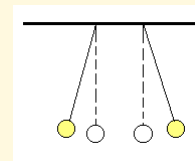
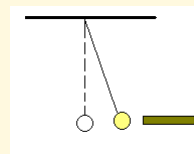


Electrostática en el vacío

1

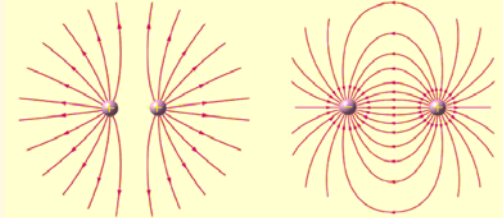
Triboelectricidad

- Al frotar una varilla de ámbar con una gamuza o una piel de gato, al aproximarla a un péndulo eléctrico, se observa que la esfera del péndulo es atraída por la varilla; otro tanto ocurre si la varilla electrizada por frotamiento es de vidrio.
- Si permitimos que la esfera del péndulo entre en contacto con la varilla desaparece la atracción.
- Tras tocar con la mano los péndulos los descargamos.
- Si ponemos a ambos en contacto con la misma varilla electrizada, veremos que los dos péndulos se repelerán.
- Al contrario de lo que ocurre si cada péndulo se pone en contacto con un tipo de varilla.



2

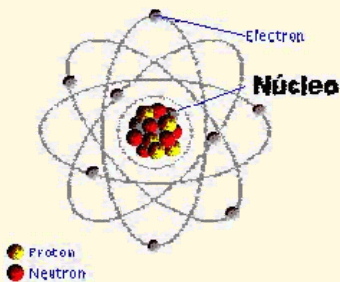
Carga eléctrica



- Hoy sabemos que la explicación es sencilla, al frotar la varilla de vidrio con un paño, la varilla pierde electrones (que comunica al paño), quedando cargada positivamente, ocurriendo al contrario con el ámbar, la carga que se adquiere por la varilla se traslada parcialmente al péndulo, produciéndose entonces los fenómenos de atracción y repulsión que hemos descrito.
- La existencia de dos tipos distintos de interacción eléctrica, que recibieron los nombres de electricidad resinosa y vítrea según quien la produjera, permite explicar fenómenos de atracción y repulsión que no pueden entenderse con la teoría gravitatoria.

3

La carga eléctrica



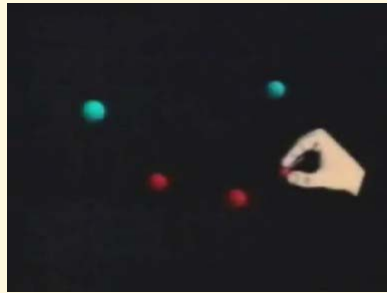
- Todos tenemos la imagen de un átomo como una carga positiva alrededor de la cual giran cargas negativas (en igual número que el de los protones del núcleo) que son los electrones de la corteza, siendo el conjunto neutro (sin carga neta). Esa imagen encierra tres características de la carga eléctrica:
- En primer lugar, la **existencia de “dos tipos de carga”**, la positiva y la negativa.
- Después, entendemos que **la carga está “cuantizada”** en el sentido de existir una unidad de carga y que la carga total de un sistema es la suma de diversas unidades de carga.
- Por último, estamos diciendo que **“la unidad de carga es única”** con independencia del signo de la misma.
- Por otra parte, se admite como ley fundamental de la naturaleza **“la conservación de la carga”** a la que hoy día no se conoce ninguna excepción..

4

Distribuciones de carga

- Cargas puntuales

Si las cargas se pueden considerar de una en una diremos que son **cargas puntuales**



- Distribuciones continuas de carga

Si las cargas se distribuyen en volúmenes, superficies o líneas. Definimos la **densidad de carga**:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau} = \frac{dq}{d\tau}$$



5

Problema de electrostática

- **Problema 1.-** El radio medio del núcleo de azufre (número atómico 16) es aproximadamente 1.37×10^{-13} cm. Suponiendo que la carga eléctrica este uniformemente distribuida en el núcleo, calcular la densidad de carga en $C \times m^{-3}$

6

Problema de electrostática

Problema 2.- La densidad de carga de una nube electrónica en el estado fundamental del átomo de hidrógeno viene dado por la función

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{\frac{-2r}{a_0}}$$

siendo q_e la carga del electrón y a_0 el radio de la primera órbita de Bohr. Calcular la carga total.

7

Ley de Coulomb



8

Ley de Coulomb

La fuerza que actúa entre dos cargas puntuales es

- Tiene la dirección de la línea que une las cargas.
- El módulo es proporcional al valor de ambas cargas.
- Puede ser atractiva o repulsiva según el signo de las cargas. Siendo atractiva para cargas de distinto signo y de repulsión para cargas del mismo signo.
- Es del tipo acción-reacción
- Varía con la distancia de forma inversamente proporcional a su cuadrado.

Ley de Coulomb

La ley de Coulomb cumple el principio de superposición

$$\vec{F}_e = K_e q \sum_{i=0}^n \frac{q'_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad \vec{F} = K_e q \int_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}) d\tau}{r^2} \vec{u}_r$$

Problema de electrostática

- **Problema 3.-** En los vértices de un triángulo equilátero de lado " r " se colocan cargas " $-e$ " y en el centro se coloca la carga " $Q > 0$ ". ¿Cuál debe ser el valor de Q para que la fuerza sobre cualquiera de las cargas negativas sea nula?

11

Concepto de campo

- Estamos acostumbrados a la existencia del campo gravitatorio debido a la Tierra, que se pone de manifiesto por la fuerza (en este caso siempre de atracción) que la Tierra ejerce sobre cualquier objeto con masa situado cerca de ella.
- La representación del fenómeno se hace mediante un campo vectorial. **El campo**, aunque **siempre existe**, sólo **se observa** por el movimiento originado del cuerpo, con masa, **por la acción de la fuerza**.

12

Concepto de campo

- El campo que empleamos para modelizar el fenómeno gravitatorio es un campo vectorial cuyas dimensiones son las de una fuerza por unidad de masa, (escalar sobre el que se detecta su existencia).
- **La fuerza se calcula como el producto del vector campo en el punto por el valor del escalar sobre el que vemos los efectos del campo**, (la masa del objeto por la masa del objeto) y escribimos:

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$$

13

Campo eléctrico

- En el caso eléctrico, la fuerza se ejerce entre cargas, para poder escribir

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

- Tenemos que definir el campo eléctrico

como
$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e}{q} \quad \text{con } q > 0$$

14

Campo eléctrico

- El campo creado por una carga puntual será $\vec{E} = K_e \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$

Si es por una distribución discreta de cargas $\vec{E} = K_e \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$

Si es distribución continua $\vec{E} = K_e \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r^2} \vec{u}_r$

15

Problema de electrostática

- **Problema 4.-** Tres cargas puntuales de $3 \times 10^{-9} \text{ C}$, se sitúan en los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado. Hallar el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en el vértice vacante del cuadrado.

16

Problema de electrostática

- **Problema 5.-** Calcular el campo creado por una línea recta infinita uniformemente cargada con una densidad lineal de carga λ , en un punto que dista "a" de ella.

17

Concepto de flujo

- Por flujo de un vector campo entendemos:

$$\phi = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

- Si la **superficie es abierta**:
 - El **flujo es máximo**, si el vector campo y el vector superficie son paralelos.
 - El **flujo es nulo**, si el vector campo y el vector superficie son perpendiculares
- Si la **superficie es cerrada**:
 - El **flujo es nulo** si en su interior no existen fuentes o sumideros del vector campo

18

Ley de Gauss

- La ley de Gauss nos da la relación entre el flujo del campo eléctrico y las cargas que encierra

$$\phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi K_e q$$

- Definimos $K_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$ con $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ uni}$

Permitividad dieléctrica del vacío

19

Ley de Gauss

- La ley de Gauss **sólo nos da el valor del flujo del campo eléctrico** si conocemos la carga que se encuentra en el interior de la superficie cerrada considerada.
- La ley de Gauss **no nos da el vector campo eléctrico** (módulo, dirección y sentido).
- **Si existe simetría** en la distribución de cargas, podemos saber dirección y sentido del campo eléctrico. Al aplicar el teorema de Gauss, **podemos calcular el módulo del campo** y conocer así el vector campo eléctrico

20

Potencial eléctrico

- Si el campo eléctrico es conservativo, podremos definir para él un potencial.
- Si es **conservativo** se cumplirá:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ por un camino} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

por cualquier otro, o lo que es lo mismo:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{la integral del campo por el}$$

desplazamiento sufrido a lo largo de una curva cerrada cualquiera (su circulación) es cero.

21

Potencial eléctrico

Por diferencia de potencial entre dos puntos entenderemos:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Que en el caso del campo creado por una carga valdrá

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

La expresión obtenida no nos permite hablar de potencial en un punto, en general, **sólo podemos hablar de diferencia de potencial entre dos puntos del espacio.**

22

Potencial eléctrico

- Para el potencial creado por una carga puntual, podremos hablar de potencial en un punto si tomamos como origen de potencial un punto muy distante de la carga, en nuestro caso $r_A \rightarrow$ infinito.

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

Esto sólo puede hacerse en el caso en que no existan cargas en el infinito.

- El campo eléctrico siempre se dirige hacia los potenciales decrecientes

23

Potencial eléctrico

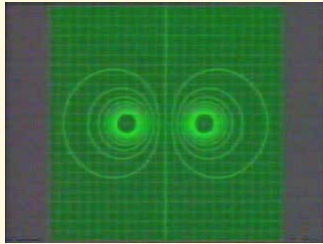
Al cumplir el campo eléctrico el principio de superposición, la expresión más genérica será:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau'}{|\vec{r}|}$$

En general el potencial eléctrico no tiene porque variar con la inversa de la distancia a la carga

24

Campo y potencial eléctricos



- Relación entre el campo y el potencial
 - Las líneas de campo son siempre perpendiculares a las superficies equipotenciales.
 - El campo siempre se dirige hacia los potenciales decrecientes.
 - Los puntos con el mismo potencial se unen mediante superficies equipotenciales.

25

El dipolo eléctrico

- Por dipolo entendemos dos cargas iguales de distinto signo, separadas una pequeña distancia respecto a la de observación.

$$\begin{array}{ccc}
 \bigcirc & \xrightarrow{d} & \bigcirc \\
 -q & & +q
 \end{array}
 \qquad
 \vec{p} = q \vec{d}$$

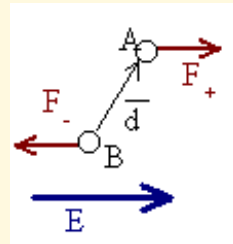
- Se caracteriza por su **momento dipolar** que es un vector que tiene:
 - por módulo el producto de la carga por la distancia que separa las cargas.
 - dirección la de la recta que une las cargas.
 - sentido desde la carga negativa hacia la positiva.

26

Acción de un campo eléctrico sobre un dipolo

- Un campo eléctrico ejercerá una fuerza sobre cada carga y tratará de orientar el dipolo paralelo al campo.
- El momento será:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

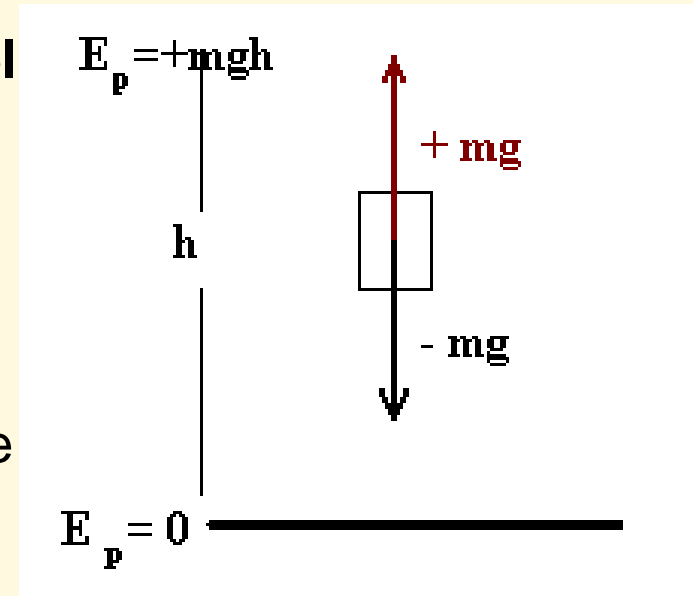


Energía del campo electrostático

Tema 3

Energía potencial en mecánica

- Si nos desplazamos en contra del campo, aumenta la energía potencial.
- Si levantamos una masa “m” **en contra del campo gravitatorio**, el trabajo se realiza en contra del campo, por lo que el “trabajo realizado por el campo” es negativo.
- Por el contrario cuando el cuerpo cae, lo hace por la acción del campo, el trabajo lo realiza el campo (trabajo positivo) y disminuye la energía potencial.



Trabajo realizado por el campo = - Trabajo realizado por nosotros

Trabajo realizado por el campo = - Variación de energía potencial

Trabajo realizado por nosotros = + Variación de energía potencial

Energía potencial y potencial eléctrico



Potencial eléctrico y trabajo

- El trabajo realizado por las fuerzas del campo, para llevar la carga desde el punto “A” hasta el punto “B” coincide con el producto de la carga, por la diferencia de potencial entre los puntos, cambiado de signo”

$$[W_{A \rightarrow B}]_{\text{campo}} = -(V_B - V_A)q$$

- La variación de energía potencial vale

$$\Delta E_p = (V_B - V_A)q$$

Energía de una distribución de cargas

- Es la energía que se almacena en la distribución, que tiene que ser la necesaria para formar esa distribución y no otra.

- Si es discreta $E_{\text{Distribucion}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n V_{i,j} \cdot q_i$

- Si es continua $E_{\text{Distribucion}} = \frac{1}{2} \int_{\tau'} V(\vec{r}) \rho(\vec{r}) d\tau'$

- De un conductor..... $W_{\text{conductor}} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

- Del campo $\frac{1}{2} \int_{\tau'} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$

Valores de interés

Valores de constantes

Constante de Boltzmann (k)= $1,38 \times 10^{-23}$ J/K

Constante de Planck (h)= $6,626\ 0693(11) \times 10^{-34}$ J·s

Constante reducida de Plack (\hbar)= $1,054\ 571\ 68(18) \times 10^{-34}$ J·s

Velocidad de la luz (c)= 3×10^8 m/s

Número de Avogadro (N_A)= $6,023 \times 10^{23}$

Constante universal de los gases ideales (R)= $8,31$ J·K⁻¹·mol⁻¹

Masa electrón en reposo (m_e)= $9,1091 \cdot 10^{-31}$ kg

Masa del protón en reposo (m_p)= $1,6725 \cdot 10^{-27}$ kg

Masa del neutrón en reposo (m_n)= $1,6748 \cdot 10^{-27}$ kg

Carga elemental (e)= $1,6021 \cdot 10^{-19}$ C

Relaciones entre unidades

1 caloría (cal) = 4,18 julios (J)

1 electrón voltio (eV) = $1,602 \times 10^{-19}$ julio (J)

74

Sistema Internacional (SI)

Unidades básicas

Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Unidades básicas sin dimensión

Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresión en unidades SI básicas
Ángulo plano	Radián	rad	m m ⁻¹ = 1
Ángulo sólido	Estereorradián	sr	m ² m ⁻² = 1

75

Sistema Internacional (SI)

Unidades derivadas

Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresión en otras unidades SI	Expresión en unidades SI básicas
Frecuencia	hertz	Hz		s^{-1}
Fuerza	newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Presión	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energía, trabajo, cantidad de calor	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Potencia	watt	W	$J \cdot s^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Cantidad de electricidad carga eléctrica	coulomb	C		$s \cdot A$
Potencial eléctrico fuerza electromotriz	volt	V	$W \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Capacidad eléctrica	farad	F	$C \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Flujo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inducción magnética	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inductancia	henry	H	$Wb \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$

Sistema Internacional (SI)

Página oficial: <http://www.cem.es/sites/default/files/siu8edes.pdf>

Prefijos SI

Factor	Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	Kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Tema I: Electrostática en el vacío.

Carga eléctrica: Distribuciones discretas y continuas de carga. Interacciones entre cargas: Ley de Coulomb. El campo eléctrico. Ley de Gauss. El potencial electrostático. Dipolo eléctrico

Bibliografía: P. Lorrain y Dale R. Corson “Campos y Ondas Electromagnéticas”. Edward M. Purcell “Electricidad y Magnetismo” Curso de Física de Berkeley

Conocimientos previos: Las leyes fundamentales de la Mecánica, operaciones vectoriales

Objetivos: Familiarizarse con el concepto de carga. Familiarizarse con el concepto de acción a distancia. Asentar el concepto de flujo de un campo vectorial. Comprender el significado de campo que deriva de un potencial, y su aplicación al campo eléctrico.

Introducción

La interpretación de los fenómenos naturales mostró que era imposible su explicación solamente a partir de fuerzas de tipo gravitatorio, puesto que no se podían explicar fenómenos como los elásticos, de tensión superficial, presión de vapor y otros muchos, entre otras razones porque las fuerzas gravitatorias resultaban demasiado pequeñas en varios órdenes de magnitud.

Por otra parte, y aun sin considerar la discrepancia cuantitativa, cuando se intentan describir los fenómenos moleculares es imposible entender la existencia de las fuerzas repulsivas que existen entre las partículas a nivel molecular, aplicando sólo los conceptos que son útiles en el estudio de los fenómenos gravitatorios.

Por tanto se requiere otro tipo de fuerzas de mayor magnitud mayores, que puedan representar estas interacciones, y estas no son otras que las fuerzas de origen eléctrico y magnético.

Nuestro primer contacto con fenómenos de tipo eléctrico, es probablemente, cuando en la escuela frotábamos un bolígrafo o una pluma sobre nuestro jersey, y atraíamos con él pedacitos de papel, estábamos, sin saberlo, realizando una experiencia de triboelectricidad (electricidad por frotamiento), que es probablemente, la primera forma en la que la humanidad puso de manifiesto la existencia de cargas eléctricas y normalmente la primera vez que tendríamos la oportunidad de pensar en la existencia de un campo de fuerzas. El estudio de la electrostática, nos va a permitir ordenar las ideas sobre fenómenos conocidos, por un lado la existencia de fuerzas que para su manifestación no necesitan del contacto, y por otro la naturaleza eléctrica de la materia.

Desde niños estamos acostumbrados a la existencia de la fuerza gravitatoria, por estar totalmente ligada a nuestra vida, y no nos sorprende que las cosas abandonadas en el aire caigan. Si recordamos la experiencia vivida con los trocitos de papel, veremos que nos pareció que estábamos haciendo magia, o que aquello tenía algún tipo de trampa, ya que por primera vez nos

encontrábamos con una situación no habitual, la existencia de interacciones a distancia distintas de las gravitatorias.

Esa misma sensación se desarrolló a lo largo de Edad Media y el Renacimiento, con lo que el fenómeno eléctrico se ligó a la magia y a las ferias, por lo que su estudio desde el punto de vista científico quedó en una situación análoga a la que tenía en las épocas griega y romana. El prefijo “electro-“ proviene del nombre griego del ámbar (*elektron*), pues son las experiencias realizadas al frotar una varilla de ámbar con la piel de un animal (igual que la experiencia realizada por nosotros en la escuela), las que inician el desarrollo del estudio de los fenómenos eléctricos.

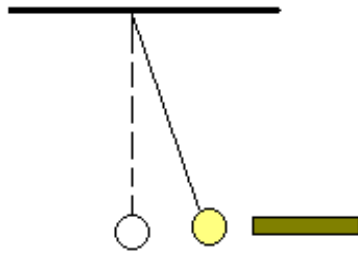


Figure 1

Al acercar al péndulo la varilla de ámbar electrizada, este pasa de su posición vertical a ser atraído por ella

Las experiencias de triboelectricidad realizadas con varillas de ámbar o vidrio que permiten atraer, en contra de las fuerzas gravitatorias, trocitos de papel, tuvieron una sistematización empleando péndulos eléctricos análogos al representado en la figura 1. Tras electrizar una varilla de ámbar frotándola con la piel de un animal, al aproximarla a un péndulo eléctrico, se observa que la esfera del péndulo es atraída por la varilla; otro tanto ocurre si la varilla electrizada por frotamiento es de vidrio. Si permitimos que la esfera del péndulo entre en contacto con la varilla desaparece la atracción. Realicemos esta experiencia con dos péndulos, uno lo ponemos en contacto con la varilla de

ámbar y el otro con la de vidrio, al aproximar los péndulos veremos que se atraen.

Por el contrario, si tras tocar con la mano los péndulos descargarlos, ponemos a ambos en contacto con la misma varilla electrizada, veremos que los dos péndulos se repelerán. Al contrario de lo que ocurre si cada péndulo se pone en contacto con un tipo de varilla.

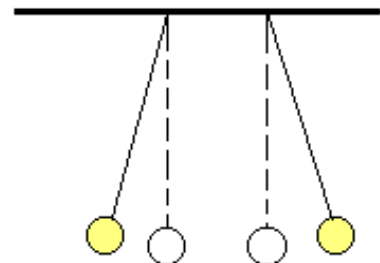


Figure 2

Los péndulos al haber estado en contacto con la misma varilla se repelen

Hoy sabemos que la explicación es sencilla, al frotar la varilla de vidrio con un paño, la varilla pierde electrones (que comunica al paño), quedando cargada positivamente, ocurriendo al contrario con el ámbar, la carga que se adquiere por la varilla se traslada parcialmente al péndulo, produciéndose entonces los fenómenos de atracción y repulsión que hemos descrito. La existencia de dos tipos distintos de interacción eléctrica, que recibieron los nombres de electricidad resinosa y vítrea según quien la produjera, permite explicar fenómenos de atracción y repulsión que no pueden entenderse con la teoría gravitatoria.

Carga eléctrica.

La carga es una propiedad de la materia que se pone de manifiesto cuando sobre ella actúa un campo electromagnético. Vamos a sistematizar algunos de conocimientos que tenemos sobre la

carga eléctrica.

Todos tenemos la imagen de un átomo como una carga positiva (cuyo valor depende del número de protones que contenga) alrededor de la cual giran cargas negativas (en igual número que el de los protones del núcleo) que son los electrones de la corteza, siendo el conjunto neutro (sin carga neta).

Esa imagen encierra tres características de la carga eléctrica. En primer lugar, estamos poniendo de manifiesto la *existencia de “dos tipos de carga”*, la positiva y la negativa. Después, entendemos que *la carga está “cuantizada”* en el sentido de existir una unidad de carga y que la carga total de un sistema es la suma de diversas unidades de carga. Por último, estamos diciendo que *“la unidad de carga es única”* con independencia del signo de la misma, pues el valor de la unidad de carga positiva tiene que ser el mismo que el de la negativa, para que el átomo resulte neutro.

Por otra parte, se admite como ley fundamental de la naturaleza *“la conservación de la carga”* a la que hoy día no se conoce ninguna excepción. Para entender esta ley fundamental tenemos en cuenta que la carga eléctrica es una propiedad de la materia, y que en conjunto la materia es neutra, de forma que cuando se carga un cuerpo otro tiene que adquirir una carga igual y de signo contrario.

Después de presentar algunas características de la carga vamos a ver como afrontaremos su estudio. Para simplificar utilizamos el concepto de “carga puntual”. Para comprender esta idea podemos pensar en otras situaciones como las siguientes. Al considerar un núcleo atómico lo representamos por una esfera pequeña, ¿pero somos capaces de “ver realmente” un núcleo?, es un hecho que es imposible verlo, de ahí que para nosotros el núcleo atómico sea una carga puntual. Consideremos ahora el péndulo eléctrico, si poco a poco nos vamos alejando de él, pasaremos de considerarlo como una esfera de un diámetro apreciable a una esfera más pequeña para parecernos finalmente un punto, y otro tanto podemos decir del bolígrafo que usábamos en la escuela para atraer los pedacitos de papel. ¿Es, que la naturaleza o el tamaño del núcleo, del bolígrafo o del péndulo, varía según lo veamos nosotros?, la respuesta es evidente. Cuando hablamos de cargas puntuales, como en mecánica cuando hablamos de masa puntual, estamos diciendo que desde nuestro punto de observación las dimensiones del objeto son despreciables, y lo tomaremos como un punto geométrico que posee carga, es lo que denominamos: “carga puntual”.

Distribuciones continuas de carga.

Hasta ahora hemos empleado cargas que podíamos suponer se encontraban perfectamente localizadas y separadas de otras, que hemos denominado “cargas puntuales”. La realidad nos lleva a la existencia de regiones en las que las cargas se encuentran muy cerca unas de otras de manera que macroscópicamente las vemos como un continuo, en esa región podemos definir una función que nos da el valor de la carga en cada punto, en esa región diremos que existe una distribución continua de carga.

En los casos reales, como ocurre en la ionosfera o con el plasma generado en una campana de

vacío, nos encontramos con la existencia de una carga “q” distribuida en un volumen “ τ ”. Si la distribución fuera uniforme en todo el espacio considerado, podríamos caracterizarla diciendo que existe una densidad volúmica de carga constante la región, dada por la expresión.

$$\rho = \frac{q}{\tau}$$

Problema 1.- El radio medio del núcleo de azufre (número atómico 16) es aproximadamente 1.37×10^{-13} cm. Suponiendo que la carga eléctrica este uniformemente distribuida en el núcleo, calcular la densidad de carga en $C \times m^{-3}$.

Datos

Llamamos q_e a la carga del electrón, cuyo valor sabemos que es 1.6×10^{-19} c

$$\text{Carga del núcleo (q)} = Z \cdot q_e = 16 \times (1.6 \times 10^{-19}) = 2.56 \times 10^{-18} \text{ c}$$

$$\text{Radio de la esfera (r)} = 1.37 \times 10^{-13} \text{ cm} = 1.37 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\text{Volumen de la esfera (}\tau\text{)} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 1.07 \times 10^{-44} \text{ m}^3$$

Suponiendo que el núcleo sea una esfera, si la carga está uniformemente repartida en ella, la densidad volúmica de carga

$$\text{es: } \rho = \frac{dq}{d\tau}, \text{ como nos dicen que la distribución es uniforme, podemos escribir: } \rho = \frac{\Delta q}{\Delta \tau} \text{ es decir: } \rho = \frac{2.56 \times 10^{-18}}{1.07 \times 10^{-44}}$$

$$= 2.4 \times 10^{26} \text{ c m}^{-3}$$

$$\underline{\rho = 2.4 \times 10^{26} \text{ c m}^{-3}}$$

A diferencia de la situación descrita anteriormente en la que la carga estaba uniformemente distribuida en la región del espacio considerada, lo normal es encontrarse situaciones en las que la carga no se distribuye de manera homogénea. Para caracterizar la distribución es preciso dar el valor de la densidad de carga $\rho(\vec{r})$ en todos y cada uno de los puntos (\vec{r}) de la región. La densidad de carga será la carga que existe en cada punto (considerando como tal el volumen elemental que lo rodea)

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \frac{dq}{d\tau}$$

siendo $d\tau$ un elemento de volumen centrado en el punto \vec{r} y dq la carga elemental contenida en $d\tau$. La carga total en el volumen será entonces:

$$q = \int_{\tau} dq = \int_{\tau} \rho(\vec{r}) d\tau$$

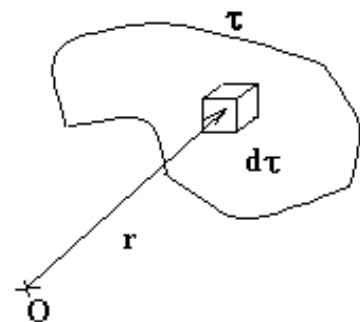


Figure 3

Volumen elemental “ $d\tau$ ” que rodea a un punto en el espacio

Problema 2.- La densidad de carga de una nube electrónica en el estado fundamental del átomo de hidrógeno viene

dado por la función $\rho(\vec{r}) = \frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{\frac{-2r}{a_0}}$, siendo q_e la carga del electrón y a_0 el radio de la primera órbita de Böhr.

Calcular la carga total.

Datos

Densidad de carga $\rho(\vec{r}) = \frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{\frac{-2r}{a_0}}$

Si la densidad de carga viene dada por la expresión $\rho(\vec{r}) = \frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{\frac{-2r}{a_0}}$, la carga total será:

$Q = \oint \rho d\tau$, Para hacer esta integral debemos encontrar el elemento diferencial de volumen que nos permita generar

la esfera. Como la densidad de carga viene expresada como una función de la distancia al centro debemos hacer que sea el radio el que nos marque el crecimiento del elemento de volumen, es decir el elemento de volumen será una corona esférica de anchura infinitesimal, cuyo volumen es: $4\pi r^2 dr$. Por tanto la carga será:

$Q = \int \frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{\frac{-2r}{a_0}} (4\pi r^2 dr) = \frac{4q_e}{a_0^3} \int r^2 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr$. Tomando como límites de integración los valores extremos

del radio que permiten generar la esfera, es decir el radio variará desde el valor "0" hasta el infinito, luego debemos

calcular: $\int_0^\infty r^2 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr$.

La integral la haremos por partes, llamando $u = r^2$, $dv = e^{\frac{-2r}{a_0}} dr$, tendremos $du = 2r dr$; $v = \frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}}$,

recordando: $\int u dv = uv - \int v du$, tendremos: $\int_0^\infty r^2 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr = (r^2) \left(\frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} \right) - \int \frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} (2r dr)$

para calcular la segunda integral volvemos a aplicar la integración por partes. De nuevo haremos $dv = e^{\frac{-2r}{a_0}} dr$ y

ahora tomaremos como $u = r$, con lo que: $v = \frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}}$, y $du = dr$, por tanto:

$$\int_0^\infty r^2 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr = \left[\left(\frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} \right) \right]_0^\infty - \left[a_0 \left(r \frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} \right) + \frac{a_0^2}{2} \left(-\frac{a_0}{2} \right) e^{\frac{-2r}{a_0}} \right]_0^\infty =$$

$$= - \left[\frac{a_0 r^2}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} + \frac{a_0^2 r}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} + \frac{a_0^3}{4} e^{\frac{-2r}{a_0}} \right]_0^\infty \quad \text{al aplicar la regla de Barrow, obtenemos:}$$

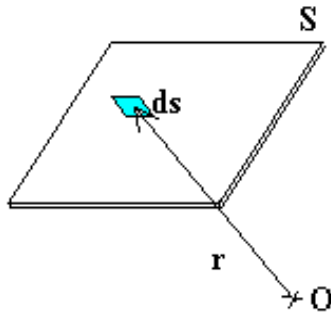
$$- \left(\infty^2 e^{-\infty} + \infty e^{-\infty} + \frac{a_0^3}{4} e^{-\infty} - 0 e^0 - 0 e^0 - \frac{a_0^3}{4} e^0 \right) = \frac{a_0^3}{4}, \text{ por tanto la carga total será: } Q = \frac{4q_e}{a_0^3} \frac{a_0^3}{4}, \text{ es}$$

decir:

$$Q = q_e$$

Que nos expresa que la carga total de la nube electrónica del hidrógeno es la carga del electrón, como esperábamos

Existen situaciones en las que se encuentra carga se encuentra distribuida en una región τ en la que una de sus dimensiones es mucho menor que las otras dos, es decir se puede considerar que la carga está distribuida en una superficie. En este caso es más cómodo acudir al concepto de densidad superficial de carga definida como



$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{dS}$$

de forma que se cumplirá que la carga total es:

$$q = \int_S \sigma(\vec{r}) dS$$

Figure 4
Superficie elemental que rodea a un punto en un plano

Análogamente, puede considerarse una distribución de carga a lo largo de una línea y acudiríamos a su caracterización mediante la densidad lineal de carga

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

cumpléndose también que la carga total venga dada por

$$q = \int_L \lambda dl$$

El caso limite sera aquel en que la carga total este concentrada en una región de dimensiones despreciables, a lo que, como ya hemos dicho, se denomina carga puntual. Este es, por ejemplo, el caso de un electrón o de un protón, que si bien ocupan una región finita, desde un punto de vista macroscópico, para dimensiones tan pequeñas como las citadas (10^{-15} m) pueden ser considerados como puntos geométricos.

Interacción entre cargas.

Las acciones que unas cargas van a realizar sobre otras, se van a poner de manifiesto por las fuerzas que se van a ejercer entre ellas. Vamos a estudiar como se llegó a la actual formulación de la interacción entre cargas siguiendo un desarrollo histórico comenzando con el caso más sencillo la fuerza que se ejercen entre sí dos cargas que nos viene dada por:

Ley de Coulomb.

La formulación de las interacciones entre cargas puntuales se llevó a cabo en 1785 por Coulomb empleando una balanza de torsión, si bien, podríamos decir, por darle un carácter intuitivo, que el origen de esta ley experimental fue realizada con la ayuda de dos péndulos eléctricos cargados, dispuestos en la misma horizontal. De la experiencia se dedujo que la fuerza que aparecía en las cargas cumple:

- Tiene la dirección de la línea que une las cargas.
- El módulo es proporcional al valor de ambas cargas.
- Puede ser atractiva o repulsiva según el signo de las cargas. Siendo atractiva para cargas de distinto signo y de repulsión para cargas del mismo signo.
- Es del tipo acción-reacción, con lo que la fuerza F_{21} que ejerce q_2 sobre q_1 es igual en magnitud pero de sentido opuesto a F_{12} , esto es:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- Varía con la distancia de forma inversamente proporcional a su cuadrado.

Lo que se formula matemáticamente como:

$$\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

siendo \vec{F}_{12} la fuerza que ejerce la carga q_1 sobre la q_2 , d_{12} la distancia entre ambas cargas, y \vec{u}_{12} un vector unitario en la dirección definida por las cargas y en el sentido de q_1 a q_2 . El valor de la constante K_e (constante eléctrica) varía según el sistema de unidades utilizado. En el Sistema Internacional (SI) vale 9×10^9 y sus unidades son $\text{Newton} \times \text{metro}^2 \times \text{culombio}^{-2}$ ($\text{N m}^2 \text{C}^{-2}$).

Esta expresión, que es **aplicable sólo a dos cargas puntuales**, es preciso generalizarla para poder considerar situaciones en las que aparecen distribuciones discretas o continuas de cargas.

En el caso de una distribución discreta de cargas puntuales, cada una de las cargas interaccionará con todas las demás, con lo que quedará sometida a varias fuerzas. Para el estudio de estas situaciones aceptaremos que se cumple el **principio de superposición** que establece que la fuerza sobre una de las cargas será la suma de las fuerzas que independientemente ejerzan las restantes. Por tanto, la fuerza que actúa sobre una carga (q), por la acción de varias (q'_i), vendrá dada por:

$$\vec{F}_e = K_e q \sum_{i=0}^n \frac{q'_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

Problema 3.- En los vértices de un triángulo equilátero de lado "r" se colocan cargas "-e" y en el centro se coloca la carga "Q > 0". ¿Cuál debe ser el valor de Q para que la fuerza sobre cualquiera de las cargas negativas sea nula?.

Dada la simetría del problema, si la fuerza que actúa sobre una carga de las situadas en un vértice es nula lo será la que actúe sobre cualquiera de las demás. Consideremos una cualquiera de ellas (por ejemplo la situada en el vértice "B"), la fuerza que actúa, será la suma de las fuerzas debidas a las demás cargas (tanto las "-e" como la "Q"), las debidas a las del mismo signo serán repulsivas y la debida a "Q" atractiva.

Si la fuerza total que actúa es nula, lo serán las sumas de las componentes de las

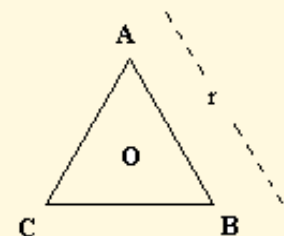


Figure 1 de problemas
Tres cargas en los vértices de un triángulo

fuerzas según los ejes. Tomaremos como eje "X" el definido por el segmento CB, en estas condiciones la fuerza debida a la carga situada en el vértice "C" será positiva y estará contenida en dicho eje, la fuerza debida a la carga situada en "A" formará un ángulo de $\pi/3$ con el eje "X" y la debida a la carga "Q", situada en el centro, formará un ángulo de $\pi/6$ con el semieje negativo.

Veamos los valores de las componentes de las fuerzas. Para ello calcularemos previamente el valor de la distancia de la carga "Q" al vértice "B". Sabemos que en un triángulo equilátero su baricentro es su ortocentro, es decir que el punto "O" distará del vértice 2/3 de la altura, y ésta por Pitágoras es: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, luego la distancia al vértice del

centro será: $\overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{3}r$.

EJE "X"

$$(\vec{F}_C)_X = |\vec{F}_C| = K_E \frac{e}{r^2}$$

$$(\vec{F}_A)_X = |\vec{F}_A| \cos \frac{\pi}{3} = K_E \frac{e}{r^2} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{K_E}{2} \frac{e}{r^2}$$

$$(\vec{F}_Q)_X = -|\vec{F}_Q| \cos \frac{\pi}{6} = -K_E \frac{3Q}{r^2} \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3} K_E}{2} \frac{3Q}{r^2}$$

Si la componente "X" debe ser nula se cumplirá: $K_E \frac{e}{r^2} + \frac{K_E}{2} \frac{e}{r^2} + \left(-\frac{\sqrt{3} K_E}{2} \frac{3Q}{r^2} \right) = \frac{K_E}{r^2} \left[e \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{3\sqrt{3}}{2} Q \right] = 0$; es decir: $Q = \frac{\sqrt{3}}{3} e$

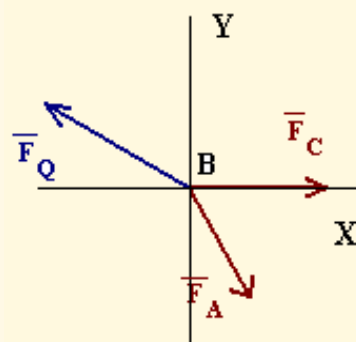


Figure 2 de problemas
Composición de las fuerzas F_A y F_C que actúan sobre la carga situada en "B" y su resultante

EJE "Y"

$$(\vec{F}_C)_Y = 0$$

$$(\vec{F}_A)_Y = -|\vec{F}_A| \sin \frac{\pi}{3} = -K_E \frac{e}{r^2} \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3} K_E}{2} \frac{e}{r^2}$$

$$(\vec{F}_Q)_Y = |\vec{F}_Q| \sin \frac{\pi}{6} = K_E \frac{3Q}{r^2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{K_E}{2} \frac{3Q}{r^2}$$

Si la componente "Y" debe ser nula se cumplirá: $0 + \left(-\frac{\sqrt{3} K_E}{2} \frac{e}{r^2} \right) + \left(\frac{K_E}{2} \frac{3Q}{r^2} \right) = 0$; es decir: $Q = \frac{\sqrt{3}}{3} e$

Que como es lógico nos reproduce el valor de "Q" que hemos obtenido con la componente "X".

$$\underline{Q = \frac{\sqrt{3}}{3} e}$$

Hasta aquí hemos considerado la fuerza que actúa sobre una carga puntual por existir otras cerca de ella. Consideremos ahora la acción de una distribución continua de cargas sobre una carga puntual. Aplicamos de nuevo el principio de superposición, es decir, realizamos la suma de efectos producidos por cada elemento diferencial de carga, que podemos considerar como una carga puntual. Suponiendo que se trata de una distribución de cargas en volumen, cada elemento diferencial de carga puede expresarse como $dq = \rho d\tau$, con lo que tendremos:

$$\vec{F} = K_e q \int_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}) d\tau}{r^2} \vec{u}_r$$

siendo \vec{u}_r un vector unitario en la dirección definida por cada elemento de volumen considerado y la carga puntual.

De la misma forma podemos considerar distribuciones lineales o superficiales de carga, en cuyo caso habrá que considerar la integral de línea o superficie respectivamente.

Al iniciar el estudio de la interacción entre cargas eléctricas recurrimos a su comparación con la interacción gravitatoria, y acabamos de comprobar que la expresión de la fuerza que se ejerce sobre una carga por estar otra presente (ley de Coulomb) tiene una gran similitud formal con la ley de Gravitación Universal ($\vec{F}_g = G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$) que nos da la expresión de la fuerza sobre una masa debida a otra situada en sus proximidades. Pasemos a ver las analogías y diferencias de ambas leyes:

- *Ambas fuerzas son del tipo acción-reacción.*
- *Ambas varían con la inversa del cuadrado de la distancia que separa a los escalares.*

Sin embargo, aparece una diferencia fundamental ya que:

- *La fuerza eléctrica puede ser atractiva o repulsiva según sea la naturaleza de las cargas. La fuerza gravitatoria siempre es atractiva.*

Además, debemos resaltar la gran diferencia entre los órdenes de magnitud de los módulos de ambos tipos de fuerzas

Problema 4.- Comparar la fuerza eléctrica y la gravitatoria entre dos electrones

Datos

Carga del electrón (q_e) = 1.6×10^{-19} C

Masa del electrón (m_e) = 9.1×10^{-31} Kg

Constante de gravitación Universal (G) = 6.67×10^{-11} N m² kg⁻²

Constante eléctrica K_e = 9×10^9 N m² C⁻²

La fuerza gravitatoria entre dos masas sabemos que vale $\vec{F}_G = G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$, siendo “r” la distancia que las separa

y \vec{u}_r , un vector unitario cuyo sentido es de una a otra masa.

La fuerza electrostática entre los dos electrones será la fuerza de Coulomb, es decir $\vec{F}_E = K_E \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$, siendo “r” la distancia que las separa y \vec{u}_r , un vector unitario cuyo sentido es, en este caso, el de repulsión de una a otra masa.

Una vez comparados los sentidos de las dos fuerzas, que en este caso son opuestas, al ser las cargas del mismo signo, vamos a comparar los módulos de las mismas. La mejor forma de compararlos será calculando su relación,

recordando que la constante eléctrica en el sistema Internacional vale 9×10^9 , tenemos: $\frac{F_E}{F_G} = \frac{K_E}{G} \frac{q_e^2}{m_e^2}$ sustituyendo

obtenemos: $\frac{F_E}{F_G} = 1.35 \times 10^{20} \times 6.4 \times 10^{23} = 8.46 \times 10^{43}$. Lo que nos dice que:

la fuerza de naturaleza eléctrica es 43 órdenes de magnitud superior a la gravitatoria.

Campo eléctrico.

De nuevo vamos a comparar las interacciones entre masas y entre cargas eléctricas, para analizar si se pueden utilizar en el caso de las cargas algunos conceptos definidos para las masas, con su correspondiente modificación, debido al cambio de propiedad de la materia considerada.

En el caso de las masas, sabemos que se puede definir el campo gravitatorio creado por una masa, aunque en general nos solemos limitar a considerar de manera específica el campo gravitatorio terrestre, es decir el creado por la Tierra. Esto es debido a dos razones, por una parte estamos inmersos en él y nosotros mismos sentimos sus efectos, y por otra los otros campos gravitatorios creados por cuerpos de nuestros entornos tienen efectos que, en contra de lo que sucede con el campo gravitatorio terrestre, apenas podemos experimentar en nosotros mismos.

Estamos acostumbrados a la existencia del campo gravitatorio debido a la Tierra. Que sabemos, se pone de manifiesto por la fuerza (en este caso siempre de atracción) que la Tierra ejerce sobre cualquier objeto con masa situado en sus proximidades, por eso todos los cuerpos abandonados en el aire “caen”. La representación del fenómeno la hacemos mediante un campo vectorial. Este campo, aunque siempre existe, sólo se observa por el movimiento originado, por acción de la fuerza, en el cuerpo con masa. El campo que empleamos para modelizar el fenómeno gravitatorio es un campo vectorial cuyas dimensiones son las de una fuerza por unidad de masa, (escalar sobre el que se detecta su existencia). Esta fuerza se calcula como el producto del vector campo en el punto, multiplicado por la masa del objeto (valor del escalar sobre el que vemos los efectos del campo, y solemos escribir: $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$

El campo gravitatorio del que estamos hablando, está creado por una masa (la de la tierra) y, para detectar su presencia empleamos otra masa. Esto quiere decir que si bien en cualquier punto de nuestro entorno existe el campo gravitatorio, no lo detectamos si en ese punto no colocamos un escalar adecuado para que sobre el aparezca la fuerza gravitatoria. Para detectar el campo terrestre, no emplearíamos normalmente un rayo de luz por entender que no tiene masa.

Podemos actuar de la misma forma con el fenómeno eléctrico e intentar definir un campo, el eléctrico, creado por una carga. Manteniendo el paralelismo con el campo gravitatorio, buscamos definir también un campo vectorial. El vector que caracteriza el campo tendrá las unidades de una fuerza dividida por el escalar sobre el que actúa la fuerza (la carga)", y que por tanto será:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e}{q}, \quad q > 0$$

Vamos a analizar la expresión anterior. En primer lugar, debemos tener claro, que **el campo eléctrico no es una fuerza. El campo eléctrico se pone de manifiesto por la aparición de una fuerza**, como le ocurría también al campo gravitatorio. Para que podamos detectar esa fuerza, debemos colocar una carga eléctrica, como para detectar el campo gravitatorio, lo hacíamos viendo la fuerza que se ejercía sobre un cuerpo con masa.

Si bien en el caso del campo gravitatorio terrestre es difícil apreciar que la fuerza ejercida sobre una masa depende de su posición, en cuanto pensemos en la Ley de Gravitación universal aplicada a los planetas entenderemos que la fuerza es distinta en cada posición. Cuando tenemos una carga "Q" sabemos que si colocamos otra carga "q" aparece sobre ella una fuerza, que depende de la distancia entre ambas, por tanto al variar la posición de la carga "q" la fuerza que aparece sobre ella variará, lo que en términos de campo eléctrico significa que el vector campo ha variado, por tanto, el campo eléctrico depende del punto que consideremos.

En este sentido, se define campo eléctrico como la región del espacio en la que al colocar en un punto cualquiera, un cuerpo con la propiedad adecuada (carga eléctrica) aparece una fuerza sobre este cuerpo.

En la expresión que nos ha servido para definir el campo, no hemos tenido en cuenta que el fenómeno eléctrico se presenta sobre cargas positivas o negativas, y el sentido de sus efectos es el opuesto para un tipo de cargas que para el otro. Para definir la dirección y el sentido del vector que define el campo, tomaremos como **sentido del campo en cada punto, el que seguiría una carga positiva colocada en él.**

En la expresión hemos empleado el límite del cociente (fuerza/carga) cuando la carga es muy pequeña y positiva. Pedimos que la carga sea muy pequeña a fin de que no modifique el valor del campo en el punto que estamos considerando y en sus cercanías.

De lo anterior se deduce que el campo creado por una carga puntual en un punto cualquiera del espacio "P", tendrá la forma:

$$\vec{E} = K_e \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

siendo Q la carga que crea el campo, r el módulo del vector que une la carga “ Q ” y el punto “ P ” en el que queremos conocer el campo (la distancia de la carga al punto) y \vec{u}_r un vector unitario en esa dirección, su sentido vendrá determinado por el del movimiento que tendría una carga positiva colocada en el punto “ P ”.

Campo eléctrico creado por una distribución puntual de cargas.

Usando de nuevo el principio de superposición, la expresión del campo en un punto cualquiera del espacio, “ P ”, debido a varias (n) cargas puntuales vendrá dada por la suma de las contribuciones al campo de cada una de las cargas, es decir:

$$\vec{E} = K_e \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

siendo Q_i cada una de las “ n ” cargas generadoras del campo, r_i el módulo del vector posición que une cada una de ellas y el punto “ P ”, y \vec{u}_i un vector unitario en cada una de esas direcciones, cuyo sentido, como siempre, vendrá dado por el que tendría el movimiento de una carga positiva colocada en el punto “ P ” si sólo existiera la carga “ Q_i ”, lo que hace necesaria la suma vectorial de los resultados obtenidos.

Problema 5.- Tres cargas puntuales de $3 \times 10^{-9} \text{ C}$, se sitúan en los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado. Hallar el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en el vértice vacante del cuadrado.

Datos

Lado del cuadrado (a) = 20 cm = 0.02 m

Valor de cada carga (q) = $3 \times 10^{-9} \text{ C}$

El valor del campo creado por cada carga será: $\vec{E} = K_E \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$, siendo “ r ” la

distancia de la carga al punto en el que queremos calcular el campo, y \vec{u}_r un vector unitario en esa dirección que al ser cargas positivas, tendrá por sentido el saliente de la carga.

Los vectores campo generados por las cargas tendrán la posición representada en la figura. Por tanto al calcular el campo total generado por la distribución debemos componer los tres campos.

Para calcular su módulo tendremos en cuenta:

- La distancia desde el vértice “ D ” a los vértices “ B ” y “ C ” será igual al lado del cuadrado (a), el módulo del campo debido a ambos será el mismo.
- Al ser un cuadrado, la distancia entre los vértices opuestos (“ A ” y “ D ”), será: $a\sqrt{2}$

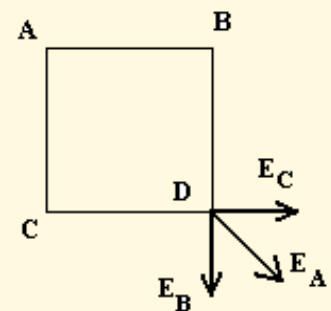


Figure 3 de problemas
Representación de los campos debidos a cada carga en el punto “ D ”

Los campos serán: $\vec{E}_C = K_E \frac{q}{a^2} \vec{u}_{CD}$, $\vec{E}_B = K_E \frac{q}{a^2} \vec{u}_{BD}$, $\vec{E}_A = K_E \frac{q}{(a\sqrt{2})^2} \vec{u}_{AD}$

Al ser los módulos de los campos \vec{E}_B y \vec{E}_C iguales, su suma formará un ángulo de $\pi/4$ con cada uno de ellos, o lo que es lo mismo tendrá la misma dirección y sentido que el debido a la carga colocada en el vértice “A”, es decir según el vector \vec{u}_{AD} . Por tanto el vector campo, que será la suma vectorial de los tres campos que hemos calculado, será el campo debido a la carga situada en “A” más la suma de los campos debidos a las cargas situadas en “B” y

“C” que llevará el mismo sentido que aquella. $|\vec{E}_B + \vec{E}_C| = 2|\vec{E}_B| \cos \frac{\pi}{4} = 2 \left(K_E \frac{q}{a^2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por tanto el campo

en el punto “D” (\vec{E}_D) será: $\vec{E}_D = K_E \frac{q}{a^2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) \vec{u}_{AD}$

$$\underline{\vec{E}_D = 1,9 K_E \frac{q}{a^2} \vec{u}_{AD}}$$

Campo eléctrico creado por una distribución continua de cargas.

Si necesitamos conocer el campo debido a una distribución continua de cargas, razonaremos de manera similar a como hicimos para determinar la fuerza debida a una distribución de cargas no puntuales. Tomamos una carga elemental (dq) **que de nuevo podemos considerar como una carga puntual**, calculamos el valor del campo debida a ella y aplicando el principio de superposición, sumamos los efectos de todas las posibles cargas elementales en las que subdividimos la distribución continua, es decir realizamos una suma continua (integración) de las contribuciones. Desde el punto de vista formal la solución es sencilla, y la expresamos como:

$$\vec{E} = K_e \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r^2} \vec{u}_r; \quad \vec{E} = K_e \int_{\Sigma} \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{u}_r; \quad \vec{E} = K_e \int_l \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}_r$$

siendo ρ, σ y λ las densidades de carga volúmica, superficial y lineal respectivamente y llamando “ τ, Σ y l ” al volumen, la superficie y la línea sobre las que se distribuye la carga.

Problema 6.- Calcular el campo creado por una línea recta infinita uniformemente cargada con una densidad lineal de carga λ , en un punto que dista “a” de ella.

Que el punto diste “a” de la línea cargada define una perpendicular a ella que nos servirá de eje de referencia. Sabemos calcular el campo creado por una carga puntual, luego **debemos convertir la línea cargada en una serie de puntos**, y con ayuda del teorema de superposición calcular así el campo creado por la distribución.

Consideremos la carga puntual debida a un elemento de línea de longitud “dl”, que dará lugar a un campo $d\vec{E}_l$ cuyo valor es: $d\vec{E}_l = K_e \frac{\lambda dl}{R^2} \vec{u}_{r1}$; por otro lado, al ser infinita la distribución aparece una simetría de forma que por cada

dl que consideremos en la mitad superior de la semirrecta cargada, existirá un “ $-dl$ ” en la semirrecta negativa, que generará un campo del mismo módulo, si bien será distinta su dirección. Componiendo ambos campos tendremos:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2;$$

$d\vec{E} = 2 K_e \frac{\lambda dl}{R^2} \cos \alpha \vec{u}_\perp$, siendo \vec{u}_\perp un vector unitario perpendicular a la línea.

El campo, que estamos buscando será: $\vec{E} = \int 2 K_e \frac{\lambda dl}{R^2} \cos \alpha \vec{u}_\perp$.

Si más que mirar a la figura nos damos cuenta que: la distancia “ R ”, la altura “ l ” y el ángulo “ α ”, no son funciones independientes, y que únicamente “ a ” es constante y conocida. Teniendo en cuenta que:

$$\cos \alpha = \frac{a}{R}, \tan \alpha = \frac{l}{a}, \text{obtenemos: } R = \frac{a}{\cos \alpha}; \quad R^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha}; \text{ por}$$

otro lado: $l = a \tan \alpha$, diferenciando, obtenemos: $dl = a \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$,

sustituyendo en el valor del módulo del diferencial de campo obtenemos:

$$dE = 2 K_e \frac{\lambda a \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha a^2} \cos \alpha d\alpha; \quad dE = \frac{2 K_e \lambda}{a} \cos \alpha d\alpha \text{ que ya sólo}$$

es función del ángulo de observación de la semirrecta, que variará desde 0 hasta $\pi/2$, luego el módulo del campo

$$\text{será: } E = \int_0^{\pi/2} \frac{2 K_e \lambda}{a} \cos \alpha d\alpha = \frac{2 K_e \lambda}{a} [\sin \alpha]_0^{\pi/2} = 2 K_e \frac{\lambda}{a}.$$

Finalmente, el campo eléctrico vendrá dado por:

$$\vec{E} = 2 K_e \frac{\lambda}{a} \vec{u}_\perp$$

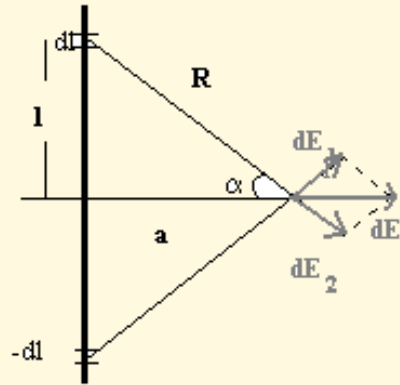


Figure 4 de problemas
Composición de los campos elementales debidos a los diferenciales de carga considerados.

Ley de Gauss

Mediante la ley de Coulomb hemos calculado el campo eléctrico debido a una carga y a una distribución discreta o continua de cargas (ya sea en volumen, superficie o línea), lo que podemos entender como una relación del campo con sus fuentes. Ahora trataremos de encontrar otra relación entre el campo eléctrico (concretamente su flujo) y las fuentes que lo generan.

Previamente vamos a recordar la definición de flujo de una magnitud vectorial a través de una superficie “ S ”, aplicado al caso de un campo eléctrico.

Consideremos un campo eléctrico en el espacio representado por sus líneas de campo y una superficie cerrada “ S ” cualquiera tal como se muestra en la figura 5. Dividamos la superficie en pequeñas porciones, lo suficientemente pequeñas para que podamos suponer cada una de ellas como una superficie plana, de forma que, en todos los puntos de cada una de ellas, el campo eléctrico no varíe apreciablemente ni en módulo, ni en dirección, ni en sentido. Sabemos que a

cada superficie elemental que hemos construido le podemos asignar un vector superficie que será perpendicular a ella cuyo sentido será saliendo del volumen y módulo el área de la superficie.

Si tomamos uno de estos elementos de superficie, por ejemplo el j -ésimo, al que asignaremos el vector \vec{s}_j , el producto escalar del vector campo en él por su vector superficie $\vec{E}_j \cdot \vec{s}_j$, es un número al que llamamos flujo del vector campo a través de la porción de superficie s_j .

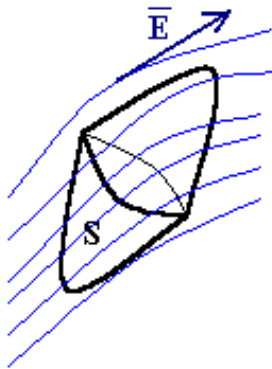


Figure 5
Representación de las líneas de campo que atraviesan una superficie cerrada

Sumando el flujo a través de todas las porciones, obtenemos el flujo total a través de la superficie “S”, que será una magnitud escalar:

$$\phi = \sum_j \vec{E}_j \cdot \vec{s}_j.$$

Si las porciones las hacemos más y más pequeñas, la

suma dejará de ser discreta para convertirse en continua, es decir en una integral de superficie. $\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$.

Como ejemplo vamos a calcular el valor del flujo del campo creado por una carga puntual “q” a través de una superficie esférica, de radio “a”, centrada en la carga.

El módulo del vector campo eléctrico en cada punto de la superficie

esférica valdrá: $K_e \frac{q}{a^2}$, su dirección y sentido serán radiales.

Por otro lado, el vector superficie sabemos que es perpendicular en cada punto a la superficie, es decir, será radial, luego el producto escalar será el producto de los

módulos de los vectores: $\phi = \int_{\text{superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{s} =$

$$\int_{\text{superficie}} |\vec{E}| \cdot |d\vec{s}| = \int_{\text{superficie}} K_e \frac{q}{a^2} \cdot ds = K_e \frac{q}{a^2} \cdot \int_{\text{superficie}} ds$$

$$= K_e \frac{q}{a^2} \cdot (4\pi a^2) = 4\pi K_e q.$$

Como si mantenemos la terminología que hemos empleado hasta ahora, nos va a aparecer el término 4π en muchas de las ecuaciones importantes del electromagnetismo,

expresaremos la constante eléctrica como $\frac{1}{4\pi \epsilon_0}$, de manera que aparece una nueva constante

“ ϵ_0 ” a la denominamos **permitividad dieléctrica del vacío**, cuyas unidades serán las inversas a las de la constante eléctrica.

Con esta sustitución el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica viene dado

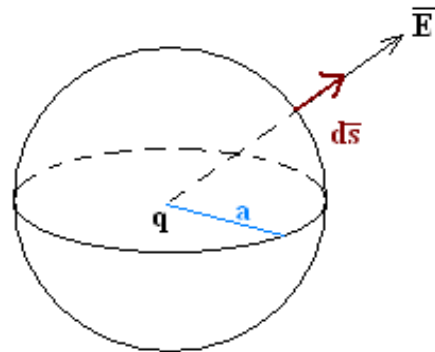


Figure 6
Rodeamos la carga “q” por una esfera de radio “a”. En cada punto de la superficie, los vectores campo y superficie son radiales

por: $\oint_{\text{esfera}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$ que es el enunciado del **teorema de Gauss**

En el caso en que la superficie cerrada que consideremos rodeando la carga no sea esférica, podemos demostrar (ver desarrollo en el anexo I) que el flujo total a través de la superficie, será el mismo que a través de la superficie esférica si sólo existe la carga “q” colocada en su centro,

lo que escribiremos como: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$

Por otro lado, si en lugar de una carga puntual tenemos una distribución de cargas, podemos sumar la contribución de cada carga al flujo total a través de la superficie cerrada, por lo que

podemos escribir: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum_1^n q_i}{\epsilon_0}$

Problema 7.- Tres cargas de 10^{-9} , 2×10^{-9} , y -10^{-9} C, están situadas respectivamente en los puntos (1,1,1); (1,2,2); (1,2,1) Calcular el flujo del campo creado por esta distribución a través de un cubo cuyos vértices están situados en los puntos (0,0,0); (3,0,0); (0,3,0); (0,0,3); (0,3,3); (3,3,3); (3,3,0); (3,0,0).

Aplicando el teorema de Gauss, sabemos que el flujo del campo eléctrico es la suma de las cargas encerradas en el volumen dividida por ϵ_0 . Como las tres cargas se encuentran dentro del cubo a considerar, el flujo será:

$$\oint_{\text{cubo}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{+10^{-9} + 2 \times 10^{-9} + (-10^{-9})}{\epsilon_0} = \frac{2 \times 10^{-9}}{8.85 \times 10^{-12}} = 2.26 \times 10^2 \text{ C m}$$

Acabamos de ver en un ejemplo que el cálculo del segundo miembro de la expresión del teorema de Gauss es en muchos casos fácil, vamos a emplear esta facilidad para calcular el campo eléctrico en un punto del espacio debido a una distribución de carga.

Como el vector campo se encuentra en el primer miembro de la ecuación como un factor del producto escalar de dos vectores, debemos pensar en una forma sencilla de realizar ese producto escalar, lo que nos lleva a la necesidad de elegir una superficie que pase por el punto y que el vector superficie sea para cada punto de ella perpendicular o paralelo al vector campo.

Como consecuencia de lo que acabamos de decir, debemos conocer cual será la “forma” (dirección y sentido) del campo en cada punto del espacio para elegir así la superficie adecuada

que permita calcular $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s}$, de modo que el teorema de Gauss sólo nos dará el módulo del

vector campo eléctrico una vez que sepamos como es su dirección y sentido, lo que nos obliga a pensar en las simetrías del campo para encontrar la superficie adecuada al caso. Por tanto el Teorema de Gauss sólo será útil para calcular el campo eléctrico si existe algún tipo de simetría

Problema 8.- Calcular, empleando el teorema de Gauss, el campo creado por una línea recta infinita uniformemente cargada con una densidad lineal de carga λ , en un punto que dista “a” de ella.

Si queremos emplear el teorema de Gauss, para calcular el campo debemos buscar como superficie gaussiana una superficie cerrada que tenga la misma simetría que la distribución, para que así el módulo del vector campo sea el mismo en todos los puntos de la superficie gaussiana.

En este caso la línea recta infinita, la superficie con simetría que rodea esta distribución podría ser, en principio, un cilindro o un prisma recto, cuyo eje sea la línea cargada. Sin embargo, no tiene sentido considerar el prisma pues los puntos de las caras laterales no equidistan del eje, y en consecuencia el módulo del vector campo no puede ser el mismo, consideraremos, por tanto un cilindro cuyo eje sea la línea infinita cargada, y cuyo radio sea la distancia "a" a la que queremos calcular el campo.

El teorema de Gauss establece que: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$. Calculemos el valor de cada uno de los miembros.

La integral a través de la superficie cerrada, será la suma del valor de la integral a través de cada base más la integral a través de la superficie lateral:

$$\oint_{\text{cilindro}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{sup lat}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

El campo creado por la distribución será normal a la línea, pues por cada elemento de carga que consideremos a lo largo de la línea podemos encontrar otro simétrico a él respecto de un segmento perpendicular a la recta que pase por el punto. Por tanto se anularán las componentes paralelas a la línea y quedarán solamente las componentes perpendiculares, como hemos visto en la solución del problema 6. En total, el campo será de la forma indicada en la figura ($\vec{E} = E \vec{u}_r$).

base 1

En la base "1", el vector superficie es normal a ella y dirigido hacia arriba $d\vec{s}_1 = ds \vec{u}_\uparrow$, como el vector campo es horizontal $\vec{E} = E \vec{u}_r$, su producto escalar será nulo. $\vec{E} \cdot d\vec{s}_1 = 0$.

base 2

En la base "2", el vector superficie es normal a ella y dirigido hacia abajo $d\vec{s}_2 = ds \vec{u}_\downarrow$, como el vector campo es horizontal $\vec{E} = E \vec{u}_r$, su producto escalar será nulo. $\vec{E} \cdot d\vec{s}_2 = 0$.

Superficie lateral

En cada punto el vector superficie irá dirigido según el radio que le une al correspondiente punto del eje $d\vec{s}_l = ds \vec{u}_r$, luego será paralelo al campo: $\vec{E} \cdot d\vec{s} = |\vec{E}| \cdot |d\vec{s}|$.

Por tanto sólo tendremos que calcular la integral extendida a la superficie lateral: $\int_{\text{sup lat}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{sup lat}} E \cdot ds$, pero dado que todos los puntos de la superficie lateral equidistan del eje, el módulo del vector campo será constante, y teniendo en cuenta el valor de la superficie lateral del cilindro, obtenemos: $\int_{\text{sup lat}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot (2\pi a h)$.

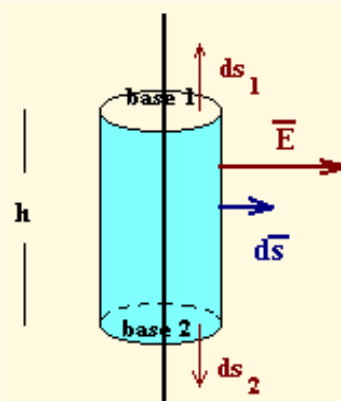


Figure 5 de problemas
Superficie cilíndrica que tomamos como superficie de Gauss

Calculemos ahora el segundo miembro de la ecuación, es decir, la carga encerrada por la superficie gaussiana. Si la distribución es uniforme, la carga encerrada será la que tenga el tramo de línea que está incluida en la superficie cilíndrica que hemos considerado, por tanto: λh . Igualando los dos miembros, obtenemos: $E (2\pi a h) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$; es

decir, $E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{a}$. Como ya sabemos la dirección y el sentido del campo podemos escribir:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \vec{u}_r$$

Que coincide con el valor obtenido por integración directa cuando sustituimos el valor de la constante eléctrica, $K_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$ en la expresión obtenida: $\vec{E} = 2 K_e \frac{\lambda}{a} \vec{u}_r = 2 \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \vec{u}_r$

Potencial eléctrico

Dada la gran similitud formal que hemos comprobado que existe entre la expresión del campo gravitatorio y el eléctrico, vamos a ver ahora, si ese parecido nos permite también hablar de un potencial para el caso eléctrico. De ser así podremos trabajar con un campo escalar del que derive el campo eléctrico con la ventaja que supone poder operar con el potencial (una única función de la posición) en vez de hacerlo con el campo vectorial (tres funciones de la posición para poder conocer en cada punto el módulo la dirección y el sentido), y cuando necesitemos conocer el campo vectorial lo podemos calcular a partir de este potencial.

Veamos que ocurre cuando nos desplazamos dentro de un campo eléctrico para buscar una expresión a partir de la que se pueda definir una función escalar relacionada con el campo eléctrico. Supongamos que nos desplazamos desde un punto “A” a otro “B” siguiendo una línea.

En cada uno de los puntos de esta línea el campo tiene un valor “ \vec{E} ” que se puede considerar constante en una diferencial de camino “ $d\vec{l}$ ”. Llamaremos circulación del vector campo eléctrico a la suma de los productos $\vec{E} \cdot d\vec{l}$, de forma que la circulación a lo largo de toda la línea es $\int_{\text{línea}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

Para calcular esta integral de línea vamos a establecer en primer lugar un camino que, en principio es muy rebuscado pero que será muy útil para poder buscar fácilmente la integral a lo largo de cualquier curva.

Trazamos dos rectas que partiendo de la carga creadora del campo, pasen por los puntos “A” y “B”, como se muestra en la figura 7 y dibujamos el arco de circunferencia con centro en la carga, limitado por las rectas. El camino que vamos a considerar está formado por dos tramos, el primero parte de “A” y sigue el arco de circunferencia, con centro en la carga, hasta el punto “C”, que se encuentra en la recta determinada por el punto “B” y la carga. El segundo tramo va de “C” a “B” siguiendo la recta que los une.

Para calcular la circulación del campo entre los puntos “A” y “B”, por el camino indicado, tendremos que calcular la circulación en los dos tramos, y sumar los resultados obtenidos.

Tramo A-C

Para calcular la circulación $\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ debemos saber como son los vectores campo y “camino” en el tramo.

El campo en todos los puntos de este tramo, tendrá el mismo módulo $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_A^2}$, ya que todos los puntos equidistan de la carga en el radio del arco, el sentido vendrá dado por un vector unitario radial \vec{u}_r , que será distinto en cada punto y estará dirigido hacia el infinito si la carga es positiva.

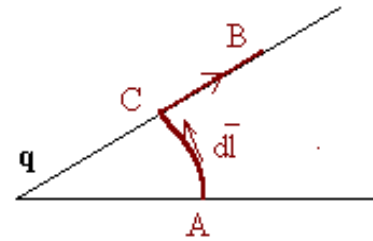


Figure 7

El “desplazamiento” en cada punto será un vector de módulo “dl” y el sentido será tangente a la trayectoria y dirigido hacia “C”. Para ir desde el punto “A” al punto “B”, trazamos un arco con centro en la carga que pase por “A”, lo que nos define el punto “C”

El producto escalar de los vectores campo y “camino” será el producto de dos vectores perpendiculares (siempre el radio y la tangente son perpendiculares), luego la circulación

en este tramo será nula: $\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Tramo C-B

Aquí el vector campo será: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$, siendo r la distancia del punto considerado a la carga, y \vec{u}_r un vector unitario contenido en la semirrecta “qB” y dirigido hacia el infinito.

El vector “camino” será: $d\vec{l} = dr \vec{u}_r$, siendo \vec{u}_r el mismo vector que nos daba el sentido del campo y dr la variación sufrida por el “desplazamiento” que lo será a lo largo de la línea por la que nos movemos.

En todo este ramo los vectores campo y “camino” son paralelos, luego su producto escalar, será igual al producto de los módulos, por tanto: $\int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_C^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} =$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_C^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_C^B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C} \right) \right], \text{ teniendo en cuenta como hemos}$$

definido el punto “C”, r_C y de r_A , son la misma magnitud (ambos son el radio del arco

centrado en la carga que pasa por ambos puntos), como el punto “A” es el definido inicialmente por el problema que habíamos planteado, la circulación del campo eléctrico,

en este tramo, la podemos escribir:
$$\int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

La circulación del campo entre “A” y “B” por este camino, valdrá la suma de los resultados obtenidos en los dos tramos en que lo hemos descompuesto.

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Vamos a calcular ahora la circulación del campo desde “A” hasta “B” siguiendo otro camino, si bien vamos a elegir un camino similar al anterior (figura 8). Ahora, trazamos una tercera línea que parte de la carga, y se encuentra entre las correspondientes a los puntos “A” y “B”, y trazamos dos arcos de circunferencia, uno que pase por “A” y llegue a la nueva línea y otro que pase por “B” y llegue también a la nueva línea. Los extremos de estos arcos definirán en esta nueva línea los puntos “D”, “E” y “F” respectivamente. El camino que consideramos ahora está formado por 4 tramos: “AD”, “DE”, “EF” y “FB”, y debemos calcular la circulación en cada uno de ellos y sumar los resultados obtenidos.

Siguiendo los razonamientos análogos al caso anterior, se llega a los siguientes resultados:

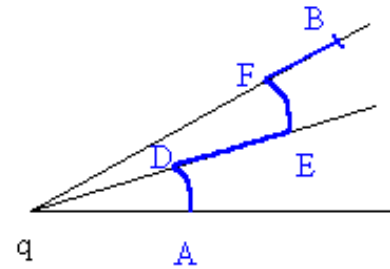


Figure 8

Tramo A-D

El campo es radial y tiene el módulo constante e igual a:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_A^2}$$

El “camino” será, en cada punto un vector tangente a la circunferencia y dirigido hacia “D”, luego perpendicular al campo.

$$\int_A^D \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Tramo D-E

El vector campo vale en cada punto: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$, y es paralelo a la recta

determinada por DE, y por tanto al vector “desplazamiento” con lo que el producto escalar de los vectores campo y “camino”, será el producto de los módulos, luego:

$$\int_D^E \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_D^E \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_D^E \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_D^E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_D} \right) \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_D} - \frac{1}{r_E} \right).$$

Tramo E-F

Igual que en el tramo “A-D”, los vectores campo y “camino” son perpendiculares, por tanto $\int_E^F \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Tramo F-B

Igual que en el tramo D-E, teniendo en cuenta los nuevos puntos inicial y final luego:

$$\int_F^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_F^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_F^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_F^B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_F} \right) \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_F} - \frac{1}{r_B} \right).$$

En total, la circulación del campo entre “A” y “B” por este camino, valdrá:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^D \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_D^E \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_E^F \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_F^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_D} - \frac{1}{r_E} \right) + 0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_F} - \frac{1}{r_B} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_D} - \frac{1}{r_E} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_F} - \frac{1}{r_B} \right).$$

En la figura puede comprobarse que la distancia entre la carga y cada uno de los puntos “A” y “D” ($r_A = r_D$), ocurriendo igual con las distancias entre la carga y cada uno de los puntos “E” y “F” ($r_E = r_F$). Sustituyendo estos valores en la expresión de la circulación tenemos:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_E} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_B} \right); \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

que es el mismo resultado que habíamos obtenido yendo por el otro camino.

A partir de este resultado podemos comprobar que podemos acercarnos a la forma de una curva cualquiera tanto como queramos, sin más que trazar más radios que partan de la carga. Por tanto, el resultado que hemos obtenido es generalizable para cualquier camino que tomemos para ir de un punto a otro. Podemos decir que la circulación del campo no depende del camino es decir que

el campo eléctrico es conservativo.

La expresión que hemos obtenido en el cálculo de la circulación para ir de “A” a “B” del campo eléctrico nos servirá para determinar el potencial eléctrico en los puntos del campo. Si asimilamos directamente la circulación entre dos puntos con la diferencia de potencial entre ellos, debida a una carga puntual, tendríamos que:

- *El potencial eléctrico en un punto varía con la inversa de la distancia a la carga. Lo que significa que si la carga es positiva, a mayor distancia a la carga, menor potencial en el punto.*
- *La expresión obtenida no nos permite hablar de potencial en un punto, sólo podemos hablar de diferencia de potencial entre dos puntos del espacio.*
- *Para el potencial creado por una carga puntual, podremos hablar de potencial en un punto si tomamos como origen de potencial un punto muy distante de la carga, en nuestro caso $r_A \rightarrow \infty$ (aunque esto solamente puede hacerse en el caso en que no existan cargas en el infinito). En este caso el potencial creado por una carga positiva en un punto cercano “B” resultaría negativo. Para subsanar esta circunstancia se define el potencial eléctrico como la circulación del campo cambiada de signo.*

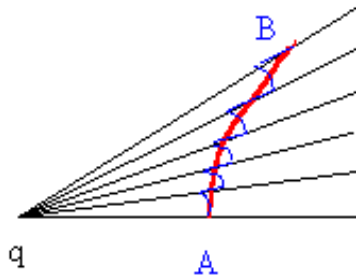


Figure 9

Nos podemos hacer a la forma de un camino cualquiera con tramos de radios y de circunferencias de centro en la carga

Por tanto, la variación de potencial entre dos puntos A y B del campo, creado por una carga puntual, vendrá dada por:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

y el potencial en un punto: $V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Potencial creado por una distribución de cargas.

Si el campo está creado por una distribución discreta o continua de cargas, podremos aplicar el principio de superposición para obtener el potencial. En el caso de una distribución discreta, cada una de ellas estará situada en un punto caracterizado por su vector de posición \vec{r}'_i . En total tendremos para la diferencia de potencial entre los puntos A y B:

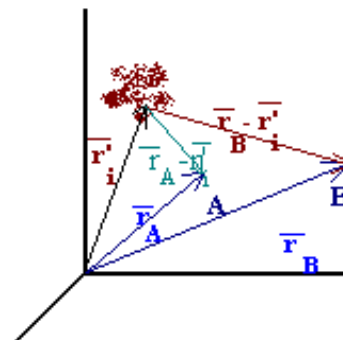


Figure 10

La posición de las cargas vendrá dada por los vectores \vec{r}'_i

$$V_B - V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_{i=1}^{i=n} q_i \left(\frac{1}{|\vec{r}_B - \vec{r}'_i|} - \frac{1}{|\vec{r}_A - \vec{r}'_i|} \right) \right)$$

Si no existe carga en el infinito, y lo podemos tomar como origen de potenciales ($r_A \rightarrow \infty, V(r_A) = 0$) y podemos escribir que el potencial en un punto será:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} \right).$$

En el caso de una distribución continua de carga, las podemos “discretizar” considerando como carga puntual la encerrada en un volumen elemental ($d\tau'$), de forma que $dq = \rho d\tau'$, con lo que la suma discreta se convertirá en continua, la distribución de potencial será:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Por tanto, en general, el campo electrostático es un campo conservativo, que deriva de un potencial que calcularemos como: $V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

Como consecuencia de todo lo anterior, hemos visto que el campo electrostático se puede describir por una función escalar $V(\vec{r})$ que esta definida en todo el espacio excepto por una constante. La descripción del campo por un potencial presenta la ventaja de simplificar los cálculos a la hora de conocer sus acciones.

Problema 8.- Determinar si el campo vectorial $\vec{a}(\vec{r}) = (x^2 + yz)\vec{i} + (y^2 + zx)\vec{j} + (z^2 + xy)\vec{k}$ puede representar un campo electrostático determinando la distribución de potencial correspondiente.

El campo vectorial dado está determinado en todos los puntos del espacio, por tanto puede existir carga en el infinito, y no podemos hablar de potencial en un punto, sino de diferencia de potencial entre dos puntos. Para ver si podemos encontrar una expresión para esta diferencia de potencial veremos si podemos encontrar una expresión de $V_A - V_B$, que vendrá dada por:

$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$, siendo $d\vec{l}$ un vector cambio de posición cualquiera, pues la diferencia de potencial no puede depender del camino que empleemos para llegar desde un punto a otro. Por tanto podemos escribir:

$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$; con lo que:

$\vec{E} \cdot d\vec{l} = ((x^2 + yz)\vec{i} + (y^2 + zx)\vec{j} + (z^2 + xy)\vec{k}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$, y la distribución de potenciales será:

$$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B (x^2 + yz)dx + (y^2 + zx)dy + (z^2 + xy)dz =$$

$$= - \left[x^3 + xyz + y^3 + xyz + z^3 + xyz \right]_B^A$$

Esta expresión permitirá calcular la diferencia de potencial entre dos puntos.

Dipolo eléctrico

A menudo nos vamos a encontrar una asociación de cargas sencilla formada por dos cargas eléctricas iguales, pero de signo contrario, separadas una distancia pequeña respecto de la de observación. Esta asociación de cargas recibe el nombre de dipolo eléctrico y su estudio suele resultar interesante en el estudio de la materia.

El dipolo se caracteriza por su **momento dipolar** que es un vector que tiene por módulo el producto de la carga por la distancia que separa las cargas, dirección la de la recta que une las cargas y sentido desde la carga negativa hacia la positiva.

Dado que las dimensiones del momento dipolar son “carga \times distancia” las unidades en el Sistema Internacional (SI) serán culombios \times metro ($C \times m$). Existe una unidad práctica el Debye, cuyo origen está ligado a la primera utilidad que se dio al estudio de los dipolos: el conocimiento de la materia. Su relación con la unidad del SI es: $1 \text{ Debye} = 3.33 \times 10^{-30} C \times m$.

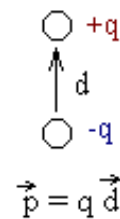


Figure 11
Esquema de un dipolo

El dipolo crea un campo eléctrico resultante del creado por cada una de las dos cargas. Las expresiones matemáticas del campo eléctrico y el potencial creados por el dipolo en un punto, haciendo la aproximación que supone que la distancia de observación es muy grande comparada con la que separa las cargas, lo que permite un desarrollo en serie de la expresión del potencial, son para el potencial eléctrico y el campo:

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ para } r \gg d$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') - \frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

Como puede apreciarse, estas expresiones son bastante diferentes a las obtenidas en el caso de cargas puntuales. La diferencia más significativa es que el potencial es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del dipolo al punto (no inversamente proporcional como ocurriría en otros casos), y el campo inversamente proporcional al cubo de la distancia (y no al cuadrado). Esto nos hace comprender por que, en ningún caso, puede considerarse el dipolo como una carga puntual y es preciso tener en cuenta su momento dipolar.

Acción de un campo eléctrico sobre un dipolo

Particularmente interesante resulta el caso de un dipolo rígido (el conjunto de las dos cargas mantiene su distancia), cuando se encuentra en el seno de un campo electrostático.

Consideremos un dipolo, como el representado en la figura (la carga positiva en el punto “A”, la negativa en “B”, separadas una distancia “d”), de momento dipolar $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$. Cuando se encuentra en el seno de un campo electrostático \vec{E} , cada carga se verá sometida a la acción de una fuerza de valores: $\vec{F}_+ = (+q) \vec{E}(A)$, $\vec{F}_- = (-q) \vec{E}(B)$, siendo $\vec{E}(A)$ y $\vec{E}(B)$ los campos existentes en las posiciones de las cargas positiva y negativa respectivamente. La fuerza resultante será:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q[\vec{E}(A) - \vec{E}(B)]$$

Al ser el dipolo rígido, estas dos fuerzas están aplicadas en puntos diferentes, con lo que aparecerá un par de fuerzas, cuyo momento resultante (tomando momentos respecto del punto “B”), será:

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = q \vec{d} \times \vec{E}(A) = \vec{p} \times \vec{E}(A)$$

En total, si el campo no es uniforme, el dipolo se verá sometido por una parte a la acción de una fuerza de arrastre (resultante de las fuerzas), que lo desplazará en sentido de los campos crecientes, y por otra parte, al ser de momento no nulo producirá un giro que lo orientará en el sentido del campo.

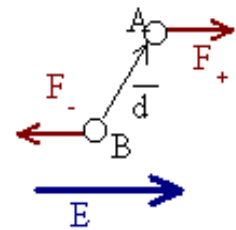


Figure 12
El campo eléctrico ejerce fuerzas de distinto sentido sobre cada carga del dipolo

Si el campo que actúa es uniforme (\vec{E}_0), la fuerza resultante será nula

$\vec{F} = q[\vec{E}_0 - \vec{E}_0] = \vec{0}$, y el momento (que será independiente del origen de momentos) será:

$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0$. Es decir un campo uniforme no desplazará al dipolo, si bien lo hará girar orientándolo en el sentido del campo actuante.

Tema II: Electrostática en medios materiales.

Conductores en campos electrostáticos. Concepto de capacidad. Materiales dieléctricos. Vectores Polarización y Desplazamiento

Bibliografía: Física. Volumen nº2. Tipler. Editorial Reverté. Física. Volumen nº2. Alonso y Finn. Editorial Addison-Wesley

Conocimientos previos: Las leyes fundamentales de la Mecánica, operaciones vectoriales, concepto de campo eléctrico

Objetivos: Entender como es el campo electroestático en el interior y en las cercanías de un conductor cargado o descargado. Comprender porque decimos que un conductor es un volumen equipotencial. Comprender que la capacidad de un sistema de conductores es una propiedad que depende de la geometría del sistema. Entender como se comportan los materiales dieléctricos en un campo electrostático, así como el significado del vector polarización y las densidades de carga de polarización.

Introducción

Hemos visto que la presencia de cargas eléctricas en un punto cualquiera del espacio, daba lugar a la existencia de un campo eléctrico, que hemos aprendido a detectar por la fuerza que aparecía sobre otra carga, y hemos entendido se encontraba en el aire o en el vacío. En este tema, vamos a estudiar tanto la influencia del medio en la distribución de campos generados por las cargas, como la influencia del campo eléctrico en la “distribución” de las cargas eléctricas que son los átomos y moléculas que forman un medio material.

Desde siempre se ha considerado que existían dos grandes grupos de medios materiales según fuese su comportamiento frente a los campos eléctricos. Así, al hablar de experiencias de triboelectricidad se calificó a los medios como eléctricos o aneléctricos según se manifestara o no con facilidad este fenómeno. Esta primera división de los medios materiales se consolidó cuando se estudió el comportamiento de la materia ante la conducción eléctrica, caso bien distinto del que nos interesa ahora, y con algunas matizaciones, dio lugar a la denominación de conductores (identificados con los metales) y aislantes (identificados con los no metales). La aparición de propiedades de conducción en ciertos no metales, dio paso a la división hoy en uso de los medios materiales como: conductores, semiconductores y dieléctricos. A continuación veremos como se comportan los distintos tipos de medios conductores en el seno de los campos electrostáticos.

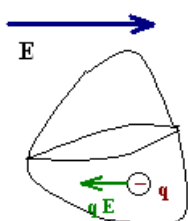
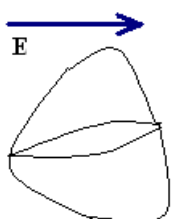
Conductores en campos electrostáticos

Vamos a iniciar el estudio de las interacciones entre campos electrostáticos y medios materiales, analizando el comportamiento de un medio conductor en un campo electrostático. Empezaremos

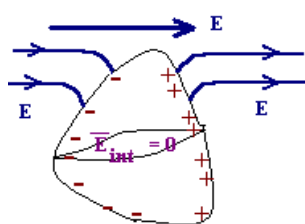
por comprender como se distribuyen sus cargas en esta situación, para conocer después como son el campo y el potencial en los conductores, terminaremos su estudio analizando el campo y el potencial debido a un conductor cargado, para llegar a entender el significado de la capacidad de un conductor y de un conjunto de ellos.

Distribución de carga en un conductor en equilibrio electrostático

Vamos a considerar ahora un medio conductor que, como sabemos, se caracteriza por la movilidad de los electrones en su volumen, al que supondremos inmerso en un campo electrostático.



En primer lugar supongamos que el conductor es neutro (no tiene carga adicional). Sin embargo, en el volumen del conductor existen electrones, que como sabemos se pueden mover con libertad por todo el volumen del conductor. Si el campo eléctrico actúa sobre un electrón, éste se verá sujeto a la acción de una fuerza $\vec{F} = q_e \cdot \vec{E}$ que tenderá a moverle en sentido opuesto al campo, y lo mismo ocurriría con todos los electrones del conductor. Ahora bien, cada electrón que se desplaza en contra del campo (en la figura, hacia la izquierda del conductor), provoca la aparición de una carga positiva en el conductor en el sentido del campo (en la figura, a la derecha). Esta nueva distribución de cargas causa la aparición de un nuevo campo eléctrico, opuesto al original, cuyo valor irá aumentando a medida que se desplazan nuevos electrones en contra del campo, y aparezcan cargas positivas en el otro extremo del conductor.



Este fenómeno se mantendrá hasta que se igualen los módulos del campo exterior aplicado y el nuevo (que se ha generado por el desplazamiento de los electrones) de modo que al final el campo electrostático en el volumen del conductor sea nulo, con lo cual no se ejercerá fuerza alguna sobre los electrones libres que posee el conductor. Por tanto la condición de equilibrio será: “El campo electrostático en el interior de un conductor descargado es nulo”.

Figuras 1, 2 y 3
Representación de la
distribución de cargas en
un conductor

Si el conductor está cargado, con una carga “Q” la situación será la misma, pues mientras exista un campo en el volumen del conductor las cargas libres (electrones) se mueven por efecto de ese campo buscando una distribución en la que exista equilibrio, que es aquella en la que el campo en el interior del conductor es nulo, con lo que no existen fuerzas eléctricas sobre las cargas. Este razonamiento nos lleva a que: **“el campo electrostático en el interior de un conductor es siempre nulo”**

Por otra parte, si el campo en el interior del conductor es nulo, aplicando el teorema de Gauss vemos que tiene que ocurrir que cualquier superficie cerrada que consideremos en el interior de ese conductor no debe encerrar ninguna carga, luego **“la carga en un conductor sólo se puede**

distribuir en la superficie del mismo”.

Problema 1.- Un objeto conductor es hueco. Si se introduce una carga puntual "Q" en la cavidad, demuéstrese que se induce una carga "-Q" en la superficie interna de la cavidad.

Consideremos el conductor hueco, cuya sección se representa en la figura, si en su cavidad interior existe una carga "Q", al aplicar el teorema de Gauss para una superficie "Σ" en

el interior del volumen del conductor, se cumplirá: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$.



Como la superficie de Gauss que hemos considerado está toda ella en el volumen del conductor, el campo eléctrico será nulo, lo que significa: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, pero por otro lado

esto obliga a que la carga encerrada en la superficie de Gauss sea nula, como en la cavidad existe la carga "Q", se debe encerrar una carga "- Q". Por estar hablando de un conductor sólo puede estar en una superficie, en este caso la superficie interior del hueco, como nos pedían demostrar.

Figure 1 de problemas
La línea roja representa a la superficie de Gauss que consideramos en el volumen del conductor

Potencial eléctrico de un conductor en un campo eléctrico

La primera conclusión que se saca del hecho de que campo electrostático sea nulo en el interior de un conductor, es que: **"los conductores son un volumen equipotencial"**. Si el volumen del conductor no está todo él a un único potencial, existirían al menos dos puntos, de ese volumen que estarían a distinto potencial, lo que significaría que entre ellos existiría un campo electrostático, lo que sabemos no es posible.

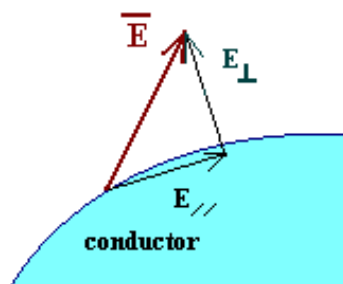
Si aplicamos la definición de diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera del conductor,

tendremos: $V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Según hemos visto, dentro del conductor se cumple siempre

que el campo electrostático es nulo ($\vec{E} = \vec{0}$) luego el integrando

de la ecuación anterior es nulo, como sumar muchas veces cero da cero (no confundir con sumar cantidades muy pequeñas cuya suma no tiene por que ser nula) llegamos a que

$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, luego el volumen del conductor está a potencial constante.



Campo eléctrico en la superficie de un conductor.

Veamos ahora, como tiene que ser al campo en la superficie de un conductor. Supongamos, como se muestra en la figura 4, que el campo no fuese perpendicular a la superficie del conductor,

Figure 4

Componentes normal y paralela del campo eléctrico en la superficie de un conductor suponiendo que no fuese perpendicular a ella

podemos descomponer el vector campo en dos componentes una normal y otra paralela a su superficie. La componente paralela a la superficie, provocaría en los portadores (los electrones que se pueden mover libremente por el volumen del conductor) un movimiento paralelo a la superficie, lo que llevaría a una nueva distribución de cargas que modificaría el campo. La situación de equilibrio es aquella en la que no existe movimiento de cargas, lo que sólo ocurre cuando la componente del campo paralela a la superficie se anule. Por tanto, en la situación de equilibrio **“el campo electrostático es perpendicular a la superficie del conductor”**.

Para calcular el valor del campo en la superficie del conductor, consideremos que está cargado con una densidad superficial de carga σ . Calcularemos el valor del campo aplicando el teorema de Gauss, para lo que tenemos que considerar una superficie cerrada. La superficie debe contener

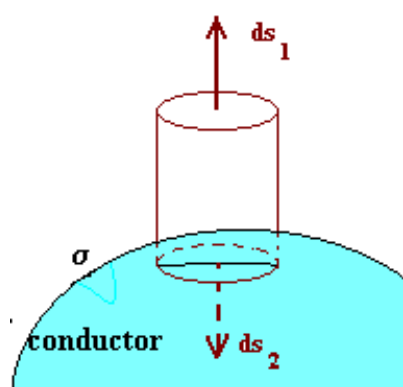


Figure 5

Para calcular el campo en las cercanías de un conductor tomamos como superficie de Gauss un cilíndrico recto una de cuyas bases está en el conductor.

los puntos en los que nos interesa calcular el campo y otros en los que sea fácil conocer el flujo del campo eléctrico. En este caso nos interesa considerar una superficie cilíndrica, como la que se muestra en la figura 5, una de cuyas bases está en el interior del conductor y la otra tan próxima a la superficie como queramos.

Aplicando el teorema de Gauss a esta superficie tendremos:

$$\oint_{\text{Sup cilindro}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$$

Calculemos por separado los dos miembros de esta ecuación. El primer miembro lo podemos escribir como:

$$\oint_{\text{Sup cil.}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{sup lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \text{ calculemos ahora}$$

cada integral por separado.

Base 1

El vector superficie es normal a ella y dirigido hacia arriba, el vector campo, si consideramos la carga positiva, también será perpendicular a la superficie del conductor y por tanto a la base 1 del cilindro si la consideramos muy pequeña y tan próxima al conductor como queramos. Por tanto, los vectores campo y superficie son paralelos y:

$$\int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{base 1}} E \cdot ds = \{ \text{como la superficie es pequeña el módulo del campo será constante} \} =$$

$$E \int_{\text{base 1}} ds \text{ llamando "S" al área de la sección recta del cilindro que es la superficie de Gauss}$$

$$\text{que hemos elegido, tendremos: } \int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot S$$

Base 2

El vector superficie es normal a ella y ahora dirigido hacia abajo, el vector campo, por estar dentro del conductor será nulo, luego:

$$\int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Superficie cilíndrica

El vector superficie será normal en cada punto a la superficie lateral del cilindro, es decir será horizontal, como el campo en las proximidades del conductor es perpendicular a la superficie del conductor, es decir es vertical, se cumple que los vectores campo y superficie son perpendiculares:

$$\int_{\text{sup lat}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Por tanto, el calculo del primer miembro de la ecuación $\int_{\text{sup cil}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot S$

Veamos el valor del segundo miembro de la ecuación: $\frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$, la carga encerrada en el cilindro será exclusivamente la de la superficie del conductor que esté dentro del propio cilindro, si la densidad de carga es σ , y el área de la sección recta “S”, la carga total encerrada en el cilindro de Gauss, será: $\sigma \cdot S$.

Igualando los dos términos de la ecuación obtenemos: $E \cdot S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$, es decir que el módulo del

vector campo será: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, como sabemos que el campo es normal a la superficie del conductor

en cada punto. Si llamamos “ \vec{u}_n ” al vector unitario normal a la superficie en cada punto, tendremos que en las proximidades de un conductor cargado el campo electrostático es:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$$

Veamos ahora que sucede en puntos más alejados del conductor, para lo cual vamos a considerar algunos casos sencillos como el de un conductor esférico.

Campo y potencial debidos a una esfera conductora cargada.

Consideremos una esfera conductora de radio “a”, que está cargada con una carga +Q. Para calcular la distribución de campos a que dará lugar deberemos tener en cuenta que:

- la carga se sitúa en la superficie
- el campo en la superficie es radial (al ser siempre perpendicular a la superficie)
- la esfera tiene simetría, de manera que girando alrededor de su centro encontramos siempre la misma situación.

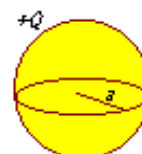


Figure 6
Esquema de una esfera de radio “a” cargada con carga +Q

Estas circunstancias tendrán como consecuencia que la distribución de campos a que de lugar tendrá también la misma simetría que la esfera. Lo que nos lleva a que en cualquier punto exterior:

- el campo será radial, y paralelo o antiparalelo a un vector unitario dirigido según el radio según sea la carga positiva o negativa. Es decir en nuestro caso $\vec{E} = E \vec{u}_r$.
- su módulo es el mismo en todos los puntos del espacio que equidisten del centro de la esfera.

Para calcular el módulo del campo, y considerando la simetría del problema, parece lógico aplicar el teorema de Gauss. En este caso la superficie con la simetría adecuada será otra superficie esférica concéntrica con la esfera generadora del campo, pero de radio “r” que será la distancia al centro de la esfera del punto genérico en el que estamos calculando el valor del campo.

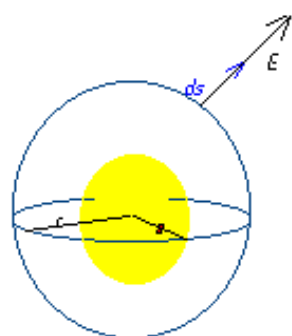


Figure 7
Como superficie de Gauss tomamos una esfera concéntrica con la esfera cargada

Según el teorema de Gauss: $\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{total}}}{\epsilon_0}$. Para calcular el primer

miembro tendremos en cuenta que el campo será radial y el vector superficie por definición será normal a la superficie, $d\vec{s} = ds \vec{u}_r$, luego el producto escalar de los vectores campo y diferencial superficie será igual al producto de los módulos $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds$

Como por simetría cualquier punto de la esfera de radio r es equivalente, el módulo del campo será constante en toda la superficie gaussiana que estamos considerando, luego $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Sigma} E ds = E \oint_{\Sigma} ds = E(4\pi r^2)$.

Para calcular el segundo miembro de la igualdad, debemos tener en cuenta que la única carga que tenemos encerrada por la superficie gaussiana, es la de la esfera conductora es decir:

$$\frac{Q_{\text{total}}}{\epsilon_0} = \frac{+Q}{\epsilon_0}.$$

Iguando los dos miembros de la ecuación tenemos:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}; \text{ el módulo del campo será:}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}, \text{ como sabemos que el campo es radial,}$$

$$\text{escribiremos: } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

Lo que nos dice que, a distancias suficientes ($r > a$), el campo generado por la esfera cargada es el mismo que el

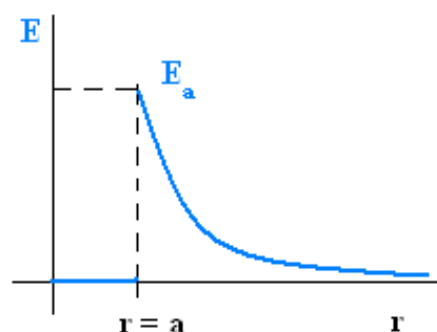


Figure 8
Variación del módulo del campo eléctrico debido a una esfera cargada de radio “a”

que crearía una carga puntual situada en el centro de la esfera.

Como el campo en el interior del conductor debe ser cero, existirá una discontinuidad en la superficie del mismo según se representa en la figura 8, **el módulo del campo en la cara exterior de la superficie valdrá:**

$$E(a)|_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^2} \text{ mientras que en el interior el campo será nulo.}$$

A partir de la expresión obtenida para el campo eléctrico podemos calcular el potencial teniendo en cuenta que:

$$V(r_B) - V(r_A) = - \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para calcular la integral desde el punto “A” hasta el punto “B” exteriores a la esfera, (figura 9), sabemos que podemos elegir cualquier camino, por tanto la podemos calcular yendo desde “A” hasta A’ y de A’ a “B”. Por la estructura del campo, el tramo desde A hasta A’ dará integral nula,

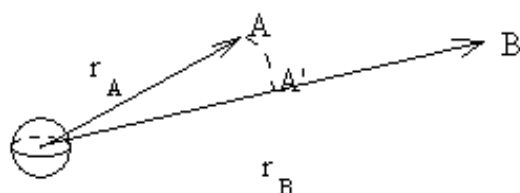


Figure 9

Para ir desde “A” hasta “B”, trazamos un arco de circunferencia con centro en el de la esfera que nos define el punto A’

ya que el producto vectorial del campo (vector paralelo a \vec{u}_r) por el vector “movimiento” (vector paralelo a la tangente y en consecuencia perpendicular a \vec{u}_r) será el producto escalar de dos vectores perpendiculares que es nulo. La única contribución será la debida a el tramo entre A’ y B en el que el vector “movimiento” es de la forma $d\vec{l} = dl \vec{u}_r$, lo que nos da el producto de dos vectores paralelos, con lo que:

$$V(r_B) - V(r_A) = - \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_A}^{r_B} E dr = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_{r_A}^{r_B}; \text{ luego}$$

$$V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right].$$

Al estar la carga en la esfera, y por tanto no existir carga en el infinito podemos tomar como cero el potencial en el infinito ($r_A \rightarrow \infty$, $V(r_A) \rightarrow 0$), lo que nos permite hablar de potencial en un punto

$$\text{cualquiera exterior a la esfera } V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}.$$

En los puntos interiores en la esfera cargada, sabemos que el campo debe ser nulo y por tanto el potencial constante. Si consideramos un punto de la superficie del conductor, su valor será

$$V_a = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a}, \text{ por tanto todos los puntos de el conductor tendrán este mismo potencial.}$$

Si representamos en uno ejes coordenados el valor del módulo del campo eléctrico y del

potencial nos encontramos con lo representado en la figura 10 (representamos en rojo el valor del potencial y repetimos en azul el módulo del vector campo en cualquier dirección del espacio).

La figura nos permite ver que si bien tanto el campo como el potencial disminuyen con la distancia, la variación es mucho más rápida en el caso del campo, lo hace con la segunda potencia de la distancia, mientras el potencial lo hace con la inversa de la distancia.

Por tanto, todos los puntos que estén a la misma distancia del centro de la esfera tendrán el mismo potencial, es decir, las superficies equipotenciales serán esferas de centro el de la esfera cargada, y radio la distancia al centro del punto que consideremos.

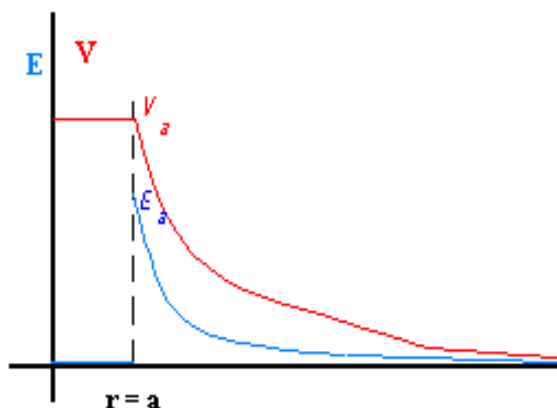


Figure 10

Variación del módulo del campo y del potencial debidos a una esfera cargada

Influencia de la geometría en la distribución de carga en un conductor

Vamos a estudiar cual es la influencia de la forma geométrica de un conductor en su comportamiento desde el punto de vista eléctrico. Para ello, vamos a considerar dos conductores esféricos “A” y “B” de radios “a” y “b” como se muestra en la figura 11. Originalmente supondremos que el conductor “A” está cargado con una carga ($Q_a = Q$) y el segundo descargado ($Q_b = 0$). Esto supondrá que cada uno tendrá un potencial inicial distinto.



Figure 11

La esfera de radio “a” tiene una carga Q, y la de radio “b” está descargada

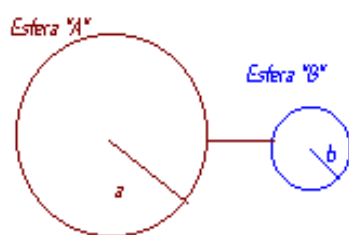


Figure 12

Las dos esferas de la figura anterior unidas por un conductor descargado

Supongamos ahora que los unimos por un hilo conductor muy fino, sin carga, como se muestra en la figura 12, formándose así un único conductor.

Al ser un sistema aislado la carga total se mantendrá constante e igual a Q. Además, al ser ahora un solo conductor su potencial será el mismo en todos los puntos, si bien por comodidad para el cálculo seguiremos hablando de cargas y potenciales de cada esfera, como se indica en la tabla adjunta.

	Estado inicial	Estado final
Esfera “A”	$Q_a = Q$	Q_a'
radio “a” densidad de carga σ_a	$V_a = V_a$	$V_a' = V$

Esfera "B" radio "b" densidad de carga σ_b	$Q_b = 0$	Q'_b
	$V_b = V_b$	$V'_b = V$

Los potenciales de cada esfera, según hemos calculado más arriba deberían ser: $V'_a = \frac{Q'_a}{4\pi\epsilon_0 a}$

y $V'_b = \frac{Q'_b}{4\pi\epsilon_0 b}$ si bien sabemos se cumple que $V'_a = V'_b = V$, es decir:

$$V = \frac{Q'_a}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q'_b}{4\pi\epsilon_0 b}$$

Por otro lado sabemos que la carga se conserva, por tanto: $Q'_a + Q'_b = Q$. De la igualdad de los potenciales obtenemos como relación entre cargas que: $b Q'_a = a Q'_b$ de donde:

$$\frac{Q'_a}{a} = \frac{Q'_b}{b}; Q'_b = b \frac{Q'_a}{a} \text{ luego: } Q'_a + b \frac{Q'_a}{a} = Q; Q'_a = Q \frac{a}{a+b} \text{ y } Q'_b = Q \frac{b}{a+b}$$

lo que nos lleva a que la carga de la esfera de mayor radio es mayor que la carga del conductor de menor radio: $Q'_a > Q'_b$

Al calcular la densidad de carga de cada esfera obtenemos: $\sigma_a = \frac{Q'_a}{4\pi a^2} = Q \frac{a}{a+b} \frac{1}{4\pi a^2}$, lo

que podemos escribir como: $\sigma_a = \frac{Q}{a} \frac{1}{4\pi(a+b)}$, operando de igual forma con la segunda esfera

tendremos: $\sigma_b = \frac{Q}{b} \frac{1}{4\pi(a+b)}$ con lo que las densidades de carga de las esferas son

inversamente proporcionales a sus radios, es decir: $\sigma_a < \sigma_b$

Si recordamos que el valor del módulo del vector campo eléctrico en las cercanías de un conductor es la densidad de carga en el punto dividido entre ϵ_0 ,

tendremos que: $\vec{E}_a = \frac{\sigma_a}{\epsilon_0} \vec{u}_n$ $\vec{E}_a = \frac{Q}{a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0(a+b)} \vec{u}_n$ y

$\vec{E}_b = \frac{Q}{b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0(a+b)} \vec{u}_n$, es decir: $|\vec{E}_a| < |\vec{E}_b|$, luego a menor

radio mayor densidad de carga y en consecuencia mayor será el módulo del vector campo eléctrico.

Si consideramos un conductor como el que se muestra en la figura 13, cuyos radios de curvatura son muy distintos, aun cuando todo él este al mismo potencial, el campo en el extremo de radio de curvatura menor (punta) será mucho mayor que el campo en el otro extremo, y las cargas se acumularán en el extremo de menor radio de curvatura.



Figure 13

Esquema de un conductor terminado en dos semiesferas de radios muy distintos

Extrapolando la situación, supongamos que uno de los extremos es un plano, es decir, su radio de curvatura es infinito y el otro es una punta de radio de curvatura muy pequeño, el campo en la punta será muchísimo mayor que el campo en el resto del conductor, con lo cual las cargas que puedan estar en las cercanías del conductor caminarán hacia la punta. En esta propiedad de campo intenso en las puntas se funda el pararrayos pues en caso de una tormenta el rayo, que no es otra cosa que un movimiento de electrones sujetos a la acción de un campo capaz de atravesar el aire, lo harán por la zona en la que el campo eléctrico sea más intenso.

Capacidad de un conductor.

En los diversos casos de cálculo del potencial debido a un conductor cargado que hemos realizado, siempre nos encontramos que existe una relación entre la carga que tiene el conductor y el potencial que adquiere, lo cual nos lleva a pensar que podemos establecer la relación que existe entre ambas magnitudes para un conductor, para lo cual se define una nueva magnitud denominada **capacidad de un conductor**, $C = Q/V$, cuya unidad es el culombio partido por voltio, que se denomina faradio.

En los apartados anteriores hemos visto que un conductor cargado es siempre un volumen equipotencial. El valor del potencial que adquiere el conductor depende de su carga, pero también varía según como está distribuida esa carga, y hemos visto que esta distribución depende de la geometría del conductor. Por tanto, la capacidad del conductor será una característica que dependerá exclusivamente de la forma del conductor. Así, por ejemplo, para un conductor esférico el potencial adquirido cuando posee una carga Q es:

$$V = K \frac{Q}{R}, \text{ con lo que } C = \frac{Q}{V} = \frac{Q R}{K_e Q} = \frac{R}{K_e}, \text{ o lo que es lo mismo } C = 4\pi \epsilon_0 R, \text{ que}$$

solamente depende del radio

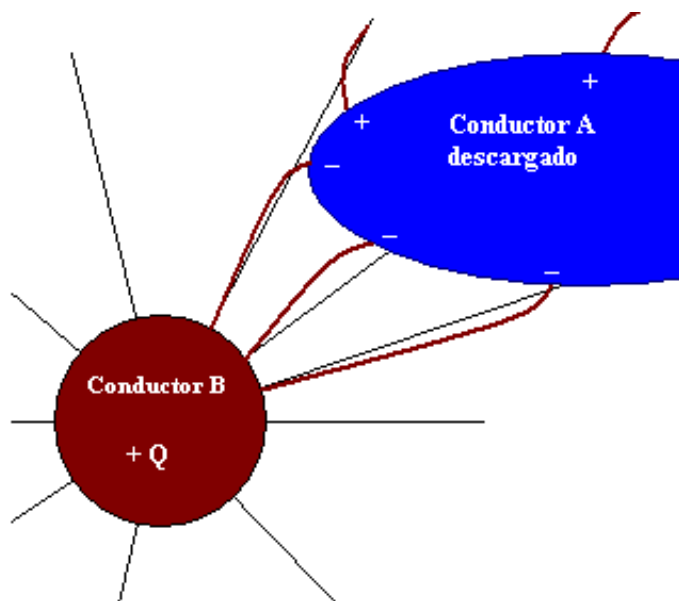


Figure 14

Las líneas de campo del conductor "B", originalmente en negro, se ven distorsionadas por la presencia del conductor "A"

Fenómenos de influencia

Por fenómenos de influencia entendemos los cambios en el potencial eléctrico que sufre un conductor por el mero hecho de estar próximo a otro conductor cargado.

Consideremos que introducimos un conductor "A" en el campo eléctrico creado por otro conductor cargado "B". Analizando la situación desde el punto de vista fenomenológico sabemos que el conductor cargado ("B") generará un campo eléctrico. Al colocar en su cercanía el conductor "A", queda

sometido a los efectos del campo creado por “B” lo que, según hemos visto, provoca una reordenación de las cargas de “A”, de manera que en su interior se cree un campo eléctrico que anule el provocado por “B”. Por tanto, aparecerán cargas negativas en la superficie de “A” próxima al conductor “B”.

Esta reordenación de cargas tendrá varias consecuencias:

- en el conductor “A” aparece un potencial que depende de la reordenación de sus cargas, y por tanto del campo creado por “B” y de la geometría.
- en el exterior del conductor “A” aparece un campo eléctrico, que a su vez altera la distribución de cargas, y por tanto el campo eléctrico y el potencial del conductor “B”

En total, el conductor “B” influye en el “A”, y a su vez lo que le sucede al conductor “A” influye en el “B”. Esta situación continuará hasta que se logre un equilibrio.

Un caso especial se produce en la práctica cuando dos conductores próximos reciben cargas del mismo valor y de signo contrario. En esta configuración, que recibe el nombre de **condensador**, también existirán fenómenos de influencia de un conductor sobre el otro de manera que al final se logrará una distribución de carga, dentro de cada conductor, para que finalmente exista un equilibrio. En ese momento cada uno de los dos conductores (que reciben el nombre de placas del condensador) tendrá una carga $+Q$ o $-Q$, y cada uno adquirirá un potencial diferente, pero constante para cada uno de ellos, de forma que se establece entre ambos una diferencia de potencial V .

De la misma forma que en el caso de un conductor único, el potencial de cada conductor, y por tanto la diferencia de potencial entre ellos dependerá de su carga y de la geometría (en este caso tanto de la forma y tamaño de cada conductor como de su posición relativa). Por consiguiente, también puede definirse la capacidad del condensador como la relación entre la carga (que en este caso es la de una de las placas) y la diferencia de potencial entre ellas, y también veremos que en este caso solo dependerá de la geometría de la configuración.

Capacidad de distintos tipos de condensadores.

Existen distintos tipos de condensadores en función de su geometría. Los más usuales son el condensador de placas plano paralelas, el condensador esférico y el condensador cilíndrico.

Condensador de placas plano paralelas.

Se compone de dos caras paralelas muy próximas de superficie “A” y separadas una distancia “d”, de forma que una tiene carga $+Q$ y la otra $-Q$. Esta configuración produce entre las placas un campo constante y uniforme.

Para calcular su capacidad partimos de que el campo creado por un plano cargado con densidad de carga σ en un punto próximo a su superficie viene dado por $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ perpendicular a la superficie. El campo en un punto del espacio comprendido entre las placas será la suma de los

creados por cada una de ellas, y como ambos serán de sentido contrario al ser sus cargas de distinto signo, en total obtenemos que el módulo del campo es: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, y dado que el campo es

constante en todos los puntos de la región comprendida entre las placas, la diferencia de potencial entre ellas la podemos calcular como el producto de los módulos campo y distancia entre placas,

es decir será: $V = E \cdot d = \frac{\sigma \cdot d}{\epsilon_0} = \frac{Q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0}$

con lo que la capacidad del condensador queda: $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q \cdot A \cdot \epsilon_0}{Q \cdot d} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$

Condensador esférico

Un condensador esférico está formado por una esfera conductora de radio “a” y concéntrica con ella una corteza esférica de radio interior “b”, de forma que en la cara interior de la corteza y en

la esfera interior existan cargas iguales “Q” y de signo contrario, distribución que puede conseguirse como indica la figura 15. Para calcular su capacidad procedemos de la misma forma que en el caso anterior. Sabemos que aplicando el teorema de Gauss a una superficie esférica concéntrica con los conductores que pase por un punto del espacio comprendido entre ellos, el campo eléctrico puede calcularse suponiendo que existe una carga Q en el centro de la esfera, con lo que la diferencia de potencial que existirá entre el conductor interior y el exterior será:



Figure 15
Esquema de un condensador esférico

$$V(a) - V(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

Con lo que la capacidad quedará: $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$

$$= 4\pi\epsilon_0 \left[\frac{ab}{b-a} \right], \text{ que solamente depende de la geometría del condensador.}$$

Problema 2.- Un condensador que consta de dos placas paralelas muy próximas, de superficie 10 cm^2 separadas 10^{-5} m . Se carga hasta que adquiere una diferencia de potencial de 50 V .

- Determinar la distribución de potenciales entre sus placas.
- La capacidad del condensador.
- La carga que adquiere.

a) Datos

Permitividad del vacío $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

Superficie de las placas $S = 10^{-3} \text{ m}^2$

Separación entre las placas $d = 10^{-4} \text{ m}$

Para determinar la distribución de potenciales que tenemos entre las placas, podríamos calcularlo por integración directa o calculando el campo creado por una de ellas (un plano conductor cargado) en un punto cualquiera del espacio y a partir de el campo obtener el potencial en un punto cualquiera. Dada la simetría del problema emplearemos el teorema de Gauss para calcular el campo y por la definición de potencial obtener este.

Como el módulo del campo dependerá de la distancia a la carga, la simetría del problema nos lleva a tomar como superficie de Gauss un prisma recto una de cuyas bases estará en el conductor (en la figura se representa un corte de esta situación).

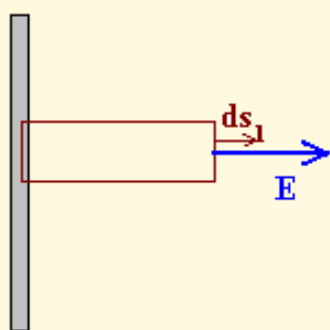


Figure 2 de problemas
Corte del plano conductor que es una placa del condensador

El teorema nos dice: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$, como siempre calcularemos cada uno de los términos de la igualdad por separado.

La $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ la calcularemos como: $\int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{sup lat}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

En la base "1" el campo y el vector superficie son paralelos, luego será el producto de los módulos, que al depender el campo sólo de la distancia al plano será una constante en la integral, con lo que tenemos: $\int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{base 1}} E \cdot ds = E \int_{\text{base 1}} ds = E S$; siendo "S" el área de la base la superficie de Gauss que hemos considerado.

En la base "2" el campo es nulo, pues estamos en un conductor. Luego $\int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{s} =$

0.

En la superficie lateral los vectores campo y superficie son perpendiculares luego su producto escalar es nulo: $\int_{\text{sup lat}} \vec{E} \cdot d\vec{s} =$

$= 0$. Por tanto $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E S$

Calculemos el segundo miembro. Como sólo existe carga en el conductor, tendremos que la carga encerrada será: $\sigma \cdot S$; siendo " σ " la densidad de carga del conductor. Igualando los dos miembros tenemos: $E \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$; por

tanto el campo será: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}$, donde \vec{u} es un vector unitario perpendicular

al plano cargado. (Observar que ahora hemos calculado el campo de distinta forma que en la parte teórica, pero sin embargo el resultado ha sido el mismo).

Para calcular la distribución de potenciales tendremos en cuenta, como siempre, que:

$V(r) - V(r_A) = - \int_{r_A}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$ Siendo r la posición de un punto intermedio cualquiera entre r_A y r_B .

Para ir desde r_A hasta r_B el vector desplazamiento es antiparalelo al campo eléctrico (suponemos que el potencial en r_B es mayor que en r_A), y como este no depende de la distancia, pues su módulo hemos visto vale $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, la integral

nos queda: $V(r) - V_A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (r - r_A)$, o lo que es lo mismo: $V(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} r - \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} r_A - V_A \right)$, que es expresable por: $V(r)$

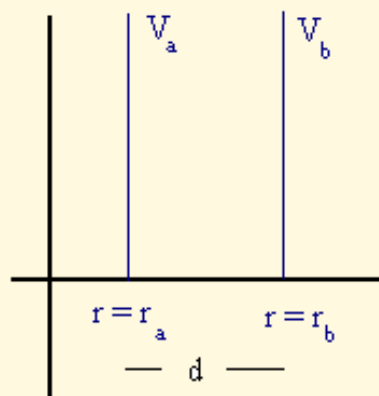


Figure 3 de problemas
En los planos $r = a$ y $r = b$ los potenciales son constantes

$$= A r + B$$

$$V(r) = A r + B$$

b) Para determinar la capacidad del condensador debemos conocer la diferencia de potencial entre las placas del condensador $V_B - V_A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (r_b - r_a)$, teniendo en cuenta que hemos llamado "d" a la distancia entre los planos

$$\text{obtenemos: } V_B - V_A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d.$$

Recordando que la densidad de carga será la carga del plano dividida entre la superficie de la placa, podemos

$$\text{escribir: } V_B - V_A = \frac{d}{\epsilon_0} \frac{Q}{S}, \text{ luego la capacidad será: } C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$\text{La capacidad del condensador será: } C = 8.85 \times 10^{-12} \frac{10^{-3}}{10^{-4}} = 8.85 \times 10^{-13} \text{ F}$$

$$C = 8.85 \times 10^{-13} \text{ F} = 8850 \text{ nF}$$

c) Para calcular la carga que adquiere el condensador tendremos en cuenta la relación entre carga capacidad y diferencia de potencial entre placas: $C V = Q$, luego la carga que será el producto de la capacidad por la diferencia de potencial será: $Q = 4.4 \times 10^{-11} \text{ C}$

$$Q = 4.4 \times 10^{-11} \text{ C}$$

Asociación de condensadores.

En los circuitos eléctricos es frecuente que nos encontremos dos o más condensadores conectados entre sí. Si tenemos dos condensadores podemos unirlos en serie o en paralelo según se conecten la placa de un signo del primero con la del otro signo del segundo (serie), o las placas del mismo signo de los dos condensadores entre sí (paralelo).

Condensadores en serie.

Al conectar la placa positiva de un condensador con la negativa del otro, el conjunto es equivalente a un condensador formado por las placas externas (no conectadas entre sí), entre las que existirá una diferencia de potencial igual a la suma de las diferencias de potencial de cada uno de los condensadores. Para que el conjunto forme un condensador único las placas extremas deberán tener la misma carga, de forma que:

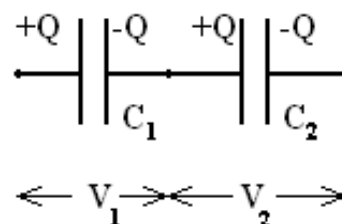


Figure 16
Esquema de dos condensadores conectados en serie

	Carga	Diferencia de potencial	Capacidad
Condensador 1	Q	V_1	$C_1 = Q/V_1$
Condensador 2	Q	V_2	$C_2 = Q/V_2$
Condensador equivalente	Q	$V = V_1 + V_2$	$C = Q/V$

para buscar la expresi3n de C en funci3n de C_1 y C_2 , vemos que podemos sumar las inversas de las capacidades parciales, ya que al tener entonces el denominador com3n la expresi3n resulta sencilla, y $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C}$. es decir: la inversa de la capacidad equivalente es la suma de las inversas de cada uno de los condensadores asociados en serie.

Condensadores en paralelo

Al conectar las placas con carga del mismo signo, el conjunto equivale a otro condensador con una sola placa de cada signo en la que existe una carga igual a la suma de las cargas de cada una de las placas, de forma que entre todas las placas positivas y las negativas existe la misma diferencia de potencial. Por tanto:

	Carga	Diferencia de potencial	Capacidad
Condensador 1	Q_1	V	$C_1 = Q_1 / V$
Condensador 2	Q_2	V	$C_2 = Q_2 / V$
Condensador equivalente	$Q = Q_1 + Q_2$	V	$C = Q/V$

Para buscar la expresi3n de la capacidad equivalente, sustituimos en la expresi3n de C , con lo que:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2.$$

Por tanto, el condensador equivalente a varios condensadores en paralelo tiene una capacidad igual a la suma de las capacidades de cada uno de los condensadores asociados.

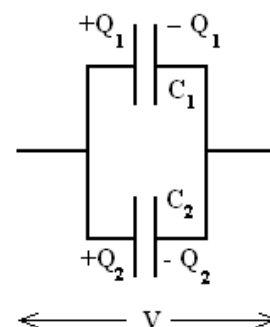


Figure 17
Esquema de dos condensadores conectados en paralelo

Electrostática en materiales dieléctricos

Hasta el momento hemos visto que ocurre cuando un conductor se encuentra en un campo eléctrico, veremos ahora que ocurre con los dieléctricos.

Por una parte, se observan algunos fenómenos relacionados con este tipo de materiales, por ejemplo, cuando se introduce un material dieléctrico entre las placas de un condensador, se comprueba que aumenta su capacidad, es decir, puede almacenar más carga con la misma diferencia de potencial entre placas. Por otra parte, sabemos que en los medios dieléctricos no existe la posibilidad de movimiento de los electrones en su volumen debido a que los electrones de cada átomo o molécula que componen el material se encuentran por tanto fuertemente ligados a ella. Pero, para poder explicar fenómenos como el mencionado es preciso que cuando el dieléctrico se encuentra en un campo eléctrico sucedan en su estructura atómica o molecular algunas modificaciones.

El fenómeno de la polarización

Para comenzar a analizar lo que ocurre cuando se sitúa un material dieléctrico en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico analicemos en primer lugar, lo que ocurre a nivel microscópico, desde el punto de vista fenomenológico. Dado que el tipo de molécula va a condicionar la respuesta, examinaremos los distintos casos que se pueden presentar empleando modelos sencillos.

Supongamos en primer lugar que las moléculas con enlace covalente. En este caso la molécula puede ser polar o no polar según no coincidan (no polar) o si coincidan los “centros de gravedad” de las cargas positivas y negativas. En el caso de las moléculas polares, cada una de ellas tiene un momento dipolar ya que se puede asimilar a un dipolo. En el caso de las moléculas no polares, en una primera aproximación, podremos suponer que los electrones que forman el enlace forman una nube electrónica que envuelve completamente a la molécula, con lo cual cada molécula de la sustancia se puede representar, de la misma manera que ocurre con los átomos, por dos esferas concéntricas de radios muy distintos (ver figura 18), la interna con carga neta positiva y la externa con carga negativa.

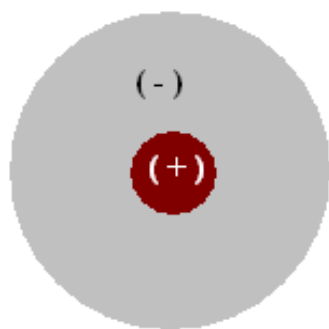


Figure 18
Representación de una
molécula covalente muy
simétrica

La aplicación de un campo eléctrico externo al material en cuestión, provocará el arrastre de la nube electrónica externa en sentido contrario al campo, mientras que el resto de la molécula (o el núcleo del átomo en el caso de moléculas monoatómicas) sufrirá un desplazamiento en el mismo sentido del campo al ser una carga positiva. El resultado será la deformación de la molécula, ya que el campo, en general en el caso de los dieléctricos, no será suficiente para arrancar un electrón de la corteza.

Esa deformación dará lugar a la separación de los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas, lo que puede considerarse como la aparición de una carga neta positiva, separada de la negativa una distancia muy pequeña frente a la de observación, es decir, cada molécula puede ser sustituida por un dipolo paralelo al campo eléctrico y cuyo módulo dependerá del desplazamiento relativo de los centros de cargas y del valor de estas. Podemos decir que el campo eléctrico a polarizado la molécula con un momento dipolar que dependerá de la naturaleza del material y del valor del campo que actúe. Dado que todas las moléculas del material son iguales, todos los momentos magnéticos de cada una de las moléculas tendrán la misma dirección y sentido, con lo que, en conjunto, el material adquirirá un momento dipolar suma de los momentos dipolares de cada una de las moléculas.

Supongamos ahora que el material del que estamos hablando está formado por moléculas polares, por lo que cada una de ellas tiene ya un momento dipolar permanente.

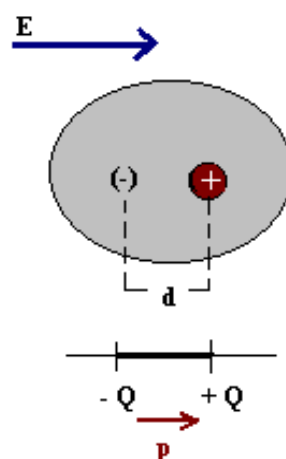


Figure 19
Deformación sufrida por
una molécula simétrica, por
efecto del campo eléctrico
aplicado

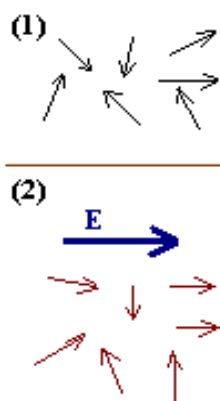


Figure 20

Representación de los dipolos permanentes de un fluido dipolar en ausencia y presencia de campo eléctrico. En (2) los dipolos están algo ordenados en el sentido del campo

positivos se verán empujados por el campo, mientras que los negativos se desplazarán en sentido contrario. El resultado será la aparición de momentos dipolares de resultante no nula dirigida en la misma dirección y sentido del campo. El módulo del momento dipolar resultante dependerá, de nuevo, del valor del campo actuante y de lo fácil o difícil que sea desplazar los iones de su posición de origen, es decir de la naturaleza de la sustancia.

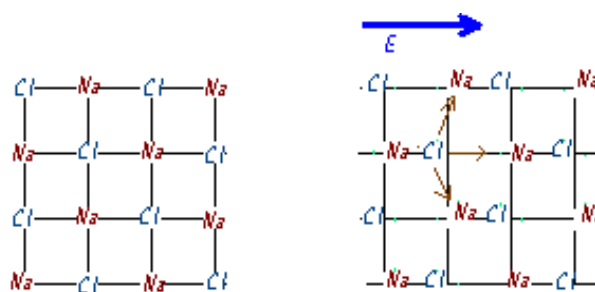


Figure 21

Representación de una estructura iónica en ausencia y en presencia de campo eléctrico

Vector polarización. Susceptibilidad eléctrica.

Del estudio fenomenológico anterior podemos inferir, que cuando un material dieléctrico cualquiera se encuentra en el seno de un campo eléctrico, cada una de sus moléculas tiene asociado un momento dipolar, aun cuando inicialmente no existiera dipolo alguno. Si consideramos un volumen cualquiera de dieléctrico, existirán en él un cierto número de dipolos de manera que podemos caracterizar el material por la **densidad de dipolos del material por unidad de volumen**, que llamaremos **vector polarización** o simplemente **polarización** (\vec{P}), de forma que si cada molécula tiene un momento dipolar \vec{p} y la sustancia tiene “N” moléculas por unidad de volumen es evidente que $\vec{P} = N\vec{p}$, al ser la polarización la densidad de momentos dipolares moleculares.

Como no todos los materiales son homogéneos e isotrópos, está magnitud debe caracterizar punto a punto la sustancia, es decir debe ser una función vectorial definida en cada punto. Si queremos tener el valor en cada punto del vector polarización, el volumen que debemos considerar para definir esa densidad de momentos dipolares debe ser tan pequeño como necesitemos para rodear

sólo el punto en cuestión, es decir: $\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\tau}$; $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$.

Las unidades del vector polarización serán las de un momento dipolar (culombios \times metro) divididas entre un volumen (m^3), es decir culombios \times metro⁻².

Este vector polarización dependerá por un lado del campo eléctrico, que es su origen, y del tipo de material del que se trate. En la mayoría de los materiales el vector polarización es directamente proporcional al campo, $\vec{P} \propto \vec{E}$, de forma que se puede introducir una constante de proporcionalidad que debe depender del medio y que escribiremos como $\chi_e \epsilon_0$; $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$. Esta nueva constante “ χ_e ” característica del material se denomina **susceptibilidad eléctrica del medio**.

Analizando dimensionalmente la ecuación anterior se obtiene que la susceptibilidad así definida no tiene dimensiones

Densidades de carga de polarización

Según hemos dicho antes, cuando una sustancia se polariza aparece en su volumen una nueva distribución de cargas distinta de la del material en “reposo”. Esta reordenación interna de las cargas de la sustancia podrá dar lugar a que al considerar un volumen de la sustancia o un área de su superficie aparezca una densidad no nula de cargas.

Densidad superficial de cargas de polarización

Para analizar esta situación desde el punto de vista fenomenológico, vamos a considerar el caso de un material dieléctrico situado entre las placas de un condensador de placas planoparalelas, de forma que ambos tengan la misma superficie. En primer lugar consideremos que el medio dieléctrico es homogéneo e isótropo, es decir que su comportamiento es análogo en todos sus puntos. Por otra parte sabemos que el campo eléctrico creado por un condensador plano paralelo también puede considerarse homogéneo en todos los puntos del interior del condensador.

En estas condiciones el campo eléctrico creado en el interior del condensador orienta los dipolos del material dieléctrico en dirección paralela al campo, de forma que si consideremos una capa muy fina del paralelepípedo cuyo espesor venga definido por “d”, como se indica en la figura 22, sobre la superficie del dieléctrico paralela a la placa positiva del condensador aparecerá un exceso de carga negativa. De la misma forma, en la cara de dieléctrico próxima a la placa negativa aparecerá un exceso de carga positiva.

Si llamamos “N” al número de moléculas por unidad de volumen del material y “ q_p ” a la carga producida en cada una de ellas por la polarización, tendremos que la carga en esa capa superior (Q_p) será igual al número de moléculas por unidad de volumen multiplicado por el volumen que consideremos y por la carga de cada molécula, es decir:

$$Q_p = N (A d) q_p = A N p$$

siendo p el módulo del momento dipolar molecular (\vec{p}). La densidad superficial de carga de polarización σ_p será: $\sigma_p = Q_p / A = N p$, que es precisamente

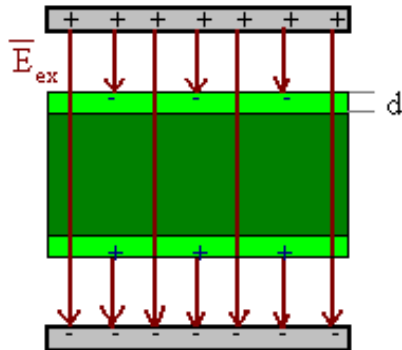


Figure 22
Representación del fenómeno de polarización dieléctrica

el módulo del vector polarización (\vec{P}) para un medio como el que hemos supuesto. Luego en estas condiciones (caras perpendiculares al campo) podemos decir que la densidad superficial de carga coincide con el módulo del vector polarización $\sigma_p = |\vec{P}|$.

En las caras laterales del dieléctrico no aparece carga superficial alguna debido a que el campo es paralelo a esta superficie y por tanto a la dirección en la que aparecen los dipolos, con lo que, de forma general escribiremos:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Esta densidad superficial de carga de polarización existe solamente cuando el dieléctrico está sometido a la acción del campo exterior, de manera que cuando desaparece el campo desaparecerán las cargas de polarización. En el ejemplo del condensador, si conectamos sus placas a tierra su carga desaparecerá por el hilo conductor al que esté unido el condensador para descargarse y por consiguiente desaparecerá el campo eléctrico. Sin embargo, las cargas de polarización, si bien es cierto que existen, no podrán viajar por el conductor al estar ligadas a la estructura del material, y lo que ocurrirá es que la densidad superficial de carga desaparecerá por reordenamiento de las moléculas (despolarización del material).

Densidad volúmica de carga de polarización

Veamos ahora lo que ocurre en el interior del material dieléctrico. Si el material es homogéneo todos los dipolos están igualmente orientados, con lo que en cualquier punto interior cada extremo positivo estará próximo al negativo de otro dipolo con lo que en conjunto no aparecerá densidad volúmica de carga.

Consideremos ahora un material cuya polarización no sea homogénea. Si tomamos un pequeño elemento de volumen imaginario (τ) en el interior del material que esté rodeado por una superficie " Σ ", no todos los dipolos contenidos son iguales, con lo que no tienen por qué anularse unos con otros, luego puede aparecer una carga en el volumen de forma que se puede definir una densidad volúmica de carga de polarización tal que $\Delta Q_p = \int_{\tau} \rho_p d\tau$

Vector desplazamiento eléctrico. Permitividad dieléctrica

Veamos que ocurre cuando cargamos un material dieléctrico. La existencia de cargas libres en el interior del dieléctrico dará lugar a la aparición de un campo eléctrico creado por ellas, este

campo eléctrico actuará sobre el propio dieléctrico de la misma forma que hemos visto en el caso de que el campo fuese exterior, de manera que polarizará el dieléctrico dando lugar a la aparición de densidades de cargas de polarización.

Para analizar lo que sucede en el interior del dieléctrico aplicaremos el teorema de Gauss. Tomemos como superficie gaussiana, una superficie cualquiera cerrada, situada en el interior del volumen del dieléctrico, como se muestra en la figura. Según el teorema de Gauss:

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{total}}}{\epsilon_0} . \text{ La carga encerrada es tanto la carga libre como la carga de}$$

polarización del dieléctrico, es decir: $Q_{\text{total}} = Q_{\text{libre}} + Q_{\text{polarización}}$; con lo que podemos escribir

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}} + Q_{\text{polarización}}$$

pero sabemos que la densidad de carga de polarización está relacionada con el vector polarización, y que crea un campo en sentido contrario del exterior (debido a la orientación de los dipolos) de forma que

$$Q_{\text{polarización}} = \oint \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

con lo que en total podemos poner al ser el campo creado por las cargas de polarización de sentido contrario al campo exterior \vec{E} queda

$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}} - \oint \vec{P} \cdot d\vec{s}$, de donde $\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} + \oint \vec{P} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$, expresión que podemos escribir de forma:

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$$

A la suma comprendida en el paréntesis la denominamos vector desplazamiento $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

de forma que podemos escribir $\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$

esta expresión es similar a la del teorema de Gauss considerando el vector desplazamiento en lugar del vector campo y teniendo en cuenta solamente las cargas libres, por lo que se conoce como la **ley de Gauss para medios materiales**. La ventaja de utilizar el vector desplazamiento es que al estar relacionado solamente con las cargas libres es independiente del medio en el que nos encontramos.

Para calcular el vector campo eléctrico a partir del vector desplazamiento veremos como están relacionados a partir de la definición del vector desplazamiento $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Como sabemos que el vector polarización es proporcional al vector campo que le origina de forma que $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$, queda: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$.

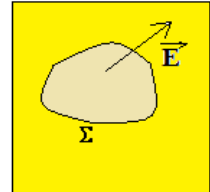


Figure 23
Superficie
imaginaria en el
interior del medio

El producto $\epsilon_0 (1 + \chi_e)$, que nos relaciona el campo eléctrico en el medio con el nuevo vector desplazamiento, sólo depende de las características del dieléctrico, lo llamaremos **permitividad dieléctrica del medio**, que representaremos por ϵ , con lo que el vector desplazamiento y el campo eléctrico estarán relacionados por: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$.

Normalmente se emplea la *permitividad relativa* del medio que es la relación entre la permitividad dieléctrica y la permitividad del vacío: $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0(1 + \chi_e)}{\epsilon_0} = (1 + \chi_e)$, la relación: $\epsilon_r = (1 + \chi_e)$, entre los dos parámetros característicos del dieléctrico es la primera relación constitutiva del medio. A partir de ella podemos escribir: $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$.

Esta expresión nos permite resolver el cálculo del campo eléctrico en cualquier material de una manera más sencilla, ya que podemos hallar el vector desplazamiento producido por las cargas libres, con lo que su valor se conserva independientemente del material que ocupe el espacio en el que se ha calculado. Si ahora ese espacio está ocupado por un dieléctrico podemos calcular el vector campo eléctrico en el material sin más que multiplicar el vector desplazamiento por la permitividad dieléctrica del medio, de forma que el vector campo es diferente según el material de que se trate.

Vamos a analizar y afianzar los conceptos en el siguiente ejemplo, que nos servirá de resumen de lo visto para los materiales dieléctricos.

Problema 3.- Se electriza una esfera de médula de saúco (de permitividad relativa 8), de 5 cm de radio, obteniéndose una distribución de carga de la forma $\rho(r) = 3 \times 10^{-12} r$ culombios/m³.

a) Calcular el campo y el desplazamiento eléctrico en todos los puntos del espacio.

Se recubre esta esfera con una corteza de radios 6 y 8cm, formada por un material de permitividad relativa 15.

b) Calcular ahora el campo y el desplazamiento eléctrico en todos los puntos del espacio.

c) Calcular el vector polarización en la corteza dieléctrica.

d) Calcular las densidades superficiales de carga de polarización en la corteza

e) Calcular la carga total en el volumen de la misma.

Datos

Radio de la esfera (a) = 5 cm = 5×10^{-2} m

Permitividad de la esfera (ϵ_r) = 8

Densidad de carga $\rho(r) = 3 \times 10^{-12} r$ culombios m⁻³

a) Nos piden calcular el campo y el desplazamiento eléctrico creado por la distribución en todos los puntos del espacio, tenemos dos regiones perfectamente diferenciadas: los puntos interiores y los puntos exteriores a la esfera.

a₁) Consideremos primero los puntos interiores ($r < a$)

Como estamos en un dieléctrico, para calcular el campo y el desplazamiento, podemos recurrir al teorema de Gauss para dieléctricos, que en general será la forma más sencilla de calcular el campo al estar ligado exclusivamente a las cargas libres, y que nos dice: $\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$. Tendremos que encontrar una superficie de Gauss que este de acuerdo con la distribución de carga que tenemos. La simetría del sistema implica que la superficie a considerar será una esfera, de radio (r), concéntrica con la distribución. Para aplicar el teorema de Gauss, debemos calcular cada uno de sus miembros.

El primero $\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s}$ nos obliga a pensar como será el forma del vector desplazamiento a que de lugar la distribución, por simetría esta forma no puede ser otra que vectores radiales, $\vec{D} = D \vec{u}_r$. De otro lado el vector superficie, al ser normal a ésta, será de la forma $d\vec{s} = ds \vec{u}_r$, lo que nos lleva a que el producto escalar de ambos vectores será el producto de módulos. $\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Sigma} D ds$. Como la distribución de carga varía con la distancia al centro de la esfera (el radio de la superficie gaussiana), el vector desplazamiento tendrá el mismo módulo en todos los puntos que equidisten del centro de la esfera: $\oint_{\Sigma} D ds = D \oint_{\Sigma} ds$, y la integral de “ds” en estas condiciones será: $4\pi r^2$. Luego: $\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 D(\vec{r})$

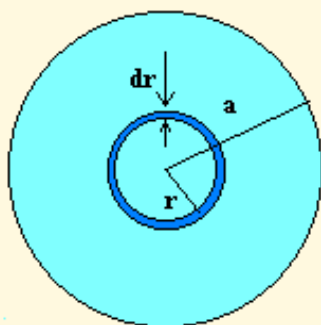


Figure 4 de problemas
Para calcular la carga encerrada por la superficie de Gauss, toamos como volumen elemental una casaca esférica de radio r y espesor dr

Vamos a calcular el segundo miembro, que es la carga libre encerrada en la esfera de Gauss. Como nos dicen que se distribuye según la densidad de carga $\rho(r) = 3 \times 10^{-12} r$ culombios m^{-3} , que por comodidad escribiremos como: $\rho(\vec{r}) = Kr$, con lo que tendremos:

$$Q_{\text{libre}} = \int_{\text{volumen esfera}(\tau)} \rho(\vec{r}) d\tau = \int_{\tau} Kr d\tau, \text{ el diferencial de volumen (ver figura 4 de problemas) será el producto del área de la superficie esférica por la altura diferencial: } d\tau = 4\pi r^2 dr; Q_{\text{libre}} = \int_0^r (Kr) (4\pi r^2 dr) = 4\pi K \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^r = \pi K r^4.$$

Igualando los resultados obtenidos para ambos miembros tenemos: $4\pi r^2 D(\vec{r}) = \pi K r^4$. El vector desplazamiento en los puntos interiores, será:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{K}{4} r^2 \vec{u}_r$$

Conocida la expresión del desplazamiento eléctrico para puntos interiores podemos calcular el campo eléctrico recordando la relación entre ambos: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Luego: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{K}{4\epsilon} r^2 \vec{u}_r$, o lo que es lo mismo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{K}{4 \epsilon_r \epsilon_0} r^2 \vec{u}_r$$

Substituyendo valores en ambas expresiones obtenemos para “ $r < a$ ”:

$$\underline{\vec{D}(\vec{r}) = 7.5 \times 10^{-13} r^2 \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}} \quad \text{y} \quad \underline{\vec{E}(\vec{r}) = 1.06 \times 10^{-2} r^2 \vec{u}_r \text{ V/m}}$$

a) Puntos exteriores a la distribución “ $r > a$ ”

En el caso de puntos exteriores a la distribución tendremos el campo creado por una carga esférica, que como sabemos se corresponde con el creado por una carga puntual situada en el centro de la distribución y cuyo valor sea el de la carga total de la esfera. Podríamos aplicar el teorema de Gauss, tomando una superficie de Gauss que fuese una esfera concéntrica, de radio “ r ”, como la mostrada en la figura 5 de problemas y obtendríamos: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_{total}}{r^2} \vec{u}_r$.

Tendremos que calcular la carga total encerrada en el volumen de la esfera que será:

$$Q_{total} = \int_{esfera} \rho(\vec{r}) d\tau, \text{ como el caso de puntos interiores, el elemento de volumen será}$$

una cáscara esférica de espesor “ dr ”, por tanto:

$$Q_{total} = \int_0^a (Kr)(4\pi r^2 dr) = \pi K a^4, \text{ el campo debido a la distribución será:}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\pi K a^4}{r^2} \vec{u}_r, \text{ es decir}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{K a^4}{r^2} \vec{u}_r.$$

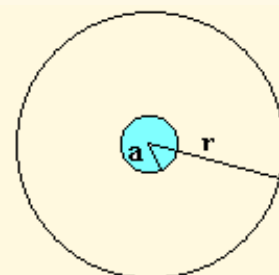


Figure 5 de problemas
Tomamos como superficie de Gauss una esfera concéntrica la dieléctrica de radio genérico r

Recordando la relación entre el campo y el vector desplazamiento, que por estar en el vacío será: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$,

obtenemos:

$$\vec{D} = \frac{1}{4} \frac{K a^4}{r^2} \vec{u}_r$$

Sustituyendo valores tendremos para “ $r > a$ ”

$$\vec{E} = \frac{5.3 \times 10^{-7}}{r^2} \vec{u}_r \text{ V / m } \text{ y } \vec{D} = \frac{4.7 \times 10^{-18}}{r^2} \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

Es de resaltar que el campo y el desplazamiento eléctrico, en la zona con carga libre van variando con el **cuadrado** de la distancia que nos separa del centro de la distribución, para variar con la **inversa del cuadrado** cuando nos encontramos fuera de la zona de carga.

b) Datos

Radio interior de la corteza esférica (b) = 6 cm = 6×10^{-2} m

Radio exterior de la corteza esférica (c) = 8 cm = 8×10^{-2} m

Para: $b < r < c$, $\epsilon_r = 15$.

Como la carga libre no varía por la inclusión de un nuevo dieléctrico, el vector desplazamiento no variará de los valores que hemos obtenido, otra cosa será el vector campo eléctrico, cuyo valor en cada punto del espacio lo podemos calcular recordando que: $\vec{E} = \epsilon \vec{D}$.

Con la nueva geometría tenemos el espacio dividido en 4 regiones de permitividades distintas: $0 < r < a$; $a < r < b$; $b < r < c$; y, $c < r$.

b₁) En la primera de ellas $0 < r < a$, si repasamos los razonamientos que hemos realizado, veremos que en los resultados obtenidos, no intervienen las propiedades eléctricas del medio circundante. Luego el vector desplazamiento

en los puntos interiores, será: $\vec{D}(\vec{r}) = \frac{K}{4} r^2 \vec{u}_r$ y $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{K}{4 \epsilon_r \epsilon_0} r^2 \vec{u}_r$, o lo que es lo mismo para “ $r < a$ ”:

$$\vec{D}(\vec{r}) = 7.5 \times 10^{-13} r^2 \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2} \text{ y } \vec{E}(\vec{r}) = 1.06 \times 10^{-2} r^2 \vec{u}_r \text{ V} / \text{m}$$

b₂) La segunda región: $a < r < b$. La situación desde el punto de vista eléctrico es la de puntos exteriores a la distribución, sin la existencia de nuevos dieléctricos. Coincidirá por tanto con lo estudiado en el apartado a₂). Luego:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r, \text{ y } \vec{D} = \frac{1}{4} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r, \text{ o lo que es lo mismo para "a < r < b"}$$

$$\vec{E} = \frac{5.3 \times 10^{-7}}{r^2} \vec{u}_r \text{ V} / \text{m} \text{ y } \vec{D} = \frac{4.7 \times 10^{-18}}{r^2} \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

b₃) En la región: $b < r < c$, no existen nuevas cargas libres, son las mismas que en la región anterior, por tanto el vector desplazamiento eléctrico no variará respecto de la región anterior: $\vec{D} = \frac{1}{4} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r$, recordando la relación entre campo y desplazamiento, que en este medio de permitividad relativa 15 será: $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$, obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\epsilon_r \epsilon_0} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r, \text{ o lo que es lo mismo para "b < r < c"}$$

$$\vec{E} = \frac{3.5 \times 10^{-8}}{r^2} \vec{u}_r \text{ V} / \text{m} \text{ y } \vec{D} = \frac{4.7 \times 10^{-18}}{r^2} \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

b₄) En la última región: $c < r$, de nuevo el vector desplazamiento se conserva, pues no se añaden cargas libres nuevas, es decir: $\vec{D} = \frac{1}{4} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r$. Como estamos en el vacío, el campo y el desplazamiento se relacionan por la permitividad del vacío, con lo que: $\vec{E} = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r$, que resultan ser los mismos valores que sin la cascara dieléctrica. Para " $c < r$ "

$$\vec{E} = \frac{5.3 \times 10^{-7}}{r^2} \vec{u}_r \text{ V} / \text{m} \text{ y } \vec{D} = \frac{4.7 \times 10^{-18}}{r^2} \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

c) Para calcular el vector polarización en la corteza dieléctrica una vez conocido el valor del vector campo, sólo tendremos que recordar la relación entre campo y polarización $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$, recordando que $\chi_e = \epsilon_r - 1$, y retomando el valor del campo en la zona considerada ($b < r < c$), tenemos: $\vec{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\epsilon_r} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r$, es decir:

$$\vec{P} = \frac{4.3 \times 10^{-18}}{r^2} \vec{u}_r \text{ V} / \text{m}$$

d) Las densidades de carga de polarización son el producto escalar del vector polarización en el punto considerado por el vector superficie correspondiente: $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$, luego:

$(\sigma_p)_b = \vec{P}(b) \cdot \vec{n}$ el vector polarización será paralelo al campo, e irá por tanto en el mismo sentido que el radio, el vector superficie será saliente de la cascara y su sentido será el opuesto al de la polarización, luego:

$$(\sigma_p)_b = -|\vec{P}(b)| \cdot |\vec{n}| = -2.6 \times 10^{-19} \text{ C m}^{-2}$$

$$(\sigma_p)_b = -1.2 \times 10^{-15} \text{ C m}^{-2}$$

En la otra cara los vectores son paralelos y por tanto: $(\sigma_p)_c = |\vec{P}(c)| \cdot |\vec{n}| = 3.4 \times 10^{-19} \text{ C m}^{-2}$

$$(\sigma_p)_c = +6.7 \times 10^{-16} \text{ C m}^{-2}$$

e) Para calcular la carga de polarización total en la corteza debemos saber que la carga total de la corteza tiene que ser cero, pues hemos introducido la corteza descargada y no se ha generado carga sólo se ha redistribuido la existente. Si calculamos la carga de polarización que tenemos en las dos superficies la diferencia hasta cero será la que tengamos en el volumen.

En la superficie de radio "b" la carga total será: $(Q_p)_b = \int_{\text{Sup radio "b"}} \sigma_b \cdot ds$, teniendo en cuenta que la densidad superficial de carga de polarización en esa superficie es constante, la carga total será $(Q_p)_b = \sigma_b \cdot (4\pi b^2)$, como conocemos el valor de la densidad de carga que acabamos de calcular, tenemos $(Q_p)_b = -5.4 \times 10^{-17} \text{ C}$

Para la superficie externa de la corteza esférica razonaremos de igual forma obteniendo:

$$(Q_p)_c = \sigma_c \cdot (4\pi c^2) = +5.4 \times 10^{-17} \text{ C}$$

Por tanto la carga total entre las dos superficies esféricas que limitan la cáscara esférica es cero, de donde se infiere que la carga de polarización en el volumen de dicha corteza es nula

Tema 3: Energía del campo electrostático

Conocimientos previos. Energía mecánica. Energía de una carga en un campo electrostático. Energía electrostática de una distribución discreta de cargas. Energía electrostática de una distribución continua de cargas. Energía electrostática de un conductor cargado. Densidad de energía del campo electrostático.

Bibliografía: J. Reitz, F. Milford, R. Christy "Fundamentos de la Teoría Electromagnética" Ed. Addison-Wesley Iberoam

Conocimientos previos: Los conceptos básicos de trabajo y energía que nos da la Mecánica clásica

Objetivos: Afianzar los conceptos de trabajo realizado por un campo, y de energía potencial de un campo conservativo así como el concepto de energía propia de un campo o un sistema.

Conocimientos previos. Energía mecánica

En Mecánica aprendimos que el trabajo realizado por una fuerza para ir de un punto a otro, era el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento, de forma que si la fuerza es un vector de un campo de fuerzas, el trabajo realizado para desplazarse de un punto a otro del campo es igual a la circulación del vector campo (fuerza en este caso) a lo largo de la curva que determina la trayectoria seguida. Además sabemos que si esa circulación no depende de la curva seguida, decimos que el **campo de fuerzas es conservativo**, de forma que se puede definir una nueva

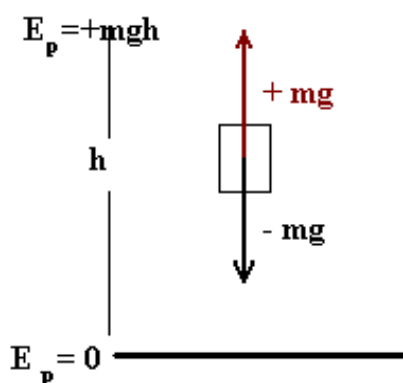


Figura 1

El trabajo realizado por la fuerza que ejercemos nosotros (en rojo en la figura) aumenta la energía potencial de la masa. Por el contrario el movimiento espontáneo, gracias a la fuerza realizada por el campo (en negro) disminuye la energía potencial de la masa

magnitud, que llamamos energía potencial, cuyo valor coincide con el trabajo realizado por el campo de fuerzas cambiado de signo, así podemos hablar de energía potencial asociada a la posición. Cuando nos desplazamos en contra del campo, aumenta la energía potencial, mientras que un desplazamiento, entre los mismos puntos, producido por las fuerzas que definen el campo hace que la energía potencial disminuya en la misma cantidad.

Tal vez el ejemplo más claro, por estar muy unido a nuestra experiencia cotidiana, sea el de levantar una masa una cierta altura. El campo de fuerzas gravitatorio que actúa sobre la masa “m”, tiene en cada punto un valor de $-m\vec{g}$ (va dirigida hacia abajo). Si levantamos una masa “m” **en contra del campo gravitatorio**, el trabajo se realiza en contra del campo, por lo que el “trabajo realizado por el campo” es negativo y la masa aumenta su

energía potencial.

Por el contrario cuando el cuerpo cae, lo hace por la acción del campo, el trabajo lo realiza el campo (trabajo positivo) y disminuye la energía potencial.

En total podemos decir que el trabajo realizado por el campo es igual a la variación de energía potencial cambiada de signo.

Trabajo realizado por el campo	=	- Trabajo realizado por nosotros
Trabajo realizado por el campo	=	- Variación de la energía potencial
Trabajo realizado por nosotros	=	+ Variación de la energía potencial

Con estas ideas, vamos a estudiar en primer lugar el valor del trabajo realizado al desplazar una carga en un campo eléctrico y posteriormente calcularemos el trabajo necesario para formar una distribución de cargas, lo que nos permitirá saber la energía que se almacena en el campo eléctrico, e introducir el concepto de energía del campo eléctrico y ver donde se encuentra.

Energía de una carga en un campo electrostático

Supongamos una carga eléctrica que puede desplazarse en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico. Si una carga se encuentra en un punto en el que existe un campo electrostático, se verá sometida a la acción de una fuerza de valor: $\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r})$, siendo $\vec{E}(\vec{r})$ el valor del campo en el punto en el que se encuentra la carga “q”. Al desplazar la carga, dado que el campo electrostático es un campo conservativo, el trabajo que realizaran las fuerzas eléctricas no dependerá del camino que sigamos, de forma que si \vec{r}_A y \vec{r}_B son los vectores de

posición de los puntos inicial y final del recorrido, el trabajo valdrá: $W_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$. ,

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} (q \vec{E}) \cdot d\vec{l} = q \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{l} .$$

En esta expresión, la integral cambiada de signo corresponde a la diferencia de potencial entre los puntos “A” y “B”. Por tanto podemos decir que el **“trabajo realizado por las fuerzas del campo, para llevar la carga desde el punto “A” hasta el punto “B” coincide con el producto de la carga, por la diferencia de potencial entre los puntos, cambiado de signo”**:

$$[W_{A \rightarrow B}]_{\text{campo}} = -(V_B - V_A)q , \text{ o lo que es lo mismo, la variación de energía potencial al mover}$$

una carga del punto A al B vale: $\Delta E_p = (V_B - V_A)q$. Es decir la variación e energía potencial al mover una carga del punto A al B es igual a la variación de potencial multiplicada por el valor de la carga. Lo que nos permite dar un significado físico a la magnitud matemática que es el potencial del que deriva el campo, como variación de energía potencial por unidad de carga. Este hecho va a ser de gran importancia a la hora de calcular, en situaciones simples, la variación de energía de las cargas.

Vamos a sacar conclusiones de las expresiones matemáticas que hemos obtenido. Sabemos que

el sentido del campo eléctrico es hacia los potenciales decrecientes, luego una carga positiva que se encuentre en un campo eléctrico, se verá sometida a la acción de una fuerza dirigida hacia los potenciales decrecientes. Es decir que el campo tenderá a mover las cargas positivas hacia los potenciales decrecientes, que corresponden a puntos con menor energía potencial.

Si la carga es negativa, la fuerza será opuesta al sentido del campo, por tanto el campo tenderá a mover a las cargas negativas hacia los puntos de mayor potencial, ya que en estos puntos una carga negativa tendrá menor energía potencial de la carga (mayor valor absoluto pero de signo negativo).

Hasta aquí hemos hablado de variación de energía potencial, si queremos hablar de energía potencial de una carga en un punto del campo tendremos que establecer un origen en el que la energía potencial sea cero. Por otra parte, estamos relacionando esta variación con la variación de potencial entre los puntos del campo. Podemos pensar que igual que si no existen cargas el infinito podemos hablar de potencial nulo en el infinito, también podremos poner en el infinito el origen de energía potencial. En este caso, el trabajo que realizarán las fuerzas del campo, para enviar al infinito una carga positiva será el producto del potencial en el punto por el valor de la carga, lo que significa que si nosotros traemos desde el infinito una carga positiva unitaria, debemos realizar un trabajo, contra las fuerzas del campo, igual al valor del potencial eléctrico en el punto. De ahí, que en algunas ocasiones se defina el potencial eléctrico en un punto, como el trabajo necesario para traer desde el infinito hasta el punto una carga unitaria.

Energía (potencial) electrostática de una distribución discreta de cargas

En primer lugar, vamos a aclarar lo que entenderemos por energía electrostática de un sistema de cargas. Siempre que hablamos de un sistema y de su energía, estamos hablando de la energía potencial que por el mero hecho de existir ese sistema, y no otro, con su forma y distribución, se puede liberar en un momento dado. Está claro, que si se puede liberar una cierta energía, es porque esa energía se ha invertido en conseguir que la distribución tenga esa forma y composición. Por tanto, en valor absoluto, la energía que se libera tiene que ser igual a la empleada para formar la distribución.

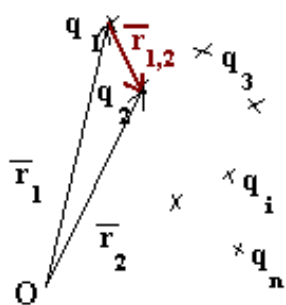


Figura 2

Cada carga de la distribución ocupa el lugar definido por su vector posición.

Si en un determinado lugar del espacio se encuentran distintas cargas (q_i), cuya posición respecto de un origen viene determinada por el vector (\vec{r}_i), será porque en un momento determinado, alguien las habrá colocado en el lugar que ocupan ahora.

Para calcular el valor de la energía que es necesaria para conseguir que las cargas estén en las posiciones que ocupan en la distribución (energía electrostática de la distribución o energía propia del sistema de cargas), tendremos que conocer el trabajo que debemos realizar para traer desde el infinito cada carga y colocarla en el lugar que ocupa. Para traer la primera carga y colocarla en la posición que ocupa en la distribución final, no tendremos que realizar ningún trabajo (llamando W_1 a ese trabajo, tenemos $W_1 = 0$), pues al no existir todavía ninguna, no habrá que vencer fuerza alguna para colocarla en su lugar final.

Para traer la segunda carga q_2 , como ya existe q_1 , existe un campo eléctrico debido a ella, que dará lugar a la aparición de un campo de fuerzas que actuarán sobre la segunda carga, será necesario un trabajo igual al valor del potencial creado por la carga q_1 en el punto por el valor de la carga que situamos en él, es decir: $W_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} q_2$, siendo $r_{1,2}$ el módulo del vector posición de la carga q_2 respecto de la posición de la carga q_1 .

Para traer la tercera carga q_3 , tendremos que tener en cuenta que al existir dos cargas q_1 y q_2 , existe una distribución de potenciales de valor: $\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$; siendo r_{13} y r_{23} los vectores posición de la carga " q_3 " respecto las cargas q_1 y q_2 respectivamente, por tanto el trabajo realizado para traer la tercera carga y colocarla en su posición final, será:

$$W_3 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} q_3 + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} q_3$$

En general, para traer la carga " i -ésima", como ya existen $i-1$ cargas, existirá en la posición definida por el vector r_i , lugar en el que queremos colocar la nueva carga, un potencial de valor:

$$V_i = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1,i}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2,i}} + \dots + \frac{q_{i-1}}{4\pi\epsilon_0 r_{i-1,i}}, \text{ lo que supondrá realizar un trabajo:}$$

$$W_i = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1,i}} q_i + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2,i}} q_i + \dots + \frac{q_{i-1}}{4\pi\epsilon_0 r_{i-1,i}} q_i.$$

Con lo que, en total, para traer las n cargas habrá que realizar un trabajo que vendrá dado por: $W_{\text{total}} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_i + \dots + W_{n-1} + W_n$

Luego la energía potencial de la distribución, que será la suma de las energías necesarias para traer las distintas cargas hasta ocupar la posición final en la distribución, valdrá:

$$W_{\text{total}} = W_1 + W_2 + \dots + W_i + \dots + W_n$$

Si realizamos esta suma, podemos comprobar que en el último sumando aparecen todos los productos de las cargas por los potenciales de los puntos en los que se encuentran, en el sumando anterior falta el sumando procedente de la anteúltima carga y así sucesivamente.

Si ahora calculamos la energía necesaria para deshacer la distribución, utilizando la misma mecánica que hemos empleado para formar la distribución. Es decir primero llevaremos la carga q_1 desde su posición actual hasta el infinito, luego la segunda y así sucesivamente. El valor de la energía así obtenido, tiene que ser igual que el de la energía necesaria para formar la distribución, ya que no se puede perder, ni generar energía en el proceso.

En esta operación, el trabajo realizado por las fuerzas del campo, para llevar la primera carga desde su posición actual hasta el infinito, será igual al producto del potencial debido a todas las demás cargas en el punto ocupado por q_1 , multiplicado por el valor de la carga. Es decir

$$T_1 = \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{2,1}} q_1 + \frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 r_{3,1}} q_1 + \dots + \frac{q_i}{4\pi \epsilon_0 r_{i,1}} q_1 + \dots + \frac{q_{n-1}}{4\pi \epsilon_0 r_{n-1,1}} q_1 + \frac{q_n}{4\pi \epsilon_0 r_{n,1}} q_1$$

Para llevarnos la carga q_2 , el trabajo será:

$$T_2 = \frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 r_{3,2}} q_2 + \dots + \frac{q_i}{4\pi \epsilon_0 r_{i,2}} q_2 + \dots + \frac{q_{n-1}}{4\pi \epsilon_0 r_{n-1,2}} q_2 + \frac{q_n}{4\pi \epsilon_0 r_{n,2}} q_2, \text{ pues ya no está}$$

presente la carga q_1 para generar potencial en la posición de q_2 .

Y así sucesivamente. Podemos comprobar que los sumandos que ahora aparecen son los que faltaban en la suma anterior. En total sumando ambos trabajos tendremos

$$2 W_{\text{distribución}} = W_{\text{total}} + T_{\text{total}},$$

y en la expresión total encontraremos “n” sumandos en cada uno de los cuales aparecen n-1 sumandos correspondientes a los productos de cada carga por el potencial creado en el punto en el que se encuentra por todas las demás cargas y en total se encuentra:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\begin{array}{ccccccc} & \frac{q_2}{r_{2,1}} + & \frac{q_3}{r_{3,1}} + & \dots & \frac{q_i}{r_{i,1}} + & \dots & \frac{q_{n-1}}{r_{n-1,1}} + \frac{q_n}{r_{n,1}} \end{array} \right] q_1 \\ & \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\begin{array}{ccccccc} & \frac{q_1}{r_{1,2}} + & & \frac{q_3}{r_{3,2}} + & \dots & \frac{q_i}{r_{i,2}} + & \dots & \frac{q_{n-1}}{r_{n-1,2}} + \frac{q_n}{r_{n,2}} \end{array} \right] q_2 \\ & \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\begin{array}{ccccccc} & \frac{q_1}{r_{1,3}} + & \frac{q_2}{r_{2,3}} + & & \dots & \frac{q_i}{r_{i,3}} + & \dots & \frac{q_{n-1}}{r_{n-1,3}} + \frac{q_n}{r_{n,3}} \end{array} \right] q_3 \\ & \dots \\ & \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\begin{array}{ccccccc} & \frac{q_1}{r_{1,i}} + & \frac{q_2}{r_{2,i}} + & \dots & \frac{q_{i-1}}{r_{i-1,i}} + & \dots & \frac{q_{i-1}}{r_{i-1,i}} + \dots & \frac{q_{n-1}}{r_{n-1,i}} + \frac{q_n}{r_{n,i}} \end{array} \right] q_i \\ & \dots \\ & \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\begin{array}{ccccccc} & \frac{q_1}{r_{1,n-1}} + & \frac{q_2}{r_{2,n-1}} + & \dots & \dots & \frac{q_i}{r_{i,n-1}} + & \dots & \frac{q_n}{r_{n,n-1}} \end{array} \right] q_{n-1} \\ & \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\begin{array}{ccccccc} & \frac{q_1}{r_{1,n}} + & \frac{q_2}{r_{2,n}} + & \dots & \dots & \frac{q_i}{r_{i,n}} + & \dots & \frac{q_{n-1}}{r_{n-1,n}} \end{array} \right] q_n \end{aligned}$$

Es decir, sumando: $2 W_{\text{distribución}} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n V_{i,j} \cdot q_i$, y por tanto

$$W_{\text{distribución}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n V_{i,j} \cdot q_i$$

que nos dice que la energía de la distribución es la semisuma de los productos de cada carga por el potencial creado en su posición por todas las demás.

Energía electrostática de una distribución continua de cargas.

Si la distribución es continua actuaremos como en otras ocasiones considerando la carga contenida en un volumen muy pequeño $d\tau'$ de la distribución, para poderlo considerar un punto, con lo que trataremos a esta carga como una carga “puntual” de valor $\rho d\tau'$, y después sumaremos la contribución de todas las cargas, operación que en caso de cargas continuas deberá ser una integral extendida a todo el espacio en el que se encuentren las cargas.

Por tanto, la energía total de la distribución será:

$$W_{\text{distribución}} = \frac{1}{2} \int_{\tau'} V(\vec{r}) \rho(\vec{r}) d\tau'$$

donde hemos llamado $V(\vec{r})$ al potencial en el “punto” que estamos considerando y que estará debido al resto de cargas y siendo τ' un volumen cualquiera que contenga a todas las cargas del sistema, no teniendo porque estar restringido al volumen que ocupan las cargas, pues si el volumen que tomamos contiene puntos sin carga la densidad de carga en esos puntos será nula.

La expresión anterior puede simplificarse en el caso en que las cargas están distribuidas en las superficies de conductores, de tal forma que si la densidad superficial de carga es σ , la expresión anterior se transforma en:

$$W_{\text{distribución}} = \frac{1}{2} \int_{S'} V \sigma ds'$$

siendo S' la suma de todas las superficies de los conductores.

Energía electrostática de un conductor cargado.

Consideremos ahora un conductor suficientemente lejos de cualquier carga al que pretendemos cargar con una carga Q , para lo que necesitaremos realizar un cierto trabajo. Para calcular este trabajo consideremos un proceso de carga, de forma que el conductor va adquiriendo la carga deseada a partir de diferenciales de carga dq . En un momento cualquiera de este proceso el conductor tendrá una carga “ q ” por efecto de la cual adquiere un potencial V , si queremos aumentar su carga en “ dq ” tendremos que realizar un trabajo para vencer la repulsión de las cargas existentes, que vendrá dado por $dW = V \cdot dq$, siendo V el potencial del conductor por

efecto de la carga que anteriormente tenía. Este proceso continuará desde que el instante inicial, en el que el conductor no tenía ninguna carga hasta que adquiriera la carga total Q , por tanto el trabajo total realizado será la suma de todos los diferenciales de trabajo, es decir:

$$W = \int_0^Q V \cdot dq$$

Ahora bien, para realizar esta integral hay que tener en cuenta que V depende de la carga con lo que debemos poner toda la expresión en función de una sola variable y constantes. Sabemos que en un conductor la relación entre la magnitud que relaciona la carga de un conductor y el potencial que adquiere por efecto de esa carga es la capacidad del conductor que es una constante

para cada conductor puesto que sólo depende de su geometría. Por tanto podemos poner: $V = \frac{q}{C}$,

con lo que la integral que nos da el trabajo quedará:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{2} Q^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

siendo Q la carga total, si llamamos V al potencial final adquirido por la carga total Q , la expresión anterior la podemos escribir también como:

$$W_{\text{conductor}} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Densidad de energía del campo electrostático

Cuando tenemos una distribución de carga se crea un campo electrostático por lo que podemos hablar de energía potencial asociada al campo electrostático.

Para relacionar el valor de la energía con el campo creado por una distribución de carga, vamos a analizar el caso más sencillo de un campo homogéneo como el creado entre las placas de un condensador plano paralelo, y seguiremos un proceso análogo al seguido en el caso de un conductor cargado.

Partimos de un condensador descargado al que vamos añadiendo carga en cantidades diferenciales dq , (por ejemplo llevando carga desde una placa a la otra con lo que las dos van adquiriendo cantidades iguales de cargas de distinto signo). En un momento cualquiera del proceso cada una de las placas estará cargada con una carga “ q ” con lo que entre las placas del condensador existirá un campo eléctrico “ E ” y una diferencia de potencial “ V ” entre ambas placas, y seguimos el proceso desde que la carga de las placas es cero hasta la carga total Q .

Para llevar una carga “ dq ” desde una placa a la otra será necesario realizar un trabajo que dependerá de la carga a transportar y de la diferencia de potencial que exista en ese momento

entre las placas: $dW = V \cdot dq$, y en total $W = \int_0^Q V \cdot dq$. Para realizar esta integral hay que tener

en cuenta que el potencial depende de la carga, luego es necesario realizar un cambio para que la expresión dependa de una sola variable. Al igual que en el caso del conductor podemos utilizar

la capacidad del condensador para relacionar el potencial y la carga con lo que tendremos

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{C} \frac{1}{2} Q^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} C \cdot V^2$$

siendo Q y V la carga y la diferencia de potencial totales al finalizar el proceso de carga.

En el caso del condensador, como estamos intentando relacionar la energía con el campo electrostático y este es constante entre las placas del condensador, podemos poner $V = E \cdot d$ con lo que el trabajo queda

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C E^2 d^2 = \frac{1}{2} \frac{A \epsilon}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} (A \cdot d) (\epsilon \cdot E) E = \frac{1}{2} \tau D E$$

siendo D el valor del vector desplazamiento, E el del campo eléctrico existente entre placas y τ el volumen comprendido entre las placas del condensador que coincide con la región en la que existe el campo electrostático, por lo que es común definir la densidad de energía en el campo

electrostático como $w = \frac{1}{2} D \cdot E$

El calculo anterior le hemos realizado en una región del espacio en la que el campo era homogéneo, lo que nos ha permitido simplificar los cálculos. En el caso en que esto no suceda así tendremos que recurrir a un proceso matemático más complejo del que podemos obtener que,

en general la energía del campo viene dada por: $W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$

y la densidad de energía del campo electrostático por $w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$, pues su integral de volumen nos da la energía total.

Tema V: Campos magnéticos en el vacío

Fuerza magnética sobre cargas en movimiento. Fuerza sobre una corriente. Acción magnética sobre una espira de corriente: momento magnético. Fuerzas entre corrientes. Ley de Biot y Savat. Ecuaciones del campo magnético: Ley de Ampère. Flujo. El fenómeno de la inducción magnética. Leyes de Faraday y de Lenz. Coeficientes de inducción.

Bibliografía: Sears, Zemansky, Young y Freedman “Física”. Ed. Addison Wesley Longman

Conocimientos previos: Los conceptos de corriente y densidad de corriente.

Objetivos: Comprender que los fenómenos eléctrico y magnético son visiones distintas del fenómeno electromagnético. Conocer el comportamiento de las corrientes eléctricas sometidas a la acción de un campo magnético. Calcular la inducción magnética creada por una corriente eléctrica. Aplicar la ley de Ampere al cálculo de la inducción magnética creada por corrientes con la simetría necesaria. Manejar los conceptos de flujo y circulación.

Introducción

Varios años antes de Cristo, el hombre observó que ciertos minerales, tenían la propiedad de atraer pequeños trozos de hierro, esta propiedad que no puede estar relacionada con la atracción gravitatoria, puesto que no todos los cuerpos la poseen y puede presentarse en una dirección distinta a esta, se manifiesta de forma más intensa en ciertas partes de aquellos materiales en los que se presenta.

A primera vista este nuevo fenómeno y el eléctrico parece que no tienen nada en común, ya que, por ejemplo, no son atraídos por los imanes los trocitos de papel ni las bolitas de corcho electrizadas, se dio a esta nueva propiedad física el nombre de magnetismo en recuerdo que la región “Magnesia” en la que, según la tradición, se observó por primera vez el fenómeno.

Como ya hemos dicho con anterioridad para el campo eléctrico, las propiedades magnéticas de la materia han llegado hasta nosotros ligadas a la brujería y a los feriantes, lo que ha dificultado un desarrollo más rápido de su conocimiento en los siglos pasados. Tenemos que esperar hasta el primer cuarto del siglo XIX para encontrar la primera experiencia en la que se sistematiza el comportamiento de los campos magnéticos.

El desarrollo del magnetismo ha estado ligado con la navegación y el comercio por la propiedad de los imanes de orientarse señalando, con buena aproximación, el polo norte geográfico. El primer estudio sistemático del fenómeno, data de 1802 y se debe a Hans Christian Oersted quien observó que al establecerse una corriente eléctrica por un conductor situado en las cercanías de una brújula esta sufría una desviación, con lo que dejaba de señalar el polo norte, si bien en algunas posiciones del hilo no se experimentaba desviación alguna. Es pues en el siglo XIX

cuando se inicia el estudio del magnetismo unido a la corriente eléctrica, esto es, al movimiento de las cargas.

Hasta ahora hemos estudiado fenómenos que hemos denominado “electrostáticos” por deberse a cargas que permanecían en reposo, y cuyas acciones se regían por la ley de Coulomb. Pero pensemos que al decir que una carga está quieta, estamos relacionando su estado de movimiento con un sistema de referencia. Si consideramos otro sistema de referencia en el que la carga se mueva con movimiento rectilíneo y uniforme, los fenómenos que aparezcan no se pueden explicar exclusivamente por la ley de Coulomb, como ocurre con el caso de cargas estáticas. Diremos entonces que nos encontramos ante acciones magnéticas.

Es claro que no podemos dar un carácter absoluto a la división entre fenómenos eléctricos y magnéticos, pues el sistema de referencia en el que nos encontremos nos hará ver que una carga en reposo respecto del sistema de referencia “S” genera un campo eléctrico, la misma situación desde un sistema de referencia “S'”, que se mueva respecto “S”, nos lleva a ver la existencia de un campo magnético.

Como entendemos que el desarrollo histórico de la formulación del fenómeno magnético no facilita su comprensión, vamos a empezar el estudio del magnetismo por el movimiento de cargas en campos magnéticos.

Fuerza magnética sobre cargas en movimiento

Vamos a introducir fenomenológicamente la expresión de la fuerza que actúa sobre una carga eléctrica que se encuentra en un campo magnético. Supongamos, que en una región del espacio en la que sabemos que existe un campo magnético (por ejemplo el entrehierro de un imán) introducimos, con velocidad conocida, partículas cargadas. En estas condiciones observaremos:

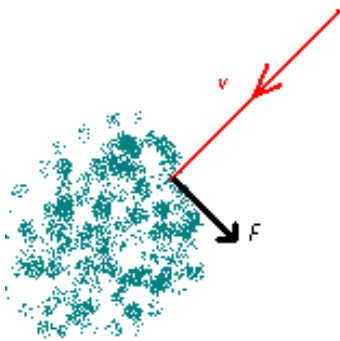


Figure 1

La partícula cargada que se mueve con velocidad “v”, sufre la acción de una fuerza “F”, perpendicular a la velocidad, al entrar en la zona en la que existe un campo magnético “B”

- que la carga se ve sometida a la acción de una fuerza perpendicular a la velocidad que llevaba.
- que si aumentamos el módulo de la velocidad, sin variar ni su dirección ni su sentido, aumentará el módulo de la fuerza que actúa sobre la carga.

Si variamos la dirección de la velocidad:

- la fuerza es siempre perpendicular a la dirección de la velocidad y a otra, que es siempre la misma.
- que existe una dirección de privilegio, en la que la carga no sufre desviación. Esa dirección privilegiada, es la dirección a la que la fuerza ha sido perpendicular para cada velocidad que ha tenido la carga.

Lo que acabamos de describir lo podemos representar por una expresión del tipo: $\vec{F} \propto q[\vec{v} \times \vec{u}_p]$, siendo \vec{u}_p un vector unitario en la dirección privilegia. La constante de

proporcionalidad, será el módulo del vector inducción magnética “ \vec{B} ” que caracterizará al campo magnético existente en la región. Lo que nos permite formular que, una carga que se mueve estará sometida a la acción de una fuerza magnética de valor $\vec{F} = q [\vec{v} \times \vec{B}]$, y a una fuerza de tipo eléctrico de valor $\vec{F} = q \vec{E}$. La fuerza total que puede actuar sobre una carga será:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right)$$

que se conoce como la **fuerza de Lorentz**.

La expresión anterior nos permite un primer acercamiento a las unidades del vector inducción magnética \vec{B} . En efecto las unidades de la inducción deben ser tales que multiplicadas por una velocidad nos den las del campo eléctrico luego $[B] = [E/v] = (V m^{-1}) / (m s^{-1}) = V s m^{-2}$ que se conoce como “Tesla”, o Weber m^{-2} . Veamos alguna de las aplicaciones de la fuerza de Lorentz.

Movimiento de una partícula cargada en el seno de un campo magnético de inducción magnética perpendicular a la velocidad de la partícula.

Supongamos, que en la región limitada por el recuadro de la figura 2, a partir del momento en que un electrón se encuentra en el punto “A” producimos un campo magnético campo perpendicular al plano del papel y entrante en él, si el módulo del vector inducción es B, en ese momento sobre la partícula actuará una fuerza

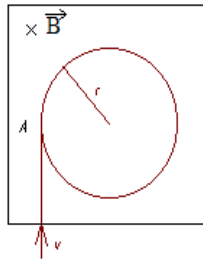


Figure 2
Movimiento de un electrón en un campo magnético

$\vec{F} = q \left(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right)$, si no existe campo eléctrico alguno, la expresión

anterior se transforma en $\vec{F}_B = q [\vec{v} \times \vec{B}]$. Como la fuerza es en cada punto perpendicular a la velocidad, el movimiento se transformará en circular, pues el módulo de la velocidad no variará, quien si lo hará será la dirección, que será en cada punto perpendicular a la velocidad, por lo que describirá una circunferencia, cuyo radio “r” será tal que $|\vec{F}_M| = m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$ que vendrá

condicionado por el módulo de la fuerza central de origen magnético que actúa, lo que permite escribir:

$$|\vec{F}_B| = q \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| = |\vec{F}_M| = m_q \frac{v^2}{r} = m_q \omega^2 r$$

luego el radio de la circunferencia descrita será: $r = \frac{m |\vec{v}|}{q |\vec{B}|}$

Si la velocidad y el campo magnético no son perpendiculares el electrón describirá una hélice, cuya proyección sobre un plano perpendicular al campo tendrá por radio $r_h = \frac{m |\vec{v}| \sin \varphi}{|\vec{B}| q}$ siendo

la velocidad axial a lo largo de la hélice constante e igual a: $v \cos \varphi$, siendo φ el ángulo formado por la velocidad y la inducción magnética

Efecto Hall

Otra consecuencia inmediata de la fuerza experimentada por un carga en el seno de un campo magnético es el efecto sufrido por los portadores de carga de un conductor cuando está inmerso en un campo magnético, la desviación sufrida por la carga en su trayectoria y las consecuencias que de este hecho se derivan, se conoce como efecto Hall.

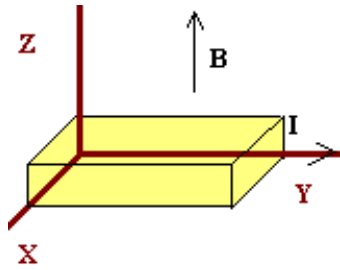


Figure 3

Tal vez el caso más curioso se presente en muestras semiconductoras, pues en este caso el tipo de portador (hueco, o, electrón), va a tener una influencia trascendental en el sentido del efecto, de modo que la llamada tensión Hall (que aparece en la muestra) va a servir para caracterizar el tipo de muestra de la que se trate.

- Consideremos una muestra paralelepípedica semiconductor tipo “n”, como la que se muestra en la figura 4 por la que circula una corriente en el sentido positivo del eje “Y”, que está situada en el interior de un campo magnético homogéneo paralelo al eje “Z”. Si la muestra es de tipo “n” la conducción se realiza por electrones y la velocidad de los portadores será de sentido contrario al de la corriente, $\vec{v} = v_e (-\vec{j})$,

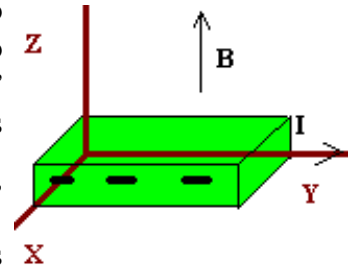


Figure 4

Semiconductor tipo “n” por el que pasa una corriente “I” en un campo magnético. Los portadores (electrones) son desviados a la cara anterior de la muestra

la inducción magnética será $\vec{B} = B(+\vec{k})$, al ser todos los vectores perpendiculares entre sí, aparecerá una fuerza de módulo “ $q_e \cdot v_e \cdot B$ ”, y su sentido lo obtendremos del producto del signo de la carga por los sentidos de los vectores campo y velocidad “ $-[(-\vec{j}) \times (+\vec{k})] = +\vec{i}$ ”, es decir los electrones se verán empujados

hacia la cara externa.

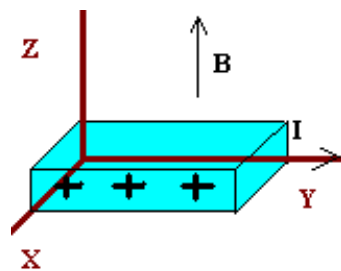


Figure 5

Semiconductor tipo “p” por el que pasa una corriente “I” en un campo magnético. Los portadores (huecos) son desviados a la cara anterior de la muestra.

- Veamos ahora que ocurre si la muestra, con la misma geometría, es tipo “p”, como se muestra en la figura 5, es decir la conducción se lleva a cabo por huecos (“cargas positivas”), suponiendo que la corriente tiene el mismo sentido y que está en el mismo campo magnético, es decir su inducción será: $\vec{B} = B(+\vec{k})$. Ahora la velocidad de los portadores

tendrá el mismo sentido que la corriente, es decir, $\vec{v} = v_p(+\vec{j})$. La

fuerza tendrá por módulo: $q_p \cdot v_p \cdot B$. Su sentido será: $[(+\vec{j}) \times (+\vec{k})] = +\vec{i}$, es decir el mismo que antes, lo que significa en esta situación que los portadores positivos se verán empujados hacia la cara externa

Es decir en ambos casos va a aparecer una tensión entre las caras anterior y posterior de la muestra, sin embargo, en un caso la cara exterior es positiva respecto de la interior (conducción por portadores positivos) y en el otro la cara exterior es negativa respecto de la interior (conducción por electrones). Por tanto el sentido de la tensión Hall, que nos ha resultado de signo opuesto en un caso que en el otro, nos dirá el tipo de muestra que tenemos

Fuerza sobre una corriente

Veamos que ocurrirá cuando varias cargas, que se mueven en el interior de un conductor, se encuentran en el seno de un campo magnético de inducción \vec{B} . Por lo que acabamos de saber cada portador se verá sujeto a la acción de una fuerza de valor: $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$. Consideremos un elemento de corriente de longitud diferencial ($d\vec{l}$), de forma que todos los portadores en él contenidos, se moverán con una velocidad promedio $\langle \vec{v} \rangle$. Para cada portador la fuerza será: $\vec{f}_p = q[\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}]$, como en el interior del tramo de conductor que hemos considerado existirán varios portadores, sobre el elemento de conductor que estamos considerando existirá una fuerza $d\vec{F}$, que será la suma de las fuerzas que actúan sobre todos y cada uno de los portadores que contiene ese elemento de conductor $d\vec{F} = \sum \vec{f}_p$.

Para calcular la suma de las fuerzas sobre los portadores ($\sum \vec{f}_p$), debemos saber el número total de portadores que tenemos en el volumen de conductor que estamos considerando. Si llamamos “n” al número de portadores por unidad de volumen y $\Delta\tau$ el volumen de la porción de conductor considerado, el producto $n\Delta\tau$, será el número total de portadores es decir que la fuerza que actúa sobre el elemento de corriente será: $d\vec{F} = \sum \vec{f} = n\Delta\tau q[\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}]$.

Calculemos ahora el valor de ese volumen de conductor que en general será un prisma recto de sección “s”, si su longitud hemos dicho que es $d\vec{l}$ tendremos que $\Delta\tau = \vec{s} \cdot d\vec{l}$, luego la fuerza que actuará será: $d\vec{F} = \sum \vec{f} = n\Delta\tau q[\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}] = n(\vec{s} \cdot d\vec{l}) q[\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}]$.

Vamos a reordenar la ecuación anterior, para ello tendremos en cuenta que en esa expresión tenemos magnitudes que dependen de la naturaleza del conductor (n , q , $\langle \vec{v} \rangle$), de la geometría del conductor (\vec{s}), y otras que pueden ser variadas por el observador ($d\vec{l}$ y \vec{B}). Si queremos agrupar esas magnitudes por su origen, debemos intercambiar la posición que ocupan en la fórmula la velocidad media de los portadores y la longitud de conductor que hemos considerado. Desde el punto de vista del cálculo lo podemos hacer pues, son dos vectores paralelos, con lo que obtenemos: $d\vec{F} = n(\vec{s} \cdot \langle \vec{v} \rangle) q [d\vec{l} \times \vec{B}]$, si ahora permutamos el orden del producto escalar y reagrupamos términos obtenemos: $d\vec{F} = (n q \langle \vec{v} \rangle) \cdot \vec{s} [d\vec{l} \times \vec{B}]$, el término entre paréntesis es

la densidad de corriente (\vec{J}), lo que nos permite escribir: $d\vec{F} = (\vec{J} \cdot \vec{s}) [d\vec{l} \times \vec{B}]$, el producto escalar de la densidad de corriente por la superficie nos da la intensidad que circula por el conductor, es decir:

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}]$$

que nos da la fuerza que actúa sobre un elemento de corriente. Si queremos obtener la fuerza sobre un conductor debemos realizar la integral a lo largo de todo él.

$$\vec{F} = \int_{\text{circuito}} I [d\vec{l} \times \vec{B}]$$

Acción magnética sobre una espira de corriente: momento magnético

Como una aplicación directa del cálculo de la fuerza ejercida por una corriente, vamos a calcular lo que ocurrirá con una espira que se encuentre en un campo magnético. Por sencillez de cálculo vamos a suponer que tenemos una espira rectangular de lados “a” y “b” recorrida por una corriente “I”, que se encuentra en un campo magnético de inducción \vec{B} . Supondremos que la normal a la espira forma un ángulo θ con el campo, como se muestra en las figuras 6 y 7

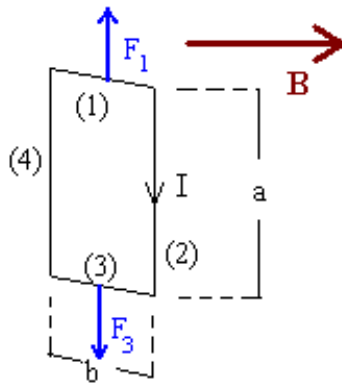


Figure 6

Representación de una espira rectangular en el seno de un campo magnético \vec{B} horizontal, que forma un cierto ángulo con el vector superficie de la espira.

Apliquemos a cada uno de los lados de la espira la relación general que hemos obtenido. Para el lado “1”, tendremos que:

$$\vec{F}_1 = I [\vec{l}_1 \times \vec{B}], \text{ análogamente para el lado “3” tendremos:}$$

$$\vec{F}_3 = I [\vec{l}_3 \times \vec{B}]. \text{ Ambas fuerzas serán del mismo módulo, con la}$$

misma recta de acción pero de sentidos opuestos, luego su resultante será nula:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{0}.$$

Para los lados “2” y “4” tendremos: $\vec{F}_2 = I [\vec{l}_2 \times \vec{B}]$ y

$$\vec{F}_4 = I [\vec{l}_4 \times \vec{B}], \text{ cuyos módulos}$$

también serán los mismos, pero los vectores no estarán en la misma línea. La resultante será nula, pero no el momento resultante, su módulo será:

$$|\vec{M}_R| = |\vec{l}_1 \times \vec{F}_2| = |\vec{l}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \sin \theta \text{ el módulo de la fuerza será:}$$

$$|\vec{F}_2| = I |\vec{l}_2| \cdot |\vec{B}| \text{ pues el campo es normal el lado “2”, luego:}$$

$$|\vec{M}_R| = |\vec{l}_1| \cdot (I |\vec{l}_2| \cdot |\vec{B}|) \cdot \sin \theta.$$

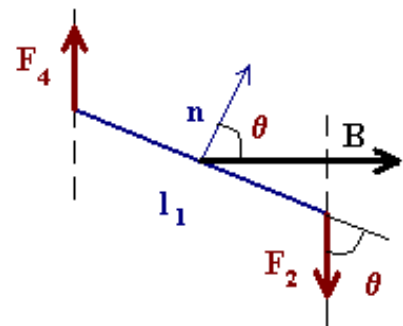


Figure 7

Representación de la espira de la figura 6, vista desde arriba (visión azimutal) en la que se representan las fuerzas sobre los lados verticales y la normal a la superficie de la espira \vec{n}

Como $|\vec{l}_1| = b$ y $|\vec{l}_2| = a$ el producto anterior lo podemos escribir como $|\vec{M}_R| = I a b B \sin \theta$.

El vector superficie de la espira será: $\vec{S} = (a b) \vec{n}$, siendo \vec{n} un vector normal a la espira y cuyo sentido venga dado por el de circulación de la corriente. Teniendo en cuenta los sentidos de los vectores que intervienen en la expresión del módulo del momento, podemos escribir:

$$\vec{M}_R = I [\vec{S} \times \vec{B}]$$

Para una espira plana, el producto de su superficie por corriente que recorre la espira lo denominamos *momento magnético de la espira*: $\vec{m} = I \vec{S}$, que nos ayudará a caracterizar desde el punto de vista magnético a las corrientes cerradas.

Por tanto diremos que una espira en un campo magnético se ve sujeta a la acción de un par cuyo momento es: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

Como vemos, si una espira se encuentra en un campo magnético uniforme, este ejerce un par sobre ella que la trata de orientar, y que se anulará si el campo es paralelo al momento magnético. De la propia definición de momento magnético se desprende que sus unidades son: $A m^2$.

Problema 1.- Calcular el momento magnético asociado al movimiento orbital de un electrón, que gira en una órbita de radio " a_0 ", con una frecuencia ν .

Si el electrón gira con una frecuencia determinada, quiere decir que en cada segundo, pasa por cualquier punto de la órbita una carga de $q_e \nu$, lo que supone que como el área de la órbita, supuesta circular es πa_0^2 , el movimiento orbital equivale a un momento magnético de módulo:

$$|\vec{m}| = \pi q_e a_0^2 \nu$$

Como el movimiento de los electrones en las órbitas es asociable a un momento magnético, la acción de un campo magnético sobre la materia supondrá que las órbitas se verán orientadas por la acción de un campo magnético. Si consideramos un electrón que gire en una órbita de radio " a_0 ", sabemos que le podemos asociar un momento angular cuyo módulo será: $|\vec{l}| = |\vec{a}_0 \times (m\vec{v})|$, teniendo en cuenta que la velocidad será perpendicular al radio en cada momento y valdrá: ωa_0 , nos queda: $|\vec{l}| = m \omega a_0^2$. Como hemos visto (ver problema anterior) que el momento magnético asociado a la órbita es: $|\vec{m}| = \pi q_e a_0^2 \nu$, podemos definir la relación entre el momento magnético y el angular, introduciendo la "razón giromagnética" $\gamma = \frac{|\vec{m}|}{|\vec{l}|}$, que en este caso valdrá:

$\gamma_0 = \frac{q_e}{2 m_e}$. La razón giromagnética nos permitirá, conocido el valor del momento angular de un electrón en una órbita, asignarle un momento magnético asociado lo cual nos será de gran utilidad en el estudio del magnetismo de los medios materiales.

Fuerzas entre corrientes: Ley de Biot y Savat.

El estudio de las fuerzas ejercidas por un campo magnético sobre una carga en movimiento nos ha permitido obtener la fuerza que ejerce un campo magnético sobre una corriente, por otro lado hemos indicado que la sistematización del estudio del magnetismo tiene como puntal importante las experiencias de Oersted, que observó que el paso de corrientes por hilos conductores suponía la desviación de una brújula colocada un las cercanías de los hilos. Este hecho, supone que el paso de corriente por un conductor da lugar a la aparición de un campo magnético, por tanto, si ponemos dos corrientes suficientemente cercanas debe aparecer entre ellas un fuerza.

Supongamos dos circuitos “C₁” y “C₂”, recorridos por intensidades I₁ e I₂, como se muestra en la figura 8. Si analizáramos la fuerza que el elemento del primer circuito d \vec{l}_1 , ejerce sobre otro elemento d \vec{l}_2 del segundo circuito, encontraríamos:

- El módulo de la fuerza será proporcional al valor de las intensidades de las dos corrientes, y la longitud del tramo considerado en cada circuito:

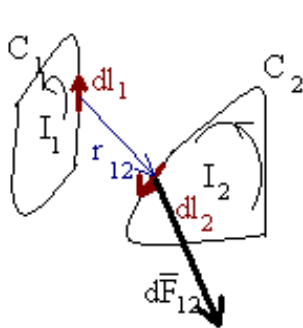


Figure 8

Fuerza sobre un elemento de corriente del circuito “2”, por la acción de otro elemento de corriente del circuito “1”.

$$|d^2\vec{F}_{1,2}| \propto I_1 I_2 |d\vec{l}_1| |d\vec{l}_2|$$

- El módulo de la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los dos elementos de corriente: $|d\vec{F}_{1,2}| \propto \frac{1}{r_{1,2}^2}$

-La fuerza es nula para los elementos de corriente d \vec{l}_2 que son perpendiculares al plano definido por d \vec{l}_1 y el vector posición: $|d\vec{F}_{1,2}| \equiv 0$ si d \vec{l}_2 es \perp al plano (d \vec{l}_1 , $\vec{r}_{1,2}$).

Estas condiciones se pueden expresar matemáticamente diciendo:

$$d^2\vec{F}_{1,2} = K_M I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times \vec{u}_{1,2}]}{r_{1,2}^2}$$

La expresión anterior introduce una nueva constante “K_M” cuyo valor dependerá del sistema de unidades. Para que la expresión sea homogénea, la constante debe tener unidades, que serán las de una fuerza dividida por el cuadrado de la intensidad de corriente. En el Sistema Internacional,

la constante la escribimos como: $K_M = \frac{\mu_0}{4\pi}$, y su valor es 10⁻⁷ N A⁻².

Por tanto la fuerza sobre un elemento de corriente en el circuito “2” debida a la existencia de una

corriente en el circuito “1” será:
$$d\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 d\vec{l}_2 \times \oint_{C_1} \frac{[(I_1 d\vec{l}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}.$$

Si recordamos la expresión que hemos obtenido para la fuerza que se ejercía sobre un elemento de corriente que se encuentra en un campo magnético $d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]$, y observamos la expresión que acabamos de obtener, vemos que son idénticas si hacemos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{(I_1 d\vec{l}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Que será la expresión de la inducción magnética creada por una corriente “ I_1 ” en un punto definido por la posición \vec{r}_2 .

Vamos a aplicar lo que acabamos de obtener al cálculo de la inducción magnética creada por un hilo recto indefinido por el que circula una corriente “ I ”, a una distancia “ ρ ” del mismo.

Si consideramos un elemento de longitud en el hilo, como se muestra en la figura 9, generará un campo de inducción $d\vec{B}$ de valor: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$ siendo \vec{u}_r un vector unitario en la dirección y sentido de \vec{r} . El producto vectorial del elemento de hilo por el vector unitario nos da que la inducción será entrante en el papel, y el módulo será:
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin \theta}{r^2}.$$

De la figura se desprende que: $\sin \theta = \cos \alpha = \frac{\rho}{r}$, $\tan \alpha = \frac{l}{\rho}$, para ver el hilo completo es mejor emplear el ángulo α luego será el que empleemos en la integración. De lo anterior se obtiene

$$\text{que: } dl = \frac{\rho}{\cos^2 \alpha} d\alpha.$$

Sustituyendo en la expresión del diferencial de la inducción obtenemos:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\frac{\rho d\alpha}{\cos^2 \alpha} \cos \alpha}{\left(\frac{\rho}{\cos \alpha}\right)^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\rho} \cos \alpha d\alpha$$

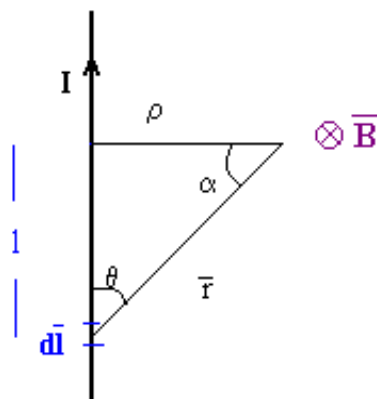


Figure 9

Para obtener el módulo de la inducción tendremos que integrar la expresión anterior. La variable de integración es el ángulo α desde el que tenemos que conseguir ver el hilo completo, es

decir desde que valga $-\pi/2$ hasta $+\pi/2$.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{\rho} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} I [\sin\alpha]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho}$$

Luego la inducción magnética generada por el hilo en un punto cualquiera del espacio será:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho} \vec{u}_\phi$$

Si queremos generalizar el resultado que hemos obtenido hasta ahora para el campo creado por

un hilo conductor, que era $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{(\vec{I}_1 \, d\vec{l}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$, pensemos en términos de densidad

de corriente. El producto de la intensidad por el elemento de corriente, es expresable como $(\vec{J} \cdot d\vec{s}) d\vec{l}$, el paralelismo entre el vector densidad de corriente y el elemento de longitud nos

permite escribir: $\vec{J}(d\vec{s} \cdot d\vec{l}) = \vec{J} \, d\tau$ sustituyendo lo anterior en la expresión de la inducción

tenemos: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{u}}{R^2} d\tau'$ que nos da la expresión del vector inducción magnética debida a una densidad de corriente.

Vamos a ver un caso interesante de fuerzas entre corrientes, es el de la fuerza entre dos hilos rectilíneos paralelos por los que circula una corriente.

Consideremos dos hilos paralelos separados una distancia ρ por los que circulan corrientes I_1 e I_2 en el mismo sentido, como se muestra en la figura 10. Según hemos calculado, el hilo “1”

creará en la posición del hilo “2” un campo magnético de inducción: $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{\rho} \vec{u}_\phi$, según

sabemos sobre un elemento de longitud $d\vec{l}_2$ del hilo “2” aparecerá una fuerza:

$$d\vec{F}_{1,2} = I_2 [d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)]$$

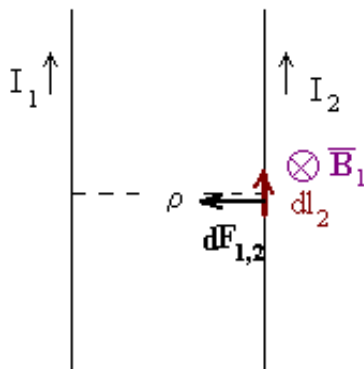


Figure 10

Como los vectores inducción y longitud son perpendiculares, el módulo del producto será el producto de los módulos y el sentido hacia el otro hilo, por tanto el módulo de la fuerza será:

$$dF_{1,2} = I_2 \, dl_2 \, B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{\rho} dl_2, \text{ es decir aparece una fuerza}$$

por unidad de longitud de módulo:

$$\frac{dF_{1,2}}{dl_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{\rho}$$

Esta expresión, que nos da la fuerza por unidad de longitud entre

dos hilos conductores, ha sido utilizada para *definir el amperio como unidad fundamental del Sistema Internacional*. Diremos que un amperio es la corriente estacionaria que cuando circula por cada uno de dos conductores rectilíneos indefinidos y paralelos separados la distancia de un metro, da como resultado la fuerza de $2 \times 10^{-7} \text{ N / m}$.

Definido así el amperio, el culombio resulta ser la cantidad de carga transportada por una corriente uniforme de intensidad un amperio, que fluye durante un segundo.

Ecuaciones del campo magnético: Ley de Ampère.

Vamos a obtener algunas propiedades del campo magnético. Empezaremos calculando la circulación del vector inducción magnética en un caso sencillo, para generalizarlo después.

Consideraremos un hilo conductor rectilíneo infinito por el que circule una corriente “I”, se generará un campo magnético de inducción: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi$, cuyas líneas de campo serán circunferencias contenidas en planos perpendiculares al hilo, de radio “r” con centro en puntos del hilo. Tomaremos pues como línea sobre la que calcular la circulación una circunferencia de radio “a”, como se muestra en la figura 11.

La circulación será: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$, pues los vectores

inducción y desplazamiento serán vectores paralelos. Como el valor del módulo de la inducción es constante en todos los

puntos de la circunferencia, la circulación será: $\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \oint_C dl =$

$\frac{\mu_0 I}{2\pi a} (2\pi a) = \mu_0 I$. Luego para este caso sencillo tenemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I.$$

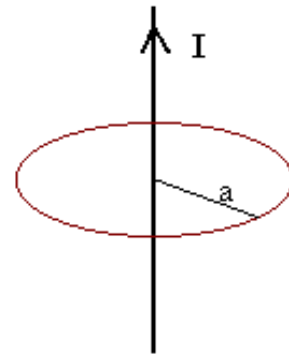


Figure 11

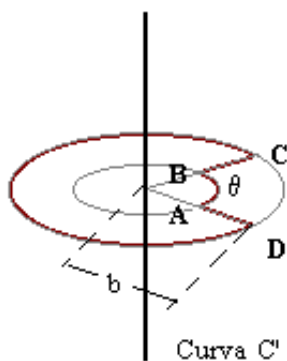


Figure 12

Vamos a ver si la curva es un poco más complicada que ocurre. Emplearemos ahora como línea cerrada la formada por dos arcos de circunferencia de amplitud θ y $2\pi - \theta$, y radios “a” y “b” respectivamente, unidos por los tramos de radios que definen los arcos, como se muestra en la figura 12. La circulación a lo largo de C' será:

$$\oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

En los tramos BC y DA, la inducción, que será tangencial, es perpendicular al desplazamiento, que es radial; por tanto las dos

integrales son nulas. En los otros tramos, los dos vectores (inducción y desplazamiento) son paralelos, quedando por tanto: $\oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l}$, como las inducciones son de

módulo constante en cada arco, y de valores: $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ y $\frac{\mu_0 I}{2\pi b}$ respectivamente, tendremos que

calcular la integral del arco en cada caso, cuyos valores son: (θa) y $(2\pi - \theta) b$, por tanto:

$$\oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\theta a) + \frac{\mu_0 I}{2\pi b} (2\pi - \theta) b = \frac{\mu_0 I \theta}{2\pi} + \frac{\mu_0 I (2\pi - \theta)}{2\pi} = \mu_0 I.$$

Encontramos de nuevo, que la circulación a lo largo de esta curva es proporcional a la corriente que circula por el hilo. Con la estructura de curva que hemos tomado nos podemos acercar a la forma de cualquier curva cerrada todo lo que queramos, y sin la necesidad de que el hilo este en el centro de la curva. Dado por otro lado, que el campo, por venir de una expresión integral, tiene que cumplir el principio de superposición, se generalizará la expresión anterior y diremos que la circulación del vector inducción magnética a lo largo de una curva cerrada cualquiera es siempre proporcional a la corriente que se encierre.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encerrada}}$$

Que es la expresión del teorema de Ampère en forma integral.

Vamos a aplicar el teorema de Ampère al calculo de la inducción magnética creada por un solenoide. Un solenoide no es otra cosa que una asociación de espiras del mismo radio recorridas por la misma corriente. La inducción magnética a la que darán lugar, será la suma de los vectores campo debidos a cada espira lo que supondrá un campo uniforme, intenso en el volumen encerrado por el solenoide, cuyas líneas se cerraran en el exterior del solenoide, con lo que la inducción magnética en la superficie externa del solenoide será prácticamente nula.

Esta propiedad de los solenoides, va a ser la que aprovechemos para elegir la línea sobre la que

calcular la circulación de la inducción. Vamos a tomar un rectángulo uno de cuyos lados esté en el volumen del solenoide; su paralelo, muy cercano a la superficie externa del mismo y los otros dos perpendiculares a las líneas de campo, como se muestra en la figura 13. En la expresión del

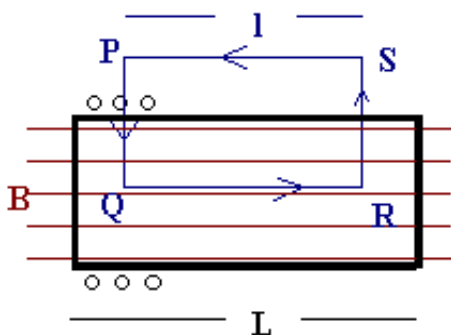


Figure 13
Esquema de un solenoide recto de "N" espiras y longitud "L"

teorema de Ampère: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encerrada}}$, debemos

calcular cada uno de sus miembros. La circulación, será

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_Q^R \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_R^S \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_S^P \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

En los tramos PQ y RS el vector inducción es perpendicular al vector movimiento, por tanto las integrales son nulas. En el tramo SP, como lo podemos dibujar todo lo cercano que queramos a la superficie externa del solenoide, la inducción

será nula, luego lo será la integral. Por tanto queda: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_Q^R \vec{B} \cdot d\vec{l}$, en este tramo inducción

y movimiento son paralelos, luego: $\int_Q^R \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_Q^R B \cdot dl$, como la inducción es uniforme nos que

dará la integral del desplazamiento que valdrá “l”: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B l$

Vamos a calcular el segundo miembro: $\mu_0 I_{\text{encerrada}}$. Realmente calcularemos la corriente encerrada por el rectángulo. Si en la longitud total del solenoide (L) tenemos (N) espiras, en la longitud “l”, que es el lado largo del rectángulo, tendremos $\frac{N}{L} l$ espiras, lo que supone encerrar

una corriente de: $\left(\frac{N}{L} I\right) l$, si igualamos los dos miembros de la ecuación, tendremos: $B l =$

$\mu_0 \frac{N}{L} l$, lo que nos lleva a que la inducción magnética generada por un solenoide tiene por

módulo: $B = \mu_0 \frac{N}{L} I$, siendo su dirección paralela al eje del solenoide y su sentido vendrá dado por el de avance de un tornillo que movamos en el sentido marcado por la corriente.

El flujo del campo magnético

Vamos ahora a expresar la otra propiedad importante del campo magnético, que es la inexistencia de polos magnéticos aislados. Nosotros la hemos podido poner de manifiesto si alguna vez se nos ha partido un imán, ya que lo que obtenemos por fractura de un imán son siempre dos imanes, y por mucho que los dividamos no conseguiremos un único polo magnético. Es decir las líneas de fuerza del campo magnético no salen de ningún lugar, entran y salen en cada cara. Al obtener la inducción creada por una espira o por un solenoide nos encontramos que las líneas de campo son cerradas. La inexistencia de fuentes de las líneas de campo, supone que el flujo del vector a través de una superficie cerrada cualquiera sea nulo, luego se cumplirá:

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

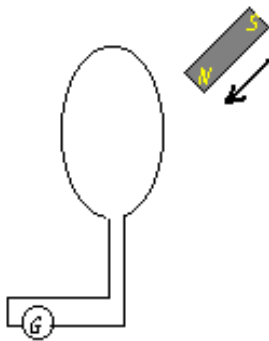
Que nos permite escribir la segunda expresión fundamental de la inducción magnética.

Las dos propiedades básicas de los campos magnéticos estacionarios, no dependientes del tiempo, son el teorema de Ampere, que al estudiar los fenómenos dependientes del tiempo tendremos que modificar y, su carácter solenoidal, o lo que es lo mismo que su flujo a través de una superficie cerrada cualquiera es cero, que es una de las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, conocidas como ecuaciones de Maxwell.

El fenómeno de la inducción magnética. Leyes de Faraday y Lenz

Hasta ahora hemos visto los campos eléctrico y magnético como fenómenos sin conexión matemática alguna, es cierto que sabemos que ambos se generan por la existencia de cargas eléctricas, pero no hemos encontrado ninguna relación entre sus vectores campo. Vamos a encontrar esa relación que intuimos debe existir, pues el movimiento de las cargas quien produce el campo magnético, o lo que es lo mismo que nosotros veamos las cargas desde un sistema de coordenadas que se mueve respecto del suyo.

Hacia 1830 Michael Faraday en Inglaterra, y Joseph Henry en Estados Unidos realizaron una serie de experimentos que ponían de manifiesto la relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos. Supongamos que tomamos una bobina y la conectamos a un galvanómetro capaz de acusar el paso de corriente (fig 14), si acercamos un imán a la bobina veremos que el galvanómetro detecta paso de corriente, lo mismo ocurre cuando alejamos el imán, pero no es así cuando esta quieto, por muy cerca que mantengamos el imán y la bobina.

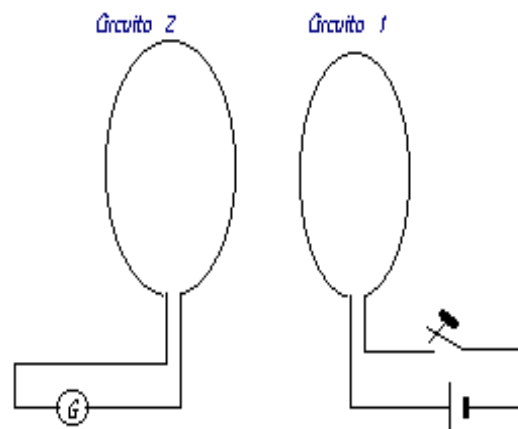
**Figure 14**

Al acercarse el imán se detecta paso de corriente por el galvanómetro

La observación del galvanómetro nos dirá que la corriente que circula cuando acercamos el imán a la bobina es de sentido contrario a la que atraviesa la bobina cuando se aleja el imán. Si ahora invertimos el imán, es decir acercamos el polo sur, la corriente será del mismo sentido que cuando alejábamos el polo norte con anterioridad. Es decir el movimiento relativo de los polos del imán respecto del circuito tiene importancia a la hora de generarse una corriente en el circuito, y no se establece corriente alguna por estar el imán quieto y cercano a las espiras.

Veamos otra experiencia curiosa, coloquemos dos circuitos eléctricos cercanos y en reposo uno respecto del otro, uno de ellos formado como antes, por una bobina y un galvanómetro y el otro

formado por otra bobina conectada a una batería con un interruptor (fig 15). Si cerramos el interruptor observaremos, por un intervalo de tiempo muy corto, el paso de una corriente eléctrica en la otra bobina, la unida al galvanómetro, no observando después ninguna corriente en el circuito del galvanómetro, aunque tengamos cerrado el circuito de la batería. Sólo aparecerá de nuevo corriente en la segunda bobina cuando abramos de nuevo el circuito primero.

**Figure 15**

El galvanómetro del circuito "2", sólo detecta paso de corriente al abrir o cerrar el interruptor del circuito "1"

Faraday describe el experimento que acabamos de relatar como: *"Cuando se hizo el contacto, se produjo un efecto repentino y muy leve en el galvanómetro y también hubo un efecto semejante, muy leve, cuando se interrumpió el*

contacto con la batería. Pero cuando la corriente voltaica pasaba por la primera hélice, no se observaba ninguna alteración galvanométrica, ni se podía observar ningún efecto de inducción sobre la otra hélice, aun cuando se había comprobado que el poder activo de la batería era muy grande”.

¿Qué ha ocurrido en este segundo experimento?, las bobinas están en reposo una respecto a otra, ¿qué ha podido variar?. La respuesta no es tan trivial, intentemos seguir el fenómeno:

Al conectar el interruptor, por el primer circuito empieza a circular una corriente eléctrica que generará un campo magnético en sus proximidades, en consecuencia el segundo circuito se verá inmerso en un campo magnético que permanecerá constante en tanto se mantenga la corriente circulando por el primero de los dos circuitos. Al abrir de nuevo el interruptor del primer circuito el campo magnético creado por él desaparecerá, en consecuencia el segundo circuito dejará de estar inmerso en un campo magnético.

En el galvanómetro del segundo circuito podremos observar que no se detecta corriente alguna mientras el interruptor del primer circuito está abierto, en el instante en que se cierra el interruptor el galvanómetro del “circuito 2”, acusará paso de una corriente inducida por un instante, dejando de circular después aunque el interruptor esté cerrado y la corriente pase por él, al abrir de nuevo el interruptor del “circuito 1”, el galvanómetro de “2” detecta el paso de corriente inducida en sentido contrario al detectado en la primera ocasión (Fig 16).

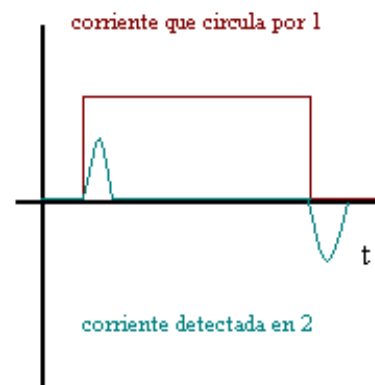


Figure 16

Sólo se acusa paso de corriente cuando existe un cambio en el valor del campo magnético que atraviesa el “circuito 2”, que es lo mismo que ocurriría en la experiencia del imán que hemos descrito anteriormente, pues por muy cerca que le mantuviéramos del circuito, si no lo movíamos no se detectaba paso de corriente.

La primera consecuencia que podemos sacar de todo lo anterior, es que lo importante no es el valor del campo en el que se encuentre la bobina que empleamos para detectar el fenómeno, quien produce la corriente inducida en ella es el cambio en el valor del campo.

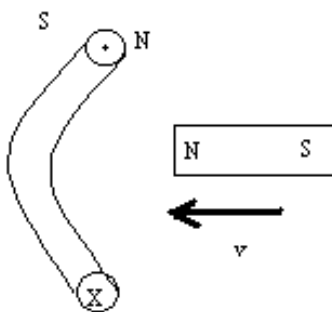


Figure 17

Esquema de un imán introduciéndose en una espira (de la que se ha representado sólo la mitad) en la que se induce una corriente

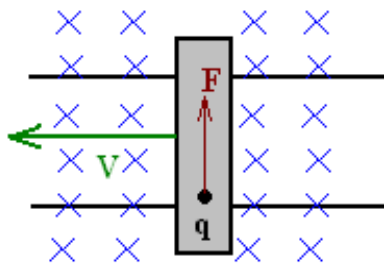
Heinrich F.E. Lenz, realizó un estudio del fenómeno desde el punto de vista de la conservación de la energía, lo que permite predecir el sentido de la corriente inducida. La ley de Lenz nos dice que: “la corriente inducida aparece en un sentido tal, que se opone a la causa que la produce”. Igual que en Mecánica empleando el principio de conservación de la energía hemos conseguido sacar conclusiones sobre el comportamiento de los sistemas sin necesidad de hacer un planteamiento completo del fenómeno, vamos a ver que consecuencia obtenemos al aplicar la conservación de la energía a esta situación.

Consideremos la primera experiencia que hemos comentado: si introducíamos el imán en la espira se producía una corriente inducida, ¿cuál es su sentido?.

Sabemos que una corriente que circula por una espira produce un campo magnético cuyas líneas de campo son cerradas en el espacio que la circunda, y resultan entrantes por una cara de la espira y salientes por la otra, las líneas de campo del imán saldrán de su polo norte (N) y se cerrarán en su interior al entrar en el mismo por su cara sur (S). Si, como prevé la ley de Lenz, la corriente inducida en la espira debe oponerse al movimiento del imán, “la cara norte de la espira” debe oponerse a la norte del imán, como indica la figura 17, para lo cual la corriente debe entrar por la parte baja del trozo de cable que se esquematiza en la misma, y salir por su parte superior.

Para conseguir introducir el imán tendremos que realizar una fuerza que empuje al imán, la ley de Lenz nos dice que la espira reaccionará generando una corriente que trate de impedir que introduzcamos el imán. Por el contrario si alejamos el imán el circuito reaccionará generando una corriente que trate de atraer al imán. De acuerdo con el principio de conservación de la energía el trabajo realizado sobre el sistema debe ser igual al de generación de la corriente si suponemos que no existen pérdidas caloríficas, por el paso de la corriente.

Los razonamientos de Lenz lo son para circuitos cerrados pues se habla siempre de intensidades inducidas. Si el circuito es abierto podemos pensar en lo que ocurriría si fuese cerrado con lo que llegaremos encontrar el sentido de la f.e.m. inducida que debe aparecer para que circule la corriente.



Inducción magnética entrante

Figure 18

La barra metálica se desplaza sobre los carriles, en el seno de un campo magnético.

Para completar el estudio del fenómeno de la inducción, vamos a ver que ocurrirá si desplazamos una barra conductora, con velocidad constante de módulo “v”, sobre unos carriles metálicos perpendicularmente a un campo magnético como indica la figura 18.

Como en el volumen del conductor existirán electrones libres, podemos decir que se mueven con la misma velocidad que el conductor, y por estar en un campo magnético se verán sometidos a la acción de la fuerza de Lorentz $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$, que impulsará a los electrones a la parte

superior de la barra, con lo que ésta quedará cargada negativamente en su parte superior y positivamente, por defecto de electrones, en su parte inferior. Como consecuencia de esta situación aparecerá en el interior del conductor un campo eléctrico que estabilizará el flujo de electrones, dando lugar a la aparición de una situación estacionaria cuando las fuerzas sobre los portadores sean iguales y opuestas.

$$\vec{F}_E = q \vec{E} = -\vec{F}_M = -\left(q[\vec{v} \times \vec{B}]\right); \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

La existencia en el interior del conductor de un campo eléctrico uniforme y paralelo al conductor, capaz de

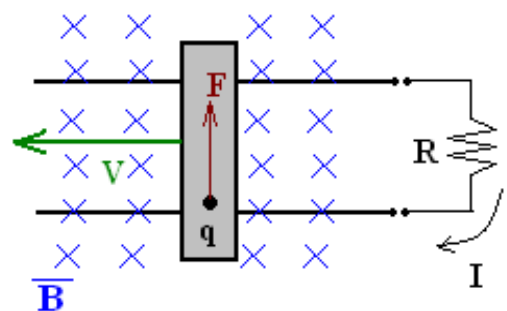


Figure 19

El movimiento de la barra metálica, provoca el paso de una corriente “I” por la resistencia “R”

provocar de forma sostenida, el movimiento de los electrones por un posible circuito externo, da lugar a la aparición de una fuerza electromotriz de valor: $\varepsilon = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -v Bl$, capaz de generar una corriente si los raíles metálicos por los que se traslada el conductor se unen mediante una resistencia eléctrica como se muestra en la figura 19.

En los tres fenómenos que hemos descrito, se produce una corriente inducida, o lo que es lo mismo existe una f.e.m. inducida capaz de generar una corriente eléctrica, luego tenemos que encontrar lo que de común tienen las tres situaciones. En las dos primeras vimos que la variación del valor del campo magnético era la causa que generaba la corriente, pero en el tercer caso el campo magnético lo hemos supuesto constante en módulo dirección y sentido. Lo que sí ocurre en este tercer caso, es que la barra en su movimiento, si estuviera quieta no se produciría fuerza sobre los portadores, va “barriendo” más y más líneas de fuerza del campo magnético, como si aumentara no el valor del campo sino el área afectada por el fenómeno.

Como la magnitud que nos une un campo vectorial con el área a la que afecta, es el flujo; vamos a calcular el valor del flujo del campo magnético afectado en la experiencia. Si hemos dicho que la barra se mueve con velocidad constante de módulo “v” en un plano perpendicular al campo magnético, el flujo: $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int B ds = B \int ds$, la integral de la diferencial de superficie será la distancia entre los raíles multiplicada por el espacio (x) que haya recorrido la barra, que será velocidad por tiempo: $x = vt$; $\phi = B(lvt)$.

Si comparamos la expresión anterior con la que hemos obtenido para la f.e.m. inducida en la barra veremos que la una es la derivada temporal de la otra, es decir la velocidad de variación del flujo es quien nos da la f.e.m. y el signo menos era previsible por las consideraciones energéticas que siguiendo el razonamiento de Lenz hemos realizado, escribiremos que:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

en donde se resumen las dos leyes que rigen el fenómeno:

Ley de Lenz: “La variación del flujo magnético que enlaza a un circuito produce una f.e.m. que se opone a la variación del flujo en él”

Ley de Faraday: “El valor de la f.e.m. coincide con la rapidez de variación del flujo magnético”

De la definición de flujo, podemos ver que sus unidades serán las de la inducción multiplicadas por m², es decir o teslas x m², o simplemente Weber.

Vamos a rescribir la ecuación anterior empleando notación integral. El primer miembro de la ecuación, la fuerza electromotriz es la circulación del campo eléctrico, y el flujo es la integral de superficie del vector campo magnético siempre que la superficie esté soportada por la línea a la que se extiende la primera integral, sólo tendremos que encontrar la línea y la superficie apropiadas.

Para tener una imagen gráfica, consideremos la situación que acabamos de estudiar. La f.e.m. inducida la podemos escribir como: $\varepsilon = \int_c \vec{E} \cdot d\vec{l}$, siendo “c” la barra conductora. El flujo lo hemos calculado sobre la superficie “ Σ ” soportada por la barra y definida por ésta en su movimiento, la variación del flujo será: $-\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s}$.

Lo que nos permite escribir que

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

siempre que la superficie “ Σ ” esté soportada por la línea “C”.

Coeficientes de inducción

Los coeficientes de inducción nos relacionan las ff. ee. mm. producidas en distintos circuitos, con las intensidades que recorren otros que están en sus cercanías, e incluso con la que recorre el propio circuito.

Sabemos que la ley de Biot y Savart nos da el valor de la inducción magnética creada por un elemento de corriente “ $d\vec{l}$ ” que se encuentra en un punto definido por \vec{r}_1 , en un punto cualquiera

del espacio definido por el vector \vec{r}_2 : $\vec{B}_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{(I_1 d\vec{l}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$. Esta expresión la podemos

leer diciendo: la inducción magnética debida a un elemento de corriente en un punto cualquiera, depende del valor de la intensidad de la corriente, de la geometría del circuito (se integra sobre la línea que es el circuito “1”), y de la posición relativa entre el punto y el circuito. O lo que es lo mismo: la inducción magnética debida a un circuito de corriente en un punto cualquiera del espacio, depende del valor de la intensidad de la corriente y de la geometría propia del circuito y relativa del punto considerado respecto del circuito.

Supongamos que tenemos “N” circuitos rígidos (que los circuitos sean rígidos es la condición habitual de los circuitos eléctricos, por tanto no se quitará generalidad al razonamiento) distribuidos en una región del espacio. Si llamamos I_j a la corriente que circula por el circuito “j”; de lo que acabamos de decir se desprende, que si no variamos las condiciones geométricas de los circuitos, la inducción magnética creada por el circuito “j” en los distintos puntos del circuito “i” es proporcional al valor de la intensidad I_j ; es decir: $|\vec{B}_{ij}| \propto I_j$. En consecuencia el flujo de la inducción magnética que atraviesa al circuito “i” debido a que por el “j” pasa corriente, será: $\phi_{ij} \propto I_j$. La constante de proporcionalidad dependerá exclusivamente de la geometría de los dos circuitos y de sus posiciones relativas y lo representaremos por M_{ij} .

Si queremos conocer el valor del flujo total que atraviesa el circuito “i”, tendremos que sumar las contribuciones de todos y cada uno de los circuitos presentes, incluyendo al propio circuito

“i”, es decir: $\phi_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} I_j$, donde M_{ij} dependerá exclusivamente de la geometría de los

circuitos. Estos coeficientes que acabamos de introducir, son los coeficientes de inducción mutua entre cada pareja de circuitos, y representan las contribuciones al flujo de la inducción magnética que atraviesa un circuito dado debido a que está en presencia de varios. Naturalmente la propia corriente que circula por un circuito genera un campo cuyo flujo también hemos tenido en cuenta, y que corresponderá a los coeficientes de la forma M_{ii} , que denotaremos por “ L_i ”, a los que llamaremos coeficientes de autoinducción.

Al escribir ahora la ley de Faraday tendremos: $\varepsilon_j = -\frac{d\phi_j}{dt} = -\sum_{i=1}^N M_{ij} \frac{dI_i}{dt}$. Se puede demostrar

que la matriz de coeficientes de inducción es simétrica, es decir que $M_{ij} = M_{ji}$. No es extraño que esto sea así pues los coeficientes de inducción, hemos dicho representaban la geometría relativa entre los circuitos.

Naturalmente si consideramos un único circuito tendremos: $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$.

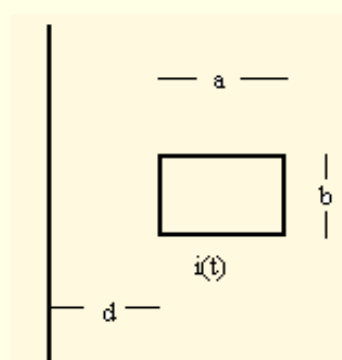
De forma esquemática, si consideramos dos circuitos podemos escribir que los flujos que atraviesan ambos circuitos son de la forma:

$$\phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

$$\phi_2 = M_{12} I_1 + L_2 I_2$$

Lo que nos permitirá calcular con facilidad la fuerza electromotriz inducida en uno de ellos una vez conocidos los coeficientes de inducción.

Por su definición, los coeficientes de inducción tendrán unidades que serán las del flujo divididas por las de la intensidad (Weber/amperio), o lo que es lo mismo las de una f.e.m. multiplicadas por las del tiempo y divididas por las de una intensidad (voltio x segundo/amperio), como el voltio dividido por amperio es ohmio, tenemos que las unidades de los coeficientes de inducción son ohmios x segundo que tiene nombre propio, “henrio”, en honor a Joseph Henry.



Problema 2.- Calcular la f.e.m. inducida en un hilo de longitud infinita, cuando por una espira rectangular de lados “a” y “b”, que diste “d” del hilo, circula una corriente: $i(t) = I \sin \omega t$.

Para calcular la f.e.m. inducida, deberíamos poder calcular la variación de flujo de la inducción magnética que atraviesa el hilo, pero definir el diferencial de superficie en el hilo no parece tarea fácil.

Sin embargo si acudimos a la definición de coeficiente de inducción mutua entre circuitos y de ahí calculamos la f.e.m. como: $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -M \frac{dI}{dt}$,

Figure 1 de problemas

podremos resolver el problema. Calculemos el coeficiente de inducción mutua. Dada la simetría de los coeficientes dará lo mismo conocer el del hilo respecto el rectángulo que a la inversa. Vamos pues a suponer que por el hilo circula una corriente “I”, como se muestra en la figura, y calcularemos el flujo que atraviesa el rectángulo.

Si la corriente es, por ejemplo, como la que se muestra en la figura, la inducción magnética será entrante en el papel en la zona en la que está el rectángulo. Para calcular el flujo que atraviesa el rectángulo, tomaremos un elemento de superficie en él, que esté a distancia “x” del hilo y tenga un espesor “dx”. La inducción en todos los puntos del elemento de área será la misma y de módulo: $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x}$, luego el flujo:

$$\phi = \int_{\text{rectángulo}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x} (b \cdot dx) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right).$$

El coeficiente de inducción mutua, como es la relación entre el flujo y la intensidad, valdrá: $M = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)$.

Como la f.e.m. inducida es: $\varepsilon = -M \frac{dI}{dt}$, nos queda:

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{d}{dt}(\sin \omega t) = \left[-\frac{\mu_0 b \omega}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \right] \cos \omega t.$$

La expresión entre corchetes, que es una constante, la podemos denotar por ε_0 , tendremos que en el hilo se inducirá una f.e.m. dependiente del tiempo también de forma senoidal de la forma:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

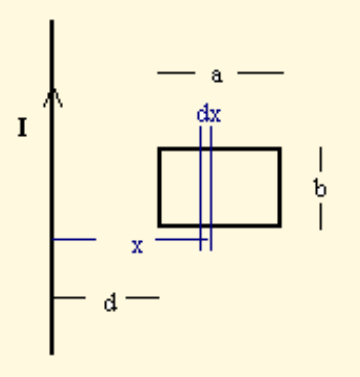


Figure 2 de problemas

Veamos que influencia tiene la unidad que acabamos de introducir respecto de las unidades de

la permeabilidad magnética. De la ley de Biot y Savart $\left[\vec{B}_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{(I_1 d\vec{l}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right]$ se

desprende que las unidades de la permeabilidad son: Tesla x m/ amperio, el tesla es Weber m⁻², que multiplicado por el metro y dividido por amperio, nos queda: weber dividido por amperio = henrio, y m⁻² multiplicado por metro “m”; luego las unidades de la permeabilidad del vacío “ μ_0 ” serán henrio x m⁻¹.

Electrostática en medios materiales

Tema 2

1

Medios materiales

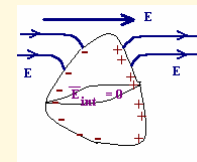
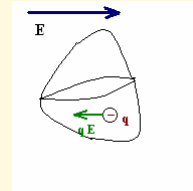
- Desde el punto de vista del **campo electrostático** los materiales se dividen en:
 - **Conductores**: algunos de sus electrones se pueden mover en todo el volumen casi libremente, por ejemplo por acción de un campo electrostática
 - **Dieléctricos**: sus moléculas no comparten sus electrones. Los campos electroestáticos sólo pueden deformar esas moléculas.
- Al hablar de conducción eléctrica debemos introducir otro tipo de materiales, los semiconductores

2

Medios conductores

- Si existe un campo en el interior de un conductor, cualquier electrón se moverá en el volumen en contra del campo.
- Se producirá un desplazamiento de cargas negativas en una parte del conductor. Esa parte quedará cargada negativamente.
- La parte contraria, aparecerá cargada positivamente.
- El movimiento de cargas cesará cuando el campo en el interior del conductor sea nulo.

$$\vec{E}_{\text{interior}} = \vec{0}$$



3

Propiedades de los conductores

- El campo electrostático es nulo en su interior.

Luego:

- No puede existir carga neta en su volumen

– La carga se repartirá sólo por su superficie.



Si el campo es nulo no puede existir diferencia de potencial:

- El volumen de un conductor es equipotencial.
- En los conductores, el campo eléctrico es siempre perpendicular a su superficie.

Y vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$$

4

Consideraciones geométricas

- El campo electrostático es mayor en los puntos con menor radio de curvatura.
- En todos los conductores el potencial que adquieren al ser cargados depende de su geometría $V \propto Q$
- La constante de proporcionalidad entre potencial y carga se denomina capacidad del conductor: $C \cdot V = Q$

5

Conductores en campos



- En el interior de un conductor, el campo es nulo
- Nunca puede existir carga en el volumen de un conductor.
- Los conductores son volúmenes equipotenciales.
- El campo es siempre perpendicular a la superficie de los conductores.
- El campo es mayor en los puntos con menor radio de curvatura.
- El potencial que adquiere un conductor es proporcional a su carga.

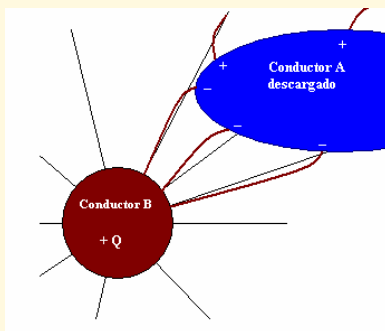
6

Electroscopio



7

Fenómenos de influencia



- Si un conductor cargado se acerca a uno descargado reordena sus cargas. Influye en él.
- **Condensador** son dos conductores en influencia total.
- Se caracterizan por su capacidad, que sólo depende de la geometría de los conductores y de su posición relativa.

8

Condensadores

- Los tipos más usuales son:

– Plano paralelos $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$

– Esféricos $C = 4\pi\epsilon_0 \left[\frac{ab}{b-a} \right]$

– Cilíndricos $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$

Se asocian:

- En paralelo, conectados a la misma diferencia de potencial $C_p = C_1 + C_2$

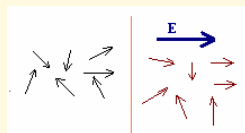
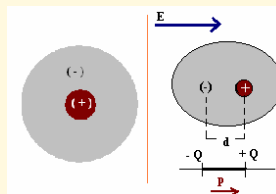
- En serie tienen la misma carga $\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

9

Medios dieléctricos

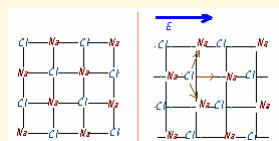
- En los dieléctricos los electrones están ligados, un campo eléctrico deformará la estructura de sus moléculas:

- Moléculas covalentes:



- Moléculas polares

- Moléculas iónicas



10

Polarización dieléctrica

- La densidad de dipolos del material por unidad de volumen, la llamaremos **vector polarización** o simplemente **polarización** \vec{P}

- Se mide en $C \cdot m^{-2}$ $\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\tau}$ $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$

- La relación entre causa (campo) y efecto (polarización) es mediante la **susceptibilidad eléctrica**:

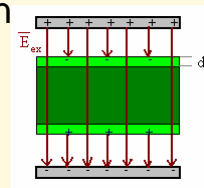
$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

11

Densidades de carga de polarización

- A un dieléctrico homogéneo en un campo eléctrico le “aparece” carga en su superficie debido a que se polariza.

- La densidad superficial de carga en las caras perpendiculares coincide con el módulo del vector polarización $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$
- En sus caras paralelas al campo no hay carga.



$$\sigma_p = |\vec{P}|$$

- En general aparecerá en su volumen una carga de polarización.

$$\Delta Q_p = \int_{\tau} \rho_p d\tau$$

- La carga de polarización desaparece al hacerlo el campo aplicado

12

Vector Desplazamiento

- Si existe carga de polarización, al aplicar el teorema de Gauss

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{total}}}{\epsilon_0}$$

También debemos considerar

la carga de polarización, con lo que obtenemos:

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$$

- **Desplazamiento eléctrico.** $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Para medios materiales el teorema de Gauss es

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{Libre}}$$

13

Relaciones constitutivas

- Entre los vectores campo, desplazamiento y polarización existen las siguientes relaciones:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \vec{P} = \chi_e \vec{E} \quad \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

- Si llamamos permitividad a $\epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon$

- Introducimos la permitividad relativa $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 (1 + \chi_e)}{\epsilon_0}$$

- Obtenemos que $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$

14

Tema 4º

Corriente eléctrica

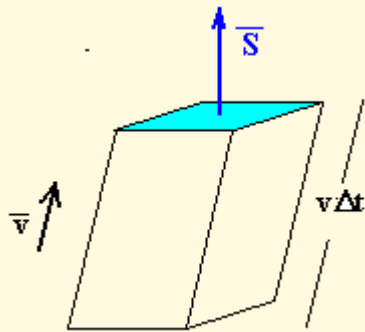
Programa

- *Corriente y densidad de corriente eléctrica.*
- *La ecuación de continuidad.*
- *Corriente de conducción. Ley de Ohm.*
- *Propiedades de conducción en los materiales:
Conductores, semiconductores y aislantes.*
- *Circuitos de corriente continua.*
- *Leyes de Kirchhoff.*
- *Teoremas del análisis de redes:*
 - *Superposición*
 - *Thevenin y Norton*
 - *Máxima transferencia de potencia.*

Introducción

El movimiento de las cargas es lo que conocemos como corriente eléctrica. El proceso por el que se transporta la carga se denomina conducción.

Se caracteriza mediante la magnitud **intensidad de corriente**, $I = \frac{dQ}{dt}$ que definimos como la velocidad a la que se transporta la carga por un punto dado en un medio conductor.



En Δt la carga que pasa por la superficie es: $Q = n q \vec{S} (\vec{v} \Delta t)$

Como: $I(S) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = q n \vec{S} \vec{v}$ Podemos decir $I = \vec{J} \cdot \vec{S}$

Definimos, **densidad de corriente** $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$

En general: $\vec{J} = \sum_i n_i q_i \langle \vec{v}_i \rangle$

Ecuación de continuidad

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \, d\tau$$

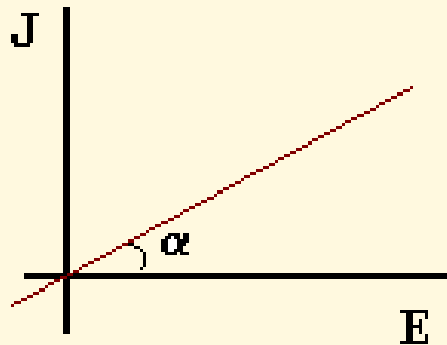


Parámetros macroscópicos

Caracterizar el fenómeno será relacionar causa \vec{E} y efecto \vec{J}

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Ley de Ohm



Medios lineales $\sigma = \text{cte}$

Medios no lineales $\sigma(E)$

Medios homogéneos $\sigma \neq \sigma(r)$

Medios isótropos (sus propiedades son las mismas en todas las direcciones) σ es escalar

Medios anisótropos σ es un tensor

En circuitos

$$I = J \cdot S = (\sigma E) \cdot S = \sigma \frac{S}{L} V$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} = \rho \frac{L}{S}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{I}$$



Parámetros macroscópicos



[3material-resistencia](#)

En metales $\rho = a + b T + c T^2 + \dots$

En semiconductores

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\varepsilon_A}{kT}}$$

La resistividad del material varía con la temperatura

Coeficiente térmico de la resistividad

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$$

En **metales la resistividad aumenta** con la temperatura (**resistencia PTC**).

En **semiconductores disminuye**, esto es, si la conductividad aumenta con la temperatura, el coeficiente será negativo (**resistencias NTC**).



Parámetros microscópicos

En conducción la velocidad de los portadores se debe:

- Agitación térmica (no contribuye a la conducción)
- Arrastre por campo $J = n q v_{arr}$

$$a = \frac{F_{electrica}}{m} = \frac{q E}{m} \xrightarrow{\text{agitación térmica}} v_{arr} = a \tau = \frac{q E}{m} \tau \quad \text{Tiempo de relajación } \tau$$

$$\xrightarrow{\quad} \vec{v}_{arr} = \mu \vec{E} \quad \text{Movilidad del portador } \mu \quad \mu = \frac{q}{m} \tau$$

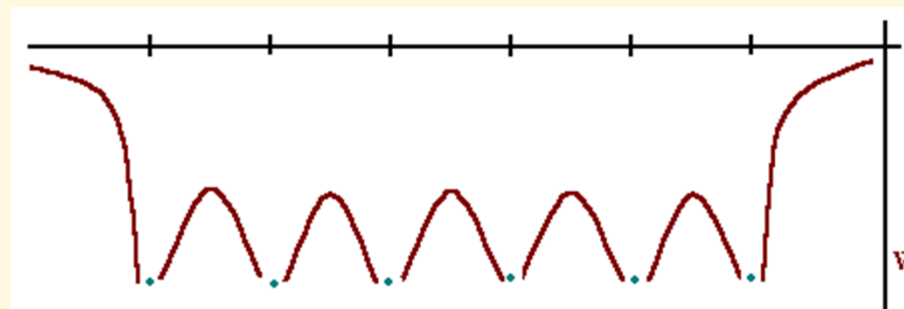
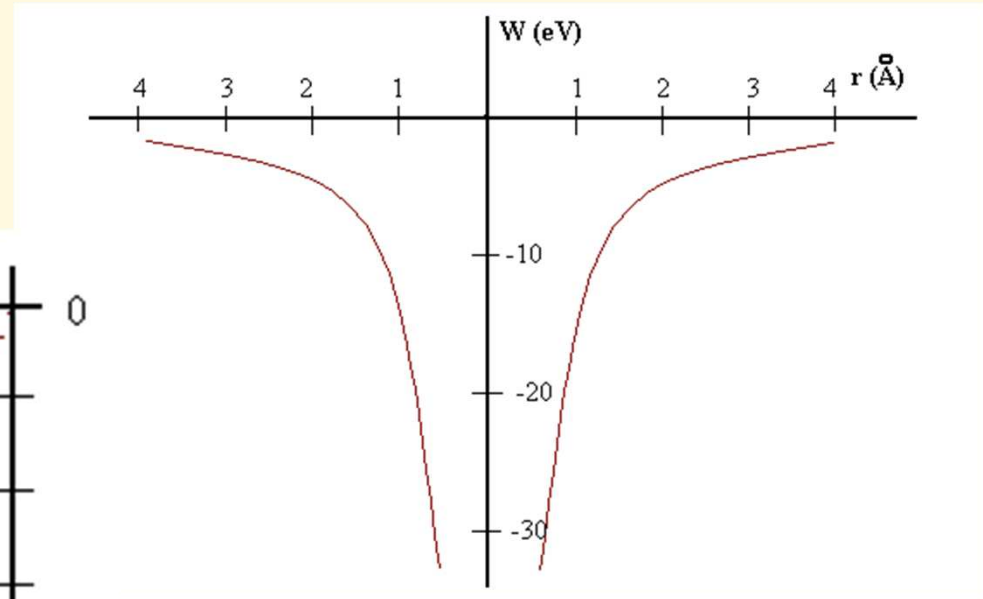
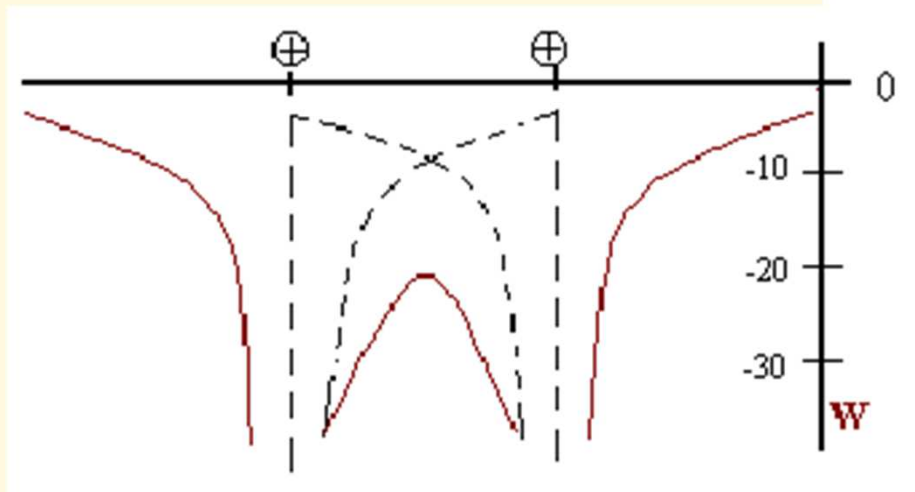
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = n q \vec{v} = n q \mu \vec{E} \quad \sigma = q n \mu = \frac{q^2 n \tau}{m}$$

En general $\sigma = \sum_i n_i q_i \mu_i$

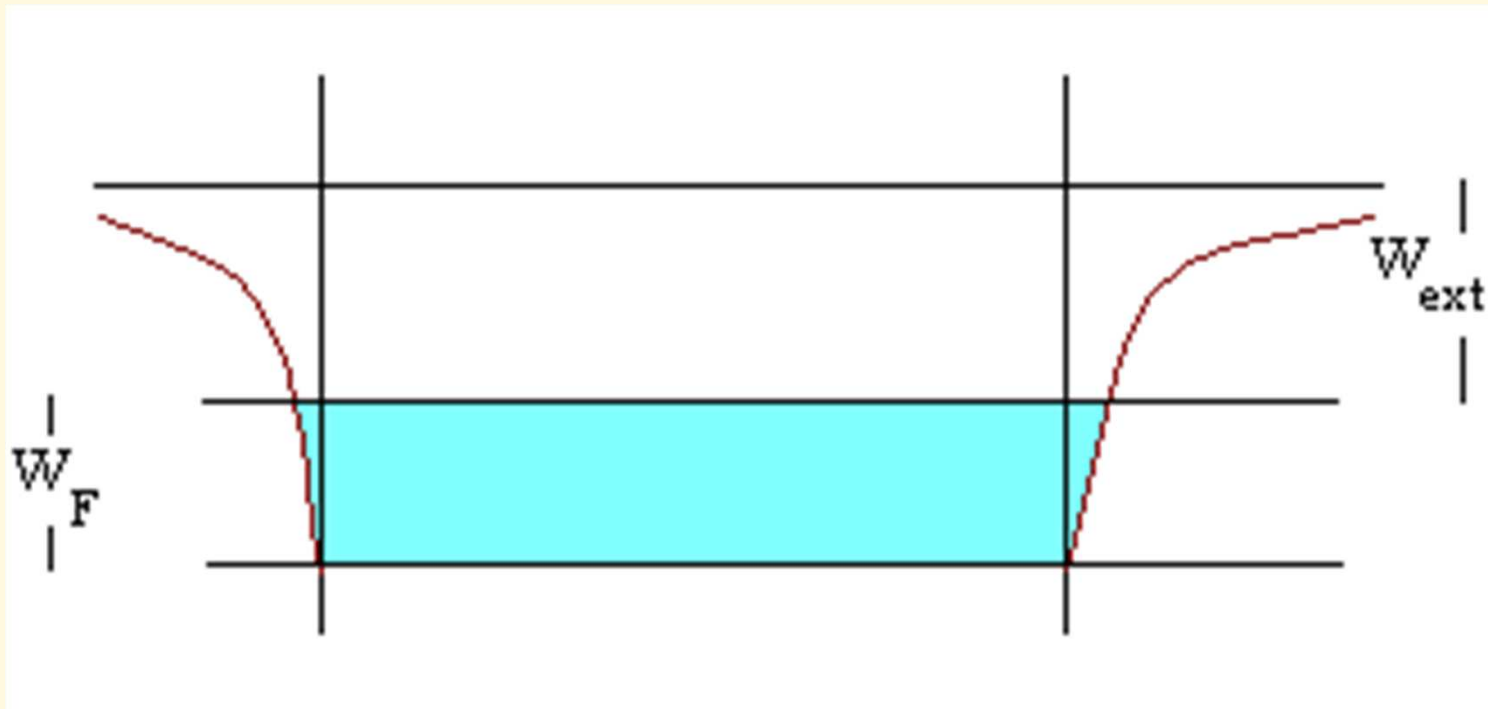
caso muy frecuente $\sigma = q_+ (n_+ \mu_+ + n_- \mu_-)$

El modelo del gas de electrones libres

$$W = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$



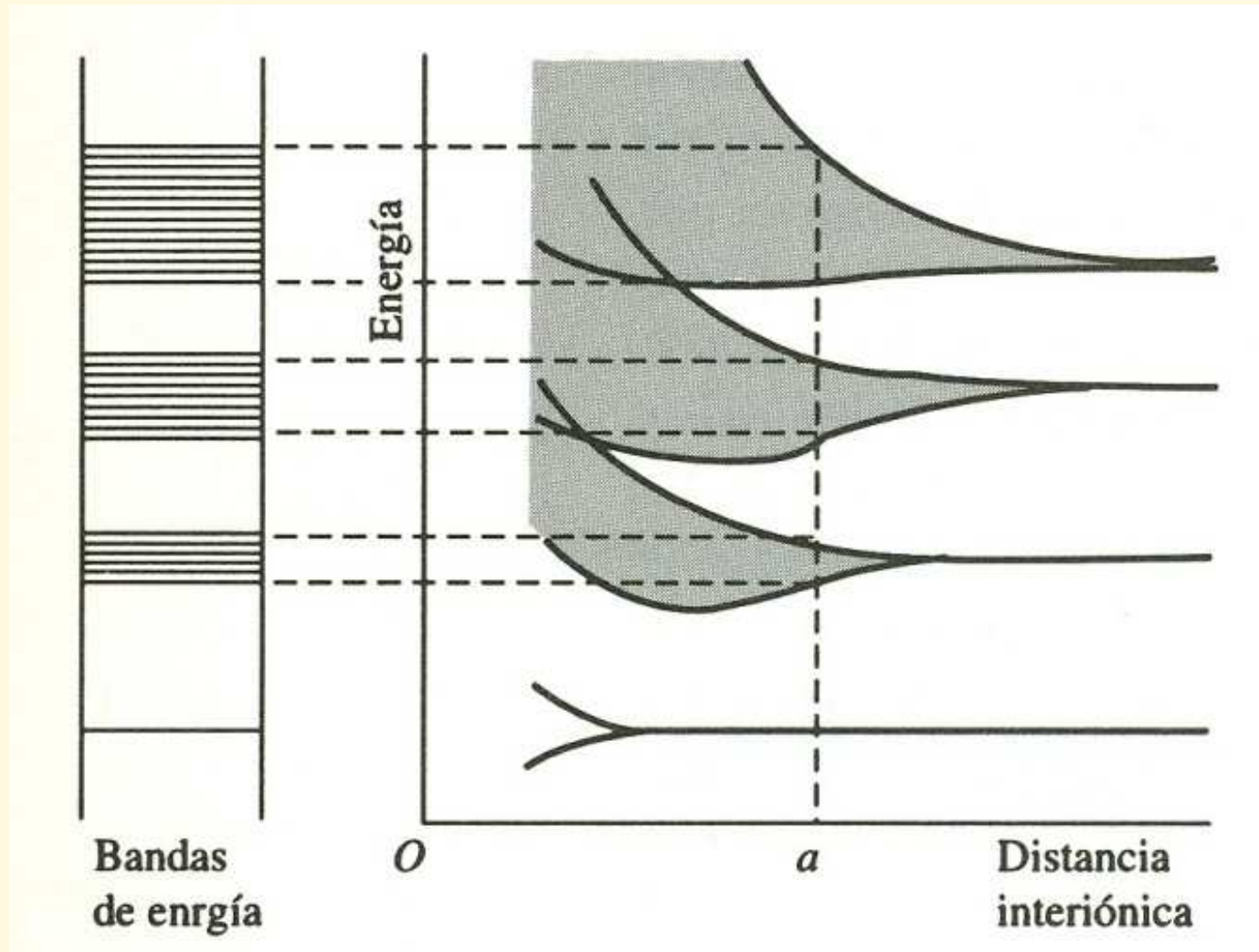
El modelo del gas de electrones libres



El **trabajo de extracción** se define como la energía mínima para sacar un electrón del metal.

La **energía de Fermi o potencial Químico** es la máxima energía que puede tener un electrón de conducción en el cero absoluto

El modelo de bandas

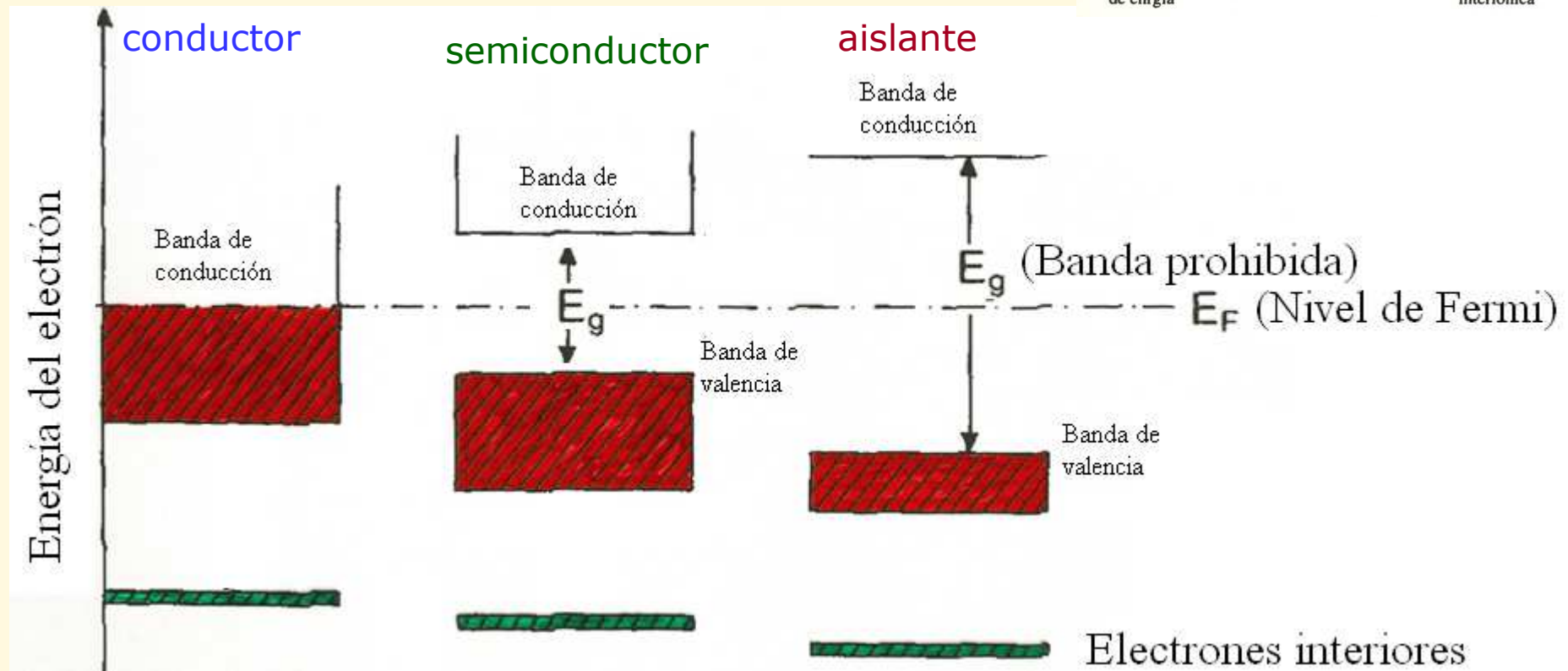
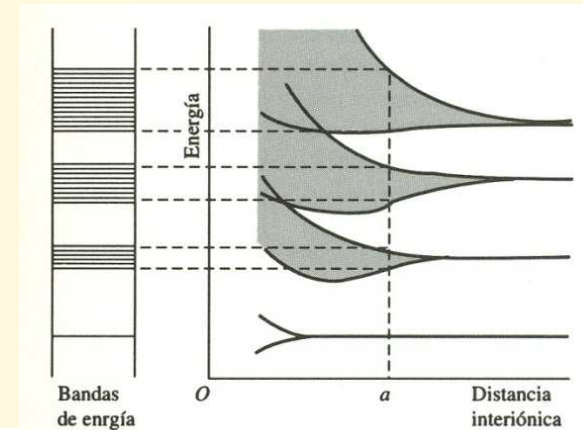


El número de niveles de energía permitidos dentro de cada banda depende de la densidad de átomos

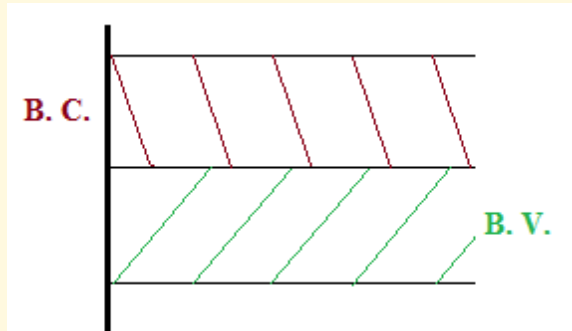
La anchura de las bandas depende de las distancias interatómicas.

El modelo de bandas

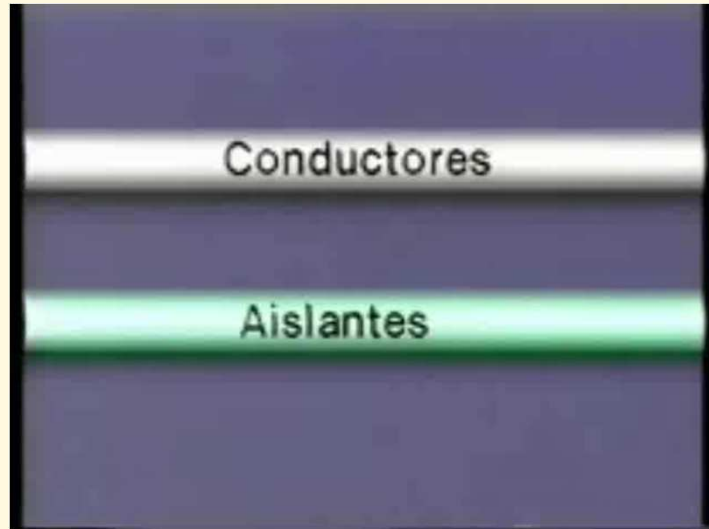
Esquema de la distribución de electrones en las bandas a 0 K según el tipo de material. Los estados ocupados están resaltados en color



Metales, semiconductores y aislantes



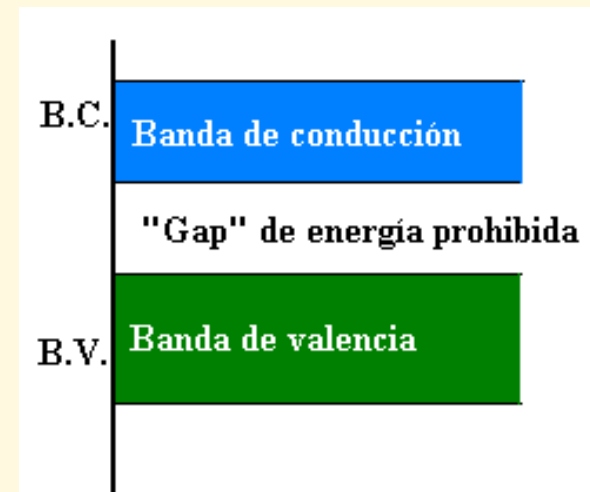
Esquema de bandas de un conductor



[Semiconductores 112](#)

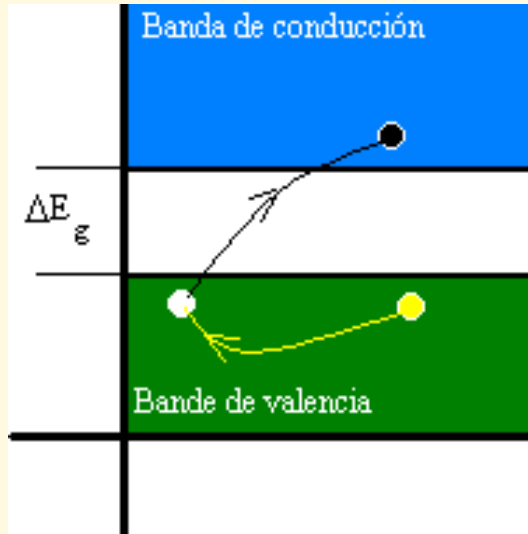
Para que un material conduzca es necesario que existan estados permitidos en la banda de conducción no ocupados y que existan electrones en esta banda, que por acción de un campo eléctrico, se muevan en ella ocupando estados permitidos vacíos.

La acción de un campo eléctrico a temperatura ambiente será comunicar a los electrones energía suficiente para que se muevan en el volumen del material en sentido opuesto al campo. El material conduce



Esquema de bandas de un no conductor

Conducción en semiconductores

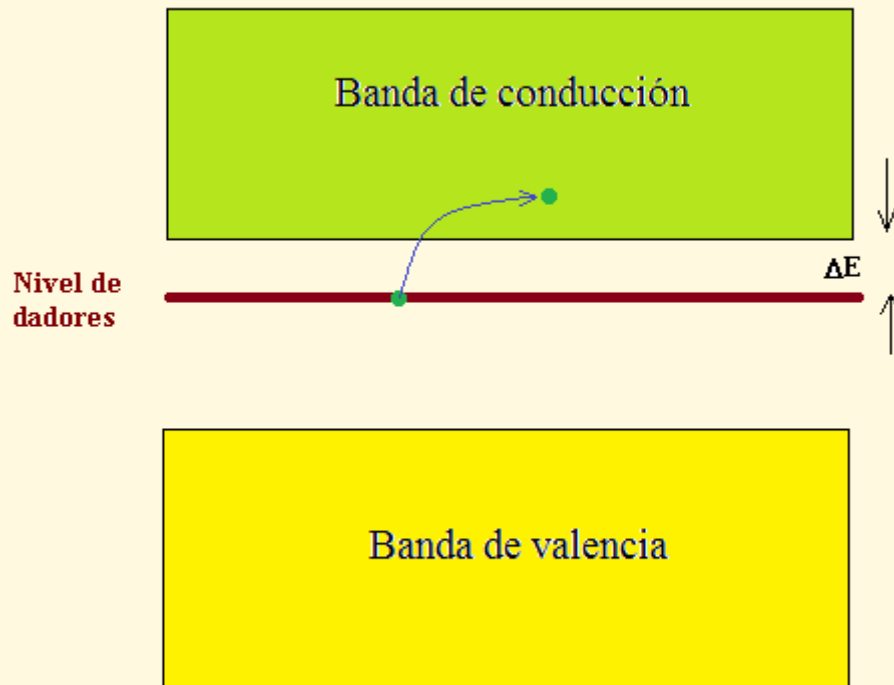


Los semiconductores, a bajas temperaturas tienen un esquema de bandas equivalentes al de los aisladores, pero el "gap" de energías prohibidas E_G es pequeño. Subiendo la temperatura, la energía térmica es capaz de hacer saltar electrones de la banda de valencia a la de conducción, con lo que estos materiales conducen, aunque sólo sea pobremente, la electricidad.

El salto del electrón provoca la aparición de un hueco, o defecto de un electrón, en **la banda de valencia**. Esta banda, **deja de estar totalmente llena y contribuye** por tanto **a la conducción**.

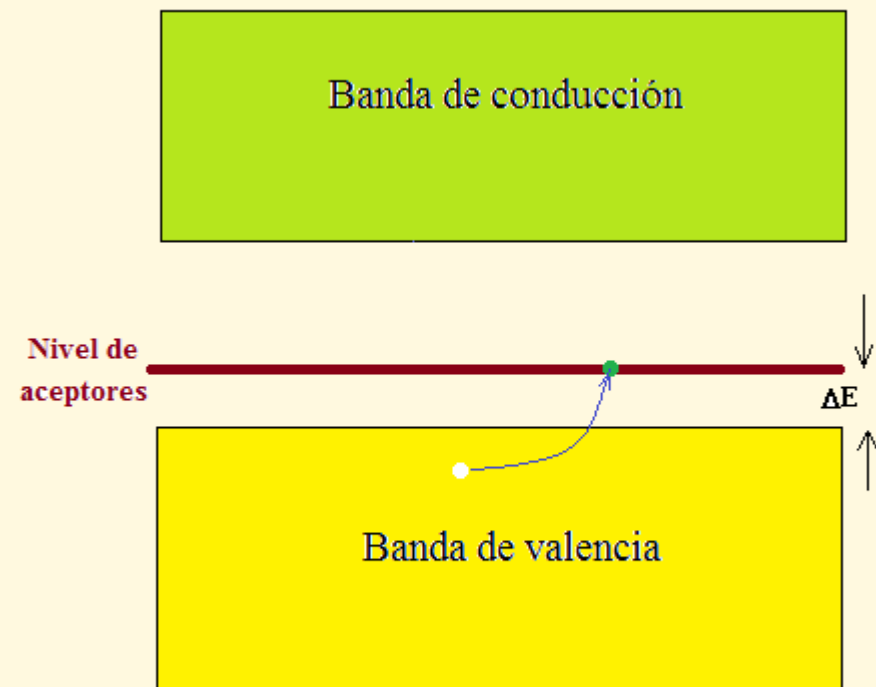
Ahora para describir el fenómeno de conducción los portadores que tendremos que considerar serán: los electrones en la banda de conducción, y los huecos en la banda de valencia

Conducción con dopado



Las impurezas ceden electrones que pasan a la banda de conducción

Los electrones de la banda de valencia con energía suficiente pasan al nivel de donadores y producen un hueco



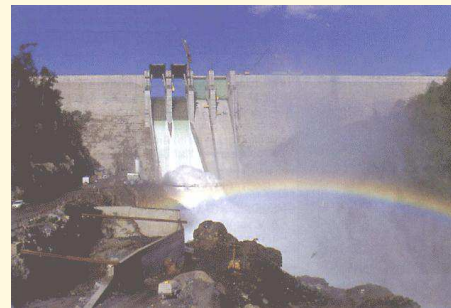
Magnitudes fundamentales

- Corriente eléctrica:
 - El movimiento de las cargas eléctricas en un conductor se conoce como **corriente eléctrica**
- Intensidad de corriente:
 - Nos mide la **cantidad de carga** eléctrica que atraviesa un punto de un conductor **en la unidad de tiempo**.
- ¿Por dónde se mueven las cargas?
 - Las cargas se mueven por los conductores eléctricos
- ¿Por qué se mueven las cargas?
 - Sólo se pueden mover si “alguien” les comunica energía: Los **generadores eléctricos**

Elementos de un circuito I

- **Elementos activos:**

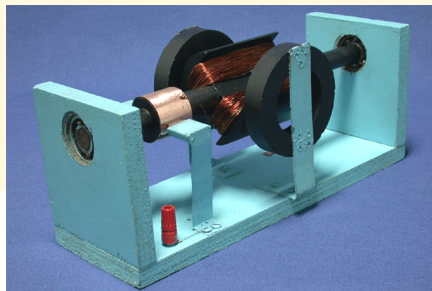
- Convierten cualquier forma de energía en energía eléctrica. **Generadores eléctricos.**
- Se caracterizan por su f.e.m. (ε)



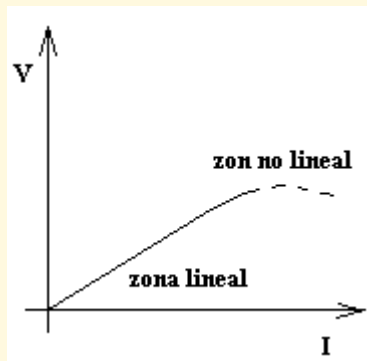
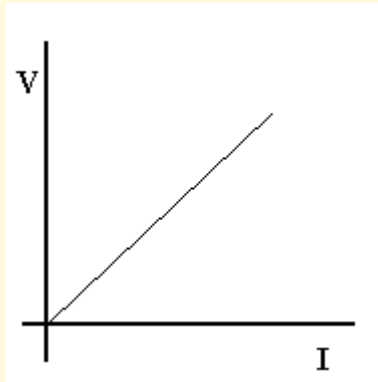
Elementos de un circuito II

- **Elementos pasivos**

- Convierten la energía eléctrica en otro tipo de energía
- Se caracterizan por su resistencia



La Ley de Ohm

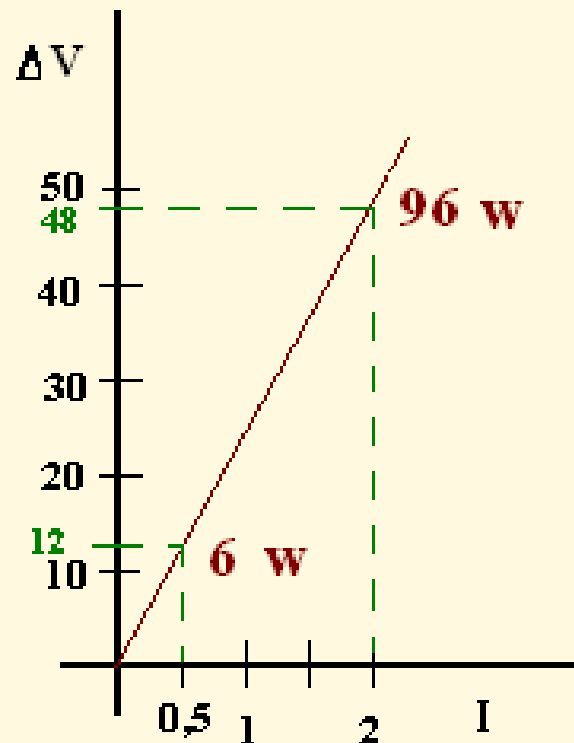


- Nos relaciona la causa, la f.e.m. del generador, con el efecto la corriente que pasa por el circuito.
- En el caso ideal:

$$\mathbf{V = I \times R}$$

Potencia en elementos pasivos

- Sabemos que: $Potencia = \frac{Energia}{Tiempo}$



- En ese elemento pasivo:
 - cuando le recorren 0,5 a, la ddp entre bornes es de 12 v, **disipa 6 w**
 - si le recorren 2 a, la ddp entre bornes es de 48 v, **disipa 96 w**

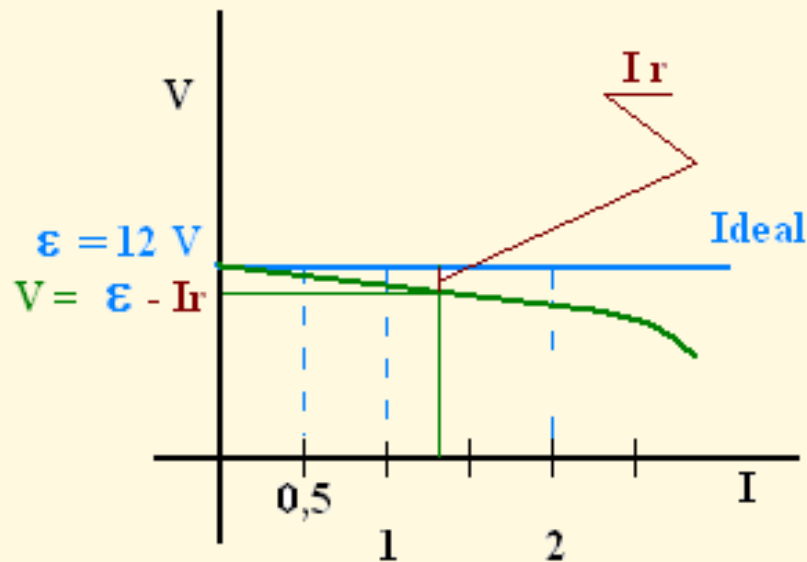
¿Es posible?

Existe una potencia máxima



Potencia en elementos activos

- Lo característico de una batería es proporcionar siempre la misma diferencia de potencial (ϵ)



- En ese elemento activo:
 - cuando le recorren 0,5 a, si es ideal, **disipa 6 w**
 - si le recorren 2 a, si es ideal, **disipa 24 w**

¿Es posible?

- En el caso real:

$$V = \epsilon - (I \times r)$$

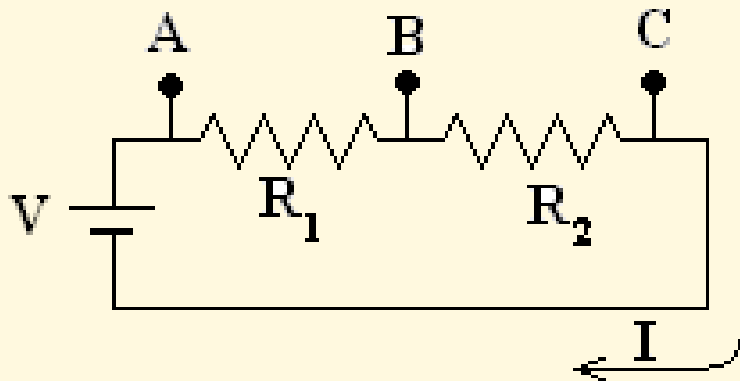


Asociación de resistencias I

- Resistencia equivalente
 - Es la resistencia que juega en el circuito el mismo papel que las resistencias que forman el circuito

Resistencias en serie

- Dos resistencias están en serie si las recorre la misma corriente



Si están recorridas por la misma intensidad:

$$V_A - V_B = I R_1 \text{ y } V_B - V_C = I R_2$$

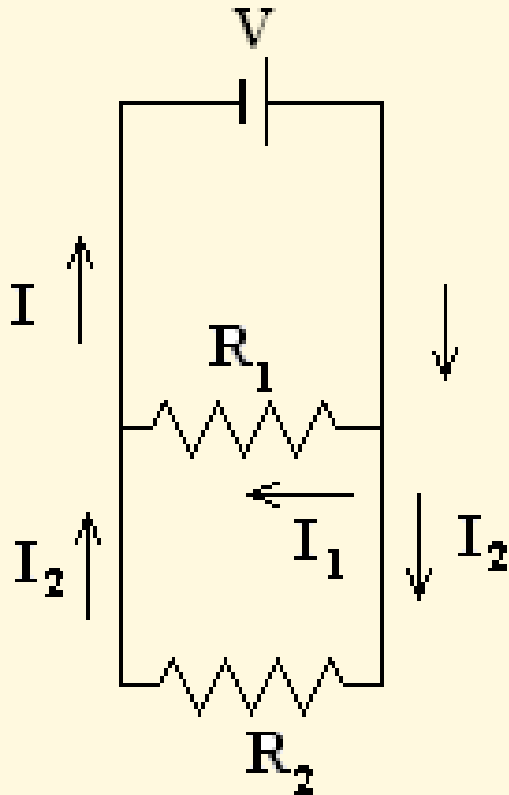
La resistencia equivalente deberá conseguir que al ser atravesada por "I" en sus bornes caiga $V_A - V_C$

es decir "V", luego:

$$R_{eq,s} = R_1 + R_2$$

Asociación de resistencias II

- Resistencias en paralelo
 - Dos resistencias están conectadas en paralelo si están sometidas a la misma diferencia de potencial



Si están sometidas a la misma tensión:

$$V = I_1 R_1 \text{ y } V = I_2 R_2$$

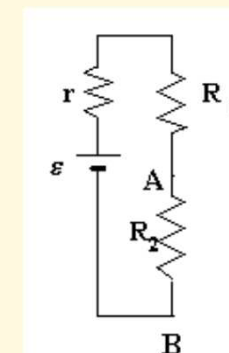
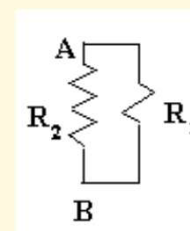
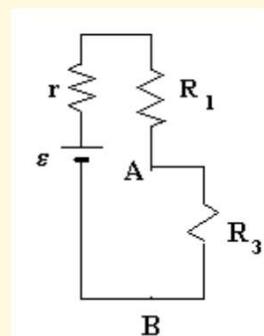
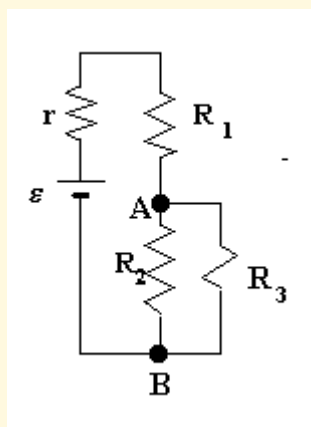
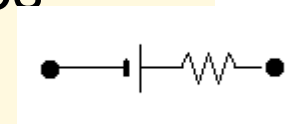
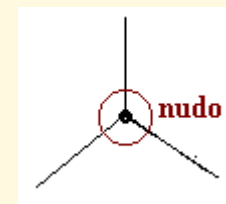
La resistencia equivalente deberá conseguir que al estar sometida a la tensión "V" por el circuito pase la corriente "I", que será la suma de las dos intensidades: $I = I_1 + I_2$

$$1/R_{eq} = (1/R_1) + (1/R_2)$$

Circuitos eléctricos I

Un circuito puede contener varios elementos activos y pasivos, que pueden conectarse entre si de diversas formas.

- ❑ Los puntos de conexión entre tres o más conductores se denominan **“nudos”**.
- ❑ El conjunto de elementos existentes entre dos nudos consecutivos, se denomina **“rama”**.
- ❑ Las figuras geométricas cerradas que se pueden formar en un circuito se denominan **“mallas”**.



Lemas de Kirchhoff

Lema de nudos:

La suma de las intensidades que llegan a un nudo es igual a la suma de las intensidades que salen de él.

$$\sum_j I_j = 0$$

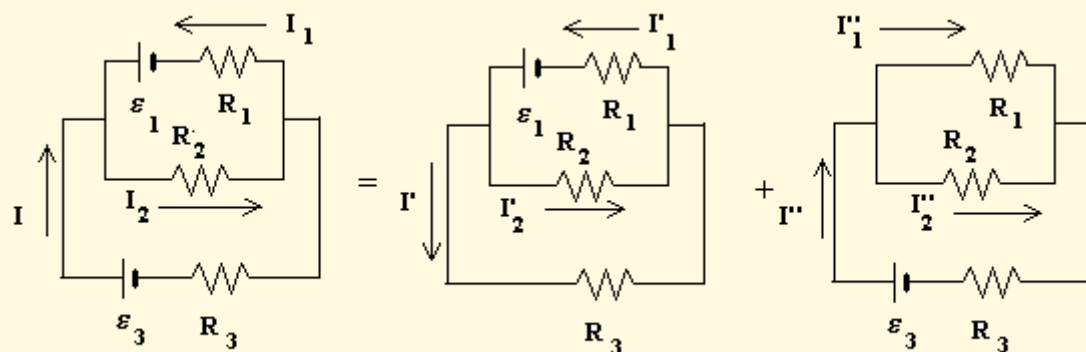
Lema de mallas:

En cada malla, la energía suministrada por los generadores es igual a la energía disipada los elementos pasivos

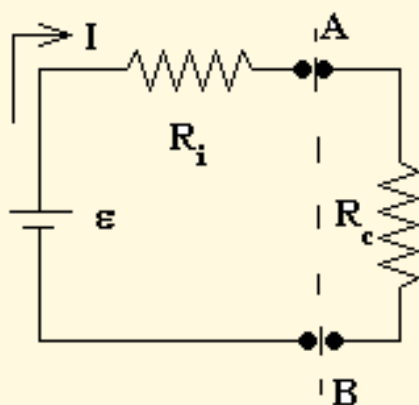
$$\sum_j \varepsilon_i = \sum_j R_i \cdot I_i$$

Circuitos eléctricos II

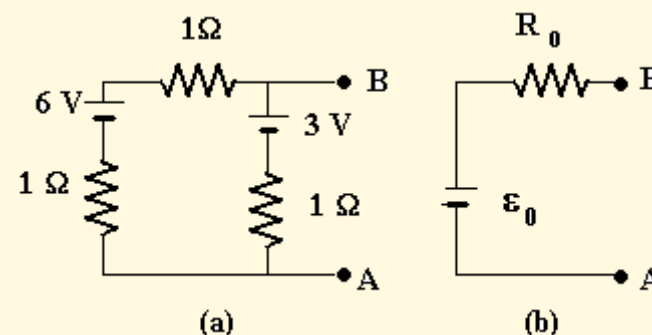
Principio de superposición



Teorema de Thevenin



Teorema de la máxima transmisión de potencia $R_i = R_c$





Universidad
de Alcalá

Tema 5º

Campos magnéticos
en el vacío

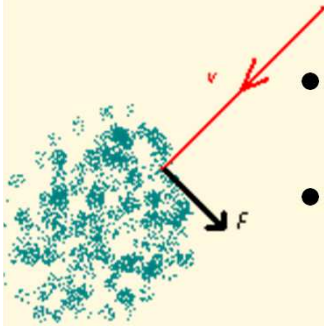
Programa

- Fuerza magnética sobre cargas en movimiento.
- Fuerza sobre una corriente.
- Acción magnética sobre una espira: momento magnético.
- Fuerzas entre corrientes. Ley de Biot y Savat.
- Ecuaciones del campo magnético: Ley de Ampere.
- Flujo.
- El fenómeno de la inducción magnética: Leyes de Faraday y Lenz.
- Coeficientes de inducción.

Fuerza sobre cargas en movimiento

Si existe campo magnético en una región e introducimos en ella una carga con una velocidad conocida, observamos:

- La carga se ve sometida a una fuerza perpendicular a la velocidad
- Si aumentamos el módulo de la velocidad, aumentará el módulo de la fuerza
- Si variamos la dirección de la velocidad, la fuerza es siempre perpendicular a la dirección de la velocidad y a otra, que es siempre la misma.
- Existe una dirección en la que la carga no sufre variación, que coincide con la dirección a la que la fuerza a sido siempre perpendicular



Lo que resumimos como $\vec{F} \propto q[\vec{v} \times \vec{u}_p]$

Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right)$$

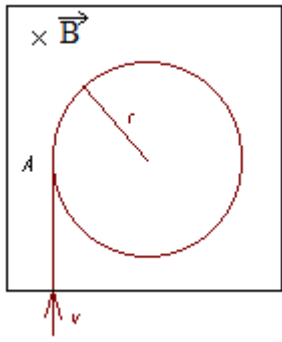
Cargas en movimiento

Si una carga se mueve en un campo magnético actúa una fuerza

$$\vec{F}_B = q [\vec{v} \times \vec{B}]$$

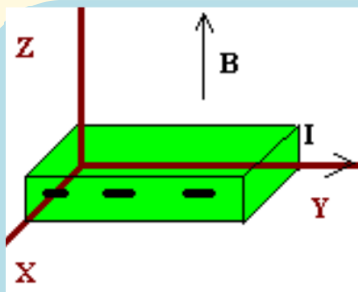
Siempre perpendicular a la velocidad, describirá una circunferencia de radio:

$$r = \frac{m |\vec{v}|}{q |\vec{B}|}$$



Efecto Hall

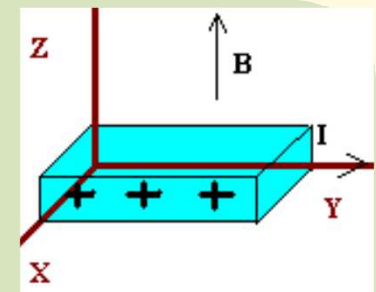
En una muestra paralelepípedica semiconductor por la que circula una corriente en el sentido positivo del eje "Y", que está situada en el interior de un campo magnético homogéneo paralelo al eje "Z".



Si la muestra es "n" la conducción se realiza por electrones, la velocidad de los portadores será de sentido contrario al de la corriente

Los electrones se verán empujados hacia la cara externa

Si la muestra es "p" la conducción se lleva a cabo por huecos ("cargas positivas") la velocidad de los portadores tendrá el mismo sentido que la corriente



Los portadores positivos se verán empujados hacia la cara externa

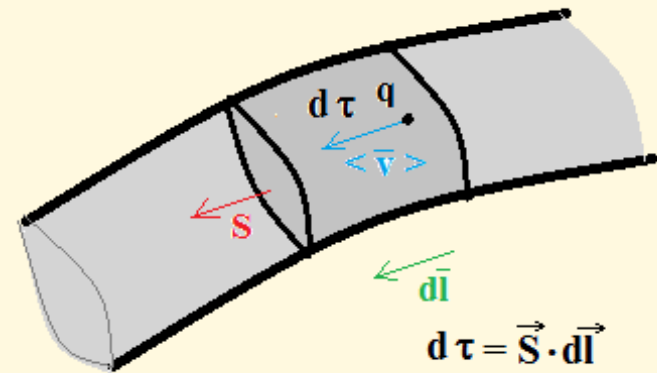
Campo magnético y corrientes

Fuerza sobre un elemento de corriente

Una corriente es un conjunto de cargas en movimiento. En el seno de un campo magnético, sobre cada portador actúa la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q[\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}]$.

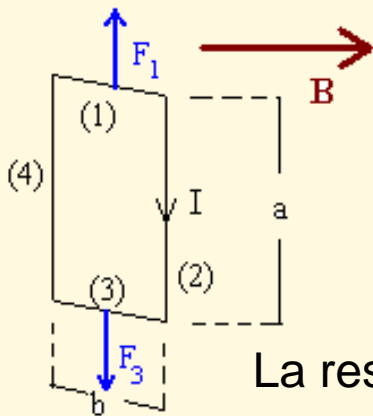
Sobre un volumen $d\tau$ que contiene "n" portadores por unidad de volumen actúa una fuerza: $d\vec{F} = \sum \vec{f} = n \cdot d\tau \cdot q[\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}]$. El paralelismo de los vectores velocidad promedio; superficie y longitud del elemento de volumen, permiten obtener :

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]$$



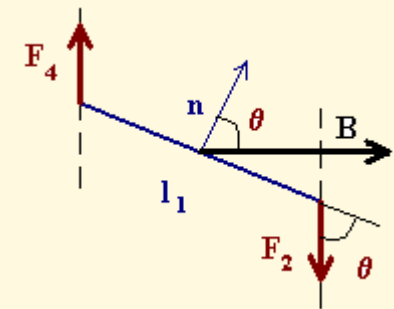
Momento magnético

Supongamos una espira rectangular de lados “a” y “b” recorrida por una corriente “I”, que se encuentra en un campo magnético de inducción \vec{B} .



Sobre cada lado actuará una fuerza $\vec{F} = I[\vec{l} \times \vec{B}]$, las fuerzas sobre los lados “1” y “3” se cancelarán. Las fuerzas sobre los lados “2” y “4”, cuyos módulos también serán los mismos, pero los vectores no estarán en la misma línea.

La resultante será nula, pero no el momento resultante, su módulo será: $|\vec{M}_R| = |\vec{l}_1 \times \vec{F}_2| = |\vec{l}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \sin\theta$, es decir: $\vec{M}_R = I(a \cdot b)[\vec{n} \times \vec{B}]$.



Lo que nos permite definir el momento magnético de la espira

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

que estará sometida a una momento mecánico $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

A un electrón en su órbita le asociamos un momento magnético relacionado con su momento angular por la razón giromagnética

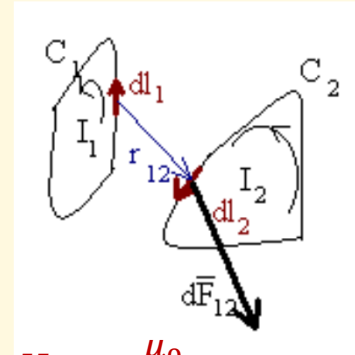
$$\gamma = \frac{|\vec{m}|}{|\vec{l}|}$$

Leyes fundamentales

Ley de Biot y Savat

Entre dos elementos de corriente aparece una fuerza

$$d^2\vec{F}_{1,2} = K_M I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times \vec{u}_{1,2}]}{r_{1,2}^2}$$



La constante magnética vale $10^7 \text{ N}\cdot\text{A}^{-2}$, y la escribimos como $K_M = \frac{\mu_0}{4\pi}$

Recordando la fuerza sobre un elemento de corriente, obtenemos para la inducción creada por un circuito

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{(I_1 d\vec{l}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Ley de Ampere

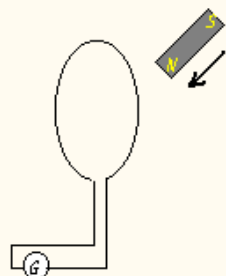
Nos da la circulación del vector inducción a través de una curva cualquiera

$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{\text{encerrada por "C"}}$ Si existe simetría y conocemos las líneas del campo puede ser muy útil para calcular el módulo de la inducción

Flujo del vector inducción magnética

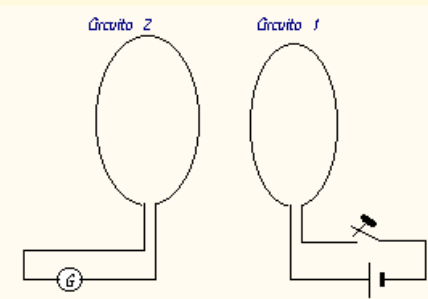
Las líneas de la inducción magnética son cerradas, $\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

Inducción

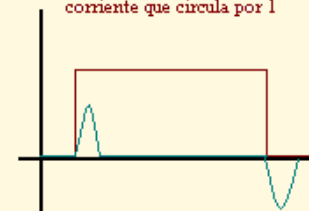


Al mover un imán en las cercanías de un circuito se induce una corriente, cuyo sentido será opuesto cuando se aleje

Experimento de Faraday "Cuando se hizo el contacto, se produjo un efecto repentino y muy leve en el galvanómetro y también hubo un efecto semejante, muy leve, cuando se interrumpió el contacto con la batería. Pero cuando la corriente voltaica pasaba por la primera hélice, no se observaba ninguna alteración galvanométrica, ni se podía observar ningún efecto de inducción sobre la otra hélice, aun cuando se había comprobado que el poder activo de la batería era muy grande".



corriente que circula por 1



corriente detectada en 2

Ley de Lenz: "La variación del flujo magnético que enlaza a un circuito produce una f.e.m. que se opone a la variación del flujo en él"

Ley de Faraday: "El valor de la f.e.m. coincide con la rapidez de variación del flujo magnético"

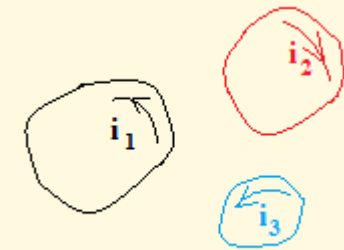
$$\varepsilon = - \frac{d\phi}{dt}$$

Recordando la definición de f.e.m. $\int_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Coeficientes de inducción

Si en las cercanías de un circuito, por el que pasa una corriente, se encuentran otros, el campo creado por cada uno atravesará a los demás.

De forma que: la inducción magnética debida a la corriente del circuito 1 en un punto cualquiera del **circuito 2**, o del **circuito 3**, depende del valor de la intensidad de la corriente i_1 , de la geometría propia del circuito 1 y la geometría relativa relativa del punto considerado en los circuitos **2** y **3** respecto del circuito 1



$$\vec{B}_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{(I_1 d\vec{l}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

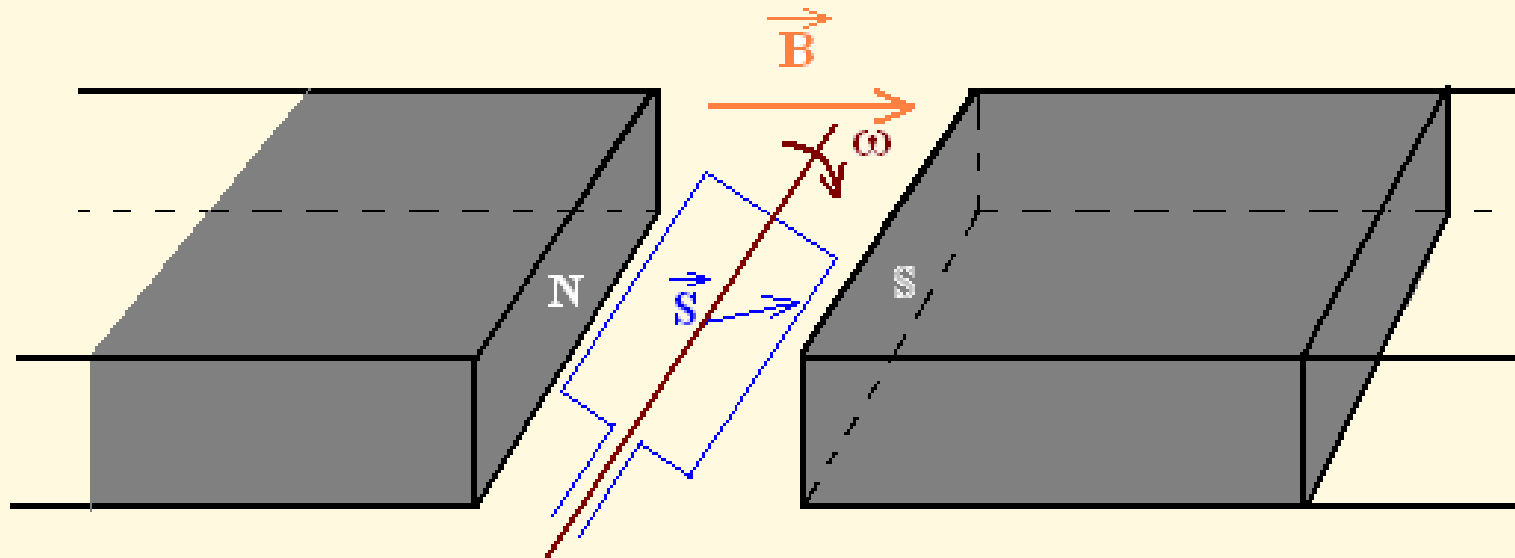
En consecuencia el flujo de la inducción magnética que atraviesa al circuito "i" debido a que por el "j" pasa corriente, será: $\phi_{ij} \propto i_j$. La constante de proporcionalidad dependerá exclusivamente de la geometría de los dos circuitos y de sus posiciones relativas y lo representaremos por M_{ij}

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} I_j \quad \text{Recordando la ley de Faraday} \quad \varepsilon_j = -\frac{d\phi_j}{dt} = -\sum_{i=1}^N M_{ij} \frac{dI_i}{dt}$$

Para un único circuito $\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$

Los coeficientes "L" y M_{ij} son los coeficiente de autoinducción e inducción mutua. Se miden en **henrios**

Generadores de alterna



El flujo del campo de inducción que atraviesa la espira será:

$$\phi = B \cdot S \cos \omega t$$

Lo que supone la aparición en la espira de una f.e.m. inducida $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$

Que podemos escribir como $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$

Sistema Internacional (SI)

Unidades básicas

Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Unidades básicas sin dimensión

Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresión en unidades SI básicas
Ángulo plano	Radián	rad	$\text{m m}^{-1} = 1$
Ángulo sólido	Estereorradián	sr	$\text{m}^2 \text{m}^{-2} = 1$

Sistema Internacional (SI)

Unidades derivadas

Magnitud	Nombre	Símbol o	Expresión en otras unidades SI	Expresión en unidades SI básicas
Frecuencia	hertz	Hz		s^{-1}
Fuerza	newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Presión	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energía, trabajo, cantidad de calor	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Potencia	watt	W	$J \cdot s^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Cantidad de electricidad carga eléctrica	coulomb	C		$s \cdot A$
Potencial eléctrico fuerza electromotriz	volt	V	$W \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Capacidad eléctrica	farad	F	$C \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Flujo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inducción magnética	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inductancia	henry	H	$Wb \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$

Sistema Internacional (SI)

Página oficial: <http://www.cem.es/sites/default/files/siu8edes.pdf>

Prefijos SI

Factor	Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	Kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Tema IV: Corriente eléctrica

Corriente y densidad de corriente eléctrica. La ecuación de continuidad. Corriente de conducción. Ley de Ohm. Propiedades de conducción en los materiales: Conductores, semiconductores y aislantes. Circuitos de corriente continua. Leyes de Kirchoff. Teoremas del análisis de redes: superposición, Thevenin y Norton.

Bibliografía: “Física”. Paul A. Tipler Ed. Reverté. “Física Universitaria”. Sears. Zemansky. Young Ed Addison-Wesley. “La naturaleza de las cosas”. Susan M. Lea. John Robert Burke Ed Paraninfo

Conocimientos previos: Nociones sobre los circuitos en corriente continua. Nociones sobre el fenómeno de la conducción eléctrica y el campo eléctrico.

Objetivos: Diferenciar elemento activos de pasivo en un circuito de corriente continua, desde el punto de vista energético. Conocer el significado de los parámetros que caracterizan los elementos de un circuito de corriente continua. Aplicar las leyes de los circuitos al análisis de los mismos. Fijar los conceptos de: densidad de corriente, campo eléctrico no conservativo, conductividad y resistividad. Dar información sobre los procesos de conducción en los distintos medios materiales.

Hasta ahora hemos tratado con cargas eléctricas en reposo, y hemos considerado los efectos que producían sobre otras cargas o asociaciones de cargas o el comportamiento de los campos que generaban. Vamos ahora a considerar cargas que se mueven para caracterizarlas y entender algunos de los efectos que producen y cuales son las causas que provocan ese movimiento.

Corriente y densidad de corriente eléctrica.

El movimiento de las cargas es lo que conocemos como corriente eléctrica, y el proceso por el que se transporta la carga se denomina conducción. Para caracterizar este fenómeno, se define la magnitud **intensidad de corriente**, como la velocidad a la que se transporta la carga por un punto dado en un medio conductor. Representa, por tanto, la variación neta de la carga en el tiempo en un punto dado

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

La unidad empleada para medir esta nueva magnitud, la intensidad, serán culombios/segundo, que recibe el nombre de amperio.

Consideremos un medio conductor con un solo tipo de portador de carga, cada uno de los cuales posee una carga q , decimos esto pues a lo largo del tema veremos que existen conductores que tienen varios tipos de portadores de carga, que contiene “ n ” de ellos por unidad de volumen y supondremos que todos tienen la misma velocidad \vec{v} . Para calcular la corriente que atraviesa

una cierta superficie imaginaria “S” en su volumen, esto es la carga que pasa por ella en la unidad de tiempo, razonaremos de la siguiente manera.

Sea \vec{S} el vector que caracteriza la superficie a través de la cual fluye la corriente (fig. 1). En el intervalo de tiempo Δt , el espacio recorrido por cada portador es $\vec{v} \Delta t$, luego las cargas que

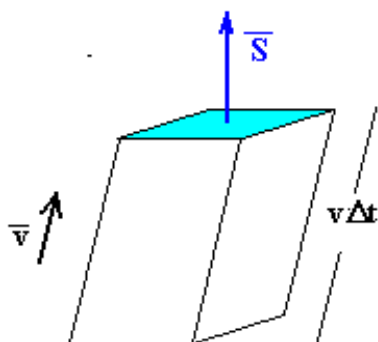


Figura 1

Los electrones contenidos en el paralelepípedo cuya área de la base es \vec{S} y su arista $\vec{v} \cdot \Delta t$ atravesarán

la superficie \vec{S} en el tiempo Δt

atravesarán la superficie en el intervalo Δt serán las contenidas inicialmente dentro del prisma oblicuo de la figura. El volumen del paralelepípedo será el producto escalar de los vectores superficie de la base y arista: $\vec{S} \cdot (\vec{v} \Delta t)$, por tanto, el número total (N) de partículas que se encuentran en este volumen será el producto del número de cargas por unidad de volumen del conductor “n” por el valor del volumen, es decir:

$$N = n [\vec{S}(\vec{v} \Delta t)], \text{ lo que supone una carga}$$

$$Q = n q \vec{S} (\vec{v} \Delta t)$$

la corriente a través de la superficie será:

$$I(S) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = q n \vec{S} \vec{v}$$

La expresión de $I(S)$ está formada por una parte característica del medio conductor que hemos considerado (la carga que poseen los portadores, el número de ellos por unidad de volumen y lo fácil o difícil que es para esos portadores moverse en el volumen del conductor) $q n \vec{v}$ y por otra parte que la hemos fijado nosotros y es meramente geométrica, S . Para desglosar estas dos contribuciones introducimos una nueva magnitud, la densidad de corriente $\vec{J} = n q \vec{v}$, lo que nos permite escribir la intensidad en la forma

$$I = \vec{J} \cdot \vec{S}$$

La densidad de corriente la mediremos en amperios m^{-2} .

Para llegar a esta expresión, hemos considerado que las cargas atraviesan una superficie cualquiera “S”. Si queremos que nuestro resultado sea más fiable, debemos considerar una superficie diferencial, pues cuanto más pequeña sea la superficie que analicemos, serán más ciertas todas las aproximaciones que hemos realizado, de forma que de manera más general debemos escribir:

$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

A pesar de todo, en la práctica es difícil aceptar que todos los portadores tengan la misma velocidad \vec{v} . Es más realista interpretar la densidad de corriente en la forma:

$$\vec{J} = n q \langle \vec{v} \rangle$$

donde $\langle \vec{v} \rangle$ es el valor medio de la velocidad de arrastre de los portadores.

Sabemos, que la intensidad es la variación temporal de la carga que atraviesa un conductor, lo que expresaremos por: $i(t) = \frac{dQ}{dt}$. Consideremos un volumen “ τ ” cualquiera en el interior de

un conductor, en él existirá una carga $Q = \int_{\tau} \rho \, d\tau$, de modo que si por ese volumen circula una corriente podemos escribir $i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \, d\tau$, donde la derivada total de la carga se tiene que transformar en derivada parcial al depender la densidad de carga también de la posición en la que nos encontremos.

Si en ese volumen queremos relacionar la intensidad de corriente que lo atraviesa, con la densidad de corriente escribiremos: $i(t) = -\oint_{\Sigma} \vec{J} \, d\vec{s}$, siendo “ Σ ” la superficie que cierra el volumen “ τ ” que estamos considerando, e indicando el signo negativo que el sentido del vector superficie es en todos los puntos hacia el exterior del volumen. La propiedad transitiva de la igualdad, nos permite obtener la **ecuación de continuidad**:

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \, d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \, d\tau$$

siendo, como hemos dicho, τ el volumen limitado por la superficie Σ .

De la expresión anterior se desprende que si no existe variación temporal de la densidad de carga (por cada carga que sale del volumen entra una nueva) la densidad de corriente será una constante lo que se conoce como corriente estacionaria,.

Corriente de conducción. Ley de Ohm

Acabamos de introducir el concepto de corriente eléctrica como el movimiento a lo largo de una dirección de portadores de carga, generalmente electrones, en el volumen de un conductor. Está claro que si los electrones se mueven dentro del volumen de un conductor es porque existe una fuerza que los pone en movimiento en su propia dirección y aunque “choquen” con otros electrones o con los átomos que constituyen el material, mantienen esa velocidad promedio de la que hemos hablado. Según sabemos, un campo eléctrico ejerce sobre las cargas una fuerza en su dirección (será en el mismo sentido si son cargas positivas y en sentido contrario si son cargas negativas) podemos por tanto establecer una relación causa efecto entre el campo eléctrico y la corriente que aparece, que escribiremos de la forma:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

que se conoce como ley de Ohm.

La constante de proporcionalidad, que depende del conductor, la denominaremos conductividad del medio y se medirá en $\frac{A \, m^{-2}}{V \, m^{-1}}$ que

se denomina siemens m^{-1} (la implantación del siemens como unidad de conductividad es menor, se sigue usando el $\Omega^{-1} m^{-1}$). Cabe esperar, que en el caso general la dependencia sea complicada, por

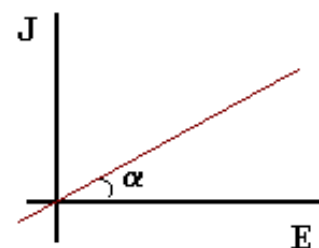


Figura 2

Si el conductor es lineal la densidad de corriente y el campo eléctrico tendrán una variación como la representada

lo que vamos a centrarnos en el caso más simple, aunque de gran significación práctica, los medios lineales homogéneos e isotropos.

- **Un medio lineal**, es aquel que presenta una relación lineal entre la densidad de corriente y el campo como la representada en la figura 2, lo que permite hablar de una conductividad σ cuyo valor, al ser independiente del campo, será $\sigma = \tan \alpha$.

- **Un medio es homogéneo** si presenta las mismas propiedades en todos sus puntos. En nuestro caso equivale a indicar que σ no depende de la posición.

- **Un medio es isotrópico** si sus propiedades son las mismas en todas las direcciones, esto es, si no existen direcciones privilegiadas como ocurre, por ejemplo, en los materiales amorfos. En estas condiciones la conductividad es una magnitud escalar.

Por tanto para medios conductores lineales, homogéneos e isotropos, el parámetro que caracteriza macroscópicamente su comportamiento conductor, será la “constante” conductividad (σ).

Vamos a dar una forma conocida a la Ley de Ohm que acabamos de escribir, para ello vamos a hacer uso de nuestra experiencia con los fenómenos de conducción, que seguro tiene que ver con la conducción de la corriente eléctrica doméstica. Consideremos un conductor filiforme, en él tanto el campo eléctrico como la densidad de corriente y el vector superficie tienen la misma dirección en todos los puntos, por tanto el producto escalar del vector densidad de corriente por el vector superficie transversal del hilo será el producto de los módulos, con lo que podemos prescindir del carácter vectorial de estas magnitudes y trabajar exclusivamente con sus módulos y los signos que correspondan. De la definición de intensidad obtenemos $I = \vec{J} \cdot \vec{S} = J S = \sigma E S$

$= \sigma \frac{\Delta V}{L} S$, Siendo ΔV a la diferencia de potencial que genera el campo eléctrico y “L” la

longitud del hilo conductor. La expresión anterior $I = \sigma \frac{\Delta V}{L} S$ la podemos reordenar, separando las magnitudes que dependen del material del que esté constituido el conductor y obtenemos $I = \sigma \frac{S}{L} \Delta V$ de donde

$$\Delta V = \left(\frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} \right) I$$

la magnitud entre paréntesis se conoce como resistencia del hilo conductor “R”, que se medirá en ohmios. Todo ello nos permite escribir

$$\Delta V = R I$$

que se conoce como ley de Ohm para los circuitos eléctricos.

La resistencia del conductor que hemos introducido, normalmente se escribe como: $R = \rho \frac{L}{S}$,

donde hemos introducido una nueva magnitud la resistividad del material “ ρ ” cuya unidad en el S.I. será (voltio metro)/ amperio, o simplemente ohmio metro ($\Omega \cdot m$). Esta claro que la

resistividad “ ρ ” es la inversa de la conductividad “ σ ”, y por tanto también lo serán sus unidades, de ahí que como ya hemos dicho más arriba aún hoy, es muy normal encontrarnos conductividades expresadas en $\text{ohmio}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, que muchas veces lo encontraremos escrito como $\text{mho} \cdot \text{m}^{-1}$.

En general la resistividad (o la conductividad) depende de la temperatura de diferente forma, según sea la naturaleza del conductor, por eso se define el coeficiente térmico de la resistividad (en terminología inglesa, RTC), como:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$$

Si la resistividad aumenta con la temperatura, este coeficiente será positivo (resistencia PTC), como ocurre en los metales, y si disminuye, esto es, si la conductividad disminuye cuando aumenta la temperatura, el coeficiente será negativo (resistencias NTC), como ocurre en los semiconductores.

Normalmente, para metales, se toma una temperatura de referencia, T_0 , y empleando el valor de la resistividad a esta temperatura, ρ_0 , se utiliza

$$\alpha_0 = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{d\rho}{dT} \right]_{T=T_0}$$

Para pequeñas variaciones, $T - T_0$, de la temperatura se puede considerar que la resistividad varía con la temperatura en la forma: $\rho = \rho_0 [1 + \alpha_0 (T - T_0)]$. Para intervalos mayores se recurre a una expresión más general:

$$\rho = a + b T + c T^2 + \dots$$

Problema 1.- La variación de la resistividad del cobre puro con la temperatura viene dada en la siguiente tabla. Calcular el coeficiente térmico de la resistividad para el cobre.

$\rho \times 10^8 \, \Omega \times \text{m}$	T (K)
0,583	125
0,916	175
1,25	225
1,59	275

Tabla 1

Como no nos dan temperatura respecto de la que referir el coeficiente térmico, lo haremos respecto de la mayor, que es prácticamente el cero Celsius.

Al ser unos datos numéricos no podemos calcular la derivada de la resistividad respecto de la temperatura, debemos por tanto hacerlo como el incremento de la resistividad dividido por el incremento de la temperatura para dos valores de esta. Tomando los valores correspondientes a las temperaturas 275 K y 125 K, tenemos:

$$\alpha = \frac{1}{\rho_{275}} \left[\frac{\Delta\rho}{\Delta T} \right] = \frac{1}{1,59 \times 10^{-8}} \frac{1,59 \times 10^{-8} - 0,583 \times 10^{-8}}{275 - 125}$$

$$= 4,22 \times 10^{-3} \, \text{K}^{-1}$$

Tomemos ahora las temperaturas 275 K y 175 K:

$$\alpha = \frac{1}{1,59 \times 10^{-8}} \frac{1,59 \times 10^{-8} - 0,916 \times 10^{-8}}{275 - 175} = 4,24 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Tomando ahora la pareja de datos que nos falta tenemos:

$$\alpha = \frac{1}{1,59 \times 10^{-8}} \frac{1,59 \times 10^{-8} - 1,25 \times 10^{-8}}{275 - 225} = 4,28 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Como vemos el resultado es el mismo en los tres casos (la diferencia, en el caso más desfavorable, es del orden de 8 centésimas en 4 unidades, es decir de 8 en 400, del 2%).

En los semiconductores, como su conductividad varía con la temperatura de forma exponencial según una ley del tipo $\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_A}{kT}}$, los resultados serán completamente distintos, si bien la mecánica de cálculo y los principios empleados serán idénticos, obteniéndose resultados como una mayor conductividad al aumentar la temperatura.

Propiedades de conducción en los materiales: Conductores, semiconductores y aislantes

Pasemos ahora al estudio microscópico de la conducción. Sabemos que la corriente se puede entender como el arrastre por un campo eléctrico de unos “portadores” de carga como son los electrones (conductores electrónicos como metales y semiconductores) o los cationes y aniones (conductores iónicos como por ejemplo los electrolitos y los gases ionizados).

En ausencia de campo los portadores están sometidos a un movimiento totalmente desordenado consecuencia de la agitación térmica (los portadores se van a comportar como las moléculas de un gas, que tienen una energía cinética promedio que depende de la temperatura absoluta, pero su dirección y sentido están distribuidos totalmente al azar) Al aplicar un campo eléctrico un portador de carga “q” y masa “m” estará sometido a una aceleración:

$$a = \frac{F_{\text{eléctrica}}}{m} = \frac{q E}{m}$$

siendo ahora la velocidad de cada portador suma de dos términos, el correspondiente a la agitación térmica, v_{ter} , que por ser totalmente al azar no dará lugar a un transporte neto de carga en ninguna dirección, y la velocidad de arrastre por el campo, v_{arr} , que por ser ordenada (en la dirección del campo eléctrico aplicado) dará lugar a una corriente eléctrica de densidad, en su misma dirección cuyo valor será:

$$J = n q v_{\text{arr}}$$

Si el portador no está sometido a ningún tipo de oposición al movimiento ordenado, su velocidad, y en consecuencia la corriente, aumentará con el tiempo, $v_{\text{arr}} = a t$. Sin embargo, sabemos que al aplicar una batería a un conductor se produce una corriente estacionaria, cuyo valor nos lo da la ley de Ohm, de forma instantánea prácticamente y que este valor se mantiene mientras el campo se mantenga constante. Para resolver esta aparente contradicción se aceptó como aproximación la existencia del tiempo de relajación “ τ ” que es una característica del proceso de frenado u oposición al movimiento de arrastre de los portadores y que permite poner:

$$v_{arr} = a \tau = \frac{q E}{m} \tau$$

siendo en consecuencia

$$J = \frac{n q^2}{m} \tau \cdot E$$

Para materiales isótropos el tiempo de relajación coincide con el tiempo libre medio entre colisiones.

Introducido el tiempo de relación τ como parámetro característico a escala microscópica de un medio conductor, vemos a introducir ahora otro parámetro, la movilidad " μ " de un portador que definimos como la relación entre la velocidad estacionaria de arrastre que adquiere y el módulo del campo que actúa sobre el mismo.

$$v_{arr} = \mu E$$

resultando la relación entre ambos parámetros microscópicos

$$\mu = \frac{q}{m} \tau$$

La movilidad en el S.I. se mide en $m^2 V^{-1} s$. Conviene hacer notar que la relación vectorial

$$\vec{v}_{arr} = \mu \vec{E}$$

implica que μ es negativa para portadores con carga negativa, y positiva para los portadores positivos.

Para terminar vamos a relacionar el parámetro macroscópico conductividad, con el microscópico movilidad, ya que recogiendo las últimas relaciones

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = n q \vec{v} = n q \mu \vec{E}$$

para conducción debida a un solo tipo de portador, resultando:

$$\sigma = n q \mu$$

Si tenemos varios tipos de portadores obtenemos:

$$\sigma = \sum_i n_i q_i \mu_i$$

Para el caso frecuente, de tener sólo dos tipos de portadores, de cargas iguales y opuestas, $q_- = -q_+$, tomando las movilidades en valor absoluto se tiene la expresión

$$\sigma = q_+ (n_+ \mu_+ + n_- \mu_-)$$

ya que el producto $q \mu$ es siempre positivo, tanto para portadores de carga positiva como negativa.

Problema 2.- Por un hilo de cobre pasa una densidad de corriente de $10^3 A/m^2$. Suponiendo que cada átomo contribuye a la conducción con un electrón.

a) Calcular la velocidad de arrastre electrónica correspondiente a esta densidad de corriente.

Utilizando la conductividad observada ($5.9 \times 10^7 mho m^{-1}$).

b) Calcular el tiempo medio de colisión para el electrón de cobre.

c) Si la temperatura es de 27° C. Comparar la velocidad térmica a esta temperatura con la obtenida en el primer apartado.

Peso atómico del cobre 63.6. Densidad del cobre 8.92 gr/cm³. Número de Avogadro 6.02 × 10²³. Constante de Boltzmann 1.38 × 10⁻²³ J K⁻¹

Datos

Apartado a)

Densidad de corriente (J) = 10³ A m⁻²

Carga de los portadores (electrones) $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C

Peso atómico del Cu (M) = 63.6

Densidad del Cu (d) = 8.92 g cm⁻³ = 8.92 × 10³ kg m⁻³

Número de Avogadro (N_A) = 6.02 × 10²³

Sabemos que la densidad de corriente cumple: $\vec{J} = nq\langle\vec{v}\rangle$. Como nos hablan de un hilo conductor, los vectores densidad de corriente y superficie son dos vectores paralelos, lo que nos permite escribir: $J = nq\langle v \rangle$. De la expresión anterior, conocemos: el valor de la densidad de corriente, la carga de los portadores y para poder calcular la velocidad de arrastre nos hace falta conocer el número de portadores por unidad de volumen de la muestra.

Para calcular el número de portadores recordaremos que un mol de una sustancia tiene un número de moléculas iguales al número de Avogadro, como nos dicen que cada átomo de Cu contribuye a la conducción con un único electrón, el número de moléculas (que coincide con el de átomos al ser una molécula monoatómica) será a su vez el número de portadores.

Por tanto n (número de portadores / unidad de volumen) = número de átomos / unidad de volumen =

$$= \frac{\text{numero de moléculas}}{\text{unidad de volumen}} = \frac{\text{numero de moles} \times N_A}{\text{unidad de volumen}} = \frac{\frac{\text{masa}}{\text{masa molecular}} \times N_A}{\text{unidad de volumen}} = \frac{\text{densidad}}{\text{masa molecular}} \times N_A.$$

$$n = \frac{d}{M} \times N_A = 8.45 \times 10^{28} \text{ portadores m}^{-3}$$

$$\text{Luego la velocidad } \langle v \rangle = \frac{J}{nq} = 7.4 \times 10^{-8} \text{ m s}^{-1}$$

$$\langle v \rangle = 7.4 \times 10^{-8} \text{ m s}^{-1}$$

b) Conductividad (σ) = 5.9 × 10⁷ mho m⁻¹

Sabemos que la conductividad es: $\sigma = nq\mu$, siendo μ la movilidad de los portadores, que está relacionada con el

tiempo medio de colisión “ τ ”, por la expresión: $\mu = \frac{q}{m}\tau$, por tanto: $\tau = \frac{m\sigma}{nq^2} = 2.5 \times 10^{-14}$ s

$$\tau = 2.5 \times 10^{-14} \text{ s}$$

c) Temperatura de la muestra $T = 300$ K

Sabemos que la temperatura de la muestra se refleja por la velocidad de los portadores y que se cumple que la energía

térmica del sistema es su energía cinética: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$; por tanto: $v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, sustituyendo valores obtenemos:
 $v_T = 1.18 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$

Que si la comparamos con la de arrastre debida a la conducción $\langle v \rangle = 7.4 \times 10^{-8} \text{ m s}^{-1}$, observamos que existen ocho órdenes de magnitud de diferencia a favor de la velocidad térmica. ¿Cómo puede existir conducción si la velocidad térmica es mucho mayor que la de arrastre?. La respuesta es fácil si bien la velocidad al azar es mucho mayor, la de conducción al tener siempre en la misma dirección y sentido supone un fenómeno continuo.

Problema propuesto.

Calcular la conductividad de una disolución acuosa de cloruro sódico 0,1 N si las movilidades de los iones en disolución acuosa son $45,1 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ y $61,9 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ para los iones sodio y cloruro respectivamente y se supone totalmente ionizado el soluto.

Veamos con algún modelo sencillo como podemos explicar el comportamiento de los distintos materiales frente al fenómeno de la conducción, para lo que utilizaremos dos modelos dos formas de explicar la realidad, para poder entender comportamientos distintos de los distintos medios materiales. Empezaremos con el modelo del gas de electrones libres para metales, para continuar con los modelos de bandas energía que son más útiles a la hora de explicar el comportamiento de dieléctricos y semiconductores.

El modelo del gas de electrones para metales

Para interpretar la elevada conductividad que presentan los metales, Drude (1900) propuso considerar estos materiales dotados de una gran concentración de electrones libres en su interior, aunque ligados al metal, en el sentido de no tener energía suficiente para abandonar su volumen, aunque si pueden moverse libremente en él.

Este modelo, que se conoce como modelo del gas electrónico, da una explicación aceptable de la realidad sin hacer uso de la Física Cuántica. Se supone que mientras los electrones más externos se pueden mover por el material, los internos permanecen ligados a los núcleos formando una red de iones positivos fijos entre los que se mueven los electrones externos.

Veamos el razonamiento completo con un ejemplo para fijar ideas. Consideremos un metal monovalente como es el sodio cuyo número átomo es 11, la

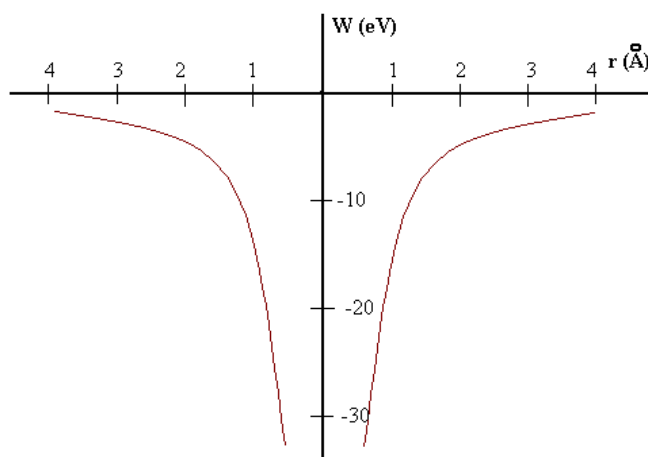


Figura 3

Distribución de la energía potencial del electrón en un átomo "hidrogenoide"

distribución de los once electrones de su corteza nos da una primera capa llena con dos electrones, una segunda llena con ocho electrones y una tercera capa en la que sólo existe un electrón, luego podemos considerar cada átomo de sodio como una carga positiva de 1 protón (suma de los +11 protones del núcleo con los -10 electrones de las capas internas) y un electrón girando en la órbita característica de la tercera capa. La visión "hidrogenoide" de este átomo polielectrónico (número atómico 11) consiste en considerar el electrón más externo (el décimo primero) y el ión positivo (carga +e) que supondremos fijo en el origen de coordenadas. La energía potencial de un electrón (carga -e) a una distancia "r" del ión positivo, situado en el origen, viene dada por el producto del valor del potencial debido al ión en "r", por la carga del electrón:

$$W = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r}$$

Luego al energía potencial del electrón varía con la inversa de la distancia al núcleo, para cualquier dirección del espacio. Sustituyendo valores obtenemos:

$$W = -\frac{14,4}{r} \text{ eV}$$

donde la energía viene expresada en "eV" (electrón-voltios) para "r" en Angström

Si ahora consideramos dos átomos iguales a una distancia suficientemente corta, por ejemplo 4Å , las curvas de energía potencial se superponen en la forma que se muestra en la figura 4.

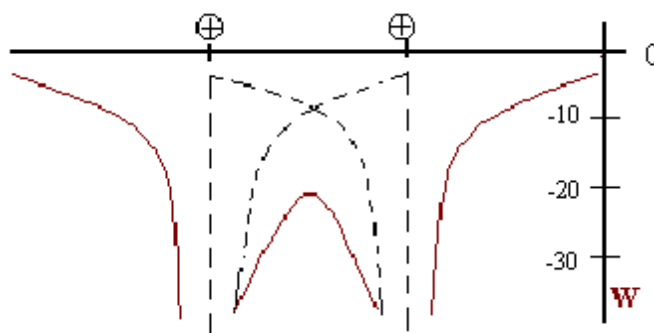


Figura 4

Distribución de la energía potencial de un electrón cuando están dos átomos hidrogenoides cercanos.

Considerando finalmente el sólido completo, tendríamos una distribución de energías como la que se muestra en la figura 5, obtenida como la superposición de las distribuciones de potencial debidas a los distintos "núcleos" situados en los puntos verdes de la figura.

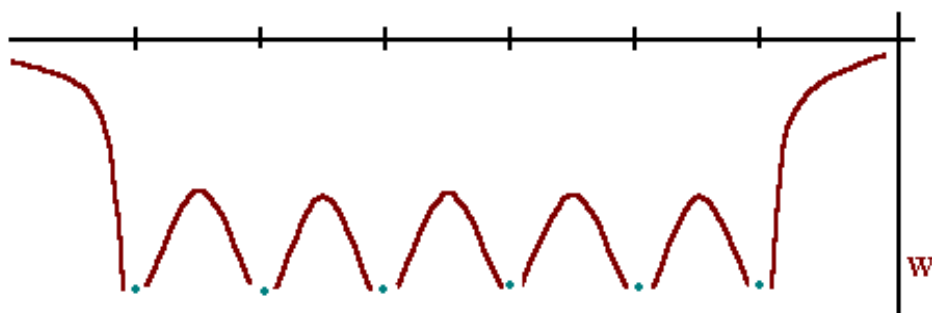


Figura 5

Distribución de energía potencial de los electrones en el seno de un metal.

Los electrones de conducción del metal serán los que tengan energías superiores a la correspondiente al "fondo" del pozo de potencial (valor de los máximos de potencial intermedios) por lo que se pueden mover libremente en el interior del metal. Para salir al exterior

necesitarán tener la energía suficiente para superar la barrera de potencial que existe en la superficie, lo que se puede favorecer aportando energía al sistema, bien calentando (emisión termoeléctrica), bien iluminando (emisión fotoeléctrica), aplicando un campo. La situación en ausencia de toda perturbación, por ejemplo a 0°K y en la oscuridad, es como se muestra en el esquema de la figura 6.

El trabajo de extracción W_{ext} se define como la energía mínima para sacar un electrón del metal y la energía de Fermi W_F , que es la energía máxima que puede tener un electrón de conducción en el cero absoluto, por ejemplo en el sodio

$$W_{\text{ext}} = 2,3 \text{ eV}; W_F = 3,12 \text{ eV}$$

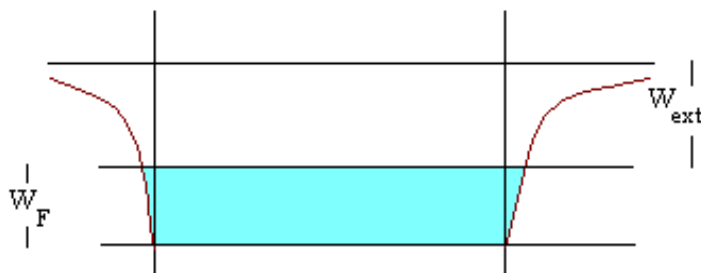


Figura 6

El modelo de bandas de energía.

W_F intervalo de energías ocupado por electrones de conducción

El modelo de bandas, responde a una teoría muy elaborada que ha servido de gran ayuda en la comprensión del comportamiento electrónico los materiales. Si bien su estudio detallado implica conocimientos de Física Cuántica, haremos una descripción del mismo empleando únicamente los conceptos más básicos que se deben poseer tras haber superado los estudios preuniversitarios.

Sabemos que en un átomo aislado sus electrones sólo pueden ocupar un cierto número de niveles de energía separados por grandes zonas de energías prohibidas que no pueden ser ocupadas como estados energéticos. Por eso cuando describimos la configuración electrónica de un átomo colocamos cada nuevo electrón de su corteza en un estado energético distinto ($1s^1$, $1s^2$, $2s^1$, $2s^2$, $2p^1$, $2p^2$...) y tantas veces como escribamos la configuración electrónica del mismo átomo tantas veces como escribiremos la misma estructura. Si consideramos un sólido, la proximidad entre átomos hace que se modifiquen ligeramente los valores de energía permitidos de forma que para cada posible "posición de un electrón aparecen varias posibles posiciones en los átomos

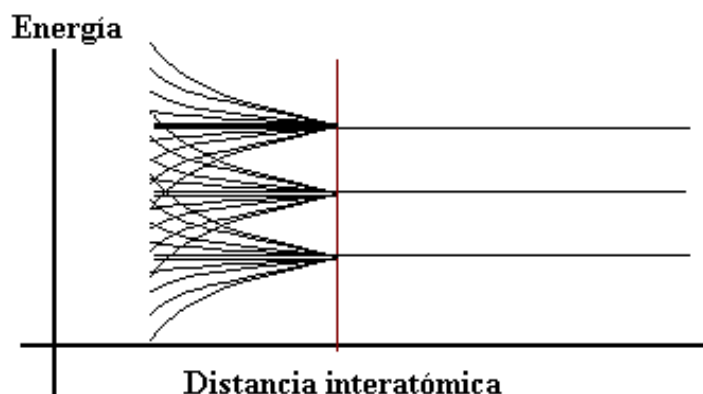


Figura 7

Representación esquemática de tres estados energéticos permitidos que se desdoblaron al acercarse átomos iguales

contiguos que pueden ser ocupadas por los electrones de ambos átomos, por lo que decimos que los niveles energéticos en ambos átomos "se han desdoblado". Como en un material la cantidad de átomos implicados es enorme, los desdoblamientos de los niveles permitidos forman bandas casi continuas de energías permitidas. Estos desdoblamientos dependen además directamente del solapamiento de las funciones de onda de los electrones, y serán tanto más importantes cuanto mayor sea la energía de los electrones, es decir,

cuan to más externos sean.

Se encuentra como hecho real, que apoya esta visión simplificada, que la anchura de las bandas depende de las distancias interatómicas y no de la densidad de átomos. La densidad de átomos influye en el número de niveles de energía permitidos dentro de cada banda, y como la cantidad de átomos en un material es tan elevada, estas bandas son prácticamente continuas.

Estas bandas de energías permitidas están separadas por espacios de energías prohibidas. Como en la conducción los posibles portadores en los que estamos interesados sólo son los de energías superiores, normalmente nuestro interés estará centrado en las dos bandas superiores que son las denominadas Banda de Valencia (BV) y Banda de Conducción (BC).

Acabamos de ver que en una banda existen diferentes posibles valores energéticos y, por tanto, cada uno de estos valores puede estar ocupado por un electrón. Cuando cada valor posible está ocupado por un electrón decimos que la banda está llena. Cuando existen valores no ocupados, los electrones de una banda pueden moverse entre los diferentes niveles.

Es un hecho interesante a destacar que si una banda está llena (todos sus niveles energéticos están ocupados) esa banda no contribuye a la conducción.

En efecto, para que hubiera posibilidad de conducción por los electrones de esa banda, estos deberían tener la posibilidad de pasar a niveles de energía superiores, energía que adquirirían del campo eléctrico, pero si están todos los niveles ocupados y la siguiente banda de energía está separada por una energía que no se puede cubrir por el campo actuante (caso normal), la energía aportada por el campo se invierte toda en colisiones con la red y no se efectúa conducción.

En forma análoga una banda completamente vacía, por lo mismo, no puede aportar nada a la conducción, no hay electrones que puedan aumentar su energía y moverse. En contraposición una banda parcialmente llena, contribuye a la conducción, pues sus electrones están capacitados para saltar a niveles de energía superiores, adquiriendo la energía del campo eléctrico.

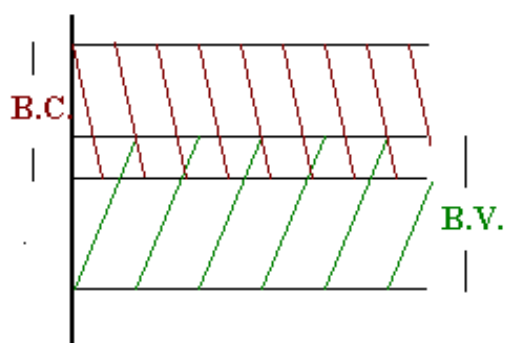


Figura 9

Esquema de bandas de energía de un conductor

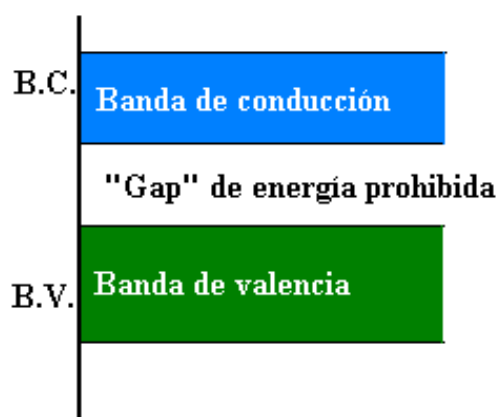


Figura 8

Esquema de bandas de energía para un aislador

Con todo esto a la vista, y fijándonos en las bandas de valencia y conducción, los esquemas correspondientes a un aislador y a un metal serían los representados en las figuras 8 y 9.

En un conductor se confundirían las bandas de valencia y de conducción, quedando en ésta estados permitidos no ocupados.

En un aislador la B. V. está completamente ocupada y la B.C. completamente vacía, existiendo

entre ambas un salto (“gap”) de energías prohibidas, E_g ,

Semiconductores

Existen materiales denominados semiconductores, que a bajas temperaturas tienen un esquema de bandas equivalentes al de los aisladores, pero el “gap” de energías prohibidas E_g es pequeño, de forma que subiendo la temperatura, la energía térmica es capaz de hacer saltar algunos electrones de la banda de valencia a la de conducción, con lo que estos materiales conducen, aunque sólo sea pobremente, la electricidad.

La conducción en un semiconductor tendrá lugar por el movimiento de los electrones que han sido excitados energéticamente hasta la banda de energía originalmente vacía, o banda de conducción. Pero además, este salto del electrón provoca la aparición de un hueco, o defecto de un electrón, en la banda de valencia. La banda de valencia deja de estar totalmente llena y contribuye por tanto al proceso de conducción. Por esta razón para describir el fenómeno de conducción los portadores que tendremos que considerar serán: los electrones en la banda de conducción, y los huecos (ausencia de electrones en la banda de valencia por haber saltado a la banda de conducción) en la banda de valencia.

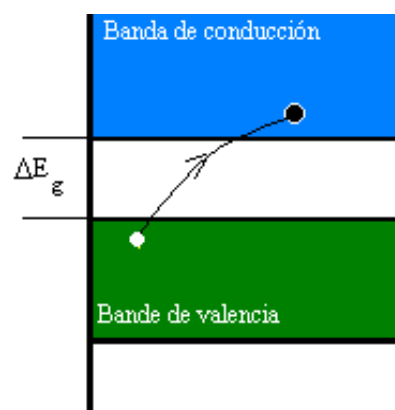


Figura 10
Esquema de la producción de un hueco en la banda de valencia

Conviene dejar bien claro, que el "hueco" no es una partícula eléctrica con existencia real, sino que es un concepto que introducimos para expresar de forma cómoda la conducción de carga eléctrica en la banda de valencia. En lugar de referirnos a los muchos electrones de la banda de valencia, nos fijamos en los pocos huecos que se han producido en ella. El "hueco" considerado como una partícula cargada vendrá caracterizado por una cierta masa que nos reflejará su respuesta dinámica a una fuerza externa como puede ser la aplicación de un campo eléctrico, y una carga que será igual en magnitud y de signo opuesto a la del electrón, ya que el hueco se desplazará en la dirección del campo (esto es los electrones "rellenan" el hueco moviéndose en sentido opuesto al campo por el signo negativo de su carga).

Los materiales que responden a este tipo de conducción se denominan semiconductores intrínsecos, como ejemplos de semiconductores intrínsecos tenemos:

- 1) "sustancias elementales" como son el Si y Ge (Grupo IV) y
- 2) "semiconductores compuestos" como el arseniuro de galio AsGa (compuestos III-V) o el sulfuro de cadmio, SCd (Compuestos II-VI).

Para terminar conviene indicar que en la práctica se puede conseguir modificar extraordinariamente la conductividad de un semiconductor impurificándolo con sustancias adecuadas en cantidades muy pequeñas.

Así por ejemplo, si añadimos a un semiconductor de silicio una pequeñísima concentración de As, material del grupo V, este átomo tiene un electrón en exceso con respecto al Si (grupo IV)

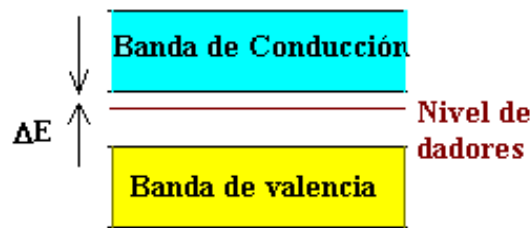


Figura 11

lo que implica la aparición de niveles energéticos, los correspondientes al electrón extra, muy próximos a los permitidos en la banda de conducción del silicio por lo que es muy fácil que esos “electrones extra” pasen a esta banda, lo que representa un aumento de portadores n, o lo que es lo mismo que aumente el número de electrones que se pueden mover en la banda de conducción del silicio aumentando por tanto la conductividad. Este tipo de

impurezas se llama “*tipo n*” por aumentar la concentración de electrones, o impurezas dadoras, porque ceden un electrón a la banda de conducción, o por exceso, ya que tienen un exceso de electrones respecto al material intrínseco.

Del mismo modo, la adición de impurezas del grupo III (B, In, Ga) a un semiconductor intrínseco (Ge, Si) da lugar a un semiconductor extrínseco “*tipo p*”, por aumentar la concentración de huecos en la banda de valencia del semiconductor intrínseco. En este caso, los niveles energéticos que origina la impureza son muy próximos a la banda de valencia lo que permite que electrones de la banda de valencia pasen con facilidad a los estados energéticos vacíos y permitidos del nivel de aceptores dejando un hueco en dicha banda de valencia, que podrá ser ocupado por un nuevo electrón de esa banda al que el campo actuante le proporcione la energía suficiente. Lo que provoca una conducción por huecos en la banda de valencia.

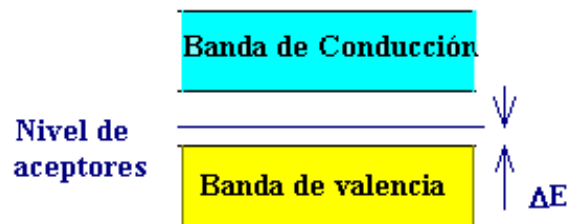


Figura 12

Estos semiconductores se denominan extrínsecos. La contribución del material con el que impurificamos la muestra (dopamos al semiconductor) es aumentar considerablemente la conductividad respecto del semiconductor intrínseco, ya que incorporación de estados energéticos permitidos muy próximos a la banda de valencia en el caso de impurezasceptoras (semiconductores tipo p) o muy próximos a la banda de conducción en el caso de impurezas dadoras (semiconductores tipo n) permiten el movimiento en la banda de valencia de huecos o de electrones por la banda de conducción respectivamente.

Circuitos de corriente continua

Sabemos que la corriente eléctrica la podemos entender como el paso de portadores de carga que, con mayor o menor libertad, se puedan mover por un medio determinado debido a la fuerza que ejerce sobre ellos un campo eléctrico. Es claro entonces que un mismo campo eléctrico actuando sobre distintos medios producirá corrientes de distinta magnitud según la oposición o resistencia que oponga el medio al movimiento de los portadores de carga a su través. La primera consecuencia a que llegamos es que, debido a la “fricción” que va a oponer el medio al paso de los portadores, cierta cantidad de la energía eléctrica se va a convertir en energía calorífica,

fenómeno comúnmente conocido como efecto Joule. Además de este tipo de energía, la energía eléctrica se puede convertir en otros tipos, como por ejemplo en energía mecánica si la corriente se aprovecha para mover un motor. A todos estos tipos de elementos que colocados en un circuito van a suponer un consumo de energía los denominaremos elementos pasivos y como elemento pasivo típico tenemos el caso de las resistencias.

Si por un circuito queremos que circule una corriente eléctrica estacionaria (mantenida en el tiempo) dado que en un circuito siempre existen elementos pasivos, lo que en lenguaje ordinario llamamos elementos que consumen energía eléctrica, es preciso que existan elementos que suministren energía eléctrica; a estos elementos los denominaremos elementos activos. El funcionamiento de estos dispositivos es el transformar otro tipo de energía en eléctrica. A continuación citamos varios ejemplos de estos elementos:

- a) Intercambio de energía química en eléctrica. Dispositivos basados en este tipo de transformación son las pilas y baterías, elementos de gran aplicación en la producción de energía eléctrica.
- b) Transformación de energía mecánica en eléctrica. La dinamo, por ejemplo, es un transductor de energía mecánica en eléctrica con gran interés también como generador de este tipo de energía; otro ejemplo lo constituye un micrófono, que transforma la energía de vibración (debida al sonido) en señales eléctricas. Este último dispositivo no es útil como fuente generadora de energía eléctrica que supla consumos de energía de otros elementos y se aplica a los fines específicos que todos conocemos.
- c) Transformación de energía luminosa en eléctrica. Ejemplo típico lo constituyen las células fotoeléctricas.
- d) Transformación de energía térmica en eléctrica. Como elemento que aprovecha directamente esta transformación tenemos por ejemplo el termopar, útil en termometría.

Dos conceptos básicos relativos respectivamente a los ya citados de elementos pasivos y activos son los de diferencia de potencial y fuerza electromotriz, que simbólicamente denotaremos por “V” y “ ε ” y que definimos a continuación.

Diferencia de potencial entre dos puntos de un elemento pasivo, es la energía que debido al paso de la unidad de carga a su través, se convierte de eléctrica en otra forma de energía.

Fuerza electromotriz de un elemento activo, es la energía que por el paso de la unidad de carga a través del elemento, se transforma de otro tipo de energía a energía eléctrica.

Lógicamente tanto “V” como “ ε ” vienen en las mismas unidades, a saber, el julio/culombio en el sistema internacional, unidad que normalmente se conoce como voltio. Según lo dicho anteriormente, la energía que se convierte en eléctrica al pasar una carga q a través de un elemento activo de fuerza electromotriz ε será “ $q \cdot \varepsilon$ ”. Análogamente, la energía eléctrica que se disipa en un elemento pasivo al pasar una carga q , si es V la diferencia de potencial entre los extremos del elemento, será “ $q \cdot V$ ”.

En la práctica es más útil sin embargo el concepto de potencia o variación con el tiempo de la energía, que vendrá dada por la variación con el tiempo de la carga, es decir por la intensidad, por la fuerza electromotriz o por la diferencia de potencial del elemento activo o pasivo. Así, la potencia eléctrica que da un elemento activo de fuerza electromotriz ε cuando suministra una corriente I será

$$P_{\text{suministrada}} = \varepsilon I \quad (\text{vatios})$$

La potencia que se disipa en un elemento pasivo cuando entre sus extremos existe una diferencia de potencial V y se encuentra recorrido por una corriente I es

$$P_{\text{disipada}} = V I$$

Caracterización de los elementos de un circuito de corriente continua

Las magnitudes que se miden en un circuito son diferencias de potencial (o voltajes) e intensidades, y a través de estas magnitudes podremos caracterizar a un elemento. Así, si tenemos un elemento pasivo típico como es una resistencia, podremos ir conectando diferentes voltajes entre sus extremos, y midiendo las intensidades que producen, con lo cual se obtendrá un resultado como el reflejado en la figura 13.

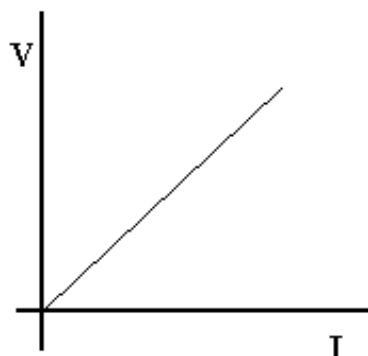


Figura 13

Diagrama I-V de un elemento pasivo ideal

Se observa que el diagrama V-I del elemento pasivo ideal representado, es lineal. Como parámetro que nos caracteriza a este elemento se define la resistencia que es el cociente entre la diferencia de potencial y la intensidad.

$$R = \frac{V}{I}$$

La unidad de resistencia en el Sistema Internacional, el voltio/amperio, que como ya sabemos se denomina ohmio.

En la práctica muchos elementos son lineales dentro de un rango grande de valores de V e I , mostrando no obstante un carácter no lineal para valores elevados de V , tal como se muestra en la figura 14.

Otros elementos que ya no son las resistencias usuales, aunque sean elementos pasivos en un circuito, muestran un carácter marcadamente no lineal, a lo cual se denomina normalmente comportamiento "no óhmico".

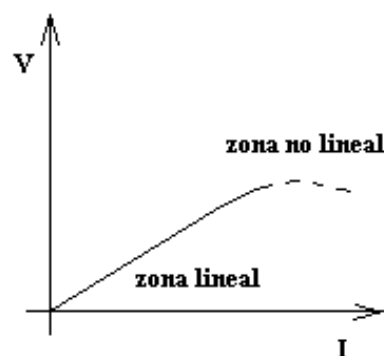


Figura 14

Diagrama I-V de un elemento pasivo real

Otro dato que es preciso conocer para caracterizar un elemento pasivo (supongamos una resistencia de valor R para centrar ideas) es la potencia máxima que puede disipar debido a su geometría y constitución. Esta potencia máxima constituirá un límite para la tensión en bornes de la resistencia y la intensidad que va a atravesar.

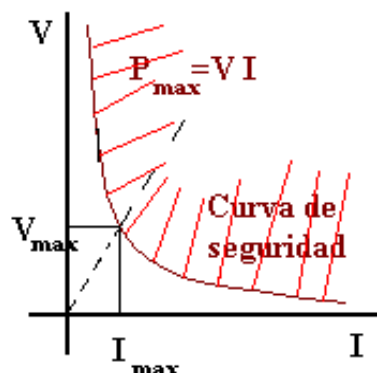


Figura 15

Según que el elemento se alimente con un generador de tensión fija V o que por él pase una intensidad fija I , la expresión de la potencia, $P = VI$, en conjunción con la ley de Ohm nos permite obtener dos expresiones duales para la potencia en función de los datos prefijados

$$P = V \cdot I = V \left(\frac{V}{R} \right) = \frac{V^2}{R}$$

$$P = V \cdot I = (I \cdot R) I = I^2 R$$

Debemos tener cuidado al usar estas expresiones, pues la primera de las ecuaciones la leeremos diciendo que la potencia que disipa una resistencia es inversamente proporcional a la resistencia y en la segunda que es directamente proporcional a la misma, por eso es mejor a la hora de afrontar un problema emplear la forma general ($P = VI$) y según las condiciones del mismo calcular la magnitud que desconozcamos con la ayuda de la ley de Ohm.

Así, por ejemplo, si de una resistencia, nos dan su valor $R = 100 \, \Omega$ y que puede disipar como máximo 1 vatio, la tensión máxima con que se puede alimentar será:

$$V = \sqrt{P \cdot R} = 10 \text{ voltios}$$

Análogamente, la intensidad máxima será:

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = 0,1 \text{ amperio}$$

de forma que evidentemente el producto $V I$ quede igual a 1 vatio.

El darnos la potencia máxima, nos permite dibujar una "curva de seguridad" $V I = P_{\max} = \text{cte.}$ en un diagrama I - V .

De forma que los puntos encima de la curva de la figura 15 (sección rayada) son prohibitivos en el sentido de peligrar el elemento (se fundirá). Si además conocemos el valor de la resistencia del elemento, la intersección de su curva característica (línea punteada) con la curva de seguridad nos dará los valores máximos de V e I con que se puede alimentar el elemento.

También los elementos activos precisan de caracterización. En el caso de una pila, por ejemplo, en principio basta con decir cuál es su fuerza electromotriz; en este caso, si el elemento es ideal, es decir, si entre sus extremos existe siempre una diferencia de potencial igual a la fuerza electromotriz del elemento independientemente de la intensidad que suministre, su diagrama I - V

será el del elemento ideal de la figura 16.

Sin embargo es fácil comprender que un elemento de este tipo no puede existir dado que a valores muy altos de la intensidad, si la diferencia de potencial sigue siendo la fuerza electromotriz ε , el producto εI , es decir, la potencia eléctrica que es capaz de suministrar la pila o batería, tendería a infinito. En el diagrama anterior se ha dibujado también la característica de un elemento real, que en el tramo inicial suele ser lineal. En este tramo se cumple que

$$V = \varepsilon - I \cdot r_i$$

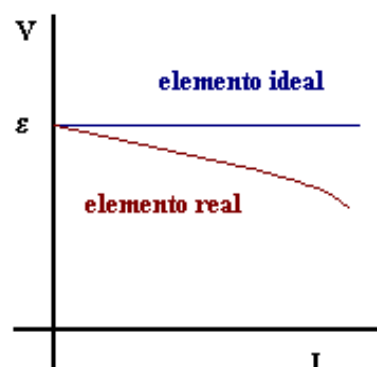


Figura 16

Representación del comportamiento de un generador de tensión

y a r_i se denomina resistencia interna del elemento, que cuanto más pequeña sea tanto más se aproximará al elemento ideal, al generador de tensión ideal. Recalquemos entonces que la fuerza electromotriz de un elemento activo es la diferencia de potencial que existe entre sus extremos cuando suministra intensidad nula.

$$\varepsilon = V|_{I=0}$$

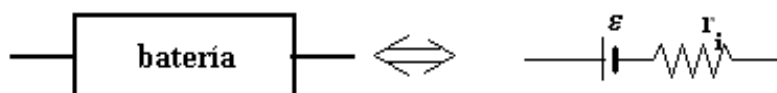


Figura 17

Todo ello debido, a que un elemento activo real hay que comprenderlo como asociación de un elemento activo ideal de fuerza electromotriz ε y de un

elemento pasivo de resistencia r_i . Lo que representamos esquemáticamente en la figura 17.

También los elementos activos tienen un límite en la potencia suministrada, lo cual, en el caso de un generador de tensión, impone un límite en la intensidad que pueden suministrar.

Otro tipo de elemento activo cuyo uso no está tan generalizado como el de generador de tensión (batería o pila) y que se suele lograr a partir de transformaciones adecuadas de ellos o con elementos de estado sólido, son los generadores de intensidad, que dan una intensidad I prácticamente constante, independiente de la tensión que suministren. Su característica I-V sería la que se muestra en la figura 18.

Lógicamente, la resistencia interna de un generador de intensidad tiende a infinito en el caso ideal, a la inversa de lo que teníamos en el caso del generador de tensión cuya resistencia interna tiende a cero en el caso ideal.

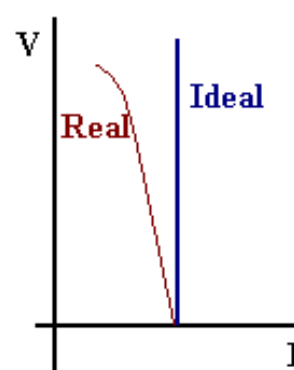


Figura 18

Representación del comportamiento de un generador de intensidad

Leyes de Kirchoff.

Como sabemos los elementos activos y pasivos se suelen conectar entre sí formando lo que denominamos circuito eléctrico. Si acabamos de decir que cualquier combinación que se nos ocurra de elementos activos y pasivos forma un circuito, será necesario imponer algún orden, en ese infinito horizonte, si queremos poder calcular cual es la intensidad que circula por un punto determinado o la caída de tensión que se produce entre dos puntos del circuito, es decir si queremos analizar el circuito.

Para ello, emplearemos los conceptos de nudo y mall:

- Por nudo entendemos la intersección de 3 o más hilos conductores, denominando rama al conjunto de elementos que existen entre dos nudos consecutivos.

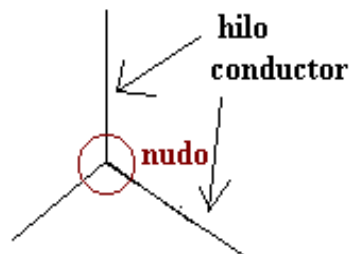


Figura 19

- Una malla es cualquier recorrido cerrado que se pueda realizar en un circuito sin pasar dos veces por el mismo punto.

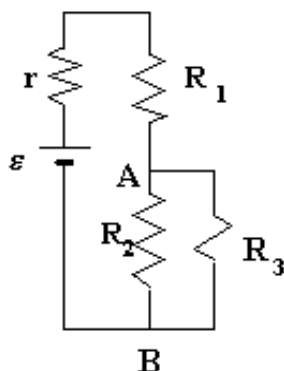


Figura 20

Así, si consideramos el circuito de la figura 20, que está formado por tres resistencias y una pila, en la que hemos considerado independientemente su resistencia interna, nos encontramos con la existencia de dos nudos los puntos "A" y "B", ya que sólo en ellos se encuentran tres hilos distintos, mientras que existen en él tres mallas distintas, pues son tres las distintas figuras cerradas distintas que podemos dibujar a partir del circuito que hemos considerado y que hemos representado en las figuras 21, 22 y 23.

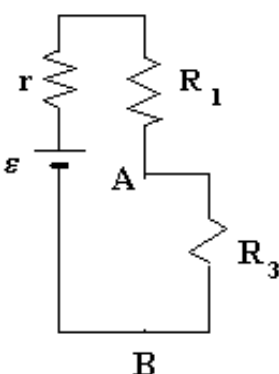


Figura 23

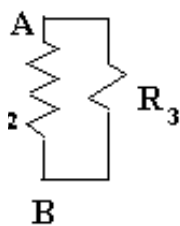


Figura 22

- La primera de ellas la ley de los nudos, nos dice: "la suma de todas las intensidades que concurren en un nudo ha de ser igual a cero".

$$\sum I_i = 0$$

Esto tiene que ser así, ya que si la suma es distinta de cero ($\sum I_i \neq 0$), en el nudo se ganaría o se perdería carga y ninguna de estas dos posibilidades es aceptable. Es decir: la carga eléctrica no se acumula en ningún sitio de la red, ya que la corriente es estacionaria y tampoco se puede

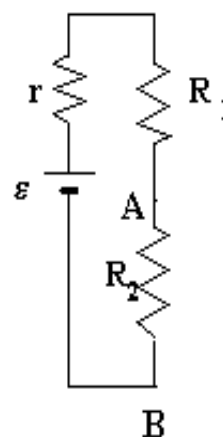


Figura 21

- La segunda, ley de mallas, dice: "para cada malla del circuito se cumple que la suma algebraica de las fuerzas electromotrices en una malla cualquiera de una red es igual a la suma algebraica de los productos $R I$ en la misma malla":

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon$$

La forma práctica de hacer un estudio de un circuito es la siguiente:

- Asignamos un sentido arbitrario de circulación de la intensidad en cada rama del circuito.
- Aplicamos la ley de nudos.

Cuando se aplica esta ley, se considera positiva la intensidad de una corriente si se dirige hacia el nudo y negativa si se aleja del mismo (también puede utilizarse el convenio contrario).

Para el nudo A: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$; $I_1 = I_2 + I_3$

Para el nudo B sale exactamente igual, ya que no hay tantas ecuaciones como nudos. Si hay "n" nudos en la red se aplica la regla de los nudos a "n-1" de éstos. La aplicación de dicha regla al nudo enésimo no proporciona una ecuación independiente.

c) Aplicación de la ley de mallas.

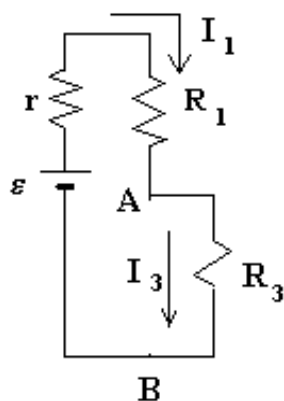


Figura 25

Elegimos un sentido arbitrario para "recorrer" la malla. El producto IR es positivo cuando la dirección de circulación de la intensidad que hemos decidido en a) coincide con la que hemos elegido para recorrer la malla y negativo en caso contrario.

Una fuerza electromotriz ε , será positiva cuando según la dirección que hemos elegido para recorrer la malla, entremos por la placa negativa y salgamos por la positiva. Es decir, que si suponemos que la pila es la única que existiera en el circuito, la corriente que genera va en el sentido que hemos elegido como positivo.

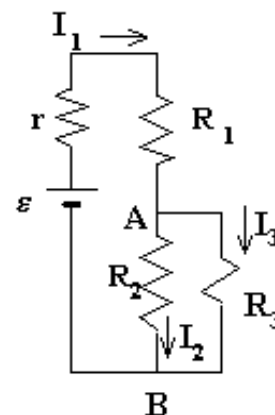


Figura 24

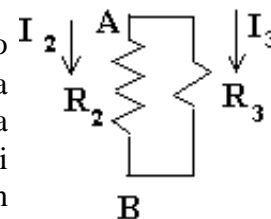


Figura 26

Lo que nos permite escribir para cada circuito:

$$\begin{aligned} \text{El de la figura 25} & \quad I_1 r + I_1 R_1 + I_3 R_3 = \varepsilon \\ \text{El de la figura 26} & \quad - I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0 \\ \text{El de la figura 27} & \quad + I_1 r + I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Pero esta ecuación no era necesario hallarla, ya que es la suma de las dos anteriores, luego tampoco hay tantas ecuaciones como mallas. Las mallas que son suma de otras mallas no dan información nueva sobre el circuito (una forma práctica de escribir el número correcto de ecuaciones de malla es: cada ecuación que escribamos tacharemos una rama del circuito, cuando ya no podamos dibujar una malla, ya tendremos todas las posibles ecuaciones de malla del circuito)

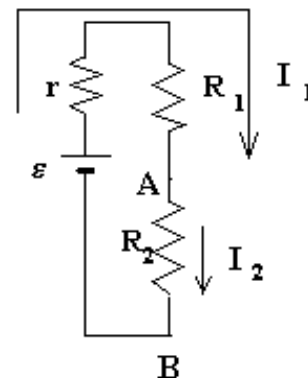


Figura 27

Para este circuito tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas que podemos resolver:

De aquí podemos hallar las tres incógnitas: I_1 , I_2 e I_3 .

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ + I_1 r + I_1 R_1 + I_2 R_2 &= \varepsilon \\ - I_2 R_2 + I_3 R_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo: el potenciómetro.

Este dispositivo tiene como objetivo la medida de la fuerza electromotriz de un generador cualquiera. Tendremos que medir la diferencia de potencial que suministra, sin pedir suministro de corriente. En esencia su funcionamiento consiste en conectar en oposición con la fuerza electromotriz que se quiere medir (ε_x) una tensión conocida y variable, de forma que justo cuando esta tensión vale ε_x la corriente que pasa por el circuito es nula.

Un esquema elemental del potenciómetro lo constituye el de la figura 28. En este esquema tenemos que:

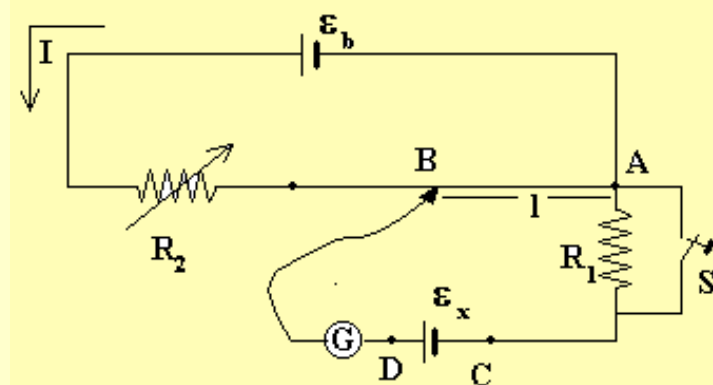


Figura 28
Esquema de un potenciómetro

1) ε_b es una batería de potencia suficiente para alimentar al circuito con estabilidad; su valor no necesita conocerse con precisión; R_2 es una resistencia que va a limitar el valor de I al orden de magnitud que deseemos.

2) AC es un hilo de resistencia uniforme (resistividad y sección constantes) B es un cursor móvil a lo

largo del hilo con objeto de variar la resistencia entre los puntos A y B. Lógicamente se cumplirá que

$$R_{AB} = k \cdot l$$

siendo k una constante y " l " la longitud del hilo uniforme comprendido entre los puntos "A" y "B".

3) G es un galvanómetro encargado de acusar cuando la corriente por la rama ACDB es nula; en este caso la corriente por BA coincide con I de acuerdo con la primera ley de Kirchhoff.

4) Para equilibrar el potenciómetro, es decir para que por G no pase corriente, se deja inicialmente el interruptor S abierto con objeto de que la resistencia, R_1 proteja al galvanómetro; se varia el cursor B hasta que aproximadamente G no acuse paso de corriente. Se cortocircuita R_1 a través del interruptor S y se ajusta con mayor precisión el cursor B para anular la corriente que pasa por G.

Cuando se ha equilibrado el potenciómetro se cumplirá que

$$V_{BA} = I R_{AB} = I (k l)$$

y como por ACDB no pasa corriente, el punto D estará al mismo potencial que el B y el C al mismo que el A; es decir:

$$V_{BA} = V_{DC} = \varepsilon$$

El procedimiento normal de medida es por comparación de la fuerza electromotriz incógnita con otra patrón conocida que suele ser una pila Weston de cadmio. Ambas fuerzas electromotrices se colocarán lógicamente entre los puntos C y D y con la polaridad mostrada respecto a la polaridad de ε_b .

Si la pila patrón, de fuerza electromotriz ε_p , se equilibra con una longitud $l = l_p$, se tendrá:

$$\varepsilon_p = I k l_p$$

Si la fuerza electromotriz incógnita se equilibra con una longitud l_x , se tendrá:

$$\varepsilon_x = I k l_x$$

con lo cual:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_p \left(\frac{l_x}{l_p} \right)$$

Hemos querido dedicarle una atención especial al potenciómetro por dos razones. La primera, porque justifica la definición de fuerza electromotriz de una pila como la diferencia de potencial del generador cuando por él no pasa corriente, pues en la descripción que hemos realizado queda patente que se mide una diferencia de potencial aunque no existe paso de corriente por la pila desconocida. Por otro lado, obtener medidas de magnitudes por detección de nulo es el fundamento de todos los métodos de medida utilizando “puentes de medida”, pues siempre es más fácil detectar que por una rama de un circuito no pasa corriente, que medir con precisión suficiente un valor determinado de la intensidad por la rama.

Teoremas del análisis de redes

Acabamos de introducir algunos conceptos de uso común al hablar de circuitos eléctricos, vamos a definir, de un modo sistemático, tanto los que acabamos de introducir como los que son de uso más frecuente en el análisis de redes.

Elemento de circuito: Es un componente indivisible con dos bornes o terminales.
Como ejemplos una resistencia o una fuente, pila o batería.

Parámetro: Es la representación simbólica de los elementos de circuito. Una resistencia se representa por R , una pila o batería por ΔV , o, ε

Rama: Se construye mediante la unión de elementos de circuito de manera que el conjunto forma un dispositivo de dos terminales. Se supone que los elementos de circuito se conectan entre sí mediante conductores ideales, es decir sin resistencia.

Malla: Es una figura cerrada formada por la unión de ramas.

Nudo: Es el punto de unión de dos o más ramas, o el punto en el que concurren tres o más conductores.

Red: Es la interconexión de ramas y mallas. Frecuentemente se utiliza la palabra circuito con el mismo significado que red.

Red de parámetros concentrados: Es una red compuesta por elementos de circuito aislados, es decir, elementos que se comportan en la red de manera que cada componente se puede caracterizar por un solo parámetro, por ejemplo por su resistencia, por su capacidad o por su fuerza electromotriz.

Red de parámetros distribuidos: Es una red compuesta por elementos que no pueden ser caracterizados por un parámetro único y por tanto no se tratan analíticamente como componentes individuales separados. Un cable coaxial es un ejemplo de una red de parámetros distribuidos y se caracteriza por su resistencia por unidad de longitud, su capacidad por unidad de longitud y su autoinducción por unidad de longitud.

Potencial: También conocido como tensión, es la forma abreviada de hablar de diferencia de potencial entre dos puntos y en el análisis de circuitos es sinónimo de voltaje. Se suele representar la tensión por V o ΔV en el caso de corrientes continuas y por e o Δv en las variables. Cuando se trata de la fuerza electromotriz de una fuente se suele representar por ε

Generador de tensión: También conocido como fuente, es un dispositivo de dos bornes o terminales entre los que existe una tensión sin que circule corriente, es decir, la fuente es un elemento activo que mantiene la tensión en sus bornes.

La fuente de tensión es ideal, cuando la diferencia de potencial entre sus bornes es independiente de la corriente que suministra. Los generadores reales, tienen resistencia interna y se verifica que $\Delta V = \varepsilon - I \cdot r$

Generador de corriente: También conocido como fuente de corriente, se caracteriza por mantener una corriente entre sus terminales en ausencia de potencial entre ellos. Un generador de corriente es ideal cuando la corriente suministrada es independiente del potencial entre los terminales

Elemento lineal: Es todo elemento en el que la relación entre la intensidad que lo recorre y la tensión entre sus bornes es lineal, es decir, no depende del valor de la corriente ni de la tensión.

Circuito lineal: Es el compuesto exclusivamente por elementos lineales.

Rama activa: Es una rama en la que existe uno o más generadores y puede o no tener elementos pasivos como resistencias.

Rama pasiva: es aquella en la que sólo existen elementos pasivos, es decir, no tiene fuentes.

Tras esta revisión de los términos más usuales en el análisis de circuitos y de las leyes de Kirchoff, que son el fundamento de todo el análisis de circuitos, vamos a describir otros conceptos de uso común cuando se realiza el análisis de redes.

Principio de superposición

Si en una red lineal, existen dos o más fuentes, la intensidad que circula por el circuito será la suma de las intensidades que produciría cada generador si sólo existiera él en el circuito.

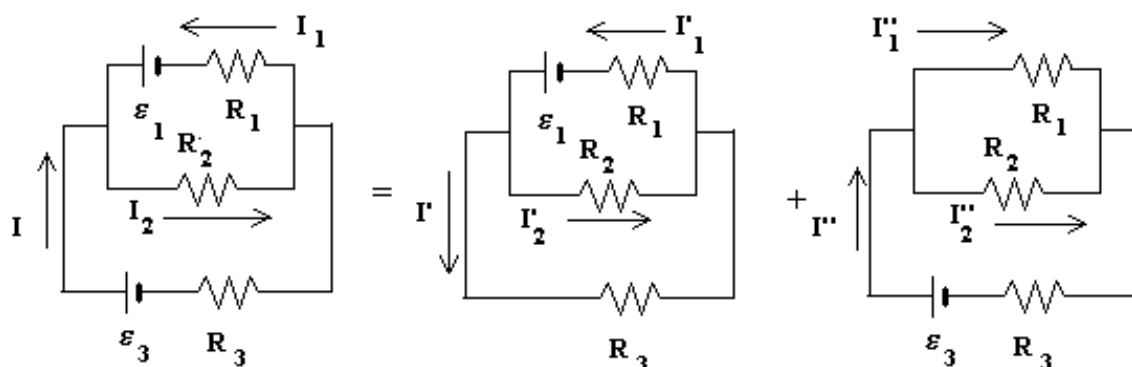


Figura 29

Así las intensidades que recorren el circuito de la izquierda de la figura 29, son la suma de las que recorren los dos circuitos de la derecha de la misma figura, es decir:

$$I = I'' - I'; \quad I_1 = I'_1 - I''_1; \quad I_2 = I'_2 - I''_2$$

para calcular las intensidades en cada uno de los circuitos de la derecha, se cortocircuitan las fuentes pero se mantienen los valores de las resistencias internas de las mismas.

Resistencia de entrada de una red.

Supongamos que tenemos una red pasiva (por ejemplo un altavoz), de la que desconocemos las resistencias que la componen y como están conectadas entre sí, sólo está a nuestro alcance los

dos bornes de conexión. Para caracterizar la red, emplearemos su resistencia de entrada, que podemos calcular alimentándola con un generador de fuerza electromotriz conocida “ ε ”, midiendo la intensidad “ I ” que recorre el generador tenemos que la resistencia de entrada (R_{in} o R_e) será

$$R_{in} = \frac{\varepsilon}{I}$$

Naturalmente si conocemos la distribución de elementos pasivos que componen el circuito, podemos calcular analíticamente la resistencia de entrada del circuito imaginándolo conectado a una batería de fuerza electromotriz conocida y calculando después la corriente que atravesaría la batería, el cociente entre ambas magnitudes nos dará la resistencia de entrada.

Teorema de Thevenin

Si el circuito del que disponemos es un circuito activo (como por ejemplo un amplificador) que debemos conectar a una resistencia de carga (por ejemplo un altavoz) se puede demostrar que el conjunto se comporta como un elemento activo (una pila en el caso de continua) y una resistencia en serie con el generador, que recibe el nombre de resistencia de salida (R_{aut} , R_0).

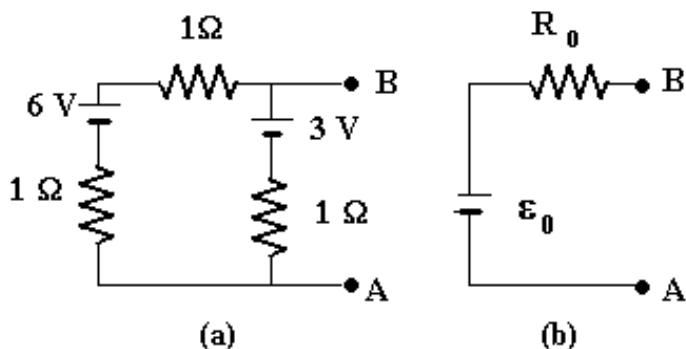


Figura 30

El circuito (b) representa el equivalente Thevenin del circuito (a)

En el circuito (a) de la figura 30, su equivalente Thevenin será el circuito (b) en el que la batería tendrá una fuerza electromotriz $\varepsilon_0 = 4 \text{ V}$ y una

resistencia interna o de salida del circuito de valor $R_0 = 0,6 \Omega$.

Teorema de Norton

Acabamos de decir que un circuito activo cualquiera equivale a un generador de tensión y una resistencia en serie con él. Del mismo modo se puede establecer el equivalente Norton del circuito que será un generador de intensidad y una resistencia en paralelo, tales que ante una carga cualquiera suministren la misma intensidad que proporciona la red.

Teorema de la máxima transmisión de potencia.

Entre los múltiples teoremas relativos a circuitos vamos a detenernos en el de máxima transferencia de potencia, debido al interés que ofrece en el mejor aprovechamiento de la potencia disponible.

Una situación comúnmente encontrada es la reflejada en la figura 31 en la cual se tiene el generador equivalente del circuito de alimentación (de fuerza electromotriz ε con una resistencia interna R_i) que se "carga" con una resistencia R_c . Nos preguntamos: ¿qué valor ha de

tener R_c para que el sistema alimentador (caracterizado por ε y R_i) suministre la máxima potencia?

En el circuito tendremos que la potencia suministrada a R_c sera:

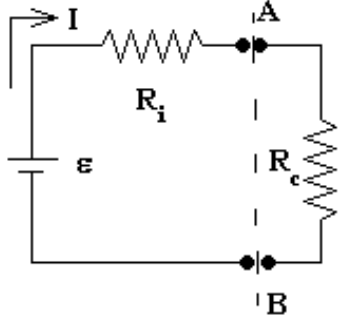


Figura 31

$$P_c = V_{AB} I = I^2 R_c = \left(\frac{\varepsilon}{R_i + R_c} \right)^2 R_c$$

Como la variable cuyo valor pedimos es R_c , tendremos que

la potencia será máxima cuando se cumpla que: $\frac{\partial P_c}{\partial R_c} = 0$ y $\frac{\partial^2 P_c}{\partial R_c^2} < 0$

Es fácil comprobar que el máximo aprovechamiento se cumple cuando: $R_c = R_i$

y en este caso la potencia disipada es

$$(P_c)_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4 R_c}$$

El lograr que $R_c = R_i$ se denomina, acoplar resistencias.