

Relación 4 Ecuaciones diferenciales

Parte 2

Ejercicio 1.

Nos piden encontrar la solución al sistema dado por

$$\left. \begin{array}{l} x' + ty = -1 \\ y' + x' = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x' = -ty - 1 \\ y' = ty + 1 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x' = -ty - 1 \\ y' = ty \end{array} \right\}$$

Dicho sistema podemos expresar de forma $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, donde vemos que cada uno de los elementos viene dado por

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nos encontramos ante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Podemos ver que la segunda ecuación sólo tiene coeficientes en y , ya que viene dada por $y' = ty$, la cual sabemos que tiene por solución

$$y(t) = K \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo en la primera ecuación, la cual viene dada por $x' = -ty - 1$, que sustituyendo la solución obtenida de la ecuación anterior obtenemos

$$x'(t) = -tK e^{\frac{t^2}{2}} - 1$$

Que integrando en ambos lados resulta

$$x(t) = -K e^{\frac{t^2}{2}} - t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

y obtenemos así la solución general del sistema planteado, en función de un parametro $K \in \mathbb{R}$, el cual variará en función de la condición inicial.

$$X(t) = \begin{pmatrix} K e^{\frac{t^2}{2}} - t + C \\ K e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Y ahora, para el cálculo de una matriz solución particular, bastará con sustituir los parámetros que tenemos para obtener dos soluciones distintas del problema inicial. Tomemos por ello

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}} - t \\ e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}$$

Donde hemos tomado para la primera solución $K = C = 0$, y para la segunda $K = 1$, $C = 0$, y por ello podemos construir su matriz solución dada por:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -t & e^{\frac{t^2}{2}} - t \\ 0 & e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}$$