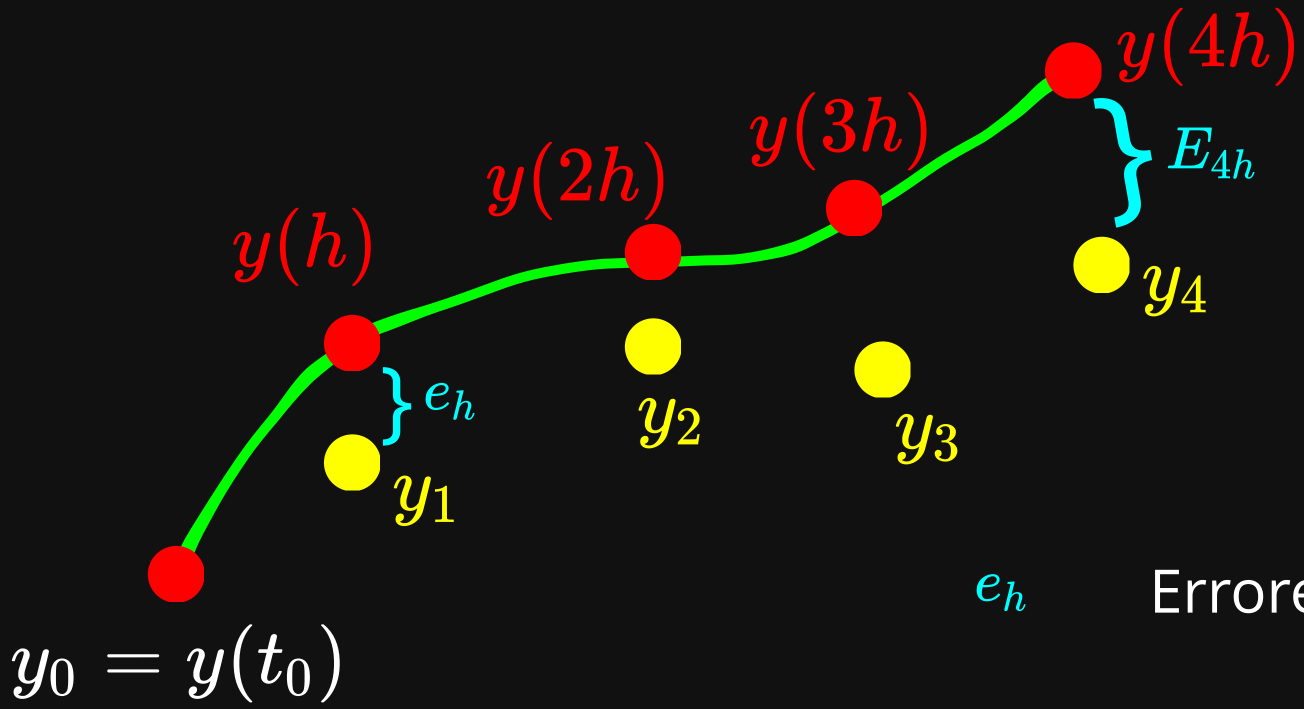
PROPRIETA' FONDAMENTALI DEI METODI NUMERICI PER ODEs

FORNISCONO UN'APPROSSIMAZIONE



e_h Errore locale

$E_k = y(kh) - y_k$ Errore globale

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

SOLUZIONE ESATTA

$$y(t) = e^t$$

EULERO ESPLICITO

$$y_1 = y_0 + hy_0 = (1+h)y_0$$

$$y_k = (1+h)y_{k-1} = (1+h)^k y_0$$

ESEMPIO

ERRORE LOCALE

$$e_h = e^h - (1 + h) =$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!} - (1 + h) =$$
$$1 + h + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{h^i}{i!} - 1 - h =$$
$$\mathcal{O}(h^2)$$

ORDINE DEL METODO

Se l'errore locale soddisfa

$$e_h = y(h) - y_h = \mathcal{O}(h^{p+1}) = ch^{p+1} + \text{h.o.t.}$$

allora diciamo che il metodo è di ordine p

CONVERGENZA

Vorrei che se il passo temporale h tende a 0, la soluzione numerica tenda a quella esatta:

$$\lim_{h\to 0^+} \max_{j=1,\ldots,N_h} \|y(jh) - y_{jh}\| = 0$$

SE SUCCEDE, IL METODO E' **CONVERGENTE**

PER L'ESEMPIO DI PRIMA

$$\|e^{jh} - (1-h)^j\| \to \|e^0 - 1\| = 0,\ \forall j$$

CONSISTENTE

Un metodo è consistente se

$$\lim_{h\to 0} \frac{e_h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\|y(h)-y_h\|}{h} = 0$$

PER L'ESEMPIO DI PRIMA

$$\frac{e^h-1-h}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{h^2}{2} + \text{h.o.t.}\right) \to 0$$

STABILE