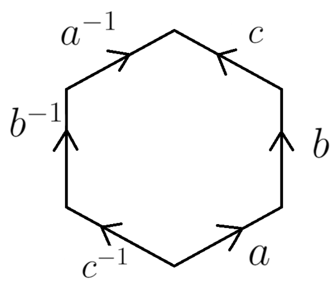
Topología II
David García Curbelo

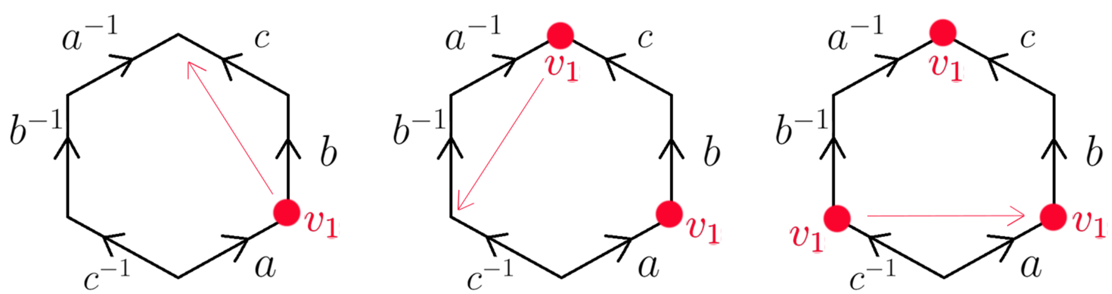
Ejercicio 13.b). *Para la siguiente presentación de superficie, calcula la caracteríastica de Euler y determina a cual de las superficies modelo es homeomorfa:*

$$< a, b, c; abca^{-1}b^{-1}c^{-1} >$$

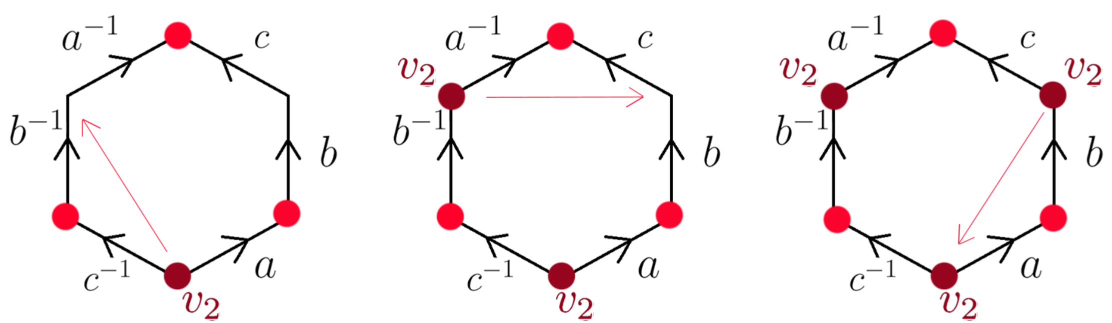
Consideremos La presentación poligonal de nuestra superficie:



Veamos cuántos vértices tiene nuestra presentación. Tomemos por v_1 al vértice final del lado a de nuestra palabra. Dicho vértice ha de estar identificado con el vértice final del lado a^{-1}, el cual es fácil observar que coincide con el vértice final del lado c. Este a su vez ha de estar identificado con el final de su inverso, el c^{-1}. Al estar conectados el final del lado c^{-1} con el principio del lado b^{-1}, éste forzosamente ha de estar identificado de igual manera con el principio del lado b, que al ser el mismo que el vértice del final de a, que sabemos que es v_1, tenemos completametne localizado nuestro vértice v_1 en nuestra superficie. Ilustramos este proceso gráficamente:



Realizamos ahora el mismo proceso para v_2. Consideremos como punto de partida el inicio del lado a. Este, al ser adyacente con el inicio de c^{-1}, estará identificado con el inicio del lado c. Vemos que dicho vértice conecta c con el final del lado b, luego dicho vértice también identifica con el final de b^{-1}, y de la misma manera, al ser adyacente con el principio del inverso de a, volvemos al vértice v_2 que habíamos definido en un principio, y por tanto dicho vértice queda totalmente identificado.



Con esta información ya estamos preparados para clasificar nuestra superficie. Como podemos ver, no ha quedado ningún vértice sin identificar, y el número de vértices que hemos requerido ha sido 2. Además, nuestra superficie está conformada por una sola palabra, la cual tiene tres aristas distintas. Siendo todo esto así, y ayudándonos de la característica de Euler podemos ver que la característica de Euler de nuestra superficie es

$$\chi(P) = C - A + V = 1 - 3 + 2 = 0$$

Sabemos que nuestra superficie debe ser homeomorfa a alguna de las superficies modelos. Ya que $\chi(P) = 0$ es par, nos encontramos ante el conflicto de no saber si nuestra superficie es un Toro o la suma conexa de dos planos proyectivos. Para ello consideremos de nuevo palabra de nuestra presentación, y apliquémosle transformaciones elementales para poder estudiar su orientabilidad (que no tenga aristas retorcidas):

$$abca^{-1}b^{-1}c^{-1} \overset{Rotar}{\approx} bca^{-1}b^{-1}c^{-1}a \overset{Consolidar}{\approx} bxb^{-1}x^{-1} \overset{Renombrar}{\approx} aba^{-1}b^{-1}$$

Vemos así claramente que nuestra superficie dada por la presentación $< a, b, c; abca^{-1}b^{-1}c^{-1} >$ es orientable por no presentar aristas retorcidas, luego ha de ser homeomorfa a un Toro.