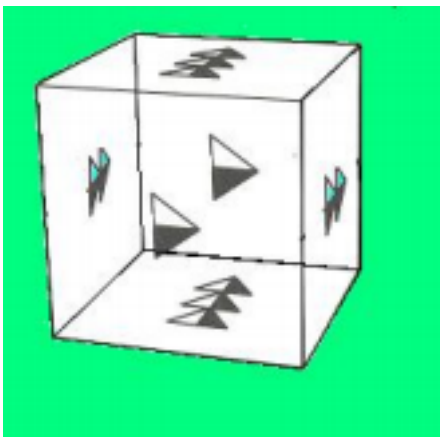


Geometrías de un Universo

Rubén Conejo Ruiz
Rubén Fernández Jurado
David García Curbelo
Elora Prados Raya
Miguel Ángel Suárez Rojas

10 de junio de 2021

1. Razona que el 3-toro llano descrito en la figura tiene una geometría euclídea de dimensión 3



Ver que una geometría es euclídea es ver que efectivamente se cumple el 5º postulado de Euclides o, equivalentemente, que las geodésicas entre dos puntos son segmentos de rectas.

Para verlo vemos el 3-toro como el espacio topológico cociente de \mathbb{R}^3 con la relación de equivalencia R definida de la siguiente forma:

$$(x, y, z)R(x', y', z') \Leftrightarrow (x', y', z') = (x + z_1, y + z_2, z + z_3) \\ \text{con } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}.$$

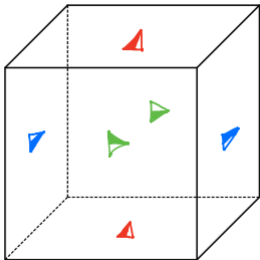
Intuitivamente, este 3-toro tendrá una geometría euclídea por heredarla de \mathbb{R}^3 , veamos que efectivamente es cierto. Si vemos a P y Q puntos del 3-toro como el conjunto de todos sus representantes podremos observar que estos siempre tienen las mismas coordenadas en los cubos de forma $[x, x + 1) \times [y, y + 1) \times [z, z + 1)$ a los que pertenecen (con $x, y, z \in \mathbb{Z}$).

Se tiene entonces que la distancia mas corta entre los dos conjuntos de puntos correspondientes a P y Q puede obtenerse tomando a P' , el representante de P en $[0, 1)^3$ y los 27 representantes de los cubos de la forma anterior adyacentes a este (entendiendo adyacentes como que la distancia entre ellos es cero, inclusive él mismo), pues así tenemos todas las posiciones relativas posibles candidatas a ser darnos una menor distancia.

Así pues, tomamos a Q' el punto más cercano de los 27 dados a P' , entonces la proyección del segmento que los une, que será un segmento en el 3-toro, es la geodésica que une a P y Q .

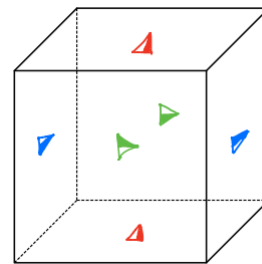
De forma intuitiva, una persona al mirar desde dentro del cubo hacia las distintas paredes vería sus pies si mira hacia arriba, su cabeza si mira hacia abajo, sus perfiles mira a los lados y su nuca si mira hacia delante o atrás (nunca vería su rostro pues al mirar hacia atras giraría la cabeza) pero sin ninguna deformación pues los rayos de luz dentro del cubo viajan como en \mathbb{R}^3 .

2. Describe otros dos universos tridimensionales obtenidos de un cubo por identificación de sus caras que tengan también geometría euclídea.



Haciendo la misma identificación que con el 3-toro pero invirtiendo una cara, podemos replicar un proceso análogo al anterior de ver al espacio dentro de \mathbb{R}^3 , solo que el cubo en vez estar repetido todo el rato, se va reflejando cuando avanza en la dirección en la que el pegado está girado, es decir, que al cruzar de un cubo a otro solo se cambia el sentido pero no hay ningún tipo de deformación. De cualquier forma, siguiendo un método similar al anterior, observamos que también es un espacio euclídeo tridimensional.

Haciendo la misma identificación que con el 3-toro pero invirtiendo ahora dos caras y haciendo un proceso análogo al anterior de ver al espacio dentro de \mathbb{R}^3 , solo que el cubo en vez estar repetido todo el rato, se va reflejando cuando avanza en las direcciones en la que el pegado está girado. Así, siguiendo un método similar al anterior, observamos que también es un espacio euclídeo tridimensional.



página 13

Calcula para cada uno de los triángulos esféricos (en \mathbb{S}_R^2) de la figura, la suma de sus ángulos y el área que encierran. Encuentra una fórmula que relacione la suma de los ángulos de un triángulo esférico y su área.

En un triángulo esférico de ángulos α, β y γ ; si extendemos los lados del mismo, obtendremos su triángulo antípoda, el cual notamos en clase por T_a . Conseguiremos de este modo tres dobles lunas, las cuales al colorearlas rellenan toda la esfera. Así:

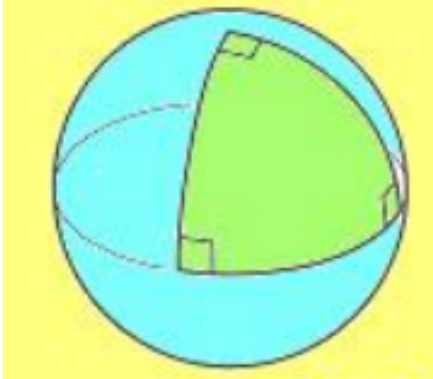
$$A(\alpha) + A(\beta) + A(\gamma) = 4\pi R^2 + 2A(T) + 2A(T_a)$$

$$4(\alpha R^2 + \beta R^2 + \gamma R^2) = 4\pi R^2 + 4A(T)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)R^2 = \pi R^2 + A(T)$$

$$A(T) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Una vez hallada la relación entre los ángulos del triángulo y el área, procedamos a calcular dichos elementos de cada uno de los triángulos esféricos del ejercicio. Notaremos por S a la suma de los ángulos del triángulo:



Cada ángulo mide $\pi/2$, por tanto, la suma de los ángulos será:

$$3 \cdot \pi/2 = 3\pi/2$$

Y, de este modo

$$A(T) = 3\pi/2 - \pi; A(T) = \pi/2$$

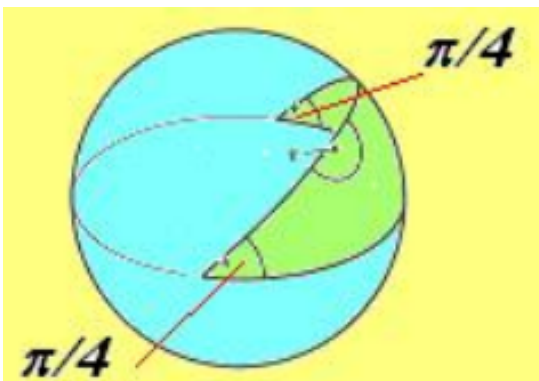
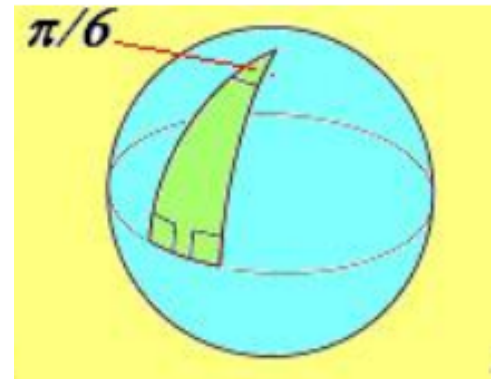
$S = 3\pi/2$	$A(T) = \pi/2$
--------------	----------------

$$\alpha = \pi/6, \quad \beta = \gamma = \pi/2$$

$$S = \pi/6 + \pi/2 + \pi/2 = 7\pi/6$$

$$A(T) = \pi/6 + \pi/2 + \pi/2 - \pi = \pi/6$$

$S = 7\pi/6$	$A(T) = \pi/6$
--------------	----------------



$$\alpha = \pi, \quad \beta = \gamma = \pi/4$$

$$S = \pi + \pi/4 + \pi/4 = 3\pi/2$$

$$A(T) = \pi + \pi/4 + \pi/4 - \pi = \pi/2$$

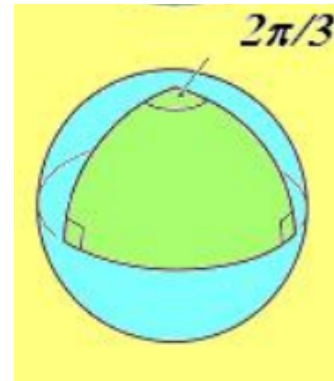
$S = 3\pi/2$	$A(T) = \pi/2$
--------------	----------------

$$\alpha = 2\pi/3, \quad \beta = \gamma = \pi/2$$

$$S = 2\pi/3 + \pi/2 + \pi/2 = 5\pi/3$$

$$A(T) = 2\pi/3 + \pi/2 + \pi/2 - \pi = 4\pi/6$$

$S = 5\pi/3$	$A(T) = 4\pi/6$
--------------	-----------------



$$\alpha = \pi, \quad \beta = \gamma = \pi/2$$

$$S = \pi + \pi/2 + \pi/2 = 2\pi$$

$$A(T) = \pi + \pi/2 + \pi/2 - \pi = \pi$$

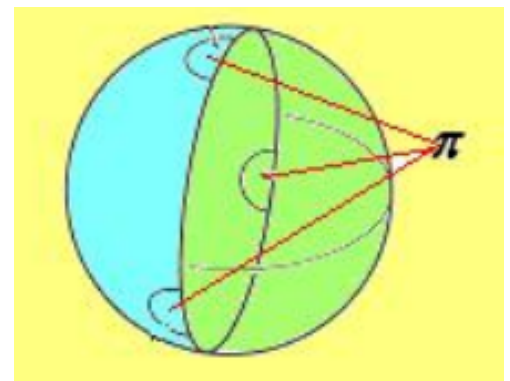
$S = 2\pi$	$A(T) = \pi$
------------	--------------

$$\alpha = \beta = \gamma = \pi$$

$$S = \pi + \pi + \pi = 3\pi$$

$$A(T) = \pi + \pi + \pi - \pi = 2\pi$$

$S = 3\pi$	$A(T) = 2\pi$
------------	---------------



(NOTA: suponemos $R=1$ en todos los casos)

1. Una sociedad de Planilandeses viven en una esfera de radio 1000 metros. La finca triangular de un granjero tiene por ángulos, 43.624° , 85.123° y 51.270° ¿Cuál es el área de la finca?

Si $\alpha = 43,624^\circ$, $\beta = 85,123^\circ$ y $\gamma = 51,270^\circ$. Usando la fórmula del área de un triángulo en una esfera de radio $r = 1000m$, se tiene que:

$$A(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot r^2 = 0,0002 * 9670\pi \cdot (1000m)^2 = 296,705\pi m^2.$$

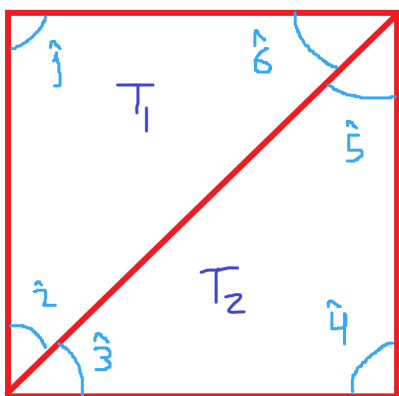
2. Un triángulo esférico de área $5410.52m^2$ tiene por ángulos 60.0013° , 60.007° y 60.0011° . ¿Cuál es el radio de la esfera?

Si $\alpha = 60,0013^\circ$, $\beta = 60,007^\circ$ y $\gamma = 60,0011^\circ$. Despejamos la fórmula del área del triángulo en una esfera:

$$\begin{aligned} A(T) &= (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A(T)}{\alpha + \beta + \gamma - \pi}} = \\ &= \sqrt{5410,520,00005222\pi} m = 5742,7101m. \end{aligned}$$

3. ¿Cuánto suman los ángulos de un polígono esférico de n lados?.

Supongamos, por simplicidad, que la esfera con la que estamos trabajando es de radio 1.



Comenzamos viendo el caso particular del cuadrado, a modo de ejemplo. Un cuadrado tiene 4 lados y 4 ángulos. Si lo triangulo, esto es, si trazo una de sus diagonales diviendo el mismo en dos triángulos, obtengo dos triángulos con 1 lado en común, como indica la figura. Sabemos que el área de un triángulo esférico, T , viene dada por

$$(\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2 = A(T),$$

con α, β, γ los ángulos del triángulo y R el radio de la esfera (en este caso $R = 1$).

Luego, para cada uno de los triángulos en el cuadrado, se tiene que la suma de sus ángulos menos π es el área del mismo, esto es,

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{6} - \pi = A(T_1),$$

$$\hat{3} + \hat{4} + \hat{5} - \pi = A(T_2),$$

lo que sumando ambas expresiones nos da

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} - 2\pi = L - 2\pi = A(T_1) + A(T_2) = A(C),$$

donde C es el cuadrado y L la suma de sus ángulos. En conclusión, la suma de los ángulos del cuadrado esférico menos π es igual al área del cuadrado.

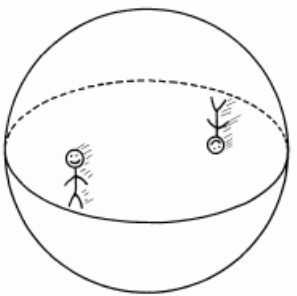
En general, para triangular un polígono de n vértices (y en consecuencia n lados), se necesitarán $n - 2$ triángulos (se puede demostrar). Triangulando dicho polígono y aplicando la fórmula del triángulo esférico a cada uno de los triángulos resultantes, igual que hemos hecho con el cuadrado, se obtiene, en definitiva,

$$L_P - (n - 2)\pi = A(P),$$

donde $L(P)$ es la suma de los ángulos interiores del polígono P y $A(P)$ su área.

página 20

Explica la siguiente visualización de \mathbb{P}^3 . ¿Es \mathbb{P}^3 orientable?



La 3-esfera vive en \mathbb{R}^4 y \mathbb{P}^3 se puede obtener tomando el hemisferio norte de esta 3-esfera e indentificando los puntos de la 2-esfera del diámetro con sus opuestos. Teniendo esto en cuenta podemos observar que la aplicación antípoda preserva la orientación (pues cambia el signo de cuatro, que es un número par, de coordenadas). Esto quiere decir que un ser que habitase este espacio y cruzase la 2-esfera diametral no vería alterada su orientación al abandonarla, lo que significa que la única región que podría generar problemas de orientabilidad no lo hace y, por lo tanto, P^3 es orientable.

Lo que la visualización dada nos quiere indicar es el hecho antes descrito de que, a pesar de que un ser que habitase P^3 cruzase el hemisferio no vería su orientación alterada, si bien todas sus coordenadas serían cambiadas de signo, es decir, que a pesar de que "se le diese la vuelta", mantendría su orientación.

página 33

1. En un plano hiperbólico de curvatura -1 ¿Cuál es el área de un triángulo de ángulos $\pi/3, \pi/4, \pi/6$?

En un triángulo hiperbólico T de ángulos α, β y γ

$$\rho^2 \pi = \rho^2(\alpha + \beta + \gamma) + A(T)$$

Por tanto

$$A(T) = \rho^2 \pi - \rho^2(\alpha + \beta + \gamma)$$

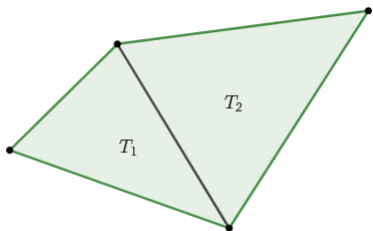
$$A(T) = \rho^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$$

De esta manera:

$$A(T) = (-1)^2(\pi - \pi/3 + \pi/4 + \pi/6) = \pi/4 u^2$$

2. ¿Cuánto suman los ángulos de un polígono hiperbólico de n lados?

Comencemos con $n = 3$. En este caso nuestro polígono será un triángulo hiperbólico; para el cual conocemos que la suma de sus ángulos es siempre menor que 180 .

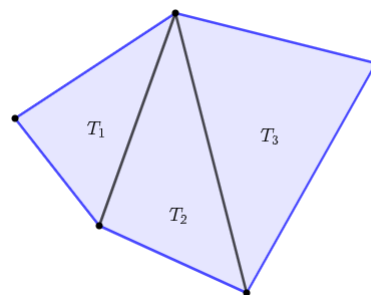


Para $n = 4$ tenemos un cuadrilátero, que podemos dividir en 2 triángulos. Por tanto, la suma de los ángulos del cuadrilátero será ahora:

$$S < 2(180) \rightarrow S < 360$$

Tomando ahora $n = 5$, podremos triangular el polígono en 3 triángulos y, de esta manera

$$S < 3(180) \rightarrow S < 540$$

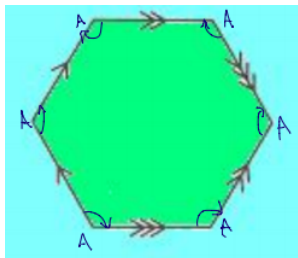


Así, podemos ver cómo un polígono de n lados lo podemos siempre triangular en $n - 2$ triángulos (visto también en ejercicio 3 de la página 17) y de ahí:

$$S_n < (n - 2)180$$

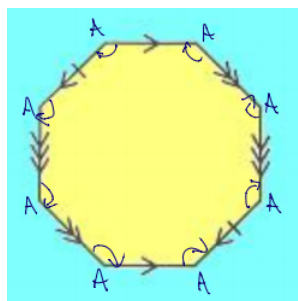
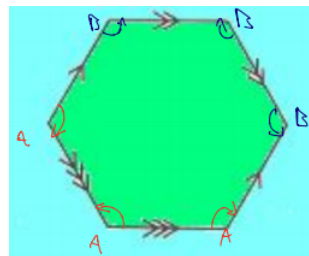
dónde S_n denota la suma de los ángulos de un polígono de n lados.

1. Para cada uno de los universos descritos en la figura, determina cómo se unen las esquinas. ¿Cuáles tienen geometría elíptica, hiperbólica o euclídea?



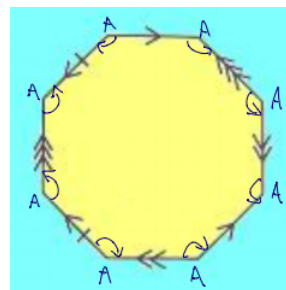
Todas las esquinas se identifican con un único vértice A . Al pasear alrededor de los ángulos vemos que deben recorrerse 6 para llegar al mismo punto, luego los ángulos deben ser de $\frac{\pi}{3}$ para cerrar el recorrido, por lo que tiene geometría hiperbólica.

Las esquinas se identifican con 2 vértices. Tal y como se ve en el dibujo, 3 son el vértice A y 3 son el vértice B . Si se empieza a pasear alrededor del vértice inicial del lado 2 recorreremos 3 ángulos, luego los ángulos deben ser de $\frac{2\pi}{3}$, luego creo un disco alrededor de B y, análogamente, lo hago alrededor del vértice A , por lo que la geometría es euclídea.



Todas las esquinas se identifican con un único vértice A . Al pasear alrededor de los ángulos vemos que deben recorrerse 8 para llegar al mismo punto, luego los ángulos deben ser de $\frac{\pi}{4}$ para cerrar el recorrido, por lo que tiene geometría hiperbólica.

Todas las esquinas se identifican con un único vértice A . Al pasear alrededor de los ángulos vemos que deben recorrerse 8 para llegar al mismo punto, luego los ángulos deben ser de $\frac{\pi}{4}$ para cerrar el recorrido, por lo que tiene geometría hiperbólica.



2. Determina cuál es la geometría de un universo que sea suma conexa de m toros con $m \geq 2$.

Si se tiene un m -toro y cortamos la superficie en $2m$ -ágonos tendremos que la suma de sus ángulos es mayor que 2π , en cuyo caso tendremos puntos opuestos a cónicos, luego extendemos los $2m$ -ágonos en el plano hiperbólico para que la suma de sus ángulos sea 2π . Entonces tendremos que la suma conexa de m toros con $m \geq 2$ tendrá geometría hiperbólica.