

Análisis Matemático II, Prueba 2

David García Curbelo

Grado en Matemáticas, Grupo A

Ejercicio 1.

$$a) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}$$

Para resolver esta integral, usaremos el siguiente cambio de variable, el cual viene dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x = 2 \sin(t) \\ dx = 2 \cos(t) dt \end{bmatrix} & \quad x_2 = \sqrt{3} \Rightarrow 2 \sin(t_2) = \sqrt{3} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{3} \\ & \quad x_1 = 1 \Rightarrow 2 \sin(t_1) = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Y por tanto sustituyendo en la integral de partida obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos(t)}{(2 \sin(t))^2 \sqrt{4 - (2 \sin(t))^2}} dt &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos(t)}{4 \sin^2(t) 2 \cos(t)} dt = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2(t)} dt = \\ \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2(t) dt &= \frac{1}{4} [-\cot(t)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

Para resolver esta integral, usaremos el siguiente cambio de variable, el cual viene dado por

$$\begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{bmatrix}$$

Y por tanto sustituyendo en la integral indefinida asociada

$$\int \frac{2t}{(t^2+1)t} dt = 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \arctan(t) + C$$

y deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = 2 \arctan(\sqrt{x}) + C$$

Por tanto la integral definida resulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = 2 [\arctan(\sqrt{x})]_0^{+\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \boxed{\pi}$$

Ejercicio 2.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall 0 < x < 1$$

Podemos ver que se trata de una función continua definida en un intervalo abierto $]0, 1[$, y que estudiando su comportamiento en los extremos del intervalo observamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sin(1)$$

Por lo que podemos afirmar que la función es continua en el intervalo $]0, 1[$. Veamos si podemos acotar la función por otra función integrable. Para ello tratemos de encontrar una función que acote a nuestra función $f(x)$ y sea integrable. Por ello consideremos la función $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, con la que vemos que podemos acotar la función $f(x)$ en el intervalo $]0, 1[$, de la siguiente manera

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Como sabemos que la función $g(x)$ es una función integrable (por ser de la forma $g(x) = x^a$, con $a > -1$), entonces concluimos que la función $f(x)$ es integrable en el intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 3.

$$f(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad \forall 0 \leq x \leq 1$$

Veamos si se trata de una función integrable. En una primera observación podemos ver que se trata de una función continua en $[0, 1]$, donde vemos además que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e$$

Por lo que concluimos que, al tratarse de una función continua y la integral está definida en un intervalo cerrado y acotado, concluimos que la función $f(x)$ es integrable.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)n!} = 1$$

Para el siguiente apartado vamos a demostrar la igualdad anterior. Para ello consideremos nuestra función $f(x)$ vista anteriormente, la cual como sabemos que es integrable, podemos calcular su integral definida en el intervalo $[0, 1]$. Considerando primero un cambio de variable de la forma $x = t^2$, $dx = 2t dt$, obtenemos la integral

$$\int_0^1 e^t 2t dt$$

La cual se resuelve mediante integración por partes, dada por los cambios siguientes

$$\left[\begin{array}{l} u = t \\ du = dt \end{array} \right] \qquad \left[\begin{array}{l} v = e^t \\ dv = e^t \end{array} \right]$$

Podemos resolver así fácilmente la integral planteada:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 e^t t dt &= 2 \left[e^t t - \int e^t dt \right]_0^1 = 2 [e^t t - e^t]_0^1 = 2 \cdot 1 = 2 \\ &\Rightarrow \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \end{aligned}$$

Este resultado lo usaremos más adelante. Calculemos la serie de Taylor centrada en cero para nuestra función $f(x)$. Para ello consideremos la serie de Taylor asociada a $e^{\sqrt{x}}$, la cual sabemos que viene dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{n!}$, por lo que sustituyendo en nuestra función $f(x)$ obtenemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{n!}$$

Consideremos por tanto la integral definida entre 0 y 1 en ambos lados de la igualdad. Tenemos por tanto

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{n!} dx$$

Ya que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{n!}$ es convergente (y además converge absolutamente, ya que $x > 0$), podemos aplicar entonces el Teorema de la Convergencia Absoluta, por el cual se cumple la igualdad

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{2}}}{n!} dx$$

Entonces, calculando ahora la integral, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{2}}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{\frac{n}{2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left[2 \frac{x^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+2)n!}$$

Con lo que hemos concluido que la integral de nuestra función $f(x)$ definida en el intervalo $[0, 1]$ es igual a la serie anterior, por lo que hemos llegado a

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+2)n!}$$

Y como vimos antes el cálculo de la integral de nuestra función $f(x)$ tal que $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = 2$, tenemos por tanto

$$2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+2)n!} \quad \Rightarrow \quad 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)n!}$$

Como queríamos probar.