Probabilidad

David García Curbelo

Esperanza condicionada, actividad A.4.1

Actividad A.4.1. : *Demostrar las propiedades enunciadas sobre la esperanza condicionada*

1. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para la demostración.

1. Caso continuo.

$$E[X/Y] = \int_{Supp(f_{X/Y})} x \cdot f_{X/Y}(x)\, dx = \int_{Supp(f_{X/Y}),\, x \geq 0} x \cdot f_{X/Y}(x)\, dx + \int_{Supp(f_{X/Y}),\, x<0} x \cdot f_{X/Y}(x)\, dx$$

   Como el conjunto $x \in Supp(f_{X/Y})$, $x < 0$ tiene medida cero, su integral es nula, y obtenemos que $E[X/Y] \geq 0$

2. Caso discreto.
   Para este caso, supongamos en toda la demostración que $X \geq 0$. Tenemos por tanto

$$E[X/Y] = \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} x \cdot p_{X/Y}(x)$$

   Como $x \geq 0$ y $p_{X/Y}(x) \geq 0$, obtenemos que $E[X/Y] \geq 0$. Ahora demostremos que $E[X/Y] = 0 \Leftrightarrow P(X = 0) = 1$:

$\boxed{\Rightarrow}$

$$E[X/Y] = \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} x \cdot p_{X/Y}(x) = 0$$

Como $p_{X/Y=y}(x) > 0, \quad x \in Supp(f_{X/Y=y})$, obtenemos que el único elemento del tipo de $p_{X/Y}$ es $x = 0$. es decir, $P(X = 0/Y) = 1$. Por otro lado, obtenemos que X es una variable degenerada, por lo que es independiente a $Y \Rightarrow P(X = 0/Y) = P(X = 0) = 1$

$\boxed{\Leftarrow}$ Tenemos que X es una variable degenerada, $E_X = \{0\}$. Suponiendo que $0 \in Supp_X/Y$, Tenemos

$$E[X/Y] = \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} x \cdot p_{X/Y}(x) = 0 \cdot p_{X/Y}(x) = 0$$

$\square$

2. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para la demostración.

1. Caso discreto.
   Aplicando la desigualdad triangular y que $p_{X/Y}(x) \geq 0, \quad \forall x :$

$$|E[X/Y]| = \left| \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} x \cdot p_{X/Y}(x) \right| \leq \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} \left| x \cdot p_{X/Y}(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} |x| \cdot p_{X/Y}(x) = E[|X|/Y]$$

$$\Rightarrow E[X/Y] \leq E[|X|/Y]$$

2. Caso continuo.
   Utilizamos las propiedades de las integrales y que $f_{X/Y}(x) \geq 0, \forall x :$

$$|E[X/Y]| = \left| \int_{Supp(f_{X/Y})} x \cdot f_{X/Y}(x)\, dx \right| \leq \int_{Supp(f_{X/Y})} \left| x \cdot f_{X/Y}(x) \right| dx \leq$$

$$\leq \int_{Supp(f_{X/Y})} |x| \cdot f_{X/Y}(x)\, dx = E[|X|/Y]$$

$$\Rightarrow E[X/Y] \leq E[|X|/Y]$$

$\square$

3. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para la demostración.

1. Caso discreto.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b/Y\right] = \sum_{x_1,\ldots,x_n \in Supp(p_{X_1,\ldots,X_n/Y})} \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i x_i + b)\right] p_{X_1,\ldots,X_n/Y}(x_1,...,x_n) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{x_i \in Supp(X_i/Y)} x_i \cdot p_{X_i/Y}(x_i) + b = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i/Y] + b$$

2. Caso continuo.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b/Y\right] = \int_{upp(p_{X_1,\ldots,X_n/Y})} \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i x_i + b)\right] f_{X_1,\ldots,X_n/Y}(x_1,...,x_n)\, dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \int_{Supp(f_{X_i/Y})} x_i \cdot f_{X_i/Y}(x_i)\, dx_i + b = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i/Y] + b$$

$\square$

4. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para la demostración.