Curvas y Superficies, Prueba 3 Opción A

David García Curbelo

Grado en Matemáticas, Grupo A

Ejercicio 1.

No es relevante que dos superficies sean difeomorfas para que tengan la misma imagen esférica. Sabemos que ambas superficies (el cilindro elíptico y el catenoide) son superficies difeomorfas, y además ambas son orientables. Por ser orientables podemos cosniderar una orientación para cada una de las superficies, y por tanto una aplicación de Gauss para cada una de ellas, dada por

$$N_1 : S_1 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \qquad\qquad N_2 : S_2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

siendo S_1 y S_2 el cilindro y el catenoide, respectivamente. Calculemos primero la imagen esférica del cilindro. para ello consideramos el conjunto

$$C_\alpha = \{\alpha(t) + v\vec{e}_3 \,:\, t \in I,\, v \in \mathbb{R}\}$$

Donde $\alpha(t)$ viene dado por la elipse $\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t), 0)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos por tanto la siguiente aplicación, en la que nos basaremos para la construcción de N_1.

$$F : I \times \mathbb{R} \to C_\alpha \subset \mathbb{R}^3$$
$$F(t, v) = (a\cos(t), b\sin(t), v)$$

Por tanto obtenemos la fórmula de Gauss:

$$N_1(F(t, v)) = \frac{F_t \times F_v}{|F_t \times F_v|} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}}(b\cos(t), a\sin(t), 0)$$

Donde podemos observar que dicha aplicación de Gauss lleva cualquier cilindro elíptico a la circunferencia obtenida de intersecar la esfera $\mathbb{S}^2$ con el plano $z = 0$. Calculemos ahora la aplicación de Gauss para el catenoide. Sabemos que se trata de una superficie de revolución, al rotar sobre (en este caso) el eje z una catenaria de la forma $\alpha(t) = (a\cosh(t), 0, bt)$, $b, a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Por ello, obtenemos la aplicación F asociada a dicha superficie de revolución dada por

$$F : I \times \mathbb{R} \to S_\alpha \subset \mathbb{R}^3$$
$$F(t, v) = (a\cosh(t)\cos(v), a\cosh(t)\sin(v), bt)$$

Donde ahora v define el ángulo de rotación de la generatriz (en vez del desplazamiento de la directriz del caso anterior). Por lo tanto obtenemos la aplicación de Gauss dada por

$$N_2(F(t, v)) = \frac{1}{\sqrt{a^2\sinh^2(t) + 1}}(-b\cos(v), -b\sin(v), a\sinh(t))$$

Para la cual, al ser una superficie de revolución, podemos considerar la imagen una generatriz cualquiera y luego rotarla al rededor del eje z (para estudiar y clasificar su imagen esférica). Por tanto, tomando $v = 0$ obtenemos la curva por la imagen de N_2, la curva $N_2(F(t, 0)) = (-1, 0, a\sinh(t))$, la cual observamos que es una recta,

y por tanto al rotarla obtenemos que la imagen esférica del catenoide es toda la esfera $\mathbb{S}^2$ sin las antípodas que pasan por el eje z, es decir, $\mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$