Topología II
David García Curbelo

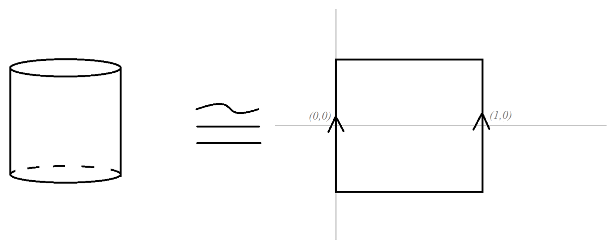
Ejercicio 7. *Construir una aplicación recubridora de dos hojas $\pi : C \to M$, donde C es el cilindro y M es la cinta de Möbius infinita:*

$$M = ([0,1] \times \mathbb{R})/\sim, \text{ donde } (x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (x',y') \\ \quad\quad \text{ó} \\ \{x,x'\} = \{0,1\}\,,\ y = -y' \end{cases}$$

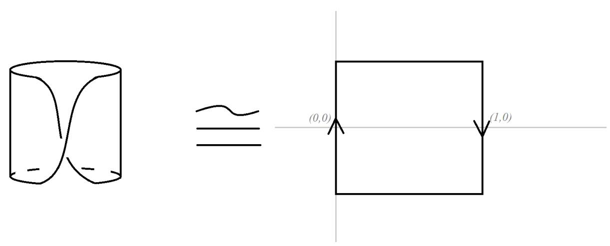
Deducir que $\mathbb{R}^2$ es el recubridor universal de M.

Durante el ejercicio denotaremos por $\sim_{R_M}$ a la relación de equivalencia dada en el enunciado. Ya que el enunciado nos proporciona el conjunto M en forma de conjunto cociente, comencemos considerando el conjunto C del cilindro también como un conjunto cociente, que lo definiremos de la siguiente manera:

$$C \overset{homeo}{\cong} ([0,1] \times \mathbb{R})\,/\sim_{R_C}, \qquad \text{donde se tiene} \qquad (x,y) \sim_{R_C} (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (x',y') \\ \quad\quad \text{ó} \\ \{x,x'\} = \{0,1\},\ y' = y \end{cases}$$

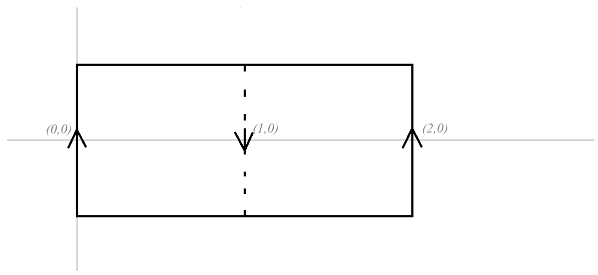


Vemos que de la misma manera, tenemos el homeomorfismo dado en el enunciado $M \cong ([0,1] \times \mathbb{R})/\sim_{R_M}$ en el que podemos ver la relación entre el conjunto M y su conjunto cociente:



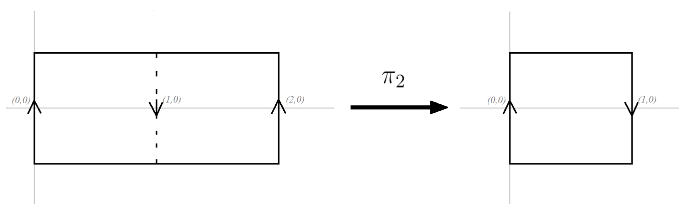
Por supuesto en ambas imágenes se han dibujado los bordes superiores e inferiores, pero es una simple representación para una mejor comprensión. Ambas figuras son infinitas en este sentido. Ahora, teniendo los dos conjuntos cocientes, el problema se restringe a encontrar una aplicación recubridora $\pi : ([0,1] \times \mathbb{R})\,/\sim_{R_C} \to ([0,1] \times \mathbb{R})/\sim_{R_M}$. Para ello, vamos a definir previamente un nuevo conjunto cociente, dado por

$$X = ([0,2]\times\mathbb{R})\,/\sim_{R_1}, \qquad \text{donde se tiene} \qquad (x,y)\sim_{R_1}(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)=(x',y') \\ \text{ó} \\ \{x,x'\}=\{0,2\},\ y'=y \\ \text{ó} \\ \{x,x'\}=\{0,1\},\ y'=-y \\ \text{ó} \\ \{x,x'\}=\{1,2\},\ y'=-y \end{cases}$$



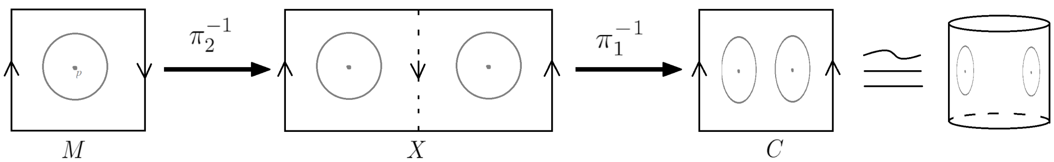
Podemos considerar así la aplicación $\pi_1 : C \to X$ dada por $\pi_1(x,y) = (2x,y)$ la cual es claramente continua y sobreyectiva. De la misma manera podemos también considerar la aplicación $\pi_2 : X \to M$ (también continua y sobreyectiva) dada por

$$\pi_2(x,y) = \begin{cases} [(x,y)]_{R_M} & \text{si} \quad x\in(0,1) \\ [(0,-y)]_{R_M} & \text{si} \quad x=1 \\ [(x-1,y)]_{R_M} & \text{si} \quad x\in(1,2) \\ [(0,y)]_{R_M} & \text{si} \quad x\in\{0,2\} \end{cases}$$

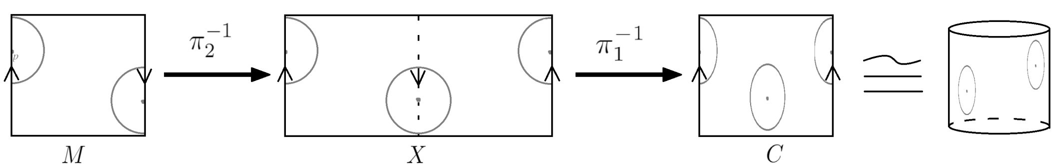


Por lo tanto, la aplicación π que andábamos buscando no es más que la composición de las dos aplicaciones que acabamos de definir, tales que $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 : C \to M$. Comprobemos que verdaderamente es una aplicación recubridora. Es claro que, al ser composición de aplicaciones continuas y sobreyectivas, la aplicación π también resultará continua y sobreyectiva. Estudiemos ahora los entornos distinguidos. Para ello consideremos un elemento $p = [(x,y)]_{R_M} \in M$, distinguiremos dos casos:

Caso 1: $x \in (0,1)$. En este caso tendríamos que $p = [(x,y)]_{R_M} = \{(x,y)\}$. Consideremos así un entorno $U = B((x,y),r)$ con $r > 0$ lo suficientemente pequeño para que no llegue al borde de nuestro conjunto. Estudiando la preimagen de nuestro elemento p tenemos $\pi_2^{-1}(p) = \{(x,y),(x+1,y)\}$, donde $[(x,y)]_{R_1} \neq [(x+1,y)]_{R_1}$. Como sabemos que π_2 es continua, tenemos que $\pi_2^{-1}(U)$ es un entorno abierto tanto de $[(x,y)]_{R_1}$ como de $[(x+1,y)]_{R_1}$. Volviendo a realizar el mismo proceso con π_1, tenemos $\pi_1^{-1}\left([(x,y)]_{R_1}\right) = [(\frac{x}{2},y)]_{R_C}$ y $\pi_1^{-1}\left([(x+1,y)]_{R_1}\right) = [(\frac{x+1}{2},y)]_{R_C}$. Por la misma razón enunciada antes, $\pi_1^{-1}\left(\pi_2^{-1}(U)\right)$ son dos entornos abiertos (distintos) de los elementos $[(\frac{x}{2},y)]_{R_C}$ y $[(\frac{x+1}{2},y)]_{R_C}$.



Caso 2: $x \in \{0,1\}$. En este caso tendríamos que $p = [(x,y)]_{R_M} = \{(0,y),(1,-y)\}$. Consideremos ahora un entorno $U = (B((0,y),r) \cup B((1,-y),r)) \cap ([0,1] \times \mathbb{R})$, con $r > 0$ lo suficientemente pequeño. Realizamos ahora el mismo proceso del caso anterior. Vemos que $\pi_2^{-1}(p) = \{(0,y),(1,-y),(2,y)\} = [(0,y)]_{R_1}$, y como π_2 es continua, se tiene que $\pi_2^{-1}(U)$ es un entorno abierto. Tomando ahora π_1 tenemos $\pi_1^{-1}\left([(0,y)]_{R_1}\right) = \{(0,y),(\frac{1}{2},-y),(1,y)\} = \left\{[(0,y)]_{R_C},[(\frac{1}{2},-y)]_{R_C}\right\}$. Así, como π_1 es continua, tenemos que $\pi_1^{-1}\left(\pi_2^{-1}(U)\right)$ son dos entornos abiertos (distintos) de los dos elementos que hemos obtenido.



Con esto hemos demostrado que nuestra aplicación π es una aplicación recubridora, y efectivamente de dos hojas, ya que se cumple que $Card(\pi^{-1}\left([(x,y)]_{R_M}\right)) = 2$, $\forall (x,y) \in C$, luego tenemos lo que buscábamos.

Veamos ahora que $\mathbb{R}^2$ es efectivamente el recubridor universal de M. Ya que $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, si es recubridor forzosamente será también recubridor universal. Encontremos primero un espacio recubridor $(\phi, \mathbb{R}^2)$ de C. Para ello basta con ver que, como la aplicación exponencial ρ es una aplicación recubridora de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{S}^1$, es claro que $(\rho \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^2)$ es un espacio recubridor de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = C$. Teniendo esto así, podemos considerar $(\pi \circ (\rho \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}), \mathbb{R}^2)$ el espacio recubridor de M ,y además, por ser simplemente conexo y $\Pi_1(\mathbb{R}^2) \cong \{1\}$, tenemos que efectivamente $\mathbb{R}^2$ es el recubridor universal de M.