SISTEMI LINEARI

PER PASSARE DALLA MATRICE ASSOCIATA AL SISTEMA CALCOLO $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ NEL CASO DI $\mathbb{R}^3$

PER PASSARE DAL SISTEMA ALLA MATRICE ASSOCIATA, CONSIDERO I COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE

OPERAZIONI ELEMENTARI:

1) Scambiare di posto due righe.
2) Sommare ad una riga il multiplo di un'altra riga.
3) Moltiplicare una riga per uno scalare non nullo.

ALGORITMO DI GAUSS (per ridurre una matrice a scala)

1) Se necessario, scambio righe in modo da avere un elemento nullo in alto a sinistra.
2) Sottraggo un'opportuno multiplo della prima riga da tutte le righe sottostanti in modo da avere 0 nella prima colonna, sotto all'elemento del passo 1.
3) Considero la sottomatrice ottenuta eliminando la prima riga e le prime J colonne con coefficienti nulli.

INSIEME DELLE SOLUZIONI PER I SISTEMI RIDOTTI

m = n° equazioni
n = n° incognite
r = rango di A

I) $r < m$ e almeno un termine noto $d_{r+1}, \dots, d_m$ diverso da 0. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{6} \end{array}\right)$ SISTEMA IMPOSSIBILE

II) $r = n$ e i termini noti $d_{r+1}, \dots, d_m$ sono uguali a 0
SISTEMA UNIVOCAMENTE DETERMINATO (1 SOLA SOLUZIONE) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$

III) $r < n$ e i termini noti $d_{r+1}, \dots, d_m$ sono uguali a 0. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
SISTEMA INDETERMINATO (INFINITE SOLUZIONI) che dipendono da $n-r$ parametri

RANGO $\to$ numero di righe diverse da 0 di una sua riduzione a scala

TEOREMA ROUCHÉ-CAPELLI

Il sistema lineare $Ax = b$ è compatibile $\iff rg(A) = rg(A|b)$. Le soluzioni dipendono da $n - rg(A)$ parametri. $n - rg(A)$ è anche la dimensione dell'insieme delle soluzioni.

Se $m = n$, il sistema ha una soluzione $\iff$ A è non singolare ($\det A \neq 0$)

Per i sistemi omogenei $Ax = 0$, il sistema ha una soluzione non banale ($x \neq 0$) $\iff rg(A) < n$

Se $m = n$, $Ax=0$ ha una soluzione non banale $\iff$ A è singolare ($\det A = 0$)

DAVIDE VALERIANI

INDIPENDENZA LINEARE

Un vettore v è COMBINAZIONE LINEARE dei vettori $v_1, \dots, v_k$ se esistono dei coefficienti $a_1, \dots, a_k$ tali che $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$.

La combinazione lineare è non banale $\Leftrightarrow a_i \neq 0$ per qualche i.

SPAZIO GENERATO $\mathcal{L}$ → insieme dei vettori che sono combinazione lineare dei vettori che generano $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$.

INSIEME DI GENERATORI → insieme di vettori $v_1, \dots, v_k$ tali che $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) = \mathbb{R}^n$.

VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI → vettori per cui esistono $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ di cui almeno uno non nullo tali che $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$. Ovvero, il vettore nullo può essere scritto come combinazione lineare non banale di $v_1, \dots, v_k$.

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI → vettori per i quali da $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$ segue che $a_1, \dots, a_k = 0$. Ovvero l'unica combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$ che è uguale al vettore nullo è quella banale ($a_1, \dots, a_k = 0$).

k vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se la corrispondente matrice $n \times k$ A ha rango k. Se $k > n$, i vettori sono linearmente dipendenti. Se A ha rango n e $k \geq n$, k vettori generano $\mathbb{R}^n$.

BASE → insieme ordinato di generatori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$.

BASE ORTOGONALE → base i cui vettori sono a due a due ortogonali. $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

BASE ORTONORMALE → base i cui vettori hanno norma 1. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ → base standard di $\mathbb{R}^3$

PROCEDIMENTO DI GRAM-SCHMIDT

Serve per trovare una base ortogonale partendo da una base (v_1, v_2, v_3):

La base ortogonale sarà formata dai vettori:

$$W_1 = v_1 \qquad W_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, W_1 \rangle}{\langle W_1, W_1 \rangle} \cdot W_1 \qquad W_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, W_1 \rangle}{\langle W_1, W_1 \rangle} \cdot W_1 - \frac{\langle v_3, W_2 \rangle}{\langle W_2, W_2 \rangle} \cdot W_2$$

Ogni base è formata esattamente da n vettori.

Un insieme di vettori è una base se e solo se la matrice $A = (v_1, \dots, v_n)$ è non singolare, ovvero ha rango uguale a n, cioè determinante diverso da 0.

La dimensione di uno spazio come $\mathbb{R}^n$ è il numero di vettori che costituiscono una sua base, cioè n.

Il rango di una matrice è uguale al numero delle sue righe (o colonne) linearmente indipendenti.

SOTTOSPAZIO VETTORIALE W → insieme chiuso rispetto a somma e moltiplicazione per scalare, cioè I) $\forall v, w \in W$, $v + w \in W$

II) $\forall v \in W$ e $\forall a \in \mathbb{R}$, $av \in W$

DAVIDE VALERIANI

MUTUA POSIZIONE DI RETTE E PIANI

- DUE PIANI

$\alpha: ax+by+cz+d=0$

$\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ $A|d=\begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{pmatrix}$

Se $rg(A)=1$ e $rg(A|d)=1$, $\alpha=\beta$

Se $rg(A)=1$ e $rg(A|d)=2$, $\alpha // \beta$

Se $rg(A)=2$ (e $rg(A|d)=2$), $\alpha \cap \beta$ è una retta

- RETTA E PIANO

$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ $\alpha: ex+fy+gz+h=0$

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \end{pmatrix}$ $A'=\begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \\ e & f & g & -h \end{pmatrix}$

Se $rg(A)=2$ e $rg(A')=2$, $r \subset \alpha$

Se $rg(A)=2$ e $rg(A')=3$, $r // \alpha$

Se $rg(A)=3$ (e $rg(A')=3$), $r \cap \alpha$ è un punto

- DUE RETTE

$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} ex+fy+gz+h=0 \\ e'x+f'y+g'z+h'=0 \end{cases}$ $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix}$ $M'=\begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \\ e & f & g & -h \\ e' & f' & g' & -h' \end{pmatrix}$

Se $rg(M)=2$ e $rg(M')=2$, $r=s$

Se $rg(M)=2$ e $rg(M')=3$, $r // s$

Se $rg(M)=3$ e $rg(M')=3$, $r \cap s$ è un punto

Se $rg(M')=4$, r e s sono SGHEMBE ($\det M' \neq 0$)

- TRE PIANI

$\alpha: ax+by+cz+d=0$ $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$ $\gamma: a''x+b''y+c''z+d''=0$

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ $A'=\begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \\ a'' & b'' & c'' & -d'' \end{pmatrix}$ Se $rg(A)=1$ e $rg(A')=1$, $\alpha=\beta=\gamma$

Se $rg(A)=1$ e $rg(A')=2$, $\alpha // \beta // \gamma$

Se $rg(A)=2$ e $rg(A')=2$, $\alpha \cap \beta \cap \gamma$ è una retta. Un vettore normale è c.l. degli altri 2.

Se $rg(A)=3$ e $rg(A')=3$, $\alpha \cap \beta \cap \gamma$ è un punto.

Se $rg(A)=2$ e $rg(A')=3$, i tre piani non si intersecano contemporaneamente, ma:

- se un vettore normale è multiplo di uno degli altri, due piani sono // e il terzo li interseca in 2 rette parallele
- se un vettore normale è c.l. degli altri, i piani si incontrano a due a due in 3 rette parallele.

PIANO PASSANTE PER TRE PUNTI NON ALLINEATI

$P_0=(x_0,y_0,z_0)$ $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ $P_2=(x_2,y_2,z_2)$

L'equazione cartesiana è data dallo sviluppo di:

$$\det\begin{pmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{pmatrix}=0$$

Se risulta $0=0$, significa che i 3 punti sono allineati e perciò non generano alcun piano.

L'equazione parametrica è data da:

$$\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ y_1-\cancel{x_0} \\ z_1-z_0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} x_2-x_0 \\ y_2-y_0 \\ z_2-z_0 \end{pmatrix}$$

APPLICAZIONI LINEARI

Un'applicazione $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ si dice applicazione lineare se valgono:

1) $L(u+v)=L(u)+L(v)$ $\forall v,u\in\mathbb{R}^n$ $\boxed{L(0)=0}$
2) $L(kv)=k\cdot L(v)$ $\forall v\in\mathbb{R}^n, \forall k\in\mathbb{R}$

Un'applicazione lineare si chiama OPERATORE $\iff n=m$.

Per conoscere l'immagine di un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^n$ basta conoscere le immagini degli n vettori di una base:

$f(x,y)=f(x(1,0))+f(y(0,1))=x\cdot f(1,0)+y\cdot f(0,1)$ con $f(0,1)$ e $f(1,0)$ noti.

Combinazioni lineari di applicazioni lineari sono ancora lineari.

Ogni matrice $A\in M_{m\times n}$ individua un'applicazione lineare $L_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ in questo modo:

se $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, allora $L_A(X)=A\cdot X$

Per passare dalla matrice all'applicazione lineare, occorre moltiplicare la matrice per il generico vettore X con la moltiplicazione riga $\times$ colonna.

Per ricavare da un'applicazione lineare la matrice associata, occorre calcolare l'applicazione lineare (l'immagine) nei vettori della base canonica.

NUCLEO $\to$ $\operatorname{Ker} L=\{v\in\mathbb{R}^n: L(v)=0\}=L^{-1}(0)$ ovvero i vettori la cui immagine tramite L è il vettore nullo.

Se $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare associata alla matrice $A\in M_{m\times n}$, allora:

1) $\operatorname{Sol}(A|0)=\operatorname{Ker} L$
2) $\operatorname{Im} L=\mathcal{L}(L(e_1),\dots,L(e_n))$
3) il numero massimo di vettori linearmente indipendenti di $\operatorname{Im} L$ è uguale al rango di A, cioè $\dim(\operatorname{Im} L)=\operatorname{rg} A$.

DAVIDE VALERIANI

Sia $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Le seguenti affermazioni si equivalgono:

1) L è iniettiva
2) $\operatorname{Ker} L = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ essendo iniettiva, l'unico vettore tale che $L(v)=0$ è il vettore nullo
3) $\operatorname{rg} M_L = n$

L è suriettiva se $\operatorname{rg} M_L = m$

Un'applicazione lineare è invertibile (ISOMORFISMO) se è sia suriettiva che iniettiva, ovvero $n = m = \operatorname{rg} M_L$.

Un operatore è un isomorfismo se e solo se $\det M_L \neq 0$.

ROTAZIONI, RIFLESSIONI, OMOTETIE

Sia A una matrice ortogonale 2×2. Se $\det A = +1$, allora esiste un angolo ϕ tale che A si può scrivere come: $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

A viene detta MATRICE DI ROTAZIONE e l'operatore associato ad A è la rotazione dei vettori di un angolo ϕ in senso antiorario (↺).

Se $\det A = -1$, allora esiste un angolo ϕ tale che A si può scrivere come:

$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$ A viene detta MATRICE DI RIFLESSIONE e l'operatore associato ad A è la riflessione dei vettori rispetto a una retta che forma un angolo $\frac{\phi}{2}$ con l'asse x.

Chiamiamo OMOTETIA del piano di fattore K un'applicazione lineare del tipo $L_K: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_K(v) = Kv$ rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$.

Se $\mathbf{R}$ è una rotazione, R^{-1} è una rotazione in senso orario.

Composizione di rotazioni è una rotazione.

Composizione di riflessioni è una rotazione.

AUTOVALORI, AUTOVETTORI, DIAGONALIZZAZIONE

Siano $B = (v_1, \dots, v_n)$ e $B' = (w_1, \dots, w_n)$ basi di $\mathbb{R}^n$. Chiamiamo MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE DA B A B' la matrice che ha come colonne le coordinate di w_j rispetto alla base B. $M(B, B') \to$ matrice da B a B'

$M(B,B') \cdot M(B',B) = Id$ $\quad M(B,B') = [M(B',B)]^{-1}$ $\quad M(B,B) = Id$

$[v]_{B'} = M(B',B) \cdot [v]_B$ $\quad [v]_B = M(B,B') \cdot [v]_{B'}$ $\quad M(C,B') \cdot M(B',B) \cdot M(B,C) = M(C,C) = Id$.

Le coordinate di un vettore sono solitamente riferite alla base canonica C.

Se B è una base, $[T(v)]_B = P^{-1}[T(v)]_C = P^{-1} M_T v = P^{-1} M_T \cdot P [v]_B$ con $P = M(C,B)$

$T \to$ operatore

Sia T un operatore di $\mathbb{R}^n$.

AUTOVETTORE → vettore non nullo per cui esiste un numero reale λ tale che $T(v) = \lambda v$, cioè T manda v in un suo multiplo

AUTOVALORE → numero reale per il quale esiste uno vettore non nullo v tale che $T(v) = \lambda v$.

Se λ è un autovalore di T, chiameremo $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda Id_{\mathbb{R}^n})$ l'AUTOSPAZIO di λ (V_λ).

L'autospazio di λ è formato dal vettore nullo e da tutti i vettori che hanno λ come autovalore.

POLINOMIO CARATTERISTICO $P(\lambda)$ → sviluppo del $\det(A - \lambda Id)$

Sia A la matrice associata all'operatore T e sia λ un numero reale. Allora λ è autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di A, cioè se $\det(A - \lambda Id) = 0$.

Non tutti gli operatori hanno autovalori.

Se A è triangolare o diagonale, i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale.

Sia T un operatore di $\mathbb{R}^n$. T si dice DIAGONALIZZABILE se $\mathbb{R}^n$ ha una base formata da autovettori di T; questo accade quando il numero di autovettori è proprio n.

Sia T un operatore su $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di T (e quindi T può essere diagonalizzato in base ortonormale) se e solo se la matrice M_T è simmetrica.

NOTE GENERALI

1) Un sistema omogeneo di r equazioni in n incognite ammette sempre soluzioni (almeno quella banale) e queste dipendono da <u>almeno</u> $n - r$ parametri.
2) Un sistema di r equazioni in n incognite $(r < n)$ <u>non è detto</u> che ammetta soluzioni.
3) Se ho più vettori di quanto sia grande lo spazio, i vettori sono sempre linearmente dipendenti (K vettori in $\mathbb{R}^n$ con $K > n$)
4) Se $A_{K \times n}$ è una matrice quadrata $(K = n)$ con $\mathrm{rg}\,A = n$, i K vettori generano $\mathbb{R}^n$.
5) n vettori sono una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\mathrm{rg}\,A = n$, cioè $\det A \neq 0$.
6) L'equazione dimensionale $\dim \mathrm{Im}\, L + \dim \mathrm{Ker}\, L = \dim \mathbb{R}^n$ ci dice che un'applicazione lineare $(L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$ da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ non è suriettiva $(3 + ? = 2$ NO$)$.
7) Se ho una base ortogonale, posso trovarne una ortonormale dividendo ogni vettore (colonna) per la propria norma.

DAVIDE VALERIANI.