Fehlerrechnung

Inhalt

Absoluter Fehler:

$\Delta x = x - x_0$

Relativer Fehler:

$\frac{\Delta x}{x_0} \approx \frac{\Delta x}{x}$

Fehlerfortpflanzung

Anhand des Beispiels $x = x_0 \pm |\Delta x| = 6 \pm 0{,}2$ und $y = y_0 \pm |\Delta y| = 3 \pm 0{,}1$ wird nun die Fehlerfortpflanzung bei den Grundrechnungsarten erklärt.

Addition: $z = x + y$

- Maximalwert: $6{,}2 + 3{,}1 = 9{,}3$
- Minimalwert: $5{,}8 + 2{,}9 = 8{,}7$

$\Rightarrow z = 9 \pm 0{,}3$

Allgemein gilt: $z = (x_0 \pm |\Delta x|) + (y_0 \pm |\Delta y|) = (x_0 + y_0) \pm (|\Delta x| + |\Delta y|)$

Subtraktion: $z = x - y$

- Maximalwert: $6{,}2 - 2{,}9 = 3{,}3$
- Minimalwert: $5{,}8 - 3{,}1 = 2{,}7$

$\Rightarrow z = 3 \pm 0{,}3$

Allgemein gilt: $z = (x_0 \pm |\Delta x|) - (y_0 \pm |\Delta y|) = (x_0 - y_0) \pm (|\Delta x| + |\Delta y|)$

Abschätzung der Fehlerfortpflanzung bei **Addition** und **Subtraktion**
Für zwei Messwerte $x = x_0 \pm \Delta x$ und $y = y_0 \pm \Delta y$ gilt:
Der maximale absolute Fehler ist die **Summe der Beträge der absoluten Fehler** der Messwerte. $\Delta z_{max} = |\Delta x| + |\Delta y|$

Multiplikation: $z = x \cdot y$

- Maximalwert: $(6 + 0{,}2) \cdot (3 + 0{,}1) = 18 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}02 \approx 19{,}2$
  Da der Wert 0,02 im Vergleich zur angegebenen Genauigkeit noch um eine Größenordnung kleiner ist als die ursprüngliche Abweichung, kann er bei der Angabe des Ergebnisses vernachlässigt werden.
- Minimalwert: $(6 - 0{,}2) \cdot (3 - 0{,}1) = 18 - 0{,}6 - 0{,}6 + 0{,}02 \approx 16{,}8$
  Auch hier wird der Wert 0,02 vernachlässigt.

$\Rightarrow z = x \cdot y \approx 18 \pm 1{,}2$

Allgemein gilt: $z = x \cdot y = (x_0 \pm |\Delta x|) \cdot (y_0 \pm |\Delta y|) = x_0 \cdot y_0 \pm y_0 \cdot |\Delta x| \pm x_0 \cdot |\Delta y| + \underbrace{|\Delta x| \cdot |\Delta y|}_{\text{vernachlässigbar klein}}$

$\Rightarrow |\Delta z| \approx |y_0 \cdot \Delta x| + |x_0 \cdot \Delta y|$

Analytische Darstellung – Funktionsgleichung

- **Explizite Darstellung**: $z = f(x, y)$
  ZB: $z = 3x - 4y + 5$
  Die Funktionsgleichung ist nach der Variablen z aufgelöst.

- **Implizite Darstellung**: $F(x, y, z) = 0$
  ZB: $3x - 4y - z + 5 = 0$
  Der Funktionsterm wird nicht nach einer Variablen aufgelöst, sondern in Form einer homogenen Gleichung angegeben.

Im Gegensatz zur impliziten Darstellung ist die explizite Darstellung nicht immer möglich, da zum Beispiel $z^3 - 2z + x + y = 0$ nicht nach z umgeformt werden kann.

Partielle Ableitungen erster Ordnung

Partielle = Teilweise

Gleichung einer Tangentialebene BS34

Bsp: $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 8xy$

$f_x = 6x^2 - 8y$

$f_y = 6y^2 - 8$

Partielle Ableitungen zweiter Ordnung

Für die **partiellen Ableitungen zweiter Ordnung** schreibt man:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Die Berechnungen erfolgen in der Reihenfolge, in der die Indizes angegeben sind.
Die Ableitungen $\mathbf{f_{xy}}$ und $\mathbf{f_{yx}}$ nennt man **gemischt partielle Ableitungen**.

Satz von Schwarz
Für stetig differenzierbare Funktionen gilt: Bei gemischt partiellen Ableitungen hängt das Ergebnis nicht von der Reihenfolge der Variablen ab, nach denen differenziert wurde.

ZB: Für eine Funktion in drei Variablen f(x, y, z) gilt:

- $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$
- $f_{xyz} = f_{xzy} = f_{yxz} = f_{yzx} = \ldots$

Es gilt:

$f_{xy} = f_{yx}$

Satz von Schwarz

Extremwerte von Funktionen in mehreren Variablen

3) Extremwerte

Bedingungen:

notwendige: $f_x = 0$, $f_y = 0$

hinreichende: $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

mit $f_{xx} < 0$ Max

$f_{xx} > 0$ Min

(od. auch f_{yy})

Maximalen fehler

?