

CURVE

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$\varphi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ è una curva se I è un intervallo e $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ sono continue. Attenzione in quelle definite a tratti.

- CURVA CHIUSA $\rightarrow I = [a, b]$ e $\varphi(a) = \varphi(b)$
- SOSTEGNO DELLA CURVA $\rightarrow \varphi(I) \subset \mathbb{R}^2$ è l'immagine della funzione (grafico).
- CURVA SEMPLICE $\rightarrow \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in I : t_1 \neq t_2 \text{ e } t_1, t_2 \in]a, b[$. In pratica la curva non ha nodi; basta che una delle componenti sia iniettiva
- CURVA DERIVABILE \rightarrow in un punto t_0 se ψ_1 e ψ_2 sono derivabili in t_0 .
- CURVA DI CLASSE $C^1 \rightarrow$ se le derivate delle sue componenti sono continue
- CURVA REGOLARE $\rightarrow \varphi'(t) \neq (0, 0) \quad \forall t \in I$
- CURVA REGOLARE A TRATTI $\rightarrow \varphi'(t) \neq (0, 0)$ tranne in un insieme finito di punti

Per disegnare il sostegno, cerco di esprimere una delle due componenti in funzione dell'altra. Esempio:

$$\varphi(t) = (t, t^2) \quad \text{il sostegno sta su } y = x^2$$

Per stabilire se una curva è regolare, calcolo la derivata prima, la pongo uguale a 0 e conto quante soluzioni ha il sistema. Esempio:

$$\varphi'(t) = (1, 2t) \quad \begin{cases} 1=0 \\ 2t=0 \end{cases} \text{ IMPOSSIBILE} \Rightarrow \varphi(t) \text{ è regolare.}$$

CURVE EQUIVALENTI \rightarrow due curve $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ aventi lo stesso sostegno S tali per cui esiste una funzione $g: I \rightarrow J$ biiettiva, di classe C^1 con derivata sempre diversa da 0 in I tale che $\varphi(t) = \psi(g(t)) \quad \forall t \in I$.

Per trovare una curva che stia su un sostegno dato (es. $y = e^x + 1$), considero la prima componente uguale a t e la seconda uguale all'equazione del sostegno con t al posto di x : $\varphi(t, e^t + 1)$.

Se al posto di t prendo $2t$, la velocità aumenta; se prendo $\frac{t}{2}$, la velocità diminuisce.

VETTORE TANGENTE IN $t_0 \rightarrow$ se esiste, è $\varphi'(t_0)$

Se $\varphi(t) \neq \varphi(t_0) \quad \forall t \neq t_0$ (iniettività), la retta $(x, y) = \varphi(t_0) + t\varphi'(t_0)$ è detta RETTA TANGENTE a φ in t_0 .

Il vettore tangente indica la direzione della retta tangente e il verso di percorrenza della curva.

Un altro modo per stabilire il verso di percorrenza sta nel calcolare i valori delle curve per alcuni t .

PARAMETRIZZAZIONI DA RICORDARE

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{array}{l} \text{circonferenza} \\ \text{centrata in} \\ (0,0) \text{ di raggio} \\ R. \end{array}$$

$$\begin{cases} x = x_c + R \cos t \\ y = y_c + R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{array}{l} \text{circonferenze centrata} \\ \text{in } (x_c, y_c) \text{ di raggio } R. \end{array}$$

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{array}{l} \text{ellisse} \\ \text{centrata in} \\ (0,0) \text{ che interseca} \\ \text{l'asse } x \text{ in } a \text{ e} \\ \text{l'asse } y \text{ in } b \end{array}$$

$$\begin{cases} x = x_c + a \cos t \\ y = y_c + b \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{array}{l} \text{ellisse centrata} \\ \text{in } (x_c, y_c) \end{array}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = mt + q \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{retta}$$

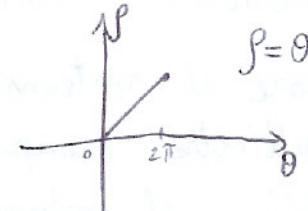
$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad \begin{array}{l} \text{segmento di retta} \\ \text{da } A(x_A, y_A) \text{ a } B(x_B, y_B). \end{array}$$

COORDINATE POLARI

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



VERSORO TANGENTE \rightarrow esiste solo se la curva è regolare e ha equazione

$$T = \left(\frac{\psi_1'(t_0)}{|\psi'(t_0)|}, \frac{\psi_2'(t_0)}{|\psi'(t_0)|} \right) \quad \text{con } |\psi'(t_0)| = \sqrt{[\psi_1'(t_0)]^2 + [\psi_2'(t_0)]^2}$$

VERSORO NORMALE \rightarrow ne esistono due, uno che punta verso l'esterno e uno che punta verso l'interno. Noi consideriamo quello esterno, che ha equazione:

$$N = \left(\frac{\psi_2'(t_0)}{|\psi'(t_0)|}, -\frac{\psi_1'(t_0)}{|\psi'(t_0)|} \right) \quad T \text{ e } N \text{ sono ortogonali.}$$

TEOREMA DI RETTIFICABILITÀ

Data $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1 , allora

$$1) L(\psi) < +\infty$$

$$2) L(\psi) = \int_a^b |\psi'(t)| dt$$

La lunghezza delle curve non cambia nel caso di curve equivalenti ed è indipendente dal verso di percorrenza scelto.

ASCISSA CURVILINEA

$$s(t) = \int_0^t |\psi(\sigma)| d\sigma$$

INTEGRALE CURVILINEO \rightarrow dato una curva $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 con vettore $\varphi([a, b])$ e una funzione $f: \varphi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ continua, definiamo

$$\int_{\varphi} f \cdot ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)| dt \text{ integrale curvilineo di } f \text{ su } \varphi.$$

$f(\varphi(t))$ si calcola sostituendo alle x di f le prime componenti di $\varphi(t)$ e alle y di f le seconde componenti di $\varphi(t)$.

BARICENTRO

$$x_B = \frac{\int_{\varphi} x \cdot f \cdot ds}{\int_{\varphi} f \cdot ds}$$

$$y_B = \frac{\int_{\varphi} y \cdot f \cdot ds}{\int_{\varphi} f \cdot ds}$$

coordinate del baricentro di φ relativa alla densità di massa f .

Se $f=1$, si parla di BARICENTRO GEOMETRICO e il denominatore diventa la lunghezza di φ .

$x \rightarrow 1^{\text{a}}$ componente di φ $y \rightarrow 2^{\text{a}}$ componente di φ .

$f \rightarrow$ funzione

$ds \rightarrow |\varphi'(t)| dt$

CURVE IN \mathbb{R}^3

$\varphi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$ stessa definizione di curve chiuse, semplice, regolare, di classe C^1 , equivalente, versore tangente e retta tangente. Non definiamo il versore normale (ce ne sono ∞^2). Le coordinate del baricentro restano invariate.

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$B(x_0, y_0; r) \rightarrow$ cerchio centrale in (x_0, y_0) e raggio r privato della circonferenza di bordo.

INTORNO DI UN PUNTO \rightarrow insieme A tale che esiste $B(x_0, y_0; r) \subset A$

INTORNO DI INFINITO \rightarrow insieme A tale che esiste $r > 0$ tale che $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > r^2\} \subset A$

PUNTO DI FRONTIERA \rightarrow per ogni $r > 0$ si ha $B(x_0, y_0; r) \cap A \neq \emptyset$ e $B(x_0, y_0; r) \cap C(A) \neq \emptyset$. (di bordo)

INSIEME CHIUSO $\rightarrow \partial C \subseteq C$

INSIEME APERTO \rightarrow insieme il cui complementare è chiuso

INSIEME LIMITATO \rightarrow esiste $R > 0$ tale che $A \subset B(x_0, y_0; R)$

PUNTO DI ACCUMULAZIONE \rightarrow $\forall r > 0 \quad (B(x_0, y_0; r) \setminus \{(x_0, y_0)\}) \cap A \neq \emptyset$

PUNTO ISOLATO \rightarrow esiste $r > 0$ t.c. $B(x_0, y_0; r) \cap A = \{(x_0, y_0)\}$

PUNTO DI MINIMO RELATIVO INTERNO $\rightarrow \exists B(x_0, y_0; r) \subset A$ t.c. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in B(x_0, y_0; r)$

PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO $\rightarrow f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in A$

PUNTO DI MASSIMO RELATIVO INTERNO $\rightarrow \exists B(x_0, y_0; r) \subset A$ t.c. $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in B(x_0, y_0; r)$

PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO $\rightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in A$.

INSIEME DI LIVELLO $K \rightarrow \{f = K\} = \{(x, y) \in A : f(x, y) = K\}$

SOTTOLIVELLO $K \rightarrow \{f \leq K\}$

SOPRALIVELLO $K \rightarrow \{f \geq K\}$

$$\boxed{\partial C(A) = \partial A}$$

LIMITE AL FINITO: $\forall J \in \mathbb{N} \exists H \in \mathbb{N}_{(x_0, y_0)} : f(x, y) \in J, \forall (x, y) \in H \cap A \setminus \{(x_0, y_0)\} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l$

LIMITE ALL'INFINITO: $\forall J \in \mathbb{N} \exists H \in \mathbb{N}_{(x_0, y_0)} : f(x, y) \in J, \forall (x, y) \in H \cap A \lim_{\|(x, y)\| \rightarrow \infty} f(x, y) = l$

RESTRIZIONE \Rightarrow funzione definita su B con valori in \mathbb{R} tale che $f|_B(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B$

Per dimostrare che \bar{l} è il limite di f in (x_0, y_0) basta trovare due restrizioni che ammettono limite diverso o una restrizione in cui il limite non esiste! Esempi di restrizioni: $\varphi(0, t), \varphi(t, 0), \varphi(t, t), \varphi(t^2, t) \dots$

Dato $g = \sqrt{x^2 + y^2}$, lo sostituiamo alla funzione e , con una catena di diseguaglianze cerco di ricondursi a una funzione in g . Poi faccio tendere $g \rightarrow +\infty$ (σ è un valore finito a seconda del limite da calcolare) e dimostro quindi che il limite di pertinenza vale $\lim_{g \rightarrow +\infty} g(f) = l$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS \Rightarrow se f è una funzione continua su un insieme chiuso e limitato C ; allora f ammette minimo e massimo assoluti su C .

CAP. 3

DERIVATA DIREZIONALE \Rightarrow data una direzione $U = (U_1, U_2)$ e un punto $P = (x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial U}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tU_1, y_0 + tU_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Se le direzioni sono $(1, 0)$ o $(0, 1)$ si parla rispettivamente di DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A X e di DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A Y .

GRADIENTE DI $f \Rightarrow$ è il vettore $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$.

PIANO TANGENTE \Rightarrow dato un punto $P(x_0, y_0)$

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

TEOREMA DIFFERENZIALE \Rightarrow se esistono le derivate parziali di f in un intorno totale di (x_0, y_0) e sono continue in (x_0, y_0) , f è differenziabile in (x_0, y_0) .

DERIVATE PARZIALI DI ORDINE 2 $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

PUNTO STAZIONARIO \Rightarrow punto in cui $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

MATRICE HESSIANA:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

PUNTO DI MINIMO $\rightarrow \nabla f = 0$, $\det H_f > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$.

PUNTO DI MASSIMO $\rightarrow \nabla f = 0$, $\det H_f > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$

PUNTO DI SELLA $\rightarrow \nabla f = 0$, $\det H_f < 0$

Condizione necessaria affinché il punto (x_0, y_0) sia di massimo [minimo] relativo di f è che gli autovalori della matrice $H_f(x_0, y_0)$ siano entrambi non positivi [non negativi].

Per il teorema di Weierstrass, su un insieme E chiuso e limitato una funzione continua ammette sempre un minimo e un massimo assoluto.

Per trovare i massimi e minimi assoluti su E :

1 - calcolo massimi e minimi relativi su tutto f con $\nabla f = 0$... e guardo quali cadono in E .

2 - parametrizzo i veri "puzzi" di bordo come curve $\varphi(t)$

3 - calcolo $f(\varphi(t))$ per ogni "pizzo" di bordo

4 - calcolo $f'(\varphi(t))$ per ogni tratto e pongo $f'(\varphi(t)) = 0$

5 - trovo massimi e minimi sul tratto distinguendoli perché
• minimi: $f''(\varphi(t)) > 0$ • massimi: $f''(\varphi(t)) < 0$

6 - il massimo assoluto sarà il massimo valore assunto della funzione nei punti trovati in 1, 5 e il minimo sarà il minimo valore assunto della funzione nei punti trovati in 1, 5.

Per determinare inf e sup di $f(x, y)$, calcolo il limite a $+\infty$ e $-\infty$ di varie restrizioni di f . Se questi limiti valgono ∞ , $f(x, y)$ è illimitata.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Equazioni in cui la y compare assieme alle sue prime n derivate.

PROBLEMA DI CAUCHY \rightarrow determinare la soluzione dell'equazione differenziale che soddisfa le condizioni iniziali $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Ogni equazione differenziale ha infinite soluzioni che dipendono dalle costanti C_1, C_2, \dots, C_n .

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A sono delle forme $y' = q(x) \cdot g(y)$. Si risolvono:

VARIABILI SEPARABILI \rightarrow trasformando y' in $\frac{dy}{dx}$ secondo la definizione

2) moltiplicando per dx e dividendo per $g(y)$

3) risolvendo l'integrale $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int q(x) dx$ ricordandosi la costante c a destra.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 1° ORDINE

Sono della forma $y' = a(x)y + b(x)$. Vi sono 2 metodi per risolvere:

A) METODO DEL FATTORE INTEGRANTE

- 1) Calcolo $A(x) = \int a(x)dx$ (con costante $C=0$).
- 2) Moltiplico entro i membri per $e^{-A(x)}$ e sposto al 1° membro il termine con la y .
- 3) Mi accorgo che al 1° membro compare la derivata di $y \cdot e^{-A(x)}$
- 4) Integro entro i membri e divido per $e^{-A(x)}$
- 5) Ottengo la soluzione $y(x) = e^{A(x)} \cdot \left[\int b(x) \cdot e^{-A(x)} dx + C \right]$

B) METODO DI VARIAZIONE DI COSTANTI ARBITRARI (raro usato)

- 1) Considero l'equazione omogenea associata (a variabili separabili) $y' = a(x)y$ che ha soluzioni $y_c(x) = C \cdot e^{A(x)}$
- 2) Cerco una soluzione dell'equazione differenziale completa della forma $v(x) = C(x) \cdot e^{A(x)}$; derivo $v(x)$ e sostituisco all'equazione di partenza che diventa $v'(x) = c(x) \cdot v(x) + b(x)$. Poi integro.
- 3) Ricavo $c(x) = \int b(x) \cdot e^{-A(x)} dx$ che vado poi a sostituire alla C del punto 1 per ritrovare la stessa formula del punto A.5.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI DI ORDINE $n > 1$

Sono della forma $y^{(n)} + q_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + q_1y' + q_0y = f(x)$. Per risolvere si applica sempre il METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI:

- 1) Trovo le n soluzioni dell'equazione omogenea associata $y^{(n)} + \dots + y = 0$. Per fare questo utilizzo il POLINOMIO CARATTERISTICO in λ dove $y^{(n)} = \lambda^n$. (es. $y'' + 3y = 0$ diventa $\lambda^2 + 3 = 0 \dots$). Si distinguono veri casi:
 - a. ottengo valori di λ reali e distinti: le soluzioni dell'omogenea saranno del tipo $y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots$
 - b. ottengo valori di λ reali e coincidenti: le soluzioni dell'omogenea saranno del tipo $y_0(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + C_3 x^2 e^{\lambda x} + \dots$
 - c. ottengo valori di λ complessi e distinti del tipo $\lambda = \alpha \pm i\beta$: le soluzioni dell'omogenea saranno del tipo $y_0(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \dots$
 - d. ottengo valori di λ complessi e coincidenti del tipo $\lambda = \alpha \pm i\beta$: le soluzioni dell'omogenea saranno del tipo $y_0(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + C_3 x e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \dots$

N.B. coincidenti significa molteplicità > 1 ; ad esempio $(\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda = 1$ molteplicità 2.

N.B. $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ va sempre in coppia con $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$.

Ovviamente, i casi a, b, c, d si possono presentare contemporaneamente e, nel caso, sommo le varie soluzioni.

2) Cerco una soluzione dell'equazione completa

a. a seconda della forma di $f(x)$ considero $v(x)$ diverse:

i) se $f(x)$ è della forma e^{kx} considero $v(x) = k e^{kx}$

ii) se $f(x)$ è della forma $x^n + \dots + c$ considero $v(x) = a x^n + \dots + c$. generico polinomio di grado $n \rightarrow P(x)$

iii) se $f(x)$ è del tipo $a \cos \beta x + b \sin \beta x$ considero $v(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$

iv) se $f(x)$ è del tipo $P(x) \cdot e^{kx}$ considero $v(x) = (a x^n + \dots + c) \cdot e^{kx}$

N.B. se $f(x)$ è somma di vari casi, considero i casi separati e poi sommo le soluzioni (sovraposizione delle soluzioni)

N.B. se $v(x)$ è soluzione dell'omogenea associata, allora moltiplico per x finché non trovo $v(x)$ indipendente dalle soluzioni dell'omogenea associata

b. calcolo le prime n derivate di $v(x)$

c. sostituisco all'equazione di pertinenza

d. trovo i valori di a, b, c, \dots, k, \dots uguagliando i coefficienti dei vari termini (es. se ho $x^2(a+2b) + x(b+c) + a + b = 3x^2$, ottengo $\begin{cases} a+2b=3 \\ b+c=0 \\ a+b=0 \end{cases}$)

e. sostituisco a $v(x)$ i valori trovati e trovo la soluzione particolare y_p .

3) La soluzione generale dell'equazione differenziale sarà la somma della soluzione dell'omogenea e di quella particolare: $y_G(x) = y_0(x) + y_p(x)$.

MISURA E INTEGRAZIONE

Se $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, la misura di E è data da

$m(E) = \int_a^b f(x) dx$. Se E e F sono insiemi misurabili e $E \cap F = \emptyset$, allora

$$m(E \cup F) = m(E) + m(F).$$

Se E è un insieme di \mathbb{R}^2 , la sua misura $m(E) = \int_E 1 dx dy$. Inoltre

$$m(E \setminus F) = \int_E 1 dx dy - \int_F 1 dx dy \quad \text{se } E \cap F = \emptyset \quad \text{e} \quad m(E \setminus F) = \int_E 1 dx dy - \int_F 1 dx dy.$$

DOMINIO NORMALE \rightarrow se esistono due funzioni continue α e $\beta : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ con rispetto all'asse X $\alpha(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [a,b]$ tali che $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

DOMINIO NORMALE \rightarrow se esistono due funzioni continue $\gamma, \delta : [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\gamma(y) \leq \delta(y)$ rispetto all'asse Y $\forall y \in [c,d]$ tali che $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \gamma(y) \leq x \leq \delta(y), c \leq y \leq d\}$

Figure quali i quadrati e i triangoli sono normali rispetto a entrambi gli assi.

TEOREMA DI RIDUZIONE: Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua definita su un misurabile. Allora

i) se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un dominio normale rispetto all'asse x , cioè $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\}$, $a(x) \leq y \leq b(x)\}$, allora $\int_A f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y) dy$.

ii) se $B \subseteq \mathbb{R}$ è un dominio normale rispetto all'asse y , cioè $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d\}$, $c(y) \leq x \leq d(y)\}$, allora $\int_B f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_{c(y)}^{d(y)} f(x,y) dx$.

BARICENTRO (G)

Se ρ la densità di massa di un corpo C . Allora le coordinate di $G(x_0, y_0)$ sono:

$$x_0 = \frac{\int_G x \cdot \rho(x,y) dx dy}{\int_G \rho(x,y) dx dy} \quad y_0 = \frac{\int_G y \rho(x,y) dx dy}{\int_G \rho(x,y) dx dy} \quad G = \text{baricentro della regione di spazio occupata da } C.$$

Nel caso in cui ρ sia costante, il BARICENTRO si dice GEOMETRICO e:

$$x_G = \frac{1}{m(G)} \int_G x dx dy \quad y_G = \frac{1}{m(G)} \int_G y dx dy \quad \text{con } m(G) = \int_G 1 dx dy$$

Se E e F sono insiemi misurabili tali che $E \cap F = \emptyset$, allora il baricentro di $C = E \cup F$

$$x_C = \frac{m(E) \cdot x_E + m(F) \cdot x_F}{m(E) + m(F)} \quad y_C = \frac{m(E) \cdot y_E + m(F) \cdot y_F}{m(E) + m(F)} \quad \text{con } (x_E, y_E) \text{ coordinate del baricentro di } E \text{ e } (x_F, y_F) \text{ coordinate del baricentro di } F.$$

Se E e F sono insiemi misurabili tali che $E \subset F$,

allora le coordinate di $C = E \setminus F$ sono

$$x_C = \frac{m(F)x_F - m(E)x_E}{m(F) - m(E)} \quad y_C = \frac{m(F)y_F - m(E)y_E}{m(F) - m(E)}$$

Se l'insieme C possiede un asse di simmetria, il baricentro appartiene all'asse.

Se l'insieme C è convesso ed emmette punti interni, il baricentro $\in C$.

TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI DOPPI

$$\int_E f(x,y) dx dy = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\phi(u,v)) \cdot |\det J_\phi(u,v)| du dv \quad \text{dove } \phi^{-1} \text{ è una funzione}$$

opportuna che esprime u in funzione di x e y e v in funzione di x e y , mentre ϕ è la funzione che esprime x e y in funzione di u e v ;

lo Jacobiano di ϕ è la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\phi = \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases} \quad \phi^{-1} = \begin{cases} u = \dots \\ v = \dots \end{cases}$$

Nel caso J sia difficile da calcolare, si può calcolare il determinante della matrice inversa

$$J_{\phi}^{-1}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1^{-1}}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2^{-1}}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \text{e } \det J_{\phi} = \frac{1}{\det J_{\phi}^{-1}}$$

Per scegliere la funzione ϕ cerco nella definizione dell'insieme E (dominio) due intervalli in cui variano x e y legate e pongo u e v uguali alle espressione di questi intervalli. Ad esempio, se $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 2\}$ pongo $u = x+y$ (u varia tra 0 e 1) e $v = x-y$ (v varia da 0 a 2).

TRASFORMAZIONE IN COORDINATE POLARI

La trasformazione ϕ è sempre $\phi : \begin{cases} x = g \cos \theta \\ y = g \sin \theta \end{cases}$ e il $|\det J_{\phi}(u,v)|$ è sempre g .

Per determinare gli intervalli entro cui variano g e θ , disegno E e ricordando che g è il modulo del vettore che parte dall'origine e arriva al bordo di E e θ è l'angolo che forma con l'asse x trovo gli intervalli. Quando vedo a sostituire le coordinate polari alla funzione mi ricordo che $g = \sqrt{x^2 + y^2}$ e che $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. Poi mi ricordo di moltiplicare per g .

INTEGRAZIONE IN \mathbb{R}^3

TEOREMA DI INTEGRAZIONE PER STRATI

Se $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata su \mathcal{R} e $E \subset \mathcal{R}$ un dominio semplice rispetto all'asse x , ovvero $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, (y,z) \in E_x\}$. Allora

$$\int_E f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{E_x} f(x,y,z) dy dz$$

TEOREMA DI INTEGRAZIONE PER FILI

Se $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata su \mathcal{R} e $E \subset \mathcal{R}$ un dominio normale rispetto al piano xy , ovvero $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Pi_{xy}(E), z = b(x,y)\}$.

Allora $\int_E f(x,y,z) dx dy dz = \int_{\Pi_{xy}(E)} dx dy \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z) dz.$

Π_{xy} è la proiezione di E sul piano xy (guarda dall'alto).

TRASFORMAZIONE IN COORDINATE SFERICHE

$$\textcircled{H} \quad \begin{cases} x = g \cos \theta \sin \varphi \\ y = g \sin \theta \sin \varphi \\ z = g \cos \varphi \end{cases}$$

$$\theta \in]0, 2\pi[\quad \varphi \in]0, \pi[$$

Le sfere si trasforma in un parallelepipedo

CALCOLO DEL VOLUME DI UN SOLIDO B

$$V(B) = m(B) = \int_B 1 dx dy dz.$$

TRASFORMAZIONE IN COORDINATE CILINDRICHE

$$\bar{\Phi}: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad |\det J_{\bar{\Phi}}(\rho, \theta, z)| = \rho$$

COSE DA RICORDARE

$$V_{\text{CONO}} = \frac{Ab \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \quad V_{\text{PARABOLOIDE}} = \frac{1}{2} V_{\text{CILINDRO CIRCOLATTO}} \quad V_{\text{CILINDRO}} = \pi r^2 \cdot h.$$

BARICENTRO DI UN TRIANGOLÒ ABC

$$x_a = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad y_a = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

SUPERFICI NOTEVOLI

PIANO $z = ax + by + c$

- $a=0 \Rightarrow z \parallel \text{asse } x$
- $b=0 \Rightarrow z \parallel \text{asse } y$
- $c=0 \Rightarrow z \text{ passa per } O(0,0)$

SFERA $C(x_0, y_0, z_0) \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

SEMISFERA CON $z \geq 0 \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ CON $z \leq 0 \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

ELLISSOIDE $C(x_0, y_0, z_0) \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$

CONO $V(0,0,0) \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{VERSO L'ALTO (V)}$

$$z = a \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + k \quad V(x_0, y_0, k) \quad a = \text{apertura}$$

PARABOLOIDE CIRCOLARE $z = x^2 + y^2 \quad \text{VERSO L'ALTO (B)}$

$$z = a [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] + k \quad V(x_0, y_0, k) \quad a = \text{apertura}$$

PARABOLOIDE ELLITTICO $z = ax^2 + by^2 \quad a > 0, b > 0 \quad (\omega)$

$$z = a(x-x_0)^2 + b(y-y_0)^2 + k \quad V(x_0, y_0, k) \quad a < 0, b < 0 \quad (\varpi)$$

CILINDRO $x^2 + y^2 = k$