

Ejercicio 8

David García Curbelo

Toma tu número $n = 191871308917122834687961459636870046909$ de la lista publicada para este ejercicio.

Apartado I. Pasa algunos test de primalidad para ver si n es compuesto

Veamos los resultados de pasar el test de Fermat para las bases 2, 3, 5 y 7. Usando el algoritmo de exponenciación rápida, tenemos los siguientes resultados de evaluar $a^{n-1} \pmod{n}$ para las bases mencionadas:

Base 2		
Iteración	Exponente	Acumulado
1	1	2
2	2	4
3	4	16
4	9	512
5	18	262144
6	36	68719476736
7	72	4722366482869645213696
8	144	118577020187434258021703433866563888073
9	288	29340227568084248416501045335641728100
...
122	2997989201830044291999397806826094482	101675255918338275426907079426403493615
123	5995978403660088583998795613652188965	74303581080468529483843167643474362336
124	11991956807320177167997591227304377931	100644730683039452944647609244075852789
125	23983913614640354335995182454608755863	59117478806542687318662872566695394313
126	47967827229280708671990364909217511727	118234957613085374637325745133390788625
127	95935654458561417343980729818435023454	-1
128	191871308917122834687961459636870046908	1

Base 3		
Iteración	Exponente	Acumulado
1	1	3
2	2	9
3	4	81
4	9	19683
5	18	387420489
6	36	150094635296999121
7	72	22528399544939174411840147874772641
8	144	79863541316174948313858493560647916069
9	288	21923773134371130434670971852591589643
...
122	2997989201830044291999397806826094482	164724765414792627514895963012658408736
123	5995978403660088583998795613652188965	50895079125131643876702492628639013989
124	11991956807320177167997591227304377931	8495266008180564491497240622868865667
125	23983913614640354335995182454608755863	175843235986790788741521745667721490030
126	47967827229280708671990364909217511727	118234957613085374637325745133390788625
127	95935654458561417343980729818435023454	-1
128	191871308917122834687961459636870046908	1

—
Base 5

Iteración	Exponente	Acumulado
1	1	5
2	2	25
3	4	625
4	9	1953125
5	18	3814697265625
6	36	14551915228366851806640625
7	72	109995655051602194850629945210045793959
8	144	72055542060367415663075562708228631321
9	288	16059290738605625158384538873481518775
...
122	2997989201830044291999397806826094482	83073020954742175186051287482142023167
123	5995978403660088583998795613652188965	59165329114860589351210691706810981474
124	11991956807320177167997591227304377931	87509861727301316206372170982747614537
125	23983913614640354335995182454608755863	119817173846143518687612360340700291480
126	47967827229280708671990364909217511727	1
127	95935654458561417343980729818435023454	1
128	191871308917122834687961459636870046908	1

—
Base 7

Iteración	Exponente	Acumulado
1	1	7
2	2	49
3	4	2401
4	9	40353607
5	18	1628413597910449
6	36	2651730845859653471779023381601
7	72	93896753671824022897665880086441711349
8	144	139184725522475144930465216926335590537
9	288	88353904871015366688933124559184247632
...
122	2997989201830044291999397806826094482	143919716633746330712290624655863621828
123	5995978403660088583998795613652188965	48370016607229836518498432319658144500
124	11991956807320177167997591227304377931	28480560223009031088627591725543683721
125	23983913614640354335995182454608755863	178621585979619985521227455109380454469
126	47967827229280708671990364909217511727	-1
127	95935654458561417343980729818435023454	1
128	191871308917122834687961459636870046908	1

Como hemos visto, para cada una de las bases se cumple que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, luego para $a = 2, 3, 5, 7$ tenemos que n es un posible primo de Fermat para dichas bases. Comprobemos ahora si nuestro número n pasa el test de Euler. Para ello, calculamos el símbolo de Jacobi $\left(\frac{a}{m}\right)$ para cada una de las bases y comprobamos que coincida con el valor de $a^{(m-1)/2} \pmod{m}$, que es precisamente la penúltima iteración del algoritmo realizado en el apartado anterior.

- $\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{(n^2-1)/2} = -1$ por ser $n \equiv -3 \pmod{8}$.
- $\left(\frac{3}{m}\right) = \left(\frac{m}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1$.
- $\left(\frac{5}{m}\right) = \left(\frac{m}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right) = -\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) = 1$.
- $\left(\frac{7}{m}\right) = \left(\frac{m}{7}\right) = \left(\frac{2}{7}\right) = -\left(\frac{1}{7}\right) = 1$.

Vemos que dichos símbolos coinciden con la penúltima iteración del algoritmo de exponenciación rápida, luego n ha pasado el test de Solovay-Strassen para las bases 2,3,5y 7, luego tenemos una probabilidad de primalidad del $1 - \frac{1}{2^4} = 0.984375$.

Apartado II. En caso que tu n sea probable primo, factoriza $n + 1$ encontrando certificados de primalidad para factores mayores de 10000

Por el apartado anterior, tenemos altas probabilidades de que nuestro número n sea primo. Por ello procedemos a factorizar $n + 1$.

$m = n+1 = 191871308917122834687961459636870046910 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2131903432412475940977349551520778299$. Desconocemos si $m_1 = 2131903432412475940977349551520778299$ es primo, pero es fácil ver que $2^{m_1-1} \not\equiv 1 \pmod{m_1}$ por lo que m_1 no es primo. Así, aplicando ahora el método ρ de Polard, obtenemos

Paso	x	y	mcd
1	2	5	1
2	5	677	1
3	26	210066388901	1
4	677	1895334587094284184613091101280776558	1
5	458330	78215585125484868093905659043889560	1
6	210066388901	1544705283024627326323128430540469400	1
7	44127887745906175987802	1886113287013530250529305226348579810	1
	1
199	1870715726329717217294060583935591760	1060801355651140048392732542642863088	1
200	424068958678740670085019879061666598	198391725553609196458053623579235637	1
201	1144313711092545399133664641920726969	1087000882140671190941176670812395039	1
202	487249409427576944821049604574813716	1380997187252811280112785131151297400	1
203	1428917232945032853447041072009195027	557963052235651406262131922066187695	1
204	662668825124170441837361214480548672	454271395768955732082738715776001264	1
205	896153999982941990933718819692803994	1849723980397089800013259742497928909	154493

Con lo que hemos obtenido un factor de $m_1 = 154493 \cdot 13799352931281520463563718430743$. Para ver si son posibles primos, aplicamos el test de Fermat con el que obtenemos que $m_2 = 154493$ pasa el test cumpliendo $a^{(m_2-1)} \equiv 1 \pmod{m_2}$ para las bases $a = 2, 3, 5, 7$, con lo que tenemos que es posible primo. Procedemos a buscar un certificado de primalidad mediante el algoritmo de Lucas-Lehmer, factorizando $m_2 - 1 = 154492 = 2^2 \cdot 38623$. Veamos si $m_{2,1} = 38623$ es primo. Para ello, aplicamos el test de Fermat y obtenemos que $2^{(m_2-1)} \not\equiv 1 \pmod{m_2}$, luego tenemos certificado de composición. Procedemos a obtener sus factores mediante el algoritmo ρ de Polard:

Paso	x	y	mcd
1	2	5	1
2	5	677	1
3	26	24562	1
4	677	33242	13

Tenemos así que $m_{2,1} = 38623 = 13 \cdot 2971$ (ambos factores son primos menores de 10000) luego tenemos completamente factorizado $m_2 - 1 = 154492 = 2^2 \cdot 13 \cdot 2971$ y por tanto estamos en condiciones de encontrar un elemento primitivo:

- $2^{(m_2-1)} \equiv 1 \pmod{m_2}$
- $2^{(m_2-1)/2} \not\equiv 1 \pmod{m_2}$
- $2^{(m_2-1)/13} \not\equiv 1 \pmod{m_2}$
- $2^{(m_2-1)/2971} \not\equiv 1 \pmod{m_2}$

Hemos obtenido un elemento primitivo, y por tanto un certificado de primalidad de 154493. Procedemos a estudiar la primalidad de $m_3 = 13799352931281520463563718430743$. Para ello, aplicamos el test de Fermat y obtenemos que $2^{(m_3-1)} \not\equiv 1 \pmod{m_3}$, luego tenemos un certificado de composición. Aplicamos por tanto el algoritmo ρ de Polard para encontrar sus factores, obteniendo una factorización de $m_3 = 5766560731 \cdot 2392995335520991752053$.

Veamos si cada uno de los factores es primo o no. Para ello, aplicamos el test de Fermat y obtenemos que para ambos candidatos $m_{3,1} = 5766560731$ y $m_{3,2} = 2392995335520991752053$, ambos pasan el test de Fermat $a^{(m_{3,i}-1)} \equiv 1 \pmod{m_{3,i}}$ para las bases $a = 2, 3, 5, 7$ y con $i = 1, 2$, con lo que tenemos que son posibles primos. Procedemos a buscar un certificado de primalidad mediante el algoritmo de Lucas-Lehmer. Factoricemos primero para este fin $m_{3,1} - 1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9153271$. Veamos si $m_{3,1,1} = 9153271$ es primo. Para ello, aplicamos el test de Fermat y obtenemos que $2^{(m_{3,1,1}-1)} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1,1}}$, luego tenemos un certificado de composición. Procedemos a obtener sus factores mediante el algoritmo ρ de Polard:

Paso	x	y	mcd
1	2	5	1
2	5	677	1
3	26	7972722	1
4	677	1349861	1
5	458330	4030875	1
6	7972722	9121035	1
7	592400	2030879	1
8	1349861	118386	1
9	1367894	3373269	1
10	4030875	2331996	127

Obtenemos una factorización de $m_{3,1,1} = 9153271 = 127 \cdot 72073$. Veamos si $m_{3,1,2} = 72073$ es primo o no. Vemos que dicho número pasa el test de Fermat para las bases $a = 2, 3, 5, 7$ y con $a^{(72073-1)} \equiv 1 \pmod{72073}$, con lo que tenemos que es posible primo. Procedemos a buscar un certificado de primalidad mediante el algoritmo de Lucas-Lehmer. Factoricemos por tanto $m_{3,1,2} - 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 1001 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ya tenemos factorizado completamente $m_{3,1,2} - 1$, luego estamos en condiciones de buscar un elemento primitivo:

- $5^{(m_{3,1,2}-1)} \equiv 1 \pmod{m_{3,1,2}}$
- $5^{(m_{3,1,2}-1)/2} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1,2}}$
- $5^{(m_{3,1,2}-1)/3} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1,2}}$
- $5^{(m_{3,1,2}-1)/7} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1,2}}$
- $5^{(m_{3,1,2}-1)/11} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1,2}}$
- $5^{(m_{3,1,2}-1)/13} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1,2}}$

Hemos obtenido un elemento primitivo, y por tanto un certificado de primalidad de $m_{3,1,2} = 72073$, y así una factorización completa de $m_{3,1} - 1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 127 \cdot 72073$, y por tanto estamos en condiciones de encontrar un elemento primitivo para $m_{3,1} = 5766560731$:

- $2^{(m_{3,1}-1)} \equiv 1 \pmod{m_{3,1}}$
- $2^{(m_{3,1}-1)/2} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1}}$
- $2^{(m_{3,1}-1)/3} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1}}$
- $2^{(m_{3,1}-1)/5} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1}}$
- $2^{(m_{3,1}-1)/7} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1}}$
- $2^{(m_{3,1}-1)/127} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1}}$
- $2^{(m_{3,1}-1)/72073} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,1}}$

Hemos obtenido un elemento primitivo, y por tanto un certificado de primalidad de $m_{3,1} = 5766560731$.

Nos falta por estudiar la primalidad de $m_{3,2} = 2392995335520991752053$. Para ello, encontremos una factorización completa de $m_{3,2} - 1 = 2^2 \cdot 598248833880247938013$ y falta ver si $m_{3,2,1} = 598248833880247938013$ es primo. Pero vemos que pasa el Test de Fermat para las bases $a = 2, 3, 5, 7$, con lo que tenemos que es posible primo. Procedemos a buscar un certificado de primalidad mediante el algoritmo de Lucas-Lehmer, factorizando $m_{3,2,1} - 1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 49854069490020661501$. Vemos que, aplicando el test de Fermat, $2^{(m_{3,2,2}-1)} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,2}}$, luego tenemos certificado de composición. Aplicando el algoritmo ρ de Polard:

Paso	x	y	mcd
1	2	5	1
2	5	677	1
3	26	210066388901	1
4	677	48154026845582945885	1
5	458330	16477550820312657009	1
6	210066388901	8767016751718741827	17

Obtenemos así un factor $m_{3,2,2} = 49854069490020661501 = 17 \cdot 2932592322942391853$. Repetimos el proceso, y vemos que aplicando el test de Fermat, $2^{(m_{3,2,3}-1)} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,3}}$, con $m_{3,2,3}$, luego tenemos certificado de composición. Aplicando el algoritmo ρ de Polard:

Paso	x	y	mcd
1	2	5	1
2	5	677	1
3	26	210066388901	1
4	677	1232549678504676237	1
5	458330	1814589205600697744	1
6	210066388901	2901832105833958121	1
7	1171062592005775711	433343035452068346	1
8	1232549678504676237	530026126697573956	1
	1
105	1072907927239829481	633060779998309531	1
106	1473715790323534215	1476795736927761280	1
107	700874798274490282	1921604684212310878	1
108	1631026691484340616	2602941659810613916	1
109	2098486954844577194	106004085321239324	1
110	910283951658615124	2174617737679806385	1
111	2326822244406153002	1356215947241368806	1
112	2780900295665156451	2177037073141657912	8389

Obtenemos así otro factor $m_{3,2,1} - 1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 8389 \cdot 349575911663177$. Repetimos el proceso, y vemos que para $m_{3,2,3} = 349575911663177$ aplicando el test de Fermat, $2^{(m_{3,2,3}-1)} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,3}}$, con $m_{3,2,3}$, luego tenemos certificado de composición. Aplicando el algoritmo ρ de Polard obtenemos:

Paso	x	y	mcd
1	2	5	1
2	5	677	1
3	26	210066388901	1
4	677	294589891977312	1
5	458330	290224068809114	1
6	210066388901	2463117925844	1
7	332863845795938	218480901392043	1
	1
2074	90963594969107	304227142127437	1
2075	48834153381626	159526109489353	1
2076	134463322576653	28163583826849	1
2077	245280188018629	284685468917185	1
2078	42109524707488	227174816698981	1
2079	338951848011268	261789712391706	1
2080	257496113186742	185895937987750	2291797

Obtenemos así otro factor $m_{3,2,1} - 1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 8389 \cdot 2291797 \cdot 152533541$. Veamos si estos dos últimos factores son primos. Vemos que ambos pasan el test de Fermat para las bases $a = 2, 3, 5, 7$, con lo que tenemos altas probabilidades de primalidad. Aplicamos por tanto a ambos el test de Lucas-Lehmer, y buscamos una factorización de $m_{3,2,1,1} - 1 = 2291796 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 59 \cdot 83$ y de $m_{3,2,1,2} - 1 = 152533540 = 2^2 \cdot 5 \cdot 67 \cdot 89 \cdot 1279$ (los tres últimos factores en ambos números han sido calculados mediante el algoritmo *rho* de Polard). Así, estamos en condiciones de buscar un elemento primitivo para cada uno de los candidatos a primo $m_{3,2,1,1} = 2291797$ y $m_{3,2,1,2} = 152533541$:

- $2^{(m_{3,2,1,1}-1)} \equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1,1}-1)/2} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1,1}-1)/3} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1,1}-1)/13} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1,1}-1)/59} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1,1}-1)/83} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,1}}$

—

- $3^{(m_{3,2,1,2}-1)} \equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,2}}$
- $3^{(m_{3,2,1,2}-1)/2} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,2}}$
- $3^{(m_{3,2,1,2}-1)/5} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,2}}$
- $3^{(m_{3,2,1,2}-1)/67} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,2}}$
- $3^{(m_{3,2,1,2}-1)/89} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,2}}$
- $3^{(m_{3,2,1,2}-1)/1279} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1,2}}$

Hemos encontrado un elemento primitivo para cada candidato a primo, luego tenemos certificado de primalidad de ambos. Ahora, tenemos factorizado en primos $m_{3,2,1} - 1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 8389 \cdot 2291797 \cdot 152533541$, y estamos en condiciones de encontrar un elemento primitivo para $m_{3,2,1} = 598248833880247938013$:

- $2^{(m_{3,2,1}-1)} \equiv 1 \pmod{m_{3,2,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1}-1)/2} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1}-1)/3} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1}}$

- $2^{(m_{3,2,1}-1)/17} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1}-1)/8389} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1}-1)/2291797} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1}-1)/152533541} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1}}$

Hemos encontrado un elemento primitivo para $m_{3,2,1} = 598248833880247938013$, luego tenemos certificado de primalidad. Ahora tenemos factorizado en primos $m_{3,2}-1 = 2^2 \cdot 598248833880247938013$, y estamos en condiciones de encontrar un elemento primitivo para $m_{3,2} = 2392995335520991752053$:

- $2^{(m_{3,2,1}-1)} \equiv 1 \pmod{m_{3,2,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1}-1)/2} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1}}$
- $2^{(m_{3,2,1}-1)/598248833880247938013} \not\equiv 1 \pmod{m_{3,2,1}}$

Hemos encontrado un elemento primitivo para $m_{3,2} = 2392995335520991752053$, luego tenemos certificado de primalidad.

Con esto ya hemos terminado, pues hemos encontrado una factorización en primos del número pedido $n+1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 154493 \cdot 5766560731 \cdot 2392995335520991752053$

Apartado III. *Con $P = 1$, encuentra Q natural mayor o igual que 2, tal que definan una sucesión de Lucas que certifique la primalidad n .*

Buscando entre las sucesiones de Lucas para $P = 1$ y $Q = 2, 3, 4, \dots$, encontramos que para la sucesión de Lucas definida por $Q = 10$ nuestro número n tiene rango de Lucas $n + 1$, ya que calculando los términos siguientes:

- $U_r = 0$
- $U_{r/2} = U_{95935654458561417343980729818435023455} = 47709003998208220060485602635197377210$
- $U_{r/3} = U_{63957102972374278229320486545623348970} = 164273324877028002772735679224768487534$
- $U_{r/5} = U_{38374261783424566937592291927374009382} = 106047746876049106968314821301996697007$
- $U_{r/154493} = U_{1241941763815336841720734658766870} = 175845131206947774252831550572310399643$
- $U_{r/5766560731} = U_{33273092553358012087493171610} = 58655345985896460309905073082122530692$
- $U_{r/2392995335520991752053} = U_{80180394031294470} = 152242346079475099180599144460723176298$

Lo que nos certifica que para los P y Q mencionados, obtenemos $\omega(n) = n + 1$, lo que nos da un certificado de primalidad para nuestro número n .