Ejercicio 6

David García Curbelo

Sea $p = 4547$ el factor primo que tiene mayor período (en este caso, 58):

Apartado I. ***Calcula los convergentes de*** $\sqrt{p}$

Los sucesivos convergentes de la FCS de $\sqrt{4547}$ son los siguientes:
$\{67, 1\}$
$\{135, 2\}$
$\{472, 7\}$
$\{2967, 44\}$
$\{3439, 51\}$
$\{16723, 248\}$
$\{53608, 795\}$
$\{606411, 8993\}$
$\{660019, 9788\}$
$\{12486753, 185177\}$
$\{25633525, 380142\}$
$\{38120278, 565319\}$
$\{292475471, 4337375\}$
$\{915546691, 13577444\}$
$\{1208022162, 17914819\}$
$\{6955657501, 103151539\}$
$\{63808939671, 946278670\}$
$\{134573536843, 1995708879\}$
$\{736676623886, 10924823065\}$
$\{871250160729, 12920531944\}$
$\{1607926784615, 23845355009\}$
$\{2479176945344, 36765886953\}$
$\{23920519292711, 354738337586\}$
$\{26399696238055, 391504224539\}$
$\{76719911768821, 1137746786664\}$
$\{103119608006876, 1529251011203\}$
$\{179839519775697, 2666997797867\}$
$\{282959127782573, 4196248809070\}$
$\{1311676030905989, 19451993034147\}$
$\{88165253198483836, 1307479782096919\}$
$\{353972688824841333, 5249371121421823\}$
$\{442137942023325169, 6556850903518742\}$
$\{796110630848166502, 11806222024940565\}$
$\{1238248572871491671, 18363072928459307\}$
$\{3272607776591149844, 48532367881859179\}$
$\{4510856349462641515, 66895440810318486\}$
$\{43870314921754923479, 650591335174725553\}$
$\{48381171271217564994, 717486775985044039\}$
$\{92251486192972488473, 1368078111159769592\}$
$\{140632657464190053467, 2085564887144813631\}$
$\{795414773513922755808, 11795902546883837747\}$

{1731462204492035565083, 25677369980912489125}
{16378574613942242841555, 242892232375096239872}
{83624335274203249772858, 1240138531856393688485}
{100002909888145492614413, 1483030764231489928357}
{383633064938639727616097, 5689230824550863473556}
{2785434364458623585927092, 41307646536087534243249}
{3169067429397263313543189, 46996877360638397716805}
{9123569223253150213013470, 135301401257364329676859}
{167393313447953967147785649, 2482422099993196331900267}
{176516882671207117360799119, 2617723501250560661577126}
{2109079022831232258116575958, 31277380613749363609248653}
{6503753951164903891710526993, 96449865342498651489323085}
{28124094827490847824958683930, 417076841983743969566540993}
{34627848778655751716669210923, 513526707326242621055864078}
{235891187499425358124973949468, 3498237085941199695901725461}
{742301411276931826091591059327, 11008237965149841708761040461}
{1720494010053289010308156068122, 25514713016240883113423806383}

Apartado II. ***Calcula las soluciones de las ecuaciones de Perll,*** $x^2 - p \cdot y^2 = \pm 1$

Para poder resolver la ecuación $x^2 - 4547 \cdot y^2 = \pm 1$ podemos recurrir a las iteraciones del desarrollo en FCS, que tiene longitud de período par ($r = 58$), luego podemos asegurar la existencia de solución de la ecuación de Perll para 1, y dicha solución se encuentra en alguno de los convergentes.

- La menor solución positiva de la ecuación $x^2 - 4547 \cdot y^2 = 1$ es la siguiente:
  $x = 1720494010053289010308156068122$
  $y = 25514713016240883113423806383$

Ahora, por ser el período de la FCS par, tenemos que no existen soluciones de la ecuación $x^2 - 4547 \cdot y^2 = -1$ dentro de los convergentes.

Apartado III. ***Calcula las unidades del anillo de enteros cuadráticos*** $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$

Para ello, vemos que no tenemos, para ninguno de los convergentes, una solución para la ecuación $x^2 - p \cdot y^2 = \pm 4$. Además, vemos que $4547 \not\equiv 1 \pmod{4}$, luego las unidades fundamentales del anillo de enteros cuadráticos se obtienen de la ecuación de Perll anterior $x^2 - 4547 \cdot y^2 = 1$, donde:
$a = 1720494010053289010308156068122$
$b = 25514713016240883113423806383$

Y por tanto las unidades del anillo son de la forma $(a + b \cdot \sqrt{4547})^n$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Apartado IV. ***¿Es*** $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ ***el anillo de enteros del cuerpo*** $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$***?***

Vemos que $4547 \equiv 3 \pmod 4$, entonces los elementos del anillo de enteros son de la forma $a + b \cdot \sqrt{4547}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $\mathbb{Z}[\sqrt{p}] = \{a + b \cdot \sqrt{p}, \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$ es el anillo de enteros del cuerpo $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$.