Compito 3, Esercizio 2

Considerare il grafo orientato (aciclico) definito da:

$$[V=]\quad f=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 & 7 & 8 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \end{array}$$

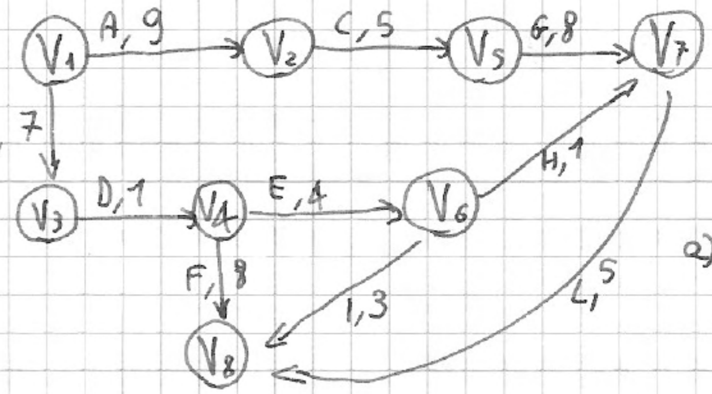
$$c=\begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 & 8 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$p=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 11 & 11 \end{bmatrix}$$

divisione prima di...

$$\Rightarrow f=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 3 & \vdots\, 5 & \vdots\, 4 & \vdots\, 6 & 8 & \vdots\, 7 & \vdots\, 7 & 8 & \vdots\, 8 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I & L \end{array} \end{array}$$

Questo rappresenta le durate



Grafo: relazioni di precedenza tra attività (10 attività)

a) indicare quali sono le relazioni di precedenza implicite.

Identifico le attività da A a L e le identifico nel grafo.

a) RISPOSTA:

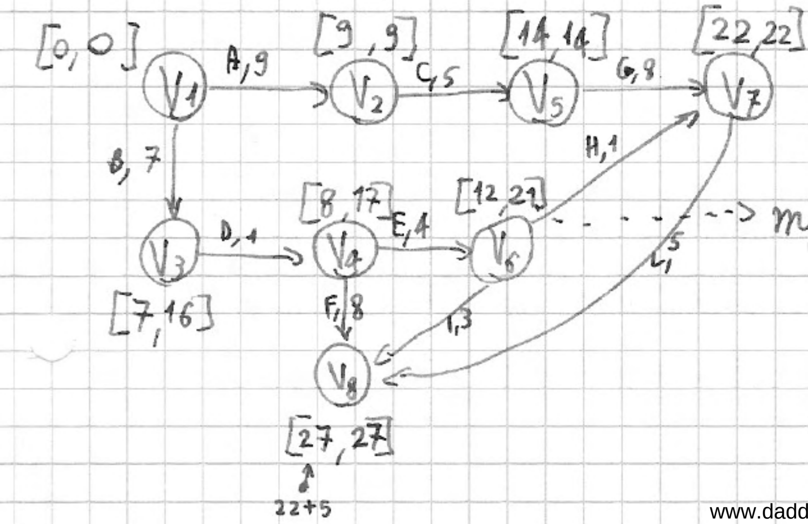
precede

$A \prec C$, $B \prec D$, $C \prec G$, $D \prec E$, $D \prec F$, $E \prec H$, $E \prec I$, $G \prec L$, $H \prec L$.

più quelle implicite per transitività (es. $A \prec G$)

b) Determinare $TMIN_i$ e $TMAX_i$:

- controllo che $(V_i, V_j) \in A \Rightarrow i < j$ ✓ (altrimenti ri-numero!)
- calcolo TMIN e TMAX $\forall V$.



TMAX → parto dal fondo con TMIN=TMAX

archi uscenti

$\dashrightarrow \min\{22-1,\ 27-3\}$

ATTIVITÀ	EARLY START TIME	LATE START TIME	SLITTAMENTO
A	0	9 - 9 = 0	0 - 0 = 0
B	0	16 - 7 = 9	9 - 0 = 9
C	9	14 - 5 = 9	9 - 9 = 0
D	7	17 - 1 = 16	16 - 7 = 9
E	8	21 - 4 = 17	17 - 8 = 9
F	8	27 - 8 = 19	19 - 8 = 11
G	14	22 - 8 = 14	14 - 14 = 0
H	12	22 - 1 = 21	21 - 12 = 9
I	12	27 - 3 = 24	24 - 12 = 12
L	22	27 - 5 = 22	22 - 22 = 0
	↑ TMIN VERTICE DI PARTENZA	↑ TMAX VERTICE ARRIVO — DISTANZA	↑ DIFFERENZA TRA LST E EST

c) Determinare il cammino massimo da V_1 a V_8.

È il cammino in cui TMIN = TMAX per tutto il cammino!

$V_1 \to V_2 \to V_5 \to V_7 \to V_8$.

ESERCIZIO 1 – PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA (PLI)

Prodotti A, B in lotti, dove un lotto di A ha lo stesso profitto di un lotto di B.

Un lotto di A richiede 50 qt di zucchero

Un lotto di B " 40 qt di zucchero

\# lotti di B ≤ # lotti di A + 1 a) Modello PLI

b) Massimizzare il profitto complessivo.

a) X_1 = # lotti di A prodotti X_2 = # lotti di B prodotti

funzione obiettivo → $\max (X_1 + X_2)$ perché stesso profitto.

vincoli:

$50X_1 + 40X_2 \leq 200 \rightarrow 5X_1 + 4X_2 \leq 20$

$X_2 \leq X_1 + 1$

$X_1, X_2 \geq 0$ interi

VA BENE APPROSSIMARE LA REALTÀ, MA MINCHIA $1/3 = 0.3\ldots$

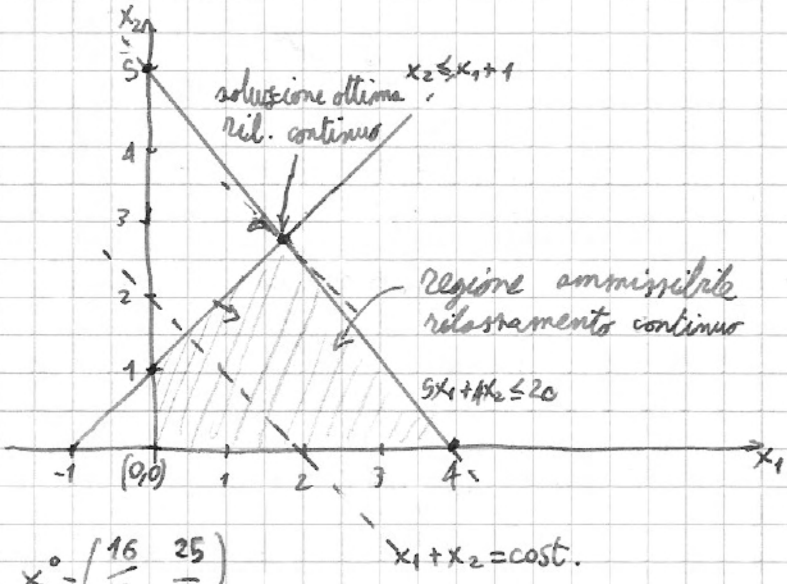
b) risolvo con branch & bound!

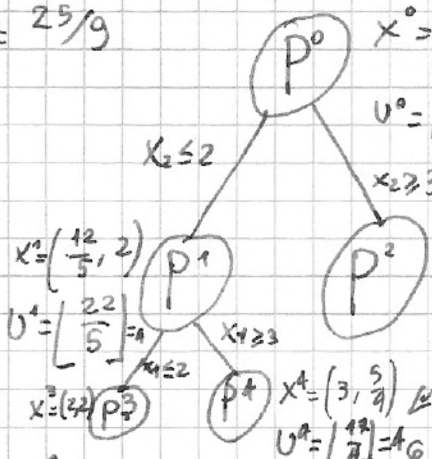
Sol. ottima ril. continuo

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 20 \leftarrow \alpha \\ x_2 = x_1 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4(x_1+1) = 20 \\ x_2 = x_1 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 = 16 \rightarrow x_1 = 16/9 \\ x_2 = 16/9 + 1 = 25/9 \end{cases}$$





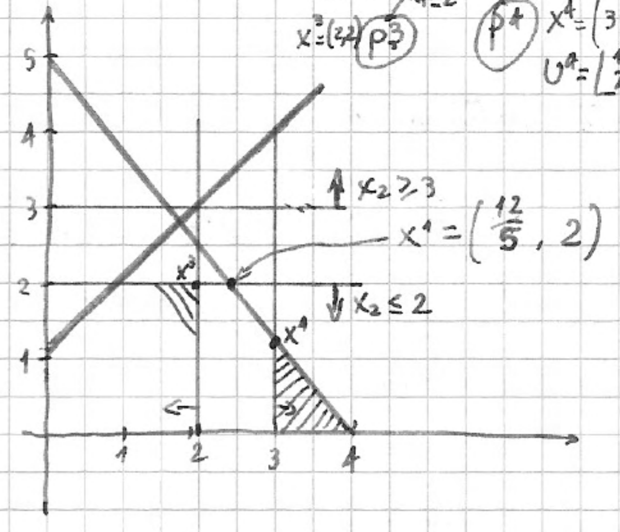
$x^0 = \left(\frac{16}{9}, \frac{25}{9}\right)$

$U^0 = \left\lfloor \frac{41}{9} \right\rfloor = 4$ Il testo dice di esplorare
somma coordinate
prima P^1.

P^2 impossibile perché regione ammissibile vuota!

$x^4 = \left(3, \frac{5}{4}\right)$ UCCISO PERCHÈ GIÀ TROVATA UNA SOLUZIONE=4

$U^4 = \left\lfloor \frac{17}{4} \right\rfloor = 4$



Se considero prima P^3, $x^3 = [2,2]$ intera di valore $x_1 + x_2 = 4$.

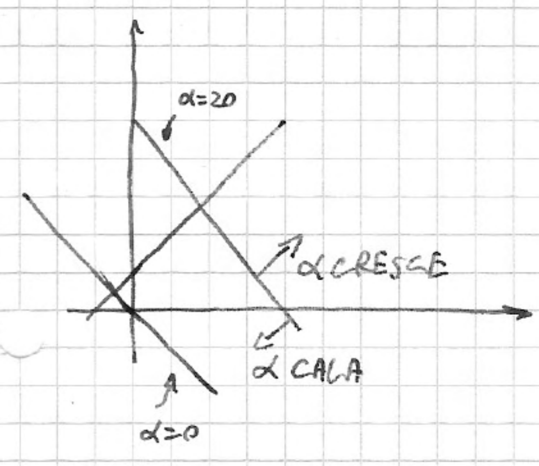
P^4: $x^4 = \left(3, \frac{5}{4}\right)$

SOL. OTTIMA $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.

9/12/08

c) studiare l'andamento della soluzione ottima del rilassamento continuo con

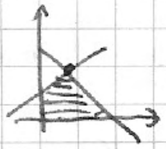
$5x_1 + 4x_2 \leq \alpha$ con $\alpha \in [0, +\infty[$



es. $\alpha = 0 \Rightarrow$ regione ammissibile = punto $(0,0)$
$\Downarrow$
sol. ottima

$\alpha = 20 \Rightarrow$ sol. ottima $\left(\frac{16}{9}, \frac{25}{9}\right)$

$\alpha = 40 \Rightarrow$ sol. ottima $\begin{cases} x_2 = x_1 + 1 \\ 5x_1 + 4x_2 = 40 \end{cases} \ldots (4,5)$

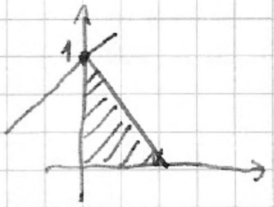
In generale: se la regione ammissibile ha la forma  (quadrilatero), la soluzione ottima è $\begin{cases} x_2 = x_1+1 \\ 5x_1+4x_2=\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow 5x_1 + 4(x_1+1) = \alpha \rightarrow x_1 = \dfrac{\alpha-4}{9}, \quad x_2 = \dfrac{\alpha+5}{9}$

Altrimenti se la regione ammissibile ha la forma (triangolo)

la soluzione ottima $\begin{cases} x_1=0 \\ 5x_1+4x_2=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=\dfrac{\alpha}{4} \end{matrix}$

Caso limite:



$5x_1+4x_2=\alpha$ passa per $(0,1) \Rightarrow \alpha=4$

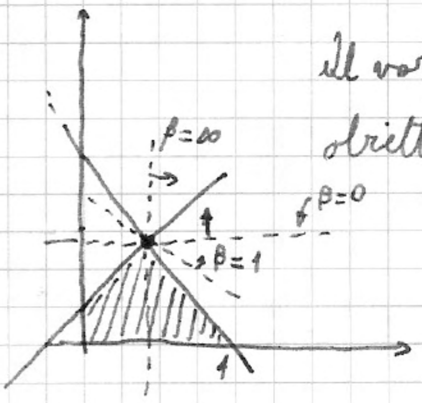
Riassumendo

per $0 \leq \alpha \leq 4 \rightarrow$ sol. ottima $\left(0, \dfrac{\alpha}{4}\right)$

per $\alpha \geq 4 \rightarrow$ sol ottima $\left(\dfrac{\alpha-4}{9}, \dfrac{\alpha+5}{9}\right)$

d. Studiare la soluzione ottima del rilassamento continuo se la funzione obiettivo è max $\beta x_1 + x_2$ (con $\alpha=20$) per $\beta \in]-\infty, +\infty[$

$\uparrow x_1$ non ha profitto, solo costi.



Al variare di β il fascio di rette parallele a funzione obiettivo costante RUOTA. Da che parte? ANTIORARIO

es. $\beta=0 \Rightarrow \max x_2$

$\beta=\infty \Rightarrow \max \infty x_1+x_2 \equiv \max x_1$

Con $\beta=0$ e $\beta=1$, sol. ottima uguale; con $\beta=\infty$, sol. ottima $(4,0)$

Caso limite: funzione obiettivo $\beta x_1+x_2=\text{cost}$ parallela a $5x_1+4x_2=20$, cioè

$\dfrac{\beta}{5} = \dfrac{1}{4}$ rapporto coefficienti $\rightarrow \beta = \dfrac{5}{4}$

$\beta > \dfrac{5}{4}$: sol. ottima $(4,0)$

$0 \leq \beta < \dfrac{5}{4}$: sol. ottima $\left(\dfrac{16}{9}, \dfrac{25}{9}\right)$

$\beta = \dfrac{5}{4}$: sol. ottima $(4,0)$, $\left(\dfrac{16}{9}, \dfrac{25}{9}\right)$ ed il segmento che li unisce se $\beta = -\infty$ $\to \max -\infty x_1 + 4x_2 \to \min x_1 \to$ sol. ottima $(0,1)$

$? < \beta \leq 0$ sol. ottima $\left(\frac{16}{9}, \frac{25}{9}\right)$

$\beta = ?$ sol. ottima $\left(\frac{16}{9}, \frac{25}{9}\right)$, $(0,1)$ ed il segmento che li unisce

$\beta < ?$ sol. ottima $(0,1)$

Caso limite 2 : funzione obiettivo $\beta x_1 + x_2 = \text{cost}$ parallela a $x_2 = x_1 + 1$, cioè

$\beta = -1 = ?$

COMPITO 1

2 tipi di prodotti in stock
- 1 $\to$ 3 tonn. materiale, profitto 1 $\leftarrow x_1$
- 2 $\to$ 8 tonn. " , profitto 4 $\leftarrow x_2$

24 tonn. a disposizione

Almeno 1 stock / tipo

Massimizzare il profitto

MODELLO PLI

$\max x_1 + 4x_2$

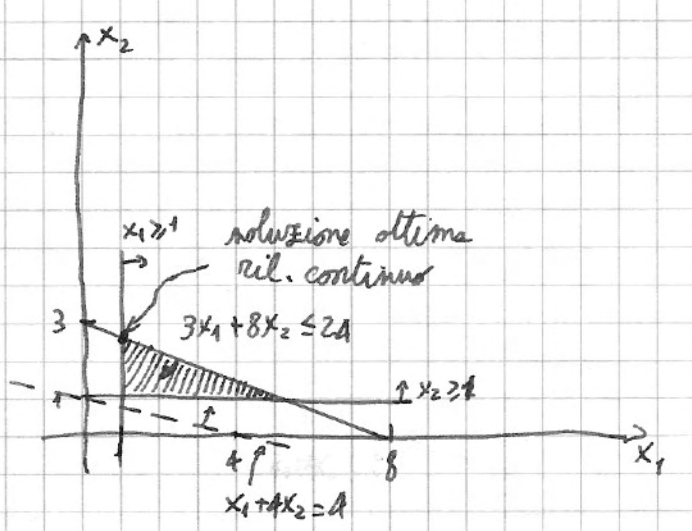
$3x_1 + 8x_2 \leq 24$

$x_1 \geq 1$

$x_2 \geq 1$

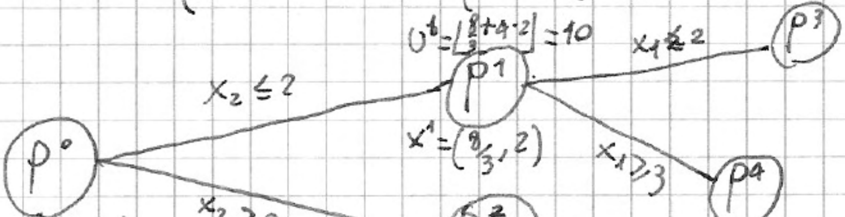
$(x_1, x_2 \geq 0)$ interi

$x_1, x_2 \geq 1$ interi



sol. ottima ril. continuo $\begin{cases} x_1 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 = 24 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{21}{8} \end{cases}$ $\left(1, \frac{21}{8}\right)$

$x^3 = (2,2)$ valore 10



$x^0 \left(1, \frac{21}{8}\right)$

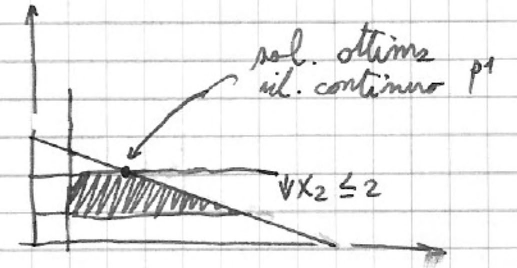
$U^0 = \left\lfloor 1 + 4 \cdot \frac{21}{8} \right\rfloor = 11$

$x^4 = \left(3, \frac{15}{8}\right)$

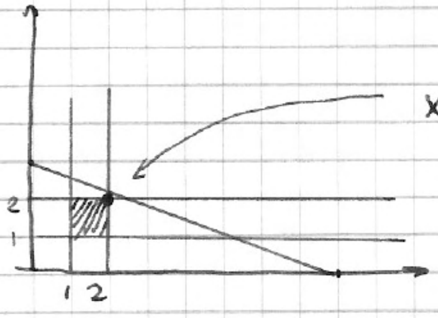
$U^4 = \left\lfloor 3 + 4 \cdot \frac{15}{8} \right\rfloor = 10$

mi fermo perché già trovata una soluzione intera di valore 10

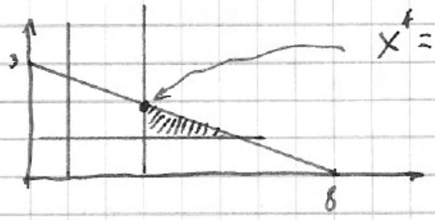
ESCO



$$x^1 = \begin{cases} x_2 = 2 \\ 3x_1 + 8x_2 = 24 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 8/3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



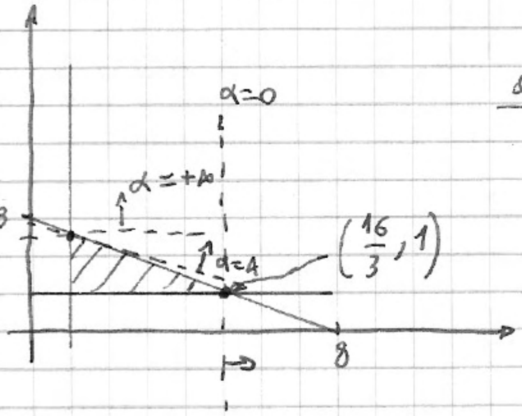
$x^3 = (2,2)$ intera valore: $2 + 2 \cdot 4 = 10$.



$$x^4 = \begin{cases} x_1 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 = 24 \end{cases} \to x^4 = \left(3, \frac{15}{8}\right)$$

P^2 è vuoto.

PUNTO 4 (diverso): studiare la soluzione ottima del rilassamento continuo con funzione obiettivo $\boxed{\max\ x_1 + \alpha x_2}$ con $\alpha \in [0, +\infty[$



es. $\alpha = +\infty$, $\max x_1 + \infty x_2 \to \max x_2$

$\alpha = 0$, $\max x_1$

$\alpha > ?$ sol. ottima $\left(1, \frac{21}{8}\right)$

$\alpha = ?$ sol. ottima $\left(1, \frac{21}{8}\right)$, $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = \frac{24-8}{3} = \frac{16}{3} \end{cases}$ $\left(\frac{16}{3}, 1\right)$ e il segmento che li unisce

$0 \leq \alpha < ?$ sol. ottima $\left(\frac{16}{3}, 1\right)$

caso limite: $x_1 + \alpha x_2$ // a $3x_1 + 8x_2$ $\quad \frac{1}{3} = \frac{\alpha}{8} \to \alpha = \frac{8}{3} = ?$

Il ? lo trovo quindi imponendo il // con una retta opportuna

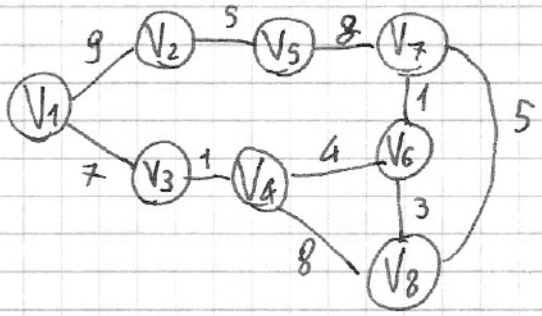
ES. 2.

$$P = (1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 11 \quad 11)$$

$$\ell = (2 \quad 3 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 7 \quad 7 \quad 8 \quad 8)$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

$$c = (9 \quad 7 \quad 5 \quad 1 \quad 4 \quad 8 \quad 8 \quad 1 \quad 3 \quad 5)$$

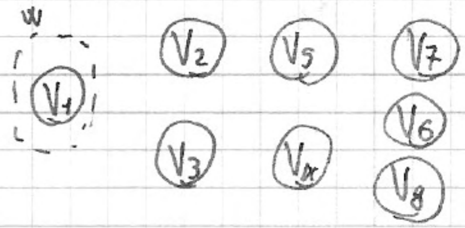


Calcolare l'albero ricoprente di costo massimo

Soluzioni — 1) Cambio segno ai costi e applico Prim

2) Se nell'algoritmo di Prim metto "max" anziché "min" il teorema di Prim è valido se cerco l'albero di costo massimo

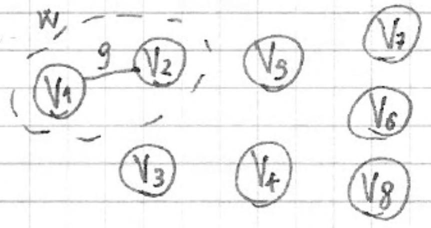
ITERAZIONI DI PRIM "MODIFICATO"



vertice ∈ W più vicino

$b(v_i) = v_1 \quad \forall i$

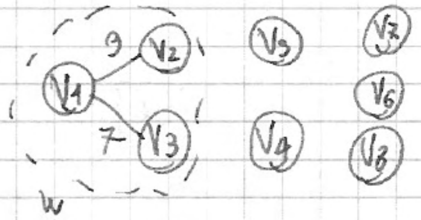
ITERAZIONE 1



cambiano i seguenti $b(v_i)$

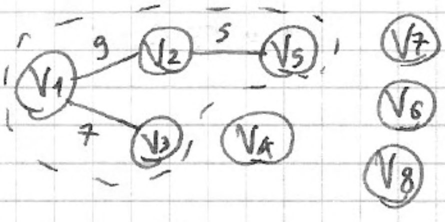
$b(v_5) = v_2$

ITERAZIONE 2



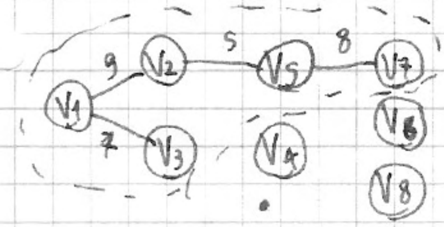
$b(v_4) = v_3$

ITERAZIONE 3



$b(v_7) = v_5$

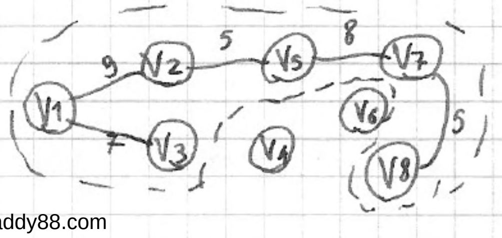
ITERAZIONE 4



$b(v_6) = v_7$

$b(v_8) = v_7$

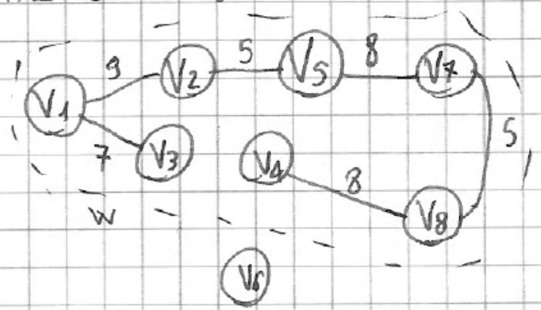
ITERAZIONE 5



$b(v_4) = v_8$

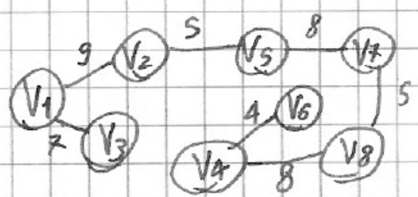
$b(v_6) = v_8$

ITERAZIONE 6



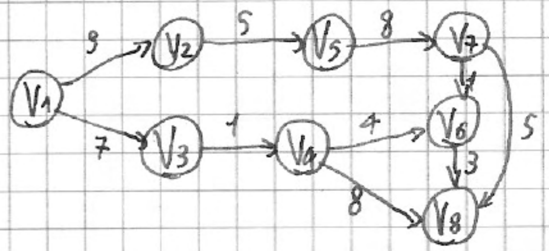
$b(V_6) = V_4$

ITERAZIONE 7



COSTO = 46

COMPITO 2 - ES. 2



Determinare cammino da V_1 a V_8 tale che il max costo di un arco è minimizzato

esempio

$V_1 \xrightarrow{9} V_2 \xrightarrow{5} V_5 \xrightarrow{8} V_7 \xrightarrow{5} V_8$ costo $= \max\{9,5,8,5\} = 9$.

Come modificare l'algoritmo di Dijkstra? Nell'aggiornamento di $L(v)$, al posto di "if $L(v) > L(v^*) + c(v^*,v)$ then $L(v) := L(v^*) + c(v^*,v)$; $pred(v) := v^*$" metto "if $L(v) > \max\{L(v^*), c(v^*,v)\}$ then $L(v) := \max\{L(v^*), c(v^*,v)\}$; $pred(v) := v^*$."

ITERAZIONI DI DIJKSTRA MODIFICATO

V_1 $pred(V_2) = V_1$ $pred(V_i) = V_1$ $\forall i$

$L(V_2) = 9$ $L(V_3) = 7$ $L(V_i) = +\infty$ $\forall i \neq 1,2,3$

ITERAZIONE 1

$V_1 \xrightarrow{7} V_3$

cambiano

$pred(V_4) = V_3$

$L(V_4) = \max\{7,1\} = 7$ e non $7+1=8$

!! differenza !!

ITERAZIONE 2

$V_1 \xrightarrow{7} V_3 \xrightarrow{1} V_4$

$pred(V_6) = V_4$

$pred(V_8) = V_4$

$L(V_6) = \max\{4, L(V_4)\} = 7$

$L(V_8) = \max\{8, L(V_4)\} = 8$

ITERAZIONE 3

$V_1 \xrightarrow{7} V_3 \xrightarrow{1} V_4 \xrightarrow{4} V_6$

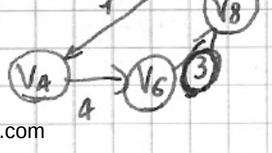
$pred(V_7) = V_6$

$pred(V_8) = V_6$

$L(V_8) = \max\{3, L(V_6)\} = 7$

$L(V_7) = \max\{1, L(V_6)\} = 7$

ITERAZIONE 4



V_8 raggiunto a costo 7. STOP.

Se anche avessi avuto 7 al posto di 3 il cammino ottimo non cambierebbe

COMPITO 2 - ES 1

~~Mazzo~~ di carte di Pokemon

- elettrici: efficacia 3
- ad acqua: efficacia 2

Il numero di pokemon elettrici al max 3 volte quelli ad acqua.

$2(\underbrace{\# \text{ elettrici}}_{x_1}) + 3(\underbrace{\# \text{ ad acqua}}_{x_2}) \leq 24$ ← efficacia max

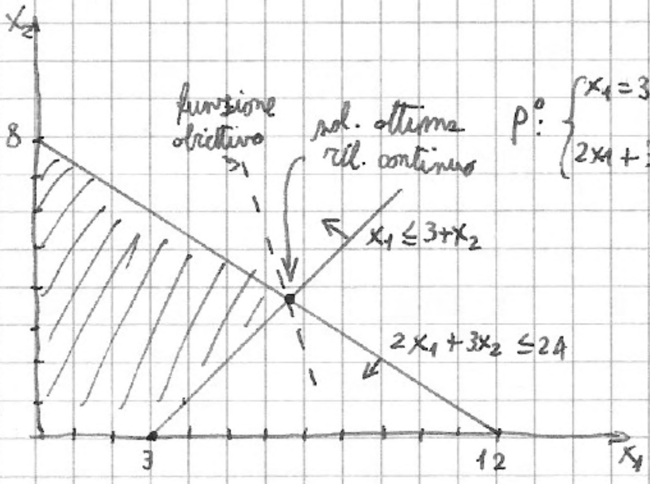
MODELLO PLI PER MASSIMIZZARE L'EFFICACIA (figura e b&b)

$\max 3x_1 + 2x_2$

$x_1 \leq 3 + x_2$

$2x_1 + 3x_2 \leq 24$

$x_1, x_2 \geq 0$ interi



$P^0: \begin{cases} x_1 = 3 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + x_2 \\ 2(3+x_2) + 3x_2 = 24 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{33}{5} \\ x_2 = \frac{18}{5} \end{cases}$

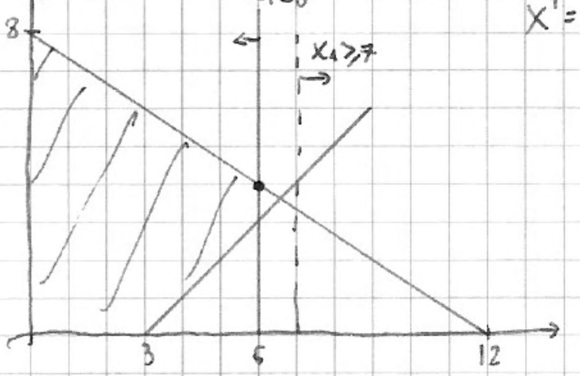
$P^0\left(\frac{33}{5}, \frac{18}{5}\right)$

$P^0 \xrightarrow{x_1 \leq 6} P^1$ $\qquad x^1 = (6, 4)$ VALORE $= 26$

$P^0 \xrightarrow{x_1 \geq 7} P^2$ $\qquad \emptyset$

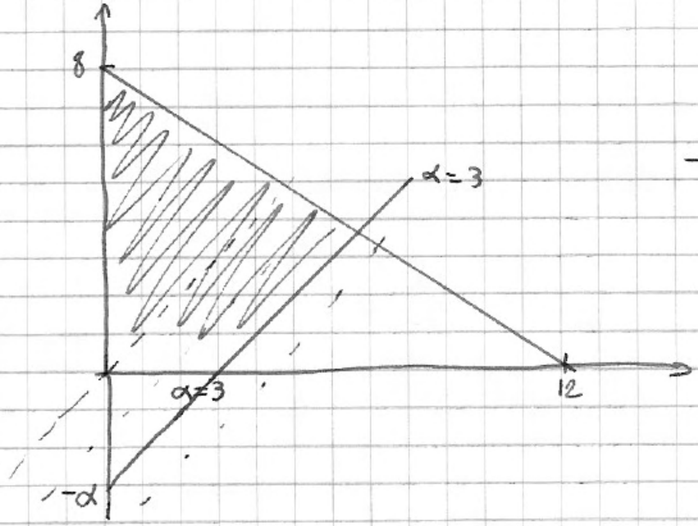
$x^0 = \left(\frac{33}{5}, \frac{18}{5}\right)$

$U^0 = \left\lfloor 3 \cdot \frac{33}{5} + 2 \cdot \frac{18}{5} \right\rfloor = 27$



$x^1 = \begin{cases} x_1 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 = 24 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = \frac{12}{3} = 4 \end{cases} = (6, 4)$ intero!

Studiare soluzione ottima ril. continuo per $x_1 \leq \alpha + x_2$



$\alpha \geq 12$ sol. ottima $(12,0)$

$-8 \leq \alpha \leq 12$ sol ottima $\begin{cases} x_1 = \alpha + x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 24 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = \alpha + x_2 \\ 2\alpha + 5x_2 = 24 \end{cases}$

$= \begin{cases} x_1 = 8 + \frac{\alpha}{3} \\ x_2 = 8 - \frac{2}{3}\alpha \end{cases} \quad \left(8 + \frac{\alpha}{3}, 8 - \frac{2}{3}\alpha\right)$

$\alpha < -8$ problema impossibile