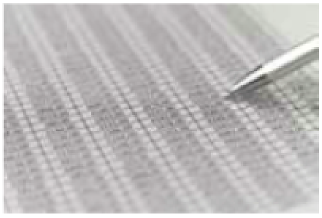
Mathe Zusammenfassung 2.0

Inhalt

Spezielle Arten von Matrizen



Spezielle Matrizen

- **Zeilenvektor**
  Einzeilige Matrix, zB: $A = (3 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 2)$ bzw. $\vec{a} = (3 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 2)$
- **Spaltenvektor**
  Einspaltige Matrix, zB: $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- **Nullmatrix O**
  Alle Elemente der Matrix haben den Wert null, zB: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **Quadratische Matrix**
  Die Anzahl der Zeilen und der Spalten einer quadratischen Matrix ist gleich groß und wird als **Ordnung** bezeichnet.

  ZB: Quadratische Matrix der Ordnung 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 12 & 1 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$
- **Diagonalmatrix**
  Quadratische Matrix, bei der alle Elemente, die nicht in der Hauptdiagonalen – das ist die Diagonale von links oben nach rechts unten – stehen, den Wert null haben.
  ZB: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- **Einheitsmatrix E**
  Diagonalmatrix, bei der alle Elemente der Hauptdiagonale gleich 1 sind.
  ZB: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **Matrix in Dreiecksform**
  Alle Elemente unterhalb oder alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen sind gleich 0.
  ZB: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ bzw. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
- **Transponierte Matrix**
  Werden Zeilen und Spalten einer Matrix A vertauscht, so erhält man die transponierte Matrix $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.
  ZB: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$
- **Symmetrische Matrix**
  Ist $A^T = A$, handelt es sich um eine symmetrische Matrix.
  ZB: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$

Rechenregel

Sind A und B Matrizen vom gleichen Typ (m x n) und ist k eine Konstante mit $k \in \mathbb{R}$, so gilt:

Man erhält die **Summe** bzw. **Differenz** der Matrizen A und B, indem man die Summe bzw. die Differenz jener Elemente von A und B bildet, die dieselben Indizes haben. Die entstehende Matrix C ist ebenfalls vom gleichen Typ.

$$C = A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Man **multipliziert** eine Matrix A **mit einem Skalar k**, indem man jedes Element der Matrix mit k multipliziert.

$$D = k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{m1} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

Das Ergebnis der **Multiplikation der Matrizen** A vom Typ (m x n) und B vom Typ (n x r) ist eine Matrix C vom Typ (m x r). Das Element c_{ij} ist dabei das skalare Produkt des i-ten Zeilenvektors der Matrix A mit dem j-ten Spaltenvektor der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \dots & a_{11} \cdot b_{1r} + a_{12} \cdot b_{2r} + \dots + a_{1n} \cdot b_{nr} \\ \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \dots & a_{m1} \cdot b_{1r} + a_{m2} \cdot b_{2r} + \dots + a_{mn} \cdot b_{nr} \end{pmatrix}$$

Merke: **„Zeile mal Spalte"**

Es gilt:

- Man kann Matrizen nur dann miteinander multiplizieren, wenn die Spaltenanzahl der linken Matrix gleich der Zeilenanzahl der rechten Matrix ist. Andernfalls ist die Matrizenmultiplikation nicht definiert.
- Die Multiplikation zweier Matrizen ist im Allgemeinen **nicht kommutativ**: $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, spricht man bei der Multiplikation zweier quadratischer Matrizen auch von **linksseitiger** und **rechtsseitiger Multiplikation**.
  $B \cdot A$ ... linksseitige Multiplikation von A mit B
  $C \cdot D$ ... rechtsseitige Multiplikation von C mit D
- $A \cdot O = O$ und $O \cdot A = O$ mit O ... Nullmatrix
- $A \cdot E = A$ und $E \cdot A = A$ mit E ... Einheitsmatrix
- $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$ mit $k \in \mathbb{R}$
- Für quadratische Matrizen gilt das Assoziativgesetz: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Determinante

Determinante einer (2x2) Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Determinante einer (3x3) Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

1) Spalte oder Zeile mit meiste 0er
2) Diese Spalte oder Zeile ausblenden
3) Alle Zahlen außer die 0er beachten, in dem fall -1 damit eine 3x3 entsteht

```
 0  1  3  0
-1  2  1  0
 3  1  0 -1
 4 -2  1  1
```

Neue 3x3 Matrix – mit der dann die Determinante ausrechnen

```
 0  1  3
-1  2  1
 4 -2  1
```

```
 0  1  3  0
-1  2  1  0
 3  1  0 -1
 4  2  1  1
```

Wieder ausrechnen und so weiter …

Formel:

Det(A) = 0 + 0 + det(A_{34}) * $(-1)^{3+4}$ + Det(A_{44}) * $(-1)^{4+4}$

Algemeine Formel:

nach j-ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(A_{ij}) \cdot (-1)^{i+j}$$

a) nach i-ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underbrace{\det(A_{ij})}_{\text{Unterdeterminante}} \cdot (-1)^{i+j}$$

Eigenschaften von Determinanten

Inverse Matrix

Eine Inverse Matrix ist nur dann invertierbar, wenn ihre Determinante **ungleich null** ist.

Eine Matrix A^{-1} ist die **inverse Matrix** zu einer quadratischen Matrix A mit $\det(A) \neq 0$, wenn das Produkt $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$ die Einheitsmatrix E ergibt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Die Inverse einer quadratischen Matrix kann mithilfe der Determinante ermittelt werden. Für eine (2x2)-Matrix kann eine einfache Formel angegeben werden.

Invertieren von (2 x 2)-Matrizen

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $\det(A) \neq 0$

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$, wobei n die Ordnung der Matrix ist.
- Eine Determinante hat den Wert null, wenn alle Elemente einer Zeile (Spalte) gleich 0 sind.
- Eine Determinante hat den Wert null, wenn mindestens zwei Zeilen (Spalten) gleich sind oder wenn mindestens eine Zeile (Spalte) eine Linearkombination einer oder mehrerer Zeilen (Spalten) ist.

Transformationsmatrix

Drehungen:

Drehung um den Ursprung um den Winkel φ in $\mathbb{R}^2$: $D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Drehung um die z-Achse um den Winkel φ in $\mathbb{R}^3$: $D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

D … **Drehmatrix**

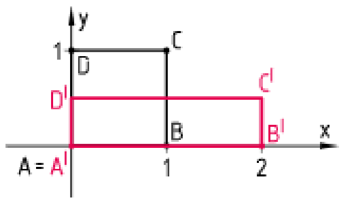
- Drehung eines Punkts P(x|y) in $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ um den Koordinatenursprung: $D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$
- Drehung eines Punkts P(x|y|z) in $\mathbb{R}^3$ um den Winkel φ um die z-Achse: $D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Streckungen: $S = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$ mit $s_x, s_y \in \mathbb{R}$ … Streckungs- bzw. Stauchungsfaktoren

Streckungsmatrix: $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$A' = A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B': \begin{pmatrix} x_B' \\ y_B' \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

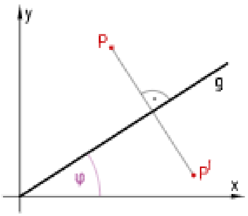
$C': \begin{pmatrix} x_C' \\ y_C' \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$; $D': \begin{pmatrix} x_D' \\ y_D' \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$



Spiegelungen: Spiegelung um eine Gerade, die im Winkel φ zur x-Achse liegt:

$$S = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

In der Ebene kann die Spiegelung eines Punkts P an einer Geraden g, die durch den Koordinatenursprung verläuft, durch eine Matrix beschrieben werden.



$S = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$ S … **Spiegelungsmatrix**

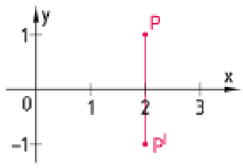
φ … Steigungswinkel der Geraden

Speziell ergibt sich für die Spiegelung an der x-Achse, also für $\varphi = 0°$: $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Für die Spiegelung an der y-Achse, also für $\varphi = 90°$, gilt: $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Der Punkt P(2|1) soll an der x-Achse gespiegelt werden.

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(2|-1)$



Schiebungen: Die Verwendung von **homogenen Koordinaten** ist notwendig.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_x \\ 0 & 1 & s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s_x, s_y \in \mathbb{R} \text{ … Komponenten des Schiebevektors}$$

Schiebungen, homogene Koordinaten

Bei einer **Schiebung** wird zum Ortsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eines Punkts der Schiebungsvektor $\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}$ addiert.

Um auch die Schiebung mit anderen Transformationen kombinieren zu können, muss sie mithilfe einer Matrizenmultiplikation dargestellt werden. Dazu verwendet man so genannte **homogene Koordinaten**. Dabei wird eine zusätzliche Koordinate mit dem Wert 1 eingefügt.

Statt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ verwendet man also $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Schiebungsmatrix lautet: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_x \\ 0 & 1 & s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Man erhält: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & s_x \\ 0 & 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + s_x \\ y + s_y \\ 1 \end{pmatrix}$ Der verschobene Punkt hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} x + s_x \\ y + s_y \end{pmatrix}$.

Der Punkt P(2|3) soll um den Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschoben werden.

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(1|5)$

Wird mit homogenen Koordinaten gerechnet, so müssen die Transformationsmatrizen T für Drehungen, Streckungen bzw. Spiegelungen auf (3 x 3)-Matrizen erweitert werden.

$$\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{T} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$