Relación 4 Ecuaciones diferenciales
Parte 2

Ejercicio 1.

Nos piden encontrar la solución al sistema dado por

$$\left.\begin{array}{l} x' + ty = -1 \\ y' + x' = -1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x' = -ty - 1 \\ y' = ty + 1 - 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x' = -ty - 1 \\ y' = ty \end{array}\right\}$$

Dicho sistema podemos expresar de forma $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, donde vemos que cada uno de los elementos viene dado por

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & t \end{pmatrix} \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nos encontramos ante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Podemos ver que la segunda ecuación sólo tiene coeficientes en y, ya que viene dada por $y' = ty$, la cual sabemos que tiene por solución

$$y(t) = K \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo en la primera ecuación, la cual viene dada por $x' = -ty - 1$, que sustituyendo la solución obtenida de la ecuación anterior obtenemos

$$x'(t) = -tKe^{\frac{t^2}{2}} - 1$$

Que integrando en ambos lados resulta

$$x(t) = -Ke^{\frac{t^2}{2}} - t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

y obtenemos así la solución general del sistema planteado, en función de un parametro $K \in \mathbb{R}$, el cual variará em función de la condición inicial.

$$X(t) = \begin{pmatrix} Ke^{\frac{t^2}{2}} - t + C \\ Ke^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Y ahora, para el cálculo de una matriz solución particular, bastará con sustituir los parámetros que tenemos para obtener dos soluciones distintas del problema inicial. Tomemos por ello

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad x_2(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}} - t \\ e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}$$

Donde hemos tomado para la primera solución $K = C = 0$, y para la segunda $K = 1$, $C = 0$, y por ello podemos construir su matriz solución dada por:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -t & -e^{\frac{t^2}{2}} - t \\ 0 & e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

Como tenemos la matriz Φ, supongamos que es matriz solución de un sistema dado $X'(t) = A(t)X(t)$. Por ser matriz solución (y ser clase $\mathcal{C}^1$ y por tanto ser derivable), sabemos que tiene que cumplirse $\Phi' = A\Phi$. Como el determinante de la matriz Φ es no nulo $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$, podemos afirmar que dicha matriz tiene inversa, y que por lo tanto la matriz A puede representarse de la siguiente manera

$$A = \Phi'\Phi^{-1}$$

Por ello vemos que hemos determinado la matriz A en función de Φ, para la cual, el problema $X'(t) = A(t)X(t)$ tiene por matriz solución la matriz Φ, y que por lo tanto (por tener determinante no nulo) podemos afirmar que se trata de una matriz fundamental.

Ejercicio 3.

Supondremos durante la demostración que ambas matrices son clase $\mathcal{C}^1$. Si queremos probar la existencia de un $C \in \mathbb{R}$ tal que se cumpla $\Phi = \Psi \cdot C$, será lo mismo probar que $C = \Phi\Psi^{-1}$ (podemos afirmar que tiene inversa ya que tiene determinante no nulo) y por tanto

$$(\Psi^{-1}\Phi)' = 0$$

Por tanto veamos si, siendo ambas matrices fundamentales, estudiemos el valor de la derivada.

$$(\Psi^{-1}\Phi)' = \Psi^{-1}\Phi' + (\Psi^{-1})'\Phi$$

Estudiemos a parte el valor de $(\Psi^{-1})'$. Para ello consideremos $\Psi\Psi^{-1} = 1_n$, y por tanto la derivada ha de ser nula,

$$(\Psi^{-1}\Psi)' = \Psi'\Psi^{-1} + \Psi(\Psi^{-1})' = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Psi^{-1})' = -\Psi^{-1}\Psi'\Psi^{-1}$$

Podemos considerar inversas puesto que, al tratarse de matrices fundamentales tienen determinante no nulo. Retomemos por tanto la ecuación anterior,

$$(\Psi^{-1}\Phi)' = \Psi^{-1}\Phi' + (\Psi^{-1})'\Phi = \Psi^{-1}\Phi' - \Psi^{-1}\Psi'\Psi^{-1}\Phi$$

Como ambas matrices son fundamentales, son por ello solución de $X'(t) = A(t)X(t)$ y por tanto la cumplen $\Phi' = A\Phi$ y $\Psi' = A\Psi$. Sustituimos y obtenemos

$$(\Psi^{-1}\Phi)' = \Psi^{-1}A(t)\Phi - \Psi^{-1}A(t)\cancel{\Psi\Psi^{-1}}\Phi = \Psi^{-1}A(t)\Phi - \Psi^{-1}A(t)\Phi = 0$$

$$(\Psi^{-1}\Phi)' = 0$$

Como queríamos probar.

Ejercicio 4.

Repetimos la demostración hecha en el apartado anterior. Como nuestra matriz es clase $\mathcal{C}^1$ con determinante no nulo, podemos afirmar que tiene inversa. También podemos afirmar la obviedad $\Phi\Phi^{-1} = 1_n$, y por tanto si derivamos ambos lados de la igualdad obtenemos

$$(\Phi^{-1}\Phi)' = \Phi'\Phi^{-1} + \Phi(\Phi^{-1})' = 0 \quad \Rightarrow \quad -\Phi'\Phi^{-1} = \Phi(\Phi^{-1})'$$

Como hemos dicho que tiene inversa, basta despejar $(\Phi^{-1})'$ y obtenemos el resultado que buscábamos

$$(\Phi^{-1})' = -\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}$$

Ejercicio 5.
El enunciado es falso. Consideremos un sistema homogéneo $X'(t) = AX(t)$ (con la matriz A con coeficientes constantes) tal que Φ sea una matriz fundamental (clase $\mathcal{C}^1$) del sistema homogeneo dado. Por tanto sabemos que Φ es solución del sistema, por lo que obtenemos

$$\Phi' = A\Phi$$

Como hemos supuesto que la matriz A tiene coeficientes constantes, al derivar en ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\Phi'' = A\Phi'$$

Luego Φ' también es solución del sistema homogéneo $X'(t) = AX(t)$.

Toda matriz fundamental tiene determinante no nulo, por lo que basta tomar una matriz Φ tal que $det(\Phi) = C$, $C \in \mathbb{R} - \{0\}$, con lo que tenemos una matriz con determinante no nulo para todo t en su dominio de definición

Ejercicio 6.

Para ver si son solución de manera simultánea, podemos considerar la matriz solución

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sin(t) \\ \sin(t) & 1 \end{pmatrix}$$

Y comprobar si existe una matriz $A(t)$ para que la matriz Φ sea solución del sistema homogéneo $X'(t) = A(t)X(t)$. Si suponemos que sea matriz solución, entonces tiene que cumplirse

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos(t) \\ \cos(t) & 0 \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} 1 & \sin(t) \\ \sin(t) & 1 \end{pmatrix}$$

Si estudiamos el determinante de la matriz Φ vemos que $det(\Phi) = 1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$, el cual vemos que es no nulo para todo $t \neq K\pi + \frac{\pi}{2}$, $K \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, considerando dicho determinante no nulo, podemos afirmar que tiene inversa, y por tanto podemos despejar la matriz $A(t)$ de la siguiente manera

$$A(t) = \Phi'(t)(\Phi(t))^{-1}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(t) \\ \cos(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sin(t) \\ -\sin(t) & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\cos^2(t)} = \begin{pmatrix} -\tan(t) & \frac{1}{\cos(t)} \\ \frac{1}{\cos(t)} & -\tan(t) \end{pmatrix}$$

Hemos encontrado una matriz $A(t)$ definida en un conjunto $I = \{t \in \mathbb{R} : t \neq K\pi + \frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}\}$, por lo tanto podemos afirmar que en estas condiciones ambas soluciones X_1 y X_2 pueden ser solución de manera simultánea.

Ejercicio 7.