Tarea construcciones geométricas

Rubén Conejo Ruiz
Rubén Fernández Jurado
David García Curbelo
Elora Prados Raya
Miguel Ángel Suárez Rojas

19 de marzo de 2021

Usando realizaciones elementales y algunos resultados de geometría euclídea plana, justifica que las siguientes construcciones pueden hacerse solo con regla y compás:

1. Básicas

Construcción 1 [Triángulo equilátero sobre un segmento dado] *Dado un segmento $\overline{AB}$ construir un punto C tal que ΔABC es equilátero.*

Construcción 2 [Copiando un segmento dado a otro con punto final dado] *Dado un segmento $\overline{AB}$ y un punto C construir un punto X tal que $\overline{AB} = \overline{XC}$.*

Construcción 3 [Cortando un segmento de otro dado] *Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tales que $\overline{AB} > \overline{AB}$, construir un punto E en el interior de $\overline{CD}$ tal que $\overline{CE} \cong \overline{AB}$.*

Construcción 4 [Bisecando un ángulo] *Dado un ángulo $\angle ABC$, construir un ángulo de medida $\frac{1}{2}\angle ABC$.*

Construcción 5 [Mediatriz de un segmento] *Construir la mediatriz de un segmento dado.*

Construcción 6 [Perpendicular a través de un punto en una recta] *Dada una recta r y un punto $A \in r$, construir la recta perpendicular a r que pasa por A.*

Construcción 7 [Perpendicular a través de un punto fuera de una recta] *Dada una recta r y un punto $A \notin r$, construir la recta perpendicular a r que pasa por A.*

Construcción 8 [Triángulo con longitudes de lados dada] *Dados tres segmentos tales que la longitud del mayor es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Construir un triángulo de lados congruentes a los tres segmentos dados.*

Construcción 9 [Copiando un triángulo a un segmento dado] *Dado ΔABC y un segmento $\overline{DE}$ congruente a $\overline{AB}$, construir un punto F sobre uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{DE}$ tal que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.*

Construcción 10 [Copiando un ángulo a un rayo dado] *Dado un ángulo propio $\angle ab$, un rayo $\overrightarrow{r}$ y un semiplano de la recta $\overleftrightarrow{r}$, construir el rayo $\overrightarrow{s}$ con el mismo punto final que $\overrightarrow{r}$ quedando en el semiplano dado de $\overleftrightarrow{r}$ y tal que $\angle rs \cong \angle ab$.*

Construcción 11 [Copiando un cuadrilátero convexo a un segmento dado] *Dado un cuadriltáero convexo $ABCD$, un segmento $\overline{EF}$ congruente a $\overline{AB}$ y un semiplano de $\overleftrightarrow{EF}$, construir punto G y H sobre el semiplano dado tales que $ABCD \cong EFGH$*

Construcción 12 [Rectángulo con longitudes de lados dada] *Dados dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ y un semiplano de $\overleftrightarrow{AB}$, construir puntos C y D sobre dicho semiplano tal que $ABCD$ es un rectángulo con $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.*

Construcción 13 [Cuadrado sobre un segmento dado] *Dado un segmento $\overline{AB}$ y un semiplano de $\overleftrightarrow{AB}$, construir puntos C y D sobre dicho semiplano tal que $ABCD$ es un cuadrado.*

Construcción 14 [Paralela a una recta a través de un punto exterior] *Dada una recta r y un punto $A \in r$, construir la recta paralela a r que pasa por A.*

2. Involucrando razones geométricas

Construcción 15 [Cortando un segmento en n partes iguales] *Dado un segmento $\overline{AB}$ y un entero $n \geq 2$, construir puntos $C_1, \ldots, C_{n-1}$ intermedios $A¡C_1 < \ldots, C_{n-1} < B$ tales que $AC_1 = C_1C_2 = \ldots = C_{n-1}B$.*

Construcción 16 [Cortando un segmento en una razón proporcional a su longitud] *Dado un segmento $\overline{AB}$ y un racional $x = m/n$ entre 0 y 1, construir un punto D entre A y B tal que $\overline{AD} = x\overline{AB}$.*

Construcción 17 [Media geométrica de dos segmentos] *Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, construir un tercer segmento que sea su media geométrica.*

Construcción 18 [La razón áurea] *Dados un segmento $\overline{AB}$ construir un punto E en el interior de $\overline{AB}$, tal que AB/AD es el número áureo.*

3. Involucrando áreas

Construcción 19 [Parelologramo con igual área que un triángulo dado] *Dado un triángulo ΔABC y un ángulo propio $\angle rs$, construir un paralelogramos con la misma área que ΔABC y con uno de los ángulos congruentes $\angle rs$.*

Construcción 20 [Rectángulo con área y arista dadosa] *Dado un rectángulo $ABCD$, un segmento $\overline{EF}$ y un semiplano de $\overleftrightarrow{EF}$, construir un nuevo rectángulo con la misma área que $ABCD$ con $\overline{EF}$ como uno de sus lados y con el lado opuesto sobre el semiplano dado.*

Construcción 21 [Cuadratura de un rectángulo] *Dado un rectángulo $ABCD$, construir un cuadrado con la misma área que $ABCD$.*

Construcción 22 [Cuadratura de un polígono] *Dado un polígono convexo, construir un cuadrado con la misma área que dicho polígono.*

Construcción 23 [Duplicación de un cuadrado] *Dado un cuadrado, construir otro con área el doble que el original.*

4. Circunferencias destacadas

Construcción 24 [Centro de una circunferencia] *Dado una circunferencia, construir su centro.*

Construcción 25 [Circunferencia inscrita a un triángulo] *Dado un triángulo, construir su circunferencia inscrita.*

Construcción 26 [Circunferencia circunscrita a un triángulo] *Dado un triángulo, construir su circunferencia circunscrita.*

5. Polígonos regulares

Construcción 27 [Cuadrado inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el cuadrado inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

Construcción 28 [Pentágono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el pentágono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

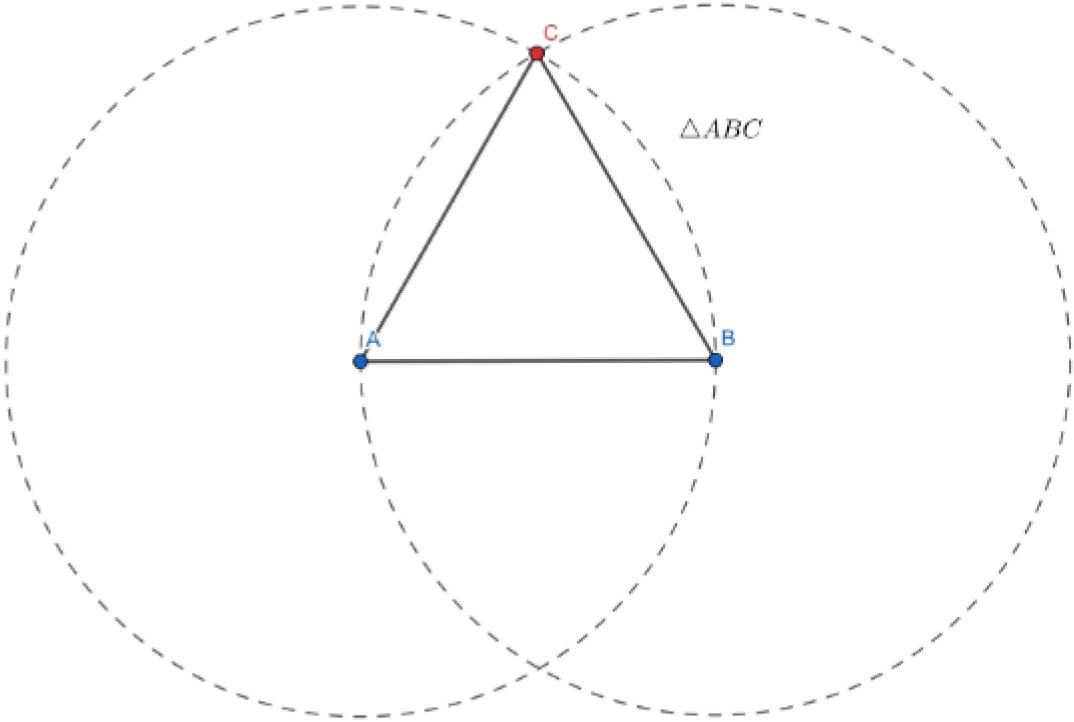
Construcción 29 [Hexágono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el hexágono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

Construcción 30 [Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el triángulo equilátero inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

Construcción 31 [Octógono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el octógono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

Construcción 32 [Pentadecágono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el pentadecágono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

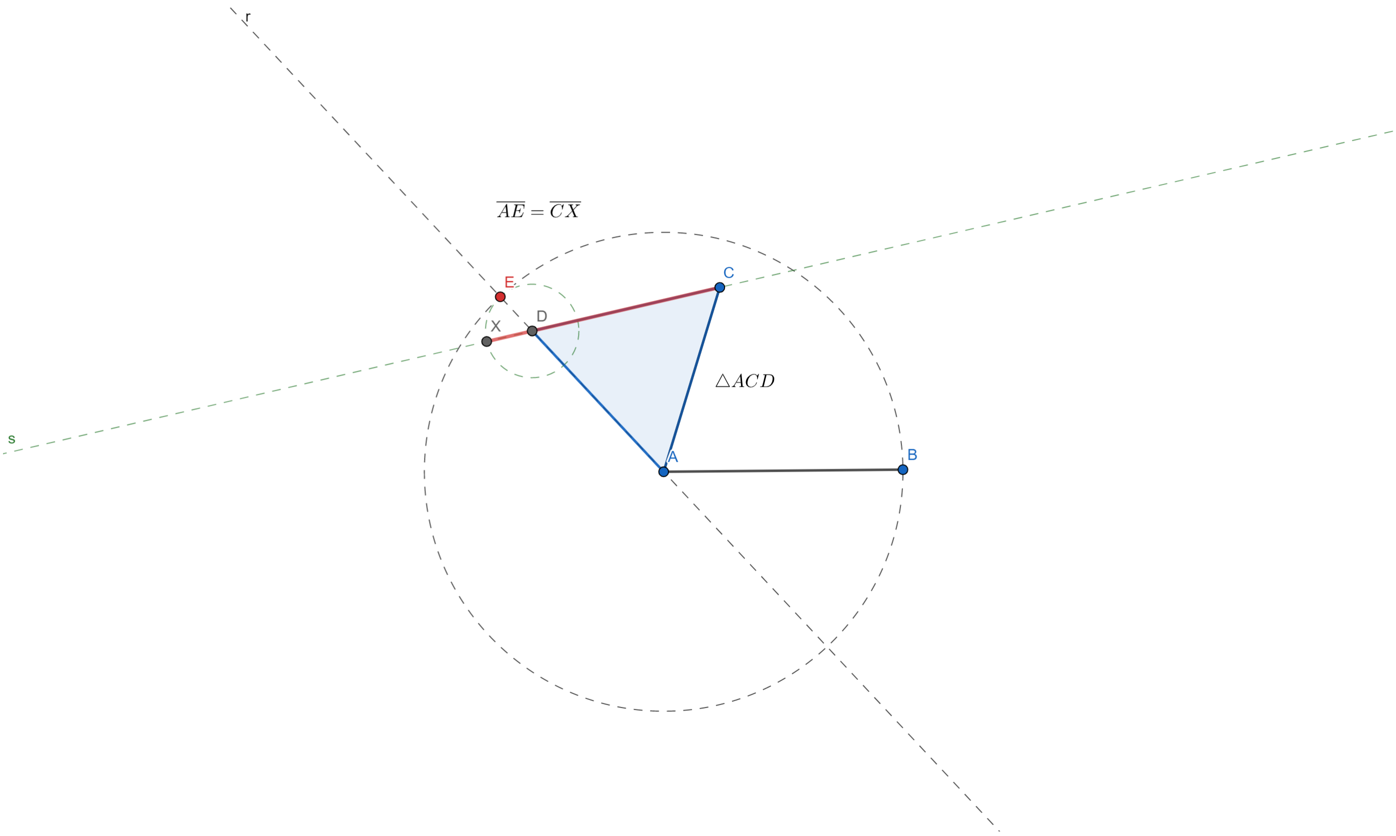
Construcción 1 [Triángulo equilátero sobre un segmento dado] *Dado un segmento $\overline{AB}$ construir un punto C tal que $\triangle ABC$ es equilátero.*



Tomamos el segmento de extremos A y B, $\overline{AB}$. A continuación trazamos dos circunferencias, una de centro A y radio $\overline{AB}$, y la otra con centro en B y del mismo radio. Ambas circunferencias se cortan en un punto que equidista de los puntos A y B exactamente la longitud del segmento $\overline{AB}$, pues el punto de corte se encuentra en circunferencias con centro en mencionados extremos y de radio dicha longitud.

Si llamamos pues C al punto de intersección de ambas circunferencias y trazamos los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, obtenemos un triángulo equilátero, el $\triangle ABC$.

Construcción 2 [Copiando un segmento dado a otro con punto final dado] *Dado un segmento $\overline{AB}$ y un punto C construir un punto X tal que $\overline{AB} = \overline{XC}$.*

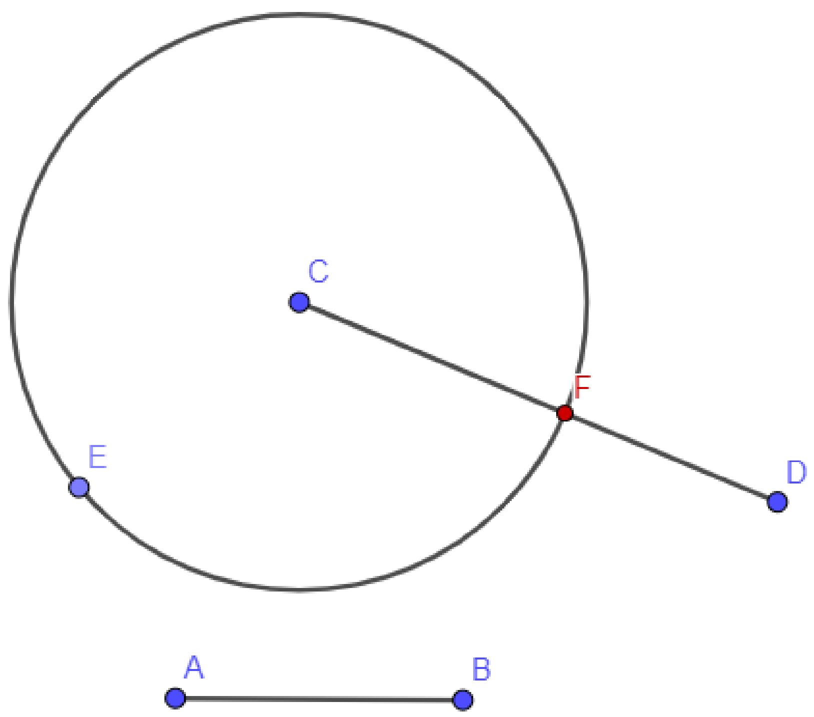


Partimos del segmento $\overline{AB}$ y el punto C. Trazamos el segmento $\overline{AC}$ y construimos, de acuerdo a como hemos visto en la construcción [1], el triángulo equilátero de lado $\overline{AC}$.

Trazamos ahora la recta que pasa por A y D, r. Dibujamos a continuación la circunferencia de centro A y radio $\overline{AB}$, y calculamos la intersección con la recta r. A este punto lo llamamos E. Por como hemos obtenido este punto (intersecando una recta que pasa por A y una circunferencia de radio $\overline{AB}$), claramente $\overline{AB} = \overline{AE}$.

Por último, trazamos una nueva circunferencia de centro D y radio $\overline{DE}$, y la intersecamos con la recta que pasa por C y D, s. Por ser el triángulo $\triangle ACD$ equilátero, $\overline{AC} = \overline{DC}$, por lo que $\overline{AE} = \overline{CX}$. Considerando lo que habíamos concluido antes, tenemos que $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{CX}$, obteniendo así el punto que queríamos, X.

Construcción 3 [Cortando un segmento de otro dado] *Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tales que $CD > AB$, construir un punto E en el interior de $\overline{CD}$ tal que $\overline{CE} \cong \overline{AB}$.*

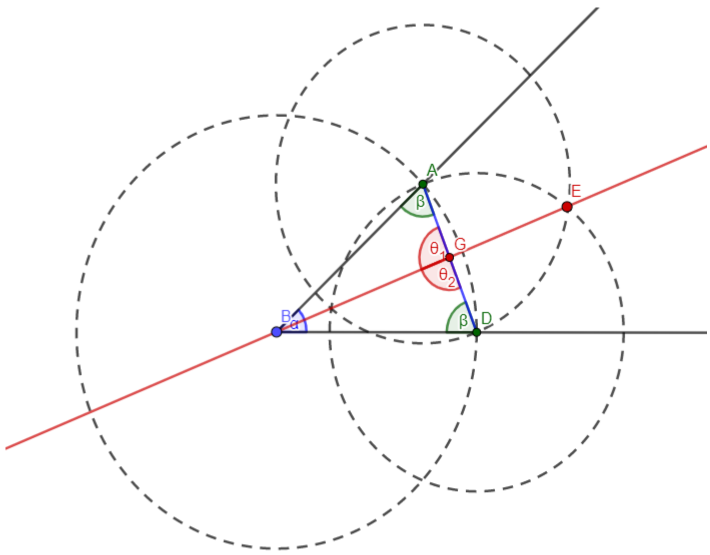


Partiendo del segmento $\overline{AB}$, obtenemos un punto E a distancia AB de C usando la construcción [2].

Trazamos una circunferencia de centro C y radio $CE = AB$.

Como $CD > AB$, existe un corte de esta última circunferencia con el segmento $\overline{CD}$, al que denominaremos F, que será el punto buscado, pues $\overline{CF} \cong \overline{AB}$ ya que CF=AB por construcción de F.

Construcción 4 [Bisecando un ángulo] *Dado un ángulo $\angle ABC$, construir un ángulo de medida $\frac{1}{2}\angle ABC$.*



Empezamos trazando una circunferencia de radio arbitrario y centro B, llamamos A y D a los cortes con las semirectas que forman el ángulo α.

El siguiente paso es trazar circunferencias de radio AD desde A y B, denominamos a uno de los cortes de ambas E y trazamos la recta que pasa por E y B.

Denominamos G al corte de dicha recta con el segmento $\overline{AD}$. Queremos ahora ver que $\triangle ABG \cong \triangle GBD$.

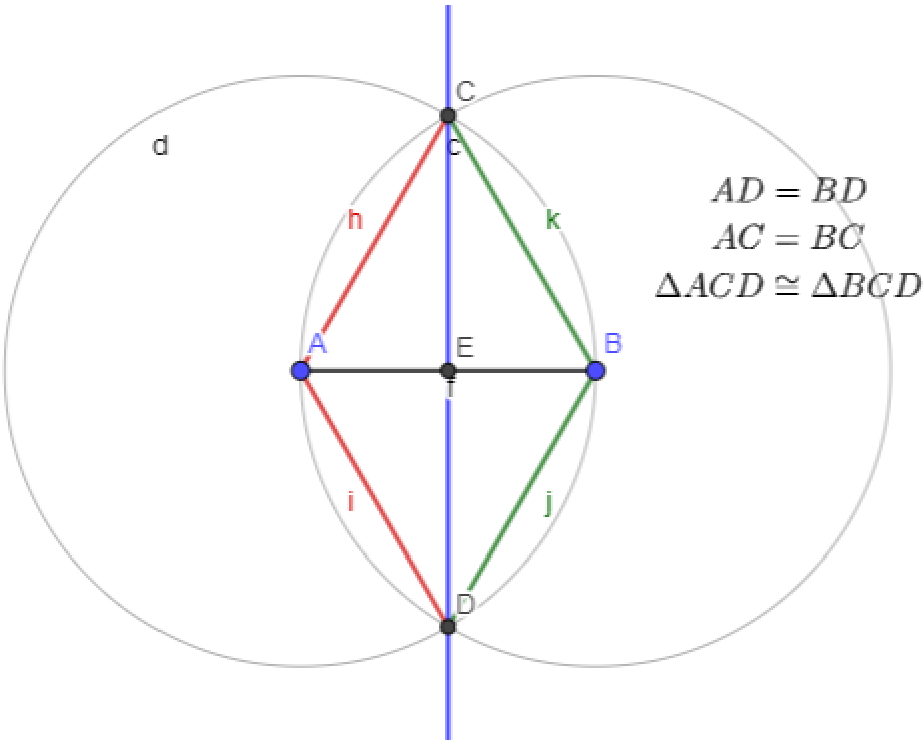
Para ver esto, notamos que $\triangle ABD$ es isósceles por construcción, luego sus ángulos con vértices en A y D son iguales y tendrán un valor de $\beta = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$, entonces, aplicando la implicación LAL, $\triangle ABG \cong \triangle GBD$, pues, además de lo dicho, es obvio que dos de sus lados son iguales.

Por todo lo anterior, se tiene que los angulos de sendos triángulos de vértice G, θ_1 y θ_2, son iguales y, como sumados tienen un valor de π, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Teniendo en cuenta lo último que hemos obtenido, como la suma de todos los ángulos de un triángulo vale π, se tiene que, si θ es el ángulo de $\triangle ABG$ en el vértice B:

$$\pi = \theta + \beta + \theta_1 = \theta + \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2}.$$

Construcción 5 [Mediatriz de un segmento] *Construir la mediatriz de un segmento dado.*



A partir del segmento $\overline{AB}$ construimos dos circunferencias con centro en A y en b y radio $\overline{AB}$. Ambas circunferencias se cortan en los puntos C y D.

Los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son iguales como se indica en la imagen por construcción (son los radios de las circunferencias); y del mismo modo lo son $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Por tanto $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ por el criterio de congruencia LLL (el lado $\overline{CD}$ es común a ambos triángulos).

De este modo podemos razonar que $\measuredangle ACE \cong \measuredangle BCE$ ya que al ser congruentes los triángulos, todos sus ángulos son iguales.

Teniendo ahora en cuenta el criterio de congruencia LAL obtenemos $\Delta ACE \cong \Delta BCE$, lo que nos permite afirmar $\overline{AE} = \overline{BE}$. Así, vemos que la recta $\overline{CD}$, que pasa por el punto E, corta al segmento $\overline{AB}$ por la mitad, por lo cual efectivamente es la mediatriz de dicho segmento.

Por último, nos queda demostrar que es perpendicular al segmento $\overline{AB}$. Para ello nos fijamos en los trángulos $\Delta ACE \cong \Delta BCE$, que como ya hemos visto previamnete son congruentes, por tanto podemos afirmar $\measuredangle AEC \cong \measuredangle BEC$. Tales ángulos miden $90°$ y, por definición de recta perpendicular concluimos que es ortogonal.

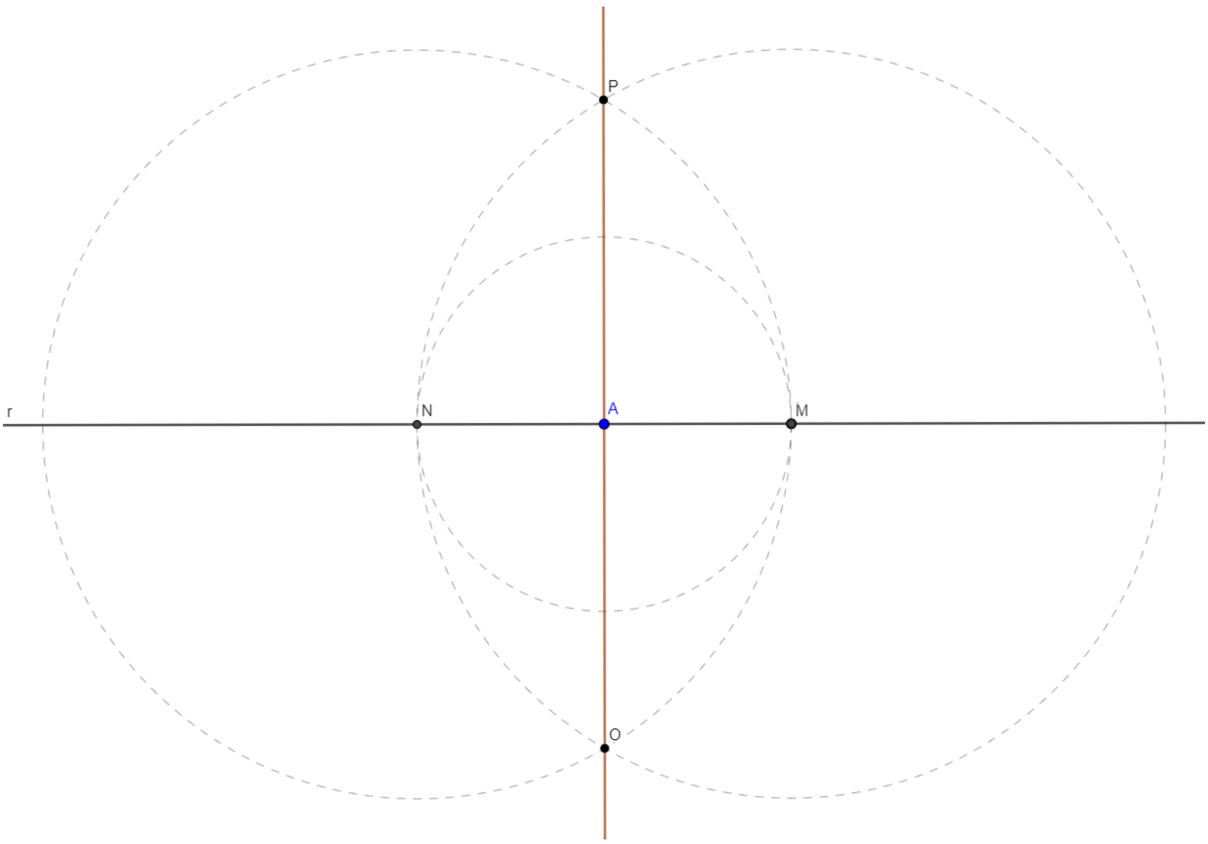
Construcción 6 [Perpendicular a través de un punto en una recta] *Dada una recta r y un punto $A \in r$, construir la recta perpendicular a r que pasa por A.*

Para la construcción del ejercicio, como lo que buscamos es la perpendicular de r que pasa por A, también lo podemos considerar como construir una mediatriz que pase por dicho punto. Para ello hayamos dos puntos equidistantes de A y que pertenezcan a la recta r mediante una circunferencia de radio arbitrario, la cual interseca a la recta en dos puntos que denotamos por N y M.

A partir de estos dos puntos construimos la mediatriz mediante el proceso visto en la construcción anterior [5]. Trazamos dos circunferencias con centros en N y M con radio $\overline{NM}$ para ambas, las cuales se intersecan en dos puntos externos a la recta r que denotamos por O y P.

Para finalizar la construcción solo falta trazar la recta que pasa por A, O y P, la cual es la recta perpendicular a r que andábamos buscando.

Se aporta imagen de la resolución:



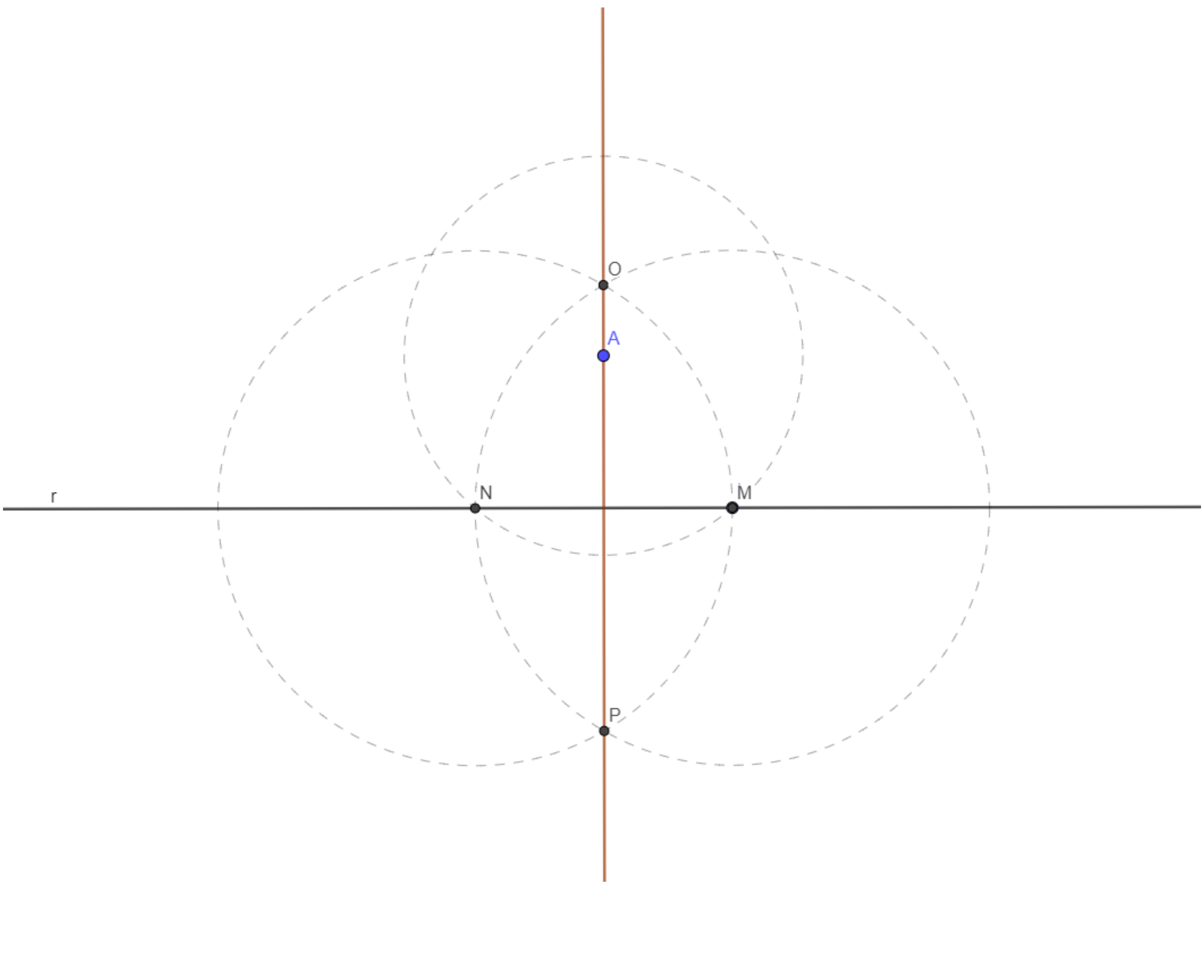
Construcción 7 [Perpendicular a través de un punto fuera de una recta] *Dada una recta r y un punto $A \notin r$, construir la recta perpendicular a r que pasa por A.*

Para la construcción del ejercicio, tomamos primero una circunferencia con centro en A y radio mayor que la distancia del punto A a nuestra recta r. Dicha circunferencia presentará dos puntos de corte con la recta r, que denotaremos por N y M, respectivamente.

Podemos ver fácilmente que el triángulo ΔANM es un triángulo isósceles, ya que tiene los lados $\overline{AN}$ y $\overline{AM}$ iguales, y por ello su altura coincide con la perpendicular que andamos buscando (que pasa precisamente por el punto medio entre N y M, y nuestro punto A dado).

Para calcular la mediatriz de los puntos N y M trazamos dos circunferencias con centro en N y M y radio NM para ambas. Obtenemos así dos puntos de corte entre las dos circunferencias, que denotaremos por O y P, los cuales están alineados con el punto A, y trazando ahora una recta que pase por los puntos O, P y A, tenemos la perpendicular a la recta r que andábamos buscando.

Se aporta imagen de la resolución:



Construcción 8 [Triángulo con longitudes de lados dada] *Dados tres segmentos tales que la longitud del mayor es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Construir un triángulo de lados congruentes a los tres segmentos dados.*

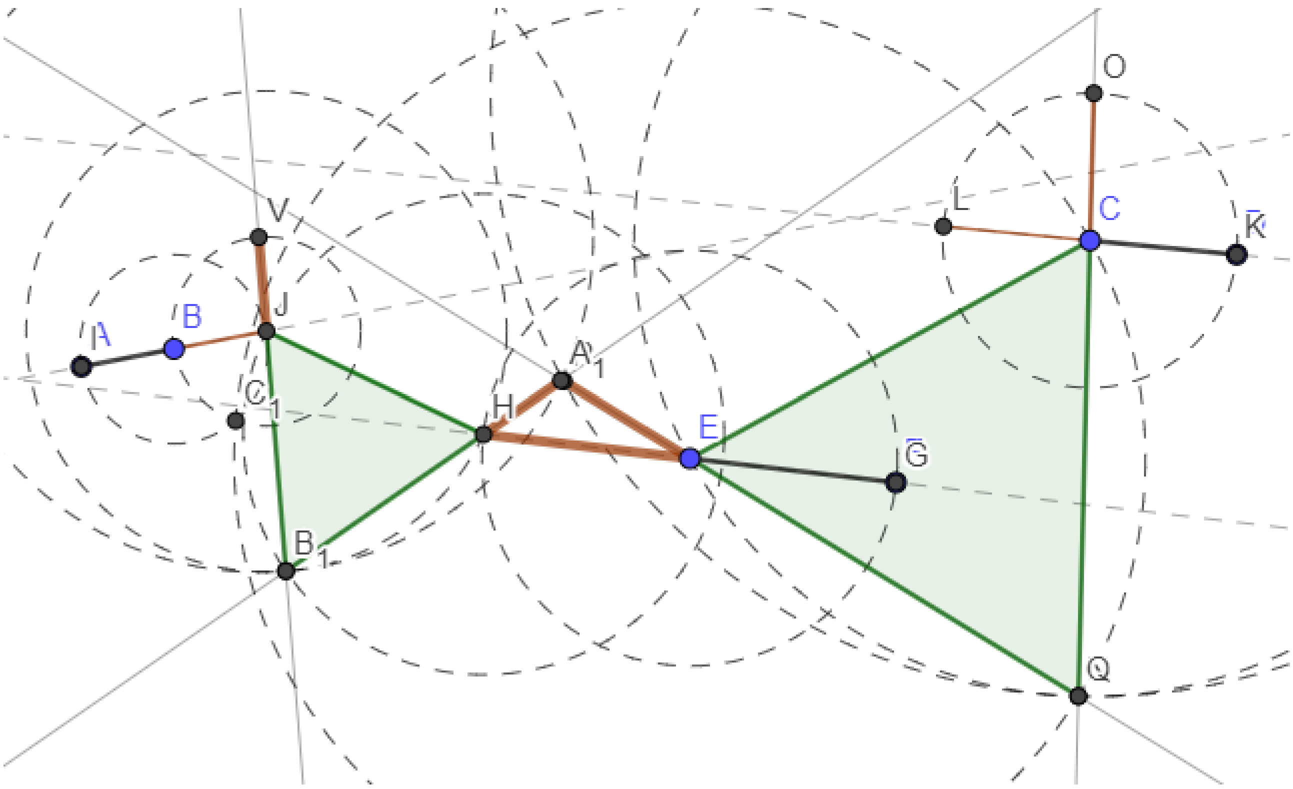
Comenzamos con tres segmentos dados: $\overline{AB}$, $\overline{CK}$ y $\overline{EG}$.

Ahora vamos a sacar segmento congruente a cada uno de esos segmentos. Explicamos el primero y los demás se hacen de forma análoga.

Para calcular un segmento congruente al $\overline{EG}$ hemos construido la circunferencia con centro en E y radio el módulo de $\overline{EG}$.Es fácil observar que la recta que une a los puntos E y G corta a la circunferencia con centro en E. Calculamos la intersección de ambas cosas y sale como resultado el punto H. El segmento $\overline{EG}$ es congruente con el muevo segmento formado por $\overline{HE}$

Ahora vamos a trasladar el segmento inicial $\overline{AB}$. Para ello, vamos a sacar el segmento $\overline{BJ}$ de la forma que hemos explicado anteriormente para el segmento $\overline{HE}$. Una vez obtenido vamos a trasladar el segmento $\overline{BJ}$ al segmento congruente con el $\overline{VJ}$. Este segmento $\overline{VJ}$ vamos a trasladarlo al punto H y formara uno de los catetos para el triangulo que queremos buscar. Para ello vamos a crear el poligono regular de 3 lados que tiene como uno de sus vértices el punto H. Tomamos la circunferencia de centro en V y radio el segmento $\overline{VB}$. SI ahora trazamos la recta que pasa por uno de las aristas de nuestro polígono regular (la que pasa justo por BH). Tenemos que calcular el punto de intersección de la recta anterior con la circunferencia de centro J y radio $\overline{VJ}$. Si unimos el punto resultante llamada A1 y el punto H ya tenemos el segmento $\overline{HA1}$ que es congruente al segmento inicial dado $\overline{AB}$

Ya tendríamos dos lados del triángulo pedido. Para trasladar el último segmento $\overline{CK}$ tenemos que hacer lo mismo y así obtenemos el segmento $\overline{EA1}$ y el triángulo marrón es el triángulo pedido.



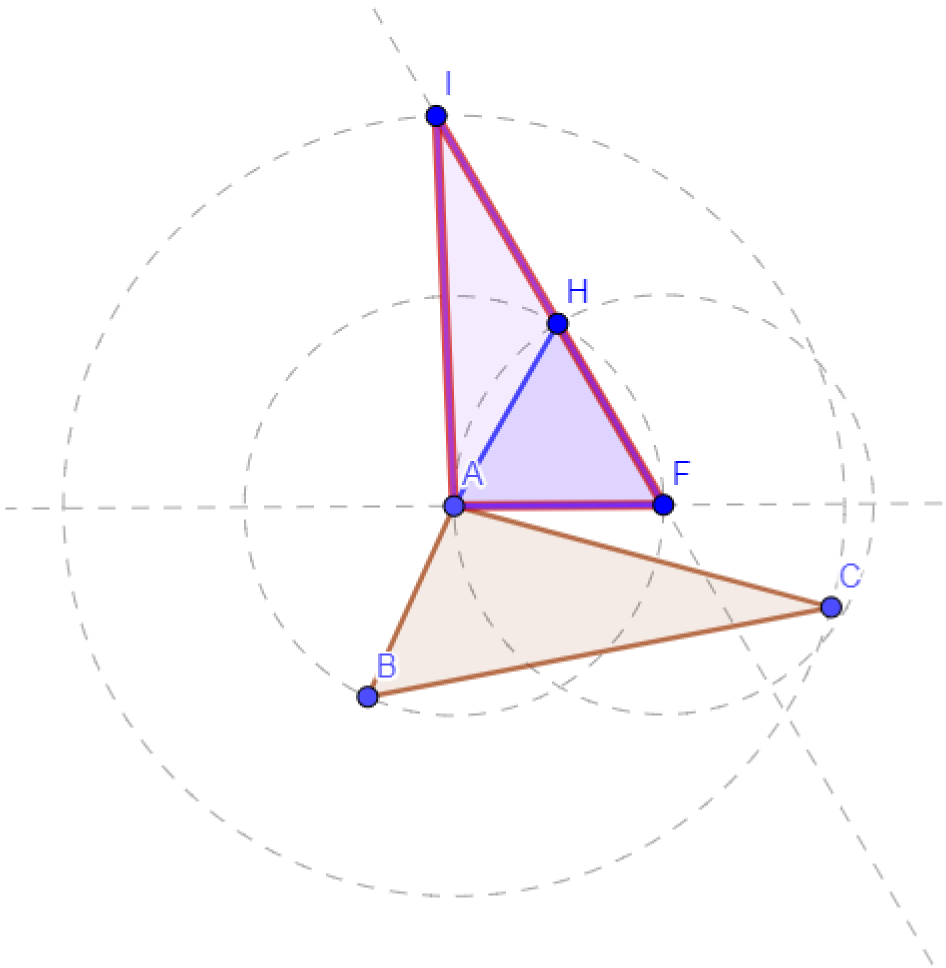
Construcción 9 [Copiando un triángulo a un segmento dado] *Dado ΔABC y un segmento $\overline{DE}$ congruente a $\overline{AB}$, construir un punto F sobre uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{DE}$ tal que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.*

Partimos del triángulo formado por ΔABC. Trazamos una circunferencia con centro en A y radio el segmento $\overline{AB}$, es así como obtenemos un segmento $\overline{AF}$ congruente al segmento $\overline{AB}$ como queríamos.

Ahora lo que tenemos que hacer es trasladar el segmento $\overline{AC}$ al vértice de A (se puede observar la forma de hacerlo en la construcción [8]).

Una vez trasladado, tendremos que por el postulado Lado-Ángulo-Lado ambos triángulos son congruentes ya que el ángulo en A de ambos triángulos coinciden y tenemos dos segmentos que también son congruentes (el segmento $\overline{AF} = \overline{AB}$ y también $\overline{AC} = \overline{AI}$). Es así como obtendríamos el triangulo ΔAFI congruente al triángulo ΔABC.

ACLARACIÓN: El punto I es el punto que nos dice el enunciado y las recta que me divide en dos semiplanos es la que pasa por los puntos A y F de la figura.



Construcción 10 [Copiando un ángulo a un rayo dado] *Dado un ángulo propio $\angle ab$, un rayo $\overrightarrow{r}$ y un semiplano de la recta $\overleftrightarrow{r}$, construir el rayo $\overrightarrow{s}$ con el mismo punto final que $\overrightarrow{r}$ quedando en el semiplano dado de $\overleftrightarrow{r}$ y tal que $\angle rs = \angle ab$.*

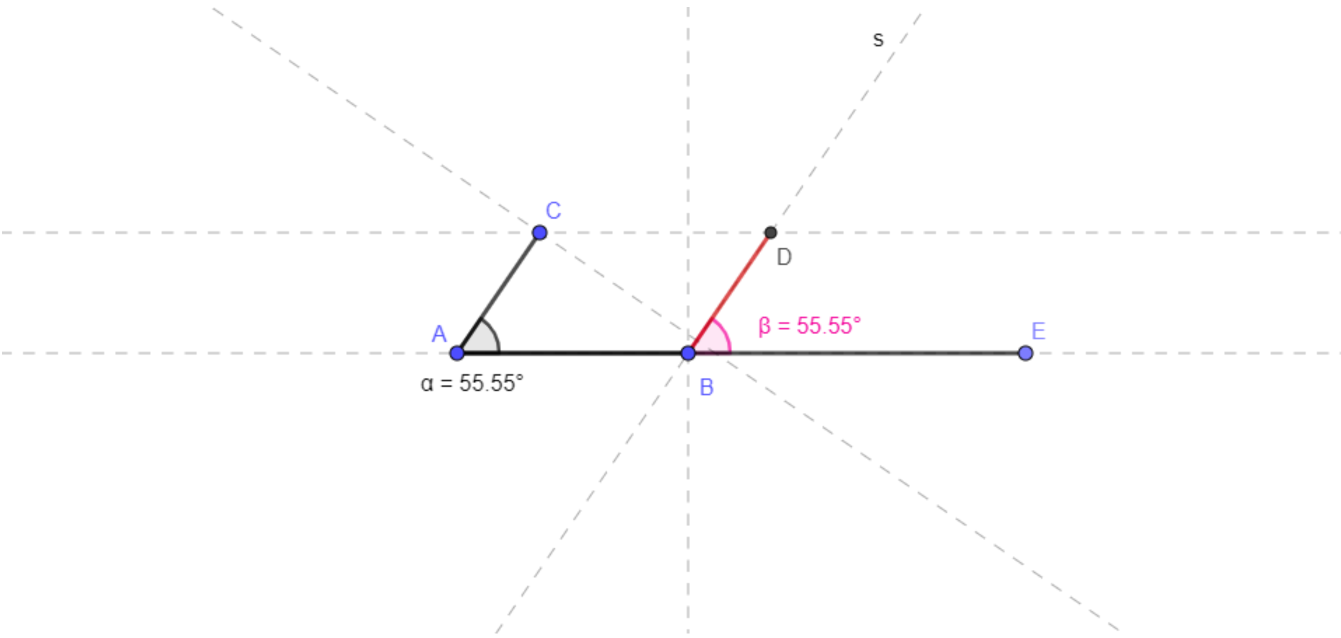
Comenzamos con un ángulo dado por los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ cuyo ángulo en A conocemos. Llamamos r a la recta que une los puntos A y B.

Para poder trasladar el ángulo conocido al punto final del segmento $\overline{AB}$ (cuyo punto final es B) y que pase por una nueva recta s vamos a hacer lo siguiente.

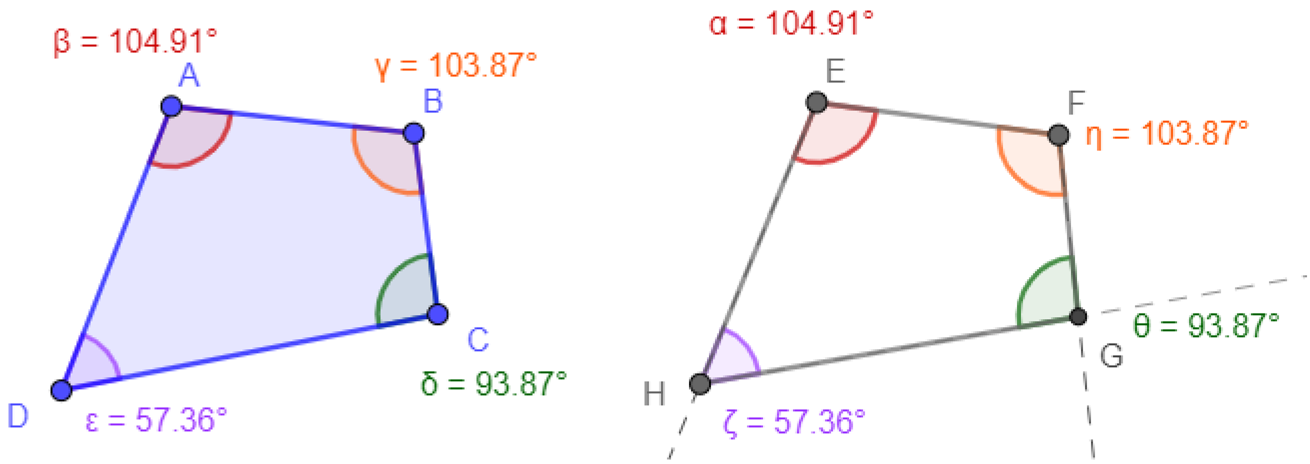
Sacamos una recta paralela al segmento $\overline{AB}$ (será la resultante de 2 rectas perpendiculares (CONSTRUCCIóN XX). La primera recta perpendicular que pase por B y la segunda que pase por el punto C. Ésta última recta (podemos llamarla H1) que pasa por C será paralela al segmento $\overline{AB}$ como queríamos.

Ahora vamos a repetir el proceso pero con el segmento $\overline{AC}$. Sacamos una recta paralela a ese segmento y que pase por el punto B. Para ellos vamos a sacar una recta perpendicular al segmento $\overline{AC}$ que pase por C, y luego otra recta perpendicular a ésta que pase por el punto B (podemos llamarla H2).

Por último, si intersecamos las rectas H1 y H2 obtenemos el punto D. Al hacer el segmento $\overline{BD}$ obtenemos en B un ángulo equivalente al que teníamos originalmente en A.



Construcción 11 [Copiando un cuadrilátero convexo a un segmento dado] *Dado un cuadriltáero convexo $ABCD$, un segmento $\overline{EF}$ congruente a $\overline{AB}$ y un semiplano de $\overleftrightarrow{EF}$, construir punto G y H sobre el semiplano dado tales que $ABCD \cong EFGH$.*

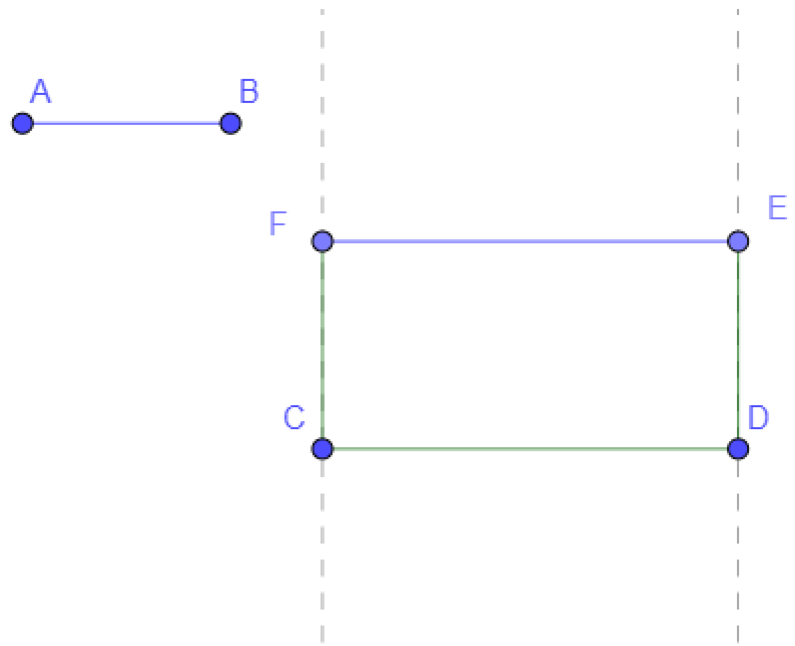


Para realizar esta construcción simplemente debemos emplear los procedimientos ya vistos en las construcciones [2] y [10].

Partimos del cuadrilátero $ABCD$ y del segmento $\overline{EF}$ como se indica en el enunciado. En primer lugar copiamos el ángulo γ en el punto F mediante la opción *'ángulo dada su amplitud'* de GeoGebra. Trazamos una semirecta auxiliar por el punto F y el otro punto auxiliar que ha resultado de copiar el ángulo previamente. A continuación copiamos ahora el segmento $\overline{BC}$ en el punto F; esto se hace pinchando en *'segmento de longitud dada'*.

Repetimos sucesivamente este procedimiento hasta obtener el polígono $EFGH \cong ABCD$. Esto es así ya que, como se puede observar en la figura, los cuatro ángulos son iguales y, por construcción, también lo son los lados.

Construcción 12 [Rectángulo con longitudes de lados dada] *Dados dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ y un semiplano de $\overleftrightarrow{AB}$, construir puntos C y D sobre dicho semiplano tal que $ABCD$ es un rectángulo con $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.*



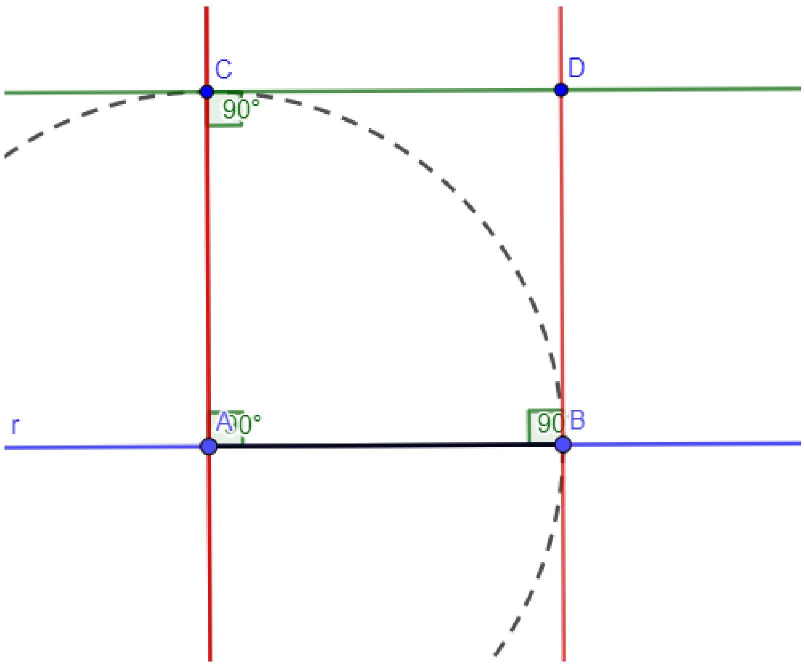
Podemos copiar segmentos dados y construir perpendicuales a una recta por un punto gracias a las construcciones [2] y [6] respectivamente. De este modo esta construcción es inmediata.

Partiendo del segmento EF, trazamos dos perpendiculares por cada uno de sus vértices, esto es, por E y F, que nos van a servir como rectas auxiliares. Para ello utilizamos la función *'perpendicular'* de GeoGebra y pinchamos en uno de los extremos y en el segmento. Repetimos la operación en el otro extremo del segmento.

Copiamos ahora el segmento dado AB en las dos rectas auxiliares que acacamos de dibujar, utilizamos la opción *'segmento de longitud dada'*. De este modo obtenemos los vértices C y D.

Finalmente unimos estos dos vértices pinchando en *'segmento'*, obteniendo el rectángulo $CDEF$.

Construcción 13 [Cuadrado sobre un segmento dado] *Dado un segmento AB y un semiplano de $\overrightarrow{AB}$, construir puntos C y D sobre dicho semiplano tal que $ABCD$ es un cuadrado.*



Usando la construcción [6], trazo perpendiculares a r, la recta que contiene a A y a B, a través de A y B.

Trazo ahora la cincunferencia de radio AB desde A y llamo D al corte de la componente conexa superior a r con la perpendicular que pasa por A.

Volviendo a usar la construcción [6], construyo una recta perpendicular a la recta que contiene a $\overline{AD}$ a través de D y llamo C a su corte con la perpendicular a r a través de B.

Sólo tenemos que ver que $ABCD$ es un cuadrado en el semiplano de $\overrightarrow{AB}$. Por una parte, los ángulos de vértices A, B y D suman $3\frac{\pi}{2}$ pues son todos ángulos rectos, por lo tanto, como la suma de los ángulos de un polígono de cuatro lados es 2π, el ángulo del vértice C es recto también, luego ya tenemos que $ABCD$ es un rectángulo, veamos que sus lados son iguales.

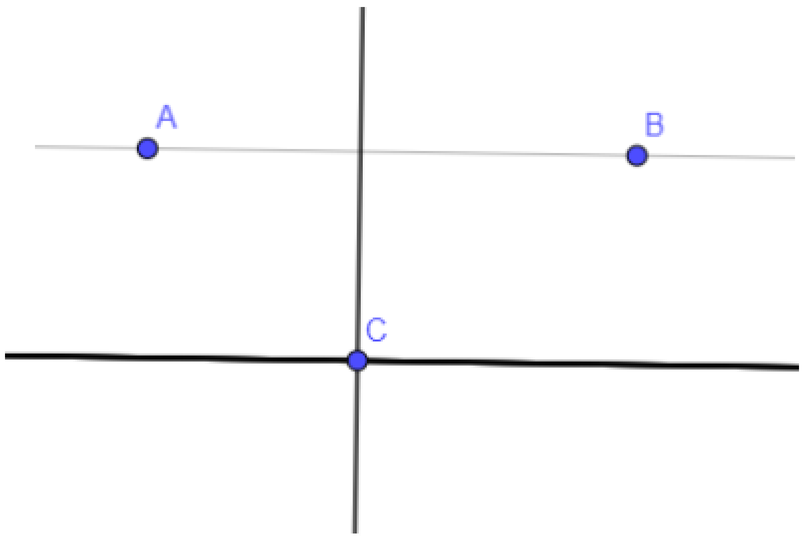
Notemos que, sin tener que probar nada más, ya sabemos que $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ porque $ABCD$ es un rectángulo, luego basta con ver que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, pero esto es obvio por construcción de D y, por lo tanto, $ABCD$ es un cuadrado.

Construcción 14 [Paralela a una recta a través de un punto exterior] *Dada una recta r y un punto C no perteneciente a r, construir la recta paralela a r que pasa por C.*

Comenzamos con la recta que pasa por los puntos A y B. Vamos a obtener una recta paralela como una recta perpendicular a una recta perpendicular.

Obtenemos la primera recta perpendicular como la recta que pasa por la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ que ya sabemos hacerlo.

Vamos a coger la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$. Una vez que obtenemos dicha recta, trazamos una recta perpendicular a la recta anterior y que pase por el punto C y ya tendrÃamos una recta que es paralela a la recta r y que pasa por el punto C.



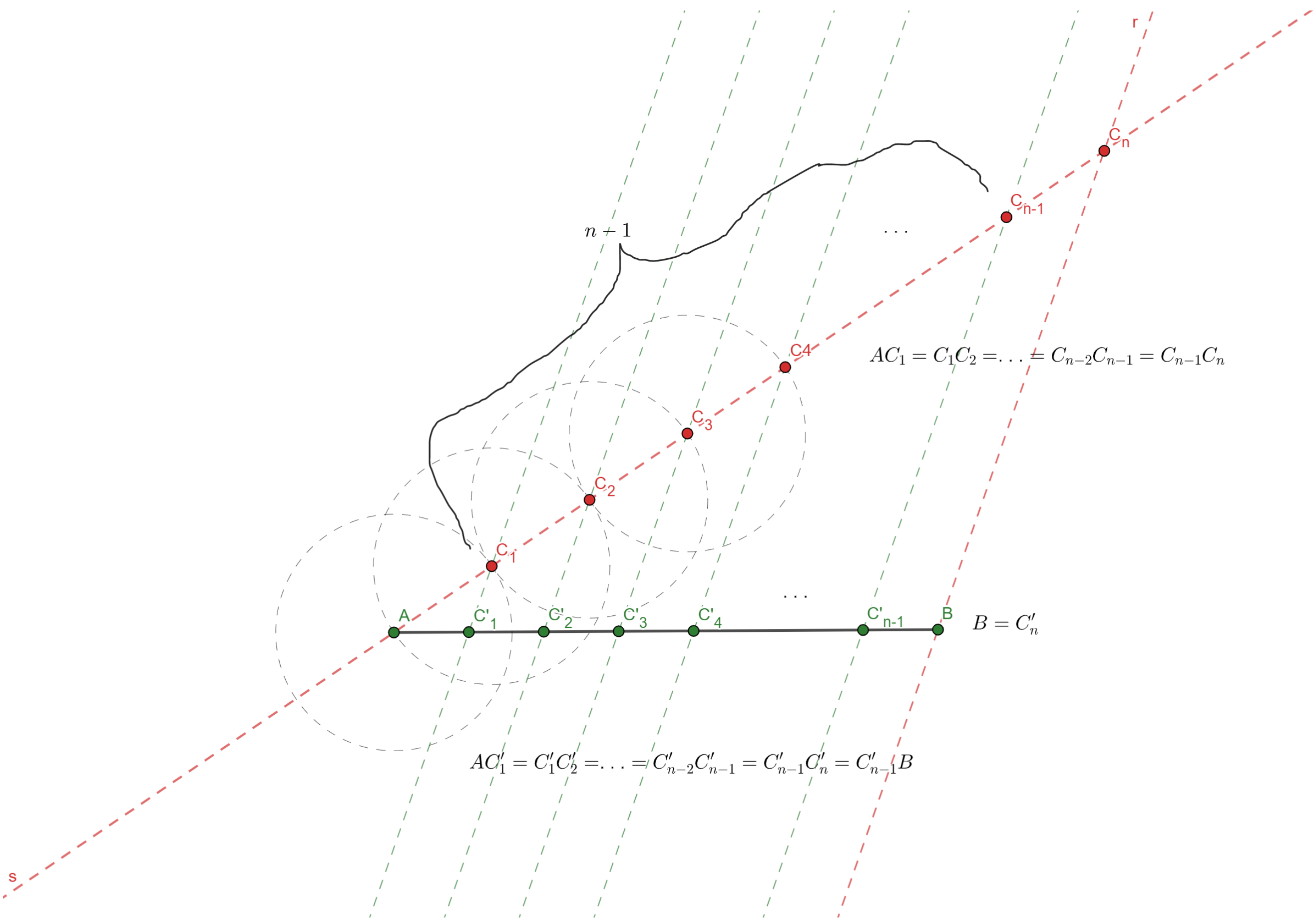
Construcción 15 [Cortando un segmento en n partes iguales] *Dado un segmento $\overline{AB}$ y un entero $n \geq 2$ construir puntos $C'_1, \ldots, C'_{n-1}$ intermedios, $A < C'_1 < \ldots < C'_{n-1} < B$, tales que $AC'_1 = C'_1C'_2 = \cdots = C'_{n-2}C'_{n-1} = C'_{n-1}B$.*

Tomamos el segmento de extremos A y B, $\overline{AB}$, y trazamos una recta cualquiera, s, que pase por el punto A.

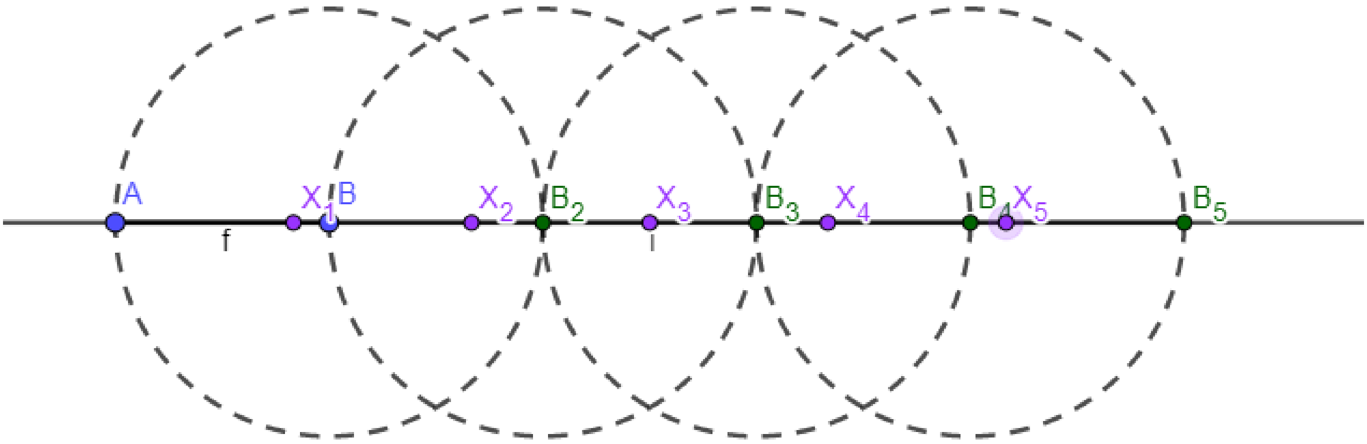
A continuación, vamos a trazar una circunferencia, de centro A y radio arbitrario, y vamos a considerar su intersección con s. Llamaremos a este punto C_1. Volvemos a trazar una circunferencia con centro en C_1 y con el mismo radio, intersecando esta con s en A y en un nuevo punto, al que llamaremos C_2. Repetimos este proceso, obteniendo nuevos puntos $C_3, C_4, \ldots, C_{n-1}, C_n$, hasta obtener n puntos. Unimos ahora el último punto con el punto B mediante una recta (la llamaremos r). Es importante notar que todos estos puntos se encuentran a la misma distancia entre ellos, pues su construcción ha sido fruto de intersecar s con circunferencias de igual radio.

Por último, dibujamos rectas que pasen por cada uno de los puntos que hemos construido en la recta s y que sean paralelas a la recta r. Obtenemos así exactamente $n-1$ cortes en el segmento $\overline{AB}$, cortes que dividen dicho segmento en n partes iguales por el Teorema de Thales.

Si llamamos a los cortes $C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, \ldots, C'_{n-1}, C'_n$; en efecto los triángulos $\Delta AC_1C'_1, \Delta AC_2C'_2, \Delta AC_3C'_3, \ldots, \Delta AC_{n-1}C'_{n-1}, \Delta AC_nC'_n$ son semejantes por el teorema de Thales mencionado anteriormente, de manera que al ser los segmentos determinados por los puntos $C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots, C_{n-1}, C_n$ iguales, también los serán los determinados en el segmento $\overline{AB}$. Esto probaría el ejercicio.



Construcción 16 [Cortando un segmento en una razón proporcional a su longitud] *Dado un segmento AB y un racional $x = \frac{m}{n}$ entre 0 y 1, construir un punto D entre A y B tal que $AD = xAB$.*



Empezamos extendiendo nuestro segmento $\overline{AB}$ a la recta que lo contiene, r. Partiendo desde $B = B_1$, trazo una circunferencia de radio AB, que corta a r en dos puntos, A y otro que llamaremos B_2, desde este punto trazaremos una circunferencia de mismo radio que la anterior y, de forma análoga a como lo hicimos antes, obtenemos un corte con la recta que llamaremos B_3. Repetiremos este proceso hasta obtener B_m. Tendremos en este momento que $AB_m = mAB_1 = mAB$.

Ahora, dividiremos el segmento $\overline{AB_m}$ en n partes iguales usando la construcción [15] y llamaremos a los bordes de los segmentos X_i con $i = 0, \ldots, n$, $X_0 = A$ y $X_n = B_m$. Tenemos, entonces, que $AB_m = nAX_1$.

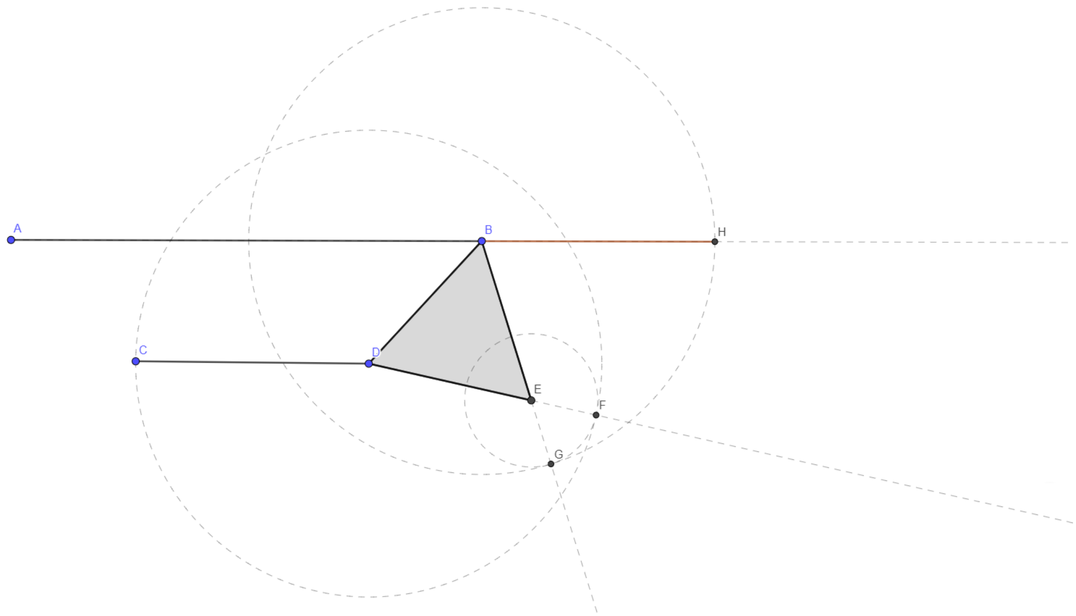
Uniendo las dos igualdades que tenemos para AB_m obtenemos que $mAB = nAX_1 \Rightarrow AX_1 = \frac{m}{n}AB$ y, como $\frac{m}{n} \in (0, 1)$, tenemos que X_1 está en el segmento $\overline{AB}$. Finalmente, si renombramos X_1 como D, tenemos el punto deseado.

Construcción 17 [Media geométrica de dos segmentos] *Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, construir un tercer segmento que sea su media geométrica.*

Esta construcción la dividermos en dos etapas: la primera consistirá en dejar alineados y unidos los dos segmentos, para así después, en una segunda etapa, calcular propiamente dicho su media geométrica.

Partiendo de dos segmentos inicialmente separados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, construimos con vértices en B y D un triángulo equilátero, con tercer vértice en un nuevo punto E basándonos en la construcción [1]. A continuación trazamos una circunferencia con centro en D y radio $\overline{DB}$, que junto con la semirrecta que pasa por D y E, obtenemos como intersección de ambos un nuevo punto, que denotaremos por F.

Llegados a este punto es importante notar que $\overline{CD} \simeq \overline{DF}$ por ser el radio de la circunfernecia. Además, podemos trazar una circunferencia con centro en E y radio $\overline{EF}$ e intersecarla con una semirrecta que pasa por B y E, obteniendo un nuevo punto G. Podemos ver que, de la misma manera que antes, $\overline{CD} \simeq \overline{BG}$, y por lo tanto, trasladando dicha medida a la prolongación de $\overline{AB}$, tendremos lo que buscábamos. Para ello trazamos una semirrecta que pase por A y B, y calculamos du intersección con una circunferencia de centro B y radio $\overline{BG}$, obteniendo un nuevo punto, que notaremos H, con el que hemos llegado a $\overline{CD} \simeq \overline{BH}$, que era lo que buscábamos.



Por lo tanto, hemos llegado a un problema equivalente, para el cual sabemos construir la media geométrica como sigue: partiendo de dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BH}$, hayamos el punto medio del segmento $\overline{AH}$ mediante la mediatriz vista en la construcción [5]. A partir de este nuevo punto que denotaremos por I, trazamos una circunferencia con centro en I y radio $\overline{AI}$.

Ahora, ayudándonos de la construcción [6] trazamos una perpendicular al segmento $\overline{AH}$ que pase por el punto B, y calculamos su intersección con la circunferencia, que nos proporciona un nuevo punto J. Tenemos así un triángulo rectángulo ΔAHJ, y de la misma manera otros dos triángulos ΔABJ y ΔBHJ, también rectángulos, ya que el ángulo en B en ambos es de $90°$.

Teniendo así que $\measuredangle ABJ = \measuredangle HBJ = \measuredangle HJA = 90°$, y además que $\measuredangle JHB = \measuredangle JHA$, vemos que los triángulos ΔAHJ y ΔBHJ comparten dos ángulos, y además el segmento $\overline{HJ}$, por el postulado ALA tenemos que los triángulos ΔAHJ y ΔBHJ son congruentes.

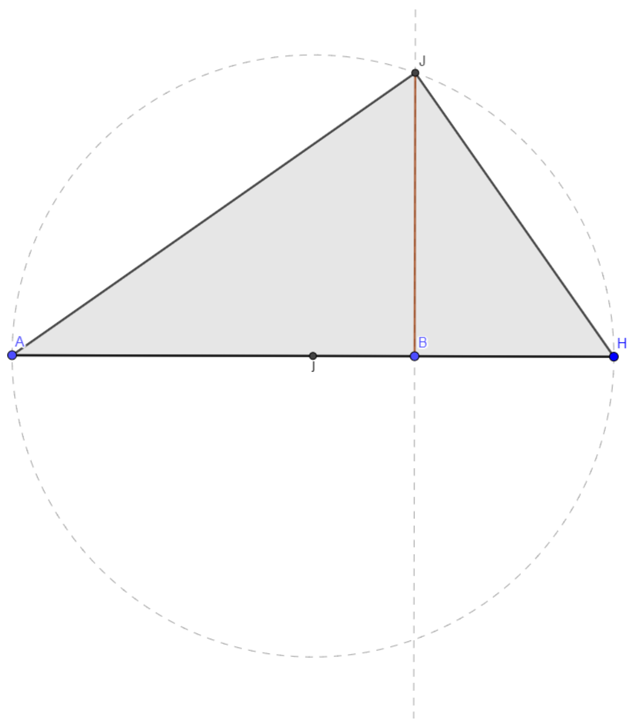
De la misma manera, vemos que $\measuredangle JAB = \measuredangle JAH$, y como los triángulos ΔAHJ y ΔABJ comparten dos ángulos y el segmento $\overline{AJ}$, por el postulado ALA tenemos que ΔAHJ y ΔABJ sn congruentes. Así tenemos que $\Delta AHJ \simeq \Delta ABJ \simeq \Delta BHJ$.

Ahora, como sabemos que los tres triángulos son congruentes, por el teorema de Tales tenemos que

$$\frac{\overline{BJ}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BJ}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BJ}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BH} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BJ} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{BH}}$$

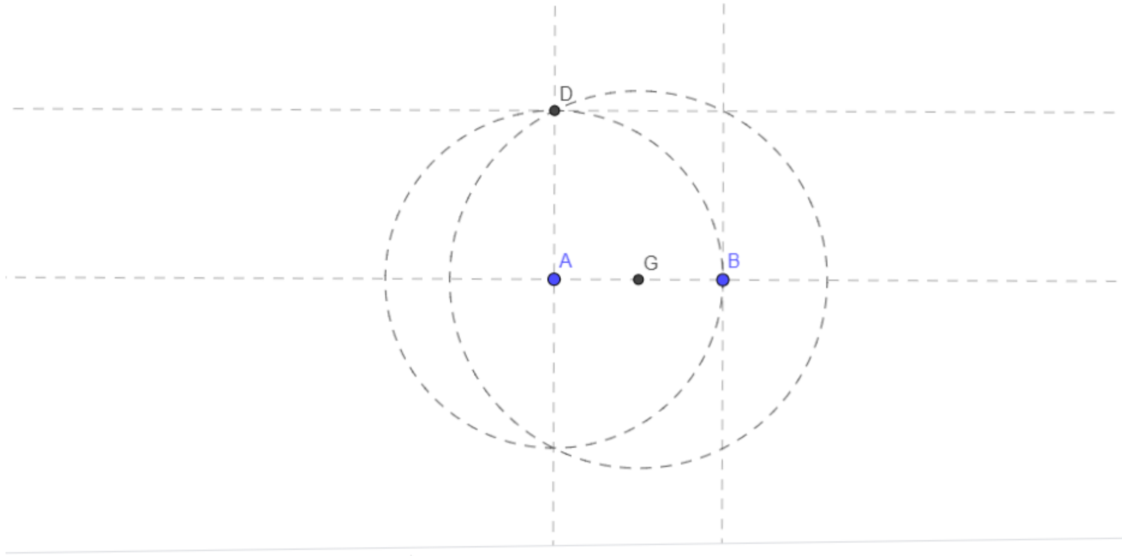
Luego hemos obtenido la media geométrica de los dos segmentos dados, la cual viene dada por la altura del triángulo $\measuredangle AJH$.

Se aporta imagen de la resolución:



Construcción 18 [La razón aurea] *Dado un segmento $\overline{AB}$, construir un punto G en el interior de $\overline{AB}$, tal que AB/AG es el número áureo.*

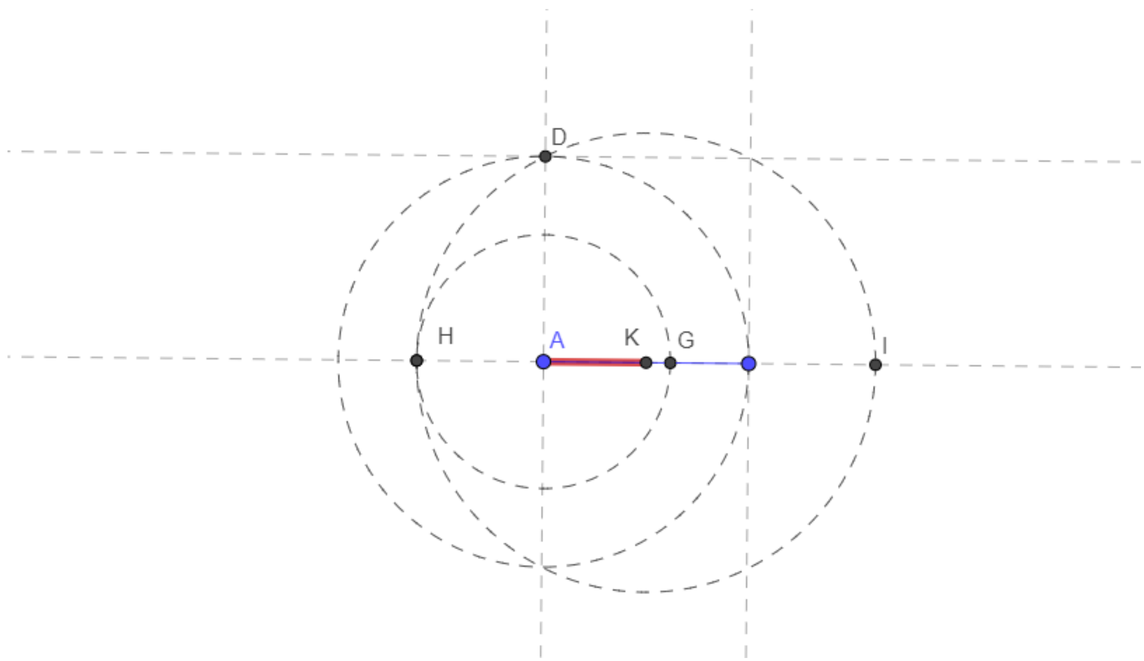
Comenzamos con el segmento dado $\overline{AB}$ y sacamos la circunferencia de centro en A y radio el módulo de $\overline{AB}$. A continuación sacamos el punto medio de $\overline{AB}$ resultando ser el punto K. Si tomamos el cuadrado cuyo lado es $\overline{AB}$ (cuya distancia suponemos x) COMO EN LA FIGURA 14 , podemos ver que el vértice D está a distancia $\frac{\sqrt{5}}{2}x$ de K. Construimos entonces la circunferencia de centro en K y radio el módulo $\overline{KD}$.



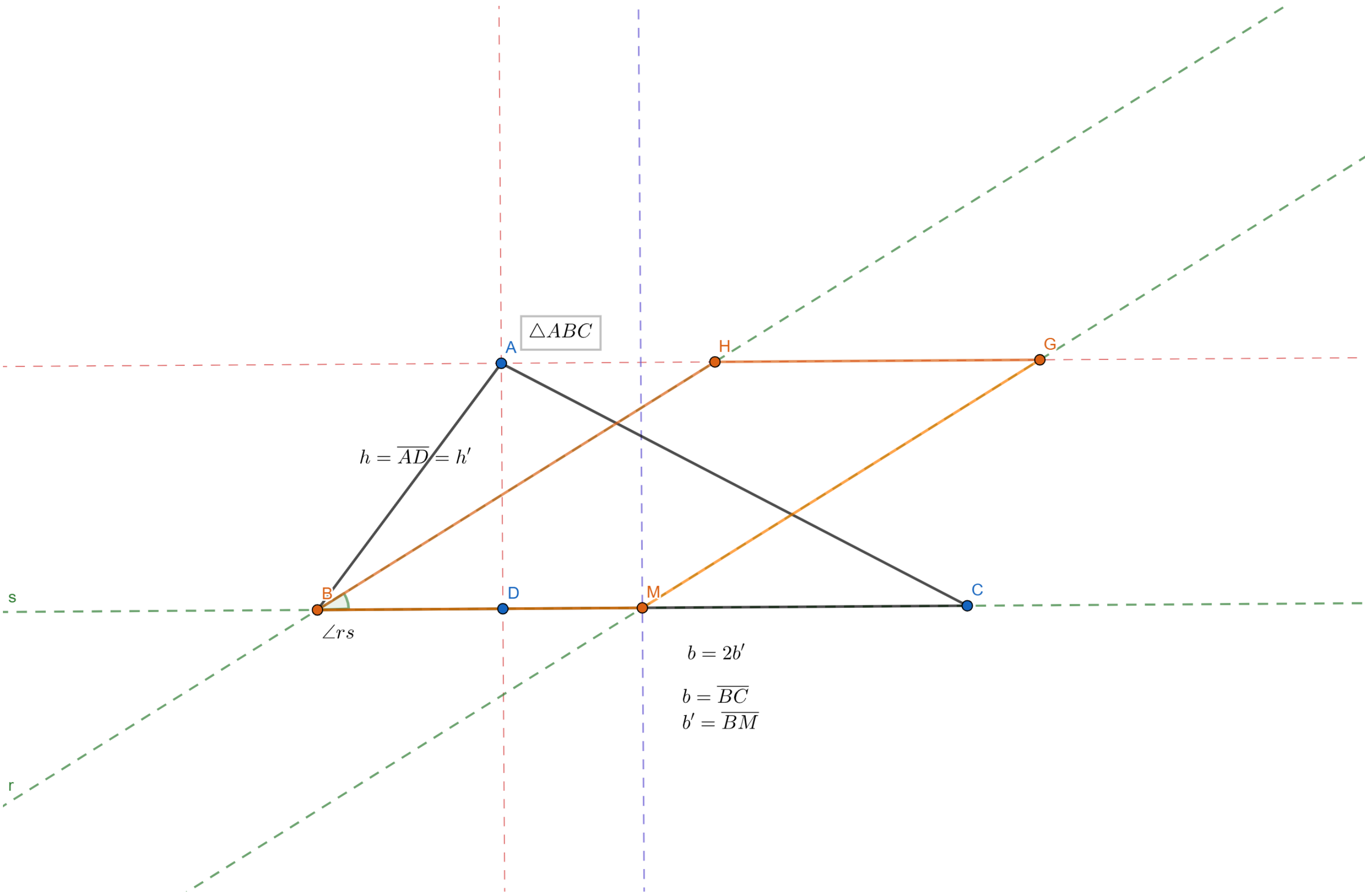
Ahora calculamos la intersección de la circunferencia anterior con la recta que pasa por A y B, resultando 2 puntos diferentes: el punto H e I El segmento $\overline{HA}$ es la razón aurea a $\overline{AB}$, es decir, $\overline{AB}/\overline{AH}$ da como resultado el numero de oro.

Como el punto H no queda dentro del segmento $\overline{AB}$, vamos a tomar la circunferencia de centro en A y radio módulo $\overline{HA}$ y así obtenemos el punto G dando como resultado lo pedido.

Dentro del segmento $\overline{AB}$ tenemos el punto G donde $\overline{AB}$ / $\overline{AG}$ es el número de oro.



Construcción 19 [Paralelogramo con igual área que un triángulo dado] *Dado un triángulo $\triangle ABC$ y un ángulo propio $\angle rs$, construir un paralelogramo con el mismo área que $\triangle ABC$ y con uno de los ángulos congruentes con $\angle rs$.*

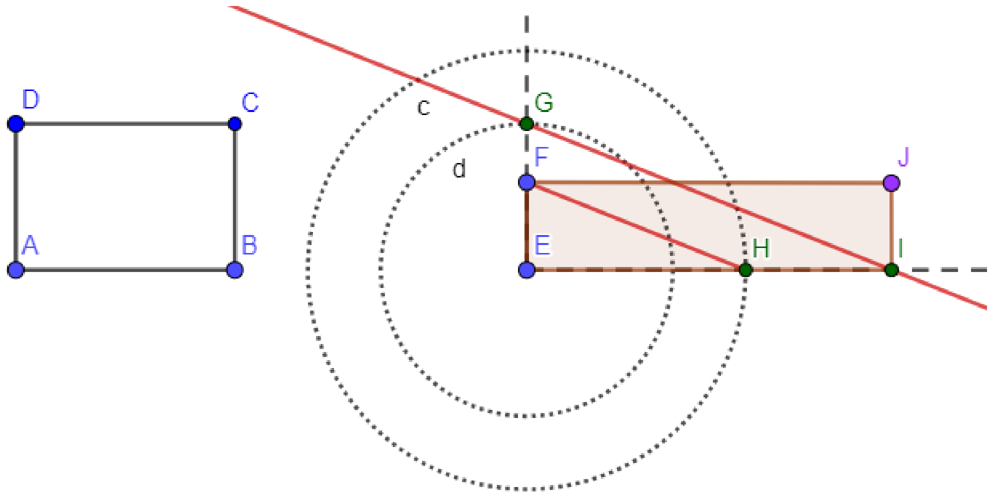


Partimos del triángulo $\triangle ABC$ y del ángulo $\angle rs$. Vamos a construir el paralelogramo que buscamos de manera que tenga igual altura que el triángulo $\triangle ABC$. Además, trazamos la recta que pasa por B y C, y la paralela a esta que pasa por A, pues nos serán de utilidad más adelante. Estás rectas además nos determinan la altura que deberá tener el paralelogramo en cuestión, pues la distancia entre ellas es exactamente la altura del triángulo, $\overline{AD}$.

Notemos que el área de un triángulo es un medio del producto de su base por su altura. Del mismo modo, la de un paralelogramo es el producto de su base por la altura. Partiendo de que la altura del triángulo, h, y la del paralelogramo, h', van a ser iguales, $h = \overline{AD} = h'$, se tiene, tras igualar las áreas de ambas figuras, que $b = 2b'$, donde b es la base del triángulo y b' es la base del paralelogramo. Es decir, la base del paralelogramo es la mitad de la del triángulo, que es $b = \overline{BC}$.

Teniendo en cuenta esto último, calculamos la mediatriz del segmento $\overline{BC}$, obteniendo el punto medio de dicho segmento, M. Por el razonamiento anterior, $\overline{BM}$ debe ser la base de nuestro paralelogramo, cuyo ángulo inferior izquierdo es el que viene dado, $\angle rs$, por lo que basta con trazar la paralela a r que pasa por M y calcular la intersección de la misma con la recta paralela al segmento $\overline{BC}$ que pasa por A, para obtener otro de los vértices del paralelogramo, G. El último vértice vendrá dado por la intersección de la recta paralela a $\overline{BC}$ que pasa por A, y la recta r, lo llamaremos H. Obtenemos finalmente los puntos B, M, G y H, los cuales determinan el paralelogramo que buscábamos.

Construcción 20 [**Rectángulo con área y arista dados**] *Dado un rectángulo $ABCD$, un segmento $\overline{EF}$ y un semiplano de $\overleftrightarrow{EF}$, construir un nuevo rectángulo con la misma área que $ABCD$ con EF como uno de sus lados y con el lado opuesto sobre el semiplano dado.*



Para construir el rectángulo pedido, trazamos sobre la circunferencia de centro E y radio AD y llamamos a su corte con la semirecta vertical del semiplano G, trazamos también una circunferencia de mismo centro y radio AB y llamamos a su corte con la semirecta horizontal del semiplano H.

Si trazamos ahora el segmento $\overline{FH}$ y obtenemos su recta paralela que pasa por G, obtenemos un nuevo corte con el semieje horizontal del semiplano al que llamaremos I, tenemos entonces que los triángulos $\triangle GEI$ y $\triangle FEH$ son semejantes, es decir, que se tiene que:

$$\frac{EG}{EF} = \frac{EI}{EH} \Rightarrow EI \cdot EF = EG \cdot EH = AD \cdot AB = A(ABCD)$$

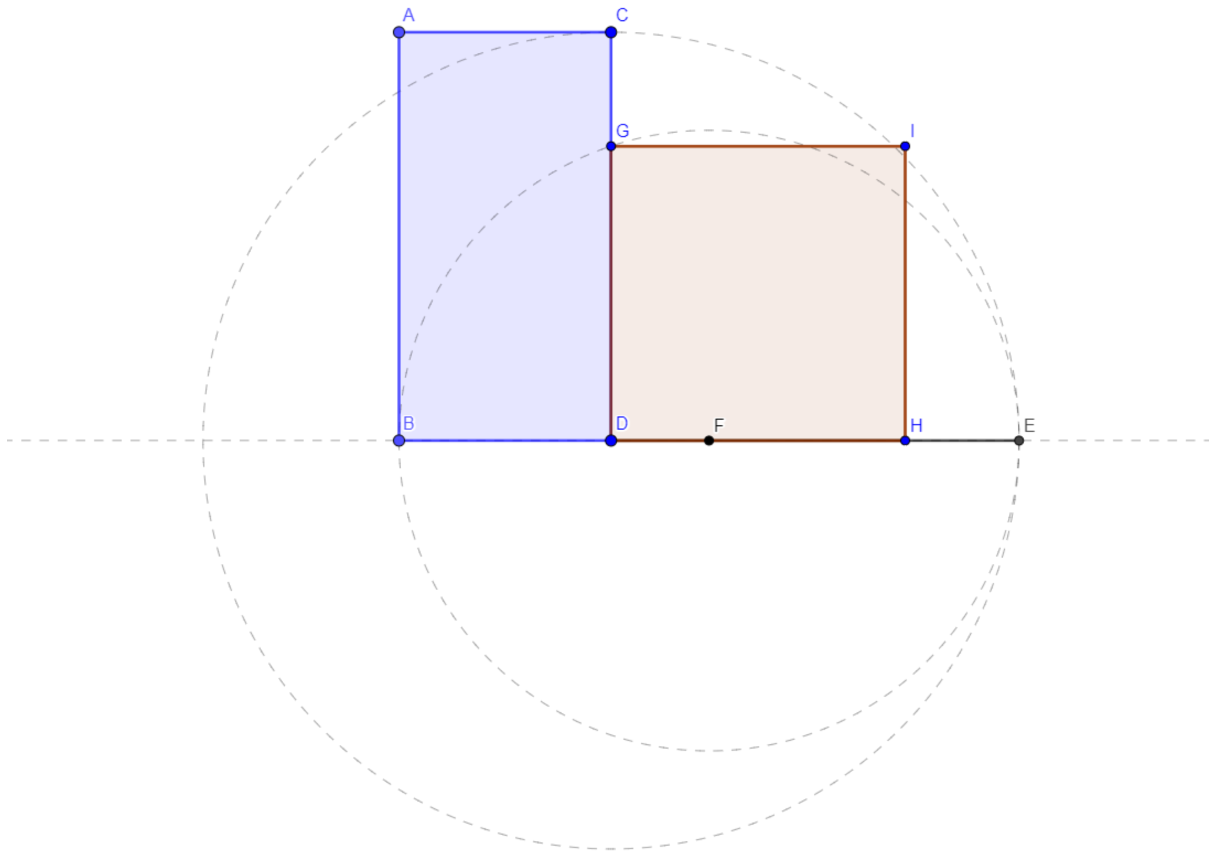
De lo cual extraemos que si construimos un rectángulo con base y altura los segmentos $\overline{EI}$ y $\overline{EF}$ tendremos lo que buscábamos, para ello simplemente trazamos rectas perpendiculares a los semiejes del semiplano en I y F, obteniendo un corte que llamaremos J y teniendose que $EIJF$ es un rectángulo pues sus cuatro ángulos son rectos (pues los de vértices F, E e I son necesariamente rectos y la suma de todos ellos debe ser π).

Construcción 21 [Cuadratura de un rectángulo] *Dado un rectángulo $ABCD$, construir un cuadrado con la misma área que $ABCD$.*

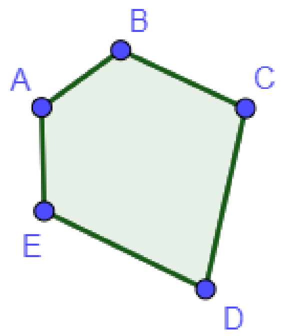
Partiendo de nuestro rectángulo $ABCD$, realmente el problema consiste en calcular la media geométrica de los lados de nuestro rectángulo, y dicha distancia será la medida del lado que andamos buscando. Trazando así una recta que pase por los puntos B y D, e intersecándola con una circunferencia de radio $\overline{CD}$ y centro en D tenemos un nuevo punto E tal que $\overline{CD} \simeq DE$.

Tenemos así dos segmentos unidos y alineados, para lo que nos podemos basar en la construcción [17] sobre el cálculo de la media geométrica para el resto del procedimiento. Con ayuda de la construcción [1] calculamos el punto medio del segmento $\overline{BE}$, que denotaremos por F, y trazamos una circunferencia con centro en dicho punto y radio $\overline{BF}$. Calculando ahora la intersección entre la circunferencia y el segmento $\overline{CD}$ obtenemos un nuevo punto G, y por la demostración vista en la construcción [17], tenemos que el segmento $\overline{DG}$ tiene longitud $\sqrt{\overline{BD} \cdot \overline{CD}}$, y por tanto tenemos el lado del cuadrado que tiene el mismo área que nuestro rectángulo inicial $ABCD$.

Se aporta imagen de la resolución:

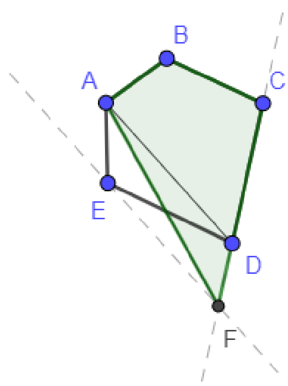


Construcción 22 [Cuadratura de un polígono] *Dado un polígono convexo, construir un cuadrado con la misma área que dicho polígono.*

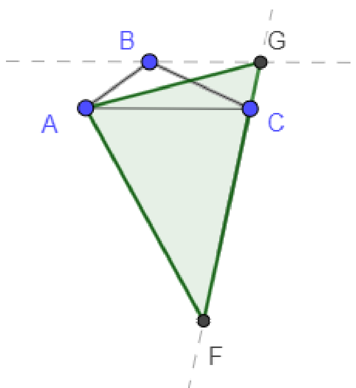


Partiendo del polígono convexo $ABCDE$ la idea es ir reduciendo el número de vértices obteniendo polígonos con el mismo área al inicial hasta llegar a un triángulo. Para hacer la cuadratura del triángulo, hallaremos primero un rectángulo con su misma área y finalmente haremos la cuadratura del mismo. Obteniendo así un cuadrado con igual área que el polígono $ABCDE$. El proceso seguido es el siguiente:

Unimos los vértices A y C y extendemos el lado $\overline{CD}$ dibujando una recta auxiliar que pase por esos puntos. Trazamos una paralela (construcción [14]) al segmento $\overline{AB}$ por el punto E. La intersección entre esta recta y la prolongación del lado $\overline{CD}$ es el punto F.

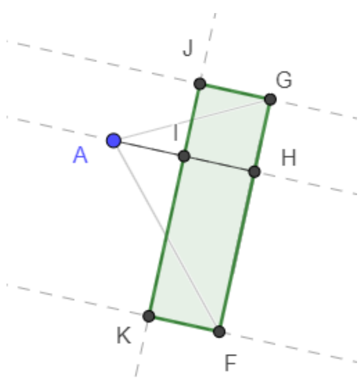


Obtenemos el paralelogramo $AEFD$. Así, al trazar su diagonal $\overline{AF}$ resultan los triángulos ΔADF y ΔEDF, $\Delta ADF \cong \Delta EDF$ por el criterio de congruencia LLL ($\overline{AE} = \overline{DF}$ y $\overline{EF} = \overline{AD}$ por construcción. $\overline{ED}$ es común a ambos triángulos). Además $\Delta EDF \cong \Delta AED$ por la misma razón. De este modo $\Delta AED \cong \Delta ADF$ y por tanto ambos triángulos tienen la misma área, por lo que el nuevo polígono $ABCF$ tiene el mismo área que el polígono de partida $ABCDE$.



Siguiendo exactamente el mismo proceso y razonamiento que en el paso anterior, convertimos el polígono $ABCF$ en un polígono de tres lados, es decir, en el triángulo ΔAGF. El cuál tiene la misma área que el polígono $ABCF$ y, por consiguiente, la misma área que el polígono $ABCDE$.

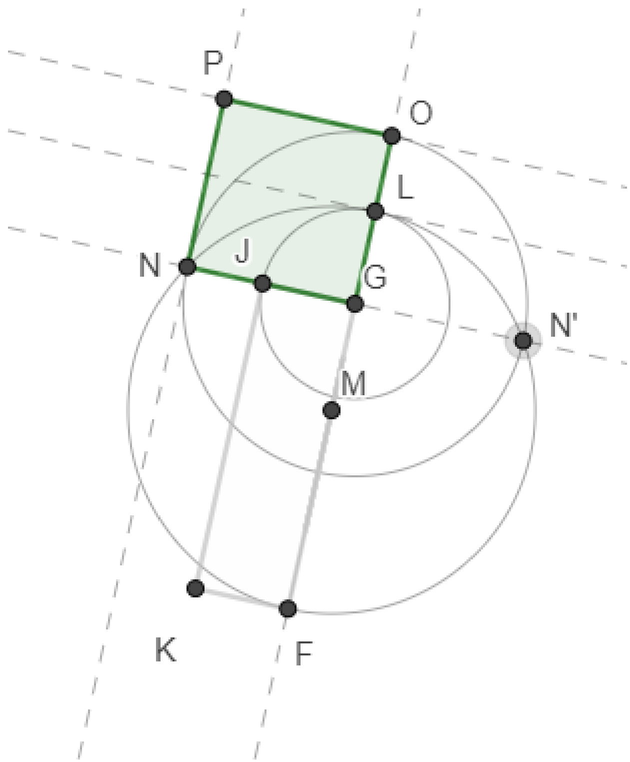
Convertimos ahora el triángulo ΔAGF en un rectángulo de igual área, como se ha enunciado al principio del ejercicio. El área del triángulo es $\frac{\overline{GF}\cdot\overline{AH}}{2}$. Por tanto basta construir un rectángulo con base $\overline{FG}$ y altura $\frac{\overline{AH}}{2}$.



Para ello hallamos el punto medio I del segmento $\overline{AH}$ (mediante construcción [5] o [15]). Trazamos perpendiculares a la base $\overline{FG}$ por los puntos F y G y, por último, trazamaos una paralela a $\overline{FG}$ por el punto I. Esta recta y las perpendicualares anteriores se cortan en los puntos J y K.

Uniendo los puntos G, F, K y J resulta el rectángulo buscado, el cuál sigue manteniendo la misma área que el polígono $ABCDE$.

Para terminar, hacemos la cuadratura del rectángulo.



Alargamos el lado $\overline{FG}$ y trasladamos a esta recta la distancia del lado menor del rectángulo haciendo una circunferencia con centro en G y radio $\overline{GJ}$. La circunferencia corta a la recta en el punto L.

Hallamos el punto medio del segmento $\overline{FL}$, el punto M y dibujamos ahora otra circunferencia con centro en M y radio $\overline{FM}$. Alargamos ahora el lado $\overline{GJ}$. Esta recta corta a la circunferencia (M, F) en el punto N. El segmento $\overline{GN}$ será el lado del cuadrado.

Para construir el cuadrado trasladamos el lado haciendo una circunferencia con radio $\overline{GN}$ y centro en G; obtenemos el punto O. Trazando una paralela al lado por el punto O y trazando una perpendicular por el punto N hallamos el cuarto vértice del cuadrado, el punto P.

Unimos los vértices y resulta el cuadrado $GNPO$. Cuadratura del polígono $ABCDE$.

Comprobamos que ambas áreas son iguales. Veamos $\overline{GF} \cdot \overline{GL} = \overline{GN} \cdot \overline{GN'}$. Pero $\overline{GN} = \overline{GN'}$ y $\overline{GL} = \overline{GJ}$.

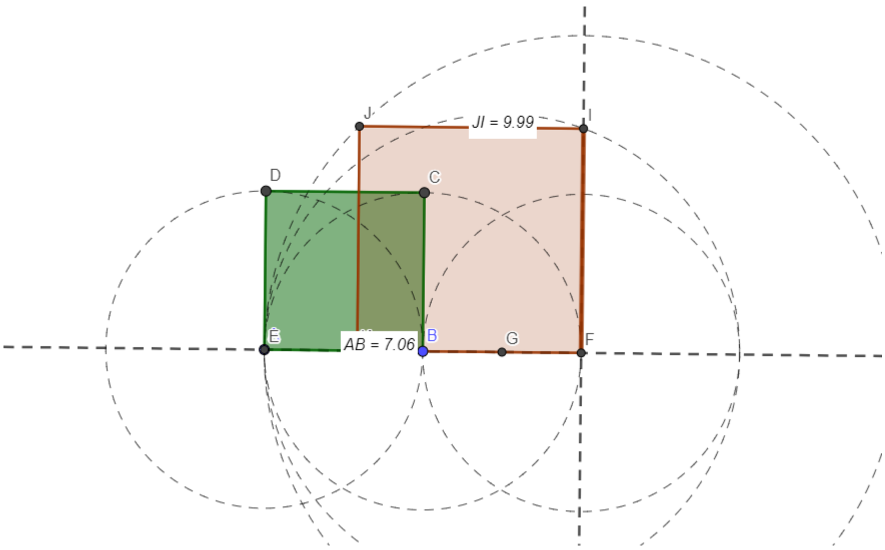
Así: $\overline{GF} \cdot \overline{GJ} = \overline{GI}^2$

Construcción 23 [Duplicación de un cuadrado] *Dado un cuadrado, construir otro con área el doble que el original.*

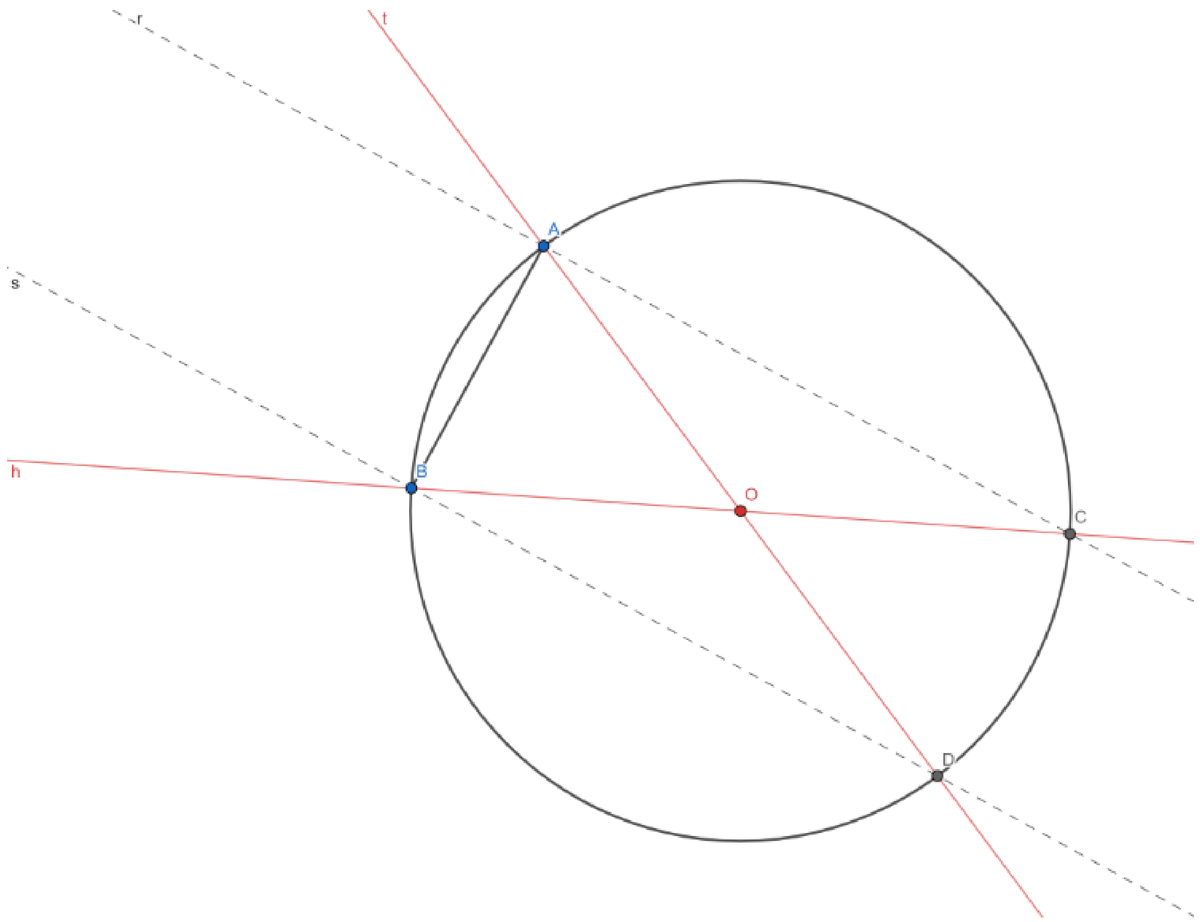
Comenzamos con un cuadrado de vértices A,B,C y D. Queremos sacar otro cuadrado con área el doble. Para ello, vamos a obtener un segmento congruente a uno de las aristas de mi cuadrado (hemos obtenido el segmento $\overline{BF}$ congruente al $\overline{EB}$. Calculamos ahora la mediatriz del segmento $\overline{BF}$ y da como resultado el punto G. trazamos ahora la circunferencia de centro el punto G y radio el módulo del segmento $\overline{EG}$ (La llamamos C1).

Ahora vamos a trazar la circunferencia de centro en F y radio $\overline{EF}$ (La llamamos C2).
Ambas circunferencias van a darnos un vértice de nuestro cuadrado.

Ahora solo tenemos que trazar la recta (recta 1) perpendicular a la recta que une F y E. La intersección de la recta 1 con C1 y ya tenemos un lado de nuestro cuadrado de área doble (es el punto I). Solo tenemos que formar el polígono de 4 lados que tiene como lado al segmentos $\overline{IF}$ y ya tendiramos al cuadrado de área doble.



Construcción 24 [Centro de una circunferencia] *Dada una circunferencia, construir su centro.*

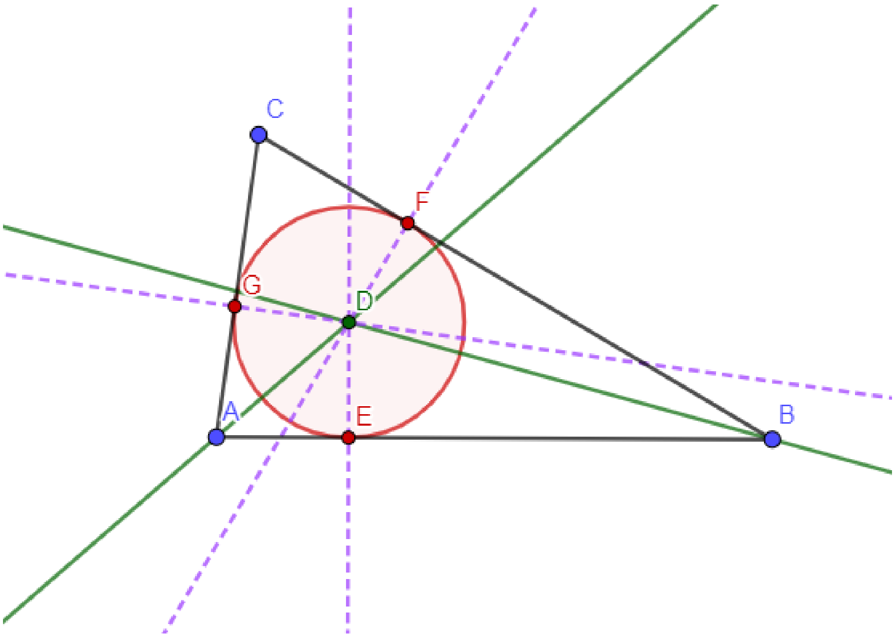


Vamos a comenzar por tomar dos puntos cualesquiera en la circunferencia, A y B. Trazamos a continuación el segmento que tiene como extremos a estos puntos, el $\overline{AB}$.

Por cada uno de los extremos, trazamos una recta perpendicular a dicho segmento (sabemos hacerlo por la construcción [6]), obteniendo así las rectas r y s que pasan, respectivamente, por A y B. Estas rectas intersecan a la circunferencia en otros puntos. Llamaremos C a la intersección de r con la circunferencia, y D a la intersección de s con la circunferencia. Si trazamos la recta que pasa por A y D y la recta que pasa por B y C, la intersección de las mismas nos da justamente el punto O que buscamos, el centro de la circunferencia.

La justificación la exponemos a continuación. Si tomamos una cuerda cualquiera de circunferencia que pase por el centro de la misma, y trazamos segmentos desde los extremos de dicha cuerda a un mismo punto de la circunferencia, el ángulo formado por dichos segmentos ha de ser recto (nos queda un triángulo rectángulo). Como en la construcción que hemos hecho hemos dibujado las rectas perpendiculares al segmento $\overline{AB}$ que pasan por los puntos A y B, la intersección con la circunferencia de cada una de ellas nos ha dado justamente el otro extremo de la cuerda con origen en A o B (A si consideramos la perpendicular s, y B si consideramos r) y que pasa por el centro de la circunferencia (las cuales serían la $\overline{BC}$ y la $\overline{AD}$). Intersecando así ambas cuerdas, obtenemos mencionado centro.

Construcción 25 [Circunferencia inscrita a un triángulo] *Dado un triángulo, construir su circunferencia inscrita.*



Empezamos trazando las bisectrices de los ángulos $\alpha = \angle CAB$ y $\beta = \angle ABC$ y llamaremos a su intersección D. Obtenemos, entonces, E, la intersección de la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por D, F, la intersección de la recta perpendicular al segmento $\overline{BC}$ que pasa por D y G, la intersección de la recta perpendicular al segmento $\overline{CA}$ que pasa por D.

E, F y G son, por construcción, los puntos a menor distancia de D de sus respectivos segmentos, esto quiere decir que si vemos que $DE = DF = DG$, tendremos que la circunferencia de centro D y radio DE estará inscrita al triángulo $\triangle ABC$.

Veamos primero que $DE = DF$. Observando los triángulos $\triangle EBD$ y $\triangle BFD$, obtenemos que

$$\left.\begin{cases} \sin\frac{\beta}{2} = \dfrac{DE}{BD} & \Rightarrow DE = BD \cdot \sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} = \dfrac{DF}{BD} & \Rightarrow DF = BD \cdot \sin\frac{\beta}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow DE = DF.$$

Y, por último, veamos que $DE = DG$. Observando los triángulos $\triangle DAE$ y $\triangle DGE$, obtenemos que

$$\left.\begin{cases} \sin\frac{\alpha}{2} = \dfrac{DE}{AD} & \Rightarrow DE = AD \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} = \dfrac{DG}{AD} & \Rightarrow DG = AD \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow DE = DG.$$

Tal y como dijimos, ahora sabemos que la circunferencia de radio ED y centro D esta inscrita al triángulo.

Construcción 26 [Circunferencia circunscrita a un triángulo] *Dado un triángulo, construir su circunferencia circunscrita.*

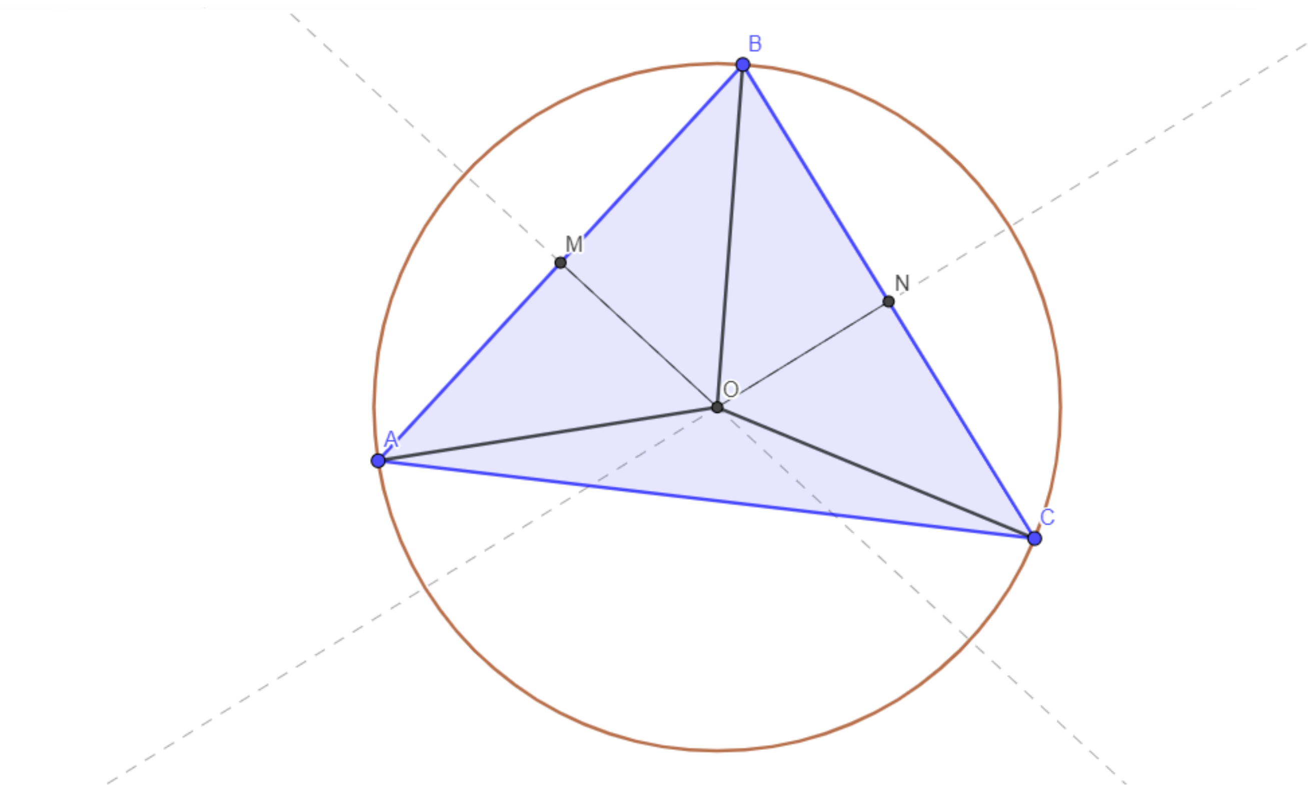
Partiendo de un triángulo arbitrario ΔABC, pretendemos construir una circunferencia que tenga contenidos en su traza los tres vértices del triángulo. Para ello trazaremos, ayudándonos de la construcción [1], las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, que se intersecarán en un nuevo punto que denotaremos por O.

Ahora, trazando los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$, dividimos nuestro triángulo inicial ΔABC en tres subtriángulos: ΔABO, ΔAOC y ΔOBC. Estudiemos un momento las propiedades del triángulo ΔABO. Si consideramos el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (calculado previamente mediante la mediatriz), y lo denotamos por M, obtenemos los triángulos ΔAOM y ΔBOM. Ya que el punto O pertenece a la mediatriz de $\overline{AB}$, ambos triángulos comparten el ángulo recto en $\measuredangle AMO$ y $\measuredangle BMO$. Además, por ser M el punto medio de $\overline{AB}$, también tenemos que $\overline{AM} = \overline{BM}$, y como ambos triángulos tienen en común el segmento $\overline{MA}$, por el postulado LAL ambos triángulos son congruentes, y por tanto se concluye que el triángulo ΔABO es isósceles ($\overline{BO} = \overline{OA}$).

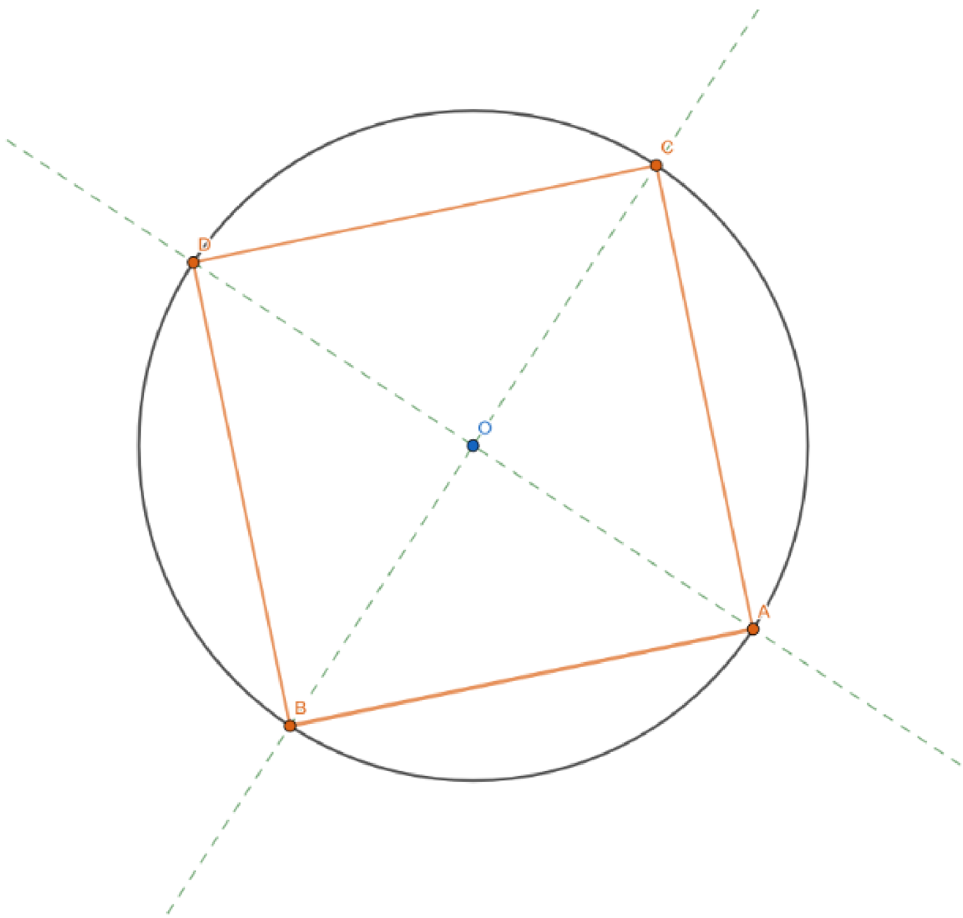
Realicemos el mismo razonamiento para el triángulo ΔOBC. Tomamos el punto medio del segmento $\overline{BC}$, lo denotamos por N y trazamos el segmento $\overline{NO}$, con lo que obtenemos los triángulos ΔNBO y ΔNCO. Vemos que $\overline{BN} = \overline{NC}$ por ser N el punto medio, y además ambos triángulos comparten el segmento $\overline{NO}$ y tienen un ángulo recto. Concluimos así que $\Delta NBO \simeq \Delta NCO$, y por tanto ΔOBC es isósceles ($\overline{BO} = \overline{OC}$).

Por estos dos procesos hemos llegado a que $\overline{BO} = \overline{OC}$ y a que $\overline{BO} = \overline{OA}$, y por lo tanto tenemos que los tres segmentos que unen los vertices de nuestro triángulo ΔABC con el punto O son iguales, y por tanto podemos construir una circunferencia con centro en O y radio $\overline{OA}$ que pasa por los tres vértices de nuestro triángulo inicial.

Se aporta imagen de la resolución:



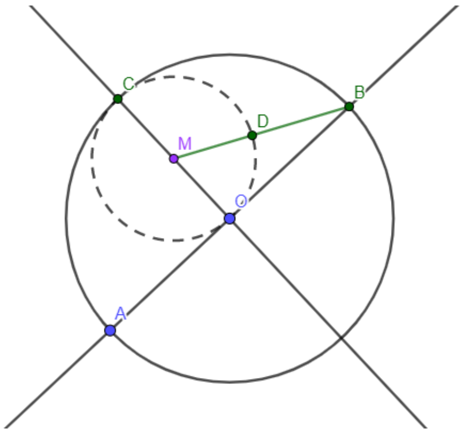
Construcción 27 [Cuadrado inscrito en una circunferencia] *Dada una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el cuadrado inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*



Comenzamos dibujando una circunferencia cualquiera, con centro O y radio $\overline{OA}$. Trazamos la recta que pasa por A y O, y la recta perpendicular a esta que pasa por el punto O (sabemos construir perpendiculares por la construcción [6]). Esto da lugar a 4 intersecciones con la circunferencia, los puntos A, B, C y D. Estos puntos son exactamente los vértices del cuadrado circunscrito que buscamos.

Para justificar esta última afirmación, vamos a considerar los triángulos $\triangle AOB$, $\triangle BOD$,$\triangle DOC$ y $\triangle COA$. Estos triángulos son todos isósceles, pues dos de sus lados son radios de la circunferencia, y por como hemos cortado las rectas que nos han generado los cortes con la circunferencia, la que pasa por O y A y su perpendicular, el ángulo formado por los radios (los lados iguales) en todos ellos es recto. Por esto último, teniendo en cuenta que los triángulos isósceles tienen dos ángulos opuestos iguales y considerando que la suma de los ángulos de un triángulo debe ser π, todos tienen como dichos ángulos opuestos $\frac{\pi}{4}$. Además, por el teorema de pitágoras, podemos obtener el lado opuesto al ángulo recto y este será igual para todos los triángulos. Tenemos pues 4 triángulos con lados y ángulos iguales, por lo que deben ser congruentes. Esta congruencia nos dice justamente que el lado opuesto al ángulo recto en todos ellos es el mismo, el cual se corresponde de hecho con los segmentos $\overline{AB}.\overline{BD}, \overline{DC}$ y $\overline{CA}$, según el triángulo considerado. En definitiva, obtenemos un polígono regular de 4 lados inscrito en la circunferencia y uno de sus vértices en A. Este es justamente el cuadrado que buscábamos.

Construcción 28 [Pentágono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el pentágono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

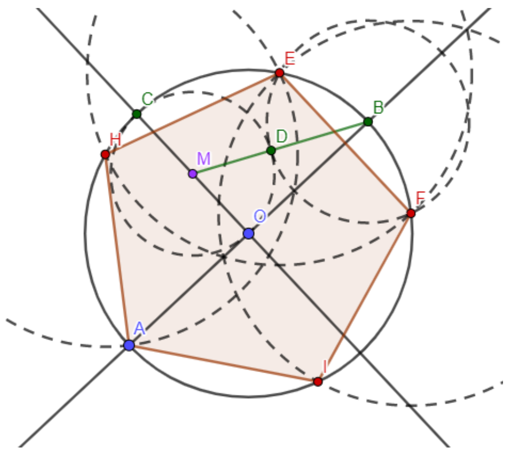


Empezamos la construcción trazando la recta que pasa por el centro, O, y por A y su perpendicular que pasa por O. Llamaremos C a uno de los cortes de la perpendicular con la circunferencia y B al otro corte con la circunferencia de la recta que pasa por A.

Si tomamos ahora a M el punto medio del segmento $\overline{AC}$, gracias al teorema de pitágoras aplicado al triángulo $\triangle MOB$ sabemos que $MB = \frac{\sqrt{5}}{2}OB$, por lo tanto, si ahora trazamos una circunferencia de radio MO de centro M, el corte que esta tenga con el segmento $\overline{MB}$, al que llamaremos D, cumplirá que $DB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}OB$.

Tomando ahora la circunferencia de radio DB de centro B, esta cortará a la circunferencia inicial en dos puntos, E y B, cumpliéndose que los triángulos $\triangle EOB$ y $\triangle BOF$ son áureos, pues son triángulos claramente isosceles que cumplen que el cociente de la longitud de su lado mayor por la de su base es el número aureo, pues estos cocientes son claramente iguales y $\frac{OB}{EB} = \frac{OB}{DB} = \frac{OB}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}OB} = \sqrt{5}+1$.

Gracias a que estos triángulos sean áureos sabemos que los ángulos que tienen en O son ambos de $36°$, es decir, que el ángulo $\angle EOF$ es de $72°$, es decir, un quinto de circunferencia y, por lo tanto, replicándolo otras 4 veces, podremos construir un pentágono.



Nos disponemos ahora a ello y trazamos circunferencias de centros E y F y radio EF y llamamos H e I a los dos nuevos cortes de estas con la circunferencia inicial. A su vez, trazamos otra circunferencia de radio EF desde H que cortará a la circunferencia inicial en el punto A, pues este es el punto diametralmente opuesto a B y hemos girado $36° + 72° + 72° = 180°$, siendo los $36°$ primeros del ángulo $\angle EOB$ y los otros dos $72°$ de los ángulos $\angle HOE$ y $\angle AOE$.

Finalmente, por lo visto con anterioridad, $AIFEH$ es un pentágono regular inscrito en la circunferencia inicial con uno de sus vértices siendo A.

Construcción 29 [Hexágono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el hexágono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

La construcción de la siguiente figura se realizará mediante la construcción sucesiva de triángulos equiláteros. Puesto que un triángulo equilátero tiene por ángulo en cada uno de sus vértices $\frac{\pi}{3}$, vemos que la unión de 6 triángulos completa la circunferencia (2π). Partimos entonces de una circunferencia con un punto dado. Calculamos su centro mediante el proceso tratado en la construcción [26]: trazamos una circunferencia con centro en A y radio arbitrario tal que interseque a nuestra circunferencia inicial en dos puntos, que denotaremos por N y M. Así, mediante el triángulo ΔANM y la construcción [26] obtenemos el centro de la circunferencia, que denotaremos por O.

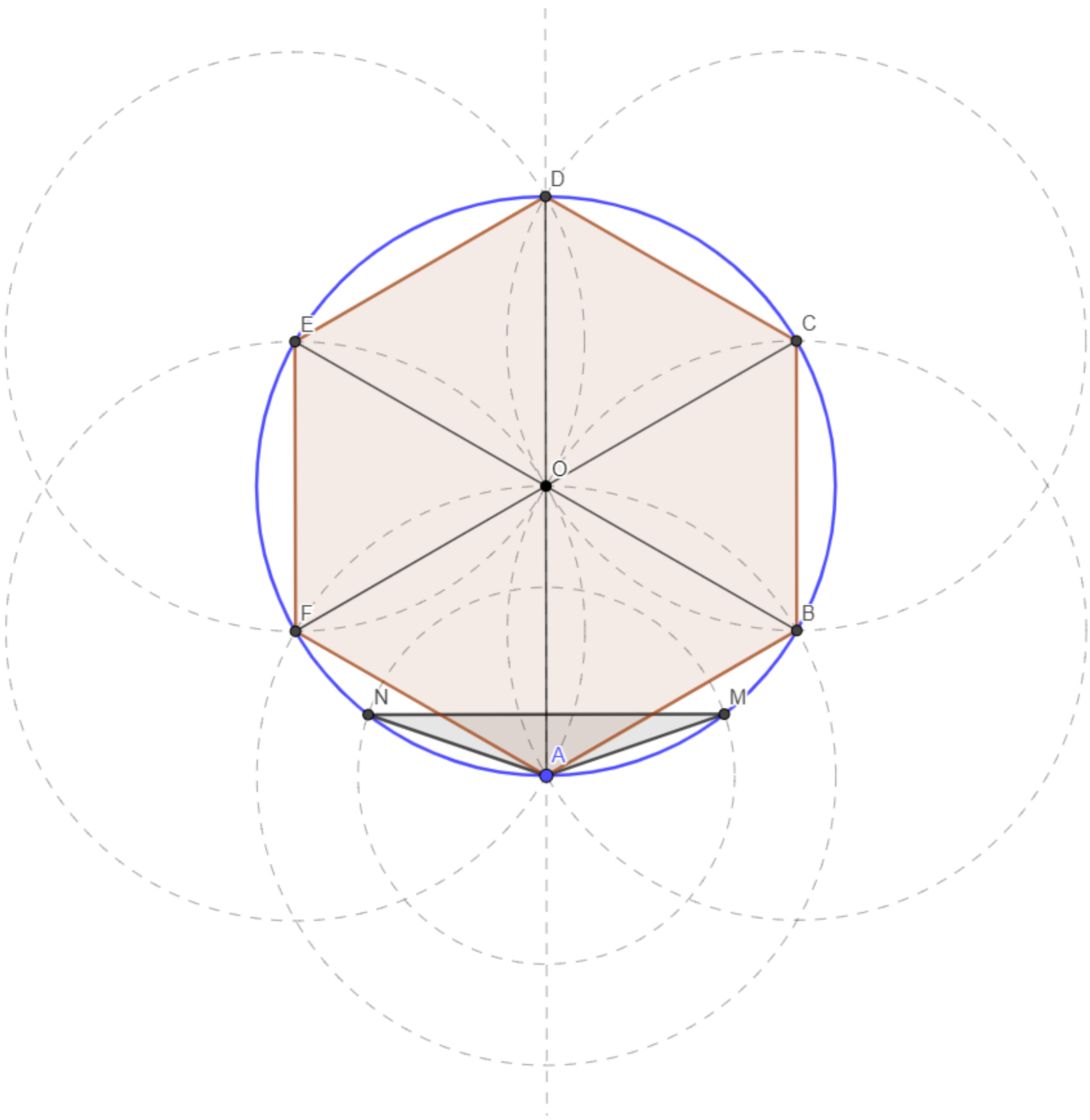
Ahora trazamos una circunferencia con centro en A y radio $\overline{OA}$, que intersecan a nuestra circunferencia inicial en dos puntos, B y F, y obtenemos así el triángulo ΔAOB, para el cual sabemos que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB}$, luego dicho triángulo es equilátero. Se realiza el mismo proceso para el triángulo ΔAOF.

A partir de los nuevos puntos B y F repetimos el mismo proceso que el anterior: trazamos dos circunferencias de radio $\overline{OB} = \overline{OF}$ con centros en B y F, que intersecándolos con la circunferencia principal dada obtenemos dos nuevos puntos, C y E respectivamente. De aquí deducimos que $\overline{OC} = \overline{OB} = \overline{BC}$ y $\overline{OF} = \overline{OE} = \overline{EF}$, luego los triángulos ΔOBC y ΔOEF son equiláteros.

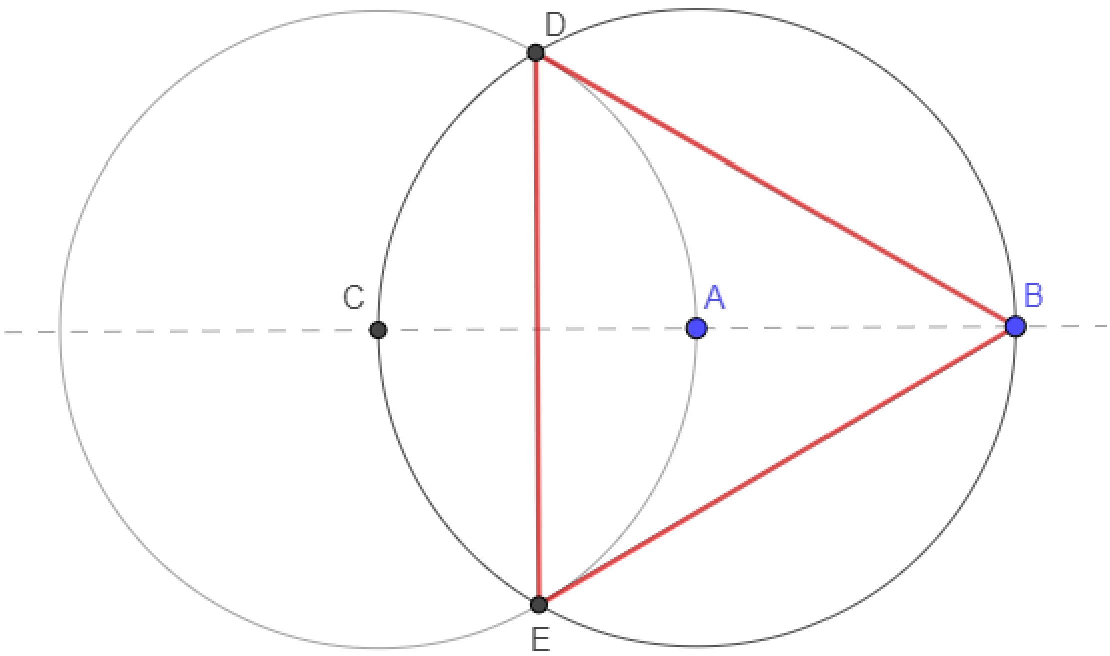
Trazamos por último una circunferencia con centro en C y radio $\overline{OC}$, con lo que intersecándolo con nuestra circunferencia inicial obtenemos un nuevo punto que denotaremos por D_1. Por los mismos razonamientos anteriores, $\overline{OC} = \overline{OD_1} = \overline{CD_1}$ y por lo tanto el triángulo ΔOCD_1 es equilátero. Siendo esto así, los triángulos adyacentes ΔOAB, ΔOBC y ΔOCD_1 son triángulos equilateros, que además por tener un lado en común también podemos afirmar que son congruentes. Siendo esto así, como los ángulos de un triángulo equilátero son todos iguales con valor de $\frac{\pi}{3}$, la suma de ángulos incidentes en el vértice O suman π radianes, luego los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OD_1}$ pertenecen a la misma recta.

Aplicando ahora el mismo razonamiento por el lado opuesto tenemos que, trazando una circunferencia con centro en E y radio $\overline{OE}$, intersecamos a la circunferencia principal en un nuevo punto que llamaremos D_2. Aplicando lo mismo que en el punto anterior, tenemos que ΔOAF, ΔOFE y ΔOED_2 son triángulos equilateros adyacentes, que además son congruentes. Si sumamos los ángulos incidentes en el vértice O vemos que suman π radianes, luego los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OD_2}$ pertenecen a la misma recta. Siendo esto así, por congruencia de triángulos tenemos que $\overline{OD_1} = \overline{OD_2} = \overline{OD}$, y como sabemos que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$, obtenemos así el hexágono $ABCDEF$.

Se aporta imagen de la resolución:



Construcción 30 [Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el triángulo equilátero inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

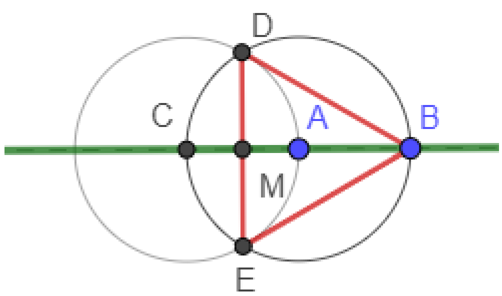


Partiendo de la circunferencia con centro en A y radio $\overline{AB}$ trazamos el diámetro que pasa por estos dos puntos. Al hacerlo, la recta corta a la circunferencia en el punto C.

Pinchando en C contruimos otra circunferencia, con radio $\overline{CA}$, que interseca con la circunferencia (A, B) en los puntos D y E que podemos ver en la imagen superior. Dichos puntos son los dos vértices restantes del triángulo equilátero buscado.

Así, uniendo B, D y E obtenemos el triángulo equilátero inscrito en la circunferencia (A, B) con uno de sus vértices B.

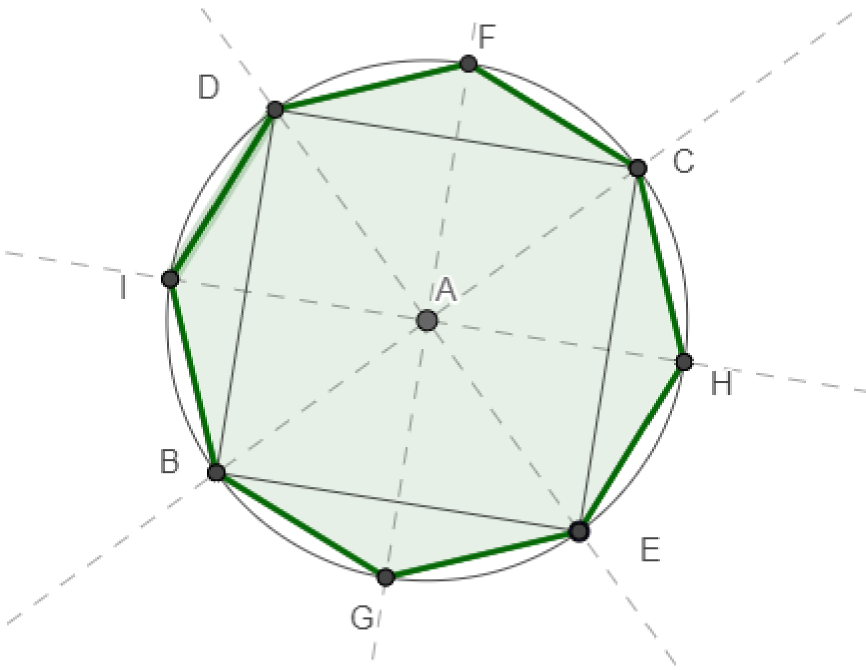
Podemos demostrar fácilmente que es equilátero.



Si trazamos la mediatriz del segmento $\overline{DE}$ vemos que coincide con la recta trazada por los puntos B y A. Llamamos M al punto medio hallado. La mediatriz divide al triángulo en otros dos: ΔBDM y ΔBEM. Demostrando $\Delta BDM \cong \Delta BEM$ probamos que ΔBDE es efectivamente equilátero.

Ambos triángulos comparten el lado $\overline{BM}$. Además, $\overline{DM} = \overline{EM}$ por ser M el punto medio de $\overline{DE}$. Si a esto le sumamos que tienen un ángulo común, el ángulo recto $\measuredangle DMB = \measuredangle EMB$, tenemos, por el criterio de congruencia LAL lo que estábamos buscando.

Construcción 31 [Octógono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el octógono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*



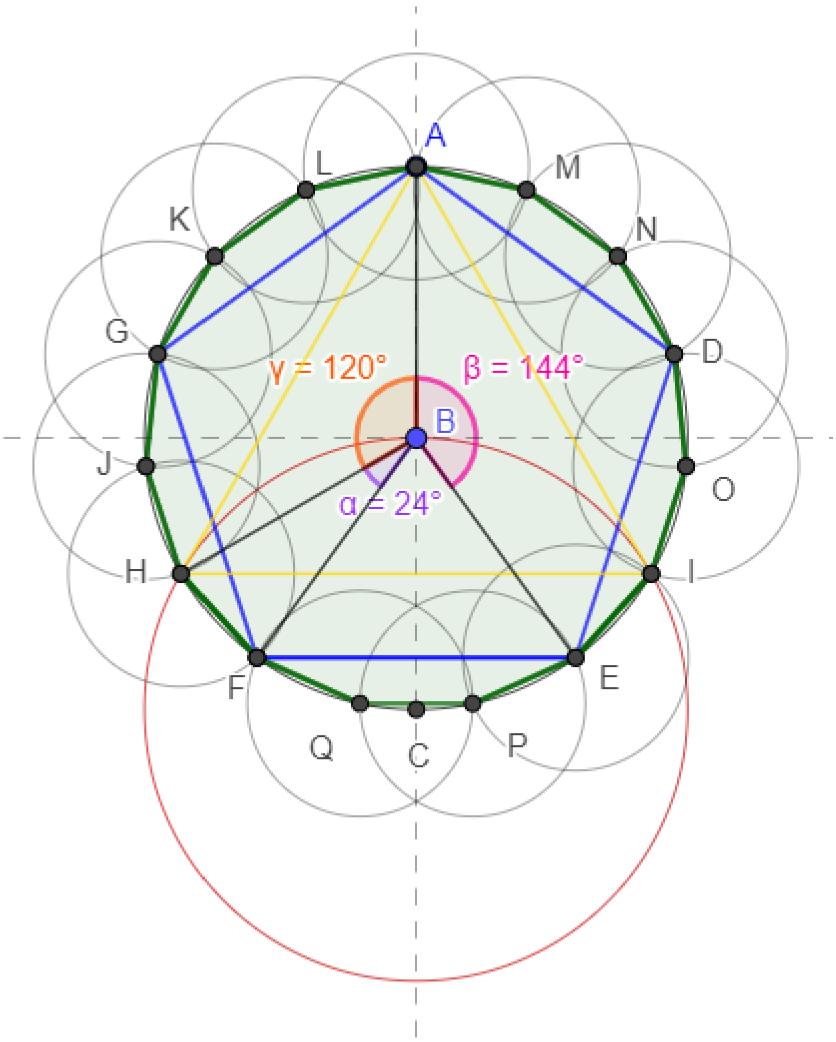
Partimos de la circunferencia con centro en A y radio $\overline{AB}$.
En primer lugar trazamos una recta que pase por A y por B (uno de los diámetros de la circunferencia), obteniendo el punto C. A continuación dibujamos una perpendicular a esta recta por el punto A, obteninendo los puntos D y E. Somos capaces de trazar perpendiculares gracias a la construcción [6].

Unimos ahora los puntos B, D, C y E formando un cuadrado y hacemos las mediatrices de cada uno de los lados de este cuadrilátero. Podemos emplear la herramienta *'mediatriz'* de GeoGebra gracias a la construcción [5].

Al hacer la mediatriz del segmento $\overline{BD}$, la cual coincide con la mediatriz del segmento $\overline{CE}$, obtenemos los dos primeros puntos de nuestro octógono regular: I y H. Trazamos ahora la mediatriz del lado $\overline{DC}$, que de nuevo coincide con la mediatriz del lado $\overline{BE}$ al tratarse de un cuadrado, y nos da dos puntos más, el purno F y el G.

Uniendo ahora los puntos B, C, D, E, F, G, HeI resulta un octógono regular inscrito en una circuenferencia.

Construcción 32 [Pentadecágono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el pentadecágono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*



Un resultado conocido en la geometría plana, y más concretamente en relación con los polígonos resultados es el siguiente:

> Los ángulos centrales de un polígono regular de n lados son todos congruentes y suman 360°. La medida α de los mismos se puede obtener como sigue:
>
> $$\alpha = \frac{360}{n}$$

Aplicando este resultado tenemos que el ángulo interior de un pentadecágono es $360/15 = 24°$. Veamos como obtener tal ángulo y así obtener el lado del polígono regular buscado.

Para ello vamos a hacer uso de las construcciones [28] y [30]. Es decir, vamos a partir de un triángulo equilátero y un pentágono regular inscritos en una circunferencia. El ángulo interior del triángulo (delimitado en amarillo) es $360/3 = 120°$. Por otro lado, cada ángulo interior del pentágono regular mide $360/5 = 72°$. Si restamos el ángulo interior del triángulo a la suma de dos ángulos interiores del pentágono (144°) obtenemos el ángulo que andábamos buscando: 24°. De este modo nos queda el triángulo ΔFAH, por lo que el lado $\overline{FH}$ es el lado del pentadecágono regular.

Para construir el polígono trazamos una circuenferencia de radio el lado con centro en el punto H, obteniendo el punto J, tercer vértice del pentadecágono. Hacemos ahora una circunferencia centrada en J con radio $\overline{HJ}$ y tenemos el siguiente vértice G. Repetimos este proceso sucesivamente hasta hallar los 15 vértices: $K, L, A, M, N, D, O, I, E, P$ y Q. Al unirlos resulta el polígono sombreado en verde, un pentadecágono regular.