Zusammenfassung: Folgenreihen

Inhalt

2
3
4
4
5
5

Konvergenz

Konvergent = wenn die Summe eine reelle Zahl ist und es einen Grenzwert besitzt.

Anhand der folgenden Reihen wird zunächst ein **Kriterium** erläutert, welches die Entscheidung ermöglicht, ob eine Reihe **divergent** sein muss oder **konvergent** sein kann.

- 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + ...
 Bildet man die Teilsummenfolge s_n, so erkennt man: s_{n+1} = s_n + 0,1
 Der Zuwachs beträgt konstant 0,1. Die Partialsummenfolge kann daher nicht konvergent sein.
 Die Reihe ist also divergent.
- 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + ...
 Die Reihenglieder n\u00e4hern sich dem Wert 0, die Partialsummen s_n n\u00e4hern sich dem Wert 1,1.
 Die Reihe ist daher konvergent.
- 1 + ½ + ⅓ + ¼ + ⅓ + ...
 Auch für diese Reihenglieder gilt a_n → 0. In Band 3, Abschnitt 1.7.4, wurde bereits gezeigt, dass diese Reihe, die harmonische Reihe, divergent ist.

Notwendige Konvergenzbedingung für unendliche Reihen

Die Glieder jeder konvergenten unendlichen Reihe bilden eine **Nullfolge**. Es gilt: $\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$ Der Umkehrschluss gilt nicht. Ist $\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$, so kann die Reihe auch divergent sein. Ist jedoch $\lim_{n\to\infty} (a_n) \neq 0$, so ist die Reihe sicher divergent.

Leibnitz

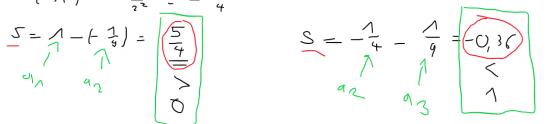
a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} = \lim_{N \to \infty} \left| \underbrace{(-1)^{n+1}}_{O} \right|_{1}^{1} = N \cdot O = O \text{ konvergent}$$

$$s = a1 - a2$$

 $a1 = (-/)^{1+1}$

a1 =
$$(-1)^{1+1}$$
, $\frac{1}{1^2}$ = 1 a3 = 1 $\frac{1}{9}$ a2 = 1 $\frac{1}{3^2}$ = 1 $\frac{1}{4}$

$$\frac{5}{5} = \frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$$



Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Eine alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm ...$ mit $a_n > 0$ ist konvergent mit dem Grenzwert S, wenn die Folge $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, ... \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt: $0 < S < a_1$

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 \pm ...$$

$$S = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + (a_7 - a_8) + ...$$

$$\Rightarrow S > 0$$

$$S = (\underbrace{a_1 - a_2}) + (\underbrace{a_3 - a_4}) + (\underbrace{a_5 - a_6}) + (\underbrace{a_7 - a_8}) > 0$$

$$S = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - (a_6 - a_7) - ...$$

•
$$a_n > a_{n+1}$$
, da monoton fallend

3

$$\Rightarrow$$
 S $>$ 0

$$\Rightarrow$$
 S $<$ a₁

Damit gilt: $0 < S < a_1$... Die Reihe konvergiert.

q. e. d.

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Eine alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm ...$ ist konvergent, wenn die Folge $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, ... \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge bildet.

Quotientenkriterium

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = > g = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{3N + N}{9l_N} \right) = \frac{O}{(2n+N)!} = O$$

$$konvergent$$

Existiert zu einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der Grenzwert g, so gilt:

Quotientenkriterium

Wurzelkriterium

$$g = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

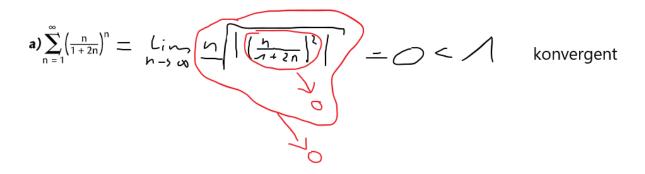
$$g = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Ist g < 1, so konvergiert die Reihe absolut.

Ist g > 1, so divergiert die Reihe.

Ist g = 1, so ist eine Entscheidung über die Konvergenz oder die Divergenz nicht möglich.

Wurzelkriterium



4

Majorantenkriterium

Für zwei unendliche Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $|a_n| \le b_n$ für fast alle Glieder gilt: Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ folgt die (absolute) Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Die Divergenz einer Reihe kann mithilfe einer divergenten **Minorante** gezeigt werden.

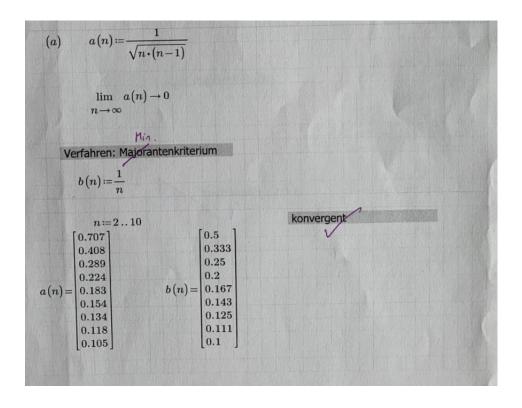
Minorantenkriterium

In ähnlicher Weise kann die **Divergenz** einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gezeigt werden, indem die Glieder mit jenen einer divergenten Reihe verglichen werden. Dieses Kriterium nennt man **Minorantenkriterium** (latein: "minor" = kleiner).

Minorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist divergent. Gilt für fast alle Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dass $a_n \ge b_n \ge 0$ ist, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nennt man **divergente Minorante**.

Nicht immer kann mithilfe des Majoranten- bzw. Minorantenkriteriums über die Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe entschieden werden.



Potenzreihe

Eine Potenzreihe P ist eine Reihe der Form

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \dots \text{ mit } c_n \in \mathbb{R}.$$

c₀, c₁, c₂, ... sind dabei die Koeffizienten der Potenzreihe.

Zu jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion existiert eine solche Potenzreihe. Zum Beispiel lautet für die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ die zugehörige Potenzreihe:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \frac{1}{6!} \cdot x^6 + ...$$

Bei der näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Funktionswerts wird nach endlich vielen Gliedern abgebrochen. Für x = 3 und n = 4 ergibt sich zB:

$$e^3 \approx 1 + \frac{1}{1!} \cdot 3 + \frac{1}{2!} \cdot 3^2 + \frac{1}{3!} \cdot 3^3 + \frac{1}{4!} \cdot 3^4 \approx 16,375$$