PEI 1. Problemas 1.

1. *(10 puntos)* Sean un plano infinito coincidente con el plano *YZ*, que no es conductor y está homogéneamente cargado con densidad superficial σ positiva, y una carga puntual positiva Q que está situada en el semieje *X* positivo a una distancia d del plano.

a) *(3 puntos)* Obtenga el flujo del campo eléctrico a través de un cubo de lado $3d$ centrado en el origen de coordenadas y con sus aristas paralelas a los ejes coordenados.

b) *(4 puntos)* ¿Hay lugares fuera del eje *X* donde se anule el campo eléctrico? ¿Los hay en el eje *X*? En caso afirmativo, obtenga su(s) posición(es).

c) *(3 puntos)* ¿Qué trabajo hay que hacer para llevar una carga puntual q desde el punto $A(d/2{,}0,0)$ al punto $B(3d/2{,}0,0)$?

Solución

a) *La ley de Gauss establece que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga contenida en el volumen que ella delimita dividido por* ε_0. El cubo contiene a la carga puntual Q, pues sus caras paralelas al plano *YZ* están en las posiciones $x = -3d/2$ y $x = 3d/2$, y a una porción del plano cuya carga es $9d^2\sigma$, ya que es un cuadrado de lado $3d$, cuya carga es igual al producto de su área $9d^2$ por la densidad superficial de carga σ. En consecuencia, el flujo del campo eléctrico Φ a través del cubo vale

$$\Phi = (Q + 9d^2\sigma)/\varepsilon_0$$

b) El campo eléctrico $\vec{E}_p$ debido a un plano infinito homogéneamente cargado con densidad superficial σ es perpendicular al mismo, de módulo $|\sigma|/2\varepsilon_0$ y repulsivo si σ es positiva o atractivo si es negativa [(*)]. En nuestro caso, $E_p = \sigma/2\varepsilon_0$ y tiene la dirección del eje *X* positivo (negativo) para valores de x positivos (negativos). El de la carga puntual es $E_Q = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ (r es la distancia a la carga) y está dirigido en la dirección y sentido de la carga al punto. Y el campo eléctrico total es la suma de ambos campos.

Fuera del eje *X*, las direcciones de ambos son diferentes, por lo que el campo eléctrico no se anula en ningún lugar.

En el eje *X*, ambos campos tienen la dirección de este y el campo eléctrico total será nulo cuando ambos campos sean iguales y opuestos. Esto solo puede suceder en la región entre el plano y la carga: $0 < x < d$, donde ambos campos tienen sentidos opuestos, y sucederá cuando tengan igual módulo:

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow r = \left(\frac{Q}{2\pi\sigma}\right)^{1/2} \Rightarrow x = d - r = d - \left(\frac{Q}{2\pi\sigma}\right)^{1/2}$$

c) *El trabajo* W *que hay que hacer sobre la carga* q *es igual al cambio de su energía potencial* $\Delta U = q[\varphi(B) - \varphi(A)]$ y el potencial φ la suma de los debidos al plano, φ_p, y a la carga puntual, φ_Q.

El debido al plano es $\varphi_p = -\int \vec{E}_p \cdot d\vec{r} = -\int (\sigma/2\varepsilon_0)\, dx = -(\sigma/2\varepsilon_0)x + cte$, luego

$$\varphi_p(B) - \varphi_p(A) = -\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\left[\left(\frac{3d}{2}\right) - \left(\frac{d}{2}\right)\right] = -\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)d$$

El debido a la carga puntual es función de la distancia r a ella y los puntos A y B están a iguales distancias: $r(B) = (3d/2) - d = d/2$ y $r(A) = d - (d/2) = d/2$, luego

$$\varphi_Q(B) - \varphi_Q(A) = 0$$

Por lo tanto

$$W = -\frac{q\sigma d}{2\varepsilon_0}$$

(*) *Debido a la simetría plana, el campo eléctrico es i) perpendicular al plano y ii) uniforme a cada lado con igual módulo en ambos, pero con sentido contrario a un lado y al otro. Consideremos un cilindro cuyas bases, de área* S, *están cada una a un lado del plano y son paralelas al mismo. De i) deducimos que no hay flujo a través de la superficie lateral, puesto que* $\vec{E} \perp d\vec{s}$. *Por consiguiente, el flujo total (saliente)* Φ *es la suma de los flujos a través de cada base. Como, según ii), ambos son iguales*

$$\Phi = 2\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2\iint E\hat{n} \cdot d\vec{s} = 2E\iint ds = 2ES$$

donde $\hat{n}$ *es un vector unitario perpendicular al plano y dirigido hacia fuera del mismo. La carga contenida en el cilindro es la de una porción circular de área* S *del plano por lo que, de acuerdo con la ley de Gauss,* $\Phi = \sigma S/\varepsilon_0$ *y obtenemos que* $\vec{E} = (\sigma/2\varepsilon_0)\hat{n}$.

2. *(5 puntos)* Una esfera metálica de radio R tiene una carga $Q_e = +2Q$ y está rodeada concéntricamente por una corteza conductora esférica, de radio interior $R_{ci} > R$ y radio exterior R_{ce}, con carga $Q_c = -Q$. Determine

a) *(1.5 puntos)* las densidades superficiales de carga sobre las superficies interior y exterior de la corteza conductora y

b) *(3.5 puntos)* la diferencia de potencial entre la esfera metálica y la corteza conductora, así como el potencial eléctrico de esta última, tomando el origen de potenciales en el infinito.

<u>Solución</u>

a) Puesto que *no hay campo eléctrico en el interior de la corteza conductora*, su flujo a través de una superficie esférica concéntrica con el sistema, contenida en la corteza y tan próxima como queramos a su superficie interior es nulo y, de acuerdo con *la ley de Gauss*, la carga contenida en ella también lo es. Y esta carga nula es la suma de las cargas de la esfera Q_e y de la superficie interior de la corteza Q_{ci}, por lo que $Q_{ci} = -Q_e = -2Q$. Como la densidad superficial σ_{ci} es igual a la carga Q_{ci} dividida por el área de la superficie, tenemos que $\sigma_{ci} = -2Q/4\pi {R_{ci}}^2 = -Q/2\pi {R_{ci}}^2$.

Ya que *las densidades volúmicas de carga son nulas en los conductores*, la carga de la superficie exterior es $Q_{ce} = Q_c - Q_{ci} = -Q - (-2Q) = Q$ (*la carga de la superficie exterior de la corteza es igual a la carga total del sistema).* Y la densidad superficial es $\sigma_{ce} = Q/4\pi {R_{ce}}^2$.

Nota. El equilibrio electrostático implica que no hay campo eléctrico en los conductores. De esto y la ley de Gauss se deduce que no hay carga en el interior de un material conductor.

b) *Como no hay campo eléctrico en el interior de los conductores, estos son objetos equipotenciales*, luego la diferencia de potencial $\Delta\varphi$ entre la esfera y la corteza es la misma que entre un punto de la superficie de la esfera (a distancia R de su centro O) y otro de la corteza (a distancia R_{ci} de O), esto es,

$$\Delta\varphi = \varphi(R) - \varphi(R_{ci}) = -\int_{R_{ci}}^{R} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En un punto P cualquiera, el campo eléctrico de una distribución de carga con simetría esférica es el mismo que el de una carga puntual, situada en el centro O de la distribución, de igual valor que la carga Q_e contenida en una esfera centrada en O que pasa por el punto P (*).

Por tanto, el campo eléctrico en cualquier punto, de vector de posición $\vec{r}$ respecto al centro O de la esfera, situado entre esta y la corteza es el de una carga puntual, de valor la carga de la esfera, situada en O:

$$\vec{E} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

donde $\hat{r} \equiv \vec{u}_r \equiv \vec{r}/r$.

Y la diferencia de potencial entre la esfera y la corteza es

$$\Delta\varphi = -\int_{R_{ci}}^{R} \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{ci}}\right)$$

El potencial de la corteza φ_c es el mismo que el de cualquier punto de su superficie exterior (a distancia R_{ce} de O). Tomando el origen de potenciales en el infinito, tenemos que

$$\varphi_c = \varphi(R_{ce}) - \varphi(\infty) = -\int_{\infty}^{R_{ce}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Y, dado que el campo eléctrico fuera de la corteza es el de una carga puntual, de valor la carga total de esfera y corteza, situada en O:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r},$$

obtenemos que

$$\varphi_c = -\int_{\infty}^{R_{ce}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{ce}}$$

(*) *Debido a la simetría esférica, el campo eléctrico es radial y su módulo sólo depende de la distancia r al centro O de la distribución: $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Por tanto, el flujo a través una esfera de radio r centrada en O es*

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oiint E(r)\hat{r} \cdot ds\,\hat{r} = E(r) \oiint ds = E(r) 4\pi r^2$$

Y, de acuerdo con la ley de Gauss, su valor es $\Phi = Q_e/\varepsilon_0$, obteniéndose que $\vec{E} = (Q_e/4\pi\varepsilon_0 r^2)\hat{r}$.

PEI 1. Problemas 2.

1.- *(5 puntos)* Una esfera metálica de radio R tiene una carga $Q_e = +2Q$ y está rodeada concéntricamente por una corteza conductora esférica, de radio interior $R_{ci} > R$ y radio exterior R_{ce}, con carga $Q_c = -Q$.

Determine las cargas de las superficies interior y exterior de la corteza conductora, la diferencia de potencial entre la esfera metálica y la corteza conductora y el potencial eléctrico de esta última, tomando el origen de potenciales en el infinito,

a) *(2.5 puntos)* si conectáramos la esfera y la corteza mediante un fino hilo conductor, y

b) *(2.5 puntos)* si, en vez de eso, conectásemos la corteza esférica conductora a tierra.

Solución:

a) Al unir la esfera y la corteza se forma un conductor único y, por tanto, el campo eléctrico en el interior es cero y toda la carga del sistema se distribuye sobre la superficie externa del conductor, es decir, sobre la superficie esférica de radio R_{ce}, por tanto,

$$Q_{ce} = 2Q + (-Q) = Q \;\; ; \;\; Q_{ci} = 0 \, .$$

Por otra parte, al estar conectadas, la esfera metálica y la corteza conductora estarán al mismo potencial y la diferencia de potencial entre ellas será nula. En el exterior, debido a la simetría esférica, el campo y el potencial eléctrico son equivalentes al de una carga puntual de valor la carga total del sistema, así que el potencial común es el de la superficie externa conductora que vale $\varphi_{cort} = Q / \left(4\pi\varepsilon_0 R_{ce} \right)$.

b) Tanto la carga de la superficie interior de la corteza conductora como la diferencia de potencial entre la esfera metálica y la corteza son las mismas que en el problema 2 de la **PEI 1. Problemas 1**, ya que la conexión a tierra de la corteza no les afecta.

Al conectar la corteza a tierra habrá una trasferencia de carga entre ambas hasta que el campo eléctrico en el exterior se anule para que el potencial de la corteza sea nulo (el potencial de Tierra).

Al ser el campo eléctrico nulo en el exterior, la carga encerrada por cualquier superficie esférica de radio $r > R_{ce}$ debe ser nula, en consecuencia

$$2Q + Q_{ci} + Q_{ce} = 0 \;\; \rightarrow \;\; Q_{ce} = -2Q - Q_{ci} = 0$$

2.- *(10 puntos)* Dos capacitores de capacitancias $C_1 = 4\ \mu\text{F}$ y $C_2 = 6\ \mu\text{F}$ se cargan independientemente cada uno mediante conexiones a fuentes de tensión que proporcionan iguales diferencia de potencial $\Delta\varphi = 660\ \text{V}$.

a) *(3 puntos)* Obtenga las cargas Q_1 y Q_2 almacenadas en los capacitores y las energías suministradas por las fuentes de tensión a cada uno de ellos.

Los capacitores cargados se desconectan de las fuentes de tensión y se conectan entre ellos. Determine sus cargas Q_1' y Q_2' y los signos de las cargas de cada una de las placas de los mismos que están unidas a través del interruptor *S*, así como las diferencias de potencial entre extremos de cada uno de ellos, una vez que se ha cerrado el interruptor *S* y se ha alcanzado el equilibrio, en los siguientes supuestos:

b) *(3.5 puntos)* Se disponen los capacitores como en la Figura nº 1.

c) *(3.5 puntos)* Se disponen los capacitores como en la Figura nº 2.

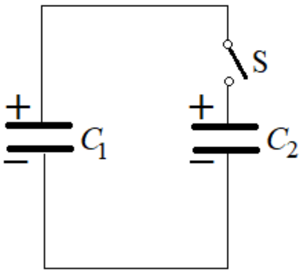

Figura nº 1

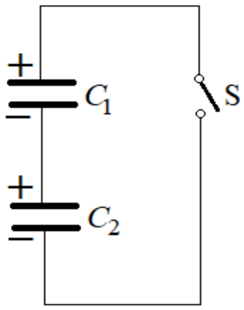

Figura nº 2

Solución:

a) Las cargas adquiridas por cada capacitor, teniendo en cuenta su relación con la diferencia de potencial entre sus placas, serán:

$$Q_1 = C_1\,\Delta\varphi = 4\cdot 10^{-6}\times 660 = 2,64\cdot 10^{-3}\ \text{C} \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2\,\Delta\varphi = 6\cdot 10^{-6}\times 660 = 3,96\cdot 10^{-3}\ \text{C}\,,$$

mientras que las energías suministradas por las fuentes de tensión a cada uno de ellos coincidirán con la energía almacenada en los mismos, así tenemos:

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1\ \Delta\varphi^2 = 0,87\ \text{J} \quad \text{y} \quad U_2 = \frac{1}{2}C_2\ \Delta\varphi^2 = 1,31\ \text{J}\,.$$

b) Las placas de los condensadores conectadas entre sí quedarán con igual potencial. Según el esquema de la figura nº 1, antes de cerrar el interruptor S las diferencias de potencial entre los extremos de ambos condensadores eran las mismas, por tanto, al cerrar S no pasará absolutamente nada y todas las magnitudes quedan como estaban inicialmente, así tendremos

$$\begin{array}{l} Q_1' = Q_1 = 2,64\cdot 10^{-3}\ \text{C} \ \ \text{y} \ \ Q_2' = Q_2 = 3,96\cdot 10^{-3}\ \text{C} \\ \Delta\varphi_1' = \Delta\varphi_2' = \Delta\varphi = 660\ \text{V} \end{array}\,,$$

siendo positivas las cargas en las placas, unidas a través de S, de ambos condensadores.

c) Según el esquema de la figura nº 2, al cerrar el interruptor S se unen placas con signos opuestos, por lo que la carga total positiva del sistema, situada en las placas que no se unen por S, es $Q_T = Q_2 - Q_1 = 1{,}32 \cdot 10^{-3}$ C Esta carga se distribuirá entre ambas placas hasta que se igualen las diferencias de potencial entre extremos de ambos condensadores (se alcanza el equilibrio), así,

Conservación de la carga: $Q_1' + Q_2' = Q_T = 1{,}32 \cdot 10^{-3}$

Igualdad de diferencias de potencial: $\Delta\varphi_1' = \Delta\varphi_2' \rightarrow Q_1'/C_1 = Q_2'/C_2 \rightarrow Q_1' = C_1\, Q_2'/C_2$

$$Q_1' = C_1\left(Q_T - Q_1'\right)/C_2 \rightarrow Q_1' = Q_T/\left(1 + C_2/C_1\right)$$

$Q_1' = 1{,}32 \cdot 10^{-3}/\left(1 + 6/4\right) = 0{,}528 \cdot 10^{-3}$ C y $Q_2' = 0{,}792 \cdot 10^{-3}$ C

$\Delta\varphi_1' = \Delta\varphi_2' = Q_2'/C_2 = 0{,}792 \cdot 10^{-3}/6 \cdot 10^{-6} = 132$ V.

La carga total en las placas que se unen a través de S es negativa, en consecuencia, una vez logrado el equilibrio ambas placas quedarán con carga negativa.