# Probabilidad

David García Curbelo

Problema P16 Propuesto

*El vector aleatorio $(X,Y)$ se distribuye según una uniforme sobre el recinto:*

$$R = \{(x,y); 0 < x < y < 1\}$$

*Calcular:*

- *Su función generatriz de momentos conjunta.*
- *Las distribuciones generatrices de momentos marginales.*
- *La covarianza de $X$ e $Y$.*

**Función generatriz de momentos conjunta** Calculemos primero su función de densidad, la cual viene dada por

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 2 \cdot 1_{[R]}(x,y) = 2; \quad 0 < x < y < 1$$

Sabemos que la función generatriz de momentos conjuntos se calcula mediante

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = E\left[exp(t_1X + t_2Y)\right]$$

Como se trata de vector aleatorio continuo, el calculo de la esperanza se calcula de la siguiente forma

$$E\left[exp(t_1X + t_2Y)\right] = 2\int_0^1 \int_x^1 exp(t_1x + t_2y)dydx = 2\int_0^1 e^{t_1x}\int_x^1 e^{t_2y}dydx =$$

$$\frac{2}{t_2}\int_0^1 e^{t_1x}\left[e^{t_2} - e^{t_2x}\right]dx = \frac{2}{t_2}\int_0^1 e^{t_1x+t_2} - e^{x(t_1+t_2)}dx$$

$$\Rightarrow M_{X,Y}(t_1,t_2) = 2\frac{(t_1+t_2)e^{t_2}[e^{t_1}-1] + t_1[1-e^{t_1+t_2}]}{t_1t_2(t_1+t_2)}, \quad \forall (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$$

Usando el desarrollo de Taylor visto en clase, llegamos a la expresión

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = 2\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_1^{k-1}}{k!} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{t_1^{l-1}t_2^k}{(k+1)!l!} - \sum_{u=1}^{k-1}\frac{\binom{k-1}{u}t_1^{k-1-u}t_2^{u-1}}{k!}\right]$$

**Distribuciones generatrices de momentos marginales**

Calculamos primero la marginal de X. Dicha marginal viene dada por

$$M_X(t_1) = M_{X,Y}(t_1, 0), \forall t_1 \in \mathbb{R}.$$

Notemos que la sustitución $t_2 = 0$ en $M_{X,Y}(t_1, t_2)$ puede producir una indeterminación, por ello tengamos en cuenta que la función generatriz de momentos es derivable y, por tanto, continua. Así, obtenemos

$$M_X(t_1) = \lim_{t_2 \to 0} M_{X,Y}(t_1, t_2) = \lim_{t_2 \to 0} 2\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_1^{k-1}}{k!} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t_1^{l-1} t_2^k}{(k+1)!l!} - \sum_{u=1}^{k-1} \frac{\binom{k-1}{u} t_1^{k-1-u} t_2^{u-1}}{k!}\right] =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_1^{k-1}}{k!} = \frac{2}{t_1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_1^k}{k!} - 1\right] = \frac{2}{t_1}[e^{t_1} - 1] \quad \forall t_1 \in \mathbb{R}$$

Procedemos al cálculo de la marginal de $Y$ mediante el mismo proceso. Dicha marginal viene dada por

$$M_Y(t_2) = M_{X,Y}(0, t_2), \forall t_2 \in \mathbb{R}.$$

Observamos que en todos los términos de la función $M_{X,Y}(t_1, t_2)$ aparece el término $t_1$, por tanto es fácil ver que

$$M_Y(t_2) = \lim_{t_1 \to 0} M_{X,Y}(t_1, t_2) =$$

$$\lim_{t_1 \to 0} 2\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_1^{k-1}}{k!} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t_1^{l-1} t_2^k}{(k+1)!l!} - \sum_{u=1}^{k-1} \frac{\binom{k-1}{u} t_1^{k-1-u} t_2^{u-1}}{k!}\right] = 0, \quad \forall t_2 \in \mathbb{R}$$

**Covarianza de X e Y**
La covarianza de dos variables aleatorias viene dado por

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Recordamos que la esperanza se define como

$$E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{(X,Y)}(x,y)dydx$$

$$\Rightarrow E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 2xydydx = \int_0^1\int_x^1 2xydydx = \int_0^1 x - x^3dx = \frac{1}{4}$$

$$E[X] = \int_0^1\int_x^1 2xdydx = \int_0^1 2x - 2x^2dx = \frac{1}{3}$$

$$E[Y] = \int_0^1\int_x^1 2ydydx = \int_0^1 1 - x^2dx = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y) = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$$