

GRAPHIC SHADERS FOR SCIENTIFIC VISUALIZATION

DAVID FERNÁNDEZ ALCOBA

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA - MATEMÁTICAS
FACULTAD DE INFORMÁTICA
UNIVERSIDAD COMPLUTESNE DE MADRID



Trabajo de Fin de Grado en Ingeniería Informática - Matemáticas

10 de agosto de 2019

Directora:
Ana Gil Luezas

Autorización de difusión

David Fernández Alcoba

10 de agosto de 2019

El/la abajo firmante, matriculado/a en el Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas de la Facultad de Informática, autoriza a la Universidad Complutense de Madrid (UCM) a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a su autor el presente Trabajo Fin de Grado “GRAPHIC SHADERS FOR SCIENTIFIC VISUALIZATION”, realizado durante el curso académico 2018-2019 bajo la dirección de Ana Gil Luezas en el Departamento de Sistemas Informáticos y Computación, y a la Biblioteca de la UCM a depositarlo en el Archivo Institucional E-Prints Complutense con el objeto de incrementar la difusión, uso e impacto del trabajo en Internet y garantizar su preservación y acceso a largo plazo.

David Fernández Alcoba

Resumen

En el mundo actual, las investigaciones y estudios científicos generan gran cantidad de datos que han de ser interpretados de una manera eficaz, con el fin de sacar las mejores conclusiones y obtener resultados fiables que no den lugar a la duda. En este contexto, una de las disciplinas más importantes es la de la visualización, ya que puede ayudar a entender, ilustrar y obtener información relevante acerca del fenómeno que se está estudiando.

De igual forma, en los últimos años se ha dado una expansión considerable de las capacidades de las GPUs, ofreciendo nuevas posibilidades dentro de la informática gráfica e incrementando el rendimiento tanto en computación paralela como en aplicaciones de visualización.

En este trabajo se exploran estas ideas, haciendo hincapié en las posibilidades que nos ofrecen los distintos tipos de shaders gráficos dentro de la especificación OpenGL, y la manera en la que nos pueden ser útiles a la hora de interpretar datos y obtener representaciones para problemas típicos de visualización científica, como puede ser la visualización de datos en tres dimensiones, visualización de volúmenes, renderizado de curvas y superficies, etc.

Palabras clave

Visualización científica, GPU, Shader, OpenGL, Bézier, Superficies.

Abstract

Nowadays, scientific studies and investigations generate a great amount of data that has to be well interpreted, so as to extract the best possible conclusions and obtain reliable results. Within this context, one of the most important disciplines is that of visualization, since it can help understand, illustrate and obtain relevant information about the phenomenon being studied.

Similarly, in the last few years, a considerable expansion of the capabilities of GPUs has been taking place, offering new possibilities within graphics computing and increasing performance both in parallel computing and in visualization applications.

In this text those ideas are explored, emphasizing the possibilities that the different kinds of graphic shaders have to offer within the OpenGL specification, and the way these can help interpret data and obtain representations for common scientific visualization topics, such as three dimensions data Visualization, volume visualization, surface rendering, etc.

Keywords

Scientific Visualization, Graphic Shaders, GPU, OpenGL.

Índice general

Índice	V
Índice de figuras	VII
Índice de tablas	VIII
1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Objetivos	2
1.3. Plan de trabajo	2
1.4. Estructura de la memoria	3
2. OpenGL y Direct3D	5
2.1. ¿Qué es?	5
2.2. Breve historia de OpenGL	5
2.3. Diseño de OpenGL	6
2.3.1. Primitivas de Puntos	8
2.3.2. Primitivas de Línea	8
2.3.3. Primitivas de Triángulo	8
2.3.4. Procesamiento de Vértices	9
2.3.5. Clipping	10
2.3.6. Rasterización	10
2.3.7. Procesamiento de Fragmentos	10
2.4. Diferencias con Direct3D	11
3. Shaders Gráficos	13
3.1. Vertex Shader	14
3.2. Tessellation Shaders	15
3.2.1. Tessellation Control Shader	15
3.2.2. Generador de primitivas de teselación	16
3.2.3. Tessellation Evaluation Shader	17
3.3. Geometry Shader	17
3.4. Fragment Shader	19
4. Visualización Científica	24
4.1. Manipulación de imágenes	24
4.2. Curvas y superficies de Bézier	24
4.3. Visualización de datos en 3D	26

4.4.	Superficies de revolución	27
4.5.	Coloreado de terrenos	28
4.6.	Line Integral Convolution	28
4.6.1.	Computar la línea de flujo	29
4.6.2.	Computar los pesos de convolución	29
4.6.3.	Computar los valores de salida del pixel	29
5.	Aplicación desarrollada	34
5.1.	Plan de desarrollo	34
5.2.	Herramientas de desarrollo	35
5.3.	Diseño de la aplicación	36
5.4.	Matemáticas necesarias	37
5.4.1.	Transformaciones matriciales	37
5.4.2.	Rotación: Ángulos de Euler y Cuaterniones	39
5.4.3.	Métodos Numéricos para la resolución de Ecuaciones Diferenciales . .	39
5.4.4.	Otras Fórmulas	44
5.5.	Shaders en la aplicación	44
5.5.1.	Coloreado de terrenos	45
5.5.2.	Curvas de Bézier	45
5.5.3.	Superficies de Bézier	45
5.5.4.	Sólidos de revolución	45
5.5.5.	Nube de puntos	45
5.5.6.	Negativo de una imagen	45
5.5.7.	Detección de bordes	45
5.5.8.	Line Integral Convolution	45
6.	Conclusiones y Trabajo Futuro	46
	Bibliography	49
A.	El lenguaje GLSL	50

Índice de figuras

2.1. Pipeline no programable. OpenGL 1.5	6
2.2. Pipeline de gráficos de OpenGL	7
2.3. Primitivas de OpenGL	9
2.4. Clipping y rasterización en OpenGL	10
2.5. Pipeline de gráficos de Direct3D	12
3.1. Comunicación entre shaders del pipeline	14
3.2. Teselación - Funcionamiento de los niveles	20
3.3. Teselación - Espaciado equidistante	21
3.4. Teselación - Espaciado fraccional par	21
3.5. Teselación - Espaciado fraccional impar	21
3.6. Teselación - Triángulos	22
3.7. Teselación - Cuadriláteros	23
4.1. Curvas de Bézier.	26
4.2. Superficie de Bézier con 16 puntos de control	26
4.3. Técnicas de visualización en 3D. Figuras provenientes de [1]	30
4.4. Coloreado de terreno por alturas	31
4.5. Resultado del método Line Integral Convolution. Imagen de Cabral and Lee- dom [2]	31
4.6. Computar la línea de flujo. Imagen de Petkov [3]	32
4.7. Computar los pesos. Imagen de Petkov [3]	32
4.8. Computar valores de salida del pixel. Imagen de Petkov [3]	33
5.1. Escalar un vector	39

Índice de tablas

2.1. Diferencias entre OpenGL y Direct3D	11
3.1. Primitivas de entrada al Geometry Shader	18

Capítulo 1

Introducción

Tal y como se cuenta en Defanti and Brown [4], los científicos computacionales basan su trabajo en fuentes de datos de gran volumen. Sin embargo, estos datos tienen tal magnitud que los científicos se ven, a menudo, superados. Entre las fuentes de datos de gran volumen se encuentran:

- Supercomputadores
- Inteligencia militar, satélites, datos astronómicos y de tiempo atmosférico
- Sondas enviando datos desde otros planetas
- Radio telescopios terrestres
- Instrumentos capturando temperaturas oceánicas, movimientos tectónicos y actividad volcánica y sísmica
- Escáneres médicos empleando distintas técnicas de imagen como tomografía, resonancias magnéticas, etc

Simplemente con un formato numérico, el cerebro humano es incapaz de interpretar gigabytes de datos cada día, resultando en mucha información desperdiciada. De aquí surge la necesidad de una alternativa a los números. La posibilidad de los científicos para visualizar cálculos complejos y simulaciones es absolutamente esencial para asegurar la integridad de análisis y predicciones, así como presentar esta información al resto.

Esta capacidad de visualización se hace especialmente importante en el ser humano, puesto que, de todas nuestras funciones cerebrales, nuestro sistema de visión es el que mayor capacidad de procesamiento de información tiene. Según expertos en conocimiento, el procesamiento de información en humanos tiene dos formas: preconsciente y consciente. El procesamiento de información preconsciente es involuntario, similar a la respiración. Este es el tipo de procesamiento que se da en información gráfica. Rohrer [5]

Teniendo esto en cuenta y el hecho de que cada persona tiene una capacidad de vision espacial diferente, la informática gráfica puede ayudar a aquellos que tienen una mayor dificultad y que, de otro modo, serían incapaces de visualizar conceptos complejos.

Estos hechos muestran una necesidad ha resultado en el surgimiento, en la última década, de una disciplina totalmente independiente, la visualización científica.

1.1. Motivación

La importancia de lo expuesto anteriormente sirve como suficiente motivación, aunque a esto se ha de añadir el reto personal de, con este trabajo, aprender y entender un área de la informática que no forma parte del itinerario en mi formación, como es la informática gráfica, y que engloba muchas de las materias vistas hasta ahora tanto en ingeniería informática como en matemáticas.

Además, esta rama dentro de la investigación científica es relativamente reciente, asociándose su nacimiento en 1987 al artículo McCormick et al. [6], por lo que aún hay muchos retos y problemas por resolver, haciendo su estudio muy interesante.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es el de aprender el funcionamiento básico de los gráficos y la aplicación de éstos a la investigación científica. Este objetivo se puede desglosar en otros subobjetivos más concretos y que marcan la línea de trabajo:

1. Comprender el pipeline de gráficos y la utilidad y funcionamiento de los shaders, así como aprender el lenguaje GLSL para su escritura.
2. Aprender las técnicas más conocidas de visualización científica y cómo desarrollar shaders que las implementen.
3. Desarrollar una aplicación que ponga de manifiesto lo aprendido, desarrollando shaders que ilustren algunas de las técnicas vistas.

1.3. Plan de trabajo

Con estos objetivos en mente, se desarrolló el siguiente plan de trabajo, acordado en reuniones iniciales entre tutora y autor del trabajo.

- **Toma de contacto con OpenGL** Durante esta fase se leyeron tutoriales sobre OpenGL y se experimentó con diversos shaders y librerías para familiarizarse con la tecnología, a la vez que se aprendía el lenguaje GLSL.

- **Documentación** Durante la duración completa del proyecto se llevó a cabo una documentación acerca de las distintas fuentes de información, con el objetivo de no olvidar incluir partes importantes en la memoria.
- **Comunicación con el tutor** Se concretaron diversas reuniones con la tutora durante las partes intensivas del proyecto con el fin de mostrar avances y acordar los siguientes pasos. Asimismo, se mantuvo una comunicación mediante correo electrónico para aquellas dudas menores que surgieron durante la realización del trabajo.
- **Preparación del entorno de desarrollo** Durante esta fase se preparó el equipo, instalando las librerías y programas necesarios para el correcto funcionamiento de la aplicación.
- **Desarrollo de la aplicación** Una vez preparado el entorno, se continuó durante toda la duración del trabajo con el desarrollo de la aplicación, incluyendo cada vez nuevas capacidades.
- **Redacción de la memoria** Se inició la redacción de la memoria una vez se tenían conocimientos suficientes, a mitad de la elaboración del trabajo. Una vez comenzada la redacción, se fue reeditando y mejorando en un proceso iterativo.

1.4. Estructura de la memoria

El siguiente capítulo, **OpenGL y DirectX 2**, presenta las dos grandes especificaciones dentro de la informática gráfica, centrándose en OpenGL y analizando sus características, capacidades y debilidades, así como las diferencias entre ambas.

Posteriormente, el capítulo **Shaders y Visualización Científica 3** explora las técnicas más comunes dentro del campo de visualización científica y qué tipos de shaders son útiles para cada una de ellas, introduciendo algunos de los que más adelante se presentarán junto a la aplicación.

En el capítulo **Aplicación 4** se presenta la aplicación desarrollada, explicando el diseño, capacidades, experimentos realizados. . .

Por último el capítulo **Conclusiones y Trabajo Futuro 5** incluye un análisis del trabajo realizado, el nivel de cumplimiento de los objetivos propuestos y posibles líneas de trabajo futuro.

El código de la aplicación desarrollada puede encontrarse en el siguiente enlace:
<http://github.com/davidfdezalcoba/TFG>

Capítulo 2

OpenGL y Direct3D

El objetivo de este capítulo es explicar en qué consiste OpenGL, así como su pipeline de gráficos, los tipos de shaders que incluye y las diferencias que presenta con DirectX, su principal competidor.

2.1. ¿Qué es?

OpenGL [7] se define como una API (*application programming interface*), que es simplemente una librería de software para acceder a capacidades del hardware de gráficos (ver Shreiner et al. [8]).

OpenGL está diseñado como una interfaz independiente del hardware que puede ser implementada en muchos sistemas hardware de gráficos diferentes, o completamente como software, en el caso de que el sistema no posea hardware de gráficos. OpenGL no proporciona ninguna funcionalidad para describir modelos en tres dimensiones ni operaciones para leer ficheros (como imágenes JPEG, por ejemplo). En su lugar, se deben construir los objetos tridimensionales a partir de un pequeño conjunto de primitivas geométricas—puntos, líneas, triángulos y parches.

2.2. Breve historia de OpenGL

OpenGL nace a principios de los años 90, desarrollada por Silicon Graphics (SGI). En los años 80, Silicon Graphics poseía una API privada denominada IRIS GL, utilizada para producir gráficos en sus estaciones de trabajo IRIS. Posteriormente, debido a la pérdida de cuota de mercado, decidió hacer su API pública. Sin embargo, a causa de problemas con patentes y el hecho de tener características poco relevantes para los gráficos 3D como la funcionalidad de ventanas, se decidió reescribir algunas de las partes y se lanzó lo que ahora se conoce como OpenGL.

Esta nueva especificación consiguió logros importantes para la informática gráfica, como estandarizar el acceso al hardware gráfico, trasladar a los fabricantes la responsabilidad del desarrollo de las interfaces con el hardware y delegar la funcionalidad de ventanas al sistema operativo. Todo esto supuso un gran impacto en la industria, al ofrecer a los desarrolladores una plataforma de alto nivel sobre la que trabajar.

En 1992, Silicon Graphics lideró la creación del OpenGL Architecture Review Board (OpenGL ARB) [9], un grupo de empresas del sector que sería la encargada de mantener y extender la especificación en los años siguientes. El OpenGL ARB estaba formado por 3Dlabs, Apple, ATI, Dell, IBM, Intel, Nvidia, SGI and Sun Microsystems.

En otoño de 2006, el OpenGL ARB y los directores de Khronos votaron para transferir el control de OpenGL a Khronos Group. El secretario de la ARB Jon Leech observó: *“Hemos decidido mover OpenGL a Khronos para asegurar la salud futura de OpenGL en todas sus formas.”* [9]

2.3. Diseño de OpenGL

OpenGL implementa el llamado pipeline de gráficos o pipeline de renderizado. Este pipeline consiste en una secuencia de etapas de procesamiento para convertir datos de una aplicación en una imagen final renderizada.

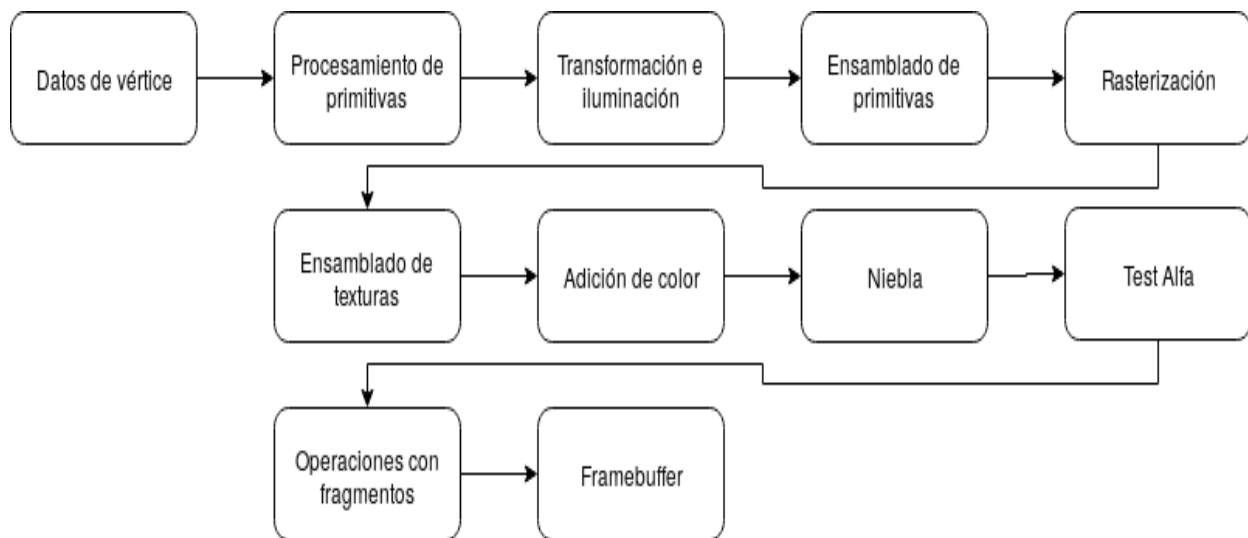


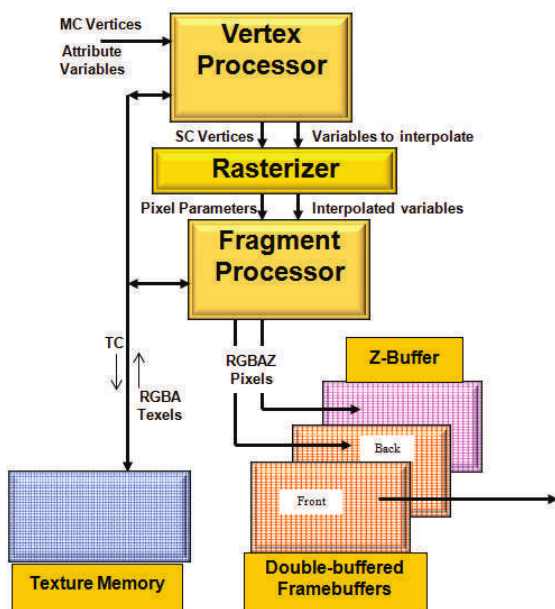
Figura 2.1: Pipeline no programable. OpenGL 1.5

En un principio, este pipeline de renderizado consistía en varias etapas fijas y no programables, en las que el programador simplemente elegía una serie de configuraciones para

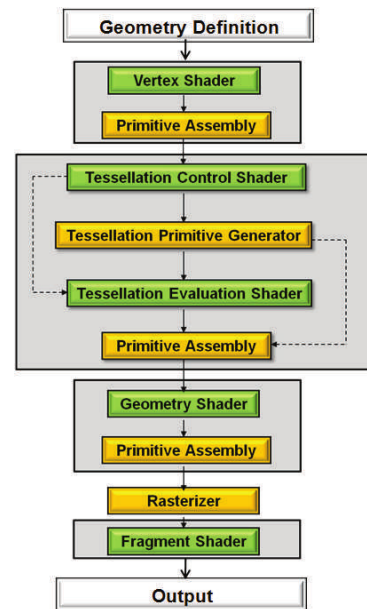
que OpenGL realizase las operaciones propias de cada etapa. Las etapas principales de este pipeline eran las siguientes (Ver Figura 2.1):

- Procesamiento de primitivas
- Transformación e iluminación
- Ensamblado de primitivas
- Rasterización
- Ensamblado de texturas
- Adición de color
- Niebla
- Test Alfa
- Operaciones con fragmentos

Sin embargo, con la versión 2.0 de OpenGL se introdujeron los *shaders*, explorados en detalle en el Capítulo 3, que sustituyeron algunas de estas etapas fijas por etapas programables, dando mayor flexibilidad al programador. La Figura 2.2 muestra el pipeline asociado a la versión 4.3 de OpenGL.



(a) Pipeline de OpenGL



(b) Pipeline detallado

Figura 2.2: Pipeline de gráficos de OpenGL

El renderizado de una imagen comienza con una llamada, desde la aplicación principal, a una función de dibujo de OpenGL. Con esta llamada, OpenGL coge datos sobre vértices contenidos en diferentes objetos y renderiza con estos datos una o más *primitivas* [10].

Las primitivas geométricas son las interpretaciones que OpenGL puede hacer sobre lo que representa un flujo de vértices. Por ejemplo, tres vértices pueden significar tres puntos independientes, dos líneas, un triángulo, etc. OpenGL contiene los siguientes tipos principales de primitivas:

2.3.1. Primitivas de Puntos

OpenGL contiene una única primitiva de puntos: `GL_POINTS`. Cuando se llama a una función de dibujo con esta primitiva, OpenGL interpreta el flujo de vértices como puntos independientes.

2.3.2. Primitivas de Línea

En cuanto a las primitivas de línea, hay tres tipos, basándose en distintas interpretaciones del flujo de vértices.

- `GL_LINES`: Los dos primeros vértices se consideran una línea, los dos siguientes otra línea, etc.
- `GL_LINE_STRIP`: Los vértices adyacentes se consideran una línea. Es decir el primero y el segundo forman una línea, el segundo y el tercero forman otra línea, etc.
- `GL_LINE_LOOP`: Como `GL_LINE_STRIP`, pero el primer y último vértices se consideran también una línea.

2.3.3. Primitivas de Triángulo

Un triángulo es una primitiva formada por tres vértices. También existen tres primitivas de triángulo:

- `GL_TRIANGLES`: los tres primeros vértices forman un triángulo, los tres siguientes otro, etc.
- `GL_TRIANGLE_STRIP`: cada grupo de tres vértices adyacentes forman un triángulo. El (0, 1, 2), el (1, 2, 3), etc.
- `GL_TRIANGLE_FAN`: El primer vértice queda fijo, y cada grupo de dos vértices adyacentes a partir de él forma un triángulo con el primero. Por ejemplo el (0, 1, 2), (0, 2, 3), etc.

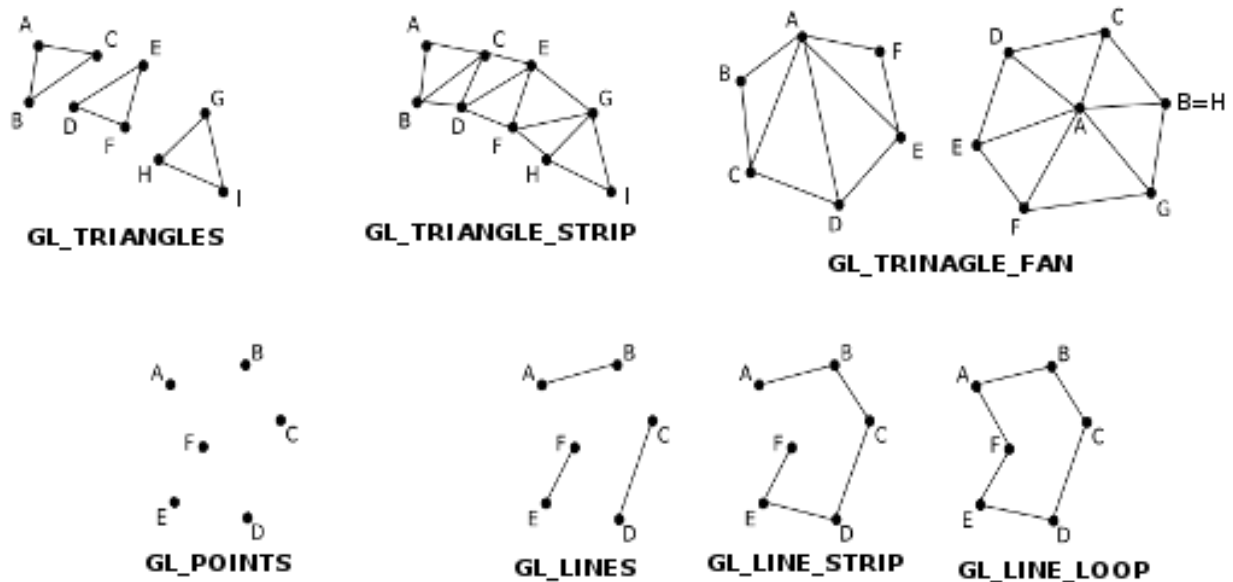


Figura 2.3: Primitivas de OpenGL

En la Figura 2.3 se pueden ver las diferentes interpretaciones en forma de primitiva que puede realizar OpenGL para renderizar un flujo de vértices.

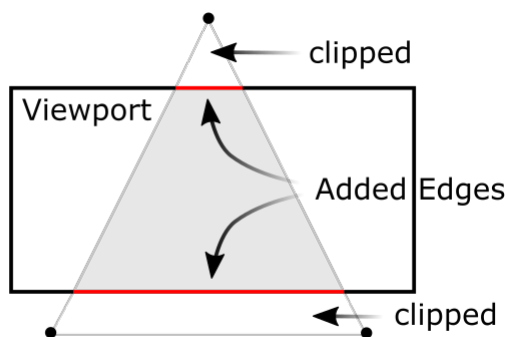
Una vez se ha hecho la llamada a la función de dibujado, comienza el proceso de renderizado, recorriéndose las diferentes etapas que forman el pipeline de renderizado.

2.3.4. Procesamiento de Vértices

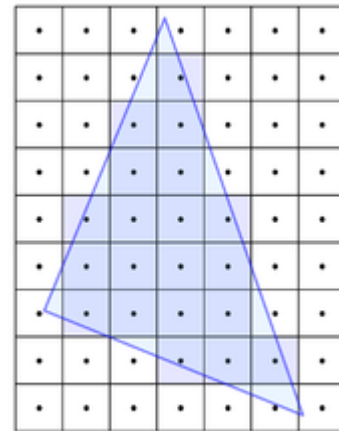
La primera etapa del pipeline programable —Vertex Processor, Figura 2.2a—, está formada a su vez por los shaders programables de vértice, teselación y geométrico, que sustituyen a las etapas de transformación e iluminación del pipeline no programable, así como la etapa fija realizada por OpenGL conocida como Ensamblado de Primitivas. Obtiene como entrada el flujo de vértices, normales, definiciones de primitivas geométricas, colores, parámetros de iluminación, materiales y coordenadas para las texturas. Esta etapa opera sobre estos datos y los organiza en las primitivas geométricas asociadas en preparación para la etapa de post-procesado de vértices, en la que se realizan, entre otras cosas, su recorte y rasterización. Así, la salida es un conjunto de vértices como píxeles, con su color, profundidad y coordenadas de textura.

2.3.5. Clipping

Posteriormente se realiza el recorte o *clipping*, que ocurre cuando, ocasionalmente, algunos vértices quedan fuera de lo que se denomina *viewport*—la región de la ventana donde se permite dibujar— modificando las primitivas geométricas para que nada quede fuera de ese espacio. (Ver Figura 2.4a).



(a) Clipping en OpenGL



(b) Rasterización en OpenGL

Figura 2.4: Clipping y rasterización en OpenGL

2.3.6. Rasterización

La siguiente etapa es la rasterización (ver Figura 2.4b). Este paso implementa la transición de vértice a fragmento. Inmediatamente después del clipping, las primitivas geométricas actualizadas se mandan al rasterizador para la generación de fragmentos. Podemos considerar un fragmento como un “candidato a pixel”, en el sentido de que un pixel reside en el *framebuffer*— un espacio de memoria manejado por el hardware gráfico que manda al dispositivo de salida digital— mientras que un fragmento puede ser rechazado y nunca actualizar su localización de pixel asociada.

2.3.7. Procesamiento de Fragmentos

En la última etapa, el procesado de fragmentos se realiza a su vez en dos pasos, uno de ellos programable con el shader de fragmentos y otras operaciones sobre fragmentos realizadas automáticamente por OpenGL. Durante este último procesamiento, la visibilidad de cada fragmento es determinada utilizando diferentes tests (profundidad, color, plantilla,

ruido...).

Cuando un fragmento pasa por todas estas etapas y todos los test activos, puede ser escrito directamente en el buffer de fragmentos, actualizando su color y valor de profundidad de su pixel o, si el *blending* está activado, mezclando su color con el del pixel actual para generar un nuevo color que se escribe en el buffer de fragmentos.

2.4. Diferencias con Direct3D

Direct3D es parte del conjunto de la API multimedia DirectX, propiedad de Microsoft [11]. Es la principal competidora de OpenGL, ofreciendo ambas un conjunto similar de funcionalidades. Aun así, se pueden observar varias diferencias en términos de disponibilidad, portabilidad, facilidad de uso, rendimiento, estructura y usuarios finales. En la tabla 2.1, se muestran algunas de ellas resumidas.

	OpenGL	Direct3D
Soporte de escritorio	Multiplataforma	Microsoft Windows Xbox
Soporte sistemas em- potrados	Multiplataforma (OpenGL ES)	Windows Embedded Win- dows CE
Licencia	Libre (con características patentadas)	Privativa
Usuario final	Profesionales	Juegos

Tabla 2.1: Diferencias entre OpenGL y Direct3D

En cuanto a la portabilidad, DirectX solo está disponible para la familia de sistemas operativos Microsoft Windows, mientras que OpenGL tiene implementaciones en muchas plataformas, incluyendo Microsoft Windows y sistemas Unix.

En términos de facilidad de uso hoy en día ambas APIs se encuentran bastante parejas, habiendo evolucionado desde las primeras versiones, en las que los desarrolladores instaban a Microsoft a unirse a la iniciativa OpenGL, debido a que suponía menos esfuerzo trabajar con esta última.

El diseño de ambas es también similar. Tras muchos años de evolución, el pipeline gráfico es bastante parecido, como puede apreciarse en la Figura 2.5.

En conclusión, hoy en día ambas se consideran bastante similares en cuanto a rendimiento y capacidades, siendo el soporte a otros sistemas y el carácter de las licencias las únicas grandes diferencias que hacen decantarse a los desarrolladores por una u otra.

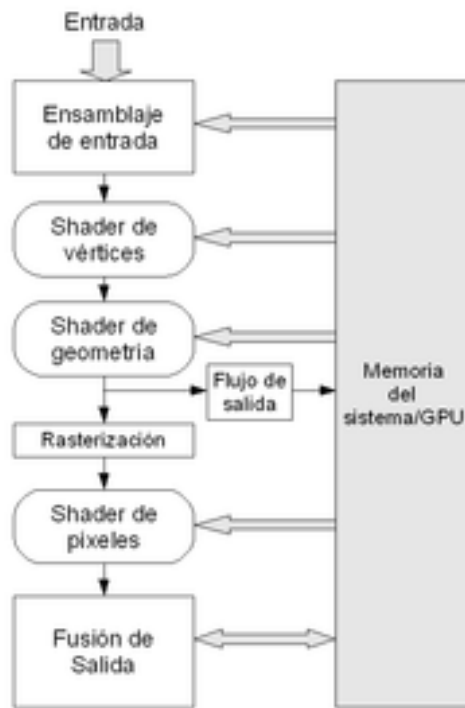


Figura 2.5: Pipeline de gráficos de Direct3D

Capítulo 3

Shaders Gráficos

Como se ha visto en la sección 2.3, el pipeline de gráficos de OpenGL tiene cuatro etapas programables:

- Shader de Vértices (Vertex Shader)
- Shaders de Teselación
 - Shader de Control de Teselación (Tessellation Control Shader)
 - Shader de Evaluación de Teselación (Tessellation Evaluation Shader)
- Shader Geométrico (Geometry Shader)
- Shader de Fragmento (Fragment Shader)

Los shaders gráficos son un tipo de programa utilizado inicialmente para producir niveles apropiados de luz, oscuridad y color en una imagen. Sin embargo, hoy en día se utilizan con diversas finalidades diferentes como efectos especiales, post procesado de vídeos, videojuegos, etc.

Los shaders se introdujeron en OpenGL en la versión 2.0, incluyendo el lenguaje de programación centrado en shaders OpenGL Shading Language, también conocido como GLSL [12]— un lenguaje tipo C creado específicamente para que los desarrolladores tuvieran más control sobre el pipeline de renderizado.—

Durante el proceso de desarrollo de shaders no es necesario incluir todas las etapas que se muestran en la Figura 2.2b, aunque normalmente, si se decide utilizar alguno de ellos, se requiere utilizar, al menos, un Vertex Shader.

Los datos se proporcionan a los shaders de dos maneras distintas desde la aplicación principal. La primera es proporcionando los datos necesarios para el renderizado de vértices a la primera etapa, el Vertex Shader. A partir de ese momento Los shaders del pipeline se comunican entre ellos mediante variables proporcionadas por GLSL o definidas por el

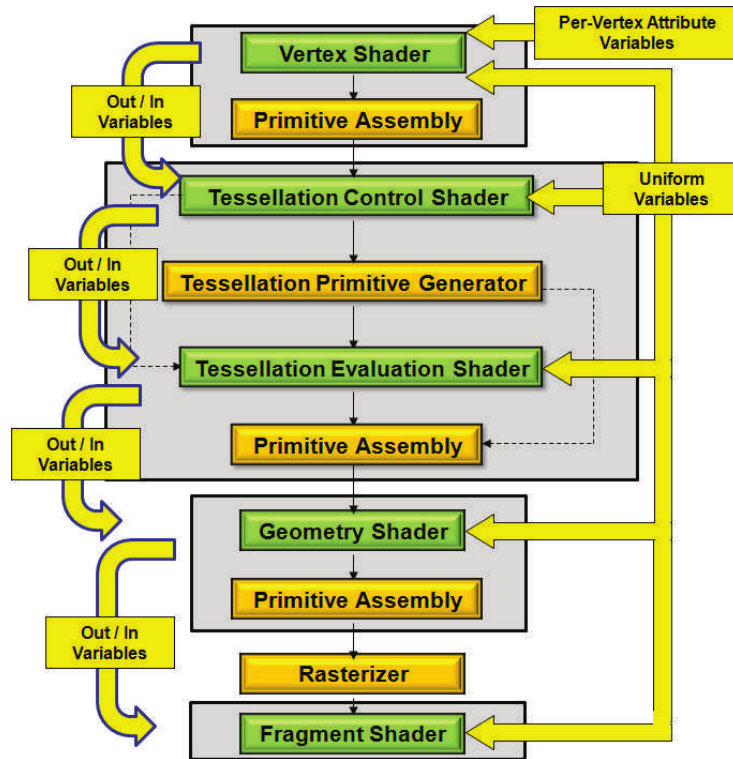


Figura 3.1: Comunicación entre shaders del pipeline

programador en los shaders, siendo la salida de un shader la entrada del siguiente, como se muestra en la Figura 3.1. Un breve resumen acerca del lenguaje GLSL se incluye en el Apéndice A.

El segundo modo de especificar datos a los shaders es mediante variables **uniform**. Estas variables se definen en los shaders. Se trata de variables de solo lectura por parte de los shaders. Al contrario que las variables definidas como entrada y salida de un shader a otro, estas variables toman sus valores del programa principal cada vez que se invoca el shader.

3.1. Vertex Shader

El Vertex Shader es la etapa de sombreado en el pipeline de renderizado que se encarga del procesamiento de los vértices individuales [13]. El Vertex Shader tiene como entrada unos atributos de vértice especificados desde un *Vertex Array Object (VAO)* por un comando de dibujo. Recibe un único vértice, formado por sus atributos, del flujo de vértices y genera un único vértice al flujo de salida. Por cada vértice de entrada ha de haber, necesariamente, uno de salida.

Este shader se invoca una vez por cada vértice en el flujo de entrada, exceptuando el caso en el que OpenGL detecte que una invocación a este shader con las exactamente las mismas entradas ya ha sido realizada, en cuyo caso se reutilizan los resultados de la invocación previa, resultando en un ahorro de tiempo valioso.

Normalmente, las operaciones que se realizan en el Vertex Shader son transformaciones para el espacio de post-proyección, iluminación por vértice o preparación para las siguientes etapas del pipeline.

3.2. Tessellation Shaders

La Teselación es la etapa, opcional, del pipeline de renderizado que consiste en subdividir un parche de algún tipo y computar los valores de los nuevos vértices creados en el proceso. Está compuesta, a su vez, por otras tres etapas, dos de ellas programables en forma de shader, y una intermedia fija. Cada una de estas etapas se encarga de una parte del proceso de teselación.

En esta sección se explican los dos shaders involucrados, además de la etapa intermedia, llamada generador de primitivas de teselación, pues resulta importante para entender el proceso y las entradas y salidas a los shaders.

3.2.1. Tessellation Control Shader

El Tessellation Control Shader (TCS) [14] es la primera etapa del proceso de teselación, en el caso de ser utilizado. Se sitúa inmediatamente posterior al Vertex Shader e inmediatamente anterior al generador de primitivas de teselación. Controla cuánta teselación provocar en un parche determinado, así como el tamaño del parche, permitiendo aumentar la cantidad de datos. Su función principal es la de comunicar al generador de primitivas de teselación el nivel de teselación deseado, así como proveerle los datos del parche al Tessellation Evaluation Shader mediante sus variables de salida.

Como entrada, el TCS obtiene la salida del Vertex Shader organizada en un vector de tantos vértices como tenga el parche de entrada. Cada invocación al TCS produce un único vértice como salida al parche de salida. Por cada vértice en el parche de entrada se realiza una invocación al TCS, resultando en tantas invocaciones como vértices hay en dicho parche.

En el caso de no utilizar un TCS, se pueden pasar valores por defecto a las siguientes etapas de teselación.

3.2.2. Generador de primitivas de teselación

El generador de primitivas de teselación [15] es la etapa que se encuentra entre los dos shaders de teselación, el TCS y el Tessellation Evaluation Shader. Esta etapa, fija en el pipeline, es la encargada de crear nuevas primitivas a partir del parche de entrada. La función principal de este sistema es la de determinar cuántos vértices crear, en qué orden hacerlo y qué clase de primitivas construir con ellos. Los datos reales de estos vértices, como color, posición, etc., han de ser generados por el TES. Debido a esto, el generador no tiene en cuenta el parche de salida producido por el TCS, sino que solo opera en términos de teselar un cuadrado o triángulo abstracto, o un bloque de isolíneas.

Esta etapa, está supeditada al Tessellation Evaluation Shader, puesto que solo se ejecutará en el caso de que exista uno activo. La generación de primitivas en esta etapa se ve afectada por distintos factores:

- Niveles de teselación marcados por el TCS (O por defecto si no hay TCS)
- Espaciado de los vértices teselados, definido en el TES
- Tipo de primitiva, definido en el TES
- Orden de generación de primitivas, definido en el TES

La cantidad de teselación a realizar se define en niveles de teselación internos y externos (Ver Figura ??). Funcionan de la siguiente manera: un nivel de teselación 4 indica que un borde se convertirá en 4 bordes (2 vértices se convertirán en 5). El nivel externo define el grado de teselación para los bordes externos de la primitiva. Esto permite que dos parches distintos se conecten apropiadamente, a pesar de tener distintos niveles de teselación dentro del parche. El nivel interno hace referencia el número de teselaciones a realizar dentro del parche abstracto.

Cabe destacar que no todos los parches abstractos utilizan los mismos niveles de teselación. Por ejemplo, los triángulos utilizan un único nivel interno y tres niveles externos. El resto de posibles niveles son ignorados.

El espaciado entre vértices puede realizarse de las siguientes maneras: espaciado equidistante, espaciado fraccional par o espaciado fraccional impar.

El espaciado equidistante (ver Figura 3.3) divide el borde a teselar en segmentos de igual longitud. Solo acepta valores enteros, por lo que redondea el nivel de teselación hasta el siguiente entero. Este hecho causa que los segmentos aparezcan instantáneamente de un nivel a otro.

Para conseguir un comportamiento mas “suave” se tienen los otros dos modos de espaciado. Estos últimos son útiles especialmente cuando el nivel de teselación es dependiente del área vista desde la cámara. En el espaciado fraccional par el número de segmentos en

los que dividir el borde (nivel de teselación efectivo) se redondea al siguiente entero par, mientras que en el espaciado fraccional impar se redondea al siguiente entero impar. Para estos modos de espaciado se necesita definir dos valores:

- n , el nivel de teselación efectivo, redondeado según lo anterior.
- f , el valor computado antes del redondeo. Un valor potencialmente fraccionario.

Según este esquema, los bordes a teselar se subdividen en dos conjuntos de segmentos. El primero con $n - 2$ segmentos de igual longitud, el otro con 2 segmentos de igual longitud entre ellos, pero no necesariamente de igual longitud que los del el otro conjunto. Estos dos segmentos tendrán menor longitud que los otros en general. La longitud de estos es exactamente $n - f$. Por tanto, cuando se cumple que $n - f = 0$ se tiene que todos los segmentos tienen igual longitud. Estos comportamientos se pueden observar en las Figuras 3.4, 3.5.

3.2.3. Tessellation Evaluation Shader

El Tessellation Evaluation Shader (TES) [16] es la etapa opcional que se encuentra entre el generador de primitivas de teselación y el geometry shader. Su función es la de coger los resultados obtenidos en la etapa anterior y computar las posiciones interpoladas y otros datos vértice a vértice a partir de ellos.

El TES obtiene del generador de primitivas de teselación un parche abstracto, así como datos de los vértices para todo el parche, junto con otros datos, provenientes del TCS. Cada invocación a este shader produce un vértice particular y es invocado una vez por cada vértice en el parche abstracto.

Esta es la etapa donde el programador implementa el algoritmo que se usa para computar las nuevas posiciones, normales, coordenadas de texturas, etc. Como se ha expuesto antes, este shader es el que determina si ocurrirá o no la etapa de generación de primitivas de teselación, puesto que solo se ejecutará si existe un TES activo.

El TES, en caso de ser utilizado, debe especificar el tipo de primitiva que servirá como entrada al geometry shader. Este tipo puede ser puntos, isolíneas, triángulos o cuadriláteros.

3.3. Geometry Shader

El Geometry Shader [17] es un programa escrito en GLSL que corresponde a la etapa del pipeline programable que se encuentra entre el TES o el Vertex Shader (dependiendo de si existe o no teselación) y la etapa fija de post-procesado de vértices. Este shader es opcional y no es necesaria su utilización.

Las invocaciones a este shader toman como entrada una única primitiva geométrica y puede dar como salida cero o más primitivas, aunque existe un límite de primitivas que se pueden generar en cada invocación, dependiendo de la implementación. Los shaders geométricos están diseñados para aceptar como entrada una primitiva específica y dar como salida otra.

Sus usos varían bastante, pudiéndose utilizar como una manera de amplificar la geometría, sirviendo como una especie de teselación, así como para realizar un renderizado por capas o incluso para la realización de tareas de cómputo en la GPU.

Entre las primitivas de entrada aceptadas por el geometry shader se encuentran las siguientes:

Entrada	Primitiva	Parámetro TES	Vértices
<code>points</code>	<code>GL_POINTS</code>	<code>point_mode</code>	1
<code>lines</code>	<code>GL_LINES</code> , <code>GL_LINE_STRIP</code> , <code>GL_LINE_LIST</code>	<code>isolines</code>	2
<code>lines_adjacency</code>	<code>GL_LINES_ADJACENCY</code> , <code>GL_LINE_STRIP_ADJACENCY</code>	N/A	4
<code>triangles</code>	<code>GL_TRIANGLES</code> , <code>GL_TRIANGLE_STRIP</code> , <code>GL_TRIANGLE_FAN</code>	<code>triangles</code> , <code>quads</code>	3
<code>triangles_adjacency</code>	<code>GL_TRIANGLES_ADJACENCY</code> , <code>GL_TRIANGLE_STRIP_ADJACENCY</code>	N/A	6

Tabla 3.1: Primitivas de entrada al Geometry Shader

Las primitivas de salida pueden ser únicamente alguna de las siguientes:

- `points`
- `line_strip`
- `triangle_strip`

Los shaders geométricos pueden generar tantos vértices como permita el límite de implementación. Para ello, el programador genera los valores que necesite para el nuevo vértice y, una vez estos valores sean correctos, una llamada a la función `EmitVertex()` produce el vértice deseado. Una vez llamada esta función, los valores escritos para el vértice son reseteados, teniendo que volver a escribirlos para generar otro vértice.

De igual modo, para generar una primitiva, debemos especificar del modo anterior todos los vértices que forman esa primitiva y posteriormente llamar a la función `EndPrimitive()`. De esta forma, si se desea generar más de una primitiva, se deben especificar los vértices que

forman la primera, llamar a `EndPrimitive()`, generar los vértices que forman la segunda y llamar de nuevo a `EndPrimitive()` para generar la segunda primitiva.

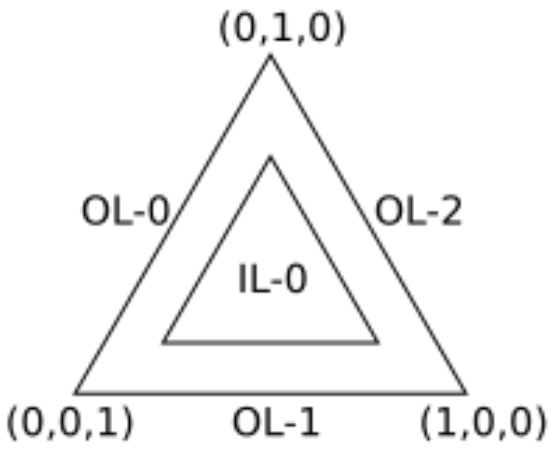
3.4. Fragment Shader

El Fragment Shader [18] es la etapa posterior a la rasterización. Por cada uno de los píxeles cubiertos por una primitiva, se genera un fragmento. Cada uno de estos fragmentos tiene una posición en la espacio de ventana, así como otros valores procedentes de la etapa de procesamiento de vértices.

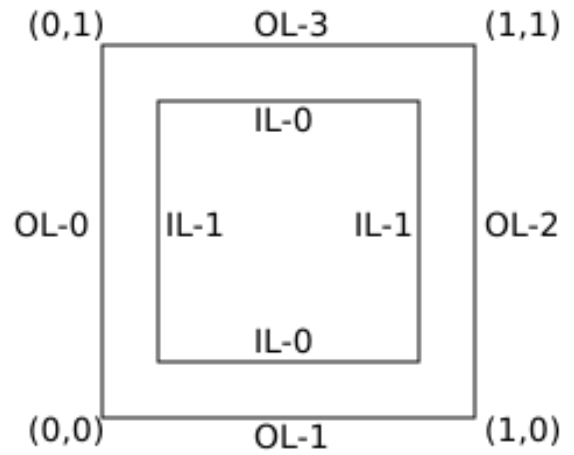
La salida del fragment shader consta de un valor de profundidad, un posible valor de plantilla (que no es modificado por el shader) y cero o más valores de color para ser potencialmente escritos en los buffers del frame buffer actual. Estos shaders toman como entrada un único fragmento, producido por el rasterizador, y dan como salida otro único fragmento.

Técnicamente, la utilización de estos shaders es también opcional, puesto que de no utilizarlo, los valores de color del fragmento de entrada quedarán indefinidos, pero los valores de profundidad y plantilla en la salida serán los mismos que los de entrada. Esto puede ser interesante en el caso de solo estar interesados en los valores de profundidad computados por el sistema en lugar de otro valor calculado por el programador.

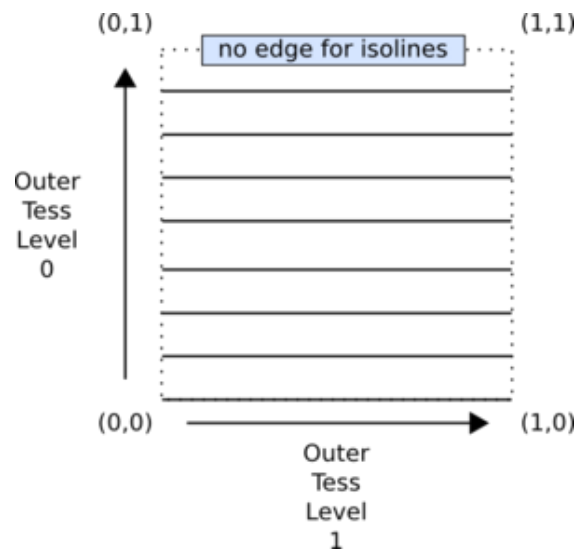
Este shader también tiene operaciones especiales no presentes en los otros tipos de shader, como puede ser la instrucción `discard`, cuyo objetivo es descartar los valores de salida generados durante la ejecución del shader para un fragmento en concreto, haciendo que este fragmento no pase a las siguientes etapas del pipeline. Esto puede ser útil para descartar fragmentos cuyos valores generados en la ejecución se queden fuera de unos límites impuestos por el programador.



(a) Niveles de triángulos



(b) Niveles de cuadriláteros



(c) Niveles de isolíneas

Figura 3.2: Teselación - Funcionamiento de los niveles

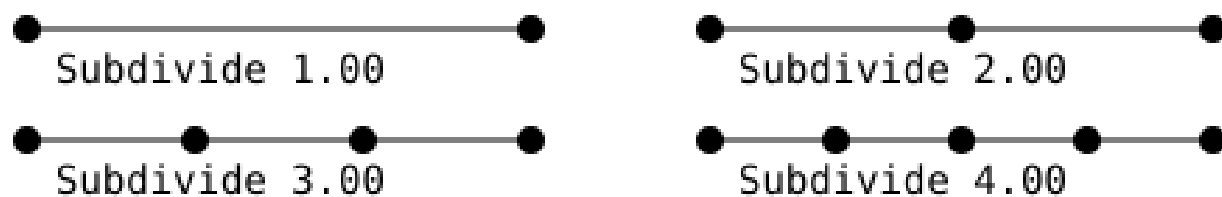


Figura 3.3: Teselación - Espaciado equidistante

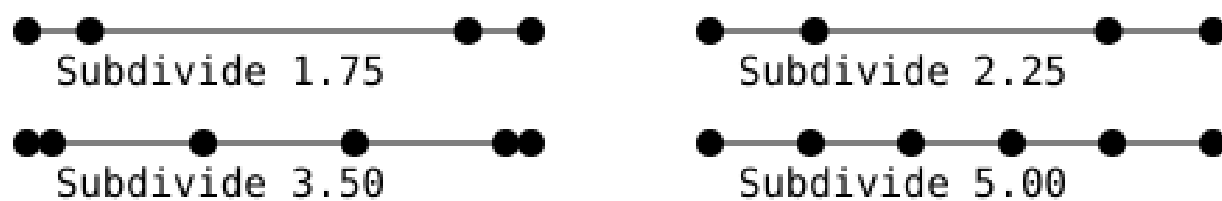


Figura 3.4: Teselación - Espaciado fraccional par

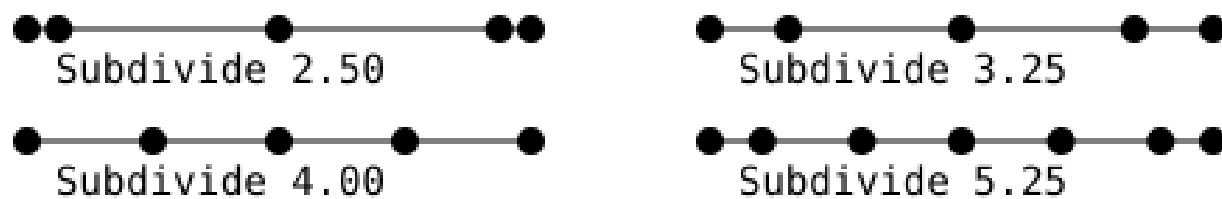


Figura 3.5: Teselación - Espaciado fraccional impar

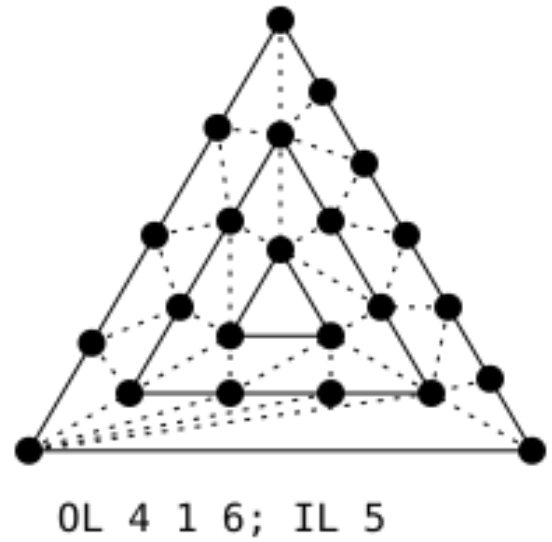
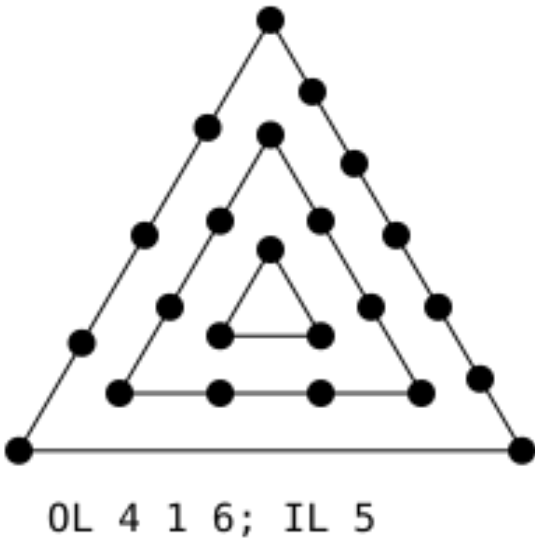
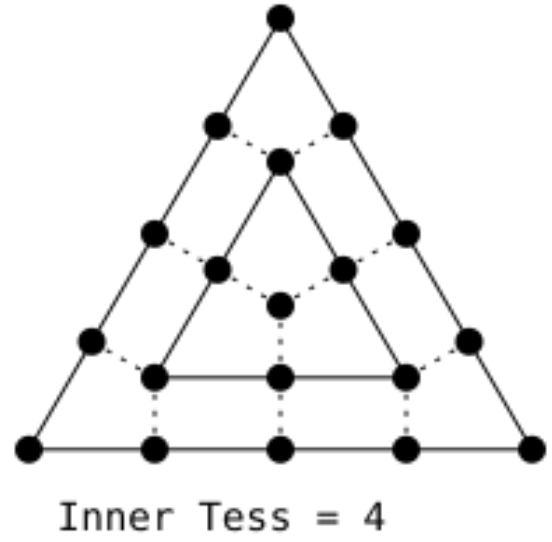
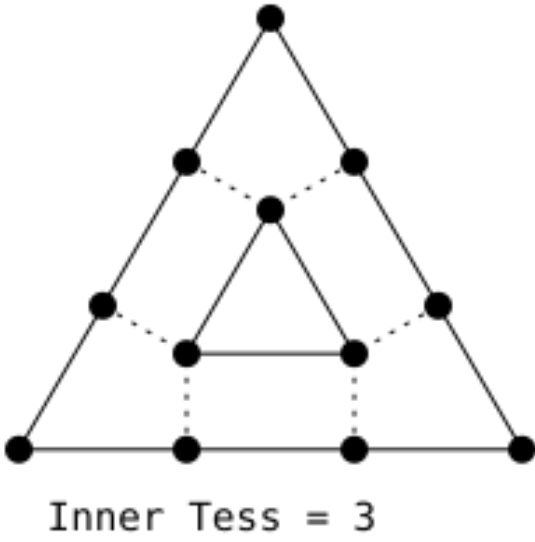


Figura 3.6: Teselación - Triángulos

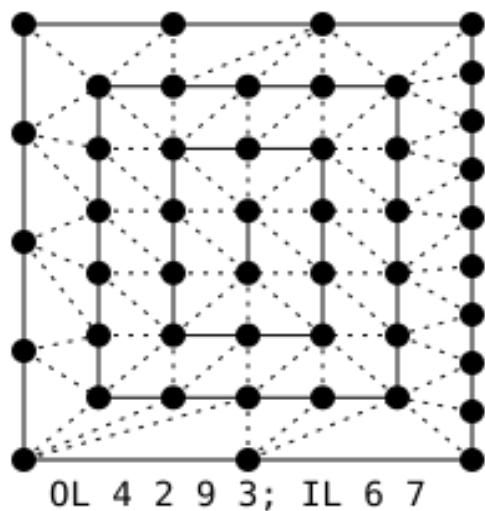
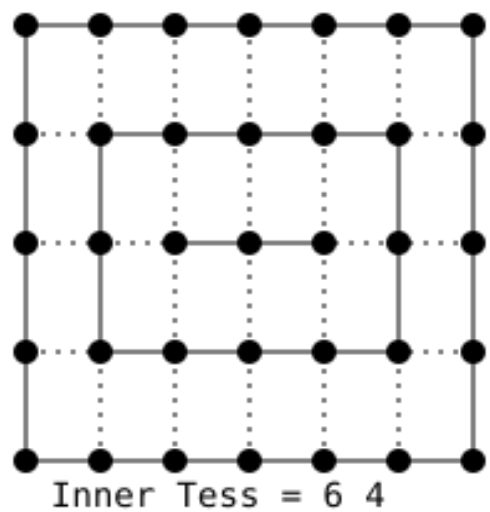
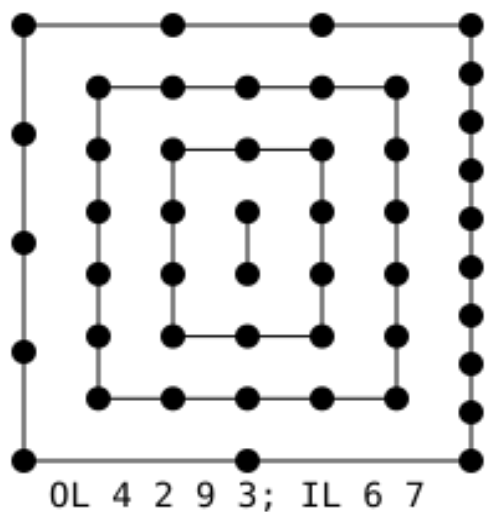
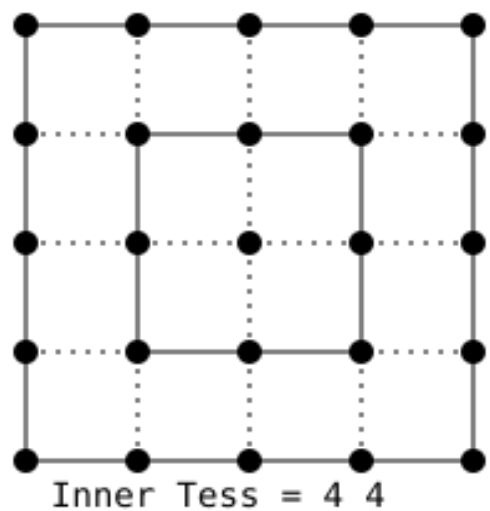
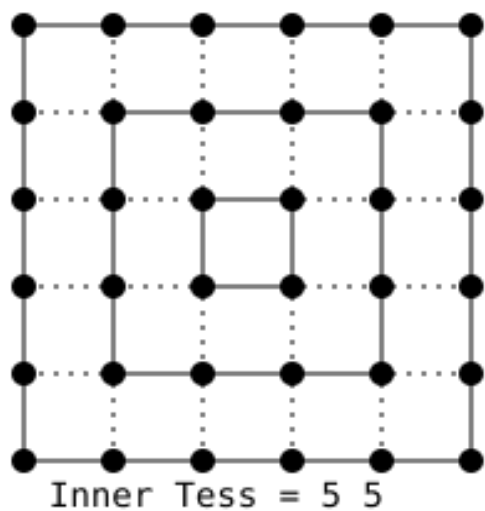


Figura 3.7: Teselación - Cuadriláteros

Capítulo 4

Visualización Científica

En este capítulo se muestran técnicas relevantes de visualización científica. Algunas de ellas serán implementadas mediante shaders en nuestra aplicación, explicando los shaders utilizados en ella.

4.1. Manipulación de imágenes

La manipulación de imágenes es la disciplina que incluye las diferentes técnicas de filtrado, combinación o modificación de imágenes con el fin de resaltar características deseables de la imagen. En visualización científica, por ejemplo, se puede utilizar el negativo de la imagen de una estructura ósea con el fin de detectar defectos que de otro modo resulta más complicado ver; utilizar una mezcla de imágenes astronómicas en diferentes espectros para conseguir una imagen mas realista; o aumentar el brillo y nitidez de una imagen para conseguir una visualización más eficaz.

Entre estas técnicas podemos encontrar, por ejemplo:

- Negativo
- Detección de bordes
- Cambios de brillo, contraste y nitidez
- Mezcla de imágenes

4.2. Curvas y superficies de Bézier

Se denominan curvas de Bézier a un sistema de trazado de dibujos técnicos ideado en los años 60 por Pierre Bézier. El modelo se basa en una descripción matemática que se utiliza extensivamente en programas tipo CAD, y son muy útiles para modelar curvas suaves y fáciles de manipular mediante sus puntos de control. Éstas pueden ser, generalmente, lineales,

cuadráticas o cúbicas, aunque se puede generalizar a cualquier grado.

Las curvas de Bézier vienen definidas mediante el llamado Polinomio de Bézier $B(t)$ y el grado de este polinomio es el que determina el grado de la curva. Las curvas de Bézier lineales tienen dos puntos de control \mathbf{P}_0 y \mathbf{P}_1 , por lo que la curva resultante es en realidad una recta entre esos dos puntos. Siguen la fórmula general de una recta, es decir:

$$B(t) = \mathbf{P}_0 + (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)t = (1 - t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1, \quad t \in [0, 1] \quad (4.1)$$

Las cuadráticas tienen tres puntos de control \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 y sigue la trayectoria marcada por la función $B(t)$:

$$B(t) = (1 - t)^2\mathbf{P}_0 + 2t(1 - t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2, \quad t \in [0, 1] \quad (4.2)$$

En las curvas cúbicas se utilizan cuatro puntos de control \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 y \mathbf{P}_3 , siguiendo la trayectoria:

$$B(t) = (1 - t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1 - t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1 - t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3, \quad t \in [0, 1] \quad (4.3)$$

Si generalizamos este polinomio se pueden generar curvas de grado n siguiendo la fórmula:

$$B(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_k BEZ_{k,n}(t), \quad t \in [0, 1] \quad (4.4)$$

donde $BEZ_{k,n}(t)$ son conocidos como los polinomios de Bernstein:

$$BEZ(t) = \binom{n}{k} t^k (1 - t)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n \quad (4.5)$$

En cuanto a las superficies de Bézier, se generan mediante dos conjuntos de curvas de Bézier ortogonales, especificadas mediante una malla de puntos de control. La ecuación para estas superficies es:

$$B(t, u) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_{j,k} BEZ_{j,m}(t) BEZ_{k,n}(u) \quad (4.6)$$

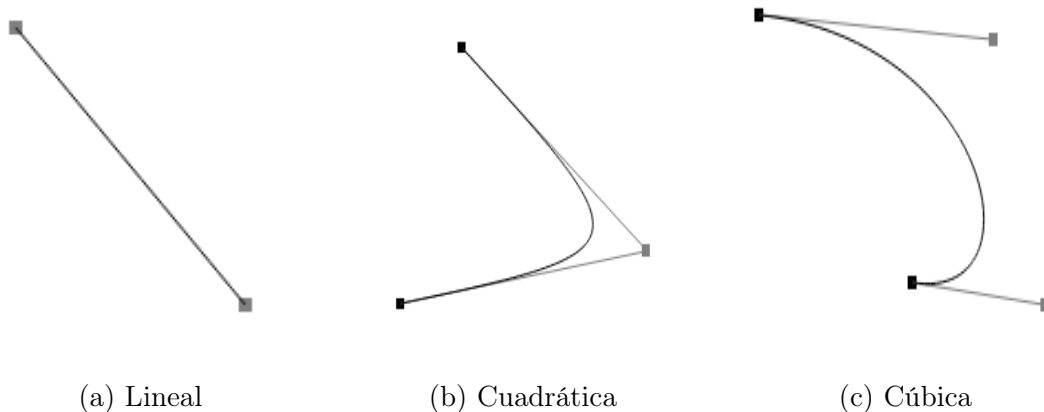


Figura 4.1: Curvas de Bézier.

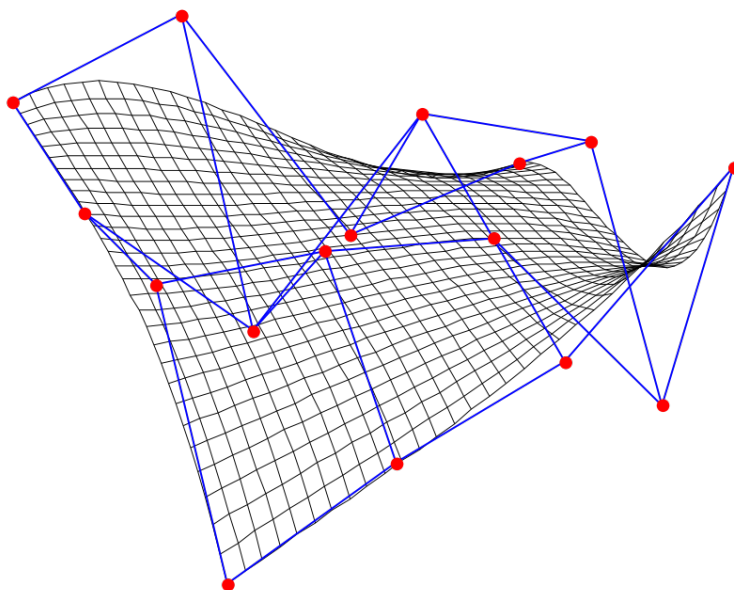


Figura 4.2: Superficie de Bézier con 16 puntos de control

Las curvas y superficies de Bézier tienen propiedades muy interesantes, como la posibilidad de calcular las primeras y segundas derivadas de la curva en los puntos finales, posibilitando su empalme con otras curvas suavemente. Para leer más acerca de las curvas y superficies de Bézier se pueden consultar Hearn and Baker [19], Bailey and Cunningham [20].

4.3. Visualización de datos en 3D

Otra de las grandes áreas de la visualización científica es la de visualizar conjuntos grandes de datos en tres dimensiones. Estos datos pueden ser tanto escalares como vectoriales.

Por ejemplo, se pueden monitorizar los datos de temperatura en la atmósfera durante un determinado período de tiempo, queriendo después visualizar las áreas que han estado más calientes de media.

Otro tipo de visualización de datos en tres dimensiones es la visualización de datos vectoriales en tres dimensiones, con el fin de capturar, por ejemplo, flujos vectoriales de fluidos al rededor de un objeto, etc.

Para este tipo de tareas existen diferentes métodos de visualización, entre los que se encuentran los siguientes:

- Nubes de puntos (Figura 4.3a)
- Visualización de volumen (Figura 4.3b)
- Isosuperficies (Figura 4.3c)
- Planos cortados (Figura 4.3d)
- Trazado de partículas (Figura 4.3e)
- Visualización de vectores en 3D (Figura 4.3f)

4.4. Superficies de revolución

Las superficies de revolución han sido siempre objeto de estudio en matemáticas, física e ingeniería. Debido a la facilidad para calcular su área, son utilizadas ampliamente en diseño industrial y modelado científico.

Este tipo de superficies surgen al rotar una curva planar —la generatriz— en torno a un eje. Como se ha dicho antes, se conocen fórmulas exactas para su área y volumen. Por ejemplo, cuando la revolución se produce en torno al eje y , se tiene la ecuación (4.7) para el área, y la ecuación (4.8) para el volumen del sólido encerrado por esta superficie. Sin embargo, si la revolución se realiza en torno al eje x , las ecuaciones de área y volumen son (4.9) y (4.10).

$$A_y = 2\pi \int_a^b x(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (4.7)$$

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad (4.8)$$

$$A_y = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (4.9)$$

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \quad (4.10)$$

4.5. Coloreado de terrenos

Otro de los ejemplos típicos en visualización científica consiste en modelar un terreno, ya sea en la Tierra o en otros planetas captando datos con sondas, y colorearlo por alturas para hacerse una idea visual de lo que nos están diciendo realmente esos datos. Un ejemplo de este coloreado de mapas puede verse en la figura 4.4.

4.6. Line Integral Convolution

La última de las técnicas de visualización que vamos a ver tiene que ver con la visualización de fluidos en dos dimensiones. Para ello veremos un método importante denominado Line Integral Convolution.

El método Line Integral Convolution fue originalmente propuesto en el artículo de Cabral and Leedom [2]. Se utiliza para visualizar campos vectoriales densos. En este método, se utiliza una imagen junto con datos de un flujo vectorial, modificando esta imagen para mostrar el flujo de los datos. (ver Figura 4.5).

En Petkov [3] se muestra como funciona el método de Line Integral Convolution, señalando los principales pasos que sigue:

Para cada pixel en la imagen de entrada, hacer:

1. Computar la línea de flujo (*streamline*) para una longitud determinada por el usuario en direcciones positivas y negativas. (Figura 4.6)
2. Para cada punto en la streamline, computar su peso de convolución h_i . (Figura 4.7)
3. Computar el valor de salida del pixel con los valores de entrada y los pesos computados en 2. (Figura 4.8)

Como imagen de entrada se puede utilizar, realmente, cualquier imagen, haciendo ver las líneas de flujo con los colores de la imagen original. Sin embargo, con el fin de que perturbaciones en la imagen original no condicionen el análisis del flujo a visualizar, la opción recomendada y casi siempre utilizada en este método es la del ruido blanco, debido a la distribución uniforme de los colores de sus píxeles.

4.6.1. Computar la línea de flujo

Para computar la línea de flujo se ha de utilizar algún método numérico. Entre las posibilidades se encuentran el método de Euler, utilizado por Petkov [3], el método de Euler de paso variable, utilizado por los autores originales en Cabral and Leedom [2], o el método de Runge-Gutta de orden 4, propuesto como alternativa en ambos textos. En la sección ??, se explican estos métodos como preparación para su implementación. De esta manera, se consiguen una serie de puntos a lo largo de la línea de flujo, dependiendo del paso escogido en el método numérico y la longitud de la línea escogida por el usuario.

4.6.2. Computar los pesos de convolución

Este paso consiste en encontrar la integral exacta del núcleo de convolución k en cada punto de la línea de flujo computado en el paso anterior. Es decir, se ha de resolver la integral (4.11).

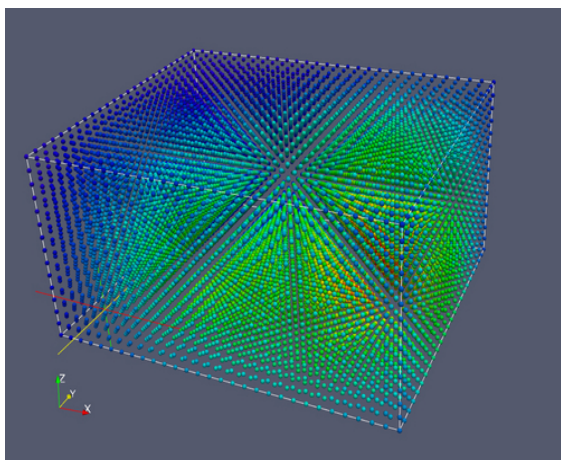
$$h_i = \int_a^b k(\omega) d\omega \quad (4.11)$$

donde i se representa el índice del punto actual en la línea de flujo, a es la distancia a lo largo de la línea de flujo entre el punto actual y el pixel para el que queremos calcular el valor de salida y b es igual a a más el tamaño del paso utilizado en el paso actual Δs_i . Más información acerca del núcleo de convolución puede encontrarse en Cabral and Leedom [2].

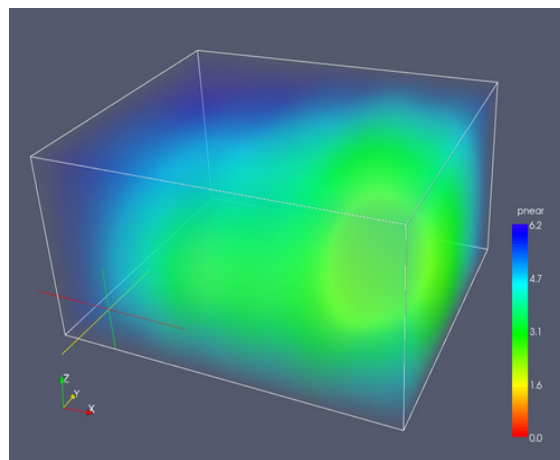
4.6.3. Computar los valores de salida del pixel

Para calcular los valores de salida del pixel una vez calculados los pesos de los puntos de la línea de flujo, se sigue la siguiente ecuación:

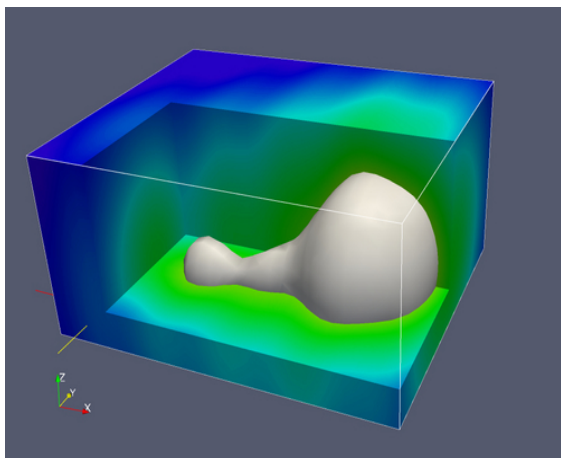
$$F_{out}(x, y) = \frac{\sum_{i=0}^l F_{in}(P_i)h_i + \sum_{i=0}^{l'} F_{in}(P'_i)h'_i}{\sum_{i=0}^l h_i + \sum_{i=0}^{l'} h'_i} \quad (4.12)$$



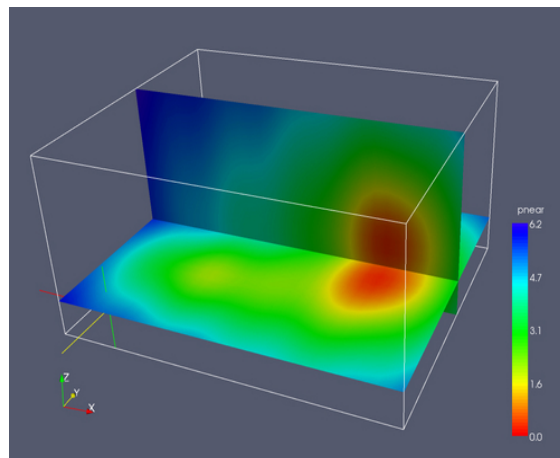
(a) Nube de puntos



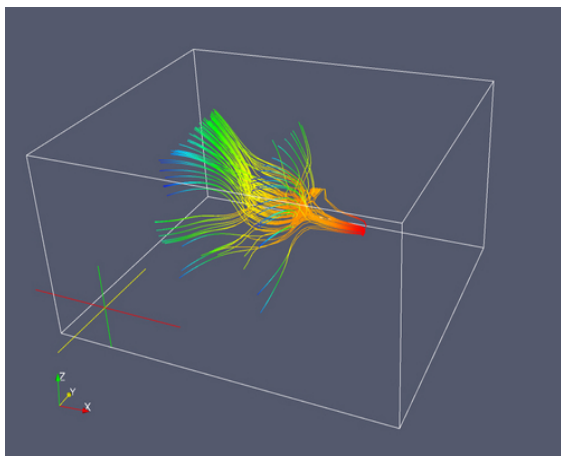
(b) Visualización de volumen



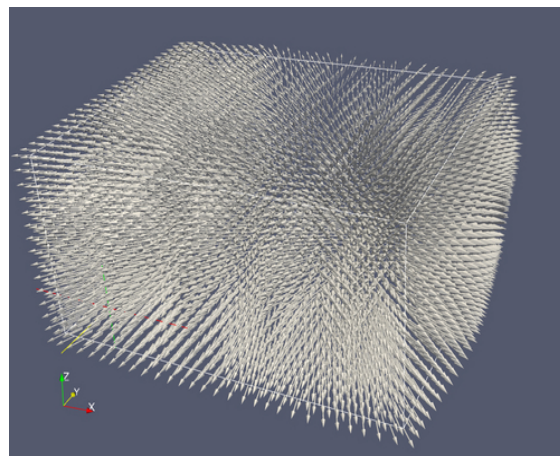
(c) Isosuperficie



(d) Planos cortados



(e) Trazado de partículas



(f) Visualización de vectores

Figura 4.3: Técnicas de visualización en 3D. Figuras provenientes de [1]

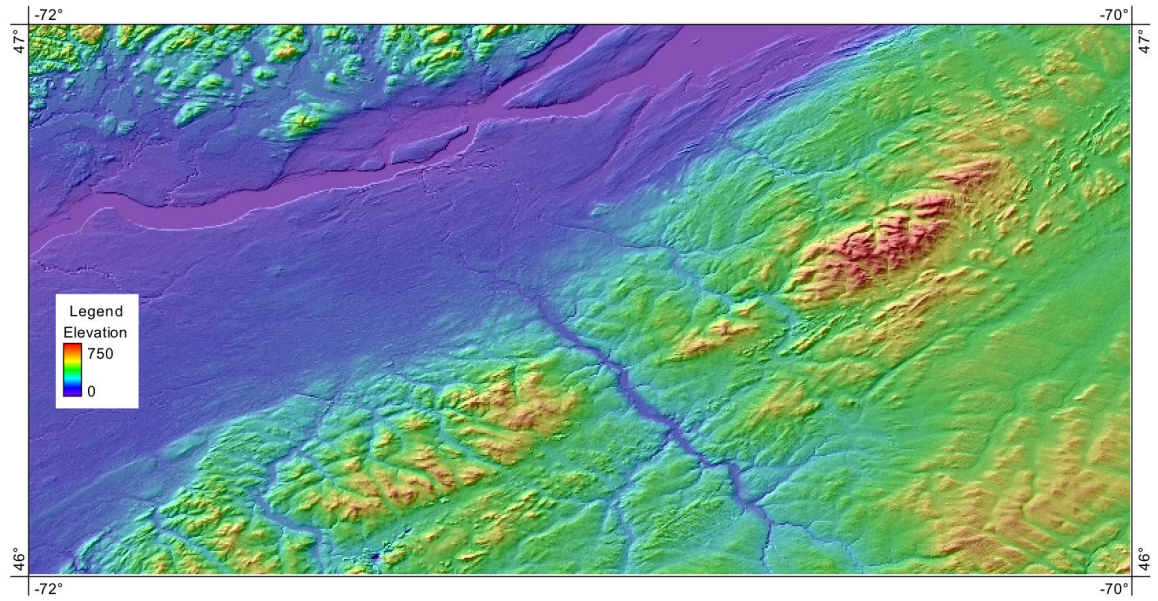


Figura 4.4: Coloreado de terreno por alturas

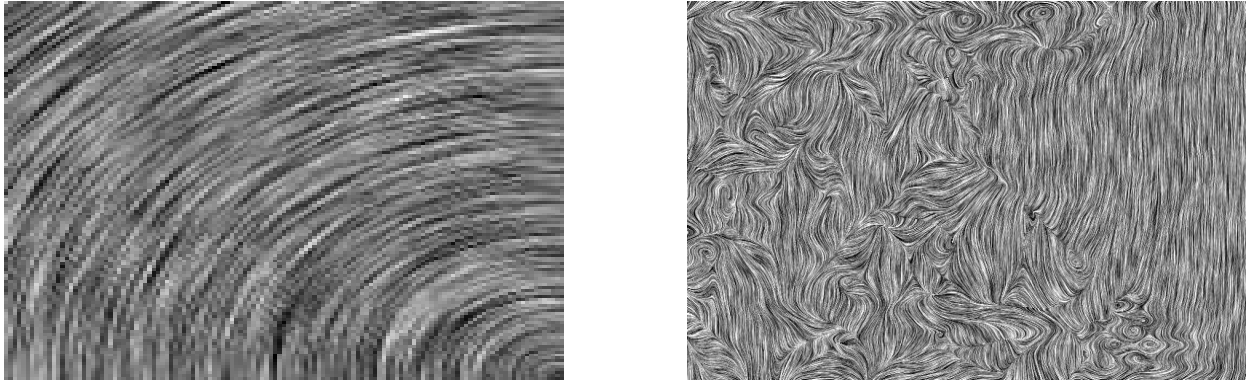


Figura 4.5: Resultado del método Line Integral Convolution. Imagen de Cabral and Leedom [2]

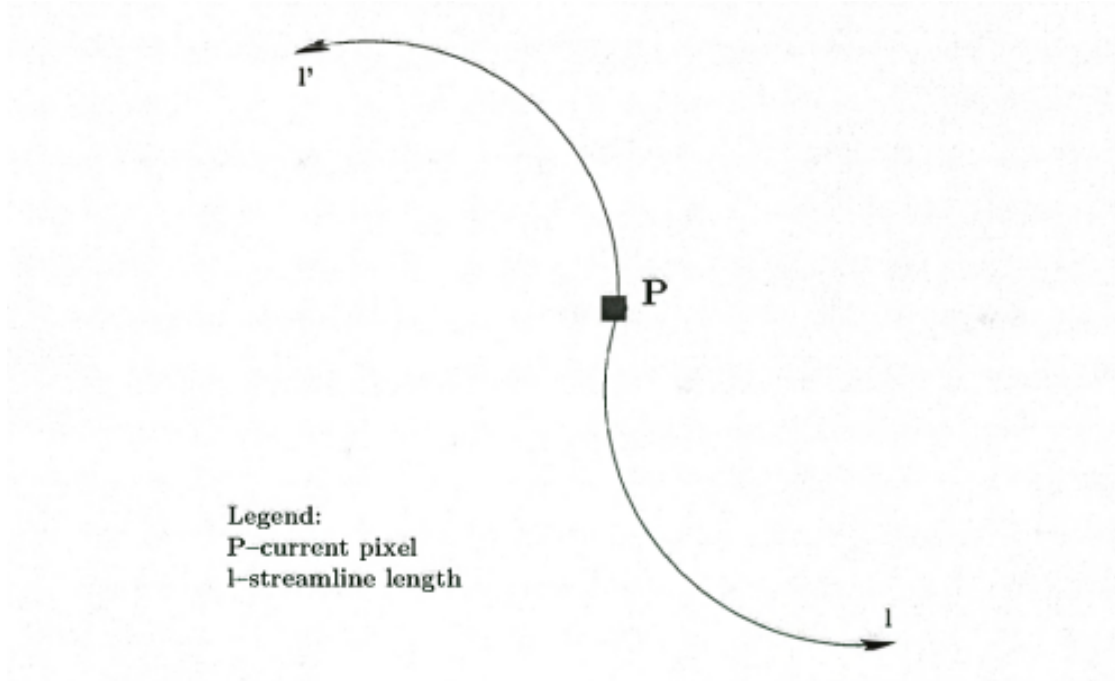


Figura 4.6: Computar la línea de flujo. Imagen de Petkov [3]

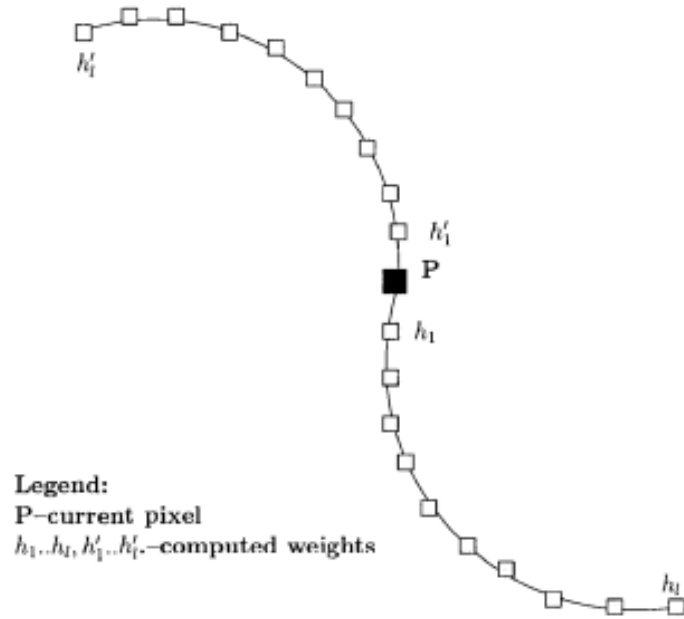


Figura 4.7: Computar los pesos. Imagen de Petkov [3]

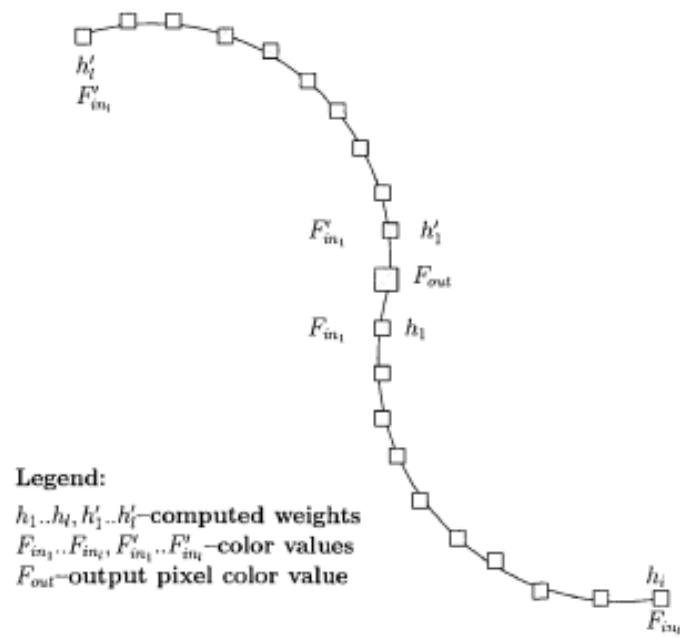


Figura 4.8: Computar valores de salida del pixel. Imagen de Petkov [3]

Capítulo 5

Aplicación desarrollada

En este capítulo se introducirá la aplicación que se ha desarrollado con el fin de demostrar los conceptos expuestos en los capítulos anteriores. En concreto se desarrollarán shaders para los siguientes problemas:

- Coloreado de terrenos
- Curvas de Bézier
- Superficies de Bézier
- Sólidos de revolución
- Nubes de puntos
- Negativo de una imagen
- Detección de bordes en una imagen
- Line Integral Convolution

Para el desarrollo de la aplicación y los shaders será necesario introducir algunos conceptos matemáticos importantes, que se explican en la sección [5.1](#).

5.1. Plan de desarrollo

Durante las primera semanas de desarrollo de la aplicación lo más importante fue realizar un exhaustivo estudio del funcionamiento de OpenGL, así como la lectura y realización de tutoriales sobre la materia. Una vez adquirido el conocimiento necesario, se comenzó a desarrollar el esqueleto principal de la aplicación, sobre el cual se incorporarían después los distintos tipos de visualización a realizar.

Una vez desarrollado este esqueleto se comenzó a la preparación de los shaders que se utilizarían en cada uno de los problemas, para lo que se utilizó en gran medida la información expuesta en el texto Bailey and Cunningham [20].

El siguiente paso fue conseguir datos y prepararlos adecuadamente para poder mostrar las capacidades de visualización de la aplicación, así como comprobar su correcto funcionamiento.

Lo anterior fue reiterado con cada uno de los problemas, añadiéndose cada vez más a lo largo del desarrollo de todo el proyecto.

5.2. Herramientas de desarrollo

Como entorno de desarrollo principal se ha utilizado el sistema operativo Ubuntu Linux 18.04 LTS [21]. En este sistema, además, se han utilizado las siguientes herramientas de desarrollo:

- Vim como editor de textos. [22]
- Git para el control de versiones. [23]
- Github como repositorio. [24]
- GCC como compilador. [25]
- GDB para la depuración. [26]
- Make para la gestión de dependencias. [27]

Asimismo, siguiendo las recomendaciones del tutorial de Vries [28], se han utilizado las siguientes librerías:

- GLFW [29]. GLFW es una librería orientada específicamente a OpenGL que proporciona las necesidades básicas para el renderizado en pantalla. Permite crear un contexto de OpenGL, definir parámetros de ventana y manejar la entrada del usuario. Estas son las funciones que utilizaremos en la aplicación.
- GLAD [30]. La localización de funciones de OpenGL depende tanto del controlador gráfico utilizado como del sistema operativo utilizado. Esta localización es desconocida en tiempo de compilación y ha de ser conseguida en tiempo de ejecución. Es, pues, tarea del programador conseguir la localización de estas funciones. GLAD es una librería que realiza esta tarea automáticamente.

- Assimp [31]. Assimp — *The Open-Asset-Importer-Lib* — es una librería que permite importar diferentes formatos de modelos 3D de una manera uniforme. Será utilizado para cargar los modelos para el colorado de terrenos.
- GLM [32]. GLM — OpenGL Mathematics — es una librería para matemáticas en software gráfico en C++ basada en las especificaciones del lenguaje GLSL. Proporciona funciones diseñadas e implementadas con el mismo convenio de nombres y funcionalidades que GLSL. Proporciona capacidades como transformaciones de matrices, cuaterniones, empaquetado de datos, aleatoriedad, ruido. . .
- Otras librerías específicas del sistema operativo, como Pthreads, xrandr, x11, xi, xcursor, etc.

5.3. Diseño de la aplicación

Para esta aplicación se ha optado por un diseño modular orientado a objetos, en el que poder incrementalmente añadir distintos tipos de visualización sin tener demasiados problemas. Como se ha expuesto en la sección 5.1 la aplicación consta de un esqueleto principal utilizado por todos los tipos de visualización. Este esqueleto consta de una ventana principal, creada en el programa principal, en la que se renderizará el objeto particular que representa el tipo de visualización. Así, con el fin de añadir un nuevo tipo de visualización solo se habrían de realizar las siguientes acciones:

1. Crear un nuevo objeto que implemente los métodos necesarios de la clase `Object`.
2. Añadir un nuevo modo al `enum Modes`.
3. Añadir las opciones necesarias para dicho objeto en el programa principal e incluir la nueva clase `#include "class.h"`.
4. Actualizar las dependencias en el Makefile.

En esta ventana principal se tiene por defecto un sistema de cámara en primera persona, con la capacidad de moverse para visualizar mejor detalles del objeto en cuestión. Este sistema puede ser sobrescrito en el objeto específico en caso de necesitar otro comportamiento.

En la clase `Object` existen tres métodos virtuales puros, que han de ser implementados por las clases específicas de cada tipo de visualización:

- `draw()`, que ha de encargarse de dibujar el objeto en cuestión.
- `processInputGLFWwindow * window`), que ha de especificar que hacer con la entrada del usuario para este tipo de visualización.
- `setUniforms()`, que ha de especificar las variables `uniform` que utilicen los shaders de este tipo de visualización.

Estos métodos se llaman una vez por vuelta del bucle principal. En la sección siguiente se introducen las matemáticas necesarias e importantes para el desarrollo de la aplicación y los shaders concretos.

5.4. Matemáticas necesarias

Con el fin de desarrollar el sistema de cámaras que utiliza la aplicación es necesario conocer varios conceptos importantes sobre álgebra, geometría lineal y transformaciones matriciales, así como los ángulos de Euler y su relación con los cuaterniones. También se explorarán distintos métodos numéricos, relevantes en el método de Line Integral Convolution, así como fórmulas matemáticas específicas de cada tipo de visualización.

5.4.1. Transformaciones matriciales

Como vamos a trabajar con objetos tridimensionales y una cámara móvil, necesitamos realizar transformaciones sobre los vértices que componen nuestros objetos para que estos aparezcan en su lugar y con sus dimensiones adecuadas. Es deseable, además, realizar estas operaciones con vectores matricialmente, puesto que éstas permiten presentar transformaciones arbitrarias en un formato consistente y apto para la computación. Así, se pueden concatenar diferentes transformaciones de manera sencilla multiplicando sus matrices.

Entre estas transformaciones podemos encontrar lineales y no lineales. Así, para representar matricialmente transformaciones no lineales en un espacio Euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n se puede utilizar una transformación lineal en el espacio $(n + 1)$ -dimensional \mathbb{R}^{n+1} . Este tipo de transformaciones incluye tanto las transformaciones afines (como la traslación 5.4.1) como transformaciones proyectivas.

Esta es la razón por la que las matrices 4×4 son tan ampliamente utilizadas en la informática gráfica y, en consecuencia, en nuestra aplicación.

En esta sección se presentan las transformaciones lineales y afines más habituales y necesarias para nuestra aplicación, así como sus formas matriciales.

Traslación

Se denomina traslación a la operación consistente en *mover* un vector en una posición a otra nueva posición. Supongamos, pues, que queremos trasladar un vector $\vec{v} = (x, y, z)$ en la dirección marcada por el vector $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$ como se muestra en la figura ???. Para ello realizaríamos la siguiente operación:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{t} = \begin{pmatrix} x + t_1 \\ y + t_2 \\ z + t_3 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

La traslación se trata de una transformación afín sin puntos fijos. Como se ha expuesto previamente, para poder representar esta transformación de forma matricial se ha de recurrir a un espacio de una dimensión más. Por tanto, se recurre a las coordenadas homogéneas para representar la traslación de un espacio vectorial con multiplicación de matrices. Escribiendo el vector $\vec{v} = (x, y, z)$ utilizando una cuarta coordenada homogénea $\vec{v} = (x, y, z, 1)$. Esta operación se muestra en (5.2).

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_1 \\ y + t_2 \\ z + t_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Escalado

El escalado de un vector es la operación consistente en modificar la longitud del vector. Para ello, debemos multiplicar cada una de sus coordenadas por el factor de escalado deseado en cada eje. Es decir, para escalar un vector \vec{v} por un factor de 0,5 en el eje x y 3 en el eje y , la operación a realizar sería la siguiente:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v}' = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0,5 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Esta operación de escalado se puede escribir matricialmente como sigue. Supongamos que tenemos un vector $\vec{v} = (x, y, z)$ y lo queremos escalar por un factor $fac = (F_1, F_2, F_3)$. Entonces podemos escribir la operación anterior con la matriz FAC como sigue:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \cdot x \\ F_2 \cdot y \\ F_3 \cdot z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

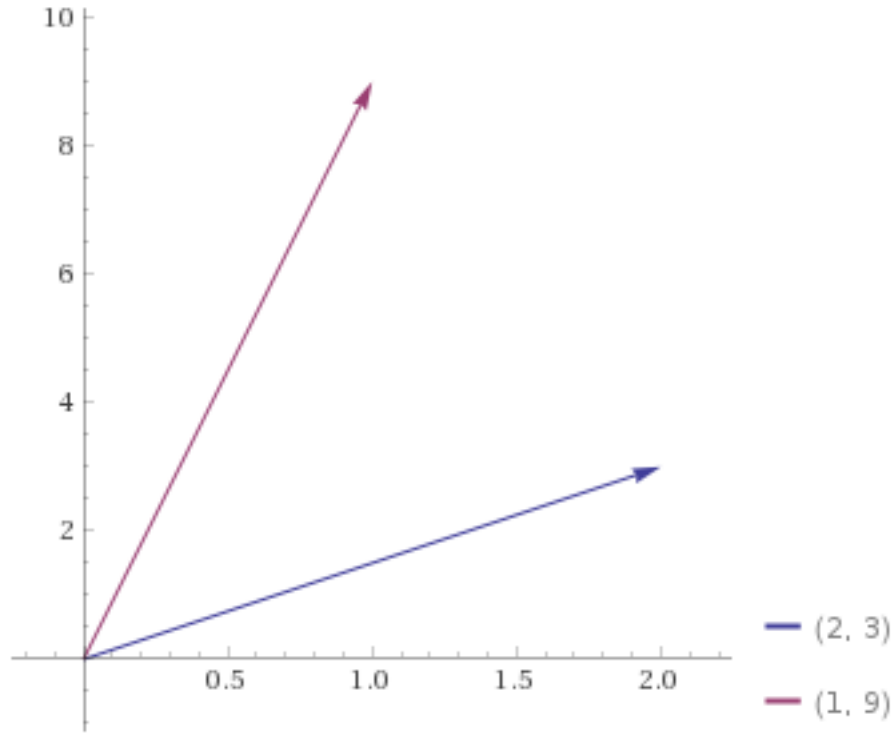


Figura 5.1: Escalar un vector

Nótese que también en este caso al vector \vec{v} se le ha añadido una cuarta coordenada w con el fin de ser consistentes con aquellas transformaciones no lineales que necesitan de un espacio de dimensión mayor.

Rotación

Al contrario de los casos de la rotación y traslación de vectores expuestas anteriormente, el caso de la rotación requiere un estudio más profundo en el caso tridimensional para la matemática aplicada. Por esto, se dedica una sección exclusiva para este tema. (Ver sección 5.4.2).

5.4.2. Rotación: Ángulos de Euler y Cuaterniones

5.4.3. Métodos Numéricos para la resolución de Ecuaciones Diferenciales

Como ya se vio en la sección 4.6, en el método del Line Integral Convolution se ha de utilizar un método numérico para computar la línea de flujo. En esta sección se analizan algunos de los métodos utilizados y propuestos tanto por Cabral and Leedom [2] como por

Petkov [3].

Para poder analizar los métodos hemos de introducir algunas definiciones relacionadas con ellos. Recordemos que un método numérico sirve para calcular de manera aproximada la solución de una ecuación diferencial en un intervalo $[t_0, T]$. Para ello, dividiremos el intervalo en una serie de puntos, dando lugar a los siguientes conceptos:

- **Puntos de red.** Cada uno de los puntos en los que se divide el intervalo $[t_0, T]$. Los subintervalos resultantes pueden ser de longitud constante (Redes uniformes de paso $h = \frac{T-t_0}{N}$) o de longitud variable, dando lugar a los métodos numéricos de paso variable.
- **Esquema Numérico.** Se denomina esquema numérico al proceso iterativo mediante el cual, conociendo los r primeros valores x_0, x_1, \dots, x_{r-1} , que son aproximaciones de los valores exactos $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{r-1})$ de la solución de la ecuación diferencial en los puntos t_0, t_1, \dots, t_{r-1} podemos calcular todos los demás valores $x_n, n = r, \dots, N$, que son aproximaciones de los valores exactos en los puntos de red.

El esquema numérico se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x_0, x_1, \dots, x_{r-1} \text{ dados} \\ x_{n-r} = \Phi(t_n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+r-1}, h), \quad n = 0, \dots, N-r \end{cases} \quad (5.5)$$

- **Error Local de Truncamiento.** Dado un esquema como el anterior, suponiendo que las soluciones exactas verifican

$$x(t_{n+r}) = \Phi(t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+r-1}, x(t_n), x(t_{n+1}), \dots, x(t_{n+r-1})) + h\tau_{n+r}(h) \quad (5.6)$$

el error local de truncamiento viene dado por

$$\tau(h) := \max_{n=0, \dots, N-r} |\tau_{n+r}(h)| \quad (5.7)$$

que consiste en el error que se comete al calcular el valor exacto utilizando el esquema numérico.

- **Consistencia.** Se dice que un método es consistente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0 \quad (5.8)$$

Se dice que es consistente de orden p si

$$\tau(h) = O(h^p) \quad (5.9)$$

- **Error Global de Discretización.** Siguiendo la notación anterior, el Error global de discretización viene dado por

$$\epsilon(h) := \max_{n=0,\dots,N} |x_n - x(t_n)| \quad (5.10)$$

- **Convergencia.** Se dice que un método es convergente cuando se verifica lo siguiente:

$$si \quad \max_{k=0,\dots,r-1} |x_k - x(t_k)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad entonces \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0 \quad (5.11)$$

Se dice que es convergente de orden p si

$$\epsilon(h) = O(h^p) \quad (5.12)$$

Con estas nociones ya podemos empezar a analizar los distintos métodos utilizados, para así conocer cuáles proporcionarán mejores resultados.

Método de Euler

El método de Euler es el más sencillo de los métodos numéricos a considerar. Se trata de un método por aproximación de la derivada. Para ver cómo aparece este método, hemos de recurrir a la definición de derivada. Para cada $t \in (t_0, T)$

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (5.13)$$

Si $h > 0$ es suficientemente pequeño, podemos suponer que

$$x'(t_n) \approx \frac{x(t_n+h) - x(t_n)}{h} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} \quad (5.14)$$

lo que nos conduce a que

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)) \quad (5.15)$$

De aquí aparece el esquema numérico del método de Euler

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) & n = 0, \dots, N-1 \\ x_0 \approx a \end{cases} \quad (5.16)$$

En Arrieta et al. [33] se puede ver una demostración de que el método de Euler supone un método **consistente de orden 1 y convergente**.

Método de Euler de paso variable

El método de Euler de paso variable sigue la misma idea general que el método de Euler de paso uniforme. En este caso, sin embargo, el siguiente punto en el que calcular la solución aproximada se calcula en cada paso. Para ello, se ha de fijar previamente una tolerancia permitida para el error cometido. Por tanto, necesitamos ser capaces de **estimar** el error que vamos a cometer al escoger el siguiente paso. Entonces, si el error estimado es mayor que la tolerancia fijada, el cálculo se descarta y se vuelve a realiza, y si éste es menor que la tolerancia, entonces se acepta y se pasa al siguiente cálculo.

Con el fin de realizar esta estimación, como hemos dicho, necesitamos introducir los siguientes conceptos:

- **Error local relativo al paso h .** Se define el error local relativo al paso h en el nodo $t_{n+1} = t_n + h$ como

$$ERR_n(h) := \frac{|y(t_n + h) - y_1(t_n, h)|}{h} \quad (5.17)$$

donde la función $y = y(t)$ es la solución del problema y la función $y_1(t_n, h)$ representa la aproximación numérica desde el instante t_n en un paso h , dada por $y_1(t_n, h) := x_n + h\Phi(t_n, x_n, h)$ Con esta notación, $x_{n+1} = y_1(t_n, h, n+1)$.

- **Error local relativo.** Se define el error local relativo como

$$ERR(h_1, \dots, h_N) := \max_{n=1, \dots, N-1} |ERR_n(h_n + 1)| \quad (5.18)$$

De nuevo en Arrieta et al. [33] podemos encontrar demostrado que si un método de paso adaptativo es consistente, estable y de orden p , entonces

$$\tau(h_1, \dots, h_N) \leq Ch_{max}^p$$

para una constante C y, por tanto, si $x_0 \rightarrow a$ y $h_{max} \rightarrow 0$, obtenemos que $\epsilon(h_1, \dots, h_N) \rightarrow 0$.

El esquema para este tipo de métodos es:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_{n+1}\Phi(t_n, x_n, h_{n+1}) & n = 0, \dots, N-1 \\ x_0 \sim a \end{cases} \quad (5.19)$$

El método de Euler adaptativo es, por tanto:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_{n+1}f(t_n, x_n) & n = 0, \dots, N-1 \\ x_0 \sim a \end{cases} \quad (5.20)$$

Este método es propuesto en Cabral and Leedom [2].

Métodos de Runge-Kutta

Los últimos métodos que vamos a considerar, y en particular el que vamos a implementar en nuestra aplicación para el método del Line Integral Convolution, son los métodos de Runge-Kutta. Esta familia de métodos se basa en añadir puntos intermedios entre los puntos del mallado t_n y t_{n+1} en la media ponderada.

Como ejemplo, si consideramos una media ponderada entre las pendientes en los puntos t_n y $t_n + ch$ con $c \in (0, 1]$ podemos aproximar el valor de $x(t_{n+1})$ por

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + h [b_1 f(t_n, x(t_n)) + b_2 f(t_n + ch, x(t_n + ch))]$$

donde $b_1 + b_2 = 1$, para que sea realmente una media. El problema ahora radica en cómo calcular el valor $x(t_n + ch)$. Una manera de hacerlo es utilizar el método de Euler, es decir,

$$x(t_n + ch) \approx x(t_n) + ch f(t_n, x(t_n))$$

De esta forma, la aproximación de $x(t_{n+1})$ queda:

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + h \left[b_1 f(t_n, x(t_n)) + b_2 f\left(t_n + ch, x(t_n) + ch f(t_n, x(t_n))\right) \right]$$

obteniéndose la familia de métodos Runge-Kutta

$$x_{n+1} = x_n + h \left[b_1 f(t_n, x_n) + b_2 f\left(t_n + ch, x_n + ch f(t_n, x_n)\right) \right]$$

que suele escribirse como

$$\begin{cases} K_1 = f(t_n, x_n) \\ K_2 = f(t_n + ch, x_n + ch K_1) \\ x_{n+1} = x_n + h(b_1 K_1 + b_2 K_2) \end{cases}$$

Esta familia de métodos se puede generalizar, dando lugar a la siguiente forma

$$\begin{cases} K_i = f\left(t_n + c_i h, x_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j\right), & i = 1, 2, 3, \dots, s, \\ x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i K_i \end{cases} \quad (5.21)$$

El que vamos a utilizar en nuestra aplicación es el método de Runge-Kutta de orden 4, que tiene el siguiente esquema numérico:

$$\begin{cases} K_1 = f(t, x) \\ K_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} K_1\right) \\ K_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} K_2\right) \\ K_4 = f(t + h, x + h K_3) \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \end{cases} \quad (5.22)$$

La demostración de que este método es consistente de orden 4 se puede encontrar en Arrieta et al. [33].

5.4.4. Otras Fórmulas

Para el desarrollo de la aplicación también se han tenido que utilizar fórmulas matemáticas que describen el comportamiento de las curvas y superficies de Bézier, ya explicadas en la sección 4.2, así como las fórmulas para la obtención de los valores de los píxeles de salida en el método del Line Integral Convolution (Sección 4.6).

5.5. Shaders en la aplicación

En esta sección se presentan ya los shaders desarrollados para cada uno de los tipos de visualización considerados en el proyecto, analizando los distintos cálculos realizados y explorando las entradas y salidas de cada uno de ellos.

- 5.5.1. Coloreado de terrenos
- 5.5.2. Curvas de Bézier
- 5.5.3. Superficies de Bézier
- 5.5.4. Sólidos de revolución
- 5.5.5. Nube de puntos
- 5.5.6. Negativo de una imagen
- 5.5.7. Detección de bordes
- 5.5.8. Line Integral Convolution

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

Bibliografía

- [1] Boston University. Scientific Visualization Techniques - Boston University. <http://www.bu.edu/tech/support/research/training-consulting/online-tutorials/introduction-to-scientific-visualization-tutorial/techniques/>. Accessed: 30/07/2019.
- [2] B. Cabral and L.C. Leedom. Imaging vector fields using line integral convolution. 3 1993.
- [3] Alexander Petrov Petkov. Transparent line integral convolution: A new approach for visualizing vector fields in opendx. Master's thesis, University of Montana, 2005.
- [4] Thomas A. Defanti and Maxine D. Brown. Visualization in scientific computing. volume 33 of *Advances in Computers*, pages 247 – 307. Elsevier, 1991. doi: [https://doi.org/10.1016/S0065-2458\(08\)60168-0](https://doi.org/10.1016/S0065-2458(08)60168-0). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0065245808601680>.
- [5] Matthew W. Rohrer. Seeing is believing: The importance of visualization in manufacturing simulation. In *Proceedings of the 32Nd Conference on Winter Simulation, WSC '00*, pages 1211–1216, San Diego, CA, USA, 2000. Society for Computer Simulation International. ISBN 0-7803-6582-8. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=510378.510552>.
- [6] B. H. McCormick, T. A. DeFanti, and M. D. Brown. Visualization in scientific computing. *Computer Graphics*, 20(6), 1987.
- [7] The Khronos Group Inc. OpenGL Website. <https://www.opengl.org/>, . Accessed: 23/07/2019.
- [8] Shreiner, Dave, and The Khronos OpenGL ARB Working Group. *OpenGL Programming Guide: The Official Guide to Learning OpenGL, Versions 3.0 and 3.1*. Addison-Wesley Professional, 7th edition, 2009. ISBN 0321552628, 9780321552624.
- [9] The Khronos Group Inc. About the OpenGL ARB. <https://www.opengl.org/archives/about/arb/>, . Accessed: 19/07/2019.
- [10] The Khronos Group Inc. Primitives - OpenGL wiki. <https://www.khronos.org/opengl/wiki/Primitive>, . Accessed: 26/07/2019.
- [11] Microsoft. Microsoft Website. <https://www.microsoft.com/es-es>. Accessed: 23/07/2019.

- [12] The Khronos Group Inc. GLSL Website. [https://www.khronos.org/opengl/wiki/Core_Language_\(GLSL\)](https://www.khronos.org/opengl/wiki/Core_Language_(GLSL)), . Accessed: 24/07/2019.
- [13] The Khronos Group Inc. Vertex Shader - OpenGL wiki. https://www.khronos.org/opengl/wiki/Vertex_Shader, . Accessed: 24/07/2019.
- [14] The Khronos Group Inc. Tessellation Control Shader - OpenGL wiki. https://www.khronos.org/opengl/wiki/Tessellation_Control_Shader, . Accessed: 24/07/2019.
- [15] The Khronos Group Inc. Tessellation Primitive Generator - OpenGL wiki. https://www.khronos.org/opengl/wiki/Tessellation#Tessellation_primitive_generation, . Accessed: 26/07/2019.
- [16] The Khronos Group Inc. Tessellation Evaluation Shader - OpenGL wiki. https://www.khronos.org/opengl/wiki/Tessellation_Evaluation_Shader, . Accessed: 25/07/2019.
- [17] The Khronos Group Inc. Geometry Shader - OpenGL wiki. https://www.khronos.org/opengl/wiki/Geometry_Shader, . Accessed: 26/07/2019.
- [18] The Khronos Group Inc. Fragment Shader - OpenGL wiki. https://www.khronos.org/opengl/wiki/Fragment_Shader, . Accessed: 26/07/2019.
- [19] Donald Hearn and M. Pauline Baker. *Computer Graphics - C Version*, volume 2nd Ed. Pearson, 1997.
- [20] M. Bailey and S. Cunningham. *Graphic Shaders, Theory and Practice*, volume 2nd Ed. CRC Press, 2011.
- [21] Canonical Group Ltd (GB). Ubuntu. <https://ubuntu.com/>. Accessed: 08/08/2019.
- [22] Bram Moolenaar et al. Vim - the ubiquitous text editor. <https://www.vim.org/>. Accessed: 08/08/2019.
- [23] Linus Torvalds. git –distributed-even-if-your-workflow-isnt. <https://git-scm.com/>. Accessed: 08/08/2019.
- [24] Inc. GitHub. Github. <https://github.com/>. Accessed: 08/08/2019.
- [25] Inc. Free Software Foundation. GCC, the GNU Compiler Collection. <https://gcc.gnu.org/>, . Accessed: 08/08/2019.
- [26] Inc. Free Software Foundation. GDB: The GNU Project Debugger. <https://www.gnu.org/software/gdb/>, . Accessed: 08/08/2019.
- [27] Inc. Free Software Foundation. GNU Make. <https://www.gnu.org/software/make/>, . Accessed: 08/08/2019.

- [28] Joey de Vries. *Learn OpenGL*, volume 3rd printing. Joey de Vries, 2017.
- [29] Camilla Löwy. GLFW - An OpenGL Library. <https://www GLFW.org/>. Accessed: 08/08/2019.
- [30] David Herberth. GLAD. <https://glad.david.de/>. Accessed: 08/08/2019.
- [31] Assimp Team. The Open-Asset-Importer-Lib. <http://www.assimp.org/>. Accessed: 08/08/2019.
- [32] G-Truc Creation. GLM - OpenGL Mathematics. <https://glm.g-truc.net/0.9.9/index.html>. Accessed: 08/08/2019.
- [33] J. M. Arrieta, R. Ferreira, R. Pardo, and A. Rodríguez. *Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Universidad Complutense de Madrid, 2018.

Apéndice A

El lenguaje GLSL