UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
FACOLTÀ di INGEGNERIA

Corso di Laurea/D.U. in Ingegneria ______ Insegnamento ______

Nome/Cognome ______ Matricola ______ Data ______

1) Calcolate la probabilità di realizzare quattro punti lanciando due dadi contemporaneamente.

2) Una scatola contiene 10 uova pasquali, due delle quali contengono una sorpresa speciale. Calcolate la probabilità di trovare almeno un uovo con sorpresa speciale, aprendone tre.

3) Determinate, al variare di k, il numero delle soluzioni dell'equazione $||3x^2-5|-2|-1=k$

4) La disequazione $||x|-x|x||<2$ è soddisfatta quando:

(A) nessuna delle altre risposte è vera (B) $-1<x<2$

(C) $-2<x<1$ (D) $-\infty<x<0$

5) Sia $A=\{x_n=\frac{n-3}{n+2} : n\geq 1\}$ determinate inf A e sup A (con verifica!) e dite se sono rispettivamente minimo e/o massimo.

6) Sia $A=\{x_n=\frac{3}{2n-1} ; n\geq 1\}\cup[3/2, 3)$ determinate inf A e sup A (con verifica!) e dite se sono rispettivamente minimo e/o massimo.

7) Scrivete in forma algebrica il numero complesso:

$$w=\frac{z-i\bar{z}}{z^2-2i|z|^2} \quad \text{ove} \quad z=1+2i$$

8) Determinate le soluzioni $z\in\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^2+2(1+2i)z+1+4i(1-\sqrt{3})=0$$

9) Provate per induzione che risulta $n^n\geq n! \quad \forall n\geq 1$

10) La successione $a_n = \dfrac{7\cdot 4^n - 2n!}{5n! + 3\cdot 4^n}$, $n \geq 0$

(A) non è convergente (B) converge a $5/2$

(C) converge a $7/3$ (D) converge a $-\frac{2}{5}$

11) Il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+2/n}-1}{\operatorname{sen} 3/n}$

(A) è uguale a $1/2$ (B) non esiste

(C) nessuna delle altre risp. è vera (D) è uguale a $1/3$

12) La successione $(1+1/n)^{2n}$, $n \geq 1$

(A) nessuna delle altre risp. è vera (B) converge ad e

(C) è strettamente crescente (D) non ha limite

13) Il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\log(1+2/n)\operatorname{sen} 1/\sqrt{n}}{e^{-3/\sqrt{n}}-1}$

(A) non esiste (B) è uguale a $-\infty$

(C) è uguale a $-2/3$ (D) è uguale a -1

14) Calcolate, qualora esista

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}}$$

15) Calcolate, qualora esista

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n/3}$$

16) Calcolate, qualora esista

$$\lim_{n\to+\infty} (3n^2+2)\left(1-\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)$$

17) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che risulti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\operatorname{sen}(3/n) - n\left[1-\cos 3/n\right]}{n\left(e^{\alpha/n^2}-1\right)} = 1$$

18) Il limite $\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{1-x}$

(A) è uguale a $-\pi$ (B) è uguale a -1

(C) non esiste (D) è uguale a π

19) Calcolate, qualora esista $\lim_{x \to +\infty} \frac{x \log(1+e^{3x})}{2x^2 + \operatorname{sen}^2 x}$

20) Calcolate, qualora esista $\lim_{x \to +\infty} \frac{x \operatorname{sen}^3 2/x}{e^{1/x^2} - \cos 1/x}$

21) Determinate $\alpha > 0$ in modo che risulti continua la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+2x)^{\alpha^2/2 - 1} + \cos(\pi + x)}{x}, & \text{per } x > 0 \\ x + \alpha, & \text{per } x \le 0 \end{cases}$$

22) Il limite $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^3(3x) + 2x(e^{2x^2} - 1) + x^2 \log(1+2x)}{x(1-\cos x) + (e^{x^2/2} - 1)\log(1+2x)}$

(A) è uguale a 22 (B) non esiste

(C) è uguale a $4/7$ (D) è uguale a $14/3$

23) Per quale $\alpha \neq 0$ è continua la funzione definita da $f(x) = \frac{[1 + \log(1+x^2)]^{\alpha x^2} - 1}{2x^2}$ per $x < 0$ e da $2\alpha - x$ per $x \geq 0$?

(A) Per nessun $\alpha \neq 0$ (B) $\alpha = 2$

(C) $\alpha = 4$ (D) $\alpha = 1/2$

24) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(x) = o(x^2)$ e $g(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$. Allora

(A) $f(x)g(x) = o(x^6)$ per $x \to 0$ (B) $f(x) + g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$

(C) $f(x) + g(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$ (D) $f(x) + g(x) = o(x^5)$ per $x \to 0$

25) Se $f(x) = x^2 e^{x^2} - x \operatorname{sen} x$ allora per $x \to 0$

(A) $f(x) = \frac{-x^4}{6} + o(x^4)$ (B) $f(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

(C) nessuna delle altre è vera (D) $f(x) = \frac{7}{6} x^4 + o(x^4)$

26) Determinate $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) & \text{per } x > 1 \\ \alpha x + \beta & \text{per } x \leq 1 \end{cases}$$

sia derivabile

27) Sia $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. Provato che f è biettiva da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$ e che f^{-1} è derivabile. Calcolate quindi $(f^{-1})'\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$

28) Determinate $\alpha > 0$ in modo che la funzione $f_\alpha(x) = x^2\left(\sqrt[4]{1 + \alpha/x} - 1\right)$, $x \in (0, +\infty)$ ammetta la retta di equazione $y = x - 3/2$ come asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Calcolate le seguenti primitive:

29) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x + 1}\,dx$; 30) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)\,dx$

31) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$; 32) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$

33) $\int_{-1}^{1} x^8 \operatorname{arctg} x \, dx =$

34) $\int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx =$

35) Sia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile tale che

$$\int_0^2 f = 3 \quad e \quad \left(\int_0^1 f\right)^2 + 5\int_1^2 f - 3\int_0^1 f = -1 \text{. Allora,}$$

(A) nessuna delle altre risposte è vera (B) $\int_1^2 f = 1/5$

(C) $\int_0^1 f = 4$ (D) $\int_0^1 f = -1$

36) Studiare la monotonia di

$$F(x) = \frac{1}{15} e^{-15x+2} - \frac{1}{4} + \int_0^{\sqrt{7}x} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{7}} dt$$

37) Calcolare a e b in modo che sia derivabile la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \int_1^{x^2} \frac{1}{1+t^3} dt & , x \geq 1 \\ ax^2 + b & , x < 1 \end{cases}$$

38) L'integrale generalizzato $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^{\alpha+1}(1+\sqrt{x})} dx$

converge se e solo se

(A) $\alpha > 2$ (B) $\alpha < 2$

(C) $\alpha > 5/2$ (D) $\alpha < 5/2$

39) Per quali valori di $\alpha > 0$ converge $\int_0^{+\infty} \frac{3x + \operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{1+x^{2+5\alpha}} \operatorname{arctg} \log(1+x^{2\alpha})} dx$

40) Determinate per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n \geq 0} \left(|x(x-2)| - 1 \right)^n$ converge e calcolatene la somma.

41) Determinate il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{(2n)^n} \quad ; \quad \sum_{n \geq 1} (n+1)^n n^n \left(\sqrt{1+1/n} - 1\right)^{2n} \quad ; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5} + \sqrt[5]{n^8} - 3n}$$