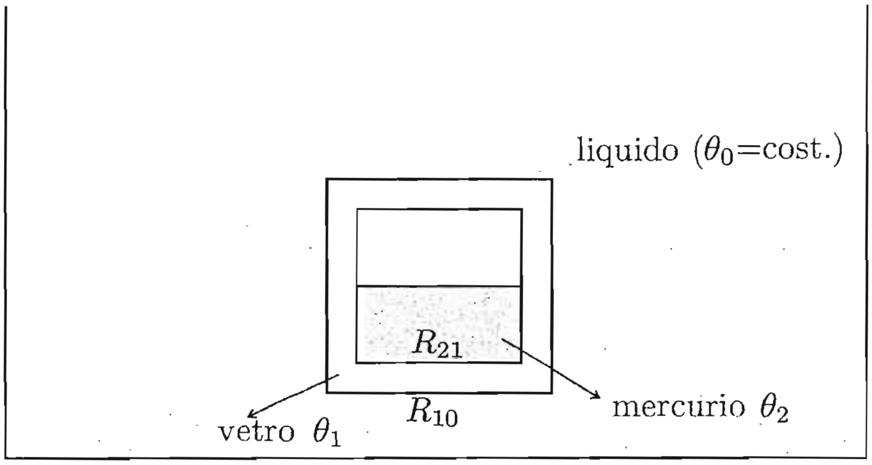
APPENDICE

RICHIAMI DI MATEMATICA E GEOMETRIA

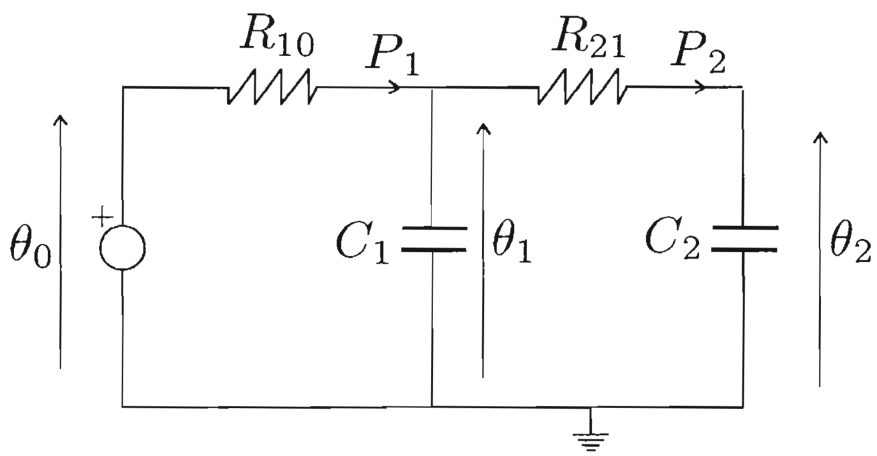
- Spazi vettoriali e trasformazioni lineari
- Rappresentazioni matriciali di trasf. lineari
- Sommario di algebra delle matrici
- prodotto interno ed ortogonalità.
- Sommario di algebra dei sottospazi
- Autovalori e autovettori
- Forma canonica di Jordan
- Det. del polinomio minimo

Esempio: Termometro



θ_0	Temperatura liquido da misurare
θ_1	Temperatura vetro
θ_2	Temperatura mercurio
R_{10}	Resistenza termica fra liquido e vetro
R_{21}	Resistenza termica fra vetro e mercurio

Equivalente elettrico:



SPAZI VETTORIALI e TRASFORMAZIONI LINEARI

- Definizione di campo $\mathbb{F}$

Un campo è un insieme con elementi detti SCALARI e con le operazioni $+$ e $\cdot$ che soddisfano le seguenti condizioni:

1) proprietà commutativa:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha \qquad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{F}$$

2) proprietà associativa:

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma \qquad \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma \qquad \forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}$$

3) proprietà distributiva:

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma \quad \forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}$$

4) proprietà di identità:

$$\exists\ 0,1\in\mathbb{F} \text{ t.c. } \alpha+0=\alpha\cdot 1=\alpha \quad \forall \alpha\in\mathbb{F}$$

5) proprietà degli inversi additivi:

dato $\alpha\in\mathbb{F}$, $\exists\beta\in\mathbb{F}$ t.c. $\alpha+\beta=0$

6) proprietà degli inversi moltiplicativi:

dato $\alpha\in\mathbb{F}$, $\alpha\neq 0$ $\exists\gamma\in\mathbb{F}$ t.c. $\alpha\cdot\gamma=1$

ESEMPI DI CAMPI: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, insieme delle funzioni razionali, ...

• Definizione di SPAZIO VETTORIALE V

Uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{F}$ è un insieme con elementi detti vettori, con le operazioni $+$ (addizione vettoriale) e $\cdot$ (moltiplicazione di vettori con scalari) che soddisfano le seguenti condizioni:

1) $x+y=y+x, \ \forall x,y \in V$
2) $x+(y+z)=(x+y)+z, \ \forall x,y,z \in V$
3) $\exists! \, 0_V \in V$ t.c. $0_V + x = x \quad \forall x \in V$
4) $\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y \quad \forall \alpha \in \mathbb{F} \ \forall x,y \in V$
5) $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{F} \ \forall x \in V$
6) $(\alpha\cdot\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{F} \ \forall x \in V$
7) $0_F\, x = 0_V \quad \forall x \in V$
8) $1_F\, x = x \quad \forall x \in V$

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI: $\mathbb{R}^n$ (su $\mathbb{R}$), $\mathbb{C}^n$ (su $\mathbb{C}$), ...

$\mathbb{R}^\infty$ insieme di tutte le sequenze infinite di numeri reali è uno s.v. (su $\mathbb{R}$):

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\} \triangleq \{x_i\} \in \mathbb{R}^\infty$$

Definizione di SOTTOSPAZIO

Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{F}$, un sottoinsieme $\mathcal{X}$ di V è un SOTTOSPAZIO di V se:
$$\alpha x + \beta y \in \mathcal{X} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad \forall x, y \in \mathcal{X}$$

Ogni sottospazio di V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$.

0_V è un sottospazio di V.

Definizione di SOMMA DI SOTTOSPAZI

$\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq V$ (sottospazi di V)
$$\mathcal{X} + \mathcal{Y} := \{ z : z = x + y, \ x \in \mathcal{X}, \ y \in \mathcal{Y} \}$$

PROPRIETÀ:

Se $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq V$ sottospazi, allora $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ è anch'esso sottospazio di V.

Definizione di INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI

$\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq V$ (sottospazi)
$$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} := \{ z : z \in \mathcal{X}, \ z \in \mathcal{Y} \}$$

PROPRIETÀ:

Se $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq V$ sottospazi, allora $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ è anch'esso sottospazio di V.

Definizione di SOMMA DIRETTA DI SOTTOSPAZI

$\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$ sottospazi di $\mathcal{V}$:

$$\begin{cases} \mathcal{X} + \mathcal{Y} = \mathcal{Z} \\ \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0_v \end{cases}$$ è equivalente a $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} = \mathcal{Z}$

PROPRIETÀ

Sia $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$

Se $z \in \mathcal{Z} \Rightarrow \exists!\ x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$ t.c. $x + y = z$

più in generale:

PROPRIETA'

Sia $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$

Con $z \in \mathcal{Z}$ sia $D(z) := \{(x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}) : x + y = z\}$

Sia $z = x_1 + y_1$ con $x_1 \in \mathcal{X}$ e $y_1 \in \mathcal{Z}$

$\Rightarrow D(z) = \{(x, y) : x = x_1 + w,\ y = y_1 - w,\ w \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}\}$

Definizione di VARIETA' LINEARE

Sia $x_0 \in \mathcal{V}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$, il sottoinsieme di $\mathcal{V}$

$$\{x_0\} + \mathcal{X} := \{z \in \mathcal{V} : z = x_0 + x,\ x \in \mathcal{X}\}$$

è una varietà lineare contenuta in $\mathcal{V}$

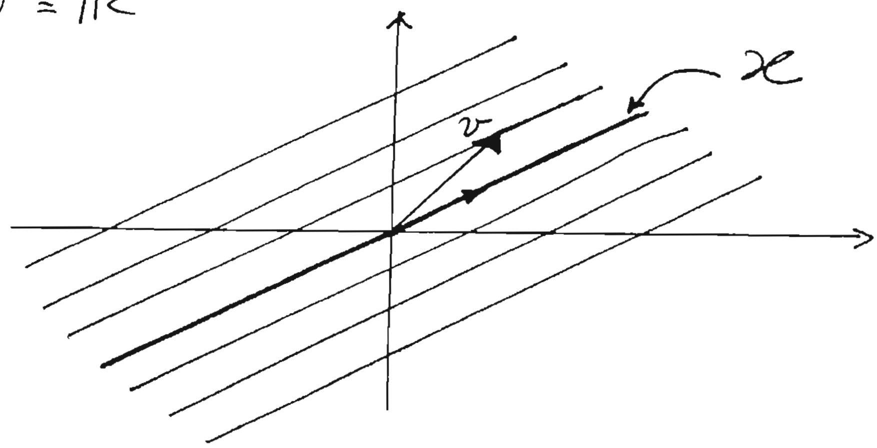
Definizione di SPAZIO QUOZIENTE

Sia $\mathcal{H} \subseteq V$. L'insieme

$$V/\mathcal{H} := \{ M \text{ varietà lineare di } V : M = \{v\} + \mathcal{H}, v \in V \}$$

denota lo spazio quoziente di V su $\mathcal{H}$.

ESEMPIO: $V = \mathbb{R}^2$



- Sottospazio $\mathcal{H}$ ≡ retta passante per l'origine
- varietà lineare (parallele a $\mathcal{H}$) ≡ rette non passante per l'origine (parallele a $\mathcal{H}$)
- spazio quoziente ≡ fascio di rette parallele a $\mathcal{H}$

PROPRIETÀ:

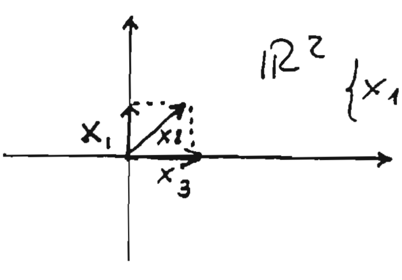
Lo spazio quoziente $V/\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale (su $\mathbb{F}$).

Definizione di VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

Un insieme $\{x_1, \dots, x_r\}$ di vettori di V è linearmente indipendente (su campo $\mathbb{F}$) se:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad i = 1, \dots, r$$

- Ovviamente un insieme di vettori è LINEARMENTE DIPENDENTE, se non vale la condizione sopra.
- Un insieme infinito di vettori di V è linearmente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito è linearmente indipendente
- In un insieme linearmente indipendente di vettori non esistono vettori esprimibili come combinazione lineare dei rimanenti
- In un insieme linearmente dipendente di vettori, esiste sempre almeno un vettore che è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti.



$\mathbb{R}^2$ $\{x_1, x_2, x_3\}$ linearmente dipendenti.

Definizione di SPAN DI VETTORI

Con $i = 1, \dots, k$ sia $x_i \in V$:

$$Sp\{x_1, \dots, x_k\} := \{x \in V : x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots$$
$$\dots + \alpha_k x_k \, , \, \alpha_i \in \mathbb{F}, \, i = 1, \dots, k\}$$

→ lo span di un insieme di vettori è un sottospazio di V

Definizione di BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Un insieme $\{x_1, \dots, x_k\}$ di vettori di V sul campo $\mathbb{F}$ è una BASE DI V se è:

1) linearmente indipendente
2) $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\} = V$

TEOREMA (componenti di un vettore)

Sia $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ una base di V su $\mathbb{F}$.
Allora

$\forall v \in V$ $\exists!$ ennupla di scalari $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
t.c. $\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n$

PROPRIETA'

Siano B' e B'' due basi dello stesso s.v. V su $\mathbb{F}$. Allora B' e B'' hanno lo stesso numero di elementi. (Dimostrazione per esercizio)

Definizione di DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

$\dim V :=$ numero di elementi di una sua base

DIGRESSIONE - (SURIETTIVITA', INIETTIVITA', CORRISP. BIUNIVOCA)

Data una funzione $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ con "$f(\mathcal{X})$" o con $\mathrm{Im}(\mathcal{X})$ si indica l'IMMAGINE di $\mathcal{X}$ secondo f, cioè:

$$f(\mathcal{X}) := \{ y \in \mathcal{Y} : y = f(x),\ x \in \mathcal{X} \}$$

Definizione di SURIETTIVITA' E INIETTIVITA':

f è SURIETTIVA se $f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$

f è INIETTIVA se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Se f è INIETTIVA allora esiste la FUNZIONE INVERSA $f^{-1}: f(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathcal{X}; \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in f(\mathcal{X})$$

Definizione di CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

$f : X \to Y$ è detta BIETTIVA (o anche CORRISPONDENZA BIUNIVOCA) se è SURIETTIVA e INIETTIVA

Quando f è biettiva: $f^{-1} : Y \to X$

PROPRIETÀ

Se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V} \Rightarrow \dim \mathcal{H} \leq \dim \mathcal{V}$

PROPRIETÀ

Sia $\mathcal{H} \subset \mathcal{V}$ con $\{c_1, \dots, c_m\}$ base di $\mathcal{H}$ e $\{b_1, \dots, b_n\}$ base di $\mathcal{V}$ $(m < n)$. Allora

$\exists$ elementi $b_{j_1}, \dots, b_{j_{n-m}}$ della base di V

t. c. $\{c_1, \dots, c_m, b_{j_1}, \dots, b_{j_{n-m}}\}$ è una base di V

PROPRIETÀ

Sia $\mathcal{X} \subseteq V$ con $\dim \mathcal{X} = m$ e $\dim V = n$.

Allora $\dim (V/\mathcal{X}) = n - m$

Definizione di TRASFORMAZIONI LINEARI

$A : V \to W$ con V e W s.v. sullo stesso campo $\mathbb{F}$ è una TRASFORMAZIONE LINEARE se:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad \forall x, y \in V$$

→ Una matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rappresenta una Trasformazione lineare da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^m$:
Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $T(x) = Ax$, allora T è una T. l.

Definizione di IMMAGINE e SPAZIO NULLO DI UNA TRASFORMAZIONE LINEARE

Sia $A : V \to W$ una T. l..

Allora

- $\mathrm{im}\, A = A(V) := \{ z \in W : z = A(x), x \in V \}$

<u>immagine di A</u>

- $\ker A := \{ x \in V : A(x) = 0 \}$ <u>kernel o spazio nullo di A</u>

rango $A \equiv \rho(A) := \dim(\mathrm{im}\, A)$

nullità di $A \equiv \nu(A) := \dim(\ker A)$

<u>CONSEGUENZE</u>:

im A e ker A sono sottospazi (di W e V rispettivamente)

<u>TEOREMA:</u>

Sia $A : V \to W$ una t.l. con <u>$\dim V = n$</u>:

$$\boxed{\rho(A) + \nu(A) = n}$$

<u>Definizione di TRASFORMAZIONI NON SINGOLARI</u>

Una t.l. $A : V \to W$ è <u>invertibile</u> o non singolare se A è iniettiva.

PROPRIETA' delle TRASFORMAZIONI INIETTIVE

Sia $A: V \to W$ una t.l.

- A è <u>iniettiva</u> se e solo se <u>$\ker A = \{0\}$</u>
- A è iniettiva se e solo se trasforma insiemi di vettori linearmente indipendenti in insiemi di vettori linearmente indipendenti
- Si assume $\dim V < \infty$: A è iniettiva se e solo se <u>$\rho(A) = \dim V$</u>
- Se A è iniettiva allora $T^{-1}: \operatorname{im} A \to V$ è una t.l.

PROPRIETA'

Sia $A: V \to W$ una t.l. con $\dim V < \infty$.

- A è <u>suriettiva</u> se e solo se <u>$\dim W = \rho(A)$</u>
- A è <u>biettiva</u> se e solo se <u>$\dim V = \dim W = \rho(A)$</u>

PROPRIETA'

Sia $A: V \to W$ una t.l. con $\dim V = \dim W < \infty$

Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1. A è iniettiva
2. A è suriettiva
3. A è biettiva

PROIEZIONI E MATRICI

Definizione di PROIEZIONE

Siano $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq V$ t.c. $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} = V$

$\forall v \in V \ \exists! \ x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$ t.c. $x + y = v$

$$P : V \to \mathcal{X} \quad \text{t.l. proiezione su } \mathcal{X} \text{ lungo } \mathcal{Y}$$
$$v \to x$$

$$Q : V \to \mathcal{Y} \quad \text{t.l. proiezione su } \mathcal{Y} \text{ lungo } \mathcal{X}$$
$$v \to y$$

Conseguenze: $\begin{cases} \bullet \ \operatorname{im} P = \mathcal{X}, \ \ker P = \mathcal{Y} \\ \bullet \ \operatorname{im} Q = \mathcal{Y}, \ \ker Q = \mathcal{X} \end{cases}$

Definizione di PROIEZIONE CANONICA

Sia $\mathcal{X} \subseteq V$. La proiezione canonica di V su $V/\mathcal{X}$ è la t.l.

$$P : V \to V/\mathcal{X}$$
$$v \to \{v\} + \mathcal{X}$$

Osservazione:

$$\operatorname{im} P = V/\mathcal{X} \qquad \ker P = \mathcal{X}.$$

- Definizione SOTTOSPAZIO INVARIANTE

Sia $A : V \to V$ una trasf. lineare.
Un sottospazio $\mathcal{X} \subseteq V$ è INVARIANTE RISPETTO AD A se:

$$\boxed{A(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}}$$

Conseguenze: $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$ invarianti rispetto ad A

$\Rightarrow \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ e $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ sono invarianti in A

RAPPRESENTAZIONE CON MATRICE DI UNA T. L.

Siano $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ e $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\}$ le basi degli s. vettoriali V e W, sullo stesso campo $\mathbb{F}$. Le componenti di $x \in V$ e $y \in W$ siano rispettivamente

$\xi_i,\ i = 1, \dots, n$ e $\eta_i,\ i = 1, \dots, m$.

Ogni trasformazione lineare data $A_T : V \to W,\ \vec{v} \to A_T(\vec{v})$ è univocamente rappresentata da $\boxed{\eta = A\,\xi}$ dove,

$$\eta := \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}, \quad \xi := \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad A := [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

e con gli elementi delle matrice A univocamente definiti da

$$\boxed{A_T(b_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} c_j} \qquad i = 1, \dots, n$$

Definizione: A viene indicata come la matrice delle trasf. lineare $A_T : V \to W$ rispetto alla base $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ di V e alla base $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\}$ di W.

Osservazione: rango della matrice $A \equiv \rho(A) = \rho(A_T)$

nullità della matrice $A \equiv \nu(A) = \nu(A_T)$

Definizione di MATRICE DI BASE:

Sia $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ una base dello s. vettoriale V sul campo $\mathbb{F}$. $\mathcal{X}$ sia un sottospazio di V e $\{\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_h\}$ una sua base.

Si definiscono gli $x_{ji} \in \mathbb{F}$ t.c.

$$\vec{d}_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ji} \vec{b}_j \quad , \; i = 1, \dots, h .$$

Allora $X := [x_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times h}$ è una matrice base di $\mathcal{X}$.

$$X = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1h} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2h} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nh} \end{bmatrix}}_{h}\right\} n$$

N
O
T
A

le colonne sono le componenti dei vettori $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_h\}$ secondo la base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$

CAMBIAMENTO DI BASE

Sia dato uno s. v. V sul campo $\mathbb{F}$, $\forall \vec{x} \in V$ siano

$$u := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad e \quad v := \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

i vettori delle componenti di $\vec{x}$ rispetto alle basi $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ e $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ di V.
Allora $\exists!$ matrice <u>NON SINGOLARE</u> $T \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tale che

$$\boxed{u = T v}$$

T ha per colonne le componenti dei vettori $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ rispetto alla base $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$

<u>PROPRIETA'</u>

Sia $A_T : V \to W$ una t. l. rappresentata dalla matrice $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ rispetto alle basi $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ e $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\}$.
Nelle nuove basi $\{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\}$ e $\{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m\}$, A_T è rappresentata dalla matrice:

$$B \in \mathbb{F}^{m\times n} \text{ e}$$

$$B = Q^{-1} A P$$

dove $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ e $Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$ sono matrici le cui colonne sono le componenti dei vettori delle nuove basi rispetto alle precedenti basi.

<u>COROLLARIO</u>

Sia $A_T : V \to V$ una T. L. rappresentata dalla matrice $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ rispetto alla base $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$. Nella nuova base $\{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\}$, A_T è rappresentata da $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$:

$$B = T^{-1} A T$$

dove $T \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ha le colonne formate dalle componenti dei vettori della nuova base rispetto alla precedente.

<u>NOTA</u>: A e B sono dette <u>matrici simili</u> e T è indicata come trasformazione di similitudine.

SOMMARIO DI ALGEBRA DELLE MATRICI

Matrici con elementi reali o complessi:

$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

$A \equiv [a_{ij}]$, a_{ij} è l'elemento della riga i-esima e colonna j-esima

PRINCIPALI OPERAZIONI:

* SOMMA: $C = A + B$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

* MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE: $C = \alpha A$

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}$$

* MOLTIPLICAZIONE DI DUE MATRICI: $C = A \cdot B$

A $m \times n$ B $n \times p$

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, \dots, m ; \; j = 1, \dots, p$$

PRINCIPALI PROPRIETA':

1) COMMUTATIVA: $A+B = B+A$

2) ASSOCIATIVA: $(A+B)+C = A+(B+C)$

$$(\alpha A)(\beta B) = (\alpha\beta)(AB)$$

$$A(BC) = (AB)C$$

3) DISTRIBUTIVA: $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

- O indica la matrice nulla (elementi nulli)
- I indica la matrice QUADRATA identità, ...

Data $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ è la matrice Trasposta:

elemento (i,j) di $A^T := a_{ji}$ $\quad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m$

Data $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ è la matrice Trasposta coniugata:

elemento (i,j) di $A^* := a^*_{ji}$ $\quad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m$

- una matrice reale A è <u>simmetrica</u> se $\underline{A = A^T}$
- una matrice complessa A è <u>hermitiana</u> se $\underline{A = A^*}$
- una matrice quadrata A è detta <u>INVERTIBILE</u> se rappresenta una trasformazione lineare invertibile (iniettiva): la matrice che rappresenta (nella base canonica) la trasformazione lineare inversa è detta matrice inversa A^{-1}. Vale:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

<u>PROPRIETA' DELLE INVERSE E TRASPOSTE</u>:

- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

<u>NOTA</u>: con le trasposte coniugate valgono anche per le matrici complesse

· La "traccia" di una matrice quadrata A è:

$$\boxed{\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

- Il <u>determinante</u> di una matrice <u>quadrata</u> A è:

– Se A 2×2 $\Rightarrow$ $\underline{\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

– Se A $n\times n$ $\Rightarrow$ per ricorsione:

$$\underline{\det A := \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, C^{A}_{ij} \quad j = 1, \dots, n}$$

$$\underline{:= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C^{A}_{ij} \quad i = 1, \dots, n}$$

dove

$C^{A}_{ij} \equiv$ <u>COMPLEMENTO ALGEBRICO</u> di a_{ij} (relativo alla matrice A)

$$\underline{:= (-1)^{i+j} \det(M^{A}_{ij})}$$

$M^{A}_{ij} \equiv$ <u>matrice ottenuta da A eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima</u>

· <u>Matrice AGGIUNTA di A:</u>

$$\operatorname{agg} A := [C^{A}_{ij}]^{T} \text{ o } [C^{A}_{ij}]^{*}$$

è la trasposta della matrice dei complementi algebrici

PROPRIETA' DEI DETERMINANTI

A e B matrici $n \times n$

1) $\det A = \det A^T$

2) se una colonna (o riga) di A è nulla:
$\det A = 0$

3) se B coincide con A ad eccezione di una colonna (o riga) che è ottenuta dall'analoga di A moltiplicandola per α: $\det(B) = \alpha \det(A)$

4) se B è come A ad eccezione di due colonne (o righe) che sono scambiate, allora: $\det(B) = -\det(A)$

5) se due colonne (righe) di A sono identiche: $\det(A) = 0$

6) se le colonne (o righe) di A sono linearmente dipendenti: $\det A = 0$

7) Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} & a_{23} + a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

oppure

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(è generalizzabile...)

8) Se B è ottenuta da A sommando ad una colonna (riga) un'altra colonna (o riga) moltiplicata per α:

$$\det B = \det A$$

9) $\underline{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$

10) A è invertibile (non singolare) $\Longleftrightarrow$ $\underline{\det A \neq 0}$

11) Sia A invertibile:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\operatorname{agg} A}{\det A}}$$

<u>Esempi di matrici partizionate:</u>

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} & \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} A+E & B+F \\ C+G & D+H \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} \end{array}$$

Siano B ed E matrici quadrate:

$$\det \begin{bmatrix} B & C \\ \emptyset & E \end{bmatrix} = \det(B) \cdot \det(E)$$

$$\det \begin{bmatrix} B & \emptyset \\ D & E \end{bmatrix} = \det(B) \cdot \det(E)$$

Più in generale <u>se B è invertibile</u>:

$$\det \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} = \det B \cdot \det(E - DB^{-1}C)$$

se <u>E è invertibile</u>:

$$\det \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} = \det E \cdot \det(B - CE^{-1}D)$$

Nota: per dimostrare che

$$\det \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} = \det B \cdot \det(E - DB^{-1}C)$$

con B invertibile, occorre considerare che:

$$\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & \phi \\ D & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & X \\ \phi & Y \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} BX \equiv C \\ DX + IY \equiv E \end{matrix}\right\} \text{ impongo...}$$

$$X = B^{-1}C$$

$$Y = E - D(B^{-1}C)$$

quindi

$$\det\left(\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\det\left(\begin{bmatrix} B & \emptyset \\ D & I \end{bmatrix}\right)}_{\det B} \cdot \underbrace{\det\left(\begin{bmatrix} I & B^{-1}C \\ \emptyset & E - D(B^{-1}C) \end{bmatrix}\right)}_{\det(E - DB^{-1}C)}$$

PRODOTTO INTERNO E ORTOGONALITÀ

Definizione di PRODOTTO INTERNO

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Il prodotto interno o prodotto scalare è una funzione $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che valgano le proprietà:

1.) commutatività:

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in V$$

2.) linearità:

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
$$\forall x, y, z \in V$$

3.) positività:

$$\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$$

$$\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$$

Se V è uno s.v. su $\mathbb{C}$, allora $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ e valgono:

1.) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^* \quad \forall x, y \in V$

2.) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha^* \langle x, z \rangle + \beta^* \langle y, z \rangle$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$
$$\forall x, y, z \in V$$

3.) come sopra

ESEMPI:

- in $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

  anche indicato come $x^T y$

- in $\mathbb{C}^n$: $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$

  anche $x^* y$

- se V è uno s.v. su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ a dimensione finita, il prodotto interno è definibile come sopra indicando con $x := [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ed $y := [y_1, \dots, y_n]^T$ le ennuple delle componenti dei vettori di V rispetto ad una base preassegnata

- $x, y \in C[a,b]$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle := \int_a^b \langle x(t), y(t)\rangle \, dt$$

Definizione di NORMA EUCLIDEA

Sia V uno s.v. con prodotto interno (su $\mathbb{R}$).

$\forall x \in V \quad \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ (norma euclidea)

Definizione di VETTORI ORTOGONALI

$x, y \in V$ s.v. con prodotto interno, sono ortogonali se

$$\langle x,y\rangle = 0$$

Definizione di INSIEME DI VETTORI ORTONORMALI

Un insieme $\{u_1, \dots, u_n\}$ con $u_i \in V$ s.v. con prodotto interno, è ortonormale se

$\longrightarrow \langle u_i, u_j\rangle = 0$ se $i \neq j \quad i,j \in \{1,\dots,n\}$

$\longrightarrow \langle u_i, u_i\rangle = 1$ se $i = 1,\dots,n$

Conseguenze:

un insieme di vettori ortonormali è un insieme di vettori linearmente indipendente

Definizione di MATRICE ORTOGONALE (UNITARIA)

Una matrice reale $n \times n$ è ortogonale se le sue colonne (righe) costituiscono un insieme ortonormale.
Nel campo complesso tale matrice è detta unitaria.

- $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(\mathbb{C}^{n\times n})$ è ortogonale (unitaria) se e solo se

$$\boxed{U^T U = U U^T = I}$$

$$(U^* U = U U^* = I)$$

quindi, se U è ORTOGONALE $U^{-1} = U^t$

- Il prodotto di più matrici ortogonali (unitarie) è ancora una matrice ortogonale (unitaria). Dimostrazione per esercizio (...)

PROPRIETA':

Sia V uno s.v. con prodotto interno e $\dim V < +\infty$. Le componenti $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ di un vettore $x \in V$ rispetto alla base ortonormale $\{u_1, \dots, u_n\}$ sono date da:

$$\boxed{\xi_i := \langle u_i, x \rangle} \quad i = 1, \dots, n$$

Definizione di TRASFORMAZIONE LINEARE

AGGIUNTA

Siano V e W s.v. con p.i. sullo stesso campo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). La t.l. $B: W \to V$ è detta aggiunta della T.l. $A: V \to W$ se $\forall x \in V$ e $\forall y \in W$:

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, B(y) \rangle$$

CONSEGUENZE:

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vale (con il p.i usuale in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$):

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$$

(NOTA: $\langle x, y \rangle = x^T y$)

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall y \in \mathbb{R}^m$

Se $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, vale analogamente

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

$\forall x \in \mathbb{C}^n$ $\forall y \in \mathbb{C}^m$

Definizione di COMPLEMENTO ORTOGONALE di UN SOTTOSPAZIO

Sia $\mathcal{X}$ un sottospazio di V, s.v. con p.i.. L'insieme

$$\boxed{\mathcal{X}^{\perp} := \{ y \in V : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in \mathcal{X} \}}$$

è il complemento ortogonale di $\mathcal{X}$.

$\mathcal{X}^{\perp}$ è ancora un sottospazio di V.

PROPRIETÀ:

Sia $\mathcal{X} \subseteq V$, s.v. con p.i.

$$\Longrightarrow \underline{V = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}^{\perp}}$$

Applicazioni alle matrici:

PROPRIETÀ:

$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ vale:

1. $\ker A^T = (\operatorname{im} A)^{\perp}$
2. $\rho(A) = \rho(A^T)$
3. $\operatorname{im} A = \operatorname{im}(A A^T)$

DIGRESSIONE: <u>matrice pseudoinversa</u>

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. La matrice **PSEUDOINVERSA** di A è:

$$A^+ = A^T X (X^T A A^T X)^{-1} X^T$$

dove X è una matrice di base di $\mathrm{im}(A)$.

Se $m \leq n$ e se $\rho(A) = m$ allora

$$\boxed{A^+ = A^T (AA^T)^{-1}}$$ <u>PSEUDOINVERSA DESTRA</u>

Se $m \geq n$ e se $\rho(A) = n$ allora

$$\boxed{A^+ = (A^T A)^{-1} A^T}$$ <u>PSEUDOINVERSA SINISTRA</u>

nel primo caso $AA^+ = AA^T(AA^T)^{-1} = I_m$

nel secondo caso $A^+A = (A^TA)^{-1}A^TA = I_n$

Considerando il sistema:

$$Ax = b$$

se ammette soluzioni, cioè se $b \in \mathrm{im}\,A$, allora A^+b è la soluzione di norma euclidea minima. L'insieme di tutte le soluzioni è $\{A^+b\} + \ker A$.

SOMMARIO DI ALGEBRA DEI SOTTOSPAZI

Si considerino $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ quali sottospazi di $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^m$ ($\mathbb{C}^n$ o $\mathbb{C}^m$) ed A venga considerata la matrice $m \times n$ reale (o complessa) che trasformazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ (o da $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^m$). Le operazioni fondamentali sui sottospazi sono:

1. SOMMA

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} := \{ z : z = x + y ,\ x \in \mathcal{X} ,\ y \in \mathcal{Y} \}$$

2. IMMAGINE

$$\mathcal{Y} = A\mathcal{X} := \{ y : y = Ax ,\ x \in \mathcal{X} \}$$

3. COMPLEMENTAZIONE ORTOGONALE

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp} := \{ y : \langle y, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{X} \}$$

4. INTERSEZIONE

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} := \{ z : z \in \mathcal{X} ,\ z \in \mathcal{Y} \}$$

5. IMMAGINE INVERSA

$$\mathcal{X} = A^{-1} \mathcal{Y} := \{ x : y = Ax ,\ y \in \mathcal{Y} \}$$

PROPRIETA'

- $\mathcal{X} \cap (\mathcal{Y} + \mathcal{Z}) \supseteq (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) + (\mathcal{X} \cap \mathcal{Z})$

Cenno di dimostrazione:

Se $k \in (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) + (\mathcal{X} \cap \mathcal{Z})$ allora

$k = k_1 + k_2$ dove $k_1 \in \mathcal{X}$ e $k_1 \in \mathcal{Y}$
$k_2 \in \mathcal{X}$ e $k_2 \in \mathcal{Z}$

allora k_1 e $k_2 \in \mathcal{X} \Rightarrow k_1 + k_2 = k \in \mathcal{X}$
$(k_1 + k_2) \in \mathcal{Y} + \mathcal{Z}$

quindi $k \in \mathcal{X} \cap (\mathcal{Y} + \mathcal{Z})$ $\square$

- $\mathcal{X} + (\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) \subseteq (\mathcal{X} + \mathcal{Y}) \cap (\mathcal{X} + \mathcal{Z})$
- $(\mathcal{X}^\perp)^\perp = \mathcal{X}$
- $\left.\begin{array}{l} (\mathcal{X} + \mathcal{Y})^\perp = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y}^\perp \\ (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})^\perp = \mathcal{X}^\perp + \mathcal{Y}^\perp \end{array}\right\}$ IMPORTANTE!
- $A(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \subseteq A\mathcal{X} \cap A\mathcal{Y}$

  $A(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = A\mathcal{X} + A\mathcal{Y}$

  $A^{-1}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = A^{-1}\mathcal{X} \cap A^{-1}\mathcal{Y}$
- $A^{-1}(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) \supseteq A^{-1}\mathcal{X} + A^{-1}\mathcal{Y}$

PROPRIETA'

Si consideriamo $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ed un sottospazio $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$, allora:

$$\boxed{(A^{-1}\mathcal{Y})^\perp = A^T \mathcal{Y}^\perp}$$

Dimostrazione:

Sia Y matrice di base di $\mathcal{Y}^\perp$: $\operatorname{im} Y = \mathcal{Y}^\perp$ per $Y^T = \mathcal{Y}$ quindi

$$A^T \mathcal{Y}^\perp = A^T \operatorname{im} Y = \operatorname{im}(A^T Y) = \left(\ker(Y^t A)\right)^\perp =$$
$$= \left(A^{-1} \ker Y^t\right)^\perp = \left(A^{-1}\mathcal{Y}\right)^\perp$$

$\square$

PROCEDURE COMPUTAZIONALI

1. Somma di due sottospazi: Siano X e Y le matrici base di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$. Una matrice di base Z di $\mathcal{Z} := \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ è ottenibile ortonormalizzando le colonne di $[X\ Y]$

2. Immagine di un sottospazio: Sia X la matrice base di $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. Una matrice base Y di $\mathcal{Y} := A\mathcal{X}$ è ottenibile ortonormalizzando le colonne di AX.

3. Complemento ortogonale di un sottospazio: Sia X la matrice base $n \times h$ di $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. Una matrice base Y di $\mathcal{Y} := \mathcal{X}^\perp$ è ottenibile

ortonormalizzando le colonne di $[X I_n]$ e selezionando le ultime $(n-k)$ colonne.

4. <u>Intersezione di due sottospazi</u>:
essendo $(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = (\mathcal{X}^\perp + \mathcal{Y}^\perp)^\perp$ si applica quanto visto per la somma e il complemento ortogonale di due sottospazi.

5. <u>Immagine inversa di un sottospazio</u>:
essendo $(A^{-1}\mathcal{Y}) = (A^T \mathcal{Y}^\perp)^\perp$ ci si riconduce ai casi visti.

Può essere utile il metodo di ortonormalizzazione di <u>GRAM-SCHMIDT</u> che consente di passare da una base qualsiasi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ad una base ortonormale $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ di uno spazio (sotto-spazio) vettoriale:

$\{x_1, \dots, x_n\}$ vettori colonna che formano la base di un sottospazio

impongo:

$$b_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \; ; \; \tilde{b}_2 = \left[x_2 - \langle x_2, b_1 \rangle b_1\right] \text{ e } b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} \; ;$$

$$\tilde{b}_3 = x_3 - \langle x_3, b_1 \rangle b_1 - \langle x_3, b_2 \rangle b_2 \text{ e } b_3 = \frac{\tilde{b}_3}{\|\tilde{b}_3\|} \; ;$$

generalizzando fino a b_n (...)

AUTOVALORI, AUTOVETTORI

Data una matrice $m \times m$ reale o complessa, si considera:

$$Ax = \lambda x \qquad (x \text{ vettore})$$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$x \neq 0 \iff \det(\lambda I - A) = 0$$

$p(\lambda) := \det(\lambda I - A)$ con $\deg p(\lambda) = m$

è il <u>POLINOMIO CARATTERISTICO</u> di A

Le <u>radici di $p(\lambda) = \phi$</u> sono gli

<u>AUTOVALORI</u> di A: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

$$\nabla(A) \equiv \text{spettro di } A := \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$$

$\forall \lambda_i \in \nabla(A)$ corrisponde almeno un vettore

x_i tale che $(\lambda_i I - A)x_i = 0$

x_i è detto AUTOVETTORE (dell'autovalore λ_i)

OSSERVAZIONI: Se A è **REALE**

- gli autovettori corrispondenti ad autovalori complessi sono complessi
- se λ, x sono un autovalore complesso ed il corrispondente autovettore, allora x^* è l'autovettore corrispondente a λ^*:

$$(Ax)^* = Ax^* \quad e \quad (\lambda x)^* = \lambda^* x^*$$

TEOREMA

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o $\mathbb{C}^{n \times n}$. Se gli autovalori di A sono distinti, i corrispondenti autovettori sono linearmente indipendenti.

PROPRIETÀ

Matrici simili hanno gli stessi autovalori.

Ovvero $\quad \nabla(A) = \nabla(T^{-1}AT) \quad \forall$ matrice T $n \times n$ invertibile.

Dimostrazione:

$$\det(\lambda I - \tilde{A}) = \det(\lambda T^{-1} I T - T^{-1}AT) =$$

$$= \det[T^{-1}(\lambda I - A)T] = \cancel{\det T^{-1}} \cdot \cancel{\det T} \cdot \det(\lambda I - A) \quad \square$$

$\tilde{A} = T^{-1}AT$

Definizione di MATRICE DIAGONALIZZABILE

Una matrice A n×n (reale) è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale Λ. (Λ è diagonale se $a_{ij}=0$ se $i\neq j$)

Ovvero $\exists\, T$ n×n tale che $\Lambda = T^{-1} A T$

TEOREMA

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (o $\mathbb{C}^{n\times n}$) è diagonalizzabile se e solo se ammette un insieme linearmente indipendente di n autovettori.

Dimostrazione: segue dagli enunciati e dai Teoremi precedenti.

CONSEGUENZE:

$\{$A ha tutti gli autovalori distinti$\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \{$A è diagonalizzabile$\}$

La forma diagonale Λ può essere complessa anche quando A è reale.

LEMMA:

Sia $\{u_1+jv_1, \dots, u_h+jv_h, u_1-jv_1, \dots, u_h-jv_h\}$ un insieme linearmente indipendente nel campo complesso.
Allora $\{u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_h\}$ è linearmente indipendente nel campo reale.

TEOREMA

Sia A una matrice $n \times n$ reale e diagonalizzabile con λ_i $(i=1,\dots,h)$ autovalori reali e $\nabla_i \pm j U_i$ $(i=1,\dots,k)$ autovalori complessi $\left(k=\frac{n-h}{2}\right)$. Allora $\exists$ T $n \times n$ tale che

$$B = T^{-1} A T =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathcal{O} & \\ & & \lambda_h & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \nabla_1 & U_1 \\ -U_1 & \nabla_1 \end{matrix}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & \mathcal{O} & & & & \boxed{\begin{matrix} \nabla_k & U_k \\ -U_k & \nabla_k \end{matrix}} & \end{bmatrix}$$

TEOREMA (SCOMPOSIZIONE DI SCHUR)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (o $\mathbb{C}^{n\times n}$). Allora esiste una matrice di similitudine unitaria (ortonormale) U tale che:

$$B = U^* A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & b_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

LEMMA:

Una matrice A $n \times n$ reale o complessa è nilpotente di indice $q \leq n$ se e solo se tutti i suoi autovalori sono nulli.

[NOTA: A è detta nilpotente di indice q se $A^{q-1} \neq 0$ e $A^q = 0$]

[NOTA: il Teorema della scomposizione di Schur indica che qualunque matrice (reale o complessa) quadrata, è TRIANGOLARIZZABILE!]

TEOREMA:

Una matrice A $n\times n$ reale o complessa sia nilpotente di indice q. Allora esiste una trasformazione di similitudine T tale che:

$$B = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_r \end{bmatrix}$$

con B_i, $i=1,\dots,r$ matrici $m_i \times m_i$ con $m_1 = q$ e $m_i \le m_{i-1}$, $i=2,\dots,r$ tale che

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \qquad i = 1,\dots,r$$

TEOREMA (FORMA CANONICA DI JORDAN)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (o $\mathbb{C}^{n \times n}$). Esiste una trasformazione di similitudine T tale che

$$J = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_h \end{bmatrix}$$

con B_i $(i = 1, \dots, h)$ corrispondenti agli h autovalori distinti di A $(\lambda_i,\ i = 1, \dots, h)$. Inoltre

$$B_i = \begin{bmatrix} B_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{i,k_i} \end{bmatrix} \qquad i = 1, \dots, h$$

con B_{ij} (blocchi di Jordan) aventi la struttura

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, h \\ j = 1, \dots, k_i \end{array}$$

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (o $\mathbb{C}^{n \times n}$) ed $x \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$)

Consideriamo la sequenza:

$$x, Ax, A^2x, A^3x, \dots, A^k x, \dots$$

Allora $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tale che $\{x, Ax, \dots, A^{k-1}x\}$ è linearmente indipendente e

$A^K x$ può essere espresso quale combinazione lineare di questi:

$$\boxed{A^K x = -\sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i A^i x}$$

$\Rightarrow$ $sp\{x, Ax, \dots, A^{K-1}x\}$ è un sottospazio invariante in A: è definito come sottospazio invariante ciclico di A generato da x.

Si definisce $p(\lambda)$ il polinomio monico

$$p(\lambda) := \lambda^K + \alpha_{K-1}\lambda^{K-1} + \dots + \alpha_0$$

quindi

$$p(A)x = 0$$

NOTA:

$$A^K x + \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i A^i x = 0$$

$p(\lambda)$ è detto POLINOMIO ANNULLANTE MINIMO DI X RISPETTO AD A

CONSEGUENZA: ogni polinomio annullante di x è divisibile da $p(\lambda)$. Cioè se $\psi(\lambda)$ è tale che $\psi(A)x = 0$ Allora $\psi(\lambda)/p(\lambda)$ è un polinomio.

Dimostrazione:

Se $\psi(\lambda)$ è t.c. $\psi(A)x = 0$, cioè $\psi(\lambda)$ è polinomio annullante di x su A (non minimo) e se per assurdo fosse vero che $\psi(\lambda)/p(\lambda)$ è una divisione "con resto", allora deve essere:

$$\psi(\lambda) = g(\lambda)\cdot p(\lambda) + \text{resto}$$

ma

$$\underbrace{\psi(A)x}_{\substack{\|\\0}} = g(A)\underbrace{p(A)x}_{\substack{\|\\0}} + \underbrace{\text{resto}\cdot x}_{\text{deve essere } = 0\,!}$$

$\square$

Siano $p(\lambda)$ e $\psi(\lambda)$ i polinomi annullanti minimi di due vettori x e y rispettivamente allora il m.c.m. di $p(\lambda)$ e $\psi(\lambda)$ è il polinomio minimo che annulla $\alpha x + \beta y$ $\forall \alpha, \beta$.

Definizione di POLINOMIO MINIMO

Il polinomio minimo di A è il polinomio minimo che annulla tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

È cioè il polinomio di grado minimo $m(\lambda)$ tale che $m(A)=0$

LEMMA

Dato un polinomio $a(\lambda)$, $\ker(a(A))$ è un sottospazio invariante in A

TEOREMA

Sia $m(\lambda)$ il polinomio minimo di A e $\xi(\lambda)$ e $\psi(\lambda)$ due polinomi coprimi per cui $m(\lambda)=\xi(\lambda)\cdot\psi(\lambda)$. Si definiscano $\mathcal{X}:=\ker(\xi(A))$ e $\mathcal{Y}:=\ker(\psi(A))$.

Allora: $\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}=\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$)

ed inoltre $\xi(\lambda)$ e $\psi(\lambda)$ sono i polinomi minimi delle restrizioni $A|_{\mathcal{X}}$ e $A|_{\mathcal{Y}}$.

Dimostrazione (cenno):

$\mathcal{X}=\ker(\xi(A))=\{x\in\mathbb{R}^n \text{ t.c. } \xi(A)x=0\}$ e idem per ψ, quindi dato che

$$\underbrace{m(A)}_{\|}v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad (\times \text{ def. polinomio minimo})$$

$$\xi(A)\psi(A)v = 0$$

quindi o è $\psi(A)v = 0$

o è $\xi(A)v = 0$ (...)

PROPRIETÀ (IMPORTANTE!)

Il polinomio minimo di A, $m(\lambda)$, ha le stesse radici distinte del suo polinomio caratteristico $p(\lambda)$. Inoltre $m(\lambda)$ è divisore di $p(\lambda)$.

COROLLARIO (TEO. DI CAYLEY-HAMILTON)

Se $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{p_1} \cdot (\lambda-\lambda_2)^{p_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_k)^{p_k}$ (polinomio caratterist.)

allora

$$m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda-\lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_k)^{m_k} \quad (\text{polinomio minimo})$$

con $m_i \leq p_i$

$i = 1, \ldots, k$

Inoltre

$p(\lambda)$ e $m(\lambda)$ sono polinomi ANNULLANTI

quindi $\underline{\underline{p(A) = 0 = m(A)}}$ IMPORTANTE!

DETERMINAZIONE DEL POLINOMIO MINIMO

Il polinomio minimo, che è monico, è unico. Inoltre è divisore di ogni polinomio $\xi(\lambda)$ tale che $\xi(A)=0$.

Il polinomio minimo di A è dato da

$$\boxed{m(\lambda) = \frac{\det(\lambda I - A)}{b(\lambda)} = \frac{p(\lambda)}{b(\lambda)}}$$

dove $b(\lambda)$ è il M.C.D. monico di tutti i minori di ordine $(n-1)$ di $(\lambda I - A)$, o equivalentemente di $\operatorname{agg}(\lambda I - A)$

FORMA CANONICA DI JORDAN CON ELEMENTI REALI

Siano $\rho_1, \dots, \rho_R$ gli autovalori reali distinti con molteplicità $\mu_1, \dots, \mu_R$. Inoltre le coppie di autovalori complessi distinti sono $\sigma_1 \pm j\omega_1, \dots, \sigma_k \pm j\omega_k$ con molteplicità $\nu_1, \dots, \nu_k$. Allora

$\exists\, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$J = T^{-1} A T = \text{diag}\left[R_1 \dots R_R \, C_1 \dots C_k\right]$$

dove

$$R_i = \text{diag}\left[R_{i1} \dots R_{iR_i}\right] \quad i = 1, \dots, R$$

$\dim R_i = \mu_i$, e

$$C_i = \text{diag}\left[C_{i1} \dots C_{ik_i}\right] \quad i = 1, \dots, k$$

$\dim C_i = 2\nu_i$

ed inoltre:

$$R_{i,l} = \begin{bmatrix} \rho_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \rho_i \end{bmatrix}$$

$$C_{i,l} = \begin{bmatrix} B_i & I_2 & & 0 \\ & B_i & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & B_i \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La dimensione massima dei blocchi di Jordan associati ad un autovalore (ad esempio ρ_i) coincide con la molteplicità di tale autovalore come zero del polinomio minimo.

$$\boxed{\text{Forma Jordan}} \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow \end{array} \boxed{\text{polinomio minimo}}$$