Topología II

Primer parcial 2020

Sea X_0 el subespacio topológico de $\mathbb{R}^3$ dado por la unión $\mathbb{S}^2_{(0,0,0)} \cup \mathbb{S}^2_{(3,0,0)} \cup L$, donde $\mathbb{S}^2_{(0,0,0)}$ es la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1, $\mathbb{S}^2_{(3,0,0)}$ es la esfera de centro $(3,0,0)$ y radio 1, y $L = \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x \in [2,4]\}$ es el segmento que conecta los polos oeste y este de la esfera $\mathbb{S}^2_{(3,0,0)}$. Observa que X_0 no es conexo, ni arcoconexo. Consideremos en X_0 la relación de equivalencia en la que dos puntos $p, q \in X_0$ están relacionados si y sólo si pasa una de las tres siguientes posibilidades:

1. $p = q$
2. $\{p,q\} = \{(0,0,1),(3,0,1)\}$; es decir, identificamos polo norte de una esfera con polo norte de la otra.
3. $\{p,q\} = \{(0,0,-1),(3,0,-1)\}$; es decir, identificamos polo sur de una esfera con polo sur de la otra.

Definimos X como el espacio topológico cociente de X_0 por esta relación de equivalencia. Justificar que X es arcoconexo y calcular su grupo fundamental (en el punto que se quiera).

CONSEJO: Haz un dibujo de un subespacio topológico de $\mathbb{R}^3$ que sea homeomorfo a X y calcula el grupo fundamental de ese subespacio (basta con un dibujo, no es necesario dar una descripción explícita del subespacio).