Curvas y Superficies

David García Curbelo

Grado en Matemáticas, Grupo A

Ejercicio 3: Se considera la espiral logarítmica $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha(t) = e^t (\cos t, \sin t)$$

- Calcula su función longitud de arco.
- Calcula su función curvatura.
- Comprueba que los vectores de posición y tangente en cada punto forman un ángulo constante.

Solución: Para calcular su función longitud de arco consideramos primero la parametrización por el arco de la curva $\alpha(t)$. Sabemos que la parametrización viene dada por $s(t) = L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t |\alpha'(v)|dv$

$$\alpha'(t) = \left(e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t\right)$$
$$|\alpha'(t)| = e^t\sqrt{2}$$

Y por lo tanto, tomando $t_0 = 0$ obtenemos

$$s(t) = \int_0^t |e^v\sqrt{2}|dv = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

Entonces $s = \sqrt{2}(e^t - 1)$ y por lo tanto $t = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)$, y obtenemos que la función

$$\beta(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)\left(\cos\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)\right), \sin\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)\right)\right)$$

es la reparametrización por el arco de la curva $\alpha(t)$, y por lo tanto su función longitud de arco.

Calculamos ahora su función curvatura. La curvatura de nuestra curva p.p.a $\beta(s)$ viene dada por las ecuaciones de Frenet de la curva:

$$\left.\begin{aligned} T'(s) &= k(s)N(s) \\ N'(s) &= -k(s)T(s) \end{aligned}\right\}$$

Para el que sabemos que $T(s)$ y $N(s)$ son los vectores tangente y normal de la curva respectivamente, y $k(s)$ la función curvatura. Como el vector tangente viene dado por la derivada de la curva, obtenemos $T(s) = \beta'(s)$ y por tanto $T'(s) = \beta''(s)$. Como el vector normal es perpendicular al vector tangente, podemos obtener dicho vector mediante $N(s) = J(T(s)) = J((x, y)) = (-y, x)$. Transcribimos los datos que hemos obtenido:

$$T(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)\right\} - \sin\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)\right\}, \sin\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)\right\} + \cos\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)\right\}\right)$$

$$T'(s) = \frac{1}{s\sqrt{2}+2}\left(-\sin\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s+1\right)\right\} - \cos\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s+1\right)\right\}, \cos\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s+1\right)\right\} - \sin\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s+1\right)\right\}\right)$$

Sabemos también que $N(s) = J(T(s))$, y tomando la igualdad $T'(s) = k(s)N(s)$, reescribiendo queda $\frac{1}{k(s)}T'(s) = N(s)$ donde obtenemos

$$\frac{1}{k(s)} = \left(s\sqrt{2}+2\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = s + \sqrt{2}$$

$$k(s) = \frac{1}{s+\sqrt{2}}$$

Con la que obtenemos la función curvatura que buscábamos.

Para el tercer apartado tomamos el vector posición dado por $\alpha = e^t(\cos t, \sin t)$ y su vector tangente en función de t, dado por $T(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$. Calculamos el ángulo que forman ambos mediante $\cos\theta = \frac{\alpha(t)\cdot T(t)}{|\alpha(t)|\cdot|T(t)|}$

$$\cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^t(\cos^2 t + \sin^2 t)}{\sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t)\frac{1}{2}(\cos^2 t + \sin^2 t)}}$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^t}{\sqrt{\frac{1}{2}e^{2t}}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Luego el angulo es constante, ya que no depende del tiempo. □

Ejercicio 5: Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada como

$$\alpha(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2(1 - \cos t))$$

¿Es una curva plana? Si lo es, calcula el plano que la contiene.

Solución: Para ver si es plana bastará con ver si su torsión o su curvatura son nulas en todo su dominio de definición con respecto a un determinado plano (el plano osculador). Para ello calculamos sus vectores tangente, normal y binormal

$$T(t) = \alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 2\sin t)$$

$$T'(t) = (-\cos t, -\sin t, 2\cos t)$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{(-\cos t, -\sin t, 2\cos t)}{\sqrt{1 + 4\cos^2 t}}$$

Donde vemos que la curvatura $k(t)$ viene dada por

$$k(t) = |T'(t)| = \sqrt{1 + 4\cos^2 t}$$

Y el binormal por el producto vectorial de los vectores tangente y normal

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\cos^2 t}} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin t & \cos t & 2\sin t \\ -\cos t & -\sin t & 2\cos t \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\cos^2 t}}((2, 0, 1))$$

Como sabemos, el binormal es el vector normal del plano osculador formado por los vectores tangencial y normal. Veamos si este plano tiene alguna dependencia en t. Si dicho plano no tiene dependencia en t implicará que los vectores tangente y normal se mueven en un mismo plano al recorrer la curva $\alpha(t)$, y que por tanto la torsión sera nula (y por tanto la curva será plana). Tomamos un punto cualquiera de la curva (x_0, y_0, z_0). La ecuación de dicho plano viene dada por

$$B_1(t)(x - x_0) + B_2(t)(y - y_0) + B_3(t)(z - z_0) = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{1 + 4\cos^2 t}}(x - x_0) + \frac{0}{\sqrt{1 + 4\cos^2 t}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\cos^2 t}}(z - z_0) = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{1 + 4\cos^2 t}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\cos^2 t}}(z - z_0) = 0$$

$$2(x - x_0) + 1(z - z_0) = 0$$

Vemos que el plano no tiene dependencia en t, por lo tanto su torsión es nula y podemos afirmar que se trata de una curva plana. Además, tomando un punto cualquiera de la curva, por ejemplo $\alpha(0) = (2, 0, 0) = (x_0, y_0, z_0)$ y sustituyéndolo en el plano antes calculado

$$2x + z = 4$$

obtenemos el plano osculador, y por tanto el plano que contiene a la curva plana.