Probabilidad

David García Curbelo

Problema P12-P13 propuesto

Actividad 1: *Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de distribución de probabilidad dada por*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = ky^2, \quad -1 \leq x \leq 0; -1 \leq x \leq y \leq x^2 \quad ó \quad 0 \leq x \leq 1; 0 \leq x^2 \leq y \leq 1$$

Calcular la constante k para que la función anterior sea una función de densidad de probabilidad. Calcular además la función de densidad de probabilidad.

Para ver que la función de distribución dada está bien definida ha de cumplir las siguientes condiciones:

- Ha de ser no negativa
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dydx = 1$
- Ha de ser continua

Vemos que para que sea no negativa partimos de que $k \geq 0$. Calculemos la integral definida para el primer dominio (primera condición nombrada en el enunciado, $-1 \leq x \leq 0; -1 \leq x \leq y \leq x^2$)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dydx = \int_{-1}^{0}\int_{u}^{u^2} f_{(X,Y)}(u,v)dvdu = \int_{-1}^{0}\left[\frac{k}{3}v^3\right]_u^{u^2} du =$$

$$= \frac{k}{3}\int_{-1}^{0} u^6 - u^3 du = \frac{k}{3}\left[\frac{u^7}{7} - \frac{u^4}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{k}{3}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\right) = \frac{11k}{84}$$

Calculemos ahora la integral definida para el segundo dominio (segunda condición nombrada en el enunciado, $0 \leq x \leq 1; 0 \leq x^2 \leq y \leq 1$)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dydx = \int_{0}^{1}\int_{u^2}^{1} f_{(X,Y)}(u,v)dvdu = \int_{0}^{1}\left[\frac{k}{3}v^3\right]_{u^2}^{1} du =$$

$$\frac{k}{3}\int_{0}^{1} 1 - u^6 du = \frac{k}{3}\left[u - \frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{k}{3}\left[1 - \frac{1}{7}\right] = \frac{6k}{21} = \frac{2k}{7}$$

Como sabemos, la suma de ambos dominios ha de ser 1, por ello

$$\frac{2k}{7} + \frac{11k}{84} = 1$$

y por tanto concluimos que el valor de k viene dado por $k = \frac{12}{5}$.

Para el siguiente apartado partimos de la función de distribución $f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{12}{5}y^2$ en el dominio antes mencionado. Nuestra función de densidad estará definida en dos partes, referentes a los dos dominios diferentes en los que trabajaremos, de los que extraemos los siguientes recintos:

Recinto 1: $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 \leq x^2 \leq y < 1\}$

$$F(x, y) = \int_0^x \int_{u^2}^y \frac{12}{5}v^2 dvdu + \int_{-\sqrt{y}}^0 \int_u^{u^2} \frac{12}{5}v^2 dvdu + \int_{-1}^{-\sqrt{y}} \int_u^y \frac{12}{5}v^2 dvdu =$$

$$\frac{12}{15}\left(\int_0^x \left[y^3 - u^6\right] du + \int_{-\sqrt{y}}^0 \left[u^6 - u^3\right] du + \int_{-1}^{-\sqrt{y}} \left[y^3 - u^3\right] du\right) =$$

$$\frac{4}{35}\left(y^3x - x^7 - 6y^{7/2} + y^3 + \frac{1}{4}\right), \quad \forall (x, y) \in R_1$$

Recinto 2: $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad -1 \leq x \leq 0, x^2 < y < 1\}$

$$F(x, y) = \int_{-1}^{-\sqrt{y}} \int_u^y \frac{12}{5}v^2 dvdu + \int_{-\sqrt{y}}^x \int_u^{u^2} \frac{12}{5}v^2 dvdu = \frac{12}{15}\left(\int_{-1}^{-\sqrt{y}} \left[y^3 - u^3\right] du + \int_{-\sqrt{y}}^x \left[u^6 - u^3\right] du\right)$$

$$\frac{4}{35}\left(-42y^3\sqrt{y} + y^3 + x^7 - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4}\right), \quad \forall (x, y) \in R_2$$

Recnito 3: $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad -1 \leq x \leq 0, x < y < x^2\}$

$$F(x, y) = \int_{-1}^x \int_u^y \frac{12}{5}v^2 dvdu = \frac{12}{15}\int_{-1}^{-\sqrt{y}} \left[y^3 - u^3\right] du = \frac{4}{5}\left(y^3x + y^3 - \frac{x^4}{4} + 1\right), \quad \forall (x, y) \in R_3$$

Recinto 4: $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad -1 \leq y \leq x, y < 0\}$

$$F(x,y) = \int_{-1}^{y} \int_{-1}^{y} \frac{12}{5} v^2 dv du = \frac{12}{15} \int_{-1}^{y} \left[y^3 + 1\right] du = \frac{4}{5} \left(y^4 + y^3 + y + 1\right), \quad \forall (x,y) \in R_4$$

Recinto 5: $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 \leq y \leq 1, y < x^2\}$

$$F(x,y) = \int_{-1}^{-\sqrt{y}} \int_{u}^{y} \frac{12}{5} v^2 dv du + \int_{-\sqrt{y}}^{0} \int_{u}^{u^2} \frac{12}{5} v^2 dv du + \int_{0}^{\sqrt{y}} \int_{u^2}^{y} \frac{12}{5} v^2 dv du =$$

$$\frac{12}{15} \left(\int_{-1}^{-\sqrt{y}} \left[y^3 - u^3\right] du + \int_{-\sqrt{y}}^{0} \left[u^6 - u^3\right] du + \int_{0}^{\sqrt{y}} \left[y^3 - u^6\right] du \right) = \frac{1}{5} \left(4y^3 + 1\right), \quad \forall (x,y) \in R_5$$

Recinto 6: $R_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y\}$

$$F(x,y) = \int_{-1}^{0} \int_{u}^{u^2} \frac{12}{5} v^2 dv du + \int_{0}^{x} \int_{u^2}^{1} \frac{12}{5} v^2 dv du = \frac{12}{15} \left(\frac{11}{28} + \int_{-\sqrt{0}}^{x} \left[1 - u^6\right] du \right) =$$

$$\frac{4}{35} \left(7x - x^7\right) + \frac{11}{35}, \quad \forall (x,y) \in R_6$$

Recinto 7: $R_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad -1 \leq x \leq 0, 1 \leq y\}$

$$F(x,y) = \int_{-1}^{x} \int_{u}^{u^2} \frac{12}{5} v^2 dv du = \frac{12}{15} \int_{-1}^{x} \left[u^6 - u^3\right] du = \frac{1}{35} \left(4x^7 - 7x^4 + 11\right), \quad \forall (x,y) \in R_7$$

Recinto 8: $R_8 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x \leq -1, y \leq -1\}$

$$F(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in R_8$$

Recinto 9: $R_9 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 1 \leq x, 1 \leq y\}$

$$F(x,y) = 1, \quad \forall (x,y) \in R_9$$

Actividad 2: *Sea (X, Y) un vector aleatorio, cuya función de densidad de probabilidad conjunta se calcula como producto de las funciones de densidad de probabilidad de dos exponenciales con parámetros λ y μ respectivamente. Es decir*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \lambda\mu \exp(-(\lambda x + \mu y)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$$

Calcular la Función de Distribución de Probabilidad de (X, Y).

La función de distribución de nuestro vector aleatorio (X, Y) se define como una función $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ dada por

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P_{(X,Y)}((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$$

donde podemos deducir que se trata de usar la igualdad $P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u, v) dudv$ por ser un vector aleatorio continuo. Por tanto podemos considerar

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u, v) dudv$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u, v) dvdu = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \lambda\mu \exp(-(\lambda u + \mu v)) dvdu =$$

$$= \lambda\mu \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} e^{-(\lambda u + \mu v)} dvdu$$

Como $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, podemos redefinir las integrales de la sguiente manera:

$$\lambda\mu \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} e^{-(\lambda u + \mu v)} dvdu = \lambda \int_{0}^{x} \left[-e^{-(\lambda u + \mu v)}\right]_0^y du = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda u} \left(e^{-\mu y} - 1\right) du =$$

$$= \left[e^{-\lambda u} \left(e^{-\mu y} - 1\right)\right]_0^x = \left(e^{-\mu y} - 1\right) \left(e^{-\lambda x} - 1\right)$$

Y por lo tanto la función de distribución de probabilidad viene dada por

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \left(e^{-\mu y} - 1\right) \left(e^{-\lambda x} - 1\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$$