

Examen Final Resuelto

Geometría Global de Curvas y Superficies

Ejercicio 5. Sea A una matriz cuadrada de orden tres regular. Demostrar que la aplicación $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$\phi(p) = \frac{Ap}{|Ap|}$$

es un difeomorfismo. Usar la fórmula del cambio de variables para comprobar que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{|Ap|^3} dp = \frac{4\pi}{|\det A|}.$$

La aplicación ϕ es claramente diferenciable ya que es una restricción de una aplicación definida en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ restringida a \mathbb{S}^2 . Como la matriz es cuadrada y regular, entonces tiene inversa y podemos definir dicha aplicación como $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que

$$\varphi(p) = \frac{A^{-1}p}{|A^{-1}p|}, \quad \forall p \in \mathbb{S}^2$$

la cual es la inversa de nuestra función ϕ , y por el mismo razonamiento que antes vemos que es diferenciable su inversa, y por tanto ϕ es un difeomorfismo. Para terminar, calculemos el valor absoluto del Jacobiano de ϕ como sigue. Para ello primero necesitamos

$$(d\phi)_p(v) = \frac{Av}{|Ap|} - \frac{\langle Ap, Av \rangle}{|Ap|^3} Ap, \quad \forall v \in T_p \mathbb{S}^2 \forall p \in \mathbb{S}^2$$

Considerando ahora una base ortonormal de \mathbb{R}^3 con $\{e_1, e_2, p\}$, con $e_1, e_2 \in T_p \mathbb{S}^2$ $p \in \mathbb{S}^2$ tenemos el Jacobiano:

$$|\text{Jac}\phi|(p) = \frac{1}{|Ap|^3} |\det(Ae_1, Ae_2, Ap)| = \frac{|\det A|}{|Ap|^3}$$

Y por tanto tenemos

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\text{Jac}\phi|(p) = \int_{\mathbb{S}^2} \frac{|\det A|}{|Ap|^3} \Rightarrow \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{|Ap|^3} = \int_{\mathbb{S}^2} \frac{|\text{Jac}\phi|(p)}{|\det A|} = \frac{4\pi}{|\det A|}.$$

Ejercicio 6. Sea S una superficie compacta con curvatura de Gauss no nula en cada punto y tal que su aplicación de Gauss es inyectiva. Probar que

$$\int_S K = 4\pi.$$

Notemos en una primera instancia que, como $K \neq 0 \forall p \in S$, no puede haber cambio de signo en dicha curvatura, y como sabemos que la curvatura de Gauss no puede ser siempre no positiva, tenemos que $K > 0$. Tomemos ahora la aplicación de Gauss dada por $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, la cual vemos fácil que es un difeomorfismo local, ya que $K(p) \neq 0$ y $K(p) = \det(dN)_p$, entonces particularmente $\det(dN)_p \neq 0$. Pero además, nuestra aplicación de Gauss lleva abiertos en abiertos, y por tanto $N(S) \subseteq \mathbb{S}^2$ tiene que ser un subconjunto abierto, pero vemos que como S es compacto, también tiene que ser cerrado. Por ello, concluimos que N es un difeomorfismo global. Aplicando ahora la fórmula del cambio de variable tenemos

$$\int_S |K| = \int_S K = \int_{\mathbb{S}^2} |\text{Jac}N| = A(\mathbb{S}^2) = 4\pi.$$