

Homework Risk Management

Davide Omento s330764

Matteo Racca s332682

Giulio Ruffinello s324211

1 Descrizione del problema

Consideriamo un problema di gestione del rischio di cambio per un'azienda americana che organizza viaggi nell'area euro per studenti. L'azienda deve sostenere i costi dei servizi inclusi nei viaggi, espressi in euro, ed è quindi esposta al rischio di cambio. In particolare, al momento della partenza in $t = T$, l'azienda dovrà sostenere una spesa di 1000 euro per ogni studente partecipante. Poichè il numero di studenti è incerto, anche l'importo complessivo in euro è incerto, così come il tasso di cambio euro-dollaro in T .

Al tempo $t = 0$, il tasso di cambio spot euro-dollaro p^0 è noto. Per mitigare il rischio di cambio, l'azienda può ricorrere ai seguenti strumenti derivati: contratti forward e opzioni call europee con tre differenti prezzi strike K_1 , K_2 e K_3 , tutti con scadenza al tempo T .

L'obiettivo è determinare la combinazione di strumenti derivati che minimizzi il rischio di cambio per l'azienda.

2 Ipotesi per la modellazione dell'incertezza

Per poter proporre una risoluzione del problema, abbiamo fatto le seguenti assunzioni riguardo le distribuzioni dei due fattori di rischio: il tasso di cambio e il volume di euro necessario in T .

1. Il tasso di cambio p^t segue un moto browniano geometrico, descritto dalla dinamica:

$$dp^t = (r_D - r_F)p^t dt + \sigma p^t dW^t \quad (1)$$

dove r_D e r_F sono rispettivamente i tassi di interesse domestico ed estero, σ rappresenta la volatilità del tasso di cambio e W^t è un moto browniano standard.

2. Il volume di euro necessario in T è distribuito secondo una distribuzione triangolare con supporto $[a, b]$ e moda $m \in (a, b)$:

$$V^T \sim \text{tria}(a, b, m) \quad (2)$$

L'uso della distribuzione triangolare consente di imporre un limite inferiore e superiore al volume necessario, evitando scenari estremi. Inoltre, il posizionamento della moda rispetto agli estremi permette di esprimere una tendenza verso valori più vicini al minimo o al massimo.

Non approfondiamo qui la scelta del moto browniano geometrico, se non per sottolineare che permette di simulare facilmente scenari per il tasso di cambio e di prezzare le opzioni tramite formule note. Infatti, i prezzi delle opzioni call c_i , con $i = 1, 2, 3$, sono calcolati tramite il modello di Black-Scholes e sono espressi come:

$$c_i = p^0 e^{-r_F T} N(d_1) - K_i e^{-r_D T} N(d_2) \quad (3)$$

dove:

$$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left(\ln \frac{p^0}{K_i} + \left(r_D - r_F + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right), \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Il prezzo del contratto forward F , invece, è determinato assumendo assenza di opportunità di arbitraggio, ed è dato da:

$$F = p^0 e^{(r_D - r_F)T} \quad (4)$$

Tutti i dati rilevanti per il problema, con i relativi valori numerici, sono riportati nella Tabella 1.

3 Modello di programmazione stocastica

3.1 Stadi del modello e rappresentazione dell'incertezza

Per affrontare questo problema di gestione del rischio, abbiamo sviluppato un modello di programmazione stocastica a due stadi, in cui l'incertezza viene rappresentata attraverso un albero di scenari:

- Primo stadio ($t = 0$): è il nodo radice dell'albero, nel quale l'azienda prende le decisioni iniziali sulla strategia di copertura. In particolare, sceglie la quantità, in euro, di contratti forward x e di opzioni call y_i da acquistare per ciascuno dei tre strike disponibili ($i = 1, 2, 3$).
- Secondo stadio ($t = T$): è costituito dai diversi nodi foglia dell'albero, ognuno dei quali rappresenta uno scenario possibile per il tasso di cambio spot euro-dollaro p^s e il volume di euro necessario V^s . In ciascuno scenario s , l'azienda deve decidere quante opzioni call esercitare h_i^s e quanta valuta acquistare o vendere al prezzo spot z^s, w^s .

Tabella 1: Dati del modello.

$p^0 = 1.03$	Tasso di cambio euro-dollaro in $t = 0$ (USD/EUR).
$K_1 = 1.01$	Prezzo strike della call option <i>in the money</i> (USD/EUR).
$K_2 = 1.03$	Prezzo strike della call option <i>at the money</i> (USD/EUR).
$K_3 = 1.05$	Prezzo strike della call option <i>out of the money</i> (USD/EUR).
$T = 0.5$	Orizzonte temporale in anni.
$r_F = 0.03$	Tasso di interesse <i>risk-free</i> estero.
$r_D = 0.02$	Tasso di interesse <i>risk-free</i> domestico.
$\sigma = 0.20$	Volatilità del tasso di cambio.
$a = 10000$	Estremo sinistro del supporto della distribuzione del volume.
$b = 30000$	Estremo destro del supporto della distribuzione del volume.
$m = 25000$	Moda della distribuzione del volume.
$c_1 = 0.064$	Prezzo dell'opzione call con strike K_1 (USD).
$c_2 = 0.055$	Prezzo dell'opzione call con strike K_2 (USD).
$c_3 = 0.046$	Prezzo dell'opzione call con strike K_3 (USD).
$F = 1.025$	Prezzo del contratto forward (USD).
π^s	Probabilità dello scenario s .
V^s	Volume di euro necessario in T nello scenario s (EUR).
p^s	Tasso di cambio spot in T nello scenario s (USD/EUR).

3.2 Funzione di perdita e misura di rischio

Il modello minimizza il $CV@R_{1-\alpha}$ di una funzione di perdita specifica adatta a valutare la strategia di copertura. L'uso del $CV@R_{1-\alpha}$ riflette l'avversione al rischio dell'azienda perché, invece di limitarsi a minimizzare la perdita media, il modello penalizza gli scenari peggiori, riducendo l'impatto delle fluttuazioni avverse del tasso di cambio. Inoltre, il $CV@R_{1-\alpha}$ è una misura di rischio coerente la cui minimizzazione è un problema convesso ed è linearizzabile nel caso in cui si rappresenti l'incertezza tramite scenari.

La funzione di perdita scelta per valutare l'efficacia della strategia di copertura è:

$$l^s = O^s - p^0 V^s \quad s \in S \quad (5)$$

dove O^s rappresenta il flusso di cassa complessivo nello scenario s , derivante sia dalle operazioni effettuate in $t = 0$ che da quelle in $t = T$, e $p^0 V^s$ indica il flusso di cassa teorico nel caso in cui l'azienda avesse acquistato tutta la valuta al tasso spot iniziale p^0 , senza alcuna strategia di copertura. La differenza $O^s - p^0 V^s$ misura quanto la strategia adottata si discosta dal costo ideale che si sarebbe sostenuto fissando il tasso di cambio iniziale p^0 . Minimizzarla significa ridurre il rischio di costi imprevisti dovuti alla volatilità del cambio.

Tabella 2: Variabili decisionali e variabili ausiliarie del modello.

x	Euro comprati in forward al tempo $t = 0$.
y_i	Call con strike K_i comprate in $t = 0$.
h_i^s	Call con strike K_i esercitate in $t = T$ nello scenario s .
z^s	Euro acquistati in $t = T$ al prezzo spot p^s nello scenario s .
w^s	Euro venduti in $t = T$ al prezzo spot p^s nello scenario s .
η	Value at risk $1 - \alpha$ della perdita L in $t = T$.
O^s	Flusso di cassa in uscita in $t = T$ nello scenario s .
L^s	Eccesso di perdita in $t = T$ nello scenario s .

3.3 Modello di programmazione lineare

Il risultato delle scelte sopra riportate è un modello di programmazione lineare le cui variabili decisionali sono riportate nella Tabella 2.

$$\min \quad \eta + \frac{1}{\alpha} \sum_{s \in S} \pi^s L^s \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \quad V^s = x + \sum_{i \in I} h_i^s + z^s - w^s, \quad s \in [S] \quad (7)$$

$$h_i^s \leq y_i, \quad i \in [I], s \in [S] \quad (8)$$

$$O^s = e^{r_D T} \sum_{i \in T} y_i c_i + xF + \sum_{i \in T} h_i^s K_i + z^s p^s - w^s p^s, \quad s \in [S] \quad (9)$$

$$L^s \geq (O^s - p^0 V^s) - \eta, \quad s \in [S] \quad (10)$$

$$L^s \geq 0, \quad s \in [S] \quad (11)$$

$$x, y_i, h_i^s, z^s, w^s \geq 0, \quad i \in [I], s \in [S] \quad (12)$$

La funzione obiettivo (6) è il $\text{CV@R}_{1-\alpha}$ della funzione di perdita l^s definita in (5). Per comodità, la funzione di perdita è stata riformulata in modo che la variabile ausiliaria L^s rappresenti l'eccesso di perdita rispetto al $\text{V@R}_{1-\alpha}$ rappresentato anch'esso da una variabile ausiliaria η :

$$L^s = \max \{ (O^s - p^0 V^s) - \eta, 0 \}$$

Nei vincoli (10) e (11) definiamo L^s in modo da rendere il problema lineare e togliere il max.

I vincoli in (7) garantiscono che il mix di derivati e l'acquisto di euro al prezzo spot in $t = T$ coprano l'intero volume di euro richiesto per ogni scenario $s \in S$ e che l'eventuale eccesso di euro sia venduto in $t = T$ al prezzo spot. Questo vincolo obbliga il modello a considerare una strategia che soddisfi l'intero volume di euro necessario, in modo da non trovare come soluzione quella banale in cui non si comprano derivati né euro in T .

In (8) imponiamo che le opzioni esercitate non superino l'ammontare di opzioni acquistate al primo stadio.

L'insieme di vincoli (9) definisce il flusso di cassa in uscita in ogni scenario $s \in S$, che include il costo di acquisto delle opzioni, capitalizzato in $t = T$, l'acquisto di euro al prezzo forward, l'acquisto di euro ai prezzi strike delle opzioni esercitate e il flusso derivante dall'acquisto o vendita di euro al prezzo spot p^T .

Infine, i vincoli (12) assicurano la non negatività delle variabili, impedendo vendite allo scoperto.

4 Spiegazione delle classi e scelte implementative

Definito il modello, lo abbiamo implementato in Python utilizzando il software di ottimizzazione Gurobi. L'implementazione del modello è stata organizzata utilizzando diverse classi, definite in quattro file distinti: *DataServer.py*, *PricingDerivatives.py*, *GenerateScenarios.py* e *HedgingModel.py*.

Il file principale, *main.py*, contiene i comandi necessari per far interagire le classi e per ottenere la soluzione del problema di ottimizzazione. In particolare, il programma stampa sul terminale il valore ottimale del CV@R e il valore ottimale delle variabili decisionali al primo stadio, ossia la quantità di forward e opzioni da acquistare in $t = 0$.

4.1 Classe *DataServer*

La classe *DataServer* è stata progettata per definire e gestire tutti i dati del problema. Alla creazione di un oggetto della classe *DataServer*, vengono automaticamente create le variabili associate ai dati di interesse a cui si assegnano i valori di default riportati in Tabella 1 o eventuali altri valori dati in input.

La classe include anche un metodo, *getData()*, che consente di accedere ai dati contenuti nel *DataServer*. Questo metodo è essenziale per trasferire i dati agli altri oggetti in modo semplice quando necessario.

Un importante vantaggio di questa struttura è la flessibilità: qualora fosse necessario modificare i dati del problema, è sufficiente aggiornare i valori definiti all'interno della classe oppure inizializzare il *DataServer* con valori specifici in input.

4.2 Classe *PricingDerivatives*

La classe *PricingDerivatives* contiene al suo interno due metodi: *get_forward_price* e *get_option_price*. Il primo calcola il prezzo del contratto forward, assicurando l'assenza di arbitraggio, come nell'Equazione (4). Il secondo, invece, determina il costo delle

diverse opzioni call disponibili utilizzando il modello di Black-Scholes, come nell'Equazione (3). Entrambi i metodi richiedono come input i dati necessari per eseguire i rispettivi calcoli.

4.3 Classe *GenerateScenarios*

Un oggetto della classe *GenerateScenarios*, al momento della creazione, riceve in input un oggetto della classe *DataServer* e usa il metodo *getData()* per salvare tutti i dati necessari. A partire da tali dati, la classe consente di generare un numero desiderato di scenari per il volume e per il tasso di cambio. In particolare, i metodi *get_volume_scenarios* e *get_price_scenarios* permettono di creare, rispettivamente, gli scenari per il volume e per il tasso spot.

Gli scenari di volume vengono generati sulla base della distribuzione specificata nel *DataServer* che ha come default la distribuzione triangolare in (2) con i parametri della Tabella 1. Gli scenari relativi al prezzo spot sono generati utilizzando il GBM dell'Equazione (1) con i parametri della Tabella 1.

4.4 Classe *HedgingModel*

La classe *HedgingModel* implementa la costruzione e risoluzione del problema di ottimizzazione. Quando un oggetto della classe *HedgingModel* viene creato, riceve in input gli oggetti delle classi *DataServer* e *PricingDerivatives*. In questo modo, utilizza il metodo *getData()* per salvare i dati d'interesse e li utilizza insieme ai metodi *get_forward_price* e *get_option_price* per ricavarsi i prezzi dei derivati.

Questo permette di capire perché *PricingDerivatives* non riceve in input *DataServer* quando viene inizializzato, al contrario di *GenerateScenarios*. Il motivo è che *PricingDerivatives* viene utilizzato all'interno di *HedgingModel* in cui i dati sono già stati salvati usando *getData()* e per cui possono essere passati ai metodi *get_forward_price* e *get_option_price*. Al contrario, abbiamo scelto di generare gli scenari fuori dalla classe che crea e ottimizza il modello in modo da garantire più flessibilità e dividere questi due processi computazionalmente dispendiosi.

I metodi *opt_hedging_model_for_loops* e *opt_hedging_model_matrices* contengono tutti i passaggi per la creazione e la risoluzione del modello tramite il solver Gurobi. Entrambi i metodi ricevono in input gli scenari generati esternamente e, utilizzando i dati salvati durante l'inizializzazione, creano le variabili, i vincoli e la funzione obiettivo descritti in precedenza. Dopodiché il modello viene risolto e in output vengono restituiti il valore ottimale del CV@R e un dizionario contenente i valori ottimali delle decisioni al primo stadio.

Sebbene i due metodi siano equivalenti e producano la stessa soluzione ottima a partire dagli stessi dati, differiscono nel modo in cui i vincoli vengono definiti: nel metodo *opt_hedging_model_for_loops* i vincoli sono definiti utilizzando cicli *for*, mentre nel metodo *opt_hedging_model_matrices* i vincoli sono definiti in forma matriciale.

Metodo	Tempo di risoluzione (secondi)
<i>opt_hedging_model_for_loops</i>	23.3028
<i>opt_hedging_model_matrices</i>	4.9274

Tabella 3: Confronto dei tempi di risoluzione per i due metodi con 10000 scenari.

Inizialmente, il modello è stato implementato definendo i vincoli mediante cicli *for*, come in *opt_hedging_model_for_loops*. Tuttavia, poiché l'elevato numero di scenari richiesto per ottenere una soluzione stabile rendeva estremamente lunga la fase di costruzione del modello, abbiamo utilizzato una rappresentazione in forma matriciale, come in *opt_hedging_model_matrices*. Come mostrato in Tabella 3, questa scelta ha permesso di ridurre significativamente i tempi di costruzione e risoluzione del problema. Di conseguenza, per tutte le analisi future adotteremo questo metodo.

Infine, all'interno della classe è stato implementato anche il metodo *evaluate_solution*, che consente di valutare l'efficacia della soluzione ottimale trovata su un insieme di scenari esterni, differenti da quelli utilizzati per la risoluzione del problema. Questo metodo restituisce la perdita/guadagno rispetto al target, il numero di opzioni riscattate e i dollari necessari da acquistare o vendere al prezzo spot per ogni scenario da valutare. Grazie a questo metodo, in seguito analizzeremo la qualità del modello di hedging e la sua capacità di affrontare scenari esterni.

5 Analisi di stabilità

In questa sezione riportiamo l'analisi che abbiamo condotto per determinare il numero ottimale di scenari da utilizzare al fine di ottenere una soluzione più stabile possibile. A tal fine, abbiamo fissato *num_scenarios* e abbiamo ottimizzato il modello 100 volte, utilizzando ogni volta un insieme di scenari differente. Così facendo, per ogni valore di *num_scenarios*, abbiamo ottenuto 100 campioni del valore ottimo della funzione obiettivo, *f*, e delle variabili decisionali, *eur_in_forward*, *eur_in_call[0]*, *eur_in_call[1]*, *eur_in_call[2]*.

I valori considerati per *num_scenarios* sono 1000, 5000, 10000, 20000 e 30000. Nelle Figure 1 e 2 sono riportate la distribuzione e la media campionaria dei valori ottenuti al variare del numero di scenari, rispettivamente per le variabili decisionali e per la funzione obiettivo.

Possiamo notare come all'aumentare del numero di scenari, le distribuzioni si concentrino maggiormente attorno alla media, presentando una deviazione standard sempre minore. Per quanto riguarda le medie campionarie di *eur_in_call[0]*, *eur_in_call[1]*, *eur_in_call[2]*, si nota una convergenza a valori trascurabili per *eur_in_call[0]* e *eur_in_call[2]* e a circa $1.36 \cdot 10^7$ per *eur_in_call[1]*, ossia l'opzione *at the money*, con una differenza tra i valori con 20000 e 30000 scenari poco rilevante. Il motivo per cui la call *in the money* non viene acquistata può essere il costo più elevato dato dallo strike

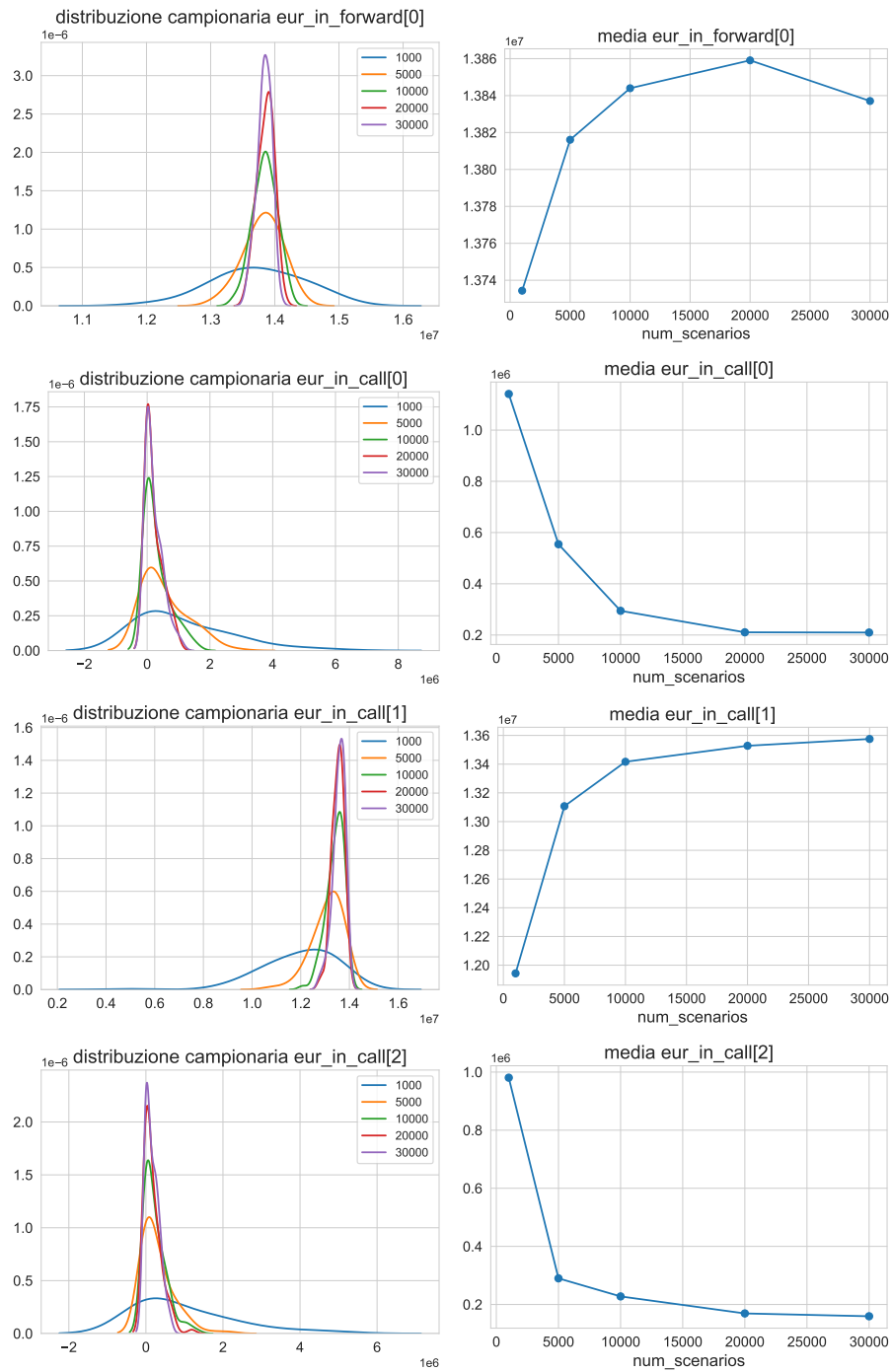


Figura 1: Distribuzione e media campionaria dei 100 campioni di *eur_in_forward*, *eur_in_call[0]*, *eur_in_call[1]*, *eur_in_call[2]*

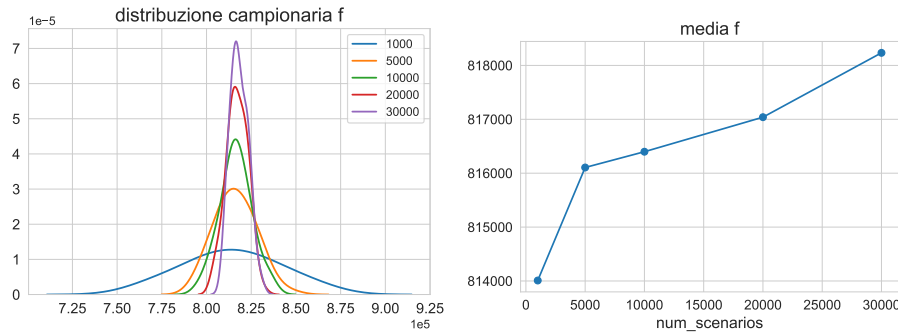


Figura 2: Distribuzione e media campionaria dei 100 campioni di f

Numero di scenari	Singola ripetizione(secondi)
1000	0.4
5000	2.5
10000	7.6
20000	22.4
30000	121.8

Tabella 4: Tempo impiegato per una ripetizione al variare del numero di scenari

conveniente, al contrario la call *out of the money* può essere trascurata a causa di uno strike poco appetibile.

Invece, i valori degli euro comprati in forward $eur_in_forward$ e della funzione obiettivo f si comportano diversamente. La media $eur_in_forward$ converge dal basso verso $1.38 \cdot 10^7$ per poi diminuire con 30000 scenari. La media di f sembra aumentare sempre in modo rilevante. Questi comportamenti possono anche essere ricondotti al fatto che vengono utilizzate solo 100 ripetizioni che può non essere una taglia rappresentativa.

Al di là delle ultime osservazioni sulle medie di $eur_in_forward$ e f , le distribuzioni campionarie suggeriscono che 20000 scenari possono essere sufficienti per una soluzione stabile non presentando rilevanti differenze rispetto all'utilizzo di 30000 scenari. Nella Tabella 4 vengono mostrati i tempi impiegati per ottenere i risultati di una singola ripetizione al variare del numero di scenari. Considerando che il tempo di calcolo con 30000 scenari è di circa 2 minuti, rispetto ai 22,4 secondi necessari per 20000 scenari, l'utilizzo di 20000 è il miglior compromesso tra stabilità e costo computazionale.

6 Impatto del grado di incertezza

Per studiare l'impatto del grado di incertezza, abbiamo risolto il modello diverse volte modificando prima il valore della volatilità in (1) e successivamente la deviazione

volatility	eur_in_forward[0]	eur_in_call[0]	eur_in_call[1]	eur_in_call[2]	CV@R
0.10	1.39e+07	10154	1.37e+07	0	3.53e+05
0.15	1.34e+07	924551	1.32e+07	0	5.98e+05
0.20	1.38e+07	0	1.38e+07	0	8.15e+05
0.25	1.37e+07	878475	1.29e+07	297236	1.05e+06
0.30	1.40e+07	508145	1.30e+07	0	1.25e+06

Tabella 5: Variabili decisionali e CV@R ottenuti al variare della volatilità

standard della distribuzione del volume in (2) e verificando come variano le variabili decisionali e il valore del CV@R ottimo.

6.1 Impatto della volatilità

I diversi valori considerati per la volatilità sono: 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30. I valori delle variabili decisionali e del CV@R ottimo ottenuti al variare della volatilità, sono riportati nella Tabella 5.

Le variabili decisionali mostrano una buona stabilità, indipendentemente dai valori di volatilità considerati. Infatti, in tutti i casi considerati, il modello suggerisce di acquistare contratti forward per un totale di circa 14 milioni di euro e opzioni call 1 per circa 13 milioni di euro. Invece, per quanto riguarda le altre due opzioni 0 e 2, il modello suggerisce di non acquistarle oppure di acquistarle ma per quantità di euro relativamente basse, tali da poter essere considerate trascurabili.

D'altra parte, come ci si aspetta, il valore del CV@R ottimo cresce significativamente all'aumentare della volatilità. Infatti, una maggiore volatilità comporta una distribuzione più ampia dei valori del tasso di cambio spot simulati, portando a scenari più estremi in entrambe le direzioni e dunque anche nella direzione negativa che determina il CV@R.

6.2 Impatto della varianza della distribuzione del volume

In modo simile, abbiamo verificato come varia la soluzione trovata al variare della varianza della distribuzione del volume di euro necessari. Per fare ciò, abbiamo mantenuto sempre una distribuzione triangolare, ma allargando progressivamente gli estremi della distribuzione. In particolare, usando la libreria *scipy* di Python, abbiamo generato gli scenari di volume da queste distribuzioni triangolari:

1. `sp.stats.triang(c=0.75, loc=17500*1000, scale=5000*1000);`
2. `sp.stats.triang(c=0.75, loc=15000*1000, scale=10000*1000);`
3. `sp.stats.triang(c=0.75, loc=10000*1000, scale=20000*1000);`

std	eur_in_forward[0]	eur_in_call[0]	eur_in_call[1]	eur_in_call[2]	CV@R
1.06e+06	1.84e+07	11809	3.39e+06	79220	1.27e+05
2.13e+06	1.68e+07	0	6.94e+06	0	3.59e+05
4.25e+06	1.36e+07	529208	1.34e+07	0	8.19e+05
6.38e+06	1.08e+07	0	2.05e+07	185345	1.27e+06
7.96e+06	9.61e+06	628152	2.56e+07	0	1.63e+06

Tabella 6: Variabili decisionali e CV@R ottenuti al variare della varianza della distribuzione di volume

4. `sp.stats.triang(c=0.75, loc=5000*1000, scale=30000*1000);`
5. `sp.stats.triang(c=0.75, loc=2500*1000, scale=37500*1000).`

I risultati ottenuti generando gli scenari con le diverse distribuzioni di volume considerate sono riportati in Tabella 6. In particolare, nella prima colonna, possiamo osservare la deviazione standard campionaria dei 20000 scenari di volume ottenuti con ciascuna distribuzione e nelle altre il valore delle variabili decisioni e del CV@R ottimo.

Con l'aumentare dell'incertezza relativa al volume di euro necessari, il modello suggerisce di ridurre l'acquisto di contratti forward, optando invece per l'acquisto di una quantità maggiore di opzioni call 1. Come nel caso precedente, le altre due opzioni call non sono consigliate.

Questo comportamento si giustifica con la maggiore flessibilità offerta dalle opzioni. Infatti, l'azienda ha la possibilità di decidere se esercitare le opzioni call in T , a differenza dei contratti forward che obbligano l'azienda a comprare gli euro al prezzo fissato in $t = 0$. Tale flessibilità consente, nel caso in cui il volume sia maggiore del previsto, di acquistare eventuali euro mancanti ai prezzi strike K_i , se vantaggiosi, esercitando le opzioni, oppure di non esercitarle nel caso in cui il volume sia inferiore al previsto. In scenari di bassa domanda, il contratto forward obbligherebbe l'azienda a comprare più euro del necessario, anche nel caso in cui il tasso di cambio scenda sotto il prezzo forward.

In conclusione, l'aumento dell'incertezza sul volume porta a soluzioni ottimali che prevedono un mix di derivati con un maggior numero di call e meno forward, in modo da adattarsi al meglio agli scenari osservati nel secondo stadio.

7 Impatto grado di avversione al rischio

Proseguiamo analizzando come i risultati variano al variare dell'avversione al rischio dell'azienda, rappresentata dal valore α . Abbiamo considerato i seguenti valori di α : 0.01, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25. Minore è α , più il CV@R viene calcolato solamente su scenari estremi e quindi è maggiore l'avversione al rischio.

Nella Figura 3 è mostrato l'andamento del CV@R e delle variabili decisionali al diminuire dell'avversione al rischio, ossia all'aumentare di α . Come ci si aspetta, il CV@R

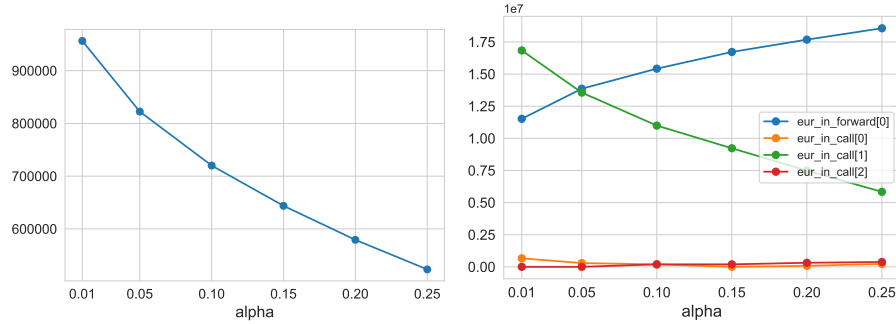


Figura 3: Valori ottimi del CV@R e delle variabili decisionali ottenute al variare di α .

diminuisce in quanto all'aumentare di α viene determinato da scenari progressivamente meno estremi e negativi. Il mix di derivati cambia al variare di α , in particolare le opzioni 0 e 2 rimangono trascurabili mentre l'opzione 1 viene comprata in quantità sempre minore compensata da un acquisto sempre maggiore di contratti forward.

La diminuzione dell'avversione al rischio, rende trascurabile la flessibilità concessa dalle opzioni e porta il modello a preferire contratti forward i quali non hanno un costo di sottoscrizione.

8 Risultati e valutazione out of sample

Concludiamo la nostra analisi riportando la soluzione proposta dal nostro modello e una sua valutazione *out of sample*. La strategia di hedging ottimale, rappresentando l'incertezza con 20000 scenari e utilizzando i dati della Tabella 1, è:

$$\begin{aligned} \text{eur_in_forward}[0] &= 13,906,015.40 \\ \text{eur_in_call}[0] &= 0.00 \\ \text{eur_in_call}[1] &= 13,712,565.42 \\ \text{eur_in_call}[2] &= 232,544.12 \end{aligned}$$

con un CV@R di 815451.23. Nella Figura 4 sono riportate la distribuzione campionaria della funzione di perdita (5) ottenuta valutando *in sample* e *out of sample* la soluzione ottima. Si nota come la distribuzione *out of sample* abbia un comportamento molto simile a quella *in sample* confermando l'adeguatezza della scelta di 20000 scenari e la robustezza della nostra soluzione.

Come possibile miglioramento per testare al meglio la robustezza della soluzione, consigliamo di generare scenari cambiando i parametri delle distribuzioni dei fattori di rischio e valutare su quest'ultimi la soluzione *out of sample*. In questo modo si può

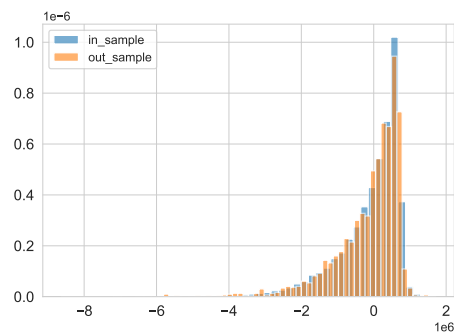


Figura 4: Valutazione *out of sample* della soluzione ottima.

valutare l'appropriatezza della strategia di hedging anche qualora i dati osservati al secondo stadio non rispecchiassero le distribuzioni dei dati *in sample*, che spesso possono essere stime affette da errori.