UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

trabajo de fin de grado

El programa de Hilbert. Teoremas de Incompletitud de Gödel

Presentado por:
David García Curbelo

Tutor:
Miguel Delgado Calvo-Flores
Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Curso académico 2021-2022

El programa de Hilbert. Teoremas de Incompletitud de Gödel

David García Curbelo

David García Curbelo *El programa de Hilbert. Teoremas de Incompletitud de Gödel*.
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2021-2022.

Responsable de tutorización

Miguel Delgado Calvo-Flores
Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Declaración de originalidad

D./Dña. David García Curbelo

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2021-2022, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 16 de junio de 2022

Fdo: David García Curbelo

A mi buen amigo Diego,
por haberme hecho ver que las matemáticas no son sólo cosa de locos.

Índice general

Summary

This paper presents the history of the theorem that shook the foundations of all known mathematics: Gödel's incompleteness theorems. To do so, we will give a brief historical review of what motivated this great mathematician of the twentieth century to deal with this peculiar subject, in which we will see that this merit is attributed to David Hilbert and his list of 23 problems.

At the end of the 19th century, mathematics felt a slight tremor in its foundations, giving rise to the foundational crisis of mathematics, and it is here that Hilbert appears with his second problem of the list, in which he poses as an urgent problem the axiomatization of arithmetic. What Hilbert did not know was that this problem would never be solved.

Gödel, after graduating in mathematics, comes across a recently published book by Hilbert and Ackermann in which an open problem of logic is posed: proving the completeness of the first-order logical calculus. Emerging from the unknown world, this great up-and-coming mathematician proposes an irrefutable solution in less than a year, and in a paper of barely 10 pages in which he states his strong result:

In a first-order logic, every formula that is valid in a logical sense is provable.

This simple statement promises us the existence of demonstration of any statement of elementary logical formulas, provided that these are in infinite numerable quantity. This great result gave much hope to Hilbert, who had hitherto held high hopes for the possibility of solving his second problem proposed at the 1900 congress.

However, what Hilbert could not foresee was that, a year later, Gödel would publish the result that would shake the whole of mathematics, and not only that of his time, but forever. In one of the most important articles of twentieth century mathematics, Gödel presents the well-known Incompleteness Theorems, by means of a constructive proof based on a gödelization, which is nothing more than an assignment of numbers to elements of first-order logic. In them he states as follows:

1. *No formal mathematical theory is consistent and complete.*
2. *If the system of axioms of such a formal system is consistent, such consistency cannot be proved by means of these axioms.*

This result represents a great wall in the advancement of the knowledge of mathematics. In the first instance, we will never be able to create a mathematical system in which we can be sure of being able to prove every result, and also that we will not have contradictions in it.

In this small bibliographic work we intend to collect the original proofs published between 1929 and 1931 by Kurt Gödel himself (although later other simpler and improved proposals have been published, I believe that in the original ones we can better understand the objectives of the same through a constructive process), in addition to the historical context necessary to understand the motivation of these proofs.

Introducción

En este trabajo se presenta la historia del teorema que hizo tambalear los cimientos de toda la matemática conocida: los teoremas de incompletitud de Gödel. Para ello daremos un pequeño repaso histórico acerca de qué fue lo que motivó a este gran matemático del siglo XX a tratar este tema tan peculiar, en el que veremos que dicho mérito se le atribuye a David Hilbert y a su lista de 23 problemas.

A finales de siglo XIX, la matemática siente un pequeño temblor en sus fundamentos, dando lugar a la crisis fundacional de la matemática, y es aquí cuando aparece Hilbert con su segundo problema de la lista, en el cual plantea como problema urgente la axiomatización de la aritmética. Lo que Hilbert desconocía es que este problema nunca tendría solución.

Gödel, después de haberse licenciado en matemáticas, se encuentra con un libro recién publicado de Hilbert y Ackermann en el que se plantea un problema abierto de la lógica: demostrar la completitud del cálculo lógico de primer orden. Emergiendo del mundo desconocido, este gran matemático prometedor propone una solución irrefutable en menos de un año, y en un artículo de apenas 10 páginas en el que enuncia su resultado fuerte:

En una lógica de primer orden, toda fórmula que es válida en un sentido lógico es demostrable.

Este enunciado tan simple nos promete la existencia de demostración de cualquier enunciado de fórmulas lógicas elementales, siempre que estas se encuentren en cantidad infinita numerable. Este gran resultado dio muchas esperanzas a Hilbert, el cual sostenía hasta entonces grandes esperanzas acerca de la posibilidad de resolver su segundo problema propuesto en el congreso de 1900.

Sin embargo, lo que Hilbert no pudo prevenir es que, un año después, Gödel publicaría el resultado que haría temblar a toda la matemática, y no sólo la de su época, sino para siempre. En uno de los artículos más importantes de la matemática del siglo XX, Gödel presenta los conocidos *Teoremas de incompletitud*, mediante una prueba constructiva basada en una *gödelización*, que no es más que una asignación de números a elementos de la lógica de primer orden. En ellos enuncia como sigue:

1. *Ninguna teoría matemática formal es consistente y completa*
2. *Si el sistema de axiomas de dicho sistema formal es consistente, dicha consistencia no se puede probar mediante dichos axiomas.*

Este resultado supone un gran muro en el avance del conocimiento de la matemática. En una primera instancia, nunca podremos de ninguna manera crear un sistema matemático en el que tengamos la certeza de poder probar todo resultado, y además tampoco de que no vayamos a tener contradicciones en el mismo.

En este pequeño trabajo bibliográfico se pretende recoger las demostraciones originales publicadas entre los años 1929 y 1931 por el propio Kurt Gödel (aunque posteriormente se hayan publicado otras propuestas más simples y mejoradas, considero que en las originales se pueden entender mejor los objetivos de la misma mediante un proceso constructivo), además del contexto histórico necesario para entender la motivación de dichas demostraciones.

Parte I.

El programa de Hilbert

1. Una cortina hacia el futuro

> ¿Quién de nosotros no se alegraría de levantar el velo tras el que se oculta el futuro; de echar una mirada a los próximos avances de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo durante los siglos futuros?
>
> *(David Hilbert)*

Con estas ambiciosas palabras comenzaba David Hilbert su conferencia desde el estrado de la universidad de La Sorbona, París, dando así comienzo al Congreso Internacional de Matemáticos de 1900. Dicha conferencia se distinguiría notablemente del resto de Congresos en los que ya había participado, debido a su gran influencia en la matemática de la época y a la ambición de la misma, que ha conseguido dejarnos retales hasta la actualidad.

1.1. Los objetivos

Hilbert tuvo como principal reto en su discurso el crear un punto de inflexión en la matemática de la época, tratando de trazar una dirección y un sentido hacia el avance y el futuro de la matemática. Dicho objetivo lo abordó mediante la propuesta de una lista de 23 problemas, ya que el propio Hilbert afirmaba que las matemáticas avanzaban proponiendo problemas, y que éstos en sí mismos son un signo de que la disciplina sigue viva.

Dicho programa ha tenido tal sonoridad y repercusión en la matemática del siglo XX debido tanto a la diversidad de campos que abarca, como a la propia influencia del conferenciante. Tal ha sido dicha importancia, que varios de estos problemas están aún sin resolver, en vistas de ideas y planteamientos matemáticos que aún no han sido organizados de manera correcta, o inclusive de nuevos campos y descubrimientos ocultos tras el velo de la ignorancia.

1.2. La lista

La recopilación de dichos 23 problemas abarca no sólo el campo que nos concierne, sino también otros tangenciales que eran de especial interés para Hilbert, como lo era la física. En este campo presentó especial interés gracias en gran medida a su buen amigo Hermann Minkowski, y gracias a él estuvo activo incluso muchos años después de la muerte de su compañero, participando en los principales avances de la física del momento.

Dentro de los problemas de las matemáticas que presenta, podemos ver varios campos de especial interés en la matemática de la época, tocando geometrías no euclídeas (todo un campo revolucionario de la época), un comienzo de atisbo en el análisis funcional (fundado en gran parte por el propio David Hilbert), o incluso problemas que afrontan la crisis fundacional de la matemática, un lastre del que la matemática parecía no poder librarse, pero en el que Hilbert tenía mucha fe y seguridad.

Como comentábamos anteriormente, Hilbert era uno de los grandes matemáticos de la época, y debido a ésto, en sus estudios trabajaba con la matemática latente de la época. Por ello, en la lista de problemas podemos observar que gran número de ellos (alrededor de tres cuartas partes del programa) están constituidos por problemas de campos que el propio Hilbert trataba, y que por tanto, debían ser temas procedentes del motor de avance y del posible futuro que pudiera tomar la matemática debido al programa.

1.2.1. Los 23 problemas

En la siguiente Tabla 1.1 se presenta una lista de los 23 problemas anunciados por Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticos en París, aunque dicha lista no fuera publicada hasta un tiempo después. Como se puede ver, muchos de ellos carecen de una explicación clara y concisa del objetivo del problema, y por éste motivo se ha considerado que muchos de ellos eran para Hilbert una dirección que tomar en el avance de la matemática, más que un problema como tal.

Problema	Enunciado	Estado
1	La hipótesis del continuo	Solución parcial
2	La compatibilidad de los axiomas de la aritmética	Resuelto
3	La igualdad de los volúmenes de dos tetraedros de la misma base y la misma altura	Resuelto
4	Construcción de todas las métricas cuyas rectas sean geodésicas	Demasiado genérico
5	El concepto de Lie de grupo continuo de transformaciones sin la hipótesis de la diferenciabilidad de las funciones que definen el grupo	Resuelto
6	Tratamiento matemático de los axiomas de la física	Solución parcial
7	Irracionalidad y trascendencia de ciertos números	Resuelto
8	Problemas de números primos	Sin resolver
9	Demostración de la ley de reciprocidad más general en cualquier campo de números	Parcialmente resuelto
10	Determinación de la resolubilidadde la ecuación diofántica	Resuelto
11	Formas cuadráticas con coeficientes numéricos algebraicos cualesquiera	Parcialmente resuelto
12	Extensión del teorema de Kronecker sobre campos abelianos a cualquier dominio de racionalidad algebraico	Sin resolver

13	Imposibilidad de la solución general de 7º grado por medio de funciones de sólo dos argumentos	Resuelto
14	Demostración de la finitud de ciertos sistemas completos de funciones	Resuelto
15	Fundamentación rigurosa del cálculo enumerativo de Schubert	Solución parcial
16	Problema de la topología de curvas y superficies algebraicas	Sin resolver
17	Expresión de formas definidas por cuadrados	Resuelto
18	Construcción del espacio a partir de poliedros congruentes	Resuelto
19	¿Son siempre necesariamente analíticas las soluciones de problemas regulares en el cálculo de variaciones?	Resuelto
20	El problema general de los valores de contorno	Resuelto
21	Demostración de la existencia de ecuaciones diferenciales lineales que tienen prescrito un grupo monodrómico	Resuelto
22	Uniformización de relaciones analíticas por medio de funciones automorfas	Resuelto
23	Desarrollo adicional de los métodos del cálculo de variaciones	Sin resolver

Tabla 1.1.: Lista de los 23 problemas del Programa

En la tabla podemos ver que muchos de los temas que trató no son un enunciado a un problema como tal, sino más bien a un campo de investigación, el cual en su discurso recogía varios problemas a resolver o simplemente unas directrices que seguir.

1.3. El escenario previo

No todos los problemas fueron motivo de estudio de Hilbert. Algunos, como los problemas que tienen que ver con la función zeta de Riemann o el teorema de uniformización, ya eran problemas resonantes de la época que no se podían ignorar como problemas relevantes para el próximo siglo. En éste sentido Hilbert quiso hacer un compendio, no sólo de problemas de su propio campo e inquietudes, sino también de las grandes obviedades de la época. Por éste motivo uno también puede intuir otros posibles problemas que hubieran podido ser motivo de estudio, y que sin embargo Hilbert ignoró[1].

Pero entre los problemas que ataviaban a la sociedad matemática de la época, uno de los temas más recurrentes era la crisis fundacional. Nos encotramos ante un marco histórico en

[1]Un ejemplo resonante es el problema de dar una definición formal de integral de una función.

el que resultados recientes hacen temblar los cimientos de la matemática[2], y por consiguiente todo campo natural sedimentado en ella. Es por ello por lo que Hilbert reclama parte del protagonismo en la escena y propone dos problemas de fundamentación axiomática: la axiomatización de la aritmética y de la física[3]. Éste ve como necesario e imprescindible la resolución de dicho problema en el que, a pesar de tener gran certeza en la veracidad de su consistencia, era necesario una demostración rigurosa y completa, que evitara la futura incertidumbre de posibles contradicciones no resolubles, y que quitaran de todo sentido a las matemáticas[4].

Es por éste problema (que trataremos más adelante) junto con muchos otros, que fueron motivación para Hilbert para incluirlos en su programa, y no sólo ganar más resonancia con ellos sino también tratar de motivar en su solución para que el futuro de la matemática pisara con paso firme, como toda la sociedad matemática deseaba en aquella época.

[2]Cabe destacar como ejemplos resonantes a la teoría de conjuntos de Cantor y a la paradoja de Russel, entre otros.

[3]Hilbert tenía gran confianza y certeza en que la axiomatización de la aritmética y la demostración de completitud de la misma era cuestión de tiempo, y por tanto también propuso la axiomatización de la física, que era el campo en el que también estaba enfocado. Véase [Kre76].

[4]En este sentido se puede ver más profundamente en palabras de Morris Kline, en [KM00].

2. Una mancha en la cortina

2.1. Los defectos del programa

Debido a la gran influencia de David Hilbert, el programa era algo que no se podía refutar ni sacar del plano principal de estudio para las próximas generaciones. Sin embargo, no por ello significa que el programa no tuviera objeciones. En efecto, muchos de los "problemas"propuestos no fueron más que un disparo al aire; una forma de que la matemática de la época mirara hacia donde Hilbert quería mirar.

Entre los problemas planteados se encuentran tanto problemas del propio estudio de Hilbert, como problemas relevantes de la época, e incluso incluyó intereses que él quería que se investigasen, pero que desgraciadamente no pertenecían a su campo de estudio. Ésto llevó a que quedaran problemas enunciados de forma demasiado vaga, lo que provocó un desinterés general en la sociedad y que, por ello, no fueran influyentes en el desarrollo posterior de la materia. Esto fue lo que ocurrió con el bloque de problemas del 13 al 18, siendo dentro de los 23 los menos coherentes, y sobre los que Hilbert tenía el tacto menos seguro.[1]

2.2. La axiomatización

El problema de la axiomatización de la aritmética (enunciado en el segundo problema), no tuvo la respuesta esperada que Hilbert quería. En efecto, dicha axiomatización era algo estrictamente necesario, pero el escepticismo de la sociedad de la época ponía en duda la mera posibilidad de cualquier avance posible.

Cierto es que en los años siguientes se dieron pequeños pasos en el avance de dicho problema, tales como la obra de Russel y Whitehead con *Principia Mathematica* y su teoría de tipos[2], o la emergente teoría de conjuntos de Cantor. Se pudo ver en ambas que, mediante cada una de ellas por separado, se podía probar que ambos sistemas formales podían expresar toda la matemática conocida.

Teniendo esta base fijada, la nube de escepticismo se fue difuminando poco a poco, y fue dando paso a la necesaria esperanza en la posible axiomatización, gracias a estos pequeños pero necesarios avances en la dirección buscada.

En relación con la consistencia, también se realizaron importantes avances en la misma mediante la demostración de la teoría de números, con demostraciones aportadas por Ackermann en 1924 y por von Neumann en 1927.[3] Lo que desconocían todos ellos era que el protagonista de la obra aún no había subido al escenario.

[1] Esto sin embargo no ocurrió con los últimos 5 problemas, en los que Hilbert tenía terreno más firme, e incluso había avanzado en algunos de ellos. Véase [BB98, Pág. 85].

[2] Véase [AR10].

[3] Notar que ambos eran unos de los más importantes discípulos de Hilbert, y por tanto de los mayores luchadores por la demostración de la consistencia de la aritmética, llegando a resultados más débiles pero no por ello menos importantes.

2.3. La llegada de Gödel a escena

Sam enunció: "Lo que va a decir es falso"
Kurt replicó: "Lo que acaba de decir es verdadero"

(Samuel Beckett)

En verano de 1928, el joven y recién licenciado en matemáticas Kurt Gödel, se encuentra con un libro que le hace entrar en escena: *Elementos de la lógica teórica*, de Hilbert y Ackermann[4]. Dicho libro no sólo se presenta un cálculo deductivo, sino que por primera vez se plantea la cuestión de si ese cálculo es completo o no, dejando dicho problema abierto. Debido a la inquietud que causó en la matemática de la época, y del impacto y la novedad que causó en el propio Gödel, fue motivo suficiente para tomar como tema para su tesis doctoral el tema de la completitud del cálculo lógico de primer orden.

Para Gödel, el campo de estudio, a pesar de ser de su interés, era completamente nuevo para él, el cual le planteaba como reto a largo plazo la resolución del segundo problema de Hilbert en el intento de formalización de la aritmética.

Como vimos, Hilbert ya había hecho pequeños avances en el tema, llegando a construir un cálculo deductivo de primer orden, el cual fue celebrado por toda la sociedad matemática como un gran avance en la solución del problema. Y precisamente estas esperanzas crecidas se vieron sustentadas con la solución aportada por Gödel en su tesis doctoral. En élla, no sólo demostró un resultado de calibre considerable, sino que además lo consiguió con una brevedad sin igual. En su artículo de apenas 10 páginas, planteaba su teorema de completitud:

En una lógica de primer orden, toda fórmula que es válida en un sentido lógico es demostrable.

Este avance se vio recogido por un calor sin igual de la sociedad matemática, promoviendo el avance en el estudio del mismo, pues era evidente que ya nada podría frenar que, tarde o temprano, se planteara una solución al problema de la formalización de la aritmética. Muchos matemáticos de la época se pusieron manos a la obra, entre ellos Ackermann, von Neumann, y por supuesto el propio Gödel.

Sin embargo, en su propuesta de demostrar la consistencia de dicho sistema, Gödel se vio en la situación en la que, mientras más se inmersaba en el tema, menos posible veía su solución. Así pues simplemente cambió el rumbo del problema: demostrar la incosistencia de la aritmética. Y este cambio de rumbo le permitió llegar a un puerto sin igual.

Sin a priori buscarlo, acabó demostrando los dos teoremas que cambiaron el curso de la historia para siempre:

1. *Ninguna teoría matemática formal es consistente y completa*
2. *Si el sistema de axiomas de dicho sistema formal es consistente, dicha consistencia no se puede probar mediante dichos axiomas.*

Al fin y al cabo, es el problema de poder medir la calidad de la lente mediante la propia lente. Se necesitaría una lente mayor (un sistema matemático formal más grande) para poder probar la consistencia de la lente pequeña, pero el problema se volvería recursivo con la lente mayor.

Con estos dos resultados fuertes, llamados Teoremas de Incompletitud, Gödel alcanzó la cima no sólo como uno de los matemáticos más importantes del siglo, sino también como uno de los lógicos más importantes de toda la historia. Y dicha fama no fue solamente

[4]Publicado en 1928, siendo el primer libro de texto de lógica en el sentido actual. Véase [HAdZ62].

debida al a magnitud de los resultados que había resuelto, sino debido en gran parte por haber derribado el fundamento del programa de uno de los matemáticos más influyentes de la época. En los siguientes capítulos se muestran las demostraciones originales que redactó Gödel en su época triunfal en el campo de la lógica, en los que demostró sus teoremas de completitud e incompletitud.

Parte II.

Los teoremas de incompletitud de Gödel

3. La completitud del cálculo lógico de primer orden

3.1. Definiciones y lemas previos

Definamos previamente el sistema axiomático sobre el que vamos a trabajar: [1]

- Signos básicos primitivos:[2]
  - $\neg$
  - $\vee$
  - $\forall$
- Axiomas formales:
  1. $X \vee X \rightarrow X$
  2. $X \rightarrow X \vee Y$
  3. $Y \vee X \rightarrow X \vee Y$
  4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$
  5. $\forall x\ Px \rightarrow Py$
  6. $\forall x\ (X \vee Px) \rightarrow X \vee \forall x\ Px$
- Reglas de inferencia: [3]
  1. El esquema de inferencia: De α y $\alpha \rightarrow \beta$ se puede inferir β.
  2. La regla de sustitución para variables sentenciales y predicativas.
  3. De $\alpha(x)$ puede inferirse $\forall x\ \alpha(x)$.
  4. Unas variables individuales (libres o ligadas) pueden ser reemplazadas por cualesquiera otras, con tal de que ello no produzca ningún solapamiento de los alcances de las variables designadas mediante el mismo signo.

Para las deducciones que van a proceder, también es conveniente establecer algunas abreviaturas en calidad de notación:

1. Las notaciones π_1, π_2, π_3, ρ, ... designan prefijos[4] cualesquiera, es decir, filas de signos finitas de la forma $\forall x \exists y$, $\forall x \forall y \exists z \forall u$, ...

2. Las letras alemanas minúsculas $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, etc., designan *n-tuplos* de variables individuales, es decir, filas de signos del tipo xyz, $x_2x_1x_2x_3$, ..., donde la misma variable puede aparecer varias veces en la misma sentencia.

[1]Coincide, exceptuando el principio de asociatividad (que es redundante), con lo expuesto en los apartados 1 y 10 de *Principia Mathematica* (Véase [AR10])

[2]A partir de ellos pueden definirse $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y $\exists$ del modo habitual.

[3]No todas ellas están explícitamente formuladas en los resultados de Russel y Whitehead, pero todas ellas son usadas continuamente en sus deducciones.

[4]Con prefijos se hace referencia a conjuntos de signos básicos primitivos.

Nota: Del modo correspondiente hay que entender sentencias como $\forall\mathfrak{x}\,\exists\mathfrak{y}$, etc. Si una misma variable aparece varias veces en $\mathfrak{x}$, hay que pensar, naturamente, que sólo está escrita una vez en $\forall\mathfrak{x}\,\exists\mathfrak{y}$, ...

Consideremos a continuación una serie de lemas, para las que no presentamos demostración por no ser relevantes para el desarrollo del resto de resultados (además de ser demostraciones relativamente sencillas de realizar).

Lema 3.1. *Para cada n-tuplo $\mathfrak{x}$ los siguientes resultados son deducibles:*

a) $\forall\mathfrak{x}F\mathfrak{x} \rightarrow \exists\mathfrak{x}F\mathfrak{x}$

b) $\forall\mathfrak{x}F\mathfrak{x} \wedge \exists\mathfrak{x}G\mathfrak{x} \rightarrow \exists\mathfrak{x}(F\mathfrak{x} \wedge G\mathfrak{x})$

c) $\forall\mathfrak{x}\neg F\mathfrak{x} \leftrightarrow \exists\mathfrak{x}F\mathfrak{x}$

Lema 3.2. *Si $\mathfrak{x}$ y $\mathfrak{x}'$ sólo se diferencian por el orden en que están escritas las variables, entonces el siguente enunciado es deducible:*

$$\exists\mathfrak{x}F\mathfrak{x} \rightarrow \exists\mathfrak{x}'F\mathfrak{x}'$$

Lema 3.3. *Si todas las variables $\mathfrak{x}$ son distintas entre sí y $\mathfrak{x}'$ tiene el mismo número de miembros que $\mathfrak{x}$, entonces el siguiente enunciado es deducible:*

$$\forall\mathfrak{x}F\mathfrak{x} \rightarrow \forall\mathfrak{x}'F\mathfrak{x}'$$

Lema 3.4. *Si π_i designa uno de los prefijos $\forall x_i$, $\exists x_i$; y ρ_i designa uno de los prefijos $\forall y_i$, $\exists y_i$, entonces el siguiente es deducible:*[5]

$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_n Fx_1x_2\cdots x_n \wedge \rho_1\rho_2\cdots\rho_m Gy_1y_2\cdots y_m \leftrightarrow \pi(Fx_1x_2\cdots x_n \wedge Gy_1y_2\cdots y_m)$$

para cada prefijo π que se componga de los π_i y ρ_i y que satisfaga la condición de que π_i esté delante de π_k para $i < k \leq n$ y de que ρ_i esté delante de ρ_k para $i < k \leq m$

Lema 3.5. *Toda fórmula puede ponerse en forma normal prenexa, es decir, para cada fórmula α hay una fórmula prenexa γ, tal que $\alpha \leftrightarrow \gamma$ es deducible.*

Lema 3.6. *Si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es deducible, entonces también lo es $\varphi(\alpha) \leftrightarrow \varphi(\beta)$, donde $\varphi(\alpha)$ designa una fórmula cualquiera que contenga α como parte.*[6]

Lema 3.7. *Cada fórmula conectiva válida es deducible, es decir, los axiomas 1-4 constituyen un sistema suficiente de axiomas para el cálculo conectivo.*

Con estos resultados previos ya estamos en condiciones de afrontar el problema que nos concierne.

3.2. Exposición y demostraciones

El teorema de completitud semántica de la lógica de primer orden aparece en el artículo de Gödel de 1930 como Teorema I:

[5]Un resultado análogo vale para $\vee$ en vez de para $\wedge$.
[6]Estos dos últimos resultados se pueden estudiar en detalle en la tercera sección de [HAdZ62].

Teorema 3.1. *Cada fórmula válida de la lógica de primer orden es deducible.*

El presente teorema, objeto principal de estudio de esta sección, sería trivialmente demostrable si pudiesemos probar el siguiente:

Teorema 3.2. *Cada fórmula de la lógica de primer orden es o refutable [7] o satisfacible (sobre un universo infinito numerable).*

Y por ello surge el siguiente resultado:

Proposición 3.1. *Teorema 3.2* $\Rightarrow$ *Teorema 3.1*

Demostración. Sea α una fórmula válida. Siendo esto así, $\neg\alpha$ no es satisfacible, y aplicando Teorema 3.2 tenemos que α es refutable. Por tanto, con ello se tiene que $\neg\neg\alpha$ (y como consecuencia, también α) es una fórmula deducible.[8] □

Definición 3.1. Una *K-fórmula* es una fórmula κ perteneciente a una clase del conjunto de fórmulas K cumpliendo las siguientes condiciones:

1. κ es una fórmula prenexa.
2. κ carece de variables individuales libres.
3. El prefijo de κ comienza con un cuantificador universal y termina con un cuantificador particular.

Entonces con la presente definición podemos deducir el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *Si cada K-fórmula es refutable o satisfacible, también lo es cualquier fórmula.*

Demostración. Sea α una fórmula que no pertenece a K. Sea $\mathfrak{x}$ el conjunto de sus variables libres. Como se puede ver directamente, si α es refutable (o satisfacible), se sigue la refutabilidad (o satisfacibilidad) de $\exists\mathfrak{x}\alpha$, e igualmente a la inversa.

Sea ahora $\pi\varphi$ la forma normal prenexa de $\exists\mathfrak{x}\alpha$, de tal modo que

$$\exists\mathfrak{x}\alpha \leftrightarrow \pi\varphi \tag{3.1}$$

es deducible. Además estipulemos que

$$\beta = \forall x\pi\exists y(\varphi \wedge \mathrm{Fx} \vee \neg\mathrm{Fy})^{9}$$

Entonces

$$\pi\varphi \leftrightarrow \beta \tag{3.2}$$

es deducible (por el Lema 3.4 y por la deducibilidad de $\forall x\pi\exists y(\varphi \wedge \mathrm{Fx} \vee \neg\mathrm{Fy})$). β pertenece a K y, por tanto, es o satisfacible o refutable. Pero por (3.1) y (3.2) la satisfacibilidad de β implica la de $\exists\mathfrak{x}\alpha$ y consiguientemente también la de α, y lo mismo se puede aplicar para la refutabilidad. Por tanto, concluimos que también α es o satisfacible o refutable. □

Teniendo en cuenta el Teorema 3.3 anterior, basta para demostrar el Teorema 3.2 con probar la siguiente:

[7] «φ es refutable» significa «$\neg\varphi$ es deducible».
[8] El recíproco del anterior resultado también es cierto y con una demostración igual de simple, aunque no la demostraremos por no ser relevante en la demostración del Teorema 3.1.
[9] Las variables x e y no deben aparecer en π.

Proposición 3.2. *Cada K-fórmula es satisfacible o refutable.*

Para ello definimos previamente el concepto de grado de una K-fórmula, y probaremos algunos resultados para poder probar la anterior proposición.

Definición 3.2. Llamaremos grado de una K-fórmula [10] al número de series de cuantificaciones universales de su prefijo, separadas unas de otras por cuantificadores existenciales.

Probamos primeramente el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Si cada K-fórmula de grado n es o refutable o satisfacible, entonces también lo es cada K-fórmula de grado $n+1$.*

Demostración. Sea $\pi_1\alpha$ una K-fórmula de grado $n+1$. Sea $\pi_1 = \forall\mathfrak{x}\exists\mathfrak{y}\pi_2$ y $\pi_2 = \forall\mathfrak{u}\exists\mathfrak{v}\pi_3$, donde π_2 tiene grado n y π_3 el grado $n-1$. Sea además F una variable predicativa que no aparezca en α. Establezcamos:

$$\beta = \forall\mathfrak{x}'\exists\mathfrak{y}'\mathrm{F}\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' \wedge \forall\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}(\mathrm{F}\mathfrak{x}\mathfrak{y} \to \pi_2\alpha)$$

y

$$\gamma = \forall\mathfrak{x}'\forall\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}\forall\mathfrak{u}\exists\mathfrak{y}'\exists\mathfrak{v}\pi_3(\mathrm{F}\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' \wedge (\mathrm{F}\mathfrak{x}\mathfrak{y}) \to \alpha)^{11}$$

Aplicando ahora dos veces el Lema 3.4 junto con el Lema 3.6, obtenemos la deducibilidad de

$$\beta \leftrightarrow \gamma \tag{3.3}$$

Además, es claro que la fórmula

$$\beta \to \pi_1\alpha \tag{3.4}$$

es válida. Ahora bien, γ tiene grado n, y por tanto es por hipótesis o satisfacible o refutable. Si γ es satisfacible, entonces también lo es $\pi_1\alpha$ (por (3.3) y (3.4)). Si en caso contrario γ es refutable, entonces también lo es β (por (3.3)), es decir, entonces $\neg\beta$ es deducible. Sustituyendo ahora F por $\pi_2\alpha$ en $\neg\beta$, obtenemos que en este caso la siguiente sentencia es deducible:

$$\neg(\forall\mathfrak{x}'\exists\mathfrak{y}'\pi_2\alpha \wedge \forall\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}(\pi_2\alpha \to \pi_2\alpha))$$

Se puede observar que, naturalmente,

$$\forall\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}(\pi_2\alpha \to \pi_2\alpha)$$

es deducible, y por ello también lo es $\neg\forall\mathfrak{x}'\exists\mathfrak{y}'\pi_2\alpha$, es decir, en este caso $\pi_2\alpha$ es refutable. Por tanto, de hecho $\pi_2\alpha$ es o refutable o satisfacible. □

Ahora, para acabar de probar la Proposición 3.2, sólo necesitamos probar el siguiente resultado:

Teorema 3.5. *Cada K-fórmula de primer grado es o satisfacible o refutable.*

La demostración de este teorema requiere algunas definiciones previas, así como algunos resultados derivados de las definiciones que vamos a establecer, por lo que se deja la presente demostración para más adelante.

[10] También, en el mismo sentido se le puede llamar "grado de un prefijo".
[11] En esta sentencia suponemos que las sucesiones de variables $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ son disjuntas entre sí.

Sea $\forall\mathfrak{x}\exists\mathfrak{y}\alpha(\mathfrak{x};\mathfrak{y})$ —abreviado como $\pi\alpha$— una fórmula cualquiera de primer grado. Mediante $\mathfrak{x}$ representamos un r-tuplo de variables, con $\mathfrak{y}$ un s-tuplo. COnsideremos los r-tuplos sacados de la sucesión $x_0, x_1, x_2, \dots x_i \dots$ ordenados por la suma creciente de sus índices en una sucesión:

$$\mathfrak{x}_1 = (x_0, x_0, \dots, x_0), \quad \mathfrak{x}_2 = (x_1, x_0, \dots, x_0), \quad \mathfrak{x}_3 = (x_0, x_1, x_0, \dots, x_0) \quad \dots$$

y definamos una sucesión $\{\alpha_n\}$ de fórmulas derivadas a partir de $\pi\alpha$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \alpha(\mathfrak{x}_1; x_1, x_2, \dots, x_s)\\
&\alpha_2 = \alpha(\mathfrak{x}_2; x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{2s}) \wedge \alpha_1\\
&\dots\\
&\alpha_n = \alpha(\mathfrak{x}_n; x_{(n-1)s+1}, x_{(n-1)s+2}, \dots, x_{ns}) \wedge \alpha_{n-1}
\end{aligned}$$

Designemos mediante $\mathfrak{y}_n$ el s-tuplo $x_{(n-1)s+1}, x_{(n-1)s+2}, \dots, x_{ns}$ de tal modo que:

$$\alpha_n = \alpha(\mathfrak{x}_n; \mathfrak{y}_n) \wedge \alpha_{n-1}$$

Además, definimos $\pi_n\alpha_n$ estableciendo como sigue:

$$\pi_n\alpha_n = \exists x_0 \exists x_1 \cdots \exists x_{ns}\alpha_n$$

Como fácilmente se comprueba, en α_n aparecen precisamente las variables desde x_0 hasta x_{ns}, que están también ligadas por el prefijo π_n. Además, es evidente que las variables del r-tuplo $\mathfrak{x}_{n+1}$ ya aparecen en π_n (y por tanto son distintas de las que aparecen en $\mathfrak{y}_{n+1}$). Designemos mediante π'_n lo que queda de π_n cuando suprimimos las variables de r-tuplo $\mathfrak{x}_{n+1}$. Si nos olvidamos del orden de aparición de las variables, tenemos que $\exists\mathfrak{x}_{n+1}\pi'_n = \pi_n$.

Supuestas todas estas notaciones previas, tenemos como resultado directo el teorema siguiente:

Teorema 3.6. *Para cada n es deducible* $\pi\alpha \to \pi_n\alpha_n$.

Demostración. Probaremos el teorema mediante inducción.

- Para $n = 1$ tenemos que $\pi\alpha \to \pi_1\alpha_1$ es deducible, ya que, por el Lema 3.3 y la cuarta regla de inferencia, tenemos:

  $$\forall\mathfrak{x}\exists\mathfrak{y}\alpha(\mathfrak{x};\mathfrak{y}) \to \forall\mathfrak{x}_1\exists\mathfrak{y}_1\alpha(\mathfrak{x}_1;\mathfrak{y}_1)$$

  y además, por el Lema 3.1 tenemos:

  $$\forall\mathfrak{x}_1\exists\mathfrak{y}_1\alpha(\mathfrak{x}_1;\mathfrak{y}_1) \to \exists\mathfrak{x}_1\exists\mathfrak{y}_1\alpha(\mathfrak{x}_1;\mathfrak{y}_1)$$

- Para un n arbitrario tenemos que $\pi\alpha \wedge \pi_n\alpha_n \to \pi_{n+1}\alpha_{n+1}$ es deducible ya que, al igual que antes, aplicando el Lema 3.3 y la cuarta regla de inferencia, tenemos:

  $$\forall\mathfrak{x}\exists\mathfrak{y}\alpha(\mathfrak{x};\mathfrak{y}) \to \forall\mathfrak{x}_{n+1}\exists\mathfrak{y}_{n+1}\alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\mathfrak{y}_{n+1}) \tag{3.5}$$

  y además, por el Lema 3.2 tenemos:

  $$\pi_n\alpha_n \to \exists\mathfrak{x}_{n+1}\pi'_n\alpha_n \tag{3.6}$$

Ahora, aplicamos el Lema 3.1 y sustituimos F por $\exists\mathfrak{x}_{n+1}\alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\mathfrak{y}_{n+1})$ y G por $\pi'\alpha_n$, con lo que obtenemos:

$$\forall\mathfrak{x}_{n+1}\exists\mathfrak{y}_{n+1}\alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\mathfrak{y}_{n+1}) \wedge \exists\mathfrak{x}_{n+1}\pi'_n\alpha_n \rightarrow \exists\mathfrak{x}_{n+1}(\exists\mathfrak{y}_{n+1}\alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\mathfrak{y}_{n+1}) \wedge \pi'_n\alpha_n) \tag{3.7}$$

Fijándonos ahora en que el antecedente del condicional (3.7) es la conyunción de los consiguientes de (3.5) y (3.6), obtenemos que es deducible:

$$\pi\alpha \wedge \pi_n\alpha_n \rightarrow \exists\mathfrak{x}_{n+1}(\exists\mathfrak{y}_{n+1}\alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\mathfrak{y}_{n+1}) \wedge \pi'_n\alpha_n) \tag{3.8}$$

Por otro lado, de (3.5) y de los lemas 2, 4 y 6 obtenemos la deducibilidad de:

$$\exists\mathfrak{x}_{n+1}(\exists\mathfrak{y}_{n+1}\alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\mathfrak{y}_{n+1}) \wedge \pi'_n\alpha_n) \leftrightarrow \pi_{n+1}\alpha_{n+1} \tag{3.9}$$

Y gracias a (3.8) y (3.9) obtenemos la inducción, y por tanto la prueba del teorema.

Con esto tenemos probado el Teorema 3.6, que como consecuencia queda probado el Teorema 3.5, que junto con resultados anteriores hemos conseguido probar la Proposición 3.2. Como vimos anteriormente, esta proposición era el resultado que nos faltaba para acabar la demostración del Teorema 3.2, con lo que hemos probado la tesis de este apartado. Es decir, hemos dado una demostración de que toda fórmula válida de primer orden es deducible. □

Supongamos que en α aparecen las variables predicativas $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_k$ y las variables sentenciales $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_l$. Entonces α_n se construye con una sola ayuda de los conectores $\vee$ y $\neg$ a partir de componentes elementales del tipo:

$$\mathrm{F}_1\mathrm{x}_{p_1}\cdots\mathrm{x}_{q_1}, \mathrm{F}_1\mathrm{x}_{p_2}\cdots\mathrm{x}_{q_2}, \ldots; \mathrm{F}_k\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_l$$

A cada α_n le hacemos corresponder una fórmula conectiva β_n, que obtenemos reemplazando los componentes elementales de α_n por variables sentenciales, de tal modo que a diferentes componentes elementales (aunque sólo se diferencien respecto a las variables individuales) los reemplacemos por variables sentenciales distintas. Por otro lado, vamos a designar como «modelo de nivel n de $\pi\alpha$» a un sistema de relaciones $R_1^n \cdots R_k^n$, definido en el dominio de los números naturales z ($0 \leq z \leq ns$), así como de valores veritativos $w_1^n, w_2^n, \ldots, w_l^n$ para las variables sentenciales $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_l$, tales que la sustitución en α_n de los F_i por los R_i^n, de los x_i por los números i y de X_i por los correspondientes valores veritativos w_i^n da lugar a un enunciado verdadero. Evidentemente, existen modelos de nivel n si y sólo si β_n es satisfacible.

Cada β_n como fórmula conectiva, es o satisfacible o refutable (por el Lema 3.7). Por tanto, sólo pueden darse dos casos:

1. Al menos un β_n es refutable. Entonces (por las reglas de inferencia 2 y 3 y el Lema 3.1), también es refutable la correspondiente $\pi_n\alpha_n$ y, a causa de la demostrabilidad de $\pi\alpha \rightarrow \pi_n\alpha_n$, también $\pi\alpha$ lo es.

2. Ningún β_n es refutable, es decir, todos los β_n son satisfacibles Entonces hay modelos de cada nivel. Pero puesto que sólo hay un número finito de modelos para cada nivel (a causa de la fínitud de los correspondientes dominios de individuos) y puesto que además cada modelo de nivel $n+1$ contiene como parte[12] otro modelo de nivel n (lo

[12]Que un sistema $\{F_1, F_2, \ldots, F_k; w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ es parte de otro $\{G_1, G_2, \ldots, G_k; v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ significa que:

que se desprende inmediatamente de la manera como se construyen los α_n mediante repetidas conyunciones), por conocidos razonamientos se sigue que en este caso hay una sucesión de modelos $S_1, S_2, \dots$ (S_k de nivel k), cada uno de los cuales contiene al anterior como parte. Ahora definimos en el dominio de los números naturales un sistema $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k; v_1 v_2 \cdots v_l\}$ mediante las siguientes estipulaciones:

a) $S_p a_1 \cdots a_i$ $(1 \leq p \leq k)$ debe valer si y sólo si para al menos un S_m de la sucesión anteriormente citada (y entonces también para todos los siguientes) vale $R_p^m a_1 \cdots a_i$.

b) $v_i = w_i^m$ $(1 \leq i \leq l)$ para al menos un S_m (y entonces también para los siguientes).

Entonces está claro, sin más, que el sistema $\mathcal{S}$ hace verdadera la fórmula $\pi\alpha$. Así pues, en este caso $\pi\alpha$ es satisfacible, con lo que ha terminado la prueba de la suficiencia del sistema de axiomas arriba indicado.

3.2.1. Generalización con identidad

Podemos señalar que la ahora ya probada equivalencia entre «válido» y «deducible» implica una reducción de lo supernumerable a lo numerable respecto al problema de la decisión, pues «válido» se refiere al conjunto supernumerable de las relaciones, mientras que «deducible» sólo supone el conjunto numerable de las deducciones.

El Teorema 3.1 y el Teorema 3.2 pueden ser generalizados en diversas direcciones. Por lo pronto es fácil considerar también el concepto de identidad (entre individuos), añadiendo a los axiomas 1-6 arriba indicados los dos siguientes:

7 $\mathrm{x} = \mathrm{x}$

8 $\mathrm{x} = \mathrm{y} \rightarrow (\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Fy})$

También para este dominio ampliado de fórmulas vale de modo análogo como antes el siguiente teorema:

Teorema 3.7. *Cada fórmula válida (más precisamente, válida en cada dominio de individuos) de la lógica de primer orden con identidad es deducible.*

Y equivalente a éste, el siguiente

Teorema 3.8. *Cada fórmula de la lógica de primer orden con identidad es o refutable o satisfacible (y precisamente sobre un dominio de imdividuos finito o infinito numerable).*

Demostración. Para probarlo supongamos que α sea una fórmula cualquiera de la lógica de primer orden con identidad. Construimos una fórmula β como la conjunción de α, de $\forall \mathrm{x}, \mathrm{x} = \mathrm{x}$ y de todas las fórmulas que se obtienen del axioma 8 sustituyendo la variable predicativa F por las variables predicativas que aparecen en α, es decir, más precisamente

$$\forall \mathrm{x} \forall \mathrm{y}(\mathrm{x} = \mathrm{y} \rightarrow (\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Fy}))$$

a) El dominio de individuos de los F_i es parte del dominio de individuos de los G_i.

b) Los F_i coinciden con los G_i en el dominio más reducido.

c) para i, $v_i = w_i$.

para todas als variables predicativas monádicas de α,

$$\forall x\forall y\forall z(x = y \to (Fxz \to Fyz)) \land \forall x\forall y\forall z(x = y \to (Fzx \to Fzy))$$

para todas lasvariables predicativas diádicas α (incluida «=» misma); y las fórmulas correspondientes para las variables predicativas triádicas y otras poliádicas. Sea β' la fórmula que se obtiene a partir de β, sustituyendo en ésta el signo de identidad $=$ por una variable predicativa G que no aparezca en β. En la fórmula β' ya no aparece el signo de identidad y es por tanto refutable o satisfacible, según probamos anteriormente. Si β' es refutable, también lo es β, que se obtiene de β' por sustitución de G por $=$. Pero β es la conyunción de α y el resto de la fórmula, que evidentemente es deducible a partir de los axiomas 7 y 8. Por tanto, en este caso también α es refutable. Supongamos ahora que β' sea satisfacible por un cierto sistema $\mathcal{S}$ de relaciones [13] sobre un dominio numerable de individuos S. De la manera de construirse β' se desprende que H (es decir, la relación del sistema $\mathcal{S}$ que corresponde a G) es una relación reflexiva, simétrica y transitiva, y que por tanto genera una partición de los elementos de S, tal que los elementos de la misma clase pueden ser sustituidos unos por otros sin que cambie nada respecto al darse o no darse de una relación del sistema $\mathcal{S}$. Por consiguiente, si identificamos entre sí todos los elementos que pertenecen a la misma clase (por ejemplo, considerando las clases mismas como elementos de un nuevo dominio de individuos), H se convierte en la relación de identidad, con lo que tenemos una satisfacción de β y por tanto también de α. De hecho, pues, α es o satisfacible[14] o refutable. □

Otra generalización del Teorema 3.1 se obtiene considerando conjuntos infinitos numerables de fórmulas lógicas. También para ellos valen los análogos del Teorema 3.1 y del Teorema 3.2, es decir:

Teorema 3.9. *Todo conjunto infinito numerable de fórmulas de la lógica de primer orden es o satisfacible (es decir, todas las fórmulas del conjunto son simultáneamente satisfacibles) o contiene un subconjunto finito, cuya conyunción es refutable.*

Este resultado se sigue inmediatamente de:

Teorema 3.10. *Para que un conjunto infinito numerable de fórmulas sea satisfacible es necesario y suficiente que cada subconjunto finito suyo sea satisfacible.*

Demostración. Respecto al Teorema 3.10 empezaremos por constatar que en su prueba podemos limitarnos a conjuntos de fórmulas normales[15] de primer grado, pues aplicando repetidamente el procedimiento empleado en la prueba de los Teorema 3.3 y Teorema 3.4 a cada fórmula concreta podemos indicar para cada conjunto Σ de fórmulas un conjunto Σ' de fórmulas normales de primer grado, tal que la satisfacibilidad de un subconjunto cualquiera de Σ es equivalente con la del correspondiente subconjunto de Σ'.

Sea pues

$$\forall \mathfrak{x}_1 \exists \mathfrak{y}_1 \alpha_1(\mathfrak{x}_1; \mathfrak{y}_1),\ \forall \mathfrak{x}_2 \exists \mathfrak{y}_2 \alpha_2(\mathfrak{x}_2; \mathfrak{y}_2), \cdots \forall \mathfrak{x}_n \exists \mathfrak{y}_n \alpha_n(\mathfrak{x}_n; \mathfrak{y}_n), \cdots$$

un conjunto numerable Σ de fórmulas normales de primer grado, $\mathfrak{x}_i$ sea un r_i-tuplo $\mathfrak{y}_i$ un s_i-tuplo de variables $\mathfrak{x}_1^i, \mathfrak{x}_2^i, \ldots, \mathfrak{x}_n^i, \ldots$ sea una sucesion de los r_i-tuplos, de elementos de la

[13]Si en α aparecen las variables sentenciales, $\mathcal{S}$ debe contener, además de relaciones, también valores veritativos para esas variables sentenciales.

[14]Y en un dominio numerable (pues consta de clases disjuntas de individuos de un dominio denumerable S).

[15]Es decir, K-fórmulas, en la terminología anterior.

sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, ordenados por suma creciente de índices, además sea $\mathfrak{y}_k^i$ un s_i-tuplo de variables de la sucesión antes citada, tal que si en la sucesión

$$\mathfrak{y}_1^1, \mathfrak{y}_2^1, \mathfrak{y}_1^2, \mathfrak{y}_3^1, \mathfrak{y}_2^2, \mathfrak{y}_1^3, \mathfrak{y}_4^1, \cdots, \text{etc.}$$

reemplazamos cada uno de los $\mathfrak{y}_k^i$ por el correspondiente s_i-tuplo de variables, obtenemos la sucesión $x_i, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Además definimos, de modo análogo a como ya antes hicimos, una sucesión de fórmulas β_n mediante estipulaciones:

$$\beta_1 = \alpha_1(\mathfrak{x}_1^1; \mathfrak{y}_1^1)$$
$$\beta_n = \beta_n \wedge \alpha_1(\mathfrak{x}_n^1; \mathfrak{y}_n^1) \wedge \alpha_2(\mathfrak{x}_{n-1}^2; \mathfrak{y}_{n-1}^2) \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1}(\mathfrak{x}_2^{n-1}; \mathfrak{y}_2^{n-1}) \wedge \alpha_n(\mathfrak{x}_1^n; \mathfrak{y}_1^n)$$

Fácilmente se ve que $\pi_n \beta_n$ (es decir, la fórmula que se obtiene a partir de β_n ligando todas sus variables libres mediante cuantificadores $\exists$) es una consecuencia de las primeras n fórmulas del anterior conjunto Σ. Por tanto, si cada conjunto Σ es satisfacible, también lo es cada β_n. Pero si cada β_n es satisfacible, también lo es el conjunto Σ entero (lo cual puede obtenerse aplicando el razonamiento empleado en la prueba del Teorema 3.6). Con esto queda probado el Teorema 3.10. □

Los Teorema 3.9 y Teorema 3.10 pueden ampliarse sin dificultad a sistemas formales que contengan el signo $=$ por el procedimiento empleado en la prueba del Teorema 3.8.

Todavía se puede dar otra versión del Teorema 3.9, si nos limitamos a conjuntos de fórmulas sin variables sentenciales y si consideramos que estos conjuntos son sistemas axiomáticos, cuyos conceptos primitivos son las variables predicativas que allí aparecen. Entonces el Teorema 3.9 dice, evidentemente, que cualquier sistema axiomático finito o numerable, en cuyos axiomas «todo» y «hay» nunca se refieren a clases o relaciones, sino sólo a individuos[16], o es contradictorio (es decir, se puede obtener en él una contradicción en un número finito de pasos formales) o posee un modelo.

3.2.2. La independencia de los axiomas

Tratemos, finalmente, de la cuestión de la independencia de los axiomas $1-8$. Ninguno de los axiomas $1-4$ se sigue de los otros tres, como ya ha mostrado P. Bernays[17]. Su independencia no resulta alterada por el añadido de los axiomas $5-8$, como puede mostrarse mediante las mismas interpretaciones usadas por Bernays, extendiéndolas también a fórmulas que contengan variables predicativas y el signo $=$ mediante la estipulación de que:

1. Se suprimen los prefijos y las variables individuales.
2. En el resto de la fórmula, las variables predicativas se tratan como variables sentenciales.
3. El signo $=$ sólo puede ser sustituido por uno de los varores veritativos «señalados».

Para mostrar la independencia del axioma 5 hacemos corresponder a cada fórmula otra fórmula, obtenida sustituyendo cada uno de sus componentes (caso de que los tenga) del

[16] El sistema axiomático de Hilbert para la geometría, exceptuando el axioma de continuidad, puede servir como ejemplo.

[17] Véase [FdCTF20]

tipo:

$$\forall xFx, \forall yFy, \cdots ; \forall xGx, \forall yGy, \cdots ; \cdots$$ [18]

Por $X \vee \neg X$. Con esto los axiomas 1-4 y 6-8 se convierten en fórmulas válidas y lo mismo ocurre con las fórmulas derivadas de esos axiomas mediante las reglas de inferencia 1-4, como puede comprobarse por inducción completa, mientras que el axioma 5 no posee esa propiedad. De exactamente el mismo modo se muestra la independencia del axioma 6, sólo que ahora $\forall xFx, \forall yFy, \cdots$, *etc*., han de ser reemplazadas por $X \vee \neg X$. Para probar la independencia del axioma 7 basta con señalar que los axiomas 1-6 y 8 (y por tanto todas las fórmulas derivadas de ellos) continúan siendo válidos al reemplazar la relación de identidad por la relación vacía, mientras que ello no ocurre con el axioma 7. Análogamente, las fórmulas derivadas de los axiomas 1-7 siguen siendo lógicamente válidas al reemplazar la relación de identidad por la relación universal, mientras que ello no ocurre con el axioma 8 (en un dominio de individuos con al menos dos individuos). De la misma manera también es fácil comprobar que ninguna de las reglas de inferencia 1-4 es superflua.

[18] Es decir, las variables predicativas F, G, ..., etc., precedidas de un cuantilicador universal, cuyo alcance se limita a la fórmula formada por la F, G, etcétera, en cuestión y su correspondiente variable individual.

4. Sobre sentencias formalmente indecidibles

> El logro de Gödel en la lógica moderna es singular y monumental - más que monumental, es una señal que permanecerá visible lejos en el espacio y en el tiempo.[1]
>
> *(John von Neumann)*

4.1. Definiciones y conceptos previos

Tendremos como objetivo principal probar la existencia de sentencias indecidibles para un sistema formal P. Dicho sistema P es esencialmente el sistema que se obtiene cuando a los axiomas de peano se les añade la lógica de *Principia Mathematica* (PM de aquí en adelante). [2]

Los signos primitivos del sistema P son los siguientes:

1. Constantes: « $\sim$ » (no), « $\vee$ » (o), « Π » (para todo), « 0 »(cero), « s » (el siguiente de), «()» (paréntesis).

2. Variables tipo 1 (para individuos[3], incluyendo el 0): «x_1», «y_1», «z_1», ...
   Variables tipo 2 (para clases de individuos): «x_2», «y_2», «z_2», ...
   Variables tipo 3 (para clases de clases de individuos): «x_3», «y_3», «z_3», ...
   ...
   etc., para cada número natural como tipo.[4]

Observación: No necesitamos disponer de variables para relaciones binarias o n-arias ($n > 2$) como signos primitivos, ya que podemos definir las relaciones como clase de pares ordenados y los pares ordenados a su vez como clases de clases. Por ejemplo, podemos considerar el par ordenado $< a, b >$ como $\{\{a\}, \{a.b\}\}$, donde $\{x, y\}$ denota la clase cuyos únicos elementos son x e y, y $\{x\}$ la clase cuyo único elemento es x.[5]

Llamaremos *signo de primer tipo* a una combinación de signos que tenga una de las siguientes formas:

$$a,\ sa,\ ssa,\ sssa,\ \ldots,\ \text{etc.},$$

Donde a es 0 ó es variable de tipo 1. En el primer caso llamamos a tal signo un numeral. Para $n > 1$ entendemos por *signo de tipo n* lo mismo que por *variable de tipo n*. Llamaremos *fórmulas elementales* a las combianciones de signos de la forma $a(b)$, donde b es un signo de tipo n, y a es un signo de tipo $n + 1$. Definimos la calse de las *fórmulas* como la mínima clase que abarca todas las fórmulas elementales y que, siempre que contenga α y β, contiene también

[2] El hecho de de los axiomas de Peano, así como todas las otras modificaciones del sistema PM introducidas en toda la demostración, sólo tienen como finalidad simplificar la prueba, y por ellos son prescindibles.

[3] Cuando tratamos de individuos hacemos referencia al conjunto de los números naturales.

[4] Suponemos que disponemos de una cantidad infinita numerable de signos para cada tipo de variables.

[5] Las relaciones no homogéneas también pueden definirse de esta manera; por ejemplo, una relación entre individuos y clases puede definirse como una clase de elementos de la forma $\{\{x_2\}, \{\{x_1\}, x_2\}\}$. Todos los teoremas deducibles en PM son también deducibles cuando se los reformula de esta manera.

$\sim(\alpha), (\alpha) \vee (\beta)$ y $\Pi x(\alpha)$ (donde x es una variable cualquiera) [6]. Llamamos a $(\alpha) \vee (\beta)$ la *disyunción* de α y β, a $\sim(\alpha)$ la *negación* de α y a $\Pi x(\alpha)$ una *generalización* de α. Una *sentencia* es una fórmula sin variables libres (donde la noción de variable libre se define del modo usual). A una fórmula con exactamente n variables libres (y ninguna otra variable libre) la llamaremos *signo relacional n-ario*; para $n = 1$ lo llamaremos también *signo de clase*.

Por $\urcorner^{b}_{v}\alpha$ (donde α designa una fórmula, v una variable y b un signo del mismo tipo que v) entendemos la fórmula que resulta de reemplazar en α cada aparición libre de v por b[7]. Decimos que una fórmula α es una *elevación de tipo* de otra fórmula β si α se obtiene a partir de β mediante una elevación por el mismo número de cada variable que aparece en β.

Las siguientes fórmulas (de I a V) se llaman *axiomas* (están escritas con ayuda de abreviaturas: $\wedge, \supset, \equiv, \Sigma, =$[8], definidas del modo usual y conforme a las conveciones habituales sobre la omisión de paréntesis)[9]:

I. 1. $\sim(sx_1 = 0)$
   2. $sx_1 = sy_1 \supset x_1 = y_1$
   3. $x_2(0) \wedge \Pi x_1 (x_2(x_1) \wedge x_2(sx_1)) \supset \Pi x_1 (x_2(x_1))$

II. Cada fórmula que resulta de sustituir X, Y por cualesquiera fórmulas en los siguientes esquemas:

1. $X \vee X \supset X$
2. $X \supset X \vee Y$
3. $X \vee Y \supset Y \vee X$
4. $(X \supset Y) \supset (Z \vee X \supset Z \vee Y)$

III. Cada fórmula que resulta de uno de estos dos esquemas:

1. $\Pi v\alpha \supset \urcorner^{c}_{v}\alpha$
2. $\Pi v(\beta \vee \alpha) \supset \beta \vee \Pi v(\alpha)$

Cuando sustituimos α, v, β, c del siguiente modo (y realizamos la operación indicada por «$\urcorner$» en 1.):

Sustituimos por α por una fórmula cualquiera, v por una variable cualquiera, β por una fórmula en la que no aparezca libre v y c por un signo del mismo tipo que v, siempre que c no contenga alguna variable que pase a estar ligada en un lugar de α donde v estaba libre.[10]

---

[6]Por tanto, $\Pi x(\alpha)$ es también una fórmula cuando x no aparece o no está libre en α. Naturalmente, en ester caso $\Pi x(\alpha)$ significaría lo mismo que α.

[7]Si v no aparece libre en α, entonces $\urcorner^{b}_{v}\alpha = \alpha$. Nótese que $\urcorner$ es un signo matemático.

[8]Como en *PM*, consideramos que $x_1 = y_1$ está definido por $\Pi x_2(x_2(x_1) \supset x_2(y_1))$; de igual modo para los tipos superiores.

[9]Para obtener los axiomas a partir de los esquemas indicados debemos (después de realizar las sustituciones permitidas en II, III y IV), además,

(1) eliminar las abreviaturas

(2) añadir los paréntesis omitidos.

Nótese que las expresiones así obtenidas deben ser "fórmulas.en el sentido arriba definido.

[10]Por tanto, c es o una variable o el 0 o un signo de la forma $s \ldots su$, donde u es 0 o una variable de tipo 1. Respecto de la noción de estar (una variable) libre o ligada en un lugar de α, véase [vN27].

IV. Cada fórmula que resulta del esquema

$$\Sigma u \Pi v(u(v) \equiv \alpha)$$

cuando usstituimos v por una varaible cualquiera de tipo n, sustituimos u por una variable cualquiera de tipo $n+1$ y sustituimos α por una fórmula, en la que u no esté libre. Este axioma desempeña el papel de axioma de reducibilidad (el axioma de comprensión de la teoría de conjuntos).

V. Cada fórmula que resulta de

$$\Pi \mathrm{x}_1(\mathrm{x}_2(\mathrm{x}_1) \equiv \mathrm{y}_2(\mathrm{x}_1)) \supset \mathrm{x}_2 = \mathrm{y}_2$$

por elevación de tipo (así como esta fórmula misma). Este axioma dice que una clase está completamente determinada por sus elementos.

Una fórmula γ se llama una *inferencia inmediata* de α y β, si α es la fórmula $\sim \beta \vee \gamma$ (y γ se llama una *inferencia inmediata* de α, si γ es la fórmula $\Pi v \alpha$, donde v designa una variable cualquiera). La clase de las *fórmulas deducibles* se define como la mínima clase de fórmulas que contiene los axiomas y está clausurada respecto a la relación de «inferencia inmediata»[11].

Ahora asignamos unívocamente números naturas a los signos primitivos del sistema P del siguiente modo:

«0» ... 1
«s» ... 3
« $\sim$ » ... 5
« $\vee$ » ... 7
«Π» ... 9
«(» ... 11
«)» ... 13

A las variables de tipo n asignamos los números de la forma ρ^n (donde ρ es un número primo > 13). Mediante esta asignación a cada fila finita de signos primitivos (y en especial a cada fórmula) corresponde biunívocamente una secuencia finita de números naturales. Ahora asignamos (de nuevo biunívocamente) números naturales a las secuencias finitas de números naturales, haciendo corresponder a la secuencia $n_1, n_2, \dots, n_k$ el número $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdots \rho_k^{n_k}$ donde ρ_k denota el k-avo número primo (en orden de magnitud creciente). Así asignamos biunívocamente un número natural no sólo a cada signo primitivo, sino también a cada secuencia finita de signos primitivos. Mediante $nu(\mathrm{a})$ denotamos el número natural asignado al signo primitivo (o a la secuencia de signos primitivos) a. Supongamos que esté dada cierta clase o relación n-aria R entre signos primitivos. Le asignamos la clase o relación n-aria R' entre números naturales, en la que están los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ si y sólo si hay signos primitivos o secuencias de signos primitivos $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n$, tales que $x_i = nu(\mathrm{a}_i)$ (para $i = 1, 2, \dots, n$) y $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n$ están en la relación R. Las clases y relaciones de números naturales, que corresponden de este modo a los conceptos metamatemáticos hasta ahora definidos, como por ejemplo «variable», «fórmula», «sentencia», «axioma», «fórmula deducible», etc., serán designadas por las mismas palabras escritas con letras mayúsculas

[11] La regla de sustitución resulta aquí supreflua, pues en los axiomas mismo ya tenemos realizadas todas las sustituciones posibles (véase [vN27])

pequeñas. Por ejemplo, el enunciado de que en el sistema P hay problemas indecidibles se convierte en la siguiente afirmación: Hay SENTENCIAS a, tales que ni a ni la NEGACIÓN de a son FÓRMULAS DEDUCIBLES.

4.2. La indecidibilidad

Ahora vamos a insertar aquí una disgresión que por el momento no tiene nada que ver con el sistema formal P. Empecemos por dar la siguiente definición: Decimos que una función numérica[12] $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está *recursivamente definida a partir* de las funciones numéricas $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ y $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, si para cada $x_2, \ldots, x_n, k$ vale lo siguiente:[13]

$$\begin{aligned} f(0, x_2, \ldots, x_n) &= h(x_2, \ldots, x_n) \\ f(k+1, x_2, \ldots, x_n) &= g(k, f(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Una función numérica f se llama *recursiva primitiva* si hay una secuencia finita de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, que acaba con f y que tiene la propiedad de que cada función f_k de la secuencia está recursivamente definida a partir de dos de las funciones precedentes o resulta de alguna de las funciones precedentes por sustitución[14], o, finalmente, es una constante o la función del siguiente, $x+1$. La longitud de la mínima secuencia de f_i corresponde a una función recursiva primitiva f se llama su *grado*. Una relación n-ara R entre números naturales se llama recursiva primitiva[15] si hay una función n-aria recursiva primitiva f tal que para cada n números naturales $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$Rx_1, x_2, \ldots, x_n \leftrightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$ [16]

Los siguientes teoremas valen:

Teorema 4.1. *Cada función (o relación) obtenida a partir de funciones (o relaciones) recursivas primitivas por sustitución de las variables por funciones recursivas primitivas es recursiva primitiva; igualmente lo es cada función obtenida a partir de funciones recursivas primitivas por definición recursiva según el esquema de* (4.1).

Teorema 4.2. *Si R y S son relaciones recursivas primitivas, también lo son $\neg R$ y $R \vee S$ (por tanto, también $R \wedge S$).*

Teorema 4.3. *Si las funciones $f(\mathfrak{x})$, $h(\mathfrak{y})$ son recursivas primitivas, entonces también lo es la relación $f(\mathfrak{x}) = h(\mathfrak{y})$*[17].

[12] Es decir, su dominio definicional es la clase de los números naturales (o de los n-tuplos de números naturales) y sus valores son números naturales.

[13] En lo sucesivo las letras latinas minúsculas (a veces con subíndices) son siempre variables para números naturales (a no ser que se indique explícitamente lo contrario).

[14] Más precisamente: por introducción de algunas de las funciones precedentes en los lugares argumentales de una de las funciones precedentes, por ejemplo, $f_k(x_1, x_2) = f_p(f_q(x_1, x_2), f_r(x_2))$, con $p, q, r < k$. No es necesario que todas las variables del lado izquierdo aparezcan también en el derecho.

[15] Incluimos las clases entre las relaciones (como relaciones monarias). Las relaciones recursivas primitivas tienen desde luego la propiedad de que para cada n-tuplo dado de números naturales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *se puede decidir si* R $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o no.

[16] Para todas las consideraciones intuitivas (y especialmente para las metamatemáticas) usamos el simbolismo de Hilbert definido en [HAdZ62].

[17] Usamos las letras alemanas $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ como abreviaturas para cualesquiera n-tuplos de variables, como por ejemplo $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Teorema 4.4. *Si la función $f(\mathfrak{x})$ y la relación $Rx, \mathfrak{y}$ son recursivas primitivas, también lo son las relaciones S y T definidas por*

$$S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leftrightarrow \exists x(x \leq f(\mathfrak{x}) \land Rx, \mathfrak{y})$$
$$T(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leftrightarrow \forall x(x \leq h(\mathfrak{x}) \land Rx, \mathfrak{y})$$

así como la función

$$q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mu x(x \leq f(\mathfrak{x}) \land Rx, \mathfrak{y}),$$

donde $\mu x \varphi(x)$ significa el mínimo número x, para el que vale $\varphi(x)$, si hay algún tal, y 0, si no lo hay.

El Teorema 4.1 se sigue inmediatamente de la definición de «recursivo primitivo». Tanto el Teorema 4.2 como el Teorema 4.3 se basan en que las funciones numéricas

$$ne(x), di(x, y), id(y, x)$$

correspondientes a las nociones lógicas $\neg, \lor, =$, a saber

$$ne(x) = 1; \quad ne(x) = 0 \text{ para } x \neq 0$$
$$di(0, x) = di(x, 0) = 0; \quad di(x, y) = 1 \text{ si } x \neq 0, y \neq 0$$
$$id(x, y) = 0 \text{ si } x = y; \quad id(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y$$

son recursivas primitivas, como fácilmente se comprueba. He aquí la prueba resumida del Teorema 4.4:

Demostración. Por hipótesis hay una función recursiva primitiva $r(x, \mathfrak{y})$, tal que

$$Rx, \mathfrak{y} \leftrightarrow r(x, \mathfrak{y}) = 0.$$

Definamos ahroa mediante el esquema de recursión (4.1) una función $j(x, \mathfrak{y})$ del siguiente modo:

$$j(0, \mathfrak{y}) = 0$$
$$j(n+1, \mathfrak{y}) = (n+1) \cdot a + j(n, \mathfrak{y}) \cdot ne(a)$$ [18]

donde $a = ne(ne(r(0, \mathfrak{y}))) \cdot ne(r(n+1, \mathfrak{y})) \cdot ne(j(n, \mathfrak{y}))$.

Por tanto, $j(n+1, \mathfrak{y})$ es igual a $n+1$ (si $a = 1$) o es igual a $j(n, \mathfrak{y})$ (si $a = 0$)[19]. Evidentemente, el primer caso ocurre si y sólo si todos los factores de a son 1, es decir, si ocurre que

$$\neg R\, 0, \mathfrak{y} \land R\, n+1, \mathfrak{y} \land j(n, \mathfrak{y}) = 0$$

De aquí se sigue que la función $j(n, \mathfrak{y})$, considerada como función de n, da siempre 0 hasta (pero no incluyendo) el mínimo valor de n para el que ocurre $R\, n, \mathfrak{y}$, y a partir de ahí siempre da ese valor. (Por consiguiente, si ya ocurre que $R\, 0, \mathfrak{y}$, $j(n, \mathfrak{y})$ es constante e igual a 0). Por tanto, ocurre que

$$q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = j(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{y})$$
$$S\, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \leftrightarrow R\, q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \mathfrak{y}$$

[19] a no puede tomar otros valores que 0 y 1, como se sigue en la definición de ne.

La relación T puede ser reducida, por negación, a un caso análogo al de S. Con esto queda probado el Teorema 4.4. $\square$

Las funciones $x+y$, $x \cdot y$, x^v, así como las relaciones $x < y$ y $x = y$ son recursivas primitivas, como fácilmente se comprueba. Partiendo de estos conceptos, vamos a definir u n a secuencia de funciones (o relaciones) 1-45, cada una de las cuales se define a partir de las precedentes mediante los procedimientos indicados en los cuatro teoremas anteriores. En la mayor parte de estas definiciones condensamos en un solo paso varios de los pasos permitidos por estos cuatro teoremas. Por tanto, cada una de las funciones (o relaciones) 1-45, entre las que se encuentran, por ejemplo, los conceptos «FÓRMULA», «AXIOMA» e «INFERENCIA INMEDIATA», es recursiva primitiva.

1. $x/y \leftrightarrow \exists z(z \leq x \wedge x = y \cdot z)$[20]
   x es divisible por y.[21]

2. $\mathrm{Prim}\, x \leftrightarrow \neg\exists z(z \leq x \wedge z \neq 1 \wedge z \neq x \wedge x/z) \wedge x > 1$
   x es un número primo.

3. $0\, Pr\, x = 0$
   $(n+1)\, Pr\, x = \mu y(y \leq x \wedge \mathrm{Prim}\, y \wedge x/y \wedge y > n\, Pr\, x)$
   $n\, Pr\, x$ es el n-avo número primo (por orden de magnitud creciente) contenido en x[22].

4. $0! = 1$
   $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

5. $Pr(0) = 0$
   $Pr(n+1) = \mu y(y \leq (Pr(n))! + 1 \wedge \mathrm{Prim}\, y \wedge y > Pr(n))$
   $Pr(n)$ es el n-avo número primo (por orden de magnitud creciente)

6. $n\, Gl\, x = \mu y(y \leq x \wedge x/(n\, Pr\, x)^y \wedge \neg x/(n\, Pr\, x)^{y+1})$
   $n\, Gl\, x$ es el miembro n-avo de la secuencia numérica correspondiente al número x (para $n > 0$ y n no mayor que la longitud de esa secuencia).

7. $l(x) = \mu y(y \leq x \wedge y\, Pr\, x > 0 \wedge (y+1)\, Pr\, x = 0)$
   $l(x)$ es la longitud de la secuencia numérica correspondiente a x.

8. $$\begin{aligned} x * y = \mu z(z \leq (Pr(l(x)+l(y)))^{x+y} \wedge \forall n(n \leq l(x) \to n\, Gl\, z = n\, Gl\, x) \wedge \\ \wedge \forall n(0 < n \leq l(y) \to (n + l(x))\, Gl\, z = n\, Gl\, y)) \end{aligned}$$
   $x * y$ corresponde a la operación de concatenación de dos secuencias finitas de números.

9. $R(x) = 2^x$
   $R(x)$ corresponde a la secuencia numérica que sólo consta del número x (para $x > 0$).

10. $E(x) = R(11) * x * R(13)$
    $E(x)$ corresponde a la operación de poner entre paréntesis (11 y 13 son los números asignados a los signos primitivos «(» y «)»).

[20] Después del definiendum, el signo $=$ se usa en el sentido de «igualdad por definición»; el signo $\leftrightarrow$, en el de «equivalencia por definición» (por lo demás, el simbolismo es el de Hilbert).

[21] Cada vez que en las definiciones siguientes aparece uno de los signos $\forall x, \exists x, \mu x$, éste está seguido de una acotación de x. Esta acotación sirve meramente para asegurar que la noción definida es recursiva primitiva (véase Teorema 4.4). La extensión de la noción definida, por el contrario, no cambiaría en la mayor parte de los casos, aunque dejásemos de lado dicha acotación.

[22] Para $0 < n \leq z$, donde z es el número de diferentes factores primos de x. Obsérvese que $n\, Pr\, x = 0$ para $n = z+1$.

11. $ntextVarx \leftrightarrow \exists z(13 < z \leq x \wedge textPrim(z) \wedge x = z^n) \wedge n \neq 0$
x es una VARIABLE DE TIPO n.

12. $textVarx \leftrightarrow \exists n(n \leq x \wedge ntextVarx)$
x es una VARIABLE.

13. $textNeg(x) = R(5) * E(x)$
$textNeg(x)$ es la NEGACIÓN de x.

14. x Dis $y = E(x) * R(7) * E(y)$
x Dis y es la DISYUNCIÓN de x e y.

15. x Gen $y = R(9) * R(x) * E(y)$
x Gen y es la GENERALIZACIÓN de y respecto a la variable x (suponiendo que x sea una variable).

16. $0\,N\,x = x$
$(n+1)\,N\,x = R(3) * n\,N\,x$
$n\,N\,x$ corresponde a la operación de poner n veces el signo s delante de x.

17. $Z(n) = n\,N\,(R(1))$
$Z(n)$ es el NUMERAL que designa el número n.

18. $\mathrm{Typ}'_1\,x \leftrightarrow \exists m\,n(m, n \leq x \wedge (m = 1 \vee 1 \text{ Var } m) \wedge x = n\,N\,(R(m)))$[23]
x es un SIGNO DE TIPO 1.

19. $\mathrm{Typ}_n\,x \leftrightarrow (n = 1 \wedge \mathrm{Typ}'_1\,(x)) \wedge (n > 1 \wedge \exists v(v \leq x \wedge n \text{ Var } v \wedge x = R(v)))$
x es un SIGNO DE TIPO n.

20. $Elf\,x \leftrightarrow \exists yzn(y, z, n \leq x \wedge \mathrm{Typ}_n(y) \wedge \mathrm{Typ}_{n+1}(z) \wedge x = x * E(y))$
x es una FÓRMULA ELEMENTAL.

21. $Op\,x\,y\,z \leftrightarrow x = \mathrm{Neg}(y) \wedge x = y \text{ Dis } z \vee \exists v(v \leq x \wedge \text{Var } v \wedge x = v \text{ Gen } y)$

22. $$FR\,x \leftrightarrow \forall n(0 < n \leq l(x) \rightarrow Elf(n\,Gl\,x) \vee \exists pq(0 < p, q < n \wedge \\ \wedge Op(n\,Gl\,x, p\,Gl\,x, q\,Gl\,x))) \wedge l(x) > 0$$
x es una SECUENCIA DE FÓRMULAS, cada una de las cuales es o una FÓRMULA ELEMENTAL o se obtiene de las precedentes mediante las operaciones de NEGACIÓN, DISYUNCIÓN o GENERALIZACIÓN.

23. Form $x \leftrightarrow \exists n(n \leq (Pr(l(x)^2))^{x \cdot (l(x)^2)} \wedge FR\,n \wedge x = (l(x))\,Gl\,n)$[24]
x es una FÓRMULA (es decir, el último miembro de una SECUENCIA DE FÓRMULAS n).

24. $v\,\mathrm{Geb}\,n, x \leftrightarrow \text{Var } v \wedge \text{Form } x \wedge \exists a\,b\,c\,(a, b, c \leq x \wedge x = a * (v \text{ Gen } b) * c \wedge \text{Form } x \wedge l(a) + 1 \leq n \leq l(a) + l(v \text{ Gen } b))$
La VARIABLE v está LIGADA en x en el n-avo lugar.

[23] $m, n \leq x$ es una abreviatura de $m \leq x \wedge n \leq x$ (y lo mismo para más de dos variables)

[24] La acotación $n \leq (Pr(l(x)^2))^{x \cdot (l(x)^2)}$ puede comprobarse así: La longitud de la más corta secuencia de fórmulas correspondientes a x puede ser a lo sumo igual al número de subfórmulas de x. Pero hay a lo sumo $l(x)$ subfórmulas de longitud 1, a lo sumo $l(x) - 1$ de longitud 2, ..., por tanto en conjunto a lo sumo $\frac{l(x) \cdot (l(x)+1)}{2} \leq n \leq (l(x))^2$. Por tanto podemos suponer que todos los factores primos de n son menores que $Pr((l(x))^2)$, que su número es $\leq (l(x))^2$ y que sus exponentes (que son subfórmulas de x) son $\leq x$.

25. $v\, Fr\, n, x \leftrightarrow \text{Var}\ v \wedge \text{Form}\ x \wedge v = n\, Gl\, x \wedge n \leq l(x) \wedge \neg v\ \text{Geb}\ n, x$
La VARIABLE v está LIBRE en x en el n-avo lugar.

26. $v\, Fr\, x \leftrightarrow \exists n(n \leq l(x) \wedge v\, Fr\, n, x)$
v aparece como VARIABLE LIBRE EN x.

27. $Su\, x\binom{n}{y} = \mu z(z \leq (Pr(l(x)+l(y)))^{x+y} \wedge \exists u\, v(u, v \leq x \wedge x = u * R(n\, Gl\, x) * v \wedge$
$\wedge\, z = u * y * v \wedge n = l(u)+1))$
$Su\, x\binom{n}{y}$ se obtiene a partir de x cuando sustituimos el n-avo miembro de x por y (suponiendo que $0 < n \leq (x)$).

28. $0\, St\, v, x = \mu n(n \leq l(x) \wedge v\, Fr\, n, x \wedge \neg \exists p(n < p \leq l(x) \wedge v\, Fr\, p, x))$
$(k+1)\, St\, v, x = \mu n(n < k\, St\, v, x \wedge v\, Fr\, n, x \wedge \neg \exists p(n < p \leq k\, St\, v, x \wedge v\, Fr\, p, x))$
$k\, St\, v, x$ es el $k+1$-avo lugar de x (contado a partir del extremo derecho de la FÓRMULA x), en el que v aparece LIBRE en x (y es 0 si no hay tal lugar).

29. $A(v, x) = \mu n(n \leq l(x) \wedge n\, St\, v, x = 0)$
$A(v, x)$ es el número de lugares en que v aparece LIBRE en x.

30. $Sb_0(x^v_y) = x$
$Sb_{k+1}(x^v_y) = Su\ (Sb_k(x^v_y))\binom{k\ St\ v, x}{y}$

31. $Sb(x^v_y) = Sb_{A(v,x)}(x^v_y)$[25]
$Sb(x^v_y)$ es la noción anteriormente definida de $\urcorner^b_v \alpha$[26].

32. x Imp y = (Neg(x)) Dis y
x Con y = Neg ((Neg(x)) Dis (Neg(y)))
x Aeq y = (x Imp y) Cong(y Imp x)
v Ex y = Neg (v Gen(Neg(y))).

33. $n\, Th\, x = \mu y(y \leq x^{(x^n)} \wedge \forall k(k \leq l(x) \rightarrow (k\, Gl\, x > 13 \wedge k\, Gl\, y = k\, Gl\, x \cdot (1\, Pr(k\, Gl\, x))^n)))$
$n\, Th\, x$ es la n-ava ELEVACIÓN DE TIPO de x (suponiendo que x y $n\, Th\, x$ sean fórmulas).

Nota. A los axiomas I,1-3, corresponden tres números determinados, que designamos mediante z_1, z_2 y z_3. Procedemos a definir los siguientes:

34. $Z - Ax\, x \leftrightarrow x = z_1 \vee x = z_2 \vee x = z_3$

35. $A_1 - Ax\ \leftrightarrow \exists y(y \leq x \wedge \text{Form}\ y \wedge x = (y\ \text{Dis}\ y)\ \text{Imp}\ y)$
x es una FÓRMULA que se obtiene a partir del esquema axiomático II,1 por sustitución. De modo análogo se definen $A_2 - Ax$, $A_3 - Ax$ y $A_4 - Ax$, correspondientes a los axiomas II,2-4.

36. $A - Ax\, x \leftrightarrow A_1 - Ax\, x \vee A_2 - Ax\, x \vee A_3 - Ax\, x \vee A_4 - Ax\, x$
x es una FÓRMULA que se obtiene por sustitución a partir de un esquema axiomático conectivo.

37. $Q\, z, y, v \leftrightarrow \neg \exists n\, m\, w\, (n \leq l(y) \wedge m \leq l(z) \wedge w \leq z \wedge w = m\, Gl\, z \wedge w\ \text{Geb}\ n, y \wedge v\, Fr\, n, y)$
z no contiene VARIABLE alguna que esté LIGADA en y en un lugar, en el cual v esté LIBRE.

[25] Si v no es una VARIABLE o x no es una FÓRMULA, enotnces $Sb(x^v_y) = x$.

[26] En vez de $Sb(Sb(x^v_w)^w_z)$ escribimos $Sb\, x^{v\, w}_{y\, z}$, (y análogamente para más de dos VARIABLES).

38. $L_1 - Ax\,x \leftrightarrow \exists v\,y\,z\,n(v, y, z, n \leq x \wedge n \text{ Var } v \wedge \text{Typ}_n z \wedge \text{Form } y \wedge Q\,z, y, v \wedge$
$\wedge\, x = (v \text{ Gen } y) \text{ Imp } (Sb(y^v_z)))$
x es una FÓRMULA que se obtiene por sustitución a partir del esquema axiomático III,1.

39. $L_2 - Ax\,x \leftrightarrow \exists v\,q\,p\,(v, p, q \leq x \wedge n \text{ Var } v \wedge \text{Form } p \wedge \neg v\,Fr\,p \wedge \text{Form } q \wedge$
$\wedge\, x = (v \text{ Gen } (p \text{ Dis } q)) \text{ Imp } (p \text{ Dis } (v \text{ Gen } q)))$
x es una FÓRMULA que se obtiene por sustitución a partir del esquema axiomático III,2.

40. $R - Ax\,x \leftrightarrow \exists u\,v\,y\,n\,(u, v, y, n \leq x \wedge n \text{ Var } v \wedge (n+1) \text{ Var } u \wedge \neg u\,Fr\,y \wedge \text{Form } y \wedge x = u \text{ Ex}(v \text{ Gen } ((R(u) * E(R(v))) \text{ Aeq } y)))$
x es una FÓRMULA que se obtiene por sustitución a partir del esquema axiomático IV,1.

Nota. Al axioma V,1 le corresponde un número determinado z_4. Así, procedemos a definir:

41. $M - Ax\,x \leftrightarrow \exists n(n \leq x \wedge x = n\,Th\,z_4)$

42. $Ax\,x \leftrightarrow Z - Ax\,x \vee L_1 - Ax\,x \vee L_2 - Ax\,x \vee R - Ax\,x \vee M - Ax\,x$
x es un AXIOMA.

43. $Fl\,x\,y\,z \leftrightarrow y = z \text{ Imp } x \vee \exists v(v \leq x \wedge \text{Var } v \wedge x = v \text{ Gen } y)$
x es una INFERENCIA INMEDIATA de y y z.

44. $Bw\,x \leftrightarrow \forall n(0 < n \leq l(x) \rightarrow Ax(n\,Gl\,x) \wedge \exists pq(0 < p, q < n \wedge Fl\,(n\,Gl\,x, p\,Gl\,x, q\,Gl\,x))) \wedge l(x) > 0$
x es una DEDUCCIÓN (una secuencia finita de FÓRMULAS, cada una de las cuales es o un AXIOMA o una INFERENCIA INMEDIATA de dos de las FÓRMULAS precedentes).

45. $x\,B\,y \leftrightarrow Bw\,x \wedge (l(x))\,Gl\,x = y$
x es una DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA y.

46. Bew $x \leftrightarrow \exists y\,yBx$
x es una FÓRMULA DEDUCIBLE. (Bew x es la única de las nociones 1-46 de la que no podemos afirmar que sea recursiva primitiva).

El hecho puede ser formulado vagamente diciendo que cada relación recursiva primitiva es definible en el sistema P (interpretado en cuanto a su contenido del modo habitual) puede ser expresado con precisión y sin referencia a ninguna interpretación natural de las fórmulas de P, mediante el siguiente teorema:

Teorema 4.5. *Para cada relación recursiva primitiva n-aria R hay un SIGNO RELACIONAL r (con las VARIABLES LIBRES*[27] $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *tal que para cada n-tuplo de números naturales* $(x_1, \ldots, x_n)$ *vale:*

$$Rx_1, \ldots, x_n \rightarrow Bew\left(Sb\left(r^{u_1, \ldots, u_n}_{Z(x_1), \ldots, Z(x_n)}\right)\right) \tag{4.2}$$

[27] Las VARIABLES $u_1, \ldots, u_n$ pueden estar elegidas de cualquier manera.

$$\neg Rx_1, \ldots, x_n \rightarrow Bew\left(Neg\ Sb\left(r\begin{matrix}u_1, \ldots, u_n\\ Z(x_1), \ldots, Z(x_n)\end{matrix}\right)\right) \tag{4.3}$$

Demostración. Aquí nos limitaremos a esbozar la prueba de este teorema[28], pues no ofrece ninguna dificultad de principio, pero es bastante larga. Probamos el teorema para todas las relaciones $Rx_1, \ldots, x_n$ de la forma $x_1 = f(x_2, \ldots, x_n)$[29] (donde f es una función recursiva primitiva) por inducción completa sobre el grado de f. Para funciones de grado 1 (es decir, constantes y la función $x+1$) el teorema es trivial. Sea f de grado m. Entonces f se obtiene a partir de las funciones $f_1, \ldots, f_k$ de menor grado mediante las operaciones de sustitución o de definición recursiva. Puesto que el teorema ya está probado para $f_1, \ldots, f_k$, por hipótesis inductiva, hay SIGNOS RELACIONALES correspondientes $r_1, \ldots, r_k$, tales que (4.2) y (4.3) valen. Los procesos de definición (sustitución y definición recursiva) mediante los que se obtiene f a partir de $f_1, \ldots, f_k$ pueden ser ambos formalmente deducidos en el sistema P. Si se hace esto se obtiene a partir de $r_1, \ldots, r_k$ un nuevo SIGNO RELACIONAL r[30] para el cual puede probarse sin dificultad que valen (4.2) y (4.3), haciendo uso de la hipótesis inductiva. Un SIGNO RELACIONAL r, que corresponde[31] de este modo a una relación recursiva primitiva, se llama recursivo primitivo. □

Ahora llegamos a la meta de nuestras consideraciones. Sea K una clase cualquiera de FÓRMULAS. Designamos mediante $\mathrm{Flg}(K)$[32] el mínimo conjunto de FÓRMULAS que contiene todas las FORMULAS de K y todos los AXIOMAS y está clausurado respecto a la relación de «INFERENCIA INMEDIATA». Decimos que K es ω-consistente si no hay ningún SIGNO DE CLASE a, tal que

$$\forall n\left(Sb\left(a\begin{matrix}v\\ Z(n)\end{matrix}\right) \in \mathrm{Flg}(K)\right) \wedge (\mathrm{Neg}(v\ \mathrm{Gen}\ a)) \in \mathrm{Flg}(K)$$

donde v es la VARIABLE LIBRE del SIGNO DE CLASE a.

Cada sistema ω-consistente es también consistente, desde luego. Pero la inversa no vale, como más adelante veremos.

El resultado general sobre la existencia de sentencias indecidibles dice como sigue:

Teorema 4.6. *Para cada clase recursiva primitiva y ω-consistente K de FORMULAS hay un SIGNO DE CLASE r tal que ni v Gen a ni $Neg(v$ Gen $a)$ pertenecen a $Flg(K)$ (donde v es la VARIABLE LIBRE de r).*

Demostración. Sea K una clase recursiva primitiva y ω-consistente cualquiera de FORMULAS. Definimos:

$$\begin{aligned} Bw_K\, x \leftrightarrow \forall n(n \leq l(x) \rightarrow Ax(n\, Gl\, x) \vee (n\, Gl\, x) \in K \vee \exists p, q(0 < p, q < n \wedge \\ \wedge\, Fl\,(n\, Gl\, x, p\, Gl\, x, q\, Gl\, x))) \wedge l(x) > 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

[28]Desde luego, el Teorema 4.5 se basa en el hecho de que, dada una relación recursiva primitiva R, para cada n-tuplo de números naturales podemos decidir en base a los axiomas del sistema P si esos números están en la relación R o no.

[29]De ahí se sigue inmediatamente su validez para toda relación recursiva primitiva, pues cada tal relación es equivalente a $0 = f(x_1, \ldots, n_n)$, donde f es recursiva primitiva.

[30]Desde luego, cuando esta prueba se lleva a cabo con todo detalle, r no se define indirectamente con ayuda de su interpretación intuitiva, sino sólo por su estructura puramente formal.

[31]Que, por tanto, en la interpretación usual expresa que esa relación se da.

[32]conjunto de inferencias a partir de K.

(véase la análoga noción 44).

$$x\,B_K\,y \leftrightarrow Bw_K\,x \wedge (l(x))\,Gl\,x = y \tag{4.5}$$

$$\text{Bew}_K\,x \leftrightarrow \exists y\,yB_K x \tag{4.6}$$

(véanse las análogas nociones 45 y 46).

Evidentemente, ocurre que

$$\forall x(\text{Bew}_K\,x \leftrightarrow x \in \text{Flg}(K)) \tag{4.7}$$

$$\forall(\text{Bew}\,x \to \text{Bew}_K\,x) \tag{4.8}$$

Ahora definimos la relación

$$Q\,x\,y \leftrightarrow \neg B_K\left(Sb\left(y_{Z(y)}^{19}\right)\right) \tag{4.9}$$

Puesto que $xB_K y$ y $Sb\left(y_{Z(y)}^{19}\right)$ son recursivas primitivas (la primera por (4.4) y (4.5); la segunda por los apartados 17 y 31), también lo es $Q\,x\,y$. Por el Teorema 4.5 y por (4.8) hay por tanto un SIGNO RELACIONAL q (con las VARIABLES LIBRES de 17 y 19), tal que

$$\neg xB_K\left(Sb\left(y_{Z(y)}^{19}\right)\right) \to \text{Bew}_K\left(Sb\left(q_{Z(x)}^{17}\;{}_{Z(y)}^{19}\right)\right) \tag{4.10}$$

$$xB_K\left(Sb\left(y_{Z(y)}^{19}\right)\right) \to \text{Bew}_K\left(\text{Neg}\;Sb\left(q_{Z(x)}^{17}\;{}_{Z(y)}^{19}\right)\right) \tag{4.11}$$

Sea

$$p = 17\;\text{Gen}\;q \tag{4.12}$$

(p es un SIGNO DE CLASE con variable libre 19) y sea también

$$r = Sb\left(q_{Z(y)}^{19}\right) \tag{4.13}$$

(r es un SIGNO DE CLASE recursivo primitivo con la VARIABLE LIBRE 17)[33]. Entonces tenemos

$$Sb\left(p_{Z(y)}^{19}\right) = \left((17\;\text{Gen}\;q)_{Z(y)}^{19}\right) = 17\;\text{Gen}\;Sb\left(q_{Z(y)}^{19}\right) = 17\;\text{Gen}\;r \tag{4.14}$$

(por (4.12) y (4.13))[34]; además

[33]Pues r se obtiene a partir del SIGNO RELACIONAL recursivo primitivo q mediante SUSTITUCÓN de una VARIABLE por el NUMERAL de p.

[34]Las operaciones Gen, Sb son intercambiables, si se refieren a distintas VARIABLES.

$$Sb\begin{pmatrix} q^{17}_{Z(x)} & {}^{19}_{Z(y)} \end{pmatrix} = Sb\begin{pmatrix} q^{17}_{Z(x)} \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

(por (4.13)). Si ahora sustituimos y por p en (4.10) y (4.11), entonces teniendo en cuenta (4.14) y (4.15) obtenemos que

$$\neg x\, B_K\,(17 \text{ Gen } r) \rightarrow \text{Bew}_K\left(Sb\begin{pmatrix} r^{17}_{Z(x)} \end{pmatrix}\right) \tag{4.16}$$

$$x\, B_K\,(17 \text{ Gen } r) \rightarrow \text{Bew}_K\left(\text{Neg } Sb\begin{pmatrix} r^{17}_{Z(x)} \end{pmatrix}\right)$$

De aquí se sigue:

1. 17 Gen r no es K-DEDUCIBLE[35]. Pues si lo fuera, habría (según (4.6)) un n tal que $n\, B_K(17 \text{ Gen } r)$. Pero entonces, por Ecuación 4.2 ocurriría que $\text{Bew}_K\left(\text{Neg } Sb\begin{pmatrix} r^{17}_{Z(x)} \end{pmatrix}\right)$, mientras que, por otro lado, de la K-DEDUCIBILIDAD de $(17 \text{ Gen } r)$ se sigue también la de $Sb\begin{pmatrix} r^{17}_{Z(x)} \end{pmatrix}$. Por otro lado, K sería inconsistente (y en especial ω-consistente).

2. Neg $(17 \text{ Gen } r)$ no es K-DEDUCIBLE.

   Demostración. Como acabamos de probar, $(17 \text{ Gen } r)$ no es K-DEDUCIBLE, es decir, por (4.6) ocurre que $\forall n \neg(n\, B_K(17 \text{ Gen } r))$. De ahí se sigue por (4.16) que

   $$\forall n \ \text{Bew}_K Sb\begin{pmatrix} r^{17}_{Z(x)} \end{pmatrix}$$

   lo que junto con $\text{Bew}_K(\text{Neg } (17 \text{ Gen } r))$, es incompatible con la ω-consistencia de K. □

Por tanto, $(17 \text{ Gen } r)$ es indecidible en base a K, con lo que el Teorema 4.6 queda probado. □

Fácilmente se ve que la prueba que acabamos de presentar es constructiva[36], es decir, hemos probado de un modo intuicionistamente del todo aceptable lo siguiente: Sea dada una clase cualquiera de FORMULAS, definida de un modo recursivo primitivo. Entonces, si se nos presentara una decisión formal (en base a K) de la SENTENCIA 17 Gen r (que puede ser efectivamente escrita) nosotros podríamos ofrecer efectivamente:

1. Una DEDUCCIÓN de Neg $(17 \text{ Gen } r)$.

2. Para cada n dado, una DEDUCCIÓN de $Sb\begin{pmatrix} r^{17}_{Z(x)} \end{pmatrix}$.

[35] Con «x es K-DEDUCIBLE» queremos decir que $x \in \text{Flg}(K)$, lo que, por (4.7), significa los mismo que $\text{Bew}_K\, x$.

[36] Pues todas las afirmaciones existenciales que aparecen en la prueba se basan en el Teorema 4.5, que, como fácilmente se ve, es intuicionistamente aceptable.

Es decir, una decisión formal de 17 Gen r tendría como consecuencia la exhibición efectiva de una ω-inconsistencia.

Diremos que una relación (o clase) entre números naturales $Rx_1, \dots, x_n$ es *decidible* si existe un SIGNO RELACIONAL n-ario r, tal que (4.2) y (4.3) valen para él[37]. En especial, por tanto, del teorema V resulta que cada relación recursiva primitiva es decidible. Análogamente diremos que un SIGNO RELACIONAL es *decidible* si corresponde de este modo a una relación decidible. Ahora bien, para la existencia de sentencias indecidibles basta con que la clase K sea ω-consistente y decidible. Pues la decidibilidad se transmite de K a $xB_K y$ y a $Q\,x\,y$[38], y esto es todo lo que se utilizó en la prueba antes expuesta. La sentencia indecidible tiene en este caso la forma v Gen r, donde r es un SIGNO DE CLASE decidible. (Incluso basta con que K sea decidible en el sistema ampliado con K).

Si en vez de suponer que K es ω-consistente nos limitamos a suponer que es consistente, entonces ya no se sigue (por la prueba anterior) que exista una sentencia indecidible, pero sí se sigue que existe una propiedad r, para la que no se puede dar un contraejemplo, y para la que tampoco se puede probar que todos los números la tengan. Pues en la prueba de que 17 Gen r no es K-DEDUCIBLE habíamos utilizado sólo el hecho de que K era consistente y por (4.16) de $\neg(\mathrm{Bew}_K(17 \text{ Gen } r))$ se sigue que para cada número x se cumpla $Sb\begin{pmatrix} & 17 \\ r & \\ & Z(x)\end{pmatrix}$ y, por tanto, que Neg $Sb\begin{pmatrix} & 17 \\ r & \\ & Z(x)\end{pmatrix}$ no es K-DEDUCIBLE para ningún número.

Si añadimos Neg $(17 \text{ Gen } r)$ a K, obtenemos una CLASE DE FORMULAS K' que es consistente, pero no ω-consistente. K' es consistente, pues si no, 17 Gen r sería K-DEDUCIBLE. Pero K' no es ω-consistente, pues por $\neg(\mathrm{Bew}_K(17 \text{ Gen } r))$ y (4.16) ocurre que $\forall x \text{ Bew }_K Sb\begin{pmatrix} & 17 \\ r & \\ & Z(x)\end{pmatrix}$ y por tanto que $\forall x \text{ Bew }_{K'} Sb\begin{pmatrix} & 17 \\ r & \\ & Z(x)\end{pmatrix}$, mientras que por otro lado ocurre, claro está, que $\text{Bew }_{K'}(\text{Neg } (17 \text{ Gen } r))$[39].

Un caso especial del Teorema 4.6 se da cuando la clase K consta de un número finito de FORMULAS (y, si se quiere, de las que se obtiene a partir de ellas por ELEVACIÓN DE TIPO). Naturalmente, cada clase finita K es recursiva primitiva. Sea a el mayor número contenido en K. Entonces ocurre para K que

$$x \in K \leftrightarrow \exists n, m\,(m \leq x \wedge n \leq a \wedge n \in K \wedge x = m\,Th\,n)$$

Por tanto, K es recursiva primitiva. Esto nos permite inferir que incluso con ayuda del axioma de elección (para todos los tipos) o de la hipótesis generalizada del continuo no todas las sentencias son decidibles, suponiendo que estas hipótesis sean ω-consistentes.

En la prueba del Teorema 4.6 no se utilizaron otras propiedades del sistema P que las siguientes:

1. La clase de los axiomas y de las reglas de inferencia (es decir, la relación de «inferencia inmediata») son recursivamente definibles (tan pronto como reemplazamos de algún modo los signos primitivos por números naturales).

[37] Véase el Teorema 4.5.

[38] Véanse para la primera transmisión (4.4) y (4.5); para la segunda véase (4.9).

[39] Desde luego, con esto sólo hemos probado la existencia de clases K, que son consistentes, pero no ω-consistentes, bajo el supuesto de que hay algún K consistente (es decir, de que P es consistente).

2. Cada relación recursiva primitiva es definible (en el sentido del Teorema 4.5) en el sistema P.

Por eso en cada sistema formal, que satisface los supuestos 1 y 2 y es ω-consistente, hay sentencias indecidibles de la forma $\forall x\, Fx$, donde F es una propiedad recursiva primitiva de los números naturales, y lo mismo ocurre en cada extensión de un tal sistema resultante de añadir una clase recursivamente definible y ω-consistente de axiomas. Como fácilmente se comprueba, entre los sistemas que satisfacen los supuestos 1 y 2 se cuentan las teorías axiomáticas de conjuntos de Zermelo-Faenkel y de von Neumann[40], así como el sistema axiomático de la teoría de números que consta de los axiomas de Peano, la definición recursiva (según el esquema (4.1)) y las reglas lógicas. El supuesto 1 es satisfecho en general por cada sistema, cuyas reglas de inferencia son las usuales y cuyos axiomas (análogamente a los de P) se obtienen por sustitución a partir de un número finito de esquemas.[41]

4.3. Consistencia

Ahora vamos a sacar algunas consecuencias del Teorema 4.6 y para ello damos la siguiente definición:

Definición 4.1. Una relación (o clase) se llama *aritmética* si puede ser definida con la sola ayuda de las nociones $+$ y $\cdot$ (adición y multiplicación de números naturales)[42] y de las constantes lógicas $\vee, \neg, \forall x$ y $=$, donde $\forall x$ y $=$ sólo pueden referirse a números naturales[43].

De modo análogo se define la noción de «sentencia aritmética». En especial son aritméticas las relaciones «mayor que» y «congruente módulo n», pues ocurre

$$x > y \leftrightarrow \neg\exists z(y = x + z)$$
$$x \equiv y \pmod n \leftrightarrow \exists z(x = y + z \cdot n \vee y = x + z \cdot n)$$

Ahora tenemos el siguiente:

Teorema 4.7. *Cada relación recursiva primitiva es aritmética.*

Demostración. Probaremos la siguiente versión de este teorema: *Cada relación de la forma $x_0 = f(x_1, \dots, x_n)$, donde f es recursiva primitiva, es aritmética*. Procedamos por inducción completa sobre el grado de f. Tenga f el grado s $(s > 1)$. Entonces ocurre que o bien

1. $f(x_1, \dots, x_n) = h(j_1(x_1, \dots, x_n), j_2(x_1, \dots, x_n), \dots, j_m(x_1, \dots, x_n))$[44]
   (donde h y todos los j_i son de grado menor que s) o bien se da

[40] La prueba del supuesto 1 resulta aquí incluso más sencilla que en el caso del sistema P, pues sólo hay un tipo de variable (o dos en el sistema de von Neumann).

[41] Como se mostrará en la segunda parte de este artículo, la verdadera razón de la incompletud inherente a todos los sistemas formales de la matemática es que la formación de tipos cada vez mayores puede continuarse hasta lo transfinito (véase [Hil26]), mientras que en cada sistema formal a lo sumo disponemos de un número infinito numerable de ellos. En efecto, se puede mostrar que las sentencias indecidibles aquí construidas se vuelven decidibles si añadimos tipos más altos adecuados (por ejemplo, el tipo ω al sistema P). Algo parecido ocurre con la teoría axiomática de conjuntos.

[42] Aquí y en lo sucesivo consideramos siempre que el cero es un número natural.

[43] de un tal concepto debe constar exclusivamente de los signos indicados, de variables $x, y, \dots$, para números naturales y de las constantes 0 y 1 (no pueden aparecer en él variables para funciones o conjuntos). En los prefijos, desde luego, puede aparecer cualquier otra variable para números en vez de x.

[44] Naturalmente, no es necesario que todos los $x_1, \dots, x_n$ aparezcan de hecho en los j_i.

2. $f(0, x_2, \dots, x_n) = p(x_2, \dots, x_n)$
   $f(k+1, x_2, \dots, x_n) = q(k, f(k, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$
   (donde p y q so nde grado menor que s).

En el primer caso tenemos

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y_1, \dots, y_m\, (Rx_0 y_1, \dots, y_m \wedge \\ \wedge\, S_1 y_1, x_1, \dots, x_n \wedge \dots \wedge S_m y_m, x_1, \dots, x_n)$$

donde R y S_i son las relaciones aritméticas, existentes por hipótesis inductiva, que son equivalentes con $x_0 = h(y_1, \dots, y_n)$ y $y = j_i(x_1, \dots, x_n)$. Por eso en este caso $x_0 = f(x_1, \dots, x_n)$ es aritmética.

En el segundo caso vamos a aplicar el siguiente procedimiento. Podemos expresar la relación $x_0 = f(x_1, \dots, x_n)$ con ayuda del concepto «sucesión de números» (t)[45] del siguiente modo:

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists t (t_0 = p(x_2, \dots, x_n) \wedge \\ \wedge\, \forall k (k < x_1 \to t_{k+1} = q(k, t_k, x_2, \dots, x_n)) \wedge x_0 = t_{x_1})$$

Si S y $x_2, \dots, x_n$ y $Tz\, x_1, \dots, x_{n+1}$ son las relaciones aritméticas, existentes por hipótesis inductiva, que son equivalentes a $y = p(x_2, \dots, x_n)$ y $z = q(x_1, \dots, x_{n+1})$, respectivamente, entonces

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists t (St_0\, x_2, \dots, x_n \wedge \\ \wedge\, \forall k (k < x_1 \to T(t_{k+1}, k, t_k, x_2, \dots, x_n)) \wedge x_0 = t_{x_1}) \tag{4.17}$$

Ahora sustituimos la noción de «sucesión de números» por la de «par de números», asignando al par de números n, d la secuencia numérica $t^{(}n, d)$ (tal que $t^{(}n, d)_k = [n]_{1+(k+1)d}$, donde $[n]_m$ denota el mínimo resto no-negativo de n módulo m).

Entonces vale el siguiente lema:

Lema 4.1. *Si t es una sucesión cualquiera de números naturales y k es un número natural cualquiera, entonces hay un par de números naturales n, d, tales que $t^{(}n, d)$ y t coinciden en los primeros k miembros.*

Demostración. (Demostración del Lema)
Sea l el máximo de los números $k, t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$. Determinemos n, de tal modo que

$$n \equiv t_i \pmod{1 + (i+1)l!} \qquad \text{para } i = 0, 1, \dots, k-1$$

lo cual es posible, pues cada dos números $1 + (i+1)l!)$ $(i = 0, 1, \dots, k-1)$ son primos entre sí. En efecto, un número primo contenido en dos de esos números debería estar contenido en la diferencia $(i_1 - i_2)l!$, y puesto que $|i_1 - i_2| < l$, también debería estar contenido en $l!$, lo que es imposible. Así pues, el par de números $n, l!$ tiene la propiedad deseada. □

[45] t es aquí una variable que toma como valores las sucesiones de números naturales. t_k designa el miembro $k+1$-avo de una sucesión t; t_0 designa su primer miembro.

Puesto que la relación $x = [n]_m$ está definida por

$$x \equiv n \pmod m \wedge x < m$$

y por tanto es aritmética, también es aritmética la relación

$$Px_0, x_1, \ldots, x_n$$

definida del siguiente modo:

$$Px_0, \ldots, x_n \leftrightarrow \exists n, d\, (S[n]_{d+1}, x_2, \ldots, x_n \wedge$$
$$\wedge \forall k(k < x_1 \rightarrow T[n]_{1+d(k+2)}, k, [n]_{1+d(k+1)}, x_2, \ldots, x_n) \wedge x_0 = [n]_{1+d(x_1+1)})$$

Pero por (4.17) y el Lema 4.1 esta relación es equivalente a $x_0 = f(x_1, \ldots, x_n)$ (en la sucesión t, tal como interviene en (4.17), sólo importan sus primeros $x_1 + 1$ miembros).

Con esto queda probado el Teorema 4.7. □

Conforme al Teorema 4.7 para cada problema de la forma $\forall x Fx$ (donde F es recursiva primitiva) hay un problema aritmético equivalente, y puesto que toda la prueba del Teorema 4.7 (para cada F particular) se puede formalizar en el sistema P, esta equivalencia es deducible en P. Por eso vale el siguiente

Teorema 4.8. *En cada uno de los sistemas formales*[46] *mencionados en el Teorema 4.6 hay sentencias aritméticas indecidibles.*

Lo mismo vale (según el Lema 4.1) para la teoría axiomática de conjuntos y sus extensiones mediante clases recursivas primitivas y ω-consistentes de axiomas.

Finalmente derivamos todavía el siguiente resultado:

Teorema 4.9. *En todos los sistemas formales mencionados en el Teorema 4.6 hay problemas indecidibles de la lógica pura de predicados de primer orden*[47] *(es decir, fórmulas de la lógica pura de primer orden, respecto a las cuales no podemos probar ni su validez ni la existencia de un contraejemplo).*

Esto se basa en el siguiente teorema (y por tanto el presente será demostrado como consecuencia del siguiente):

Teorema 4.10. *Cada problema de la forma $\forall x Fx$ (donde F es recursiva primitiva) es reducible a la cuestión de si una determinada fórmula de la lógica pura de primer orden es satisfacible o no (es decir, para cada F recursiva primitiva podemos encontrar una fórmula de la lógica pura de primer orden, cuya satisfacibilidad es equivalente a la verdad de $\forall x Fx$).*

Consideramos como fórmulas de la lógica pura de primer orden las fórmulas formadas con los signos primitivos: $\neg, \vee, \forall \mathrm{x}, =; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \ldots$ (variables individuales), $\mathrm{Hx}, \mathrm{Gxy}, \mathrm{Lxyz}$ (variables relacionales y de propiedades), donde $\forall$x y $=$ sólo pueden referirse a individuos[48]. A estos signos añadimos todavía una tercera especie de variables g(x), l(x,y), j(x,y,z), etc., que

[46] Se trata de los sistemas formales ω-consistentes que resultan de añadir a P una clase recursivamente definible de axiomas.

[47] Véase [HA99]. En el sistema P entendemos por fórmulas de la lógica pura de predicados de primer orden las fórmulas que se obtienen al sustituir las relaciones por clases de tipo superior en las fórmulas del cálculo de predicados de primer orden de PM.

[48] Hilbert y W. Ackermann no incluyen el signo $=$ entre los del cálculo lógico de primer orden. Pero para cada fórmula en que aparece el signo $=$ existe otra fórmula en que ese signo no aparece y que es satisfacible si y sólo si la primera fórmula lo es.

representan funciones de objetos (es decir, g(x), l(x,y), etc., designan funciones cuyos argumentos y valores son individuos)[49]. Una fórmula que, además de los signos de la lógica pura de primer orden, contenga variables de la tercera especie (g(x), l(x,y), etc.), será llamada una fórmula en sentido amplio[50]. Las nociones de «satisfacible» y «válido» pueden extenderse sin más a las fórmulas en sentido amplio, y tenemos un teorema que dice que para cada fórmula α en sentido amplio podemos encontrar una fórmula β de la lógica pura de primer orden, tal que la satisfacibilidad de α es equivalente a la de β. β se obtiene a partir de α, sustituyendo las variables de la tercera especie (g(x), l(x,y), etc.), ... que aparecen en α por expresiones de la forma ιzGzx, ιzLzxy, ... eliminando las funciones «descriptivas» por el método usado en *PM*, y uniendo conyuntivamente[51] la fórmula así obtenida con una expresión que diga que todos los G, L, ... que hemos puesto en vez de los g, l, ... son unívocos respecto a su primer lugar.

Ahora mostramos que para cada problema de la forma $\forall x F x$ (donde F es recursiva primitiva) hay un problema equivalente referente a la satisfacibilidad de una fórmula en sentido amplio, de donde -según la observación que acabamos de hacer- se sigue el Teorema 4.10.

Puesto que F es recursiva primitiva, hay una función recursiva primitiva $f(x)$, tal que $Fx \leftrightarrow f(x) = 0$, y para f hay una secuencia de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, tales que $f_n = f$, $f_1(x) = x + 1$ y para cada $f_k (1 < k \leq n)$ o bien

1.
$$\forall x_2, \ldots, x_m (f_k(0, x_2, \ldots, x_m) = f_p(x_2, \ldots, x_m)) \tag{4.18}$$
$$\forall x, x_2, \ldots, x_m (f_k(f_1(x), x_2, \ldots, x_m) = f_q(x, f_k(x_1, x_2, \ldots, x_m), x_2, \ldots, x_m))$$

   donde $p, q < k$, o bien

2.
$$\forall x_1, \ldots, x_m (f_k(x_1, \ldots, x_m) = f_r(f_{i_1}(\mathfrak{x}_1), \ldots, f_{i_s}(\mathfrak{x}_s)))^{52} \tag{4.19}$$

   donde $r < k, i_v < k$ (para cada $v = 1, 2, \ldots, s$), o bien

3.
$$\forall x_1, \ldots, x_m (f_k(x_1, \ldots, x_m) = f_1(f_1(\ldots (f_1(0)) \ldots))) \tag{4.20}$$

Además formamos las sentencias:

$$\forall x \neg f_1(x) = 0 \land \forall x, y\, (f_1(x) = f_1(y) \to x = y) \tag{4.21}$$

$$\forall x\, (f_n(x) = 0) \tag{4.22}$$

En todas las fórmulas (4.18), (4.19), (4.20) (para $k = 2, 3, \ldots, n$) y en (4.21) y (4.22) sustituimos ahora las funciones f_1 por las variables funcionales g_i y el número 0 por una variable individual x_0 que no haya aparecido hasta ahora, y a continuación formamos la conyunción γ de todas las fórmulas así obtenidas.

[49] Además, el dominio de definición debe ser siempre el dominio entero de individuos.
[50] Variables de la tercera especie pueden aparecer en todos los lugares ocupados por variables individuales, por ejemplo, y=l(x), Gxl(y), Gl(x,g(y)), x, etc.
[51] Es decir, formando la conyunción.
[52] Los $\mathfrak{x}_i$ representan cualesquiera secuencias finitas de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$; por ejemplo x_1, x_3, x_2.

Corolario 4.1. *La fórmula $\exists x_0\, \gamma$ tiene la propiedad requerida, es decir,*

$$\forall x f(x) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \exists x_0\, \gamma \text{ es satisfacible.}$$

Demostración. La implicación $\rightarrow$ es directa, pues si las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se ponen en vez de las variables $g_1, g_2, \ldots, g_n$ en $\exists x_0\, \gamma$, evidentemente resulta un enunciado verdadero.

Veamos ahora el recíproco. Sean $h_1, h_2, \ldots, h_n$ las funciones, existentes por hipótesis, que producen un enunciado verdadero cuando se ponen en vez de $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Su dominio de individuos sea D. Puesto que $\exists x_0\, \gamma$ vale para las funciones h_i hay un individuo a (de D), tal que todas las fórmulas (4.18) a (4.22), si reemplazamos las f_i por h_1 y 0 por a. Ahora formamos la mínima subclase de D, que contiene a y está clausurada respecto a la operación $h_1(x)$. Esta subclase D' tiene la propiedad de que cada una de las funciones h_i, aplicada a elementos de D', proporciona de nuevo elementos de D'. Pues para h_1 vale esto por definición de D', y por (4.18), (4.19) y (4.20) esta propiedad se transmite de los h_1 con índice menor a los de índice mayor. Designemos mediante h_i'las funciones que resultan de restringir los h_1 al dominio de individuos D'. También para éstas funciones valen todas las fórmulas (4.18) a (4.22) (reemplazando las f_i por h_1 y 0 por a).

Puesto que (4.21) vale para h_i' y a, podemos aplicar biunívocamente los individuos de D' a los números naturales, de tal modo que a se convierte en 0 y la función h_1' en la función f_1 del siguiente. Pero mediante esta aplicación todas las la funciones h_i' se convierten en la funciones f_i, y puesto que (4.22) vale para h_n' y a, ocurre que $\forall x\, f_n(x) = 0$ o $\forall x\, f(x) = 0$, que es lo que queríamos probar[53]. □

Puesto que (para cada F especial) la argumentación que conduce al Teorema 4.10 puede también ser llevada a cabo en el sistema formal P, también la equivalencia entre un enunciado de la forma $\forall x F x$ (donde F es recursivo primitivo) y la satisfacibilidad de la fórmula correspondiente de la lógica de primer orden es demostrable en P, y por tanto de la indecidibilidad de lo uno se sigue la de lo otro, con lo que queda probado el Teorema 4.9[54].

4.4. Consecuencias

De los resultados del apartado de la Decibilidad, se sigue una sorprendente consecuencia relativa a la prueba de la consistencia del sistema P (y de sus extensiones), que queda expresada en el siguiente teorema:

Teorema 4.11. *Sea K una clase recursiva primitiva y consistente[55] cualquiera de FORMULAS. Entonces ocurre que la SENTENCIA que dice que K es consistente no es K-DEDUCIBLE. En especial, la consistencia de P no es deducible[56] en P, suponiendo que P sea consistente (en caso contrario, naturalmente, toda fórmula sería deducible).*

Demostración. La prueba (meramente esbozada) es la siguiente: Sea K una clase recursiva primitiva cualquiera (pero elegida de una vez por todas para las siguientes consideraciones)

[53] Del Teorema 4.10 se sigue, por ejemplo, que los problemas de Fermat y de Goldbach podrían ser resueltos, si se pudiera resolver el problema de la decisión para la lógica de primer orden.

[54] Naturalmente, el Teorema 4.9 también vale para la teoría axiomática de conjuntos, así como para sus extensiones obtenidas mediante el añadido de clases recursivas primitivas y @o-consistentes de axiomas, pues también en esos sistemas hay enunciados indecidibles de la forma $\forall x F x$ (donde F es recursivo primitivo).

[55] K es consistente (abreviadamente, Wid K) se define así: Wid $K \leftrightarrow \exists x\, (\text{Form } x \wedge \neg \text{Bew}_K x)$.

[56] Esto se sigue al tomar como K la clase vacía de FORMULAS.

de FORMULAS (en el caso más simple, la clase vacía). Para probar el hecho de que 17 Gen r[57] no es K-DEDUCIBLE, sólo habíamos utilizado la consistencia de K, es decir, ocurre que

$$\text{Wid } K \to \neg \text{Bew}_K(17 \text{ Gen } r) \tag{4.23}$$

es decir, según (4.6):

$$\text{Wid } K \to \forall x \neg (x\, B_K (17 \text{ Gen } r))$$

Ahora, por (4.14) se tiene

$$17 \text{ Gen } r = Sb \left(p \begin{matrix} 19 \\ Z(p) \end{matrix} \right)$$

y por tanto

$$\text{Wid } K \to \forall x \neg \left(x\, B_K Sb \left(p \begin{matrix} 19 \\ Z(p) \end{matrix} \right) \right)$$

es decir, por (4.9)

$$\text{Wid } K \to \forall x\, Qxp \tag{4.24}$$

Ahora constatamos que todas las nociones definidas hasta ahora (y todas las afirmaciones probadas) son también definibles (o deducibles) en P. Pues no hemos utilizado más que los métodos usuales de definición y prueba de la matemática clásica, tal y como están formalizados en P. Especialmente ocurre que K (como cada clase recursiva primitiva) es definible en P. Sea w la SENTENCIA mediante la que se expresa en P que Wid K La relación Qxy expresa (conforme a (4.9), (4.10) y (4.11)) mediante el SIGNO RELACIONAL q, por tanto, Qxp por r (pues por (4.13) ocurre que $r = Sb \left(p \begin{matrix} 19 \\ Z(p) \end{matrix} \right)$), el enunciado $\forall x\, Qxp$ por 17 Gen r.

Por (4.24), se tiene que w Imp (17 Gen r) es deducible[58] en P (y, por tanto, K-DEDUCIBLE). Si w fuese K-DEDUCIBLE, también 17 Gen r sería K-DEDUCIBLE, y de ahí se seguiría, por (4.23), que K no es consistente. □

Nótese que también esta prueba es constructiva, es decir, caso de que nos presenten una DEDUCCIÓN de w a partir de K, nuestra prueba permite obtener efectivamente una contradicción a partir de K. La prueba entera del Teorema 4.11 puede trasladarse literalmente a la teoría axiomática de conjuntos M y a la matemática clásica axiomática[59] A y también aquí obtenemos el mismo resultado: No hay prueba alguna de la consistencia de M (o de A), que pudiera ser formalizada en M (o en A), suponiendo que M(o A) sea consistente. Hagamos notar explícitamente que el Teorema 4.11 (y los resultados correspondientes sobre M y A) no se oponen al punto de vista formalista de Hilbert. En efecto, este punto de vista sólo supone la existencia de una prueba de consistencia llevada a cabo por medios finitarios y sería concebible que hubiera pruebas finitarias que no fuesen representables en P (ni en M o A). Puesto que para cada clase consistente K w no es K-DEDUCIBLE, ocurre que siempre que Neg(w) no es K-DEDUCIBLE ya tenemos sentencias (a saber, w) no decidibles en base a K. Con otras palabras en el Teorema 4.6 podemos sustituir la hipótesis de la ω-consistencia por esta otra: la sentencia «K es inconsistente» no es K-DEDUCIBLE. (Nótese que existen clases consistentes K para las que esa sentencia es K-DEDUCIBLE.)

[57] Naturalmente, r depende (como p) de K.

[58] Que de (4.23) podríamos inferir la verdad de w Imp (17 Gen r) se debe a que la sentencia indecidible 17 Gen r afirma su propia indeducibilidad, como ya observamos al principio.

[59] Véase [vN27].

4.4.1. La noción de sistema formal

En este trabajo se ha limitado básicamente al sistema P y sólo se han indicado las aplicaciones a otros sistemas. Sin embargo, como consecuencia de avances posteriores, en particular del hecho de que gracias a la obra de A. M. Turing[60] ahora disponemos de una definición precisa e indudablemente adecuada de la noción general de sistema formal, ahora es posible dar una versión completamente general de los teoremas Teorema 4.6 y Teorema 4.11. Es decir, se puede probar rigurosamente que en cada sistema formal consistente que contenga una cierta porción de teoría finitaria de números hay sentencias aritméticas indecidibles y que, además, la consistencia de cualquiera de esos sistemas no puede ser probada en el sistema mismo.

[60] Véase [T+36].

Bibliografía

Para escribir la parte biográfica de Hilbert y su respectivo programa, me he basado fundamentalmente en [GR+00] [1] y [Cor98]. También me han acompañado obras como [Zac07] y [Sie13] (para el estudio de los avances históricos del programa), y también [FdCTF20]. En menor medida, me han ayudado a entender mejor la persectiva del programa obras como [Ste87], [Bro76] y [VB93].
Para tratar la crisis fundacional me he fundamentado en [Man97], [Kre76] y en [Fer12]. En un segundo plano también han sido consultadas obras como [Tor49] o [KM00], entre otras.
Por último, en relación con las obras de Gödel, destacar los dos pilares [AR10] y [Göd86] en los que me he sustentado principalmente, además de obras como [Alc00] y [Smi13]. Se obvian aquí obras de carácter divulgativo que han tenido un menor peso en el desarrollo del trabajo.

[Alc00] Carlos Torres Alcaraz. La lógica matemática en el siglo xx. *Miscelánea Matemática*, 31:61–105, 2000. [Citado en pág. 43]

[AR10] Whitehead AN and B Russell. Principia mathematica. *Cambridge University*, 1, 1910. [Citado en págs. 7, 13, and 43]

[BB98] Haiïm Brezis and Felix Browder. Partial differential equations in the 20th century. *Advances in Mathematics*, 135:76–144, 1998. [Citado en pág. 7]

[Bro76] Felix E Browder. *Mathematical developments arising from Hilbert problems*. American Mathematical Society, 1976. [Citado en pág. 43]

[Cor98] Leo Corry. Los 23 problemas de hilbert y su transfondo histórico. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, V(2), 1998. [Citado en pág. 43]

[FdCTF20] Max Fernández de Castro and Yolanda Torres Falcón. La constitución del programa de hilbert. *Metatheoria - Revista de Filosofía e Historia de la Ciencia*, 10(2):31–50, abr. 2020. [Citado en págs. 21 and 43]

[Fer12] F.J.G. Fernández. *Esperando a Gödel: Literatura y matemáticas*. Ciencia abierta. Nivola Libros y Ediciones, S.L., 2012. [Citado en pág. 43]

[Göd86] Kurt Gödel. *Collected Works, Volume 1: Publications 1929-1936*. Oxford University Press, 1986. [Citado en pág. 43]

[GR+00] Jeremy Gray, David Rowe, et al. *The Hilbert Challenge*. Oxford University Press on Demand, 2000. [Citado en pág. 43]

[Gra03] Jeremy J Gray. *El reto de Hilbert: Los 23 problemas que desafiaron a la matemática*. Crítica, 2003. [No citado]

[HA99] David Hilbert and Wilhelm Ackermann. *Principles of mathematical logic*, volume 69. American Mathematical Soc., 1999. [Citado en pág. 38]

[HAdZ62] David Hilbert, Wilhelm Ackermann, and Víctor Sánchez de Zavala. *Elementos de lógica teórica*. Tecnos, 1962. [Citado en págs. 8, 14, and 26]

[Hil26] David Hilbert. Über das unendliche. *Mathematische Annalen*, 95(1):161–190, 1926. [Citado en pág. 36]

[KM00] M. Kline and A.R. Merino. *Matemáticas: La pérdida de la Certidumbre*. Ciencia y técnica. Siglo XXI Ediciones, 2000. [Citado en págs. 6 and 43]

[Kre76] Georg Kreisel. What have we learnt from hilbert's second problem. *Browder [8: 1, pp. 93-130]*, 67:8–12, 1976. [Citado en págs. 6 and 43]

[Man97] Paolo Mancosu. *From Brouwer to Hilbert: The debate on the foundations of mathematics in the 1920s*. Oxford University Press, 1997. [Citado en pág. 43]

[Sie13] Wilfried Sieg. *Hilbert's programs and beyond / Wilfried Sieg*. Logic and computation in philosophy. Oxford University Press, Oxford, [England] ;, 2013 - 2013. [Citado en pág. 43]

[Smi13] Peter Smith. *An introduction to Gödel's theorems*. Cambridge University Press, 2013. [Citado en pág. 43]

[Ste87] Ian Stewart. *The problems of mathematics*. Oxford University Press Oxford, 1987. [Citado en pág. 43]

[T$^+$36] Alan Mathison Turing et al. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *J. of Math*, 58(345-363):5, 1936. [Citado en pág. 42]

[Tor49] Fausto I. Toranzos. El panorama actual de la filosofía de la matemática y la influencia en él de d. hilbert. In *Actas del Primer Congreso Nacional de Filosofía, Mendoza, Argentina*, 1949. [Citado en pág. 43]

[VB93] Jean Paul Van Bendegem. The strong hilbert program. *Revue internationale de philosophie*, pages 343–353, 1993. [Citado en pág. 43]

[vN27] J. v. Neumann. Zur hilbertschen beweistheorie. *Mathematische Zeitschrift*, 26(1):1–46, 1927. [Citado en págs. 24, 25, and 41]

[Zac07] Richard Zach. Hilbert's program then and now. In *Philosophy of Logic*, pages 411–447. Elsevier, 2007. [Citado en pág. 43]