Lezione 2

Teorema: Siano $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$ t.c. $x_0,\ldots,x_n$ sono tutti distinti. Allora $\exists!\, p(x)\in\mathbb{R}_n[x]$ t.c. $p(x_i)=y_i\ \forall i=0,\ldots,n$.

Dim. (2)

$\forall j=0,\ldots,n$ definiamo il polinomio

$$L_j(x)=\prod_{i=0}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

$$\boxed{(x-1)(x-2)(x-3)=\\ =x^3-3x^2-2x^2+6x}$$

Gli $n+1$ polinomi $L_0(x),\ldots,L_n(x)$ hanno grado n e quindi stanno in $\mathbb{R}_n[x]$. Siccome questi polinomi sono in numero di $n+1=\dim\mathbb{R}_n[x]$, per dimostrare che sono una base basta dimostrare che sono linearmente indipendenti (algebra lin.)

> Il fatto che $\dim\mathbb{R}_n[x]=n+1$ vale perché sappiamo che una base di $\mathbb{R}_n[x]$ è la base canonica $1,x,x^2,\ldots,x^n$ che ha precisamente $n+1$ elementi. Ricordiamo inoltre che una base di uno spazio vettoriale è un insieme di elementi lin. indip. che generano lo spazio; inoltre, tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi, e questo numero di elementi comune a tutte le basi si chiama dimensione dello spazio vettoriale.

Per dimostrare che $L_0(x),\ldots,L_n(x)$ sono lin. indip., mettiamo in luce una proprietà: $\forall i,j=0,\ldots,n$

$$(\star)\quad L_j(x_i)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\qquad (=\delta_{ij})$$

Dobbiamo mostrare che se $\alpha_0L_0(x)+\alpha_1L_1(x)+\ldots+\alpha_nL_n(x)=0$ è il polinomio identicamente nullo, allora $\alpha_0=\ldots=\alpha_n=0$

Sia dunque $\alpha_0L_0(x)+\ldots+\alpha_nL_n(x)=0$ identicamente $\forall x\in\mathbb{R}$

Di conseguenza $\forall i=0,\ldots,n$

$\underbrace{\alpha_0L_0(x)+\ldots+\alpha_nL_n(x)}_{=\alpha_i}=0\Rightarrow\alpha_0=\ldots=\alpha_n=0\Rightarrow L_0(x),\ldots,L_n(x)$ sono lin. indip. e dunque sono base di $\mathbb{R}_n[x]$

Definiamo

$$p(x)=y_0L_0(x)+\ldots+y_nL_n(x).$$

- $p(x)\in\mathbb{R}_n[x]$
- Verifichiamo che $p(x_i)=y_i\ \forall i=0,\ldots,n$.

$p(x_i)=y_0L_0(x_i)+\ldots+y_nL_n(x_i)=y_i$

Questo dimostra l'esistenza di un polinomio $p(x)$ che soddisfa la tesi del teorema. Dimostriamo l'unicità.

Supponiamo che $q(x)$ sia un altro polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ t.c. $q(x_i)=y_i\ \forall i=0,\ldots,n$

Poiché $L_0(x),\ldots,L_n(x)$ sono una base di $\mathbb{R}_n[x]$, possiamo scrivere $q(x)=\beta_0L_0(x)+\ldots+\beta_nL_n(x)$ per certi $\beta_0,\ldots,\beta_n\in\mathbb{R}$.

Valutando $q(x)$ nei punti $x_0,\ldots,x_n$ otteniamo che $\forall i=0,\ldots,n$

$q(x_i)=\beta_0L_0(x_i)+\ldots+\beta_nL_n(x_i)=\beta_i$

$\|$

y_i

$\Rightarrow q(x)=y_0L_0(x)+\ldots+y_nL_n(x)=p(x)$

Questo prova che $p(x)$ è l'unico polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ t.c. $p(x_i)=y_i$ $\forall i=0,\ldots,n$ $\square$

Def. Siano $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$ con $x_0,\ldots,x_n$ distinti. L'unico polinomio $p(x)\in\mathbb{R}_n[x]$ t.c. $p(x_i)=y_i\ \forall i=0,\ldots,n$ si chiama polinomio di interpolazione dei dati $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)$, oppure polinomio di interpolazione dei valori $y_0,\ldots,y_n$ sui nodi $x_0,\ldots,x_n$

- La prima dim. del Th dice che $p(x)$ si scrive in forma canonica come

$$p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \text{ dove } \begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=[V(x_0,\ldots,x_n)]^{-1}\begin{pmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

e $V(x_0,\ldots,x_n)$ è la matrice di Vandermonde sui nodi $x_0,\ldots,x_n$.

- La seconda dim. del Th. dice che

$$p(x)=y_0L_0(x)+\ldots+y_nL_n(x)\quad(\$\$)\quad \text{dove } \forall j=0,\ldots,n$$

$$L_j(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

si chiama j-esimo polinomio di Lagrange relativo ai nodi $x_0,\ldots,x_n$.

La ($\$\$$) si chiama forma di Lagrange del polinomio di interpolazione.

- Se gli y_i sono i valori negli input x_i di una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, cioè se risulta $y_i=f(x_i)\ \forall i=0,\ldots,n$, allora il polinomio $p(x)$ si chiama anche polinomio di interpolazione della funzione $f(x)$ sui nodi $x_0,\ldots,x_n$

Esempio: Dalla funzione $\sin(x)$ sono noti i valori su tre punti $x_0=0$, $x_1=\pi/6$, $x_2=\pi/4$ e sono dati da $\sin(x_0)=0$, $\sin(x_1)=\frac{1}{2}$ e $\sin(x_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Scrivere in forma canonica e in forma di Lagrange il polinomio di interpolazione $p(x)$ di $\sin(x)$ sui nodi x_0,x_1,x_2.

Soluzione: Iniziamo dalla forma di Lagrange:

$$p(x)=\sin(x_0)L_0(x)+\sin(x_1)L_1(x)+\sin(x_2)L_2(x)$$

$$=\cancel{\sin(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}+\sin(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\sin(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-\pi/4)}{\pi/6\cdot\left(-\frac{\pi}{12}\right)}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{x(x-\pi/6)}{\pi/4\cdot\pi/12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-\frac{\pi}{4})}{-\pi^2/72}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{x(x-\frac{\pi}{6})}{\pi^2/48}$$

Sviluppando i calcoli, portiamo il polinomio in forma canonica:

$$p(x)=\left(\frac{9}{\pi}-\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\right)x+\left(-\frac{36}{\pi^2}+\frac{24\sqrt{2}}{\pi^2}\right)x^2\quad(\epsilon)$$

Oss. Dall'espressione della forma canonica di $p(x)$ avevamo che

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \text{ con } \begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\left[V\left(0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 1/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

Dunque per confronto con (ϵ) concludiamo che

$$\left[V\left(0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 1/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{9}{\pi}-\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\\ -\frac{36}{\pi^2}+\frac{24\sqrt{2}}{\pi^2}\end{pmatrix}$$