

Elettrostatica

- 1) - introduzione,
- 2) - legge di Coulomb,
- 3) - campo elettrico,
- 4) - legge di Gauss,
- 5) - potenziale elettostatico,
- 6) - condensatori,
- 7) - dielettrici.

\overrightarrow{F} → non conservative
 \overrightarrow{F} → conservative
 [dal calcolo del lavoro vediamo se F è conserv. o no]

Forze conservative →

molla	{	$\frac{GMm}{R^2}$
peso		

forze centrali →

$\frac{KQq}{R^2}$	{	$\frac{GMm}{R^2}$
$\frac{KQq}{R^2}$		

$\overrightarrow{F} \Rightarrow$ campo vettoriale $\frac{\vec{F}_{grav.}}{m}$
 \Rightarrow $\vec{F}_{Coulomb}$

LAVORO

Energia potenziale $E_{pot.} = \frac{GMm}{R}$; $E_{pot.} = \frac{kQq}{R}$

SE UN RAMPO AMMETTE POTENZIALE, È CONSERVATIVO

Potenziale

$V = \frac{GM}{R}$; $V = \frac{kQ}{R}$ $\vec{F} = -\nabla E_{pot.}$

L'energia potenziale e il potenziale sono degli SCALARI.

2

È noto che esistono due tipi di cariche: l'esperienza mostra che se strofiniamo delle bacchette di vetro con della seta esse si respingono.

Se strofiniamo delle bacchette di plastica con della pelle le bacchette di plastica si respingono, ma le bacchette di vetro e quelle di plastica si attirano. Questo si spiega supponendo che esistano cariche elettriche positive e cariche elettriche negative.

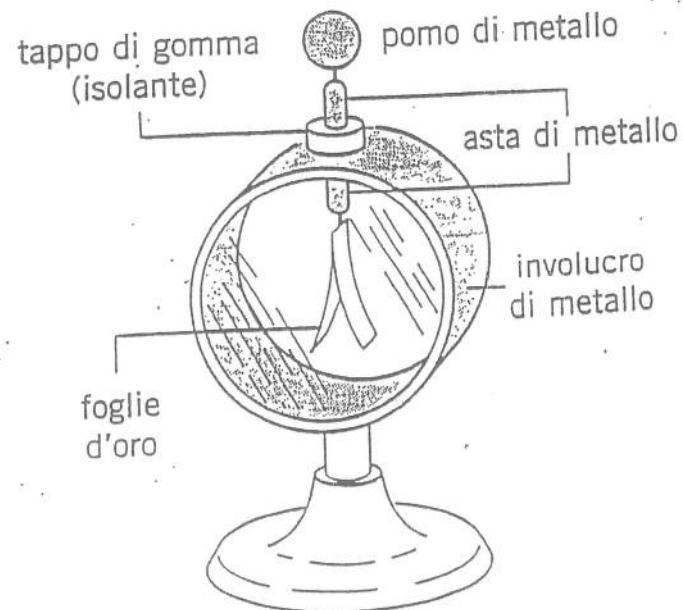
$$\text{vetro} = + \quad \text{plastica} = -$$

3

Se strofiniamo una bacchetta metallica tenendola in mano essa non si carica, ma è possibile caricarla tenendo il metallo con un manico isolante.

La spiegazione è che i metalli, il corpo umano, la terra sono conduttori e le cariche in essi si possono muovere. Vetro e plastica sono invece degli isolanti. In questo caso le cariche sono fisse.

L' elettroskopio



Esperienza di Thomson. [raggi catodici]

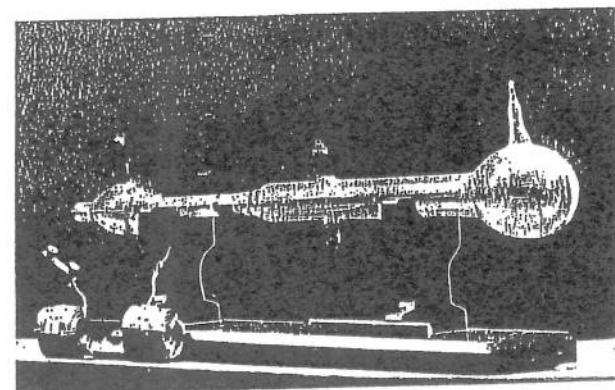
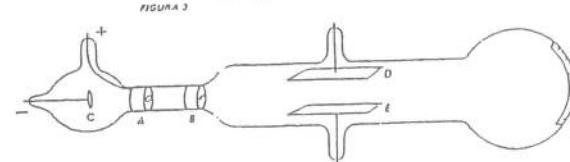


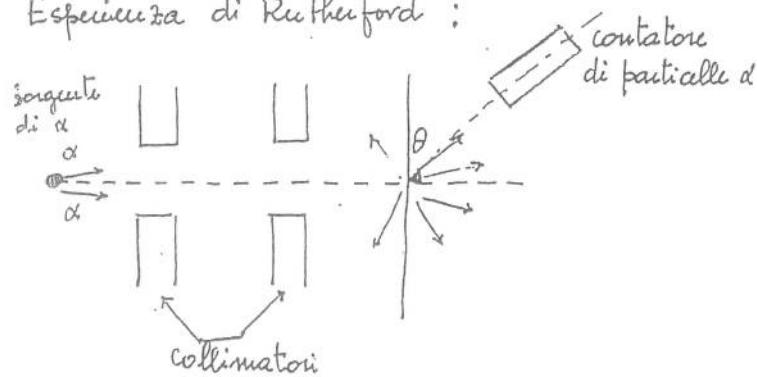
FIGURA 2
fascio passava attraverso la regione tra D ed E, e veniva osservato sullo schermo graduato all'estremità destra del tubo. Curicando le armature D ed E, si produceva una deflessione del fascio verso l'alto o verso il basso. Il verso della deflessione mostrava che la carica portata dal fascio era negativa. Poi, per mezzo delle bobine illustrate in figura 2, si generava un campo magnetico nella regione tra D ed E, la cui direzione era perpendi-



Espienza di Rutherford.

Il modello di atomo di Thomson prevedeva una distribuzione di cariche negative all'interno di una distribuzione di cariche positive avente raggio pari a quello dell'atomo.

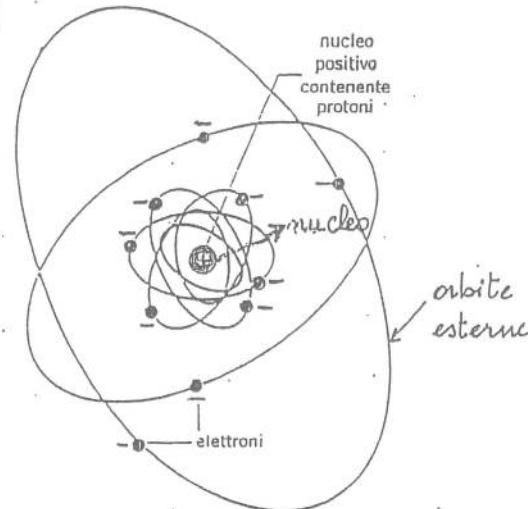
Espienza di Rutherford :



L'angolo sotto il quale vengono deflesse le α non può essere spiegato con il modello di Thomson.

PARTICELLE α = nuclei di ELIO 2 PROTONI
 2 NEUTRONI

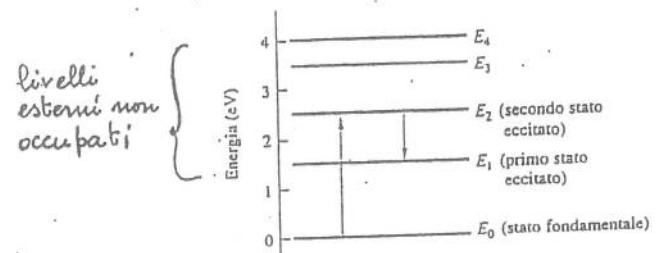
L'atomo.



Un atomo contiene un piccolo nucleo carico positivamente, attorno a cui si muovono elettroni carichi negativamente. Le traiettorie chiuse mostrate in questa figura sono soltanto simboliche; in realtà, gli elettroni non seguono traiettorie discrete (distinte e definite).

ELETTRONE DI VALENZA O OTTICO

Schema dei livelli validi per un atomo.

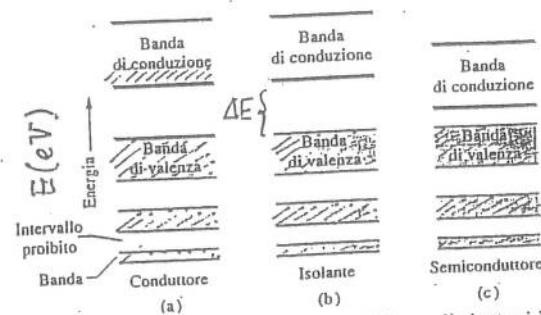


Un diagramma dei livelli energetici di un atomo, corrispondenti ai diversi stati quantici nei quali l'atomo può esistere. Lo stato di minima energia E_0 è chiamato stato fondamentale. L'atomo emette luce quando si trasferisce dallo stato di energia E_1 al fondamentale, come indicato dalla freccia verticale. L'atomo non può possedere un'energia compresa fra questi due valori, né tra una coppia qualsiasi di altri livelli consecutivi fra quelli possibili.

CALORE \leftarrow "TRASFERITO"
IRRADIATO

Il calore invaggiato è un'onda elettromagnetica.
 1 cm^3 di materia solida contiene da 10^{21} a 10^{23} atomi circa.

OPACO PERCHÉ LE Onde luminose VENGONO ASSORBITI PER PORTARE UN ELETTRONE IN BANDA DI CONDUZIONE E NON VIENE QUINDI FATTA PASSARE



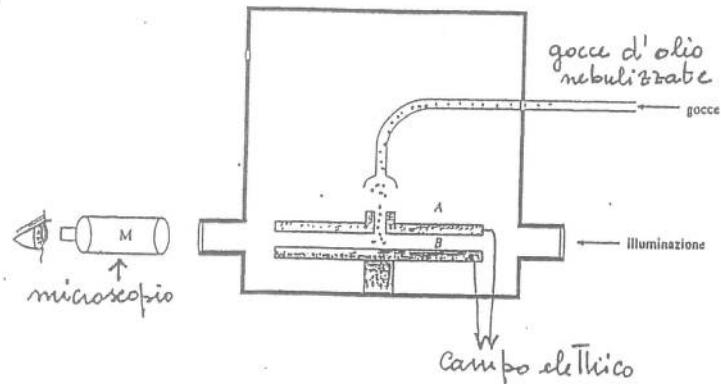
I livelli di energia disponibili per gli elettroni in un solido formano una serie di bande permesse e intervalli proibiti. Il verde denota una banda parzialmente o completamente riempita. (a) In un conduttore metallico, la banda di valenza è solo parzialmente piena. (b) In un isolante, la banda di valenza è completamente piena e il salto tra la banda di valenza e la banda di conduzione è relativamente grande. (c) Un semiconduttore assomiglia a un isolante eccetto che il salto tra la banda di valenza e quella di conduzione è relativamente piccola.

$1 \text{ cc} = 1 \text{ NA DI ATOMI}$

Esperienza di Millikan

10

[misura della carica e verifica della quantizzazione della carica].



CARICHE

11

Considereremo :

- cariche puntiformi;
- cariche distribuite su corpi non conduttori;
- cariche distribuite su conduttori.

[induzione] :

le gocce d'olio nebulizzate sono in parte caricate elettricamente [in genere con carica negativa].

È possibile misurare il cammino percorso dalle gocce in un dato tempo e in questo modo si può trovare la velocità delle gocce.

In assenza di campo :

$$ma = mg - 6\pi\eta r v$$

eff. resist.
volumetrica
di rame
grandezze

in presenza di campo :

$$ma = mg - qE - 6\pi\eta r v$$

LA CARICA È QUANTIZZATA

Coulomb fu il primo a misurare quantitativamente la legge che governa l'attrazione e la repulsione fra le cariche elettriche.

Siano q_1 e q_2 due cariche a distanza R . La forza di interazione fra esse è proporzionale a :

$$F \propto \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2}.$$

La forza è diretta come la congiungente le due cariche e verso opportuno

La legge precedente si chiama legge di Coulomb e vale per cariche puntiformi [dimensioni delle cariche « di R »].

12. La legge di Coulomb in forma vettoriale è:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \cdot \hat{R}$$

cotesta elettrica nel vuoto

\hat{R} = versore di $\vec{R} = \frac{\vec{R}}{R}$.

se q_1 e q_2 hanno lo stesso segno la forza è repulsiva,
se hanno segno opposto la forza è attrattiva.

La carica q_1 si trovi nel punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e la carica q_2 nel punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$; il modulo del vettore \vec{R} è

$$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

e le componenti del versore \hat{R} sono

$$\frac{x_2 - x_1}{R}, \quad \frac{y_2 - y_1}{R}, \quad \frac{z_2 - z_1}{R}.$$

Le componenti della forza sono :

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{R}$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{R}$$

$$F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \cdot \frac{z_2 - z_1}{R}$$

Nell'ambito del sistema internazionale l'unità per le grandezze elettromagnetiche è l'ampere (A).

L'ampere è l'unità di misura dell'intensità di corrente elettrica (che definiremo in seguito).

L'unità di carica è il coulomb (C), pari alla carica trasportata da una corrente di 1 A in un secondo.

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \left(8.9875 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \right)$$

ϵ_0 = costante dielettrica del vuoto = $(8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2})$

1 e ha carica = $1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Esempio

L'elettrone e il protone in un atomo di idrogeno si trovano ad una distanza media di $0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Calcolare l'intensità della forza gravitazionale e della forza elettrica fra l'elettrone e il protone

$$\underline{F_g = G \frac{m_e m_p}{R^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{(0.53 \cdot 10^{-10})^2} = 3.61 \cdot 10^{-47} \text{ N}}$$

$$\underline{F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{9 \cdot 10^9 (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(0.53 \cdot 10^{-10})^2} = 8.2 \cdot 10^{-8} \text{ N}}$$

e quindi 1 C equivale alla carica di
 $6.24 \cdot 10^{18}$ elettroni.

In genere vengono utilizzati cariche dell'ordine di mC, μC, nC ecc.

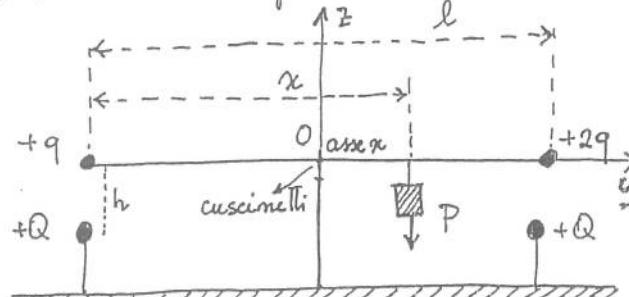
carichi \rightarrow Coulomb

4. Un'unità è l'Ampere quando il C fluisce nell'A

Problema

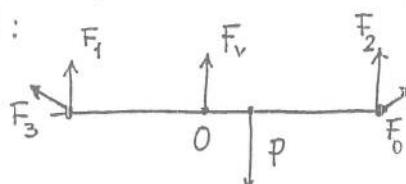
Una sbarra isolante, di massa trascurabile e di lunghezza l è impennata al centro ed è equilibrata con un peso P a una distanza x dall'estremo sinistro. Ai due estremi della sbarra sono fissate due cariche positive q e $2q$, mentre a distanza h sotto di esse vengono messe due cariche positive Q .

Trovare la distanza x del peso quando la sbarra è in equilibrio.



Trascurare le interazioni fra le cariche agli estremi opposti della sbarra.

Il diagramma delle forze è:



La condizione di equilibrio è:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad \sum \tau_i = 0$$

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{h^2}$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQ}{h^2}$$

$$P = mg$$

$$F_v + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{h^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQ}{h^2} = mg$$

Prendiamo O come centro delle rotazioni, cioè come polo per i momenti.

$$\tau_{1x} = -F_1 \cdot \frac{l}{2} \quad \tau_{2x} = F_2 \frac{l}{2} \quad \tau_{Px} = -P(x - \frac{l}{2})$$

REGOLA MANO DESTRA

L'asse y e l'asse z sono diretti come in figura; l'asse x è perpendicolare al piano del foglio. I momenti sono diretti come l'asse x .

La condizione per l'equilibrio è:

$$F_2 \frac{l}{2} = F_1 \frac{l}{2} + P(x - \frac{l}{2})$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQ}{h^2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{h^2} \frac{l}{2} + mg(x - \frac{l}{2})$$

e quindi

$$x = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{h^2 mg} + 1 \right] \cdot \frac{l}{2}$$

b) Che valore dovrebbe avere h perché la sbarra non eserciti alcuna forza verticale sui cuscinetti?

$$\text{Ponendo } F_v = 0 \quad h = \sqrt{\frac{3qQ}{4\pi\epsilon_0 mg}}$$

CARICA SENZA → POSITIVA

18

19

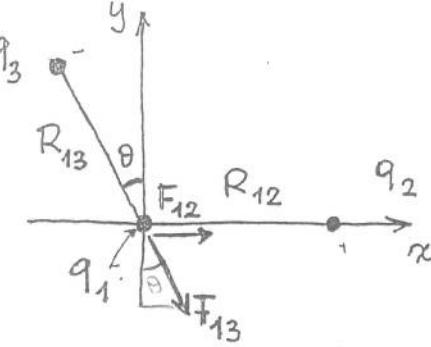
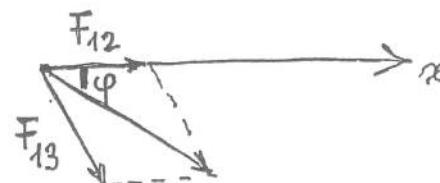
La forza risultante ha componente lungo l'asse x :

$$F_x = F_{12} + F_{13}x = 1.2 + 1.8 \sin 30^\circ = 2.1 \text{ N}$$

$$F_y = -F_{13}y = -1.8 \cdot \cos 30^\circ = -1.6 \text{ N}$$

$$\text{modulo di } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\text{direzione di } F : \quad \tan \varphi = \frac{F_y}{F_x}$$



$$\begin{aligned} q_1 &= -1 \cdot 10^{-6} \text{ C} \\ q_2 &= 3 \cdot 10^{-6} \text{ C} \\ q_3 &= -2 \cdot 10^{-6} \text{ C} \\ R_{12} &= 15 \text{ cm} \\ R_{13} &= 10 \text{ cm} \\ \theta &= 30^\circ \end{aligned}$$

Trovare la forza che agisce su q_1 .

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{(0.15)^2} \xrightarrow{\text{in metri}}$$

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{R_{13}^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{(0.10)^2} \xrightarrow{\text{in metri}}$$

$F_{12} = 1.2 \text{ N}$ attrattiva

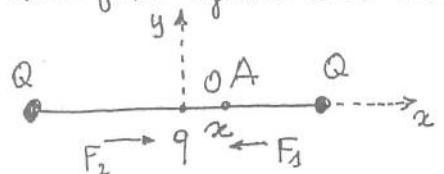
Somma le due forze

per il TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

$F_{13} = 1.8 \text{ N}$ repulsiva

Esempio

Due cariche positive uguali Q sono poste a distanza $2a$. La forza su una carica di prova $+q$, posta a metà fra le cariche precedenti è nulla. Se la carica q viene spostata a) verso una delle cariche o b) perpendicolarmente alla congiungente le cariche, trovare la direzione della forza agente su di essa. In ciascun caso l'equilibrio è stabile o instabile?



Il equilibrio è stabile o instabile?

Prendiamo un sistema Oxy con O nella posizione iniziale di q , e l'asse x come in figura.

a) consideriamo lo spostamento di q nel punto $A(x, 0)$.

La risultante su q è:

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Qq}{(a+x)^2} - \frac{Qq}{(a-x)^2} \right] = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-4ax}{(a^2-x^2)^2}$$

diretta verso il centro.

b) spostiamo la carica q lungo y e scomponiamo le forze esercitate dalle cariche Q su q lungo l'asse x e l'asse y .

In una superficie metallica le cariche si dispongono sulla superficie esterna e stanno ferme.



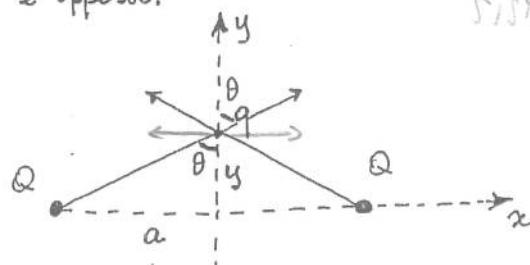
il campo elettrico è perpendicolare alla superficie se no le cariche si muovono

$$F_y = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2+y^2} \cos\theta$$

$$\text{dove } \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

Le componenti della forza lungo l'asse x sono uguali e opposte.

SISTEMA SIMMETRICO



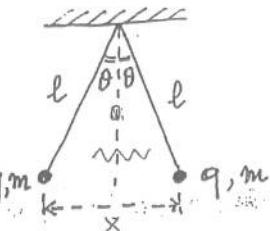
La componente lungo l'asse y è tale da allontanare la carica q . L'equilibrio è instabile.

Problema

IOLANTE Due sfere uguali di massa m sono appese a fili di seta di lunghezza l , come in figura e recano cariche uguali q . Dimostrare che

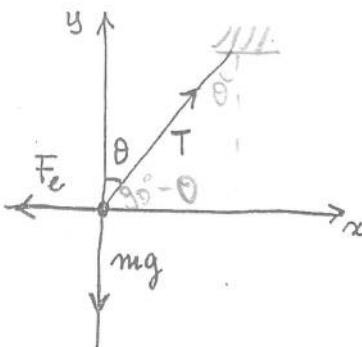
$$x = \left[\frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 m g} \right]^{1/3}$$

sotto l'ipotesi che $\tan\theta \approx \sin\theta$



SE HO UN ISOLANTE, LE CARICHE NON SI MUOVONO

sia T la tensione del filo, F_e la forza elettostatica
e mg la forza peso.



$$\vec{T} + \vec{F}_e + \vec{mg} = 0$$

sull'asse x

$$-F_e + T \sin\theta = 0$$

sull'asse y

$$-mg + T \cos\theta = 0$$

$$\begin{cases} F_e = T \sin\theta \\ mg = T \cos\theta \end{cases}$$

dividendo membro a membro

$$\tan\theta = \frac{F_e}{mg} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{x^2} \cdot \frac{1}{mg}$$

$$\tan\theta \approx \sin\theta \quad \text{ma} \quad \frac{x}{2} = l \sin\theta \quad \sin\theta = \frac{x}{2l}$$

$$\frac{x}{2l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{x^2} \cdot \frac{1}{mg}$$

$$x^3 = \left[\frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \right] \Rightarrow x = \left[\frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \right]^{1/3}$$

Se $l = 120 \text{ cm}$, $m = 10 \text{ g}$ e $x = 5 \text{ cm}$ quanto vale q ?

$$5 \cdot 10^{-2} = \left[\frac{q^2 \cdot 1.2}{2\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.01 \cdot 9.8} \right]^{1/3} \quad q = 2.38 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

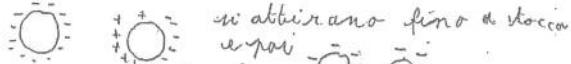
Problema

23

Se le sfere del problema precedente sono conduttrici

- a) cosa accade quando una di esse è scarica?
- b) calcolare la nuova distanza di equilibrio.

- supponiamo che una sfera sia carica positivamente
e la seconda sia scarica; essendo le sfere conduttrici
cosa succede?



si abbirano fino a stocca

- si portano a contatto le due sfere? la carica si dividerà
sulle due sfere e si resping

- la nuova distanza a cui si portano alla fine
le sfere è

$$x' = \left[\frac{l(q/2)^2}{2\pi\epsilon_0 mg} \right]^{1/3}$$

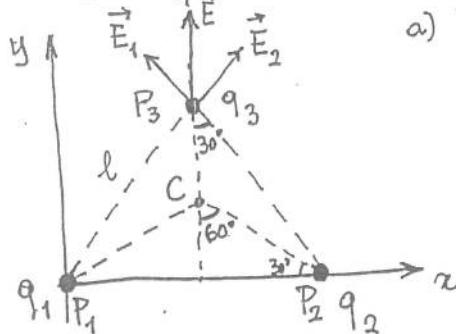
In un conduttore scarico le cariche sono in tutto sul
corpo e sono immobili

OSSERVAZIONI:

- cos'è l'induzione elettrica
- come si dispongono le cariche in un conduttore?

Escenario

Tre cariche positive uguali $q_1 = q_2 = q_3 = q$ sono fisse nei tre vertici di un triangolo equilatero di lato l . Calcolare il campo elettostatico nel centro del triangolo, e la forza agente su ciascuna carica.



Essendo q_3 equidistante da q_1 e q_2 in modulo abbiamo:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{l^2}$$

Le componenti lungo l'asse x sono uguali ed opposte
e si annullano; lungo l'asse y abbiamo

$$E = E_{1y} + E_{2y} = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{l^2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q\sqrt{3}}{l^2}$$

La forza che agisce su \vec{q}_3 diventa pertanto

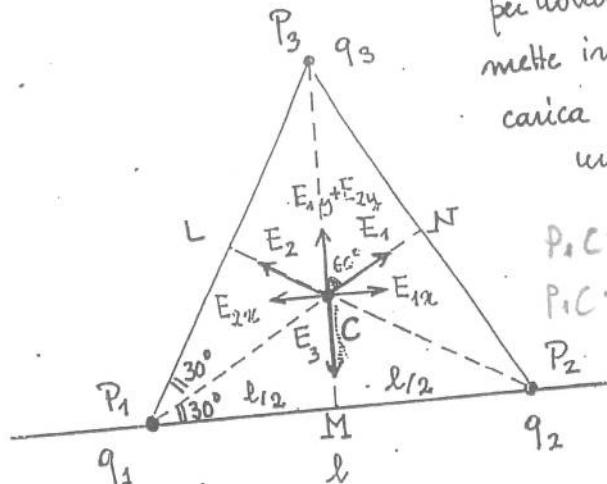
$$\vec{F} = q_3 \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \cdot q_3 \sqrt{3}}{r^2} \hat{j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2 \sqrt{3}}{r^2} \hat{j}$$

$$\vec{F} = q_3 \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_3 \sqrt{3}}{r^2} \hat{j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 \sqrt{3}}{r^2} \hat{j}$$

b) ripetendo questo ragionamento si dimostra che in C il campo è nullo.

1.000 1.000 1.000

per trovare E si mette in C una carica sonda unitaria.



$$P_r C = \cos 30^\circ = P_r M = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_1 C \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2}$$

$$P_1 C = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

nel triangolo equilatero altezze, mediane e bisettrici coincidono. I tre campi E_1, E_2, E_3 sono in ruolo $E_{1x} = E_{2x}$ ma sono opposti e si annullano.

$$E_{1y} = E_1 \cos 60^\circ = E_1 \cdot \frac{1}{2}$$

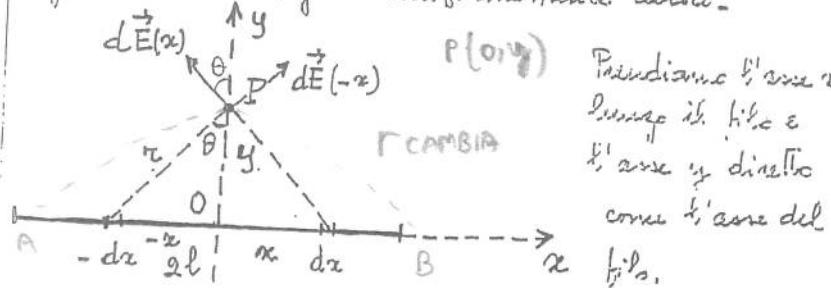
$$E_{2y} = E_2 \cos 60^\circ = E_2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$E_3 = E_{1y} + E_{2y} \quad \text{ma sono opposti}$$

e si annullano.

Campi elettostatici prodotti da una distribuzione continua di carica.

Un filo di lunghezza $2l$ possiede una carica q (positiva) distribuita uniformemente su tutta la sua lunghezza. Calcolare il campo elettostatico \vec{E} nei punti dell'asse del filo. Dedurre l'espressione del campo per un filo infinitamente lungo e uniformemente carico.



La densità lineare di carica, costante lungo tutto il filo, è $\lambda = \frac{q}{2l}$; ogni elemento dx del filo ha carica $dq = \lambda dx$ e il campo $d\vec{E}$ infinitesimo prodotto nel punto P distante y da O è dato da:

$$d\vec{E}(0, y) = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\rho = \frac{q}{V}$$

$$S = \frac{q}{\sigma}$$

dove \hat{r} è il versore diretto come la congiungente dx e il punto P,

25

I due elementi di carica dg simmetrici rispetto a O e a distanza $\pm x$ producono componenti lungo l'asse x del campo uguali in modulo e di segno opposto.

Queste componenti sommavandosi si annullano.

Le componenti lungo l'asse y si sommano e danno il campo in P:

$$d\vec{E}(0, y) = \frac{2\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \hat{j}$$

si ha:

$$y = r \cos\theta \quad x = y \tan\theta \quad dx = y \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

costante

$$\text{quindi: } d\vec{E}(0, y) = \frac{2\lambda y d\theta}{4\pi\epsilon_0 \frac{y^2}{\cos^2\theta}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} \hat{j} = \frac{2\lambda \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 y} d\theta \hat{j}$$

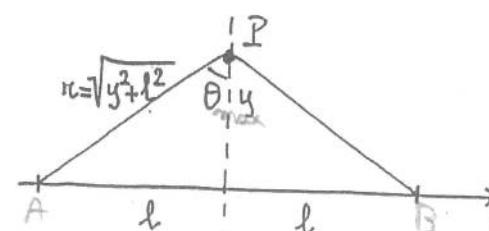
Supponiamo di tenere y costante; θ varia da 0 a

θ_{\max} dato da:

$$l = r \sin\theta = \sqrt{y^2 + l^2} \sin\theta$$

cioè:

$$\theta_{\max} = \arcsin \frac{l}{\sqrt{y^2 + l^2}}$$



$$\text{quindi } E(0, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \int_{0}^{\theta_{\max}} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \left[\sin\theta \right]_{0}^{\theta_{\max}}$$

26

$$E_x(0,y) = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{y^2 + l^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y \sqrt{y^2 + l^2}}$$

Osserviamo che il campo trovato non presenta l'andamento tipico per una carica puntiforme (cioè con dipendenza $1/r^2$) proprio perché prodotto da una distribuzione continua; tuttavia a grandi distanze dal filo ($y \gg l$)

$$\text{si ha allora: } E(0,y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}$$

Quando il filo diventa infinitamente lungo

$\lambda \gg y$ e quindi:

$$E(0,y \ll \lambda) = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{\lambda^2}} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 y \lambda} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

E.S.

Provare a trovare il centro di massa.
Si fa al cm tra quello del O grosso e quello del O piccolo considerato come massa negativa.

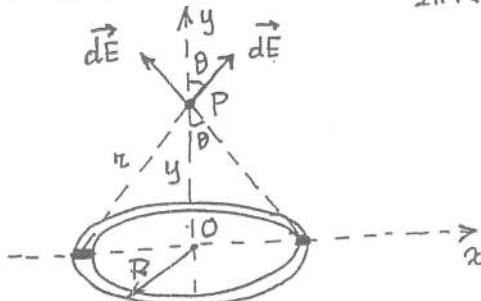


27

Esempio

Una carica q è distribuita uniformemente su un sottili anello di raggio R . Calcolare il campo elettostatico sull'asse dell'anello.

La densità di carica è $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$



Consideriamo due elementi infinitesimi dl diametralmente opposti, ciascuno con carica $dq = \lambda dl$

Le componenti dei campi lungo l'asse x si elidono.
Il campo nel punto P, diretto come l'asse y, dovuto alla carica infinitesima $dq = \lambda dl$ è:

$$dE_y(0,y) = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 \pi^2} \cos\theta$$

Al variare della posizione di dl lungo l'anello questa espressione rimane costante per cui integriamo

$$E_y(0,y) = \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 \pi^2} \int dl = \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 \pi^2} 2\pi R$$

$$\text{ma } r^2 = R^2 + y^2 \quad y = r \cos\theta \quad \cos\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}}$$

quindi $E_y(0, y) = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi y}{(R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y}{\sqrt{(R^2 + y^2)^3}}$

per punti a grande distanza dal centro

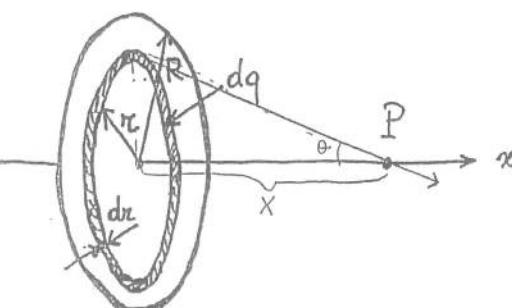
$y \gg R$ si riottiene

$$E_y(0, y) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 y^2}$$

Esempio

Un disco di raggio R ha una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua superficie.

Calcolare il campo sull'asse del disco. Estendere il risultato al caso in cui R tenda all'infinito (piano uniformemente carico).



La densità di carica, costante su tutto il disco, è $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$.

$d\sigma = \frac{2\pi r \sigma}{R^2} dr$ infinitesima 2° sezione trascurabile
Consideriamo una corona circolare compresa fra r e $r+dr$, assimilabile ad un anello, di superficie $dS = 2\pi r dr$ e carica $dq = \sigma dS = \frac{\sigma}{2\pi r} 2\pi r dr = \sigma dr$.

In un punto P a distanza x dal centro del disco il campo infinitesimo è dato da:

$$d\vec{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i}$$

che è il risultato ottenuto per l'anello carico dell'esempio precedente.

Il campo risultante si ottiene sommando i contributi degli infiniti anelli che compongono il disco, cioè integrando l'espressione precedente per r che varia da 0 a R e con $x = \text{costante}$.

$$\vec{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \hat{i} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] \hat{i}.$$

Questa espressione è vera per $x > 0$; per $x < 0$ il modulo è lo stesso, cambia solo il verso per cui:

$$\vec{E}(x) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] \hat{i}$$

Per grandi distanze ($x \gg R$) il disco è visto come una carica puntiforme posta nel centro.

Consideriamo $x \rightarrow 0$; i limiti a cui tende il campo

Sono $\vec{E}_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$ $\vec{E}_- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$

CAMPO COSTANTE,
NON DIPENDE
DA $Z + X \Rightarrow$ CAMPO UNIFORME

Nell'approcciare la superficie carica con densità σ
il campo subisce la discontinuità:

$$\vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i}$$

Facciamo ora tendere R all'infinito otteniamo
un piano indefinito uniformemente carico.

Il campo elettostatico, calcolato per $R \rightarrow \infty$, è

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$$

questo campo si dice uniforme.

CAMPO PERPENDICOLARE PERCHE'
ALTRIMENTI LA COMPONENTE
TANGENTE FAREBBE
MUOVERE IL CAMPO, MA
SIAMO IN ELETTROSTATICA





Campo elettrico.

Supponiamo di considerare una carica Q presente in un punto dello spazio; se in un punto qualsiasi si mettiamo una carica di prova su questa agisce una forza di natura elettrostatica. Si dice che in questo spazio agisce un campo elettrico.

Per definire il campo elettrico in modo operativo poniamo una carica di prova q_0 [che deve tendere a zero ed essere per convenzione positiva] nel punto P_0 in cui vogliamo

34

misurare il campo.

L'intensità del campo elettrico o semplicemente il campo è definita:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

\vec{E} è un vettore con direzione e verso di \vec{F} , essendo q_0 uno scalare.

Da un punto di vista teorico la definizione precedente diventerebbe più precisa facendo tendere a zero la carica q_0 così da far scomparire la perturbazione prodotta da q_0 . Poiché al tendere a zero di q_0 anche la forza su q_0 tende a zero il rapporto $\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \vec{F}/q_0$

rimane finito.

In realtà quanto piccola può diventare q_0 ?

Unità di misura del campo elettrico

Nel SI il campo elettrico si misura in Newton/Coulomb; in seguito vedremo un'altra unità più pratica di questa.

35

Data una carica q il campo a distanza R è dato da :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}.$$

Se si ha una distribuzione discinta di cariche puntiformi $q_1, q_2 \dots q_k$ il campo può essere determinato con il principio di sovrapposizione degli effetti : si calcola in un punto il campo come se ognuna delle cariche fosse la sola agente e quindi si sommano vettorialmente i vari campi ottenuti :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_k.$$

Nel caso di una distribuzione continua di cariche, si considerano degli elementi infinitesimali di carica dq , si determina il campo prodotto da ciascun elemento e infine si integra su tutta la carica.

Linee di forza del campo elettostatico

Il concetto di campo elettostatico mette in evidenza che lo spazio attorno ad un sistema di cariche viene modificato; infatti muovendo una carica di prova in questo spazio essa risente la forza dovuta all'interazione con il campo.

Per visualizzare l'andamento del campo elettostatico si possono usare le linee di forza.

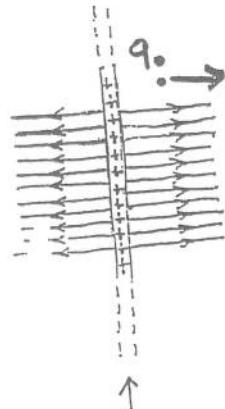
La relazione fra le linee di forza (che sono linee immaginarie) e il campo si possono riassumere così :

- 1) una linea di forza in ogni suo punto è tangente e concorde al campo in quel punto,
- 2) le linee di forza si addensano dove l'intensità del campo è maggiore,
- 3) le linee di forza non si incrociano mai
- 4) le linee di forza hanno origine dalla cariche positive e terminano sulle cariche negative. Nel caso di cariche di uno stesso segno le linee di forza si chiudono all'infinito,

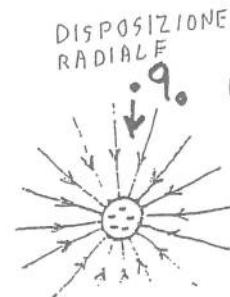
Un campo uniforme è rappresentato da linee parallele (costante di direzione e verso) ed equidistanti (stesso modulo).



Esempi di linee di forza:

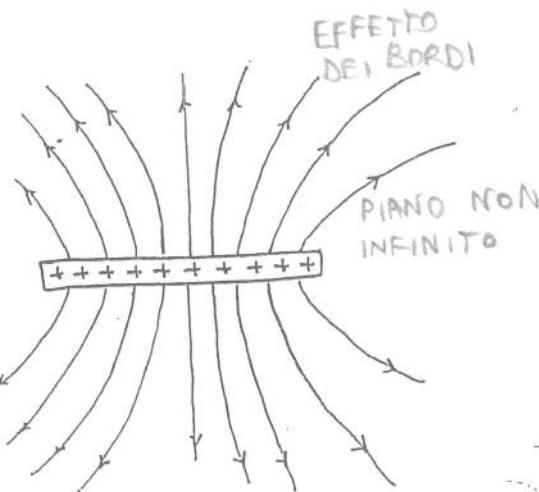


strato uniforme
di cariche positive;
si suppone uno strato
indefinito. Le linee
di forza sono equispaziate:
il campo E è uniforme
vicino allo strato. Una
carica di sonda q_0 positiva
viene respinta.

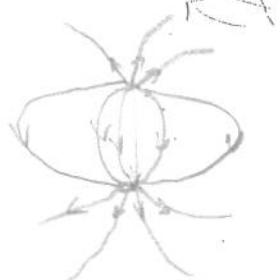
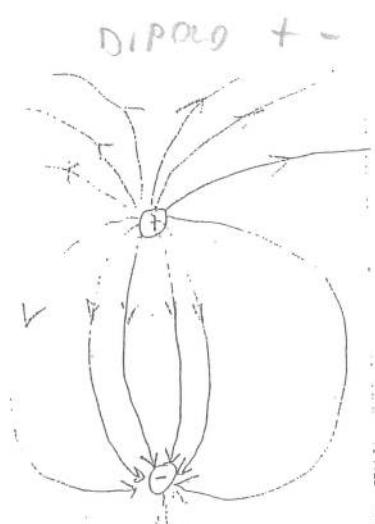
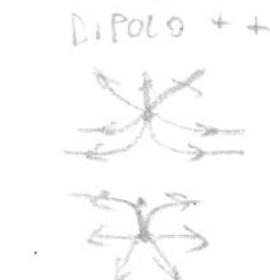
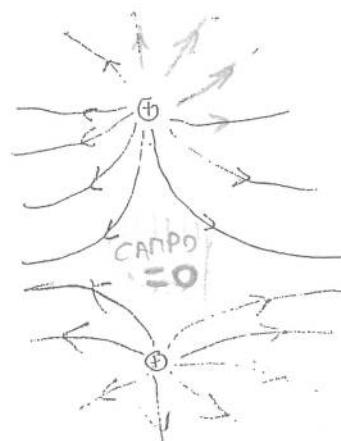


una carica
di prova q_0
positiva è
attratta.

linee di forza
per una sfera carica
negativamente. Il
campo è radiale e
decresce con la
distanza: le linee
di forza si allargano. Il campo
è lo stesso sui
punti di ogni
circonferenza
concentrica
con la sfera
carica.



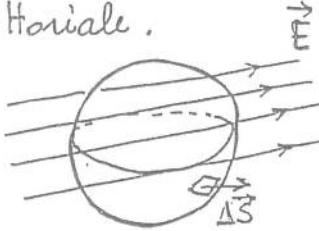
manca una
pagina con
dei disegni



2 cariche + 1 nonda: Le linee di forza
all'infinito + - - non si incontrano mai, mentre da +

Flusso di un campo vettoriale

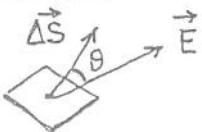
Definiamo il flusso di un campo vettoriale.



Consideriamo una superficie chiusa [ad esempio la sfera mostrata in figura]

immersa in un campo elettrico.

Consideriamo degli elementi di area, che rappresentiamo con un vettore $\vec{\Delta S}$, il cui modulo è dato dall'area ΔS , con direzione data dalla perpendicolare all'area e con verso diretto verso l'esterno.



Definiamo flusso del campo elettrico \vec{E} attraverso la superficie $\vec{\Delta S}$

$$\Delta \Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{\Delta S}$$

è uno scalare se sono perpendicolari $\Phi = \phi$

e definiamo

FLUSSO TOTALE

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \vec{\Delta S}$$

integrale esteso a una superficie chiusa

integrale esteso a tutta la superficie

48

Legge di Gauss

1^a LEGGE DI MAXWELL

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \text{CARICA CONTENUTA ALL'INTERNO}$$

il flusso attraverso una superficie chiusa, del campo elettrico \vec{E} , è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute dentro la superficie, comunque esse siano distribuite, divisa per ϵ_0 .

Il campo elettrico è prodotto da tutte le cariche interne ed esterne alla superficie; il flusso può dipendere solo dalle cariche interne.

La legge di Gauss può essere considerata come una formulazione alternativa della legge di Coulomb basata sul concetto di campo.

Infatti la dimostrazione della legge di Gauss si basa sul fatto che l'esponente di R al denominatore sia esattamente = 2.

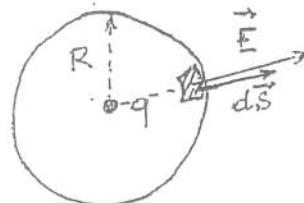
La CIRCUITAZIONE è l'integrale di linea esteso a una linea chiusa. \Rightarrow SE IL CAMPO È CONSERVATIVO

49

La legge di Gauss è uno strumento molto utile per determinare \vec{E} nei casi in cui la distribuzione di carica che genera il campo presenta un alto grado di simmetria (sfERICA, cilINDrica, pIANA).

Esempio

Consideriamo una carica q e una superficie sfERICA di raggio R . Per motivi di simmetria il campo \vec{E} deve essere perpendicolare alla superficie e avere lo stesso modulo in ogni punto.



Si ha :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint E dS = E \underbrace{4\pi R^2}_{\text{superficie della sfera}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{il campo elettrico è costante in modulo su tutta la superficie}$$

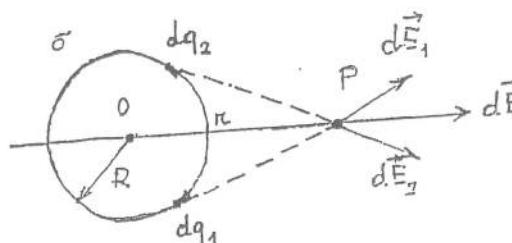
questo è il modulo del campo; la direzione di \vec{E} è data dalla simmetria.
Abbiamo dedotto la legge di Coulomb da quella di Gauss.

4.1

Esempio

Una carica q è distribuita con densità superficiale costante σ su una superficie sfERICA di raggio R . Calcolare il campo \vec{E} nei punti all'interno e all'esterno della superficie.

X QUALSIASI SFERA
IL CAMPO È RADIALE



Nel punto P distante $r > R$ dal centro il campo ha direzione radiale in quanto è dovuto alla somma di contributi a due a due simmetrici, uguali in modulo. Se così non fosse vorrebbe dire che σ non è uniforme. Si ha :

$$\vec{E}(r) = \int \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma r^2}{\epsilon_0}$$

dove $q = \sigma 4\pi R^2$

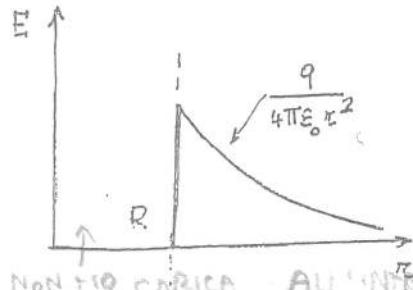
$$\text{quindi } E(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

Il campo all'esterno di una distribuzione sfERICA uniforme di carica è uguale a quello di una carica puntiforme di equal valore, concentrata in O.

4.5

All'interno della sfera non c'è carica e il flusso è nullo e quindi $E=0$ per $r < R$.

All'interno di una distribuzione superficiale sferica uniforme il campo è nullo.



Per $r \rightarrow R$ dall'interno il campo è sempre nullo, mentre per $r \rightarrow R$ dall'esterno E tende a $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

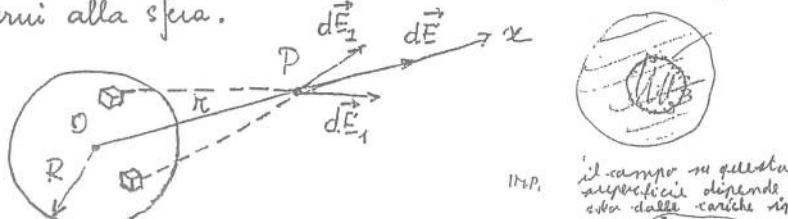
$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ se } r=R$$

Il campo presenta la discontinuità $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ per $r=R$ cioè nel passaggio attraverso lo strato carico.

E semipis.

Una carica q è distribuita con densità spaziale ρ uniforme nel volume di una sfera di raggio R .

Calcolare il campo elettostatico nei punti interni ed esterni alla sfera.



che tipo di sistema è quello illustrato in figura?

Vale anche in questo caso il ragionamento basato sulla simmetria sferica. Il campo all'esterno di una sfera uniformemente carica vale:

$$\Phi(\vec{E}) = E \cdot S \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q R^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad \text{per } r > R$$

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

E come se la carica fosse concentrata nel centro della sfera.

All'interno della sfera di raggio R (cioè per $r < R$) esiste in questo caso una carica distribuita uniformemente e quindi il campo non è più nullo.

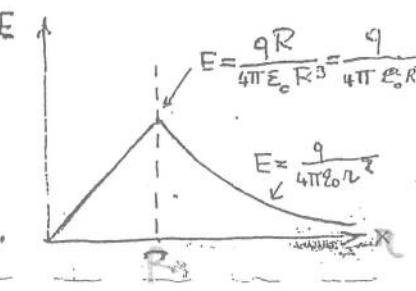
La carica all'interno di una sfera di raggio r ($r < R$) con volume $\frac{4}{3}\pi r^3$ è:

$$q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q \cdot r^3}{R^3}$$

$$E = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2 R^3} = \frac{q r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

Quindi il campo cresce linearmente dal valore zero fino al valore assunto per $r=R$. Per $r > R$ il campo decresce come $\frac{1}{r^2}$.



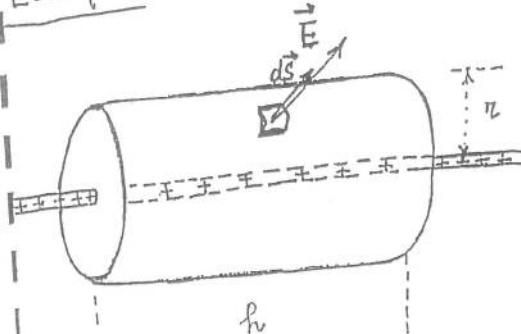
CAMPO IN P?



CONSIDERO UNA SFERA
IN CUI PE SUPERFICIE
CON CARICA INTERNA q'

Esempio

distribuzione lineare infinita di carica.



Trovare il campo ad una distanza r dal centro della distribuzione di carica.

Per ragioni di simmetria il campo può essere diretto solo radialmente. Come superficie gaussiana sceglieremo un cilindro di raggio r ed altezza h , chiuso alle due estremità da superfici piane perpendicolari all'asse. E è costante in modulo su tutta la superficie laterale del cilindro ($S = 2\pi r h$). La densità lineare di carica sia λ .

La carica racchiusa dalla superficie gaussiana della figura è: $\lambda \cdot h$. PERCHÉ?

Per il teorema di Gauss:

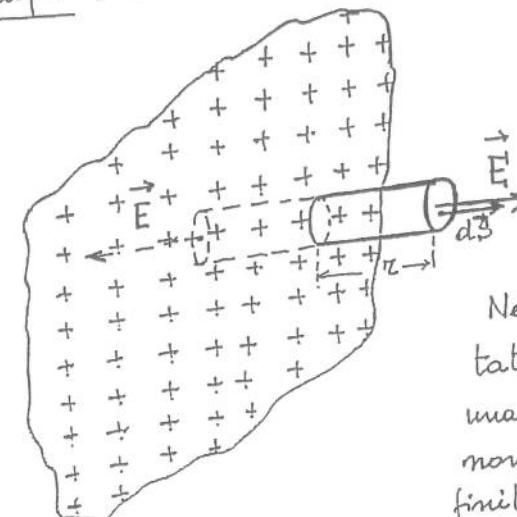
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Esempio

distribuzione piana infinita di carica



conduttrice

FLUSSO SOLO
SULLE 2 BASI
DEL CILINDRO

Nel disegno è riportata una parte di una lamina sottile non conduttrice, infinita con densità

di carica superficiale uguale a σ costante.

Puoi dividere come superficie gaussiana un cilindro di area di base $= A$ e altezza $2r$, disposto per metà da una parte della lamina e per metà dall'altra.

E è diretto perpendicolarmente alle due superfici di base con il verso indicato in figura.

Il flusso attraverso la superficie laterale è zero.

Il flusso attraverso le due basi è:

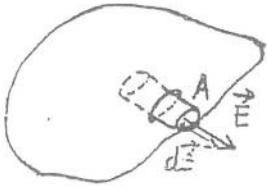
$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

modulo del campo

$$\begin{aligned} EA &= 90^\circ \\ \cos 90^\circ &= 0 \end{aligned}$$

Esempio: conduttore carico.



Nel disegno è rappresentato un conduttore carico con densità superficiale di carica σ che in genere varierà da punto a punto.

Quanto vale E nei punti esterni alla superficie e vicini ad essa?

Il campo elettrico nei punti vicini alla superficie è perpendicolare alla superficie stessa e il verso è quello indicato in figura se la carica è positiva.

Poiché E deve essere perpendicolare alla superficie? PER NON AVERE COMPONENTE TANGENZIALE
Consideriamo una piccola scatola cilindrica come superficie gaussiana. L'unico contributo al flusso proviene dalla base esterna del cilindro avente area A .

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

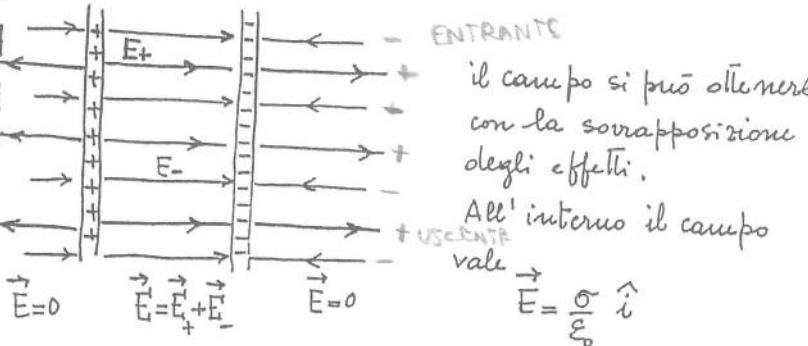
$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

confrontare questo valore di E con quello trovato per l'isolante

50

Esempio

Calcolare il campo elettostatico prodotto da due piani uniformemente carichi con densità superficiale σ uno $+\sigma$ e l'altro $-\sigma$.



51

NEI METALLI LE CARICHE SONO SULLA SUPERFICIE PERCHÉ ESSENDO LIBERE DI MUOVERSI CERCANO LA CONFIGURAZIONE DI MINOR ENERGIA

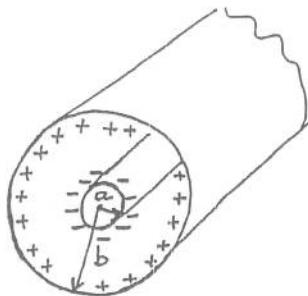
Problema

In figura è disegnata una sezione di due cilindri concentrici di raggi a e b sui quali si trovano cariche uguali e di segno opposto con densità lineare λ .

Usando il teorema di Gauss dimostrare che:

a) $E=0$ per $r>b$ e per $r<a$,

b) che tra i cilindri $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$.



Consideriamo una superficie cilindrica di raggio r e altezza h , coassiale con i due cilindri.

Per ragioni di simmetria il campo è radiale e ha lo stesso valore su tutti i punti a uguale distanza dall'asse.

Il flusso uscente è dato da:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E_{\text{radiale}} dS = E_{\text{radiale}} \cdot 2\pi h r$$

Si vede subito che per $r>a$ q contenuta = 0, per $r>b$ la carica totale è = 0.

52

per $a < r < b$

$$q = -\lambda h$$

quindi applicando il teorema di Gauss :

$$r < a \quad \text{e} \quad r > b \quad E_{\text{radiale}} = 0$$

$$a < r < b \quad E_{\text{radiale}} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 h r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Supponiamo di avere un partitore che si muova su di una traiettoria circolare di raggio r concentrica con i due cilindri del caso precedente e contenuta fra essi. Quale deve essere l'energia cinetica K del partitore? Si ponga $a = 2.0 \text{ cm}$, $b = 3.0 \text{ cm}$ e $\lambda = 3.0 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}}$.

Il partitore che si muove su una circonferenza di raggio r è soggetto ad una forza $\vec{F} = e\vec{E}$ diretta verso l'asse del sistema di cilindri.

$$\vec{F} = e\vec{E} = \frac{e}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r}, [\text{forza diretta come il raggio}]$$

L'accelerazione centripeta è $\frac{v^2}{r}$ e : la forza elettrica cambia solo la direzione del moto.

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad \text{da cui } K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{e^2 \lambda}{4\pi\epsilon_0 r} = 4.3 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 270 \text{ eV}$$

Problema.

Su una piccola sfera di massa $m = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ g}$, si trova una carica di $2.0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. Essa è sostenuta da un filo che forma un angolo di 30° con una lamina estesa conduttrice, come in figura. Calcolare la densità superficiale di carica σ che si trova sulla lamina.

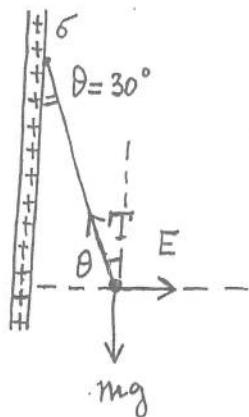
La condizione di equilibrio richiede che la somma delle forze applicate alla sfera sia nulla; affinché ciò avvenga consideriamo le forze agenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} T \sin \theta = qE = \frac{qE_0}{2E_0} \text{ NON } 2E_0 \text{ PERCHÉ} \\ T \cos \theta = mg \quad 2E_0 \text{ E IL 2 SI SEMPRE} \end{array} \right.$$

dividendo membro a membro :

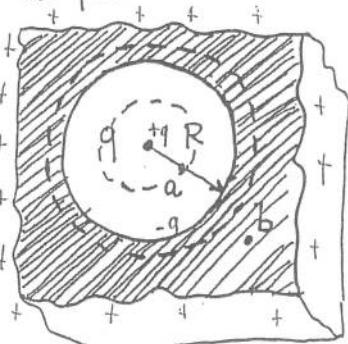
$$\tan \theta = \tan 30^\circ = \frac{qE}{mg}$$

$$\sigma = 4.34 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$



XProblema

Una carica puntiforme di $1.0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ è posta al centro di una cavità sferica, avente raggio di 3.0 cm , posta all'interno di un blocco metallico. Mediante la legge di Gauss trovare il campo elettrico 1) nel punto a situato a metà fra il centro e la superficie e 2) nel punto b.



Consideriamo una superficie sferica all'interno della cavità con il centro nella carica q e di raggio arbitrario R.

Prendiamo come positiva la normale esterna alla superficie.

Applichiamo il teorema di Gauss :

$$\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int_S ds = E 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

il problema ha simmetria centrale.

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Nel punto a avevmo, sostituendo i valori numerici,

$$E(a) = 4.0 \cdot 10^6 \frac{V}{m} \text{ (Nm)}$$

Sulla superficie interna della cavità troviamo la carica $q_c = -q$.

Se applichiamo il teorema di Gauss a una qualsiasi superficie interna al conduttore [che abbraccia la cavità] il campo elettrico è nullo e si ha:

$$q_c + q = \epsilon_0 \vec{\Phi}(E) = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

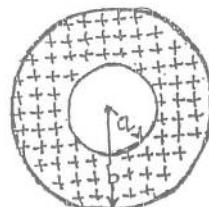
Problema

Un involucro sferico non conduttore, caricato con densità uniforme ρ :

costruire il diagramma di E in funzione di r per distanze dal centro comprese fra 0 e 30cm.

Utilizzare i seguenti valori:

$$\rho = 1.0 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^3}, a = 10 \text{ cm}, b = 20 \text{ cm}.$$



56

na: se nel - il cui c. -
di modulo costante nei punti a uguali distanze dal centro. Consideriamo una superficie sferica di raggio r concentrica con la sua carica. Sia positiva la normale esterna. Il flusso è dato da:

$$\vec{\Phi}(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E_{\text{radiale}}$$

Afflichiamo il teorema di Gauss ai vari casi:

a) $r < a$ $\vec{\Phi}(\vec{E}) = 0$ perché non ci sono cariche,

b) $a < r < b$

la carica contenuta nella sfera di Gauss è INTESA VERA SPERA ESTERNA NOTA

$$q = \int \rho dV = \rho \int dV = \frac{4}{3} \pi (r^3 - a^3) \rho$$

PERICO B
INTESA B
TRA B

quindi $E_{\text{radiale}} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{r^3 - a^3}{r^2} \right) \rho = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2}$

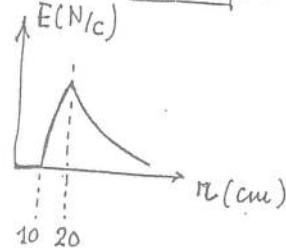
$$E_{\text{rad}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[r - \frac{a^3}{r^2} \right] = 3.77 \cdot 10^4 \left[r - \frac{10^{-3}}{r^2} \right] \frac{N}{C}$$

c) $r > b$

la carica racchiusa nella sfera di Gauss è $q = \frac{4}{3} \pi \rho (b^3 - a^3)$ da cui

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} = 264 \frac{1}{r^2} \frac{N}{C}$$

andamento del campo:



58

Dalla legge di Gauss abbiamo:

$$\Phi_E = \frac{E}{\epsilon_0} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} [Q + 2\pi A(r^2 - a^2)]$$

59

su una superficie sferica di raggio r ($a < r < b$)

$$\text{da cui } E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r^2} + 2\pi A \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \right].$$

Il campo è costante quando $\frac{dE_r}{dr} = 0$ cioè quando la variazione del campo è 0, cioè il campo non cambia e quindi:

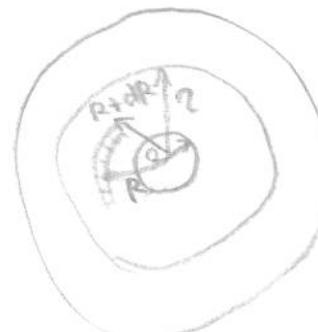
$$-2Qr^{-3} + 4\pi A a^2 r^{-3} = 0$$

$$\text{che porta a: } A = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

e il campo diventa

$$E_r = \frac{A}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$\frac{4}{3}\pi [R+dR]^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 dR + o(dR)$$



questa è da carica contenuta in una sfera di raggio r con $a < r < b$.

$$q = Q + 4\pi A \left[\frac{R^2}{2} \right]_a^r = Q + 4\pi A \left[\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right]$$

Problema

Due lamine metalliche estese, affacciate l'una all'altra, sono caricate sulle superfici interne, con densità superficiali di carica rispettivamente $+σ$ e $-σ$. Quanto vale E in punti: a) a sinistra delle lamine, b) fra di esse, c) a destra?

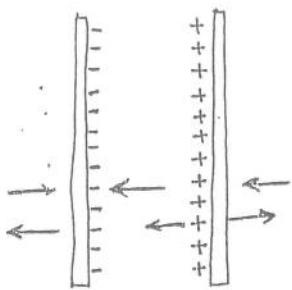
Consideriamo dapprima, invece dei due conduttori, due piani geometrici, sui quali siano distribuite cariche di segno opposto con densità $σ$.

Il campo prodotto da una sola di queste distribuzioni

$$\text{è: } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{teorema di Gauss})$$

Il campo elettrico complessivo risulta dalla somma dei campi elettrici generati dalle singole distribuzioni:

60



61

- nello spazio compreso fra i due piani i campi sono concordi e il campo risultante è:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

diretto dalle cariche positive a quelle negative.

- nello spazio esterno i campi sono uguali e discordi e il campo risultante è nullo.

Torniamo alle lamine metalliche: lontano dai bordi abbiamo lo stesso risultato dei piani preceduti.

Questo risultato non è valido nei punti vicini ai bordi dove campo e distribuzione di carica non sono più uniformi.

Nel caso delle due lamine conduttrici la presenza dei due strati serve a garantire la condizione di equilibrio, rendendo nullo il campo dentro ogni conduttore.

L'UNICO CAMPO CONSERVATIVO CHE AMMETTE
POTENZIALE È IL CAMPO ELETROSTATICO

SE C'È IL POTENZIALE, ALLORA IL CAMPO È CONSERVATIVO

Il potenziale elettostatico. Il potenziale è il lavoro fatto dal campo.

Abbiamo visto che $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ è valida quando le cariche che generano il campo sono fisse e costanti e la carica q_0 non deve perturbare la distribuzione delle cariche sorgenti.

Il lavoro della forza \vec{F} per uno spostamento $d\vec{s}$ della carica q_0 è:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 E ds \cos\theta$$

$$\text{e } W = \int_C dW = q_0 \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

integrale di linea

[ricordiamo che l'integrale su un percorso chiuso prende il nome di "circuitazione"]. SE $F=0$, IL LAVORO È 0 \Rightarrow CAMPO E FORZA SONO CONSERVATIVE

In meccanica abbiamo visto una categoria di forze, delle forze conservative, per le quali il lavoro compiuto per spostare un punto materiale da una posizione A a una posizione B dipende solo dalla posizione iniziale a quella finale e non dal cammino seguito.

Non tutte le forze elettriche sono conservative. può si può dimostrare che il campo elettostatico è conservativo.

Se il campo elettostatico è conservativo allora si ha:

$$f(B) - f(A) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

all'opposto di questa funzione si dà il nome di potenziale elettostatico del campo E , che è quindi dato da:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1)$$

In realtà la relazione precedente definisce la differenza di potenziale fra il punto A e il punto B.

Ricordando che $W = q_0 \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q q_0}{R^2}$$

dalla (1) precedente abbiamo

$$W_{AB} = q_0 (V_A - V_B) = -q_0 \Delta V_{BA}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

il lavoro fatto dalla forza elettrica per portare q_0 dal punto A al punto B è dato dal prodotto di q_0 per la d.d.p. fra A e B.

$$f(B) - f(A) = \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q q_0}{R^2} dR = -\frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right]$$

$$f(A) - f(B) = \frac{Q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right]$$

Ricordando che ad ogni forza conservativa è associata una energia potenziale e che il lavoro della forza conservativa è uguale all'opposto della variazione dell'energia potenziale si ha:

$$W_{AB} = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B)$$

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V.$$

U_e = energia potenziale elettostatica. = U_e

Unità di misura

La def. p. è un lavoro diviso per una carica
l'unità di misura nel SI è Joule/coulomb.

Questa unità si chiama volt (V) e quindi:

$$V = \frac{J}{C}$$
 IN RELAZIONE AL CAMPO
 \Rightarrow TOLGO UNA CARICA

L'unità di misura del campo elettrico può essere

$$\frac{N}{C} \rightarrow \frac{N}{C} \cdot \frac{m}{C} = \frac{J}{C^2} = \frac{V}{m}$$

più comunemente di $\frac{N}{C}$ si usa $\frac{V}{m}$

I.B. - il volt è l'unità di misura della tensione

Calcoliamo il lavoro fatto dalla forza \vec{F} per spostare la carica q_0 dalla posizione A alla posizione B.

$$\text{Lavoro} = W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_0 \int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr =$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

dalle espressioni precedenti si nota che la funzione integrandia dipende solo da r e che il lavoro non dipende dal cammino seguito ma solo dalla posizione iniziale e da quella finale. Questo risultato era prevedibile in quanto la forza considerata è una forza centrale e il suo modulo dipende solo da r .

Possiamo scrivere, ricordando che $\frac{W_{AB}}{q_0} = V_A - V_B$

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

$$\text{e } U_e(A) - U_e(B) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

La forza decresce con la distanza; questo fatto suggerisce che per cariche molto lontane fra loro la forza sia trascurabile e che sia lecito porre:

$$F(\infty) = 0, V(\infty) = 0, U_e(\infty) = 0.$$

Possiamo pertanto definire il potenziale generato da una carica puntiforme q , in un punto a distanza r dalla sorgente come:

$$V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

e per l'energia potenziale di una carica q_0

$$U_e(r) = q_0 V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

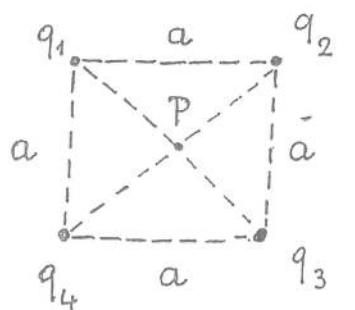
Consideriamo un insieme di cariche puntiformi; il potenziale in un punto

si calcola così:

- 1) si trova il potenziale dovuto ad ogni carica,
- 2) si sommano le quantità così ottenute:

$$V = \sum V_n = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_n}{R_n}$$

Esempio:



$$a = 1 \text{ m}$$

$$q_1 = 1 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$q_2 = -2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$q_3 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$q_4 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Trovare il potenziale nel punto P, centro del quadrato. La distanza di ogni carica dal centro P è $= a \cdot \sqrt{2} = 0.7 \cdot a$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{0.7 \cdot a} = 500 \text{ V}$$

Moto di una carica - Conservazione dell'energia

Consideriamo una carica puntiforme q_0 in moto in un campo elettostatico \vec{E} .

Supponiamo che la carica passi dalla posizione A alla posizione B; possiamo definire una energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$ e una energia potenziale che in A vale $q_0 V_A$ e in B vale $q_0 V_B$.

Possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + q_0 V_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + q_0 V_B \quad \left. \begin{array}{l} \text{LAVORO DELLA CAMPO} \\ \text{SULLA CARICA} \\ \text{conservaz.} \\ \text{dell'energia} \end{array} \right\}$$

durante il moto della particella carica l'energia totale, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, rimane costante.

Dalla relazione precedente si vede che si può accelerare una particella carica, trasformando l'energia potenziale in energia cinetica, con una opportuna scelta della differenza di potenziale.

L'electronvolt.

quando una carica elementare viene accelerata dalla d.d.p. di $1V$ essa acquista l'energia cinetica

$$e \Delta V = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} \cdot 1V = 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

carica dell'elettrone

questa quantità di energia è utile per descrivere le energie su scala atomica e viene chiamata electronvolt (eV).

$$1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J \Rightarrow 1J = 6.25 \cdot 10^{18} eV$$

$$\mu eV = 10^{-6} eV$$

$$m eV = 10^{-3} "$$

$$KeV = 10^3 "$$

$$MeV = 10^6 eV$$

$$GeV = 10^9 eV$$

$$TeV = 10^{12} eV$$

energie massime raggiunte = $50 GeV$ per gli elettroni e $1 TeV$ per i protoni

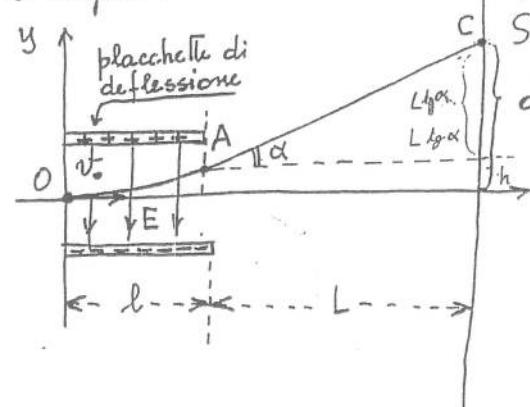
PER LA LUCE $\lambda = \frac{12400}{E(eV)}$ $E(eV) = \frac{12400}{\lambda(\text{\AA})}$

L'ENERGIA AUMENTA ANDANDO VERSO L'ULTRAVIOLETTO

Esempio.

Un elettrone viene mandato con velocità iniziale v_0 in una regione in cui agisce un campo elettrostatico uniforme (vedere figura).

Uscito dalla regione in cui agisce il campo, l'elettrone colpisce uno schermo S nel punto C ; trovare velocità e energia cinetica finali dell'elettrone, l'angolo α e l'ordinata del punto C .



DA UN'ARMATURA ALL'ALTRA
NON POSSONO PASSARE CARICHE

$d =$ distanza \approx $10^{-2} m$
 $l =$ lunghezza $\approx 10^{-2} m$

L'elettrone viene ad avere una accelerazione $\frac{eE}{m}$ FORZA quando si muove all'interno delle placchette.

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 \end{array} \right. \text{ forza elettrica}$$

eliminando t si ottiene l'equazione della traiettoria:

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{x^2}{v_0^2}$$

$$F = ma$$

$$a = \frac{F}{m}$$

77

$$V_B = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_B}$$

$$E \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right) Q$$

L'angolo di deflessione α si trova:

$$\tan \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{eE}{m} \cdot \frac{l}{v_0^2}$$

la distanza di A dall'asse x cioè la $y(A)$

$$h = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v_0^2} = h$$

fuori dalle placchette l'elettrone descrive una traiettoria rettilinea:

$$y = mx + q$$

e l'ordinata del punto C cioè la distanza d fra il punto C e l'asse x vale:

$$d = h + L \tan \alpha = \frac{eEl}{mv_0^2} \left(\frac{l}{2} + L \right)$$

L'energia cinetica e quella potenziale si conservano:

$$\underbrace{\frac{1}{2} mv^2}_{\text{in } C} = \underbrace{\frac{1}{2} mv_0^2}_{\text{in } A} + \underbrace{eEh}_{\substack{\rightarrow \text{lavoro fatto} \\ \text{dal campo} \\ \text{elettrico}}} \quad \rightarrow \text{NON NULLI}$$

da cui si ricava la velocità.

In C non c'è energia potenziale perché non c'è campo elettrico.

Se la carica è puntiforme $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$

Superfici equipotenziali

Il luogo dei punti aventi il medesimo potenziale elettrico è chiamato superficie equipotenziale.

Una famiglia di superf. equip. - ciascuna corrispondente ad un diverso valore del potenziale -

può essere utilizzata per dare una descrizione del campo elettrico in una regione dello spazio.

In tutti i casi le superfici equipotenziali sono normali alle linee di forza e quindi ad \vec{E} .

Se così non fosse \vec{E} avrebbe una componente sulla superficie equipotenziale e quindi si dovrebbe compiere lavoro per muovere una carica di prova sulla superficie stessa, cosa che non è possibile.

Le superfici equip. saranno vicine fra loro dove \vec{E} è grande e distanti dove \vec{E} è piccolo.



$$V(B) - V(A) = 0 = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

\Rightarrow L'UNICA CONDIZIONE È CHE $E \perp d\vec{s}$

Il campo come gradiente del potenziale.

Conoscendo il campo \vec{E} elettostatico in ogni punto di una curva che unisce due punti A e B si ha:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

e il risultato non dipende dalla curva scelta.

Si può dimostrare che accanto a questa relazione integrale esiste una relazione locale che, noto il potenziale, permette di risalire al campo elettostatico.

Il potenziale è una funzione scalare continua e derivabile.

Per uno spostamento $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ che unisce due punti A(x,y,z) e B(x+dx,y+dy,z+dz) si ha

$$dV = V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x, y, z) = -\vec{E} \cdot d\vec{r} =$$

$$= -E_x dx - E_y dy - E_z dz. \quad (1)$$

D'altra parte:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (2)$$

e confrontando le due relazioni (1) e (2) si ha:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad } V}$$

il campo elettostatico è uguale al gradiente del potenziale elettostatico cambiato di segno.

Ricordando l'operatore:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla V = \text{grad } V$$

Si può scrivere:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = \nabla V \cdot d\vec{s}$$

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \nabla V \cdot d\vec{s}$$

questo è il teorema del gradiente: NO

La variazione di una funzione scalare fra i punti A e B è data dall'integrale di linea del gradiente della funzione lungo un qualsiasi percorso che collega A e B.

Problema

Su una asta di lunghezza L , posta sull'asse x con un estremo nell'origine ($x=0$) è distribuita una carica con densità lineare $\lambda = kx$, dove k è una costante.

$$[\frac{C}{m} \cdot \frac{A}{m}]$$

a) supponendo nullo il potenziale elettostatico all'infinito, calcolare V nel punto P dell'asse y .

b) calcolare la componente verticale E_y del campo elettrico in P ,

c) la componente E_x [componente orizzontale] del campo elettrico in P può essere calcolata usando il risultato di a)?

Il potenziale nel punto P viene calcolato integrando tutti i contributi ottenuti dagli elementi di carica $dq = \lambda dx$

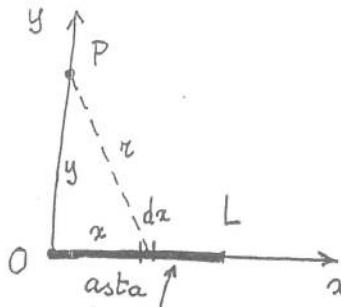
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dx}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\stackrel{15}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{kx dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \left[\sqrt{x^2+y^2} - y \right]$$

$$b) E_y = - \frac{dV}{dy} = - \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \right]$$

confrontare V ed E che abbiamo calcolato qui con quelli trovati per un disco carico.

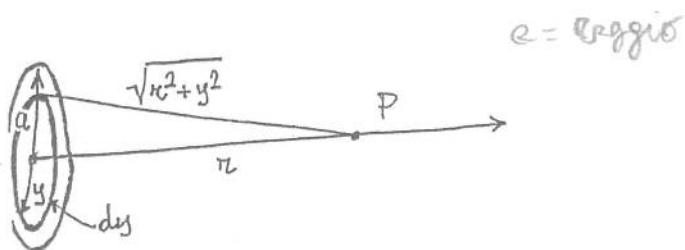
c) il risultato trovato in a) riguarda i punti dell'asse y , con $x=0$. Per il calcolo della componente orizzontale E_x abbiamo bisogno di conoscere la dipendenza di V da x .



Problema

Il potenziale in un punto sull'asse di un disco carico è

$$V = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + r^2} - r \right].$$



a) dimostrare che E per i punti sull'asse è dato da:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right]$$

b) l'espressione di E si riduce a forme note per $r \gg a$ e per $r=0$?

Ricaviamo la componente del campo lungo la direzione r , che è l'unica in cui il campo è $\neq 0$ per ragioni di simmetria.

17

$$\begin{aligned} E = E_r &= - \frac{dV}{dr} = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{d}{dr} \left[\sqrt{a^2 + r^2} - r \right] = \\ &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2r}{\sqrt{a^2 + r^2}} - 1 \right] = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right]. \end{aligned}$$

b) quando $r=0$, cioè quando P si trova sul disco

$$E(r=0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

CAMPO UNIFORME
CONDUTTORE
ISOLANTE

che è il campo nelle vicinanze di una superficie carica, in assenza di altre cariche.

Per $r \gg a$ invece di fare il $\lim_{r \rightarrow \infty} E(r)$, che

non è significativo, conviene sviluppare la radice quadrata mediante la serie binomiale arrestata al secondo termine:

$$E(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{a}{r})^2}} \right] \approx \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\pi a^2}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

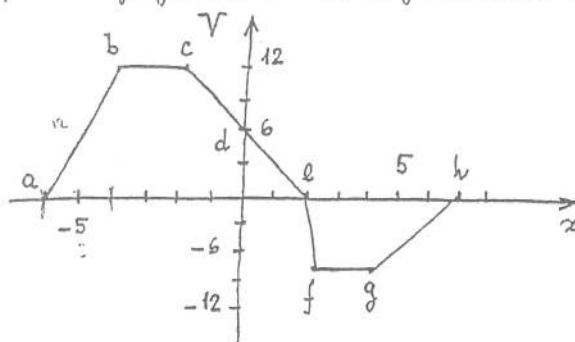
$\frac{a}{r} \ll 1$, $\pi a^2 = \text{area del disco}$, $\sigma \cdot \pi a^2 = q$.

$x = \frac{a}{r}$ sviluppo $\sqrt{1+x^2}$ come $f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$

Problema

19

Il potenziale elettrico varia lungo l'asse x come mostrato in figura. Determinare per ognuno degli intervalli indicati le componenti del campo elettrico secondo l'asse x e riportare graficamente E_x in funzione di x .



E' sempio:

calcolare $E(r)$ per una carica puntiforme q , assumendo che $V(r)$ sia dato da:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

Per simmetria E deve essere diretto radialmente verso l'esterno per una carica puntiforme (positiva).

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \right] =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

La relazione fra E e V è:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

Consideriamo la tabella:

intervallo	a-b	b-c	c-e	e-f	f-g	g-h
Δx	2	2	4	0.5	2.0	2.5
ΔV	12	0	-12	-7.5	0	7.5
E_x	-6.0	0	3	15.0	0	-3.0

Problema

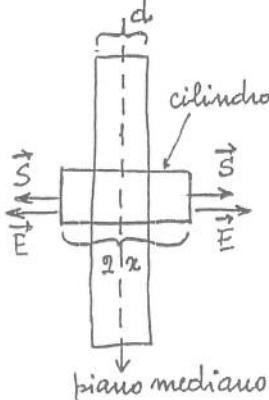
Una lamina isolante piana di spessore d ha una densità di carica di volume costante ρ .
trovare il modulo del campo elettrico in tutti i punti dello spazio sia all'interno che all'esterno della lamina.

Il campo elettrico, data la simmetria del problema, è perpendicolare alle facce della lamina ed ha uguale intensità a metà di distanza dal piano mediano, ma è di verso opposto per i punti che appartengono a parti opposte rispetto al piano mediano.

Consideriamo un cilindro di area di base S e altezza ρx . Il flusso del campo elettrico uscente dal cilindro è solo quello attraverso le basi.

$$\vec{\Phi}_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2ES$$

Applichiamo il teorema di Gauss, calcolando la carica contenuta all'interno del cilindro.



$$\text{Per } 0 < x < \frac{d}{2} \quad q = \rho x S$$

$$\text{quindi } 2ES = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\rho x S}{\epsilon_0}$$

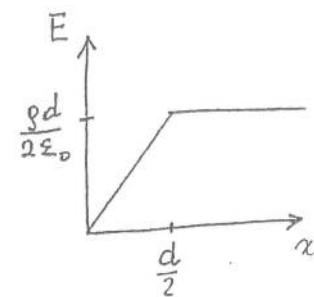
IL CAMPO È
STABILE CHE
ASX

$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$

$$\text{per } x > \frac{d}{2} \quad q = \rho S d$$

$$2ES = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\rho S d}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}$$



Problema

Un elettrone di energia cinetica pari a 100 eV è lanciato verso una lastra metallica estesa caricata con una densità superficiale di carica $\sigma = -2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$. Da che distanza deve essere lanciato l'elettrone se si vuole che giunga a urtare la piastra con velocità nulla?

$$\lambda(\text{eV}) = \frac{12400}{\lambda(\text{A})}$$

Il campo elettrico prodotto dalla lastra metallica

$$\bar{E} : E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 2.26 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$$

uniforme e diretto verso la lastra.

A causa questo campo contribuiscono le cariche distribuite su entrambe le facce della lastra.

Due distribuzioni piane e parallele di cariche dello stesso segno danno campo nullo all'interno e campo $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ all'esterno.

L'elettore è soggetto ad una forza repulsiva di intensità $F = eE = \frac{e\sigma}{\epsilon_0}$ costante. Il lavoro fatto da questa forza sull'elettore dalla posizione iniziale fino alla lastra è:

$$L = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{RETTO}}{\downarrow} F s \cos 180^\circ = -Fs$$

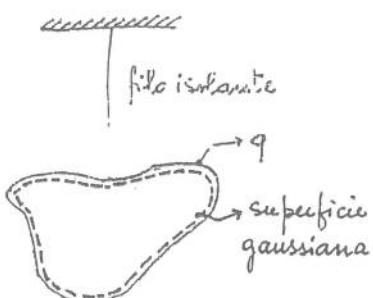
Per il teorema dell'energia cinetica il lavoro è uguale alla variazione dell'energia cinetica.

$$L = -Fs = K_f - K_i = -K_i$$

$$S = \frac{K_i}{F} = \frac{K_i(eV)}{E l} = \frac{100(eV)}{(2.26 \cdot 10^5) \frac{V}{m}} = 4.42 \cdot 10^{-4} m,$$
$$eV \Rightarrow J \times 1.6 \cdot 10^{-19}$$

21 - Conduttore isolato.

Una carica in eccesso, posta su un conduttore isolato, si distribuisce interamente sulla sua superficie esterna



In figura è mostrata una sezione di un conduttore isolato di forma arbitraria sul quale si trova un eccesso di carica q .

La linea tratteggiata rappresenta la sezione di una superficie gaussiana contenuta all'interno del conduttore; la superficie gaussiana può essere ad una distanza dalla superficie del conduttore piccola a piacere ma deve essere interna al conduttore stesso.

L'eccesso di carica depositato sopra un conduttore isolato crea all'interno del conduttore un campo elettrico che, agendo sulle cariche mobili del conduttore, le pone in moto dando origine a correnti interne; queste ridistribuiscono le cariche in modo che il campo elettrico interno venga automaticamente diminuito. Quando il campo elettrico si annulla, le correnti cessano e lo stato elettrico del sistema diventa statico.

Se all'equilibrio elettostatico \vec{E} è zero in ogni punto interno al conduttore esso deve essere zero in ogni punto della superficie gaussiana e allora all'interno di questa superficie la carica deve essere nulla.

Come conseguenza l'eccesso di carica deve essere sulla superficie del conduttore.

Si può dire che la carica si distribuisce sulla superficie in modo tale che tutti i punti, quelli all'interno e quelli sulla superficie abbiano lo stesso potenziale.

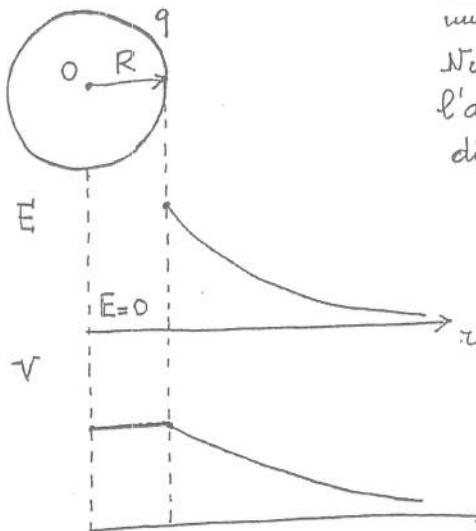
Se così non fosse, le cariche si muoverebbero a causa delle differenze di potenziale; questo sarebbe in contraddizione con il fatto che siamo in una condizione di equilibrio elettostatico.

Se poi la superficie del conduttore è equipotenziale E deve essere normale alla superficie stessa in tutti

suo punti.

Abbiamo detto che l'eccesso di carica si distribuisce sulla superficie di un conduttore; possiamo dire che questa distribuzione ha come conseguenza che tutti i punti del conduttore (sulla superficie e all'interno) sono portati al medesimo potenziale, perché se V è costante E è zero ($\vec{E} = -\frac{dV}{dr}$).

Consideriamo una sfera cava conduttrice isolata; sulla superficie è posta una carica q . Nella figura è riportato l'andamento di E e di V in funzione di r , dove r è la distanza dal centro O della sfera.



SE NON FOSSE COSTANTE, AVREI UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE E QUINDI SE $dV \neq 0 \Rightarrow E \neq 0$ MENTRE r È DEVE ESSERE 0 ALL'INTERNO PERCHÉ NON HO CARICHE.

L'andamento di V , riportato in figura, può essere spiegato così; per distanze $r > R$ il potenziale è dato da $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

come se la carica fosse concentrata nel centro della sfera. Per distanze da $O < R$, il potenziale è lo stesso di quello che si ha in superficie.

La curva del campo si ricava derivando l'andamento del potenziale.

La curva che dà l'andamento del potenziale si ottiene integrando il campo elettrico.

Considerazione.

La densità di carica tende ad essere alta sulle superfici con piccoli raggi di curvatura.

Per esempio la densità di carica tende ad essere elevata sulle punte e bassa nelle parti piatte di una superficie conduttrice.

Consideriamo due sfere di raggi diversi collegate da un filo molto lungo e sottile.



Supponiamo che il sistema sia a un potenziale V arbitrario. I potenziali (uguali) delle sfere sono:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{R_2}$$

e quindi $q_1/q_2 = R_1/R_2$

le densità di carica superficiale sono:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

dividendo:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

ricordando che $q_1/q_2 = R_1/R_2$

si ha:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Potenziale di un dipolo.

Problema

Due sfere conduttrici, una di raggio di 6 cm e l'altra di raggio di 12 cm, sono entrambe caricate con $3 \cdot 10^{-8}$ C e sono molto distanti. Se le sfere vengono collegate da un filo metallico trovare:

- la direzione di moto e il modulo della carica trasfusa
- la carica finale e il potenziale delle due sfere.

Prima del collegamento ciascuna sfera possiede una carica $q_0 = 3 \cdot 10^{-8}$ C; dopo il collegamento la carica totale si suddivide fra le due sfere ed esse assumono lo stesso potenziale V . Quindi:

$$q_0 + q_0 = 2q_0 \Rightarrow q_1 + q_2 = 2q_0$$

dopo il collegamento $V = \text{PERCHÉ SE NO}$

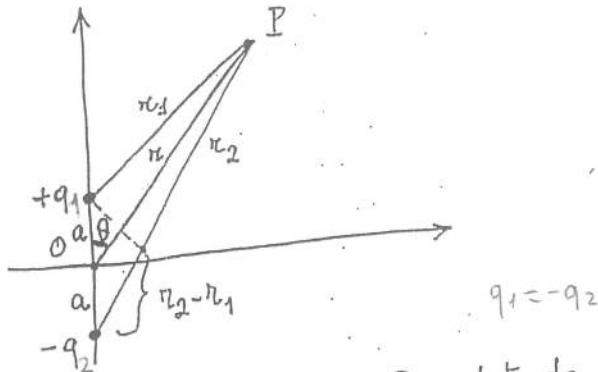
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{R_2}$$

Risolvendo il sistema formato dalle equazioni precedenti si ottiene:

$$q_1 = \frac{2}{3} q_0 = 2 \cdot 10^{-8}$$

$$q_2 = \frac{4}{3} q_0 = 4 \cdot 10^{-8}$$

$$V = \frac{q_0}{6\pi\epsilon_0 R_1} = 3,0 \text{ KV.}$$



il potenziale V nel punto P è dato da :

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Supponiamo che $r \gg 2a$, allora si hanno queste relazioni approssimate (veder la figura):

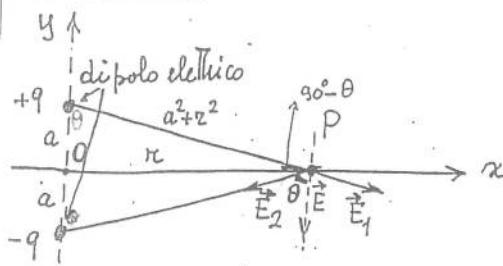
$$r_2 - r_1 \approx 2a \cos\theta, \quad r_1 r_2 \approx r^2.$$

Il potenziale si riduce a:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2a \cos\theta}{r^2} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos\theta}{r^2}}$$

$p = 2aq$ modulo del momento di dipolo

Problema (ci nel compito)



una carica positiva $+q$ e una negativa $-q$ (di uguale grandezza) sono poste ad una distanza $2a$ in configurazione chiamata "dipolo elettrico".

Trovare il campo nel punto P posto sull'asse del segmento congiungente le due cariche a distanza r da O .

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Il modulo del campo E_1 e E_2 è :

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2 + r^2}$$

Il modulo del campo E è :

$$E = E_1 \cos\theta + E_2 \cos\theta = 2E_1 \cos\theta$$

[componente lungo l'asse y]

[e le componenti di \vec{E}_1 e \vec{E}_2 lungo l'asse x ?]

30

dalla figura si vede che

$$a = \sqrt{a^2 + r^2} \quad \sin [90^\circ - \theta] = \sqrt{a^2 + r^2} \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

$$\text{quindi } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2 + r^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 [a^2 + r^2]^{3/2}}$$

Se $r \gg a$ l'equazione precedente si riduce a :

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2aq}{r^3} \quad \begin{matrix} \text{CAMPO} \\ \text{DEBOLE} \end{matrix}$$

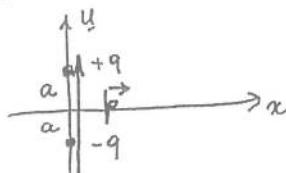
Le proprietà della distribuzione di carica e cioè q e $2a$ compongono come prodotto; questo significa che se ad esempio dimentichiamo q e moltiplichiamo a il campo E non cambierebbe, sempre per $r \gg a$.

I. bordello $2aq$ è chiamato momento di dipolo elettrico
P:

• la dipendenza di E da r è del tipo $\frac{1}{r^3}$.

Dipolo in un campo elettrico.

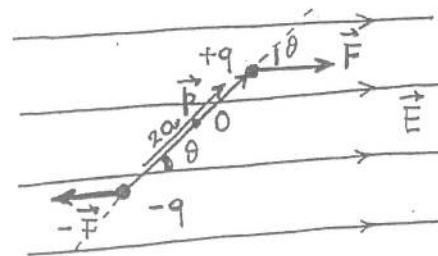
Il momento di dipolo elettrico $p = 2a\vec{q}$, può essere



considerato come un vettore \vec{p} il cui modulo è $2aq$, la direzione è data dalla retta su cui

giacciono le due cariche e verso quello che va dalla carica negativa a quella positiva.

Consideriamo un dipolo elettrico posto in un campo elettrico uniforme \vec{E} , in modo che il suo momento di dipolo formi un angolo θ con il campo.



Sul dipolo agiscono due forze $+qE$ e $-qE$ con risultante nulla.

Esiste un momento non nullo rispetto ad un asse passante per O e dato da

$$\tau = 2a\vec{F} \sin\theta = 2a\vec{q}\vec{E} \sin\theta = \vec{p} \cdot \vec{E}$$

o in forma vettoriale. $\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$.

Per orientare un dipolo in un campo elettrico bisogna compiere un lavoro che è immagazzinato come energia potenziale U nel sistema formato dal dipolo e dal dispositivo usato per generare il campo.

Se l'angolo θ ha valore iniziale θ_0 , il lavoro fatto per rotolare il dipolo da θ_0 a θ è:

$$U = W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \vec{p} \cdot \vec{E} \sin\theta d\theta = \vec{p} \cdot \vec{E} \left[-\cos\theta \right]_{\theta_0}^{\theta}$$

Se come siamo interessati a variazioni di energia potenziale scegliamo θ_0 in modo conveniente, e cioè $= 90^\circ$,

$$\text{Allora } U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \cos\theta.$$

Esempio.

Un dipolo elettrico formato da due cariche di segno opposto la cui grandezza è $q = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, poste ad una distanza $d = 2.0 \text{ cm}$ l'una dall'altra, si trova in un campo esterno $1.0 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$.

a) quale è il momento massimo esercitato dal campo sul dipolo?

$$\text{ricordiamo che : } \tau = p E \sin \theta$$

il massimo momento si ha quando $\theta = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \tau &= (1 \cdot 10^{-6} \text{ C})(0.020 \text{ m}) \left(1.0 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \sin 90^\circ = \\ &= 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

b) quale lavoro deve fornire un agente esterno per ruotare il dipolo di 180° , partendo dalla posizione in cui è allineato con il campo ($\theta = 0$)?

il lavoro è la differenza dell'energia potenziale fra le posizioni $\theta = 180^\circ$ e $\theta = 0$.

$$U = -p E \cos \theta$$

$$\begin{aligned} W &= U_{180^\circ} - U_0 = (-p E \cos 180^\circ) - (-p E \cos 0^\circ) = \\ &= 2pE = 2q d E = 4.0 \cdot 10^{-3} \text{ J}. \end{aligned}$$

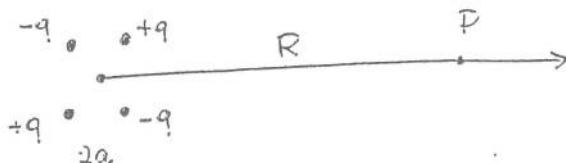
31

Problema .

Un tipo di quadrupolo elettrico è formato da quattro cariche poste ai vertici di un quadrato di lato $2a$.

Il punto P giace a distanza R dal centro del quadrupolo come mostrato in figura. Per $R \gg a$ dimostrare che il campo elettrico in P è dato approssimativamente da :

$$E = \frac{12qa^2}{4\pi\epsilon_0 R^4}$$



Nel punto P a distanza R il campo prodotto da ciascuno dei dipoli ha intensità :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{R^3}$$

Montauando ora i due dipoli, le distanze da P diventano rispettivamente $R+a$ e $R-a$.

Il campo risultante vale :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qa}{(R-a)^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qa}{(R+a)^3} = \\ = \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(R+a)^3 - (R-a)^3}{(R-a)^3(R+a)^3} \right] = \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{6R^2a + 2a^3}{(R^2a^2)^3} \right]$$

Al numeratore si può trascurare a^3 essendo $a \ll R$
e a denominatore il termine a^2 ottenendo così:

$$E = \frac{12qa^2}{4\pi\epsilon_0 R^4}$$

Gradiente, divergenza, rotore

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

1) grad. vettore $\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k}$

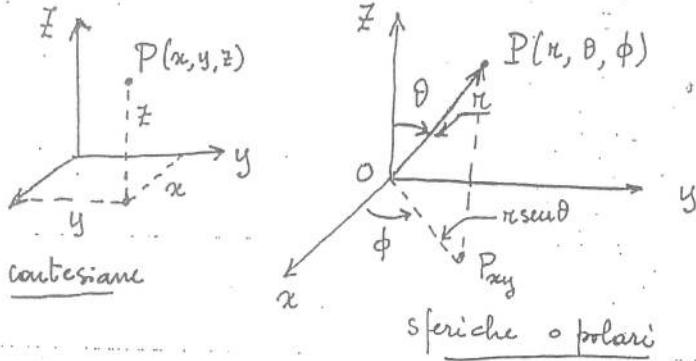
2) div. scalare $\nabla \cdot \vec{A} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right] \cdot [A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}]$

3) rot. vettore $\nabla \times \vec{A} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right] \times [A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}]$

o se il campo è conservativo

∇ in coordinate polari

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{u}_\phi$$

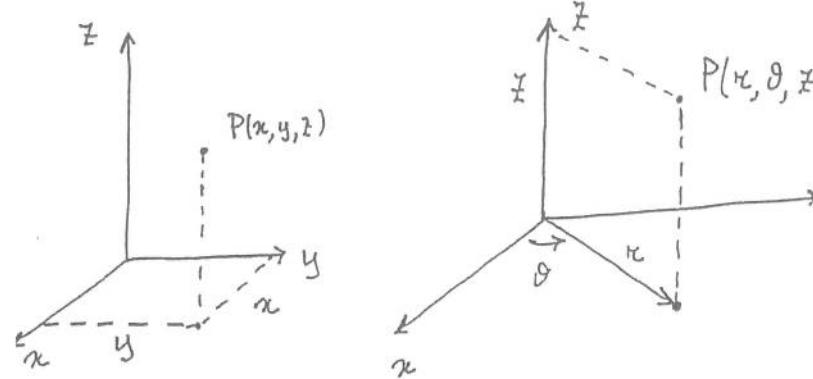


$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

∇ in coordinate cilindriche

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z$$



cartesiane

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = y/x \\ z = z \end{cases}$$

cilindriche

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

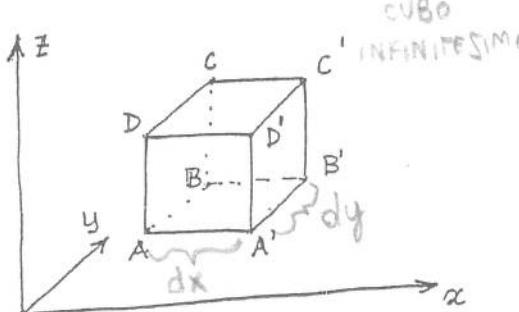
LEGGI DI MAXWELL / FORMA INTEGRALE
MAXWELL \ FORMA LOCALE + DIFFERENZIALE

La legge di Gauss in forma differenziale.

Consideriamo un parallelepipedo infinitesimo con gli spigoli dx, dy, dz paralleli agli assi e contenente la carica $dq = \rho(x, y, z) d\tau$; $d\tau = dx dy dz$ è il volume del parallelepipedo.

$$\rho = \frac{dq}{d\tau} \rightarrow \text{CARICA}$$

$$d\tau \rightarrow \text{VOLUME}$$



Il flusso attraverso la superficie $A'B'C'D'$ è

$$\vec{E}' \cdot \hat{i} dy dz = E'_x dy dz$$

$\overset{ds \rightarrow \text{SUPERFICE}}{}$

indichiamo con E'_x la componente di \vec{E}' parallela all'asse x .

Il flusso attraverso la superficie $ABCD$ è

$$\vec{E} \cdot (-\hat{i}) dy dz = -E_x dy dz$$

la normale all'esterno della faccia $ABCD$ è $-\hat{i}$.

Complessivamente:

$$\delta E \rightarrow (E'_x - E_x) dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

$\overset{\text{MOLTIPLICO}}{} \overset{\text{PER}}{} \overset{\text{VOLUME}}{}$

VARIAZIONE
INFINITESIMA

Ripetendo il calcolo per le altre coppie di superfici si arriva al seguente risultato :

$$d\bar{\Phi} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

ma $d\bar{\Phi} = \frac{dq}{\epsilon_0} = \rho(x, y, z) \frac{d\tau}{\epsilon_0}$ VOLUME

e quindi $\frac{d\bar{\Phi}}{d\tau} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z) \cdot d\tau$

il primo membro si può scrivere :

$$\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_x = \frac{dq}{d\tau} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d\tau}$$

Legge di Gauss

La divergenza di un campo vettoriale \vec{E} è $\neq 0$ solo ai punti in cui esiste una densità di carica, nello spazio vuoto la divergenza di E è nulla.

La divergenza del campo nel punto P è data dal rapporto tra il flusso attraverso la superficie di un parallelepipedo infinitesimo centrato su P e il volume del parallelepipedo.

Abbiamo visto:

$$d\bar{\phi} = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] dz$$

$$\int_{\Sigma} d\bar{\phi} = \bar{\phi} = \int_{\Gamma} \nabla \cdot \vec{E} dz$$

Teorema della divergenza: il flusso del campo attraverso una superficie chiusa Σ è uguale all'integrale della divergenza del campo esteso al volume racchiuso da Σ .

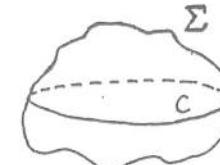
Un campo vettoriale che ha flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa si dice solenoidale e la sua divergenza è nulla. Viceversa un campo a divergenza nulla ha flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa ed è solenoidale.

Proprietà tipica dei campi solenoidali: si ha sempre lo stesso flusso attraverso le superfici che si appoggiano su uno stesso contorno. Cioè il flusso dipende solo dalla forma del contorno.

Teorema di Stokes :

La circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa C è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie Σ avente per contorno C :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \nabla \wedge \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$$



Se il campo vettoriale è conservativo la circuitazione è nulla lungo qualsiasi linea chiusa C . Quindi la relazione precedente dice:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \nabla \wedge \vec{E} = 0$$

$\nabla \wedge \vec{E} = 0$ significa che un campo conservativo ha rotore identicamente nullo ovvero è detto "irrotazionale", ed è una formulazione locale.

Formalmente da $\vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\nabla V$ segue che: $\nabla \wedge \vec{E} = -\nabla \wedge \nabla V = 0$ $\vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\nabla V$ in quanto i due vettori ∇ e ∇V sono paralleli.

La condizione di nullità si traduce in :

$$(1) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Riassumendo :

- se un campo è conservativo esso può essere espresso come gradiente di una funzione scalare e il suo rotore è ovunque nullo,
- viceversa se per un campo valgono le relazioni (1) cioè il suo rotore è ovunque nullo, esiste una funzione scalare di cui il campo è il gradiente.

Eq. di Maxwell per l'elettostatica.

Equazioni locali per un campo \vec{E} conservativo e che obbedisce alla legge di Gauss :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \wedge \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array}$$

Poiché $\vec{E} = -\nabla V$ si può scrivere :

$$1) \quad -\nabla^2 V = -\nabla \cdot \nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

equazione di Poisson

[lega il potenziale alla densità di carica]

$$2) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

valida nello spazio vuoto.

equazione di Laplace.

$$\text{L'operatore } \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

che applicato a un campo scalare dà un'altra grandezza scalare si chiama :

operatore di Laplace o laplaciano.

GENERATORE
IN CONTINUA

CON UN SEGNALE
ALTERNATO, GLI
ELETTRONI OSCILLANO
ATTORNO ALLA POSIZIONE DI
EQUILIBRIO.

CONDENSATORE \rightarrow POCO VILLE

ESSE

ATT

Consideriamo due conduttori isolati
a e b; con cariche opposte $+q$ e $-q$
rispettivamente. Supponiamo che questi
conduttori siano anche isolati dagli
oggetti che li circondano. [condensatore].

Attenzione: sia q la carica in valore
assoluto su ciascun conduttore, non la
carica totale che è nulla e sia V la
differenza di potenziale fra i due
conduttori.

Si può dimostrare che q e V sono
proportionali [in un condensatore] secondo:

$$q = C V$$

$$\text{da cui } C = \frac{q}{V}$$

CAPACITÀ $\Leftrightarrow \frac{1}{V} \rightarrow$ DIFFERENZA DI POTENZIALE

QUANDO $\Delta V_{\text{GEN}} = \Delta V_{\text{COND}}$ NON PASSANO
CARICHE PERCHÉ SUPERFICI EQUIPOTENZIALI



IL CONDENSATORE
SI CARICA IT SU
UN'ARMATURA E -
SULLA ALTRA

- 1) IMMAGAZZINA ENERGIA
- 2) BLOCCA LE CORRENTI

FRA LE ARMATURE NON PASSANO CARICHE

Unità di misura di una capacità:

Farad (F) = 1 coulomb / 1 volt

nel sistema SI.

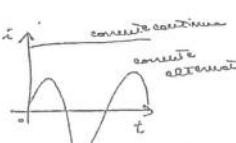
In pratica si usano i sottomultipli del
Farad: 10^{-6} F (microF), 10^{-9} F (nanoF) e
 10^{-12} F (picoF).

Vedremo più avanti alcune applicazioni
dei condensatori.

La capacità di un condensatore dipende
dalla forma e dalla posizione relativa
dei conduttori, come vedremo più avanti.

Capacità di una sfera isolata.

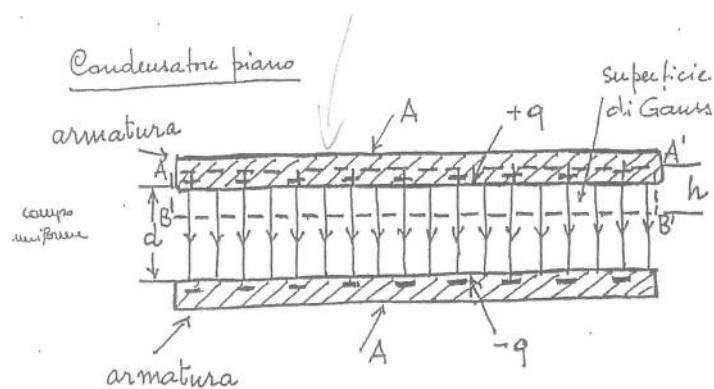
Il potenziale di una sfera isolata conduttrice
di raggio R recante una carica Q è:
 $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$ ricorda la capacità



Possiamo pensare questa sfera come l'armatura
di un condensatore, l'altra essendo una
sfera di raggio infinito e potenziale nullo.

$$\text{Allora } C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

CARICHE ALL'INTERNO X $E_{ESTERNO} = 0$
ATTRAZIONE



In figura è rappresentato un condensatore piano costituito da due conduttori che hanno la forma di due armature parallele di area A e distanza d . Carichiamo le armature con una carica $+q$ (una) e una carica $-q$ (l'altra).

Se d è « delle dimensioni delle armature l'intensità di E sarà uniforme fra le armature stesse. [in realtà in un condensatore reale il campo elettrico ai bordi non può andare a zero bruscamente quando ci si sposta \perp al campo; esiste un effetto di bordo delle linee di forza che significa che E si annulla in modo continuo e graduale]. (ved. problema 31-36)

Consideriamo la superficie gaussiana tralteggiata in figura, di altezza h e chiusa da superfici piane di area A della stessa dimensione.

Il flusso di E è zero lungo la superficie di sezione AA' perché il campo elettrico all'interno dell'armatura è zero.

Il flusso attraverso le facce laterali [sezioni AB e $A'B'$] è zero [trascurando effetti ai bordi] → cose di bordo
come: Scavare
nella cava
di mezzo tra
le armature

Rimane la superficie di Gauss di sezione BB' , ma se E è costante e il flusso $\Phi_E = EA$:

$$\Phi_E = EA = \frac{q}{\epsilon_0} \quad q = \epsilon_0 EA$$

Il lavoro per portare una carica da una armatura all'altra si può esprimere:

ΔV = LAVORO CHE FAREBBE IL CAMPO ELETTRICO PER PORTARE UNA CARICA DA UN'ARMATURA ALL'ALTRA

$$V = Ed$$

$$\text{che deriva da } V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

V = diff. di pot. fra le armature.

Consideriamo:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon_0 EA}{Ed} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Al variare di q
e d questo vale sempre
perché viene anche ϵ_0
e A

vale solo per condensatori piani; per geometrie differenti si hanno espressioni diverse.

Dalla relazione precedente si nota come C dipenda dalla geometria dei conduttori.

La relazione precedente ci suggerisce ...

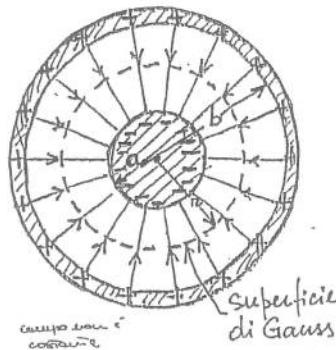
$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

PER RADDOPPIARE C
NON POSSO RADDOPPIARE
Q PERCHE' RADDOPPIA
ANCHE ΔV

DEVO RADDOPPIARE A O RIDURRE D.

Condensatore cilindrico

Un condensatore cilindrico è costituito da due cilindri coassiali di raggio a e b e lunghezza l . Supponiamo che $b \gg a$ in modo da trascurare la dispersione delle linee di forza agli estremi.



La legge di Gauss dice:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{enc}}$$

$$S = 2\pi r l$$

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = q_{\text{enc}}$$

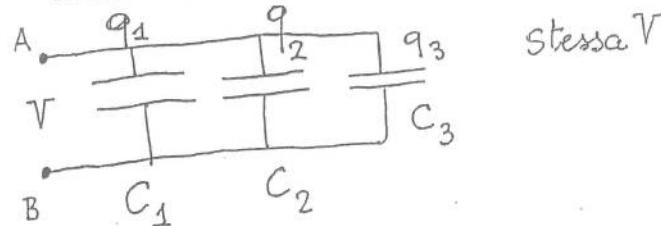
$$E = \frac{q}{2\pi r l \epsilon_0}$$

La d.d.p. fra le due armature:

$$V = \int_a^b E dr = \frac{q}{2\pi l \epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \log \frac{b}{a}$$

$$\frac{C = q}{V} = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\log \frac{b}{a}}$$

Condensatori in parallelo.



Sono dati tre condensatori in parallelo; la differenza di potenziale è la stessa per tutti i condensatori. Applicando la relazione $q = CV$ abbiamo:

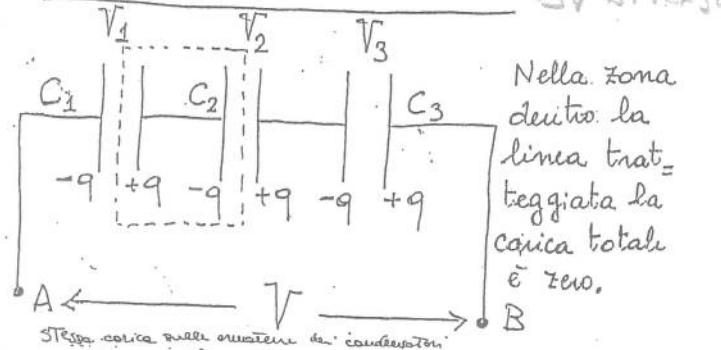
$$q_1 = C_1 V \quad q_2 = C_2 V \quad q_3 = C_3 V$$

La carica totale è:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = C_1 V + C_2 V + C_3 V$$

$$\frac{q}{V} = C = C_1 + C_2 + C_3$$

Condensatori in serie



3 condensatori in serie.

Quale singola capacità C è equivalente a questa combinazione?

Può condensatori collegati in serie il valore assoluto della carica su ogni armatura deve essere lo stesso.

Applicando la $q=CV$ ad ogni condensatore:

$$V_1 = q/C_1 \quad V_2 = q/C_2 \quad V_3 = q/C_3$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right]$$

$$\frac{V}{q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

STECCA DI CARICA
 ΔV DIVERSO

Energia immagazzinata in un campo elettrico.

Tutte le configurazioni di carica hanno una certa energia potenziale elettrica U , uguale al lavoro (che può essere positivo o negativo) che deve essere fatto per mettere insieme tutti i componenti, assumendoli inizialmente a distanza infinita gli uni dagli altri e a riposo.

Ad esempio per separare due cariche uguali ed opposte bisogna fare lavoro; questa energia è accumulata nel sistema e viene restituita se, ad esempio, si lasciano riavvicinare le cariche.

Supponiamo che ad un dato istante t una carica $q(t)$ sia trasferita da una armatura all'altra del condensatore; la differenza di potenziali all'istante t è $V = q(t)/C$.

Se viene trasferita una ulteriore carica dq' , il lavoro infinitesimo è

$$dW = V dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

LAVORO

Il lavoro totale è :

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$\text{ma } q = CV \quad \text{per cui} \quad W = \frac{1}{2} C V^2$$

In un condensatore piano, trascurando la dispersione ai bordi, il campo elettrico ha lo stesso valore in tutti

①



②



IL LAVORO DI
RIPORTARE LE
CARICHE DA
LE ARMATURE FA L'ENERGIA IMMAGAZZINATA NEI CONDENSATORI

i punti compresi fra le armature.

La densità di energia u , che è l'energia accumulata per unità di volume, è

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{W}{Ad} = \frac{\frac{1}{2} CV^2}{Ad}$$

LEGGE DI OHM
APPLICATA AL
CONDENSATORE
PIANO

dove Ad è il volume compreso fra le armature; per un condensatore piano $C = \epsilon_0 A/d$, per cui :

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2$$

ma $\frac{V}{d} = E$ e quindi

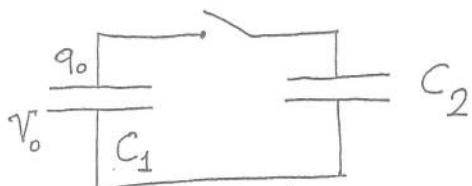
$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Se in un punto dello spazio esiste un campo E si può pensare che in quel punto sia immagazzinata una energia $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ per unità di volume.

RISULTATO VALIDO IN GENERALE

LEADER

Esempio



Un condensatore C_1 è caricato ad una differenza di potenziale V_0 per mezzo di una batteria che viene poi staccata e il condensatore viene collegato a un condensatore C_2 scarico.

① quale è la differenza di potenziali finale?

la carica q_0 si ripartisce in due parti:

$$\begin{aligned} q_0 &= q_1 + q_2 \quad \text{Ci sarà una nuova} \\ C_1 V_0 &= C_1 V + C_2 V \quad \text{V uguale per i due} \\ &\quad \text{condensatori.} \end{aligned}$$

$$V = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

11

② quale è l'energia immagazzinata prima e dopo la chiusura dell'interruttore?

$$\text{iniziale } U_0 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2$$

$$\text{finale } U = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2} V^2 (C_1 + C_2)$$

$$= \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left(V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(V_0 C_1)^2}{C_1 + C_2} =$$

$$= \cancel{U_0} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

L'energia finale è < di quella

iniziale. ~~X IL LAVORO FATTO DAL 1° CONDENSATORE X CARICARE IL 2° CONDENSATORE.~~

Attenzione: nei casi pratici si deve tenere conto della resistenza e della induttanza dei fili che dissipano energia. Questo è stato trascurato nell'esercizio

12

Condensatore sferico

Il potenziale di una sfera conduttrice isolata di raggio R recante una carica q è:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

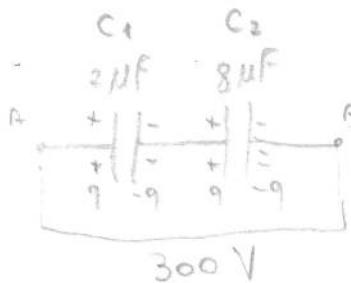
Siano dati due conduttori sferici concentrici di raggi R_1 e R_2 rispettivamente.

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

PER $R_1 \circ R_2 \rightarrow 00$

43



44

Problema

Si applica una d.d.p. di $300V$ a due condensatori di capacità di $2.0\mu F$ e $8.0\mu F$ rispettivamente, collegati in serie.

- quale è la carica e la d.d.p. di ciascun condensatore?
- i condensatori carichi sono ricollegati con le armature positive insieme e quelle negative insieme senza applicare nessuna tensione esterna. (in parallelo) Quale è la carica e la d.d.p. di ciascuno?
- i condensatori carichi nella situazione di a) sono ricollegati mettendo insieme le armature di segno opposto. Quale è la carica e la d.d.p. di ciascuno?

I due condensatori in serie equivalgono ad un solo condensatore di capacità C :

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1.6 \mu F$$

applicando $300V$ a questo condensatore si ha sulle armature una carica q data da:

$$C = \frac{q}{V} \quad q = 300 \cdot 1.6 \cdot 10^{-6} = 4.8 \cdot 10^{-4} C$$

STESSA CARICA DELLA SERIE DI CONDENSATORI

La stessa carica si trova sulle armature di entrambi i condensatori, ai capi dei quali si hanno le seguenti d.d.p.:

$$V_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{4.8 \cdot 10^{-4} C}{2 \cdot 10^{-6} F} = 240 V$$

$$V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{4.8 \cdot 10^{-4} C}{8 \cdot 10^{-6} F} = 60 V$$

15

b) i condensatori dopo essere stati collegati in serie vengono ricollegati mettendo in contatto le armature positive e quelle negative.

Dopo il collegamento le cariche si ristruiscono in modo da raggiungere la condizione di equilibrio; le armature positive e quelle negative formano un conduttore isolato che deve trovarsi tutto allo stesso potenziale.

$$\cancel{q_1 + q_2} = \boxed{q'_1 + q'_2 = 2q = 9.6 \cdot 10^{-4} C}$$

CONDENSATORI IN PARALLELIO

$$V = \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{C_2} \quad \frac{q'_1}{2 \mu F} = \frac{q'_2}{8 \mu F} \quad \boxed{4q'_1 = q'_2}$$

che danno la soluzione

$$q'_1 = 1.92 \cdot 10^{-4} C \quad q'_2 = 7.68 \cdot 10^{-4} C \quad V = 96 V$$

c) se i condensatori, dopo esser stati collegati in serie a $V = 300 V$, vengono ricollegati mettendo a contatto fra loro le armature di segno opposto avremmo:

$$Q''_1 + Q''_2 = Q_1 - Q_2 = 0$$

$$\frac{Q''_1}{C_1} = \frac{Q''_2}{C_2}$$

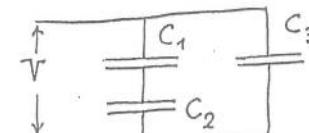
16

e quindi i condensatori sono completamente scarichi.

Problema

Trovare la capacità equivalente alla combinazione mostrata in figura, $C_1 = 10 \mu F$, $C_2 = 5 \mu F$, $C_3 = 4 \mu F$.

I due condensatori C_1 e C_2 sono collegati in serie e possono essere sostituiti con la capacità C' equivalente.



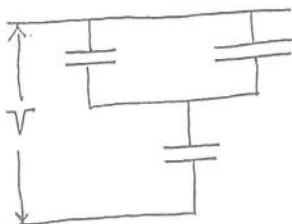
$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad C' = 3.33 \mu F$$

La rete è ridotta a due condensatori in parallello equivalenti alla capacità C :

$$C = C' + C_3 = 7.33 \mu F$$

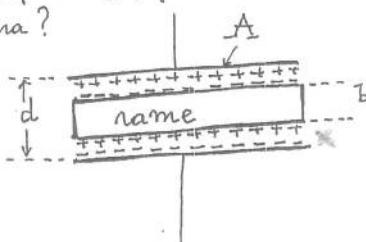
Problema

Trovare la capacità equivalente alla combinazione seguente :



Problema

Una lastra di rame di spessore b è introdotta in un condensatore piano esattamente equidistante dalle due armature. Quale è la capacità (a) prima e (b) dopo l'introduzione della lastra?



La capacità del condensatore prima di introdurre la lastra è :

$$(C = \epsilon_0 \frac{A}{d})$$

17

Possiamo procedere in due modi :

a) sistema condensatore + lastra = due condensatori in serie [la lastra di rame fornisce le due armature intermedie].

b) sistema = doppio strato.

$$a) C_1 = \epsilon_0 \frac{A}{x} \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{A}{(d-b)-x}$$

la capacità risultante è :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\epsilon_0 A} + \frac{(d-b)-x}{\epsilon_0 A} = \frac{d-b}{\epsilon_0 A}$$

x = spessore di una intercalazione
 $d-b-x$ = spessore della seconda intercalazione.

b) sia x lo spessore di una intercalazione :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{CAMPO UNIFORME}$$

$$\text{ricordando } \Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E x + E \cdot [d-b-x].$$

$$= E [d-b] = \frac{\sigma}{\epsilon_0} [d-b]$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} [d-b]}$$

18

Partitore capacitivo

Ai capi di tre condensatori in serie si ha una d.d.p.

$V = V_B - V_A = 100V$ e la capacità equivalente del sistema è $C = 100\text{pF}$. Calcolare i valori C_1, C_2 e C_3 delle 3 capacità tali che $V_1 = 50V$ e $V_2 = 70V$ rispetto a V_A .

La carica che si trova su ogni armatura è $q = CV = 100 \cdot 10^{-10} = 10^{-8} \text{ C}$

i valori delle 3 capacità sono

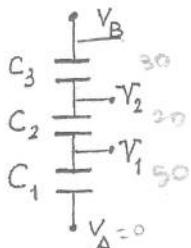
$$C_1 = \frac{10^{-8}}{50} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

$$C_2 = \frac{10^{-8}}{20} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

$$C_3 = \frac{10^{-8}}{30} = 3,33 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

questo sistema prende il nome di partitore capacitivo poiché permette di dividere una tensione data in un numero di parti. Dalla eguaglianza:

$$C_1 V_1 = C_2 V_2 \dots C_i V_i \dots$$



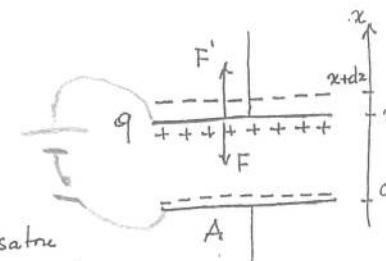
$$\begin{cases} V_2 - V_1 = 70 \\ V_1 - V_A = 50 \end{cases}$$

19

Problema

Verificare che le armature di un condensatore piano si allontanano con una forza data da:

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}$$



Le armature di un condensatore piano si allontanano poiché possiedono cariche di segno opposto.

Supponiamo che la armatura negativa cui il campo ^{vere} è quindi la forza agente sulle cariche positive è

$$F = qE = q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = q \frac{q}{2\epsilon_0 A} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A} = \frac{\sigma^2 A}{2\epsilon_0} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}$$

$$\frac{q^2}{2\epsilon_0 A}$$

Procediamo per una seconda via, scrivendo il bilancio energetico conseguente ad un allontanamento delle due armature di una quantità dx :

a) Allontanamento a carica costante.

Il condensatore è stato caricato alla tensione V e, dopo aver staccato il generatore, le armature vengono allontanate da x a $x+dx$. Applichiamo dall'esterno una

FORZA F' DI POCO SUPERIORE CHE È LA FORZA

20

21
distanza fra le armature [supponiamo l'armatura negativa fissa e quella positiva mobile] - $Q = \epsilon_0 A$

Il lavoro dL' fatto dalla forza F' è uguale e opposto al lavoro fatto dalla forza F esercitata dal campo elettrico. Allontanando la armatura la capacità e l'energia potenziale immagazzinata variano :

$$dU = d \left[\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right] = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} dC = -\frac{1}{2} V^2 dC$$

la capacità diminuisce e l'energia aumenta.

$$dU = -dL = +dL' = -\vec{F} \cdot d\vec{x} = F_x dx$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right] = -\frac{d}{dx} \left[\frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 A} \right]$$

$C = \frac{\epsilon_0 A}{x}$

$$F_x = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}$$

b) allontanamento a potenziali costante.

Questa volta lasciamo il generatore collegato al condensatore.

Allontaniamo le armature; la capacità diminuisce e diminuisce l'energia potenziale $U = \frac{1}{2} CV^2$

Anche la carica presente sulle armature diminuisce quando si allontanano le armature :

$$C = \frac{Q}{V}$$

cosa succede della carica che abbandona le armature

Si ha :

$$dU = dL' + dL_g$$

$$dL' = -F_x dx$$

$$dL_g = V dQ$$

$$\overbrace{dU = d \left[\frac{1}{2} CV^2 \right]} = -F_x dx + \underbrace{V dQ}$$

$$-F_x dx = d \left[\frac{1}{2} CV^2 \right] - \underbrace{V dQ}$$

$$\begin{cases} V dQ = V d [CV] \\ V dQ = d [CV^2] \end{cases} \quad \text{ma } V = \text{costante}$$

$$-F_x dx = d \left[\frac{1}{2} CV^2 \right] - d [CV^2] = -d \left[\frac{1}{2} CV^2 \right] = -dU$$

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} CV^2 \right] = \frac{1}{2} V^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{\epsilon_0 A}{x} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 A}{x^2} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A \cdot \epsilon_0 A}{x^2} V^2 \end{aligned}$$

DIPOLO
ELETTRICO

$$E_{Dipolo} \propto \frac{1}{R^3}$$
$$P = 2e q^2$$

ORIENTAMENTO ESTERNO

Condensatori in presenza di un dielettrico.

Capacità quando fra le armature c'è il vuoto

$$C_0 = \frac{q}{V_0}$$

Dielettrico inserito fra le armature

$$C = K C_0 \quad K = \frac{C}{C_0} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{costante} \\ \text{dielettrica} \\ \text{relativa.} \end{array}$$

Il dielettrico può essere inserito a V costante : E_0
[il condensatore è collegato al generatore]
la carica q diventa Kq .

Il dielettrico può essere inserito a q costante ;
[il condensatore è scollegato dal generatore]
la d.d.p. V diventa $\frac{V}{K}$.

In ciascuno dei due casi la capacità aumenta di un fattore K .



NON SONO CARICHE
MA DIPOLI CHE SI ORIENTANO

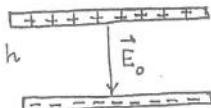
I dielettrici.

L'interazione fra cariche elettriche fisse è stata finora studiata supponendo che lo spazio fra le cariche fosse vuoto.

Vogliamo ora vedere come viene modificato il campo elettostatico nello spazio fra conduttori carichi, quando questo viene riempito [parzialmente o totalmente] con un materiale isolante.

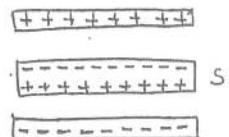
Esamineremo una situazione semplice: un condensatore piano carico e isolato in vuoto che la carica sulle armature resti costante.

$$V_0 = \frac{q_0}{C_0}$$



Introduciamo fra le armature, senza toccarle, una lastra conduttrice di spessore s e h .

Si osserva (sperimentalmente) che la d.d.p. fra le armature diminuisce.



$$E_0 + E_{Dip} \Rightarrow E_x \quad F_x = \frac{q}{K} \quad \text{costante dielettrica}$$
$$V_K = \frac{V_0}{K}$$

24

i 2 CAMPI: UNO DELLE
CARICHE DEL CONDENSATORE
E UNO INTERNO AI DIPOLI

$$C_K = K \cdot C_0$$

26

$V < V_0$. Sulle facce della lastra si formano per induzione due distribuzioni di densità σ_0 , con segno tale da annullare il campo all'interno della lastra.

La presenza di questa carica indotta può essere messa in evidenza con un elettrometro.

Si può inserire una lastra di materiale isolante; in questo caso si nota ancora una diminuzione di d.d.p., ma l'effetto a parità di spessore s'è inferiore a quello che si ha con la lastra conduttrice; inoltre non si evidenzia la presenza di cariche libere.

Le sostanze isolanti che hanno il potere di ridurre la d.d.p. fra le armature si chiamano sostanze dielettriche o dielettici e il rapporto adimensionale:

$$K = \frac{V_0}{V_K} > 1$$

può prendere il nome di costante dielettrica relativa del dielettico.

La variazione del campo elettrico dovuta alla presenza del dielettico è:

$$E_0 - E_K = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_K} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_K} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{K-1}{K} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \frac{X}{X+1}$$

27

avendo posto $X = K-1$
questa grandezza si chiama suscettività elettrica del dielettico.

La capacità del condensatore con dielettico è

$$C_K = \frac{q_0}{V_K} = K \frac{q_0}{V_0} = \frac{V_0}{V_K} K C_0$$

cioè è aumentata dello stesso fattore K di cui è diminuita la d.d.p. del condensatore, in accordo con il fatto che la carica è rimasta costante.

Le formule ottenute per i condensatori sfusici, piani e cilindrici restano valide a patto di sostituire a ϵ_0 la quantità

$$\epsilon = K \epsilon_0$$

della costante dielettrica assoluta del dielettico.

Ripetitività dielettrica: caratteristica dei materiali, massima tensione a cui può arrivare il materiale prima di scendere.

Polarizzazione dei dielettrici

28

- Conduttori : esiste un gas di elettroni praticamente liberi.

- Isolanti : gli elettroni sono legati agli atomi e non si allontanano. In condizioni normali - in un atomo - la nube elettronica è distribuita in modo simmetrico attorno al nucleo.

In presenza di un campo elettrico esterno si crea un doppio polo : le cariche negative si spostano rispetto al nucleo.

Quindi in un atomo si crea un momento di doppio polo elettrico microscopico \vec{P}_a , parallelo e concorde con il campo elettrico esterno \vec{E} ; l'effetto cessa quando si toglie il campo. Questo fenomeno si chiama "polarizzazione elettronica".

Esistono molecole che hanno un momento di doppio polo permanentemente [es. H_2O] che, in assenza di campo esterno, è orientato a caso; in presenza di un campo \vec{E} questi dopoli si orientano [anche se sono disturbati dall'agitazione termica]. Questo meccanismo prende il nome di polarizzazione per orientamento.

Si può definire un vettore \vec{P} che caratterizza la formazione dei momenti di doppio polo. $\vec{P} \Rightarrow$ polarizzazione del dielettrico. Nella maggior parte dei dielettrici si ha :

$$\vec{P} = \epsilon_0(K-1)\vec{E} = \epsilon_0 \times \vec{E},$$

29

Consideriamo un condensatore piano.

Sulla dielettrico abbiamo :

$$\int \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

in presenza di un dielettrico

$$\int \vec{E}_K \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} [q - q']$$

$$E_K = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

q = carica libera q' = carica superficiale indotta.

$$\text{ma } E_K = \frac{E_0}{K} = \frac{q}{K\epsilon_0 A}$$

$$\text{si ha } \frac{q}{K\epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

$$\frac{q}{K\epsilon_0 A} = q - q'$$

$$\text{da cui } q' = q(1 - \frac{1}{K})$$

questo mostra che la carica indotta superficiale è sempre minore della carica libera q ed è nulla se non è presente alcun dielettrico ($K=1$)

$$\text{Riconducendo } \int \vec{E}_K \cdot d\vec{S} = \frac{q - q'}{\epsilon_0}$$

Si arriva ad avere:

$$\int_{N_0} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

la carica q è solo quella libera; la carica superficiale indotta è già considerata nella costante k . CARICA DEL CONDENSATORE

Riscriviamo la

$$\frac{q}{k\epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A} \quad \frac{q}{k\epsilon_0 A} + \frac{q'}{\epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

così:

$$\frac{q}{A} = \epsilon_0 \left[\frac{q}{k\epsilon_0 A} \right] + \frac{q'}{A}$$

la quantità in parentesi è il campo elettrico nel dielettrico. $\frac{q'}{A}$ è la carica superficiale indotta per unità di superficie e prende il nome di polarizzazione elettrica P :

$$P = \frac{q'}{A}$$

possiamo riscrivere:

$$\frac{q}{A} = \epsilon_0 E_K + P$$

introduciamo lo spostamento elettrico

30

o induzione dielettrica D

$$D = \frac{q}{A}$$

per cui abbiamo:

$$D = \epsilon_0 E_K + P$$

che vettorialmente diventa

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_K + \vec{P} \quad \begin{smallmatrix} \vec{P} \text{ polarizzazione} \\ \text{unità di dipolo} \end{smallmatrix}$$

\vec{D} è connesso solo con la carica libera

\vec{P} è connesso solo con la carica di polarizzazione

\vec{E}_K è connesso con tutti e due i tipi di carica.

Espriammo \vec{D} e \vec{P} in termini di \vec{E}_K

$$\vec{D} = k\epsilon_0 \vec{E}_K \quad \Rightarrow \frac{q}{A} = k\epsilon_0 \left[\frac{q}{k\epsilon_0 A} \right]$$

$$D \quad E_K$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (k-1) \vec{E}_K \quad \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{q'}{A} = \frac{q}{A} \left[1 - \frac{1}{k} \right] \\ D = k\epsilon_0 E_K \end{cases}$$

attenzione alle unità di misura:

D e P sono $\frac{\text{coulomb}}{\text{m}^2}$

31

POLARIZZAZIONE DEI DIPOLI

NON SONO CAMPI

Esempio

Una lastra dielettrica di spessore b e costante dielettrica K è posta fra le armature di un condensatore piano di area A e di distanza fra le armature = d .
Prima di introdurre il dielettrico si applica una d.d.p. = $100V$ e quindi si stacca il generatore e si introduce il dielettrico. Sia : $A = 100 \text{ cm}^2$, $d = 1.0 \text{ cm}$, $b = 0.50 \text{ cm}$
 $K = 7$.

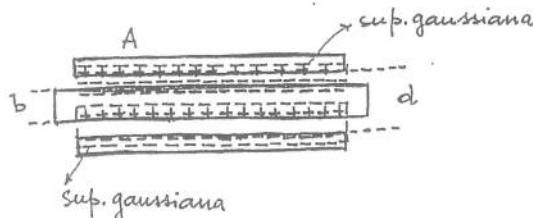
a) capacità C_0 prima di inserire il dielettrico.

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{8.9 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} = 8.9 \text{ pF}$$

b) calcolare la carica libera q .

$$q = C_0 V_0 = 8.9 \cdot 10^{-12} \cdot 100 = 8.9 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

a causa del modo con cui si carica il condensatore la carica libera non cambia quando si introduce il dielettrico.



30

c) calcolare il campo elettrico nell'intercapacitazione fra il dielettrico e l'armatura del condensatore.
Legge di Gauss sull'armatura superiore :

$$E_0 A = \frac{q}{\epsilon_0} = 10^4 \frac{V}{m}$$

Sulla superficie gaussiana considerata non esistono cariche di polarizzazione.

d) intensità del campo entro il dielettrico.

$$E_k = \frac{E_0}{K} = \frac{q}{K \epsilon_0 A}$$

notare che stiamo considerando il dielettrico e quindi compare K

$$E_k = \frac{1 \cdot 10^4 \text{ V/m}}{7} = 0.14 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

e) calcolare la d.d.p. fra le armature.

$$V = \int E \cdot dl = E_0 (d - b) + E_k b = 57 \text{ V}$$

diversa dalla d.d.p. = $100V$ applicata all'inizio perché il generatore è stato scollegato e quindi la carica q sulle armature non cambia, ma V col E calano di un fattore K .

31

Intensità di corrente e densità di corrente.

Gli elettroni liberi in un conduttore isolato si muovono caoticamente come le molecole di un gas racchiuso in un recipiente. Considerando una ipotetica sezione del conduttore il numero di elettroni che attraversa la sezione da destra a sinistra è circa uguale a quello che attraversa da sinistra a destra.

Collegando al conduttore una batteria si stabilisce nel conduttore un campo elettrico che agisce sugli elettroni e impone un moto risultante in direzione di $-E$.

IN TUTTI I PUNTI DI UN CIRCUITO CI DEVONO ESSERE SEMPRE GLI STESSI ELETTRONI MAGLIA \rightarrow I COSTANTE

Si dice che si è stabilita una corrente elettrica i e si definisce intensità di corrente la quantità di carica dq che passa attraverso una sezione del conduttore nel tempo dt :

$$i = dq/dt$$

unità SI:

$i \rightarrow$ ampere (A).

$q \rightarrow$ coulomb (C)

$t \rightarrow$ secondo

questa equazione definisce il coulomb attraverso la definizione operativa dell'ampere che vedremo più avanti.

Il campo E non è nullo all'interno del conduttore: questo fatto è in contrasto con il risultato dell'elettostatica in cui il campo all'interno del

conduttore è nullo? ALTRIMENTI LE CARICHE NON SI MUOVEREBBERO



3

Come verso della corrente si assume quello in cui si sposterebbero i portatori con carica positiva e cioè il verso della corrente è opposto al verso in cui si muovono gli elettroni che sono i portatori di carica nei metalli.

La corrente è una grandezza macroscopica; una grandezza microscopica è la densità di corrente \vec{j} che è un vettore ed è caratteristica di ogni punto all'interno del conduttore.

Se la corrente è distribuita uniformemente in un conduttore di sezione

A si ha:

$$\vec{j} = \frac{i}{A} \quad j \Rightarrow \frac{\text{ampere}}{\text{m}^2}$$

La relazione generale fra i e \vec{j} è:

$$i = \int \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad \leftarrow \text{flusso di } \vec{j}$$

dove $d\vec{s}$ è l'elemento di superficie di una superficie (non necessariamente piana) del conduttore.

$$i = j A$$

è un caso particolare in cui A è una sezione piana del conduttore, j è costante sulla superficie e normale ad essa.

Il numero di elettroni di conduzione in un conduttore è nAl , dove n è il numero di elettroni di conduzione per unità di volume e $A \cdot l$ il volume del conduttore. La carica totale è:

$$q = (nAl) e$$

ed essa attraversa il conduttore in un tempo

$$t = \frac{l}{v_d}$$

dove v_d = velocità di deriva

VELOCITÀ IN DIREZIONE
DEL CAMPO

la v_d è la velocità degli elettroni in direzione del campo elettrico \vec{E} .

Si ha:

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nA \cdot l \cdot e}{l/v_d} = nAe v_d$$

ricordando che $j = i/A \Rightarrow i = jA$

$$j = ne v_d$$

Esempio.

Un conduttore cilindrico di rame ha sezione $S = 4 \text{ mm}^2$ ed è percorso da una corrente $i = 8 \text{ A}$. Trovare v_d .

$$j = \frac{i}{S} = \frac{2 \text{ A}}{\text{mm}^2} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

nel rame $n = 8,49 \cdot 10^{28} \frac{\text{elettroni}}{\text{m}^3}$

quindi

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{2 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,49 \cdot 10^{28}} = 1,47 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= 0,147 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

5

Nel loro moto gli elettroni subiscono continue intuazioni con gli ioni che chiamiamo urti; tra un urto e l'altro la traiettoria è rettilinea e quindi il cammino percorso da ogni elettrone è formato da tratti rettilinei con lunghezza e direzione variabile.

Si può definire un tempo medio τ e un libero cammino medio [fra due urti successivi] l legati da: $\tau = \frac{l}{v_d}$.

Quando si applica un campo elettrico esterno alla distribuzione casuale e isotropa delle velocità si sovrappone la velocità di drift che è molto minore della precedente e si può dimostrare che:

$$v_d = \frac{e\tau}{m} E$$

6

Legge di conservazione della carica.

Abbiamo detto che ^{densità di corrente}

$$i = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint j \vec{i}$$

Il principio di conservazione della carica richiede che i sia uguale alla variazione complessiva della carica totale contenuta all'interno di Σ , cioè si deve avere:

$$i = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial q_{int}}{\partial t} \quad (1)$$

il segno - significa che la carica all'interno della superficie considerata diminuisce.

Un caso importante si ha quando $\frac{\partial q_{int}}{\partial t} = 0$

e segue che

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2)$$

della condizione di stazionarietà.

Ricaviamo la (2) in forma locali.

Saviamo $q_{int} = \int \rho d\tau$ e la sostituiamo

7

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \rho d\tau = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Teorema di Divergenza

8

ricordando che il flusso di un campo attraverso una superficie chiusa i è all'integrale della divergenza del campo esteso al volume racchiuso dalla superficie abbiamo:

$$\int_{\Sigma} \left(\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0$$

se questa relazione deve essere valida comunque si salga il volume di Σ , deve essere nullo l'integrando:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

nota come equazione di continuità della corrente elettrica ed esprime la conservazione della carica.

In condizioni stazionarie $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

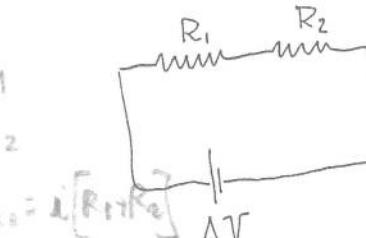
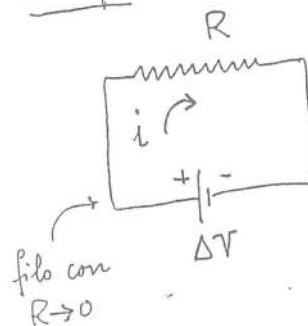
\rightarrow AMPEROMETRO \rightarrow SERIE
 \rightarrow VOLTMETRO \rightarrow PARALLELO

Legge di Ohm

$$\Delta V = R \cdot i$$

APPLICABILE ANCHE
 A SOLO UN PEZZO
 DEL CIRCUITO (MAGLIA)

Esempio

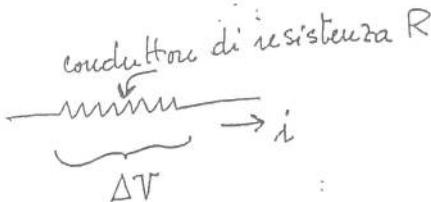


$$V_{R_1} = i R_1$$

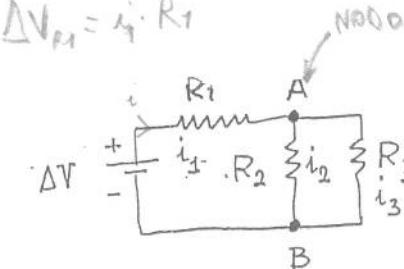
$$V_{R_2} = i R_2$$

$$\Delta V = V_{R_1} + V_{R_2} = i [R_1 + R_2] \quad \Delta V$$

TENSIONE = DIFFERENZA DI POTENZIALE



$$\Delta V_M = i \cdot R_1$$



- numero di maglie?
- concetto di nodo punto in cui si dividono le correnti
- resistenze in // quando sono in //?] stessa ΔV , diversa a

$i_1 = i_2 + i_3$ 1^a legge di Kirchhoff
 come la si può giustificare?

- somma di resistenze in parallelo:

$$R_2 // R_3 \Rightarrow R_p = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

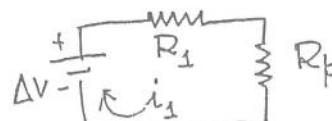
$$V_{AB} = V_{R_2} = V_{R_3} = i_2 R_2 = i_3 R_3 \quad [\text{perché?}]$$

$$\text{di qui} \quad i_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} \quad i_3 = \frac{V_{AB}}{R_3}$$

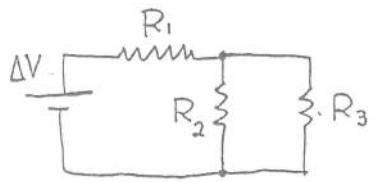
$$\text{ma} \quad i_1 = i_2 + i_3 = V_{AB} \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right] = V_{AB} \left[\frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \right]$$

$$\frac{V_{AB}}{i_1} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = R_p$$

il circuito diventa:



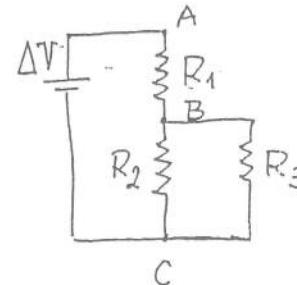
date due resistenze in //, R_p è > 0 < delle due? N.D.R.



dato questo circuito
dire in ordine :

- quali resistenze sono in serie
- quali in // .

¹¹

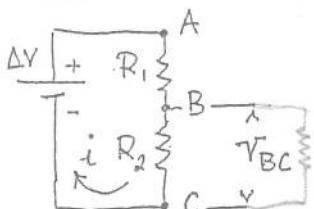


cosa succede ?
valutare il caso $R_3 = R_2$.

$R_2 // R_3 < R_2 \rightarrow$ si modifica V_{BC}
SOLO SE $R_3 \ll R_2$ ALTRIMENTI LE
DIFFERENZE SI TRASCRIPANO

¹²

Partitore resistivo



Trovare V_{BC} .

$$i_{\text{maglia}} = \frac{\Delta V}{R_1 + R_2}$$

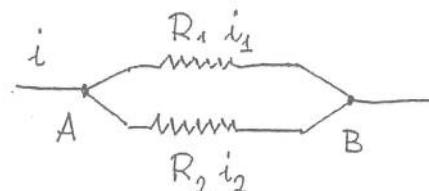
$$V_{BC} = i_{\text{maglia}} \cdot R_2$$

V_{BC} = tensione a vuoto.

Cosa succede se metto una resistenza in // R_2
[questa nuova resistenza sarebbe l'utilizzatore];
si dice: "chiude R_2 su un carico resistivo".

Catocircuito vuol dire collegare B e C con
un filo di $R \rightarrow 0$.

Derivatore di corrente :



meglio dimensionare
 R_1 e R_2 : in modo
che, nota la i , la
 i_2 abbia un valore
prefissato.

scrivo $\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ i_1 R_1 = i_2 R_2 = V_{AB} \end{cases}$ cosa sono

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ i_1 = i_2 R_2 / R_1 \end{cases} \Rightarrow i = i_2 \frac{R_2}{R_1} + i_2 = i_2 \frac{R_2 + R_1}{R_1}$$

quindi :

$$i_2 = i \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{valutare i casi: } R_1 \rightarrow 0, R_1 \rightarrow \infty$$

Resistenza:

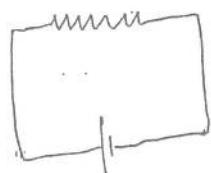
$$R = \rho \frac{l}{A}$$

- ρ = resistività [caratteristica del materiale]

unità $\Rightarrow \Omega \cdot m$

- $\frac{1}{\rho} = \sigma$ [conduttività del materiale]

$$\sigma \Rightarrow \text{unità} \Rightarrow [\Omega \cdot m]^{-1} = \left[\frac{\text{Siemens}}{m} \right] = \left[\frac{S}{m} \right]$$



filo di lunghezza $\approx 1m$
sezione $R = 1mm$
Resistenza $= 0,1 \Omega$

trovarci la ρ . $\rho = \frac{R \cdot A}{l} = \frac{0,1 \cdot 10^{-6} m^2 \cdot \Omega}{1} = 10^{-7} \Omega \cdot m$

POTENZA \rightarrow CALORE CHE SVILUPPA UNA RESISTENZA
PER EFFETTO JOULE

$$P = V \cdot i = R \cdot i^2 \quad [\text{W}]$$

DIMENSIONI

13

La resistività ha il seguente andamento in funzione di T :

$$\rho = \rho_{20} [1 + \alpha \Delta T]$$

T è espressa in gradi centigradi

ρ_{20} è la resistività misurata a $20^\circ C$

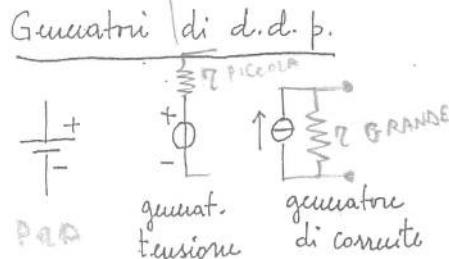
- α è positivo nei metalli \Rightarrow aumenta ρ

- α è negativo \Rightarrow diminuisce ρ
[carbonio, silicio, germanio]

Ricordare leghe come la costantana e il nichelcromo che hanno un coeff. di temperatura $\approx 10^{-4} \text{ } ^\circ C^{-1}$.

PER GLI ISOLANTI
 $\rho \approx 10^{12}$

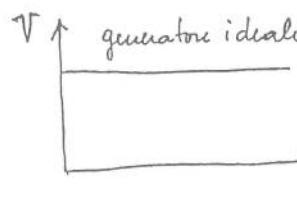
TRADUCE LA PERSONA DI CAPACITÀ DI FAR LAVORO DOVUTA AL TRASPORTO DELLE CARICHE DA UN ELETRODO ALL'ALTRO



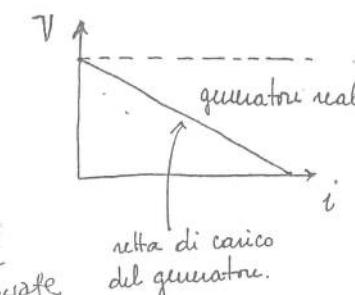
NEL GENERATORE DI CORRENTE, LA RESISTENZA INTERNA È IN PARALLELO ED È ALTA ALTRIMENTI CI SAREBBE UNA CORRENTE PERSA IN QUEL RAMO

15

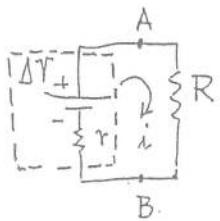
SENZA R.i.



CON R.i.



16



si definisce una f.e.m. :

$$f.e.m. = \Delta V_{AB} + i r$$

AVVOCATO → CADUTA DI POTENZIALE
QUANDO EROGA CORRENTE
→ FA LAVORO

r = resistenza interna del generatore

attenzione: non può essere tolta e fisicamente non è una resistenza, ma traduce ...

LAVORO CHE IL GENERATORE FA PER PORTARE GLI ELETTRONI DA UN'ARMATURA ALL'ALTRA

Quando $i \rightarrow 0$ il termine $i r \rightarrow 0$ ELETTRONI DA

e quindi f.e.m. $\rightarrow \Delta V_{AB}$

[questo fatto ci suggerisce un metodo sperimentale per determinare f.e.m.]

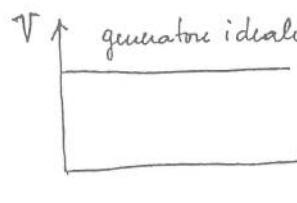
GENERATORE IDEALE DI TENSIONE

Un generatore ideale di tensione è un generatore che mantiene costante la d.d.p. ai capi di un circuito indipendentemente dal carico esterno

CARICO INDIPENDENTEMENTE DAL CARICO STESSO

CARICO \Rightarrow UTILIZZATORE

SENZA R.i.



CARICO = insieme
di resistenze associate
a un generatore

Risoluzione di un circuito con il metodo delle maglie

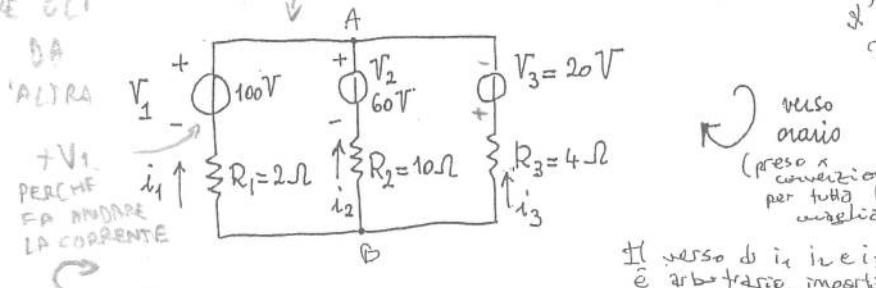
Data una maglia possiamo scrivere :

$$\sum V_k = \sum I_k \cdot R_k \quad \textcircled{R}$$

VERSO ORARIO $\times i_+ \rightarrow +$

VERSO ANTIORARIO $\times i_- \rightarrow -$

esempio



Il verso di i_1 , i_2 , i_3 è arbitrario, importa solo che in modulo soddisfino \textcircled{R} .

fissò una corrente in ogni ramo

convenzione sul verso

segno dei generatori di tensione

- numero di maglie linearmente indibassato, estremo

Poi $i_1 + i_2 + i_3 = 0$
anche nel nodo la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle uscite \Rightarrow siccome

La corrente i_1 è la corrente verso il senso indicato nella maglia considerata
 nodo A tre correnti esistenti
 $\left\{ \begin{array}{l} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ V_1 - V_2 = i_1 R_1 - i_2 R_2 \\ V_2 + V_3 = i_2 R_2 - i_3 R_3 \end{array} \right.$
 maglia a sinistra
 maglia a destra

se prendessimo la maglia esterna si vedrebbe subito che ci dà una relazione che è combinazione lineare delle due equazioni precedenti.

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = -i_2 - i_3 \\ 40 = 2i_1 - 10i_2 \\ 80 = 10i_2 - 4i_3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 40 = -2[i_2 + i_3] - 10i_2 \\ 80 = 10i_2 - 4i_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 40 = -12i_2 - 2i_3 \quad \leftarrow \text{moltiplico} \times -2 \\ 80 = 10i_2 - 4i_3 \\ -80 = 24i_2 + 4i_3 \quad \text{Sommo membro a membro} \\ 80 = 10i_2 - 4i_3 \end{array} \right.$$

$$0 = 34i_2 + 0 \quad i_2 = 0$$

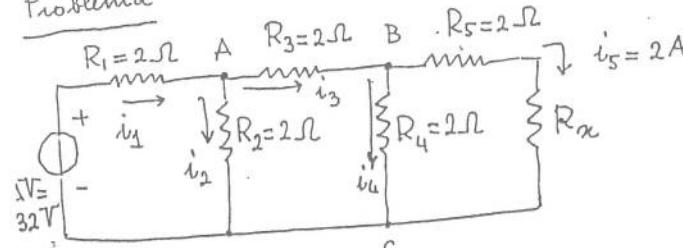
$$i_3 = -20 \text{ A}$$

$$i_1 = 20 \text{ A}$$

il segno - vuol dire che dobbiamo cambiare il verso scelto per i_3 .

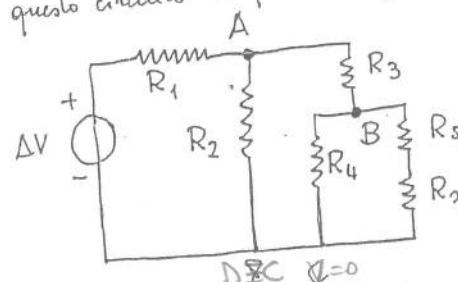
17

Problema



Calcolare le quattro correnti e la R_x .

questo circuito si può disegnare anche così



$\Delta V_{BC} = 0$
si può procedere usando la legge di Ohm:

$$\begin{aligned} \Delta V_{BC} &= i_4 R_4 = [R_5 + R_x] i_5 \\ i_4 \cdot 2 &= [2 + R_x] 2 \end{aligned}$$

$$i_4 = 2 + R_x$$

$$\text{ma al nodo B: } i_3 = i_4 + i_5 \quad i_3 = 2 + R_x + 2 = 4 + R_x$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{AD} &= \Delta V_{AC} \Rightarrow i_2 R_2 = i_3 R_3 + i_4 R_4 \\ 2i_2 &= 2[4 + R_x] + 2[2 + R_x] \end{aligned}$$

$$i_2 = 6 + 2R_x$$

18

al modo A

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad i_1 = 4 + R_K + 6 + 2R_K = 10 + 3R_K$$

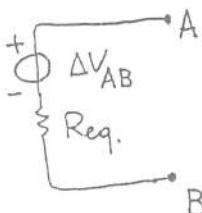
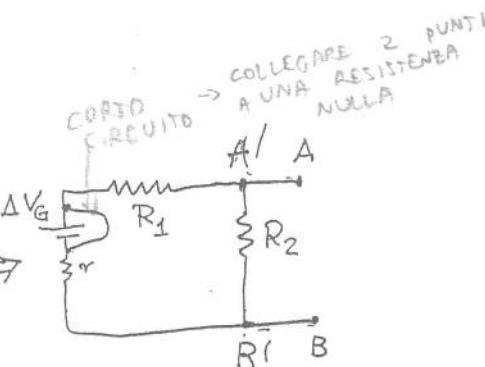
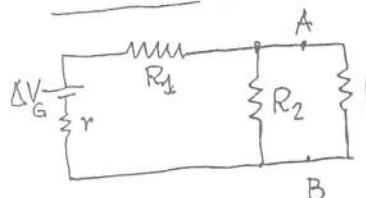
$$\text{ma } 32V = i_1 R_1 + i_2 R_2 = [i_1 + i_2] \cdot 2\Omega$$

$$32V = 2[10 + 3R_K + 6 + 2R_K]$$

$$32 = 32 + 10R_K \quad R_K = 0$$

19

Thevenin (N.D.)



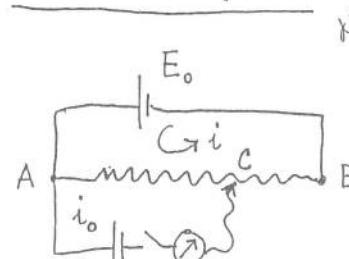
$$V_{AB} = V_{R_2} = \frac{\Delta V_G}{r+R_1+R_2} \cdot R_2$$

$$\text{Req.} = R_2 // (R_1 + r)$$



Misura di f.e.m.

(Fotoconie
strumento di
misura)



$$f_{\text{em}} = i(R_1 + R_2) = \\ = i \overrightarrow{E} - \overrightarrow{dE} \quad \text{NON È CONSERVATORE}$$

Si muove il cursore
finché $i_0 = 0$

$$E_C = V_{AC} = i \cdot R_{AC} = \\ = i g \frac{l_{AC}}{S}$$

$$E_x = V_{AC'} = i R_{AC'} = \\ = i g \frac{l_{AC'}}{S}$$

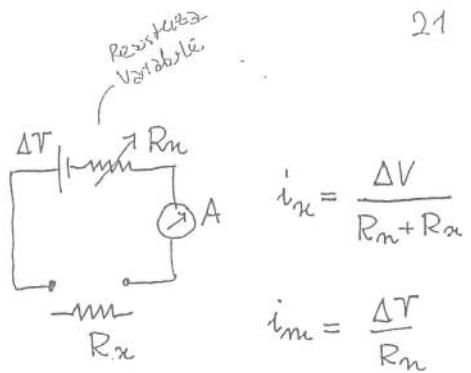
$$\frac{E_C}{E_x} = \frac{l_{AC}}{l_{AC'}}$$

- uso di un voltmetro con $R_{\text{int.}}$ molto alta
per cui i del circuito $\rightarrow 0$

20

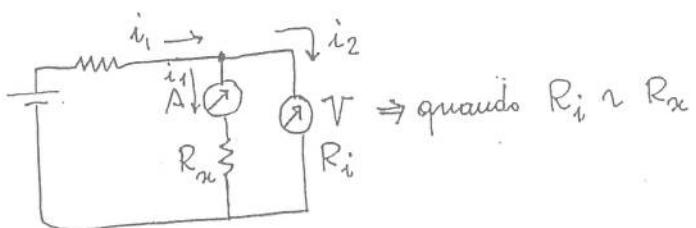
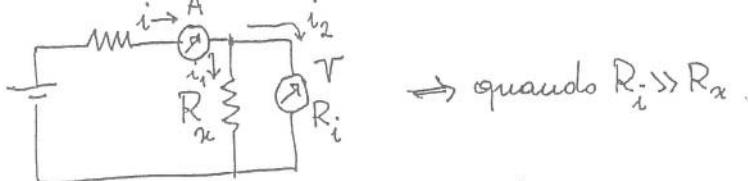
Misura di R

- codice colori
- ohmetro



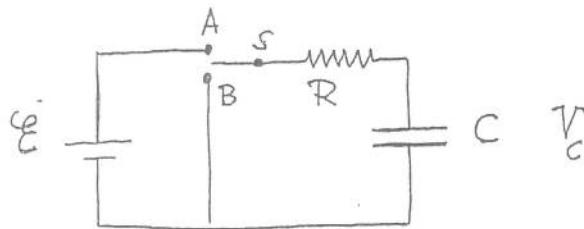
21

- metodo volt-ampometrico



- ponte di Wheatstone

Carica e scarica di un condensatore



23

chiudiamo l'interruttore S nella posizione A; si ha un movimento di cariche che si accumulano sulle armature del condensatore. Quando la differenza di potenziale è uguale a E la carica finale sul condensatore è

$$q = C E = C V_C$$

e nel circuito non abbiamo più movimento di cariche.

Esaminiamo il processo di carica: in particolare $q(t)$ carica sulle armature, $V_C(t)$ ai cabi del condensatore e la $i(t)$

Consideriamo ad un istante t la somma delle diff. di potenziale:

$$E = iR + V_C = iR + \frac{q}{C}$$

$$E - iR - \frac{q}{C} = 0$$

(corrente nel condensatore verso destra)

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$E - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

questa equazione differenziale ha per soluzione

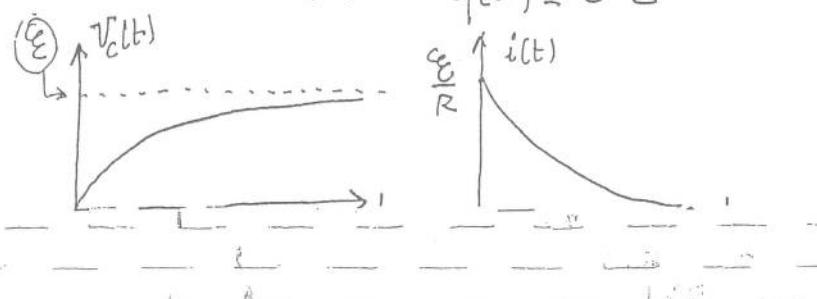
$$q(t) = C E \left[1 - e^{-t/RC} \right]$$

SALITA ESPONENZIALE

le condizioni iniziali sono
 $q=0$ per $t=0$

quindi per $t=0$ $q(0)=0$

$$t \rightarrow \infty \quad q(\infty) = C E$$



24

Correnti alternate

Consideriamo una induttanza L percorsa da una $i(t) = i_0 \sin \omega t$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Possiamo scrivere:

$$v_L = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} i_0 \sin \omega t =$$

$$= L i_0 \omega \cos \omega t = L i_0 \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sin \omega t \cos \frac{\pi}{2} + \cos \omega t \sin \frac{\pi}{2} = \cos \omega t$$

$$v_L = i_0 \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

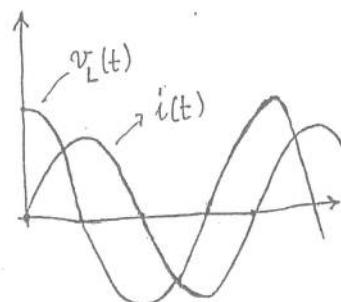
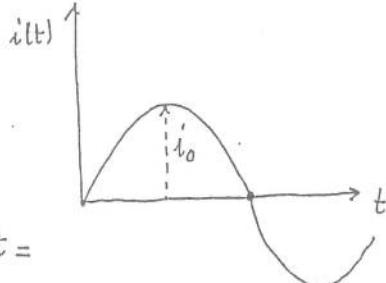
dimensioni R

$\omega L \Rightarrow$ reattanza induttiva

sfasamento fra i e v_L

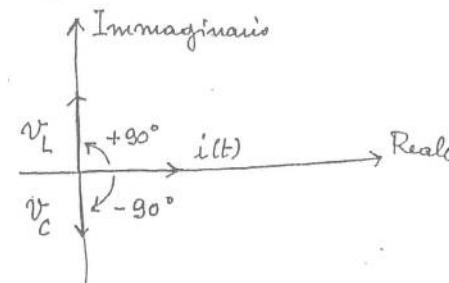
TENSIONE IN ANTICIPO DI

$\frac{\pi}{2}$ RISPESSO FELA CORRENTE



Quindi in una induttanza la v_L è in anticipo rispetto a i mentre in un condensatore la v_C è in ritardo rispetto a i .

l'operatore è $j \circ -j$
unità del campo
complesso che fanno
ruotare di $\pm 90^\circ$ un
vettore sull'asse reale
portandolo sull'asse immaginario.

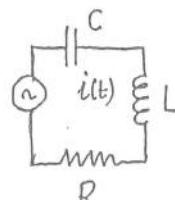


$$L \Rightarrow \omega L \Rightarrow j\omega L$$

$$C \Rightarrow \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \frac{1}{j\omega C}$$

$$\text{ricordiamo } (j)^2 = -1$$

numero complesso $\Rightarrow a + jb$ modulo $\sqrt{a^2 + b^2}$
 $\text{tg}\varphi = \frac{b}{a}$



$$\begin{aligned} v_G(t) &= i(t) \left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right] = \\ &= i(t) \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \end{aligned}$$

$$i(t) = \frac{v_G(t)}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

25

$$R \frac{dq}{dt} = \left[\mathcal{E} - \frac{q}{C} \right] = \frac{C\mathcal{E} - q}{C}$$

$$\frac{dq}{C\mathcal{E} - q} = + \frac{dt}{RC} \quad \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = - \frac{dt}{RC}$$

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\ln(q - C\mathcal{E}) - \ln(C\mathcal{E}) \\ \ln \frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = - \frac{t}{RC}$$

$$\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-t/RC} \quad \text{dimensioni di } RC?$$

$$q = C\mathcal{E} \left[1 - e^{-t/RC} \right]$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \left[1 - e^{-t/RC} \right]$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

26

Scarica di un condensatore.

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

$$\text{con soluzione:} \\ q = q_0 e^{-t/RC}$$

dove q_0 è la carica iniziale del condensatore.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = - \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

Potenza.

$$P = V_i i = R i^2 = \frac{V^2}{R}$$

legge di Joule \Rightarrow trasformazione energia elettrica
in energia termica

$$P \Rightarrow \frac{J}{s} \Rightarrow \text{watt [W]}$$

Consideriamo un condensatore di capacità C .

Sia $i(t) = i_0 \sin \omega t$ la corrente.

$$C = \frac{Q(t)}{V_c(t)} \quad i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad Q(t) = \int i(t) dt$$

$$C = \frac{\int i(t) dt}{V_c(t)}$$

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int i_0 \sin \omega t dt$$

$$V_c(t) = -\frac{1}{WC} i_0 \cos \omega t = \frac{1}{WC} i_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

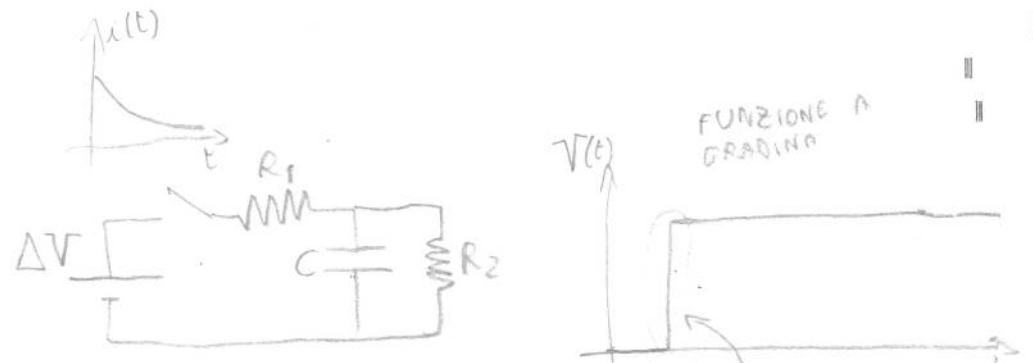
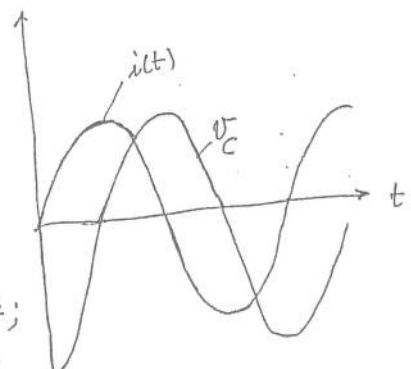
dimensioni
di R

$\frac{1}{WC} \Rightarrow$ reattanza capacitiva

sfasamento fra $i(t)$

$$\text{e } V_L \Rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

La tensione in una
induttanza ideale è in
anticipo di $\frac{\pi}{2}$ sulla corrente;
la tensione in un condensatore
ideale è in ritardo
di $\frac{\pi}{2}$ sulla corrente.



$t=0$?
 $t \gg 0$?

$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{q}{V}$

POSSO METTERE UN DIELETTRICO ALL'INTERNO DEL CONDENSATORE PER CAMBIARE LA SUA CAPACITÀ

LEGGE DI GAUSS

HA SOLO DIPOLI, NON CARICHE LIBERE

AUMENTA C PERCHÉ IL CAMPO SI ABBASSA

$\Rightarrow V$ SI PEGGIOSSA

SE $t \gg 0$ IL CONDENSATORE È CARICO E LA PASSA TUTTA NEL RAMO DELLA RESISTENZA.

SE $t=0$ LA CORRENTE PASSA TUTTA ATTRAVERSO IL CONDENSATORE PERCHÉ È COME SE C NON CI FOSSE \rightarrow RESISTENZA NULLA

$$\frac{A}{K_1 + \frac{K_2 - K_3}{K_3} \cdot d}$$

TROVARE LA CAPACITÀ
TOTALE



$$C = \frac{C_1}{K_1} + \left(\frac{\frac{C_2}{K_2} - \frac{C_3}{K_3}}{\frac{C_2}{K_2} + \frac{C_3}{K_3}} \right)$$

Campo magnetico

Il vettore \vec{B} è chiamato campo magnetico o induzione magnetica.

La proprietà di attrarre la laminatura di ferro mostrata da alcuni minerali [ad esempio dalla magnetite $FeO \cdot Fe_2O_3$] è nota fin dall'antichità. Questa proprietà di attrarre la laminatura non è presente ovunque nel materiale, ma se il campione viene lavorato in forma di un cilindro, si manifesta nelle basi.

Avicinando due magneti si osservano azioni di attrazioni o repulsioni a seconda dei poli dei magneti che vengono affacciati; quindi esistono poli positivi e poli negativi e in uno stesso magnete si hanno un polo + e un polo -.

Avicinando un pezzo di magnetite a una sottile bacchetta di ferro, questa acquista la proprietà di attrarre la laminatura di ferro. La bacchetta di ferro nel campo magnetico della magnetite è diventata un magnete, cioè si è magnetizzata; essa prende il nome di calamita.

Se le dimensioni della bacchetta sono molto piccole essa diventa un ago magnetico; se sospendiamo l'ago a un filo esso si orienta nel campo magnetico terrestre in modo analogo a un dritto in un campo

elettrico esterno.

Chiameremo polo Nord il polo dell'ago magnetico che si orienta verso il nord geografico e polo Sud il polo dell'ago magnetico che si orienta verso il sud geografico.

polo Nord $\Rightarrow +$ polo Sud $\Rightarrow -$

Mentre è possibile isolare una carica elettrica positiva o una carica elettrica negativa non è stato mai possibile isolare uno dei due poli magnetici che sembrano esistere sempre a coppie di ugual valore e di segno opposto, cioè si manifestano solo sotto forma di dipoli magnetici.

L'indicazione classica è quella della calamita spazzata.

Le prime relazioni fra fenomeni magnetici ed elettrici furono scoperte da Oersted e successivamente il problema venne approfondito da Ampère. Quest'ultimo intui che le azioni magnetiche non sono altro che la manifestazione dell'interazione fra cariche elettriche in movimento.

FLUSSO = 0 $\nabla \vec{B} = 0$
Il campo magnetico B è solenoidale: $\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$
ma non è irrotazionale, $\text{rot } \vec{B} = 0 \rightarrow \text{CAMPO CONSERVATIVO}$

Esiste $\text{rot } \vec{B} \neq 0$

Faraday dimostrò che i campi magnetici variabili nel tempo producono campi elettrici [questi non sono conservativi]

In fine Maxwell dimostrò che campi elettrici variabili nel tempo producono campi magnetici e viceversa campi elettrici e campi magnetici nell'unico concetto di campo elettromagnetico

Definiamo da un punto di vista operativo il modulo e la direzione di \vec{B} in un punto P in prossimità di un magnete, di un conduttore percorso da corrente

Determiniamo inoltre l'effetto di un campo magnetico su cariche in moto; utilizzando come corpo di prova una carica q_0 .

Supponiamo che la carica q_0 si muova con velocità \vec{v} ; si può dire che, se una carica prova positiva q_0 passa per il punto P con velocità \vec{v} , sulla particella agisce una forza \vec{F} data da :

$$\text{Lavoro} = q_0 \vec{F} \cdot \vec{s} = q_0 \vec{v} \cdot \vec{B} \quad F = q_0 v B \sin \theta$$

\vec{v}
 \vec{B}

\vec{B} è il vettore campo magnetico (o induzione magnetica) che esiste nel punto P.

Dalla relazione precedente si ha :

\vec{F} è nulla per $v=0$ o per $\vec{v} \parallel \vec{B}$
ed è massima per $\vec{v} \perp \vec{B}$

Unità di misura.

nel SI l'unità di misura è il tesla [simbolo T]

$$1 \text{ tesla} = \frac{1 \text{ weber}}{\text{m}^2} = \frac{1 \text{ newton}}{\text{ampere} \cdot \text{metro}}$$

[weber = unità di flusso magnetico].

Si può notare che se F è sempre \perp alla direzione del moto [per campi magnetici stazionari] il lavoro è sempre nullo; quindi un campo magnetico stazionario non può cambiare l'energia cinetica.

Se la particella si muove in presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico si ha :

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} + q_0 \vec{v} \wedge \vec{B}$$

[detta anche forza di Lorentz].

Una corrente è un insieme di cariche in moto; dato che un campo magnetico esercita una forza [di tipo trasversale] su una carica in movimento ci aspettiamo che eserciti una forza su un filo percorso da corrente.

Linee di forza del campo magnetico.

Determinare \vec{B} in una zona dello spazio vuol dire conoscere il suo modulo, direzione e verso in ogni punto. La rappresentazione grafica di B si fa tramite le linee di forza, cioè le linee che in ogni punto sono tangenti ed equivalenti al vettore \vec{B} in quel punto.

La situazione è analoga a quella descritta per E e valgono le considerazioni fatti nel caso di E , l'unica differenza essendo legata al fatto che non esiste il monopolo magnetico. Analogamente al caso di E nel caso di B uniformi le linee sono parallele ed equidistanti.

Convenzione: per linee di forza \perp al piano del foglio
un punto (+) indica che \vec{B} esce dal foglio verso il lettore, una croce (x) che \vec{B} entra nel foglio.

Consideriamo una superficie chiusa che racchiuda un magnete; l'equivalenza fra i dipoli magnetici e le correnti microscopiche comporta che all'interno della superficie deve esserci un numero intero di dipoli. Data la struttura dipolare si ha:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{e in termini locali: } \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Sottemultipli usati sono:

$$\text{il gauss (G)} \quad 1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

$$\text{il chiologauss (KG)} \quad 1 \text{ KG} = 10^{-1} \text{ T}$$

$$\text{Campo magnetico Terrestre} \quad \sim 10^{-5} \text{ T} \quad \sim 10^1 \text{ G}.$$

Il massimo valore di un campo magnetico

è dell'ordine di 10^7 [tecnologia di superconduttori] SOTTO UNA T, HANNO RESISTENZA 0

Flusso del campo magnetico : $T \cdot m^2 \Rightarrow \text{weber (Wb)}$

$$\text{quindi } 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot m^2, \quad T = \frac{\text{Wb}}{m^2}$$

Momento magnetico : $\text{N} \cdot \text{m}$

$$\text{unità } A \cdot m^2 = \frac{T}{\text{A}}$$

i momenti magnetici delle correnti microscopiche atomiche e dell'elettrone sono dell'ordine di $10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ quello del protone $5 \cdot 10^{-27} \text{ Am}^2$.

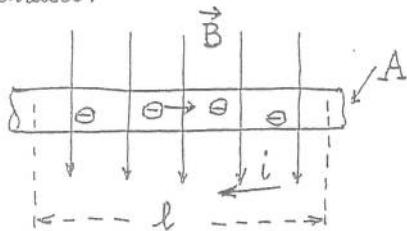
Per momenti magnetici elementari si può usare l'unità :

$$\frac{eV}{T} = 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{J}{T} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Azioni magnetiche su una corrente.

Una corrente è un insieme di cariche in moto.

Poiché un campo magnetico esercita una forza su una carica in movimento, ci aspettiamo che eserciti una forza anche su un filo percorso da corrente.



Consideriamo un tratto di filo di lunghezza l , percorso da una corrente i e posto in un campo di induzione magnetica B . Il filo è orientato in modo che il vettore densità di corrente \vec{j} sia perpendicolare a \vec{B} . La corrente i in un filo metallico è formata da elettroni; sia n il numero di elettroni per unità di volume. Il modulo della forza media per elettrone è dato da: $F = q_0 v B \sin\theta = e v_d B$

$$\theta = 90^\circ, v_d = \text{velocità di migrazione (deriva)} = n \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Dalla relazione } v_d = \frac{i}{n e} \xrightarrow{\substack{\text{DENSITÀ} \\ \text{DI CORRENTE}}} \downarrow \text{IN DIREZIONE} \\ \text{DEL CAMPO}$$

$$\text{si ha } F = e \left[\frac{j}{n e} \right] \cdot B = \frac{j B}{n} \hat{A}$$

Il tratto di filo di lunghezza l contiene nAl elettroni liberi, essendo Al il volume del tratto di filo di sezione A che stiamo considerando.

La forza totale è:

$$F' = nAl \cdot F = nAl \frac{j B}{n} = Al j B$$

$$\text{ma } A j = i \text{ da cui, } F' = i l B.$$



Le cariche negative si muovono verso destra, mentre quelle positive si muovono verso sinistra cioè nel verso della corrente. Per una carica positiva la velocità \vec{v} ha verso a sinistra e la forza $q_0 \vec{v} \wedge \vec{B}$ è diretta come la perpendicolare al foglio e verso uscente dal foglio stesso; in modo analogo è diretta la forza su una carica negativa in quanto cambia il segno alla carica e il verso alla velocità. Quindi una misura della forza non ci permette di risalire al segno delle cariche in moto.

Le relazioni precedenti sono state ricavate nel caso di un filo \perp a B . Nel caso più generale si ha la relazione vettoriale

$$\vec{F} = i \vec{l} \wedge \vec{B}$$

\downarrow
CONDUTTORE
VERSO DELLE CARICHE POSITIVE

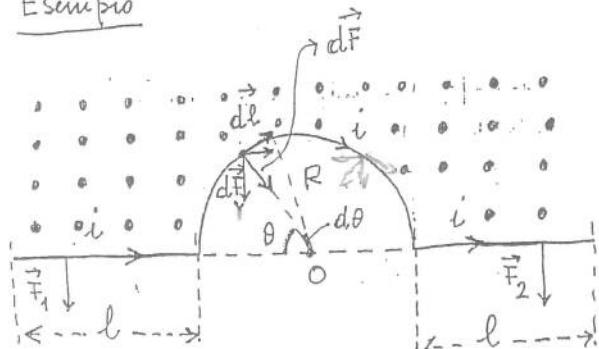
dove \vec{l} è un vettore parallelo al filo rettilineo con lo stesso verso della corrente e modulo pari alla lunghezza del filo.

Se consideriamo un elemento dl di un conduttore, la forza $d\vec{F}$ agente su esso è:

$$d\vec{F} = i \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

e integrando in modo opportuno questa relazione possiamo trovare la forza \vec{F} agente su un conduttore non rettilineo.

Esempio



Un filo avente la forma mostrata in figura è percorso da una corrente i ed è posto in un campo magnetico uniforme di induzione B , perpendicolare al piano della figura e verso uscente dal piano della figura stessa.

La forza agente su ogni tratto rettilineo è:

$$F_1 = F_2 = ilB$$

ed è diretta verso il basso come indicato in figura.

Sul segmento dl appartenente alla circonferenza agisce una forza $d\vec{F}$ il cui modulo è:

$$dF = iB dl = iBR d\theta \quad dl = R d\theta$$

diretta radialmente verso il centro O dell'arco di circonferenza.

La sola componente efficace di questa forza è quella diretta verso il basso, dato che la componente orizzontale è equilibrata da una componente uguale e opposta associata al corrispondente segmento di circonferenza, rispetto a O . La forza risultante, agente sulla circonferenza è diretta verso il basso e ha modulo:

$$\vec{F} = \int_0^{\pi} dF \sin \theta = \int_0^{\pi} iBR \sin \theta d\theta = 2iBR \cdot 2R = 4iB R^2$$

$2R = \text{DIAMETRO}$

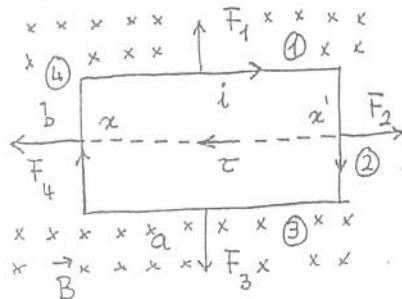
E COME SE NON FOSSE UNA CIRCONFERENZA MA UNA RETTA

PROIEZIONE
DELLA FORZA
LUNGO LA
VERTICALE

F_2 e F_4 HANNO MOMENTO=0 PERCHÉ SULLO STESSO ASSE

FORZE APPLICATE AL CENTRO

Spira percorsa da corrente



una spira rettangolare di lunghezza a e larghezza b posta in un campo uniforme di induzione \vec{B} .

La direzione di \vec{B} forma un angolo di 90° con i lati ① e ③, mentre la normale $n\vec{n}$ al piano della spira forma un angolo θ con la direzione di \vec{B} .

La forza agente sulla spira è il risultante delle forze agenti sui quattro lati.

In il lato ② \vec{l} ha la direzione del lato e il verso della corrente e forma con \vec{B} un angolo $= 90 - \theta$; il modulo di \vec{l} è uguale a b .

$$\vec{l} = i b \vec{B} \cos \theta$$

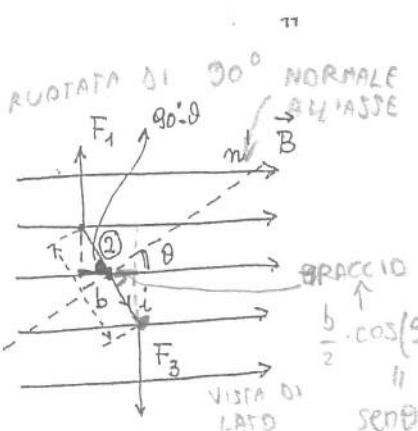
quindi $F_2 = i b B \cos \theta$

La direzione di F_2 è \perp al piano della figura,

La forza F_4 ha lo stesso modulo di F_2 e verso opposto.

F_1 e F_3 DANNANO LUOGO A UN MOMENTO $\neq 0$

CHE FA RUOTARE LA SPIRA



F_2 e F_4 hanno la stessa retta d'azione e quindi il momento totale di queste forze è nullo.

Il modulo di F_1 e F_3 è iab . Anche queste forze hanno verso opposto e quindi non provocano una traslazione; esse però non hanno la stessa linea di azione e quindi hanno un momento che tende a far ruotare la spira attorno all'asse xx' .

Il modulo del momento τ' si trova calcolando il momento di F_1 rispetto all'asse xx' e raddoppiando lo poiché il momento di F_3 è uguale a quello di F_1 .

$$\tau' = 2 [iab] \left[\frac{b}{2} \sin \theta \right] = iab B \sin \theta$$

UGUALI,
BRACCIO FORZA
BRACCIO

Se invece di una spira ne abbiamo N

$$\tau = N \tau' = Niab B \sin \theta = NiAB \sin \theta$$

dove A è l'area della spira.

Questo risultato vale per ogni spira rettangolare o no.

L'esistenza di un momento agente su una spira percorsa da corrente è alla base del funzionamento del motore elettrico e di parte degli strumenti usati come amperometri e voltmetri.

Una spira percorso da corrente si orienta in un campo magnetico esterno; questo comportamento è analogo a quello di un ago magnetico.

Spira percorso da corrente e agghi magnetici possono essere considerati come dipoli magnetici e hanno delle analogie con i dipoli elettrici.

Il dipolo elettrico in presenza di un campo esterno subisce l'azione di un momento:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

che, in modulo, è $\tau = p E \sin\theta$.

Per una spira magnetica

$$\tau' = (iA)B \sin\theta \quad \circ \quad \tau = (NiA)B \sin\theta$$

e quindi possiamo pensare a un momento di dipolo magnetico

$$\mu = NiA$$

e vettorialmente forze $\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$.

Princípio di equivalenza di Ampère:

una spira percorso da corrente è equivalente a un dipolo magnetico.

^{NO} Possiamo definire una maglia potenziale magnetica

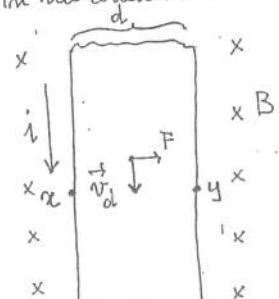
$$U = \int \tau d\theta = -\mu B \cos\theta \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

in analogia all' energia potenziale elettrica

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Effetto Hall

Determinazione del segno dei portatori di carica in un conduttore.



portatori positivi

una analoga con \vec{v}_d orientata verso l'alto per i portatori negativi.

Nel disegno è rappresentata una striscia di rame percorso da una corrente i , nel verso segnato. Secondo la convenzione nel verso di i si muoverebbero i portatori di carica se fossero positivi.

PRENDI LA striscia in un campo magnetico [ved. disegno]
 si ha un campo \perp alla striscia che esercita
 una forza diflettente $\vec{F} = i \vec{l} \wedge \vec{B}$, che nel caso
 del nostro disegno è diretta verso destra,
 [e se fossero elettroni?]

Questo spostamento di carica verso la destra
 crea fra i punti x e y una d.d.p. V_{xy}
 [detta d.d.p. di Hall] che permette di trovare
 il segno dei portatori. Dalla polarità di V_{xy} si può
 sapere quale estremo è a potenzialmente maggiore.
 Si ha:

$$V_{xy} = E d$$

dove E è il campo elettrico che si instaura.
 Quando la forza elettrica è E_i e la forza qvB
 si confondono si ha:

$$eE_i = e v_d B$$

$$\text{ma } v_d = \frac{j}{ne} = \frac{i}{neA} \quad E = \frac{V_{xy}}{d}$$

dove:

A = sezione della lamina = $d \cdot l$

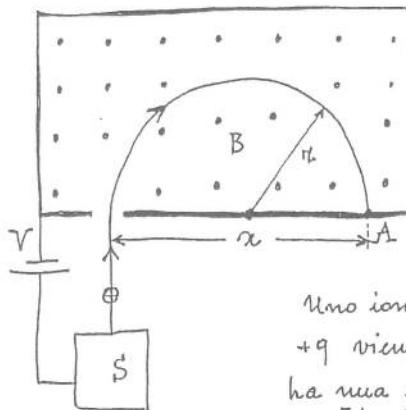
n = numero di portatori per unità di volume

e si ottiene

$$n = \frac{Bi}{V_{xy} l e}$$

$$l = \text{spessore della lamina}$$

Spettrometro di massa



Uno ione di massa M e carica $+q$ viene prodotto in S , dove si ha una scarica elettrica in un gas. [Lo ione inizialmente è praticamente in quiete].

Lo ione viene accelerato da una d.d.p. V e successivamente entra in un campo magnetico B , dove descrive una semicirconferenza e, alla fine, una una lastra fotografica [in A] dove viene rivelato, ad una distanza x dalla fenditura di ingresso.

Si può dimostrare che la massa M è data da:

$$M = \frac{B^2 q}{8V} x^2$$

Quando lo ione entra nel campo magnetico è soggetto ad una forza

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Il moto è circolare uniforme con raggio

$$\kappa = \frac{x}{2} :$$

$$F = \frac{M v^2}{\kappa} = \frac{2 M v^2}{x}$$

Poiché la conservazione dell'energia fa variazione di energia potenziale nel processo di accelerazione è uguale all'energia cinetica con cui lo ione entra nella fenditura:

$$\begin{aligned} \text{ENERGIA} & \rightarrow qV = \frac{1}{2} M v^2 \\ \text{POENZIALE} & \\ \text{INIZIALE} & \left\{ F = qvB = \frac{2 M v^2}{x} \right. \quad v = \frac{q B x}{2 M} \end{aligned}$$

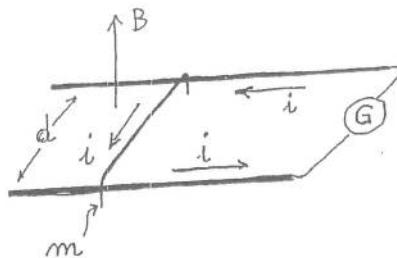
$$qV = \frac{1}{2} M \left[\frac{q B x}{2 M} \right]^2$$

$$qV = \frac{1}{2} M \frac{q^2 B^2 x^2}{4 M^2} = \frac{1}{8} \frac{q^2 B^2 x^2}{M}$$

$$M = \frac{1}{8} \frac{q B^2 x^2}{V}$$

1+

Problema



18

Un filo metallico di massa m scivola senza attrito su due rotarie poste a distanza d come nel disegno.

Le due rotarie sono poste in un campo B diretto

verticalmente; una corrente costante i circola lungo una rotaria, il filo e la seconda rotaria. Trova la velocità del filo in funzione del tempo supponendo che esso sia fermo per $t=0$.

La forza agente sul filo mobile è data da:

$$F = idB$$

e impone una accelerazione costante:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{idB}{m}$$

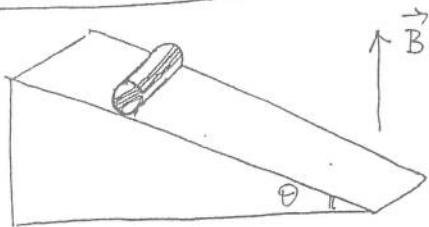
quale è la direzione e il verso del moto?

La velocità in modulo è data da

$$v = v_0 + \frac{idB}{m} t$$

\downarrow
 $v_0 = 0$

Problema N. 46 (cap. 29)



i?

$$m_{al.} = 0.25 \text{ kg}$$

raggio R

$$l = 0.1 \text{ m}$$

N = 10 (numero spine)

$$B = 0.5 \text{ T}$$

suggerimento:

- a) calcolare il momento delle N coppie di forze generate dalle N spine; tenere conto che il braccio è inclinato di θ rispetto all'orizzontale.

- b) momento della forza peso.

Uguagliando:

$$2Ni l RB \sin\theta = mg R \sin\theta$$

$$\text{si ricava} \quad i = \frac{mg}{2NlB}$$

19

Teorema di Ampere

20

La scoperta degli effetti magnetici dovuti alle correnti è dovuta a Oersted.

Pensiamo a fili percorsi da una corrente come sorgenti di campi magnetici; le correnti generano dei campi magnetici e a loro volta i campi magnetici esercitano delle azioni sulle correnti.

Nella figura è rappresentato un filo circondato da un certo numero di piccoli magneti; se nel filo non circola corrente tutti i magneti sono allineati col campo magnetico terrestre.

Se nel filo circola una forte corrente, i magneti si orientano in modo da suggerire che le linee magnetiche formano delle circonferenze chiuse attorno al filo.

Questa ipotesi è avvalorata da un'altra esperienza, che mostra il comportamento della limatura di ferro posta su una lastra di vetro orizzontale attraverso il cui centro passa un filo percorso da corrente.



La relazione quantitativa fra il campo magnetico \vec{B} e la corrente i è data da:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad \text{NEL CASO ELETTRICO}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

nota come "teorema di Ampère".

Mediante un piccolo ago magnetico posto ad una distanza r da un filo percorso da corrente si può valutare il campo magnetico.

Questo ago [un piccolo dipolo magnetico] tende a disporsi, con un campo magnetico esterno, con il polo nord diretto nello stesso verso di \vec{B} .

Dalla figura precedente è chiaro che \vec{B} , nel punto in cui si trova il dipolo, è tangente alla circonferenza di raggio r e curto nel filo.

Se invertiamo il verso della corrente nel filo gli agghi magnetici ruotano di 180° .

Si può ricavare la regola della mano destra per trovare il verso di \vec{B} : si prenda il filo con la mano destra e con il pollice orientato nel verso della corrente. Le dita attorno al filo daranno il verso secondo cui è diretto \vec{B} .

²¹
Ruotiamo ora il dipolo di un angolo θ rispetto alla sua posizione di equilibrio.

Il momento τ che tende a riportare il dipolo nella sua posizione di equilibrio è

$$\tau = \mu B \sin \theta \quad \begin{matrix} \mu = \text{momento magnetico di dipolo,} \\ \text{di dipolo.} \end{matrix}$$

e quindi misurando τ e θ possiamo avere una misura relativa di B [anche se non conosciamo μ], per diversi valori di r e di i .

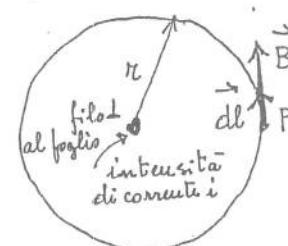
I risultati sperimentali mostrano una proporzionalità del tipo:

$$B \propto \frac{i}{r}$$

e ragionando su questi dati si arriva a scrivere

$$\text{LEGGE DI AMPÈRE} \quad B = \mu_0 \frac{i}{2\pi r} \quad \begin{matrix} \mu_0 = \text{permibilità} \\ \text{magnetica.} \end{matrix}$$

e in forma finale $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$. ²² B CAMPO NON CONSERVATIVO



La costante μ_0 è
 $= 4\pi \cdot 10^{-7}$ tesla-metro ^{NON SI PUÒ}
 amper DEFINIRE UN ^{'POTENZIALE'}

$\text{rot } B \neq 0$
 CIRCUITAZIONE \leftarrow
 FO

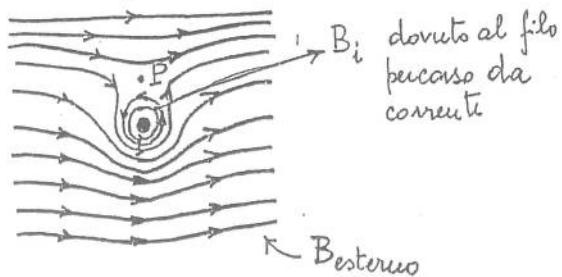
$$\text{FORZA DI LORENZ} \quad \vec{F} = q \vec{V} \wedge \vec{B}$$

$$\text{PER N CARICHE} \quad \vec{F} = i \vec{l} \wedge \vec{B}$$

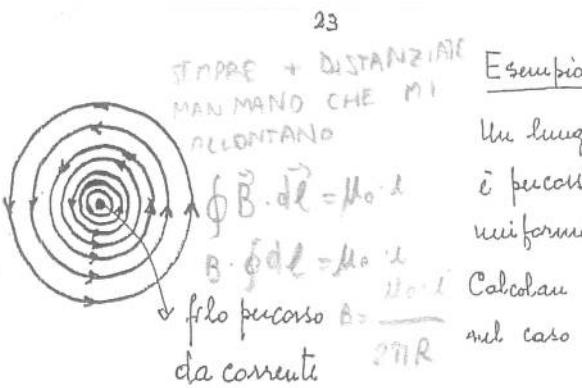
\rightarrow lunghezza filo

Nella figura sono disegnate le linee di \vec{B} , che rappresentano il campo \vec{B} vicino a un filo rettilineo molto lungo.

Si osservi che allontanandosi dal filo aumenta la distanza fra le linee, cosa che rappresenta la dipendenza di B da r .



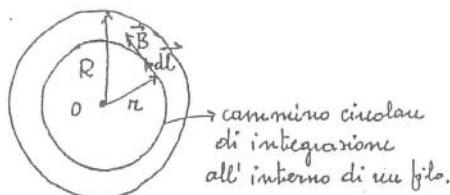
Nella seconda figura sono disegnate le linee di induzione magnetica associate a una corrente che percorre un filo disposto \perp a un campo magnetico esterno uniforme B_e .



Esempio

Un lungo filo di forma cilindrica e di raggio R è percorso da una corrente di intensità i_0 distribuita uniformemente su tutta la sezione del filo.

Calcolare B a distanza r dal centro del filo nel caso in cui $r < R$.



CONSIDERO SOLO LA I CHE PASSA NELLA CIRCONFERENZA INTERNA

$$i \cdot l_0 = \pi R^2 \cdot \pi R^2 \cdot i = i_0 \cdot \frac{\pi R^2}{R^2}$$

la corrente i_0 è distribuita uniformemente sulla sezione del filo ed è diretta dalla pagina verso l'esterno.

Poi il teorema di Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$

$$\text{si ha } B \cdot 2\pi r = \mu_0 i_0 \frac{\pi R^2}{TR^2}$$

poché nei termini si deve includere solo la corrente che passa attraverso la linea di integrazione.

$$B = \frac{\mu_0 i_0 r}{2\pi R^2}$$

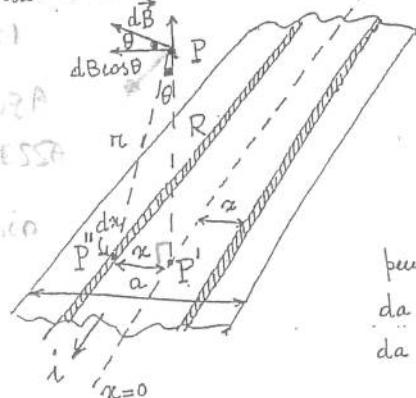
Poi $r=R$ [superficie del filo] si ha $B = \mu_0 i_0 / 2\pi R$.

Esempio

Si consideri una lamina di rame, piana, di larghezza a , di spessore trascurabile, percorsa da una corrente di intensità i . Calcolare B in un punto P che si trova sulla perpendicolare alla lamina a distanza R dal centro della lamina stessa.

842

CONSIDERO TANTI
FATTI IN MODO
CHE LA DISTANZA
DA P SIA LA MESETTA
PROBLEMA SEMPLICIO



Il contributo dB al campo nel punto P è dato da

$$dB = \mu_0 \cdot \frac{di}{2\pi r}$$

$$\text{ma } R = r \cos \theta \quad \text{per cui} \quad dB = \mu_0 \frac{di}{2\pi R / \cos \theta}$$

Notiamo che $\vec{d_B}$ è perpendicolare al segmento r

Al campo contribuisce solo la componente orizzontale di B : quella verticale viene annullata dal contributo del filamento dx simmetrico rispetto all'asse $x=0$ del filamento finora considerato.

Quindi nel punto P si ha:

$$B = \int dB \cos\theta = \int \frac{\mu_0 di}{2\pi R \cos\theta} \cos\theta = \int \frac{\mu_0 i [dx/a] \cos^2\theta}{2\pi R}$$

PROIEZIONE
DEL CAMPO
SULL'ORIZZONTALE

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi a R} \left\{ \cos^2\theta dx \right\}$$

Le variabili x e θ sono legate da:

$$x = R + g \theta \quad a = k \frac{f}{g} \theta_{\text{massimo}}$$

$$dx = R \sec^2 \theta \, d\theta = R \frac{1}{\cos^2 \theta} \, d\theta$$

grindi :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a R} \int R \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_0 i}{\pi a} \operatorname{arctg} \frac{a}{2R}$$

- $\operatorname{arctg} \frac{a}{2R}$ ANGULO MINIMO

P.V.P.

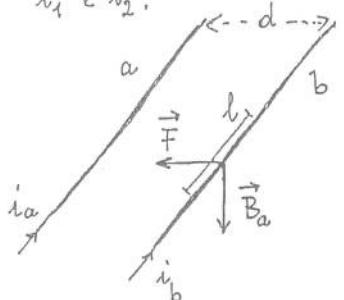
in punti lontani dalla lamina $\operatorname{actg} \frac{a}{2R} \approx \frac{a}{2R}$

$$\text{für cui } B \geq \mu_0 \frac{i}{2\pi R}$$

cioè per punti lontani dalla lamina, un filo e una lamina non sono distinguibili.

Conduttori paralleli.

Consideriamo due lunghi fili paralleli posti a distanza d e percorsi da correnti di intensità i_a e i_b .



Il filo a produrrà un campo magnetico B_a in tutti i punti attorno a lui.

dal filo b è :

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

Per la regola della mano destra B_a nella posizione del filo b è diretto verso il basso. Un tratto l del filo b è soggetto a una forza magnetica trasversale data in modulo da :

$$F_b = i_b l B_a = \frac{\mu_0 l i_a i_b}{2\pi d}$$

$$\vec{F}_b = i_b l \vec{B}_a$$

Come si può verificare con la regola della mano destra la forza F_b sta nel piano individuato dai due fili

con direzione e verso indicati in figura.

Analogamente ripetendo il ragionamento per il filo b si ha che sul filo a agisce una forza F_a con la stessa direzione di F_b ma con il verso rivolto a destra. I due fili si attraggono.

Per correnti dirette in versi opposti i fili si respingono.

Analogie fra fili percorsi da corrente e ?

L'attrazione fra due lunghi fili paralleli percorsi da correnti di uguale intensità è usata per definire l'ampere. Se i fili sono a distanza di 1 metro e sono percorsi da una corrente di uguale intensità ($i_a = i_b$) si definisce 1 ampere come quel valore dell'intensità di corrente, comune ai due fili, in corrispondenza della quale si misura una forza di attrazione per unità di lunghezza, fra i due fili, pari a $2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$.

$$F = i_b l B_a = \frac{\mu_0 l i_a i_b}{2\pi d}$$

$$\frac{F}{l} = \frac{[4\pi \cdot 10^{-7} T m/A] [1A]^2}{[2\pi] [1m]} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

CAMPO CONSERVATIVO

Problema

Nel disegno sono riportati un lungo filo percorso da una corrente di 30 A ed una spira rettangolare percorsa da una corrente di 20 A .

Calcolare la forza risultante agente sulla spira.

Utilizzare i seguenti valori numerici:

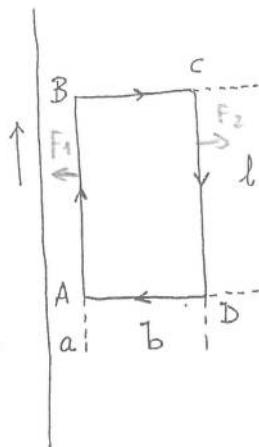
$$a = 1.0\text{ cm}, \quad b = 8.0\text{ cm}, \quad l = 30\text{ cm}$$

Per risolvere il problema possiamo pensare che i lati della spira rettangolare siano soggetti a forze in quanto percorsi da corrente; la forza agente sulla spira sarà la somma vettoriale di queste forze.

Il campo magnetico generato dalla corrente è dato da $\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$, \perp al foglio ed entrante nel foglio.

Valutiamo le forze. Il lato AB si trova nel campo

$$B(a) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi a} \quad F_1 = i_1 i_2 \frac{\mu_0 l}{2\pi a} = \text{diretta verso il filo.} \\ = 3.6 \cdot 10^{-3}\text{ N}$$



FORZA LORENZ

$$F = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}$$

FORZA SUL FILO
PERCORSO DA CORRENTE

sul lato CD la forza è:

$$F_3 = i_1 i_2 \frac{\mu_0 l}{2\pi(a+b)} = 4 \cdot 10^{-4}\text{ N}$$

diretta in modo da allontanare il lato dal filo.

Lati BC e DA:

Le forze agenti su questi lati sono uguali in modulo e contrarie e non contribuiscono alla forza risultante.

I due lati BC e DA sono immersi in un campo non uniforme. Consideriamo un elemento dr del lato BC a distanza r dal filo; la forza infinitesima è:

$$d\vec{F} = i_2 dr \times \vec{B} = i_1 i_2 \frac{\mu_0}{2\pi r} dr$$

$$\text{e quindi } F = \int_a^{a+b} i_1 i_2 \frac{\mu_0}{2\pi r} dr = i_1 i_2 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} = 264 \cdot 10^{-4}$$

Per trovare il punto di applicazione:

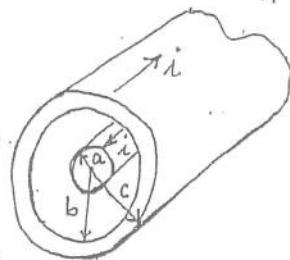
$$\bar{r}_0 = \frac{\int_a^{a+b} r dF}{\int_a^{a+b} dF}$$

Si sarebbe potuto utilizzare l'energia potenziale.
 $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ e risalire alla forza tramite il gradiente?

Problema

Un lungo cavo coassiale è formato da due conduttori concentrici. I conduttori sono percorsi da correnti di uguale intensità i , ma dirette in verso opposto.

a) Trovare il campo magnetico B in funzione di r nel conduttore interno



b) fra i due conduttori

$$a < r < b$$

c) dentro il conduttore esterno
 $b < r < c$

d) all'esterno per $r > c$.

Per la simmetria del problema, le linee di forza di B sono circonferenze concentriche con l'asse del cavo; B ha la stessa ampiezza a metà di distanza dall'asse.

La circuitazione di B su un cerchio orientato di raggio r concentrico con l'asse vale:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B$$

(a) se la corrente è distribuita uniformemente su tutta la sezione

31

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot i \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \mu_0 \frac{ir}{2\pi a^2}$$

32

per $a < r < b$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \begin{matrix} \text{LA CORRENTE NON CAMBIA,} \\ \text{LA DISTANZA SI} \end{matrix}$$

per $b < r < c$

abbiamo due termini: il conduttore centrale che produce $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ e una parte del conduttore esterno.

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} - \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \left[\frac{\pi(r^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} \right] = \frac{\mu_0 i}{2\pi(c^2 - b^2)} \left[\frac{c^2}{r} - r \right].$$

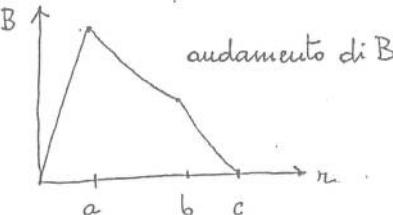
CAMPO
CORRENTE
INTERNA

CORRENTE
OPPOSTA

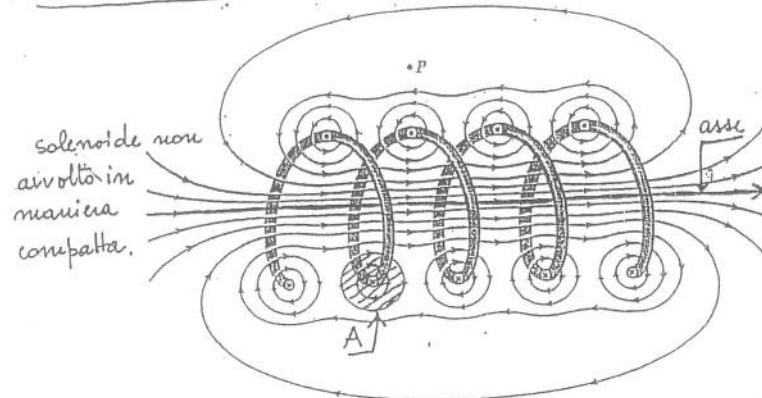
per $r > c$

$$B = 0$$

perché il percorso abbraccia sia la corrente di andata che quella di ritorno



Solenoide



Un solenoide è formato da un lungo filo avvolto ad elicica, come mostrato in figura.

Quali sono le caratteristiche del campo \vec{B} creato?

Nei punti vicini alla singola spira del solenoide il filo si comporta come se fosse nullo e le linee di \vec{B} dentro alle singole spire sono quasi circonference concentriche. [vedere la zona A].

Nei punti interni al solenoide, e sufficientemente lontani dai fili, \vec{B} è parallelo all'asse del solenoide.

I POTIZZO UN PEZZETTO DI FILO COME UN FILO (INFINITO).
APPLICO LA LEGGE DI AMPÈRE

Se il solenoide tende a diventare ideale cioè ad avvicinarsi alla configurazione di una corrente su una lamina infinitamente lunga, il campo \vec{B} nei punti esterni gliessa tende a zero.

Applichiamo il teorema di Ampère al circuito rettangolare $a-b-c-d$ della figura precedente.

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ si può scrivere come somma di 4 integrali uno per ciascun lato del circuito rettangolare.

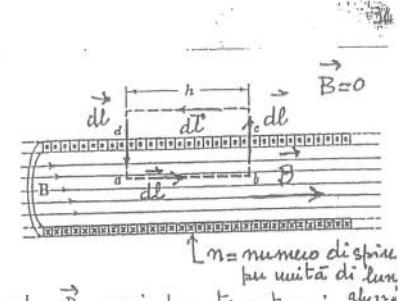
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \cdots + \int_c^d \cdots + \int_d^a \cdots = B h$$

$\begin{matrix} b & & & d \\ \uparrow & & & \uparrow \\ a & & & c \\ \uparrow & & & \uparrow \\ B h & & & B h \\ \uparrow & & & \uparrow \\ & & & B h \end{matrix}$

indichiamo con n il numero di spire per unità di lunghezza :

$$i = i_0 (nh)$$

i_0 = corrente nel solenoide.



Il teorema di Ampère diventa allora :

$$Bh = \mu_0 i_0 nh$$

$$B = \mu_0 i_0 n$$

B non dipende dal diametro né dalla lunghezza del solenoide; la relazione precedente vale con buona approssimazione anche per un solenoide reale [non infinitamente lungo] per punti vicini al centro del solenoide stesso.

Nel solenoide ideale come varia B lungo la sezione del solenoide stesso?

Mediante un solenoide si può avere un campo magnetico uniforme di valore noto; per avere un campo elettrico uniforme come possiamo fare?

Si può definire il flusso Φ_B per un campo magnetico B :

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

NON SUPERFICIE CHIUSA

in stretta analogia a quanto fatto per il campo elettrico.

$$\left\{ \begin{array}{l} B \Rightarrow \text{tesla (T)} = \frac{\text{weber}}{\text{m}^2} \\ \Phi_B \Rightarrow \text{weber (Wb)} \end{array} \right.$$

unità SI

Esempio.

Un solenoide è lungo 1,0 m e ha un diametro medio di 3,0 cm. È costituito da cinque strati di avvolgimento ciascuno formato da 850 spire ed è percorso da una corrente di 5,0 A.

a) quanto vale B al centro?

$$B = \mu_0 i_0 n = [4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}] [5,0 \text{ A}] \left[\frac{850 \text{ spire}}{0,1 \text{ m}} \right] = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

SPIRE X
UNITA' DI
LUNGHEZZA

si può usare l'equazione precedente anche se abbiamo più strati?

b) quanto vale il flusso del campo magnetico attraverso una sezione del solenoide al centro del solenoide stesso?

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BA$$

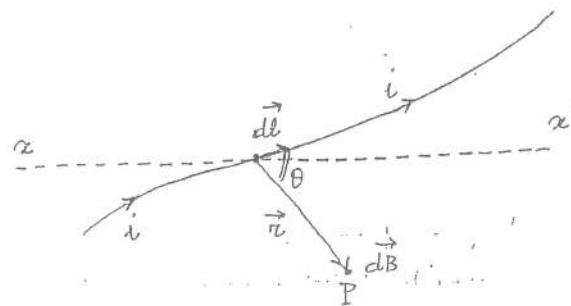
$$A = \left(\frac{3,0 \text{ cm}}{2} \right)^2 \cdot \pi = 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\Phi_B = BA = [2,7 \cdot 10^{-2} \text{ T}] [7,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2] = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$



La legge di Biot-Savart.

Per calcolare il campo magnetico si può usare il teorema di Ampère se la simmetria è tale da poter valutare facilmente $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$.



Consideriamo una distribuzione di corrente, che consiste in una corrente i che percorre un filo curvo.

Sia P il punto in cui si vuole conoscere il campo $d\vec{B}$ associato con l'elemento di corrente; il modulo di $d\vec{B}$ è:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{dl \sin\theta}{r^2} \quad [\text{legge di Biot-Savart}]$$

$d\vec{B}$ creato nel punto P è perpendicolare alla figura.

La legge di Biot e Savart può essere scritta in forma vettoriale: $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{dl \times \vec{r}}{r^3} \rightarrow \text{DISTANZA DAL PUNTO } P$

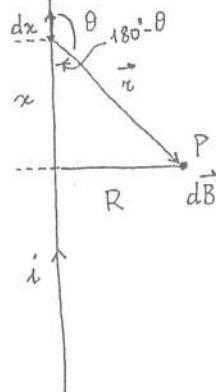
ELEMENTO DI LINEA

37

Il campo risultante \vec{B} nel punto P è:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}.$$

Esempio



consideriamo un filo rettilineo molto lungo, percorso da una corrente i .

$d\vec{B}$ nel punto P è dato da:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{dx \sin\theta}{r^2}$$

I contributi $d\vec{B}$ nel punto P hanno tutti la stessa direzione e lo stesso verso quindi consideriamo solo i moduli.

$$B = \int dB = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{\sin\theta dx}{r^2}$$

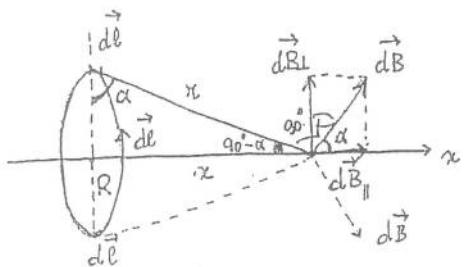
x, r e θ sono collegati dalle relazioni

$$r = \sqrt{x^2 + R^2} \quad \sin\theta = \sin[180^\circ - \theta] = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R dx}{\sqrt{x^2 + R^2}^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}.$$

38

Spira circolare percorsa da corrente.



La spira è percorsa da una corrente di intensità i .

L'angolo fra \vec{r} e $d\vec{l}$ è di 90° e $d\vec{B}$ è diretto come in figura; scomponiamo $d\vec{B}$ in una componente parallela e in una perpendicolare all'asse della spira.

Solo le componenti $dB_{||}$ si sommano e danno un contributo a B ; le componenti dB_{\perp} si elidono per la simmetria del problema.

Applichiamo la legge di Biot-Savart all'elemento di corrente e abbiamo:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{dl \sin 90^\circ}{x^2}$$

$$\begin{aligned} d\vec{B}_{||} &= \text{parallelo} \\ &\text{all'asse } x \\ d\vec{B}_{\perp} &= \text{perpendicolo} \\ &\text{alla } x. \end{aligned}$$

$$dB_{||} = B \cos \alpha$$

da cui

$$\begin{aligned} dB_{||} &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{dl \cos \alpha}{x^2} \\ x &= \sqrt{R^2 + x^2} \\ \cos \alpha &= \frac{R}{x} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dB_{||} &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \cdot \frac{i}{x^2 + R^2} \cdot dl = \\ &= \frac{\mu_0 i R}{4\pi [x^2 + R^2]^{3/2}} \cdot dl \end{aligned}$$

integrandolo :

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i R}{4\pi [x^2 + R^2]^{3/2}} \int dl =$$

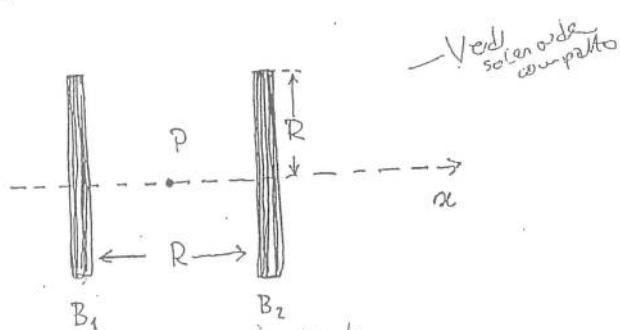
alla circonferenza $= 2\pi R$

$$= \frac{\mu_0 i R^2 \cdot 2\pi}{4\pi [x^2 + R^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R^2}{2 [x^2 + R^2]^{3/2}}$$

$$\text{per } x \gg R, B = \frac{\mu_0 i R^2}{2 x^3} \quad \text{per } x \approx 0, B = \frac{\mu_0 i}{2 R}$$

Problema - Bobine di Helmholtz.

Due anelgimeti di 300 spire sono posti ad una distanza pari al raggio. Traccia il diagramma di B in funzione di x , lungo l'asse del sistema nell'intervallo $x = -5\text{cm} - x = +5\text{cm}$ [$x=0$ è l'ascissa del punto P], per $R = 5\text{cm}$ e $i = 50\text{ A}$.



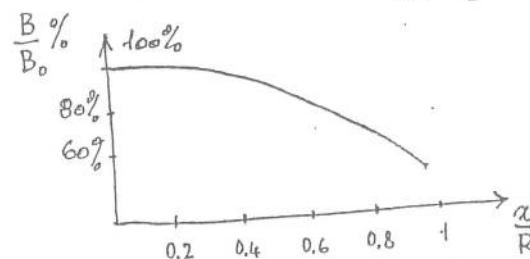
il campo B in un qualsiasi punto dell'asse x risulta dalla sommapposizione dei campi B_1 e B_2 delle due bobine.

$$B_1 = N \frac{\mu_0 i R^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{R}{2} + x \right)^2 \right]^{3/2}}$$

$$B_2 = N \frac{\mu_0 i R^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{R}{2} - x \right)^2 \right]^{3/2}}$$

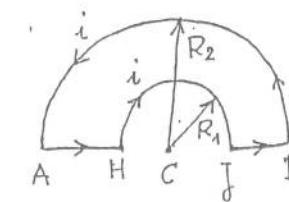
e quindi il campo complessivo è dato da

$$B(x) = B_1 + B_2 = \frac{N \mu_0 i}{2R} \left[\dots \right]$$



(Problema)

Calcolare il campo magnetico B nel punto C , centro comune dei due archi semi circolari AD e HJ di raggi R_1 e R_2 rispettivamente, che fanno parte del circuito $ADJHA$ attraversato dalla corrente i .



Applichiamo la legge di Biot-Savart.

I tratti AH e JD

danno contributo nullo PERCHE' SONO SULLA STESSA RETTA.

Il tratto HJ contribuisce con campi infinitesimi $d\vec{B}$ perpendicolari al piano del foglio ed entranti nel foglio stesso. Il campo B_1 vale:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4R_1} \quad \int dl = \pi R_1$$

STESSA DISTANZA DAL
CENTRO $\rightarrow r = R_1$

Analogamente il tratto AD dà:

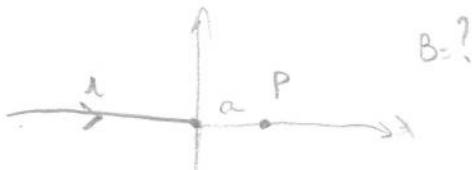
$$B_2 = \frac{\mu_0 i}{4R_2} < B_1$$

parallelo e contrario a B_1 .

Alla fine si ha un campo risultante entrante nel foglio di intensità:

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 i}{4} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right].$$

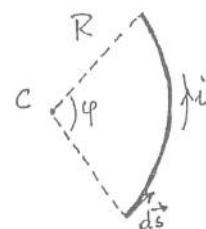
$$B = dl \cdot R \cdot \sin\theta$$



$$B=?$$

(Campo magnetico generato da una corrente)
in un filo piegato ad arco.)

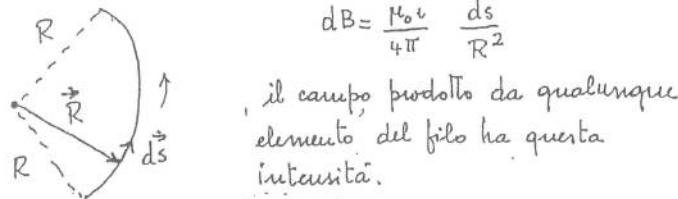
44



nel punto C la corrente in ciascun elemento di filo ds produce un campo magnetico di modulo dB dato da: $dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin\theta}{R^2}$

dove $\theta = 90^\circ$ e quindi

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{R^2}$$



il campo prodotto da qualunque elemento del filo ha questa intensità.

La direzione di B è \perp al foglio e il verso è uscente dalla pagina. Quindi

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1}{R^2} \int R d\varphi = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1}{R} \cdot \varphi$$

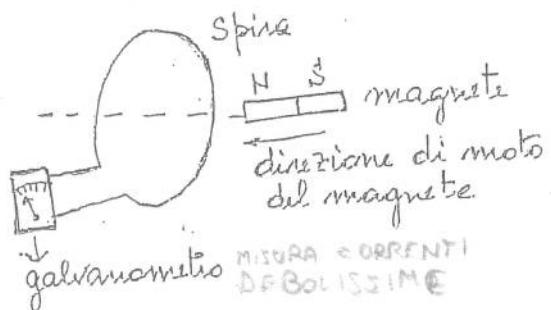
avendo posto $ds = R d\varphi$

questo è vero solo sul centro di curvatura C dell'arco.

$\varphi \Rightarrow$ radienti.

Legge della induzione elettromagnetica di Faraday.

Consideriamo alcuni semplici esperimenti dai quali si può dedurre la legge di Faraday.

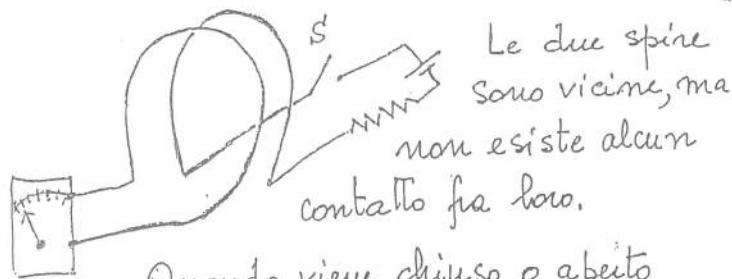


una spira è collegata a un galvanometro; non essendo presenti nel circuito dei generatori non si ha passaggio di corrente. Ma se si avvicina un magnete il galvanometro segna

un passaggio di corrente. Questa corrente va a zero se il magnete viene arrestato e se invertiamo il verso di movimento del magnete l'indice del galvanometro viene deviato in verso opposto.

Quello che è importante sottolineare è che è fondamentale il moto relativo fra spira e magnete.

La corrente che circola è chiamata corrente indotta e si dice che essa è fatta circolare da una forza elettromotrice indotta.



Quando viene chiuso o aperto l'interruttore S nel circuito di destra, il galvanometro a sinistra segna un passaggio di corrente con verso in un senso o in senso opposto a seconda che l'interruttore venga chiuso o aperto.

Faraday intuì che il fattore comune importante negli esperimenti precedenti è la variazione del flusso Φ_B attraverso la spira di sinistra.

La legge dell'induzione di Faraday afferma che la f.e.m. E indotta è uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico attraverso

LA F.E.M. SI OPPONE ALLA VARIAZIONE CHE L'HA PRODOTTA

il circuito, cambiata di segno.

$$E = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Flusso CONCERNATO
cioè flusso del campo che è
abbassato dal sistema (sera) considerato

legge dell'induzione di Faraday.

$$E \Rightarrow \text{volt}$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \frac{\text{weber}}{\text{s}}$$

da cosa dipende E?

Il segno - indica il verso della f.e.m. e verrà discusso in seguito.

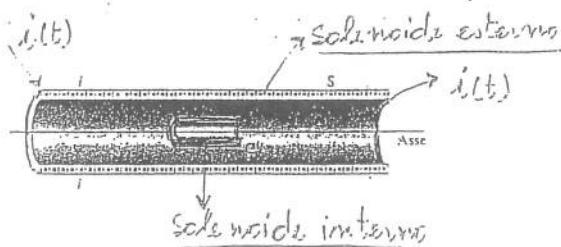
Se pensiamo a una bobina formata da N spire, in ogni spira compare una f.e.m. indotta e queste f.e.m. devono essere addizionate. Se la bobina è compatta, il flusso attraverso ogni spira sarà lo stesso. Quindi si può scrivere:

$$E = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{dN\Phi_B}{dt}$$

$N\Phi_B$ si chiama flusso concatenato.

Esempio :

Un solenoide ha 200 spire/cm ed è percorso da una corrente di 1,5 A; il suo diametro è di 3 cm. Al suo centro poniamo una bobina estremamente compatta costituita da 100 spire con diametro di 2 cm. La corrente viene portata a zero e poi a 1,5 A in un tempo uguale a 0,050 secondi. Quanto vale la f.e.m. indotta che appare nella bobina mentre la corrente sta variando?



$$fem = \frac{d\phi(t)}{dt} = \vec{\phi} \cdot \vec{E}$$

CAMPO NON CONSERVATIVO

Il campo B al centro del solenoide, e al centro del solenoide interno è:

$$B = \mu_0 n i = \underbrace{4\pi \cdot 10^{-7}}_{\mu_0} \cdot \underbrace{200/10}_{\text{SPIRE}} \cdot \underbrace{1.5}_{i} = \underbrace{3.8 \cdot 10^2}_{\text{T}} \text{ T}$$

L'area A della bobina (solenoido interno) è $3.14 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Il flusso Φ_B attraverso ogni spira della bobina è:

$$\Phi_B = \underbrace{B \cdot A}_{\substack{\text{RADIO} \\ \text{BOBINA} \\ \text{INTERNA}}} = \underbrace{3.8 \cdot 10^2 \cdot 3.14 \cdot 10^{-4}}_{\substack{\text{FLUSSO} \\ \text{CONCATENATO}}} = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

Il flusso passa da questo valore a zero in 0,050 secondi. La f.e.m. indotta è data da:

$$E = -N \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = 100 \cdot \frac{1.2 \cdot 10^{-5} - 0}{0.050} =$$

$$= -2.4 \cdot 10^{-2} \text{ V} = -0.024 \text{ V} = -24 \text{ mV}$$

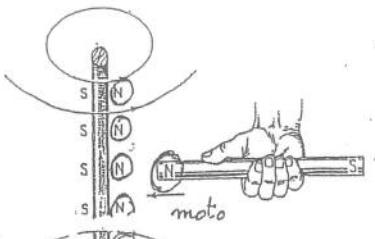
$$fem \text{ LEGATO AL SOLENOIDE INTERNO}$$

$$= \frac{-24 \text{ mV}}{\text{RESISTENZA BOBINA}}$$

MAGNETICO, PUR MUOVENDOSSI, IL FLUSSO
NON CAMBIA (STESO N° LINEE DI FORZA)

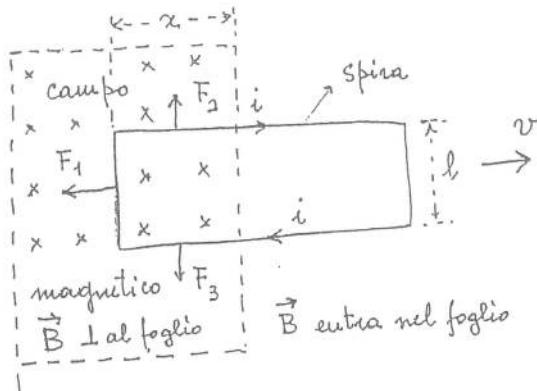
La legge di Lenz
dice che la corrente
indotta ha un verso
tale da opporsi alla
variazione che l'ha
indotta.

Attenzione: non si
oppone al campo ma
alla sua variazione.



la corrente
indotta ha il verso
indicato, in modo da
creare un campo magnetico
che si opponga al moto
del magnete.

Studio dell'induzione



consideriamo una spira retangolare di filo di
larghezza l , una parte della quale si trova in
un campo magnetico uniforme perpendicolare
al piano del foglio e quindi al piano della
spira. [vedere il disegno].

Muoviamo la spira verso dentro con una velocità
 v costante.

Questa esperienza è del tutto analoga a quelle
viste precedentemente. In ogni caso si hanno
una spira conduttrice e un magnete in moto
relativo e il flusso del campo magnetico attraverso
la spira viene fatto variare nel tempo.

Il flusso attraverso la spira è :

$$\boxed{\Phi_B = Blx}$$

Se fosse tutta
della variazione
nella regione
sarebbe flusso

dove lx è l'area della parte della spira
che si trova nella regione in cui B è diverso da 0.

La f.e.m. indotta è data dalla legge di Faraday:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} [Blx] = - Bl \frac{dx}{dt} \rightarrow v$$

$$\mathcal{E} = Blv$$

$v = - \frac{dx}{dt}$ è la velocità con cui la spira è
allontanata dal campo magnetico.

L'unico elemento geometrico della spira che compare
è la larghezza l della spira.

La f.e.m. Blv dà origine a una corrente nella spira
data da : $i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$

dove R è la resistenza del filo della spira.

A causa della corrente che circola nella spira,
sui conduttori di cui essa è costituita agiscono
delle forze \vec{F}_1, \vec{F}_2 e \vec{F}_3 la cui espressione è data da

$$\vec{F} = i \vec{l} \wedge \vec{B}$$

\vec{F}_2 e \vec{F}_3 essendo uguali ed opposte si fanno equi-
librio ; il modulo di F_1 , che è la forza che si
oppone al tentativo di muovere la spira, è dato da :

$$F_1 = ilB \text{ su } 90^\circ = \left[\frac{Blv}{R} \right] lB = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

\cancel{lB}
↑ i indotta

L'agente che estrae la spira deve impiegare una
potenza pari a :

$$P = \frac{F_1 \cdot dx}{dt} = F_1 \cdot v = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

Per il principio di conservazione dell'energia, nella
resistenza deve apparire una potenza uguale
sotto forma di energia termica :

$$P = i^2 R = \left[\frac{Blv}{R} \right]^2 \cdot R = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

Questo esempio illustra una trasformazione di
energia meccanica [lavoro fatto dall'agente esterno]
in energia elettrica [la f.e.m. indotta] e successivamente
in energia termica.

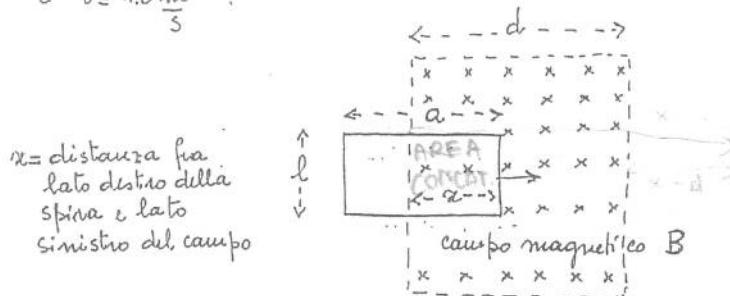
(Esempio)

Una spira rettangolare di resistenza R , larghezza l e lunghezza a , è trascinata con velocità v costante attraverso una regione nella quale esiste un campo magnetico uniforme.

- a) rappresentare il flusso Φ_B attraverso la spira in funzione di x , usando i seguenti valori numerici:

$$l=4\text{ cm}, a=10\text{ cm}, d=15\text{ cm}, R=16\Omega, B=2.0\text{ T}$$

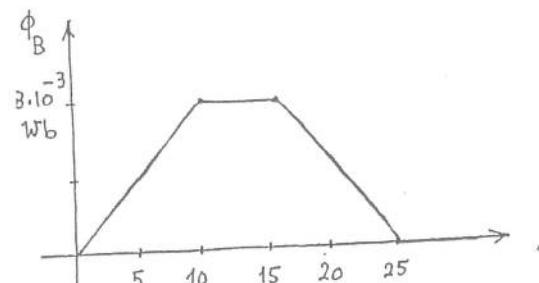
$$\text{e } v = 1.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Il flusso Φ_B è zero quando la spira è fuori dal campo, vale Bla quando la spira è interamente nel campo, vale Blx quando sta entrando nel campo e $Bl[a-(x-d)]$ quando ne sta uscendo.

$$\Phi = \frac{l}{a} \cdot a \cdot B = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

55



56

- b) la f.e.m. indotta è:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx} \cdot v$$

dove $\frac{d\Phi_B}{dx}$ è la pendenza della curva

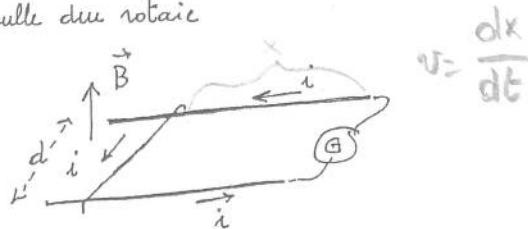
precedente e si può tracciare il grafico di \mathcal{E} in funzione di x .

Dalla legge di Lenz si ottiene che quando la spira sta entrando nel campo la f.e.m. fa circolare la corrente in verso antiorario vista dall'alto.

Quando la spira è interamente dentro il campo la f.e.m. indotta è nulla perché il flusso è costante nel tempo.

Problema

Riprendiamo in esame il filo metallico di massa m che si muove sulle due rotarie



e di cui abbiamo valutato la velocità.

Sostituiamo al generatore precedente un generatore di f.e.m. costante E . La velocità del filo tende in questo caso a un valore limite. Quanto vale?

Oltre alla E è presente nel circuito una f.e.m. indotta, che, per la legge di Faraday, è data da:

$$E' = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bvd$$

L'intensità di corrente nel circuito è data da

$$i = \frac{E+E'}{R} = \frac{E-Bvd}{R}$$

GENERATORE - FEM INDOTTA

dove R è la resistenza del circuito.

$$\text{La forza sul filo è } F = Bid = \frac{BED}{R} - \frac{B^2d^2v}{R}$$

La velocità limite si raggiunge quando $a=0$

$$\text{cioè } a = \frac{E}{m} = \frac{BED}{Rm} - \frac{B^2d^2v}{Rm}$$

$$a=0 \quad \frac{BED}{Rm} - \frac{B^2d^2v}{Rm} = 0 \quad v = \frac{BED}{B^2d^2}$$

$$v = \frac{E}{Bd}$$

in queste condizioni $E=E'$

e da un punto di vista matematico $i=0$.

Abbiamo trascurato gli effetti.

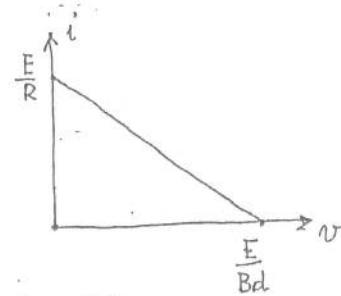
Riprendiamo in considerazione:

$$i = \frac{E}{R} - \frac{Bd}{R} v$$

e consideriamo il grafico

$$v=0 \quad i = \frac{E}{R}$$

$$i=0 \quad v = \frac{E}{Bd}$$



per $v=0$ la i è massima [spunto]

(Esempio).

Una bacchetta di rame di lunghezza L ruota con velocità angolare ω in un campo magnetico uniforme. Calcolare la f.e.m. indotta fra gli estremi della bacchetta.



Se un filo di lunghezza dl è trascinato con velocità v perpendicolarmente a un campo B , si ha una f.e.m.

campo magnetico B
perpendicolare al piano del foglio

$$dE = Bv dl$$

La bacchetta può essere suddivisa in tanti trallini di ciascuno dei quali si muove con velocità $v\omega l$; ogni elemento dl è perpendicolare a B e si muove in direzione perpendicolare a B .

$$E = \int dE = \int Bv dl = \int B\omega l dl = \frac{B\omega L^2}{2}$$

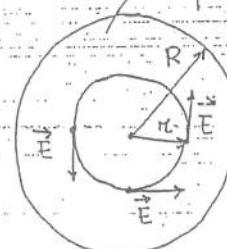
Campi magnetici variabili nel tempo.

Consideriamo ora il caso in cui non si abbia un moto relativo fra spire e magneti ma consideriamo il caso in cui il campo magnetico sia variabile nel tempo.

Se una spira conduttrice si trova all'interno di questo campo variabile il flusso attraverso la spira cambierà e nella spira comparirà una f.e.m. indotta.

Consideriamo un campo magnetico uniforme \vec{B} perpendicolare al piano del foglio e supponiamo che il modulo di \vec{B} varie nel tempo con una legge per cui $\frac{dB}{dt}$ sia costante

il campo magnetico



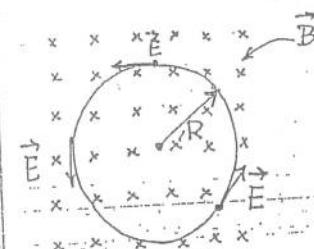
Attraverso la circonferenza

di raggio r esiste in ogni istante un flusso Φ_B

poiché questo flusso è variabile nel tempo apparirà nella spira una

$$\text{f.e.m. indotta } E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

I campi elettrici E indotti nei vari punti della spira per simmetria sono tangenti alla spira stessa.



Un campo magnetico variabile produce un campo elettrico.

I campi elettrici \vec{E} sono tangenti alla spira; sia q_0 una carica di prova che si muove lungo la circonferenza e sia W il lavoro compiuto in ogni giro:

$$W = (q_0 \vec{E}) (2\pi r) = q_0 \vec{E}$$

da cui $E = \vec{E} \cdot 2\pi r$

e in un caso più generale, si può scrivere

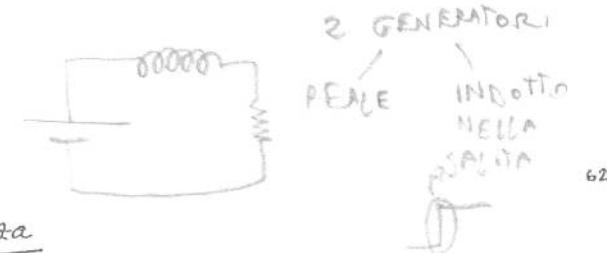
$$\vec{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

e quindi $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$

NON CONSERVATIVO (campo elettrico ridotto)

formula in cui si può scrivere la legge dell'induzione di Faraday.

NASCE DAL CAMPO Φ .
fem \rightarrow LAVORO FATTO DAL CAMPO Φ .



62

Induttanza

Se due bobine sono vicine fra loro una corrente i in una di esse dà origine a un flusso Φ_B attraverso la seconda e se questo flusso cambia nel tempo nella seconda bobina appare una f.e.m. indotta,

Un fenomeno di induzione si verifica anche nella bobina in cui si varia la corrente: questo fenomeno si chiama autoinduzione e la f.e.m. originata si chiama autoindotta ed obbedisce alla legge di Faraday esattamente come le altre f.e.m. indotte.

Consideriamo la parte centrale di un lungo solenoide. Il flusso originato in ciascuna spira da una corrente i è lo stesso. La legge di Faraday è:

$$\text{fem} = - \frac{d(N\Phi_B)}{dt}$$

$N\Phi_B$ = flusso concatenato N = numero di spire

Per una data bobina si ha

$$N\Phi_B = Li$$

la costante L è l'induttanza del sistema

$$T = \frac{R}{L}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{dN\Phi_B}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

che possiamo scrivere

$$L = - \frac{\mathcal{E}}{\frac{di}{dt}}$$

definisce l'induttanza per una bobina ed è analoga a

$$C = \frac{Q}{V}$$

$L \Rightarrow$ simbolo  \Rightarrow henry [H]

$$1 \text{ henry} = 1 \frac{V \cdot s}{A}$$

Pur trovare il verso della f.e.m. autoindotta, consideriamo una bobina percorsa da una corrente i e facciamo diminuire la i : questa diminuzione di corrente fa la legge di Lenz è la variazione a cui la f.e.m. deve opporsi e quindi la f.e.m. deve avere lo stesso verso della i .

Quando si aumenta la i la f.e.m. deve opporsi a questa variazione e quindi la f.e.m. deve avere verso opposto alla i .

Estimiamo per una bobina L in termini geometrici.

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

sia l la lunghezza di una porzione di solenoide (vicino al centro), A l'area della sezione, B il campo magnetico, n il numero di spire per unità di lunghezza SPIRE TOTALI

$$N\Phi_B = (n l)(BA)$$

flusso concatenato con la lunghezza l del solenoide,

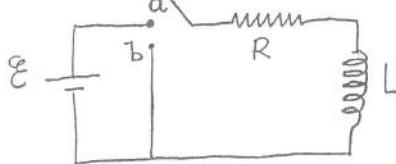
$$\text{ma } B = \mu_0 n i$$

$$\text{e quindi } N\Phi_B = (n l)(\mu_0 n i A) = \mu_0 n^2 l i A$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \mu_0 n^2 l A$$

$$C = \frac{\mathcal{E}_0 A}{d}$$

Consideriamo il seguente circuito :



65

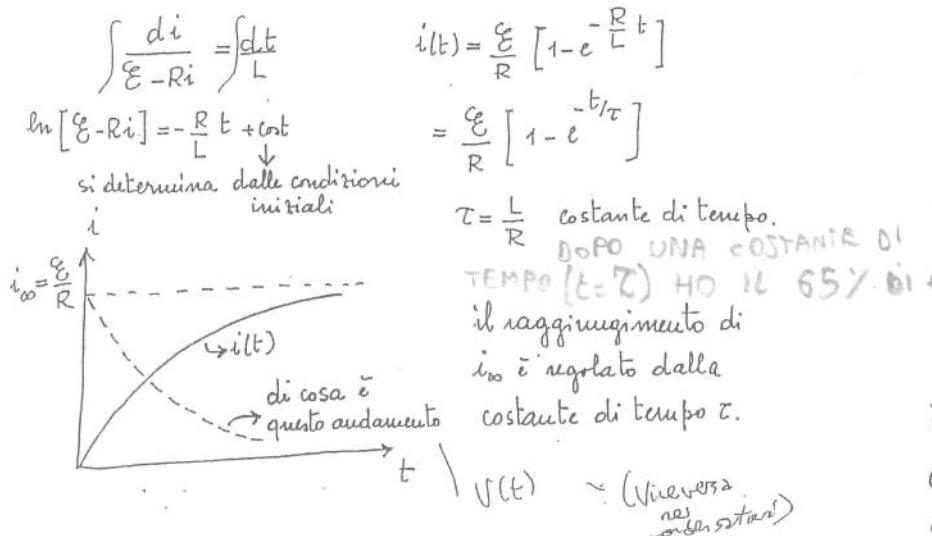
GENERATORE
IDEALE

LLENZ +

chiudiamo l'interruttore nella posizione a :

$$\frac{dE}{dt} + E = RI \quad E = iR + L \frac{di}{dt} \quad (E - iR) = L \frac{di}{dt}$$

la soluzione di questa equazione differenziale si ottiene separando le variabili



Aertura del circuito

A $t=0$ la corrente ha il suo valore di regime $\frac{E}{R}$. Apriamo l'interruttore ; la corrente tende a zero come $i(t) = i_{\infty} e^{-t/\tau}$

Questa equazione si ottiene da quella precedente [ottenuta chiudendo l'interruttore] dopo aver posto $E=0$.

Le due correnti che si hanno nei due transitori si chiamano "extracorrenti di chiusura e di apertura".

Da un punto di vista qualitativo analizziamo quello che succede quando chiudiamo l'interruttore :

se non ci fosse l'induttanza la corrente si porterebbe subito al valore finale. Nell'induttanza si genera una f.e.m. indotta pari a $L \frac{di}{dt}$ con il segno - per la legge di Lenz e quindi è come se al circuito fossero applicati due generatori : uno con f.e.m. costante e l'altro con f.e.m. variabile nel tempo e di segno opposto al primo.

Energia e campo magnetico

Quando allontaniamo due cariche di segno opposto diciamo che il lavoro compiuto rimane immagazzinato fra le due cariche nel campo elettrico e possiamo

BLOCCA LE ALTE FREQUENZE

BLOCCA LE CONTINUE

recuperare questo lavoro lasciando riavvicinare le cariche.

Nello stesso modo possiamo immagazzinare energia in un campo magnetico: più esempio due fili percorso da corrente concordi si attraranno reciprocamente e si deve compiere un lavoro per allontanarli. L'energia immagazzinata può essere recuperata dal campo lasciando ritornare i fili alla loro posizione iniziale.

Consideriamo l'equazione già vista

$$E = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

moltiplichiamo per i entrambi i membri

$$E \cdot i(t) = R i^2(t) + L i(t) \frac{di(t)}{dt}$$

- il primo membro cioè $E \cdot i(t)$ rappresenta l'energia ceduta dal generatore al circuito nell'unità di tempo,

- $R i^2$ è l'energia che appare nella resistenza come energia termica (eff. Joule),

- l'ultimo termine rappresenta l'energia immagazzinata nell'unità di tempo nel campo magnetico;

$$\frac{dU_B}{dt} = L i(t) \frac{di(t)}{dt} \quad i(t) \Rightarrow i$$

o anche $\frac{dU_B}{dt} = L i \cdot di$

$$U_B = \int_0^t dU_B = \int_0^t L i di = \frac{1}{2} L i^2$$

ENERGIA IMMAGAZZINATA
DA UN'INDUTTANZA

68

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2$$

$$U_E = \frac{1}{2} C V^2$$

Esempio

Una induttanza da 3.0 H è collegata in serie a una resistenza da 10Ω . Al sistema viene applicata una f.c.m. di 3.0 V . Dopo 0.3 s dall'istante di applicazione della f.c.m. trovare:

a) la potenza erogata dalla batteria.

$$\text{la corrente è: } i(t) = \frac{E}{R} [1 - e^{-t/\tau}]$$

$$\frac{L}{R} = \tau = 0.3 \text{ s} \quad \text{per } t = \tau$$

$$i = \frac{3.0 \text{ V}}{10 \Omega} \cdot [1 - e^{-1}] = 0.189 \text{ A}$$

$$P_E = Vi = (3.0 \text{ V})(0.189 \text{ A}) = 0.567 \text{ W}$$

b) la potenza che appare nella resistenza come energia termica.

$$P_R = R i^2 = (10 \Omega) \cdot (0.189 \text{ A})^2 = 0.357 \text{ W}$$

c) la potenza P_B accumulata nel campo magnetico.

la potenza è data da

$$P_B = \frac{1}{2} L i(t) \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{E}{R} \cdot \frac{R}{L} e^{-t/\tau} = \frac{E}{L} e^{-t/\tau}$$

per $t=\tau$ si ha :

$$\frac{di(t)}{dt} = \left(\frac{3.0V}{3.0H} \right) e^{-1} = 0.37 \text{ A/s}$$

$$P_B = L \cdot i(t) \frac{di(t)}{dt} = (3.0H)(0.189 \text{ A})(0.37 \text{ A/s}) = 0.210 \text{ W}$$

notare che $P_E = P_R + P_B$

69

otteniamo :

$$(U_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0})$$

che ci dà la densità di energia immagazzinata in qualunque punto [nel vuoto] dove il campo magnetico è B . Questa equazione, pur essendo stata ricavata per un solenoide, è vera per qualunque configurazione del campo magnetico. Questa equazione può essere confrontata con la equivalente valida per il campo elettrico :

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

70

Densità di energia.

Consideriamo un segmento di lunghezza l vicino al centro di un solenoide e sia Al il volume associato a questa lunghezza.

$$u_B = \frac{U_B}{Al} = \frac{\frac{1}{2} L i^2}{Al}$$

ma ricordiamo che :

$$L = \mu_0 n^2 l A \quad \text{e} \quad B = \mu_0 i n \Rightarrow i = \frac{B}{\mu_0 n}$$

Esempio

Un cavo coassiale consiste di due cilindri concentrici di raggio a e b . Nel conduttore centrale passa una corrente i e il conduttore esterno serve come percorso di ritorno.

a) calcolare l'energia contenuta nel campo magnetico in un tratto di lunghezza l di tale cavo.

Nello spazio fra i due conduttori per il teorema di Ampère si ha :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$



Al di fuori del conduttore esterno B è nullo.

All'interno di entrambi i conduttori il campo magnetico è $\neq 0$.

La densità di energia all'interno dei due conduttori è

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}$$

Consideriamo un elemento di volume dr costituito da un guscio cilindrico di raggi r e $r+dr$ e altezza l .

$$dU_B = u_B \cdot dr = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} (2\pi r l) (dr) = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

$$U_B = \int dU_B = \int_a^b \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a} .$$

(b) quale è l'induttanza di un tratto di cavo coassiale lungo l ?

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} .$$

Mutua induzione NO

Se consideriamo due bobine vicine, una corrente stazionaria i in una bobina dà origine ad un flusso magnetico Φ concatenato con l'altra; se si varia la i nel tempo, nella seconda bobina appare una f.e.m. indotta data dalla legge di Faraday. Questo processo è chiamato induzione.

Si potrebbe chiamare più correttamente mutua induzione per suggerire l'interazione reciproca fra le due bobine e per distinguerlo dall'autoinduzione.

E sperimentalmente la mutua induzione.

Nella bobina 1 circola una corrente i_1 prodotta da un generatore. Questa corrente produce un campo magnetico B_1 .

La bobina 2 è un circuito chiuso e isolato, senza alcun collegamento esterno e ad esso è connesso un flusso magnetico Φ_{21} .

Si definisce mutua induzione della bobina 2 rispetto alla bobina 1

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}$$

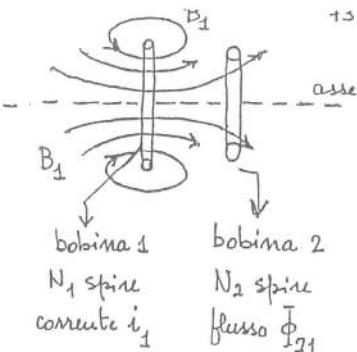
si può confrontare questa relazione con la: $L = \frac{N\Phi}{i}$

Possiamo scrivere

$$M_{21} i_1 = N_2 \Phi_{21}$$

e facendo variare la i_1 :

$$M_{21} \frac{di_1}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$



$$\text{ma } N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\mathcal{E}_2$$

cioè la f.e.m. indotta che compare nella bobina 2 a causa della variazione della i_1 nella bobina 1 è uguale a :

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

da confrontare con $\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$.

Scambiando ora la bobina 2 con la 1 si può scrivere :

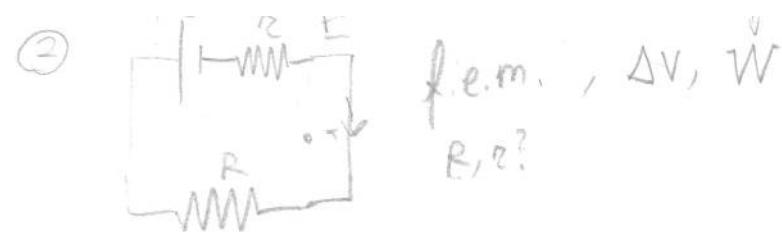
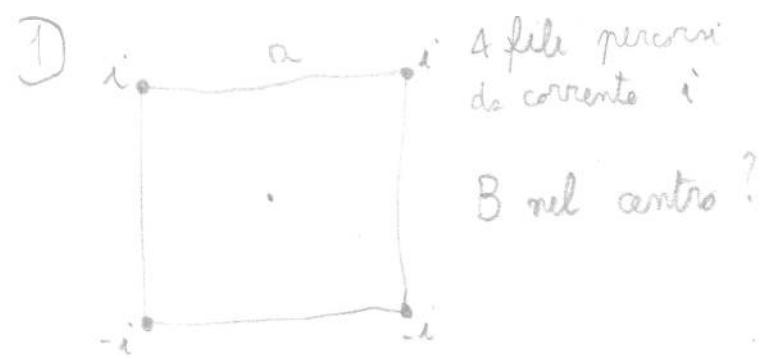
$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

La f.e.m. indotta in una bobina dipende dalla rapidità della variazione della corrente nell'altra bobina.

Si può dimostrare che le due costanti M_{21} e M_{12} sono uguali :

$$M_{21} = M_{12} = M$$

L'unità di misura di M_{21} e M_{12} è l'henry.
Il calcolo di M come quello di L dipende dalla geometria del sistema.



$$Ri^2 = W$$

③

TROVARE t IN CUI IL
FUSIBILE SI BRUCIA

$i_{max} = I_0 = 3A$

$\Delta V - L \cdot \frac{di}{dt}$

ne $t=0, i=0$

I POMPIATORI NON HANNO LA STRADA PER TORNARE
AL GENERATORE \rightarrow NON SI MUOVONO

R NON SERVE, SOLO PROTEZIONE

$-t$
 $3A = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$ E TROVO t

$$T = \frac{L}{R}$$

$$\nabla \wedge \nabla V = 0$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

$$\hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial y} \right] + \dots = 0$$

not grad V = 0

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

Potenziale vettore

Il rotore di \vec{B} è proporzionale a \vec{j} e quindi non è identicamente nullo; la circuazione di \vec{B} è diversa da zero quando la linea di integrazione concerne una corrente. Questi fatti non permettono di definire un potenziale scalare magnetico come nel caso elettostatico dove $\text{not } \vec{E} = 0$.

Può il campo magnetico soddisfare alla condizione

$$V \cdot \vec{B} = 0$$

questo vuol dire che può essere espresso come rotore di un altro vettore \vec{A} , detto potenziale vettore:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \nabla \wedge \vec{A}$$

Se applichiamo infatti la divergenza ad entrambi i membri:

$$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot [\nabla \wedge \vec{A}] = 0$$

perché la divergenza di un rotore è = 0.

$$\nabla \cdot \nabla \wedge \vec{E} = 0$$

$$\text{div not } \vec{E} = 0$$

$$\text{not } \vec{E} = \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \right] - \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial x} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_x \right] + \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \right]$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} E_z - \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} E_y}} - \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} E_z}} + \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} E_x}} \\ &\quad + \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} E_y}} - \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} E_x}} = 0. \end{aligned}$$

La $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ non determina completamente il potenziale vettore; infatti se consideriamo un nuovo campo vettoriale

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla S$$

dove S è una funzione scalare arbitraria,

$$\text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \nabla S = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \underbrace{\nabla S}_{=0} = \nabla \times \vec{A}$$

quindi il campo magnetico derivato da \vec{A}' è uguale a quello derivato da \vec{A} .

Il potenziale vettore è definito a meno di una funzione scalare arbitraria.

Torniamo alla $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla S$ e calcoliamone la divergenza:

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot (\nabla S) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 S$$

Se si sceglie S in modo che soddisfi all'equazione

$$\nabla^2 S + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{risulta } \nabla \cdot \vec{A}' = 0.$$

In questo modo se abbiamo un potenziale vettore \vec{A} e si prende S in modo da soddisfare alla

$$\nabla^2 S = -\nabla \cdot \vec{A}$$

il potenziale vettore $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla S$ è a divergenza nulla.

In elettostatica nota la distribuzione di carica si può calcolare \vec{E} mediante

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho d\tau}{r^2} \cdot \hat{r}$$

oppure si può calcolare V e da questo dedurre $\vec{E} = -\nabla V$, così in magnetostatica si può avere \vec{B} tramite le leggi studiate o tramite il potenziale vettore \vec{A} .

Equaz. di Maxwell in elettostatica

$$\text{flusso: } \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{not } \vec{E} = \nabla \times \vec{A} = 0 \quad \vec{E} = -\nabla V = \\ \text{circuazione} \quad \text{campo conservativo} \quad -\nabla V$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{array} \right| = \text{rot } \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \hat{j} = 0 \quad \text{conservazione della carica elettrica} \\ [\text{processi stazionari}]$$

Proprietà del campo magnetostatico nel vuoto.

Proprietà integrali :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i \quad , \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

cui corrispondono le proprietà locali

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

[teorema di Stokes]

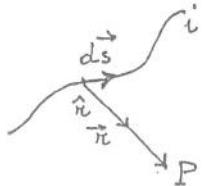
Dalle equazioni di Maxwell della magnetostatica.

Il campo magnetico è quindi solenoidale, ma non è irrotazionale.

L'espressione più generale del campo magnetico dovuto a una distribuzione di corrente

è :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \wedge \hat{r}}{r^2} d\tau$$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \wedge \hat{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

$$d\vec{i} \cdot d\vec{s} = j dS \cdot ds = j d\tau$$

Alle proprietà del campo magnetico aggiungiamo la forza agente su una carica

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{FORZA DI LORENZ}$$

Dai fenomeni di induzione si può arrivare alle seguenti conclusioni. Quando un elemento di un conduttore si muove in un campo magnetico fisso, al suo interno si ha un campo elettromotore dovuto alla forza di Lorentz. Se gli elementi formano un conduttore chiuso, questo diventa la sede di una f.e.m. E' nel conduttore circola una corrente indotta.

Si può scrivere :

$$\text{fem } \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)}_{\text{variazione del campo}} \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \\ = - \int \frac{\partial}{\partial t} [\vec{B} \cdot d\vec{s}]$$

alla circuazione del campo elettrico $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ applichiamo il teorema di Stokes e si ha :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \nabla \wedge \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int \frac{\partial}{\partial t} [\vec{B} \cdot d\vec{s}]$$

l'equazione fra i due integrali deve essere vera per qualsiasi superficie e quindi:

$$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

che esprime la relazione locale fra la variazione nel tempo del campo magnetico e il campo elettrico indotto.

Equazioni di Maxwell:

$$-\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{LEGG. DI GAUSS}$$

$$-\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{LEGG. DI GAUSS MAGNETICA}$$

$$-\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \left[\begin{array}{l} \nabla \wedge \vec{E} = 0 \\ \text{caso elettostatico} \end{array} \right] \quad \text{FEM INDOTTA}$$

$$-\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \begin{array}{l} \text{corrente di} \\ \text{spostamento} \end{array} \quad \downarrow \quad \text{LEGGE DI AMPERE}$$

Studiamo questo termine.

CORPORESE DI DISINTERRATO

Il campo magnetico nel vuoto soddisfa alla:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{e cioè } \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

che sono rispettivamente le due forme - integrale e differenziale -

La conservazione della carica [nel caso stazionario] è: $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ [formula differenziale]

Nel caso generale in cui la densità di carica varia nel tempo la densità di corrente soddisfa l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

e quindi la divergenza è $\neq 0$.

La non validità della legge di Ampere nei casi non stazionari si può constatare nel processo di carica di un condensatore.

Sappiamo che durante il processo di carica circola una corrente dovunque traune che fra le armature del condensatore, fra le quali è interposto un materiale isolante.

Quindi su una armatura abbiamo una variazione di carica corrispondente alla corrente entrante e sull'altra armatura abbiamo una corrente uscente.

Attraverso una superficie chiusa che abbraccia le due armature abbiamo un flusso di carica nullo come se ci fosse continuità nel circuito.

Però se consideriamo una superficie chiusa che racchiude una sola armatura il flusso di \vec{j} non è nullo poiché c'è una carica entrante o uscente, ma nello spazio fra le armature non c'è passaggio di cariche. Per sanare questa contraddizione Maxwell propose di estendere il significato di densità di corrente ragionando nel seguente modo; consideriamo:

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \sigma / \epsilon_0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

quindi

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\nabla \left[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = 0$$

La relazione precedente ci dà che il vettore

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ha sempre divergenza zero.

Modifichiamo la legge di Ampère sostituendo a \vec{j} la densità \vec{j}_{tot} .

Possiamo scrivere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + i_s) \quad \text{legge di Ampère-Maxwell.}$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_s) \quad \text{CONDENSATORE}$$

dove $\vec{j}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ densità di corrente di spostamento nel vuoto
 $i_s = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$ intensità di corrente di spostamento nel vuoto.

La legge precedente attribuisce gli stessi effetti magnetici di una corrente di conduzione alle variazioni temporali del campo elettrico.

Il termine corrente di spostamento - coniato da Maxwell - non deve trarre in inganno: alla \vec{j}_s non è collegato alcun moto di carica.