Probabilidad

David García Curbelo

Esperanza condicionada, actividad A.4.1

Actividad A.4.1. : *Demostrar las propiedades enunciadas sobre la esperanza condicionada*

1. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para la demostración.

1. Caso continuo.

$$E[X/Y] = \int_{Supp(f_{X/Y})} x \cdot f_{X/Y}(x)\, dx = \int_{Supp(f_{X/Y}),\, x \geq 0} x \cdot f_{X/Y}(x)\, dx + \int_{Supp(f_{X/Y}),\, x<0} x \cdot f_{X/Y}(x)\, dx$$

Como el conjunto $x \in Supp(f_{X/Y})$, $x < 0$ tiene medida cero, su integral es nula, y obtenemos que $E[X/Y] \geq 0$

2. Caso discreto.
Para este caso, supongamos en toda la demostración que $X \geq 0$. Tenemos por tanto

$$E[X/Y] = \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} x \cdot p_{X/Y}(x)$$

Como $x \geq 0$ y $p_{X/Y}(x) \geq 0$, obtenemos que $E[X/Y] \geq 0$. Ahora demostremos que $E[X/Y] = 0 \Leftrightarrow P(X = 0) = 1$:

$\boxed{\Rightarrow}$

$$E[X/Y] = \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} x \cdot p_{X/Y}(x) = 0$$

Como $p_{X/Y=y}(x) > 0, \quad x \in Supp(f_{X/Y=y})$, obtenemos que el único elemento del tipo de $p_{X/Y}$ es $x = 0$. es decir, $P(X = 0/Y) = 1$. Por otro lado, obtenemos que X es una variable degenerada, por lo que es independiente a $Y \Rightarrow P(X = 0/Y) = P(X = 0) = 1$

$\boxed{\Leftarrow}$ Tenemos que X es una variable degenerada, $E_X = \{0\}$. Suponiendo que $0 \in Supp_X/Y$, Tenemos

$$E[X/Y] = \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} x \cdot p_{X/Y}(x) = 0 \cdot p_{X/Y}(x) = 0$$

□

2. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para la demostración.

1. Caso discreto.
Aplicando la desigualdad triangular y que $p_{X/Y}(x) \geq 0, \quad \forall x$:

$$|E[X/Y]| = \left| \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} x \cdot p_{X/Y}(x) \right| \leq \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} \left| x \cdot p_{X/Y}(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} |x| \cdot p_{X/Y}(x) = E[|X|/Y]$$

$$\Rightarrow E[X/Y] \leq E[|X|/Y]$$

2. Caso continuo.
   Utilizamos las propiedades de las integrales y que $f_{X/Y}(x) \geq 0, \forall x :$

$$|E[X/Y]| = \left| \int_{Supp(f_{X/Y})} x \cdot f_{X/Y}(x)\, dx \right| \leq \int_{Supp(f_{X/Y})} \left| x \cdot f_{X/Y}(x) \right| dx \leq$$

$$\leq \int_{Supp(f_{X/Y})} |x| \cdot f_{X/Y}(x)\, dx = E[|X|/Y]$$

$$\Rightarrow E[X/Y] \leq E[|X|/Y]$$

□

3. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para la demostración.

1. Caso discreto.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b/Y\right] = \sum_{x_1,\dots,x_n \in Supp(p_{X_1,\dots,X_n/Y})} \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i x_i + b)\right] p_{X_1,\dots,X_n/Y}(x_1,\dots,x_n) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{x_i \in Supp(X_i/Y)} x_i \cdot p_{X_i/Y}(x_i) + b = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i/Y] + b$$

2. Caso continuo.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b/Y\right] = \int_{upp(p_{X_1,\dots,X_n/Y})} \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i x_i + b)\right] f_{X_1,\dots,X_n/Y}(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \int_{Supp(f_{X_i/Y})} x_i \cdot f_{X_i/Y}(x_i)\, dx_i + b = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i/Y] + b$$

□

4. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para ver que $E[X_2 - X_1/Y] \geq 0$.

1. Caso continuo.

$$E[X_2 - X_1/Y] = \int_{Supp(f_{X_1,X_2/Y})} (x_2 - x_1) \cdot f_{X_1,X_2/Y}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \geq 0$$

2. Caso discreto.

$$E[X_2 - X_1/Y] = \sum_{(x_1,x_2) \in Supp(p_{X_1,X_2/Y})} (x_2 - x_1) \cdot p_{X_1,X_2/Y}(x_1, x_2) \geq 0$$

Ahora aplicando la propiedad de linealidad de la esperanza matemática, optenemos $E[X_2/Y] \geq E[X_1/Y]$ □

5. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para la demostración.

1. Caso discreto.

$$E[E[g(X)/Y]] = \sum_{y\in E_y} \sum_{x\in Supp(p_{X/Y})} g(x) \cdot p_{X/Y=y}(x) \cdot p_Y(x) = \sum_{y\in E_y} \sum_{x\in Supp(p_{X/Y})} g(x) \cdot \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(x)} \cdot p_Y(x) =$$

$$= \sum_{y\in E_y} \sum_{x\in Supp(p_{X/Y})} g(x) \cdot p_{X,Y}(x,y) = \sum_{x\in Supp(p_{X/Y})} g(x) \sum_{y\in E_y} p_{X,Y}(x,y) = \sum_{x\in Supp(p_{X/Y})} g(x) \cdot p_X(x) = E[g(X)]$$

2. Caso continuo.

$$E[E[g(X)/Y]] = \int_{E_y} \int_{Supp(p_{X/Y})} g(x) \cdot f_{X/Y}(x) \cdot f_Y(x) dx dy = \int_{E_y} \int_{Supp(f_{X/Y})} g(x) \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(x)} \cdot f_Y(x) =$$

$$= \int_{E_y} \int_{Supp(f_{X/Y})} g(x) \cdot f_{X,Y}(x,y) = \int_{Supp(f_{X/Y})} g(x) \int_{E_y} f_{X,Y}(x,y) = \int_{Supp(f_{X/Y})} g(x) \cdot f_X(x) = E[g(X)]$$

$\square$

7. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para la demostración.

1. Caso discreto.

$$E[Xg(Y)/Y=y] = \sum_{x\in Supp(p_{X/Y=y})} x \cdot g(y) \cdot p_{X/Y=y}(x) = g(y) \sum_{x\in Supp(p_{X/Y=y})} x \cdot p_{X/Y=y}(x) = E[X/Y=y]g(y)$$

$$E[Xg(Y)/Y=y] = E[X/Y=y]g(y)$$

2. Caso continuo.

$$E[Xg(Y)/Y=y] = \int_{Supp(f_{X/Y=y})} x \cdot g(y) \cdot f_{X/Y=y}(x) dx = g(y) \int_{Supp(f_{X/Y=y})} x \cdot f_{X/Y=y}(x) = E[X/Y=y]g(y)$$

$$E[Xg(Y)/Y=y] = E[X/Y=y]g(y)$$

$\square$

8. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para la demostración.

1. Caso discreto.

$$E[X/Y, g(Y)] = \sum_{x\in Supp(p_{X/Y,g(Y)})} x \cdot p_{X/Y,g(Y)}(x) = \sum_{x\in Supp(p_{X/Y,g(Y)})} x \cdot \frac{p_{(X/Y)}(x,y)}{p_Y(y)} =$$

$$= \sum_{x\in Supp(p_{X/Y})} x \cdot p_{X/Y}(x) = E[X/Y]$$

2. Caso continuo.

$$E[X/Y, g(Y)] = \sum_{Supp(f_{X/Y,g(Y)})} x \cdot f_{X/Y,g(Y)}(x) dx = \sum_{Supp(f_{X/Y,g(Y)})} x \cdot \frac{f_{(X/Y)}(x,y)}{f_Y(y)} dx =$$

$$= \sum_{Supp(f_{X/Y})} x \cdot f_{X/Y}(x) dx = E[X/Y]$$

$\square$

9. Estudiemos por separado el caso continuo y el caso discreto para la demostración.

1. Caso discreto.

$$E[g(X)/X] = \sum_{x \in Supp(X/X)} g(x) \cdot p_{X/X}(x) = \sum_{x \in E_X} g(x) \cdot p_X(x) = E[g(X)]$$

2. Caso continuo.

$$E[g(X)/X] = \int_{Supp(X/X)} g(x) \cdot f_{X/X}(x) = \int_{E_X} g(x) \cdot f_X(x) = E[g(X)]$$

$\square$

10. Como X es una variable degenerada, es discreta, por lo que no hay caso continuo.

$$E[X/Y] = \sum_{x \in Supp(p_{X/Y})} x \cdot p_{X/Y}(x) = c \cdot p_{X/Y}(x) = E[c/Y] = c \cdot 1 = c$$

Siendo $c \in Supp(p_{X/Y})$