1. Indica que variables son cualitativas y cuales cuantitativas:

   a) Comida Favorita.

   b) Profesión que te gusta.

   c) Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada.

   d) Número de alumnos de tu Instituto.

   e) El color de los ojos de tus compañeros de clase.

   f) Coeficiente intelectual de tus compañeros de clase.

Solución:

a) Comida Favorita.
Cualitativa.
b) Profesión que te gusta.
Cualitativa.
c) Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada.
Cuantitativa.
d) Número de alumnos de tu Instituto.
Cuantitativa.
e) El color de los ojos de tus compañeros de clase.
Cualitativa.
f) Coeficiente intelectual de tus compañeros de clase.
Cuantitativa

2. De las siguientes variables indica cuáles son discretas y cuales continúas.

   a) Número de acciones vendidas cada día en la Bolsa.

   b) Temperaturas registradas cada hora en un observatorio.

   c) Período de duración de un automóvil.

   d) El diámetro de las ruedas de varios coches.

   e) Número de hijos de 50 familias.

   f) Censo anual de los españoles.

Solución:

a) Número de acciones vendidas cada día en la Bolsa.
Discreta
b) Temperaturas registradas cada hora en un observatorio.
Continua
3 Período de duración de un automóvil.
Continua
4 El diámetro de las ruedas de varios coches.
Continua
5 Número de hijos de 50 familias.
Discreta
6 Censo anual de los españoles.
Discreta

3. Clasificar las siguientes variables en cualitativas y cuantitativas discretas o continuas.

a) La nacionalidad de una persona.

b) Número de litros de agua contenidos en un depósito.

c) Número de libros en un estante de librería.

d) Suma de puntos tenidos en el lanzamiento de un par de dados.

e) La profesión de una persona.

f) El área de las distintas baldosas de un edificio.

Solución:

a) La nacionalidad de una persona.
Cualitativa

b) Número de litros de agua contenidos en un depósito.
Cuantitativa continua.

c) Número de libro en un estante de librería.
Cuantitativa discreta.

d) Suma de puntos tenidos en el lanzamiento de un par de dados.
Cuantitativa discreta.

e) La profesión de una persona.
Cualitativa.

f) El área de las distintas baldosas de un edificio.
Cuantitativa continua.

4. Las puntuaciones obtenidas por un grupo en una prueba han sido:

15, 20, 15, 18, 22, 13, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 16, 14, 13.

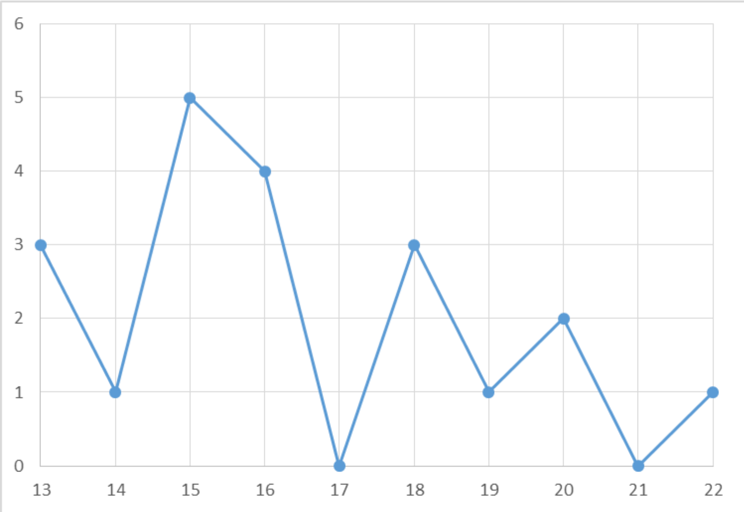
Construye la tabla de distribución de frecuencias y dibuja el polígono de frecuencias.

Solución:

- **Tabla de distribución de frecuencias**

x_i	f_i	F_i	n_i	N_i
13	3	3	0,15	0,15
14	1	4	0,05	0,2
15	5	9	0,25	0,45
16	4	13	0,2	0,65
17	0	13	0	0,65
18	3	16	0,15	0,8
19	1	17	0,05	0,85
20	2	19	0,1	0,95
21	0	19	0	0,95
22	1	20	0,05	1
	20		1	

- **Polígono de frecuencias**



5. El número de estrellas de los hoteles de una ciudad viene dado por la siguiente serie:

3, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 3, 3, 3, 2, 3,

2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 1.

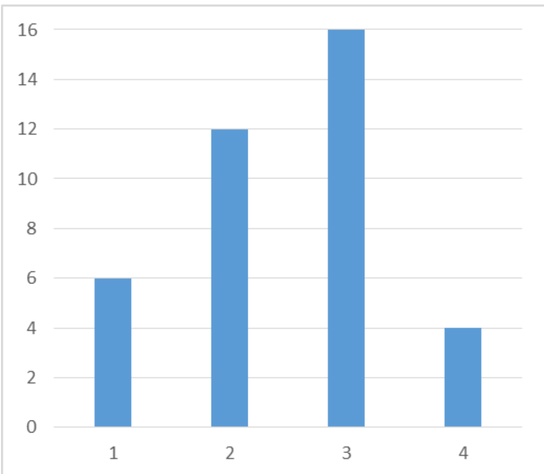
Construye la tabla de distribución de frecuencias y dibuja el diagrama de barras.

Solución:

- **Tabla de distribución de frecuencias**

x_i	f_i	F_i	n_i	N_i
1	6	6	0,16	0,16
2	12	18	0,32	0,47
3	16	34	0,42	0,89
4	4	38	0,11	1,00
	38		1,00	

- **Diagrama de barras**



6. Las calificaciones de 50 alumnos en Matemáticas han sido las siguientes:

5, 2, 4, 9, 7, 4, 5, 6, 5, 7, 7, 5, 5, 2, 10, 5, 6, 5, 4, 5, 8, 8, 4, 0, 8, 4, 8, 6, 6, 3, 6, 7, 6, 6, 7, 6, 7, 3, 5, 6, 9, 6, 1, 4, 6, 3, 5, 5, 6, 7.

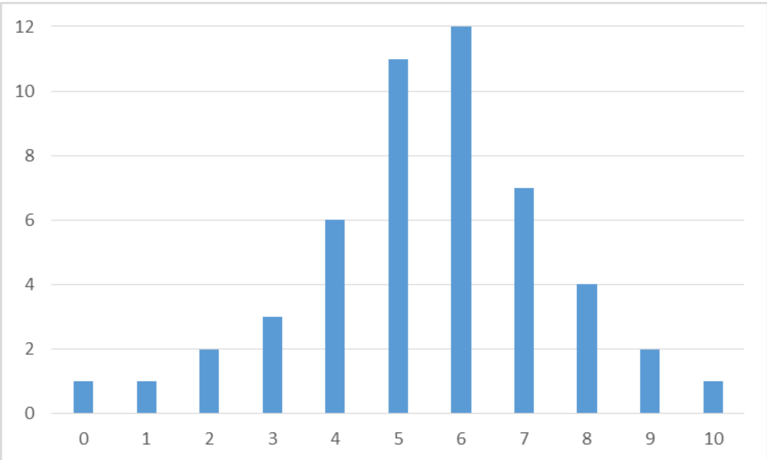
Construye la tabla de distribución de frecuencias y dibuja el diagrama de barras.

Solución:

- **Tabla de distribución de frecuencias**

xi	fi	Fi	ni	Ni
0	1	1	0,02	0.02
1	1	2	0,02	0.04
2	2	4	0,04	0.08
3	3	7	0,06	0.14
4	6	13	0,12	0.26
5	11	24	0,22	0.48
6	12	36	0,24	0.72
7	7	43	0,14	0.86
8	4	47	0,08	0.94
9	2	49	0,04	0.98
10	1	50	0,02	1.00
	50		1	

- **Diagrama de barras**



7. Los pesos de los 65 empleados de una fábrica vienen dados por la siguiente tabla:

Peso	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80,90)	[90, 100)	[100, 110)	[110, 120)
f_i	8	10	16	14	10	5	2

a) Construir la tabla de frecuencias.

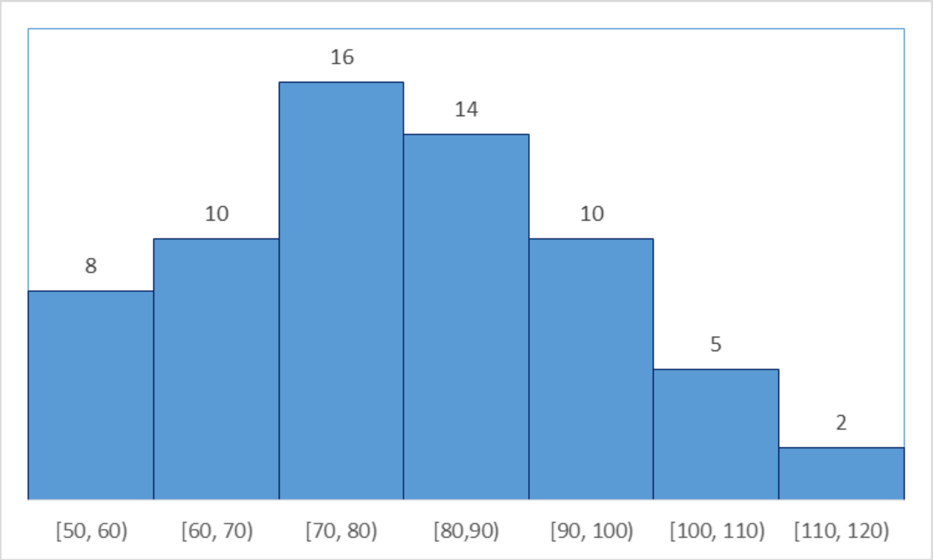
b) Representar el histograma.

Solución:

- **Tabla de distribución de frecuencias**

	x_i	f_i	F_i	n_i	N_i
[50, 60)	55	8	8	0,12	0.12
[60, 70)	65	10	18	0,15	0.27
[70, 80)	75	16	34	0,25	0.51
[80,90)	85	14	48	0,22	0.73
[90, 100)	95	10	58	0,15	0.88
[100, 110)	105	5	63	0,08	0.96
[110, 120)	115	2	65	0,03	0.99
		65		1	

- **Histograma**



8. Los 40 alumnos de una clase han obtenido las siguientes puntuaciones, sobre 50, en un examen de Física.

3, 15, 24, 28, 33, 35, 38, 42, 23, 38, 36, 34, 29, 25, 17,
7, 34, 36, 39, 44, 31, 26, 20, 11, 13, 22, 27, 47, 39, 37,
34, 32, 35, 28, 38, 41, 48, 15, 32, 13.

a) Construye la tabla de frecuencias.

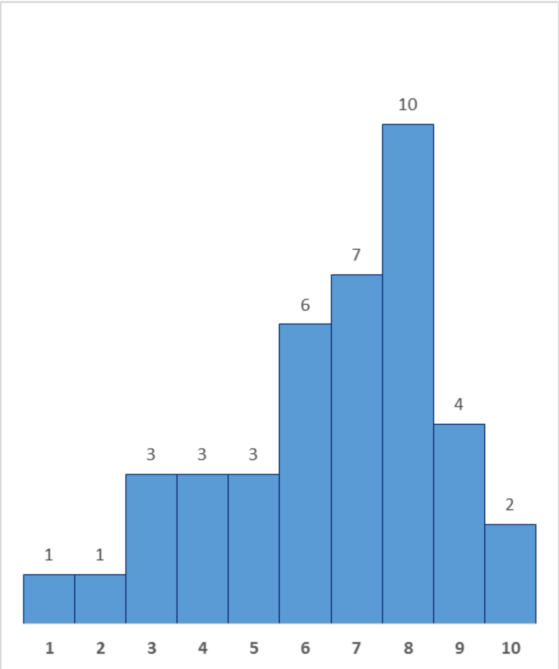
b) Dibuja el histograma.

Solución:

- **Tabla de distribución de frecuencias**

	x_i	f_i	F_i	n_i	N_i
[0, 5)	2.5	1	1	0.025	0.025
[5, 10)	7.5	1	2	0.025	0.050
[10, 15)	12.5	3	5	0.075	0.125
[15, 20)	17.5	3	8	0.075	0.200
[20, 25)	22.5	3	11	0.075	0.275
[25, 30)	27.5	6	17	0.150	0.425
[30, 35)	32.5	7	24	0.175	0.600
[35, 40)	37.5	10	34	0.250	0.850
[40, 45)	47.5	4	38	0.100	0.950
[45, 50)	47.5	2	40	0.050	1.000
		40		1	

- **Histograma**



9. Calcular para la distribución estadística que viene dada por la siguiente tabla:

a) La moda, mediana y media.

b) El rango, desviación media, varianza y desviación típica

x_i	61	64	67	70	73
f_i	5	18	42	27	8

Solución:

	x_i	f_i	F_i	P_i	x_i*f_i	x_i^2	$f_i*x_i^2$	Media	$Media^2$
	61	5	5	5,0%	305	3.721	18.605	68	4.586
	64	18	23	23,0%	1.152	4.096	73.728		
	67	42	65	65,0%	2.814	4.489	188.538		
	71	27	92	92,0%	1.917	5.041	136.107		
	73	8	100	100,0%	584	5.329	42.632		
sumas		100			6.772		459.610		
	max	**73**							
	min	**61**							

$$Media = \bar{x} = \sum \frac{(f_i \cdot x_i)}{N} = \sum \frac{6.772}{100} = 67,72$$

$$Moda = x_{i\ \ Max(f_i)} = 67_{\underline{f=42}}$$

$$Mediana = x_{i\ \ P(x_i\ \geq 50\%)} = 67_{\underline{P=65\%}}$$

$$Varianza = S^2 = \sum \frac{(f_i \cdot x_i^2)}{N} - \bar{x}^2 = \sum \frac{459.610}{N100} - 4.586 = 10,10$$

$$Desviación\ típica = S = \sqrt{S^2} = \sqrt{10,10} = 3,18$$

$$Rango = Max(x_i) - Min(x_i) = 73 - 61 = 12$$

10. Hallar la media de la distribución estadística que viene dada por la siguiente tabla:

Clase	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)
f_i	3	5	7	4	2

Hallar:

a) La moda, mediana y media.

b) El rango, desviación media y varianza.

c) Los cuartiles 1º y 3º.

d) Los deciles 3º y 6º.

e) Los percentiles 35 y 85

Solución:

L_{i-1}	L_i	x_i	MC	f_i	F_i	P_i	MC_i*f_i	MC_i^2	$f_i*MC_i^2$	Media	$Media^2$
10	15	[10, 15)	12,5	3	3	14,3%	38	156	469	21,79	474,62
15	20	[15, 20)	17,5	5	8	38,1%	88	306	1.531		
20	25	[20, 25)	22,5	7	15	71,4%	158	506	3.544		
25	30	[25, 30)	27,5	4	19	90,5%	110	756	3.025		
30	35	[30, 35)	32,5	2	21	100,0%	65	1.056	2.113		
		sumas		21			458		10.681		
			max	32,5							
			min	12,5							

a) La moda, mediana y media.

media	21,79
mediana	21,79
moda	22

$$M_E = x_{med} = L_{i-1} + (L_i - L_{i-1}) \cdot \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \qquad Mo = L_{i-1} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} C$$

C= 5 L_{i-1}= 20

N= 21

F_{i-1}= 8

f_i= 7 f_{i-1}= 5 f_{i+1}= 4

Δ_1= 2

Δ_2= 3

b) El rango, desviación media y varianza.

varianza	34,01
desv.	5,83
Rango	20

c) Los cuartiles 1º y 3º.

$$C_{\alpha} = L_{i-1} + (L_i - L_{i-1}) \cdot \frac{\alpha \cdot N - F_{i-1}}{f_i}$$

α=	0,25	Q1=	17,25
α=	0,5	Q2=	21,79
α=	0,75	Q3=	25,94

d) Los deciles 3º y 6º.

α=	0,3	D3=	18,3
α=	0,6	D6=	23,29

e) Los percentiles 35 y 85

α=	0,35	P35=	19,35
α=	0,85	P85=	28,56

11. Completar los datos que faltan en la siguiente tabla estadística:

x_i	f_i	F_i	n_i
1	4		0.08
2	4		
3		16	0.16
4	7		0.14
5	5	28	
6		38	
7	7	45	
8			

Calcular la media, mediana y moda de esta distribución.

Solución:

1ª fila: $f_i = 4$; $ni = f_i/N = 4/N = 0{,}08 \rightarrow N = 50$; $F_i = f_i = 4$

2ª fila: $ni = f_i/N = 4/50 = 0{,}08$; $F_i = F_{i-1} + f_i = 4 + 4 = 8$

3ª fila: a) $f_i = n_i*N = 0{,}16*50 = 8$; b) $F_i=16= F_{i-1} + f_i = 8 + + f_i \rightarrow f_i = 8$

4ª fila: $F_i = \sum_1^i F_i = 4 + 4 + 8 + 7 = 23$

5ª fila: $ni = fi/N = 5/50 = 0{,}1$

6ª fila: $f_i= F_i-F_{i-1}= 38 - 28 = 10$; $ni = 10/N = 10/50 = 0{,}2$

7ª fila: $ni = fi/N = 7/50 = 0{,}14$

8ª fila: $F_i = N = 50$, $f_i= F_i-F_{i-1}= 50 - 45 = 5$; $ni = 5/N = 5/50 = 0{,}1$

x_i	f_i	F_i	n_i
1	4	**4**	0.08
2	4	**8**	**0,08**
3	**8**	16	0.16
4	7	**23**	0.14
5	5	28	**0,1**
6	**10**	38	**0,2**
7	7	45	**0,14**
8	**5**	**50**	**0,1**

x_i	f_i	F_i	n_i	x_i*n_i	
1	4	4	0,08	0,08	
2	4	8	0,08	0,16	
3	8	16	0,16	0,48	
4	7	23	0,14	0,56	
5	5	28	0,1	0,5	
6	10	38	0,2	1,2	
7	7	45	0,14	0,98	
8	5	50	0,1	0,8	
	50		1	**4,76**	sumas
				media	

max(fi)=	10	moda= 6	
xi/ Fi>N/2=25	xi/ Fi=28 =5	mediana= 5	
xi/ Fi>N/2=25			

12. Hallar la desviación media, la varianza y la desviación típica de la serie de números siguiente:

2, 3, 6, 8, 11, 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5

Solución:

números		nº ordenados		x_i	f_i	n_i	x_i*n_i	$(x_i)^2*n_i$			
2		2		2	1	0,08	0,15	0,31			
3		3		3	2	0,15	0,46	1,38			
6		3		5	1	0,08	0,38	1,92			
8		5		6	2	0,15	0,92	5,54			
11		6		7	1	0,08	0,54	3,77			
12		6		8	1	0,08	0,62	4,92			
6		7		10	1	0,08	0,77	7,69			
7		8		11	1	0,08	0,85	9,31			
3		10		12	1	0,08	0,92	11,08			
15		11		15	1	0,08	1,15	17,31			
10		12		18	1	0,08	1,38	24,92			
18		15		N=	13	1	**8,15**	88,15		**S^2 =**	**21,67**
5		18					**media**			**S =**	**4,65**

13.. Las alturas de los jugadores de un equipo de baloncesto vienen dadas por la tabla:

Altura	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)	[195, 2.00)
Nº de jugadores	1	3	4	8	5	2

Calcula la media, la mediana y la desviación típica. ¿Cuántos jugadores se encuentran por encima de la media más una desviación típica?

Solución:

Altura	Nº de jugadores (f_i)	F_i	MC	f_i*MC	$(MC)^2*f_i$
[170, 175)	1	1	172,5	172,50	29756,25
[175, 180)	3	4	177,5	532,50	94518,75
[180, 185)	4	8	182,5	730,00	133225
[185, 190)	8	16	187,5	1500,00	281250
[190, 195)	5	21	192,5	962,50	185281,3
[195, 2.00)	2	23	197,5	395,00	78012,5
N=	23		suma	4292,50	802043,75
S^2=	**40,55**		**Media=**	**186,63**	
S=	**6,37**		**Moda=**	**187,86**	
			Mediana=	**187,19**	

H = Media (h) +S=186, 63+6, 37= 193 cm

H =190 +5*(α*23 - 16)/5 →

α*23= (193-190)*4/5+16=19 =nº jugadores ≤ H

nº jugadores (h>H) = 23-19=4

14. Dada la distribución estadística:

Clase	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, ∞)
fi	3	5	7	8	2	6

Calcular la media, la mediana, la varianza y los cuartiles 1º y 3º.

Solución:

L_{i-1}	L_i	Clase	MC	f_i	F_i	P_i	MC_i*f_i	MC_i^2	$f_i*MC_i^2$
0	5	[0, 5)	2,5	3	3	9,68%	7,5	6,25	18,75
5	10	[5, 10)	7,5	5	8	25,81%	37,5	56,25	281,25
10	15	[10, 15)	12,5	7	15	48,39%	87,5	156,25	1093,75
15	20	[15, 20)	17,5	8	23	74,19%	140	306,25	2450
20	25	[20, 25)	22,5	2	25	80,65%	45	506,25	1012,5
25	30	[25, ∞)	27,5	6	31	100,00%	165	756,25	4537,5
			suma	31		suma	482,5	suma	9393,75

Media=	15,56
Moda=	15,71
Mediana=	15,31

S^2=	60,77
S=	7,80

Q1=	9,75
Q3=	20,625

15. Calcule para la distribución de la tabla los cuartiles, los deciles y los percentiles 35 y 65.

Clase	f_i	F_i
[50, 60)	8	8
[60, 70)	10	18
[70, 80)	16	34
[80, 90)	14	48
[90, 100)	10	58
[100, 110)	5	63
[110, 120)	2	65

Solución:

L_{i-1}	L_i	Clase	f_i	F_i	P_i	
50	60	[50, 60)	8	8	12,31%	**D1**
60	70	[60, 70)	10	18	27,69%	**D2; Q1**
70	80	[70, 80)	16	34	52,31%	**D3, D4,D5=Q2, P35**
80	90	[80, 90)	14	48	73,85%	**D6, D7, P65**
90	100	[90, 100)	10	58	89,23%	**Q3, D8**
100	110	[100, 110)	5	63	96,92%	**D9**
110	120	[110, 120)	2	65	100,00%	
		N=	65			

Q1=	**68,25**
Q2=	**79,06**
Q3=	**90,75**

D1=	**58,13**
D2=	**65,00**
D3=	**70,94**
D4=	**75,00**
D5=Q2=	**79,06**
D6=	**83,57**
D7=	**88,21**
D8=	**94,00**
D9=	**101,00**

P35=	**72,97**
P65=	**85,89**

SOLUCIONES TEMA 1 HOJA 2

1.

a) CUANTITATIVA CONTÍNUA b) CUANTITATIVA CONTINUA
c) CUANTITATIVA DISCRETA d) CUANTITATIVA CONTINUA
e) CUANTITATIVA CONTINUA f) CUALITATIVA ORDINAL
g) CUANTITATIVA DISCRETA

2.

x	8	9	10	11	12	13
f_a	2	6	9	4	3	1
f_r	0,08	0,24	0,36	0,16	0,12	0,04
f_{rA}	0,08	0,32	0,68	0,84	0,96	1

$\tilde{x}_{1/2}$; $n = 25$ IMPAR $\rightarrow$ $\tilde{x}_{1/2} = x_{n/2}+1 = x_{13}$

$\tilde{x}_{1/2} = 10$

$x_{MOD} = 10$

$$\bar{x} = \frac{2.8 + 6.9 + 9.10 + 4.11 + 3.12 + 1.13}{25} = \frac{253}{25} = 10,12$$

$\tilde{x}_{1/4}$; $n = 25 \rightarrow n.c_{1/4} = 25 . 1/4 = 6,25 \notin \mathbb{N} \rightarrow \tilde{x}_{1/4} = x_{\left[\frac{n}{4}\right]+1} = x_{6+1} = x_7 = 9$

$\tilde{x}_{3/4}$; $n = 25 \rightarrow n c_{3/4} = 25 . 3/4 = 18,75 \notin \mathbb{N} \rightarrow \tilde{x}_{3/4} = x_{\left[n\frac{3}{4}\right]+1} = x_{18+1} = x_{19} = 11$

3.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{F_n} \qquad F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$\bar{x} = \frac{8.0 + 4.1 + \ldots + 0.6 + 2.7}{50} = \frac{146}{50} = 2.92$$

$$F_n = 8 + 4 + \ldots + 0 + 2 = 50$$

$\tilde{x}_{1/2}$, $n = 50$ PAR $\longrightarrow$ $\tilde{x}_{1/2} = \dfrac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2} = 3$

$x_{MOD} = 5$

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{F_n} = \frac{8|0-2,92| + 4|1-2,92| + \ldots + 0|6-2,92| + 2|7-2,92|}{50}$$

$$S = 1.61$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{F_n} = \frac{8(0-2,92)^2 + 4(1-2,92)^2 + \ldots + 0(6-2,92)^2 + 2(7-2,92)^2}{50}$$

$$S^2 = 3.67$$

4.

$$\bar{x} = \frac{22 + 25 + \ldots + 2.35 + 37 + \ldots + 61}{1 + 1 + \ldots + 2 + \ldots + 1} = 37,42$$

$$S = \sqrt{\frac{(22 - 37,42)^2 + \ldots + (61 - 37,42)^2}{14}} = 10,1398$$

$\tilde{x}_{1/2}$; $np = 14 \cdot \frac{1}{2} = 7 \in \mathbb{N} \longrightarrow \tilde{x}_{1/2} = \frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{35+37}{2} = 36$

(B) CON LOS DATOS AGRUPADOS CON 10 cm EN 5 CLASES

CLASE	MARCA	f_r
[20,30)	25	3
[30,40)	35	6
[40,50)	45	3
[50,60)	55	1
[60,70]	65	1

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 25 + 6 \cdot 35 + 3 \cdot 45 + 1 \cdot 55 + 1 \cdot 65}{3+6+3+1+1} = 38,57$$

$$S = \sqrt{\frac{(25-38,57)^2 \cdot 3 + \ldots + (65-38,57)^2}{14}} = 11,09$$

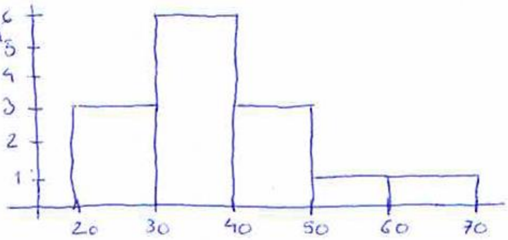
$$\tilde{x}_{1/2} = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} n_i}{14} \cdot a_i = 30 + \frac{7-3}{14} \cdot$$

$$\tilde{x}_{1/2} = 32,857$$

(C) TALLO Y HOJAS

```
2 | 2 5 8
3 | 1 2 5 5 7 8
4 | 1 2 4
5 | 3
6 | 1
```

HISTOGRAMA



5.

	[400, 700)	[700, 1000)	[1000, 1300)	[1300, 1600)	[1600, 1900]
n_i	13	30	32	15	10
MARCAS	550	850	1150	1450	1750
	$\frac{400+700}{2}$	$\frac{700+1000}{2}$	$\frac{1000+1300}{2}$	$\frac{1300+1600}{2}$	$\frac{1600+1900}{2}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{F_n} = \frac{13 \cdot 550 + 30 \cdot 850 + \ldots + 15 \cdot 1450 + 10 \cdot 1750}{100} = 1087$$

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i = 13 + 30 + 32 + 15 + 10 = 100$$

$$\tilde{x}_{1/4} = L_{i-1} + \frac{\frac{1 \cdot n}{4} - \sum_{i=1}^{n-1} n_i}{n_i} \cdot a_i$$ COMO HAY 100 DATOS, 1/4 ES EL 25 → 2° INTERVALO

$$= 700 + \frac{100/4 - 13}{30} \cdot 300 = 820$$

$$\tilde{x}_{1/2} = L_2 + \frac{100/2 - (n_2 + n_1)}{n_3} a_3$$ COMO ES EL DATO 50 → 3er INTERVALO

$$= 1000 + \frac{50-43}{32} 300 = 1065,62$$ MEDIANA

$\tilde{x}_{3/4}$ COMO ES EL DATO 75 ESTÁ EN EL 3er INTERVALO

$$= 1000 + \frac{75-43}{32} 300 = 1300$$

$\tilde{x}_{90/100}$ ESTARÁ EN EL 4° INTERVALO

$$= L_3 + \frac{\frac{90}{100} \cdot 100 - 75}{15} \cdot 300 = 1300 + 300 = 1600$$

SÍ SE HUBIERA SUPUESTO EN EL 5° SALDRÍA LO MISMO:

$$= L_4 + \frac{\frac{90}{100} \cdot 100 - 90}{10} \cdot 300 = 1600 + 0 = 1600$$

6.

$$\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{2 \cdot 99,7 + 1 \cdot 99,8 + \ldots + 1 \cdot 100,2 + 1 \cdot 100,3}{8} = 99,9625$$

$$\bar{x}_B = \frac{4 \cdot 99,8 + 1 \cdot 100 + 1 \cdot 100,1 + 2 \cdot 100,2}{8} = 99,9625$$

LA MEDIA ES IGUAL, ASÍ QUE HASTA AQUÍ NO PODEMOS ELEGIR ENTRE AMBAS MÁQUINAS. CALCULAMOS LA DESVIACIÓN TÍPICA

$$S_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (99,7 - 99,9625)^2 + \ldots + 1 \cdot (100,3 - 99,9625)^2}{8}}$$

$$S_A = 0,21176$$

$$S_B = \sqrt{\frac{4 \cdot (99,8 - 99,9625)^2 + \ldots + 2 \, (100,2 - 99,9625)^2}{8}} = 0,17275$$

LA MÁQUINA B ES MEJOR QUE LA A PORQUE TIENE UN MEDIA DE DESVIACIONES ALREDEDOR DE LA LONGITUD CORRECTA MENOR QUE LA A

7.

$$\bar{x}_A = \frac{0 + 2 \cdot 1 + 3 + 2 \cdot 5 + 6 + 2 \cdot 8 + 9}{10} = 4,6 \qquad \bar{x}_B = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 8}{10} = 4,6$$

TIENEN LA MISMA MEDIA, PERO A PRESENTA MÁS APROBADOS Y NOTAS MÁS ALTAS, ASÍ QUE, DESDE LA PERSPECTIVA DE LA MEDIA, ES MEJOR A

$$S_A = \sqrt{\frac{(0 - 4,6)^2 + 2 \, (1 - 4,6)^2 + \ldots + 2 \, (8 - 4,6)^2 + (9 - 4,6)^2}{10}} = 3,072$$

$$S_A^2 = 9,44$$

$$S_B = 1,7435 \quad ; \quad S_B^2 = 3,04$$

8.

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 3000 + 3 \cdot 2500 + 6 \cdot 1500 + 9 \cdot 800}{19} = 1405,26$$

$\tilde{x}_{1/2}$; n ES IMPAR Y POR LO TANTO $x_{1/2} = x_{[n/2]+1} = 1500$ $\quad n = 19$

$x_{MOD} = 800$

9.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{5} = 7,31 \longrightarrow \sum_{i=1}^{5} f_i x_i = 36,55$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i + 4,47 + 10,15}{7} = \frac{36,55 + 4,47 + 10,15}{7} = 7,31$$

10.

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 1 + 3 + 5 + 13}{6} = 4$$; $\tilde{x}_{1/2}$; n ES PAR Y POR LO TANTO $\frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$

$n = 6 \rightarrow n/2 = 3$

$x_{MOD} = 1$

11.

$$\bar{x} = \frac{1+3+5+7+9}{5} = 5 \quad ; \quad s^2 = \frac{(1-5)^2+(3-5)^2+0^2+(7-5)^2+(9-5)^2}{5} = 8$$

Sumamos 12

$$\bar{x} = \frac{1+12+3+12+\dots+9+12}{5} = \frac{12\cdot 5+25}{5} = 17 = 12+5$$

$$s^2 = \frac{((1+\cancel{12})-(5+\cancel{12}))^2+\dots+((9+\cancel{12})-(5+\cancel{12}))^2}{5} = 8$$

12. Calculamos los porcentajes

URBANA: $\frac{240}{2000} = 0,12$; SUBURBANA: $\frac{1400}{2000} = 0,7$; RURAL: $\frac{360}{2000} = 0,18$

REGLA DE TRES: Al área πr^2 le corresponde un ángulo 2π.
Al área x le corresponde un ángulo α
si $r = 1$

PARA URBANA $\left.\begin{array}{l} 0,12\pi \longrightarrow \alpha \\ \pi \longrightarrow 2\pi \end{array}\right\}$ $\alpha = 0,12\cdot 2\cdot \pi = 0,7536$ radianes

HACEMOS OTRA REGLA DE 3 PARA PASAR A °

$\left.\begin{array}{l} 6,28 \longrightarrow 360 \\ 0,75 \longrightarrow x \end{array}\right\} x = 43°$

HACIENDO LO MISMO: SUBURBANA ES 252° Y RURAL 65°

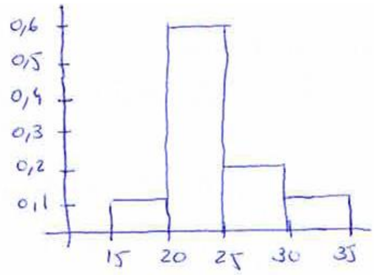
EL DIAGRAMA QUEDA:

13.

SE CALCULAN LAS FRECUENCIAS RELATIVAS

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i = 5+30+10+5 = 50$$

$f_r \longrightarrow 0,1 ; 0,6 ; 0,2 ; 0,1$



14.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{24\cdot 11,9+30\cdot 14,2+28\cdot 10,8}{82} = \frac{1014}{82} = 12,3659$$

MEDIA PONDERADA

15.

Observemos la expresión de la varianza : $s_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} n_i . x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

La primera parte de la expresión contiene los cuadrados de los valores de la variable X; es decir, los valores definidos como la nueva variable Y.

Con esto : $s_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} n_i . y_i}{N} - \bar{x}^2 \Rightarrow s_x^2 = \bar{y} - \bar{x}^2 \Rightarrow \bar{y} = s_x^2 + \bar{x}^2 = 3^2 + 12^2 = 153$

ESTADISTICA: Ejercicios TEMA2 HOJA 1

1. Se han realizado cinco observaciones sobre dos variables, X e Y, tabuladas se la siguiente forma:

X	5	7	10	13	15
Y	2	3	4	5	6

   a. Determinar la recta de regresión
   b. ¿Cuál es el valor de coeficiente de correlación lineal? ¿Hay correlación?

2. Una compañía de seguros considera que el número de vehículos (Y) que circulan por una determinada autopista a más de 120 km/h, puede ponerse en función del número de accidentes (X) que ocurren en ella. Durante 5 días obtuvo los siguientes resultados:

Accidentes	5	7	2	1	9
Nº vehículos	15	18	10	8	20

   a. Calcular la recta de regresión y el coeficiente de correlación lineal.
   b. Si ayer se produjeron 6 accidentes, ¿cuántos vehículos podemos suponer que circulaban por la autopista a más de 120 km / h?
   c. ¿Es buena la predicción?

3. Las calificaciones de 32 alumnos en fundamentos de programación y en estadística han sido las de la tabla adjunta.

Fdmentos Prog. (X)	3	4	5	6	6	7	7	8	10
Estadística (Y)	2	5	5	6	7	6	7	9	10
Nº alumnos	6	6	4	4	4	4	1	1	2

   a. Obtener la ecuación de la recta de regresión de calificaciones de estadística respecto de las calificaciones de fundamentos de programación.
   b. ¿Cuál será la nota esperada en estadística para un alumno que obtuvo un 4,5 en fundamentos de programación?

4. Se han colgado sucesivamente del extremo de un resorte cinco masas, en gramos, y se han registrado los alargamientos en milímetros, producidos por las cargas:

Peso (gr.)	3	4	5	6	7
Alargamientos (mm)	1.2	1.9	2.4	3.0	3.7

   a. Dibuja la nube de puntos.
   b. Hallar la recta de regresión, el coeficiente de correlación lineal.
   c. Deducir lo que se estiraría el muelle si colgáramos una masa de 15 gramos.

ESTADISTICA: Ejercicios TEMA2 HOJA 1

5. Dada la tabla de información adjunta:

X\Y	1	3	4	8	15
2	2	1	1	4	1
4	2	0	4	1	2
6	5	1	3	4	3
10	1	0	0	2	6

Calcular las distribuciones y medias marginales.

6. Se han medido dos caracteres simultáneos sobre cada uno de los miembros de un colectivo, obteniéndose así la tabla adjunta:

X\Y	90-100	100-120	120-140
10-15	6	3	1
15-20	5	10	2
20-25	4	1	7
25-30	2	2	4

a. Hallar el punto $(\overline{x},\overline{y})$
b. Hallar la covarianza
c. Calcular las distribuciones marginales
d. Representar gráficamente la variable (X, Y)

7. En una exploración biológica sobre un tejido se han observado dos caracteres cualitativos (X, Y), obteniéndose los siguientes resultados:

(0, 2), (1,6), (3,14), (-1,-2), (2,10)

a. Calcular las distribuciones marginales.
b. Estudiar la correlación entre ambos caracteres
c. Completar estos pares: (-3,), (-2,) y (, 4).

8. Se ha considerado un grupo de matrimonios (con hijos) y se ha preguntado a qué edad tuvieron su primer hijo. La información se recoge en la tabla adjunta (X= edad marido, Y= edad mujer). Se pide:

X\Y	15-17	17-19	19-21	21-23	23-27
16-18	5	2			
18-20		3	9	1	
20-25			4	6	10
25-28				5	7
28-32				3	4

a. ¿Cuántos matrimonios fueron encuestados?
b. Hallar la recta de regresión de X sobre Y
c. Hallar la recta de regresión de Y sobre X

9. Cinco niños de 2, 3, 5, 7 y 8 años pesan respectivamente 14, 20, 30, 42 y 44 Kg, Calcular:
   a. La recta de regresión del peso sobre la edad
   b. El coeficiente de correlación lineal
   c. Según estos datos ¿Cuánto se prevé que debe pesar un niño de 6 años?

10. La siguiente tabla de frecuencias absolutas corresponde a 200 observaciones de una variable bidimensional

X\Y	10	15	20	25	30	35
8	8	10	10	6	0	10
10	12	20	0	14	10	20
12	24	10	10	6	20	10

Calcular:
   a. Las distribuciones Marginales de X y de Y.
   b. La distribución de X condicionada a que Y=25
   c. La distribución de Y condicionada a que X=12

11. Con los datos del ejercicio anterior calcular las medias y varianzas marginales ¿Cuál de las dos variables presenta mayor variación?
12. Se han clasificado 100 familias según el número de hijos (H) y de hijas (M) en la siguiente tabla

H\M	0	1	2	3	4
0	4	6	9	4	1
1	5	10	7	4	2
2	7	8	5	3	1
3	5	5	3	2	1
4	2	3	2	1	0

Calcular:
   a. Hallar las medias, varianzas y desviaciones típicas Marginales.
   b. ¿Qué número medio de hijas hay en aquellas familias que tienen 2 hijos?
   c. ¿Qué número medio de hijos hay en aquellas familias que no tienen hijas?
   d. ¿Qué número medio de hijos tienen aquellas familias que a lo sumo tienen 2 hijas?
   e. Hallar la covarianza.

SOLUCION EJERCICIOS NO RESUELTOS EN AULA

TEMAS 3

Ejercicio 7

Los estudiantes de 1º y 2º de un centro académico se distribuyen por curso y sexo como se indica en la tabla, aunque hay números desconocidos:

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º	60	*a*	130
2º	*b*	65	*c*
Total	110	*d*	245

Completa los números que faltan.

Se elige un estudiante al azar, calcular la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

A = "que sea una chica"; B = "que sea de 1º"; C = "que sea una chica de 2º"; D = "que sea un chico de 1º"; F = "que sea de 1º si se sabe que es un chico"; G = "que sea un chico si se sabe que es de 1º"

Solución

a) Como las sumas por filas y columnas deben "cuadrar", se tendrá:

$60 + a = 130 \Rightarrow a = 70; \quad 60 + b = 110 \Rightarrow b = 50; \quad c = 50 + 65 = 115; \quad d = 70 + 65 = 135.$

Por tanto, la tabla completa es la siguiente.

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º	60	70	130
2º	50	65	115
Total	110	135	245

a) Hay 135 chicas $\to P(A) = \dfrac{135}{245}$.

Hay 130 alumnos/as de 1º $\to P(B) = \dfrac{130}{245}$.

Hay 65 chicas de 2º $\to P(C) = \dfrac{65}{245}$.

Hay 60 chicos de 1º $\to P(D) = \dfrac{60}{245}$.

Hay 110 chicos, de los que 60 son de 1º $\mapsto P(F) = \dfrac{60}{110}$.

Hay 130 estudiantes de 1º, de los que 60 son chicos $\to P(F) = \dfrac{60}{130}$.

Ejercicio 9

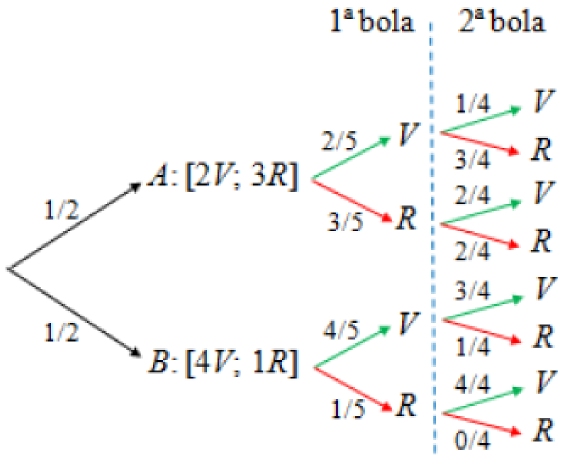
Sobre una mesa hay dos bolsas iguales opacas. Una de ellas contiene 2 bolas verdes y 3 rojas; la otra, 4 bolas verdes y 1 roja.

Si se elige una bolsa al azar y se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja?

Si se elige una bolsa al azar y se extraen dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que las bolas sean de distinto color?

Solución

Sea A la bolsa con 2 bolas verdes y 3 rojas; y B la bolsa con 4 bolas verdes y 1 roja.
Ambas bolsas pueden elegirse con probabilidad 1/2.
Sean V y R los sucesos bola verde y bola roja, respectivamente.
El diagrama de árbol asociado al experimento es el siguiente.



a) Si se elige bolsa y se extrae una bola,

$P(R) = P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) \Rightarrow$

$P(R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

b) Si se elige bolsa y se extraen dos bolas, los sucesos que se piden son V y R (o R y V), en cualquier orden. La probabilidad pedida es:

$P(V \text{ y } R) = P(A) \cdot P(V \text{ y } R) + P(B) \cdot P(V \text{ y } R) \Rightarrow$

$P(V \text{ y } R) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 11

El 50 % de los jóvenes de cierta población afirma practicar el deporte A y el 40 % afirma practicar el deporte B. Además, se sabe que el 70 % de los jóvenes de dicha población practica el deporte A o el B. Si seleccionamos un joven al azar, se pide:

1. La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes
2. La probabilidad de que practique el deporte A y no practique el deporte B.
3. Si practica en deporte B, ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte A?
4. ¿Son independientes los sucesos “Practicar el deporte A” y “Practicar el deporte B”? ¿Por qué?

Solución

Sean los sucesos:

A = “Practicar el deporte A”, B = “Practicar el deporte B”

Se sabe que:

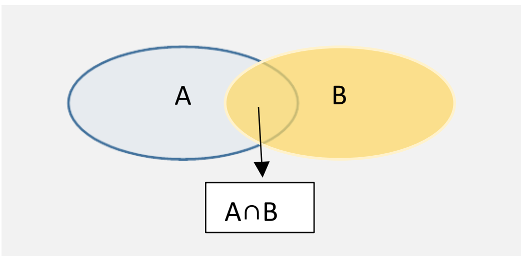
$P(A) = 0{,}50$; $P(B) = 0{,}40$; $P(A \cup B) = 0{,}70$.

a) No practicar ningún deporte es el suceso contrario de $A \cup B$. Su probabilidad es:

$P\left[(A \cup B)^C\right] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$.

b) El suceso “practique el deporte A y no practique el deporte B” = $A - B$.
Su probabilidad es:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}50 - 0{,}20 = 0{,}30$.



La $P(A\cap B)$ se obtiene despejando en la igualdad:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,70=0,50+0,40-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=0,20.$$

c) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,2}{0,4}=\dfrac{1}{2}$.

d) Son independientes si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Como $P(A)\cdot P(B)=0,50\cdot 0,40=0,20$ y $P(A\cap B)=0,20$, los sucesos A y B son independientes.

Ejercicio 12

Se van a sortear 4 viajes a Roma entre 40 personas utilizando una baraja de 40 cartas. Se reparte una carta por persona y cada una de las que ha obtenido un rey (R) gana un viaje. Calcula la probabilidad de que gane un viaje:

a) La primera persona que recibe la carta.
b) La segunda persona que recibe la carta.
c) Ninguna de las dos primeras personas gane el viaje.

Solución

a) La primera persona gana el viaje cuando le sale un rey. $P(\text{viaje})=P(R)=\dfrac{4}{40}$.

b) La segunda persona gana el viaje cuando la segunda carta es un rey, que puede pasar saliendo un rey en la primera o no.

$P(\text{la } 2^a \text{ carta sea un rey})=P(1^a\, R)\cdot P(2^a\, R/1^a\, R)+P(1^a \text{ no } R)\cdot P(2^a\, R/1^a \text{ no } R)=$

$$=\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}+\frac{36}{40}\cdot\frac{4}{39}=\frac{4}{40}.$$

c) Ambas personas deben recibir cartas que no sean reyes.

$$P\left(\overline{R,R}\right)=\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}.$$

Ejercicio 15

Sean A, B y C tres sucesos tales que A∩B=∅ ¿P[(A∪B) / C] = P(A/C) + P(B/C)?

$$P[(A\cup B)/C]=\frac{P[(A\cup B)\cap C]}{P(C)}=\frac{P[(A\cap C)\cup(B\cap C)]}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(C)}=$$

$$=\frac{P(A\cap C)+P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}+\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=P(A/C)+P(B/C)$$

Si se cumple

Ejercicio 16

Sean dos sucesos A y B, donde P($\bar{A} \cap \bar{B}$)= 0, P($\bar{A} \cup \bar{B}$) = 0,5 y P($\bar{A}$) =0,4. Se pide P(B) y P(A∪B).

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

$$0 = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \quad \mapsto \quad P(A \cup B) = 1$$

$$0{,}5 = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \quad \mapsto \quad P(A \cap B) = 0{,}5$$

$$1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \mapsto \quad 1 = 0{,}6 + P(B) - 0{,}5 \quad \mapsto \quad P(B) = 0{,}9$$

Ejercicio 18

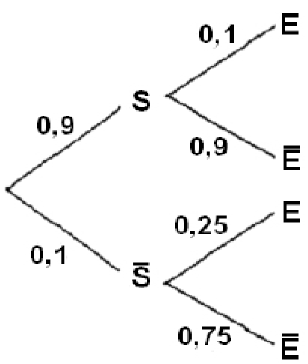
Un psicólogo de una compañía aérea, por experiencias anteriores, conoce que el 90% de los tripulantes de cabina (en adelante TCP) que inician un determinado entrenamiento técnico terminan con éxito. la proporción de TCPs con experiencia previa es del 10% de entre los que completaron con éxito su entrenamiento y del 25% de entre aquellos que no terminaron con éxito su entrenamiento. Se desea saber:

a. La probabilidad de que un TCP con experiencia previa supere el entrenamiento con éxito.
b. ¿La experiencia previa influye en el éxito del entrenamiento?

<u>Solución</u>

Sean los sucesos: S=" supera el entrenamiento con éxito"
E=" tiene experiencia previa"

$$P(S) = 0{,}9 \qquad P(\bar{S}) = 0{,}1 \qquad P(E/S) = 0{,}1 \qquad P(E/\bar{S}) = 0{,}25$$



a) $P(S/E) = \dfrac{P(S \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}9 \times 0{,}1}{0{,}9 \times 0{,}1 + 0{,}1 \times 0{,}25} = 0{,}78$

b) $\begin{cases} P(S/E) = 0{,}78 \\ P(S) = 0{,}9 \end{cases} \quad \mapsto \quad P(S) > P(S/E)$

La experiencia previa influye desfavorablemente en el éxito del tratamiento.

Ejercicio 19

En una facultad el 80% de los alumnos tienen ordenador de sobremesa, el 50% tiene ordenador portátil y el 10% no tiene ordenador. Se pide:

c. Probabilidad de que un alumno tenga ambos tipos de ordenador.
d. Sabiendo que un alumno tiene ordenador de sobremesa, obtener la probabilidad de que tenga portátil.
e. Sabiendo que un alumno tiene portátil, obtener la probabilidad de que tenga ordenador de sobremesa.
f. Determinar si ambos sucesos son independientes.

Solución

a) Sean los sucesos: $\begin{cases} A = \text{Un alumno tiene ordenador de sobremesa} \\ B = \text{Un alumno tiene ordenador portátil} \end{cases}$

$$P(A)=0,8 \qquad P(B)=0,5 \qquad P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,1$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \qquad\qquad P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0,1 \quad\mapsto\quad P(A\cup B)=0,9$$

b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad\mapsto\quad 0,9=0,8+0,5-P(A\cap B) \quad\mapsto\quad P(A\cap B)=0,4$

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0,4}{0,8}=\frac{1}{2}=0,5$$

c) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,4}{0,5}=\dfrac{4}{5}=0,2$

d) Dos sucesos A y B son independientes $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$$P(A\cap B)=0,4=0,8\times 0,5=P(A)\times P(B) \quad\mapsto\quad \text{A y B son independientes}$$

Ejercicio 20

Tres tiradores hacen una descarga simultánea. Las probabilidades de hacer blanco son, respectivamente, 0,6, 0,5 y 0,4. Calcular las probabilidades de los sucesos:

a. Algún tirador hace blanco.
b. Exactamente dos tiradores hacen blanco.
c. El tercer tirador hace blanco, sabiendo que los dos primeros lo han hecho.

Solución:

Los sucesos tirador A = "hacer blanco 1er tirador", tirador B = "hacer blanco 2º tirador" y tirador C= "hacer blanco 3er tirador", son independientes, la descarga es simultánea.

a) Sean los tiradores A, B y C $\begin{cases} P(A)=0,6 & P(\overline{A})=0,4 \\ P(B)=0,5 & P(\overline{B})=0,5 \\ P(C)=0,4 & P(\overline{C})=0,6 \end{cases}$

Se resuelve por el suceso contrario, que no haga blanco ningún tirador:

$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(\overline{A})\times P(\overline{B})\times P(\overline{C})=0,4\times 0,5\times 0,6=0,12$

$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1-0,12=0,88$

b) Exactamente dos tiradores hacen blanco

$P\left[(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\right]=P[A\cap B\cap\overline{C}]+P[A\cap\overline{B}\cap C]+P[\overline{A}\cap B\cap C]=$

$=(0,6\times 0,5\times 0,6)+(0,6\times 0,5\times 0,4)+(0,4\times 0,5\times 0,4)=0,38$

d) Al ser independientes P(C) es la misma.

TEMA 4- 1ª PARTE

Ejercicio 3

En una lotería se pueden ganar 10.000 € con probabilidad de 0,001; en los demás casos se pierde lo jugado. Si cada apuesta cuesta 12 €, ¿es un juego equitativo?

En otra lotería se pueden ganar 5.000 € con probabilidad 0,002 o 15.000 € con probabilidad 0,0001; en los demás casos se pierde lo jugado. Si cada apuesta cuesta 12 €, ¿es un juego equitativo?

Solución

Un juego es equitativo cuando su esperanza matemática es 0: $E(X) = \mu = 0$.

a) La probabilidad de ganar 10.000 € es 0,001, y la de perder 12 € es 0,999. Por tanto, la esperanza matemática es la ganancia por la probabilidad de ganar menos lo que se apuesta por la probabilidad de perder:

μ = 10.000* 0,001 - 12·0,999 = 10- 11,988= - 1,988

Como la esperanza es negativa, el juego no es equitativo. Tiene ventaja la empresa de loterías.

b) μ = 5.000* 0,002 + 15.000*0.0001 - 12·0,9979 = 11.5- 11,9748= - 0,4748
Tampoco es equitativo

Ejercicio 4

Para cada una de las loterías anteriores, ¿cuánto debe valer cada apuesta si se quiere que el juego sea equitativo?

Un juego es equitativo cuando su esperanza matemática es 0: $E(X) = \mu = 0$.
Si el precio de cada apuesta es k euros:
a) La probabilidad de ganar 10000 € es 0,001 y la perder k euros es 0,999, la esperanza matemática es 0 si:

$$\mu = 10000 \cdot 0,001 - k \cdot 0,999 = 0 \Rightarrow k = \frac{10}{0,999} \approx 10,01.$$

b) $\mu = 5000 \cdot 0,002 + 15000 \cdot 0,0001 - k \cdot 0,9979 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{11,5}{0,9979} \approx 11,52$.

Ejercicio 10

La función de densidad de una variable es

$$f(x) = \begin{cases} a x^2 + b & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sabiendo que P ((1/2) <x<1) = 0,1666. Determinar a y b.

Por ser función de densidad:

$$1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (a x^2 + b)\,dx = \left[a\frac{x^3}{3} + b x\right]_0^2 = \frac{8a}{3} + 2b \quad \mapsto \quad 8a + 6b = 3$$

- $$P\left[\frac{1}{2} \le x \le 1\right] = \int_{1/2}^1 f(x)\,dx = \int_{1/2}^1 (a x^2 + b)\,dx = \left[a\frac{x^3}{3} + b x\right]_{1/2}^1 = 0,1666, \text{ con lo que:}$$

$$\left[a\frac{x^3}{3} + b x\right]_{1/2}^1 = \left[\frac{a}{3} + b\right] - \left[\frac{a}{24} + \frac{b}{2}\right] = \frac{7a}{24} + \frac{b}{2} = 0,1666 \quad \mapsto \quad 7a + 12b \approx 4$$

En consecuencia:

$$\left.\begin{matrix} 8a + 6b = 3 \\ 7a + 12b = 4 \end{matrix}\right\} \mapsto \left.\begin{matrix} 16a + 12b = 6 \\ 7a + 12b = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{a = \frac{2}{9} = 0,22} \quad 6b = 3 - \frac{16}{9} = \frac{11}{9} \mapsto \boxed{b = \frac{11}{54} = 0,20}$$

EJERCICIOS DE REFUERZO TEMA 4 – PARTE I

1. La función de distribución asociada a la producción de una máquina, en miles de unidades, es del tipo:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(2-x) & 0 \le x \le k \\ 1 & x > k \end{cases}$$

a) Determinar K para que sea función de distribución.
b) Hallar la función de densidad.
c) Calcular la media y la varianza de la producción.
d) Hallar P (X ≤0,5) y P (X >0,25)

SOLUCION

a) Para que sea función de distribución se debe verificar:

$$1 = \lim_{x\to k^+} F(x) = \lim_{x\to k^-} F(x) \quad \mapsto \quad \lim_{x\to k^-} x(x-2) = k(k-2) = 1 \quad \mapsto \quad k^2 - 2k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

En consecuencia, la función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(2-x) & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

b) La función de densidad es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2-2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \longrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 2-2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) La media

$$\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0^1 x\,(2-2x)\,dx = \int_0^1 (2x-2x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

La Varianza de la producción es: $\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 (2-2x)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

d) Mediante la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(2-x) & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$P(X < 0,5) = P(X \le 0,5) = F(0,5) = 0,5(2-0,5) = 0,75$$

$$P(X > 0,25) = 1 - P(X \le 0,25) = 1 - F(0,25) = 1 - 0,25(2-0,25) = 0,5625$$

O bien mediante la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$P(X < 0,5) = \int_0^{0,5} f(x)\,dx = \int_0^{0,5} (2-2x)\,dx = \left[2x - x^2\right]_0^{0,5} = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$P(X > 0,25) = \int_{0,25}^{1} f(x)\,dx = \int_{0,25}^{1} (2-2x)\,dx = \left[2x - x^2\right]_{0,25}^{1} = 1 - (0,5 - 0,0625) = 0,5625$$

2. Dada la variable aleatoria X con la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^n & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}, \text{ donde}$$

n≥ 1, se pide:

a. Calcular la función de densidad
b. Encontrar la media y la varianza de X

SOLUCION

a. La función de densidad es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \longrightarrow f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial x^n}{\partial x} = n x^{n-1} & \text{para } 0 < x \le 1 \\ \frac{\partial 1}{\partial x} = 0 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

b. La media y la varianza

$$\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, n x^{n-1}\,dx = n\int_{-\infty}^{\infty} x^{n}\,dx = n\,\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1}\right) = n/n+1$$

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 n x^{n-1}\,dx - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = n\,\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 =$$

$$= n\left(\frac{1}{n+2}\right) - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

3. Dada la variable aleatoria X con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & resto \end{cases}$$

Se pide:

a. La función de distribución de x

b. Encontrar $F(2/3)$, $F(9/10)$ y $P(1/3 < x \leq 1/2)$

c. Aquel valor de a tal que $P(x \leq a) = 1/4$

d. La media y varianza de x

a) Calculamos la función de distribución F(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 3t^2\,dt = 3\,\frac{t^3}{3}\Big|_0^x = \frac{3x^3}{3} - \frac{3\cdot 0}{3} = x^3$$

Es decir: F (X) vale: 0 para $x \leq 0$; x^3 en $0<x<1$; 1 $x \geq 1$

b) Sustituimos en la función de distribución los valores pedidos:

$$F(2/3) = (2/3)^3 = 0{,}296,\quad F(9/10) = (9/10)^3 = 0{,}729,\quad P(1/3 < x \leq 1/2) = (1/2)^3 - (1/3)^3 = 0{,}088$$

$\rightarrow$ es acumulada, por eso tomamos F(x) en ambos casos

c) F(α) = P(x≤α)

$$F(x) = 0{,}25 \longrightarrow x^3 = 0{,}25 \longrightarrow x = \sqrt[3]{0{,}25} = 0{,}63$$

α =0,63

d) calculamos la media y la varianza

$$\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\,3x^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 3x^3\,dx = 3\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot 3x^2\,dx - (0{,}75)^2 = \frac{3x^5}{5}\Big|_0^1 - 0{,}56 = 0{,}0375$$