Metodi Analitici

Davide Marchesi

April 16, 2022

Contents

1 Partial Differential Equations

1.1 Modelli Matematici

I modelli matematici non sono altro che un insieme di equazioni e/o relazioni matematiche che descrivono un fenomeno catturandone le caratteristiche essenziali e la cui soluzione permette di controllare/prevederne lo sviluppo. Essi sono ovviamente utilizzati in moltissimi ambiti (STEM e non) vome ad esempio: fisica, chimica, ma anche finanza, medicina, biologia, sport,... Come avviene la validazione di un modello matematico? Anzitutto bisogna osservare a livello teorico che il modello sia ben posto, ovvero che la soluzione esista, sia unica e sia stabile.
Fatto ciò il modello viene simulato numericamente, e di conseguenza se funziona, si dice che è stato validato sperimentalmente.
Gli esempi pratici delle simulazioni numeriche sono vari : studio della circolazione sanguigna nel corpo, progettazione di un mezzo (come una barca), studio sulla diffusione di un inquinante, e così via...
I modelli matematici sono generalmente costruiti a partire da 2 'mattoni' :

- **Leggi di carattere Generale** , ovvero leggi che non dipendono dal problema specifico che stiamo trattando (ex. leggi di conservazione di massa, di energia,...);
- **Relazioni Costitutive** , ovvero relazioni strettamente dipendenti dal problema che stiamo treattando (ex. la 'Legge di Hook'per una determinata molla, la 'Legge di Fourier' per la diffusione del calore,...).

Molto spesso un modello matematico risulta essere una equazione o un sistema di equazioni alle derivate parziali (in più variabili, come spazio, tempo,...).
In generale, una funzione incognita di più variabili, con x variabile spaziale fino a 3 dimensioni, e t variabile temporale, la scriveremo come :

$$F(t, x, y, z, u, u_t, u_x, ..., u_{tt}, u_{tx}, ..., u^{(k)}_{t...t}, ...) = 0$$

E diamo anche qualche definizione :

'Ordine' = massimo ordine di derivazione che appare in F (non tutte le variabili devono essere derivate per essere la funzione di un determinato ordine, ne basta una).

'Lineare' = F è lineare in 'n' e tutte le sue derivate (in poche prole deve essere una combinazione lineare di esse).

Vediamo ora alcuni esempi:

1. **Trasporto** : $u_t + \bar{V}(\bar{x}, t) \cdot \nabla_x u = 0$, è una equazione lineare del 1° Ordine che mi descrive ad esempio il trasporto di una sostanza in un fluido (come per esempio un inquinante), dove $\bar{V}$ è la velocità della corrente, e $u = u(\bar{x}, t)$ è la concentrazione;

2. **Diffusione del Calore** : $u_t - D\Delta_x u = 0$ con $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$, $t \in \mathbb{R}^+$ (del 2° ordine lineare) e con $\Delta_x u = \partial^2_{x_1 x_1} + ... + \partial^2_{x_n x_n}$ operatore di Laplace, anche detto 'Laplaciano'. Essa mi descrive ad esempio la diffusione del calore in un corpo in diverse dimensioni;

3. **Laplace** : $\Delta u = 0$, equazione del 2° ordine lineare con $u = u(\bar{x})$, e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Essa mi descrive ad esempio il potenziale elettrostatico di un determinato corpo a regime, oppure della temperatura (in particolare l'equazione di Laplace se uguagliata ad una funzione 'f' prende il nome di **Equazione di Poisson** : $\Delta u = f$);

4. **Onde** : $u_{tt} - c^2\Delta_x u = 0$, equazione lineare del 2° ordine con $u = u(\bar{x}, t)$, e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad (n = 1, 2, 3), \quad t \in \mathbb{R}^+$. Essa rappresenta la propagazione di onde trasversali di piccola ampiezza $(n = 1)$, delle membrane $(n = 2)$, oppure delle onde sonore/elettromagnetiche $(n = 3)$;

5. **Piastra Vibrante** : $u_{tt} - \Delta^2_x u = 0$ equazione lineare del 4° ordine dove $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$. Essa rappresenta le piccole vibrazioni di una piastra omogenea ed isotropa;

6. **Korteveg De Vries** : $u_t + cuu_x + U_{xxx} = 0$, equazione non lineare del 3° ordine con $u = u(\bar{x}, t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+$. Essa descrive il caso di un problema non lineare legato allo studio di onde di superficie in acqua bassa, e che descrive la formazione di 'solitoni';

7. **Mezzi Porosi** : $u_t = k \operatorname{div}(u^\gamma \nabla u)$, equazione lineare del 2° ordine non-lineare con $k > 0, \gamma > 1, u = u(\bar{x}, t), \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, che descrive fenomeni di filtrazione dei fluidi (ad es. di acqua nel sottosuolo);

8. **Navier-Stokes** : $\begin{cases} \bar{u}_t + (\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\bar{u}; \\ \operatorname{div}\, \bar{u} = 0; \end{cases}$
   Sistema che mi descrive il moto di un fluido viscoso, omogeneo, incomprimibile (condizione incomprimibilità: div$\bar{u} = 0$);

Che cosa si intende per *Problemi Ben Posti*?
Si intende che, essendo che una sola equazione ha infinite soluzioni, sono necessarie ulteriori informazioni per far si che esista un'unica soluzione, per predire un comportamento o l'evoluzione di un fenomeno.
Tipicamente queste condizioni sono *Condizioni Iniziali* (CI), ovvero condizioni ad un certo istante di tempo t_0, oppure delle *Condizioni al Contorno* (CC), ovvero sul bordo del dominio che stiamo considerando.
La *Teoria* si occuperà allora principalmente di studiare condizioni sul problema affinchè esso abbia queste 3 caratteristiche (che lo riconducono alla 'buona posizione') : esista almeno una soluzione; la soluzione sia unica; ci sia dipendenza continua della soluzione dai dati (ovvero sia stabile).
Seppur esistano dei casi notevoli che possono essere risolti analiticamente, oggi la teoria è stata definitivamente soppiantata dalle soluzioni numeriche.
In particolare vedremo :

- *Eq. diffusione-Laplace/Poisson* , se siano problemi ben posti ed alcuni casi particolari, proprietà particolari delle soluzioni, stabilità delle soluzioni;
- *Eq. delle Onde* , cenni generali;
- *Eq. lin. del* 2 *ordine* , cenni su queste generiche funzioni;
- *Soluzioni variazionali* , formulazione debole (trattando essenzialmente il caso stazionario bi-dimensionale come se fosse una estensione delle soluzioni delle derivate parziali).

(L'unicità sarà osservata per tutti i problemi, per quanto invece riguarda l'esistenza, la vedremo solo per alcuni per costruzione e/o per casi particolari, così come solo per alcuni casi sarà osservata la stabilità).

1.2 Derivazione dell'equazione di Diffusione

Vedremo principalmente il modello per la diffusione del calore (non sarebbe l'unica applicazione). Vedremo la soluzione più generale in 3D (quindi in $\mathbb{R}^3$). Le Ipotesi semplificative che facciamo sono :

- Corpo Rigido;
- Corpo Omogeneo ed Isotropo;
- Densità costante;
- Consideriamo che ci sia diffusione all'interno, ma che possa ricevere energia dall'esterno da fonti esogene (correnti, reazioni chimiche, irraggiamento,...), senza però preoccuparci della loro caratterizzazione e raggruppandole in un termine r ($r =$ tasso di calore per unità di massa dall'esterno).

Procediamo prendendo un volume infinitesimo del corpo (non ne tocca il bordo), dove consideriamo ν la normale alla superficie ($V =$ elemento di volume infinitesimo , invece $\partial V =$ superficie dell'elemento infinitesimo).

$\star$ **Legge di carattere generale**
Conservazione dell'energia : il tasso di variazione dell'energia in V è uguale al flusso di calore attraverso al bordo ∂V al quale va aggiunto il tasso di calore fornito dalle sorgenti r. Definiamo allora :

$$e = e(\bar{x}, t) \text{ energia interna del corpo,}$$
$$\text{l'energia in } V \text{ è : } \quad \int_V e(\bar{x}, t)\rho \mathrm{d}\bar{x},$$
$$\text{ed il tasso di variazione : } \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V e(\bar{x}, t)\rho \mathrm{d}\bar{x} = \int_V e_t \rho \mathrm{d}\bar{x}.$$

Descritta la variazione, introduciamo il flusso di calore $\bar{q}$, che sarà uguale alla direzione del flusso, ed alla sua velocità ($\bar{q}$ è quindi una variabile vettoriale). Considerando allora l'elemento di area $\partial\sigma$ con versore $\partial\bar{\nu}$, la velocità con cui si fornirà calore sarà:

$$\bar{q} \cdot \bar{\nu} \mathrm{d}\sigma$$

Da cui si ricava il flusso di calore del volumetto V :

$$-\int_{\partial V} \bar{q} \cdot \bar{\nu} \mathrm{d}\sigma = -\int_V \mathrm{div}\ \bar{q} \mathrm{d}\bar{x}$$

A cui aggiungendo le fonti esterne r, si ricava infine :

$$\int_V e_t \rho \mathrm{d}\bar{x} = -\int_V \mathrm{div}\ \bar{q} \mathrm{d}\bar{x} + \int_V r\rho \mathrm{d}\bar{x}$$

Oss : Essendo che V è arbitrario in Σ (dove Σ indica la totalità del volume), allora vale senza integrale in Σ.
Si può vedere facilmente la dimostrazione che:

Se $\displaystyle\int_{B_r(\bar{x_0})} f(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x} = 0, \quad f \in \mathbb{C}^0(\Sigma), \quad \forall B_r(\bar{x}^0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \|\bar{x} - \bar{x_0}\| < r\} \subset \Sigma,$

Allora $f \equiv 0$ in Σ aperto.

Infatti se prendiamo $\bar{x_0} \in \Sigma$ per r sufficientemente piccolo, $B_r(\bar{x_0}) \subset \Sigma$. (Per passaggi completi vedi il corollario 1.2 della dispensa 1). Quindi possiamo scrivere:

$$e_t\rho = -\mathrm{div}\ \bar{q} + r\rho$$

A questo punto aggiungiamo le

⋆ **Leggi Costitutive** :

- *Fourier* , il flusso è proporzionale al gradiente di temperatura ed è diretto da pti più caldi a pti più freddi, ovvero $\bar{q} = -k\nabla\theta$, con $\theta = \theta(\bar{x}, t)$ temperatura del corpo, e k conduttività termica caratteristica del materiale;
- *Energia Interna prop. alla T* , ovvero $e = c\theta$, con c calore specifico del materiale.

Queste condizioni, sostituendole, fanno sì che si abbia:

$$\begin{aligned} e_t\rho &= -\mathrm{div}\ \bar{q} + r\rho \\ \rho c\theta_t &= k\Delta\theta + r\rho \\ \theta_t &= \frac{k}{\rho c}\Delta\theta + \frac{r}{c} \\ \theta_t - D\Delta\theta &= f. \end{aligned}$$

Possiamo poi vedere i casi particolari di:

- $n = 1$, ovvero $\theta_t - D\theta_{xx} = f$;

- $n = 2$, ovvero $\theta_t - D\delta\theta = f$;

1.2.1 Proprietà e Problemi Ben posti

Principio di Sovrapposizione : $u_t - D\Delta u = f$, dove l'operatore di Diffusione (anche detto di Fourier) lineare, è tale che

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \quad \rightarrow \quad [\partial t - D\Delta_x] \quad \rightarrow \quad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$$

Con la condizione particolare che se l'equazione è omogenea ($f = 0$), l'insieme delle soluzioni di $u_t - D = 0$ è spazio vettoriale.
Più in generale vale a dire che:

$$u(\bar{x}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) u_k(\bar{x}, t)$$

dove u_k è soluzione e $g(k) \rightarrow 0$ abbastanza rapidamente, *allora* $u(\bar{x}, t)$ è soluzione.

Vediamo ora l'esempio di un problema ben posto con $d = 1$, quindi in 1 **dimensione**. Si ha : $u_t - Du_{xx} = f \quad x \in (0, L) \quad t \in \mathbb{R}^+$, e si vuole studiare l'evoluzione della temperatura in tutti i punti (essenzialmente stiamo trattando una sbarra posta sull'asse x, che inizia in 0 e finisce in L).
Che condizioni devo porre?

→ Vedere la distribuzione della temperatura all'istante iniziale (Pb. di Cauchy), ovvero $u(x, 0) = g(x) \quad x \in [0, L]$ (solo questo però non basta!);

→ Condizione di temperatura controllata (Pb. di Dirichlet), ovvero

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \quad t \in [0, T].$$

→ Flusso agli estremi controllato (Pb. di Neumann) , ovvero

$$\text{In } x = 0 \quad -ku_x(0, t) = C(t);$$
$$\text{In } x = L \quad ku_x(L, t) = N(t).$$

→ Radiazione (Pb. di Robin) , ovvero

$$-ku_x(0, t) = \gamma(U - u(0, t));$$
$$ku_x(L, t) = \gamma(u - u(L, t)).$$

→ Posso infine porre condizioni differenti all'estremo di dx e sx.

(Queste condizioni non vanno adottate tutte ovviamente, ma scegliere quelle più utili e consone al nostro problema in considerazione per completare le condizioni oltre a quella di *Cauchy*, che è sempre necessaria per ottenere la soluzione).
Quanto fatto in questo esempio per una dimensione, può essere ampliato su più dimensioni; guardando ora $d = 2, 3$, quindi bi- o tri-dimensionale

$$u_t - D\delta u = f(x,t), \quad \text{definito in } \Sigma \text{ per } t \in (0,T],$$

$$\text{con } \Sigma \in \mathbb{R}^{2(o3)} \text{ dominio aoerto-connesso con } \partial\Sigma \text{ Regolare.}$$

Dove si pone:

$\rightarrow$ Problema di Cauchy , $u(\bar{x}, 0) = g(\bar{x}) \quad \bar{x} \in \bar{\Sigma}$;

A cui naturalmente si deve aggiungere una condizione al contorno tra

$\rightarrow$ Dirichlet , $u(\bar{\sigma}, t) = a(\bar{\sigma}, t) \quad \bar{\sigma} \in \partial\Sigma$;

$\rightarrow$ Neumann , $-\bar{q} \cdot \bar{\nu} = k\nabla\bar{u} \cdot \bar{\nu} = k\partial\bar{\nu}u(\sigma\bar{,}t) = b(\bar{\sigma}, t)$;

$\rightarrow$ Robin, $-\bar{q} \cdot n\bar{u} = \gamma(U - u) \quad \Rightarrow \quad \partial_\gamma u(\bar{\sigma}, t) + \alpha u(sig\bar{m}a, t) = \beta(\bar{\sigma}, t)$ con $\alpha > 0$;

$\rightarrow$ Misto, dove possiamo scrivere $\partial\Sigma = \partial_D\Sigma \cup \partial_N\Sigma$ con $\partial_D\Sigma \cap \partial_N\Sigma = 0$, e con $\partial_D\Sigma$ e $\partial_N\Sigma$ non vuoti;

1.2.2 Unicità

Considerando l'unicità cerchiamo soluzioni classiche, ovvero tutte le derivate sono 'coinvolte' in una funzione continua, e quindi

$$u \in \mathbb{C}^{2,1}(\Sigma \times (0,T))$$

Che significa che 2 derivate in $\bar{x}$ e 1 in t sono continue all'interno, ed infine bisogna porre che

$$u \in \mathbb{C}^0(\bar{\Sigma} \times [0,T])$$

(Fare attenzione che una funzione continua all'interno, non è necessariamente continua sulla frontiera).

Oss : Per tutte le condizioni al contorno che abbiamo visto, vale il '*principio di Sovrapposizione*'.

Questa condizione ha una importante implicazione, ovvero che se le soluzioni u_1 e u_2 sono soluzioni dello *stesso problema* (con quindi anche gli stessi dati), la loro differenza $\tilde{u}(\bar{x}, t) = u^{(1)}(\bar{x}, t) - u^{(2)}((\bar{x}), t)$, risulterà essere soluzione del problema completamente omogeneo.

Esempio per (CD): $\begin{cases} \tilde{u}_t - D\delta\tilde{u} = 0 \quad \Sigma \times (0,T]; \\ \tilde{u}(\bar{x},0) = 0 \quad \Sigma; \\ \tilde{u}(\bar{\sigma},t) = 0 \quad \partial\Sigma \times (0,T]. \end{cases}$

(Ed analogamente per (CN), (CR), (CM)).

Chiamiamio ora (CB) un generico problema di Cauchy-bordo (condizione al bordo generica), in generale : $\begin{cases} u_t - D\Delta u = f \quad \Sigma \times (0,T]; \\ u(\bar{x},0) = g \quad \bar{\Sigma}; \\ +C.C. \text{ tale che} \quad \partial\Sigma \times (0,T]. \end{cases}$

Proposizione : Un problema (CB), ammette al più una soluzione $\forall$ scelte dei dati *se e solo se* il problema corrispondente ha solo la soluzione identicamente nulla (sol $\equiv 0$).
Guardandone la dimostrazione :
$\Rightarrow$ è ovvio;
$\Leftarrow$ Se per un certo Pb. (CB) due soluzioni $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$, allora $\tilde{u} = u^{(1)} - u^{(2)}$ è soluzione del problema omogeneo, ma allora $\tilde{u} \equiv 0$, cioè $u^{(1)} = u^{(2)}$.

Quindi si ricava:

Th : UNICITA' per Pb. Omogeneo
Il (CB) omogeneo ammette solo la soluzione $\equiv 0$.
Oss. il teorema della divergenza è analogo al teorema fondamentale del calcolo integrale, in $\mathbb{R}^d$.

Infatti:

- $\mathbb{R}$,

$$\text{div } f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x);$$

$$\text{Con } \partial\Sigma = \{a,b\} \quad \text{ e } \nu = -1 \text{ in } a, \text{ e } \nu = 1 \text{ in } b;$$

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a);$$

$$\textit{Per l'int. per parti} \quad (fg)' = f'g + fg';$$

$$\text{Che integrata risulta dare : } \quad \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g\mathrm{d}x + \int_a^b fg'\mathrm{d}x;$$

Arrivando così al *Th. Fondamentale del calcolo Integrale :*

$$\int_a^b f'g\mathrm{d}x = -\int_a^b fg'\mathrm{d}x + (fg)|_a^b.$$

- $\mathbb{R}^d$,

$$\int_\Sigma \text{div } \bar{F} \text{d}\bar{x} = \int_{\partial\Sigma} \bar{F} \cdot \bar{\nu} \text{d}\bar{\sigma};$$

Osservando il caso di funzione scalare (quindi t.c. $\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$) :

$$\text{div}(g\bar{F}) = \nabla g \cdot \bar{F} + g\text{div } \bar{F};$$

Che integrata risulta dare : $\displaystyle\int_\Sigma \text{div}(g\bar{F})\text{d}\bar{x} = \int_\Sigma \bar{F} \cdot \nabla g \text{d}\bar{x} + \int_\Sigma g\text{div } \bar{F};$

Da cui si ottiene il *Th. della Divergenza* :

$$\underline{\int_\Sigma g \text{ div } \bar{F} = \int_{\partial\Sigma} g\bar{F} \cdot \bar{\nu} \text{ d}\bar{x} - \int_\Sigma \bar{F} \cdot \nabla g \text{ d}\bar{x}.}$$

Visto il teorema di integrazione per parti in $\mathbb{R}^d$, riprendiamo il teorema di unicità per il problema omogeneo.
Abbiamo visto che dimostrare l'unicità del problema significa dimostrare l'unicità del generico problema omogeneo (CBO), per cui ora scriviamo la dimostrazione :

$$\textbf{(CBO)} \quad \begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \quad \Sigma \times (0, T]; \\ u(\bar{x}, 0) = 0 \quad \Sigma; \\ \text{condiz. al bordo } \equiv 0 \quad \partial\Sigma \times (0, T]; \end{cases}$$

Allora moltiplichiamo per u l'equazione, ed integriamo su Σ in $\text{d}\bar{x}$

$$\int_\Sigma u_t u \text{d}\bar{x} = \int_\Sigma D u \Delta u \text{d}\bar{x}$$

Proseguiamo chiamando il termine a sx dell'uguale come 'I', e quello a dx dell'uguale come 'II', e scriviamo allora:

$$I = \int_\Sigma \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(u^2)\text{d}\bar{x} = \frac{1}{2} \frac{\text{d}}{\text{d}t} \int_\Sigma u^2(\bar{x}, t)\text{d}\bar{x};$$

$$\text{Con} \quad \int_\Sigma u^2(\bar{x}, t)\text{d}\bar{x} = E(t) \quad \text{Energia al tempo } t \geq 0;$$

$$II = D \int_\Sigma u\text{div } (\nabla u)\text{d}\bar{x};$$

Da cui per il Th. di integrazione per parti si ricava che :

$$II = D \int_{\partial\Sigma} u\partial_\gamma u \text{d}\bar{\sigma} - \int_\Sigma \|\nabla u\|^2 \text{d}\bar{x}];$$

Per il problema di Neumann, Dirichlet, e misto dei due, l'integrale su $\partial\Sigma$ è tale da essere equivalente a $u\partial_\gamma u \equiv 0$.
Per Robin invece esso è $\partial_g ammau = -\alpha u$ con $\alpha > 0$, allora si ricava che $u\partial_\gamma u = -\alpha u^2 \leq 0$.
A questoo punto però anche il secondo termine di II (quello con all'interno la

norma), essendo sempre definito positivo, avendo un meno davanti darà un contributo negativo, e ciò porta a $II \leq 0$.
Essendo allora $II \leq 0$, dall'uguaglianza $I = II$, si ricava che anche $I \leq 0$, ed in definitiva che : $E'(t) \leq 0$.
Abbiamo usato finora le CC e le equazioni, ma non la condizione iniziale, che ora osserviamo :

$$E(0) = \int_{\Sigma} [u(x,0)]^2 \mathrm{d}\bar{x} = 0;$$

Ci troviamo allora davanti ad una funzione maggiore o uguale a zero, che non può mai crescere (derivata prima ≤ 0), e che parte da 0, allora avremo una funzione identicamente nulla $E(t) = 0$, ovvero $\int_S igmau^2 \mathrm{d}\bar{x}$. Quindi $u^2 \equiv 0$, e $u(\bar{x}, t) \equiv 0$ come volevasi dimostrare.
(*oss.* La divergenza ci rappresenta una sorta di densità locale di flusso).

1.2.3 Soluzione per Separazione delle Variabili

Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet con Dirichlet omogeneo e dati omogenei (Cauchy la consideriamo genericamente anche non omogenea).

1-d , come detto con $f \equiv 0$ e dati di Dirichlet $\equiv 0$.
Consideriamo una sbarra di lunghezza $L = \pi$ per facilità di calcoli, quindi si avrà :

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & (o, \pi) \times (0, T] \\ u(x,0) = g(x) & [0, \pi] \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 & t \in (0, T) \end{cases}$$

Con le condizioni che $g \in \mathbb{C}^0([0, \pi])$ e g sia continua agli estremi $g(0) = g(\pi) = 0$.
Andiamo allora inizialmente a trovare funzioni che formino una soluzione data solo dal prodotto tra una funzione della x ed una della t, che vedremo poi solo successivamente essere delle soluzioni generali del nostro problema.

- 1°step , Cerchiamo soluzioni della forma $v(x,t) = X(x)T(t)$, con

$$v_t = X(x)T'(t) \quad \text{e} \quad v_{xx} = X''(x)T(t)$$

Sostituiamo all'equazione

$$X(x)T'(t) = DX''(x)T(t)$$

(Supponendo il prodotto delle equazioni diverso da zero per rispettare la cond. di Cauchy).
A questo punto dividiamo per $DX(x)T(t)$, ed otteniamo :

$$\frac{T'(t)}{DT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda(x,t)$$

Dove il termine di sinistra dipende solo dalla t, e quello di destra solo dalla x, quindi la funzione generica λ non può dipendere nè dall'uno, nè dall'altro, e dovrà essere necessariamente costante.

- 2°step , Risolvere le due equazioni :

$$T'(t) = D\lambda T(t);$$
$$T(t) = \gamma e^{D\lambda t}. \quad \text{(con } \gamma \text{ costante arbitraria)}$$

Ed allo stesso tempo

$$X''(x) = \lambda X(x)$$
$$X(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0, \text{ e } X(\pi) = 0$$
$$\begin{cases} X'' = \lambda x; \\ X(0) = X(\pi) = 0; \end{cases}$$

Particolare problema in X, chiamato problema ai limiti, dove quindi il valore della funzione non è all'istante iniziale, ma su più punti (non sempre ammette soluzione).
Cerchiamo di risolverla (ODE Lineare del 2° ordine a coeff. costanti) seguendo i 3 possibili casi ($u^2 = \lambda$) :

i) $\lambda > 0 \quad u_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$, 2 rad. reali distinte.
Allora : $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$;
ed imponenendo le condizioni $X(0) = X(\pi) = 0$ otteniamo :
$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ e^{\sqrt{\lambda}\pi} C_1 + e^{-\sqrt{\lambda}\pi} C_2 = 0; \end{cases}$ ovvero un sistema 2×2 con determinante t.c.

$$e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi} \neq 0 \qquad \text{per } \lambda > 0$$

Ciò sta a significare che per il teorema di Cramer esiste un'unica soluzione $C_1 = C_2 = 0$, quindi $X(x) \equiv 0$, soluzione banale (in inglese detta '*trivial solution*'), che non ci interessa.

ii) $\lambda = 0 \quad u_{1,2} = 0;$
Quindi : $X'' = 0, \quad X(x) = C_1 x + C_2;$
Ed imponendo le condizioni $X(0) = X(\pi) = 0$, si ottiene :

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1\pi + C_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0, \quad \text{Non interessante, trivial solution.}$$

iii) $\lambda = -\omega^2 < 0 \quad u_{1,2} = \pm i\omega$ radici complesse coniugate;
Allora : $X(x) = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x$;
Dove imponendo $X(0) = X(\pi) = 0$, si ha che :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \\ C_1 \cos\omega\pi + C_2 \sin\omega\pi = 0 \quad \Rightarrow \sin\omega\pi = 0 \text{ Se } C_2 \neq 0 \text{ , ovvero no sol. ban..} \end{cases}$$

Ciò è possibile se $\omega = n \in \mathbb{N}$.

Quindi possiamo dire di aver trovato ∞ soluzioni non banali del tipo :

$$X_n(x) = C_n \sin(nx) \quad \text{ con } n \in \mathbb{N};$$

Che corrispondono a $\lambda_n = -n^2$ unici valori per cui esistono soluzioni non banali.
Tornando alla soluzione del problema, ricaviamo che :

$$T_n(t) = \gamma_n e^{-Dn^2 t}$$

Quindi le infinite soluzioni saranno :

$$v_n(x,t) = b_n e^{-n^2 Dt} \sin nx$$

Con $b_n = \gamma_n c_n$, e che soddisfano :

$$\begin{cases} (v_n)_t - D(v_n)_{xx} = 0 \quad (0,\pi) \times (0,T]; \\ v_n(0,t) = v_n(\pi,t) = 0 \quad t \in (0,T]; \end{cases}$$

(Nb. Mi manca però ancora la condizione di Cauchy, che ancora in generale non è soddisfatta.)

Oss. :

$$v^{(N)}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-n^2 Dt} \sin nx;$$

E' ancora soluzione dello stesso problema (per princ. di sovrapposizione), e

$$v^{(N)}(x,0) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx;$$

Quindi se $g(x)$ è un polinomio trigonometrico in soli seni($g(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \sin nx$), ottengo la soluzione uguagliando i coefficienti ($\alpha_n = b_n$), ed inoltre questa soluzione è unica come già sappiamo.
Guardando l'esempio :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \quad (0,\pi) \times (0,T] \\ u(x,0) = 2\sin 2x - \sin 3x \quad x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad t \in [0,T] \end{cases}$$

Sono nella situazione in cui $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $b_3 = -1$. Quindi la soluzione unica è

$$u(x,t) = 2e^{-4t}\sin 2x - e^{-gt}\sin 3x$$

Ci chiediamo allora cosa fare se $g(x)$ non è un polinomio trigonometrico in soli seni.

- 3°step , Se non funzionano combinazioni lineari finite, proviamo con combinazioni lineari infinite, ovvero proviamo ad utilizzare le '**Serie di Fourier**' (perchè usano termini trigonometrici).
  Proviamo allora a scrivere $g(x)$ come serie di Fourier in soli seni. Ciò è possibile solo quando la funzione è periodica (condizione per scrivere la serie di Fourier) e dispari (condizione affinchè la serie sia di soli seni).
  Estendiamo allora la nostra funzione $g(x)$ ad una $\tilde{g}(x)$, t.c. quest'ultima sia dispari e periodica con periodo 2π.
  Quindi possiamo scrivere che :

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx$$

Dove ricordiamo che :

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(x)\sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(x)\sin nx \mathrm{d}x$$

(quest'ultima uguaglianza poichè $\tilde{g}(x)$ dispari, e $\tilde{g}(x) = g(x)$ in $[0,\pi]$).
La candidata soluzione allora sarà :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n^2 Dt}\sin nx$$

Affinchè però questa sia effettivamente una funzione, devo verificarne la convergenza, e la continuità di questa convergenza.
In termini matematici tocca verificare che :

$$u \in \mathbb{C}^{2,1}((0,\pi)\times(0,T)) \cap \mathbb{C}^0([0,\pi]\times[0,T]);$$

e che sia soluzione effettiva dell'equazione, cioè che

$$u_t - Du_{xx} = 0 \quad \text{e } u(0,t) = u(\pi,t) = 0;$$

Ed infine sarà da dimostrare che

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = g(x)$$

Dalla dispensa 1, sappiamo che possiamo verificare che una serie converge ad una funzione continua nel momento in cui può essere maggiorata (*Th. di Weierstrass*).

Allora si può facilmente osservare che la serie converge nel momento in cui abbiamo $t > 0$, in quanto la serie è maggiorata da una esponenziale negativa, infatti :

$$\beta_n \to 0 \text{ per } n \to \infty \quad \text{ quindi per } n > N, \quad |\beta_n| < 1;$$

E si può quindi maggiorare la serie con :

$$|\beta_n e^{-n^2 Dt} \sin nx| \leq |\beta_n (\frac{1}{e^{nDt_0}})^n| \leq (\frac{1}{e^{Dt\sigma}})^n = q^n$$

(dove la prima disuguaglianza è dovuta al fatto che il val. ass. del 'sin' è maggiorato da 1, la seconda dal fatto che $n > N$, ed infine abbiamo il termine q che ci sta semplicemente ad indicare una serie generica convergente ($q < 1$)).
Inoltre usando il criterio del rapporto si può osservare che questa serie converga a zero anche se derivata un numero indefinito di volte; infatti si noti come derivando la serie si otterrebbe sempre la stessa serie iniziale, moltiplicata per una potenza di n sempre maggiorabile (genericamente $n^H(\frac{1}{e^{Dt_0}})^n$) moltiplicata alternativamente a 'sin' e 'cos'. Ciò allora implica che

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{\infty}([0,T] \times (0,+\infty));$$

Ovvero che l'equazione di Diffusione abbia un effetto regolarizzante portando ad appartenere ad una classe di funzioni $\mathbb{C}^{\infty}$.

Oss.1 Posso trattare una sbarra di lunghezza qualsiasi ($L \neq \pi$), tutto sarà uguale per sep. delle variabili tranne che $X(0) = X(L) = 0$ dove troverò che $\lambda = -\omega^2 < 0$, quindi

$$\omega = \frac{n\pi}{L} \quad \text{e} \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

e $\tilde{g}$ sarà dispari e periodica di periodo $2L$.

Guardando ora un esempio :

$$\begin{cases} u_t - 2uxx = 0 \quad (0,1) \times (0,+\infty); \\ u(x,0) = x(1-x) \quad x \in [0,1]; \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t \in (0,+\infty); \end{cases}$$

Cerco allora soluzioni del tipo $v(x,t) = X(x)T(t)$, e sostituendo per $X(x)T(t) \neq 0$, si ottiene :

$$\frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Da cui si ottiene :

$$T'(t) = 2\lambda T(t) \quad \Rightarrow \quad T(t) = e^{2\lambda t};$$
$$X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{CON } \underline{X(0) = X(1) = 0 \ \textbf{(importante)}};$$

Da queste condizioni si ricava che :

i) Per $\lambda > 0$, come visto sopra si hanno solo sol. ban.;

ii) Per $\lambda = 0$, come visto sopra si hanno solo sol. ban.;

iii) Per $\lambda = -\omega^2 < 0$, si ottiene :

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0;$$
$$X(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 \sin\omega = 0 \Rightarrow \omega = n\pi;$$

E quindi si ricava che :

$$X_n = c_n \sin n\pi x;$$
$$T_n = \gamma_n e^{-2(n\pi)^2 t};$$
$$\lambda = -n^2\pi^2;$$
$$v_n(x,t) = b_n e^{-2(n\pi)^2 t} \sin n\pi x$$

Da cui :

$$u(x,t) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-2n^2\pi^2 t} \sin n\pi x;$$

E voglio :

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x = x(1-x);$$

A questo punto sviluppiamo in serie di Fourier di soli sin l'estensione periodica dispari di $x(1-x)$ (che ricordiamo dover avere periodo $2L$, quindi in queso caso 2)
Si arriva allora a definire :

$$\beta_n = \frac{4[1-(-1)^n]}{(n\pi)^3}$$

(sviluppata a partire da $\beta_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x \mathrm{d}x$)
Che nel caso di n-pari sarà uguale a zero, e nel caso di n-dispari sarà uguale a $\frac{8}{(n\pi)^3}$.
Quindi :

$$\underline{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{[(2k+1)\pi]^3} e^{-2(2k+1)^2\pi^2 t} \sin(2k+1)\pi x;}$$

Oss.2 Per tutte le soluzioni $v_n(x,t)$ abbiamo visto che il limite per $t \to \infty$ è sempre 0, sia che parliamo di combinazioni lineari di esse (ovviamente), sia che stiamo trattando delle serie (per la sommatoria in n di... vale infatti il teorema di scambio di lim e $\sum$ [come possiamo vedere dalla dispensa]). Ciò rispetta la realtà fisica dell'avvenimento, in quanto ci aspettiamo i pti più caldi di un corpo tendano a raffreddarsi e viceversa. (Il fatto che per

$t \to \infty$ sia ammesso il limite e che sia zero è volendo dimostrabile.)

Oss.3 Problema di Dirichlet non nullo ma costante, ovvero con dato al bordo $\neq 0$, quindi t.c. :

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \quad (0, L) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) \quad [0, L] \\ u(0, t) = a \quad u(L, t) = b \times [0, +\infty) \end{cases}$$

(In questo caso affinchè vi sia soluzione in $\mathbb{C}^0$ dovrò avere la funzione $g(x)$ continua in $[a, b]$ e con $g(0) = a$ e $g(L) = b$). Si osservi che quindi è come se avessimo gli estremi a due temperature differenti, una più alta ed una più bassa, ci aspettiamo allora che per $t \to \infty$, e quindi a regime, ci sia una distribuzione lineare.
Che sarà del tipo $r(x) = \frac{b-a}{L}x + a$.
Consideriamo allora di sottrarre la soluzione con distribuzione per far sì che tendendo ad infinito tenda ad un valore L.
Poniamo allora $v(x, t) = u(x, t) - r(x)$, che per il principio di Sovrapposizione soddisfa :

$$\begin{cases} v_t - Dv_{xx} = 0; \\ v(x, 0) = g(x) - r(x) = \hat{g}(x); \\ v(0, t) = v(L, t) = 0; \end{cases}$$

Quindi potrò risolvere il tutto per separazione delle variabili, ed una volta trovato v potrò ricavare u tramite :

$$u(x, t) = v(x, t) + r(x);$$

Oss.4 In realtà possiamo notare come nel procedimento di separazione delle variabili non abbiamo utilizzato la continuità di $g(x)$, e nemmeno le condizioni agli estremi, se non per garantire la sua sviluppabilità in serie di Fourier; quest'ultimo fatto è però possibile anche se la funzione è meno regolare. Un esempio concreto di ciò è la sviluppabilità di una generica funzione g con un n° finito di discontinuità a salto (materialmente è come se un corpo fosse definito da due temperature differenti delimitate bene a livello spaziale). Eccone un esempio :
Consideriamo una barra divisa a metà da due temperature differenti t.c.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \quad (0, \pi) \times (0, T); \\ u(x, 0) = g(x) \quad [0, \pi]; \\ u(o, t) = u(\pi, t) = 0 \quad [0, +\infty]; \end{cases}$$

Dove si ha che : $g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{\pi}{2}]; \\ 0 & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]; \end{cases}$

Usando come fatto finora la separazione delle variabili si ricaverebbe :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nt$$

Dove :

$$\begin{aligned} b_n = \beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx g(x) \mathrm{d}x &= \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \mathrm{d}x &= \\ = -\frac{2}{\pi n} \cos nx|_0^{\frac{\pi}{2}} &= \\ = -\frac{2}{\pi n} [\cos n\frac{\pi}{2} - 1] \end{aligned}$$

Che alla fine di tutto sarà (essendo $cosn\frac{\pi}{2} = 0$ per n dispari):

$$\text{Per } n \text{ Dispari} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\pi n};$$

$$\text{Per } n = 2k \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\pi}[\cos k\pi - 1] = \frac{1}{\pi}[1 - (-1)^k]$$

Essendo poi dalla teoria di Fourier che :

$$\bar{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sin nx$$

Allora $\bar{g}(x)$ sarà pari a $\tilde{g}(x)$ dove $\tilde{g}$ è continua, e pari a $\frac{\tilde{g}(x^-)+\tilde{g}(x^+)}{2}$ dove essa ha discontinuità a salto. Quindi nel nostro esempio avremo discontinuità in $(0,0)$ ed in $(0, \frac{\pi}{2})$.
Detto tutto ciò avremo quindi in $[0,\pi]$:

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]; \\ 0 & x = 0, \pi; \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

(Precisiamo in oltre che la funzione sarà continua in (x,t) in $[0,\pi] \times (0,T]$).

Oss.5 Problema di Neumann
In questo caso la differenza risiede nel fatto che otteniamo cos invece di sin (infatti dobbiamo avere $u_x = 0$ in 0 e L); Oltre a ciò avrò anche delle soluzioni costanti (non solo trivial solutions) per $\lambda = 0$. Notare che questa risoluzione deve avere $g(x)$ pari e periodica.

Oss.6 Equazione non Omogenea
Si può risolvere per separazione di variabili anch'essa, però nel solo caso particolare in cui la funzione $f(x,t)$ sia tale da essere il prodotto di una sola funzione di x per una sola funzione di t.

1.2.4 Proprietà della Soluzione dell'equazione di Diffusione [caso 1d]

Consideriamo il **'Principio del Massimo'** e **'Stabilità'**.
Prendiamo $u(\bar{x},t)$ definita in $\bar{\Omega} \times [0,T]$ (soluzione equazione di diffusione).
Dato un problema di (CD), allora Cauchy assegna 'u' sulla faccia inferiore, mentre Dirichlet assegna valori sulla frontiera di $\Omega \quad \forall t$, quindi sulla superficie laterale del cilindroide.
Chiamiamo allora il cilindroide come $Q_T = \Omega \times (0,T)$;
Dirichlet mi definisce le condizioni sulla sola frontiera parabolica (non su tutta la frontiera) , ovvero :

$$\partial_p Q_T = \Omega \times t = 0 \cup \partial\Omega \times [0,T);$$

Che viene definita *frontiera parabolica*, e dove quindi con Cauchy-Dirichlet assegnamo valori. In questo modo determino valori di u all'interno di Q_T e per $t = T$. Consideriamo ora il problema di (CD) in condizioni omogenee, ovvero senza alcun tipo di sorgente di calore (più in generale fonti esogene); in questo caso la '*Le Legge di Fourier*' suggerisce che max. e min. siano sulla frontiera parabolica (Nb. questo è un teorema generale).
Quanto detto sopra è il '**Principio del Massimo-Minimo**', che ora dimostriamo :
Sia $\omega \in \mathbb{C}^{2,1}(Q_T) \cap \mathbb{C}^0(\bar{Q_T})$ t.c.

$$\omega_t - D\Delta\omega = q \leq 0;$$

Oss. Essendo che $q \leq 0$ allora significa che abbiamo qualcosa che sottrae calore, allora :

$$\max_{\bar{Q_T}} \omega(\bar{x},t) = \max_{\partial_p Q_T} \omega(\bar{x},t);$$

In particolare se $q \equiv 0$ valgono entrambe le forme del teorema.
Guardando la dimostrazione, supponendo che $q < 0$, per assurdo se la tesi fosse falsa, il pto di max $(\bar{x_0},t_0) \in Q_T$ oppure $\in \Omega \times t = T$ (che chiamiamo rispettivamente primo e secondo caso [I e II]).

I) $(\bar{x_0},t_0) \in Q_T$ pto di max , allora dal 'Th. di Fermat' si avrebbe che $\omega_t(\bar{x_0},t_0) = 0$, essendo il pto interno ed essendo $\omega \quad \mathbb{C}^1$ rispetto a t. Però $\omega \in \mathbb{C}^2$ in $\bar{x}$, ed il '*Criterio dell'Hessiana*' mi dice che $H_{\bar{x}}\omega(\bar{x_0},t_0)$ è definita o semi-definita negativa, ovvero che i suoi autovalori λ_i sono ≤ 0 ; quindi, poichè :

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \lambda_i = TrH_{\bar{x}}\omega(\bar{x_0},t_0) \leq 0;$$

Si ha che $TrH_{\bar{x}}\omega = \Delta\omega$, e quindi :

$$TrH_{\bar{x}}\omega(\bar{x_0},t_0) = \Delta\omega(\bar{x_0},t_0) \leq 0;$$

Da cui infine :

$$\omega_t(\bar{x_0},t_0) - D\Delta\omega(\bar{x_0},t_0) \geq 0;$$

Che contraddice il fatto che $q < 0$ (Ipotesi iniziale).

II) Se il pto di max è $(\bar{x_0, T})$, allora ho che $\omega_t(\bar{x_0}, T) \geq 0$ e ancora che $\Delta\omega(\bar{x_0}, T) \leq 0$, che implica :

$$\omega_t(\bar{x_0}, T) - D\Delta\omega(\bar{x_0}, T) \geq 0;$$

Che non fa altro che contraddirmi l'ipotesi iniziale di $q < 0$.

Quindi vediamo come in entrambi i casi venga contraddetta l'ipotesi iniziale di $q < 0$ (se si fosse dovuto dimostrare per $q \leq 0$ avremmo dovuto fare un po' più di lavoro, usando una soluzione perturbata). Guardiamo ora i vari Corollari :
Corollario 1 , Se $\omega \in \mathbb{C}^{2,1}(Q_T) \cap \mathbb{C}^0(\bar{Q_T})$ e se $u_t - D\Delta u = 0$ in Q_T , allora si ha che :

$$\min_{\partial_p Q_T} u(\bar{x}, t) \leq u(\bar{x}, t) \leq \max_{\partial_p Q_T} u(\bar{x}, t);$$

E quindi che :

$$|\omega(x, t)| \leq max_{\partial_p Q_T} |\omega| \quad \forall (x, t) \in Q_T;$$

Quindi questo corollario mi dà unicità per (CD), perchè mi dà unicità per problemi con dati tutti omogenei (formulazione alternativa dell'unicità per il problema di (CD)). In poche parole il corollario ci dice che :

$$0 \leq u(\bar{x}, t) \leq 0 \quad \text{ovvero che} \quad u(\bar{x}, t) \equiv 0$$

Corollario 2 , siano $v, w \in \mathbb{C}^{2,1}(Q_T) \cap \mathbb{C}^0(\bar{Q_T})$ e $v_t - D\Delta v = f_1$ e $\omega_t - D\Delta\omega = f_2$, con f_1, f_2 limitate in Q_T , allora ricavo che :

a) Se $v \geq \omega$ su $\partial_p Q_T$ e $f_1 \geq f_2$ in Q_T , allora $v \geq \omega$ su tutto $\bar{Q_T}$;

b) $\max|v - \omega| \leq \max_{\partial_p Q_T} |u - \omega| + T \max_{Q_T} |f_1 - f_2|$;
In questo caso possiamo fare delle osservazioni : b) mi dà stabilità per (CD), infatti supponendo che :

$$v(\bar{x}, 0) = g_1, \quad \omega(\bar{x}, 0) = g_2, \quad \text{t.c. } \max_\Omega |g_1 - g_2| \leq \epsilon$$
$$\text{e che } f_1, f_2 \quad \text{t.c. } \max_{\bar{Q_T}} |f_1 - f_2| \leq \epsilon$$
$$\text{e che } h_1, h_2 \quad \text{t.c. } |h_1 - h_2|_{\partial\Omega \times (0,T)} \leq \epsilon$$

Allora si ricava che :

$$|v - \omega| \leq \epsilon + T\epsilon = (1 + T)\epsilon \quad \text{in} \bar{Q_T}$$

A cui quindi si arriva alla condizione di <u>stabilità</u>.

1.2.5 Equazione di Diff. con Conservazione della Massa

Problema utilizzato per studiare la diffusione/trasporto. Usiamo un modello per 'Concentrazione', ovvero :
$C = C(x, t_0)$, che dimensionalmente risulta essere massa/lunghezza.

Osservando la '*Conservazione della Massa*', sappiamo che il tasso di variazione della massa corrisponde al suo flusso attraverso gli estremi.
Individuamo il tasso di variazione :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_x^{x+\Delta x} C(y,t)\mathrm{d}y = \int_x^{x+\Delta x} C_t(x,t)\mathrm{d}x$$

Dove il primo termine a sx ci identifica la massa in $[x, x+\Delta x]$ al variare di t.
Chiamiamo allora $q = q(x,t)$ la massa che vi entra attraverso x.
E troviamo in questo modo il flusso netto :

$$q(x,t) - q(x+\Delta x, t);$$

Che risulta rispondere all'equazione :

$$\int_x^{x+\Delta x} C_t(y,t)\mathrm{d}y = q(x,t) - q(x+\Delta x, t);$$

Dividendo per Δx e facendo $\lim_{\Delta x \to 0}$ ricaviamo :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} C_t(y,t)\mathrm{d}y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{q(x,t) - q(x+\Delta x, t)}{\Delta x}$$

E quindi alla fine si giunge alla forma :

$$\underline{C_t(x,t) = -q_x}$$

Aggiungiamo ora le Leggi Costitutive relative a trasporto e diffusione.

Legge del Trasporto si ha che $q(x,t) = Vc(x,t)$ (dove V è una costante che ci rappresenta la velocità dell'acqua);

Legge di Fick (o di diffusione) in questo caso si ha che il flusso avviene da punti a concentrazione più alta verso punti a concentrazione più bassa, ed è come 'proporzionale alla differenza di concentrazione', ovvero si ha che (supponendo che k sia una costante) :

$$q(x,t) = -kC_x(x,t)$$

Oss.1 Questa legge risulta essere analoga a quella di Fourier nel caso di diffusione della temperatura :

$$C_t(x,t) = kC_{xx}(x,t) - VC_x(x,t)$$

Che può dunque essere interpretata come una equazione di diffusione/trasporto con rispettivamente al secondo membro il primo termine (C_{xx}) ci rappresenta una diffusione del secondo ordine, mentre il secondo termine (C_x) ci rappresenta un trasporto del primo ordine.

Oss.2 La soluzione C può essere messa in relazione con la soluzione di equazione di sola diffusione, cioè :

$$\omega(x,t) = e^{\alpha t + \beta x} C(x,t)$$

soddisfa $\omega_t = k\omega_{xx}$ scegliendo rispettivamente

$$\alpha = \frac{V^2}{\Delta k}, \quad \beta = -\frac{V}{2k}$$

e quindi si ha che

$$C(x,t) = e^{-\alpha t - \beta x} \omega(x,t)$$

Oss.3 La concentrazione dell'inquinante può decrescere per effetto ad esempio della decomposizione biologica, e ciò si può aggiungere nell'equazione con un termine $-\gamma C$, ovvero :

$$\underline{C_t = kC_{xx} - VC_x - \gamma C}$$

Che chiamiamo **Equazione di Diffusione-Trasporto-Reazione**. (La relazione può anche essere modificata per trasformare il termine di trasporto in termine di sorgente).

1.3 Equazione di Laplace e Poisson

L'equazione di Laplace è un'equazione stazionaria, non ha termini legati al tempo. Come già visto è definita come :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \text{Laplace} \\ \Delta u &= f, \quad \text{Poisson} \end{aligned}$$

Definite in un Insieme aperto, connesso e limitato in $\mathbb{R}^n$, con $n = 2, 3$.
Per $n = 1$ si ha che $u'' = 0$ o $u'' = f$ in $(0, L)$.
In generale si ottiene l'equazione stazionaria per esempio per la distribuzione di temperatura in un corpo a regime (o in equilibrio) omogeneo e isotropo, senza fonti esogene (Laplace), o con fonti indipendenti dal tempo.
Inoltre l'equazione delle onde del tipo

$$u_{tt} - k\Delta u = 0;$$

Che per $t \to \infty$, con l'equazione di Laplace, e condizioni al contorno della membrana, mi da per un corpo (bi o tri- dimensionale) perfettamente elastico, la posizione della membrana (in condizioni di equilibrio).
L'equazione di Laplace mi indica anche il Potenziale di velocità di un fluido omogeneo ad esempio; l'equazione di Poisson invece si sposa con la teoria dei campi conservativi (elettrico, magnetico, gravitazionale,...).
Facendone un esempio, consideriamo il campo elettrico in 3 dimensioni, in un insieme Ω fissato. Allora come ben sappiamo div$\bar{E}$ mi dà la distribuzione delle cariche elettriche. Se u ne è il potenziale, ovvero se $\nabla u = -\bar{E}$, si ottiene che :

$$\Delta u = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

(Con ρ densità elettrica ed ε costante dielettrica)
Dove se il campo è generato da cariche esterne ad Ω , allora si ottiene che $\Delta u = 0$.
Def Se u soddisfa $\Delta u = 0$ in Ω, allora si dice che è **armonica** in Ω.
Un esempio sono le funzioni lineari in $\mathbb{R}^2$, che risultano essere armoniche.
In generale la condizione che si deve avere in $\mathbb{R}^2$ per essere armoniche è che:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{xx} = -u_{yy};$$

degli esempi sono i seguenti :

$$u(x, y) = e^x \sin y; u(x, y) = x^2 - y^2; u(x, y) = xy;$$

Nb. l'operatore Δ è di tipo lineare, quindi possiamo costruire altre funzioni combinando quelle elencate tra di loro.

1.3.1 Problemi ben posti e Unicità

Si consideri :

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n;$$

Ci aspettiamo allora che i problemi ben posti siano analoghi a quelli per l'equazione di diffusione, ovvero con una condizione iniziale (Cauchy) e delle condizioni al contorno (che definiamo come $\partial\Omega$). Osserviamo però che questa volta non necessitiamo di una condizione iniziale trattando un problema stazionario.

a) **Dirichlet** , in cui si assegnano le condizioni su $\partial\Omega$, ricavando dunque

$$u|_{\partial\Omega} = g;$$

b) **Neumann** , in cui si assegna $\partial_{\bar{nu}} u$ su $\partial\Omega$, ricavando dunque

$$\partial_{\bar{\nu}} u|_{\partial\Omega} = h;$$

c) **Robin** , in cui si assegna su $\partial\Omega$ che

$$\partial_\nu u + \alpha u = \beta|_{\partial\Omega} \quad (\alpha > 0);$$

d) **Misto (DN)** , si assegna che $u|_{\Sigma_D}$ $\partial_{\bar{nu}} u|_{\Sigma_N} = h$ con

$$\Sigma_D \cup \Sigma_N = \partial\Omega, \quad \Sigma_D \cap \Sigma_N = 0;$$

Anche per tutte queste condizioni vale il principio di sovrapposizione, quindi come per le equazioni di diffusione possiamo usare lo stesso ragionamento per dimostrarne l'unicità della soluzione.

Th. di Unicità $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia dominio (insieme aperto e connesso) limitato, con frontiera $\partial\Omega$ regolare (quindi che ci sia il vettore 'tangente' in ogni punto) , allora $\exists$ al più una soluzione $u \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\bar{\Omega})$ tale che sia soluzione di $\Delta u = f$ e con le condizioni a) , c), o d). Caso particolare è la condizione di Neumann, per il quale non abbiamo unicità in assoluto, ma il fatto che due funzioni possano essere soluzione differendo di una costante (vediamo infatti come sia caratterizzata dal divergente in questo caso la condizione dal divergente, e quindi alla fine che la costante sia derivata) $(\partial_\gamma u|_{\partial\Omega} = h)$.

Guardiamone ora la dimostrazione usando il 'teorema di integrazione per parti'. Per farlo dobbiamo usare l'*Identità di Green* , che ci dice che (usando l'integrazione per parti) :

$$\int_\Omega g \mathrm{div} \bar{F} \mathrm{d}\bar{x} = \int_{\partial\Omega} g\bar{F} \cdot \bar{\nu} \mathrm{d}\bar{\sigma} - \int_\Omega \nabla g \cdot \bar{F} \mathrm{d}\bar{x};$$
$$\text{Con } g, \bar{F} \in \mathbb{C}^1(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\bar{\Omega}).$$

Se $\bar{F} = \nabla u$ allora otteniamo la **Prima identità di Green** :

$$\int_\Omega g\Delta u \mathrm{d}\bar{x} = \int_{\partial\Omega} g\partial_\nu u \mathrm{d}\bar{\sigma} - \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla u \mathrm{d}\bar{x};$$

Se poi $g \equiv 1$ si ha che :

$$\int_\Omega \Delta u \mathrm{d}\bar{x} = \int_{\partial\Omega} \partial_{\bar{\nu}} u \mathrm{d}\bar{\sigma};$$

Che ci dice che il totale della diffusione di Ω debba essere nullo.
Se poi scegliamo $u, v \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^1(\bar{\Omega})$ otteniamo allora la **Seconda identità di Green** :

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \mathrm{d}\bar{x} = \int_{\partial\Omega} (u\partial_{\bar{\nu}} v - v\partial_{\bar{\nu}} u) \mathrm{d}\bar{\sigma};$$

Facciamo ora la dimostrazione vera e propria.
Usiamo un approcio per assurdo : Se $\exists u_1, u_2$ entrambe soluzioni per il problema

$$\begin{cases} \Delta u = f; \\ \text{Condizioni al Contorno ;} \end{cases} \qquad \text{allora} \quad \omega = u_1 - u_2$$

Dove ω soddisfa il sistema $\begin{cases} \Delta\omega = 0; \\ \text{Condizioni al Contorno Omogenee ;} \end{cases}$.
Quindi da $\Delta\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \omega\Delta\omega \mathrm{d}\bar{x} = 0$, dalla Prima identità di Green si ricava che :

$$\int_{\partial\Omega} \omega\partial_\nu\omega \mathrm{d}\bar{\sigma} = \int_\Omega \|\nabla\omega\|^2 \mathrm{d}\bar{x}$$

Dove per le condizioni di bordo omogenee a),b),d) risulta essere il primo termine $= 0$, mentre per c) questo è ≤ 0; però si ha che il secondo termine risulta essere

≥ 0 , allora anche per c) si ha che l'unica possibilità affinchè il primo termine sia uguale al secondo, è che entrambi siano uguali a zero. Ma :

$$\int_\Omega \|\nabla\omega\|^2 \mathrm{d}\bar{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\nabla\omega\|^2 = 0$$

Quindi necessariamente dovrei avere ω =costante.
Per b) ho finito.
Per a) e d) la costante deve essere zero, poichè

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{o} \quad \omega|_{\Sigma_D} = 0$$

Per Robin $\nabla\omega = 0 \quad \partial_\nu\omega|_{\partial\Omega} = 0$ e anche la condizione omogenea per cui si ha che $\omega|_{\partial\Omega} = 0$, quindi si deve avere che $\omega \equiv 0$.
Si è ricavato quindi che nei casi a),c),d) si ha $u_1 = u_2$, mentre nel caso b) che $u_1 - u_2$ =cost. *Oss.* da Gauss-Green per $g \equiv 1$

$$\int_\Omega \Delta u \mathrm{d}\bar{x} = \int_{\partial\Omega} \partial_{\bar{\nu}} u \mathrm{d}\bar{\sigma}$$

Segue che :

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{in } \Omega; \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = h; \end{cases}$$

Può avere soluzione solo se :

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\bar{x} = \int_{\partial\Omega} h \mathrm{d}\bar{\sigma};$$

Questa è la **Condizione di Compatibilità per pb. di Neumann** , che dunque non risulta essere sempre risolubile.
(Il significato fisico di questa condizione è che il contributo delle fonti interne deve uguagliare il flusso netto attraverso $\partial\Omega$).

Guardiamo ora come usare il Laplaciano in coordinate polari.

1.3.2 Laplaciano in Coordinate Polari

Vogliamo passare dalla rappresentazione (x, y) alla rappresentazione (ρ, θ) (sottolineamo che per l'origine in coordinate polari non abbiamo una definizione univoca, quindi non la consideriamo $[\neq 0]$) , definendo un interallo t.c. $\theta \in [-\pi, \pi]$ (o anche per esempio $[0, 2\pi]$). Quindi passiamo da $u(x, y)$ a :

$$v(\rho, \theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta);$$

Con :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \quad \rho > 0; \\ y = \rho\sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi] \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e :

$$\theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} \quad \text{Per } (x,y) \in \text{I,IV quad.}; \\ \frac{\pi}{2} \quad \text{Per } x=0, y>0; \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi \quad \text{Per } (x,y) \in \text{II quad.}; \\ \frac{-\pi}{2} \quad \text{Per } x=0, y<0; \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi \quad \text{Per } (x,y) \in \text{III quad.}; \end{cases}$$

Ed ora dobbiamo fare le derivate (vediamo solo le prime, le altre sono sullo stesso modello) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2};$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2};$$

Essendo che derivando parzialmente u per x e per y si ricava che :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y};$$

E quindi sostituendo quanto trovato sopra derivando i soli termini ρ, θ , si ha che :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{y}{x^2+y^2};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{x}{x^2+y^2};$$

Da cui si ricava (facendo un po' di conti) che :

$$\Delta_P v = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

Osserviamo ora la soluzione per separazione delle variabili nel Cerchio (in $\mathbb{R}^2$) : Vogliamo risolvere

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } B_R(\bar{0}) = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 < \mathbb{R}^2 \\ u|_{\partial B_R} = g(x,y) \quad \text{CONTINUA}; \end{cases}$$

Cerchiamo allora $u \in \mathbb{C}^2(B_R(0)) \cap \mathbb{C}^0(\bar{B_R}(0))$.
Visto che $B_R(\bar{0})$ si descrive in coordinate polari come $0 < \rho < R$ e che $\theta \in (-\pi, \pi]$, passiamo a questo tipo di coordinate :

$$\begin{cases} \Delta_P v = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta} = 0 \quad 0 < \rho < R \\ v(R, \theta) = \hat{g}(\theta) = g(R\cos\theta, R\sin\theta) \end{cases}$$

Cerco soluzioni del tipo :

$$U(\rho, \theta) = S(\rho)T(\theta)$$

Con :

$$U_\rho = S'(\rho)T(\theta);$$
$$U_{\rho\rho} = S''(\rho)T(\theta);$$
$$U_{\theta\theta} = S(\rho)T''(\theta);$$

(Quindi faccio per separazione). Sostituisco dunque :

$$S''(\rho)T(\theta) + \frac{1}{\rho} S'(\rho)T(\theta) + \frac{1}{\rho^2} S(\rho)T''(\theta) = 0$$

Che lavoriamo portando a dx i termini con S' e S'', e dividendo poi per $\frac{S(\rho)T(\theta)}{\rho^2}$;
Otteniamo quindi :

$$\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\frac{\rho^2 S''(\rho) + \rho S'(\rho)}{S(\rho)} = \lambda$$

Osserviamo che dobbiamo garantire che la funzione si salvi con continuità , e con lei le derivate; Per farlo nell'intervallo angolare θ , devo imporre che :

$$T(\theta + 2\pi) = T(\theta)$$

Ovvero che la funzione sia periodica di periodo 2π.
Ponendo allora $T''(\theta) - \lambda T(\theta) = 0$, vediamo i vari casi :

$\lambda > 0$, allora $T(\theta) = ae^{\sqrt{\lambda}\theta} + be^{-\sqrt{\lambda}\theta}$ non risulta essere mai periodica se non per $a = b = 0$, soluzione banale;

$\lambda = 0$, allora $T(\theta) = a + b\theta$ risulta essere periodica per $b = 0$, ovvero risulta essere $T_0(\theta) = a_0$, costante;

$\lambda < 0$, allora $\lambda = -\omega^2 < 0$, che ci porta quindi alla funzione $T(\theta) = a\cos\omega\theta + b\sin\omega\theta$, una funzione periodica di periodo 2π per $\omega = n \in \mathbb{N}$. Si ha allora la soluzione periodica data dalla funzione :

$$\underline{T_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta}$$

Ora dobbiamo guardare la soluzione per la variabile ρ, $S(\rho)$ (compreso $n = 0$) :

$$\rho^2 S''(\rho) + \rho S'(\rho) - n^2 S(\rho) = 0;$$

(Dove $\lambda = -n^2$). Osservando allora i casi si ha che :

$\lambda = 0$, (quindi $n = 0$) si ha che

$$\rho^2 S''(\rho) + \rho S'(\rho) = 0 \quad S'(\rho) = Y(\rho);$$
$$Y'(\rho) = -\frac{1}{\rho} Y(\rho);$$
$$\text{(Sappiamo che: } \int -\frac{1}{\rho} \mathrm{d}\rho = -\log \rho)$$
$$Y(\rho) = e^{-\log \rho} = e^{\log \frac{1}{\rho} + c} = \frac{d}{\rho};$$

E si ricava dunque che :

$$S_0(\rho) = c_0 + d_0 \log \rho;$$

$\lambda = -n^2 < 0$, si ha allora che :

$$\rho^2 S''(\rho) + \rho S'(\rho) - n^2 S(\rho) = 0$$

Cerchiamo allora soluzioni del tipo $S(\rho) = p^\mu$ (vogliamo che derivando si annulli)

$$S'(\rho) = \mu \rho^{\mu-1} \quad S''(\rho) = \mu(\mu - 1)\rho^{\mu-2}$$

Che sostituendo all'equazione prima detta, diventa :

$$\mu(\mu - 1)\rho^\mu + \mu\rho^\mu + n^2\rho^\mu = 0$$

Equazione che implica che :

$$\mu(\mu - 1) + \mu - n^2 = 0$$
$$\mu^2 - n^2 = 0$$
$$\mu_{1,2} = \pm n$$

E quindi finalmente si arriva a

$$S_n(\rho) = c_n\rho^n + d_n\rho^{-n};$$

Avendo compreso l'origine, trovandoci dei termini in S_0 e S_n tendenti ad infinito se i termini vengono fatti tendere a zero (logaritmo ed esponenziale presenti infatti) , volendo una soluzione limitata per $\rho \to 0$ allora imponiamo che :

$$d_0 = d_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ci ritroviamo a questo punto con :

$$T_0 = a_0, \quad S_0 = c_0;$$
$$T_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad S_n(\rho) = c_n \rho^n;$$

Quindi si arriva a :

$$U_0 = \tilde{a_0} \quad U_n(\rho,\theta) = \rho^n(\tilde{a_n} \cos n\theta + \tilde{b_n} \sin n\theta)$$

Come fatto per la diffusione possiamo ora considerare combinazioni lineari finite ed infinite(le serie) di $U_n(\rho,\theta)$. Una candidata soluzione è ad esempio :

$$v(\rho,\theta) = \tilde{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n(\tilde{a_n} \cos n\theta + \tilde{b_n} \sin n\theta)$$

A cui imponiamo la condizione $v(R,\theta) = \hat{g}(\theta)$.
Oss. $\hat{g}(\theta)$ dipende solo da $\cos\theta$ e $\sin\theta$, quindi risulta essere una funzione periodica di periodo 2π. Inoltre è continua, quindi sviluppabile serie di Fourier. Sia definita allora :

$$\hat{g}(\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta);$$

Dove i coefficienti saranno pari rispettivamente a :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\theta) \mathrm{d}\theta;$$
$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\theta) \cos n\theta \mathrm{d}\theta;$$
$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\theta) \sin n\theta \mathrm{d}\theta;$$

Volendo noi ottenere :

$$\bar{u}(R,\theta) = \tilde{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tilde{a_n} \cos n\theta + \tilde{b_n} \sin n\theta) = \hat{g}(\theta)$$

Dovremo avere :

$$\tilde{a_0} = \alpha_0, \quad R^n \tilde{a_n} = \alpha_n \quad \Rightarrow \quad \tilde{a_n} = \frac{\alpha_n}{R^n};$$
$$R^n \tilde{b_n} = \beta_n \quad \Rightarrow \quad \tilde{b_n} = \frac{\beta_n}{R_n};$$

Che sostituiti nella u mi danno :

$$\bar{u}(\rho,\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\rho}{R})^n(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin \beta\theta)$$

Con α_n, β_n coefficienti di Fourier di $\hat{g}(\theta)$.
Una volta trovata la soluzione in coordinate polari, possiamo poi tornare alle variabili (x, y).
Abbiamo allora dimostrato che il problema di Dirichlet ammette un'unica soluzione (in realtà nel cerchio può essere qualsiasi). Osserviamo però che dovrei dimostrare che $\bar{u}$ sia proprio derivabile 2 volte nell'interno e che soddisfi l'equazione; ciò, come nella diffusione, sarebbe un segno del fatto che la serie, e la serie delle derivate, rispettino il Th. di Weierstrass per $\rho < R$ (e dai risultati presenti nella prima dispensa).
Segue allora un **esempio** :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } B_2(\bar{0}); \\ u|_{\partial B_2} = x^2 - 2y + 1; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x^2 - 2y + 1; \\ \hat{g}(\theta) &= g(2\cos\theta, 2\sin\theta) = \\ &= 4\cos^2\theta - 4\sin\theta + 1 = \\ &= 2(\cos 2\theta + 1) - 4\sin\theta + 1 = \\ &= 3 - 4\sin\theta + 2\cos 2\theta; \\ &\dots \end{aligned}$$

Usando il metodo di separazione delle variabili

$$\dots$$

$$v(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\rho}{2})^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

Quest'ultima deve diventare :

$$v(2, \theta) = \hat{g}(\theta) = 3 - 4\sin\theta + 2\cos 2\theta$$

Che implica che :

$$\alpha_0 = 3, \quad \beta_1 = -4, \quad \alpha_2 = 2, \quad \text{tutti gli altri } = 0;$$

Si ricava quindi :

$$\begin{aligned} v(\rho, \theta) &= 3 - 4\frac{\rho}{2}\sin\theta + 2\frac{\rho^2}{4}\cos 2\theta = \\ &= 3 - 2\rho\sin\theta + \frac{\rho^2}{2}\cos 2\theta; \end{aligned}$$

Da cui ci manca solo di passare alle coordinate cartesiane. Facendo qualche sostituzione ricaveremmo :

$$u(x, y) = 3 - 2y + \frac{1}{2}(x^2 - y^2);$$