CAPITOLO V

ELEMENTI DI TEORIA DELLA REALIZZAZIONE

- Introduzione alla realizzazione di $H(s)$
- Realizzazioni minime
- Metodi di realizzazione
  - realizzazione di sistemi scalari (realizzazione del regolatore e realizzazione dell'osservatore)

$H(s) \to \Sigma(A,B,C,D)$

In questo capitolo si vuole determinare un modello di stato, ovvero una rappresentazione ingresso-stato-uscita ($\Sigma(A,B,C,D)$) data una rappresentazione ingresso-uscita di un sistema dinamico.

Per i sistemi LINEARI, STAZIONARI e A TEMPO CONTINUO, caratterizzati da:

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

la matrice di TRASFERIMENTO INGRESSO-USCITA è data da:

$$\boxed{H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D}$$

e corrisponde alla sua rappresentazione ingresso-uscita.

La seguente trattazione vale anche per i sistemi tempo discreto.

DEFINIZIONE DI REALIZZAZIONE di $H(s)$

Data una matrice di trasferimento $H(s)$ di un sistema dinamico, una realizzazione di $H(s)$ è un modello di stato $\{A, B, C, D\}$ per cui:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

La matrice di trasferimento $H(s)$ di un modello $\{A, B, C, D\}$ è sviluppabile in serie di LAURENT:

$$H(s) = H_0 + H_1 s^{-1} + H_2 s^{-2} + H_3 s^{-3} + \dots$$

H_i MATRICI SCALARI $\quad s$ VARIABILE COMPLESSA

DEFINIZIONE DI PARAMETRI DI MARKOV di Σ

I termini H_i, $i = 0, 1, \dots$, sono i parametri di Markov di Σ.

I parametri di Markov sono determinabili con le relazioni:

$$H_0 = \lim_{s \to +\infty} H(s) \quad , \quad H_1 = \lim_{s \to +\infty} s\,(H(s) - H_0)$$

$$H_2 = \lim_{s \to +\infty} s^2 \left(H(s) - H_0 - s^{-1}H_1\right), \dots$$

TEOREMA

Un modello di stato $\{A, B, C, D\}$ è una realizzazione di $H(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} H_i s^{-i}$ se e solo se

$$H_0 = D \quad e \quad H_i = C A^{i-1} B \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

NON UNICHE

Dimostrazione:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D =$$

$$= C[s(I - s^{-1}A)]^{-1} B + D = C[(I - s^{-1}A)^{-1} s^{-1}] B + D =$$

$\frac{1}{1-a} = \sum_{i=0}^{+\infty} a^i$

$$= C(I + s^{-1}A + s^{-2}A^2 + s^{-3}A^3 + \dots) s^{-1} B + D =$$

$$= D + (CB)s^{-1} + (CAB)s^{-2} + (CA^2B)s^{-3} + \dots$$

che confrontato con lo sviluppo in serie di Laurent: $H(s) = H_0 + H_1 s^{-1} + H_2 s^{-2} + \dots$ si ottiene la Tesi.

$\square$

Se esiste una realizzazione di $H(s)$, ne esistono infinite altre. (Il Teorema precedente lo dimostra).

Non è detto però che, data $H(s)$, esistano comunque delle sue realizzazioni; vale infatti il Teorema:

TEOREMA

Una matrice $H(s)$ è realizzabile quale matrice di trasferimento di un modello di stato $\{A,B,C,D\}$ se e solo se

<u>$H(s)$ è una matrice di funzioni razionali e soddisfa</u>

$$\boxed{\lim_{s\to+\infty} H(s) < +\infty}$$

IL GRADO DEL NUMERATORE È MINORE O UGUALE A QUELLO DEL DENOMINATORE

$$H(s) = \begin{bmatrix} s & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s} & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\text{NO}}$$

ovvero, se e solo se, $H(s)$ è una <u>matrice razionale propria</u>.

<u>Dimostrazione</u>

• <u>NECESSITÀ</u>: Sia $H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

allora

$$H(s) = \frac{C\,Agg(sI-A)\,B}{\det(sI-A)} + D$$

e dato che $\det(sI-A)$ è un polinomio di grado n in s, mentre

$Agg(sI-A)$ è, per costruzione, una matrice i cui elementi sono polinomi in s con grado massimo $(n-1)$, si può concludere che $H(s)$ è una matrice di FUNZIONI RAZIONALI, inoltre $\lim_{s\to+\infty} H(s) = D < \infty$.

- <u>SUFFICIENZA</u>: Se $H(s)$ è una matrice razionale propria, allora basta utilizzare un algoritmo di realizzazione presentato in seguito per provare l'esistenza di una sua realizzazione. □

Data una matrice razionale propria $H(s)$ non esiste un limite superiore all'ordine delle sue realizzazioni, ma esiste un limite inferiore. A_{11}, B_1, C_1 è limite inferiore

Ad esempio:

Sia $\Sigma\{A,B,C,D\}$ con $H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ allora considero il sistema visto a cui "aggiungo" una parte inosservabile, così:

$$\Sigma': \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ \dot{\tilde{z}} = \tilde{A}\,\tilde{z} + \tilde{B}\,u \quad \leftarrow \text{aggiungo questa} \\ y = Cz + Du \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \tilde{B} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + Du$$

quindi:

$$\Sigma': \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ \tilde{B} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, D \right\}$$ è

una realizzazione di $H(s)$ di ordine maggiore.

<u>DEFINIZIONE DI REALIZZAZIONE MINIMA</u>

Una realizzazione $\{A, B, C, D\}$ di <u>ordine minimo</u> di $H(s)$ è detta MINIMA o IRRIDUCIBILE.

Attraverso la scomposizione canonica di Kalman, si era visto che la matrice di trasferimento $H(s)$ dipendeva solo dalla parte controllabile ed osservabile.
Vale quindi il Teorema:

TEOREMA

Una realizzazione $\{A, B, C, D\}$ di ordine n di $H(s)$ è minima se e solo se è controllabile ed osservabile.

Dimostrazione:

- NECESSITA':
$\{A, B, C, D\}$ di ordine minimo $\Rightarrow \{A, B, C, D\}$ è controllabile ed osservabile. La dimostrazione discende dalla scomposizione canonica di Kalman, infatti se così non fosse, attraverso la scomposizione canonica si potrebbe ottenere una realizzazione di $H(s)$ di ordine inferiore.
- SUFFICIENZA: $\{A, B, C, D\}$ di ordine n è controllabile ed osservabile $\Rightarrow \{A, B, C, D\}$ è di ordine minimo. NO DIMOSTRAZIONE □

GUARDO L'MCM. DEI MINORI ESCLUSO LO 0

TEOREMA

Il grado del polinomio dei poli di $H(s)$, coincide con l'ordine di una realizzazione minima di $H(s)$. Quindi, data una matrice razionale propria $H(s)$ è sempre possibile determinare l'ordine di una sua realizzazione minima SENZA COSTRUIRLA ESPLICITAMENTE.

(NO DIMOSTRAZ.)

ESEMPIO:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 1 & \frac{2}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{10}{s+3} & -1 \end{bmatrix}$$

3 INGRESSI
2 USCITE

$D = \lim_{s \to \infty} H(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $C \in \mathbb{R}^{2\times 3}$
$B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $D \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

minori non nulli:

$$\frac{1}{s+2};\ 1;\ \frac{2}{s+2};\ \frac{10}{s+3};\ \frac{10}{(s+2)(s+3)} - \frac{1}{(s+2)};$$

$$\left(-1 - \frac{20}{(s+2)(s+3)}\right);\ -\frac{1}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}$$

cioè:

$P_H(s) = (s+2)^2(s+3)$ polinomio dei poli

ORDINE DI UNA REALIZZAZIONE MINIMA DI $H(s)$ SARA': $n = 3$

METODI DI REALIZZAZIONE

- METODI INDIRETTI : si ottiene una realizzazione che in generale non è minima, poi con la scomposizione canonica di Kalman si costruisce una realizzazione minima.
Metodi indiretti sono:
  - REALIZZAZIONE DEL REGOLATORE
  - REALIZZAZIONE DELL'OSSERVATORE NO
- METODI DIRETTI: si ottiene subito una realizzazione minima senza dover affrontare la scomposizione canonica di Kalman.
Metodi Diretti sono:
  - ALGORITMO DI HO
  - REALIZZAZIONI "BILANCIATE"
  - ECC...

Si esamineranno nel seguito, solo le realizzazioni con metodi indiretti per il solo caso scalare: $m = p = 1$.

ALGORITMI DI REALIZZAZIONE PER SISTEMI SCALARI $m = p = 1$

Sia $H(s) = \dfrac{n(s)}{d(s)} = \dfrac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$

con $n(s)$ e $d(s)$ coprimi tra loro.

REALIZZAZIONE DEL REGOLATORE:

$H(s) = \dfrac{1+s}{s^5}$ $A \in \mathbb{R}^{5\times5}$ $C \in \mathbb{R}^{1\times5}$ $B \in \mathbb{R}^{5\times1}$ D NON C'È

Si definisce:

$$S(s) := \left.\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}\right\} n \text{ ELEMENTI } \in \mathbb{R}^{n\times1}$$

Si determina $C_c \in \mathbb{R}^{1\times n}$ e $D_c \in \mathbb{R}$ affinché:

$$\underset{\text{NUMERATORE}}{n(s)} = C_c\, S(s) + D_c\, \underset{\text{DENOMINATORE}}{d(s)}$$

$$D_c = \lim_{s \to +\infty} H(s) = b_n$$

$$C_c = [\, b_0 - b_n a_0,\ b_1 - b_n a_1,\ \dots,\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \,]$$

la realizzazione del regolatore è definita da C_c, D_c e da:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

a_i DEL DENOMINATORE

RICORDA LA FORMA CANONICA DI CONTROLLO

LEMMA

La realizzazione del regolatore $\{A_c, B_c, C_c, D_c\}$ è una realizzazione di $H(s)$.

Dimostrazione

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = C\,\frac{Agg(sI-A)}{\det(sI-A)}\,B + D =$$

$$= \frac{C\,Agg(sI-A)B + D\det(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

scegliendo $A = A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & \cdots & & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ $\quad B = B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$$C = C_c = [\, b_0 - b_n a_0, \ldots, b_{n-1} - b_n a_{n-1} \,]$$

e $D = D_c = \lim_{s \to +\infty} H(s) = b_n$

Si ottiene:

$$\det(sI-A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0 = d(s)$$

segue dalle proprietà della forma canonica di controllo

inoltre

ULTIMA COLONNA DELLA AGGIUNTA OVVERO ULTIMA RIGA DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI

$$C\,Agg(sI-A)B + D\det(sI-A) = C_c\,Agg(sI-A_c)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ b_n(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0)$$

Si noti che

$$Agg\,(sI-A_c)\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{è l'ultima colonna}$$

di $Agg\,(sI-A_c)$. Quindi, dato che

$$(sI-A_c)=\begin{pmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & s & -1 & 0 \cdots & 0\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & & -1\\ a_0 & a_1 & \cdots & & a_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$Agg\,(sI-A_c)=$$

NOTA

$$=\begin{pmatrix} * & * & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\\ * & * & * & *\\ * & * & * & *\\ \underbrace{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n+1}}_{(-1)^{2n}=1} & \underbrace{s\cdot(-1)^{n-2}\cdot(-1)^{n+2}}_{(-1)^{2n}=1} & \underbrace{s^2(-1)^{n-3}\cdot(-1)^{n+3}}_{(-1)^{2n}=1} & \cdots\; s^{n-1}\cdot(-1)^{2n}\end{pmatrix}^t$$

RIGA COLONNA

POSIZIONE

det. del minore di ordine $(n-1)$
CANCELLO 1ª COLONNA E ULTIMA RIGA

det. del minore di ordine $(n-1)$

det. del minore di ordine $(n-1)$

quindi

$$Adj(sI-A_c)B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} := S(s)$$

$$C_c \cdot S(s) + D_c\, d(s) = n(s)$$

□

LEMMA

La realizzazione del regolatore è una realizzazione minima (caso scalare)

Dimostrazione

$P_H(s) = d(s) \qquad deg(d(s)) = n$

□

REALIZZAZIONE DELL'OSSERVATORE

La realizzazione dell'osservatore è data da:

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & (-a_0) \\ 1 & 0 & & (-a_1) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & (-a_{n-1}) \end{bmatrix} \qquad B_o = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C_o = [0 \; \cdots \; 1] \qquad D_o = b_n$$

LEMMA

La realizzazione dell'osservatore $\{A_o, B_o, C_o, D_o\}$ è una realizzazione di $H(s) = \dfrac{n(s)}{d(s)}$.

Dimostrazione

Si utilizza la proprietà di dualità della realizzazione del regolatore:

$$A_o = A_c^t \qquad B_o = C_c^t \qquad C_o = B_c^t \qquad D_o = D_c$$

$\square$

LEMMA

La realizzazione dell'osservatore è una realizzazione minima. $\square$