ACCELERAZIONE MEDIA

$$a_m(t) = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t}$$

ACCELERAZIONE ISTANTANEA

$$a(t) = \lim \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} \quad \Delta t \to 0$$

PER ACCELERAZIONE COSTANTE

$$v(t) = at + v_0 \qquad x(t) = \tfrac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

VELOCITÀ MEDIA (2 DIM)

$$\vec{v}_m(t) = \frac{\Delta(\vec{OP})}{\Delta t}$$

VELOCITÀ ISTANTANEA (2 DIM)

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\vec{OP})}{\Delta t} = \frac{d\vec{OP}}{dt}$$

ACCELERAZIONE ISTANTANEA (2 DIM)

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

ACCELERAZIONE CENTRIPETA

$$a_n = v^2/R \quad \text{se } R \to \infty \quad a_n \text{ nulla}$$

R = raggio curvatura traiettoria

2° LEGGE DELLA DINAMICA

$$\vec{f} = m\vec{a} \ (N)$$

CHILOGRAMMO FORZA

$$g = 9{,}806 \ m/s^2 \qquad 1 k_g f = 9{,}806 \ N$$

3° LEGGE DI NEWTON

$$\vec{f}_{AB} = -\vec{f}_{BA}$$

FORZA PESO

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

FORZA NORMALE

$$\vec{N} = m\vec{g}$$

FORZA ESERCITATA DA UNA MOLLA

$F = -Kx$ [LEGGE DI HOOKE]

MOTO DI CADUTA LIBERA

$$g = 9{,}8 \ m/s$$

FORZA CENTRIPETA

$$F = m \, v^2/R$$

ATTRITO STATICO

$$f_s \leq \mu_s N$$

μ_s, μ_c = coefficienti

ATTRITO DINAMICO

$$f_c = \mu_c N$$

N = modulo F normale

LAVORO DI UNA FORZA

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad \left(\text{sul tratto } AB\right)$$

SE LA FORZA È COSTANTE E LA TRAIETTORIA È RETTILINEA $\Rightarrow L = f \cdot l \cdot \cos\varphi$

l = segmento AB   φ = angolo tra l e f

ENERGIA CINETICA

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2 \ [J]$$

IL LAVORO È

$$L = \int_{x_0}^{x} F\,dx = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 \ \left(\text{variazione } E_C\right) \ [J]$$

$$\Rightarrow L = \Delta K \ [J]$$

POTENZA

$$P = L/t \ [W]$$

UN CAMPO DI FORZE È CONSERVATIVO QUANDO $\text{rot}\,\vec{F} = \nabla \wedge \vec{F} = 0$

$$L_{AB_1} + L_{AB_2} = 0$$

$$L_{AB_1} = -L_{AB_2}$$

IL CAMPO $\vec{F}$ È CONSERVATIVO SE ESISTE UNA FUNZIONE V TALE CHE $\vec{F} = -\text{grad}\,V$

V = CHIAMATA ENERGIA POTENZIALE

$$\Delta K + \Delta U = 0 \qquad \Delta K = -\Delta U \qquad K + U = \text{COSTANTE} = E$$

ENERGIA MECCANICA TOTALE

$$L = \Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta U = -L$$

L'ENERGIA POTENZIALE DIPENDE SOLO DALLA POSIZIONE DEL PUNTO MATERIALE

DURANTE IL MOTO L'ENERGIA MECCANICA TOTALE RIMANE COSTANTE

IN UNA DIMENSIONE

$$\Delta U = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

ALTRIMENTI

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + U(x_0)$$

CENTRO DI MASSA

$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

QUANTITÀ DI MOTO

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

FORZA ESTERNA

$$\vec{F}_{est} = M\vec{a}_{cm} = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

ENERGIA POTENZIALE

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{R}$$

POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$$V_1 = \frac{E_p}{m_2} = -G\frac{m_1}{R}$$

LAVORO PER UNO SPOSTAMENTO DI m_2 DA A A B NEL CAMPO DI …

$$W = -m_2\,[V_{1,B} - V_{1,A}]$$

VELOCITÀ AREOLARE

$$\frac{1}{2}\omega R^2$$

2° LEGGE DI KEPLERO

$$\frac{1}{2}\omega R^2 = \text{COSTANTE}$$

FORZA ATTRATTIVA TRA 2 PARTICELLE

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

R = DISTANZA TRA LE PARTICELLE

COSTANTE GRAVITAZIONALE

$$G = 6{,}6720 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/Kg^2$$

MOTO DEL PENDOLO

$$F = -mg\,\text{sen}\,\theta = ma$$

NUMERO DI OSCILLAZIONI PER UNITÀ DI TEMPO

$$f = \text{FREQUENZA} = 1/T$$

PERIODO DEL MOTO

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m/K}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

ω = PULSAZIONE O FREQUENZA ANGOLARE

VELOCITÀ ANGOLARE MEDIA

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t = t_2 - t_1}$$

VELOCITÀ ANGOLARE ISTANTANEA

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

ACCELERAZIONE ANGOLARE MEDIA

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

ACCELERAZIONE ANGOLARE ISTANTANEA

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

PER UN MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$s(t) = s_0 + vt$

$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$

$a = a_n = v^2/R = \omega^2 R$ ACCELERAZIONE NORMALE

PER UN MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME

$a_t = dv/dt$ ACCELERAZIONE TANGENZIALE

ACCELERAZIONE ANGOLARE $\alpha = \frac{1}{R} a_t$

MOMENTO MECCANICO

$\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{F}$ => MODULO DATO DA $\tau = RF \operatorname{sen}\theta$

MOMENTO ANGOLARE

$\vec{l} = \vec{R} \wedge \vec{p} = Rp \operatorname{sen}\theta$

$\vec{\tau} = d\vec{l}/dt$ $\quad \vec{\tau}_{est} = d\vec{L}/dt$ $\quad L = L_{1,tr} + L_{II}$ $\quad \vec{F}_{est} = d\vec{P}/dt$

ENERGIA CINETICA DEL CORPO IN ROTAZIONE $K = \frac{1}{2} I \omega^2$

$I = I_{CM} + Mh^2$

PER UN CORPO RIGIDO

$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

VELOCITÀ DEL PUNTO C CHE DISTA R DAL CENTRO DI MASSA

$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

CONDIZIONE DI ROTOLAMENTO PURO $\vec{v}_C = 0$ QUINDI $\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \wedge \vec{R}$

$v_{CM} = \omega R$ => $a_{CM} = \alpha R$

PENDOLO COMPOSTO, MOMENTO DELLA F DI RICHIAMO = $-Mgh \operatorname{sen}\theta$

PER UN MOTO ROTATORIO L'ENERGIA CINETICA È

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

IN ASSENZA DI FORZE ESTERNE LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE DEL SISTEMA NON CAMBIA

VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO DURANTE L'URTO

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_f} \vec{F}\, dt$$

VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO DOVUTA ALL'URTO

$$\Delta \vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_1\, dt = \vec{F}_1 \Delta t$$

PENDOLO BALISTICO

L'URTO È COMPLETAMENTE ANELASTICO

SI CONSERVA LA q DI MOTO ORIZZONTALE DEL SISTEMA

$m v_1 + 0 = (m + M) v_2$

MASSA RIDOTTA

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Supporto di

Fisica AB

(prof. Manfredi)

Grandezze

Una grandezza è una osservabile per la quale si può definire:

a) una unità di misura,

b) un criterio di confronto fra l'osservabile e l'unità di misura.

Esempio tipico: la lunghezza di un segmento è misurata, una volta noto un segmento unità di misura, dal numero di volte che contiene l'unità.

Si dicono grandezze di una stessa classe delle osservabili per le quali sia possibile definire operativamente il confronto fra due di esse.

Per esse si può definire una serie di operazioni quali somma, sottrazione.

Grandezze che appartengono alla stessa classe si dicono "omogenee".

La somma e la differenza possono avvenire solo fra grandezze omogenee.

E il prodotto o la divisione?

Si chiama indice di stato una osservabile quale ad es. il tempo o la temperatura.

Per queste bisogna definire uno "zero" e quindi il tempo e la temperatura diventano "intervalli di tempo" o "salti di temperatura".

Questi ultimi diventano grandezze.

Equazioni dimensionali.

Per scrivere delle relazioni analitiche fra le grandezze è necessario indicare a quali classi esse appartengano.
Si introducono quindi opportuni simboli che indicano queste classi.

Ad esempio per indicare delle lunghezze useremo il simbolo L chiuso in parentesi quadra [L], per le durate di tempo [T], per le masse [M] ecc.

Attenzione: se in una relazione compare la somma o differenza di diversi termini, ogni termine deve avere le stesse dimensioni degli altri. [Principio di omogeneità dimensionale].

Vedremo in seguito degli esempi

Ricordare che in espressioni quali
sen... , cos.... , log.... , $e^{\cdots}$

gli argomenti devono essere numeri puri oppure rapporti di grandezze omogenee: $\frac{x}{\lambda}$, $\frac{t}{T}$ --- ecc.

Unità di misura.

Tra le grandezze fisiche se ne scelgono alcune che vengono chiamate "fondamentali" e tutte le altre vengono "derivate" da queste.

- sistema vecchio M K S
  metro, kilogrammo, secondo
- ora è diventato S I (sistema internazionale)

Tabella unità SI

Grandezza	Nome	Simbolo
- lunghezza	metro	m
- massa	chilogrammo	kg
- tempo	secondo	s
- intensità di corrente elettrica	ampere	A
- temperatura termodinamica	grado Kelvin	K
- quantità di materia	mole	mol
- intensità luminosa	candela	cd

- metro = { fino a poco tempo fa = multiplo della lunghezza d'onda del colore rosso emesso dagli atomi di Kripton
  oggi = lunghezza percorsa in 1/299'792'456 secondi,
- massa = cilindro platino-iridio,
- tempo = orologio a fasci di atomi di cesio.

Altri sistemi :

- CGS :

centimetro	cm
grammo	g
secondo	s

- sistema di Gauss : usato dai teorici

- Sistema pratico :

Si prendono come grandezze fondamentali
- la lunghezza,
- il Kilogrammo-forza [kgf],
- il tempo.

PREFISSI MULTIPLI			PREFISSI SOTTOMULTIPLI		
10^{3}	K	(kilo)	10^{-3}	m	(milli)
10^{6}	M	(mega)	10^{-6}	μ	(micro)
10^{9}	G	(giga)	10^{-9}	n	(nano)
10^{12}	T	(tera)	10^{-12}	p	(pico)
10^{15}	P	(peta)	10^{-15}	f	(femto)

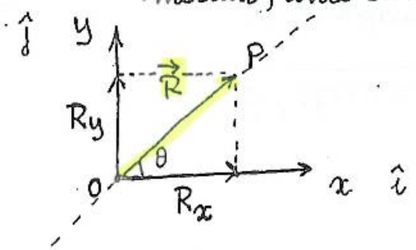
$a+(-b)$

ESEMPIO 1 K Ω = 1 Kilo Ω = 1000 Ω

1 m Ω = 1 milli Ω = 0.001 Ω

Vettori

Vettore = grandezza individuata da un modulo, una direzione e un verso.



il vettore $\vec{R}$ definisce la posizione del punto P.

Versore = vettore di modulo unitario

il vettore si può scrivere :

$$\vec{R} = R_x \cdot \hat{\imath} + R_y \hat{j}$$

dove $\hat{\imath}$ e $\hat{j}$ sono i versori dell'asse x e dell'asse y rispettivamente ; R_x e R_y sono chiamate le componenti del vettore.

Il modulo del vettore è

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

e la sua direzione è individuata da

$$tg\,\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

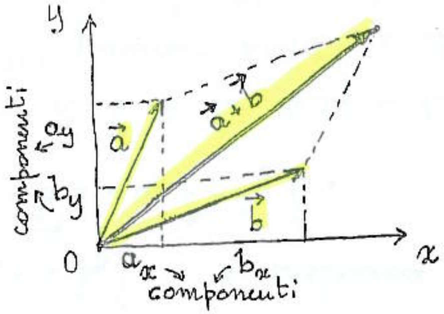
considerare le dimensioni

Operazioni con i vettori.

Somma di due vettori:

$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$

$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$



costruzione geometrica con la regola del parallelogrammo

La somma è il vettore diagonale del parallelogrammo.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j}.$$

Esempio:

$$\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j}$$

$$\vec{b} = -3\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = 1\hat{i} + 1\hat{j}$$

La somma vettoriale ha queste proprietà:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ prop. commutativa,

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ prop. associativa,

Moltiplicazione di un vettore per un numero: $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$

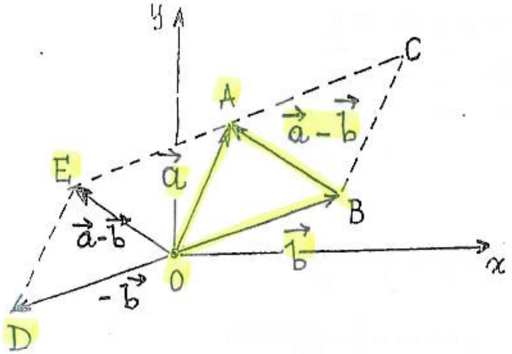
$$m\,\vec{a} = m a_x \hat{i} + m a_y \hat{j}$$

Se m è negativo:

$$-m\vec{a} = -m a_x \hat{i} - m a_y \hat{j}.$$

Moltiplicare un vettore per -1 vuol dire cambiare verso al vettore.

Differenza di due vettori :



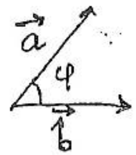
dati i due vettori $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$ e $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$, si costruisce il vettore $-\vec{b} = -b_x \hat{i} - b_y \hat{j}$.

Il vettore $\vec{a}-\vec{b}$ è la diagonale OE del parallelogrammo AODE e dalla figura si vede che OE è uguale a AB. Quindi la somma $\vec{a}+\vec{b}$ è la diagonale OC e la differenza $\vec{a}-\vec{b}$ è la diagonale AB del parallelogrammo OACB.

Prodotto di due vettori .

Prodotto scalare :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos\varphi$$



Se $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

vedremo fra poco come si può esprimere il prodotto scalare con le componenti.

Il prodotto scalare di due vettori è uno scalare. Quando è nullo?

Prodotto vettore :

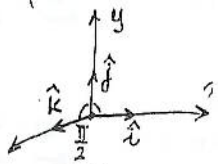
$\vec{a} \wedge \vec{b} =$ un vettore con :

- modulo $= a\, b \operatorname{sen}\varphi$
- direzione perpendicolare al piano individuato da a e b.
- verso ottenuto con la regola della "mano destra" : pollice su $\vec{a}$, indice su $\vec{b}$, il

Operazioni con i versori :

① $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ prod. scalare

questi prodotti scalari sono = 1 perché l'angolo è zero e $\cos 0° = 1$.



$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{i}\cdot\hat{k} = 0$

perché l'angolo è di 90° e il $\cos 90° = 0$.
Ricordare che il prodotto scalare è uno scalare.

② $\hat{i}\wedge\hat{i} = \hat{j}\wedge\hat{j} = \hat{k}\wedge\hat{k} = 0$ prod. vettore

perché l'angolo è zero e il prodotto vettore prevede il sen dell'angolo e $\text{sen}\, 0° = 0$

$\hat{i}\wedge\hat{j} = \hat{k}$ $\quad \hat{j}\wedge\hat{k} = \hat{i}$ $\quad \hat{k}\wedge\hat{i} = \hat{j}$

Ricordare che il prodotto vettore è un vettore.

Attenzione : $\hat{j}\wedge\hat{i} = -\hat{k}$ $\quad \hat{i}\wedge\hat{k} = -\hat{j}$ $\quad \hat{k}\wedge\hat{j} = -\hat{i}$

basta applicare la regola della mano destra.

COME GEOMETRIA + $\hat{i}$ $\hat{j}$ $\hat{k}$

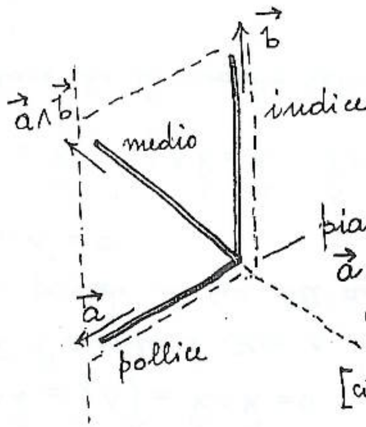
Consideriamo il prodotto vettore :

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\wedge(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) =$$
$$= a_x b_x \underbrace{\hat{i}\wedge\hat{i}}_{0} + a_x b_y \underbrace{\hat{i}\wedge\hat{j}}_{\hat{k}} + a_x b_z \underbrace{\hat{i}\wedge\hat{k}}_{-\hat{j}}$$
$$+ a_y b_x \underbrace{\hat{j}\wedge\hat{i}}_{-\hat{k}} + a_y \cdot b_y \underbrace{\hat{j}\wedge\hat{j}}_{0} + a_y b_z \underbrace{\hat{j}\wedge\hat{k}}_{\hat{i}} +$$
$$+ a_z b_x \underbrace{\hat{k}\wedge\hat{i}}_{\hat{j}} + a_z b_y \underbrace{\hat{k}\wedge\hat{j}}_{-\hat{i}} + a_z b_z \underbrace{\hat{k}\wedge\hat{k}}_{0} =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}.$$

Consideriamo il prodotto scalare :

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) =$$
$$= a_x b_x \underbrace{\hat{i}\cdot\hat{i}}_{1} + a_x b_y \underbrace{\hat{i}\cdot\hat{j}}_{0} + a_x b_z \underbrace{\hat{i}\cdot\hat{k}}_{0} +$$
$$+ a_y b_x \underbrace{\hat{j}\cdot\hat{i}}_{0} + a_y b_y \underbrace{\hat{j}\cdot\hat{j}}_{1} + a_y b_z \underbrace{\hat{j}\cdot\hat{k}}_{0} +$$
$$+ a_z b_x \underbrace{\hat{k}\cdot\hat{i}}_{0} + a_z b_y \underbrace{\hat{k}\cdot\hat{j}}_{0} + a_z b_z \underbrace{\hat{k}\cdot\hat{k}}_{1} =$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

medio individua il verso del prodotto.



piano individuato da $\vec{a}$ e da $\vec{b}$. La direzione di $\vec{a} \wedge \vec{b}$ è perpendicolare a questo piano, [cioè al piano del foglio].

attenzione:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ è uno scalare → NUMERO

ma $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{b} \wedge \vec{a}$ è un vettore

e pensando alla regola della mano destra si vede che cambia il verso del vettore risultato.

Ricordiamo che:

Versore = vettore di modulo unitario.

Un vettore si può scrivere come modulo per un versore:

$$\vec{R} = R \, \mathrm{vers}\vec{R} = R \cdot \hat{R}$$

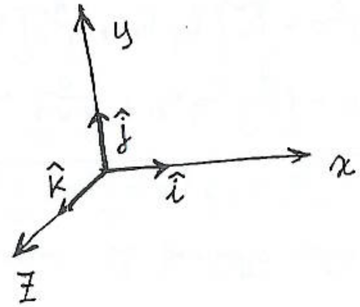
Se assumiamo ^ come segno di versore, come detto all'inizio.

Un versore si può scrivere:

$$\hat{R} = \mathrm{vers}\vec{R} = \frac{\vec{R}}{R}.$$

Dimensioni di $\hat{R}$?

Siano $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ i versori degli assi x, y e z:



Derivata di un vettore :

sia $\vec{R} = R\,\hat{R}$;

consideriamo ad esempio

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\,(R \cdot \hat{R})}{dt} = \frac{dR}{dt} \cdot \hat{R} + R \cdot \frac{d\hat{R}}{dt} .$$

Se il vettore lo scriviamo come $\vec{R} = R_x\,\hat{\imath} + R_y\,\hat{\jmath} + R_z\,\hat{k}$ quale è la sua derivata ?

E l'integrale di un vettore ?

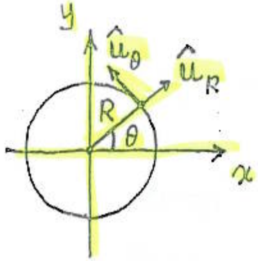
Dato un vettore $\vec{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k}$

si definisce quadrato del vettore

$$|\vec{a}|^2 = [a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k}] \cdot [a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k}]$$

$$= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Coordinate polari.



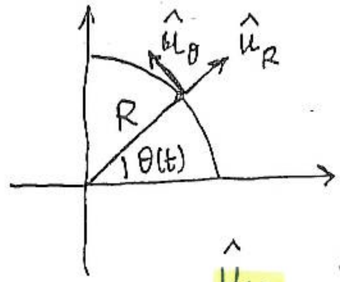
In alcuni casi invece di considerare le componenti cartesiane $x(t)$ e $y(t)$ e i due versori $\hat{i}$ e $\hat{j}$, conviene usare le coordinate polari.

Ad esempio, se un punto si muove su una circonferenza, la sua posizione può essere individuata da R (raggio) che non cambia in modulo e dall'angolo $\theta(t)$

Le relazioni fra $x(t)$, $y(t)$ e R e $\vartheta(t)$ sono

$$x(t) = R\cos\theta \qquad R = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y(t) = R\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

In coordinate polari si introducono due versori:



$\hat{u}_\theta$ tangente alla circonferenza punto per punto

$\hat{u}_R$ ha la direzione di R.

I due versori $\hat{u}_\theta$ e $\hat{u}_R$ hanno direzione che cambia da punto a punto, mentre $\hat{i}$ e $\hat{j}$ hanno direzione fissa. Invece di $\hat{u}_\theta$ e $\hat{u}_R$ si può trovare la notazione $\hat{t}$ (versor tangente) e $\hat{n}$ (versor normale).

Cinematica.

Concetti :

- traiettoria,
- spostamento,
- legge del moto
- velocità
- accelerazione.

Non ci occuperemo di massa e forza.

attenzione : $\boxed{\text{spostamento, velocità e accelerazione sono vettori.}}$

Si può trascurare la natura vettoriale se siamo in una sola dimensione. Non esiste una velocità scalare e una vettoriale.

Cinematica.

Alcune considerazioni generali.

La cinematica studia la descrizione del moto dei corpi [cioè le posizione di un oggetto nello spazio e nel tempo] senza considerare le cause che hanno prodotto il moto.

Nota : 1) gli oggetti presi in esame sono costituiti da un grandissimo numero di molecole ; alcune delle considerazioni che faremo non saranno più valide su dimensioni atomiche.

2) in meccanica classica le velocità dei corpi sono sempre molto minori della velocità di propagazione della luce ($3 \cdot 10^5$ Km/s)

3) come già detto considereremo solo oggetti schematizzabili come punti materiali.

4) quando un corpo A assume posizioni diverse rispetto ad un osservatore O [cioè rispetto al suo sistema di riferimento] si dice che A si muove rispetto ad O.

Si può parlare di moto solo rispetto ad un sistema di riferimento precisato.

Una persona su un veicolo in moto è ferma rispetto al veicolo, ma è in moto rispetto alla terra.

[problema dei sistemi di riferimento su cui torneremo più avanti].

Possiamo definire ogni posizione occupata da un oggetto mediante una quaterna di coordinate x, y, z, t oppure mediante un punto P la cui posizione è funzione del tempo.

Le tre coordinate x, y, z che danno la posizione dell'oggetto si scrivono:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t) .$$

Queste tre equazioni descrivono completamente il moto e danno ad ogni istante la posizione dell'oggetto.

L'insieme dei punti occupati dall'oggetto in moto si chiama **traiettoria** ed è una linea fissata nello spazio.

Le equazioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ rappresentano analiticamente la traiettoria e descrivono anche il modo con cui l'oggetto percorre la traiettoria in funzione del tempo cioè danno la **legge oraria**.

Prendiamo ad esempio il moto di un treno: la linea percorsa è la traiettoria e l'orario del passaggio alle varie stazioni è la legge oraria.

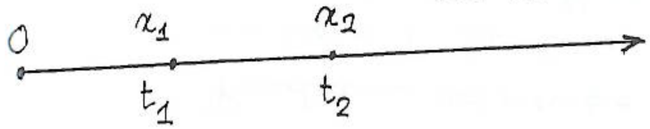
Nota: la traiettoria può essere una retta; il moto si dice rettilineo. Può essere una circonferenza e il moto si dice circolare. In generale è una linea.

Velocità e accelerazione

attenzione: velocità e accelerazione come lo spostamento sono vettori. In casi particolari possono venire considerati come scalari perché la direzione è fissa, come ad esempio il moto su una retta.

Velocità e accelerazione in una dimensione.

Consideriamo un punto che si muova lungo una retta, con una legge $x = x(t)$ legge oraria



sia x_1 la posizione del punto per $t = t_1$ [o lo spostamento da O]

e x_2 la posizione del punto per $t = t_2$ [o lo spostamento da O]

Chiamiamo velocità media :

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$$

cioè v_m è uguale al rapporto fra il tratto di traiettoria Δx descritto dal punto materiale e l'intervallo di tempo impiegato.

Riduciamo ora Δx, cioè avviciniamo sempre di più x_2 a x_1. Definiamo velocità istantanea :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{d\,x(t)}{dt}$$

quindi $v(t)$ = derivata della $x(t)$ rispetto a t.

$\boxed{[v] = [L][T^{-1}]}$ dimensioni $\boxed{\frac{\text{metri}}{\text{secondo}} ; \frac{\text{centim.}}{\text{secondo}}}$ unità

La $v(t)$ può non dipendere da t [e allora il moto avviene con velocità costante] o può dipendere da t.

Nel secondo caso vogliamo studiare come varia nel tempo la velocità.

$\frac{\Delta}{\Delta}$ = posso fare la derivata

$\int v.$

Siano $v_1(t_1)$ e $v_2(t_2)$ le velocità del punto all'istante t_1 e all'istante t_2 rispettivamente.

Definiamo accelerazione media:

$$a_m(t) = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t}$$

e accelerazione istantanea

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t}$$

dimensioni:

$$[a] = [L][T^{-2}]$$

infatti $[a] = [v][T^{-1}]$

unità di misura:

$$\frac{\text{metro}}{(\text{secondo})^2} \; ; \quad \frac{\text{cm}}{(\text{secondo})^2}$$

Se l'accelerazione è costante si parla di moto uniformemente accelerato o uniformemente ritardato.

Se $v(t)$ è costante si parla di moto uniforme.

Cosa possiamo notare?

1) nella trattazione precedente non intervengono nè la massa nè la forza, che in cinematica non interessano, come abbiamo detto.

2) non si è parlato di vettori. Perchè? Quale considerazione si può fare?

Nota la $x = x(t)$

abbiamo ottenuto :

$$v = v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

e $$a = a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}.$$

Se è nota a come facciamo a ricavare la $v(t)$ e la $x(t)$?

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) \text{ la scriviamo come } v.$$

$$dv = a\,dt$$

$$\int dv = \int a\,dt$$

$$v = \int a\,dt + C$$

$\Downarrow$

costante

$$v = \int a\,dt + C$$

se a è costante :

$$v = a\int dt + C = at + C.$$

In modo analogo :

$$v = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\int dx(t) = \int v(t)\,dt$$

ma $v = v(t) = at + C$

$$\int dx(t) = x(t) = \int (at + C)\,dt + C'$$

$$\| x(t) = \frac{1}{2}at^2 + Ct + C' \|$$ IMPO X a COSTANTE

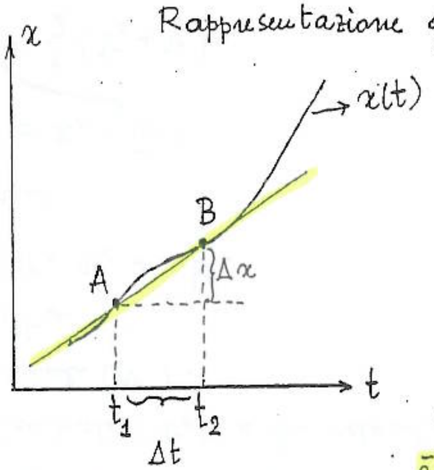
questo è vero se a è costante.

Per $t=0$ abbiamo un valore particolare di $v(t)$ e cioè v_0 e un valore particolare di $x(t)$ e cioè x_0.

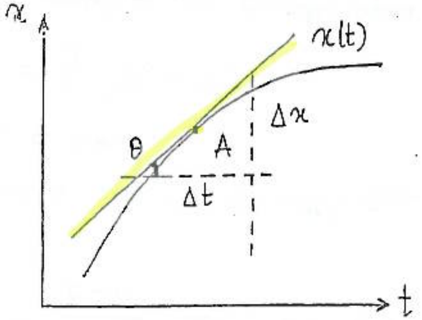
v_0 e x_0 danno le condizioni iniziali.

$v(t) = at + v_0$ $\quad\quad$ $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$.

Rappresentazione geometrica.



È riportata in figura la legge $x = x(t)$ di moto di un punto.
La velocità media nell'intervallo Δt è la pendenza della retta che congiunge i punti A e B.



La velocità istantanea nel punto A è la pendenza della tangente nel punto.

Esempio

Consideriamo un moto lungo una retta, quindi la traiettoria è la retta stessa.

Supponiamo che valga una legge del moto del tipo:

$$s(t) = x(t) = a + bt + ct^2 .$$

[attenzione questo è un caso particolare].

Considerazione sulle dimensioni:

$$s(t) = x(t) = [L]$$

per il principio di omogeneità dimensionale:

$$[a] = [bt] = [ct^2] = [L]$$

quindi

$$[a] = [L]$$

$$[b] = [LT^{-1}]$$

$$[c] = [LT^{-2}] .$$

Consideriamo la velocità media $\bar{v}$

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t - 0} \Rightarrow x = x_0 + \bar{v} t$$

la particella sia in x all'istante t e in x_0 a $t=0$.

Ma $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$

la velocità media in qualunque intervallo di tempo - ad esempio fra $t=0$ e un generico istante t - è la media fra la velocità nel punto iniziale (v_0) e la velocità nel punto finale (v).

Si ha inoltre

$$v = v_0 + at.$$

Consideriamo

$$\begin{cases} x = x_0 + \bar{v} t \\ \bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v) \end{cases}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v) t$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0) t$$

Consideriamo:

$$\begin{cases} v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \\ x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0) t \end{cases}$$

Si ottiene sostituendo t nella seconda equazione:

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \frac{(v + v_0)(v - v_0)}{a}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Le equazioni:

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0) t \qquad v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

rappresentano un insieme completo di equazioni per il moto rettilineo con accelerazione <u>costante</u>.

ESEMPIO:

La velocità $v(t)$ è:

$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = b + 2ct$$

[fare il controllo dimensionale: b e ct devono avere le dimensioni $[LT^{-1}]$].

L'accelerazione è

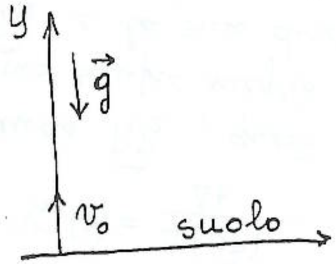
$$a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = 2c$$

Abbiamo trattato il problema solo in una dimensione e quindi non abbiamo considerat la direzione.

Matematicamente l'operazione di derivata vuol dire applicare $\frac{d}{dt}$ [operatore] a $x(t)$ e a $v(t)$.

Esempio:

Una palla viene lanciata dal suolo con velocità $v_0 = 29.4\ m/s$.



Quanto tempo impiega a raggiungere il punto più alto?

condizioni iniziali:

$t_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_0 = 29.4\ m/s$.

$$a(t) = a = -g$$

$$v(t) = -\int g\,dt + v_0 = -gt + v_0$$

la palla si ferma quando $v(t) = 0$

e quindi $-gt + v_0 = 0$ $\quad t = \frac{v_0}{g} =$

$$t = \frac{29.4}{9.8} = 3 \text{ secondi}.$$

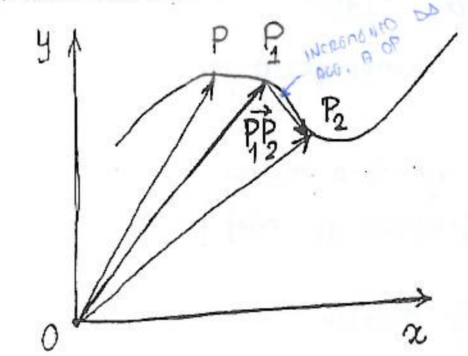
A quale altezza arriva la palla quando si ferma?

$$y(t) = \int v(t)\,dt = \int (-gt + v_0)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

a $t = 3\,s$ $\quad y(3s) = 44.1\,m$.

Moto in due dimensioni



Il punto P è funzione di t e descrive la linea curva, che costituisce la traiettoria.

Consideriamo il tratto $\overrightarrow{P_1P_2}$: esso rappresenta l'incremento del vettore $\overrightarrow{OP}(t)$ [$\overrightarrow{OP}$ è funzione del tempo quindi si dovrebbe scrivere $\overrightarrow{OP}(t)$], quando il punto P passa dalla posizione P_1 alla posizione P_2.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

e quindi $\overrightarrow{P_1P_2} = \Delta \overrightarrow{OP}$.

Definiamo velocità media

$$\vec{v}_m(t) = \frac{\Delta(\overrightarrow{OP})}{\Delta t}.$$

Riducendo $\overrightarrow{P_1P_2}$, questo segmento approssima sempre meglio l'arco di curva $\widehat{P_1P_2}$ e la sua direzione è quella della tangente alla curva.

Definiamo velocità istantanea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\overrightarrow{OP})}{\Delta t} = \frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}.$$

La velocità così definita si può rappresentare come un vettore, tangente alla traiettoria punto per punto.

Notiamo che derivando $\vec{OP}$ si ottiene il vettore $\vec{v}$ che è tangente alla traiettoria che però non è diretto come $\vec{OP}$.

In generale si procede nel seguente modo; si parte dalle componenti del vettore $\vec{OP}(t)$ lungo gli assi [ad esempio x e y].

Siano $x = x(t)$ e $y = y(t)$ le due componenti;

possiamo ricavare

$$\underbrace{v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad v_y(t) = \frac{d}{dt}y(t)}$$

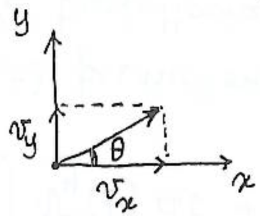
con queste relazioni conosciamo tutto sul vettore velocità. $\Rightarrow$

Il vettore velocità è

$$\vec{v} = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j}$$

il modulo di $\vec{v}$ è

$$\sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}$$

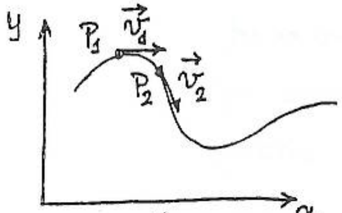


$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y(t)}{v_x(t)}$$

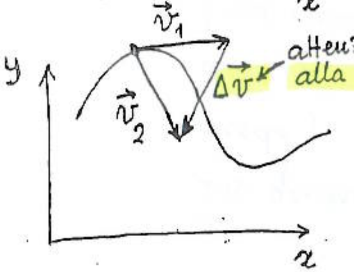
passare attraverso le componenti $x(t)$ e $y(t)$ e derivarle per ottenere $v_x(t)$ e $v_y(t)$ da cui

$$\vec{v} = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j}$$

Accelerazione in due dimensioni.



Due posizioni del mobile, P_1 e P_2 con velocità $\vec v_1$ e $\vec v_2$



attenzione $\Delta\vec v$ non è tangente alla traiettoria.

Si definisce accelerazione media

$$\vec a_m = \frac{\vec v_2 - \vec v_1}{\Delta t}$$

e accelerazione istantanea

$$\vec a(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \vec v(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec v(t)}{dt}.$$

ora $\vec v(t)$ si può scrivere $v(t)\,\hat t$
[$\hat t$ = versor tangente] e quindi:

$$\frac{d\vec v(t)}{dt} = \frac{d[v(t)\cdot\hat t]}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}\hat t + v(t)\cdot\frac{d}{dt}\hat t$$

Note $a_x(t)$ e $a_y(t)$:

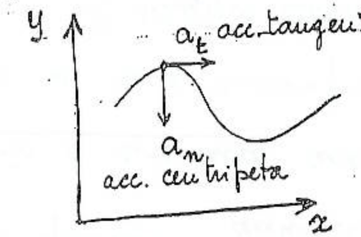
$$v_x(t) = \int a_x(t)\,dt + v_{0x}(t=0)$$

$$v_y(t) = \int a_y(t)\,dt + v_{0y}(t=0)$$

$$x(t) = \int v_x(t)\,dt + x_0(t=0)$$

$$y(t) = \int v_y(t)\,dt + y_0(t=0)$$

$x(t)$ e $y(t)$ permettono di trovare la traiettoria.



L'accelerazione non è più solo tangente alla traiettoria, ma ha una componente tangente e una normale: [centripeta]

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n .$$

Note $v_x(t)$ e $v_y(t)$ si può scrivere

$$a_x(t) = \frac{d}{dt} v_x(t)$$

$$a_y(t) = \frac{d}{dt} v_y(t)$$

e $\vec{a}(t) = a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j}$.

modulo $\vec{a}(t) = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)}$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y(t)}{a_x(t)} .$$

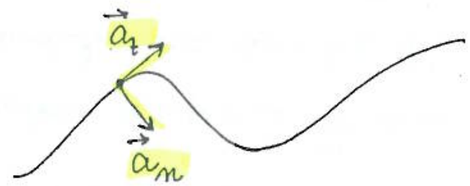
Accelerazione tangenziale, accelerazione centripeta. Moto circolare uniforme.

Abbiamo visto che il vettore velocità è tangente alla traiettoria punto per punt
L'accelerazione ha due componenti:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$\vec{a}_t$ = componente tangenziale,

$\vec{a}_n$ = componente normale o centripeta.



La componente tangenziale nasce dalla variazione del modulo della velocità

La componente normale o centripeta della accelerazione è responsabile del cambiamento della direzione della velocità e in generale ha modulo:

$$a_{centripeta} = \frac{v^2}{R}$$

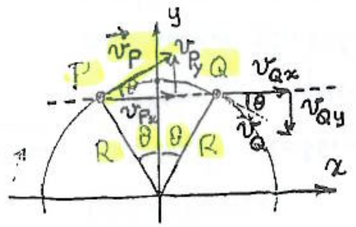
dove R è il raggio di curvatura della traiettoria.

Quindi se la traiettoria è rettilinea $R \to \infty$ e quindi $a_{centripeta}$ è nulla.

Se il moto è circolare, cioè il punto si muove su una circonferenza, allora R è il raggio della circonferenza stessa.

Giustifichiamo, nel caso particolare di un moto circolare uniforme, l'espressione $\frac{v^2}{R}$ per l'acc. centripeta.

Nel moto circolare uniforme $\vec{v}$ non cambia in modulo ma cambia di direzione punto per punto; quindi l'accelerazione tangenziale è nulla ma deve essere diversa da zero quella centripeta che produce il cambiamento di direzione.



un punto si muove sulla circonferenza di raggio R. Consideriamo due posizioni P e Q equidistanti dall' asse y. $|v_P = v_Q = v|$

$\vec{v}_P$ e $\vec{v}_Q$ hanno lo stesso modulo ma direzioni diverse. Le componenti sono

DATA 1 CIRCONFERENZA DI RAGGIO r

ARCO = θr

$v_{Px} = v\cos\theta \qquad v_{Py} = v\,\text{sen}\,\theta$

$v_{Qx} = v\cos\theta \qquad v_{Qy} = -v\,\text{sen}\,\theta$

$$\bar{a}_x = \frac{v\cos\theta - v\cos\theta}{\Delta t} \qquad \bar{a}_y = \frac{-v\,\text{sen}\,\theta - v\,\text{sen}\,\theta}{\Delta t}$$

$$\bar{a}_x = 0 \qquad \bar{a}_y = -\frac{2v\,\text{sen}\,\theta}{\Delta t}$$

ma $v = \dfrac{\overset{\frown}{PQ}}{\Delta t} = \dfrac{R\cdot 2\theta}{\Delta t}$ da cui $\Delta t = \dfrac{2R\theta}{v}$

e quindi $\bar{a}_y = -\dfrac{2v}{\frac{2R\theta}{v}}\cdot \text{sen}\,\theta = -\dfrac{v^2}{R}\cdot\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$

Il segno meno indica che l'accelerazione è diretta verso il centro.

Riprendiamo:

$$a_{centripeta} = -\frac{v^2}{R}\cdot\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$$

quando consideriamo intervalli sempre più piccoli, abbiamo angoli θ che tendono a zero e in questo limite $\text{sen}\,\theta \to \theta$

e quindi:

$$a_{centrip.} = -\frac{v^2}{R}.$$

in quale punto abbiamo trovato $a_{centripeta}$?

Esempio :

La velocità di una automobile che viaggia verso est si riduce uniformemente da 45 Km/h a 30 Km/h in un tratto di 100 m.

ⓐ trovare modulo e direzione della accelerazione.

- cosa vuol dire uniformemente ?

CHE NELL'ARCO DEI 100 m LA QUANTITÀ DI ACCELERAZIONE PERSA PER OGNI METRO È UGUALE

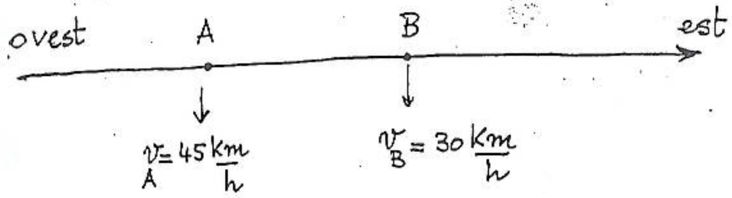
- con quale tipo di moto abbiamo a che fare ? MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE DECELERATO

Considerazione : quando dobbiamo risolvere problemi di questo tipo dobbiamo stabilire le condizioni iniziali :

t_0 , x_0 e v_0 .

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$0 \quad 0 \quad 45$



assumiamo A come posizione iniziale :

$x_0 = 0 \quad , \quad v_0 = v_A = 45 \frac{Km}{h}$.

Abbiamo in generale :

$$\begin{cases} v = at + v_0 \\ x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases},$$

perché a = COSTANTE

nel nostro caso :

$$\begin{cases} v_B = at + v_A \Rightarrow v_B - v_A = at \\ x_B = \frac{1}{2} a t^2 + v_A t \end{cases}$$

$a = \frac{-15}{t}$ l'accelerazione è negativa

$$x_B = -\frac{15}{2t} \cdot t^2 + 45 t = t \left[45 - \frac{15}{2} \right]$$

avendo preso $x_A = x_0 = 0$

x_B è riferito a A e quindi

$$x_B = 100\, m = 0.1\, Km,$$

$$x_B = t\left[45 - \frac{15}{2}\right] = t\,\frac{90-15}{2} = t \cdot \frac{75}{2}$$

$$0.1 = \frac{t \cdot 75}{2} \qquad t = \frac{0.2}{75}\frac{(Km)}{(Km/h)}$$

$$t = 0.00266h = 9.6\ s\ .$$

t è l'istante in cui l'auto arriva in B.

Ricordando

$$v_B = at + v_A \qquad a = \frac{-45+30}{t}$$

$$a = -\frac{15\,[Km/h]}{9.6\,s} = -0.434\ \frac{m}{s^2}$$

L'esempio chiede ancora quanto tempo deve passare affinché l'auto si arresti, se prosegue con la stessa accelerazione.

$$v_x = -at + v_A$$

quando l'auto è ferma $v_x = 0$

e quindi: $at = v_A$

$$t = \frac{45\,[Km/h]}{0.434\ m/s^2} =$$

$$= \frac{45 \cdot 10^3/3600\ m/s}{0.434\ m/s^2} =$$ } controllare se questo termine ha le dimensioni di un tempo.

$$= 28.8 \text{ secondi.}$$

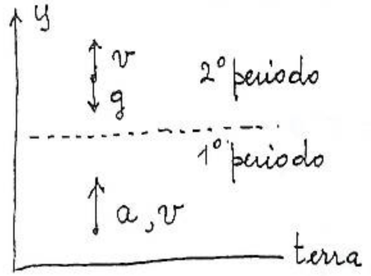
A quale distanza si ferma?

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + v_A t = -\frac{1}{2}\cdot 0.434\,[28.8]^2 + \frac{45 \cdot 10^3}{3600}\cdot 28.8$$

$$= -179.99 + 360 = 180\ m\ .$$

Problema

Un razzo è lanciato verticalmente e sale con accelerazione costante di $20\ m/s^2$ per 1 minuto. A questo istante finisce il combustibile e continua a salire come un corpo libero.
Trovare: ⓐ l'altezza massima raggiunta e ⓑ il tempo totale fra l'istante del lancio e quello in cui il razzo ricade a terra.



Supponiamo queste condizioni iniziali:
$y_0 = 0,\ t_0 = 0,\ v_0 = 0.$

Il problema non da alcuna condiz. iniziale.
Nel primo periodo il razzo si muove con accelerazione $= 20\ m/s^2$; nel secondo periodo con accelerazione $= g$.

1° periodo:

$$y = \frac{1}{2} a t^2$$

altezza raggiunta dopo 1 minuto = 60 secondi:

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot 20\ m/s^2 \cdot (60)^2 = 36'000 \text{ metri}$$

a questa altezza la velocità v_1 è:

$$v_1 = at = 20\ m/s^2 \cdot 60\,s = 1200\ m/s.$$

A questa altezza il razzo si muove con acceleraz. g:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_1 t + y_1$$

v_1 e y_1 sono le nuove condizioni iniziali; la sua velocità è

$$v = -gt + v_1$$

il razzo si ferma quando $v = 0$

cioè:

$$0 = -gt + v_1$$

$$t = \frac{v_1}{g} = \frac{1200}{9,8} \simeq 120 \text{ secondi}$$

L' altezza del razzo è :

$$y = \overbrace{-\frac{1}{2} g (120)^2}^{\frac{1}{2}gt^2} + \overbrace{1200 \cdot 120}^{v_1 t} + \overbrace{36\,000}^{y_1} \simeq$$

$$\simeq 10^5 \ m.$$

Il tempo totale è la somma del tempo impiegato per la salita più il tempo impiegato in discesa.

in salita $= 60 + 120$

in discesa :

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + y_2 = -\frac{1}{2} g t^2 + 10^5$$

quando $y = 0$ il razzo è a terra

$$0 = -\frac{1}{2} g t^2 + 10^5$$

$$t^2 = \frac{2 \cdot 10^5}{g} = 149 \ s$$

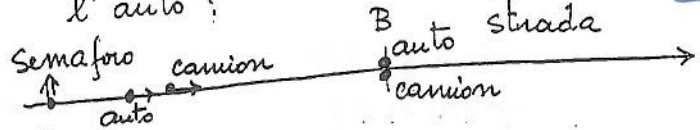
tempo totale $= 60 + 120 + 149 = 329$ s

Problema

Un' auto è ferma al semaforo; quando questo diventa verde parte con una accelerazione pari a 1.8 metri/secondo^2, costante. Nello stesso istante arriva un camion che viaggia con velocità costante di 9.0 m/s e, trovando il verde, raggiunge e sorpassa l' auto. Trovare :

① a quanti metri dal semaforo l' auto sorpassa il camion ? $\boxed{90\ m}$

② a che velocità starà viaggiando l' auto ? $\boxed{11\ m/s}$



$x_0 = 0$

$t_0 = 0$

$v_{0\,auto} = 0$ $\quad a_{auto} = 1,8 \ m/s^2$

$v_{0\,camion} = 9.0 \ m/s$ $\quad a_{camion} = 0$

per il camion :

$v = v_0$ camion = costante = 9.0 m/s

l'accelerazione è nulla.

$x_{camion} = v_{0\,cam.} \cdot t$

per la macchina :

$v_{auto} = v_{0\,auto} + \underbrace{at}$ questo perchè a è costante

$v_{auto} = 0 + at$

$x_{auto} = x_0 + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a t^2$

auto e camion si incontrano per

$x_{camion} = x_{auto}$

$v_{0\,cam.} \, t = \frac{1}{2} a t^2$

$\frac{1}{2} \cdot 1.8 \cdot t^2 - 9 \cdot t = 0$

$t = 0 \quad t = 10$ secondi

La velocità della macchina è :

$v_{au.} = at + v_0$ ma $v_0 = 0$ perchè è partita da ferma.

$v_{au.} = at$ $\quad t = 10$ secondi, $a = 1,8\ m/s^2$

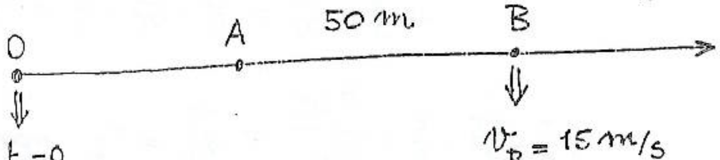
$v_{auto} = 1.8\ m/s^2 \cdot 10\,s = 18\ m/s$.

Problema :

Una automobile si muove con accelerazione costante e percorre 50 metri, fra i punti A e B, in 6 secondi. La sua velocità in B è di 15 m/s. Trovare :

1. quale è la sua velocità in A,
2. quale è la sua accelerazione,
3. da che distanza da A è partita.

Il problema ci chiede anche la distanza del punto A dalla posizione di partenza.



$t_0 = 0$

$x_0 = 0$

$v_0 = 0$ [lo assumiamo perché il problema non da dati]

in generale si può scrivere essendo $a = \text{cost.}$:

$$\begin{cases} v = at + v_0 \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

a è costante, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$

l'auto parte nel punto O.

Nel nostro caso si ha:

$$\left.\begin{matrix} v_A = a\, t_A \\ v_B = a\, t_B \end{matrix}\right\} v_B + v_A = a \cdot (t_B + t_A)$$

$$x_A = \frac{1}{2} a t_A^2 \qquad x_B = \frac{1}{2} a t_B^2$$

① $$x_B - x_A = 50\ m = \frac{1}{2} a t_B^2 - \frac{1}{2} a t_A^2 =$$

$$= \frac{1}{2} a \underbrace{[t_B - t_A]}_{\text{6 secondi, dato del problema}} [t_B + t_A]$$

ma:

$$v_B + v_A = a [t_B + t_A] \Rightarrow t_B + t_A = \frac{v_B + v_A}{a}$$

per cui:

$$50\,m = \frac{1}{2} a (6\,s) \cdot \frac{v_B + v_A}{a}$$

$$50 = 3 \cdot (v_B + v_A)$$

$$v_A = \frac{50}{3} - 15 = \frac{50 - 45}{3} = \frac{5}{3}\ m/s$$

② trovare l'accelerazione dell'auto.

$$v_A = a t_A \qquad v_B = a t_B$$

$$v_B - v_A = a [t_B - t_A]$$

$$15 - \frac{5}{3} = a \cdot 6$$

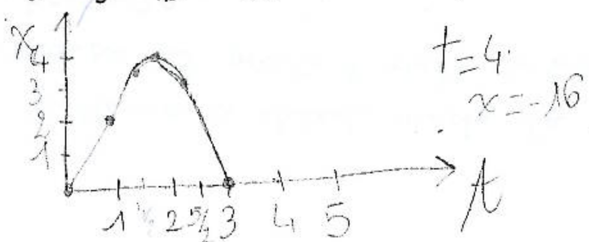
$$\frac{40}{3} = a \cdot 6 \qquad a = \frac{20}{9}\ m/s^2$$

③ da che distanza è partita?

$$x_A = \frac{1}{2} a t_A^2 \qquad v_A = a t_A$$

quindi $t_A = \frac{v_A}{a} = \frac{5/3}{20/9} = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{20} = \frac{3}{4}\ s$

$$x_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{9} \cdot \frac{9}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}\ m$$



Problema.

La posizione di una particella che si muove lungo l'asse x dipende dal tempo secondo la legge

$$x = At^2 - Bt^3,$$

dove x è espresso in metri e t in secondi. *(a)* Quali unità del SI devono avere le costanti A e B? Nel seguito si pongano i valori delle due costanti rispettivamente uguali a 3 e 1 unità del SI. *(b)* Dopo quanto tempo la particella raggiunge il massimo valore di x? *(c)* Quanta strada effettiva percorre la particella nei primi 4 s? *(d)* Qual è lo spostamento nei primi 4 s? *(e)* Qual è il valore della velocità della particella alla fine dei primi 4 s? *(f)* Quanto vale l'accelerazione alla fine dei primi 4 s? *(g)* Qual è il valore della velocità media nell'intervallo di tempo fra $t = 2$ s e $t = 4$ s?

ⓐ $x = At^2 - Bt^3$

$$[L] = [L] - [L]$$

$$[At^2] = [\frac{L}{T^2} \cdot T^2] = [L] \quad \text{unità } m/s^2$$

$$[Bt^3] = [\frac{L}{T^3} \cdot T^3] = [L] \quad \text{unità } m/s^3$$

$$x = 3t^2 - t^3$$

ⓑ il massimo valore di x si ha quando $v = 0$ e il moto si inverte. Quando x diventa negativo cosa vuol dire?

derivata rispetto al tempo

$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = 6t - 3t^2$$

$v(t) = 0$ per $t = 0$

e $t = 2$ secondi.

(c) Per trovare lo spazio effettivamente percorso in un determinato tempo dobbiamo sommare tutti i moduli degli spostamenti elementari.

$$\int_0^4 |dx| = \int_0^4 |6t - 3t^2|\, dt =$$

bisogna guardare il segno di $6t - 3t^2$

$>0 \quad 0 < t < 2$

$<0 \quad 2 < t < 4$

$$= \int_0^2 (6t - 3t^2)\, dt + \int_2^4 (3t^2 - 6t)\, dt = 24\ m$$

vettore che collega la posizione iniziale, a quella finale

(d) Lo spostamento è

$$x(4) - x(0) = -16\ m$$

(e) La velocità è:

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \left[6t - 3t^2\right]_{t=4} = -24\ m/s$$

(f) L' accelerazione a $t = 4\ s$ è:

$$a = \frac{d}{dt} v(t) = 6 - 6t$$

$$a(4) = -18\ m/s^2$$

(g) La velocità media fra $t = 2$ e $t = 4\ s$

è $$v_m = \frac{x(4) - x(2)}{4 - 2} = \frac{-16 - 4}{2} = -10\ m/s$$

Esempio :

$x_0 = y_0 = 0$

$v_{\text{iniziale su } x} = v_{0x}$

$v_{\text{iniziale su } y} = v_{0y}$

Un proiettile viene lanciato dall'origine con velocità iniziale $\vec{v}_0$; si muove con accelerazione costante g .

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) = 0 + v_{0x} \\ v_y(t) = \int a_y \, dt = -gt + v_{0y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t + x_0 = v_{0x} t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t \end{cases}$$ eq.ni parametriche del moto

la traiettoria non deve essere in funzione del tempo.

il modulo della velocità è :

$\sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}$; $\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x}$

Il vettore velocità è :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}.$$

Eliminiamo t dalle :

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t \end{cases} \qquad t = \frac{x(t)}{v_{0x}}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_{0x}^2} + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x}$$

equazione della traiettoria.

Problema

Dimostrare che la gittata di un proiettile con velocità iniziale v_0 e angolo di lancio θ_0 è $R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0$.

Dimostrare che la massima altezza raggiunta dal proiettile è

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta_0}{2g}.$$

Trovare per quale angolo di lancio la gittata e la massima altezza sono uguali.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta_0 \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = [v_0 \cos\theta_0] \cdot t + x_0 \\ y = [v_0 \operatorname{sen}\theta_0] \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + y_0 \end{cases}$$

ricavo t dalla 1° eq.ne e poi lo sostituisco nella seconda.

con $x_0 = y_0 = 0$.

Ricaviamo t da $x = [v_0 \cos\theta_0] \cdot t$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$$

e lo sostituiamo nella $y = [v_0 \operatorname{sen}\theta_0] t$ .....

$$y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cos\theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0} =$$

$$= x \cdot \operatorname{tg}\theta_0 - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

ABBIAMO TROVATO L'EQ. DELLA TRAIETTORIA

la gittata si ha per $y = 0$ e quindi

$$0 = x \cdot \operatorname{tg}\theta_0 - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

$$\frac{\cancel{x_G}}{\cancel{x_G}} \operatorname{tg}\theta_0 = \frac{1}{2} \frac{g x_G^{\cancel{2}}}{v_0^2 \cos^2\theta_0} \cdot \frac{1}{\cancel{x_G}}$$

$$2 \operatorname{tg}\theta_0 \frac{v^2 \cos^2\theta_0}{g} = x_G$$

$x_G \neq 0$

$$x_G = \frac{2}{g} v_0^2 \, tg\theta_0 \cos^2\theta_0 = \frac{2 v_0^2}{g} \frac{\operatorname{sen}\theta_0}{\cos\theta_0} \cdot \cos^2\theta_0 =$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0 .$$

(b) massima altezza.

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt$$

per $v_y = 0$ $\qquad t = \dfrac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}$

quando $v_y = 0$ si raggiunge l'altezza massima.

Ma $\qquad y = [v_0 \operatorname{sen}\theta_0] \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

$$y = [v_0 \operatorname{sen}\theta_0] \cdot \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} - \frac{1}{2} g \left[\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}\right]^2$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g}$$

(c) $\quad$ gittata $= \dfrac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0$

altezza $= \dfrac{1}{2} v_0^2 \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_0}{g}$

uguagliamo:

$$\frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0 = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{\operatorname{sen}^2\theta_0}{g}$$

$$2 \operatorname{sen} 2\theta_0 = \operatorname{sen}^2\theta_0$$

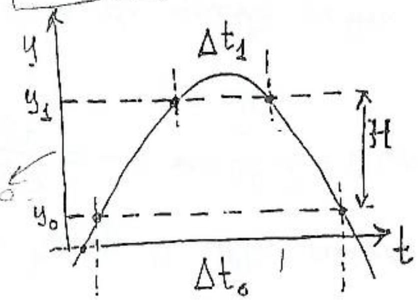
$$4 \cancel{\operatorname{sen}\theta_0} \cos\theta_0 = \cancel{\operatorname{sen}\theta_0} \operatorname{sen}\theta_0$$

$$tg\theta_0 = 4 \qquad \theta_0 = 76^\circ$$

non considerare l'attrito dell'aria.

Problema

Una sferetta viene lanciata verso l'alto, nel vuoto, e viene lasciata ricadere.



legge oraria non è la traiettoria

Con riferimento alla figura, Δt_0 sia l'intervallo di tempo fra i due passaggi della sfera a un livello inferiore, e Δt_1 sia l'intervallo di tempo fra i due passaggi a un livello superiore. Dimostrare che:

$$g = \frac{8H}{\Delta t_0^2 - \Delta t_1^2}.$$

La legge del moto è:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 =$$
$$= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

$y_0 = 0$ $\quad$ v_0 = velocità iniziale $\neq 0$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

risolviamo rispetto a t $\boxed{\text{per } y = y_0 =}$ livello inferiore.

$$g t^2 - 2 v_0 t + 2 y_0 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2 g y_0}}{g}$$

$$t_2 - t_1 = \Delta t_0 = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2 g y_0}}{g}$$

al quadrato $\boxed{\Delta t_0^2 = 4\,\frac{v_0^2 - 2 g y_0}{g^2}}$

Analogamente al livello superiore:

$$t_2 - t_1 = \Delta t_1 = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2 g y_1}}{g}$$

$$\boxed{\Delta t_1^2 = 4\,\frac{v_0^2 - 2 g y_1}{g^2}}.$$

$$\Delta t_0^2 - \Delta t_1^2 = 4\,\frac{v_0^2 - 2 g y_0 - v_0^2 + 2 g y_1}{g^2} = \frac{8(y_1 - y_0)}{g}$$

~~RAGGIO BI~~

Problema.

Dato il vettore posizione:

$$\vec{R} = 3\cos 2t \cdot \hat{i} + 3\,\text{sen}\,2t \cdot \hat{j} + (8t-4)\hat{k}$$

1) calcolare il versore tangente $\hat{t}$ alla curva,
2) verificare che $\vec{v} = v\hat{t}$.

Un vettore tangente alla curva è

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = -6\,\text{sen}\,2t \cdot \hat{i} + 6\cos 2t \cdot \hat{j} + 8\hat{k} \quad (1)$$

il modulo di questo vettore è

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-6\,\text{sen}\,2t)^2 + (6\cos 2t)^2 + 8^2} = 10$$

$$\cos^2 + \text{sen}^2 = 1$$

un versore tangente è

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-6\,\text{sen}\,2t\,\hat{i} + 6\cos 2t \cdot \hat{j} + 8\hat{k}}{10}$$

b) segue immediatamente da 1).

$$\vec{v} = -6\,\text{sen}\,2t\,\hat{i} + 6\cos 2t\,\hat{j} + 8\hat{k} =$$

$$\underbrace{10}_{|\vec{v}|} \cdot \underbrace{\frac{-6\,\text{sen}\,2t\,\hat{i} + 6\cos 2t\,\hat{j} + 8\hat{k}}{10}}_{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

Problema

Due particelle hanno vettori posizione dati da:

$$\vec{R}_1 = 2t\,\hat{i} - t^2\hat{j} + (3t^2 - 4t)\hat{k} \quad e$$

$$\vec{R}_2 = (5t^2 - 12t + 4)\,\hat{i} + t^3\hat{j} - 3t\,\hat{k}$$

Calcolare la velocità relativa della seconda particella rispetto alla prima all'istante $t = 2$.

Calcolare, nelle stesse condizioni, la accelerazione relativa della seconda particella rispetto alla prima.

Le due velocità sono:

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{R}}_1 = \left[2\hat{i} - 2t\,\hat{j} + (6t-4)\hat{k}\right]_{t=2} =$$

$$= 2\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$$

$$\dot{\vec{R}}_2 = \vec{v}_2 = \left[(10t - 12)\,\hat{i} + 3t^2\hat{j} - 3\hat{k}\right]_{t=2} =$$

$$= 8\hat{i} + 12\hat{j} - 3\hat{k}$$

La velocità relativa della 2^a particella rispetto alla 1^a è:

$$\vec{v}_{relat.} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 8\hat{i} + 12\hat{j} - 3\hat{k} - \left[2\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}\right] =$$

$$= 6\hat{i} + 16\hat{j} - 11\hat{k}$$

Si procede in modo analogo per la accelerazione.

Problema

Una particella si muove con le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(t) = A \cos \omega t \\ y(t) = A \sin \omega t \end{cases}$$

dove ω è una costante.

1) trovare la traiettoria,
2) dimostrare che la velocità della particella è perpendicolare al vettore posizione,
3) dimostrare che l'accelerazione $\vec{a}$ è diretta verso l'origine e ha modulo proporzionale alla distanza dall'origine,
4) dimostrare che il prodotto vettore del vettore velocità per il vettore distanza dall'origine è un vettore costante.

$$T = 3mg + m\frac{v_0^2}{l}$$

③ I punti A e C sono alla stessa altezza, $\Delta U = 0$.

Il lavoro delle forze di attrito è uguale alla variazione di energia cinetica.

$$L_{attrito} = K(C) - K(A) = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

④ L_f = lavoro della forza di attrito non conservativa $= \Delta K + \Delta U$

$$L_f = K(B) - K(A) + U(B) - U(A) =$$

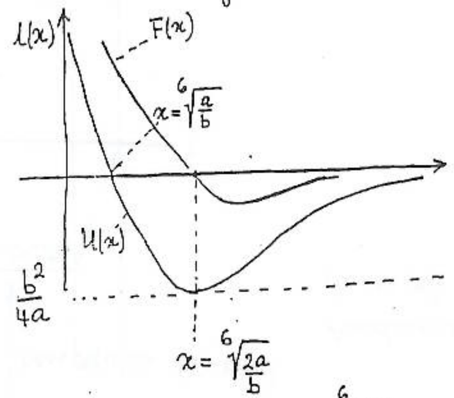
$$= -\frac{1}{2} m v_0^2 - mgl \, .$$

in A la particella ha energia potenziale nulla e in B energia cinetica nulla.

L'energia potenziale relativa alla forza tra due atomi in una molecola biatomica può essere espressa approssimativamente da:

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$$

dove a e b sono costanti positive e x è la distanza fra i due atomi



La figura mostra l'andamento di $U(x)$ in funzione di x.

$U(x)$ si annulla per $x = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}$ oppure per $x \to \infty$

La $U(x)$ ha un minimo per $x = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$.

La forza $F(x)$ fra gli atomi è data da $-\frac{d}{dx} U(x)$ ed è mostrata in rosso.

La forza è positiva per $0 \leq x \leq \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$; in questo caso gli atomi si respingono.

La forza è negativa per x che va da $\sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$ fino all'∞ e in questo caso gli atomi si attraggono.

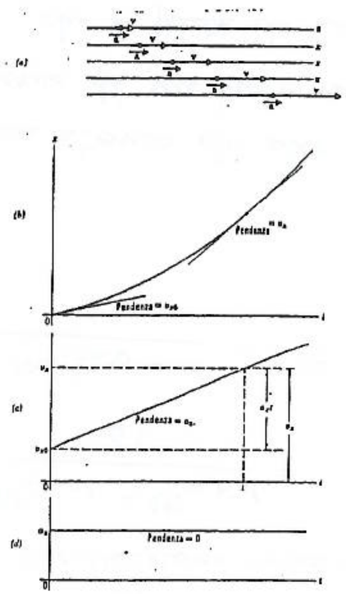
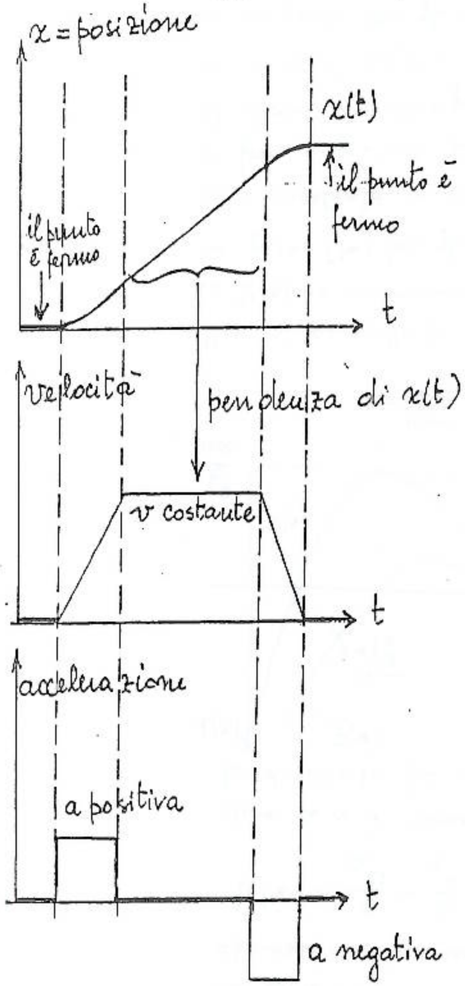


FIGURA 3-7

(*a*) Cinque successive posizioni di un punto materiale in moto rettilineo uniformemente accelerato. Le frecce sui punti rappresentano **v**, mentre quelle sotto rappresentano **a**. (*b*) Lo spostamento aumenta in modo quadratico secondo la relazione $x = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$; la pendenza aumenta uniformemente e in ogni istante ha il valore v_x, la velocità. (*c*) La velocità v_x cresce uniformemente secondo la relazione $v_x = v_{x0} + a_x t$; la pendenza è costante e vale a_x, l'accelerazione. (*d*) L'accelerazione a_x è costante; la sua pendenza è nulla. La fig. 3-5 illustra grafici analoghi per il moto in una dimensione con accelerazione *non* costante.

Leggiamo i seguenti grafici.



Il disegno rappresenta il moto di un punto.

Andamento di v(t)

Andamento di a(t)

Esempio:

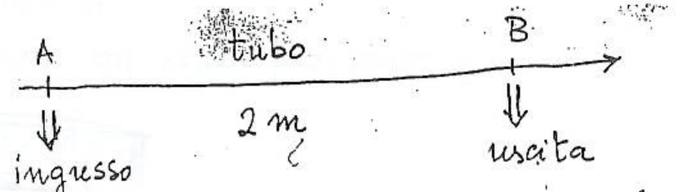
Un uomo, partendo da fermo, raggiunge la velocità di 190 Km/h in 6 secondi. Trovare la sua accelerazione media.

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{finale} - v_{iniziale}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{190 \cdot 1000/3600 - 0}{6} = 8.79\ m/s^2$$

Esempio:

Il nucleo di un atomo di elio si muove all'interno di un tubo vuoto lungo 2 metri, che è parte di un acceleratore di particelle. Supponendo costante l'accelerazione, per quanto tempo la particella rimane nel tubo se essa entra con $v = 1 \cdot 10^4\ m/s$ ed esce con $v = 5 \cdot 10^6\ m/s$?



$v_B = 5 \cdot 10^6 \, m/s$

$x_0 = x_A = 0$

$v_A = v_0 = 1 \cdot 10^4 \, m/s$

$t_A = t_0 = 0$

scriviamo :

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v = v_0 + a t \end{cases}$$

nel nostro caso

$$\begin{cases} x_B = 0 + 1 \cdot 10^4 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_B = v_A + a t \qquad a = \frac{v_B - v_A}{t} = \frac{5 \cdot 10^6 - 1 \cdot 10^4}{t} \end{cases}$$

$$x_B = 2 = 1 \cdot 10^4 t + \frac{1}{2} \frac{499}{t} \cdot 10^4 \cdot t$$

$$2 = \left[1 \cdot 10^4 + 249{,}5 \cdot 10^4\right] t$$

$$t = \frac{2}{250{,}5} \cdot 10^{-4} = 0{,}8 \cdot 10^{-6} = 0{,}8 \, \mu s$$

Problema

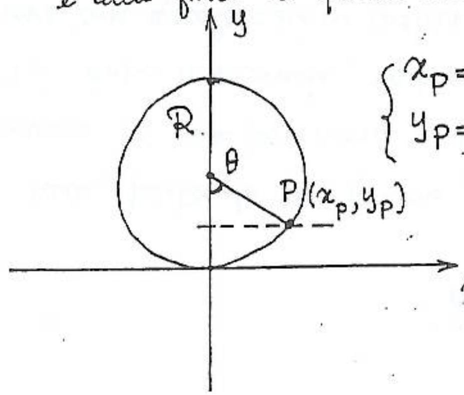
Un punto materiale percorre in senso antiorario con velocità costante una circonferenza di raggio $R = 3 \, m$ e compie un giro in $20 \, s$. Il punto parte da O all' istante $t = 0$. Trovare :

a) modulo e direzione dei vettori posizione a $5 \, s$, $7.5 \, s$, e $10 \, s$,

b) modulo e direzione dello spostamento fra 5 e 10 secondi,

c) vettore velocità media in questo intervallo,

d) vettore velocità istantanea all' inizio e alla fine di questo intervallo



$$\begin{cases} x_P = R \sin\theta \\ y_P = R - R\cos\theta \end{cases}$$

Il moto è periodico con periodo

T = 20 s.

Dalla relazione

$$2\pi : T = \theta : t$$

si ha $\theta = \frac{2\pi}{T} \cdot t = 18\,t$ (gradi)

Si può costruire una tabella:

t (s)	θ (°)	x	y	r (posizione)
0	0	0	0	0
5.0	90	3.0	3.0	4.24
7.5	135	2.12	5.12	5.54
10.0	180	0.0	6.0	6.0

$\sqrt{x^2+y^2}$

↑

POSIZIONE

$$\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2}}$$

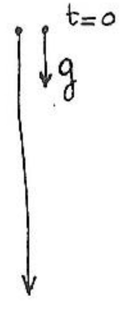
la direzione del vettore posizione è:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

Esempio:

un oggetto cade, partendo da fermo; si vuole trovare la sua posizione e la sua velocità dopo 4 secondi, sapendo che si muove con accelerazione costante pari a 9.8 m/s² [cioè g].

$t=0 \quad y_0 = 0 \quad v_0 = 0$



$$\begin{cases} a(t) = a = g & \text{[accel. costante]} \\ v(t) = \int g\,dt = gt + \underbrace{v_0}_{=0} \end{cases}$$

$$v(t) = gt$$

$$y(t) = \int v(t)\,dt = \int gt\,dt = \frac{1}{2}gt^2 + \underbrace{y_0}_{=0}$$

Passando ai valori numerici:

$v(4s) = 9.8 \cdot 4 = 39.2$ m/s

$y(4s) = 78.4$ m

Dinamica

Concetti :

- corpo materiale,

- interazione fra i corpi,
  e tipi di interazioni,

- forze,

- massa.

Interazioni.

Fra i corpi sono possibili interazioni di vario genere : possono urtarsi, attirarsi ecc.

Si cerca, in fisica, di rappresentare le interazioni fra i corpi mediante delle osservabili : le forze.

Le interazioni possono essere di due tipi :

a) quando i corpi vengono a contatto
(es. processi di urto, forze di attrito, forze dovute ai vincoli ecc.) .

b) quando i corpi sono ad una certa distanza fra loro
(es. forze gravitazionali, forze elettrostatiche, forze elettromagnetiche, forze nucleari) .

Definizione operativa delle forze.

Il metodo più semplice per definire operativamente una forza è basato sugli effetti dinamici che essa produce.

Consideriamo un oggetto libero di muoversi su di un piano sotto l'azione di un meccanismo" costante (ad esempio l'azione del vento). L'oggetto comincia a muoversi in una direzione fissa e acquista una accelerazione costante $\vec{a}$.

Si dirà che, fissato l'oggetto A, una forza che lo spinga ha intensità uguale ad un'altra quando le accelerazioni prodotte sono uguali, che una forza è doppia di un'altra quando l'accelerazione prodotta è doppia dell'accelerazione prodotta dalla prima forza e così via.

La forza ha natura vettoriale:

$$\vec{f} \sim \vec{a}$$

La massa.

Supponiamo ora di fare agire la stessa forza su oggetti puntiformi diversi.

E' molto importante cercare di indicare per ogni corpo quale sia il suo comportamento dinamico sotto l'azione di una forza e questo viene fatto introducendo una nuova osservabile fisica: la massa dei corpi.

Dati due corpi qualsiasi diremo che hanno la stessa massa quando spinti da una stessa forza acquistano la stessa accelerazione, e che un corpo ha massa doppia di un altro se, spinto dalla stessa forza, acquista accelerazione metà ecc.

La massa di un corpo è una osservabile scalare inversamente proporzionale al modulo dell'accelerazione impressa al corpo da una forza stabilita:

$$m \sim \frac{1}{a}$$

e dati due corpi si avrà

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Questa definizione permette di costruire una scala delle masse indipendente dalla natura dei corpi.

La massa rappresenta la proprietà dei corpi di opporsi al moto e per questo la si chiama anche "massa inerziale".

Legge fondamentale della dinamica. 2°

Consideriamo un corpo qualsiasi di massa m e sul quale agisce una forza $\vec{f}$; l'accelerazione è legata alla massa ed alla forza e in definitiva si può scrivere

$$\vec{f} = m\,\vec{a}$$ 2ª legge della dinamica

La massa è una costante durante il moto.

Il problema generale della dinamica del punto si può riassumere così:

Data una forza comunque variabile nel tempo, applicata ad un punto, trovare il moto di questo punto.

Dato il moto di un punto cercare una forza capace di determinarlo.

Principio di inerzia. (1ª legge della dinamica)

1ª

Un oggetto A qualsiasi sul quale non agisca alcuna forza secondo la legge fondamentale della dinamica ha accelerazione nulla :

$\vec{f}=0 \quad \vec{a}=0$

Si deduce quindi che la sua velocità $\vec{v}$ è costante e si ha che:

se il corpo è inizialmente fermo esso rimane fermo; se viceversa è in moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}_0$ esso prosegue di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}_0$.

Questo è il principio di inerzia (o prima legge di Newton). I sistemi di riferimento in cui vale la legge si chiamano "inerziali".

Dimensioni e unità di misura

massa [M]

S.I.
MKS Kilogrammo massa (Kg).

massa del campione di platino-iridio conservato a Parigi.

CGS grammo massa (g).

forza

$f=ma \qquad [MLT^{-2}]$.

S.I.
MKS newton (N)

è quella che imprime a 1 Kg l'accelerazione di $1\ m/s^2$.

CGS dine.

1 dine = 1 grammo × 1 centimetro/secondo^2

1 dine = 10^{-5} newton

- Il chilogrammo forza.

Il valore convenzionale di g è $9.806 \, m/s^2$, per cui la forza peso applicata a un corpo di massa 1 Kg è 9.806 N.

In alcuni sistemi di unità di misura questo valore è stato assunto come unità di misura delle forze e viene chiamato chilogrammo-forza (Kgf) o chilogrammo peso.

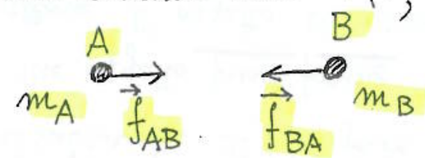
$$1 \, Kgf = 9.806 \, N \quad , \quad 1 \, N = 0.102 \, Kgf.$$

La terza legge di Newton.

Le forze si manifestano a coppie.

Se colpiamo un muro, il muro risponde spingendo in senso inverso contro di noi.

Consideriamo due corpi, A e B:



il corpo A esercita una forza $\vec{f}_{AB}$ sul corpo B e il corpo B esercita una forza $\vec{f}_{BA}$ sul corpo A.

Le due forze hanno la stessa intensità, la stessa direzione, verso opposto.

$$\vec{f}_{AB} = - \vec{f}_{BA}$$

Questa è la terza legge di Newton.

Si può dire che ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

Attenzione che i due membri di una coppia azione-reazione agiscono sempre su corpi diversi.

Un blocco di ferro viene lasciato cadere da una altezza h, ad un istante $t=t_0$

Descrivere cosa succede al sistema terra + blocco per $t > t_0$.

Osservazione:

quando su un corpo agiscono contemporaneamente più forze $\vec{f}_1, \vec{f}_2 \cdots \vec{f}_K$ esso si comporta come se agisse la loro risultante $\vec{F}$, somma vettoriale di tutte le forze agenti.

Quando la risultante di più forze applicate ad un oggetto puntiforme è nulla, allora l'oggetto se inizialmente fermo rimane fermo.

Alcune forze.

Forza peso

il peso di un corpo è la forza con cui il corpo stesso è attirato verso il centro della terra. La forza è dovuta all'attrazione gravitazionale che si esercita fra le masse dei corpi.

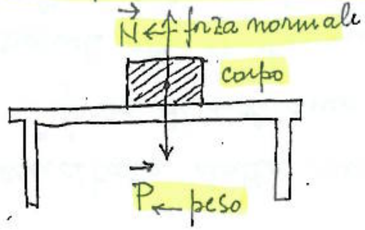
$$\vec{P} = m\vec{g} \quad \text{o} \quad \vec{P} = -m\vec{g}$$

a seconda di come si prende il verso dell'asse y. Ricordiamo che $\vec{g}$ è diretta come la verticale.

Forza normale.

Consideriamo un corpo appoggiato in stato di quiete su una superficie, ad

esempio su un tavolo; il corpo è soggetto a una forza $\vec{N}$ – la forza normale che equilibra il peso.



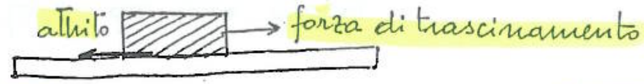
In condizioni di equilibrio lungo la verticale, abbiamo

$$\vec{N} = m\vec{g}$$

cioè in questo caso non esiste accelerazione lungo la verticale (asse y)

Attrito.

Se facciamo scivolare un corpo sopra una superficie si nota una resistenza fra corpo e superficie detta forza di attrito o semplicemente attrito. La forza di attrito agisce parallelamente alla superficie di contatto.

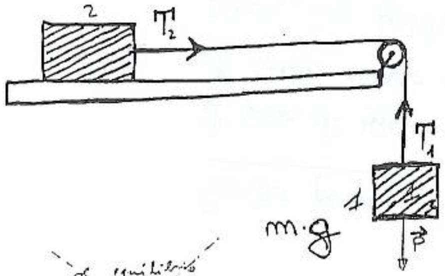


l'attrito ha verso opposto alla forza di trascin.

Tensione

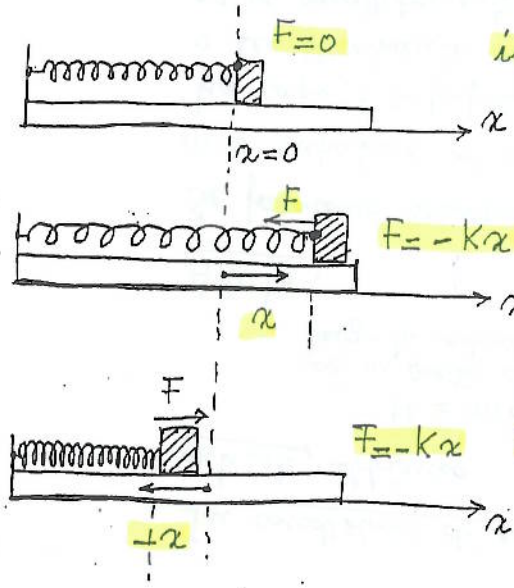
Quando una fune o un cavo sono fissati a un corpo e il corpo è tirato, si dice che esso è sotto tensione. La fune o il cavo esercitano sul corpo una forza di trazione T, applicata al punto di fissaggio e orientata lungo la fune, come mostrato nel disegno.

Spesso la fune è considerata come priva di massa e non soggetta ad allungamento.



~~in equilibrio $|\vec{P}| = |T_1| = m_1 g$ $|T_2| = |T_1|$~~

Forza esercitata da una molla.



in equilibrio

allungamento

compressione

K = COSTANTE

La forza esercitata dalla molla è chiamata "forza di richiamo" ed è proporzionale allo spostamento del capo libero dalla posizione di riposo.

$F = -Kx$ [legge di Hooke]

Moto di caduta libera.

Quando dei corpi vengono lasciati cadere dall'alto o vengono lanciati dal basso, essi sono caratterizzati da una accelerazione identificata con il simbolo g, detta accelerazione di caduta libera o accelerazione di gravità. Essa è indipendente dalle caratteristiche del corpo quali la massa, la forma, la densità ecc.

Il valore di g è $9.8\ m/s^2$.

Se facciamo cadere da una certa altezza due oggetti, ad esempio una piuma e una mela, arrivano a terra insieme o no? NO ARRIVA PRIMA LA MELA CON ARIA

SI SENZA ARIA

Cos'è g?

Ogni corpo viene attirato verso il centro della terra da una forza [la forza gravitazionale] data, in modulo, da:

$$\vec{F} = \frac{G\, M_T \cdot m}{R^2} \quad \text{verso } \vec{R}$$

dove G = costante universale,
M_T = massa della terra,
m = massa del corpo,
R = distanza fra il corpo di massa m e il centro della terra dove si può ritenere concentrata tutta la massa della terra.

La forza è diretta come la congiungente il corpo di massa m e il centro della terra.

Se lasciamo cadere un corpo di massa m da una certa altezza, sul corpo agisce la forza:

$$F = \frac{G M_T \cdot m}{R^2}$$

e quindi dalla $f = ma$ si ha

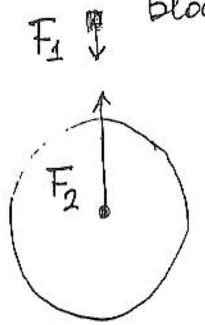
$$F = \frac{G M_T \cdot m}{R^2} = m a$$

da cui $$g = \frac{G M_T}{R^2}.$$

g si chiama accelerazione di gravità, è un vettore diretto come la verticale rispetto al suolo, cioè è diretto verso il centro della terra*). g varia con l'altezza rispetto al suolo [la variazione è data dal termine R^2 a denominatore] e con la latitudine. Nei nostri problemi si può ritenere g costante.

*) il verso è verso il centro della terra.

Esempio sul principio di azione-reazione.



blocco di ferro - massa m

terra - massa M

la forza che agisce sul blocco è, in modulo:

$$F_1 = G \frac{M m}{R^2}$$

[R = distanza blocco - centro della terra]

l'accelerazione corrispondente è:

$$F_1 = m a_1 = \frac{G M m}{R^2}$$

quindi $a_1 = \frac{GM}{[illegible]} = g$

La forza che agisce sulla terra
[per il principio di azione-reazione]
è, in modulo:

$$F_2 = F_1 = G\frac{Mm}{R^2}$$

l'accelerazione corrispondente è:

$$F_2 = F_1 = \frac{GMm}{R^2} = Ma_2$$

quindi $a_2 = \frac{Gm}{R^2}$.

Problema

Una particella di massa 2 kg si muove in un campo di forza dipendente dal tempo t dato da

$$\vec{F} = 24t^2\hat{i} + (36t-16)\hat{j} - 12t\hat{k} .$$

Supposto che per t=0 la particella sia posta in $\vec{r}_0 = 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ed abbia velocità $\vec{v}_0 = 6\hat{i} + 15\hat{j} - 8\hat{k}$, trovare la velocità e la posizione ad un qualsiasi istante t.

Per la $\vec{F} = m\vec{a}$

$$2 \cdot \vec{a} = 24t^2\hat{i} + (36t-16)\hat{j} - 12t\hat{k}$$

$$2\frac{d\vec{v}}{dt} = 24t^2\hat{i} + \ldots\ldots$$

integrando rispetto a t abbiamo:

$$\vec{v} = \int[12t^2\hat{i} + (18t-8)\hat{j} - 6t\hat{k}]dt + C_1$$

$$\vec{v} = 4t^3\hat{i} + (9t^2 - 8t)\hat{j} - 3t^2\hat{k} + c_1$$

conoscendo $v = v_0$ a $t=0$ $\quad c_1 = 6\hat{i} + 15\hat{j} - 8K$

$$\vec{v} = (4t^3+6)\hat{i} + (9t^2 - 8t + 15)\hat{j} - (3t^2+8)\hat{k}$$

e analogamente per $\vec{r}$.

Problema

Una forza costante $\vec{F}$ (modulo, direzione e verso) che agisce su una particella di massa m cambia la sua velocità da $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ nell'intervallo di tempo τ.

1) Dimostrare che $\vec{F} = m\dfrac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\tau}$

2) vale il risultato di 1) se la forza è variabile?

Per la 2ª legge della dinamica:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Se $\vec{F}$ e m sono costanti:

$$\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}t + c_1 \quad (1)$$

ma per $t=0$ possiamo supporre $\vec{v}_0 = \vec{v}_1$

$$\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}t + \vec{v}_1$$

ma per $t = \tau$ $\quad \vec{v} = \vec{v}_2$

e quindi

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{\vec{F}}{m}\tau$$

$$\vec{F} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\tau} \cdot m$$

2) Se F è costante vale 1), ma se non è costante l'integrazione di 1) non vale più.

Problema

Un blocco è lasciato scivolare da fermo dalla cima di un piano inclinato liscio di lunghezza 16 m e raggiunge il fondo dopo 4.0 s. Un secondo blocco viene lanciato lungo il piano inclinato dal fondo nell' istante in cui parte il primo blocco, in modo da tornare in fondo contemporaneamente al primo.

a) determinare l'accelerazione di entrambi i blocchi,

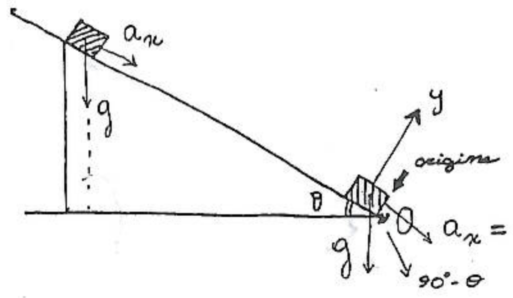
b) la velocità iniziale del 2° blocco,

c) la distanza percorsa in salita lungo il piano inclinato,

d) l' angolo formato dal piano con l'orizzontale.

Chiamiamo θ l' angolo di inclinazione del piano e prendiamo l' asse x parallelo al piano inclinato.

asse x y



$a_x = g\cos(90°-\theta) = g \operatorname{sen}\theta$

per il 1° blocco:

$-x = x_0 + v_{0x}t - \frac{1}{2}a_x t^2$ $\qquad v_{0x} = 0$ dato del problema

per come abbiamo scelto l' asse x

$x_0 = 16\ m$

quindi: $-x = 16 - \frac{1}{2}a_x t^2$

alla fine del piano inclinato $x = 0$.

$0 = 16 - \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad t = 4\,s$

$\boxed{a_x = 2\ m/s^2}$

$\boxed{a_x = g \operatorname{sen}\theta}$

<u>Per il secondo blocco</u>

$$x = v_{0x} t - \frac{1}{2} a_x t^2$$

$x_0 = 0$ perché il blocco parte dall'origine.

per $t = 4$ secondi il blocco è di nuovo in O (origine), quindi $x = 0$

$$0 = v_{0x} t - \frac{1}{2} a_x t^2$$

il blocco sale di un tratto x' e scende di un tratto $-x'$; in totale $x' - x' = 0$

ma $t = 4\,s$:

$$0 = 4\, v_{0x} - \frac{16}{2} a_x$$

ma $a_x = 2.0 \frac{m}{s^2}$

quindi $v_{0x} = 4 \frac{m}{s}$

c) distanza percorsa in salita :

$$v_x = v_{0x} - a_x t$$

$v_x = 0$ il blocco si arresta

$$v_{0x} - a_x t = 0 \qquad t = 2.0\, s$$

l'equazione di moto è :

$$x = x_0 + v_{0x} t - \frac{1}{2} a_x t^2$$

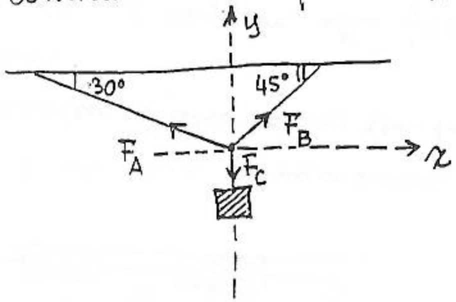
$x_0 = 0 \qquad t = 2\, s \qquad v_{0x} = 4 \frac{m}{s} \qquad a_x = 2 \frac{m}{s^2}$

$$x = 4 \cdot 2 - \frac{1}{2}\, 2 \cdot 4 = 8 - 4 = 4\, m$$

d) $g \operatorname{sen} \theta = a_x \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{2.0}{9.8} = 0.204 \quad \theta = 11^\circ 4$

Esempio :

Consideriamo un peso P appeso a dei fili :



Consideriamo come punto di applicazione delle forze il nodo dei fili.

Le forze che agiscono sono $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ e $\vec{F}_C$.
Il corpo non ha accelerazione, per cui

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$$

Proiettiamo la legge sugli assi cartesiani x e y :

$$\begin{cases} -F_{Ax} + F_{Bx} = 0 \\ F_{Ay} + F_{By} - F_C = 0 \end{cases}$$

$$F_{Ax} = F_A \cos 30°$$

$$F_{Ay} = F_A \operatorname{sen} 30°$$

$$F_{Bx} = F_B \cos 45°$$

$$F_{By} = F_B \operatorname{sen} 45°$$

$$F_{Cy} = F_C = P$$

$$\begin{cases} -F_{Ax} + F_{Bx} = 0 \\ F_{Ay} + F_{By} - F_C = 0 \end{cases}$$

e quindi :

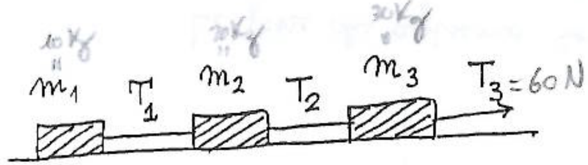
$$\begin{cases} -F_A \cos 30° + F_B \cos 45° = 0 \\ F_A \operatorname{sen} 30° + F_B \operatorname{sen} 45° = P \end{cases}$$

Supponiamo di conoscere il modulo di una delle tre forze [ad es. $P = 100\,N$] possiamo ricavare il modulo di F_A e F_B :

$$F_A = 73{,}3\,N \qquad F_B = 89.6\,N$$

Problema

Tre blocchi sono collegati da una fune e poggiano su un tavolo orizzontale senza attrito. Essi sono tirati verso destra con una forza $T_3 = 60\,N$.
Se $m_1 = 10\,Kg$, $m_2 = 20\,Kg$ e $m_3 = 30\,Kg$ trovare le tensioni T_1 e T_2.



Il moto è in una dimensione: si può prendere l'asse x orizzontale verso destra.
La massa m_1 è soggetta alla forza T_1

$$T_1 = m_1 a_x$$

la massa m_2 è soggetta a $T_2 - T_1$

$$T_2 - T_1 = m_2 a_x$$

La massa m_3 a $T_3 - T_2$:

$$T_3 - T_2 = m_3 a_x$$

La fune è tesa per cui la accelerazione delle tre masse è uguale ed è a_x.

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a_x \\ T_2 - T_1 = m_2 a_x \\ T_3 - T_2 = m_3 a_x \end{cases}$$

$T_1 = 10ax$
$T_2 - T_1 = 20ax$
$60 - T_2 = 30ax$

$T_1 = 10ax$
$T_2 = 30ax$
$60ax = 60$ $ax = 1\,m/s$

$T_1 = 10$
$T_2 = 30$

Sommando membro a membro abbiamo:

$$T_3 = a_x [m_1 + m_2 + m_3] =$$

$$= a_x [10 + 20 + 30]$$

$$a_x = \frac{60\,N}{60\,Kg} = 1{,}0\,\frac{m}{s^2}$$

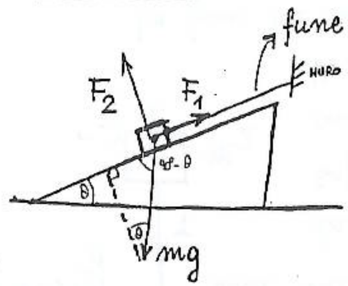
$$\frac{[MLT^{-2}]}{[M]} = [LT^{-2}]$$

e quindi ricaviamo T_1 e T_2 :

$$T_1 = 10\,N$$

$$T_2 = 30\,N$$

Esempio : il piano inclinato.



Un blocco di massa m è tenuto a riposo sul piano inclinato; le forze sono indicate in figura.

F_1 = forza esercitata dalla fune [tensione della fune]
mg = forza peso
F_2 = reazione del vincolo

Il blocco è a riposo : $\vec{a} = 0$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0$$

Prendiamo come asse x una parallela al piano inclinato e come asse y la normale al piano stesso. Si ha :

$$F_1 - mg \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad F_2 - mg\cos\theta = 0$$

noti m e θ si possono trovare F_1 e F_2.

Caso dinamico.

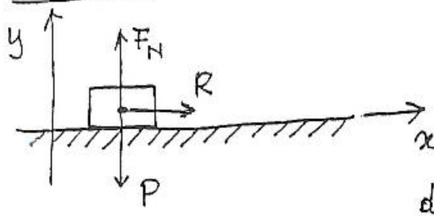
Si tagli il filo; il blocco non è più in equilibrio. Trovare l'accelerazione.

Usando gli stessi assi di prima :

$a_y = 0 \qquad a_x = -g \operatorname{sen}\vartheta \qquad F_1$ ora è zero

$$\begin{cases} a_y = 0 \\ a_x = -g \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$$

Esempio



Un blocco viene fatto scorrere su un piano liscio [cioè senza attrito] da una forza orizzontale R.

Se m del blocco = 2 kg quanto vale F_N?

F_N deve essere uguale a P perché è la reazione del vincolo.

$$F_N = m \cdot g = 2\,\text{Kg} \cdot 9.8\,m/s^2 = 19.6\,N$$

Quale forza R si deve applicare al corpo per dare al blocco una velocità di 4,0 m/s dopo 2 s, partendo da fermo?

applichiamo una accelerazione costante a_x.

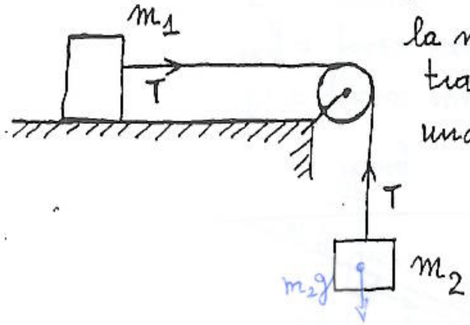
$$v_x = \int a_x dt = a_x \cdot t + v_{0x}$$

ma $v_{0x} = 0$.

Quindi $\quad a_x = \dfrac{v_x}{t} = \dfrac{4.0\,m/s}{2.0\,s} = 2\,m/s^2$

$$F = m \cdot a_x = 2\,\text{Kg} \cdot 2\,m/s^2 = 4\,N$$

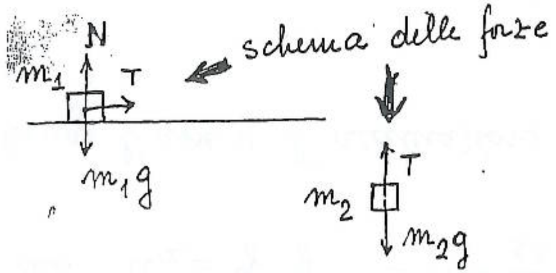
Esempio



su un piano liscio (senza attrito) si muove la massa m_1 collegata tramite la fune a una massa m_2; la fune passa sopra una carrucola priva di attrito.

La fune ha massa trascurabile. Trovare l'accelerazione del sistema.

Il modulo della tensione T è lo stesso in ogni punto della fune.



i corpi si muovono, quindi $a \neq 0$

$$\begin{cases} T = m_1 a_1 \\ m_2 g - T = m_2 a_2 \end{cases} \qquad \text{ma} \quad a_1 = a_2$$

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

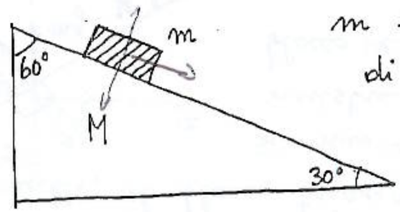
$$m_2 g = m_1 a + m_2 a \qquad a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$\text{e} \quad T = m_1 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

(valutare le dimensioni della relazione precedente)

Problema

Un blocco triangolare di massa M con angoli di 30°, 60° e 90° poggia su di un tavolo orizzontale. Un blocco di massa

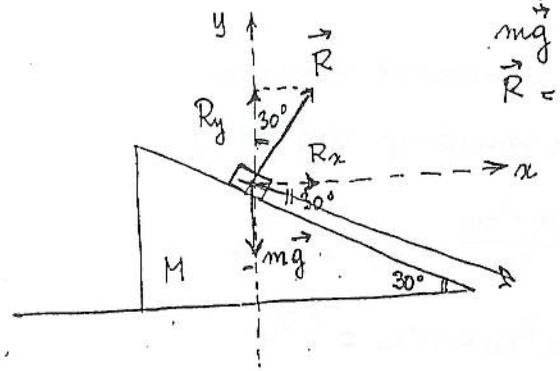


m è appoggiato su di esso.

1) quale accelerazione orizzontale deve avere M perché il blocco m rimanga fermo sul blocco triangolare, supponendo nullo l'attrito?

2) quale forza orizzontale $\vec{F}$ deve essere applicata al sistema per ottenere questo risultato?

3) Supponendo che nessuna forza sia applicata a M e che entrambe le superfici siano prive di attrito descrivere il moto risultante.



presi due assi cartesiani x e y come in figura possiamo scrivere:

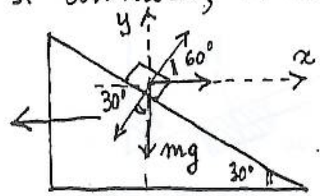
$$\begin{cases} R\cos 30° - mg = 0 & \text{lungo l'asse } y \\ R\cos 60° = ma_x & \text{lungo l'asse } x \end{cases}$$

da cui $a_x = g\,\text{tg}\,30° = 5{,}66\ \frac{m}{s^2}$

perchē lungo l'asse y l'accelerazione ē nulla?

b) trattiamo l'insieme dei due blocchi come un corpo unico di massa $m+M$ con accelerazione a.
Il moto ē orizzontale e rettilineo e l'accelerazione verticale ē nulla.
Lungo l'orizzontale si deve applicare una forza $F = (m+M)a$.

c) Supponiamo che la forza F si annulli; il blocco triangolare si muove verso sinistra e il blocco verso destra.



Adesso la y del blocco non rimane più costante come prima perchè il blocco scivola lungo il piano inclinato.
Il sistema non ha attrito.

Il triangolo non ha accelerazione lungo la y ; lungo l' asse x per il triangolo vale :

$$M a_{triangolo} = - R \operatorname{sen} 30°$$

cioè la componente orizzontale di R .

Per il blocco si hanno le equazioni :

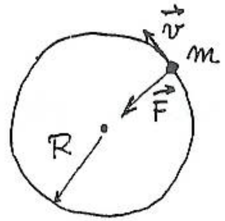
$$\begin{cases} m a_{blocco\,x} = R \operatorname{sen} 30° & \text{orizzontale} \\ m a_{blocco\,y} = R \cos 30° - mg & \text{verticale} \end{cases}$$

Dinamica del moto circolare uniforme.

Se un corpo si muove di moto circolare uniforme la sua traiettoria è una circonferenza e la sua velocità è costante in modulo (non in direzione).

Non esiste accelerazione tangenziale ma solo quella centripeta - diretta radialmente verso il centro di rotazione - che ha modulo v^2/R .

Sul corpo deve agire una forza F

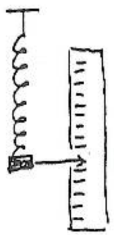


$$F = m \frac{v^2}{R} \rightarrow a = \frac{v^2}{R}$$

forza centripeta

Pensare ad un sasso legato a una fune e fatto girare - F in questo caso è la

La forza peso è un tipico esempio di forza statica in quanto, come altre forze, è presente anche quando l'accelerazione è nulla.
Le forze statiche possono venire misurate mediante dinamometri.

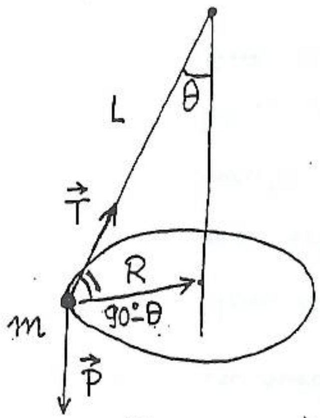


Il confronto fra due forze peso si può fare tramite una bilancia.

Si dicono dinamiche le forze che sono presenti solo se i corpi sono in moto. Per misurarle bisogna conoscere ad esempio l'accelerazione.

PENDOLO CONICO

Esempio:



un corpo puntiforme di massa m, ruota su una circonferenza orizzontale di raggio R, con modulo della velocità v costante, all'estremità di una fune lunga L.
Si trovi il tempo richiesto per una rivoluzione.

Forze agenti: tensione del filo $\vec{T}$ e peso $\vec{P}$.

Scomponiamo le forze in una componente radiale ed una verticale:

$$T \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{R} \quad \text{radiale} \Rightarrow F = ma$$

$T\cos\theta$ verticale [non c'è moto]

$P = T\cos\theta$

$$\begin{cases} T\sin\theta = m\, v^2/R \\ P = T\cos\theta \end{cases}$$

$T = \frac{P}{\cos\theta}$

elimino T ed ho

$$P \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = mg\,tg\,\theta = m\frac{v^2}{R}$$

$$g\,tg\theta = \frac{v^2}{R} \qquad \underline{v^2 = gR\,tg\,\theta}$$

se τ è il tempo per un giro completo

$$v = \frac{2\pi R}{\tau} \qquad \tau = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{gR\,tg\theta}}.$$

τ non dipende da m

cosa si nota nell'ultima relazione?

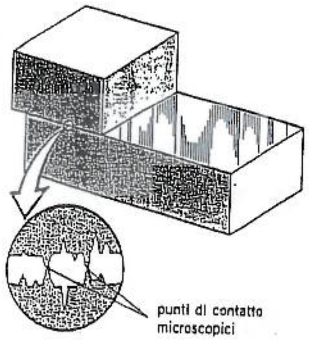
Forze di attrito.

Nei casi considerati abbiamo visto forze quali la tensione di una fune o la forza peso; consideriamo ora le forze di attrito.

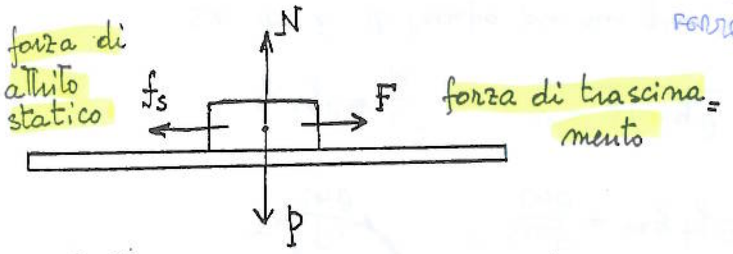
Un blocco si muove su di una superficie orizzontale con velocità iniziale $\vec{v}_0$ e alla fine si arresta; ciò significa che il blocco viene ad avere una accelerazione in direzione opposta al moto.

(moto ritardato uniformemente o non unifor.)

Ma all'accelerazione associamo una forza e questa forza viene chiamata forza di attrito.



caso statico QUANDO IL CORPO È FERMO



$a = 0$

caso dinamico QUANDO IL CORPO È IN MOVIMENTO

$a \neq 0$

il corpo si muove e si ha la forza di attrito dinamico.

Le forze di attrito che agiscono fra superfici ferme, a contatto, sono delle forze di attrito statico. La massima forza di attrito statico sarà uguale alla più piccola forza necessaria per iniziare il moto.

Le forze di attrito agenti fra corpi in movimento sono dette di attrito dinamico.

Modulo della forza di attrito statico

$$f_s \leq \mu_s N$$

μ_s = coefficiente di attrito statico

N = modulo della forza normale (che in generale è uguale alla forza peso).

Il segno di uguale nella relazione precedente vale quando f_s raggiunge il suo valore massimo.

μ = COEFF DI ATTRITO STATICO

Si definisce modulo di attrito dinamico:

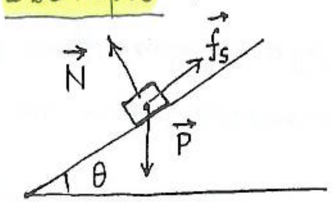
$$f_c = \mu_c N$$

μ_c = coefficiente di attrito dinamico (o cinetico)

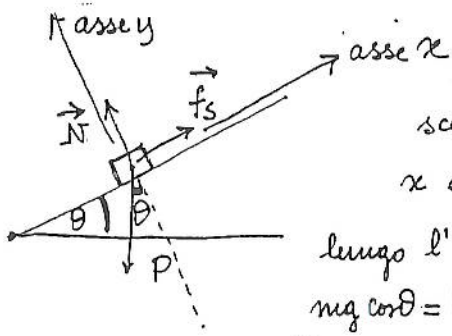
μ_s e μ_c sono coefficienti adimensionali.

Le due relazioni viste danno solo i moduli delle forze di attrito; la direzione di queste forze è perpendicolare alla forza normale.

Esempio:



Un blocco è fermo su un piano inclinato. Aumentando l'inclinazione il corpo comincia a scivolare per $\theta = \theta_s$. Trovare il coeff. di attrito statico fra blocco e piano.



scegliamo l'asse x e y come in figura

lungo l'asse y

$$mg \cos\theta = N$$

lungo l'asse x $\quad \vec{f_s} = mg \operatorname{sen}\theta \leq \mu_s N$

quindi $\begin{cases} mg \operatorname{sen}\theta \leq \mu_s N \\ N = mg \cos\theta \end{cases}$

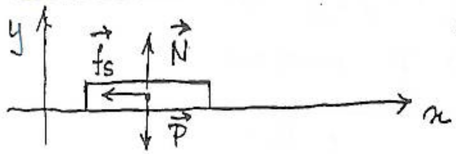
$$mg \operatorname{sen}\theta \leq \mu_s mg \cos\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta \leq \mu_s$$

quando θ diventa $= a\ \theta_s$ il corpo si muove e quindi

$$\operatorname{tg}\theta = \mu_s$$

Esempio :



un mobile si muove con velocità v_0 su una traiettoria rettilinea.
Se μ_s è il coefficiente di attrito statico quale è la distanza a cui il mobile si ferma ?

Supponendo f_s costante durante il moto, il moto è uniformemente decelerato.

$$\begin{cases} v(t) = -at + v_0 \\ x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \qquad x_0 = 0$$

il mobile si ferma quando $v(t) = 0$

da cui $-at + v_0 = 0 \qquad t = \frac{v_0}{a}$

e $x = -\frac{1}{2}a\frac{v_0^2}{a^2} + \frac{v_0^2}{a}$

DOBBIAMO RICAVARE a:
LUNGO L'ORIZZONTALE AGISCE SOLO f_s

Ricaviamo a :

$N = mg \qquad f_s = \mu_s N = \mu_s mg = +ma$

$a = +\mu_s \cdot g$

$$x = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{+\mu_s \cdot g} + \frac{v_0^2}{+\mu_s \cdot g} = \frac{-v_0^2 + 2v_0^2}{2\mu_s g}$$

Problema

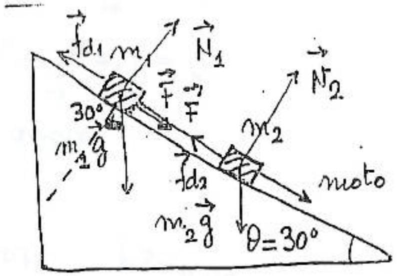
Due masse, $m_1 = 1.65$ Kg e $m_2 = 3.30$ Kg, fissate agli estremi di un'asta di massa trascurabile, parallela al piano inclinato, come indicato in figura, si muovono verso il basso e m_1 segue la pista di m_2. L'angolo di inclinazione è di 30°. Il coefficiente di attrito dinamico tra m_1 e il piano inclinato è $\mu_1 = 0.226$ tra m_2 e il piano è $\mu_2 = 0.113$.

Calcolare:

a) la tensione dell'asta che collega le due masse

b) l'accelerazione comune delle due masse.

Cambiano le risposte se è m_2 a seguire m_1?



La massa m_1 è soggetta a $m_1\vec{g}$, alla reazione normale $\vec{N}_1$, l'attrito $\vec{f}_{d1}$ e la forza $\vec{F}$ dovuta all'asta.

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{f}_{d_1} + \vec{F}$$

e su m_2 agiscono analoghe forze.

Prendiamo come asse x un asse parallelo al piano inclinato. Lungo l'asse x abbiamo:

$$\begin{cases} m_1 a_x = m_1 g \operatorname{sen}\theta - \mu_1 N_1 + F \\ m_2 a_x = m_2 g \operatorname{sen}\theta - \mu_2 N_2 - F \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 a_x = m_1 g \operatorname{sen}\theta - \mu_1 m_1 g \cos\theta + F \\ m_2 a_x = m_2 g \operatorname{sen}\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta - F \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro le due equazioni:

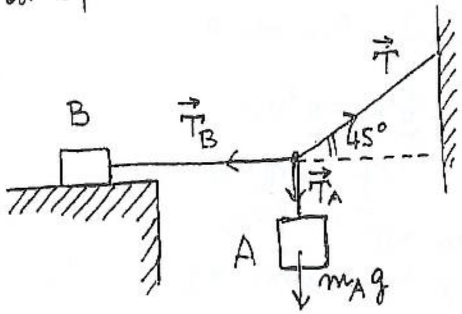
$$a_x = g \operatorname{sen}\theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} g \cos\theta = 3{,}6\, m/s^2$$

Dividiamo le due equazioni del sistema per m_1 e per m_2 rispettivamente e sottraiamo una dall'altra:

$$F = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left[(\mu_1 - \mu_2) g \cos\theta \right] = 1{,}05\, N$$

Problema:

Il blocco B pesa 710 N; il coefficiente di attrito statico fra blocco e terreno è 0.25. Trovare il massimo peso del blocco A per cui il sistema assuma la posizione di equilibrio indicata in figura.



$m_B g = 710\, N$ $\quad \mu_s = 0.25$

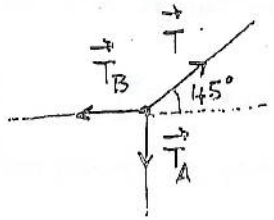
Si deve avere:

$$\vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{T} = 0$$

Il modulo di $\vec{T}_B$ deve essere inferiore a $\mu_s m_B g = 177.5\, N$.

Orizzontalmente si ha :

$$-T_B + T\cos 45^\circ = 0$$



Verticalmente :

$$-T_A + T\sin 45^\circ = 0$$

$\underline{\sin 45^\circ = \cos 45^\circ}$

dalle due equazioni si ha (sottraendo):

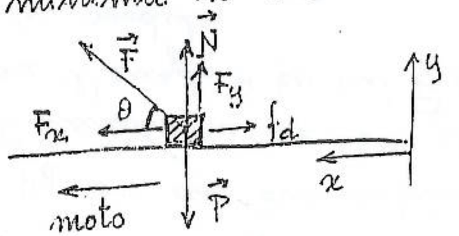
$$T_A = T_B \qquad T_B = T_A = m_A g$$

quindi $\underbrace{m_A g}_{T_B = T_A} < \mu_s m_B \cdot g$

$$m_A < \mu_s m_B = 18.1 \text{ Kg}$$

Problema

Una forza $\vec{F}$ è applicata ad un corpo di massa $m = 3$ Kg., come mostrato in figura. In presenza di un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.4$ essa deve imprimere al corpo l'accelerazione $a = 1.2\ m/s^2$. Determinare l'angolo θ per cui $\vec{F}$ è minima in modulo.



$\vec{N}$ = reazione del vincolo

$\vec{F}$ = forza esterna

$\vec{P}$ = forza peso

$$m.a. = -f_d + F\cos\theta = -\mu_d N + F\cos\theta$$

(orizzontale)

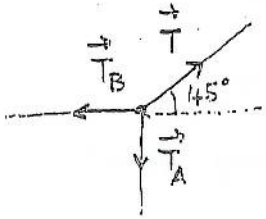
ma. $N = P - F_y = P - F\sin\theta$ (verticale)

quindi :

$$ma = -\mu_d\left[P - F\sin\theta\right] + F\cos\theta$$

Orizzontalmente si ha:

$$-T_B + T\cos 45° = 0$$



Verticalmente:

$$-T_A + T\,\mathrm{sen}\,45° = 0 \qquad \underline{\mathrm{sen}\,45° = \cos 45°}$$

dalle due equazioni si ha (sottraendo):

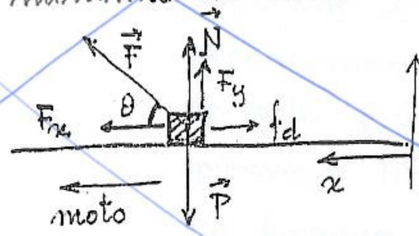
$$T_A = T_B \qquad T_B = T_A = m_A\, g$$

quindi $\underbrace{m_A\, g}_{T_B = T_A} < \mu_s m_B \cdot g$

$$m_A < \mu_s m_B = 18.1\ \mathrm{Kg}$$

<u>Problema</u>

Una forza $\vec{F}$ è applicata ad un corpo di massa $m = 3$ Kg., come mostrato in figura. In presenza di un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.4$ essa deve imprimere al corpo l'accelerazione $a = 1.2\ m/s^2$. Determinare l'angolo θ per cui $\vec{F}$ è minima in modulo.



$\vec{N}$ = reazione del vincolo
$\vec{F}$ = forza esterna
$\vec{P}$ = forza peso

$$m.a. = -f_d + F\cos\theta = -\mu_d N + F\cos\theta$$
(orizzontale)

$$ma.\quad N = P - F_y = P - F\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{(verticale)}$$

quindi:

$$ma = -\mu_d\left[P - F\,\mathrm{sen}\,\theta\right] + F\cos\theta$$

$$ma = -\mu_d \left[mg - F' \operatorname{sen}\theta \right] + F' \cos\theta$$

$a = 1.2\ m/s^2$ $\mu = 0.4$

$m = 3\ Kg$.

Si ricava. $F' = \dfrac{ma + \mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d \operatorname{sen}\theta}$

$$F' = \frac{15.4}{\cos\theta + \mu_d \operatorname{sen}\theta}$$

Per trovare l'angolo θ che minimizza F bisogna calcolare $\dfrac{dF}{d\theta}$ e porla uguale a zero.

Sistemi di riferimento.

La prima legge di Newton è chiamata anche legge di inerzia; i sistemi di riferimento in cui è valida si chiamano inerziali. Essi sono sistemi che o sono fermi rispetto alle stelle fisse o si muovono con velocità costante rispetto ad esse.

E' possibile tuttavia applicare le leggi della meccanica classica dal punto di vista di un sistema non inerziale.
Ad esempio questo sistema potrebbe essere un sistema in rotazione.
In questo caso dobbiamo introdurre delle forze che sono non newtoniane, le cosiddette forze di inerzia. Queste

forze non nascono dalla presenza di corpi e scompaiono quando si torna ad un sistema di riferimento inerziale.

Consideriamo un esempio: su una piatta= forma rotante sia appoggiato al bordo rialzato un blocco di marmo.

Un osservatore si trova sulla piattaforma e un secondo osservatore è a terra.

L' osservatore sulla piattaforma vede il blocco fermo; se lo allontana dal bordo verso il centro della piattaforma si accorge che il blocco torna verso il bordo.

Dice allora che il blocco è soggetto a due forze: una diretta verso l'interno dovuta al bordo rialzato e una verso l'esterno. Questa seconda è fittizia e prende il nome di forza centrifuga.

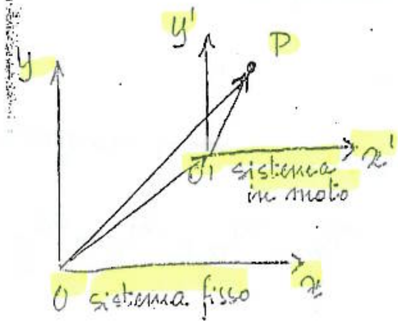
[modulo $\frac{m v^2}{R}$].

L' osservatore che si trova a terra vede le cose in modo diverso. Per lui sul blocco di marmo - che si muove di moto circolare - agisce solo la forza centripeta dovuta al bordo della piattaforma.

e quindi $F = m \cdot a_{centripeta} = m \frac{v^2}{R}$.

Se mancasse il vincolo del bordo il blocco si muoverebbe lungo la tangente e procederebbe lungo la stessa direzione con velocità v costante. Perché?

Trattazione quantitativa.



Abbiamo due sistemi di riferimento xy e $x'y'$, che studiamo il moto di una particella P. Si può scrivere:

$$\vec{PO} = \vec{PO'} + \vec{OO'}$$

le velocità sono:

$$\vec{v}_{PO} = \vec{v}_{PO'} + \vec{v}_{OO'}$$

$\vec{v}_{OO'}$ è la velocità del sistema di riferimento $x'y'$ rispetto al sistema xy.

Se il sistema di riferimento $x'y'$ si muove con velocità costante

$\vec{v}_{OO'}$ = costante

$$\vec{v}_{PO} = \vec{v}_{PO'} + \vec{v}_{OO'}$$

se deriviamo otteniamo le accelerazioni:

$$\vec{a}_{PO} = \vec{a}_{PO'}$$

la $\vec{v}_{OO'}$ ha derivata nulla.

Le accelerazioni e quindi le forze sono "viste" uguali dai due osservatori.

Ricordiamoci che questo è vero se i due osservatori o sono fermi o si muovono l'uno rispetto all'altro con velocità costante, cioè di moto rettilineo uniforme.

Prendiamo ancora in considerazione la relazione:

$$\vec{v}_{PO} = \vec{v}_{PO'} + \vec{v}_{OO'}.$$

Supponiamo che il sistema di riferimento $O'x'y'$ non si muova di moto rettilineo uniforme ma di un moto rototraslatorio qualsiasi.

Derivando la relazione precedente si ottengono delle relazioni del tipo:

$$\vec{a}_{PO} = \vec{a}_{PO'} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{Co}$$

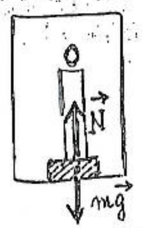
$\vec{a}_{PO}$ = acceleraz. rispetto al sistema Oxy

$\vec{a}_{PO'}$ = " " " $O'x'y'$

$\vec{a}_{tr}$ = accelerazione di trascinamento

$\vec{a}_{Co}$ = accelerazione di Coriolis.

Esempio:



un uomo di massa $m = 72.2$ Kg sta su una bilancia nella cabina di un ascensore. Cosa segna la bilancia quando l'accelerazione della cabina è nulla, vale $+3.2\ m/s^2$, vale $-3.2\ m/s^2$?

1) Quando $a = 0$

$\vec{N} = m\vec{g}$ cioè $N = mg$ cioè $= 72,2 \times 9,8 = 707,56$ N

2.) $a = 3.2\ m/s^2$

$$N - mg = m.a$$

$$N = mg + m.a = 72.2\,[g + a] =$$

$$= 72.2\,[9.8 + 3.2] = 939 \text{ Newton}$$

3) $a = -3.2\ m/s^2$

$$N - mg = -m.a$$

$$N = mg - m.a = 72.2\,[9.8 - 3.2] =$$

$$= 72.2 \cdot 6.6 = 477 \text{ Newton}$$

Lavoro e energia

1) - Lavoro,

2) - Energia cinetica,

3) - Teorema dell'energia cinetica,

4) - Concetto di gradiente, divergenza e rotore,

5) - Forze conservative,

6) - Conservazione dell'energia meccanica.

LAVORO = PRODOTTO SCALARE (5)

Lavoro di una forza.

Quando una forza $\vec{f}$ agisce lungo un tratto infinitesimo $\vec{ds}$ si dice lavoro della forza $\vec{f}$ il prodotto scalare:

$$\delta L = \vec{f} \cdot \vec{ds} = f\,ds \cdot \cos\varphi = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz\,.$$

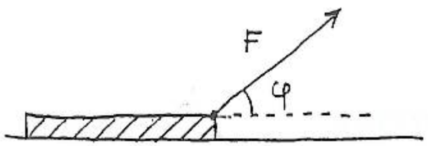
Consideriamo una linea qualsiasi sulla quale si sposta il punto a cui è applicata la forza e consideriamo il tratto di curva compreso fra due punti A e B. Si definisce lavoro della forza sul tratto AB:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot \vec{ds}$$

dimensioni di L?

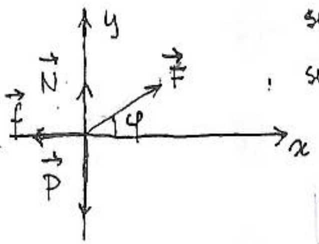
Se la forza è costante e la traiettoria è rettilinea, il lavoro è $f \cdot l \cdot \cos\varphi$ dove l è il segmento AB e φ l'angolo fra f e l

Esempio :



Una slitta viene tirata su una superficie orizzontale con velocità costante per un tratto $d = 10\,m$, Se il coefficiente di attrito dinamico è $= 0.20$ e la forza applicata forma un angolo di 45° con l'orizzontale trovare il lavoro.

$m_{slitta} = 10\,kg$. Dobbiamo trovare F. Abbiamo:



$$\begin{cases} \text{su } y & N + F\,\text{sen}\,\varphi = P = mg \\ \text{su } x & F \cdot \cos\varphi = f \qquad a = 0 \\ & f = \mu_d \cdot N \end{cases}$$

$$L = F\cos\varphi \cdot d = 10\,m$$

Dalle prime tre relazioni eliminiamo f e N e otteniamo:

$$F = \mu_d\, mg \cdot \frac{1}{(\cos\varphi + \mu_d\,\text{sen}\,\varphi)}$$

numericamente :

$m = 10\,kg$, $\mu_d = 0.20$, $\varphi = 45°$

$$F = 0.2 \cdot 10 \cdot 9.8 \, \frac{1}{0{,}707 + 0{,}14} = 23.1\,N$$

La componente verticale di F non compie lavoro, però riduce la forza normale fra slitta e superficie $N = P - F\,\text{sen}\,\varphi$, e quindi la forza di attrito.

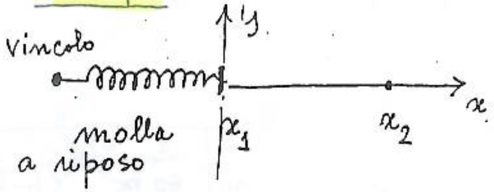
Calcolare il lavoro delle altre forze che agiscono sulla slitta.

$f = 19{,}6\,N$

$98 \cdot F\,\text{sin}\,\varphi = 98$

F

Esempio



Allungando la molla di un tratto x (ad esempio tirandola con la mano lungo l'asse x) essa esercita una forza di richiamo

$F = -Kx$ $\quad$ K = costante della molla.

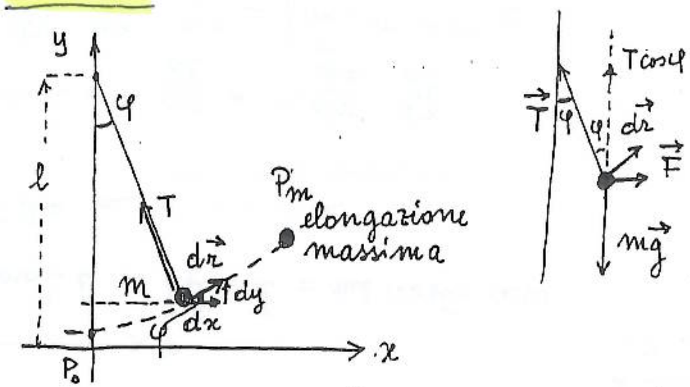
Per allungare la molla dobbiamo esercitare una forza pari a Kx. Calcoliamo il lavoro fatto da noi per spostare l'estremo libero della molla da x_1 a x_2:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} Kx \cdot dx = \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

e se $x_1 = 0$ e $x_2 = x$ $\quad$ $L = \frac{1}{2} k x^2$.

Se la molla viene compressa o allungata

Esempio: pendolo semplice.



Un corpo di massa m è sospesa a una corda di lunghezza l; il corpo descrive un arco di circonferenza con un angolo φ che va da 0 a φ_0.
Applichiamo una forza F orizzontale.
Notare che $d\vec{r}$ è tangente alla traiettoria del corpo (che è una circonferenza).
Il lavoro:

$$L = \int_{P_0}^{P_m} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_0}^{P_m} F \cos\varphi \, dr =$$

$$\int_{P_0}^{P_m} (F_x dx + F_y dy)$$

La forza F non ha componenti verticali per cui $F_y\, dy = 0$.

Possiamo scrivere

$\boxed{m\ x}$ $F_x = T \operatorname{sen}\varphi$ $\qquad$ $mg = T\cos\varphi$ $\boxed{m\ y}$

quindi

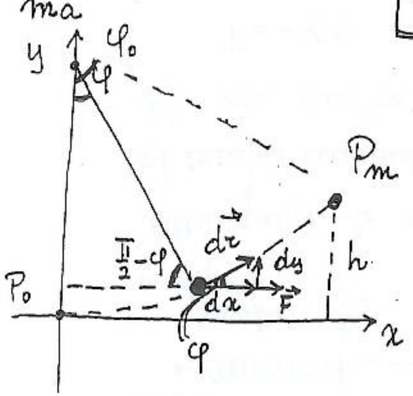
$F_x = mg\, tg\varphi$

$$L = \int_{P_0}^{P_m} F_x\, dx = \int_{P_0}^{P_m} mg\, tg\varphi \cdot dx =$$

$\boxed{tg\varphi = \frac{dy}{dx}}$ e

quindi $\frac{dy}{\cancel{dx}}$ $\cancel{dx}$

$$L = \int_0^h mg\, dy = mgh$$



Calcolare il lavoro fatto dalla tensione del filo. 0 perché la forza è ⊥ allo spostamento

Energia cinetica.

Si definisce energia cinetica di un corpo puntiforme:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \qquad [ML^2T^{-2}]$$

m = massa

v = velocità.

Consideriamo una forza qualsiasi agente lungo l'asse x

Velocità in una sola dimensione è solo il modulo e non il vettore

il lavoro L è $= \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = nel nostro caso

$$= \int_{x_0}^{x} F\, dx$$ ← se rimane in una sola dimensione

ma $F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

$$\boxed{L =} \int_{x_0}^{x} m\, \frac{dv}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} \cdot dx = \int_{v_0}^{v} m \cdot v \cdot dv =$$

LAVORO IN 1 SOLA DIMENSIONE $\boxed{\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2}$ = VARIAZIONE DI Ec [ENERGIA CINETICA che si può anche scrivere

$$\boxed{L = \Delta K}$$

il lavoro fatto su un corpo puntiforme dalla risultante delle forze è uguale alla variazione dell'energia cinetica.

Questo teorema vale per tutte le forze.

Unità di misura :

lavoro ed energia cinetica sono grandezze omogenee ed hanno le stesse dimensioni

Nel SI o MKS l'unità è il Joule J

$1\,J = 1$ Newton $\times$ 1 metro

Nel CGS l'unità è l'erg

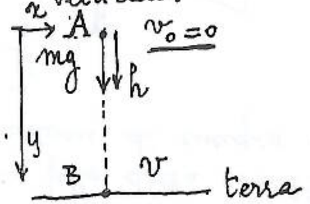
1 erg $= 1$ dine $\times$ 1 centimetro

1 joule $= 10^5$ dine $\times 10^2$ cm $= 10^7$ erg

1 elettron volt (eV) $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J

Esempio.

Un corpo viene fatto cadere da fermo da un'altezza h dalla superficie della terra. Quale è la velocità all'atto di toccare la terra. Sia m la massa del corpo; la forza agente è mg diretta secondo la verticale.



$$L = \int_0^h mg\,dy = mgh$$

la variazione di energia cinetica è $K_B - K_A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$

$$L = \Delta K = mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Esempio

Un blocco scivola su un piano orizzontale senza attrito con velocità costante di 1 m/s - Il blocco si ferma comprimendo una molla che si trova sul suo cammino. Di quanto si comprime la molla sapendo che la sua costante elastica è 25 N/m ?

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v^2_{finale} - \frac{1}{2} m v^2_{iniziale}$$

Il lavoro fatto per comprimere la molla è :

$$L = -\frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \text{lavoro fatto dalla molla}$$

$$\Delta K = -\frac{1}{2} m v^2_{iniziale}$$

la sua v_{finale} è $= 0$

Uguagliamo L alla variazione di K

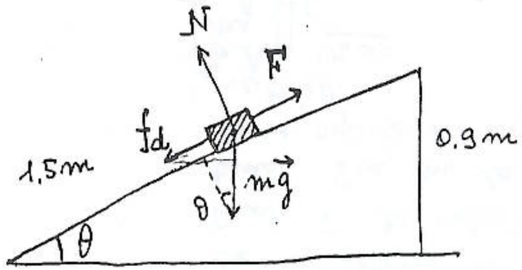
$$\Delta K = L \qquad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x^2$$

Problema

Un blocco di ghiaccio di 50 kg è posto su un piano inclinato lungo 1.5 m e alto 0.9 m. Un uomo spinge il blocco in su parallelamente al piano inclinato con velocità costante. Il coefficiente di attrito dinamico è 0.10.

Trovare :

a) la forza esercitata dall'uomo,
b) il lavoro fatto dall'uomo,
c) il lavoro fatto dalla forza di gravità,
d) il lavoro della forza di attrito,
e) il lavoro fatto dalla risultante delle forze,
f) la variazione di energia cinetica del blocco.



Impostazione :

a) la risultante delle forze deve essere nulla.

Prendiamo l'asse x parallelo al piano

inclinato :

$$F - f_d - mg \sin\theta = 0$$

dove F = forza esercitata dall' uomo.

$$F = f_d + mg \sin\theta = \mu_d mg \cos\theta + mg \sin\theta$$

b) lavoro fatto :

dall' uomo $L_1 = F \cdot l$

dalla forza di gravità $L_2 = -mg\, l \sin\theta$

dalla forza di attrito $L_3 = -l mg\, \mu_d \cos\theta$

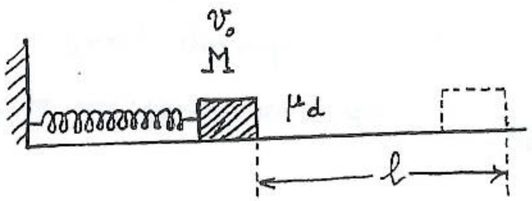
perchè la risultante delle forze è nulla il lavoro totale deve essere nullo e nulla è la variazione dell' energia cinetica.

Problema

Il blocco di massa M ha velocità iniziale v_0 verso destra e la sua posizione iniziale è tale che la molla non è nè compressa nè allungata. Il blocco percorre il tratto l verso destra prima di fermarsi; la costante elastica della molla è K e il coeff. di attrito μ_d. Quando il blocco si è spostato del tratto l trovare :

1) il lavoro fatto dalle forze di attrito,
2) il lavoro fatto dalla molla,
3) se vi sono altre forze agenti sul blocco e, in caso affermativo, quale lavoro compiono,
4) il lavoro totale compiuto sul blocco.

- Usare il teorema dell' energia cinetica per calcolare l in funzione di M, v_0, μ_d, g e K.



1) La reazione vincolare in questo caso equilibra la forza peso e quindi

$$N = Mg$$

La forza di attrito è $\mu_d N = \mu_d M g$

e siccome ha verso opposto allo spostamento l il lavoro è :

$$-l\,\mu_d M g$$

2) la molla esercita una forza elastica di richiamo

$$F = -Kx$$

il lavoro è $= \int_0^l -Kx\,dx = -\frac{1}{2} K l^2$

3) Sul blocco agiscono forza peso e reazione vincolare ma il loro lavoro è nullo in quanto sono perpendicolari allo spostamento.

4) Il lavoro totale è la somma dei lavori calcolati separatamente.

L'energia cinetica del blocco varia da $\frac{1}{2} M v_0^2$ a zero, quindi

$$\Delta K = -\frac{1}{2} M v_0^2$$

ma la variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro delle forze che agiscono e quindi

$$-\frac{1}{2} M v_0^2 = -\mu_d M g l - \frac{1}{2} K l^2$$

da cui

$$K l^2 + 2\mu_d M g l - M v_0^2 = 0$$

$$l = \frac{-\mu_d M g \pm \sqrt{\mu_d^2 M^2 g^2 + K M v_0^2}}{K}$$

Nota - ci sono due soluzioni :

$$l_1 = \frac{-\mu_d M g + \sqrt{}}{K} \quad \text{positiva}$$

$$l_2 = \frac{-\mu_d M g - \sqrt{}}{K} \quad \text{negativa}$$

Problema:

Una particella di massa m si muove nel piano xy in modo che il suo vettore posizione sia $\vec{R} = a\cos\omega t\,\hat{\imath} + b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{\jmath}$

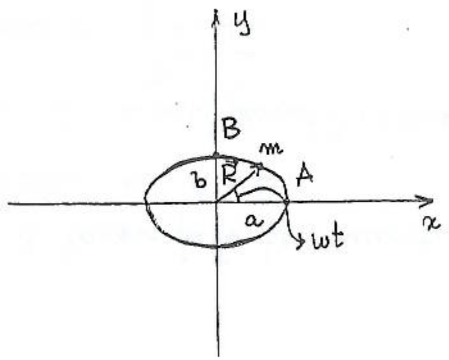
dove a, b, ω sono costanti positive e $a > b$.

ⓐ dimostrare che la particella si muove lungo una ellissi.

$$\vec{R} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} = a\cos\omega t\,\hat{\imath} + b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{\jmath}$$

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,\omega t \end{cases} \qquad \begin{cases} x/a = \cos\omega t \\ y/b = \mathrm{sen}\,\omega t \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



ⓑ dimostrare che la forza che agisce sulla particella è sempre diretta verso l'origine.

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}\left[a\cos\omega t\,\hat{\imath} + b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{\jmath}\right]$$

$$= m\left[-\omega^2 a\cos\omega t\,\hat{\imath} - \omega^2 b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{\jmath}\right] =$$

$$= -m\omega^2 \underbrace{\left[a\cos\omega t\,\hat{\imath} + b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{\jmath}\right]}_{\vec{R}}$$

ⓒ trovare l'energia cinetica nei punti A e B.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = -\omega a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{\imath} + \omega b\cos\omega t\,\hat{\jmath}$$

in A : $\cos\omega t = 1$, $\mathrm{sen}\,\omega t = 0$

$$K_A = \frac{1}{2} m\omega^2 b^2$$

in B : $\cos\omega t = 0$, $\mathrm{sen}\,\omega t = 1$

$$K_B = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$$

(d) trovare il lavoro fatto per muovere la particella da A a B.

la forza è : $-m\omega^2\left[a\cos\omega t\,\hat{i}+b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{j}\right]$

il lavoro è $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{R}$

dobbiamo trovare $d\vec{R}$,

$\vec{R}=a\cos\omega t\,\hat{i}+b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{j}$

$dR=\left[-a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{i}+b\omega\cos\omega t\,\hat{j}\right]dt$

quindi :

$$L=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{R}=\int_0^{t_B}\left[-m\omega^2(a\cos\omega t\,\hat{i}+b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{j}\right]\cdot\left[-a\omega\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{i}+b\omega\cos\omega t\,\hat{j}\right]dt$$

cioè prendiamo $t_A=0$ e $t_B=\frac{\pi}{2\omega}$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} m\omega^3\left[a^2-b^2\right]\mathrm{sen}\,\omega t\cos\omega t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2\left[a^2-b^2\right]$$

Un secondo modo per trovare questo lavoro è di calcolare la differenza fra l'energia cinetica in B e quella in A.

Calcolando il lavoro in un giro completo intorno all'ellisse si ottiene :

$$L=0$$

Potenza.

Si definisce potenza il lavoro compiuto nell'unità di tempo:

$$P = \frac{L}{t}$$

nel SI l'unità di potenza è il watt (W) = 1 J/s.

Gradiente, divergenza, rotore.

SI BASANO TUTTI SUL ∇ NABLA

Sia $\varphi = \varphi(x,y,z)$ una funzione scalare che chiamiamo "campo scalare".
Sia $\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$ un vettore funzione di x, y, z che chiamiamo "campo vettoriale".
Si definisce un operatore differenziale vettoriale, indicato con ∇, dato da:

$$(\text{NABLA})\ \nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Mediante questo operatore definiamo le seguenti grandezze:

1) $$\nabla\varphi = \left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\varphi = \hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$ vettore

questo vettore si chiama gradiente di φ

e viene indicato con grad φ.

2) Divergenza.

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \vec{A}$$

Prodotto scalare

$$= \left[\; \cdots\cdots\cdots \;\right] \cdot \left[A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}\right]$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \leftarrow \text{scalare}.$$

questo scalare si chiama divergenza di $\vec{A}$ ed è indicato con div $\vec{A}$.

3) Rotore $\quad \nabla \wedge \vec{A}$

prodotto vettore

$$\nabla \wedge \vec{A} = \left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] \wedge \left[A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}\right] =$$

prodotto vettore

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

questo vettore viene chiamato rotore di $\vec{A}$ e viene indicato con rot $\vec{A}$.

Esempi

1) Sia $\varphi = x^2 y z^3$ trovare il gradiente di φ.

$$\nabla \varphi = \hat{i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$

$$= \hat{i}\,2xyz^3 + \hat{j}\,x^2 z^3 + \hat{k}\,3x^2 y z^2$$

2) Sia $\vec{A} = xz\,\hat{i} - y^2\hat{j} + 2x^2 y\,\hat{k}$

trovare $\mathrm{div}\,\vec{A}$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot\left[xz\hat{i} - y^2\hat{j} + 2x^2 y\,\hat{k}\right]$$

$$= z - 2y + 0$$

Questo perchè nel prodotto scalare rimangono solo i termini $\hat{i}\cdot\hat{i}$, $\hat{j}\cdot\hat{j}$ e $\hat{k}\cdot\hat{k}$.

Quindi $\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\cdot xz\,\hat{i} = \frac{\partial}{\partial x}\,xz = z$

3) calcoliamo $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla \wedge \vec{A}$

$$\vec{A} = xz\,\hat{i} - y^2\,\hat{j} + 2x^2 y\,\hat{k}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y^2 & +2x^2 y \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}2x^2 y - \frac{\partial}{\partial z}(-y^2)\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}2x^2 y - \frac{\partial}{\partial z}xz\right] +$$

$$+ \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}xz\right] =$$

$$= \hat{i}\left[2x^2 + 0\right] - \hat{j}\left[4xy - x\right] + \hat{k}\left[0 - 0\right] =$$

$$= 2x^2\,\hat{i} - \left[4xy - x\right]\hat{j}\,.$$

Si dimostra che un campo di forze $\vec{F}$ è conservativo quando:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \nabla \wedge \vec{F} = 0$$

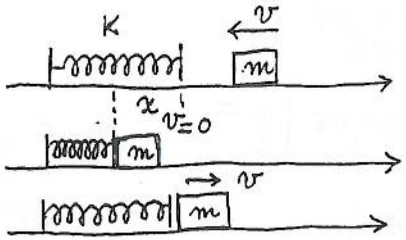
Il campo $\vec{F}$ è conservativo se esiste un campo scalare V tale che:

$$\vec{F} = -\,\text{grad}\,V$$

V è chiamato energia potenziale o potenziale scalare, o brevemente potenziale della particella nel campo di forza conservativo $\vec{F}$.

Conservazione dell' energia.

Consideriamo questa situazione:



il blocco viene lanciato con velocità v contro una molla; si muove sopra un piano orizzontale senza attrito e la molla è supposta ideale, e di massa trascurabile.

Il blocco comprime la molla, si ferma e la molla, compressa, si espande e il blocco si muove e riacquista la velocità iniziale.

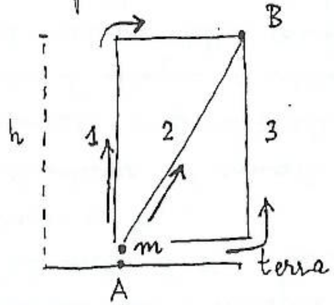
Supponiamo ora che il piano orizzontale eserciti un attrito; il blocco riacquista una velocità inferiore a quella iniziale.

Chiamiamo conservative le forze (esempio quella della molla, quella di gravità ecc.) per le quali la capacità di fare lavoro rimane inalterata, come nel primo esempio.

Chiamiamo non conservative le forze (ad esempio l'attrito) per le quali la capacità di fare lavoro non rimane inalterata, come ad esempio il caso di blocco + molla in presenza di attrito.

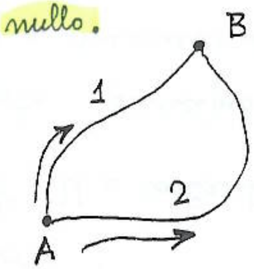
Per una forza conservativa si può dimostrare che il lavoro fatto per spostare un corpo da una posizione A a una posizione B non dipende dal cammino seguito per andare da A a B.

Verificare, come esempio, il lavoro fatto dalla forza peso per andare da A a B lungo le 3 traiettorie mostrate in figura;



questo lavoro non dipende dal cammino seguito.

Si ha ancora che per una forza conservativa il lavoro fatto lungo un percorso chiuso è nullo.



Per una forza conservativa

$$L_{AB1} + L_{BA2} = 0$$

da cui

$$L_{AB1} = - L_{BA2} \, .$$

Infine, sempre per una forza conservativa si può dire che il lavoro fatto per spostare un corpo da un punto A a un punto B dipende solo dal punto A e dal punto B e non dal cammino seguito per andare da A a B.

Introduciamo per una forza conservativa il concetto di energia potenziale.
Partiamo da un esempio considerando il sistema già visto molla + blocco che si muove su un piano senza attrito; il blocco comprime la molla e si arresta, la molla compressa spinge il blocco che riacquista la velocità iniziale.

SONO 3 I PRINCIPI DI CONSERVAZIONE

- ENERGIA MECCANICA
- QUANTITÀ DI MOTO
- MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Si ha quindi che l'energia cinetica che inizialmente è K_0, diventa $=0$ e poi torna a K_0.

Si può introdurre il concetto di energia configurazionale o potenziale U e dire che, quando l'energia cinetica K varia di ΔK, al variare della configurazione del sistema, l'energia potenziale U deve essere cambiata della stessa quantità ma in senso opposto. Si può scrivere:

$$\boxed{\Delta K + \Delta U = 0} \qquad \Delta K = -\Delta U$$

o anche $K + U = \text{costante}$.

Dalla relazione $L = \Delta K = -\Delta U$ si ha

$$\boxed{\Delta U = -L}.$$

SOLO X LE FORZE CONSERVATIVE

La quantità

$$K + U = \text{costante} = E$$

prende il nome di "energia meccanica totale".

Se siamo in una dimensione possiamo anche scrivere:

$$K + U(x) = E$$

SOLO X 1 FORZA CONSERVATIVA PARLO DI ENERGIA POTENZIALE

in quanto sappiamo che l'energia potenziale dipende solo dalla posizione del punto materiale.

La relazione precedente ci dice che durante il moto [e solo per forze conservative] l'energia meccanica totale rimane costante.

Quale suggerimento abbiamo quando risolviamo dei problemi in cui si hanno forze conservative?

La relazione:

$$K + U = \text{costante}$$

è chiamata "principio di conservazione dell'energia meccanica per le forze conservative".

$$\underbrace{dU(x,y,z)}_{\text{VARIAZ. ENERG. POTENZIALE}} = -\underbrace{\left[F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz\right]}_{\text{LAVORO}}$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Nelle relazioni precedenti si è usata la quantità $\mathcal{U}$ [o $\mathcal{U}(x)$] sebbene sia possibile calcolare "variazioni" di energia potenziale. Supponiamo di considerare una forza conservativa che agisca in una sola dimensione; sotto l'azione di questa forza una particella si sposti da una posizione a a una posizione b.

Si ha

$$\Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}_b - \mathcal{U}_a$$

$$\mathcal{U}_b = \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_a$$

$$\mathcal{U}_b = -\int_{x_a}^{x_b} F(x)\,dx + \mathcal{U}_a$$

È spesso conveniente scegliere come valore per b il valore x per cui $\mathcal{U}_b = \mathcal{U}(x)$ e assumiamo per a una opportuna posizione di riferimento $x_a = x_0$.

Allora:

$$\mathcal{U}(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + \mathcal{U}(x_0).$$

A $\mathcal{U}(x_0)$ si attribuisce solitamente un valore nullo; è inoltre conveniente scegliere come posizione di riferimento x_0 quella in cui la forza agente sul punto materiale è nulla.

Nota.

$$\Delta\mathcal{U} = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

in una dimensione.

LA FORZA PESO È UNA FORZA CONSERVATIVA

Utilizzando questa relazione si può ricavare:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

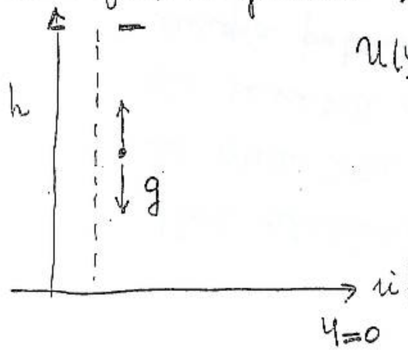
che ci dice:

l'energia potenziale è una funzione della posizione la cui derivata cambiata di segno ci dà la forza.

Esempi:

Calcoliamo l'energia potenziale nel caso della forza di gravità:

$$U(y) = -L = -\int_0^h (-mg)\,dy + U(0)$$



Quindi

$U(y)$ = energia potenziale gravitazionale $= mgy$

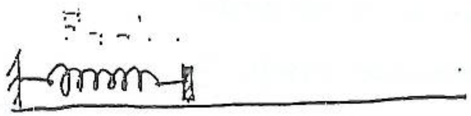
La relazione $F(y) = -\frac{dU}{dy} = -mg$.

SOLO NEL CASO [illegible]

Prendendo l'origine degli assi sulla superficie terrestre l'energia potenziale è nulla per $y=0$ e cresce linearmente con y.

Esempio

Energia potenziale della molla.
Sia data una molla elastica che si muova su una superficie orizzontale priva di attriti.



Prendiamo il punto $x_0 = 0$ come posizione di equilibrio della molla; l'energia potenziale è:

$$U(x) = -\int_0^x F(x)\,dx + U(0) = -\int_0^x -Kx\,dx + U(0).$$

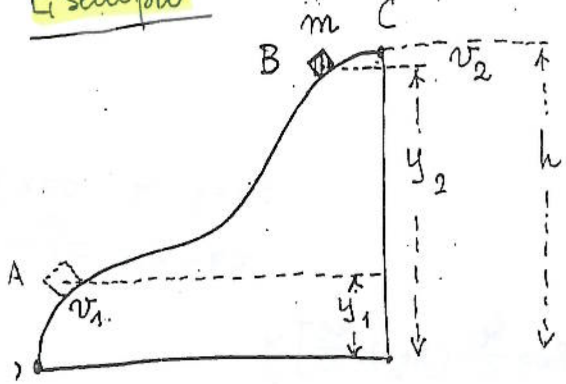
Scegliamo $U(0) = 0$; la forza e l'energia potenziale sono nulle nella posizione di equilibrio della molla:

$$U(x) = -\int_0^x -Kx\,dx = \frac{1}{2}Kx^2.$$

La relazione $F = -\dfrac{dU}{dx} = -Kx$

è soddisfatta.

Esempio



Il blocco di massa m scivola lungo la superficie curva priva di attrito.

L'energia meccanica nella posizione A è:

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1$$

e nella posizione B:

$$E = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

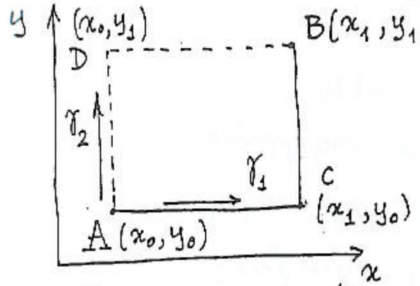
da cui $\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$.

Se il blocco parte da fermo da C:

$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \qquad v = \sqrt{2gh}$

Problema.

Un punto materiale P si muove nel piano xy sotto l'azione di più forze, tra le quali la forza F di componenti $F_x = b\,xy$ e $F_y = c\,(x^2+y^2)$ con b e c costanti. Calcolare i lavori compiuti da F quando P si sposta da A a B lungo la traiettoria γ_1 o γ_2; trovare la relazione che deve sussistere fra b e c affinché i lavori così calcolati siano uguali.



$$\vec{F} = bxy\,\hat{i} + c(x^2+y^2)\,\hat{j}$$
$$d\vec{R} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}$$
$$\vec{F}\cdot d\vec{R} = bxy\,dx + c(x^2+y^2)\,dy.$$

Lavoro lungo γ_1: $L_1 = \int_{\gamma_1} (F_x\,dx + F_y\,dy) =$

$$= \int_{x_0}^{x_1} bxy_0\,dx + \int_{y_0}^{y_1} c(x_1^2+y^2)\,dy = \frac{b}{2}y_0(x_1^2-x_0^2) + c\,x_1^2(y_1-y_0) + \frac{c}{3}(y_1^3-y_0^3)$$

Lavoro lungo γ_2:

$$L_2 = \int_{\gamma_2} (F_x\,dx + F_y\,dy) = \int_{x_0}^{x_1} bxy_1\,dx + \int_{y_0}^{y_1} c(x_0^2+y^2)\,dy =$$

$$= \frac{b y_1}{2}(x_1^2-x_0^2) + c\,x_0^2(y_1-y_0) + \frac{c}{3}(y_1^3-y_0^3)$$

uguagliamo i due lavori:

$$\frac{b}{2}y_0(x_1^2-x_0^2) + c\,x_1^2(y_1-y_0) + \cancel{\frac{c}{3}(y_1^3-y_0^3)} = \frac{b}{2}y_1(x_1^2-x_0^2) +$$
$$+ c\,x_0^2(y_1-y_0) + \cancel{\frac{c}{3}(y_1^3-y_0^3)}$$

si ottiene $\frac{b}{2} = c$ cioè $b = 2c$.

Sappiamo che una forza F è conservativa se

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$$

$$\vec{F} = bxy\,\hat{i} + c(x^2+y^2)\,\hat{j}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bxy & c(x^2+y^2) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}c(x^2+y^2)\right] = 0$$
$$-\hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}bxy\right] = 0$$
$$\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}c(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial y}bxy\right]$$

$$[\,\text{-------}\,] = 2cx - bx$$

$2cx - bx = 0$ se $b = 2c$

Riprendiamo in considerazione il punto che si muove con il vettore posizione:

$$\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} = a\cos\omega t\,\hat{i} + b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{j}$$

dimostriamo che il campo di forza è conservativo

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{R} = -m\omega^2(x\hat{i} + y\hat{j}) = -m\omega^2(a\cos\omega t\,\hat{i} + b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{j})$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (-m\omega^2 x) & (-m\omega^2 y) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}(-m\omega^2 y)\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}(-m\omega^2 x)\right] +$$

$$+ \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-m\omega^2 y) - \frac{\partial}{\partial y}(-m\omega^2 x)\right]$$

$$= \hat{i}\,0 - \hat{j}\,0 + \hat{k}\,0.$$

Essendo il campo conservativo esiste un potenziale V tale che

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

cioè $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -m\omega^2 x \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -m\omega^2 y$

$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

Esempio

E' dato il campo di forza:

$$\vec{F} = x^2yz\,\hat{i} - xyz^2\,\hat{k}.$$

Stabilire se è conservativo o no.

$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \nabla \wedge \vec{F}$ è uguale a zero se il campo è conservativo ed è $\neq 0$ se il campo non è conservativo.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & 0 & -xyz^2 \end{vmatrix} =$$

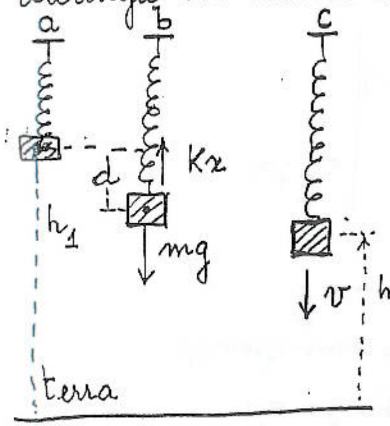
$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(-xyz^2) - \frac{\partial}{\partial z}0\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-xyz^2) - \frac{\partial}{\partial z}x^2yz\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial y}x^2yz\right]$$

$$= -xz^2\,\hat{i} - (-yz^2 - x^2y)\,\hat{j} + (-x^2z)\,\hat{k}$$

questo è $\neq 0$ e quindi il campo non è conservativo.

Problema

Un oggetto è appeso ad una molla verticale e viene abbassato lentamente fino alla posizione di equilibrio. Esso allunga la molla di un tratto d. Se lo stesso oggetto, attaccato alla stessa molla viene lasciato cadere, di quanto si allunga la molla?



nel caso b

$$mg = Kx$$

cioè $\underline{mg = Kd}$

Nel caso c il corpo cade; le forze sono tutte conservative.
Supponiamo che nella posizione

In condizioni iniziali:

$$U_{molla} = 0 \qquad U_{massa} = mgh_1$$

dove h_1 è la posizione del corpo rispetto alla terra. Quindi

1) $$E_{energia\ totale} = mgh_1 + \underbrace{0}_{energia\ cinetica} + \underbrace{0}_{ener.\ potenz.\ molla}$$

l'energia cinetica è nulla perché il corpo parte da fermo.

In posizione finale, quando la molla è completamente allungata la velocità si annulla:

2) $$E_{energia\ totale} = mgh_2 + \frac{1}{2}KD^2 + \underbrace{0}_{energia\ cin.}$$

ma la 1) e la 2) sono uguali perché l'energia meccanica totale si conserva nel caso di forze conservative.

Quindi

$$mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2} K D^2$$

dove $D = h_1 - h_2$

D = ALLUNGAMENTO DELLA MOLLA

e :

$$2mg[h_1 - h_2] = K D^2$$

$$2mg D = K D^2$$

$$D = \frac{2mg}{K}.$$

Problema :

Una particolare molla non segue la legge di Hooke; la forza (in Newton) che essa esercita quando è allungata di un tratto x (in metri) ha modulo $52.8x + 38.4x^2$ in senso opposto al movimento.

L'ALLUNGAMENTO È TALE CHE LA MOLLA NON PERDE IL SUO INDICE DI ELASTICITÀ

a) Calcolare il lavoro totale necessario per allungare la molla da $x = 0.5\,m$ a $x = 1.0\,m$

b) Tenendo fisso un estremo della molla, si fissi all'altro estremo una particella di massa 2.17 Kg e si allunghi la molla di un tratto $x = 1.0\,m$. Se da questa configurazione la particella viene lasciata libera, partendo da ferma, calcolarne la velocità nell'istante in cui la molla ha ripreso la configurazione nella quale l'allungamento è $x = 0.50\,m$.

c) La forza esercitata da tale molla è conservativa o no?

a) lavoro per allungare la molla :

Si deve applicare la forza $52.8x + 38.4x^2$ che agisce parallelamente allo spostamento.

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \int_{0.5}^{1.0} (52.8x + 38.4x^2)\,dx$$

$$= \Big[26.4\,x^2 + 12.8\,x^3\Big]_{0.5}^{1.0} = 31.0\ J$$

b) per il teorema dell' energia cinetica il lavoro prodotto dalla forza risultante (in questo caso solo $F(x)$) è uguale alla variazione di energia cinetica :

$$L = K_{fin} - \underbrace{K_{iniz.}}_{0} = K_{fin} - 0$$

$$31.0\ J = \frac{1}{2} m v^2_{finale}$$

$$v^2_{fin} = \frac{31.0 \cdot 2}{m} = 28.6$$

$$v_{fin} = 5.35\ m/s$$

c) La forza è conservativa.

A questa conclusione si può arrivare con un ragionamento del tutto generale sui moti unidimensionali.

La forza è di tipo posizionale e dipende solo dalla coordinata x ;

$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$ dipende solo da x_1 e x_2 che sono gli estremi dell' intervallo di integrazione.

Si può dimostrare che è conservativa calcolando $\nabla \wedge \vec{F}(x)$ e controllando se è $=0$ o no.

La $F(x)$ è diretta come l'asse x ; vettorialmente la scriviamo :

$$\vec{F}(x) = (52.8x + 38.4x^2)\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + 0\,\hat{k}$$

$$\nabla \wedge \vec{F}(x)$$

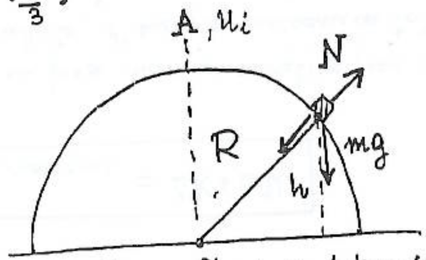
$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (52{,}8x+38{,}4x^2) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\hat{i} - \hat{j}\,0 + \hat{k}\,0$$

quindi $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$ e la forza è conservativa.

Problema

Un ragazzo seduto sulla cima di un blocco di ghiaccio emisferico si dà una piccola spinta e comincia a scivolare sul ghiaccio.

Dimostrare che, in assenza di attrito, il ragazzo si stacca dal ghiaccio in un punto ad altezza $\frac{2R}{3}$.



In assenza di attrito applichiamo la conservazione dell'energia meccanica.
In A l'energia cinetica è praticamente nulla e l'energia potenziale è $U_i = mgR$.
In un generico istante $E = U_i = mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$
Quando il ragazzo si stacca dal ghiaccio la reazione vincolare si annulla e si ha

$$\frac{mv^2}{R} = mg\frac{h}{R}$$

eliminando v :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgR \\ mv^2 = mgh \end{cases} \qquad \begin{cases} mv^2 = 2mgR - 2mgh \\ mv^2 = mgh \end{cases}$$

$$3mgh = 2mgR \qquad h = \frac{2}{3}R\,.$$

Problema

Un diodo a vuoto è costituito da un anodo e un catodo. Un elettrone con una energia potenziale relativa all'anodo di $4.8 \cdot 10^{-16}$ J lascia la superficie del catodo con velocità iniziale zero. Si supponga che non ci siano collisioni con le molecole dell'aria e che sia trascurabile la forza gravitazionale:

1) che energia cinetica ha l'elettrone quando colpisce l'anodo?
2) sapendo che la massa dell'elettrone è $9.1 \cdot 10^{-31}$ kg trovare la sua velocità finale,
3) è lecito usare relazioni classiche per l'energia cinetica e la massa piuttosto che le analoghe relativistiche?

① Indichiamo con C e A le posizioni dell'elettrone in corrispondenza a catodo e anodo.

$$E = K(C) + \mathcal{U}(C) = K(A) + \mathcal{U}(A)$$

ma $K(C) = 0 \qquad \mathcal{U}(C) - \mathcal{U}(A) = 4.8\ 10^{-16}$ J

$$K(A) = 4.8\ 10^{-16}\ \text{J}$$

② dall'espressione classica per l'energia cinetica di un punto materiale:

$$K(A) = \frac{1}{2} m_0 v_A^2$$

$$v_A = \frac{2K(A)}{m_0} = 3.25 \cdot 10^{7}\ m/s$$

③ calcoliamo v^2 ... $\frac{v^2}{\ }= 1.17 \cdot 10^{-2}$

Nota

Se le forze agenti sono solo conservative

$$E = K + \mathcal{U} = \text{costante}.$$

Cosa succede se agiscono oltre a forze conservative anche delle forze non conservative?

Si ha

$$L_{\text{forze non cons.}} + L_{\text{forze conserv.}} = \Delta K$$

da cui

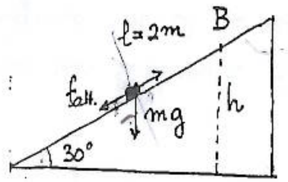
$$\boxed{L_{\text{forze non cons.}} = \Delta K + \Delta \mathcal{U}}$$

In presenza di forze non conservative, ad esempio la forza di attrito, l'energia meccanica totale non è costante ma subisce una variazione pari al lavoro della o delle forze non conservative. Quindi solo quando non agiscono forze non conservative si può ritenere valida la conservazione della energia meccanica.

Problema

Un blocco di 10 kg viene fatto salire lungo un piano, inclinato di 30°, con una velocità iniziale di 5 m/s: Esso percorre 2 m, si ferma e poi ritorna alla base. Si calcoli la forza di attrito (supponendola costante in modulo) agente sul blocco e si trovi la velocità v con cui il blocco ripassa per la posizione iniziale.

Consideriamo la salita.



Il corpo parte da A: energia cinetica $K_A = \frac{1}{2} m v_0^2 = 125$ J

$v_0 = 5 \frac{m}{s}$

U_A energia potenziale $= 0$

Il corpo si ferma in B:

energia cinetica $K_B = 0$ energia potenziale $U_B = mgh$

$= 10 \cdot 9.8 \cdot 2 \,\text{sen}\, 30° = 98$ J

$\Delta K = K_B - K_A = -125$ J $\Delta U = U_B - U_A = 98$ J $\approx h$

$\boxed{\Delta K + \Delta U = L_{f_{attrito}}}$ $-125 + 98 = -\underbrace{2}_{\text{spostamento}} f_{attrito}$

$-27 = 2 f_{attrito}$ $f_{attrito} = 13.5$ N

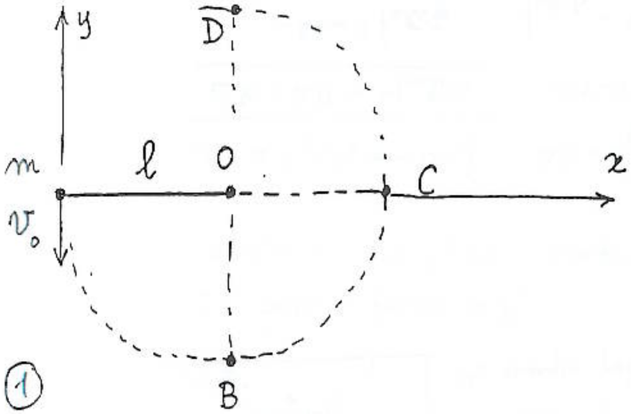
Problema

Una asta rigida di massa trascurabile e lunghezza l reca ad una estremità una massa m; l'asta è imperniata all'altro estremo in modo che la massa possa percorrere una circonferenza verticale.

Il sistema parte dalla posizione orizzontale A con velocità iniziale v_0 verso il basso e la massa arriva nel punto D fermandosi.

1) Ricavare l'espressione di v_0 in funzione di m, l e g.
2) Quale è la tensione dell'asta quando la sferetta è in B?
3) Se si mette della sabbia sul perno la massa arriva solo in C quando viene lanciata da A con la stessa velocità di prima.
4) Quale è il lavoro totale compiuto dall'attrito prima che la massa si fermi in B.?

$\boxed{T = mg}$ ERRORE



(1)

Scegliamo un sistema di riferimento con l'origine in O e asse y verticale verso l'alto si ha :

$U_{potenziale}(A) = 0 \qquad U_{pot.}(D) = mgl$

$K(A) = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad K(D) = 0$

Essendo il sistema conservativo :

$$E = U_{pot}(A) + K(A) = U_{pot}(D) + K(D)$$

$$0 + \frac{1}{2} m v_0^2 = mgl + 0$$

$$v_0 = \sqrt{2gl}$$

MOTO IN CADUTA LIBERA

2) in modo analogo troviamo v_B :

$K_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \qquad U_{pot}(B) = -mgl$

$$E = U_{pot}(A) + K(A) = U_{pot}(B) + K(B)$$

$$0 + \frac{1}{2} m v_A^2 = -mgl + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$0 + \frac{1}{2} m v_0^2 + mgl = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$v_0^2 + 2gl = v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gl}$$

nel punto B la forza centripeta $f_{cent.}$

è $f_{cent.} = \frac{m v_B^2}{l} = \frac{m v_0^2}{l} + 2mg$

ed è diretta verso l'alto.

Ma $f_c = T - mg$ per cui

$$T - mg = \frac{m v_0^2}{l} + 2mg$$

Problema

Determinare la forza che corrisponde all' energia potenziale $\mathcal{U} = \frac{1}{2} K(x^2+y^2)$.

Da $\vec{F} = -\text{grad}\,\mathcal{U}$ si ha :

$$F_x = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = -Kx \qquad F_y = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = -Ky \qquad F_z = 0$$

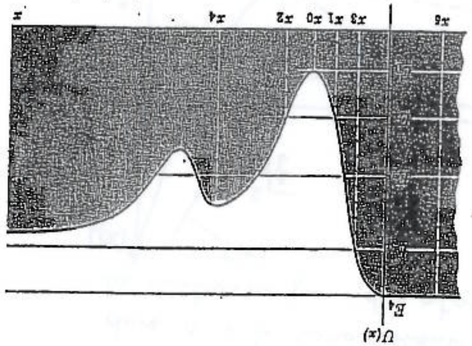
Quindi :

$$\vec{F} = -Kx\,\hat{i} - Ky\,\hat{j} = -K\vec{R}$$

è una forza avente come modulo

$$F = \sqrt{K^2(x^2+y^2)} = KR$$

ed è l'estensione al caso bidimensionale della forza della molla.



$$T = 3mg + m\frac{v_0^2}{\ell}$$

③ I punti A e C sono alla stessa altezza. $\Delta U = 0$.
Il lavoro delle forze di attrito è uguale alla variazione di energia cinetica.

$$L_{attrito} = K(C) - K(A) = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

④ L_f = lavoro della forza di attrito non conservativa $= \Delta K + \Delta U$

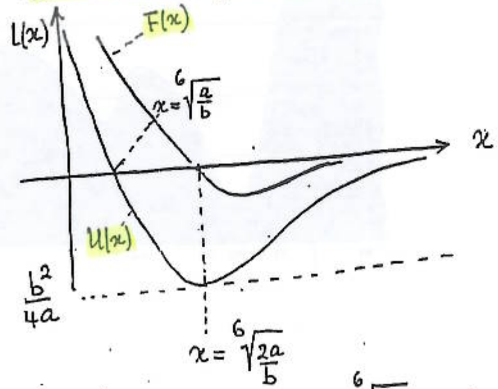
$$L_f = K(B) - K(A) + U(B) - U(A) =$$
$$= -\frac{1}{2} m v_0^2 - mg\ell .$$

in A la particella ha energia potenziale nulla e in B energia cinetica nulla.

L'energia potenziale relativa alla forza tra due atomi in una molecola biatomica può essere espressa approssimativamente da:

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$$

dove a e b sono costanti positive e x è la distanza fra i due atomi



La figura mostra l'andamento di $U(x)$ in funzione di x.

$U(x)$ si annulla per $x = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}$ oppure per $x \to \infty$
La $U(x)$ ha un minimo per $x = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$.
La forza $F(x)$ fra gli atomi è data da $-\frac{d}{dx}U(x)$ ed è mostrata in rosso.
La forza è positiva per $0 \le x \le \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$; in questo caso gli atomi si respingono.
La forza è negativa per x che va da $\sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$ fino all'∞ e in questo caso gli atomi si attraggono.

Il centro di massa è il [illegible] de presenza [illegible] da corpo

Centro di massa e baricentro.

Consideriamo due particelle di massa m_1 e m_2 e distanti rispettivamente x_1 e x_2 da una certa origine O.
Si definisce "centro di massa" il punto che dista da O di x_{CM} dato da:

$$x_{CM} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Supponendo di essere in due dimensioni e di considerare n particelle si ha:

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots x_N m_N}{m_1 + m_2 + \dots m_N}$$

$$y_{CM} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots y_N m_N}{m_1 + m_2 + \dots m_N}$$

Possiamo scrivere in 3 dimensioni:

$$\begin{cases} x_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i \\ y_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i \\ z_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i z_i \end{cases}$$

o con notazione vettoriale

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

CENTRO DI MASSA
=
SISTEMA

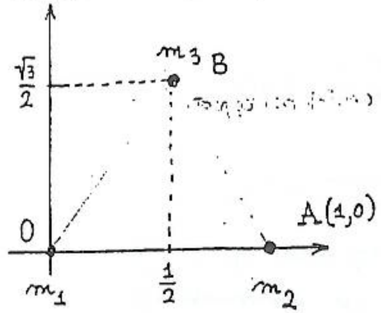
BARICENTRO = PUNTO CENTRALE DI UN SISTEMA

Nota: il baricentro è il centro dei pesi; quindi a m_i si deve sostituire $m_i \vec{g}$. Se $\vec{g}$ non varia nella zona che si considera allora centro di massa e baricentro coincidono.

Perchè $\vec{a}$ varia?

Esempio:

Trovare il centro di massa di tre particelle di massa $m_1 = 1.0\,kg$, $m_2 = 2.0\,kg$ e $m_3 = 3\,kg$ poste ai vertici di un triangolo equilatero di $1.0\,m$ di lato.



$OA = 1\,m$
$OB = 1\,m$
$AB = 1\,m$

$m_1\,(0,0)$
$m_2\,(1,0)$
$m_3\,\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Gli assi x e y sono scelti come mostrato in figura.

Si ha:

$$x_{cm} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{(1kg)(0) + (2kg)(1\,m) + (3kg)(1/2\,m)}{(1+2+3)\,kg}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} = \frac{(1kg)(0) + (2kg)(0) + (3kg)(\frac{\sqrt{3}}{2}\,m)}{(1+2+3)\,kg}$$

$$x_{cm} = \frac{7}{12}\,m \qquad y_{cm} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,m$$

ASCISSA CENTRO DI MASSA

ORDINATA CENTRO DI MASSA

Consideriamo ora un corpo rigido, come ad esempio un'asta. Il corpo rigido può essere considerato come un insieme di particelle strettamente connesse. Per ottenere le coordinate del centro di massa possiamo pensare di suddividere il corpo in n masse elementari Δm_i situate nei punti x_i, y_i, z_i. Le coordinate del centro di massa sono date approssimativamente da:

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Suddividiamo ulteriormente le masse elementari in modo da far tendere $n \to \infty$; i punti x_i, y_i, z_i individueranno la posizione delle masse elementari in modo più preciso al crescere di n.

Le coordinate del centro di massa diventano

$$x_{cm} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int x\,dm\,; \qquad y_{cm} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

$$z_{cm} = \frac{\int z\,dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int z\,dm\,.$$

Riprendiamo in considerazione

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$ posizione del centro di massa in termini vettoriali

$$M \vec{r}_{CM} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots m_N \vec{r}_N ;$$

deriviamo rispetto a t :

$$M \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_1 \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_2 + \dots m_N \frac{d}{dt} \vec{r}_N$$

$$M \vec{v}_{CM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots m_N \vec{v}_N ;$$

deriviamo una seconda volta :

$$M \vec{a}_{CM} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots m_N \vec{a}_N$$

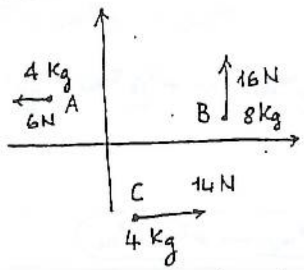
$$M \vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \vec{F}_N = \vec{F}_{est}$$

Si può dire che: il centro di massa di un sistema di particelle si muove come se tutta la massa fosse concentrata nel CM stesso e tutte le forze esterne fossero applicate nel CM.

E le forze interne? si annullano a vicenda

Le forze interne non danno contributo perché dalla terza legge della dinamica sono a due a due uguali e contrarie.

Esempio :



Sulle 3 particelle A, B e C agiscono le forze esterne mostrate in figura.

Trovare l'accelerazione del centro di massa.

A(-2,2) B(4,1) C(1,-3)

$$x_{CM} = \frac{4\cdot(-2) + 8(1) + 4(1)}{16} = 1.8 \text{ metri}$$

$$y_{CM} = \frac{4(2) + 8(1) + 4(-3)}{16} = 0.25 \text{ metri}$$

Troviamo le componenti del risultante delle forze esterne lungo x e y:

$$F_x = 14\,N - 6\,N = 8{,}0 \text{ Newton}$$

$$F_y = 16\,N$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 18\,N$$

$$tg\,\theta = \frac{F_y}{F_x} = 2 \qquad \theta = 63°$$

$$a_{CM} = \frac{F}{M} = \frac{18 \text{ Newton}}{16 \text{ Kg}} = 1.1\, m/s^2$$

Quantità di moto

Si definisce quantità di moto di una particella di massa m e velocità $\vec{v}$ la quantità vettoriale

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Per una particella si può scrivere:

$\vec{p} = m v \rightarrow$ quantità di moto

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}m\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Per un sistema di particelle abbiamo scritto

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\vec{R}_1 m_1 + \vec{R}_2 m_2 + \dots \vec{R}_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots m_n}$$

derivando:

$$M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots m_n\vec{v}_n$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_n$$

e quindi

$$M\vec{v}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots \vec{p}_n = \vec{P}$$

$\vec{P}$ = quantità di moto totale del sistema.

Abbiamo visto che:

$$\vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM}$$

Dalle due relazioni:

$$\vec{F}_{est} = M\,\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{P} = M\,\vec{v}_{CM}$$

possiamo dire che:

$$\vec{F}_{est} = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

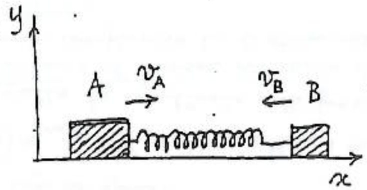
ricordare che $\vec{F}_{est}$ è il risultante delle forze esterne che agiscono sul sistema.

Nota bene:

quando il risultante delle forze esterne agenti su un sistema è nullo, il vettore quantità di moto totale del sistema rimane costante [Conservazione della quantità di moto di un sistema].

2° dei principi di conservazione. Quale è il primo? Quello dell'energia

Esempio



I due blocchi A e B sono uniti da una molla e giacciono su un piano orizzontale privo di attriti.

Allontaniamo i blocchi, quindi lasciamoli liberi. Descriviamo il moto che ne segue. Dalla conservazione della quantità di moto [non ci sono forze esterne; non esiste attrito] si ha:

quant. di moto iniziale = q. di moto finale

$$0 = m_A v_A + m_B v_B$$

[il sistema è fermo]

$$v_A = -\frac{m_B}{m_A} \cdot v_B$$

Energia cinetica dei due blocchi:

$$K_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2$$

$$K_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

L'energia meccanica si conserva e i blocchi continueranno ad oscillare avanti e indietro e l'energia sarà in parte cinetica e in parte potenziale.
Quale è il moto del CM del sistema?
In presenza di attriti non si conserva la q. di moto e l'energia meccanica.

Problema

Un cannone e una riserva di proiettili sono posti all'interno di un vagone ferroviario chiuso.
Il cannone spara verso destra e il vagone rincula verso sinistra. I proiettili dopo aver colpito la parte più lontana cadono all'interno del vagone.
Dimostrare che, indipendentemente da come vengono sparati i proiettili, il vagone non può spostarsi di un tratto maggiore della sua lunghezza L.
Il vagone è inizialmente fermo.

Sia M la massa del vagone + cannone e

X_1 l'ascissa del centro di massa del sistema cannone + vagone,

m la massa dei proiettili,

x_1 l'ascissa del centro di massa dei proiettili prima dello sparo,

X_2 l'ascissa del centro di massa vagone + cannone dopo lo sparo

x_2 l'ascissa del centro di massa dei proiettili dopo lo sparo.

$$(M+m)\, x_{cm} = M X_1 + m x_1 = M X_2 + m x_2$$

essendo nulla la risultante delle forze esterne applicata al sistema l'ascissa del centro di massa del sistema complessivo ha lo stesso valore prima e dopo lo sparo.

13

Si può scrivere : $X_1 \rightarrow$ prima dello sparo $\rightarrow x_1$
$X_2 \rightarrow$ dopo lo sparo $\rightarrow x_2$

$$M(X_1 - X_2) = m(x_2 - x_1) \quad ;$$

ma $X_1 - X_2 = D \rightarrow$ spostamento del vagone

$x_2 - x_1 = L - D \rightarrow$ spostamento del vagone rispetto alla terra

e quindi $\quad M D = m(L-D)$

ossia $\quad MD + mD = mL$

$$D = \frac{mL}{m+M} = \underbrace{\frac{m}{m+M}}_{<1} L$$

Problema.

Due corpi sono connessi con una leggera corda che passa attraverso una carrucola di 5 cm di diametro. Non vi è attrito. I due corpi sono inizialmente allo stesso livello e ciascuno ha massa di 0.5 Kg.

1) Trovare la posizione del centro di massa.
2) Si trasferiscono 20g da un corpo all'altro senza permettere al sistema di muoversi. Indicare la nuova posizione del centro di massa.
3) Si lasciano ora liberi i due corpi. Descrivere il moto del centro di massa e determinare la sua accelerazione.

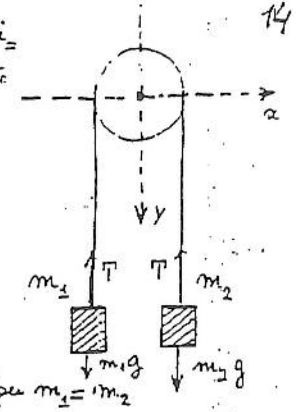
14

1) Scegliamo un sistema di riferimento con l'origine nel punto medio fra i due corpi.
Le ascisse dei due corpi sono :

$$x_1 = |-x_2| = \frac{d}{2} = 2{,}5\,cm .$$

La posizione del centro di massa è :

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad \text{per } m_1 = m_2$$



2) $m_1 = 480g \quad m_2 = 520g$

le coordinate del centro di massa sono ora :

$$x_{cm} = \frac{480 \cdot 2.5 - 520 \cdot 2.5}{1000} = -0.1\,cm$$

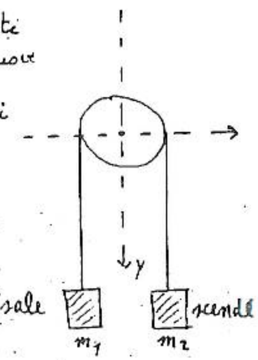
Le coordinate delle due masse non sono cambiate perché il problema dice che il sistema non si muove

3) Le forze che agiscono sul sistema sono le tensioni dei due capi della corda e le due forze peso.
La risultante delle forze è :

$$\vec{F} = m_1 g + m_2 g - 2T$$

La tensione della fune è data da

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$



$$\begin{cases} -T + m_1 g = -m_1 a \\ -T + m_2 g = m_2 a \end{cases} \qquad \begin{cases} T = m_1(g+a) \\ -m_1(g+a) + m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

$$-a(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2) g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Dalla 1ª equazione $\quad -T = -m_1 g - m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{-m_1^2 - m_1 m_2 - m_1 m_2 + m_1^2}{m_1 + m_2} g = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

quindi $F = m_1 g + m_2 g - 4 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

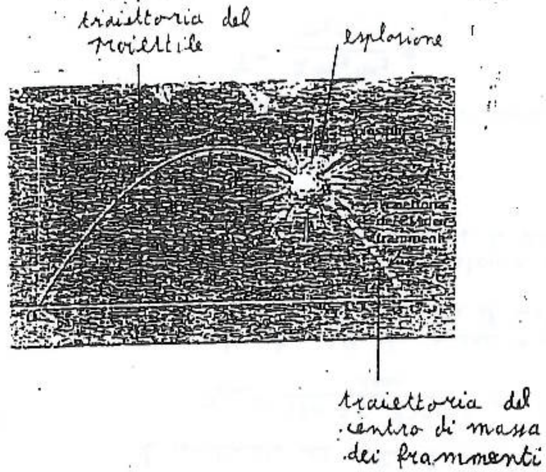
$$= g \left[\frac{m_1^2 + m_1 m_2 + m_1 m_2 + m_2^2 - 4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right]$$

$$= g \cdot \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2}$$

L'accelerazione del centro di massa ha il modulo

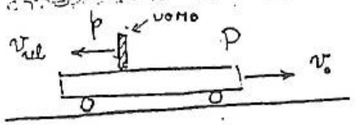
$$a_{cm} = \frac{F}{M} = g \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2)} = 0.016 \frac{m}{s^2}$$

con direzione verticale verso il basso.
Il moto del centro di massa è uniformemente accelerato su una retta verticale a -0.1 cm dall'origine delle coordinate.



Problema SISTEMA ISOLATO

Un vagone ferroviario di peso P può scorrere senza attrito su una rotaia diritta e orizzontale. Inizialmente un uomo di peso p sta in piedi sul vagone che si muove con velocità costante v_0. Qual è la variazione di velocità del vagone se l'uomo corre verso sinistra con velocità v_{rel} relativa al carro, nell'istante in cui raggiunge l'estremità del vagone e salta giù?



Dai dati del problema la risultante delle forze esterne è nulla e quindi si conserva la quantità di moto del sistema.

Siano M e m le masse del vagone e dell'uomo, e v e u le velocità all'istante del salto.

La quantità di moto iniziale è:

$$P_0 = (M+m)\,v_0$$

all'istante del lancio la quantità di moto è:

$$P_1 = Mv + mu$$

ma $v_{rel} + v = u$ $\qquad v_{rel} = u - v$

Uguagliando le due quantità di moto:

$$(M+m)\,v_0 = Mv + m(v_{rel} + v)$$

da cui si ricava $v - v_0$.

$$(M+m)\,v_0 = Mv + m(v_{rel} + v)$$

$$(M+m)\,v_0 = (M+m)\cdot v + m\,v_{rel}$$

$$v - v_0 = -\frac{m\,v_{rel}}{M+m}$$

Problema

Un cane di peso 5 kgf è fermo su una zattera e dista 6 m dalla riva. Esso cammina per 3 m sulla zattera verso la riva e poi si ferma. La zattera pesa 20 kgf e si può trascurare l'attrito fra zattera e acqua. Quanto dista il cane dalla riva alla fine dello spostamento?

Il centro di massa del sistema cane + zattera inizialmente fermo conserva questo stato durante e dopo il movimento del cane.

Si ha:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_1' + m_2 x_2' \qquad X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} = \frac{m_1 x_1' + m_2 x_2'}{M}$$

dove m_1 e m_2 = massa del cane e massa della zattera

x_1 e x_2 = distanza dalla riva del cane e della zattera rispettivamente, prima dello spostamento

x_1' e x_2' = distanza dalla riva del cane e della zattera dopo lo spostamento.

La relazione precedente si può scrivere:

$$m_1 x_1 - m_1 x_1' + m_2 x_2 - m_2 x_2' = 0$$

$$m_1 \underbrace{\Delta x_1}_{x_1 - x_1'} + m_2 \underbrace{\Delta x_2}_{x_2 - x_2'} = 0$$

lo spostamento del cane dalla riva è

$$\Delta x_1 = x_1' - x_1$$

quello della zattera rispetto alla riva è

$$\Delta x_2 = x_2' - x_2$$

Lo spostamento del cane è

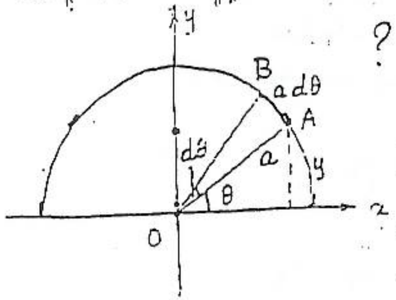
$$\begin{cases} \Delta x_1 - \Delta x_2 = 3\,m & \text{spostamento rispetto la zattera} \\ m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 = 0 \end{cases}$$

di qui si ricava $\Delta x_1 = 2.4\ m$

e il cane dista dalla riva 3.6 m.

Problema.

Trovare il centro di massa di un filo semicircolare uniforme di raggio a.



? $\pi : \pi a = d\theta : \widehat{AB}$

$AB = a\,d\theta$

Per ragioni di simmetria il centro di massa del filo deve essere sull'asse y in modo che $x = 0$.

Sia σ la massa per unità di lunghezza del filo.

[capire bene perché tornerà con le cariche elettriche

Se chiamiamo ds l'elemento di arco : $ds = a\,d\theta$.

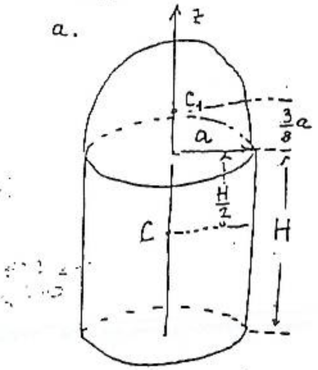
L'elemento di massa è : $dm = \sigma\, ds$.

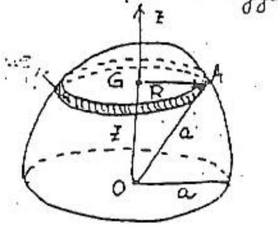
L'ordinata del centro di massa è :

$$y_{cm} = \frac{\int_C y \overset{\text{densità}}{\sigma}\, ds}{\int_C \sigma\, ds} = \frac{\sigma \int_0^{\pi} (a \operatorname{sen}\theta)\, a\, d\theta}{\sigma \int_0^{\pi} a\, d\theta} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}$$

Problema

Trovare il centro di massa di un solido di densità costante, consistente in un cilindro di raggio a ed altezza H, sormontato da una semisfera di raggio a.





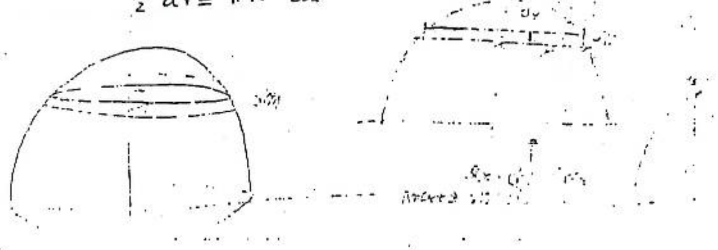
$GO = z \quad GA = R$
GO va da o ad a
GA va da o ad a

Cominciamo a trovare il centro di massa dell'emisfero di raggio a. Per simmetria il centro di massa si trova sull'asse z [approfondire facendo dei modelli]. Suddividiamo l'emisfero in lamine circolari solide di raggio R; se il centro della lamina in figura è G, esso dista z dal centro O dell'emisfero e si ha:

$$z^2 + R^2 = a^2$$

Quindi il volume di ogni lamina è:

$$dV = \pi R^2 dz$$



ma $dV = \pi R^2 dz = \pi(a^2 - z^2)\,dz$

e la massa dm è $= \sigma\pi(a^2 - z^2)\,dz$.

Quindi:

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \pi\sigma z(a^2-z^2)\,dz}{\int_0^a \pi\sigma(a^2-z^2)\,dz} = \frac{3}{8}a$$

Se ora consideriamo cilindro + emisfero, il centro di massa dell'emisfero si trova a una distanza $\frac{3}{8}a + H$ dalla base del solido e la sua massa M_1 è $\frac{1}{2}\sigma\left[\frac{4}{3}\pi a^3\right] = \frac{2}{3}\sigma\pi a^3$

Il centro di massa del cilindro è a distanza $\frac{H}{2}$ dalla base del solido e la sua massa è $M_2 = \pi\sigma a^2 H$.

Il centro di massa totale è:

$$z_{cm\,totale} = \frac{M_1\left(H+\frac{3}{8}a\right) + M_2\left(\frac{H}{2}\right)}{M_1 + M_2}$$

Si può dimostrare che:

siano dati n sistemi di particelle aventi i centri di massa rispettivamente in $\vec{R}_1, \vec{R}_2 \dots \vec{R}_n$ e masse $M_1, M_2 \dots M_n$.

Il centro di massa di tutti i sistemi si trova in:

$$\vec{R} = \frac{M_1\vec{R}_1 + M_2\vec{R}_2 + \dots M_n\vec{R}_n}{M_1 + M_2 + \dots M_n}$$

Provare a dimostrarlo come esercizio.

Per trovare il lavoro necessario a far passare il satellite da un'orbita di raggio r_1 a un'orbita di raggio r_2, basta scrivere:

$$W = E_{m,r_2} - E_{m,r_1}$$

cioè il lavoro è uguale alla differenza di energia meccanica delle due orbite.

Massa inerziale e massa gravitazionale.

La legge della gravitazione universale prevede una forza proporzionale alla massa e quindi possiamo misurare una massa dalla misura della forza gravitazionale.

La parola massa è stata usata in una situazione sperimentale diversa; ad esempio se spingiamo un blocco lungo un piano orizzontale ci accorgiamo che ciò richiede uno "sforzo". Questa massa interviene nella $\vec{F} = m\vec{a}$ ed ha il significato di "massa inerziale" e la prima di cui abbiamo parlato ha il significato di "massa gravitazionale".

Le due masse sono veramente la stessa cosa?

Problema

Un satellite artificiale di massa $m = 10^3$ kg descrive un' orbita circolare intorno alla terra.
Calcolare, in funzione del raggio R dell' orbita, la velocità, il periodo, l' energia meccanica, la forza gravitazionale; si assuma per R un valore di poco maggiore del raggio terrestre R_T.
Determinare il lavoro necessario per portare il satellite da un' orbita di raggio r_1 a un' orbita di raggio r_2 con $r_2 > r_1$.

$M_T = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg

$R_T = 6.38 \cdot 10^6$ m

$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg s^2

numericamente $GM_T = 3.99 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$.

$$\frac{G M_T \cdot m}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \qquad v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \frac{2 \cdot 10^7}{\sqrt{R}} \frac{m}{s}$$

Per un' orbita di raggio poco maggiore di quello della terra, assumiamo $R = R_T$.

Per un' orbita di poco superiore al raggio terrestre

$$v = 7.91 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = 28'500 \frac{Km}{h}$$

il periodo T è dato da:

$$T = \frac{2\pi R_T}{v} = 5.05 \cdot 10^3 \, s = 84 \text{ minuti}$$

$$F_{gravitazionale} = \frac{G M_T \, m_{satellite}}{R_T^2} = m_{satell.} \, g =$$

$$= 9.81 \; 10^3 \, N.$$

Energia meccanica:

$$E_{mecc.} = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{K} - \underbrace{\frac{G M_T m_{sat}}{R_T}}_{E_P}$$

ma $\underbrace{\frac{G M_T m_{sat}}{R_T^2}}_{F} = \underbrace{m_s \frac{v^2}{R_T}}_{= m a_c}$ quindi $\frac{1}{2} m_s v^2 = \frac{G M_T m_{sat}}{2 R_T}$

$$K = \frac{1}{2} \frac{G M_T m_{sat}}{R_T}$$

$$E_{meccanica} = \frac{1}{2} \frac{G M_T m_{sat}}{R_T} - \frac{G M_T m_{sat}}{R_T} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{G M_T m_{sat}}{R} = -3.14 \cdot 10^{10} J.$$

Il risultato ottenuto dimostra che la forza è conservativa in quanto il lavoro non dipende dalla traiettoria, ma solo dalla posizione iniziale e da quella finale.

Inoltre il calcolo del lavoro permette di trovare l'energia potenziale:

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{R}$$

al solito, siccome l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva. Poniamo per due masse molto distanti $(R \simeq \infty)$ $F=0$ e $E_p=0$.

Il segno - nasce dal fatto che la forza è attrattiva e può essere giustificato con il seguente ragionamento. Quando m_2 si avvicina a m_1 acquista energia cinetica; siccome la forza è conservativa l'energia meccanica [cinetica + potenziale] deve restare costante e quindi se K aumenta E_p deve diminuire. Ma E_p è nulla a distanza infinita, per cui a distanze finite deve essere negativa.

Potenziale gravitazionale

Si può definire il potenziale gravitazionale del campo prodotto da m_1:

$$V_1 = \frac{E_p}{m_2} = -G\frac{m_1}{R}$$

Tra campo e potenziale esiste la relazione:

$$\frac{\vec{F}}{m_2} = -\,\mathrm{grad}\,V = -\nabla V.$$

Per uno spostamento della massa m_2 dalla posizione A alla posizione B nel campo di m_1 il lavoro è:

$$W = -\Delta E_p = -m_2 \Delta V_1 = -m_2\left[V_{1,B} - V_{1,A}\right]$$

$$GM = \omega^2 R^3$$

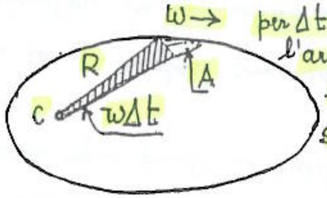
Se esprimiamo ω in funzione del periodo di rivoluzione, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, si ha:

$$GM = \frac{4\pi^2}{T^2} R^3$$

$$GMT^2 = 4\pi^2 R^3 .$$

Consideriamo la seconda legge di Keplero.
Data un'orbita ellittica con il sole in uno dei fuochi, l'area descritta dal raggio vettore in un intervallo di tempo Δt molto piccolo è mostrata in figura.

L'area del triangolo, trascurando la parte indicata con A, è:



per $\Delta t \to 0$ l'area A è trascurabile

$$\Delta S = \frac{R}{2}\left[R\omega\Delta t\right]$$

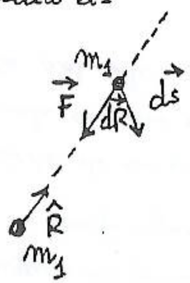
La velocità istantanea con cui viene descritta questa area è:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\omega \Delta t}{\Delta t} = \frac{1}{2}\omega R^2 .$$

$m\omega R^2$ è il momento della quantità di moto della particella attorno a C. La seconda legge di Keplero richiede che la velocità areolare $\frac{1}{2}\omega R^2$ sia costante; è equivalente dire che il momento della quantità di moto di un pianeta attorno al sole è costante. Il momento della quantità di moto del pianeta attorno al sole non può essere cambiato da una forza diretta verso C.
La 2^a legge di Keplero è soddisfatta da una forza "centrale" cioè diretta verso il sole.

La forza gravitazionale è una forza centrale; le forze centrali sono conservative.
Consideriamo il lavoro fatto dalla forza gravitazionale compiuto durante lo spostamento ds

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds} = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} dR$$



$$W = \int_{R_A}^{R_B} - \frac{G m_1 m_2}{R^2} dR =$$

$$= G m_1 m_2 \left[\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right]$$

La $\vec{g}$ si può chiamare "intensità del campo gravitazionale" e possiamo associare a ciascun punto vicino alla terra un vettore $\vec{g}$.
Ricordiamo che $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$

Il campo gravitazionale è un esempio di campo vettoriale, avendo ogni punto di questo campo un vettore associato.
Ci sono anche campi scalari, come ad esempio il campo di temperature in un solido conduttore di calore.
Il campo gravitazionale è anche un esempio di "campo stazionario", cioè il campo in un punto non cambia nel tempo.

Il concetto di campo è molto importante per capire le forze elettrodinamiche fra cariche in movimento; questi concetti vennero sviluppati da Faraday.

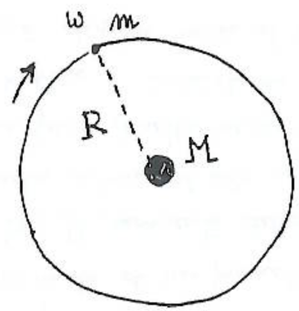
Leggi di Keplero sul moto dei pianeti.

1) tutti i pianeti si muovono su orbite ellittiche aventi il sole in uno dei fuochi;

2) il segmento congiungente un pianeta con il sole descrive aree uguali in tempi uguali;

3) il quadrato del periodo di un pianeta attorno al sole è proporzionale al cubo della distanza media del pianeta dal sole.

Ciascun pianeta è attratto verso il sole con una forza proporzionale alla massa del pianeta e inversamente proporzionale alla distanza sole-pianeta al quadrato.



Consideriamo una massa m che ruota attorno ad una massa M [M>>m] descrivendo un'orbita circolare con velocità angolare w. Si ha:

$$\frac{G\,mM}{R^2} = m w^2 R$$

Gravitazione

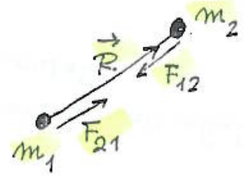
Date due particelle di massa m_1 e m_2, poste a distanza R, tra di esse si esercita una forza attrattiva data in modulo da:

$$\boxed{F = G\,\frac{m_1\, m_2}{R^2}}$$

FORZA ATTRATTIVA

dove R rappresenta la distanza fra le particelle, e G è una costante universale avente lo stesso valore per tutte le coppie di particelle.

In forma vettoriale,
se $\vec{R}$ è il vettore che va dalla massa m_1 alla massa m_2, la forza $\vec{F}_{12}$ esercitata dalla massa m_1 sulla massa m_2 è:



$$\vec{F}_{12} = -\,G\,\frac{m_1\, m_2}{R^2}\cdot\frac{\vec{R}}{R}$$

e in modo analogo per la forza $\vec{F}_{21}$ esercitata dalla particella 2 sulla particella 1.
Ricordiamo che $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

G, costante di gravitazione universale venne misurata per la prima volta da Cavendish nel 1798; il valore attualmente accettato è:

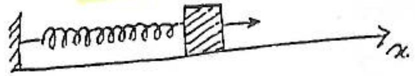
$$\boxed{G = 6.6720\cdot 10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2}$$

il campo gravitazionale

Abbiamo visto che due particelle interagiscono fra loro anche se non sono a contatto: questa interazione si può chiamare "azione a distanza".
Un altro modo per descrivere questa interazione è quello di introdurre il concetto di "campo": la presenza di una particella materiale modifica lo spazio circostante creando un campo gravitazionale.
Possiamo dire che, data una distribuzione di masse puntiformi, si può determinare in primo luogo il campo prodotto e in secondo luogo si può determinare la forza che il campo esercita su una massa puntiforme che venga posta nel campo stesso.

Moto armonico smorzato.

Consideriamo un moto armonico che avvenga in presenza di una forza di attrito e supponiamo che questa forza di attrito dipenda dalla velocità.



Il moto viene smorzato dall'attrito e viene chiamato moto armonico smorzato.

Possiamo scrivere:

$$F = ma$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

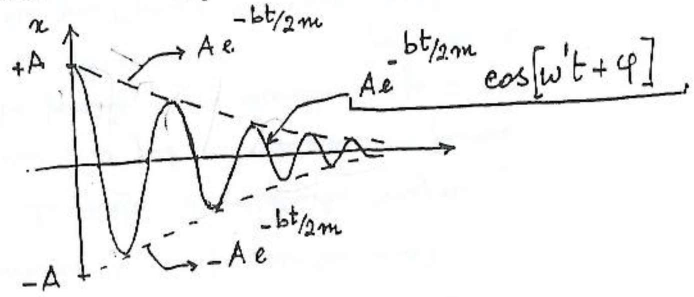
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

La soluzione di questa equazione è:

$$x = A e^{-\frac{bt}{2m}} \cos[\omega' t + \varphi]$$

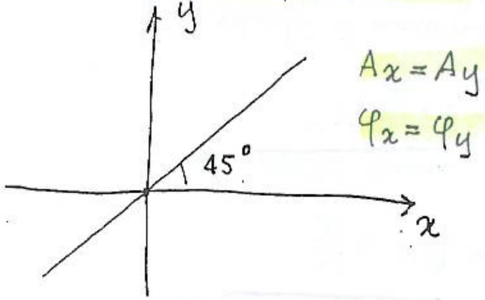
dove $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$.

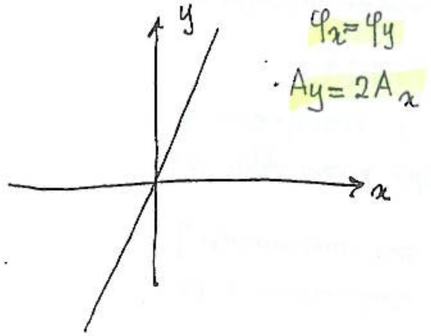
L'andamento di x in funzione di t è mostrato in figura:



Confrontando ω' con la ω del moto non smorzato si vede che per $b=0$ $\omega' = \omega = \sqrt{k/m}$; con l'attrito $\omega' < \omega$ e il periodo aumenta.

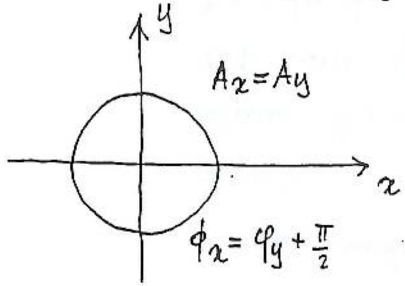
Questa è l'equazione della bisettrice del 1° e 3° quadrante:





Se A_x è uguale a A_y ma $\varphi_x \neq \varphi_y$ il moto non è più rettilineo.

Supponiamo $\varphi_x = \varphi_y + \frac{\pi}{2}$

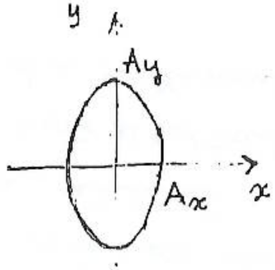


$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) = A_x \cos(\omega t + \varphi_y + \tfrac{\pi}{2}) = -A_x \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_y)$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

la combinazione delle due equazioni dà una circonferenza, se come detto $A_x = A_y$.

Se ad esempio abbiamo $\varphi_x = \varphi_y + \frac{\pi}{2}$ e $A_y/A_x = 2$ si ottiene un ellisse e così via.



La legge oraria del moto è :

$$\theta = \theta_0 \operatorname{sen}[\omega t + \varphi]$$

l'ampiezza θ_0 e la costante di fase φ dipendono dalle condizioni iniziali del moto.

Il periodo T del moto è dato da :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ed è indipendente dall'ampiezza.

[isocronismo delle piccole oscillazioni]

La legge oraria dello spostamento lungo l'arco di circonferenza è data da :

$$s = L\theta = L\theta_0 \operatorname{sen}[\omega t + \varphi]$$

la velocità angolare è :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega\,\theta_0 \cos[\omega t + \varphi]$$

- la velocità lineare è :

$$v = \frac{ds}{dt} = L\,\frac{d\theta}{dt} = L\omega\theta_0 \cos[\omega t + \varphi]$$

La velocità è massima quando il punto passa per la verticale ($\theta = 0$) e nulla agli estremi delle oscillazioni dove il moto si inverte.

Composizione di moti armonici.

Supponiamo di combinare due moti armonici semplici rettilinei e ortogonali fra loro. Il moto risultante è la somma di due oscillazioni indipendenti.

Consideriamo il caso in cui le frequenze dei due moti siano uguali :

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

i due moti hanno ampiezza e fase diverse.

Siano A_x e A_y uguali fra loro e così sia $\varphi_x = \varphi_y$.

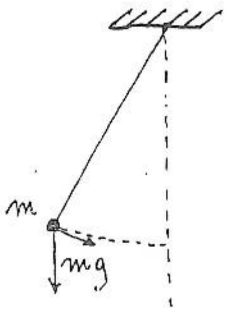
Dividendo membro a membro si ha:

$$x/y = 1$$

Pendolo semplice.

Il pendolo semplice è un sistema ideale formato da una massa puntiforme sospesa ad un filo inestensibile e privo di massa.

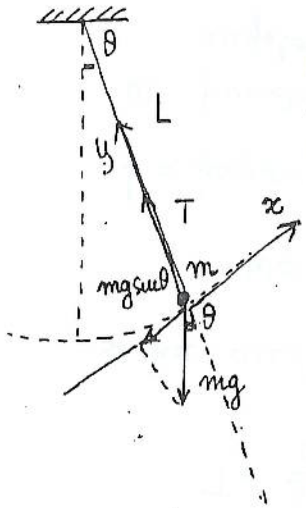
Quando il pendolo viene spostato dalla sua posizione di equilibrio e viene abbandonato a sé stesso compie delle



oscillazioni in un piano verticale sotto l'azione della forza di gravità.

Il moto è oscillatorio e periodico.

Studiamo il moto del pendolo.



Sia L la lunghezza del filo, m la massa della particella; l'asse x è diretto come la tangente alla traiettoria che è la circonferenza di raggio L e l'asse y è diretto come il filo.

L'arco di traiettoria è $S = L\theta$.

Lungo l'asse x possiamo scrivere:

$$F = -mg\,\text{sen}\,\theta = ma$$

per angoli θ piccoli si può porre $\text{sen}\,\theta \simeq \theta$ [piccole oscillazioni] e quindi

$$-mg\,\theta = ma$$

$$-mg\,\theta = Lm\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

analoga all'equazione della molla e cioè valida per un moto armonico.

il segno − che compare davanti a $mg\,\text{sen}\,\theta$ si assume perché la forza è di richiamo.

Ad esempio :

$$\frac{d}{dt}\cos at = -a\,\text{sen}\,at \qquad \frac{d^2}{dt^2}\cos at = \frac{d}{dt}(-a\,\text{sen}\,at) = -a^2\cos at$$

Prendiamo una funzione :

$$\overset{*}{x} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

dimensioni [L] ← dimensioni : numero puro

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \qquad [\omega] = [T^{-1}]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

Introduciamo questa funzione in

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}\cdot x$$

$$\underbrace{-A\omega^2}\cos(\omega t + \varphi) = \underbrace{-\frac{K}{m}}A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \quad .$$

Vediamo il significato di ω.

* x prende anche il nome di elongazione.

aumentiamo t della quantità $\frac{2\pi}{\omega}$:

la $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

diventa :

$$x = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right]$$

$$x = A\cos[\omega t + 2\pi + \varphi] .$$

La funzione si ripete identica dopo un tempo $\frac{2\pi}{\omega}$. Perciò $\frac{2\pi}{\omega}$ è $= T$ cioè è il periodo del moto.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} ,$$

si ha anche :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

f = frequenza.

ω prende il nome di frequenza angolare o pulsazione.

Il termine φ che compare nell'argomento della funzione coseno è una costante e dà il valore di x per $t=0$.

Considerare [e disegnare] :

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\, \text{sen}(\omega t+\varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t+\varphi).$$

Trovare l'energia cinetica e l'energia potenziale e valutare l'energia meccanica totale del sistema :

$$K+U.$$

$$U = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}A^2\omega^2\cdot m\, \text{sen}^2(\omega t+\varphi)$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \qquad K+U = \frac{1}{2}KA^2.$$

La $f=-Kx$ è un caso particolare di una legge più generale detta legge di Hooke che riguarda le deformazioni dei corpi elastici, naturalmente valida entro il limite di elasticità dei corpi.

Risolviamo l'equazione :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}\cdot x = 0$$

cioè $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{K}{m}x$

qui si vede che la x deve essere una funzione tale che, derivata due volte, sia ancora la funzione stessa a parte il segno e il fattore $\dfrac{K}{m}$.

Le funzioni seno e coseno hanno queste proprietà.

Oscillazioni.

$x(t) = A \cos[\omega t + \varphi]$

$\frac{d^2x}{dt^2} = Kx$

Ogni moto che si ripete a intervalli di tempo uguali si chiama moto periodico.

Se una particella si muove avanti e indietro sullo stesso percorso il moto è detto oscillatorio.

Si chiama periodo T di un moto oscillatorio il tempo necessario per avere una oscillazione completa.

La frequenza f è il numero di oscillazioni nell'unità di tempo:

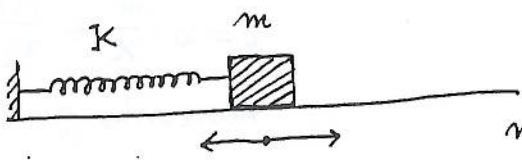
$$f = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{W}$$

unità (SI) = Hertz (Hz).

Sia data una particella su cui agisce una forza $F = -Kx$ e quindi la particella si muova in un potenziale dato da $U = +\frac{1}{2}Kx^2$.

Questo moto si chiama moto armonico semplice) e la particella prende il nome di oscillatore armonico. Esempio: la molla a cui è fissata una massa m libera di muoversi su un piano orizzontale liscio.



La massa m è un oscillatore armonico.

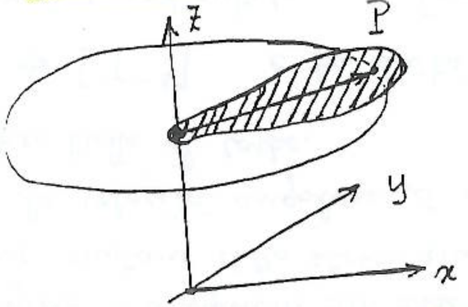
Applichiamo la $f = ma$:

$$-Kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

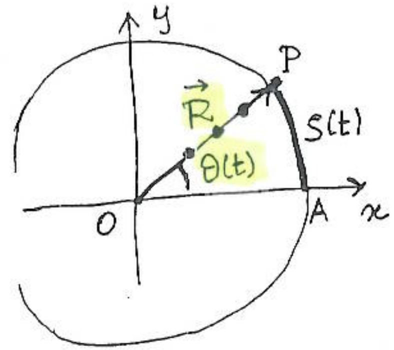
$$\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \qquad K = \text{costante elastica.}$$

Cinematica rotazionale

Studiamo la rotazione di un corpo attorno ad assi fissi.



Sia P un punto del sistema indicato in figura. Il moto del corpo rigido è puramente rotatorio se tutti i punti del corpo [come P] si muovono su circonferenze i cui centri giacciono su di un asse, detto asse di rotazione, [nel nostro esempio l'asse z].



Consideriamo il piano xy nel quale ruota il punto P lungo una circonferenza individuata da $\vec{R}$.

L'angolo $\theta(t)$ individua la posizione angolare di P rispetto ad O.

Sia $s(t)$ l'arco di circonferenza AP:

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R} ; \qquad s(t) = R\,\theta(t)$$

Siano θ_1 e θ_2 due posizioni angolari del punto P a due istanti rispettivamente t_1 e t_2.

Si definisce velocità angolare media $\bar{\omega}$ del punto P nell'intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ come:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} .$$

e velocità angolare istantanea:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Tutte le rette radiali solidali con il corpo rigido e ortogonali all'asse di rotazione ruotano dello stesso angolo, quindi la velocità angolare ω è la stessa per tutto il corpo.

$\omega \Rightarrow [T^{-1}]$ e per unità si assume: radiante/secondo [rad/s] o giro/secondo [giro/s].

Se la velocità angolare non è costante si ha una accelerazione angolare.

L'accel. angolare media è:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

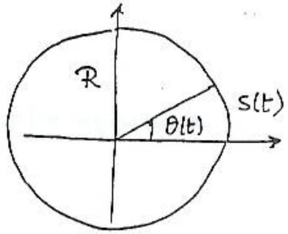
Si definisce una accelerazione istantanea come:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

le dimensioni di α sono $[T^{-2}]$ e le unità di misura più comuni sono rad/s^2 o giri/s^2.

L'accelerazione angolare è la stessa per tutti i punti di un corpo rigido.

$s(t) = $ arco



$s(t) = R\,\theta(t)$

deriviamo

$\boxed{v = R\,\omega}$ $\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$

Per un moto circolare uniforme :

$s(t) = s_0 + vt$

$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$

$a = a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ accelerazione normale

In un moto circolare non uniforme abbiamo anche l'accelerazione $a_t = \frac{dv}{dt}$. (accelerazione tangenziale)

Definiamo una accelerazione angolare

$$\boxed{\alpha =} \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \boxed{\frac{1}{R}a_t}$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Sia nota $\theta = \theta(t)$ allora :

$$\omega = \frac{d\,\theta(t)}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\,\omega(t)}{dt}$$

Sia nota la funzione $\alpha(t)$ allora :

$$\omega(t) = \omega_0 + \int \alpha(t)\,dt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int \omega(t)\,dt.$$

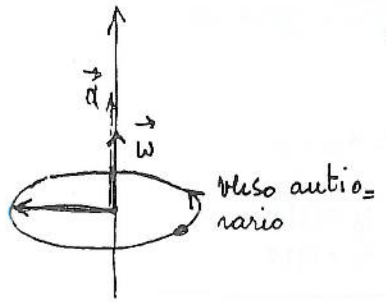
Nel caso di un moto circolare non uniforme con $\alpha =$ costante [moto circolare uniformemente accelerato]

$$\begin{cases} \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \\ \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

$$a_n = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$$

Notazione vettoriale

Associamo alla velocità angolare le caratteristiche vettoriali.
Definiamo vettore velocità angolare il vettore $\vec{\omega}$ che ha queste proprietà:



- modulo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
- direzione $\perp$ al piano in cui giace la circonferenza,
- verso dato dalla 2ª regola della mano destra.

quindi $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

Da $\vec{\omega}$ per derivazione rispetto al tempo abbiamo $\vec{\alpha}$ che risulta parallela a $\vec{\omega}$.

Tramite $\vec{\alpha}$ e $\vec{\omega}$ possiamo esprimere l'accelerazione del moto circolare:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{R}) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{R}}_{\vec{\alpha} \wedge \vec{R}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{R}}{dt}}_{\vec{\omega} \wedge \vec{v}}$$

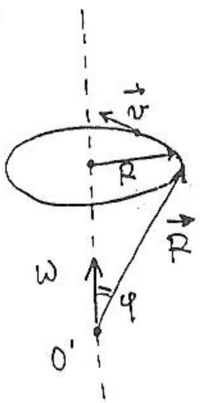
- $\vec{\alpha} \wedge \vec{R} \Rightarrow$ accelerazione tangenziale in modulo αR

$v = \omega R$
$a = \alpha R$

- $\vec{\omega} \wedge \vec{v} \Rightarrow$ accelerazione centripeta modulo ωv ma $v = \omega R$ quindi $\omega^2 R$ cioè $\frac{v^2}{R}$.

Nel moto circolare uniforme $\vec{\omega}$ è un vettore costante anche in modulo
$\vec{\alpha}$ è $= 0$ e $\vec{a} = \vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_0$

Consideriamo la figura:



il vettore $\vec{R}$ applicato in O' ha modulo costante e descrive un moto rotatorio attorno all'asse di rotazione ovvero alla direzione di $\vec{\omega}$ formando un angolo φ costante con l'asse stesso.

Il vettore $\vec{v}$, che nel moto circolare uniforme ha modulo costante, descrive una rotazione attorno a $\vec{\omega}$.

La derivata $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$ moto circolare uniforme.

A questo tipo di moto, rotazione di un asse rispetto ad un altro asse fisso, con cui forma un angolo costante e ha un punto in comune si dà il nome di moto di precessione.

Proprietà: dato un vettore A, costante in modulo, che descrive un moto di precessione con velocità angolare $\vec{\omega}$, la sua derivata temporale può essere scritta:

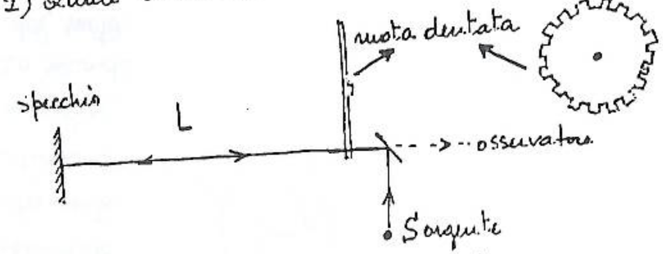
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

Problema

Per determinare la velocità della luce si può usare una ruota dentata rotante. Un raggio di luce passa attraverso un incavo della ruota, incide su uno specchio messo come in figura, si riflette e torna indietro in tempo per passare attraverso l'incavo successivo. La ruota ha raggio di 5 cm e ha 500 denti. Le misure fatte per una distanza ruota-specchio di 500 m danno $v_{luce} = 3 \cdot 10^5 \frac{Km}{s}$.

1) Quale è la velocità angolare (costante) della ruota.

2) Quale è la velocità lineare di un punto del bordo.



1) il tempo impiegato dalla luce per una distanza 2L (andata e ritorno dallo specchio) è

$$t = \frac{2L}{c} = 3,33 \cdot 10^{-6}\ s = 3,33\ \mu s$$

la separazione angolare fra due denti successivi è $\Delta\theta = \frac{2\pi}{500} = 0,01257$ radianti

La velocità angolare è :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{0.01257}{3.3 \cdot 10^{-6}} = 3809 \ \frac{rad}{s}$$

cui corrisponde una frequenza di rotazione

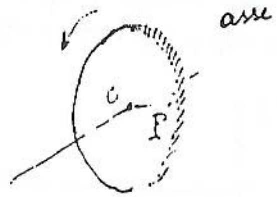
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 606 \ \frac{giri}{s}$$

2.) $v = \omega R = 3809 \cdot 0.05 = 190 \ \frac{m}{s}$

Problema

Una mola ha una accelerazione angolare costante pari a $3.0 \ \frac{rad}{s^2}$.

All'inizio del moto la linea OP è orizzontale. Trovare lo spostamento angolare della linea OP e la velocità angolare della mola 2.0 secondi dopo l'inizio del moto.



$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$\theta(t)$ = l'angolo
$\omega(t)$ = velocità angolare
$\alpha(t)$ = accel. angolare

prendiamo $\omega_0 = 0$.

Dopo 2 secondi

$$\underline{\theta(t)} = \frac{1}{2}\left(3 \frac{rad}{s^2}\right)\cdot(2s)^2 = 6 \ rad$$

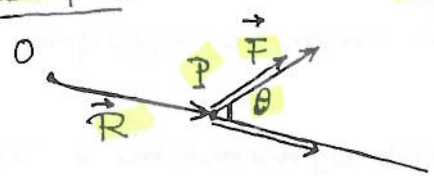
$$\underline{\omega(t)} = \omega_0 + \alpha t$$

$$\underline{\omega(t)} = \left(3.0 \frac{rad}{s^2}\right)(2.0s) = 6.0 \frac{rad}{s}$$

Dinamica rotazionale.

Nel moto traslatorio si associa ad una accelerazione lineare una forza, nel moto rotatorio si associa ad una accelerazione angolare il momento meccanico. Dato un punto materiale P la cui posizione rispetto a O è data da $\vec{R}$

O è detto polo.



e sul quale agisca la forza $\vec{F}$, si definisce momento meccanico:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{F}}$$

verso dato regola della mano destra – direzione perpend. al foglio – modulo dato da:

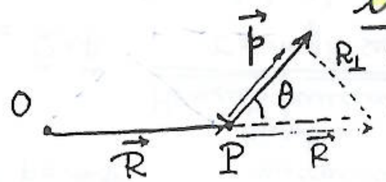
$$\boxed{\tau = R F \operatorname{sen}\theta}$$

$[ML^2T^{-2}]$ unità $\begin{cases} N \cdot m \\ dyn \cdot cm \end{cases}$

Momento angolare o momento della quantità di moto.

Sia data una particella di massa m e velocità $\vec{v}$ (quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$) in una posizione P rispetto all'origine di un sistema di riferimento inerziale.

$\vec{\ell}$ = momento angolare $\boxed{= \vec{R} \wedge \vec{p}}$



al solito il modulo di $\vec{\ell}$ è $\boxed{R \cdot p \operatorname{sen}\theta}$ direzione $\perp$ al piano del foglio e verso dato dalla regola della mano destra.

$$\ell = R \cdot p \cdot \operatorname{sen}\theta = p\,[R \operatorname{sen}\theta] = p R_\perp$$

dove $R_\perp$ è la componente di $\vec{R}$ perpendicolare alla direzione di $\vec{p}$.

R_1 è chiamato spesso "braccio del momento".

Notare che se $\theta = 0$ o $180°$ cioè $\vec{R}$ e $\vec{p}$ giacciono sulla stessa retta il momento angolare è $= 0$ $[\operatorname{sen}\theta = 0]$.

Relazione fra momento di una forza e momento angolare

Data una particella di massa m e velocità $\vec{v}$:

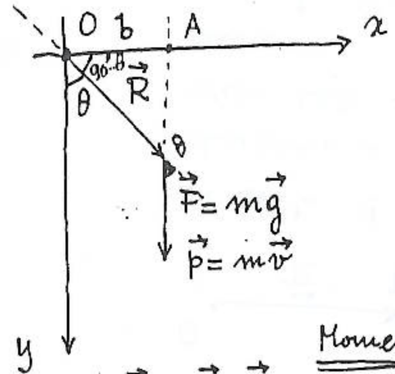
$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ora $\vec{R} \wedge \vec{F} = \vec{R} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\left| \vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt} \right|$$

la derivata rispetto al tempo del momento angolare di una particella è uguale al momento delle forze applicate alla particella stessa. [attenzione a quale momento....]

Esempio:



Una particella di massa m viene lasciata cadere dal punto A [da ferma]. Calcolare il momento meccanico, il momento angolare.

Momento meccanico:

$\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{F}$ $\qquad \tau = mgR\operatorname{sen}\theta = mgb$

direzione perpendicolare al foglio, verso entrante nel foglio.

Momento angolare:

$\vec{l} = \vec{R} \wedge m\vec{v}$ $\qquad l = Rmv\operatorname{sen}\theta = bmv = bmgt$

$a = g \quad v = gt$.

Se invece di una sola particella abbiamo un sistema a più particelle,

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots \vec{l}_N ,$$

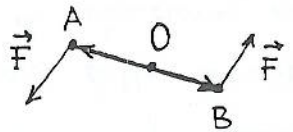
cioè il momento angolare totale è la somma vettoriale dei momenti angolari delle singole particelle.

Per il sistema di particelle si può scrivere:

$$\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt} ,$$

dove $\vec{\tau}_{est}$ è la somma di tutti i momenti esterni agenti sul sistema.

● Attenzione: la somma dei momenti ci dà il momento risultante: non confonderlo con il momento del risultante delle forze agenti sul sistema. Ad esempio: una coppia di forze.



Le due forze $\vec{F}$ hanno risultante =0, quindi il momento del risultante è =0, ma il risultante dei momenti è ≠ 0; controllare con la regola della mano destra. Il sistema ruota attorno ad O.

Notare l'analogia:

nel caso traslazionale

$$\boxed{\vec{F}_{est} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

il risultante delle forze esterne è = alla derivata della quantità di moto rispetto al tempo,
nel moto rotatorio il momento meccan. è uguale alla derivata del momento angolare rispetto al tempo:

$$\boxed{\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Notare infine che si parla di risultante dei momenti delle forze esterne; si può dimostrare che il momento totale delle forze interne è nullo. Perchè?

Il calcolo dei momenti è stato fatto rispetto all' origine O del sistema di riferimento inerziale scelto. Se si prende come punto rispetto al quale si calcolano i momenti un punto Q [detto "polo"] in moto rispetto ad O si ha:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{v}_o \wedge \vec{P}}$$

dove $\vec{P} = M\,\vec{v}_{CM}$

$\vec{v}_o$ = velocità del polo Q rispetto a O,
M = massa del sistema,
$\vec{v}_{CM}$ = velocità del centro di massa.

Momento di inerzia.

Consideriamo un corpo rigido che ruoti attorno ad un asse fisso. Ogni particella m, $\underbrace{\text{ad una distanza } R}_{\text{variabile}}$ dall' asse ruota con velocità angolare ω, e quindi con una velocità lineare $v = \omega R$. La energia cinetica è

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2.$$ [per ogni particella]

L' energia cinetica totale del corpo è:

$$K = \frac{1}{2}\left[\sum_i m_i R_i^2\right] \cdot \omega^2 .$$

Il termine $\boxed{\sum_i m_i R_i^2}$ è la somma della massa di ogni particella per il quadrato della corrispondente distanza dall' asse di rotazione; esso prende il nome di "momento di inerzia" del corpo rispetto a quel particolare asse di rota=

Possiamo scrivere l'energia cinetica del corpo in rotazione:

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}.$$

Confrontando questa con $\boxed{K = \frac{1}{2} M v^2}$ valida per un moto traslatorio notiamo che mentre M non dipende dalla posizione del corpo, I dipende dall'asse di rotazione.

Trovare il momento di inerzia delle due masse puntiformi mostrate in figura trascurando la massa dell'asta che le congiunge; considerare il momento rispetto a un asse normale al piano del foglio e passante per il centro.

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

$$I_A = 5\,kg \cdot (0.5\,m)^2 = 5 \cdot 0{,}25\ kg \cdot m^2$$

$$I_B = 5\,kg \cdot (0.5\,m)^2 = 5 \cdot 0{,}25\ kg \cdot m^2$$

$$I = I_A + I_B = 5 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}25 = 2{,}5\ kg \cdot m^2$$

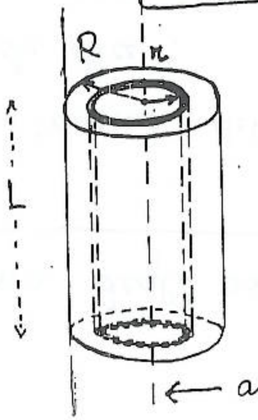
Volendo calcolare I rispetto ad un asse passante per una delle due sfere:

$$I = 5\,kg \cdot (1\,m)^2 = 5\ kg\,m^2$$

il momento della massa su cui passa l'asse è $= 0$.

Se la distribuzione di masse è continua allora $\boxed{\sum m_i R_i^2}$ diventa un integrale:

$$\boxed{I = \int R^2\, dm}.$$



← asse del cilindro

Consideriamo, come esempio, il calcolo di I per il cilindro a sinistra. Sia R il raggio del cerchio di base. Consideriamo la guaina cilindrica di raggio r $[0 < r < R]$

e altezza L. Sia dr lo spessore della guaina. Sia $\rho = \frac{M}{V}$ la densità del cilindro.

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot L \cdot \overbrace{2\pi r dr}^{\text{area di base della guaina}}$$

$$\underset{\substack{\text{rispetto all'asse} \\ \text{del cilindro}}}{I} = \int_0^R 2\pi L \rho \cdot r^3 dr = \frac{2\pi L}{4} \rho R^4$$

ma $V_{cilindro} = \pi R^2 \cdot L$

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

quindi

$$I = \frac{2\pi}{4} \cdot L \cdot R^4 \cdot \frac{M}{V} = \frac{1}{2} \pi L \frac{R^4 M}{\pi R^2 L} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} MR^2}.$$

Il calcolo è relativamente semplice quando esistono delle simmetrie.

Teorema degli assi paralleli.

Esiste un teorema, detto degli assi paralleli, che dice:
sia M la massa di un corpo e I_{CM} il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa; il momento rispetto ad un asse parallelo al precedente [quello passante per il centro di massa] e distante da esso di h è:

$$I = I_{CM} + Mh^2.$$

Si può dimostrare che per un corpo rigido

$$\boxed{\vec{\tau} = I\vec{\alpha}}$$

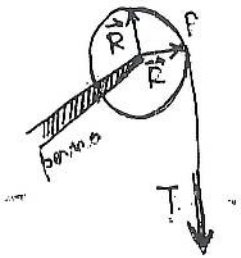
dove $\vec{\tau}$ = momento della forza,
I = momento di inerzia,
$\vec{\alpha}$ = accelerazione angolare,

Tavola di confronto :

moto rettilineo → rotazione attorno a un asse.

- spostamento x → spostamento angolare θ
- velocità $v = \frac{dx}{dt}$ → velocità angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
- acceleraz. $a = \frac{dv}{dt}$ → accel. angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
- massa m → momento di inerzia I
- $F = ma$ → $\tau = I\alpha$
- q. di moto mv → momento angolare $I\omega$

Esempio : è dato un disco di raggio R e massa M, montato su un perno sostenuto da supporti privi di attrito.



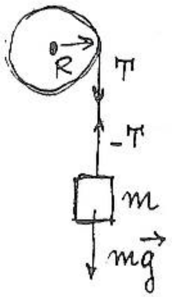
Una corda è arrotolata sul bordo del disco e tirata verso il basso da una forza costante T. Trovare l'accelerazione angolare del disco e l'accelerazione tangenziale di un punto sul bordo.

Usiamo

$$\tau = I\alpha$$

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \qquad \alpha = \frac{2T}{MR}$$

$$a_T = R\alpha .$$



Supponiamo di appendere ora alla corda un oggetto di massa m.
Trovare l'accelerazione angolare e quella tangenziale di un punto del bordo.

Se il corpo di massa m scende verso il basso

$$mg - T = ma \quad ,$$

il momento agente sul disco è

$$\tau = I\alpha \qquad = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha$$

$$\begin{cases} \tau = RT \\ a = R\alpha \longrightarrow \alpha = a/R \\ \tau = \frac{1}{2} MR^2 \alpha \longrightarrow \tau = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \frac{a}{R} \end{cases}$$

$$RT = \frac{1}{2} MRa \qquad \boxed{a = \frac{2T}{M}}$$

$$mg - T = m \cdot \frac{2T}{M} \qquad mMg = (M + 2m)T$$

$$T = \frac{mM}{\;} \cdot g$$

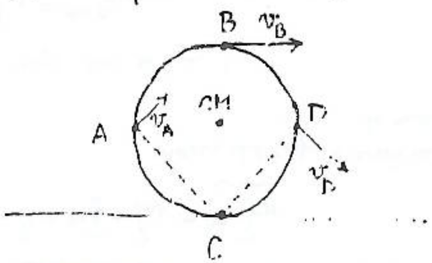
dalla $2T = Ma$ si ha

$$a = g \, \frac{2m}{2m + M}$$

e ricordando che $a = R\alpha$ si ha α.

Moto di puro rotolamento

Consideriamo ora una situazione in cui l'asse di rotazione non è un asse materiale, ma un asse geometrico che si muove assieme al corpo.
Consideriamo ad esempio un cilindro che si muova su di un piano orizzontale.



Se la velocità di tutti i punti del corpo sono uguali si ha un moto di traslazione e il corpo striscia sul piano.

In generale il corpo rotola sul piano e il punto C (punto di contatto) ha velocità non nulla rispetto al piano.
Si dice che il corpo rotola e striscia. Se invece la velocità di C è nulla (istantaneamente) si ha un rotolamento puro. Cioè il corpo ruota attorno al punto C; ad ogni istante cambia la particella che è a contatto con il piano orizzontale.
La retta passante per il punto C prende il nome di "Asse di istantanea rotazione". Questa retta è perpendicolare al piano del foglio

Riassumendo si può schematizzare così la situazione fisica: nell'intervallo dt il corpo che rotola senza strisciare può essere considerato come se ruotasse attorno all'asse passante per C, con velocità angolare ω.
In un intervallo dt successivo la rotazione avviene con contatto in un punto C' infinitamente vicino a C e così via.
Per tenere fermi i punti C, C'.... durante la rotazione deve agire una forza: questa forza è l'attrito statico.
La velocità del punto C, che dista R dal centro di massa, si può scrivere:

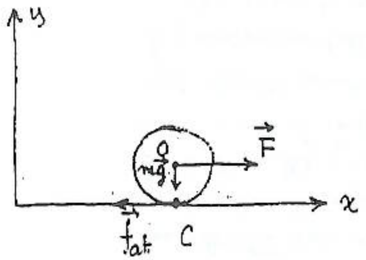
$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

la condizione di rotolamento puro è $\vec{v}_C = 0$

e quindi $\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \wedge \vec{R}$

e in modulo $v_{CM} = \omega R \Rightarrow a_{CM} = \alpha R$.

Consideriamo un corpo di massa m e raggio R che ruoti senza strisciare su una superficie orizzontale.



Sul corpo agisce la forza peso $m\vec{g}$, la forza orizzontale costante $\vec{F}$, la reazione vincolare $\vec{N}$ e la forza di attrito $\vec{f}_{at}$.

La legge di moto del centro di massa è:

$$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{f}_{at} = \underbrace{m\,\vec{a}_{CM}}$$

massa del corpo x accelerazione del centro di massa.

Proiettando sugli assi si ha:

$$\begin{cases} F - f_{at} = m\,a_{CM} \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

Scelto come polo il punto O il teorema del momento angolare

$$\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{f}_{at} = I\,\vec{\alpha} \qquad \text{o scalarmente}$$

$$R \cdot f_{at} = I\alpha = I\,\frac{a_{CM}}{R}$$

Facendo sistema:

$$\begin{cases} F - f_{at} = m\,a_{CM} \\ R\,f_{at} = \dfrac{I\,a_{CM}}{R} \end{cases}$$

si ricavano le due incognite:

$$\boxed{a_{CM} = \frac{F}{m\left[1 + \frac{I}{mR^2}\right]}} \qquad \boxed{f_{at} = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I}}}$$

È importante notare che affinché si abbia un puro rotolamento si deve avere:

$$f_{at} \le \mu_s N = \mu_s mg \rightarrow \text{massima forza di attrito statico}$$

$$F \le \mu_s mg\left[1 + \frac{mR^2}{I}\right]$$

F quindi non deve superare $\mu_s mg\left[1 + \frac{mR^2}{I}\right]$.

Si considera l'attrito statico perché il punto C è supposto che non si muova.

Per un moto rotatorio l'energia cinetica totale K può essere scritta:

$$K = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

I_C = momento di inerzia rispetto a C.

Dal teorema degli assi paralleli si ha:

$$I_C = I_{CM} + MR^2$$

M = massa cilindro R = raggio.

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

ma $R\omega = v_{CM}$ e quindi

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv_{CM}^2$$

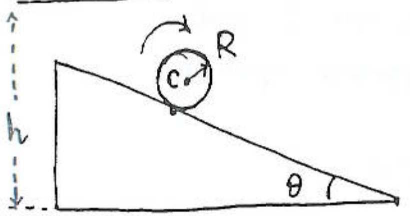
Questo risultato si può interpretare così: un moto rotatorio attorno ad un asse passante per il punto di contatto di un corpo che rotola,

è equivalente ad una traslazione del centro di massa più una rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa con la stessa velocità angolare.

Perchè il corpo ruoti e non scivoli sopra il piano orizzontale bisogna che esista una forza di attrito fra corpo e piano. Si può applicare la conservazione dell'energia in questo caso?

Sì, perchè?

Esempio :



Un cilindro di massa M e raggio R rotola su un piano inclinato senza strisciare.

Trovare la velocità del centro di massa quando il cilindro arriva in fondo. Usiamo la conservazione dell'energia

Il cilindro è inizialmente fermo :

energia cinetica = 0

energia potenziale = Mgh ,

in fondo al piano inclinato l'energia cinetica vale $\frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$

$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2 \qquad \omega = \frac{v_{CM}}{R}$

quindi

$$Mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right) v_{CM}^2/R^2 + \frac{1}{2} v_{CM}^2 =$$

$$= \frac{3}{4} M v_{CM}^2 \qquad v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3} gh} \ .$$

se il corpo scivolasse senza rotolare si avrebbe :

$$\text{energia } \underbrace{\text{cin.} + \text{energ. potenziale}}_{\text{in cima al piano inclinato}} = \underbrace{\text{energ. cin.} + \text{energ. pot.}}_{\text{in fondo al piano inclinato}}$$

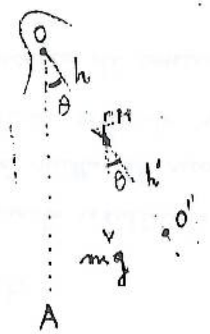
$$0 + Mgh = \frac{1}{2} M v^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

questa velocità - se il corpo scivola senza attrito - è maggiore della $v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$ trovata per il caso di rotolamento. Nel caso di scivolamento manca il termine $\frac{1}{2} I \omega^2$ di energia cinetica di rotazione.

Il pendolo composto:

Si chiama pendolo composto ogni corpo rigido che oscilli per azione del suo peso in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il centro di massa CM.



O è la traccia dell'asse di rotazione ortogonale al foglio, h è la distanza fra O e il centro di massa.

Se partiamo da una situazione di equilibrio in cui il centro di massa CM è sulla retta OA e spostiamo il pendolo composto l'azione della forza peso è tale da riportare il pendolo nella situazione di equilibrio.

Il momento della forza di richiamo è:

$$-Mgh\,\text{sen}\theta.$$

Supponiamo che non esistano momenti dovuti alle forze di attrito

$$\frac{d}{dt}L\ (\text{momento angolare}) = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\,\text{sen}\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgh}{I}\,\text{sen}\theta$$

Per piccole oscillazioni:

$$\text{sen}\theta \simeq \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgh}{I}\theta \qquad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgh}{I}\theta = 0}$$

che ha come soluzione $\theta = \theta_0 \,\text{sen}\,\omega t$.

dove $\omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I}}$.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\text{dove } l = \frac{I}{Mh}$$

si chiama lunghezza ridotta del pendolo composto e corrisponde alla lunghezza del filo di un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo.

Prova:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgh}{I}\theta \qquad \theta = \theta_0\,\text{sen}\sqrt{\frac{Mgh}{I}}\,t$$

Conservazione del momento angolare.

$$\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Supponiamo che $\vec{\tau}_{est} = 0$, allora $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

cioè $\vec{L} = \text{costante}$.

Quando il momento risultante delle forze applicate ad un sistema è nullo il momento angolare totale del sistema rimane costante nel tempo.

Questo è il principio di conservazione del momento angolare.

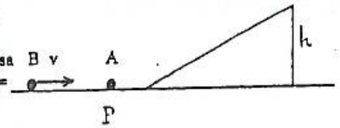
1) Un campo di forza è definito dalla relazione :

$F_x = ay$ (a= costante)
$F_y = 0$
$F_z = 0$

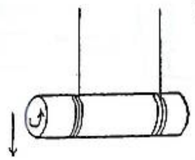
Stabilire se questo campo è conservativo o no .

2) Di un sistema di punti materiali di massa totale M si conosce ad un istante t la velocità v_C e l'accelerazione a_C del centro di massa.
Dire, giustificando la risposta, quali di queste grandezze è possibile calcolare all' istante t :
a) risultante delle forze esterne,
b) momento risultante delle forze esterne,
c) quantità di moto del sistema.

3) Un corpo puntiforme A di massa m è fermo nel punto P di fronte ad un ostacolo costituito da un tratto in salita di altezza h = 40 cm.
Un secondo corpo puntiforme B di uguale massa e velocita' v, diretta come in figura, urta elasticamente A. Quale deve essere la minima velocità di B affinchè A superi l'ostacolo ? (trascurare gli attriti).



4) Un cilindro di raggio R e lunghezza l ha massa m. Due corde sono avvolte attorno al cilindro, una a ciascun estremo, e sono fissate al soffitto. Il cilindro è trattenuto in posizione orizzontale e viene lasciato libero. Trovare l'accelerazione lineare e la tensione delle corde.



5) Trovare il centro di massa di una lamina a forma di mezzo cerchio di massa m, di raggio R e di spessore trascurabile.

Urti.

Il problema che vogliamo affrontare è il seguente:

date due particelle che si urtano e date le loro condizioni iniziali di moto, cosa si può sapere, applicando i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto, sui loro moti finali?

Supponiamo di non conoscere nulla circa le forze agenti durante l'urto.

Abbiamo visto che:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

$$d\vec{p} = \vec{F}\cdot dt .$$

Supponiamo che una particella subisca un urto; la variazione della quantità di moto durante l'urto è:

$$\underbrace{\vec{p}_f}_{\text{finale}} - \underbrace{\vec{p}_i}_{\text{iniziale}} = \int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$$

dove $\vec{F}$ è la forza che si esercita durante l'urto.

$\int \vec{F}\,dt$ prende il nome di impulso della forza.

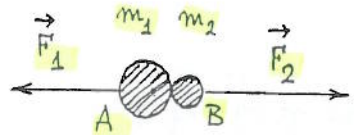
Le forze agenti per un tempo breve rispetto al tempo di osservazione del sistema sono chiamate "f

Sia $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

$$\Delta \vec{P} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 .$$

Quindi in assenza di forze esterne la quantità di moto totale del sistema non cambia.

Si può fare la seguente considerazione: durante l'urto a causa del brevissimo tempo di interazione le forze impulsive sono molto grandi e si possono trascurare le forze esterne. Quindi possiamo applicare il principio di conservazione della quantità di moto se la durata dell'urto è sufficientemente piccola.



Consideriamo l'urto fra le due particelle A e B: durante l'istante in cui vengono a contatto esercitano l'una sull'altra una forza. $\vec{F}_1$ è la forza che B esercita su A e $\vec{F}_2$ la forza che A esercita su B.

La variazione della q. di moto di A dovuta all'urto è:

$$\Delta \vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_1 \, dt = \bar{\vec{F}}_1 \Delta t$$

dove $\bar{\vec{F}}_1$ è il valor medio di $\vec{F}_1$ nell'intervallo Δt. Per la particella B analogamente si scrive:

$$\Delta \vec{p}_2 = \bar{\vec{F}}_2 \Delta t$$

ma $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ e quindi $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$

attenzione F_1 e F_2 sono uguali per la 3ª

Classificazione degli urti :

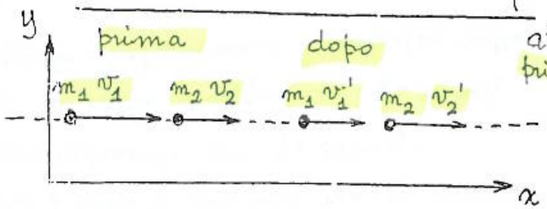
- urto elastico : in questo caso si conserva l'energia cinetica.

- urto anelastico : non si conserva l'energia cinetica.

- urto completamente anelastico : i due corpi dopo l'urto rimangono attaccati insieme.

- urto centrale : i centri di massa dei corpi che si urtano si muovono sempre lungo la stessa retta.

Studiamo alcuni esempi .



attenzione : prima dell'urto v_1 e v_2 sono orizzontali.

Caso di due particelle che si muovono lungo una retta e compiono un urto elastico.

quantità di moto prima dell'urto :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2$$

dopo l'urto :

$$m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

e quindi dalla conservaz. della q. di moto

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' .$$

Essendo l'urto elastico si conserva l'energia cinetica :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 .$$

Si possono ricavare v_1' e v_2' :

$$\boxed{\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \\ v_2' &= \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \end{aligned}}$$

considerare alcuni casi particolari :

Esempio.

Una palla da baseball avente una massa 100 g viene colpita da una mazza mentre vola orizzontalmente con $v_1 = 30\,m/s$.
Dopo l'urto la palla viaggia con $v_2 = 40\,m/s$ in verso opposto. Determinare l'impulso nella collisione.

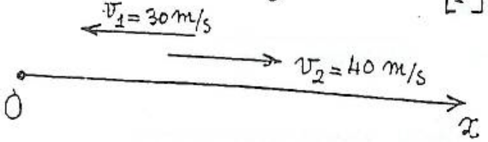
F non è nota quindi non sappiamo calcolare $\int \vec{F}\,dt$. Usiamo la relazione

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int \vec{F}\,dt$$ Teorema dell'impulso

la palla si muove in <u>una dimensione</u>
[il testo dice che viaggia in <u>verso opposto</u>]

quindi $\Delta p = 0{,}1\ kg\,[+40 - (-30)]\ m/s =$

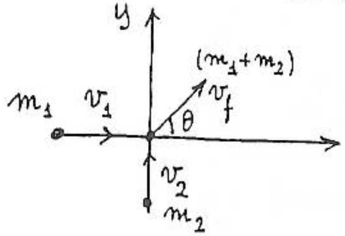
$$= 7\ kg \cdot \frac{m}{s} = 7\ N \cdot s \quad [P] = [L M T^{-1}]$$



i versi delle due velocità sono stati presi

Se l'urto non è in una sola dimensione, ma ad esempio in due, si proiettano le leggi di conservazione sugli assi cartesiani.

Consideriamo un esempio:



due corpi di masse $m_1 = 70\,Kg$ e $m_2 = 50\,kg$ si muovono con velocità $v_1 = 6\ Km/h$ e $v_2 = 8\,\frac{Km}{h}$ come in figura.

Nell'origine si ha un urto e le due masse proseguono unite. Trovare la velocità finale e dire quale frazione dell'energia cinetica dei due corpi si perde nell'urto.

Conservazione della quantità di moto lungo l'asse x:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v_f \cos\theta$$

v_2 non ha componenti su x.

Lungo l'asse y:

$$m_2 v_2 = v_f \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot (m_1 + m_2)$$

Dalle due relazioni precedenti ricaviamo:

$$\begin{cases} \text{Sen}\,\theta = \dfrac{m_2 v_2}{v_f\,(m_1 + m_2)} \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{m_1 v_1}{v_f\,(m_1 + m_2)} \end{cases}$$

da qui noto θ si trova subito v_f

da cui $\dfrac{\text{Sen}\,\theta}{\cos\theta} = \dfrac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = tg\,\theta = 0.95$

$\boxed{\theta = 43^\circ}$ e $\boxed{v_f = 4.9\ Km/h}$

Ricordare che: $1\,Km = 10^3\,m$
$1\,h = 1\,ora = 3600$ secondi

si devono trasformare le velocità date in $\frac{Km}{ore}$ in $\frac{m}{s}$:

$$\frac{1\,Km}{1\,ora} = \frac{10^3\ \text{metri}}{3600\ \text{secondi}} = \frac{1}{3.6}\ \frac{m}{s}$$

Consideriamo l'energia cinetica.

L'energia cinetica iniziale dei due corpi vale:

$$K_{in.} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 =$$

rapporto fra $\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{1}{2}(70\,Kg)(6\,Km/h)^2 + \frac{1}{2}(50\,Kg)\left(8\,\frac{Km}{h}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 70 \cdot 36 \cdot \left(\frac{10^3}{3600}\right)^2 + \frac{1}{2}\,50 \cdot 64 \left(\frac{10^3}{3600}\right)^2$$

$$= 220\ J$$

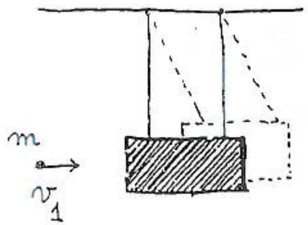
L'energia cinetica finale è

$$K_{fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_f^2 = 110\ J$$

per cui nell'urto si perde la metà dell'energia cinetica.

Pendolo balistico

Il pendolo balistico è formato da un blocco di legno di massa M sospeso mediante due funi; un proiettile di massa m si conficca nel legno con velocità $\vec{v}_1$ e rimane fermo.



L'urto è completamente anelastico. Durante l'urto il blocco di legno rimane fermo per un istante e quindi in questo istante non agiscono forze esterne, e si conserva la q. di moto orizzontale del sistema:

$$m v_1 + 0 = (m+M) v_2 .$$

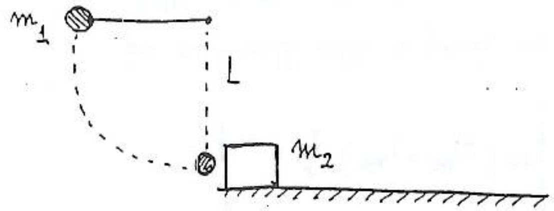
Terminata la collisione blocco di legno e proiettile si muovono come un pendolo e si fermano quando l'energia cin. uguaglia quella potenziale:

$$\frac{1}{2}(m+M) \cdot v_2^2 = (m+M) g h .$$

Problema

Una sfera di acciaio di peso 0.5 kgf è fissata all'estremità di una corda lunga 70 cm, avente l'altro estremo fisso. La sfera viene lasciata cadere dalla posizione in cui la corda è orizzontale. Nel punto più basso del suo cammino la sfera colpisce un blocco di acciaio di 2 kg, inizialmente fermo su una superficie orizzontale. L'urto è elastico.

Determinare la velocità della sfera e la velocità del blocco immediatamente dopo l'urto.



La velocità della sfera prima dell'urto si ricava dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$m_1 g L = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

energia potenziale in A, in A $K=0$ — energia cinetica in B, in B $U=0$.

Ricaviamo $v_{1i} = \sqrt{2gL} = 3.7 \frac{m}{s}$

L'urto è elastico: si conserva la quantità di moto e l'energia cinetica del sistema.
Notiamo che in direzione verticale la componente della quantità di moto è zero e rimane zero.
Dalle due leggi di conservazione si ha:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 \overset{=0}{v_{2i}} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

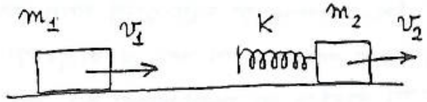
Il sistema risolto ci dà:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = -2.33 \frac{m}{s}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = 1.17 \frac{m}{s}$$

Problema

Un blocco di massa $m_1 = 2\,Kg$ scivola su un piano orizzontale liscio con velocità $10 \frac{m}{s}$. Subito di fronte ad esso un blocco di massa $m_2 = 5\,Kg$ si muove nella stessa direzione con velocità $3 \frac{m}{s}$. Una molla di massa trascurabile con costante elastica $K = 1120 \frac{N}{m}$ è fissata sul retro di m_2, come mostrato in figura. Quando i blocchi si urtano quale è la massima compressione della molla?
Si supponga che la molla segua la legge di Hooke.



Non esistono attriti (il piano è liscio); l'interazion fra i blocchi è rappresentata da una forza elastica (e quindi conservativa). Si conservano la quantità di moto e l'energia meccanica.
La conservazione della quantità di moto si scrive:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v_{CM}$$

la v_{CM} è anche la velocità comune ai due blocchi nell'istante in cui la molla raggiunge la massima compressione e quindi la velocità relativa si annulla.

L'energia meccanica prima dell'urto è solo cinetica.

$$E = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 122.5 \text{ J}$$

Nell'istante in cui la molla raggiunge la massima compressione all'energia cinetica dei due blocchi (aventi entrambi velocità uguale a v_{CM}) dobbiamo aggiungere l'energia potenziale della forza elastica:

$$E = K + U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = 87.5 \text{ J} + \frac{1}{2} k x^2$$

Quindi confrontando le due espressioni si ha:

$$122.5 \text{ J} = 87.5 \text{ J} + \frac{1}{2} k x^2$$

si ricava $x = 0.25 \text{ m}$

Problema (in aula)

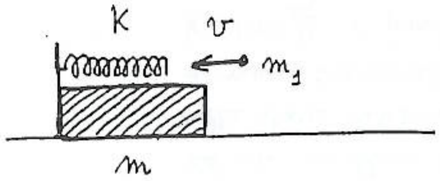
Trovare l'impulso sviluppato da una forza data da $\vec{F} = 4t\,\hat{i} + (6t^2 - 2)\hat{j} + 12\hat{k}$ da $t=0$ a $t=2$.

$$\int_0^2 \left[4t\,\hat{i} + (6t^2-2)\hat{j} + 12\hat{k}\right] dt = \left[2t^2\hat{i} + (2t^3 - 2t)\hat{j} + 12t\,\hat{k}\right]_0^2$$

$$= 8\,\hat{i} + 12\hat{j} + 24\hat{k}$$

Problema DIFF

Un blocchetto di massa m è fermo su un piano orizzontale scabro con coeff. di attrito statico μ_s. Sopra il blocchetto si trova in condizioni di riposo una molla di costante elastica K con un estremo saldato al blocchetto stesso. Una particella di massa m_1, diretta come l'asse della molla urta con velocità v l'estremo libero della molla e la comprime. Calcolare il valore v' tale che se $v > v'$ il blocchetto si muove.



La compressione massima della molla si ha quando la particella si ferma :

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} K x^2$$

x = accorciamento della molla rispetto alla posizione di equilibrio

quindi $x = \sqrt{\frac{m_1}{K}}\, v$.

L' intensità massima della forza di attrito è

$$\mu_s (m + m_1) g .$$

La forza che esercita la molla è

$$|F| = Kx = K \cdot \sqrt{\frac{m_1}{K}}\, v = \sqrt{K m_1}\, v .$$

Il blocchetto si muove se

$$K \cdot x > \mu_s (m + m_1) g$$

da cui

$$v' = \frac{\mu_s (m + m_1) g}{\sqrt{K m_1}} .$$

Problema

Si determini il centro di massa di un'asta di massa m e lunghezza l, la cui densità lineare è ρ_1 nel primo tratto lungo $\frac{l}{3}$ e ρ_2 nel secondo tratto lungo $\frac{2}{3} l$.

Problema

Un corpo di massa m inizialmente in quiete viene spezzato in due frammenti per mezzo di un esplosivo messo all'interno del corpo. Calcolare le velocità dei due frammenti subito dopo l' esplosione.

il tempo di durata dell' esplosione è molto piccolo e quindi anche se agiscono delle forze esterne (non impulsive) la quantità di moto resta costante

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = 0$$

quindi i due frammenti si muovono lungo la stessa retta ma in versi opposti e in modulo si ha

$$m_A v_A = m_B v_B .$$

Se i frammenti non possiedono movimenti rotatori e se E è l'energia ceduta ai frammenti dalla esplosione si ha:

$$E = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 .$$

Queste due equazioni ci danno

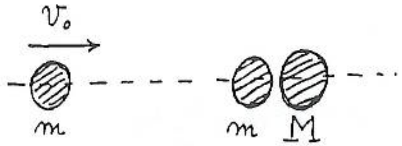
$$v_A = \sqrt{\frac{2E}{m_A\left(1+\frac{m_A}{m_B}\right)}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2E}{m_B\left(1+\frac{m_B}{m_A}\right)}}$$

Queste formule si applicano anche al caso di un processo di disintegrazione spontanea di un nucleo.

Problema

Le due masse a destra nella figura sono lievemente distanziate e inizialmente in quiete.



La massa a sinistra si dirige verso di esse con velocità v_0. Si suppongano gli urti centrali.
Dimostrare:

a) se $M \leq m$ dimostrare che vi sono due urti e calcolare le velocità finali.

b) se $M > m$ dimostrare che vi sono tre urti e calcolare le velocità finali.

a) dalla conservazione della q. di moto e dell'energia cinetica (supponiamo urti elastici) si ha:

$$\begin{cases} m_1 v_0 = m_1 v_0' + m_2 v_1 \\ m_1 v_0^2 = m_1 v_0'^2 + m_2 v_1^2 \end{cases}$$

dove $m_1 = m_2 = m$
v_1 = velocità della sfera di mezzo
v_0' = velocità della sfera di sinistra dopo il primo urto.

risolvendo il sistema precedente si ottiene:

$$\begin{cases} v_0' = \dfrac{m-m}{m+m}\, v_0 + \dfrac{2m}{m+m} \cdot 0 \\[2ex] v_1 = \dfrac{2m}{m+m}\, v_0 + \dfrac{m-m}{m+m}\, 0 \end{cases}$$

velocità iniziale della sfera di mezzo che è zero,

quindi la sfera di sinistra si ferma e quella di mezzo parte con velocità v_0.

Ripetendo le equazioni per la massa m di mezzo e la massa M di destra abbiamo:

$$\begin{cases} v_0' = \text{velocità finale della massa di mezzo} = \dfrac{m-M}{m+M}\, v_0 + \dfrac{2M}{m+M} \cdot 0 \\[2ex] v_1 = \text{velocità finale della massa } M = \dfrac{2m}{m+M}\, v_0 + \dfrac{M-m}{m+M} \cdot 0 \end{cases}$$

velocità iniziale di M

se $M < m$ la massa di mezzo ha velocità positiva cioè si muove verso destra ma

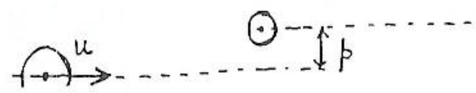
$$v_0' = \frac{m-M}{m+M}\, v_0 \quad \text{è minore di} \quad v_1 = \frac{2m}{m+M} \cdot v_0$$

(b) se $M > m$ la velocità v_0' della massa di mezzo diventa negativa e quindi si muove verso sinistra; urta di nuovo con la massa m di sinistra come nel primo urto.
La massa di mezzo si arresta e la massa di sinistra si muove verso sinistra e non ci sono più urti.

- Supponiamo di avere una fila di palline tutte di massa uguale e messe a contatto fra loro; alla luce del problema precedente l'ultima parte con velocità v_0 e le altre rimangono ferme.

- Dimostrare che una pallina che colpisce perpendicolarmente un muro con velocità v rimbalza con velocità $-v$.

- Se l'urto non è centrale è importante conoscere il parametro d'urto p:



Sistema di due punti materiali - Massa ridotta

Consideriamo due punti materiali P_1 e P_2 non soggetti a forze esterne e siano $\vec{F}_{1,2}$ e $\vec{F}_{2,1}$ le forze interne che i punti esercitano uno sull'altro

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{2,1} \quad , \quad \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1} = 0$$

Le equazioni di moto rispetto ad un sistema di riferimento inerziale sono:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{1,2} \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{2,1} \end{cases} \qquad (1)$$

La risoluzione di questo sistema è più o meno complicata a seconda della natura delle forze.

Sommiamo membro a membro le due equazioni precedenti:

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \right] = 0$$

questo implica che la velocità del centro di massa $\vec{v}_{cm} = \dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \text{costante}$

come ci potevamo attendere dal fatto che il sistema è isolato.

Riscriviamo il sistema (1):

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \dfrac{d\vec{v}_1}{dt} = \dfrac{\vec{F}_{1,2}}{m_1} \\ \vec{a}_2 = \dfrac{d\vec{v}_2}{dt} = \dfrac{\vec{F}_{2,1}}{m_1} \end{cases}$$

sottraendo membro a membro si ha:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right] = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{1,2} \qquad (2)$$

possiamo supporre $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 =$ alla velocità relativa dei due punti, la $\frac{d}{dt}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ è l'accelerazione relativa.

Introduciamo la massa ridotta del sistema dei due punti μ:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

In termini di massa ridotta la (2) si può scrivere:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{1,2}$$

$$\vec{a}_{1,2} \cdot \mu = \vec{F}_{1,2}$$

Lo studio del moto relativo di due punti materiali interagenti solo fra di loro è equivalente a quello del moto di un punto materiale di massa uguale alla massa ridotta e soggetto ad una forza uguale a quella di interazione fra i due punti.

Cenno di statica del punto materiale.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto materiale resti in quiete in una data posizione dello spazio è che la sua velocità sia nulla e che il risultante delle forze agenti sia nullo.

Se la posizione P_0 è di equilibrio si possono distinguere tre situazioni:

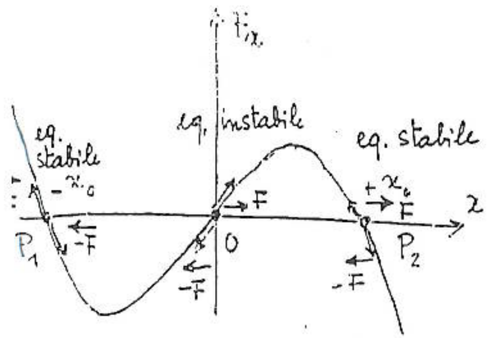
1) l'equilibrio è stabile se spostando di sufficientemente poco il punto materiale dalla posizione di equilibrio, questo tende a tornarvi,
2) l'equilibrio è instabile se il punto materiale, spostato di quanto poco si voglia dalla posizione di equilibrio, si allontana da questa,
3) l'equilibrio è indifferente se esiste un intorno di P_0 in cui ciascun punto è posizione di equilibrio

---

Esempio

Un punto può muoversi lungo l'asse x sotto l'azione di una forza, parallela all'asse x, di componente

$$F_x = -f \left[\left(\frac{x}{x_0} \right)^3 - \frac{x}{x_0} \right] \qquad f, x_0 = \text{costanti positive}$$



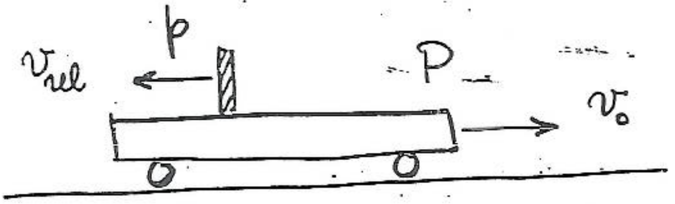
Affinché una posizione sia di equilibrio occorre che la forza agente in quella posizione sia nulla.

F_x è nulla per $x=0$, $x=\pm x_0$

dal grafico di F_x si vede che P_1 $(x=-x_0)$ è una posizione di equilibrio stabile.
Infatti se ci spostiamo sopra l'asse x la forza è >0 e riporta il punto in x_0; se ci spostiamo a $F_x<0$ (cioè verso destra) la forza è diretta con verso a sinistra e tende a riportare il punto in x_0. Analogamente in P_2.
In O l'equilibrio è instabile.

Problema

Un vagone ferroviario di peso P può scorrere senza attrito su una rotaia diritta e orizzontale. Inizialmente un uomo di peso p sta in piedi sul vagone che si muove con velocità costante v_0. Quale è la variazione di velocità del vagone se l'uomo corre verso sinistra con velocità v_{rel} relativa al carro, nell'istante in cui raggiunge l'estremità del vagone e salta giù?



Dai dati del problem. la risultante delle forze esterne è nulla e quindi si conserva la quantità di moto del sistema.

Siano M e m le masse del vagone e dell'uomo, e v e u le velocità all'istante del salto.

La quantità di moto iniziale è:

$$P_0 = (M+m)\, v_0$$

all'istante del lancio la quantità di moto è:

$$P_1 = M v + m u \qquad v_{rel} = u - v$$
$$u = v_{rel} + v$$

$$(M+m)\, v_0 = M v + m (v_{rel} + v)$$

$$(M+m)\, v_0 - (M+m)\, v + m\, v_{rel}$$

$$v - v_0 = - \frac{m\, v_{rel}}{(M+m)}$$