Ejercicios para entregar. Ecuaciones diferenciales, 3/04

Ejercicio 3.2.3. *¿Qué ocurre si repetimos el proceso del ejemplo anterior a las funciones $P(x,y) = e^x$ y $Q(x,y) = e^y + x$?*

Solución Consideramos $P(x,y) = e^x$ y $Q(x,y) = e^y + x$. Ambas funciones están definidas en $\mathbb{R}^2$, el cual sabemos que es un dominio estrellado. Veamos si se cumple la condición de exactitud.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ observamos que no se cumple la condición de exactitud mencionada, y por tanto no se cumplirá la Proposición 3.2.1., es decir, no se cumple la condición

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

y por ello podemos afirmar que no existe U bajo las condiciones de $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ enunciadas.

Otra forma de Solucionar el problema es realizando las cuentas del ejemplo anterior y comprobando que se llega a contradicción. Para ello debemos de suponer que la condición de exactitud se cumple, con lo que procedemos a calcular U mediante integración.

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + f(y) = \int e^x dx + f(y) = e^x + f(y)$$

$$U(x,y) = \int Q(x,y)dy + f(x) = \int (e^y + x)dy + f(x) = e^y + xy + f(x)$$

Podemos ver fácilmente que $f(x) = e^x$, pero para $f(y)$ no queda tan claro ya que tendríamos que tomar $f(y) = e^y + xy$, la cual no depende únicamente de y, luego llegamos a una contradicción. Por ello, no existe un potencial para las condiciones de $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ enunciadas. $\square$

Ejercicio 3.2.4. *Consideramos* $P(x,y) = e^x + 2y$ *y* $Q(x,y) = 2x + \cos(y)$. *Determina U como indica el teorema 3.2.1, es decir, calcula*

$$U(x,y) = x\int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)d\lambda + y\int_0^1 Q(\lambda x, \lambda y)d\lambda$$

Calcula las derivadas parciales empleando el Lema 3.2.1.

Solución Consideramos $P(x,y) = e^x + 2y$ y $Q(x,y) = 2x + \cos(y)$. Ambas funciones están definidas en $\mathbb{R}^2$, el cual sabemos que es un dominio estrellado. Sabemos además por el ejemplo anterior que estas dos funciones cumplen la condición de exactitud. Procedamos al cálculo de U mediante la integral

$$\int_0^1 xP(\lambda x, \lambda y) + yQ(\lambda x, \lambda y)d\lambda$$

$$\int_0^1 xe^{x\lambda}d\lambda + \int_0^1 2xy\lambda d\lambda + \int_0^1 2xy\lambda d\lambda + \int_0^1 y\cos(y\lambda)d\lambda$$

$$x\int_0^1 e^{x\lambda}d\lambda + 4xy\int_0^1 \lambda d\lambda + y\int_0^1 \cos(y\lambda)d\lambda$$

$$[x\frac{1}{x}e^{x\lambda} + 2xy\lambda^2 + y\frac{1}{y}\sin(y\lambda)]_0^1 = e^x + 2xy + \sin(y) - 1$$

El cual vemos que se trata de la solución que buscábamos, con la constante $C = -1$,

$$U(x,y) = e^x + 2xy + \sin(y) - 1$$

Para el segundo apartado, calcularemos las derivadas parciales de $U(x,y)$ y veremos que se verifica $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$. Aplicamos para ello el Lema 3.2.1. por el cual partiendo de

$$U(x,y) = \int_0^1 xP(\lambda x, \lambda y) + yQ(\lambda x, \lambda y)d\lambda$$

y aplicando el lema obtenemos

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(xP(\lambda x, \lambda y) + yQ(\lambda x, \lambda y))d\lambda$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)d\lambda + x\int_0^1 \lambda\frac{\partial}{\partial x}P(\lambda x, \lambda y)d\lambda + y\int_0^1 \lambda\frac{\partial}{\partial x}Q(\lambda x, \lambda y))d\lambda$$

Sustituimos a continuación las respectivas funciones P y Q. Como sabemos que se cumple la condición de exactitud, tenemos

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)d\lambda + x\int_0^1 \lambda\frac{\partial}{\partial x}P(\lambda x, \lambda y)d\lambda + y\int_0^1 \lambda\frac{\partial}{\partial y}P(\lambda x, \lambda y)d\lambda$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=\int_0^1(e^{x\lambda}+2y\lambda)d\lambda+x\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial x}(e^{x\lambda}+2y\lambda)d\lambda+y\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial y}(e^{x\lambda}+2y\lambda)d\lambda$$

Ahora, mediante $\frac{dP}{\lambda d}(\lambda x,\lambda y)=x\frac{\partial}{\partial x}P(\lambda x,\lambda y)+y\frac{\partial}{\partial y}P(\lambda x,\lambda y)$ obtenemos

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=\int_0^1(e^{x\lambda}+2y\lambda)d\lambda+\int_0^1\lambda\frac{d}{\lambda d}(e^{x\lambda}+2y\lambda)d\lambda$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=\left(\frac{e^x-1}{x}+y\right)+\left(e^x+\frac{1-e^x}{x}+y\right)$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=e^x+2y=P(x,y)$$

Como queríamos probar. Para $Q(x,y)$ el proceso sería el mismo. $\square$