5,5 4. Sia $f$ la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata in base canonica alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3 a) Dire per quali valori di $k$ $f$ è un prodotto scalare e giustificare la risposta.

2,5 b) Scelto $k = 2$ e $W := \mathcal{L}((2,0,-1))$, calcolare $W^\perp$ rispetto a $f$.

a) Affinché $f$ sia un prodotto scalare, deve essere definita positiva:

$\det M = 5K - 1 - 4 = 5K - 5 > 0 \Rightarrow K > 1$

$\det M' = K - 1 \geq 0 \Rightarrow K > 1$ con $M' \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & K \end{pmatrix}$

$\det M'' = 1 > 0$ OK con $M'' (1)$.

Pertanto $f$ è un prodotto scalare se e solo se $K > 1$.

Sr

b) $M|_{K=2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$W^\perp$ è l'insieme degli elementi non appartenenti a $W$ ?
aventi prodotto scalare nullo. ? ?

La forma bilineare associata a $M$, ovvero il prodotto scalare, è $f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 5x_3y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 +$
$+ y_1x_2 + y_1x_3 + y_3x_2 + y_2x_3$

$W^\perp = \{(a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{R}^3 : f((a_0,a_1,a_2),(2,0,-1)) = 0\} =$

$= \{(a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{R}^3 : 2a_0 - 5a_2 - a_0 + 2a_1 + 2a_2 - a_1 = 0\} =$

$= \{(a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{R}^3 : a_0 + a_1 - 3a_2 = 0\}$ Sr

(*) Se consideriamo, ad esempio, $V = W_1 \oplus W_2$, e pensassimo $\dim V = 3$, $\dim W_1 = 1$ e $\dim W_2 = 2$ che soddisfa le ipotesi; $W_1 \not\subset W_2$ perché nella somma diretta $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Sr

Esame di GEOMETRIA B - prof. Lucia Alessandrini - 20.1.2010

| 8 | 5 | 6 | 5 | 5,5 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|

Cognome e nome: VALERIANI | DAVIDE

Matricola e Corso di Laurea: 190883 | ING. INFORMATICA

*Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)*

+ (X) (F) $W = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] / p(1) = 0\}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[t]$.
+ (X) (F) Se una matrice è simile a una matrice invertibile, è anche essa invertibile.
+ (X) (F) Se $T$ è un operatore ortogonale su uno spazio euclideo, e $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di $V$, anche $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base ortonormale di $V$.
+ (V) (X) Se $L : V \to W$ è una applicazione lineare, e $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di $V$, allora $(L(v_1), \dots, L(v_n))$ è una base di $W$
+ (V) (X) Un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$ o è una rotazione, o è una traslazione.
+ (V) (X) $W$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $V$ se e solo se $\forall w_1, w_2 \in W$, anche $w_1 + w_2 \in W$.
+ (X) (F) Su uno spazio euclideo, una forma bilineare simmetrica si diagonalizza in base ortonormale.
+ (X) (F) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è una matrice del cambiamento di base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_1[x]$.

*Risolvere su questo foglio.*

1. Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e siano $W_1, W_2$ suoi sottospazi. Considerare le seguenti affermazioni; se sono vere, dimostrarle, se sono false, fornire un controesempio:

3 a) $dimW_1 < dimW_2 \Longrightarrow W_1 \subset W_2$ F

3,5 b) $W_1 \subset W_2 \Longrightarrow dimW_1 < dimW_2$. V

b) VERA

Infatti, se $\dim V = n$, ad esempio, $\dim W_2 \leq \dim V$ (da teoria), quindi $\dim W_2 \leq n$, essendo $W_2$ un sottospazio vettoriale di $V$.
Analogamente, essendo $W_1$ strettamente contenuto in $W_2$, la sua dimensione non potrà che essere minore di quella di $W_2$. In parole semplici, $W_1 \subset W_2$ vuol dire che in $W_1$ ci sono meno elementi di $W_2$, pertanto la dimensione è minore (ci sono solo alcuni elementi di $W_2$) quan

a) FALSA: infatti, $W_1 \subseteq V$ e $W_2 \subseteq V$ per cui potrebbe essere che contengano elementi diversi di $V$. (*)

3 2. Considerare l'operatore $L : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ dato da $L(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3) = a_1+a_2t+a_3t^2+a_0t^3$.

3 a) Calcolare $M_C(L)$.

3 b) Dire se $L$ è suriettiva e scrivere una base per $ImL$.

a) La matrice $M_C(L)$, con $C=(1,t,t^2,t^3)$, deve essere tale che

$$(a_0,a_1,a_2,a_3)\cdot M_C(L)\cdot \begin{pmatrix}1\\t\\t^2\\t^3\end{pmatrix} = L(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3)=a_1+a_2t+a_3t^2+a_0t^3$$

$L(e_1)= t^3 = a+bt+ct^2+dt^3 \Rightarrow d=1 \qquad (0,0,0,1)$

$L(e_2)= 1 = a+bt+ct^2+dt^3 \Rightarrow a=1 \qquad (1,0,0,0)$

$L(e_3)= t = a+bt+ct^2+dt^3 \Rightarrow b=1 \qquad (0,1,0,0)$

$L(e_4)= t^2 = a+bt+ct^2+dt^3 \Rightarrow c=1 \qquad (0,0,1,0).$

La matrice $M_C(L)$ diventa: $M_C(L)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

b) Affinché $L$ sia suriettiva, deve essere

$\dim Im L = \dim \mathbb{R}_3[t] = 4$

Questo è vero se una base di $ImL$ è formata da 4 vettori.
Trovo una base. Prendo i 4 vettori della base canonica che so essere indipendenti. Essi generano $ImL = \mathbb{R}_3[t]$ essendo $a_1+a_2t+a_3t^2+a_0t^3$ un generico polinomio.

Pertanto, posso affermare che $L$ è suriettiva e una base per $ImL$ è $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Infatti, $ImL = \mathbb{R}_3[t]$ come si vede facilmente essendo $a_1+a_2t+a_3t^2+a_0t^3$ un generico elemento di $\mathbb{R}_3[t]$.

6

5 3. Dimostrare che il determinante di una matrice unitaria è un numero complesso di modulo 1.

Una matrice unitaria è una matrice $A$ per cui vale $A^* = A^{-1}$ ovvero $A\cdot A^* = Id$ essendo $A^* = \overline{A}^T$.

Una matrice unitaria è diagonalizzabile, per cui è possibile scrivere una matrice $D=\begin{pmatrix}\sim&0&0&\dots&0\\0&\sim&0&\dots&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\dots&0&\sim\end{pmatrix}$.

che però non è A

Il $\det D$ è il prodotto degli elementi della diagonale.
Ma se $D\cdot D^* = Id$, essendo $D = D^*$, necessariamente deve essere che $|\det D| = 1$, visto che il $\det Id = 1$.

In particolare, se $D$ è scritta in base ortonormale, la norma delle sue colonne (vettori che le compongono) deve essere 1.

$\det(D\cdot D^*) \underset{\uparrow}{=} \det D \cdot \det D^* = (\det D)^2 = 1$ da cui deriva

formula di Binet

$|\det D| = 1$ dove $D$ può ovviamente essere un numero complesso in caso $\det D$ negativo.

Essendo $D$ la diagonalizzazione di $A$, ciò che vale per lei vale anche per $A$.

$\det D = \det P^{-1}AP = \det A$
ma bisogna dirlo.