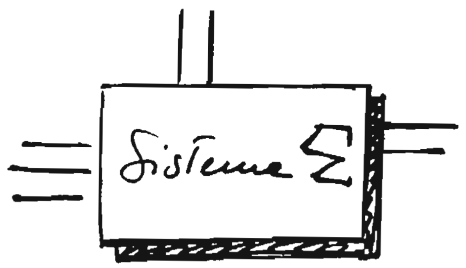
CAPITOLO I

INTRODUZIONE AI SISTEMI DINAMICI

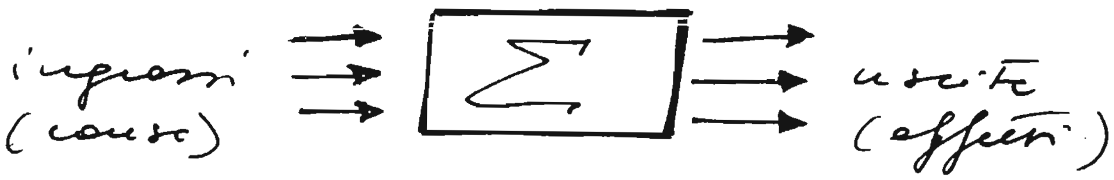
- Introduzione
- Sistemi dinamici a tempo continuo/tempo discr.
- Sistemi lineari, stazionari
- Stato di un sistema
- Stato di equilibrio
- Controllo ed osservazione (definizioni)
  - controllo
  - osservazione
- Problemi significativi relativi a controllo e osservazione

INTRODUZIONE AI SISTEMI DINAMICI



Un sistema è un oggetto o fenomeno, o complesso di oggetti e/o fenomeni, in cui si distinguono grandezze soggette a variare nel tempo (le variabili di Σ).

- <u>ORIENTAMENTO DI UN SISTEMA</u>: le variabili vengono suddivise in INGRESSI (o CAUSE) ed uscite (o EFFETTI)



- <u>E' necessario specificare</u>:

1. un insieme dei tempi $\mathcal{T}$
2. un insieme degli ingressi $\mathcal{U}$
3. un insieme delle <u>funzioni</u> di ingresso $\mathcal{U}_f$
4. un insieme degli stati $\mathcal{X}$
5. un insieme delle uscite $\mathcal{Y}$

• Definizione di <u>SISTEMA PURAMENTE ALGEBRICO</u>:

Σ è puramente algebrico se è definito da $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{Y}$ unitamente alla funzione di ingresso-uscita $g : \mathcal{U} \times \mathcal{T} \to \mathcal{Y}$:

$$y(t) = g(u(t), t)$$

(non dipende dallo stato $x(\cdot)$)

$\Rightarrow$ STATICO!

• Σ è detto TEMPO CONTINUO se $\mathcal{T} = \mathbb{R}$

• Σ è detto TEMPO DISCRETO se $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$

<u>SISTEMI DINAMICI A TEMPO CONTINUO</u>:

Un sistema dinamico a tempo continuo è definito da $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_f$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ unitamente all'<u>equazione di stato differenziale</u>:

$$\boxed{\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)}$$

avente un'unica soluzione per ogni stato iniziale ed ogni funzione di ingresso, ed alla <u>funzione di uscita</u>:

$$\boxed{y(t) = g(x(t), u(t), t)}$$

SISTEMI DINAMICI A TEMPO DISCRETO:

Un sistema dinamico a tempo discreto è definito da $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_f$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ unitamente all'eq.ne di stato alle differenze:

$$\boxed{x(i+1) = f(x(i), u(i), i)}$$

ed alla funzione d'uscita:

$$\boxed{y(i) = g(x(i), u(i), i)}$$

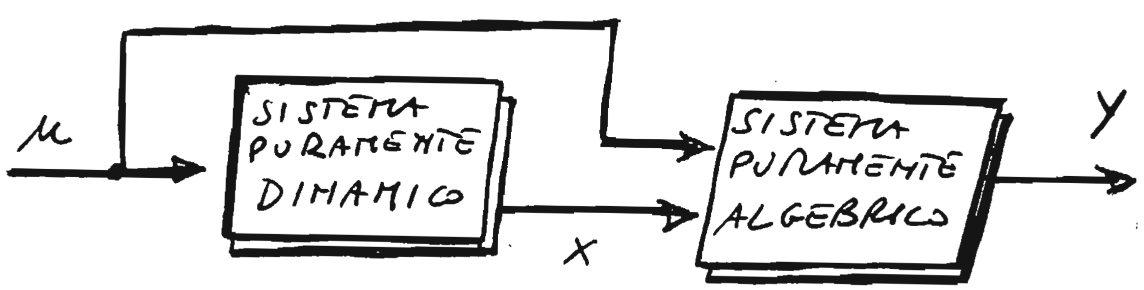
. Definizione SISTEMA PURAMENTE DINAMICO:

un sistema Σ è puramente dinamico se la funzione d'uscita è riducibile

a: $\underline{y(t) = g(x(t), t)}$ (t. continuo)

o a: $\underline{y(i) = g(x(i), i)}$ (t. discreto)

SCOMPOSIZIONE DI UN SISTEMA DINAMICO:



- Definizione di <u>SISTEMA STAZIONARIO</u>:

Un sistema è stazionario (o INVARIANTE NEL TEMPO) se il tempo non è un argomento effettivo delle funzioni del suo modello matematico (f e/o g).
In caso contrario è detto non stazionario (o variante nel tempo)

<u>es. sistema stazionario</u>:

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad \text{(a tempo continuo)}$$

$$\Sigma_d \begin{cases} x(i+1) = f_d(x(i), u(i)) \\ y(i) = g_d(x(i), u(i)) \end{cases} \quad \text{(a tempo discreto)}$$

- Definizione di <u>SISTEMA LINEARE</u>:

Un sistema è lineare se gli insiemi $\mathcal{U}, \mathcal{U}_f, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ <u>sono spazi vettoriali sullo stesso campo</u> <u>e le funzioni del suo modello matematico</u> (f e/o g) <u>sono lineari rispetto a x ed u</u> <u>per ogni valore ammissibile del tempo</u>.
In caso contrario è detto non lineare.

SISTEMI LINEARI PURAMENTE ALGEBRICI:

$$\left(\mathcal{U} := \mathbb{R}^m , \; \mathcal{Y} := \mathbb{R}^p \right)$$

$$y(t) = C(t)\, u(t) \qquad t \in \mathbb{R} \quad (\text{tempo continuo})$$

$$y(i) = C(i)\, u(i) \qquad i \in \mathbb{Z} \quad (\text{tempo discreto})$$

dove $C(t), C(i) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

SISTEMI LINEARI (DINAMICI):

$$\left(\mathcal{U} := \mathbb{R}^m , \; \mathcal{X} := \mathbb{R}^n , \; \mathcal{Y} := \mathbb{R}^p \right)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) \\ y(t) = C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t) \end{cases} \qquad (\text{t. continuo})$$

$$\begin{cases} x(i+1) = A(i)\, x(i) + B(i)\, u(i) \\ y(i) = C(i)\, x(i) + D(i)\, u(i) \end{cases} \qquad (\text{t. discreto})$$

$A(t), A(i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $B(t), B(i) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$C(t), C(i) \in \mathbb{R}^{p \times n}$; $D(t), D(i) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

($A(t), B(t), C(t), D(t)$ funzioni matriciali continue a tratti)

STATO DI UN SISTEMA:

Lo stato di un sistema dinamico è un elemento (di un insieme degli stati) soggetto a variazione nel tempo e tale che il suo valore $x(t_0)$ ad un dato istante di tempo t_0, unitamente al segmento della funzione d'ingresso $u|_{[t_0,t_1]}$ determina univocamente l'uscita $y|_{[t_0,t_1]}$.

→ E' una definizione congruente con la definizione data di SISTEMA DINAMICO (a tempo continuo o discreto).

→ Nel concetto di stato è implicita la proprietà di CAUSALITA': le uscite ad ogni istante di tempo t non dipendono dai valori degli ingressi successivi al tempo t.

#STATI

$+\infty$ — SISTEMI A STATI INFINITI

($\mathcal{X}$ sp. vettoriale)

dim $\mathcal{X} = \infty$

SISTEMI A DIMENSIONE INFINITA (o a parametri distribuiti)

→ eq.ni diff.li alle derivate parziali

ES. sbarra che conduce calore in cui si controlla la temp. ad un'estremità

dim $\mathcal{X} < \infty$

SISTEMI A DIMENSIONE FINITA (a parametri concentrati)

→ eq.ni diff.li ordinarie

$< \infty$

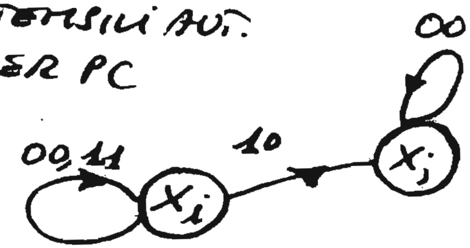
- SINCRONI
- ASINCRONI

- ELABORATORI ELETT.
- COMMUTATORI TEL.
- MACCHINE UTENSILI AUT.
- PROGRAMMI PER PC

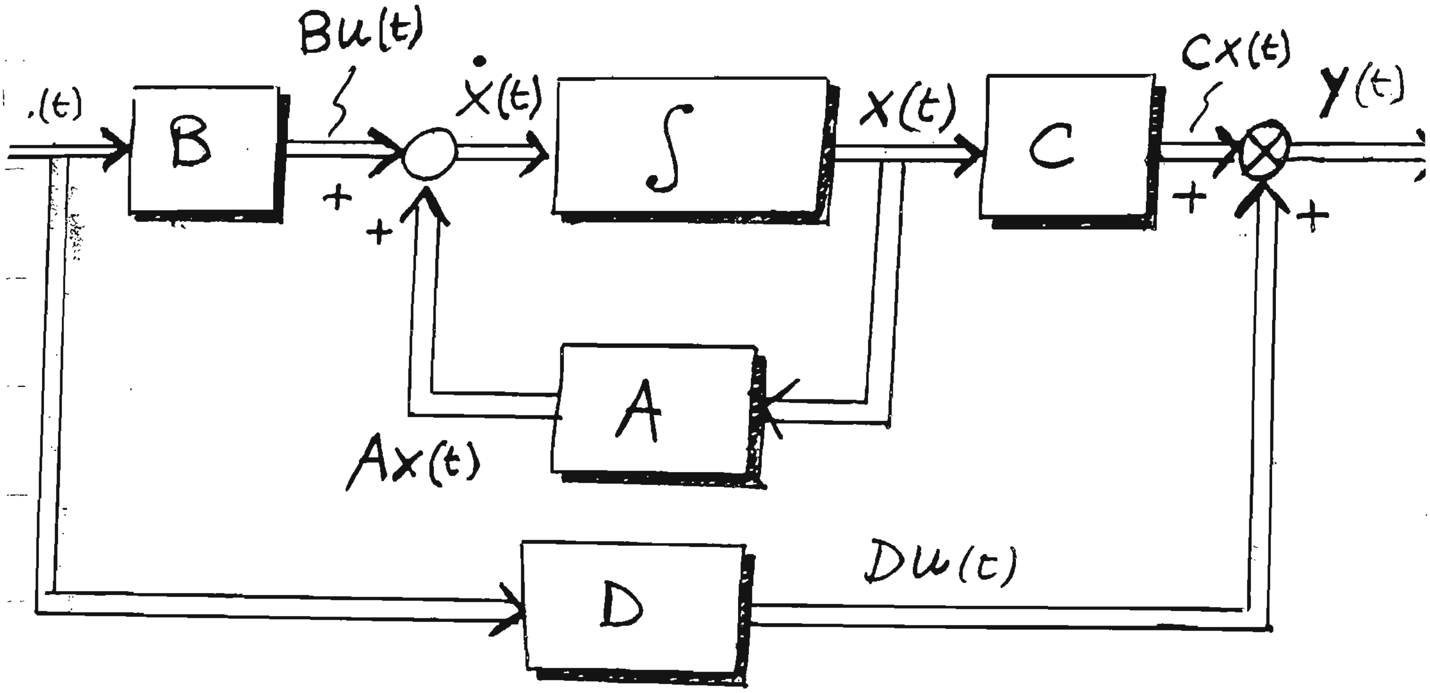
SISTEMI A STATI FINITI

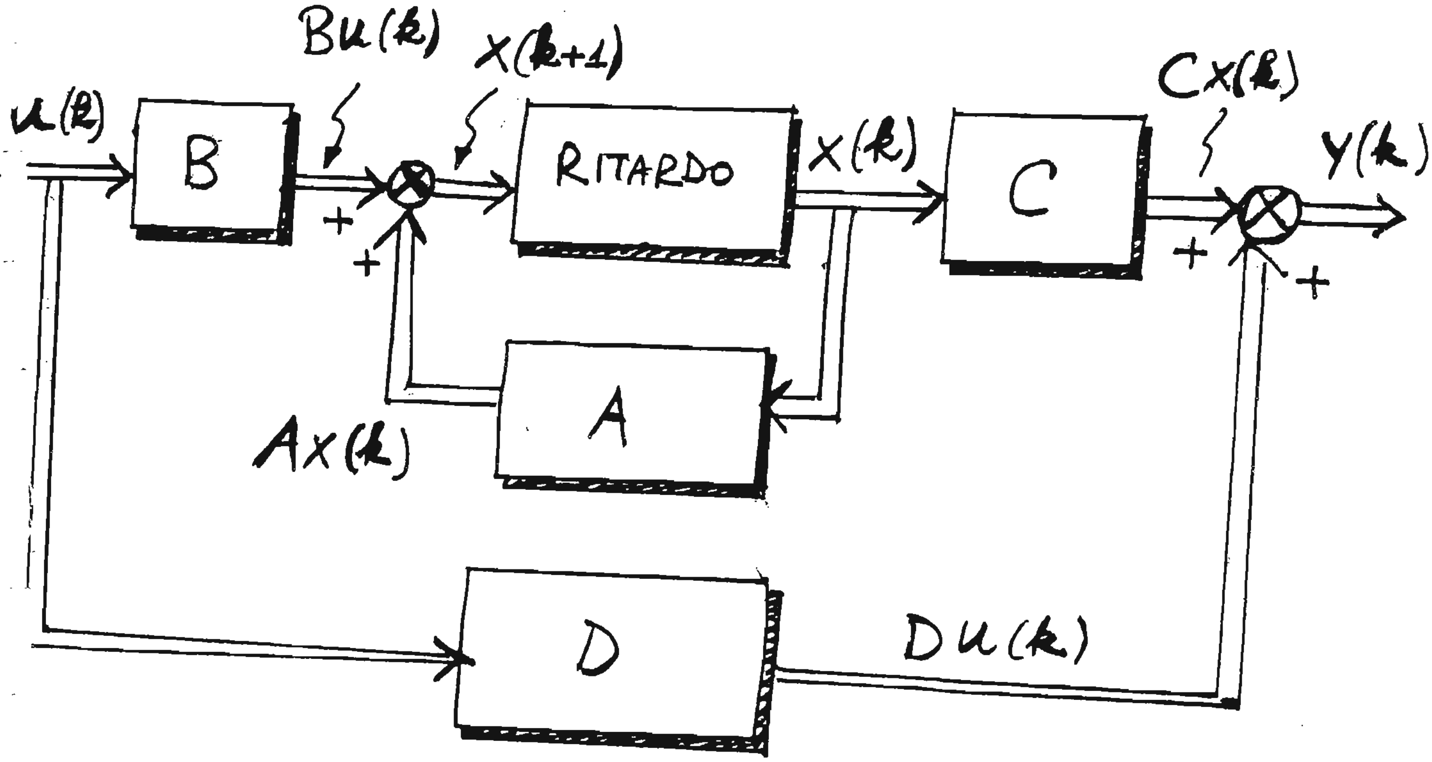
$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

lo stato (e l'ingresso e l'uscita) assumono SOLTANTO UN NUMERO FINITO DI POSSIBILI CONFIGURAZIONI



SISTEMA TEMPO CONTINUO





SISTEMA TEMPO DISCRETO

La soluzione (unica) dell'eq.ne di stato è formalmente indicata come FUNZIONE DI TRANSIZIONE DELLO STATO ($x_0 := x(t_0)$)

$$\boxed{x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))}$$

PROPRIETA':

1. ORIENTAMENTO NEL TEMPO: è definita per $t \geq t_0$, non necessariamente per $t < t_0$

2. CAUSALITA':

Se $u'|_{[t_0,t]} = u''|_{[t_0,t]} \Rightarrow \varphi(t,t_0,x_0,u'(\cdot)) = \varphi(t,t_0,x_0,u''(\cdot))$

3. CONSISTENZA:

$$x = \varphi(t, t, x, u(\cdot))$$

4. COMPOSIZIONE: Sia $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ con

$x_1 := \varphi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot))$

$\Rightarrow \varphi(t_2, t_0, x_0, u(\cdot)) = \varphi(t_2, t_1, x_1, u(\cdot))$

Da $y(t) = g(x(t), u(t), t)$ si ha che:

$$y(t) = \underbrace{g(\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)), u(t), t)}_{\gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot))}$$

:= FUNZIONE DI RISPOSTA

La coppia $(t, x(t)) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}$ è chiamata <u>EVENTO</u> di Σ.

- L'insieme degli eventi generati da $(t_0, x(t_0))$ con l'ingresso $u|_{[t_0,t_1]}$ è definito <u>MOTO DI Σ</u> (nell'insieme degli stati $\mathcal{X}$):

$$\{(\underset{\text{tempo}}{t}, \overset{\text{VETTORE STATO}}{x}) : x = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)),\ t \in [t_0, t_1]\}$$

- L'immagine del moto è la <u>TRAIETTORIA</u>:

$$\{x \in \mathcal{X} : x = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)),\ t \in [t_0, t_1]\}$$

Quindi, data la funzione $x(\cdot)$ su $[t_0, t_1]$ la traiettoria è $X([t_0, t_1])$.

Analogamente, considerando la funzione $y(\cdot)$ su $[t_0, t_1]$ definita da

$$\underline{y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot))} \quad t \in [t_0, t_1]$$

la traiettoria nell'insieme delle uscite è $Y([t_0, t_1])$.

Definizione di <u>STATI INDISTINGUIBILI</u>:

Due stati $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ di Σ sono indistinguibili in $[t_0, t_1]$ se

$$\gamma(t, t_0, x_1, u(\cdot)) = \gamma(t, t_0, x_2, u(\cdot)) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$
$$\text{e } \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$$

<u>Definizione di STATI EQUIVALENTI</u>:

Due stati $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ di Σ che siano indistinguibili su ogni intervallo temporale $[t_0, t_1]$ ($\forall t_0, t_1 \in \mathcal{T}$ con $t_1 \geq t_0$) sono detti equivalenti.

<u>Definizione di SISTEMA IN FORMA MINIMA</u>:

Un sistema Σ che <u>non</u> abbia stati equivalenti in $\mathcal{X}$ è detto sistema in forma minima o sistema minimo.

<u>Definizione di SISTEMI EQUIVALENTI</u>:

due sistemi Σ_1 e Σ_2 sono equivalenti se $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_{f1} = \mathcal{U}_{f2}$, $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$ e per ogni stato $x_1 \in \mathcal{X}_1$ dell'uno è possibile associare uno stato $x_2 \in \mathcal{X}_2$ dell'altro (e viceversa) tale che:

$$\gamma_1(t, t_0, x_1, u(\cdot)) = \gamma_2(t, t_0, x_2, u(\cdot))$$
$$\forall t_0 \ \forall t \geq t_0 \text{ e } \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$$

NOTA: ogni sistema non minimo Σ può essere trasformato in un sistema equivalente minimo Σ_m, costruendo su $\mathcal{X}$ (di Σ) l'insieme delle classi di equivalenza ...

- Definizione di STATO TEMPORANEO DI EQUILIBRIO:

Uno stato $x \in \mathcal{X}$ di Σ è stato temporaneo di equilibrio in $[t_0, t_1]$ se $\exists\, u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ tale che

$$\left(x(t) =\right) x = \varphi(t, t_0, x, u(\cdot)) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

- Definizione di STATO DI EQUILIBRIO:

Uno stato $x \in \mathcal{X}$ di Σ è stato di equilibrio se è stato temporaneo di equilibrio in $[t_0, t_1]$ $\forall t_0, t_1 \in \mathcal{T}$ con $t_0 \leq t_1$.

Data $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ e $\tau \in \mathcal{T}$ si definisce la funzione traslata $u_\Delta(\cdot)$ con:

$$u_\Delta(t+\tau) = u(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

$$\left(u_\Delta(t) = u(t-\tau) \right)$$

(dove si è chiaramente assunto $u_\Delta(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ $\forall \tau \in \mathcal{T}$ e $\forall u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$).

<u>PROPRIETA'</u> (<u>di TRASLAZIONE NEL TEMPO DI CAUSE ED EFFETTI</u>):

Sia Σ <u>stazionario</u>. Allora

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \Longleftrightarrow x(t+\tau) = \varphi(t+\tau, t_0+\tau, x_0, u_\Delta(\cdot))$$

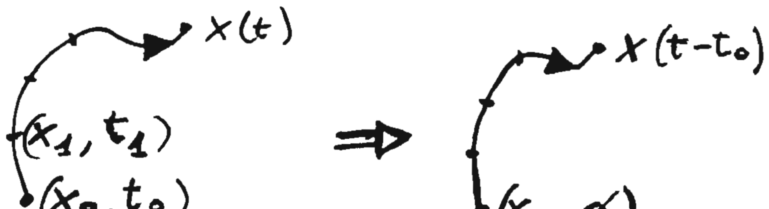
$$y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \Longleftrightarrow y(t+\tau) = \gamma(t+\tau, t_0+\tau, x_0, u_\Delta(\cdot))$$

In particolare con $\tau := -t_0$ si ha:

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \Longleftrightarrow x(t-t_0) = \varphi(t-t_0, 0, x_0, u_\Delta(\cdot))$$

$$y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \Longleftrightarrow y(t-t_0) = \gamma(t-t_0, 0, x_0, u_\Delta(\cdot))$$

(<u>mi porto nell'origine dei tempi</u>)



PROPRIETÀ (linearità di φ e γ):

Sia Σ lineare sul campo $\mathbb{R}$, allora:

- $\varphi(t, t_0, \alpha x_{01} + \beta x_{02}, \alpha u_1(\cdot) + \beta u_2(\cdot)) =$
$= \alpha \varphi(t, t_0, x_{01}, u_1(\cdot)) + \beta \varphi(t, t_0, x_{02}, u_2(\cdot))$
- $\gamma(t, t_0, \alpha x_{01} + \beta x_{02}, \alpha u_1(\cdot) + \beta u_2(\cdot)) =$
$= \alpha \gamma(t, t_0, x_{01}, u_1(\cdot)) + \beta \gamma(t, t_0, x_{02}, u_2(\cdot))$

$\forall t, t_0 \in \mathcal{T}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $x_{01}, x_{02} \in \mathcal{X}$; $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{U}_f$

Dimostrazione (per esercizio): utilizzo le eq.ni diff.li e moltiplico per le costanti α e β ... sommo opportunamente ...

NOTA BENE: Se $\alpha = \beta = 1$ ottengo il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

PROPRIETÀ (scomposizione della funzione di transizione dello stato e della funzione di risposta):

Sia Σ lineare, allora:

- $\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \varphi(t, t_0, x_0, 0) + \varphi(t, t_0, 0, u(\cdot))$
- $\gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \gamma(t, t_0, x_0, 0) + \gamma(t, t_0, 0, u(\cdot))$

($\forall t, t_0 \in \mathcal{T}$, $x_0 \in \mathcal{X}$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$)

Dimostrazione: È sufficiente scegliere
$\alpha = 1$, $\beta = 1$, $x_{01} = x_0$, $u_1(\cdot) = 0$,
$x_{02} = 0$, $u_2(\cdot) = u(\cdot)$ ...

Interpretazione:

moto = (moto libero) + (moto forzato)
risposta = (risposta libera) + (risposta forzata)

Conseguenze:

Sia Σ lineare, allora:

- $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ sono indistinguibili in $[t_0, t_1]$ se e solo se essi generano la stessa risposta libera.
- Σ è in forma minima se e solo se
$$\{ \gamma(t, t_0, x_1, 0) \equiv \gamma(t, t_0, x_2, 0) \ \forall t_0 \} \Longrightarrow \{ x_1 = x_2 \}$$

CONTROLLO ED OSSERVAZIONE DELLO STATO

CONTROLLO DELLO STATO

Obbiettivo: influire sul moto $x(\cdot)$ di Σ agendo sulla funzione d'ingresso $u(\cdot)$.

$$(t_0, x_0) \longrightarrow (t_1, x_1) \qquad t_1 \geq t_0$$

Insiemi caratterizzanti la raggiungibilità e controllabilità:

- $\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0) = \{x_1 : x_1 = \varphi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$

  è l'insieme degli stati raggiungibili all'istante finale t_1 dall'evento (t_0, x_0).

- $\mathcal{W}^+(t_0, t_1, x_0) = \{x_1 : x_1 = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \text{ e } t \in [t_0, t_1], u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$

  è l'insieme degli stati raggiungibili in un istante dell'intervallo $[t_0, t_1]$ dall'evento (t_0, x_0).

• $\mathcal{R}^-(t_0,t_1,x_1) = \{x_0 : x_1 = \varphi(t_1,t_0,x_0,u(\cdot)),\ u(\cdot)\in\mathcal{U}_f\}$

è l'insieme degli <u>stati controllabili all'evento (t_1,x_1) dall'istante iniziale t_0.</u>

• $\mathcal{W}^-(t_0,t_1,x_1) = \{x_0 : x_1 = \varphi(t_1,t,x_0,u(\cdot)),\ u(\cdot)\in\mathcal{U}_f \text{ e } t\in[t_0,t_1]\}$

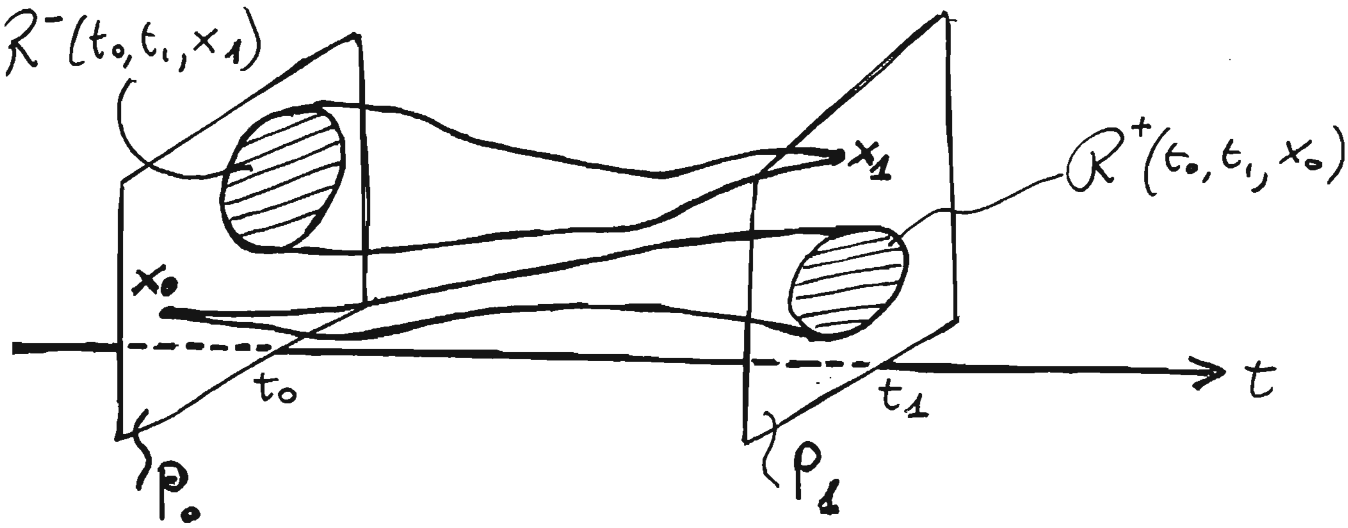
è l'insieme degli <u>stati controllabili all'evento (t_1,x_1) da un istante dell'intervallo $[t_0,t_1]$.</u>

<u>PROPRIETÀ:</u>

$\mathcal{R}^+(t_0,t_1,x) \subseteq \mathcal{W}^+(t_0,t_1,x) \quad \forall x\in\mathcal{X}$

$\mathcal{R}^-(t_0,t_1,x) \subseteq \mathcal{W}^-(t_0,t_1,x) \quad \forall x\in\mathcal{X}$

<u>Esempio</u>: $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, spazio degli eventi: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$



dove $P_0 := \{(t,x) : t=t_0\}$ e $P_1 := \{(t,x) : t=t_1\}$, inoltre $\mathcal{W}^+(t_0,t_1,x_0)$ e $\mathcal{W}^-(t_0,t_1,x_1)$ sono gli stati interni ai dove "coni" -

$$\mathcal{E}(t_0,x_0) := \{(t,x) : x = \varphi(t,t_0,x_0,u(\cdot)) \ , u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$$

è l'insieme di tutti i moti (anche per $t < t_0$) che includono l'evento (t_0,x_0)

analogamente:

$$\mathcal{E}(t_1,x_1) := \{(t,x) : x = \varphi(t,t_1,x_1,u(\cdot)), u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$$

Quindi:

$$\mathcal{R}^+(t_0,t_1,x_0) = \mathcal{E}(t_0,x_0) \cap P_1$$

$$\mathcal{R}^-(t_0,t_1,x_1) = \mathcal{E}(t_1,x_1) \cap P_0$$

• <u>Definizione di SISTEMA COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE</u>:

Σ è detto completamente RAGGIUNGIBILE dall'evento (t_0, x) nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se

$$W^+(t_0, t_1, x) = \mathcal{X}$$

<u>Definizione di SISTEMA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE</u>:

Σ è detto completamente controllabile all'evento (t_1, x) nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se

$$W^-(t_0, t_1, x) = \mathcal{X}$$

Per i sistemi <u>STAZIONARI</u> si può fissare $t_0 = 0$ ed ottenere gli insiemi:

$$\mathcal{R}^+_{t_1}(x) := \mathcal{R}^+(0, t_1, x)$$

$$W^+_{t_1}(x) := W^+(0, t_1, x)$$

$$\mathcal{R}^-_{t_1}(x) := \mathcal{R}^-(0, t_1, x)$$

$$W^-_{t_1}(x) := W^-(0, t_1, x)$$

Se $t_1 \leq t_2$ allora

$$W^+_{t_1}(x) \subseteq W^+_{t_2}(x) \qquad \forall x \in \mathcal{X}$$

$$W^-_{t_1}(x) \subseteq W^-_{t_2}(x) \qquad \forall x \in \mathcal{X}$$

Definiamo ora gli insiemi:

$$\boxed{W^+(x) := \lim_{t \to +\infty} W^+_t(x)}$$

$$\boxed{W^-(x) := \lim_{t \to +\infty} W^-_t(x)}$$

che sono l'insieme <u>raggiungibile da x</u> e l'insieme <u>controllabile ad x</u> in un intervallo di tempo arbitrariamente grande.

<u>Definizione di SISTEMA COMPLETAMENTE CONNESSO</u>:

Un sistema <u>stazionario</u> è completamente connesso se è possibile raggiungere ogni stato partendo da un altro stato arbitrario, più precisamente se

$$W^+(x) = W^-(x) = \mathcal{X} \qquad \forall x \in \mathcal{X}$$

Quindi Σ stazionario è completamente connesso se e solo se
$\forall x_0, x_1 \in \mathcal{X} \quad \exists t_1 \in \mathcal{T}$ e $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ tali che

$$x_1 = \varphi(t_1, 0, x_0, u(\cdot))$$

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE DELLO STATO}}$

Più precisamente parliamo di osservabilità e ricostruibilità quale possibilità di individuare lo stato iniziale $x(t_0)$ e quello finale $x(t_1)$ dalla conoscenza congiunta di

$$u|_{[t_0,t_1]} \text{ e } y|_{[t_0,t_1]}$$

Esempio: il ~~problema~~ dell'osservazione dello stato iniziale è certamente non risolubile se $x(t_0)$ appartiene ad un insieme (di cardinalità >1) di stati indistinguibili su $[t_0, t_1]$.

<u>Insiemi caratterizzanti l'osservabilità e la ricostruibilità:</u>

$$\bar{Q}(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) := \{x_0 : y(\tau) = \gamma(\tau, t_0, x_0, u(\cdot)), \tau \in [t_0, t_1]\}$$

è l'insieme degli <u>stati iniziali compatibili con</u> $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y|_{[t_0,t_1]}$ -

$$\mathcal{Q}^{+}(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)) := \{x_1 : x_1 = \varphi(t_1,t_0,x_0,u(\cdot));\ x_0 \in \mathcal{Q}^{-}(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))\}$$

è l'insieme degli stati finali compatibili con $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y|_{[t_0,t_1]}$.

Evidentemente $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y|_{[t_0,t_1]}$ non sono funzioni arbitrarie ma, bensì, una coppia <u>causa-effetto</u> di Σ:

$$(u(\cdot),y(\cdot)) \in \mathcal{B} := \{(u(\cdot),y(\cdot)) : y(\tau)=\gamma(\tau,t_0,x_0,u(\cdot))$$
$$\forall \tau \geq t_0,\ t_0 \in \mathcal{T},\ x_0 \in \mathcal{X},\ u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$$

<u>Definizione di STATO DIAGNOSTICABILE</u>:

Lo stato di un sistema Σ, o il sistema Σ, è detto diagnosticabile in $[t_0,t_1]$ se

$$\exists\ u(\cdot) \in \mathcal{U}_f \ \text{ t.c. } \ |Q^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))| = 1$$
$$\forall y(\cdot) \ \text{ t.c. } \ (u(\cdot),y(\cdot)) \in \mathcal{B}.$$

<u>Definizione di STATO INCASELLABILE</u>:

Lo stato di un sistema Σ, o il sistema Σ, è detto incasellabile in $[t_0,t_1]$ se

$$\exists\ u(\cdot) \in \mathcal{U}_f \ \text{ t.c. } \ |Q^+(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))| = 1$$
$$\forall y(\cdot) \ \text{ t.c. } \ (u(\cdot),y(\cdot)) \in \mathcal{B}.$$

Definizione di STATO COMPLETAMENTE OSSERVABILE

Lo stato di un sistema Σ, o il sistema Σ, è detto completamente osservabile in $[t_0, t_1]$ se $\forall (u(\cdot), y(\cdot)) \in \mathcal{B}$ definite su $[t_0, t_1]$ vale

$$|Q^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))| = 1 .$$

Definizione di STATO COMPLETAMENTE RICOSTRUIBILE

Lo stato di un sistema Σ, o il sistema Σ, è detto completamente ricostruibile in $[t_0, t_1]$ se $\forall (u(\cdot), y(\cdot)) \in \mathcal{B}$ definite su $[t_0, t_1]$ vale

$$|Q^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))| = 1 .$$

CONSEGUENZE:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \text{ diagnosticabile} & \Rightarrow & \Sigma \text{ inoscellabile} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \Sigma \text{ comp. osservabile} & \Rightarrow & \Sigma \text{ com. ricostruibile} \end{array}$$

→ NOTA: se c'è un unico st. iniziale allora per l'unicità della soluzione ci sarà un unico stato finale...

Per i sistemi stazionari, ovviamente si avrà:

$$Q^-_{t_1}(u(\cdot),y(\cdot)) := Q^-(0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))$$

$$Q^+_{t_1}(u(\cdot),y(\cdot)) := Q^+(0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))$$

CONCLUSIONE: si elencano ora alcuni significativi problemi relativi al controllo ed alla osservazione dello stato:

1. controllo fra due stati assegnati: dati gli stati x_0 e x_1 e gli istanti t_0, t_1 determinare $u(\cdot)$ tale che $x_1 = \varphi(t_1,t_0,x_0,u(\cdot))$

2. controllo ad una data uscita: dato uno stato iniziale x_0 ed un valore d'uscita y_1 e dati gli istanti t_0 e t_1, determinare $u(\cdot)$ tale che $y_1 = \gamma(t_1,t_0,x_0,u(\cdot))$

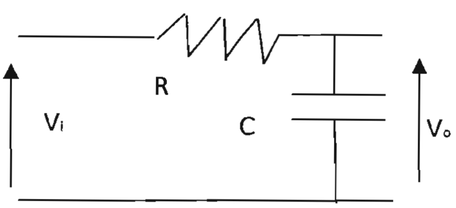
3. controllo su una data funzione d'uscita: dato uno stato iniziale x_0, una funzione d'uscita ammissibile $y(\cdot)$ e due istanti t_0 e t_1 determinare $u(\cdot)$ tale che
$y(t) = \gamma(t,t_0,x_0,u(\cdot)) \quad \forall t \in [t_0,t_1]$

4. osservazione dello stato: dati i segmenti di funzione $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y|_{[t_0,t_1]}$ determinare $\mathcal{Q}^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))$.

5. ricostruzione dello stato: dati i segmenti di funzione $u|_{[t_0,t_1]}$ e $y|_{[t_0,t_1]}$ determinare $\mathcal{Q}^+(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))$.

ecc...

Elementi di Modellistica



NON BASTA CONOSCERE L'INGRESSO V_i PER DETERMINARE V_o

DIPENDE DALLO STATO DEL CONDENSATORE!!!!

LO STATO DI UN SISTEMA ALL'ISTANTE t_0 E' LA GRANDEZZA CHE CONTIENE L'INFORMAZIONE NECESSARIA PER DETERMINARE UNIVOCAMENTE L'ANDAMENTO DELL'USCITA y(t) PER OGNI $t>t_0$ UNA VOLTA CONOSCIUTO L'INGRESSO u(t). ANCHE IN ASSENZA DI INGRESSO UN SISTEMA PUO' EVOLVERE DINAMICAMENTE SE LO STATO è DIVERSO DA 0!

<u>QUALE GRANDEZZE SCELGO PER IDENTIFICARE LO STATO?</u> SONO TANTE LE GRANDEZZE CHE VANNO BENE, LA SCELTA "CONSIGLIATA" E' QUELLA DI ASSUMERE COME VARIABILI DI STATO LE GRANDEZZE FISICHE CHE CARATTERIZZANO IL SISTEMA DAL PUNTO DI VISTA ENERGETICO:

- CONDENSATORE C: $E_c(t)=\frac{1}{2}CV_c^2(t)$
- INDUTTANZA L: $E_L(t)=\frac{1}{2}LI_L^2(t)$
- MOLLA CON COSTANTE k: $E_k(t)=\frac{1}{2}kz^2(t)$
- MASSA m IN MOTO A VELOCITA' v(t) : $E_p(t)=\frac{1}{2}mv^2(t)$
- CILINDRO DI AREA BASE B PIENO DI LIQUIDO CON DENSITA' ρ:

$$E_p(t)=\frac{1}{2}\rho g\frac{V^2(t)}{B}=\frac{1}{2}\rho gBh^2(t)$$

PRINCIPALI PROBLEMI AFFRONTATI DALL'AUTOMATICA

1) MODELLIZZAZIONE: individuare un modello matematico del sistema che ne descrive il comportamento in termini quantitativi. E' richiesto:

   - ASTRAZIONE
   - APPROSSIMAZIONE: trascuro ciò che è inutile,...
   - UN INSIEME DI ASSUNZIONI: lavoro in un determinato modo, in un particolare contesto, ecc..

2) IDENTIFICAZIONE: a causa della conoscenza incompleta dei dispositivi, si tenta di risalire al suo modello osservando il comportamento del sistema.

   - IDENTIFICAZIONE PARAMETRICA
   - IDENTIFICAZIONE A SCATOLA NERA (errori di misura, disturbi da variazioni temp., da rete elettica, ecc..)

3) ANALISI: prevedere il comportamento del sistema futuro sulla base delle sollecitazioni a cui è soggetto (es: analisi ecosistema marino con la possibilità di ridurre le emissioni di CO_2 sciogliendo l'anidride carbonica nell'acqua...)

4) CONTROLLO – SINTESI (del controllore): imporre al sistema un comportamento desiderato – progettare, cioè sintetizzare, un CONTROLLORE che sollecitando opportunamente il sistema sia capace di guidare la sua evoluzione nel senso desiderato (ad es: rete idrica a portata costante comandata da pompe di mandata).

5) **OTTIMIZZAZIONE:** caso particolare di problema di controllo. Si vuole che il sistema realizzi un determinato obbiettivo OTTIMIZZANDO UN DATO INDICE DI PRESTAZIONE. Ad esempio: le sospensioni attive dei SUV sono progettate per garantire un adeguato indice di confort ai passeggeri ed al contempo assicurare una buona tenuta di strada, oppure i satelliti artificiali che devono raggiungere un punto nello spazio consumando meno carburante possibile.

6) **VERIFICA:** avendo a disposizione il prototipo del modello del sistema, si testano le proprietà desiderate utilizzando i controlli possibili (ad esempio: modello matematico di ascensore controllato con PLC dove voglio scoprire se ci sono "bachi" nel sw).

7) **DIAGNOSI DI GUASTO:** diagnosi per comportamenti anomali per determinare soluzioni correttive (ad es: corpo umano quando si ammala e sale la temperatura).

- **DESCRIZIONE INGRESSO-USCITA**

- **DESCRIZIONE IN VARIABILI DI STATO**

TIPOLOGIE-CLASSIFICAZIONI:

- DINAMICI
- ISTANTANEI

- STAZIONARI
- NON STAZIONARI

- LINEARI
- NON LINEARI

- CAUSALI
- NON CAUSALI

- PAR. CONCENTRATI
- PAR. DISTRIBUITI

- SISO
- MIMO

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI IN BASE ALLO STATO

NUMERO DI STATI POSSIBILI

∞

SISTEMI A STATI INFINITI

χ *spaziovettoriale*

$\dim \chi < \infty$

SISTEMI A DIMENSIONE FINITA (o a PARAMETRI CONCENTRATI)

sono caratterizzati da equazioni differenziali a parametri CONCENTRATI (equazioni differenziali ordinarie)

$\dim \chi = \infty$

SISTEMI A DIMENSIONE INFINITA (o a PARAMETRI DISTRIBUITI)

sono caratterizzati da equazioni differenziali a parametri DISTRIBUITI

AD ES: sbarra metallica che conduce calore in cui si controlla la temperatura ad una estremità

$< \infty$

SISTEMI A STATI FINITI

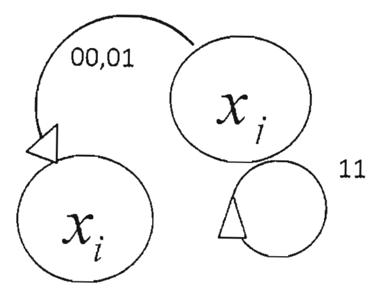
$$\chi = \left\{ x_1, x_2, x_{3,\dots,} x_n \right\}$$

SINCRONI

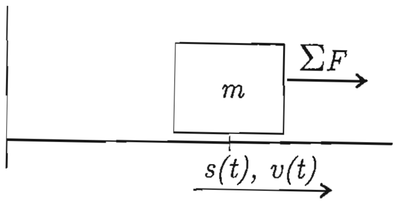
ASINCRONI

LO STATO (L'INGRESSO E L'USCITA) ASSUMONO SOLO UN NUMERO FINITO DI POSSIBILI CONFIGURAZIONI

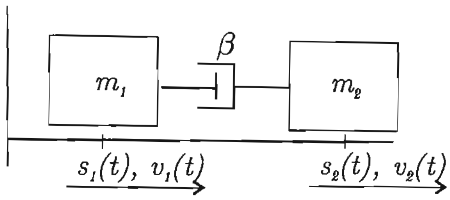
- ELABORATORI ELETTRONICI
- COMMUTATORI TELEFONICI
- MACCHINE UTENSILI AUTOMATICHE
- PLC



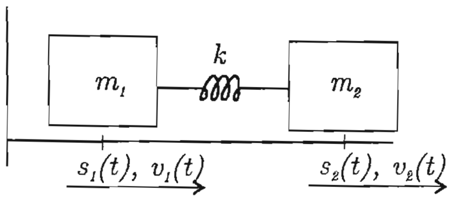
Sistemi Meccanici - Traslazione



$$\Sigma F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$ massa



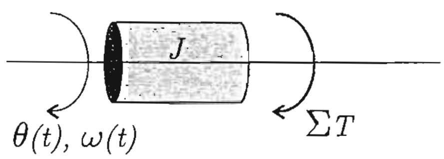
$$F_1 = \beta(v_2 - v_1) = -F_2$$ attrito viscoso



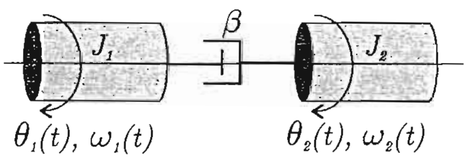
$$F_1 = k(s_2 - s_1) = -F_2$$ elasticità

- s_i, v_i: posizione e velocità del corpo #i rispetto ad un sistema di riferimento fisso (inerziale)
- F_i: forza agente sul corpo #i
- $P = Fv$: potenza meccanica

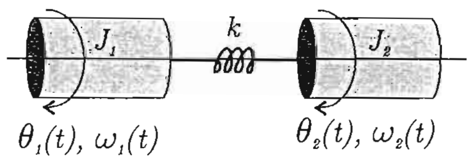
Sistemi Meccanici - Rotazione



$$\Sigma T = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$ inerzia



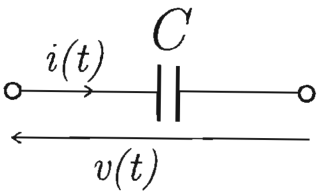
$$T_1 = \beta(\omega_2 - \omega_1) = -T_2$$ attrito viscoso



$$T_1 = k(\theta_2 - \theta_1) = -T_2$$ elasticità

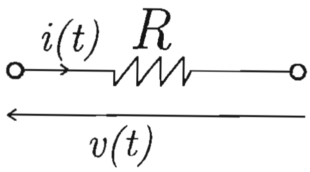
- θ_i, ω_i: posizione e velocità angolari del corpo #i rispetto ad un sistema di riferimento fisso
- T_i: coppia agente sul corpo #i
- $P = T\omega$: potenza meccanica

Sistemi Elettrici



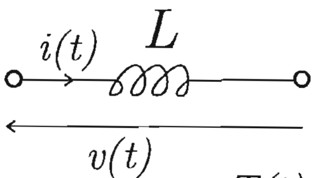
$$i = C\frac{dv}{dt}$$

capacità



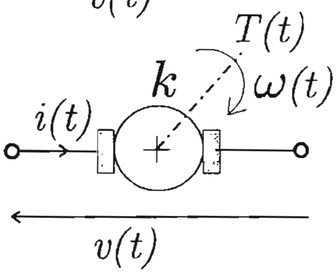
$$v = Ri$$

resistenza



$$v = L\frac{di}{dt}$$

induttanza

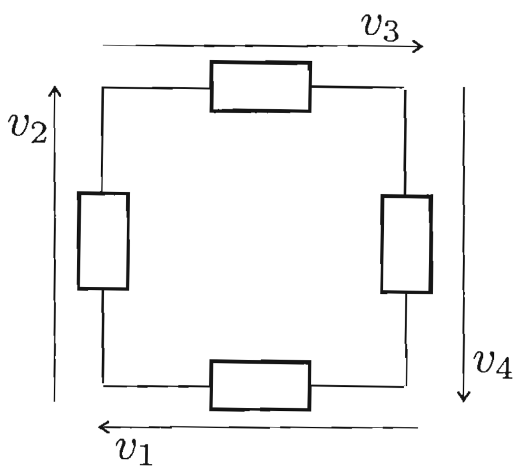


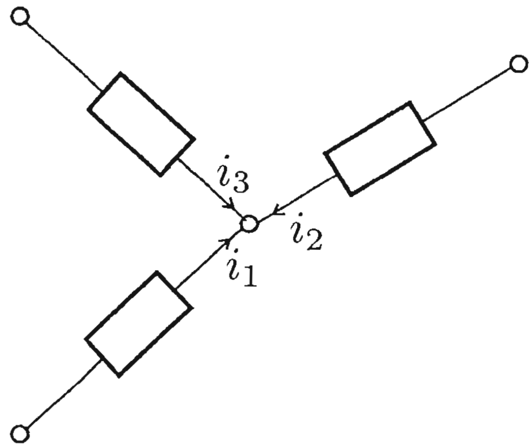
$$v = k\omega$$
$$T = ki$$

motore DC.
con controllo in
tensione di
armatura

- v, i: tensione ai capi del componente, corrente attraverso il componente
- $P = vi$: potenza elettrica
- ω, T: velocità angolare e coppia prodotta

Strumenti di analisi: Leggi di Kirchhoff





equilibrio delle tensioni alla maglia

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

equilibrio delle correnti al nodo

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Sistemi Termici

θ	Temperatura
Q	Calore
P	Potenza termica o flusso di calore
M	Massa
c_s	Calore specifico
R	Resistenza termica fra due corpi

Relazioni:

- $P = \frac{dQ}{dt}$ flusso di calore
- $P = C\frac{d\theta}{dt}$ variazione di temperatura
- $P = \frac{\theta_1 - \theta_2}{R}$ flusso di calore fra due corpi

Analogo elettrico:

- Per ogni capacità termica $C = c_s M$, associa un condensatore C collegato a massa (=temperatura di riferimento, e.g. 0^o K)
- Per ogni coppia (i, j) di corpi che si scambiano calore, associa una resistenza elettrica R_{ij}
- Per ogni generatore di calore, associa un generatore di corrente.
- Tensione=temperatura, corrente=flusso di calore
- Nota: non ci sono "induttanze termiche" ($\Rightarrow$ no oscillazioni!)