LA MECCANICA DEI FLUIDI

Descrizione empirica:

SOLIDO: materiale con volume e forma definiti

LIQUIDO: materiale con volume definito ma forma indefinita

GAS LIBERO: materiale con volume e forma indefiniti.

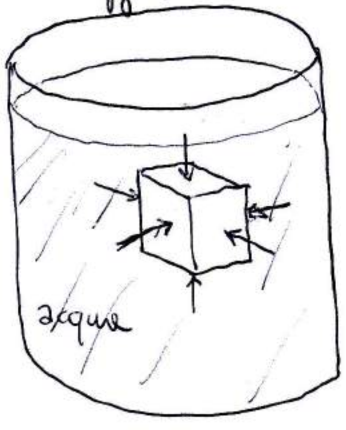
FLUIDO: insieme di molecole distribuite in modo casuale, tenute insieme da deboli forze di legame e dalle forze esercitate dalle pareti del contenitore.

STATICA DEI FLUIDI: meccanica dei fluidi a riposo

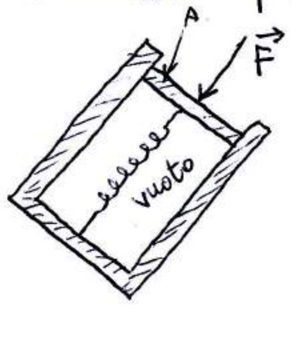
FLUIDODINAMICA: meccanica dei fluidi in moto

1. PRESSIONE

La forza esercitata da un fluido su un oggetto solido con cui è in contatto è sempre perpendicolare alla superficie dell'oggetto:



La pressione in un fluido si può misurare, ad esempio, mediante uno strumento fatto in questo modo:



Cilindro in cui è stato fatto il vuoto, chiuso da un pistone leggero collegato a una molla fissata, all'altro estremo, alla base fissa del cilindro attraverso il volume vuoto.

Immergendo il dispositivo in un fluido, il fluido preme sul pistone e la molla si comprime finché la forza elastica di compressione bilancia esattamente la forza esercitata dal fluido. Avendo tarato lo strumento in modo che funzioni come un dinamometro, a questo punto è possibile calcolare la **pressione** esercitata dal fluido sulla superficie del pistone:

$$P = \frac{|\vec{F}|}{A}$$

P è una **grandezza scalare**: infatti, si osserva sperimentalmente che il valore di P non dipende dall'orientamento del dispositivo nel fluido, ma solo dal punto in cui il dispositivo è posizionato nel fluido.

In generale, se la pressione sulla superficie del solido non è costante, la forza infinitesima $|\Delta\vec{F}|$ su un elemento di superficie ΔA è $|\Delta\vec{F}| = P\,\Delta A$, dove P è la pressione sull'elemento di superficie ΔA.

Unità di misura della pressione nel SI:

$$\boxed{1\ \frac{N}{m^2} = 1\ Pa} \quad \text{(PASCAL)}$$

Esempio 1 Materasso ad acqua di massa $M = 1200\ kg \rightarrow Mg = 1,18 \times 10^4\ N$

Pressione esercitata sul pavimento dal materasso, che poggia con tutta la sua superficie $A = 4\ m^2$: $P = \frac{1.18 \times 10^4\ N}{4\ m^2} = 2,94 \times 10^3\ Pa$

Letto di massa 59 kg che poggia sui 4 piedi, ciascuno con sezione di raggio $r = 2\ cm$

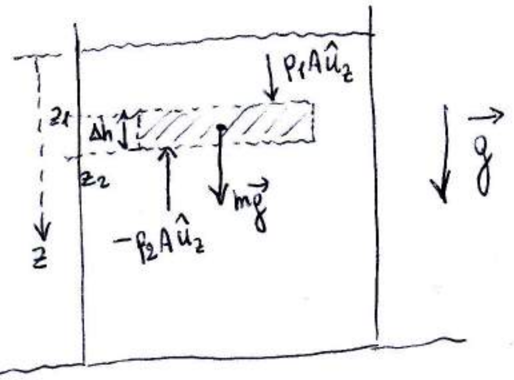
$P = \frac{mg}{4(\pi r^2)} = \frac{578,73\ N}{4(\pi \cdot 0,02)^2\ m^2} \simeq 1,15 \times 10^5\ Pa$ N.B. !!!

2. VARIAZIONE DELLA PRESSIONE CON LA PROFONDITA'

Nel campo di gravità terrestre, in prossimità della superficie terrestre, la pressione in un liquido aumenta linearmente con la profondità.

La densità di un liquido varia debolmente con la temperatura, e inoltre $\rho_{gas} \sim \frac{1}{1000} \rho_{solidi,\, liquidi}$ in condizioni normali.

Consideriamo quindi un contenitore con un fluido al suo interno, posto in prossimità della superficie terrestre.



Consideriamo un "cilindro di fluido" all'interno della massa del fluido, con le basi orizzontali uguali ad A. Sia Δh l'altezza di questo cilindro. Questo elemento di fluido si trova, in condizioni statiche, in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne agenti su di esso: forza peso, forza di pressione del resto del fluido sulla base superiore, forza di pressione del resto del fluido sulla faccia inferiore. Per questo calcolo consideriamo un asse z con origine alla superficie del fluido e orientato positivamente verso il basso. Siano z_1 e z_2 le coordinate rispettivamente della base superiore e della base inferiore.

Il volume del cilindro è $V = A(z_2 - z_1)$, per cui la massa di fluido contenuta nel cilindro è $m = \rho V = \rho A (z_2 - z_1)$.

Condizione di equilibrio statico:

$$p_1 A \hat{u}_z + mg\hat{u}_z - p_2 A \hat{u}_z = 0$$

$$\Rightarrow (p_1 - p_2)A + mg = 0 \Rightarrow (p_1-p_2)\cancel{A} + \rho \cancel{A}(z_2-z_1)g = 0$$

Dunque risulta $\boxed{p_2 = p_1 + \rho g(z_2 - z_1)}$ (LEGGE DI STEVINO)

[Allora: la pressione in un punto $z = z_2$ al di sotto di un punto $z = z_1$ in cui la pressione vale p_1 è maggiore di p_1 di una quantità $\rho g(z_2-z_1)$]

Se $z_1 = 0$ (superficie del fluido) e $z_2 = h$ (profondità nel fluido), risulta in particolare $\boxed{P(h) = P_0 + \rho g h}$

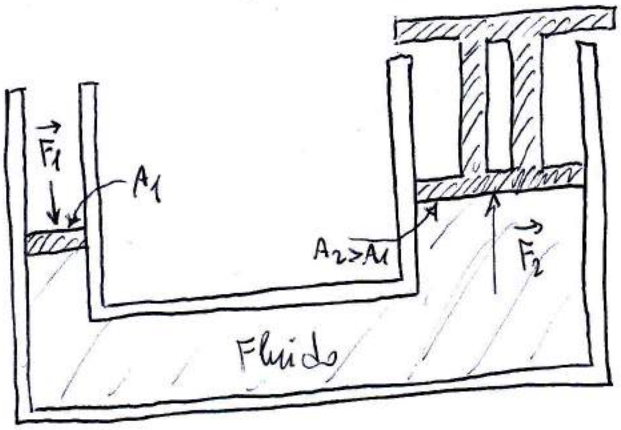
In questo caso P_0 è la pressione atmosferica alla superficie del fluido. Al livello del mare risulta $P_0 = 1{,}0\ atm = 1{,}013 \times 10^5\ Pa$

Dunque, in un ~~caso~~ fluido dentro un contenitore la pressione all'interno del fluido dipende esclusivamente dalla profondità e da P_0.

Variando P_0, di conseguenza, varia la pressione in ogni altro punto all'interno del fluido. Ne consegue la

[LEGGE DI PASCAL: una variazione di pressione applicata a un fluido viene trasmessa invariata a ogni punto del fluido e alle pareti del contenitore.]

Applicazione: pressa idraulica



Una forza $\vec{F}_1$ viene applicata a un piccolo pistone di area A_1. Il fluido incomprimibile trasmette questo aumento di pressione alla superficie interna del pistone di area $A_2 > A_1$, per cui sul secondo pistone viene ad agire una forza $\vec{F}_2$ con $|\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$,

essendo $\Delta P = \dfrac{|\vec{F}_1|}{A_1} = \dfrac{|\vec{F}_2|}{A_2} \Rightarrow |\vec{F}_2| = \dfrac{A_2}{A_1}|\vec{F}_1| > |\vec{F}_1|$

Dunque in una pressa idraulica una piccola forza in ingresso può generare una forza elevata in uscita. Questo effetto è utilizzato, ad es., nei freni idraulici, negli elevatori idraulici per auto e nei carrelli elevatori.

Ovviamente il volume spinto verso il basso dal pistone di sinistra (che scende di un tratto Δx_1) è uguale al volume che spinge verso l'alto il pistone di destra di un tratto $\Delta x_2 \Rightarrow$

$$A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \Rightarrow \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |\vec{F}_1| \Delta x_1 = |\vec{F}_2| \Delta x_2$ questo ce lo potevamo aspettare: il lavoro di $\vec{F}_1$ sul pistone di sinistra è uguale al lavoro di $\vec{F}_2$ sul pistone di destra.

Esempio 2 In un elevatore per auto dell'aria compressa esercita una forza su un piccolo pistone circolare di raggio 5 cm. La pressione viene trasmessa da un liquido a un secondo pistone di raggio 15 cm.

a) Quale forza deve esercitare l'aria compressa per sollevare un'auto che pesa 13300 N?

b) Quale pressione produrrà questa forza?

a)

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 = 13300\,N \Rightarrow F_1 = \frac{A_1}{A_2} \cdot 13300\,N = \left(\frac{5}{15}\right)^2 \cdot 13300\,N =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 13300\,N = 1{,}48 \times 10^3\,N$$

b)

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = \frac{13300\,N}{\pi r_2^2} = \frac{13300\,N}{\pi \cdot (0{,}15)^2} \simeq 1{,}88 \times 10^5\ Pa$$

Esempio 3

Si dia una stima della forza dovuta all'acqua sovrastante che si esercita sul timpano di un nuotatore che nuota sul fondo di una piscina a 5 m di profondità.

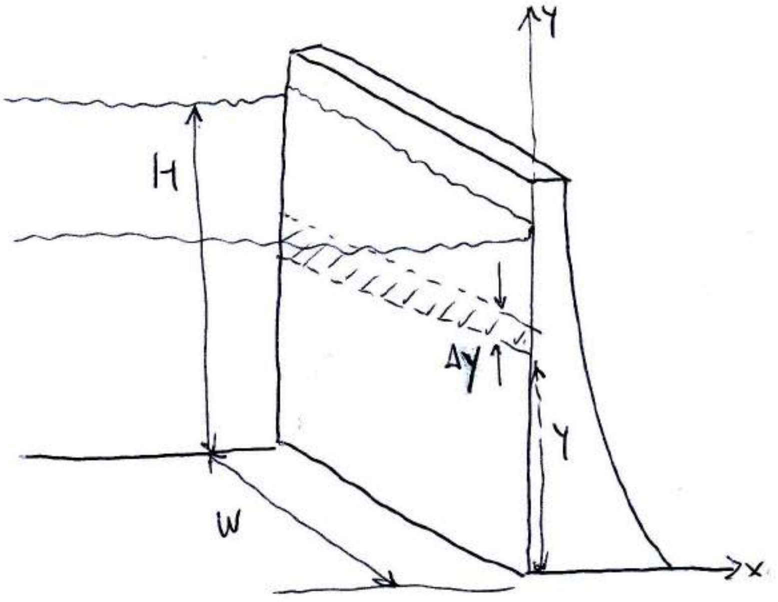
Alla pressione atmosferica il timpano è in equilibrio. Occorre stimare quindi la forza aggiuntiva dovuta all'acqua.

$$F = \rho g h \cdot A \quad , \text{ con } A \simeq 1\,cm^2 = 1 \times 10^{-4}\,m^2$$

$$\Rightarrow F = \left(1 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}\right) \cdot (9{,}81\ m/s^2) \times 5 \times 1 \times 10^{-4}\ N \simeq 4{,}91\ N$$

Esempio 4

L'acqua riempie una diga di larghezza w fino a un'altezza H.
Si determini la forza risultante sulla diga.



La pressione varia con la profondità, per cui su un tratto di diga di altezza fissata Δy la forza agente varierà con la profondità del tratto di diga considerato.
Occorre considerare solo la pressione aggiuntiva dovuta all'acqua, dato che la pressione atmosferica agisce su entrambe le facce della diga.

Profondità del tratto di diga considerato $= H-y$

$$P = \rho g (H-y)$$

Forza esercitata sul tratto di diga di altezza Δy alla profondità $H-y$:

$$\Delta F = P \cdot \Delta A = \rho g (H-y) \cdot w \Delta y$$

Forza complessiva agente sulla diga:

$$F = \int_0^H \rho g w (H-y) dy = \rho g w \left(Hy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^H = \frac{1}{2} \rho g w H^2$$

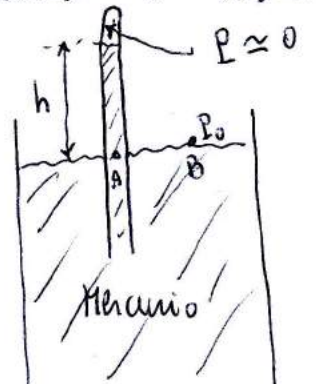
Come si può risolvere questo problema senza ricorrere al calcolo integrale?

$$P_{media} = \frac{0 + \rho g H}{2} = \frac{1}{2} \rho g H \Rightarrow F = P_{media} \cdot A = \left(\frac{1}{2} \rho g H\right) \cdot (wH) = \frac{1}{2} \rho g w H^2$$

Questo è possibile farlo perché P varia linearmente con la profondità!

3. Misure di pressione

Barometro inventato da Evangelista Torricelli nella prima metà del $\underline{\text{XVII}}$ secolo, per misurare la pressione atmosferica: tubo lungo chiuso a una sua estremità (tubo di vetro), riempito di mercurio e poi rovesciato e inserito in una ciotola piena di mercurio.



All'equilibrio si osserva una colonna di mercurio nel tubo lungo che si eleva fino a un'altezza h al di sopra della superficie del mercurio nella ciotola.

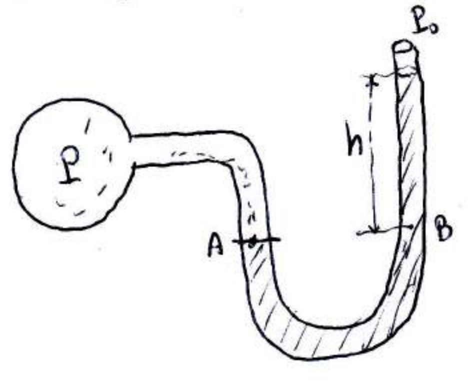
Nella parte all'interno del tubo al di sopra della colonna di mercurio c'è un vuoto molto spinto (non essendo entrata aria nel tubo durante la preparazione della misura), per cui la pressione al di sopra della colonna di mercurio si può considerare praticamente nulla.

Nella figura sopra, la pressione nel punto A deve essere uguale alla pressione nel punto B. Ma poiché $P_B = P_0$ (pressione atmosferica), e poiché $P_A = \rho_{Hg}\, g\, h$ (per quanto visto prima), risulta

$$P_0 = \rho_{Hg}\, g\, h \Rightarrow h = \frac{P_0}{\rho_{Hg}\, g} = \frac{1{,}013 \times 10^5 \text{ Pa}}{\left(13{,}6 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} \simeq 0{,}759 \text{ m} \simeq 76 \text{ cm}$$

Su questa base, che è quello che si osserva anche sperimentalmente, si definisce la pressione di 1 atm come la pressione esercitata da una colonna di mercurio di altezza pari a 76 cm alla temperatura di 0 °C.

Manometro a tubo aperto.



Permette di misurare la pressione di un gas contenuto dentro un recipiente. Uno dei due estremi del tubo a U mostrato in figura, contenente un liquido, e' aperto e la superficie del liquido e' a contatto con l' atmosfera; l' altro estremo e' collegato al recipiente contenente il gas di cui si vuole misurare la pressione. All' equilibrio le pressioni nei due punti A e B (che si trovano alla stessa quota) devono essere le stesse (altrimenti il tratto di liquido nel tubo tra A e B accelererebbe!), uguali alla pressione incognita del gas (l' altra superficie del liquido e' infatti nel punto A a contatto con il gas).

Risulta chiaramente $P_B = P_0 + \rho g h$, dove ρ e' la densita' del liquido utilizzato $\Rightarrow$ $P_{gas} = P_A = P_B = P_0 + \rho g h$.

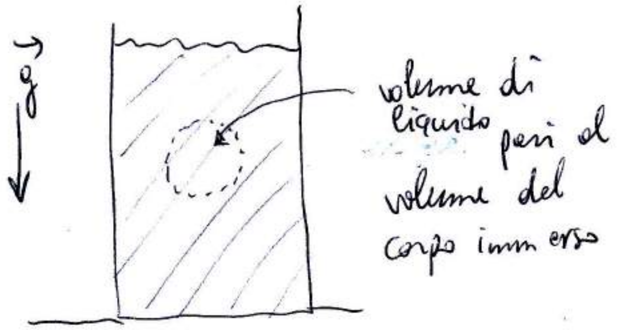
$\rho g h$ e' anche chiamata PRESSIONE DIFFERENZIALE

$\rho_{H_2O} = 1{,}0 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$ $\quad$ $\rho_{\substack{alcool\\etilico}} = 0{,}806 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$ $\quad$ $\rho_{benzene} = 0{,}873 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$

Ripetere la stima di h nell' esperienza di Torricelli per questi altri tre liquidi diversi dal mercurio.

4. SPINTA DI ARCHIMEDE E PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Qualsiasi oggetto immerso in acqua (o in un qualunque liquido) e' sottoposto a una forza addizionale diretta verticalmente verso l'alto. Questo si può giustificare così: se sostituiamo al corpo immerso un uguale volume del liquido considerato, questa quantità di liquido si trova in equilibrio, per cui deve essere presente una forza aggiuntiva diretta verticalmente verso l'alto

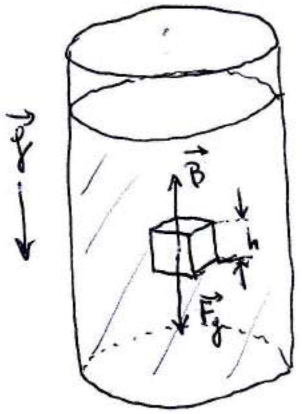


che bilancia esattamente il peso del volume di liquido considerato: questa forza si chiama SPINTA DI ARCHIMEDE, ed e' la risultante di tutte le forze esercitate sul volume di liquido considerato dal liquido circostante.

Se sostituiamo al volume di liquido un corpo di uguale volume, la risultante delle forze esercitate dal liquido circostante resta la stessa, cioe' vale il PRINCIPIO DI ARCHIMEDE:

[ogni corpo immerso parzialmente o totalmente in un fluido viene spinto verso l'alto da una forza aggiuntiva pari in modulo al peso del volume di fluido spostato dal corpo.]

La spinta di Archimede non dipende dalla composizione del corpo, ma solo dal volume che il corpo occupa all'interno del fluido.



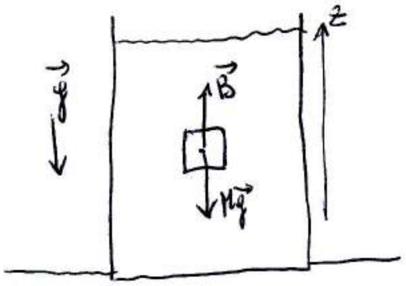
Consideriamo un cubetto di materiale solido immerso in un liquido.
La pressione nella faccia inferiore del cubo e' maggiore di una quantita' $\rho_{fluido}\, g\, h$ (dove h e' la lunghezza del lato del cubo) rispetto alla pressione nella faccia superiore del cubo.

La pressione nella faccia superiore produce una forza agente verso il basso di modulo $P_{sup} A$, dove $A = h^2$
La pressione nella faccia inferiore produce una forza agente verso l'alto di modulo $P_{inf} A$. La risultante di queste due forze e' la spinta di Archimede $\vec{B}$:

$$|\vec{B}| = (P_{inf} - P_{sup})A = (\rho_{fluido}\, g\, h)\, A = \rho_{fluido}\, g\, V,$$

dove V e' il volume occupato dal solido nel fluido.
Ma poiché $\rho_{fluido} V$ e' la massa di tale volume di fluido, risulta verificato quantitativamente il principio di Archimede enunciato in precedenza.
Un pesce tipicamente si muove a varie profondita' in mare variando il volume della sua vescica natatoria che e' riempita di aria.

1] CORPO COMPLETAMENTE IMMERSO



Equazione del moto:

$$M a_z = -Mg + B_z = -Mg + \rho_{fluido}\, g\, V =$$

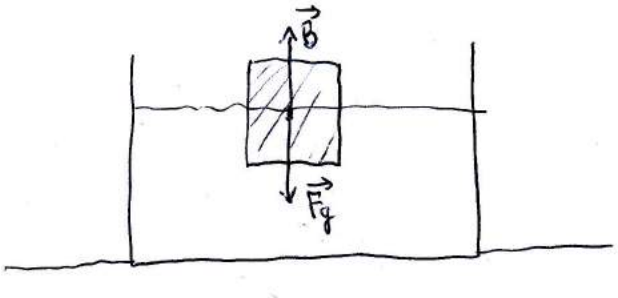
$$= (\rho_{fluido} - \rho_{corpo})\, g\, V$$

Allora, se $\rho_{corpo} < \rho_{fluido}$ risulta $a_z > 0$ e la forza risultante agente sul corpo e' diretta verso l'alto

Se $\rho_{corpo} > \rho_{fluido}$, viceversa, risulta $a_z < 0$ e la forza risultante agente sul corpo e' diretta verso il basso.

Se $\rho_{corpo} = \rho_{fluido}$, risulta $a_z = 0$ per cui il corpo rimane in equilibrio se inizialmente e' fermo.

2] CORPO GALLEGGIANTE



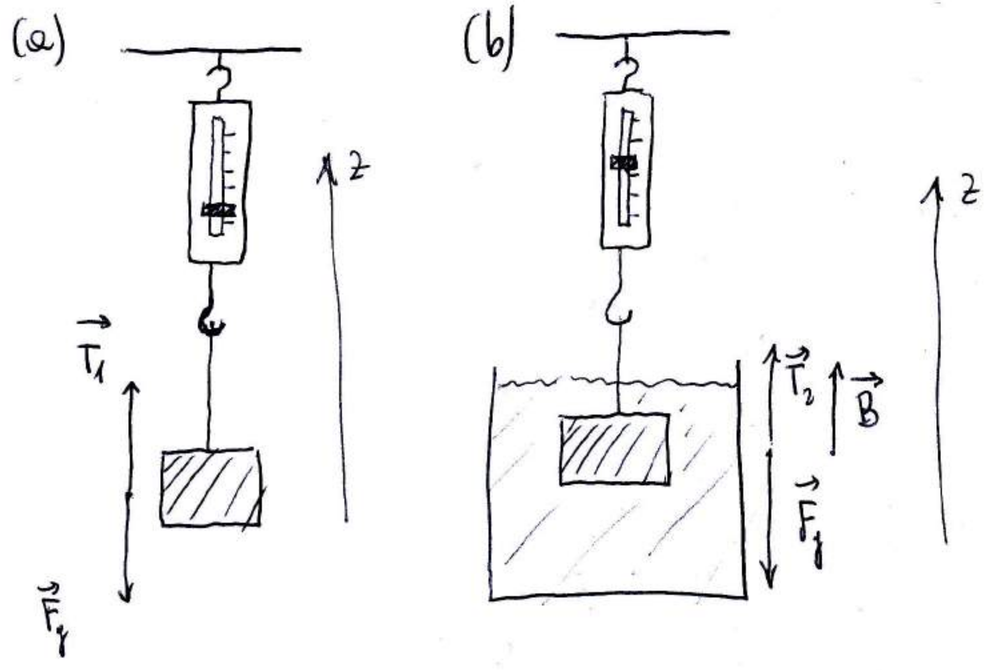
In un corpo galleggiante il peso del corpo e' esattamente equilibrato dalla spinta di Archimede.

Detto V_{sp} il volume della parte del corpo immersa nel fluido (con $V_{sp} < V_{corpo}$), dovrà risultare $\cancel{g}\, V_{corpo}\, \rho_{corpo} = \rho_{fluido}\, V_{sp}\, \cancel{g}$, da cui

$$\boxed{\frac{V_{sp}}{V_{corpo}} = \frac{\rho_{corpo}}{\rho_{fluido}}}\ ;$$

questo e' possibile, chiaramente, solo se $\rho_{corpo} < \rho_{fluido}$.

Esempio 5 Ad Archimede fu richiesto di determinare se una corona fabbricata per il re fosse di oro zecchino. La leggenda narra che risolse il problema pesando prima la corona in aria e poi in acqua. Si suppone che nella pesata in aria abbia letto sulla scala 7,84 N e nella pesata in acqua 6,84 N.
Quale è stata la risposta di Archimede al sovrano?



Corpo TOTALMENTE immerso in acqua

(a) In aria il bilancio delle forze è immediato:

$$T_1 - mg = 0 \Rightarrow T_1 = mg$$ (la spinta di Archimede in aria si può trascurare rispetto a mg).

(b) In acqua risulta:

$$B + T_2 - mg = 0 \Rightarrow B = mg - T_2$$

$B = \rho_{acqua}\, g\, V \qquad m = \rho_c V$, per cui

$$\rho_c = \frac{m}{V} = \frac{mg}{Vg} = \frac{mg}{(B/\rho_{acqua})} = \frac{mg\,\rho_{acqua}}{B} = \frac{mg\,\rho_{acqua}}{mg - T_2} \Rightarrow$$

Sostituendo i valori, otteniamo

$$\rho_c = \frac{(7{,}84\ N)\cdot(1000\ kg/m^3)}{7{,}84\ N - 6{,}84\ N} = 7{,}84 \times 10^3\ kg/m^3$$

Poiché la densità dell'oro è $19{,}3 \times 10^3\ kg/m^3$, si conclude che la corona o non è massiccia (cioè contiene cavità) oppure non è di oro.

Quale sarebbe stata la lettura sulla scala nella seconda pesata per una corona di oro massiccio?

Esempio 6. Un iceberg che galleggia in mare aperto è particolarmente pericoloso per la navigazione poiché la sua parte immersa è molto più grande della parte emersa. Quale frazione dell'iceberg è immersa sott'acqua?

La densità del ghiaccio è $917\ kg/m^3$, per cui, per un corpo di ghiaccio galleggiante risulta

$$\frac{V_{sp}}{V_{corpo}} = \frac{\rho_{corpo}}{\rho_{acqua}} = \frac{917}{1030} \simeq 0{,}890 \quad (89\ \%)$$

essendo $1030\ kg/m^3$ la densità tipica dell'acqua di mare.

5. DINAMICA DEI FLUIDI

Tipologie di flusso in un fluido in movimento:

- FLUSSO STAZIONARIO o LAMINARE: ciascuna "particella" di fluido segue un cammino regolare che non interseca i cammini di altri elementi del fluido; in queste condizioni la velocità di ciascun elemento del fluido che passa per un dato punto dello spazio, in questo punto è costante nel tempo.
- FLUSSO TURBOLENTO: si instaura quando il modulo della velocità supera un certo valore critico; si tratta di un flusso irregolare con zone vorticose.

In generale, tra due strati adiacenti di fluido in moto l'uno rispetto all'altro si esercita una forza di ATTRITO VISCOSO, a causa della quale parte dell'energia cinetica viene convertita in energia interna, in maniera simile a ciò che accade a un corpo sotto l'azione di una forza di attrito dinamico.

Modello di FLUIDO IDEALE:

a) FLUIDO NON VISCOSO: attrito interno trascurabile ⇒ un corpo in moto in un fluido non viscoso non è soggetto a forze di attrito.

b) FLUSSO STAZIONARIO: vedi sopra.

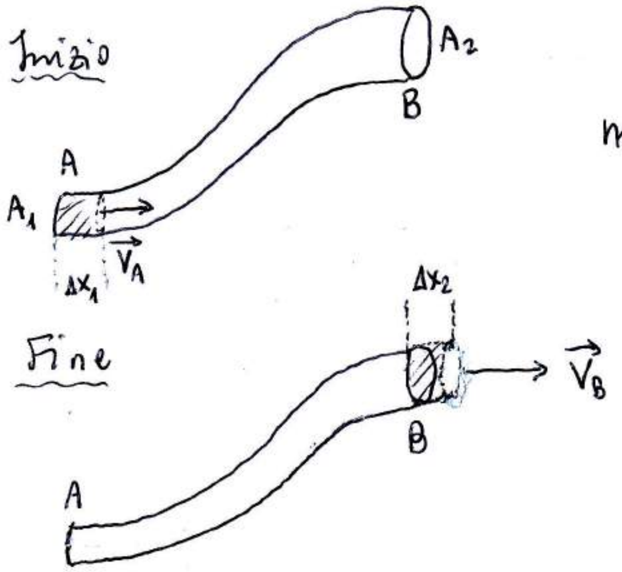
c) FLUIDO INCOMPRIMIBILE: densità costante

d) FLUIDO IRROTAZIONALE: il momento angolare del fluido rispetto a un punto qualsiasi è nullo.

In una situazione di flusso stazionario, ogni particella di fluido si muove lungo una specifica traiettoria, detta LINEA DI CORRENTE, e la velocità istantanea vettoriale della particella è tangente a tale linea.

Un insieme di linee di corrente è formato da linee che, per definizione, non si intersecano, ed è detto TUBO DI FLUSSO.

Consideriamo un fluido ideale che scorre in un tubo, e consideriamo un tratto di tubo tra un punto A e un punto B.



Poiché un fluido ideale è incomprimibile, quando una certa quantità Δm di liquido entra nel tratto di tubo considerato dall'estremità A, la stessa quantità Δm deve necessariamente uscire dall'estremità B, nello stesso intervallo di tempo Δt.

Se Δm è una piccola quantità di liquido, i tratti Δx_1 e Δx_2 dello schema qua sopra sono piccoli, e di fatto la quantità di liquido Δm che entra nell'estremità A del tubo è contenuta in un cilindro con area di base A_1 e altezza Δx_1, e la stessa quantità di liquido che esce dall'estremità B del tubo è contenuta in un cilindro con area di base A_2 e altezza Δx_2.

Se ρ è la densità costante del liquido incomprimibile, deve quindi risultare

$$\rho \Delta V_A = \rho \Delta V_B \Rightarrow \cancel{\rho} A_1 \Delta x_1 = \cancel{\rho} A_2 \Delta x_2$$

Poiché l'ingresso della quantità Δm dall'estremità A avviene nello stesso intervallo di tempo Δt in cui la stessa quantità Δm esce dall'estremità B, se indichiamo con V_1 il modulo della velocità di ingresso del fluido in A e con V_2 il modulo della velocità di uscita del fluido in B, risulta $\Delta x_1 = V_1 \Delta t$, $\Delta x_2 = V_2 \Delta t$, e quindi l'equazione scritta in precedenza diventa:

$$A_1 V_1 \cancel{\Delta t} = A_2 V_2 \cancel{\Delta t}$$

, e in definitiva

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Poiché questa uguaglianza vale per qualsiasi coppia di punti lungo il tubo, otteniamo che per un fluido incomprimibile che fluisce in un tubo (a sezione eventualmente variabile) vale la legge $\boxed{Av = \text{costante}}$ (EQUAZIONE DI CONTINUITÀ)

dove A è la sezione trasversale del tubo nel punto considerato, e V è il modulo della velocità del fluido nello stesso punto: in un fluido incomprimibile che scorre in un tubo il prodotto tra la sezione trasversa del tubo in un punto e la velocità del fluido nello stesso punto è costante in tutti i punti lungo il tubo. Il prodotto Av è detto PORTATA.

Restringendo la sezione del tubo in un punto, la velocità del fluido in quel punto aumenta per mantenere costante il prodotto Av. <u>La portata si misura in m^3/s.</u>

Esempio 7

Un giardiniere, per riempire una tanica di volume $V = 30\,\ell$ con un tubo impiega un tempo $T = 1$ min.
Se il giardiniere applica al tubo un ugello di sezione $A = 0{,}5\ cm^2$, e se l'ugello si trova ad una altezza $h = 1$ m al di sopra del terreno, a quale distanza orizzontale dall'ugello il terreno viene innaffiato?

Anzitutto valutiamo la portata del fluido: dai dati del problema si vede subito che deve risultare

$$\text{portata} = \frac{V}{T} = \frac{30\,\ell}{1\ \text{min}} = \frac{30 \times 10^{-3}\ m^3}{60\ s} = 0{,}5 \times 10^{-3}\ \frac{m^3}{s} = 0{,}5\ \ell/s$$

Poiché portata $= A v$, deve quindi risultare, all'uscita dell'ugello:
$$A v = \frac{V}{T},$$
dove v è il modulo della velocità del fluido all'uscita dell'ugello; risulta

$$v = \frac{V}{AT} = \frac{30 \times 10^{-3}\ m^3}{(0{,}5 \times 10^{-4}\ m^2) \cdot (60\ s)} = 10\ m/s$$

Considerando un elemento di fluido come un punto materiale, il problema si riduce quindi a determinare la distanza orizzontale percorsa, prima di toccare terra, da un punto materiale lanciato con velocità orizzontale nota v da un punto situato a un'altezza h.

Sappiamo già che il tempo di caduta è

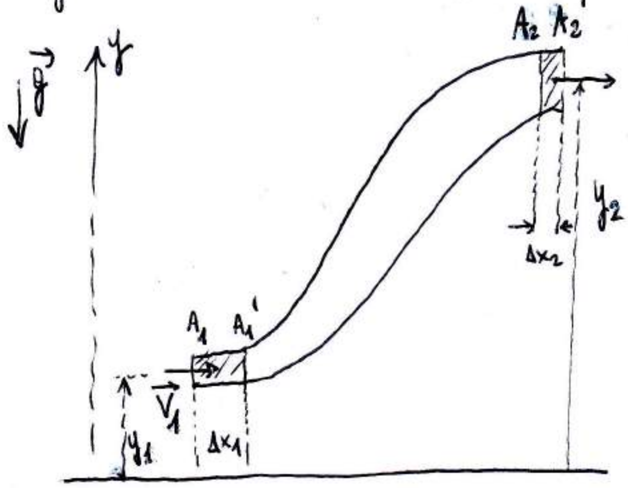
$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

, per cui, dato che la componente orizzontale della velocità si conserva durante il moto di un proiettile (perché in questo caso vale lo stesso modello), otteniamo che la distanza orizzontale da determinare è:

$$\boxed{D = v t_c = v\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{V}{AT}\sqrt{\frac{2h}{g}} = (10\ m/s)\cdot\sqrt{\frac{2\times(1\ m)}{9{,}81\ m/s^2}} = 4{,}5152\ m}$$

Teorema di Bernoulli (Daniel Bernoulli, 1738)

Consideriamo un fluido ideale incomprimibile che scorre in regime stazionario in un tubo a sezione variabile (vedi schema).



Vogliamo valutare dal punto di vista energetico che cosa accade quando un dato volume di fluido compreso tra le sezioni A_1 e A_2 si sposta lungo il tubo e, dopo un intervallo di tempo Δt, si trova compreso tra le sezioni A_1' e A_2'.

Supponiamo che il tratto tra A_1 e A_1' e quello tra A_2 e A_2' siano a quote fisse, rispettivamente y_1 e y_2.

1) Osserviamo anzitutto che, dato che il fluido e' incomprimibile, il volume del tratto di fluido compreso tra le sezioni A_1 e A_1' e' uguale al volume del tratto di fluido compreso tra le sezioni A_2 e A_2': risulta cioe'

$$A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 \quad (*)$$

(A_1 e A_1' sono uguali, come pure A_2 e A_2', per piccoli spostamenti del fluido).

2) Le forze di pressione dovute alle pareti del tubo non compiono lavoro in quanto sono perpendicolari alla direzione della velocita' del fluido, mentre il lavoro delle forze di pressione dovute al fluido a monte e a valle del volume considerato compiono un lavoro complessivo

$$\Delta W = p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 ,$$

in quanto nel punto 1 agiscono concordemente alla velocita' del fluido, mentre nel punto 2 hanno verso discorde rispetto a quello della velocita' del fluido; poiché $A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = \Delta V$ (vedi (*)), possiamo scrivere

$$\Delta W = (p_1 - p_2) \Delta V$$

3) Nel complesso, il movimento considerato del volume di fluido equivale a spostare la massa di fluido contenuta nel volume ΔV_1 nel volume ΔV_2 posto a una quota diversa. Se confrontiamo l'energia potenziale complessiva iniziale del volume di fluido compreso tra A_1 e A_2 e la

confrontiamo con l'energia potenziale complessiva dello stesso volume di fluido dopo un intervallo di tempo Δt quando e' compreso tra A_1' e A_2', si osserva che si può scrivere:

$$U_{p,i} = U_p(A_1 A_1') + U_p(A_1' A_2)$$

$$U_{p,f} = U_p(A_1' A_2) + U_p(A_2 A_2')$$

Dunque, il lavoro svolto dalla forza peso nell'intervallo di tempo Δt e'

$$\Delta W_p = U_{p,i} - U_{p,f} = U_p(A_1 A_1') - U_p(A_2 A_2') =$$

$$= \Delta m\, g\, y_1 - \Delta m\, g\, y_2 = -\Delta m\, g\,(y_2 - y_1) =$$

$$= -\rho g (y_2 - y_1)\Delta V$$

Infatti, le masse di fluido dei tratti $A_1 A_1'$ e $A_2 A_2'$ sono uguali, essendo uguali i volumi per quanto detto in precedenza; inoltre la densita' del fluido e' costante.

Poiché le forze di pressione e la forza peso sono le uniche forze che compiono lavoro sul volume di fluido considerato, possiamo applicare il teorema dell'energia cinetica.

L'energia cinetica del volume di fluido "iniziale" compreso tra A_1 e A_2 e' $\quad K_{TOT,i} = K(A_1 A_1') + K(A_1' A_2)$

L'energia cinetica del volume di fluido "finale" compreso tra A_1' e A_2' e': $\quad K_{TOT,f} = K(A_1' A_2) + K(A_2 A_2')$

Dunque, la variazione dell'energia cinetica totale del volume di fluido considerato nell'intervallo di tempo Δt è:

$$K_{TOT,f} - K_{TOT,i} = K(A_2 A_2') - K(A_1 A_1')$$

Infatti, le velocità del fluido in punti fissati sono le stesse, per cui il contributo del tratto di fluido tra A_1' e A_2 è lo stesso in $K_{TOT,i}$ e in $K_{TOT,f}$, e si cancella quando calcoliamo la variazione dell'energia cinetica totale.

Dunque, otteniamo:

$$K_{TOT,f} - K_{TOT,i} = \Delta W + \Delta W_p \,, \qquad \text{cioè}$$

$$\frac{1}{2}(\Delta m)|\vec{v}_2|^2 - \frac{1}{2}(\Delta m)|\vec{v}_1|^2 = (p_1 - p_2)\Delta V - \rho g (y_2 - y_1)\Delta V$$

$$\frac{1}{2}\rho \cancel{\Delta V} |\vec{v}_2|^2 - \frac{1}{2}\rho \cancel{\Delta V} |\vec{v}_1|^2 = (p_1 - p_2)\cancel{\Delta V} - \rho g (y_2 - y_1)\cancel{\Delta V}$$

Riordiniamo i termini:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_1|^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_2|^2 + \rho g y_2$$

Poiché questa uguaglianza vale per qualsiasi coppia di punti lungo il tubo, otteniamo che per un fluido incomprimibile di densità ρ che fluisce in un tubo vale la legge

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 + \rho g y = \text{costante}}$$

TEOREMA DI BERNOULLI

Ovviamente p, $|\vec{v}|$ e y sono misurati in uno stesso punto.

Alcune conseguenze del teorema di Bernoulli sono le seguenti:

1) se la velocità di un fluido aumenta, la pressione in quel punto deve diminuire;
2) la pressione diminuisce al crescere della quota, a parità di $|\vec{v}|$; in particolare, se un fluido è in quiete ($|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 0$) risulta

$$p + \rho g y = \text{costante}, \quad \text{cioè}$$

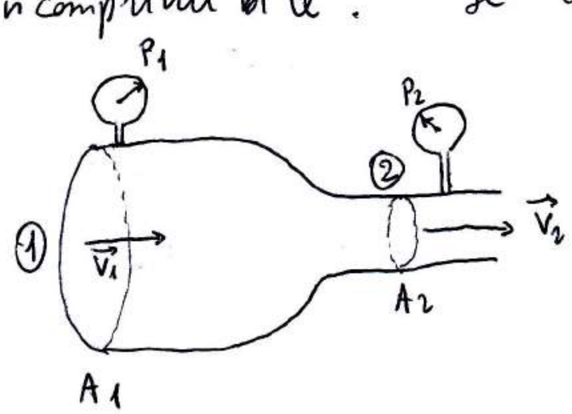
$$p_1 - p_2 = \rho g (y_2 - y_1), \quad \text{in accordo con la legge}$$

di Stevino (pag. 4)

Esempio 8

Tubo di Venturi

Un tubo orizzontale a sezione variabile (il "tubo di Venturi") può essere utilizzato per misurare la velocità di un fluido incomprimibile. Se è nota la differenza di pressione $p_1 - p_2$, note anche le sezioni A_1 e A_2, si determini la velocità del fluido nel punto 2 dello schema a fianco.



Il tubo e' orizzontale, per cui il teorema di Bernoulli in questo caso assume la forma $p_2 + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_2|^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_1|^2$

Ma, per l'equazione di continuita', deve anche risultare

$$A_1|\vec{v}_1| = A_2|\vec{v}_2|, \text{ cioe' } \quad |\vec{v}_1| = \frac{A_2}{A_1}|\vec{v}_2|, \text{ che}$$

sostituito nell'equazione precedente da':

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_2|^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2|\vec{v}_2|^2$$

Riordiniamo i termini:

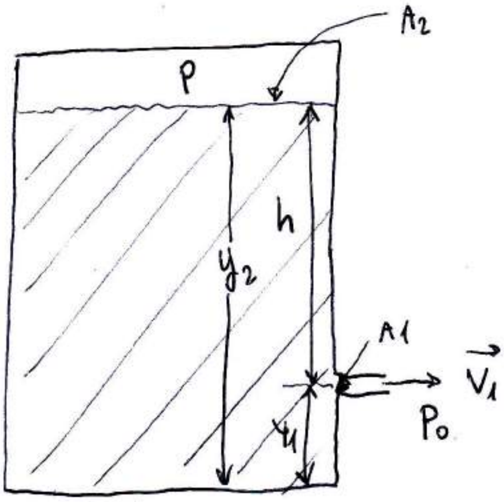
$$\frac{1}{2}\rho\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]|\vec{v}_2|^2 = p_1 - p_2, \quad \text{cioe'}$$

$$|\vec{v}_2|^2 = \frac{2(p_1-p_2)}{\rho\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]} = \frac{2A_1^2(p_1-p_2)}{\rho(A_1^2-A_2^2)}, \quad \text{e in fine}$$

$$\boxed{|\vec{v}_2| = A_1\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho(A_1^2-A_2^2)}}}$$

Esempio 9

Un serbatoio contenente un liquido di densità ρ ha un piccolo foro su un lato ad altezza y_1 dal fondo. La pressione dell'aria esterna al foro è quella atmosferica e il foro ha una sezione molto più piccola di quella del contenitore. L'aria al di sopra del liquido è mantenuta a una pressione p. Se il livello del liquido si trova a un'altezza h sopra il foro, si determini la velocità di uscita dell'acqua dal foro.



Essendo $A_1 << A_2$, la superficie superiore del liquido si può considerare di fatto ferma, per cui la velocità del liquido sulla superficie A_2 è all'incirca nulla.

La pressione alla quota del foro è uguale alla pressione atmosferica. Applichiamo il teorema di Bernoulli:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_1|^2 + \rho g y_1 = p + \rho g y_2$$

Poiché $y_2 = y_1 + h$, otteniamo:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_1|^2 + \cancel{\rho g y_1} = p + \cancel{\rho g y_1} + \rho g h$$, e quindi

$$\frac{1}{2}\rho|\vec{v}_1|^2 = p - p_0 + \rho g h \Rightarrow |\vec{v}_1|^2 = \frac{2(p-p_0)}{\rho} + 2gh$$, e quindi

$$\boxed{|\vec{v}_1| = \sqrt{\frac{2(p-p_0)}{\rho} + 2gh}}$$

In un serbatoio aperto risulta $p = p_0$, per cui $|\vec{v}_1| = \sqrt{2gh}$, che è la velocità che raggiungerebbe un corpo in caduta libera che parta da fermo da una quota h (LEGGE DI TORRICELLI).