# Probabilidad

David García Curbelo

Problema 6 Tema 4 propuesto

**Ejercicio 6.** *Dadas las siguientes distribuciones de probabilidad bidimensionales discretas*

| $X\|Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/5 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1/5 | 0 |
| 3 | 1/5 | 0 | 1/5 |
| 4 | 0 | 0 | 1/5 |

| $X'\|Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/5 | 0 | 1/5 |
| 2 | 0 | 1/5 | 0 |
| 3 | 1/5 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1/5 |

*Calcular:*
*a) Curvas de regresión y errores cuadráticos medios asociados*

$\boxed{Y/X}$

$$E[Y/X=0]=0\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 0=0$$
$$E[Y/X=2]=0+1+0=1$$
$$E[Y/X=3]=0+0+2\cdot\frac{1}{2}=1$$
$$E[Y/X=4]=0+0+2\cdot 1=2$$

$$E[Y/X]=\begin{cases}0\xrightarrow{g}0=g(1), & P_{g(1)}=1/5\\ 2\xrightarrow{g}1=g(2), & P_{g(2)}=1/5\\ 3\xrightarrow{g}1=g(3), & P_{g(3)}=2/5\\ 4\xrightarrow{g}2=g(4), & P_{g(4)}=1/5\end{cases}$$

Con el objetivo de calcular el error cuadrático medio, obtendremos primero la varianza, que viene dada por $Var(Y/X)=E[Y^2/X]-(E[Y/X])^2$. Para ello necesitamos unos cálculos previos

$$E[Y^2/X=0]=0$$
$$E[Y^2/X=2]=1\dot{1}=1$$
$$E[Y^2/X=3]=4\cdot\frac{1}{2}=2$$
$$E[Y^2/X=4]=4\cdot 1=4$$

$$E[Y/X]=\begin{cases}0\xrightarrow{h}0=h(1), & P_{h(1)}=1/5\\ 2\xrightarrow{h}1=h(2), & P_{h(2)}=1/5\\ 3\xrightarrow{h}2=h(3), & P_{h(3)}=1/5\\ 4\xrightarrow{h}4=h(4), & P_{h(4)}=1/5\end{cases}$$

$$Var[Y/X=0]=0-0^2=0,\quad P_{f(1)}=1/5$$
$$Var[Y/X=2]=1-1^2=0,\quad P_{f(2)}=1/5$$
$$Var[Y/X=3]=2-1^2=1,\quad P_{f(3)}=2/5$$
$$Var[Y/X=4]=4-2^2=0,\quad P_{f(4)}=1/5$$

Entonces tenemos ya el error cuadrático medio

$$ECM(Y/X)=E[Var(Y/X)]=\frac{2}{5}$$

$\boxed{X/Y}$

$$E[X/Y=0]=0+3\cdot 1/2=3/2$$
$$E[X/Y=1]=2\cdot 1=2$$
$$E[X/Y=2]=3\cdot 1/2+4\cdot 1/2=7/2$$

$$E[X/Y]=\begin{cases}0\xrightarrow{g}3/2=g(0), & P_{g(0)}=2/5\\ 1\xrightarrow{g}2=g(1), & P_{g(1)}=1/5\\ 2\xrightarrow{g}7/2=g(2), & P_{g(2)}=2/5\end{cases}$$

Con el objetivo de calcular el error cuadrático medio, obtendremos primero la varianza, que viene dada por $Var(X/Y) = E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$. Para ello necesitamos unos cálculos previos

$$E[X^2/Y = 0] = 9/2 \qquad Var[X/Y = 0] = 9/4$$
$$E[X^2/Y = 1] = 4 \qquad Var[X/Y = 1] = 0$$
$$E[X^2/Y = 2] = 25/2 \qquad Var[X/Y = 2] = 1/4$$

Entonces tenemos ya el error cuadrático medio

$$ECM(X/Y) = E[Var(X/Y)] = 1$$

*b) Razones de correlación*

$$\eta^2_{X/Y} = \frac{Var(E[X/Y])}{Var(X)} = 0.456521739$$
$$\eta^2_{Y/X} = \frac{Var(E[Y/X])}{Var(Y)} = 0.5$$

$$E[X] = 12/5E[X^2] = 38/5E[Y] = 1E[Y^2] = 9/5$$
$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 46/25Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 4/5$$

*c) Rectas de regresión $Y/X$ y $X/Y$*

$$\hat{y} = E[Y] + \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}(X - E[X]) = 1 + \frac{4/5}{46/25}(X - \frac{12}{5})$$
$$\hat{x} = E[X] + \frac{Cov(Y,X)}{Var(Y)}(Y - E[Y]) = \frac{12}{5} + \frac{4/5}{4/5}(Y - 1)$$

Teniendo en cuenta $Cov(X,Y) = E[XY] - (E[X]E[Y]) = 4/5$, con $E[XY] = 16/5$

*d) Coeficiente de correlación lineal*

$$P_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{4/5}{\sqrt{46/25 \cdot 4/5}} = 0.659380473$$

*f) Razones de correlación*

$$\eta^2_{X/Y} = 1 - \frac{5/2}{64/25} = 0.0234375$$
$$Var[X'] = E[X'^2] - (E[X'])^2 = 64/25 \quad E[X'] = 9/5 \quad E[X'^2] = 29/5 \quad Var[Y] = 4/5$$
$$\eta^2_{Y/X} = 1 - \frac{2/5}{4/5} = 1/2$$

*g) Rectas de regresión*

$$\hat{y} = E[Y] + \frac{Cov(X',Y)}{Var(X')}(X' - E[X']) = \frac{7}{10}X' - \frac{13}{50}$$

$$\hat{x'} = E[X'] + \frac{Cov(Y, X')}{Var(Y)}(Y - E[Y]) = \frac{506}{320} + \frac{14}{64}Y$$

Teniendo en cuenta $Cov(X', Y) = E[X'Y] - (E[X']E[Y]) = 1/5$, con $E[X'Y] = 2$

*h) Coeficiente de correlación lineal*

$$P_{X',Y} = \frac{Cov(X', Y)}{\sqrt{Var(X')Var(Y)}} = \frac{1/5}{\sqrt{64/25 \cdot 4/5}} = 0.139754248$$

*i) ¿Cuál se aproxima más a la variable aleatoria Y?*

X aproxima mejor a la variable aleatoria Y, ya que el coeficiente de correlación lineal es un valor más cercano a 1.