

Probabilidad

David García Curbelo

Problema P3 Tema 4 Propuesto

Ejercicio: *Demostrar las propiedades enunciadas en el P3T4*

Calculemos para ello los siguientes datos, necesarios para la demostración del primer apartado:

$$E[X/Y = 1] = 3/2, \quad E[X/Y = 2] = 9/5, \quad E[X/Y = 3] = 20/7, \quad E[X/Y = 4] = 16/5$$

$$E[X/Y] = \begin{cases} 1 \xrightarrow{f_2} 3/2, & P_{f_2}(1) = 2/24 \\ 2 \xrightarrow{f_2} 9/5, & P_{f_2}(2) = 5/24 \\ 3 \xrightarrow{f_2} 20/7, & P_{f_2}(3) = 7/24 \\ 4 \xrightarrow{f_2} 16/5, & P_{f_2}(4) = 10/24 \end{cases}$$

$$E[X^2/Y = 1] = 5/2, \quad E[X^2/Y = 2] = 19/5, \quad E[X^2/Y = 3] = 62/7, \quad E[X^2/Y = 4] = 106/10$$

$$E[X^2/Y] = \begin{cases} 1 \xrightarrow{h_2} 5/2, & P_{h_2}(1) = 2/24 \\ 2 \xrightarrow{h_2} 19/5, & P_{h_2}(2) = 5/24 \\ 3 \xrightarrow{h_2} 62/7, & P_{h_2}(3) = 7/24 \\ 4 \xrightarrow{h_2} 106/10, & P_{h_2}(4) = 10/24 \end{cases}$$

$$Var[X/Y = 1] = 5/2 - (3/2)^2 = 1/4, \quad P_Y(1) = 2/24$$

$$Var[X/Y = 2] = 19/5 - (9/5)^2 = 14/25, \quad P_Y(2) = 5/24$$

$$Var[X/Y = 3] = 62/7 - (20/7)^2 = 34/49, \quad P_Y(3) = 7/24$$

$$Var[X/Y = 4] = 106/10 - (16/5)^2 = -176/25, \quad P_Y(4) = 10/24$$

$$ECM[Var(X/Y)] = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{24} + \frac{14}{25} \cdot \frac{5}{24} + \frac{34}{49} \cdot \frac{7}{24} + \frac{9}{25} \cdot \frac{10}{24} = \frac{823}{1680}$$

Resolvamos por tanto el siguiente apartado:

$$E[X] = \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{7}{24} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{5}{24} = \frac{8}{3}$$
$$E[X^2] = \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{7}{24} + 3^2 \cdot \frac{3}{8} + 4^2 \cdot \frac{5}{24} = 8$$

Y por lo tanto obtenemos $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{8}{9}$

$$E[Y] = \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{5}{24} + 3 \cdot \frac{7}{24} + 4 \cdot \frac{5}{12} = \frac{73}{24}$$
$$E[Y^2] = \frac{1}{12} + 2^2 \cdot \frac{5}{24} + 3^2 \cdot \frac{7}{24} + 4^2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{245}{24}$$

Y por lo tanto obtenemos $Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{551}{576}$. Entonces tenemos que:

$$\eta_{Y/X}^2 = 0.485887$$

$$\eta_{X/Y}^2 = 0.448884$$

Calculemos las rectas de regresión para el siguiente apartado:

$$E[XY] = \frac{209}{24}, \quad Cov[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = \frac{43}{72}$$

Entonces obtenemos:

$$\boxed{X/Y}$$

$$\hat{x} = E[X] + \frac{Cov(X, Y)}{Var[Y]}(Y - E[Y]) = \frac{344}{551}x + \frac{423}{451}$$

$$\boxed{Y/X}$$

$$\hat{y} = E[Y] + \frac{Cov(X, Y)}{Var[X]}(X - E[X]) = \frac{43}{64}x + \frac{5}{4}$$

Por último calcularemos el coeficiente de correlación

$$P_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = \frac{43/72}{\sqrt{\frac{551}{576} \cdot \frac{8}{9}}} = 0.164766$$

El cual podemos apreciar que se trata de un buen ajuste, ya que el coeficiente de correlación es próximo a 1.