CAPITOLO III

CONTROLLABILITA' E OSSERVABILITA'

- Raggiungibilità e controllabilità per sistemi a tempo continuo
  - caso non stazionario
  - caso stazionario
- Raggiungibilità e controllabilità per sistemi a tempo discreto
  - caso stazionario
- Osservabilità e ricostruibilità per i sistemi a tempo continuo
  - caso non stazionario
  - caso stazionario
- Osservabilità e ricostruibilità per i sistemi a tempo discreto
  - caso stazionario
- Forme standard di raggiungibilità
- Forme standard di osservabilità

- Scomposizione canonica di Kalman
- Forma canonica di controllo
  - caso scalare
  - caso multivariabile

  (Lemma di Brunovski)
- Forma canonica di osservazione
  - caso scalare
  - caso multivariabile

  (Lemma di Brunovski)
- Poli e Zeri
- Stabilità ingresso-uscita dei sistemi lineari a tempo continuo
- Stabilità ingresso-uscita dei sistemi lineari a tempo discreto.

$W^+(t_0,t_1,x_0) = \{x_1 : x_1 = \varphi(t_1,t_0,x_0,u(\cdot)), \forall u(\cdot), t \in [t_0,t_1]\}$

INSIEME DEGLI STATI RAGGIUNGIBILI PARTENDO DA x_0 A t_0 NELL'INTERVALLO $[t_0,t_1]$

Analizziamo ora in dettaglio, per i sistemi LINEARI, a tempo continuo e a tempo discreto, i seguenti argomenti: raggiungibilità, controllabilità ed i relativi problemi; osservabilità, ricostruibilità ed i relativi problemi; scomposizioni e forme canoniche, poli e zeri.

$W^-(t_0,t_1,x_1) = \{x_0 : x_1 = \varphi(t_1,t,x_0,u(\cdot)), \forall u(\cdot), t \in [t_0,t_1]\}$

INSIEME DEGLI STATI CONTROLLABILI AD x_1 TRA t_0 E t_1

RAGGIUNGIBILITA' E CONTROLLABILITA' PER I SISTEMI A TEMPO CONTINUO

- CASO NON STAZIONARIO:

raggiungibilità $\longrightarrow$ raggiungibilità dell'origine

controllabilità $\longrightarrow$ controllabilità all'origine

$$R^+(t_0,t_1,0) = \Big\{\underset{\text{STATI FINALI}}{x_1} : x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,\ u(\cdot)\in U\Big\}$$

EVOLUZIONE FORZATA ($x_0 = 0 \Rightarrow$ EVOLUZIONE LIBERA NULLA)

insieme degli stati raggiungibili dall'evento $(t_0,0)$

PARTO DA x_0 AL TEMPO t_0; AL TEMPO t_1 ARRIVO IN UNO STATO A SECONDA DELL'INGRESSO

$R^+ = R^+(t_0,t_1,x_0) = \{x_1 : x_1 = \varphi(t_1,t_0,x_0,u(\cdot)), \forall u(\cdot)\in U\}$

$$R^-(t_0,t_1,0) = \Big\{ x_0 : \ 0 = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau, \ u(\cdot) \in \mathcal{U}_f \Big\}$$

insieme degli stati controllabili all'evento $(t_1, 0)$

PROPRIETA':

$R^+(t_0,t_1,0)$ e $R^-(t_0,t_1,0)$ sono sottospazi (di $\mathbb{R}^n$).

La proprietà è deducibile direttamente dalle definizioni di $R^+(t_0,t_1,0)$ e $R^-(t_0,t_1,0)$. Un metodo indiretto è quello di mostrare che:

$$R^+(t_0,t_1,0) = \operatorname{im} L$$

dove L è l'operatore <u>lineare</u>:

$$L : \mathcal{U}_f \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$u(\cdot) \longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

Analogamente

$$R^-(t_0,t_1,0) = \operatorname{im} \hat{L}$$

dove $\hat{L}$ è l'operatore <u>lineare</u>:

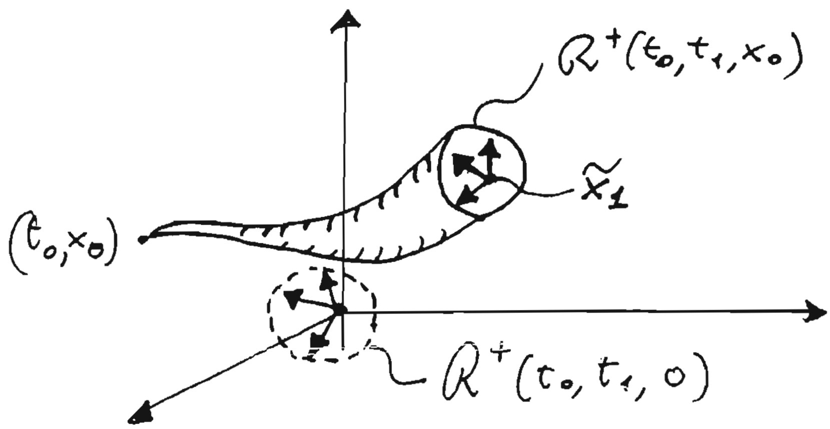
$$\hat{L} : \mathcal{U}_f \to \mathbb{R}^n$$
$$u(\cdot) \longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$
(dim. per esercizio!)

PROPRIETA':

$\forall \tilde{x}_1 \in \mathcal{R}^+(t_0,t_1,x_0)$ e $\forall \tilde{x}_0 \in \mathcal{R}^-(t_0,t_1,x_1)$:

- $\mathcal{R}^+(t_0,t_1,x_0) = \{\tilde{x}_1\} + \mathcal{R}^+(t_0,t_1,0)$
- $\mathcal{R}^-(t_0,t_1,x_1) = \{\tilde{x}_0\} + \mathcal{R}^-(t_0,t_1,0)$

cioè sono VARIETA' LINEARI



Ad esempio dimostriamo che,

$\forall \tilde{x}_0 \in \mathcal{R}^-(t_0,t_1,x_1)$, $\mathcal{R}^-(t_0,t_1,x_1) = \{\tilde{x}_0\} + \mathcal{R}^-(t_0,t_1,0)$

infatti:

$$\mathcal{R}^-(t_0,t_1,x_1) = \left\{x_0 : x_1 = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right\}$$

allora se consideriamo un $x_0 \in \mathcal{R}^-(t_0,t_1,x_1)$

si avrà che:

1.) $x_1 = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u_1(\tau)d\tau$

ma $\forall \hat{x} \in R^-(t_0,t_1,0)$ si ha:

2.) $0 = \Phi(t_1,t_0)\hat{x} + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u_2(\tau)d\tau$

sommando la 1.) e la 2.) si ha:

$$x_1 = \Phi(t_1,t_0)(x_0+\hat{x}) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)\left[u_1(\tau)+u_2(\tau)\right]d\tau$$

per la linearità dello spazio vett. $R^-(t_0,t_1,0)$ si ha l'ipotesi.

LEMMA DEL GRAMIANO

Sia $F(\cdot): [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ continua a tratti. Allora

$$\boxed{\underset{m\times n}{F^T(t)}\underset{n}{x} = 0 \quad \forall t \in [t_0,t_1]}$$

<u>se e solo se</u>

$$\boxed{x \in \ker G(t_0,t_1)}$$

dove

$$\boxed{G(t_0,t_1) := \int_{t_0}^{t_1} F(t)F^T(t)\,dt}$$

(senza dimostrazione, MA IMPORTANTE!!!)

Definizione di GRAMIANO DI RAGGIUNGIBILITA'

Il gramiano di raggiungibilità del sistema $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ è la matrice $n \times n$:

$$\boxed{W_r(t_0,t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\Phi(t_1,\tau)\, B(\tau) B^T(\tau)\, \Phi^T(t_1,\tau)}_{\text{SIMMETRICA}} \, d\tau}$$

$F^T(t)$

dove $\Phi(t_1,\tau)$ è la matrice di transizione.
DELLO STATO

Definizione di GRAMIANO DI CONTROLLABILITA':

Analogamente definiamo il gramiano di controllabilità:

$$\boxed{W_c(t_0,t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)\, B(\tau) B^T(\tau)\, \Phi^T(t_0,\tau) \, d\tau}$$

E' facile verificare che:

$$W_r(t_0,t_1) = \underbrace{\Phi(t_1,t_0)}_{\text{NON SINGOLARE}}\, W_c(t_0,t_1)\, \underbrace{\Phi^T(t_1,t_0)}_{\text{NON SINGOLARE}}$$

$$W_c(t_0,t_1) = \Phi(t_0,t_1)\, W_r(t_0,t_1)\, \Phi^T(t_0,t_1)$$

NON SINGOLARE

$W_r(t_0,t_1)$ NON SINGOLARE $\Longleftrightarrow$

TEOREMA

$$R^+(t_0, t_1, 0) = \text{im } W_R(t_0, t_1)$$

$$R^-(t_0, t_1, 0) = \text{im } W_C(t_0, t_1)$$

DIMOSTRAZIONE (TRACCIA)

Dimostriamo che il sottospazio di raggiungibilità dall'origine, coincide con $W_R(t_0, t_1)$

$$\ker W_R(t_0,t_1) = [\text{im } W_R(t_0,t_1)]^\perp \quad \text{(vedi lucido A.33)}$$

(in quanto $W_R(t_0,t_1)$ simmetrica: $W_R \equiv W_R^T$)

1) $\ker W_R(t_0,t_1)$ non contiene stati raggiungibili dall'origine (esclusa l'origine)

2) $\text{im } W_R(t_0,t_1) \subseteq R^+(t_0,t_1,0)$ $\quad W_R(t_0,t_1)^T = W_R(t_0,t_1)$

Dimostriamo la 1): $\quad \text{Ker } W_R(t_0,t_1)^T = \text{im}(W_R(t_0,t_1))^\perp$

Se è vero per assurdo che $x_1 \in R^+(t_0,t_1,0)$ $\quad$ x_1 SIA RAGGIUNTO DALL'ORIGINE

allora $\exists\, u(\cdot)$ t.c.

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow x_1 \in \ker W_R(t_0,t_1)$$

$\Updownarrow$ per il lemma del gramiano

$$F^T(t)x_1 = B^T(\tau)\Phi^T(t_1,\tau)x_1 = 0 \quad \forall \tau \in [t_0,t_1]$$

ma $x_1^T x_1 = \int_{t_0}^{t_1} u^T(\tau) \underbrace{B^T(\tau)\Phi^T(t_1,\tau)x_1}_{=0} d\tau \quad \Rightarrow x_1 = 0$

quindi:

$$x_1^T x_1 = 0 \quad \text{se e solo se } x_1 = 0$$

quindi $\ker W_r(t_0,t_1)$ non contiene stati raggiungibili dall'origine

<u>Dimostriamo la 2):</u>

$x_1 \in \operatorname{im} W_r(t_0,t_1) \Longleftrightarrow \exists\, \eta_1 \in \mathbb{R}^m$ t.c.

$x_1 = W_r(t_0,t_1)\,\eta_1$ cioè

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\Phi(t_1,\tau)B(\tau)}_{\text{EVOLUZIONE FORZATA}}\, \underbrace{B^T(\tau)\,\Phi^T(t_1,\tau)\,\eta_1}_{u(\tau)}\, d\tau$$

ma questo è un controllo che porta dallo stato "0" allo stato "1" con il controllo $(u(\tau))$

$$B^T(t)\,\Phi^T(t_1,t)\,\eta_1 \Rightarrow x_1 \in \mathcal{R}^+(t_0,t_1,0)$$

quindi dalla 2) risulta: $\mathcal{R}^+(t_0,t_1,0) = \mathcal{R}^+(t_0,t_1,0)\left[\operatorname{im} W_r + (\operatorname{im} W_r)^\perp\right]$

$$\mathcal{R}^+(t_0,t_1,0) = \operatorname{im} W_r(t_0,t_1) + \mathcal{R}^+(t_0,t_1,0) \cap \left(\operatorname{im} W_r(t_0,t_1)\right)^\perp$$

inoltre (dato che W_r è simmetrica ...)

$$\mathcal{R}^+(t_0,t_1,0) = \operatorname{im} W_r(t_0,t_1) + \underbrace{\mathcal{R}^+(t_0,t_1,0) \cap \ker\left(W_r(t_0,t_1)\right)}$$

per quanto visto in 1) questo pezzo è $\equiv 0$

quindi $\boxed{\mathcal{R}^+(t_0,t_1,0) = \operatorname{im} W_r(t_0,t_1)}$ $\square$

NON È DETTO CHE RIESCA A RAGGIUNGERE TUTTI GLI STATI CHE VOGLIO:
GLI STATI DEVONO ESSERE IN $R^+(t_0, t_1, 0) = \operatorname{im} W_r(t_0, t_1)$

Sia $\underline{x_1 \in R^+(t_0, t_1, 0)}$. Allora x_1 è raggiunto al tempo t_1, a partire dall'origine al tempo t_0, con l'ingresso:

$$\boxed{u(t) = B^T(t)\, \Phi^T(t_1, t)\, \eta_1} \quad t \in [t_0, t_1]$$

OTTIMO: MINIMIZZA $\int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|^2 d\tau$ ENERGIA RICHIESTA

dove $\underline{\eta_1 \text{ è una soluzione}}$ di

$$\boxed{W_r(t_0, t_1)\, \eta_1 = x_1}$$

Si noti che è possibile scegliere

$$\eta_1 = W_r^+(t_0, t_1)\, x_1$$

dove $W_r^+(t_0, t_1)$ è la pseudoinversa di $W_r(t_0, t_1)$ [la dimostrazione segue dalla dimostrazione precedente]

Sia $\underline{x_0 \in R^-(t_0, t_1, 0)}$. Allora l'origine è raggiunta al tempo t_1 a partire dallo stato x_0 al tempo t_0 con l'ingresso:

$$\boxed{u(t) = -B^T(t)\, \Phi^T(t_0, t)\, \eta_1} \quad t \in [t_0, t_1]$$

CONTROLLO MIGLIORE PER ARRIVARE ALL'

dove $\underline{\eta_1 \text{ è una soluzione}}$ di

$$\boxed{W_c(t_0, t_1)\, \eta_1 = x_0}$$

e anche qui si può scegliere $\eta_1 = W_c^+(t_0, t_1)\, x_0$

Dimostrazione:

$$W_c(t_0,t_1)\,\eta_1 = x_0$$

in quanto l'immagine di $W_c(t_0,t_1)$ è $R^-(t_0,t_1,0)$

$$x_0 = \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)\,B(\tau)\,B^t(\tau)\,\Phi^t(t_0,\tau)\,d\tau\right]\eta_1$$

quindi

$$-x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)\,B(\tau)\underbrace{\left(-B^t(\tau)\,\Phi^t(t_0,\tau)\,\eta_1\right)}_{\text{lo chiamo } u(\tau)}d\tau$$

$$-x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$-\Phi(t_1,t_0)\,x_0 = \Phi(t_1,t_0)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$0 = \Phi(t_1,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$\square$

NOTA: l'ingresso scelto è

$$\Longrightarrow \quad u(t) = -B^t(t)\,\Phi^t(t_0,t)\,\eta_1$$

PROPRIETA'

C e D NON [s]ONO UTILI

1) $\Sigma(A(t), B(t))$ è completamente raggiungibile su $[t_0, t_1]$ se e solo se

$W_r(t_0, t_1)$ è non singolare

2) $\Sigma(A(t), B(t))$ è completamente controllabile su $[t_0, t_1]$ se e solo se

$W_c(t_0, t_1)$ è non singolare $\quad \operatorname{im} W_c(t_0, t_1) = \mathbb{R}^n$

→ D'altronde

$W_r(t_0, t_1)$ è non singolare

se e solo se

$W_c(t_0, t_1)$ è non singolare

VALE SOLO PER SISTEMI TEMPO CONTINUI

QUINDI

$\Sigma(A(t), B(t))$ è completamente raggiungibile su $[t_0, t_1]$ se e solo se $\Sigma(A(t), B(t))$ è completamente controllabile su $[t_0, t_1]$

RAGGIUNGIBILITÀ COMPLETA $\Longleftrightarrow$ CONTROLLABILITÀ COMPLETA

RAGGIUNGIBILITÀ DALL'ORIGINE $R^+(t_0, t_1, 0) = \operatorname{im} W_r(t_0, t_1)$

CONTROLLABILITÀ ALL'ORIGINE $R^-(t_0, t_1, 0) = \operatorname{im} W_c(t_0, t_1)$

PROPRIETA' (CONTROLLO OTTIMO)

SISTEMA COMPLETAMENTE CONNESSO

Sia $\Sigma(A(t), B(t))$ completamente raggiungibile (controllabile) su $[t_0, t_1]$

$\Updownarrow$

W_R INVERTIBILE

$\forall\, x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, lo stato x_1 è raggiunto al tempo t_1 a partire dallo stato x_0 al tempo t_0, con l'ingresso:

$$\boxed{u(t) = B^T(t)\,\Phi^T(t_1, t)\,W_R^{-1}(t_0, t_1)\left[x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0\right]}$$

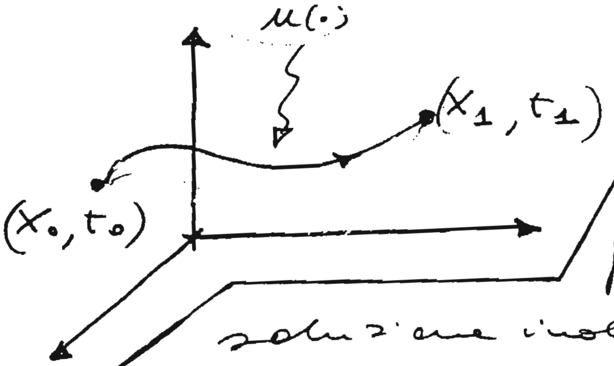
NON SEMPRE INVERTIBILE

$t \in [t_0, t_1]$

alternativamente esprimibile come:

$$\boxed{u(t) = -B^T(t)\,\Phi^T(t_0, t)\,W_c^{-1}(t_0, t_1)\left[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_1\right]}$$

$t \in [t_0, t_1]$



NOTA: le $u(\cdot)$ che determinano le transizioni da (t_0, x_0) a (t_1, x_1) possono essere infinite, la soluzione indicata, associata al gramiano, minimizza l'integrale: $\int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|_2^2 \, d\tau$

DIMOSTRAZIONE: (cenno)

Sappiamo che: $x(t_1) = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$

$$\Rightarrow x(t_1) = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)B^t(\tau)\cdot$$

$$\cdot\Phi^t(t_1,\tau)\cdot \underbrace{W_r^{-1}(t_0,t_1)[x_1-\phi(t_1,t_0)x_0]}_{\text{è costante e lo possiamo portare fuori dall'integ.}} d\tau$$

quindi:

$$x(t_1) = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)B^t(\tau)\cdot\Phi^t(t_1,\tau)d\tau\cdot$$

$$\cdot W_r^{-1}(t_0,t_1)[x_1-\Phi(t_1,t_0)x_0]$$

ma $\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)B^t(\tau)\Phi^t(t_1,\tau)d\tau \underset{\uparrow}{=} W_r(t_0,t_1)$

per definizione

quindi

$$x(t_1) = \Phi(t_1,t_0)x_0 + W_r(t_0,t_1)W_r^{-1}(t_0,t_1)\cdot$$

$$\cdot[x_1-\phi(t_1,t_0)x_0] \equiv x_1$$

per dimostrare la seconda espressione si può procedere così:

Σ COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE $\Longleftrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOTTOSPAZIO}}}{R^+} = \mathbb{R}^n \underset{\substack{\uparrow \\ W_R \text{ NON SINGOLARE} \\ \text{PERCHÉ } \operatorname{im} W_R = \mathbb{R}^n}}{\Longleftrightarrow}$ Σ COMPLETAMENTE CONTROLLABILE $\quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MATRICE}}}{\operatorname{im} W_R} = \operatorname{im} W_C = \mathbb{R}^n$

$$x(t_1) = \phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1,\tau)B(\tau)\Big[-B^T(\tau)\phi^T(t_0,\tau) \cdot$$

$$\cdot W_c^{-1}(t_0,t_1)\big[x_0 - \phi(t_0,t_1)x_1\big]\Big]d\tau$$

$$x(t_1) = \phi(t_1,t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\phi(t_1,t_0)\phi(t_0,t_1)}_{I} \cdot \phi(t_1,\tau) \cdot$$

$$\cdot B(\tau)\Big[B^T(\tau)\phi^T(t_0,\tau)W_c^{-1}(t_0,t_1)\big[x_0 - \phi(t_0,t_1)x_1\big]\Big]d\tau$$

$$x(t_1) = \phi(t_1,t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1,t_0)\phi(t_0,\tau) \cdot B(\tau) \cdot$$

$$\cdot B^T(\tau)\phi^T(t_0,\tau)\,d\tau \cdot W_c^{-1}(t_0,t_1) \cdot$$

$$\cdot\big[x_0 - \phi(t_0,t_1)x_1\big]$$

$$x(t_1) = \phi(t_1,t_0)x_0 - \phi(t_1,t_0) \cdot \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0,\tau)B(\tau) \cdot$$

$$\cdot B^T(\tau)\phi^T(t_0,\tau)\,d\tau \cdot W_c^{-1}(t_0,t_1) \cdot$$

$$\cdot\big[x_0 - \phi(t_0,t_1)x_1\big]$$

$$x(t_1) = \phi(t_1,t_0)x_0 - \phi(t_1,t_0) \cdot \cancel{W_c(t_0,t_1)} \cdot \cancel{W_c^{-1}(t_0,t_1)} \cdot$$

$$\cdot\big[x_0 - \phi(t_0,t_1)x_1\big]$$

$$x(t_1) = \phi(t_1,\cancel{t_0}) \cdot \phi(\cancel{t_0},t_1)x_1 \qquad \square$$

• CASO STAZIONARIO

Studiamo la raggiungibilità e controllabilità per sistemi lineari, tempo continuo, stazion.

$\Sigma \{ \dot{x} = Ax + Bu \}$ o anche detto coppia (A,B)

La matrice di transizione è $\Phi(t_1,t_0) = e^{A(t_1 - t_0)}$

nel seguito fissiamo $t_0 = 0$ e $t_1 = T$

Si ricorda che:

$$\mathcal{R}^+_T(x_0) := \mathcal{R}^+(0,T,x_0)$$

$$\mathcal{R}^-_T(x_1) := \mathcal{R}^-(0,T,x_1)$$

Per quanto già dimostrato:

$\mathcal{R}^+_T(0)$ e $\mathcal{R}^-_T(0)$ sono <u>sottospazi vettoriali</u>

$\mathcal{R}^+_T(x)$ e $\mathcal{R}^-_T(x)$ sono <u>varietà lineari</u>

<u>Definizione di GRAMIANO DI RAGGIUNGIBILITA'</u>

$$\bullet\; W_r(\underset{t_0}{0},\underset{t_1}{T}) = \int_0^{\overset{t_1}{T}} e^{A(T-\tau)} B B^T e^{(T-\tau)A^T} d\tau$$

<u>Definizione di GRAMIANO DI CONTROLLABILITA'</u>

$$\bullet\; W_c(\underset{t_0}{0},\underset{t_1}{T}) = \int_0^{\overset{t_0}{T}} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} d\tau$$

Introduciamo ora la MATRICE DI RAGGIUNGIBILITA'
di Σ o della coppia (A,B):

DIMENSIONE SPAZIO DEGLI STATI

$$R := [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

(è usualmente indicata come MATRICE DI CONTROLLABILITA' [dall'origine]) $R \in \mathbb{R}^{n\times(mn)}$

TEOREMA (di raggiungibilità)

SPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ DALL'ORIGINE NEL TEMPO T

$$\mathcal{R}_T^+(0) = \operatorname{im} R = \operatorname{im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad \forall T>0$$

Dimostrazione:

LEMMA GRAMIANO

$$\ker W_r(0,T) = \{x_1 : B^T e^{A^T(T-t)}x_1 = 0 \ \forall t\in[0,T]\} =$$

$t = T - t'$

$$= \{x_1 : B^T e^{A^T(t)}x_1 = 0 \ \forall t\in[0,T]\}$$

prima di tutto dimostro che:

$$\ker W_r(0,T) \subseteq \ker R^T \qquad R^T = \begin{bmatrix} B^T \\ B^TA^T \\ \vdots \\ B^T(A^{n-1})^T \end{bmatrix}$$

infatti:
se $x_1 \in \ker W_r(0,T)$ allora

$B^T e^{A^T(t)}x_1 = 0$ derivando ambo i membri

$B^T A^T e^{A^T(t)}x_1 = 0$ derivando ancora ottengo

$$B^T (A^T)^i e^{A^T(t)} x_1 = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

quindi $x_1 \in \ker R^T$ in quanto

$$R^T = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix}$$

ora dimostro che $\ker R^T \subseteq \ker W_R(0,T)$

infatti se $x_1 \in \ker R^T$:

$$B^T (A^T)^i x_1 = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

ma per il Teo. di Cayley Hamilton

posso dire che $B^T (A^T)^i x_1 = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$

e dato che $B^T e^{A^T t} x_1 = B^T \left(I + A^T + (A^T)^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right) x_1 \equiv 0$

allora $x_1 \in \ker W_R(0,T)$ $\qquad \forall t \geq 0$

quindi si conclude che: $\ker R^T \equiv \ker W_R(0,T)$

$$\mathcal{R}^+_T(0) = \operatorname{im} W_R(0,T) = (\ker W_R(0,T))^\perp =$$

$$= (\ker R^T)^\perp = \operatorname{im} (R^T)^T = \operatorname{im} R$$

$\square$

con la matrice

$$\min \mathcal{J}(A, \mathrm{im}\, B)$$

indichiamo il <u>PIU' PICCOLO SOTTOSPAZIO INVARIANTE IN A CONTENENTE IL SOTTOSPAZIO im B</u> (oggetto ben definito)

PROPRIETA'

$$\boxed{\mathcal{R}^+_T(0) = \min \mathcal{J}(A, \mathrm{im}\, B)}$$

$AX \subseteq X$

cioè il sottospazio di raggiungibilità è il più piccolo invariante in A contenente l'immagine di B.

Si noti che: $\mathrm{im}\, R = \mathrm{im}\, B + A\, \mathrm{im}\, B + A^2 \mathrm{im}\, B + \dots$
$\dots + A^{n-1} \mathrm{im}\, B$.

Dimostrazione:

prima di tutto dimostriamo che $A(\mathrm{im}\, R) \subseteq \mathrm{im}\, R$

infatti: $A\, \mathrm{im}\, R = A\left(\mathrm{im}\, B + A\, \mathrm{im}\, B + \dots + A^{n-1} \mathrm{im}\, B\right) =$

$= A\, \mathrm{im}\, B + A^2 \mathrm{im}\, B + \dots + A^n \mathrm{im}\, B$

ma $A^n \mathrm{im}\, B \underset{\uparrow}{=} (-a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 I)\, \mathrm{im}\, B \subseteq$

× Teorema Cayley Hamilton

$$\subseteq -a_{n-1} A^{n-1} \mathrm{im} B - a_{n-2} A^{n-2} \mathrm{im} B - \ldots - a_0 I \,\mathrm{im} B =$$

$$= A^{n-1} \mathrm{im} B + \ldots + \mathrm{im} B = \mathrm{im} R$$

ora che si è dimostrata l'invarianza, dimostriamo che è il più piccolo...
infatti sia J un invariante tale che:

$$J : AJ \subseteq J \quad e \quad \underset{\text{CONTIENE}}{J \supseteq} \mathrm{im} B$$

allora

$$A \,\mathrm{im} B \subseteq AJ \subseteq J \quad \text{e iterando fin che occorre}$$

$$A^i \mathrm{im} B \subseteq J \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

quindi

$$\mathrm{im} B + A \,\mathrm{im} B + A^2 \mathrm{im} B + \ldots + A^{n-1} \mathrm{im} B \subseteq J \quad \square$$

$0 = e^{AT} x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau$

STATI CONTROLLABILI ALL'ORIGINE

$x_0 = e^{-AT} \left[\int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau \right]$

$\mathcal{R}_T^+(0)$

TEOREMA

$$\mathcal{R}_T^-(0) = e^{-AT} \mathcal{R}_T^+(0)$$

$\mathcal{R}_T(0)$ INVARIANTE IN A

Dim: ...

TEOREMA (CONSEGUENZA DEL PRECEDENTE)

$$\mathcal{R}_T^-(0) = \mathcal{R}_T^+(0)$$

Dim: ... .

Definizione di SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ (o di controllabilità)

$$\boxed{\mathcal{R} := \operatorname{im} R = \operatorname{im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B]}$$

- Sia $x_1 \in \mathcal{R}$. Allora x_1 è raggiunto al tempo T a partire dall'origine al tempo zero con l'ingresso:

$$\boxed{u(t) = B^T e^{A^T(T-t)} \eta_1 \quad t \in [0, T]}$$

dove η_1 è soluzione di $W_R(0,T)\eta_1 = x_1$

- Sia $x_0 \in \mathcal{R}$. Allora l'origine è raggiunta al tempo T a partire da x_0 al tempo zero con l'ingresso:

$$\boxed{u(t) = -B^T e^{-A^T t} \eta_1 \quad t \in [0,T]}$$

dove η_1 è soluzione di $W_c(0,T)\eta_1 = x_0$

Definizione di SISTEMA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE

$\Sigma(A,B)$ è completamente controllabile se

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}^n.$$

La coppia (A,B) sia completamente controllabile. $\forall\, x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, x_1 è raggiunto al tempo T a partire da x_0 al tempo zero con l'ingresso:

$$u(t) = B^T e^{A^T(T-t)} W_R^{-1}(0,T)[x_1 - e^{AT}x_0] \quad t \in [0,T]$$

anche esprimibile come

$$u(t) = -B^T e^{-A^T t} W_c^{-1}(0,T)[x_0 - e^{-AT}x_1] \quad t \in [0,T]$$

PROPOSIZIONE

(A, B) è completamente controllabile

1. se e solo se

$$\text{rango } R = \text{rango } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$$

2. se e solo se, per qualche T,

$$\text{rango } W_r(0, T) = n$$

3. se e solo se, per qualche T,

$$\text{rango } W_c(0, T) = n$$

4. se e solo se le n righe di

$e^{At}B$ sono linearmente indipendenti su $[0, +\infty)$ sul campo $\mathbb{C}$

alternativamente, se e solo se le n righe di

$(sI - A)^{-1}B$ sono linearmente indipendenti sul campo $\mathbb{C}$

5. se e solo se

$$\text{rango } [sI - A, B] = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$$ o alternativamente $\forall s \in \sigma(A)$.

RAGGIUNGIBILITA' E CONTROLLABILITA' PER I SISTEMI LINEARI A TEMPO DISCRETO

• CASO STAZIONARIO

$$\Sigma \left\{ x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \right. , \quad x(k_0) = x_0$$

la matrice di transizione è $\Phi(k_1, k_0) = A^{k_1 - k_0}$;
nel seguito fissiamo $k_0 = 0$.

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-(j+1)} B\, u(j) = Bu(k-1) + ABu(k-2) +$$

$$x(k) = A^k x_0 + R_k U_k$$

$$R_k := [B, AB, A^2B, \dots, A^{k-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times mk}$$ SIMILE ALLA MATRICE DI CONTROLLABILITÀ, MA K VA MOLTO IN

$$U_k := \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mk}$$ (in senso lato: sequenze di controllo)

$u(k-1)$ ← VETTORE DI m ELEMENTI (INGRESSI ALL'ISTANTE K-1)

Si noti che $R_n = R$ (matrice di controllabilità)

$\mathcal{R}^+_{k_1}(0)$ indica il sottospazio di raggiungibilità in k_1 passi (partendo dall'origine)

TEOREMA

Dim

$\mathcal{R}^+_{k_1}(0) = A^{k_1}\cancel{x(0)} + R_{k_1} U_{k_1}$

$x(k_1) = R_{k_1} U_{k_1}$ ☐

SPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ IN K_1 PASSI

$$\boxed{\mathcal{R}^+_{k_1}(0) = \operatorname{im} R_{k_1}}$$

K_1 PASSI

COROLLARIO

DIMENSIONE SPAZIO STATI

$$\mathcal{R}^+_{k_1}(0) = \operatorname{im} R \qquad \text{con } k_1 \geq n$$

Dimostrazione: segue dal Teor. di Cayley Hamilton (...) $A^n B$ SARÀ COMBINAZIONE LINEARE DELLE PRECEDENTI

Si definisce SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ:

$$\boxed{\mathcal{R}^+(0) := \lim_{k_1 \to +\infty} \mathcal{R}^+_{k_1}(0) = \mathcal{R}^+_n(0)}$$

Sia $x_1 \in \mathcal{R}^+(0)$. E' possibile trasferire lo stato dall'origine a x_1 in n passi con l'ingresso ottenuto:

$$\underline{R U_n = x_1}$$

ad esempio: $\underline{U_n = R^+ x_1}$

più in generale se $x_1 \in \mathcal{R}^+_{k_1}(0)$:

$$R_{k_1} U_{k_1} = x_1 \Rightarrow U_{k_1} = R^+_{k_1} x_1$$

<u>Definizione di sistema COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE:</u>

Il sistema $\Sigma \{ x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

è completamente raggiungibile se

$$\underline{\mathcal{R}^+(0) = \mathbb{R}^n}$$

<u>PROPOSIZIONE</u>

Il sistema $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ è completamente raggiungibile se e solo se

$$\boxed{\text{rango } R = n}$$

<u>PROPOSIZIONE</u>

Esiste un ingresso $\{u(k)\}$ che trasferisce lo stato del sistema Σ da x_0 ad x_1 in un numero finito di passi k_1 se e solo se

$$(x_1 - A^{k_1} x_0) \in \text{im}\, R_{k_1}$$

Dimostrazione:

$$x(k_1) = A^{k_1} x_0 + R_{k_1} U_{k_1}$$

$$x_1 = A^{k_1} x_0 + R_{k_1} U_{k_1}$$

$$x_1 - A^{k_1} x_0 = R_{k_1} U_{k_1}$$

$\square$

COROLLARIO

Sia (A,B) completamente raggiungibile. $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ è possibile trasferire lo stato da x_0 a x_1 in un numero finito di passi. La sequenza d'ingresso è determinabile risolvendo, per k_1 sufficientemente grande, (ma non più di n) l'eq.:

$$\boxed{R_{k_1} U_{k_1} = x_1 - A^{k_1} x_0}$$

RISOLVO IN U_{k_1}

- $\bar{R}_{k_1}(0)$ indica il SOTTOSPAZIO DI CONTROLLABILITA' (all'origine) in k_1 passi

$$\bar{R}_{k_1}(0) = \{x_0 : 0 = A^{k_1} x_0 + R_{k_1} U_{k_1},\ U_{k_1} \in \mathbb{R}^{mk_1}\}$$

x_0 è controllabile all'origine in k_1 passi se e solo se

$$\exists\, U_{k_1} : \quad -A^{k_1} x_0 = R_{k_1} U_{k_1}$$

cioè

$$\exists\, U_{k_1} : \; A^{k_1} x_0 = R_{k_1} (-U_{k_1})$$

OPPURE + PERCHÉ TANTO STO CONSIDERANDO UN QUALSIASI INGRESSO

TEOREMA

$$\boxed{\mathcal{R}^-_{k_1}(0) = A^{-k_1} \mathcal{R}^+_{k_1}(0)}$$

SOTTOSPAZIO DI CONTROLLABILITÀ IN k_1 PASSI ALL'ORIGINE

CONTROLLABILITÀ E RAGGIUNGIBILITÀ NON COINCIDONO

Dimostrazione (cenno):

EVOLUZIONE LIBERA — EVOLUZIONE FORZATA

$$\mathcal{R}^-_{k_1}(0) = \{x_0 : \; 0 = A^{k_1} x_0 + R_{k_1} U_{k_1}\}$$

$$\mathcal{R}^-_{k_1}(0) = \{x_0 : \; x_0 = -A^{-k_1} R_{k_1} U_{k_1}\}$$

e dato che $\mathcal{R}^+_{k_1}(0) = \operatorname{im} R_{k_1}$

$$\mathcal{R}^-_{k_1}(0) = \operatorname{im}(A^{-k_1} \cdot R_{k_1}) \quad \dots \qquad \square$$

NON SEMPRE SINGOLARE

NOTA:

$$A^{-k}\mathcal{X} := (A^k)^{-1}\mathcal{X} = \{y : x = A^k y,\; x \in \mathcal{X}\}$$

$\Rightarrow$ è ben definito anche per A singolare

$$A^{-1} y = (A^T y^\perp)^\perp$$

PROPOSIZIONE

$$\mathcal{R}^-_{k_1}(0) \subseteq \mathcal{R}^-_{k_1+1}(0)$$

PROPOSIZIONE

$$\mathcal{R}^-_{k_1}(0) = \mathcal{R}^-_{n}(0) \quad \text{con } k_1 \geq n$$

COROLLARIO

$$\mathcal{R}^-_{k_1}(0) = A^{-n}\mathcal{R}^+_{n}(0) \quad \text{con } k_1 \geq n$$

- $\mathcal{R}^+ := \mathcal{R}^+_n(0)$ SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ
- $\mathcal{R}^- := \mathcal{R}^-_n(0)$ SOTTOSPAZIO DI CONTROLLABILITÀ

imR

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{R}^- = A^{-n}\mathcal{R}^+}$$

$$\mathcal{R}^+ = A^n \mathcal{R}^- \quad (\text{se } A \text{ singolare})$$

COROLLARIO

$$\mathcal{R}^+ \subseteq \mathcal{R}^-$$

Dimostrazione: segue da $\mathcal{R}^+ = A^n \mathcal{R}^-$, se A è singolare ...

PROPOSIZIONE

Sia A invertibile: allora

$$\boxed{\mathcal{R}^- = \mathcal{R}^+}$$

Dimostrazione:

Se A invertibile $\Rightarrow A^{-n}$ è pure invertibile

$\Rightarrow \mathcal{R}^- = A^{-n}\mathcal{R}^+$

$\Rightarrow \dim \mathcal{R}^- = \dim (A^{-n}\mathcal{R}^+) = \dim \mathcal{R}^+$

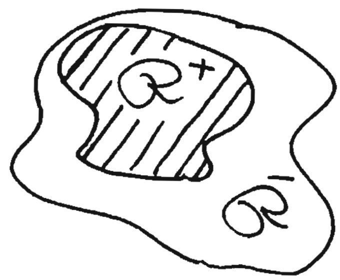
ma $\mathcal{R}^+ \subseteq \mathcal{R}^-$, quindi $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^-$ $\square$

IN GENERALE: Σ TEMPO DISCRETI

$\{(A,B)_d$ comp. raggiungibile$\}$

$\Downarrow \quad \cancel{\Uparrow}$

$\{(A,B)_d$ comp. controllabile$\}$



Introduciamo ora i gramiani, per i sistemi a tempo discreto.

Definizione di GRAMIANO DI RAGGIUNGIBILITÀ

$$W_r(0,k_1) := \sum_{j=0}^{k_1-1} \Phi(k_1, j+1) B B^T \Phi^T(k_1, j+1)$$

$$W_r(0,k_1) = \sum_{j=0}^{k_1-1} A^{k_1-j-1} B B^T (A^T)^{k_1-j-1}$$

LEMMA

$$W_r(0,k_1) = \sum_{j=0}^{k_1-1} A^i B B^T (A^T)^i = R_{k_1} R_{k_1}^T$$

LEMMA

$$\mathcal{R}^+ = \operatorname{im} W_r(0,k_1) \quad \forall k_1 \geq n$$

Dimostrazione:

$$\operatorname{im} W_r(0,k_1) = \operatorname{im} R_{k_1} R_{k_1}^T = \operatorname{im} R_{k_1} = \operatorname{im} R = \mathcal{R}^+$$

$\operatorname{im}(AA^T) = \operatorname{im} A$

$\square$

- Sia (A,B) completamente raggiungibile.

$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, x_1 è raggiunto al tempo $k_1 \geq n$ a partire da x_0 al tempo 0 con l'ingresso:

$$\boxed{U_{k_1} = R_{k_1}^T W_r^{-1}(0,k_1)(x_1 - A^{k_1} x_0)}$$

verifichiamolo:

$$x(k_1) = A^{k_1}x_0 + R_{k_1}U_{k_1} = \ ?$$

$$? = A^{k_1}x_0 + R_{k_1}R_{k_1}^T W_r^{-1}(0,k_1)(x_1 - A^{k_1}x_0)$$

$$= A^{k_1}x_0 + x_1 - A^{k_1}x_0 = x_1$$

$\square$

Il controllo associato al gramiano è OTTIMO nel senso che:

$$\min_{U_{k_1} \in \mathbb{R}^{mk_1}} \|u(0)\|_2^2 + \|u(1)\|_2^2 + \ldots + \|u(k_1-1)\|_2^2$$

con il vincolo

$$x_1 = A^{k_1}x_0 + R_{k_1}U_{k_1}$$

Quando A è NON SINGOLARE si può definire il GRAMIANO DI CONTROLLABILITA':

$$W_c(0,k_1) := \sum_{j=0}^{k_1-1} \phi(0,j+1)BB^T\phi^T(0,j+1)$$

$$W_c(0,k_1) := \sum_{j=0}^{k_1-1} A^{-(j+1)}BB^T(A^T)^{-(j+1)}$$

Si verifica che:

$$W_r(0,k_1) = A^{k_1}W_c(0,k_1)(A^T)^{k_1}$$

POSSIBILITÀ DI RICOSTRUIRE LO STATO DEL SISTEMA A PARTIRE DA UN PEZZO DELL'USCITA E DELL'INGRESSO

OSSERVABILITA' E RICOSTRUIBILITA' PER I SISTEMI LINEARI A TEMPO CONTINUO

• **CASO NON STAZIONARIO**

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) & , x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

l'insieme degli STATI INIZIALI COMPATIBILI con $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y|_{[t_0,t_1]}$ è:

INSIEME STATI INIZIALI

$$\underline{\bar{Q}(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))} = \Big\{ x_0 : \underline{y}(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\underline{u}(\tau)\,d\tau + D(t)\underline{u}(t), \ \forall t \in [t_0,t_1] \Big\}$$

$y(t) = y_L(t) + y_F(t)$ (risposta libera più risposta forzata)

quindi $\boxed{y_L(t) = y(t) - y_F(t)}$

vale quindi:

$$Q^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)) = Q^-(t_0,t_1,0,y_L(\cdot))$$

L'insieme degli <u>STATI FINALI COMPATIBILI</u>

con $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y|_{[t_0,t_1]}$ è:

INSIEME

$$Q^+(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)) = \Big\{x_1 : x_1 = \phi(t_1,t_0)x_0 + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau,\ x_0 \in Q^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))\Big\}$$

dato che $y_L(t) = y(t) - y_F(t)$, $t \in [t_0,t_1]$

Valgono:

- $$Q^+(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)) = \Phi(t_1,t_0)Q^-(t_0,t_1,0,y_L(\cdot)) + \\ + \Big\{\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau\Big\}$$

- $$Q^+(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)) = Q^+(t_0,t_1,0,y_L(\cdot)) + \\ + \Big\{\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau\Big\}$$

Definizione di SOTTOSPAZIO DI INOSSERVABILITA'

$Q^-(t_0, t_1, 0, 0)$ è detto sottosp. di inosservabilità, o sottospazio degli stati inosservabili.

(ingressi ed uscite identic. nulli)

Definizione di SOTTOSPAZIO DI NON RICOSTRUIBILITA'

$Q^+(t_0, t_1, 0, 0)$ è detto sottosp. di non ricostruibilità o sottosp. degli stati non ricostruibili.

Definizione di GRAMIANO di OSSERVABILITA'

$$W_o(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0)\, C^T(\tau)\, C(\tau)\, \Phi(\tau, t_0)\, d\tau$$

Definizione di GRAMIANO di RICOSTRUIBILITA'

$$W_{rc}(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_1)\, C^T(\tau)\, C(\tau)\, \Phi(\tau, t_1)\, d\tau$$

$$W_o(t_0,t_1) = \Phi^T(t_1,t_0)\, W_{rc}(t_0,t_1)\, \Phi(t_1,t_0)$$

$$W_{rc}(t_0,t_1) = \Phi^T(t_0,t_1)\, W_o(t_0,t_1)\, \Phi(t_0,t_1)$$

TEOREMA

$$Q^-(t_0,t_1,0,0) = \ker W_o(t_0,t_1) \quad \text{(insieme inosserv.)}$$

$$Q^+(t_0,t_1,0,0) = \ker W_{rc}(t_0,t_1) \quad \text{(ins. non ricost.)}$$

Dimostrazione:

$$Q^-(t_0,t_1,0,0) = \Big\{ x_0 : \underbrace{y(t)}_{0} = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + $$

$$+ C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\underbrace{u(\tau)}_{0}\, d\tau + D(t)\underbrace{u(t)}_{0} \Big\} =$$

$$= \Big\{ x_0 : 0 = \overbrace{C(t)\Phi(t,t_0)}^{F^T(t)}x_0 \Big\}$$

ma per il lemma del gramiano:

$$x_0 \text{ t.c. } F^T(t)x_0 = 0 \quad \forall t \in (t_0,t_1)$$

$$\Updownarrow$$

$$x_0 \in \ker G(t_0,t_1)$$

cioè $x_0 \in \ker \Big\{ \int_{t_0}^{t_1} F(t)F^T(t)\, d\tau \Big\} =$

$= \ker \Big\{ \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)\, d\tau \Big\} =$

$= \ker \{ W_o(t_0,t_1) \}$. In modo analogo si dimostra il secondo punto. □

COROLLARIO

$$Q^+(t_0, t_1, 0, 0) = \Phi(t_1, t_0) \ker W_0(t_0, t_1)$$

Definizione di SISTEMA COMPLETAMENTE OSSERVABILE e SIST. COMP. RICOSTRUIBILE

$\Sigma(C(t), A(t))$ è completamente osservabile nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se
$Q^-(t_0, t_1, 0, 0) = \{0\}$
SOTTOSPAZIO DI INOSSERVABILITÀ
$\Sigma(C(t), A(t))$ è completamente ricostruibile nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se $Q^+(t_0, t_1, 0, 0) = \{0\}$
SOTTOSPAZIO DI NON RICOSTRUIBILITÀ

PROPRIETA'

1) $\Sigma(C(t), A(t))$ è completamente osservabile su $[t_0, t_1]$ se e solo se

$W_0(t_0, t_1)$ è non singolare cioè $\ker W_0(t_0, t_1) = \{0\}$

2) $\Sigma(C(t), A(t))$ è completamente ricostruibile su $[t_0, t_1]$ se e solo se

$W_{rc}(t_0, t_1)$ è non singolare

3) $W_0(t_0, t_1)$ è non singolare se e solo se $W_{rc}(t_0, t_1)$ è non singolare.

PROPRIETA' SOLO PER TEMPO CONTINUO!

$\Sigma_1 (C(t), A(t))$ è completamente osservabile su $[t_0, t_1]$ se e solo se $\Sigma_1 (C(t), A(t))$ è completamente ricostruibile su $[t_0, t_1]$

Sia $\Sigma_1 (C(t), A(t))$ completamente osservabile su $[t_0, t_1]$.

Dati $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y_{[t_0,t_1]}$ relativi a Σ_1 si vuole determinare lo stato iniziale x_0:

1) Si determina la risposta libera $y_L(t)$:

$$y_L(t) = y(t) - C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau - D(t)u(t)$$

COMPONENTI FORZ

2) $\{x_0\} = Q^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) = Q^-(t_0, t_1, 0, y_L(\cdot))$

$$\boxed{x_0 = W_0^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0)\, C^T(\tau)\, y_L(\tau)\, d\tau}$$

(come verifica si sostituisce a $y_L(\tau)$ il suo valore cioè $y_L(\tau) = C(\tau)\Phi(\tau, t_0)x_0 \ldots$)

Più in generale se Σ non è completamente osservabile, vale:

$$\boxed{W_o(t_0,t_1)\,x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)\,C^T(\tau)\,y_L(\tau)\,d\tau}$$

$$Q^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)) = Q^-(t_0,t_1,0,y_L(\cdot)) =$$

$= \{x_0 : (x_0$ soluzione del sistema lineare riportato sopra$)\}$

Una soluzione opportuna è data dalla pseudoinversa di $W_o(t_0,t_1)$:

$$x_0 = W_o^+(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)\,C^T(\tau)\,y_L(\tau)\,d\tau$$

Analizziamo ora il problema della ricostruzione: dati $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y|_{[t_0,t_1]}$ relativi a Σ, si vuole determinare lo stato finale x_1.

Se è già stato risolto il problema di osservazione, allora:

$$x_1 = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \; ;$$

in alternativa si usa il GRAMIANO DI RICOSTRUIBILITA':

1) Si determina la risposta libera $y_L(t)$;

2) $$Q^+(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)) = Q^+(t_0,t_1,0,y_L(\cdot)) + \\ + \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right\}$$

Si osservi che: $$y_L(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 = \\ = C(t)\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,t_1)x_{1L} = \\ = C(t)\Phi(t,t_1)x_{1L}$$

$$W_{rc}(t_0,t_1)x_{1L} = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_1)C^T(\tau)y_L(\tau)d\tau$$

quindi

$$x_{1L} = W_{rc}^{+}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^T(\tau,t_1)\,C^T(\tau)\,y_L(\tau)\,d\tau$$

e infine, lo stato finale:

$$x_1 = x_{1L} + \int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

• CASO STAZIONARIO

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

analizziamo osservabilità e ricostruibilità per sistemi lineari a tempo continuo stazionari

la matrice di transizione è $\Phi(t_1, t_0) = e^{A(t_1 - t_0)}$

con $t_0 = 0$ e $t_1 = T$, $\Phi(0, T) = e^{AT}$

NOTAZIONE INTRODUTTIVA:

$$Q_T^-(u(\cdot), y(\cdot)) := Q^-(0, T, u(\cdot), y(\cdot))$$

$$Q_T^+(u(\cdot), y(\cdot)) := Q^+(0, T, u(\cdot), y(\cdot))$$

$Q_T^-(0,0)$ e $Q_T^+(0,0)$ sono sottospazi (rispettivamente di non osservabilità e non ricostruibilità)

Definizione di GRAMIANO DI OSSERVABILITÀ:

$$W_o(0, T) = \int_0^T e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$$

Definizione di GRAMIANO DI RICOSTRUIBILITÀ:

$$W_{rc}(0, T) = \int_0^T e^{A^T(\tau - T)} C^T C e^{A(\tau - T)} d\tau$$

Introduciamo la MATRICE DI OSSERVABILITA' di Σ o della coppia (C, A)

$$Q := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

SIMILE A $R = [B \; AB \; \cdots \; A^{n-1}B]$

TEOREMA

INSIEME STATI INOSSERVABILI

$$\boxed{Q_T^-(0,0) = \ker Q} \quad \forall T > 0$$

$R^+(0) = \operatorname{im} R$

Dimostrazione (cenno):

$$Q_T^-(0,0) = \ker\{W_o(0,T)\}$$

ma $\tilde{x}_0 \in \ker\{W_o(0,T)\} = \ker\left[\int_0^T e^{A^t\tau} C^t C e^{A\tau} d\tau\right]$

se e solo se $F^T(t)\,\tilde{x}_0 = 0 \;\; \forall t$ (lemma gramiano)

dove $F(t) = C e^{At}$, quindi $C e^{At} \tilde{x}_0 = 0 \;\forall t$

$$\begin{bmatrix} CI \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^n \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}_0 = 0$$

e per Cayley Hamilton: $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x}_0 = 0$ $\square$

Con la notazione:

$$\boxed{\max \mathcal{J}(A, \ker C)}$$

indichiamo il **PIÙ GRANDE SOTTOSPAZIO INVARIANTE IN A, CONTENUTO IN ker C.**

$\hookrightarrow \tilde{x} \in R^{+}(0) \Rightarrow e^{At}\tilde{x} \in R^{+}(0)$

PROPRIETÀ:

$$Q^{-}_{T}(0,0) = \max \mathcal{J}(A, \ker C)$$

Dimostrazione (cenno):

Si nota innanzitutto che

$$Q^{-}_{T}(0,0) = \ker Q = \ker C \cap \ker CA \cap \ldots \cap \ker CA^{n-1}$$

$Q^{-}_{T}(0,0)$ è invariante in A, cioè se $x_0 \in Q^{-}_{T}(0,0) = \ker Q$ allora anche $Ax_0 \in \ker Q$

infatti:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \cdot Ax_0 = 0 \quad \text{(per Cayley Hamilton)}$$

inoltre $Q^{-}_{T}(0,0)$ è ovviamente contenuto in $\ker C$. Se, per assurdo, esiste un sottosp. $\mathbb{K}$ invariante in A e contenuto in $\ker C$ più grande di $Q^{-}_{T}(0,0)$ e $\tilde{x}$ è un suo elemento generico, allora deve essere $C\tilde{x}=0$, inoltre per l'invarianza in A $CA^i\tilde{x}=0$ $\forall i=1,\dots$ quindi $\tilde{x}\in Q^-_T(0,0)=\ker Q$

$\square$

PROPOSIZIONE

INSIEME DI NON RICOSTRUIBILITÀ

$$Q^+_T(0,0)=e^{AT}\,Q^-_T(0,0)$$

INSIEME STATI FINALI COMPATIBILI CON INGRESSO E USCITA NULLI

Dimostrazione

Si era visto che

e^{AT}

$$Q^+(0,T,0,0)=\Big\{x_1 : x_1=\Phi(T,0)x_0+\int_0^T\Phi(T,\tau)B(\tau)\underbrace{u(\tau)}_{=0}\,d\tau\Big\}=\big\{x_1 : x_1=\Phi(T,0)x_0\big\}$$

con $x_0\in Q^-(0,T,0,0)$

$\square$

PROPOSIZIONE SOLO A TEMPO CONTINUO

$$Q^+_T(0,0)=Q^-_T(0,0)$$

DALLA PROPOSIZIONE PRECEDENTE CONSIDERANDO CHE $Q^-_T(0,0)$ È INVARIANTE IN A

$Q^+_T(0,0)\subseteq Q^-_T(0,0)$, MA HANNO LA STESSA DIMENSIONE

$\downarrow$

COINCIDONO

Dimostrazione:

discende dal fatto che $Q^-_T(0,0)$ è invariante in A e $\underset{\text{NON SINGOLARE}}{e^{AT}}=\left(I+AT+\frac{1}{2}A^2T^2+\dots\right)$

$\square$

Definizione di SOTTOSPAZIO DI INOSSERVABILITÀ

$$\mathcal{Q} := \ker Q = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

PROPRIETÀ / DEFINIZIONE

$\Sigma(C, A)$ è COMPLETAMENTE OSSERVABILE se

$$\mathcal{Q} = \{0\}$$ CIOÈ Q HA RANGO MASSIMO

- Per quanto riguarda il problema dell'osservazione dello stato iniziale:

dati $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y|_{[t_0,t_1]}$ si può determinare

$$\mathcal{Q}_T(u(\cdot), y(\cdot)) = \{\tilde{x}_0\} + \mathcal{Q}$$

1) calcolo della risposta libera $y_L(t) = Ce^{At}x_0$

2) $x_0 = W_0^{-1}(0,T)\int_0^T e^{A^T\tau} C^T y_L(\tau)\, d\tau$

(è lo stato iniziale a distanza minima dall'origine $\Rightarrow$ tipo controllo ottimo...)

- Per quanto riguarda il problema di ricostruzione dello stato finale:

dati $u|_{[0,T]}$ e $y|_{[0,T]}$ si può determinare

$$Q^+_T\,(u(\cdot), y(\cdot)) = \{\tilde{x}_1\} + \mathcal{Q}$$

NOTA:

$$x_{1L} = \Phi(t_1,t_0)\,x_0$$
$$x_0 = \Phi(t_0,t_1)\,x_{1L}$$
$$y_L(\tau) = C(\tau)\,\Phi(\tau,t_0)\,x_0$$
$$y_L(\tau) = C e^{(\tau-T)A} x_{1L}$$

1) Calcolo $y_L(t)$

2) $x_{1L} = W_{rc}^{+}(0,T)\displaystyle\int_0^T e^{A^t(\tau-T)}\,C^t\,y_L(\tau)\,d\tau$

$$x_1 = x_{1L} + \int_0^T e^{A(T-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau$$

PROPOSIZIONE

(C,A) è completamente osservabile

1) se e solo se

$$\text{rango } Q = \text{rango}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

2) se e solo se, per qualche T,

$$\text{rango } W_o(0,T) = n$$

3) se e solo se, per qualche T,

$$\text{rango } W_{rc}(0,T) = n$$

4) Se e solo se le n colonne di

$$C e^{At}$$

sono linearmente indipendenti su $[0, +\infty)$ ~~sul~~ campo $\mathbb{R}$ o, alternativamente se e solo se le n colonne di

$$C\,(sI - A)^{-1}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$.

5) Se e solo se

$$\text{rango}\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

$\forall s \in \mathbb{C}$, o alternativamente, $\forall s \in \nabla(A)$

OSSERVABILITA' E RICOSTRUIBILITA' PER SISTEMI A TEMPO DISCRETO

• <u>CASO STAZIONARIO</u>

$$\Sigma \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), & x(0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-(j+1)} B u(j) \quad , k>0$$

$$\begin{cases} y(k) = CA^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-(j+1)} B u(j) + Du(k) & k>0 \\ y(0) = Cx_0 + Du(0) & k=0 \end{cases}$$

Cerchiamo ora l'insieme degli <u>STATI INIZIALI</u> x_0 <u>COMPATIBILI</u> con $\{u(k)\}$ e $\{y(k)\}$, $k = 0, 1, .., k_1-1$

$$U_{0,k_1} := \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(k_1-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mk_1} \qquad Y_{0,k_1} := \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k_1-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pk_1}$$

$u(0)$ ← VETTORE DI m INGRESSI ALL'ISTANTE k=0

$y(0)$ ← VETTORE DI p USCITE ALL'ISTANTE k=0

• $\bar{Q}_{k_1}(U_{0,k_1}; Y_{0,k_1}) = \{x_0 :$ stato iniziale x_0 compatibile con U_{0,k_1} e $Y_{0,k_1}\}$

$$x(k) = A^k x_0 + \left[A^{k-1}B,\ A^{k-2}B, \dots, AB, B\right] \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

EVOLUZIONE LIBERA

$$y(k) = CA^k x_0 + \left[CA^{k-1}B, \dots, CAB, CB\right] \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + Du(k)$$

$$y(k) = CA^k x_0 + \left[CA^{k-1}B, \dots, CAB, CB, D\right] \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(k-2) \\ u(k-1) \\ u(k) \end{bmatrix},\ k \geq 0$$

USCITA DEL SISTEMA ALL'ISTANTE DI CAMPIONAMENTO K

$$Y(k) = CA^k x_0 + \left[CA^{k-1}B, \dots, CB, D\right] \cdot U_{0,k}$$

$$Y(0) = Cx_0 + Du(0) \qquad k=0$$

$$Y(1) = CAx_0 + [CB, D] \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} \qquad k=1$$

$$Y(2) = CA^2 x_0 + [CAB, CB, D] \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} \qquad k=2$$

$(\dots)$

$$Y(k_1-1) = CA^{k_1-1} x_0 + \left[CA^{k_1-2}B, \dots, CB, D\right] \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(k_1-1) \end{bmatrix} \qquad k=k_1-1$$

Y_{0,k_1} EVOLUZIONE LIBERA M_{0,k_1}

quindi possiamo scrivere:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k_1-1) \end{bmatrix}}_{Y_{0,k_1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k_1-1} \end{bmatrix}}_{\substack{Q_{k_1} := \\ \text{matrice} \\ \text{osservabilità!}}} x_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & & \vdots \\ CAB & CB & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{k_1-2}B & \cdots & \cdots & CB & D \end{bmatrix}}_{M_{k_1} :=} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(k_1-1) \end{bmatrix}}_{U_{0,k_1}}$$

per cui

VOGLIO DETERMINARE QUESTO

$$\boxed{Y_{0,k_1} = Q_{k_1} x_0 + M_{k_1} U_{0,k_1}}$$

Si osservi che $Q_n = Q = \{\text{matrice di osservabilità}\}$

conseguentemente:

$$Q^{-}_{k_1}(U_{0,k_1}; Y_{0,k_1}) = \{x_0 : Y_{0,k_1} = Q_{k_1} x_0 + M_{k_1} U_{0,k_1}\}$$

mentre $\tilde{Y}_{0,k_1} := Y_{0,k_1} - M_{k_1} U_{0,k_1}$ è la risposta LIBERA

$$\Rightarrow Q^{-}_{k_1}(U_{0,k_1}; Y_{0,k_1}) = Q^{-}_{k_1}(0, \tilde{Y}_{0,k_1})$$

Prendiamo in considerazione ora l'insieme degli <u>STATI FINALI COMPATIBILI</u> con $\{u(k)\}$ e $\{y(k)\}$ $\quad k=0,1,\dots,k_1-1$

$$\underline{Q^+_{k_1}(U_{0,k_1}, Y_{0,k_1}) = \{x_1 : \text{stato finale } x_1 \text{ compatibile con } U_{0,k_1} \text{ e } Y_{0,k_1}\}}$$

$$Q^+_{k_1}(U_{0,k_1}, Y_{0,k_1}) = \{x_1 : x_1 = A^{k_1} x_0 + \sum_{j=0}^{k_1-1} A^{k_1-(j+1)} B u(j),\ x_0 \in Q^-_{k_1}(U_{0,k_1}, Y_{0,k_1})\}$$

e quindi

$$Q^+_{k_1}(U_{0,k_1}, Y_{0,k_1}) = A^{k_1} Q^-_{k_1}(U_{0,k_1}; Y_{0,k_1}) + \left\{\sum_{j=0}^{k_1-1} A^{k_1-(j+1)} B u(j)\right\}$$

- <u>$Q^-_{k_1}(0,0)$ e $Q^+_{k_1}(0,0)$ sono SOTTOSPAZI</u>
- <u>$Q^-_{k_1}(U_{0,k_1}, Y_{0,k_1})$ e $Q^+_{k_1}(U_{0,k_1}, Y_{0,k_1})$ sono VARIETA' LINEARI</u>

TEOREMA

SOTTOSPAZIO DEGLI STATI INOSSERVABILI È IL $\ker Q_{k_1}$

$$\bar{Q}_{k_1}(0,0) = \ker Q_{k_1}$$

Dimostrazione:

$$\bar{Q}_{k_1}(\underbrace{U_{0,k_1}}_{=0}, \underbrace{Y_{0,k_1}}_{=0}) = \{x_0 : \underbrace{Y_{0,k_1}}_{=0} = Q_{k_1}x_0 + M_{k_1}\underbrace{U_{0,k_1}}_{=0}\}$$

$\square$

COROLLARIO

$$\bar{Q}_{k_1}(0,0) \supseteq \bar{Q}_{k_1+1}(0,0) \quad \forall k_1 \geq 0$$

La dimostrazione segue dalla definizione di $\bar{Q}_{k_1}(0,0)$ ...

PROPOSIZIONE

$$\bar{Q}_{k_1}(0,0) = \ker Q \quad \forall k_1 \geq n$$

La dimostrazione segue da un'applicazione del Teo. di Cayley Hamilton ...

$$Q_{k_1} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k_1-1} \end{bmatrix}$$

Definizione di SOTTOSPAZIO DI INOSSERVABILITÀ

$$\underline{\mathcal{Q}^-} := \lim_{k_1 \to +\infty} \mathcal{Q}^-_{k_1}(0,0) = \mathcal{Q}^-_m(0,0) = \underline{\ker Q}$$

quindi

Σ è completamente osservabile

se $\underline{\mathcal{Q}^- = \{0\}}$

PROPOSIZIONE

Σ è completamente osservabile se e solo se

$$\boxed{\text{rango}\, Q = m}$$

PROPOSIZIONE

$$\mathcal{Q}^+_{k_1}(0,0) = A^{k_1}\, \mathcal{Q}^-_{k_1}(0,0)$$

La dimostrazione segue dall'applicazione delle relazioni più generali già individuate ...

PROPOSIZIONE

$$\mathcal{Q}^+_{k_1}(0,0) = A^n\, \mathcal{Q}^-_m(0,0) \qquad k_1 \geq m$$

Definizione di SOTTOSPAZIO DI NON RICOSTRUIBILITÀ

$$\underline{Q^+} := \lim_{k_1 \to +\infty} Q^+_{k_1}(0,0) = \underline{Q^+_n(0,0)}$$

PROPOSIZIONE

Σ è completamente ricostruibile se

$$Q^+ = \{0\}$$

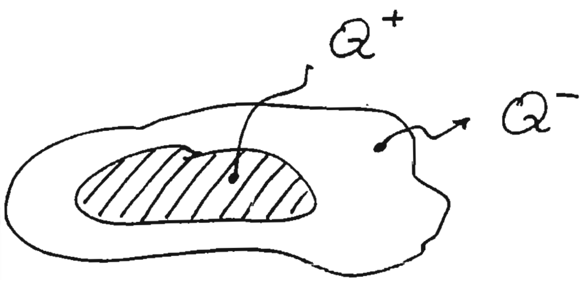
PROPOSIZIONE

$$Q^+ = A^n Q^-$$

COROLLARIO

$$Q^- \supseteq Q^+$$

NON UGUALI PERCHÉ $\dim Q^- \neq \dim Q^+$



La dimostrazione segue dall'invarianza in A di Q^-, infatti

$$A^n Q^- \in Q^- \quad \text{ma} \quad A^n Q^- = Q^+ \qquad \square$$

COMPLETAMENTE OSSERVABILE $\Rightarrow$ COMPLETAMENTE RICOSTRUIBILE

$Q^- = \{0\} \Rightarrow Q^+ = \{0\}$

✱ NON VALE IL VICEVERSA $\quad Q^+ = \{0\},\ Q^- = ?$

PROPOSIZIONE:

Sia A invertibile. Allora

$$Q^- = Q^+$$

> **NOTA**: a differenza del caso a tempo continuo, non è detto che A sia invertibile $\Rightarrow$ non sempre Q^+ e Q^- coincidono.

In generale si ha:

$$\{(C,A)_d \text{ completamente osservabile}\}$$
$$\Downarrow \quad \cancel{\Uparrow}$$
$$\{(C,A)_d \text{ completamente ricostruibile}\}$$

Definizione di GRAMIANO DI OSSERVABILITA':

$$W_o(0,k_1) := \sum_{j=0}^{k_1-1} (A^T)^j C^T C A^j$$

$$Q_{k_1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$$

LEMMA

$$W_o(0,k_1) = Q_{k_1}^T \cdot Q_{k_1}$$

TEOREMA

$$Q^- = \ker W_o(0,k_1) \quad \text{con } k_1 \geq n$$

Analizziamo quindi il problema di osservazione dello stato, dati i set U_{0,k_1} e Y_{0,k_1}, vogliamo determinare x_0

$$Y_{0,k_1} = Q_{k_1} x_0 + M_{k_1} U_{0,k_1}$$

$$Q_{k_1} x_0 = Y_{0,k_1} - M_{k_1} U_{0,k_1}$$

- soluzione con la pseudoinversa di Q_{k_1}:

$$x_0 = Q_{k_1}^{+} \left(Y_{0,k_1} - M_{k_1} U_{0,k_1} \right)$$

- alternativamente, riscriviamo l'equazione:

$$Q_{k_1}^{T} Q_{k_1} x_0 = Q_{k_1}^{T} \left(Y_{0,k_1} - M_{k_1} U_{0,k_1} \right)$$

ovvero:

$$W_0 (0,k_1) x_0 = Q_{k_1}^{T} \left(Y_{0,k_1} - M_{k_1} U_{0,k_1} \right)$$

$$x_0 = W_0^{+}(0,k_1) \, Q_{k_1}^{T} \left(Y_{0,k_1} - M_{k_1} U_{0,k_1} \right)$$

(è la soluzione a norma euclidea minima)

Quando A è non singolare si può definire anche il GRAMIANO DI RICOSTRUIBILITÀ:

$$W_{rc}(0,k_1) := \sum_{j=0}^{k_1-1} (A^T)^{-(j+1)} C^T C A^{-(j+1)}$$

Si può verificare che:

$$W_o(0,k_1) = (A^T)^{k_1} W_{rc}(0,k_1) A^{k_1}$$

TEMPO DISCRETO

$$Q^+ = A^n Q^- \qquad R^+ = A^n R^-$$

ma

$$R^+ = \operatorname{im} R \qquad Q^- = \ker Q \implies R^- = (A^n)^{-1} R^+ \qquad Q^+ = A^n Q$$

immagine inversa

FORMA STANDARD DI RAGGIUNGIBILITÀ

Si consideri un sistema non completamente raggiungibile (a tempo continuo o discreto) STAZIONARIO

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad \Sigma_d \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$R = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ matrice di controllabilità

$\mathcal{R}^+$ o $\mathcal{R}^-$ (sono uguali)

a tempo continuo: $\mathcal{R} = \operatorname{im} R$ (sottospazio di raggiungibilità o controllabilità)

a tempo discreto: $\mathcal{R}^+ = \operatorname{im} R$ (sottospazio di raggiungibilità)

Sia quindi $\dim \mathcal{R}^+ < n$ con $n_R := \dim \mathcal{R}$

Con riferimento a Σ (ma con validità anche per Σ_d) si considera la seguente trasformazione di coordinate nello spazio degli stati $\mathbb{R}^n$:

MATRICE DI CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$$\boxed{x = Tz}$$

NUOVA VARIABILE DI STATO

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare

$$\begin{cases} T\dot{z} = ATz + Bu \\ y = CTz + Du \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{z} = \overbrace{(T^{-1}AT)}^{A_r}z + \overbrace{(T^{-1}B)}^{B_r}u \\ y = \underbrace{(CT)}_{C_r}z + \underbrace{D}_{D_r}u \end{cases}$$

PROPOSIZIONE

Sia $T := [T_1 \,\vdots\, T_2]$ con

$\operatorname{im} T_1 = \mathcal{R}^+$ e $\operatorname{im}[T_1 \,\vdots\, T_2] = \mathbb{R}^n$

COLONNE CHE COMPLETANO T_1 A $\mathbb{R}^n$

Allora

$$A'_r := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B'_r := T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

dove $\quad A_1 \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}, \quad B_1 \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$

DIMENSIONE SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITA'

e la coppia (A_1, B_1) è COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE.

A_2 È LA PARTE NON RAGGIUNGIBILE

$A_2 \in \mathbb{R}^{(n-n_r) \times (n-n_r)}$

NOTA: la coppia (A', B') è indicata quale FORMA STANDARD DI RAGGIUNGIBILITA'.

Esempio

$\mathcal{R}^+ = \operatorname{im} R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \dim \mathcal{R}^+ = 2 \qquad n = 4$

$T = [T_1 \; T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dimostrazione:

$T = [T_1 \,\vdots\, T_2]$ $\quad \mathrm{Im}\,T_1 = \mathcal{R}^+$

Sia $T_1 = [\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_{nr}}_{\text{vettori colonna}}]$ allora la prima relazione matriciale ($AT = TA'_r$) $\quad A_r = T^{-1}AT$ equivale a:

$$A[\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_{nr}}_{\text{appartengono a } \mathcal{R}} \,\vdots\, T_2] \stackrel{?}{=} [\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_{nr}}_{\text{BASE DEL SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ}} \,\vdots\, T_2] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_{12} \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$$

$\mathcal{R}$ è invariante in A: $A\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$

dato che $v_1 \in \mathcal{R}$ $\;Av_1 \in \mathcal{R}$, quindi:

$$\exists\, \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ t.c. } Av_1 = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{nr} v_{nr}}_{\text{comb. lineare di } (v_1, v_2, \dots, v_{nr}) \text{ CHE SONO UNA BASE DI } \mathcal{R}^+}$$

quindi:

$$Av_1 = [v_1, \dots, v_{nr}, T_2] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{nr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n - nr \text{ zeri} \end{array}$$

è la prima colonna della matrice A'_r

Stesso ragionamento vale per Av_i con $i = 2, \dots, nr$ quindi si ottiene la struttura della matrice A'.

A riguardo della struttura di B':

$$B = T\begin{bmatrix} B_1 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè deve essere:}$$

$$B = [v_1, \dots, v_{nr}, T_2] \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

È noto che $\operatorname{im} B \subseteq R = \operatorname{im}[v_1, \dots, v_{nr}]$

Sia $B := [b_1, \dots, b_m]$, allora $\exists \beta_i \in \mathbb{R}$:

$$b_1 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{nr} v_{nr} = [v_1, \dots, v_{nr}, T_2] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{nr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

prima colonna di B' =

analogamente si considera $b_2, b_3, \dots$

Ora proviamo che (A_1, B_1) è completamente raggiungibile.

$\Sigma(A', B')$ $\quad A' = T^{-1}AT$, $B' = T^{-1}B$

$$R' := [B', A'B', \dots, (A')^{n-1}B'] =$$

$$= [T^{-1}B, T^{-1}A\overset{T\cdot T^{-1}}{\vee}B, T^{-1}A^2B, \dots, T^{-1}A^{n-1}B] =$$

$$= T^{-1}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = T^{-1}R$$

$\Rightarrow$ rango R' = rango $R = nr$

$$R' = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} B_1 & A_1 B_1 & A_1^2 B_1 & & A_1^{n-1} B_1 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

Per il teorema di Cayley-Hamilton:

$$\text{rango}\, R' = \text{rango}\left[B_1, A_1 B_1, \ldots, A_1^{n_r-1} B_1, \ldots, A_1^{n-1} B\right] =$$

$$= \text{rango}\left[B_1, A_1 B_1, \ldots, A_1^{n_r-1} B_1\right]$$

$$\Rightarrow \text{rango}\, [\underbrace{B_1, A_1 B_1, \ldots, A_1^{n_r-1} B_1}_{\text{matrice } R_1 \text{ relativa alla coppia } (A_1, B_1)}] = n_r \quad \square$$

NOTA:

$C' := CT = [C_1 \; C_2]$ non ha una struttura particolare $(C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_r})$

Sia $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ con z_1 avente n_r componenti:

$$\begin{cases} \dot z_1 = A_1 z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u \\ \dot z_2 = A_2 z_2 \\ y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + D u \end{cases}$$

essendo $\dot z = A_r z + B_r u$

$$\begin{bmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Σ_1 (stato z_1) è la parte raggiungibile (controllabile)

Σ_2 (stato z_2) è la parte non raggiungibile (incontrollab.)

NOTA: la parte non controllabile non influisce sulla matrice di Trasferimento:

$$\begin{cases} s\hat{z}_1(s) = A_1\hat{z}_1(s) + A_{12}\hat{z}_2(s) + B_1\hat{u}(s) \\ s\hat{z}_2(s) = A_2\hat{z}_2(s) \\ \hat{y}(s) = C_1\hat{z}_1(s) + C_2\hat{z}_2(s) + D\hat{u}(s) \end{cases}$$

da $(sI - A_2)\hat{z}_2(s) = 0 \Rightarrow \hat{z}_2(s) = 0$

quindi

$$\begin{cases} (sI - A_1)\hat{z}_1(s) = B_1\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) = C_1\hat{z}_1(s) + D\hat{u}(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(s) = \left[C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D\right]\hat{u}(s)$$

Vale $\hat{y}(s) = \mathrm{H}(s)\hat{u}(s)$ dove

$$\boxed{\mathrm{H}(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D}$$ matrice di Trasferimento

---

DIGRESSIONE: IMPORTANTE!

$\{$modi di $\Sigma\}$:= sono i modi associati alle radici del polinomio minimo di A. $(m(\lambda))$

Esempio:

- Σ è a tempo continuo con $m(s) = (s+2)^3(s+4)$

$\{\text{modi di } \Sigma\} = \{e^{-2t}, te^{-2t}, t^2e^{-2t}, e^{-4t}\}$

- Σ_d è a tempo discreto con $m(s) = (s+2)^3(s+4)$

$\{\text{modi di } \Sigma_d\} = \{(-2)^k, k(-2)^{k-1}, k(k-1)(-2)^{k-2}, (-4)^k\}$

PROPRIETA'

Ogni elemento di e^{At} (A^k) è una combinazione lineare di modi di Σ (Σ_d).

La dimostrazione è già stata presentata precedentemente.

COROLLARIO

L'evoluzione libera dello stato è una combinazione lineare dei modi di Σ.

(FINE DIGRESSIONE)

$\{\text{spettro degli autovalori controllabili}\} := \nabla(A|_{\mathcal{R}^+})$

$\{\text{spettro degli autovalori incontrollabili}\} := \nabla(A|_{\mathbb{R}^n/\mathcal{R}^+})$

$\nabla(A) = \nabla(T^{-1}AT)$

$\nabla(A_t) = \nabla(A_1) \cup \nabla(A_2)$

$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda \underbrace{I}_{T^{-1}T} - T^{-1}AT)$

$= \det(T^{-1}(\lambda I - A)T) =$

$= \det T^{-1} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det T$

$$A|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$$
$$x \longrightarrow Ax$$

$$A|_{\mathbb{R}^n/\mathcal{R}} : \mathbb{R}^n/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathcal{R}$$
$$\{x\}+\mathcal{R} \longrightarrow \{Ax\}+\mathcal{R}$$

<u>sono trasformazioni lineari</u> (ben definite) quando $\mathcal{R}$ è un sottospazio invariante in A.

Valgono: $$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - T^{-1}AT)$$

<u>$\{$s. autovalori controllabili$\} = \nabla(A_1)$</u>

<u>$\{$s. autovalori incontrollabili$\} = \nabla(A_2)$</u>

Si ricorda che:

$$\nabla(A) = \nabla(A_1) \cup \nabla(A_2)$$

<u>Definizione di MODI CONTROLLABILI DI Σ:</u>

$\{$modi controllabili di $\Sigma\}$:= i modi associati alle radici del polinomio minimo di $A|_{\mathcal{R}}$

<u>Definizione di MODI INCONTROLLABILI DI Σ:</u>

$\{$modi incontrollabili di $\Sigma\}$:= i modi associati alle radici del polinomio minimo di $A|_{\mathbb{R}^n/\mathcal{R}}$

I modi controllabili di Σ (Σ_d) sono le funzioni tipiche di $e^{At}B$ (A^kB)

PROPRIETA'

Ogni elemento di $e^{At}B$ (A^kB) è una combinazione lineare dei modi controllabili di Σ.

FORMA STANDARD DI OSSERVABILITÀ

la trattazione è valida per sistemi a tempo continuo (Σ) e a tempo discreto (Σ_d):

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{matrice di osservabilità}$$

$\mathcal{Q}^+ = \mathcal{Q}^-$

- a tempo continuo: $\mathcal{Q} = \ker Q$ sottospazio di inosservabilità o di non ricostruibilità.
- a tempo discreto: $\mathcal{Q}^- = \ker Q$ sottospazio d'inosservabilità.

Sia $\dim(\ker Q) > 0$: $\quad \gamma(\ker Q) = n - n_o$

$n_o :=$ rango Q, $\quad \dim(\ker Q) = n - n_o$

PROPOSIZIONE

SOTTOSPAZIO DI INOSSERVABILITÀ

Sia $T := [T_1 \,\vdots\, T_2]$ con $\boxed{\operatorname{im} T_2 = \mathcal{Q}^-}$ e

$\operatorname{im}[T_1, T_2] = \mathbb{R}^n$ $\quad (T \in \mathbb{R}^{n \times n})$

Allora:

PARTE OSSERVABILE

$$C_o' := CT = [C_1 \mid 0] \qquad A_o' = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline A_{21} & A_2 \end{array}\right]$$

PARTE INOSSERVABILE $\in \mathbb{R}^{n-n_o \times n-n_o}$

dove $A_1 \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$ PARTE OSSERVABILE

$C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$

<u>e la coppia (C_1, A_1) è completamente osservabile</u>.

La Dimostrazione è simile a quella della forma standard di raggiungibilità. (DA FARE)

- la coppia (C', A') è indicata quale <u>FORMA STANDARD DI OSSERVABILITÀ</u>.
- la matrice $B' := T^{-1}B$ non ha una struttura particolare: $\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} := B'$ con $B_1 \in \mathbb{R}^{n_o \times m}$.
- sia $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \hline z_2 \end{bmatrix}$ con z_1 avente n_o componenti.

Con riferimento specifico <u>ai sistemi a tempo continuo</u>:

$A_o = T^{-1}AT \qquad T = [T_1 \mid T_2] = [T_1 \mid \underbrace{\eta_1 \eta_2 \quad \eta_{n-n_o}}_{\text{BASE DI } Q^-}]$

$A_o = AT \qquad T_2 = \operatorname{im} Q^-$

$[\ldots \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_{n-n_o}] \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} = A [T_1 \; \eta_1 \eta_2 \; \eta_{n-n_o}]$ $\qquad A\eta_1 \in Q^-$ PERCHÈ INVARIANTE

$\Rightarrow A\eta_1 = \sum_{i=1}^{\ldots} \gamma_i \eta_i$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_1 z_1 + B_1 u \\ \dot{z}_2 = A_{21} z_1 + A_2 z_2 + B_2 u \\ y = C_1 z_1 + D u \end{cases}$$

$\overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}$ $s\hat{z}_1(s) = A_1 \hat{z}_1(s) + B_1 \hat{u}(s)$

$s\hat{z}_2(s) = A_{21} \hat{z}_1(s) + A_2 \hat{z}_2(s) + B_2 \hat{u}(s)$

Σ_1 (stato z_1) parte osservabile

Σ_2 (stato z_2) parte inosservabile

- la parte inosservabile non influisce sulla matrice di Trasferimento:

$$H(s) = C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 + D$$

{spettro degli autovalori osservabili} $:= \nabla(A_1) =$

$$= \nabla\left(A|_{\mathbb{R}^n/Q}\right)$$

{spettro degli autovalori inosservabili} $:= \nabla(A_2) =$

$$= \nabla\left(A|_Q\right)$$

{modi osservabili di Σ} := sono i modi associati alle radici del polinomio minimo di $A|_{\mathbb{R}^n/Q}$

{modi inosservabili di Σ} := sono i modi associati alle radici del polinomio minimo di $A|_Q$.

I modi osservabili di Σ sono le funzioni tipiche di Ce^{At} (CA^k)

PROPRIETA'

Ogni elemento di Ce^{At} (CA^k) è una combinazione lineare dei modi osservabili di Σ. (la matrice C mi "filtra" i modi non osservabili...)

COROLLARIO

La risposta libera è una combinazione lineare dei modi osservabili di Σ

SCOMPOSIZIONE CANONICA DI KALMAN

Valido per sistemi a tempo continuo e a tempo discreto.

SUPPONGO IL SISTEMA NON COMPLETAMENTE
- RAGGIUNGIBILE
- OSSERVABILE

$\mathcal{Q}^- = \ker Q \quad , \quad \mathcal{R}^+ = \operatorname{im} R$

$n_r := \dim \mathcal{R} \quad , \quad \dim \mathcal{Q} = n - n_o := n_{\bar{o}}$ PARTE INOSSERVABILE

$n_{r\bar{o}} := \dim(\mathcal{R}^+ \cap \mathcal{Q}^-)$ ($n_{r\bar{o}}$ è la dimensione del sottospazio raggiungibile ma <u>non</u> osservabile)

<u>**PROPOSIZIONE**</u>

Sia $T := [T_1, T_2, T_3, T_4]$ con:

- $\operatorname{im} T_2 = \mathcal{R}^+ \cap \mathcal{Q}^-$
- $\operatorname{im}[T_2, T_4] = \mathcal{Q}^-$ PARTE INOSSERVABILE NON RAGGIUNGIBILE
- $\operatorname{im}[T_1, T_2] = \mathcal{R}^+$
- $\operatorname{im}[T_1, T_2, T_3, T_4] = \mathbb{R}^n$

Allora:

PARTE RAGGIUNGIBILE OSSERVABILE

FORMA STANDARD DI OSSERVABILITÀ

$$A'_k := T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|c|cc} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ \hline 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{array}\right] \qquad B'_k := T^{-1} B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

RAGGIUNGIBILE NON OSSERVABILE

OSSERVABILE NON RAGGIUNGIBILE

FORMA STANDARD DI RAGGIUNGIBILITÀ

INOSSERVABILE NON RAGGIUNGIBILE

$$C'_k := C T = [\, C_1 \mid 0 , C_3 , 0 \,] \qquad D' = D$$

SISTEMA ESTERNAMENTE EQUIVALENTE $\Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix}$

dove:

A_{11}: $(n_R - n_{R\bar{O}}) \times (n_R - n_{R\bar{O}})$ A_{22}: $n_{R\bar{O}} \times n_{R\bar{O}}$

A_{33}: $(n + n_{R\bar{O}} - n_{\bar{O}} - n_R) \times (n + n_{R\bar{O}} - n_{\bar{O}} - n_R)$

A_{44}: $(n_{\bar{O}} - n_{R\bar{O}}) \times (n_{\bar{O}} - n_{R\bar{O}})$

B_1: $(n_R - n_{R\bar{O}}) \times m$

B_2: $n_{R\bar{O}} \times m$

C_1: $p \times (n_R - n_{R\bar{O}})$ C_3: $p \times (n + n_{R\bar{O}} - n_R - n_{\bar{O}})$

Inoltre (A_c, B_c) con:

$$A_c := \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B_c := \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

è <u>completamente raggiungibile</u>, $A_c \in \mathbb{R}^{n_R \times n_R}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_R \times m}$;

la coppia (C_o, A_o) con

$$C_o := [C_1, C_3] \qquad A_o := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

è <u>completamente osservabile</u>

$C_o \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$ $A_o \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$

Infine

(A_{11}, B_1) è completamente raggiungibile

(C_1, A_{11}) è completamente osservabile

Dimostrazione (per esercizio)

Si partizioni il vettore $\mathbf{z}$ conformemente alle partizioni di A'. Con riferimento ai sistemi a tempo continuo:

$$
\begin{cases}
\dot{z}_1 = A_{11} z_1 + A_{13} z_3 + B_1 u \\
\dot{z}_2 = A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + A_{23} z_3 + A_{24} z_4 + B_2 u \\
\dot{z}_3 = A_{33} z_3 \\
\dot{z}_4 = A_{43} z_3 + A_{44} z_4 \\
y = C_1 z_1 + C_3 z_3 + D u
\end{cases}
$$

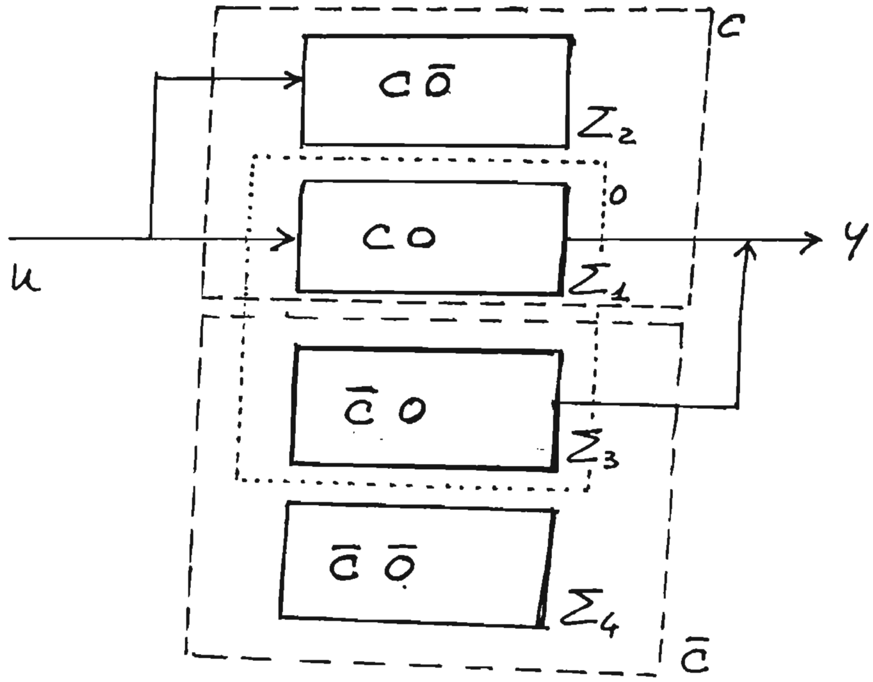
Σ_1 (stato z_1) parte controllabile e osservabile

Σ_2 (stato z_2) parte controllabile ed inosservabile

Σ_3 (stato z_3) parte incontrollabile ed osservabile

Σ_4 (stato z_4) parte incontrollabile ed inosservabile

RAPPRESENTAZIONE A BLOCCHI:



La matrice di trasferimento dipende solo dalla parte controllabile ed osservabile:

$$\Rightarrow \quad \boxed{H(s) = C_1 (sI - A_{11})^{-1} B_1 + D} \quad \Leftarrow$$

$\{$autovalori controllabili e osservabili$\} = \nabla(A_{11})$

$\{$autovalori controllabili ed inosservabili$\} = \nabla(A_{22})$

$\{$autovalori incontrollabili ed osservabili$\} = \nabla(A_{33})$

$\{$autovalori incontrollabili ed inosservabili$\} = \nabla(A_{44})$

FORMA CANONICA DI CONTROLLO

La trattazione che segue è valida per sistemi a tempo continuo che a tempo discreto.
Per comodità ci si riferisce a:

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \text{(sist. stazionari)}$$

La forma canonica di controllo è una particolare rappresentazione interna di Σ in cui sia la matrice di stato che la matrice degli ingressi hanno una struttura particolarmente semplice.

Assunzioni:

(1) $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ha rango massimo

(2) (A, B) è completamente controllabile. LA FACCIO SOLO PER LA PARTE CONTROLLABILE $(A_{11}\ B_1)$

Come facciamo a ricondurci in questo caso se non valgono le assunzioni fatte sopra?

(1) Se rango $B = r < m$, allora esiste una matrice K $m \times m$, non singolare, tale che

$$BK = [B_r, 0] \quad \text{con rango } B_r = r$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + BKK^{-1}u$$

definendo $\begin{bmatrix} u_r \\ u_{m-r} \end{bmatrix} := K^{-1}u$

$$\dot{x} = Ax + [B_r, 0] \cdot \begin{bmatrix} u_r \\ u_{m-r} \end{bmatrix} = Ax + B_r u_r$$

e mi riconduco al caso voluto con la coppia A, B_r

(2) $(A,B) \rightarrow (A', B')$ <u>forma standard di raggiungibilità</u>

$$A' = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e mi riconduco al caso voluto con (A_1, B_1).

<u>A questo punto costruisco le forme canoniche per la coppia</u> (A_1, B_1)

Consideriamo ora separatamente <u>il caso scalare</u> $(m=1)$ dal <u>caso multivariabile</u> $(m>1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad p(\lambda) = (\lambda - 1)\lambda = \lambda^2 - \lambda \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

UN INGRESSO

• CASO SCALARE ($m=1$)

$X = T^{-1} Z$
A DIFFERENZA DI PRIMA ($X = TZ$)

La rappresentazione di Σ in forma canonica di controllo è data da $\Sigma(A_c, B_c, C_c, D_c)$ dove con $A_c := TAT^{-1}$, $B_c := TB$, $C_c := CT^{-1}$, $D_c := D$ e T opportunamente definita, si ottiene:

SCAMBIATE RISPETTO ALLE ALTRE

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ULTIMA RIGA →

UNA COLONNA PERCHÉ 1 INGRESSO

Il polinomio caratteristico di A è:

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0}$$

$P_{A_c}(\lambda) = P_A(\lambda)$ PERCHÉ TRASFORMAZIONE DI SIMILITUDINE

Dimostrazione

$R = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare (per le ipotesi fatte in preced.)

1 COLONNA 1 COLONNA

n COLONNE

definiamo:

$$q := [0 \ldots\ldots 0\ 1] \cdot R^{-1}$$

è l'ultima riga di R^{-1}

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \vdots \\ -\ * \ - \\ -\ q\ - \end{bmatrix}$$

sia $T := \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ allora vale:

$$qA^{i-1}B = 0 \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

$$qA^{n-1}B = 1$$

infatti

$$R^{-1}R = I$$

$$\begin{bmatrix} -\ *\ - \\ \vdots \\ -\ *\ - \\ -\ q\ - \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | & | & & | \\ B & AB & \ldots & A^{n-1}B \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ultima riga}$$

sono matrici colonne

matrice identità

allora:

$$\begin{array}{cc} q \cdot B & qAB \end{array}$$

$$TR = T[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & * \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & * & \cdots & & * \end{bmatrix}$$

qAB →

Termini che non conosco

TRIANGOLARE INFERIORE NON SINGOLARE

si noti che:

$$TR = R_c := [B_c, A_cB_c, \ldots, A_c^{n-1}B_c]$$

$\Longrightarrow T$ è non singolare PERCHÉ TR e R NON SINGOLARI

$$B_c = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{inoltre } A_c = TAT^{-1}$$

cioè $A_c T = TA$, verifichiamo che A_c ha la forma vista:

T → MATRICE DI CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} qA \\ qA^2 \\ \vdots \\ -\alpha_0 q - \alpha_1 qA - \dots - \alpha_{n-1} qA^{n-1} \end{bmatrix}} \stackrel{?}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix} \cdot A}_{\begin{bmatrix} qA \\ qA^2 \\ \vdots \\ qA^n \end{bmatrix}}$$

a questo punto basta dimostrare che:

$$\cancel{q} \cdot (-\alpha_0 I - \alpha_1 A - \dots - \alpha_{n-1} A^{n-1}) = \cancel{q} A^n$$

per il teo. di Cayley Hamilton risulta vera e $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico di A.

$p_A(A) = \dots$

POLINOMIO ANNULLANTE

$p_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda_1 + \lambda_0$

$p_A(A) = 0 \Rightarrow 0 = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A_1 + \lambda_0$

$A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_1 A_1 - \lambda_0$

$\square$

Esistono anche forme canoniche di controllo "alternative":

$$A_{c_1} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & \cdots & \cdots & -\alpha_0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{c_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $\quad T_1 := \begin{bmatrix} q A^{n-1} \\ q A^{n-2} \\ \vdots \\ q \end{bmatrix}$

o anche

$$A_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & & & -\alpha_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_{c_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{c_3} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -\alpha_0 & & & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{c_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- CASO MULTIVARIABILE ($m>1$)

SISTEMA SEMPRE COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE / CONTROLLABILE

R NON QUADRATA => NON INVERTIBILE

$$R=[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \quad n \times (n \cdot m)$$

$$A_c = TAT^{-1} \qquad B_c = TB$$

la matrice di Trasformazione T è costruita come segue:

$$R=[\underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_m}_{B}, \underbrace{Ab_1, \ldots, Ab_m}_{AB}, \ldots, A^{n-1}b_1, \ldots, A^{n-1}b_m]$$

Selezioniamo, partendo da sinistra verso destra, le prime n colonne linearmente indipendenti e le riordiniamo nel seguente modo:

$$\bar{R}=[\underbrace{b_1, Ab_1, \ldots, A^{\mu_1-1}b_1}_{\text{DIPENDONO DA } b_1}, b_2, Ab_2, \ldots, A^{\mu_2-1}b_2, b_m, \ldots, A^{\mu_m-1}b_m] \in \mathbb{R}^{n}$$

INVERTIBILE

Definizione di INDICI DI CONTROLLABILITÀ

Gli m interi μ_i, $i=1,\ldots,m$ sono gli indici di controllabilità di Σ e

$\boxed{\mu := \max_i \mu_i}$ è l'indice di controllabilità di Σ.

definizione alternativa di μ:

$$\underline{\mu = \min k}$$

tale che $\underline{\text{rango}[B, AB, \dots, A^{k-1}B] = n}$

oppure

$$\underline{\mu = \min k}$$

tale che $\underline{\text{rango}[B, AB, \dots, A^{k-1}B] =}$

$$\underline{= \text{rango}[B, AB, \dots, A^{k}B]}$$

Inoltre:

- $\mu_i \geq 1 \ \forall i$ (B è di rango massimo)
- Se $A^k b_i$ è presente in $\bar{R}$, allora $A^{k-1} b_i$ è anch'esso presente.

Definiamo $\boxed{\nabla_k := \sum_{i=1}^{k} \mu_i}$ $k = 1, \dots, m$

allora:

$\nabla_1 = \mu_1$

$\nabla_2 = \mu_1 + \mu_2$

$\vdots$

$\nabla_m = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m = \mu$

Si definiscano i vettori riga $q_1, q_2, \dots, q_m$ nel seguente modo:

$\bar{R}$ SEMPRE NON SINGOLARE

$$\bar{R}^{-1} = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{c} \vdots \\ - q_1 - \\ \vdots \\ - q_2 - \\ \vdots \\ - q_m - \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \nabla_1^{\circ} \text{ RIGA} \\ \\ \leftarrow \nabla_2^{\circ} \text{ RIGA} \\ \\ \leftarrow \nabla_m = m \text{ ULTIMA RIGA} \end{array}$$

Infine:

$$T := \left[\begin{array}{c} q_1 \\ q_1 A \\ \vdots \\ q_1 A^{\mu_1 - 1} \\ \hdashline q_2 \\ \vdots \\ q_2 A^{\mu_2 - 1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline q_m \\ \vdots \\ q_m A^{\mu_m - 1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \mu_1 \text{ RIGHE} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \mu_2 \text{ RIGHE} \\ \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \mu_m \text{ RIGHE} \end{array}$$

Conseguentemente: $\quad A_c = [A_{ij}] \quad i, j = 1, \dots, m \quad$ SOTTOMATRICI

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & I_{\mu_i - 1} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ \times & \times & \dots \times \dots & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_i \times \mu_i} \qquad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \times & \dots & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_i \times \mu_j} \quad i \neq j$$

$$B_c = \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \qquad B_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_i \times m}$$

$\uparrow$ i-esima colonna

$$A_c = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ -1&1&1&0&0\\ -1&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 1&1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \quad \bar{A}_c = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad \bar{B}_c = \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \quad A_m = \begin{bmatrix} -1&1&1&0&0\\ -1&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} 1&1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$$

LEMMA DI BRUNOVSKI

ci permette di separare le strutture di A_c e B_c

$$A_c = \bar{A}_c + \bar{B}_c A_m$$

$$B_c = \bar{B}_c B_m$$

dove

DIAGONALE A BLOCCHI

$$\bar{A}_c = \text{block diag}\left[\bar{A}_{11}, \bar{A}_{22}, \dots, A_{mm}\right]$$

$$\bar{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & I_{\mu_i - 1} \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_i \times \mu_i}$$

$$\bar{B}_c = \text{block diag}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_i}, \; i = 1, \dots, m\right)$$

B_m

$A_m \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad B_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$\sum_{i=1}^{m} \mu_i = n$, $|B_m| \neq 0$

B_c

A_m sono le m righe della matrice A_c, nell'ordine, la ν_1-esima, la ν_2-esima, ecc... partendo dall'alto

$(\bar{A}_c, \bar{B}_c)$ è la FORMA CANONICA DI BRUNOVSKI.

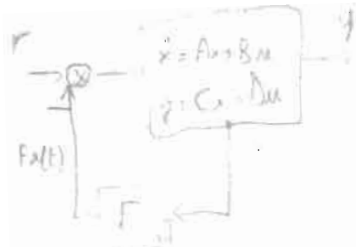
LEMMA:

Gli indici di controllabilità di (A,B) sono identici agli indici di controllabilità di $A' = TAT^{-1}$ e $B' = TB$ $\forall T$ non singolare.

• Gli indici di controllabilità di (A, BG), con G non singolare, sono uguali, con permutazione in generale diverse, agli indici μ_i di (A,B)

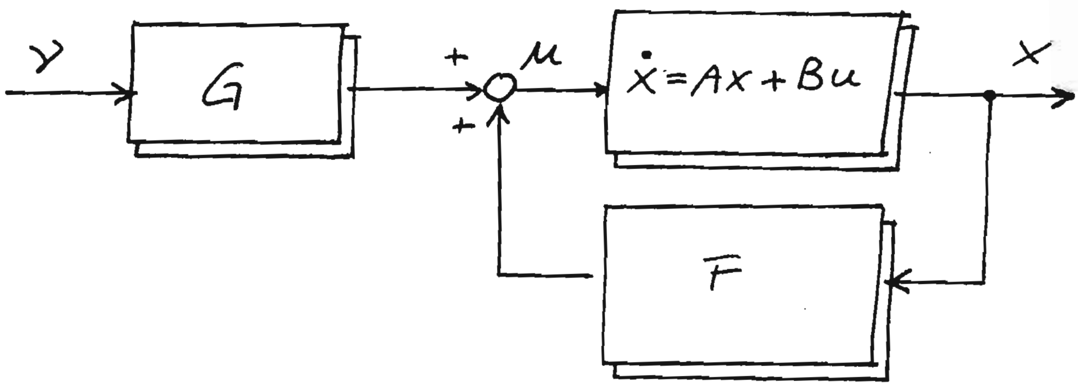
• Se si applica la retroazione dello stato

$$\boxed{u = Fx + Gr} \quad \text{con } |G| \neq 0$$



si ottiene $\dot{x} = (A+BF)x + BGr$

$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[Fx(t) + r(t)] = (A+BF)x(t) + Br(t)$



Allora la combinazione di indici di controllabilità di $(A+BF, BG)$ è la medesima di (A,B).

INDICI DI CONTROLLABILITÀ INVARIANTI CON UNA RETROAZIONE TRA STATO E INGRESSO

$\tilde{A}_c, \tilde{B}_c$ SONO LE ST...

Esempio: $\mu_1 = 2, \mu_2 = 4, \mu_3 = 1$

e $\mu_1 = 4, \mu_2 = 1, \mu_3 = 2$ $\Big\}$ stessa combinazione

TII CC

• Più in generale:
le combinazione di indici di controllabilità di $(T(A+BGF)T^{-1}, TBG)$ $\forall F, T$ e G compatibili e T, G non singolari è la medesima di (A,B). In conclusione:

GLI INDICI DI CONTROLLABILITA' SONO INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI DI SIMILITUDINE T E RETROAZIONE DALLO STATO (F, G).

• Inoltre si può provare che se (A_i, B_i) $i=1,2$ hanno le stesse combinazione di indici di controllabilità, allora esistono F, G, T tali che

$$A_1 = T(A_2 + B_2GF)T^{-1} \qquad B_1 = TB_2G$$

$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ il sistema duale è $\Sigma_D \begin{cases} \dot{x}_D = A_D x_D + B_D u_D \\ y_D = C_D x_D + D_D u_D \end{cases}$ $A_D = A^T$ $B_D = C^T$ $C_D = B^T$ $D_D = D^T$

SE Σ È RAGGIUNGIBILE (CONTROLLABILE) ALLORA Σ_D È OSSERVABILE (RICOSTRUIBILE)

SE Σ È STABILE, Σ_D È STABILE

FORMA CANONICA DI OSSERVAZIONE

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

valido anche per sistemi a tempo discreto

Assumiamo che:

1) $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ è di rango massimo

2) (C, A) è completamente osservabile

Si potrebbe dedurre la forma canonica di osservazione per dualità dalla forma canonica di controllo:

$\tilde{A} := A^T \quad \tilde{B} := C^T \Rightarrow (\tilde{A}, \tilde{B})$ completamente controllabile

$$\Rightarrow \exists\, \tilde{T} : \quad \left.\begin{aligned} \tilde{A}_c &= \tilde{T} \tilde{A} \tilde{T}^{-1} \\ \tilde{B}_c &= \tilde{T} B \end{aligned}\right\} \text{ forma canonica di controllo}$$

Allora $\begin{cases} A_o := \tilde{A}_c^T \\ C_o := \tilde{B}_c^T \end{cases}$ è la forma canonica di osservazione

Si descrive ora la forma canonica di osservazione, <u>senza ricorrere alle proprietà di dualità</u>.

Si ricordi che $Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ -

- CASO SCALARE $(p=1)$

Q è $n \times n$ non singolare

sia $\underbrace{\tilde{q}}_{\text{ultima colonna di } Q^{-1}} := Q^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ovvero $Q^{-1} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \tilde{q} \end{bmatrix}$

$$T := \left[\tilde{q}, A\tilde{q}, \dots, A^{n-1}\tilde{q} \right]$$

con

$$A_o := T^{-1} A T \quad \text{e} \quad C_o := CT$$

si ottiene

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \mathbf{0} & \vdots \\ & \mathbf{0} & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0}$ è il POLINOMIO CARATTERISTICO DI A.

$$B_o = T^{-1}B \quad \text{e} \quad D_o = D$$

• CASO MULTIVARIABILE ($p>1$)

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_p \\ \hdashline C_1A \\ \vdots \\ C_pA \\ \hdashline \vdots \\ C_1A^{n-1} \\ \vdots \\ C_pA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} C \\ \\ \\ CA \\ \\ \\ \end{matrix}$$

→ sono le righe della matrice Q

Selezioniamo, dall'alto al basso, le prime n righe linearmente indipendenti e le riordiniamo così:

$$\overline{Q} := \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A \\ \vdots \\ C_1A^{\nu_1-1} \\ \vdots \\ C_p \\ \vdots \\ C_pA^{\nu_p-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

INVERTIBILE PER COME L'HO COSTRUITA

Definizione di INDICI DI OSSERVABILITÀ:

I p interi ν_i, $i=1,\dots,p$ sono detti indici di osservabilità di Σ e $\nu := \max_i \nu_i$ è l'indice di osservabilità di Σ.

Notiamo che

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} \nu_i = n \quad e \quad p\nu \geq n}$$

Si definiscono gli interi $\tilde{\nu}_K$:

$$\tilde{\nu}_K := \sum_{i=1}^{K} \nu_i \qquad K = 1, \dots, p$$

$\tilde{\nu}_1 = \nu_1$, $\tilde{\nu}_2 = \nu_1 + \nu_2$, ..., $\tilde{\nu}_p = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_p = n$

Si individuano i vettori colonna $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_p$ nel seguente modo:

$$\bar{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \tilde{q}_1 & \cdots\cdots & \tilde{q}_2 & \cdots\cdots & \tilde{q}_p \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \updownarrow \\ \tilde{\nu}_1 & \tilde{\nu}_2 & \tilde{\nu}_p = n \end{matrix}$$

Infine:

$$T := \left[\tilde{q}_1, \dots, A^{\nu_1 - 1}\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_p, \dots, A^{\nu_p - 1}\tilde{q}_p \right]$$

Quindi con $A_o := T^{-1} A T$ e $C_o := C T$ si ottiene la forma canonica di osservazione:

$A_o = [A_{ij}]$ $i, j = 1, \dots, p$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 \cdots\cdots 0 & \times \\ & \times \\ I_{\nu_i - 1} & \vdots \\ & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu_i \times \nu_i} \qquad \underset{i \neq j}{A_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & \times \\ \vdots & & \vdots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu_i \times \nu_j}$$

$$C_0 = \left[c_1, c_2, \ldots, c_p\right]$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times \nu_i}$$

i-esima riga

LEMMA DI BRUNOVSKI

$$A_0 = \overline{A}_0 + A_p \overline{C}_0$$

$$C_0 = C_p \overline{C}_0$$

$$\overline{A}_0 = \text{blockdiag}\left[A_1, A_2, \ldots, A_p\right], \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ I_{\nu_i - 1} & \begin{matrix} \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu_i \times \nu_i}$$

$$\overline{C}_0 = \text{blockdiag}\left(\left[0 \ldots 0\ 1\right] \in \mathbb{R}^{1 \times \nu_i}, \ i = 1, \ldots, p\right)$$

$A_p \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C_p \in \mathbb{R}^{p \times p}$ non singolare

---

A_p SONO LE p COLONNE DI A_0 DA SINISTRA A DESTRA $\nu_1 \cdot \nu_2$

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} & 1 \\ \frac{s}{s+1} & 1 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO CHE LEGA IL 1° INGRESSO ALLA 1ª USCITA

POLI E ZERI

Dato Σ, introduciamo le definizioni di poli e zeri di $H(s)$, la sua matrice di trasferimento.

$$H(s) = [h_{ij}(s)] \quad p \times m$$

con $h_{ij}(s)$ <u>funzione razionale</u> data dal <u>rapporto di due polinomi coprimi fra loro</u>.

<u>$r :=$ rango $H(s)$</u> <u>È L'ORDINE MASSIMO DEI MINORI DI $H(s)$ NON IDENTICAMENTE NULLI.</u>

Sia $P_H(s)$ il <u>minimo comune multiplo monico dei denominatori di tutti i minori non nulli di $H(s)$</u>.

$$\frac{1}{s},\ \frac{s}{(s+1)^2},\ \frac{1}{s(s+1)},\ \frac{1}{s^2},\ \frac{s}{s+1} \Rightarrow mcm\ s^2(s+1)^2$$

<u>$P_H(s)$ è detto POLINOMIO DEI POLI DI $H(s)$</u>

$$P_H(s) = s^2(s+1)^2$$

Definizione di POLI DI $H(s)$.

I poli di $H(s)$ <u>sono le radici di $P_H(s)$</u>

ESEMPIO:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

I denominatori di tutti i minori non nulli di $H(s)$ sono:

$s(s+1)$, s, s^2, s^3, $s^3(s+1)$ $\Leftarrow$

il minimo comune multiplo monico di questi denominatori è:

$P_H(s) = s^3(s+1)$ quindi i poli di $H(s)$ sono $= \{0, 0, 0, -1\}$

———o———o———o———

Possiamo ora ad analizzare gli zeri. Si considerino tutti i minori non nulli di ordine massimo di $H(s)$. Questi vengono riscritti come

$$\left\{ \frac{\xi_i(s)}{P_H(s)} \quad \text{con } i = 1, \dots, m_{MAX} \right\}$$

$P_H(s) \rightarrow$ polinomio dei poli

definiamo quindi:

$$z_H(s) := \underline{\text{massimo comun divisore monico dei } \xi_i(s),\ i=1,\dots,n_{MAX}}$$

$\underline{z_H(s) \text{ è il POLINOMIO DEGLI ZERI DI } H(s).}$

Definizione di ZERI DI $H(s)$

Gli zeri di $H(s)$, anche detti <u>ZERI DI TRASMISSIONE</u> di $H(s)$, <u>sono le radici di $z_H(s)$</u>.

<u>ESEMPIO</u>

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

nell'esempio precedente si era trovato $P_H(s) = s^3(s+1)$

considero i minori non nulli di ordine massimo (2): $\left(\frac{1}{s^3(s+1)}\right)$ e $\left(\frac{1}{s^3}\right)$ e li esprimo così:

$$\frac{\xi_1(s)}{P_H(s)} = \frac{1}{s^3(s+1)} \qquad \frac{\xi_2(s)}{P_H(s)} = \frac{(s+1)}{s^3(s+1)}$$

Allora $z_H(s) = 1 \Rightarrow$ <u>$H(s)$ NON HA ZERI</u> !

MCD TRA 1 E S+1

PROPRIETÀ

I poli di $H(s)$ sono gli autovalori della parte controllabile ed osservabile di Σ:

$$\{\text{poli di } H(s)\} = \nabla\left(A|_{R/Q}\right)$$

COROLLARIO

Se un sistema Σ è completamente controllabile ed osservabile, allora

$$\boxed{\{\text{poli di } H(s)\} = \nabla(A)}$$

STABILITA' INGRESSO-USCITA DEI SISTEMI LINEARI A TEMPO CONTINUO

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

Definizione di STABILITA' INGRESSO-LIMITATO USCITA-LIMITATA

Σ è stabile i.l.u.l. se $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$ con $x(t_0)=0$ ad un ingresso limitato $u\big|_{[t_0,+\infty)}$ corrisponde l'uscita limitata $y\big|_{[t_0,+\infty)}$.

Formalmente questo si esprime così:

Σ è stabile i.l.u.l. se $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$ con $x(t_0)=0$ e $\forall\, M>0$ con $\|u(t)\| \le M$ $\forall\, t \ge t_0$ esiste $N>0$ tale che $\|y(t)\| \le N$ $\forall\, t \ge t_0$.

In virtù della linearità di Σ la definizione data è equivalente alla seguente:

Σ è stabile i.l.u.l. se $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$ con $x(t_0)=0$ e $\|u(t)\| \le 1$ $\forall\, t \ge t_0$, esiste $N>0$ t.c.

$$\|y(t)\| \le N \quad \forall\, t \ge t_0$$

Con le ipotesi usuali su Σ_1 vale:

<u>$\Sigma_1(A(t), B(t), C(t), D(t))$ è stabile i.l.u.l.</u>

se e solo se

<u>$\Sigma_1(A(t), B(t), C(t), 0)$ è stabile i.l.u.l.</u>

<u>Dimostrazione</u>:

$$\hat{y}(s) = H(s)\hat{u}(s)$$
$$= C(s)\left[sI - A(s)\right]^{-1}\hat{u}(s) + D(s)u(s)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau =$$
$$= \int_{t_0}^{t} C(t)\,\Phi(t,\tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \underbrace{\int_{t_0}^{t} D(t)\,\delta(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau}_{D(t)u(t)}$$

<u>$D(t)u(t)$</u> <u>che è sempre limitato se $u(t)$ è limitato.</u> $\square$

Ricordando che la matrice di risposta all'impulso di Σ_1 è:

$$H(t,\tau) = \begin{cases} C(t)\,\Phi(t,\tau)\,B(\tau) + D(t)\,\delta(t-\tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

vale il seguente Teorema:

TEOREMA

Σ è stabile i.l.u.l. se e solo se esiste una costante finita $L>0$ tale che $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$ con $t \geq t_0$ vale

$$\int_{t_0}^{t} \|H(t,\tau)\| d\tau < L$$

Dimostrazione:

- Sufficienza (se vale $\int_{t_0}^{t} \|H(t,\tau)\| d\tau < L$, allora Σ è stabile i.l.u.l. ...)

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\tau) u(\tau) d\tau \quad \text{quindi}$$

$$\|y(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \dots \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|H(t,\tau) u(\tau)\| d\tau \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|H(t,\tau)\| \cdot \underbrace{\|u(\tau)\|}_{\substack{\text{per Hp.} \\ \|u(\tau)\| < 1}} d\tau \leq \int_{t_0}^{t} \|H(t,\tau)\| d\tau < L$$

- Necessità (se è stabile i.l.u.l. allora vale $\int_{t_0}^{t} \|H(t,\tau)\| d\tau < L$)

per semplicità $\underline{m=p=1}$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} R(t,\tau) u(\tau) d\tau \quad \text{per assurdo nego la tesi}$$

$\forall L>0 \ \exists \ t_0 = t_0(L)$ e $t_1 = t_1(L)$

t.c. $\int_{t_0}^{t_1} |R(t_1,\tau)| d\tau > L$

adesso scelgo $u(t)$ così:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } h(t_1,\tau) > 0 \\ 0 & \text{se } h(t_1,\tau) = 0 \\ -1 & \text{se } h(t_1,\tau) < 0 \end{cases}$$

allora

$$y(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} h(t_1,\tau)\, u(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} |h(t_1,\tau)|\, d\tau > L$$ per la genericità di L, dicendo che il sistema non può essere stabile i.e.u.l.

$\square$

Per i <u>sistemi stazionari</u>

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

la matrice di risposta all'impulso (applicata al tempo zero) è:

$$H(t) = \begin{cases} Ce^{At}B + D\delta(t) & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

ed il risultato precedente diventa:

TEOREMA

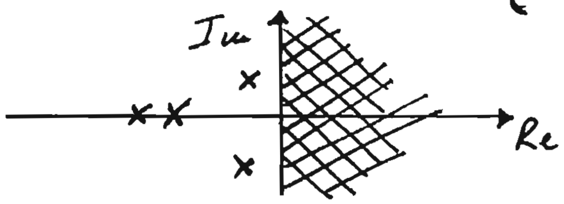
Il sistema stazionario Σ è stabile i.l.u.l. se e solo se

$$\boxed{\int_0^\infty \|H(t)\|\, dt < \infty}$$

TEOREMA

TEMPO CONTINUO

Il sistema stazionario Σ è stabile i.l.u.l. se e solo se gli autovalori controllabili ed osservabili di Σ hanno tutti parte reale negative, cioè se $\nabla(A|\mathcal{R}/\mathcal{R}\cap\mathcal{Q}) \subseteq \mathbb{C}^-$



piano complesso a parte reale negativa.

PROPOSIZIONE:

Il sistema stazionario Σ sia asintoticamente stabile. Allora Σ è stabile i.l.u.l.

PROPOSIZIONE:

Il sistema stazionario Σ è stabile i.l.u.l se e solo se tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale negativa.

STABILITA' INGRESSO-USCITA DEI SISTEMI LINEARI A TEMPO DISCRETO

Trattiamo solo il caso stazionario:

$$\Sigma_d \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Definizione di STABILITA' INGRESSO LIMITATO USCITA LIMITATA

Σ_d è stabile i.l.u.l. se con $x(0)=0$ e $\|u(k)\| \leq 1 \ \forall k \geq 0$, esiste una costante finita $c > 0$ tale che

$$\|y(k)\| \leq c \quad \forall k \geq 0$$

PROPOSIZIONE

$\Sigma_d(A,B,C,D)$ è stabile i.l.u.l.

se e solo se

$\Sigma_d(A,B,C,0)$ è stabile i.l.u.l.

La matrice di risposta all'impulso (unità) è:

$$H(k) = \begin{cases} CA^{k-1}B + D & \text{se } k > 0 \\ D & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

La risposta forzata è esprimibile come

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} H(k-j)\, u(j) \qquad k \geq 0$$

TEOREMA

Σ_d è stabile i.l.u.l. se e solo se esiste una costante $L > 0$ tale che $\forall k \geq 0$

$$\sum_{j=0}^{k} \| H(j) \| \leq L$$

Dimostrazione:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} H(k-j)\, u(j)$$

$$\| y(k) \| \leq \sum_{j=0}^{k} \| H(k-j) \| \cdot \| u(j) \| \leq \sum_{j=0}^{k} \| H(k-j) \| =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \| H(j) \| \leq L$$ e questo dimostra la sufficienza.

La necessità viene dimostrata per $m=1$ $p=1$

Devo dimostrare che se Σ_d stabile i.l.u.l. allora $\exists L > 0$ t.c. $\sum_{j=0}^{k} \|h(j)\| \leq L \quad \forall k \geq 0$;

per assurdo, nego la tesi e suppongo che

$\forall L > 0 \quad \exists k_1 = k_1(L)$ t.c. $\sum_{j=0}^{k_1} \|h(j)\| > L$

scelgo

$$u(j) = \begin{cases} +1 & \text{se } h(k_1 - j) > 0 \\ 0 & \text{se } h(k_1 - j) = 0 \\ -1 & \text{se } h(k_1 - j) < 0 \end{cases}$$

$$y(k_1) = \sum_{j=0}^{k_1} h(k_1 - j) u(j) = \sum_{j=0}^{k_1} |h(k_1 - j)| =$$

$$= \sum_{j=0}^{k_1} |h(j)| > L$$

$\square$

PROPOSIZIONE

Sia Σ_d asintoticamente stabile. Allora Σ_d è stabile i.l.u.l..

TEOREMA

Σ_d è stabile i.l.u.l. se e solo se gli autovalori raggiungibili e osservabili hanno tutti modulo minore di 1.

COROLLARIO:

Σ_d è stabile i.l.u.l se e solo se tutti i poli di $H(s)$ hanno modulo minore di uno.