Probabilidad

David García Curbelo

Clase teórica 23 y 24 de Abril

Actividad 1. *Revisar de nuevo los contenidos referentes al cálculo de momentos centrados y no centrados, a partir de la formulación general, que establece el cálculo de la esperanza matemática de una función medible $g(X_1, ..., X_n)$ de las componentes aleatorias $(X_1, ..., X_n)$ del vector $\underline{X}$, según se indica a continuación. Es decir, definir las diferentes g adecuadas, para el cálculo de momentos centrados y no centrados.*

Para estudiar los momentos centrados y no centrados en base a la formulación general que establece el cálculo de la esperanza matemática, debemos considerar primero $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P_X) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_X)$ un vector aleatorio (ya sea discreto o continuo) n-dimensional, y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, para porceder al cálculo de los momentos centrados y no centrados:

- Momentos no centrados de orden k de $\mathbf{X}$. Los notaremos por $m_{k_1,...,k_n}$, siendo $k = \sum_{i=1}^n k_i$. Corresponden al cálculo de la esperanza matematica de la función

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, ..., X_n) = X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}, \quad k = \sum_{i=1}^n k_i$$

- Momentos centrados (respecto de la media) de orden k de $\mathbf{X}$. Los notaremos por $\mu_{k_1,...,k_n}$, siendo $k = \sum_{i=1}^n k_i$. Corresponden al cálculo de la esperanza matematica de la función

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, ..., X_n) = (X_1 - E[X_1])^{k_1} \cdots (X_n - E[X_n])^{k_n}, \quad k = \sum_{i=1}^n k_i$$

□

Actividad 2. *Deducir de forma explícita el cálculo de la varianza de una combinación lineal de variables aleatorias, aplicando las propiedades anteriormente formuladas sobre la esperanza matemática que todos conocéis, así como se tendrá en cuenta la definición particular del momento centrado cruzado de orden dos, que define la covarianza, según se indica a continuación.*

Sea $X_1, ..., X_n$ un conjunto de variables aleatorias. Consideramos $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ una combinación lineal suya cualquiera. Veamos cuál es la expresión de su varianza. Usando el teorema de König, obtenemos:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^2\right] - E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right]^2$$

Sabemos que $E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right] = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]\right)^2$. Usando dicha igualdad y sustituyendo en lo anterior, desarrrollando los cuadrados tenemos

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 X_i^2 + \sum_{i\neq j}^{n} a_i a_j X_i X_j\right] - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 E[X_i]^2 + \sum_{i\neq j}^{n} a_i a_j E[X_i]E[X_j]\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E[X_i^2] + \sum_{i\neq j}^{n} a_i a_j E[X_i X_j] - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E[X_i]^2 - \sum_{i\neq j}^{n} a_i a_j E[X_i]E[X_j] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i] + \sum_{i\neq j}^{n} a_i a_j Cov(X_i X_j)$$

Obteniendo así lo que buscábamos. □

Actividad 3. *Particularizar la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, derivada a continuación para el producto escalar definido mediante*

$$\rangle X, Y \langle_{\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{A},P)} = E[(X - E[X])(Y - E[Y])], \quad E[X^2] < \infty, E[Y^2] < \infty$$

al caso de variables aleatorias centradas, es decir, cuando $E[X] = E[Y] = 0$.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz viene dada por $\langle X, Y \rangle \leq ||X|| \cdot ||Y||$. Tomando el producto escalar y la norma dadas para variables aleatorias centradas, desarrrollamos el producto escalar

$$\langle X, Y \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{A},P)} = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = Cov(X, Y) = E[XY]$$

por ser tanto X como Y centradas. Para la norma desarrrollamosde la siguiente forma:

$$||X||^2 = \rangle X, X \langle = Var[X] = E[X^2] - E[X] = E[X^2], \quad X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

Con ello obtenemos la siguiente desigualdad, $E[XY]^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$, es decir:

$$Cov(X, Y)^2 \leq Var[X]Var[Y]$$

□

Actividad 4.*Estudiar los siguientes contenidos sobre la función generatriz de momentos de un vector aleatorio multidimensional* $(X_1, ..., X_n)$ *y calcular :*

- *La función generatriz de momentos* $M_{\sum_{i=1}^m \underline{X}_i}(t_1, ..., t_n)$ *del vector aleatorio suma* $\sum_{i=1}^m \underline{X}_i$*, donde* $\underline{X}_i = (X_{i1}, ..., X_{in}), i = 1, ..., m$ *son vectores aleatorios* n*–dimensionales independientes e idénticamente distribuidos.*

- *Obtener, para* $n = m = 2$*, los momentos de orden uno y dos no centrados de la suma a partir de la función generatriz de momentos calculada en el apartado anterior.*

- *Si se supone para* $m = 2 = n$*, en el caso anterior, que las componentes de dichos vectores* $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ *son independientes, calcular de nuevo la función generatriz de momentos del vector suma.*

Primer apartado. Por definición, la función generatriz de momentos viene dada por

$$M_{\underline{X}_i}(t_1, ..., t_n) = g_t(x_1, ..., x_n) = exp(\langle \underline{X}, t\rangle) = E\left[exp\left(\sum_{i=1}^n t_i \underline{X}_i\right)\right]$$

Consideramos como $X = \sum_{i=1}^n \underline{X}_i$, donde $\underline{X}_i = (X_{i1}, ..., X_{in}), i = 1, \ldots, m$. Conseguimos entonces la igualdad

$$M_{\sum_{i=1}^m \underline{X}_i}(t_1, ..., t_n) = g_t\left(\sum_{i=1}^m \underline{X}_i\right) = E\left[exp\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m t_j \underline{X}_{ij}\right)\right]$$

Segundo apartado. Procedemos al cálculo de los momentos de orden 1

$$m_{1,0} = \left[\frac{\partial E[exp(t_1X_1 + t_2X_2 + t_1Y_1 + t_2Y_2)]}{\partial t_1}]\right]_{t_1=t_2=0} =$$

$$= [E[exp(t_1X_1 + t_2X_2 + t_1Y_1 + t_2Y_2)](X_1 + Y_1)]_{t_1=t_2=0} = E[X_1+Y_1] = E[X_1]+E[Y_1]$$

$$m_{0,1} = \left[\frac{\partial E[exp(t_1X_1 + t_2X_2 + t_1Y_1 + t_2Y_2)]}{\partial t_2}]\right]_{t_1=t_2=0} =$$

$$= [E[exp(t_1X_1 + t_2X_2 + t_1Y_1 + t_2Y_2)](X_2 + Y_2)]_{t_1=t_2=0} = E[X_2+Y_2] = E[X_2]+E[Y_2]$$

Procedemos al cálculo de los momentos de orden 2

$$m_{1,1} = \left[\frac{\partial^2 E[exp(t_1X_1 + t_2X_2 + t_1Y_1 + t_2Y_2)]}{\partial t_1 t_2}]\right]_{t_1=t_2=0} =$$

$$= [E[exp(t_1X_1 + t_2X_2 + t_1Y_1 + t_2Y_2)](X_1 + Y_1)(X_2 + Y_2)]_{t_1=t_2=0} = E[(X_1+Y_1)(X_2+Y_2)]$$

$$m_{2,0} = \left[\frac{\partial^2 E[exp(t_1X_1 + t_2X_2 + t_1Y_1 + t_2Y_2)]}{\partial^2 t_1}]\right]_{t_1=t_2=0} = E[(X_1 + Y_1)^2]$$

$$m_{0,2} = \left[\frac{\partial^2 E[exp(t_1X_1 + t_2X_2 + t_1Y_1 + t_2Y_2)]}{\partial^2 t_2}] \right]_{t_1=t_2=0} = E[(X_2 + Y_2)^2]$$

Tercer apartado. En caso de ser todas las variables aleatorias independientes, se dan los mismos resultados vistos en el apartado anterior, añadiendo:

$$m_{1,1} = E[(X_1 + Y_1)]E[(X_2 + Y_2)]$$
$$m_{2,0} = E[(X_1 + Y_1)^2] = E[(X_1 + Y_1)]^2$$
$$m_{0,2} = E[(X_2 + Y_2)^2] = E[(X_2 + Y_2)]^2$$

□