CAPITOLO II

ANALISI DEI SISTEMI LINEARI

$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$
$x(t_0) = x_0$

$\Rightarrow x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ LINEARE RISPETTO A STATO E INGRESSO

$= \varphi(t, t_0, x_0, 0) + \varphi(t, t_0, 0, u)$

- Introduzione all'analisi dei sistemi lineari
- Evoluzione libera dei sistemi lineari a tempo continuo
  - caso non stazionario
  - caso stazionario
- Evoluzione libera dei sistemi lineari a tempo discreto
  - caso non stazionario
  - caso stazionario
- Evoluzione totale dei sistemi lineari a tempo continuo
  - caso non stazionario
  - caso stazionario
- Evoluzione totale dei sistemi lineari a tempo discreto
  - caso non stazionario
  - caso stazionario (digressione: la trasformata Z)

- Sistemi a dati campionati
- Calcolo dell'integrale dell'esponenziale di matrice
- Stabilità dei sistemi lineari stazionari
- Equivalenza di sistemi lineari e stazionari.

ANALISI DEI SISTEMI LINEARI

Per i sistemi (dinamici) lineari vale:

EV. LIBERA — EV. FORZATA

$$\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \varphi(t, t_0, x_0, 0) + \varphi(t, t_0, 0, u(\cdot))$$

PER LINEARITÀ E SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$$\gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \gamma(t, t_0, x_0, 0) + \gamma(t, t_0, 0, u(\cdot))$$

SOLUZIONE DI $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u$

Ovvero:

Evoluzione (dello stato o dell'uscita) = evoluzione libera + evoluzione forzata

Studieremo ora l'evoluzione libera e l'evoluzione forzata per sistemi non stazionari e per sistemi stazionari, sia a tempo continuo che a tempo discreto.

EVOLUZIONE LIBERA DEI SISTEMI LINEARI A TEMPO CONTINUO

CASO NON STAZIONARIO

$u(t) = 0$

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}$$

(evoluzione libera → → ingresso nullo)

- l'insieme delle soluzioni dell'eq.ne di stato omogenea è uno s.v. su $\mathbb{R}$ → ∞ SOLUZIONI
- nel momento in cui fisso le condizioni al contorno, la soluzione è definita unicamente (UNICAMENTE) ∃! SOLUZIONE

- $x(\cdot) = 0$ è la soluzione "ovvia" dell'eq.ne di stato omogenea:

  sia $x(\cdot)$ una soluzione, se $\exists\, t'$ tale che

  $$x(t') = 0 \implies x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

LA SOLUZIONE NULLA E' UNICA, NON POSSONO ESISTERE ALTRE TOCCANDO LO ZERO

(infatti sto cercando la soluzione unica e parto dello stato iniziale $x(t') = 0$ ⟶ la soluzione è $x(t) = 0$ $\forall t > t'$ ma questo è vero anche "all'indietro", cioè per $t < t'$)

SE PRENDO $x_1(t) \neq x_2(t)$ SOLUZIONI CHE [illegible] PUNTO $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ AVREI $\tilde{x}(t) = x_1(t) - x_2(t)$ $\tilde{x}(t_0) = 0$ ⇒ CASO DI PRIMA

Definizione di MATRICE DI TRANSIZIONE DELLO STATO

La soluzione (unica) dell'eq.ne differenziale matriciale:

CONDIZIONI AL CONTORNO

$$\boxed{\dot{X}(t) = A(t)\,X(t) \quad , \; X(t_0) = I_n}$$

è $\Phi(t,t_0)$, matrice di transizione dello stato. $\Phi(t,t_0) \in M^{n \times n}$

TEOREMA (NEI SISTEMI TEMPO CONTINUI)

$\Phi(t,t_0)$ è NON SINGOLARE $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$
CIOÈ INVERTIBILE

Dimostrazione:

$\Phi(t,t_0) = [\,\xi_1(t,t_0), \dots, \xi_n(t,t_0)\,]$
le colonne di $\Phi(t,t_0)$ sono le sol. dell'eq.ne diff.le matriciale

$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t)$ con condizioni al contorno: $X(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (prima colonna)

$\vdots$

$X(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ultima colonna)

$$\dot{\xi}_i(t,t_0) = A(t)\,\xi_i(t,t_0) \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

e con $\xi_i(t_0,t_0) = \vec{e}_i$ → versore i-esimo

se per assurdo $\Phi(t,t_0)$ fosse singolare, allora $\exists\, \bar{t} \in \mathbb{R}$ e $\exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$ $i = 1,\dots,n$ t.c.:

$$\alpha_1 \xi_1(\bar{t},t_0) + \dots + \alpha_n \xi_n(\bar{t},t_0) = 0$$

(cioè le colonne di $\Phi(t,t_0)$ sono lin. dipendenti)

$$\eta(t) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \xi_i(t,t_0)$$

POSSO PRENDERE QUESTA SOLUZIONE, ESSENDO UNA COMBINAZIONE LINEARE DI SOLUZIONI $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

$\Rightarrow \quad \dot{\eta} = A(t)\,\eta$ (per la linearità)

ma $\eta(\bar{t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta(t) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$

$\bar{t}$ ↑ istante iniziale — per l'unicità delle soluzioni

$\Rightarrow \eta(t_0) = 0$

$\eta(t_0, t_0)$ = CONDIZIONE AL CONTORNO

$$\text{ma } \eta(t_0) = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\xi_i(t_0,t_0) = \vec{e}_i} \neq 0$$

$\square$

COROLLARIO

L'insieme delle soluzioni dell'eq. ne di stato omogenea è uno sp. vettoriale di dimensione n.

Le colonne di $\Phi(t, t_0)$ sono una base di questo sp. vettoriale ed ogni singola soluzione è esprimibile come una combinazione lineare delle colonne di $\Phi(t, t_0)$: al variare delle condizioni al contorno, fisso $x(t_0) = x_0$ e la soluzione unica sarà una comb. lineare delle colonne di $\Phi(t, t_0)$. I coefficienti di questa combinazione lineare sono individuati dalla scelta dello stato iniziale x_0.

La soluzione dell'eq. ne di stato omogenea è esprimibile:

$$\boxed{x(t) = \phi(t, t_0)\, x_0}$$

INFATTI, SE $t = t_0$ $\phi(t_0, t_0) = I$
$x(t_0) = x_0$.

cioè $\boxed{x(t) = \phi(t, t_0)\, x(t_0)}$

$x(t_0) = \phi(t_0, t)\, x(t)$

- per l'invertibilità (della matrice Φ)

$$\boxed{x(t_0) = \Phi^{-1}(t, t_0)\, x(t)}$$

QUESTO MI PERMETTE DI TRASLARE ... TEMPO.

PROPRIETÀ:

QUINDI TROVARE L'INVERSA

- $\underline{\Phi(t, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t) \quad \forall\, t, t_0 \in \mathbb{R}}$

(infatti: $x(t) = \phi(t, t_0)\, x(t_0)$ e
$x(t_0) = \phi(t_0, t)\, x(t) \Rightarrow x(t) = \phi^{-1}(t_0, t)\, x(t_0)$
→ posso vedere t_0 come variabile e x come stato iniziale fisso...

quindi $\Phi(t, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t)$)

COMPONIBILE

- $\underline{\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\, \Phi(t_1, t_0) \quad \forall\, t, t_1, t_0 \in \mathbb{R}}$

(infatti: $x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\, x(t_0)$
$x(t) = \Phi(t, t_1)\, x(t_1) \Rightarrow x(t) =$

$= \Phi(t, t_1) \cdot \Phi(t_1, t_0)\, x(t_0) \ldots$)

7. Definite le sequenze di Peano - Baker:

MODO RICORSIVO ↓ SI FA CON MATLAB

$$\begin{cases} \Phi_0(t,t_0) = I \\ \Phi_i(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,\Phi_{i-1}(\tau,t_0)\,d\tau \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots$$

allora, si può dim. che:

$$\lim_{i \to +\infty} \Phi_i(t,t_0) = \Phi(t,t_0) \quad \text{(uniformemente)}$$

DIMOSTRAZIONE: (cenno)

$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad x(t_0) = x_0$ equivale

all'eq. ne integrale: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau$

col Teo. del punto fisso (...) voglio un punto che soddisfa la $x = T(x)$

FUNZIONALE

$$x_0 \longrightarrow x_1 = T(x_0)$$
$$x_i = T(x_{i-1}) \quad i = 1, 2, \ldots$$
$$x_i \longrightarrow x \quad \text{per } i \to +\infty$$

abbiamo $\dot{X} = A(t)X$

$$X(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)X(\tau,t_0)\,d\tau$$

e lo vedo come $\longrightarrow$ $X(t) = T(X(t))$

$$X_0(t) = I$$

(...)

DIGRESSIONE (le funzione di matrice)

Si consideri $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (σ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) sviluppabile in serie di potenze:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad \text{TAYLOR}$$

Definizione di FUNZIONE DI MATRICE:

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\sigma \in \mathbb{C}^{n \times n}$) QUADRATA!

$$\boxed{f(A) := \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i}$$

Nota: $A \cdot f(A) = f(A) \cdot A$ (propr. matrici)

Elenchiamo alcuni metodi per il calcolo di $f(A)$:

1) troncamento della serie infinita
2) metodo del polinomio interpolatore
3) metodo con la forma di Jordan

Vediamo ora in dettaglio questi metodi (a parte il primo che è ovvio!)

Metodo del polinomio interpolatore

Sia $m(\lambda)$ il polinomio minimo di A:

$$m(\lambda) = \lambda^{\ell} + \alpha_{\ell-1}\lambda^{\ell-1} + \alpha_{\ell-2}\lambda^{\ell-2} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

$\ell := \deg m(\lambda)$ GRADO POLINOMIO MINIMO

Da $m(A) = 0$ otteniamo

$$A^{\ell} = -\alpha_{\ell-1}A^{\ell-1} - \alpha_{\ell-2}A^{\ell-2} - \dots - \alpha_1 A - \alpha_0 I$$ COMBINAZIONE LINEARE

moltiplicandola per A^k:

$$A^{\ell+k} = -\alpha_{\ell-1}A^{\ell+k-1} - \alpha_{\ell-2}A^{\ell+k-2} - \dots - \alpha_1 A^{k+1} - \alpha_0 A^k$$

$k = 0, 1, 2 \dots$

quindi:

$$\boxed{f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i = \sum_{i=0}^{\ell-1} \gamma_i A^i}$$

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ le radici distinte di $m(\lambda)$:

MOLTEPLICITÀ

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\ell_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_h)^{\ell_h}.$$

Analogamente a sopra:

$$\lambda_j^{\ell} = -\alpha_{\ell-1}\lambda_j^{\ell-1} - \dots - \alpha_1 \lambda_j - \alpha_0$$

$$\lambda_j^{l+k} = -\alpha_{l-1}\lambda_j^{l+k-1} - \ldots - \alpha_1 \lambda_j^{k+1} - \alpha_0 \lambda_j^{k}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$f(\lambda_j) = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i \lambda_j^i \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, h$$

I coefficienti $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$ sono incogniti:

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_h) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{l-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{l-1} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_h & \lambda_h^2 & \ldots & \lambda_h^{l-1} \end{bmatrix}}_{\text{matrice } h \times l \text{ di rango massimo di Vandermonde}} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

$h \rightarrow$ RADICI

$l \rightarrow$ GRADO

POLINOMIO MINIMO

Se $h = l$ si risolve il sistema di Vandermonde per ottenere l'unica soluzione $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1})$

<u>Nota:</u>

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \not\equiv \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i x^i =: g(x)$$

l'uguaglianza vale solo quando $x = \lambda_j$

$j = 1, \dots, h$

$$f(\lambda_j) \equiv g(\lambda_j)$$

Nel caso (più complesso) in cui le radici non sono tutte distinte ($h < l$) si avrà:

λ_j di molteplicità l_j : $\sum_{j=1}^{h} l_j = l$

$$\begin{cases} f(\lambda_j) = g(\lambda_j) \\ D f(\lambda_j) = D g(\lambda_j) \\ \dots \\ D^{l_j-1} f(\lambda_j) = D^{l_j-1} g(\lambda_j) \end{cases} \qquad j = 1, \dots, h$$

da cui si ricava:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad P_A(\lambda) = (\lambda+1)^2 \quad m(\lambda) = (\lambda+1)^2$ PERCHÈ BLOCCHETTO DI DIMENSIONE 2

$e^{At} = \sum_{i=0}^{1} \gamma_i A^i = \gamma_0 I + \gamma_1 A$

$$\begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

CALCOLO INVERSA $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$

$\gamma_0 = e^{-t} + te^{-t}$

$\gamma_1 = te^{-t}$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \gamma_0 - \gamma_1 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_0 - \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
f(\lambda_1) \\
D f(\lambda_1) \\
\vdots \\
D^{l_1-1} f(\lambda_1) \\
\hline
f(\lambda_2) \\
D f(\lambda_2) \\
\vdots \\
\hline
D^{l_h-1} f(\lambda_h)
\end{bmatrix}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\
0 & 1 & 2\lambda_1 & \dots & (l-1)\lambda_1^{l-2} \\
 & & & & \\
 & & & & \dfrac{(l-1)!}{(l_1-1)!}\lambda_1^{l-l_1} \\
\hline
1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{l-1} \\
0 & 1 & 2\lambda_2 & \dots & (l-1)\lambda_2^{l-2} \\
 & & & & \\
\hline
0 & \dots & & & \dfrac{(l-1)!}{(l_h-1)!}\lambda_h^{l-l_h}
\end{bmatrix}}_{\text{matrice generalizzata di Vandermonde}}
\cdot
\begin{bmatrix}
\gamma_0 \\
\gamma_1 \\
\vdots \\
\\
\vdots \\
\gamma_{l-1}
\end{bmatrix}
$$

risolviamo il sistema generalizzato di Vandermonde come:

$$\rightarrow v = V\gamma \quad \text{da cui} \quad \gamma = V^{-1} v$$

$$\gamma_i = d_{i1} v_1 + d_{i2} v_2 + \dots + d_{il} v_l$$

dove $i = 0, 1, \ldots, l-1$

$$f(A) = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i A^i = \sum_{i=0}^{l-1} (d_{i1} v_1 + d_{i2} v_2 + \ldots + d_{il} v_l) A^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1} \left(d_{i1} v_1 A^i + d_{i2} v_2 A^i + \ldots + d_{il} v_l A^i \right)$$

$\Rightarrow$ {elemento i-j della matrice $f(A)$} $=$

$$= \xi_{ij1} v_1 + \xi_{ij2} v_2 + \ldots + \xi_{ijl} v_l$$

ξ_{ijk} dipendono solo da A

v_i dipendono da A e <u>$f(\cdot)$, f. ne di mat.</u>

$$v := \left[\underbrace{f(\lambda_1)} \ldots D^{l_1 - 1} f(\lambda_1) \; f(\lambda_2) \ldots \ldots D^{l_h - 1} f(\lambda_h) \right]^T$$

è v_1 ecc...

Metodo con le forme di Jordan

$$J = T^{-1} A T \quad \text{da cui} \quad A = T J T^{-1}$$

$$A^i = T J^i T^{-1} \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(A) = T f(J) T^{-1}$$

$$f(J) = c_0 I + c_1 J + c_2 J^2 + \dots + \dots$$

$$J = \begin{bmatrix} B_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & B_{1,k_1} & & & & \\ & & & B_{21} & & & \\ & O & & & \ddots & & \\ & & & & & B_{h,1} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & B_{h,k_h} \end{bmatrix}$$

$$f(J) = \begin{bmatrix} f(B_{11}) & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & f(B_{1,k_1}) & & & \\ & & & f(B_{21}) & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & f(B_{h,k_h}) \end{bmatrix}$$

$$B_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$i = 1, \dots, h$
$j = 1, \dots, k_i$
matrice $q_{i,j} \times q_{i,j}$

$$f(B_{i,j}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2} f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(q-1)!} f^{(q-1)}(\lambda_i) \\ 0 & f(\lambda_i) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} f''(\lambda_i) \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Il calcolo di $f(A)$ con le forme di Jordan conferma quanto visto prima col metodo del polinomio interpolante: ogni elemento di $f(A)$ è una combinazione lineare di:

$$f(\lambda_1), \dots, D^{l_1 - 1} f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots\dots, D^{l_h - 1} f(\lambda_h)$$

<u>Infatti vale la seguente proprietà del polinomio minimo in rapporto alle forme di Jordan</u>:

se $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_h)^{k_h}$ è il polinomio minimo, allora

$$l_i = \max_j \left\{ q_{i,j} : B_{i,j} \in \mathbb{R}^{q_{ij} \times q_{ij}} \right\}$$

ESEMPIO:

Sapendo solo che $p(\lambda) = (\lambda - 3)^4$, la forma di Jordan può essere:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ecc...}$$

ma se so anche che $m(\lambda) = (\lambda - 3)^3$ allora ~~sicuramente~~ la forma di Jordan è:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

CASO STAZIONARIO

TOLGO LA DIPENDENZA DAL TEMPO DA A e C

Analizziamo l'evoluzione libera dei sistemi lineari a tempo continuo, stazionari.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}, \quad x(0) = x_0$$

PRENDO $t_0 = 0$

la matrice di transizione è $\Phi(t,0)$:

$$x(t) = \Phi(t,0)\,x_0$$

Dalla sequenza di Peano-Baker:

$$\Phi_0(t,0) = I$$

$$\Phi_1(t,0) = I + \int_0^t A\, d\tau = \underbrace{I}_{\text{MATRICE } n\times n} + \underbrace{At}_{\text{SCALARE}}$$

$$\Phi_2(t,0) = I + \int_0^t A(I + A\tau)\, d\tau =$$

$$= I + At + A^2 \frac{t^2}{2}$$

...

$$\Phi_i(t,0) = I + At + A^2\frac{t^2}{2} + A^3\frac{t^3}{3!} + \dots + A^i\frac{t^i}{i!}$$

PER $i \to \infty$ CONVERGO ALLA SOLUZIONE

...

$$\boxed{\Phi(t,0) = I + At + \dots + A^i\frac{t^i}{i!} + \dots \triangleq e^{At}}$$

ESPONENZIALE DI MATRICE ← expm(A)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} \triangleq e^{At}$$

PROPRIETÀ DI e^{At}

1. $e^{At_1} e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)} \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

2. $A e^{At} = e^{At} A \quad \forall t \in \mathbb{R}$

3. $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ SEMPRE INVERTIBILE

4. se $AB = BA$ allora $e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

Cenni di dimostrazioni:

1. Scomponendo:

$$\left(I + At_1 + \frac{1}{2}A^2t_1^2 + \dots\right) \cdot \left(I + At_2 + \frac{1}{2}A^2t_2^2 + \dots\right) =$$

$$= I + At_2 + \frac{1}{2}A^2t_2^2 + \dots + At_1 + A^2t_1t_2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{2}A^2t_1^2 + \dots = I + A(t_1+t_2) + \frac{1}{2}A^2t_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}A^2t_2^2 + A^2t_1t_2 + \dots = e^{A(t_1+t_2)}$$

analogo a sopra.

3. $I \stackrel{?}{=} (e^{-At})(e^{At})$

$$I = \left(I - At + \frac{A^2t^2}{2!} - \frac{A^3t^3}{3!} + \dots\right)\left(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots\right) = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots$$

$$\dots - At - A^2t^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots = \text{semplificando}$$

tutto $= I$

4. analogo a sopra (per esercizio)

- Metodi per il calcolo di e^{At}:

oltre ai metodi generali visti precedentemente per il calcolo di funzione di matrice (polinomio interpolante, forma di Jordan, ecc...) è possibile l'uso dell'<u>ANTITRASFORMATA DI LAPLACE</u>:

$$\boxed{e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]}$$

e^{At} è la funzione di matrice dell'esponenziale scalare $f(x)=e^{xt}$:

$$D f(x) = t e^{xt},\ D^2 f(x) = t^2 e^{xt},\ D^3 f(x) = t^3 e^{xt}, \dots$$

Il calcolo di e^{At} (per esempio mediante polinomio interpolante) evidenzia che <u>ogni elemento di e^{At} è una combinazione lineare di</u>:

$$f(\lambda_1), \dots, D^{l_1-1} f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, D^{l_2-1} f(\lambda_2), \dots$$
$$\dots D^{l_R-1} f(\lambda_R)$$

~~ovvero~~:

$$\underbrace{e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{l_1-1} e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{l_2-1} e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_R t}, \dots, t^{l_R-1} e^{\lambda_R t}}_{\text{MODI DI } e^{At}}$$

in conclusione:

- $\underline{x(t) = e^{At} x_0}$ evoluzione libera dello stato

- $\underline{y(t) = C e^{At} x_0}$ evoluzione libera dell'uscita

$x(t) = \Phi(t,t_0)\, x(t_0)$ CASO NON STAZIONARIO $y(t) = C(t)\, \Phi(t,t_0)\, x(t_0)$

$x(t) = e^{At} x_0$ CASO STAZIONARIO $y(t) = C(t)\, e^{At} x_0$

EVOLUZIONE LIBERA DEI SISTEMI LINEARI A TEMPO DISCRETO

CASO NON STAZIONARIO

$$\Sigma \begin{cases} x(k+1) = A(k)\,x(k), & x(k_0) = x_0 \\ y(k) = C(k)\,x(k) \end{cases}$$

$$x(k_0+1) = A(k_0)\,x(k_0) = A(k_0)\,x_0$$

$$x(k_0+2) = A(k_0+1)\,x(k_0+1) = A(k_0+1)\,A(k_0)\,x_0$$

$$x(k_0+3) = A(k_0+2)\,A(k_0+1)\,A(k_0)\,x_0$$

....

con $i \in \mathbb{N}$:

$$x(k_0+i) = A(k_0+i-1)\,A(k_0+i-2)\cdot\ldots\cdot A(k_0)\,x_0$$

se $k = k_0 + i$

$$x(k) = A(k-1)\,A(k-2)\cdot\ldots\cdot A(k_0)\,x_0$$

non ho problemi di esistenza: c'è per forza ed è <u>unica</u>: la posso costruire

MI PERMETTE DI PASSARE DALL'ISTANTE k_0 ALL'ISTANTE k

in questo modo!) -

Si definisce la **MATRICE DI TRANSIZIONE**:

$$\Phi(k,k_0) := \begin{cases} A(k-1)A(k-2)\cdots A(k_0) & \text{se } k>k_0 \\ I & \text{se } k=k_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(k) = \Phi(k,k_0)x_0$$

$y(k) = C(k)\,\Phi(k,k_0)\,x(k_0)$

NON SEMPRE INVERTIBILE (A DIFFERENZA DEL TEMPO CONTINUO)

- La matrice di transizione è soluzione dell'eq.ne matriciale alle differenze:

$$X(k+1) = A(k)\,X(k), \quad X(k_0) = I$$

- $\Phi(k,k_0)$ è **NON SINGOLARE** se e solo se le matrici $A(k-1), A(k-2), \dots, A(k_0)$ sono tutte non singolari. (differenza importante rispetto ai sistemi tempo continuo). Infatti:

$$\det \Phi(k,k_0) = \det A(k-1) \cdot \det A(k-2) \cdots \cdots \det A(k_0)$$

SE NON È INVERTIBILE NON POSSO FARE LA RICOSTRUZIONE ALL'INDIETRO

PROPRIETA' di $\Phi(k, k_0)$:

1. Se $\Phi(k,k_0)$ è non singolare

vale: $\boxed{\Phi(k,k_0) = \Phi^{-1}(k_0,k)}$ $\forall k, k_0 \in \mathbb{Z}$

(nota: se $k > k_0$, allora $\Phi(k_0,k)$ è una "ricostruzione all'indietro" ...)
(Dimostrazione a seguire)

2. $\Phi(k,k_0) = \Phi(k,k_1)\,\Phi(k_1,k_0)$

con $k \geq k_1 \geq k_0$

Dimostrazione della proprietà N. 1 :

$$\Phi(k,k_0) = \begin{cases} A(k-1)A(k-2)\dots A(k_0) & k>k_0 \\ I & k=k_0 \end{cases}$$

$x(k) = \phi(k,k_0)x_0 = \phi(k,k_0)x(k_0)$

$x(k_0) = \phi(k_0,k)x(k)$ (scambiando gli indici)

INVERTIBILE PER IPOTESI

$x(k_0+1) = A(k_0)x(k_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(k_0) = A^{-1}(k_0)x(k_0+1)$

dato che si suppone A invertibile e quindi dalla conoscenza dello stato futuro ho lo stato pregresso

$x(k_0+2) = A(k_0+1)A(k_0)x(k_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(k_0+1) = A^{-1}(k_0+1)x(k_0+2)$

$\Rightarrow x(k_0) = A^{-1}(k_0)A^{-1}(k_0+1)x(k_0+2)$

iterando il procedimento

$$x(k_0) = \underbrace{A^{-1}(k_0)A^{-1}(k_0+1)\dots A^{-1}(k-1)}_{\triangleq\, \Phi(k_0,k)}x(k)$$

$$\Phi^{-1}(k_0,k) = A(k-1)A(k-2)\dots A(k_0)$$

per proprietà matrici

$\square$

concludendo, per il caso NON stazionario:

$$\underline{x(k) = \Phi(k, k_0)\, x_0} \qquad \text{e.l. dello stato}$$

$$\underline{y(k) = C(k)\, \Phi(k, k_0)\, x_0} \qquad \text{e.l. uscita}$$

CASO STAZIONARIO

- A NON DIPENDE PIÙ DA K
- $K_0 = 0$
- $A(k) = A$ ...

$$\Sigma \begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) \quad , \; x(0) = x_0 \\ y(k) = C\,x(k) \end{cases}$$

(evoluzione libera di sistema lineare a tempo discreto, stazionario)

<u>MATRICE DI TRANSIZIONE</u>:

$$\Phi(k, k_0) = A^{k-k_0}$$

Se <u>A è non singolare</u> è ben definita anche per $k_0 > k$.

con $k_0 = 0 \implies$ $\boxed{\Phi(k, 0) = A^k}$

METODI DI CALCOLO DI A^K

1. Binary Powering
2. Metodo con le forme di Jordan
3. Metodo del polinomio interpolante

1) BINARY POWERING MAI USATO

esempio : $A^{10} = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{nove moltiplicazioni}}$

$A^2 = A \cdot A = A^2$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = A^4$

$A^8 = A^4 \cdot A^4 = A^3$

infine $A^{10} = A^8 \cdot A^2$

in questo modo faccio 4 moltiplicazioni anziché 9.

possiamo descrivere in forma binaria l'esponente K così:

$$K = \sum_{j=0}^{m} \beta_j 2^j \qquad \text{con } m \text{ opportuno}$$

e $\beta_j \in \{0, 1\}$

a questo punto è sufficiente implementare il seguente

ALGORITMO

$j \leftarrow 0$

$Z \leftarrow A$

IF $\beta_0 = 0$ THEN $B \leftarrow I$ ELSE $B \leftarrow A$

REPEAT

$\quad j \leftarrow j+1$

$\quad Z \leftarrow Z^2$

$\quad$ IF $\beta_j = 0$ THEN $B \leftarrow B$ ELSE $B \leftarrow ZB$

UNTIL $j = n$

---

2) METODO CON LA FORMA DI JORDAN

$$J = T^{-1} A T \Rightarrow A = T J T^{-1}$$

$$\Rightarrow A^k = T J^k T^{-1}$$

$$J = \text{block diag.}\left[B_{11}, \dots, B_{1,k_1}, B_{21}, \dots, B_{2k_2}, \dots \right.$$
$$\left. \dots B_{h1}, \dots, B_{hk_h}\right]$$

$$B_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$ matrice $q \times q$

Moltiplicando J per se stessa k volte la struttura viene mantenuta:

$$J^k = \text{block diag.}\left[B_{11}^k, \dots, B_{1k_1}^k, B_{21}^k, \dots, B_{hk_h}^k\right]$$

$$B_{i,j}^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{q-1}\lambda_i^{k-q+1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} \\ & 0 & & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ & & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

L SISTEMA È STABILE SE $\lambda_i < 1$ ... SEMPRE PER SISTEMI TEMPO CONTINUI ...

... DERIVATIVO $\lambda_i \leq 0$

con

$$\begin{cases} \binom{k}{h} := \dfrac{k!}{h!\,(k-h)!} = \dfrac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-h+1)}{h!} & \text{se } k \geq h \\[2ex] \binom{k}{h} := 0 & \text{se } k < h \end{cases}$$

<u>Conseguentemente, gli elementi di A^k sono dati da combinazioni lineari di</u>

$$\binom{k}{0}\lambda_1^{k},\ \binom{k}{1}\lambda_1^{k-1},\ \ldots,\ \binom{k}{l_1-1}\lambda_1^{k-l_1+1}$$

$$\binom{k}{0}\lambda_2^{k},\ \binom{k}{1}\lambda_2^{k-1},\ \ldots,\ \binom{k}{l_2-1}\lambda_2^{k-l_2+1}$$

$$\ldots$$

$$\binom{k}{0}\lambda_h^{k},\ \binom{k}{1}\lambda_h^{k-1},\ \ldots,\ \binom{k}{l_h-1}\lambda_h^{k-l_h+1}$$

dove $l_1, l_2, \ldots, l_h$ sono le molteplicità delle radici distinte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_h$ del <u>polinomio minimo di A</u>.

3) METODO DEL POLINOMIO INTERPOLANTE:

A^k è la funzione di matrice della funzione scalare x^k:

$$Df(x) = k x^{k-1}, \quad D^2 f(x) = k(k-1)\, x^{k-2}, \dots$$

Si procede analogamente a quanto visto nel caso a tempo continuo.

Ogni elemento di A^k è una combinazione lineare di

$$f(\lambda_1), \dots, D^{l_1-1} f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_R), D^{l_R-1} f(\lambda_R)$$

cioè di

$$\underbrace{\begin{array}{l}
\lambda_1^{k}, \; k\lambda_1^{k-1}, \dots, k(k-1)\cdots(k-l_1+2)\,\lambda_1^{k-l_1+1} \\
\lambda_2^{k}, \; k\lambda_2^{k-1}, \dots, k(k-1)\cdots(k-l_2+2)\,\lambda_2^{k-l_2+1} \\
\dots \\
\lambda_R^{k}, \; k\lambda_R^{k-1}, \dots, k(k-1)\cdots(k-l_R+2)\,\lambda_R^{k-l_R+1}
\end{array}}_{}$$

MODI DI A^k

I modi visti sono corretti solo se

$$k \geq l_1-1\ , l_2-1, \dots, l_R-1$$

Affinché i modi di A^k siano definiti

per ogni $k \geq 1$:

$$\underbrace{\begin{array}{l}
\lambda_1^{k},\ k\lambda_1^{k-1},\ 2!\binom{k}{2}\lambda_1^{k-2}, \dots, (l_1-1)!\binom{k}{l_1-1}\lambda_1^{k-l_1+1}, \\
\lambda_2^{k},\ k\lambda_2^{k-1},\ 2!\binom{k}{2}\lambda_2^{k-2}, \dots, (l_2-1)!\binom{k}{l_2-1}\lambda_2^{k-l_2+1} \\
\dots \\
\lambda_R^{k},\ k\lambda_R^{k-1},\ 2!\binom{k}{2}\lambda_R^{k-2}, \dots, (l_R-1)!\binom{k}{l_R-1}\lambda_R^{k-l_R+1}
\end{array}}_{\text{modi di } A^k}$$

<u>Concludendo</u>:

$x(k) = A^k x_0$ evoluzione libera dello stato

$y(k) = CA^k x_0$ evoluzione libera dell'uscita

EVOLUZIONE TOTALE DEI SISTEMI LINEARI A TEMPO CONTINUO

CASO NON STAZIONARIO:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

Si è già visto che:

$$\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \varphi(t, t_0, x_0, 0) + \varphi(t, t_0, 0, u(\cdot))$$

$$\gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \gamma(t, t_0, x_0, 0) + \gamma(t, t_0, 0, u(\cdot))$$

rispettivamente funzione di transizione dello stato e funzione di risposta

PROPRIETÀ:

Le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ di Σ sono esprimibili come:

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t,t_0)x_0}_{\uparrow} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\, B(\tau) u(\tau)\, d\tau}$$

$$y(t) = \underbrace{C(t)\,\Phi(t,t_0)x_0} + \underbrace{C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau + D(t)u(t)}$$

evoluzione libera

evoluzione forzata

DIMOSTRAZIONE (cenno):

considerando l'identità: $X X^{-1} = I$

derivando ambo i membri:

$$X\left(\frac{d}{dt}X^{-1}\right) = -\left(\frac{d}{dt}X\right)X^{-1} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}(t,t_0)\right) = \dot{\Phi}^{-1}(t,t_0) = -\Phi^{-1}(t,t_0)\,\dot{\Phi}(t,t_0)\,\Phi^{-1}(t,t_0)$$

$$\underbrace{\dot{\Phi}^{-1}(t,t_0)X(t)} = -\Phi^{-1}(t,t_0)\,\dot{\Phi}(t,t_0)\,\Phi^{-1}(t,t_0)\,X(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}(t,t_0)X(t)\right) - \Phi^{-1}(t,t_0)\,\dot{x}(t), \quad \text{quindi}$$

ESSENDO $\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}(t,t_0)X(t)\right) = \dot{\Phi}^{-1}(t,t_0)X(t) \quad \Phi^{-1}(t,t_0)\,\dot{x}(t)$

$\dot{\Phi}(t,t_0) \triangleq A(t)\, \Phi(t,t_0)$

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}(t,t_0)x(t)\right) = \Phi^{-1}(t,t_0)\dot{x}(t) - \Phi^{-1}(t,t_0)\dot{\Phi}(t,t_0)\,\Phi^{-1}(t,t_0)x(t)$$

$$= \Phi^{-1}(t,t_0)\dot{x}(t) - \Phi^{-1}(t,t_0)A(t)\cancel{\Phi(t,t_0)}\,\cancel{\Phi^{-1}(t,t_0)}x(t)$$

$$= \Phi^{-1}(t,t_0)\left[\dot{x}(t) - A(t)x(t)\right]$$

$$= \Phi^{-1}(t,t_0)\,B(t)u(t)$$

quindi, integrando ambo i membri:

$$\Phi^{-1}(t,t_0)x(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{K} + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau,t_0)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

$$\Phi^{-1}(t,t_0)x(t) = K + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

moltiplicando per $\Phi(t,t_0)$:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)K + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

Ricordare che:

$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\,\Phi(t,t_0)$

$\Phi^{-1}(\tau,t_0) = \Phi(t_0,\tau)$

$K = x(t_0)$ COME VERIFICO SE SOSTITUISCO $t = t_0$.

$\square$

Se $x_0 = 0$ si hanno le evoluzioni forzate dello stato e dell'uscita:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = C(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + D(t) u(t)$$

la risposta forzata è riscrivibile come:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \left[C(t) \Phi(t,\tau) B(\tau) + D(t) \delta(t-\tau) \right] u(\tau) d\tau$$

L'INTEGRALE DIVENTA UN INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

ovvero:

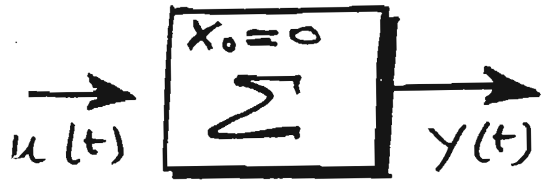
$$\underset{p\times 1}{y(t)} = \int_{t_0}^{t} \underset{p\times m}{H(t,\tau)} \underset{m\times 1}{u(\tau)} d\tau$$

dove

$$H(t,\tau) = \begin{cases} C(t) \Phi(t,\tau) B(\tau) + D(t) \delta(t-\tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

è la MATRICE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO di Σ
$H \in \mathbb{R}^{p \times m}$)

INTERPRETAZIONE DELLA MATRICE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO:



$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta(t-t_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow$$

m ingressi tutti nulli tranne l'i-esimo

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta(\tau-t_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} H_{1i}(t,\tau)\,\delta(\tau-t_0) \\ H_{2i}(t,\tau)\,\delta(\tau-t_0) \\ \vdots \\ H_{pi}(t,\tau)\,\delta(\tau-t_0) \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} H_{1i}(t,t_0) \\ H_{2i}(t,t_0) \\ \vdots \\ H_{pi}(t,t_0) \end{bmatrix}$$

colonna i-esima di $H(t,\tau)$

La colonna i-esima di $H(t,\tau)$ è la risposta forzata di Σ ad un impulso di Dirac applicato al tempo τ all'ingresso i-esimo.

RAPPRESENTAZIONE INTERNA ⇒ APPROFONDITA, MATRICI A, B, C, D...
ESTERNA ⇒ PIÙ POVERA, SISTEMA COME SCATOLA NERA NON CONTIENE LO STATO

Evoluzione forzata dell'uscita:

$$\boxed{y(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau}$$

$H(t,\tau)$ è una <u>RAPPRESENTAZIONE ESTERNA</u> di Σ, ovvero un modello INGRESSO-USCITA (forzata) di Σ.

<u>CASO STAZIONARIO:</u>

Consideriamo l'<u>evoluzione totale</u> dei sistemi lineari a tempo continuo:

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

Si è visto $\Phi(t,0) = e^{At}$. Le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono quindi:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = C e^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau + D\,u(t)$$

Se $x_0 = 0$ EVOLUZIONE FORZATA

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$ (ev. forzata dello stato)

$$y(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau + Du(t)$$ (evoluz. forzata dell'uscita)

$$y(t) = \int_0^t H(t,\tau) u(\tau)\, d\tau$$ con

$$H(t,\tau) = \begin{cases} C e^{A(t-\tau)} B + D\delta(t-\tau) & \text{per } t \geq \tau \\ 0 & \text{per } t < \tau \end{cases}$$

$$H(t,\tau) \rightsquigarrow H(t-\tau)$$

definiamo la <u>MATRICE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO</u> (applicato al tempo "0")

$$H(t) := \begin{cases} C e^{At} B + D\delta(t) & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t H(t-\tau) u(\tau)\, d\tau$$

$Y(s) = \hat{H}(s)\, U(s)$ TRASFORMATA DI LAPLACE ELEMENTO PER ELEMENTO

Deduzione della FUNZIONE MATRICIALE DI TRASFERIMENTO:

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t H(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau\right]$$

dal Teorema di convoluzione (che vale anche in caso matriciale) otteniamo:

$$\boxed{\hat{y}(s) = \hat{H}(s)\,\hat{u}(s)}$$

con

$$\hat{y}(s) = \mathcal{L}[y(t)]$$

$$\hat{H}(s) = \mathcal{L}[H(t)]$$

$$\hat{u}(s) = \mathcal{L}[u(t)]$$

$\hat{H}(s) \equiv$ MATRICE DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Ricordando che $\mathcal{L}[e^{At}] = (SI-A)^{-1}$

e la linearità della Trasformata di

Laplace:

$$\boxed{\hat{H}(s) = C(SI-A)^{-1}B + D}$$

che si poteva ricavare anche direttamente

trasformando le equazioni del modello

di stato Σ:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

TRASFORMO SECONDO LAPLACE

$$\begin{cases} s\hat{X}(s) - X(0) = A\hat{X}(s) + B\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) = C\hat{X}(s) + D\hat{u}(s) \end{cases}$$

$(SI-A)\hat{X}(s) = X(0) + B\hat{u}(s)$ da cui:

$$\begin{cases} \hat{X}(s) = (SI-A)^{-1}X(0) + (SI-A)^{-1}B\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) = C(SI-A)^{-1}X(0) + C(SI-A)^{-1}B\hat{u}(s) + D\hat{u}(s) \end{cases}$$

con $X(0) = 0$

$\hat{y}(s) = [C(SI-A)^{-1}B + D]\hat{u}(s)$

ove $\hat{y}(s) = \hat{H}(s)\hat{u}(s)$

$\Rightarrow \hat{H}(s) = [C(SI-A)^{-1}B + D]$

MATRICE DI TRASFERIMENTO INGRESSO - USCITA

$$\lim_{s \to +\infty} \hat{H}(s) = D$$

Se $D = 0 \Rightarrow \lim_{s \to +\infty} \hat{H}(s) = 0$ e quindi

$\hat{H}(s)$ è <u>STRETTAMENTE PROPRIA</u>.

Riassumendo:

NON STAZIONARIO

$$x(t) = \phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t-\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = C(t)\,\phi(t,t_0)\,x(t_0) + C(t)\int_{t_0}^{t} \phi(t-\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau + D(t)u(t)$$

STAZIONARIO

$$\underbrace{x(t)}_{n\times 1} = \underbrace{e^{At}}_{n\times n}\underbrace{x_0}_{n\times 1} + \int_0^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}B(\tau)u(\tau)}_{n\times 1}\,d\tau$$

INTEGRO OGNI ELEMENTO DELLA MATRICE $n \times 1$

$$y(t) = C e^{At} x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

RAPPRESENTAZIONE INTERNA $\Longrightarrow$ RAPPRESENTAZIONE ESTERNA

$\Sigma(A,B,C,D)$

$$\underset{p\times m}{H(s)} = \underset{p\times n}{C}\,\underset{n\times n}{(sI-A)^{-1}}\,\underset{n\times m}{B} + \underset{p\times m}{D}$$

SEMPRE POSSIBILE PASSARE DA INTERNA AD ESTERNA

EVOLUZIONE TOTALE DEI SISTEMI LINEARI A TEMPO DISCRETO

CASO NON STAZIONARIO:

$$\Sigma \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), & x(k_0) = x_0 \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k). \end{cases}$$

Le soluzioni $x(k)$ e $y(k)$ di Σ sono esprimibili come:

$$x(k) = \underbrace{\Phi(k,k_0)x_0}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k,j+1)B(j)u(j) \qquad k > k_0$$

$$y(k) = C(k)\Phi(k,k_0)\overset{x(k_0)}{x_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} C(k)\Phi(k,j+1)B(j)u(j) +$$

$$+ D(k)u(k) \qquad k > k_0$$

$\boxed{\text{SE STAZIONARIO } \Phi(k,k_0) = A^k}$ $x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B\, U(j)$

DIMOSTRAZIONE: per verifica diretta, si sostituisce a $x(k+1)$ e $x(k)$ il valore trovato ricordando che $A(k)\Phi(k,k_0) = \Phi(k+1,k_0)$...

Se $x_0 = 0$

$$x(k) = \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1)\, B(j)\, u(j) \quad \text{ev. forzata stato} \quad (k > k_0)$$

$$y(k) = \sum_{j=k_0}^{k-1} C(k)\, \Phi(k, j+1)\, B(j)\, u(j) + D(k)\, u(k) \quad \text{ev. forzata uscita} \quad (k > k_0)$$

La risposta forzata si può riscrivere:

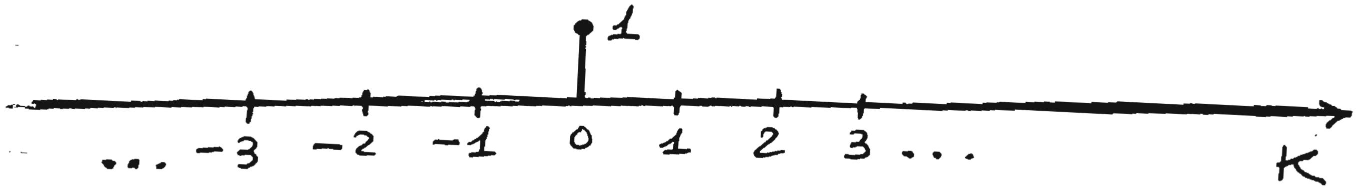
$$y(k) = \sum_{j=k_0}^{k} H(k, j)\, u(j) \qquad k \geq k_0$$

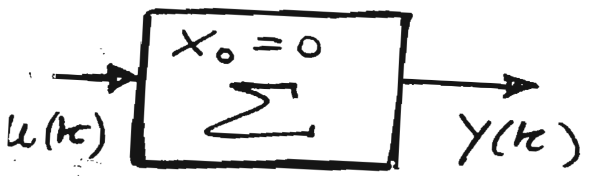
dove $\underline{H(k,j)}$ è la MATRICE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO (DISCRETO) di Σ:

$$H(k,j) = \begin{cases} C(k)\, \Phi(k, j+1)\, B(j) & \text{se } k > j \\ D(k) & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k < j \end{cases}$$

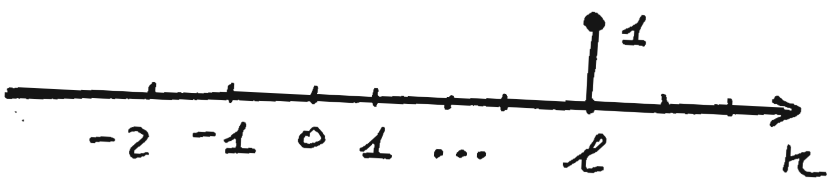
L'impulso discreto (impulso a tempo discreto o anche IMPULSO UNITA') è definito come:

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 & \text{per } k \neq 0,\ k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{per } k = 0 \end{cases}$$





$$u(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta(k-\ell) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-esimo ingresso}$$



$$y(k) = \sum_{j=\ell}^{k} H(k,j)\,u(j) = H(k,\ell)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ H(k,\ell+1)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots = \begin{bmatrix} H_{1i}(k,\ell) \\ H_{2i}(k,\ell) \\ \vdots \\ H_{pi}(k,\ell) \end{bmatrix}$$

La colonna i-esima di $H(k,\ell)$ è la risposta forzata di Σ ad un impulso

RAPPRESENTAZIONE ESTERNA

unità, applicato all'ingresso i-esimo al tempo l.

La matrice di risposta all'impulso $H(k,l)$ è una RAPPRESENTAZIONE ESTERNA di Σ: descrive cioè il comportamento INGRESSO-USCITA (forzato) di Σ.

CASO STAZIONARIO

Si esamina l'evoluzione totale di sistemi lineari e tempo discreto, stazionari.

$$\Sigma \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), & x(0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

le soluzioni sono:

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k, j+1) B u(j) \quad k > 0$$

quindi

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u(j) \quad k > 0$$

$$\begin{cases} y(k) = CA^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} B u(j) + D u(k) & (k>0) \\ y(0) = C x_0 + D u(0) & (k=0) \end{cases}$$

l'evoluzione forzata dell'uscita $(x_0=0)$ risulta quindi:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} H(k,j) u(j) \qquad k \geq 0$$

con

$$H(k,j) = \begin{cases} CA^{k-j-1} B & \text{se } k>j \\ D & \text{se } k=j \\ 0 & \text{se } k<j \end{cases}$$

con "abuso di notazione":

$$H(k-j) := H(k,j)$$

$$H(k) = \begin{cases} CA^{k-1} B & \text{se } k>0 \\ D & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k<0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y(k) = \sum_{j=0}^{k} H(k-j) u(j) \qquad k \geq 0$$

DIGRESSIONE: LA TRASFORMATA $\mathcal{Z}$

Data la sequenza $\{f(k)\} = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$

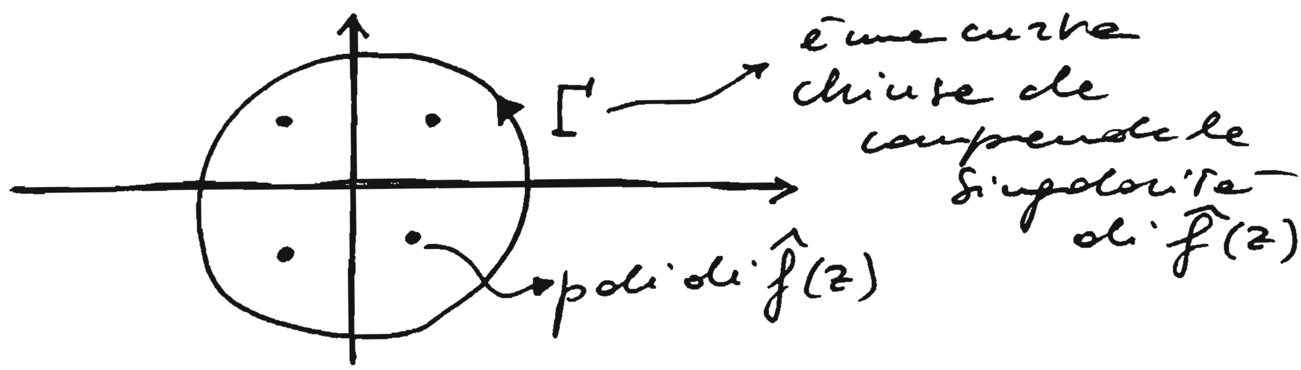
si definisce <u>TRASFORMATA ZETA</u>

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = \hat{f}(z) := f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} f(j)\, z^{-j}$$

$$\hat{f}(\cdot): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

E' un operatore invertibile:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \hat{f}(z)\, z^{k-1}\, dz$$

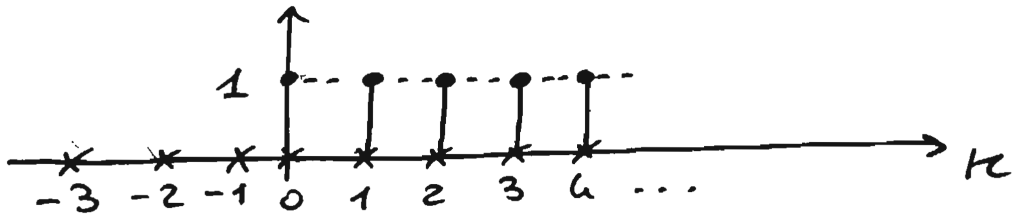


analogamente all'ascissa di assoluta convergenza (trasformata $\mathcal{L}$), esiste un r_0 t.c. $\forall z$ esterna alla circonfe=

enza di raggio R_0, la funzione $\hat{f}(z)$ risulta analitica completamente. Dentro Γ la $\hat{f}(z)$ non è analitica.

ESEMPI:

- gradino unitario $\{1(k)\}$:



$$\hat{f}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^j$$

CONVERGE SE $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ CIOÈ $|z|>$

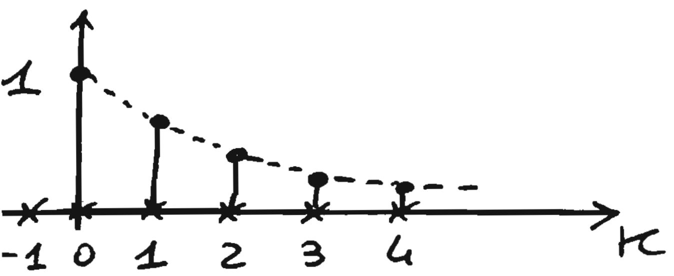
$$= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} =$$

$$= \frac{z}{z-1}$$

la serie converge per $|z|>1$ quindi il cerchio di assoluta convergenza è quello di modulo unitario

• esponenziale $\{e^{-akT}\} =$

$$= \{1, e^{-aT}, e^{-2aT}, e^{-3aT}, \dots\}$$



$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$Z\{e^{-akT}\} = \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{e^{-aT} z^{-1}}_{f(1)\, z^{-1}} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{aT} z}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

converge se

$$|e^{-aT} z^{-1}| < 1$$

quindi

$$e^{aT}|z| > 1 \leadsto |z| > e^{-aT}$$

PROPRIETA':

- $$\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = z\hat{f}(z) - z f(0)$$

(f(k+1) è la sequenza traslata a sx. → anticipo)

infatti:

$$\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = \sum_{j=0}^{+\infty} f(j+1) z^{-j} \overset{i=j+1}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) z^{-(i-1)} =$$

$$= z\left[\sum_{i=1}^{+\infty} f(i) z^{-i}\right] = z\left[\sum_{i=0}^{+\infty} f(i) z^{-i} - f(0)\right] =$$

$$= z\,\mathcal{Z}\{f(k)\} - z f(0)$$

- Linearità:

$$\mathcal{Z}\{\alpha_1 f_1(k) + \alpha_2 f_2(k)\} = \alpha_1 \mathcal{Z}\{f_1(k)\} + \alpha_2 \mathcal{Z}\{f_2(k)\}$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \ (\text{o } \mathbb{C})$$

Se $f(k) = 0$ con $k < l$ per $l \in \mathbb{N}$ assegnato ed esiste $\lim_{z \to +\infty} z^l \hat{f}(z)$:

$$\lim_{z \to +\infty} z^l \hat{f}(z) = f(l)$$

(analogo al Teo. del valore iniziale per la Trasf. Laplace)

infatti:

$$\lim_{z\to+\infty} z^{\ell}\hat{f}(z) = \lim_{z\to+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} f(j)\,z^{\ell-j} = \text{(essendo } f(k)=0 \text{ per } k<\ell\text{)}$$

$$= \lim_{z\to+\infty}\left(f(\ell)z^{0} + f(\ell+1)z^{-1} + f(\ell+2)z^{-2} + \ldots\right) = f(\ell)$$

Se $(1-z^{-1})\hat{f}(z)$ <u>non</u> ha singolarità esternamente e sul cerchio unitario, allora

$$\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\hat{f}(z) = \lim_{k\to+\infty} f(k)$$

(analogo al Teo. del valore finale per le trasformate di Laplace)

Infatti:

$$\mathcal{Z}\left\{f(k)-f(k-1)\right\} = \hat{f}(z) - z^{-1}\hat{f}(z) = (1-z^{-1})\hat{f}(z)$$

(si suppone $f(k)=0,\ k<0$)

quindi

$$\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\hat{f}(z) = \lim_{z\to 1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(f(k)-f(k-1)\right)z^{-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(f(k)-f(k-1)\right) = \lim_{j\to+\infty}\sum_{k=0}^{j}\left(f(k)-f(k-1)\right) =$$

$$\lim_{j\to+\infty}\left(f(0) - \underbrace{f(-1)}_{=0} + f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + f(j) - f(j-1)\right) = \lim_{j\to+\infty}\left(f(j) - f(-1)\right) =$$

$$\lim_{j\to+\infty} f(j)$$

TRASFORMATE ZETA COMUNI:

$\{f(k)\}\ k \geq 0$	$\hat{f}(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$
$\delta(k)$	1
$1(k)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
k	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
k^2	$\dfrac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
a^k	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$
$(k+1)a^k$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}$
$\dfrac{(k+1)\cdots(k+\ell)}{\ell!}a^k$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^{\ell+1}}$
$a\cos(\alpha k)+b\sin(\alpha k)$	$\dfrac{a+z^{-1}(b\sin\alpha-a\cos\alpha)}{1-2z^{-1}\cos\alpha+z^{-2}}$

ALTRE PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA ZETA:

$\{f(k)\}\ k \geq 0$	$\hat{f}(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$
$f(k+1)$	$z\hat{f}(z) - z f(0)$
$f(k+\ell)\ ,\ \ell \geq 1$	$z^{\ell}\hat{f}(z) - z \sum_{i=1}^{\ell} z^{\ell-i} f(i-1)$
$f(k-1)$	$z^{-1}\hat{f}(z) + f(-1)$
$f(k-\ell)\ ,\ \ell \geq 1$	$z^{-\ell}\hat{f}(z) + \sum_{i=1}^{\ell} z^{-\ell+i} f(-i)$
$a^{k} f(k)$	$\hat{f}(z/a)$
$k\, f(k)$	$-z \frac{d}{dz}\hat{f}(z)$
$\sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell) g(k-\ell) = f(k) * g(k)$	$\hat{f}(z) \cdot \hat{g}(z)$ (proprietà convoluzione)

RISOLUZIONE DEL MODELLO DI STATO DISCRETO CON LA TRASFORMATA ZETA:

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$$ FACCIO $\mathcal{Z}$ DA ENTRAMBE LE PARTI

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = z\hat{x}(z) - z x(0)$$ quindi

$$z\hat{x}(z) - z x(0) = A\hat{x}(z) + B\hat{u}(z)$$

$$(zI - A)\,\hat{x}(z) = z\,x(0) + B\hat{u}(z)$$

$$\hat{x}(z) = (zI-A)^{-1} z\,x(0) + (zI-A)^{-1}B\,\hat{u}(z)$$

da $\hat{y}(z) = C\hat{x}(z) + D\hat{u}(z)$ si ottiene:

$$\hat{y}(z) = C(zI-A)^{-1} z\,x(0) + C(zI-A)^{-1}B\hat{u}(z) + D\hat{u}(z)$$

$$\hat{y}(z) = \underbrace{\left[C(zI-A)^{-1}B + D\right]}_{\text{UGUALE ALLA } H(s) \text{ A TEMPO CONTINUO}}\hat{u}(z) \qquad (\text{se } x(0)=0)$$

D'altronde da $y(k) = \sum_{j=0}^{k} H(k-j)\,u(j)$ $\quad k \geq 0$

e col Teo. di convoluzione, si ottiene:

$$\hat{y}(z) = \hat{H}(z)\,\hat{u}(z)$$

dove $\hat{H}(z) = \mathcal{Z}\{H(k)\}$ è la matrice di trasferimento zeta di Σ.

T. CONTINUO: $H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

T. DISCRETO: $\hat{H}(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$ $\quad \hat{y}(z) = \hat{H}(z)\,\hat{u}(z)$

Dal confronto:

$$\hat{H}(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

E' possibile il calcolo diretto di $\hat{H}(z)$ da:

$$\{H(k)\} = \{D, CB, CAB, CA^2B, \dots\} =$$

MATRICE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO

$$= \{D, CA^{k-1}B\} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\hat{H}(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} H(j) z^{-j} = D + \sum_{j=1}^{\infty} CA^{j-1}Bz^{-j} =$$

$$= D + z^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} CA^{j}Bz^{-j} =$$

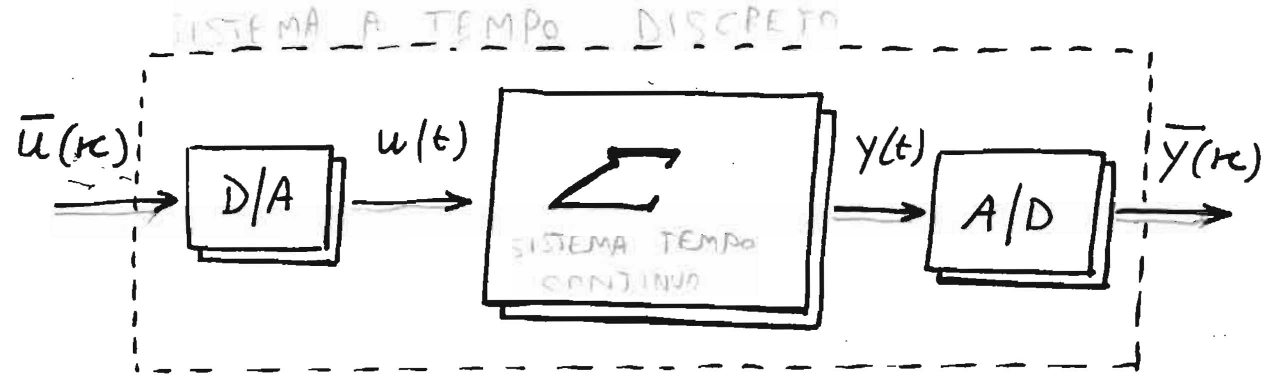
$$= D + C\left[z^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} A^{j}z^{-j}\right] B =$$

$$= D + Cz^{-1} \underbrace{(I + z^{-1}A + z^{-2}A^2 + \dots)}_{=(I - z^{-1}A)^{-1}} B =$$

$$= C z^{-1} (I - z^{-1}A)^{-1} B + D = C\left[z(I - z^{-1}A)\right]^{-1} B + D =$$

$$= C(zI - A)^{-1} B + D$$

SISTEMI A DATI CAMPIONATI



Σ stazionario

A/D campionatore ideale

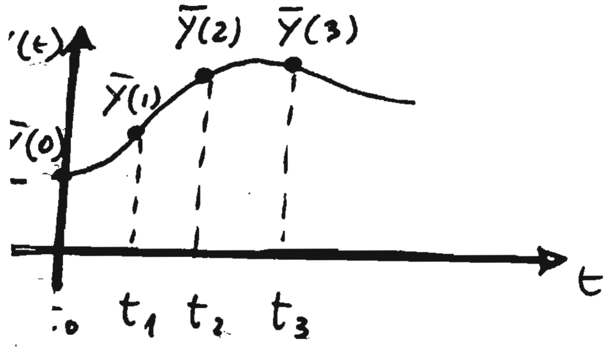
$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

<u>CONVERTITORE A/D</u> (CAMPIONATORE):

genera la sequenza $\{\bar{y}(k)\}$ $k = 0, 1, \dots$

$$\bar{y}(k) := y(t_k)$$

dove t_k sono i tempi di campionamento

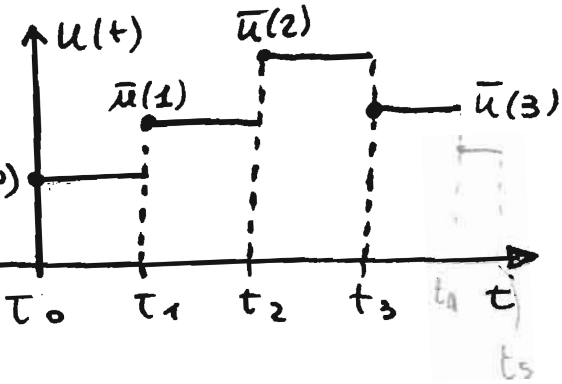


(non necessariamente i t_k sono equispaziati)

CONVERTITORE D/A (DISPOSITIVO DI TENUTA):

genera il segnale a tempo continuo $u(t)$:

$$u(t) := \bar{u}(k) \quad , \quad t_k \le t < t_{k+1} \quad , \quad k = 0,1,2,\dots$$



è il dispositivo di tenuta di ordine zero, esistono dispositivi di tenuta di ordine uno, ecc...

ANALISI DELLA RELAZIONE CAUSA-EFFETTO FRA LE SEQUENZE $\bar{u}(k)$ e $\bar{y}(k)$:

Sia $t \in [t_k, t_{k+1}]$ allora

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,u(\tau)\,d\tau =$$

SPEZZO L'INTEGRALE SUI VARI INTERVALLINI

EVOLUZIONE SISTEMA TEMPO CONTINUO

PERCHÈ Ū È COSTANTE NELL'INTERVALLINO

$$= e^{At}x_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t-\tau)}\,d\tau\right)B\,\bar{u}(i) +$$

$$+ \left(\int_{t_k}^{t} e^{A(t-\tau)}\,d\tau\right)B\,\bar{u}(k)$$

INTEGRO L'ULTIMO PEZZETTINO

a comodità scriviamo: $f(A,t) := \int_0^t e^{A\tau}\,d\tau$

notando che:

$t_1 - \tau = \sigma$

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\, d\tau = -\int_{t_1-t_0}^{0} e^{A\sigma}\, d\sigma =$$

$$= \int_{0}^{t_1-t_0} e^{A\sigma}\, d\sigma = f(A, t_1-t_0)$$

SIGMA

e che:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t-\tau)}\, d\tau = e^{At}\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-A\tau}\, d\tau =$$

MOLTIPLICO PER $e^{-At_{i+1}} \cdot e^{At_{i+1}}$

$$= e^{At}\, e^{-At_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\tau)}\, d\tau =$$

$$= e^{A(t-t_{i+1})} f(A, t_{i+1}-t_i)$$

si ha:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} e^{A(t-t_{i+1})} f(A, t_{i+1}-t_i)\, B\, \bar{u}(i) +$$

$$+ f(A, t-t_k)\, B\, \bar{u}(k)$$

Nell'ipotesi che il campionamento sia uniforme con periodo T: $t_k = kT$, $k \in \mathbb{N}$, si ha:

$$x(t_k) = e^{At_k} x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} e^{A(t_k - t_{i+1})} f(A,T) B \bar{u}(i) +$$

$$+ \cancel{f(A,0) B \bar{u}(k)}$$ PERCHÉ $f(A,0) \triangleq \int_0^0 e^{A\tau} d\tau = 0$.

$$x(t_k) = e^{AkT} x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} e^{AT(k-i-1)} f(A,T) B \bar{u}(i) =$$

$$= \left(e^{AT}\right)^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \left(e^{AT}\right)^{k-i-1} f(A,T) B \bar{u}(i)$$

NEI SISTEMI A TEMPO DISCRETO ERA $x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u(j)$

Inoltre:

$$y(t_k) = C x(t_k) + D u(t_k)$$

Con la definizione $\bar{x}(k) := x(t_k)$ si ottiene

infine:

$$\bar{x}(k) = \left(e^{AT}\right)^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \left(e^{AT}\right)^{k-i-1} f(A,T) B \bar{u}(i)$$

$$\bar{y}(k) = C \bar{x}(k) + D \bar{u}(k)$$

<u>è la soluzione del modello di stato a tempo discreto</u>

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \bar{A} \bar{x}(k) + \bar{B} \bar{u}(k), & \bar{x}(0) = x_0 \\ \bar{y}(k) = \bar{C} \bar{x}(k) + \bar{D} \bar{u}(k) \end{cases}$$

dove

CAMBIERANNO LA MATRICE DI SISTEMA E QUELLA DI DISTRIBUZIONE DELLE USCITE

TEMPO DI CAMPIONAMENTO

$$\bar{A} = e^{AT} \qquad \bar{B} = f(A,T)B = \left(\int_0^T e^{A\tau} d\tau\right)B$$

INTEGRALE DI OGNI SINGOLO ELEMENTO

oppure

GIRA PAGINA

$$\bar{C} = C \qquad \bar{D} = D$$

Il sistema a tempo discreto ottenuto è interpretabile anche come l'approssimazione discreta del sistema Σ a tempo continuo soggetto ad un ingresso continuo $u(t)$.

CALCOLO DELL'INTEGRALE DELL'ESPONENZIALE DI MATRICE:

Se A è non singolare vale:

COME NEL CASO SCALARE $\int_0^t e^{a\tau} d\tau = \frac{1}{a}(e^{at}-1)$

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1}\left(e^{At} - I\right)$$

ESISTE SEMPRE, $\forall A$ QUADRATA

DIMOSTRAZIONE:

$$e^{At} \underset{\text{TAYLOR}}{\overset{\Delta}{=}} I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = \left[I\tau + A\frac{\tau^2}{2!} + A^2\frac{\tau^3}{2!\,3} + A^3\frac{\tau^4}{3!\,4} + \dots\right]_0^t =$$

$$= It + A\frac{t^2}{2!} + A^2\frac{t^3}{3!} + A^3\frac{t^4}{4!} + \dots + A^i\frac{t^{i+1}}{(i+1)!} + \dots =$$

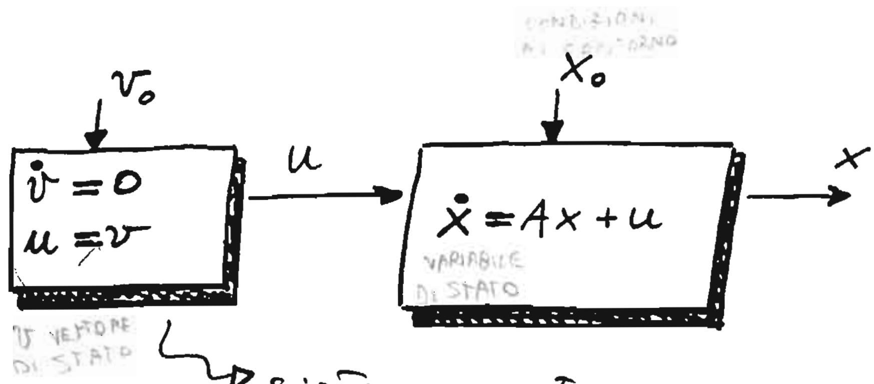
$$= A^{-1}\left(At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \dots\right) =$$

( ) SIMILE A e^{At}, MANCA I: È UGUALE A $e^{At}-I$

$$= A^{-1}\left(e^{At} - I\right) \blacksquare$$

Nel caso in cui **A sia singolare** si utilizza un metodo alternativo: si calcola $f(A,t)$ quale **sottomatrice dell'esponenziale di matrice di un opportuno sistema esteso**:

Si consideri il sistema composito:



→ sistema autonomo senza ingresso → SOLO EVOLUZIONE LIBERA

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot x \\ \dot v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} Ax + v = \dot x \\ \dot v = 0 \end{matrix}$$

$$\tilde{x} := \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A \in M_{3\times 3} \Rightarrow \tilde{A} \in M_{6\times 6}$

Si osserva che $v(t) = v_0 \quad \forall t$

$$\tilde{x}(t) = e^{\tilde{A}t}\tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} v_0 \, d\tau \\ v_0 \end{bmatrix} =$$

$\begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} e^{At}x_0 + \left(\int_0^t e^{A\tau} d\tau\right) v_0 \\ v_0 \end{bmatrix} =$$

essendo v_0 costante lo porto fuori ed impongo $\gamma = t - \tau$ ...

$$= \left[\begin{array}{c|c} e^{At} & \int_0^t e^{A\tau} d\tau \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \hline v_0 \end{bmatrix}$$

quindi:

$$e^{\tilde{A}t} = \left[\begin{array}{c|c} e^{At} & \int_0^t e^{A\tau}\,d\tau \\ \hline O & I \end{array}\right]$$

dato che siamo in grado di calcolare $e^{\tilde{A}t}$ (esponenziale di matrice), riesco in questo modo a calcolare $\int_0^t e^{A\tau}\,d\tau$ (anche nel caso in cui A è singolare).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\tilde{A}t} = \Big[\quad O \quad \int_0^t e^{A\tau}\,d\tau$$

STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

• SISTEMI A TEMPO CONTINUO

Il sistema Σ di eq.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

si dice:

1) <u>STABILE SEMPLICEMENTE</u> se con $u(t) \equiv 0$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\exists M > 0$ (dipendente da x_0) tale che

$$\|x(t)\| < M \quad \forall t \geq 0$$

) <u>ASINTOTICAMENTE STABILE</u> se Σ è stabile (semplicemente) ed inoltre con $u(t) \equiv 0$ e $\forall x_0$ vale:

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0}$$

) <u>INSTABILE</u> se Σ non è stabile.

TEOREMA

Il sistema Σ è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A hanno la parte reale negativa.

Dimostrazione: per esercizio, ci si può basare sulla forma di Jordan o considerando le comb. lineari dei modi del sistema (...) MODI NATURALI DEL TIPO $e^{-\lambda t}$, $te^{-\lambda t}$ CHE TENDONO A ZERO PER $t \to \infty$

TEOREMA

Il sistema Σ è stabile (semplicemente) se e solo se

1) nessun autovalore di A ha parte reale positiva
2) gli autovalori di A con parte reale nulla sono zeri semplici del polinomio minimo.

Dimostrazione: per esercizio, segue dal teorema precedente (...)

SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Il sistema Σ di equazioni

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

si dice:

1) STABILE SEMPLICEMENTE se con $u(k)=0, k\geq 0$ $\forall x_0$ $\exists M>0$ (dipendente da x_0) tale che

$$\|x(k)\| < M \quad \forall k \geq 0$$

2) ASINTOTICAMENTE STABILE se Σ è stabile ed inoltre con $u(k)=0$, $k\geq 0$ $\forall x_0$ vale:

$$\lim_{k\to+\infty} \|x(k)\| = 0$$

3) INSTABILE se Σ non è stabile.

TEOREMA

Il sistema Σ a tempo discreto è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A hanno modulo minore di uno.

Dimostrazione per esercizio.

TEOREMA

Il sistema Σ a tempo discreto è stabile semplicemente, se e solo se

1) nessun autovalore di A ha modulo maggiore di uno

2) gli autovalori di A con modulo uguale ad uno sono zeri semplici del polinomio minimo.

Dimostrazione per esercizio.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$m(\lambda) = (\lambda+1)^1$ SEMPLICEMENTE STABILE (A TEMPO DISCRETO)

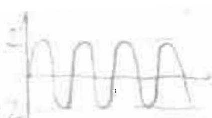
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = (\lambda+1)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{1} = -1 \pm j$$

ASINTOTICAMENTE STABILE (A TEMPO CONTINUO)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1 \qquad \lambda_1 = -j \quad \lambda_2 = +j$$

SEMPLICEMENTE STABILE (A TEMPO CONTINUO)

$$y(t) = e^{jt} + e^{-jt} = 2\cos(t)$$



SEMPLICEMENTE STABILE (LIMITATA

$$y(t) = j(e^{-2t+jt} - e^{-2t-jt}) = e^{-2t}\, 2\sin(t)$$

ASINTOTICAMENTE STABILE

EQUIVALENZA DI SISTEMI LINEARI E STAZIONARI

(a tempo continuo ed a tempo discreto)

Il concetto di equivalenza è già stato introdotto per i sistemi dinamici generali. Vengono qui introdotti concetti specifici per i sistemi lineari e stazionari:

Definizione di SISTEMI INTERNAMENTE EQUIVALENTI:

I sistemi $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1, D_1)$ e $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2, D_2)$ sono detti internamente (algebricamente) equivalenti se $D_1 = D_2$ ed esiste una trasformazione non singolare T:

$$A_2 = T^{-1} A_1 T \quad ; \quad B_2 = T^{-1} B_1 \; ; \; C_2 = C_1 T$$

CAMBIO DI BASE

L'equivalenza interna è una "relazione di equivalenza" in senso matematico, valgono cioè:

$Ax + Bu$ $\quad x = Tz \quad \Rightarrow \begin{cases} T\dot z = ATz + Bu \\ y = CTz + Du \end{cases} \Rightarrow \quad \dot z = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$

$Cx + Du \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y = CTz + Du$

$\Sigma_1 \sim \Sigma_1$

$\Sigma_1 \sim \Sigma_2 \Rightarrow \Sigma_2 \sim \Sigma_1$

$\{\Sigma_1 \sim \Sigma_2 \text{ e } \Sigma_2 \sim \Sigma_3\} \Rightarrow \Sigma_1 \sim \Sigma_3$

...i noti che:

$$\left\{\begin{matrix}\Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2 \text{ sono} \\ \text{equivalenti}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\not\Longrightarrow \\ \Longleftarrow\end{matrix} \left\{\begin{matrix}\Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2 \text{ sono} \\ \text{internamente equi.}\end{matrix}\right\}$$

vedi definizione nel lucido I-9

<u>...efinizione di SISTEMI EQUIVALENTI ALLO</u>
<u>...TATO ZERO</u>

Due sistemi <u>lineari</u> Σ_1 e Σ_2 sono ...quivalenti allo stato zero (iniziale) ...nche detti <u>ESTERNAMENTE EQUIVALENTI</u>) <u>...e hanno la stessa matrice di risposta ...ll'impulso</u>. (Ovviamente Σ_1 e Σ_2 ...ono esternamente equivalenti se hanno ...e stessa <u>matrice di trasferimento</u>.)

EQUIVALENZA PIÙ DEBOLE

$H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

$\tilde{H}(s) = \tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D = CT\left(T^{-1}(sI-A)T\right)^{-1}T^{-1}B + D =$

$= C\cancel{T}\cancel{T^{-1}}(sI-A)^{-1}\cancel{T}\cancel{T^{-1}}B + D$

Definizione di SISTEMI EQUIVALENTI ALL'INGRESSO ZERO.

Due sistemi lineari Σ_1 e Σ_2 sono equivalenti all'ingresso zero se per ogni stato iniziale dell'uno esiste uno stato iniziale dell'altro per cui le rispettive risposte libere sono identiche.

Nota:

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2 \text{ sono} \\ \text{internamente} \\ \text{equivalenti}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2 \text{ sono} \\ \text{esternamente equivalenti}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2 \text{ sono} \\ \text{internamente} \\ \text{equivalenti}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2 \text{ sono equivalenti} \\ \text{all'ingresso zero}\end{array}\right\}$$