Probabilidad

David García Curbelo

Ejercicios teóricos propuestos 31 de marzo

Ejercicio 1: *Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto con función masa de probabilidad*

$$P(X = x, Y = y) = \frac{k}{2^{x+y}}, \quad x, y \in \mathbb{N}$$

Calcular la función masa de probabilidad de $X + Y$ y $X - Y$.

Calculemos primero la función masa de probabilidad de $X + Y$. Tomando $k = 1/4$, defino el cambio de variable

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \longmapsto g(X, Y) = Z = X + Y$$

que tiene por inversa

$$g^{-1} := \begin{cases} X^{-1}(z) = X \\ Y^{-1}(z) = Z - X \end{cases}$$

Calculemos a continuación su función masa de probabilidad

$$P_{(X+Y)}(x + y) = P_Z(z) = P_{(X,Y)}(g^{-1}(z)) = P_{(X+Y)}(x, x - z) =$$

$$\sum_{x=0}^{z} \frac{1}{2^{2+x+z-x}} = \sum_{x=0}^{z} \frac{1}{2^{2+z}} = \frac{z+1}{2^{2+z}}, \quad \forall x, y \in \mathbb{N}$$

Ahora deshacemos el cambio y obtenemos

$$P_{(X+Y)}(x + y) = \frac{x + y + 1}{2^{2+x+y}}, \quad \forall x, y \in \mathbb{N}$$

$X + Y$. Tomamos el siguiente cambio de variable

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \longmapsto g(X, Y) = Z = X - Y$$

que tiene por inversa

$$g^{-1} := \begin{cases} X^{-1}(z) = Z + Y \\ Y^{-1}(z) = Y \end{cases}$$

Calculemos a continuación su función masa de probabilidad

$$P_{(X-Y)}(x - y) = P_Z(z) = P_{(X,Y)}(g^{-1}(z)) = P_{(X+Y)}(z + y, y) =$$

$$\sum_{y=0}^{z} \frac{1}{2^{2+y+y}} = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{z} \frac{1}{2^{2y}} \cdot \frac{1}{2^z} = \frac{1}{3} \frac{x+1}{2^z}, \quad \forall x, y \in \mathbb{N}$$

Ahora deshacemos el cambio y obtenemos

$$P_{(X-Y)}(x-y) = \frac{1}{3}\left[\frac{x-y+1}{2^{x-y}}\right], \quad \forall x, y \in \mathbb{N}$$

. $\square$

Ejercicio 2: *Calcular la función generatriz de momentos de (Z,T) y de $Z+T$, cuando $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ y $T \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ independientes. Es decir siguen distribuciones de Poisson independientes.*

$$Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1), \quad \mathcal{P}(Z=z) = e^{-\lambda_1}\lambda_1^z/z!$$
$$T \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_2), \quad \mathcal{P}(Z=t) = e^{-\lambda_2}\lambda_2^z/t!$$

- *(Z,T).* Dados $(t_1,t_2) \in]-a_1,b_1[\times]-a_2,b_2[, \quad a_i,b_i \in \mathbb{R}^+$ la función generatriz de momentos de (Z,T) es

$$M_{(Z,T)} = (t_1,t_2) = E\left[exp(t_1Z+t_2T)\right] = E\left[exp(t_1Z)\right] \cdot E\left[exp(t_2T)\right] =$$

$$= exp\left(\lambda_1(e^{t_1}-1)\right) \cdot exp\left(\lambda_2(e^{t_2}-1)\right) = exp\left(\lambda_1(e^{t_1}-1)+\lambda_2(e^{t_2}-1)\right), \quad \forall t_1, t_2$$

- *(Z+T).* Como Z y T son independientes, tomamos

$$\left.\begin{array}{r} Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1) \\ T \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (Z+T) \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$$

  Entonces, dado $t \in]-a,b[$, con $a,b \in \mathbb{R}^+$, la función generatriz de momentos viene dada por

$$M_{(Z+T)}(t) = exp\left((\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)\right), \quad \forall t \in]-a,b[$$

$\square$