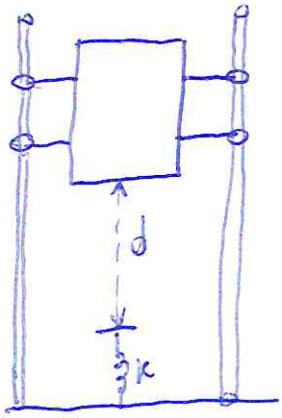
ESAME DEL CORSO DI FISICA PER INFORMATICA

PROVA SCRITTA DEL 21/02/2023 - SECONDO APPELLO INVERNALE

## Problema n. 1

a)




Nel primo tratto di caduta della cabina dell'ascensore, agiscono la forza peso e la forza frenante applicata dalle guide.

Lavoro della forza peso:

$$W_P = F_p \cdot d = Mgd \quad \text{(positivo)}$$

Lavoro della forza frenante:

$$W_F = -Fd \quad \text{(negativo)}.$$

Indicando con v il modulo della velocità istantanea della cabina dell'ascensore nell'istante in cui tocca l'estremo libero della molla, per il teorema dell'energia cinetica possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = W_p + W_F$$

(la velocità istantanea della cabina è nulla per le ipotesi del problema, all'istante $t=0$)

Allora: $\frac{1}{2}Mv^2 = Mgd - Fd \Rightarrow \frac{1}{2}Mv^2 = (Mg - F)d$

$$v^2 = \frac{2(Mg-F)d}{M} = 2\left(g - \frac{F}{M}\right)d, \quad \text{e infine}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2\left(g - \frac{F}{M}\right)d} = \sqrt{2\left(9{,}81\,\frac{m}{s^2} - \frac{4{,}4\cdot10^3\,N}{2\cdot10^3\,kg}\right)\cdot 3{,}7\,m} \simeq 7{,}50\,m/s}$$

1

b) Applicando il teorema dell'energia cinetica tra l'istante iniziale e l'istante in cui la cabina si ferma istantaneamente con la molla compressa di un tratto $\delta_M$, occorre tenere conto del lavoro svolto dalla forza peso, dalla forza frenante e della forza elastica nel tratto in discesa. Risulta:

$$W_p^{i} = F_p(d+\delta_M) = Mg(d+\delta_M)$$

$$W_F^{i} = -F(d+\delta_M)$$

$$W_E^{i} = -\frac{1}{2}k\,\delta_M^2$$

Poiché la velocità istantanea iniziale e la velocità istantanea finale sono entrambe nulle, risulta:

$$W_p^{i} + W_F^{i} + W_E^{i} = 0, \quad \text{e quindi:}$$

$$Mg(d+\delta_M) - F(d+\delta_M) - \frac{1}{2}k\,\delta_M^2 = 0$$

$$(Mg-F)d + (Mg-F)\delta_M - \frac{1}{2}k\,\delta_M^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}k\,\delta_M^2 - (Mg-F)\delta_M - (Mg-F)d = 0$$

$$\delta_M^2 - \frac{2(Mg-F)}{k}\delta_M - \frac{2(Mg-F)d}{k} = 0$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado nell'incognita $\delta_M$.

$$\delta_M = \frac{Mg-F}{k} \pm \sqrt{\frac{(Mg-F)^2}{k^2} + \frac{2(Mg-F)d}{k}}$$

La soluzione accettabile e' quella con il segno positivo davanti alla radice quadrata, in quanto l'altra soluzione, essendo negativa, non e' accettabile.

$$\boxed{\delta_M = \frac{Mg-F}{k} + \sqrt{\frac{(Mg-F)^2}{k^2} + \frac{2(Mg-F)d}{k}} = \frac{Mg-F}{k}\left[1+\sqrt{1+\frac{2kd}{Mg-F}}\right] \simeq 0{,}974 \text{ m}}$$

c) Applichiamo nuovamente il teorema dell'energia cinetica nel tratto ascendente del moto della cabina.

Lavoro della forza peso:

$$W_P'' = -F_P(\delta_M + d_1) = -Mg(\delta_M + d_1)$$

Lavoro della forza frenante:

$$W_F'' = -F(\delta_M + d_1)$$

Lavoro della forza elastica:

$$W_E'' = \frac{1}{2}k\delta_M^2$$

Poiché la velocita' istantanea iniziale e la velocita' istantanea finale sono entrambe nulle, risulta:

$$W_P'' + W_F'' + W_E'' = 0$$

$$-Mg(\delta_M + d_1) - F(\delta_M + d_1) + \frac{1}{2} k \delta_M^2 = 0$$

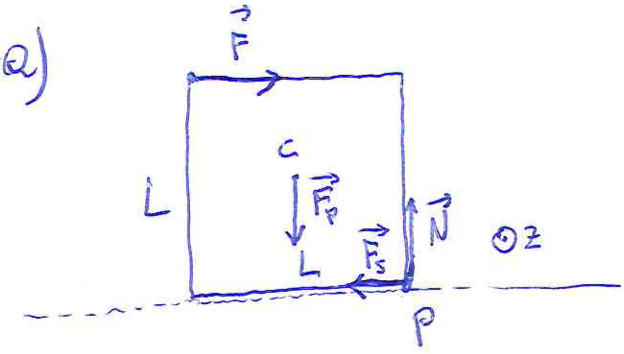
$$(Mg + F)(\delta_M + d_1) = \frac{1}{2} k \delta_M^2$$

$$\delta_M + d_1 = \frac{k \delta_M^2}{2(Mg + F)}$$

$$\boxed{d_1 = \frac{k \delta_M^2}{2(Mg + F)} - \delta_M \simeq 1{,}988 \text{ m}}$$

Problema n. 2

a)




La forza peso e' applicata nel centro di massa del cubo

La forza $\vec{F}$, per ipotesi, e' applicata a uno degli spigoli superiori del cubo, ed e' diretta orizzontalmente.

La forza di reazione, nell'istante in cui il cubo inizia a ruotare, e' applicata nello spigolo inferiore P.

Il cubo inizia a ruotare attorno a un asse coincidente con lo spigolo P (in senso orario nella figura) se la componente z del momento della forza totale rispetto a un polo posto nello spigolo P e' $\leq 0$. Allora, tenuto conto che l'altra forza agente sul cubo, che e' la forza di attrito statico, e' anch'essa applicata nel punto P quando il cubo inizia a ruotare, rispetto al polo P solo la forza peso $\vec{F}_p$ e la forza applicata $\vec{F}$ hanno momenti non nulli. Allora:

$$\frac{L}{2} F_p - L F \leq 0 \Rightarrow F \geq \frac{1}{2} F_p \text{, per cui}$$

$$\boxed{F_1 = \frac{1}{2} F_p = \frac{1}{2} \cdot 890\ N = 445\ N}$$

b) Per quanto riguarda la forza di attrito statico, dal diagramma delle forze agenti risulta:

$$N = |\vec{N}| = F_p \qquad |\vec{F_s}| = F_1$$

Dunque, dalla disuguaglianza

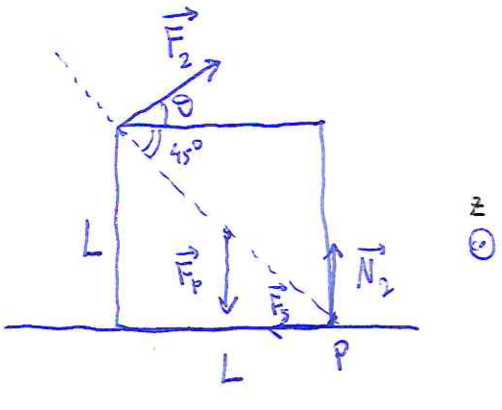
$$|\vec{F_s}| \leq \mu_s N \quad , \quad \text{ricaviamo}$$

$$F_1 \leq \mu_s F_p \Rightarrow \mu_s \geq \frac{F_1}{F_p} = \frac{1}{2}$$

Pertanto, il valore minimo del coefficiente di attrito statico tra lo spigolo inferiore della scatola cubica e il pavimento

è $\boxed{\mu_{s,min} = \frac{1}{2} = 0{,}5}$

c)




Rispetto alla situazione di partenza, la differenza sta nella direzione della forza applicata allo spigolo superiore del cubo ($\vec{F_2}$ nello schema a fianco).

Come nel caso precedente, nell'istante in cui il cubo inizia a ruotare la reazione vincolare normale $\vec{N_2}$ e la forza di attrito statico $\vec{F_s}$ sono applicate nel punto P.

Come nel caso precedente, imponiamo che la componente z del momento delle forze totale rispetto al polo P sia ≤ 0:

$$\frac{\cancel{L}}{2} F_p - \cancel{L}\sqrt{2}\, F_2 \sin(180° - 45° - \theta) \leq 0$$

$\sqrt{2}\, F_2 \sin(135° - \theta) \geq \frac{1}{2} F_p$, e infine

$$F_2 \geq \frac{F_p}{2\sqrt{2}\sin(135° - \theta)}$$

L'espressione al secondo membro della disequazione dipende dall'angolo $\theta$, e risulta minima quando $\sin(135° - \theta) = 1$.

Questo e' vero per $135° - \theta = 90° \Rightarrow \theta = 135° - 90° = 45°$

Pertanto l'angolo per cui il modulo della forza minima richiesta per far ruotare la scatola e' il piu' piccolo possibile e' $\boxed{\bar{\theta} = 45°}$, e $F_{2m} = \frac{F_p}{2\sqrt{2}\sin 90°} = \frac{F_p}{2\sqrt{2}}$

A questo punto ripetendo il ragionamento fatto al punto b), deve risultare:

$$N_2 + F_{2m} \sin\bar{\theta} - F_p = 0 \Rightarrow N_2 = F_p - F_{2m} \sin\bar{\theta} = F_p - F_{2m} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

tsl

$$= F_p - \frac{F_p}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = F_p - \frac{F_p}{4} = \frac{3}{4} F_p$$

Deve poi risultare:

$$|\vec{F}_s| = F_{2m} \cos\bar{\theta} = \frac{F_p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{F_p}{4}$$ , e inoltre

$$|\vec{F}_s| \leq \mu_s N_2 \Rightarrow \frac{\cancel{F_p}}{\cancel{4}} \leq \frac{3}{\cancel{4}} \mu_s \cancel{F_p}$$ , da cui

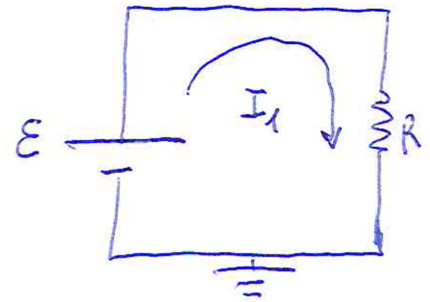
$$\mu_s \geq \frac{1}{3}$$

Pertanto, il valore $\overline{\mu_s}$ del minimo coefficiente di attrito statico tra lo spigolo inferiore della scatola e il pavimento quando $\theta = \bar{\theta}$ e $F_2 = F_{2m}$ e'

$$\boxed{\overline{\mu_s} = \frac{1}{3}}$$

Problema n. 3

a)




Seguendo lo schema circuitale a fianco, e applicando la legge di Kirchhoff alle maglie, otteniamo:

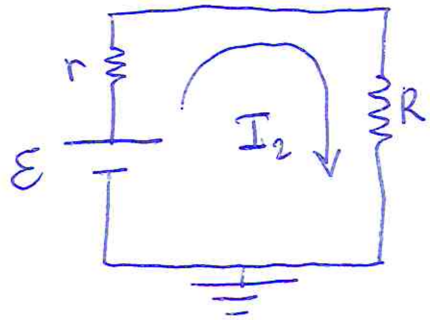
$\mathcal{E} - I_1 R = 0$, da cui ricaviamo

$$\boxed{I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12\,V}{10^3\,\Omega} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\,A = 12\ mA}$$

La potenza erogata dal generatore e' quindi:

$$\boxed{P_1 = \mathcal{E} I_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{(12\,V)^2}{10^3\,\Omega} = 1{,}44 \cdot 10^{-1}\,W = 144\ mW}$$

b) Tenuto conto della resistenza interna del generatore, lo schema circuitale diventa il seguente:




Applicando la legge di Kirchhoff alle maglie, otteniamo:

$\mathcal{E} - r I_2 - R I_2 = 0$, da cui

$(R+r) I_2 = \mathcal{E}$, e infine $\boxed{I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{12V}{10^3\,\Omega + 10\,\Omega} \simeq 11{,}88\ mA}$

La potenza erogata dal generatore e' quindi

$$\boxed{P_2 = I_2 \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r} = \frac{(12\,V)^2}{1010\,\Omega} \simeq 142{,}57\ mW}$$

c) Potenza assorbita dal resistore R

$$P_R = I_2 \cdot V_R = I_2 (\mathcal{E} - r I_2) =$$

$$= \frac{\mathcal{E}}{R+r}\left[\mathcal{E} - \frac{r\mathcal{E}}{R+r}\right] = \frac{\mathcal{E}}{R+r}\,\frac{(R+r)\mathcal{E} - r\mathcal{E}}{R+r} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2 (R + \cancel{r} - \cancel{r})}{(R+r)^2}$$ ; dunque risulta

$$P_R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$$

Determiniamo per quale valore di R la quantita' $P_R$ risulta massima; chiamiamo

$$f(R) = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$$ ; risulta $$f'(R) = \mathcal{E}^2\left[\frac{1}{(R+r)^2} - \frac{2R}{(R+r)^3}\right] =$$

$$= \mathcal{E}^2 \frac{R+r-2R}{(R+r)^3} = \mathcal{E}^2 \frac{r-R}{(R+r)^3} \geq 0 \quad \text{per } 0 \leq R \leq r$$

Pertanto $f(R)$ e' crescente per $0 \leq R \leq r$ e monotona decrescente per $r > R$. Dunque, $f(R)$ ha un massimo relativo (che e' anche assoluto) per $r = R$.

Tm

La potenza massima assorbita dal resistore R si ha quindi per $R=r$:

$$P_M = P_R(R=r) = \frac{\mathcal{E}^2 r}{(2r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 \cancel{r}}{4r^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{P_M = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{(12\,V)^2}{4\cdot(10\,\Omega)} = 3{,}6\ W}$$