Lezione 1.

Interpolazione Polinomiale

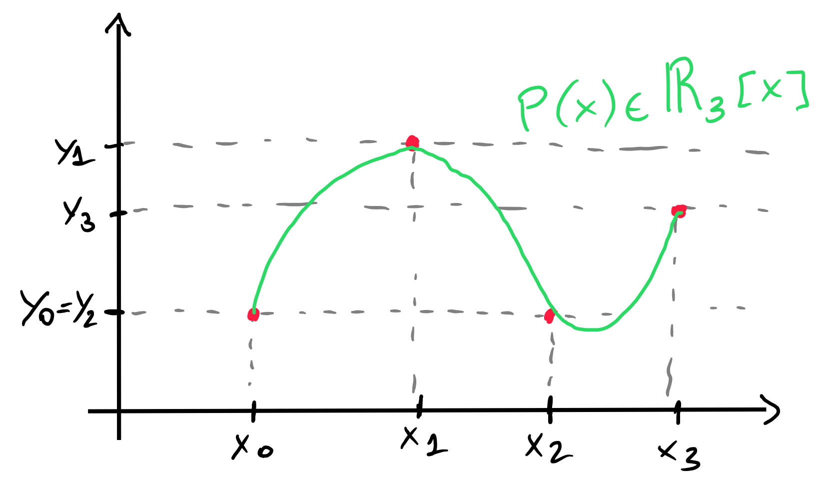
Problema. È data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ di cui sono noti i valori $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ in $n+1$ punti distinti $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$.
Si sceglie una classe di funzioni $\mathcal{G}$ da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ e si vuole approssimare $f(x)$ con una funzione $g(x)$ nella classe $\mathcal{G}$ tale che $g(x_i) = f(x_i)$ $\forall i = 0, \dots, n$.

Una scelta comune per la sua semplicità è $\mathcal{G} = \mathbb{R}_n[x]$ = spazio dei polinomi di grado $\le n$
$= \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

Con questa scelta di $\mathcal{G}$ si ha che
$\exists!\, p(x) \in \mathcal{G} = \mathbb{R}_n[x]$ t.c. $p(x_i) = f(x_i)$ $\forall i = 0, \dots, n$.

Teorema Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tali che se $x_0, \dots, x_n$ sono tutti distinti. Allora
$\exists!$ polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ t.c. $p(x_i) = y_i$ $\forall i = 0, \dots, n$.

Illustrazione Th. per $n=3$



Dim. Un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{R}_n[x]$ soddisfa la proprietà
$p(x_i) = y_i$ $\forall i = 0, \dots, n$
se e solo se

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_2^n = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Cioè se e solo se il vettore dei coefficienti di $p(x)$ ossia $(a_0, \dots, a_n)^T$ soddisfa il sistema lineare

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

$V(x_0, \dots, x_n)$ = matrice di Vandermonde sui nodi $x_0, \dots, x_n$

Per dimostrare che $\exists!\, p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ tale che $p(x_i) = y_i$ $\forall i = 0, \dots, n$ basta dimostrare che il sistema lineare $(*)$ ha un'unica soluzione.

In tal caso, l'unica soluzione di $(*)$ sarà il vettore dei coefficienti dell'unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ tale che $p(x_i) = y_i$ $\forall i = 0, \dots, n$
"$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$"

Dimostriamo dunque che il sistema $(*)$ ha un'unica soluzione, cioè che $\det[V(x_0, \dots, x_n)] \ne 0$. Per farlo dimostriamo che

$$\det[V(x_0, \dots, x_n)] = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ \prod_{\substack{i,j=0 \\ j<i}}^{n} (x_i - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}) & \text{se } n \ge 1 \end{cases} \quad (**)$$

Dimostriamo $(**)$ nel caso in cui $n = 3$ (dim. analoga)

Per $i = 1, \dots, 3$ definiamo
$d_i = \det[V(x_0, \dots, x_i)]$. Il nostro obiettivo è calcolare
$d_3 = \det[V(x_0, \dots, x_3)]$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} \underset{C_4 \to C_4 - x_3 \cdot C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 - x_0^2 \cdot x_3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 - x_1^2 \cdot x_3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_2^2 \cdot x_3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_3 = C_3 - x_3 C_2}{=}$$

(operazione elementare che non modifica il det)

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 - x_0 x_3 & x_0^2(x_0 - x_3) \\ 1 & x_1 & x_1^2 - x_1 x_3 & x_1^2(x_1 - x_3) \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_2 x_3 & x_2^2(x_2 - x_3) \\ 1 & x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_2 = C_2 - x_3 C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_3 & x_0(x_0 - x_3) & x_0^2(x_0 - x_3) \\ 1 & x_1 - x_3 & x_1(x_1 - x_3) & x_1^2(x_1 - x_3) \\ 1 & x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Regola della scacchiera

Laplace lungo l'ultima riga

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} x_0 - x_3 & x_0(x_0 - x_3) & x_0^2(x_0 - x_3) \\ x_1 - x_3 & x_1(x_1 - x_3) & x_1^2(x_1 - x_3) \\ x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3 (x_0 - x_3)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}}_{= d_2} =$$

$= (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdot d_2$

Sviluppo per ricorrenza

Conclusione: $d_3 = (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdot d_2 = (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdot (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \cdot d_1 =$
$= (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdot (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)$.

$$\left[d_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 \right]$$