamo allora che i problemi ben posti siano analoghi a quelli per l'equazione di diffusione, ovvero con una condizione iniziale (Cauchy) e delle condizioni al contorno (che definiamo come $\partial\Omega$). Osserviamo però che questa volta non necessitiamo di una condizione iniziale trattando un problema stazionario.

a) **Dirichlet**, in cui si assegnano le condizioni su $\partial\Omega$, ricavando dunque

$$u|_{\partial\Omega} = g;$$

b) **Neumann**, in cui si assegna $\partial_{\bar{n}}u$ su $\partial\Omega$, ricavando dunque

$$\partial_{\bar{n}}u|_{\partial\Omega} = h;$$

c) **Robin**, in cui si assegna su $\partial\Omega$ che

$$\partial_{\nu}u + \alpha u = \beta|_{\partial\Omega} \quad (\alpha > 0);$$

d) **Misto (DN)**, si assegna che $u|_{\Sigma_D} \quad \partial_{\bar{n}}u|_{\Sigma_N} = h$ con

$$\Sigma_D \cup \Sigma_N = \partial\Omega, \quad \Sigma_D \cap \Sigma_N = \emptyset;$$

Anche per tutte queste condizioni vale il principio di sovrapposizione, quindi come per le equazioni di diffusione possiamo usare lo stesso ragionamento per dimostrarne l'unicità della soluzione.

Th. di Unicità $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia dominio (insieme aperto e connesso) limitato, con frontiera $\partial\Omega$ regolare (quindi che ci sia il vettore 'tangente' in ogni punto), allora \exists al più una soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tale che sia soluzione di $\Delta u = f$ e con le condizioni a), c), o d). Caso particolare è la condizione di Neumann, per il quale non abbiamo unicità in assoluto, ma il fatto che due funzioni possano essere soluzione differendo di una costante (vediamo infatti come sia caratterizzata dal divergente in questo caso la condizione dal divergente, e quindi alla fine che la costante sia derivata) ($\partial_{\gamma}u|_{\partial\Omega} = h$).

Guardiamone ora la dimostrazione usando il 'teorema di integrazione per parti'. Per farlo dobbiamo usare l'*Identità di Green*, che ci dice che (usando l'integrazione per parti) :

$$\int_{\Omega} g \operatorname{div} \bar{F} d\bar{x} = \int_{\partial\Omega} g \bar{F} \cdot \bar{\nu} d\bar{\sigma} - \int_{\Omega} \nabla g \cdot \bar{F} d\bar{x};$$

Con $g, \bar{F} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Se $\bar{F} = \nabla u$ allora otteniamo la **Prima identità di Green** :

$$\int_{\Omega} g \Delta u d\bar{x} = \int_{\partial\Omega} g \partial_{\nu} u d\bar{\sigma} - \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla u d\bar{x};$$

Se poi $g \equiv 1$ si ha che :

$$\int_{\Omega} \Delta u d\bar{x} = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u d\bar{\sigma};$$

Che ci dice che il totale della diffusione di Ω debba essere nullo.

Se poi scegliamo $u, v \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^1(\bar{\Omega})$ otteniamo allora la **Seconda identità di Green** :

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\bar{x} = \int_{\partial\Omega} (u \partial_{\nu} v - v \partial_{\nu} u) d\bar{\sigma};$$

Facciamo ora la dimostrazione vera e propria.

Usiamo un approccio per assurdo : Se $\exists u_1, u_2$ entrambe soluzioni per il problema

$$\begin{cases} \Delta u = f; \\ \text{Condizioni al Contorno;} \end{cases} \quad \text{allora} \quad \omega = u_1 - u_2$$

Dove ω soddisfa il sistema $\begin{cases} \Delta \omega = 0; \\ \text{Condizioni al Contorno Omogenee;} \end{cases}$.

Quindi da $\Delta \omega = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \omega \Delta \omega d\bar{x} = 0$, dalla Prima identità di Green si ricava che :

$$\int_{\partial\Omega} \omega \partial_{\nu} \omega d\bar{\sigma} = \int_{\Omega} \|\nabla \omega\|^2 d\bar{x}$$

Dove per le condizioni di bordo omogenee a),b),d) risulta essere il primo termine = 0 , mentre per c) questo è ≤ 0 ; però si ha che il secondo termine risulta essere ≥ 0 , allora anche per c) si ha che l'unica possibilità affinché il primo termine sia uguale al secondo, è che entrambi siano uguali a zero. Ma :

$$\int_{\Omega} \|\nabla \omega\|^2 d\bar{x} = 0 \Rightarrow \|\nabla \omega\|^2 = 0$$

Quindi necessariamente dovrei avere $\omega = \text{costante}$.

Per b) ho finito.

Per a) e d) la costante deve essere zero, poichè

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{o} \quad \omega|_{\Sigma_D} = 0$$

Per Robin $\nabla \omega = 0 \quad \partial_{\nu} \omega|_{\partial\Omega} = 0$ e anche la condizione omogenea per cui si ha che $\omega|_{\partial\Omega} = 0$, quindi si deve avere che $\omega \equiv 0$.

Si è ricavato quindi che nei casi a),c),d) si ha $u_1 = u_2$, mentre nel caso b) che $u_1 - u_2 = \text{cost.}$

Oss. da Gauss-Green per $g \equiv 1$

$$\int_{\Omega} \Delta u d\bar{x} = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u d\bar{\sigma}$$

Segue che :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega; \\ \partial_{\nu} u|_{\partial\Omega} = h; \end{cases}$$

Può avere soluzione solo se :

$$\int_{\Omega} f d\bar{x} = \int_{\partial\Omega} h d\bar{\sigma};$$

Questa è la **Condizione di Compatibilità per pb. di Neumann** , che dunque non risulta essere sempre risolubile.

(Il significato fisico di questa condizione è che il contributo delle fonti interne deve uguagliare il flusso netto attraverso $\partial\Omega$).

Guardiamo ora come usare il Laplaciano in coordinate polari.

2.3.2 Laplaciano in Coordinate Polari

Vogliamo passare dalla rappresentazione (x, y) alla rappresentazione (ρ, θ) (sottolineiamo che per l'origine in coordinate polari non abbiamo una definizione univoca, quindi non la consideriamo $[\neq 0]$), definendo un intervallo t.c. $\theta \in [-\pi, \pi]$ (o anche per esempio $[0, 2\pi]$). Quindi passiamo da $u(x, y)$ a :

$$v(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta);$$

Con :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta & \rho > 0; \\ y = \rho \sin \theta & \theta \in (-\pi, \pi] \end{cases} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e :

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{Per } (x, y) \in \text{I, IV quad.}; \\ \frac{\pi}{2} & \text{Per } x = 0, y > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{Per } (x, y) \in \text{II quad.}; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{Per } x = 0, y < 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{Per } (x, y) \in \text{III quad.}; \end{cases}$$

Ed ora dobbiamo fare le derivate (vediamo solo le prime, le altre sono sullo stesso modello) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2}; \end{aligned}$$

Essendo che derivando parzialmente u per x e per y si ricava che :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}; \end{aligned}$$

E quindi sostituendo quanto trovato sopra derivando i soli termini ρ, θ , si ha che :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{y}{x^2 + y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{x}{x^2 + y^2}; \end{aligned}$$

Da cui si ricava (facendo un po' di conti) che :

$$\Delta_P v = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

Osserviamo ora la soluzione per separazione delle variabili nel Cerchio (in \mathbb{R}^2) : Vogliamo risolvere

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(\bar{0}) = (x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < R^2 \\ u|_{\partial B_R} = g(x, y) & \text{CONTINUA;} \end{cases}$$

Cerchiamo allora $u \in \mathbb{C}^2(B_R(0)) \cap \mathbb{C}^0(\bar{B}_R(0))$.

Visto che $B_R(\bar{0})$ si descrive in coordinate polari come $0 < \rho < R$ e che $\theta \in (-\pi, \pi]$, passiamo a questo tipo di coordinate :

$$\begin{cases} \Delta_P v = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}v_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}v_{\theta\theta} = 0 & 0 < \rho < R \\ v(R, \theta) = \hat{g}(\theta) = g(R \cos \theta, R \sin \theta) \end{cases}$$

Cerco soluzioni del tipo :

$$U(\rho, \theta) = S(\rho)T(\theta)$$

Con :

$$\begin{aligned} U_{\rho} &= S'(\rho)T(\theta); \\ U_{\rho\rho} &= S''(\rho)T(\theta); \\ U_{\theta\theta} &= S(\rho)T''(\theta); \end{aligned}$$

(Quindi faccio per separazione). Sostituisco dunque :

$$S''(\rho)T(\theta) + \frac{1}{\rho}S'(\rho)T(\theta) + \frac{1}{\rho^2}S(\rho)T''(\theta) = 0$$

Che lavoriamo portando a dx i termini con S' e S'' , e dividendo poi per $\frac{S(\rho)T(\theta)}{\rho^2}$; Otteniamo quindi :

$$\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\frac{\rho^2 S''(\rho) + \rho S'(\rho)}{S(\rho)} = \lambda$$

Osserviamo che dobbiamo garantire che la funzione si salvi con continuità, e con lei le derivate; Per farlo nell'intervallo angolare θ , devo imporre che :

$$T(\theta + 2\pi) = T(\theta)$$

Ovvero che la funzione sia periodica di periodo 2π .

Ponendo allora $T''(\theta) - \lambda T(\theta) = 0$, vediamo i vari casi :

$\lambda > 0$, allora $T(\theta) = ae^{\sqrt{\lambda}\theta} + be^{-\sqrt{\lambda}\theta}$ non risulta essere mai periodica se non per $a = b = 0$, soluzione banale;

$\lambda = 0$, allora $T(\theta) = a + b\theta$ risulta essere periodica per $b = 0$, ovvero risulta essere $T_0(\theta) = a_0$, costante;

$\lambda < 0$, allora $\lambda = -\omega^2 < 0$, che ci porta quindi alla funzione $T(\theta) = a \cos \omega\theta + b \sin \omega\theta$, una funzione periodica di periodo 2π per $\omega = n \in \mathbb{N}$. Si ha allora la soluzione periodica data dalla funzione :

$$\underline{T_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta}$$

Ora dobbiamo guardare la soluzione per la variabile ρ , $S(\rho)$ (compreso $n = 0$) :

$$\rho^2 S''(\rho) + \rho S'(\rho) - n^2 S(\rho) = 0;$$

(Dove $\lambda = -n^2$). Osservando allora i casi si ha che :

$\lambda = 0$, (quindi $n = 0$) si ha che

$$\rho^2 S''(\rho) + \rho S'(\rho) = 0 \quad S'(\rho) = Y(\rho);$$

$$Y'(\rho) = -\frac{1}{\rho}Y(\rho);$$

$$\text{(Sappiamo che: } \int -\frac{1}{\rho} d\rho = -\log \rho)$$

$$Y(\rho) = e^{-\log \rho} = e^{\log \frac{1}{\rho} + c} = \frac{d}{\rho};$$

E si ricava dunque che :

$$S_0(\rho) = c_0 + d_0 \log \rho;$$

$\lambda = -n^2 < 0$, si ha allora che :

$$\rho^2 S''(\rho) + \rho S'(\rho) - n^2 S(\rho) = 0$$

Cerchiamo allora soluzioni del tipo $S(\rho) = \rho^\mu$ (vogliamo che derivando si annulli)

$$S'(\rho) = \mu \rho^{\mu-1} \quad S''(\rho) = \mu(\mu-1) \rho^{\mu-2}$$

Che sostituendo all'equazione prima detta, diventa :

$$\mu(\mu-1) \rho^\mu + \mu \rho^\mu + n^2 \rho^\mu = 0$$

Equazione che implica che :

$$\mu(\mu-1) + \mu - n^2 = 0$$

$$\mu^2 - n^2 = 0$$

$$\mu_{1,2} = \pm n$$

E quindi finalmente si arriva a

$$S_n(\rho) = c_n \rho^n + d_n \rho^{-n};$$

Avendo compreso l'origine, trovandoci dei termini in S_0 e S_n tendenti ad infinito se i termini vengono fatti tendere a zero (logaritmo ed esponenziale presenti infatti) , volendo una soluzione limitata per $\rho \rightarrow 0$ allora imponiamo che :

$$d_0 = d_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ci ritroviamo a questo punto con :

$$T_0 = a_0, \quad S_0 = c_0;$$

$$T_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad S_n(\rho) = c_n \rho^n;$$

Quindi si arriva a :

$$U_0 = \tilde{a}_0 \quad U_n(\rho, \theta) = \rho^n (\tilde{a}_n \cos n\theta + \tilde{b}_n \sin n\theta)$$

Come fatto per la diffusione possiamo ora considerare combinazioni lineari finite ed infinite (le serie) di $U_n(\rho, \theta)$. Una candidata soluzione è ad esempio :

$$v(\rho, \theta) = \tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (\tilde{a}_n \cos n\theta + \tilde{b}_n \sin n\theta)$$

A cui imponiamo la condizione $v(R, \theta) = \hat{g}(\theta)$.

Oss. $\hat{g}(\theta)$ dipende solo da $\cos \theta$ e $\sin \theta$, quindi risulta essere una funzione periodica di periodo 2π . Inoltre è continua, quindi sviluppabile serie di Fourier.

Sia definita allora :

$$\hat{g}(\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta);$$

Dove i coefficienti saranno pari rispettivamente a :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\theta) d\theta;$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\theta) \cos n\theta d\theta;$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\theta) \sin n\theta d\theta;$$

Volendo noi ottenere :

$$\bar{u}(R, \theta) = \tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (\tilde{a}_n \cos n\theta + \tilde{b}_n \sin n\theta) = \hat{g}(\theta)$$

Dovremo avere :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 = \alpha_0, \quad R^n \tilde{a}_n = \alpha_n &\Rightarrow \tilde{a}_n = \frac{\alpha_n}{R^n}; \\ R^n \tilde{b}_n = \beta_n &\Rightarrow \tilde{b}_n = \frac{\beta_n}{R^n}; \end{aligned}$$

Che sostituiti nella u mi danno :

$$\bar{u}(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

Con α_n, β_n coefficienti di Fourier di $\hat{g}(\theta)$.

Una volta trovata la soluzione in coordinate polari, possiamo poi tornare alle variabili (x, y) . Abbiamo allora dimostrato che il problema di Dirichlet ammette un'unica soluzione (in realtà il cerchio può essere qualsiasi, anche traslato). Osserviamo però che dovrei dimostrare che \bar{u} sia proprio derivabile 2 volte nell'interno e che soddisfi l'equazione; ciò, come nella diffusione, sarebbe un segno del fatto che la serie, e la serie delle derivate, rispettino il Th. di Weierstrass per $\rho < R$ (e dai risultati presenti nella prima dispensa).

Segue allora un **esempio** :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_2(\bar{0}); \\ u|_{\partial B_2} = x^2 - 2y + 1; \\ g(x, y) = x^2 - 2y + 1; \end{cases} \\ &\hat{g}(\theta) = g(2 \cos \theta, 2 \sin \theta) = \\ &\quad = 4 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta + 1 = \\ &\quad = 2(\cos 2\theta + 1) - 4 \sin \theta + 1 = \\ &\quad = 3 - 4 \sin \theta + 2 \cos 2\theta; \end{aligned}$$

Usando il metodo di separazione delle variabili

...

$$v(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{2}\right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

Quest'ultima deve diventare :

$$v(2, \theta) = \hat{g}(\theta) = 3 - 4 \sin \theta + 2 \cos 2\theta$$

Che implica che :

$$\alpha_0 = 3, \quad \beta_1 = -4, \quad \alpha_2 = 2, \quad \text{tutti gli altri} = 0;$$

Si ricava quindi :

$$\begin{aligned} v(\rho, \theta) &= 3 - 4 \frac{\rho}{2} \sin \theta + 2 \frac{\rho^2}{4} \cos 2\theta = \\ &= 3 - 2\rho \sin \theta + \frac{\rho^2}{2} \cos 2\theta; \end{aligned}$$

Da cui ci manca solo di passare alle coordinate cartesiane. Facendo qualche sostituzione ricaveremmo :

$$u(x, y) = 3 - 2y + \frac{1}{2}(x^2 - y^2);$$

2.3.3 Altri Problemi con le Coordinate Polari

Abbiamo allora finora dimostrato che il problema di Dirichlet ammette sempre un'unica soluzione. Osserviamo ora quali altri problemi possano essere appiacciati in coordinate polari.

- **Problema di Neumann** : Col problema di Neumann viene assegnata la derivata 'normale' $\bar{\nu}$, che in coordinate polari corrisponde nient'altro che alla derivata in direzione radiale : u_{ν} corrisponde a $\partial \rho$ (soluzione a meno di una costante additiva);

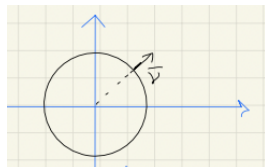


Figure 10: Problema di Neumann in coordinate polari

- **Corona Circolare** : La corona circolare sarà compresa tra due raggi R_1 e R_2 con $R_1 > R_2$ e ρ compreso tra i due (oltre che $\theta \in [-\pi, \pi]$). In questo caso si noti che non ho la condizione per cui i coefficienti del logaritmo e dell'esponenziale debbano essere zero (come invece era stato visto sopra), però ciò non ci deve spaventare in quanto ho non una, ma due condizioni al contorno, e questo perchè ho ben due circonferenze, non più una. In questo caso sono risolvibili sia problemi di Neumann, che di Dirichlet, che misti (però nel caso di misti, e quindi con Dirichlet nella circonferenza interna e/o Neumann su quella esterna ad esempio, devo avere particolari condizioni);

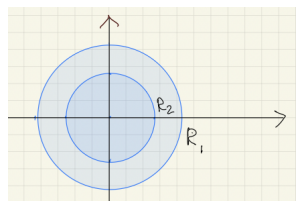


Figure 11: Corona circolare in coordinate polari

- **Semicerchio** : In questo caso sono risolvibili sia Dirichlet che Neumann, ma con una accortezza, ovvero che considerando θ non abbiamo più condizioni di periodicità come nei casi precedenti poichè risulta essere definita da 0 a π , quindi possiamo usare la separazione delle variabili solo se il dato di Dirichlet sull'asse x è $\equiv 0$ e sviluppare \hat{g} sulla semicirconferenza in serie di soli seni (dopo averla prolungata dispari periodica). Situazione analoga per Neumann. Si noti che se il cerchio ha centro generico :

$$(x_0, y_0) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \theta; \\ y = y_0 + \rho \sin \theta; \end{cases}$$

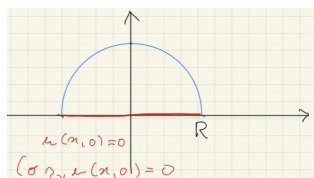


Figure 12: Semicerchio in coordinate polari

- **Equazione di diffusione in corpi Cilindrici** : Si separano prima le variabili temporali da quelle spaziali; dopodichè si trasformano le spaziali in coordinate polari. Ciò non sempre è possibile ed inoltre è molto pesante a livello computazionale;

2.3.4 Proprietà delle Funzioni Armoniche

Utilizzando la formula per separazione delle variabili nel cerchio si trova una formula interessante per $u = u(\bar{x})$ armonica in $B_R(\bar{x}^0)$, da cui si può ottenere la seguente formula di Poisson :

$$u(\bar{x}) = \frac{R^2 - |\bar{x} - \bar{x}^0|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(\bar{x}^0)} \frac{g(\sigma)}{|\sigma - \bar{x}|^2} d\sigma$$

Questa formula mi dice che la u armonica in $B_R(\bar{x}^0)$ in realtà è derivabile di classe $\mathbb{C}^\infty(B_R(\bar{x}^0))$, quindi che :

$$u \in \mathbb{C}^\infty(B_R(\bar{x}^0)) \cap \mathbb{C}^0(\bar{B}_R(\bar{x}^0))$$

Proprietà della Media (per funzioni armoniche)

Se u è armonica in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, allora \forall cerchio $B_R(\bar{x}) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x} - \bar{y}\| < R\}$ t.c. $B_R(\bar{x}) \subset \Omega$ valgono :

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{B_R(\bar{x})} u(\bar{y}) d\bar{y};$$

e

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(\bar{x})} u(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma};$$

Oss.1 Per u qualsiasi, continua ma non armonica, si ha che, per il teorema della media integrale :

$$u(\bar{x}) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \int_{B_R(\bar{x})} u(\bar{y}) d\bar{y} \quad \text{NON } \forall R$$

Oss.2 Le due formule non sono legate nel senso che se vale una allora vale anche l'altra ;

Oss.3 In \mathbb{R}^3 valgono le formule con le opportune modifiche (e si potrebbe dire lo stesso anche in \mathbb{R}^n), ovvero :

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \iiint_{\bar{B}_R(\bar{x})} u(\bar{y}) d\bar{y};$$

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial \bar{B}_R(\bar{x})} u(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma};$$

Principio del Massimo

Se $u \in \mathbb{C}(\Omega)$, ed ha la proprietà della media in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ connesso, e se $\bar{p} \in \Omega$ è un punto di estremo massimo o minimo per u , allora si ha che $u \equiv \text{cost.}$ *Oss.1* Se $u \in \mathbb{C}^0(\Omega)$ e Ω limitato, allora u ha massimo e minimo in Ω per il Th. di Weierstrass, e se per u vale la proprietà della Media (ad esempio la funzione è armonica), allora se u non è costante, massimo e minimo si trovano in $\partial\Omega$, ovvero : $\min_{\partial\Omega} u \leq u \leq \max_{\partial\Omega} u$.

Questa è una ulteriore dimostrazione dell'unicità della soluzione al problema di Dirichlet.

Vediamone ora una sua dimostrazione (del principio del massimo (min.)) :

Sia $n = 2$ e \bar{p} punto di minimo, ovvero che

$$m = u(\bar{p}) \leq u(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \Omega$$

Dalla proprietà della media allora si ha che

$$m = u(\bar{p}) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{B_R(\bar{p})} u(\bar{y}) d\bar{y}$$

Procediamo allora per assurdo : supponendo che $\exists \bar{z} \in \Omega$ con $u(\bar{z}) > m$, e si supponga che $\bar{z} \in B_R(\bar{p})$ (aperto) e si prenda $B_r(\bar{z}) \subset B_R(\bar{p})$ allora si ha che :

$$m = \frac{1}{\pi R^2} \int_{B_R(\bar{p})} u(\bar{y}) d\bar{y} = \frac{1}{\pi R^2} \left\{ \int_{B_r(\bar{z})} u(\bar{y}) d\bar{y} + \int_{B_R(\bar{p}) \setminus B_r(\bar{z})} u(\bar{y}) d\bar{y} \right\}$$

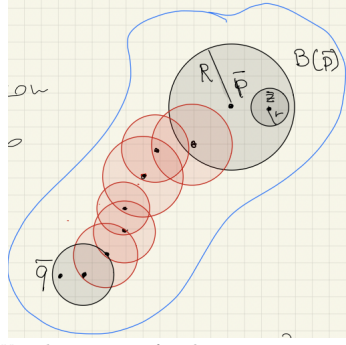


Figure 13: Visualizzazione grafica dimostrazione principio del max.

Usando a questo punto la proprietà della media in \bar{z} si ha che :

$$m \geq \frac{1}{\pi R^2} \{ \pi r^2 u(\bar{z}) + \int_{B_R(\bar{p}) \setminus B_r(\bar{z})} m d\bar{y} \}$$

Se però $u(\bar{z}) > m$ allora si ha che :

$$u(\bar{z}) > \frac{1}{\pi R^2} \{ \pi r^2 m + m(\pi R^2 - \pi r^2) \} = m$$

Cioè si ricaverebbe per assurdo che $m > m$! Ciò naturalmente non è possibile, quindi $u(\bar{y}) \equiv m$ in $B_R(\bar{p})$.

Preso quindi un $\bar{q} \in \Omega$ arbitrario, con una sequenza di un numero finito di cerchi tale che ognuno ha il suo centro nel precedente, si mostra successivamente che $u \equiv m$ fino in \bar{q} . In modo del tutto analogo si mostra che u non possa avere massimo interno a meno che non sia costante.

Oss.1 Se $u \geq (\leq) 0$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice allora che u è Subarmonica (o Superarmonica) in Ω .

Oss.2 Per u subarmonica (o superarmonica) in Ω le proprietà della media valgono come

$$\begin{aligned} u(\bar{x}) &\leq (\geq) \frac{1}{\pi R^2} \int_{B_R(\bar{x})} u(\bar{y}) d\bar{y}; \\ u(\bar{x}) &\leq (\geq) \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(\bar{x})} u(\sigma) d\bar{\sigma}; \end{aligned}$$

Quindi, verificando dalla dimostrazione del principio di massimo, si ottiene che u subarmonica non può avere massimi interni, mentre la superarmonica minimi (tutto ciò sempre ovviamente escluso il caso che u sia costante).

Corollario - Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto, connesso e limitato, con $g_1, g_2 \in C^0(\partial\Omega)$ e u_{g_1} e u_{g_2} soluzioni dei rispettivi problemi di Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta u_{g_1} = 0; \\ u_{g_1}|_{\partial\Omega} = g_1; \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_{g_2} = 0; \\ u_{g_2}|_{\partial\Omega} = g_2; \end{cases}$$

Allora si ha :

- i) (confronto) se $g_1 \geq g_2$ su $\partial\Omega$ e $g_1 \neq g_2$ in almeno un punto, allora $u_{g_1} > u_{g_2}$ in tutto Ω ; (La cui dimostrazione risulta per altro essere banale :

$$\omega = u_{g_1} - u_{g_2};$$

Per princ. del min. : $\min_{\bar{\Omega}} \omega = \min_{\partial\Omega} \omega = \min_{\partial\Omega} (g_1 - g_2) \geq 0;$

$u_{g_1} \geq u_{g_2}$ in $\bar{\Omega}$ e in Ω vale perchè NO MIN..

)

- ii) (stabilità) ovvero $\max_{\bar{\Omega}} |u_{g_1} - u_{g_2}| = \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|$;

Oss.1 Se $|g_1 - g_2| < \epsilon$ su $\partial\Omega$, allora si ha che $|u_{g_1} - u_{g_2}| < \epsilon$ in Ω .

Oss.2 Guardiamo la dimostrazione della i) :

$$\omega = u_{g_1} - u_{g_2} \Rightarrow \min_{\bar{\Omega}} \omega = \min_{\partial\Omega} \omega = \min_{\partial\Omega} (g_1 - g_2) \geq 0$$

Allora si ha che $u_{g_1} \geq u_{g_2}$ in $\bar{\Omega}$ e in Ω vale $>$ perchè non possono esserci minimi interni.

Teorema (Il seguente teorema vale come conseguenza del principio del massimo, ed afferma che la proprietà della media caratterizza le funzioni armoniche) Se u è continua in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\forall B_R(\bar{x}) \subset \Omega$ vale la proprietà della media per u , allora u è armonica in Ω e quindi in particolare è $C^\infty(\Omega)$. Guardiamone ora la dimostrazione, e per farlo facciamo prima una osservazione, ovvero che la combinazione lineare di funzioni che hanno la proprietà della media hanno la proprietà della media.

Consideriamo ora per $\bar{B} \subset \Omega$ il pb. di Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B; \\ v|_{\partial B} = u; \end{cases}$$

Esso ha una e una sola soluzione v (come visto prima) e soddisfa la proprietà della media (essendo armonica), ma anche $u - v$ soddisfa la proprietà della media, e per $u - v$ vale anche il principio del massimo :

$$\begin{aligned} \min_{B_R} (u - v) &= \min_{\partial B_R} (u - v) = 0; \\ \max_{B_R} (u - v) &= \max_{\partial B_R} (u - v) = 0; \end{aligned}$$

Allora si ottiene che $u \equiv v$ in tutto B_R , e quindi B_R è una armonica in quanto coincide con una funzione armonica (u in Ω).

3 Introduzione ai F.E.M.

In questa parte tratteremo problemi e metodi che ci introducono ai **Finite Elements Methods**, metodo fondamentale, legato ad una matematica più recente ed ai supercomputer. La sua utilità e bellezza è data dal fatto che l'approssimazione della risoluzione, non risulta essere fatta solo localmente, ma globalmente.

3.1 Soluzioni deboli (o variazionali) di PDE - 1d

Consideriamo per prima l'equazione di Poisson con problema di Dirichlet :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1; \\ u(0) = u(1) = 0; \end{cases}$$

Equazione che potrebbe descrivere diversi fenomeni fisici :

Una sbarra in condizioni di equilibrio termico con $f(x)$ che rappresenta la densità di calore da fonti esterne, ovvero che il calore fornito al tratto $[x, x + \Delta x]$ è dato da $\int_x^{x+\Delta x} f(y)dy$; Altro possibile modello è un filo elastico in configurazione di equilibrio soggetto a forze verticali di densità $f(x)$ con estremi particolari.

In questo caso la definizione di soluzione classica che richiede $u \in \mathbb{C}^2((0,1)) \cap \mathbb{C}^0([0,1])$ implica che si richieda una funzione $f(x)$ continua, cosa che non è vera in assoluto.

Possiamo allora dire che la soluzione classica sia inadatta in molti casi perchè :

- In molti problemi fisici la funzione $f(x)$ non è continua;
- E' inadatta alla trattazione numerica, in quanto già dall'inizio in molti casi si prendono funzioni discontinue;
- La dimostrazione di esistenza e unicità è spesso lunga e macchinosa.

Consideriamo ora in particolare il caso del filo con una forza uniformemente distribuita in $[2/5; 3/5]$, di intensità unitaria (verso il basso), avremo allora :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{2}{5}); \\ -1 & x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]; \\ 0 & x \in (\frac{3}{5}, 1]. \end{cases}$$

Allora la forza che agisce su $[0, x]$ è t.c. :

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{2}{5}); \\ -x + \frac{2}{5} & x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]; \\ -\frac{1}{5} & x \in (\frac{3}{5}, 1]; \end{cases}$$

(si osservi infatti che per $x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$ si ha che $\text{int} = \int_{\frac{2}{5}}^x -1dy$)

Come procediamo per provare a trovare una soluzione? Partendo dal problema di Dirichlet integriamo :

$$\begin{aligned} u''(x) &= -f(x); \\ u'(x) &= -\int_0^x f(y)dy + k; \\ u'(x) &= \begin{cases} k & x \in [0, \frac{2}{5}); \\ x - \frac{2}{5} + k & x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]; \\ \frac{1}{5} + k & x \in (\frac{3}{5}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Integrando nuovamente troviamo (con la condizione che $u(0) = 0$) :

$$u(x) = \int_0^x u'(y)dy = \begin{cases} kx & x \in [0, \frac{2}{5}); \\ \frac{x^2}{2} + (k - \frac{2}{5})x + \frac{2}{25} & x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]; \\ (\frac{1}{5} + k)x - \frac{1}{10} & x \in (\frac{3}{5}, 1]. \end{cases}$$

A questo punto va scelta la costante k affinché sia $u(1) = 0$:

$$\frac{1}{5} + k - \frac{1}{10} = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{10}$$

Quindi la ‘soluzione’ dovrebbe essere :

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{10}x & x \in [0, \frac{2}{5}); \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{25} & x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]; \\ \frac{1}{10}x - \frac{1}{10} & x \in (\frac{3}{5}, 1]. \end{cases}$$

Che risulta essere una soluzione con un profilo tale che sia una parabola in un minimo, collegante due rette. Possiamo fare diverse osservazioni su questa soluzione : La soluzione non è globalmente di classe seconda ($u \in \mathbb{C}_0^1((0, 1))$) ma non è tale da essere di classe $\mathbb{C}_0^2(0, 1)$. In realtà è di classe \mathbb{C}^2 tranne che nei punti di discontinuità ($x = \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$). Ma possiamo accettare allora la definizione di funzione di classe \mathbb{C}^2 globalmente tranne che in $(0, 1)$? NO , e questo perchè, oltre al fatto della elevata complessità che avrei (ogni volta dovrei studiare i punti di discontinuità), avrei più di una soluzione dell’equazione, cioè :

$$\omega(x) = \begin{cases} -\frac{h}{5}x & x \in [0, \frac{2}{5}); \\ h[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{100}] & x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]; \\ \frac{h}{5}x - \frac{h}{5} & x \in (\frac{3}{5}, 1]. \end{cases}$$

Che sarebbe soluzione $\forall h$.

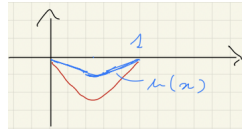


Figure 14: Molteplicità delle soluzioni $u(x)$

Proviamo allora un altro approccio alla soluzione : prendiamo l’equazione iniziale $-u''(x) = f(x)$ e la moltiplichiamo per $v(x) \in \mathbb{C}_\nu^1([0, 1])$ e $v(0) = v(1) = 0$, e a questo punto integriamo :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Supponiamo ora di integrare per parti a sinistra :

$$-u'(x)v(x)|_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

In cui il primo termine a sx è $\equiv 0$, e l’uguaglianza tra i due rimanenti è tale che $\forall v \in \mathbb{C}_\nu^1([0, 1]) = \{v \in \mathbb{C}^1([0, 1]) | v(0) = v(1) = 0\}$.

Nel nostro esempio abbiamo che :

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{10} & x \in [0, \frac{2}{5}); \\ x - \frac{1}{2} & x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]; \\ \frac{1}{10} & x \in (\frac{3}{5}, 1]. \end{cases}$$

Che integrato diventa :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2}{5}} -\frac{1}{10}v'(x)dx + \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} (x - \frac{1}{2})v'(x)dx + \int_{\frac{3}{5}}^1 \frac{1}{10}v'(x)dx \\ & -\frac{1}{10}v(x)|_0^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{2}v(x)|_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} + xv'(x)|_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} - \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} v(x)dx + \frac{1}{10}v(x)|_{\frac{3}{5}}^1 \\ & -\frac{1}{10}v(\frac{2}{5}) - \frac{1}{2}v(\frac{2}{5}) + \frac{1}{2}v(\frac{2}{5}) + \frac{3}{5}v(\frac{3}{5}) - \frac{2}{5}v(\frac{2}{5}) - \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} v(x)dx - \frac{1}{10}v(\frac{3}{5}) \end{aligned}$$

Dove quindi si può verificare l'uguaglianza vista sopra per cui $\forall v(x) \in \mathbb{C}_\mu^1$ vale che

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Se avessimo preso la soluzione di classe \mathbb{C}^2 , ovvero ω allora avremmo avuto questa condizione solo per $h = \frac{1}{2}$, quindi la soluzione che stiamo considerando noi.

Allora la condizione $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$ è incoraggiante come definizione di soluzione perchè verificata da $v(x)$ e non da $\omega(x)$, ed oltre a ciò si evidenzia il fatto che c'è il vantaggio di coinvolgere solo $u'(x)$ e per altro sotto integrale, quindi la funzione u' avrebbe anche la possibilità di essere discontinua.

Riprendiamo a questo punto :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1; \\ u(0) = u(1) = 0; \end{cases}$$

E la condizione di possibile soluzione u :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in \mathbb{C}_\mu^1([0, 1])$$

Definiamo quello al primo termine come operatore $a(u, v)$ lineare in u ed in v , mentre al secondo termine una $F(v)$ anch'essa lineare. Questa formulazione ci dice che dobbiamo trovare una $u \in \mathbb{C}_\mu^1$ t.c. $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbb{C}_\mu^1$.

Dimostriamo a questo punto che se u soddisfa la condizione sopra, è di $\mathbb{C}^2((0, 1))$, allora la soluzione è classica è f ed è continua. Quindi :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Integriamo per parti usando $u \in \mathbb{C}^2$:

$$u'(x)v(x)|_0^1 - \int_0^1 u''(x)v(x)dx$$

Dove il primo termine è 0 in quanto $v(1)$ e $v(0)$ sono $\equiv 0$.

Inoltre :

$$\int_0^1 (u''(x) + f(x))v(x)dx = 0 \quad \forall v(x) \in \mathbb{C}_\mu^1$$

Vogliamo allora concludere che $u''(x) - f(x) = 0$. Se infatti così non fosse allora ci sarebbe x per cui $u''(x) - f(x) \neq 0$. Supponendo $x > 0$, e chiamando $u''(x) - f(x)$ come $h(x)$, allora per il teorema di permanenza del segno essendo h continua, si ha che $h(x) > 0$ in $(x^0 - \epsilon, x^0 + \epsilon)$. Prendiamo allora $v \in \mathbb{C}_1^0$ t.c.

$$\begin{aligned} v(x) &\equiv 0 \quad x \notin (x^0 - \epsilon, x^0 + \epsilon); \\ &\text{e } v(x_0) > 0; \\ &\text{e } v(x) \geq 0 \quad \text{in } [0, 1]; \end{aligned}$$

Il che allora vuol dire che : $\int_0^1 h(x)v(x)dx > 0$ Ma $\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} h(x)v(x)dx$ contraddice il fatto che $\int_0^1 h(x)v(x)dx > 0$.

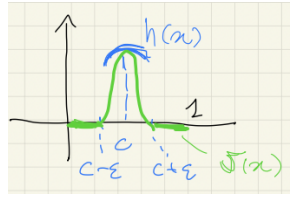


Figure 15: Visualizzazione $h(x)$ e $v(x)$

Quindi $h(x) = u''(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1)$ che implica che $-u'(x) = f(x)$ è soluzione classica, soddisfacendo che $u(1) = u(0) = 0$ perchè $u \in \mathbb{C}_\mu^2$.

Ricapitolando allora gli step fatti :

- Partendo dal problema iniziale (il sistema) moltiplichiamo per $v \in \mathbb{C}_\mu(0, 1)$ e integriamo per parti arrivando alla condizione per cui $a(u, v) = F(v)$;
- Bisogna allora trovare una $u \in V$ t.c. rispetti la condizione di cui sopra;
- abbiamo anche dimostrato che nel caso esista una soluzione classica di (PD) la condizione sopra ci restituisce solo quella (nb. non sono soluzioni diverse ma possono semplicemente risolvere problemi più generali), e si noti inoltre che nell'esempio in cui esisteva una soluzione fisica non classica di (PD) (e quindi non derivabile 2 volte), questa soddisfa la condizione (e vedremo che un'ampia classe di problemi si può formulare in questo modo).

Aggiungiamo inoltre che lo scopo è quello di costruire una teoria per poter mostrare l'esistenza ed unicità (oltre che la stabilità) della soluzione; In tutto ciò il problema che dobbiamo risolvere non è completo (nel senso in cui \mathbb{Q} razionale non è completo e per completarlo, quindi per poter fare sempre limiti senza uscire dal dominio, passiamo ad \mathbb{R} reali).

Consideriamo ora un filo elastico con carico concentrato a metà :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0, 1); \\ u(1) = u(0) = 0. \end{cases}$$

Per capire cosa sia $f(x)$ osserviamo che :

$$F(x) = \text{forza che agisce su } [0, x] = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}); \\ -1 & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Quindi la $F(x)$ è una funzione definita costante a tratti, non derivabile in $\frac{1}{2}$. $f(x)$ dovrebbe essere la derivata di $F(x)$, ovvero dovrei avere $f(x) = F'(x)$ e dovrei avere che $\begin{cases} x & x \neq \frac{1}{2}; \\ \infty & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$.

Apriamo una parentesi sulla **Delta di Dirac**, una funzione generalizzata $\delta_0(x)$ che rappresenta una quantità concentrata nell'origine. Definirla puntualmente sarebbe tale da avere :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0; \\ \infty & x = 0. \end{cases}$$

Ma questa definizione non ci risulta essere molto utile. Piuttosto possiamo definirla attraverso un limite fatto in un integrale : preso un intervallo $[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$ allora abbiamo via

via all'aumentare di n (valore all'ordinata) un picco sempre più ristretto. Inoltre si ha la proprietà che $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$. Allora ponendo : $\delta_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ si ha che :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)dx = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$$



Figure 16: Visualizzazione limite delta di Dirac

Considerando $\delta_a(x) = \delta_0(x - a)$, si ha che :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)f(x)dx = f(a)$$

Possiamo allora ragionare nel modo seguente considerando $f_n^a(x) = f_n(x - a)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^a(x)f(x)dx = \int_{a-\frac{1}{2n}}^{a+\frac{1}{2n}} nf(x)dx = f(x_n)$$

Che non è altro che il teorema del valor medio integrale per f continua con $x_n \in [a - \frac{1}{2n}, a + \frac{1}{2n}]$.

Quindi per $n \rightarrow \infty$ si ha che $x_n \rightarrow a$, ed essendo f continua, $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Inoltre può essere vista come derivata generalizzata (o distribuzionale) di $H(x)$ funzione di Heaveside :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Ciò nel senso che vale l'integrazione per parti, cioè :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)g'(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)g(x)dx$$

dove $g \in \mathbb{C}_k^1(-\infty, +\infty)$, allora $g(x) = 0$ per $x \neq k$ compatto.

Tornando quindi all'esempio precedente dopo questa parentesi, si ha che : $f(x) = -\delta_{\frac{1}{2}}(x)$ per $x \in (0, 1)$

e che : $F(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}); \\ -1 & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$.

Allora integrando otteniamo :

$$u'(x) = -F(x) + c = \begin{cases} c & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 1 + c & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Con c costante arbitraria da determinare.

Integrando nuovamente si ottiene :

$$u(x) = \int_0^x u'(y)dy = \int_0^x (-F(y) + c)dy$$

che soddisfa già $u(0) = 0$ e che dà

$$u(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{c}{2} + (1+c)(x - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dove imponendo $u(1) = 0$ si ottiene che $c = -\frac{1}{2}$, e quindi che :

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}(x-1) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Chiaramente $u \notin \mathbb{C}_0^2(0,1), \mathbb{C}_0^1(0,1)$.

Pure in questo caso inoltre si può verificare che posto :

$$h_k(x) = \begin{cases} -kx & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ k(x-1) & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

$h_k(x)$ soddisfi $\int_0^1 h'(x)v'(x)dx = -\int_0^1 \delta_{\frac{1}{2}}v(x)dx = -v(\frac{1}{2})$, e questo per $\forall v \in \mathbb{C}_0^1(0,1)$ se e solo se $k = \frac{1}{2}$.

Infatti si verifica che :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} kv'(x)dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 kv'(x)dx &= \\ &= kv(x)|_0^{\frac{1}{2}} - kv(x)|_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= kv(\frac{1}{2}) + kv(\frac{1}{2}) = 2kv(\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Quindi anche in questo (caso che però non considereremo), il tentativo fatto per generalizzare il concetto di soluzione sembrerebbe selezionare proprio la soluzione ‘fisica’.

3.2 Onde Trasversali in una Corda Tesa

Questo modello tratta piccole vibrazioni trasversali : si considera una corda di lunghezza L spostata dalla sua posizione di equilibrio.

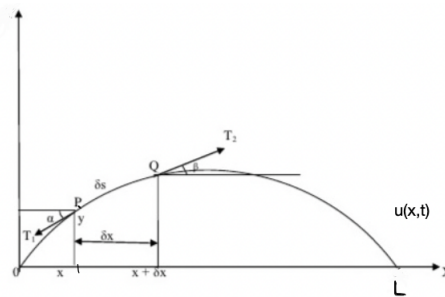


Figure 17: Visualizzazione onde trasversali

Guardiamo le ipotesi che facciamo :

- Lo spostamento avviene nella direzione ‘verticale’;
- La posizione di ciascun punto della corda, dipende dalla posizione di equilibrio del punto a riposo sull’asse x (direzione perpendicolare a quella dello spostamento che invece è verticale) e dal tempo;
- Sono trascurati eventuali spostamenti orizzontali;

- La corda è considerata come flessibile, quindi lo sforzo modellato dal vettore \vec{T} è diretto tangenzialmente al profilo della corda, e di intensità τ (detta tensione della corda);
- Lo spostamento e inclinazione della corda sono piccoli, ovvero che : $|u|, |u_x| \ll 1$;
- Consideriamo trascurabile l'attrito.

La legge di carattere generale che utilizzeremo sarà la *Legge di Conservazione della Massa*, perchè la corda si deformerà, ma terrà per ogni segmento deformato una massa che non varia (ovviamente).

Chiamiamo $\rho_0(x)$ la densità a $t = 0$, mentre chiamiamo $\rho(x, t)$ la densità al tempo t . Consideriamo ora un tratto $[x, x + \delta x]$ di corda, e chiamiamo allora il corrispondente tratto deformato con lo spostamento, e quindi l'arco corrispondente a δx al tempo t , δs . Per la conservazione della massa allora :

$$\rho_0(x)\delta x = \rho(x, t)\delta s$$

Inoltre le componenti orizzontali della forza dovranno annullarsi in quanto non abbiamo movimento lungo l'asse x :

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = \tau_0(t)$$

(La x non ha influenza)

$$\text{Dove i } T_i \text{ sono : } \begin{cases} T_1 = \tau(x, t); \\ T_2 = \tau(x + \delta x, t) \end{cases} \Rightarrow \tau(x, t) \cos \alpha(x, t) = \tau_0(t).$$

A questo punto guardando la componente verticale :

$$\tau_{\text{vert}}(x, t) = \tau(x, t) \sin \alpha(x, t) = \tau_0 \tan \alpha(x, t)$$

Che risulta essere : $\tau_{\text{vert}}(x, t) = \tau_0(x)u_x(x, t)$.

Facendo un bilancio delle forze verticali :

$$\tau_{\text{vert}}(x + \delta x, t) - \tau_{\text{vert}}(x, t) = \tau_0(x)[u_x(x + \delta x, t) - u_x(x, t)]$$

Si consideri ora $f(x, t)$ l'intensità, maggiore dell'unità di massa risultante delle forze verticali (come il peso ad esempio).

Quindi su δs agisce :

$$f(x, t)f(x, t)\delta s = \rho_0(x)f(x, t)\delta x$$

Dalla *Legge di Newton* ($F = ma$) si ricava che :

$$\rho_0 \delta x u_{tt}(x, t) = \tau_0(t)[u_x(x + \delta x, t) - u_x(x, t)] + \rho_0(x)f(x, t)\delta x$$

Dividendo entrambi i membri per δx , per $\delta \rightarrow 0$, otteniamo :

$$\rho_0(x)u_{tt}(x, t) = \tau_0(t)u_{xx} - \rho_0(x)f(x, t)$$

Ottenendo in questo modo **l'Equazione delle Onde** (dividendo per $\rho_0(x)$) :

$$u_{tt} - c^2(x, t)u_{xx} = f(x, t)$$

Con : $c^2(x, t) = \frac{\tau_0(t)}{\rho_0(x)}$, costante se la corda è omogenea, e quindi con $\rho_0(x) = \rho_0 = \text{cost.}$, ed elastica se $\tau_0(t) = \tau_0 = \text{cost.}$.

L'equazione delle onde ha un comportamento diverso dalle equazioni di diffusione e di Laplace, che invece avevano delle analogie.

Inoltre per l'equazione delle onde vale la Conservazione dell'Energia : Esprimiamo l'energia Cinetica :

$$E_{\text{cin}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_0 u_t^2 dx;$$

mentre invece l'energia Potenziale :

$$ds = \int_x^{x+\delta x} \sqrt{1 + u_x^2} dx$$

che possiamo trasformare in :

$$\delta s - \delta x = \int_x^{x+\delta x} (\sqrt{1+u_x^2} - 1) dx \approx \frac{1}{2} u_x^2 \delta x$$

(Quest'ultimo passaggio considerando $u'_x \ll 1$) Potendo allora esprimere il lavoro come :

$$\delta W \approx \frac{1}{2} \tau_0 u_x^2 \delta x;$$

L'energia potenziale potrà poi essere espressa come :

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \tau_0 u_x^2 dx;$$

L'energia Totale si potrà esprimere allora come :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_0 u_t^2 + \tau u_x^2] dx$$

e la sua variazione come :

$$E'(t) = \int_0^L (\rho_0 u_t u_{tt} + \tau_0 u_x u_{xt}) dx$$

Integrando allora per parti e usando le condizioni di estremi fissi e $f \equiv 0$ (quindi no forze esterne), si ottiene :

$$E'(t) = \int_0^L \rho_0 [u_{tt} - c^2 u_{xx}] u_t dx = 0$$

(Perchè il termine in parentesi quadra abbiamo un termine pari a zero)

Quindi la $E(t)$ è costante, e vale la legge di Conservazione dell'energia.

Quando abbiamo un problema ben posto? In un problema di Dirichlet non dobbiamo solo dare la condizione della funzione agli estremi, ma anche della derivata; un altro problema rilevante tra i ben posti è il problema di Cauchy Globale (ovvero su \mathbb{R}) :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+); \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}; \\ u_t(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Con $g(x), h(x) \rightarrow 0$ abbastanza rapidamente per $|x| \rightarrow \infty$.

Oss. Chiamiamo operatore delle onde l'operatore : $\text{op.} = \partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}$, anche detto 'Operatore di D'Alembert', che si può dimostrare essere uguale a

$$\text{op.} = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x)$$

oppure come

$$\text{op.} = (\partial_t + c \partial_x)(\partial_t - c \partial_x)$$

Che è utile in quanto, prendendo una generica funzione $\omega(x, t)$:

$$\text{Se : } (\partial_t + c \partial_x) \omega = \omega_t + c \omega_x = 0,$$

$$\text{Allora : } \omega \text{ soddisfa } \text{op.} \omega = 0;$$

Analogamente per una funzione $v(x, t)$ ho che :

$$\text{Se : } (\partial_t - c \partial_x) v = v_t - c v_x = 0,$$

$$\text{Allora : } v \text{ soddisfa } \text{op.} v = 0;$$

$$\text{Quindi : } v_t = c v_x.$$

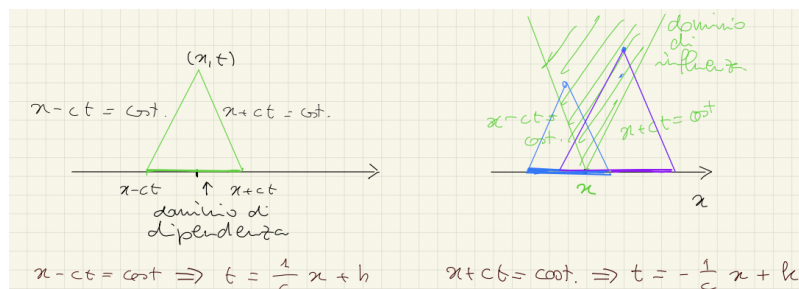


Figure 18: Formulazione di D'Alembert

Si può allora giungere alla Formulazione di D'Alembert :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[g(x + ct) - g(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy$$

Vediamo allora come la $u(x, t)$ dipenda esclusivamente da valori iniziali di g , e di h .

Questa volta non c'è assolutamente un effetto regolarizzante : le singolarità al contrario risultano infatti propagarsi (vedi caso di $h(x) = 0$).

(Osserviamo che in 2 dimensioni (membrana) l'equazione si trasforma in un laplaciano : $u_{tt} - c^2 \Delta u = f$).

3.2.1 Generalizzazione delle Equazioni Viste finora

Equazione di Diffusione Avevamo considerato una diffusione isotropa con corpo (o membrana o filo) a densità costante : $u_t - D \Delta u = f$.

Generalizzando allora, guardando il caso anisotropo e non omogeneo, si trasforma il coefficiente di diffusione e diventa :

$$u_t - \text{div}(A(\bar{x}) \nabla u) = f(\bar{x})$$

(dove A può anche essere dipendente pure dal tempo e diventare $A(\bar{x}, t)$)

$A(\bar{x}, t)$ deve essere matrice definita positiva t.c.

$$\sum_{ij=1}^n A_{ij}(\bar{x}, t) v_i v_j \geq \lambda \|\bar{v}\|^2$$

(Con $\lambda > 0$).

E vale ancora il principio del massimo e gli stessi problemi ben posti *Laplace* Analogamente a quanto visto per la diffusione possiamo scrivere allora che :

$$\text{div}(A(\bar{x}) \nabla u) = f(\bar{x})$$

Anche qui valgono gli stessi problemi ben posti e il principio del massimo.

Onde Analogamente a quanto visto per la diffusione possiamo scrivere allora che :

$$u_{tt} - \text{div}(A(\bar{x}) \nabla u) = f(\bar{x})$$

Vale qui la propagazione delle singolarità.

(*Oss.* Si può dimostrare che con un cambio di variabile tutte le equazioni a derivate parziali lineari del 2° ordine possono essere trasformate in una delle 3).

3.3 Spazi di Hilbert

Consideriamo V spazio Vettoriale su \mathbb{R} , ovvero uno spazio in cui esistono 2 operazioni : somma e prodotto per uno scalare (quindi in \mathbb{R}^n) tra gli elementi, che chiameremo genericamente vettori. Lo spazio risulterà essere chiuso rispetto a queste operazioni, cioè :

$$\text{Se } \bar{u}, \bar{v} \in V \text{ e } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{Allora } \lambda \bar{u} + \mu \bar{v} \in V$$

(Considereremo spazi di dimensione finita e infinita \mathbb{R}^n , ovvero spazi dove possiamo trovare un numero finito di vettori che generano lo spazio con una loro combinazione lineare (la Base), un numero infinito, o meno (e quindi non esserci una base)).

Alcuni esempi sono :

\mathbb{P}_n = (Polinomi di grado $\leq n$) di dimensione finita;

\prod_n = (Polinomi trigonometrici di grado $\leq n$) , di dimensione finita di cui è possibile trovare una base infinita;

Altri esempi sono spazi di funzioni come : $\mathbb{C}^0, \mathbb{C}^1, \mathbb{C}_0^1([a, b])$ ($= 0$ negli estremi infatti è ancora vettoriale) , e tutti questi sono di dimensione infinita;

\mathbb{P} = (tutti i polinomi algebrici) , di dimensione infinita.

Diamo ora quindi la definizione di **Norma** su V spazio Vettoriale :

Sia $\bar{u} \in V$, la norma è una funzione tale che $\bar{u} \mapsto \|\bar{u}\| \in [0, +\infty)$.

E per essere tale deve avere le seguenti proprietà :

- i) Annullamento , $\|\bar{u}\| = 0 \iff \bar{u} = \bar{0} \in V$;
- ii) Omogeneità , $\|\lambda \bar{u}\| = |\lambda| \|\bar{u}\| \quad \forall \bar{u} \in V \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- iii) Disuguaglianza Triangolare, $\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$.

La norma mi definisce il concetto di distanza :

$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\|$ e come in \mathbb{R}^n intorno sferico di \bar{u} , ovvero

$$B_r(\bar{u}) = \{\bar{v} \in V | d(\bar{u}, \bar{v}) < r, \|\bar{u} - \bar{v}\| < r\}$$

Facciamo allora un esempio per $f \in \mathbb{C}^0([a, b])$, per cui possiamo definire la norma come :

$$\|f\|_{\mathbb{C}^0} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Ma potrebbe essere definita anche come :

$$\|f_1\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

O come :

$$\|f_2\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Evidenziamo ora il fatto che, la norma, è stata introdotta per dare una definizione di *convergenza* :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n = \bar{u} \quad \text{con } \bar{u}_n, \bar{u} \in V$$

Se si verifica che : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{u}_n - \bar{u}\| = 0$.

3.3.1 Completezza

La *Completezza* è definita come :

V con norma $\|\cdot\|$ si dice completo se per tutte le successioni $\{\bar{u}_n\} \subset V$ i cui elementi si avvicinano tra loro indefinitamente , ovvero $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\bar{u}_n - \bar{u}_m\| = 0$, si può dire che $\bar{u} \in V$ t.c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n = \bar{u}$.

Un esempio di spazio incompleto è dato da \mathbb{Q} insieme dei numeri razionali, infatti le approssimazioni decimali di numeri irrazionali come $\sqrt{2}$, o π , hanno elementi arbitrariamente vicini, ma non potranno mai avere limite tendente a ∞ perchè altrimenti non apparterebbero più a \mathbb{Q} , ma a \mathbb{R} . Guardiamone una dimostrazione numerica considerando $\sqrt{2}$

:

$$\begin{aligned}a_0 &= 1 \\a_1 &= 1.4 \\a_2 &= 1.41 \\a_3 &= 1.414 \\\dots \\a_n &= 1.4142\dots d_n\end{aligned}$$

Allora :

$$\|a_n - a_m\| = |a_n - a_m| < \frac{1}{10^N}$$

, con $N = \min(n, m)$;

Si avrebbe allora il limite per cui : $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|a_n - a_m\| = 0$, ma a questo punto avendo un numero infinito di cifre decimali non stiamo più trattando l'insieme \mathbb{Q} , ma siamo passati a \mathbb{R} . Ciò dimostra che lo spazio \mathbb{Q} sia incompleto, a differenza di \mathbb{R}

Guardiamo ora un altro esempio per vedere che la completezza è legata alla scelta della norma.

Consideriamo la 'norma 2', ovvero $\|\cdot\|$ in $\mathcal{C}^0([a, b])$ definita come :

$$\|u\|_2 = \left\{ \int_a^b u(x)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Che non risulta essere completo allora! Vediamo infatti che (prendendo $m > n$):

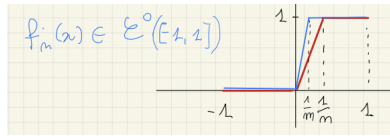


Figure 19: Esempio per la completezza

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_2 &= \left\{ \int_{-1}^1 (f_n - f_m)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_0^{\frac{1}{n}} (f_n - f_m)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \\&= \left\{ \int_0^{\frac{1}{m}} (mx - nx)^2 dx + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1 - nx)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \\&= \left\{ (m - n)^2 \int_0^{\frac{1}{m}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1 + n^2 x^2 - 2nx) dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \\&= \left\{ -\frac{2}{3} \frac{1}{m} + \frac{1}{3n} + \frac{n}{3m^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{(m - n)^2}{3m^2 n} \right\}^{\frac{1}{2}} \\&\leq \left\{ \frac{m^2}{3m^2 n} \right\} \rightarrow 0\end{aligned}$$

Da questo vediamo come quindi andando a fare il limite, la funzione dovrebbe coincidere col limite di Heaviside (ovvero che $f_n(x) \rightarrow_{L^2(-1,1)} H$), e questo si può infatti dimostrare :

$$\begin{aligned}\|f_n - H\|_{L^2(-1,1)}^2 &= \int_{-1}^1 (f_n(x) - H(x))^2 dx = \\&= \int_0^{\frac{1}{n}} (nx - 1)^2 dx = \\&= n^2 \frac{x^3}{3} + x - nx^2 \Big|_0^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0\end{aligned}$$

Essendo quindi questa norma tendente alla funzione di Heaviside che sappiamo essere tale che $H(x) \notin \mathbb{C}^0([-1, 1])$, la norma 2 non appartiene allo spazio \mathbb{C}^0 , per cui questo spazio non è completo.

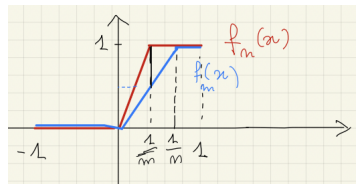


Figure 20: Esempio per la completezza

In realtà $\mathbb{C}^0([a, b])$ se scelgo $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^0}$ è **completo**. Come si concilia allora quanto visto sopra con la completezza?

Succede che in $\|\cdot\|_{\infty}$, la $\|f_n - f_m\|$ non necessariamente tende a 0 per $n, m \rightarrow \infty$.

Supponendo infatti $m > n$ si ha che :

$$\|f_n - f_m\|_{\infty} = \max_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f_m(x)| = 1 - \frac{n}{m}$$

Quindi se $m = 2n$ si ottiene $\frac{1}{2}$, quindi diverso da 0 per n, m tendenti ad infinito.

Quindi con questa nuova definizione di distanza i termini della successione non si avvicinano indefinitamente, ed il fatto che non converga non contraddice la completezza.

3.3.2 Spazi con Prodotto Scalare

Parliamo ora degli **Spazi con Prodotto Scalare** in quanto vedremo esserci utile il concetto di proiezione. Considerando V spazio vettoriale, diamo la definizione di *Prodotto Scalare* : il prodotto scalare è un prodotto che associa ad una coppia $(\bar{u}, \bar{v}) \in V \times V$ uno scalare appartenente a \mathbb{R} scritto come $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ tale che :

- i) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$, proprietà commutativa ;
- ii) $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \geq 0$ e $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0$ se e solo se $\bar{u} = 0$, proprietà di positività ed annullamento ;
- iii) $\langle \lambda \bar{u}^1 + \mu \bar{u}^2, \bar{v} \rangle = \lambda \langle \bar{u}^1, \bar{v} \rangle + \mu \langle \bar{u}^2, \bar{v} \rangle$, proprietà di linearità .

La norma è legata al prodotto scalare con il rapporto : $\|\bar{u}\| = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Oss. Possiamo definire l'*Ortogonalità*, cioè \bar{u} ortogonale a \bar{v} se $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$. Guardiamo allora le proprietà importanti (le stesse di \mathbb{R}^n) :

- Disuguaglianza di Schwarz : $\forall u, v \in V \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$;
- Proprietà del Parallelogramma : $\forall u, v \in V \quad \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$;
- Teorema di Pitagora : se $u \perp v$, cioè $\langle u, v \rangle = 0$, allora si ha che $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

La dimostrazione del Teorema di Pitagora è inoltre facilmente visualizzabile :

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle$$

dove, essendo l'ultimo termine uguale a 0, il teorema risulta già dimostrato.

Diamo allora la definizione di Spazio di Hilbert : 'uno spazio vettoriale con prodotto scalare completo (rispetto alla norma che deriva dal prodotto scalare)'.

In questo spazio valgono molti teoremi di \mathbb{R}^n (tra cui ad esempio il teorema di Rappresentazione opportunamente adattato), noi vedremo ora il *Teorema della Proiezione*.

Questo teorema ci servirà per trovare in un sottospazio S di uno spazio di Hilbert H , l'elemento u_S di S che ha distanza minima da un elemento $u \in H$.

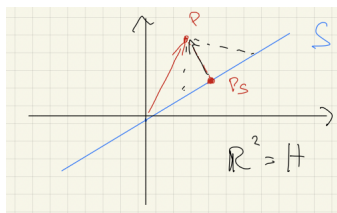


Figure 21: Visualizzazione del teorema della proiezione

Per estendere a dimensione infinita, dobbiamo prendere un sottospazio S completo (o chiuso), condizione ok se S ha dimensione finita, altrimenti da specificare.

L'enunciato diventa quindi :

Sia H di Hilbert, $S \subset H$ sottospazio chiuso, ed $u \in H$, Allora esiste uno ed un solo u_S proiezione ortogonale di u su S t.c. :

- 1) $\|u - u_S\| = \min_{v \in S} \|u - v\|$;
- 2) $\langle u - u_S, v \rangle = 0 \quad \forall v \in S (u - u_S \perp S)$.

Guardiamo allora alcuni esempi.

Esempio 1. $\mathbb{C}^0([a, b])$ con $\|\cdot\|_\infty$ è completo, ma la norma infinita non deriva dal prodotto scalare, in quanto non vale la 'Regola del Parallelogramma':

$$u_1 = 1 \quad u_2 = x \quad \text{in } [-1, 1];$$

E sono tali che

$$\begin{aligned} \|u_1 + u_2\|_\infty &= \max_{[-1,1]} |1 + x| = 2; \\ \|u_1 - u_2\|_\infty &= \max_{[-1,1]} |1 - x| = 2; \\ \|u_1\| &= 1 \quad \|u_2\| = 1; \\ \|u_1 + u_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2 &= 8 \neq 2(1 + 1) = 4. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo verificato che non ci sia il teorema della proiezione, e non sia allora adatto.

Esempio 2. Consideriamo le funzioni a quadrato integrabile $\mathbb{L}^2(a, b)$ in (a, b)

Apriamo prima una parentesi sugli *Integrali di Lebesgue*.

Vogliamo avere che il limite di funzioni integrabili, siano a loro volta integrabili, e ciò in Riemann non è sempre vero.

Lebesgue definisce l'integrale, approssimandolo con funzioni costanti a tratti, con il limite di queste funzioni (Riemann suddivideva quindi i sotto intervalli nel Dominio e li sommava, mentre Lebesgue opera col Codominio, suddividendone i valori da sommare e poi sommandoli).

Arriviamo allora alla definizione : 'L'integrale di f è definito come il limite di integrali funzioni costanti a tratti (se finito) che approssimano f '.

Fatti importanti :

- Funzioni integrabili secondo Riemann, lo sono anche secondo Lebesgue, ed il loro integrale è uguale;
- Funzioni che in valore assoluto sono integrabili in senso generalizzato, sono integrabili secondo Lebesgue;
- Due funzioni che differiscono su insiemi di misura nulli (insiemi infiniti, o finiti ma non numerabili), per integrale di Lebesgue sono indistinguibili. In realtà quindi ho classi di equivalenza di funzioni che sono uguali quasi ovunque (tranne nell'insieme di misura nulla);
- Una funzione è integrabile secondo Lebesgue se e solo se lo è il suo modulo.

Vediamone allora un esempio :

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha < 1, \quad \text{Int. secondo L. in } (0, 1)$$

Disegnandola graficamente, ci si accorge quindi come si possa evitare di fare integrali impro-

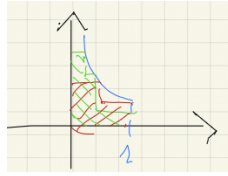


Figure 22: Integrale di Lebesgue

pri semplicemente andandola ad approssimare con funzioni continue a tratti ed integrandole. Ovvero, in termini matematici che :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

Torniamo quindi a $L^2((a, b))$. Definiamo :

$$L^2(a, b) = \{u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b [u(x)]^2 dx < \infty\}$$

In particolare se (a, b) è limitato, $\in L^2(a, b)$, ed i casi possibili di funzioni che possono appartenervi sono :

- $u \in \mathbb{C}^0([a, b])$;
- u limitata e continua a tratti ;
- u è illimitata e tendente a ∞ lentamente, contenente ad esempio funzioni del tipo :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \text{in } (0, 1)$$

(Invece $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin L^2(0, 1)$)

Guardiamo allora il Prodotto Scalare in $L^2(a, b)$:

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x) dx$$

Da cui :

$$\|u\| = \left(\int_a^b [u(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(Ricordiamo che $u \in L^2(a, b)$ SE e SOLO SE $\|u\| < \infty$).

Si possono verificare facilmente le proprietà i) e iii) del prodotto scalare. La proprietà di annullamento vale poi per $u(x) = 0$ q.o. (quasi ovunque).

Proposizione Con $\|\cdot\|_2$, $L^2(a, b)$ è Completo, e quindi spazio di Hilbert : Vale Schwarz che dice che

$$\left| \int_a^b u(x)v(x) dx \right| \leq \left\{ \int_a^b [u(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b [v(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

3.3.3 Teorema di Lax-Milgram

Sia preso H spazio di Hilbert. Allora $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ è detto funzionale lineare se

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v) \quad \forall u, v \in H, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

In dimensione finita tutti i funzionali lineari sono continui, cioè $u_n \rightarrow_{\|\cdot\|} u$ (ossia la norma della loro differenza tende a 0), allora si ha che :

$$\|F(u^n) - F(u)\| \rightarrow 0$$

In dimensione infinita questo non è vero (nel senso che può verificarsi almeno una volta che ciò sia falso, non che sia sempre falso).

Possiamo allora dire che definiamo un funzionale lineare F su H continuo se :

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0 \Rightarrow |F(u^n) - F(u)| \rightarrow 0$$

Ed invece che definiamo un funzionale lineare F su H limitato se :

$$C > 0 \text{ t.c. } \forall u \in H \text{ si ha } |F(u)| \leq C\|u\|$$

E' possibile dimostrare che, in H di Hilbert, se F è continua allora è limitata, e viceversa. Guardiamo un esempio :

$$F(v) = \int_{-1}^1 H(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx \quad x \in L^2(-1,1)$$

Poichè integrale di Heaviside. Proviamo quindi a mostrare la continuità mostrando la limitatezza :

$$|F(v)| = \left| \int_0^1 v(x)dx \right| \leq \left\{ \int_0^1 [v(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^1 1^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Dove considerando per il primo termine la disuguaglianza di Schwarz-Holder tra 1 e v :

$$\leq \left\{ \int_{-1}^1 [v(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{L_2}$$

Dunque abbiamo mostrato che è limitato con $C = 1$.

Definizione : $H^* = \{F : H \rightarrow \mathbb{R} | F \text{ lineare continuo (limitato)}\}$ è detto **duale** di H ed è spazio vettoriale.

Possiamo dare la definizione di norma duale $\|\cdot\|_*$ come :

$$\|F\|_{H^*} = \|F\|_* = \sup_{\|u\|=1} |F(u)| = \sup_H \frac{|F(v)|}{\|v\|}$$

poichè possiamo scrivere : $v = \|v\| \frac{v}{\|v\|}$.

$\|F\|_* \leq C$ dalla definizione di limitatezza.

In realtà $\|F\|_*$ è la più piccola C nella definizione. Infatti :

$$|F(v)| = \|v\| \left| F\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right| \leq \|v\| \sup_H \left| F\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right| \leq C\|v\| = \|F\|_* \|v\|$$

Oss. H di Hilbert, fissiamo $\tilde{u} \in H$, allora :

$$L_{\tilde{u}}(u) = \langle \tilde{u}, u \rangle \quad \text{è chiaramente lineare}$$

Inoltre : $|L_{\tilde{u}}(u)| = |\langle \tilde{u}, u \rangle|$, dalla disuguaglianza di Schwarz per cui $\leq \|\tilde{u}\| \|u\|$, essendo \tilde{u} fissato (C della limitatezza).

Allora si ha : $\|L_{\tilde{u}}\|_* \leq \|\tilde{u}\|$. Ma essendo che :

$$\frac{L_{\tilde{u}}(\tilde{u})}{\|\tilde{u}\|} = \frac{\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle}{\|\tilde{u}\|} = \|\tilde{u}\|$$

Quindi si ricava che : $\|L_{\tilde{u}}\|_* = \|\tilde{u}\|$.

Finita l'osservazione, torniamo a quanto detto sopra, che in realtà vale al contrario, dal :
Teorema di Rappresentazione. Esso enuncia che : Con H spazio di Hilbert, sia $F \in H_*$, allora esiste una e una sola $\tilde{u} \in H$ t.c. $F = L_{\tilde{u}}$, cioè che $F(u) = \langle \tilde{u}, u \rangle \forall u \in H$, e si ha $\|F\|_* = \|\tilde{u}\|$.

Il teorema ci dice che tra H, H^* c'è una corrispondenza biunivoca (ovvero che H^* possa essere identificato come H).

Definiamo poi un'applicazione bilineare su H , un'applicazione tale che

$$a : H \times H \mapsto \mathbb{R}$$

E che sia lineare in entrambe le componenti, cioè che :

$$a(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda a(u_1, v) + \mu a(u_2, v)$$

e che

$$a(u, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda a(u, v_1) + \mu a(u, v_2)$$

(Nb. in generale questa proprietà non è commutativa)

Si dice inoltre che a è :

- **Limitata**, se $M \geq 0$ t.c. $|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$ questo $\forall u, v \in H$;
- **Coerciva**, se $\alpha > 0$ t.c. $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$, $\forall u \in H$.

Anche per forme bilineari abbiamo la continuità se e solo se c'è limitatezza.

A questo punto abbiamo tutto per esprimere il *Problema Variazionale Astratto* (PVA), definito come :

$$\text{Trovare } v \in H \text{ t.c. } a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H$$

Guardiamo quindi il **Teorema di Lax-Milgram** :

Con H spazio di Hilbert, se

- a forma bilineare continua e coerciva;
- F funzionale lineare continuo;

Allora esiste una e una sola soluzione di (PVA) e inoltre $\|u\| \leq \frac{\|F\|_*}{\alpha}$ con α costante di coercività.

Oss. L'ultima stima è stima di *stabilità*, infatti se F^1 e $F^2 \in H$, e u_1, u_2 sono le soluzioni corrispondenti, allora per linearità $u_1 - u_2$ risolve (PVA) con $F^1 - F^2$ al posto di F . L'ultima stima inoltre mi dice che :

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{\|F^1 - F^2\|_*}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \|F^1 - F^2\|_*$$

Cioè se per esempio $\|F^1 - F^2\| < \epsilon$ allora $\|u_1 - u_2\| < \frac{\epsilon}{\alpha}$, quindi le due soluzioni distano in norma al più $\frac{\epsilon}{\alpha}$.

Vorremmo ora applicare il Teorema di Lax-Milgram a problemi della tipologia di quello visto all'inizio di questa parte. Allora si pone il problema : Quale spazio di H ?

- La formulazione era scritta per $\mathbb{C}_0^1(a, b)$, ma abbiamo visto che non è di Hilbert, dunque non va bene;
- L^2 è di Hilbert, ma funzioni in L^2 in generale non sono derivabili.

Idea : Consideriamo le funzioni in L^2 e con derivate in esso.

In che senso la derivata di L_2 ?

3.3.4 Spazi di Sobolev e Derivate Deboli

Per definire la derivata in L_2 dobbiamo allora definire i cosiddetti **Spazi di Sobolev** e le **Derivate Deboli**.

La definizione di derivata debole parte dall'utilizzo di integrali per la definizione di derivata. Sia $u \in L^2(a, b)$ diciamo che w è derivata debole di u se

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = - \int_a^b w(x)v(x)dx \quad \forall v \in \mathbb{C}_0^1([a, b])$$

Oss. Allora se $u \in \mathbb{C}^1([a, b])$ è il teorema di integrazione per parti :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Dove al secondo membro il primo termine sarà pari a 0 , mentre nel secondo avremo che $u' = w$.

Scriveremo allora : $w = u'$ debole.

Guardiamo un esempio :

$$u(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 1; \\ x & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Verifichiamo che

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

funzione di Heaviside, sia derivata debole di $u(x)$.

Preso $v \in \mathbb{C}_0^1([-1, 1])$ si ha :

$$\int_{-1}^1 u(x)v'(x)dx = \int_0^1 xv'(x)dx =$$

che integrando per parti diventa

$$= xv(x)|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot v'(x)dx =$$

e quindi continuando ancora

$$= 1v(1) - 0v(0) - \int_{-1}^1 H(x)v'(x)dx$$

dove i primi termini saranno uguali a zero entrambi (essendo $v(1) = 0$) , e nell'integrale $w(x)$ rappresenta la derivata debole.

Abbiamo che :

- i) Se $\mathbb{C}^1([a, b])$, allora la derivata debole che coincide con quella classica;
- ii) Se $u \in \mathbb{C}([a, b])$ ed è di classe \mathbb{C}^1 tranne in un numero finito di punti dove ha comunque derivata limitata, allora ha derivata debole (discontinua);
- iii) In generale se u è discontinua non è detto che abbia derivata debole (piuttosto dovremmo avere bisogno della teoria delle distribuzioni e della Delta di Dirac).

Diamo ora la definizione di **Spazio di Sobolev** $H^1(a, b)$

$$H^1(a, b) = \{v \in L^2 | v' \in L^2(a, b), v' \text{ debole}\}$$

Possiamo introdurre il prodotto scalare :

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2}$$

Di conseguenza la norma :

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$$

quindi che :

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2}$$

Dalla teoria si otterrebbe a questo punto che $H^1(a, b)$ è spazio di Hilbert.

Inoltre si può mostrare che se $u \in H^1(a, b)$ allora u è continua (cioè nella classe di equivalenza di funzioni uguali q.o. una funzione continua).

Inoltre vale la *Disuguaglianza di Traccia* : Se $u \in H^1(a, b)$ allora $C_T > 0$ (traccia) t.c. :

$$\forall x \in [a, b] \quad |u(x)| \leq C_T \|u\|_{H^1(a, b)}$$

Essendo le funzioni di $H^1(a, b)$ continue, possiamo definire altri spazi di Sobolev :

$$H_0^1(a, b) = \{u \in H^1 | u(a) = u(b) = 0\};$$

$$H_{0,a}^1(a, b) = \{u \in H^1 | u(a) = 0\};$$

$$H_{0,b}^1(a, b) = \{u \in H^1 | u(b) = 0\}.$$

(Tutti anche spazi di Hilbert ricordiamo, e dove vedremo valere la disuguaglianza di Poincaré (utile per dimostrare la coercività)). Introduciamo ora il **Teorema di Poincaré** :

$C_P > 0$ tale che per $\forall u \in H_0^1(a, b)$ allora $\|u\|_{L^2} \leq C_P \|u'\|_{L^2}$ (Con $C_P = C_P(a, b)$). (In realtà vale anche in $H_{0,a}^1$ e $H_{0,b}^1$).

Segue ora la dimostrazione :

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_a^x u'(t) dt \right| = \left| \int_a^b 1_{[a,x]} u'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \left\{ \int_a^x 1^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b [u'(t)]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{x-a} \|u'\|_{L^2(a,b)} \Rightarrow \|u\|_{L^2}^2 = \int_a^b [u(x)]^2 dx \leq \|u'\|_{L^2}^2 \int_a^b (x-a) dx = \\ &= \frac{(b-a)^2}{2} \|u'\|_{L^2}^2 \Rightarrow C_P = \frac{b-a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Facciamo ora delle osservazioni :

Oss.1 Il teorema è valido anche per $u \in H_{0,a}^1$ o $H_{0,b}^1$.

Oss.2 Non può valere questo teorema su H^1 , infatti $u = k$ cost. $\in H^1$, ma si ha che $\|u'\|_{L^2} = 0$ mentre $\|u\|_{L^2} \neq 0$ se $k \neq 0$. L'unica funzione costante in H_0^1 (o in $H_{0,a}^1, H_{0,b}^1$) è la funzione $\equiv 0$.

$$\|u\|_{H_1}^2$$

Quando vale Poincaré allora :

$$\|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{1 + C_P^2} \|u\|_{H_1}^2$$

3.3.5 Formulazione Debole (o Variazionale) per Problemi Differenziali

Guardando l'esempio fatto all'inizio di questa parte, ovvero :

$$\begin{cases} -u'' = f(x); & \text{in }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Per Dirichlet omogeneo scegliamo $H_0^1(0, 1)$, e quindi abbiamo la formulazione debole : trovare $u \in H_0^1(0, 1)$ t.c.

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$$

(dove, come sappiamo, indichiamo il primo termine con $a(u, v)$, ed il secondo termine con $F(v)$)

Vogliamo allora verificare se valgono le ipotesi di *Lax-Milgram* :

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx; \\ F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{cases}$$

Verificando le ipotesi :

- **Continuità** di $a(u, v)$:

$$|a(u, v)| = | \langle u', v' \rangle_{L^2} | \leq_{(Schwarz)} \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

- **Coercività** di $a(u, v)$:

$$a(u, u) = \langle u', u' \rangle_{L^2} = \|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{1 + C_P^2} \|u\|_{H^1}^2$$

(Dove abbiamo usato il teorema di Poincarè);

- **Continuità** di F :

$$F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad f \in L^2(0, 1);$$

$$|F(v)| = | \langle f, v \rangle_{L^2} | \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \leq \|F\|_* \|v\|_{H^1}$$

Dunque abbiamo dimostrato per questo esempio valere le ipotesi di Lax-Milgram, motivo per cui possiamo dire che UN'UNICA SOLUZIONE del problema, e che questa valga :

$$\|u\|_{H^1} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\frac{1}{1+C_P^2}} = (1 + C_P^2) \|f\|_{L^2}$$

(In questo caso $C_P = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi la soluzione sarà : $\frac{3}{2} \|f\|_{L^2}$)

3.4 Approcio ai Problemi Differenziali

Per affrontare problemi differenziali abbiamo degli step :

1. Moltiplicare l'equazione per una funzione v test (con, ad esempio, $v \in \mathbb{C}^1$, e quindi regolare), che nel caso Dirichlet omogeneo la funzione test deve soddisfare le condizioni al bordo (Nb. la funzione test deve essere sufficientemente regolare da poter integrare per parti);
2. Dare condizioni al bordo a v e usare quelle di u per decidere lo spazio di Sobolev opportuno;
3. Integriamo per parti per arrivare alla formulazione debole;
4. Verificare la validità delle ipotesi di Lax-Milgram per poter concludere l'esistenza e unicità della soluzione.

Guardiamo un esempio :

$$\begin{cases} -Au''(x) + Bu'(x) + Cu(x) = f(x) & \text{in } (a, b); \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

(Dove A, B, C costanti).

Procedendo abbiamo allora (avendo scelto per quanto visto sopra v t.c. $v(a) = v(b) = 0$) :

$$\int_a^b -Au'(x)v'(x)dx + \int_a^b Bu'(x)v(x)dx + C \int_a^b u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

Scegliamo uno spazio $H_0^1(a, b)$, e di conseguenza abbiamo la formulazione debole : Essendo posti $\begin{cases} \int_a^b -Au''(x)v(x)dx + \int_a^b Bu'(x)v(x)dx + C \int_a^b u(x)v(x)dx = a(u, v); \\ \int_a^b f(x)v(x)dx = F(v). \end{cases}$, allora vogliamo trovare un $u \in H_0^1(a, b)$ t.c.

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(a, b)$$

Verifichiamo ora, dopo la formulazione del problema, le ipotesi di Lax-Milgram :

- *Continuità* di $a(u, v)$:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_a^b Au'v' + Bu'v + Cuv \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^b u'v' \right| + |B| \left| \int_a^b u'v \right| + |C| \left| \int_a^b uv \right| \leq \\ &\leq (|A| + |B| + |C|) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

- *Coercività* di $a(u, v)$:

$$a(u, u) = A \int_a^b [u']^2 dx + B \int_a^b u' u dx + C \int_a^b [u]^2 dx;$$

Essendo che, per il termine B :

$$\int_a^b u' u dx = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{d}{dx} u^2(x) dx = \frac{1}{2} u^2(x) \Big|_a^b = 0,$$

Applicando il Th. Fond. dell'Alg., ed essendo $u \in H_0^1$, si ha che :

$$a(u, v) = A \int_a^b [u']^2 + C \int_a^b [u]^2;$$

Per la Coercività dovrò poi avere sempre : $A > 0$, e $C \geq 0$. Dopodiché abbiamo due casi possibili :

- Se $C > 0$, allora ho che

$$\geq \min(A, C) \|u\|_{H^1}^2;$$

- Se $C = 0$, allora usiamo Poincarè, ovvero

$$\geq A \int_a^b [u']^2 dx = A \|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{A}{1 + C_P^2} \|u\|_{H^1}^2$$

- *Continuità* di F , come visto prima.

Quindi utilizzando Lax-Milgram abbiamo le condizioni per l'esistenza e unicità :

$$A > 0, \quad C \geq 0 \quad (B \text{ qualsiasi})$$

Discorso differente quando abbiamo il caso non omogeneo.

Per Dirichlet non omogeneo si sottrae una retta (detta rilevamento al bordo), che rende le condizioni omogenee.

Ne facciamo un esempio con l'equazione più generale che considereremo :

$$-(A(x)u'(x))' + B(x)u'(x) + C(x)u = f(x) \quad a < x < b;$$

Quindi per $v \in \mathbb{C}^1([a, b])$ moltiplico e integro per parti :

$$\begin{aligned} \int_a^b [-(A(x)u'(x))' + B(x)u'(x) + C(x)u]v(x)dx &= \int_a^b f(x)v(x)dx; \\ \int_a^b [A(x)u'(x)v'(x) + B(x)u'(x)v(x) + C(x)u(x)v(x)] &= A(x)u'(x)v(x) \Big|_a^b + \int_a^b f(x)v(x)dx; \end{aligned}$$

Dove il termine a sinistra dell'uguaglianza sarà il nostro $a(u, v)$, il primo termine a destra sarà quello relativo ai termini di bordo, ed il secondo a destra sarà la nostra $F(v)$. Consideriamo un problema di Dirichlet omogeneo $u(a) = u(b) = 0$, quindi scegliamo lo spazio $H_0^1(a, b)$. Imponiamo ora le condizioni del teorema di Lax-Milgram :

- *Continuità* di $a(u, v)$:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_a^b [A(x)u'v' + B(x)u'v + C(x)uv] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |A(x)u'v'| dx + \int_a^b |B(x)u'v| dx + \int_a^b |C(x)uv| dx \leq \\ &\leq A\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + B\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Ed avremo allora :

$$A(x) \leq A, \quad B(x) \leq B, \quad C(x) \leq C$$

- *Coercività* di $a(u, v)$:

$$a(u, u) = \int_a^b A(x)[u']^2 dx + \int_a^b B(x)u'u dx + \int_a^b C(x)u^2(x) dx;$$

A questo punto il secondo termine a destra (l'integrale relativo a B) sarà tale che :

$$\begin{aligned} \int_a^b B(x)u'u dx &= \frac{1}{2} \int_a^b B(x) \frac{d}{dx} u^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} B(x)u^2(x) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b B'(x)u^2 dx \end{aligned}$$

(Dove $\frac{1}{2}B(x)u^2(x) \Big|_a^b = 0$). Allora si ottiene :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_a^b A(x)[u']^2 dx + \int_a^b [C(x) - \frac{1}{2}B'(x)]u^2 dx \geq \\ &\geq a_0\|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{1+C_P} a_0\|u\|_{H^1} \end{aligned}$$

Allora da tutte queste ipotesi si deve ricavare che :

$$\begin{aligned} &A, B, B', C \text{ limitate, con } f^2 \\ &A(x) \geq a_0 > 0 \quad -\frac{1}{2}B'(x) + C(x) \geq 0 \end{aligned}$$

3.4.1 Problema di Neumann

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & x \in (0, 1); \\ -u'(0) = 0 & u'(1) = 1. \end{cases}$$

Moltiplichiamo per la funzione test $v \in \mathbb{C}^1(a, b)$ e integriamo :

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 f v dx$$

Usando le condizioni di Neumann sui primi due termini dell'equazione sopra, essi saranno rispettivamente pari a 1 e a 0 (le u'). L'equazione diventa allora :

$$-v(1) + \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 f v dx$$

$v(1)$ dipenderà solo da v e sarà lineare. Allora poniamo la formulazione debole :

$$\int_0^1 [u'v' + uv]dx = \int_0^1 f v dx + v(1)$$

(Primo membro che sarà quindi $a(u, v)$, e secondo membro che sarà $F(v)$).

Abbiamo $u, u', v, v' \in L^2$, quindi scelgo $H^1(0, 1)$ come spazio di Hilbert.

Dovremo trovare $u \in H^1(0, 1)$ t.c.

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H^1(0, 1)$$

Con la funzione a e F definiti sopra.

Apriamo ora una parentesi per vedere che si può tornare indietro, cioè che se esiste una soluzione alla formulazione debole $u \in \mathbb{C}^2([0, 1])$, allora essa è soluzione classica del Problema di Neumann.

Sappiamo che la formulazione debole vale $\forall v \in H^1$, in particolare scegliamo $v \in \mathbb{C}^1$ e integriamo per parti a sinistra :

$$\int_0^1 [-u''v + uv]dx + u'v|_0^1 = \int_0^1 f v dx + v(1) \quad \forall v \in H^1[0, 1]$$

Che sviluppato diventerà :

$$\int_0^1 (-u'' + u - f)v dx = v(1)[1 - u'(1)] + v(0)u'(0);$$

Notiamo che in $H^1(0, 1)$ ci sono anche funzioni $\mathbb{C}^1([0, 1])$. Prendiamo allora la funzione test $v \in \mathbb{C}_0^1([0, 1])$.

Allora si ottiene che : $\int_0^1 (-u'' + u - f)v dx = 0$, motivo per cui possiamo porre :

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \quad \forall x \in (0, 1)$$

(Dovrà essere allora uguale a 0; questo perchè se così non fosse, se fosse quindi diversa da zero in un punto, essendo continua sarebbe diversa da zero anche in un intervallo intorno al punto, e così facendo potremmo scegliere una funzione test per cui l'integrale risulterebbe essere diverso da 0)

Tornando quindi all'equazione da cui siamo partiti :

$$0 = v(1)[1 - u'(1)] + v(0)u'(0) \quad \forall v \in \mathbb{C}^1$$

Essendo il lato sinistro continuo vale $[0, 1]$.

Prendendo $v \in \mathbb{C}_{0,1}^1([0, 1])$, allora $\forall v$ deve valere che

$$u'(0)v(0) = 0 \quad \rightarrow u'(0) = 0$$

Quindi dovremo avere anche :

$$\begin{aligned} \rightarrow v(1)[1 - u'(1)] &= 0 \\ \rightarrow u'(1) &= 1 \end{aligned}$$

Così ottenendo il problema di Neumann. (vediamo quindi che quando esistono le formulazioni deboli, comprendono anche le soluzioni classiche).

Finita la parentesi torniamo a quanto iniziato sopra e guardiamo ora la soluzione tramite **Lax-Milgram** :

Verificando le ipotesi si hanno i seguenti passaggi

- *Continuità* di $a(u, v)$:

$$|a(u, v)| = | \langle u, v \rangle_{H^1} | \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

Quindi $a(u, v)$ continua con $M = 1$;

- *Coercività* di $a(u, v)$:

$$a(u, u) = \int_0^1 [(u')^2 + (u)^2] dx = \|u\|_{H^1}^2 \quad \alpha = 1;$$

- *Continuità* di $F(v)$:

$$\begin{aligned} |F(v)| &= \left| \int_0^1 f(x)v(x) dx \right| + |v(1)| \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + C_T \|v\|_{H^1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(Ricordiamo che : $\|x^2\|_{L^2}^2 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$);

Si ottiene allora che esiste una ed una soluzione u di (FV) e che :

$$\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2} + C_T$$

(Le ipotesi di Lax-Milgram valgono, e quindi esiste una ed una sola soluzione del problema).

3.4.2 Problema Misto Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -u''(x) - u'(x) + u(x) = 0 & x \in (0, 1); \\ u'(0) = 1 & u(1) = 0; \end{cases}$$

Prendiamo allora $v \in \mathbb{C}_{0,b}^1$ (ovvero come \mathbb{C}_0^1 ma solo con $v(b) = 0$). Moltiplichiamo per v e integriamo per parti, per poi applicare le condizioni ai bordi. Si ottiene allora che :

$$\int_0^1 [u'v' - u'v + uv] dx = -v(0);$$

In quanto la condizione di Neumann coinvolge solo $v(0)$ ed è lineare. (Come al solito allora chiamiamo il termine a sx $a(u, v)$ e quello a dx $F(v)$).

Scelgo a questo punto lo spazio funzionale $H_{0,1}^1(0, 1)$ (dovendo infatti avere $u, u', v, v' \in L^2(0, 1)$ e $u(1) = v(1) = 0$).

Guardiamo ora la *Formulazione Debole* :

trovare $u \in H_{0,1}^1(0, 1)$ t.c. $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_{0,1}^1(0, 1)$.

(Con a e F sopra assegnati).

Guardiamo che siano soddisfatte le condizioni :

- *Continuità* di $a(u, v)$:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 [u'v' - u'v + uv] dx \right| \leq \\ &\leq | \langle u, v \rangle_{H^1} | + \left| \int_0^1 u'v dx \right| \leq \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \|u'\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \\ &\leq 2\|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

- *Coercività* di $a(u, v)$:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^1 [(u')^2 - u'u + u^2] dx = \\ &= \|u\|_{H^1}^2 - \int_0^1 u'udx = \\ &= \|u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2}u^2(0) \geq \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

(In quanto sviluppando $\int_0^1 u'udx$ si ottiene $-\frac{1}{2}u^2(0)$).

Allora risulta essere coerciva con $\alpha = 1$;

- *Continuità* di F :

$$|F(v)| = |v(0)| \leq C_T \|v\|_{H^1}$$

Continua allora con $C = C_T$

Abbiamo allora una e una sola soluzione di u del problema variazionale (FV) e vale $\|u\| \leq C_T$.

Apriamo una parentesi per verificare di poter ‘tornare indietro’.

Supponiamo, come prima, che esista u che soddisfi la formulazione debole e che sia di classe $\mathbb{C}_{0,b}^2(0,1)$, e verifichiamo che questa sia soluzione classica.

Sappiamo che :

$$\int_0^1 [u'v']dx + \int_0^1 [-u' + u]vdx = -v(0) \quad \forall v \in V$$

In particolare per $\forall v \in \mathbb{C}_{0,b}^1(0,1)$. Integriamo allora per parti :

$$\begin{aligned} u'v|_0^1 - \int_0^1 u''vdx + \int_0^1 [-u' + u]vdx &= -v(0); \\ \int_0^1 [-u'' - u' + u]vdx &= v(0)[-1 + u'(0)] \end{aligned}$$

Essendo per tutte le $v \in \mathbb{C}_{0,b}^1(0,1)$, vale anche per quelle che valgono 0 in 0 (cioè $v(0) = 0$). Quindi :

$$-u''(x) - u'(x) + u = 0$$

Da cui si ottiene :

$$v(0)[-1 + u(0)] = 0 \quad \forall v \in \mathbb{C}_{0,b}^1$$

Che implica che $u'(0) = 1$.

(Evidenziamo che Dirichlet ce l'abbiamo come conseguenza delle scelte dello spazio).

3.4.3 Riassunto delle leggi Utilizzate

Guardiamo ora le disuguaglianze utilizzate nella trattazione :

-

$$\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \quad \|u'\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \quad \forall u \in H_0^1(a,b)$$

-

$$| \langle u, v \rangle_{L^2} | \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad \forall u, v \in L^2(a,b)$$

- *Schwarz*

$$| \langle u'v' \rangle_{L^2} | \leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \quad \forall u, v \in H^1(a,b)$$

- *Holder*

$$| \langle u, v \rangle_{H^1} | \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \forall u, v \in H^1(a,b)$$

- *Traccia*

$$|u(x)| \leq C_T \|u\|_{H^1} \quad \forall u \in H^1(a,b)$$

- *Poincarè (1)*

$$\|u\|_{L^2} \leq C_P \|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(a,b)$$

- *Poincarè (2)*

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq (1 + C_P^2) \|u'\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in H_0^1(a,b)$$

Facciamo ora una osservazione :

$\|u'\|_{L^2}$ potrebbe essere presa come norma su H_0^1 (o $H_{0,a}^1, H_{0,b}^1$). Infatti l'unico motivo per cui non potremmo sceglierla come norma in H^1 è che non varrebbe in questo caso la proprietà di annullamento. Per essere norma dobbiamo avere :

$$\|u\| = 0 \iff u = 0 \text{ q.o.}$$

Allora $\|u'\|_{L^2} = 0$ se $u \in H^1$, e quindi non è norma (se $u = \text{cost} \neq 0$).

Al contrario in H_0^1 (e gli altri visti sopra aventi come estremo a o b) l'unica costante è $u \equiv 0$. In questi spazi allora posso prendere questa come norma e non quella di H^1 , e viene detta :

$$\|u\|_{H_0^1} (= \|u'\|_{L^2})$$

Si noti inoltre che $\|u\|_{H_0^1}$ è equivalente a $\|u\|_{H^1}$ per $u \in H_0^1$. Infatti :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1}^2 &\leq \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \leq (1 + C_P^2) \|u\|_{H_0^1}^2; \\ \|u\|_{H_0^1}^2 &\leq \|u\|_{H^1}^2 \leq (1 + C_P) \|u\|_{H_0^1}^2 \end{aligned}$$

Ciò sta a significare che ho una successione $\{u_n\} \subset H_0^1$, allora che :

$$u_n \rightarrow_{\|\cdot\|_{H^1}} u \text{ con } u \in H_0^1 \iff u_n \rightarrow_{\|\cdot\|_{H_0^1}} u$$

Quindi in $H_0^1, H_{0,a}^1, H_{0,b}^1$ posso usare questa come norma rendendomi alcune verifiche per Lax-Milgram più semplici. (Negli esercizi potremo comunque scegliere quale utilizzare).

Altra regola generale riguarda invece il problema di Dirichlet :

Dirichlet si rende sempre omogeneo, sottraendo le rette che rilevano i dati agli estremi se ho esclusivamente un problema di Dirichlet, mentre usando la retta costante se in problema misto.

Per l'equazione generale :

$$-(A(x)u'(x))' + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = f(x) \quad a < x < b$$

Abbiamo bisogno di $A(x) \geq A > 0$ per Coercività.

$A(x), B(x), C(x)$ sono limitati in (a, b) .

Il termine $\int_a^b B(x)u'v dx$ per la dimostrazione di coercività si integra per parti, cioè :

$$\begin{aligned} \int_a^b B(x)u'v dx &= \frac{1}{2} \int_a^b B(x) \frac{d}{dx} u^2(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} B(x)u^2(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2} B'(x)u^2(x) dx \end{aligned}$$

Quindi deve essere :

$$B(b) > 0 \text{ e } u(a) = 0 \text{ oppure } B(a) < 0 \text{ e } u(b) = 0$$

Inoltre il termine con l'integrale si somma a $\int_a^b C(x)u^2(x) dx$, da cui si ricava che $\int_a^b [C(x) - \frac{1}{2}B'(x)]u^2(x) dx$;

di conseguenza deve essere anche $B'(x)$ limitato e $C(x) = \frac{1}{2}B'(x) \geq 0$.

(Per Neumann questo termine è più complicato, non lo vedremo). Ricordiamo che la condizione naturale su f è $f \in L^2(a, b)$.