GÖDEL Y LA INCOMPLETITUD DE LAS MATEMÁTICAS

Kurt Gödel en 1939

> El logro de Gödel en la lógica moderna es singular y monumental - más que monumental, es una señal que permanecerá visible lejos en el espacio y en el tiempo.
>
> **John von Neumann**[1]

El presente artículo pretende dar a conocer al lector quién fue Kurt Gödel y qué dice su famoso resultado acerca de la incompletitud de las matemáticas a través de los pasos básicos de la demostración de éste. Para poder alcanzar el objetivo he considerado necesario comprender el enunciado del teorema de completud[2]. Por tanto, en primer lugar se explica este otro resultado de Gödel, aunque sin entrar en la justificación de tal.

1 ¿Quién fue Kurt Gödel?

Kurt Gödel ha sido sin lugar a dudas uno de los grandes matemáticos del s. XX. Nació el 28 de abril de 1906 en Brno, ciudad de la actual República Checa, en el seno de una familia de ascendencia austríaca. Ya de pequeño destacó en su trayectoria escolar[3]. En 1924 Gödel marchó de su país natal a Austria para inscribirse en la universidad de Viena. Fue para cursar física, pero poco a poco su interés se orientó hacia las matemáticas en pos de una mayor exactitud. Finalmente se licenció en matemáticas centrándose en el campo de la lógica, campo en el que encontró la precisión que anhelaba. A lo largo de su vida siempre buscó la exactitud. Esto explica la poca cantidad de artículos que publicó en vida. Fue una persona que sólo publicó aquello que fue capaz de justificar con claridad abrumadora, incluso para convencer a los más escépticos[4].

En 1929 se doctoró presentando el teorema de completud de la lógica de primer orden. Dos años después la irrupción de su teorema de incompletitud provocó una auténtica revolución que acabó con el Programa formalista de Hilbert. El resultado fue aceptado desde el primer momento, la exquisita claridad de su exposición fue tal que nadie dudó de la prueba dada. Un poco más tarde, en el año 1938, justificó la consistencia relativa del axioma de elección y de la hipótesis del continuo.

---

[1] Estas palabras fueron pronunciadas por von Neumann con motivo de la entrega a Gödel del premio Einstein en 1951. Tal cual dice [Wan, pág. 179] están recogidas en *New York Times*, 15 de marzo de 1951, pág. 31.

[2] Dependiendo de la literatura castellana que uno consulta se encuentra con el término completud o con el término completitud. La elección del término aquí hecha ha sido totalmente arbitraria.

[3] Durante esa etapa sólo en una ocasión recibió una calificación por debajo de la máxima, y curiosamente fue en matemáticas.

[4] Esta parece ser la causa por la que publicó tan poco sobre su concepción de la filosofía de la matemática, lugar en el que se consideraba totalmente platónico.

Los tres resultados anteriores constituyen los logros más famosos de Gödel en el terreno de la lógica matemática, no los únicos. Se puede decir, por tanto, que su época más productiva fue la década de los años 30. Durante este tiempo Gödel estuvo ejerciendo de profesor de la universidad de Viena, aunque viajó en varias ocasiones al I.A.S.[5] de Princeton. En el año 1938 se casó con Adele Nimbursky, con quien convivió hasta su muerte.

La pareja se trasladó definitivamente a Princeton en 1940, donde él se dedicó al I.A.S. Allí estuvo junto a grandes figuras de este siglo como Einstein, v. Neumann, Veblen, etc. Uno de los mejores amigos de Gödel fue Einstein. Juntos compartieron gran cantidad de paseos y conversaciones. Fueron dos genios de carácter muy diferente: mientras que Einstein fue una persona afable a la que gustó convivir con la fama, Gödel fue una persona solitaria, huraña e hipocondríaca. Poco a poco parece ser que Gödel comenzó a interesarse por la filosofía, tanto filosofía de la física[6] como de la matemática, dejando un poco de lado la lógica matemática[7]. Finalmente murió el 14 de enero de 1978 por inanición, se negaba a comer convencido de que la comida estaba envenenada.

Gödel acompañado por un físico de renombre llamado Einstein en 1954

2 La completud de la lógica de primer orden

Este resultado de Gödel corresponde a su tesis doctoral, publicada en 1930 bajo el título *La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden*[8]. En breves palabras este resultado suele describirse como que todo lo que es verdad es demostrable. Para poder comprender[9] lo que se quiere decir con las palabras anteriores es necesario adentrarse un poco dentro de los dominios de la lógica.

En la lógica de primer orden las fórmulas se construyen a partir de dos tipos de símbolos. Hay unos símbolos *comunes* que son: $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $=$, *(* y *)*. A parte de estos símbolos comunes a todo lenguaje de primer orden también se dispone de símbolos *concretos* dependiendo de lo que se quiera hablar. Hay, por tanto, muchos lenguajes de primer orden. Mientras que los símbolos comunes tienen una interpretación intuitiva y unívoca, los otros símbolos se pueden interpretar de formas muy diferentes.

Supóngase que se quiere hacer teoría de grupos, entonces a los símbolos comunes es interesante añadirles los símbolos siguientes (notación aditiva): + y *0*. En este caso, algunos ejemplos de fórmulas serían los siguientes:

(G1) $\forall x \forall y \forall z\ (\ (x+y)+z = x+(y+z)\ )$

(G2) $\forall x\ (\ x+0 = x\ ) \wedge \forall x\ (\ 0+x = x\ )$

(G3) $\forall x\ \exists y\ (\ x+y = 0\ ) \wedge \forall x\ \exists y\ (\ y+x = 0\ )$

(G4) $\forall x \forall y\ (\ x+y = y+x\ )$

(G5) $x+y = z$

---

5 Instituto de Estudios Avanzados.

6 Seguramente animado por sus charlas con Einstein.

7 Tal vez esta sea la explicación de los pocos resultados matemáticos que consiguió mientras estuvo en Princeton.

8 Su tesis doctoral es de una concisión legendaria, cabía en 11 páginas. Se puede encontrar una traducción castellana en [Mos, pág. 23].

9 Y también para evitar malinterpretaciones del enunciado, sobretodo hay que ir con sumo cuidado de cara a las conclusiones de carácter filosófico que se pretendan extraer.

Se observa que G5 tiene una diferencia esencial con respecto a las otras fórmulas. Si se considera una interpretación de los símbolos no comunes (es decir, una estructura matemática concreta) se observa que en G5 uno no puede afirmar si la fórmula es verdadera o no (depende de como se interpreten las variables x, y, z), mientras que en las otras fórmulas sí que se puede[10]. Se llama *sentencias* a las fórmulas que dada una estructura se puede afirmar si son verdaderas o falsas (como G1-G4). Para estudiar el concepto de verdad, en el fondo, lo único que presenta interés son las sentencias, no las fórmulas en general. Para referirse a las sentencias se emplean los símbolos φ, ψ, … (letras griegas). En cambio, para referirse a las fórmulas que no son sentencias se emplean también letras griegas pero indicando entre paréntesis cuales son las variables que falta interpretar; así pues, la fórmula G5 se denotaría por $\varphi(x,y,z)$[11]. Es decir, las fórmulas que no son sentencias se denotan en general por $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ con $k \geq 0$.

Supóngase que dentro de un lenguaje concreto de primer orden fijamos un conjunto de sentencias Σ. Se dice que una sentencia φ es *consecuencia* de Σ si toda estructura que verifica todas las sentencias de Σ automáticamente verifica φ. En tal caso se usa la notación $\Sigma\varnothing\ \varphi$. Y se dice que se dispone de una *demostración formal* de φ a partir de Σ cuando se tiene una sucesión finita de sentencias tal que cada sentencia de la sucesión es una sentencia de Σ o bien se ha obtenido a partir de sentencias anteriores de la sucesión aplicando las leyes de la lógica[12]. Esto se denota $\Sigma\wp\ \varphi$.

Ahora ya estamos en condiciones de comentar el teorema de completud. Este resultado afirma que φ es consecuencia de Σ si y sólo si φ es demostrable formalmente a partir de Σ, es decir, que $\Sigma\varnothing\ \varphi$ si y sólo si $\Sigma\wp\ \varphi$. Es evidente que las leyes de la lógica habían sido elegidas para permitir concluir que todo lo que se puede demostrar formalmente a partir de un conjunto de sentencias Σ también es consecuencia de Σ. El mérito de Gödel fue justificar que sólo se necesitaban esas leyes lógicas para obtener todo lo que es consecuencia. Es decir, Gödel fue capaz de ver que no se escapa ninguna consecuencia usando simplemente esas leyes.

3 La incompletitud de las matemáticas

Este resultado es, sin lugar a dudas, el más famoso de los resultados de Gödel. También se le conoce con los nombres de primer teorema de Gödel, teorema de incompletitud o teorema de Gödel. Fue publicado por Gödel en 1931 bajo el título *Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines*[13]. Este artículo es sin ningún género de dudas, a pesar de ocupar sólo unas 25 páginas, el más revolucionario de toda la lógica del s. XX

[10] Se puede pensar por ejemplo en los **N** con la interpretación estándar de los símbolos no comunes.

[11] Entonces por la fórmula $\varphi(x,0,z)$ se entiende la fórmula $x+0 = z$. Análogamente se puede hablar de $\varphi(0,0,z)$, de $\varphi(0,0,0)$, etc.

[12] Para conocer cuales son exactamente las leyes de la lógica con las que se juega se puede consultar cualquier manual de lógica, por ejemplo [Men]. Lo importante es que se trata de leyes concretas. No sólo sabemos que existen sino que están dadas, son unas leyes perfectamente conocidas y esencialmente se trata de un número finito.

[13] Se puede encontrar una traducción castellana en [Mos, pág. 53].

3.1 ¿Qué dice el teorema de Gödel?

En primer lugar intentaremos situarnos en el contexto histórico en el que irrumpió el teorema de Gödel. Desde comienzos del s. XX las matemáticas estaban sufriendo un proceso de formalización para garantizar que estaban libres de toda contradicción[14]. Este intento de formalización se ha conocido como el Programa de Hilbert, y esencialmente constaba de dos puntos. En primer lugar había que encontrar una axiomática *completa*[15] para poder demostrar todas las verdades matemáticas y sólo éstas. Y una vez encontrados estos axiomas sólo quedaría justificar que eran *consistentes*, es decir, que a partir de ellos no se podría deducir jamás una contradicción[16]. Por aquel entonces todo el mundo era muy optimista de cara al éxito del Programa. Incluso parecía que el teorema de completud de Gödel era un granito de arena más para completar el Programa. Pero he aquí que Gödel en 1931 hundió el Programa de Hilbert de un plumazo.

Para cargarse el Programa, Gödel no necesitó fijarse en todas las matemáticas, él simplemente puso sus ojos sobre la aritmética[17]. Con la aritmética intentó llevar a cabo el Programa de Hilbert y comprobó que es imposible. Gödel consideró el lenguaje de primer orden con los símbolos $+$, $*$, S y 0. Es evidente que en este lenguaje se puede estudiar la aritmética pensando el símbolo S como el asociado a una función monaria que nos da el siguiente de un número natural. Dentro de ese lenguaje consideramos los siguientes axiomas (la formalización en primer orden de los axiomas de Peano):

(P1) $\neg \exists x \, (0 = Sx)$

(P2) $\forall x \forall y \, (Sx = Sy \rightarrow x = y)$

(P3) $\forall x \, (x+0 = x)$

(P4) $\forall x \, (x+Sy = S(x+y))$

(P5) $\forall x \, (x*0 = 0)$

(P6) $\forall x \, (x*Sy = x*y+x)$

(P7) Para cada fórmula no sentencia $\varphi(x)$ consideramos la sentencia

$$(\varphi(0) \wedge \forall x \, (\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx))) \rightarrow \forall x \, \varphi(x)$$

Es evidente que cualquier conjunto de axiomas candidato para la aritmética debe incluir los axiomas de Peano, pero a priori puede ser que se necesiten más axiomas.

Gödel se dio cuenta de que el conjunto de axiomas que buscaba debía cumplir otra condición más. Es trivial que si consideramos el conjunto {sentencias verdaderas en **N** con la interpretación estándar de los símbolos no comunes} podremos demostrar a partir de él todas las sentencias verdaderas de la aritmética y sólo éstas; pero esto no nos interesa, no tenemos ninguna idea efectiva de quién es ese conjunto. Por tanto, Gödel exigió la existencia de un algoritmo que en un número finito de pasos permita saber si una sentencia es de Σ o no. Es decir, el conjunto de sentencias Σ que buscaba para axiomatizar la aritmética debía ser *computable*. Así pues, la demostración del teorema

[14] Se pretendía ahorrar al futuro casos como el ocasionado por la entonces reciente paradoja de Russell.

[15] Un conjunto de axiomas Σ se dice que es completo si dada cualquier sentencia φ se verifica que $\Sigma \wp \varphi$ o que $\Sigma \wp \neg\varphi$. El hecho de exigir que la axiomática fuera completa recaía en la idea de que todo problema matemático es resoluble, es decir, que toda afirmación matemática es verdadera o falsa. Si Σ no es completo entonces no es posible responder a todas las preguntas que se puedan formular en ese lenguaje.

[16] Esto se pretendía hacer analizando simplemente los símbolos que aparecen en los axiomas, por métodos finitarios. No se podía recurrir a matemáticas de tipo superior puesto que aún no se sabía que estuvieran libres de contradicción.

[17] La parte de las matemáticas que versa sobre los números naturales con su interpretación estándar.

de Gödel le llevó a dar la primera noción formal de computabilidad, de existencia de un algoritmo[18].
Ahora ya estamos en condiciones de dar el enunciado que Gödel demostró.

Teorema de Gödel Para cualquier conjunto computable y consistente de sentencias Σ que incluya las sentencias P1,…,P7 ocurre que existe una sentencia φ tal que a partir de Σ no se puede demostrar formalmente ni φ ni $\neg\varphi$. Se dice que φ es una sentencia *indecidible*.

Si se interpreta este teorema a través del teorema de completud se obtiene que hay estructuras matemáticas que verifican $\Sigma \cup \{\varphi\}$ y también estructuras matemáticas que verifican $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Con anterioridad a Gödel, el lógico noruego Thoralf Skolem ya había visto que había estructuras diferentes a la estándar de los **N** que cumplen los axiomas de Peano. El mérito de Gödel radicó en ver que no sólo había estructuras diferentes, sino que además cumplían sentencias diferentes. Además, Gödel fue capaz de mostrar que el problema que aparece es insalvable, no se puede solucionar añadiendo las sentencias indecidibles a los axiomas[19]. Es decir, si ahora se considera $\Sigma \cup \{\varphi\}$ como nuevo conjunto de axiomas se siguen teniendo sentencias indecidibles en virtud del mismo teorema. Y análogamente si consideramos $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. En resumen, el decantarse por φ o por $\neg\varphi$ como nuevo axioma no depende de motivos lógicos. La intuición siempre jugará un papel fundamental en la tarea matemática.
Por tanto, si se acepta la existencia de los objetos matemáticos con independencia de nuestra mente (si se acepta el Cielo Platónico) uno se encuentra con el problema de que la verdad aritmética no es axiomatizable puesto que en el Cielo deberá cumplirse φ o $\neg\varphi$. Y como la aritmética es una parte de la matemática (la más simple de todas) se concluye que la verdad matemática no es axiomatizable. Es decir, no se puede alcanzar la verdad matemática a través del concepto de demostración formal. En virtud de esto último suele decirse que no toda verdad matemática es demostrable, y que por ende las matemáticas son incompletas. Así pues la tarea matemática siempre dependerá en última instancia de la intuición, no es mecanizable. La verdad matemática está más allá de los axiomas y las leyes de la lógica. La verdad está ahí fuera.
Así pues, este teorema permite concluir que no se puede encontrar una axiomática completa de la aritmética, es decir, da la irrealizabilidad del Programa de Hilbert para la aritmética. Y de ahí no es difícil[20] concluir que también supone el fracaso del Programa para toda la matemática.

3.2 ¿Cómo se las apañó Gödel para demostrar su teorema?

A continuación vamos a seguir el método seguido por Gödel para justificar su famoso teorema. El teorema de Gödel, tal cual se dice en [Hof], es como una perla en una ostra.

[18] Gödel mismo no usó el concepto de computable. Él hablaba de conjuntos recursivos, ver [Men]. Fue el inglés Turing quien en 1936 dio la primera definición formal de computabilidad. En ese artículo Turing justificó que su noción de computabilidad coincidía con la de recursividad empleada por Gödel. De cara al presente artículo, para no entretenerme con temas más técnicos, he considerado más adecuado hablar de computabilidad puesto que todo el mundo tiene la idea intuitiva de algoritmo.
[19] El éxito de Gödel radica en el ver que es insalvable puesto que la existencia de sentencias indecidibles no es sorprendente en sí misma. Todo matemático sabe que existen grupos abelianos y grupos no abelianos, es decir, que la sentencia G4 es indecidible a partir del conjunto {G1, G2, G3}.
[20] Pero no es trivial.

Su secreto no se percibe escrutando la perla, sino el aparato demostrativo oculto en la ostra que la aloja.
La clave de la prueba se encuentra en la autorrecursión. A modo de ejemplo se puede pensar en el lenguaje ordinario. En cierta forma se puede pensar el lenguaje ordinario como un sistema formal que tiene una serie de axiomas (palabras) y una serie de leyes (reglas gramaticales) que nos permiten construir sentencias (frases). Las frases pueden ser calificadas de verdaderas o falsas: "José colabora en Aleph", "Aleph tiene tapas blandas",… El lenguaje ordinario es recursivo, permite construir frases relativas a otras frases. "De las dos frases citadas antes entre comillas ambas son ciertas". Esta frase también se puede calificar de verdadera o falsa. Se suele llamar *metalenguaje* a un lenguaje que es capaz de producir declaraciones sobre otro. Así pues el lenguaje ordinario es metalenguaje de él mismo. En cuanto un lenguaje posee esta capacidad automáticamente aparecen problemas. Considérese por ejemplo la afirmación: "Esta frase es falsa". Es evidente que no se puede ver la certeza o falsedad de dicha afirmación. La frase anterior da lugar a una paradoja.
Lo que Gödel hizo fue repetir el argumento anterior en la aritmética en lugar del lenguaje ordinario. Gödel encontró un método que permite a la aritmética hacer declaraciones sobre ella misma. Y una vez encontrado ese método todo lo que tuvo que hacer es construir la sentencia que afirma de ella misma que es indemostrable.

¿Cómo puede la aritmética hacer declaraciones sobre ella misma? El método que usó Gödel se conoce hoy día con el nombre de gödelización. La idea recae en asociar a cada fórmula φ un número natural $[\varphi]$ conocido como el número de Gödel de φ[21]. A cada símbolo se le asocia un número natural.

0	3	,	17	x_0	31
S	5	$\forall$	19	x_1	33
+	7	$\exists$	21	x_2	35
*	9	$\rightarrow$	23	x_3	37
=	11	$\neg$	25	x_4	39
(	13	$\wedge$	27	etc.[22]	
)	15	$\vee$	29		

Esta codificación de símbolos permite codificar cualquier sucesión formada por ellos. La expresión $\forall x_0\ x_1 *\ \exists$ se codifica por la sucesión 19 31 33 9 21. Análogamente, la sentencia $\forall x_0\ (\ +(x_0,0) = x_0\ )$ se codifica por la sucesión 19 31 13 7 13 31 17 3 15 11 31 15. Ahora la clave está en usar la sucesión de los números primos para codificar toda la sucesión en un sólo número. Así pues, la primera expresión queda codificada por el número $2^{19}*3^{31}*5^{39}*7^{9}*11^{21}$, y la segunda por $2^{19}*3^{31}*5^{13}*7^{7}*11^{13}*13^{31}*17^{17}*19^{3}*$ $*23^{15}*29^{11}*31^{31}*37^{15}$. En virtud de que la factorización en primos es única se obtiene que dado un número natural se puede recuperar la expresión que codifica, si es que codifica alguna.
Hasta ahora hemos asociado números de Gödel a las sucesiones de símbolos (incluidas las fórmulas). Ahora toca el turno de asociar números de Gödel a las demostraciones formales. Conviene recordar que por definición una demostración formal es una

[21] En la práctica se hace algo más general, se asocia un número a cada sucesión de símbolos, no sólo a las fórmulas.
[22] ¿Por qué tomar números impares para los símbolos? Porque entonces es sencillo, una vez conocido el método de gödelización, justificar que los números naturales que codifican símbolos, sucesiones de símbolos y demostraciones son tres conjuntos disjuntos. Si se usaran números consecutivos (incluyendo a los pares) para codificar los símbolos, la afirmación anterior no sería cierto.

sucesión de fórmulas φ_1, φ_2, …, φ_n que cumple ciertas condiciones. Ésta quedará codificada por el número $2^{[\varphi_1]} * 3^{[\varphi_2]} * 5^{[\varphi_3]} * \ldots$

De entre las sucesiones de símbolos que se pueden encontrar, Gödel distinguió unas especiales que le permitían reproducir los números naturales. A estas expresiones se les llama *numerales*. ¿Cómo se definen? El numeral de 0 es la expresión 0. El numeral de 1 es la expresión S(0). El numeral del 2 es la expresión S(S(0)). Y así sucesivamente. En general el numeral de n se denota a través del símbolo $\overline{n}$.

Una relación numérica es un subconjunto de $\mathbf{N}^k$ con $k \in \mathbf{N}$. Una relación numérica se dice que es *computable* si existe un algoritmo que dada cualquier tupla permite averiguar en un número finito de pasos si la tupla es de la relación o no.

Ahora ya podemos enunciar el lema que utilizó Gödel para poder realizar declaraciones de la aritmética sobre ella misma.

Lema 1 Sea R una relación (k+1)-aria computable y sea Σ un conjunto de sentencias que incluya a P1,…,P7. Entonces existe una fórmula $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ que cumple:

i) Si $(n_0, n_1, \ldots, n_k) \in R$ entonces $\Sigma \wp\ \psi(\overline{n_0}, \overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$[23].
ii) Si $(n_0, n_1, \ldots, n_k) \notin R$ entonces $\Sigma \wp\ \neg\, \psi(\overline{n_0}, \overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$.

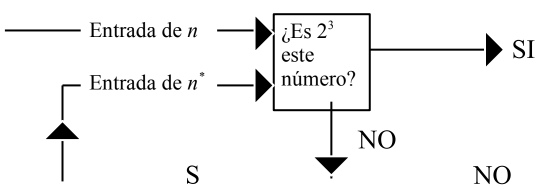
Llegado este punto a Gödel sólo le quedaba encontrar la relación computable adecuada para poder construir la sentencia que dijera "No soy demostrable". Se definen las siguientes relaciones (se supone que Σ es un conjunto de sentencias):

$F = \{ k \in \mathbf{N}$: k es número de Gödel de una fórmula $\}$
$Sent = \{ k \in \mathbf{N}$: k es número de Gödel de una sentencia $\}$
$Num = \{ k \in \mathbf{N}$: k es número de Gödel de un numeral $\}$
$D = \{ (k,m,n) \in \mathbf{N}^3$: m es número de Gödel de una fórmula $\varphi(x_0)$, k es número de Gödel de la sentencia $\varphi(\overline{n})\ \}$.
$G_\Sigma = \{ k \in \mathbf{N}$: k es número de Gödel de una sentencia de $\Sigma\ \}$
$Dem_\Sigma = \{ (k,m) \in \mathbf{N}^2$: k es número de Gödel de una demostración formal a partir de Σ de la sentencia de número de Gödel n $\}$
$R_\Sigma = \{ (t,m,n) \in \mathbf{N}^3$: m es número de Gödel de una fórmula $\varphi(x_0)$, t es número de Gödel de una demostración a partir de Σ de la sentencia $\varphi(\overline{n})\ \} =$
$= \{ (t,m,n) \in \mathbf{N}^3$: existe k tal que $(k,m,n) \in D$ y $(t,k) \in Dem_\Sigma\ \}$

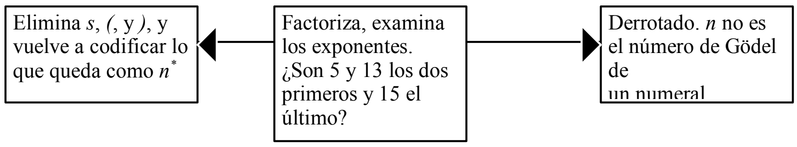
Y ahora es muy fácil justificar el siguiente resultado.

Lema 2 Se cumplen las siguientes afirmaciones:

i) Las relaciones F, Sent, Num y D son todas ellas computables.
ii) Si Σ es un conjunto de sentencias tal que G_Σ es computable (esto suele abreviarse diciendo que Σ es computable) entonces las relaciones Dem_Σ y R_Σ son computables.



[23] Por $\psi(\overline{n_0}, \overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$ se hace referencia a la fórmula que resulta de sustituir en la fórmula $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ la variable x_0 por $\overline{n_0}$, la variable x_1 por $\overline{n_1}$, etc.



Este algoritmo muestra que Num es computable

Con esos dos lemas Gödel ya fue capaz de construir la sentencia que dice "No soy demostrable". Supóngase que se tiene un conjunto Σ cumpliendo las hipótesis del teorema de Gödel. Entonces por el lema 2 se obtiene que R_Σ es una relación computable. Así pues, por el lema 1 existe una fórmula $\psi(x_0, x_1, x_2)$ que cumplirá las dos condiciones allí expuestas para la relación R_Σ. Sea g el número de Gödel de la fórmula $\neg\ \exists x_1\ \psi(x_1, x_0, x_0)$. Ahora definimos la sentencia φ como $\neg\ \exists x_1\ \psi(x_1, \overline{g}\ , \overline{g}\ )$. Ahora sólo queda comprobar que φ es una sentencia indecidible. Por definición se tiene que $(t,g,g)\in R_\Sigma$ si y sólo si t es el número de Gödel de una demostración formal de φ a partir de Σ. Así pues, la sentencia φ en el metalenguaje nos viene a decir que no existe demostración de la fórmula φ, es decir, viene a decir "No soy demostrable". En resumen, esta fórmula reproduce la paradoja del lenguaje ordinario antes comentada.

Comprobación de que φ no se puede demostrar a partir de Σ:
Supóngase que sí se puede demostrar φ. Sea h número de Gödel de una demostración formal de φ a partir de Σ. Entonces, $(h,g,g)\in R_\Sigma$. Como consecuencia del lema 1 se tiene que $\Sigma \wp\ \psi(\ \overline{h}\ ,\ \overline{g}\ ,\ \overline{g}\ )$. Por tanto $\Sigma \wp\ \exists x_1\ \psi(x_1,\ \overline{g}\ ,\ \overline{g}\ )$, de donde es inmediato afirmar que $\Sigma \wp\ \neg\varphi$. Así pues, se puede demostrar a partir de Σ tanto φ como $\neg\varphi$. Y esto es un absurdo con la suposición que Σ es consistente.

Comprobación de que $\neg\varphi$ no se puede demostrar a partir de Σ:
Supóngase que sí se puede demostrar $\neg\varphi$. Entonces aprovechando que Σ es consistente se tiene que no se puede demostrar φ a partir de Σ. Por tanto, para todo número natural h se cumple que $(h,g,g)\notin R_\Sigma$. Consecuentemente, a partir del lema 1, para todo número natural h se tiene que $\Sigma \wp\ \neg\psi(\ \overline{h}\ ,\ \overline{g}\ ,\ \overline{g}\ )$. De ahí se sigue[24] que $\Sigma \wp\ \exists x_1\ \psi(x_1,\ \overline{g}\ ,\ \overline{g}\ )$ es mentira, es decir, que $\neg\varphi$ no se puede demostrar a partir de Σ. Y eso es un absurdo con la hipótesis de partida.

3.3 ¿Qué conclusiones filosóficas se pueden extraer?

El teorema de Gödel da pie a cantidad de ideas filosóficas tanto sobre la matemática como sobre el concepto de verdad. Aquí no voy a entrar en ellas, dejaré que el lector

[24] Para poder dar este paso no es suficiente suponer que Σ es consistente. Gödel necesitó suponer que Σ es *ω-consistente*, lo cual quiere decir que dada cualquier fórmula $\varphi(x)$ tal que para todo número natural n se cumple $\Sigma \wp\ \varphi(\ \overline{n}\ )$ entonces es falso que $\Sigma \wp\ \exists x\ \neg\varphi(x)$. El teorema de Gödel deberíamos haberlo formulado cambiando la hipótesis Σ es consistente por la de Σ es ω-consistente. Sin ese cambio la justificación del teorema dada por Gödel no sería correcta. De hecho Gödel enunció su teorema imponiendo la hipótesis de ser ω-consistente. He optado por enunciarlo de esa otra manera por dos razones: a)ahorrarme introducir el concepto de ω-consistencia, b)Barkley Rosser, en 1936, vio que la prueba de Gödel retocada un poco permitía demostrar el resultado que yo he enunciado como teorema de Gödel. El retoque introducido por Rosser consistía en considerar otra sentencia, la cual tiene un carácter bastante menos intuitivo que la utilizada por Gödel.

reflexione personalmente[25]. Por último, para acabar, simplemente quiero comentar una consecuencia que suele pasar desapercibida. Se trata de una consecuencia religiosa[26]. Si se define *religión* como un sistema de ideas que contiene enunciados indemostrables entonces lo que Gödel nos ha mostrado es que la matemática no es sólo una religión, sino que es la única religión que puede demostrar por sí misma que lo es.

FÉLIX BOU MOLINER

Quiero agradecer a los editores la invitación que me brindaron para escribir estas páginas. Y también quiero agradecer los comentarios realizados al manuscrito original por Josep Maria Font, Óscar Ledesma y Ventura Verdú. A todos ellos gracias.

Bibliografía

Para escribir la parte biográfica de Gödel he consultado básicamente [Da1], [Da2], [Reg] y [Wan]. Las fuentes usadas a propósito del teorema de Gödel han sido principalmente [Cro] y [Men], y en menor medida [Da1], [Nag], [Pla], [Re1], [Re2].
Las obras señaladas con asterisco son aquellas que requieren una familiaridad con el aparato matemático de la lógica, mientras que el resto son principalmente de carácter divulgativo.

[Bar] John D. Barrow. *¿Por qué el mundo es matemático?*. Grijalbo Mondadori, 1997.
[Cro] J. N. Crossley. *¿Qué es la lógica matemática?*. Tecnos, 1988[2].
[Da1] John W. Dawson, Jr. *Gödel y los límites de la lógica*. Investigación y Ciencia **275** (agosto 1999), 58-63.
[Da2] John W. Dawson, Jr. *Kurt Gödel in Sharper Focus*. The mathematical intelligencer vol. 6, no. 4 (1984), 9-17.
[Hof] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach, un eterno y grácil bucle*. Tusquets, 1987.
[Men]*Elliott Mendelson. *Introduction to mathematical logic*. Wadsworth & Brooks/Cole, 1987[3].
[Mos]*Jesús Mosterín. *Kurt Gödel: Obras completas*. Alianza, 1989[2].
[Nag] Ernest Nagel y James R. Newman. *El teorema de Gödel*. Tecnos, 1994[2].
[Pla] *Josep Pla i Carrera. *Kurt Gödel: dos teoremes i una metodología*. Actes II Congrés Català de Lògica Matemàtica (1983), 15-21.
[Re1] Javier Redal. *Esto no es el título*. Nueva Dimensión revista de ciencia ficción y fantasía **135** (junio 1981), 96-99.
[Re2] Javier Redal. *"Es el título de este artículo" es el título de este artículo*. Nueva Dimensión revista de ciencia ficción y fantasía **135** (junio 1981), 119-138.
[Reg] Ed Regis. *¿Quién ocupó el despacho de Einstein?*. Anagrama, 1992, 64-91.
[Rod] Francisco Rodríguez Consuegra. *Kurt Gödel. Ensayos inéditos*. Biblioteca Mondadori **42**, 1994.
[Wan] Hao Wang. *Reflexiones sobre Kurt Gödel*. Alianza Universidad, 1987.

[25] El lector interesado en cuestiones filosóficas encontrará interesantes los libros [Rod] y [Wan].
[26] Aparece en [Bar, pág. 77].