Relación 4 Ecuaciones diferenciales
Parte 2

Ejercicio 1.

Nos piden encontrar la solución al sistema dado por

$$\left.\begin{array}{l} x' + ty = -1 \\ y' + x' = -1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x' = -ty - 1 \\ y' = ty + 1 - 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x' = -ty - 1 \\ y' = ty \end{array}\right\}$$

Dicho sistema podemos expresar de forma $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, donde vemos que cada uno de los elementos viene dado por

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & t \end{pmatrix} \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nos encontramos ante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Podemos ver que la segunda ecuación sólo tiene coeficientes en y, ya que viene dada por $y' = ty$, la cual sabemos que tiene por solución

$$y(t) = K \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo en la primera ecuación, la cual viene dada por $x' = -ty - 1$, que sustituyendo la solución obtenida de la ecuación anterior obtenemos

$$x'(t) = -tKe^{\frac{t^2}{2}} - 1$$

Que integrando en ambos lados resulta

$$x(t) = -Ke^{\frac{t^2}{2}} - t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

y obtenemos así la solución general del sistema planteado, en función de un parametro $K \in \mathbb{R}$, el cual variará em función de la condición inicial.

$$X(t) = \begin{pmatrix} Ke^{\frac{t^2}{2}} - t + C \\ Ke^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{R}$$