METODI DI COLLOCAZIONE

IDEA DI BASE

Voglio approssimare la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

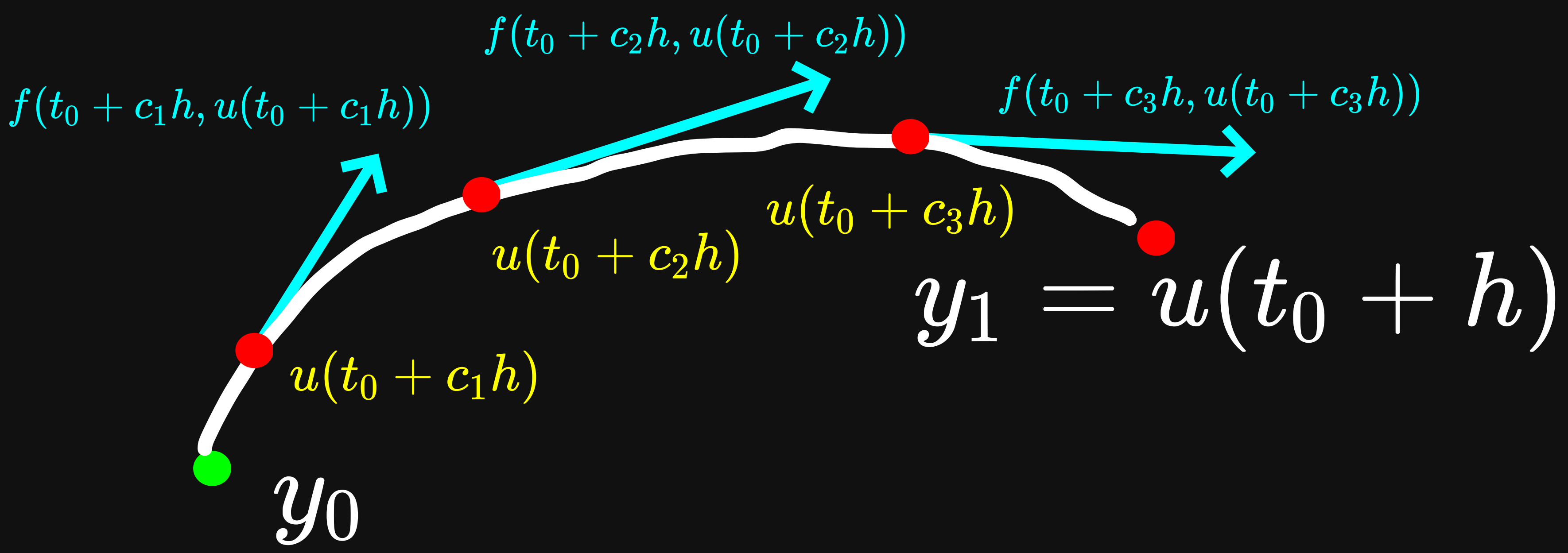
e lo faccio **calcolando un polinomio** $u(t)$ di grado s che soddisfa

- $u(t_0) = y_0$
- $\dot{u}(t_0 + c_i h) = f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h))$, $i = 1, ..., s$

con $c_1, ..., c_s \in [0, 1]$.

L'approssimazione di $y(t_0 + h)$ che considero sarà quindi $y_1 = u(t_0 + h)$

VISUALIZZAZIONE



La curva bianca non è la soluzione esatta, che non conosciamo..ma il polinomio $u(t)$

DERIVAZIONE

La condizione

$$\dot{u}(t_0 + c_i h) = f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h))$$

ci dice che la derivata del polinomio è un polinomio interpolante di f. Esso sarà un polinomio di grado $s - 1$.

Visto ciò che sappiamo dell'interpolante di Lagrange, possiamo scrivere

$$\dot{u}(t) = \sum_{i=1}^{s} f(t_i, u(t_i)) \, \boldsymbol{l_i(t)}$$

con $t \in [t_0, t_0 + h]$, e $t_i = t_0 + c_i h$.

DERIVAZIONE

Se ora integriamo entrambi i lati rispetto a t nell'intervallo $[t_0, t_0 + h]$ otteniamo:

$$\int_{t_0}^{t_0+h} \dot{u}(t)dt = u(t_0 + h) - u(t_0)$$

$$= y_1 - y_0$$

$$= \sum_{i=1}^{s} f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h)) \int_{t_0}^{t_0+h} l_i(t)dt$$

$$= h \sum_{i=1}^{s} f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h)) \int_0^1 l_i(w)dw$$

$$t = t_0 + wh,\ \ dt = hdw,$$

$$t \in [t_0, t_0 + h],\ w \in [0, 1]$$

DERIVAZIONE

$$y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h))$$

con

$$\int_0^1 l_i(w) =: b_i$$

Rimane da trovare il valore di $u(t_0 + c_i h)$.
Per farlo seguiamo una procedura simile
ma integriamo tra t_0 e $t_0 + c_i h$
l'espressione da cui siamo partiti.

DERIVAZIONE

$$\int_{t_0}^{t_0+c_i h} \dot{u}(t)dt = u(t_0 + c_i h) - u(t_0)$$

$$= u(t_0 + c_i h) - y_0$$

$$= \sum_{j=1}^{s} f(t_0 + c_j h, u(t_0 + c_j h)) \int_{t_0}^{t_0+c_i h} l_j(t)dt$$

$$= h \sum_{j=1}^{s} f(t_0 + c_j h, u(t_0 + c_j h)) \int_{0}^{c_i} l_j(w)dw$$

$$t = t_0 + wh,\ \ dt = hdw,$$

$$t \in [t_0, t_0 + c_i h],\ w \in [0, c_i]$$

DERIVAZIONE

$$u(t_0 + c_i h) = y_0 +$$
$$+h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_0 + c_j h, u(t_0 + c_j h))$$

Dove

$$a_{ij} := \int_0^{c_i} l_j(w) dw$$

RIASSUNTO

$$u(t_0 + c_i h) = y_0 +$$
$$+h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_0 + c_j h, u(t_0 + c_j h))$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h))$$

Dove

$$a_{ij} := \int_0^{c_i} l_j(w) dw$$
$$b_i := \int_0^{1} l_i(w) dw$$

RISCRITTURA

$$Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_0 + c_j h, Y_j)$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(t_0 + c_i h, Y_i)$$

Dove

$$a_{ij} := \int_0^{c_i} l_j(w) dw$$

$$b_i := \int_0^1 l_i(w) dw$$

Questo vedremo che è una particolare famiglia di quelli che chiameremo "METODI RUNGE-KUTTA"

ESEMPI

METODO DEI TRAPEZI

$$y_1 = u\left(t_0 + h\right) =$$

$$y_0 + \frac{h}{2}\left(f\left(t_0 + h, y_1\right) + f\left(t_0, y_0\right)\right)$$

$c_1 = 0,\ c_2 = 1$

METODO DEL PUNTO MEDIO IMPLICITO

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f\left(t_n, y_n\right)\right)$$

$c_1 = \frac{1}{2}$, è parte dei metodi di Gauss-Legendre, che hanno ordine $2s$ quando usiamo s nodi.