FORME QUADRATICHE

$x \in \mathbb{R}$

- $f(x) = ax$ con $a \in \mathbb{R}$ <u>F.ME LINEARE</u>
- $f(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ <u>F.ME LINEARE AFFINE</u>
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ <u>F.ME QUADRATICA</u>

generalizzando:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = x^t A x + c^t x + c_0 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0$$

<u>F.ME QUADRATICA</u>

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$

$c^t = 0$, $c_0 = 0$ Allora:

SE $A = I_d$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2$

$$f(x) = x^t A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

è detta <u>FORMA QUADRATICA</u>

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\left(f(x) = \langle x, Ax \rangle \underset{\uparrow}{=} \langle Ax, x \rangle \right)$

(se $A \equiv A^t$)

ESEMPIO :

PERCHE' USEREMO SOLO MATRICI SIMMETRICHE

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -4 & -7 & 11 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

costruiamo la forma quadratica $x^T A x$!

$$x^t A x = 3x_1^2 - 5x_1x_3 - 4x_2x_1 - 7x_2^2 + 11x_2x_3 + 5x_3x_1 + 3x_3x_2 + x_3^2$$

OPPURE:

$$x^t A x = 3x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 14x_2x_3$$

il risultato è identico a quello che avrei usando la matrice SIMMETRICA B:

$$B = \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

(NOTA: B è simmetrica? $B^t = \left(\frac{1}{2}(A+A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A+A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = B$, sì!)

$\Rightarrow$ D'ORA IN AVANTI CONSIDERIAMO SOLO FORME QUADRATICHE SIMMETRICHE cioè x^tAx DOVE A è SIMMETRICA

(nota: se consideriamo f. quadratiche con matrice A non simmetrica, allora esistono più matrici $\neq A$ che generano le stesse f.ne quadratiche, invece, se impongo A simmetrica c'è una corrisp. biunivoca tra A e le f. quadr.)

6.2

DEFINIZIONE DEL SEGNO DI UNA F. QUAD.

$x \in \mathbb{R}^n$ al variare di x su $\mathbb{R}^n$, la f.q. x^tAx cambia di segno?

Se $x \equiv 0$ allora $x^tAx = 0$ ovvio.

1) $\{x \neq 0\} \Rightarrow \{x^tAx > 0\}$ allora la f.q. si dice <u>DEFINITA POSITIVA</u>

2) $\{x \neq 0\} \Rightarrow \{x^tAx < 0\}$ allora la f.q. si dice <u>DEFINITA NEGATIVA</u>

3) Se $\{x^tAx \geq 0\}$ ed $\exists\, z \neq 0$ t.c. $z^tAz = 0$, allora la f.q. si dice <u>SEMIDEFINITA POSITIVA</u> $(z \in \mathbb{R}^n)$

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x^tAx = 2x_1^2$ $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{matrix} \to f(x) = 0$

4) Se $\{x^tAx \leq 0\}$ ed $\exists\, z \neq 0$ t.c. $z^tAz = 0$, allora la f.q. si dice <u>SEMIDEFINITA NEGATIVA</u> $(z \in \mathbb{R}^n)$

5) Se la forma q. può assumere valori positivi e negativi, cioè se $\exists\, v, w \in \mathbb{R}^n$ t.c. $v^tAv > 0$ e $w^tAw < 0$ allora la f.q. si dice <u>INDEFINITA</u> $\to$

$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$f(x) = -x_1^2 + x_2^2$

<u>Esempio</u>

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $f(x) = x^tAx = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + x_2^2$ DEFINITA POSITIVA

ATTENZIONE! una matrice POSITIVA NON è una matrice DEFINITA POSITIVA!

Una matrice POSITIVA è una qualunque matrice (rettangolare) i cui valori sono TUTTI positivi: $a_{ij} > 0 \ \forall i,j$, mentre una matrice DEF. POSITIVA è una matrice simmetrica e quadrata la cui forma quadratica $x^T A x$ è definita positiva.

PRIMO CRITERIO DI RICONOSCIMENTO

- A è DEF. POSITIVA $\iff \lambda_i > 0, \forall i$
- A è DEF. NEGATIVA $\iff \lambda_i < 0, \forall i$
- A è SEMIDEF. POSITIVA $\iff \lambda_i \geq 0 \ \forall i$ e $\exists \lambda_R = 0$
- A è SEMIDEF. NEGATIVA $\iff \lambda_i \leq 0 \ \forall i$ e $\exists \lambda_R = 0$
- A è INDEFINITA $\iff \exists \lambda_R > 0$ ed $\exists \lambda_P < 0$

λ_i AUTOVALORI

MINORI DI UNA MATRICE (di interesse quadrata)

I **minori** di una matrice sono la matrice stessa e le matrici ottenute rimuovendo in successione una riga e una colonna.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ Allora: A è un minore

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$ è un minore

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$ è un minore $\quad [a_{11}]$ è un minore

I **minori** **PRINCIPALI** di una matrice (sempre quadrata) sono la matrice stessa e tutte le matrici ottenute rimuovendo in successione la i-esima riga e la i-esima colonna

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Allora} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ è un}$$

minore principale.

I **minori PRINCIPALI DOMINANTI** di una matrice sono la matrice A e tutte le matrici ottenute rimuovendo in successione l'ultima riga e l'ultima colonna.

A, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $[a_{11}]$ (detti anche minori di NORDOVEST)

SECONDO CRITERIO DI RICONOSCIMENTO

Sia $A \neq [0]$ una matrice quadrata simmetrica di ordine n. Allora:

- **A è DEFINITA POSITIVA** se e solo se i determinanti di tutti i suoi minori principali dominanti (DI NORDOVEST) sono STRETTAMENTE positivi
- **A è DEFINITA NEGATIVA** se e solo se i determinanti dei suoi minori principali dominanti sono a segni alterni iniziando col segno negativo, cioè:
  $a_{11} < 0, \quad \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} < 0, \ldots$
- **A è SEMIDEFINITA POSITIVA** se e solo se i determinanti dei suoi minori principali (TUTTI NON solo quelli dominanti!!) sono ≥ 0 ed in più è $\det(A) = 0$
- **A è SEMIDEFINITA NEGATIVA** se e solo se i determinanti dei suoi minori principali (TUTTI NON solo quelli dominanti!!) sono ≥ 0 quelli di ordine pari e ≤ 0 quelli di ordine dispari e $\det(A) = 0$

NOTA: se $A > 0$ (DEFINITA POSITIVA) oppure $A < 0$ (DEFINITA NEGATIVA) Allora A è NON singolare

DERIVAZIONE VETTORIALE

VETTORE

$$\frac{\partial S(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} = \left[\frac{\partial S(\mathbf{b})}{\partial b_1} \quad \frac{\partial S(\mathbf{b})}{\partial b_2} \cdots \frac{\partial S(\mathbf{b})}{\partial b_k} \right]$$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$

esempio: $S(\mathbf{b}) = \mathbf{a}^t \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k$$ FUNZIONE SCALARE

$$\frac{\partial S(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{a}^t \cdot \mathbf{b}}{\partial \mathbf{b}} = \left[a_1 \quad a_2 \dots a_k \right] = \mathbf{a}^t \quad (1)$$

$\frac{\partial S(\mathbf{b})}{\partial b_1}$

Attenzione!

PERCHÉ SCALARE

$(a^T b)^T = \mathbf{a}^t \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^t \cdot \mathbf{a}$

quindi $$\frac{\partial \mathbf{a}^t \cdot \mathbf{b}}{\partial \mathbf{b}} \equiv \frac{\partial \mathbf{b}^t \cdot \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}^t} = \mathbf{a} \quad (2)$$

le scelte tra (1) e (2) dipende dal contesto!

$$\frac{\partial \mathbf{b}^t A \mathbf{b}}{\partial \mathbf{b}} = 2 \mathbf{b}^t A$$ vettore riga

$\parallel$

$$\frac{\partial \mathbf{b}^t A \mathbf{b}}{\partial \mathbf{b}^t} = 2 A \mathbf{b}$$ vettore colonna

inoltre $$\frac{\partial \mathbf{b}^t A \mathbf{c}}{\partial \mathbf{b}^t} = A \mathbf{c} \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{c}^t A \mathbf{b}}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{c}^t A$$

PROGETTO DI UN SISTEMA DI CONTROLLO

Tecniche *classiche*:

- Specifiche nel dominio del tempo (tempo salita, errori a regime)
- Specifiche nel dominio delle frequenze (margini ampiezza/fase)

⇒ PROGETTO "ITERATIVO" LA CUI SOLUZIONE, NON UNIVOCA, VIENE SPESSO DETERMINATA PER TENTATIVI

- non facilmente estendibile a sistemi multivariabili (ok scalari)
- non vi è considerazione esplicita dell'energia di controllo
- non è determinabile una soluzione OTTIMA
- non applicabili a modelli non stazionari.

Soluzione?

TECNICHE PIU' "MODERNE" basate sulla definizione di un

<u>INDICE DI COMPORTAMENTO</u>

di cui si vuole ottenere un minimo

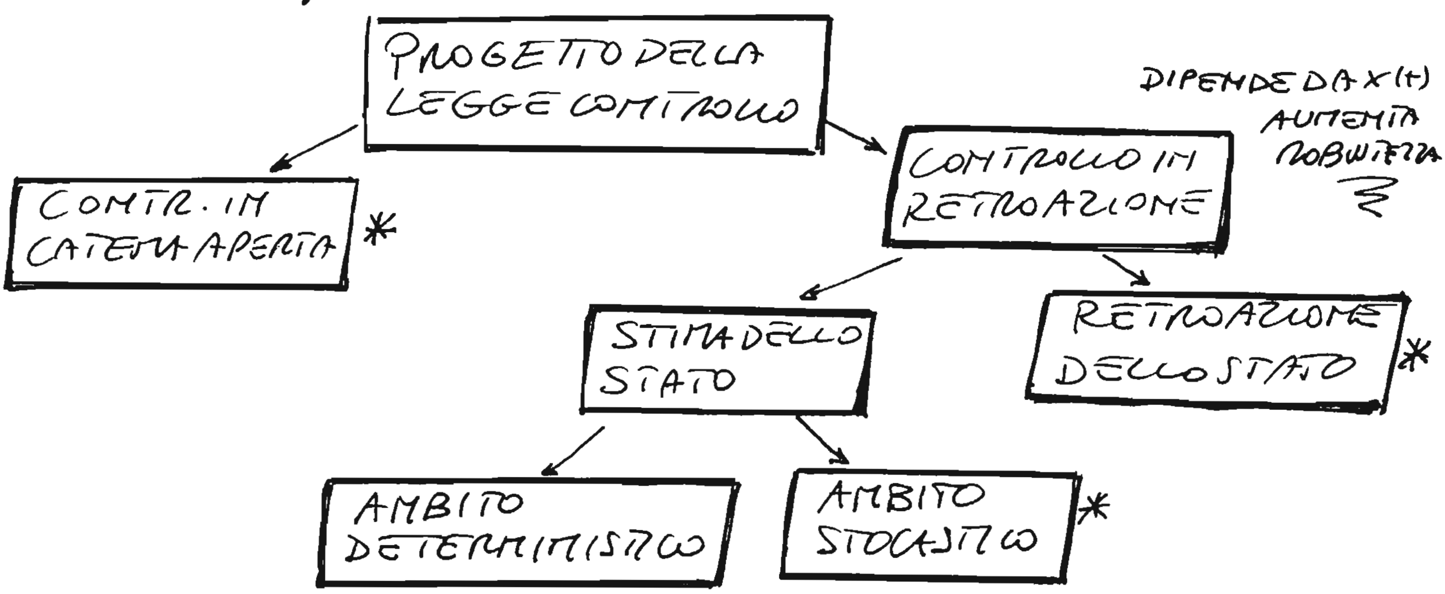
AD ES.

$$J = (\text{PERFORMANCE INDEX}) = \int_0^{+\infty} e^2(t)\,dt$$

È UNA FORMA QUADRATICA

le prestazioni del sistema sono quindi definite ottime rispetto all'indice di comportamento.

NOTA: nella definizione dell'indice di comportamento spesso si considerano esigenze diverse e TALVOLTA CONTRADDITTORIE TRA LORO e si ottengono SOLUZIONI DI COMPROMESSO



* PROB. DI OTTIMIZZAZIONE

CONTROLLO OTTIMO LQ (lineare quadratico)

caso particolare in cui:

- il Σ da controllare è di tipo LINEARE
- le funzioni che compaiono nell'indice J di costo/comportamento sono QUADRATICHE

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

$$J = x^T(t_1)\, S_F\, x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} x^T(t)Q\,x(t) + \underbrace{u^T(t)R\,u(t)}_{\text{POTENZA DI CONTROLLO}}\, dt$$

$S_F = S_F^T \geq 0$

$Q(t) = Q^T(t) \geq 0$

$R(t) = R^T(t) > 0$

(solitamente S_F, $Q(t)$ e $R(t)$ sono scelte diagonali)

(in ogni caso per noi S_F, Q, R sono simmetriche)

PROBLEMA LQR A TEMPO INFINITO
(SISTEMI TEMPO CONTINUI)

A T=+∞ ARRIVO PRATICAMENTE SEMPRE A X(T) DESIDERATO

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0$$

- la coppia (A,B) **È STABILIZZABILE**

INDICE DI COSTO QUADRATICO:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right)dt$$

R DEF. POSITIVA ($R>0$)
Q SEMIDEF. POS. ($Q\geq 0$)
SIMMETRICHE

DECISE DAL PROGETTISTA, PARAMETRI DEL PROGETTO
$u(t)$ STABILIZZA ANCHE IL SISTEMA

CON RETROAZIONE:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= -Kx(t) \\ K &= R^{-1}(B^TS) \end{aligned}}$$

e $S \in M^{n\times n}$ $S>0$ SIMMETRICA

ottengo la soluzione che minimizza l'indice di costo J (OTTIMA)

COSA È S? è la soluzione unica dell'eq. **ALGEBRICA DI RICCATI**:

$$\boxed{0 = A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q} \qquad (S\geq 0)$$

COSTO DA t AD $+\infty$: $J(t) = \frac{1}{2}x^T(t)Sx(t)$

PROBLEMA LQR A TEMPO FINITO
(SISTEMI TEMPO CONTINUI)

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \qquad x(0) = x_0$$

la coppia (A, B) è STABILIZZABILE

INDICE COSTO QUADRATICO:

$$J = \frac{1}{2} x^t(t_1)\, S_1\, x(t_1) + \frac{1}{2}\int_0^{t_1} \left(x^t(t)\, Q\, x(t) + u^t(t)\, R\, u(t) \right) dt$$

R DEF. POSIT. $(R > 0)$
Q SEMIDEF. POSIT. $(Q \geq 0)$
S_1 SEMIDEF. POSIT. $(S_1 \geq 0)$

CON RETROAZIONE:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= -K(t)\,x(t) \\ K(t) &= R^{-1}\left(B^t S(t)\right) \end{aligned}}$$

e K DIPENDE DAL TEMPO

otteniamo la soluzione che minimizza l'indice di costo J. Cos'è $S(t)$?
E' la soluzione dell'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI RICCATI:

$$S(t_1) = S_1$$

$$\boxed{-\dot{S}(t) = A^t S(t) + S(t)A - S(t)BR^{-1}B^t S(t) + Q}$$

COSTO DA t A t_1: $\quad J(t) = \frac{1}{2} x^t(t)\, S(t)\, x(t)$

PROBLEMA LQR A TEMPO INFINITO (SISTEMI TEMPO DISCRETI)

X ESERCIZI

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad x(0) = x_0$$

la coppia (A, B) STABILIZZABILE.

INDICE COSTO QUADRATICO:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[x^T(k) Q x(k) + u^t(k) R u(k) \right]$$

R DEF. POSITIVA $(R > 0)$

Q SEMI DEF. POSITIVA $(Q \geq 0)$

CON RETROAZIONE:

$$\boxed{\begin{array}{l} u(k) = -K x(k) \quad \text{e} \\ K = (R + B^t S B)^{-1} (B^t S A) \end{array}}$$

ottengo la soluzione che minimizza l'indice di costo J (OTTIMA)

COSA E' S? è la soluzione dell'equazione algebrica DISCRETA DI RICCATI:

$$\boxed{S = A^t S A - (A^t S B)(R + B^t S B)^{-1}(B^t S A) + Q}$$

COSTO DI J DA K A $+\infty$:

$$J(k) = \frac{1}{2} x^t(k) S x(k)$$

PROBLEMA LQR A TEMPO FINITO (SISTEMI TEMPO DISCRETO)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad x(0) = x_0$$

la coppia (A,B) è <u>STABILIZZABILE</u>.

INDICE COSTO QUADRATICO: $K_0 \to K_1$

$$J = \frac{1}{2} x^T(K_1)\, S_1\, x^T(K_1) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K_1-1} \left[x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \right]$$

R DEF. POSITIVA $R > 0$

Q SEMIDEF. POSIT. $Q \geq 0$

S_1 SEMIDEF. POSIT. $S_1 \geq 0$

<u>CON RETROAZIONE</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} u(k) &= -K(k)\, x(k) \\ K(k) &= \left(R + B^T S(k+1) B\right)^{-1} \left(B^T S(k+1) A\right) \end{aligned}}$$

ottengo la soluzione che minimizza l'indice di costo J (ottimo)

COSA E' $S(k)$? è la soluzione dell'eq.ne ALLE DIFFERENZE DI RICCATI:

$$\boxed{\begin{aligned} S(k) = A^T S(k+1) A - \left(A^T S(k+1) B\right)\left(R + B^T S(k+1) B\right)^{-1} \cdot \\ \cdot \left(B^T S(k+1) A\right) + Q \qquad S(K_1) = S_1 \end{aligned}}$$

COSTO DA k A K_1:

$$J(k) = \frac{1}{2} x^T(k)\, S(k)\, x(k)$$

Si consideri $\dot{x} = Ax + Bu$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$ s. iniz.

cerchiamo un controllo $u(\cdot)$ t.c. la soluzione dell'eq.ne diff. la soddisfi $x(0) = x_0$ e renda minimo

CONDIZIONI AL CONTORNO

il funzionale di costo J. (CASO T. CONTINUO)

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left[x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau) \right] d\tau$$

Consideriamo la funzione <u>HAMILTONIANA</u>:

$$\boxed{H(x,S,u) = S^T(Ax + Bu) + x^T Q x + u^T R u}$$

$R > 0$ (ed in particolare è <u>non</u> singolare!)

QUINDI INVERTIBILE

Dimostriamo che fissati x e S, $H(x,S,u)$ ammette 1 solo <u>punto di minimo</u>. (per u)

u^* è p.to di minimo per $H(x,S,u)$ se e solo se:

$$\left(\frac{\partial H(x,S,u)}{\partial u} \right)_{u=u^*} = 0 \qquad \text{condizione necessaria}$$

$$\frac{\partial b^T A b}{\partial b} = 2 b^T A$$

$$\left(\frac{\partial H(x,S,u)}{\partial u} = \right)_{u=u^*} S^T B + 2 u_*^T R = 0$$

che ammette 1 sola soluzione:

$$\boxed{u_* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T S} \qquad (R \text{ simmetrica})$$

il punto $u = u^*$ trovato è a tutti gli effetti un minimo di H infatti, usando Taylor in un intorno di u^*:

$$H(x,s,u) = H(x,s,u^*) + \left.\frac{\partial H(x,s,u)}{\partial u}\right|_{u=u^*} \cdot (u-u^*) + $$

$$+ (u-u^*)^t \underbrace{\left[\frac{\partial^2 H(x,s,u)}{\partial u^2}\right]_{u=u^*} \cdot (u-u^*)}_{\text{FORMA QUADRATICA (TERMINE 2° GRADO)}}$$

dato che

$$\left.\frac{\partial^2 H(x,s,u)}{\partial u^2}\right|_{u=u^*} = 2R \quad e \quad \left.\frac{\partial H(x,s,u)}{\partial u}\right|_{u=u^*} = 0$$

si ottiene:

$$\underbrace{H(x,s,u)}_{\text{INTORNO DI } u^*} = H(x,s,u^*) + \underbrace{(u-u^*)^t 2R (u-u^*)}_{>0}$$

ed essendo $R > 0$ si vede che $H(x,s,u)$ raggiunge il suo minimo proprio per $u = u^* = -\left(\frac{1}{2} R^{-1} B^t S\right)$

(note $(u-u^*)^t 2R(u-u^*) \geq 0$)

a questo punto, quanto vale il minimo?

$u = u^*$

$$\underline{H(x,s,u^*)} = s^t\left[Ax + B\left(-\tfrac{1}{2}R^{-1}B^Ts\right)\right] +$$

$$+ x^TQx + \left(-\tfrac{1}{2}R^{-1}B^Ts\right)^T R \left(-\tfrac{1}{2}R^{-1}B^ts\right) =$$

$(R^{-1})^T = R^{-1}$
PERCHÉ R SIMMETR.

$$= s^TAx + x^TQx - \tfrac{1}{2} s^TBR^{-1}B^ts +$$

$$+ \tfrac{1}{4} s^tB\cancel{R^{-1}}\cancel{R}R^{-1}B^TS =$$

$$\underline{= S^TAx + x^TQx - \tfrac{1}{4} s^tBR^{-1}B^TS} \qquad (1)$$

Si consideri ora la f.ne $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1 (cioè con derivate parziali prime continue) e nulla in $x=0$, cioè $V(0)=0$.

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \frac{\partial V}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$$

è la sua matrice jacobiana

si indichi: $\boxed{V_x(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}}$ (è un vettore!)

17

Facciamo l'Hp. che se sostituiamo $V_x^t(x)$ a S nelle $H(x, S, u^*)$, si abbia:

$$\boxed{H(x, V_x^t(x), u_*) \equiv 0} \quad (2)$$

NOTA: si è posto $S = V_x^t(x)$

Allora si avrà: (vedi (1))

$$H(x, V_x^t(x), u^*) = V_x(x) A x + x^T Q x +$$

$$- \frac{1}{4} V_x(x) B R^{-1} B^t V_x^t(x) \equiv 0 \quad \text{(vedi (2))}$$

inoltre sostituendo $V_x^T(x)$ a S onde nell'espressione di u_* si ha:

$$u_* = -\left(\frac{1}{2}\right) R^{-1} B^T S \qquad \tilde{u}(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^t V_x^t(x)$$

(Si indica u_* in cui si è sostituito ad S, $V_x^T(x)$ con $\tilde{u}(x)$)

18

ma con lo sviluppo di Taylor avevamo visto che:

$$H(x,s,u) = H(x,s,u^*) + 2(u-u^*)^T R(u-u^*)$$

(in un intorno di u^*)

e siccome si è fatta l'Hp. che

$$H(x, V_x^t(x), u^*) \equiv 0 \qquad \text{(vedi 2)}$$

allora

$$H(x,V_x^t, u) = \underbrace{H(x,V_x^t, u^*)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + 2(u-u^*)^T R(u-u^*)$$

quindi:

$$\boxed{H(x,V_x^t(x),u) = 2(u-u^*)^T R(u-u^*)}$$

che vale $\forall x, u$!

ricordando come è stata definita

$$H(x,s,u) = s^T(Ax+Bu) + x^T Q x + u^T R u$$

si ottiene:

$$\boxed{V_x(x)(Ax+Bu) + x^T Q x + u^T R u = 2(u-u^*)^T R(u-u^*)}$$

RIASSUMENDO:

Se esiste una f.ne $V(x)$ t. che $V(x) \in C^1$

$\longrightarrow H(x, V_x^T(x), u^*) = 0$ (e $V(x)$ di classe C^1)

Allora $\forall x$ e u vale:

$$V_x(x)(Ax+Bu) + x^T Q x + u^T R u = 2(u-u^*)^T R (u-u^*)$$

a questo punto si può notare che:

$$\left(\frac{d\,V(x(t))}{dt}\right) = V_x(t) \cdot \dot{x}(t) = V_x(t) \cdot (Ax+Bu)$$

quindi vale

$$\left(\frac{d\,V(x(t))}{dt}\right) + x^T Q x + u^T R u = 2(u(t) - \tilde{u}(x))^T \cdot$$

$$\cdot R \cdot (u(t) - \tilde{u}(x))$$

integrando tra $[0,T]$ ed indicando con x_0 il valore $x(0) = x_0$ si ha:

$$\int_0^T \left[x^T(t)\,Q\,x(t) + u^T(t)\,R\,u(t)\right] dt =$$

$$= \left[V(x_0) - V(x(T))\right] + \int_0^T 2\left[u(t) - \tilde{u}(x(t))\right]^T R \,\cdot$$

$$\cdot \left[u(t) - \tilde{u}(x(t))\right] dt \qquad (3)$$

ora si analizzi la risposta del sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ ad un ingresso $\tilde{u}(x)$ e partendo dallo stato iniziale $x(0) = x_0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\tilde{u}(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Si indichi con $\tilde{x}(t)$ la risposta del sistema a questo ingresso.

NOTA: $\tilde{u}(t) = \tilde{u}(\tilde{x}(t))$

nella (3) usando $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{u}(t)$ si ha:

$$\boxed{\int_0^T \left(\tilde{x}^T(t)\,Q\,\tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t)\,R\,\tilde{u}(t)\right) dt = V(x_0) - V(\tilde{x}(T))} \qquad (4)$$

confrontando a questo punto la (3) con la (4) si ottiene:

$$\int_0^T \left(x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)\right) dt + V(x(T)) \geq$$

$$\geq \int_0^T \left(\tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t) R \tilde{u}(t)\right) dt + V(\tilde{x}(T)) \quad (5)$$

NOTA: si è sfruttato il fatto che nella (3) a secondo membro c'è una quantità sempre positiva essendo $R > 0$.

La relazione (5) vale $\forall u(\cdot)$ e $\forall x_0$ funzioni di ingresso e stato iniziale. L'uguaglianza vale solo quando

$u(t) = \tilde{u}(\tilde{x}(t))$

Supponendo inoltre che $\lim_{T \to +\infty} \tilde{x}(T) = 0$

e che nella (5) $u(t)$ sia una qualunque funzione tale che $x(T) \to 0$ per $T \to +\infty$, allora:

$$\int_0^{+\infty} x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \, dt \geq \int_0^{+\infty} \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t) R \tilde{u}(t) \, dt$$

$\Rightarrow$ CIOE' LA F.NE DI INGRESSO $\tilde{u}(\tilde{x}(t))$ RENDE MINIMO IL FUNZIONALE DI COSTO J

RIASSUMENDO:

Se esiste una funzione $V(x)$ che ($V \in C^1$) soddisfa la relazione:

$$V_x(x)Ax + x^T Q x - \frac{1}{4} V_x(x) B R^{-1} B^T V_x^T(x) = 0$$

e se la risposta $\tilde{x}(t)$, a partire dallo stato iniziale $x(0) = x_0$, del sistema $\dot{x} = Ax + B\tilde{u}(x)$ in cui

$$\boxed{\tilde{u}(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x^T(x)}$$

è tale per cui $\tilde{x}(T) \to 0$ per $T \to \infty$,

allora la legge di controllo $u(t) = \tilde{u}(x(t))$ rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_0^{+\infty} \left(x^T(t) Q x(t) + \tilde{u}(t) R u(t) \right) dt \quad .$$

A questo punto se imponiamo:

$$\boxed{V(x) = x^T S x} \quad \text{(forma quadratica)}$$

in cui S è una matrice simmetrica $n \times n$

questa scelta soddisfa le condizione solo se:

$$V_x(x)Ax + x^T Q x - \frac{1}{4} V_x(x) B R^{-1} B^T V_x^t(x) = 0$$

DERIVATA DI $V(x)$

$$\Downarrow \qquad (V(x) = x^T S x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_x(x) = 2x^T S)$$

$$2x^T S A x + x^T Q x - \frac{1}{4} \cdot 2x^T S B R^{-1} B^t \cdot (2S^t x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^t \left(A^T S + SA + Q - S B R^{-1} B^t S \right) x = 0$$

quindi la relazione che $V(x)$ deve soddisfare risulta soddisfatta se S è una matrice simmetrica tale che:

$$\boxed{A^T S + SA + Q - S B R^{-1} B^t S = 0}$$

(eq. ne algebrica di Riccati)

in questo caso

$$\tilde{u}(x(t)) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^t \cdot 2 S x = \underbrace{-R^{-1} B^t S}_{K} x(t)$$

$$\tilde{u}(t) = K x(t)$$

inoltre il valore minimo del funzionale di costo è $\quad V(x_0) = x_0^T S x_0 \quad$ (vedi (4))

GENERALITÀ SU VARIABILI CASUALI E PROCESSI STOCASTICI

- $X(x)$ variabile casuale aleatoria
- $F_X(x)$ FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE della v.c. X

  dove $F_X(x) = Pr\{X \leq x\}$

- proprietà:
  - $0 \leq F_X(x) \leq 1$
  - $F_X(-\infty) = 0$ e $F_X(+\infty) = 1$
  - se $x_1 < x_2$ allora $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

- $f_X(x)$ FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ della v.c. X, dove:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

- proprietà:
  - $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1 - 0 = 1$
  - $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\, d\xi$

- **VALORE ATTESO**: VALOR MEDIO

$$m_x = E\{X(\alpha)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_x(x) \, dx$$ CASO CONTINUO

$$m_x = E\{X(\alpha)\} = \sum_i x_i \, P_r\{X = x_i\}$$ CASO DISCRETO

- $g(\cdot)$ di $X(\alpha)$: FUNZIONE COMPOSTA

$$E\{g(X(\alpha))\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, f_x(x) \, dx$$

$$E\{\cos(2\pi X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi x) \cdot f_x(x) \, dx$$

- **VARIANZA σ_x^2**:

$$\sigma_x^2 = E\{(X - E\{X\})^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f_x(x) \, dx$$

- **AUTOCORRELAZIONE**:

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f_x(x) \, dx$$

- $$\sigma_x^2 = E\{(X - E\{X\})^2\} = E\{X^2 - 2X E\{X\} + m_x^2\} =$$

$$= E\{X^2\} - m_x^2$$

se $m_x = 0$ allora $E\{X^2\} = \sigma_x^2$

- **DEVIAZIONE STANDARD**: SCOSTAMENTO RISPETTO AL VALORE MEDIO

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

PROCESSI STOCASTICI:

$X(x,t)$ funzione di una v.c. x e del tempo t.

si può vedere come un insieme di funzioni del tempo, ognuna associata ad un evento x_i

può essere CONTINUO o DISCRETO rispetto al tempo t

la v.c. x può essere CONTINUA o DISCRETA.

ESEMPI:

- $X(x,t) = t^{x-1}$ dove x è associato al lancio di un dado ($x = 1, 2, \dots, 6$)

- $X(x,t) = x V_0 \cos(2\pi f t)$

dove $0 < x < 1$

• <u>FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE</u> PB. del processo stocastico:

$$F_X(x,t) = P_r\{X(x,t) \leq x\}$$

• <u>FUNZIONE DENSITA' DI PB.</u> del processo stocastico:

$$f_X(x,t) = \frac{d}{dx} F_X(x,t)$$

• valgono le stesse proprietà delle v.c. ...

• <u>FUNZIONE DENSITA' DI PB. CONGIUNTA</u>:

$$f_{X_1 \dots X_n}(x_1,t_1; x_2,t_2; \dots; x_n,t_n)$$

• <u>MEDIA O VALORE ATTESO</u> (f.ne Tempo):

$$m_X(t) = E\{X(x,t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x,t) \, dx$$

$$m_X(t) = E\{X(x,t)\} = \sum_i x_i(t) \, P_r(x_i(t))$$

• In genere applicando una f.ne $g(\cdot)$ al processo $X(x,t)$:

$$E\{g(X(x,t))\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, f_X(x,t) \, dx$$

Dato il p.s. $X(t)$ e due istanti di tempo t_1 e t_2 abbiamo 2 v.c. $X(t_1)$ e $X(t_2)$ e le f.ne di

<u>DISTRIBUZIONE MISTA e DENSITÀ MISTA:</u>

- $F_{XX}(x_1, t_1; x_2, t_2) = P_r\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$
- $f_{XX}(x_1, t_1; x_2, t_2) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{XX}(x_1, t_1; x_2, t_2)$

Dato due p.s. $X(t)$ e $Y(t)$ e due istanti di tempo t_1 e t_2 abbiamo 2 v.c. $X(t_1)$ e $Y(t_2)$ e le F.NI <u>DISTRIBUZIONE e DENSITÀ INCROCIATE:</u>

- $F_{XY}(x, t_1; y, t_2) = P_r\{X(t_1) \leq x, Y(t_2) \leq y\}$
- $f_{XY}(x, t_1; y, t_2) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, t_1; y, t_2)$

CORRELAZIONE DI DUE PROCESSI STOCASTICI

$X(t)$ e $Y(t)$:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E\{X(t_1)\,Y(t_2)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x y \, f_{XY}(x,y;t_1,t_2)\, dx\, dy$$

AUTOCORRELAZIONE DI UN PROCESSO $X(t)$:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \, f_{XX}(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_1\, dx_2$$

COVARIANZA DI DUE PROCESSI STOCASTICI $X(t)$ e $Y(t)$:

$$C_{XY}(t_1,t_2) = E\left\{\left[X(t_1) - m_X(t_1)\right]\left[Y(t_2) - m_Y(t_2)\right]\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X(t_1))(y - m_Y(t_2))\, f_{XY}(x, y; t_1, t_2)\, dx\, dy$$

AUTOCOVARIANZA D'UN PROCESSO $X(t)$:

$$C_{XX}(t_1,t_2) = E\left\{\left[X(t_1) - m_X(t_1)\right]\left[X(t_2) - m_X(t_2)\right]\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_X(t_1))(x_2 - m_X(t_2))\, f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2$$

In pratica la autocovarianza descrive il grado di dipendenza tra lo scarto tra il processo e la sua media in istanti differenti: "alto" valore di $C_{XX}(t_1,t_2)$ per $t_1 \neq t_2$ è evidenza di un andamento piuttosto "regolare" del processo in quanto lo scarto all'istante t_1 rispetto al valor medio non sarà molto differente dallo scarto al tempo t_2 rispetto al valor medio.

Occorre notare che autocovarianza e autocorrelazione sono legate da:

$$\underline{C_{xx}(t_1,t_2)} = E\left\{\left[X(t_1)-m_x(t_1)\right]\left[X(t_2)-m_x(t_2)\right]\right\} =$$

$$= E\left\{\left[X(t_1)X(t_2) - m_x(t_1)X(t_2) - m_x(t_2)X(t_1)\right]\right\} +$$

$$+ m_x(t_1)m_x(t_2) =$$

$$= E\left\{X(t_1)X(t_2)\right\} - m_x(t_1)m_x(t_2) =$$

$$= \underline{R_{xx}(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2)}$$

PROCESSI STOCASTICI GAUSSIANI:

Hanno densità di pb. di tipo gaussiano:

$$f_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(t)}}\, e^{\left[\frac{-(x-m_x(t))^2}{2\sigma_x^2(t)}\right]}$$

PROCESSO RUMORE BIANCO

Un processo stocastico $X(t)$ è un rumore bianco se e solo se:

- $E\{X(t)\} = 0 \quad \forall t$ MEDIA NULLA
- $\sigma^2(t) = C_{XX}(t,t) =$ COSTANTE
- $C_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2) = 0 \quad \forall t_1 \neq t_2$ PERDO AD OGNI ISTANTE TEMPORALE LA MEMORIA
- la funzione densità di pb. è Gaussiana a media nulla e σ^2 cost.:

$$f_X(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)}, \quad \forall t$$

Il processo bianco è quindi caratterizzato dal fatto che è a media nulla e che la covarianza è nulla quindi non c'è correlazione per tempi differenti: i valori delle v.c. misurati ad un tempo t sono completamente scorrelati da quelli misurati ad un tempo t', cioè NON C'E' ALCUNA MEMORIA DEL PASSATO

STAZIONARIETÀ

Un processo stocastico è detto STAZIONARIO IN SENSO STRETTO quando le sue caratteristiche non variano se si sposta l'origine dei tempi, cioè se e solo se:

$$f_x(x_1,t_1;x_2,t_2;\dots;x_n,t_n)=f_x(x_1,t_1+\varepsilon;x_2,t_2+\varepsilon;\dots;x_n,t_n+\varepsilon)$$

da cui deriva che: $\forall \varepsilon$

$$f_x(x,t)=f_x(x,t+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \text{ quindi}$$

$$\underline{f_x(x,t)=f_x(x) \quad \text{INDIPEND. DAL TEMPO}}$$

e anche che:

$$\underline{f_x(x_1,t_1;x_2,t_2)}=\underline{f_x(x_1,t_1+\varepsilon;x_2,t_2+\varepsilon)}=\underline{f_x(x_1;x_2,\tau)}$$

con $\tau=t_1-t_2$

Il processo stocastico si dice STAZIONARIO IN SENSO LATO se e solo se:

- $\underline{E\{X(t)\}=\bar{x} \quad \text{COSTANTE}}$
- $\underline{R_{xx}(t_1,t_2)=R_{xx}(t_1-t_2)=R_{xx}(\tau)}$ con $\tau=t_1-t_2$
- $\underline{C_{xx}(t_1,t_2)=R_{xx}(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_x(t_2)=C_{xx}(\tau)}$

NOTA: la f.ne di autocorrelazione $R_{xx}(\tau)$ quantifica il "RICORDO" che il processo, all'istante $(t+\tau)$, ha di quello che è successo all'istante (t).

IL FILTRO DI KALMAN TEMPO CONT.

È un osservatore di stato con caratteristiche di ottimalità e sviluppato per sistemi affetti da DISTURBI STOCASTICI.

Duale al controllo LQR.

Si consideri il sistema:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v_x(t) \\ y(t) = Cx(t) + v_y(t) \end{cases}$$

dove: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$ RUMORE GAUSSIANO BIANCO CON VALORE ATTESO NULLO

$v_x(t)$ e $v_y(t)$ processi stocastici

$v_x(t) \rightarrow$ disturbo che influenza l'evoluzione dello stato: disturbi di attuazione e disturbi interni del sistema

$v_y(t) \rightarrow$ disturbo nelle misure di $y(t)$ (indice di prestazione)

Inoltre:

$E\{v_x(t)\} = E\{v_y(t)\} = 0$ medie nulle

$E\{v_x(t_1) v_x^t(t_2)\} = \tilde{Q}\,\delta(t_1 - t_2)$

$E\{v_y(t_1) v_y^t(t_2)\} = \tilde{R}\,\delta(t_1 - t_2)$

matrici di COVARIANZA (o CORRELAZ. in questo essendo le medie nulle coincidono)

$\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ VARIANZA DI X

$\tilde{R} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ VARIANZA DI Y

Inoltre si fa l'ipotesi che

$\tilde{Q} \geq 0$ semi def. positiva

$\tilde{R} > 0$ def. positiva

e i due processi stocastici SONO INCORRELATI TRA LORO (perché generati da cause differenti):

$E\{v_x(t_1) v_y^t(t_2)\} = 0 \quad \forall t_1, t_2$

inoltre $x(0) = x_0$ è una variabile casuale gaussiana con valore atteso:

$E\{x_0\} = \bar{x}_0$ incorrelata ai rumori $v_x(t)$ e $v_y(t)$:

$E\{x_0 v_x^t(t)\} = E\{x_0 v_y^t(t)\} = 0$

ed ha matrice di covarianza:

$$E\{(x_0-\bar{x}_0)(x_0-x_0)^t\} = P_0 \geq 0$$

A questo punto si considera l'osservatore:

$$\boxed{\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)\left[y(t) - C\hat{x}(t)\right]}$$

dove $K(t) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ guadagno TEMPO VARIANTE che dovrà soddisfare il criterio di ottimalità.

Definiamo l'errore di stima: $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$y(t) = Cx(t) + v_y(t)$

$$\underline{\dot{e}(t)} = \overset{\text{STATO REALE}}{\dot{x}(t)} - \overset{\text{STATO STIMATO}}{\dot{\hat{x}}(t)} = Ax(t) + Bu(t) + V_x(t) +$$

$$- A\hat{x}(t) - Bu(t) - K(t)\left[Cx(t) - C\hat{x}(t)\right] - K(t)V_y(t)$$

$$= Ae(t) - K(t)\left[Ce(t) + V_y(t)\right] + V_x(t) =$$

$$= \left[A - K(t)C\right]e(t) + \underbrace{\left[I \quad -K(t)\right]}_{\text{MATRICE DISTRIBUZIONE "INGRESSI"}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \end{bmatrix}}_{\text{"INGRESSO"}} =$$

$$\underline{\underline{= A_c(t)e(t) + B_c(t)\cdot V(t)}}$$ dove si è posto:

$$A_c(t) = \left[A - K(t)C\right] \qquad B_c(t) = \left[I \quad -K(t)\right]$$

Si consideri il valore atteso dell'errore di stima $E\{e(t)\} = \bar{e}(t)$

allora $E\{\dot{e}(t)\} = E\{A_c(t)e(t) + B_c(t)v(t)\} =$

$$= A_c(t)E\{e(t)\} + B_c(t)\underbrace{E\{v(t)\}}_{=0}$$

è rumore gaussiano a media nulla!

quindi

$$\dot{\bar{e}}(t) = A_c(t)\bar{e}(t) \qquad (1)$$

inoltre se poniamo $\hat{x}(0) = \bar{x}_0$ si ha:

$$E\{e(0)\} = E\{x(0) - \hat{x}(0)\} = 0 \qquad (2)$$

quindi da (1) e (2) si ricava che

$\underline{\bar{e}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0}$ (essendo un sistema autonomo con stat. iniziale nullo)

lo stato iniziale è quindi scelto in modo che il valore atteso dell'errore sia sempre nullo.

La matrice di covarianza dell'errore allora sarà:

$$\underline{\tilde{P}(t) = E\{e(t)e^T(t)\}}$$ (è una correlazione essendo l'errore a media nulla)

$$\boxed{\tilde{P}(0) = \tilde{P}_0}$$

PROBLEMA: vogliamo il guadagno $K(t)$ dell'osservatore in modo da MINIMIZZARE la matrice di covarianza dell'errore di stima $\tilde{P}(t) = E\{e(t)\,e^t(t)\}$ cioè:

$$\Rightarrow \boxed{\min_{K(t)} x^t \tilde{P}(t)\, x}$$ con $x \in \mathbb{R}^n$ vettore generico qualsiasi

TEOREMA:

Il guadagno $K(t)$ che risolve il problema sopra (cioè il filtro ottimo) è dato da:

MATRICE DISTRIBUZIONE USCITE

$$\boxed{K(t) = \tilde{P}(t)\, C^t\, \tilde{R}^{-1}}$$

VARIANZA PROCESSO RUMORE SU Y

dove $\tilde{P}(t)$ è la soluzione dell'equazione differenziale di RICCATI:

$$\boxed{\dot{\tilde{P}}(t) = A\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)A + \tilde{Q} - \tilde{P}(t)C^t\tilde{R}^{-1}C\tilde{P}(t)}$$

con le condizioni al contorno:

$$\tilde{P}(0) = \tilde{P}_0$$

DIMOSTRAZIONE No

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad e \quad E\{v(t_1)v^t(t_2)\} = \tilde{V}\,\delta(t_1 - t_2)$$

con $\tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{Q} & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{bmatrix}$ covarianza dei due rumori $v_x(t)$ e $v_y(t)$

$$\dot{e}(t) = A_c(t)e(t) + B_c(t)v(t)$$

$$e(t) = \phi(t,0)e(0) + \int_0^t \phi(t,\tau)B_c(\tau)v(\tau)\,d\tau$$

dove $\phi(t,\tau)$ è matrice di transizione t.c.:

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t,\tau) = A_c(t)\,\phi(t,\tau) \\ \phi(0,0) = I \end{cases}$$

Allora:

$$E\{e(t_1)\,e^t(t_2)\} = E\Big\{\Big[\phi(t_1,0)e(0) + \int_0^{t_1} \phi(t_1,\tau)B_c(\tau)v(\tau)\,d\tau\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big[e^t(0)\phi^t(t_2,0) + \int_0^{t_2} v^t(\tau)B_c^t(\tau)\,\phi^t(t_2,\tau)\,d\tau\Big]\Big\} =$$

$$= \phi(t_1,0)\,E\{e(0)e^t(0)\}\,\phi^t(t_2,0) + \qquad (1)$$

$$+ E\Big\{\phi(t_1,0)e(0)\int_0^{t_2} v^t(\tau)B_c^t(\tau)\phi^t(t_2,\tau)\,d\tau\Big\} + \qquad (2)$$

$$+ E\Big\{\int_0^{t_1} \phi(t_1,\tau)B_c(\tau)v(\tau)\,d\tau \cdot e^t(0)\,\phi^t(t_2,0)\Big\} + \qquad (3)$$

$$+ E\Big\{\int_0^{t_1} \phi(t_1,\tau)B_c(\tau)v(\tau)\,d\tau\Big(\int_0^{t_2} v^t(\tau)B_c^t(\tau)\phi^t(t_2,\tau)\,d\tau\Big)\Big\} = \qquad (4)$$

Si consideri che (2) e (3) sono termini nulli in quanto $e(0)$ e $v(0)$ sono incorrelati mentre (4) può essere scritto:

$$E\left\{\left[\int_0^{t_1}\phi(t_1,\tau)B_c(\tau)v(\tau)d\tau\right]\left[\int_0^{t_2}v^t(\tilde{\tau})B_c^t(\tilde{\tau})\phi^t(t_2,\tilde{\tau})d\tilde{\tau}\right]\right\}=$$

$$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\phi(t_1,\tau)B_c(\tau)\underbrace{E\{v(\tau)v^t(\tilde{\tau})\}}_{\bar{V}\delta(\tau-\tilde{\tau})}B_c^t(\tilde{\tau})\phi^t(t_2,\tilde{\tau})\,d\tau\, d\tilde{\tau}=$$

$$=\int_0^{t_1}\phi(t_1,\tau)B_c(\tau)\bar{V}\,B_c^t(\tau)\,\phi^t(t_2,\tau)\,d\tau$$

a questo punto se si pone $t_1=t_2=t$ si ha:

$$\tilde{P}(t)=E\{e(t)e^t(t)\}=\phi(t,0)\tilde{P}(0)\,\phi^t(t,0)+$$

$$+\int_0^t\phi(t,\tau)B_c(\tau)\bar{V}B_c^t(\tau)\,\phi^t(t,\tau)\,d\tau$$

derivando rispetto al tempo l'eq. ne sopra si ha:

- $$\frac{d}{dt}\left(\phi(t,0)\tilde{P}(0)\phi^t(t,0)\right)=A_c(t)\phi(t,0)\tilde{P}(0)\phi^t(t,0)+$$
$$+\phi(t,0)\tilde{P}(0)\,\phi^t(t,0)A_c^t(t)$$

NO

$$\circ\ \frac{d}{dt}\left[\int_0^t \phi(t,\tau) B_c(\tau) \bar{V} B_c^t(\tau)\, \phi^t(t,\tau)\, d\tau\right] =$$

$$= \int_0^t A_c(t)\, \phi(t,\tau) B_c(\tau) \bar{V} B_c^t(\tau) \phi^t(t,\tau)\, d\tau) +$$

$$+ \int_0^t \phi(t,\tau) B_c(\tau) \bar{V} B_c^t(\tau)\, \phi^t(t,\tau) A_c^t(\tau)\, d\tau \ +$$

$$+ \ B_c(t) \bar{V}\ B_c^t(t)$$ quindi

$$\dot{\tilde{P}}(t) = A_c(t)\, \phi(t,0) \tilde{P}(0)\, \phi^t(t,0) + A_c(t) \int_0^t \phi(t,\tau) \cdot$$

$$\cdot B_c(\tau) \bar{V}\ B_c^t(\tau)\, \phi^t(t,\tau)\, d\tau \ +$$

$$+ \ \phi(t,0)\ \tilde{P}(0)\ \phi^t(t,0) A_c^t(t) + \int_0^t \phi(t,\tau)\ B_c(\tau) \bar{V} \cdot$$

$$\cdot\ B_c^t(\tau)\, \phi^t(t,\tau)\, d\tau \cdot A_c^t(\tau) \ + \ B_c(t) \bar{V} B_c^t(t) =$$

$$= A_c(t) \tilde{P}(t) + \tilde{P}(t) A_c^t(t) + B_c(t) \bar{V} B_c^t(t)$$

ricordando che $A_c(t) = [A \quad -K(t)C]$

$$B_c(t) = [I \quad -K(t)]$$

e notando che:

$$B_c(t) \bar{V} B_c^t(t) = [I \ -K(t)] \begin{bmatrix} \tilde{Q} & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -K^t(t) \end{bmatrix}$$ si ha:

No

$$\tilde{P}(t) = \left[A - K(t)C\right]\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)\left[A - K(t)C\right]^t + \tilde{Q} + K(t)\tilde{R}K^t(t) \qquad e \ \tilde{P}(0) = \tilde{P}_0 \tag{5}$$

Si consideri ora il sistema:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad t \geq t_0 \quad x(t_0) = x_0$$

e il sistema:

$$-\dot{y}(t) = f(t^* - t, y(t)) \quad t \leq t_1, \quad y(t_1) = y_1$$

con $t_1 > t_0$ e $t^* = t_0 + t_1$, se $x_0 = y_1$
allora le soluzioni dei problemi soddisfano le relazioni:

- $x(t) = y(t^* - t) \qquad t \geq t_0$
- $y(t) = x(t^* - t) \qquad t \leq t_1$

ciò si verifica facendo il cambio di variabile $t \to t^* - t$

tornando quindi a (5) e facendo correre il tempo all'indietro si ricava nella variabile $\hat{P}(t)$:

$$-\dot{\hat{P}}(t) = \left[A - K(t^* - t)C\right]\hat{P}(t) + \hat{P}(t)\left[A - K(t^* - t)C\right]^t + \tilde{Q} + K(t^* - t)\tilde{R}K^t(t^* - t) \tag{6}$$

con $t^* = t_0 + t_1 = 0 + t_1$

e $\hat{P}(t_1) = \tilde{P}_0$

da quanto visto prima si ha:

$$\widetilde{P}(t) = \widehat{P}(t^* - t) \qquad t \leq t_1$$

Considerando il tempo da t_1 a $t_0 = 0$
e facendo le seguenti posizioni nella (6).

$$A \longleftrightarrow A^t$$
$$Q \longleftrightarrow \widetilde{Q}$$
$$R \longleftrightarrow \widetilde{R}$$
$$B \longleftrightarrow C^T$$
$$\mathbb{K}(t) \longleftrightarrow \mathbb{K}^t(t^* - t)$$
$$P(t) \longleftrightarrow \widehat{P}(t^* - t)$$

Si vede che l'eq. ne (6) è la eq. di Riccati
che risolve il problema lineare quad.:

$$\min_{\mathbb{K}(t)} \xi^t P(t) \xi$$

la cui soluzione è $\mathbb{K}(t) = R^{-1} B^t P(t)$

NOTA: per vedere che la (6) con le posizioni
fatte è effettivamente l'eq. diff. di Riccati
basta notare che (sostituendo):

$$-\dot{P}(t) = (A^t - \mathbb{K}^t(t) B^t) P(t) + P(t)(A - \mathbb{K}^t(t) B^t)^t + Q +$$
$$+ \mathbb{K}^t(t) R \, \mathbb{K}(t) =$$

$$= A^t P(t) - \mathbb{K}^t(t) B^t P(t) + P(t) A^t - P(t) B \mathbb{K}(t) +$$

$$+ Q + \mathbb{K}^t(t) R \mathbb{K}(t) = \quad \left(\text{sostit. } \mathbb{K}(t) = R^{-1} B^t P(t)\right)$$

$$= A^t P(t) - P^t(t) B R^{-1} B^t R^{-1} B^t P(t) + P(t) A^t +$$

$$- P(t) B R^{-1} B^t P(t) + Q + P^t(t) B R^{-1} \cancel{R}\, \cancel{R^{-1}} B^t P(t) =$$

$$= A^t P(t) + P(t) A^t + Q - P(t) B R^{-1} B^t P(t)$$

che effettivamente è l'eq. diff. di Riccati che minimizza $\xi^t P(t) \xi$ al variare di $\mathbb{K}(t)$ con soluzione $\mathbb{K}(t) = R^{-1} B^t P(t)$

Tornando a quanto visto a noi interessa minimizzare la forma quad. associata a $\tilde{P}(t)$ cioè il nostro problema era:

$$\min_{\mathbb{K}(t)} x^t \tilde{P}(t) x$$

e tale problema risulta risolto in base a quanto visto sopra se si impone:

$$\mathbb{K}^t(t^*-t) = \tilde{R}^{-1} C \hat{P}(t) = \tilde{R}^{-1} C \tilde{P}(t^*-t)$$

$$\left(\mathbb{K}(t) = R^{-1} B^t P(t) \right)$$

tale soluzione consente di minimizzare le forme quad. associate a $\tilde{P}(t^*-t)$ cioè risolve il pb.:

$$\min_{\mathbb{K}(t} x^t \tilde{P}(t^*-t) x$$

dove $\mathbb{K}^t(t^*-t)$ è quella vista sopra e $\tilde{P}(t^*-t)$ è quella dell'eq.ne (6)

A questo punto basta invertire il tempo e si ha la tesi. $\square$

ESEMPIO

Si vuole stimare una costante x di cui si dispone di una misura nel tempo che però è affetta da rumore.
Possiamo associare a x una "finta" dinamica ed utilizzare il filtro di Kalman tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \ , \ x(0) = \bar{x} \\ y(t) = x(t) + v_y(t) \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} y(t) \text{ misura in} \\ \text{tempo reale} \end{matrix} \right)$$

↑ rumore (SCALARE) BIANCO

Si ha quindi:

$A = 0 \ , \ C = 1 \ , \ \tilde{Q} = 0 \ , \ \tilde{R} = r$ (SCALARE) (correlazione del rumore v_y)

l'eq. ne di Riccati diventa: ($\hat{P}(t)$ SCALARE)

$$\dot{\tilde{P}}(t) = -\tilde{P}(t) R^{-1} \tilde{P}(t) \rightsquigarrow \frac{d\tilde{P}(t)}{dt} = -\left[\frac{\tilde{P}^2(t)}{r} \right]$$

quindi $\dfrac{d\tilde{P}(t)}{\tilde{P}^2(t)} = -\dfrac{dt}{r}$ integrando:

$$\int_{\tilde{P}_0}^{\tilde{P}(t)} \frac{d\tilde{P}(t)}{\tilde{P}^2(t)} = -r^{-1} \int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{\tilde{P}(t)} \Bigg|_{\tilde{P}_0}^{\tilde{P}(t)} = -r^{-1} t \quad \text{quindi: } \tilde{P}(t) = \frac{1}{\frac{t}{r} + \frac{1}{\tilde{P}_0}}$$

TEMPO → t; CORRELAZIONE ERRORE → r

DEVO TROVARE UNA STIMA $\hat{x}(t)$ PIÙ VICINA POSSIBILE A $x(t)$ REALE quindi il guadagno del filtro è:

$$\mathbb{K}(t) = \tilde{P}(t) C^T \tilde{R}^{-1} = \frac{r^{-1}}{t r^{-1} + \left(\frac{1}{\tilde{P}_0}\right)}$$

e l'espressione del filtro diventa:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left[\frac{r^{-1}}{r^{-1} t + \frac{1}{\tilde{P}_0}}\right] \left[y(t) - \hat{x}(t) \right]$$

K

Per $t \to +\infty$ il guadagno del filtro tende a zero e ciò è dovuto al fatto che man mano che si conoscono nuove misure di x la sua stima migliora.

TEOREMA

Se:

1) la coppia (A, B_q) con $\tilde{Q} = B_q B_q^t$ è raggiungibile

2) la coppia (A, C) è osservabile

Allora:

1) lo stimatore ottimo di Kalman è:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)\left[y(t) - C\hat{x}(t)\right]$$

con

$$K(t) = K = \bar{P}C^t R^{-1}$$

dove $\bar{P}$ è l'unica soluzione definita positiva dell'eq.ne algebrica di Riccati:

$$0 = A\bar{P} + \bar{P}A^t + \tilde{Q} - \bar{P}C^t R^{-1} C\bar{P}$$

2) lo stimatore così definito è asintoticamente stabile cioè tutti gli autovalori di $(A - KC)$ sono a parte reale negativa.

IL FILTRO DI KALMAN TEMPO DISCRETO

- PREDITTORE: quando la stima dello stato $x(k)$ dipende da $y(\cdot)$ e $u(\cdot)$ fino a $(k-1)$
- FILTRO: quando la stima dello stato $x(k)$ dipende da $y(\cdot)$ e $u(\cdot)$ fino a k.

Sia:

$$\Sigma_d : \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + v_x(k) \\ y(k) = Cx(k) + v_y(k) \end{cases}$$

con $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = v$ rumore bianco gaussiano

con valore atteso nullo e matrice di covarianza nota:

$$E\{v_x(k)\} = E\{v_y(k)\} = 0$$

$$E\{v_x(k_1)v_x^t(k_2)\} = \tilde{Q}\,\delta(k_1-k_2) \quad , \quad \tilde{Q} \geq 0$$

$$E\{v_y(k_1)v_y^t(k_2)\} = \tilde{R}\,\delta(k_1-k_2) \quad , \quad \tilde{R} > 0$$

$$E\{v_x(k_1)v_y^t(k_2)\} = 0 \quad \forall k_1, k_2 \quad \text{(incorrelati)}$$

Si suppone infine che $x(0)$ v.c. gaussiana con $E\{x(0)\} = \bar{x}_0$ e matrice di covarianza nota:

$$E\{[x(0)-\bar{x}_0][x(0)-\bar{x}_0]^t\} = \tilde{P}_0 \geq 0$$

ed incorrelata con i rumori V_x e V_y:

$$E\{x(0)V_x^t(k)\} = E\{x(0)V_y^t(k)\} = 0 \quad \forall k$$

IL PREDITTORE DI KALMAN

VARIABILE STIMATA

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K(k)\left[y(k) - C\hat{x}(k)\right]$$

GUADAGNO FILTRO DI KALMAN

↑

Stima dello stato all'istante $(k+1)$ conoscendo $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ agli istanti (k).

onde in questo caso:

$e(k)$ è l'errore di stima $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$

$e(k)$ ha la dinamica:

$$e(k+1) = \left[A - K(k)C\right]e(k) + V_x(k) - K(k)V_y(k)$$

$$= \left[A - K(k)C\right]e(k) + \left[I \quad -K(k)\right]V(k) =$$

$$e(k+1) = A_c(k)e(k) + B_c(k)V(k)$$

dove:
$$A_c(k) = \left[A - K(k)C\right]$$
$$B_c(k) = \left[I \quad -K(k)\right]$$
$$V(k) = \begin{bmatrix} V_x(k) \\ V_y(k) \end{bmatrix}$$

quindi $E\{e(k+1)\} = A_c(k)\,E\{e(k)\}$

(il rumore è a media nulla)

e scegliendo
$$\hat{x}(0) = \bar{x}_0$$

si ottiene $E\{e(0)\} = E\{x(0) - \hat{x}(0)\} = 0$

quindi la dinamica dell'errore è quella di un sistema autonomo con stato iniziale 0:

$$\underline{E\{e(k)\} = 0 \quad \forall k}$$

la sua matrice di covarianza è:
$$\tilde{P}(k) = E\{e(k)\,e^t(k)\} \quad \text{con } \tilde{P}(0) = \tilde{P}_0$$

IL PROBLEMA È: determinare un guadagno $K(k)$ del filtro che minimizzi la forma quadratica associata a $\tilde{P}(k)$:

$$\boxed{\min_{K(k)} \gamma^t \tilde{P}(k+1)\gamma} \quad \forall \gamma$$

TEOREMA:

Il guadagno $K(k)$ che minimizza la covarianza dell'errore è:

$$\boxed{K(k) = A\tilde{P}(k)C^t\left[C\tilde{P}C^t + \tilde{R}\right]^{-1}}$$

dove $\tilde{P}(k)$ è la soluzione dell'equazione alle differenze di Riccati:

$$\tilde{P}(k+1) = A\tilde{P}(k)A^t + \tilde{Q} - A\tilde{P}(k)C^t\left[C\tilde{P}(k)C^t + \tilde{R}\right]^{-1} \cdot C\tilde{P}(k)A^t$$

con condizione al contorno

$$\tilde{P}(0) = \tilde{P}_0$$

DIMOSTRAZIONE: NO

l'obbiettivo è minimizzare la matrice di covarianza dell'errore:

$$\min_{K(k)} \gamma^t P(k+1)\gamma \qquad \gamma \text{ vettore generico}$$

$$P(k+1) = E\{e(k+1)e^t(k+1)\} = E\{(A_c(k)e(k)+B_c(k)v(k))\cdot$$
$$\cdot(A_c(k)e(k)+B_c(k)v(k))^t\} = E\{A_c(k)e(k)e^t(k)A_c^t(k) +$$
$$+B_c(k)v(k)e^t(k)A_c^t(k) + B_c(k)v(k)e^t(k)A_c^t(k) +$$
$$+B_c(k)v(k)v^t(k)B_c^t(k)\} =$$ considerando che $e(k)$ e $v(k)$ sono incorrelati

$$= A_c(k)E\{e(k)e^t(k)\}A_c^t(k) +$$
$$+B_c(k)E\{v(k)v^t(k)\}B_c^t(k) =$$
$$= A_c(k)P(k)A_c^t(k) + B_c(k)\begin{bmatrix}\tilde{Q} & 0\\ 0 & \tilde{R}\end{bmatrix}B_c^t(k) =$$
$$= A_c(k)P(k)A_c^t(k) + \tilde{Q} + K(k)\tilde{R}K^t(k) =$$

considerando $B_c(k) = [I \;\; -K(k)]$ si ha:

$$[I \;\; -K(k)]\begin{bmatrix}\tilde{Q} & 0\\ 0 & \tilde{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ -K^t(k)\end{bmatrix} = \tilde{Q} + K(k)\tilde{R}K^t(k)$$

$$= [A-K(k)C]P(k)[A-K(k)C]^t + \tilde{Q} +$$
$$+K(k)\tilde{R}K^t(k) =$$
$$= AP(k)A^t - AP(k)C^tK^t(k) +$$
$$+K(k)CP(k)C^tK^t(k) - K(k)C\cdot$$
$$\cdot P(k)A^t + \tilde{Q} + K(k)\tilde{R}K^t(k) =$$
$$= AP(k)A^t - AP(k)C^tK^t(k) - K(k)CP(k)A^t + K(k)[CP(k)C^t+\tilde{R}]K^t(k) +$$
$$+\tilde{Q}$$

a questo punto basta derivare rispetto a $K(k)$ l'espressione di $P(k+1)$ e porre la derivata uguale a zero per ottenere il minimo di $P(k+1)$ al variare di $K(k)$:

$$\frac{d}{dK(k)}\Big(P(k+1)\Big) = -CP(k)A^t - CP(k)A^t + $$
$$+2\left[CP(k)C^t+\tilde{R}\right]K^t(k)$$

da cui:
$$2CP(k)A^t = \left[CP(k)C^t+\tilde{R}\right]K^t(k)\cdot 2$$
$$K(k)\left[CP(k)C^t+\tilde{R}\right] = AP(k)C^t$$
$$\underline{K(k) = AP(k)C^t\left[CP(k)C^t+\tilde{R}\right]^{-1}}$$

questa è la $K(k)$ che minimizza la forma quadratica associata alla covarianza dell'errore. Sostituendo questa espressione in $P(k+1)$ si ha:

$$P(k+1) = AP(k)A^t - AP(k)C^t\left[CP(k)C^t+\tilde{R}\right]^{-1}CP(k)A^t +$$
$$-AP(k)C^t\left[CP(k)C^t+\tilde{R}\right]^{-1}CP(k)A^t +$$
$$+AP(k)C^t\left[CP(k)C^t+\tilde{R}\right]^{-1}\cancel{\left[CP(k)C^t+\tilde{R}\right]}\cancel{\left[CP(k)C^t+\tilde{R}\right]^{-1}}\cdot$$
$$\cdot CP(k)A^t + \tilde{Q} =$$
$$= AP(k)A^t - AP(k)C^t\left[CP(k)C^t+\tilde{R}\right]^{-1}CP(k)A^t + \tilde{Q} \quad \square$$

TEOREMA:

Se:

1) la coppia (A, B_q) con $\tilde{Q} = B_q B_q^t$ è raggiungibile

2) la coppia (C, A) è osservabile

Allora:

1) Il predittore di Kalman ottimo è:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K(k)\left[y(k) - C\hat{x}(k)\right]$$

con

$$K(k) = A\bar{P}C^t\left[C\bar{P}C^t + \tilde{R}\right]^{-1} = K$$

e $\bar{P}$ è l'unica soluzione definita positiva dell'eq. ne stazionaria di Riccati:

$$\bar{P} = A\bar{P}A^t + \tilde{Q} - A\bar{P}C^t\left[C\bar{P}C^t + \tilde{R}\right]^{-1} C\bar{P}A^t$$

2) Tale stimatore è asintoticamente stabile cioè gli autovalori di $(A - KC)$ hanno modulo minore di 1.