PROGETTO DI RETROAZIONE

- Controllo che il sistema sia completamente raggiungibile/controllabile scrivo la matrice di raggiungibilità:

$$R = \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B \right]$$

e seleziono i vettori linearmente indipendenti. Se ne trovo n, allora il sistema è completamente raggiungibile/controllabile e passo al punto 2, altrimenti costruisco la forma standard di raggiungibilità, calcolando:

$$\mathbb{R}^+ = \text{span}\begin{Bmatrix} \text{vettori di } R \\ \text{linearmente} \\ \text{indipendenti} \end{Bmatrix} \qquad T = \left[T_1 \,\vdots\, T_2 \right] \quad \text{im}\, T_1 = \mathbb{R}^+ \quad \text{im}\left[T_1\, T_2 \right] = \mathbb{R}^n.$$

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

controllo che gli autovalori di A_2 (parte incontrollabile) siano a parte reale negativa (sistema stabilizzabile);
seleziono le matrici A_1 e B_1 e passo al punto 2.

- Costruisco la matrice di raggiungibilità del sistema controllabile (A_1, B_1)

$$R = \left[b_1, b_2 \dots b_m \,\vdots\, A_1 b_1, \dots, A_1 b_m \,\vdots\, \dots \right]$$

- Costruisco la matrice $\bar{R}$ riordinando le colonne e selezionando quelle linearmente indipendenti

$$\bar{R} = \left[b_1 \;\; A_1 b_1 \dots \,\vdots\, b_2 \;\; A_1 b_2 \dots \,\vdots\, \right]$$

- Calcolo gli indici di controllabilità:

$\mu_1 =$ n° di colonne di $\bar{R}$ che derivano da b_1
$\mu_2 =$ n° di colonne di $\bar{R}$ che derivano da b_2
e così via fino a μ_m.

$$\mu_{sistema} = \text{MAX}\{\mu_1, \mu_2, \dots\}$$

- Calcolo $\nabla_1, \dots, \nabla_m$ tali che

$\nabla_1 = \mu_1$
$\nabla_2 = \mu_1 + \mu_2$
$\vdots$
$\nabla_m = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m$

Calcolo $\bar{R}^{-1}$ e seleziono le righe $q_1 = \nabla_1$, $q_2 = \nabla_2$, … $q_m = \nabla_m$ a partire dall'alto

• Costruisco la matrice di cambiamento di coordinate T_c così:

$$T_c = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 A_1 \\ \vdots \\ q_1 A_1^{\mu_1 - 1} \\ \hdashline q_2 \\ q_2 A_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \mu_1 \text{ righe} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\end{matrix}}\right\} \mu_2 \text{ righe} \\ \vdots \end{matrix}$$

e calcolo T_c^{-1}.

• Ricavo le matrici $A_c = T_c A_1 T_c^{-1}$, $B_c = T_c \cdot B_1$ che mi identificano il sistema in forma canonica di controllo.

• Usando il lemma di Brunovski possiamo scrivere:

$A_c = \bar{A}_c + \bar{B}_c A_m$ — A_m composta dalle righe $\nabla_1, \dots, \nabla_m$ di A_c

$B_c = \bar{B}_c B_m$ — B_m composta dalle righe $\nabla_1, \dots, \nabla_m$ di B_c

$\bar{A}_c$ è la "struttura" di A_c composta da matrici diagonali a blocchi

$\bar{A}_c = [\bar{A}_{11}, \bar{A}_{22} \dots, \bar{A}_{mm}]$ con $\bar{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \\ \vdots & I_{\mu_i - 1} \\ 0 & \dots\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{B}_c$ è la matrice che rappresenta la struttura di B_c ed è fatta così:

$\bar{B}_c = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ con $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_1}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_2} \dots$

• $\nabla(A+BF) = \nabla(A_c + B_c F T^{-1})$ pongo $F_c = F T_c^{-1}$ e $F = F_c T_c$.

• Nel caso scalare ($m=1$), calcolo $\nabla(A) = \lambda^n + \dots + \alpha_i \lambda^i + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ e il polinomio desiderato $p_{DES}(\lambda) = \lambda^n + \dots + d_i \lambda^i + \dots + d_1 \lambda + d_0$.

La matrice F_c sarà fatta da termini f_i tali che $f_i = \alpha_i - d_i \quad \forall i$

$F_c = [f_0, f_1 \dots f_{n-1}]$.

Oppure, posso usare la formula di Ackermann per calcolare direttamente F.

$F = -e_n^T R^{-1} \alpha_{DES}(A)$ con $e_n^T = [0, \dots, 0\ 1]$ vettore trasposto

$$R = [B \vdots AB \vdots \dots \vdots A^{n-1}B]$$

$$\alpha_{DES}(A) = p_{DES}(A) = A^n + \dots + d_i A^i + \dots + d_1 A + d_0$$

- Nel caso multivariabile ($m>1$), trovo $F_c = B_m^{-1}[A_{dm} - A_m]$ in cui A_{dm} è una matrice opportuna tale che $A_d = \bar{A}_c + \bar{B}_c A_{dm}$ con A_d matrice desiderata.

Quindi

- ▷ scelgo A_d in modo che abbia la stessa struttura (in forma canonica di controllo) di A_c e polinomio caratteristico α_{DES}, ad esempio:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ -d_0 & -d_1 & \cdots & & & -d_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{con } \alpha_{DES} = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$$

- ▷ costruisco A_{dm} selezionando le righe $\nabla_1, \ldots, \nabla_m$ di A_d
- ▷ calcolo $F_c = B_m^{-1}[A_{dm} - A_m]$

- Infine, si ricava la matrice F dalla formula $F_c = F T_c^{-1}$, quindi $F = F_c T_c$