Análisis Matemático II, Prueba 2

David García Curbelo

Grado en Matemáticas, Grupo A

Ejercicio 1.

$$a) \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Para resolver esta integral, usaremos el siguiente cambio de variable, el cual viene dado por

$$\begin{bmatrix} x = 2\sin(t) \\ dx = 2\cos(t)dt \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} x_2 = \sqrt{3} \Rightarrow 2\sin(t_2) = \sqrt{3} \Rightarrow t_2 = \dfrac{\pi}{3} \\ x_1 = 1 \Rightarrow 2\sin(t_1) = 1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{\pi}{6} \end{array}$$

Y por tanto sustituyendo en la integral de partida obtenemos

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(t)}{(2\sin(t))^2\sqrt{4-(2\sin(t))^2}}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(t)}{4\sin^2(t)2\cos(t)}dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2(t)}dt =$$

$$\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2(t)dt = \frac{1}{4}\left[-\cot(t)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

$$b) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

Para resolver esta integral, usaremos el siguiente cambio de variable, el cual viene dado por

$$\begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix}$$

Y por tanto sustituyendo en la integral indefinida asociada

$$\int \frac{2t}{(t^2+1)t}dt = 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2\arctan(t) + C$$

y deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = 2\arctan(\sqrt{x}) + C$$

Por tanto la integral definida resulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = 2\left[\arctan(\sqrt{x})\right]_0^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \boxed{\pi}$$

Ejercicio 2.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall\, 0 < x < 1$$

Podemos ver que se trata de una función continua definida en un intervalo abierto $]0,1[$, y que estudiando su comportamiento en los extremos del intervalo observamos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \sin(1)$$

Por lo que podemos afirmar que la función es continua en el intervalo $]0,1]$. Veamos si podemos acotar la función por otra función integrable. Para ello tratemos de encontrar una función que acote a nuestra función $f(x)$ y sea integrable. Por ello consideremos la función $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, con la que vemos que podemos acotar la función $f(x)$ en el intervalo $]0,1]$, de la siguiente manera

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Como sabemos que la función $g(x)$ es una función integrable (por ser de la forma $g(x) = x^a$, con $a > -1$), entonces concluimos que la función $f(x)$ es integrable en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 3.

$$f(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad \forall\, 0 \leq x \leq 1$$

Veamos si se trata de una función integrable. En una primera observación podemos ver que se trata de una función continua en $[0, 1]$, donde vemos además que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 1} f(x) = e$$

Por lo que concluimos que, al tratarse de una función continua y la integral está definida en un intervalo cerrado y acotado, concluimos que la función $f(x)$ es integrable.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)n!} = 1$$

Para el siguiente apartado vamos a demostrar la igualdad anterior. Para ello consideremos una función $f(x)$ dada por $f(x) = e^x x$, la cual vemos que es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, particularmente en el intervalo $[0, 1]$. Por ello podemos afirmar que dicha función es integrable en el intervalo, y considerando

$$\begin{bmatrix} u = x \\ du = dx \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} v = e^x \\ dv = e^x \end{bmatrix}$$

Podemos resolver fácilmente la integral siguiente:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 e^x x\, dx = \left[e^x x - \int e^x dx \right]_0^1 = [e^x x - e^x]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x x\, dx = 1$$

Este resultado lo usaremos más adelante. Calculemos la serie de Taylor centrada en cero para nuestra función $f(x)$. Para ello consideremos la serie de Taylor asociada a e^x, la cual sabemos que viene dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, opr lo que sustituyendo en nuestra función $f(x)$ obtenemos

$$f(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

Consideremos por tanto la integral definida entre 0 y 1 en ambos lados de la igualdad, tenemos

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\, dx$$

Ya que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ es convergente, podemos aplicar entonces el Teorema de la COnvergencia Absoluta, por el cual se cumple la igualdad

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n!}\, dx$$

Entonces, calculando ahora la integral, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{n+1}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)n!}$$

Con lo que hemos concluido que la integral de nuestra función $f(x)$ definida en el intervalo $[0,1]$ es igual a la serie anterior, por lo que hemos llegado a

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)n!}$$

Y como vimos antes, el valor de la integral es 1, por lo que hemos llegado a la igualdad

$$1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)n!}$$

Como queríamos probar.