

## ONDE ELETTROMAGNETICHE

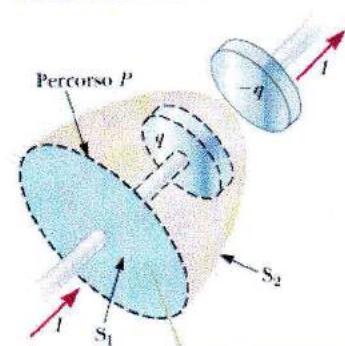
### Corrente di spostamento e teorema di Ampère generalizzato

Nel capitolo sui campi magnetici statici e' stato enunciato il teorema di Ampère:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$ , con l'integrale di linee esteso a un qualsiasi percorso chiuso concatenato con la corrente di conduzione  $I = [q(t)]'$ . In queste forme, il teorema di Ampère vale solo se la corrente di conduzione e' continua nello spazio, e Maxwell fu il primo che si accorse di ciò.

Mentre un condensatore si sta caricando, delle correnti scorrono nei conduttori e la carica accumulata sulle armature varia nel tempo, ma non c'e' corrente di conduzione tra le due armature.

Nelle figure a fianco sono schematizzati un percorso chiuso  $P$  attorno al conduttore percorso dalla corrente  $I$ , e due diverse superfici che sono contornate dal percorso  $P$  ( $S_1$  e  $S_2$ ). Secondo il teorema di Ampère, l'integrale di linee  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  (anche detto circuitazione di  $\vec{B}$ ) lungo il percorso chiuso  $P$  deve essere uguale a  $\mu_0 I$ , dove  $I$  e' la corrente di conduzione che attraversa qualsiasi superficie delimitata dal percorso chiuso  $P$ .

Nello schema della figura, questo accade se consideriamo la superficie  $S_1$ , ma non e' vero se consideriamo la superficie  $S_2$  che passa tra le due armature del condensatore, in quanto la corrente di conduzione e' discontinua tra le armature. ①



La corrente di conduzione nel filo attraversa solo  $S_1$ . Questo fatto porta ad una contraddizione nella legge di Ampère, che si risolve solo postulando una corrente di spostamento che attraversi  $S_2$ .

Per risolvere questa contraddizione, Maxwell postulo' che, nel 2<sup>o</sup> membro dell'equazione che esprime il teorema di Ampère, ci fosse un termine aggiuntivo, detto CORRENTE DI SPOSTAMENTO, definito con:

$$I_s = \epsilon_0 [\Phi_E(t)]'$$

dove  $\Phi_E(t)$  e' il flusso del campo elettrico attraverso la superficie contornata dal percorso P.

Qualitativamente, possiamo dire che, quando il condensatore si carica o si scarica, il campo elettrico visibile tra le armature genera una "corrente equivalente" che a tutti gli effetti e' una continuazione della corrente di conduzione nel filo conduttore. Dunque, il TEOREMA DI AMPÈRE GENERALIZZATO, o TEOREMA DI AMPÈRE - MAXWELL, e' espresso dalla legge

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_s) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 [\Phi_E(t)]'$$

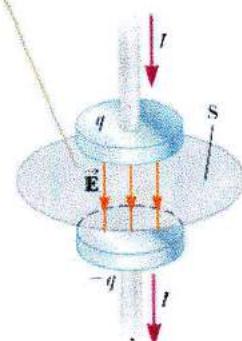
valida nel vuoto.

Ad esempio, consideriamo la situazione schematizzata nella figura a fianco. Se A e' l'area degli elettrodi del condensatore, il flusso elettrico attraverso la superficie S e':

$\Phi_E = EA$ , dove  $E = |\vec{E}|$  (campo elettrico fra le due armature). Se  $q(t)$  e' la carica nelle armature ( $+q(t)$  nell'armatura positiva,  $-q(t)$  in quella negativa) all'intante t, risultate  $E = \sigma/\epsilon_0 = q(t)/A\epsilon_0$ , per cui

$\Phi_E = EA = q(t)/\epsilon_0$ , e quindi la corrente di spostamento (2)

Le linee di campo elettrico tra le armature generano un flusso elettrico attraverso la superficie S.



e'  $I_s = \epsilon_0 [\Phi_E(t)]' = [q(t)]'$ , che coincide esattamente con la corrente di conduzione nei fili conduttori del circuito elettrico col legato al condensatore. In presenza di una corrente di spostamento tra le armature del condensatore, diretta come il campo elettrico  $\vec{E}$ , si capisce che si genera un campo magnetico associato a queste correnti, che per quanto abbiamo visto in precedenze avrà linee di campo circolari centrate nell'asse del condensatore. Pertanto, un campo magnetico può essere generato sia da una corrente di conduzione sia da un campo elettrico variabile nel tempo, e questo fatto è stato il passo evanti decisivo compiuto da Maxwell nella comprensione teorica dei fenomeni elettromagnetici.

Esempio 1. Ai capi di un condensatore avente capacità  $C$  viene applicata una tensione sinusoidale avente frequenza  $f$  e ampiezza  $V_{max}$ . Si trovi l'espressione della corrente di spostamento nel condensatore.

-----

La pulsazione della tensione applicata ai capi del condensatore è:

$$\omega = 2\pi f, \text{ per cui la tensione applicata è } V(t) = V_{max} \sin(\omega t)$$

La carica accumulata nel condensatore all'intento  $t$  è, quindi:

$$q(t) = C V(t) = C V_{max} \sin(\omega t), \text{ e la corrente di spostamento è}$$

$$I_s(t) = [q(t)]' = \omega C V_{max} \cos(\omega t) = 2\pi f C V_{max} \cos(2\pi f t)$$

## Equazioni di Maxwell e scoperte di Hertz

Le equazioni di Maxwell sintetizzano tutte le proprietà dei campi elettromagnetici. In questa sede ci limiteremo alle equazioni di Maxwell nel Vuoto, cioè in assenza di materiali dielettrici e magnetici. Le equazioni in questione sono le seguenti:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(<sup>1<sup>a</sup></sup> EQUAZIONE DI MAXWELL  
TEOREMA DI GAUSS)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

(<sup>2<sup>a</sup></sup> EQUAZIONE DI MAXWELL  
TEOREMA DI GAUSS PER IL MAGNETISMO)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - [\Phi_B(t)]' \quad (3^{\text{a}} \text{ EQUAZIONE DI MAXWELL})$$

(LEGGE DI FARADAY-NEUMANN)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 [\Phi_E(t)]' \quad (4^{\text{a}} \text{ EQUAZIONE DI MAXWELL})$$

(TEOREMA DI AMPÈRE-MAXWELL)

Le prime tre equazioni le abbiamo già incontrate nei capitoli precedenti, mentre l'ultima equazione è stata analizzata a pag. ①-③.

Nelle terze e nelle quarte equazione di Maxwell il flusso del 2<sup>o</sup> membro è calcolato attraverso una qualunque superficie delimitata dal percorso chiuso lungo il quale è calcolato l'integrale del primo membro.

Nella prima equazione di Maxwell, il primo membro rappresenta il flusso del campo elettrico  $\vec{E}$  attraverso una superficie chiusa, e  $q$  è la carica elettrica totale all'interno di queste superficie chiuse. Nella seconde equazione di Maxwell, il primo membro rappresenta il flusso del campo magnetico  $\vec{B}$  attraverso una superficie chiusa: già sappiamo che questo flusso è nullo perché le linee ④

di campo magnetico non hanno origine né fine in punti isolati (a differenza delle linee del campo elettostatico), il che implica che il numero di linee di campo magnetico che entrano in una regione di spazio limitata è uguale al numero di linee di campo uscenti dalla stessa regione. Un altro modo di interpretare le seconde equazioni di Maxwell è dire che queste equazioni implicano l'non esistenza di cariche magnetiche isolate (nono implicato la non esistenza di cariche magnetiche isolati (nono pelli magnetici), mai osservate sperimentalmente fino a oggi) nonostante molti tentativi sperimentali.

Come visto nei capitoli precedenti, una volta noti il campo elettrico  $\vec{E}$  e il campo magnetico  $\vec{B}$  in una regione dello spazio nella quale si trova una carica elettrica  $q$ , sappiamo quanto vale la forza agente sulla carica:

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$$

Come vedremo tra breve, le ultime due equazioni di Maxwell possono essere combinate tra loro per ottenere un'equazione d'onda sia per il campo elettrico sia per il campo magnetico; vedremo che, nello spazio vuoto, la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è uguale alla velocità delle luce: sulla base di ciò, Maxwell potrà concludere che la luce è una forma di onde elettromagnetiche.

Hertz verifica sperimentalmente le previsioni teoriche di Maxwell. Egli riuscirà a generare e rivelare onde elettromagnetiche.

Nella figura a pag. ⑥ c'è schematizzato il dispositivo messo a punto da Heinrich Hertz nel 1887.

Una "bobina di induzione" (o "raccetto di Ruhmkorff") è collegata a due elettrodi sferici molto vicini tra loro.

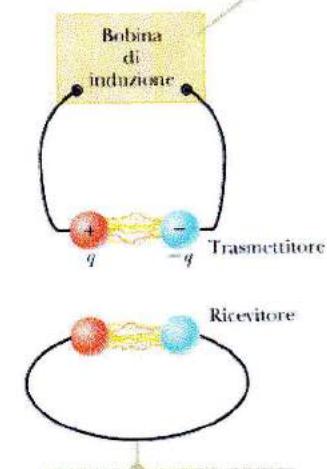
La bobina fornisce rapidi impulsi di tensione tra i due elettrodi: quando il campo elettrico vicino a ogni elettrodo diventa maggiore delle rigidità dielettriche dell'aria ( $3 \times 10^6$  V/m), si forma una scintilla tra le due sfere in quanto l'aria nella regione tra i due elettrodi viene ionizzata. Cioè, gli elettroni più esterni delle molecole di aria in queste regioni vengono estratti dall'elevato campo elettrico e le scieno ioni positivi liberi; gli elettroni estratti vengono poi accelerati dal campo elettrico e guadagnano energia sufficiente a ionizzare altre molecole di aria. A un certo punto l'aria tra i due elettrodi diventa ionizzata completamente e diventa conduttrice: in queste condizioni la scarica fra gli elettrodi si comporta come un segnale che oscilla e frequente ell.

vate. Elettricamente questo sistema equivale a un circuito LC nel quale l'induttanza è quella della bobina e la capacità è quella delle coppie di elettrodi sferici. In un circuito LC la corrente ha un andamento temporale di tipo sinusoidale con pulsazione

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
 ; nell'esperimento di Hertz le frequenze di oscillazione sono  $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 100$  MHz: vengono irradiate onde elettromagnetiche in queste frequenze e cause dell'oscillazione (con conseguente accelerazione) delle cariche libere nel circuito trasmettitore.

Per captare queste onde, Hertz usò una spira di filo conduttore intorno ad due sfere: questo circuito ha una propria induttan-

Il trasmettitore consiste in due elettrodi sterici connessi ad una bobina che fornisce brevi impulsi di tensione agli elettrodi, generando una scarica oscillante fra essi.



Il ricevitore è una spira circolare vicina che contiene un'altra coppia di elettrodi sterici.

ze, capacita' e frequenze di oscillazione. Quando la frequenze caratteristiche del ricevitore coincideva con quelle del trasmettitore, non osservavano scintille fra gli elettrodi del ricevitore, porto a diversi metri di distanze dal trasmettitore. Sulla base di queste osservazioni, Hertz condisse che le corrente oscillante indotta nel ricevitore era dovuta a onde elettromagnetiche irradiate dal trasmettitore.

Con ulteriori esperimenti Hertz dimostrò che la radiazione prodotta in questo modo possedeva tutte le proprietà che dovevano avere un'onda: interferenza, diffrazione, riflessione, rifrazione, polarizzazione; tutte proprietà che possiede la luce visibile, come già zazione; tutte proprietà che possiede la luce visibile, come già era noto da lungo tempo. Pertanto le "onde hertziane" erano vere proprietà molto simili a quelle della luce, da cui dif- fivano solo per i valori delle frequenze e delle lunghezze d'onda. L'esperimento chiave fu quello in cui, studiando le posizioni dei minimi di interferenza delle radiazioni prodotte, fu misurata la velocità di propagazione di queste onde. Il risultato fu  $v \approx 3 \times 10^8$  m/s, valore coincidente con quello della velocità della luce nel vuoto.

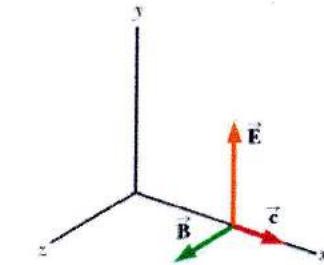
### Onde elettromagnetiche

La previsione più importante delle teorie unificate dell'elettromagnetismo di Maxwell fu quella relativa all'esistenza di ONDE ELETTRONOMICHE: un'onda elettromagnetica è dovuta a campi elettrici e magnetici oscillanti; poiché un campo elettrico variabile nel tempo genera un campo magnetico, e poiché un campo

magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico, queste variazioni temporali provocano una propagazione spaziale dei campi stessi. In un'onda elettromagnetica i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono tra loro perpendicolari, e la direzione di propagazione dell'onda è perpendicolare al piano su cui giacciono i vettori  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ .

La direzione di propagazione, per la precisione, è quella del vettore  $\vec{E} \times \vec{B}$ . Nella figura a fianco c'è schematicamente

l'illustrazione per un'onda elettromagnetica che si propaga lungo l'asse  $x$  nel verso positivo, con  $\vec{E}$  lungo l'asse  $y$  e  $\vec{B}$  lungo l'asse  $z$ .



Un'onda elettromagnetica in cui  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono diretti lungo direzioni fine è POLARIZZATA LINEARMENTE.

Se i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  hanno ciascuno lo stesso valore in tutti i punti di ogni piano ortogonale all'asse  $x$ , si parla di ONDA PIANA (i fronti d'onda sono piani perpendicolari all'asse  $x$ ).

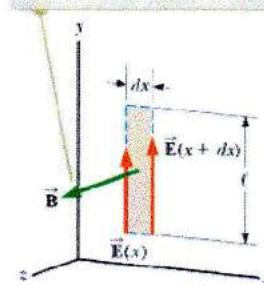
Se invece la sorgente dell'onda è puntiforme e irradia uniformemente in tutte le direzioni nello spazio, si parla di ONDA SFERICA (i fronti d'onda sono superfici sferiche centrate sulla posizione della sorgente).

Cerchiamo di ricavare l'equazione delle onde elettromagnetiche partendo dalle tre equazioni di Maxwell:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - [\Phi_B(t)]', \quad \text{assumendo che } \vec{E} \text{ sia diretto lungo l'asse } x \text{ nel verso positivo, e che } \vec{B} \text{ sia diretto lungo l'asse } z \text{ nel verso positivo.}$$

Considerando lo schema delle figure qui a destra, calcoliamo l'integrale di linee di  $\vec{E}$  lungo il perimetro del rettangolino colorato, e il flusso di  $\vec{B}$  attraverso la superficie di questo rettangolino.

Questa variazione spaziale di  $\vec{E}$  produce un campo magnetico variabile nel tempo lungo l'asse  $z$ , in accordo con l'Equazione 34.11.



Calcolo di  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ . Lungo i lati "orti" superiore e inferiore, i contributi a questo integrale sono nulli, poiché  $d\vec{s} \perp \vec{E}$  lungo questi due tratti.

Se  $\vec{E}(x) = E(x)\hat{j}$  è il campo elettrico lungo il lato ministro del rettangolino, e se le lunghezze  $\Delta x$  del lato orto del rettangolo è molto piccola, risulta:

$$\vec{E}(x + \Delta x) \approx \vec{E}(x) + \left( \frac{d\vec{E}}{dx} \Big|_{t=\text{costante}} \right) \cdot \Delta x \hat{j} = \left( E(x) + \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \Delta x \right) \hat{j}$$

Infatti,  $\vec{E}$  dipende dalle due variabili  $x$  e  $t$ , e le derivate rispetto alla sola variabile  $x$  con  $t$  costante e proprio le derivate parziali rispetto a  $x$ .

Dunque, la circuazione del campo elettrico  $\vec{E}$  lungo il perimetro del rettangolino è:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= E(x + \Delta x) \cdot l - E(x) \cdot l = E(x)l + \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot l - E(x)l = \\ &= \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot l \end{aligned}$$

Nel contempo, il flusso magnetico attraverso l'area del rettangolino è  $\Phi_B = B \cdot \Delta x \cdot l$ , con  $B = |\vec{B}|$ , e quindi:

$$[\Phi_B(t)]' = \left( [B(t)]' \Big|_{x=\text{costante}} \right) \cdot \Delta x \cdot l = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot l \quad (9)$$

Allora, vale l'identità seguente:

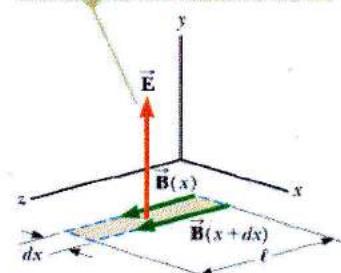
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -[\Phi_B(t)]' \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot l = -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot l, \text{ e infine}$$

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}}$$

Effettuiamo un calcolo simile perendo delle quante equazione di Maxwell nel vuoto, cioè in assenza di correnti di conduzione:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \mu_0 [\Phi_E(t)]'$$

Questa variazione spaziale di  $\vec{B}$  produce un campo elettrico variabile nel tempo lungo l'asse  $y$ , in accordo con l'Equazione 34.14.



Considerando lo schema delle figure a fianco, calcoliamo l'integrale di linee di  $\vec{B}$  lungo il perimetro del rettangolo calzato, e il flusso di  $\vec{E}$  attraverso le superficie di questo rettangolo.

Calcolo di  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ . Ripetendo lo schema di ragionamento seguito a pag. ⑨, otteniamo

$$\vec{B}(x + \Delta x) \approx \vec{B}(x) + \left( \frac{dB}{dx} \Big|_{t=\text{costante}} \right) \cdot \Delta x \hat{k} = \left( B(x) + \frac{\partial B}{\partial x} \Delta x \right) \hat{k}$$

Dunque risulta:

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= -B(x + \Delta x) \cdot l + B(x) \cdot l = -B(x) \cdot l - \frac{\partial B}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot l + B(x) \cdot l = \\ &= -\frac{\partial B}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot l \end{aligned}$$

N.B.: attenzione ai segni in questo calcolo! Basarsi sui versi dei vettori nelle figure; il verso della circolazione è antiorario.

Nel contempo, il flusso elettrico attraverso l'area del rettangolo è:

$$\Phi_E = E \cdot \Delta x \cdot l, \text{ con } E = |\vec{E}|, \text{ e quindi}$$

$$[\Phi_E(t)]' = ([E(t)]')|_{x=\text{costante}} \cdot \Delta x \cdot l = \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot l$$

Allora vale l'identità seguente:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \mu_0 [\Phi_E(t)]' \Rightarrow -\frac{\partial B}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot l = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot l,$$

e infine

$$\boxed{\frac{\partial B}{\partial x} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}}$$

Adesso, riprendiamo l'equazione  $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$  e deriviamo

rispetto alla variabile  $x$  i due membri:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Dunque, ottieniamo l'equazione

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}}$$

Con un procedimento simile, partendo dall'equazione

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \text{ e derivando rispetto alla variabile } x \text{ i due membri, ottieniamo:}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial B}{\partial t} \right) =$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}, \text{ e quindi ottieniamo:}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}}$$

Le due equazioni ottenute per il campo elettrico  $\vec{E}$  e per il campo magnetico  $\vec{B}$  hanno le forme di un'equazione d'onda lineare, in cui la velocità di propagazione dell'onda è

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}) \cdot (8,8541878 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)}} \\ = 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s} = c,$$

velocità che coincide con la velocità delle luce nel vuoto. Da questo risultato si pensò che le luce fosse un'onda elettromagnetica, cosa che è certamente vera (come fu verificato).

Una semplice soluzione delle equazioni ottenute è:

$$E = E_{\max} \cos(kx - \omega t); \quad B = B_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

Gli ottengono incontri onde sinusoidali nello studio delle onde meccaniche; il formalismo e le nomenclature introdotti a suo tempo valgono anche per le onde elettromagnetiche.

$\lambda$ : lunghezza d'onda;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ : numero d'onda angolare;

$f$ : frequenza dell'onda ( $= \frac{1}{T}$ );  $\omega = 2\pi f$ : pulsazione o frequenza angolare

La velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica è:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = c$$

per un'onda elettromagnetica sinusoidale, polarizzata linearmente, in moto lungo l'asse  $x$  nel verso positivo, otteniamo quindi:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -k E_{\max} \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B_{\max} \sin(kx - \omega t)$$

Dunque, riprendendo l'equazione  $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$  e applicandole a queste onde sinusoidali, otteniamo:

$$-k E_{\max} \sin(kx - \omega t) = -\omega B_{\max} \sin(kx - \omega t), \text{ e quindi}$$

vale la relazione  $k E_{\max} = \omega B_{\max} \Rightarrow \frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \frac{\omega}{k} = c$

Pertanto vale la relazione

$$\boxed{\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \frac{E}{B} = c}$$

Dunque, il rapporto tra il modulo del campo elettrico e il modulo del campo magnetico in un'onda elettromagnetica, a ogni istante, è uguale alla velocità della luce.

Osserviamo che, a causa delle linearità delle equazioni per  $E$  e per  $B$ , per le onde elettromagnetiche vale la legge di sovrapposizione.

## Effetto Doppler per le onde elettromagnetiche

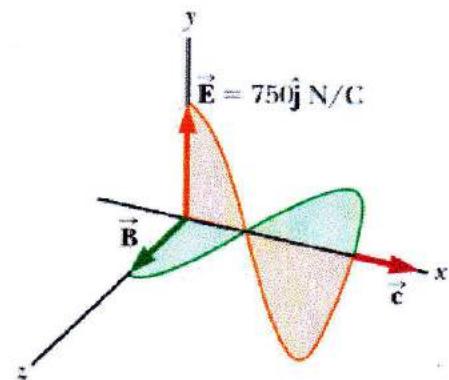
Come nel caso delle onde sonore, anche per le onde elettromagnetiche si osserva uno "spostamento" delle frequenze misurate dell'osservatore rispetto alle frequenze emesse dalla sorgente se c'è un moto relativo tra l'osservatore e la sorgente. Ma tra i due casi (onde sonore e onde elettromagnetiche) c'è una differenza sostanziale: nel caso del suono tutti i movimenti sono relativi al mezzo in cui si propaga l'onda sonora; invece, le onde elettromagnetiche non necessitano di un mezzo in cui propagarsi: l'unico parametro utilizzabile è la velocità relativa fra la sorgente dell'onda elettromagnetica rispetto all'osservatore (o, che è lo stesso caso, dell'osservatore rispetto alla sorgente).

Se  $v$  è queste velocità relative ( $v > 0$  se sorgente e osservatore si stanno avvicinando,  $v < 0$  se si stanno allontanando), il calcolo basato sulla teoria della relatività ristretta di Albert Einstein fornisce la seguente legge per le frequenze f misurate dall'osservatore di un'onda elettromagnetica che emette emette con frequenze  $f$  dalla sorgente:

$$f' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} f$$

## Esempio 2

Un'onda elettromagnetica piena sinusoidale avente frequenza  $f = 40 \text{ MHz}$  si propaga nel vuoto lungo la direzione  $x$  (vedi figura).



- Calcolare le lunghezze d'onda e il periodo dell'onda.
- In un certo punto e a un certo istante, il campo elettrico ha il suo valore massimo  $E_{\max} = 750 \text{ N/C}$ , ed è diretto lungo l'asse  $y$ . Calcolare il modulo e la direzione del campo magnetico in questo punto nello spazio e nel tempo.
- Un osservatore nell'asse  $x$ , lontano a destra nella figura, si muove verso sinistra lungo l'asse  $x$  alla velocità di  $0,5c$ . Che frequenze misura questo osservatore per l'onda elettromagnetica?



a)

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{40 \times 10^6 \text{ Hz}} = 7,5 \text{ m}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{40 \times 10^6 \text{ Hz}} = 2,5 \times 10^{-8} \text{ s} = 25 \text{ ms}$$

b)

$$B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} = \frac{750 \text{ N/C}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2,5 \times 10^{-6} \text{ T}$$

c)

$$f' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} f = \sqrt{\frac{c + \frac{1}{2}c}{c - \frac{1}{2}c}} f = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}c}{\frac{1}{2}c}} f = \sqrt{3} f = 69,2820 \text{ MHz}$$

## Energia trasportata dalle onde elettromagnetiche

Come succede nel caso delle onde meccaniche, anche le onde elettromagnetiche trasportano energia e possono trasferire energia a corpi e sistemi che incontrano mentre si propagano nello spazio. La rapidità con cui varia nel tempo il flusso di energia di un'onda elettromagnetica attraverso una data superficie nello spazio è data dal vettore, attraverso la superficie considerata, del vettore

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \text{VETTORE DI POYNTING}$$

[ Le direzione e il verso di  $\vec{S}$  coincidono con la direzione e il verso di propagazione dell'onda elettromagnetica. Il modulo di  $\vec{S}$  rappresenta quindi la potenza per unità di superficie trasportata dall'onda elettromagnetica. ]

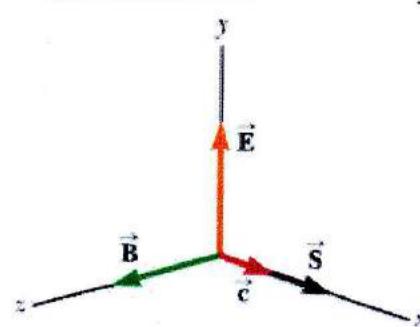
L'unità di misura di  $\vec{S}$  nel S.I. è  $\text{W/m}^2$ .

Nel caso di un'onda elettromagnetica piena risultate:

$$|\vec{E} \times \vec{B}| = |\vec{E}| \cdot |\vec{B}| = EB, \text{ e quindi}$$

$$|\vec{S}| = S = \frac{EB}{\mu_0}$$

Dato che  $B = E/c$ , risultate anche  $S = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c B^2}{\mu_0}$ , relazione vera a ogni istante.



Nel caso di un'onda elettromagnetica sinusoidale si risulta

$$S = \frac{E_{\max} B_{\max} [\cos(kx - \omega t)]^2}{\mu_0}$$

In questo caso la quantità di interesse è l'intensità  $J$ , cioè la potenza media (nel tempo) per unità di superficie. Si misura nel tempo su uno o più periodi di  $[\cos(kx - \omega t)]^2$  vale  $\frac{1}{2}$ .

Dunque, l'intensità di un'onda elettromagnetica sinusoidale è:

$$J = \frac{E_{\max} B_{\max}}{2 \mu_0} = \frac{E_{\max}^2}{2 \mu_0 c} = \frac{c B_{\max}^2}{2 \mu_0}$$

Ricordiamo l'energia per unità di volume associata al campo elettrico e al campo magnetico nel vuoto:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 ; \quad u_B = \frac{B^2}{2 \mu_0}$$

Nel caso di un'onda elettromagnetica sinusoidale  $B = E/c$ , per cui risulta

$$u_B = \frac{B^2}{2 \mu_0} = \frac{E^2}{2 \mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2 \mu_0 \epsilon_0 c^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u_E$$

[Dunque, in un'onda elettromagnetica risulta  $u_B = u_E$ .]

In un dato volume, l'energia di un'onda elettromagnetica è suddivisa in modo uguale tra i due campi.

Dunque, la densità di energia instantanea totale di un'onda elettromagnetica è

$$u = u_E + u_B = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Le medie temporali su uno o più periodi di queste grandezze e'

$$U_{\text{med}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{\text{max}}^2 = \frac{B_{\text{max}}^2}{2 \mu_0}$$

La relazione tra  $J$  e  $U_{\text{med}}$  è la seguente, quindi:

$$J = c U_{\text{med}}$$

Esempio 3. Stimare i valori massimi del campo elettrico e del campo magnetico delle luce incidente su queste pagine, originale della luce visibile che proviene dalla lampada da tavolo. Si consideri la lampadina come una sorgente puntiforme di radiazione elettromagnetica, che trasforma l'energia elettrica assorbita in luce visibile uscente con un'efficienza del 5 %

Considerazioni preliminari: una sorgente puntiforme ideale emette uniformemente in tutte le direzioni da un punto, la cui in questo caso si tratta di un'onda sferica. Dunque, la potenza emessa delle lampadine si distribuisce uniformemente, a distanze  $r$  delle lampadine, su una superficie sferica di area  $4\pi r^2$ . Pertanto, a distanze  $r$  delle lampadine l'intensità dell'onda elettromagnetica è  $J = P_{\text{med}} / 4\pi r^2$ , dove  $P_{\text{med}}$  è la media temporale delle potenze elettromagnetiche emesse dalla lampadina.

Poiché deve risultare  $J = \frac{P_{\text{med}}}{4\pi r^2} = \frac{E_{\text{max}}^2}{2\mu_0 C}$ , otteniamo:

$$E_{\text{max}}^2 = \frac{2\mu_0 C P_{\text{med}}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 C P_{\text{med}}}{2\pi r^2}, \text{ e quindi}$$

$$E_{\text{max}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 C P_{\text{med}}}{2\pi}}$$

Se le lampadine emette una potenza di 60 W, con le ipotesi fatte risulta  $P_{\text{med}} = 0,05 \cdot (60 \text{ W}) = 3 \text{ W}$  per la potenza media elettromagnetica emessa. Se risulta  $r = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$  otteniamo quindi:

$$\boxed{E_{\text{max}} = \frac{1}{0,3 \text{ m}} \sqrt{\frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s}) \cdot (3 \text{ W})}{2\pi}} = \\ = 44,7214 \text{ V/m}}$$

E quindi ottieniamo anche

$$\boxed{B_{\text{max}} = \frac{E_{\text{max}}}{C} = 1,4907 \times 10^{-7} \text{ T}}$$

## Quantità di moto e pressione di radiazione

L'energia ceduta in un periodo da un'onda elettromagnetica sinusoidale è uguale al lavoro svolto da una carica elettrica  $q$  dalle forze di Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$  agente sulla carica:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^T [\vec{F} \cdot \vec{v}] dt = q \int_0^T [(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}] dt =$$

$$= q \int_0^T \vec{E} \cdot \vec{v} dt, \quad \text{poiché } (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

[Dunque, solo il campo elettrico dell'onda elettromagnetica contribuisce all'energia ceduta dall'onda alla carica.]

L'impulso ceduto in un periodo dell'onda sinusoidale alla carica è:

$$\vec{I} = \int_0^T \vec{F}(t) dt = q \int_0^T (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) dt = q \int_0^T (\vec{V} \times \vec{B}) dt,$$

$$\text{poiché } \int_0^T \vec{E} dt = 0 \text{ per un'onda sinusoidale.}$$

[Dunque, solo il campo magnetico di un'onda elettromagnetica sinusoidale contribuisce all'impulso ceduto dall'onda alla carica.]

$$\text{Poiché } \vec{B} = B \hat{k} = \frac{E}{c} \hat{k}$$

Supponiamo che la carica sia vincolata e muova sul piano  $x=0$ , cioè che simili  $\vec{v} = v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$ .

$$\begin{aligned} \text{Rimette allora: } \vec{v} \times \vec{B} &= (v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \times \left( \frac{E}{c} \hat{k} \right) = v_y \frac{E}{c} (\hat{j} \times \hat{k}) = \\ &= v_y \frac{E}{c} \hat{i} = \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{E}) \hat{i} \end{aligned}$$

Allora, risulta:

$$\vec{I} = \frac{q}{c} \left[ \int_0^T (\vec{V} \cdot \vec{E}) dt \right] \hat{i} = \frac{W}{c} \hat{i}, \text{ e anche}$$

$$W = c |\vec{I}| \Rightarrow P(t) = c |[\vec{P}(t)]'|$$

Supponiamo quindi che l'onda elettromagnetica sinusoidale incide normalmente su una superficie piatta posta in  $x=0$ . La potenza di radiazione esorbita sulla superficie è:

$$P = \frac{|\vec{F}|}{A} = \frac{1}{A} |[\vec{P}(t)]'|$$

Dall'analisi svolta in precedenze deduciamo che se le superficie assorbe tutta la potenza incidente risulta:

$$P = \frac{1}{A} \frac{P(t)}{c} = \frac{1}{c} \left[ \frac{P(t)}{A} \right]$$

Ma, per quanto abbiamo espresso a pag. ⑯ e ⑰, risulta quindi:

$$P = \frac{1}{c} |\vec{S}|$$

Calcolando le medie temporali dei due membri, ottieniamo:

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{c} S_{\text{med}} = \frac{J}{c} \cdot (\text{assorbimento completo})$$

Se la superficie è perfettamente riflettente, risulta per le premesse di radiazione:

$$P = \frac{2|\vec{S}|}{c} \quad (\text{riflessione completa})$$

Esempio 4. Il Sole fornisce circa  $1000 \text{ W/m}^2$  di energia alla superficie terrestre.

- Calcolare le potenze totale incidente su un tetto di dimensioni  $8 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ .
- Determinare la pressione e la forza di radiazione sul tetto, assumendo che la copertura del tetto sia un assorbitore perfetto.

-----

- Dai dati del problema ricaviamo:

$$\mathcal{J} = S_{\text{med}} = 1000 \text{ W/m}^2$$

Superficie del tetto:  $A = (8 \text{ m} \times 20 \text{ m}) = 160 \text{ m}^2$

Potenza totale incidente sul tetto:

$$\boxed{P = \mathcal{J}A = \left(1000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)(160 \text{ m}^2) = 1,6 \times 10^5 \text{ W}}$$

- Assorbimento perfetto:

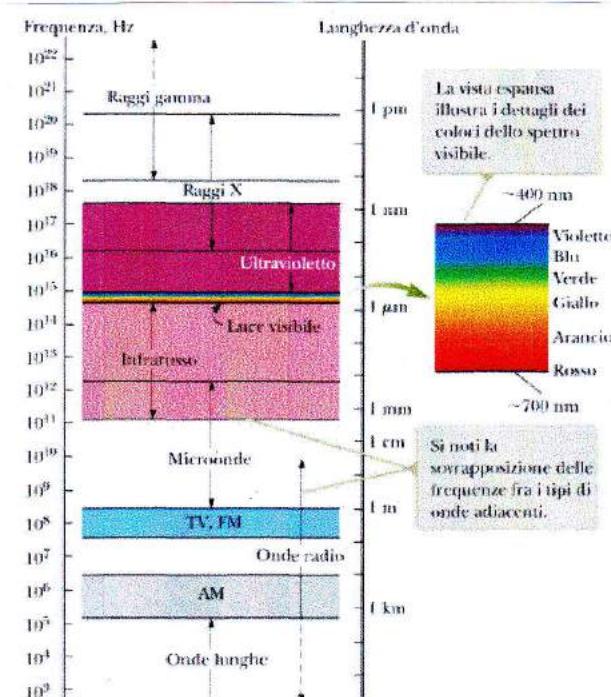
$$\boxed{P_{\text{med}} = \frac{\mathcal{J}}{c} = \frac{1000 \text{ W/m}^2}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3,3333 \times 10^{-6} \text{ Pa}}$$

$$\boxed{|\vec{F}| = P_{\text{med}} A = \frac{(1000 \text{ W/m}^2) \cdot (160 \text{ m}^2)}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 0,5333 \times 10^{-3} \text{ N}}$$

## Spettro delle onde elettromagnetiche

Nel vuoto, le onde elettromagnetiche si propagano con velocità  $c = 2,9979 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Le onde elettromagnetiche sono tipicamente generate da cariche elettriche accelerate, e sono secondo dell'intervalle di lunghezze d'onda e frequenze vengono classificate secondo uno schema rappresentato nella figura a destra.



### 1) ONDE RADIO (lunghezze d'onda):

$\lambda \geq 1 \text{ cm}$ ): sono emesse da cariche elettriche accelerate nel conduttore di un'antenna; spesso sono generate da circuiti oscillanti LC e vengono nelle telecomunicazioni radio e televisive.

2) MICROONDE ( $1 \text{ mm} \leq \lambda \leq 30 \text{ cm}$ ): sono generate da dispositivi elettronici; si usano nei sistemi radar aeronautici e nelle fince atomica e molecolare, oltre che nei forni a microonde.

3) RAGGI INFRAROSSI ( $0,7 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 1 \text{ mm}$ ): sono prodotti dal moto accelerato delle cariche elettriche sulle superficie di corpi a temperature comprese fra pochi K e circa 20000 K; queste onde elettromagnetiche vengono facilmente assorbite dalla maggior parte dei materiali. Si usano per la terapia fisica, nelle fotografie a infrarossi e in spettroscopia vibrazionale, oltre che nei telecomandi di dispositivi elettronici.

4) LUCE VISIBILE ( $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 700 \text{ nm}$ ): sono le onde elettromagnetiche rilevabili dall'occhio umano. La luce visibile è prodotta da oggetti a temperatura elevata (filamenti di lampadine)

e da "transizioni" energetiche di elettroni orbitali negli atomi e nelle molecole. Qui a fianco e' elencata le corrispondenze approssimate tra intervalli di lunghezze d'onda della luce visibile e colore percepito dall'occhio. Lo studio delle propagazione della luce visibile e' alla base delle branche delle fince dette OTTICA.

Intervallo di lunghezza d'onda (nm)	Colore
400-430	Violetto
430-485	Blu
485-560	Verde
560-590	Giallo
590-625	Arancio
625-700	Rosso

Note: gli intervalli di lunghezza d'onda sono approssimati. Persone diverse hanno una diversa percezione dei colori.

- 5) RAGGI ULTRA VIOLETTI ( $0,6 \text{ nm} \lesssim \lambda \lesssim 400 \text{ nm}$ ): il sole produce una quantita' enorme di radiazione ultravioletta. In gran parte i raggi ultravioletti vengono smorbiti nella stratosfera da molecole di ozono ( $O_3$ ) che li rientrano come radiazione infrarossa.
- 6) RAGGI X ( $0,1 \text{ pm} \lesssim \lambda \lesssim 10 \text{ nm}$ ): sono prodotti dalla decessione di elettroni di alte energie in un bersaglio metallico ("bremsstrahlung"). Sono usati nella diagnostica medica (radiografie) e nel trattamento di alcune neoplasie. Sono usati anche nello studio delle proprietà delle strutture cristalline di certi materiali solidi (la distanza interatomica e'  $\approx 0,1 \text{ nm}$ ).
- 7) RAGGI GAMMA ( $10^{-14} \text{ m} \lesssim \lambda \lesssim 0,1 \text{ nm}$ ): sono prodotti da nuclei radioattivi e in certe reazioni nucleari. Sono radiazioni molto penetranti e dannose per i tessuti viventi. Possono essere schermati da spessori opportuni di materiale pesante (ad es., piombo).