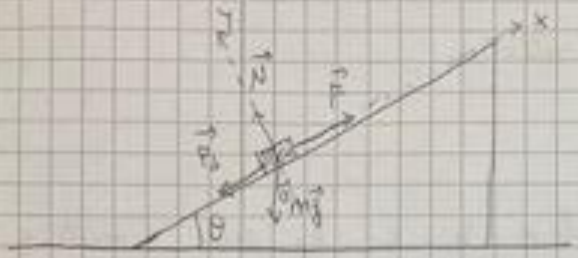
APPELLO INVERNALE DEL 24/01/2023

FISICA PER INFORMATICA

Problema n. 1



A lato sono schematizzate le forze agenti sul punto materiale, durante il suo moto.

a) Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali xy come nello schema, risulta:

$N_x = 0 \qquad N_y = |\vec{N}| = N \; ; \qquad (m\vec{g})_x = -mg\sin\theta \qquad (m\vec{g})_y = -mg\cos\theta$

$F_{d,x} = -\mu_d N \qquad F_{d,y} = 0 \; ; \qquad F_x = |\vec{F}| = F \qquad F_y = 0$

Dato che il punto materiale si muove con velocità costante, la risultante delle forze agenti sul punto materiale è nulla:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_d + \vec{N} = 0 \; ; \text{ dunque:}$$

$$\begin{cases} F_x + (m\vec{g})_x + F_{d,x} + N_x = 0 \\ F_y + (m\vec{g})_y + F_{d,y} + N_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - mg\sin\theta - \mu_d N = 0 \\ -mg\cos\theta + N = 0 \end{cases} \text{, da cui}$$

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta \\ F = mg\sin\theta + \mu_d N \end{cases} \Rightarrow \boxed{F = mg(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) = (10\,\text{kg})\left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)(\sin 30^\circ + 0{,}1\cos 30^\circ) = 57{,}55\,N}$$

b) Poiché l'energia cinetica del punto materiale non varia durante il suo moto (per ipotesi il modulo della sua velocità istantanea è costante), per il teorema dell'energia cinetica il lavoro svolto complessivamente dalle forze agenti sul punto materiale durante il suo moto è nullo. Dunque, dato che la reazione normale $\vec{N}$ del piano inclinato non compie lavoro, deve risultare

c)

$$W_p + W_F + W_d = 0$$

Risulta $W_p = mg(h_i - h_f)$, dove h_i e h_f sono rispettivamente le quote verticale iniziale e quella finale del punto materiale. Poiché tra l'istante iniziale e quello finale il punto materiale si sposta di un tratto L in salita lungo il piano inclinato, risulta $h_i - h_f = -L\sin\theta$, e quindi

$$\boxed{W_p = -mgL\sin\theta = -(10\,kg)\left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)(10\,m)\cdot\sin 30° \simeq -490{,}5\,J}$$

La forza $\vec{F}$ è costante durante il moto del punto materiale, per cui il lavoro svolto dalla forza $\vec{F}$ nel tratto di lunghezza L è positivo ($\vec{F}$ è concorde con lo spostamento del punto materiale)

$$\boxed{W_F = FL = mgL(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) \simeq (57{,}55\,N)\cdot(10\,m) \simeq 575{,}5\,J}$$

Dal teorema dell'energia cinetica (vedi sopra) otteniamo quindi il lavoro svolto dalla forza di attrito dinamico:

$$\boxed{\begin{aligned} W_d &= -W_p - W_F = mgL\sin\theta - mgL(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) = \\ &= -\mu_d mgL\cos\theta = -0{,}1\cdot(10\,kg)\left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)(10\,m)\cdot\cos 30° \simeq -84{,}96\,J \end{aligned}}$$

c) Dalle formule ottenute nel punto a):

$$F = mg\,(\sin\theta + \mu_s \cos\theta)$$

possiamo determinare il valore di θ per cui F è massima:

$$\frac{dF}{d\theta} = mg\,(\cos\theta - \mu_s \sin\theta) \geq 0 \quad \text{per} \quad \cos\theta - \mu_s \sin\theta \geq 0 \Rightarrow \tan\theta \leq \frac{1}{\mu_s}$$

$$\Rightarrow \quad \theta \leq \arctan\left(\frac{1}{\mu_s}\right)$$

Dunque F è crescente per $0° < \theta < \arctan\left(\frac{1}{\mu_s}\right)$, ed è decrescente per $\arctan\left(\frac{1}{\mu_s}\right) < \theta < 90°$

Pertanto F ha un massimo per

$$\boxed{\theta = \theta^* = \arctan\left(\frac{1}{\mu_s}\right) = \arctan\left(\frac{1}{0,1}\right) = \arctan(10) \simeq 84,29° \simeq 1,47 \text{ rad}}$$

Dunque:

$$F_{max} = F(\theta = \theta^*) = mg\,(\sin\theta^* + \mu_s \cos\theta^*)$$

Ricordiamo le relazioni tra le funzioni goniometriche:

$$\sin\theta^* = \frac{\tan\theta^*}{\sqrt{1+(\tan\theta^*)^2}}, \quad \cos\theta^* = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan\theta^*)^2}}, \quad \text{per } 0 \leq \theta^* < 90°$$

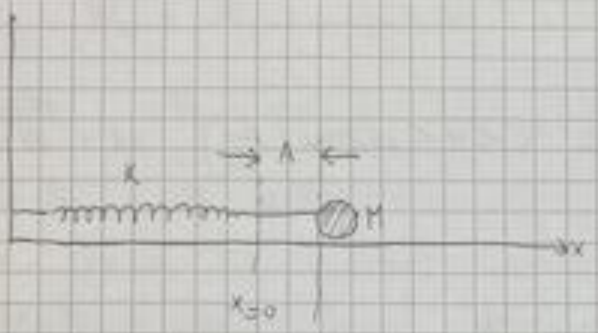
Allora: $$F_{max} = mg\left[\frac{\tan\theta^*}{\sqrt{1+(\tan\theta^*)^2}} + \frac{\mu_s}{\sqrt{1+(\tan\theta^*)^2}}\right] =$$

$$= mg\left[\frac{1/\mu_s}{\sqrt{1+\frac{1}{\mu_s^2}}} + \frac{\mu_s}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\mu_s}\right)^2}}\right] = mg\,\frac{\cancel{\mu_s}}{\sqrt{1+\mu_s^2}}\,\frac{1}{\cancel{\mu_s}}(1+\mu_s^2)$$

e infine:

$$\boxed{F_{max} = mg\sqrt{1+\mu_s^2} = (10\ kg)\left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)\sqrt{1+(0{,}1)^2} = 98{,}59\ N}$$

<u>Problema n. 2</u>



a) Il moto del punto materiale, dopo che viene rilasciato, e' armonico. ~~...~~ La pulsazione del moto armonico di un punto materiale di ~~massa~~ M collegato all' estremita' libera di una molla di costante elastica k, se il moto avviene lungo l' asse di allungamento e compressione della molla, e':

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$, per cui, essendo $\omega = 2\pi f$, risulta

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{50\ N/m}{0{,}1\ kg}} = 3{,}56\ Hz}$$

b) L' energia meccanica si può calcolare sapendo che inizialmente il punto materiale e' fermo e la molla e' allungata di un tratto di lunghezza A. Dunque l' energia meccanica del punto materiale coincide con l' energia potenziale elastica iniziale (l' energia cinetica iniziale e' nulla):

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(50 \frac{N}{m}\right) \cdot (0{,}2\, m)^2 = 1\, J}$$

Durante il moto del corpo, l'unica forza che compie lavoro è la forza elastica; non c'è (per ipotesi) attrito dinamico, e le altre due forze agenti sul punto materiale (forza peso e reazione normale del piano orizzontale) non compiono lavoro perché a ogni istante agiscono lungo la direzione perpendicolare alla direzione del moto del punto materiale. Dato che l'unica forza che compie lavoro, quindi, è la forza elastica, e dato che la forza elastica è conservativa, allora l'energia meccanica E_m si conserva durante il moto del punto materiale

c) Poiché all'istante iniziale e all'istante finale il punto materiale è fermo, il lavoro complessivamente svolto dalle forze agenti è nullo (non c'è variazione dell'energia cinetica del punto materiale tra l'istante iniziale e l'istante finale). Le uniche forze che compiono lavoro sul punto materiale sono la forza elastica esercitata dalla molla e la forza di attrito dinamico. Dunque:

$$W_e + W_d = 0$$

Risulta $W_e = U_{e,i} - U_{e,f} = \frac{1}{2} k A^2$, e quindi

$$\boxed{\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} k A^2 = 1\, J \\ W_d &= - W_e = -1\, J \end{aligned}}$$

Problema n. 3

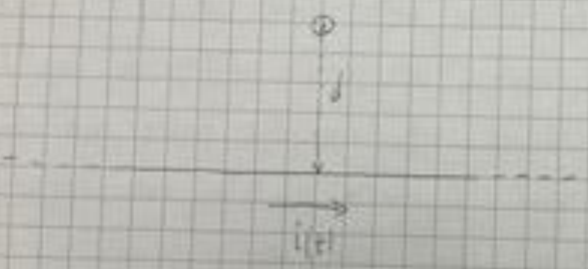
a) Vista schematica nel piano perpendicolare al filo; in questo schema supponiamo che la corrente sia uscente dal piano del foglio

Per il teorema di Ampère possiamo scrivere:

$$2\pi d\, B_0 = \mu_0 i_0 \text{, da cui ricaviamo}$$

$$\boxed{B_0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} = \frac{\left(4\pi\cdot10^{-7}\ \frac{T\cdot m}{A}\right)\cdot(1\ A)}{2\pi\cdot(0{,}5\ m)} = 4\cdot10^{-7}\ T}$$

b)



Se possiamo supporre che risulti $|\vec B| \simeq B_0$ in tutti i punti interni alla spira, dove B_0 è il modulo del campo magnetico nel centro della spira, otteniamo:

$$|\vec B(t)| \simeq B_0(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi d}$$ (sulla base della risposta alla domanda a))

Il flusso del campo magnetico attraverso la spira è quindi

$$\Phi(\vec B(t)) \simeq \pi r^2 |\vec B(t)| = \pi r^2 B_0(t) = \frac{\cancel{\pi} r^2 \mu_0 i(t)}{2\cancel{\pi} d} = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{r^2}{d} i(t)$$

La f.e.m. indotta nella spira è, per la legge di Faraday-Neumann

$$\mathcal{E}_i(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(\vec B(t)) = -\frac{1}{2}\mu_0\frac{r^2}{d}\frac{di(t)}{dt}$$

Essendo $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$, risulta $\frac{di(t)}{dt} = i_0 \left[-\sin(\omega t)\right] \cdot \omega =$

$= -\omega i_0 \sin(\omega t)$,

e quindi otteniamo

$$v_1(t) = -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{r^2}{d} \left[-\omega i_0 \sin(\omega t)\right]$$, e infine

$$\boxed{v_1(t) = \frac{1}{2} \mu_0 \omega i_0 \frac{r^2}{d} \sin(\omega t)}$$

L'ampiezza delle oscillazioni di $v_1(t)$ è quindi

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \mu_0 \omega i_0 \frac{r^2}{d} = \frac{1}{2} \left(4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}\right) \cdot \left(300\pi \frac{rad}{s}\right) \cdot (1A) \cdot \frac{(0{,}02\, m)^2}{(0{,}5\, m)} = \\ &\simeq 4{,}74 \cdot 10^{-7}\, V \simeq 474\, nV \end{aligned}}$$

c) Per la legge di Ohm, la corrente indotta nella spira è

$$\boxed{i_1(t) = \frac{v_1(t)}{R} = \frac{\mu_0 \omega i_0 r^2}{2dR} \sin(\omega t)}$$

e l'ampiezza delle oscillazioni di $i_1(t)$ è

$$I = \frac{V}{R} = \frac{4{,}74 \cdot 10^{-7}\, V}{1\, \Omega} = 4{,}74 \cdot 10^{-7}\, A = 474\, nA$$

La potenza dissipata nella piccola spira è

$$\boxed{P_1(t) = \frac{(v_1(t))^2}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 \omega i_0 r^2}{2d}\right)^2 \sin^2(\omega t)}$$

Si può anche scrivere, usando la formula trigonometrica

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

$$P_1(t) = \frac{1}{2R}\left(\frac{\mu_0 \omega i_0 r^2}{2d}\right)^2 \left[1-\cos(2\omega t)\right]$$, per cui vediamo che

la potenza dissipata nella spira oscilla con frequenza $2f$ attorno al valore medio

$$\overline{P_1} = \frac{1}{2R}\left(\frac{\mu_0 \omega i_0 r^2}{2d}\right)^2 = \frac{V^2}{2R} \simeq 1{,}122 \cdot 10^{-13}\ W \simeq 112{,}2\ fW$$