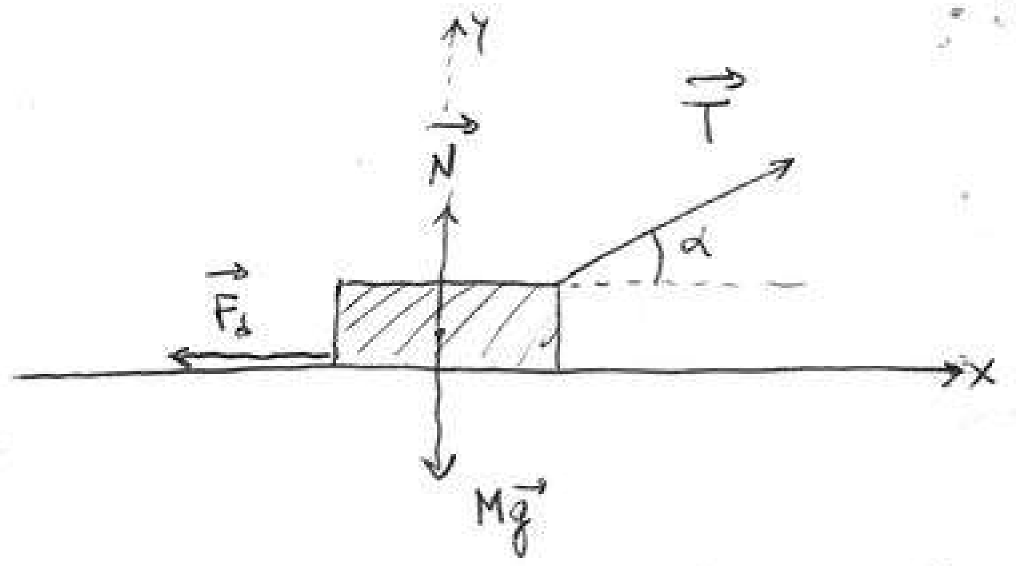
PROVA SCRITTA DI FISICA PER INFORMATICA

2° APPELLO AUTUNNALE 17/09/2021

PROBLEMA N. 1

a) Disegnamo il diagramma delle forze agenti sullo scatolone mentre scivola sul piano orizzontale:



Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali come nello schema a fianco.

Poiché lo scatolone si muove di moto rettilineo sul piano orizzontale, la somma delle componenti lungo l'asse y di tutte le forze agenti sullo scatolone è nulla:

$$N_y + T_y + (M\vec{g})_y = 0 \quad (\text{essendo } F_{d,y} = 0)$$

Posto $N = |\vec{N}|$, $T = |\vec{T}|$; $g = |\vec{g}|$, possiamo quindi scrivere:

$$N + T \operatorname{sen}\alpha - Mg = 0, \text{ da cui ricaviamo}$$

$$\boxed{N = Mg - T \operatorname{sen}\alpha}$$

b) Basandosi sullo schema disegnato in precedenza, possiamo scrivere la 2ª legge della dinamica per il moto dello scatolone:

$$M\vec{a} = \vec{T} + \vec{N} + M\vec{g} + \vec{F_d}$$

Sulla base delle considerazioni svolte nel punto a), tuttavia, sappiamo che la componente y della forza risultante e' nulla, per cui l'equazione vettoriale si riduce a una equazione scalare per il moto lungo l'asse x:

$$M a_x = T_x + N_x + (M\vec{g})_x + F_{d,x}$$

Risulta $T_x = T\cos\alpha$, $N_x = 0$, $(M\vec{g})_x = 0$,

$F_{d,x} = -\mu_d N = -\mu_d (Mg - T\operatorname{sen}\alpha)$, per cui otteniamo

$M a_x = T\cos\alpha - \mu_d (Mg - T\operatorname{sen}\alpha)$, e infine

$M a_x = (\cos\alpha + \mu_d \operatorname{sen}\alpha) T - \mu_d Mg$, e dunque

$$\boxed{a_x = (\cos\alpha + \mu_d \operatorname{sen}\alpha)\frac{T}{M} - \mu_d g}$$

c) Affinché lo scatolone non si sollevi dal piano orizzontale durante il suo moto, deve risultare

$$N \geq 0 \text{, cioe' } Mg - T\,\text{sen}\alpha \geq 0, \text{ da cui}$$

$$T\,\text{sen}\alpha \leq Mg, \text{ e infine } T \leq \frac{Mg}{\text{sen}\alpha}$$

Pertanto, il valore cercato e'

$$\boxed{T_{max} = \frac{Mg}{\text{sen}\alpha} = \frac{(50\,kg)\cdot(9.81\ m\,s^{-2})}{\text{sen}\,30^\circ} = 981\ N}$$

d) Affinché lo scatolone possa muoversi nel piano orizzontale sotto l'azione delle forze indicate, deve risultare

$$a_x \geq 0, \text{ cioe'}$$

$$(\cos\alpha + \mu_d \,\text{sen}\alpha)\frac{T}{M} - \mu_d g \geq 0, \text{ da cui}$$

$$(\cos\alpha + \mu_d \,\text{sen}\alpha)\frac{T}{M} \geq \mu_d g, \text{ da cui}$$

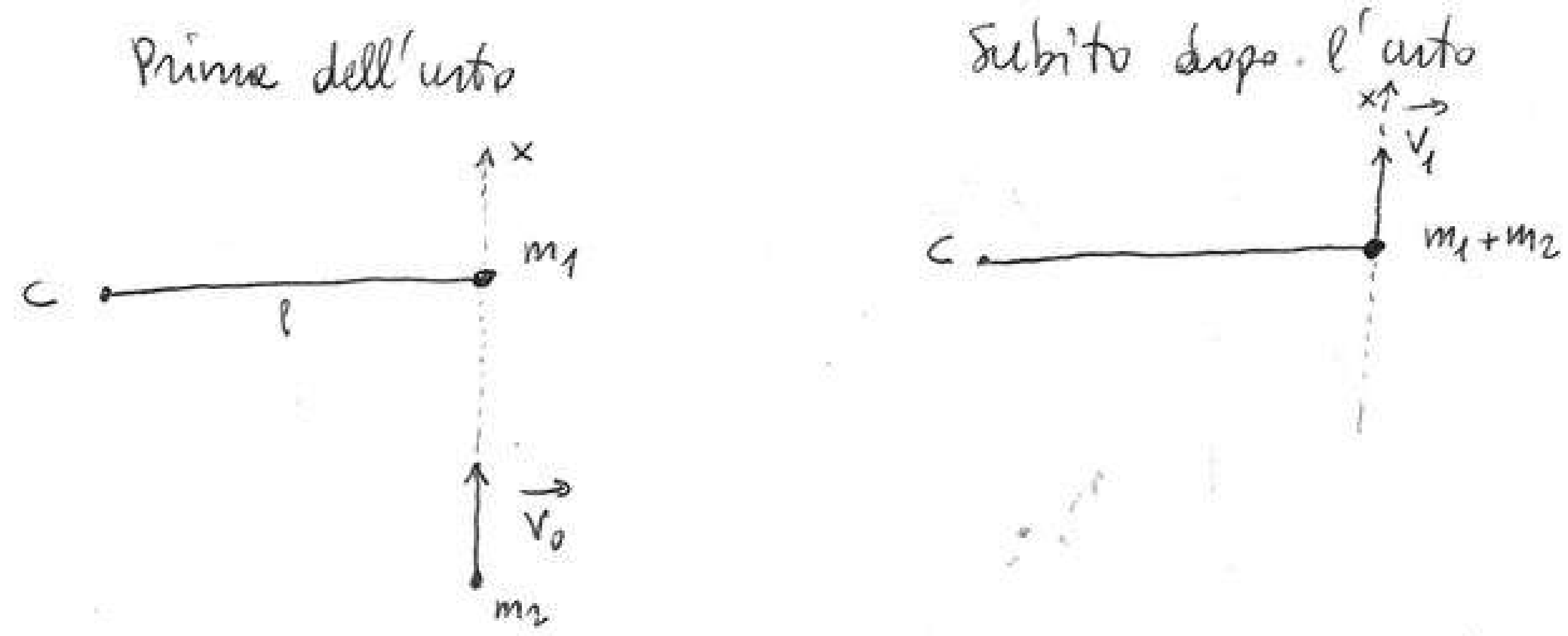
$$T \geq \frac{\mu_d Mg}{\cos\alpha + \mu_d \,\text{sen}\alpha} = \frac{0.08\cdot(50\,kg)\cdot(9.81\ m\,s^{-2})}{\cos 30^\circ + 0.08\cdot\sin 30^\circ} =$$

$$= \frac{0.08\cdot(50\,kg)\cdot(9.81\ m\,s^{-2})}{\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 0.08)} \simeq 43.31\ N$$

Dunque $\boxed{T_{min} = \frac{\mu_d Mg}{\cos\alpha + \mu_d \,\text{sen}\alpha} \simeq 43.31\ N}$

PROBLEMA N. 2

a)



Qua sopra sono indicati i vettori velocità dei punti materiali prima dell'urto (a sinistra) e subito dopo l'urto (a destra). Lungo la direzione x non agiscono forze durante l'urto, per cui la componente x della quantità di moto totale del sistema si conserva nell'urto.

Dunque, vale l'equazione

$$P_{tot,x,f} = P_{tot,x,i} \implies (m_1+m_2)V_1 = m_2 V_0 ,$$

essendo $V_0 = |\vec{V_0}|$ e $V_1 = |\vec{V_1}|$, e considerando che $\vec{V_0}, \vec{V_1}$ sono dirette lungo la direzione dell'asse x.

Pertanto si ricava

$$\boxed{V_1 = \frac{m_2 V_0}{m_1+m_2} = \frac{V_0}{2} = \frac{3\ m\,s^{-1}}{2} = 1.5\ m\ s^{-1}}$$

Abbiamo sfruttato l'informazione del testo $m_2 = m_1$.

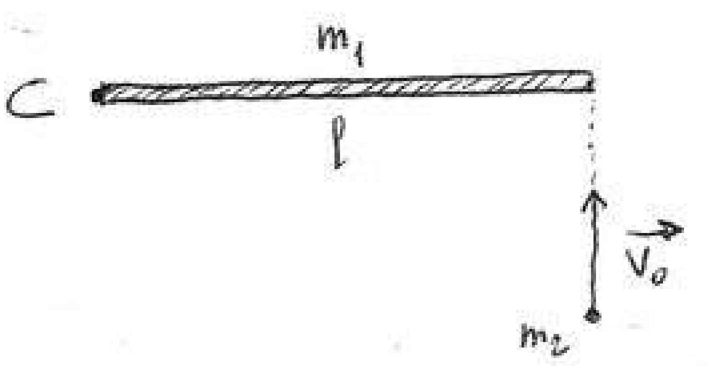
5

b) Dopo l'urto, i due punti materiali attaccati (costituenti quindi un punto materiale di massa $m_1 + m_2$) si muovono di moto circolare uniforme, attaccati all'estremo libero del filo di lunghezza l.

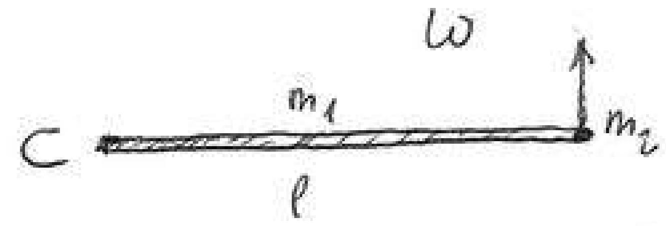
Pertanto, il periodo del moto circolare uniforme è

$$\boxed{T_1 = \frac{2\pi l}{v_1} = \frac{2\pi l \cdot (m_1 + m_2)}{m_2 v_0} = \frac{2\pi \cdot (2\ m)}{1{,}5\ m\, s^{-1}} \simeq 8{,}38\ s}$$

c) Prima dell'urto



Subito dopo l'urto



In questa situazione, si ha un urto totalmente anelastico tra un punto materiale e un corpo rigido. Il momento delle forze esterne totale rispetto al polo C (a cui la sbarretta è vincolata per la rotazione) è nullo durante l'urto: le forze peso sono esattamente bilanciate dalle reazioni della superficie orizzontale (lungo la direzione ortogonale al piano del foglio nello schema sopra mostrato), e il momento della reazione del perno è nullo rispetto al perno stesso, ovviamente.

Pertanto, il momento angolare totale rispetto al perno si conserva nell'urto. Dunque, vale l'equazione

$$L_{tot,z,f} = L_{tot,z,i} \, ,$$ essendo l'asse z diretto lungo la direzione ortogonale al piano del foglio nello schema mostrato in precedenza.

Prima dell'urto risulta $L_{tot,z,i} = \ell m_2 v_0$

Dopo l'urto risulta $L_{tot,z,f} = I\omega$,

dove I e' il momento d'inerzia del sistema rigido (dopo l'urto) rispetto all'asse passante per il perno C e perpendicolare al piano del foglio, e ω e' la velocita' angolare di rotazione del sistema rigido dopo l'urto.

Risulta $I = \frac{1}{3} m_1 \ell^2 + m_2 \ell^2$, e quindi

$I\omega = \ell m_2 v_0$, da cui otteniamo

$$\boxed{\omega = \frac{\ell m_2 v_0}{I} = \frac{\ell m_2 v_0}{\left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right)\ell^2} = \frac{\ell v_0}{\frac{4}{3}\ell^2} = \frac{3 v_0}{4\ell} = \frac{3 \cdot (3\ m\ s^{-1})}{4 \cdot (2\ m)} = 1.125\ rad\ s^{-1} \qquad (m_2 = m_1)}$$

d) Dopo l'urto, il sistema rigido si muove di moto rotatorio con velocita' angolare costante ω attorno all'asse passante per il perno C e perpendicolare al piano del foglio.

Dunque, il periodo di rotazione adesso e'

$$\boxed{T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 4l}{3V_0} = \frac{8\pi l}{3V_0} = \frac{8\pi \cdot (2\,m)}{3\cdot(3\,m\,s^{-1})} = 5.585\,s}$$

Dunque, infine, otteniamo

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{\overset{4}{\cancel{8\pi l}}}{3V_0}\cdot\frac{V_1}{\cancel{2\pi l}} = \frac{4V_1}{3V_0} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3\cancel{V_0}}\cdot\frac{\cancel{V_0}}{\cancel{2}_1} = \frac{2}{3}}$$

PROBLEMA N. 3

a) Dalla seconda legge di Ohm ricaviamo:

$$R_a = \rho \frac{L}{S_a}$$

dove S_a e' la sezione trasversale in questa configurazione del potenziale.

Risulta $S_a = \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi (r_e^2 - r_i^2) = 66 \text{ mm}^2$, per cui:

$$\boxed{R_a = \frac{\rho L}{\pi (r_e^2 - r_i^2)} = \frac{(2.5 \cdot 10^3 \,\Omega\, m) \cdot (2 \cdot 10^{-2} m)}{\pi [(5 \cdot 10^{-3} m)^2 - (2 \cdot 10^{-3} m)^2]} \simeq 0.758 \cdot 10^6 \,\Omega}$$

b) Dalla prima legge di Ohm otteniamo:

$$\boxed{I_a = \frac{V_0}{R_a} = \frac{\pi (r_e^2 - r_i^2) V_0}{\rho L} \simeq 1.32 \cdot 10^{-5} A = 13.2 \,\mu A}$$

$$\boxed{|\vec{J}_a| = \frac{I_a}{S_a} = \frac{V_0}{\rho L} \simeq 0.2 \frac{A}{m^2}}$$

c) Nella nuova configurazione del potenziale, la corrente scorre radialmente e la sezione trasversale varia in funzione della superficie laterale del cilindro di raggio r, con $r_i < r < r_e$.

Pertanto la resistenza richiesta si ottiene come serie di resistenze infinitesime di lunghezza Δr e sezione trasversale $2\pi L r$, con $r_i < r < r_e$.

Ogni resistenza infinitesima, per la seconda legge di Ohm, vale $\Delta R_K = \rho \dfrac{\Delta r}{2\pi L\, r_K}$, e la resistenza complessiva è quindi

$$R_b = \lim_{\Delta r \to 0^+} \sum_K \rho \frac{\Delta r}{2\pi L r_K} = \int_{r_i}^{r_e} \frac{\rho}{2\pi L} \frac{1}{r}\, dr$$

Dunque:

$$R_b = \frac{\rho}{2\pi L} \int_{r_i}^{r_e} \frac{1}{r}\, dr = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{r_e}{r_i} = 1.82 \cdot 10^4\ \Omega = 18.2\ \text{k}\Omega$$

d) Risulta pertanto:

$$\boxed{I_b = \frac{V_0}{R_b} = 0.55 \cdot 10^{-3}\ A = 0.55\ mA}$$

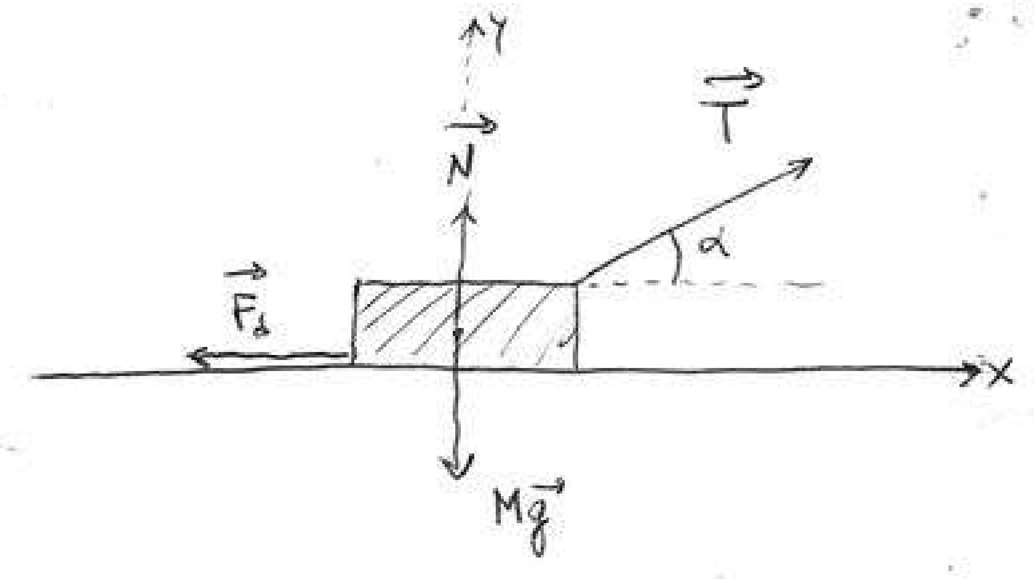
$$\boxed{|\vec{J}_b| = \frac{I_b}{2\pi L r} \simeq \frac{4.38}{r}\ \frac{A}{m^2}}$$

PROVA SCRITTA DI FISICA PER INFORMATICA

2° APPELLO AUTUNNALE 17/09/2021

PROBLEMA N. 1

a) Disegnamo il diagramma delle forze agenti sullo scatolone mentre scivola sul piano orizzontale:



Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali come nello schema a fianco.

Poiché lo scatolone si muove di moto rettilineo sul piano orizzontale, la somma delle componenti lungo l'asse y di tutte le forze agenti sullo scatolone e' nulla:

$$N_y + T_y + (M\vec{g})_y = 0 \qquad (\text{essendo } F_{d,y} = 0)$$

Posto $N = |\vec{N}|$, $T = |\vec{T}|$, $g = |\vec{g}|$, possiamo quindi scrivere:

$$N + T\,\text{sen}\,\alpha - Mg = 0,$$ da cui ricaviamo

$$\boxed{N = Mg - T\,\text{sen}\,\alpha}$$

b) Basandosi sullo schema disegnato in precedenza, possiamo scrivere la 2ª legge della dinamica per il moto dello scatolone:

$$M\vec{a} = \vec{T} + \vec{N} + M\vec{g} + \vec{F_d}$$

Sulla base delle considerazioni svolte nel punto a), tuttavia, sappiamo che la componente y della forza risultante e' nulla, per cui l'equazione vettoriale si riduce a una equazione scalare per il moto lungo l'asse x:

$$M a_x = T_x + N_x + (M\vec{g})_x + F_{d,x}$$

Risulta $T_x = T\cos\alpha$, $N_x = 0$, $(M\vec{g})_x = 0$,

$F_{d,x} = -\mu_d N = -\mu_d (Mg - T\sin\alpha)$, per cui otteniamo

$$M a_x = T\cos\alpha - \mu_d (Mg - T\sin\alpha), \quad \text{e infine}$$

$$M a_x = (\cos\alpha + \mu_d \sin\alpha)\, T - \mu_d M g, \quad \text{e dunque}$$

$$\boxed{a_x = (\cos\alpha + \mu_d \sin\alpha)\frac{T}{M} - \mu_d g}$$

c) Affinché lo scatolone non si sollevi dal piano orizzontale durante il suo moto, deve risultare

$$N \geq 0 \text{ , cioe' } \quad Mg - T\,\text{sen}\alpha \geq 0, \text{ da cui}$$

$$T\,\text{sen}\alpha \leq Mg, \quad \text{e infine} \quad T \leq \frac{Mg}{\text{sen}\alpha}$$

Pertanto, il valore cercato e'

$$\boxed{T_{max} = \frac{Mg}{\text{sen}\alpha} = \frac{(50\,kg)\cdot(9.81\;m\,s^{-2})}{\text{sen}\,30^\circ} = 981\,N}$$

d) Affinché lo scatolone possa muoversi nel piano orizzontale sotto l'azione delle forze indicate, deve risultare

$$a_x \geq 0, \quad \text{cioe'}$$

$$(\cos\alpha + \mu_s\,\text{sen}\alpha)\frac{T}{M} - \mu_s g \geq 0, \quad \text{da cui}$$

$$(\cos\alpha + \mu_s\,\text{sen}\alpha)\frac{T}{M} \geq \mu_s g, \quad \text{da cui}$$

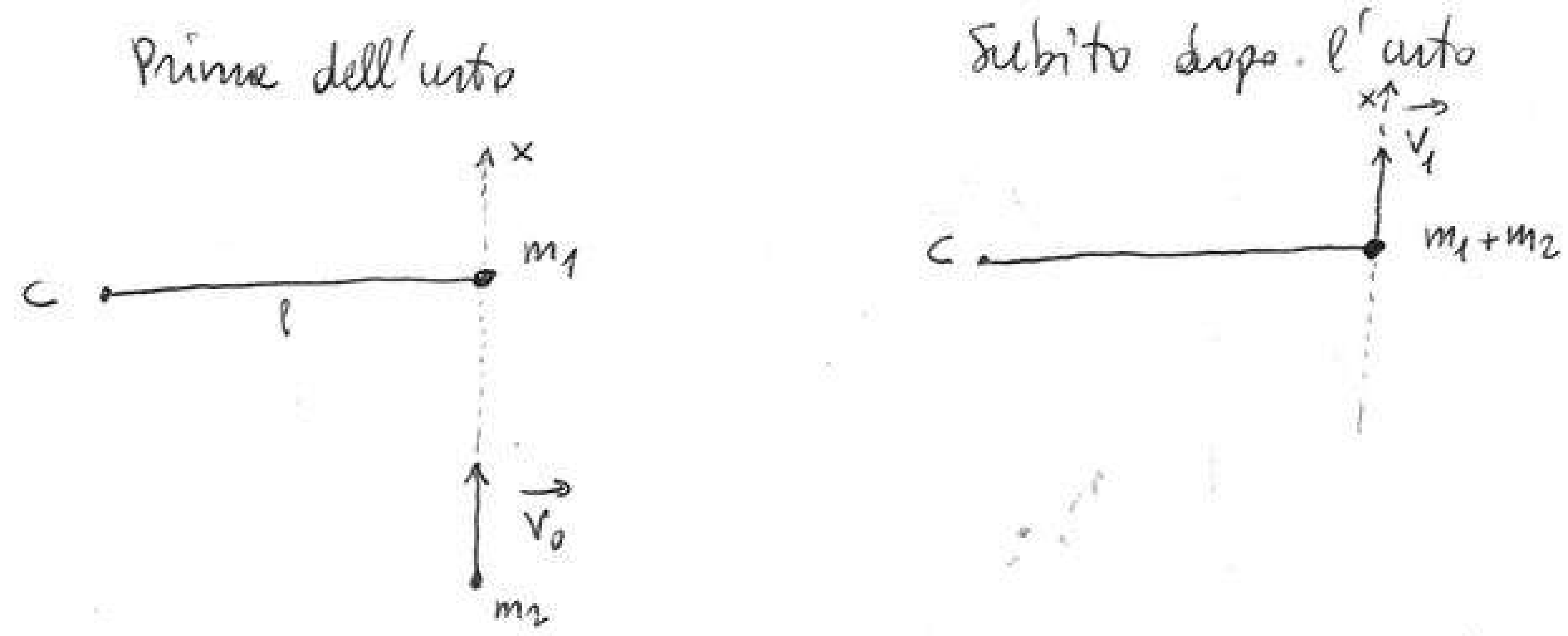
$$T \geq \frac{\mu_s Mg}{\cos\alpha + \mu_s\,\text{sen}\alpha} = \frac{0.08\cdot(50\,kg)\cdot(9.81\;m\,s^{-2})}{\cos 30^\circ + 0.08\cdot\sin 30^\circ} =$$

$$= \frac{0.08\cdot(50\,kg)\cdot(9.81\;m\,s^{-2})}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 0.08\right)} \simeq 43.31\,N$$

Dunque $\boxed{T_{min} = \frac{\mu_s Mg}{\cos\alpha + \mu_s\,\text{sen}\alpha} \simeq 43.31\,N}$

PROBLEMA N. 2

a)



Qua sopra sono indicati i vettori velocità dei punti materiali prima dell'urto (a sinistra) e subito dopo l'urto (a destra). Lungo la direzione x non agiscono forze durante l'urto, per cui la componente x della quantità di moto totale del sistema si conserva nell'urto.

Dunque, vale l'equazione

$$P_{tot,x,f} = P_{tot,x,i} \Rightarrow (m_1+m_2)V_1 = m_2 V_0 ,$$

essendo $V_0 = |\vec{V}_0|$ e $V_1 = |\vec{V}_1|$, e considerando che $\vec{V}_0, \vec{V}_1$ sono dirette lungo la direzione dell'asse x.

Pertanto si ricava

$$\boxed{V_1 = \frac{m_2 V_0}{m_1+m_2} = \frac{V_0}{2} = \frac{3\ m\,s^{-1}}{2} = 1.5\ m\ s^{-1}}$$

Abbiamo sfruttato l'informazione del testo $m_2 = m_1$.

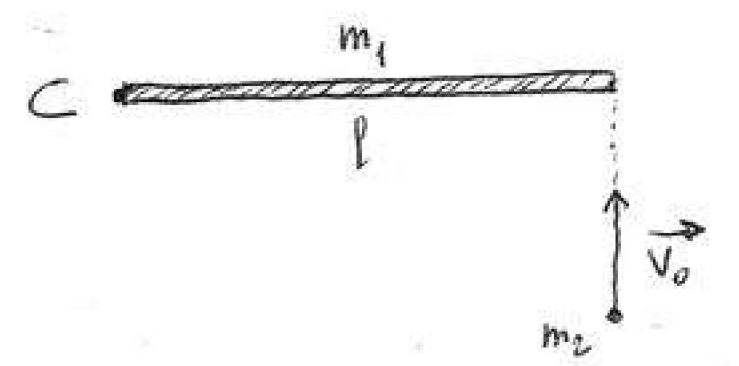
5

b) Dopo l'urto, i due punti materiali attaccati (costituenti quindi un punto materiale di massa $m_1 + m_2$) si muovono di moto circolare uniforme, attaccati all'estremo libero del filo di lunghezza l.

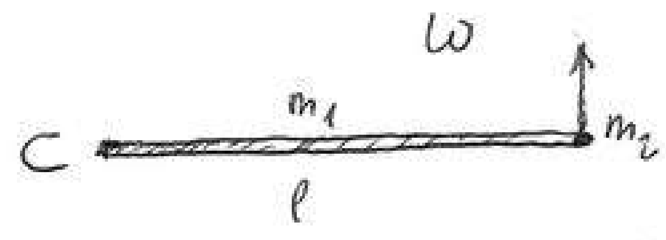
Pertanto, il periodo del moto circolare uniforme è

$$\boxed{T_1 = \frac{2\pi l}{V_1} = \frac{2\pi l \cdot (m_1+m_2)}{m_2 V_0} = \frac{2\pi \cdot (2\,m)}{1.5\ m\,s^{-1}} \simeq 8.38\ s}$$

c) Prima dell'urto



Subito dopo l'urto



In questa situazione, si ha un urto totalmente anelastico tra un punto materiale e un corpo rigido. Il momento delle forze esterne totale rispetto al polo C (a cui la sbarretta è vincolata per la rotazione) è nullo durante l'urto: le forze peso sono esattamente bilanciate dalle reazioni della superficie orizzontale (lungo la direzione ortogonale al piano del foglio nello schema sopra mostrato), e il momento della reazione del perno è nullo rispetto al perno stesso, ovviamente.

Pertanto, il momento angolare totale rispetto al perno si conserva nell'urto. Dunque, vale l'equazione

$$L_{tot,z,f} = L_{tot,z,i} ,$$ essendo l'asse z diretto lungo la direzione ortogonale al piano del foglio nello schema mostrato in precedenza.

Prima dell'urto risulta $L_{tot,z,i} = \ell m_2 v_0$

Dopo l'urto risulta $L_{tot,z,f} = I\omega$,

dove I e' il momento d'inerzia del sistema rigido (dopo l'urto) rispetto all'asse passante per il perno C e perpendicolare al piano del foglio, e ω e' la velocita' angolare di rotazione del sistema rigido dopo l'urto.

Risulta $I = \frac{1}{3} m_1 \ell^2 + m_2 \ell^2$, e quindi

$I\omega = \ell m_2 v_0$, da cui otteniamo

$$\boxed{\omega = \frac{\ell m_2 v_0}{I} = \frac{\ell m_2 v_0}{\left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right)\ell^2} = \frac{\ell v_0}{\frac{4}{3}\ell^2} = \frac{3 v_0}{4\ell} = \frac{3 \cdot (3\ m\ s^{-1})}{4 \cdot (2\ m)} = 1.125\ rad\ s^{-1} \qquad (m_2 = m_1)}$$

6

d) Dopo l'urto, il sistema rigido si muove di moto rotatorio con velocita' angolare costante ω attorno all'~~asse~~ passante per il perno C e perpendicolare al piano del foglio.

Dunque, il periodo di rotazione adesso e'

$$\boxed{T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 4\ell}{3V_0} = \frac{8\pi\ell}{3V_0} = \frac{8\pi\cdot(2\,m)}{3\cdot(3\,m\,s^{-1})} = 5.585\ s}$$

Dunque, infine, otteniamo

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cancel{\pi}\cancel{\ell}}{3V_0}\cdot\frac{V_1}{\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{\ell}} = \frac{4V_1}{3V_0} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3\cancel{V_0}}\cdot\frac{\cancel{V_0}}{\cancel{2}_1} = \frac{2}{3}}$$

PROBLEMA N. 3

a) Dalla seconda legge di Ohm ricaviamo:

$$R_a = \rho \frac{L}{S_a}$$

dove S_a e' la sezione trasversale in questa configurazione del potenziale.

Risulta $S_a = \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi (r_e^2 - r_i^2) = 66 \text{ mm}^2$, per cui:

$$\boxed{R_a = \frac{\rho L}{\pi (r_e^2 - r_i^2)} = \frac{(2.5 \cdot 10^3 \,\Omega\, m) \cdot (2 \cdot 10^{-2} m)}{\pi [(5 \cdot 10^{-3} m)^2 - (2 \cdot 10^{-3} m)^2]} \simeq 0.758 \cdot 10^6 \,\Omega}$$

b) Dalla prima legge di Ohm otteniamo:

$$\boxed{I_a = \frac{V_0}{R_a} = \frac{\pi (r_e^2 - r_i^2) V_0}{\rho L} \simeq 1.32 \cdot 10^{-5} A = 13.2 \,\mu A}$$

$$\boxed{|\vec{J}_a| = \frac{I_a}{S_a} = \frac{V_0}{\rho L} \simeq 0.2 \frac{A}{m^2}}$$

c) Nella nuova configurazione del potenziale, la corrente scorre radialmente e la sezione trasversale varia in funzione della superficie laterale del cilindro di raggio r, con $r_i < r < r_e$.

Pertanto la resistenza richiesta si ottiene come serie di resistenze infinitesime di lunghezza Δr e sezione trasversale $2\pi L r$, con $r_i < r < r_e$.

Ogni resistenza infinitesima, per la seconda legge di Ohm, vale $\Delta R_k = \rho \frac{\Delta r}{2\pi L r_k}$, e la resistenza complessiva è quindi

$$R_b = \lim_{\Delta r \to 0^+} \sum_k \rho \frac{\Delta r}{2\pi L r_k} = \int_{r_i}^{r_e} \frac{\rho}{2\pi L} \frac{1}{r}\, dr$$

Dunque:

$$R_b = \frac{\rho}{2\pi L} \int_{r_i}^{r_e} \frac{1}{r}\, dr = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{r_e}{r_i} = 1.82 \cdot 10^4\ \Omega = 18.2\ k\Omega$$

d) Risulta pertanto:

$$\boxed{I_b = \frac{V_0}{R_b} = 0.55 \cdot 10^{-3}\ A = 0.55\ mA}$$

$$\boxed{|\vec{J}_b| = \frac{I_b}{2\pi L r} \simeq \frac{4.38}{r}\ \frac{A}{m^2}}$$