GIORGIO PICCHI, PAL. 2 0521/905762 02/10/08

2 PARZIALI o 1 PROVA SCRITTA + PROVA ORALE

- SEGNALI DETERMINATI (deterministici)
- SEGNALI ALEATORI (stocastici)

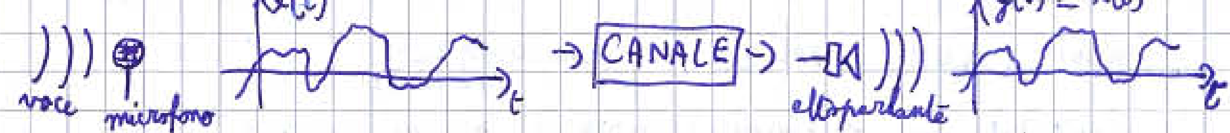
---

SEGNALE → grandezza fisica variabile nel tempo che supporta un'informazione.
Se utilizzo la temperatura della stanza per accendere il riscaldamento, diventa un segnale perché trasferisce informazioni.
C'è tanta più informazione quanto più la cosa è imprevedibile.
La sinusoide non ha niente di aleatorio. Se uno parla al microfono c'è imprevedibilità.
SEGNALE → INFORMAZIONE → IMPREVEDIBILITÀ.
I segnali determinati sono funzioni note (costante, sinusoide) che si studiano come prerequisito.
I segnali possono essere:
- ANALOGICI: l'informazione sta nella FORMA del segnale 

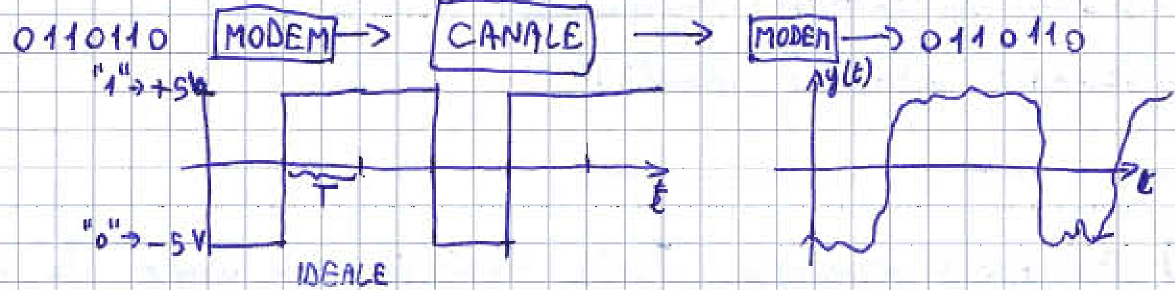
- NUMERICI o DIGITALI: l'informazione sta in una SEQUENZA DI SIMBOLI

Se il segnale analogico cambia con la trasformazione in digitale si ha DISTORSIONE, DISTURBI (rumore).
Un esempio di segnale numerico è il testo scritto. Esiste sempre un alfabeto $X=\{A,B,C,D,\dots,Z\}$ di una certa dimensione (M), cioè alfab M-ario. Se i simboli sono solo 2 $X=\{1,0\}$ si ha l'alfabeto BINARI
Associo a ogni elemento dell'alfabeto M-ario una sequenza di 0,1 (CODIFICA). M-ario → binario
Bisogna preservare, quindi, la SEQUENZA di simboli. Se anche la for è distorta, se si riesce a estrapolare la sequenza, l'informazione è salv

ANALOGICO




NUMERICO

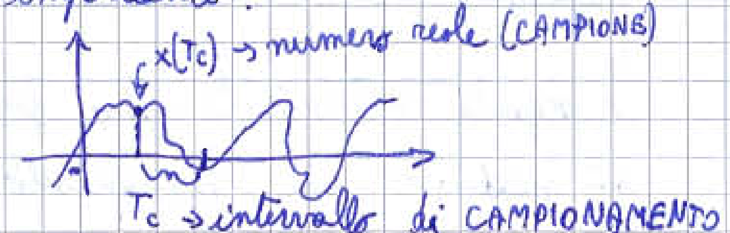



Il modem deciderà se nell'intervallo trasmesso (SINCRONIZZAZIONE) è stato inviato +5V o −5V, ad esempio prendendo il valore centrale dell'intervallo e decidendo a quale livello si avvicina di più.

Con una forte distorsione si ha un ERRORE che posso vedere con calcoli anche complessi.

Molto spesso il segnale alla fonte è analogico e viene trasformato in digitale.

I segnali numerici hanno 3 elementi importanti:




- sequenza di simboli
- intervallo di segnalazione
- sincronizzazione.

La conversione analogico-digitale si ha una fase di campionamento e una fase in cui il numero reale viene approssimato a un numero intero e convertito in binario. Maggiore è l'intervallo di campionamento e più precisa sarà la conversione. La conversione del numero reale in intero e poi digitale si chiama QUANTIZZAZIONE.

A/D → convertitore analogico/digitale. D/A → convertitore digitale/analogico

$$\text{INTERVALLO DI SEGNALAZIONE} = \frac{\text{INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO}}{\text{NUMERO BIT UTILIZZATI}}$$

Il segnale di clock sincronizza i convertitori.

DISCO VINILE → segnale analogico impresso nel disco.

CD → impresso in microaree alterando la riflettività 0 o 1.

TRASDUTTORI $\rightarrow$ trasformano un segnale di una certa natura in uno di altra natura (microfono, antenna, altoparlante...)

# SEGNALI DETERMINATI

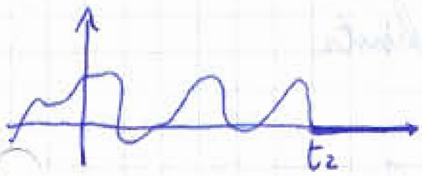
- **DURATA FINITA**


$D = t_2 - t_1$ durata

$x(t) = 0$ per $t < t_1$ e $t > t_2$

- **DURATA INFINITA**


SEGNALE "DESTRO" (non finisce) $t_2 = \infty$

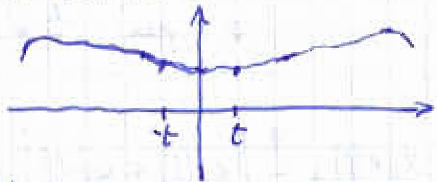



SEGNALE "SINISTRO" $t_1 = \infty$

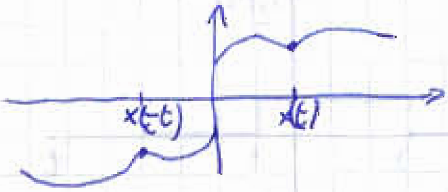
Se $t_1 = 0 \rightarrow$ SEGNALE CAUSALE

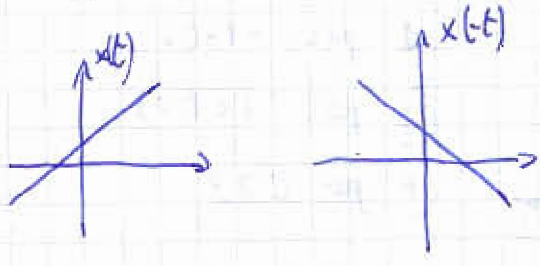
Se $t_2 = 0 \rightarrow$ SEGNALE ANTICAUSALE

- **PARI** $x(t) = x(-t)$ $\forall t$




- **DISPARI** $x(t) = -x(-t)$ $\forall t$




$x_p(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$ è PARI $\forall x(t)$ infatti

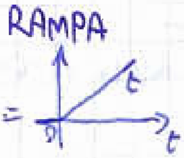
$x_p(-t) = \frac{1}{2}\left[x(-t) + x(t)\right]$

$x_D(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$ è DISPARI $\forall x(t)$ infatti $x_D(-t) = \frac{1}{2}\left[x(-t) - x(t)\right]$

Inoltre $\boxed{x(t) = x_p(t) + x_D(t)}$. Ogni segnale è scomponibile univocamente nella somma di due segnali, uno pari e uno dispari.

ES. trovare la parte pari e dispari di:

$x_1(t) = a \cdot t$ $\quad x_2(t) = a \cdot \cos 2\pi f_0 t$ $\quad x_3(t) = 2t + 1$ $\quad x_4(t) =$ RAMPA

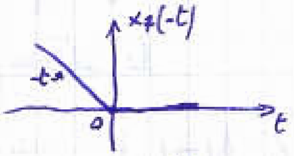


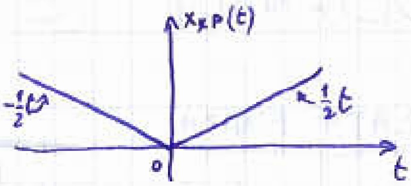

1) $x_p(t) = \frac{1}{2}\left(at - at\right) = 0$ $\quad x_D(t) = \frac{1}{2}\left(at + at\right) = a t$

2) $x_p(t) = \frac{1}{2}\left(a\cos(2\pi f_0 t) + a\cos(2\pi f_0 t)\right) = a\cos(2\pi f_0 t)$ $\quad x_D(t) = \frac{1}{2}\left(a\cos(2\pi f_0 t) - a\cos(2\pi f_0 t)\right.$

5) $x_P(t) = \frac{1}{2}\left(2t+1-2t+1\right) = 1 \qquad x_D(t) = \frac{1}{2}\left(2t+1+2t-1\right) = 2t$

7) $x(t) = \begin{cases} 0 & se\ t \le 0 \\ t & se\ t > 0 \end{cases} \qquad x_P(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+0) & se\ t > 0 \\ \frac{1}{2}(0-t) & se\ t \le 0 \end{cases}$



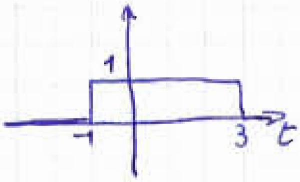




$x_D(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-0) & se\ t > 0 \\ \frac{1}{2}(0+t) & se\ t < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}t$

$x_7(-t) = \begin{cases} 0 & per\ -t \le 0 \\ -t & per\ -t > 0 \end{cases} = \begin{cases} -t & per\ t < 0 \\ 0 & per\ t \ge 0 \end{cases}$

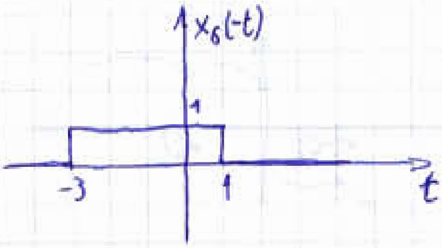
6/10/08

6) $x_6(t) \Rightarrow$

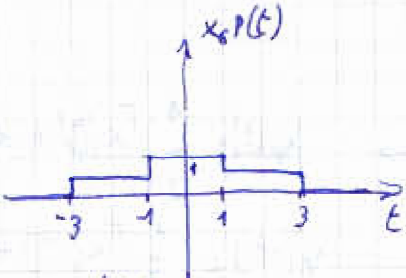



IMPULSO → segnale a durata finita

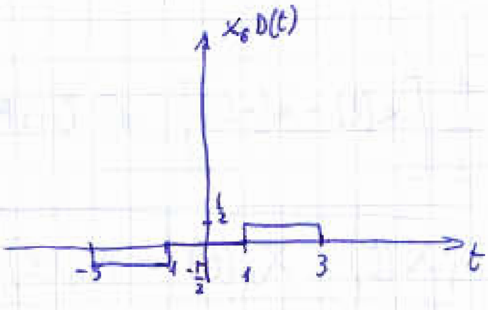
$x_6(t) = \begin{cases} 0 & per\ t \le -1 \\ 1 & per\ -1 < t < 3 \\ 0 & per\ t \ge 3 \end{cases} \qquad x_6(-t) = \begin{cases} 0 & per\ -t \le -1 \\ 1 & per\ -1 < -t < 3 \\ 0 & per\ -t \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & per\ t \le -3 \\ 1 & per\ -3 < t < 1 \\ 0 & per\ t \ge 1 \end{cases}$




$x_{6P}(t) = \frac{1}{2}\left[x_6(t) + x_6(-t)\right] = \begin{cases} 0 & per\ t \le -3 \\ \frac{1}{2} & per\ -3 < t < -1 \\ 1 & per\ -1 \le t \le 1 \\ \frac{1}{2} & per\ 1 < t < 3 \\ 0 & per\ t \ge 3 \end{cases}$




$x_{7D}(t) = \frac{1}{2}\left[x_6(t) - x_6(-t)\right] = \begin{cases} 0 & per\ t \le -3 \\ -\frac{1}{2} & per\ -3 < t < -1 \\ 0 & per\ -1 \le t \le 1 \\ \frac{1}{2} & per\ 1 < t < 3 \\ 0 & per\ t \ge 3 \end{cases}$



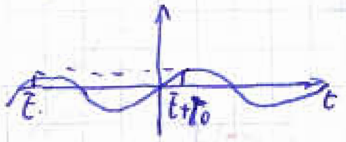

$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \qquad A = 12\ V \qquad f_0 = \frac{1}{12}\ kHz\ (\simeq 83,3\ Hz) \qquad \varphi = \frac{4}{3}\pi$

Trovare espressione analitica di $x_P(t)$ e $x_D(t)$ + grafico accurato con scale: ascisse: 1 quadretto = 1 ms   ordinate: 1 quadretto = 3 V

# SEGNALI PERIODICI

↳ segnali (funzioni nel tempo) che si ripetono. Un segnale è periodico se $\exists\, T_0$:

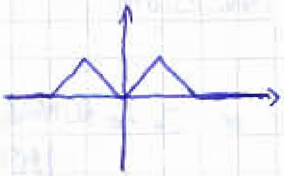
$x(t) = x(t+T_0) \quad \forall t.$




$T_0 \rightarrow$ periodo fondamentale

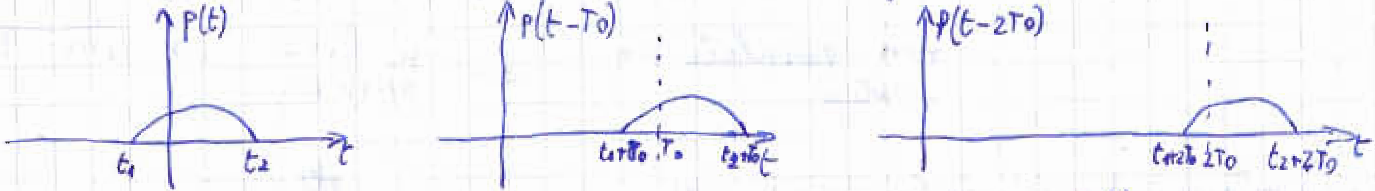
⇓

$x(t) = x(t+nT_0)$ tutti i segnali che hanno periodo multiplo di quello fondamentale sono periodici.

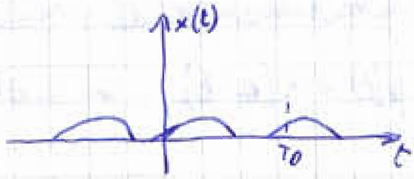


segnale NON periodico perché non è vero $\forall t$ → i segnali periodici sono SEMPRE di durata infinita!

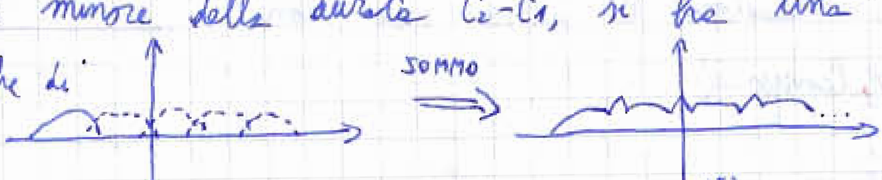
PERIODICIZZAZIONE → operazione per costruire un segnale periodico




$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t-nT_0) = \dots + \underset{n=-1}{p(t+T_0)} + \underset{n=0}{p(t)} + \underset{n=1}{p(t-T_0)} + \dots$$

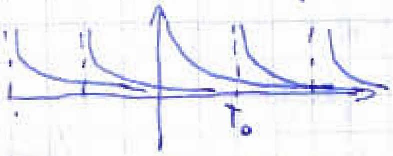



Se il periodo $T_0$ è minore della durata $t_2 - t_1$, si ha una sovrapposizione anche di N segnali!!




Se il segnale di partenza è di durata infinita,


avrò $\infty$ sovrapposizioni




→ SERIE

↓

per convergere i termini devono calare come $\frac{1}{x}$ (un po' + velocemente).

se la serie converge, allora il segnale è periodico.

09/10/08

Il numero di CICLI o periodi nell'unità di tempo è la FREQUENZA FONDAMENTALE (Hz). $f_0 = 1/T_0$

$p(t) \rightarrow$ segnale $\qquad x(t) \overset{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t-nT_0)$ supponiamo che converga $\forall t$.

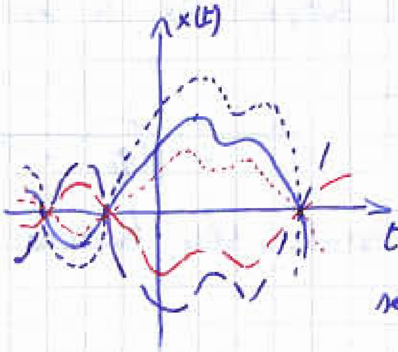
VERIFICA DI PERIODICITÀ $\qquad$ pongo $1-n = -k$, $k = n-1$

$$x(t+T_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t+T_0-nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t+(1-n)T_0) \overset{\downarrow}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t-kT_0)$$ VERIFICATA! $= x(t) \ \forall t$

# TRASFORMAZIONI ELEMENTARI $x(t) \rightarrow y(t)$

• Moltiplicazione per costante

$y(t) = A \cdot x(t)$




se $A > 1$ AMPLIFICAZIONE

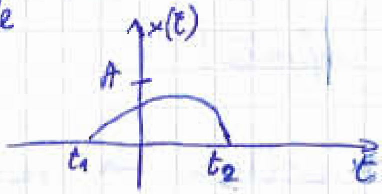
se $0 < A < 1$ ATTENUAZIONE

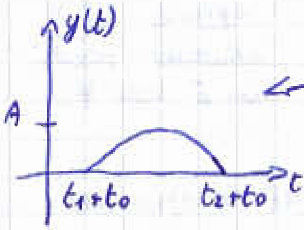
se $A < -1$ AMPLIFICAZIONE CON INVERSIONE

se $-1 < A < 0$ ATTENUAZIONE CON INVERSIONE

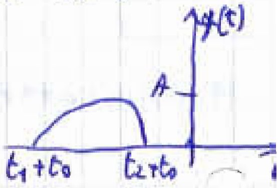
• Traslazione temporale

$y(t) = x(t - t_0)$



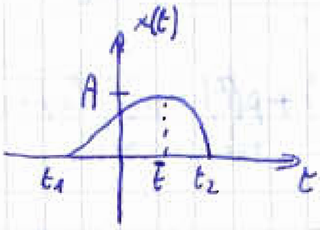

← se $t_0 > 0$ RITARDO

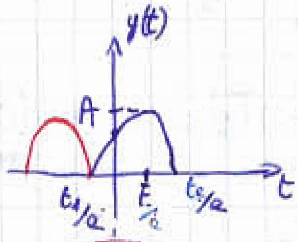



non possibile in pratica. ← se $t_0 < 0$ ANTICIPO →

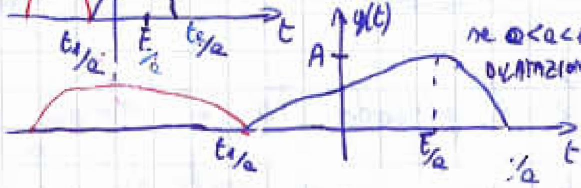
• Cambiamento di scala

$y(t) = x(a \cdot t)$ con $a \in \mathbb{R}$




se $a > 1$ RESTRINGIMENTO

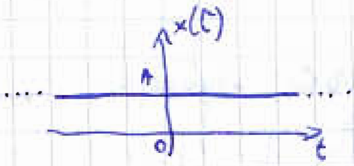



se $0 < a < 1$ DILATAZIONE

Con $a < 0$ succedono le stesse cose con ribaltamento temporale.

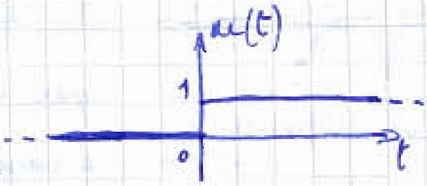
# SEGNALI ELEMENTARI

• COSTANTE $x(t) = A$




• GRADINO UNITARIO

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

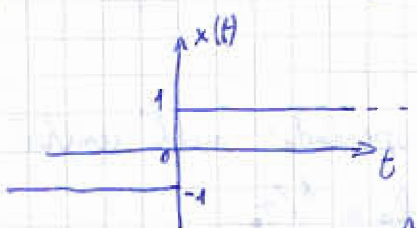



funzione causale

$u(-t) \rightarrow$ funzione anticausale

• SEGNO

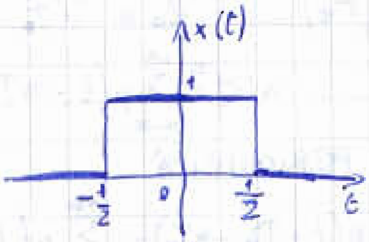
$$x(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t > 0 \\ -1 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$




$\mathrm{sgn}(t) = 2\,u(t) - 1$

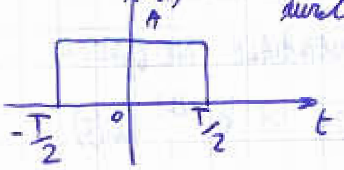
• IMPULSO RETTANGOLARE o PORTA

$$x(t) = \mathrm{rect}(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < 1/2 \\ 0 & \text{se } |t| > 1/2 \end{cases}$$

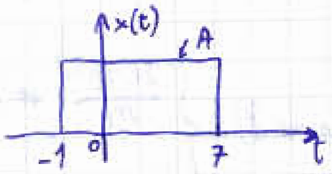



segnale pari di durata 1

In generale $x(t) = \begin{cases} A & \text{per } |t| < T/2 \\ 0 & \text{per } |t| > T/2 \end{cases} = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ durata $= T$



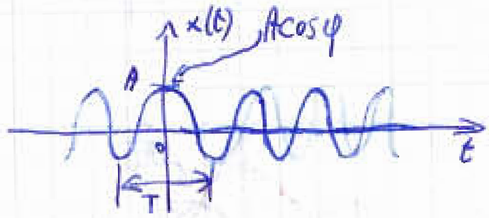

Nel caso di una porta traslata




$x(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t-3}{8}\right)$ Sostituisco a $t$ il valore $t$ − spostamento a destra o $t$ + spostamento a sinistra.

• SINUSOIDE

$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$




$A \to$ ampiezza
$f_0 \to$ frequenza
$\varphi \to$ fase iniziale (angolo rad)

Il periodo è $T_0 = 1/f_0$.

La fase istantanea è $\varphi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi$

Verifica di periodicità: $x(t+T_0) = x\left(t+\frac{1}{f_0}\right) = A\cos\left(2\pi f_0\left(t+\frac{1}{f_0}\right)+\varphi\right) =$

$= A\cos(2\pi f_0 t + 2\pi + \varphi) \overset{\cos 0 = \cos 2\pi}{=} A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = x(t)$ !

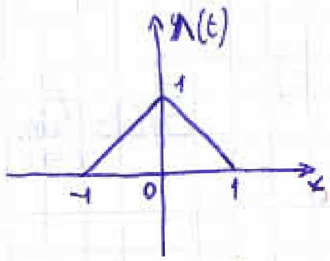
$\omega = 2\pi f_0$ PULSAZIONE (angular frequency)

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

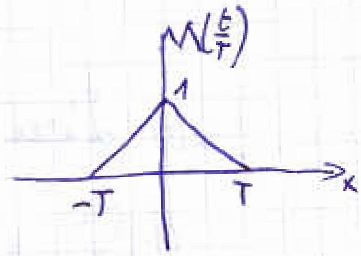
13/10/08

• TRIANGOLO $\Lambda$

$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } |t| > 1 \\ 1 - |t| & \text{per } |t| < 1 \end{cases}$



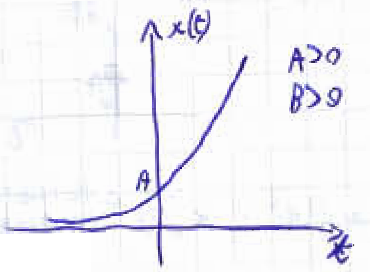

$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \longrightarrow$



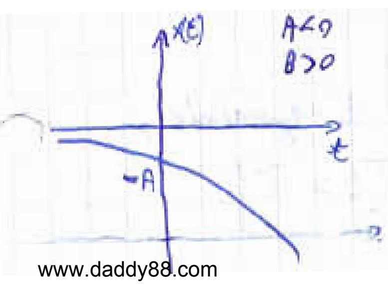

durata $2 \cdot T$

• ESPONENZIALI

$x(t) = Ae^{Bt}$ con $A, B \in \mathbb{R}$

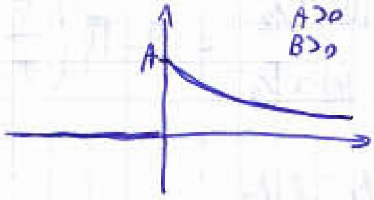






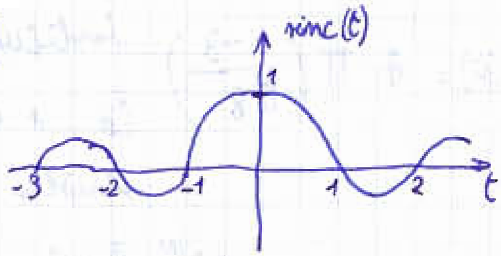
• ESPONENZIALE NEGATIVO

$$x(t) = A \cdot e^{-Bt} \cdot u(t)$$




• SINC (t) ["sinus cardinalis"]

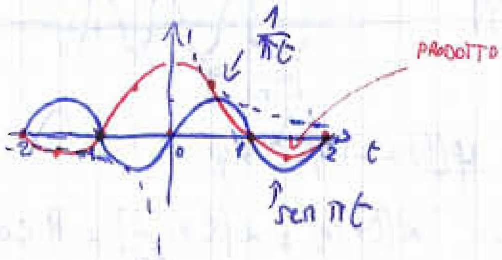
$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\mathrm{sen}(\pi t)}{\pi t}$$




$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}(\pi t)}{\pi t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

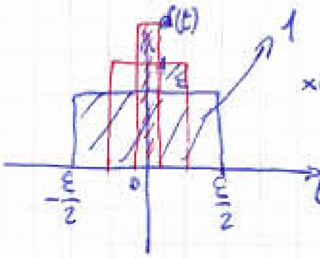
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(t)\, dt = 1$$

$$\mathrm{sinc}(t) = \mathrm{sen}(\pi t) \cdot \frac{1}{\pi t}$$




Il prodotto tra una funzione PARI e una PARI è PARI,
PARI × DISPARI = DISPARI, DISPARI × DISPARI = PARI.

• DELTA DI DIRAC (impulso di Dirac / impulso unitario)



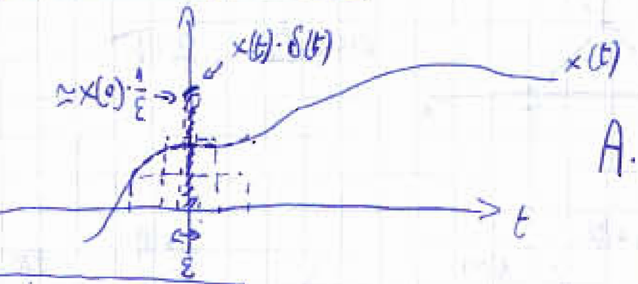

$$x(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

se $\varepsilon \to 0$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

L'area sottesa vale 1.
⇓
Teoria delle distribuzioni

<u>Proprietà campionatrice</u>



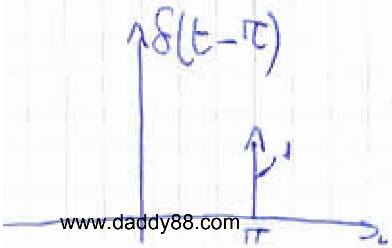

L'area di $x(t) \cdot \delta(t)$ tende a $x(0)$.

$A \cdot \delta(t)$ è una funzione di area $A$.


$$\int_{-t_0}^{t_0} A \cdot \delta(t)\, dt = A$$

$$\boxed{\int_{-t_0}^{t_0} \delta(t)\, dt = 1}$$

$$\int_{-t_0}^{t_0} x(t)\,\delta(t)\, dt = x(0)$$ ← PROPRIETÀ CAMPIONATRICE




sposto la δ lungo l'asse t.

Dove si annulla l'argomento, lì c'è la δ. $[t = \tau]$

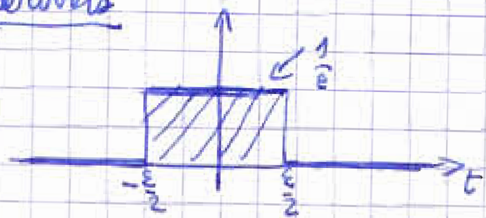
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(t-\tau) = x(\tau)$$ PROPRIETÀ CAMPIONATRICE GENERALE $\qquad \delta(t)$ è PARI.

La $\delta$ è la derivata della funzione gradino


$\xrightarrow{\text{per } \varepsilon\to 0} u(t)$

derivata

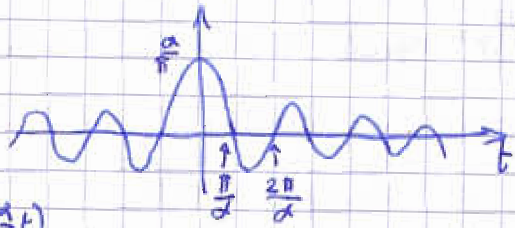
$$\Rightarrow \delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$




$\xrightarrow{\text{per } \varepsilon\to 0} \delta(t)$

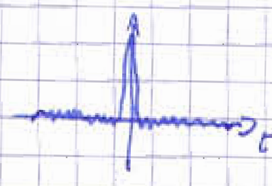
Posso arrivare alla $\delta$ anche da altre funzioni, in particolare da

$\frac{\alpha}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\alpha}{\pi}t\right)$




AREA = 1

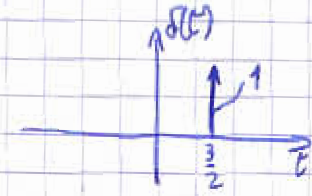
$\xrightarrow{\text{con } \alpha\to +\infty}$



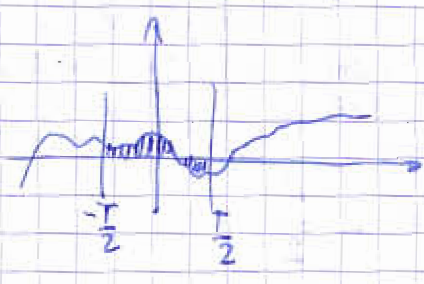

$$\delta(t) = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\alpha}{\pi}t\right)$$

$\delta(3-2t) \qquad 3-2t=0$

$t = 3/2$




## VALOR MEDIO




Il valor medio sull'intervallo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ è

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt.$$

In generale, il valor medio

$$\boxed{\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt}.$$

Se il segnale è periodico, allora $\langle x(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt$ integrale esteso a un intervallo di ampiezza $T_0$ (un periodo).

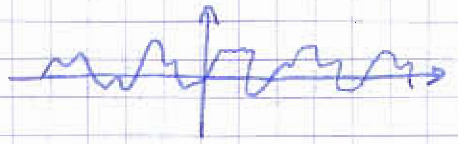
Il valor medio ha le dimensioni della grandezza stessa.

## POTENZA E ENERGIA (normalizzate)

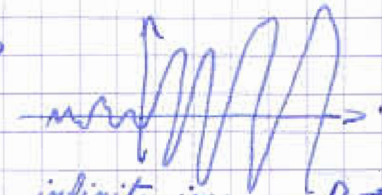
- POTENZA ISTANTANEA $\quad p(t) = x^2(t)$

- POTENZA $\quad P = \langle p(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt$ $\quad$ VALORE QUADRATICO MEDIO TEMPORALE (non delle V.A.).

Un segnale a POTENZA FINITA ha delle elongazioni più o meno simili e costanti:



non →



Tutti i segnali a durata finita ha potenza infinitesima $P \to 0$.

- ENERGIA SU UN INTERVALLO $\quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt$ $\quad$ dimensioni di $x^2(t)$ per il tempo

- ENERGIA $\quad E = \lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt$ $\quad$ Un segnale ha energia finita se l'area del segnale è finita.

I segnali a durata finita sono a energia finita.

I segnali periodici sono a potenza finita pari a $P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t)\,dt$ $\quad T_0 \to$ periodo

ES.

Calcolare la potenza di

$x(t) = A$

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\,dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\cancel{T}} \cdot A^2 \left( \cancel{\frac{T}{2} + \frac{T}{2}} \right) = A^2$$

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

periodo $= 2\pi f_0$

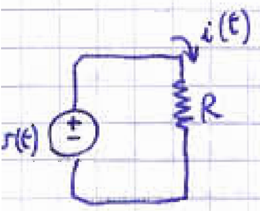
$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi)\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) \right]$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A^2}{2}\,dt + \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{\frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 + 2\varphi)\,dt}_{0 \text{ all } \infty} = \frac{A^2}{2}$$

segnali complessi

16/10/08

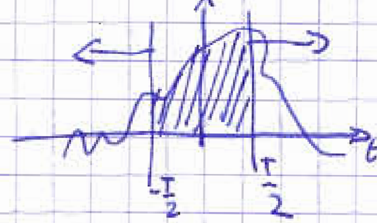
$$p(t) = x^2(t) = |x(t)|^2$$ POTENZA ISTANTANEA NORMALIZZATA



$$i(t) = \frac{v(t)}{R} \qquad P_D(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{v^2(t)}{R} = R \cdot i(t)^2 \ [W]$$

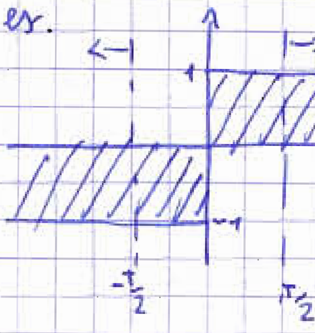
$$v(t) = R \cdot i(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$




PARTE PRINCIPALE DI CAUCHY
⇓
può esistere anche quando $\int_{-\infty}^{0} x(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} x(t)\,dt$ non esiste

es.




$x(t) = sgn(t)$

$$\int_{-\infty}^{0} x(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} x(t)\,dt = \infty$$ mentre

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt = 0$$

VALORE EFFICACE → valore del segnale costante che ha la stessa potenza di $x$.
utile nei calcoli della potenza

$x_{eff} = \sqrt{P}$ Per una costante $A$, $x_{eff} = A$

Per una sinusoide, $x_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

Il valore efficace è DIVERSO dal valore massimo.

## SISTEMI

Ogni legge che ad un segnale (di ingresso) fa corrispondere un altro segnale (di uscita) è un sistema $\xrightarrow{x(t)} \boxed{T} \xrightarrow{y(t)}$ o trasformazione.

$y(t) = T[x(t)]$

ANALISI → dato un sistema e un ingresso voglio trovare l'uscita.

SINTESI → dato ingresso e uscita, trovare il sistema che lo fa.

PROPRIETÀ DEI SISTEMI

* TEMPO INVARIANZA (sistemi tempo-invarianti o stazionari)

$T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$ $\forall t_0, x(t)$. Ritardando il segnale di ingresso si ottiene la stessa uscita ritardata dello stesso tempo.

* CAUSALITÀ → il valore dell'uscita in un determinato istante $t_0$ dipende solo dagli ingressi $x(t)$ con $t \le t_0$.

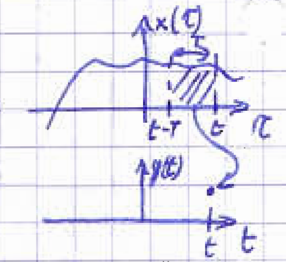
dipende da $t$, ovviamente!

$y(t) = T[x(\tau); -\infty < \tau < t] = T[x(\tau)\cdot u(t-\tau); t]$

* SENZA MEMORIA → il valore dell'uscita in un determinato istante $t$ dipende solo dall'ingresso $x(t)$. $y(t) = T[x(\tau); \tau = t; t]$ segnale istantaneo!

Se un sistema è senza memoria è anche causale, ma non viceversa.
Quando c'è un legame funzionale $y = f(x)$ tra ingresso e uscita, i sistemi sono senza memoria

CON MEMORIA → l'uscita dipende da un intervallo di ingressi.




$$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau$$ INTEGRATORE A FINESTRA MOBILE.

Il sistema è causale, con memoria.

Potrebbe anche dipendere dal futuro $\int_{t}^{t+T} x(\tau)\, d\tau$, ma non sarebbe causale.

20/10/08

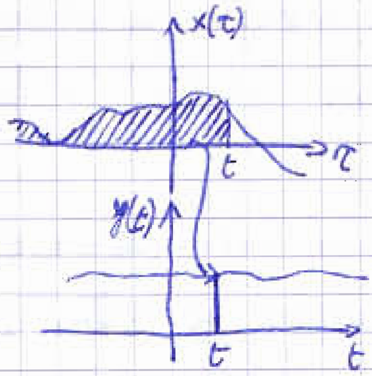
ESERCITAZIONE GIO 23/10 16.30 - 18.30 AULA F ING. MEDAGLIONI

*STABILITÀ → BIBO (Bounded Input Bounded Output) se un qualunque ingresso è limitato da un valore M (in ampiezza) allora anche il segnale di uscita sarà limitato in ampiezza da un valore K. Per verificare la non stabilità basta un caso di ingresso limitato che produce un'uscita illimitata

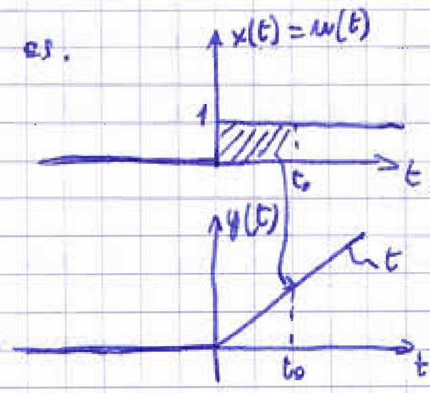
INTEGRATORE

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

È un sistema instabile in quanto nell'esempio l'ingresso è limitato, l'uscita è illimitata. L'integratore a finestra mobile, invece, è stabile.




es.




SISTEMA INVERSO → sistema che annulla gli effetti del sistema dato.

$x(t) \to \boxed{T} \to y(t)$ $\quad y(t) \to \boxed{T^{-1}} \to x(t)$ $\quad \forall x(t)$ !!! $\quad T^{-1}(y(t)) = x(t)$

es.

$x(t) \to \boxed{A} \to y(t) = A \cdot x(t) \to \boxed{1/A} \to x(t) = \frac{1}{A} \cdot y(t) = \frac{1}{A} \cdot A \cdot x(t) = x(t)$

AMPLIFICATORE ATTENUATORE

$x(t) \to \boxed{\int_{-\infty}^{t}} \to y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \to \boxed{d/dt} \to x(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right]$

INTEGRATORE DERIVATORE

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Rit.}\ t_0} \xrightarrow{y(t)=x(t-t_0)} \boxed{\text{Ant.}\ t_0} \longrightarrow x(t) \Rightarrow y(t+t_0) = x(t-t_0+t_0) = x(t)$$

RITARDATORE — ANTICIPATORE → irrealizzabile

## SISTEMI OMOGENEI

Dato un sistema $y(t) = T[x(t)]$, se moltiplico per una costante in ingresso e anche in uscita ho $y(t)$ moltiplicato per la costante, il sistema è omogeneo. $a \cdot x(t) \longrightarrow a \cdot y(t)$ $\quad T[a \cdot x(t)] = a \cdot T[x(t)] \quad \forall x(t), a \in \mathbb{R}$

es. $y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau) \cdot d\tau$ l'integratore a finestra mobile è un sistema omogeneo

$$\int_{t-T}^{t} a \cdot x(\tau) d\tau = a \int_{t-T}^{t} x(\tau) d\tau = a \cdot y(x).$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{(\ )^2} \longrightarrow y(t) = x^2(t)$$

QUADRATORE

$x_1(t) = a \cdot x(t) \quad y_1(t) = x_1^2(t) = a^2 \cdot x^2(t) = a^2 \cdot y(t)$ NON omogeneo perché l'uscita è moltiplicata per "$a^2$" e non per "$a$".

Un sistema omogeneo dà sempre uscita nulla se l'ingresso è nullo. $x(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$. Alcuni sistemi non rispettano questa regola (condensatori...), cioè non sono omogenei.

## SISTEMI LINEARI

Sistemi per cui vale il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow \begin{matrix} y_1(t) = T[x_1(t)] \\ y_2(t) = T[x_2(t)] \end{matrix}$$

$$x_3(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \rightarrow y_3(t) = T[x_3(t)] = T[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)]$$

Se accade che $T[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 T[x_1(t)] + a_2 T[x_2(t)] \quad \forall x_1, x_2, a_1, a_2$ allora il sistema è lineare. Lo stesso vale per $\infty$ segnali.

Un sistema lineare è anche omogeneo ma non viceversa.

Dato un sistema, voglio trovare l'uscita. Se scrivo l'ingresso come somma di segnali semplici (da calcolare l'uscita) e il sistema è lineare, ottengo facilmente l'uscita.

$$x(t) = a_1 \cdot x_1(t) + \dots + a_n x_n(t)$$
$$y(t) = a_1 \cdot y_1(t) + \dots + a_n y_n(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y(t)$$

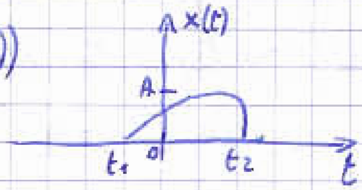
Ad esempio le sinusoidi sono semplici da studiare.

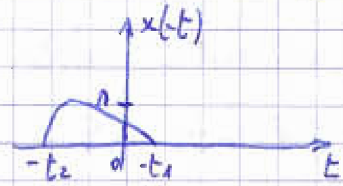
# SISTEMI LINEARI - TEMPO INVARIANTI (L.T.I.)

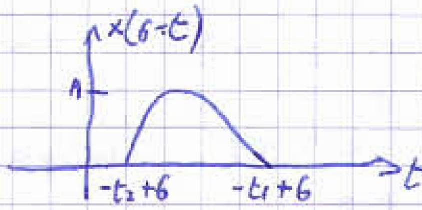
Gode delle proprietà di linearità e tempo invarianza (stazionarietà).
Molto importante...

## VERIFICA PROPRIETÀ DEI SISTEMI

$y(t) = x(6-t) = x(-(t-\underset{t_0}{6}))$




- MEMORIA? Per trovare $y(5)$ mi serve sapere quanto vale l'ingresso in $x(6-5) = x(1)$ uno, quindi il sistema è con memoria.

l'uscita dipende solo dall'ingresso in quell'istante

$y(\bar{t}=5) = x(6-\bar{t}) = x(1) \neq \bar{t} \Rightarrow$ con memoria.

- CAUSALE? $6-t \leq t \quad \forall t$? $\quad 6 \leq 2t \quad t \geq 3$ NON $\forall t$, quindi NON è causale.

dipende solo dal passato

- STABILE? I valori dell'uscita sono quelli in ingresso ritardati, pertanto è STABILE perché se l'ingresso è limitato lo è anche l'uscita.

ingresso limitato ⇒ uscita limitata

$|y(t)| = |x(6-t)| \qquad |x(t)| \leq M \Rightarrow |x(6-t)| \leq M \Rightarrow |y(t)| \leq M.$

- TEMPO INVARIANTE? $x_R(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_R(t) = x_R(6-t)$ uscita con ingresso ritardato

$y_{RIT}(t) = y(t-t_0)$ ? ← uscita precedente ritardata

$y_R(t) = x_R(6-t) = x(6-t-t_0) \xleftarrow{?\ \forall t, t_0, x?}$ NO → sistema NON stazionario e TEMPO VARIANTE

$y_{RIT}(t) = y(t-t_0) = x(6-(t-t_0)) = x(6-t+t_0)$

- LINEARE? $x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = x_1(6-t)$

rispetta il principio di sovrapposiz. degli effetti

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = x_2(6-t)$

$x_3(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = x_3(6-t) = a_1 x_1(6-t) + a_2 x_2(6-t)$

$y_c(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) = a_1 x_1(6-t) + a_2 x_2(6-t)$

$\overset{?}{=}$ // uguali $\forall t, x_1, x_2, a_1, a_2$ ⇒ sistema LINEARE

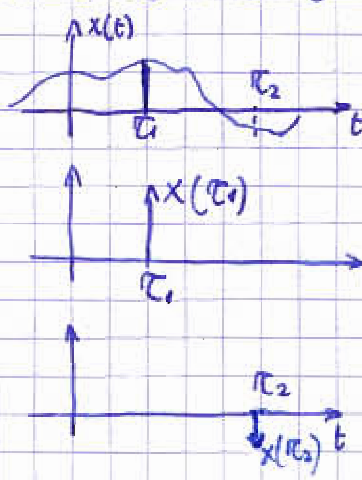
## SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI (L.T.I.) 23/10/08

Sappiamo dalla proprietà campionatrice della $\delta$ di Dirac che

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= x(\tau_1)\,\delta(t-\tau_1) + x(\tau_2)\,\delta(t-\tau_2) + \dots$$

COMBINAZIONE LINEARE DI FUNZIONI SEMPLICI COME LE $\delta$




$x(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y(t) = T[x(t)]$

$\delta(t) \longrightarrow T[\delta(t)] = h(t)$ RISPOSTA ALL'IMPULSO UNITARIO

TEMPO INVARIANZA

$$T[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$$

Considerando che il sistema è L.T.I., avrò

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau \qquad y(t) = T[x(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right] \overset{\text{SISTEMA LINEARE}}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot T[\delta(t-\tau)]\,d\tau \overset{T.I.}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

Devo conoscere $h(t)$ e l'ingresso $x(\tau)$

$$= x(t) * h(t) \quad \text{CONVOLUZIONE}$$

### PROPRIETÀ DELLA CONVOLUZIONE

- COMMUTATIVA $\rightarrow$ $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

DIM. $x(t) * h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau \underset{\substack{\lambda = t-\tau \\ \tau = t-\lambda \\ d\tau = -d\lambda}}{=} -\int_{+\infty}^{-\infty} x(t-\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\,x(t-\lambda)\,d\lambda =$

$= h(t) * x(t)$ ∎

- ASSOCIATIVA $\rightarrow$ $\big(x(t) * h_1(t)\big) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$

- DISTRIBUTIVA $\rightarrow$ $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$

- ELEMENTO INDIFFERENTE $\rightarrow$ la $\delta$ di Dirac!

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$$

- TRASLAZIONE $\rightarrow$ il segnale viene spostato della stessa quantità della $\delta$.

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau-t_0)\,d\tau = x(t-t_0)$$

## SISTEMI IN CASCATA L.T.I.

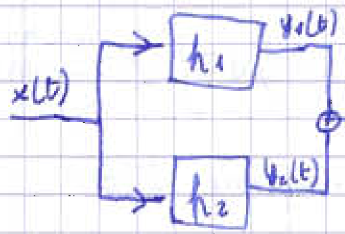
$$x(t) \rightarrow \boxed{h_1(t)} \xrightarrow{y_1(t)=x(t)*h_1(t)} \boxed{h_2(t)} \rightarrow y_2 = y_1(t) * h_2(t) = x(t) * \underbrace{\left[h_1(t) * h_2(t)\right]}_{h_{eq}(t)}$$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h_{eq}(t)} \rightarrow y_2(t)$$

Per un qualunque numero di sistemi; l'ordine è indifferente

Ad esempio, un equalizzatore (sistema inverso di un ambiente) annulla gli effetti distorcenti dell'ambiente. Di solito si mette prima dell'altoparlante per la proprietà commutativa $\rightarrow \boxed{h_I(t)} \rightarrow$ ◁))))  $h(t)$ .

## SISTEMI IN PARALLELO




$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * \left[h_1(t) + h_2(t)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \xrightarrow{x(t)} \boxed{h_1(t) + h_2(t)} \rightarrow y(t)$$

## SISTEMA INVERSO

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \boxed{h_I(t)} \rightarrow y(t) = x(t) \qquad h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

OPERAZIONE INVERSA
↓
DECONVOLUZIONE
↳ DIFFICILE!

## NUMERI COMPLESSI

↳ coppie ordinate di numeri reali

$z_1 = (a, b) \qquad z_2 = (c, d)$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \triangleq (a+c, b+d) \\ z_1 \cdot z_2 \triangleq (ac - bd, ad + bc) \end{cases}$$

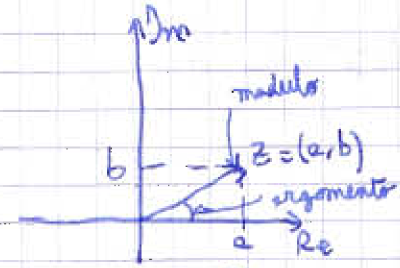
$(a, 0) \rightarrow$ reali $\qquad (0, b) \rightarrow$ immaginari puri

$$z = (a, b) = \underbrace{(a, 0)}_{a} + \underbrace{(0, 1)}_{i} \cdot \underbrace{(b, 0)}_{b} \qquad i \triangleq (0, 1)$$

$z = \underbrace{a}_{\text{PARTE REALE}} + i \underbrace{b}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}}$ FORMA ALGEBRICA

$b \rightarrow$ coefficiente della parte immaginaria

$$i^2 = i \times i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0) = -1 \quad \text{reale.}$$



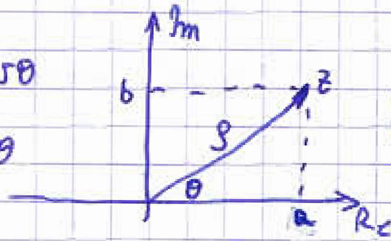

PIANO DI GAUSS

Nel mondo dell'ingegneria dell'informazione, anziché la $i$ si scrive la $J$

27/10/200

$z = (a,b) = a + jb$    $a = Re\{z\} = \rho\cos\theta$

FORMA CARTESIANA    FORMA ALGEBRICA    $b = Im\{z\} = \rho\,sen\theta$




$\angle z$

$\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ MODULO

$\theta = arctg\,\frac{b}{a}$ ARGOMENTO

se $\theta \in [-\pi, \pi[ \rightarrow$ ARGOMENTO PRINCIPALE

se $z = -5$, $|z| = |-5| = 5$, $\angle z = \pm\pi$

FORMA ESPONENZIALE

$e^{j\theta} \triangleq \cos\theta + j\,sen\theta$

FORMULA DI EULERO

$z = a + jb = \rho\cos\theta + j\rho\,sen\theta = \rho(\cos\theta + j\,sen\theta) = \rho \cdot e^{j\theta}$ FORMA ESPONENZIALE

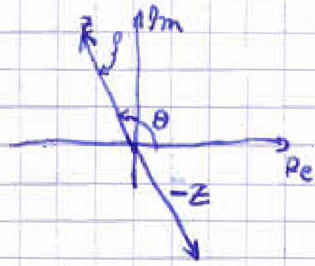
$\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2} \end{cases} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} = \underbrace{\rho_1\rho_2}_{\text{MODULO N° COMPLESSO}} \cdot e^{j\overbrace{(\theta_1+\theta_2)}^{\text{ARGOMENTO N° COMPLESSO}}}$

Prodotto dei moduli
Somma degli argomenti

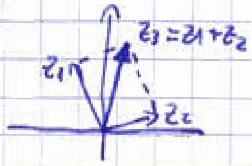
$z \rightarrow -z = (-1)(z) = e^{j\pi} \cdot \rho e^{j\theta} = \rho e^{j(\theta \pm \pi)}$

$e^{\pm j\pi}$

$\boxed{e^{j\pi} = -1}$




$\begin{cases} |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2| \\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\ \angle z_1 \cdot z_2 = \angle z_1 + \angle z_2 \end{cases}$



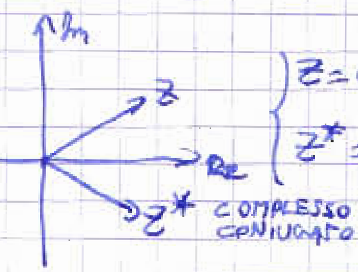

$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\,sen(-\theta) = \cos\theta - j\,sen\theta$

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,sen\theta$

SOMMO $\Rightarrow e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$

SOTTRAGGO $\Rightarrow e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\,sen\theta$

$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \\ sen\theta = \dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \end{cases}$ FORMULE DI EULERO

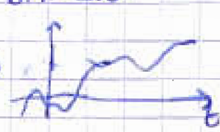



$\begin{cases} z = a + jb = \rho e^{j\theta} \\ z^* = a - jb = \rho e^{-j\theta} \end{cases}$

$z + z^* = 2\,Re\{z\}$    $z - z^* = j2\,Im\{z\}$

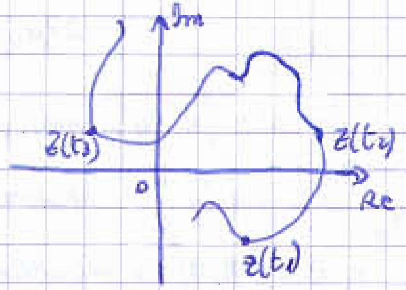
## FUNZIONI COMPLESSE DI VARIABILI REALI

SEGNALI COMPLESSI

$x(t) \rightarrow$ 

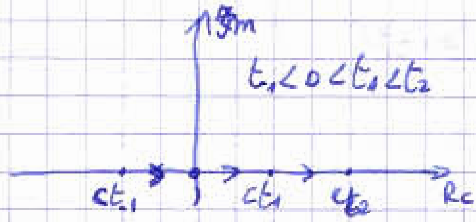
Ad ogni valore della variabile reale "tempo" associo un numero complesso.

$t_1 \rightarrow z(t_1)$    $t_2 \rightarrow z(t_2)$    $t_3 \rightarrow z(t_3)$

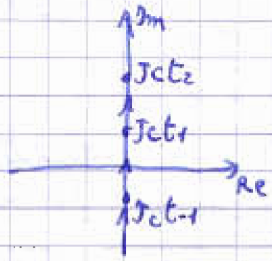



I segnali diventano traiettorie!

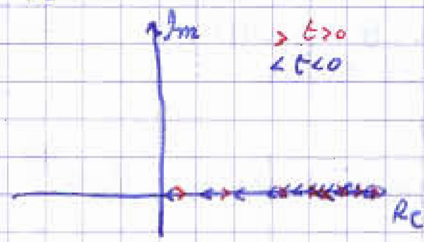
$z(t) = ct$ con $c > 0$, $c \in \mathbb{R}$




$z(t) = jct$

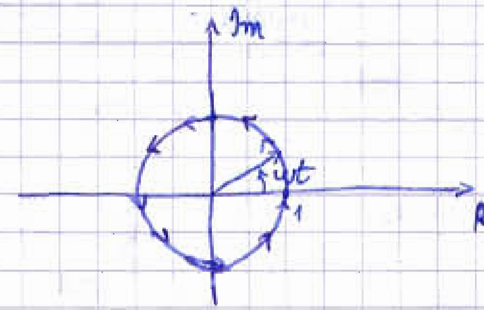



$z(t) = t^2$




$z(t) = e^{j\omega t}$ $\quad \omega > 0$

ESPONENZIALE COMPLESSO




Velocità angolare costante $\omega$.
Se $\omega < 0$, ruota in senso opposto

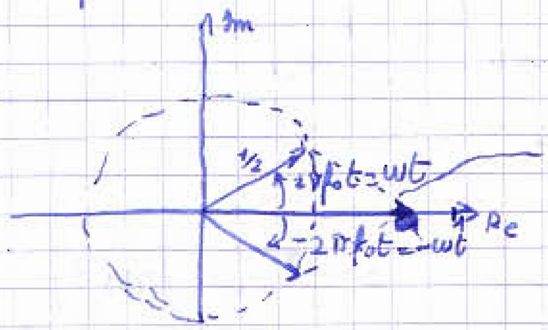
Il segnale è periodico

$$e^{j\omega(t+T_0)} = e^{j\omega t} \qquad \cancel{e^{j\omega t}} \cdot e^{j\omega T_0} = \cancel{e^{j\omega t}} \Rightarrow e^{j\omega T_0} = 1 = e^{j2\pi} \qquad \cancel{j}\omega T_0 = 2\pi \cdot \cancel{j}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega}{2\pi}\ Hz \qquad \omega = 2\pi f_0$$

$A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ considero $A = 1$ e $\varphi = 0$ $\Rightarrow$ $\cos(2\pi f_0 t) = \dfrac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} =$

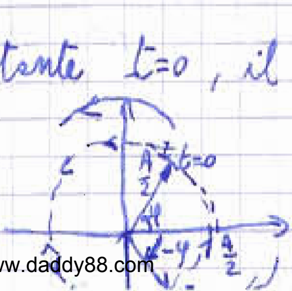
$$= \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$




somma $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 2\pi f_0 t$

$$A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A\left[e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right] \cdot \frac{1}{2} = \frac{A}{2} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

All'istante $t = 0$, il vettore non parte dall'asse reale ma da $\frac{A}{2} e^{j\varphi}$



# SISTEMI L.T.I.

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e^{j2\pi f_0 (t-\tau)}\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\cdot e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau =$$

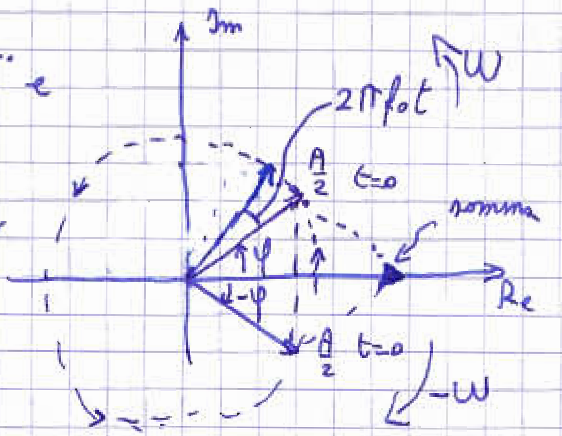
$$= \underbrace{e^{j2\pi f_0 t}}_{\text{!!segnale in ingresso!!!}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau}$$ → non dipende dal tempo! Il risultato sarà complesso. $H(f_0)$

Entrando $e^{j2\pi f_0 t}$, esce lo stesso vettore con la stessa velocità angolare moltiplicato per $H(f_0)$, cioè che parte da $H(f_0)$.

<u>SINUSOIDI</u> 30/10/08

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \overset{\text{Eulero}}{=} \frac{A}{2} e^{j\varphi}\cdot e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t} \qquad \omega = 2\pi f_0$$

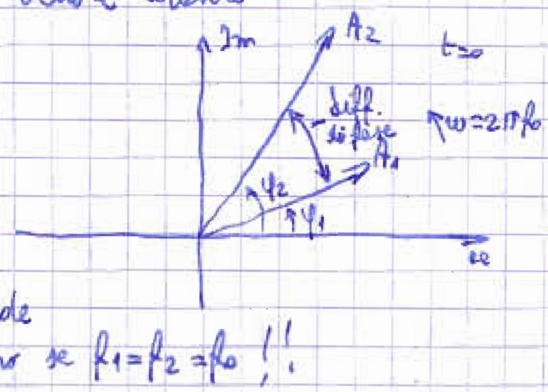
I due vettori sono sempre complessi coniugati e la loro somma è un numero reale.
La somma posso anche ottenerla raddoppiando l'ampiezza di un vettore (A) e prendendone la parte reale.




$$= \mathrm{Re}\{\underbrace{A e^{j\varphi}}_{\text{FASORE}} \overbrace{e^{j2\pi f_0 t}}^{\text{MOTORE}}\}$$ TRASFORMATA DI STEINMEZ

FASORE → n° complesso rappresentativo di un vettore rotante

$$x_1(t) = A_1\cos(\overbrace{2\pi f_0 t + \varphi_1}^{\varphi_1(t)}) = \mathrm{Re}\{A_1 e^{j\varphi_1} e^{j2\pi f_0 t}\}$$
$$x_2(t) = A_2\cos(2\pi f_0 t + \varphi_2) = \mathrm{Re}\{A_2 e^{j\varphi_2} e^{j2\pi f_0 t}\}$$




DIFFERENZA DI FASE o SFASAMENTO $= \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \cancel{2\pi f_0 t} + \varphi_1 - \cancel{2\pi f_0 t} - \varphi_2 =$

$= \varphi_1 - \varphi_2$ non dipende dal tempo se $f_1 = f_2 = f_0$!!

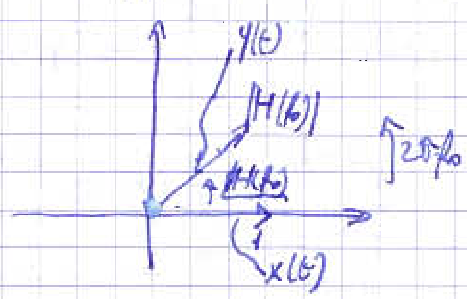
Se $f_1 \neq f_2$, lo sfasamento sarà $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = 2\pi f_1 t + \varphi_1 - 2\pi f_2 t + \varphi_2$! NON PIÙ COSTANTE.

non dipende da $t$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau}_{H(f_0)} = e^{j2\pi f_0 t} \cdot H(f_0) =$$

$$= e^{j2\pi f_0 t} \cdot |H(f_0)|\, e^{j\angle H(f_0)} = |H(f_0)| \cdot e^{[j2\pi f_0 t + j\angle H(f_0)]}$$





La frequenza del segnale finale è la STESSA del segnale in ingresso.

$$x(t) = B e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} = \underbrace{\left[B e^{j\theta}\right]}_{\text{costante}} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow$$

$$y(t) = |H(f_0)| \cdot e^{j[2\pi f_0 t + \angle H(f_0)]} \cdot B e^{j\theta} =$$

($B > 0$)

$$= |B \cdot H(f_0)| \cdot e^{j[2\pi f_0 t + \angle H(f_0) + \theta]} =$$

$$= \boxed{|B \cdot H(f_0)| \cdot e^{j[\theta + \angle H(f_0)]} \cdot e^{j2\pi f_0 t}}$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau$$ funzione complessa di $f$ chiamata RISPOSTA IN FREQUENZA o funzione di trasferimento del sistema

$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ TRASFORMATA DI FOURIER

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t} \overset{\text{LINEARITÀ}}{=} \frac{A}{2} e^{j\varphi} \underbrace{|H(f_0)| e^{j\angle H(f_0)}}_{H(f_0)} \cdot e^{j2\pi f_0 t} +$$

$$+ \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \underbrace{|H(-f_0)| e^{j\angle H(-f_0)}}_{H(-f_0)} \cdot e^{-j2\pi f_0 t} = \boxed{*}$$

$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

Sia $h(t)$ reale!! $\underset{\text{COMPLESSO CONIUGATO}}{H^*(f)} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau\right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[h(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau}\right]^* d\tau$ $\quad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau) \cdot e^{j2\pi f \tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau) \cdot e^{-j2\pi(-f)\tau}\, d\tau \overset{\text{reale}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j2\pi(-f)\tau} = H(-f)$$

$$\boxed{H^*(f) = H(-f)} \Leftarrow \text{se } h(t) \text{ è reale.}$$

$$|H(f)|\, e^{-j\angle H(f)} = |H(-f)|\, e^{j\angle H(-f)} \Rightarrow \begin{cases} |H(f)| = |H(-f)| & \text{FUNZIONE PARI} \\ -\angle H(f) = \angle H(-f) & \text{FUNZIONE DISPARI} \end{cases}$$

SIMMETRIA HERMITIANA DI $H(f)$ con $h(t)$ reale

$$\boxed{*} = \frac{A}{2} e^{j\varphi} |H(f_0)| e^{j\angle H(f_0)} \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} |H(f_0)| e^{-j\angle H(f_0)} e^{-j2\pi f_0 t} =$$

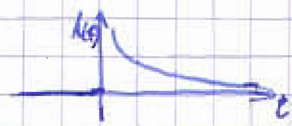
$$= \frac{A}{2} |H(f_0)| \cdot e^{j[\varphi + \angle H(f_0)]} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} |H(f_0)| e^{-j[\varphi + \angle H(f_0)]} \cdot e^{-j2\pi f_0 t} = \text{formula di Eulero}$$

$$= A\, |H(f_0)| \cdot \cos\left[2\pi f_0 t + \varphi + \angle H(f_0)\right] \;!!$$

Quando una sinusoide entra in un sistema L.T.I. esce un'altra sinusoide con fase e ampiezza cambiate, ma con la stessa frequenza.

ES.

$h(t) = A e^{-bt} u(t)$ reale $\qquad A>0,\ b>0$

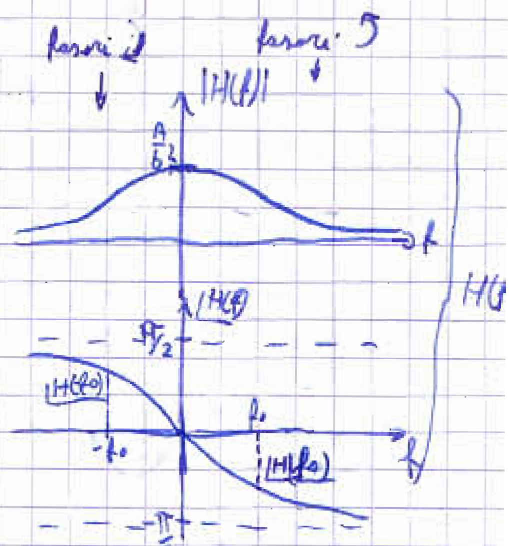



$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-b\tau} \underbrace{u(\tau)}_{\text{limita l'intervallo}} \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{0}^{+\infty} A e^{-(b+j2\pi f)\tau} d\tau = A \left[\frac{e^{-(b+j2\pi f)\tau}}{-(b+j2\pi f)}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= A\left[\frac{e^{-b\tau} \cdot e^{-j2\pi f\tau}}{-(b+j2\pi f)}\right]_0^{+\infty} = A\left[0 - \frac{1}{-(b+j2\pi f)}\right] = \frac{A}{b+j2\pi f}$$

modulo che tende a $0^+$

Il prodotto tende a 0




$$|H(f)| = \frac{|A|}{|b+j2\pi f|} = \frac{\overset{=A}{|A|}}{\sqrt{b^2 + (2\pi f)^2}}$$

$$\angle H(f) = \underset{\angle A}{0} - \angle b + j2\pi f = -\operatorname{arctg} \frac{2\pi f}{2b}$$

$f \to \infty \quad \angle H(f) \to \frac{\pi}{2}$

$f \to \infty \quad |H(f)| \to 0$

$f \to 0 \quad |H(f)| \to A/b$

03/11/2008

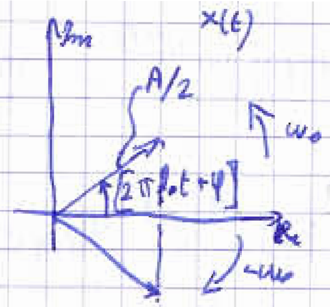
1° PROVA PARZIALE: 17/11 ORE 12.30 – 14.30

$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(f)$ $\qquad \boxed{h(t), H(f)}$ $\qquad H(f)$ funzione complessa $\quad H(f) = |H(f)| \cdot e^{j\angle H(f)}$

$$x(t) = A e^{j2\pi f_0 t} \qquad \omega_0 = 2\pi f_0 \ \frac{rad}{s} \qquad y(t) = H(f_0) \cdot \underbrace{A \cdot e^{j2\pi f_0 t}}_{x(t)} = A\,|H(f_0)| \cdot e^{j[2\pi f_0 + \angle H(f)]}$$

La frequenza NON cambia

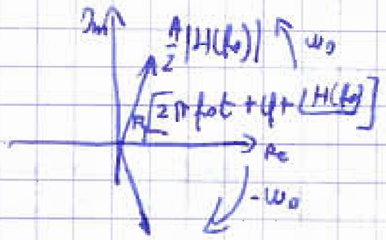
$\rightarrow \boxed{h(t), H(f)} \rightarrow$




$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t+\varphi)$
SINUSOIDE

$$y(t) = A \cdot |H(f_0)| \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi + \underline{/H(f_0)})$$

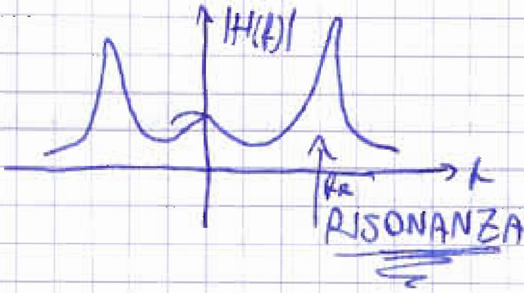
y(t)

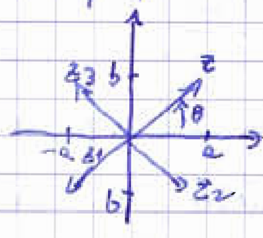



$\Longleftarrow \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \quad \Longrightarrow$

La differenza di fase si mantiene costante a $\underline{/H(f_0)}$

Il sistema precedente tratta meglio le frequenze basse (SISTEMA PASSA-BASSO)



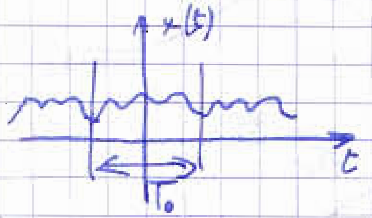

$z = \text{arctg}\,\frac{b}{a}$

$z_1 = \text{arctg}\,\frac{b}{a} - \pi$

$z_2 = \text{arctg}\,\frac{-b}{a} \qquad z_3 = \text{arctg}\,\frac{-b}{a} + \pi$

$$\theta = \begin{cases} \text{arctg}\,\frac{b}{a} & \text{per } a>0 \\ \text{arctg}\,\frac{b}{a} - \pi & \text{per } a<0,\ b<0 \\ \text{arctg}\,\frac{b}{a} + \pi & \text{per } a<0,\ b>0 \end{cases}$$

## SEGNALI PERIODICI

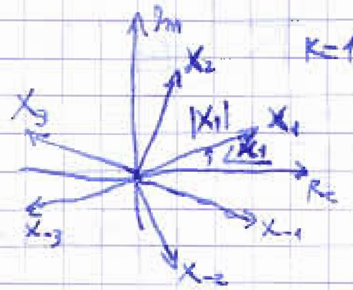



$f_0 = \frac{1}{T_0}$ FREQUENZA FONDAMENTALE

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t}$$

FASORE

SERIE DI FOURIER IN FORMA ESPONENZ.




se $x(t)$ reale

$\Downarrow$

$X_{-k} = X_k^*$

| MIN | MAIUSC. |
| --- | --- |
| $x$ | $X$ |
| $y$ | $Y$ |
| $k$ | $K$ |
| $z$ | $Z$ |

La serie di Fourier converge se sono soddisfatte le CONDIZIONI DI DIRICHLET!

$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_k$

PERIODICO — COEFFICIENTI DI FOURIER

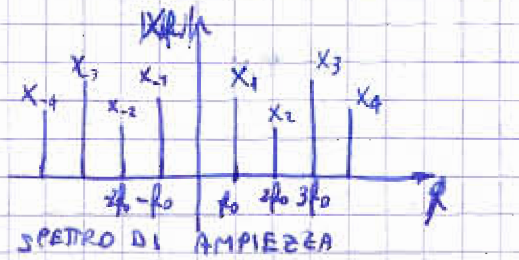
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

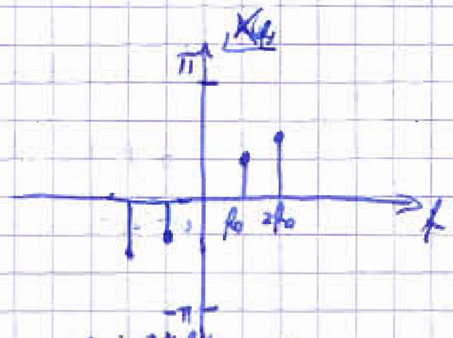
↳ integrale esteso a un periodo qualunque.


Se $x(t)$ è periodico lo considero come una combinazione lineare: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{X_k \cdot H(kf_0)}_{Y_k} \cdot e^{j2\pi k f_0 t}$

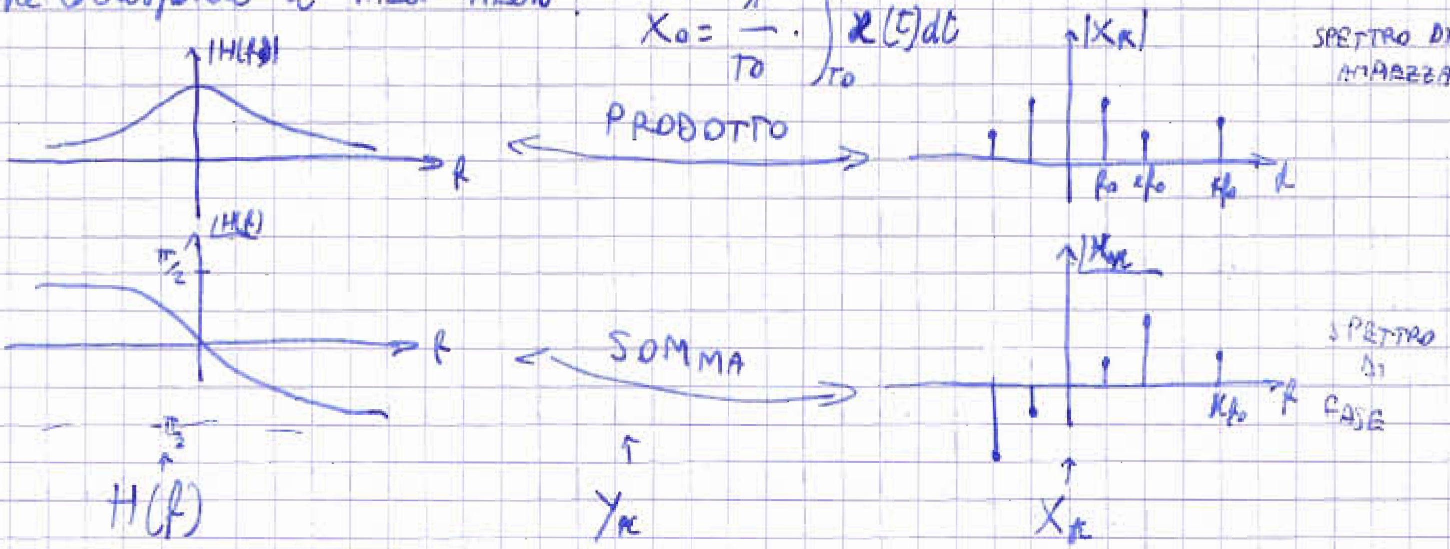
Anche l'uscita è quindi periodica. È una serie di Fourier dove $Y_k = X_k \cdot H(kf_0)$.

SPETTRO DI FOURIER




In 0, $k=0$, il segnale non ruota ($e^{j2\pi k f_0 t} = 1$) e avrà ampiezza $X_0$ che corrisponde al VALOR MEDIO. $X_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{T_0} x(t)dt$




## SERIE DI FOURIER

6/11/08

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t}}$$ ← EQUAZIONE DI SINTESI

$f_0 \to$ frequenza fondamentale $\frac{1}{T_0}$ $(k=1)$

$kf_0 \to$ frequenza armonica con $k>1$

$X_k \to$ coefficienti di Fourier

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt}$$ EQUAZIONE DI ANALISI

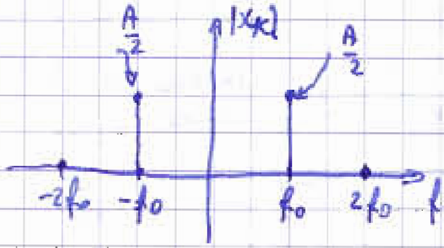
Se $x(t)$ è reale $\Rightarrow X_{-k} = X_k^*$

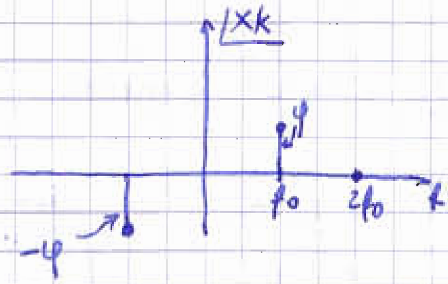
SINUSOIDE

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \underbrace{\left[\frac{A}{2}e^{j\varphi}\right]}_{k=1\text{ nella serie di Fourier}\ \to X_1} e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\left[\frac{A}{2}e^{-j\varphi}\right]}_{k=-1\ \to X_{-1}} e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

$$x(t) \xleftrightarrow{S.F.} X_k \qquad X_2 = 0,\ X_3 = 0 \dots$$





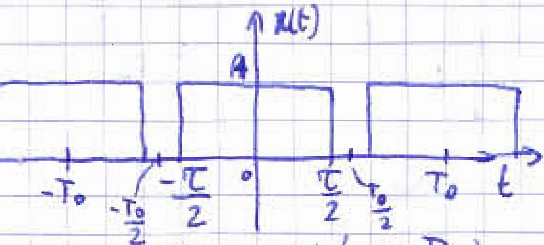
Ogni segnale periodico si può esprimere come somma di sinusoidi (coppie $X_k, X_{-k}$). La serie di Fourier in forma trigonometrica diventa

$$\boxed{x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\underbrace{X_k}_{|X_k|e^{j\angle X_k}} e^{j2\pi k f_0 t} + X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t}\right]} =$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty}|X_k|\left[e^{j2\pi k f_0 t + \angle X_k} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \angle X_k)}\right] =$$

formula di Eulero del coseno a meno di un 2.

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{2|X_k|}_{A_k}\cos(2\pi k f_0 t + \underbrace{\angle X_k}_{\varphi_k})$$



Segnale periodico di periodo $T_0$.

$n \to$ n° "cose" nel tempo $\qquad k \to$ n° "cose" nella frequenza

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Pi\left(\frac{t - nT_0}{\tau}\right) \qquad T_0 \geq \tau$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \underbrace{A}_{x(t)}\cdot e^{\overbrace{-j2\pi k f_0}^{\text{coeff. di } t} t}\,dt = \frac{A}{T_0}\cdot\left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{A}{T_0}\cdot\frac{1}{-j2\pi k f_0}\left[e^{-j\pi f_0 \frac{\tau 2}{2}} - e^{j\pi f_0\frac{\tau}{2}}\right] =$$

$$sen\,\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

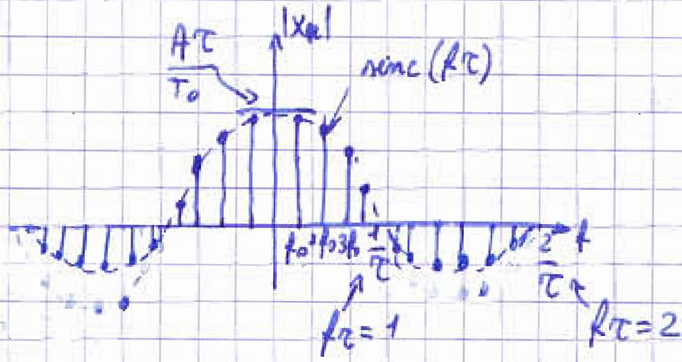
$$= \frac{A}{T_0}\cdot\frac{1}{j2\pi k f_0}\left[e^{j2\pi f_0\frac{\tau}{2}} - e^{-j\pi f_0 \tau/2}\right] = \frac{A}{T_0}\cdot\frac{1}{k f_0 \pi}\,sen\left(2\pi k f_0\frac{\tau}{2}\right) =$$

$$T_0 \cdot f_0 = 1$$

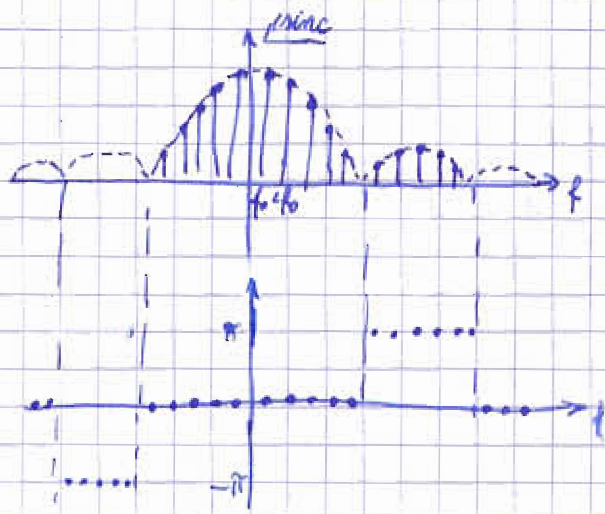
$$= \frac{A}{\pi k}\cdot sen(\pi k f_0 \tau) \overset{\cdot\frac{f_0\tau}{f_0\tau}}{=} A\cdot f_0\tau\cdot\frac{sen(\pi k f_0 \tau)}{\pi k f_0 \tau} = \frac{A\tau}{T_0}\,sinc(k f_0 \tau) \qquad sinc(x) = \frac{sen\,\pi x}{\pi x}$$

$$|X_k| = \frac{A\tau}{T_0}\cdot\left|\frac{sen(\pi k f_0 \tau)}{k\pi f_0\tau}\right| \qquad \angle X_k = \angle\left(\frac{sen(\pi k f_0\tau)}{\pi k f_0 \tau}\cdot\frac{A\tau}{T_0}\right)$$

$$X_k = \frac{A\tau}{T_0}\, sinc(f\tau)\Big|_{f=kf_0}$$




La fase sarà nulla se il modulo è positivo e varrà $\pm\pi$ se il modulo è negativo




ESERCIZIO TEMA D'ESAME 19/11/07

$x(t)$ è periodico $f_0 = \frac{1}{T_0}$ $\quad X_k = \frac{jk}{k^2-2}$ è reale? $\quad X_{-k} = \frac{-jk}{k^2-2} = X_k^*$? sì!

⇓

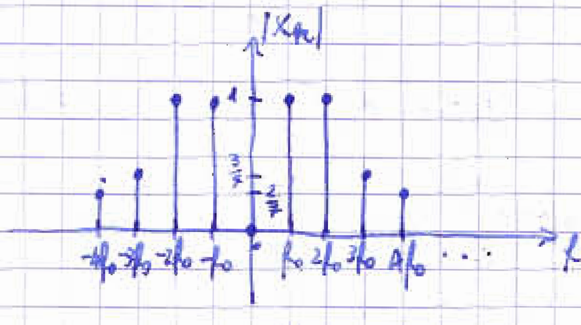
$x(t)$ è reale

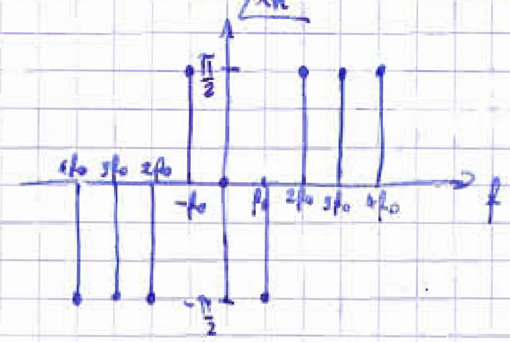
⇓

simmetria hermitiana

a)

| $k$ | $X_k$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | $-j$ |
| 2 | $j$ |
| 3 | $\frac{3}{7}j$ |
| 4 | $\frac{2}{7}j$ |



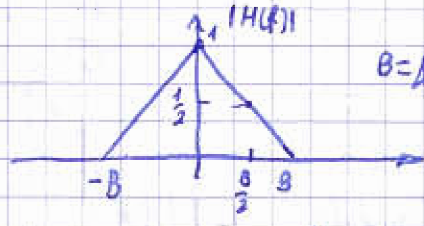



b) $x(t) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow y(t)$

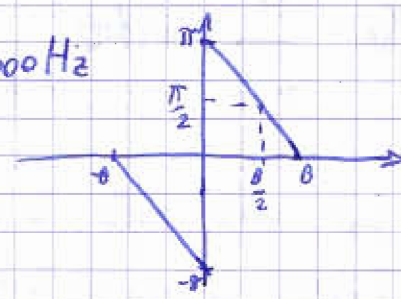
$x(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t}$ $\qquad y(t) = \sum_k X_k \cdot H(kf_0) \cdot e^{j2\pi k f_0 t}$

$|Y_k| = |X_k| \cdot |H(kf_0)|$

$\angle Y_k = \angle X_k + \angle H(kf_0)$




$B = 1000\ Hz$

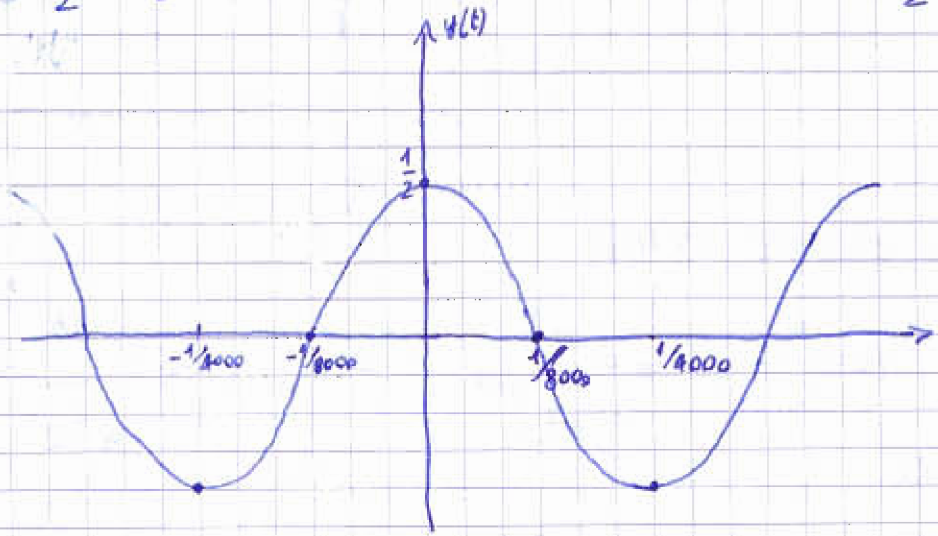



Per far uscire una sinusoide, devo avere solo due righe $\Rightarrow f_0$ minima $= \frac{B}{2} = 2000\ Hz$.

b2)

$y(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ devo trovare $A$ e $\varphi$ ($f_0$ ce l'ho già)

$|Y_k| = A = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \angle Y_k = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$ $\qquad y(t) = \frac{1}{2}\cos(4000\pi t)$




10/11/08

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t), H(f)} \xrightarrow{y(t)}$ $\qquad y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t) * h(t)$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t} \rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty} \underbrace{X_k \cdot H(kf_0)}_{Y_k} \cdot e^{j2\pi f_0 t}$.

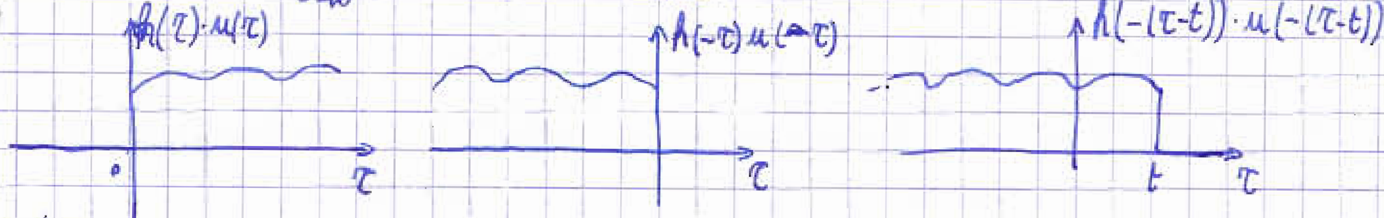
$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\,dt \qquad H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

Dato $h(t)$ e un sistema causale [l'uscita dipende dagli ingressi precedenti cioè $y(\bar{t}) = T[x(\tau), \tau \leq \bar{t}, \bar{t}]$).

$\boxed{!}$ SISTEMA CAUSALE $\Leftrightarrow$ $h(t)$ CAUSALE $(h(t) = h(t) \cdot u(t))$

Sia $h(t)$ causale: $h(t) = h(t) \cdot u(t)$; dimostro che il sistema è causale.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau =$$

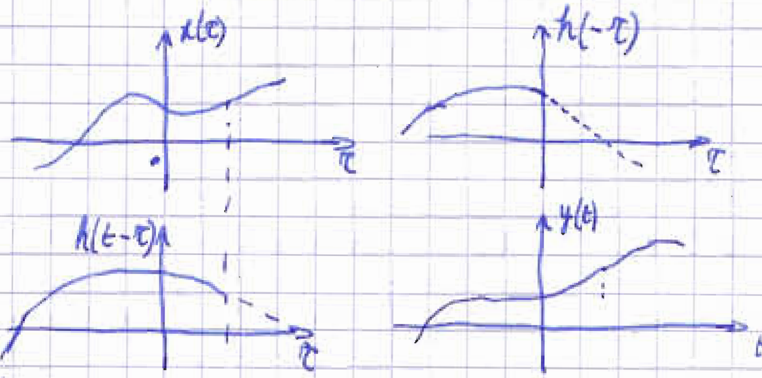



$$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau.$$ Mi serve conoscere l'ingresso a istanti precedenti di $t$.

$\Rightarrow$ il sistema è causale.

Partendo invece da un sistema causale, dimostro che la risposta all'impulso unitario $h(t)$ è causale.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$




Siccome il sistema è causale, l'uscita all'istante $t$ deve dipendere solo dagli ingressi precedenti; pertanto, l'unico modo per far avvenire questo è che la $h(t-\tau)$ sia nulla dopo $t$. $\Rightarrow h(t)$ è causale.

▣ SISTEMA STABILE (B.I.B.O.) $\Longleftrightarrow$ $h(t)$ INTEGRABILE, cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = H < \infty$

Sia $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = H$, dimostro che il sistema è stabile (ingresso limitato $\to$ uscita limitata).

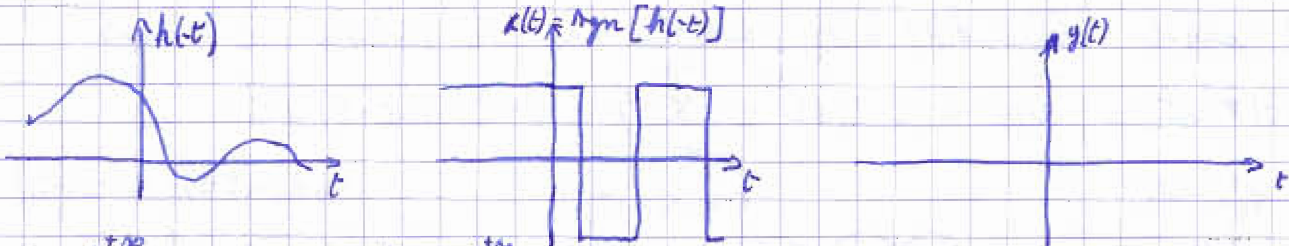
$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \quad \text{Hp: } |x(t)| \leq M, \quad \text{th: } |y(t)| \text{ è limitato?}$$

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\, d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau) \cdot x(t-\tau)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot \underbrace{|x(t-\tau)|}_{\leq M \text{ per Hp.}}\, d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot M\, d$$

$$= M \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, d\tau = M \cdot H \text{ limitato} \qquad |y(t)| \leq M \cdot H \Rightarrow \text{limitato} ▣$$

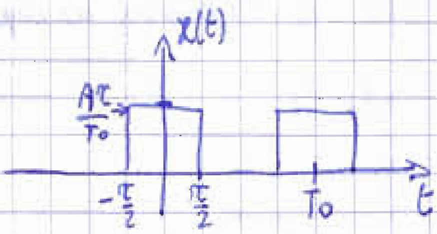
Sia un sistema stabile $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \cdot dt < +\infty$

Per assurdo, sia $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = +\infty$ scelgo $x(t) = \mathrm{sgn}[h(-t)]$

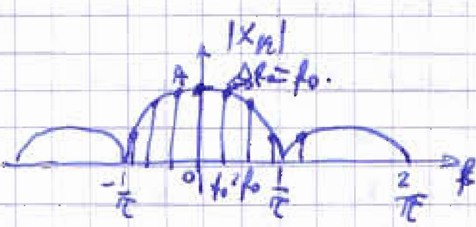



$$y(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\,d\tau\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot sgn\left[h(-(t-\tau))\right]d\tau\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot sgn\left[h(\tau)\right]d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\,d\tau = +\infty$$ per le assurde ipotesi → il sistema non sarebbe stabile → È ASSURDO! ■



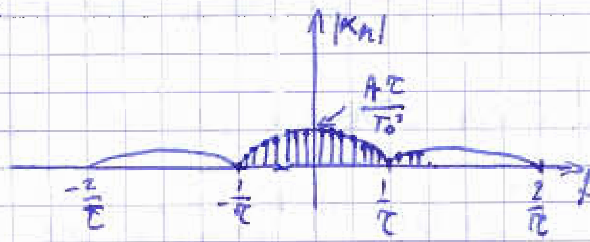

$$X_k = \frac{A\tau}{T_0}\,sinc(k f_0 \tau)$$




$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)\cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

Aumentando $T_0$, le repliche si distanziano. Se $T_0 \to +\infty$, sopravvive solo il segnale centrale.

Un segnale non periodico può essere pensato come un segnale periodico a periodo infinito. Lo spettro diventa:




frequenza più elevata

$T_0' > T_0 \qquad \Delta f' = f_0' = \frac{1}{T_0'} < \Delta f$

$$X_k = \Delta f\cdot\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x(t)\cdot e^{-j2\pi(k\Delta f)t}\,dt \qquad \frac{X_k}{\Delta f} = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} x(t)\cdot e^{-j2\pi \underbrace{\Delta f k}_{\text{tende a } f} t}\,dt$$

non ci sono le repliche — DENSITÀ FREQUENZIALE

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt$$ → TRASFORMATA DI FOURIER

PERIODICO $\begin{cases} x(t) = \sum_k X_k\, e^{j2\pi k f_0 t} \\ X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt \end{cases}$

NON PERIODICO $\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot e^{j2\pi f t}\,df \\ X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt \end{cases}$

INTEGRALE DI FOURIER

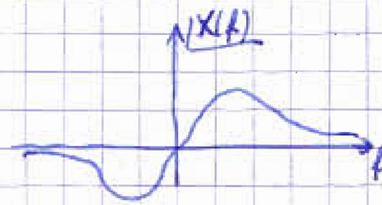
$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f)$

$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

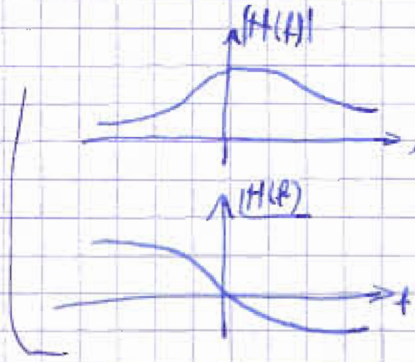
L.T.I.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t),\,H(f)} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

$X(f)$ $\qquad Y(f) = X(f)\cdot H(f) \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(f)\cdot H(f)}_{Y(f)} \cdot e^{j2\pi f t}\, df$



Gli spettri saranno funzioni continue

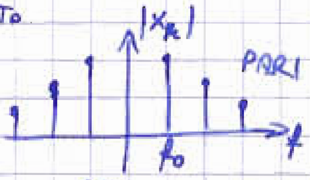


13/11/08

SERIE DI FOURIER

- $x(t)$ periodico $\overset{SF}{\longleftrightarrow}$ $X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$;

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t}$$

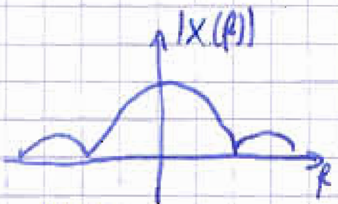


ANALISI $\qquad$ SINTESI

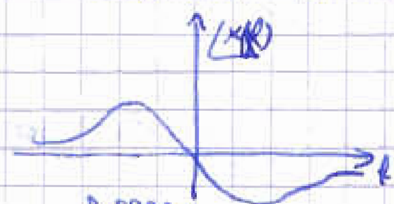
- $x(t)$ non periodico $\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$ $X_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$ ; $\quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot e^{j2\pi f t}\, df$

TRASFORMATA DI FOURIER $\qquad$ INTEGRALE DI FOURIER

continua



PARI



DISPARI

**SIMMETRIA HERMITIANA**

$$X_k = X_{-k}^{*} \qquad X(f) = X^{*}(-f)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t),H(f)} \longrightarrow y(t) \qquad H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \xrightarrow[\text{per } H(f)]{\text{moltiplico}} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(f)\cdot H(f)}_{Y(f)}\cdot e^{j2\pi f t}\, df \qquad \boxed{Y(f) = X(f)\cdot H(f)}$$

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) \qquad \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) * h(t)]\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\, d\tau\right]\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt \underset{\substack{\text{cambio}\\\text{ordine}\\\text{integrazione}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt\right] d\tau = \qquad \begin{array}{l} t-\tau=\lambda \\ t=\tau+\lambda \\ dt = d\lambda \end{array}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\cdot e^{-j2\pi f(\lambda+\tau)}\, d\lambda\right] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j2\pi f \tau}\cdot \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\cdot e^{-j2\pi f\lambda}\, d\lambda\right]}_{H(f)} d\tau =$$

$$= H(f) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau}_{X(f)} = H(f) \cdot X(f).$$


SISTEMI IN SERIE

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

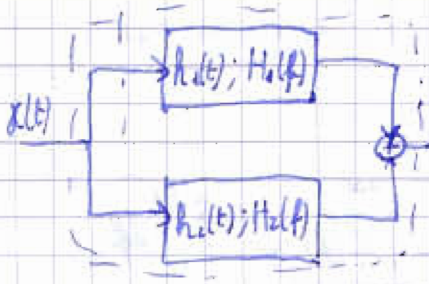
$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

LINEARITÀ

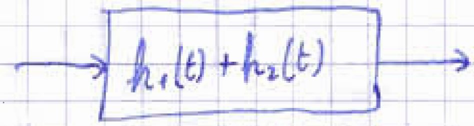
$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f) \qquad x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(f)$$

$$a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a X_1(f) + b X_2(f)$$

Vale $\forall a$




$\Longleftrightarrow$




SISTEMI IN PARALLELO

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

$$z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1} \qquad z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2} \qquad z_1 + z_2 = ?$$

$$z_1 = \rho_1 \cos\theta_1 + j\rho_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$z_2 = \rho_2 \cos\theta_2 + j\rho_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$z_1 + z_2 = [\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_2 \cos\theta_2] + j[\rho_1 \operatorname{sen}\theta_1 + \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2] \Rightarrow \text{modulo, argomento}$$

Se $z_1$ e $z_2$ sono allineati, è più semplice!

$$\theta_1 = \theta_2 \qquad \theta_1 = \theta_2 \pm \pi$$

$$\rho = |\rho_1 - \rho_2| \qquad \theta = \begin{cases} \theta_1 & \text{se } \rho_1 > \rho_2 \\ \theta_2 & \text{se } \rho_1 < \rho_2 \end{cases}$$


modulo $\to$ somma argomenti

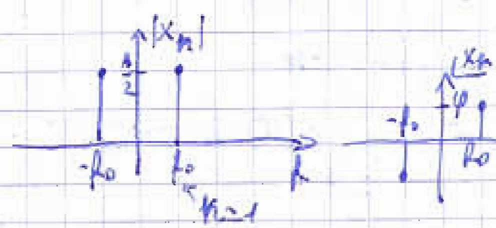
argomento $= \theta_1 = \theta_2$

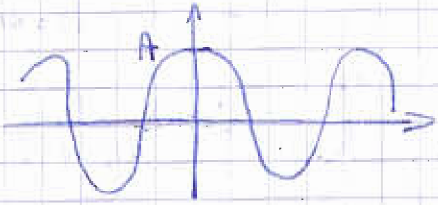
SEGNALI PERIODICI ALTERNATIVI


$$x\left(t \pm \frac{T_0}{2}\right) = -x(t)$$

$$\boxed{X_k = 0 \text{ per } k \text{ PARI}}$$

La sinusoide è un segnale alternativo!




$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$P = \frac{A^2}{2}$$

## RELAZIONE DI PARSEVAL

$$\underset{\substack{\text{potenza}\\\text{segnale}\\\text{periodico}}}{P} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^2(t)\,dt \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \Rightarrow P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

Con la sinusoide $P = |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$ come atteso!

## FILTRAGGIO DI UNA COSTANTE

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

$$x(t) = A \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot \underset{\substack{\Downarrow\\ A}}{x(t-\tau)}\,d\tau = A\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t} \longrightarrow y(t) = \sum_k X_k \cdot H(f_0 k)\, e^{j2\pi k f_0 t}$$

Segnale costante espresso come segnale periodico

Siano $X_k = 0$ per $k \neq 0$ e $X_k = A$ per $k = 0$

$$x(t) = A = X_0 \longrightarrow y(t) = X_0 \cdot H(0) = A \cdot H(0) \text{ costante}$$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f t}\,dt\right|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = H(0)$$

## ESERCIZI

20/11/2006 - ES. 2

SOLO X SINUSOIDI

$$x(t) = \sqrt{2} - 2\cos\left(\frac{t}{T} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad h(t) = \frac{1}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}} u(t)$$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

Uso la risposta in frequenza. La frequenza di $\frac{t}{T} + \frac{\pi}{4}$ è $\left(2\pi \frac{1}{2\pi T} t + \frac{\pi}{4}\right)$

$$y(t) = \sqrt{2}\cdot H(0) - 2\left|H\left(\frac{1}{2\pi T}\right)\right| \cdot \cos\left(\frac{t}{T} + \frac{\pi}{4} + \angle H\left(\frac{1}{2\pi T}\right)\right)$$

Devo trovare $H(f)$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi T} \qquad T_0 = 2\pi T \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

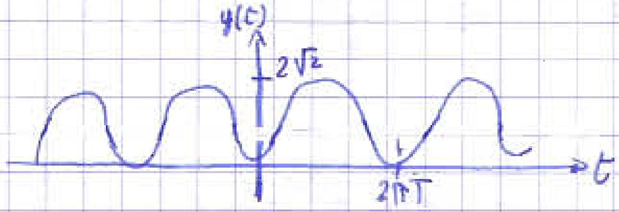
$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} \quad \text{so che} \quad \mathcal{F}\{A e^{-bt}\cdot u(t)\} = \frac{A}{b + j2\pi f} \quad \text{con } A = \frac{1}{T} \text{ e } b = \frac{1}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$= \frac{\frac{1}{T}}{\frac{1}{T} + j2\pi f} = \frac{1}{1 + j2\pi f T} \qquad H(0) = 1 \qquad H\left(\frac{1}{2\pi T}\right) = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{1+j}\cdot\frac{1-j}{1-j} = \frac{1-j}{2} = \frac{1}{2} - \frac{j}{2}$$

$$\left|H\left(\frac{1}{2\pi T}\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \angle H\left(\frac{1}{2\pi T}\right) = \operatorname{arctg}\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{4}$$

$$y(t) = \sqrt{2}\cdot 1 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\left(\frac{t}{T}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{T}\right) = \sqrt{2}\left[1-\cos\left(\frac{t}{T}\right)\right]$$




③

$$\rightarrow \boxed{h_1(t)} \rightarrow \boxed{H_2(f)} \rightarrow \qquad H(f) = H_1(f)\cdot H_2(f) = \frac{1}{1+2\pi f j}\cdot\frac{2}{1+j2\pi f} = \frac{2}{(1+j2\pi f)^2}$$

$h_1(t) = e^{-t}u(t)$ $\quad H_1(f) = \dfrac{1}{1+2\pi f\cdot j}$ $\quad$ Disegnare spettri di modulo e argomento

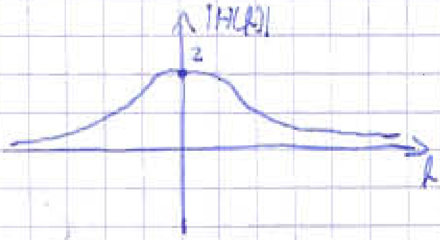
$H_2(f) = \dfrac{2}{1+j2\pi f}$

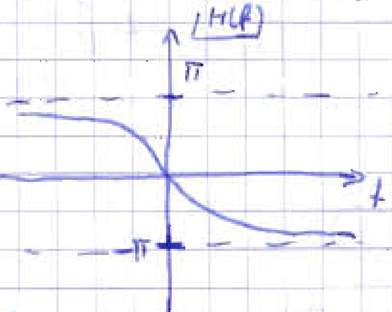
$H(f) = ?$

$h(t) = ?$

$$|H(f)| = \frac{2}{|(1+j2\pi f)^2|} = \frac{2}{|1+j2\pi f|^2} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+(2\pi f)^2}\right)^2} = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}$$

$$\angle H(f) = \angle NUM. - \angle DEN = 0 - 2\cdot\angle 1+j2\pi f = 0 - 2\,\mathrm{arctg}(2\pi f) = -2\,\mathrm{arctg}(2\pi f)$$



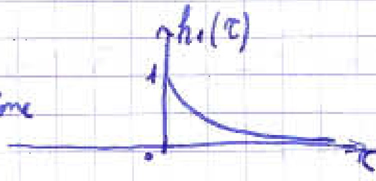

17/11/08

$$h_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{1+j2\pi f}\right\} = 2e^{-t}u(t) = 2\,h_1(t)$$

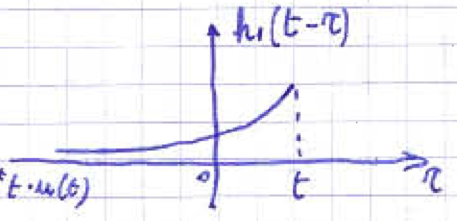
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = h_1(t) * 2h_1(t) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)\cdot h_1(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}\cdot u(\tau)\cdot e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau =$$

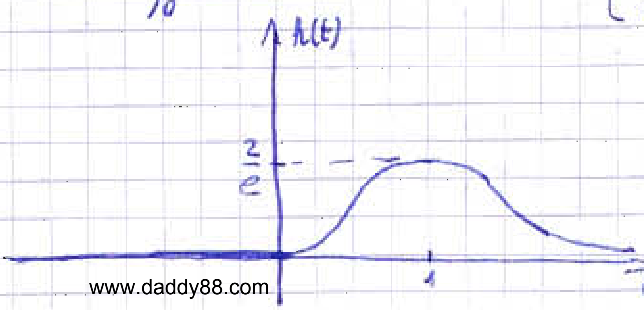
limitano l'intervallo di integrazione




$$= 2\int_0^t e^{-\tau}\cdot e^{-(t-\tau)}\,d\tau = 2\int_0^t \cancel{e^{-\tau}}\cdot e^{-t}\cdot\cancel{e^{\tau}}\,d\tau =$$




$$= 2e^{-t}\int_0^t d\tau = 2e^{-t}\cdot t \qquad h(t) = \begin{cases} 2e^{-t}\cdot t & \text{se } t\geq 0 \\ 0 & \text{se } t<0 \end{cases} = 2e^{-t}t\cdot u(t)$$




$$h'(t) = 2e^{-t} - 2te^{-t} = 2e^{-t}(1-t)$$

$$2e^{-t}(1-t) = 0 \qquad t = 1 \qquad h(1) = \frac{2}{e}$$

① Sistema lineare $\quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,(1-u(\tau-t))\,d\tau$

STAZIONARIO? SI

$$x_R(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_R(\tau)\cdot(1-u(\tau-t))\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau-t_0)\cdot(1-u(\tau-t))\,d\tau$$

$$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot(1-u(\tau-t+t_0))\,d\tau \underset{\tau=\alpha+t_0}{\overset{\alpha=(\tau+t_0)}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha-t_0)\cdot(1-u(\alpha-t))\,d\tau$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\,(1-u(\tau-t))\,d\tau = 1-u(-t) = u(t)$$ usando le proprietà campionatrice della $\delta$.

calcolata per $\tau=0$ centro della $\delta$

in generale $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau = h(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per } t>0 \end{cases}$

$h(t)$ è causale $\rightarrow$ sistema causale

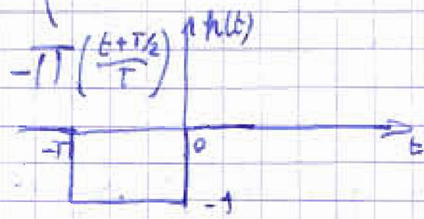
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \int_{0}^{+\infty} 1\,dt = +\infty \quad \text{NON STAB.}$$

ESAME 19/11/2007

① $$y(t) = -\int_{t}^{t+T} x(\tau)\,d\tau \qquad h(t) = -\int_{t}^{t+T}\delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} -1 & \text{per } t<0<t+T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} =$$

$h(t)$ non è causale $\Rightarrow$ sistema non causale

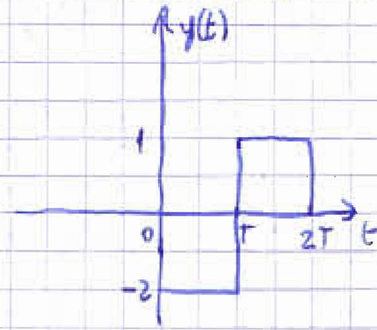
$$= \begin{cases} -1 & \text{per } -T<t<0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = -\Pi\left(\frac{t+T/2}{T}\right)$$




STABILE? $$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt = \int_{-T}^{0}|-1|\,dt = \left[t\right]_{-T}^{0} = 0+T = T \quad \text{STABILE!}$$

$x(t) = 2\cdot\delta(t-T) - \delta(t-2T)$ l'uscita è la stessa combinazione lineare delle uscite delle $\delta$ trovate prima (linearità). Per la stazionarietà si ha quindi:

$$y(t) = 2\,h(t-T) - h(t-2T) = -2\,\Pi\left(\frac{t-T+T/2}{T}\right) + -\Pi\left(\frac{t-2T+T/2}{T}\right)$$

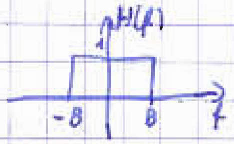


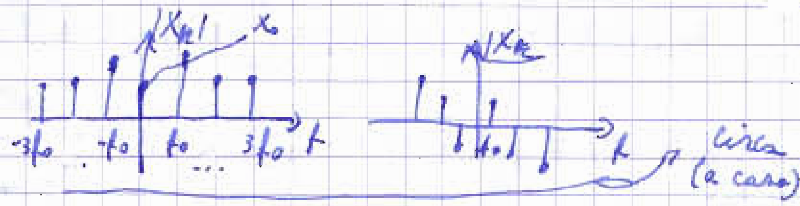
ESAME 18/11/05

$$x(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t-nT}{T/2}\right)$$ segnale periodico  Lo spettro è a righe in $f_0$, $2f_0$...

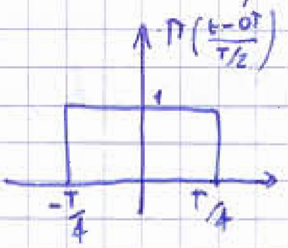
$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$

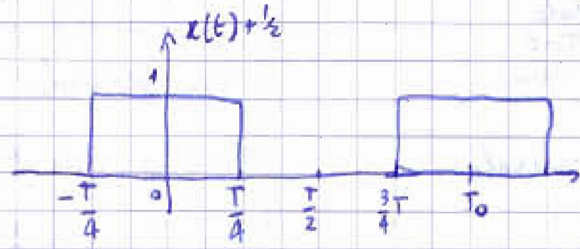
reale ⇒ fase nulla



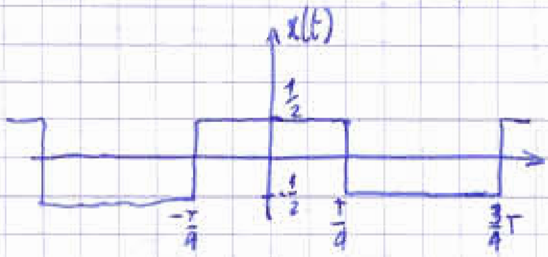




Per avere uscita nulla devo sicuramente avere $X_0=0$ (se $X_0 \neq 0$, esce sicuramente qualcosa). Inoltre devo avere $B<f_0$



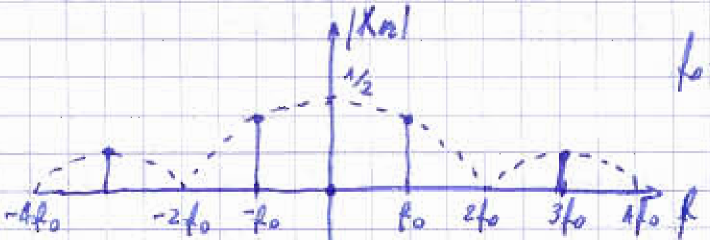

$$X_k = \frac{1\cdot T}{2}\cdot\frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}\left(k\frac{1}{T}\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(k/2\right) \qquad X_0 = 1/2$$




segnale alternativo → $X_k \neq 0$ per $k$ dispari

$X_0 = 0$ perché sottraggo $1/2$

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) & \text{se } k\neq 0 \\ 0 & \text{se } k=0 \end{cases}$$




$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{T}$$

$y(t) = 0$ per $f_0 > B \Rightarrow \frac{1}{T} > B$

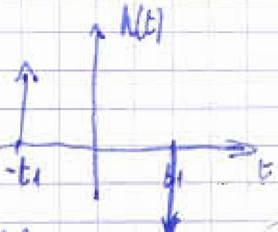
$$= \boxed{T < \frac{1}{B}}$$


$y(t)$ è sinusoide per $f_0 < B < 3f_0$

$$\begin{cases} \frac{1}{T} < B \\ \frac{3}{T} > B \end{cases} \qquad \begin{cases} T > \frac{1}{B} \\ T < \frac{3}{B} \end{cases} \qquad \boxed{\frac{1}{B} < T < \frac{3}{B}}$$

---

$y(t) = x(t+t_1) - x(t-t_1)$  $h(t) = T\{\delta(t)\} = \delta(t+t_1) - \delta(t-t_1)$




$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = 2 \Rightarrow \text{stabile}$$

Non è causale perché lo sarebbe se entrambe le $\delta$ stessero a destra.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t) \qquad \Rightarrow \quad H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

$X(f) \qquad\qquad Y(f) = X(f) \cdot H(f)$

Un sistema ha una risposta in frequenza solo se è L.T.I.

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(t+t_1) - \delta(t-t_1)] \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \text{prop. camp.} =$$

$$= e^{+j2\pi f t_1} - e^{-j2\pi f t_1} \overset{\text{eulero}}{=} 2j\, sen(2\pi f t_1).$$

20/11/08

ESAMI: 2ª prova parziale + 1° appello 2/2 → orale 1° appello 6/2

2° appello 24/02 → orale 27/2

ESERCITAZIONE: venerdì 28/11 15.30-17.30 aula F

CORREZIONE COMPITO

① $$y(t) = \int_t^{t+T} \left[1 + \frac{t-\tau}{T}\right] x(\tau)\, d\tau \qquad h(t) = \int_t^{t+T} \left(1 + \frac{t-\tau}{T}\right) \delta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T} & \text{se } \underbrace{t < \alpha < t+T}_{-T<t<0} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$


Sistema non causale perché $h(t)$ non causale

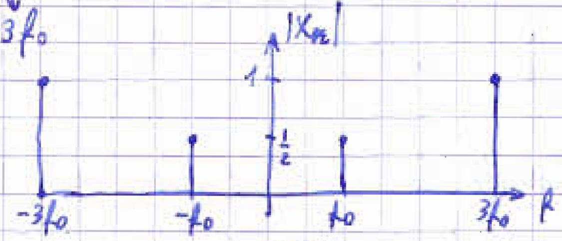
Sistema stabile perché $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = \frac{T}{2} < +\infty$.

② $$H(f) = \left[1 - \Lambda\left(\frac{f-f_0}{f_0/2}\right) - \Lambda\left(\frac{f+f_0}{f_0/2}\right)\right] e^{-j2\pi\frac{f}{6f_0}}$$

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + 2\cos\left(6\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{periodico}$$

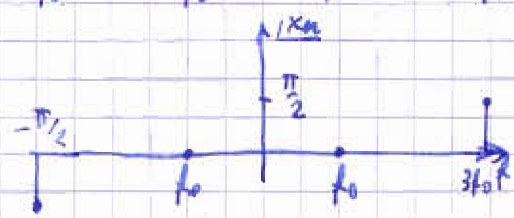
$f = 3f_0$

2. spettro di $x(t)$




$X_1 = X_{-1} = \frac{1}{2}$

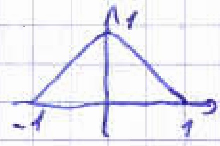
$X_3 = j$



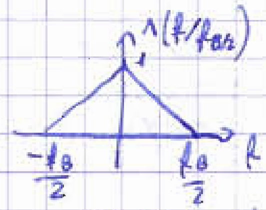

$X_{-3} = -j$

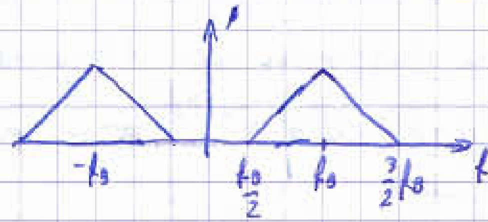
altri $X_n = 0$

$$\Lambda(f) = \begin{cases} 1+|f| & \text{per } |f|<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

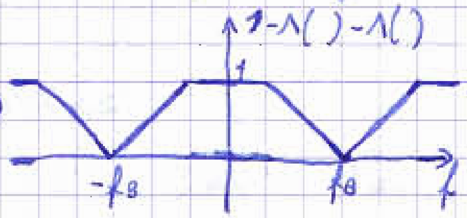



$$\Lambda\left(\frac{f}{f_B/2}\right)$$



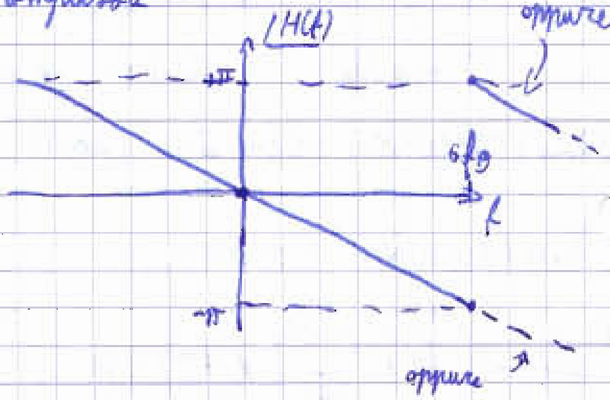




$\Rightarrow$




$\leftarrow |H(f)|$ perchè sempre $\geq 0$

$\nwarrow$ risposta in ampiezza




$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{j\varphi} \qquad \angle H(f) = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{f}{f_B}$$

$$-\frac{\pi}{6}\frac{f}{f_B} = -\pi \qquad f = 6f_B$$

c. Una possibile soluzione è

$$\begin{cases} f_0 = f_B \Rightarrow 3f_0 = f_B = 3000\,Hz \\ f_0 = 1000\,Hz \end{cases}$$

d. $$y(t) = \underbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{perchè } f_0=f_B}}{|H(f_0)|}\cdot\cos\big(2\pi f_0 t + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\angle H(f_0)}\big)}_{0} + 2\cdot\underset{\downarrow 1}{|H(3f_0)|}\cos\left(2\pi(3f_0)t + \frac{\pi}{2} + \angle H(3f_0)\right) =$$

$$\angle H(3f_0) = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{3f_B}{f_B} = -\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\cos(6\pi f_0 t) = 2\cos(6000\pi t).$$

e. $P$: $A\cos(2\pi f_0 t+\varphi) \longrightarrow P = \frac{A^2}{2}$ $\qquad P = \frac{2^2}{2} = 2$ oppure, usando Parseval

$P = 1^2 + 1^2 = 2$ (quelli in $-f_0$ e $f_0$ si annullano in uscita)

In alternativa, si poteva anche annullare la riga di $3f_0$ ponendo $f_B = 3f_0$, quindi se $f_0 = 3000\ Hz$, $f_B = 9000\ Hz$.

$$y(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \angle H(f_0)\right) = \cos\left(6000\pi t - \frac{\pi}{18}\right) \qquad P = \frac{1}{2}.$$

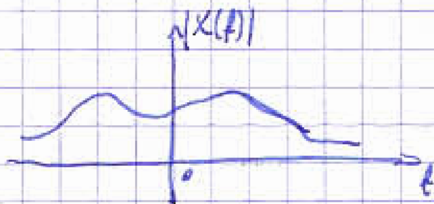
$|H(f_0)| = 1 = H(f_B/3) \qquad \angle H(f_B/3) = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{f_B/3}{f_B} = -\frac{\pi}{18}$

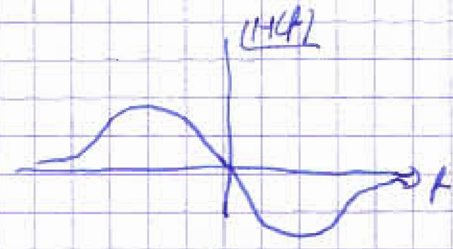
# TRASFORMATA DI FOURIER (T.d.F)

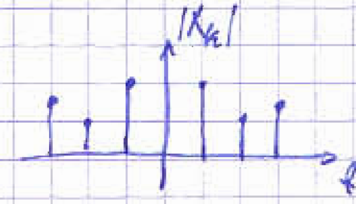
ω pulsazione (angular frequency)

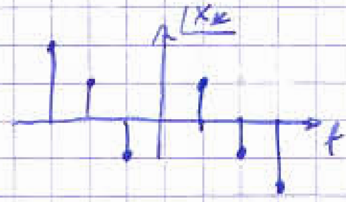
$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot e^{j\overbrace{2\pi f}^{\omega} t}\, df$$

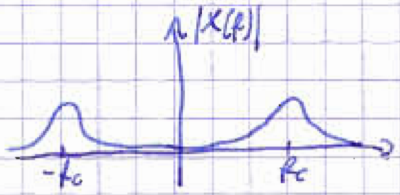
EQUAZIONE DI ANALISI EQUAZIONE DI SINTESI

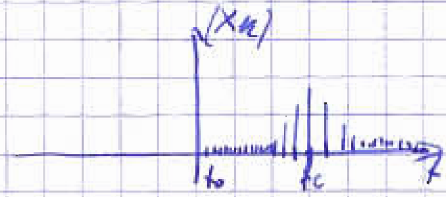


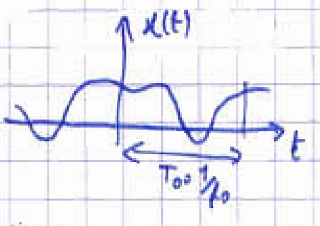



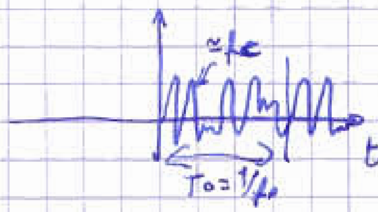



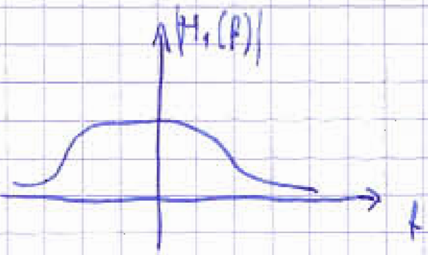

$f_0 << f_c$

CONTENUTO FREQUENZIALE → frequenze in cui è concentrata la potenza

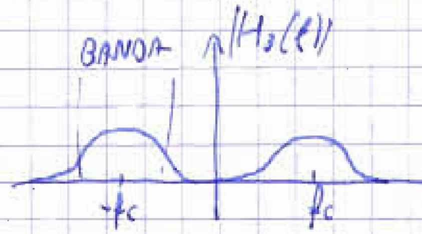



Se le frequenze sono concentrate verso frequenze basse, si avranno andame simili a lente sinusoidi; per frequenze alte, il segnale si "agita".








FILTRO PASSA BASSO
(attenua le frequenze alte)

FILTRO PASSA ALTO
(attenua le frequenze basse)

FILTRO PASSA BANDA
se il segnale di ingres ha un contenuto frequenz maggiore vicino a $f_c$, no fa niente, altrimenti lo ammazza

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,dt < \infty \Longrightarrow \exists\ \text{T.d.F.}$$

non vale il viceversa.

I segnali a energia finita hanno $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt < +\infty$. Se $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,dt$

Se $x(t)$ è reale → $H(f)=H^*(-f)$

PARTE REALE E PARTE IMMAGINARIA

$$X(f)=X_R(f)+j\,X_I(f)$$ con $X_R$ e $X_I$ reali.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(\cos(2\pi f t) - j\,\text{sen}(2\pi f t)\right) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)\, dt}_{X_R(f)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\text{sen}(2\pi f t)\, dt}_{-X_I(f)}$$

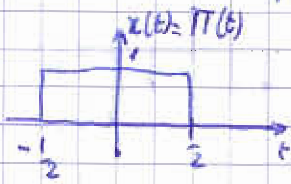
Se $x(t)$ è reale PARI $\rightarrow X(f) = X_R(f)$

Se $x(t)$ è reale DISPARI $\rightarrow X(f) = jX_I(f)$ ↑ immaginaria pura.

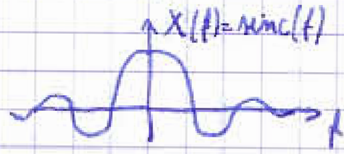
Usando $\int_{-\infty}^{+\infty}$ funzione dispari $= 0$.

24/11/08

# ANALISI SPETTRALE




$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$




$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \text{sinc}(f)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(f)\cdot e^{j2\pi f t}\, df = \Pi(t)$$

TABELLA PROPRIETÀ

| $t$ | $f$ |
|---|---|
| $x(t) * h(t)$ | $X(f)\cdot H(f)$ |
| $X(t)$ | $x(-f)$ |
| $\sum_i a_i x_i(t)$ | $\sum_i a_i X_i(t)$ |
| $x(-t)$ | $X(-f)$ |
| $x(t/T)$ | $\lvert T\rvert \cdot X(fT)$ |

| $x(t)$ | $X(f)$ |
|---|---|
| $\Pi(t)$ | $\text{sinc}(f)$ |
| $\text{sinc}(t)$ | $\Pi(f)$ |
| $\frac{1}{T}e^{-t/T}u(t)$ | $\frac{1}{1+j2\pi T f}$ |

DUALITÀ

$$\mathcal{F}[\text{sinc}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\alpha)\cdot e^{j2\pi(-f)\alpha}\, d\alpha = \Pi(-f)$$

$$\mathcal{F}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, e^{-j2\pi f \alpha}\, d\alpha = x(-f) \qquad X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$$

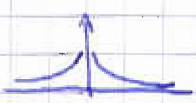
ES. 41 $\quad x(t) = \frac{1}{1+jt} \longleftrightarrow X(f)$ ?

OMOGENEITÀ E LINEARITÀ

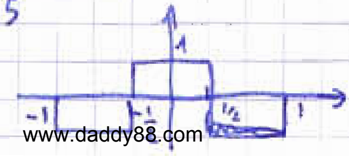
$$\mathcal{F}[Ax(t)] = AX(f) \qquad a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \ldots + a_n x_n(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a_1 X_1(f) + \ldots + a_n X_n(f)$$

ES. 44

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}] \qquad s(t) = e^{-t}u(t) + S(-t)$$

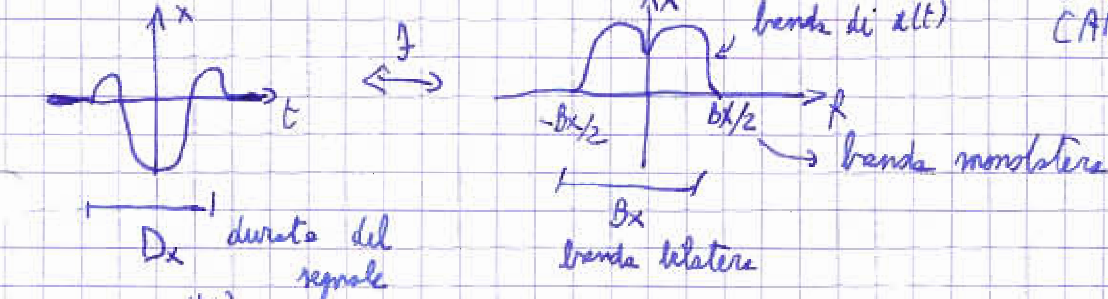


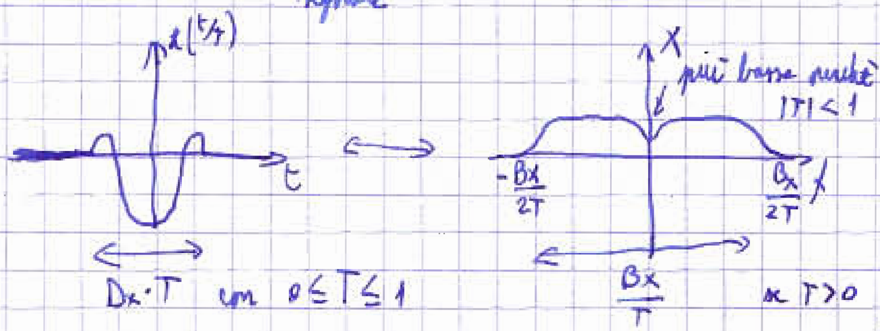
ES 45




$$x(t) = -\Pi\left(\tfrac{t}{2}\right) + 2\Pi(t)$$

## CAMBIAMENTO DI SCALA




$\theta = \frac{t}{T}$

$$\mathcal{F}\left[x\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt = d\theta = \frac{dt}{T}$$

se $T>0$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot e^{-j2\pi f T\theta} \cdot T\, d\theta = T \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot e^{-j2\pi (fT)\theta}\, d\theta$$

$$= T \cdot X(fT) \quad \text{per } T<0 \rightarrow -T X(fT)$$

$$\Rightarrow |T| \cdot X(fT)$$

Se $T=-1$, cioè $x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(-f)$

$$x\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} |T|\, X(fT)$$ PROPRIETÀ DEL CAMBIAMENTO DI SCALA

$D_x \cdot B_x \rightarrow$ prodotto DURATA-BANDA $\rightarrow$ rimane costante per un cambiamento di scala. Caratteristica dell'andamento del segnale.

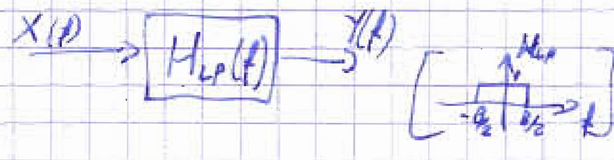
$T$ piccolo $\rightarrow$ più bit ci stanno perché piccola durata $\rightarrow$ banda larga.

$$D_x \cdot B_x \geq \frac{1}{4\pi}$$ PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE

durata (efficace per segnali a durata illimitata)

3) Calcolare la trasformata di Fourier di $h_{LP} = B \cdot \operatorname{sinc}(Bt)$ con $B>0$

[filtro low-pass = passa-basso ideale)

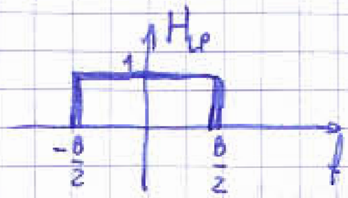



$$Y(f) = X(f) \cdot H_{LP}(f) = \begin{cases} X(f) & \text{per } -\frac{B}{2} \leq f \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Es (46), (47) $\rightarrow$ Tracciare lo spettro a righe di $x(t) = \cos(2\pi f_0 \, t/T)$ e di $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$\rightarrow$ Calcolare $\mathcal{F}\left[e^{-t/T} \cdot u(t)\right]$, $\mathcal{F}\left[e^{-t} \cdot u(t)\right]$

(43) $h_{LP} = B\,\mathrm{sinc}(Bt)$ $\quad H_{LP} = \mathcal{F}[B\,\mathrm{sinc}(Bt)] \overset{\text{linearità}}{=} B \cdot \mathcal{F}[\mathrm{sinc}(Bt)] \overset{\frac{1}{T}=B \to T=\frac{1}{B}}{=} B \cdot \left(\frac{1}{B}\Pi\left(\frac{f}{B}\right)\right) =$




$= \Pi\left(\frac{f}{B}\right) \qquad Y(f) = X(f) \cdot H\left(\frac{f}{B}\right) = \begin{cases} 1 & \text{per } \left|\frac{B}{2}\right| > f \\ 0 & \text{per } \left|\frac{B}{2}\right| < f \end{cases}$

27/11/08

ESERCITAZIONE GIOVEDÌ 4/12 15.30 – 17.30 AULA F

$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f)$

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df \\ X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \end{cases}$$

$X(f) = X^*(-f)$ per $x(t)$ reale

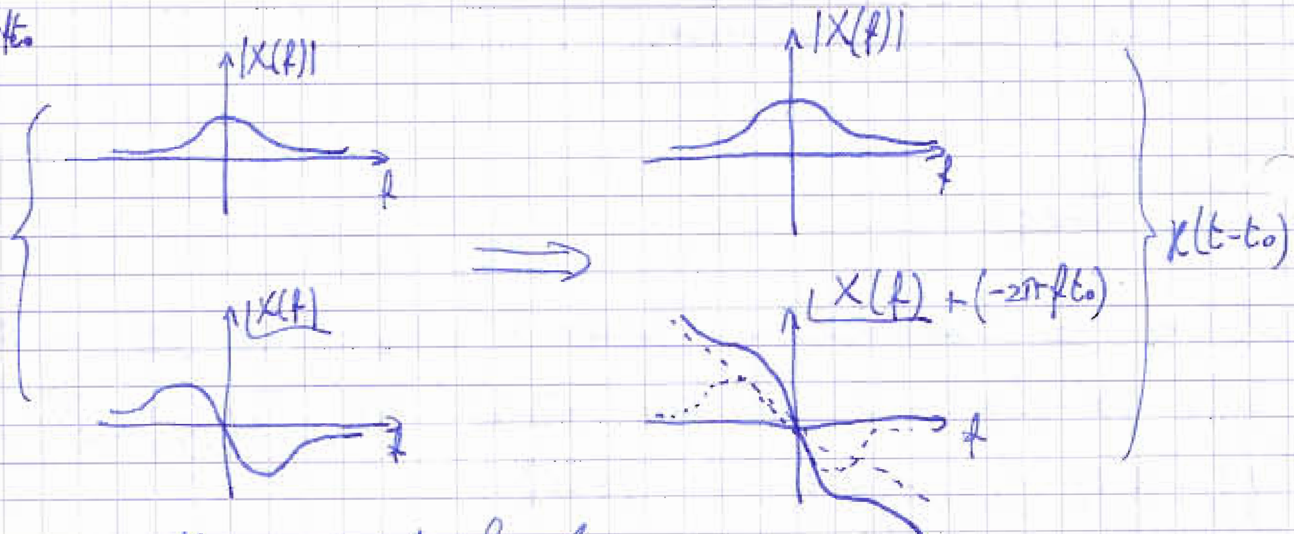
$X(f)$ reale per $x(t)$ pari reale

$X(f)$ immaginario puro per $x(t)$ dispari reale

TRASLAZIONE NEL TEMPO

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \overset{\substack{\lambda = t-t_0 \\ t = \lambda + t_0}}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \cdot e^{-j2\pi f\lambda} \cdot e^{-j2\pi ft_0}\, d\lambda =$$

$= \underbrace{e^{-j2\pi ft_0}}_{\substack{\text{modulo } 1 \\ \text{argomento } -2\pi ft_0}} \cdot X(f) \Rightarrow$ il modulo della trasformata $X(f)$ viene moltiplicato per 1 mentre l'argomento sarà aumentato di $-2\pi ft_0$




La traslazione influenza solo la fase

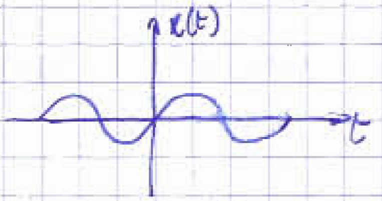
CAMBIAMENTO DI SCALA

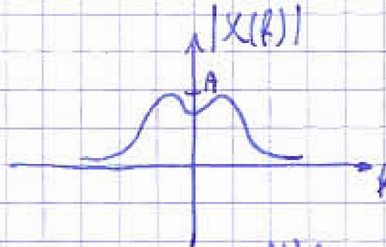
$$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \overset{\substack{at=\lambda \quad dt = \frac{1}{a}d\lambda \\ t = \lambda/a}}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j2\pi f\frac{\lambda}{a}} \cdot \frac{1}{a}\, d\lambda \quad \text{per } a>0$$

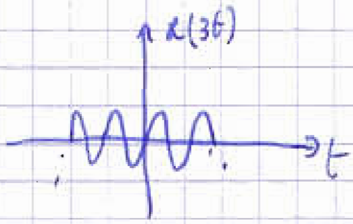
$$= \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} x(\lambda)\, e^{-j2\pi f\frac{\lambda}{a}}\, d\lambda \quad \text{per } a<0$$

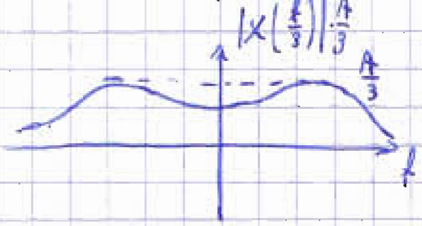
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) & \text{per } a>0 \\ -\frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) & \text{per } a<0 \end{cases} \Rightarrow x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

caso particolare: se $a=-1 \Rightarrow \mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-f)$; se $x(t)$ reale, allora $\mathcal{F}\{x(-t)\} = X^*(f)$



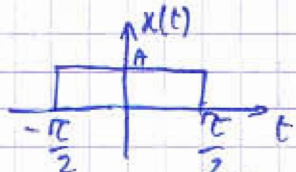

TEOREMA DI DUALITÀ

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{-j2\pi f t}\, df \overset{f=\lambda}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\, e^{-j2\pi\lambda t}\, d\lambda \overset{t=f}{\Rightarrow} x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\cdot e^{-j2\pi\lambda f}\cdot d\lambda \overset{t=\lambda}{=}$$

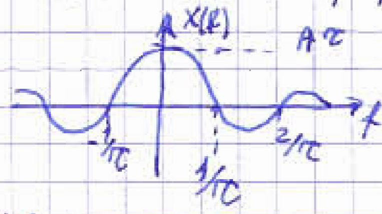
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \mathcal{F}\{X(t)\} \qquad X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$$

funzione del tempo — segnale di partenza nel dominio della frequenza

$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$




$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$



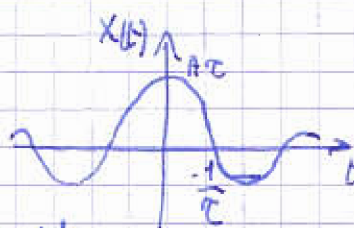

un solo grafico perché reale

$$X(f) = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\, dt = A\left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = A\tau \operatorname{sinc}(f\tau)$$

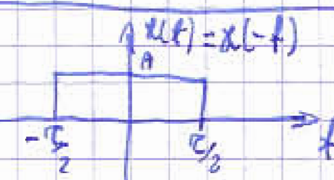
TRASFORMAZIONE NOTEVOLE

$$\boxed{A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \longleftrightarrow A\tau \operatorname{sinc}(f\tau)}$$

$X(t) = A\tau \operatorname{sinc}(t\tau)$

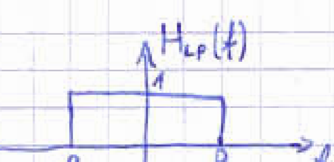



$x(f) = A\Pi\left(\frac{f}{\tau}\right)$ $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$




Quindi una sinc nel tempo diventa una rett in frequenza.

FILTRO PASSA BASSO IDEALE

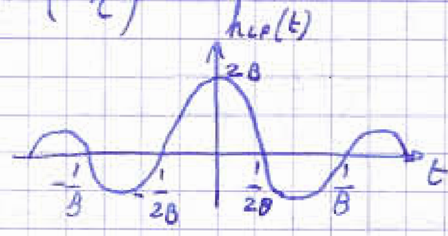



Fa passare inalterate le frequenze tra $-B$ e $B$

$$H_{LP}(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$h_{LP}(t) = \mathcal{F}\{H_{LP}(f)\}$ $\qquad A\tau \,\text{sinc}(t\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} A\Pi\left(\frac{f}{\tau}\right)$

$A = 1$, $\tau = 2B$ $\Rightarrow h_{LP}(t) = 2B\,\text{sinc}(2Bt)$




B = banda passante o frequenza di taglio
unilatera

AUMENTO DI BANDA $\longrightarrow$ RISPOSTA ALL'IMPULSO UNITARIO PIÙ AGITATA.
$\uparrow 2B$ $\qquad \frac{1}{2B} \Downarrow$

TRASLAZIONE IN FREQUENZA

$x(t) \leftrightarrow X(f)$

$x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow ?$ $\qquad \mathcal{F}\{x(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}] \cdot e^{-j2\pi f t} dt =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi (f-f_0)t} dt = X(f-f_0)$ Una traslazione in frequenza ha come effetto nel tempo una moltiplicazione per $e^{j2\pi f_0 t}$.

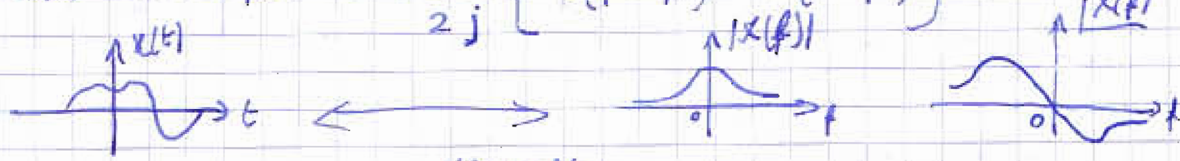
$x(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f+f_0)$

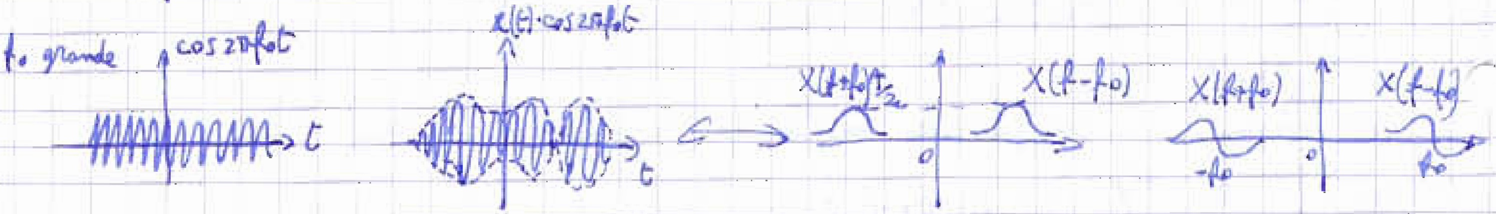
$x(t) \cdot \dfrac{(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})}{2} \longleftrightarrow \dfrac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$

$\Rightarrow$ TEOREMA DELLA MODULAZIONE

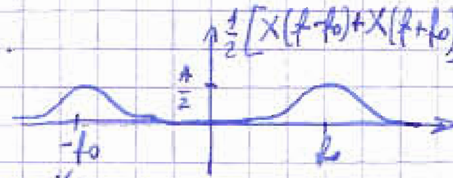
$x(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}[X(f-f_0) + X(f+f_0)]$

$x(t) \cdot \text{sen}\, 2\pi f_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2j}[X(f-f_0) - X(f+f_0)]$



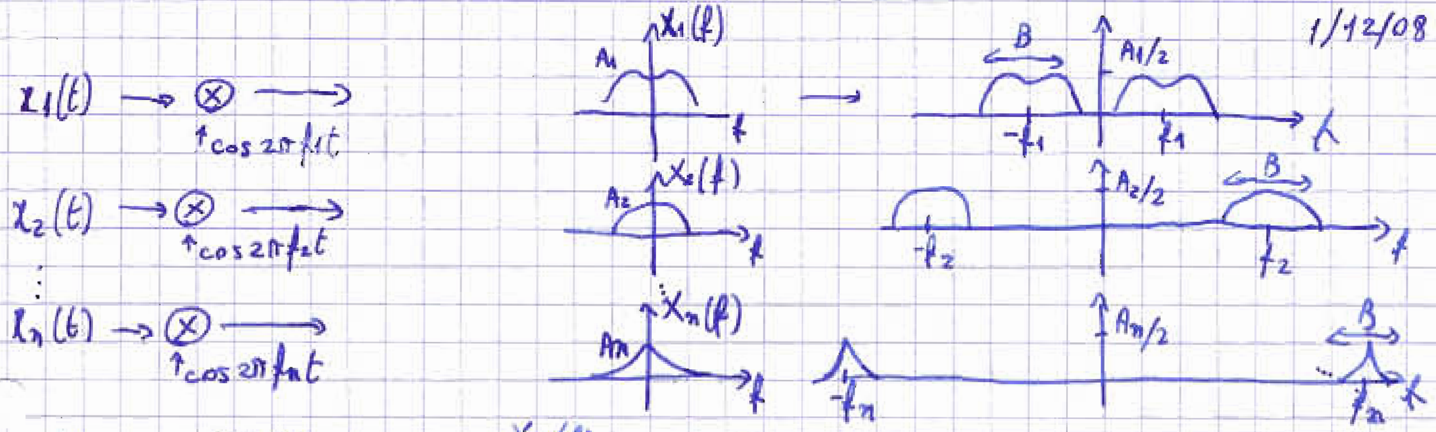



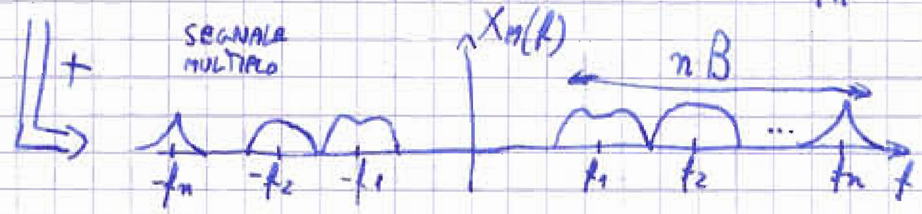
Per $f_0$ molto grande, il contributo di $X(f+f_0)$ in $+f_0$ è nullo (e viceversa) quindi posso disegnare il grafico totale.




- Modulare significa
  - nel dominio del tempo moltiplicare per una sinusoide
  - nel dominio della frequenza traslare il contenuto frequenziale

1/12/08




La larghezza di banda B mi dice che intervallo il segnale occupa.

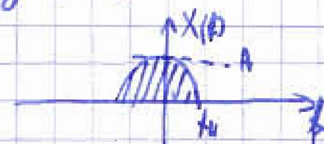
Il segnale finale avrà banda $= n \cdot B$.

Il segnale multiplo posso a sua volta modularlo.

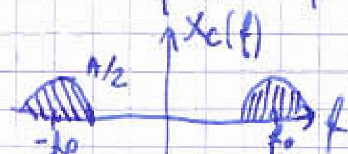
$x_1(t), x_2(t) \ldots$ sono SEGNALI IN BANDA BASE (o MODULANTI). La frequenza $f_1$ (o $f_2, \ldots$) si chiama PORTANTE ("carrier"), o meglio il termine $\cos 2\pi f_1 t \ldots$

DEMODULAZIONE $\to$ dal segnale multiplo a più segnali in banda base

$x_c(t) = x(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t \longleftrightarrow X_c(f) = \frac{1}{2}\left(X(f-f_0) + X(f+f_0)\right)$

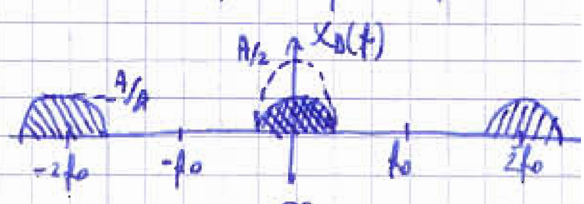



$x_c(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t = x(t) \cdot \cos^2 2\pi f_0 t \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$




$\underbrace{x_c(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t}_{x_D(t)} = x(t) \cdot \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2\pi (2f_0) t\right] =$

$= \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x(t) \cdot \cos(2\pi (2f_0) t).$

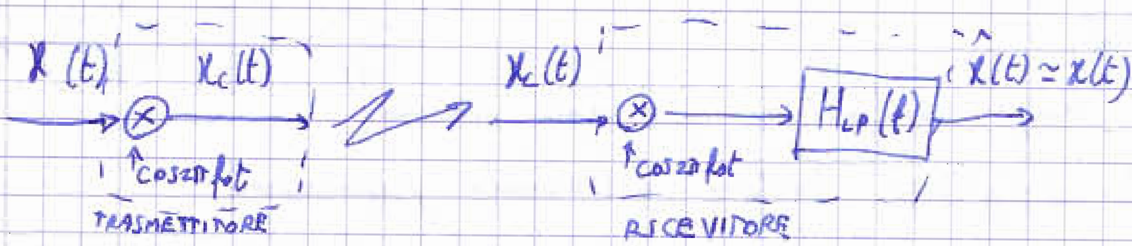



: somma dei due segnali che suppongo reali

Faccio passare $x_D(t)$ attraverso un filtro passa-basso con $f_H$


per riottenere il segnale iniziale $x(t)$

In questo modo posso quindi separare i vari segnali da quello multiplo, con opportuni filtri (demodulazione).




DERIVAZIONE

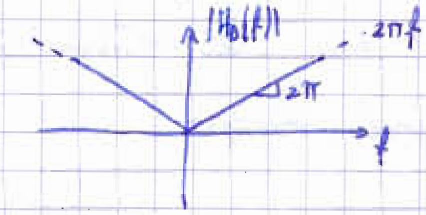
$x(t) \longleftrightarrow X(f)$

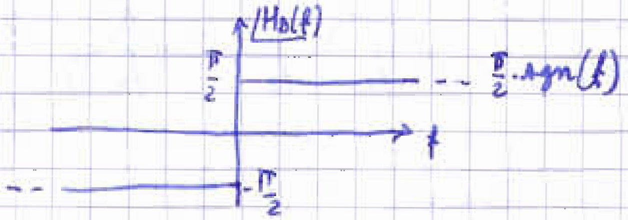
$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f \cdot X(f)$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, df \cdot \frac{d}{dt} e^{j2\pi f t} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[X(f)\cdot j2\pi f\right] \cdot e^{j2\pi f t}\, df$$

La derivata la posso ottenere applicando a $X(f)$ un filtro con risposta $j2\pi f = H_D(f)$



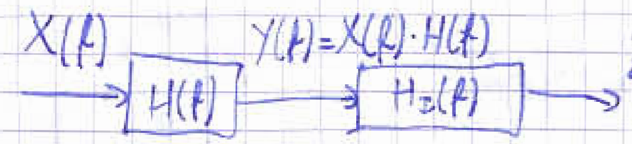

RISPOSTA IN FREQUENZA DEL DERIVATORE
↓
PASSA-ALTO NON IDEALE

INTEGRAZIONE

$x(t) \longleftrightarrow X(f)$

$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f)$

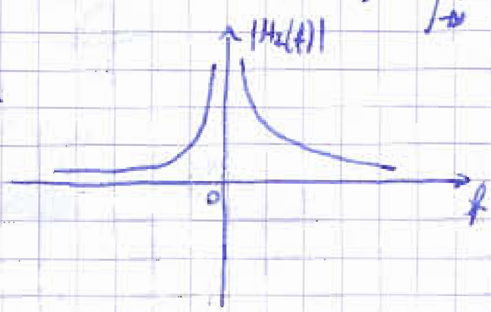
L'integrale è l'operazione inversa della derivata, quindi per annullare la derivata devo far passare il segnale in un filtro inverso

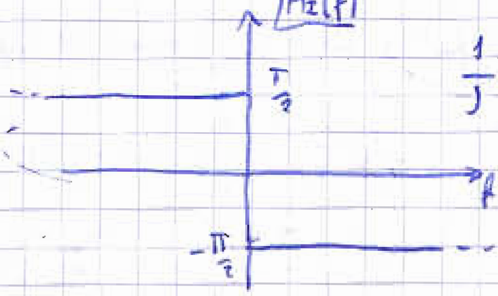



$$Z(f) = X(f) \cdot \underbrace{H(f) \cdot H_I(f)}_{1} = X(f) \qquad H_I(f) = \frac{1}{H(f)}$$

Questo vale SOLO se $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = 0$

$H_I(f) = \frac{1}{j2\pi f}$



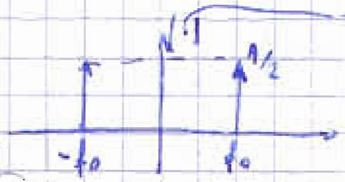



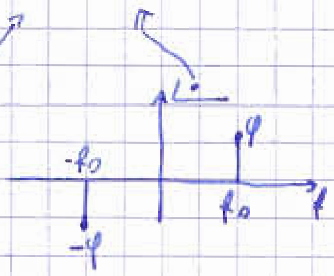

$\frac{1}{j} = -j$

Esistono anche derivazioni e integrazioni nella frequenza (libro)

# TRASFORMATE NOTEVOLI

| TEMPO | FREQUENZA | CALCOLI |
|---|---|---|
| $A\delta(t)$ | $A$ | $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A\delta(t) e^{-j2\pi f t}dt = A \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} df = \delta(t)$ |
| $e^{j2\pi f_0 t}$ | $\delta(f-f_0)$ | $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t}\cdot e^{-j2\pi f t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f-f_0)t}dt = \delta(f-f_0)$ |
| $A\cos(2\pi f_0 t+\varphi)$ | $\frac{A}{2}e^{j\varphi}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}e^{j\varphi}\delta(f+f_0)$ | $\mathcal{F}\{A\cos(2\pi f_0 t+\varphi)\} \overset{\text{eulero}}{=} \mathcal{F}\{\frac{A}{2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\varphi}e^{-j2\pi f_0 t}\} =$ $= \frac{A}{2}e^{j\varphi}\cdot\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}e^{-j\varphi}\delta(f+f_0).$ |



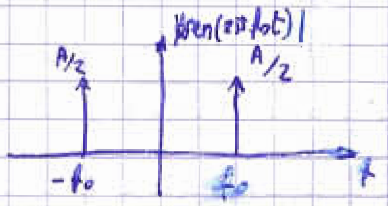



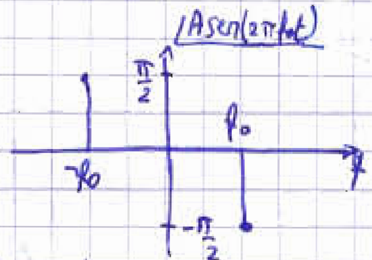

In particolare

$\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $\quad e^{-\frac{\pi}{2}j}$

$\text{sen}(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j}\delta(f-f_0) - \frac{1}{j}\delta(f+f_0)\right]$

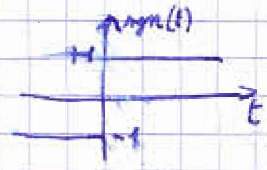


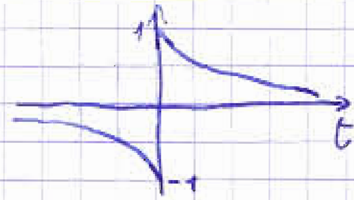




4/12/08

| | | |
|---|---|---|
| $\text{sgn}(t)$ | $\frac{1}{j\pi f}$ | $\downarrow$ |

$\hookrightarrow = \begin{cases} +1 & \text{per } t>0 \\ -1 & \text{per } t<0 \end{cases}$ Possiamo scrivere $\text{sgn}(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$



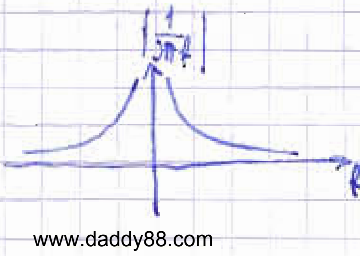

$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} - \mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\}$

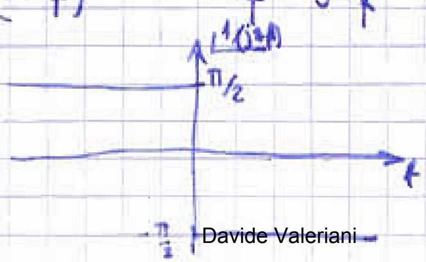
$\frac{1}{a+j2\pi f} - \frac{1}{a-j2\pi f} =$

$= \frac{a - j2\pi f - a - j2\pi f}{a^2+(2\pi f)^2} = \frac{-4\pi f j}{a^2+(2\pi f)^2}$

La funzione segno è uguale a

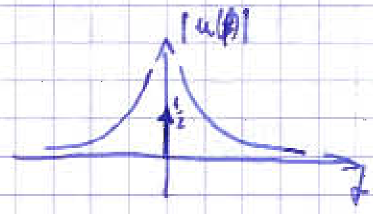
$\lim_{a\to 0}\left(e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)\right) = \frac{-j4\pi f}{(2\pi f)^2} = -j\cdot\frac{1}{\pi f} = \frac{1}{j\pi f}$

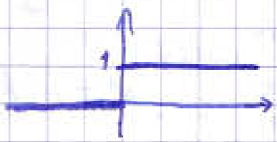


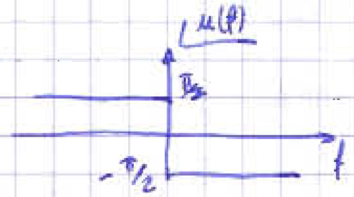



Gradino

$$u(t) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 + \mathrm{sgn}(t)\right)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$



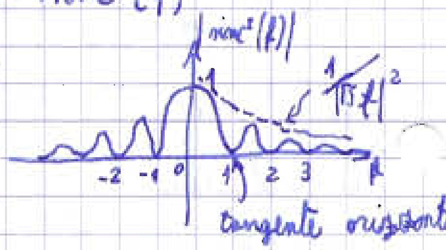




Triangolo $\Lambda(t) = (1 - |t|)\cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$

$\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$ da T.D.S.A!!! $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}\{\Pi(t)\}^2 = \mathrm{sinc}^2(f)$

$A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow A\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)$ nel nostro caso $A=1$, $\tau=1$

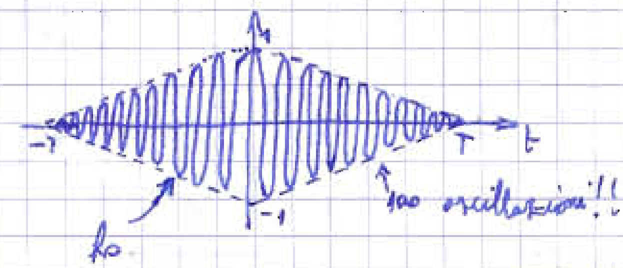
funzione reale $\to$ fase nulla




ESERCIZIO

$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\frac{200\pi t}{T}\right) \qquad f_0 = \frac{100}{T}$$

$$\cos\left(2\pi\frac{100}{T}t\right)$$

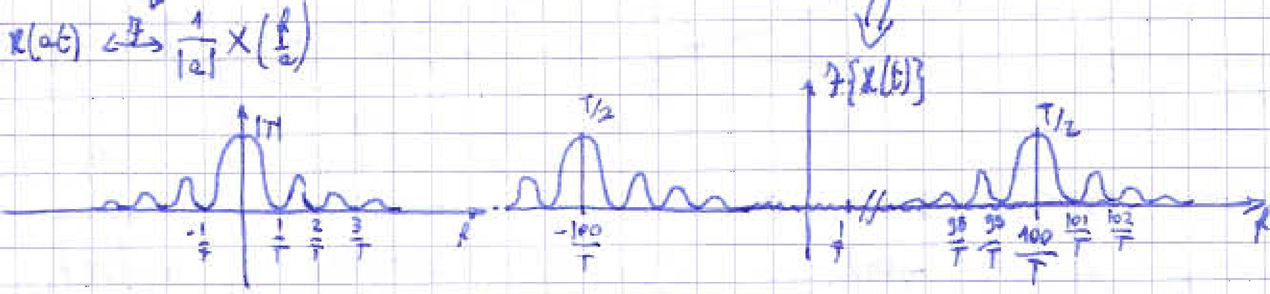



$$x(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right]$$

$$\boxed{\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow[\text{teorema cambiamento di scala}]{\mathcal{F}} |T|\cdot\mathrm{sinc}^2(fT)}$$

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ $\frac{T}{2}\left[\mathrm{sinc}^2[T(f-f_0)] + \mathrm{sinc}^2[T(f+f_0)]\right]$

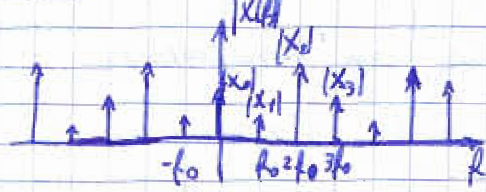


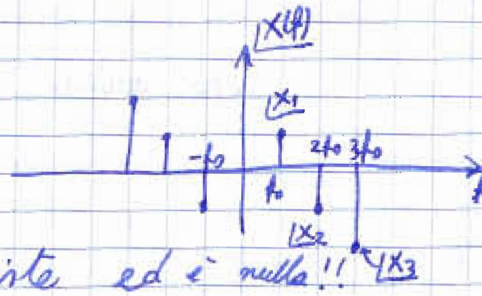

Le piccole oscillazioni le posso trascurare e quindi non mi influenzano la somma, altrimenti avrei dovuto sommare i due contributi.

## Segnali periodici

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\cdot e^{j2\pi k f_0 t} \qquad \mathcal{F}\{x(t)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\cdot \underbrace{\mathcal{F}\{e^{j2\pi k f_0 t}\}}_{\downarrow \mathcal{F}\ \downarrow \text{frequenza}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\cdot\delta(f-kf_0)$$

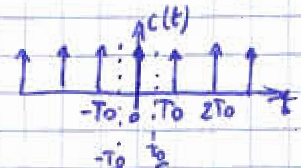
Somme di $\delta$ centrate nei multipli di $f_0$, $\delta(f-kf_0)$ con peso complesso $X_k$.




Tra una riga ($\delta$) e l'altra la trasformata esiste ed è nulla!!

Se $c(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$




PETTINE DI DELTA

non campion.

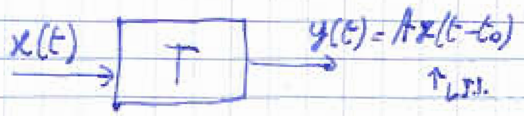
$$X_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot e^{j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)\, e^{j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\cdot e^{j2\pi k f_0\cdot 0} = \frac{1}{T_0}$$

non dipende da $k$ ↓ tutti uguali a $1/T_0$

$$\mathcal{F}\{c(t)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_0}\,\delta(f-kf_0)=\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-kf_0)$$


Se aumento $T_0$, le $\delta$ si diradano in $c(t)$ e l'area diminuisce nella frequenza.

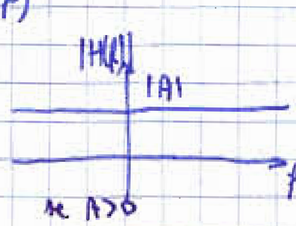
SISTEMI NON DISTORCENTI → se il segnale di uscita è legato a quello d'ingresso mediante moltiplicazione per costanti e/o traslazione nel tempo.

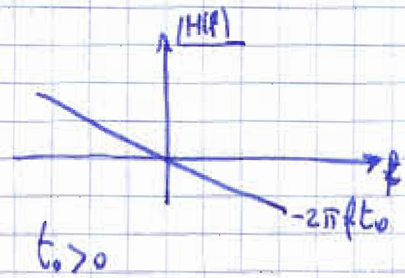



Non tutti i sistemi L.T.I. sono non distorcenti!

$$Y(f)=X(f)\cdot H(f) \Rightarrow H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)} \qquad Y(f)=\mathcal{F}\{A\,x(t-t_0)\}=A\cdot X(f)\cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\Rightarrow H(f)=\frac{A\cdot \cancel{X(f)}\cdot e^{-j2\pi f t_0}}{\cancel{X(f)}}=A\cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

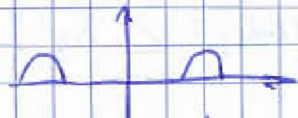



filtro passa-tutto

non esistono nella realtà (se non per macinare le verdure!!!!).

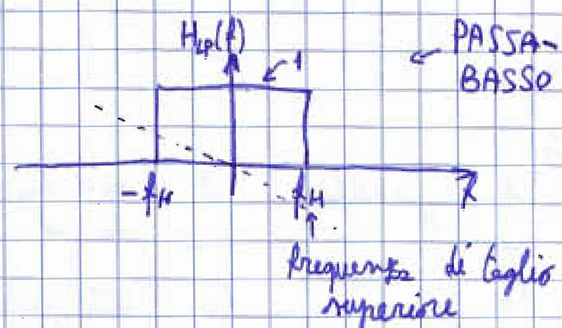
L'approssimazione migliore è un passa-banda reale. → tutti i sistemi sono distorcenti!

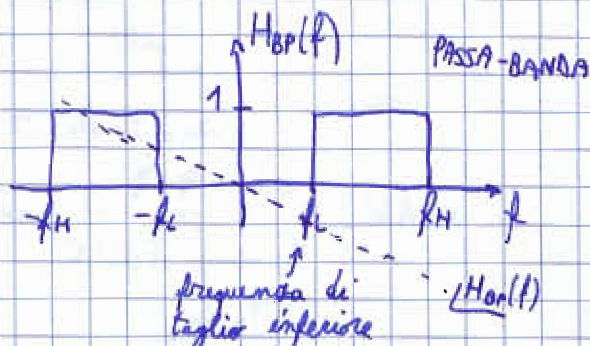
Tuttavia, se ho un segnale  mi basta avere un filtro passa banda reale opportuno (distorcente in assoluto) per non aver distorsione (nella sua banda passante è non distorcente).

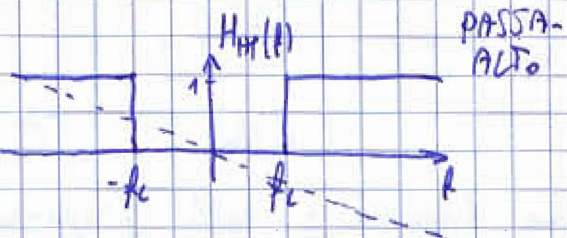
I segnali devono quindi avere un andamento opportuno, cioè contenuto frequenziale in corrispondenza della banda passante del mio filtro.

11/12/08

FILTRI IDEALI

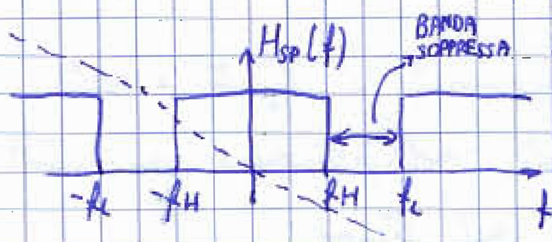


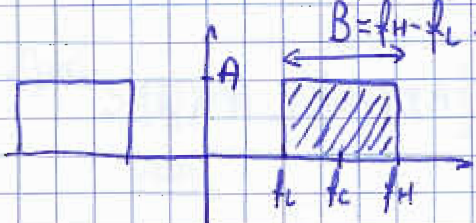




PASSA-BASSO → passa-banda con $f_L = 0$

PASSA-ALTO → passa-banda con $f_H = +\infty$




FILTRO STOP-BAND
↓
SOPPRESSORE DI BANDA



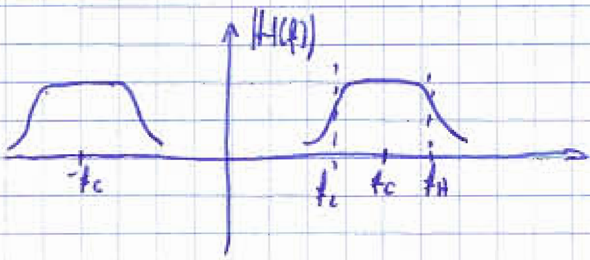

$B = f_H - f_L$ → BANDA PASSANTE → è anche la zona individuata da $|H|$

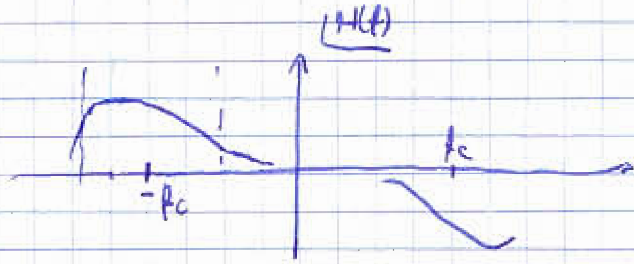
↳ intervallo di frequenze che passano all'interno del filtro (BANDA UNILATERA)

$f_c$ → FREQUENZA CENTRALE $= \frac{f_L + f_H}{2}$ → punto in cui il guadagno è massimo.

A → GUADAGNO

## FILTRI REALI

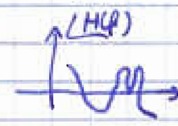



DISTORSIONI
- LINEARI → introdotte dai sistemi lineari (filtri ideali)
- NON LINEARI → introdotte dai sistemi non lineari

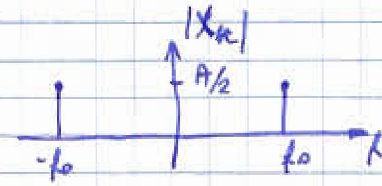
DISTORSIONI LINEARI
- DISTORSIONI DI AMPIEZZA → modulo non costante nella banda

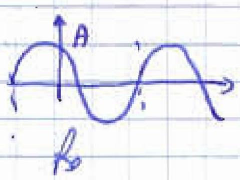

- DISTORSIONI DI FASE → argomento non rettilineo



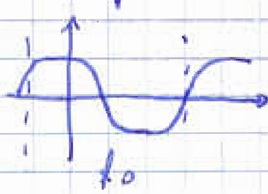

In generale sono presenti entrambe.

$x(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y(t)$ Il sistema è lineare?

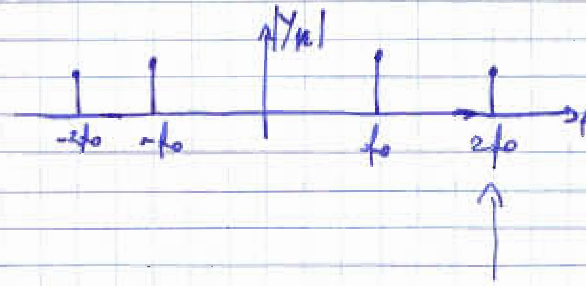



sinusoide

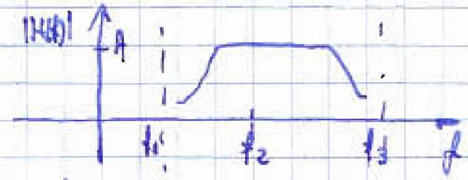



segnale periodico



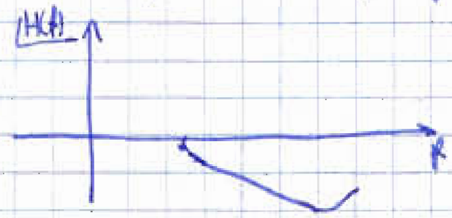

⟹ Il sistema NON è lineare perché il sistema crea delle sinusoidi che prima non c'erano, mentre quelli lineari amplificano la sinusoide e/o la spostano, ma non ne creano altre.

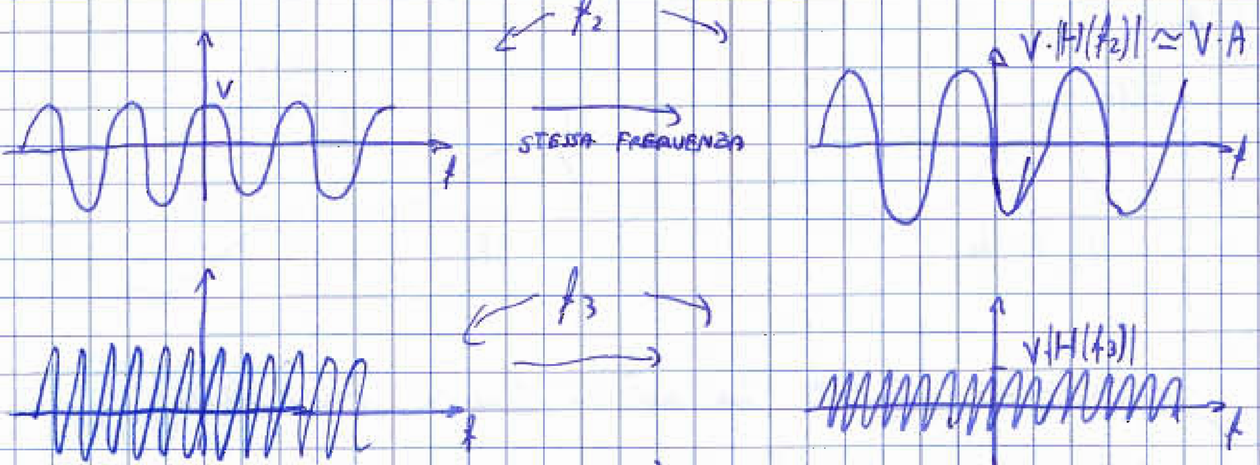
Dato un filtro passa-banda reale:




$x(t) = V\cos(2\pi f t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t) = V\,|H(f)|\cdot\cos(2\pi f t +$

Faccio variare la freq. f tra




$$P_1 = \frac{V^2 \cdot |H(f_1)|^2}{2} \qquad P_2 = \frac{V^2 \cdot |H(f_2)|^2}{2} \qquad P_3 = \frac{V^2 \cdot |H(f_3)|^2}{2}$$

$$f_L \rightarrow \frac{\dfrac{\cancel{V^2} \cdot |H(f_L)|^2}{\cancel{2}}}{\dfrac{\cancel{V^2} \cdot |H(f_C)|^2}{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}$$

La frequenza $f_L$ è la frequenza per la quale il segnale di uscita ha potenza pari a $\frac{1}{2}$ della potenza massima (quella a centro banda)

$$|H(f_L)|^2 = \frac{1}{2} |H(f_C)|^2$$

In modo analogo $|H(f_H)|^2 = 1/2 \, |H(f_C)|^2$

| $\frac{P_1}{P_2}$ | $\log_{10} \frac{P_1}{P_2}$ [Bel] | $10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$ [dB] |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 10 |
| 100 | 2 | 20 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $10^{10}$ | 10 | 100 |

CASI PARTICOLARI →

| $\frac{P_1}{P_2}$ | $\log_{10} \frac{P_1}{P_2}$ | $10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$ |
|---|---|---|
| 2 | $\log 2 = 0{,}301$ | $\simeq 3$ dB |
| $\frac{1}{2}$ | $\log \frac{1}{2} = -0{,}301$ | $\simeq -3$ dB |

In corrispondenza di $f_L$ e $f_H$ ho rapporto $-3$dB. La banda $B = f_H - f_L$ è detta anche BANDA A 3dB.

La banda a 1dB è più stretta ma individua meglio la zona non distorcente.

RUMORE $40\,dB \rightarrow \dfrac{P}{P_0}$ $P \rightarrow$ potenza che misuro (attraverso un microfono)

$P_0 \rightarrow$ soglia di udibilità, $\simeq 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)_{dB} = 40 \longrightarrow \frac{P}{P_0} = 10^{\frac{(P/P_0)_{dB}}{10}} = 10^4 = 10000$$

120 dB → soglia del dolore

$$\frac{P}{10^{-12}} = 10^4 \qquad P = 10^{-8}\,\frac{W}{m^2}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\phantom{HHH}} \longrightarrow y(t)$$

$$\begin{cases} b_0 y(t) + b_1 \dfrac{dy(t)}{dt} + \ldots + b_N \dfrac{d^N y(t)}{dt^N} = a_0 x(t) + a_1 \dfrac{dx(t)}{dt} + \ldots + a_M \dfrac{d^M x(t)}{dt^M} \quad E.D. \\ y(0) = [0] \\ y'(0) = [0] \\ y^N(0) = [0] \end{cases}$$

se [ ] il sistema è lineare

↑ descrive completamente il sistema

Nel dominio della frequenza è più semplice

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \longleftrightarrow (j2\pi f)^2 \cdot X(f)$$

$$b_0 \cdot Y(f) + b_1 \cdot j2\pi f \cdot Y(f) + b_2 (j2\pi f)^2 \cdot Y(f) + \ldots + b_N (j2\pi f)^N Y(f) = a_0 X(f) +$$
$$+ a_1 (j2\pi f) X(f) + \ldots + a_M (j2\pi f)^M X(f)$$

$$Y(f)\left(b_0 + b_1 \cdot j2\pi f + \ldots + b_N (j2\pi f)^N\right) = X(f)\left(a_0 + a_1 \cdot j2\pi f + \ldots + a_M (j2\pi f)^M\right)$$

$$\boxed{H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot (j2\pi f) + \ldots + a_M (j2\pi f)^M}{b_0 + b_1 (j2\pi f) + \ldots + b_N (j2\pi f)^N}}$$

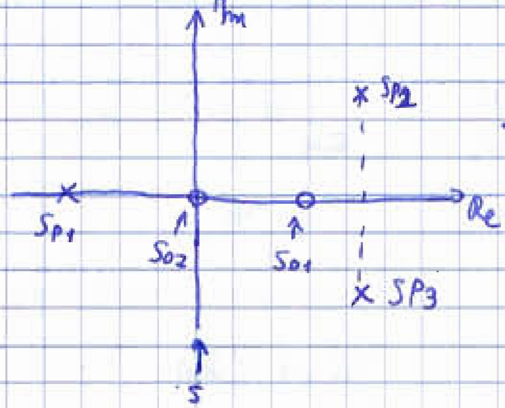
FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN QUALUNQUE SISTEMA LINEARE REALIZZABILE

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ polinomio $M$ radici.

Se coefficienti reali, radici reali o complesse coniugate

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \underset{s=j2\pi f}{=} \left.\frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_M s^M}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_N s^N}\right|_{s=j2\pi f} = \left. K \cdot \frac{(s-s_{01})\cdot(s-s_{02})\cdot\ldots\cdot(s-s_{0n})}{(s-s_{P1})\cdot(s-s_{P2})\cdot\ldots\cdot(s-s_{PN})}\right|_{s=j2\pi f}$$

ZERI → radici del numeratore $(M)$ → $s_{01}, s_{02}, \ldots, s_{0M}$ o reali o complessi coniugati \
POLI → radici del denominatore $(N)$ → $s_{P1}, s_{P2}, \ldots, s_{PN}$ o reali o complessi coniugati / se il sistema è reale



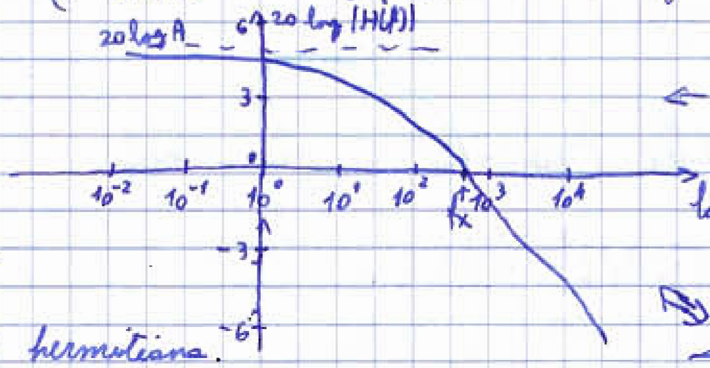

ZERI → O
POLI → X

$M=2$
$N=3$

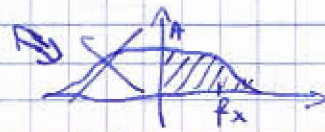
a me interessa $s = j2\pi f$ (immaginario puro)

$$H(s)\big|_{j2\pi f = s} \begin{cases} |H(f)| \\ \angle H(f) \end{cases}$$

$$\left(|H(f)|\right)_{dB} \to 10 \log |H(f)|^2 \quad \text{scala logaritmica}$$




← DIAGRAMMA DI BODE




In questa rappresentazione si rinuncia a rappresentare i valori per $f<0$ perché sappiamo esserci simmetria hermitiana.

Per $H(f) > 1$ (filtro amplificatore) il logaritmo è positivo, mentre per $H(f) < 1$ è negativo.

Per $\angle H(f)$ sulle ordinate si usa l'angolo direttamente.



Quanto vale $v_u(t)$?

$-v_i(t) + v_R(t) + v_u(t) = 0$ equazione di Kirchhoff alla maglia

$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$

$i_C(t) = i_R(t) = i(t)$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\tau)\,d\tau \qquad \frac{d v_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}\cdot i_C(t)$$

$t_0$ ← istante inizio

$$\underset{x(t)}{v_i(t)} = v_R(t) + v_C(t) = R\cdot i(t) + v_C(t) = R \cdot C \cdot \frac{d v_C(t)}{dt} + \underset{y(t)}{v_C(t)}$$

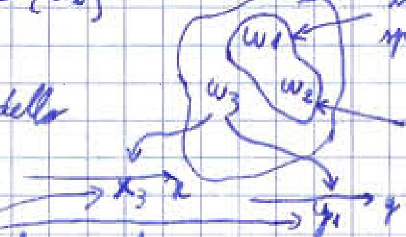
$$y(t) + RC \cdot \frac{d}{dt} y(t) = x(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad Y(f) + RC(j2\pi f)\,Y(f) = X(f) \qquad Y(f)\cdot\left(1+RC(j2\pi f)\right) = X(f)$$

$b_0 = 1$   $b_1 = RC$   $a_0 = 1$   trasformata della derivata

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1+RC(j2\pi f)} = \frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{\frac{1}{RC}+j2\pi f} \qquad h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(f)) = \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{1}{RC}t}\cdot u(t).$$

# PROCESSI STOCASTICI (o ALEATORI, o CASUALI)

SPAZIO CAMPIONE $S = \{w_i\}$




SPAZIO DI PROBABILITÀ

$(S, F, P\{\cdot\})$

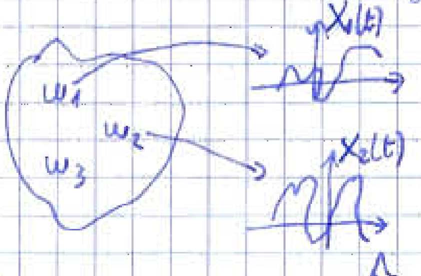
insieme eventi — probabilità associata a ciascun evento.

EVENTO → sottoinsieme dello spazio campione

VARIABILE ALEATORIA VA → legge che associa ad ogni uscita sperimentale un numero

Realizzazione di una VA: $x_3, y_1 \ldots$

PROCESSO STOCASTICO → legge che associa ad ogni uscita sperimentale un segnale




$X(w_i, t)$ PROCESSO ($w_i$: uscita sperimentale, $t$: tempo)

$$\Rightarrow \begin{cases} X(\overline{w_i}, t) & \text{SEGNALE DETERMINATO} \\ X(w_i, \bar{t}) & \text{VARIABILE ALEATORIA} \\ X(\overline{w_i}, \bar{t}) & \text{NUMERO} \end{cases}$$

Il processo può essere visto come un'infinito numero di VA.

FUNZIONI CAMPIONE o REALIZZAZIONI

N V.A. sono completamente date se ho la PDF CONGIUNTA

$f(x,y,z)$ PDF CONGIUNTA   $f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\,dy\,dz$   variabili che voglio far sparire

Un processo stocastico è dato se si conoscono tutte le PDF congiunte per qualunque N-upla.

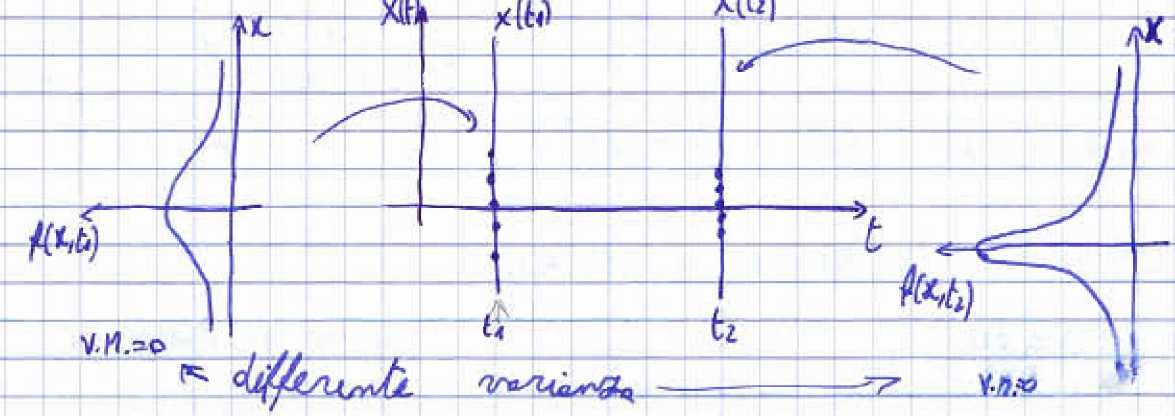
Per $n = 3 \rightarrow f_X(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$ (individuano la N-upla). In generale $f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ $\forall n$ intero

Fissato $n$, ottengo la DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONGIUNTA DI ORDINE $n$, del processo.

$n=1 \rightarrow$ DENSITÀ DI PROBABILITÀ DEL 1° ORDINE $f_x(x,t)$

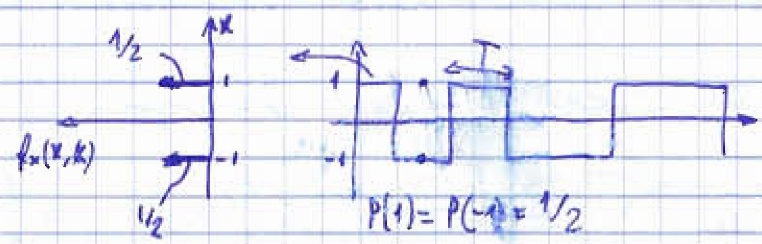
18/12/08

8/1/09 : 8.30-10.30 LEZIONE www.tlc.unipr.it/vannucci/studenti/testiDesame
14.30-16.30




Se $f_X(x,t) = f_x(x)$ non dipende dal tempo (costante), il processo si chiama STAZIONARIO DEL I° ORDINE.

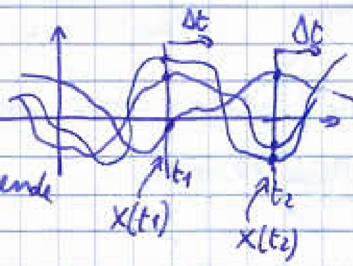
Per i processi voce/audio, la $f_x(x,t)$ è approssimabile a una Gaussiana, mentre per onde quadre avrò




STAZIONARIETÀ DI ORDINE $n$

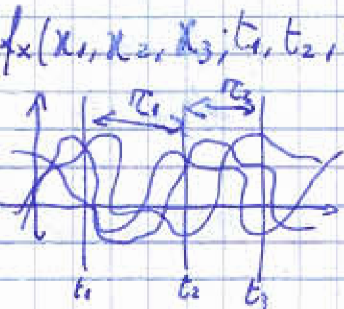
$n=1 \quad f_x(x_1,t_1) = f_x(x)$

$n=2 \quad f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_x(x_1,x_2,t_1+\Delta t,t_2+\Delta t) = f_x(x_1,x_2,\tau)$ ← $t_1-t_2$




insensibile da spostamenti temporali, dipende dalla distanza dei due istanti

$n=3 \; f_x(x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3) = f_x(x_1,x_2,x_3;t_1+\Delta t, t_2+\Delta t, t_3+\Delta t) = f_x(x_1,x_2,x_3,\tau_1,\tau_2)$




STAZIONARIETÀ IN SENSO STRETTO → stazionarietà di qualunque ordine ($n=1,2,\ldots$

La stazionarietà di ordine $n$ presuppone la stazionarietà degli ordini inferiori. Un sistema stazionario di ordine 3 è stazionario anche di ordine 2 e 1.

## VALOR MEDIO

$$E\{X(t)\} = \eta_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x,t)\, dx$$

Se stazionario del 1° ordine, il valor medio è costante.

V.A

$$E\{X\} = \eta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

conoscendo $X$ e $g$ e volendo calcolare $E\{Y = g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x)\, dx$

## VALORE QUADRATICO MEDIO

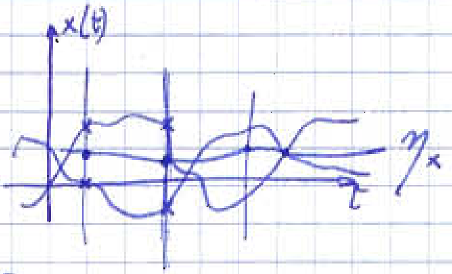
$$E\{\underbrace{X^2(t)}_{\text{potenza istantanea} \downarrow \text{V.A.}}\} = \text{media della potenza istantanea} = P_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_x(x,t)\, dx$$

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\, dx$$

## VARIANZA

$$\sigma_x^2(t) = E\{(X(t) - \eta_x(t))^2\} = E\{X^2(t)\} - \eta_x^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_x(t))^2 f_x(x,t)\, dx$$

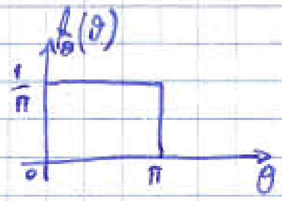
$$\sigma_x^2 = E\{(X-\eta_x)^2\} \overset{\text{T.A.}}{=} E\{X^2\} - \eta_x^2$$



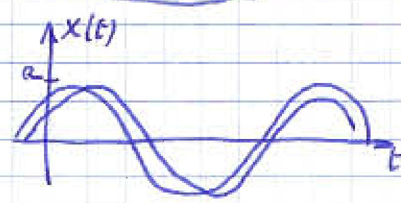

ES.

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \underset{\uparrow \text{V.A.}}{\Theta})$$

$f_\theta(\theta)$:

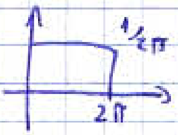



MINUSCOLO $\vartheta$
MAIUSCOLO $\Theta$




Stazionario?

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a\cos(2\pi f_0 t + \vartheta) \cdot f_\Theta(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2\pi f_0 t + \theta)\, d\theta = -\frac{2a}{\pi} \underset{\uparrow \text{NON STAZIONARIO}}{\operatorname{sen}(2\pi f_0 t)}$$

Se  → PROCESSO ARMONICO → le realizzazioni sono tutte sinusoidi con fase iniziale uniformemente distribuita tra 0 e $2\pi$.


$E\{X(t)\} = 0$ !!!!

## FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

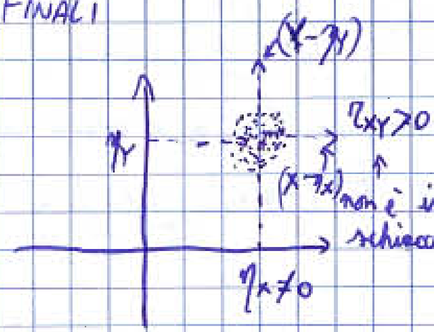
$$R_x(t_1,t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \cdot \overbrace{f_x(x_1,x_2;t_1,t_2)}^{\text{stazionarietà di ordine 2.}}\, dx_1\, dx_2$$

$$\underset{\substack{\text{CORRELAZIONE} \\ \uparrow \\ r_{XY}}}{E\{X \cdot Y\}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

Come la $f_{XY}$ è distribuita sui vari quadranti


LEZIONI 8/1 AULA C 8:30 - 10:30
FINALI 14.30 - 16:30

22/12/08



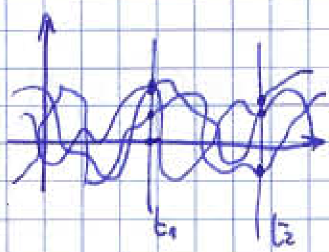

non è indice di schiacciamento → COVARIANZA tendenza di due VA ad assumere lo stesso segno

$$C_{XY}=E\{(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)\}$$

$$r_{XX}=E\{X^2\} \qquad C_{XX}=E\{(X-\eta_X)^2\}=\mathrm{Var}\,X=\sigma_X^2$$

$$\boxed{\sigma_X^2=E\{X^2\}-\eta_X^2} \qquad \boxed{C_{XY}=r_{XY}-\eta_X\eta_Y=E\{XY\}-\eta_X\eta_Y}$$

analogie




$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)\cdot X(t_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\cdot f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2$$

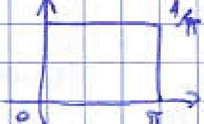
$\underset{\text{processo}}{E\{X^2(t)\}}$ = POTENZA ISTANTANEA STATISTICA → $R_X(t_1,t_1)=E\{X^2(t_1)\}$ = POTENZA DEL PROCESSO

Per $t_2$ molto vicino a $t_1$, $R_X(t_1,t_2)$ tende al valore massimo che può assumere (potenza del processo). Per $t_2$ molto lontano, $R_X \to 0$.

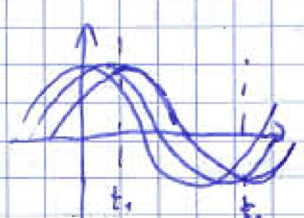
$R_X$ → dipende dal contenuto frequenziale.

Sia $x(t)=a\cos(2\pi f_0 t+\Theta)$ :

V.A.




caso $\Theta$ costante




$$\boxed{R_X(t_1,t_2)}=E\{X(t_1)X(t_2)\}=$$

$$=E\{a\cos(2\pi f_0 t_1+\theta)\cdot a\cos(2\pi f_0 t_2+\theta)\}$$

$$=a^2\int_0^{\pi}\cos(2\pi f_0 t_1+\theta)\cdot\cos(2\pi f_0 t_2+\theta)\cdot\frac{1}{\pi}\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\underbrace{\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\theta)}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1-t_2))}_{\text{costante non dipende da }\theta}$$

dipende dalla distanza delle due V.A.

analogo → densità di probabilità del 2° ordine (stazionarietà)

$$=\boxed{\frac{a^2}{2\pi}\cdot\cos(2\pi f_0(t_1-t_2))\cdot\pi}$$

# PROCESSI STAZIONARI IN SENSO LATO

$X(t)$ stazionario in senso lato se:

- $\eta_x(t) = \eta_x$ costante
- $R_x(t_1,t_2) = R_x(t_1-t_2) = R_x(\tau)$ con $\tau = t_1 - t_2$

Nell'esempio di prima, $\eta_x(t) = \frac{2a}{\pi}$ sen $2\pi f_0 t$ ← dipende dal tempo ⇒ non è costante ⇓ non stazionario

ESERCIZIO

Calcolare $R_x(t_1,t_2)$ di $X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ con $f_\Theta(\theta)$:

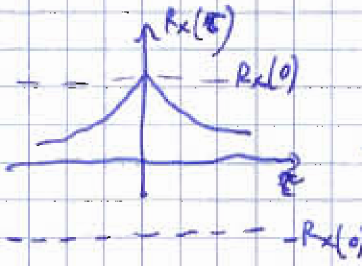

$\boxed{\eta_x(t)=0 \quad R_x(t_1,t_2) \text{ identica a prima}}$

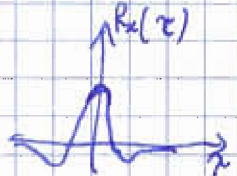
PROPRIETÀ DI $R_x(\tau)$

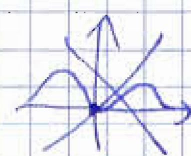
→ $R_x(0) = E\{X^2(t)\}$

→ $R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$

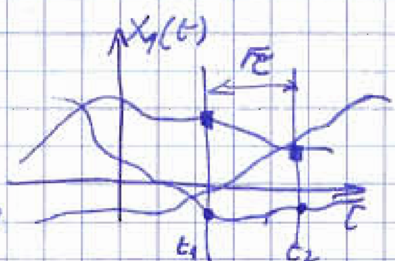
→ $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ (funzione pari)

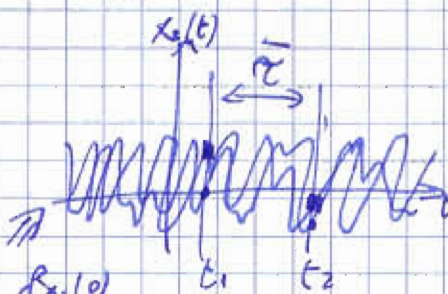


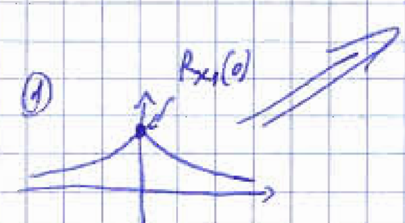



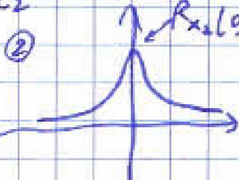



$R_x(0) \geq 0 \quad \forall x$



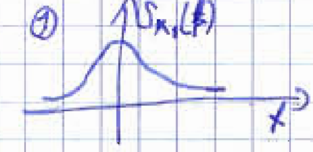



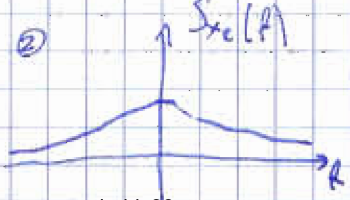

Se $R_{x_1}(0) = R_{x_2}(0)$, $R_x(\tau)$ sarà più veloce a cambiare a seconda della frequen[za]

- FREQUENZE "CALME" → più probabile che $X(t_1) = X(t_2)$ → $R_x$ lenta a cambiare
- FREQUENZE ALTE → meno " " " " → $R_x$ rapida, veloce a cambia[re]

# DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA (per processi stazionari almeno in senso l[ato])

$S_x(f) \triangleq \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$ reale perché $R_x(\tau)$ pari.
pari perché $R_x(\tau)$ reale.



$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t}\, df \qquad x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).$$

$$E\{X^2(t)\} = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df$$ POTENZA DEL PROCESSO → area della densità spettrale di potenza

## SPETTRI

$x(t) \xleftrightarrow{SF} X_k$ segnali periodici

$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$ segnali non periodici

$X(t) \longrightarrow S_x(f)$ processi stazionari in senso lato

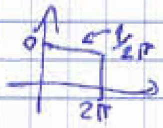
non vale il viceversa

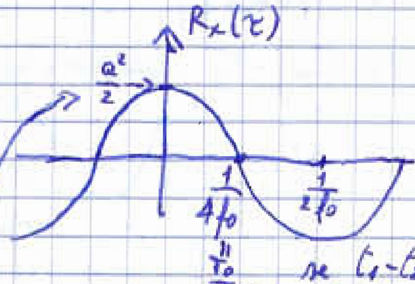
Possono esserci tanti processi aventi stessa densità spettrale.

$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

$$\begin{cases} R_x(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) \\ \eta_x = 0 \end{cases}$$

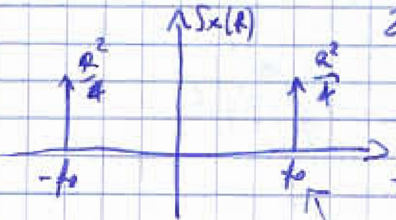
$f_\theta(\theta) =$




$\frac{1}{4f_0} = \frac{T_0}{4}$ → se $t_1 - t_2 = \frac{T_0}{4}$ incorrelate ($R_x = 0$)

$$S_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$




solo una frequenza dà contributo al processo

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

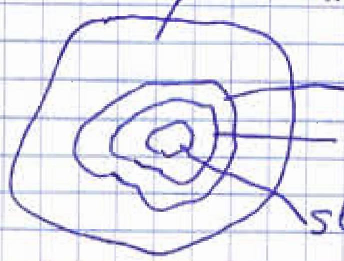
$X(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(t)$

$S_x(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$

08/01/2009

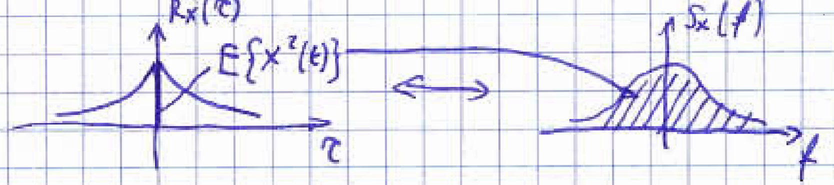
PROCESSI STAZIONARI
- SENSO STRETTO
- DI ORDINE $n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$
- SENSO LATO $(\eta_x(t) = \eta_x \ ;\ R_x(t_1; t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau))$, con $\tau = t_1 - t_2$

$$R_x(0) = E\{X^2(t)\}$$

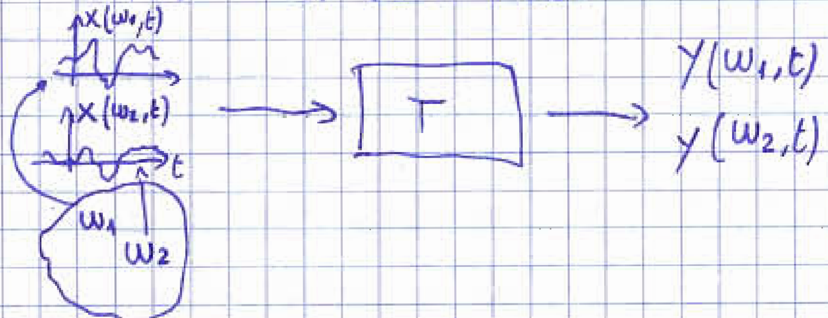


$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}$

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA




# FILTRAGGIO DI PROCESSI




SISTEMA L.T.I.

$$\begin{matrix} X(\omega_1,t) \\ X(\omega_2,t) \\ \vdots \end{matrix} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \begin{matrix} Y(\omega_1,t) = X(\omega_1,t) * h(t) \\ Y(\omega_2,t) = X(\omega_2,t) * h(t) \\ \vdots \end{matrix}$$

in generale $Y(t) = X(t) * h(t)$

Difficile in generale → si analizzano le proprietà statistiche:

VALOR MEDIO E FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$X(t) \qquad\qquad\qquad Y(t)$$

$$\begin{cases} \eta_X(t) \\ R_X(t_1,t_2) \end{cases} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \begin{cases} \eta_Y(t) \\ R_Y(t_1,t_2) \end{cases}$$

È importante saper calcolare $\eta_Y(t)$ e $R_Y(t_1,t_2)$ conoscendo quelle di $X(t)$.

VALOR MEDIO

$$\boxed{\eta_Y(t)} = E\{Y(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\cdot X(t-\alpha)\,d\alpha\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\cdot \underbrace{E\{X(t-\alpha)\}}_{\eta_X(t-\alpha)}\,d\alpha =$$

a seconda di $t$ calcolo $Y(t)$
$\alpha$ è come il $\tau$ usato

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\cdot \eta_X(t-\alpha)\,d\alpha = \boxed{\eta_X(t) * h(t)}$$

normale convoluzione

Un sistema L.T.I. filtra il valor medio (che può non essere una realizzazione del processo).

Se $\eta_X(t) = \eta_X$ costante $\longrightarrow \eta_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\cdot \underbrace{\eta_X(t-\alpha)}_{\text{costante}}\,d\alpha = \eta_X \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,d\alpha$ non dipende dal tempo

$\Longrightarrow \eta_Y(t) = \eta_Y$ costante

$$= \eta_X \cdot H(0).$$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$R_Y(t_1,t_2) = E\{Y(t_1)\cdot Y(t_2)\} = E\left\{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\cdot h(t_1-\alpha)\,d\alpha\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta)\cdot h(t_2-\beta)\,d\beta\right]\right\} =$$

$$= E\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-\alpha)\cdot h(t_2-\beta)\cdot X(\alpha)\cdot X(\beta)\, d\alpha\, d\beta \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-\alpha)\cdot h(t_2-\beta)\cdot E\{X(\alpha)\cdot X(\beta)\}\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-\alpha)\, h(t_2-\beta)\cdot R_X(\alpha,\beta)\cdot d\alpha\, d\beta = \ldots = \underbrace{R_X(t_1,t_2) * h(t_1)}_{} * h(t_2)$$

faccio prima questa e considero $t_2$ costante
$\Rightarrow$ ottengo una $f(t_2) \Rightarrow f(t_2) * h(t_2)$.

## PROCESSI S.S.L.

$R_X(t_1,t_2) = R_X(t, t-\tau) = E\{X(t)\cdot X(t-\tau)\} = \ldots$ se ottengo una funzione solo di $\tau$, allora il processo è SSL

$t_1 = t$, $t_2 = t-\tau \Rightarrow t_1 - t_2 = \tau$

$R_X(\tau)$

FACCHINAGGIO ALGEBRICO

$R_Y(t_1,t_2) = E\{Y(t_1)\cdot Y(t_2)\} = E\{Y(t)\cdot Y(t-\tau)\} \ldots$

Se $R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau)$ allora $R_Y(t_1,t_2) = R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$

Riassumendo: se $X(t)$ è S.S.L.

$$\begin{cases} \eta_X \\ R_X(\tau) \end{cases} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \begin{cases} \eta_Y = \eta_X \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt = \eta_X \cdot H(0) \\ R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \end{cases}$$

$\Updownarrow \mathcal{F}$ $\qquad\qquad\qquad \Updownarrow \mathcal{F}$

$S_X(f) \qquad\qquad \boxed{S_Y(f) = S_X(f)\cdot H(f)\cdot H(-f)}$

Se $h(t)$ è reale $\Rightarrow H(f)^* = H(-f) \Longrightarrow \boxed{= S_X(f)\cdot |H(f)|^2}$

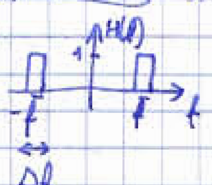
$X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow Y(f) = X(f)\cdot H(f)$

$S_X(f) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow S_Y(f) = S_X(f)\cdot |H(f)|^2$.

$S_X(f)$ è reale e pari


$S_X(f) \geq 0$

$$\xrightarrow[S_X(f)]{x(t)} \boxed{H(f)} \xrightarrow[S_Y(f)]{y(t)}$$





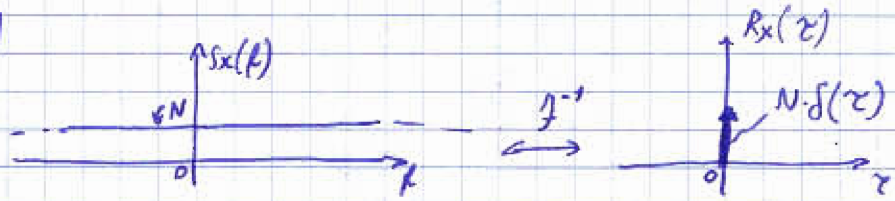
$P_Y = E\{Y^2(t)\} \simeq 2\cdot\Delta f\cdot S_X(\bar{f}) \geq 0$

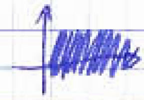
DEVE!!!

Se $S_X(\bar{f}) < 0$, $P_Y < 0$, che non può essere!

# PROCESSI BIANCHI

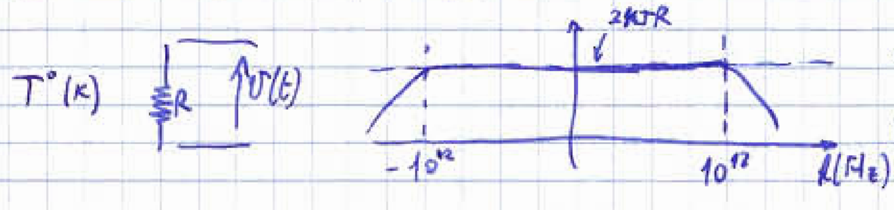
$S_x(f) = N$ ← costante




Realizzazioni super-agitate. Processo irrealizzabile. 

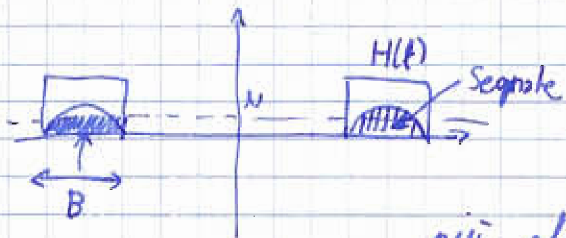
La potenza di un processo bianco è $\infty$.

Questo è il modello matematico di molti DISTURBI, in particolare del RUMORE TERMICO.




approssimabile a una retta perché tutte le frequenze di interesse stanno tra $-10^{12}$ e $10^{12}$

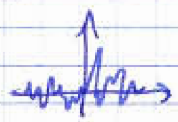
## PROCESSO BIANCO FILTRATO




Ogni segnale deve quindi essere filtrato per potere eliminare il rumore termico (sempre presente). Per farlo, uso un filtro più stretto possibile che non altere il segnale.

così elimino tanto rumore

POTENZA DI RUMORE $= 2B \cdot N$




POTENZA DI RUMORE $= 2B' \cdot N$

Per ridurre il rumore devo abbassare N.

# PROCESSI GAUSSIANI

$X(t)$ è gaussiano se fissati $t_1, t_2, \dots, t_n$ il vettore colonna

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

è composto da V.A. congiuntamente gaussiane,

cioè $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det C_x}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[(\bar{x}-\bar{\eta}_x)^T \cdot C_x^{-1} \cdot (\bar{x}-\bar{\eta}_x)\right]}$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \bar{\eta}_x = \begin{bmatrix} \eta_{x_1} \\ \eta_{x_2} \\ \vdots \\ \eta_{x_n} \end{bmatrix} \qquad C_x = \begin{bmatrix} Cov(X_1,X_1) & \dots & Cov(X_1,X_n) \\ \vdots & & \\ Cov(X_n,X_1) & \dots & Cov(X_n,X_n) \end{bmatrix}$$

MATRICE DI COVARIANZA

$$Cov(X_i, X_j) = E\{(X_i - \eta_i)(X_j - \eta_j)\}$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)}{2\sigma_x^2}} \Leftarrow \text{Gaussiana semplice.}$$

Un processo Gaussiano è completamente descritto dal suo valor medio e dalla funzione di autocorrelazione.

Siano note:

$\eta_x(t)$

$C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - \eta_x(t_1)\eta_x(t_2)$

FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA

fissati $t_1, t_2, \dots, t_n$

$$\bar{\eta}_x = \begin{bmatrix} \eta_x(t_1) \\ \eta_x(t_2) \\ \vdots \\ \eta_x(t_n) \end{bmatrix} ; \quad C_x = \begin{bmatrix} C_x(t_1,t_1) & \dots & \\ \vdots & \dots & \vdots \\ & \dots & C_x(t_n,t_n) \end{bmatrix}$$

E questo dimostra che il sistema è descritto completamente.

PROPRIETÀ DEI PROCESSI GAUSSIANI:

- S.S.L. $\Longrightarrow$ S.S.S. $\quad \begin{cases} \eta_x(t) = \eta_x \\ C_x(t_1 - t_2) = R_x(t_1 - t_2) - \eta_x^2 \end{cases} \Rightarrow \bar{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_x \\ \vdots \\ \eta_x \end{bmatrix} ; \ C_x = \begin{bmatrix} C_x(t_1 - t_1), C_x(t_1 \dots \\ \vdots \\ C_x(t_n - t_1) \dots \end{bmatrix}$

MATRICE SIMM.

$C_x(t_1 - t_2) = C_x(t_2 - t_1)$

Spostando gli n valori, ottengo sempre le stesse cose perché le differenze non cambiano $\Rightarrow$ S.S.S.

FILTRAGGIO DI PROCESSI GAUSSIANI (sistemi L.T.I.)

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) h(t-\alpha)\, d\alpha$$

$$\begin{cases} Y(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) h(t_1 - \alpha)\, d\alpha \\ \vdots \\ Y(t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) h(t_n - \alpha)\, d\alpha \end{cases}$$

insieme di V.A. congiuntamente Gaussiane

se X(t) gaussiano $\Rightarrow$ Y(t) gaussiano

se X(t) gaussiano e stazionario in senso lato (SSL),

$\begin{cases} \eta_x \\ R_x(\tau) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_Y \\ R_Y(\tau) \end{cases}$ allora sarà S.S.S. e Gaussiano anche in uscita.

S.S.L. $\longrightarrow$ S.S.L.

Dato un processo gaussiano di valor medio $\eta_x$ e funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$, trovare la densità di probabilità del primo ordine.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad \text{con } \sigma_x^2 = R_X(0) - \eta_x^2$$

Faccio transitare $X(t)$ in un filtro di data $h(t)$ e $H(f)$, trovare $f_Y(y)$.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{-\frac{(y-\eta_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} \quad \text{con } \eta_Y = \eta_x \cdot H(0) = \eta_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt$$

$$\sigma_Y^2 = R_Y(0) - \eta_Y^2 \qquad R_Y(\tau)\big|_{\tau=0} = R_X(\tau) * h(\tau) * h$$

calcolato in $\tau = 0$

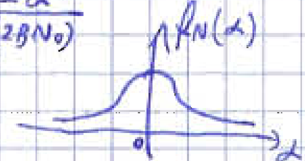
Conoscendo $S_X(f)$, $S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2$. La potenza del segnale di uscita $P_Y = E\{Y^2(t)\} = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\,df$

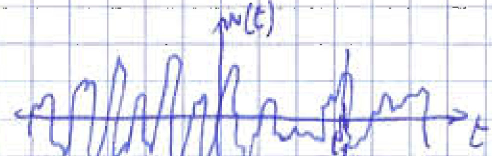

Dato $N(t)$ gaussiano e v.m. nullo $\qquad \eta_N = 0$

rumore

$$\underset{\text{VARIANZA}}{\sigma_N^2} = \underset{\text{POTENZA}}{R_X(0)} - \underset{!!}{\eta_N^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_N(f)\,df = 2 \cdot B \cdot N_0$$

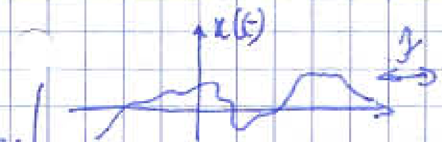
$$\underset{\text{DENSITÀ DI PROBABILITÀ PRIMO ORDINE}}{f_N(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2BN_0)}} \cdot e^{\frac{-\alpha^2}{2(2BN_0)}}$$

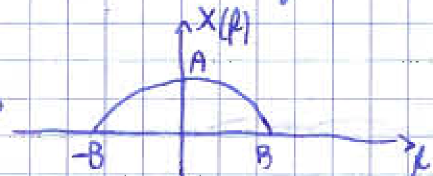


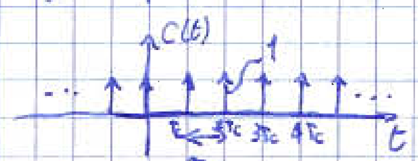

$$P(\alpha > 0) = \frac{1}{2} = P(N(t) > 0)$$

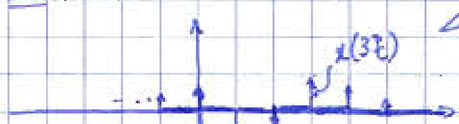
# CAMPIONAMENTO (Segnali determinati)




$X(f) = 0$ per $|f| > B$ banda strettamente limitata




Campionamento ideale → si perde l'andamento del segnale di partenza fuori dalle $\delta$.

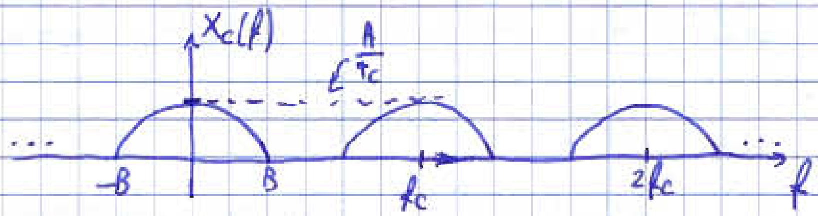
$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) \qquad x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \cdot \delta(t - nT_c) = x(t) \cdot c(t)$$

$$\boxed{X_c(f)} = \mathcal{F}\{x_c(t)\} = X(f) * C(f) = X(f) * \left[ \underset{\text{INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO}}{\frac{1}{T_c}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k\underset{\text{FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO}}{f_c}) \right] =$$

$$f_c = \frac{1}{T_c}$$

$$= \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta(f-kf_c) = \boxed{\frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f-kf_c)}$$

PERIODICIZZAZIONE DEL SEGNALE (SPETTRO) DI PARTENZA

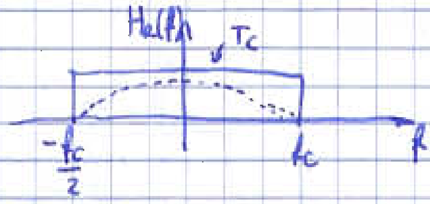



Posso, dal segnale campionato, ricostruire quello di partenza se:

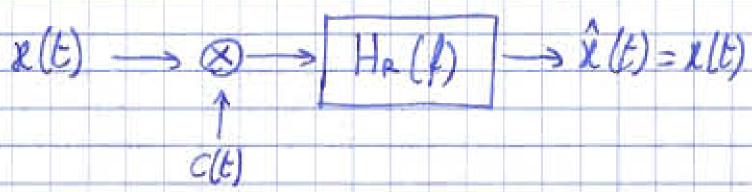
1) $f_c \geq 2B$ ← CONDIZIONE DI NYQUIST

FREQUENZA DI NYQUIST (minima)

2) utilizzo un FILTRO DI RICOSTRUZIONE (passa-basso) $H_R(f)$ di banda $\frac{f_c}{2}$ e ampiezza $T_c$.




$$H_R(f) = T_c \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right)$$



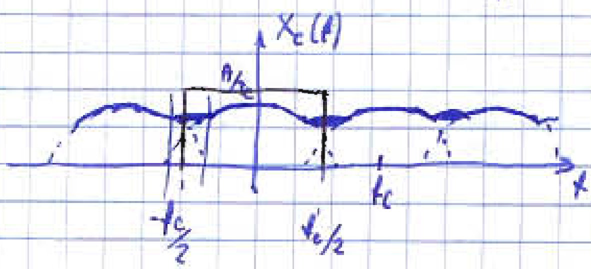

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

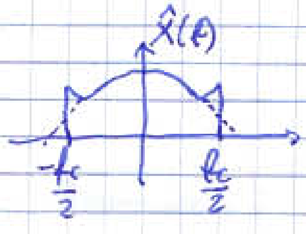
Un segnale $x(t)$ è ricostruibile sulla base dei suoi campioni se

1) è a banda strettamente limitata $B$ (unilatera)

2) è soddisfatta la condizione di Nyquist ($f_c \geq 2B$)

Sia $f_c < 2B$




Dal filtro di ricostruzione esce un segnale con banda inferiore a $B$ e diverso ai bordi: DISTORSIONE DA ALIASING

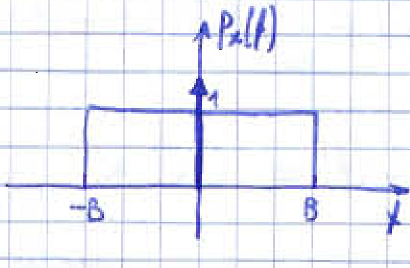
CAMPIONAMENTO MOLTIPLICATIVO e A MANTENIMENTO → sul libro

ESERCIZI 02/02/07

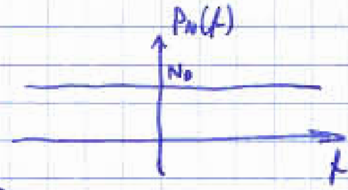
$X(t)$ SSL

$\eta_x(t) = 1$

$P_x(f) = \delta(f) + \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$



$Z(t) = X(t) + N(t)$ indipendenti




$N(t)$: stazionario, gaussiano $\}$ S.S.S.
bianco $\rightarrow P_N(f) = N_0$ costante
a media nulla $\Rightarrow$ S.S.L.

Dimostrare che $Z(t)$ è S.S.L.:

$$\eta_Z(t) = E\{Z(t)\} = E\{X(t)+N(t)\} = \eta_X(t) + \eta_N(t) = 1 + 0 = 1 \text{ costante } \checkmark$$

$$R_Z(t_1,t_2) = E\{Z(t_1)\cdot Z(t_2)\} = E\{[X(t_1)+N(t_1)]\cdot[X(t_2)+N(t_2)]\} = E\{X(t_1)\cdot X(t_2)\} + E\{X(t_1)\cdot N(t_2)\}$$

$$+ E\{N(t_1)\cdot X(t_2)\} + E\{N(t_1)\cdot N(t_2)\} = E\{X(t_1)X(t_2)\} + \eta_X\cdot\underset{0}{\eta_N} + \underset{0}{\eta_N}\cdot\eta_X + E\{N(t_1)N(t_2)\} = \underset{R_X(t_1-t_2)}{R_X(t_1;t_2)} + \underset{R_N(t_1-t_2)}{R_N(t_1;t_2)}$$

processi indipendenti $\Rightarrow$ processi incorrelati $\Rightarrow E\{A\cdot B\} = E\{A\}\cdot E\{B\}$

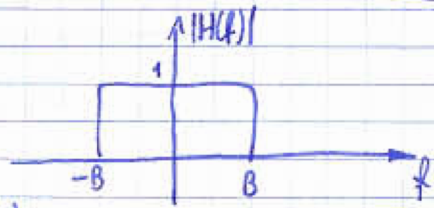
$Z(t)$ transita in un filtro con $h(t) = 2B\,\text{sinc}(2Bt-1)$ ed esce come $Y(t)$.
Stabilire se $Y(t)$ è stazionario, gaussiano, bianco, a media nulla.

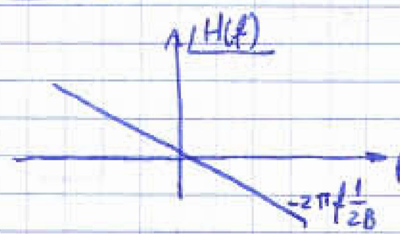
$Y(t)$ è S.S.L. perché $Z(t)$ S.S.L. e il filtro è L.T.I.
$Y(t)$ è gaussiano se lo è $Z(t)$. $N(t)$ è gaussiano ma $X(t)$ non è detto, quindi non è gaussiana $Y(t)$.

$$P_Y(f) = P_Z(f)\cdot|H(f)|^2 \qquad H(f) = \mathcal{F}\left(2B\,\text{sinc}(2Bt-1)\right) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)e^{-j2\pi f\cdot\frac{1}{2B}}$$

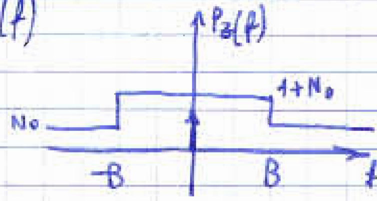
$$h(t) = 2B\,\text{sinc}\left(2B\left(t-\underbrace{\tfrac{1}{2B}}_{t_0}\right)\right)$$

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_N(\tau)$$

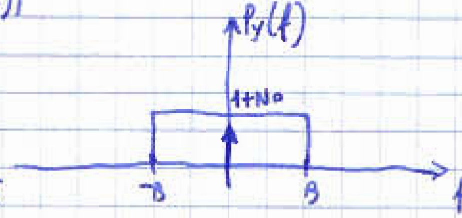



$$P_Z(f) = P_X(f) + P_N(f)$$



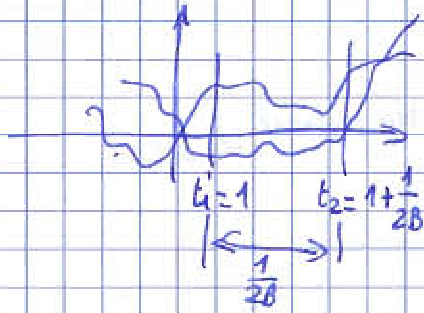

$$|H(f)|^2 = |H(f)|$$




$Y(t)$ NON è bianco perché $P_Y(f)$ non è costante

$Y(t)$ NON è a media nulla perché $\eta_Y = \eta_Z\cdot H(0) = 1\cdot 1 = 1 \neq 0$.

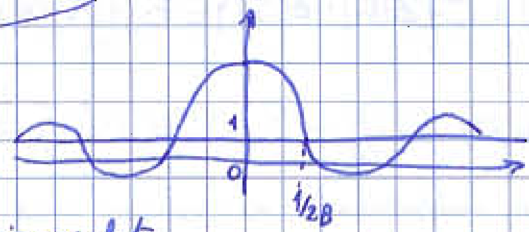
Determinare la correlazione statistica fra $Y_1 = Y(t_1)$ e $Y_2 = Y(t_2)$ essendo $t_1 = 1$ e $t_2 = t_1 + \frac{1}{2B}$




Calcolo la funzione di autocorrelazione e il suo valore in $\frac{1}{2B}$ è la quantità cercata

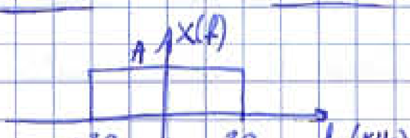
$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\underbrace{P_Y(f)}_{S_Y(f)}\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\delta(f) + (N_0+1)\,\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)\right\} = 1 + (N_0+1)\cdot|2B|\,\text{sinc}(2B\tau)$$

$$R_Y(1/2B) = 1 + (N_0+1)\cdot|2B|\,\underbrace{\text{sinc}(1)}_{0} = 1.$$



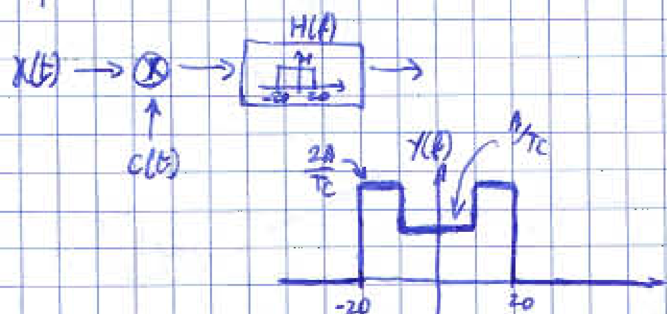

$E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = E\{Y(t_1)\}\cdot E\{Y(t_2)\} \Rightarrow Y(t_1), Y(t_2)$ incorrelate

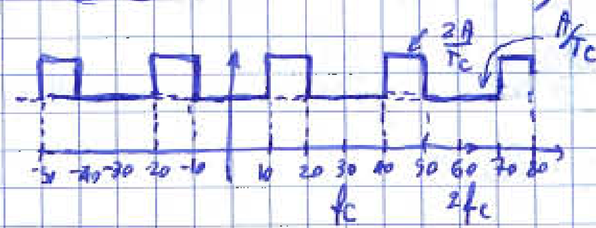
---



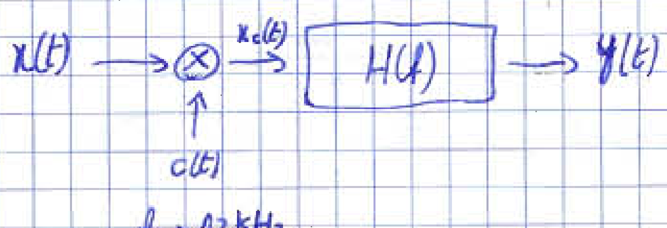

campionato con $f_c = 30$ KHz. Si vuole ricostruire il segnale originale filtrando con filtro passa basso ideale con $B = 20$ KHz. Tracciare lo spettro del segnale di uscita e dire se si è verificato aliasing.

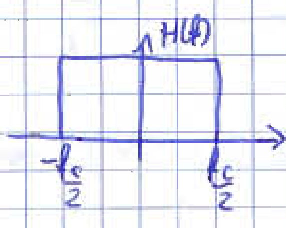
$f_c = 30 \text{ KHz} \overset{?}{\geq} 2B = 2\cdot 20 = 40 \text{ KHz}$ NO → c'è aliasing




---




$f_c = 12$ KHz

$x(t) = A\cos 2\pi f_0 t$ con $f_0 = 10$ KHz

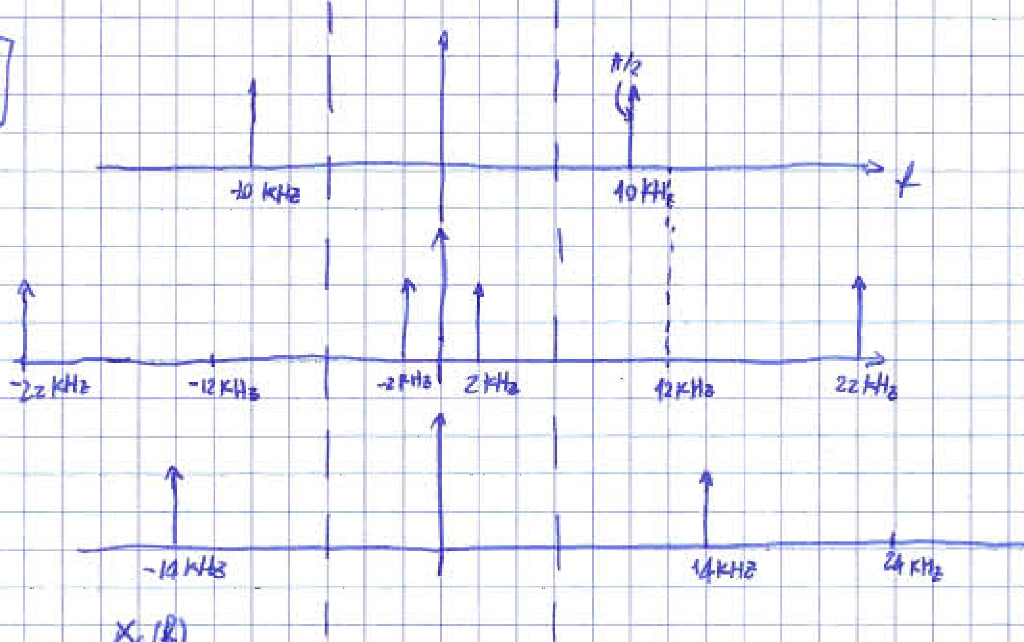
Tracciare lo spettro di $x_c(t)$ e di $y(t)$.

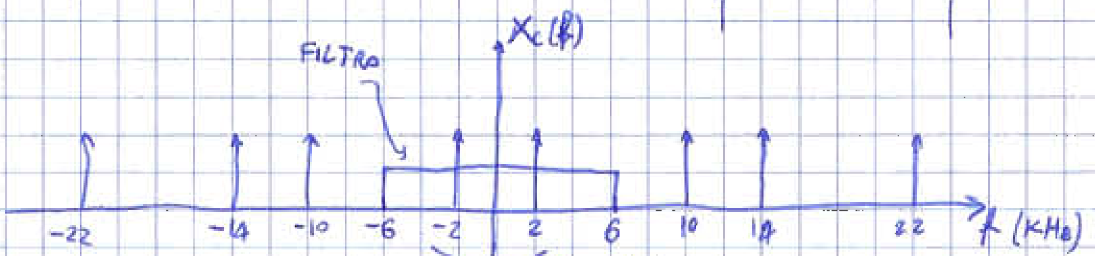
$$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$f_c = 12\,kHz \overset{?}{\geq} 2B = 2 \cdot 10\,kHz = 20\,kHz$$

NO

C'è aliasing




sinusoide di frequenza $f_c - B = 2\,kHz$ → conseguenza di una forte aliasing

$$y(t) = A' \cos(2\pi f_y t)$$

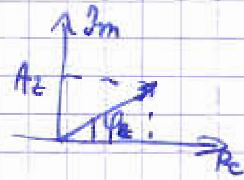
$f_y \to 2\,kHz$

ESERCITAZIONE TEORIA DEI SEGNALI B 23/10/08

## ALGEBRA COMPLESSA

$j = \sqrt{-1} \Leftrightarrow j^2 = -1$

$z = z_R + j z_I$




$$\begin{cases} A_z = \sqrt{z_R^2 + z_I^2} \\ \varphi_z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{z_I}{z_R}\right) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

se $z_R < 0 \Rightarrow \pm\pi$

$$z = \underbrace{A_z \cos\varphi_z}_{z_R} + j\underbrace{A_z \operatorname{sen}\varphi_z}_{z_I} = A_z e^{j\varphi_z}$$

$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\operatorname{sen}\varphi$

$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\operatorname{sen}\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2}$$

$$z + \bar{z} = 2\,Re(z) \qquad z - \bar{z} = 2j\,Im(z)$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right) \qquad Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2j} = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} = \operatorname{sen}\varphi$$

$$\cos^2\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \cdot \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{j2\varphi} + e^{-j2\varphi} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j2\varphi} + e^{-j2\varphi}}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 2\varphi + \right.$$

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}\cos(\theta + \phi)$$

$$\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \cdot \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} = \frac{-e^{j(\theta+\phi)} - e^{-j(\theta+\phi)}}{2} + \frac{e^{-j(\theta-\phi)} + e^{j(\theta-\phi)}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi$$

$$= \frac{e^{j(\theta+\phi)} - e^{-j(\theta+\phi)}}{2j} = \frac{e^{j\theta}e^{j\phi} - e^{-j\theta}e^{-j\phi}}{2j} = \frac{\frac{e^{j\theta}e^{j\phi}}{2} + \frac{e^{j\theta}e^{j\phi}}{2} - \frac{e^{-j\theta}e^{-j\phi}}{2} - \frac{e^{-j\theta}e^{-j\phi}}{2}}{2j}$$

$$\pm e^{j\theta}e^{-j\phi} \pm e^{-j\theta}e^{j\phi} =$$

$$= \frac{e^{j\theta}(e^{j\phi}+e^{-j\phi}) - e^{-j\theta}(e^{j\phi}+e^{-j\phi})}{2\cdot 2j} + \frac{e^{j\theta}(e^{j\phi}-e^{-j\phi})+e^{-j\theta}(e^{j\phi}-e^{-j\phi})}{2\cdot 2j} =$$

$$= \underbrace{\frac{e^{j\phi}+e^{-j\phi}}{2}}_{\cos\phi}\cdot\underbrace{\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}}_{\text{sen}\,\theta} + \underbrace{\frac{e^{j\phi}-e^{-j\phi}}{2j}}_{\text{sen}\,\phi}\cdot\underbrace{\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}}_{\cos\theta}.$$

$(r_0, \theta_0)$ $\quad r_0 = 2$

$(x_0, y_0)$ $\quad \theta = \frac{\pi}{4} \vee \theta = \frac{\pi}{2}$

$$z_1 = r_0 e^{-j\theta_0} \to 2e^{-j\frac{\pi}{4}} \to z = 2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j2\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - j\sqrt{2}$$

$$\hookrightarrow 2e^{-j\frac{\pi}{2}} \to 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j2\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2j$$

$$z_3 = r_0 e^{j(\theta_0+\pi)} \to 2e^{j\frac{5}{4}\pi} = -\sqrt{2} - j\sqrt{2}$$

$$\hookrightarrow 2e^{j\frac{3}{2}\pi} = -2j$$

$$z_4 = r_0 e^{j(\pi-\theta)}$$

$$\hookrightarrow 2e^{j(\pi-\frac{\pi}{4})} = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}$$

$$\hookrightarrow 2e^{j(\pi-\frac{\pi}{2})} = 2j$$

$$z_5 = r_0 e^{j(\theta+2\pi)} = r_0 e^{j\theta}$$

$$\hookrightarrow 2e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}j$$

$$\hookrightarrow 2e^{j\frac{\pi}{2}} = 2j$$

2.4. Rappresenta in forma cartesiana

$$\frac{3+4j}{1-2j} = \frac{3+4j}{1-2j}\cdot\frac{1+2j}{1+2j} = \frac{3+6j+4j-8}{1+4} = \frac{-5+10j}{5} = -1+2j$$

$$\frac{j(2+j)}{(1+j)(2-j)} = \frac{2j-1}{2-j+2j+1} = \frac{2j-1}{3+j}\cdot\frac{3-j}{3-j} = \frac{6j-3+2+j}{9+1} = \frac{7j-1}{10} = \frac{7}{10}j - \frac{1}{10}$$

$$\frac{2j(1+j)^2}{3-j} = \frac{2j(\cancel{1}+2j\cancel{-1})}{3-j} = \frac{-4}{3-j}\cdot\frac{3+j}{3+j} = \frac{-12-4j}{9+1} = -\frac{6}{5} - \frac{2}{5}j$$

$$3e^{j4\pi} + 2e^{j7\pi} = 3e^{j\cdot 0} + 2e^{j\pi} = 3 - 2 = 1$$

$$(1-j)^9 = \left[(1-j)(1-j)\right]^4 (1-j) = \left[\cancel{1}-2j\cancel{-1}\right]^4 (1-j) = 16 - 16j$$

$$\hookrightarrow \left(\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^9 = \sqrt{2}^9\cdot\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) + j\sqrt{2}^9\,\text{sen}\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = \sqrt{2}^9\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{6e^{-j\frac{\pi}{3}}}{1-j} = \frac{3-3\sqrt{3}j}{1-j}\cdot\frac{1+j}{1+j} = \frac{3+3j-3\sqrt{3}j+3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+j\left(1-\sqrt{3}\right)\right]$$

01/12/08

MARCO MARTALÒ

martalò@tlc.unipr.it PAL. 2

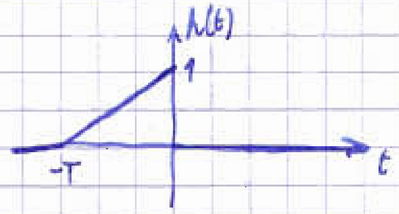
INTERNO 5759

CORREZIONE COMPITO

(1)

$$y(t) = \int_t^{t+T}\left[1-\frac{t-\tau}{T}\right]x(\tau)\,d\tau \quad T>0 \qquad h(t) = \int_t^{t+T}\left[1-\frac{t-\tau}{T}\right]\delta(\tau)\,d\tau =$$


$$= \begin{cases} 0 & \text{per } t+T<0 \rightarrow t<-T \\ 1+\frac{t}{T} & -T\le t\le 0 \\ 0 & \text{per } t>0 \end{cases}$$




non è causale

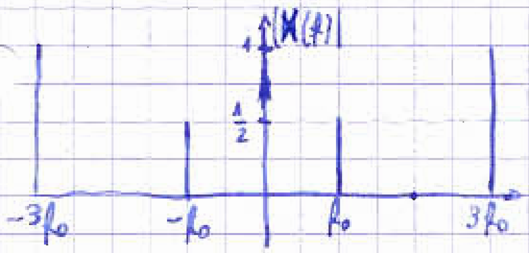
BIBO perché $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt<+\infty$.

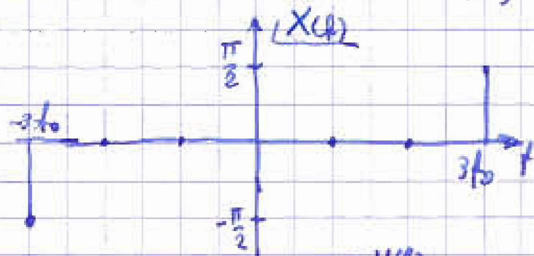
(2)

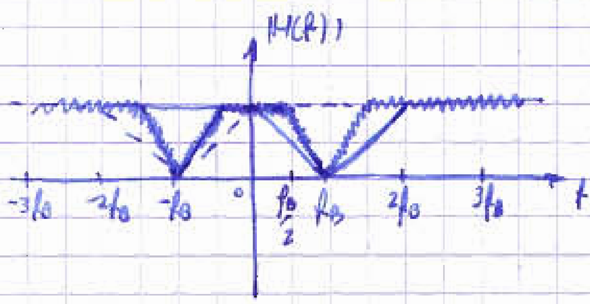
$x(t) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow y(t)$

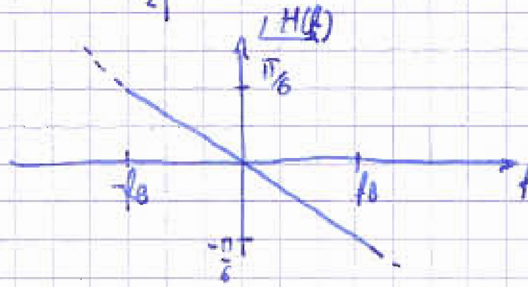
$$H(f) = \left[1-\Lambda\left(\frac{f-f_0}{f_0/2}\right)-\Lambda\left(\frac{f+f_0}{f_0/2}\right)\right]\cdot e^{-j\frac{\pi f}{6f_0}}$$


$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)+2\cos\left(6\pi f_0 t+\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{X_1}e^{j2\pi f_0 t}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{X_{-1}}e^{-j2\pi f_0 t}+\underbrace{\frac{2}{2}}_{X_3}e^{j2\pi 3f_0 t}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}+\underbrace{\frac{2}{2}}_{X_{-3}}e^{-j2\pi 3f_0 t}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$




$$y(t) = A_y\cos(2\pi f_y t)$$

$f_y \Downarrow \frac{3\,\text{KHz}}{2}$

$$Y_k = X_k\cdot|H_k|^2$$

1° MODO $f_0 = f_B$ : $3f_0 = f_Y = 3f_B \rightarrow f_B = 1\,kHz$

2° MODO $3f_0 = f_B$ : $f_0 = 3\,kHz \rightarrow f_B = 9\,kHz$

1° MODO

$$y(t) = 2\left|H(3f_B)\right| \cos\left(2\pi 3 f_0 t + \frac{\pi}{2} + \underbrace{\angle H(3f_B)}_{-\pi/2}\right) = 2\cos(2\pi 3 f_0 t)$$

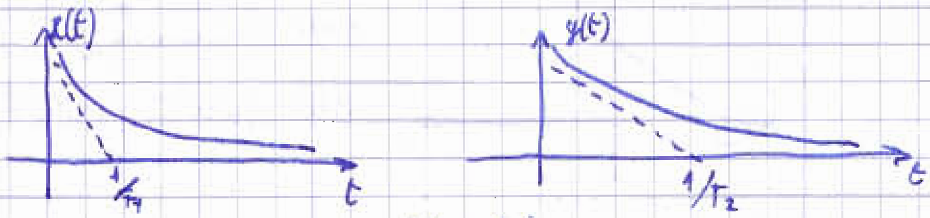
2° MODO

$$y(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{18}\right) \qquad P_Y = \frac{A_Y^2}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1/2 \end{cases}$$

---

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot u(t)$$
$$y(t) = e^{-t/T_2}\, u(t)$$

$T_1, T_2 > 0$ Valutare lo spettro di: $z(t) = x(t) \cdot y(t)$




$T_2 < T_1$

$$z(t) = e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \cdot u(t) = e^{-t\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \; ?$$

Sapendo che $e^{-t/T} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{\frac{1}{T} + j2\pi f}$ , $\quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) + j2\pi f}$

2° MODO

$$Z(f) = X(f) * Y(f) = \left[\frac{1}{\frac{1}{T_1} + j2\pi f}\right] * \left[\frac{1}{\frac{1}{T_2} + j2\pi f}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{T_1} + j2\pi\tau} \cdot \frac{1}{\frac{1}{T_2} + j2\pi(f-\tau)}\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{A}{\frac{1}{T_1} + j2\pi\tau} + \frac{B}{\frac{1}{T_2} + j2\pi(f-\tau)}\right] d\tau \qquad A\left[\frac{1}{T_2} + j2\pi(f-\tau)\right] + B\left[\frac{1}{T_1} + j2\pi\tau\right] = 1$$

$$\Longleftrightarrow A = B = \frac{1}{\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) + j2\pi f} \qquad Z(f) = \frac{1}{\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) + j2\pi f} \cdot \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{T_1} + j2\pi\tau} d\tau}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{T_2} + j2\pi(f-\tau)} d\tau}_{=\frac{1}{2}}\right] =$$

integrali noti

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) + j2\pi f}$$

che è esattamente quanto trovato prima

$\boxed{77}$

$e_{xy}(t)$ correlazione $x(t), y(t)$ ? $\quad x(t) = e^{-t} u(t) \quad x(t) \to A \to \boxed{T} \to y(t) = Ax(t-T)$

$$e_{xy}(t) = x^*(t) * y(-t) \longleftrightarrow E_{xy}(f) = X^*(t) \cdot Y(-t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)\, y(t+\tau)\, d\tau$$

$$e_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \cdot u(+\tau)\, A e^{-(t+\tau-T)} \cdot u(+\tau+t-T) = \int_{T-t}^{\infty} A e^{-\tau} e^{-(t-T)} e^{-\tau} d\tau = A e^{-(t-T)} \cdot \int_{T-t}^{+\infty} e^{-2\tau} d\tau$$

$$= A e^{-(t-T)} \cdot \frac{1}{-2} \left[ e^{-2\tau} \right]_{T-t}^{+\infty} = \frac{A}{2} e^{-(t-T)} \cdot \left( 0 - e^{-2(T-t)} \right) = \frac{A}{2} e^{-t+T-2T+2t} = \frac{A}{2} e^{t-T} \quad \text{se } T-t>0$$

altrimenti, se $T-t<0$, $\int_0^{+\infty} A e^{-\tau} e^{-(t-T)} e^{-\tau} d\tau = \frac{A}{2} e^{-(t-T)}$ — $C_{xy}(t) = \frac{A}{2} e^{-|t-T|}$

28/01/09

2° COMPITINO 2008

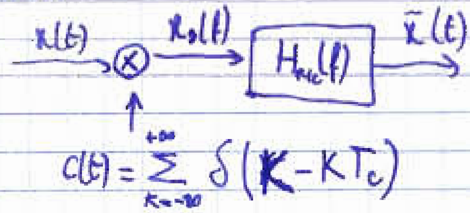
$\boxed{1}$

$x(t) = A\,\text{sinc}(3Bt)$

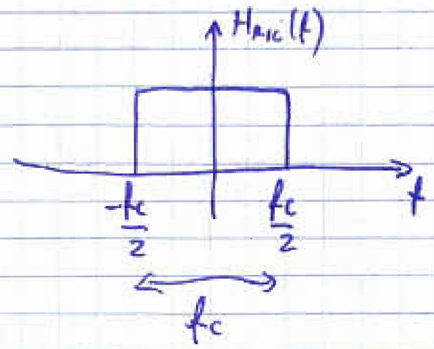
$f_c = 2B$

$T_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{2B}$

SCHEMA

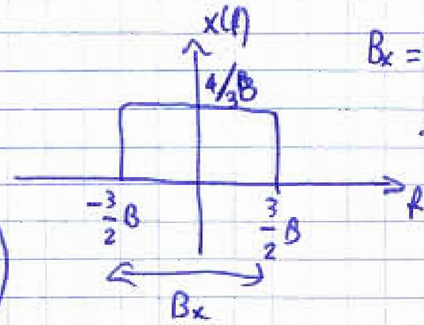



$H_{RIC}(f) = T_c \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right)$




COND. NYQUIST

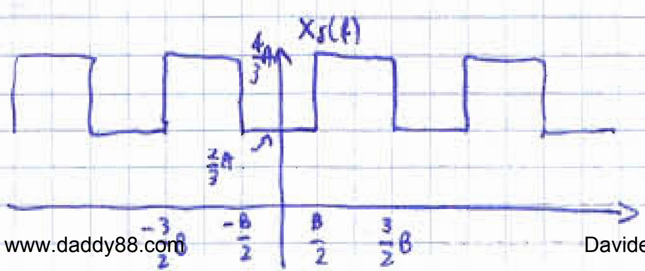
$B_x \le f_c \qquad x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \frac{A}{|3B|} \Pi\left(\frac{f}{3B}\right)$



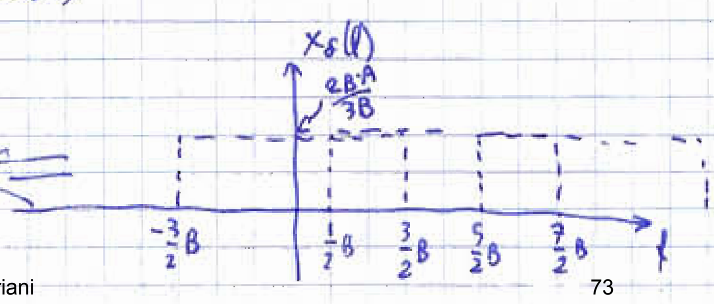

$B_x = 3B > f = 2B$

NO V

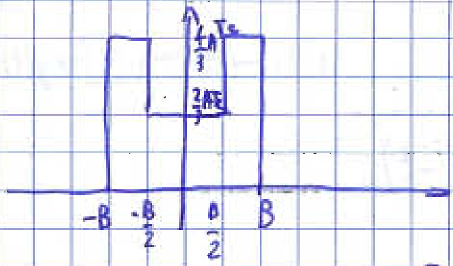
$$X_\delta(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_c X(f - kf_c) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2B \cdot \frac{A}{3B} \Pi\left(\frac{f - k2B}{3B}\right)$$




$\Longleftarrow$



$\tilde{X}(f)$ :




$$\tilde{X}(f) = T_c \cdot \frac{4A}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f}{B}\right)\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) =$$

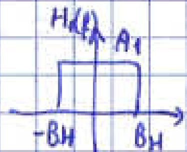
$$\tilde{x}(t) = \frac{4A}{3}\, \mathrm{sinc}(2Bt) - \frac{A}{3}\, \mathrm{sinc}(Bt)$$

$\boxed{2}$

PROCESSO RUMORE BIANCO

$$N(t) \longrightarrow \boxed{H_1(f)} \xrightarrow{Y(t)} \boxed{H_2(f)} \xrightarrow{z(t)}$$

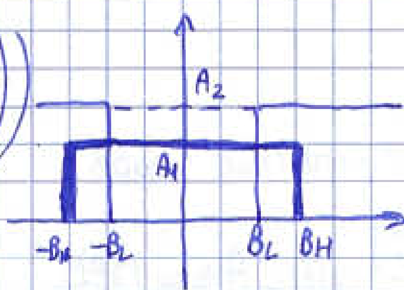
$$H_1(f) = A_1 \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B_H}\right)$$




$$h_2(t) = A_2 \cdot \left[\delta(t) - 2B_L\, \mathrm{sinc}(2B_L t)\right]$$

$B_H > B_L$

$$H_2(f) = A_2 - A_2 \cdot \frac{2B_L}{|2B_L|} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B_L}\right) = A_2\left(1 - \Pi\left(\frac{f}{2B_L}\right)\right)$$




$P_N(f) = C$

Trovare $B_L$ dato che $P_Y = P_Z$

$$\xrightarrow[\text{SSL}]{X(t)} \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(t)$$

$\eta_X(t) = \eta_X$ $\qquad \eta_Y = \eta_X \cdot H(0)$

$R_X(\tau)$ $\qquad R_Y(\tau) = R_X(\tau) \circledast h(t) \circledast h(-t)$

$P_X(f)$ $\qquad P_Y(f) = P_X(f) \cdot |H(f)|^2$

$$P_Y(f) = C \cdot A_1^2 \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B_H}\right) \qquad P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} P_Y(f)\, df = \int_{-B_H}^{B_H} C \cdot A_1^2\, df = C \cdot A_1^2 \cdot 2B_H$$

$$P_Z(f) = P_Y(f) \cdot |H_2(f)|^2 = P_N(f) \cdot |H_1|^2 \cdot |H_2|^2 = C \cdot A_1^2 \cdot A_2^2 \cdot \left|\Pi\left(\frac{f}{2B_H}\right) \cdot \left[1 - \Pi\left(\frac{f}{2B_L}\right)\right]\right|^2$$

$$P_Z = \int_{-\infty}^{+\infty} P_Z(f)\, df = 2\int_{B_L}^{B_H} C A_1^2 A_2^2\, df = C A_1^2 A_2^2 (B_H - B_L)$$

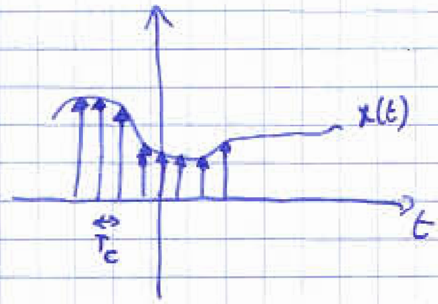
$$P_Y = P_Z \Rightarrow \cancel{CA_1^2} \cdot \cancel{2} B_H = \cancel{CA_1^2} A_2^2 \cdot \cancel{2} (B_H - B_L) \qquad B_H = A_2^2 B_H - A_2^2 B_L$$

$$B_L = B_H \left( \frac{A_2^2 - 1}{A_2^2} \right) = 100 \cdot \left( \frac{100 - 1}{100} \right) = 99 \text{ kHz}.$$

CAMPIONAMENTO
IDEALE

$$x(t) \longrightarrow \otimes \xrightarrow{x_\delta(t)} \boxed{H_{RIC}(f)} \xrightarrow{\tilde{x}(t)}$$

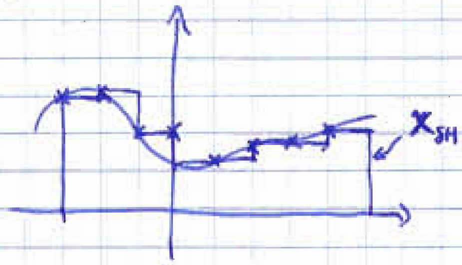
$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c)$$




CAMPIONAMENTO
REALE

$\longrightarrow$ tecnica SAMPLE AND HOLD

segnale a gradini




$$x(t) \longrightarrow \otimes \xrightarrow{x_\delta(t)} \boxed{\int_{T_c}} \xrightarrow{x_{SH}(t)} \qquad h_{SH}(t) = \Pi\left( \frac{t - \frac{T_c}{2}}{T_c} \right)$$

$$c(t) = \sum_k \delta(t - kT_c) \qquad x_{SH}(t) = x_\delta(t) \circledast h_{SH}(-t) = \sum_k x(t - kT_c) \circledast \Pi\left( \frac{t - \frac{T_c}{2}}{T_c} \right)$$

$$= \sum_k \Pi\left( \frac{t - \frac{T_c}{2} - kT_c}{T_c} \right) x(kT_c) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_{SH}(f) = X_\delta(f) \cdot H_{SH}(f)$$

$$H_{SH}(f) = \underbrace{T_c \operatorname{sinc}(fT_c)}_{\text{AMPIEZZA}} \underbrace{e^{-j2\pi f \frac{T_c}{2}}}_{\text{FASE}}$$

$$x(t) \longrightarrow \otimes \xrightarrow{x_\delta(t)} \boxed{\int_{T_c}} \xrightarrow{x_{SH}(t)} \boxed{H_{eq}(f)} \longrightarrow \boxed{H_{ric}(f)} \longrightarrow \hat{x}(t)$$

$c(t)$

non realizzabile $\rightarrow$ $H_{eq}(f) = \dfrac{1}{T_c \operatorname{sinc}(fT_c)}$ $\qquad H_{ric}(f) = T_c \Pi\left(\dfrac{f}{f_c}\right)$

realizzabile $\rightarrow$ $H_{eq\text{-}ric}(f) = \dfrac{1}{\operatorname{sinc}(fT_c)} \cdot \Pi\left(\dfrac{f}{f_c}\right)$

2° COMPITINO 2006

**1**

$x(t)$ banda $B = 16\ KHz$ $\qquad B_x = 32\ KHz < f_c = 100\ kHz$ cond. nyquist V.

$B_x = 2B = 32\ KHz$

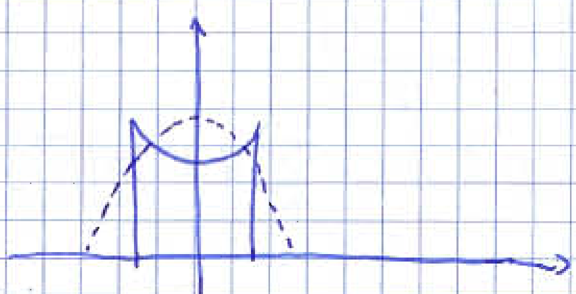
Uso SH $\quad f_c = 100\ KHz$

$T_c = 10\ \mu s$

$$x_{SH}(t) = h_{SH}(t) \circledast \sum_k x(t - kT_c) = \sum_k x(kT_c)\, \Pi\left(\frac{t - kT_c - \frac{T_c}{2}}{T_c}\right)$$

$$X_{SH}(f) = H_{SH}(f) \cdot X_\delta(f) = H_{SH}(f) \cdot \sum_k f_c X(f - kf_c) = \sum_k f_c T_c\, \mathrm{sinc}(fT_c)\, e^{-j2\pi f k T_c}$$

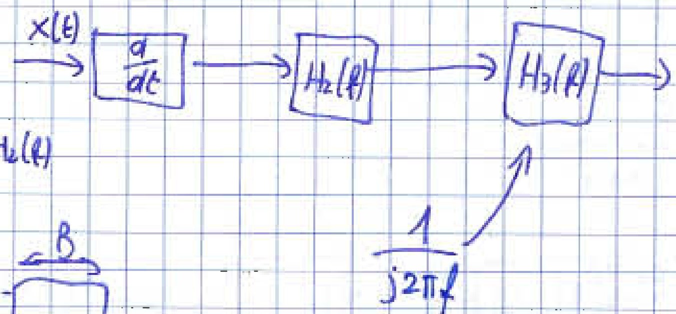
$$H_{eq,ric}(f) = \frac{1}{H_{SH}(f)} \cdot T_c \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) = \frac{1}{\cancel{T_c}\, \mathrm{sinc}(fT_c)} \cdot \cancel{T_c} \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) = \frac{1}{\mathrm{sinc}(fT_c)} \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right)$$



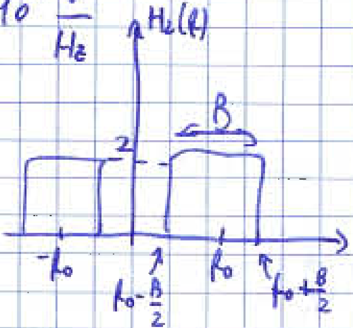
**2**

$X(t)$ SSL

$P_x(t) = A = 10^{-6}\ \frac{V^2}{Hz}$




$P_{MAX} = 8 \cdot 10^{-3}\ V^2$

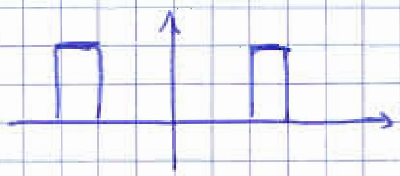



$$H_{TOT} = H_{der} \cdot H_2 \cdot H_3 = \cancel{j2\pi f} \cdot H_2(f) \cdot \frac{1}{\cancel{j2\pi f}} = H_2(f) = 2\,\Pi\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + 2\,\Pi\left(\frac{f + f_0}{B}\right)$$

$$P_{OUT}(f) = P_x(t) \cdot |H(f)|^2 = A \cdot \left[2A \cdot \left(\Pi\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right)\right]^2 = 4A\left[\Pi\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right] =$$

$$= \int \dots = 8AB \le P_{MAX}$$

$$8 \cdot 10^{-6} B \le 8 \cdot 10^{-3} \qquad B \le 10^3 = 1000\,Hz$$



non è bianco!

$$\eta_{OUT} = \eta_x \cdot |H(0)| = 0 \qquad \sigma^2_{OUT} = E\{Y^2_{OUT}\} - \underbrace{\eta_Y^2}_{0} = E\{Y^2_{OUT}\} = P_{OUT} \le 8 \cdot 10^{-3} V^2 = P_{MAX}$$