

# Ejercicio 6

David García Curbelo

Sea  $p = 4547$  el factor primo que tiene mayor período (en este caso, 58):

## **Apartado I. *Calcula los convergentes de $\sqrt{p}$***

Los sucesivos convergentes de la FCS de  $\sqrt{4547}$  son los siguientes:

{67, 1}  
{135, 2}  
{472, 7}  
{2967, 44}  
{3439, 51}  
{16723, 248}  
{53608, 795}  
{606411, 8993}  
{660019, 9788}  
{12486753, 185177}  
{25633525, 380142}  
{38120278, 565319}  
{292475471, 4337375}  
{915546691, 13577444}  
{1208022162, 17914819}  
{6955657501, 103151539}  
{63808939671, 946278670}  
{134573536843, 1995708879}  
{736676623886, 10924823065}  
{871250160729, 12920531944}  
{1607926784615, 23845355009}  
{2479176945344, 36765886953}  
{23920519292711, 354738337586}  
{26399696238055, 391504224539}  
{76719911768821, 1137746786664}  
{103119608006876, 1529251011203}  
{179839519775697, 2666997797867}  
{282959127782573, 4196248809070}  
{1311676030905989, 19451993034147}  
{88165253198483836, 1307479782096919}  
{353972688824841333, 5249371121421823}  
{442137942023325169, 6556850903518742}  
{796110630848166502, 11806222024940565}  
{1238248572871491671, 18363072928459307}  
{3272607776591149844, 48532367881859179}  
{4510856349462641515, 66895440810318486}  
{43870314921754923479, 650591335174725553}  
{48381171271217564994, 717486775985044039}  
{92251486192972488473, 136807811159769592}  
{140632657464190053467, 2085564887144813631}  
{795414773513922755808, 11795902546883837747}

{1731462204492035565083, 25677369980912489125}  
{16378574613942242841555, 242892232375096239872}  
{83624335274203249772858, 1240138531856393688485}  
{100002909888145492614413, 1483030764231489928357}  
{383633064938639727616097, 5689230824550863473556}  
{2785434364458623585927092, 41307646536087534243249}  
{3169067429397263313543189, 46996877360638397716805}  
{9123569223253150213013470, 135301401257364329676859}  
{167393313447953967147785649, 2482422099993196331900267}  
{176516882671207117360799119, 2617723501250560661577126}  
{2109079022831232258116575958, 31277380613749363609248653}  
{6503753951164903891710526993, 96449865342498651489323085}  
{28124094827490847824958683930, 417076841983743969566540993}  
{34627848778655751716669210923, 513526707326242621055864078}  
{235891187499425358124973949468, 3498237085941199695901725461}  
{742301411276931826091591059327, 11008237965149841708761040461}  
{1720494010053289010308156068122, 25514713016240883113423806383}

**Apartado II. *Calcula las soluciones de las ecuaciones de Pell*,  $x^2 - p \cdot y^2 = \pm 1$**

Para poder resolver la ecuación  $x^2 - 4547 \cdot y^2 = \pm 1$  podemos recurrir a las iteraciones del desarrollo en FCS, que tiene longitud de período par ( $r = 58$ ), luego podemos asegurar la existencia de solución de la ecuación de Pell para 1, y dicha solución se encuentra en alguno de los convergentes.

- La menor solución positiva de la ecuación  $x^2 - 4547 \cdot y^2 = 1$  es la siguiente:

$$x = 1720494010053289010308156068122$$

$$y = 25514713016240883113423806383$$

Ahora, por ser el período de la FCS par, tenemos que no existen soluciones de la ecuación  $x^2 - 4547 \cdot y^2 = -1$  dentro de los convergentes.

**Apartado III. *Calcula las unidades del anillo de enteros cuadráticos*  $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$**

Para ello, vemos que no tenemos, para ninguno de los convergentes, una solución para la ecuación  $x^2 - p \cdot y^2 = \pm 4$ . Además, vemos que  $4547 \not\equiv 1 \pmod{4}$ , luego las unidades fundamentales del anillo de enteros cuadráticos se obtienen de la ecuación de Pell anterior  $x^2 - 4547 \cdot y^2 = 1$ , donde:  
 $a = 1720494010053289010308156068122$   
 $b = 25514713016240883113423806383$

Y por tanto las unidades del anillo son de la forma  $(a + b \cdot \sqrt{4547})^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .

**Apartado IV.** *¿Es  $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$  el anillo de enteros del cuerpo  $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ ?*

Vemos que  $4547 \equiv 3 \pmod{4}$ , entonces los elementos del anillo de enteros son de la forma  $a + b \cdot \sqrt{4547}$ , con  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Por tanto,  $\mathbb{Z}[\sqrt{p}] = \{a + b \cdot \sqrt{p}, \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$  es el anillo de enteros del cuerpo  $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ .