Módulo I.1.1 Concepto de “Densidad”, Sustancia homogénea” y “Sustancia heterogénea”.

Algunas de las magnitudes físicas que estudiamos en los cuerpos toman valores que son característicos del propio cuerpo. Es el caso de la masa, el volumen, la cantidad de calor necesaria para elevar su temperatura, el índice de refracción,....

Algunas están relacionadas entre si, como por ejemplo la masa y el volumen, y en general, dependen del tipo de sustancia de que está formado el cuerpo.

¿Por qué es importante este concepto?

Para conocer el comportamiento de los cuerpos ante los fenómenos físicos es conveniente poder prescindir de características como la forma o el tamaño, y tratar con magnitudes que dependan solamente del tipo de sustancia de que está formado el cuerpo, para poder después extender los valores al cuerpo total.

Pongamos un ejemplo: Si queremos saber cuanta energía necesito para calentar el agua de una piscina sólo necesito saber el tamaño de la misma, porque sabiendo que es agua, ya se cuanta energía es necesaria por cada unidad de cantidad de materia (masa) del agua. Esta es una característica de la sustancia que no depende de la cantidad de materia, y que por tanto se califica como ***“específica”***. Si se trata de saber cuanta energía tengo que gastar para calentar el liquido de un recipiente, además de preguntarme la cantidad de líquido me preguntarán de que líquido se trata.

Propósitos y expectativas.

Esta actividad trata de comprender el mecanismo de definición de estas magnitudes específicas y comprender su significado, centrándonos en la relación que existe entre la cantidad de materia y el volumen.

Conexión con conocimientos previos

“¿que pesa más, un kilo de hierro o un kilo de paja?”.

Todos nos reímos cuando oímos a alguien que intenta confundir a otra persona con esta pregunta. Esto es porque todos sabemos que una cosa es el peso y otra el volumen, y que el peso depende de la cantidad de materia del cuerpo y de la atracción que sobre ella ejerce la tierra y no depende del volumen que ocupa.

Sin embargo, a menudo nos interesa relacionar estas dos magnitudes: cantidad de materia y volumen. A esta relación la llamaremos **densidad** y, en condiciones normales, depende de la sustancia que constituye el cuerpo.

http://es.wikipedia.org/wiki/Densidad_(f%C3%ADsica)

Cuestión 1.

Calcular la densidad del papel utilizado en mi impresora sabiendo que un paquete de 500 folios tiene una masa de 700 g y sus dimensiones son: 29,6 cm; 21,0 cm; 0,01cm.

Cuestión 2.

El papel de la cuestión anterior se ha utilizado para elaborar un cuaderno de 100 páginas, con cubiertas de cartón. Si la masa total del cuaderno es de 145,6, determinar la densidad del material del que estás elaboradas las cubiertas.

En el caso de la cuestión 2, ¿es posible hablar de densidad media?. En caso afirmativo, ¿cual sería esta densidad media?

Un objeto que está formado por materiales diferentes, se dice que es un objeto **heterogéneo**, mientras que si todas las molecular que le forman son idénticas, diremos que es **homogéneo**. En algunas ocasiones no podemos llegar a diferenciar a nivel molecular, por lo que también podemos hablar de cuerpos homogéneos y heterogéneos a simple vista.

Cuestión 3.

Para el revestimiento de fachadas suele utilizarse una piedra artificial que, teniendo el mismo aspecto que la natural tiene menor densidad. Este tipo de material suele estar constituido por un bloque de poliuretano al que se inyecta polvo de mármol. Se quiere elaborar un material de densidad 1 g/cc, inyectando polvo de mármol de densidad 2,4 g/cc en un bloque de poliuretano de densidad 0,07 g/cc. Sabiendo que cada bloque de poliuretano tiene unas dimensiones de 40x60x1,5cm ¿que cantidad de polvo de mármol se necesita inyectar en cada una de estas placas?

Conceptos nuevos

Sustancia homogénea, Sustancia heterogénea y Densidad

Conceptos análogos.

Peso específico. Todo lo expresado anteriormente para la densidad puede repetirse si en lugar de tener en cuenta la masa utilizamos el peso de cada unidad de volumen del material. En este caso hablaremos de peso específico de una sustancia como la relación entre el peso y el volumen que ocupa.

La diferencia con la densidad estriba en que ahora las unidades de peso específico en el sistema internacional serán N/m^3.

Cuestión 4.

En una tabla aparece que el peso específico del plomo es 11,34 Kg/litro ¿Cual es su densidad?

Muy a menudo existe confusión entre la densidad y el peso específico, igual que existe entre masa y peso de un cuerpo. La razón puede encontrarse en que, aunque la unidad de peso (fuerza) en el Sistema Internacional es el Newton, suele utilizarse el Kilopondio que es el peso de un cuerpo de masa 1 Kg situado a nivel del mar y a 45º de latitud. Entonces, podemos decir que un Kilogramo pesa un Kilopondio y para simplificar hablamos de un cuerpo de 1 kilo. Pero este Kilo debe interpretarse como 1 Kilogramo de masa o 1 Kilopondio de peso, lo que equivale a un peso de 9,8 Newton, medido el peso en el Sistema Internacional.

Densidad cúbica (o volúmica) de carga. Al igual que la masa es una propiedad de los cuerpos que se encuentra en todo el volumen que ocupa la materia que los constituye, otra propiedad característica de la materia es la carga eléctrica, que igualmente se encuentra en la materia.

En este sentido, podemos hablar de una distribución de carga eléctrica en el volumen ocupado por el cuerpo, y por consiguiente de carga por unidad de volumen o densidad cúbica de carga.

Cuestión 5.

¿Que cantidad de carga negativa existe en una llave como la que usamos habitualmente para abrir la puerta sabiendo que: es de aluminio, que tiene una masa de 3 g, que cada átomo de aluminio tiene 13 electrones (número atómico), y que 27 g (un mol) contienen 6. 10^{23} átomos. (Carga del electrón $1{,}6.10^{-19}$C)

Cuestión 6.

Si aceptamos que esta carga esta regularmente repartida por toda la llave. ¿Podríamos calcular la densidad cúbica de carga negativa? si el volumen de la llave es de 3 cm^3. Si la llave es eléctricamente neutra, ¿Cuál sería la densidad cúbica de carga positiva?. Si hacemos que pierda la décima parte de sus electrones, ¿seguirán siendo iguales las densidades de carga positiva y negativa?, ¿cual será su nueva densidad cúbica de carga neta?

Una situación especial que sucede cuando cargamos un cuerpo es que, a menudo la carga no se distribuye de forma homogénea, y entonces tendremos distintas densidades de carga según esté distribuida. En este caso tenemos que conocer la expresión matemática que nos permita saber como esta distribuida y podemos recurrir a pensar en volúmenes diferenciales y definir densidad de carga en cada punto como la relación entre la diferencial de carga y la diferencial de volumen en el que está incluida $\delta = \dfrac{dq}{dv}$

Densidad superficial y densidad lineal de carga. En el caso en que el exceso de carga de un cuerpo se distribuya por una superficie o por una línea podremos hablar de densidad superficial o de densidad lineal de carga.

Calor específico de una sustancia.

Existen otra serie de magnitudes para las que nos interesa conocer valores específicos, es decir valores referidos a una unidad de la sustancia. Por ejemplo: si queremos calcular cuantas calorías se necesitan para calentar el agua de una piscina, bastará que midamos las dimensiones de la piscina para calcular su volumen, porque sabemos que cada gramo de agua, para elevar su temperatura un grado necesita una caloría. Igualmente otras sustancias necesitan otras cantidades diferentes de calorías. Por eso solemos recurrir a esa característica llamada calor específico que nos dice cuantas calorías (cuanta energía) se necesitan para elevar un grado de temperatura cada gramo de sustancia.

De la misma forma existen otros coeficientes característicos de las sustancias como son el ***coeficiente de dilatación lineal, el coeficiente de dilatación superficial o el coeficiente de dilatación cúbica*** que nos relacionan la cantidad de aumento de la dimensión correspondiente por cada unidad inicial, cuando se eleva un grado la temperatura.

Módulo I.1.2. Composición y descomposición de fuerzas.

En muchas situaciones reales, sin darnos cuenta, estamos componiendo o descomponiendo fuerzas. Supongamos que deseamos desplazar un mueble muy pesado, si al empujarlo no somos capaces de hacerlo solos, pedimos que alguien nos ayude empujando a la vez que nosotros. Cuando queremos empujar un carro en un supermercado, si una de sus ruedas esta desajustada, el carro se mueve en dirección distinta a la que estamos empujando, lo que nos obliga a realizar más fuerza que la necesaria si el carro estuviera bien ajustado. ¿Por qué esto es así? porque de la fuerza que realizanos, sólo “se aprovecha” la parte de ella que está alineada con el movimiento.

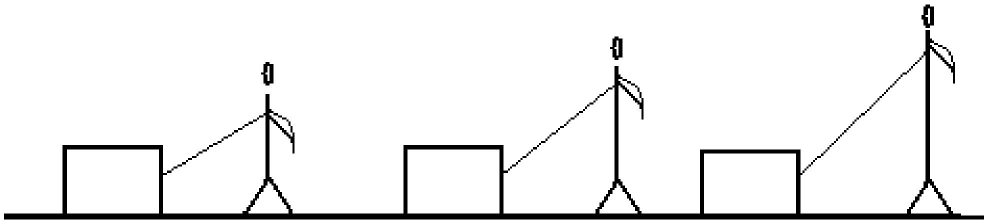
¿Por qué es importante este concepto?

Es importante estudiar estas operaciones en física, no solamente en casos similares a los planteados anteriormente, sino también, y de forma fundamental, porque en muchas situaciones reales nos encontraremos con que el movimiento se debe a una componente de la fuerza aplicada o a la acción de varias de ellas
Por un lado, es casi imposible encontrar situaciones en las que un cuerpo queda sometido a una fuerza. Por ejemplo, cuando estudiamos la caída libre, casi siempre prescindimos de la fuerza que ejerce el aire sobre el cuerpo oponiendose a la gravedad responsable de la caída. Esto sucede, en general porque esta fuerza procedente de la presencia del aire es mucho menor que la debida a la atracción de la Tierra, pero existirán situaciones, como por ejemplo el salto de un paracaidista en que es esencial tenerlo en cuenta para determinar las características del movimiento que tendrá lugar.

> ***Cuestión 1.***
> *Calcular el tiempo que tarda en caer desde una altura de 10 m una bola de 20 g de masa, a) suponiendo una caída libre.*
> *Si lo que se deja caer desde el mismo punto es un hoja de papel de 20 g, b)¿tardará el mismo tiempo? ¿por qué?*

Por otra parte, también sucede que en muchas ocasiones no es posible aprovechar la totalidad de la fuerza aplicada para lograr un determinado efecto debido a las “ataduras” o “ligaduras” existentes. Es por ejemplo el caso en el que queremos arrastrar un cuerpo por un suelo horizontal y tiramos de él con una fuerza que forma un ángulo con la dirección del desplazamiento.

> ***Cuestión 2.***



Tres personas de distinta altura, pretenden arrastrar una caja por un suelo horizontal tirando de ella mediante una cuerda que pasa sobre su hombro. Las tres pueden realizar fuerzas de la misma magnitud. ¿Obtienen todas el mismo resultado? ¿Por que?

Conexión con conocimientos previos y expectativas.

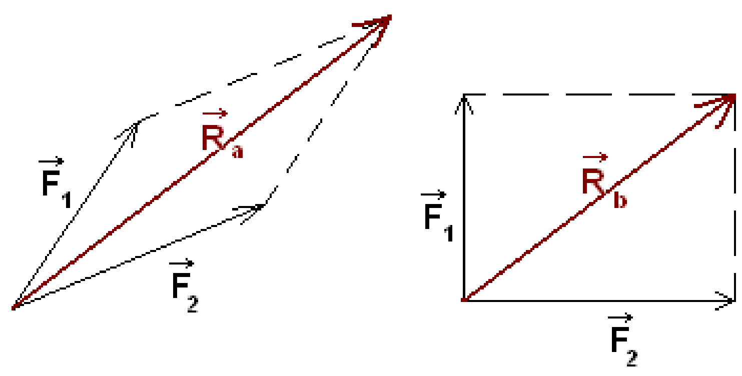
Cuestión 3.
¿Porque existe una norma en la Federación de Atletismo de no homologar las marcas que se baten cuando la velocidad del viento es mayor de 2 m/s?. ¿Es conveniente aplicar esta norma en todos los casos, o debe cumplirse alguna condición más?

Sabemos que las fuerzas son magnitudes vectoriales, y por tanto las operaciones entre ellas se realizarán de acuerdo a esta característica. Por tanto, podríamos decir que, en principio podemos operar con fuerzas igual que con vectores.

Composición de fuerzas aplicadas en un mismo punto

El caso más sencillo de composición de fuerzas lo encontramos al considerar dos fuerzas de la misma dirección y sentido. Sabemos que el efecto producido por ambas es igual al producido por una sola fuerza (resultante) de la misma dirección, el mismo sentido y módulo la suma de ambos módulos.
En el caso en que ambas fuerzas tengan la misma dirección y sentidos contrarios, la resultante mantiene la misma dirección, el módulo la diferencia de ambos y el sentido el de la mayor.
La misma norma podemos aplicar en el caso de más de dos fuerzas

¿Que ocurre cuando las fuerzas aplicadas en el mismo punto no tienen la misma dirección?
Se encuentran situaciones reales en las que podemos comprobar que el efecto producido por dos fuerzas aplicadas en el mismo punto, depende del ángulo que forman. Pensemos en una situación en la que queremos arrastrar un cuerpo por dos personas tirando de dos cuerdas atadas al mismo punto. Sin pensarlo intentamos tirar lo más juntas posible en la misma dirección en la que queremos que se mueva el cuerpo. Esto es porque sabemos que, a medida que nos separemos formando un ángulo mayor con la dirección del movimiento deseado, obtendremos peores resultados, ya que el efecto producido será el mismo que el de una fuerza aplicada en el mismo punto, cuyo módulo, dirección y sentido sean los correspondientes a la diagonal del paralelogramo formado por ambas fuerzas y sus paralelas.



La figura representa la composición de dos fuerzas (la “1” y la “2”) cuando forman ángulos distintos.

De todas formas para calcular el módulo necesitamos conocer el valor del ángulo formado. Por ejemplo:
Calcular la fuerza resultante de aplicar al mismo punto dos fuerzas de 10 N de módulo cada una de ellas , una horizontal hacia la derecha y otra vertical hacia arriba.

Como ambas fuerzas son del mismo módulo formaran un cuadrado de lado 10 y la resultante será la diagonal del cuadrado. Al ser iguales los lados y el ángulo que forman las fuerzas de 90º, la resultante formará un ángulo de 45º con cada una de ellas y su módulo será el de la hipotenusa de un triangulo rectángulo de 10 m de cada cateto

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2 + \left|\vec{F}_2\right|^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$

Cuestión 4

Una barca pretende cruzar un río de 100 m de ancho remando a una velocidad de 0,5 m/s en dirección perpendicular a la orilla. Se encuentra que el río mantiene una corriente perpendicular a la orilla que le imprime una velocidad de 1,2 m/s. a)con qué velocidad se moverá la barca respecto a la orilla?. b) ¿cuantos metros habrá descendido la barca por el río cuando llegue a la orilla opuesta? c)¿que espacio habrá recorrido la barca?

Este procedimiento se puede generalizar a más de dos fuerzas, sumando dos de ellas y al resultado sumarle la tercera y así sucesivamente hasta completar el total de las fuerzas.

Composición de fuerzas aplicadas en puntos distintos del mismo cuerpo.

¿Que ocurre cuando aplicamos dos fuerzas al mismo cuerpo en puntos diferentes?. Estamos acostumbrados a considerar las fuerzas como vectores libres, es decir como vectores que pueden desplazarse paralelamente a si mismos poniendo su origen (punto de aplicación) en cualquier punto. Pero, *las fuerzas aplicadas a un cuerpo ¿son realmente vectores libres?*, o bien *¿sus efectos dependen del punto de aplicación?* Veamos un ejemplo sencillo:

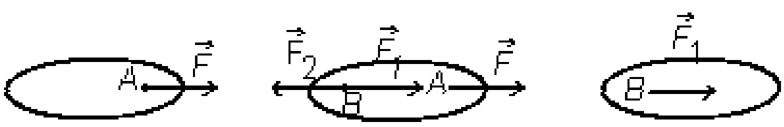
Tenemos una barra rígida de 1 m de longitud situada en posición horizontal y aplicamos dos fuerzas del mismo módulo, 10 N, una vertical hacia arriba y otra vertical hacia abajo, pero en el primer caso ambas están aplicadas en el mismo punto de la barra (por ejemplo el centro de la misma) y en el segundo caso una en cada uno de los extremos ¿lograremos el mismo efecto?

No solamente nos ocurre esto en el caso de fuerzas paralelas, también cuando las direcciones son concurrentes, por ejemplo la trayectoria de un balón de futbol es muy diferente según la fuerza (patada) se aplique en el centro del balón, en la parte inferior, o en un lateral.

Cuando es necesario tener en cuenta el punto de aplicación, podemos hablar de fuerzas representadas por vectores deslizantes y de fuerzas representadas por vectores fijos. Cuando se trata de cuerpos y no pueden considerarse puntuales, el efecto de las fuerzas aplicadas no les producen deformaciones, es decir cuerpos rígidos hablamos de vectores deslizantes, mientras que cuando se trata de cuerpos no rígidos (por ejemplo los cuerpos flexibles), será necesario considerar las fuerzas como vectores fijos.

Sólido rígido.

En efecto, en un sólido rígido, al aplicar una fuerza en un punto, podemos considerar en otro punto

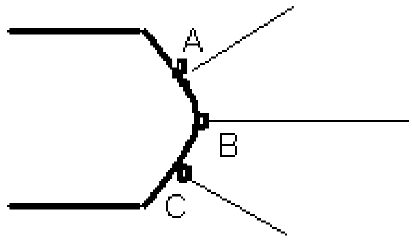


cualquiera de la dirección de la fuerza, otras dos fuerzas de la misma dirección, el mismo módulo y sentidos contrarios, que se anulan entre si. Tenemos así un sistema de tres fuerzas en la misma dirección y módulo, dos de ellas en un sentido y otra en sentido contrario. Siempre se anularan dos de distinto sentido, independientemente de que sean las dos aplicadas al mismo punto o en puntos diferentes, y el resultado será una fuerza del mismo módulo y dirección de la original, aplicada en cualquier punto de su dirección.

Sin embargo, no ocurrirá lo mismo si no se trata de puntos de la misma dirección, o si el cuerpo se puede deformar.

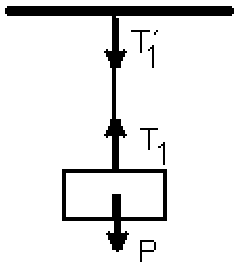
Cuestión 5

Para arrastrar un barco se utilizan tres remolcadores que van enganchados en tres argollas situadas en el casco del barco en tres puntos diferentes A,B y C, dos de ellos pueden ejercer una fuerza de 10.000N y el tercero de 15.000N. Determinar como se deben situar los remolcadores explicando la razón.



Tensión de una cuerda.

A menudo intentamos mantener un cuerpo sujeto a determinada altura, sabemos que es necesario realizar una fuerza hacia arriba. Esta fuerza deberá ser igual y de sentido contrario al peso, para que la resultante del peso y esta fuerza sea nula, y el cuerpo permanezca en equilibrio. Si la fuerza que hacemos es mayor que el peso, el cuerpo sube, y si es menor cae.
Cuando el cuerpo queda colgado en reposo, la cuerda tendrá que realizar una fuerza igual y de sentido contrario al peso del cuerpo que sujeta. Esta fuerza se denomina tensión de la cuerda. Si a su vez la cuerda está sujeta a otro lugar, por ejemplo al techo, la tensión se transmite a lo largo de la cuerda ejerciendo una fuerza sobre el techo igual al peso del cuerpo.

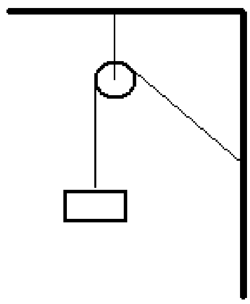


Cuestión 6

Para sujetar un bloque de piedra de 100 Kg se utiliza un sistema de dos cuerdas sujetas a dos vigas del techo separadas 5m. Cada una de las cuerdas forma con el techo un ángulo de 45º. Calcular la tensión de cada cuerda y las tensiones que soportan las vigas del techo.

Cuestión 7

Dibujar las fuerzas, incluidas todas las tensiones, en el caso en que sujetemos un cuerpo de 10 Kg mediante una cuerda que pasando por una polea sujeta al techo, está atada a una argolla situada en la pared lateral, como indica el dibujo.

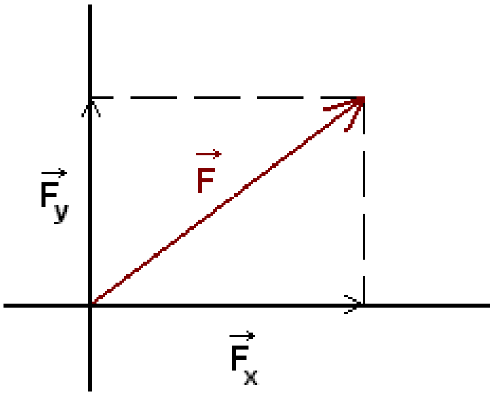


Descomposición de una fuerza en varias direcciones diferentes.

Como sabemos que la resultante de varias fuerzas produce el mismo efecto que el conjunto de todas ellas, también podemos realizar la operación contraria y descomponer una fuerza en otras varias de forma que el resultado de todas ellas sea igual a la fuerza original.
Esto nos interesa en el caso de descomponer una fuerza en sus componentes según los ejes coordenados, de forma que cada una de ellas puede representarse por números (escalares)

Consideremos en primer lugar la descomposición de una fuerza en otras dos que se encuentren en direcciones perpendiculares entre si (sistema de dos ejes coordenados).
Situando la fuerza en el origen de coordenadas y trazando paralelas a los ejes por los extremos de la fuerza, tenemos constituido un paralelogramo en el que la fuerza es la diagonal, por tanto se puede aceptar que esta fuerza es suma de otras dos, dirigidas según los ejes coordenados, con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto en que la proyección del extremo de la fuerza corta al correspondiente eje.
Si además consideramos vectores unitarios sobre los ejes, podemos escribir

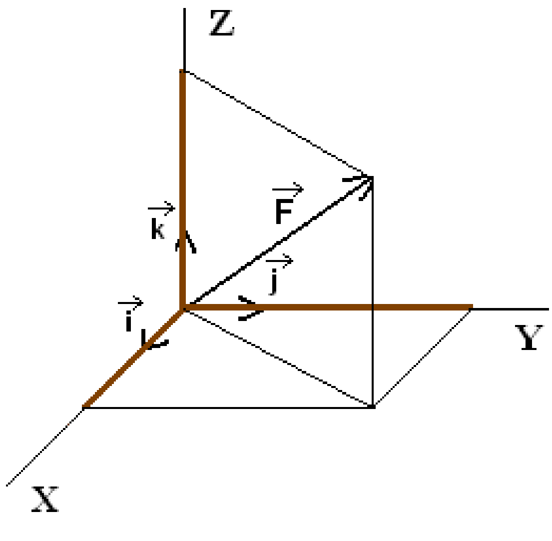
$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, con lo que la fuerza queda escrita en función de dos número (coordenadas) y dos vectores unitarios según los ejes



La operación puede repetirse en 2 pasos, si consideramos un sistema de ejes coordenados en el espacio y tres vectores unitarios según los tres ejes, de forma que podemos escribir

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

El valor de las componentes puede calcularse en función del módulo de la fuerza y del ángulo que forma su dirección correspondiente eje.
Teniendo en cuenta que lo que estamos haciendo para determinar las componentes es proyectar el vector fuerza sobre una dirección (eje), por definición de producto escalar, esta proyección será el producto escalar del vector fuerza por el vector unitario de dirección el eje $\left(a_x = \vec{F}\cdot\vec{i} = \left|\vec{F}\right|\cdot 1\cdot\cos\alpha\right)$ que es el mismo valor que se obtiene considerando el triangulo rectángulo formado por la fuerza (hipotenusa), el eje y la perpendicular trazada desde el extremo de la fuerza al eje, que es la que determina la coordenada.



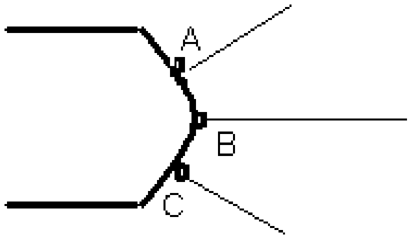
Composición y descomposición de fuerzas por componentes.

La expresión de las fuerzas en componentes nos permite simplificar matemáticamente las operaciones entre fuerzas aprovechando la propiedad asociativa.
Así, para sumar varias fuerzas basta sumar por una parte todas sus componentes según el eje

de las x, y el resultado será la componente x de la suma, y análogamente con las otras componentes.

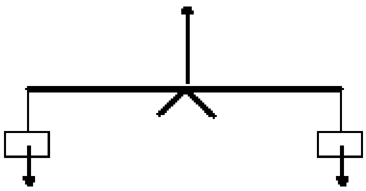
Cuestión 8

En el caso de los tres remolcadores de la cuestión 5 determinar cual será la fuerza total ejercida por el conjunto de los tres remolcadores si las direcciones en las que se ejercen las fuerzas forman ángulos de 30º entre dos consecutivas.



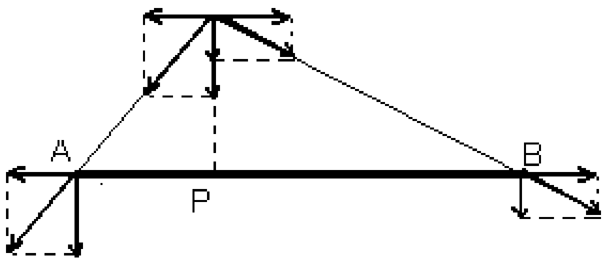
Composición de fuerzas paralelas

Supongamos que queremos sujetar dos cuerpos de 10Kg sujetos a los extremos de una barra de 1m de longitud, y que los soportes para los pesos se encuentran en los dos extremos, mientras que solamente podemos apoyar la barra en un punto. Inmediatamente nos damos cuenta que ese punto de apoyo deberá estar en el centro de la barra y que ese punto soportarán el peso de ambos cuerpos.



Cuestión 9
¿que ocurrirá en el caso anterior si los dos cuerpos no son iguales?
Es evidente que no podremos equilibrar la barra si situamos el apoyo en el punto medio. ¿Hacia donde deberemos mover el punto de apoyo? ¿Hacia el cuerpo de mayor peso o hacia el cuerpo de menor peso?. ¿El peso que soportaremos seguirá siendo la suma de los módulos de los pesos de los dos cuerpos?

Si queremos resolver el problema cuantitativamente tendremos que buscar los datos con algún sistema de composición de fuerzas. Para ello, dibujamos en los dos extremos de la barra dos fuerzas iguales y de sentido contrario, con lo cual no hemos alterado el estado de la misma. Componiendo las dos fuerzas aplicadas a cada uno de los extremos tendremos dos fuerzas que ahora son concurrentes, con lo que podremos sumarlas trasladandolas al mismo punto y buscando la diagonal del paralelogramo que forman, como las componentes horizontales son iguales y se anulan entre si, la resultante será la resultante de las dos fuerzas paralelas, y trasladandola verticalmente tendremos el punto de la barra en la que se aplica esta resultante.



Cuestión 10
Demostrar, ayudandole de la figura que la resultante de dos fuerzas paralelas tiene de módulo la suma de los módulos y está aplicada en un punto que cumple que las distancias a las fuerzas son inversamente proporcionales a sus módulos.
Realiza los cálculos en el caso en que las fuerzas aplicadas a los extremos sean de 80 y 120 Newtons y la longitud de la barra de 1 m.

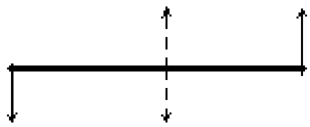
Cuestión 11
¿podremos aplicar la misma norma cuando las fuerzas sean de sentidos contrarios?

Par de fuerzas

Cuestión 12
¿que ocurrirá si tenemos dos fuerzas de sentidos contrarios y del mismo módulo?

Evidentemente en este caso la resultante de las fuerzas tiene de módulo cero. Pero sus resultados serán diferentes según sean las condiciones de aplicación, o dicho de otro modo según las características del cuerpo al que están aplicadas.
Supongamos que las fuerzas se aplican en los extremos de una barra rígida y que esta fija. En este caso las fuerzas se anulan y no tenemos ningún efecto porque la barra es capaz de compensar las fuerzas aplicadas creando tensiones en los puntos en que están colocadas las fuerzas que son puntos fijos de la barra

Si la barra solo está sujeta por el centro, entonces las dos tensiones que crea la barra se aplican en el único punto por el que está sujeta, el centro, y se anulan entre si, pero no anulan las fuerzas aplicadas. Además, como los extremos de la barra no están fijos se moverán por efecto de las fuerzas aplicadas, y si la barra es rígida, el movimiento deberá mantener las posiciones relativas de las distintas partes de la barra, luego se desplazarán manteniendo fijo el centro de la barra y girando alrededor de él.



Actividad I. 1 3 Análisis de dimensiones de magnitudes y fórmulas

En la factura de la energía suministrada por la compañía eléctrica nos hablan del número de Kwh gastados, nosotros sabemos que la energía se mide en julios. ¿vale el kwh como unidad de energía?

¿Por qué es importante este concepto?

Situaciones como las anteriores nos las encontramos en diversos momentos del desarrollo de los contenidos de Física.

> *Por ejemplo: En una clase de Física el profesor pregunta cuales son las unidades del campo eléctrico. Un alumno responde que Newtons partido por culombio (N/C) y otro que Voltios partido metro (V/m). ¿Cual de los dos tiene razón? ¿Cómo podemos determinar cual de los dos alumnos anteriores tiene razón?*.

Sabemos que la mayor parte de las magnitudes que estudiamos se miden a partir de ***unidades derivadas*** de otras, que son las correspondientes a las llamadas ***magnitudes fundamentales*** que son la longitud (L), la masa (M), el tiempo (T), la intensidad de corriente eléctrica (I), a las que se añaden la temperatura absoluta, la intensidad luminosa y la cantidad de materia.
Por tanto, el procedimiento más seguro para determinar si estas dos unidades corresponden a la misma magnitud, será determinar si derivan de las mismas magnitudes fundamentales, y de la misma forma.

Conexión con conocimientos previos y expectativas.

En el caso de la pregunta anterior veamos cuales son las dimensiones de cada una de las unidades, en función de las magnitudes fundamentales, que iremos señalando en mayúsculas. El Newton es una unidad de fuerza, y por tanto es masa por aceleración (f = M.a), la masa ya es una unidad fundamental y la aceleración es una velocidad partido por un tiempo $\left(f = M \cdot v \cdot T^{-1}\right)$. Aún debemos tener en cuenta que la velocidad es una longitud partido por un tiempo $\left(v = L \cdot T^{-1}\right)$. En total, las dimensiones de la fuerza son $M \cdot L \cdot T^{-2}$, que escribiremos $\left[F\right] = M.L.T^{-2}$. Por otra parte como la fuerza que un campo eléctrico ejerce sobre una carga es $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$ y el culombio es intensidad de corriente por tiempo, $\left(\left[Q\right] = I \cdot T\right)$ tenemos que:

$$\left[E\right] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T} = M \cdot L \cdot I \cdot T^{-3}$$, que es su ***"ecuación de dimensiones"***.

Si nos vamos a la segunda respuesta , el metro es unidad fundamental de longitud y el voltio es energía por unidad de carga, como la energía es trabajo, es decir fuerza por espacio, en total tenemos fuerza por espacio partido por carga y por longitud

$\left[E\right] = \frac{\left[F\right]\cdot L}{\left[Q\right]\cdot L} = \frac{\left[F\right]}{\left[Q\right]} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T} = M \cdot L \cdot I \cdot T^{-3}$, expresión idéntica a la anterior. si bien podíamos haberlo comprobado viendo que ambas unidades corresponden a una fuerza por unidad de carga.

Análisis de dimensiones.

Método de análisis que permite determinar la expresión de una magnitud derivada en función de las magnitudes fundamentales, y por consiguiente permite determinar si en una ecuación todos los sumandos son homogéneos (tienen las mismas dimensiones), y lo mismo con los dos miembros de la ecuación.

> ***Cuestión 1***.
> *Determinar la ecuación de dimensiones de la energía potencial mecánica*.

Análisis de dimensiones de una fórmula.

> *Al buscar la fórmula de la energía cinética de un sólido rígido que gira en torno a un eje hemos obtenido la siguiente expresión* $E_C = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$ *donde I es el momento de inercia del sólido y* ω *su velocidad angular. Tenemos dudas y queremos saber si la expresión es correcta.*

Un primer paso sería asegurarnos de la homogeneidad de la fórmula, es decir realizar el análisis de las dimensiones para asegurarnos que son las mismas en los dos miembros
El primer miembro es una energía, luego tiene las mismas dimensiones de un trabajo, es decir fuerza por espacio, tenemos $\left[E_C\right] = \left[F\right] \cdot L = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$
En el segundo miembro nos encontramos el término ½, que es una constante procedente de integración, luego no tiene dimensiones, por tanto no es preciso considerarla. El resto es un momento de inercia, que por definición es el producto de las masas por las distancias al eje de giro al cuadrado, por el cuadrado de la velocidad angular que es ángulo girado por unidad de tiempo, como el ángulo no tiene dimensiones, tenemos:

$$\left[\frac{1}{2} I \cdot \omega^2\right] = M \cdot L^2 \cdot \left(T^{-1}\right)^2 = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

> ***Cuestión 2***
> *Demostrar que el impulso mecánico de una fuerza es igual a la variación del momento lineal del cuerpo que la recibe* $F.t = m.\left(v_2 - v_1\right)$

En realidad el análisis dimensional nos sirve para resolver situaciones más complejas, de las que tenemos un ejemplo muy sencillo en la siguiente situación:

> *Sabemos que la velocidad de salida de un líquido por un pequeño orificio practicado en la pared de un recipiente depende de la distancia vertical del orificio a la superficie libre del líquido (h) y de la aceleración de la gravedad (g), pero dudamos si depende o no de*

la densidad del líquido(d), y de cuales serían los exponentes de "h" y "g".

Veamos como el análisis de dimensiones puede ayudarnos a resolver esta duda.
Si la velocidad de salida depende de estas tres variables, siempre podremos escribir la velocidad como una función de ellas. v = f(h,g d) y la correspondiente fórmula deberá ser homogénea. Analicemos las ecuaciones de ambos miembros

$\left[v\right] = L \cdot T^{-1}$ y por otra parte en el segundo miembro tendríamos una expresión del tipo:

$k \cdot h^a \cdot g^b \cdot d^c$ donde k es una constante y por tanto no tiene dimensiones, y a, b y c tres números que es preciso determinar con la condición de que la fórmula sea homogénea.
La ecuación de dimensiones del segundo miembro es

$$\left[h^a \cdot g^b \cdot d^c\right] = L^a\left(L \cdot T^{-2}\right)^b\left(M \cdot L^{-3}\right)^c = L^{a+b-3c} \cdot T^{-2b} \cdot M^c$$

por tanto, igualando ambas ecuaciones de dimensiones queda:

$L \cdot T^{-1} = L^{a+b-3c} \cdot T^{-2b} \cdot M^c$, e igualando los exponentes tenemos: c=0, luego no podemos tener dependencia de la densidad, además -2b = -1, con lo que b=½, es decir la gravedad aparece bajo una raíz cuadrada, y finalmente a+b-3c =1, es decir a = 1 - b = ½ , con lo que también la altura estará elevada al exponente ½, y por tanto la expresión total de la velocidad pedida será $v = k.\sqrt{h.g}$

Cuestión 3.
Determinar las dimensiones de la constante de gravitación universal

Conceptos adquiridos.

Magnitudes fundamentales. Son el menor número de magnitudes cuya combinación nos permite obtener todas las demás, que diremos dependen de ellas y son: la masa (unidad el kilo), la longitud (unidad el metro), el tiempo (unidad el segundo), la intensidad eléctrica (unidad el amperio), la temperatura absoluta (unidad Kelvin), la intensidad luminosa (unidad candela) y cantidad de mas (unidad mol).
Por ejemplo para medir el volumen de una habitación se miden sus dimensiones y se opera con ellas. De hecho el metro cúbico (m^3) se define como el volumen de un cubo de 1 m de lado. Para calcular una velocidad se miden espacios y tiempos, etc..

Ecuación de dimensiones. Expresión de una magnitud derivada en función de las magnitudes simples o fundamentales.

Homogeneidad de una fórmula. Es la condición de que todos los sumando y ambos miembros tengan las mismas dimensiones.

Módulo I.2.1 Conceptos de incremento y diferencial de una magnitud.

La palabra incremento se encuentra incorporada a nuestro lenguaje diario. Por ejemplo, al buscar en Google en un momento determinado, han aparecido 2.970.000 resultados.

> ***Cuestión 1***
> *A comienzos de año se han publicado noticias como la siguiente: "La empresa N.... ha registrado un incremento del 44% en el beneficio neto durante su 4º trimestre fiscal" ¿puedes explicar el significado de esta frase?*

¿Por qué es importante este concepto?

En algunas ocasiones utilizamos palabras cuyo significado físico es diferente en algún grado al significado que tiene la misma expresión cuando mantenemos una conversación coloquial. Por ejemplo a menudo decimos que hemos trabajado mucho sin producir desplazamiento alguno, lo que en física equivaldría a realizar un trabajo nulo. Otras veces decimos que "tenemos mucho calor", sin embargo el calor es energía en tránsito.

> *Cuando estudiamos física o matemáticas, la palabra incremento ¿tiene el mismo significado que cuando la usamos en el lenguaje habitual?*

Conexión con conocimientos previos y expectativas.

Hemos llamado magnitud física a aquellas propiedades de los cuerpos que se pueden medir. Es decir, que es posible establecer una cantidad a la que llamaremos unidad , a fin de poder, en cada caso comparar el valor de la magnitud con el valor de la unidad establecida. El resultado de la medida es un número, que irá acompañado del nombre de la unidad con el que le hemos obtenido.

Así, cuando decimos que una persona tiene 20 años, manifestamos que su edad es 20 veces mayor que la unidad de tiempo a la que hemos llamado año. De la misma manera, cuando decimos que hoy hace una temperatura de 20º, estamos diciendo que la diferencia de temperaturas entre la de hoy y la de fusión del hielo es 20 veces la centésima parte de la diferencia de temperatura entre los puntos de fusión y ebullición del agua.

Si nos interesa medir el valor de las magnitudes físicas, es precisamente porque este valor puede cambiar cuando se cambian algunas condiciones. Por ejemplo la temperatura de un cuerpo varia cuando le calentamos (suministramos energía en forma de calor), la edad de una persona varia en función del tiempo transcurrido, la velocidad de un coche varia en función de la aceleración, la longitud de un muelle varia en función de la fuerza con la que le estiramos.

Definición de incremento de una magnitud

Llamamos incremento experimentado por una magnitud a la variación que ha sufrido al cambiar las condiciones.

Incremento de una función

En general, en física, nos interesa conocer como ha variado una magnitud como consecuencia de la variación de otra. Por tanto la variación que ha tenido lugar en una magnitud (variable independiente) provoca una variación en la otra magnitud (variable dependiente).

Cuestión 2

Se ha medido la velocidad de un coche en distintos momentos, obteniendose los siguientes resultados:

Instante (s)	*0*	*5*	*10*	*15*	*20*
Velocidad (Km/h)	*0*	*7*	*14*	*21*	*28*

En la medición se han utilizado incrementos de tiempo regulares (iguales entre si) ¿lo son también los incrementos de velocidad?. Si el movimiento siguiera la misma pauta (la misma aceleración) ¿podemos saber cuanto se incrementa la velocidad en 30 segundos?

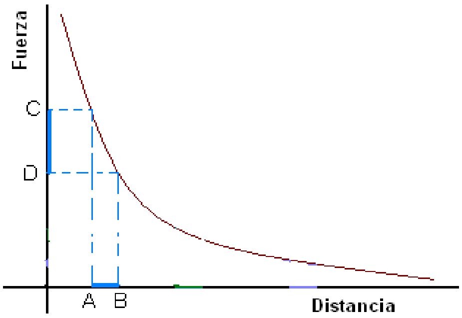
Cuestión 3

Hemos comprobado que al aumentar la presión sobre un émbolo, el gas encerrado en su interior disminuye su volumen. Una vez medidas ambas variables en diferentes momentos hemos encontrado los siguientes valores:

Presión (atm)	*1*	*1,25*	*1,6*	*2*	*4*
Volumen (cm^3)	*200*	*160*	*125*	*100*	*50*

Las variaciones de presión ¿se han realizado utilizando incrementos iguales?, ¿que incremento ha experimentado el volumen al variar la presión de 2 a 4 atm?, ¿que significado tiene el signo de los incrementos?

El concepto de incremento puede observarse gráficamente. En la figura podemos apreciar que si en el eje x correspondiente a la variable distancia tomamos un incremento comprendido entre los puntos A (3 m) y B (5 m), de forma que $\Delta x = 5 - 3 = 2m$ a la variable fuerza le corresponde un incremento comprendido entre los valores C (18 N) y D (13 N) $\Delta y = 13 - 18 = -5N$



Cuestión 4

Una función viene dada por la expresión matemática: $y = 3x^2 + 5$ *¿Cual será el incremento experimentado por la variable dependiente (y), cuando la independiente (x) varia de 1 a 4?* ¿y cuando varia de 4 a 7?

Concepto de diferencial.

Existen funciones, como la correspondiente a la cuestión 4, en las que cuando consideramos distintos incrementos de la variable independiente, el incremento que experimenta la variable dependiente no siempre es el mismo a pesar de que la variable independiente varíe la misma cantidad. Por ejemplo, podemos pensar que la variable independiente es el tiempo y la variable dependiente el espacio recorrido por un coche. En estos casos nos interesa conocer como se va produciendo la variación de la función (espacio recorrido) para cada valor de la variable independiente (tiempo). La forma de saberlo es considerar en el instante considerado un incremento de tiempo muy pequeño, que tienda a cero. En este caso, en lugar de hablar de incremento hablamos de diferenciales. y decimos a en una diferencial de tiempo se ha recorrido una diferencial de espacio.

El mismo concepto de diferencial lo podemos aplicar a otras variables, por ejemplo, cuando tenemos un cuerpo cuya masa está repartida de forma no uniforme y queremos saber su densidad, podemos hablar de densidad media, pero el valor obtenido no corresponde a la densidad de cualquier parte del cuerpo. Entonces tenemos que recurrir a tomar volúmenes muy pequeños (diferenciales de volumen) y ver la masa de esa diferencial de volumen (diferencial de masa).

Cuando se trata de una variable que depende de otra (una función), también existirá el concepto de diferencial de la variable dependiente relacionado con la diferencial de la variable independiente. Así, en la ecuación de la cuestión 4, $y = 3x^2 + 5$, si se toma una diferencial de x (dx), le corresponderá una diferencial de y (dy),

Módulo I.2.2 Concepto de función de una o varias variables.

Se acepta que una persona aprende más cuanto más estudia. ¿Podemos decir que el aprendizaje es función del estudio?. Una determinada primavera está de moda el color amarillo, por lo que se vende más ropa de ese color.¿Podemos decir que la venta de la ropa de color amarillo está en función de la época del año? ¿Podemos decir que las ventas están en función del color?.

A menudo empleamos la palabra función para denotar que una cosa está relacionada con otra u otras. Sin embargo la expresión función así utilizada no nos permite conocer como variará una de las “cosas” (el aprendizaje o las ventas) al modificar la otra “cosa” (el estudio o el color).

Definición de función

En Física son importantes las “cosas” que son medibles y pueden tener distintos valores (magnitudes) y en matemáticas reciben el nombre de ***variables***.

En general en Física las magnitudes van a resultar ser funciones de una o varias variables, como por ejemplo el volumen ocupado por un gas depende de la temperatura y de la presión del gas. La resistencia de un conductor va a depender del tipo de sustancia, la longitud del hilo y de su sección.

Por función entendemos la expresión matemática que nos permite relacionar el valor de una variable (***variable dependiente***) con el valor de aquellas magnitudes que influyen en el valor de esta (***variables independientes***).

¿Por qué es importante este concepto?

Examinemos el caso de una persona que pasea por una calle larga, está claro que se aleja más del lugar de partida cuanto más tiempo camine, como las dos magnitudes (espacio y tiempo) son medibles, podemos buscar una función que nos las relacione [$e = f(t)$].

La función matemática que relaciona espacio y tiempo, es diferente según las condiciones del paseo. Si empieza a ir más deprisa hasta llegar a correr, la expresión matemática del espacio recorrido es distinta que en el caso de ser la velocidad siempre la misma, pues el espacio recorrido (variable dependiente) dependerá ahora no sólo del tiempo sino también de la forma en que varíe la velocidad (aceleración), con lo que aparecen dos variables independientes [$e = F(t,a)$].

Conexión con conocimientos previos y expectativas.

Consideremos la ecuación de la recta en el plano $y = 2x + 4$. ¿Qué implica que la variable “x” valga “2”?. Operemos y tendremos $y = 8$ ¿qué información nos proporcionan estos dos números? que estamos en el punto (2, 8) del plano (fig 1). El conjunto de parejas de números nos determinan todos los puntos de la recta, como se muestra en la figura.

Supongamos que la ecuación anterior representa la velocidad del movimiento de un cuerpo que lleve mucho tiempo moviéndose con aceleración constante. La variable "y" representa la velocidad del cuerpo expresada en m/s y la variable "x" el tiempo que lleva el cuerpo moviéndose. Si observamos la figura, lo primero que nos salta a la vista es que en el eje de abscisas aparecen representados tiempos negativos *¿qué quiere decir esto? ¿es una inconsistencia y debemos "despreciar" los tiempos negativos?*. Si leemos con detenimiento la descripción de la situación que queremos representar, vemos que estamos hablando de un cuerpo que lleva mucho tiempo moviendose, luego es posible que se esté moviendo antes de que nosotros empecemos a contar tiempos.

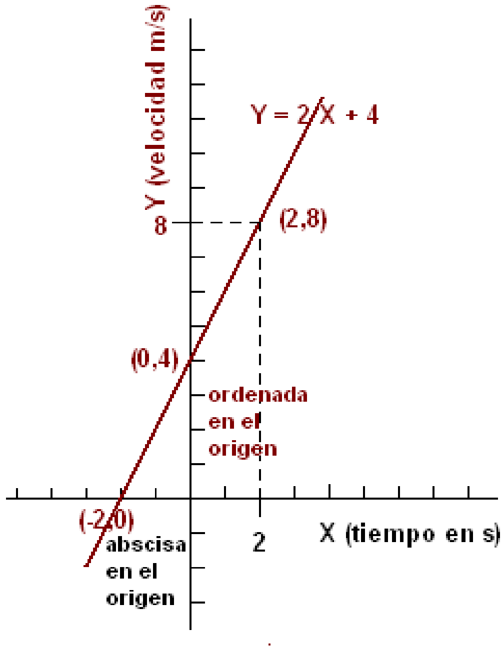


Figura 1

Cuestión 1
¿Puede la figura 1 representar el crecimiento de un esqueje una vez plantado?

Si en la figura, nos fijamos ahora en el eje de ordenadas nos encontramos con la posibilidad de velocidades negativas y positivas. La explicación es sencilla, hasta el instante en el que empezamos a contar tiempos (t = 0, punto de corte con el eje de ordenadas) el sentido de la velocidad era el contrario que el que tiene a partir de ese momento.

Cuestión 2
¿Puede la figura 1 representar el crecimiento de una persona en sus primeros meses de vida, suponiendo que creciera de forma lineal?. Si la respuesta es afirmativa razonarla, si es negativa explicar qué representará cada eje y en qué se medirían, y que parte de la figura será aprovechable.

Esta función nos ha permitido establecer una aplicación entre el conjunto de valores de la velocidad del cuerpo y el conjunto de valores del tiempo de forma que cada punto de la gráfica nos proporciona información sobre la velocidad que lleva el cuerpo en un instante determinado, sea este anterior o posterior al momento en el que hemos empezado a cronometrar.

La gráfica nos proporciona más información:

- En primer lugar, el término independiente, en este caso "4" nos da el valor de la función (velocidad o variable dependiente) cuando la variable independiente (tiempo) es "0", en la representación gráfica se denomina ordenada en el origen.

- Por otra parte la abscisa en el origen (valor de la variable independiente para y = 0) nos indica el instante en el que la variable dependiente (la velocidad del cuerpo) ha cambiado de signo (el sentido de la velocidad es distinto al que tenía).

Cuestión 3
La ecuación $l = 50 + 0{,}1\left|\vec{F}\right|$ representa la longitud de un muelle en función de la fuerza aplicada para alargarle. ¿Qué significado tiene "50"? Si en vez de 0,1 el coeficiente del

módulo de la fuerza fuese 3 ¿en qué se diferenciarían los muelles?¿existiría alguna diferencia entre muelles si en la ecuación el termino independiente es 100 en vez de 50?

En la figura 2 se representan las velocidades de dos cuerpos que se mueven desde hace mucho tiempo y en los dos casos empezamos a contar el tiempo cuando ambos cuerpos llevan la misma velocidad 4 m/s, *pasados "2" segundos ¿siguen teniendo los dos cuerpos la misma velocidad?*

Los coeficientes de la variable independiente son respectivamente "2" y "1", se observa que a mayor coeficiente mayor inclinación de la recta, por tanto este coeficiente nos da información sobre la rapidez de variación de la variable dependiente respecto de la independiente y se denomina pendiente de la recta. En este caso nos da información sobre la rapidez con la que varía la velocidad del cuerpo con el tiempo (aceleración).

Cuestión 4
Determinar la ecuación de la función que relaciona las variables T(dependiente) y M (independiente) sabiendo, que es lineal, y que cuando la variable independiente toma los valores 5 y 10, la variable dependiente toma los valores 52 y 92 respectivamente.

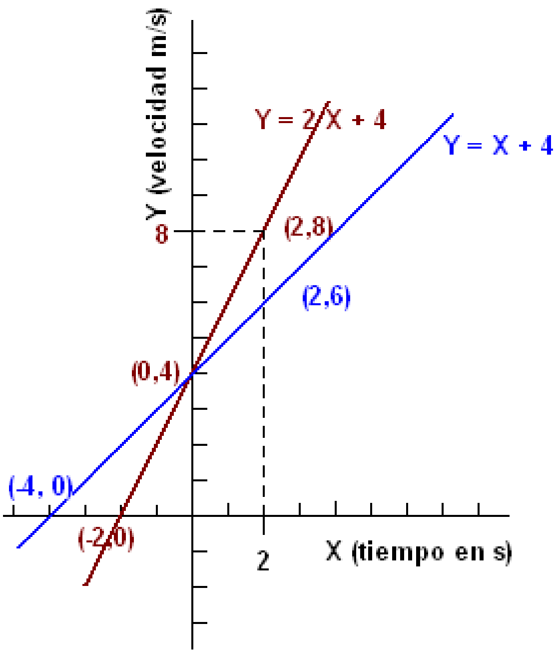


Figura 2

Acabamos de ver un ejemplo de ***función lineal***, que es aquella en la que el exponente de la variable independiente es la unidad, veamos ahora el caso de otros tipos de funciones.

Función cuadrática

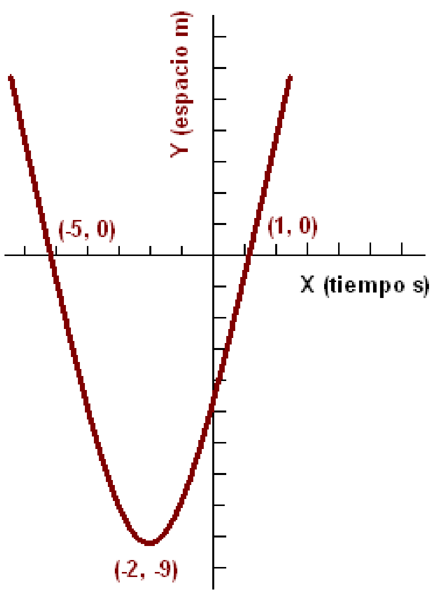


Figura 3

Si el exponente de la variable independiente es "2", como en: "$y = x^2 + 4x - 5$", la función se denomina cuadrática o de segundo orden.

Veamos que puntos importantes nos encontramos en la representación gráfica.

En primer lugar la variable dependiente ahora es nula en dos ocasiones para "x = -5" y para "x = 1".

La función presenta un mínimo, que obtendremos calculando su primera derivada (y' = 2x+4) e igualándola a cero, con lo que obtenemos "x = -2" (para saber que es mínimo sustituimos "-2" en la segunda derivada, en este caso y'' = 2, y si el resultado es positivo, +2>0, la función tiene un mínimo en el punto) sustituyendo en la función nos da el punto (-2, -9) en el que se encuentra el mínimo.

Supongamos que esa función nos da el espacio recorrido por el cuerpo del ejemplo anterior que se movía con aceleración constante.

Otras funciones de interés

Función proporcional inversa

Muchos fenómenos físicos son representable por funciones del tipo $y = \frac{k}{x}$, figura 4. Un ejemplo típico es la variación entre presión y volumen ocupado por un gas, es decir las magnitudes varían de forma inversamente proporcional, la representación gráfica en este tipo de ecuaciones es una hipérbola equilátera que es asíntota a los dos ejes.

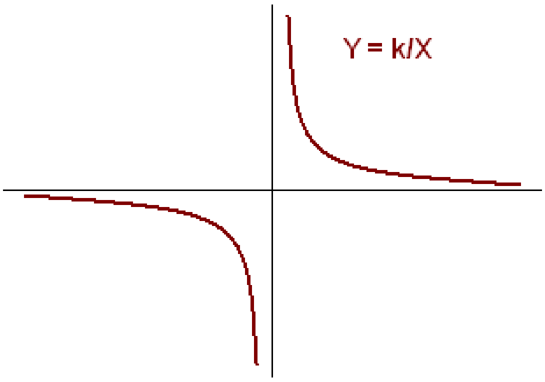


Figura 4

Función exponencial

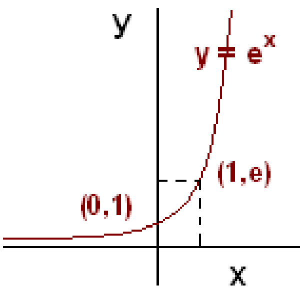


Figura 5

Otra función que se presenta con frecuencia es la función exponencial. De ellas la más común es aquella en la que la base es el número “e”, $y = e^{a\,x}$.

Como puntos notables de esta familia de funciones tenemos:

- El corte con el eje de ordenadas (0,1). Que es común con todas las exponenciales, sea cual sea su base.
- Y el punto en el que la abscisa es la unidad, pues según sea el valor de la ordenada en ese punto (que viene fijado por el valor de “a”) nos dará información sobre lo “rápido” o “lento” que crece el fenómeno que estamos estudiando.

Función de varias variables

Cuando el valor de una magnitud depende de más de una variable independiente decimos que es una función de varias variables, por ejemplo el volumen que ocupa un gas depende de su presión y de su temperatura. Para conocer esta función (en este caso el volumen) debemos analizar como influyen en ella las variaciones de cada variable independiente por separado, considerando constantes las demás.

Es decir la variación total del volumen de un gas será: la variación que experimente el volumen del gas al variar la presión multiplicada por la variación de la presión manteniendo constante la temperatura más la variación que experimente el volumen del gas al variar la temperatura multiplicada por la variación de dicha temperatura manteniendo constante la presión

Módulo I.2.3 Concepto de derivada de una función.

Existen magnitudes cuyo valor varia al modificarse el valor de otra, si se logra una expresión matemática que nos proporcione esta información tenemos una ***función***. En muchas ocasiones es necesario conocer no sólo los valores que va tomando la función, sino también la forma en la que se produce esa variación.

Pongamos un ejemplo: Un grupo de amigos deciden realizar una actividad de puenting, para lo que, además de conocer las características del lugar, necesitan preparar el material adecuado (por ejemplo las cuerdas). En este momento pueden surgir preguntas importantes como: ¿la resistencia de la cuerda depende de su longitud?, ¿en qué momento la cuerda deja de alargarse?, ¿depende este momento del grosor?. Los organizadores de esta actividad recomiendan que *"La medición de la cuerda también es clave, deben restarse 5 metros como mínimo sobre la altura del puente o soporte",* pero, ¿es siempre esto suficiente? damos por supuesto que el alargamiento de la cuerda depende del peso que soporta, pero ¿esta dependencia es siempre lineal?, o, ¿se alarga de forma diferente según la longitud de cuerda utilizada?. Podemos pensar que para responder a estas preguntas basta conocer una ecuación matemática que nos relacionara las variables longitud de la cuerda y peso que soporta, pero no nos basta saber que existe una variación, deberemos saber como es esa variación de la longitud para cada valor del peso.

¿Por qué es importante este concepto?

En Física también existen múltiples situaciones en las que nos interesa conocer como varía una función para cada valor de la variable independiente. Por ejemplo supongamos el movimiento de un tren cuando llega a una estación. Sabemos que tendrá que reducir su velocidad hasta pararse al final del andén, tenemos que saber como disminuye la velocidad para que el tren no se salga de la estación, es decir en función del espacio que debe recorrer. No es lo mismo que la disminución de la velocidad se empiece a producir antes o después de entrar en el anden

Cuestión 1
¿Qué conductor prefieres? el que frena muy cerca de la estación, u otro que empiece a frenar cuando la distancia es mayor. ¿por qué?

Cuestión 2
En competiciones deportivas de moto "GP" se alaba al piloto que hace "buenas apuradas de frenada" ¿por qué?

Cuestión 3
El émbolo de un motor de automóvil es empujado por una fuerza constante durante el proceso de compresión del combustible en su interior. La variación del volumen del gas, que se produce en el émbolo ¿es constante o variable? ¿por qué?.

Cuestión 4
Sabemos que en un imán, los polos del mismo nombre se repelen. Si queremos mantener separados dos imanes enfrentados por polos del mismo nombre ¿tendremos que realizar una fuerza? ¿dependerá de la distancia a la qué se encuentren?. Si

queremos disminuir esta distancia ¿tendremos que variar la fuerza que realizábamos?¿dependerá esta fuerza de la variación de la distancia entre los imanes?

Conexión con conocimientos previos y expectativas.

Acabamos de comprobar que existen funciones, en las que cuando consideramos distintos incrementos de igual valor de la variable independiente, el incremento que experimenta la variable dependiente no siempre es el mismo, a pesar de que la variable independiente varíe la misma cantidad.

Esta situación nos plantea algunas situaciones en Física que hemos de resolver de manera especial. Por ejemplo, cuando tenemos un cuerpo cuya masa está repartida de forma no uniforme y queremos saber su densidad, al dividir la masa total por el volumen total obtenemos un valor al que podemos llamar densidad media, pero el valor obtenido no corresponde a la densidad de cualquier parte del cuerpo. Entonces tenemos que tomar volúmenes muy pequeños (diferenciales de volumen) y ver la masa de esa diferencial de volumen (diferencial de masa), podríamos así conocer la densidad de cada pequeña parte (o punto) del cuerpo.

Cuestión 5
Un coche realiza un viaje de un lugar de Madrid a un lugar de Barcelona distante 700 Kilómetros. Sale de Madrid a las 8:00 horas y llega a Barcelona a las 18 :00 horas ¿Podemos conocer cual a sido su velocidad media?. Además sabemos que el conductor paró dos horas para comer. ¿Altera esto la velocidad media del viaje?. Si paró en el punto medio del camino a las 13:00 horas. ¿Llevó siempre la misma velocidad?. ¿Podríamos conocer de una manera más precisa la velocidad que lleva en cada instante tomando intervalos de camino más pequeños?.

En casos como estos en los que queremos relacionar la variación de dos variables y no existe variación siempre igual, en lugar de hablar de incremento hablamos de diferenciales.

Cuestión 6
¿por qué no podemos tomar incrementos finitos para conocer la forma en que cambia una magnitud dependiente cuando varia la magnitud independiente?

Gráficamente también podemos observar fácilmente que si la función no es lineal, cuando tomamos un intervalo finito, lo que hacemos es sustituir un trozo de curva, correspondiente a la función, por una recta correspondiente a una función lineal que no es la que estábamos analizando. Esta función lineal está caracterizada por una pendiente que nos da información sobre como varia la variable dependiente en función de la independiente, y que podemos calcular mediante la tangente del ángulo que forma con el eje de la variable independiente, y por tanto es el cociente de dividir el incremento de la variable dependiente entre el incremento correspondiente de la variable dependiente, y nos dirá como variaría la variable dependiente en función de la independiente si la relación entre ellas fuera una relación lineal.

Está claro que esa sustitución nos proporciona una aproximación, pero no los valores reales. Si partimos el incremento de la variable independiente en dos iguales, obtendremos diferentes resultados en cada mitad, pero cada uno de esos dos valores será más próximo a la realidad ya que las dos secantes en conjunto se acercan más a la curva que cuando teníamos una sola.

Repitiendo esta operación, podemos sustituir la primera secante correspondiente al intervalo total por una linea quebrada que se va aproximando más y más a la curva a medida que disminuimos el tamaño del intervalo, como ocurre en los intervalos azul, rojo y verde de la figura 1, de forma que en cada punto podemos llegar a tener una tangente, como se representa en la figura 2.

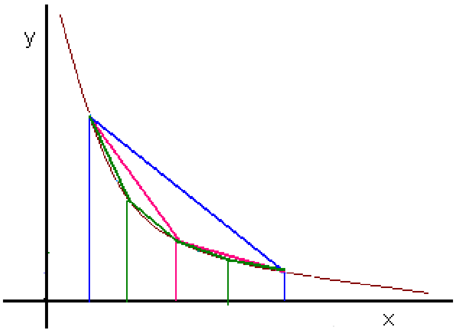


Figura 1

La pendiente de la tangente en cada punto es la que nos va a determinar si la variación es más rápida o más lenta y se calcula como el limite del cociente " Δy " entre " Δx " cuando " Δx " en muy pequeño, es decir tiende a cero. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

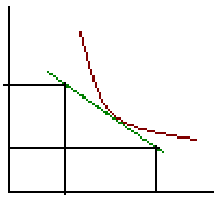


Figura 2

Esta claro que, si vamos haciendo este límite en todos los puntos de la línea que representa la función, vamos obteniendo un valor en cada punto, tendremos por tanto un valor del límite para cada valor de la variable independiente, que será otra función que denominamos derivada de la función. De forma que

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ y , dado que cuando " Δx " tiende a cero es una diferencial, y entonces " Δy " es también una diferencial se escribe $y' = \dfrac{dy}{dx}$

Conocimientos relacionados: cálculo de derivadas

Función	Derivada
y = K	y' = 0
y = a x	y' = a
y = x^2	y' = 2x
y = a x^n	y' = a n x^{n-1}
y = a/x^n = a x^{-n}	y' = a (- n) x^{-n-1}
y = a e^x	y' = a e^x
y = a e^{nx}	y' = a n e^{nx}
y = L x = ln x	y' = 1/x
y = sen x	y' = cos x
y = cos x	y' = - sen x
y = tag x	y' = - cotag x = 1/ $\cos^2$ x

Módulo I. 2. 4 Concepto de integral

Frecuentemente necesitamos medir superficies. Por ejemplo para saber el coste de un revestimiento, como los precios vienen dados por metro cuadrado, debemos calcular la superficie a revestir para saber la cantidad de material necesario. La superficie es una magnitud que no se mide directamente, realizamos una medida indirecta, midiendo otras magnitudes más simples (longitudes) y calculando el valor de la superficie mediante operaciones matemáticas como productos o sumas. Como ejemplos de áreas sencillas tenemos: el área del cuadrado (lado al cuadrado), la del rectángulo (producto de dos lados desiguales), la del triángulo (un medio de la base por la altura), o la del círculo (π por el radio al cuadrado).

Por que es importante este concepto

Cuando la figura cuyo área queremos conocer no es una figura sencilla recurrimos a descomponerla otras figuras de área fácilmente calculable. en partes cada una de las cuales sea una figura conocida.

> ***Cuestión 1***
> *Calcular la superficie de la figura 1: lo primero que tenemos que hacer es descomponer la figura en otras cuya superficie sea fácil de calcular. En la figura 2 la tenemos descompuesta en un semicírculo, cuatro rectángulos y cuatro triángulos rectángulos, cuyas áreas son fácilmente calculables midiendo longitudes.*
>
> ***Cuestión 2.***
> *Calcular la superficie del piso de una iglesia de planta de cruz latina sabiendo que la nave longitudinal es un rectángulo de 80 m de longitud por 20 de anchura rematada por un ábside semicircular, y la nave transversal es otro rectángulo de 60 metros de longitud por 20 de anchura cuyos dos brazos están rematados por capillas semicirculares.*

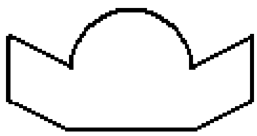


Figura 1

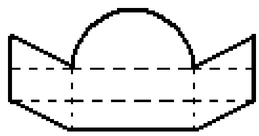


Figura 2

Un problema más complejo se nos plantea cuando la figura de la que queremos calcular el área no se puede descomponer de una manera tan fácil en figuras de área conocida. En este caso tendremos que recurrir a otro tipo de operaciones que dan lugar al establecimiento de una nueva operación matemática denominada ***integral de una función***, que nos va a permitir, entre otras cosas, calcular áreas de figuras con contornos "extraños" si conocemos la ecuación representada por la línea que determina el contorno.

Relación con conocimientos previos.

Supongamos representada la función y = f(x) que aparece en la figura 3, y queremos conocer el área encerrada entre la curva y el eje "x". Dado que la curva no es una semicircunferencia es bastante complicado. Veamos como podemos ir aproximandonos sucesivamente a ese área. Si dibujamos varios rectángulos con base en el eje "X" cuya altura venga marcada por el corte con la curva y sumamos todas sus áreas, obtenemos una aproximación al área encerrada por la curva y el eje.

Para mejorar la aproximación haremos más estrechos los rectángulos definidos de la misma manera y así sucesivamente. A medida que hacemos los rectángulos más estrechos, la diferencia entre el área encerrada por la curva y la suma de las áreas de todos los rectángulos se hace menor, de manera que cuando esta base es una diferencial (d x) podemos decir que

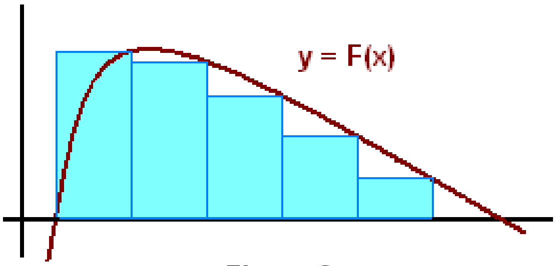


Figura 3

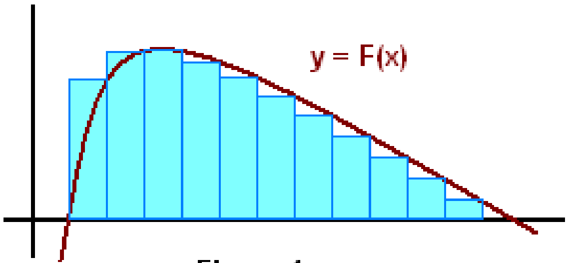


Figura 4

cada rectángulo tiene una diferencial de superficie (d S) igual al producto de su base d x por el valor que toma la coordenada “Y” en ese punto. $dS = y \cdot dx = f(x)\,dx$

Definición de integral de una función.

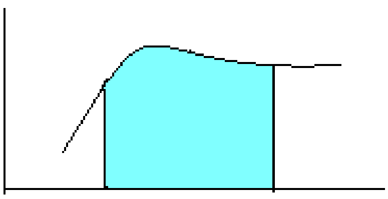
Para una función y = f(x), el área total encerrada por la curva que representa la función y el eje de las “X”, en un cierto intervalo será la suma de todas las diferenciales de superficie $dS = y \cdot dx = f(x)\,dx$.

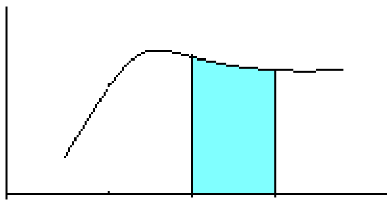
Esta suma de infinitos términos, siguiendo al terminología de Riemann, la llamamos integral definida de una función entre dos puntos (los valores de x que delimitan el área considerada)

$$S = \int_a^b f(x).dx$$

Dada una función ¿que ocurrirá con su integral al modificar los limites de integración?

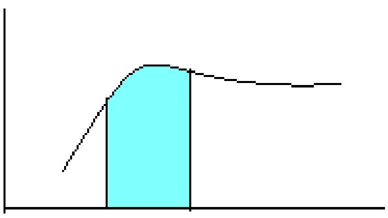
Parece inmediato pensar que cambiará el valor de la integral, ya que cambia el área encerrada entre la curva, el eje “x” y las ordenadas correspondientes a los límites de la integral.

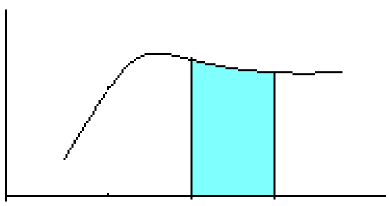




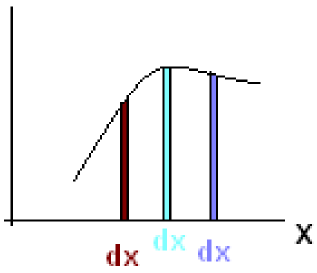
¿Que ocurrirá si manteniendo el tamaño del intervalo de integración, modificamos su posición?

Como puede observarse en la figura, también en ese caso cambia el área encerrada, luego cambia la integral, ya que estamos considerando una porción de función diferente.





Si tomamos ahora intervalos iguales muy pequeños (dx) y vamos modificando su posición a lo largo del eje "X", para cada posición de "dx", tendremos un valor de la integral distinto, es decir dependiente de la posición "X"



Podemos así definir una nueva función de "X" igual al valor de la integral en cada punto $F(x) = \int f(x)\,dx$, que llamaremos ***integral indefinida*** de la función f(x)

Relación entre derivada e integral de una función

Partamos de la definición de derivada de la función F(x), que sabemos que es $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$. Si F(x) es la integral de la función y = f(x) el incremento de F(x) será el área de un rectángulo de base Δx y altura f(x), por tanto $\Delta F = f \cdot \Delta x$, luego en la definición de derivada nos encontramos que: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f(x)$, luego para cualquier valor de "x" la derivada de la integral de una función nos da la función. A la función F(x) la llamamos función primitiva de la f(x)

Según acabamos de decir al derivar la función primitiva F(x) (integral indefinida) de una función f(x) obtenemos la misma función.

¿Qué ocurre si a una función primitiva le sumamos una constante?
Como la derivada de una constante es cero obtenemos la misma función f(x). En consecuencia, la función primitiva de f(x) es su integral indefinida F(x) más cualquier constante.

¿Qué significado tiene esta constante?
La constante aparece como un término independiente, luego afecta a que la curva se desplace, paralelamente a sí misma, hacia arriba o hacia abajo. Por tanto tenderemos una familia de curvas "paralelas" cuya derivada es la misma, luego todas son primitivas de la función f(x).

Para resolver un problema concreto, si su solución nos viene dada por la integral de una función, no basta con identificar toda la familia de funciones primitivas, será necesario identificar la solución adecuada mediante la determinación del valor la constante adecuada. Este valor vendrá determinado por las condiciones iniciales del problema.

Cuestión 3
La aceleración de un cuerpo viene dada por la ecuación a = 2t+3. Calcular su velocidad a los 5 segundos después de comenzar a contar el tiempo sabiendo que cuando empezamos a contar el tiempo su velocidad era de 2 m/s

Como sabemos que la aceleración es la derivada de la velocidad, se cumplirá que $v(t) = \int a(t) \cdot dt = \int (2t+3)\,dt = t^2 + 3t + C$. *Para determinar el valor de "C" tenemos en cuenta que para t = 0; v(0) = 2. Sustituyendo en la ecuación tenemos:* $2 = 0^2 + 3 \cdot 0 + C$, *luego C = 2, la velocidad vendrá dada por* $v = t^2 + 3t + 2$.

La velocidad a los 5 s será: $v(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 = 42\ m/s$

Cuestión 4.
Dada la tabla de derivadas, escribir la correspondiente tabla de integrales de las funciones comunes.

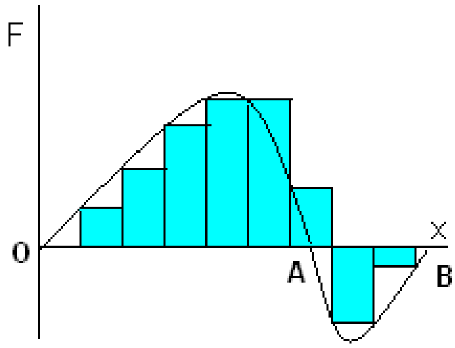
Función	Derivada	Integral
y = K	y' = 0	
y = a x	y' = a	
y = x^2	y' = 2x	
y = a x^n	y' = a n x^{n-1}	
y = a/x^n = a x^{-n}	y' = a (- n) x^{-n-1}	
y = a e^x	y' = a e^x	
y = a e^{nx}	y' = a n e^{nx}	
y = L x = ln x	y' = 1/x	
y = sen x	y' = cos x	
y = cos x	y' = - sen x	
y = tag x	y' = - cotag x = 1/ $\cos^2$ x	

Aplicación al cálculo del trabajo realizado por una fuerza constante.

Sabemos que cuando se aplica una fuerza a un cuerpo y este se desplaza, se define "trabajo realizado por la fuerza", como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento producido $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$

¿Que ocurrirá cuando la fuerza no es constante?.

Si la fuerza no es constante será función de la posición, que podemos considerar como variable independiente. Para cada desplazamiento diferencial podemos considerar la fuerza aplicada constante y calcular una diferencial de trabajo $dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$, el trabajo total vendrá dado por al "suma" de todos los productos diferenciales, es decir la integral $W = \int \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$



Veamos un caso "especial".

Supongamos que la fuerza que estamos considerando tiene siempre la misma dirección que el desplazamiento a que da lugar y cuyo módulo no es constante, de forma que incluso pueda cambiar de sentido. Como ocurre cuando un móvil es primero acelerado y después se le frena. En este caso el producto escalar es el producto de los módulos.

Si observamos el primer bucle de la curva de la figura, en el que la fuerza tiene un valor positivo (el móvil acelera) realizamos un trabajo que será $W = \int_O^A F \cdot dx$

Cuando la fuerza cambia de sentido, el móvil empieza a frenar, el trabajo que realizamos es negativo. En efecto si multiplicamos la fuerza (negativa) por el desplazamiento (positivo), el trabajo resulta negativo, y como se ve en la figura, el área encerrada por la curva y el eje de las x se encuentra por debajo de este eje.

En general, si consideramos todo el desplazamiento tendremos que sumar todas las áreas positivas (por encima del eje), sumar todas las áreas negativas (por debajo del eje) y sumarlas con su propio signo.

La integral definida de una función representa el área limitada por la gráfica de la función, con signo positivo cuando la función toma valores positivos y negativo cuando toma valores negativos (figura 7).

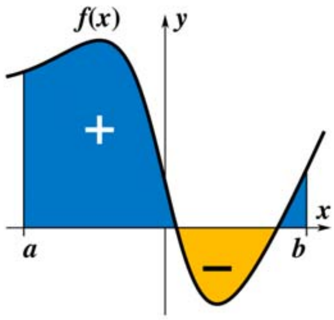


Figura 7

Módulo I.3.3 Concepto de “Producto escalar de dos vectores”. “Proyección”.

Está claro que cuando decimos: “han transcurrido tres minutos” sabemos que nos referimos a un intervalo temporal, cuyo valor es de <u>tres minutos</u>, no son tres horas, ni cinco minutos, ni tampoco tres segundos. La expresión del valor de la cantidad (con la unidad correspondiente) nos informa de la magnitud a la que hacemos referencia y de la importancia de la cantidad que estamos considerando.

Sin embargo, cuando nos dicen que un automóvil ha conseguido una media de 109 km/h, podemos decir que ha ido bastante deprisa, la cantidad y la unidad empleada nos permite decir eso, pero ¿ha llegado a Málaga? o ¿llegó a Toledo? ¿partió de Barcelona? o ¿inició su recorrido en Madrid?. La velocidad es una de esas magnitudes que para quedar bien definidas, necesitamos conocer, desde luego su valor y la unidad de medida empleada, pero también, tanto la dirección de la que hablamos, como el sentido de la misma.

Las magnitudes que quedan caracterizadas con el conocimiento de la cantidad y su unidad, las llamamos ***magnitudes escalares***, mientras que las magnitudes que para quedar definidas necesitamos conocer, además de la unidad empleada, tres números que nos permiten conocer las tres características del vector: su módulo, su dirección y su sentido las llamaremos ***magnitudes vectoriales***.

¿Por qué es importante este concepto?

Para arrastrar un vagón de un tren por la vía, ¿qué resulta más eficiente? hacerlo con la fuerza roja o con la fuerza negra de la figura 1. La respuesta es evidente con la roja ¿por qué? porque el desplazamiento y la fuerza tienen la misma dirección, y en el caso de la negra sólo la componente paralela a la vía produce movimiento.

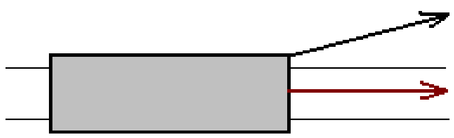


Figura 1

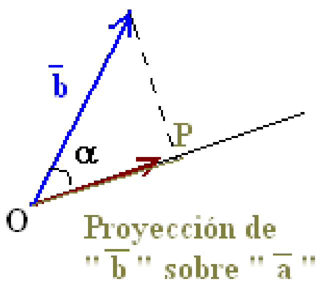


Figura 2

Existe una operación matemática entre vectores (producto escalar) que relaciona la dirección y el sentido de ellos, permitiéndonos entre otras cosas, calcular la proyección de un vector sobre otro.

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores es un escalar cuyo valor es el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. Producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ $\equiv (\vec{a} \cdot \vec{b})$

En la figura 2 se ve que la proyección del vector $\vec{b}$ sobre la dirección definida por $\vec{a}$, es el segmento OP cuyo valor es igual al módulo del vector $\vec{b}$ multiplicado por el coseno del ángulo que forman las direcciones de los vectores.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \overline{OP} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$$

Por tanto, el producto escalar de dos vectores se puede calcular multiplicando el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

> ***Cuestión 1***
> *¿Qué se obtiene al multiplicar un vector escalarmente por si mismo?*

El producto escalar de vectores nos permite introducir las coordenadas cartesianas y las coordenadas de un vector, con lo cual podremos trabajar con vectores empleando únicamente escalares.

Conexión con conocimientos previos y expectativas.

Todos sabemos sumar dos vectores gráficamente en el plano con lo que obtenemos la diagonal del paralelogramo que forman, no es difícil generalizar este concepto a varios vectores aún cuando estos se encuentran en el espacio. A partir de este conocimiento vamos a:

- Multiplicar un vector por un escalar.
- Definir vector unitario.
- Proyectar un vector sobre una dirección.
- Obtener la expresión de un vector en coordenadas.
- Realizar operaciones con vectores a partir de sus coordenadas.

Producto de un vector por un escalar

Si un vector lo sumamos con el mismo varias veces, es decir lo ponemos a continuación de si mismo varias veces, el resultado será otro vector de la misma dirección y sentido que el original cuyo módulo será igual a tantas veces el módulo del vector como le hemos repetido. Por similitud con la multiplicación de números reales, a esa operación la llamaremos ***producto de un escalar*** (λ) ***por un vector*** $(\vec{a})$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \overrightarrow{\lambda a}$$

Siendo $\overrightarrow{\lambda a}$ un vector de módulo $\left|\overrightarrow{\lambda a}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, paralelo al vector $\vec{a}$ y de sentido el del vector $\vec{a}$ si $\lambda > 0$ y opuesto al de $\vec{a}$ si $\lambda < 0$.

Esta operación presenta las siguientes propiedades

Existencia de elemento unitario	$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
Existencia de elemento nulo	$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
Distributiva respecto de la suma de escalares	$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$
Distributiva respecto de la suma de vectores	$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

Vector unitario

Naturalmente como dividir por un escalar es multiplicar por su inverso, si a un vector lo multiplicamos por el inverso de su módulo, que es un escalar, obtenemos un *vector unitario* (cuyo módulo es la unidad) en la dirección y sentido del vector dado. $\vec{a}\cdot\frac{1}{|\vec{a}|}=\vec{u}$

Proyectar un vector sobre una dirección

Naturalmente si multiplicamos escalarmente un vector $\vec{b}$ por otro de módulo unidad $\left(|\vec{a}|=1\right)$, tendremos $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=1\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$. Es decir, habremos obtenido la proyección de $\vec{b}$ sobre la *dirección definida* por la dirección del vector $\vec{a}$, lo que nos permite proyectar un vector sobre una dirección

Cuestión 2
¿Cuánto debe valer el producto escalar de dos vectores perpendiculares?

Debemos recordar también que la ecuación de una recta en el espacio, escrita en la forma (ecuación continua de la recta) $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, nos está diciendo que está contenida en la misma dirección que el vector (l, m, n)

Coordenadas rectangulares

Consideremos un punto "P" en el espacio, como se muestra en la figura 3, para conocer su posición respecto del origen "O" definimos su ***vector de posición*** $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$

Recordemos que el producto escalar de dos vectores es el módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. Si definimos unos vectores unitarios según los ejes $\left(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z\right)$ al calcular los productos escalares de $\vec{r}$ por estos tres vectores unitarios, tendremos las respectivas proyecciones del vector posición sobre los tres ejes.

$\vec{r}\cdot\vec{u}_x=\overline{OA}=r_x$, $\vec{r}\cdot\vec{u}_y=\overline{OB}=r_y$, $\vec{r}\cdot\vec{u}_z=\overline{OC}=r_z$

El vector $\vec{r}$ es la suma de los tres vectores formados al multiplicar cada uno de los tres vectores unitarios por la correspondiente proyección sobre cada eje:

$\vec{r}=r_x\cdot\vec{u}_x+r_y\cdot\vec{u}_y+r_z\cdot\vec{u}_z$

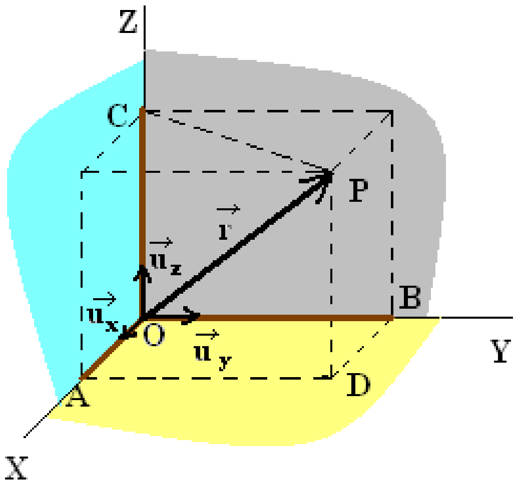


Figura 3

A los números r_x, r_y,r_z, los denominamos ***coordenadas del vector***.

Producto escalar en coordenadas rectangulares

Lo que acabamos de escribir nos permite obtener la forma del producto escalar de vectores en coordenadas rectangulares. Supongamos dos vectores: $\vec{a}=a_x\vec{u}_x+a_y\vec{u}_y+a_z\vec{u}_z$, $\vec{b}=b_x\vec{u}_x+b_y\vec{u}_y+b_z\vec{u}_z$ al multiplicarlos escalarmente, tendremos:

$\left(a_x \cdot \vec{u}_x + a_y \cdot \vec{u}_y + a_z \cdot \vec{u}_z\right) \cdot \left(b_x \cdot \vec{u}_x + b_y \cdot \vec{u}_y + b_z \cdot \vec{u}_z\right) = a_x \cdot b_x\left(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x\right) + a_x \cdot b_y\left(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y\right)$ $+ a_x \cdot b_z\left(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_z\right) + a_y \cdot b_x\left(\vec{u}_y \cdot \vec{u}_x\right) + a_y \cdot b_y\left(\vec{u}_y \cdot \vec{u}_y\right) + a_y \cdot b_z\left(\vec{u}_y \cdot \vec{u}_z\right) + a_z \cdot b_x\left(\vec{u}_z \cdot \vec{u}_x\right)$ $+ a_z \cdot b_y\left(\vec{u}_z \cdot \vec{u}_y\right) + a_z \cdot b_z\left(\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z\right)$. Sabemos que el producto escalar de un vector por sí mismo es su módulo al cuadrado y que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero.

Cuestión 3

Justificar que $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = a_x\ b_x + a_y\ b_y + a_z\ b_z$

Cuestión 4.

Existe un vector "$\vec{v}$" que al multiplicarle escalarmente por un vector "$\vec{a}$" da como resultado el mismo vector "$\vec{a}$". Justifica si esta frase es verdadera o falsa.

Cuestión 5.

¿Que obtenemos al intentar multiplicar escalarmente tres vectores?

Conceptos adquiridos.

Producto escalar de dos vectores: Es el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él

Proyectar sobre una dirección definida por una recta: Se toman los denominadores de la ecuación continua de la recta, que definen un vector de esa dirección, lo dividimos por su módulo obteniendo un vector unitario que multiplicamos escalarmente por el vector que queremos proyectar

Vectores perpendiculares: Siempre que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar tiene que ser cero.

Conceptos relacionados.

Trabajo realizado por una fuerza al desplazarse $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico: $\Delta V = \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Módulo I.3.4 Concepto de “Producto vectorial de dos vectores”. “Áreas y Volúmenes”.

¿Por qué es importante este concepto?

Vamos a ver dos ejemplos en los que aunque apliquemos la misma fuerza se obtienen resultados deferentes.

Para abrir la puerta de un ascensor *¿que resulta más eficiente empujar en el centro de la puerta, al lado de la bisagra o en el extremo opuesto a esta?.* Es evidente que cuando menos esfuerzo realizamos es si colocamos la mano lo más lejos posible de la bisagra. Podemos decir que con la misma fuerza obtenemos distinta “cantidad” de resultado según la posición en la que apliquemos la fuerza.

Existen ventanales cuya hoja puede abrirse hacia el que tira (como un tragaluz) o que gira como una ventana ordinaria sobre sus bisagras, según cuales sean los goznes sobre los que gira. Aunque nosotros realicemos siempre la misma fuerza y la apliquemos en el mismo punto, su posición respecto de las bisagras o de los goznes es distinta. En este caso el resultado obtenido es diferente no sólo en “cantidad” sino también en dirección de movimiento. El efecto (el giro) lo podemos representar por un vector, que depende de la fuerza y de la posición en la que esta se aplica respecto del eje de giro.

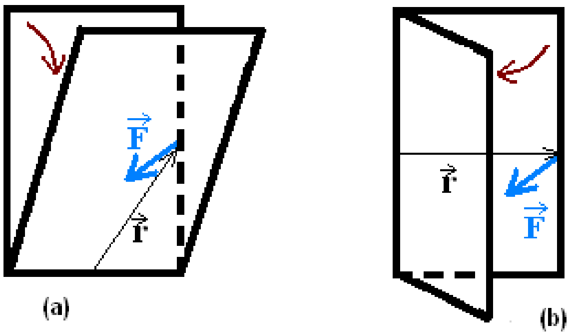


Figura 1
Esquema del resultado obtenido por la misma fuerza cuando la referencia fija del giro (gozne) es un eje horizontal (a) o vertical (b)

Como este, existen otros casos en los que el resultado de operaciones con vectores se puede representar por otra magnitud vectorial, lo que nos lleva a definir el producto vectorial de dos vectores.

Producto vectorial de dos vectores

Se define producto vectorial de dos vectores como otro vector, de dirección perpendicular al plano definido por los vectores, sentido el de avance de un tornillo que gire del primer vector (multiplicando) sobre el segundo (multiplicador) por el camino más corto y módulo el área del paralelogramo formado por los dos vectores (figura 2):

$$\vec{P} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$$

Cuestión 1
¿Cuánto valdrá el producto vectorial de dos vectores paralelos?

Cuestión 2
¿Qué se obtiene al multiplicar un vector vectorialmente por el mismo?

Conexión con conocimientos previos y expectativas.

Como sabemos, un vector libre lo podemos considerar aplicado en cualquier punto del espacio, siempre que se mantengan su módulo, dirección y sentido. Como consecuencia siempre que tengamos dos vectores, si uno de ellos es libre, podemos hacer coincidir sus orígenes y a partir de ellos formar un paralelogramo.

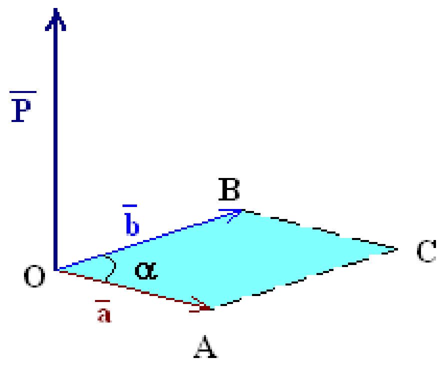


Figura 2

Como el área del paralelogramo definido por los vectores (la figura 2), es la longitud de los lados por el seno del ángulo que forman (tal vez se recuerde mejor que el área del triángulo $\overset{\Delta}{OAB}$ es el $\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}\,\mathrm{sen}\alpha$, por lo tanto el rectángulo tiene el doble de área) el módulo del producto vectorial de dos vectores será:

$$\left|\vec{P}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \,\mathrm{sen}\alpha$$

Cuestión 3
¿Se obtiene el mismo resultado si cambiamos el orden de los factores en el producto vectorial de dos vectores?

Por la propia definición de producto vectorial de dos vectores ***no puede existir elemento neutro*** para el producto, pues no puede existir ningún vector, aunque su módulo sea unitario, que nos reproduzca el vector original, pues por definición el producto vectorial es un vector perpendicular a los dos vectores que se multiplican.

De la imposibilidad de existir el elemento neutro respecto del producto vectorial, se desprende que ***no puede existir elemento inverso de un vector***, lo que supone que ***no existe la división entre vectores***.

Una aplicación importante del producto vectorial es la posibilidad de asignar carácter vectorial a las superficies y otra calcular volúmenes.

Vector superficie

Cualquier superficie, plana o alabeada, se puede considerar como la suma de infinitos paralelogramos elementales, en cada uno de ellos podemos considerar los dos vectores elementales que definen dos lados contiguos. El producto vectorial de estos dos vectores será un vector perpendicular a la superficie elemental y de módulo su área, que representa vectorialmente la superficie (***vector superficie***)

$$d\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$$

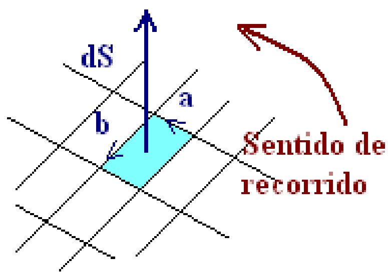


Figura 3
El producto de “a” por “b”, si los consideramos como vectores, da un sentido de recorrido a la superficie del paralelogramo elemental considerado.

Como hemos dicho más arriba, si la superficie no es elemental tendremos que realizar la suma, discreta o continua, de todos los vectores superficie.

El sentido del producto vectorial dependerá del orden de los factores y por tanto del sentido en el que recorramos la superficie. Si la superficie encierra un volumen, tomaremos como sentido positivo el dirigido hacia fuera del volumen.

Cálculo de volúmenes

Otra aplicación directa del producto entre vectores es el cálculo del *volumen de un paralelepípedo*. Consideremos tres vectores que no sean coplanarios. Definirán un paralelepípedo, en general, no recto, cuya base podemos considerar son dos cualesquiera de ellos y el tercero será una de sus aristas laterales (figura 4).

Sabemos que el volumen (V) de un paralelepípedo es el producto del área del polígono base por la altura del prisma. Si consideramos dos de los vectores formando la base del paralelepípedo, su producto vectorial $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ será un vector perpendicular a la base (es decir, paralelo a la altura del paralelepípedo) de módulo el área de la base. Como la altura es la proyección de la arista sobre la perpendicular a la base, la proyección de $\vec{c}$ sobre el producto vectorial $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$, será la altura "h" del prisma, recordando que el producto escalar de vectores es una proyección tendremos que el volumen "V" será:

$$V = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{c}$$

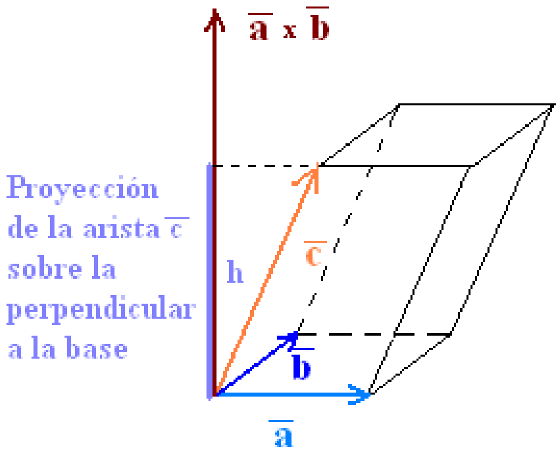


Figura 4

Por tanto, podemos asignar un vector a cualquier superficie, según el sentido en el que la recorramos y calcular el volumen de cualquier paralelepípedo como el producto mixto de sus aristas entendidas como vectores.

Expresión del producto vectorial por componentes.

Cuestión 4.
¿Cual es el producto vectorial de dos vectores unitarios?
Completar la siguiente tabla de doble entrada escribiendo en cada casilla el resultado de multiplicar vectorialmente el vector de la fila por el de la columna que determinan la casilla

Producto vectorial	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_x$			
$\vec{u}_y$			
$\vec{u}_z$			

Cuestión 5

De acuerdo con los resultados obtenidos en la cuestión anterior, y sabiendo que el producto vectorial tiene la propiedad distributiva respecto a la suma, buscar la expresión del producto vectorial de los vectores:

$$\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z\,,\ \vec{b} = b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z$$

Conceptos adquiridos

Producto vectorial de dos vectores: Es otro vector, de módulo el área del paralelogramo formado por los dos vectores, dirección perpendicular al plano definido por los vectores, sentido el de avance de un tornillo que gire desde el multiplicando al multiplicador por el camino más corto.

Vectores paralelos: Si dos vectores son paralelos, su producto vectorial tiene que ser cero.

La superficie como vector: Cualquier superficie puede representarse por un vector de módulo su área dirección la perpendicular a ella y sentido dependiente del sentido en el que se recorre su perímetro.

Cálculo del volumen de un paralelepípedo: Para calcular el volumen de un paralelepípedo consideraremos sus aristas como vectores, calculamos el producto vectorial de dos de ellas y ese producto lo multiplicamos escalarmente por la tercera arista.

Conceptos relacionados.

Momento de una fuerza. Como se señalaba al comienzo, en el caso de la puerta del ascensor, la fuerza necesaria para abrir la puerta es diferente según el punto en que se aplique. La existencia de puntos fijos condiciona el resultado de la acción de la fuerza y hay que tener en cuenta, además de su dirección sentido y módulo, la posición en la que se aplican.

Para tener en cuenta la posición de la fuerza respecto a los puntos fijos que condicionan el movimiento definimos el vector posición de la fuerza respecto a estos puntos. Llamaremos ***momento de la fuerza respecto al punto*** al producto vectorial del vector de posición por la fuerza $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Cuestión 6

Calcular los distintos momentos de la misma fuerza de 50 N de módulo, aplicada perpendicularmente a la puerta a 0,1 y 0,5 y 0,8 m de los goznes de la puerta. Relacionar el módulo de los momentos obtenidos con la "eficiencia" a la hora de abrir la puerta.