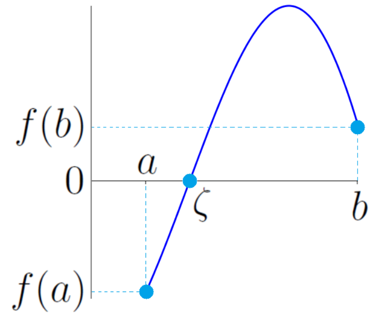

Figura 1.1: Una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $f(a)f(b) < 0$ possiede almeno uno zero $\zeta \in (a, b)$.

1 Esercizi

Esercizio 1.1. Esercizio d'implementazione dell'algoritmo di valutazione del polinomio d'interpolazione in più punti (Esercizio 1.11 sulle dispense).

Esercizio 1.2. Esercizio d'implementazione della formula dei trapezi (Esercizio 2.2 sulle dispense).

Esercizio 1.3. Esercizio d'implementazione del metodo di estrapolazione (Esercizio 2.4 sulle dispense).

Esercizio 1.4. Esercizio d'implementazione del metodo di Jacobi (Esercizio 4.2 sulle dispense).

Esercizio 1.5. Esercizio d'implementazione del metodo di Gauss-Seidel (Esercizio 4.3 sulle dispense).

Esercizio 1.6. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ tale che $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto: $f(a)f(b) < 0$. Un teorema dell'analisi matematica (teorema degli zeri) garantisce che la funzione $f(x)$ ha almeno uno zero nell'intervallo (a, b), cioè esiste un punto $\zeta \in (a, b)$ tale che $f(\zeta) = 0$; si veda la Figura 1.1. Supponiamo che $f(x)$ abbia un unico zero ζ in (a, b). Un metodo per determinare un'approssimazione ξ di ζ è il metodo di bisezione: fissata una soglia di precisione $\varepsilon > 0$, il metodo costruisce la successione di intervalli

$$[\alpha_k, \beta_k], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

in cui $[\alpha_0, \beta_0] = [a, b]$ e, per $k \geq 1$,

$$[\alpha_k, \beta_k] = \begin{cases} \left[\alpha_{k-1}, \dfrac{\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}}{2}\right], & \text{se } \zeta \in \left[\alpha_{k-1}, \dfrac{\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}}{2}\right] \text{ cioè } f(\alpha_{k-1})f\Big(\dfrac{\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}}{2}\Big) \leq 0, \\[2ex] \left[\dfrac{\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}}{2}, \beta_{k-1}\right], & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La successione di intervalli così costruita gode delle seguenti proprietà:
- $\zeta \in [\alpha_k, \beta_k]$ per tutti i $k \geq 0$;
- ogni intervallo è metà del precedente e dunque la lunghezza di $[\alpha_k, \beta_k]$ è $\beta_k - \alpha_k = \frac{b-a}{2^k}$ per ogni $k \geq 0$.

Il metodo si arresta al primo indice K tale che $\beta_K - \alpha_K \leq \varepsilon$ e restituisce come risultato il punto medio ξ dell'intervallo $[\alpha_K, \beta_K]$ dato da $\xi = \frac{\alpha_K+\beta_K}{2}$. In questo modo, siccome $\zeta \in [\alpha_K, \beta_K]$, si ha $|\xi - \zeta| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Osserviamo che l'indice di arresto K è il più piccolo intero ≥ 0 tale che

$$\beta_K - \alpha_K \leq \varepsilon \quad \iff \quad \frac{b-a}{2^K} \leq \varepsilon \quad \iff \quad 2^K \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \quad \iff \quad K \geq \log_2\Big(\frac{b-a}{\varepsilon}\Big),$$

cioè $K = \left\lceil \log_2\big(\frac{b-a}{\varepsilon}\big) \right\rceil$.

Scrivere un programma Matlab che implementa il metodo di bisezione. Il programma deve:

- prendere in input gli estremi a, b di un intervallo, una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, con $f(a)f(b) < 0$ e con un unico zero $\zeta \in (a, b)$, e un $\varepsilon > 0$;
- restituire in output l'approssimazione ξ di ζ ottenuta con il metodo di bisezione sopra descritto, l'indice di arresto K del metodo, e il valore $f(\xi)$ (che sarà all'incirca pari a $0 = f(\zeta)$).

2 Problemi

Problema 2.1. Si consideri la funzione $\sqrt{x}$.

(a) Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $\sqrt{x}$ sui nodi

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{64}, \quad x_2 = \frac{4}{64}, \quad x_3 = \frac{9}{64}, \quad x_4 = \frac{16}{64}, \quad x_5 = \frac{25}{64}, \quad x_6 = \frac{36}{64}, \quad x_7 = \frac{49}{64}, \quad x_8 = 1.$$

Calcolare il vettore (colonna)

$$\begin{bmatrix} p(\zeta_1) - \sqrt{\zeta_1} & p(\zeta_2) - \sqrt{\zeta_2} & \cdots & p(\zeta_{21}) - \sqrt{\zeta_{21}} \end{bmatrix}^T$$

dove $\zeta_i = \frac{i-1}{20}$ per $i = 1, \ldots, 21$, e osservare in che modo varia la differenza $p(\zeta_i) - \sqrt{\zeta_i}$ al variare di i da 1 a 21.

(b) Tracciare il grafico di $\sqrt{x}$ e di $p(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$, ponendo i due grafici su un'unica figura e inserendo una legenda che ci dica qual è la funzione $\sqrt{x}$ e qual è il polinomio $p(x)$.

Problema 2.2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^x.$$

Per ogni intero $n \geq 1$ indichiamo con I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1.7182818284590...$$

(a) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un $n = n(\varepsilon)$ tale che $|I - I_n| \leq \varepsilon$.

(b) Costruire una tabella che riporti vicino ad ogni $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$:
- il numero $n(\varepsilon)$;
- il valore I_n per $n = n(\varepsilon)$;
- il valore esatto I (in modo da confrontarlo con I_n);
- l'errore $|I - I_n|$ (che deve essere $\leq \varepsilon$).

(c) Calcolare le approssimazioni di I ottenute con le formule dei trapezi I_2, I_4, I_8, I_{16} e confrontarle con il valore esatto I.

(d) Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione dei valori I_2, I_4, I_8, I_{16} sui nodi h_2^2, h_4^2, h_8^2, h_{16}^2, dove $h_2 = \frac{1}{2}$, $h_4 = \frac{1}{4}$, $h_8 = \frac{1}{8}$, $h_{16} = \frac{1}{16}$ sono i passi di discretizzazione relativi alle formule dei trapezi I_2, I_4, I_8, I_{16} rispettivamente. Calcolare $p(0)$ e confrontare I_2, I_4, I_8, I_{16}, $p(0)$ con il valore esatto I. Che cosa si nota?

Problema 2.3. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ e indichiamo con I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(a) Calcolare I prima manualmente e poi con la funzione simbolica `int` di Matlab.

(b) Calcolare $I_5, I_{10}, I_{20}, I_{40}$.

(c) Calcolare $p(0)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione dei dati (h_0^2, I_5), (h_1^2, I_{10}), (h_2^2, I_{20}), (h_3^2, I_{40}) e h_0, h_1, h_2, h_3 sono i passi di discretizzazione delle formule dei trapezi $I_5, I_{10}, I_{20}, I_{40}$.

(d) Riportare in una tabella:

- i valori $I_5, I_{10}, I_{20}, I_{40}, p(0)$;
- gli errori $|I_5 - I|, |I_{10} - I|, |I_{20} - I|, |I_{40} - I|, |p(0) - I|$.

(e) Posto $\varepsilon = |p(0) - I|$, determinare un n in modo tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I_n - I| \le \varepsilon$. Calcolare successivamente I_n e verificare che effettivamente $|I_n - I| \le \varepsilon$.

Problema 2.4. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcoli la soluzione $\mathbf{x}$ del sistema dato con Matlab.

(b) La matrice A è a diagonale dominante in senso stretto per cui il metodo di Jacobi è convergente ossia partendo da un qualsiasi vettore d'innesco $\mathbf{x}^{(0)}$ la successione prodotta dal metodo di Jacobi converge (componente per componente) alla soluzione $\mathbf{x}$ del sistema dato. Calcolare le prime 10 iterazioni $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(10)}$ del metodo di Jacobi partendo dal vettore nullo $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ e confrontarle con la soluzione esatta $\mathbf{x}$ ponendo iterazioni e soluzione esatta in un'unica matrice S di dimensioni 3×12 le cui colonne sono nell'ordine $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(10)}, \mathbf{x}$.

(c) Consideriamo il metodo di Jacobi per risolvere il sistema dato. Conveniamo d'innescare il metodo di Jacobi con il vettore nullo $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$. Costruire una tabella che riporti vicino ad ogni $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$:

- il numero d'iterazioni K_ε necessarie al metodo di Jacobi per convergere entro la precisione ε;
- la soluzione approssimata $\mathbf{x}_\varepsilon$ calcolata dal metodo di Jacobi;
- la soluzione esatta $\mathbf{x}$ (in modo da confrontarla con la soluzione approssimata $\mathbf{x}_\varepsilon$);
- la norma ∞ dell'errore $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon\|_\infty$.

Problema 2.5. Si consideri il sistema lineare $A_n\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$, dove $\mathbf{b}_n = [1, 1, \ldots, 1]^T$ e A_n è la matrice $n \times n$ definita nel modo seguente:

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} 3, & \text{se } i = j, \\ -(\frac{1}{2})^{\max(i,j)-1}, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

(a) Scrivere esplicitamente A_n per $n = 5$.

(b) Dimostrare che, qualunque sia n, A_n è una matrice a diagonale dominante in senso stretto per righe e per colonne. Dedurre che i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per risolvere un sistema lineare di matrice A_n sono convergenti.

(c) Risolvere con il comando "\" il sistema lineare $A_n\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$ per $n = 5, 10, 20$.

(d) Risolvere il sistema lineare $A_n\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$ per $n = 5, 10, 20$ con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel entro una soglia di precisione $\varepsilon = 10^{-7}$ partendo dal vettore d'innesco $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

(e) Costruire una tabella che vicino ad ogni $n = 5, 10, 20$ riporti:

- la soluzione esatta $\mathbf{x}$ del sistema $A_n\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$ ottenuta al punto (c);
- le soluzioni approssimate $\mathbf{x}_J$ e $\mathbf{x}_G$ ottenute con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel al punto (d);
- gli errori $\|\mathbf{x}_J - \mathbf{x}\|_\infty$ e $\|\mathbf{x}_G - \mathbf{x}\|_\infty$;
- i numeri K_J e K_G che contano le iterazioni effettuate da Jacobi e Gauss-Seidel per calcolare $\mathbf{x}_J$ e $\mathbf{x}_G$, rispettivamente.

Problema 2.6. Consideriamo i seguenti due casi:

- $f(x) = x^3 + 3x - 1 - \mathrm{e}^{-x^2}$ e $[a, b] = [0, 1]$;
- $f(x) = \cos x - x$ e $[a, b] = [0, \pi]$.

Per ciascuno di questi due casi, risolvere i seguenti punti.

(a) Verificare che $f(a)f(b) < 0$.

(b) Tracciare il grafico di $f(x)$ su $[a, b]$ e verficare che $f(x)$ ha un unico zero ζ nell'intervallo (a, b).

(c) Dimostrare analiticamente che $f(x)$ ha un'unico zero ζ nell'intervallo (a, b).

(d) Costruire una tabella che riporti vicino ad ogni $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$:

- un'approssimazione ξ_ε di ζ, calcolata con il metodo di bisezione, che soddisfa $|\xi_\varepsilon - \zeta| \leq \varepsilon$;
- il numero d'iterazioni K_ε effettuate dal metodo di bisezione per calcolare l'approssimazione ξ_ε;
- il valore $f(\xi_\varepsilon)$.