CAPITOLO IV

CONSENTE DI SPOSTARE GLI AUTOVALORI PER RENDERE STABILE UN SISTEMA INSTABILE

SISTEMA VIRTUALE CHE FA UNA STIMA DELLO STATO PER SISTEMI NON OSSERVABILI

RETROAZIONI ED OSSERVATORI

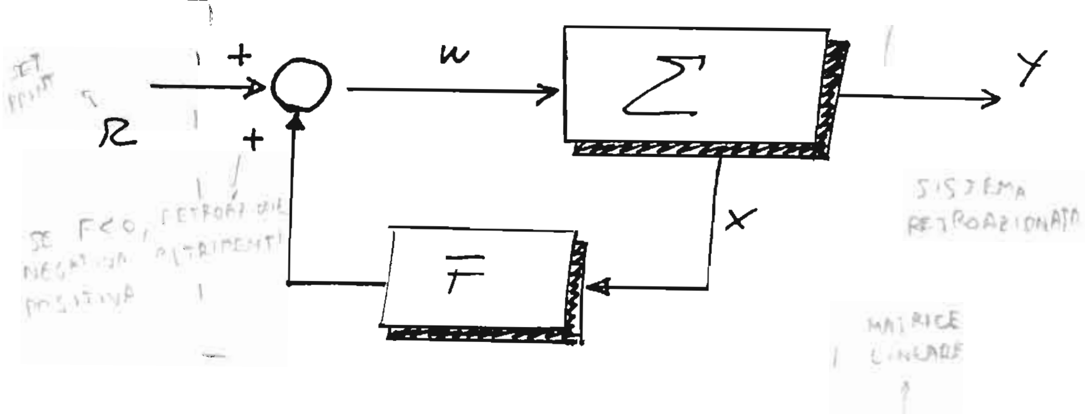
- Introduzione alla retroazione lineare dello stato
- Teorema dell'assegnabilità degli autovalori
- Metodi di assegnazione degli autovalori:
  - metodo diretto
  - uso della forma canonica di controllo
    1. caso scalare ($m = 1$), formula di Ackermann
    2. caso multivariabile ($m > 1$)
- L'osservatore asintotico dello stato
- Osservatore ottimo dello stato (filtro di Kalman)
- Osservazione dello stato per sistemi tempo discreti
- Controllori dinamici basati sull'osservatore
- Teorema di separazione

RETROAZIONE LINEARE DALLO STATO

$$\Sigma \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

SISTEMA TEMPO CONTINUO STAZIONARIO

Ipotizziamo che lo stato di Σ sia ACCESSIBILE.



La legge di retroazione è: $u(t) = Fx(t) + r(t)$ dove $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Di conseguenza:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x + Br \\ y = (C + DF)x + Dr \end{cases}$$

SISTEMA RETROAZIONATO

TEOREMA

Date le matrici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, esiste una matrice $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che lo spettro degli autovalori di $(A + BF)$ è assegnabile arbitrariamente, se e solo se (A,B) è COMPLETAMENTE CONTROLLABILE. O RAGGIUNGIBILE

<u>Dimostrazione:</u>

$\nabla(A) = \nabla(T^{-1}AT)$ CON T NON SINGOLARE

FORMA STANDARD DI RAGGIUNGIBILITÀ: $T = [T_1 \; T_2] \to A_R = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ $B_R = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- <u>Necessità:</u> si effettua una trasformazione di coordinate che porta alla forma standard di raggiungibilità e si osserva che sulla parte non raggiungibile non è possibile intervenire opportunamente. $\nabla(A_2) = \nabla(A+BF)$ $(A,B) \to (A+BF, B)$
- <u>Sufficienza:</u> discende dalle soluzioni algoritmiche proposte nel seguito.

<u>LEMMA</u>

Gli autovalori incontrollabili di (A,B) non possono essere modificati da una retroazione lineare stato-ingresso, cioè:

$$\nabla(A|_{\mathbb{R}^n/R}) \subseteq \nabla(A+BF) \;\; \forall F \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

<u>Dimostrazione:</u>

Dal sistema $\Sigma(A,B)$ passiamo alla forma standard di ragg.tà $\rightsquigarrow (A_R, B_R)$

Si ha:

$$A_r = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = T^{-1} B$$

dove si è imposto:

$\underline{x = T x_r}$

e si impone:

$$\boxed{F_r' = F T}$$

effettuando la retroazione con il sistema in f. standard, si ha:

$\nabla(T^{-1}(A+BF)T)$

$$A_r + B_r F_r = T^{-1} A T + T^{-1} B F T = T^{-1}(A+BF)T$$

$$A_r + B_r F_r = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_{12} \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_{12} \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} B_1 F_1 & B_1 F_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_1 + B_1 F_1 & A_{12} + B_1 F_2 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$$

Se sistema compl. raggiungibile

quindi

$$\nabla(A_r + B_r F_r) = \nabla(A_1 + B_1 F_1) \cup \underbrace{\nabla(A_2)}$$

$\longrightarrow$ autovalori <u>non</u> modificabili con la retroazione

PERCHÈ PARTE NON RAGGIUNGIBILE

$\nabla(A+BF) = \nabla(A_r + B_r F_c)$ con $F_c \triangleq F T$

e^{-1000t} MIGLIORA DI $e^{-10{,}000t}$ [illegible] SPOSTARLI OLTRE -2 PERCHÉ [illegible] PORTO ALLA [illegible]

$\square$

DEFINIZIONE DI COPPIA (A, B) STABILIZZABILE

La coppia (A,B) è detta stabilizzabile se esiste una matrice $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

$$\nabla(A+BF) \subseteq \mathbb{C}^-$$

È STABILE

Piano complesso a parte reale negativa

PROPOSIZIONE

La coppia (A,B) è stabilizzabile se e solo se tutti gli autovalori incontrollabili di (A,B) sono a parte reale negativa, ovvero se e solo se

$$\nabla\left(A|_{\mathbb{R}^n/\mathcal{R}}\right) \subseteq \mathbb{C}^-$$

Dimostrazione:

Attraverso la retroazione riesco a modificare solo gli autovalori della parte controllabile di $\Sigma(\dots)$ $\square$

PROPOSIZIONE

Il sottospazio di raggiungibilità relativo ad (A,B) coincide con il sottospazio di raggiungibilità relativo a $(A+BF, B)$ $\forall F \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Dimostrazione

Se $\tilde{A} = A + BF$ e $\tilde{B} = B$ allora $\Sigma'(\tilde{A}, \tilde{B})$ è il sistema retroazionato, con F generica.
Cosa è quindi

$$\operatorname{im}\left[\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}\right] \quad ?$$

$$R = \left[\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}\right] = \left[B, (A+BF)B, (A+BF)(A+BF)B, \dots\right] =$$

$$= \left[B, AB + BFB, A^2B + ABFB + BF(A+BF)B, A^3B + A^2BFB + ABF(A+BF)B + BF\cdot(A+BF)^2B, \dots\right] =$$

$$= \left[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\right] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I & FB & F(A+BF)B & \dots & F(A+BF)^{n-2}B \\ 0 & I & FB & & \\ 0 & 0 & I & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{bmatrix}}_{\text{non singolare!} \quad \det = 1}$$

$\{y : y = ATz, \forall z \in \mathbb{R}^n\} \xrightarrow{x = Tz} \{y : y = Ax \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

Siccome
$\operatorname{im}(AT) = \operatorname{im} A$ per T non singolare e A matrice generica, si ha la Tesi. $\square$

$\operatorname{im}\tilde{R} = \operatorname{im} R \cdot T = \operatorname{im} R$

COROLLARIO

Per ogni $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

- (A,B) è completamente controllabile se e solo se $(A+BF, B)$ è completamente controllabile
- (A,B) è stabilizzabile se e solo se $(A+BF, B)$ è stabilizzabile

---

METODI DI ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI

• METODO DIRETTO

Sia $F = [f_{ij}]$ $\quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$

$$\det(sI - (A+BF)) = s^n + g_{n-1}(f_{ij})\, s^{n-1} + g_{n-2}(f_{ij})\, s^{n-2} + g_{n-3}(f_{ij})\, s^{n-3} + \dots + g_0(f_{ij})$$

costruisco cioè il polinomio caratteristico, imponendo lo spettro $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, il polinomio caratteristico desiderato è:

$$\alpha_{desid.}(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i) = s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0$$

POLINOMIO DESIDERATO

quindi si ottiene il sistema di n equazioni

$$\begin{cases} g_0(f_{ij}) = d_0 \\ g_1(f_{ij}) = d_1 \\ \dots \\ g_{n-1}(f_{ij}) = d_{n-1} \end{cases}$$

(uguagliando i coefficienti dei due polinomi)

questo sistema trovato è LINEARE se $m = 1$ e non lineare se $m > 1$, infatti se $m = 1$ $B \subseteq \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $F \subseteq \mathbb{R}^{1 \times n}$ quindi:

$$A + BF = A + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_1 f_1 & \dots & a_{1n} + b_1 f_n \\ \vdots & & \\ a_{n1} + b_n f_n & \dots & a_{nn} + b_n f_n \end{bmatrix}$$

e le $g(f_{ij})$ sono f.ni lineari di $f_1, f_2, \dots f_n$

Questo è un approccio numerico, il metodo di per sé non dà indicazioni sulla risolubilità del sistema di equazioni ottenuto.

● METODO CON LA FORMA CANONICA DI CONTROLLO

Data la coppia (A,B) completamente controllabile, esiste una trasformazione di equivalenza T tale che

$$A_c = TAT^{-1} \qquad B_c = TB \qquad e$$

(A_c, B_c) è in forma canonica di controllo.

Si osservi innanzitutto che:

$$\nabla(A+BF) = \nabla(T(A+BF)T^{-1}) = \nabla(A_c + B_c F T^{-1})$$

NOTA: $\nabla(A) \Rightarrow \det(sI-A)=0$

$$\nabla(TAT^{-1})? \quad \det(sI - TAT^{-1}) =$$

$$= \det(s TIT^{-1} - TAT^{-1}) =$$

$$= \det(T(sI-A)T^{-1}) =$$

$$= \cancel{\det(T)} \cdot \det(sI-A) \cdot \cancel{\det(T^{-1})} =$$

$$= \det(sI-A)$$

a questo punto possiamo definire

$$\boxed{F_c := FT^{-1}}$$

$F = F_c \cdot T$

quindi:

$$\nabla(A+BF) = \nabla(A_c + B_c F_c)$$

e una volta che si è determinato F_c si risalirà a F così:

$$\boxed{F = F_c T}$$

Analizziamo separatamente il caso scalare che quello multivariabile:

CASO SCALARE $m=1$

$$F_c = [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}]$$

ovvero trovare gli f_i tali che gli autovalori vengano allocati...

$$A_{CF} := A_c + B_c F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} +$$

MATRICE DEL SISTEMA RETROAZIONATO IN FORMA DI CONTROLLO

COEFFICIENTI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_0, \dots, f_{n-1}]$$

quindi

$f_c \in R^{1\times n}$

B_c

$$A_{CF} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ -(\alpha_0 - f_0) & -(\alpha_1 - f_1) & \dots & & -(\alpha_{n-1} - f_{n-1}) \end{bmatrix}$$

dove gli α_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico di A ($e\ A_c$) infatti:

$$\underline{\det(sI - A) = \det(sI - A_c) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

mentre

$$\underline{\det(sI - A_{CF}) = s^n + (\alpha_{n-1} - f_{n-1}) s^{n-1} + (\alpha_{n-2} - f_{n-2}) s^{n-2} +}$$

$$\underline{+ \dots + (\alpha_1 - f_1) s + (\alpha_0 - f_0)}$$

Se lo spettro desiderato è $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, il polinomio caratteristico da imporre per A_{CF} è:

$$\alpha_{des.}(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i) = s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_0$$

quindi dovrà valere:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \pi_{des} = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$

$f_0 = \alpha_0 - d_0 = 0 - 1 = -1$

$f_1 = \alpha_1 - d_1 = 1 - 2 = -1$

$$d_i = \alpha_i - f_i \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$$

da cui la soluzione per gli f_i cercati:

$$\boxed{f_i = \alpha_i - d_i} \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$$

E' possibile (SOLO NEL CASO SCALARE) dare un'espressione diretta per la matrice F cercata, tramite la:

FORMULA DI ACKERMANN

SOLO SCALARE!

$$\boxed{F = -e_n^t R^{-1} \alpha_{des}(A)}$$

VERSORE TRASPOSTO → VETTORE RIGA → SELEZIONA L'ULTIMA RIGA DI R^{-1}

con $e_n := \left.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ n elementi $\quad R = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$

FORMA CANONICA DI CONTROLLO (A_c, B_c)

__Dimostrazione__

Dimostriamo prima la $F_c = -e_n^t R_c^{-1} \alpha_{des}(A_c)$

infatti:

$$R_c = [B_c \; A_c B_c \; \dots \; A_c^{n-1} B_c]$$

$$\alpha_{des}(A_c) = A_c^n + d_{n-1} A_c^{n-1} + \dots + d_0 I \qquad (1)$$

COEFFICIENTI DESIDERATI

inoltre

$$\alpha(A_c) = A_c^n + \alpha_{n-1}A_c^{n-1} + \dots + \alpha_0 I = 0 \quad (2)$$

POLINOMIO CARATTERISTICO DI A_c

per Teo. Cayley Ham.

POLINOMIO ANNULLANTE

quindi:

$$\alpha_{d_{es}}(A_c) = \sum_{i=0}^{n-1} (d_i - \alpha_i) A_c^i$$

ottenuto sottraendo la (2) alla (1) TANTO (2)=0

ma

$$R_c = \begin{bmatrix} \overset{\nearrow B_c}{0} & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & * \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

e se $e_1^t := [1\ 0 \dots 0]$

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

si ha:

$$e_1^t R_c = e_n^t \Rightarrow e_1^t = e_n^t R_c^{-1}$$

quindi

$$f_c = -\underbrace{e_n^t R_c^{-1}}_{e_1^t} \alpha_{des}(A_c) = -e_1^t \alpha_{des}(A_c) =$$

$$= -e_1^t \left[(d_0 - \alpha_0) I + (d_1 - \alpha_1) A_c + \dots + (d_{n-1} - \alpha_{n-1}) A_c^{n-1}\right]$$

$$= \Big[\underbrace{(\alpha_0 - d_0)}_{\text{NUMERO}} e_1^t + (\alpha_1 - d_1) \underbrace{e_1^t A_c}_{e_2^t} + \dots \Big] =$$

$$= \left[(\alpha_0 - d_0) e_1^t + (\alpha_1 - d_1) e_2^t + (\alpha_2 - d_2) e_3^t + \dots \right] = \begin{bmatrix} \overset{f_0}{(\alpha_0 - d_0)} & \overset{f_1}{(\alpha_1 - d_1)} & \dots \end{bmatrix}$$

dove $e_i^t = [0\ 0 \dots 0\ 1\ 0 \dots 0]$

l'espressione trovata della F_c è esattamente quella già vista, quindi vale:

$$F_c = -e_n^t R_c^{-1} \alpha_{des}(A_c)$$

a questo punto basta considerare che:

$$T R = R_c = [\overset{TB}{B_c} \; \overset{TAT^{-1}TB}{A_c B_c} \ldots A_c^{n-1} B_c]$$ quindi

$$R_c^{-1} = R^{-1} T^{-1}$$, inoltre

$$F = F_c T = -e_n^t R_c^{-1} \alpha_{des}(A_c) T =$$

$$= -e_n^t R^{-1} T^{-1} \alpha_{des}(\overset{TAT^{-1}}{A_c}) T =$$

$$= -e_n^t R^{-1} T^{-1} \cdot T \alpha_{des}(A) T^{-1} \cdot T =$$

$$= -e_n^t R^{-1} \alpha_{des}(A)$$

□

CASO MULTIVARIABILE $m>1$

$$A_{CF} = A_C + B_C F_C$$

Si osserva innanzitutto che, per ogni scelta di F_C, A_{CF} è ancora in forma canonica di controllo con struttura identica alla struttura di A_C.

Ad esempio:

$\begin{cases} A_C = \bar{A}_C + \bar{B}_C A_m \\ B_C = \bar{B}_C B_m \end{cases}$

$$A_{CF} = A_C + B_C F_C \overset{\text{forma di Brunowski}}{=} \bar{A}_C + \bar{B}_C A_m + \bar{B}_C B_m F_C =$$

$$= \bar{A}_C + \bar{B}_C (A_m + B_m F_C) = \bar{A}_C + \bar{B}_C \cdot \underbrace{K_m}$$

STESSA STRUTTURA DEL SISTEMA ORIGINARIO

(matrice di dimensioni opportune)

Quindi sia $\alpha_{des}(s) = s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0$ il polinomio caratteristico desiderato e selezioniamo una matrice A_d (MATRICE DESIDERATA) in forma canonica di controllo avente la stessa struttura di A_C (e quindi stessa struttura di A_{CF}), affinché:

$$\det(sI - A_d) = \alpha_{des}(s)$$

Quindi con A_{dm} matrice opportuna, A_d è riscrivibile grazie al lemma di Brunovski così:

$$A_d = \overline{A_c} + \overline{B_c} A_{dm}$$

D'altronde

$$A_{cF} = A_c + B_c F_c = \left(\overline{A_c} + \overline{B_c} A_m\right) + \left(\overline{B_c} B_m\right) F_c =$$
$$= \overline{A_c} + \overline{B_c}\left(A_m + B_m F_c\right)$$

per cui, imponendo

$$A_{cF} = A_d \qquad \text{si ottiene:}$$

$$A_m + B_m F_c = A_{dm} \qquad \text{cioè}$$

$$\boxed{F_c = B_m^{-1}\left[A_{dm} - A_m\right]}$$

Quindi si conclude che

$$\boxed{F = B_m^{-1}\left[A_{dm} - A_m\right] T}$$

Rimane aperto il problema di come selezionare A_d.

SELEZIONE DI A_d

Gli unici vincoli su A_d sono che:

→ deve avere come polinomio caratteristico $\alpha_{des}(s)$ con i $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ voluti

→ deve essere in forma canonica di controllo con stessa struttura di A_c

NOTA:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\multicolumn{3}{c}{\eta_1=3} & \multicolumn{4}{c}{\eta_2=4} & \multicolumn{2}{c}{\eta_3=2}
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|cccc|cc}
0 & 1 & 0 & & & & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & & & & & 0 & 0 \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\hline
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\hline
 & & & & & & & 0 & 1 \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times
\end{array}\right]
\quad e \quad
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & & & 0 \\
\vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 1 \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times
\end{array}\right]
\leftarrow \text{POLINOMIO CARATTERISTICO DESIDERATO}
$$

Hanno la stessa struttura! Basta mettere nelle posizioni opportune degli "0" o degli "1" nelle "x" della prima e si ottiene la seconda

Dunque una scelta possibile di A_d è quella compatibile con qualunque insieme di indici di controllabilità, cioè:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -d_0 & -d_1 & \dots & -d_{n-1} \end{bmatrix}$$ con questa

scelta si ha:

$$A_{d_m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -d_0 & & & \dots & & & & -d_{n-1} \end{bmatrix}$$

Un'altra scelta possibile è

$A_d = [A_{ij}] \quad i,j = 1,\dots,m$

con $A_{ij} = 0$ per $i \neq j$, cioè

$$A_d = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{mm} \end{bmatrix} = \text{blockdiag}\,(A_{ii})$$

in questo caso vale:

$$\det(sI - A_d) = \det(sI - A_{11}) \cdot \ldots \cdot \det(sI - A_{mm})$$

e $A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ * & * & & * \end{bmatrix}$

Uno possibile svantaggio per quest'ultima scelta è che essa può imporre restrizioni non necessarie sul numero degli autovalori reali assegnati. Per esempio se $n=4$, $m=2$ e $\mu_1=3$ e $\mu_2=1$, allora è necessario che almeno due autovalori da assegnare siano reali.
Altre scelte sono possibili, compresa la possibilità di scegliere in modo ottimo la legge di retroazione.

LEMMA

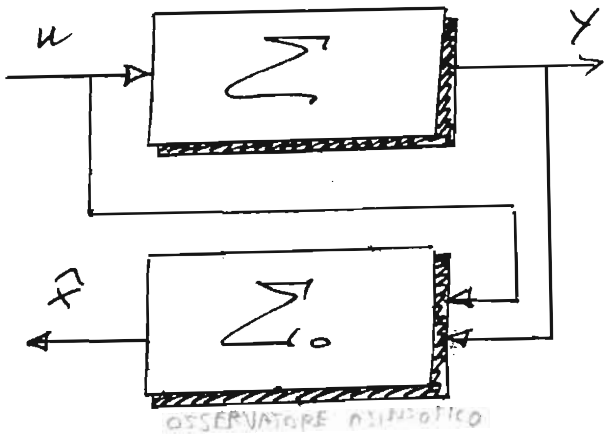
Sia (A,B) completamente controllabile. Dato uno spettro arbitrario $\nabla_d = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, esiste una matrice $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

$$\nabla(A+BF) = \nabla_d$$

Inoltre F è unica per $m=1$ ed F è non unica per $m>1$

OSSERVATORI DELLO STATO

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$



$\hat{x}$ è la STIMA DELLO STATO x di Σ

OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO DI Σ (PER SISTEMI TEMPO CONTI…)

O OSSERVATORE DI LUENBERGER

$$\Sigma_0 \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \end{cases}$$

STIMA DELL'USCITA CON STATO PARI A $\hat{x}$

$K(y - C\hat{x} - Du)$

A B C D UGUALI A QUELLI DI Σ

$\hat{x}$: stima dello stato (sistema Σ_0)

y: evoluzione dell'uscita (del sistema originale Σ)

$\hat{y}$: evoluzione dell'uscita assumendo $\hat{x}$ come stato l'eq. ne di stato dell'osservatore è riscrivibile come:

NUOVA MATRICE DI SISTEMA

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + [B - KD, K] \cdot \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

L'errore di stima è

$$\boxed{e(t) := x(t) - \hat{x}(t)}$$

da cui si deduce che:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) +$$

$$- A\hat{x}(t) - Bu(t) - K\big(\underbrace{Cx(t) + Du(t)}_{y(t)} +$$

$$- C\hat{x} - Du(t)\big) = (A - KC)\, e(t)$$

cioè

$$\dot{e}(t) = (A - KC)\, e(t)$$

SOLO EVOLUZIONE LIBERA
⇓
e(t) HA UN ANDAMENTO COME ESPONENZIALE DI MATRICE

la cui "dinamica" è:

$$e(t) = \exp[(A - KC)t]\, e(0)$$

SE K HA ESPONENZIALI MOLTO NEGATIVI, L'ERRORE INIZIALE VIENE SMORZATO VELOCEMENTE, $e(t) \to 0$ e QUINDI $\hat{x}(t) \to x(t)$

Ovviamente se

PARTE REALE NEGATIVA

$$\boxed{\nabla(A-KC) \subseteq \mathbb{C}^-}$$

allora $\boxed{\lim_{t\to+\infty} e(t) = 0}$

TEOREMA

Esiste una matrice $K \in \mathbb{R}^{n\times p}$ affinché lo spettro $\nabla(A-KC)$ sia assegnabile arbitrariamente, se e solo se (C, A) è OSSERVABILE.

cioè $\nabla(A-KC) \subset \mathbb{C}^-$

Dimostrazione:

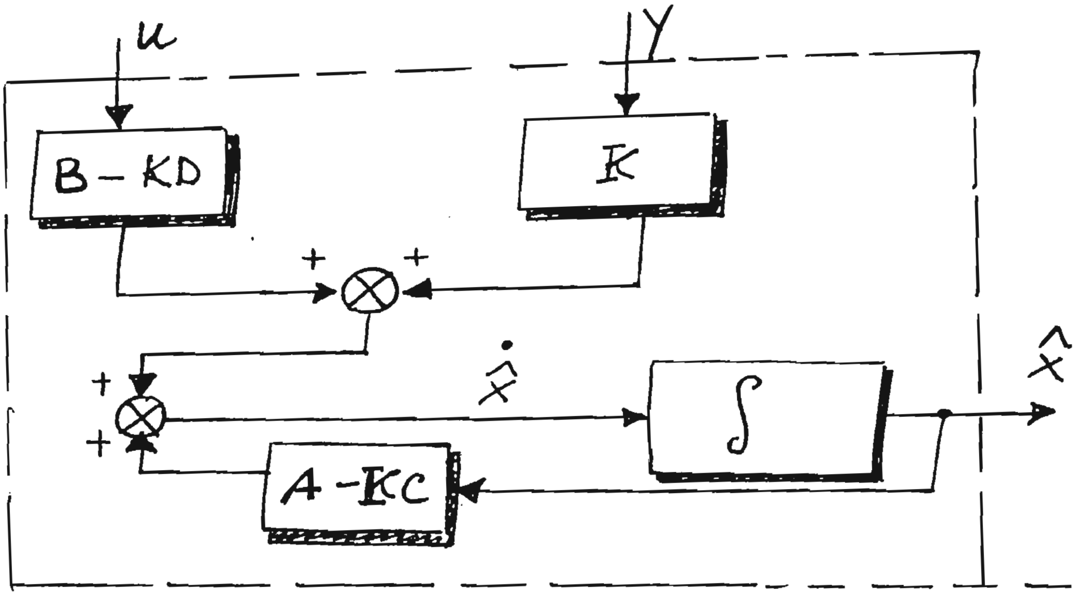
Per dualità diretta:

$$\nabla(A-KC) \underset{\uparrow}{=} \nabla(A^t - C^tK^t) = \nabla(A^t + C^t(-K^t))$$

(lo spettro è uguale allo spettro della trasposta)

RICORDA $\nabla(A+BF)$

lo spettro di $(A^t + C^t(-K^t))$ è assegnabile arbitrariamente se e solo se (A^t, C^t) è completamente controllabile, ovvero se e solo se (C, A) è completamente osservabile $\square$



SCHEMA DI OSSERVATORE ASINTOTICO

LEMMA

Gli autovalori inosservabili di A fanno parte dello spettro di $(A - KC)$ POSSO SPOSTARE SOLO GLI AUTOVALORI ASSOCIATI ALLA PARTE OSSERVABILE

Dimostrazione (cenno)

Con la forma standard di osservabilità:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla(A) \equiv \nabla(A_0)$$

$$C_0 = (C_1 \;\; 0)$$

inoltre $\nabla(A|_Q) = \nabla(A_2)$ $\quad T^{-1}AT \quad T^{-1}K \quad C$

$$\nabla(A - KC) = \nabla(T^{-1}(A - KC)T) = \nabla(A_0 - K_0 C_0)$$

FORMA STANDARD DI OSSERVABILITÀ

con $K_0 = T^{-1}K$

$$A_0 - K_0 C_0 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{12} & A_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{01} \\ K_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 - K_{01} C_1 & 0 \\ A_{12} - K_{02} C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad \text{quindi;}$$

$$\nabla(A - KC) = \nabla(A_1 - K_{01} C_1) \cup \underbrace{\nabla(A_2)}_{\text{PARTE INOSSERVABILE}} \qquad \square$$

DEFINIZIONEDI COPPIA (C, A) RIVELABILE :

La coppia (C, A) è detta rilevabile se esiste una matrice $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $\nabla(A - KC) \subseteq \mathbb{C}^-$

GLI AUTOVALORI INOSSERVABILI SONO A PARTE REALE NEGATIVA (NON DANNO FASTIDIO)

PROPOSIZIONE

Il sottospazio di inosservabilità relativo a (C, A) coincide con il sottospazio di inosservabilità relativo a $(C, A - KC)$ $\forall K \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Dimostrazione (cenno)

Occorre provare che

PIÙ GRANDE SOTTOSPAZIO INVARIANTE
IN A CONTENUTO in KER C

$$\max \mathcal{J}(A, \ker C) \equiv \max \mathcal{J}(A - KC, \ker C) \quad \forall K \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

per la coppia (C, A) infatti:

$$\begin{cases} \mathcal{Q} \subseteq \ker C \\ A\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q} \end{cases}$$ ma allora posso anche

INVARIANTE

scrivere (relativamente ad $(C, A-KC)$) che:

$$\begin{cases} \mathcal{Q} \subseteq \ker C \\ (A-KC)\mathcal{Q} = A\mathcal{Q} - KC\mathcal{Q} = A\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \end{cases}$$

dato che $\mathcal{Q} \in \ker C$ si ha $KC\mathcal{Q} = \{0\}$

$\mathcal{Q}$ è invariante in A

(...)

$\square$

<u>COROLLARIO</u> NO

Per ogni $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$

a) (C, A) è osservabile se e solo se $(C, A-KC)$ è osservabile

b) (C, A) è rilevabile se e solo se $(C, A-KC)$ è rilevabile

Poniamoci ora il quesito di come allocare gli autovalori dell'osservatore.
Per ottenere una stima che converga rapidamente ($e(t) \to 0$) si vorrebbero gli autovalori di $A-KC$ allocati il più possibile a sinistra nel piano complesso. Un "guadagno K" grande consentirebbe di allocare gli autovalori (1) lontano dall'asse immaginario, ma d'altra parte, rischierebbe di amplificare il rumore inevitabilmente presente nelle misure di ingresso e uscite, producendo una stima inaccurata. Emerge quindi un problema di OSSERVAZIONE OTTIMA:

<u>LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG) ESTIMATOR PROBLEM</u>. La soluzione OTTIMA è il cosiddetto FILTRO DI KALMAN_

---

(1) Se il Σ è rilevabile ma non completamente osservabile e se gli autovalori inosservabili sono "vicini" all'asse immaginario saranno loro a dominare la dinamica dell'osservatore

OSSERVATORE OTTIMO DELLO STATO (FILTRO DI KALMAN)

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Gamma w(t) \\ y(t) = Cx(t) + \nu(t) \end{cases}$$

$w(t)$ rappresenta il rumore sul processo (disturbo interno)

$\nu(t)$ rappresenta il rumore di misura (sull'uscita)

si assumono w e ν quali processi stocastici bianchi e gaussiani di intensità rispettive W e V:

$$E\{w(t)\} = 0 \qquad E\{\nu(t)\} = 0 \qquad \text{(medie)}$$

$$E\{w(t)w^t(\tau)\} = W\delta(t-\tau)$$
$$E\{\nu(t)\nu^t(\tau)\} = V\delta(t-\tau) \qquad \text{(valori quad. medi)}$$

inoltre si suppone:

$$W = W^T, \quad W > 0$$
$$V = V^T, \quad V > 0$$

Inoltre i due rumori siano incorrelati tra loro:

$$E\{w(t)\nu^T(\tau)\} = 0 \quad \forall t, \tau \geq 0$$

Lo stato iniziale $x(0)$ sia una variabile aleatoria gaussiana di media e covarianza:

$$x_0 := E\{x(0)\}$$

$$P_{e0} := E\{(x(0)-x_0)(x(0)-x_0)^T\}.$$

Infine $x(0)$ sia incorrelato a w e ν.

Il problema che vogliamo risolvere è: considerato l'osservatore asintotico

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ &= (A-KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t)\end{aligned}$$

determinare $K \in \mathbb{R}^{n\times p}$ e la condizione iniziale $\hat{x}(0)$ affinché sia minimizzato l'errore di covarianza asintotica:

$$\lim_{t\to+\infty} E\{(x(t)-\hat{x}(t))^T(x(t)-\hat{x}(t))\}$$

Sia (C,A) osservabile e (A,Γ) controllabile.
La matrice di guadagno ottimo che minimizza l'errore di stima (covarianza) asintotica è

$$\boxed{K^* = P_e^* C^T V^{-1}}$$

dove P_e^* indica l'unica soluzione definita positiva dell'equazione algebrica di Riccati:

$$\boxed{P_e A^T + A P_e - P_e C^T V^{-1} C P_e + \Gamma W \Gamma^T = 0}$$

OSSERVAZIONI

La soluzione è indipendente da P_{e0}, x_0 e anche $\hat{x}(0)$;
L'errore minimizzato della covarianza asintotica è

$$\mathrm{tr}\, P_e^*$$

· Analoga trattazione esiste anche per determinare la matrice F ottima per la retroazione dello stato. (non svolto)

OSSERVAZIONE DELLO STATO PER I SISTEMI A TEMPO DISCRETO

$$\Sigma_d \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Per analogia al caso a tempo continuo si costruisce l'osservatore come segue:

$$\Sigma_o \begin{cases} \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K[y(k) - \hat{y}(k)] \\ \hat{y}(k) = C\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(k+1) = (A-KC)\hat{x}(k) + [B-KD,\ K] \cdot \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE DELL'OSSERVATORE

E' facile mostrare che l'errore $e(k) := x(k) - \hat{x}(k)$ obbedisce all'equazione:

$$\boxed{e(k+1) = (A-KC)\,e(k)}$$

ISTANTE

(infatti $e(k) = (A-KC)^{k} e(0)$ mentre

MATRICE

$e(k+1) = (A-KC)^{k+1} e(0) \ldots$)

MODULO MINORE DI 1

Se $\nabla(A-KC) \subseteq \mathbb{C}^{1-}$ allora

$e(k) \to 0$ per $k \to +\infty$

PROBLEMA: Come scegliere lo spettro $\nabla(A-KC)$?

Una scelta particolare porta al "DEADBEAT OBSERVER":

A UN CERTO VALORE DI K L'ERRORE VIENE DISTRUTTO $(e(k)=0)$, MENTRE I TEMPO CONTINUO $e(t) \to 0$ ASINTOTICAMENTE

se (C,A) è osservabile, è possibile selezionare K, affinché tutti gli autovalori di $(A-KC)$ siano posti nell'origine del piano complesso.

Ne consegue:

$$e(k) = (A-KC)^k e(0) = 0 \quad \forall k \geq \tilde{k}$$

con $\tilde{k} \leq n$

cioè l'errore di stima va a zero ad un certo punto (per $k=\tilde{k}$) e ci rimane per sempre

SPIEGAZIONE: $(A-KC)$ presenta un unico

autovalore ($\lambda = 0$) e sia l la sua molteplicità quale zero del polinomio minimo di $(A - KC)$.

Allora i modi di $(A-KC)^k$ sono per $k \geq 1$:

INDICE TEMPORALE

$$0^k,\ k0^{k-1},\ 2!\binom{k}{2}0^{k-2}, \ldots, (l-1)!\binom{k}{l-1}0^{k-l+1}$$

per $k = l-1$ $\quad (A-KC)^k$ non è nulla

per $k > l-1$ $\quad$ tutti i modi sono nulli

$$\Rightarrow (A-KC)^k \equiv 0 \text{ per } k > l-1$$

Noi

Indipendentemente da come abbiamo scelto lo spettro $\sigma(A-KC)$, l'osservatore Σ_o che abbiamo descritto per i sistemi tempo discreti, è indicato quale **OSSERVATORE DI PREDIZIONE** (predictor estimator) perché la stima $\hat{x}(k)$ è basata su misure fino ad includere $y(k-1)$.

Di grande interesse per le applicazioni pratiche è la costruzione di una stima $\bar{x}(k)$ dello stato $x(k)$ basandosi sulle misure che includono anche $y(k)$:

OSSERVATORE DI STATO CORRENTE

(current estimator)

Innanzi tutto consideriamo, per semplicità, $D \equiv 0$. Come osservatore di stato corrente consideriamo:

$$\Sigma_{OC} \begin{cases} \bar{x}(k) = \hat{x}(k) + K_c\left(y(k) - C\hat{x}(k)\right) & (1) \\ \underbrace{\hat{x}(k)}_{\text{predizione}} = A\bar{x}(k-1) + Bu(k-1) & (2) \end{cases}$$

$\hat{x}(k)$ è la stima di $x(k)$ basata sulla predizione data dal modello Σ a partire dalla stima precedente di stato-corrente $\bar{x}(k-1)$

Sostituendo la (2) nella (1) al fine di eliminare $\hat{x}(k)$, possiamo ottenere:

$$\bar{x}(k)=(I-K_cC)A\bar{x}(k-1)+\left[(I-K_cC)B, K_c\right]\cdot\begin{bmatrix} u(k-1) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

che è l'<u>OSSERV. DI STATO CORRENTE</u>

mentre

$$\hat{x}(k+1)=A\hat{x}(k)+Bu(k)+AK_c\left(y(k)-C\hat{x}(k)\right)$$

che è l'<u>OSSERVATORE DI PREDIZIONE</u>

ricordando la stima che si era trovato con l'osservatore di predizione, si vede che se

$$\boxed{K=AK_c}$$

allora la stima $\hat{x}(k)$ data da Σ_{oc} è la medesima stima $\hat{x}(k)$ data da Σ_o.

In particolare se $\hat{e}(k):=x(k)-\hat{x}(k)$, si avrà: $\hat{e}(k+1)=(A-AK_c)\hat{e}(k)$

mentre se definiamo:

$$\bar{e}(k):=x(k)-\bar{x}(k)$$

si ha:

$$\bar{e}(k) = x(k) + \hat{x}(k) - \hat{x}(k) - \bar{x}(k) = \hat{e}(k) - (\bar{x}(k) - \hat{x}(k))$$

e dato che

$$\bar{x}(k) - \hat{x}(k) = K_c\,(y(k) - C\hat{x}(k)) = K_c\, C\,\hat{e}(k)$$

si ha:

$$\bar{e}(k) = \hat{e}(k) - K_c C\,\hat{e}(k) \quad \text{cioè}$$

$$\bar{e}(k) = (I - K_c C)\,\hat{e}(k) \quad \text{a questo punto,}$$

considerando che

$$\bar{e}(k) = (I - K_c C)\,\hat{e}(k) \quad \text{e che}$$

$$\bar{x}(k+1) = (I - K_c C)A\bar{x}(k) + (I - K_c C)Bu(k) + $$
$$+ K_c y(k+1)$$

si ottiene:

$$\bar{e}(k+1) = x(k+1) - \bar{x}(k+1) = Ax(k) + \cancel{Bu(k)} +$$
$$- (I - K_c C)A\bar{x}(k) - \cancel{(I} - K_c C)Bu(k) +$$
$$- K_c\, y(k+1) =$$
$$= A\bar{e}(k) + K_c CA\bar{x}(k) + K_c CBu(k) +$$
$$- K_c\,(Cx(k+1)) =$$

$$= A\bar{e}(k) + K_c C A \bar{x}(k) + \cancel{K_c C B u(k)} +$$

$$- K_c C A x(k) - \cancel{K_c C B u(k)} =$$

$$= A\bar{e}(k) - K_c C A \bar{e}(k) =$$

$$= (A - K_c C A)\bar{e}(k)$$

Si è quindi dimostrato che

$$\boxed{\bar{e}(k+1) = (A - K_c C A)\bar{e}(k)}$$

il guadagno K_c deve essere scelto opportunamente affinché

$$\nabla(A - K_c C A) \subseteq \mathbb{C}^{1-}$$

La coppia (CA, A) deve essere osservabile per ottenere l'assegnabilità arbitraria di $\nabla(A - K_c C A)$.

<u>Si può dimostrare facilmente che, se A è invertibile, vale (C, A) è OSSERVABILE se e solo se (CA, A) è OSSERVABILE.</u>

OSSERVAZIONE OTTIMA DELLO STATO PER SISTEMI TEMPO DISCRETI (FILTRO DI KALMAN TEMPO DISCRETO)

NO

$$\Sigma_d \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \Gamma w(k) \\ y(k) = Cx(k) + \nu(k) \end{cases}$$

rumore gaussiano (a tempo disc.)

$w(k)$ e $\nu(k)$ siano processi stocastici (a tempo discreto) bianchi e gaussiani di intensità rispettive W e V:

$$E\{w(k)\} = E\{\nu(k)\} = 0$$

$$E\{w(k)w^t(i)\} = W\,\delta(k-i) \qquad W^t \equiv W,\ W>0$$

$$E\{\nu(k)\nu^t(i)\} = V\,\delta(k-i) \qquad V^t \equiv V,\ V>0$$

dove $\delta(k-i) = 1$ se $k=i$ e zero altrove

I rumori $w(k)$ e $\nu(k)$ sono incorrelati tra loro e lo stato $x(0)$ sia una variabile aleatoria gaussiana di media:

$E\{x(0)\} = x_0$ e covarianza:

$P_{e0} = E\{(x(0)-x_0)(x(0)-x_0)^t\}$ incorrelata a w e ν.

PROBLEMA:

Considero l'OSSERVATORE DI STATO CORRENTE cioè:

$$\Sigma_{oc} \begin{cases} \bar{x}(k) = \hat{x} + K_c(y(k) - C\hat{x}(k)) \\ \hat{x}(k) = A\bar{x}(k-1) + Bu(k-1) \end{cases}$$

e voglio determinare la matrice di guadagno $K_c \in \mathbb{R}^{n \times p}$ affinché sia minimizzata la covarianza asintotica dell'errore di stima:

$$\lim_{k \to +\infty} E\left\{ (x(k) - \bar{x}(k))(x(k) - \bar{x}(k))^t \right\}$$

SOLUZIONE:

Se (C, A) è osservabile e $(A, \Gamma W^{1/2})$ raggiungibile, si può dimostrare che la matrice di guadagno ottima che minimizza la covarianza asintotica dell'errore è:

$$\boxed{K_c^* = P_e^* C^T (C P_e^* C^T + V)^{-1}}$$

dove P_e^* è l'unica soluzione definita positiva dell'eq.ne algebrica di Riccati a tempo discreto:

$$\boxed{P_e = A\left[P_e - P_e C^T \left[C P_e C^T + V\right]^{-1} C P_e\right] A^T + \Gamma W \Gamma^t}$$

CONTROLLORI DINAMICI BASATI SULL'OSSERVATORE

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

PROBLEMA: voglio allocare gli autovalori in modo opportuno con una retroazione stato-ingresso, ma lo stato non è accessibile.

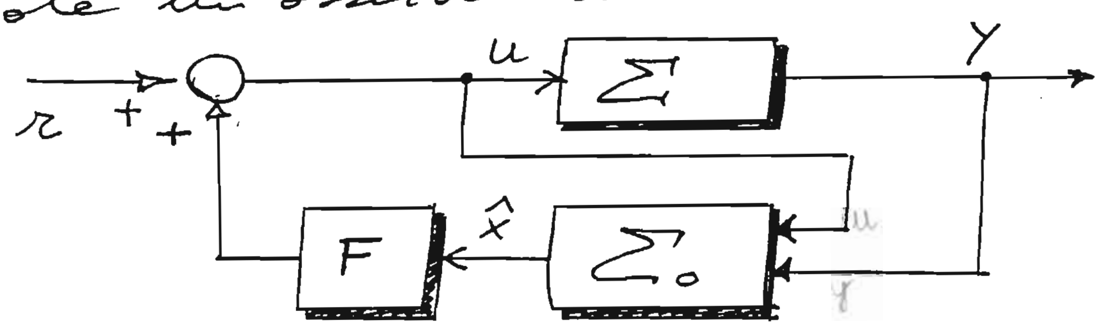
Quando lo stato di Σ non è accessibile, non è neppure possibile implementare la legge di retroazione:

$$\boxed{u(t) = F\,x(t) + r(t)}$$

ma è possibile invece con

$$\boxed{u(t) = F\,\hat{x}(t) + r(t)}$$

dove $\hat{x}(t)$ è la stima di $x(t)$ fornita da un osservatore:



Il sistema retroazionato complessivo così ottenuto, obbedisce alle seguenti leggi:

$$\dot{x} = Ax + B(\overbrace{F\hat{x} + r}^{u}) = Ax + BF\hat{x} + Br \qquad (1)$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + [B - KD,\ K] \cdot \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$ EQUAZIONE DI STATO DELL'OSSERVATORE

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + (B - \cancel{KD})u + K(Cx + \cancel{Du})$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + BF\hat{x} + Br + KCx$$

$$\dot{\hat{x}} = KCx + (A - KC + BF)\hat{x} + Br \qquad (2)$$

Inoltre $\quad y = Cx + DF\hat{x} + Dr \qquad (3)$

quindi da (1), (2) e (3) si ha: VEDO IL TUTTO COME UN UNICO SISTEMA

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix}}_{\text{VETTORE DI STATO}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & BF \\ KC & A - KC + BF \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}}_{B} \underset{\text{INGRESSO}}{r}$$

$$\underbrace{y}_{\text{USCITA}} = \underbrace{[\, C \quad DF \,]}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \underbrace{D}_{D}\, r$$

TEOREMA DI SEPARAZIONE

E' possibile progettare <u>indipendentemente</u> la <u>RETROAZIONE STATO-INGRESSO</u> <u>dell' OSSERVATORE ASINTOTICO</u>.

Infatti il sistema retroazionato con l'osservatore asintotico è:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BF \\ KC & A-KC+BF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r$$

VARIABILE DI STATO $= \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$

$$Y = \begin{bmatrix} C & DF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + Dr$$

effettuando la trasformazione di coordinate

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}}_{\text{errore}} = \overbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}}^{T} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \qquad (e := x - \hat{x})$$

MATRICE DI CAMBIAMENTO DI COORDINATE

e notando che

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}}_{T^{-1}}$$

si ottiene:

$$T^{-1}\cdot\begin{bmatrix} A & BF \\ KC & A-KC+BF \end{bmatrix}\cdot T$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BF & -BF \\ 0 & A-KC \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C+DF & -DF \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + Dr$$

da cui segue che

$$\nabla\left(\begin{bmatrix} A+BF & -BF \\ 0 & A-KC \end{bmatrix}\right) = \nabla(A+BF) \cup \nabla(A-KC)$$

(la progettazione di F e K avviene in istanti diversi)

$\square$

Il sistema complessivo, così descritto NON è completamente raggiungibile e/o controllabile in quanto, attraverso "r" posso "influire" solo su x.