Universidad de Granada

Facultad de Ciencias

Ejercicios de exámenes Resueltos

Estadística descriptiva en introd. a la Probabilidad

AmigoCanario

En el presente documento se presenta un compendio de todas las cuestiones del marco teórico que se han preguntado en los últimos 10 años, con la intención de que sirva al lector a modo de guía teórica para los exámenes venideros. Como podréis observar, no hay preguntas en exceso, y éstas mismas que aquí os presento se han repetido convocatoria tras convocatoria a lo largo de los años. Espero que te sirva de ayuda tanto como me ha servido a mí, y espero que hagas buen uso del mismo.

Índice

1. Estadística Unidimensional y Bidimensional

1.1. Opción Múltiple

1. **Responde correctamente a las siguientes cuestiones:**

   a) **Si el coeficiente de variación de Pearson de X es $CV(X) = 0{,}32$ y la variable $Y = \frac{X+4}{2}$, entonces:**

   1) $CV(Y) = 2{,}16$
   2) Las variables X e Y tienen la misma dispersión relativa.
   3) $CV(Y) = \frac{0{,}32}{1+\frac{4}{\bar{x}}}$
   4) Ninguna de las anteriores.

   b) **La razón de correlación:**

   1) Tiene por rango de variación $[-1, 1]$.
   2) En el caso del ajuste lineal coincide con el coeficiente de correlación lineal.
   3) Indica la proporción de la varianza de la variable dependiente debida a la varianza residual.
   4) Indica la proporción de la varianza de la variable dependiente, explicada por la regresión.

   c) **El valor de la vivienda se ha incrementado un 10 %, 3 %, 2 % y 9 % respectivamente durante los últimos cuatro años. El incremento medio anual del valor de la vivienda durante dicho periodo ha sido:**

   1) 25.97 %
   2) 5.94 %
   3) 6 %
   4) 4.82 %

   d) **A partir de la siguiente distribución:**

x_i	f_i	N_i
0	0.5	
1	0.2	7
2	0.3	

   se puede afirmar que:

   1) La media aritmética es 0.5.
   2) El valor 1 se repite 7 veces.
   3) Existe un total de 10 observaciones.
   4) El valor mediano es x_2.

1.1.1. Soluciones

a) Solución apartado 3). Como queremos calcular el $CV(Y)$, tenemos que aplicar el cambio de variable de $Y = \frac{X}{2} + 2$, lo que es lo mismo, todos sus valores en la nueva variable quedan modificados tal que $y_i = \frac{x_i}{2} + 2$. Como sabemos,

$$CV_X = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \quad \Rightarrow \quad CV_{aX+b} = \frac{a\sigma_x}{a\bar{x}+b} \quad \Rightarrow \quad CV_Y = \frac{\frac{1}{2}\sigma_x}{\frac{\bar{x}}{2}+2}$$

Ahora diviendo entre la media $\bar{x}$ el numerador tenemos

$$CV_Y = \frac{\frac{1}{2}\sigma_x}{\frac{\bar{x}}{2}+2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\sigma_x}{\bar{x}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{\bar{x}}} = \frac{1}{2}\frac{CV_X}{\frac{1}{2}+\frac{2}{\bar{x}}} = \frac{CV_X}{1+\frac{4}{\bar{x}}}$$

b) Solución apartado 4). Aquí hay poco que explicar. El primero no puede ser, ya que se trata de un intervalo abierto, y la razón de correlación puede tomar valor 0 (ajuste perfecto). Como la fórmula es

$$\eta^2_{y/x} = 1 - \frac{\sigma^2_{ry}}{\sigma^2_y}$$

Vemos que indica la proporción de la variable dependiente (y) con respecto a la regresión.

c) Solución apartado 2). Para este ejercicio debemos tener en cuneta que se trata de *incremento*, es decir, en realidad estamos trabajando con los porcentajes 110 %, 103 %, 102 % y 109 %. Al tratarse de porcentajes, realizamos su media geométrica, y obtenemos así

$$I_M = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[4]{1{,}1 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}09} = 1,0594$$

$$\Rightarrow \quad \text{Incremento del } 5{,}94\,\%$$

d) Solución apartado 3). Si calculamos la media veremos que su valor es $\bar{x} = 0{,}8 \neq 0{,}5$. El valor mediano no puede ser 1 ya que el 50 % de los datos están en x_1 ($f_1 = 0{,}5$). Si completamos la tabla, vemos que $F_2 = 0{,}7$, y como $n = \frac{N_i}{F_i}$, tenemos que $n = 10$.

1.2. Verdadero/Falso

2. **Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:**

   a) El cuartil de orden 2 de la distribución de una variable estadística continua no siempre coincide con su mediana.

   b) El coeficiente de determincación, en el caso de la regresión lineal, coincie con el coeficiente de correlación lineal.

   c) Sea X una variable estadística. Sea $Y = 3X - 2$. Entonces $CV(Y) = \frac{3CV(X)}{3-\frac{2}{\bar{x}}}$.

   d) Si $\mu_{11} = 0$ entonces las variables son independientes (momento conjunto no centrado).

   e) Si las variables X e Y son independientes, entonces los momentos conjuntos no centrados serán todos nulos.

   f) En la curva de regresión mínimo cuadrática Y/X, los residuos tienen media $\bar{Y}$ y los valores ajustados tienen media 0.

   g) Si X e Y son independientes, entonces la covarianza de las variables es nula.

   h) Si X e Y son independientes, entonces la razón de correlación de Y sobre X es mayor que el coeficiente de determincación lineal.

   i) Si X e Y son independientes, entonces la media de los residuos lineales mínimo cuadráticos de Y/X es $\bar{Y}$.

   j) Si X e Y son independientes, entonces la varianza de los residuos lineales mínimo cuadráticos de Y/X es σ_y^2.

   k) Si todos los valores de X están comprendidos en un intervalo de amplitud 2, la varianza de X es menor o igual que 4.

   l) Si la varianza de X vale 4 y el error cuadrático medio asociado a la recta de regresión de X sobre Y vale 3, la razón de correlación de X sobre Y es menor que 0.25.

1.2.1. Soluciones

a) Falso. $P_{50} = D_{10} = Q_2 = Me$

b) Falso. Sólo coinciden en en caso en el que las rectas son crecientes y que además exista dependencia lineal recíproca entre X e Y $(R_{xy} = R_{xy}^2 = 1)$

c) Verdadero. Como queremos calcular el $CV(Y)$, tenemos que aplicar el cambio de variable de $Y = 3X - 2$, lo que es lo mismo, todos sus valores en la nueva variable quedan modificados tal que $y_i = 3x_i - 2$. Como sabemos,

$$CV_X = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \quad \Rightarrow \quad CV_{aX+b} = \frac{a\sigma_x}{a\bar{x} + b} \quad \Rightarrow \quad CV_Y = \frac{3\sigma_x}{3\bar{x} - 2}$$

Ahora diviendo entre la media $\bar{x}$ el numerador tenemos

$$CV_Y = \frac{3\sigma_x}{3\bar{x} - 2} = \frac{3CV_X}{3 - \frac{2}{\bar{x}}}$$

d) Falso. Que las variables sean independientes implica que la covarianza sea nula, pero el recíproco no es cierto. Basta considerar el ejemplo siguiente:

$X \setminus Y$	1	2	3
-1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

donde podemos ver que la covarianza es nula y sin embargo las variables no son independientes.

e) Falso. Si son independientes entonces se tiene $m_{rs} = m_{r0}m_{0s} \neq 0$

f) Falso. El enunciado correcto sería el siguiente: ...los residuos tienen media 0 y la media de los valores ajustados coincide con la de los observados (es decir, tiene media $\bar{y}$).

g) Verdadero. Si dos variables son independientes, entonces se cumple que $f_{ij} = f_{i.}f_{.j}$, $\forall i, j$. Por tanto, aplicando el teorema de Konig se tiene:

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_iy_j - \bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{i.}f_{.j}x_iy_j - \bar{x}\bar{y} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} f_{i.}x_i \sum_{j=1}^{p} f_{.j}y_j - \bar{x}\bar{y} = \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} = 0$$

h) Falso. Como las variables son independientes, entonces se tiene que la covarianza es nula, y por tanto el coeficiente de determinación lineal viene dado por

$$R^2_{xy} = \frac{\sigma^2_{xy}}{\sigma^2_x \sigma^2_y} = 0$$

y por tanto, dado que la razón de correlación es mayor o igual que cero, no podemos afirmar que sea estrictamente mayor que cero.

i) Falso. Si consideramos la recta de regresión Y/X, los residuos vienen dados por

$$r_{ij} = y_j - \left(\bar{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma^2_x}(x_i - \bar{x})\right)$$

Entonces, suponiendo que la media de los residuos lineales es nula, notando por $n = pk$, luego tenemos (sustituyendo el resultado anterior)

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{n}r_{ij} = 0 \Leftrightarrow k\sum_{j=1}^{p} y_j = kp\bar{y} \leftrightarrow \sum_{j=1}^{p} y_j = p\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p} y_j \Leftrightarrow p = n \Leftrightarrow k = 1$$

y por tanto, si $k = 1$ nos encontraríamos en una unidimensional, lo cual contradice con la hipótesis inicial.

j) Verdadero. Por ser X e Y independientes, tenemos que la covarianza es nula $\sigma^2_{xy} = 0$. Sabemos que la varianza de los residuos lineales viene explicada de la siguiente manera:

$$\sigma^2_y = \sigma^2_{ey} + \sigma^2_{ry}, \qquad \sigma^2_{ey} = \frac{\sigma^2_{xy}}{\sigma^2_x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^2_y = \sigma^2_{ry}$$

k) Verdadero. la varianza sabemos que viene dada por

$$\sigma^2_x = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})$$

Por definición, la media pertenece al intervalo comprendido entre el valor máximo y el mínimo de todos los x_i, $i = 1, ..., k$. por lo que tenemos

$$\text{mín}(x_i) \leq \bar{x} \leq \text{máx}(x_i)$$

Y de la misma manera, podemos deducir que

$$\text{mín}(x_i - \bar{x})^2 \leq \sigma_x^2 \leq \text{máx}(x_i - \bar{x})^2$$

Por hipótesis sabemos que la amplitud del intervalo $(\text{mín}(x_i), \text{máx}(x_i))$ vale 2, luego

$$\text{máx}(x_i - \bar{x}) \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \text{máx}(x_i - \bar{x})^2 \leq 4$$

$$\text{mín}(x_i - \bar{x})^2 \leq \sigma_x^2 \leq \text{máx}(x_i - \bar{x})^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x^2 \leq 4$$

l) Falso. Sabemos que la razón de correlación viene dada por

$$\eta_{x/y}^2 = 1 - \frac{ECM(X/Y)}{\sigma_x^2}$$

Sustituyendo los dos valores que nos da el enunciado tenemos que $\eta_{x/y}^2 = 0{,}25$, en contradicción con que valga estrictamente menos que 0.25.

1.3. Cuestiones Teóricas

3. **Sea** (X, Y) **una varaible estadística bidimensional con valores** (x_i, y_j) **y frecuencias relativas** f_{ij}**,** $i = 1, ..., k$; $j = 1, ..., p$**.**

    a) Dado $j = 1, ..., p$, expresa las frecuencias relativas de la distribución condicionada de X a $Y = y_j$, en términos de las conjuntas, f_{ij}, y especifica la media y la varianza de dicha distribución condicionada en términos de las frecuencias relativas correspondientes.

    b) Determina de forma justificada la curva de regresión mínimo cuadrática de Y sobre X. Calcula la media de los valores ajustados por esta curva.

    c) Se han observado las variables (X, Y) y se ha obtenido que la recta de regresión de Y sobre X es $y = -2x + 4$, con $R^2_{xy} = 4/9$, $\bar{x} = 3$ y $\sigma_y = 12$. Determina los valores de $\bar{y}$, σ_x y la covarianza σ_{xy}.

    d) Deducir de forma razonada cómo afecta el cambio de origen y escala al coeficiente de variación X.

    e) Deducir de forma razonada las ecuaciones normales de la recta de regresión mínimo cuadrática de Y/X y obtener la expresión de la recta a partir de dichas ecuaciones.

    f) En la regresión lineal de Y sobre X, deducir de forma razonada la expresión de la varianza de los valores observados en función de los valores ajustados y de los momentos de los residuos.

    g) Definir las frecuencias relativas, la media y la varianza de la distribución Y condicionada a $X = x_i$.

1.3.1. Soluciones

a) Frecuencia relativa de x_i en los individuos tales que $Y = y_j$:

$$f_{i/j} = \frac{n_{ij}}{n_{.j}} == \frac{f_{ij}}{f_{.j}}$$

$$\bar{x}_j = \sum_{j=1}^{p} f_{i/j} x_i \qquad \sigma^2_{x,j} = \sum_{j=1}^{p} f_{i/j}(x_i - \bar{x}_j)^2$$

b) Se deja este ejercicio propuesto para el lector.

c) Nuestra recta viene dada por $y = ax + b = -2x + 4$. Basándonos en los resultados del apartado anterior, y sustituyendo los valores dados por el enunciado, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ b &= \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} -2 &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ 4 &= \bar{y} - 3\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 4 = \bar{y} - 3(-2)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y} = -2$$

Ya tenemos nuestra primera ecuación. Aplciando ahora que

$$R^2_{xy} = \frac{\sigma^2_{xy}}{\sigma^2_x \sigma^2_y} = \frac{4}{9}$$

y junto con la primera ecuación del sistema anterior (y que $\sigma_y = 12$) entonces tenemos:

$$\frac{4}{9} = \frac{\sigma^2_{xy}}{\sigma^2_x \sigma^2_y} = \sigma_{xy}\frac{\sigma_{xy}}{\sigma^2_x}\frac{1}{\sigma^2_y} = \sigma_{xy}(-2)\frac{1}{144} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xy} = -32$$

Y retomando ahora nuestra primera ecuación, obtenemos de manera directa que $\sigma_x = 4$.

d) Veamos cómo es afectado por cambios de origen, pero sin embargo no afectado por cambios de escala.

$$CV_X = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \quad \Rightarrow \quad CV_{aX+b} = \frac{\sigma_{ax+b}}{\overline{ax+b}}$$

Como bien sabemos, la media se ve afectada tanto por cambios de escala como por cambios de origen, al igual que la varianza por cambios de escala de la siguiente manera:

$$CV_{aX+b} = \frac{\sigma_{ax+b}}{\overline{ax+b}} = \frac{|a|\sigma_x}{a\bar{x}+b}$$

Donde vemos que en caso de que $b = 0$ (sin cambio de origen, sólo de escala) resulta que $CV_{aX} = CV_X$, pero dicha igualdad no se cumple para cualquier otro valor de b, luego concluimos que el coeficiente de variación es invarainte ante cambios de escala, pero sí es sensible a cambios de origen.

e) Queremos que Y/X sea aproximado por una distribución de la forma $y = ax + b$ tal que la función

$$\lambda(a,b) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}[y_j - (ax_i + b)]^2$$

sea mínima (notemos que es la varianza donde hemos sustituido la recta que buscamos en la media de y). Para calcular que sea mínima, calculamos las parciales con respecto a las variables a y b e igualamos a cero (para obtener los posibles extremos relativos) de donde obtenemos las siguientes ecuaciones normales:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial\lambda(a,b)}{\partial a} = 0\\ \dfrac{\partial\lambda(a,b)}{\partial a} = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} m_{11} = am_{20} + bm_{10}\\ m_{01} = am_{10} + b\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\\ b = \bar{y} - \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x}\end{array}\right\}$$

de donde hemos obtenido los elementos de nuestra recta $y = ax + b$ que buscábamos. Notemos que la varianza no puede ser nula, ya que en tal caso tendremos que X es constante, y por tanto no tendría sentido calcular la recta de regresión (los datos ya dibujarían una recta).

f) Calculemos primero la varianza de los valores ajustados (σ_{ey}^2) y luego la de los residuos (σ_{ry}^2):

$$\sigma_{ey}^2 = \sum_{i=1}^{k} f_{i.}\left(\bar{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x_i - \bar{x}) - \bar{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} f_{i.}\left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x_i - \bar{x})\right)^2 =$$

$$= \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^4}\sum_{i=1}^{k} f_{i.}\,(x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}$$

$$\sigma_{ry}^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}\left(y_j - \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x_i - \bar{x})\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}(y_j - \bar{y})^2 + \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^4}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x_j - \bar{x})^2 - 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}(y_j - \bar{y})\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x_j - \bar{x})$$

$$= \sigma_y^2 + \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^4}\sigma_x^2 - 2\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\sigma_{xy} = \sigma_y^2 + \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} - 2\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}$$

Y por tanto tenemos que la suma de ambos resulta:

$$\sigma_{ey}^2 + \sigma_{ry}^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} + \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_y^2 = \sigma_{ey}^2 + \sigma_{ry}^2$$

$g)$ Mismo proceso que el apartado $a)$, cambiando subíndices.

2. Probabilidad como Conjuntos

2.1. Verdadero/Falso

1. **Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:**

   a) Si A y B están contenidos en C, entonces $P(\bar{C}) < P(\bar{A}) + P(\bar{B})$

   b) $P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{P(A)}$

   c) Si A y B son dos sucesos independientes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

   d) Si $\{B_i\}_{i=1,2,3,...}$ son sucesos incompatibles, exhaustos y de probabilidades no nulas, entonces para un suceso arbitrario A se tiene:

   $$P(A/B_j) = \frac{P(B_j/A)P(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i/A)P(A)}$$

   e) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

   f) $P(A \cap B \cap C) = P(B/A \cap C)P(A/C)P(C)$

   g) $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$

   h) Si A y B son sucesos independientes, entonces $\bar{A}$ y $\bar{B}$ también lo son.

   i) Si A y $\bar{B}$ son independientes, entonces $\bar{A}$ y B también lo son.

   j) Si $\bar{A}$ y B son independientes, entonces $P(A \cup B) = P(\bar{A})P(B) + P(A)$

   k) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

   l) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(B)$

   m) $P(A) + P(B) > P(A \cap B)$ implica que A y B son sucesos incompatibles.

   n) $P((A - B)/A) = 1 - P(B)$ implica que A y $\bar{B}$ son sucesos independientes.

   ñ) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

   o) $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)$

   p) $P(A/B) = P(A \cap B)/P(A)$

   q) Si A, B y C son tres sucesos independientes dos a dos, entonces $P(A/B) = P(B/A)$.

   r) Si A, B y C son tres sucesos independientes dos a dos, entonces $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

   s) Si A, B y C son tres sucesos independientes dos a dos, entonces $P(A/(B \cap C)) = P(A)$.

   t) Si A, B y C son tres sucesos independientes dos a dos, con C independiente de $A \cup B$ entonces $P((\bar{A} \cup \bar{B})/C) = 1 - P(A)P(B)$.

   u) Si A y B son dos sucesos incompatibles e independientes, entonces $P(A \cup B) \geq 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})$

   v) Si A y B son dos sucesos incompatibles e independientes, entonces $P(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(\bar{B}/A) < 1$

2.1.1. Soluciones

a) Verdadero. Como $A \subset C$, tenemos que $P(A) \leq P(C)$, y entonces tenemos que $P(\bar{A}) \geq P(\bar{C})$ (se realiza el mismo proceso con B, obteniendo $P(\bar{B}) \geq P(\bar{C})$). Sumando ambas desigualdades tenemos $P(\bar{A})+P(\bar{B}) \geq 2P(\bar{C})$ y por tanto concluimos $P(\bar{A})+P(\bar{B}) > P(\bar{C})$.

b) Verdadero. Basta con ver que $P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$, y vemos que el enunciado cumple la propiedad de la probabilidad condicionada $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

c) Falso. Dicha igualdad sólo se cumple cuando alguna de los dos conjuntos tenga probabilidad nula, para que se cumpla la condición de independencia $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Con que una de as dos probabilidades sea no nula, no se cumple la igualdad dada.

d) Falso. La definición correcta del Teorema de Bayes concluiría con la siguiente igualdad:

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}$$

e) Verdadero. $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \geq P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \quad \Rightarrow \quad 1 \geq P(A \cup B)$

f) Verdadero.

$$P(B/A \cap C)P(A/C)P(C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap C)} \frac{P(A \cap C)}{P(C)} P(C) =$$

$$P(A \cap B \cap C)$$

g) Falso. Esto sólo se cumple cuando los sucesos son independientes. Si no se da el caso, el enunciado es erróneo.

h) Verdadero.

$$P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1-P(A))(1-P(B)) = 1-P(A)-P(B)+P(A)P(B) =$$

$$= 1-P(A)-P(B)+P(A \cap B) = 1-P(A \cup B) = P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

i) Verdadero. Demostración análoga a la anterior.

j) Verdadero. Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, luego la demostración se basa en probar que $P(B) - P(A \cap B) = P(\bar{A})P(B)$, y esto es tan fácil como ver que $P(B) - P(A \cap B) = P(\bar{A} \cap B)$ y que $\bar{A}$ y B son independientes.

k) Verdadero. Definición de probabilidad de intersección.

l) Falso. Sólo cierto en caso de que $P(A) = 1$.

m) Falso. Para $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}7$, $P(A \cap B) = 0{,}6$ se cumple la desigualdad y no son incompatibles (intersección no nula).

n) Verdadero. Llegamos a la independencia entre A y B:

$$P((A - B)/A) = P((A \cap \bar{B})/A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Y ahora como A y B son independientes, A y $\bar{B}$ también lo son.

ñ) Falso. Supongamos $P(A) = 0{,}1$, $P(B) = 0{,}2$, $P(A \cap B) = \emptyset$. Es fácil ver que no se cumple la igualdad.

o) Falso. Si la intersección de dos conjuntos B_i es no nula, la igualdad dada no se cumple (Teorema de la Probabilidad Total).

p) Falso. El denominador debería ser $P(B)$ por definición de probabilidad condicionada.

q) Falso. Para que se de la igualdad ha de cumplirse que $P(A) = P(B)$.

r) Falso. Basta considerar Que la intersección de los tres conjuntos sea nula, pero que los sucesos sean no nulos.

s) Falso. Consideremos igual que en el apartado anterior el caso en que $P(A \cap B \cap C) = 0$, y tendríamos

$$P(A/(B \cap C)) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = 0$$

En cuyo caso sólo se cumpliría en el caso $P(A) = 0$, pero sería falso en cualquier otro caso.

t) Verdadero.

$$P((\bar{A} \cup \bar{B})/C) = P((A \bar{\cap} B)/C) = 1 - P((A \cap B)/C) = 1 - \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} =$$

$$= 1 - \frac{P(A)P(B)P(C)}{P(C)} = 1 - P(A)P(B)$$

u) Verdadero. Si son incompatibles, la intersección es nula, y por tanto de la independencia se tiene que A o B al menos uno de los dos es un suceso nulo. Si sólo uno es nulo (supongamos A), tendríamos $P(A \cup B) = P(B)$ y $P(\bar{A}) = 1$, y por tanto se daría la igualdad en la desigualdad dada. En caso de que ambos fueran nulos, entonces la unión es nula, y por tanto se daría de nuevo la igualdad (ya que $P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = 1$ y por ello $1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0$).

v) Falso. Si A es no nulo, por lo mencionado en el apartado anterior, tenemos que $P(B) = 0$ y así $P(\bar{B}) = 1$ lo que lo convierte en suceso seguro. Por ello al calcular $P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$. Luego no se cumple la desigualdad dada.

2.2. Cuestiones Teóricas

a) Si A y B son sucesos independientes, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ también lo son.

b) Definir la función de probabilidad condicionada a un suceso no nulo y demostrar que satisface los axiomas de Kolmogorov.

c) Especificar las condiciones para que tres sucesos sean independientes.

d) Demostrar que $1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) \leq P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

e) Sean $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ sucesos no nulos, incompatibles dos a dos, cuya unión es Ω y sea $B \in \mathcal{A}$ un suceso arbitrario. Suponiendo que las probabilidades $P(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$, son conocidas, y que también lo son las probabilidades condicionadas $P(B/A_n)$, $n \in \mathbb{N}$, deducir la expresión para calcular $P(B)$ a partir de ellas.

2.2.1. Soluciones

a) Solución dada en el apartado *h*) de la sección anterior.

b) Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y un suceso no nulo $A \in \mathcal{A}$, la aplicación

$$\begin{aligned} P(\cdot/A) : \mathcal{A} &\to \mathbb{R} \\ B &\mapsto P(B/A) \end{aligned}$$

es una función de probabilidad sobre $(\Omega.\mathcal{A})$ cumpliendo:

1) $P(B/A) \geq 0$, $\forall B \in \mathcal{A}$
Dado que A es un suceso no nulo, y que $P(A \cap B) \leq P(A)$, tenemos que la probabilidad condicionada está bien definida.

2) $P(\Omega/A) = 1$.
$P(\Omega/A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

3) Tercer axioma de Kolmogorov, se deja demostración al lector como ejercicio.

c) Para que tres sucesos cualesquiera sean independientes, ha de cumplirse

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

d) La fórmula para el cálculo de $P(B)$ viene dado por

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B/A_n)P(A_n)$$

3. Variables Aleatorias y Distribuciones Discretas

3.1. Opción Múltiple

1. **Responde correctamente a las siguientes cuestiones:**

   a) **Sea X una variable aleatoria discreta y considérese la nueva v.a. $Y = g(X)$, donde g es una función continua estrictamente decreciente. Si $h = g^{-1}$, entonces la función de distribución de Y es:**

   1) $F_Y(y) = 1 - F_X(h(y))$
   2) $F_Y(y) = F_X(h(y))$
   3) $F_Y(y) = 1 - F_X(h(y)) + P(Y = y)$
   4) $F_Y(y) = [1 - F_X(h(y))][h'(y)]$

   b) **Sea X una v.a. discreta con media m y desviación típica 0. Entonces se puede afirmar que:**

   1) $P(X \neq 0) = 0$
   2) $P(X = 0) = 1$
   3) $P(X \neq 0) = 1$
   4) $X = m$

   c) **Sea X una variable aleatoria continua y considérese la nueva v.a. $Y = aX + b$. Entonces:**

   1) $F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$
   2) $F_Y(y) = \left[1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\right]|a|^{-1}$
   3) $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$
   4) $f_Y(y) = |a| f_X(ax + b)$

3.1.1. Soluciones

a) Opción 1. *Si g fuera monótona creciente...*
Al ser g una función continua y estrictamente monótona, tenemos que dicha función es biyectiva en el dominio en el que esté definida. Por definición sabemos que

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

Por ello, llamando ahora $g^{-1} = h$ tenemos $F_Y(y) = F_X(h(y))$.
**Como g es monótona decreciente...*
Basta considerar ahora que, por ser decreciente, si el intervalo maximal de definición viene dado por $[a, b]$, su imagen por g viene dada por $[g(b), g(a)]$, con $a \leq b$. Por ello, tenemos

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - P(X \leq g^{-1}(y)) =$$

$$= 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

Por ello, llamando ahora $g^{-1} = h$ tenemos $F_Y(y) = 1 - F_X(h(y))$.

b) Opción 4. Si la desviación típica vale 0 significa que el intervalo que contiene a todos los elementos es de longitud nula, por ello sabemos que todos los elementos del conjunto han de ser el mismo. Al tener media m, y saber que todos los elementos de la v.a. son el mismo (es decir, son un único valor), concluimos que $X = m$. Los dos primeros apartados es fácil desmentirlos considerando cualquier $m \neq 0$, y para el tercero $m = 0$ conduce también a un enunciado erróneo.

c) Opción 3. Vamos a suponer $a, b \neq 0$, ya que en dicho caso el resultado sería trivial, y no hay ninguna opción para ello. Podemos ver que al tratarse de una transformación lineal sabemos que es derivable, y como la derivada viene dada por el valor de a, sabemos que la transformación $g(X) = aX + b$ es estrictamente monótona. Por el apartado *a*) sabemos que $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$, y por tanto calculando la inversa de la transformación y sustituyendo obtenemos $g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$ y así $F_Y(y) = F_X(\frac{y-b}{a})$. Vemos que esta igualdad no la dispone ninguna de las opciones del enunciado, luego procedamos como sigue. Para ver su función de distribución basta con aplicar el teorema del cambio de variable para transformaciones de continua a continua, dado por

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = \left| \frac{d\frac{y-b}{a}}{dy} \right| = \frac{1}{|a|}$$

$$\Rightarrow \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

3.2. Verdadero/Falso

2. **Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:**

    a) La varianza de la distribución binomial es siempre inferior a su esperanza.

    b) La distribución de Poisson es un caso particular de la binomial cuando n es grande y p pequeño.

    c) En sucesivos experimentos independientes éxito/fracaso, con probabilidad de éxito p constante, el número de realizaciones hasta encontrar el r-ésimo éxito sigue una distribución normal negativa.

    d) La distribución hipergeométrica toma valores entre cero y n con probabilidades no nulas.

    e) El momento centrado de orden 2 de una variable aleatoria nunca puede ser inferior al momento no centrado de orden 2 de dicha variable.

    f) Si X es una v.a. no negativa cuya esperanza existe, entonces se tiene $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$.

    g) Si $E[X] = 2$ y $Var[X] = 3$, entonces $P(-3 < X < 7) \geq 3/5$.

    h) Una variable aleatoria que es transformada de otra no tiene por qué ser siempre del mismo tipo que ésta.

    i) La distribución geométrica modela el número de fracasos que han ocurrido antes de que ocurra el primer éxito.

    j) El momento no centrado de orden 2 de una v.a. nunca puede ser inferior al cuadrado del momento centrado de orden 1 de dicha variable.

    k) Sea X una variable aleatoria continua definida en todo $\mathbb{R}$. Entonces se tiene $F_X(x) = 1 - F_{-X}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

    l) Si $p = 0{,}4$ en una distribución binomial, el cálculo de $\frac{7!}{3!4!}(0{,}4)^3(0{,}6)^4$ nos da la posibilidad de conseguir exactamente tres éxitos en 7 ensayos.

    m) La varianza de la distribución de Poisson aumenta cuando aumenta su media.

    n) La distribución binomial con $n = 1$, es la distribución de Bernoulli.

    ñ) La distribución geométrica es un caso particular de la hipergeométrica si r (número de éxitos) es igual a 1.

3.2.1. Soluciones

a) Verdadero. $E[X] > Var[X]$, siendo X una distribución binomial, donde $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (0,1)$. Tenemos entonces

$$np > np(1-p) \quad \Rightarrow \quad 1 > 1-p \quad \Rightarrow \quad p > 0$$

b) Verdadera. La distribución de Poisson se aproxima a la binomial cuando $n > 20$ y $p \leq 0,1$. Se la conoce por ello como la ley de los sucesos raros. El enunciado es un poco impreciso pero lo damos como válido.

c) Falso. Una X con distribución binomial negativa describe el número de fracasos antes de que ocurra el r-ésimo éxito.

d) Verdadero. Por definición, sabemos que si tenemos una muestra aleatoria de tamaño n, entonces $x = 0, ..., n$.

e) Falso. El enunciado afirma que $m_2 \leq \mu_2$, siendo éstos los momentos de una v.a. X. Por definición sabemos que

$$\left.\begin{array}{l} m_2 = E[X^2] \\ \mu_2 = E[(X-E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 \end{array}\right\}$$

Si suponemos $m_2 \leq \mu_2$ tenemos

$$E[X^2] \leq E[X^2] - E[X]^2 \quad \Rightarrow \quad E[X]^2 \leq 0$$

Lo cual es una contradicción.

f) Verdadero. Nos encontramos ante el enunciado del teorema de Markov de la Desigualdad Básica, cuya demostración se puede ver detenidamente en el siguiente enlace: `http://www.ugr.es/~cdpye/CursoProbabilidad/pdf/P_T04_DesigualdadBasica.pdf`

g) Verdadero. Aplicando la desigualdad de Chebychev en una de sus variantes dada por

$$P\left(-k\sqrt{Var[X]} < X - E[X] < k\sqrt{Var[X]}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}, \quad \forall k > 0$$

$$P\left(-k\sqrt{3} < X - 2 < k\sqrt{3}\right) = P\left(2 - k\sqrt{3} < X < 2 + k\sqrt{3}\right)$$

Tomando $k = \frac{5}{\sqrt{3}}$ obtenemos

$$P(-3 < X < 7) \geq \frac{22}{25} \geq \frac{3}{5}$$

h) Falso. Por resultados vistos anteriormente hemos visto que, siendo g una transformación medible, dicha transformación conserva todas las propiedades de la variable primaria.

i) Verdadero. Definición de la distribución geométrica.

j) Verdadero. El enunciado afirma que $m_2 \geq \mu_1^2$. Aplicando lo visto en el apartado *e*) tenemos $E[X^2] \geq E[X - E[X]] = 0$. Como $E[X^2] = \sum_i \frac{x_i^2}{n}$, al ser suma de cuadrados vemos claramente que es suma de elementos no negativos, y por tanto afirmamos que $E[X^2] \geq 0$.

k) Falso. Sabemos por definición que $F_X(x) = P(X \leq x)$, donde tenemos por hipótesis que $x \in \mathbb{R}^+$. Consideremos la transformación lineal (y por tanto diferenciable) dado por $Y = g(X) = -X$, de donde sabemos que

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)) = F_X(-y)$$

Como $Y = -X$ deshaciendo los cambios obtenemos

$$F_{-X}(-x) = F_X(x)$$

Para el último paso de la prueba necesitaríamos la condición $F_{-X}(-x) = 1 - F_{-X}(x)$, lo cual sólo se daría en caso de que la distribución fuera simétrica centrada en 0, lo cual no se supone en la hipótesis. Luego suponiendo cualquier otro tipo de distribución continua se llega al contraejemplo.

l) Verdadero. Extrayendo de la hipótesis los datos de la fórmula del cálculo de probabilidades de la distribución binomial, $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, obtenemos los datos $n = 7$, $x = 3$, luego podemos afirmar que X describe el numero de éxitos en n repeticiones independientes.

m) Verdadero. Ya que, en una distribución de Poisson la media es igual a su varianza, es fácil ver que el enunciado es cierto.

$n)$ Verdadero. Si tomamos $n = 1$ vemos forzado a que x sólo pueda tomar valores 0 y 1, y en su función de probabilidad vemos que, como la binomial viene dada por $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$, al suponer $n = 1$ entonces tenemos $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$ que es precisamente una Bernoulli con probabilidad p.

$\tilde{n})$ Falso. La distribución geométrica es un caso particular cuando $r = 1$, pero no de la hipergeométrica. Se trata de un caso particular de la binomial negativa.

3.3. Cuestiones Teóricas

a) Probar que la distribución de probabilidad es una función de probabilidad.

b) Si X es una variable aleatoria con media 1 y varianza 2, dar una cota inferior para la probabilidad de que la variable tome valores en $[-4, 11]$.

c) Explicar el modelo que da lugar a la distribución binomial negativa y especificar su función masa de probabilidad.

d) Deducir la función generatriz de momentos de la distribución geométrica.

e) Definir formalmente el concepto de variable aleatoria especificando la distribución de todos los elementos que aparecen.

f) Definir la distribución de probabilidad de una variable aleatoria y probar que satisface los axiomas de Kolmogorov.

g) Definir la función de distribución de una variable aleatoria y enumerar las propiedades que caracterizan de manera genérica a esta función.

h) Formular y demostrar la desigualdad de Chebishev.

i) Distribución binomial. Definición. Cálculo de la media y la varianza.

j) Distribución de Poisson. Definición. Función de distribución y función generatriz de momentos. Cálculo de la media.

3.3.1. Soluciones

Estas cuestiones se dejarán resueltas de cara a la convocatoria ordinaria, ya que todas estas son definiciones y demostraciones que se encuentran a disposición del alumnado en múltiples plataformas, y que de cara al parcial del próximo viernes no resultan relevantes. Mucho ánimo y nos vemos este viernes en PRADO.

a) Para probar que P_X es una función de probabilidad bastará, como en temas anteriores, con que cumpla los tres axiomas de Kolmogorov:

A1: $P_X(B) \geq 0, \forall B \in \mathcal{B}$.

A2: $P_X(\mathbb{R}) = 1$.

A3: $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ y $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P_X\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P_X(B_i)$.