Análisis Matemático II, Prueba 2

David García Curbelo

Grado en Matemáticas, Grupo A

Ejercicio 1.

$$a) \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Para resolver esta integral, usaremos el siguiente cambio de variable, el cual viene dado por

$$\begin{bmatrix} x = 2\sin(t) \\ dx = 2\cos(t)dt \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x_2 = \sqrt{3} \Rightarrow 2\sin(t_2) = \sqrt{3} \Rightarrow t_2 = \dfrac{\pi}{3} \\ x_1 = 1 \Rightarrow 2\sin(t_1) = 1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{\pi}{6} \end{matrix}$$

Y por tanto sustituyendo en la integral de partida obtenemos

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(t)}{(2\sin(t))^2\sqrt{4-(2\sin(t))^2}}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(t)}{4\sin^2(t)2\cos(t)}dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2(t)}dt =$$

$$\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2(t)dt = \frac{1}{4}\left[-\cot(t)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

$$b) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

Para resolver esta integral, usaremos el siguiente cambio de variable, el cual viene dado por

$$\begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix}$$

Y por tanto sustituyendo en la integral indefinida asociada

$$\int \frac{2t}{(t^2+1)t}dt = 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2\arctan(t) + C$$

y deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = 2\arctan(\sqrt{x}) + C$$

Por tanto la integral definida resulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = 2\left[\arctan(\sqrt{x})\right]_0^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \boxed{\pi}$$

Ejercicio 2.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall\, 0 < x < 1$$

Podemos ver que se trata de una función continua definida en un intervalo abierto $]0,1[$, y que estudiando su comportamiento en los extremos del intervalo observamos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \sin(1)$$

Por lo que podemos afirmar que la función es continua en el intervalo $]0,1]$. Veamos si podemos acotar la función por otra función integrable. Para ello tratemos de encontrar una función que acote a nuestra función $f(x)$ y sea integrable. Por ello consideremos la función $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, con la que vemos que podemos acotar la función $f(x)$ en el intervalo $]0,1]$, de la siguiente manera

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Como sabemos que la función $g(x)$ es una función integrable (por ser de la forma $g(x) = x^a$, con $a > -1$), entonces concluimos que la función $f(x)$ es integrable en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 3.

$$f(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad \forall\, 0 \leq x \leq 1$$

Veamos si se trata de una función integrable. En una primera observación podemos ver que se trata de una función continua en $[0,1]$, donde vemos además que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 1} f(x) = e$$

Por lo que concluimos que, al tratarse de una función continua y la integral está definida en un intervalo cerrado y acotado, concluimos que la función $f(x)$ es integrable.