*Davide Pietrangeli*

**UNIVERSITÀ CAMPUS BIO-MEDICO DI ROMA**
FACOLTA' DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA DEI SISTEMI INTELLIGENTI

# MODELLI E METODI DI OTTIMIZZAZIONE STATISTICA

## INDICE

**TRACCIA:**

## Progetto 6

La Boeing deve costruire 5 centri di manutenzione aerea che servano l'area euro-asiatica. Il costo di costruzione di ogni centro è di 300 milioni di euro nell'area europea (tra 20°W e 40°E) e di 150 nell'area asiatica (tra 40°E e 160°E), come nella figura sotto. Ogni centro può servire 60 aviogetti/anno.


I centri dovranno servire gli aeroporti dove si concentrano i maggiori clienti Boeing, come dettagliato nella tabella sotto (nome dell'aeroporto, coordinate geografiche, numero atteso di aviogetti/anno che avranno bisogno di manutenzione).

| Aeroporto | Coordinate | | N. aviogetti |
|---|---|---|---|
| London Heathrow | 51°N | 0°W | 30 |
| Frankfurt | 51°N | 8°E | 35 |
| Lisboa | 38°N | 9°W | 12 |
| Zürich | 47°N | 8°E | 18 |
| Roma Fiumicino | 41°N | 12°E | 13 |
| Abu Dhabi | 24°N | 54°E | 8 |
| Moskva Sheremetyevo | 55°N | 37°E | 15 |
| Vladivostok | 43°N | 132°E | 7 |
| Sydney | 33°S | 151°E | 32 |
| Tokyo | 35°N | 139°E | 40 |
| Johannesburg | 26°S | 28°E | 11 |
| New Dehli | 28°N | 77°E | 20 |

Il costo totale di un centro di manutenzione è dato dal costo di costruzione sommato al costo atteso di servizio. Il costo di servizio di ogni aviogetto dipende linearmente dalla distanza che questo deve coprire per raggiungere il centro di manutenzione, con una costante di proporzionalità di 50 euro/Km. Si assume che la terra sia una sfera perfetta e che la distanza più breve tra due punti di coordinate geografiche ($\delta 1$, $\varphi 1$) e ($\delta 2$, $\varphi 2$) sia data da:

$$d(\delta_1, \varphi_1, \delta_2, \varphi_2) = 2r \text{ asin} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \sin^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)},$$

dove r, il raggio terrestre, è pari a 6371 *km*. Formulare un modello matematico per decidere dove localizzare i centri di manutenzione minimizzando i costi dell'operazione.

## 1. SOLUZIONI:

### 1.1 FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min\ 750000000 + \sum_{i=1}^{5} 150000000 * y_i + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{12} 50 * s_{ij} * 2 * 6731 ** asin\sqrt{sin^2\left(\frac{x_{i1}-x_{j1}}{2}\right) + \cos x_{i1} * \cos x_{j1} * sin^2\left(\frac{x_{i2}-x_{j2}}{2}\right)}$$

### 1.2 VINCOLI

$$\sum_{j=1}^{12} s_{ij} \leq 60 \quad i = 1, \dots, 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} s_{ij} = N.\ aviogetti_j \quad j = 1, \dots, 12$$

$$x_{i2} + 40 \leq 60 y_i \quad i = 1, \dots, 5$$

### 1.3 DOMINIO

$y_i \in \{0,1\}$ $\quad i = 1, \dots, 5$, variabili binarie

$-90 \leq x_{i1} \leq 90$ $\quad i = 1, \dots, 5$ , variabili continue

$-160 \leq x_{i2} \leq 20$ $\quad i = 1, \dots, 5$, variabili continue

$s_{ij} \geq 0$ $\quad i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 12$, variabili intere

### 1.4 VARIABILI

$$y_i = \begin{cases} 1\ se\ il\ centro\ i\ è\ nell'area\ europea \\ 0\ viceversa \end{cases}$$

$x_{i1} = coordinata\ 1\ del\ centro\ i$ (Nord-Sud)
$x_{i2} = coordinata\ 2\ del\ centro\ i$ (Est-Ovest)
$s_{ij} = numero\ di\ aviogetti\ dell'aeroporto\ j\ serviti\ dal\ centro\ i$

## 2. RELAZIONE:

La funzione obiettivo è quella di minimizzare i costi dell'operazione di localizzazione di centri di manutenzione aerea (costi di costruzione e costi attesi di servizio).

I costi di costruzione sono pari a €150.000.000 per ogni centro di manutenzione costruito nell'area asiatica, e €300.000.000 per ogni centro nell'area europea.
Il costo di costruzione totale può quindi essere scritto come €750.000.000 (caso in cui costruissi tutti e 5 i centri nell'area asiatica) + €150.000.000*Yi (incremento di €150.000.000 per ogni centro costruito nell'area europea) dove Yi, come mostrato in soluzione, è pari ad 1 se il centro è collocato nell'area europea, 0 se collocato in area asiatica.

Trattandosi di un vincolo di tipo logico, Yi è posto pari ad 1 o a 0 tramite l'utilizzo di un vincolo di Big-M ($x_{i2} + 40 \leq 60y_i \quad i = 1, \dots, 5$), che lega il valore di Yi alla longitudine del centro "i" (Xi2).

Il costo di servizio di ogni aviogetto dipende linearmente dalla distanza che questo deve coprire per raggiungere il centro di manutenzione, con una costante di proporzionalità di 50 €/Km.
Il totale di questi costi può, quindi, essere scritto come la sommatoria per ogni centro "i" e per ogni aeroporto "j" della costante di proporzionalità (50 €/Km) * il numero di aviogetti dell'aeroporto "j" serviti dal centro "i" (Sij) * la distanza tra centro ed aeroporto in questione approssimata come segue:

$$d(\delta_1, \varphi_1, \delta_2, \varphi_2) = 2r \operatorname{asin}\sqrt{\sin^2\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \sin^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)},$$

dove r (raggio terrestre) è pari a 6371 km e ($\delta 1$, $\varphi 1$), ($\delta 2$, $\varphi 2$) sono le coordinate geografiche del centro di manutenzione e dell'aeroporto.

Vi sono tre vincoli:

- Un limite massimo di aviogetti (60) che possono essere serviti da ciascun centro.
- Un numero preciso di aviogetti che richiedono manutenzione in ciascun aeroporto (con riferimento alla tabella degli aeroporti).
- Vincoli di Big-M, precedentemente introdotti.

Il primo vincolo è pari alla sommatoria per "j" che va da 1 a 12 (numero di aeroporti) delle variabili Sij minore o uguale a 60 per ogni centro di manutenzione "i".

Il secondo è pari alla sommatoria per "i" che va da 1 a 5 (numero di centri) delle variabili Sij posta uguale al valore richiesto dall' aeroporto "j".

Il vincolo di Big-M, scritto come $x_{i2} + 40 \leq 60y_i \quad i = 1, \dots, 5,$ assegna alla variabile Yi valore 1 nel caso in cui la seconda coordinata del centro i (Xi2) sia compresa tra 20W e 40E (tra 20 e -40) e 0 nel caso contrario (tra -40 e -160). Il valore di M è posto pari a 60 in quanto esso massimizza la funzione Xi2 + 40 per ciascun centro di manutenzione "i".

Per la modellizzazione del problema sono state scelte 4 classi di variabili: Yi, Sij, Xi1, Xi2.

Le variabili Yi sono variabili dicotomiche (il loro valore è pari a 0 o ad 1) che, come spiegato precedentemente, assumono valore 1 se e solo se un centro di manutenzione è collocato nell'aria europea (incremento del costo di costruzione pari a €150.000.000).

Le variabili Sij, rappresentanti il numero di aviogetti dell'aeroporto "j" manutenuti dal centro "i", sono variabili intere che hanno valore non negativo (lower bound = 0) e valore massimo che può esser posto pari a 40, in quanto nessun aeroporto richiede manutenzione per un numero di aviogetti maggiore (upper bound = 40).

Le variabili Xi1, indicanti la prima coordinata dell'i-esimo centro (latitudine), sono variabili continue che assumono valori compresi tra -90 e 90, dove il Nord è posto negativo ed il Sud positivo.

Le variabili Xi2, indicanti la seconda coordinata dell'i-esimo centro (longitudine), sono variabili continue che assumono invece valori compresi tra -160 e 20, dove l'Ovest è posto negativo e l'Est positivo.

La scelta di porre positivi l'Ovest ed il Sud anziché l'Est ed il Nord non comporta nessun cambiamento a livello di funzione obiettivo, in quanto la funzione coseno è una funzione pari: (cos(x) = cos(-x)), e la funzione seno è una funzione dispari: (sen(x)^2 = sen(-x)^2).

### 3. CONCLUSIONE:

Data la presenza di una funzione obiettivo non lineare e di vincolo di interezza sulle variabili Yi ed Sij, per la risuoluzione del problema di ottimizzazione tramite MATLAB, è stato scelto di utilizzare il solutore '*surrogateopt*'.

Qui di seguito si riportano lo script e la function finali dello studio (visibili in maniera più chiara nel file Matlab allegato):

1)

```
clear all
close all
clc
%Vettori delle coordinate degli aeroporti
C1 = [-51 -51 -38 -47 -41 -24 -55 -43 33 -35 26 -28];
C2 = [0 -8 9 -8 -12 -54 -37 -132 -151 -139 -28 -77];

%Vincoli di disuguaglianza:
% 1. Ciascun centro 'i' può servire al più 60 aviogetti
% 2. Vincoli di big M
A = [zeros(1,5), ones(1,12), zeros(1,58);
    zeros(1,17), ones(1,12), zeros(1,46);
    zeros(1,29), ones(1,12), zeros(1,34);
    zeros(1,41), ones(1,12), zeros(1,22);
    zeros(1,53), ones(1,12), zeros(1,10);
    -60, zeros(1,69), 1 0 0 0 0;
    0 -60 zeros(1,69), 1 0 0 0;
    0 0 -60 zeros(1,69), 1 0 0;
    0 0 0 -60 zeros(1,69), 1 0;
    0 0 0 0 -60 zeros(1,69), 1];
b = [60;60;60;60;60;-40;-40;-40;-40;-40];

%Vincoli di uguaglianza:
%1. Ciascun aeroporto necessita manutenzione ad un numero di aviogetti
%prestabilito
Aeq
=[zeros(1,5),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,
zeros(1,11),zeros(1,10);
    zeros(1,6),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,
zeros(1,10),zeros(1,10);
    zeros(1,7),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,
zeros(1,9),zeros(1,10);
    zeros(1,8),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,
zeros(1,8),zeros(1,10);
    zeros(1,9),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,
zeros(1,7),zeros(1,10);
zeros(1,10),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,
zeros(1,6),zeros(1,10);
```

```
zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,
zeros(1,5),zeros(1,10);
zeros(1,12),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,
zeros(1,4),zeros(1,10);
zeros(1,13),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,
zeros(1,3),zeros(1,10);
zeros(1,14),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,
zeros(1,2),zeros(1,10);
zeros(1,15),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,
zeros(1,1),zeros(1,10);
zeros(1,16),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zeros(1,11),1,zer
os(1,10)];

beq = [30;35;12;18;13;8;15;7;32;40;11;20];
lb = [zeros(1,65), -90 -90 -90 -90 -90 -160 -160 -160 -160 -160];
ub = [ones(1,5), ones(1,60).*40, 90 90 90 90 90 20 20 20 20 20];

options = optimoptions('surrogateopt','MaxFunctionEvaluations',5000);

[x,fval] = surrogateopt(@(X)
tesina_mmos_f_obj(X,C1,C2),lb,ub,[1:65],A,b,Aeq,beq,options)
```

2)

```
%Creo la funzione obiettivo del mio problema
%Il vettore di variabili X è posto uguale ad [Yi,Sij,Xi1,Xi2] ed è quindi
un
%vettore di dimensione 1x75 grazie alla trasformazione delle Sij in
variabili
%a singolo indice secondo la regola canonica (S1-1 S1-2 ... S1-12 S2-1
%S2-2 ...)
function f = fobj(X,C1,C2)
f = 0;

%Costo di costruzione
for i=1:5
    f = f + 150000000 + 150000000*(X(i));
end

%Costo atteso di servizio
vect_s = 5;
for i=1:5 %numero di centri
    for j=1:12 % numero di aeroporti
        vect_s=vect_s+1; %indice necessario per la trasformazione delle
Sij in variabili a singolo indice
        f = f + 50*X(vect_s)*2*6731*asin(sqrt((sind((X(i+65)-
C1(j))/2))^2+cosd(X(i+65))*cosd(C1(j))*(sind(X(i+70)-C2(j))/2)^2));
    end
```

```
end
end
```

Il risultato ottenuto ponendo il '*MaxFunctionEvaluations*' pari a 5000 è:

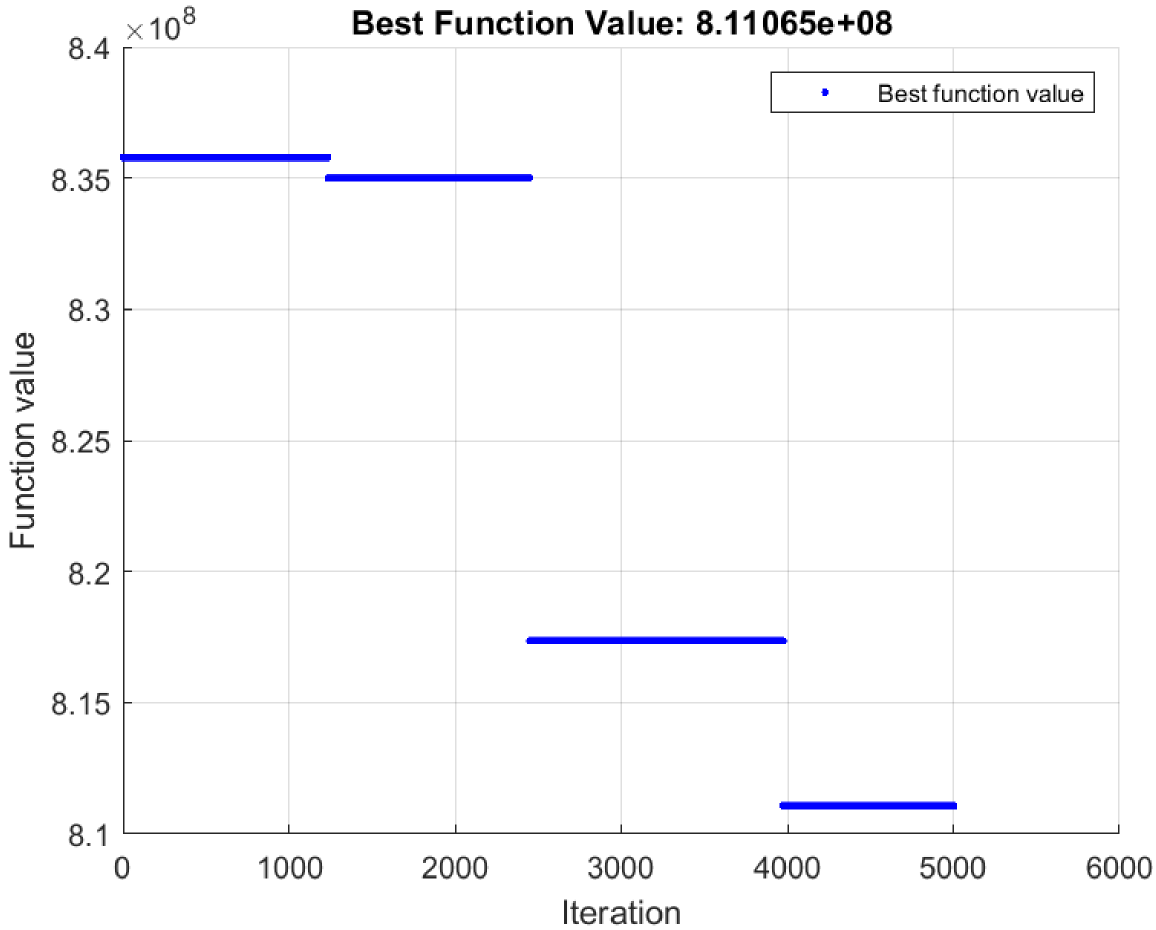
fval = €8.1106e+08

Yi = [ 0 0 0 0 0 ]

Sij = [ 29 0 7 0 13 0 2 0 0 9 0 0
0 35 0 0 0 0 0 0 0 8 0 17
1 0 5 0 0 0 0 0 32 2 0 0
0 0 0 18 0 0 0 3 0 0 0 0
0 0 0 0 0 8 13 4 0 21 11 3 ]

Xi1=[-74.7509765625000 -37.1337890625000 34.5849609375000 18.6767578125000 1.36230468750000 ] (negativo Nord, positivo Sud)

Xi2 =[-66.4404296875000 -150.639648437500 -119.086914062500 -47.2802734375000 -151.782226562500](negativo Est, positivo Ovest)




È chiaro come, aumentando il valore del '*MaxFunctionEvaluations*', a discapito di un maggior tempo di elaborazione, si otterrebbe nell'ipotesi peggiore un risultato pari al precedente.