

Cea  
Cea

ANALOGICA  $1 \div 102$

DIGITALE  $103 \div 358$

[http://www.tlc.unipi.it/people/  
coldavolpe](http://www.tlc.unipi.it/people/coldavolpe)

# Comunicazioni

## Elettriche

Coldavolpe

- ag 1 rumore AWGN
- pag 5 delta
- pag 7 campionamento ideale
- pag 7 condizione di Nyquist
- pag 9 teorema di Shannon - formula di interpolazione
- ag 11 campionamento naturale
- pag 12 filtro di ricostruzione segnale dal campionato
- pag 15 Hilbert - Segnale analitico - rappresentazione segnali in banda base
- pag 16 inviluppo complesso
- pag 17 fase e quadratura
- ag 19 segnali in banda passante
- pag 21 fase e quadratura nel dominio del tempo
- pag 23 modulazione IQ
- ag 23 estrattore di sincronismo (IQ)
- ag 25 modulazione SSB
- pag 33 SSB - VSB / C B
- pag 35 demodulatore SSB
- pag 37 potenza - energia di segnali reali - Parseval
- ag 39 processi reali in banda base e passante - correlazione
- es. su processi reali
- ag 43 introduzione alle modulazioni analogiche
- pag 46 modulazione AM
- pag 48 potenza segnali AM
- pag 51 AM in frequenza
- pag 53 DSB - SSB
- ag 55 Potenza SSB
- pag 56 Modulazione AM
- ag 57 DEMODULAZIONE AM
- ag 60 riepilogo segnali modulati in ampiezza
- ag 62 riepilogo
- demodulatori AM
- ag 63 VSB
- ag 66 conversione di frequenza
- ag 68 moltiplicazione e divisione di frequenza FDM
- ag 70 ricevitore supereterodina
- ag 72 errori di fase e frequenza nei demodulatori AM
- ag 75 demodulatori AM in presenza di rumore
- ag 75 S/N DSB
- pag 78 S/N SSB
- pag 83 modulazione FM e PM
- pag 88 FM e PM analisi in potenza
- pag 90 occupazione di banda
- pag 91 banda stretta
- pag 92 banda FM e PM
- pag 97 PM e AM in presenza di rumore

## INTRODUZIONE ALLE COMUNICAZIONI ELETTRICHE

① ✓

Quando mi parla di comunicazioni elettriche gli esempi più significativi di segnali in uso sono quelli "telefonici" e quelli "video". Tipicamente un segnale telefonico ha una banda di frequenze che va da 300 Hz a 3400 Hz, BANDA TELEFONICO alimentata mediante il filtraggio dell'intera banda vocale; il motivo di questo filtraggio è la riduzione dell'ingombro frequenziale senza alterare l'intelligibilità del messaggio. Il segnale video invece occupa una banda di frequenze che arriva fino a 5 MHz.

Entrambi i segnali sono di tipo analogico. Un segnale numerico può essere, ad esempio, la sequenza di bit trasmessa da un calcolatore elettronico.

Un concetto importante nel campo delle com. elettriche è il "rumore"; intuitivamente se misurassimo la tensione ai capi di un conduttore isolato a temperatura ambiente, verrebbe rilevata una tensione fluctuante a valo medio nullo; questa è di fatto dovuta allo stato di agitazione termica delle particelle subatomiche che non si trovano allo zero assoluto: esso si chiama DONG SUNDI AL MOVIMENTO DELLE PARTICOLE SUBATOMICHE appunto RUMORE TERMICO. Il rumore termico può essere rappresentato (modello matematico) come processo stocastico,  $N(t)$ . Durante la trasmissione di un segnale, quindi, si sovrappone ad esso un certo rumore; questo rumore può essere dovuto al trasmettitore, al canale trasmittendo o introdotto dal ricevitore.

In realtà, essendo il trasmettitore ad uno anziano di poca qualità, il rumore risulta per centualmente insignificante rispetto al segnale stesso.

Il canale di fatto ha

il compattamento di un filtro  $C(f)$ .

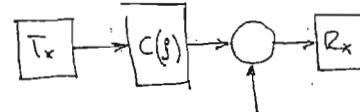
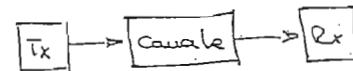
Il sistema di comunicazione

composto da trasmettitore ( $T_x$ )

canale ( $C$ ) e ricevitore ( $R_x$ )

Tutta ciò può essere schematizzato come in figura; il

NUOVI VOCABOLI: SCHEMATIZZATO !!



canale  
 rumore = rumore vel.  
 canale  
 filtro  
 ricevitore  
 trasmettitore

Il canale è, caratterizzato da un certo rumore, può essere schematizzato come un filtro privo di rumore  $C(f)$  (in generale il canale è  $P.B.$ ); al segnale che percorre il canale non rimanendo si somma il processo  $N(t)$  che rappresenta il rumore (indipendente dalla sorgente che lo ha generato, ad esempio l'agitazione termica).

In generale la densità spettrale di potenza del processo rumore può essere schematizzata, per semplicità, come costante:

$$\text{RUMORE BIANCO} \quad \text{densità spettrale di potenza} \quad W_N(f) = S_N(f) = \frac{N_0}{2} = \text{costante}$$

Se integriamo  $W_N(f)$  su tutto l'asse delle frequenze avremmo come risultato infinito, tuttavia, in tutte le applicazioni si considera una banda di frequenza limitata e quindi l'integrale suddetto, nell'intervallo finito, è appunto finito. Un rumore con densità spettrale di potenza, si dice RUMORE BIANCO.

Come già detto il rumore ha valore medio nullo, quindi:

$$\eta_N = 0$$

$\rightarrow$  rumore bianco  
 $\rightarrow$  valore medio nullo

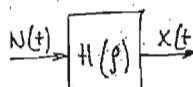
### e autocorrelazione

$$R_N(n) = \frac{N_0}{2} \delta(n)$$

Il rumore così considerato è quindi STAZIONARIO IN SENSO LATO, il rumore che consideriamo è inoltre un processo GAUSSIANO; dalla t.d.s. sappiamo che un processo "stazionario in senso lato" se è Gaussiano è anche "stazionario in senso stretto".

Il rumore così descritto si dice AWGN (Additive White Gaussian Noise).

Si ricordi che un processo Gaussiano come l'AWGN ha alcune proprietà nei confronti di un blocco  $H(f)$ : sia  $N(t)$  il rumore bianco e sia  $X(t)$  l'uscita di  $H(f)$  avremo:



$$\begin{aligned} \eta_x &= \eta_N + h(0) = 0 \\ R_x(n) &= R_N(n) \otimes h(n) \\ W_x(f) &= W_N(f)H(f) \end{aligned}$$

Canale = filtro passa banda

3

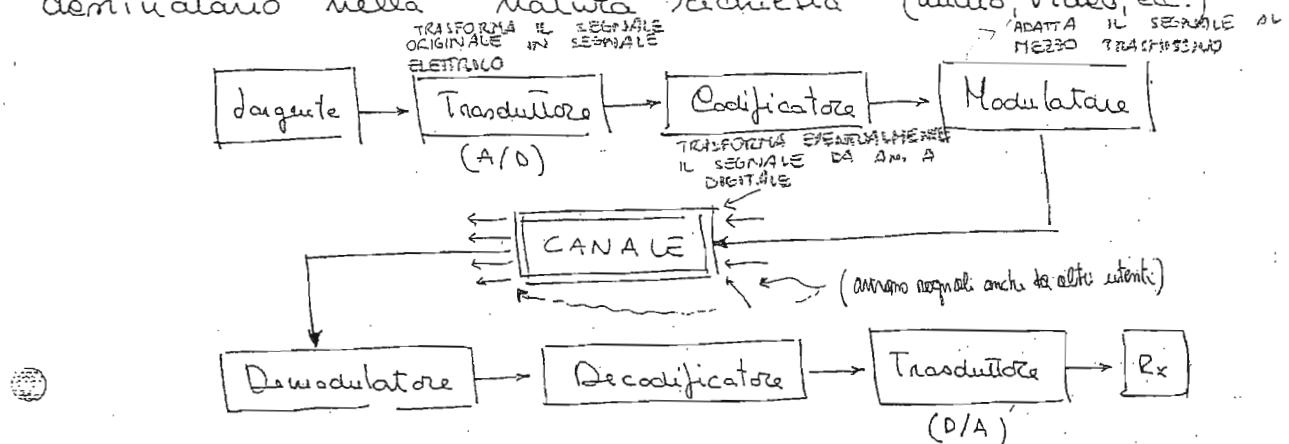
In generale un canale ha un campamento "passa banda", ovvero predilige una gamma di frequenza entro la quale l'attenuazione del segnale si mantiene ragionevole. La linea bifilare ad esempio ha una banda che va da 1 KHz a 1 MHz.

- Approfondendo l'analisi di un sistema di telecomunicazioni, si possono individuare alcuni blocchi fondamentali: L'informazione è prodotta da una SORGENTE (ad esempio l'apparato vocale umano), questo segnale non essendo elettrico deve essere trasformato mediante un TRASDUTTORE, per poter utilizzare il canale.

Se la trasmissione è di tipo numerico, occorre un apparato di conversione Analogico-Digitale, che nella maggior parte dei casi ha sede nel trasduttore stesso.

- Sempre nel caso di segnali numerici, è necessario "codificare", attraverso un CODIFICATORE, il segnale, con lo scopo di rendere identificabili e correggibili eventuali errori (Vedi Codici di trasmissione). Per adattare il segnale al mezzo di comunicazione occorre alterare il segnale stesso con un MODULATORE; grazie all'operazione di modulazione, sullo stesso canale possono coesistere più segnali.

La fase di ricezione è avviamente il processo inverso che passa attraverso una DEMODULAZIONE, una DECODIFICA e un TRASDUTTORE, fino a portare il segnale al destinatario nella natura richiesta (audio, video, ecc.).



**Cenni sui CODICI DI TRASMISSIONE:** Nelle trasmissioni numeriche, esistono alcune operazioni per ottimizzare l'utilizzo del canale.

- A. CODICI DI SORGENTE: Per limitare l'occupazione del canale, si può pensare di eliminare tutti gli elementi del "messaggio" che non siano fondamentali per l'intelligenza del ricevitore; si applicano allora dei "codici di sorgente" che hanno il compito di togliere secondo una certa logica tutta la "ridundanza" presente nel messaggio.
- B. CODICI DI CANALE: Il messaggio inviato dalla ridundanza è avviamente più suscettibile agli errori; a seconda del canale di trasmissione e quindi delle interferenze parassiti, si sceglie di reintrodurre una parte della ridundanza per migliorare l'immunità ai disturbi.
- C. CODICI DI LINEA: Per adattare il segnale alla linea di trasmissione, si introduce una <sup>correlazione</sup> fra i simboli del segnale in modo da modificare la <sup>correlazione</sup> spettrale del segnale stesso. Questa operazione è regolata dai cosiddetti codici di linea.

- A) Compresa nell'operazione precedente
- B) Aggiunge le informazioni al canale al quanto è necessario il canale
- C) Aggiunge al canale le informazioni necessarie



La funzione  $\delta(t)$  è tale per cui data una funzione  $f(t)$  è verificata la seguente:

PROPRIETÀ CONVOLUZIONE  
DELLA FUNZIONE DELTA DI DIRAC

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

per definizione allora ponendo  $f(t) = 1$

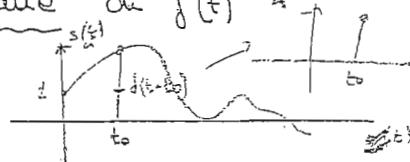
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Questa funzione gode di alcune proprietà:

1. Proprietà CAMPIONATRICE della  $\delta(t)$

Il prodotto di un segnale  $s(t)$  e la funzione  $\delta(t)$  centrata in  $t_0$ , fornisce un "campione" di  $s(t)$  in  $t_0$ :

$$s(t) \cdot \delta(t-t_0) = s(t_0) \delta(t-t_0)$$



2. Proprietà della CONVOLUZIONE

La convoluzione di un segnale  $s(t)$  e la funzione  $\delta(t)$  centrata in  $t_0$ , corrisponde ad una traslazione di  $s(t)$  in  $t_0$ :

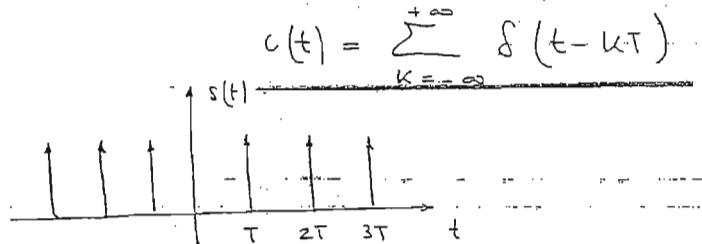
$$s(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) s(t-\tau) d\tau = s(t-t_0)$$

La funzione  $\delta(t)$  non è che un'astrazione matematica, che può essere ottenuta come limite di funzioni ordinarie.

*nel tempo*  
convoluzione ~~con~~  $\delta$  = traslazione

### Esempio

Si consideri un segnale "pettine di  $\delta(t)$ " definito da



il segnale può essere sviluppato con la serie di Fourier, avremo

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

nella quale  $C_n$  è il coefficiente dello sviluppo dato dalla seguente:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} c(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Questo risultato è ottenuto mediante la proprietà campionatrice del delta di dirac, infatti:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n \frac{0}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Ricordiamo che

$$\delta(t - t_0) s(t) = s(t_0) \delta(t - t_0)$$

$$\text{ponendo } t_0 = 0$$

$$\delta(t) s(t) = s(0) \delta(t)$$

lo sviluppo in serie di Fourier diviene

7

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}} = \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{j2\pi n \frac{t}{T}} = \\ = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

A questo punto poniamo applicare la Trasformata di Fourier del segnale periodico; in particolare notiamo che

PROPRIETÀ TRASFORMATA DI  
FOURIER RETRADO DI  $t_0$   $\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] = \delta(f - f_0)$

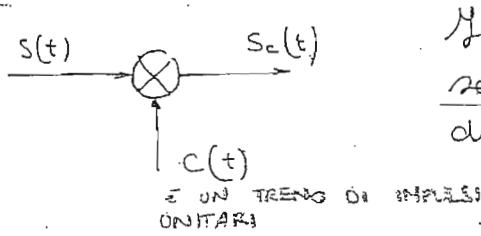
allora  $\mathcal{F}[f(t-t_0)] = F e^{j2\pi f_0 t_0}$

$$C(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{m}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(f - mf_0)$$

Un segnale che nel dominio del tempo è una sequenza di  $\delta(t)$  distanziati di  $T$ , nel dominio della frequenza è sempre una sequenza di impulsi  $\delta(f)$  distanziati di  $1/T$  e ampiezza  $1/T$

### CAMPIONAMENTO IDEALE

Sia  $s(t)$  un segnale; Campionare tale segnale significa trasformarlo in  $s_c(t)$ , ovvero una sequenza di impulsi di ampiezza uguale all'ampiezza di  $s(t)$  nell'istante considerato.



Il segnale,  $c(t)$  che è il segnale campionatore, è definito come segue

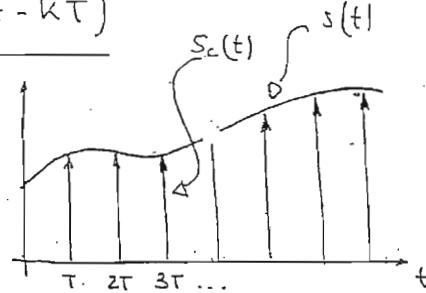
$$\downarrow c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

Se con  $T$  si indica il periodo di campionamento.

$$s_c(t) = s(t) \cdot c(t)$$

$$\begin{aligned}
 S_c(t) &= s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t - kT) = \\
 &\times \text{proprietà del campionamento} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta(t - kT)
 \end{aligned}$$

Ad esempio se  $s(t)$  ha un generico andamento (vedi figura) il segnale campionato  $s_c(t)$  è una sequenza di impulsi che conservano l'ampiezza di  $s(t)$  negli istanti  $t = kT$ .



Calcoliamo lo spettro in frequenza del segnale campionato  $s_c(t)$ .

$$S_c(f) = S(f) \otimes C(f)$$

questo perché

$$\stackrel{\text{T. d'F del prodotto}}{=} \stackrel{\text{è la convoluzione}}{[S(f) \cdot C(f)]} = S(f) \otimes C(f)$$

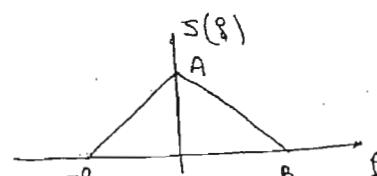
allora viceversa

$$\begin{aligned}
 S_c(f) &= S(f) \otimes \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ S(f) \otimes \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right] \frac{1}{T} = \quad \begin{array}{l} \text{lineare la} \\ \text{convoluzione} \\ \text{è un operatore} \\ \text{lineare.} \end{array}
 \end{aligned}$$

Siccome la convoluzione non è che una traslazione, come testimonia la proprietà 2, precedentemente richiamata, avremo:

$$\begin{aligned}
 S_c(f) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f) \otimes \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \\
 &\Rightarrow = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{k}{T}\right)
 \end{aligned}$$

Supponiamo che il segnale  $s(t)$  sia caratterizzato da uno spettro  $S(f)$ , come in figura



Campionamento ideale:

infrequenze ho infinite repliche dello spettro del segnale campionato

Per determinare l'andamento dello spettro  $S_c(f)$  del segnale campionato, distinguiamo due casi:

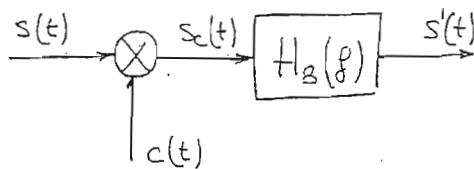
1. Se  $\frac{1}{T} = F \geq 2B$  avremo:

$$\frac{1}{2T} \geq B$$

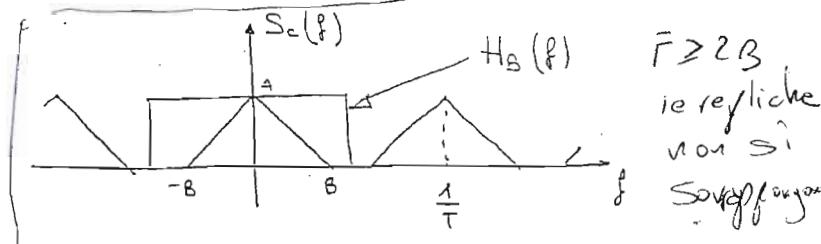
Allora lo spettro di  $S_c(t)$  non è che la ripetizione dello spettro  $S(f)$  a distanza di  $1/T$ , non sovrapposti.

In questo caso è facile intuire che per ricavare il segnale di partenza

è sufficiente filtrare il segnale campionato con un dispositivo che selezioni la gamma di frequenze che va da  $-B$  a  $B$ .

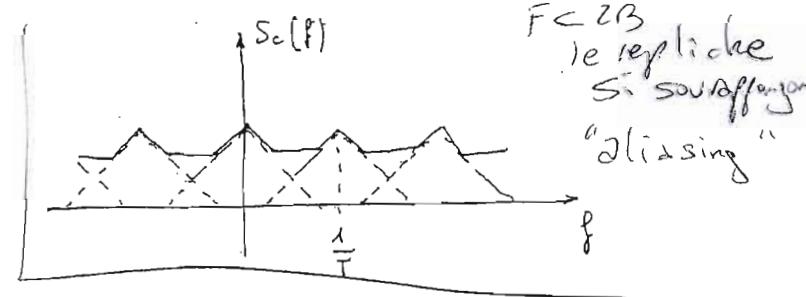


$$\text{con } H_B(f) = \frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$



2. Se  $\frac{1}{T} = F < 2B$  le code degli spettri  $S(f)$  di  $s(t)$  ripetuti nello spettro del segnale campionato; si sovrapppongono:

questo fenomeno è detto ALIASING ed impedisce la ricavazione del segnale  $s(t)$  a partire da quello campionato.



La condizione appena vista, per garantire la possibilità di ricavare un segnale a partire dal segnale campionato

$$\frac{1}{T} = F \geq 2B$$

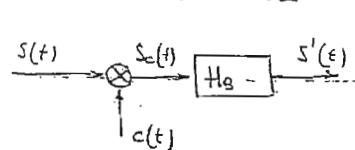
è detta CONDIZIONE DI NYQUIST.

NYQUIST  $F \geq 2B$

Analizziamo il filtro  $H_B(f)$  per la ricostruzione del segnale originale:

$$H_B(f) = \frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

ricordiamo che



$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[H_B(f)] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\right] \\ &= \frac{1}{T} 2B \operatorname{sinc}(2Bt) \end{aligned}$$

$$h_B(t) = \operatorname{sinc}(2Bt)$$

Nella condizione limite in cui  $\frac{1}{T} = F = 2B$

$$h_B(t) = \operatorname{sinc}(Ft) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Siccome

$$S(f) = S_c(f) \cdot H_B(f)$$

$$S'(t) = S_c(t) \otimes h_B(t) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta(t - kT) \otimes h_B(t)$$

Sulla base della FORMULA DI INTERPOLAZIONE ( $F = 2B$ )  
interpolazione

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right) \quad F = 2B$$

possiamo dire che

$$\begin{aligned} S'(t) &= S_c(t) \otimes h_B(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta(t - kT) \otimes \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right) = S(t) \end{aligned}$$

cioè il segnale  $s(t)$  può essere ottenuto come somma di infinite sinc centrate negli istanti dei campioni con ampiezza del campione stesso.

Alla luce di quanto detto esiste il teorema del campionamento o teorema di Shannon che riassume le condizioni per la ricostruzione di un segnale.

TEOREMA DI SHANNON: Se un segnale  $s(t)$  è a banda limitata  $B$  esso è completamente descritto dai suoi campioni istantanei uniformemente spaziati nel tempo con periodo  $T \leq \frac{1}{2B} \Rightarrow f \geq 2B$ . Su altri termini dal segnale campionato si può ripetere al segnale originale.

La formula di interpolazione appena scritta è valida nel caso limite  $F = 2B$ ; nel caso più generale vale la seguente:

FORMULA DI INTERPOLAZIONE CASO GENERICO CON

$$\cancel{F \geq 2B}$$

$$s(t) = \frac{2B}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \sin \left[ 2B(t-kT) \right]$$

formula per  
ricostruire il  
segnale  
originale dai  
suoi campioni

Osserviamo che la condizione di Shannon  $F \geq 2B$  dice anche che all'aumentare di  $F$  le ripetizioni dello spettro si allontanano; nell'ambito del tempo significa aumentare il numero di campioni e in parola di SOVRACCAMPIONAMENTO.

Questa condizione è necessaria perché un filtro reale di fatto non ha una banda rigorosamente rettangolare, quindi, se aumenta la distanza fra le ripetizioni di spettro, è parioso scegliere un filtro sempre più dolce.

Sovra  
campiona  
mento

filtro  
reale

Nota: Un segnale reale non ha mai una banda rigorosamente finita, quindi è necessario filtrare  $s(t)$  prima del campionamento per definire l'intervallo  $[-B, B]$ .

Segnale  
reale

La formula di interpolazione, facendo uso della funzione sinc, è un'astrazione matematica; per questo motivo è necessario stabilire come esistente un filtro reale. Su base del risultato che si vuole ottenerne, ovvero sulla base

della qualità richiesta nel segnale ricostruito,  
 è necessario decidere come approssimare la risposta  
 del filtro  $H_s$ , in modo da ottenere una risposta  
 $H_1$ , finitamente realizzabile.

Consideriamo allora un filtro reale  $h_1(t)$ :

$$H_s(f) \longleftrightarrow h_1(t)$$

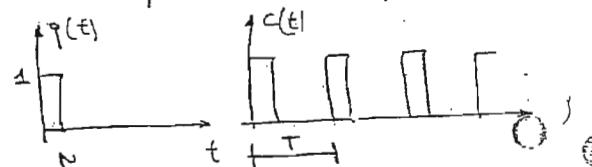
e asserviamo come non modifica la ricostruzione  
 del segnale  $s(t)$ , ovvero analizziamo qual'è il  
 risultato dell'operazione:

$$s'(t) = s_c(t) \otimes h_1(t) \quad \begin{matrix} \text{ricostruzione segnale} \\ \text{con un filtro reale } h_1(t) \end{matrix}$$

CAMPIONAMENTO NATURALE con un impulso rettangolare di durata breve

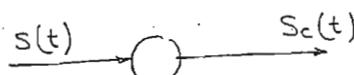
Siccome l'impulso di Dirac è anch'esso una  
 astrazione matematica, non è finitamente realizzabile  
 campionare un segnale con tale impulso.

Consideriamo allora un segnale di Campionamento  
 $c(t)$  costituito da una sequenza di impulsi,  
 comunque di breve durata: sia  $q(t)$  un impulso  
 unitario di durata  $N$ ,  
 esprimiamo il segnale  
 $c(t)$  nel modo seguente

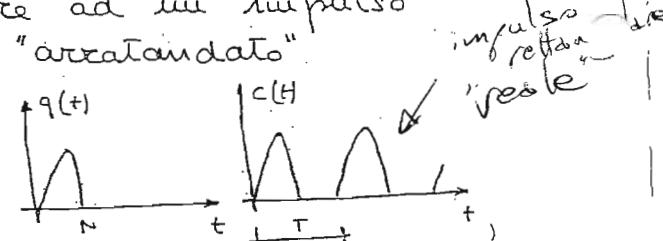


$$\begin{matrix} \text{Tempo:} \\ \text{impulsi:} \rightarrow c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(t-kT) \quad q(t) = \text{rect}\left(\frac{t-\tau/2}{N}\right) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{replica} \\ \text{base} \end{matrix}$$

Anche l'impulso rettangolare di fatto è finitamente  
 irrealizzabile, perciò si ricorre ad un impulso



$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(t-kT)$$



Questo è quello che si chiama CAMPIONAMENTO NATURALE.  
 Se ad esempio consideriamo  $q(t)$  rettangolare e  
 supponiamo di voler campionare un segnale generico

$S(t)$ , il risultato del campionamento sarà costituito da pulsazioni di durata  $\tau$  del segnale:

$$S_c(t) = S(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(t - kT)$$

Analizziamo cosa accade in frequenza.

Siccome

13

$$c_s(t) = \sum_k q(t - kT) = q(t) \otimes \sum_k \delta(t - kT)$$

in frequenza:

$$C_s(f) = Q(f) \sum_k \delta(f - \frac{k}{T}) \frac{1}{T} =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k Q(f) \delta(f - \frac{k}{T}) =$$

Inoltre essendo

$$q(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{N}\right) \quad e \quad Q(f) = N \sin(f_N) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

avremo:

$$C_s(f) = \frac{1}{T} \sum_k N \sin(f_N) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} \delta(f - \frac{k}{T})$$

Lo spettro del segnale campionato sarà costituito

d'una sequenza di impulsi di dirac che assumono l'area della sinc, centrati in  $(f - \frac{k}{T})$

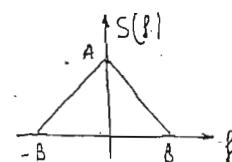
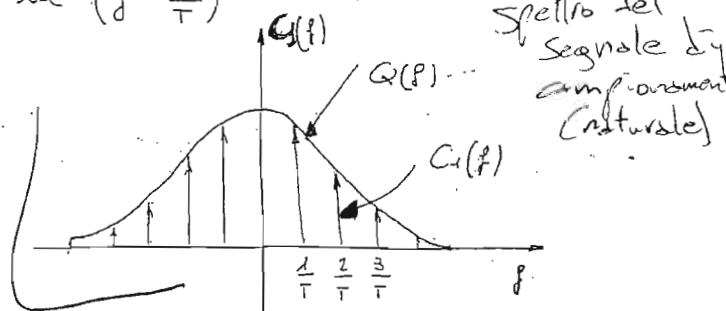
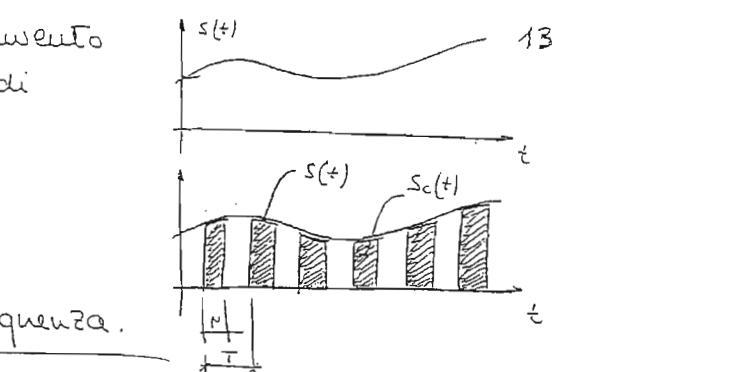
Noto l'andamento di  $Q(f)$

lo spettro del segnale di campionamento è quello di figura a lato

Per studiare lo spettro del segnale campionato  $S_c(t)$ , assumiamo che  $S(t)$  abbia uno spettro generico  $S(f)$  con banda  $B$  e ampiezza  $A$ .

Allora ricordando che

$$S_c(t) = S(t) \cdot c_s(t)$$



Supponiamo che  $S(t)$  abbia questo spettro

avremo

$$S_c(f) = S(f) \otimes Q(f)$$

$$S(f) \otimes S(f \cdot \frac{k}{T})$$

convoluzione  
con una delta  
= traslazione,

14

ovvero:

$$S_c(f) = \frac{1}{T} \sum_k Q\left(\frac{k}{T}\right) S\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Spettro del segnale  
campionato

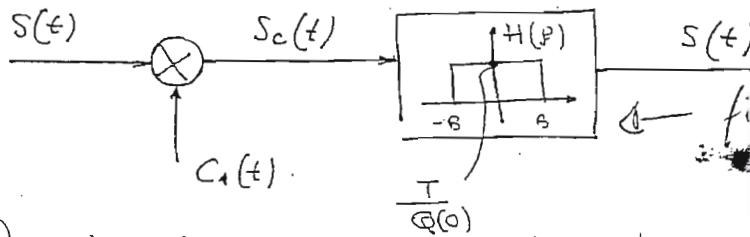
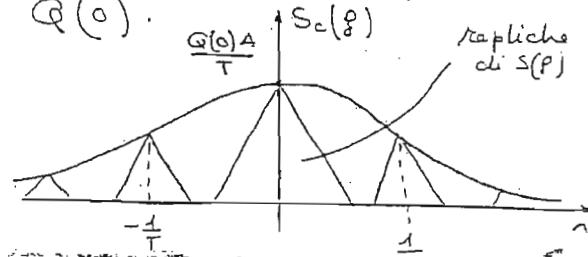
Che causisce in una ripetizione attenuata o

amplificata dello spettro  $S(f)$ . Per  $k=0$  lo spettro è amplificato del fattore  $Q(0)$ .

Anche in questo caso vale il teorema di Shannon,

per cui se  $F \geq 2B$ , è possibile ricavare il

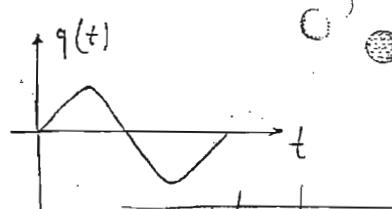
segnale di partenza da quello campionato. Tuttavia il filtro deve attenuare/amplificare dello stesso fattore  $Q(0)$ , per riportarci a  $S(f)$ .



filto per la ricostruzione del  
segnale campionato  
deve ribaltare l'amplificazione  
(o attenuazione) introdotta dal  
campionamento

Consideriamo ora un impulso di campionamento  $q(t)$  a media nulla, cioè tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(t) dt = 0$$



Allora

$$Q(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

e dalla teoria dei segnali sappiamo che

$$Q(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) dt$$

prendendo un impulso  
di campionamento  
a media nulla  
in frequenza annullo  
la replica in zero

Quindi si ha uno spettro  $Q(f)$  nullo nell'origine.

Questo fatto si ripercuote sul segnale campionato cancellando la replica dello spettro  $S_c(f)$  nell'origine

infatti come già visto

45

$$S_c(f) = \frac{1}{T} \sum_n Q\left(\frac{n}{T}\right) S\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

mato lo spettro  $S(f)$ , quello del segnale campionato

$S_c(f)$  risulta, qualitativamente come in figura.

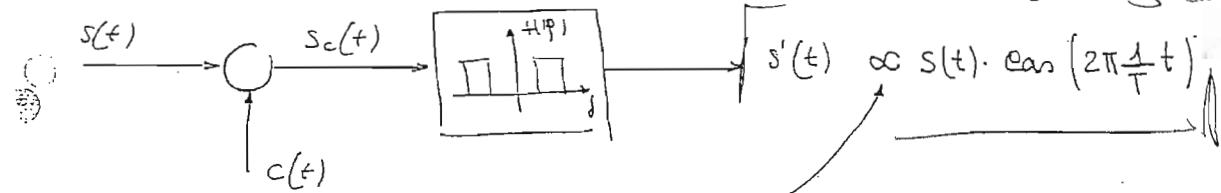
La componente informativa è contenuta in ognuna delle

repliche, quindi per ricavare il segnale  $s(t)$ , basta filtrare una delle suddette repliche, ad esempio quella centrata in  $1/T$ .

Il risultato del filtraggio, però, non è esattamente il segnale di partenza, ma una sua versione traslata in frequenza; ricordando che una traslazione in  $f$  coincide con la moltiplicazione per un fattore nel tempo:

$$s'(t) = s(t) \cdot \cos\left(2\pi \frac{1}{T} t\right)$$

per giungere ad  $s(t)$  è necessario, dopo il filtraggio un'operazione di DEMODULAZIONE. (per riportare il segnale dove era originalmente)



In questo caso si dice che  $s'(t)$  è la versione modulata in ampiezza di  $s(t)$  (caso che sarà chiarito in seguito).



filtro x tenere una sola delle repliche  
↓  
ottengo per una replica traslata  
↓  
demodulo

- www.daddy88.com
- Davide Valeriani
- 17

## RAPPRESENTAZIONE IN BANDA BASE DI SEGNALI (Rappresentazione Complessa di segnali reali).

18

Si consideri un generico segnale reale  $x(t)$ .

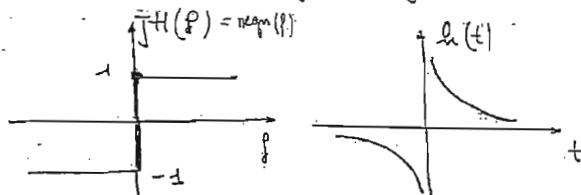
### TRASFORMATA DI HILBERT $\hat{x}(t)$

Si definisce trasformata di Hilbert  $\hat{x}(t)$ , del segnale  $x(t)$  il segnale ottenuto dall'operazione di filtraggio con:

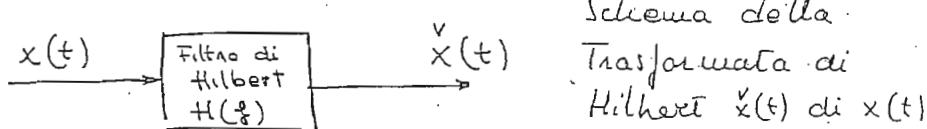
risposta in frequenza

$$H(f) = -j \operatorname{segu}(f)$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$



Il filtro  $H(f)$  si dice in questo caso FILTO DI HILBERT; l'operazione può essere schematizzata nel modo seguente:



Schemma della Trasformata di Hilbert  $\hat{x}(t)$  di  $x(t)$

Osserviamo che:

$$|H(f)| = 1 \text{ e } \arg H(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & f \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & f < 0 \end{cases}$$

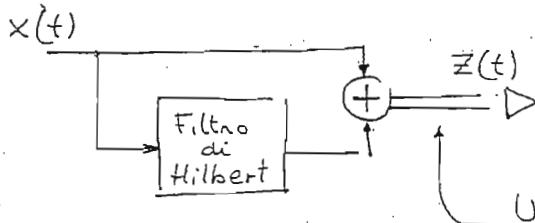
→ Filtro di Hilbert = filtro REALE che altera solamente la fase

### SEGNALE ANALITICO $z(t)$

Si definisce segnale analitico  $z(t)$ , del segnale  $x(t)$ , il segnale complesso ottenuto sommando lo stesso  $x(t)$  alla sua trasformata di Hilbert  $\hat{x}(t)$  moltiplicata per l'unità immaginaria:

$$z(t) = x(t) + j \hat{x}(t)$$

Il segnale analitico  $z(t)$ , può essere schematizzato come segue:

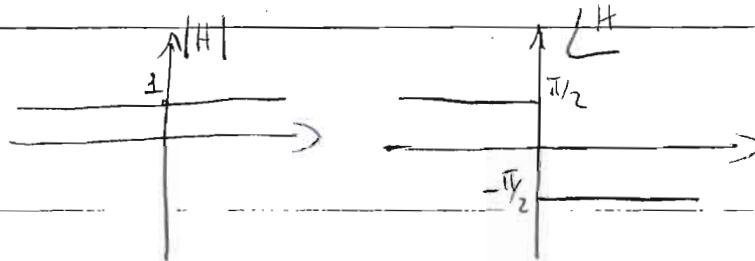


Schemma del Segnale Analitico  $z(t)$  di  $x(t)$

Osserviamo cosa accade in frequenza.

Un segnale complesso si indica con una doppia linea

Hilbert



Nota: Un segnale  $s(t)$  è a simmetria Hermitiana se:

$$S(f) = S^*(-f) \quad (\text{fornisce la parte reale pari e quella immaginaria dispari})$$

mentre  $s(t)$  è a simmetria Antitermitiana se:

$$S(f) = -S^*(-f)$$

Siccome il segnale Analitico  $Z(t)$  di  $x(t)$  è un segnale complesso, risulta di fatto la cambiazione lineare della sua parte reale e della sua parte immaginaria per la linearità della trasformata di Fourier:

Segnale analitico  
in frequenza  $\rightarrow$

$$Z(f) = X(f) + j\tilde{X}(f)$$

se questo  
segnale reale

Supponiamo allora  $x(t)$  a simmetria Hermitiana ✓

Se un generico spettro  $X(f)$ , qualitativamente come

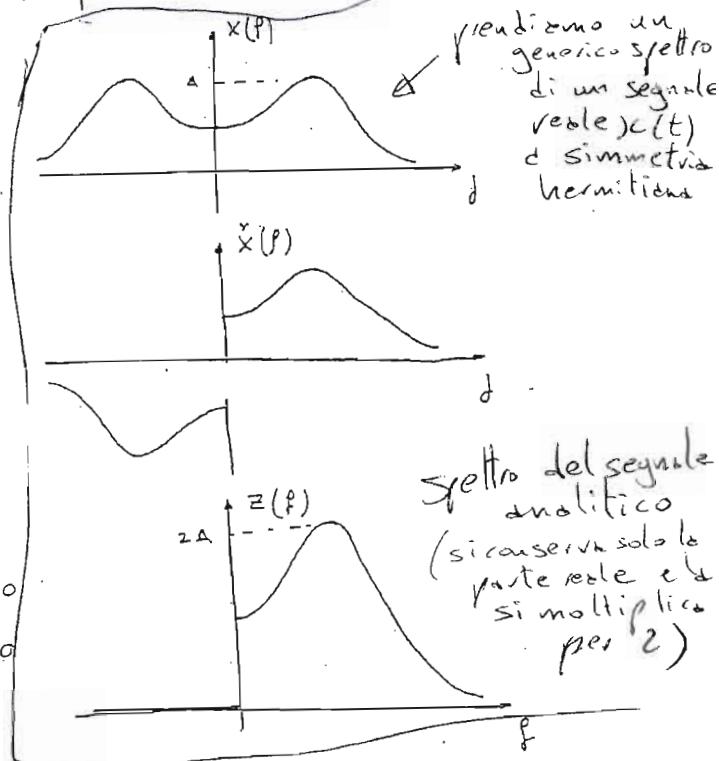
in figura, lo spettro del segnale analitico  $Z(f)$  non è che quello del segnale  $x(t)$ , privato delle frequenze negative e moltiplicato per due.

$$\begin{aligned}\tilde{X}(f) &= X(f)H(f) = \\ &= -j\text{segu}(f)X(f)\end{aligned}$$

$$Z(f) = X(f) + j\text{segu}(f)X(f)$$

avremo che

$$\text{segu}(f)X(f) = \begin{cases} X(f) & f \geq 0 \\ -X(f) & f < 0 \end{cases}$$



INVLUPPO COMPLESSO  $\tilde{x}(t)$  DEL SEGNALE  $x(t)$  RISPETTO A  $f_0$

Inviuluppo Scelta una frequenza  $f_0$  arbitraria, si definisce inviluppo complesso  $\tilde{x}(t)$  del segnale  $x(t)$  rispetto alla frequenza  $f_0$ , il segnale attenuato moltiplicato

dallo segnale analitico  $Z(t)$  per l'esponentiale complesso  $\exp(-j2\pi f_0 t)$ . Di fatto questa operazione

N.B  $\Rightarrow$  tutti i segnali reali hanno simmetria hermitiana

causisce nella traslazione in frequenza di

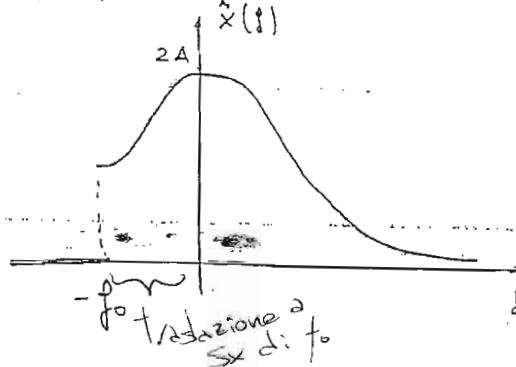
musica<sup>18</sup>

seguale analitico di  $+f_0$

$$\tilde{X}(t) = Z(t) e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\tilde{X}(f) = Z(f + f_0)$$

In riferimento alle figure precedenti si può tracciare lo spettro di  $\tilde{X}(t)$ .



Vediamo come ricavare il seguale originale  $x(t)$  dai segnali appena definiti. Osserviamo innanzi tutto che:

$$X(t) = \operatorname{Re}\{Z(t)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{X}(t) e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$$Z(t) e^{-j2\pi f_0 t} e^{j2\pi f_0 t} = z(t)$$

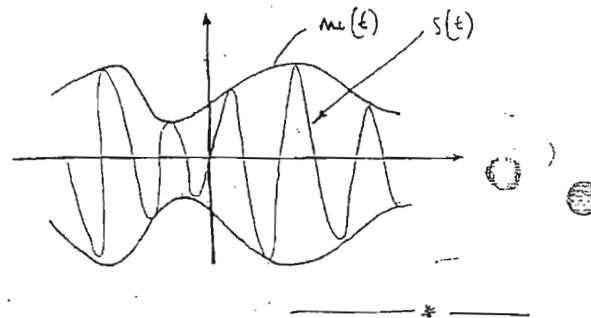
Esempio

Supponiamo di avere un segnale  $s(t)$  così definito:

$$s(t) = m(t) \cos 2\pi f_0 t$$

nel quale  $m(t)$  è un segnale qualiasi, con l'andamento di figura.

$m(t)$  mi dice INVOLUCCRO del COSENO.



Come già detto:

$$X(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{X}(t) e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (1.1)$$

ossia anche  $\tilde{X}(t)$  è un segnale complesso; può essere scritto esplicitando parte reale e parte immaginaria:

$$\tilde{X}(t) = X_c(t) + j X_s(t) \quad (*)$$

nella quale  $X_c(t)$ , la parte reale, è detta

CORPOLENTE IN FASE (spesso indicata anche con  $X_r(t)$ ), mentre  $X_s(t)$ , la parte immaginaria, è detta

CORPOLENTE IN QUADRATURA (spesso indicata con  $X_i(t)$ ).

Tornando al discorso di prima:

$$\boxed{X(t) = \operatorname{Re}\{Z(t)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{X}(t)e^{j2\pi f_0 t}\} =}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\left[X_c(t) + jX_s(t)\right]\left[\cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)\right]\right\} =$$

$$= X_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - X_s(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.2)$$

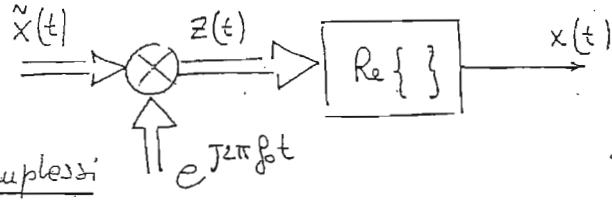
Abbiamo stabilito la relazione che lega il segnale  $X(t)$  alla campionante in quadratura e alla

campionante in fase dell'inviluppo complesso in  $f_0$ .

Sulla base della relazione (1.1), si può tracciare il seguente schema per segnali complessi:

Schema per  
il passaggio  
da  $\tilde{x}(t)$  a  $x(t)$

per segnali complessi

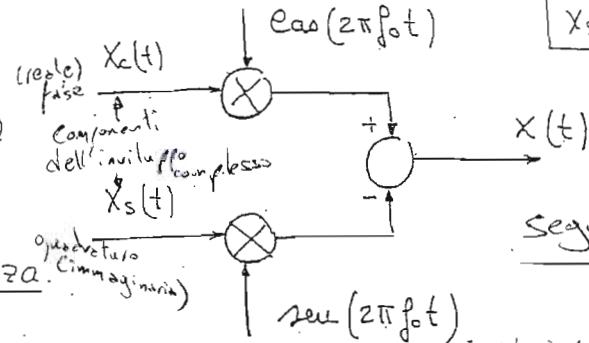


$$\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$$

Segnali complessi

Sulla base della (1.2), si può tracciare lo schema equivalente per segnali reali:

Schema 1. per  
il passaggio dal  
campionanti in fase e  
quadratura dell'  
inviluppo ea  
al segnale di palma.



$$\begin{cases} X_c(t) \\ X_s(t) \end{cases} \rightarrow \tilde{x}(t)$$

Segnali reali

Per completezza osserviamo che  $\underline{z(t)e^{-j2\pi f_0 t}e^{j2\pi f_0 t}} = z(t)$

$$\tilde{X}(t) = \operatorname{Im}\{Z(t)\} = \operatorname{Im}\{\tilde{X}(t)e^{j2\pi f_0 t}\}$$

sulla base della quale, attraverso considerazioni analoghe alle precedenti, si giunge allo schema duale (che ammettiamo).

Per determinare la relazione di passaggio da  $x(t)$  alle due componenti dell'inviluppo complesso, avremo che, per definizione

$$\tilde{x}(t) = z(t) e^{-j2\pi f_0 t}$$

Allora:

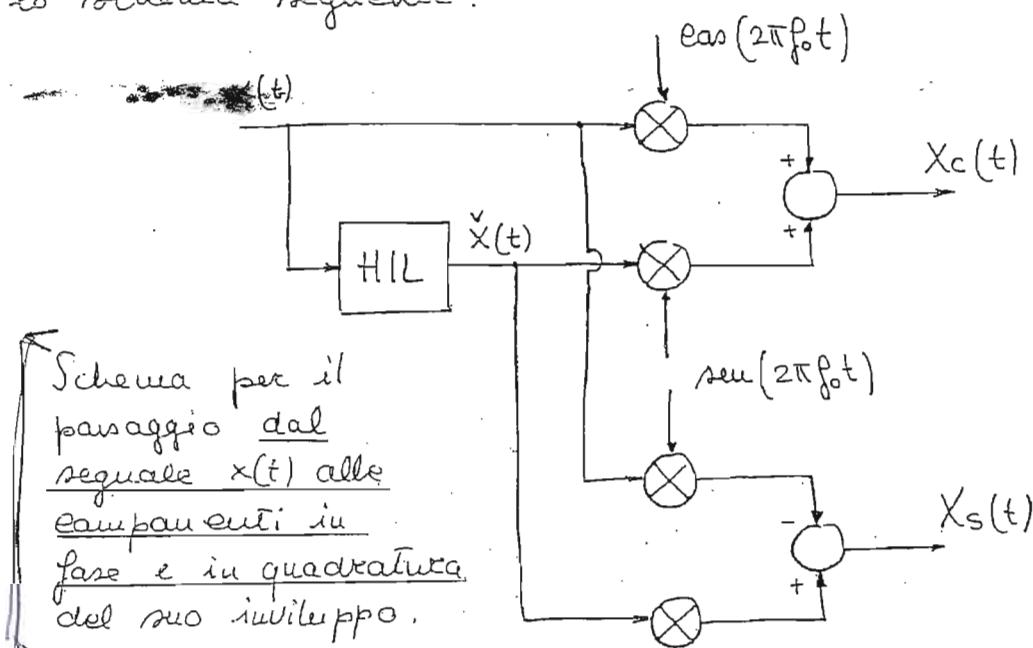
$$X_c(t) + j X_s(t) = [x(t) + j \dot{x}(t)] [\cos(2\pi f_0 t) - j \sin(2\pi f_0 t)]$$

uguagliando parte reale e parte immaginaria si ottiene

$$X_c(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) + \dot{x}(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.3)$$

$$X_s(t) = \dot{x}(t) \cos(2\pi f_0 t) - x(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.4)$$

Sulla base di queste due relazioni si può tracciare lo schema seguente:



Come vedremo in seguito, per la categoria di segnali di maggior interesse, questo schema può essere materialmente semplificato.

Come nato dall'algebra, un numero complesso può<sup>24</sup> essere scritto in forma polare. Anche l'inviluppo complesso allora diviene:

$$\tilde{x}(t) = X_c(t) + jX_s(t) = p(t) e^{j\Phi(t)} \quad (1.5)$$

nella quale

$$\left\{ \begin{array}{l} p(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)} \\ \Phi(t) = \arctg \frac{X_s(t)}{X_c(t)} \end{array} \right. \quad (1.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)} \\ \Phi(t) = \arctg \frac{X_s(t)}{X_c(t)} \end{array} \right. \quad (1.7)$$

detti rispettivamente **MODULO** e **FASE** dell'inviluppo complesso.

**Proprietà dell'inviluppo complesso  $\tilde{x}(t)$**

- Si considerino due frequenze  $f_0$  e  $f_1$  e riavi  $\tilde{x}(t)$  e  $\tilde{x}'(t)$  gli inviluppi complessi di  $x(t)$  ad esse relative:

$$\tilde{x}(t) = z(t) e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\tilde{x}'(t) = z(t) e^{-j2\pi f_1 t}$$

Se entrambe i cari il modulo vale

$$p(t) = p'(t) = |z(t)|$$

quindi il modulo non dipende dalla frequenza.

il modulo dell'inviluppo complesso non dipende dalla frequenza

### ANALISI IN FREQUENZA DELL'INVILUPPO COMPLESSO

Per definizione

$$\boxed{\tilde{x}(t) = X_c(t) + jX_s(t)}$$

nella quale  $X_c(t)$  e  $X_s(t)$  sono uguali reali; in quanto tali; gli spettri  $X_c(f)$  e  $X_s(f)$  sono a simmetria Hermitiana e lo spettro  $jX_s(f)$  è a simmetria Anti-Hermitiana. Come già detto:

$$\boxed{\tilde{x}(f) = X_c(f) + jX_s(f)}$$

**Nota:** Un segnale complesso  $S(t)$ , con spettro  $S(f)$ , può sempre essere scritto come somma di un segnale a simmetria Hermitiana e uno a simmetria Anti-Hermitiana

N.B. Se  $\tilde{x}(f)$  è a simmetria Hermitiana  $\Rightarrow jX(f)$  è a simmetria anti-hermitiana

Per quanto detto:

$$S(f) = S_H(f) + S_A(f)$$

$$S_H(f) = S^*(f)$$

$$S_A(f) = -S^*(-f)$$

Inoltre ...

$$S_H(f) = \frac{S(f) + S^*(-f)}{2}$$

$$S_A(f) = \frac{S(f) - S^*(-f)}{2}$$

Per la metà appena vista

Componente  
fase e quadratura  
in frequenza  
partendo dall'inviluppo  
Complesso in  
frequenza

$$\left\{ \begin{array}{l} X_C(f) = \frac{\tilde{X}(f) + \tilde{X}^*(-f)}{2} \\ X_S(f) = \frac{\tilde{X}(f) - \tilde{X}^*(-f)}{2j} \end{array} \right.$$

No. B<sub>0</sub>

Se  $X_S$  è nullo  
le componenti in  
fase e quadratura  
sono  
incoerenti

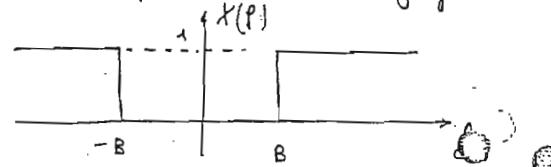
(1.8)

(1.9)

$$\text{nei grafici si fa } jX_S(f) = \frac{\tilde{X}(A) - \tilde{X}(-A)}{2}$$

### Esempio

Si consideri un segnale  $x(t)$  con spettro  $X(f)$  di figura.  
Determinare  $x(t)$  in funzione  
delle due componenti in  
fase e in quadratura.



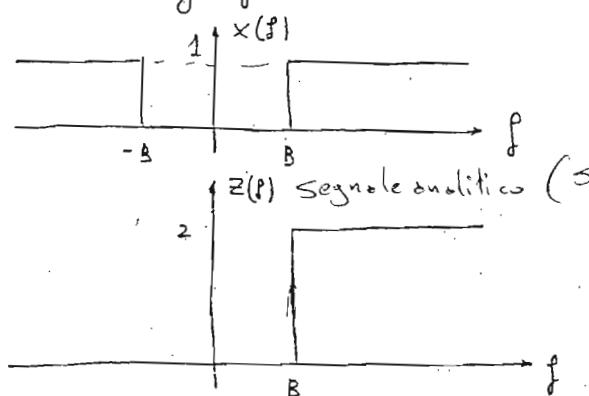
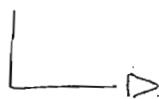
Sappiamo che:

$$x(t) = X_C(t) \cos(2\pi f_0 t) - X_S(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

ponendo  $f_0 = B$ , per via grafica:

$$z(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$$

$$z(f) = X(f) + j\tilde{X}(f)$$



(Si prende solo la parte reale positiva  
moltiplicata per due)

$$\begin{aligned} \check{x}(f) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(f) X(f) = \\ &= \begin{cases} -\int X(f) & f \geq 0 \\ \int X(f) & f < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} Z(f) &= X(f) + \check{J} \check{x}(f) = \\ &= \begin{cases} 2X(f) & f \geq B \\ 0 & f < B \end{cases} \end{aligned}$$

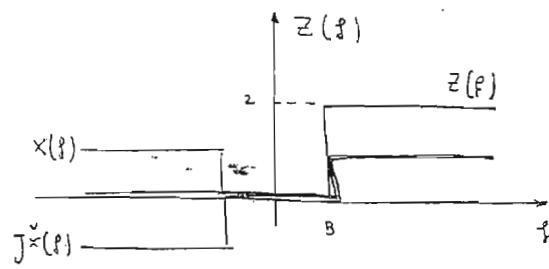
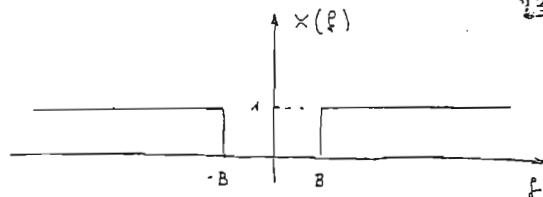
 per le due relazioni (1.8) e (1.9)

$$X_c(f) = \frac{\tilde{X}(f) + \tilde{X}^*(-f)}{2}$$

$$X_s(f) = \frac{\tilde{X}(f) - \tilde{X}^*(-f)}{2J}$$

e an

$$\tilde{X}(f) = Z(f + f_0)$$

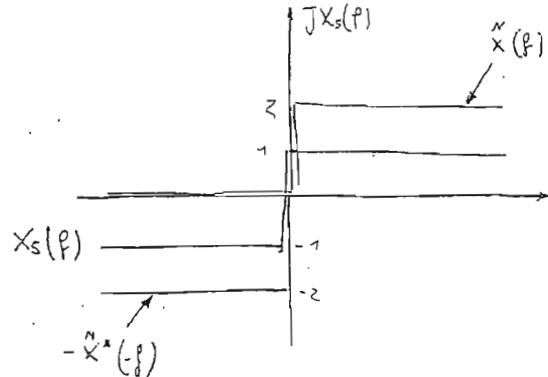
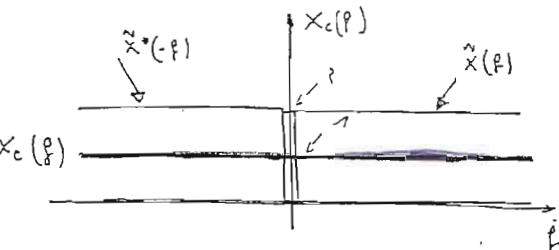


$$\tilde{X}(f) = Z(f + f_0)$$

f. suppose = d B

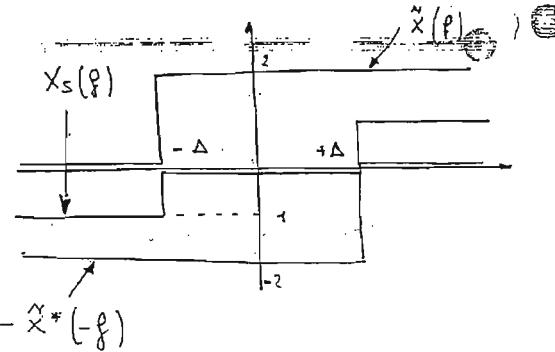
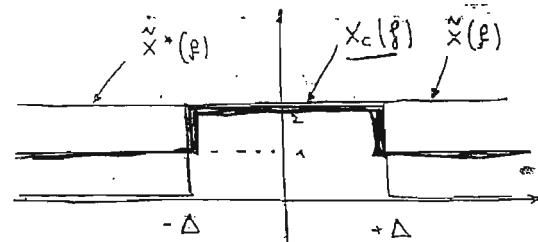
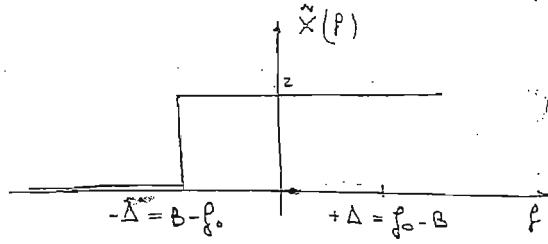
$$\tilde{X}(f) = Z(f + f_0)$$

$$\tilde{X}(f) = Z(f + f_0)$$



24

Supponiamo di prendere  
 $f_0 > B$  così da aumentare  
 le traslazioni, e sia la  
 quale si ottiene  $\tilde{X}(f)$ .  
 Dall'unità  $X(f)$  e  $Z(f)$   
 riusciamo inviati, ciò  
 che costituisce l'inviluppo  
 complesso  $\tilde{X}(f)$ .



$$X_c(f) = 1 + \text{rect}\left(\frac{f - f_0}{2\Delta f}\right)$$

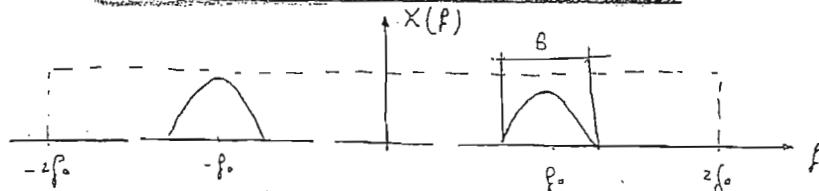
$$\Rightarrow x_c(t) = \delta(t) + \text{sinc}(2\Delta f t)$$

Nelle comunicazioni elettriche, analogiche o numeriche che riguardano i segnali hanno una BANDA limitata  $B$ , centrata in  $f_0$ ; nella maggior parte dei casi  $f_0$  è piuttosto elevata ( $f_0 \gg B/2$ ).

Segnale PASSA BANDA: Si definisce segnale Passa Banda  $x(t)$

intorno alla frequenza  $f_0$ , se il suo spettro  $X(f)$  si estende al più tra  $-2f_0$  e  $2f_0$  avendo:

$$X(f) \neq 0 \Leftrightarrow -2f_0 < f < 2f_0$$



Se  $x(t)$  è  
Passa banda

$\tilde{x}(t)$

$X_c(f)$

$X_s(f)$

Sono  
Passa  
Basso

- Proprietà dei segnali Passa banda:

1. Se  $x(t)$  è un segnale Passa Banda, il suo inviluppo complesso, la campata in fase e quella in quadratura sono segnali PASSA BASSO di Banda  $f_0$ .

#### Dimostrazione

Per esempio è definito  $z(t)$  è passa basso di banda  $2f_0$ , infatti:  $Z(f) \neq 0$  per  $0 \leq f \leq 2f_0$ .

Si assume  $\tilde{x}(f) = Z(f + f_0)$

avremo

$$\tilde{x}(f) = Z(f + f_0) \neq 0 \text{ per } -f_0 \leq f \leq f_0$$

questo significa che

$$X_c(f) = \frac{\tilde{x}(f) + \tilde{x}^*(-f)}{2} \neq 0 \quad \text{per } -f_0 \leq f \leq f_0$$

$$X_s(f) = \frac{\tilde{x}(f) - \tilde{x}^*(-f)}{j} \neq 0$$

avranno passa basso di banda  $f_0$ .

Introducendo l'inviluppo complesso  $\tilde{x}(t)$  del segnale reale  $x(t)$ , si ha la possibilità di lavorare con segnali passo basso anziché passo banda in  $f_0$ . In sostanza si dice che  $\tilde{x}(t)$ , o analogamente  $x_c(t) \in X_s(t)$ , sono l'EQUIVALENTE IN BANDA BASE DEL SEGNALE PASSA BANDA  $x(t)$ . Il vantaggio è evidente se poniamo che  $f_0$  in genere è la frequenza della portante del segnale  $x(t)$  attenuato modulando un qualunque segnale da trasmettere. In quanto tale,  $f_0$  può essere molto elevata (nelle comunicazioni satellitari  $f_0$  arriva anche a 90 GHz), per cui può essere davvero problematico progettare circuiti che lavorino a tale frequenza.

Consideriamo allora un segnale Passa-Banda centrale in  $f_0$ ; sappiamo che se  $X(f)$  è lo spettro di  $x(t)$ ,

$$\underline{Z(f) = 2X(f)u(f)}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \underline{X(f)} &= Z(f + f_0) = \\ &= 2X(f + f_0)u(f + f_0) \end{aligned}$$

È evidente che per attivare  $\tilde{x}(f)$ , basterebbe filtrare con  $H_p(f)$  rettangolare di banda  $2f_0$ .

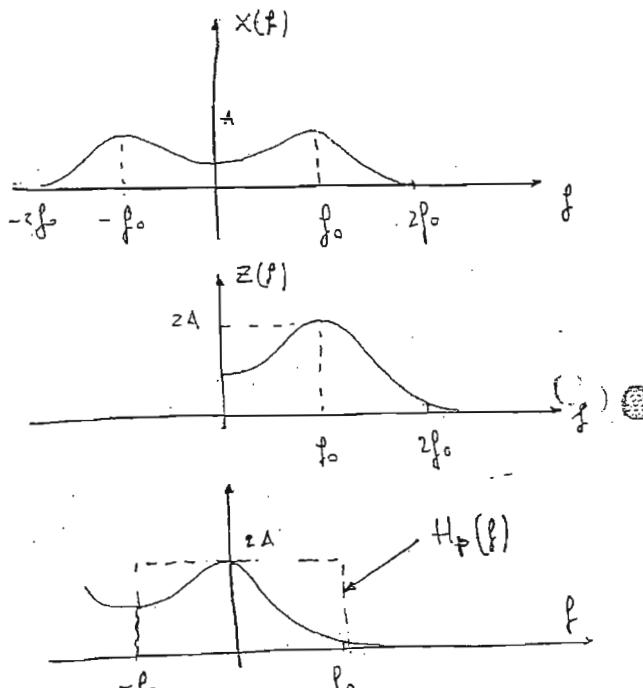
$$\underline{\tilde{x}(f) = 2X(f + f_0)H_p(f)}$$

Ecco

$$H_p(f) = \begin{cases} 1 & -f_0 \leq f \leq f_0 \\ 0 & |f| > f_0 \end{cases}$$

Nel dominio del tempo

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= 2 \left[ x(t) e^{-j2\pi f_0 t} \right] \otimes h_p(t) = \\ &= 2 \left[ x(t) \cos(2\pi f_0 t) - j x(t) \sin(2\pi f_0 t) \right] \otimes h_p(t) = \end{aligned}$$



$$\tilde{x}(t) = X_c(t) + jX_s(t)$$

uguagliando parte reale e parte immaginaria

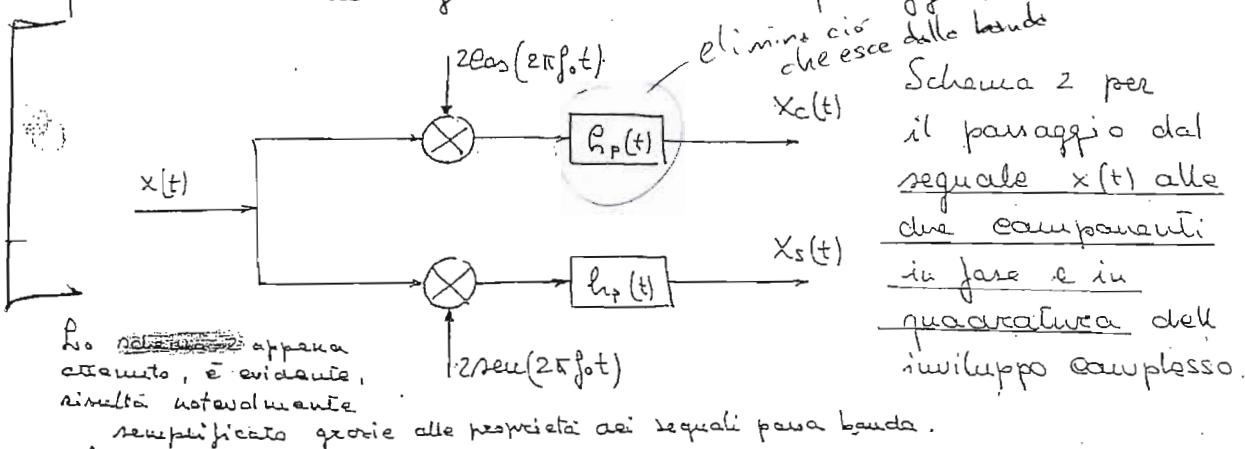
$$X_c(t) + jX_s(t) = 2 \left[ x(t) \cos(2\pi f_0 t) \right] \otimes h_p(t) - j \left[ x(t) \sin(2\pi f_0 t) \right] \otimes h_p(t)$$

per la linearità della convoluzione

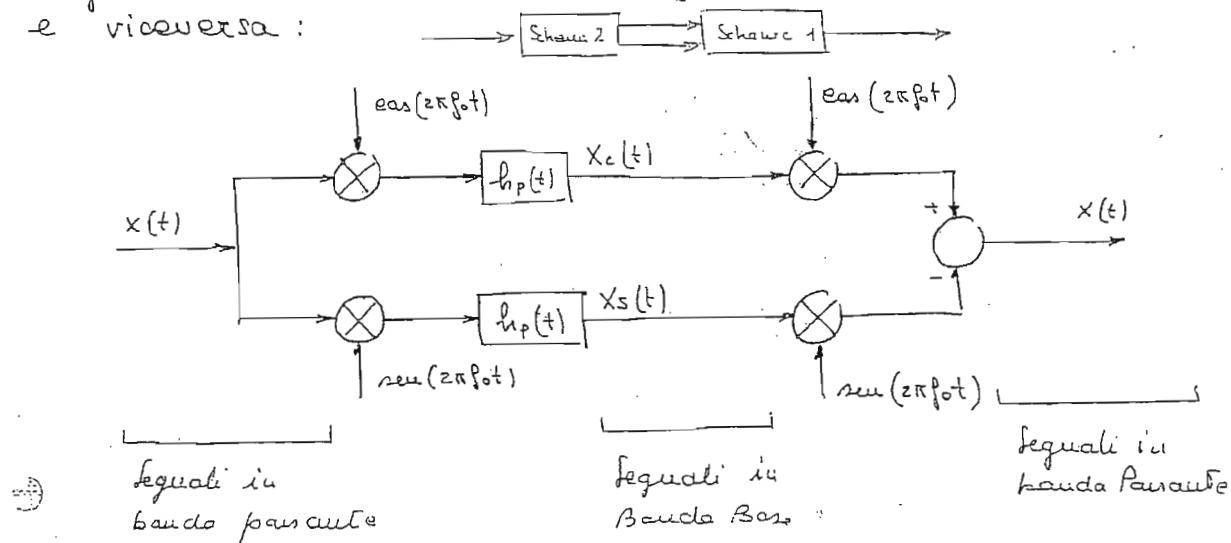
$\Rightarrow x(t)$   
 $\Rightarrow x_s$   
 $\Rightarrow$  dominio  
 del tempo

$$\begin{cases} X_c(t) = 2x(t) \cos(2\pi f_0 t) \otimes h_p(t) & (1.10) \\ X_s(t) = -2x(t) \sin(2\pi f_0 t) \otimes h_p(t) & (1.11) \end{cases}$$

sulla base delle relazioni (1.10) e (1.11) appena scritte, perveniamo al seguente schema di passaggio:



In generale allora si può tracciare uno schema per il passaggio da segnali in BANDA PASSANTE  $x(t)$  a segnali in BANDA BASE  $X_c(t)$  e  $X_s(t)$  e ancora da segnali in BANDA BASE a segnali in BANDA PASSANTE, e viceversa:



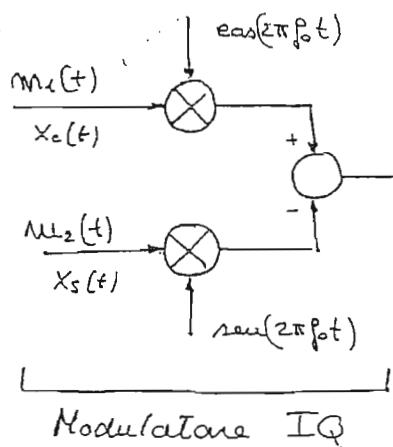
## Applicazione di fase e quadratura

Una possibile applicazione dei due schemi (schema 1 e 2, schema 2), può essere la seguente. Siano  $m_1(t)$  e  $m_2(t)$  due segnali, ad esempio due segnali video, in banda base. Per poter essere trasmessi, devono essere modulati (traslati ad una frequenza più elevata); allora si può pensare di modulare  $m_1(t)$  con una portante  $\cos(2\pi f_0 t)$  e  $m_2(t)$  con la stessa in quadratura; in questo modo si ottiene tramite lo schema 1, un unico segnale in banda passante  $x(t)$ , che può essere trasmesso.

Il ricevitore può allora essere realizzato con lo schema 2 che estrae da  $x(t)$  le due componenti dell'onda complesso, che in sostanza sono  $m_1(t)$  e  $m_2(t)$ .

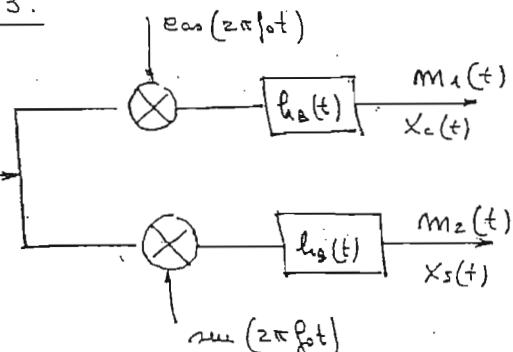
Questa operazione è detta MODULAZIONE IQ e permette di trasmettere due segnali  $m_1$  e  $m_2$  sovrapposti nel tempo e in frequenza. Lo schema realizzativo è il seguente:

Schemi  
modulazione  
IQ  
(fase-  
quadratura)



Modulazione IQ

Schemi 3.



Demodulazione IQ

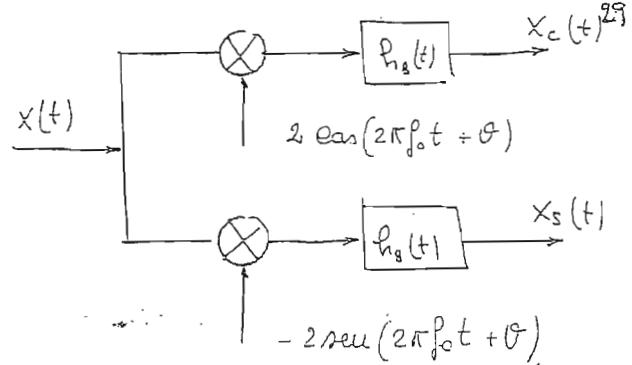
problema Il problema della MODULAZIONE IQ, risiede nel fatto che, in eventuale ritardo o anticipo di fase nel demodulatore IQ, compromette la possibilità di ricevere i segnali in banda base di origine.

Dimostrazione Dallo schema 3, sappiamo che il segnale trasmesso include i segnali  $m_1(t)$  e  $m_2(t)$  è nella forma

$$X(t) = m_1(t) \cos(2\pi f_0 t) - m_2(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

Supponiamo che il demodulatore sia del tipo di figura.

dimostrazione  
Immediatamente con le formule trigonometriche che affichia  $x_c(t) = m_1(t)$  e  $x_s(t) = m_2(t)$ , dove essere  $\theta = 0$ .



$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \theta) &= \cos(2\omega_0 t + \theta) + \cos(\theta) \\ \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \theta) &= \sin(2\omega_0 t + \theta) - \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_c(t) &= 2x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \\ &= 2m_1(t) \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) - 2m_2(t) \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \\ &\textcircled{1} \quad = 2m_1(t) \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \theta) - 2m_2(t) \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$

i termini in  $2\omega_0$  vengono eliminati dal filtraggio  $h_a$

- perché escono dalla banda, quindi rimane: con le formule di addizione di seno e coseno:

$$2x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) = m_1(t) \cos \theta - m_2(t) \sin \theta$$

Vedendo

$$x_c(t) = m_1(t)$$

$$m_1(t) \cos \theta - m_2(t) \sin \theta = m_1(t)$$

Si deduce

$$\theta = 0$$

Analogo discorso si può fare per ottenere  $x_s(t) = m_2(t)$ .

Per poter demodulare correttamente il segnale ricevuto gli oscillatori di portante non devono essere sfasati tra loro. Al più se lo sfasamento fase  $\theta = \pi/2$ , otteneremo  $x_c(t) = m_2(t)$  e  $x_s(t) = m_1(t)$  se  $\theta = \pi/2$   $x_c$  e  $x_s$  si invertono

In molti casi per non incorrere in eventuali sfasamenti, la portante viene dedita direttamente dal segnale ricevuto, tramite un dispositivo detto ESTRATTORE DI SINCRONISMO. In presenza di rumore

dispositivo per dedurre la portante di rettamento dal segnale

molto spesso ci si deve accontentare di avere la stessa frequenza, ma un leggero sfasamento.  
E' evidente che se  $\theta$  è molto piccolo

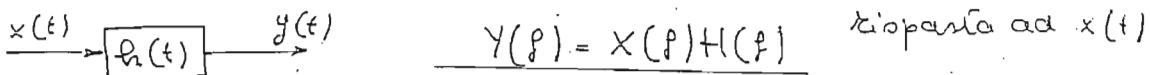
$$\cos \theta \approx 1 \quad \text{e} \quad \sin \theta \approx 0$$

quindi

$$m_1(t) \cos \theta - m_2(t) \sin \theta \approx m_1(t)$$

situazione reale  
in cui  $\theta$  è  
molto  
piccolo

Supponiamo di avere  $X(t)$  e  $h(t)$  passa banda; allora il seguente attenuto come uscita del blocco  $h(t)$  in



è a sua volta un segnale passa banda; in realtà, affinché anche  $y(t)$  sia passa banda, basterebbe che almeno uno dei due fra  $x(t)$  e  $h(t)$  fosse passa banda, infatti, per  $|f| > 2f_0$ , uno dei due sarebbe nullo e così  $y(t)$ .

Ricaviamo l'inviluppo complesso  $\tilde{y}(t)$  da quelli di  $x(t)$  e  $h(t)$ . Sappiamo che:

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(f) &= 2Y(f+f_0)H_p(f) = \\ &= 2\left[\frac{i}{2} \cdot 2X(f+f_0)H(f+f_0)H_p(f) + H_p(f)\right] = \\ &= \frac{i}{2}\left[2X(f+f_0)H_p(f) \cdot 2H(f+f_0)H_p(f)\right] = \\ &= \frac{i}{2}\tilde{H}(f)\tilde{X}(f) \quad (1.12)\end{aligned}$$

Allora:

$$(1.13) \quad \tilde{y}(t) = \frac{i}{2}\tilde{h}(t) \otimes \tilde{x}(t) \quad \tilde{x}(t) \rightarrow \boxed{\frac{i}{2}\tilde{h}(t)} \rightarrow \tilde{y}(t)$$

Scriviamo  $\tilde{y}(t)$  esplicitando le due componenti:

$$\tilde{y}(t) = y_c(t) + jy_s(t)$$

Inoltre:

$$\tilde{y}(t) = \frac{i}{2}\tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t) =$$

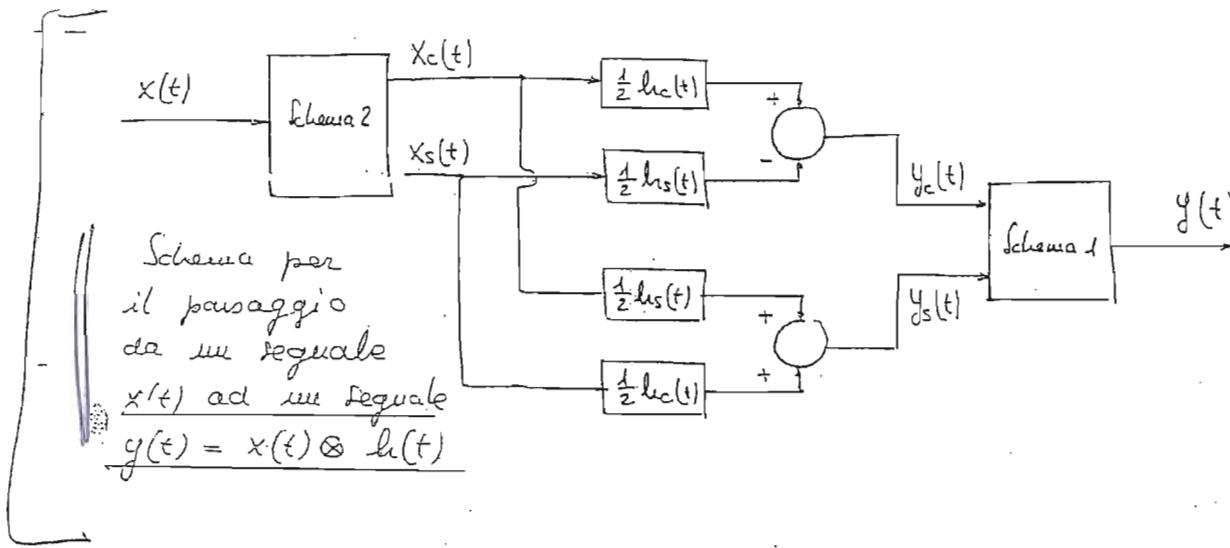
$$\begin{aligned}
 &= \left[ x_c(t) + jx_s(t) \right] \otimes \frac{1}{2} \left[ h_c(t) + jh_s(t) \right] = \\
 &= \left[ x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) - x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t) \right] + \\
 &\quad + j \left[ x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) + x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t) \right]
 \end{aligned}$$

uguagliando parte reale e parte immaginaria

$\boxed{y_c(t) = x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) - x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t)}$  (1.1)

$y_s(t) = x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) + x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t)$  (1.1)

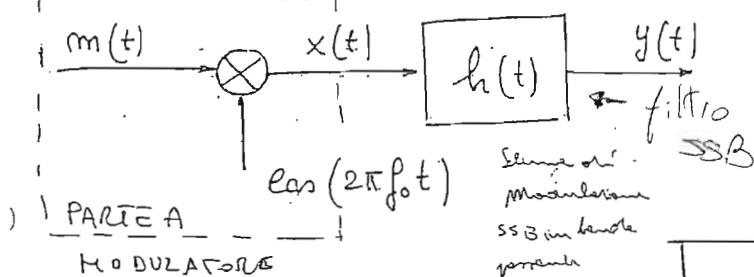
Sulla base delle relazioni appena scritte si  
arriva al seguente schema:



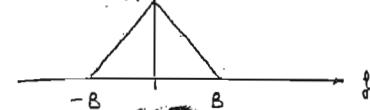
## MODULAZIONE SSB

Si consideri un segnale  $m(t)$  <sup>selezione di ampiezza limitata</sup> pausa banda, con banda  $B$  e un filtro  $h(t)$  pausa banda,

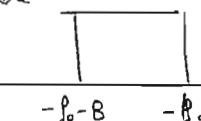
riserveremo sul modulatore e analizziamo il funzionamento dello schema seguente:



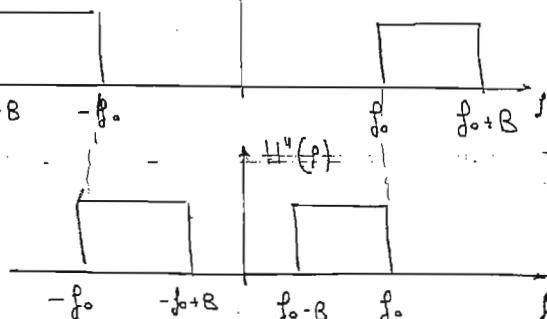
$H(f)$  spettro di  $m(t)$



SENZA AL  
modulazione  
SSB in banda  
portante



$H'(f)$



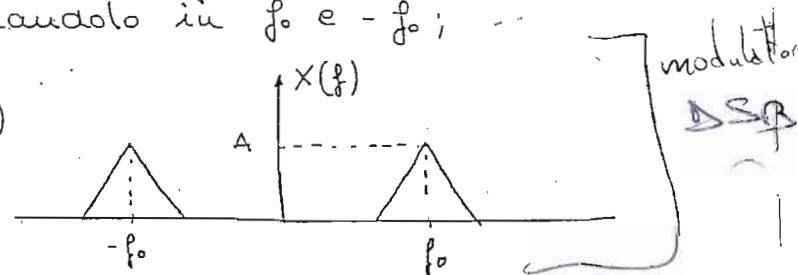
La parte A del sistema  
oppo ripettato, ma è  
che un MODULATORE. Siccome  
lo spettro di  $m(t)$ ,  $H(f)$ ,  
è a Simmetria Hermitiana  
e conoscendo la parte delle

frequenze positive o quella delle frequenze negative, è  
nato l'intero spettro  $H(f)$ . La parte di spettro di  
un segnale pausa banda delle frequenze positive è  
detta BANDA LATERALE SUPERIORE (Upper Band UB).

Mentre quella per frequenze negative è detta  
BANDA LATERALE INFERIORE (Lower Band LB).

La parte A del dispositivo, ma fa che traslare  
lo spettro di  $m(t)$ , centrandolo in  $f_0$  e  $-f_0$ ;  
esso si dice MODULATORE A

## DOPPIA BANDA LATERALE (DSB)



Nata la simmetria dello spettro di  $X(f)$ , si può  
pensare di limitare l'occupazione frequenziale,  
eliminando una delle due bande laterali. In  
questo modo si ottiene un segnale a SINGOLA  
BANDA LATERALE. Questa operazione può essere

eseguita con il filtro  $h(t)$ , detto FILTO SSB.

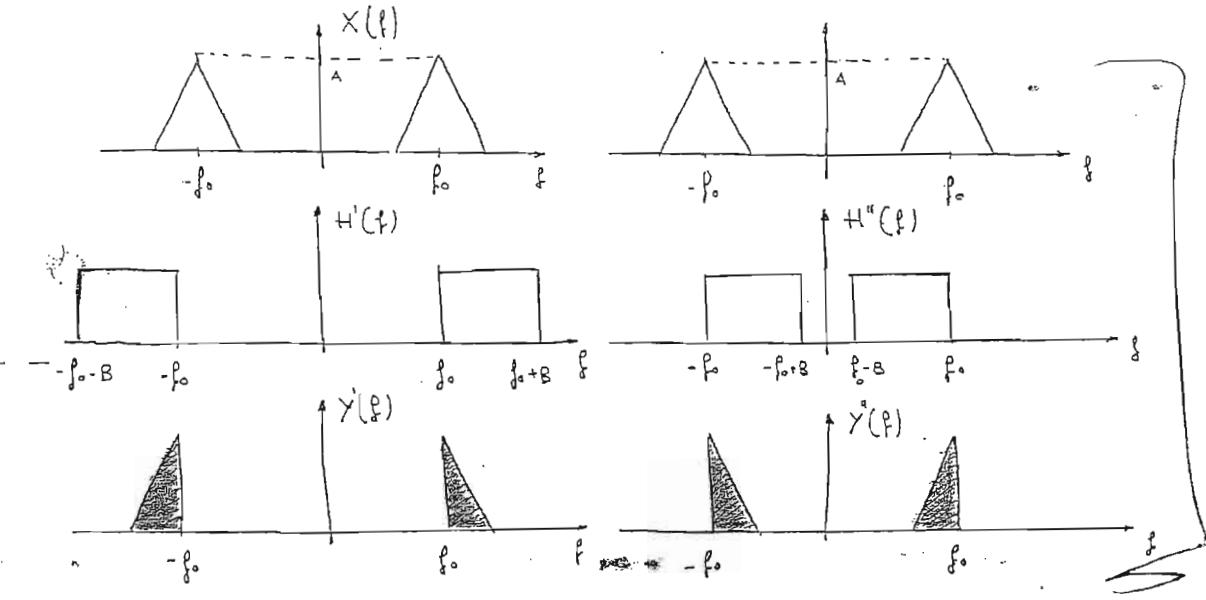
L'eliminazione della banda laterale, può essere di due tipi: Se si impiega il filtro  $h(t)$ , si elimina la banda laterale inferiore attenuando un segnale SSB-UB (Single Side Band - Upper Band); se si usa il filtro  $h''(t)$ , si elimina la banda superiore, attenuando un segnale SSB-LB (Single Side Band - Lower Band).

SSB

UB

SSB

LB



MODULAZIONE SSB-UB

MODULAZIONE SSB-LB

Con il dispositivo impiegato, detto MODULATORE SSB

si passa da un segnale in banda base ad uno in banda passante e poi si esegue il filtraggio.

Vediamo gli equivalenti in banda base di  $x(t)$  e  $y(t)$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

allora, per la (1.13)

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \otimes \frac{1}{2} \tilde{h}(t)$$

assumiamo che  $\tilde{x}(t) = m(t)$ , ovvero

$$x_c(t) = m(t)$$

$$x_s(t) = 0$$

Analogamente

pp. 32

F

mato  $H(f)$ , attraverso le relazioni seguenti, si determinano le due componenti:

34

$$H_c(f) = \frac{\tilde{H}(f) + \tilde{H}^*(-f)}{2}$$

$$H_s(f) = \frac{\tilde{H}(f) - \tilde{H}^*(-f)}{2j}$$

Siccome  $H_c(f)$  deve filtrare  $x_c(f)$  che è già di banda  $B$ , si può assumere

$$H_c(f) = 1$$

Analogamente

$$H_s(f) = \begin{cases} 1 & f \geq 0 \\ -1 & f < 0 \end{cases} = -j \operatorname{segno}(f)$$

Si deduce che

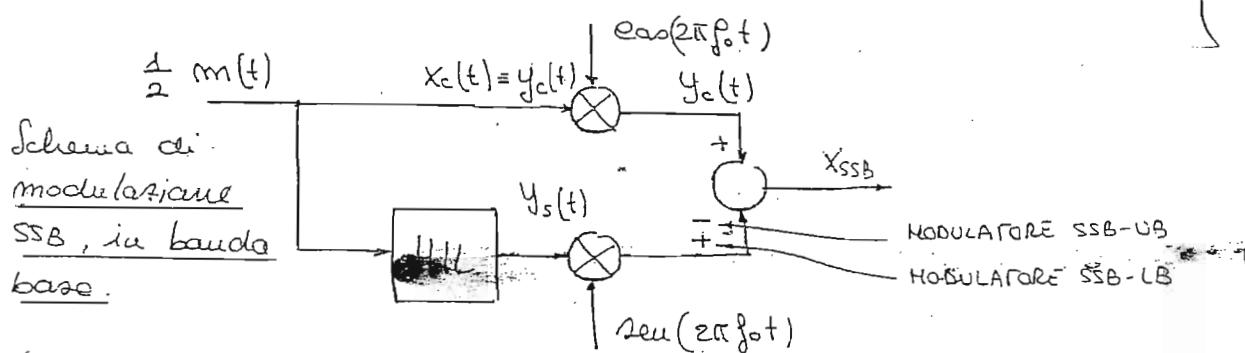
$$\tilde{H}(f) = \text{FILTRO DI HILBERT}$$

ponendo  $x_s(t) = 0$  nelle (1.14) e (1.15) si ottiene:

$$y_c(t) = x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t)$$

$$y_s(t) = x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t)$$

che si introduce nel seguente schema



f.a la stessa cosa dello schema iniziale solo che qui filtra prima di modulare

La differenza tra quest'ultimo dispositivo e quello iniziale esiste nel fatto che l'ultimo esegue l'operazione di filtraggio direttamente sui segnali in banda base e poi esegue la traslazione.  
Si fatti i due sono equivalenti.

35

Dallo schema appena tracciato, si può scrivere l'espressione di  $y(t)$  in forma chiusa:

$$y(t) = \frac{m(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t) - \frac{\dot{m}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t) \quad \text{SSB - UB}$$

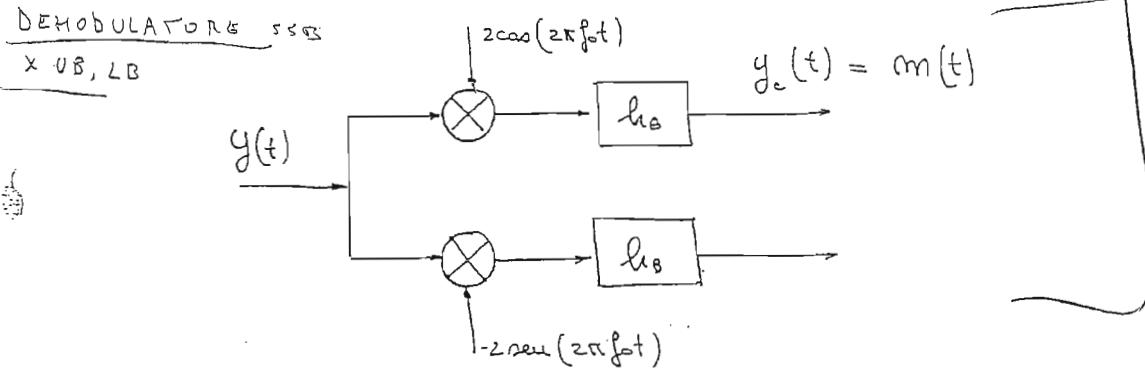
$$y(t) = \frac{m(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t) + \frac{\dot{m}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t) \quad \text{SSB - LB}$$

Dalle due espressioni si deduce che

$$\frac{m(t)}{2} = \text{componente in fase} = g_c(t)$$

$$\frac{\dot{m}(t)}{2} = \text{componente in quadratura} = g_s(t)$$

Allora  $m(t)$  può essere ottenuto dal ramo superiore del dispositivo rappresentato nello schema 2.



Questo è lo schema realizzativo del DEMODULATORE SSB e vale sia per UB che LB.



Qualsiasi segnale  $x(t)$ , abbia pure vinto, può essere scritto come somma di due componenti in fase e in quadratura. Se  $x(t)$  è passo banda,  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  sono in banda base.

$$x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t$$

Se  $x(t)$  è ad ENERGIA FINITA

$$\bar{E}_x = \frac{1}{2} \bar{E}_c + \frac{1}{2} \bar{E}_s$$

$$\begin{cases} \bar{x} < \infty \Rightarrow P = 0 \\ P < \infty \Rightarrow E = \infty \end{cases}$$

Se  $x(t)$  è a POTENZA FINITA

$$P_x = \frac{1}{2} P_c + \frac{1}{2} P_s \quad (2.1)$$

Ricordiamo che se un segnale è a Energia finita allora è a Potenza media nulla; viceversa se è a potenza media finita allora è ad Energia infinita.

- Ricordiamo anche due importanti risultati

$$(2.3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(t) S_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) S_2^*(f) df \quad \text{TEOREMA DI PARSEVAL}$$

$$(2.4) \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(f)|^2 df \quad \text{UGUAGLIANZA DI PARSEVAL}$$

- Dimostrazione (della 2.1), per la 2.2 si ha la dim. analoga)

Sappiamo che

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} \} =$$

$$\begin{aligned} &\text{Proprietà dei} \\ &\text{numeri complessi} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} \tilde{x}^*(t) e^{-j2\pi f_0 t} \end{aligned}$$

Allora dall' uguaglianza di Parseval:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} \tilde{x}^*(t) e^{-j2\pi f_0 t} \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t) e^{j4\pi f_0 t} dt + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^{*2}(t) e^{-j4\pi f_0 t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \end{aligned}$$

Analizziamo i singoli integrali:

Se un segnale è passo banda le sue componenti in fase e quadratura sono in banda base

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t) e^{j4\pi f_0 t} dt = \quad (A)$$

38

ponendo

$$\tilde{x}^2(t) = s_1(t) + e^{j4\pi f_0 t} s_2(t)$$

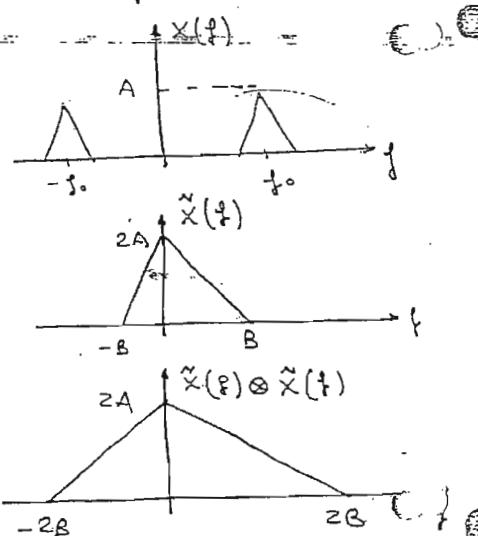
e applicando il teorema di Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t) e^{j4\pi f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{x}(f) \otimes \tilde{x}(f)] \cdot \delta(f + 2f_0) df =$$

ricordando che essendo  $\tilde{x}(f)$  in banda base

proprietà  
che deriva dalla teoria dei segnali  
e ricordando che la moltiplicazione per un  $\delta$   
equivale alla traslazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{x}(f) \otimes \tilde{x}(f)] \delta(f + 2f_0) df = \\ = [\tilde{x}(f) \otimes \tilde{x}(f)] \Big|_{f=2f_0} = 0$$



allora l'integrale (A) è nullo.

L'integrale (B)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t) e^{-j4\pi f_0 t} dt =$$

è anch'esso nullo perché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t) e^{-j4\pi f_0 t} dt = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t) e^{j4\pi f_0 t} dt \right]^* = 0$$

atteniamo allora che

$$E_x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_c^2(t) + x_s^2(t)] dt =$$

$$= \frac{1}{2} E_c + \frac{1}{2} \bar{E}_s$$

(Rappresentazione complessa di processi reali)

Si consideri un generico processo stocastico  $N(t)$ ;  
ricordiamo che ad esso sono associate infinite  
"realizzazioni" che di fatto non sono altre che seguili determinati:

$$N(t) \rightarrow M_1(t), M_2(t), \dots, M_n(t)$$

TRASFORMATA DI HILBERT  $\tilde{N}(t)$

La trasformata di Hilbert è definita esattamente come per i segnali reali:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(t) &= N(t) * h(t) \text{ con } h(t) = \frac{1}{\pi t} \\ \tilde{N}(f) &= N(t) H(f) \text{ con } H(f) = -J \operatorname{segn}(f) \end{aligned}$$

PROCESSO ANALITICO  $Z(t)$

Si definisce processo analitico  $Z(t)$  di  $N(t)$ , il processo complesso che ha per parte reale il processo  $N(t)$  stesso e per parte immaginaria la trasformata di Hilbert  $\tilde{N}(t)$  del processo di partenza.

$$Z(t) = N(t) + J \tilde{N}(t)$$

In sostanza il processo analitico è il processo che ha come realizzazioni i segnali analitici delle realizzazioni del processo di partenza:

$$\begin{cases} Z_1(t) = M_1(t) + J \tilde{M}_1(t) \\ Z_2(t) = M_2(t) + J \tilde{M}_2(t) \\ \vdots \\ Z_n(t) = M_n(t) + J \tilde{M}_n(t) \end{cases}$$

INVOLUCCRO COMPLESSO  $\tilde{N}(t)$  DEL PROCESSO  $N(t)$  RISPETTO A  $f_0$ .  
Scelta una frequenza arbitraria  $f_0$  si definisce inviluppo complesso  $\tilde{N}(t)$  del processo  $N(t)$  rispetto alla frequenza  $f_0$ , il processo ottenuto moltiplicando il processo analitico  $Z(t)$  per l'esponentiale  $\exp(-J2\pi f_0 t)$ .

avverto:

40

$$\tilde{N}(t) = Z(t) e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\tilde{N}(f) = Z(f + f_0)$$

Anche in questo caso l'inviluppo complesso, può essere espresso come somma di una CORPORENTE IN FASE  $N_c(t)$  e una CORPORENTE IN QUADRATURA  $N_s(t)$ :

$$\tilde{N}(t) = N_c(t) + j N_s(t)$$

Analogamente, l'inviluppo complesso di un processo, non è che il processo che ha per realizzazioni gli inviluppi complessi delle realizzazioni del processo  $N(t)$  di partenza

$$\tilde{M}_1(t) = M_{c1}(t) + j M_{s1}(t)$$

$$\tilde{M}_2(t) = M_{c2}(t) + j M_{s2}(t)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{M}_n(t) = M_n(t) + j M_{sn}(t)$$

Il più generale ogni operazione definita per i segnali determinati, applicata ad un processo, equivale alla stessa applicata a ciascuna realizzazione.

Ogni schema visto per i segnali è da ritenere valido per i processi, con le dovute considerazioni.

#### RICHIAMI SULLA STAZIONARITÀ DI UN PROCESSO

Un processo si dice STAZIONARIO IN SENSO STRETTO

(sss) se le sue statistiche non dipendono dall'origine dell'asse dei tempi; in sostanza se i processi

$$X(t) \text{ e } X(t+\varepsilon)$$

con  $\varepsilon$  arbitrario hanno le stesse statistiche.

In sostanza tutte le statistiche di primo ordine  $\mu_x, \sigma_x^2, \mathbb{E}\{X^2\}$  non dipendono da  $t$ .

Fixato  $t = \bar{t}$ , tutte le variabili aleatorie estratte sono equidistribuite (uguale valor medio), uguale varianza media e uguale varianza.

Un processo si dice STAZIONARIO IN SENSO LATO (SSL)<sup>41</sup> se la funzione valore medio è costante e la funzione di autocorrelazione non dipende da  $t_1$  e  $t_2$  ma solo dalla differenza  $N$ :

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(N) \quad N = t_1 - t_2$$

$$\eta_x(t) = \eta_x = \text{costante}$$

### IPOTESI SEMPLIFICATIVA

Nella pratica, i processi che descrivono fenomeni come ad esempio il "rumore", sono soggetti ad alcune ipotesi semplificative. In particolare supponiamo che il processo  $N(t)$  sia stazionario in senso lato (SSL) e media nulla:

$$E\{N(t)\} = \eta_N = 0$$

### caso Autocorrelazione

$$R_{NN}(N) = E\{N(t+N)N(t)\}$$

Sotto queste ipotesi, si potrebbe dimostrare che l'inviluppo complesso del processo  $\tilde{N}(t)$  è a sua volta stazionario in senso lato a valore medio nullo:

$$E\{\tilde{N}(t)\} = 0$$

### Caso Autocorrelazione

$R_{NN}(N)$  è un segnale determinato;

$$R_{\tilde{N}\tilde{N}}(N) = E\{\tilde{N}(t+N)\tilde{N}(t)\} =$$

$$= \overset{N}{\overbrace{2R_{NN}(N)}}$$

### PROCESSI IN BANDA PASSANTE (o Processi Passa Banda)

Processo PASSA BANDA: Si definisce Processo Passa Banda  $N(t)$ , intorno ad una frequenza  $f_0$ , se la sua funzione di Autocorrelazione è un segnale determinato di tipo Passa Banda. Questo significa che la Densità spettrale di potenza  $S_{NN}(f)$ , che è l'equivalenza

in frequenza dell'autocorrelazione è nullo solo nell'intervallo che va da  $-2f_0$  a  $2f_0$ .

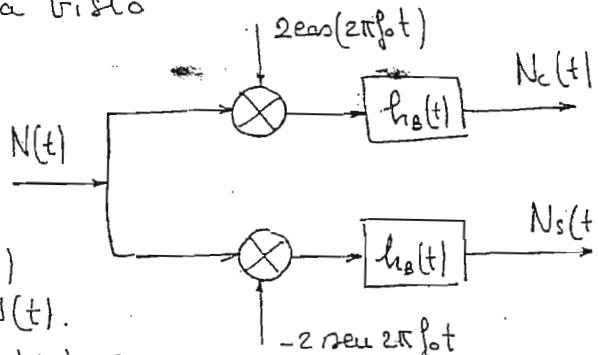
$$S_{NN}(f) \neq 0 \iff |f| \leq 2f_0$$

Proprietà dei Processi Pausa Banda:

Sia  $N(t)$  un processo Pausa Banda, avendo tale che:

$$S_{NN}(f) \neq 0 \iff |f| < 2f_0$$

Mettere un processo in ingresso ad un sistema, significa trasformare, attraverso il sistema stesso, tutte le realizzazioni del processo. Per passare dal processo  $N(t)$  alle componenti in fase e in quadratura  $N_c(t)$  e  $N_s(t)$  di  $\tilde{N}(t)$ , si utilizza lo stesso schema 2 impiegato per i segnali determinati; analogamente per l'operazione inversa si utilizza lo schema 1 già visto.



Determiniamo ora le statistiche di  $N_c(t)$  e  $N_s(t)$  da quelle di  $N(t)$ .

Suppongo  $N(t)$  sia pausa banda, passiamo dunque, come accadeva per i segnali determinati, che i processi  $N_c(t)$  e  $N_s(t)$  siano stazionari SSL e a valore medio nullo.

$$\mathbb{E}\{N_c(t)\} = \mathbb{E}\{N_s(t)\} = 0$$

Qualche la funzione di autocorrelazione è la stessa per le due componenti:

$$R_{cc}(n) = \mathbb{E}\{N_c(t+n)N_c(t)\} = \mathbb{E}\{N_s(t+n)N_s(t)\} = R_{ss}(n)$$

In particolare  $R_{cc}(n)$  e  $R_{ss}(n)$  sono la CORPOLENTE IN FASE di  $R_{NN}(n)$ .

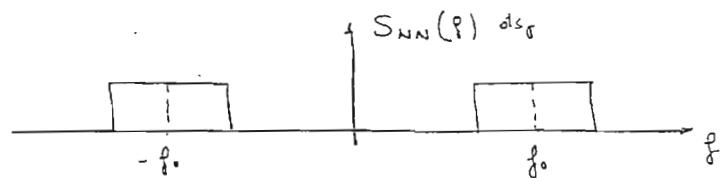
Per quanto riguarda la funzione di cross-correlazione<sup>43</sup> di  $N_s(t)$  e  $N_c(t)$ , avremo:

$$R_{sc}(n) = \mathbb{E} \{ N_s(t+n) N_c(t) \}$$

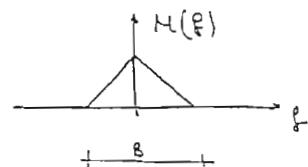
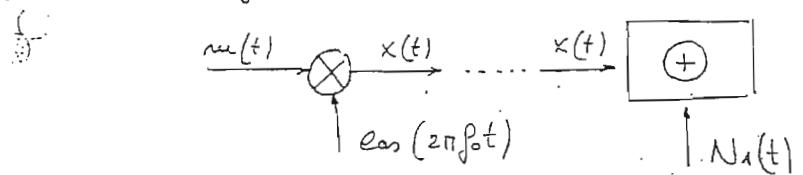
che, in particolare è la CORPORENTE IN QUADRATURA di  $R_{NN}(n)$ .

### Esempio

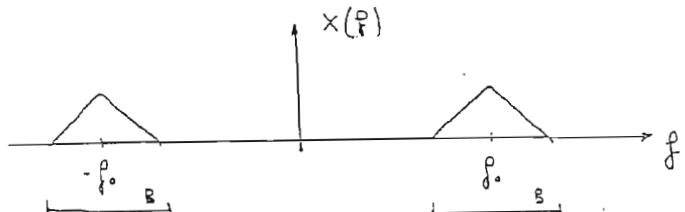
- Si consideri il processo  $N_s(t)$  attenuato dal filtraggio passa banda dell'AWGN; ricordiamo che l'AWGN ha densità spettrale di potenza costante e pari a  $N_0/2$ , quindi filtrando con banda centrale in  $f_0$ , otterremo che la densità spettrale di pot. di  $N_s(t)$  risulta:



Questo di fatto è il rumore che si sovrappone al segnale utile. Supponiamo di avere un segnale  $m(t)$  di banda  $B/2$  come segue. Supponiamo di modulare  $m(t)$  in  $f_0$  come segue



In frequenza:



La ricerca di  $X(f)$  deve essere filtrata in modo da eliminare quanto più rumore possibile, lasciando inalterato il segnale  $X$ .

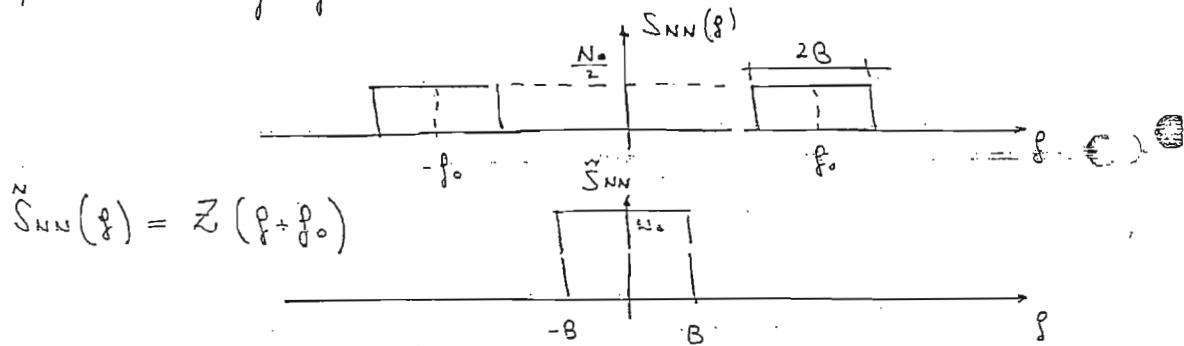
Calcoliamo le statistiche del rumore, in particolare:  
Autocorrelazione e Crosscorrelazione delle componenti  
in fase e in quadratura:

$$R_{ss}(N) = R_{cc}(N) \quad \text{e} \quad R_{sc}(N)$$

che in frequenza corrispondono a

$$S_{cc}(f) = S_{ss}(f) \quad \text{e} \quad S_{sc}(f)$$

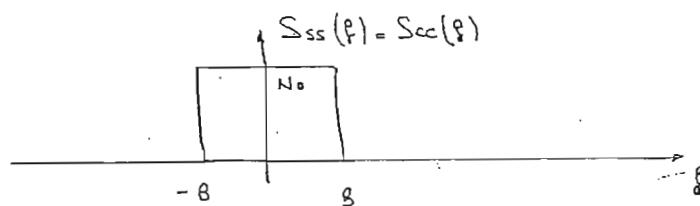
Scelta  $f_0$  la frequenza rispetto alla quale calcolare  $S$ , avremo graficamente:



$$\tilde{S}_{NN}(f) = Z(f + f_0)$$

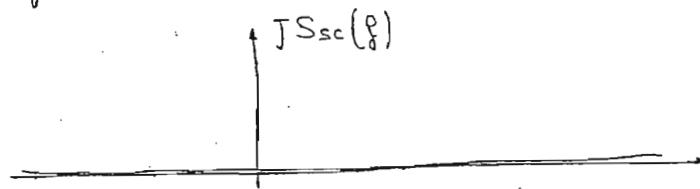
Come per i segnali determinati

$$S_{cc}(f) = S_{ss}(f) = \frac{S_{NN}(f) + S_{NN}^*(-f)}{2} = S_{NN}(-f)$$



Analogamente:

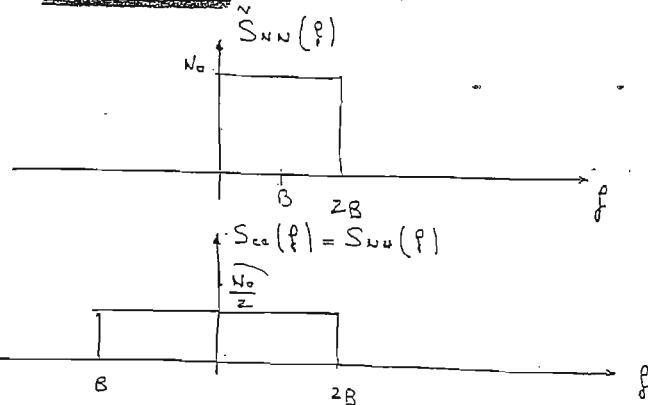
$$S_{sc}(f) = \frac{S_{NN}(f) - S_{NN}^*(-f)}{2j} = S_{NN}(-f)$$



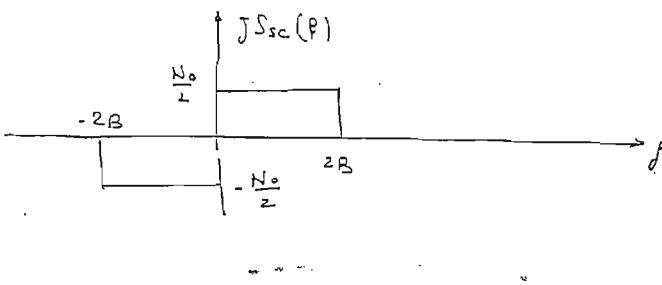
Come noto i segnali  $N_c$  e  $N_s$  sono PASSA BASSO di banda  $2B$ . Se  $S_{sc}(f) = 0$ , i due processi

$N_c$  e  $N_s$  sono INCORRELATI; ricorda che non anche a 45  
media nulla, perché AWGN è tale, sono  
invece  $N(t)$  gaussiano anche  $N_c$  e  $N_s$

Calcoliamo l'insieme complesso del processo  $\tilde{S}_{NN}(f)$   
rispetto alla frequenza  $f_1 = B$ : come prima



Come si vede dai  
grafici  $N_c$  e  $N_s$  non  
sono più incorrelati.



Modulare un segnale, significa imporre la variazione di una grandezza in base all'aumento del segnale da trasmettere stesso.

Si consideri un segnale  $x(t)$  di Banda B (tipicamente da zero a qualche MHz); si supponga  $x(t)$  a media nulla; questa ipotesi è ragionevole, perché le informazioni sono contenute nella variazione del segnale rispetto al valore medio, indipendentemente dal valore che esso assume. Un'altra ipotesi è nel modulo del segnale, poniamo:

$$\boxed{|x(t)| \leq 1} \quad \leftarrow \text{Segnale normalizzato}$$

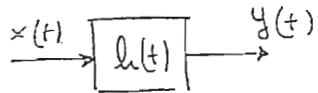
se così non fosse basterebbe amplificare o attenuare il segnale senza compromettere il contenuto informativo; si suppone allora di normalizzare l'ampiezza del segnale. Questa ipotesi ha conseguenze sulla potenza del segnale, infatti

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \leq 1 \text{ perché } |x(t)| \leq 1$$

un segnale normalizzato ha  $P_x \leq 1$

### Esempio

Si consideri un segnale  $x(t)$  e un filtro  $h(t)$  mota  $E_y$ , l'energia di  $y$  risulta:



$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt =$$

per l'uguaglianza di Parseval

$$\bar{E}_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df =$$

$$|H(f)| = 1$$

allora

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

Riassumendo le ipotesi, consideriamo segnali  $x(t)$  caratterizzati da:

A. Banda B passa basso

(4.1.1)

B.  $x(t)$  a media nulla

(4.1.2)

C. Ampiezza normalizzata  $|x(t)| \leq 1$

(4.1.3)

} Segnali  
che  
utilizzano  
hanno  
queste  
caratteristiche

H motivi per cui si applica una modulazione,

- prima di trasmettere un segnale, sono i seguenti:

#### 1. ADATTAMENTO DEL SEGNALE AL CANALE

Un qualunque canale trasmissivo, prealige un segnale all'interno di una banda specificata.

#### 2. MULITPLAZIONE

Per far esistere più segnali su di uno stesso canale, vengono assegnati intervalli di frequenza a ciascun utente; con la modulazione ci si porta in questi intervalli prefissati.

#### 3. IMMUNITÀ AI DISTURBI

Come vedremo modulando un segnale, si rende lo stesso più immune ai disturbi; spesso questo accade a spese di un maggiore ingombro frequenziale.

#### 4. REALIZZABILITÀ DELL'hardware

Può accadere che un determinato dispositivo lavori in maniera ottimale in un certo intervallo di frequenza, allora modulando, ci si propone di lavorare esattamente in quella zona.

Ma generalmente una modulazione è caratterizzata da:

A. SEGNALE MODULANTE  $x(t)$  che è di fatto il segnale da trasmettere.

B. SEGNALE PORTANTE  $p(t)$  esimissaiale nella forma

$$p(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

A seconda del tipo di modulazione, si varia l'ampiezza della portante (AM), la frequenza della portante (FM) o la fase della portante (PM).

## MODULAZIONI LINEARI

### MODULAZIONE DI AMPIEZZA (AM)

In generale un segnale modulato in ampiezza (AM) ha un'espressione del tipo:

$$X_{AM}(t) = A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (4.2)$$

nella quale l'ampiezza è funzione del tempo, che dipende da  $x(t)$ :

$$A(t) = A_0 [1 + \mu x(t)] = A_0 + \mu A_0 x(t) \quad (4.3)$$

l'ampiezza del segnale modulato in ampiezza  $A(t)$  è proporzionale tramite  $\mu$  a  $x(t)$ . La costante

$\mu$  è detta INDICE DI MODULAZIONE DI AMPIEZZA.

Il segnale  $X_{AM}(t)$  è un segnale passa banda, scomponibile in campionato in fase e campionato in quadratura:

$$(4.4) \quad X_{AM}(t) = X_c(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - X_s(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Osservazione: la scrittura (4.4) discende da una definizione più generale di inviluppo complesso:

$$X_{AM}(t) = Z_{AM}(t) e^{-j(2\pi f_0 t + \theta_0)}$$

confrontandolo con la 4.2 si vede che

$$\begin{cases} X_c(t) = A_0 + \mu A_0 x(t) \\ X_s(t) = \phi \end{cases}$$

modulazione AM ha componente in quadratura nulla

Dalla (4.2) e dalla (4.4) si evince che in un segnale 49 modulato in ampiezza  $x_{AM}(t)$  la componente in fase è  $A(t)$ , come nella (4.3), mentre quella in quadratura è nulla.

### ANDAMENTO TEMPORALE

Consideriamo un generico segnale  $x(t)$ , sotto le ipotesi (4.1.1), (4.1.2) e (4.1.3) come in figura.

Moltiplichiamo  $x(t)$  per l'indice  $\mu$  e distinguiamo due casi:

$$1. \mu \leq 1$$

$$2. \mu > 1$$

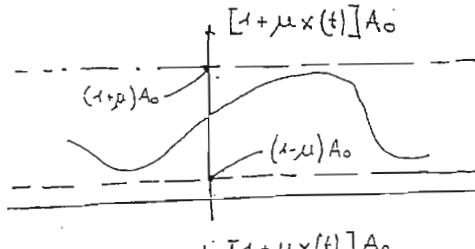
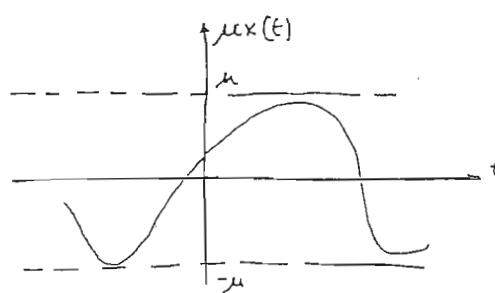
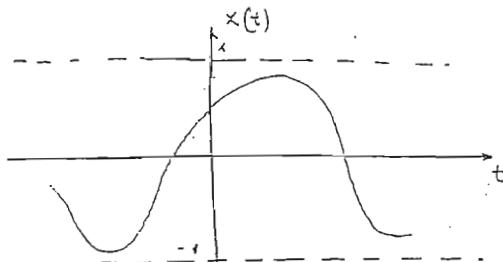
Allora il risultato di

$$[1 + \mu x(t)] A_0 \quad \begin{matrix} x(t) \text{ normalizzato} \\ |x(t)| < 1 \end{matrix}$$

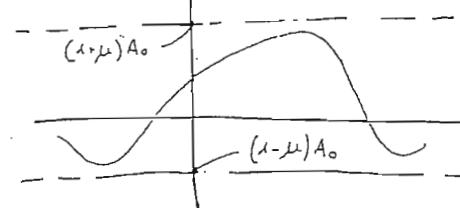
sarà, nei due casi differenti,

- Se  $\mu \leq 1$  il segnale  $[1 + \mu x(t)] A_0$  è compreso fra  $(1-\mu)A_0$  e  $(1+\mu)A_0$

- Se  $\mu > 1$  il segnale  $[1 + \mu x(t)] A_0$  è compreso fra  $(1-\mu)A_0$  e  $(1+\mu)A_0$  con  $(1-\mu) < 0$



$\mu \leq 1$   
sta tutto  
sopra lo  
zero  
 $(= 0 \text{ nel caso } \Delta f = 1)$



$\mu > 1$   
passa sotto  
lo zero  
(inversione  
di fase)  
Sfasamento  
di T

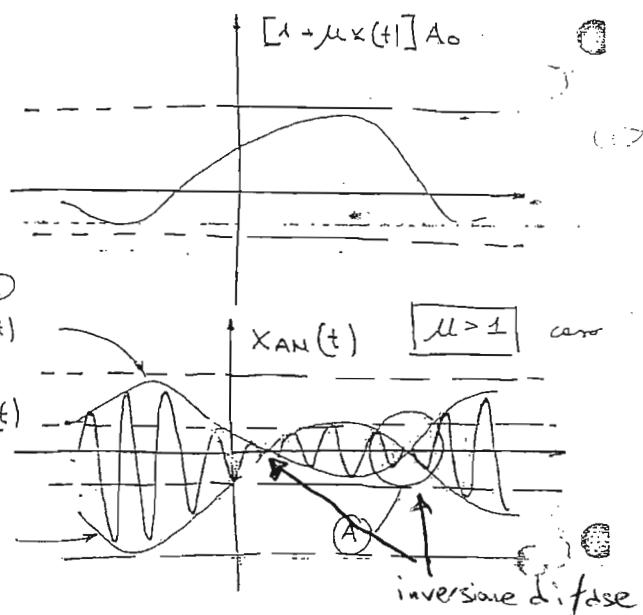
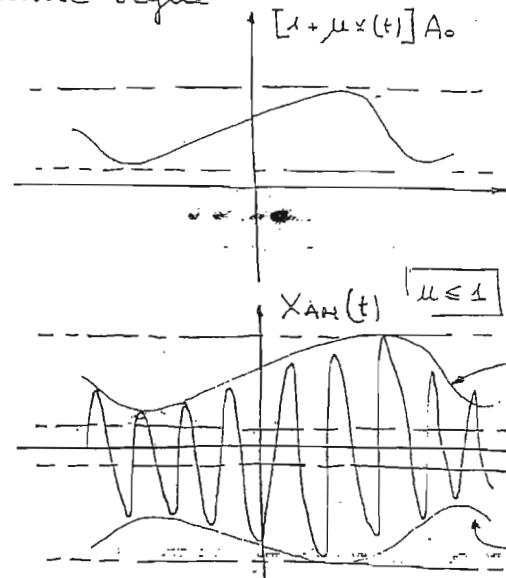
N.B.

Osserviamo che nel caso della modulazione di ampiezza occorre imparare la condizione:

$$\boxed{f_0 \gg B} \quad (4.5)$$

Avere  $f_0$  elevata significa imparare una oscillazione molto fitta; avere  $B$  piccola, significa avere una lenta variazione dell'ampiezza.

Nei due casi il segnale modulato  $x_{AM}(t)$  risulterà<sup>50</sup> come segue



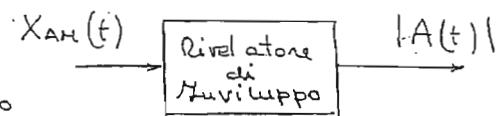
Nel caso 2. nell'istante in cui l'ampliezza cambia di seguo<sup>④</sup> è cancane imparre uno sfasamento di  $\pi$  nel cancano della portante; questi istanti sono detti

ISTANTI DI INVERSIONE DI FASE. INVERSIONE DI FASE

Perche l'attenzione su questo aspetto è essenziale, perché nei dispositivi per le modulazioni ha molta importanza il RIVELATORE DI INVOLUCCO, ovvero, un circuito elettronico che segue la variazione dell'ampliezza nel tempo; in sostanza fornisce il modulo di  $A(t)$ . Nel caso 1., cioè

quando  $\mu \leq 1$ ,

$$|A(t)| = A(t) = [1 + \mu x(t)] A_0$$



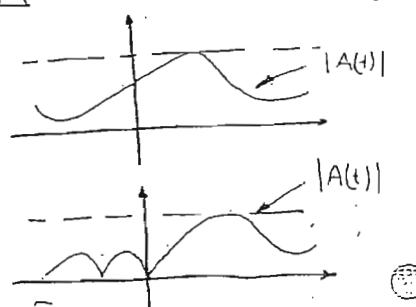
è evidente che per ritagliare a  $x(t)$ , basta eliminare il valore medio (traslare il segnale).

Nel caso 2., cioè quando  $\mu > 1$ ,

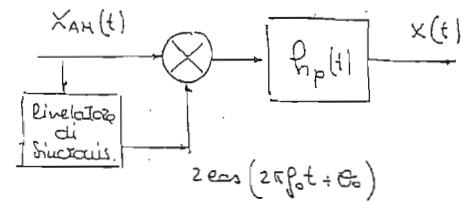
$$|A(t)| \neq A(t)$$

quindi per ritagliare a  $x(t)$  occorre un dispositivo più complesso;

mentre  $A(t)$  non è che la campata in fase di  $x(t)$ , basta applicare un dispositivo basato



sullo schema 1 di pag 19, detto DEMODULATORE SINCRONO.  
 Per avere in fase di ricezione  
 la stessa frequenza  $f_0$  e la  
 stessa fase  $\theta_0$ , viene inserito  
 un blocco che ha il compito  
 di sincronizzarsi, detto RIVELATO-  
RE DI SINCRONISMO.



Un dispositivo basato sul demodulatore sincrono risulta  
 più costoso e difficile da realizzare, pertanto, a seconda  
 delle applicazioni si deve scegliere se impostare  $\mu \ll 1$  o  
 $\mu \gg 1$ .

### ANALISI IN POTENZA DEL SEGNALE AM

Come noto

$$P_{AM} = \frac{1}{2} P_c + \frac{1}{2} P_s$$

mentre  $x_s(t)$  è nulla anche la potenza  $P_s$  è tale.

$$P_{AM} = \frac{1}{2} P_c \quad (4.6)$$

applicando la definizione di potenza

$$\begin{aligned} P_c &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T A_b^2 [1 + \mu x(t)]^2 dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ A_b^2 T + A_b^2 \mu^2 \int_T x^2(t) dt + 2 A_b^2 \mu \int_T x(t) dt \right] = \end{aligned}$$

poche  $x(t)$  è  
a media nulla

mentre  $x(t)$  è a media nulla (annulliamo l'ultimo integ.):

$$P_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ A_b^2 T + A_b^2 \mu^2 \int_T x^2(t) dt \right] = A_b^2 + A_b^2 \mu^2 P_x \quad (4.7)$$

quindi :

$$P_{AM} = \frac{1}{2} P_c = \left( \frac{A_b^2}{2} \right)^{(1)} + \left( \frac{A_b^2}{2} \mu^2 P_x \right)^{(2)} \quad (4.8) \quad \parallel \begin{array}{l} P_{AM} \\ (\text{portante + modulante}) \end{array}$$

Osserviamo dalla (4.8) che nella modulazione AM,  
 la parte ① è potenza spesa per trasmettere la  
 portante, mentre la parte ② è potenza associata  
 al segnale vero e proprio (potente modulato).

## ANALISI SPECTRALE DEL SEGNALE AM

Come già ricavato:

$$x_{AM}(t) = A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) =$$

$$= A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) + \mu A_0 x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

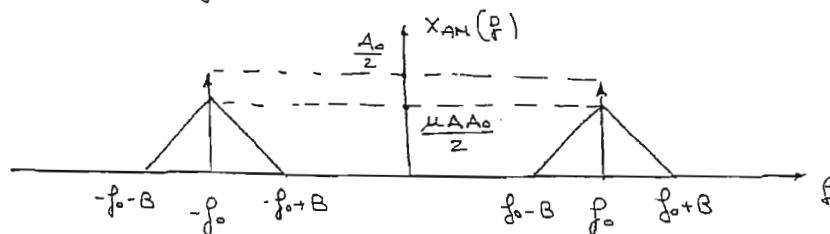
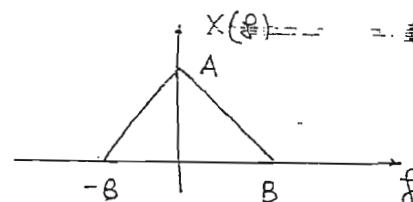
Una frequenza sfissata nel tempo  $\Rightarrow$  esponentiale in frequenza

$$X_{AM}(f) = \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} \delta(f - f_0) + \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} \delta(f + f_0) +$$

$$+ \frac{\mu A_0}{2} e^{j\theta_0} X(f + f_0) + \frac{\mu A_0}{2} e^{j\theta_0} X(f - f_0) \quad (4.9)$$

Noto il generico spettro di  $x(t)$ 

di banda B (ricordiamo che la banda si misura sulle sole frequenze portanti).

Lo spettro del segnale modulato  $X_{AM}$  risulta il seguente:

esso è composto dallo spettro del segnale originale, cambiato in ampiezza di  $\mu A_0/2$ , traslato alla frequenza della portante  $f_0$ ; in più ad esso si sovrappone in  $f_0$  lo spettro della portante stessa (che è un  $\delta$  perché la portante è sinusoidale). Siccome  $f_0 \gg B$ , la banda del segnale AM risulta

$$B_{AM} = 2B \quad (4.10)$$

Come già accennato la tecnica di demodulazione, dipende fortemente dalla scelta del seguito di modulazione  $\mu$ . Se  $\mu \leq 1$  per il recupero del seguito basta un semplice rivelatore di enveloppe (realizzabile anche con soli componenti passivi). Se  $\mu > 1$ , è necessario un demodulatore mixato che di fatto compie diversi assorbimenti.

Ci sono, tuttavia, altri aspetti che suggeriscono alcune modifiche. Dalla espressione (4.8), si evince che una parte sostanziale della potenza è spesa per trasmettere la portante; essa però non è associata a nessuna infatuazione il che significa un certo spreco di energia.

### MODULAZIONE AM DSB-SC (Double Side Band - Suppressed Carrier).

Per quanto appena detto, si può pensare di non trasmettere la portante; in sostanza l'espressione del segnale modulato diviene

$$X_{\text{DSB-SC}}(t) = \mu A_0 \times(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (4.11)$$

l'analisi condotta in precedenza, ci dice che in questo caso la potenza risulta

$$P_{\text{DSB-SC}} = A_0^2 \mu^2 \frac{P_x}{2} \quad (4.12)$$

ed è tutta associata all'infatuazione.

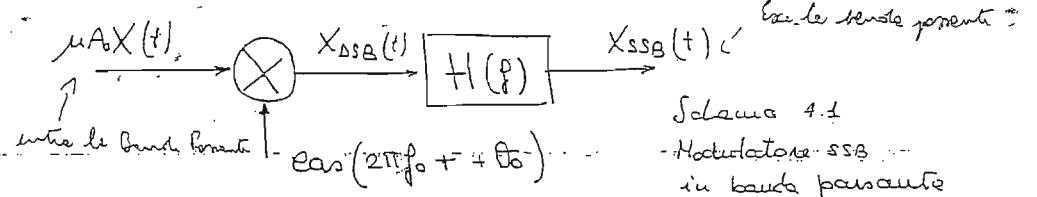
Lo spettro di un segnale DSB-SC è identico a quello di un segnale AM, senza però i f associati alla portante in  $+f_0$  e in  $-f_0$ .

### MODULAZIONE SSB-SC (Single Side Band - Suppressed Carrier)

I segnali reali di trasmissione hanno simmetria Hermitiana ( $X(f) = X(-f)$ ); per questo motivo, si può pensare di limitare l'ingombro frequenziale, eliminando la parte nota una volta nata la simmetria. Se consideriamo come prima un generico spettro, pariamo modulare in ampiezza sopprimendo la portante cioè che ottieniamo sono due copie dello spettro

originale, in  $+f_0$  e in  $-f_0$ . A questo punto si filtra eliminando una delle parti ricavabile per simmetria. Se  $H(f)$  è il generico filtro passa banda si ha:

modulatore in banda passante

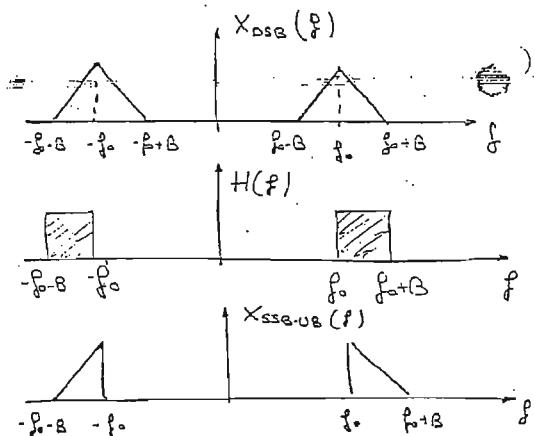


Schema 4.1  
Modulatore SSB  
in banda passante

Esistono però due possibilità, in base alla scelta del filtro  $H(f)$ :

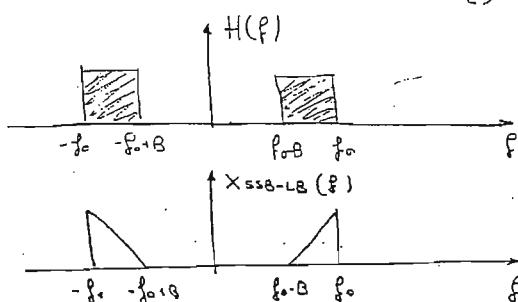
### 1. Modulazione AM SSB-UB (Upper Band)

Il filtro ha una banda passante che va da  $f_0$  a  $f_0 + B$ ; allora viene eliminata la banda laterale inferiore.



### 2. Modulazione AM SSB-LB (Lower-Band)

Il filtro ha una banda passante che va da  $-f_0 - B$  a  $f_0$ ; allora viene eliminata la banda laterale superiore.



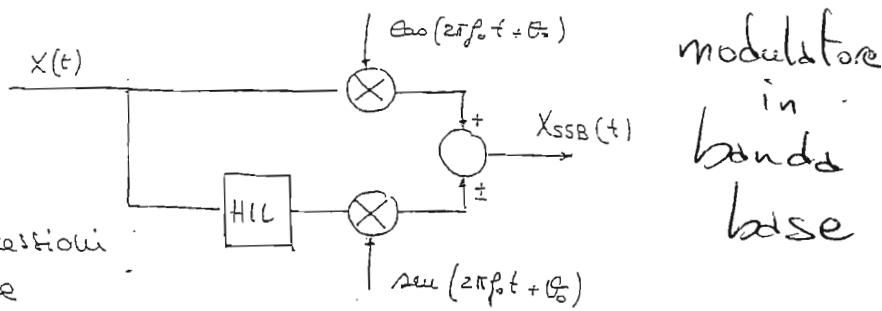
Come visto dalla trattazione di pag 34 e 35, l'espressione di un segnale SSB risulta

$$X_{SSB-UB}(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) - \frac{\dot{x}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t + \phi_0) \quad (4.13)$$

$$X_{SSB-LB}(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) + \frac{\dot{x}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t + \phi_0) \quad (4.14)$$

Un segnale SSB, può essere ottenuto mediante filtraggio in banda passante come nello schema 4.1, oppure mediante filtraggio in banda base secondo lo schema 4.2 (vedi pag 34, 35).

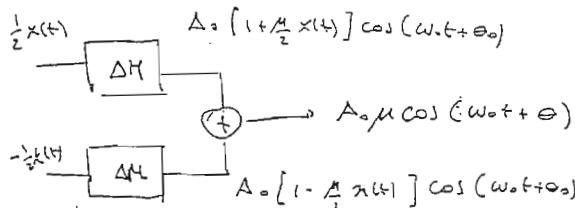
Schema 4.2  
modulazione SSB  
in banda base



Eseguendo l'analisi  
in potenza sulle espressioni  
(4.13) e (4.14) si deduce

$$P_{SSB} = \frac{\mu^2 A_0^2}{2} \left( \frac{P_x}{4} + \frac{P_x}{4} \right) = \frac{\mu^2 A_0^2}{4} P_x \quad (4.15)$$

### MODULATORE BALANCIATO DSB



i cos devono  
avere stessa fase e  
stessa ampiezza.

$$P_{SSB} = \frac{1}{2} P_{DSB}$$

## MODULATORE AM

56

La relazione che esprime formalmente un segnale modulato in ampiezza è la seguente:

$$X_{AM}(t) = A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

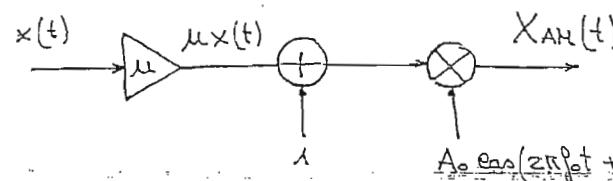
essa suggerisce la possibilità di ottenere questa modulazione mediante amplificatori, sommatore e moltiplicatori, secondo lo schema seguente:

Il problema del

Schemi 4.3. Modulatore AM

punto di vista

realizzativo sta nel blocco moltiplicatore (mixer).



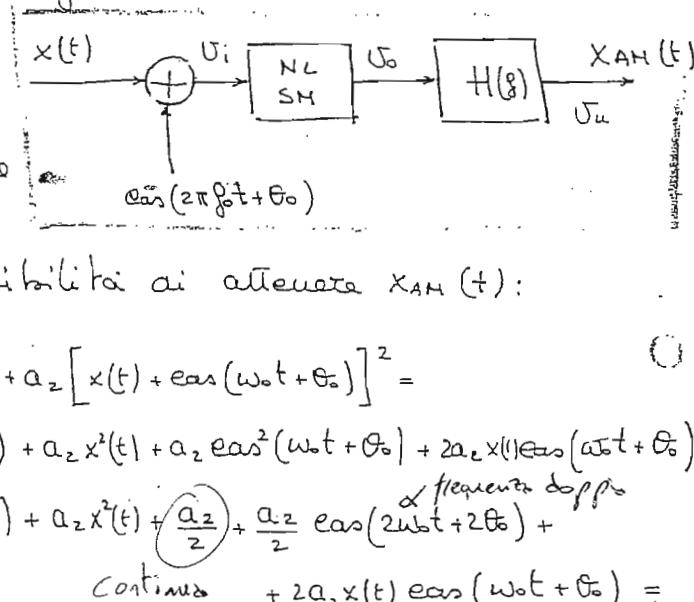
Lo schema più frequentemente impiegato per la modulazione AM è il seguente:

Il blocco NLSM è

un elemento non lineare senza memoria  
che realizza la funzione

$$U_o = a_1 U_i + a_2 U_i^2$$

Schemi 4.4. Modulatore AM



Dimenticando opportunamente il filtro passa banda  $H(f)$  si ottiene la continua e le armoniche a frequenza doppia quindi rimane:

filtato da  $H(f)$

$$\begin{aligned} U_u(t) &= \cancel{a_1 x(t)} + \cancel{a_1 \cos(\omega_0 t + \theta_0)} + \cancel{a_2 x^2(t)} + \cancel{2a_2 x(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0)} = \\ &= a_1 \left( 1 + \frac{2a_2}{a_1} x(t) \right) \cos(\omega_0 t + \theta_0) \quad (4.16.1) \end{aligned}$$

ponendo

$$Q_1 = A_0 \quad e \quad Q_2 = \mu A_0 / 2 \quad (4.16.2)$$

57

si ottiene:

$$U_u = X_{AM}$$

cane sopra definito.

### DEMODULATORE AM

Come già detto, a seconda del coefficiente di modulazione, esiste la possibilità di ricostruire il segnale originale: se  $\mu > 1$  è necessario il demodulatore: ricordiamo che, per altro, è adatto anche se  $\mu < 1$ . In questo caso specifico però basta il rivelatore di inviluppo.

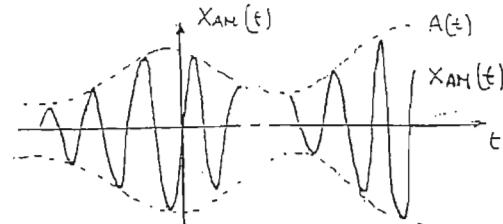
### RIVELATORE DI INVILUPPO

Se il coefficiente  $\mu$  è minore o uguale a 1.

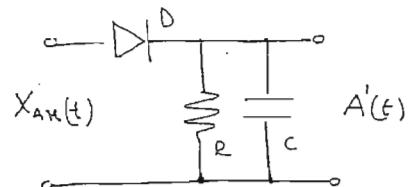
Supponendo un generico andamento del segnale da trasmettere e il conseguente andamento del segnale modulato, poniamo ottenere l'andamento di  $A(t)$  attraverso un dissipativo passivo composto da diodo resistenza e capacità detto rivelatore di inviluppo. Ricordiamo che  $A(t)$  è un segnale proporzionale a  $x(t)$  traslato, quindi sufficiente per ricalcare al segnale  $x$ .

Requisito fondamentale  
è la condizione secondo la quale il segnale da trasmettere vari molto  
più lentamente del  
segnale portante, ovvero:

$$f_o \gg B$$



Schema 5.1 Rivelatore di inviluppo  
(supponendo  $\mu$  ideale)



Di fatto il funzionamento del rivelatore si basa sulla carica e sulla scarica del condensatore.

Nella fase di carica C è alimentato tramite il diodo

sezione  $R_d$  è pressoché nulla, la carica di tempo di carica è zero: questo significa che la tensione su  $C$  segue esattamente quella in ingresso.

Quando  $X_{AN}(t)$  scende sotto la tensione appena memorizzata su  $C$ , il diodo si interdice e il condensatore inizia il transitorio di scarica su  $R$ . In

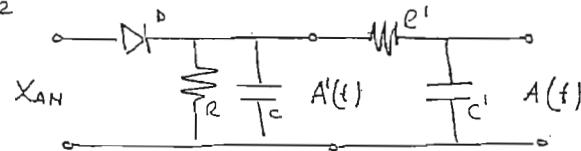
questo caso la costante di tempo è  $RC$  (vedremo in seguito come deve essere dimensionata).

In sostanza si verifica una

oscillazione su  $A'(t)$  che ha frequenza

molto più elevata rispetto a  $A(t)$ , detta RIPPLE; per eliminare questo fenomeno basta inferire un filtro passa basso (ad esempio uno squadra  $RC$ ) per ottenere esattamente  $A(t)$ :

Schemma 5.2



### Considerazioni sulla costante di tempo di scarica RC

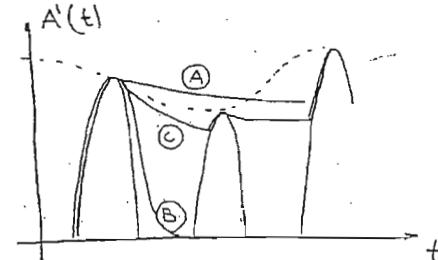
Se il transitorio di scarica è troppo lento rispetto alle variazioni di  $A(t)$ , la tensione di uscita del rivelatore potrebbe non essere in grado di

seguire variazioni troppo brusche

di  $A(t)^{(A)}$ ; in sostanza la durata del transitorio deve sicuramente essere inferiore rispetto al "periodo" di  $A(t)$ : se  $B$  è la banda di  $x(t)$ ,

$$\frac{1}{RC} \gg B \quad (\text{s.i.})$$

D'altra parte, se il transitorio di scarica è troppo veloce, cioè se  $RC$  è troppo piccolo, il condensatore



tare non segue più l'aumento di  $A(t)$ <sup>⑧</sup>; in altri termini il transitorio deve durare strettamente di più del "periodo" della portante, ovvero se  $f_0$  è la frequenza della portante:

$$\frac{1}{RC} \ll f_0 \quad (5.2)$$

Le condizioni  $R$  e  $C$  devono essere dimensionate in modo che:

$$B \ll \frac{1}{RC} \ll f_0 \quad (5.3)$$

Osservazione: Consideriamo un generico segnale  $X_H(t)$  passa banda e osserviamo cosa succede se applicalo ad un rivelatore di inviluppo.

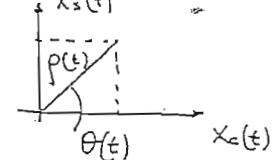
$$X_H(t) = X_c(t) \cos(\omega t + \theta_0) - X_s(t) \sin(\omega t + \theta_0)$$

l'inviluppo complesso

$$\begin{bmatrix} X_c(t) - p(t) \cos \theta(t) \\ X_s(t) = p(t) \sin \theta(t) \end{bmatrix} \quad \tilde{X}_H(t) = X_c(t) + j X_s(t) = p(t) e^{j\theta(t)}$$

$$p(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)}$$

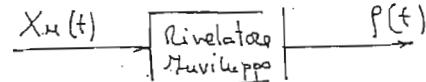
$$\theta(t) = \arctg \frac{X_s(t)}{X_c(t)}$$



possiamo ricavare

$$\begin{aligned} X_H(t) &= p(t) \cos \theta(t) \cos(\omega t + \theta_0) - \\ &\quad - p(t) \sin \theta(t) \sin(\omega t + \theta_0) = \\ &= p(t) \cos [\omega t + \theta_0 + \theta(t)] \end{aligned}$$

Un segnale di questo tipo ha frequenza variabile per la presenza di  $\theta(t)$ . Il rivelatore d'inviluppo determina  $p(t)$  indipendentemente dalle variazioni di frequenza. Ricordiamo che  $p(t)$  è il modulo dell'inviluppo complesso, e questo è anche il motivo del nome.



### PROBLEMI DI DEMODULAZIONE

Vediamo come può essere realizzata la demodulazione nei vari tipi di modulazione di ampiezza.

A. Segnale AM: l'espressione risulta

$$x_{AM}(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

in particolare

$$x_c(t) = A(t) = \text{camp. in fase}$$

$$x_s(t) = 0 = \text{camp. in quadratura}$$

$$p(t) = |A(t)|$$

$$A(t) = A_0 + \mu A_0 x(t)$$

$A(t)$  è proporzionale a  $x(t)$ . Come noto per recuperare  $A(t)$  e quindi  $x(t)$  si può impiegare il DEMOD. SINCRONO, inoltre se  $\mu \leq 1$  si può impiegare il RIVEL DI INVOLUCCRO, se  $\mu > 1$  invece no.

B. Segnale DSB: l'espressione risulta

$$x_{DSB}(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

in particolare

$$x_c(t) = x(t) = \text{camp. in fase}$$

$$x_s(t) = 0 = \text{camp. in quadratura}$$

$$p(t) = |x(t)|$$

In ogni caso se vediamo il segnale originale come campionato in fase si può applicare il DEMOD. SINCRONO; Il rivelatore di inviluppo non funziona, perché non è detto che  $|x(t)| = x(t)$ .

C. Segnale SSB: l'espressione risulta

$$x_{SSB}(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \frac{\dot{x}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

in particolare

$$x_c(t) = \frac{x(t)}{2} = \text{camp. in fase}$$

$$X_S(t) = \frac{\dot{X}(t)}{2} = \text{camp. in quadratura}$$

$$P(t) = \sqrt{\frac{x^2(t)}{4} + \frac{\dot{x}^2(t)}{4}}$$

61

Anche in questo caso il DEMOD. SINCRONO funziona sempre, mentre il RIVEL. DI INVILUPPO non consente di risalire ad  $x(t)$ .

### DEMODULATORE CON SINCRONIZZATORE E RIVELATORE D'INVILUPPO

Consideriamo lo schema

a lato e verifichiamo come esso consenta la demodulazione di qualsiasi segnale modulato in amp.

A. Segnale AM: l'espressione risulta

$$X_H(t) = X_{AM}(t) = A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

$$X_H(t) + A_1 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) = [A_0 + A_1 + \mu x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Dimensionando  $A_1$  sufficientemente grande da garantire che  $A_0 + A_1 + \mu x(t)$  sia sempre positivo dal rivelatore di inviluppo esce  $P(t) = |A_0 + A_1 + \mu x(t)|$  e quindi

$$P(t) = |A_0 + A_1 + \mu x(t)| = A_0 + A_1 + \mu x(t)$$

Che essendo proporzionale a  $x(t)$  ne permette la ricontrollazione.

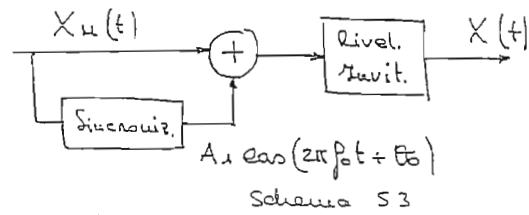
B. Segnale SSB: l'espressione risulta:

$$X_H(t) = X_{SSB}(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \frac{\dot{x}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

$$X_H(t) + A_1 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) = \left(A_1 + \frac{x(t)}{2}\right) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \frac{\dot{x}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

In uscita dal rivelatore di inviluppo avremo  $P(t)$  ovvero:

$$P(t) = \sqrt{\left(A_1 + \frac{x(t)}{2}\right)^2 + \frac{\dot{x}^2(t)}{4}} =$$



Schema 53

$$= \left| A_1 + \frac{x(t)}{2} \right| \sqrt{1 + \frac{x^2(t)}{4(A_1 + \frac{x(t)}{2})^2}}$$

62

ponendo  $A_1 \gg 1$

$$P(t) \approx \left| A_1 + \frac{x(t)}{2} \right|$$

per ipotesi  $|x(t)| < 1$ , quindi

$$A_1 + \frac{x(t)}{2} > 0$$

avendo

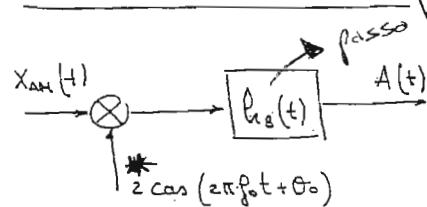
$$\left| A_1 + \frac{x(t)}{2} \right| = A_1 + \frac{x(t)}{2}$$

Che è appunto proporzionale ad  $x(t)$ . Per i segnali DSB non essendoci  $\bar{x}(t)$ , non è neppure necessario porre  $A_1 \gg 1$ .

Riassumendo:

Demod.	Rivel.	Rivelat. di inviluppo	Sincroniz. + Rir. Rivel.
AM $\mu \leq 1$	SI	SI	SI
AM $\mu > 1$	SI	NO	SI
DSB	SI	NO	SI
SSB	SI	NO	SI

Demodulatore Sincrono



d. banda  
B

filtri di front-end  
NON critico

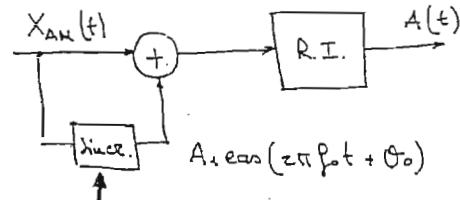
Rivelatore di inviluppo



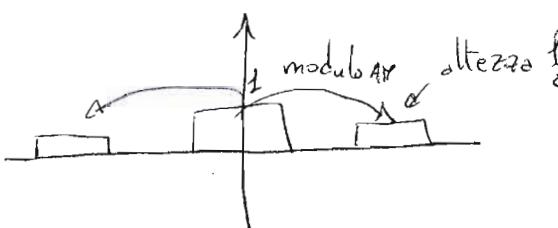
filtri di front-end critico  
(2B)

Sincronizzatore più

Rivelatore di Inviluppo



ricrea  
la portante  
partendo dal  
segnale modulato



ha 2 repliche di altezza  $\frac{1}{4}$  per tornare all'altezza originale 1 devo moltiplicare per 2 \*

La modulazione VSB, associa al segnale da trasmettere  $x(t)$ , un segnale  $X_{VSB}(t)$  che ha per componenti in fase sul termine preparazionale a  $x(t)$  e per componenti in quadratura una generica trasformazione  $T$  di  $x(t)$ ; in sostanza:

$$X_{VSB}(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - T[x(t)] \sin(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (5.4)$$

Lo spettro di un generico segnale  $x(t)$ , può avere i più svariati andamenti; ciò nonostante, i segnali passanti essendo suddivisi fra quelli che hanno (seg. telefonici) componente armonica nulla nell'intervallo dell'origine e quelli che invece hanno componente armonica in zero. (ad esempio segnali video).

- E' evidente che nel primo caso, per applicare

una modulazione SSB, valendo eliminare una banda laterale è

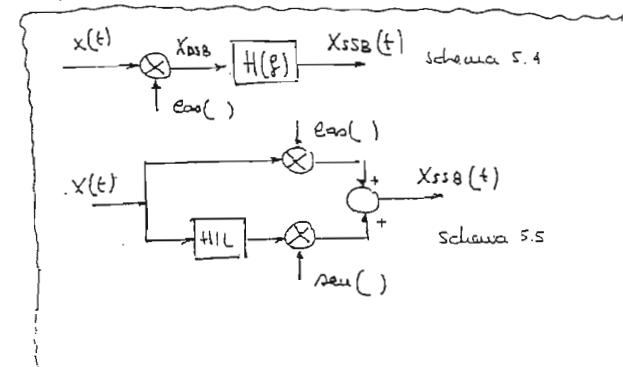
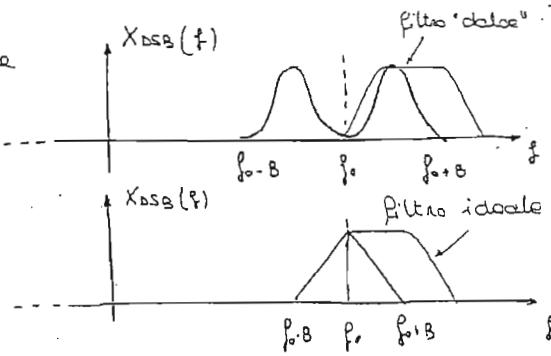
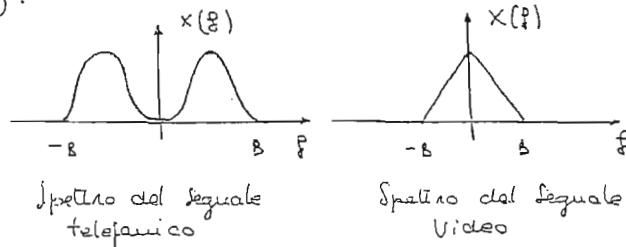
sufficiente un filtro "dolce". Nel secondo caso invece è necessario un filtro ideale che tagli esattamente in  $f_0$ .

(trascurando le freq. negative)

Per quanto detto la modulazione SSB è semplice ed efficiente per i segnali telefonici, mentre

risulta assai problematica per i segnali video.

Ricordiamo inoltre che un segnale SSB può essere ottenuto con filtraggio in banda passante (schema 5.4) o con il filtraggio in banda base (Schema 5.5).



La modulazione VSB si propone di curiare proprio a questo inconveniente. Anziché eliminare una banda laterale lasciandone una inalterata, parzialmente e ne lascia una parzialmente inalterata.

L'operazione può essere analizzata per via grafica.

il requisito fondamentale

è la simmetria tra la parte di banda "trasmessa"

che viene eliminata e la parte di quella "eliminata"

che viene trasmessa. Il filtro

che può avere pendenza dolce deve avere simmetria dispari

rispetto ad un punto stabilito.

La banda di un segnale VSB

è maggiore di quella di un segnale SSB, per la presenza di  $B_v$ , detta banda VESTIGIALE; in sostanza

$$B_{VSB} = B + B_v$$

nella quale  $B$  è la banda del segnale originale.

Per ottenere un segnale VSB, si può adattare lo schema

5.4, sostituendo al filtro passa banda  $H(f)$

un filtro reale  $H_1(f)$  che ripetti le suddette caratteristiche.

Come nel caso

della SSB lo schema

S.6 filtra in banda

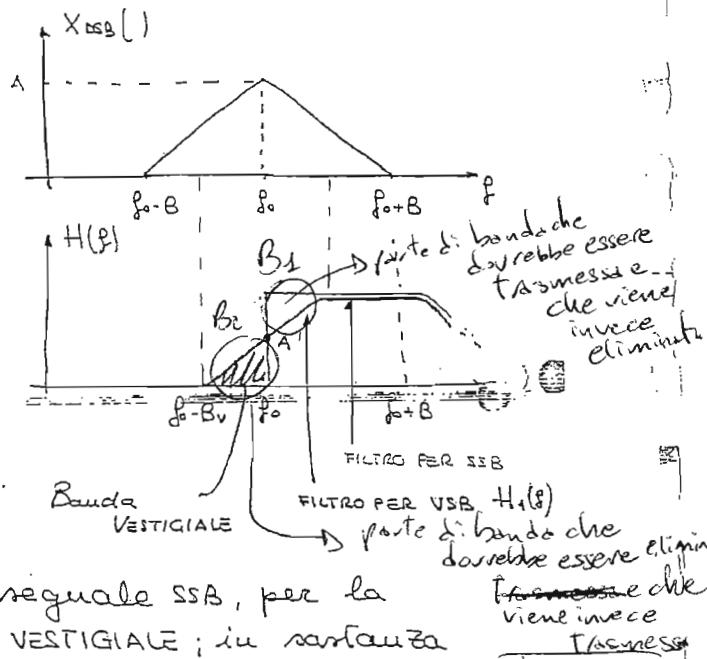
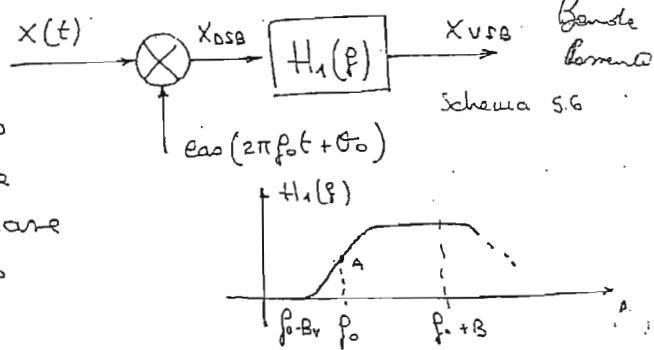
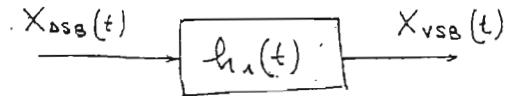
passante. Ora dimostriamo

come sia possibile eseguire

il filtraggio in banda base

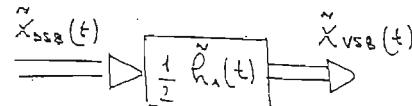
ottenendo un analogo dello

schema S.5.



Le aree  $B_1$  e  $B_2$  devono essere uguali!!

Ricordiamo che



65

$$X_{SSB}(t) = X(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - 0$$

Saranno  $\tilde{H}_1(f)$  in funzione delle componenti in fase e in quadratura.

$$H_{1C}(f) = \frac{\tilde{H}_1(f) + \tilde{H}_1^*(-f)}{2}$$

$$H_{1S}(f) = \frac{\tilde{H}_1(f) - \tilde{H}_1^*(-f)}{2j}$$

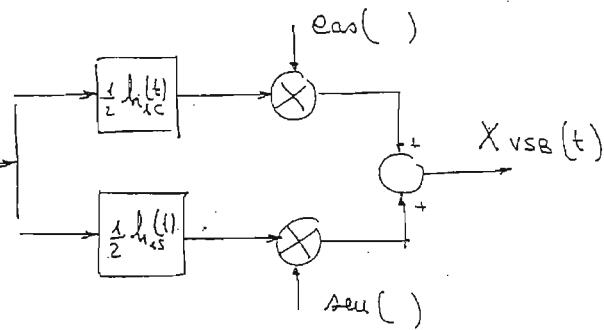
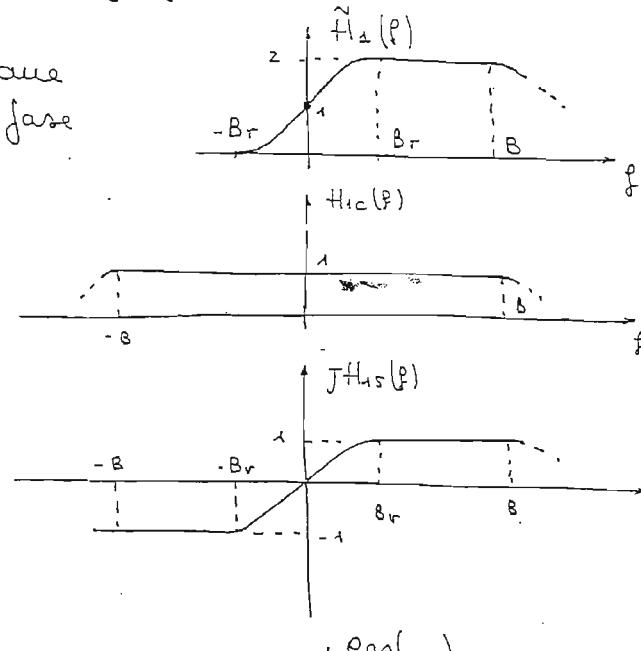
Possiamo associare alle due componenti in fase e in quadratura le rispettive di  $H(f)$

possiamo portare

fuori il fattore 1/2.

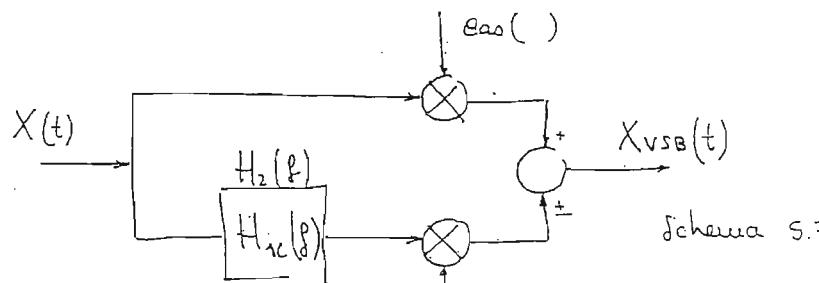
Quindi  $h_{1C}$  è unitario nello banda

e  $X(t)$ , quindi può  
essere fatto. Allora si  
perviene al seguente schema



VSB  $\Leftarrow$

Banda Base



schemma 5.7

Lo schemma 5.7 è l'analogo  
del 5.5 per la modulazione VSB. L'unica differenza  
sta nel filtraggio in banda base: al posto di un  
filtro di Hilbert che è ideale, inseriamo  $H1c(f)$  che è reale.

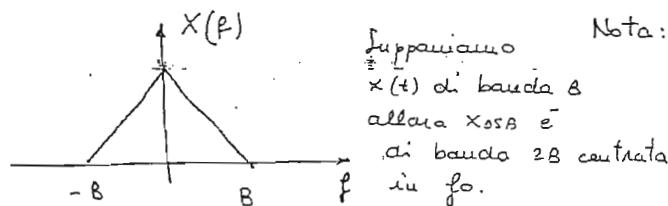
Anche la modulazione VSB può essere LB o UB a seconda del segno + o - nell'espressione (5.4) 66

### CONVERSIONE DI FREQUENZA

Consideriamo un segnale DSB nella forma

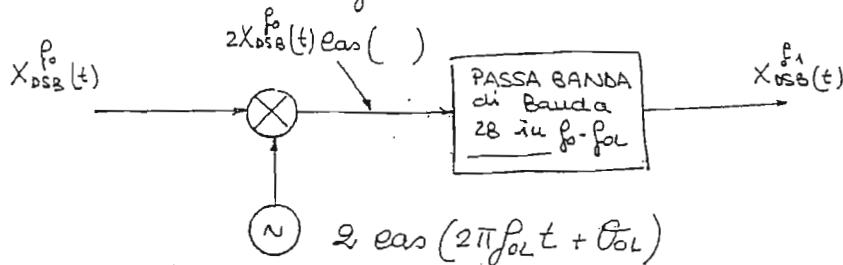
$$x_{DSB}(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

alla frequenza  $f_0$ ; in sostanza lo spettro di  $x(t)$  è traslato in  $f_0$ . Supponiamo di voler passare dalla frequenza  $f_0$  alla frequenza  $f_1$ .



Nota: Questa operazione viene normalmente impiegata per distinguere l'UPUNK dal DOWNLINK della trasmissione satellitare (in genere UPUNK 6 GHz, e DOWNLINK a 4 GHz).

L'operazione di "conversione di frequenza" può essere realizzata con lo schema seguente.



$$\begin{aligned} x_{DSB}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_{OL} t + \theta_{OL}) &= 2x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \cos(2\pi f_{OL} t + \theta_{OL}) \\ &= x(t) \cos[2\pi(f_0 + f_{OL})t + (\theta_0 + \theta_{OL})] + \\ (6.1) \quad &\quad + x(t) \cos[2\pi(f_0 - f_{OL})t + (\theta_0 - \theta_{OL})] \end{aligned}$$

ponendo in cascata un filtro passa banda centrato ad esempio sulla frequenza di differenza  $f_0 - f_{OL}$ , rimane

$$x_{DSB}(f_1) = x(t) \cos[2\pi(f_0 - f_{OL})t + (\theta_0 - \theta_{OL})]$$

se il nostro obiettivo è trasformare  $X_{DSB}$  ad  $f_0$  67  
in  $X_{SSB}$  ad  $f_1$ , scegliendo  $f_{oc}$  in modo che

$$\boxed{f_1 = f_0 - f_{oc}} \quad (6.2)$$

otteniamo

$$X_{SSB}^{f_1}(t) = X_{DSB}^{f_0} 2 \cos(2\pi f_{oc} t + \theta_{oc}) = \\ = X(t) \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \quad (6.3)$$

Analogamente si può scegliere il filtro in modo  
da conservare la somma  $f_0 + f_{oc}$ ; in tal caso  
possiamo:

$$\boxed{f_1 = f_0 + f_{oc}} \quad (6.4)$$

## MULTIPLAZIONE A DIVISIONE DI FREQUENZA (FDH)

68

Supponiamo di avere tre generici segnali di banda  $B$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  aventi uno spettro  $X_1(f)$ ,  $X_2(f)$  e  $X_3(f)$ .

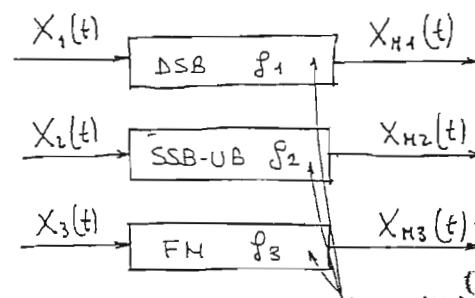
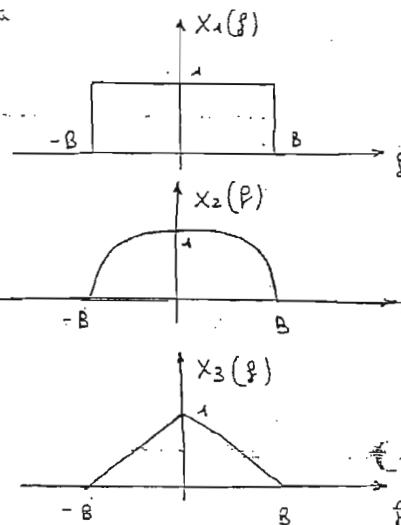
Se trasmettessimo <sup>simultaneamente</sup> i tre segnali sullo stesso canale, il risultato sarebbe una sovrapposizione dei tre; in frequenza lo spettro risultante sarebbe esattamente la somma di  $X_1(f)$ ,  $X_2(f)$  e  $X_3(f)$ .

Supponiamo di modulare i tre segnali anche in modo diverso. In generale si può pensare di modulare  $x_1(t)$  con DSB alla frequenza  $f_1$ ;  $x_2(t)$  con SSB alla frequenza  $f_2$  e  $x_3(t)$  con modulazione FM alla frequenza  $f_3$  (vedremo in seguito cosa significa).

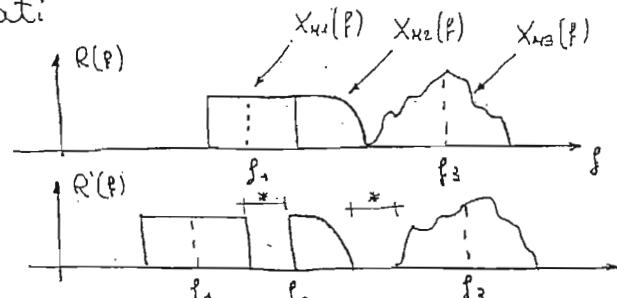
Scegliendo opportunamente le frequenze  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$ , in relazione alla banda del segnale modulato, in modo che i singoli spettri non si sovrappongano, avremo la seguente situazione. In frequenza gli spettri non si sovrappongono, allora si possono sommare nel tempo i segnali modulati.

In realtà per facilitare il filtraggio in ricezione, è bene separare i singoli spettri, garantendo la cosiddetta BANDA DI GUARDIA\*.

Per una operazione di questo tipo mi dice che i tre segnali sono stati MULTIPLATI IN FREQUENZA.



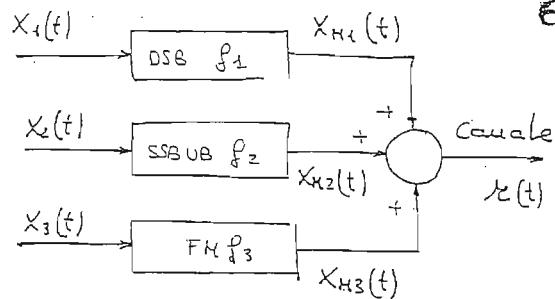
(i tre segnali sono stesi nella banda  $B$ )  
MODULATORI



(e si dicono solo le freq. positive)

Moltiplicare in frequenza  
i tre segnali significa sommare  $X_{1H}(t)$ ,  $X_{2H}(t)$  e  $X_{3H}(t)$  nel tempo.

69



Ricezione

Riottenere i segnali segnali  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ , basta filtrare con la banda

opportuno alle varie frequenze  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ; per ciascuna di esse si ottiene un segnale modulato, per cui occorrerà un demodulatore opportuno. In generale, la situazione può essere riassunta nel seguente.

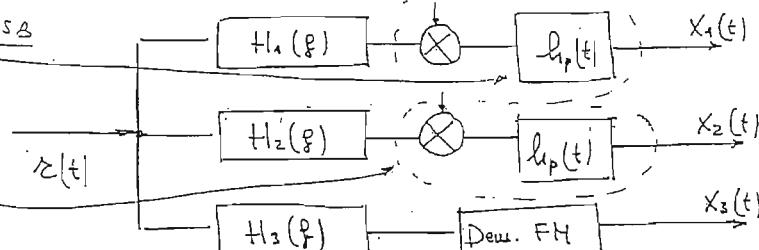
Demodulatore DSB

Demodulatore SSB

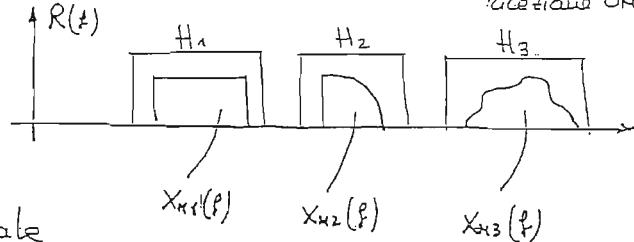
Il segnale ottenuto dalla moltiplicazione  $r(t)$ , ha uno spettro  $R(f)$ . Il sistema

sopra descritto per la ricezione del segnale

$r(t)$  è detto ONODINA; in esso si impiega un filtro e un demodulatore dedicati per ogni frequenza associata ad un segnale. Nel caso esaminato si hanno tre diverse portanti e quindi si impiegano tre filtri passa banda  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$ .



Schema di ricezione ONODINA

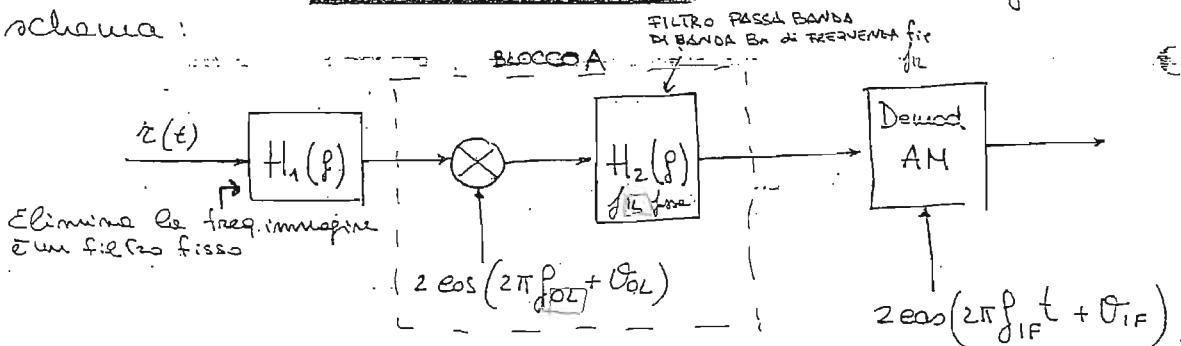
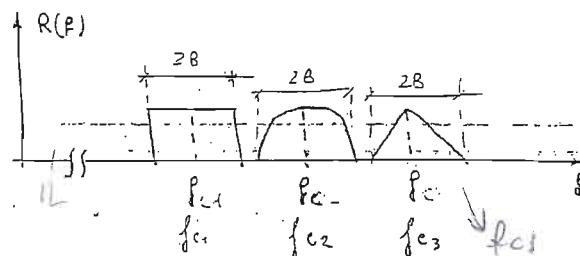


## RICEVITORE SUPERETERODINA

70

Supponiamo di avere tre segnali AM multiplati in frequenza alle frequenze  $f_1, f_2, f_3$ :

per recuperare i segnali segnali, si può impiegare un ricevitore OMODINA, visto in precedenza. Una soluzione più economica, che consente l'impiego di campionamenti che non dipendono dalla particolare trasmissione (filtri quiescenti), si ha un ricevitore SUPERETERODINA, basata sul seguente schema:



Il segnale multiplato è  $r(t)$  e ha uno spettro  $R(f)$  come in figura.

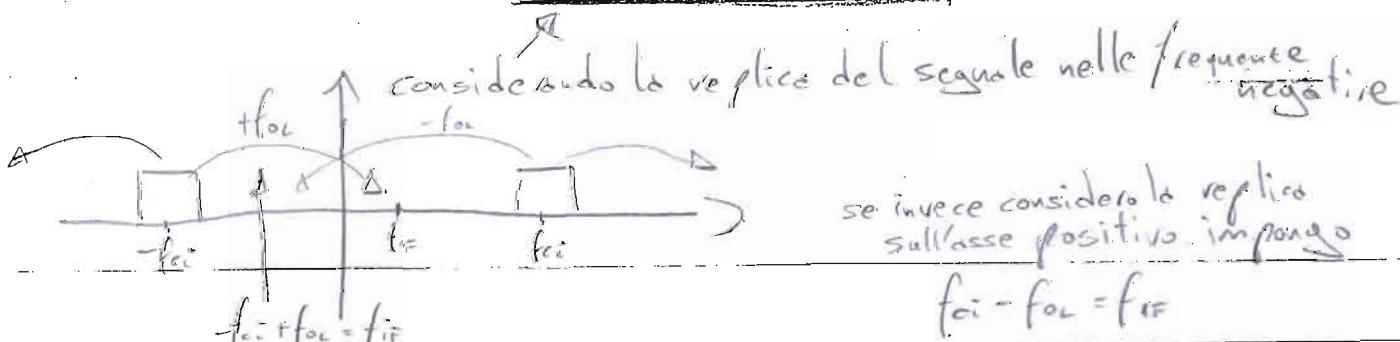
$$r(t) = x_{1H}(t) + x_{2H}(t) + x_{3H}(t)$$

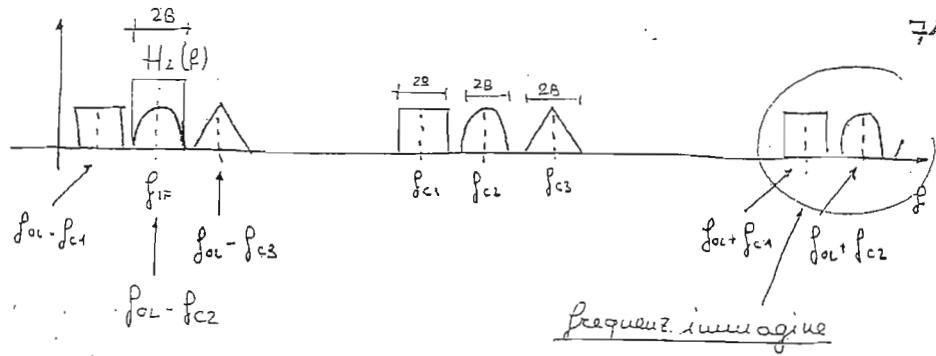
Il dispositivo

rappresentato è composto

da un CONVERTITORE DI FREQUENZA (blocco A), che trasla l'insieme dei segnali ricevuti  $r(t)$ , alla frequenza  $f_{loc}$ ; il filtro  $H_2(f)$  è centrato alla frequenza fissa  $f_{IF}$ . Agendo sulla frequenza  $f_{loc}$  dell'oscillatore del ricevitore si fa in modo di centrare il segnale valuto nelle bande di  $H_2$ . Per demodulare il segnale i-esimo  $x_{iH}(t)$ , basta ridimensionare l'oscillatore di  $f_{loc}$  in modo che  $|f_{loc} - f_{ci}| = f_{IF}$  (7.1)

Schema di un ricevitore SUPERETERODINA.  $H_1(f)$  è il FILTRO FRONTALE (di Front End); il blocco A è un convertitore di frequenza. Il blocco Demod AM è un demodulatore AM.





Nell'esempio di figura si seleziona  $f_{C1}$  in modo che  $f_{C1} - f_{C2} = f_{I.F.}$ , in questo modo si fa cadere nella banda solo il canale di  $X_{N2}(t)$ , quindi vengono eliminati tutti gli altri canali e viene ~~modulato~~ modulato  $X_{N2}(t)$ .

Il filtro  $H_2(f)$  ha il compito di eliminare i canali adiacenti a quello selezionato; inoltre elimina anche la frequenza immagine ( $f_{C1} + f_{I.F.}$ ) che viene a comparire nella cava eraria di frequenza del blocco A. In seguito il demodulatore AN, estrae il segnale in banda base, che era stato trasmesso in origine  $X_i(t)$ .

Il filtro  $H_2(f)$  è di banda  $2B$  circa e centrato sulla frequenza fissa  $f_{I.F.}$  della FREQUENZA INTERMEDIA; questa frequenza può essere diversa da ricevitore a ricevitore: non può essere troppo elevata perché degraderebbe la qualità di taglio del filtro stesso; allo stesso tempo ridurre eccessivamente  $f_{I.F.}$  significa in base alla (7.1), avvicinare le repliche in

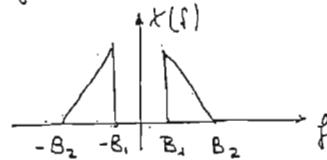
$$f = f_{C1} - f_{I.F.} \quad \text{e} \quad f' = f_{C1} + f_{I.F.}$$

riscuoiando la sovrapposizione.

Il filtro  $H_2(f)$  ha il compito di eliminare eventuali frequenze immagini introdotte nel canale.

## SEGNALI IN PRESENZA DI ERRORE DI FASE E DI FREQUENZA 72

Si consideri un generico segnale con componenti armoniche nulla in prossimità dell'origine (segnale telefonico), con lo spettro  $X(f)$  di figura.

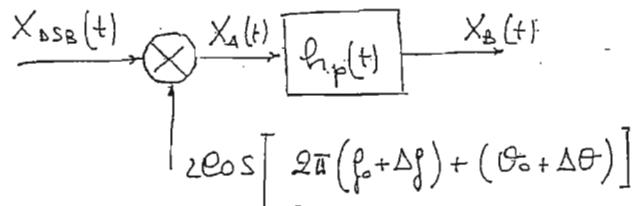


### (A) Modulazione DSB in presenza di errori

Il segnale modulato ha espressione

$$X_{DSB}(t) = X(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Demoduliamo il segnale con un demodulatore mixer. Supponiamo che l'oscillatore locale permetta un errore  $\Delta f$  rispetto a  $f_0$  e un errore  $\Delta\theta$  rispetto a  $\theta_0$ .



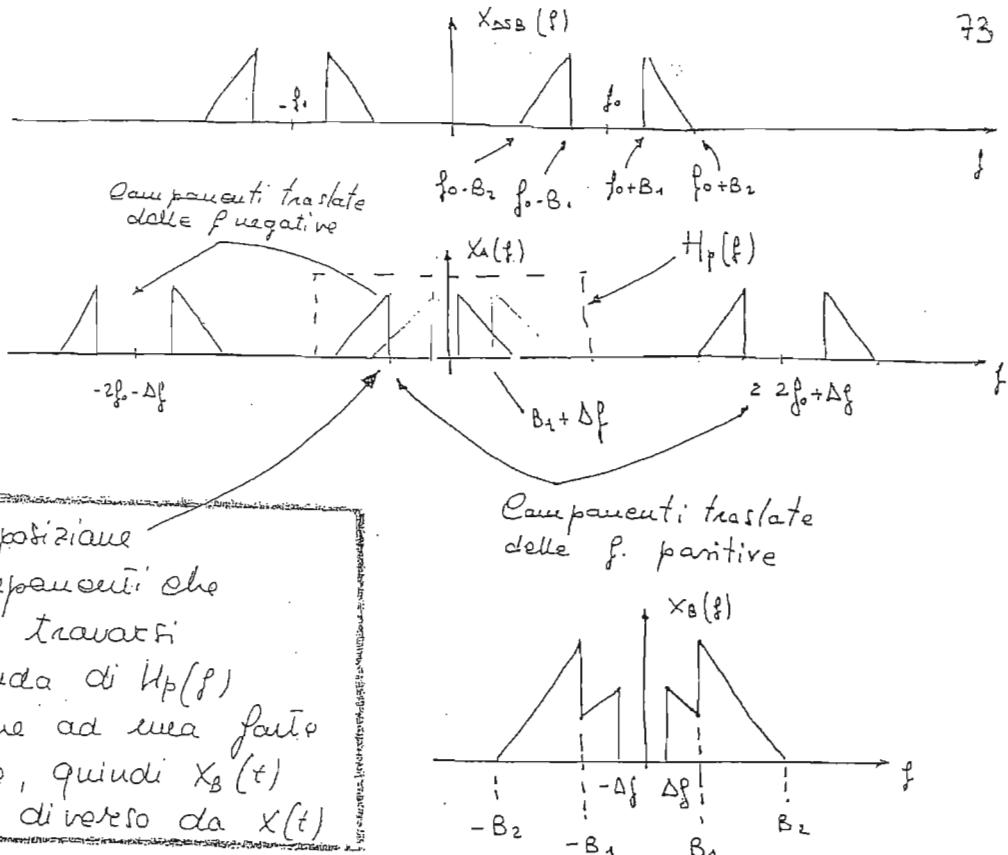
Nel dominio del tempo

$$\begin{aligned} X_A(t) &= X_{DSB}(t) \cdot 2 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + (\theta_0 + \Delta\theta)] = \\ &= 2X(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + (\theta_0 + \Delta\theta)] = \\ &= X(t) \cos[2\pi(2f_0 + \Delta f)t + (2\theta_0 + \Delta\theta)] + \\ &\quad + X(t) \cos[2\pi \Delta f t + \Delta\theta] \quad (7.3) \end{aligned}$$

Il filtro  $h_p(t)$  elimina la componente a frequenza doppia, quindi:

$$X_B(t) = X_A(t) * h_p(t) = X(t) \cos(2\pi \Delta f t + \Delta\theta) \quad (7.4)$$

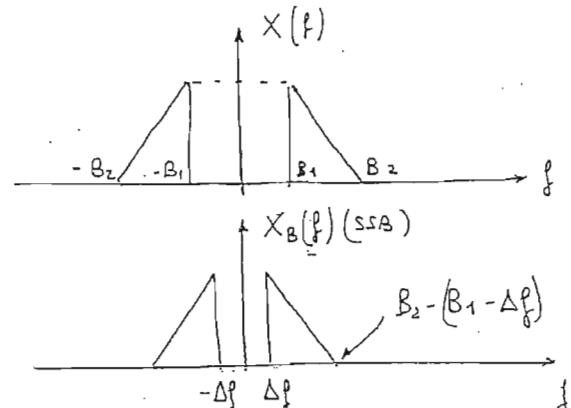
La frequenza riporta una notevole distorsione; supponendo  $\Delta\theta = 0$ , considerato cioè l'errore di fase nullo  $\Delta f < B_1$ , ottieniamo:



B) Modulazione SSB (US) in presenza di errori

Senza ripetere i calcoli, poniamo dire che mancando la banda laterale (in questo caso quella inferiore), non vi hanno componenti in sovrapposizione.

Se due bande laterali vengono portate con il mixer in  $\Delta f$  e  $-\Delta f$  come in figura (quelle in  $2f_0 + \Delta f$  come prima vengono eliminate da  $H_p$ ). Come si vede lo spettro è qualitativamente identico, tuttavia si ha un abbassamento frequenziale di tutte le componenti armoniche di  $B_1 - \Delta f$  (assumendo come prima  $\Delta\theta = 0$  e  $\Delta f < B_1$ ). Il segnale è distorto ma l'informazione non è compreesa.

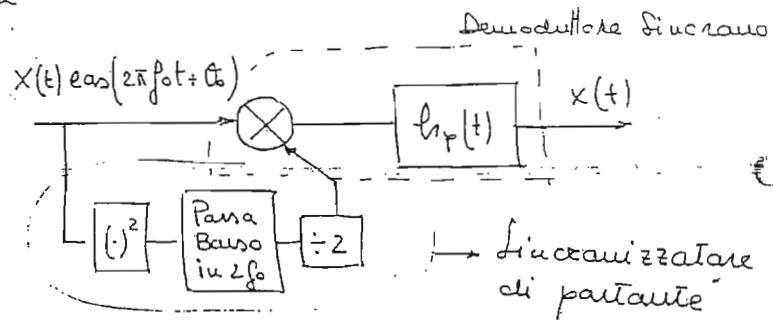


Per questo motivo si dice che la SSB è più "robusta"<sup>44</sup>  
della DSB.

### SINCRONIZZATORE DI PORTANTE

Per avviare agli inconvenienti appena analizzati,  
molto spesso si estrae frequenza e fase della  
portante direttamente dal segnale ricevuto.

Anziché impiegare un oscillatore locale, si ricorre  
al seguente schema



Vediamo cosa fornisce questo sincronizzatore:

$$\begin{aligned} (x(t) \operatorname{eas}(2\pi f_0 t + \theta_0))^2 &= x^2(t) \operatorname{eas}^2(2\pi f_0 t + \theta_0) = \\ &= \frac{x^2(t)}{2} + \frac{x^2(t)}{2} \operatorname{eas}[2\pi(2f_0)t + 2\theta_0] = \end{aligned}$$

eliminato dal filtro

Lissame

$$x^2(t) = K + y(t)$$

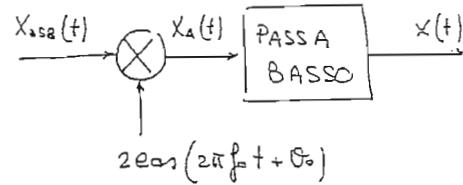
$$\begin{aligned} (x(t) \operatorname{eas}(2\pi f_0 t + \theta_0))^2 &= \frac{K}{2} \operatorname{eas}(2\pi(2f_0)t + 2\theta_0) + \frac{y(t)}{2} \operatorname{eas}(2\pi(2f_0)t + 2\theta_0) \\ \frac{1}{2} [K + y(t)] \cdot \cos[2\pi(2f_0)t + 2\theta_0] &= \frac{K}{2} \cos(2\pi(2f_0)t + 2\theta_0) + \frac{y(t)}{2} \cos(2\pi(2f_0)t + 2\theta_0) \end{aligned}$$

Si consideri un demodulatore sincrono e un segnale DSB  $X_{DSB}(t)$  di banda  $2B$ , nella frequenza  $f_0$ :

$$X_{DSB}(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Same metà

$$X_A(t) = x(t) + X(t) \cos[2\pi(2f_0)t + 2\theta_0]$$



per ricevere  $x(t)$  è sufficiente

un filtro passa basso che elimini da  $X_A(t)$  la componente a  $2f_0$ . Questo significa che basta un passa basso di banda  $B$ ; se la banda fasce maggiore avremmo dei problemi nel caso in cui  $B$  risulti più grande della portante  $f_0$ .

- Consideriamo ora un "rumore" AWGN; esso è rappresentabile mediante un processo gaussiano a media nulla, con densità spettrale di potenza  $N_0/2$ , che chiiameremo  $n(t)$ . \*\*

### DSB

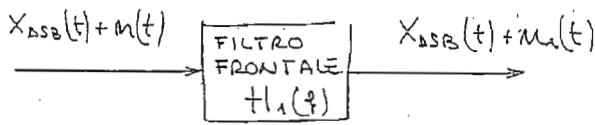
A. Demodulazione sincrona di un segnale DSB con rumore  $n(t)$

Il ricevitore rileva in ingresso segnale DSB e rumore  $n(t)$  sovrapposti:

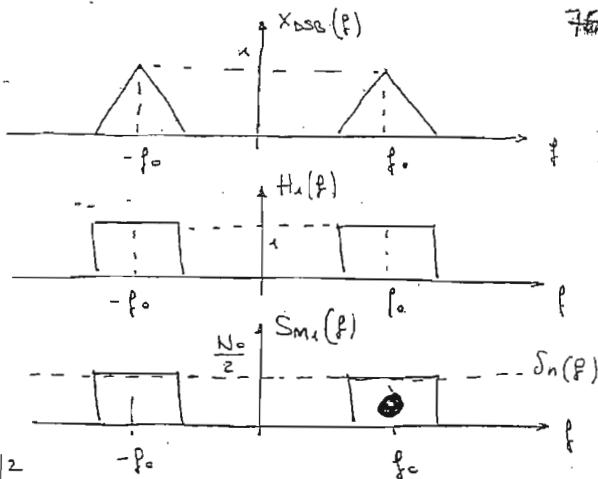
$$X_{DSB}(t) + n(t)$$

La frequenza lo spettro di  $X_{DSB}(t)$  è uoto; la densità spettrale di potenza  $S_n(f)$  del rumore è costante e pari a  $N_0/2$ . Per eliminare quanto più rumore possibile si effettua un prefiltraggio con un passa banda centrato alla frequenza della portante, il più possibile: in sostanza questo filtro, detto FILTO FRONTALE (Front end) deve avere una banda il più possibile vicina a quella del segnale DSB, ovvero circa  $2B$ . ( $B$  è la banda di  $x(t)$ ).

- \*\* Una misura quantitativa del rumore presente è rappresentata dal rapporto fra la potenza del segnale utile e la potenza del rumore  $S/N$ .



Se uscita da  $H_1$  avremo ancora  $X_{DSB}(t)$  sommato però al processo  $m_1(t)$  come in figura a lato.  
In sostanza



$$S_{m_1}(f) = S_m(f) \cdot |H_1(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_1(f)|^2$$

Questa operazione non compromette la possibilità di stimare  $m_1(t)$ , perché  $m(t)$  è AWGN, per cui  $M$  e  $M_1$  sono incaricati e indipendenti.

Nel filtro di "front end" è necessario per stimare il rapporto segnale utile rumore in ingresso; senza  $H_1$  il rapporto fra potenza di  $X_{DSB}$  e potenza di  $m$  sarebbe nullo, perché  $N$  è infinita. A valle del filtro frontale avremo la potenza del DSB pari a  $P_x/2$  (visto dallo studio della mod. DSB).

La potenza di  $m_1(t)$  risulta

$$N_1 = N_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_{m_1}(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\pi}{2B} = \frac{N_0}{4} \cdot \pi B$$

$\hookrightarrow$  2 volte l'area cioè  $(\frac{\pi}{2} \cdot \pi B) \cdot 2$

Allora il rapporto segnale utile in ingresso e rumore base in ingresso risulta:

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{P_x}{4N_0 B} \quad (7.6)$$

Pariamo ora il risultato del prefiltraggio in ingresso al demodulatore sincrono; avverremo però che

$$X_{DSB}(t) = X(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

scrivendo  $m_1(t)$  come componente in fase e componente in quadratura:

$$m_1(t) = m_c(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) - m_s(t) \sin(\phi_0)$$

Come visto il demodulatore estrae solo le componenti in fase, quindi in uscita n' ha:

$$x(t) + m_c(t)$$

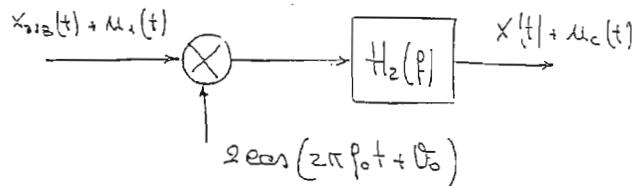
Il filtro  $H_2(f)$  è di banda  $B$ ; esso quindi elimina le componenti di rumore che non aveva

eliminato il filtro frontale. Per questo motivo nella demodulazione DSB il filtro di fronte non è "critico".

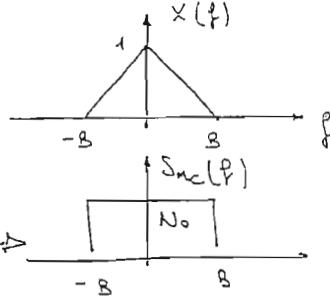
Il rapporto teoria utile rumore in uscita, può essere calcolato sulla base degli spettri ai figuri, i cui risultati:

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{P_x}{2N_0B} = \frac{2S_i}{N_i} \quad (7.7)$$

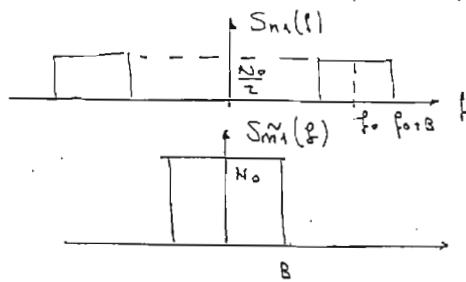
Osserviamo che tale rapporto è raddoppiato rispetto all'ingresso, quindi la demodulazione ha introdotto un miglioramento.



$$2\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$



Vediamo come è stata ricavata  $S_{n_c}(f)$ ; ricordiamo che nota  $S_{n_i}(f)$  si calcola l'inviluppo complesso  $\tilde{S}_{n_i}(f)$



$$S_{n_c}(f) = S_{n_i}(f) = \frac{\tilde{S}_{n_i}(f) + \tilde{S}_{n_i}(-f)}{2}$$

DSB = filtro frontale non critico

SSB

B. Demodulazione Sintetica di un segnale SSB con Scuola  $M(t)$

Il ricevitore riceve in ingresso

78 C

$$X_{SSB}(t) + m(t)$$

In questo caso il segnale SSB è di banda B, con il filtro frontale dovrà essere passa banda in  $f_0$  ma di banda  $B$ ; fra  $f_0$  e  $f_0 + B$ . In questo caso allora in ingresso al demodulatore avremo  $X_{SSB}(t)$  e un processo  $m_1(t)$  con potenza

$$= \left(\frac{N_0}{2} \cdot B\right) \cdot 2$$

$$N_1 = N_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_{M_1}(f)|^2 df = N_0 B \quad (7.8)$$

Come visto la potenza di un segnale SSB è  $P_x/4$ , quindi il rapporto segnale utile rumore sarà:

$$\boxed{\frac{S_i}{N_i} = \frac{P_x}{4N_0 B}} \quad (7.9)$$

il demodulatore riceverà ora solo la sola campionante in fase;

Sapendo che

$$X_{SSB}(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(\phi) + \frac{y(t)}{2} \sin(\phi)$$

viene estratto  $\frac{x(t)}{2}$ ; per il rumore viene estratta  $N_0(t)$

In questo caso però  $S_{M_1}(f)$  è quella di figura.

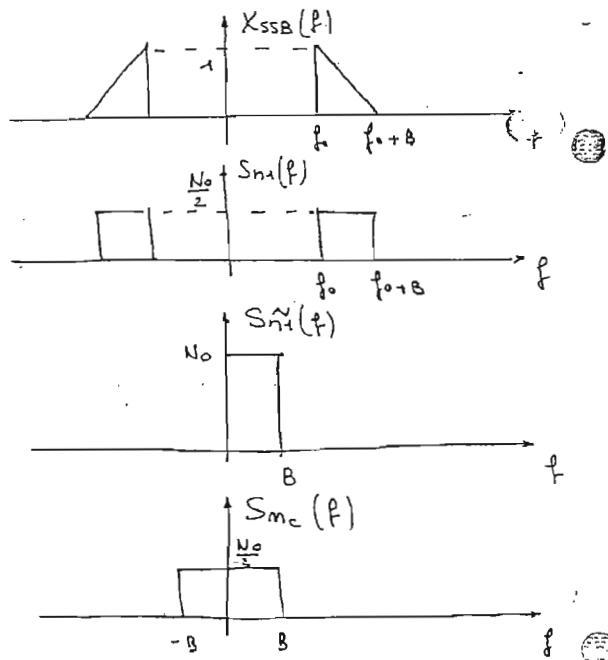
Calcoliamo  $S_{M_1}(f)$  e dalla relazione

$$S_{M_1}(f) = \frac{S_{M_1}(f) + S_{M_1}(-f)}{2}$$

determiniamo la densità spettrale di potenza della campionante in fase  $M_1(t)$ .

Si vede la camp. in fase di  $X_{SSB}(t)$  e  $\frac{x(t)}{2}$  la pot. del segnale utile è  $P_x/4$ , quindi il rapporto S/N in uscita risulta

$$\boxed{\frac{S_u}{N_u} = \frac{P_x}{4N_0 B}} \quad (7.10)$$



SSB,

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{S_i}{N_i}$$

## Criticità del filtro frontale per la demodulazione SSB.

79

Supponiamo che il filtro frontale  $H_1(f)$ , anziché essere di banda  $B$ , ecceda di  $\Delta B_1$  a sx e di  $\Delta B_2$  a dx.  
In questo caso il processo  $m_1(t)$  che si presenta in ingresso al demodulatore ha densità spettrale  $S_{m_1}(f)$  costante e pari a  $\frac{N_0}{2}$  nell'intervallo che va da  $f_0 - \Delta B_1$  a  $f_0 + B + \Delta B_2$ .

Si moltiplicherà tutto diminuisce il rapporto S/N in ingresso, perché

$$S_i = P_x / 4$$

$$N_i = N_0 (B + \Delta B_1 + \Delta B_2)$$

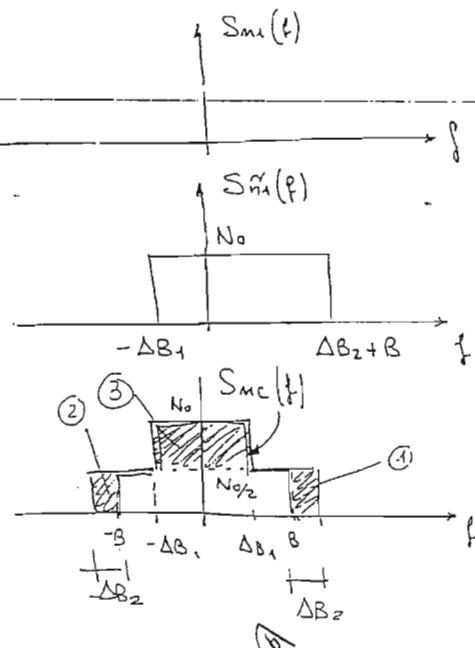
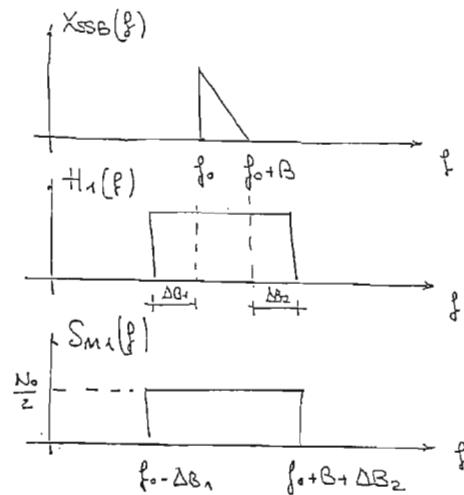
(anziché  $N_0 B$ )

Quindi calcoliamo la componente in fase di  $m_1(t)$ ; partiamo da  $S_{m_1}(f)$  e quindi da  $\tilde{S}_{m_1}(f)$ ; sapendo che

$$S_{mc}(f) = \frac{\tilde{S}_{m_1}(f) + \tilde{S}_{m_1}(-f)}{2}$$

Si viene a creare la zona ③ che essendo proprio nella banda di  $x(t)$ , non può più essere eliminata.

Per questo motivo  $\Delta B_1$  deve essere il più piccolo possibile. L'eccedenza  $\Delta B_2$  non influenza perché comunque viene eliminata tramite  $H_2(f)$ .



SSB: il filtro frontale è critico

nella SSB  
dovendo ricostruire  
il segnale specchiando la metà che  
ci arriva se no il filtro fa troppo largo  
tira dentro componenti che poi  
versano specchiante generando  
un segnale diverso da quello di  
partenza

## 2) RIEPILOGO Verificazioni DSB e SSB in presenza di rumore

facciamo ora un rapido confronto del comportamento in demodulazione di DSB e SSB nei confronti del rumore AWGN  $m(t)$ .

$$P_{DSB} = \text{pot. trasmessa in DSB} = \frac{P_x}{2}$$

$$\left( \frac{S_u}{N_u} \right)_{DSB} = \frac{P_x}{2 N_0 B} = 2 \left( \frac{S_i}{N_i} \right)_{DSB}$$

filtri frontale  
Non critico

$$P_{SSB} = \text{pot. trasmessa in SSB} = \frac{P_x}{4}$$

$$\left( \frac{S_u}{N_u} \right)_{SSB} = \frac{P_x}{4 N_0 B} = \left( \frac{S_i}{N_i} \right)_{SSB}$$

filtri frontale  
critico

Osserviamo che anche se

$$\left( \frac{S_u}{N_u} \right)_{SSB} = \frac{1}{2} \left( \frac{S_u}{N_u} \right)_{DSB}$$

l'efficienza della SSB è la stessa della DSB, perché il rapporto S/N è calcolato su metà della potenza in trasmissione.

Anche in questo caso si riceve un segnale AM sovrapposto allo stesso rumore  $m(t)$  AWGN; osserva anche in questo caso un filtro di frontale di banda 2B centrato in  $f_0$ , all'uscita del quale in più ancora  $X_{AM}(t)$  e un rumore  $m_1(t)$  di banda due 2B. All'ingresso del rivelatore di inviluppo avremo:

$$\begin{aligned} X_{AM}(t) + m_1(t) &= A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(\omega_0 t + \theta_0) + m_1(t) = \\ &= A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(\omega_0 t + \theta_0) + m_c(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) - m_s(t) \sin(\omega_0 t + \theta_0) = \\ &= [A_0 + \mu A_0 x(t) + m_c(t)] \cos(\omega_0 t + \theta_0) - m_s(t) \sin(\omega_0 t + \theta_0) \end{aligned}$$

In questo caso la campionatura in fase è

$$A_0 + \mu A_0 x(t) + m_c(t)$$

mentre quella in quadratura è  $m_s(t)$ . Ricordiamo che l'uscita del rivelatore di inviluppo è il modulo dell'inviluppo complesso, quindi:

$$X_u(t) = \sqrt{[A_0 + \mu A_0 x(t) + m_c(t)]^2 + m_s^2(t)}$$

Se vale la condizione sul rapporto segnale utile rumore in ingresso molto grande:

$$\boxed{\frac{S_i}{N_i} \gg 1} \quad (7.11) \quad \text{filtro frontale critico}$$

si ottiene:

$$X_u(t) = \sqrt{[A_0 + \mu A_0 x(t) + m_c(t)]^2}$$

$$\text{con } A_0 + \mu x(t) A_0 + m_c(t) \geq 0$$

quindi:

$$X_u(t) = A_0 + \mu A_0 x(t) + m_c(t) \quad (7.12)$$

Demodulatore con rivelatore d'inviluppo

 filtro frontale critico

ed è lo stesso risultato che si ottiene con un demodulatore sincrono. Se la (7.11) non è soddisfatta si ha la "NOTIFICAZIONE DEL SEGNALE": ciò che m'attiene in uscita è una funzione non lineare del segnale originale e quindi non è possibile estrarlo. Per garantire il soddisfacimento della condizione (7.11) è necessario scegliere il più preciso passabili il filtro frontale, per ridurre il più passabile la densità spettrale di potenza del rumore  $n_1$ , alzando il rapporto fra segnale utile e rumore in ingresso.

MODULAZIONE DI FREQUENZA (FM) E DI FASE (PM)

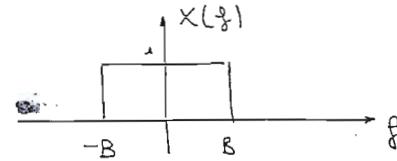
In entrambe i casi la portante è  $p(t)$

$$p(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Nella FM viene modulata la frequenza nella PM viene modulata la  fase, in ogni caso in maniera proporzionale al seguale modulante  $x(t)$ . Nota lo spettro di  $x(t)$ :

In generale il seguale modulato, può essere scritto come:

$$X_M(t) = A_0 \cos [2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0] \quad (8.1)$$



nella quale  $\Phi(t)$  è la funzione che mantiene le informazioni su  $x(t)$ . Possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned} X_M(t) &= A_0 \cos [2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0] = \\ &= \operatorname{Re} \{ A_0 e^{j[2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0]} \} \end{aligned}$$

ed è per questo che vengono dette modulazioni esponenziali.

L'argomento del coseno è detta FASE ISTANTANEA  $\theta(t)$ :

$$\boxed{\theta(t) = 2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0} \quad (8.2)$$

derivando si ottiene la velocità angolare della FREQUENZA ISTANTANEA:

$$(8.3) \quad \boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \dot{\Phi}(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt}}$$

Nella modulazione PM la funzione  $\Phi(t)$ , che contiene le informazioni sul seguale modulante, è la seguente

$$\boxed{\Phi(t)_{PM} = \Phi_\Delta \cdot x(t)} \quad (8.4) \quad \text{NOTA}$$

l'espressione del seguale  $X_{PM}(t)$  pertanto risulta

$$(8.5) \quad X_{PM}(t) = A_0 \cos [2\pi f_0 t + \Phi_\Delta x(t) + \theta_0]$$

nel caso della FM, invece in  
viale che

84

$$\frac{1}{2\pi} \dot{\Phi}(t) = f_A x(t) = (f(t) = f_0 + f_A x(t))$$

quindi risulta

$$\boxed{\Phi_{\text{FH}}(t) = 2\pi f_A \int_{-\infty}^t x(n) dN} \quad (8.6)$$

NOTA

l'espressione del segnale modulato in frequenza  $X_{\text{FH}}(t)$   
risulta

$$(8.7) \quad X_{\text{FH}}(t) = A_0 \cos \left[ 2\pi f_0 t + 2\pi f_A \int_{-\infty}^t x(n) dN + \theta_0 \right]$$

la quantità  $f_A$  è detta INDICE DI MOD. DI FASE.

mentre la quantità  $f_A$  è detta INDICE DI MOD. DI

FREQUENZA. Scegliendo per convenzione segnali con

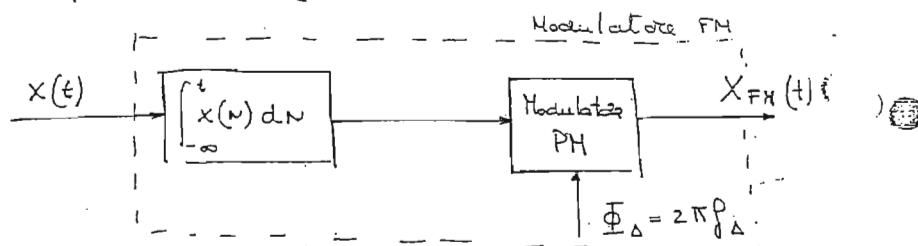
$|x(t)| \leq 1$ , i due indici rappresentano il scansamento di fase e di frequenza, rispettivamente.

Modulazione di fase e modulazione di frequenza  
sono strettamente legate, infatti una può essere  
ottenuta dall'altra mediante operazioni di  
derivaione o integrazione sul segnale in  
ingresso al modulatore.

Sulla base dell'espressione (8.7)

Schemi 8.1

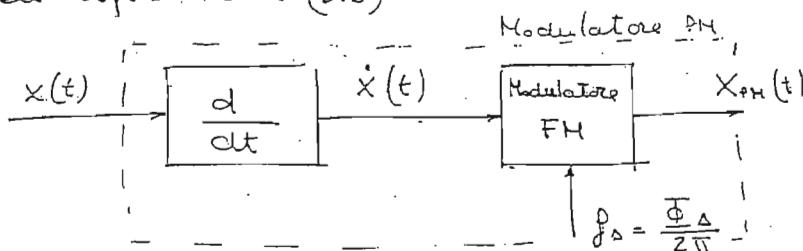
Modulatore FM  
realizzato con  
modulatore PH



Sulla base dell'espressione (8.5)

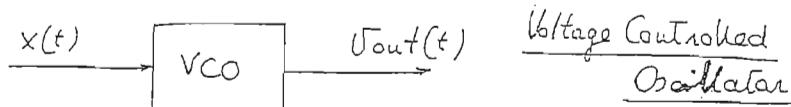
Schemi 8.2

Modulatore PM  
realizzato con  
modulatore FM



In generale come modulatore FM si utilizza un  
dispositivo elettronico detto VCO (Voltage Controlled  
Oscillatore), che realizza la funzione:

$$U_{out} = A_0 \cos \left[ 2\pi f_c t + K \int_{-\infty}^t x(t) dN + \theta_0 \right]$$



Gli generali modulatori PM non esistono e vengono realizzati tramite modulatori FM come nello schema precedente (Schema 8.2).

Per ciò che riguarda la demodulazione, per definizione un demodulatore FM è un dispositivo che fornisce in uscita un segnale proparzionale ad  $x(t)$  avendo in ingresso  $X_{FM}(t)$ .

Un demodulatore FM che riceve

in ingresso un segnale PH

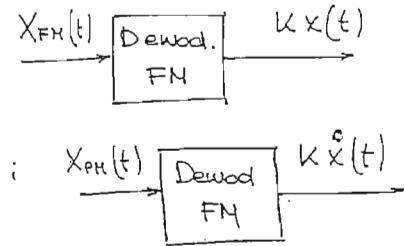
$X_{PH}(t)$ , restituisce in uscita

$\dot{x}(t)$ , un segnale pro-

parziale alla derivata di  $x(t)$ ;

allora basta integrare per

completare la demodulazione PH.



Osservazione: la frequenza istantanea  $f(t)$  è una funzione del tempo; nell'operazione di trasformazione di Fourier la frequenza  $f$  è una variabile indipendente.

Nei due casi, il significato di frequenza, è profondamente diverso e non va assolutamente confuso.

Punto aereo: riassumere alcuni aspetti delle mod. esponenziali.

1. L'ampiezza di un segn. modulato esponenzialmente è costante.
2. L'informazione risiede solo nell'altroscorciato dello zero del segnale modulato.
3. Non sempre si riesce a visualizzare tramite l'onda del segnale modulato, l'aumento del segnale modulante.

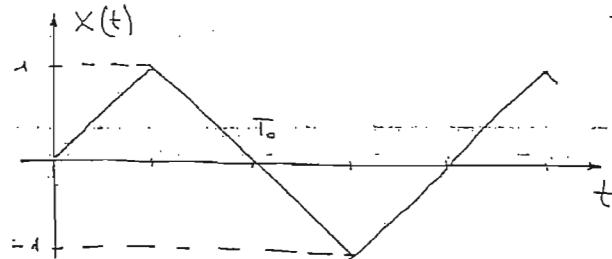
## ANDAMENTO TEMPORALE DEL SEGNALE

86

Supponiamo il segnale modulante di tipo triangolare di ampiezza unitaria con  $T_0$  ( $T_0$  non è il periodo).

Il segnale modulato, in frequenza o in fase è un'oscillazione continua compresa fra  $+A_0$  e  $-A_0$ .

Nella modulazione PM,



$$X_{PM}(t) = A_0 \cos [2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0]$$

$$= A_0 \cos [2\pi f_0 t + \Phi_0 + \dot{\Phi}_0 t + \theta_0]$$

nella quale la fase istantanea varia con perché  $x(t)$  è continuo. La frequenza risulta

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} = f_0 + \frac{\dot{\Phi}_0}{2\pi} t$$

il segnale  $\dot{x}(t)$  non è che la derivata del segnale  $x(t)$  modulante; la frequenza istantanea, allora, è proporzionale alla "pendenza", in quell'istante, del segnale. Si quanto aumenta o diminuisce  $f(t)$ , dipende dal segnale (in particolare sua derivata), ma anche dall'indice di modulazione.

Per  $t < 0$   $x(t) = 0$  allora

$$f(t) = f_0$$

cioè si ha la portante non modulata. Nell'intervallo

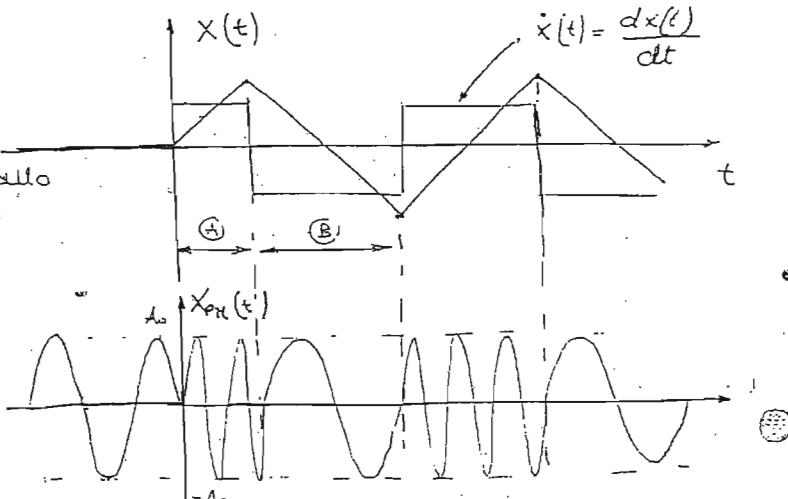
(A) la  $\dot{x}(t)$  è positiva, allora

$$f(t) = f_0 + f_0 \dot{x}(t) > f_0$$

Nell'intervallo (B) al contrario la  $\dot{x}(t)$  è neg, allora

$$f(t) = f_0 + f_0 \dot{x}(t) < f_0$$

In ogni caso  $f(t)$  è proporzionale a  $\dot{x}(t)$ .



$$\begin{aligned} X_{FM}(t) &= A_0 \cos [2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0] = \\ &= A_0 \cos \left[ 2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + \theta_0 \right] \end{aligned}$$

la frequenza istantanea risulta

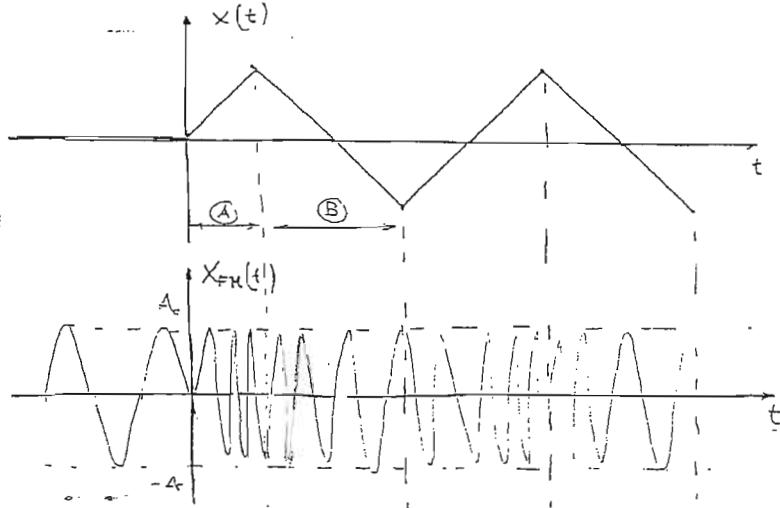
$$f(t) = f_0 + f_\Delta x(t)$$

ovvero è proporzionale direttamente al segnale  $x(t)$ , tranne l'indice di modulazione  $f_\Delta$ .

I diagrammi temporali del segnale  $x(t)$  triangolare sono i seguenti.

Se  $t < 0$  si ha  
la portante  
non modulata,

perché  $x(t) = 0$ .  
Nel tratto ①  $f(t)$   
aumenta linearmente  
in funzione di  $x(t)$   
e tocca il valore max  
in  $T_0/2$ . Al contrario  
in ② la frequenza  
diminuisce linearmente  
con  $x(t)$ .



### VINCI DI MODULAZIONE

Un sistema di modulazione deve assicurare la possibilità di determinare in maniera univoca il segnale originale. Per questo motivo occorre osservare alcuni vincoli.

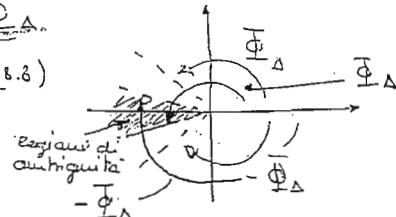
#### A. Indice di Modulazione di fase $\Phi_\Delta$

E' necessario che

$$|\Phi_\Delta| < \pi \quad (8.8)$$

in questo modo man mano che, essendo  $|x(t)| \leq 1$   
 $\Phi(t)$

varia fra  $-\Phi_\Delta$  e  $\Phi_\Delta$ . Se  $\Phi_\Delta$  fosse maggiore di  $\pi$



## B. Indice di Modulazione di frequenza

88

È necessario  $f_m < f_c$  per assicurare la natura passa banda di  $x_{FM}(t)$ , ovvero del segnale modulato (elaborremo in seguito questo aspetto)

## C. Vincolo sulla frequenza di portante

$$f_p > B \quad (8.10)$$

Ne altri termini la portante deve variare molto più velocemente del segnale modulante.

## ANALISI IN POTENZA DEI SEGNALI FM e PH

In entrambi i casi la potenza associata al segnale trasmesso, FM o PH è che sia, vale:

$$P_{FM} = P_{PH} = \frac{A_0^2}{2} * \quad (8.11)$$

ovvero è la potenza associata alla portante sinusoidale.

Intuitivamente si può giustificare la (8.11), pensando al vincolo (8.10); ricordiamo che per segnali periodici

$$\rightarrow P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

mentre per segnali aperiodici

$$\rightarrow P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Allora considerato un intervallo piccolo  $x(t)$  varia poco, per cui  $x_{FM}(t) \circ x_{PH}(t)$  si scatta di poco dall'andamento della portante. Ne altri termini  $\Phi(t)$  è attenuto da  $x(t)$  tramite relazioni lineari o integrali;

Allora la banda di  $\Phi(t)$  è la stessa del segnale modulante  $x(t)$ . Per questo motivo  $\Phi(t)$  varia con la stessa velocità di  $x(t)$ .

$$P_{p(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt = \frac{1}{T} \frac{A_0^2}{2} \left[ + \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A_0^2}{2} *$$

Vediamo una dimostrazione più rigorosa

$$X_H(t) = A_0 \cos \left[ 2\pi f_0 t + \underbrace{\phi(t)}_{\alpha} + \phi_0 \right] = \phi(t) = \begin{cases} \phi_0 \text{ se } t < 0 \\ \frac{1}{2\pi f_0} \int_{-\infty}^t \alpha(\tau) d\tau \text{ se } t \geq 0 \end{cases}$$

$$x = A_0 \cos \Phi(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) - A_0 \sin \Phi(t) \sin(2\pi f_0 t + \phi_0)$$

Allora

$$A_0 \cos \Phi(t) = \text{Componente in fase}$$

$$A_0 \sin \Phi(t) = \text{Componente in quadratura}$$

ciascun moto

$$P_H = \frac{1}{2} (P_c + P_s)$$

nella quale

$$P_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_c^2(t) dt \right]$$

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_s^2(t) dt \right]$$

Allora

$$\begin{aligned} P_c + P_s &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x_c^2(t) + x_s^2(t)] dt \right] = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_0^2 dt \right] = A_0^2 \end{aligned}$$

quindi

$$P_H = \frac{1}{2} (P_c + P_s) = \frac{A_0^2}{2}$$

## ANALISI DELLA OCCUPAZIONE DI FREQUENZA

90

Come in precedenza scrivendo il segnale modulato con le componenti in fase e in quadratura, avremo

$$x_n(t) = A_0 \cos [\Omega \pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0] =$$

con

$$x_c(t) = A_0 \cos \Phi(t) \quad (8.12.1)$$

$$x_s(t) = A_0 \sin \Phi(t) \quad (8.12.2)$$

sviluppando con la serie di Taylor le due espressioni (8.12.1) e (8.12.2), ottieniamo

$$x_c(t) = A_0 \cos \Phi(t) = \left[ 1 - \frac{\Phi^2(t)}{2!} + \frac{\Phi^4(t)}{4!} + \dots \right] A_0 \quad (8.12.3)$$

$$x_s(t) = A_0 \sin \Phi(t) = \left[ \Phi(t) - \frac{\Phi^3(t)}{3!} + \dots \right] A_0 \quad (8.12.4)$$

Se  $x(t)$  ha banda  $B$ , la funzione  $\Phi(t)$  è proporzionale ad  $x(t)$  (nella PM) o, allo integrale, (nella FM)

di  $x(t)$  ha esattamente la stessa banda. La componente in fase e quella in quadratura invece hanno banda molto maggiore di  $B$ ; infatti  $\Phi^2(t)$ ,  $\Phi^3(t)$ , ...,  $\Phi^n(t)$  sono delle convolutioni in frequenza che allargano la banda:

$\Phi^2(t)$  ha banda  $2B$

$\Phi^3(t)$  ha banda  $3B$

$\vdots$   
 $\Phi^n(t)$  ha banda  $nB$

la modulazione PM o FM che sia, può essere vista come la differenza tra una modulazione DSB per un caso, meno una DSB per un altro.

$$\Rightarrow x_n(t) = A_0 \cos \Phi(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - A_0 \sin \Phi(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

nella quale i segnali modulatori

$$A_0 \cos \Phi(t) \text{ e } A_0 \sin \Phi(t).$$

hanno banda molto maggiore di  $B$ . Si conclude

$$B_{PM} \text{ e } B_{FM} \gg B \quad (8.13)$$

# MODULAZIONI ESPOENZIALI A BANDA STRETTA

Narrow Band

94

Consideriamo il caso in cui

$$|\Phi(t)| \ll 1$$

banda stretta

dalle (8.1.3) e (8.1.4), possiamo approssimare come segue

$$A_0 \cos \Phi(t) \approx A_0 \cdot 1$$

$$A_0 \sin \Phi(t) \approx A_0 \Phi(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(t) \text{ PM} \\ 2\pi f_0 \int x(n) dn \text{ FM} \end{array} \right.$$

Allora il segnale modulato  $x_H(t)$  risulta:

$$(8.14) \quad x_H(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - A_0 \Phi(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Nu frequenza, per le sole frequenze paritive

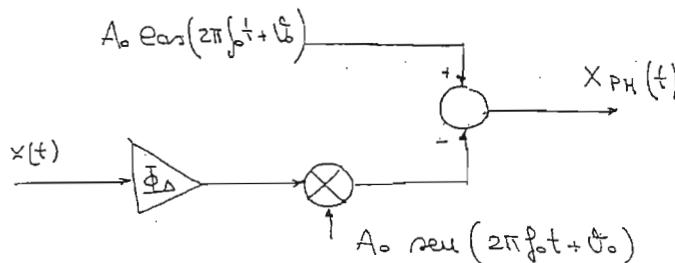
$$(8.15) \quad X_H(f) = \frac{A_0}{2} \delta(f-f_0) e^{j\theta_0} + j \frac{A_0}{2} \Phi(f-f_0) e^{j\theta_0}$$

Di fatto dalla (8.14) si può vedere  $x_H(t)$  come un segnale AM con portante sinusoidale. Ricordando gli schemi di modulazione AM e ricordando che nei due casi:

$$FM \rightarrow \Phi(t) = 2\pi f_0 \int_{-\infty}^t x(n) dn$$

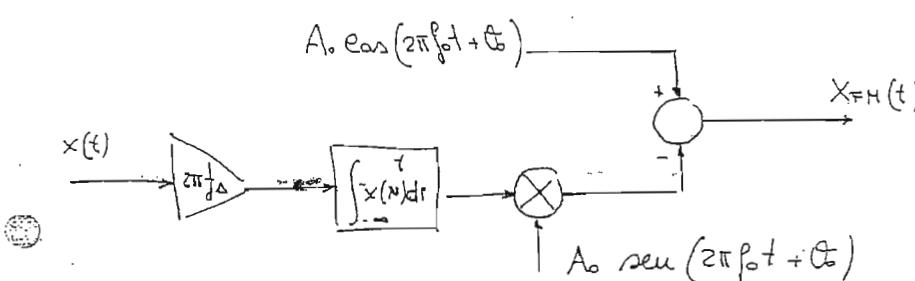
$$PM \rightarrow \Phi(t) = \Phi_0 x(t)$$

si possono tracciare i seguenti schemi.



Schema 8.3  
Modulatore.  
NBPW

narrow band PM  
(banda stretta)



Schema 8.4  
Modulatore  
NBFM

N.B.  $A_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)] =$

$$= A_0 \cos(2\pi f_0 t) \cos \phi(t) - A_0 \sin(2\pi f_0 t) \sin \phi(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) - A_0 \phi(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$|\phi(t)| \ll 1$  banda stretta

Il segnale della (8.14) si dice A BANDA STRETTA; a seconda della funzione  $\Phi(t)$  si ha NBPM o NBFM.

### BANDA DEI SEGNALI FM E PM

Sia  $x_{FM}(t)$  un segnale modulato in frequenza nella forma

$$x_{FM}(t) = A \cdot \cos \left[ 2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \int_0^t x(\tau) d\tau + \phi_0 \right]$$

Se  $x(t)$ , cioè il segnale modulante è del tipo

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t)$$

nello spettro comparemo una serie di componenti armoniche eccedenti lo spettro del segnale modulante. Anche se il segnale ha banda limitata, modulando in FM la banda è teoricamente infinita.

Esistono delle relazioni (per la dim. vedi Carlson) approssimate che permettono di quantificare la banda.

$$B_{FM} \approx 2(f_A + B) \quad (8.16)$$

detta FORMULA DI CARLSON. Una formula più precisa è la seguente

$$B_{FM} \approx 2(f_A + 2B) \quad (8.17)$$

A seconda della qualità richiesta si sceglie una oppure l'altra relazione.

#### Esempio

Un segnale Audio di qualità ha una banda  $B$  di  $15 \text{ kHz}$ . A seconda della modulazione si ha

$$B_{AM} = 30 \text{ kHz}$$

$$\begin{aligned} B_{FM_1} &\approx 180 \text{ kHz} \\ B_{FM_2} &\approx 210 \text{ kHz} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{tipicamente con } f_A = 75 \text{ kHz}, \\ \text{ } \end{array} \right\}$$

per la modulazione PM vale la seguente:

§3

$$B_{PM} \approx 2 (\Phi_0 + 1) B \quad (8.18)$$

## DISPOSITIVI DI MODULAZIONE E DEMODULAZIONE FM

### BLOCCO LIMITATORE

Sia  $X_R(t)$  un segnale modulato; esprimendolo tramite campionamento in fase e in quadratura avremo

$$\begin{aligned} X_R(t) &= X_C(t) \cos(2\pi f_0 t) + X_S(t) \sin(2\pi f_0 t) = \\ &= P(t) \cos[2\pi f_0 t + \Phi(t)] = P(t) \cos(\theta(t)) \end{aligned}$$

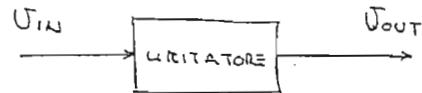
ponendo  $\theta(t) = 2\pi f_0 t + \Phi(t)$ . Osserviamo che

$$P(t) = \sqrt{X_C^2(t) + X_S^2(t)} \quad \begin{aligned} X_C(t) &= A \cos \Phi(t) \\ X_S(t) &= A \sin \Phi(t) \end{aligned}$$

$$\Phi(t) = \arctg \frac{X_S(t)}{X_C(t)}$$

Un LIMITATORE è un blocco non lineare senza uscita che ricevendo in ingresso un segnale  $V_{IN} = X_R(t)$ , fornisce in uscita  $V_{OUT}$  sempre definita

$$V_{OUT}(t) = A_L \cos[2\pi f_0 t + \Phi(t)]$$



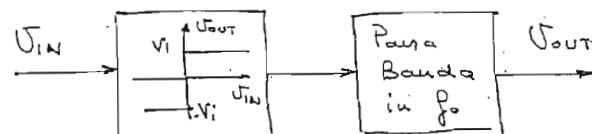
In particolare troviamo  
un blocco non lineare

con la caratteristica  $V_{OUT}(V_{IN})$  di figura, seguente  
da un filtro passa banda centrato in  $f_0$ .

$$\text{Se } V_{IN} = P(t) \cos[\theta(t)]$$

in uscita

$$V_{OUT} = A_L \cos[\theta(t)]$$



Il primo blocco è uno "squadratore".  
fissiamo  $t = \bar{t}_0$ , in ingresso:

$$P(\bar{t}) \cos[\theta(\bar{t})] \quad (9.1)$$

l'ingresso è periodico rispetto a  $\theta(t)$ , allora anche  
 $V_{OUT}$  è periodico rispetto a  $\theta(t)$  con periodo  $2\pi$   
(perché è un coseno).

Siccome il blocco è senza memoria, quindi, per valori uguali di ingresso si hanno valori uguali di uscita. Allora esprimiamo  $U_{\text{out}}(t)$  come serie di Fourier di un segnale periodico:

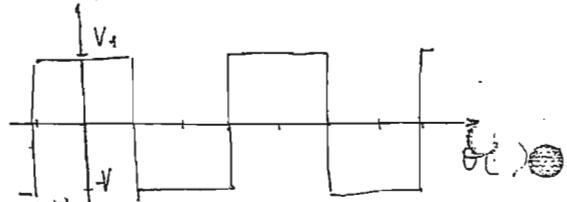
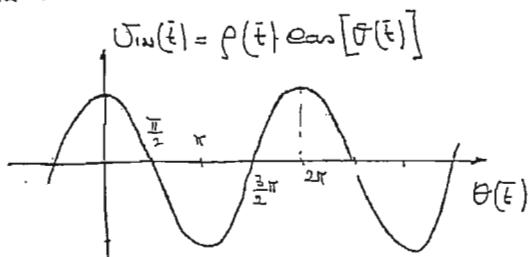
$$U_{\text{out}}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{j2\pi \frac{m\theta}{2\pi}}$$

il periodo di  $U_{\text{in}}$  rispetto a  $\theta$  è  $2\pi$  e la variabile rispetto alla quale si parla di periodicità è  $\theta(t)$

$$\begin{aligned} U_{\text{out}}(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{j m \theta} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cos \{ m \theta + \arg(a_m) \} \\ &= a_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \cos \{ m \theta + \arg(a_m) \} \end{aligned}$$

Calcoliamo i coefficienti  $a_m$ :

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} U_{\text{out}} e^{-j m \theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_1 e^{-j m \theta} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} V_1 e^{-j m \theta} d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ V_1 \frac{e^{-j m \theta}}{-j m} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - V_1 \frac{e^{-j m \theta}}{-j m} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{V_1}{m} \frac{e^{j n \frac{\pi}{2}} - e^{-j n \frac{\pi}{2}}}{2j} + \frac{V_1}{m\pi} \frac{e^{j n \frac{3\pi}{2}} - e^{-j n \frac{3\pi}{2}}}{2j} \\ &= \frac{V_1}{m\pi} \left[ \operatorname{sen} m \frac{\pi}{2} + e^{-j \frac{\pi}{2} n} \left( \frac{(-1)^m - 1}{2j} \right) \right] \end{aligned}$$



Calcoliamo alcuni dei coefficienti:

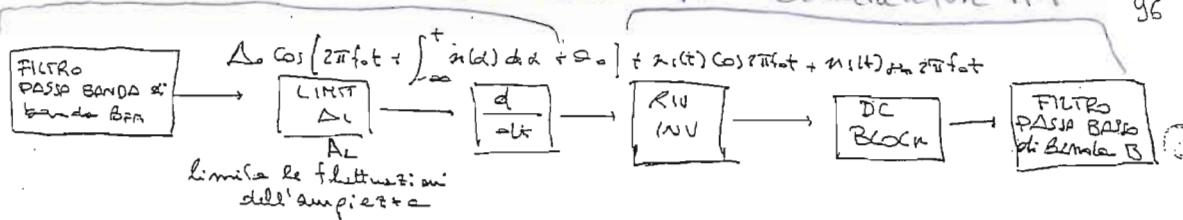
$$a_1 = \frac{2V_1}{\pi} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{V_1}{3\pi} [-1-1] = -\frac{2}{3} \frac{V_1}{\pi} \dots$$

Risolvendo  $U_{\text{out}}(t)$ :

$$U_{\text{out}}(t) = \frac{4V_1}{\pi} \cos \left[ \theta(t) \right] + \frac{4}{3} \frac{V_1}{\pi} \cos \left[ 3\theta + \pi \right] + \dots \quad (9.2)$$

DEMODULATORE FM

96



Il filtre riesce a eliminare componenti di frequenza del rumore.

Questi sono i 6 blocchi fondamentali di un DEMODULATORE FM.

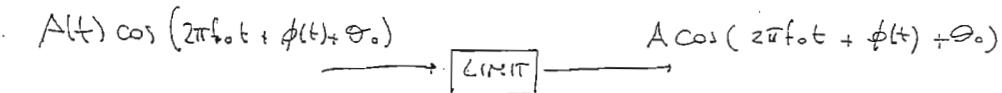
$$\textcircled{4} = \frac{4V_0}{\pi} \cos \theta + 2 \sum Q_m \cos(m\theta + \phi_m)$$

$$\frac{4V_0}{\pi} \cos[\theta(t)] + 2 \sum |Q_m| \cos[m\theta(t) + \phi_m]$$

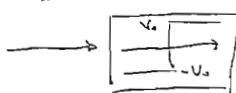
$$Q_m = \begin{cases} \frac{2V_0}{\pi m} & \text{in passi disponibili} \\ 0 & \text{in passi non disponibili} \end{cases}$$

### LIMITATORE

È un oggetto che riceve in ingresso un oggetto



$$A(t) \cos[\theta(t)]$$



$$2 \frac{V_0}{\pi s} \cos[5\theta(t)]$$

(Se per esempio ho 5f₀)

### MODULATORE BANDA LARGA

$$x(t) = A_s \cos[2\pi f_c t + \phi(t) + \theta_0] = A_s \cos[N(2\pi \frac{f_c}{N} t + \frac{\phi(t)}{N} + \frac{\theta_0}{N})]$$

$$\frac{\phi(t)}{N} \ll 1$$

↳ moltiplica le fasi in fase



Mod. banda stretta + moltiplicatore di fasi in fase

• Vale per FM e PM.

Un altro modulatore, MA SOLO PER LE FM è il VCO

### DEMODOLATORE FM → AM

$$A_s \cos[2\pi f_c t + 2\pi f_a \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha + \theta_0]$$

fondo  $f_a \ll f_c$

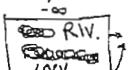
$$B_{FM} \approx 2(f_a + 2B)$$



$$A_s [2\pi f_c t + 2\pi f_a x(t)] \sim A_s [2\pi f_c t + 2\pi f_a \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha + \theta_0 + \pi]$$



$$2\pi f_a A_s x(t)$$

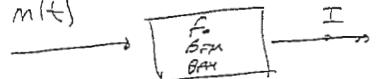


$A_s [2\pi f_a + 2\pi f_a x(t)]$   
blocca la componente continua

I due componenti principali sono il derivaforse e il rivelatore di enveloppe



$$A_0 \cos [2\pi f_0 t + \phi(t) + \Theta_0] + m(t)$$

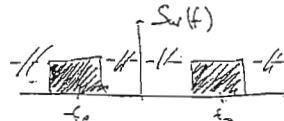


elimina le componenti  
del rumore o di fuori del  
segnale

$$S_i = \frac{A_0^2}{2}$$

I è considerato il verso e proprio ingrezzo.

Vediamo N: ...



$$N_i = \left( \frac{N_0 B_{FM}}{2} \right) \cdot 2 = N_0 B_{FM}$$

↳ Contiduro anche  
le frequenze  
negative

Scrivo il segnale dopo il filtre di front-end

$$A_0 \cos [2\pi f_0 t + \phi(t) + \Theta_0] + \underbrace{m_i(t) \cos [2\pi f_0 t + \Theta_0] - m_i(t) \sin [2\pi f_0 t + \Theta_0]}_{\text{ar}}$$

L'inviluppo completo lo scrivo con modulo e fase

$$A_m(t) \cos [2\pi f_0 t + \phi_m(t) + \Theta_0]$$

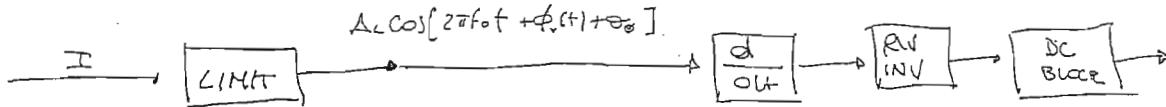
$$\left[ \hat{m}(t) = m_i(t) + j m_i(t) \right] = A_m(t) e^{j\phi_m(t)} \quad m(t) = \Re[\hat{m}(t) e^{j(2\pi f_0 t + \Theta_0)}]$$

$$(*) = A_r(t) \cos [2\pi f_0 t + \phi_r(t) + \Theta_0]$$

(il segnale è portabando, il rumore è portabando  $\Rightarrow$  la risultante è portabando)

$$\text{lo scrivo come } A_r(t) e^{j\phi_r(t)} + A_m(t) e^{j\phi_m(t)} = A_r(t) e^{j\phi_r}$$

- SOMMARE 2 SEGNALI SIGNIFICA SOMMARE I RISPECTIVI INVILUPPI COMPLESSI



dopo il derivatore...

$$A_r [2\pi f_0 + \dot{\phi}_r(t)] \sin [2\pi f_0 t + \phi_r(t) + \Theta_0 + \pi]$$

dopo Rin inv...

$$A_r [2\pi f_0 + \dot{\phi}_r(t)]$$

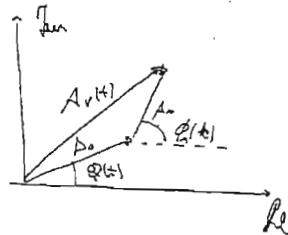
dopo DC BLOC...

$$A_r \dot{\phi}_r(t)$$

36.1

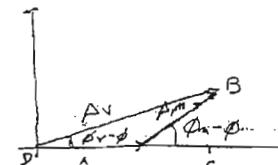
Diagramma fisioreale.

1) lo schema funziona se lo  $\phi_r(t) = \phi(t) + m(t)$ ?  $\phi_r(t)$  è proporzionale al segnale?



Se risulta il diagramma di  $\phi_r(t)$

mi riconosco



$$\phi_r(t) - \phi(t) = \operatorname{arcctg} \frac{A_m(t) \tan [\phi_m(t) - \phi(t)]}{A_0 + A_m(t) [\phi_m(t) - \phi(t)]} = \operatorname{arcctg} \frac{B C}{D C}$$

$$\phi_r(t) = \phi(t) + \operatorname{arcctg} \frac{B C}{D C}$$

Hip

$$\frac{\delta t}{N_i} \gg 1$$

Dato  $x, y$  gestione indipendente

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$A_m(t)$  Rayleigh

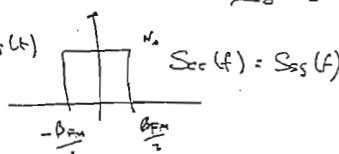
$\phi_m(t)$  uniforme



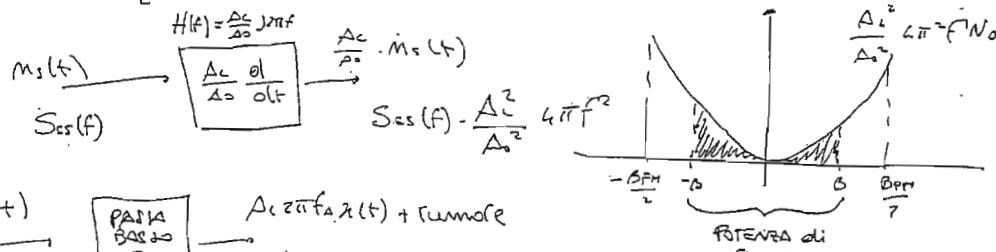
caso FM

$$\Delta_c \phi_r(t) = \Delta_c \left[ \phi(t) + \frac{m_s(t)}{A_0} \right] = \Delta_c \left[ 2\pi f_a \sin(t) + \frac{m_s(t)}{A_0} \right]$$

distribuzione di  $m_s(t)$



Vediamo



$\Delta_c \phi_r(t)$  PARA  
BASSO  
B  $\rightarrow$   $\Delta_c \sin f_a t + \text{rumore}$

$$\int_{\nu} = 4\pi^2 f_a^2 A_0^2 P_x \quad N_i = \frac{A_c^2}{A_0^2} 4\pi^2 N_0 \int_{-B}^B f^2 df = \frac{A_c^2}{A_0^2} \frac{8}{3} \pi^2 B^3 N_0$$

Più piccole è le bande, minore è il rumore:

Efficienza spettrale significa inefficienza del rumore

$$\frac{S_v}{N_0} = \frac{3f_a^2 B_m P_x}{B^3} \gg 1 \quad \begin{array}{l} \text{elenco} \\ \text{guadagno} \\ \text{di demodulazione} \end{array}$$

RAPPORTO SEGNALE RUMORE NEL DETEKTOR

FM

potenza trasmessa dal modulatore

dove  $S_v = \frac{P_t}{2} \leftarrow$  attenuazione del canale

$$N_i = B_0 B_{FM}$$

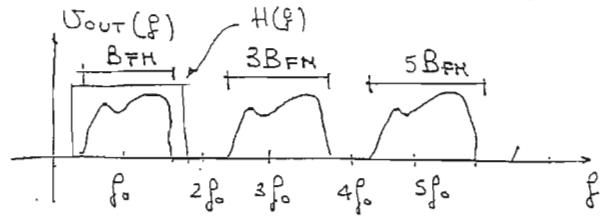
quindi:

$$U_{\text{out}}(t) = \frac{4}{\pi} V_1 \cos [2\pi f_0 t + \Phi(t)] + \frac{4}{3} \frac{V_1}{R} \cos [2\pi (3f_0) t + 3\Phi(t) + \pi] + \dots$$

95. 3

qui addendo è un segnale FM o PM a seconda di  $\Phi(t)$ , centra  
si in  $kf_0$ , ovvero in frequenza (consideriamo la mod FM):

Supponendo come sempre  
 $f_0 \gg B_{\text{FM}}$  le prime ripliche  
sono sicuramente non  
sovrapposte. Per estrarre  
lo spettro del segnale



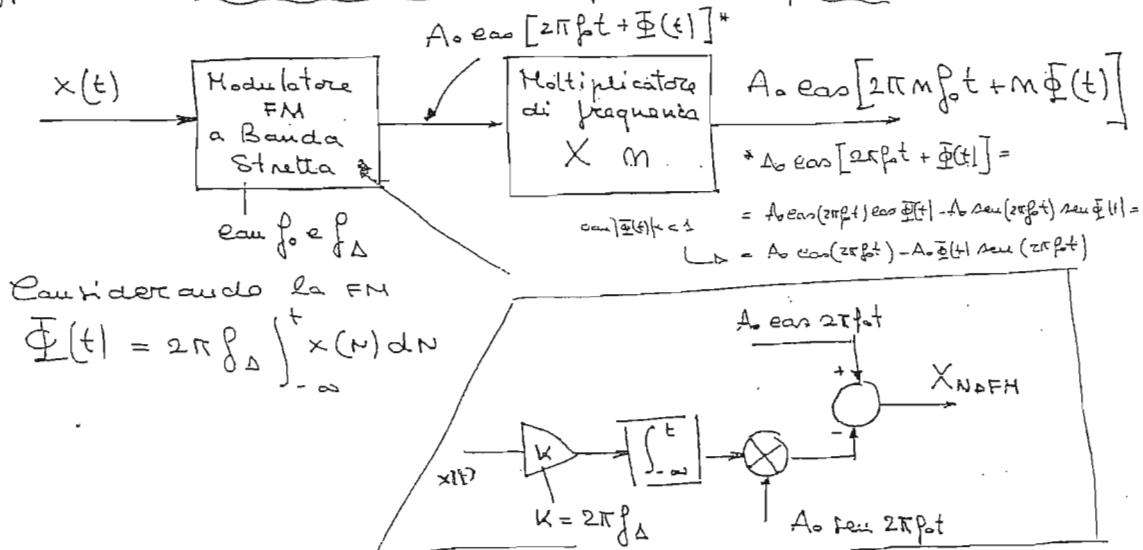
trasmesso occorre un filtro passa banda in  $f_0$  di banda  $B_{\text{FM}}$ .

Consideriamo che se avessimo centrato il filtro in  $Mf_0$ ,  
con banda  $mB_{\text{FM}}$ , avremmo ottenuto un "moltiplicatore di  
frequenza".

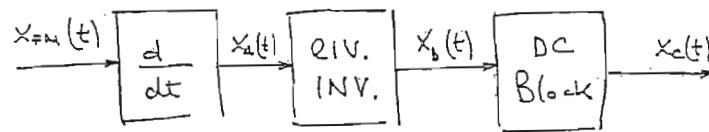
Un segnale FM ha, nel tempo, ampiezza costante. Questa  
caratteristica, è caratterizzata da alcune proprietà dello  
spettro. Il canale di fatto è un filtro che modifica  
lo spettro del segnale FM, quindi uno potrebbe (in realtà)  
essere ricevuto con ampiezza variabile. Questo è il motivo,  
per cui si considera  $\rho(t)$  funzione del tempo.

### MODULATORE FM CON MOD ABANDA STRETTA

Un modulatore a banda stretta, non è altro che un  
modulatore AN. Per ottenere una modulazione FM, è  
sufficiente inserire un moltiplicatore per  $m$ .



Il segnale FM ricevuto sarà nella forma:



$$x_{FM}(t) = A_0 \cos \left[ 2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_0^t x(t) dN \right]$$

dove vendo rispetto al tempo:

$$\rightarrow x_b(t) = A_0 \left( 2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta x(t) \right) \operatorname{sen} \left[ 2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_0^t x(N) dN \right] =$$

Il rilevatore di inviluppo preleva il modulo dell'inviluppo complesso, ovvero

$$\rightarrow x_c(t) = |A_0 (2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta x(t))|$$

affinché  $x_{FM}$  sia bassa banda  $f_0 \gg f_\Delta$ ; allora sicuramente

$$A_0 (2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta x(t)) > 0 \Rightarrow x_c(t) = A_0 (2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta x(t))$$

semplicemente rimane:

$$\rightarrow x_c(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$$

che è appunto proporzionale al segnale originale.

## MODULAZIONI EXP IN PRESENZA DI RUMORE (AWGN) 97

Supponiamo di avere sorgente al segnale FM  $X_{FM}(t)$ , un rumore  $m(t)$  (AWGN); esso ha densità spettrale di potenza costante pari a  $No/2$ . Allora il ricevitore FM dove essere dotato di un filtro fratiale, che elimini quanto più rumore sia possibile; tale filtro deve essere di banda  $B_{FM}$  in  $f_0$ , e anche in attiene il segnale  $X_{FM}(t)$  sommato ad un rumore bianco filtrato  $m_1(t)$ . Un ingresso

$$X_{FM}(t) + m(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + 2\int_0^t x(n) dn] + m(t)$$

- Il rumore filtrato è passa banda, quindi:

$$X_{FM}(t) + m_1(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \Phi(t)] + A_m(t) \cos[2\pi f_0 t + \Phi_m(t)] =$$

$$\left( \begin{array}{l} m_1(t) = m_1^{(t)} \cos(2\pi f_0 t) - m_1^{(t)} \sin(2\pi f_0 t) \\ A_m(t) = \sqrt{m_c^2(t) + m_s^2(t)} \end{array} \right) \quad \left| \frac{S_I}{N_I} = \frac{A_0^2/2}{No B_{FM}} \right.$$

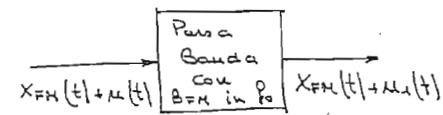
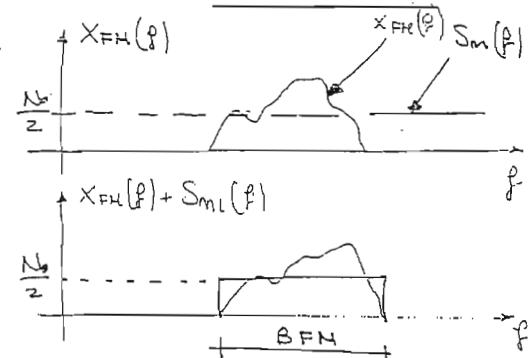
$$P_{FM} = \frac{A_0^2}{2}, \text{ non dipende da } x \\ S_n(f) = \Omega \left[ \frac{No}{2} B_{FM} \right]$$

$$= A_r(t) \cos[2\pi f_0 t + \Phi_r(t)] \quad (9.3)$$

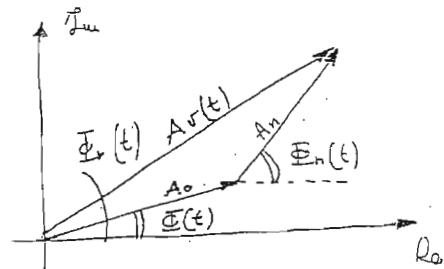
Passando in serie al filtro fratiale un limitatore attenua mo in uscita  $X_A(t)$  come segue:

$$X_A(t) = A_L \cos[2\pi f_0 t + \Phi_v(t)] \quad (9.4)$$

Della (9.3), il termine  $A_r(t)$  non ci interessa, quindi calcoliamo  $\Phi_r(t)$  che è legato a  $x(t)$ . Osserviamo che il segnale espresso attraverso l'inviluppo complesso può essere rappresentato con un vettore di modulo  $A_0$  e fase  $\Phi(t)$ ; analogamente il vettore sarà un vettore di modulo  $A_m(t)$  e fase  $\Phi_m(t)$ .



$$\left( \begin{array}{l} \Phi_r(t) = \Phi(t) - \Phi_m(t) \\ A_r(t) = \sqrt{A_0^2 + A_m^2} \end{array} \right) \quad (9.3)$$



Sommando vettorialmente si ottiene un vettore di modulo  $A_v(t)$  e fase  $\Phi_v(t)$ ; ruotando il tutto in senso orario  $\Phi_v(t)$  si ottiene il diagramma vettoriale di figura nel quale

$$\Phi_v(t) - \Phi(t) = \arctg \frac{A_m(t) \sin [\Phi_n(t) - \Phi(t)]}{A_0 + A_m(t) \cos [\Phi_n(t) - \Phi(t)]}$$

allora

$$\Phi_v(t) = \Phi(t) + \arctg \frac{A_m(t) \sin [\Phi_n(t) - \Phi(t)]}{A_0 + A_m(t) \cos [\Phi_n(t) - \Phi(t)]} \quad \text{per la}$$

Supponiamo di avere in ingresso un rapporto segnale - rumore sufficientemente grande da garantire

$$\frac{S_i}{N_i} \gg 1 \quad (9.5) \quad \begin{array}{l} \text{(vettore segnale lungo)} \\ \text{(vettore rumore corto)} \end{array}$$

in questo modo  $A_0 \gg A_m$ .

( $\Phi_0 = 2\pi$ )

La fase  $\Phi_n(t)$  ha distribuzione uniforme; allora anche  $\Phi_n(t) - \Phi(t)$  (per  $t$  fissato  $\Phi(t)$  è costante) è anch'essa uniformemente distribuita.

Allora

$$\Phi_n(t) - \Phi(t) \quad (9.6)$$

Si siano da  $m_c(t)$  e  $m_s(t)$ , che sono due var. casuali gaussiane, si estraggano due variabili casuali  $A_m(t)$  e  $\Phi_n(t)$

è statisticamente equivalente

a  $\Phi_n(t)$ ; inoltre

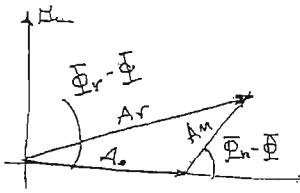
$$A_m(t) \text{ seu } (\Phi_n(t)) = m_s(t)$$

allora per l'espressione (9.5) e per l'assunzione (9.6), si può dire

$$\begin{aligned} \Phi_v(t) &= \Phi(t) + \arctg \frac{m_s(t)}{A_0} \approx \quad \begin{array}{l} \text{sempre per} \\ \text{la (9.5)} \end{array} \\ &\approx \Phi(t) + \frac{m_s(t)}{A_0} \end{aligned}$$

Riscrivendo la (9.4), si ottiene

$$\begin{aligned} x_A(t) &= A_c \cos (2\pi f_0 t + \Phi_v(t)) = \\ &= A_c \cos \left( 2\pi f_0 t + \Phi(t) + \frac{m_s(t)}{A_0} \right) \end{aligned}$$



perché hanno  
la stessa statistica

intendendo ora un derivatore, un rivelatore di inviluppo <sup>gg</sup>  
e un blocco per eliminare la "scintilla" attenuante:

$$X_B(t) = \frac{d}{dt} X_A(t) = A_L \left[ 2\pi f_0 + \dot{\phi}(t) + \frac{\dot{m}_s(t)}{A_0} \right] \sin(\quad) = \\ = -A_L \left[ 2\pi f_0 + 2\pi f_{\Delta} \times(t) + \frac{\dot{m}_s(t)}{A_0} \right] \sin(\quad)$$

quindi  $X_c(t)$  risulta

$$X_c(t) = -2\pi A_L f_{\Delta} x(t) + \frac{A_L}{A_0} \dot{m}_s(t)$$

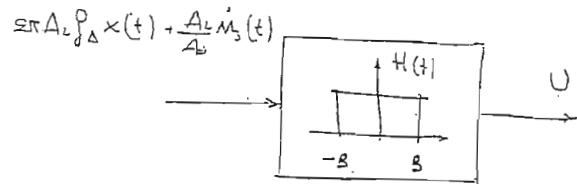
A questo punto inseriamo un filtro passo basso di banda B, attenuante

Come rapporto segnale  
rumore in uscita:

$$N_U = \int_{-B}^B N_o 4\pi^2 f^2 df = \\ = 8 N_o \pi^2 \int_0^B f^2 df = \\ = 8\pi^2 N_o B^3 / 3$$

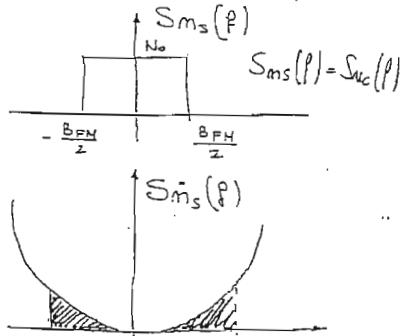
Quindi

$$\frac{S_U}{N_U} = \frac{4\pi^2 f_{\Delta}^2 P_x A_L^2}{8\pi^2 N_o B^3} = \frac{3f_{\Delta}^2 P_x A_0^2}{2 N_o B^3}$$



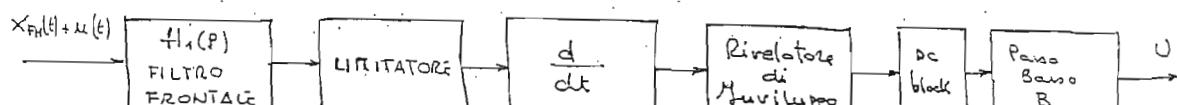
Ricordiamo che nota  $S_{m_s}(f)$ ,  
derivando

$$\dot{m}_s(f) = 4\pi^2 f^2 S_{m_s}(f)$$



In sostanza lo schema del  
DEMODULATORE FM A LARGA BANDA

risulta il seguente



Vediamo cosa succede nell'ipotesi di rumore preponderante rispetto al segnale in ingresso: 100

Analizziamo il diagramma fasoriale.

$$\frac{S_i}{N_i} \ll 1$$

In questo caso se  $\Phi_n$  varia, non esiste legame fra  $\Phi(t)$  e  $\Phi_r(t)$ , quindi il segnale è praticamente "scampato" rispetto al rumore.

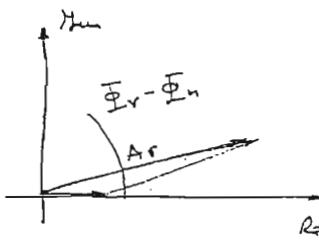
Nei ricevitari FM come quello appena visto esiste il cosiddetto EFFETTO SOGLIA.

In sostanza, esiste un valore minimo di rapporto S/N in ingresso oltre il quale scompare la relazione fra  $\Phi_r$  e  $\Phi$ . La soglia si indica con

$$\left( \frac{S_i}{N_i} \right)_{th} = \text{Soglia S/N}$$

Soglia del demodulatore FM

Osservazione: Se tracciammo il diagramma fasoriale sommando il phasor del rumore al phasor del segnale, avremo ottenuto



$$\Phi_r(t) = \Phi_n(t) + \arctg \frac{A_o \sin [\Phi(t) - \Phi_n(t)]}{A_n + A_o \cos [\Phi(t) - \Phi_n(t)]}$$

In questo caso è evidente che lavorando sotto soglia  $S_i < N_i$ , si possono trascurare tutti i termini che riguardano il segnale e si ottiene:

$$\Phi_r(t) \approx \Phi_n(t) + \arctg \frac{A_o \sin \Phi_n(t)}{A_n(t)}$$

Nota. Il rapporto Segnale-Rumore si misura in dB. Siccome S/N è il rapporto fra due potenze

$$\left( \frac{S}{N} \right)_{dB} = 10 \log_{10} \frac{S}{N}$$

Se anziché esprimere il rapporto S/N in potenza, venisse espresso in ampiezza, avremmo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 20 \log_{10} \frac{S}{N} \rightarrow \text{Ampiezza.}$$

Se ad esempio seguale S e rimuovere N faremo minuscolali,

$$S = \frac{A_0^2}{Z} \quad N = \frac{A_n^2}{Z}$$

Allora

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{dB} &= 10 \log \frac{S}{N} = 10 \log_{10} \left(\frac{A_0^2}{A_n^2}\right) = \\ &= 20 \log_{10} \left(\frac{A_0}{A_n}\right) \end{aligned}$$

Quando mi parla di banda a -3dB mi parla in termini di ampiezza.

$$20 \log_{10} \frac{S_1}{S_2} = -3 \text{ dB} \Rightarrow 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = -3 \text{ dB}$$

Allora

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}$$

la banda a -3dB mi dice anche BANDA A MEIA POTENZA.

FH e Banda Stretta. FH e Banda Stretta con rumore

Se seguale  $x_{FH}(t)$  a BANDA STRETTA è nella forma:

$$\begin{aligned} x_{FH}(t) &= A_0 \cos(2\pi f_0 t) - \Phi(t) A_0 \sin(2\pi f_0 t) \\ \Phi(t) &= 2\pi f_D \int_0^t x(n) dn \end{aligned}$$

anche in questo caso supponiamo la sovrapposizione di un rumore  $m(t)$ :

$$m(t) = m_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - m_s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

Ese il filtro frontale mi dà un rumore  $m_1(t)$

$$x_{FH}(t) + m_1(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) - \Phi(t) A_0 \sin(2\pi f_0 t) +$$

$$m_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - m_s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

Ese un "demodulatore sincrono" mi estrai la componente

te in quadratura

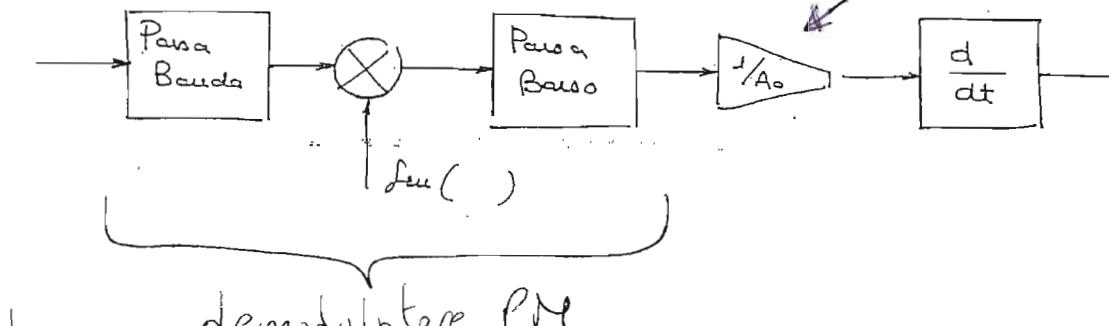
$$\Phi(t) + M_s(t)$$

eventualmente si può attenuare, quindi derivando si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[ \Phi(t) + \frac{M_s(t)}{A_0} \right] &= \\ &= 2\pi f_0 X(t) + \frac{M_s(t)}{A_0}\end{aligned}$$

Lo schema di riferimento è il seguente.

riaddotta l'ampiezza togliendo quella delle portanti



demodulatore PM

demodulatore FM  
banda stretta

FINE PARTE ANALOGICA

## INTRODUZIONE

Nelle trasmissioni numeriche viene stabilito un alfabeto di simboli finito; ciascuno di questi "caratteri" è associato ad una informazione. In genere ciascun simbolo potrebbe essere costituito da un particolare segnale  $s_i(t)$  con una propria forma d'onda.

Ad esempio in una codifica binaria avremmo un segnale  $s_1(t)$  associato all'uno logico e un segnale  $s_0(t)$  associato allo zero logico (vedi figura a lato).

Ovviamente trasmettere e ricevitore riconoscono l'alfabeto stabilito e si

decide, in base al segnale ricevuto, quale dei simboli è stato trasmesso.

Il compito del ricevitore è proprio

quello del DECISORE; tanto più le forme d'onda sono diverse fra loro tanto più facile sarà riconoscere la forma d'onda trasmessa anche se deformata dalla presenza di rumore.

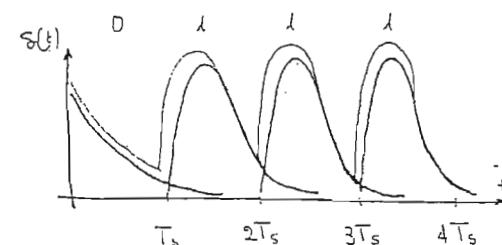
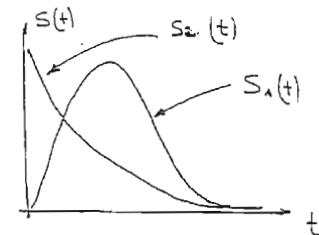
Ogni segnale associato ad un carattere viene trasmesso ad una distanza  $T_s$  detta

INTERVALLO DI SEGNALAZIONE

(indicato con  $T_o D$ ). In genere le il segnale  $s_i(t)$  analogico

ha durata superiore all'intervallo di segnalazione; come visto infatti per avere durata limitata occorre banda illimitata.

L'impiego di un alfabeto risulta utile anche in termini di insensibilità al rumore. Consideriamo ad esempio un sistema binario al quale associamo allo zero  $s_0(t)$  e all'uno  $s_1(t)$ , notiamo che anche in presenza di rumore AWGN



l'intellegibilità dell'informazione non è compromessa.  
Metodi ancora più efficienti prevedono codifiche multilevello  
che associano a ciascun carattere più segnali. In  
altri casi si inseriscono codifiche per l'individuazione  
e la correzione degli errori.

Si consideri un segnale analogico  $x(t)$ . Per prima cosa viene eseguito il CAMPIONAMENTO; come visto, se  $x(t)$  ha banda  $B$  (ottenibile comunque con operazioni di prefiltraggio), rispettando il teorema di Shannon (condizione di Nyquist  $F \geq 2B$ ), è possibile ricavare  $x(t)$  a partire dal segnale campionato. Dopo il campionamento  $x_c(t)$  è un segnale tempo discreto.

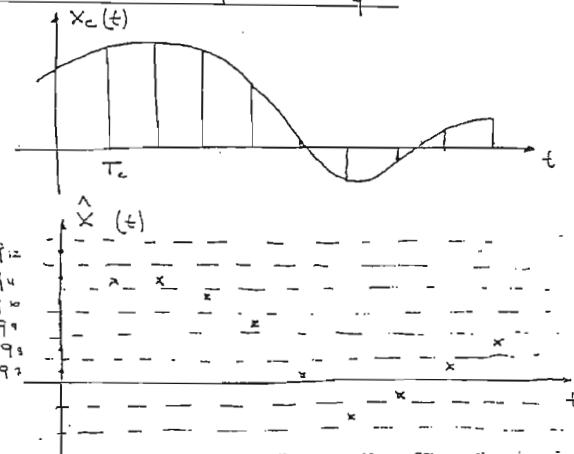
La fase successiva consiste in una discretizzazione delle ampiezze ed è detta QUANTIZZAZIONE. L'intervallo dell'ampiezza viene suddiviso in  $q$  fasce

$q_1, q_2, \dots, q_q$ , di ampiezza  $2/q$  che

si estende da  $q_i + \frac{1}{q}$  a  $q_i - \frac{1}{q}$ . Nella fase di quantizzazione Ogni campione viene ricondotto al valore  $q_i$  più vicino. Per esempio sono contruite le fasce in modo da avere un errore detto ERRORE DI QUANTIZZAZIONE, che può valere al più  $\pm \frac{1}{q}$ .

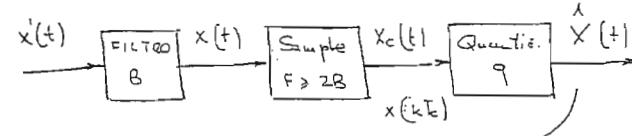
In ricezione, la riconstruzione viene fatta sul segnale quantizzato  $\hat{x}(kT_c)$ .

L'errore commesso in riconstruzione prendendo quello di quantizzazione, è  $\frac{2}{q} \pm \frac{1}{q}$ . È facilmente quantificabile e riducibile, perché come già accennato vale  $\pm \frac{1}{q}$ .



In fase di quantizzazione si ha un errore commesso: si associa a

ogni campione quantizzato  $\hat{x}(kT_c)$  un simbolo o segnale; se abbiamo scelto di quantizzare con  $q$  livelli, otteniamo  $q$  segnali per rappresentare tutto  $x(t)$ .



$$\hat{x}(kT_c) = x(kT_c) + \epsilon(kT_c)$$

Nella maggior parte dei casi si impiega il sistema binario. Ciascun simbolo o segnale è costituito da una parola a l bit. In sostanza per ottenere la rappresentazione di q livelli attraverso q segnali o q parole, occorrono l bit tali che

$$q = 2^l$$

avrò

$$l = \log_2 q$$

### Rumore di Quantizzazione

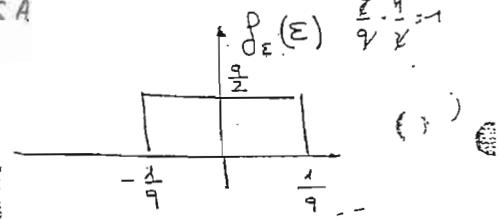
Come già accennato ciascun livello di quantizzazione è centrato intorno al valore  $q_i$  con ampiezza  $2/q$ . Il segnale PCM ricevuto dopo la trasmissione sarà:

$$\hat{x}(kT_c) = x(kT_c) + \epsilon(kT_c)$$

nella quale  $\epsilon(kT_c)$  è detto appunto rumore di QUANTIZZAZIONE. Esso è descrivibile mediante una variabile casuale uniformemente distribuita fra

$-\frac{1}{q}$  e  $\frac{1}{q}$ , con potenza vedere TdA

$$\rightarrow E\{\epsilon^2\} = N_o = \int_{-\frac{1}{q}}^{\frac{1}{q}} \epsilon^2 p_\epsilon(\epsilon) d\epsilon = \\ = \frac{1}{q^2} \int_{-\frac{1}{q}}^{\frac{1}{q}} \epsilon^2 d\epsilon = \boxed{\frac{1}{3q^2}}$$



Nota: Trasmissioni Telefoniche

La modulazione PCM è impiegata nelle trasmissioni telefoniche e si pone:

$$q = 256$$

$$T_c = 125 \mu\text{sec}$$

$$B = 8 \text{ kHz}$$

$$R = \frac{1}{T} = \frac{8}{125 \mu\text{sec}} = 64 \text{ kbit/sec}$$

Siccome  $q = 256$  occorrono 8 bit per ciascun campione. Per trasmettere 8 bit prima che venga rilevato il successivo campione occorre un intervallo di sequenziazione  $T$

Osserviamo che essendo  $T = 1 / 64 \text{ Kbit/sec}$  la banda del segnale PCM risulta

$$B = \frac{1}{2T} = 32 \text{ KHz}$$

intervalllo associato alla tx di un singolo bit.

Con una mod AM avremmo avuto  $B_{AM} = 16 \text{ KHz}$

### TRASMISSIONI NUMERICHE IN BANDA BASE

In generale un sistema di trasmissione, può essere schematizzato come segue:

Il canale di trasmissione

è di fatto un filtro passa banda  $C(f)$ , che introduce un rumore  $n(t)$  AWGN.

In una trasmissione numerica viene stabilito un alfabeto  $A$  che in generale sarà del tipo:

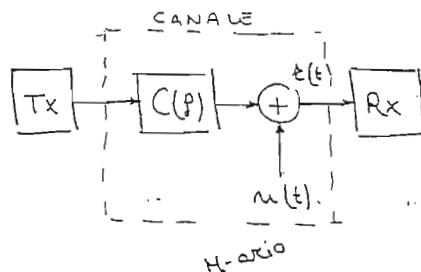
$$A = \left\{ s_i(t) \right\}_{i=1}^N = \left\{ s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t) \right\}$$

con probabilità  $p_i$

costituito appunto da  $N$  simboli o segnali. A ciascuno degli  $N$  segnali è associata una probabilità di essere trasmesso  $p_i$ .

Consideriamo il caso di una trasmissione "one shot", nella quale si invia sul canale un simbolo alla volta. Se ricevitore emerse il set di caratteri e le relative probabilità e, acquisito il segnale  $r(t)$ , deve decidere a quale informazione associarlo; in altri termini deve stabilire a quale segnale  $s_i(t)$  corrisponde  $r(t)$ . Assumendo che la decisione  $s_i(t)$  sia corretta, il rumore sovrapposto nel canale non ha più alcuna valenza e può ritenersi eliminato. In questo senso le trasmissioni numeriche risultano più "robuste" di quelle analogiche.

Osservazione: Se per le tx analogiche su lunghe distanze, la rigenerazione del segnale comporta una amplificazione del rumore fino a quel punto introdotto, nelle tx numeriche la rigenera-



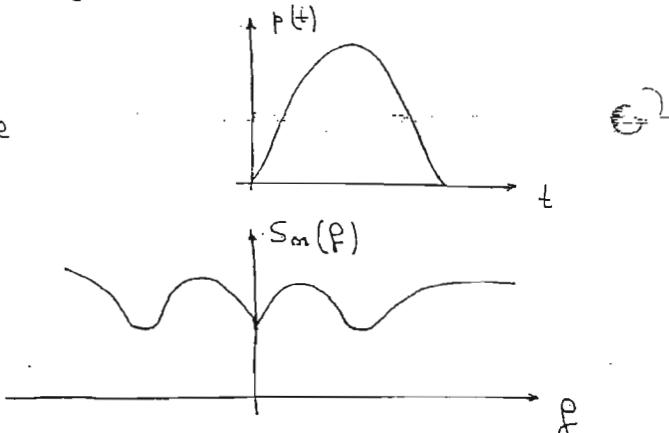
zione dei livelli logici permette la discriminazione 108  
del rumore.

Consideriamo un generico impulso  $p(t)$  avente un proprio andamento e una durezza  $D$ . Supponiamo di sommare ad esso il processo  $m(t)$  che rappresenta il rumore introdotto dal canale. Supponiamo inoltre che tale rumore sia gaussiano ma "colorato" (rumore bianco) con densità spettrale di potenza  $S_m(f)$  che, per quanto detto, non è più costante, ma a simmetria pari per la gaussianità.

$$r(t) = p(t) + m(t)$$

Trasmettiamo sul canale l'impulso che, sommato al rumore, costituisce  $r(t)$ .

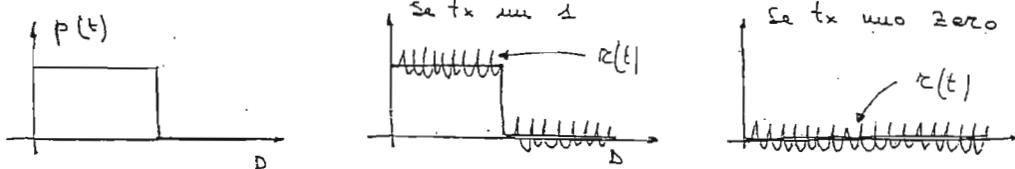
(Questo è il caso delle strutture radar nelle quali, per verificare la presenza o meno di un oggetto, si trasmette  $p(t)$  e si attende una risposta; se il bersaglio è presente si riceve  $p(t)$ , mentre in caso contrario solo il rumore.)



{ Il problema consiste quindi nel decidere se nel segnale  $r(t)$  è presente o meno l'impulso  $p(t)$ .

Questa situazione è quella che si presenta nel caso delle trasmissioni binarie. Si associa all'uno l'impulso rettangolare  $p(t)$  mentre allo zero si associa il valore nullo di tensione. Il ricevitore dovrà stabilire se in  $r(t)$  è presente o meno  $p(t)$ .

Ricordiamo che il rumore è a media nulla.



Vediamo alcune strategie di decisione.

109

Si potrebbe pensare di leggere il valore di tensione in un generico istante dell'intervallo  $D$  ma, se per coincidenza scegliersimo A si verificherebbe un errore. Una soluzione certamente più efficiente consiste nel calcolare l'area sotto da  $r(t)$  in un certo istante.

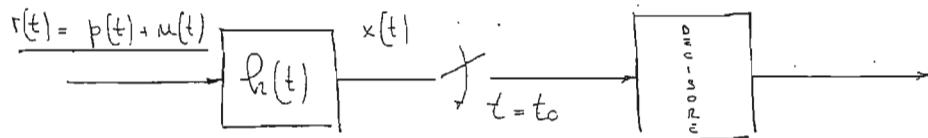
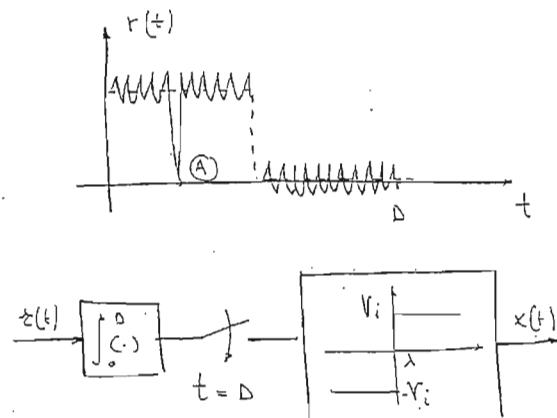
Ad esempio integriamo  $r(t)$  dall'istante di ricezione all'istante pari alla durata  $D$ ; nell'istante

( $t = D$ ) leggiamo il valore di tale integrale. Se

zero l'integrale risulterebbe pressoché nullo, in caso contrario assumerebbe un certo valore.

A questo punto quindi basterebbe decidere a soglia per produrre un'uscita consueta alla decisione. Il caso della tx binaria è un caso particolare nel quale i due eventi (0 e 1) sono equiprobabili.

La questione può essere generalizzata, cercando un filtro frontale  $h(t)$  che minimizza il rapporto S/N in ingresso al ricevitore



Supponiamo il filtro  $h(t)$  lineare. Allora si può affermare che:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \otimes h(t) = [p(t) \otimes h(t) + m(t) \otimes h(t)] = \\ &= x_p(t) + x_m(t) \quad (10.1) \end{aligned}$$

nella quale  $x_p(t)$  è un segnale determinato, mentre

$x_m(t)$  è un processo stocastico. Il rapporto segue 110  
remare (indicato in questo caso con SNR) risulta:

$$\text{SNR} \triangleq \frac{x_p^2(t_0)}{\mathbb{E}\{x_n^2(t_0)\}} = \frac{x_p^2(t_0)}{\mathbb{E}\{x_m^2(t)\}} \quad (10.2)$$

Il filtro  $h(t)$  deve essere  
progettato in modo da maximizzare (poche  $u(t)$  è gaussiano)  
il rapporto SNR nell'istante  $t_0$ , quindi è essenziale  
che il campionamento in  $t_0$  sia perfettamente  
riemezzato. Dalla relazione (10.2) passando in  
frequenza abbiamo:

$$X_p(f) = P(f) H(f) \quad \text{e an} \quad X_p(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(f) e^{-j2\pi f t_0} df \quad (10.3)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) H(f) e^{-j2\pi f t_0} df$$

Mentre per il processo

$$X_m(f) = S_m(f) |H(f)|^2$$

quindi:

$$\mathbb{E}\{X_m^2(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) |H(f)|^2 df$$

La (10.2) dirà:

$$\text{SNR} \triangleq \frac{x_p^2(t_0)}{\mathbb{E}\{x_m^2(t)\}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) H(f) e^{-j2\pi f t_0} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) |H(f)|^2 df} \quad (10.4)$$

Nota: Si ricordi la DISUAGLIANZA DI S

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) \varphi^*(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(x)|^2 dx$$

Nella quale  $\Psi(x)$  e  $\varphi(x)$  sono due generi che  
funzioni complesse. Osserviamo che  
l'uguaglianza vale se  $\varphi(x) = k \Psi^*(x)$

Applicando la diseguaglianza di Schwartz al numeratore della (10.4)

$$\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(f) e^{j2\pi f t_0} df \right]^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) H(f) \sqrt{S_n(f)} e^{j2\pi f t_0} df \right|^2 = \\ = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(f)}{\sqrt{S_n(f)}} H(f) \sqrt{S_n(f)} e^{j2\pi f t_0} df \right|^2 \quad (10.5)$$

poniamo

$$\varphi^*(x) = H(f) \sqrt{S_n(f)} \quad (10.6.1)$$

$$\psi(x) = P(f) / \sqrt{S_n(f)} e^{j2\pi f t_0} \quad (10.6.2)$$

quindi :

$$? \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(f)}{\sqrt{S_n(f)}} e^{j2\pi f t_0} H(f) \sqrt{S_n(f)} df \right|^2 \leq \\ \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{P(f)}{\sqrt{S_n(f)}} e^{j2\pi f t_0} \right|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f) \sqrt{S_n(f)}|^2 df$$

Sarà tenendo nella (10.2)

$$SNR \triangleq \frac{\mathbb{E}\{X_p^2(t_0)\}}{\mathbb{E}\{X_n^2(t)\}} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P(f)|^2 |e^{j2\pi f t_0}|^2}{S_n(f)} df \quad (10.7)$$

valendo maximizzare SNR in dimensione  $h(t)$  in modo che valga l'uguaglianza, quindi

$$\varphi(x) = K \psi(x) \quad (10.8.1)$$

$$H^*(f) \sqrt{S_n(f)} = K \frac{P(f) e^{j2\pi f t_0}}{\sqrt{S_n(f)}} \quad (10.8.2)$$

avranno

$$H(f) = K \frac{\varphi^*(f) e^{-j2\pi f t_0}}{S_n(f)} \quad (10.9)$$

questo filtro, così costruito, si dice FILTO ADATTATO e è quello che minimizza SNR nell'istante valuto.

Nel caso delle marmali trasmissioni  $m(t)$  e AWGN, quindi la sua densità spettrale di potenza è

costante

$$S_m(f) = \frac{N_0}{2}$$

PARSEVAL: energia nel dominio del tempo = energia nel dominio delle frequenze

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \\ \bar{E} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

uguali x Parseval

quindi si ha

$$\text{SNR}_{\max} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P(f)|^2}{S_m(f)} df = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df$$

che, per il teorema di Parseval vale

$$\boxed{\text{SNR}_{\max} = \frac{2E_p}{N_0}}$$

nella quale  $E_p$  è l'energia parseduta dall'impulso.

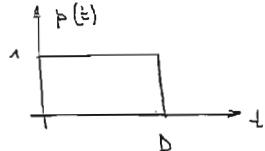
CORRELATORE (IN ALTERNATIVA AL FILTRO ADATTATO)  
Si consideri l'impulso per rettangolare di durata  $\Delta$ .

Supponendo  $S_m(f) = 1$ , dalla (6.9)

$$H(f) = K P^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

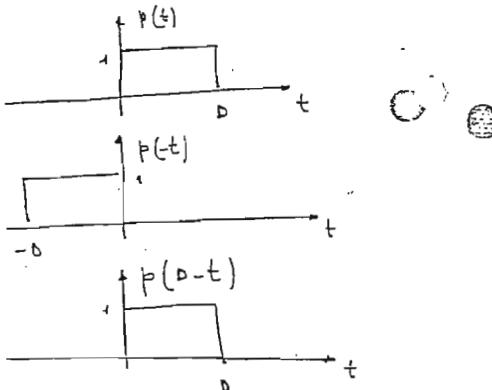
posta  $K = 1$

$$h(t) = p(t_0 - t) \quad \text{con } t_0 = \Delta \quad h(t) = p(\Delta - t)$$



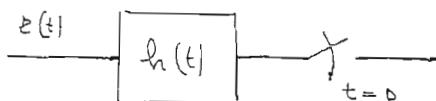
Se  $r(t)$  è il segnale ricevuto in uscita dal filtro si ha una convolution!!!

$$\begin{aligned} r(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(n) h(t_0 - n) dn = \\ \text{con } t = t_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_0 - n) \cdot p(t_0 - t_0 + n) dn \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(n) p(n) dn = \\ &= \int_0^\Delta r(n) p(n) dn = \end{aligned}$$

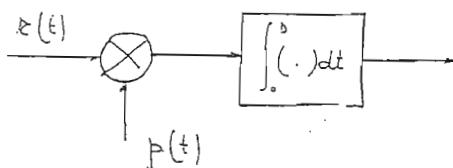


$$= \int_0^\Delta [p(n) + m(n)] p(n) dn = \underbrace{\int_0^\Delta p^2(n) dn}_{E_p} + \underbrace{\int_0^\Delta m(n) p(n) dn}$$

Interpretando la relazione appena ottenuta, proviamo tracciare i seguenti schemi



FILTO ADATTATO



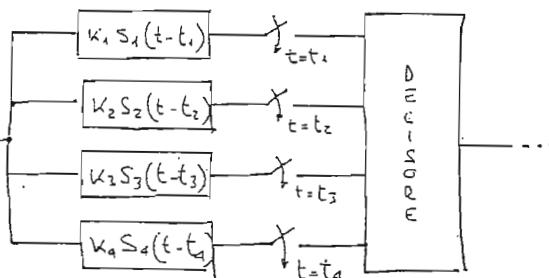
CORRELATORE

### SISTEMA DI RICEZIONE NUMERICA

Consideriamo la modalità di trasmissione "one shot". I segnali trasmessi sono scelti in un alfabeto A.

$$A = \{s_i(t)\}_{i=1}^M \text{ e assunno le probabilità } \{p_i\}_{i=1}^M.$$

Se consideriamo il caso con 4 simboli ( $M=4$ ) il ricevitore può essere realizzato con 4 filtri ciascuno, adattato ad uno dei simboli, come segue:



Sia T l'intervallo di regolarazione e D la durata massima di ogni segnale

Per le trasmissioni numeriche in banda base vengono impiegate, principalmente, due tipi di modulazione: PAM (Pulse Amplitude Modulation) e PPM (Pulse Position Modulation).

#### 1. Modulazione PPM

Siano n i segnali necessari, scelto un impulso di durata D, ciò che viene modulato, dal segnale da trasmettere, è la posizione di tale impulso all'interno dell'intervallo di regolazione.

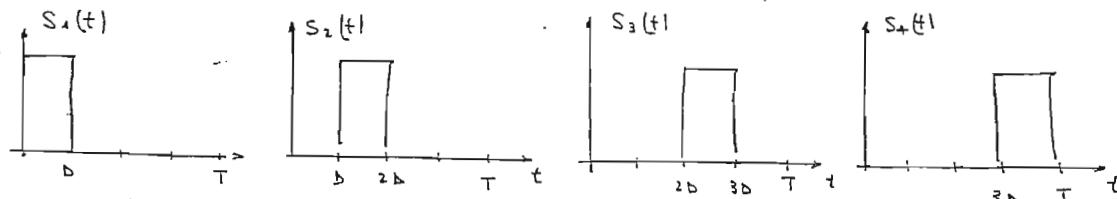
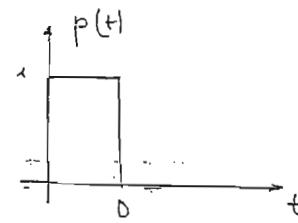
Per questo motivo l'intervallo T deve necessariamente

te essere multiplo di  $D$ :

$$T = M D$$

114

nella quale  $M$  è il numero di caratteri presenti nell'alfabeto. Se  $p(t)$  è un impulso rettangolare (vedi figura) e si vuole realizzare una PPM quaternaria ( $M = 4$ ) i paritibili segnali da trasmettere sono:



Analizziamo come può essere ridotto lo schema del ricevitore. Nello schema generale  $t_1 = D$ ,  $t_2 = 2D$ ,  $t_3 = 3D$  e  $t_4 = 4D = T$  ma

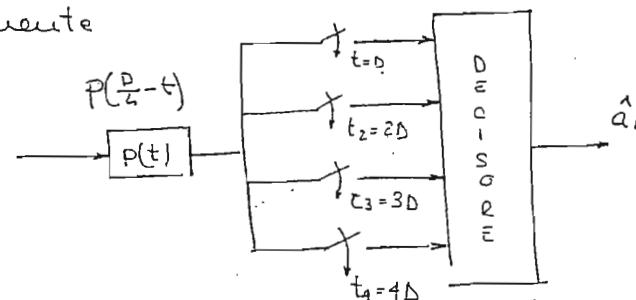
$$\frac{D}{2} \leq t$$

$$\begin{aligned}S_1(D-t) &= p(t) \\S_2(2D-t) &= p(t) \\S_3(3D-t) &= p(t) \\S_4(4D-t) &= p(t)\end{aligned}$$

Allora i quattro filtri vengono sostituiti da uno unico\* e lo schema diviene il seguente

ricomme  $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 1$

allora ho 4 filtri uguali



SCHEMA  
PPM

## 2. Modulazione PAM

In questo caso scelta l'impulso  $p(t)$ , il segnale da trasmettere ne modula l'ampliezza.

Anche in questo caso analizziamo come si riduce lo schema generale nel caso della modulazione PAM.

La condizione di adattamento dei filtri impone

una proporzionalità con l'impulso; allora sceglieremo i coefficienti  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  arbitrari pari a

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = \frac{1}{3}$$

$$k_3 = -1$$

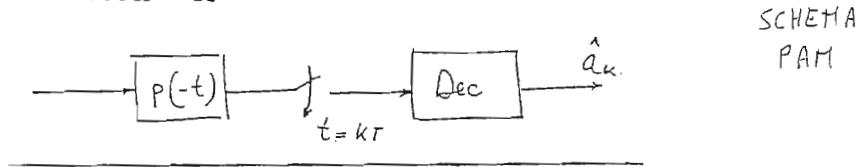
$$k_4 = -\frac{1}{3}$$

$$k_i = \frac{1}{\alpha_i}$$

Inoltre finiamo i tempi di campionamento  $t_1, t_2, t_3$  e  $t_4$  nulli, quindi avremo

$$\left. \begin{array}{l} k_1 s_1(t_1 - t) = s_1(-t) \\ k_2 s_2(t_2 - t) = \frac{1}{3} s_2(-t) \\ k_3 s_3(t_3 - t) = -s_3(-t) \\ k_4 s_4(t_4 - t) = -\frac{1}{3} s_4(-t) \end{array} \right\} = p(-t)$$

Sulla base di ciò lo schema generale può essere ridotto a



SCHEMA  
PAM



## MODULAZIONE PAM (Pulse Amplitude Modulation)

117

Il segnale  $s_i(t)$  trasmesso da un tx PAM può essere scritto nella forma:

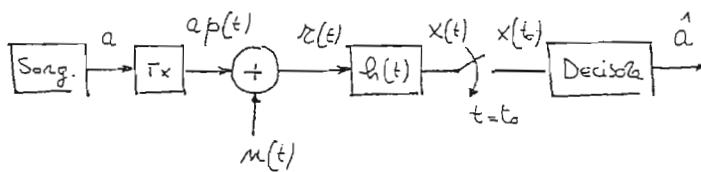
$$S_i(t) = a_i p(t)$$

nella quale  $p(t)$  è l'impulso seleno e "a", detto SIMBOLO, dipende dal carattere che si vuole trasmettere ed è scelto fra un alfabeto prefissato. Ciascun simbolo  $a_i$  ha una probabilità di essere trasmesso pi, per cui è una variabile casuale discreta.

Supponiamo di avere un alfabeto di quattro caratteri, scelti  $p(t)$ , si può definire il simbolo  $a$  come segue

$$a = \begin{cases} 1 & \text{eau } p_1 \\ 3 & \text{eau } p_2 \\ -1 & \text{eau } p_3 \\ -3 & \text{eau } p_4 \end{cases}$$

Il sistema tx, rx e canale, può essere riassunto come segue:

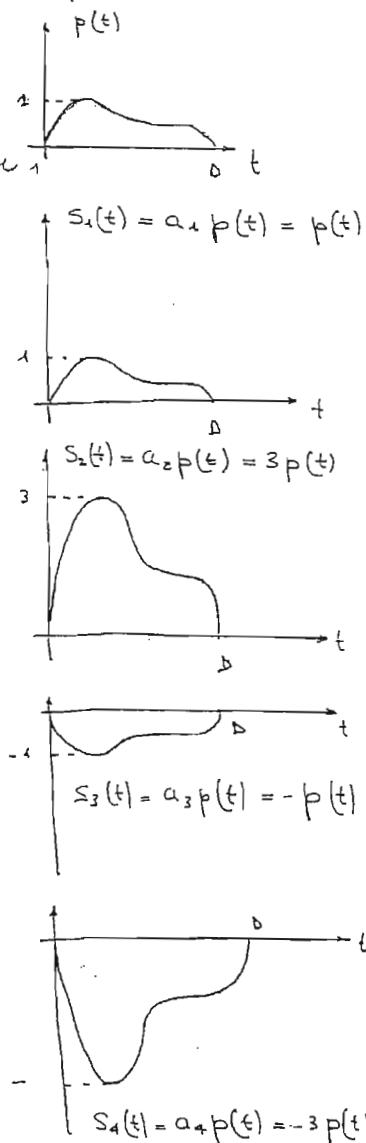
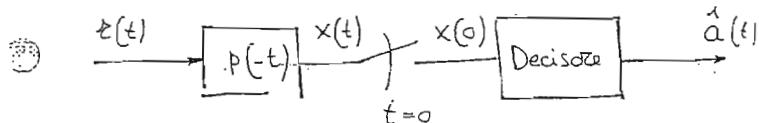


Nel quale il filtro  $h(t)$  è un filtro adattato, descritto dalla relazione

$$h(t) = K p(t_0 - t)$$

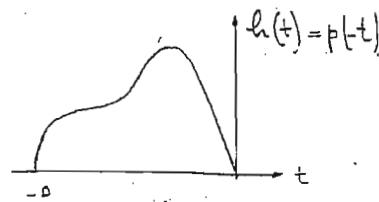
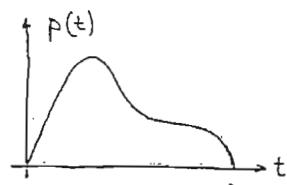
come moto dalle semplificazioni fatte in precedenza si può scrivere

$$h(t) = p(-t) \text{ con } t_0 = 0$$



Consideriamo un sistema binario, cioè un alfabeto composto da due soli caratteri; partì i due simboli  $a_1 = 1$  con probabilità  $P$  e  $a_2 = -1$  con probabilità  $(1-P)$ ; la variabile casuale  $a$  è discreta e così definita

$$a = \begin{cases} a_1 = 1 \text{ con } P \\ a_2 = -1 \text{ con } (1-P) \end{cases}$$



Scelto l'impulso  $p(t)$ , mi definisce automaticamente il filtro  $h(t)$ .

Osserviamo che in questo caso

(vedi figura) ( $h(t)$  potrebbe non essere

causale: in tal caso si dovrebbe traslare il tutto a dx e spartire della stessa quantità l'istante di campionamento, (in particolare si deve spartire tutto di D).

Il segnale ricevuto sarà  $s_i(t)$  sommato al rumore  $m(t)$  AWGN:

$$r(t) = a p(t) + m(t) \quad (1.1)$$

all'uscita del filtro adattato

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \otimes h(t) = \\ &= r(t) \otimes p(-t) = \\ &= a p(t) \otimes p(-t) + m(t) \otimes p(-t) \quad (1.2) \end{aligned}$$

pariamo

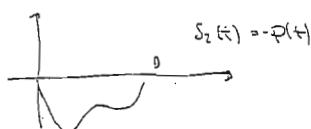
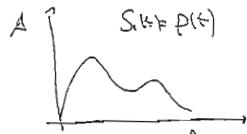
$$g(t) = p(t) \otimes p(-t) \quad (1.3.1)$$

$$m_i(t) = m(t) \otimes p(-t) \quad (1.3.2)$$

quindi

$$x(t) = a g(t) + m_i(t)$$

essendo  $m(t)$  un processo anche  $m_i(t)$ , e quindi  $x(t)$ , è un processo; il campionamento in  $t=0$ , fissa il tempo ed estrae dal processo una variabile casuale  $x(0)$  come segue



$$Q \in \{1, -1\}$$

$$\begin{aligned} P(Q=1) &= p \\ P(Q=-1) &= 1-p \end{aligned}$$

$$S(t) = Q p(t)$$

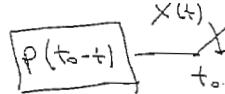
$$S(t) = e^t p(t)$$

$$\text{R } f(t) = p(t) \otimes p(-t)$$

$$m(t) = w(t) \otimes p(-t)$$

$$r(t) = \sigma p(t) + w(t)$$

$$\boxed{p(t_0-t)}$$



$$X(t_0) = \sigma f(0) + m(0)$$

$$x(t) = r(t) \otimes p(t_0-t) =$$

$$= [\sigma p(t) + w(t)] \otimes p(t_0-t) = \underbrace{\sigma p(t) \otimes p(t_0-t)}_{f(t-t_0)} + \underbrace{w(t) \otimes p(t_0-t)}_{m(t-t_0)}$$

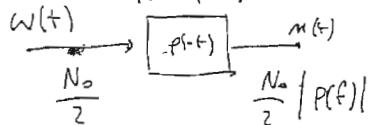
$$= \sigma f(t-t_0) + m(t-t_0)$$

$\alpha$  è variabile casuale

$m(0)$  è variabile ~~casuale~~ casuale gaussiana

{ 1) Valore medio  
2) Varianza

$$p(-t) = p^*(t)$$



$$\frac{N_0}{2} / |P(f)|^2$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Per la varianza ho bisogno di } f^2 \text{ che è } & \quad \overline{f^2} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df \\ = \text{per Poissonal } & \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) dt = \frac{N_0}{2} \overline{E_p} \quad \text{energie} \end{aligned}$$

Il filtre un processo con Valore medio nullo e dunque spettro di potenza  $= \frac{N_0}{2}$   
In uscita il Valore medio è ancora nullo e la d.s.p è data da quella  
di ingresso per la t.d.f. del filtro

Vediamo  $f(0)$

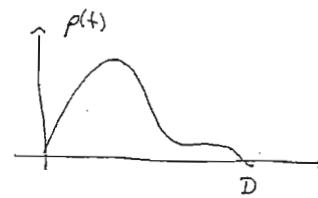
$$f(t) = p(t) \otimes p(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) p(t-\tau) d\tau$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) p(0) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(\tau) d\tau = E_p$$

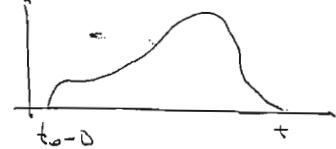
$$H(f) = \frac{K p^*(f) e^{-j2\pi f t_0}}{\frac{N_0}{2} S_n(f)} = K p^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = K p(t_0 - t)$$

$t_0 > 0$  garantisce un filtro causale



$$h(t) = k p(t_0 - t)$$



Il ricevitore deve campionare all'istante di campionamento: prima e dopo quest'istante non è più possibile massimizzare il rapporto segnale rumore. Per sincronizzare questo istante introduce una funzione auxiliare detta SINCRONIZZAZIONE DI CLOCK

$$\begin{aligned} P\{X > n_i\} &= P\left\{ \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} > \frac{n_i - \mu_x}{\sigma_x} \right\} = Q\left(\frac{n_i - \mu_x}{\sigma_x}\right) \\ &= \int_{n_i}^{+\infty} P_x(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{n_i}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{n_i - \mu_x}{\sigma_x}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = Q\left(\frac{n_i - \mu_x}{\sigma_x}\right) \end{aligned}$$

$$X(0) = a g(0) + m_1(0)$$

149

Calealiamo ora le statistiche di  $g(0)$  e  $m_1(0)$ .  
 Sappiamo che

$$G(f) = P(f)P(-f) = g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] = \mathcal{F}^{-1}[P(f)P(-f)] =$$

$$= P(f)P^*(f) = |P(f)|^2$$

per la simmetria Hermitiana.

Allora

$$(14.4) \quad g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)P^*(-f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = E_p$$

dalla precedente si deduce che  $g(0)$  è l'energia dell'impulso  $p(t)$ .

Per quanto riguarda  $m_1(t)$  possiamo dire che, essendo attenuto da  $m(t)^*$ , AWGN, è anch'esso gaussiano a media nulla

$$\eta_n = 0 \Rightarrow \eta_{n_1} = 0$$

\* attraverso un filtro LTI (lineare e tempo invariante).

Inoltre la densità spettrale di potenza risulta:

$$\left(\text{se } S_u(f) = \frac{N_0}{2}\right) : S_{m_1}(f) = S_m(f) |P(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |P(f)|^2$$

Per quanto detto anche la v.c.  $m_1(0)$  è gaussiana

$$m_1(0) \in N(0, \sigma^2)$$

Il valore medio nullo è covarianza

$$\sigma^2 = E\{[m(0) - M_1]^2\} \quad \underline{\sigma_{n_1}^2 = E\{m_1^2(0)\}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |P(f)|^2 df = \frac{N_0 E_p}{2}$$

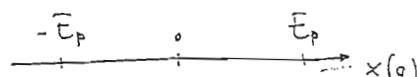
In conclusione si può dire che essendo

$$X(0) = a E_p + m_1(0)$$

con  $a$  che assume i valori  $1$  o  $-1$ , la componente di rumore  $m_1(0)$  fa sì che  $X(0)$  cada fra  $-E_p$  e  $E_p$ .

Il DECISORE dovrà scegliere

sulla base di  $X(0)$  il valore  
di  $a$  emettendo il risultato  $\hat{a}$ .



\* In realtà  $X(0)$  è dato al di fuori dei valori  $-E_p$  e  $E_p$  ma il problema è che quando  $X(0)$  è compreso fra i due valori

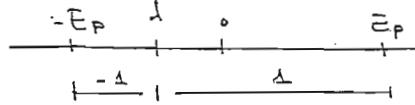
E' ragionevole pensare che la soglia in base alla quale decidere debba dipendere dalla probabilità di

transmissione di un carattere; per chiarire questo aspetto supponiamo di sapere con certezza che il carattere  $t_x$  è 1: allora  $P=1$  e  $P-1=0$  allora, poniamo spostare la soglia a  $-\infty$ . In generale se

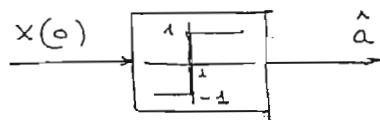
$$P > 1 - P$$

è ragionevole spostare la soglia verso il risultato meno probabile: ponendo la soglia pari a  $\lambda$  le decisore sarà definito come segue

$$\hat{a} = \begin{cases} 1 & \text{se } x(0) \geq \lambda \\ -1 & \text{se } x(0) < \lambda \end{cases}$$



In questo caso si parla di DECISORE A SOGNA ed è schematizzabile con il blocco non lineare senza memoria seguente:



A questo punto è necessario quantificare la probabilità di errare sul simbolo, avendo:

$$P\{\hat{a} \neq a\} = P_s = \text{PROBABILITÀ DI ERRORE SUL SIMBOLI}$$

Osserviamo che  $P\{\hat{a} \neq a\}$  è l'errore totale della probabilità totale

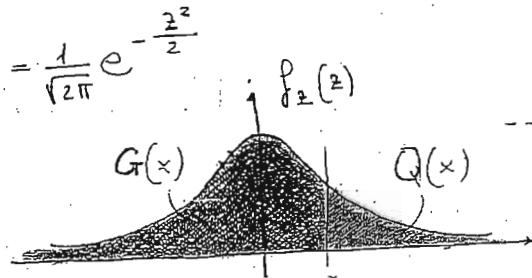
$$\therefore P\{\hat{a} \neq a\} = P(\hat{a} \neq a | a=1)P(a=1) + P(\hat{a} \neq a | a=-1)P(a=-1)$$

### RICHIAMI SULLE VARIABILI CASUALI GAUSSIANE

Una v.e. GAUSSIANA STANDARD è definita come segue

$$z \in \mathcal{N}(0,1) \quad f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Ricordiamo che l'area sottesa dalla gaussiana è unitaria



finato un valore  $x$  si definisce la funzione 124  
 CODA  $Q(x)$

$$z = \frac{x - m_x}{\sigma_x} \quad Q(x) = \int_x^{+\infty} \varphi_z(z) dz = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Non esiste una primitiva in forma chiusa, quindi i valori di  $Q(x)$  sono tabulati.

Analogamente per il valore di  $x$  si definisce

$$G(x) = 1 - Q(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_z(z) dz$$

Derivando

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \frac{dG(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Tornando al problema

$$P(\hat{a} \neq a | a=s) = P(\hat{a} = -\frac{1}{s} | a=s) = P(X(0) < \lambda | a=s)$$

se è stato trasverso su uno, cioè  $a=s$ , si ha

$$X(0) = aE_p + m_s(0) = E_p + m_s(0)$$

Allora

$$P(X(0) < \lambda | a=s) = P(aE_p + m_s(0) < \lambda | a=s) =$$

$$\underbrace{aE_p + m_s(0) / a=s}_{\begin{array}{l} \text{se metto } a=s \\ \text{i due eventi} \\ \text{divengono} \\ \text{indipendenti} \end{array}} = P(E_p + m_s(0) < \lambda) = P(m_s(0) < \lambda - E_p)$$

Osserviamo che  $m_s(0)$  è gaussiana non standard, tuttavia dividendo per  $\sigma$  si ottiene una gaussiana standard.

Allora anziché considerare  $m_s(0)$ , poniamo

$$z = \underbrace{\frac{m_s(0)}{\sigma}}$$

ed ora è standard.

Dico.

$$\mathbb{E}\{z\} = \frac{\mathbb{E}\{m_s(0)\}}{\sigma} = 0$$

Inoltre

$$E\{z^2\} = E\left\{\frac{M_1(0)}{\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sigma^2} E\{M_1^2(0)\} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Quindi

$$\begin{aligned} P(\hat{a} \neq a | a=1) &= P\left(M_1(0) < \lambda - \bar{E}_P\right) = \\ &= P\left(\frac{M_1(0)}{\sigma} < \frac{\lambda - \bar{E}_P}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(z < \frac{\lambda - \bar{E}_P}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{\bar{E}_P - \lambda}{\sigma}\right) = \\ &= Q\left(\frac{\bar{E}_P - \lambda}{\sqrt{\frac{N_o}{2} \bar{E}_P}}\right) \stackrel{\text{LDP}(-z > \frac{\bar{E}_P - \lambda}{\sigma})}{=} \end{aligned}$$

Per calcolare la probabilità di errore sul simbolo risulta

$$\begin{aligned} P_s &= P(\hat{a} \neq a | a=1) \underbrace{P(a=1)}_{p} + P(\hat{a} \neq a | a=-1) \underbrace{P(a=-1)}_{1-p} = \\ &= Q\left(\frac{\bar{E}_P - \lambda}{\sqrt{\frac{N_o}{2} \bar{E}_P}}\right) p + Q\left(\frac{\bar{E}_P + \lambda}{\sqrt{\frac{N_o}{2} \bar{E}_P}}\right) (1-p) = P_s(\lambda) \quad (\text{u.s.}) \end{aligned}$$

### DETERMINAZIONE DELLA SOGLIA OTTIMA (SISTEMA BINARIO)

Nel caso di una trasmissione binaria, abbiamo stabilito che la probabilità di errore sul simbolo è data dalla relazione (u.s.), riportata di seguito, ottenuta con il sistema di figura

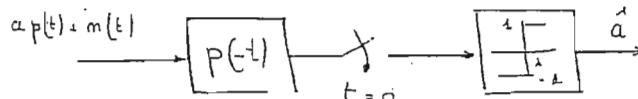
$$P_s(\lambda) = Q\left(\frac{\bar{E}_P - \lambda}{\sqrt{\frac{N_o}{2} \bar{E}_P}}\right) p + Q\left(\frac{\bar{E}_P + \lambda}{\sqrt{\frac{N_o}{2} \bar{E}_P}}\right) (1-p)$$

Per determinare il valore di  $\lambda$  che minimizza la probabilità di errore, deriviamo rispetto a  $\lambda$  la (u.s.)

$$(u.s.) \frac{dP_s(\lambda)}{d\lambda} = p \left( -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{E}_P - \lambda)^2}{2\sigma^2}} \right) \left( -\frac{1}{\sigma} \right) + (1-p) \left( -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{E}_P + \lambda)^2}{2\sigma^2}} \right) \frac{1}{\sigma} =$$

riordinando che

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{con } \sigma^2 = \frac{N_o}{2} \bar{E}_P$$



Eguagliando a zero la (11.6)

123

$$P \left( -\frac{1}{\lambda^2 \sigma^2} e^{-\frac{(\bar{E}_p - \lambda)^2}{2\sigma^2}} \right) \left( \frac{1}{\sigma} \right) + (1-P) \left( -\frac{1}{\lambda^2 \sigma^2} e^{-\frac{(\bar{E}_p + \lambda)^2}{2\sigma^2}} \right) \frac{1}{\sigma} = 0$$

$$P e^{-\frac{(\bar{E}_p - \lambda)^2}{2\sigma^2}} - (1-P) e^{-\frac{(\bar{E}_p + \lambda)^2}{2\sigma^2}} = 0$$

$$e^{-\frac{(\bar{E}_p - \lambda)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1-P}{P} e^{-\frac{(\bar{E}_p + \lambda)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{1-P}{P} = e^{-\frac{(\bar{E}_p - \lambda)^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{(\bar{E}_p + \lambda)^2}{2\sigma^2}}$$

Allora

$$\frac{(\bar{E}_p + \lambda)^2 - (\bar{E}_p - \lambda)^2}{2\sigma^2} = \ln \left( \frac{1-P}{P} \right)$$

$$\cancel{E_p^2} + \cancel{\lambda^2} + 2\lambda \bar{E}_p - \cancel{E_p^2} - \cancel{\lambda^2} + 2\lambda \bar{E}_p = 2\sigma^2 \ln \left( \frac{1-P}{P} \right)$$

$$\Rightarrow 4\lambda \bar{E}_p = 2\sigma^2 \ln \left( \frac{1-P}{P} \right)$$

quindi

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{OTTIMO}} &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\bar{E}_p} \ln \left( \frac{1-P}{P} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{N_0}{2} \bar{E}_p \frac{1}{\bar{E}_p} \ln \left( \frac{1-P}{P} \right) = \\ &= \frac{N_0}{4} \ln \left( \frac{1-P}{P} \right) \quad (11.7) \end{aligned}$$

Facendo la derivata  
seconda, si può  
dimostrare che  
esso è un pt. di  
minimo.

Osserviamo che se i due eventi sono EQUIPROBABILI

$$P = 0,5 \quad \lambda_{\text{OTTIMO}} = 0$$

Se invece l'evento  $\{a=0\}$  è imparsabile

$$P = 1 \quad \lambda_{\text{OTTIMO}} = -\infty$$

Se l'evento imparsabile è  $\{a=1\}$  avremo

$$P = 0 \quad \lambda_{\text{OTTIMO}} = +\infty$$

Calcoliamo la probabilità di errare  $P_s$  nel caso in cui venga scelta la soglia attiva:

$$P_s(\lambda) \Big|_{\lambda = \lambda_{ottima}} = P Q \left( \frac{\bar{E}_p - \lambda_{ottima}}{\sigma} \right) + (1-p) Q \left( \frac{\bar{E}_p + \lambda_{ottima}}{\sigma} \right)$$

$$P_s(0) \Big|_{\lambda = \lambda_{ottima}} = Q \left( \frac{\bar{E}_p}{\sqrt{\frac{N_0}{2} \bar{E}_p}} \right) = Q \left( \sqrt{\frac{2 \bar{E}_p}{N_0}} \right)$$

$P = 0,5$   
 $\lambda_{\infty}$

### TRASMISSIONI MULTIPLE (sistemi binari)

Analizziamo il caso in cui venga trasmessa una sequenza di segnali PAN. Scelto l'impulso  $p(t)$ , con durata  $D$  e definito l'intervallo di segnalazione  $T$ , supponiamo di voler trasmettere

la sequenza 1001 associando all'1

$$a = 1 \quad \text{e allo} \quad 0 \quad a = -1$$

Vediamo le due situazioni significative.

Il segnale PAN  $s(t)$  può essere espresso matematicamente con lo modello

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

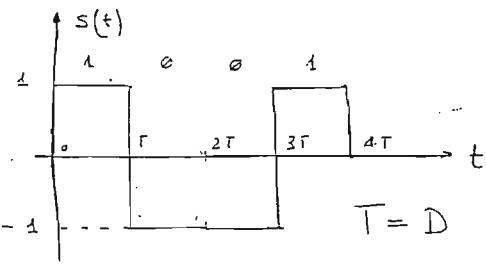
Nella quale  $a_k$  è un coeff. che dipende dall'istante.

A.  $D \leq T$ . La durata dell'impulso è inferiore all'intervallo di segnalazione (in particolare analizziamo il caso limite  $D = T$ ). La sequenza trasmessa  $s(t)$  sarà

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

Sul canale si sovrappone il rumore  $m(t)$  AWGN.

Vediamo cosa succede all'uscita del filtro adattato



$$\begin{aligned} x(t) &= [s(t) + m(t)] \otimes p(-t) = \\ &= s(t) \otimes p(-t) + m(t) \otimes p(-t) = \\ &= \sum_k a_k p(t - kT) \otimes p(-t) + m(t) \otimes p(-t) \end{aligned}$$

ponendo

$$g(t) = p(t) \otimes p(-t)$$

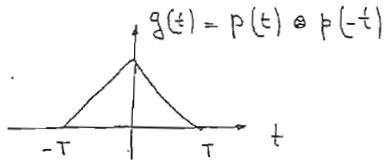
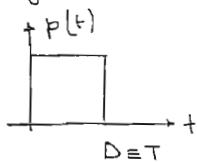
$$g(t - kT) = p(t - kT) \otimes p(-t)$$

\*25

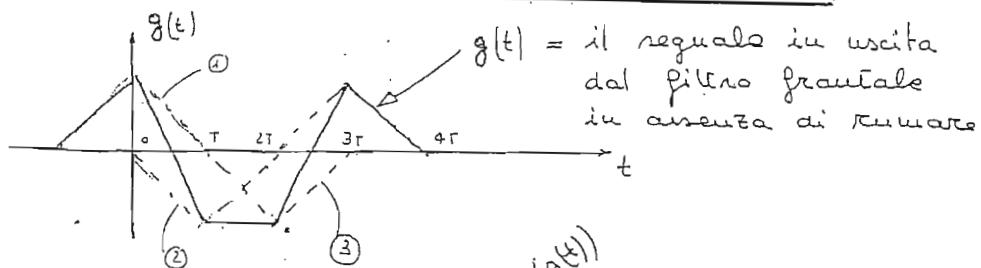
quindi

$$x(t) = \sum_k a_k g(t - kT) + m_1(t) \quad (11.8)$$

Osserviamo che per  $p(t)$  rettangolare,  $g(t)$  è triangolare come segue



Allora in riferimento alla sequenza 1001 trasmetta il segnale  $s(t)$  risulta, trascurando il rumore,

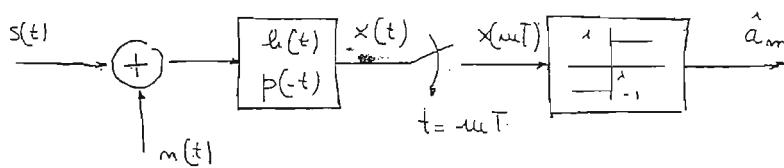


Dell'andamento temporale di  $s(t)$  ( $g(t)$ ) si deduce che, progettando correttamente il filtro frattale secondo la relazione (10.9), possiamo maximizzare il rapporto SNR in ingresso al ricevitore; inoltre compiacendo opportunamente negli istanti  $t = nT$ , con  $n$  intero, si può extrapolare solo il nibbalo di interesse: la durata dell'impulso è al più pari a  $T$ , quindi compiaccendo negli istanti suddetti il nibbalo precedente<sup>(1)</sup> si è già esaurito, mentre quello successivo<sup>(2)</sup> deve ancora iniziare. Nel rispetto dei vincoli appena esposti, non si verifica INTERFERENZA INTERSIMBOLICA (ISI); in altri termini non si ha sovrapposizione fra i nibbali negli istanti di campionamento.

Allora:

(ideale impiegando in ricevitore a FILTRO ADATTATO) te è "più" possibile ricevere il segnale correttamente inserire i nibbali trasmessi. Sarà necessario invece un "decisore a soglia" progettato secondo

i criteri della "soglia attiva". Secondo quanto detto<sup>126</sup> un possibile schema di ricezione può essere il seguente.



SCHEMA DI RICEZIONE  
PAM REALIZZATO CON  
FILTRI ADATTATI

Valutiamo la possibilità di impiegare come ricevitore

un CORRELATORE al posto del filtro adattato (vedi figura).

L'andamento temporale del segnale

$x'(t)$  può facilmente essere ricavato

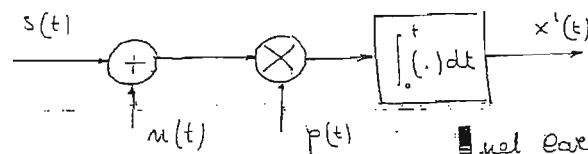
dall'operazione di integrazione (sempre in riferimento alla sequenza 1001).

Anche in questo caso campionando

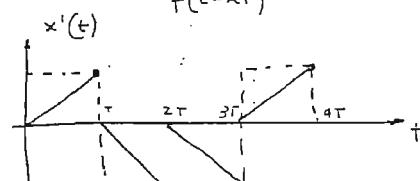
negli istanti opportuni  $t = nT$

il decisore a soglia è

in grado di restituire il simbolo trasmesso.



nel correlatore m ha il prodotto  $p(t) \cdot p(t) = p(t)$



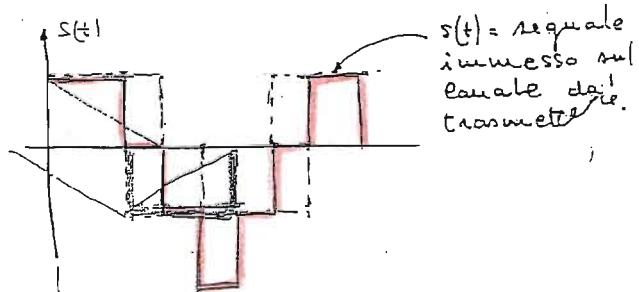
B.  $D > T$ . La durata dell'impulso è maggiore dell'intervallo di regolazione (in particolare analizziamo il caso in cui  $D = T + \frac{T}{2}$ ). In riferimento all'impulso  $p(t)$  e alla sequenza 1001 visti in precedenza, poniamo assieme che in uscita dal trasmettitore si ha un

segnale  $s(t)$  fortemente

"distorto". La sovrapposizione dei simboli si verifica già in uscita dal Tx.

Anche in questo caso

il filtro adattato trascina gli impulsi



rettangolari in impulsi  
triangolari simmetrici,  
quindi è possibile tracciare l'andamento  
temporale del segnale  
 $x(t)$  in uscita dal filtro  
(supponendo nullo il rumore)

E' possibile che si verifichi ISI. Il filtro adattato

è ancora utilizzabile, ma il correlatore no.

Per quanto riguarda il decodare, può essere  
impiegato un DECISORE A SOGLIA se non si verifica ISI.

Se al contrario c'è interferenza è necessario impiegare  
algoritmi di decisione più complessi come ad esempio  
l'ALGORITMO DI VITERBI.

Il caso  $D > T$  può essere modellato matematicamente  
nel modo seguente.

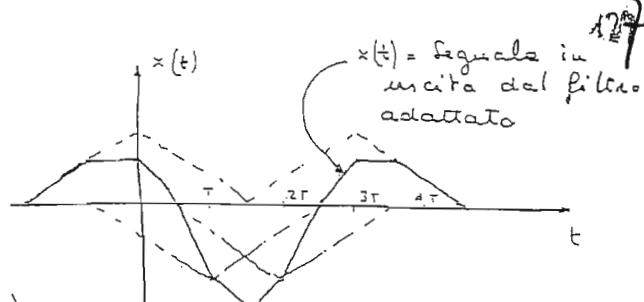
$$x(t) = \sum_k a_k g(t - kT) + m_1(t)$$

Campionando in  $t = mT$ , si ottiene

$$\begin{aligned} x(mT) &= \sum_{k=m}^{\infty} a_k g(mT - kT) + m_1(mT) = \\ &\stackrel{(A)}{=} \underbrace{a_m g(0)}_{\text{TENSIO}} + \underbrace{a_{m-1} g(T) + a_{m-2} g(-T) +}_{\text{INTERFERENZA}} + \\ &\quad + \underbrace{a_{m-2} g(2T) + a_{m-3} g(-2T) + \dots +}_{\text{INTERSINERGIA}} \underbrace{m_1(t)}_{(B)} = \\ &\quad (C) \end{aligned}$$

Il termine (A) contiene il simbolo utile, cioè  
quello che varremo estrapolare nell'istante di  
campionamento; il termine (B) contiene tutte le  
componenti relative ai simboli che  
dovranno esaurirsi o che sono già cominciati. Il termine  
(C) è il rumore AWGN del canale. Osserviamo che

$$(11.9) \quad x(mT) = \underbrace{a_m g(0)}_{\text{TENSIO}} + \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{a_k g[(m-k)T]}_{\text{INTERFERENZA}} + \underbrace{m_1(mT)}_{\text{RUMORE}}$$



Per sopprimere l'interferenza intersimbolica è 128  
necessario modellare l'impulso  $p(t)$  in modo che

$$g(t) \triangleq p(t) \otimes p(-t)$$

sia tale che

Condizione di  
NO-ISI  
nel tempo

$$g(l) = \begin{cases} g(0) & \text{se } l=0 \\ 0 & \text{se } l \neq 0 \end{cases}$$

Una funzione che  
rispetta la (11.10)  
è la sinc, che  
pure nello spazio è  
tecnologicamente  
(11.10) difficile da  
realizzare.

Riassumendo le due situazioni si presentano come segue:

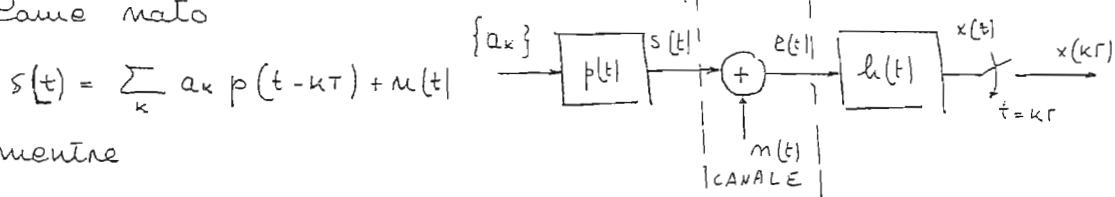
	ISI	FILTO	DECISORE
$D \leq T$	NO	Filtro Adattato o canelatore	A SOGLIA
$D > T$	SI	Filtro Adattato	VITERBI
	NO		A SOGLIA

ISI: interferenza intersimbolica



Osservazione: Il caso  $D > T$  benché svantaggioso è di fatto l'unico realmente possibile. Si ricordi che in seguito a dura limitata la banda infinita. Questo può non essere accettabile nel caso di FDR. Anche se paternamente riguardo l'occupazione frequenziale dell'impulso, il canale è di fatto un filtro passa banda con banda  $B_c$ ; di conseguenza taglia la banda dell'impulso trasformato in uno a durata infinita.

Come noto



mentre

$$x(t) = \sum_i a_i g(t - iT) + m_1(t)$$

sappiamo che per definizione

$$g(t) \triangleq s(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(n) h(t - n) dn$$

$$m_1(t) \triangleq m(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(n) h(t - n) dn$$

camponando in  $t = kT$

$$\begin{aligned} x(kT) &= \sum_i a_i g(kT - iT) + m_1(kT) = \\ &= \underbrace{a_k g(0)}_{\textcircled{A}, k=i} + \underbrace{\sum_{i \neq k} a_i g[(k-i)T]}_{\textcircled{B}} + \underbrace{m_1(kT)}_{\textcircled{C}} \end{aligned}$$

Come già accennato il termine  $\textcircled{A}$  rappresenta il campione utile,  $\textcircled{B}$  rappresenta il termine di ISI e  $\textcircled{C}$  il rumore. Per annullare l'ISI ribadiamo la condizione (11.10)

$$g(kT) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{condizione} \\ \text{di Nyquist} \end{matrix}$$

Inoltre, scrivendo la (11.10) nel modo seguente

$$\sum_k g(kT) \delta(t - kT) \Leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_k G\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad \begin{matrix} \text{proprietà} \\ \text{del} \\ \text{componento} \end{matrix}$$

imponendo la condizione che annulla l'ISI

$$\frac{1}{T} G\left(f - \frac{k}{T}\right) = 0$$

$$g(0) \delta(t) = \delta(t) \text{ poiché } g(0) = 1$$

$$G\left(f - \frac{k}{T}\right) = T \quad (12.1) \quad \begin{matrix} \text{condizione} \\ \text{di NO-ISI} \end{matrix}$$

frequenza

La relazione (12.1) afferma che per non avere interferenza interimbalsica è necessario considerare

una  $G(f)$  rettangolare che va da  $-\frac{1}{2T}$  a  $\frac{1}{2T}$

130

$$G(f) = T \text{rect}\left(\frac{f}{1/T}\right)$$

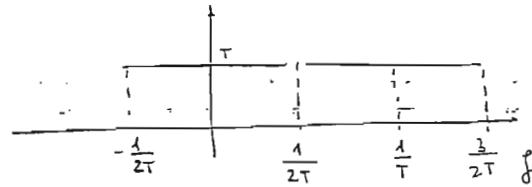
C

che periodizzata da origine ad una costante e pari a  $T$ .

Il segnale che ha andamento in frequenza rettangolare è la funzione

Sinc. In effetti la sinc è tale per cui si annulla in tutti i multipli di  $T$  non nulli e quindi rispetta la condizione (11.10).

Consideriamo che l'aggiunta di uno sfasamento modifica le cose.



La condizione di Nyquist è rispettata anche dalle funzioni il cui andamento in frequenza è quello di figura. In generale la (12.1) è verificata per tutte le funzioni che hanno una

particolare simmetria detta SIMMETRIA VESTIGIALE:

queste funzioni hanno simmetria dispari rispetto al punto  $1/2T$  e  $-1/2T$  in modo che sommando le repliche

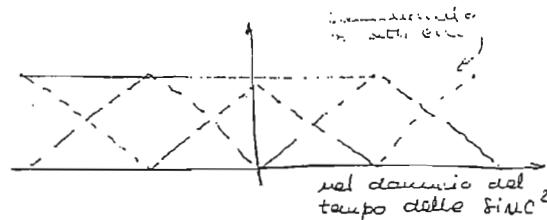
d'uno origine ad una costante. In sostanza una funzione ha "simmetria vestigiale" rispetto al punto  $\frac{1}{2T}$

se uno spostamento verso dx

di  $\alpha$  produce una variazione  $-\Delta$  e uno stesso spostamento

$\alpha$  verso  $-dx$  produce una

variazione di  $+\Delta$



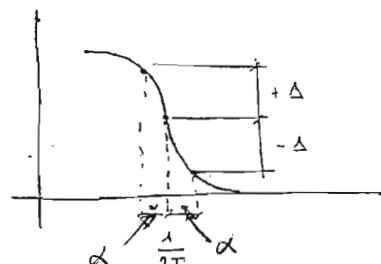
nel dominio del tempo delle sinc

Una classe di funzioni che rispettano queste condizioni è quella del COSENO RIALZATO: la simmetria è quella di un caseno

traslato verso l'alto. È caratterizzato da un parametro

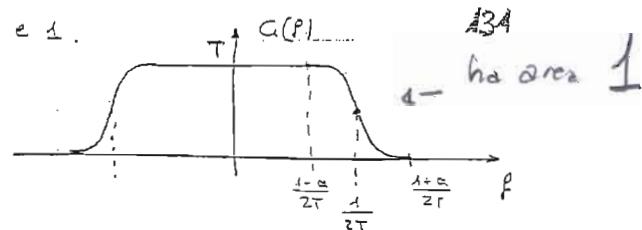
$\alpha$  detto roll off che definisce la banda in eccesso (o banda vestigiale).

$$(0 \leq \alpha < 1)$$



Il "roll off"  $\alpha$  è compreso tra 0 e 1.

$$0 \leq \alpha \leq 1$$



Nel dominio del tempo una funzione a simmetria verticale

nel dominio del tempo è simile ad una Sinc per la quale le oscillazioni al di fuori dell'impulso in zero sono maggiormente smorzate di una marmalata. All'aumentare di  $\alpha$ , cioè del roll off, lo smorzamento delle code aumenta; allora per minimizzare l'ISI si pone  $\alpha$  elevato.

Come visto dalla definizione

$$g(t) = p(t) * h(t)$$

$$G(f) = P(f) H(f)$$

- 1) riduzione banda (d grande)  
che pagheremo con una maggiore facilità e sufficienza errori  
2) a piccolo, circuito di sincronismo di clock buono

quindi per avere la  $G(f)$  valuta abbiamo due gradi di libertà  $p(t)$  e  $h(t)$ ; per minimizzare il rapporto segnale rumore  $h(t)$  va progettato "adattato" a  $p(t)$ , ovvero

$$h(t) = p(-t)$$

$$H(f) = P^*(f)$$

caso rialzato

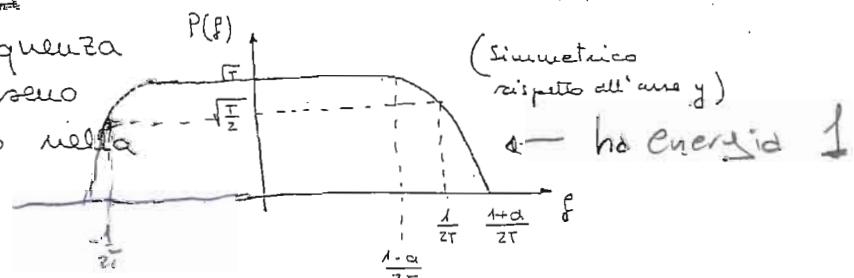
per questo motivo

$$G(f) = P(f) P^*(f) = |P(f)|^2 = G_N(f) \quad (12.2.1)$$

quindi

$$(12.2) \quad P(f) = \sqrt{G_N(f)} = \text{radice di un caso rialzato.}$$

L'aumento in frequenza della radice del caso rialzato è riportato nella figura a lato.



Sappiamo che il canale di trasmissione è di fatto un filtro  $C(f)$ ; allora se  $p(t)$ , con  $P(f)$ , è l'impulso che viene trasmesso, il ricevitore rileva in ingresso

l'impulso sarà  $P(f)C(f)$ . Allora la condizione B2  
di adattamento del filtro si traduce nella seguente

$$H(f) = P^*(f) C^*(f) \quad (12.3)$$

per avere un impulso in grado di una piazzata ISI  
si deve imparare la condizione

$$\begin{aligned} H(f)P(f)C(f) &= G_N(f) \\ P^*(f)P(f)C^*(f)C(f) &= G_N(f) \\ |P(f)|^2 |C(f)|^2 &= G_N(f) \quad (12.4) \end{aligned}$$

dalla quale

$$P(f) = \frac{\sqrt{G_N(f)}}{|C(f)|} \quad (12.5)$$

Tutto questo assume  
che il canale  
è invariante e data  $C(f)$ .

Considerando l'effetto che il filtro adattato ha  
sul rumore additivo

$$(12.6) \quad E\{m_1^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) |H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} G_N(f) df = \frac{N_0}{2}$$

Ancora sotto dal  
caso risalito è  
ufficiale.

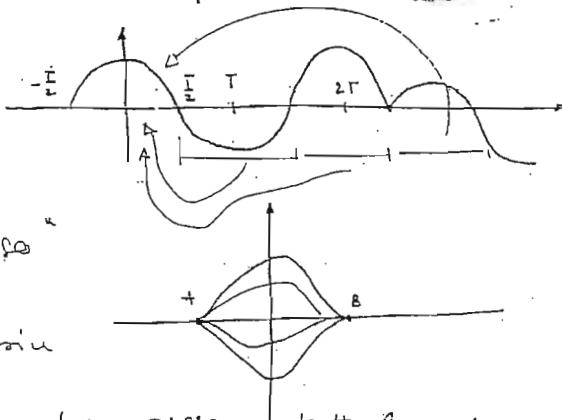
### DIAGRAMMI AD OCCHIO

Si consideri il segnale, di fondo del canale, in assenza  
di rumore; si sovrappongano i tratti di curva  
che rappresentano l'adattamento temporale nell'intervallo  
 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ . Se rispettata la  
condizione di Nyquist  
le curve si intersecano  
in due punti.

Maggiore ISI  $\Rightarrow$  "occhio chiuso"

Minore ISI  $\Rightarrow$  Stretta banda  
ma risulta più  
insensibile.

L'istante di campionamento si trova dove passano tutte le curve,  
in questo punto l'ISI è assente



B pag. 160

2) Verifico la presenza o meno di si

3) Più è aperto l'occhio in larghezza, più siamo immuni all'errore.

$$\alpha \in \{-1\}$$

$$P\{\alpha_k = 1\} = p$$

$$P\{\alpha_k = -1\} = 1-p$$

$$E\{\alpha_k\} = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p - 1$$

$$\Theta(t) = \underbrace{2\pi f_0 t}_{\Theta(t)} + \underbrace{\theta_0 + \phi_{\Delta n}(t)}_{\Phi(t)}$$

fase del segnale modulato POPO 8.4

$$\Theta_{PM}(t) = 2\pi f_0 t + \theta_0 + \phi_{\Delta n}(t)$$

fase segnale modulato, è uguale in proposito a  $\phi_{\Delta n}(t)$

# POPO 8.6

$$\Theta_{PM}(t) - \Theta(t) = \phi_{\Delta n}(t)$$

Derivando  $x_{PM}(t)$  ottengo

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\Theta(t)}{dt} = f_0 + f_{\Delta n}(t)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_0 + n(t) & t < 0 \\ \frac{1}{2\pi f_0} \int_{-\infty}^t n(\tau) d\tau + \theta_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

segnale positivo  $\rightarrow$  incremento frequenza  
e negativo  $\rightarrow$  diminuzione frequ.

La frequenza spettrale è una variabile indipendente

# POPO 9.2  $f_A = 75 \text{ kHz}$

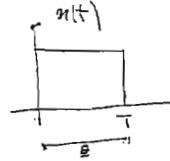
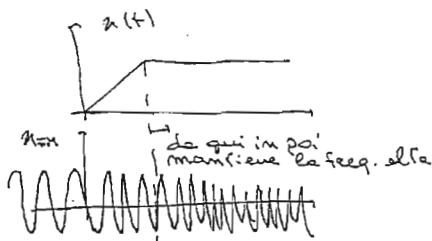
$$B = 15 \text{ kHz}$$

$$B_{FM} \approx \begin{cases} 210 \text{ kHz} & 2(f_A + B) \\ 12 \text{ kHz} & 2(f_A - B) \end{cases} \quad \left\{ 200 \text{ kHz} \right.$$

se confronto due segnali a 200 kHz non c'è interferenza

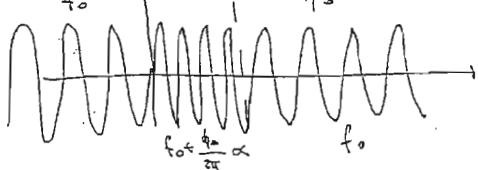
$$B_{FM} = 2(f_A - 2B)$$

ES



Notando in FM significa modulare in FH la derivata del segnale

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\Theta(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \Delta n(t)$$



Consideriamo un generico segnale PAR espresso dalla relazione

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT) \quad (13.1)$$

questo è un processo non stazionario; allora l'auto-correlazione dipende altre che da  $N$ , anche da  $t$ .

Tuttavia

$$R_s(t, n) = E\{s(t+n)s(t)\} \quad (13.2)$$

dipende dal tempo in modo periodico cioè

$$R_s(t+T, n) = R_s(t, n)$$

inoltre il valore medio

$$\eta_s(t) = E\{s(t)\} = \eta_s(t+T) \quad (13.3)$$

questo processo, per il quale valgono le relazioni (13.2) e (13.3), si dice CICLOSTAZIONARIO.

$$s(t) \rightarrow S_{T_0}(t) \rightarrow S_{T_0}(f)$$

$s(t)$  per  $-\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$

$$W_s(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}\{|S_{T_0}(f)|^2\}}{T_0}$$

La densità spettrale di potenza del processo  $s(t)$   $W_s(f)$  risulta

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2 \quad (13.4)$$

nella quale  $W_a(f)$  è la densità spettrale di potenza del processo tempo discreto  $a_k$ ; in particolare si calcola

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} \quad (13.5.1)$$

$$W_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T} \quad (13.5.2)$$

Nella relazione (13.4), il termine  $|P(f)|^2$  non è altro che lo spettro dell'impatto  $p(t)$  dalla (12.2.1) in particolare

$$|P(f)|^2 = G(f)$$

dove  $G(f)$  è il caso rialzato.

## Esempio

134

Consideriamo come impulso p.ti la radice di un polinomio rialzato con roll-off  $\alpha$ . Quale è consideriamo un alfabeto

$$A = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm (\pi-1)\}$$

con eventi

indipendenti ed equiprobabili con  $p_i = \frac{1}{M}$ .

Calcoliamo l'auto-correlazione:

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\}$$

distinguiamo due casi:

1. Se  $m = 0$

$$R_a(0) = R_a(m) = E\{a_k^2\}$$

2. Se  $m \neq 0$

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} = E\{a_{k+m}\} E\{a_k\}$$

perché indipendenti

Osserviamo che

$$E\{a_k\} = 1 \cdot \frac{1}{M} + (-1) \frac{1}{M} + 3 \frac{1}{M} + (-3) \frac{1}{M} + \dots = 0$$

e questo vale anche per  $E\{a_{k+m}\}$ . Il valore quadratico medio

$$\begin{aligned} E\{a_k^2\} &= (1)^2 \frac{1}{M} + (-1)^2 \frac{1}{M} + (3)^2 \frac{1}{M} + (-3)^2 \frac{1}{M} + \dots = \\ &= \frac{M^2 - 1}{3} \quad \leftarrow \text{formula generale} \end{aligned}$$

valida per ogni  $n$

Allora:

$$\text{Se } m = 0 \quad R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} = E\{a_k^2\} = \frac{M^2 - 1}{3}$$

$$\text{Se } m \neq 0 \quad R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} = E\{a_{k+m}\} E\{a_k\} = 0$$

Calcoliamo ora la densità spettrale di potenza del processo  $a_k$  detta  $Wa(f)$ .

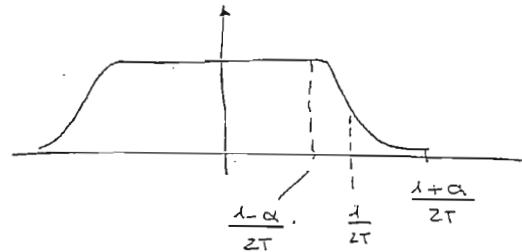
Sulla base della relazione (13.5.2)

135

$$W_a(f) = \sum_m R_a(m) e^{-j\omega_m t} = R_a(0) = \frac{M^2 - 1}{3} \quad R_a(0) = \frac{M^2 - 1}{3} S_m$$

La dens. spett. di potenza del segnale PAM risulta

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2 = \frac{M^2 - 1}{3T} G(f)$$



Osservazione: Se avessimo scelto  $p(t)$

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Come noto la TCF

$$P(f) = T \sin\left(\frac{\pi f T}{2}\right)$$

avremmo avuto

$$\begin{aligned} W_s(f) &= \frac{M^2 - 1}{3T} |P(f)|^2 = \\ &= \frac{M^2 - 1}{3T} \left| T \sin\left(\frac{\pi f T}{2}\right) \right|^2 \end{aligned}$$

### Esempio

Si consideri  $p(t)$  come nell'esempio precedente, con un alfabeto  $a_k \in \{0, 1\}$

Per trovare lo spettro calco l'autocorrelazione  
f' autocorrelazione

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\}$$

Come prima

$$\text{Se } m=0 \quad R_a(m) = R_a(0) = E\{a_k^2\} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{se } m \neq 0 \quad R_a(m) = \mathbb{E}\{a_{k+m} a_k\} = \mathbb{E}\{a_{k+m}\} \mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{4}$$

$\mathbb{E}\{a_{k+m}\} = (0)^2 \frac{1}{2} + (1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$   
 $\mathbb{E}\{a_k\} = (0) \frac{1}{2} + (1) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

allora

$$R_a(m) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} S_m \quad \cancel{\frac{1}{4}} S_m = R_a(m)$$

Calcoliamo la densità spettrale di potenza  $W_a(f)$   
secondo la (1)

$$W_a(f) = \sum_m R_a(m) e^{-j2\pi f m T} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f m T} \quad \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$$

Ricordando che

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi m f T} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{m}{T})$$

avremo

$$W_a(f) = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi m f T} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{m}{T}) + \frac{1}{4}$$

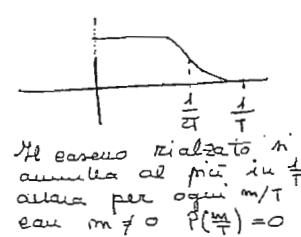
quindi dalla (13.4)

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2 =$$

$$= \frac{|P(f)|^2}{4T} + \frac{1}{4T^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |P(\frac{m}{T})|^2 \delta(f - \frac{m}{T})$$

Eseguendo  $P(t)$  nel caso rialzato,  $P(f)$  è nulla  
in  $\frac{m}{T}$  se  $m \neq 0$ , allora risulta

$$W_s(f) = \frac{|P(f)|^2}{4T} + \frac{1}{4T^2} |P(0)|^2 \delta(f)$$



Rispetto all'esempio precedente,  $W_s(f)$  è identico, 137  
con l'aggiunta di una  $\delta$  nell'origine.

### Esempio

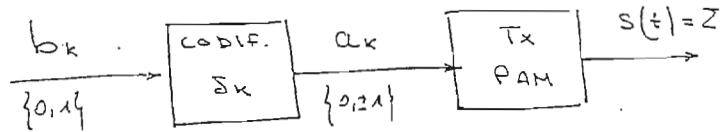
Supponiamo di avere dei simboli  $b_k$  prodotti dalla sorgente; rielaborare questi simboli attraverso un CODIFICATORE che li trasforma nei simboli  $a_k$ . Il codificatore è una macchina a stati finiti per la quale

$$a_k = f(b_k, S_k)$$

nella quale  $S_k$  è lo stato interno definito come

$$S_{k+1} = g(b_k, S_k)$$

I simboli  $a_k$  sono poi trasmessi attraverso un Tx PAM.



$$\text{con } \delta(\cdot) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

Consideriamo allora un codificatore impiegato per produrre codice di UNEA AMI (Alternate Mark Inversion): ad ogni transmissione si invierte il segno. Allora lo stato è definito

Va bene anche il contrario,  $S_k = \begin{cases} 1 & \text{se la volta precedente n la tx 1} \\ -1 & \text{se la volta precedente n la tx -1} \end{cases}$   
basia che memorizzi l'ultima transmissione  
S<sub>k</sub> va inizializzato a 1 o -1 in maniera arbitraria

La funzione di uscita invece sarà:

$$a_k = b_k (-S_k) = -b_k S_k$$

La legge di transizione di stato sarà

$$S_{k+1} = S_k (1 - 2b_k)$$

Se  $b_k$  è uno 0 138  
 $S_{k+1} = S_k$   
 Se  $b_k$  è uno si  
 invierte lo stato.

Supponiamo che  $b_k$  rappresenti il sistema binario  
 $b_k \in \{0, 1\}$

Allora

$$a_k \in \{0, 1, -1\}$$

Calcoliamo l'autocorrelazione del processo  $a_k$

$$\begin{aligned} R_a(m) &= E\{a_{k+m} a_k\} = E\{-(b_{k+m} S_{k+m})(-b_k S_k)\} = \\ &= E\{(b_{k+m} b_k) S_k S_{k+m}\} \end{aligned}$$

Vediamo alcuni casi

$$m=0 \quad R_a(0) = E\{b_k^2 S_k^2\} = E\{b_k^2\} = \frac{1}{2}$$

perché  $b_k$  e  $S_k$  sono indipendenti  
 e siccome  $S_k$  vale 1 o -1  
 $E\{S_k^2\} = 1$

$$m=1 \quad R_a(1) = E\{b_{k+1} b_k S_{k+1} S_k\} =$$

$$= E\{b_{k+1} b_k S_k^2 (1 - 2b_k)\} =$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Siccome } b_k, b_{k+1} \text{ e } S_k \text{ sono indipendenti e} \\ E\{S_k^2\} = 1 \end{array} \right.$

$$= E\{b_{k+1} b_k (1 - 2b_k)\} =$$

$$= E\{b_k b_{k+1}\} - 2 E\{b_k^2 b_{k+1}\} =$$

$$= E\{b_k\} E\{b_{k+1}\} - 2 E\{b_k^2\} E\{b_{k+1}\} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

439

$$m = 2 \quad R_a(2) = E\{b_{k+2} b_k s_k s_k\} = 0$$

Calcolando  $R_a(m)$  per  $m \geq 2$  ottieniamo zero.  
Liesame l'autocorrelazione è pari

$$R_a(-1) = R_a(1) = -\frac{1}{4}$$

$$R_a(0) = \frac{1}{2}$$

$$R_a(-2) = R_a(2) = 0$$

$$\vdots \quad R_a(-m) = R_a(m) = 0 \quad \text{per } m > 2$$

Procedendo

$$W_a(f) = \sum_m R_a(m) e^{-j2\pi m f T} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-j2\pi f T} - \frac{1}{4} e^{j2\pi f T} =$$

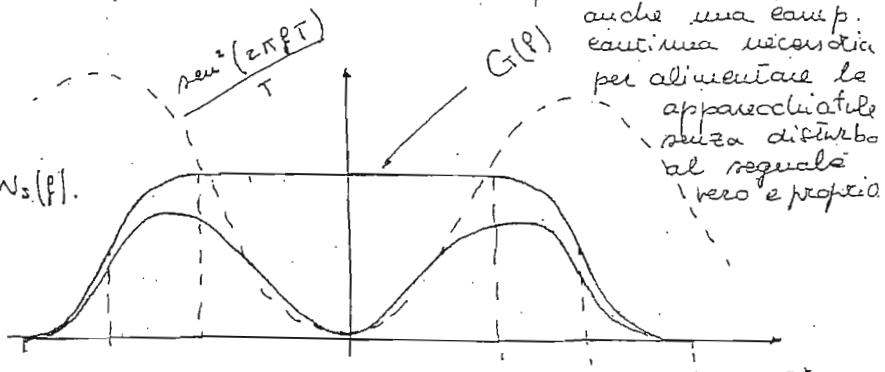
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi f T)$$

Se  $p(t)$  è  
un segnale  
realizzato  
 $|P(f)|^2 = G(f)$

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2 = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi f T)\right)}{T} G(f) =$$

quindi:

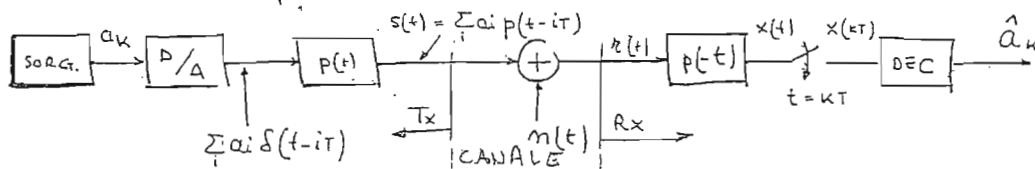
Il codificatore  
ha sagomato  $W_s(f)$ .



## MODULAZIONE PAM M-ARIA

#40

Il sistema può essere schematizzato nel modo seguente



Sia  $a_k$  il simbolo tratto da un alfabeto  $A$  di  $M$  simboli

$$a_k \in A = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm (M-1)\}$$

indipendenti ed equivalenti.

$$(x(kT) = a_k g_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i [(k-i)T] + m_1(kT))$$

$$x(t) = \sum_i a_i g(t - iT) + m_1(t)$$

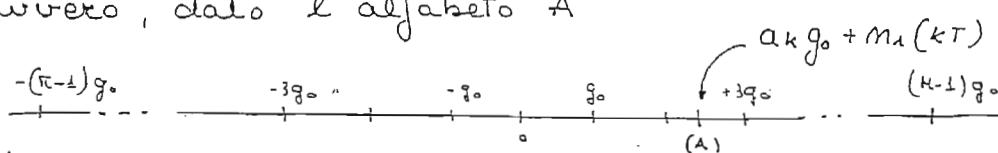
$m_1(t)$ , attenuato dal filtraggio di  $m(t)$ , è garantito a media nulla, con varianza

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = \frac{N_0}{2} g_0 = \frac{N_0 E_p}{2}$$

E' necessario capire come carinuire il "decidere" affinché, sulla base di  $x(kT)$ , venga determinata  $a_k$ . La varianza di ricezione

$$x(kT) = a_k g_0$$

avranno, dato l'alfabeto  $A$



Se ricevere  $m_1(t)$  fa in modo che  $x(kT)$  cada all'interno degli intervalli considerati, ad esempio in (A). Il decidere dunque avrà M-2 soglie  $\lambda_i$ .

Se gli eventi fossero equiprobabili si può scegliere come soglia il punto medio fra i due simboli.

Logicamente a seconda della "caratteristica" di simboli alcuni di essi risulteranno più protetti di altri.

Nel caso generale quindi si usa un DECODERE a M-2 SOGIE. Calcoliamo la PROBABILITÀ DI ERRORE SU SIMBOLI in sostanza sappiamo che, per definizione

$$P_s \left( \text{probabilità di errare su simbolo} \right) = P(\hat{a}_k \neq a_k) =$$

$$= \sum_{\alpha \in A} P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = \alpha) P(a_k = \alpha)$$

Teorema della Probabilità Totale. 141

Probabilità di errare condizionata alla trama del carattere qualiasi  $\alpha \in A$

Se i simboli sono equiprobabili

$$P(a_k = \alpha) = \frac{1}{M}$$

$$= \boxed{\frac{1}{M} \sum_{\alpha \in A} P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = \alpha)} \quad (14.1)$$

Supponiamo  $\alpha$  interno, ovvero  $\alpha \neq M-1$  e  $\alpha \neq -(M-1)$ :

$$P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = \alpha) =$$

$$= P\left\{ x_{(KT)} > (\alpha+1)g_0 | a_k = \alpha \right\} + P\left\{ x_{(KT)} < (\alpha-1)g_0 | a_k = \alpha \right\}$$

Sono eventi disgiunti che è impossibile che  $x_{(KT)}$  sia contemporaneamente maggiore di una soglia e minore di un'altra più piccola.

$$= P\left\{ \alpha g_0 + M_1(KT) > (\alpha+1)g_0 \right\} +$$

$$+ P\left\{ \alpha g_0 + M_1(KT) < (\alpha-1)g_0 \right\} =$$

$$P\left\{ M_1(KT) > g_0 \right\} + P\left\{ M_1(KT) < -g_0 \right\} =$$

dividendo per  $\sigma$  otteniamo la gaussiana STANDARD  $\frac{x_{(KT)} - \mu}{\sigma}$

$$= P\left\{ \frac{M_1(KT)}{\sigma} > \frac{g_0}{\sigma} \right\} + P\left\{ \frac{M_1(KT)}{\sigma} < -\frac{g_0}{\sigma} \right\}$$

$$= 2 P\left\{ \frac{M_1(KT)}{\sigma} > \frac{g_0}{\sigma} \right\} = 2 Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$$

Sostituendo ad  $x_{(KT)}$  la sua espressione che tiene conto di  $\alpha$ , avremo  $x_{(KT)} = \alpha g_0 + M_1(KT)$ . Inserisco la condizione  $a_k = \alpha$  nell'evento ①,  $\Rightarrow$  poniamo togliere il condizionamento.

(14.2)

tenendo  $M_1(KT)/\sigma$  gaussiana la prob che sia maggiore è uguale a quella che sia minore (per simmetria)

Supponiamo ora che  $\alpha$  sia un ESTREMO; poniamo  $\alpha = M-1$ , perché il caso  $\alpha = -(M-1)$  è identico con uguale probabilità.

# Probabilità d'errore per M simboli

$$P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = M-1) = P(x_{(kT)} < (M-2)g_0 | a_k = M-1) = \\ = P\{(M-1)g_0 + m_1(kT) < (M-2)g_0\} = P\{m_1(kT) < -g_0\} = Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$$

142  
14.3

Trovando all'espressione di  $P_s$  data dalla (14.1), inserendo i risultati (14.2) e (14.3) ottieniamo

$$P_s = P(\hat{a}_k \neq a_k) = \frac{1}{M} \left[ \underbrace{(M-2)2Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)}_{M-2 simboli interni} + \underbrace{2Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)}_{due simboli agli estremi} \right] = \\ = \frac{1}{M} Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right) \left[ 2(M-2) + 2 \right] = \boxed{2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)} \quad (14.4)$$

Consideriamo ad esempio il caso di  $M=4$  ; l'alfabeto diviene :

$$\text{Supponiamo che } A = \{\pm 1, \pm 3\}$$

la sorgente produca il

simbolo 1, trasmesso da Tx ricevuto da Rx ; supponiamo

che il decisore commetta un errore e decida per il simbolo -1. In generale i simboli di A derivano da un codice binario ; in base ad una mappa  $M$

si passa dal codice binario al simbolo. In ricezione, in base ad una mappa  $M'$  si passa dal simbolo al codice binario. Se avemmo associato bit e simboli nel modo seguente (MAPPA NATURALE)

all'errore su simbolo

corrispondono DUE errori

sul bit ; vengono erraneamente valutati entrambi i bit

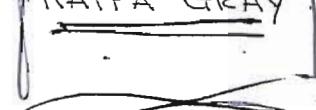
$b_0$  e  $b_1$ .

00	01	11	10 (M. GRAY)
-3	-1	1	3

1	$\rightarrow$	10
3	$\rightarrow$	11
-1	$\rightarrow$	01
-3	$\rightarrow$	00

$b_0 b_1$

Si può pensare che impiegando una mappatura differente ad un errore sul simbolo corrisponda un solo errore sul bit. Questo risultato può essere ottenuto con una MAPPA GRAY



GRAY

La mappa Gray associa a simboli adiacenti configurazioni di bit che differiscono fra loro solo di un bit 143  
ad esempio aseguendo

$$\begin{aligned} -1 &\rightarrow 01 \\ 1 &\rightarrow 11 \end{aligned}$$

Si ha un solo bit che cambia.

Siccome il numero tipicamente è piccolo e a media nulla associando ai simboli una "mappatura Gray" si fa in modo che un errore su bit significhi l'interpretazione di un simbolo come quello adiacente a quello realmente trasmesso.

Osserviamo che la probabilità di errare sul simbolo  $P_s$  equivale al rapporto fra il numero di simboli errati  $N_{SE}$  e quelli trasmessi  $N_{ST}$

$$P_s = 2 \left( 1 - \frac{1}{M} \right) Q \left( \sqrt{\frac{2 \bar{E}_p}{N_0}} \right) = \frac{N_{SE}}{N_{ST}}$$

La probabilità di errare sul bit sarà invece

$$P_b = \frac{N_{BE}}{N_{BT}} = \frac{N_{BE}}{N_{ST} \cdot \log M} =$$

Applicando una Mappa Gray.

$$N_{SE} \approx N_{BE}$$

Allora la probabilità di errare su bit

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{N_{BE}}{N_{BT}} = \frac{N_{SE}}{N_{ST} \log_2 M} \approx \frac{P_s}{\log_2 M} = \\ &= \frac{2}{\log_2 M} \left( 1 - \frac{1}{M} \right) Q \left( \sqrt{\frac{2 \bar{E}_p}{N_0}} \right) \end{aligned}$$

La probabilità d'errore sul bit = prob errore simbolo /  $\log_2 M$   
numero simboli

Un segnale PAM M-ario, può essere scritto come

$$s(t) = \sum_i a_i p(t-iT)$$

ad ogni simbolo sarà associata una Energia

$$a_i p(t-iT) \longrightarrow a_i^2 E_p$$

De mediamente

$$E_s = \mathbb{E} \{ a_i^2 E_p \} = \mathbb{E} \{ a_i^2 \} \bar{E}_p = \frac{M-1}{3} \bar{E}_p$$

per ogni bit invece

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{\frac{M^2 - 1}{3} E_p}{\log_2 M}$$

144

allora

$$E_p = \frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1} E_b$$

La probabilità di errare sul bit diventa:

$$P_b = \frac{2}{\log_2 M} \left( 1 - \frac{1}{M} \right) Q \left( \sqrt{\frac{6 \log_2 M E_b}{(M^2 - 1) N_0}} \right)$$

Prendendo

$$s(t) = \sum_i a_i p(t-iT)$$

$$W_s(f) = \frac{M^2 - 1}{3T} |P(f)|^2$$

Il tempo per trasmettere un bit sarà uguale alla durata dell'intervallo di segnalazione diviso il numero di bit associati a ciascun simbolo

$$T_b = \frac{T}{\log_2 M} \Rightarrow T = T_b \log_2 M$$

La banda del segnale PAM risulta:

$$B_s = \frac{1}{2T} = \frac{1}{2T_b \log_2 M}$$

Si può affermare che l'efficienza spettrale è tanto maggiore quanto maggiore è  $M$ . L'efficienza energetica invece cala all'aumentare di  $M$ .

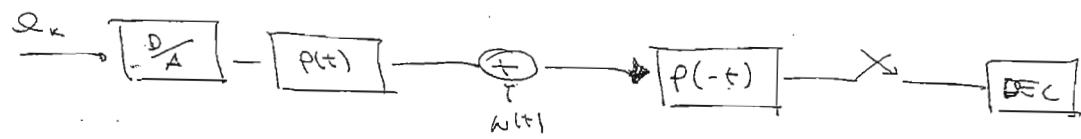
fe ha la prob. sul simbolo come riferire la finore la prob di errore sul bit

$$N_{se} = \text{nr. errori}$$
$$N_{sr} = \text{nr. simboli trasmesi}$$
$$P_s = \frac{N_{se}}{N_{sr}} \approx \frac{N_{se}}{N_{sr} \cdot \frac{1}{\log_2 M}} = P_b \log_2 M$$
$$P_b = P_s / \log_2 M$$

$$N_{sr} = N_{se} \log_2 M$$

$$E_P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{P}(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} g(f) df = f(0) = 1$$

Calcolo dell'errore con obiettivo  $m = \sigma \omega_0$



$$f(t) = p(t) \otimes p(-t)$$

$$f_t = \begin{cases} 1 & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$X(m\tau) = \omega_m + m(\eta\tau)$$

$$\Omega_K \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)\}$$

$$P(\hat{\omega}_m \neq \omega_m) = \sum_{\alpha=\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)\}} P(\hat{\omega}_m \neq \omega_m / \omega_m = \alpha) \underbrace{P(\omega_m = \alpha)}_{\frac{1}{M}} \quad \frac{1}{M} \sum P(\hat{\omega}_m \neq \omega_m / \omega_m = \alpha)$$

mi interessano solo 2 casi, quando  $\alpha$  è interno ( $\alpha = \pm 1$ )

$$P(\hat{\omega}_m \neq \omega_m / \omega_m = \alpha) = P\left(X(m\tau) > \alpha+1 \vee X(m\tau) < \alpha-1 / \omega_m = \alpha\right) \\ = P\left(\begin{array}{l} \alpha+m(m\tau) > \alpha+1 \\ \alpha+m(m\tau) < \alpha-1 \end{array}\right) = P(m(m\tau) > 1 \vee m(m\tau) < -1) = 2P\left(\frac{m(m\tau)}{\sigma} > \frac{1}{\sigma}\right) = 2Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

guardo il caso esterno

$$P(\hat{\omega}_m \neq \omega_m / \omega_m = (M-1)) = P(X(m\tau) > -(M-2) / \omega_m = -(M-1)) = P(-(M-1) + m(m\tau) > -(M-2)) \\ = P(m(m\tau) > 1) = Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

in totale

$$\frac{1}{M} \sum P(\hat{\omega}_m \neq \omega_m / \omega_m = \alpha) = \frac{1}{M} [(M-2)2Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)] = \frac{2}{M}(M-1)Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

probabilità di errore su PAM K-ARIA



ha una simmetrica trasmissione quasi memoria



prendo i bit a coppie

~~00~~ 01 10 11 naturale  
~~00~~ 01 10 11 prima

Cerchiamo di minimizzare le prob di errore sul bit

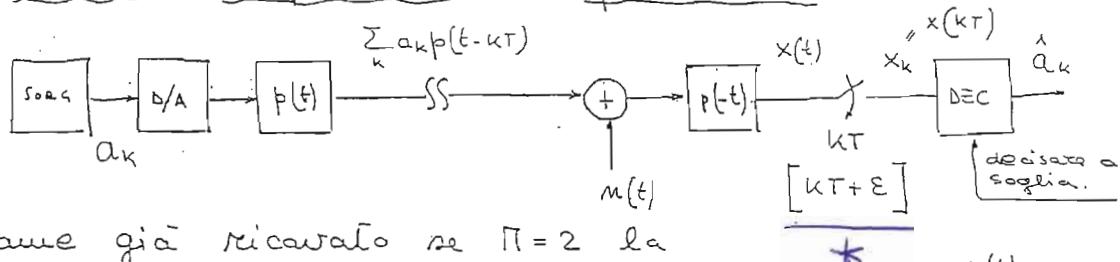
Gray per 3bit	000	001	011	010	110	111	101	100
	000	001	011	010	110	111	101	100
	000	001	011	010	110	111	101	100
	000	001	011	010	110	111	101	100
	000	001	011	010	110	111	101	100

## INTERFERENZA INTERSINBOUCA E PROBABILITA' D'ERRORE 155

Si consideri un sistema binario con alfabeto

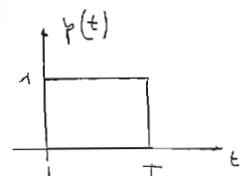
$$a_k \in \{\pm 1\}$$

Consideriamo un impulso  $p(t)$  e supponiamo i simboli indipendenti e equiprobabili.



Come già ricavato se  $N=2$  la probabilità di errare risulta

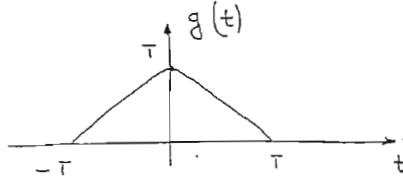
$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2\bar{E}_p}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2T}{N_0}}\right)$$



- Valutiamo il funzionamento del sistema se viene introdotto un ritardo  $\tau$  nel campionamento (avendo supposto la durezza  $T$  dell'impulso pari all'intervalllo di regolazione  $T$ ).

Osserviamo che

$$p(t) \otimes p(t-\tau) \rightarrow \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} \quad g(kT) = \begin{cases} T & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

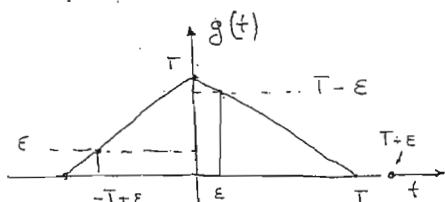


Sappiamo che

$$x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l g(t-lT) + m_a(t)$$

$$x(kT+\epsilon) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l g(kT-lT+\epsilon) + m_a(kT+\epsilon)$$

$$g((kT+\epsilon)-\epsilon) = g((k-\epsilon)T+\epsilon)$$



$$\begin{aligned} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l g[T(k-l)+\epsilon] + M_a(kT+\epsilon) = ? \\ &= a_k g(\epsilon) + a_{k+1} g(-T+\epsilon) + \\ &\quad + a_{k-1} g(T+\epsilon) + \dots + M_a(kT+\epsilon) = \\ &= a_k (T-\epsilon) + \epsilon a_{k+1} + M_a(kT+\epsilon) \end{aligned}$$

Calealiamo la probabilità di errare

146 perché incip

$$\begin{aligned}
 P_b(\varepsilon) &= P(\hat{a}_k \neq a_k) = \\
 &= P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k=1, a_{k-1}=1) \underbrace{P(a_k=1, a_{k-1}=1)}_{\frac{1}{4}} + \\
 &\quad + P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k=1, a_{k-1}=-1) \underbrace{P(a_k=1, a_{k-1}=-1)}_{\frac{1}{4}} + \\
 &\quad + P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k=-1, a_{k-1}=1) \underbrace{P(a_k=-1, a_{k-1}=1)}_{\frac{1}{4}} + \\
 &\quad + P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k=-1, a_{k-1}=-1) \underbrace{P(a_k=-1, a_{k-1}=-1)}_{\frac{1}{4}} = \quad (15.1)
 \end{aligned}$$

Qualtre cosa ne decisore a soglia

$$\begin{aligned}
 P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k=1, a_{k-1}=\alpha) &= \\
 &= P\{X(kT+\varepsilon) < 0 | a_k=1, a_{k-1}=\alpha\} = \\
 &= P\left\{ T - \varepsilon \rightarrow \varepsilon \alpha + m_1(kT+\varepsilon) < 0 \right\} = \\
 &= P\left\{ m_1(kT+\varepsilon) < -[T - \varepsilon \alpha - \varepsilon] \right\} = \\
 &= P\left\{ \frac{m_1(kT+\varepsilon)}{\sigma} < -\frac{T - \varepsilon + \varepsilon \alpha}{\sigma} \right\} = Q\left(\frac{T - \varepsilon + \varepsilon \alpha}{\sigma}\right)
 \end{aligned}$$

dividendo per  $\sigma$  mi ricaduce  
per ad una gauss  
standard.

$$\frac{T}{\sigma} = \frac{T}{\sigma}$$

Analogamente

$$P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k=-1, a_{k-1}=\alpha) = Q\left(\frac{T - \varepsilon - \varepsilon \alpha}{\sigma}\right)$$

Trovando alla (15.1), sostituendo

$$P_b(\varepsilon) = \frac{1}{2} Q\left(\frac{T}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{T - 2\varepsilon}{\sigma}\right)$$

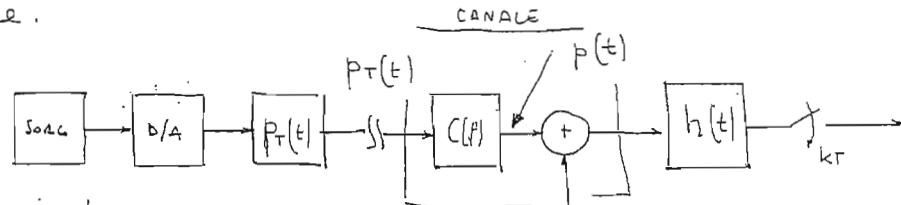
Osserviamo che se  $\varepsilon=0$  mi torna all'espressione  
del caso attimo ( ). Orviamente all'aumentare  
di  $\varepsilon$ , cioè all'aumentare dell' ISI, aumenta la

probabilità di errare.

Se un errore genera ISI: mi spieghi  $\delta$ .

## EQUAUZZAZIONE

Consideriamo ora il comportamento da filtro  $C(f)$  del canale; il sistema può essere schematizzato come segue.



Se l'impulso trasmesso è  $p_T(t)$ ,

passa attraverso il canale  $C(t)$  e ne esce "distorto".

Se il canale è tempo invariante, la  $C(t)$  è data, perciò

$$p(t) = p_T(t) \otimes C(t)$$

Il filtro frontale del ricevitore deve essere ADATTATO a  $p(t)$  anziché a  $p_T(t)$ ; in particolare

$$G(f) = \underbrace{P_T(f) C(f) P^*(f)}_{P(f)} = \frac{\text{Condizione di Nyquist}}{P(f)}$$

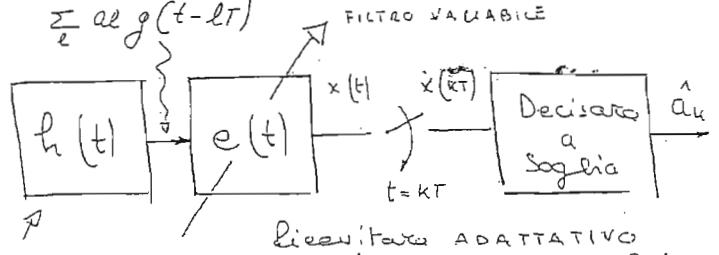
Soddisfacendo la condizione di Nyquist.

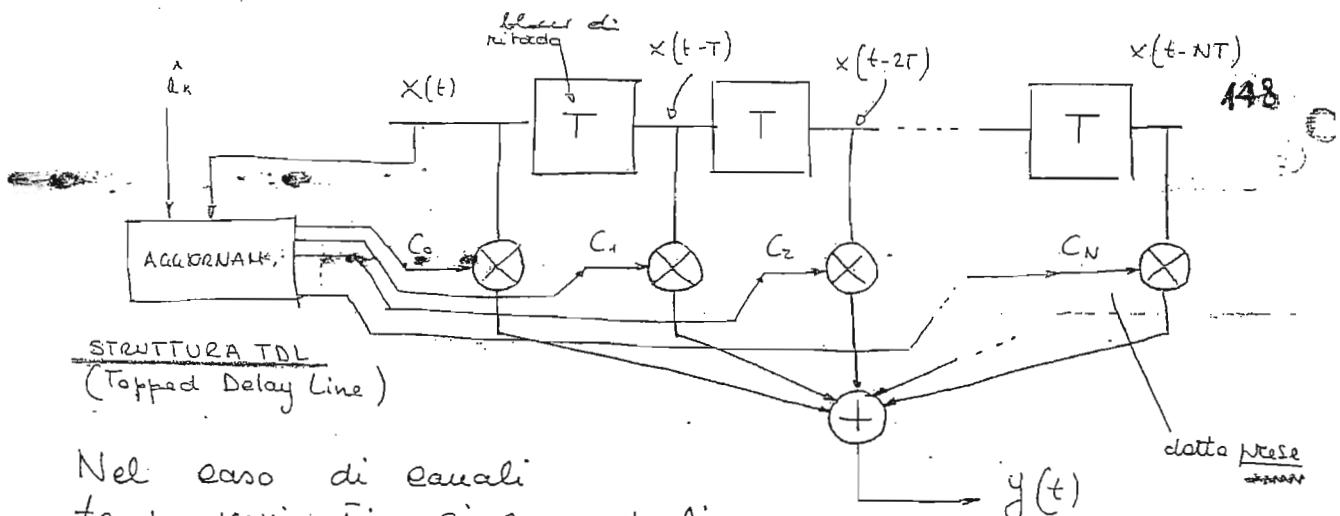
Se il canale non è tempo invariante, non è possibile determinare a priori  $p(t)$  e quindi non è possibile determinare il filtro adattato. In genere allora si considera come ricevitore il seguente:

Il filtro frontale ha una risposta in frequenza  $H(f)$

può essere oppure

ADATTATO all'impulso trasmesso  $p_T(t)$ . Il secondo filtro, detto EQUAUZZATORE, ha una risposta in frequenza variabile dall'esterno. In generale la sua struttura può essere rappresentata come segue.





Nel caso di canali tempo variabili, ci sono degli algoritmi che aggiornano.

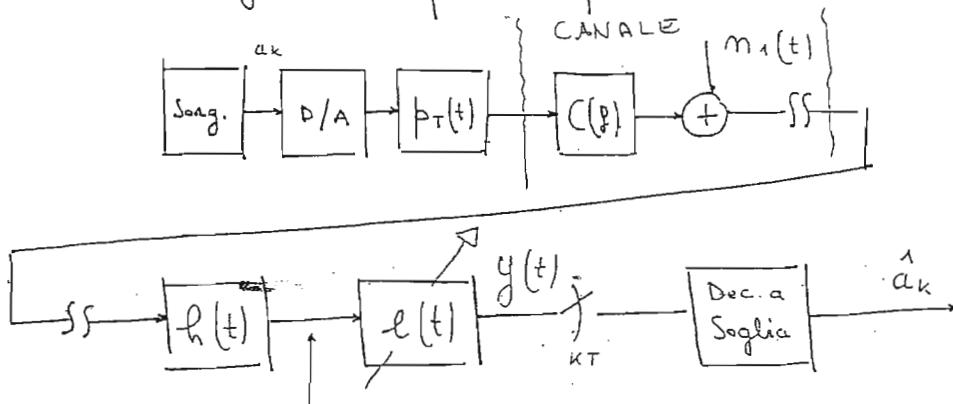
In tempo reale i coefficienti ci in base alle decisioni già prese  $\hat{a}_k$  è al seguente ricevuto e prefiltro.

$$h(t) = \sum e_i S(t - lT)$$

$$E(t) = \sum e_i e^{-\mu lT}$$

### CRITERIO ZERO FORCING

Per il dimensionamento degli equalizzatori esistono diversi criteri fra i quali quello dello zero forcing.



$$x(t) = \sum_l a_l g(t - lT) + m_1(t)$$

L'operazione dell'equalizzatore può essere riassunta come segue.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{k=0}^N c_k x(t - kT) = \\
 &= \sum_{k=0}^N c_k \left\{ \sum_l a_l g(t - lT - kT) + \sum_{k=0}^N c_k m_1(t - kT) \right\} =
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{\ell} a_{\ell} \sum_{k=0}^N c_k g(t - \ell T - kT) + m_2(t) =$$

$$= \sum_{\ell} a_{\ell} q(t - \ell T) + m_2(t) \quad g(kT) = \sum_{\ell} a_{\ell} q[(k-\ell)T] + m_2(kT)$$

Osserviamo che

$$q(t) = \sum_{k=0}^N c_k g(t - kT)$$

con

$$q(mT) = \begin{cases} 1 & m = m_0 \\ 0 & m \neq m_0 \end{cases} = \sum_{k=0}^N c_k g[(m-k)T]$$

$$\Rightarrow y(kT) = a_{k-m_0} + m_2(kT)$$

CONDIZIONE VANTAGGIOSE PER NON AVERE ISI

Dimenziunare il disparitivo di equalizzazione,

significa risalvere infinite equazioni in  $N+1$  incognite. Allora non si ha la soluzione

attina ma solo approssimata

Il criterio dello "zero forcing" guarda solo i campioni precedenti, trascurando completamente il rumore; ciò che succede il più delle volte è che il rumore  $m_2(t)$  ne esce amplificato, con conseguente peggioramento del rapporto S/N.

Per ecalcare  $c_k$  si forzano a ZERO i CAMPIONI

Supponiamo che il filtro frontale abbia espressione

$$g(kT) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0,2 & k=1 \\ -0,1 & k=-1 \\ 0 & |k| \geq 2 \end{cases}$$

il segnale sarà quindi in uscita da e(t)

$$x_k = a_k g(0) + a_{k+1} g(1) + a_{k-1} g(-1) + m_2(t)$$

Sappiamo che

$$q(mT) = \sum_{k=0}^N c_k g[(m-k)T]$$

Supponiamo di volere un equalizzatore a 3 prese

essere  $N=2$ , quindi

150

$$q(mT) = \sum_{k=0}^2 C_k g[(m-k)T] = C_0 g(mT) + C_1 g((m-1)T) + C_2 g((m-2)T)$$

A questo punto mi dava imparare la condizione

$$q(mT) = \begin{cases} 1 & m = m_0 \\ 0 & m \neq m_0 \end{cases}$$

essendo  $m_0$  arbitrario

Allora, prendiamo  $m_0 = 1$ , la condizione diventa

$$q(0) = 0 \quad q(1) = 1 \quad q(2) = 0$$

che mi traduce nelle equazioni

$$\begin{cases} q(0) = C_0 g(0) + C_1 g(-1) + C_2 g(-2) = 0 \\ q(1) = C_0 g(1) + C_1 g(0) + C_2 g(-1) = 1 \\ q(2) = C_0 g(2) + C_1 g(1) + C_2 g(0) = 0 \end{cases}$$

dal quale

$$C_0 = 0,1 \quad (0,096)$$

$$C_1 = 0,96$$

$$C_2 = -0,18 \quad (-0,19)$$

Canc f<sub>2</sub>

Canc f<sub>1</sub>

f<sub>2</sub>

Osserviamo che

$$g(kT) = a_{k-1} + a_{k-3}(-0,1) - 0,1 a_k + m_2(kT)$$

Si verifica ancora sì, ma in maniera attenuata.

$$y(kT) = \sum_l a_l q[(k-l)T] + m_2(kT) =$$

$$= \sum_l a_l \left[ C_0 g[(k-l)T] + C_1 g[(k-l-1)T] + C_2 g[(k-l-2)T] \right] =$$

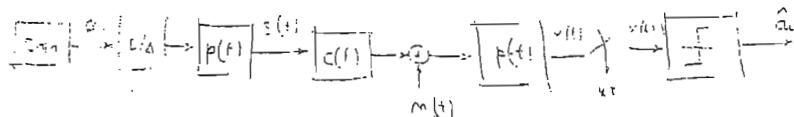
$$\begin{aligned} k-l &= m_0 \Rightarrow l = k-m_0 \\ k-l-1 &= m_0 \Rightarrow l = k-m_0-1 \\ k-l-2 &= m_0 \Rightarrow l = k-m_0-2 \end{aligned}$$

Si consideri il sistema di figura, con

- $a_k \in \{\pm 1\}$  equiprobabili e indipendenti
- l'impulso  $p(t)$  radice di coseno realizzato con  $\alpha$

definiamo anche

$$\begin{aligned} g_N(t) &= p(t) \otimes p(-t) & g_N(k\tau) &= \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \\ g_N(0) &= E_p = 1 \end{aligned}$$



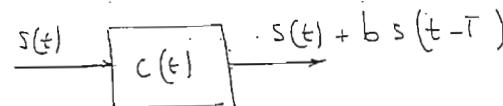
Supponiamo che il canale abbia risposta all'impulso  
 $c(t) = \delta(t)$  (caso IDEALE) piaghetto ricevitore ottimo e prob di errore

la prob. di errore nel caso ideale risulta

$$P_e^{(1)} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

$$\frac{N_0}{2} \xrightarrow{m(t)} \boxed{p(t)} \xrightarrow{\frac{N_0}{2} |p(f)|^2} \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int |P(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} E_p = \frac{N_0}{2}$$

Supponiamo ora che il canale sia REALE modellato dal seguente schema



avranno con una risposta

$$c(t) = \delta(t) + b \delta(t - T) \quad 0 \leq b < 1$$

Il canale ha risposta in frequenza

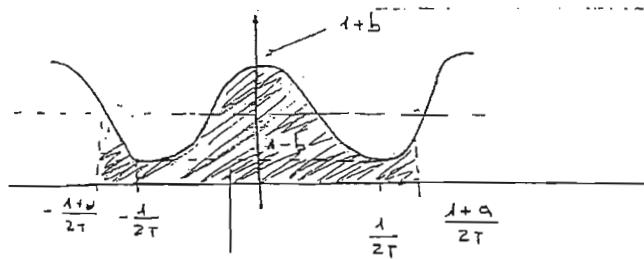
$$\begin{aligned} C(f) &= 1 + b e^{-j2\pi fT} = \sqrt{\frac{1+b^2+2b \cos 2\pi fT + b^2 \sin^2 2\pi fT}{1+b^2+2b \cos 2\pi fT}} \\ &= (1 + b \cos 2\pi fT) + j b \sin 2\pi fT \end{aligned}$$

$$|C(\rho)| = \sqrt{1 +$$

$$= \sqrt{(1+b^2) + 2b \cos(2\pi f)} = \begin{cases} \sqrt{(1+b)^2} = 1+b \\ \sqrt{(1-b)^2} = 1-b \end{cases}$$

L'impulso ha banda (il roll-off  $\alpha$ )

$$B_p = \frac{1+\alpha}{2T}$$

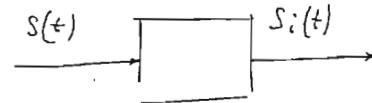


Questa è la zona in cui c'è il segnale utile e, rispetto a rimasta fuori estremamente distinto.)

Osserviamo che

$$s(t) = \sum_i a_i p(t-iT)$$

$$s_i(t) = \sum_i a_i p_R(t-iT)$$



$$\text{con } p_R(t) = p(t) \otimes c(t) = p(t) + b p(t-T)$$

In questo caso c'è ISI, quindi dovreemo cambiare il filtro adattato e il decisore a soglia in uno di Viterbi. Proviamo a lasciare tutto inalterato, analizziamo come degradano le prestazioni.  
Ha uscita dal filtro adattato

$$x(t) = \sum_i a_i g(t-iT) + m_1(t)$$

nella quale

$$\begin{aligned} g(t) &= p_R(t) \otimes p(-t) = p(t) \otimes c(t) \otimes p(-t) = \\ &= g_N(t) \otimes c(t) = g_N(t) + b g_N(t-T) \end{aligned}$$

deve tenere conto nel caso del canale non ideale

Campionando

$$g(kT) = g_N(kT) + b g_N[(k-1)T] = \delta_k + b \delta_{k-1} =$$

$\delta_k$  = delta di Kronecker

$$g(k_T) = \delta_k + b\delta_{k-1} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ b & k=1 \\ 0 & k \neq 0,1 \end{cases}$$

Calcoliamo la probabilità di errore

$$P_b^{(\text{REALE})} = P(a_k \neq \hat{a}_k) = \frac{1}{4} \left[ P(a_k \neq \hat{a}_k | a_k=1, a_{k-1}=1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} P(a_k \neq \hat{a}_k | a_k=1, a_{k-1}=-1) + P(a_k \neq \hat{a}_k | a_k=-1, a_{k-1}=1) \right] \frac{1}{4} \\ + P(a_k \neq \hat{a}_k | a_k=-1, a_{k-1}=-1) \frac{1}{4} = \dots (*)$$

Come già visto in teoria

$$P(a_k \neq \hat{a}_k | a_k=1, a_{k-1}=\alpha) = P(x(k_T) < 0 | a_k=1, a_{k-1}=\alpha) = \\ = P(1+b\alpha + m_1(k_T) < 0) = P(m_1(k_T) < -1-b\alpha) = \\ = Q\left(\frac{1+b\alpha}{\sigma}\right)$$

Analogamente per gli altri termini risolviamo la  $(*)$

$$P_b^{(\text{REALE})} = \left[ Q\left(\frac{1+b\alpha}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1-b\alpha}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1+b\alpha}{\sigma}\right) + \right. \\ \left. + Q\left(\frac{1-b\alpha}{\sigma}\right) \right] \frac{1}{4} =$$

Confrontiamo il caso reale e il caso ideale per  $\alpha=1$

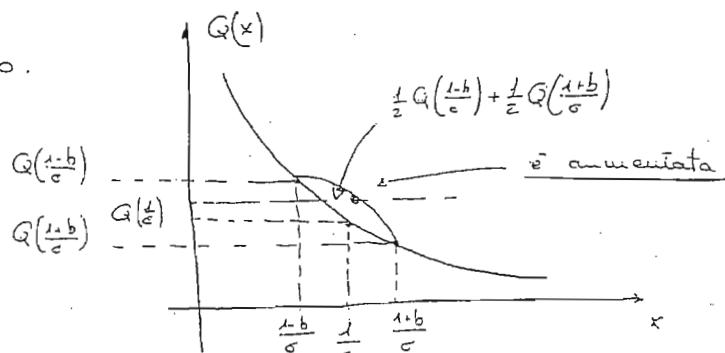
$$P_b^{(\text{ID})} = \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

$$P_b^{(\text{REALE})} = \frac{1}{2} Q\left(\frac{1+b}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1-b}{\sigma}\right)$$

e si osserva un aumento della prob. di errore.

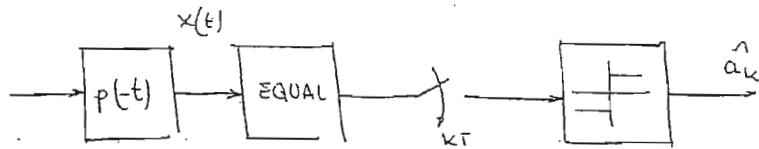
$$\frac{dQ(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{d^2Q(x)}{dx^2} = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



L'aziende esaurire l'intero ricevitore, interviene un equalizzatore (prima o dopo il campionatore è indifferentemente) come segue e decidiamo ancora a soglia

154



Campioniamo con un equalizzatore a due passi.

Sappiamo che

$$y(t) = \sum_i a_i q(t-iT) + m_2(t)$$

con

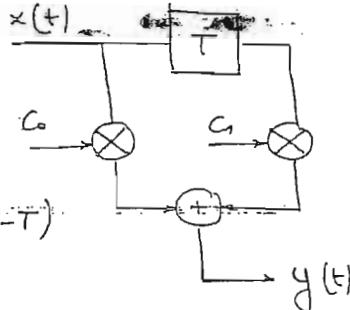
$$q(t) = \sum_{l=0}^1 C_l g(t-lT) = C_0 g(t) + C_1 g(t-T)$$

$$m_2(t) = C_0 m_1(t) + C_1 m_1(t-T)$$

Campionando

$$\begin{aligned} q(kT) &= C_0 g(kT) + C_1 g[(k-1)T] = \\ &= C_0 [\delta_k + b \delta_{k-1}] + C_1 [\delta_{k-1} + b \delta_{k-2}] = \\ &= C_0 \delta_k + (C_0 b + C_1) \delta_{k-1} + C_1 b \delta_{k-2} = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} C_0 & k=0 \\ C_0 b + C_1 & k=1 \\ C_1 b & k=2 \\ 0 & k \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$



Calcoliamo  $C_0$  e  $C_1$  con lo "Zero forcing".

Proviamo i vari casi:

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} q(0) = 0 = C_0 \\ q(T) = 1 = C_1 + C_0 b = C_1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Non va bene perche è} \\ \text{un semplice ritardatore} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} q(T) = 1 \\ q(2T) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_0 b + C_1 = 1 \\ C_1 b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1/b \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q(0) = 1 \\ q(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = -b \end{cases} \Rightarrow q(kT) = \begin{cases} C_0 = 1 & k=0 \\ b - b^k = 0 & k=1 \\ -b^2 & k=2 \\ 0 & k \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

155

$$y(kT) = a_k - b^2 a_{k-2} + m_2(kT)$$

In questo senso si può sperare che le prestazioni siano migliorate; il termine interiore  $a_{k-2}$  è pesato con  $b^2$  e, siccome  $0 < b < 1$ , è diminuito; ciò non basta per sapere se effettivamente l'EQ. è sufficientemente accurata,  $m_2(kT)$  è diverso da  $M_2$ . Attraverso analoghi passaggi si può verificare che

$$P_b^{(\text{EQ})} = \frac{1}{2} Q\left(\frac{1+b^2}{\sigma_2}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1-b^2}{\sigma_2}\right)$$

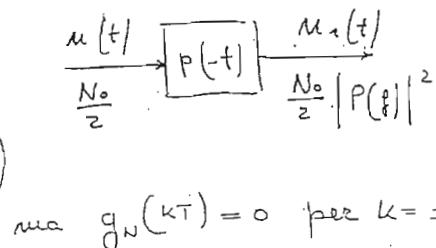
nella quale  $\sigma_2^2$  è la varianza di  $M_2$ .

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= E\{m_2^2(t)\} = E\{\{C_0 M_1(t) + C_1 M_1(t-T)\}^2\} = \\ &= E\{C_0^2 M_1^2(t) + C_1^2 M_1^2(t-T) + 2C_0 C_1 M_1(t) M_1(t-T)\} = \\ &= E\{C_0^2 M_1^2(t)\} + E\{C_1^2 M_1^2(t-T)\} + E\{2C_0 C_1 M_1(t) M_1(t-T)\} = \\ &= \underbrace{C_0^2 E\{M_1^2(t)\}}_{\sigma^2} + \underbrace{C_1^2 E\{M_1^2(t-T)\}}_{\sigma^2 \text{ perche staz. in senso lato e quindi ind. dal. tempo}} + 2C_0 C_1 \underbrace{E\{M_1(t) M_1(t-T)\}}_{R_{M_1}(T)} \end{aligned}$$

$$\frac{N_0}{2} |P(f)|^2 = \frac{N_0}{2} G_N(f)$$

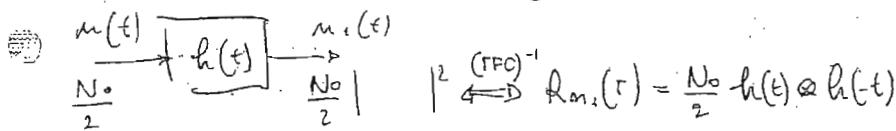
$$\rightarrow \frac{N_0}{2} g_N(n)$$

$$\Rightarrow R_{M_1}(T) = \frac{N_0}{2} g_m(T)$$



ma  $g_N(kT) = 0$  per  $k \neq 1$

$$\Rightarrow R_{M_1}(T) = 0$$



$$|^2 \xrightleftharpoons{(\text{TFC})^{-1}} R_{M_1}(T) = \frac{N_0}{2} h(t) \otimes h(-t)$$

## MODULAZIONI NUMERICHE IN BANDA PASSANTE

156

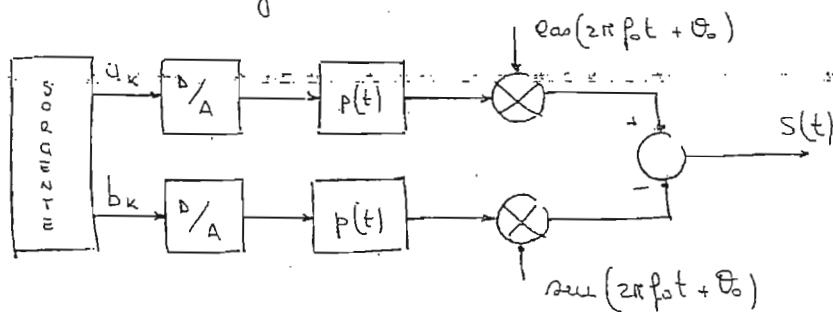
Un segnale modulato numericamente in banda base può essere scritto come

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

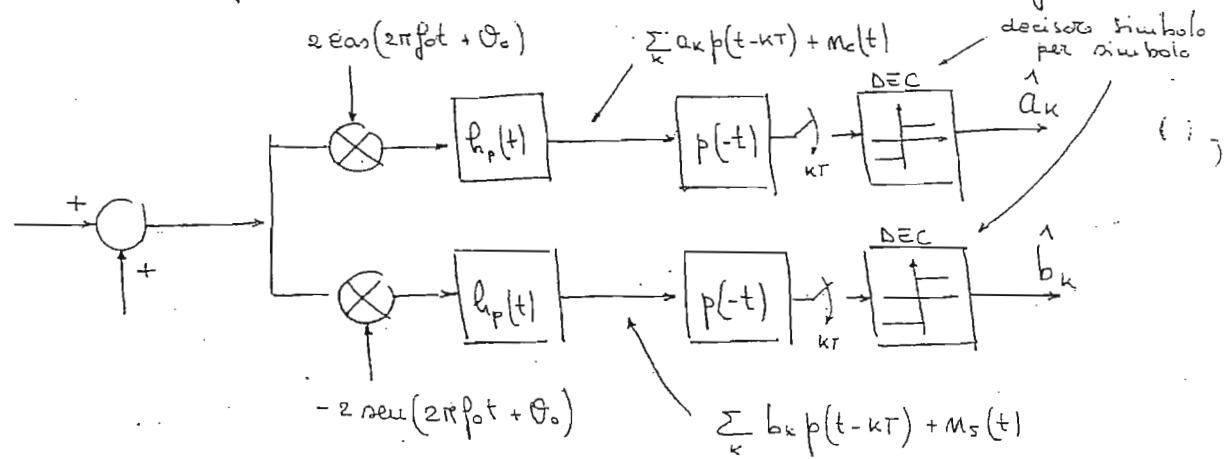
Per la trasmissione in banda passante si generano la componente in fase e quella in quadratura nel modo seguente

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \sum_k b_k p(t - kT) \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Lo schema di un trasmettitore in banda passante risulta il seguente



Il canale introduce un rumore AWGN \$m(t)\$; se ricevitore può essere schematizzato come segue



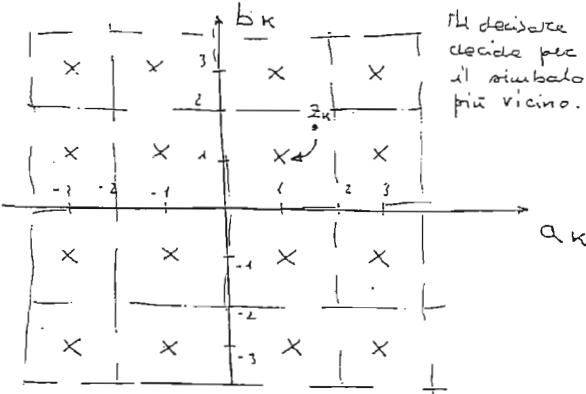
Ne sappiamo due segnali PAM H-ari portante in fase e uno sulla portante in quadratura. Questo tipo di trasmissione si dice QAM (Quadrature Amplitude Modulation). In particolare si parla di \$\Pi^2\$-QAM, nella quale ne hanno due PAM inarie.

L'inviluppo complesso del segnale M<sup>2</sup>QAM risulta 157

$$\begin{aligned}\tilde{s}(t) &= \sum_k a_k p(t-kT) + j \sum_k b_k p(t-kT) = \\ &= \sum_k (a_k + j b_k) p(t-kT) = \\ &= \sum_k c_k p(t-kT)\end{aligned}$$

nella quale  $c_k$  è un simbolo complesso. Si assume che  $a_k$  e  $b_k$  appartengano ad un alfabeto di  $M$  simboli.  $c_k$  va a formare una COSTELLAZIONE DI PUNTI della QUADRATA.

Il decisore può essere indipendente per ciascun ramo; uno decide per il simbolo  $a_k$  e uno per il simbolo  $b_k$ . In questo caso si parla di M<sup>2</sup>-QAM (nella quale  $M$  è il numero di simboli).

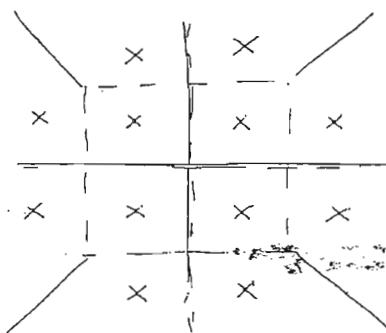


Se invece si scelgono  $a_k$  e  $b_k$  da alfabeti differenti si possono ottenere costellazioni diverse. Un esempio può essere la  $\pi$ -CROSS (a croce).

Sostanza si elimina

no alcuni dei punti della costellazione in particolare quelli sugli angoli della costellazione precedente.

In questo caso il decisore deve essere unico perché deve prendere una decisione esclusiva sui due simboli.



La scelta di una costellazione differente da quella quadrata risulta utile per diversi motivi. Ad esempio la costellazione 12-cross rappresentata in figura, ma ha i punti negli angoli; qui sono i simboli

Così il modulo dell'inviluppo complesso più grande, avendo quelli che per essere trasmessi richiedono la maggiore energia; questa caratteristica può essere sfruttata per minimizzare la potenza del segnale trasmesso.

Un'altra alternativa alla QAM è la "modulazione di fase numerica" PSK (Phase Shift Keying). Così essa rimane esistente il modulo dell'inviluppo complesso e viene modulato l'argomento.

$$s(t) = A_0 \cos[2\pi f t + \theta_k]$$

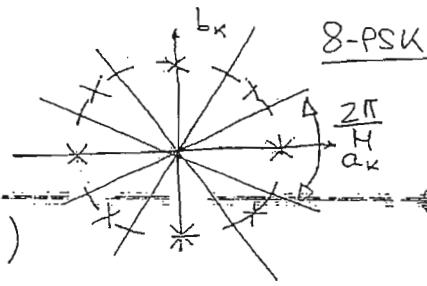
Analogamente si realizza una FSK (Frequency Shift Keying) nella quale

$$s(t) = A_0 \cos[2\pi f_k t + \phi]$$

È una modulazione che risponde alle stesse necessità della modulazione CROSS

QAM  
CROSS } modulazione numeriche LINEARI  
PSK } in banda passante (Combinando il decodatore, per il resto hanno lo stesso schema)

La FSK NON È LINEARE!



in questo caso sarebbe  
non sono indipendenti: