Análisis Funcional

Evaluación 2, David García Curbelo

Ejercicio 1. Dada una sucesión $a = \{a(n)\}$ en l_1, se define, para cada $x \in c_0$, la sucesión $T_a(x)(n) = \sum_{k=n}^{\infty} a(k)x(k)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) **Probar que $T_a(x) \in c_0$ para todo $x \in c_0$.** Como $a \in l_1$ se tiene que la serie $\sum_{k\geq 1} a(k)$ es absolutamente convergente. Además, sabemos por hipótesis que x es una sucesión convergente a cero, luego $a(k)x(k)$ tiende a cero, y por tanto tenemos que $T_a(x)$ tiende a cero.

b) **Probar que $T_a : c_0 \longrightarrow c_0$ es lineal, continua y calcular su norma.** Veamos que es lineal:

$$T_a(\lambda x+\mu y)(n) = \sum_{k=n}^{\infty} a(k) \left(\lambda x(k) + \mu y(k)\right) = \lambda \sum_{k=n}^{\infty} a(k)x(k) + \mu \sum_{k=n}^{\infty} a(k)y(k) =$$

$$= \lambda T_a(x)(n) + \mu T_a(y)(n), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in c_0$$

Veamos ahora que es continua. Por un resultado visto en el ejercicio numero 1 de la realción del tema 2, tenemos que

$$\|x\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|$$

Por ello consiferemos un $x \in c_0$ tal que $\|x\|_\infty \leq 1$, entonces tenemos

$$\|T_a(x)(n)\| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a(k)x(k)\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a(k)||x(k)| \leq \|x\|_\infty \sum_{k=n}^{\infty} |a(k)| \leq$$

$$\leq \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |a(k)| = L\|x\|_\infty, \quad L \in \mathbb{R}^+$$

Ejercicio 2. Sea $X = C([0,1])$. Se define $T : X \longrightarrow X$ mediante $T(f)(x) = \int_0^x f(t^2)dt$.

a) **Probar que T es lineal, continua e inyectiva.** Veamos que T es lineal:

$$T(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x \lambda f(t^2) + \mu g(t^2)dt = \mu \int_0^x g(t^2)dt + \lambda \int_0^x f(t^2)dt =$$

$$= \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in C([0,1])$$

Veamos ahora la continuidad. Consideremos una $f \in X$ tal que $\|f\|_\infty \leq 1$. Entonces tenemos:

$$\|T(f)(x)\| = \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x f(t^2)dt \right| \leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^x \left|f(t^2)\right| dt \leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^x 1dt \leq \max_{x\in[0,1]} x = 1$$

$$\Rightarrow \quad \|T(f)(x)\| \leq 1$$

Veamos la inyectividad. Sean $f, g \in X$ tales que $T(f)(x) = T(g)(x)\,\forall x in[0,1]$. Entonces:

$$0 = T(f)(x) - T(g)(x) = T(f-g)(x) = \int_0^x f(t^2) - g(t^2)dt$$

Como $f - g$ es continua, tenemos que T es derivable, y por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos:

$$f(x^2) - g(x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x^2) = g(x^2) \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

b) **Calcular la norma de T.** Veamos ahora su norma. Por definición, tenemos que

$$\|T\| = Sup_{\substack{f\in X \\ \|f\|\leq 1}} \{\|T(f)(x)\|\} \leq 1$$

Vemos que $\exists f \in X$ tal que se cumple $\|f\| \leq 1$ con el que se tiene $\|T(f)(x)\| = 1$. Por ello, si tomamos $f(x) = 1\,\forall t \in [0,1]$ tenemos:

$$T(f)(x) = \int_0^x 1dt = x \quad \Rightarrow \quad \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x 1dt \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \|T\| = 1$$

c) **Probar que $T^{-1} : T(X) \longrightarrow X$ no es continua.**