

## Examen Final Resuelto

### Geometría Global de Curvas y Superficies

**Ejercicio 5.** Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden tres regular. Demostrar que la aplicación  $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  dada por

$$\phi(p) = \frac{Ap}{|Ap|}$$

es un difeomorfismo. Usar la fórmula del cambio de variables para comprobar que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{|Ap|^3} dp = \frac{4\pi}{|\det A|}.$$

La aplicación  $\phi$  es claramente diferenciable ya que es una restricción de una aplicación definida en  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  restringida a  $\mathbb{S}^2$ . Como la matriz es cuadrada y regular, entonces tiene inversa y podemos definir dicha aplicación como  $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que

$$\varphi(p) = \frac{A^{-1}p}{|A^{-1}p|}, \quad \forall p \in \mathbb{S}^2$$

la cual es la inversa de nuestra función  $\phi$ , y por el mismo razonamiento que antes vemos que es diferenciable su inversa, y por tanto  $\phi$  es un difeomorfismo. Para terminar, calculemos el valor absoluto del Jacobiano de  $\phi$  como sigue. Para ello primero necesitamos

$$(d\phi)_p(v) = \frac{Av}{|Ap|} - \frac{\langle Ap, Av \rangle}{|Ap|^3} Ap, \quad \forall v \in T_p \mathbb{S}^2 \quad \forall p \in \mathbb{S}^2$$

Considerando ahora una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  con  $\{e_1, e_2, p\}$ , con  $e_1, e_2 \in T_p \mathbb{S}^2$   $p \in \mathbb{S}^2$  tenemos el Jacobiano:

$$|\text{Jac}\phi|(p) = \frac{1}{|Ap|^3} |\det(Ae_1, Ae_2, Ap)| = \frac{|\det A|}{|Ap|^3}$$

Y por tanto tenemos

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\text{Jac}\phi|(p) = \int_{\mathbb{S}^2} \frac{|\det A|}{|Ap|^3} \Rightarrow \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{|Ap|^3} = \int_{\mathbb{S}^2} \frac{|\text{Jac}\phi|(p)}{|\det A|} = \frac{4\pi}{|\det A|}.$$

**Ejercicio 6.** Sea  $S$  una superficie compacta con curvatura de Gauss no nula en cada punto y tal que su aplicación de Gauss es inyectiva. Probar que

$$\int_S K = 4\pi.$$

Notemos en una primera instancia que, como  $K \neq 0 \forall p \in S$ , no puede haber cambio de signo en dicha curvatura, y como sabemos que la curvatura de Gauss no puede ser siempre no positiva, tenemos que  $K > 0$ . Tomemos ahora la aplicación de Gauss dada por  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ , la cual vemos fácil que es un difeomorfismo local, ya que  $K(p) \neq 0$  y  $K(p) = \det(dN)_p$ , entonces particularmente  $\det(dN)_p \neq 0$ . Pero además, nuestra aplicación de Gauss lleva abiertos en abiertos, y por tanto  $N(S) \subseteq \mathbb{S}^2$  tiene que ser un subconjunto abierto, pero vemos que como  $S$  es compacto, también tiene que ser cerrado. Por ello, concluimos que  $N$  es un difeomorfismo global. Aplicando ahora la fórmula del cambio de variable tenemos

$$\int_S |K| = \int_S K = \int_{\mathbb{S}^2} |\text{Jac}N| = A(\mathbb{S}^2) = 4\pi.$$