Tema 1
Electrostática en el vacío

Física (780000)

Grado en Ingeniería de Computadores (grupo 1ºA, lunes mañana)

Curso 2019/2020 – Primer Cuatrimestre

Universidad de Alcalá

R. Gómez Herrero

Departamento de Física y Matemáticas

- Ya en la antigua Grecia, Tales de Mileto (s. VI a.C.) observó que frotando un fragmento de ámbar (élektron en griego), éste era capaz de atraer ciertos objetos ligeros como fragmentos de plumas. Otros materiales como la lana presentan este mismo comportamiento.

Identifícate / Regístrate Martes 09 de noviembre de 2010 | RSS

informacion.es El periódico de la provincia de Alicante NOTICIAS Alicante

EDICIONES SUPLEMENTOS SECCIONES DEPORTES

FDS Alicante Elche Vega Baja Benidorm/Marina Baixa Alcoy Elda L´Alacantí Baix Vinalopó

Información.es » Alicante

Atención Urbana tratará el tobogán de los calambres contra la electricidad estática

El Ayuntamiento aplicará un líquido aislante al juego infantil del parque de La Florida, au descargas a los niños persisten sustituirá el aparato

02:51 Me gusta 53

J. HERNÁNDEZ

La Concejalía de Atención Urbana empezará esta misma semana a aplicar un tratamiento contra la electricidad estática al tobogán del parque de la Cochera de Tranvías, en el barrio de La Florida, que provoca calambres y descargas a los niños cuando se deslizan por él. El responsable del área, Andrés Llorens, contactó ayer con la empresa fabricante del aparato, elaborado en polietileno, en un intento de solucionar el problema después de que un grupo de padres y madres denunciara a este diario que en determinados días, cuando sopla mucho viento o si hay muchos niños sobre el tobogán, se llegan incluso a oír las chispas que se generan cuando los pequeños se agarran a la barandilla durante el descenso e incluso acaban con los pelos de punta. También algunos padres han sentido los calambres cuando cogen a los niños mientras bajan por el juego infantil.

Llorens, que envió a los técnicos a supervisar el aparato, explicó que el tobogán lleva en uso casi tres años,

La Voz de Galicia.es

PORTADA GALICIA DEPORTES SOCIEDAD DINERO ESPAÑA MUNDO OPINIÓN PARTICIPA BLOGS OCIO Y CULTURA

A Coruña A Mariña Arousa Barbanza Carballo Deza Ferrol Lemos Lugo Ourense Pontevedra Santiago

La electricidad estática en los toboganes obligará a instalar un inhibidor en un parque carballés

La Voz | 18/3/2010

Valoración

La Concellería de Obras e Servizos de Carballo ha detectado un problema de acumulación de electricidad estática en los dos toboganes instalados en el parque infantil de la plaza Eduardo Pondal. Según informó el responsable del área, Luis Lamas, algunos vecinos informaron de que, al deslizarse, los niños notaban una sensación de descarga eléctrica cuyas consecuencias son algún pequeño calambre o que se pusiese el pelo de punta.

El motivo, añadió el edil, es la acumulación de electricidad estática que se

Carga eléctrica - triboelectricidad

- Ya en la antigua Grecia, Tales de Mileto (s. VI a.C.) observó que frotando un fragmento de ámbar (elektron en griego), éste era capaz de atraer ciertos objetos ligeros como fragmentos de plumas. Otros materiales como la lana presentan este mismo comportamiento.
- Esta capacidad de electrificación por contacto o fricción se denomina **triboelectricidad**.
- Experimentos sencillos:
  - Un globo o una varilla de plástico que hayan sido frotados atraen pequeños trozos de papel
  - Dos varillas de plástico que han sido frotadas y suspendidas de un hilo se repelen
  - Todos hemos sentido pequeñas descargas de electricidad estática en la vida cotidiana

Carga eléctrica - triboelectricidad

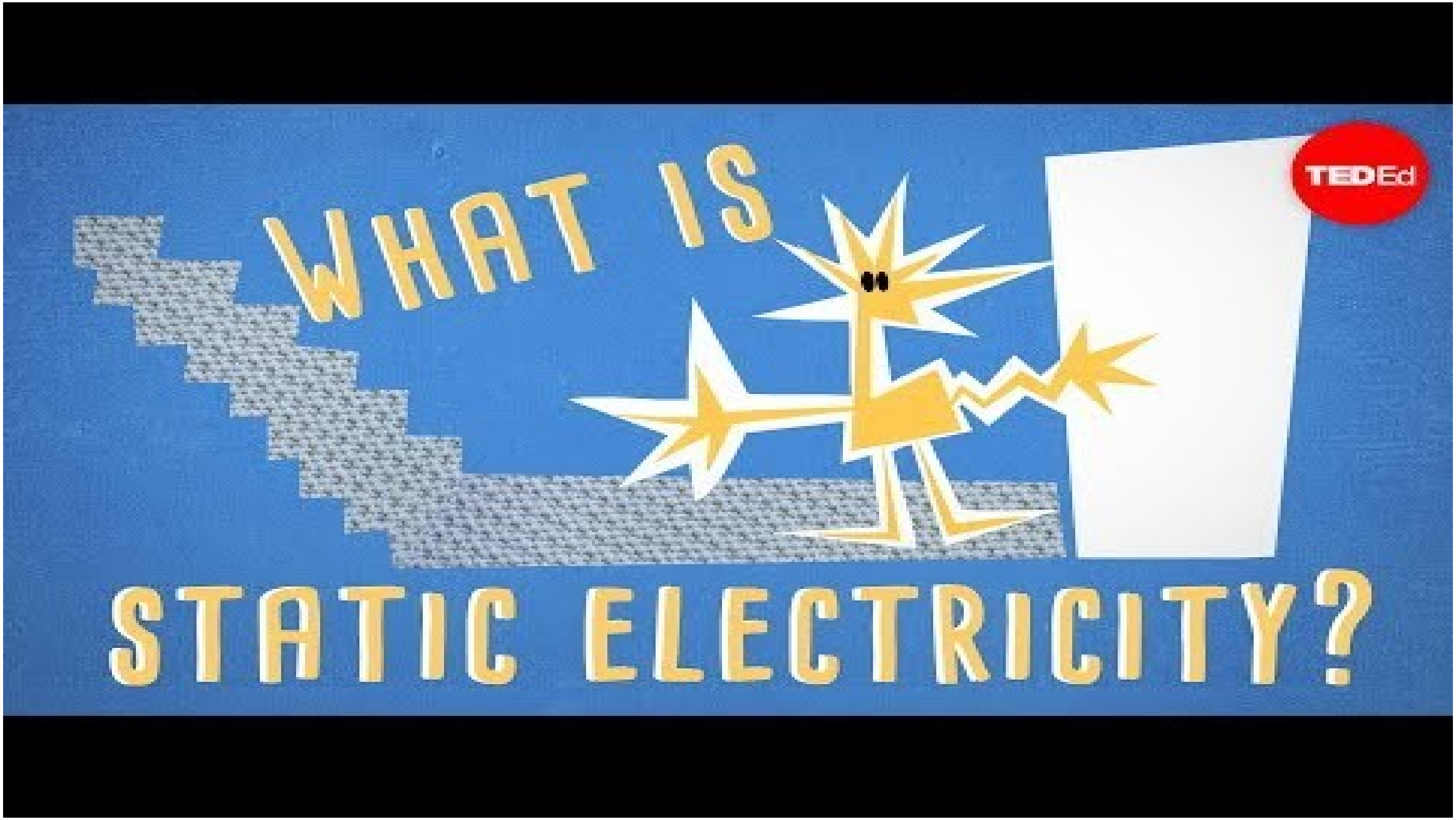
- En el siglo XVI Girolamo Cardano y William Gilbert identificaron la electrostática como un fenómeno diferente al magnetismo. Gilbert especuló que la frotación del material conducía a la pérdida de algún tipo de fluido.
- En el siglo XVIII B. Franklin, apoyándose en trabajos previos, propuso la existencia de dos tipos de carga y sugirió que sólo uno de ellos se comportaba como un fluido capaz de transferirse de un cuerpo a otro.
- La ley de Coulomb, enunciada por este en 1785 puso las bases de la electrostática actual, permitiendo su completo desarrollo durante el siglo XIX.

Carga eléctrica - triboelectricidad

- Hoy sabemos que estos fenómenos son debidos a la transferencia de cargas eléctricas (electrones) entre objetos.
- Dependiendo de si se adquieren o ceden electrones un objeto inicialmente neutro quedará cargado negativa o positivamente.
- La existencia de dos tipos de carga explica que pueda existir repulsión (cargas del mismo signo) o atracción (cargas opuestas).
- La carga eléctrica está cuantizada. En el mundo macroscópico todas las cargas observadas son múltiplos enteros $Q = Ne$ de la **carga del electrón *e***, a la que podemos considerar **unidad fundamental de carga***.

*q_{quark} 1/3 e

Carga eléctrica - triboelectricidad



Enlace al vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=yc2-363MIQs

Carga eléctrica - triboelectricidad

Enlace al vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=ViZNgU-Yt-Y

Carga eléctrica - triboelectricidad

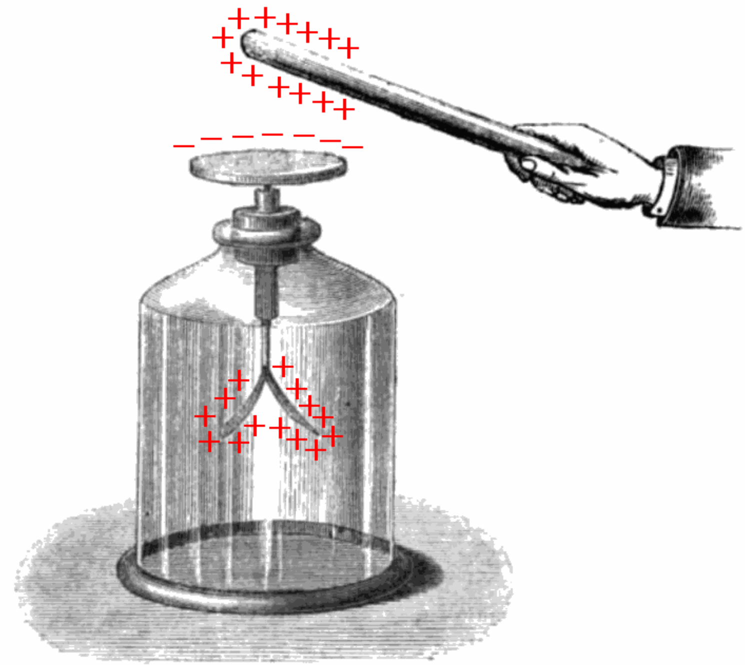
Enlace al vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=4S0EBxT60pw

Serie triboeléctrica

Vidrio	(+)
Cabello humano	↑
Nylon	
Lana	
Seda	
Goma natural	
Poliestireno	
PVC	
Teflón	(-)

Clasifica los materiales según su tendencia a ceder o tomar electrones

Electroscopio



http://phys23p.sl.psu.edu/phys_anim/EM/indexer_EMB.html

Carga eléctrica – unidad fundamental

- La **conservación de la carga** es una de las leyes fundamentales de la naturaleza
- El valor de *e* es extremadamente pequeño comparado con las cargas típicamente presentes en objetos macroscópicos

Carga del electrón $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

Unidad de carga S.I.: Culombio (C),
(en honor a Charles-Augustin de Coulomb)

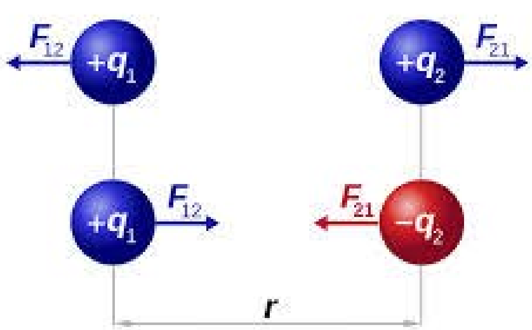
Nótese que *e* denota el valor absoluto (sin signo)

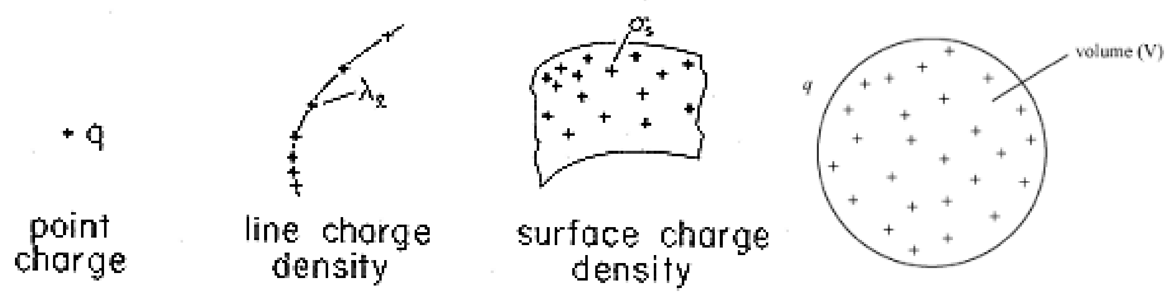
Ejercicio: calcular la carga total de todos los electrones contenidos en una moneda de cobre de 3 gramos
(datos: $Z_{Cu}= 29$, $A_{Cu}= 63{,}5$ g/mol, $N_A=6{,}023 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}, $e=1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C)

Solución abreviada:
nº moles $n=m/A=0{,}047$; nº átomos $N=n \cdot N_A=2{,}85 \cdot 10^{22}$; carga total $Q=N \cdot 29 \cdot (-e)=-1{,}32 \cdot 10^{5}$ C

Distribuciones continuas de carga

- Aunque la carga está cuantizada, en ocasiones a nivel macroscópico las cargas son tan numerosas y están tan juntas que pueden tratarse como una **distribución continua**.
- Por el contrario, cuando el número de cargas es bajo, estas se tratan individualmente como **cargas puntuales** (distribución discreta de carga)
- Las distribuciones continuas pueden ser de distinto tipo: lineales, superficiales o volumétricas





Distribuciones continuas de carga

- La distribuciones continuas a lo largo de una línea, se caracterizan por una densidad lineal de carga λ:

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \qquad \text{C/m}$$

- Distribuciones sobre una superficie, se caracterizan por una densidad superficial de carga σ:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \qquad \text{C/m}^2$$

- Distribuciones dentro de un volumen, se caracterizan por una densidad de carga volumétrica ρ:

$$\rho = \lim_{\Delta \tau \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \frac{dq}{d\tau} \qquad \text{C/m}^3$$

Distribuciones continuas de carga

- Nótese que estas densidades no tienen por qué ser constantes, sino que en general dependen de la posición.
- La integral sobre toda la región (línea, área o volumen) es igual a la carga total contenida en dicha región

$$Q = \int_L \lambda dl$$

$$Q = \int_S \sigma ds$$

$$Q = \int_V \rho d\tau$$

Ejercicio: El radio medio del núcleo de azufre (Z = 16) es aproximadamente 1,37 × 10^{-13} cm. Suponiendo que la carga eléctrica esté uniformemente distribuida en el núcleo, calcular la densidad de carga en C/m^3

Solución abreviada:

$$Q = \int_V \rho d\tau = \rho \int_V d\tau = \rho \cdot V \Rightarrow \rho = \frac{Q}{V}$$

$$\left.\begin{array}{l} Z = 16 \Rightarrow Q = 16e = 16 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} C = 2{,}56 \cdot 10^{-18}\ C \\ V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(1{,}37 \cdot 10^{-15} m)^3 = 1{,}08 \cdot 10^{-44} m^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho = \frac{Q}{V} = 2{,}4 \cdot 10^{26}\ \mathrm{C\ m^{-3}}$$

Ejercicio: La densidad de carga de una nube electrónica en el estado fundamental del átomo de hidrógeno viene dado por la función:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{-e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

siendo e la carga del electrón y a_0 el radio de la primera órbita de Bohr. Calcular la carga total.

Solución abreviada:

En este caso ρ depende de la posición y por tanto no se puede sacar de la integral. Además solo se anula cuando r tiende a infinito por lo que la integral se extiende a todo el espacio:

$$Q = \int_V \rho d\tau = \int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 dr = -\frac{4\pi e}{\pi a_0^3}\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} dr = -\frac{4e}{a_0^3}\int_0^\infty e^{-2r/a_0} dr$$

Aplicando dos integraciones por partes consecutivas se llega a:*

$$Q = -\frac{4e}{a_0^3}\frac{a_0^3}{4} = -e$$

*véase también p.ej. https://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+x%5E2*exp(-2*x%2Fa)
https://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+x%5E2*exp(-2*x%2Fa)+from+x%3D0+to+infinity

- Determinada experimentalmente por Coulomb a finales del siglo XVIII mediante una balanza de torsión

- La fuerza que ejerce una carga puntual q_1 sobre otra q_2:
  - Está dirigida según la línea que une las cargas
  - Su módulo es proporcional al valor de ambas cargas
  - Si ambas cargas son del mismo signo, es repulsiva
  - Si ambas cargas son de signos opuestos, es atractiva
  - Decrece con el cuadrado de la distancia entre ambas cargas
  - La fuerza $\overrightarrow{F_{12}}$ ejercida sobre la carga 2 por efecto de la carga 1 es de igual módulo pero de sentido contrario a la fuerza $\overrightarrow{F_{21}}$ ejercida sobre la carga 1 por efecto de la carga 2

Balanza de torsión y experimento de Coulomb: https://www.youtube.com/watch?v=FYSTGX-F1GM

Ley de Coulomb

- Matemáticamente se pueden condensar todos estos enunciados en la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{F_{12}} = K_e \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} \overrightarrow{u_{12}}$$

*Nótese que la notación empleada en este caso es:
$\overrightarrow{u_{12}}$=vector unitario que empieza en 1 y va dirigido hacia 2
$\overrightarrow{F_{12}}$=Fuerza ejercida por 1 sobre 2
La notación opuesta también es frecuente

Siendo K_e una constante cuyo valor en el Sistema Internacional de unidades es $K_e = 8{,}99 \cdot 10^9$ N·m^2 /C^2

Simulación interactiva

- Cuando existen más de dos cargas, se aplica el principio de superposición: la fuerza resultante es la suma de las fuerzas individuales ejercidas por cada carga:

$$\overrightarrow{F_j} = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \overrightarrow{F_{ij}} = K_e \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{q_i q_j}{d_{ij}^2} \overrightarrow{u_{ij}}$$

Ejercicio (cuestión de examen): Dos cargas puntuales positivas Q y 3Q se mantienen separadas por una distancia d, de forma que la fuerza sobre la carga Q tiene un valor F. Si separamos las cargas hasta una distancia 3d ¿Cuál será el módulo de la nueva fuerza sobre la carga 3Q?

Solución:

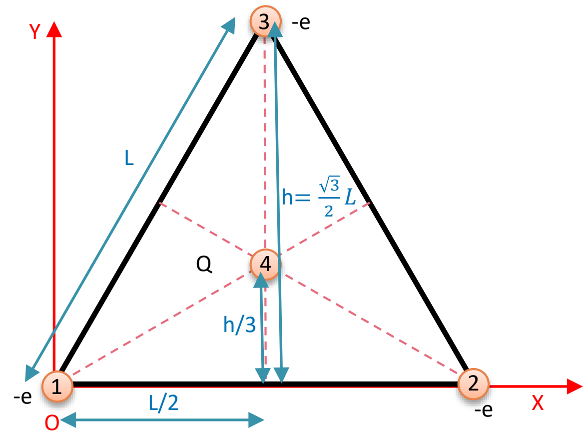
Es una aplicación directa de la ley de Coulomb. Teniendo en cuenta que la fuerza de la carga Q sobre la 3Q es de igual módulo pero de sentido contrario a la fuerza de 3Q sobre Q, la fuerza inicial sobre 3Q tendrá módulo:

$$F = K_e \frac{Q \cdot 3Q}{d^2} = K_e \frac{3Q^2}{d^2}$$

y al separar las cargas, esta pasará a ser:

$$F' = K_e \frac{Q \cdot 3Q}{(3d)^2} = K_e \frac{3Q^2}{9d^2} = \frac{F}{9}$$

Ejercicio: En los vértices de un triángulo equilátero de lado l se colocan cargas –e y en su centro se coloca cierta carga Q>0. Calcular el valor de Q para que la fuerza sobre cualquiera de las cargas de los vértices sea nula



Solución abreviada:

Por la simetría de la figura, basta exigir F_{tot}=0 para la carga en uno de los vértices (p.ej 2). Eligiendo por ejemplo los ejes XY de la figura, la fuerza sobre carga 2 sería

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} = \frac{Ke^2}{L^2}\vec{\imath} + \frac{Ke^2}{L^3}\left(\frac{L}{2}\vec{\imath} - h\vec{\jmath}\right) - \frac{KeQ}{\left(\frac{2}{3}h\right)^3}\left(\frac{L}{2}\vec{\imath} - \frac{h}{3}\vec{\jmath}\right)$$

Sustituyendo la altura en función de L, se llega a:

$$\vec{F}_2 = \frac{Ke^2}{L^2}\vec{\imath} + \frac{Ke^2}{2L^2}(\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath}) - \frac{3\sqrt{3}KeQ}{2L^2}\left(\vec{\imath} - \frac{\vec{\jmath}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{Ke}{L^2}\left[\left(e + \frac{e}{2} - \frac{3\sqrt{3}Q}{2}\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{\sqrt{3}e}{2} + \frac{3Q}{2}\right)\vec{\jmath}\right]$$

Igualando ambas componentes a 0 y operando se llega dos veces al mismo resultado:

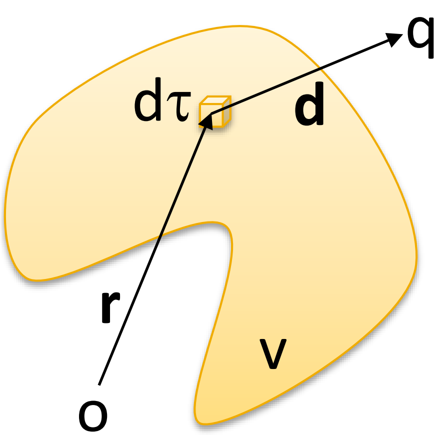
$Q = e/\sqrt{3}$

Nótese que esta solución es ficticia ya que e es la carga más pequeña posible en estado libre en la naturaleza

Ley de Coulomb – distribuciones continuas de carga

- El principio de superposición también nos permite escribir la ley de Coulomb para distribuciones continuas de carga. Por ejemplo, la fuerza ejercida sobre una carga q por un elemento de volumen dτ de una distribución volumétrica de carga $\rho(\vec{r})$ sería:

$$\mathrm{d}\vec{F} = K_e \frac{q\,dq}{d^2}\overrightarrow{u_d} = K_e \frac{q\rho\, d\tau}{d^2}\overrightarrow{u_d}$$



Siendo $\vec{d}$ el vector que une el elemento de volumen y el punto donde calculamos el campo. Integrando a todo el volumen cargado queda:

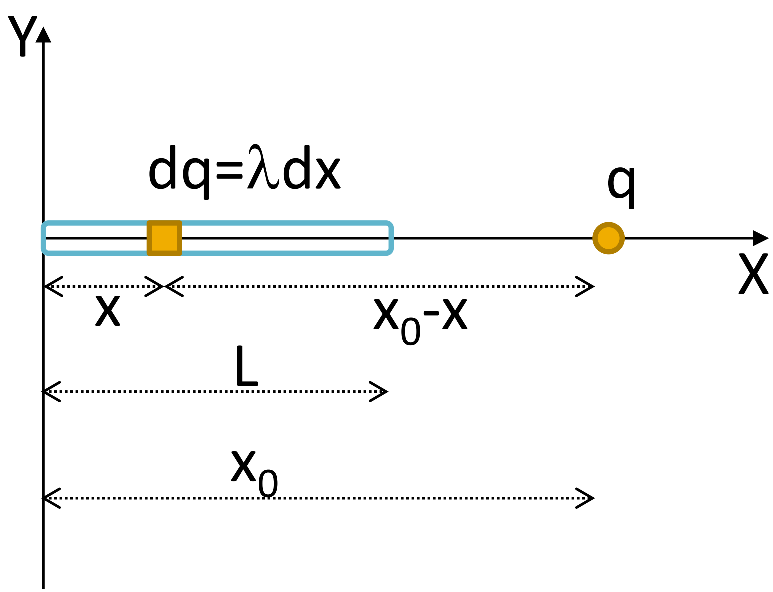
$$\vec{F} = K_e q \int_V \frac{\rho \overrightarrow{u_d}}{d^2} d\tau$$

Ley de Coulomb – distribuciones continuas de carga

- Para distribuciones superficiales o lineales se procede del mismo modo pero usando σ o λ e integrando sobre la superficie o línea, según corresponda.

Ejercicio: Sea una segmento colocado sobre el eje X entre x=0 y x=L con densidad lineal de carga uniforme (constante) λ C/m. Calcular la fuerza sobre una carga q colocada sobre el eje X a cierta distancia x_0

Solución abreviada:



$$\vec{F} = K_e q \int_0^L \frac{\lambda \overrightarrow{u_x}}{(x_0 - x)^2} dx = $$

$$= K_e q \lambda \overrightarrow{u_x} \int_0^L \frac{dx}{(x_0 - x)^2} = $$

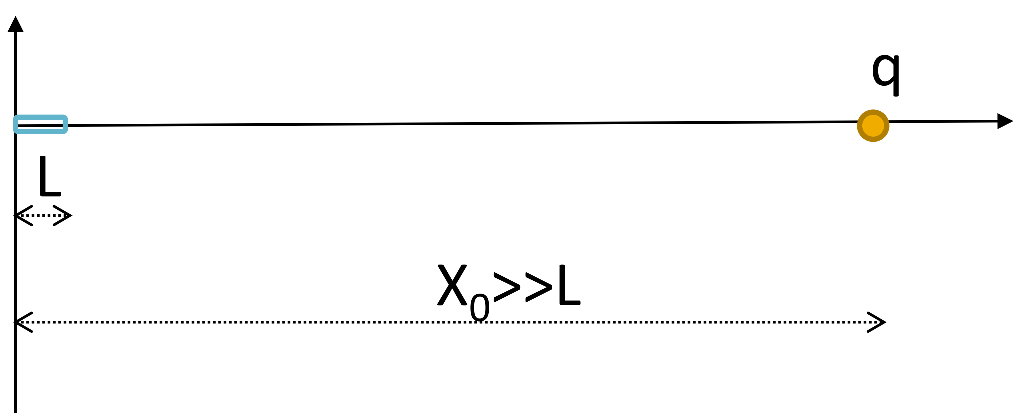
$$= \frac{K_e q \lambda L}{x_0 (x_0 - L)} \overrightarrow{u_x}$$

Ley de Coulomb – distribuciones continuas de carga

Nótese que Q=λL es la carga total del segmento, por tanto:

$$\vec{F} = \frac{K_e q Q}{x_0(x_0 - L)} \overrightarrow{u_x}$$

Si la carga estuviera muy lejos del origen comparado con la longitud del segmento (x_0>>L) entonces podemos aproximar el denominador por x_0^2, es decir, el efecto del segmento sería como el de una carga puntual Q en el origen



$$\vec{F} \approx \frac{K_e q Q}{{x_0}^2} \overrightarrow{u_x}$$

Campo eléctrico

- El concepto de campo vectorial se introduce para representar la acción a distancia que puede ejercer un cuerpo sobre otro (p.ej. atracción gravitatoria, repulsión eléctrica). La fuerza sería el efecto visible, pero el campo estaría presente en el espacio incluso si no ponemos un cuerpo de prueba.
- Sea una carga positiva de prueba muy pequeña $q \to 0$, Podemos definir el campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto del espacio como:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \left(\frac{\vec{F}}{q} \right) \quad q>0$$

Siendo $\vec{F}$ la fuerza electrostática ejercida sobre q

- El campo eléctrico tiene dimensiones de fuerza por unidad de carga. En el S.I. se expresa en N/C o V/m
- Es un vector que va dirigido en la misma dirección que la fuerza que sería ejercida sobre una carga **positiva**
- De la ley de Coulomb, deducimos que el campo creado por una carga Q situada en el origen será:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \left(K_e \frac{Qq}{qr^2} \overrightarrow{u_r} \right) = K_e \frac{Q}{r^2} \overrightarrow{u_r}$$

- De forma más genérica, el campo eléctrico creado por una carga Q situada en el punto 1 evaluado en un punto 2 valdría:

$$\vec{E} = K_e \frac{Q}{d^2} \overrightarrow{u_d} = K_e Q \frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{|\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}|^3}$$

- Para distribuciones discretas, aplicamos el principio de superposición como vimos antes con la ley de Coulomb:

Simulación interactiva

$$\vec{E}(\vec{r}) = K_e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_i}{d_i^2} \overrightarrow{u_{d_i}} \qquad \text{siendo } \overrightarrow{d_i} = \vec{r} - \overrightarrow{r_i}$$

- Análogamente, para distribuciones continuas de carga:

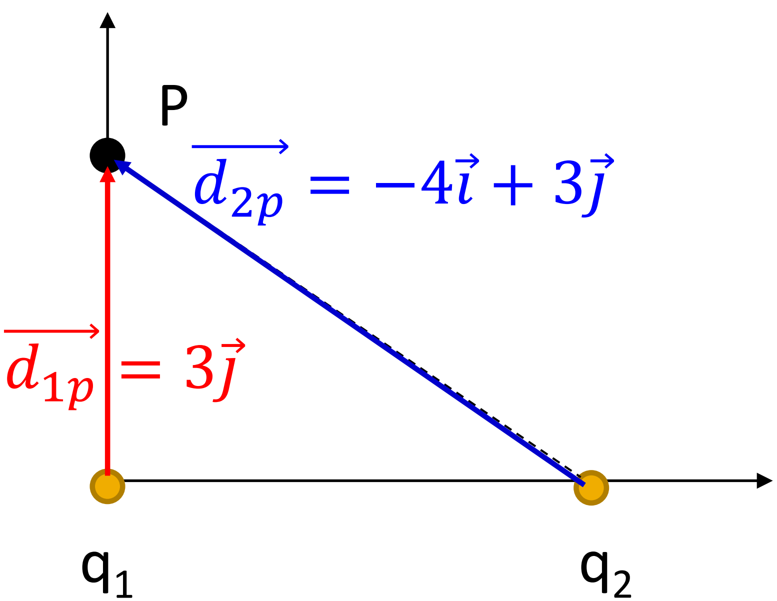
$$\vec{E} = K_e \int_L \frac{\lambda \overrightarrow{u_d}}{d^2} dl \qquad \text{(línea)}$$

$$\vec{E} = K_e \int_S \frac{\sigma \overrightarrow{u_d}}{d^2} ds \qquad \text{(superficie)}$$

$$\vec{E} = K_e \int_V \frac{\rho \overrightarrow{u_d}}{d^2} d\tau \qquad \text{(volumen)}$$

Ejercicio: Calcular el campo en el punto P=(0,3) de la figura, creado por dos cargas q_1 = 8 nC y q_2 = 12 nC situadas en los puntos (0,0) y (4,0). Asumir que las distancias están expresadas en metros.

Solución abreviada:



$$\vec{E} = \overrightarrow{E_{1p}} + \overrightarrow{E_{2p}} = \frac{K_e q_1}{d_{1p}^2}\overrightarrow{u_{1p}} + \frac{K_e q_2}{d_{2p}^2}\overrightarrow{u_{2p}} =$$

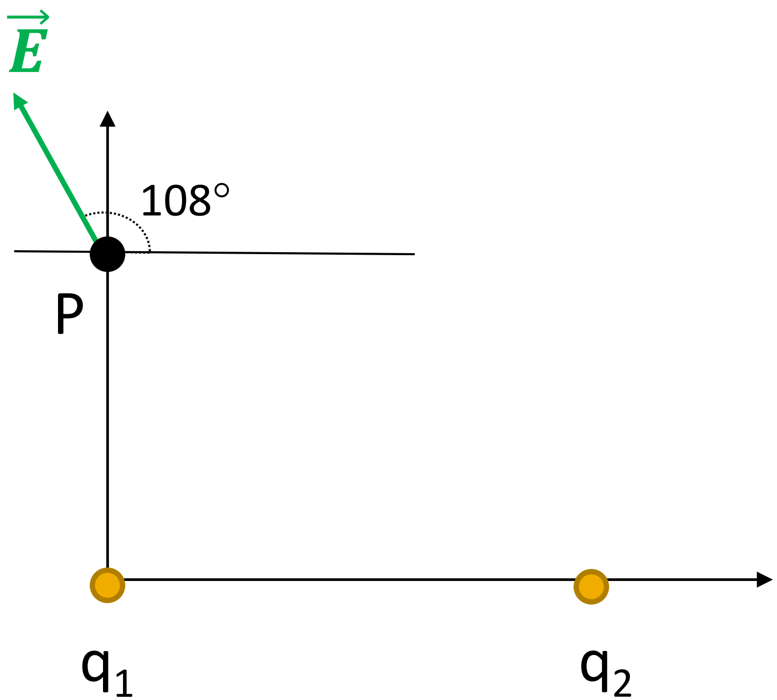
$$= \frac{K_e q_1}{d_{1p}^3}\overrightarrow{d_{1p}} + \frac{K_e q_2}{d_{2p}^3}\overrightarrow{d_{2p}} =$$

$$= \frac{9\cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-9}}{3^3} 3\vec{\jmath} +$$

$$+ \frac{9\cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-9}}{(4^2+3^2)^{3/2}}(-4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}) \quad \text{N/C} =$$

$$= -3.5\vec{\imath} + 10.6\vec{\jmath} \;\; \text{N/C}$$

Ejercicio: Calcular el campo en el punto P=(0,3) de la figura, creado por dos cargas q_1 = 8 nC y q_2 = 12 nC situadas en los puntos (0,0) y (4,0). Asumir que las distancias están expresadas en metros.



$$\boxed{\vec{E} = -3,5\vec{\imath} + 10.6\vec{\jmath}\ \text{N/C}}$$

O equivalentemente:

$$\begin{cases} E_x = -3{,}5\ \text{N/C} \\ E_y = +10{,}6\ \text{N/C} \\ |\vec{E}| = \sqrt{3{,}5^2 + 10{,}6^2} = 11{,}2\ \text{N/C} \end{cases}$$

El ángulo del vector campo con la horizontal sería:

$$\alpha = \arctan\frac{E_y}{E_x} = 108°$$

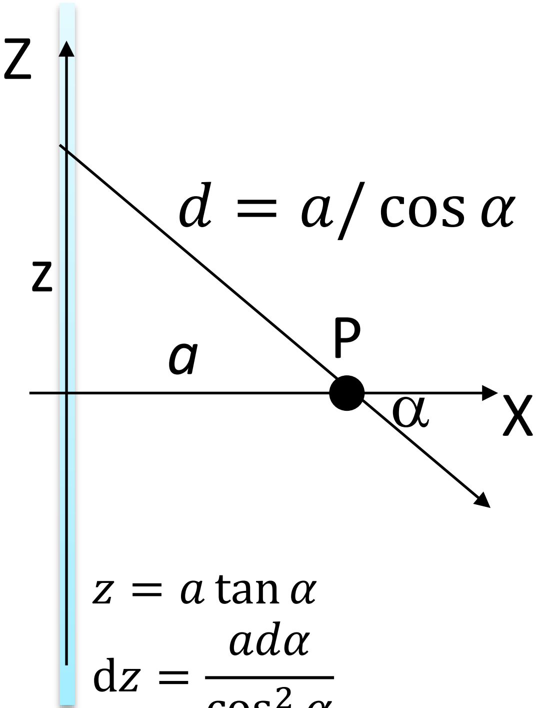
Ejercicio: Calcular el campo creado por una línea recta infinita uniformemente cargada con una densidad de carga λ, en un punto situado a cierta distancia *a* de la línea.

<u>Solución abreviada:</u>

Eligiendo el eje Z paralelo a la línea y el punto P sobre el eje X

La componente Z del campo es nula por la simetría del problema.

Basta con integrar la componente X:



$$d = a/\cos\alpha$$

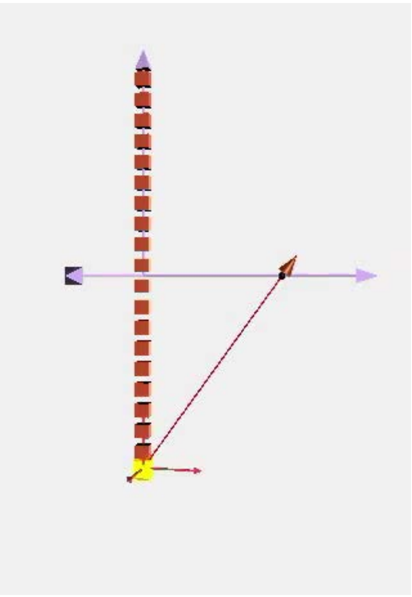
$$z = a\tan\alpha$$

$$\mathrm{d}z = \frac{a\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha \frac{K_e \lambda dz}{d^2} =$$

$$= \frac{K_e\lambda}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2K_e\lambda}{a}\overrightarrow{u_x}}$$



http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/electrostatics/LineIntegration/LineIntegration.htm

Flujo

- Definición: el **flujo** de un campo vectorial $\vec{v}$ a través de una superficie S es un escalar ϕ que viene dado por:

$$\phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Siendo $d\vec{s}$ el elemento diferencial de superficie:

$$d\vec{s}=\overrightarrow{u_s}ds$$

$\overrightarrow{u_s}$= vector unitario normal a la superficie en cada punto. Si llamamos α al ángulo entre $\overrightarrow{u_s}$ y $\vec{v}$:

$$\phi = \int_S v \cos\alpha \, ds$$

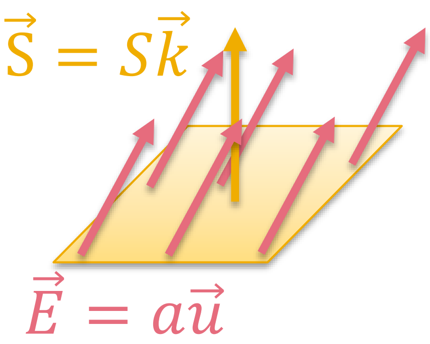
- En un diagrama de líneas de campo, se puede visualizar el significado del flujo a través de una superficie como el número de líneas de campo que la atraviesan (analogía con un fluido)

Flujo

- <u>Ejemplo:</u> sea un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = a\vec{\mathrm{k}}$. Su flujo a través de una superficie cuadrada de área S en el plano XY sería:

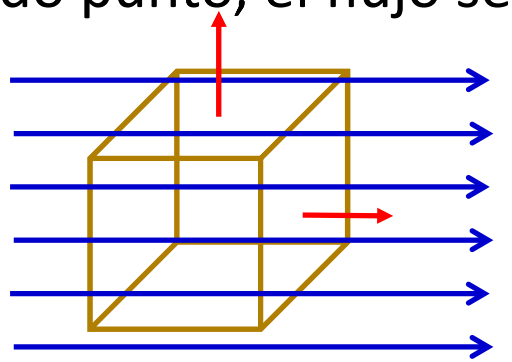
$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S a\vec{\mathrm{k}} \cdot \vec{\mathrm{k}} ds = a \int_S ds = aS \quad \mathrm{Nm^2/C}$$

- <u>Ejemplo:</u> sea un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = a\vec{u}$ que forma en todo punto un ángulo α con la normal a una superficie rectangular de área S. El flujo será:



$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = aS\cos\alpha \quad \mathrm{Nm^2/C}$$

Nótese que la orientación es importante: si el campo es paralelo a la superficie (vector campo y vector superficie ortogonales) en todo punto, el flujo será nulo (las líneas no cruzan la superficie)



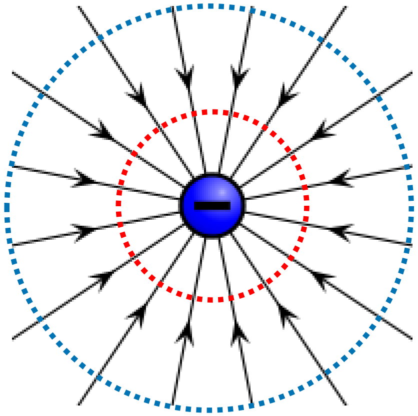
- Consideremos una **superficie cerrada**. Si no encierra fuentes ni sumideros del campo en su interior, entrarán tantas líneas como salen, y el flujo será nulo:

$$\phi = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$

Flujo

Algunas notas finales sobre el flujo y las líneas de campo:

- El vector normal a superficies cerradas se elige siempre apuntando hacia el exterior de la superficie
- Si el flujo a través de una superficie cerrada es positivo, significa que hay más líneas salientes que entrantes atravesando dicha superficie
- Las líneas de campo no se cruzan. Comienzan y acaban en cargas (o en el infinito). Las cargas negativas crean líneas entrantes y las positivas líneas salientes.
- Recordar que las zonas con campo más intenso son aquellas donde las líneas de campo están más juntas y las de campo menos intenso aquellas donde están más separadas (la densidad de líneas representa la intensidad del campo)



El flujo entrante que atraviesa la esfera roja es idéntico al que atraviesa la esfera azul

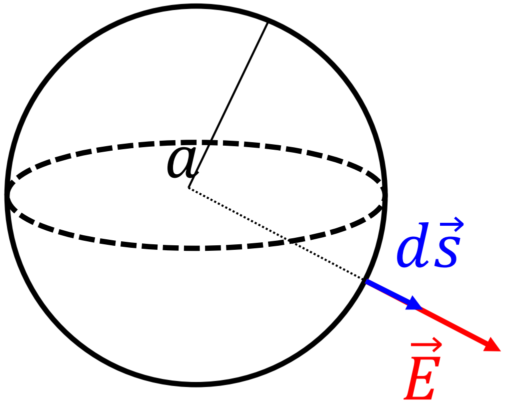
- Consideremos una superficie esférica *S* de radio *a* centrada en una carga *q* y calculemos el flujo del vector campo eléctrico a través de dicha esfera aplicando la ley de Coulomb:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S K_e \frac{q}{a^2} \overrightarrow{u_r} \cdot d\vec{s} = K_e \frac{q}{a^2} \oint_S \overrightarrow{u_r} \cdot d\vec{s}$$

El vector normal a la superficie también es radial con lo cual:

$$\phi = K_e \frac{q}{a^2} \oint_S ds = K_e \frac{q}{a^2} S =$$

$$= K_e \cdot 4\pi a^2 \frac{q}{a^2} = 4\pi K_e q$$



Definiendo ε_0 tal que $K_e = 1/(4\pi\varepsilon_0)$:

$$\boxed{\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Este resultado es generalizable a cualquier otra superficie

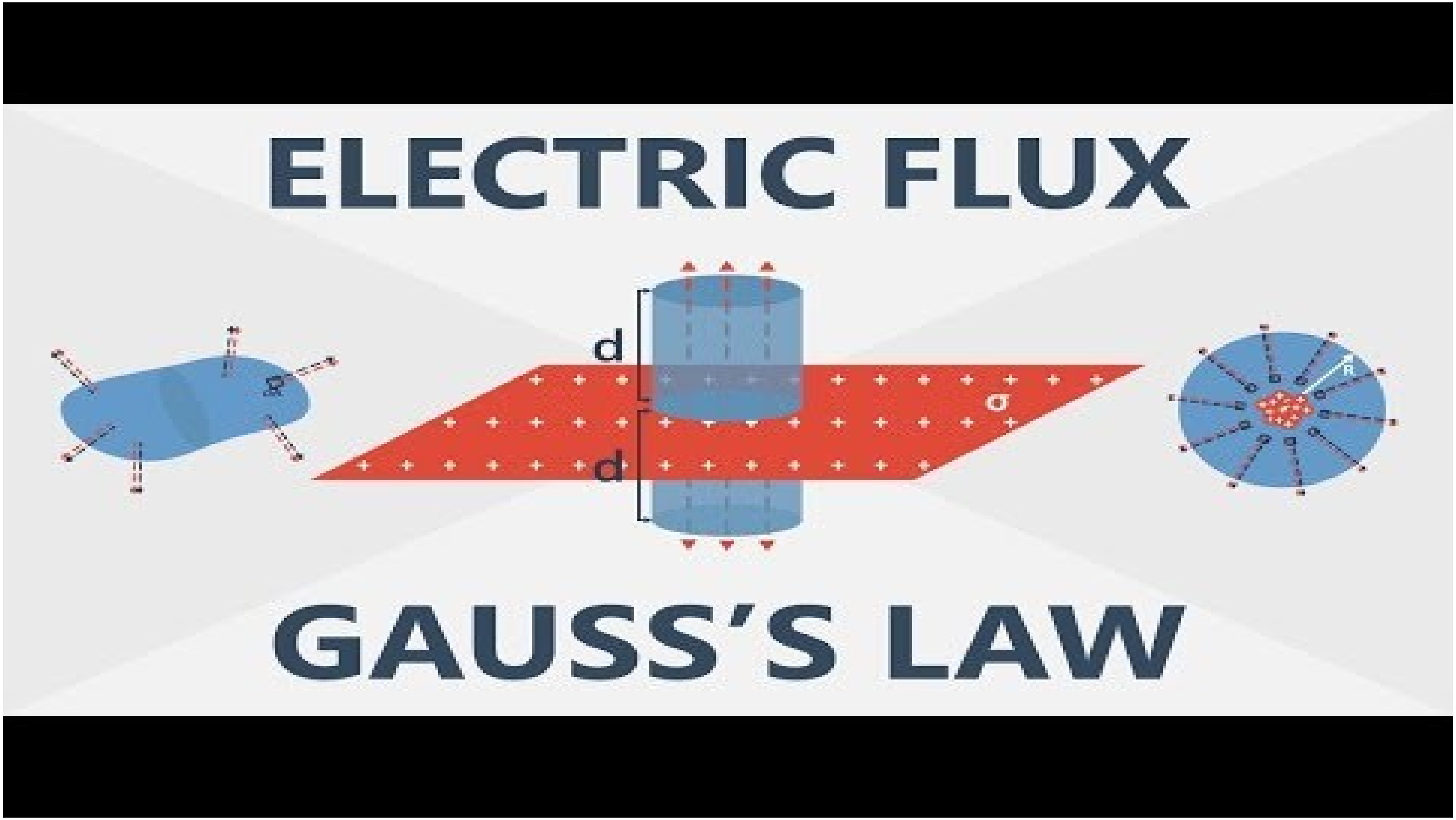
Ley de Gauss

- ε_0 se denomina permitividad (o constante dieléctrica) del vacío. Su valor es:
  ε_0=8,85·10^{-12} F m^{-1} (F = C^2 N^{-1} m^{-1})
- La ley de Gauss, es una de las bases del electromagnetismo y nos dice que el resultado anterior se puede generalizar a cualquier superficie cerrada S y número de cargas:

$$\boxed{\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

- El flujo del vector campo eléctrico a través de una superficie cerrada cualquiera es igual a la carga neta Q encerrada por dicha superficie, dividida por ε_0. Si por ejemplo hay n cargas puntuales encerradas, el valor de Q sería $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$.

Ley de Gauss



Enlace al vídeo:

https://www.youtube.com/watch?v=yOv4xxopQFQ

Notación en el vídeo: $E_0 \rightarrow \varepsilon_0$

Ley de Gauss

Ejercicio: Sea una esfera de radio 3 centrada en el origen y 3 cargas de -1 C situadas en (0,0,1), (0,1,0) y (4,4,4). Calcular el flujo del vector campo eléctrico a través de la esfera usando el teorema de Gauss. Asumir que las distancias están expresadas en metros

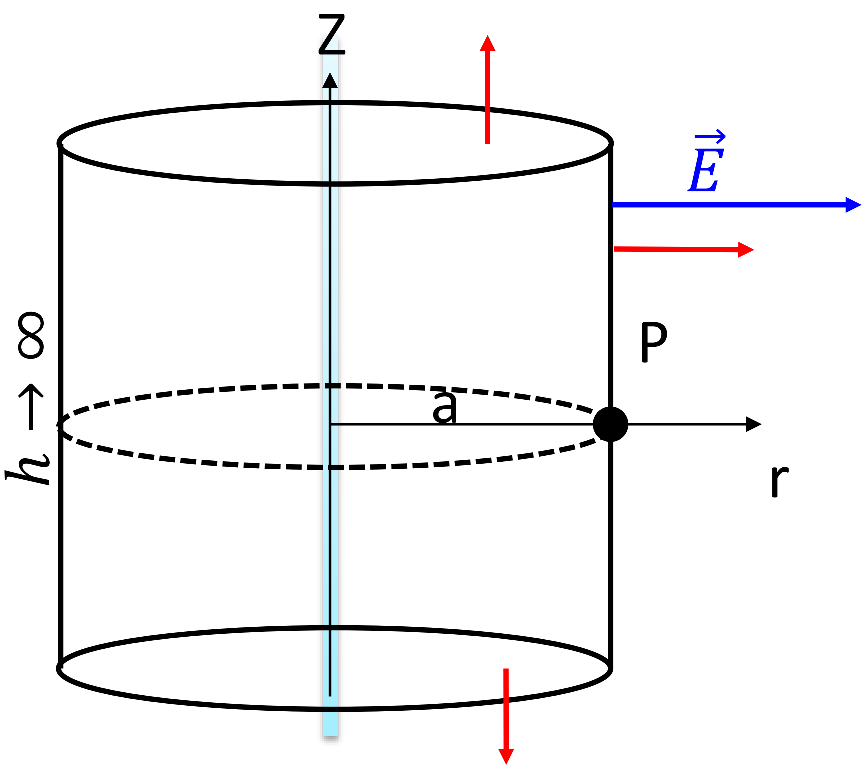
Solución:

$$\phi = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} = \frac{-2\ \mathrm{C}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C}^2\ \mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^{-2}} = -2{,}26 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N\ m}^2/\mathrm{C}$$

El signo menos indica flujo neto entrante en la esfera. Nótese que la tercera carga “no cuenta” porque produce tantas líneas entrantes como salientes al estar fuera de la esfera.

- La ley de Gauss es de gran utilidad práctica ya que permite calcular el campo eléctrico de forma sencilla para distribuciones de carga que tengan cierto grado de simetría (que permita resolver fácilmente la integral)

Ejercicio: Resolver el ejercicio de la transparencia 28 (hilo cargado infinito) usando la ley de Gauss



Solución:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Por simetría, $\vec{E}$ es constante sobre toda la superficie cilíndrica lateral y además es perpendicular a ella. El flujo a través de las dos bases del cilindro es nulo :

$$\phi = E \cdot 2\pi a \cdot h = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0}$$

$h \rightarrow \infty$ pero se va a ambos lados de la igualdad:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi a \varepsilon_0} = \frac{2K_e\lambda}{a} \Rightarrow \vec{E} = \frac{2K_e\lambda}{a}\overrightarrow{u_r}$$

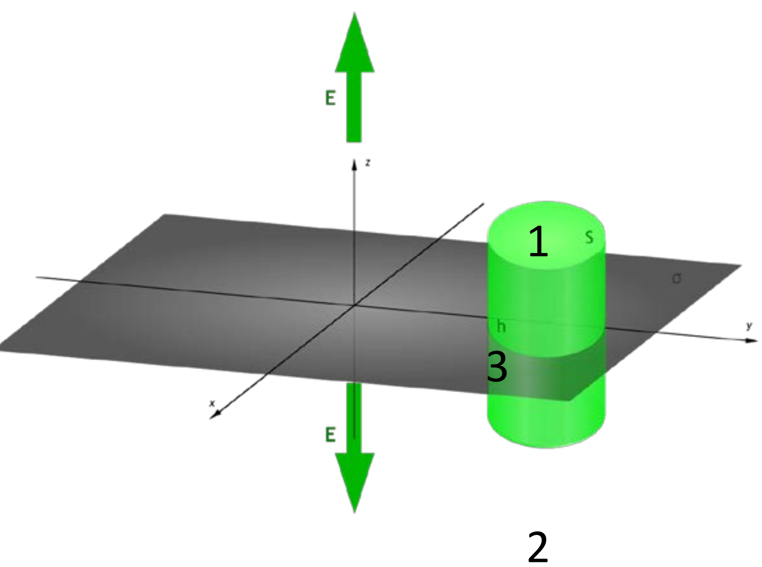
Idéntico al resultado calculado anteriormente

Ley de Gauss – Aplicación práctica

Ejercicio: Hallar el campo eléctrico creado en todo el espacio por un plano infinito XY, cargado uniformemente con densidad superficial de carga σ

Solución:

Por simetría, $\vec{E}$ no puede tener componente paralela al plano y estará dirigido hacia +Z sobre el plano y hacia –Z bajo el plano. Tomamos una superficie de Gauss cilíndrica como la de la figura y aplicamos la ley de Gauss:



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}$ será paralelo a la superficie lateral (3), que por tanto no contribuye al flujo, y perpendicular a las dos bases (1 y 2), y constante sobre ellas:

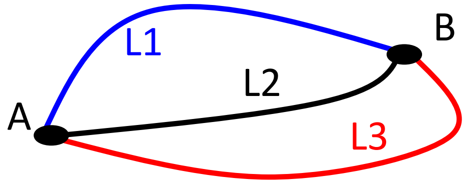
$$\phi = E_1\vec{k} \cdot S\vec{k} + E_2(-\vec{k}) \cdot S(-\vec{k}) = 2ES$$

La carga encerrada será σS, de modo que:

$$\vec{E} = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & para\ z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & para\ z < 0 \end{cases}$$

Nótese que E es discontinuo (salto σ/ε_0)

- Como vimos en el tema 0, si un campo $\vec{E}$ es conservativo, la circulación del vector entre dos puntos A y B es independiente del camino seguido y podemos definir un potencial *V* tal que:



$$\int_{L1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L3} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \cdots = -(V_B - V_A)$$

Nótese el criterio de Signos utilizado!

- Si el trayecto considerado es cerrado, la circulación es nula, ya que el punto de salida y llegada coinciden:

$$\oint_{L} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Definiremos pues, la **diferencia de potencial** eléctrico entre dos puntos A y B como:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Sea una **carga puntual *q*** *en el origen*. La diferencia de potencial entre dos puntos arbitrarios A y B solo depende de q y sus distancias respectivas a la carga, r_A y r_B :

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

*Demostración de que E es conservativo y del valor de ΔV: dividir un trayecto arbitrario AB en tramos radiales y concéntricos y notar que solo los tramos radiales contribuyen a la integral

Potencial eléctrico

- Las **unidades de *V*** en el S.I. son los Voltios:
  $1V = 1\ J/C = 1\ N{\cdot}m/C$
- Para que exista campo eléctrico, el potencial debe variar en el espacio. Si V es uniforme en una región, el campo eléctrico será nulo en dicha región
- Líneas (2D) o superficies (3D) equipotenciales: son aquellas que unen puntos a un mismo potencial
- El campo eléctrico es perpendicular a dichas superficies equipotenciales y va dirigido en el sentido de V decreciente (analogía gravedad-campo eléctrico atractivo)
- El potencial es una función continua en puntos del espacio no ocupados por cargas. Por el contrario, el campo eléctrico puede presentar discontinuidades

Potencial eléctrico

- El potencial guarda estrecha relación con el concepto de energía potencial (energía por u. de carga $V=U/q$), que veremos en detalle en el tema de energía electrostática
- Al desplazar una carga por una superficie equipotencial no se realiza trabajo ya que el desplazamiento es perpendicular al campo y por tanto a la fuerza de Coulomb (U no cambia)
- La definición dada para V se refiere a diferencias de potencial entre dos puntos. Podemos definir el potencial en un punto eligiendo un potencial de referencia (punto tal que $V=0$)

- El campo eléctrico deriva de un potencial, quedando completamente descrito por el. Al ser un escalar, el tratamiento usando V suele ser mas simple que con $\vec{E}$. En términos matemáticos se puede escribir como*:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad\,V} = \vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

*Fuera de temario, nosotros solo usaremos la forma integral descrita anteriormente

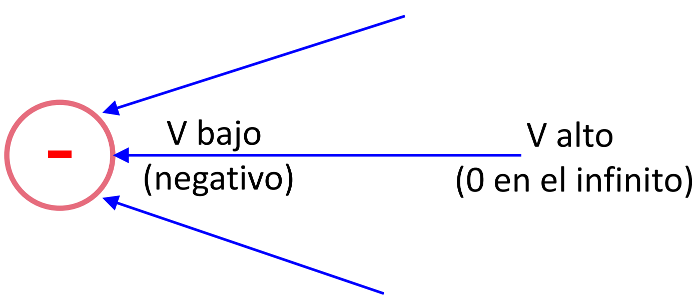
Potencial eléctrico – caso de una carga puntual

- Cuando no existe carga en el infinito, puede tomarse este como origen de potencial ($V \rightarrow 0 \; si \; r \rightarrow \infty$), de modo que el potencial creado por una carga q situada en el origen de coordenadas se puede definir como:

$$V_r - V_\infty = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - 0\right) \Rightarrow V_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + V_\infty = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

De forma más genérica (carga en un punto cualquiera $\overrightarrow{r_q}$):

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \overrightarrow{r_q}|}}$$



- Líneas de campo radiales hacia la carga negativa
- Líneas equipotenciales concéntricas
- Una carga positiva se movería siguiendo la dirección de potencial decreciente
- Una carga negativa haría lo contrario
- En ambos casos ganaría energía cinética a costa de la energía potencial electrostática

Potencial eléctrico – distribuciones de carga

- La expresión anterior es válida para una carga puntual
- Para distribuciones discretas de carga utilizaremos el principio de superposición como hicimos antes con el campo:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r_i}|}$$

Simulación interactiva

- Análogamente, para distribuciones continuas de carga:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho d\tau}{|\vec{r}-\vec{r_i}|}$$

Ejercicio: Una carga puntual q_1 está situada en el origen de coordenadas y otra q_2 se encuentra sobre el eje X en $x = a > 0$. Hallar el potencial en cualquier punto del eje X

Solución:

Aplicando el principio de superposición:

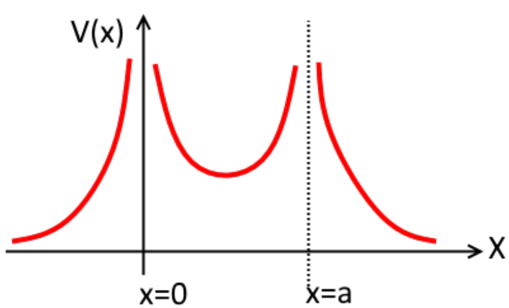
$$V(\mathrm{x}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0|x - x_1|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0|x - x_2|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{|x|} + \frac{q_2}{|x - a|}\right)$$

Existen tres casos que deben tratarse por separado:

1) A la izda de q_1: $(x < 0) \Rightarrow V(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{a-x}\right)$

2) Entre ambas: $(0 < x < a) \Rightarrow V(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{a-x}\right)$

3) A la dcha de q_2: $(x > a) \Rightarrow V(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x-a}\right)$



Gráfica para $q_1, q_2 > 0$

Ejercicio: Sea una esfera de radio R con carga total Q, repartida uniformemente. Hallar el campo eléctrico y el potencial en todo el espacio.

Solución:

Ver también http://surendranath.org/GPA/Electricity/EVGraphs/EVGraphs.html

La densidad de carga será $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

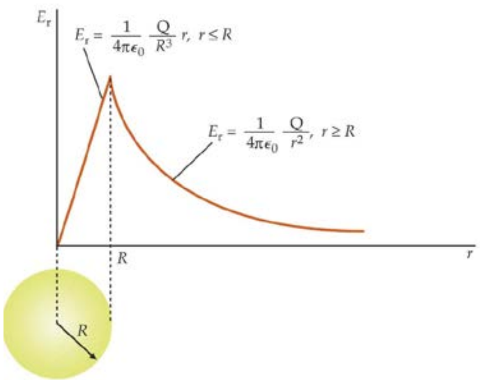
Hallamos el campo usando la ley de Gauss, diferenciando int. y ext. de la esfera:

$r < R$

$$\vec{E} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{\mathrm{u_r}} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\overrightarrow{\mathrm{u_r}}$$ (crece linealmente con r)

$r > R$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{\mathrm{u_r}}$$ (decrece como r^{-2}, idéntico al creado por carga Q en centro esfera)



Aplicando ahora la definición de potencial, con origen en el infinito:

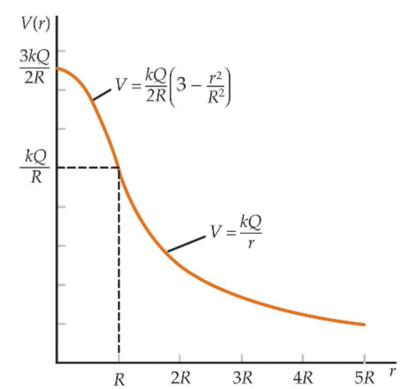
$r < R$

$$\mathrm{V}(\infty) - V(r) = -\int_r^R \frac{Qrdr}{4\pi\epsilon_0 R^3} - \int_R^\infty \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{2R^3} - \frac{r^2}{2R^3} - \frac{1}{\infty} + \frac{1}{R}\right) =$$

$$= \frac{-Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

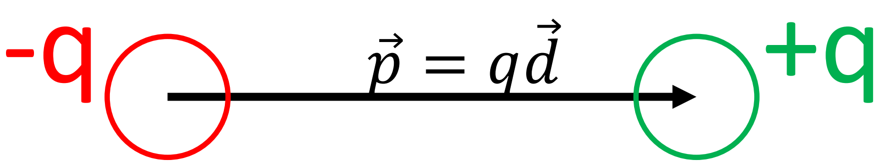
$r > R$

$$\mathrm{V}(\infty) - V(r) = -\int_r^\infty \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{r}\right) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



Dipolo eléctrico

- Un dipolo eléctrico es un sistema formado por dos cargas eléctricas iguales, de signo opuesto y muy próximas entre sí
- Es un caso importante a nivel molecular debido a la existencia de moléculas polares. Por eso se estudia su respuesta a campos externos.
- Se define el **momento dipolar** como un vector $\vec{p}$ cuyo módulo es igual al producto de la distancia que separa a las cargas y el valor absoluto de la carga, y cuyo sentido va de la carga negativa hacia la positiva:



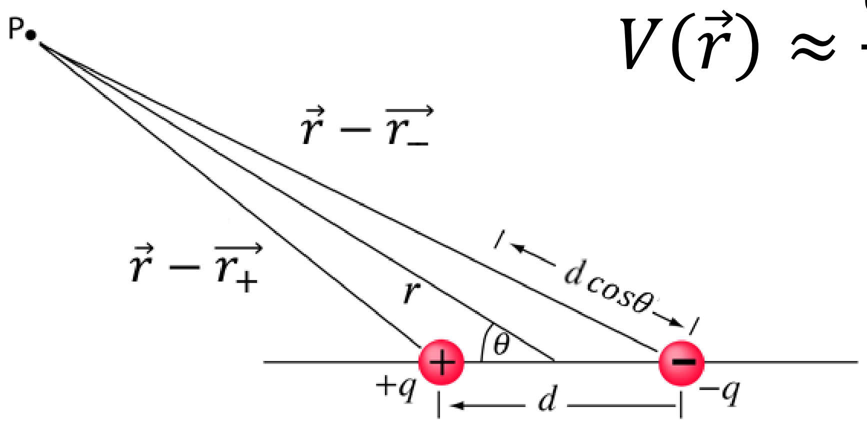
Potencial creado por un dipolo

- El potencial creado por un dipolo vale:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\overrightarrow{r_+}|} - \frac{1}{|\vec{r}-\overrightarrow{r_-}|}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\vec{r}-\overrightarrow{r_-}| - |\vec{r}-\overrightarrow{r_+}|}{|\vec{r}-\overrightarrow{r_+}|\cdot|\vec{r}-\overrightarrow{r_-}|}$$

Tomando el origen en el centro del dipolo, *r* es la distancia de éste hasta el punto donde queremos calcular V

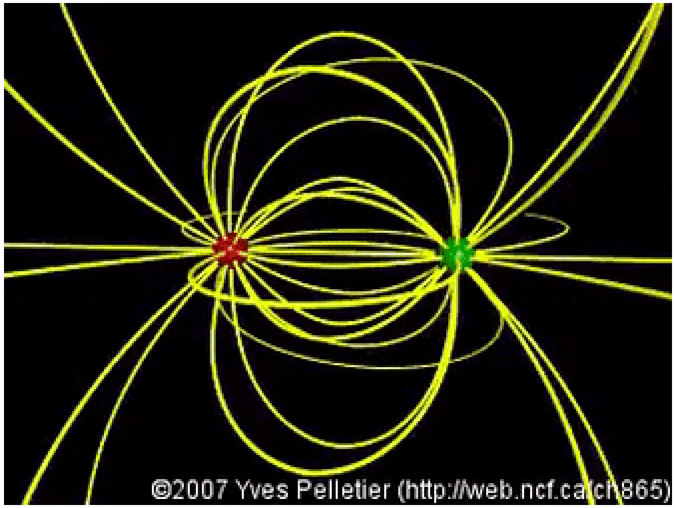
Si *r>>d*, se puede aproximar el denominador de la segunda fracción por r^2 y el numerador por $d\ cos\theta$ (ver figura):

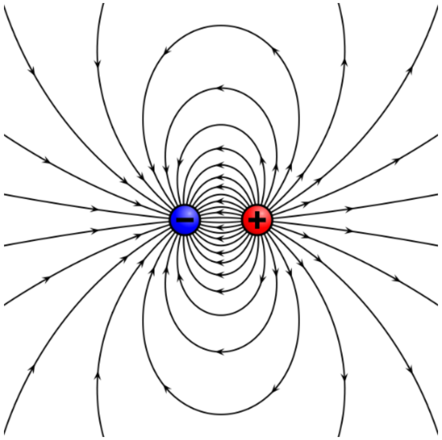


$$V(\vec{r}) \approx \frac{qd\ cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\ cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Campo eléctrico creado por un dipolo

- El campo eléctrico creado por el dipolo es la suma de los campos creado por cada carga individual





- y se puede aproximar por:

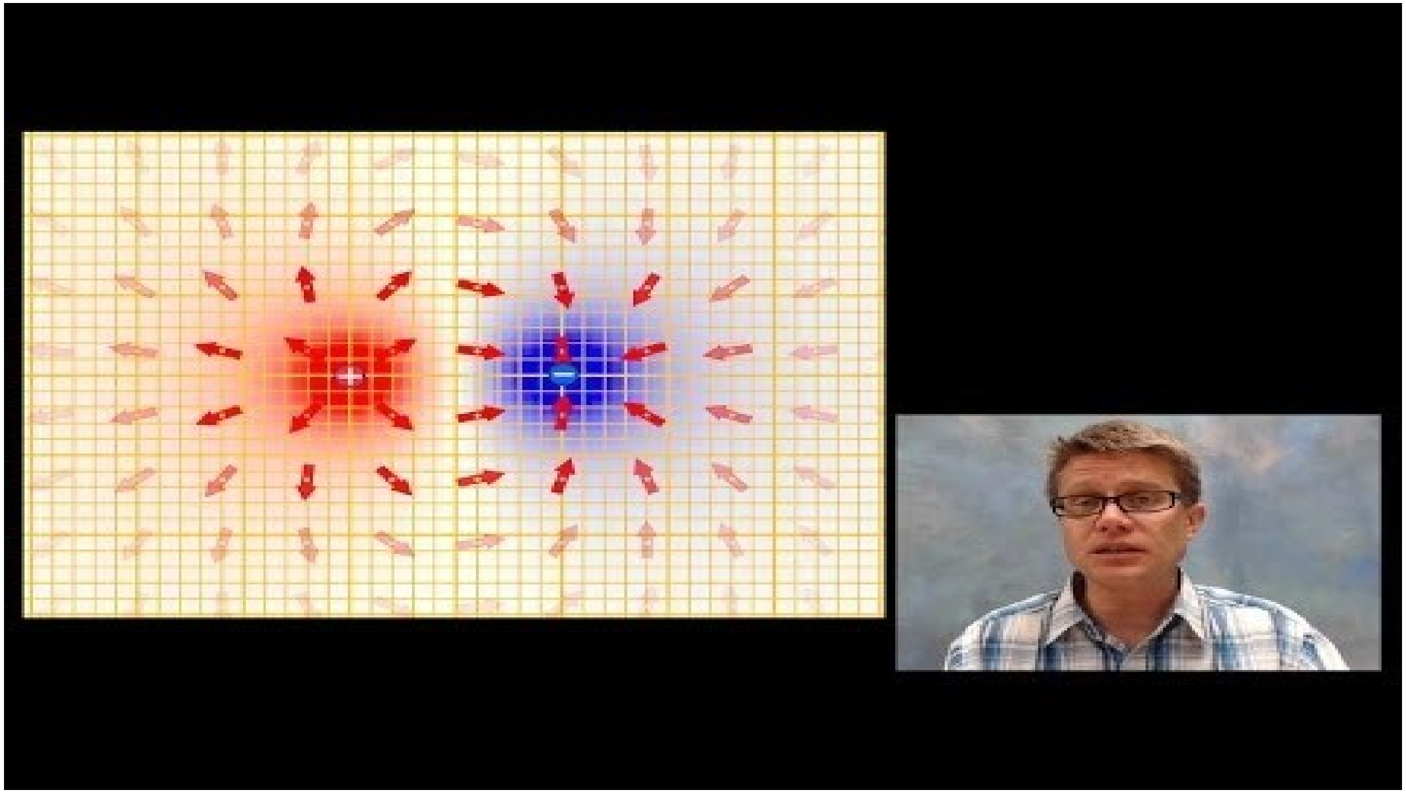
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})}{|\vec{r}|^2}\vec{r} - \vec{p}\right)$$

- Nótese el decrecimiento rápido (término r^{-3}) y la simetría alrededor de la línea que une ambas cargas

Campo eléctrico creado por un dipolo

- Simulaciones y material multimedia online:

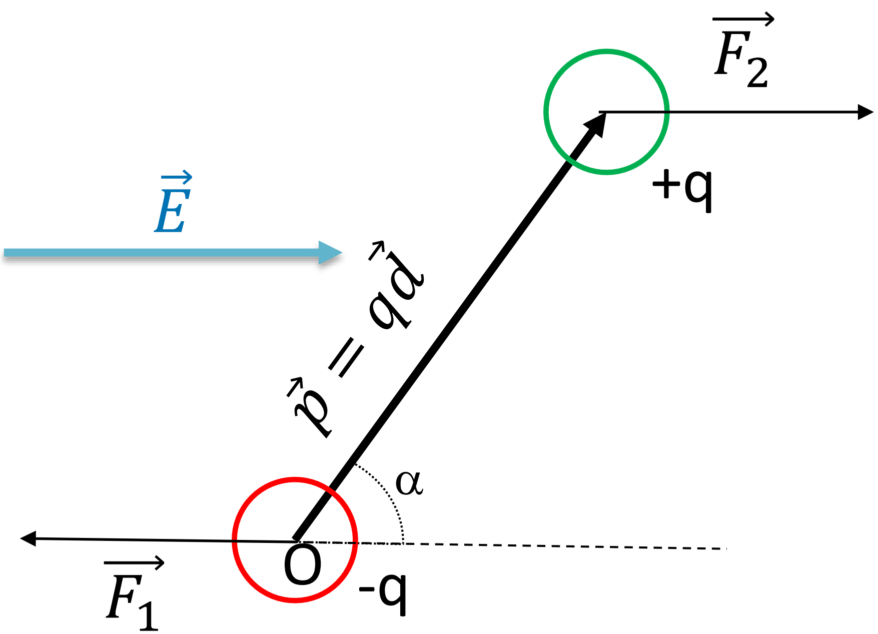
http://surendranath.org/GPA/Electricity/ElectricField/FieldLines.html (Enlace local)



Enlace al vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=RZxyjv8YF3k

Respuesta de un dipolo a un campo eléctrico

- Un dipolo expuesto a un campo tiende a rotar hasta orientarse paralelamente a él
- El momento del par de fuerzas que aparece vale:



$$\vec{\tau} = q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

La fuerza neta sobre el CM será nula si el campo es uniforme por tanto no habría desplazamiento. En campos no uniformes sí puede haber fuerza neta. Ejemplo: molécula polarizada sometida al campo de una carga puntual

- El vector $\vec{p}$ es de gran importancia para la formulación de la electrostática en medios materiales

Respuesta de un dipolo a un campo eléctrico

Ejercicio: Un dipolo eléctrico forma un ángulo de 30 grados con un campo eléctrico uniforme de $2{\cdot}10^5$ N/C, experimentando un momento de 4 N·m. Hallar el valor de las cargas que constituyen el dipolo sabiendo que su longitud es de 2 cm.

<u>Solución:</u>

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

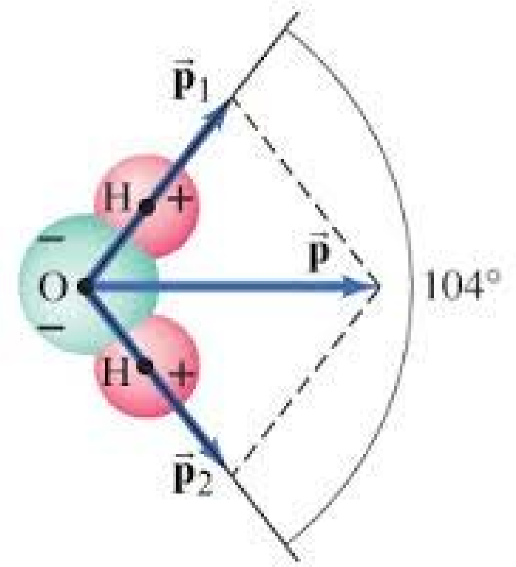
$$\tau = pE\ sen\ \alpha = qdE\ sen\ \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{\tau}{dE\ sen\ \alpha} = \frac{4\ \mathrm{Nm}}{2{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{m}\ 2{\cdot}10^{5}\mathrm{NC}^{-1}{\cdot}0{,}5} = 0{,}002\ \mathrm{C} = 2\ \mathrm{mC}$$

Este momento hará girar al dipolo para alinearse con el campo

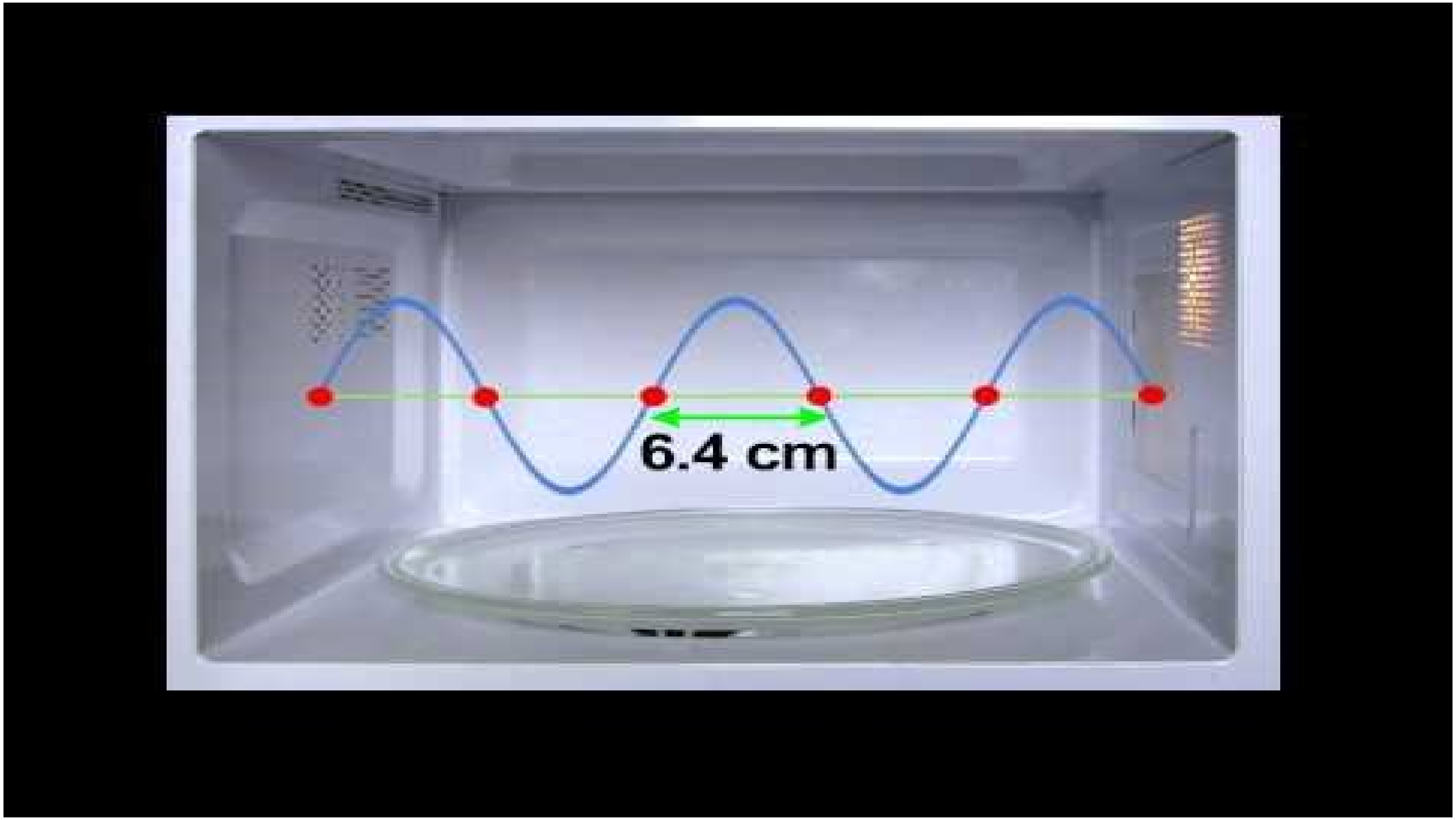
Respuesta de un dipolo a un campo eléctrico

- En el tema 3 veremos que existen dipolos moleculares inducidos y permanentes, y su importancia para el estudio de la electrostática en el interior de medios dieléctricos
- El agua es un claro ejemplo de molécula con momento dipolar permanente y por tanto se reorientará si se sumerge en un campo electrostático



Respuesta de un dipolo a un campo eléctrico

- Dipolos moleculares y calentamiento por microondas



Enlace al vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=kp33ZprO0Ck

ver también simulación interactiva Phet:

https://phet.colorado.edu/es/simulation/microwaves

Apéndice - Teorema de Earnshaw (1842)

- "Un conjunto de cargas puntuales no se puede mantener en un estado de equilibrio mecánico estacionario exclusivamente mediante la interacción electrostática de las cargas"
- Es consecuencia de la ley de Gauss. Para una partícula que esté en un equilibrio estable, **todas** las líneas de campo alrededor de la posición de equilibrio deben ir hacia el interior (para que la fuerza lleve a la carga a dicho punto si se mueve ligeramente). Si todas las líneas de campo apuntan hacia el punto de equilibrio, y eso solo es posible si hay carga en dicho punto (que no es la suposición de partida)

Tema 2
Electrostática en medios conductores

Física (780000)

Grado en Ingeniería de Computadores (grupo 1ºA, lunes mañana)

Curso 2019/2020 – Primer Cuatrimestre

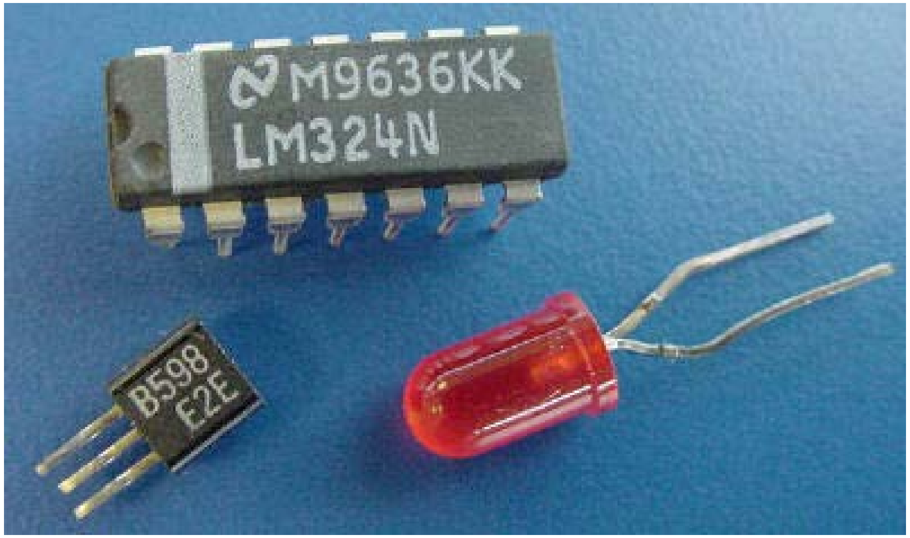
Universidad de Alcalá

R. Gómez Herrero

Departamento de Física y Matemáticas

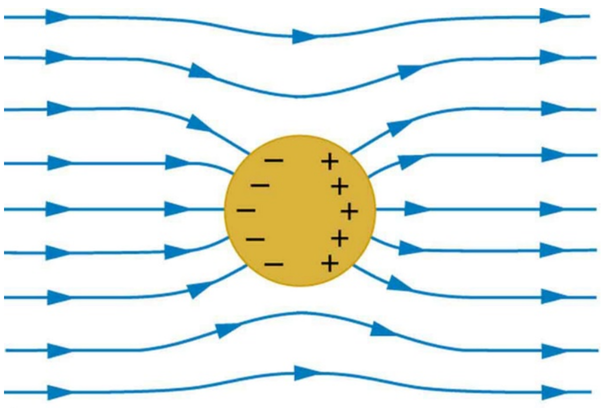
Introducción: materiales conductores y dieléctricos

- Clasificación de los materiales con respecto a la conductividad eléctrica (movilidad de cargas):
  - Conductores: cobre, oro,…
  - No conductores (aislantes, dieléctricos): vidrio, madera,…
  - Semiconductores, se comportan como conductores o no conductores según las condiciones: silicio, germanio,…

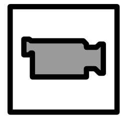
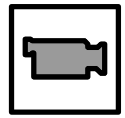


Conductores

- Algunos de sus electrones se pueden mover con libertad por todo su volumen
  (Nota: existen conductores donde las cargas móviles pueden ser positivas, P.ej. electrolitos)
- Sea un conductor neutro sometido a un campo externo, los electrones libres se moverán en dirección contraria al campo (hasta llegar a la superficie). El defecto de electrones en el otro extremo equivaldrá a una carga positiva. El efecto de esta redistribución de cargas es crear un campo eléctrico opuesto al campo externo
- El equilibrio se alcanza cuando **el campo eléctrico en el interior del conductor es nulo** de modo que no hay fuerza de Coulomb neta sobre las cargas

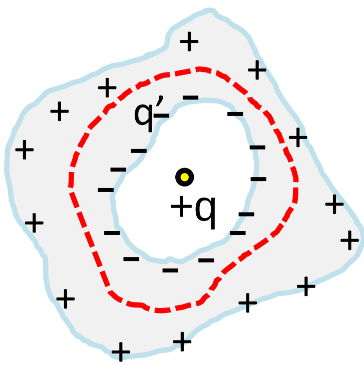


Campo eléctrico y potencial en medios conductores

- Resumen de propiedades fundamentales:
  1. El campo en el interior de un conductor en equilibrio es nulo (de lo contrario las cargas libres se moverían, y no existiría dicho equilibrio)
     Jaula de Faraday:  
  2. La carga neta en su interior es nula (consecuencia de la ley de Gauss y la propiedad anterior). En consecuencia, si existe carga neta, ésta se reparte por la superficie.
  3. Su volumen es equipotencial (consecuencia de la primera propiedad y la definición de potencial)
  4. El campo eléctrico en la superficie de un conductor es siempre perpendicular a ella y vale $\vec{E} = \sigma\overrightarrow{u_s}/\varepsilon_0$, siendo $\overrightarrow{u_s}$ un vector unitario perpendicular a la superficie y σ la densidad superficial de carga

- Demostración de las propiedades 2,3,4:

Carga neta en el interior = 0, demostración usando Gauss:



$$\phi = \oint_S \cancel{\vec{E}} \cdot d\vec{s} = 0 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

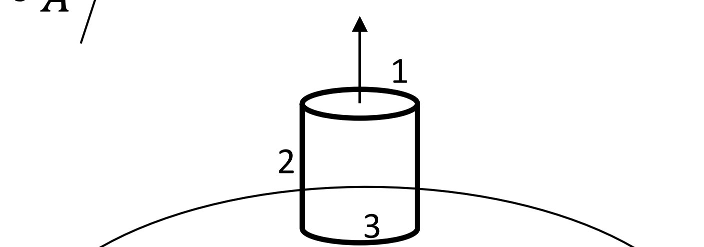
$$\Rightarrow \mathrm{Q} = 0 \Rightarrow \mathrm{q}' = -\mathrm{q}$$

Volumen equipotencial:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \cancel{\vec{E}} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow V = cte$$

Campo en la superficie, usando Gauss:



$$\phi = \phi_1 + 0 + 0 = \oint_{S1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$= E \cdot S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \sigma/\varepsilon_0$$

Campo eléctrico y potencial en medios conductores

Ejercicio: Sabiendo que la lata es conductora y no tiene carga neta, trata de explicar lo observado en el siguiente vídeo.

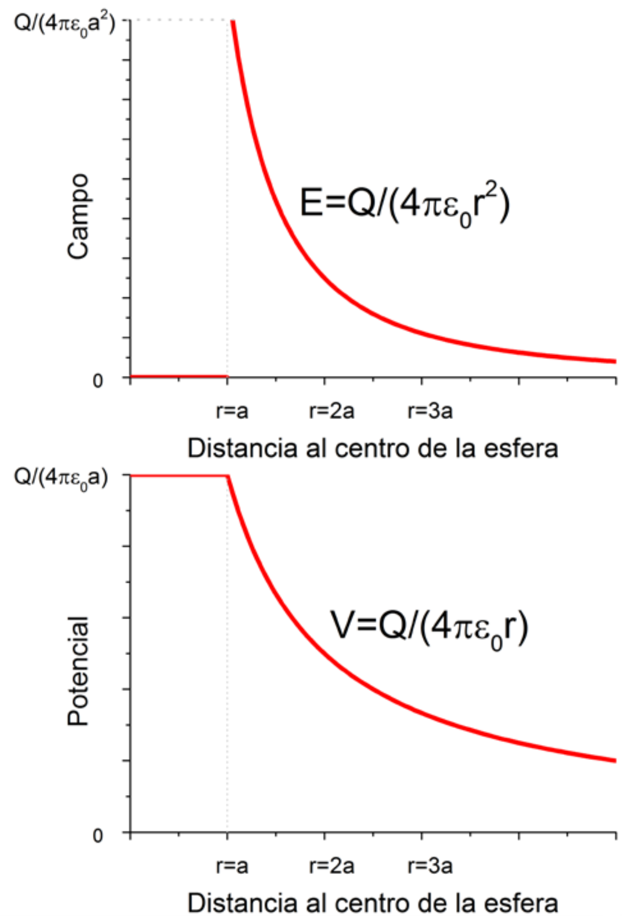
Campo eléctrico y potencial en medios conductores

Ejercicio: Sea una esfera conductora de radio *a*, cargada con una carga +Q. Determinar las expresiones del campo eléctrico y el potencial para cualquier punto del espacio

Solución:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r} & para\, r \geq a \\ 0 & para\, r < a \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & para\, r \geq a \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & para\, r < a \end{cases}$$



Consideraciones geométricas – Efecto punta

- El campo $\vec{E}$ es mayor en las zonas con menor radio de curvatura $\Rightarrow$ las cargas se acumulan en las puntas (efecto punta, fundamento del pararrayos)

Ejercicio: Sea una esfera conductora de radio *a* cargada con una carga Q. Usando un hilo muy fino, se pone en contacto con una segunda esfera conductora de radio $R_b < Ra$, inicialmente descargada. Estudiar como se redistribuye la carga y los valores del campo en la superficie de cada esfera.

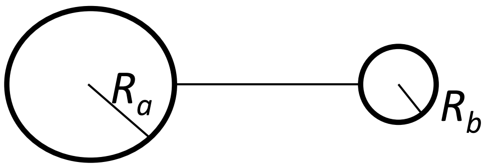
Solución abreviada:

Inicialmente las esferas tienen cargas $Q_a=Q$, $Q_b=0$

En la situación final las esferas tendrán cargas diferentes Q_a', Q_b', pero por conservación de la carga: $Q_a'+Q_b'=Q$

Además al estar unidas, constituyen un conductor único, por tanto: $V_a'=V_b'$

Asumiendo que las esferas están suficientemente separadas, podemos emplear la expresión del potencial para esferas conductoras:



$$\frac{Q'_a}{4\pi\epsilon_0 R_a} = \frac{Q'_b}{4\pi\epsilon_0 R_b} \Rightarrow Q'_b = \frac{R_b}{R_a}Q'_a$$

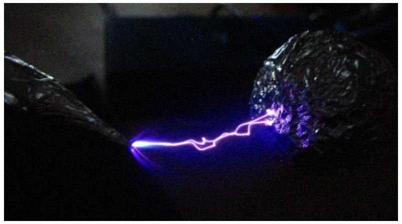
Sustituyendo en la expr. de cons. carga: $Q'_a = Q - Q'_b = Q - \frac{R_b}{R_a}Q'_a \Rightarrow Q'_a = \frac{R_a}{R_a+R_b}Q \Rightarrow \boxed{Q'_b = \frac{R_b}{R_a+R_b}Q = \frac{R_b}{R_a}Q_a' < Q_a'}$

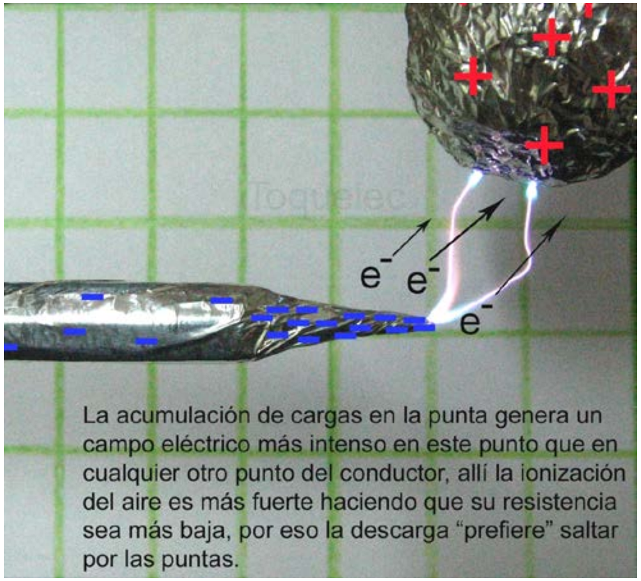
Las dens. sup. de carga serán: $\sigma'_a = \frac{Q}{4\pi(R_a+R_b)R_a}$; $\boxed{\sigma'_b = \frac{R_a}{R_b}\sigma'_a > \sigma'_a}$

Y los campos: $\vec{E'_a} = \frac{\sigma'_a}{\epsilon_0}\vec{u_r}$; $\vec{E'_b} = \frac{\sigma'_b}{\epsilon_0}\vec{u_r}$ por tanto $\boxed{E'_b = \frac{R_a}{R_b}E'_a > E'_a}$ (alternativamente, puede hallarse E usando Gauss)

Consideraciones geométricas – Efecto punta

- Demostración práctica del efecto punta





http://toquelec.blogspot.com/2012/11/demostracion-del-efecto-punta.html

- Este efecto ilustra que aunque la superficie de un conductor sea equipotencial, σ y por tanto el campo eléctrico superficial pueden variar localmente

Consideraciones geométricas. Concepto de capacidad

- Sea cual sea la geometría de un conductor, el potencial es proporcional a la carga, de modo que se puede establecer una relación $Q = C \cdot V$, siendo C una magnitud denominada capacidad, expresada en C/V (=Faradio) y que depende exclusivamente de la geometría del conductor
- Por ejemplo, según vimos anteriormente, el potencial de una esfera cargada de radio a es:

$$\mathrm{V} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Por tanto la capacidad de una esfera conductora valdrá:

$$\mathrm{C} = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 a = cte \cdot a$$

(es decir, solo depende del radio de la esfera)

Fenómenos de influencia. Condensadores

- Al acercar conductores cargados, sus cargas se reorganizan debido a la influencia mutua de los campos creados por cada uno de ellos (cada uno tiende a cancelar el campo creado por el otro)
- La reorganización de cargas cesará al alcanzar el equilibrio
- Caso particular: dos conductores próximos (placas) que reciben cargas iguales de signo contrario $\Rightarrow$ **condensador**
- Definición: la **capacidad** de un condensador es el cociente entre la carga de **una de sus placas** y la diferencia de potencial entre ambas placas:

$$\mathrm{C} = \frac{Q}{\Delta V}$$

Condensador de placas plano-paralelas

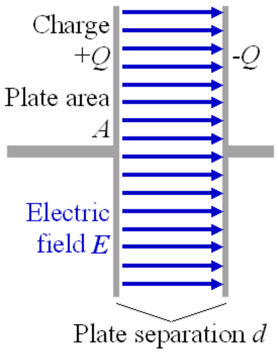
- Sea un plano infinito con densidad de carga σ. El campo cerca de su superficie es:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_s}$$

(nótese el factor ½ de diferencia con respecto a expresión vista antes para la superficie de conductores "gruesos")

- El caso más simple de condensador está compuesto por dos placas planas muy próximas en comparación con su área A, de modo que puede considerarse que cada una de ellas es un plano infinito de carga uniforme σ = Q/A. El campo en la región entre placas será la suma de los campos creados por cada placa:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_s}$$



$\overrightarrow{u_s}$ es un vector unitario dirigido desde la placa positiva hacia la negativa

Condensador de placas plano-paralelas

- Como el campo es constante en la región entre placas, el cálculo de la diferencia de potencial entre placas es inmediato:

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{A\varepsilon_0}$$

- Por tanto, la capacidad será:

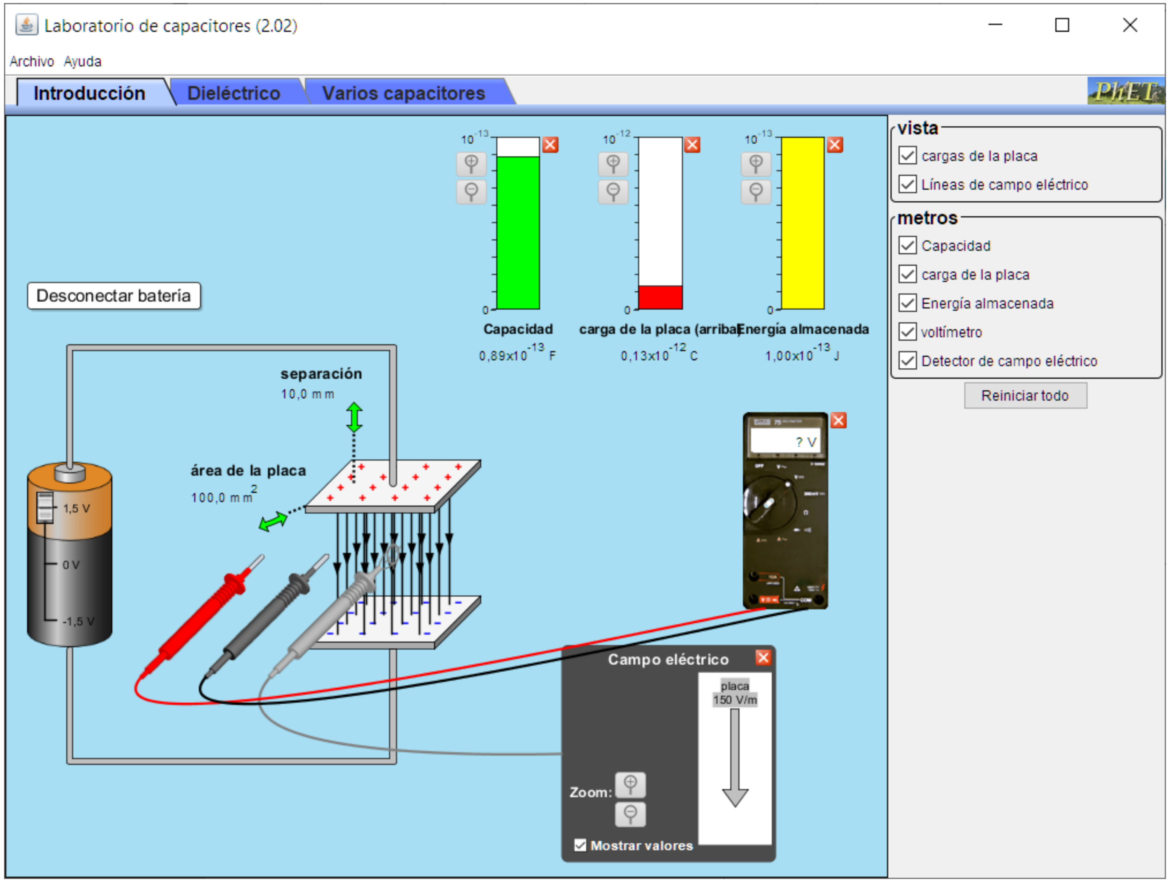
$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\Delta V} = \frac{QA\varepsilon_0}{Qd} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

<u>Nota:</u> en un condensador ΔV se define de modo que sea positivo (potencial de la placa positiva menos el de la negativa)

Condensador de placas plano-paralelas

- Simulación interactiva

https://phet.colorado.edu/es/simulation/capacitor-lab



Condensadores con otras geometrías

- Es posible construir condensadores con otras geometrías (esférica, cilíndrica,….).

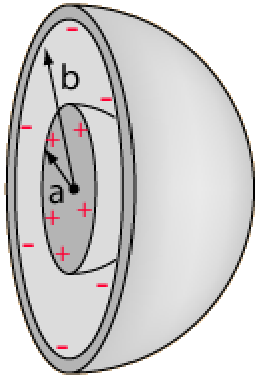
Ejercicio: Obtener la capacidad de un condensador esférico, compuesto por una esfera central de radio a y una corteza esférica de radio b

<u>Solución abreviada</u>

Aplicando Gauss se obtiene el campo entre placas: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$

La diferencia de potencial será:

$$\Delta V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{b-a}{4\pi\epsilon_0 ab}Q$$



Comparando con la definición de capacidad:

$$Q = C\Delta V \Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/capsph.html

Condensadores con otras geometrías

- Es posible construir condensadores con otras geometrías (esférica, cilíndrica,….).

Ejercicio: Obtener la capacidad por unidad de longitud de un condensador cilíndrico compuesto por un cilindro central de radio a y una corteza cilíndrica de radio b

Solución abreviada:

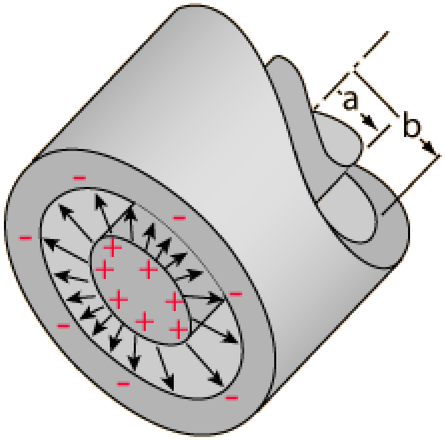
Aplicando Gauss, se obtiene el campo entre placas: $\vec{\mathrm{E}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$

La diferencia de potencial será:

$$\Delta V = \int_a^b E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

Usando las definiciones de capacidad y λ:

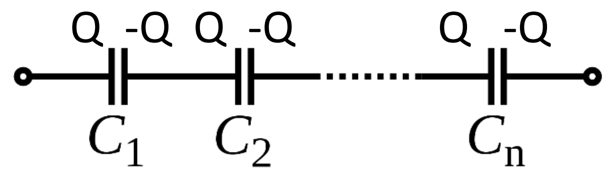
$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{L}} = \lambda = \frac{\mathrm{C}\Delta V}{L} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{\lambda}{\Delta \mathrm{V}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\dfrac{b}{a}}$$



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/capcyl.html

Asociación de condensadores

- Condensadores en serie:



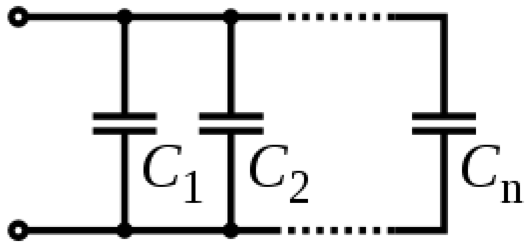
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots + \Delta V_n = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n} =$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \frac{1}{C_n}\right) \cdot Q = \frac{Q}{C}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}}$$

Asociación de condensadores

- Condensadores en paralelo

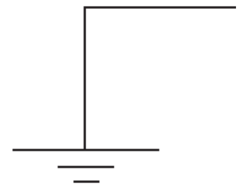
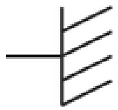


$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 = \cdots = \Delta V_n$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V} + \frac{Q_2}{\Delta V} + \cdots + \frac{Q_n}{\Delta V}$$

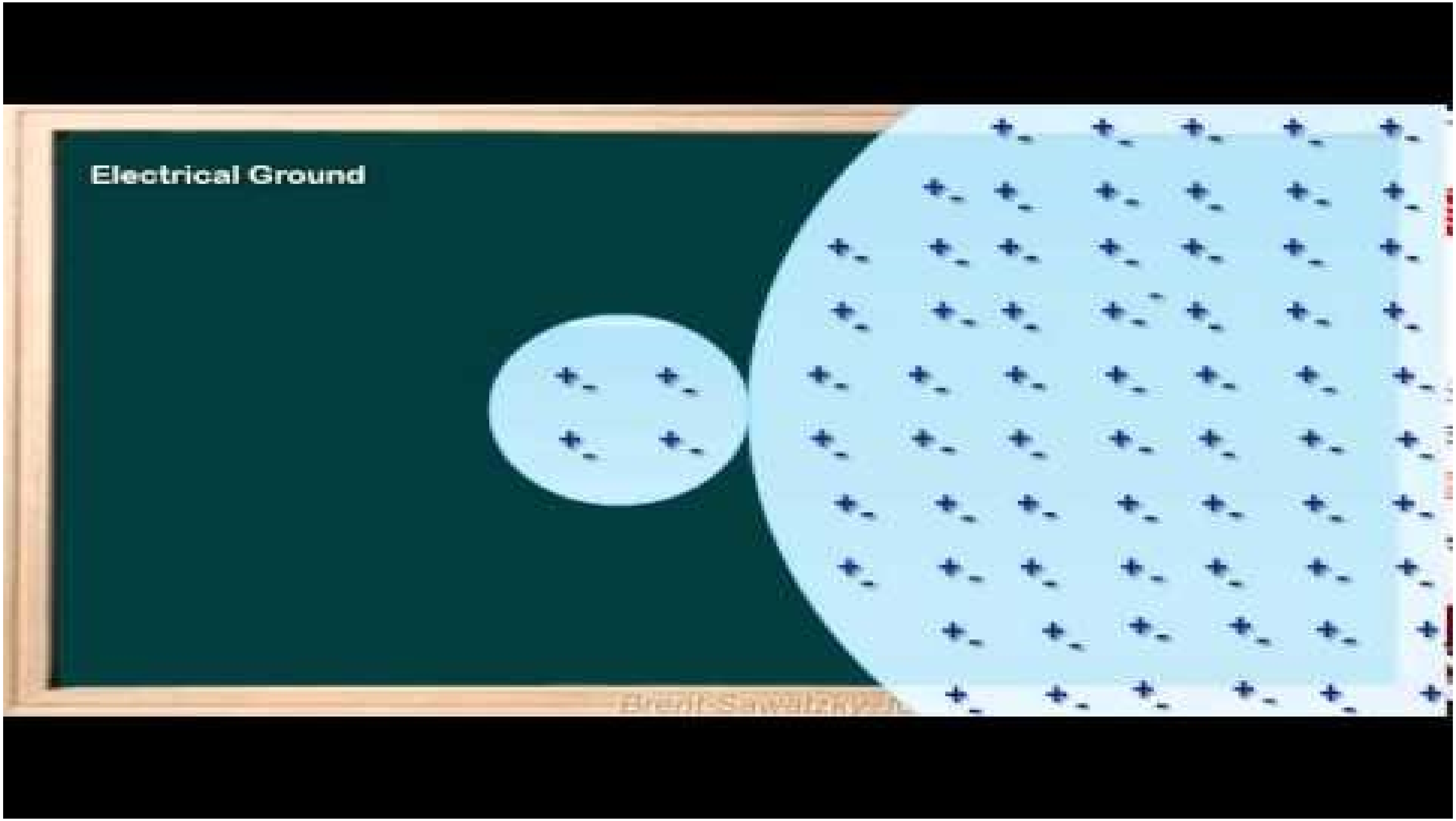
$$\Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n}$$

Conexión a tierra

- Cuando decimos que "conectamos un conductor a tierra", denotamos que lo conectamos al potencial de referencia (que tomamos como V=0)
- Se representa por el símbolo  o también 

  (estrictamente: masa)
- En la práctica un conector muy grande actúa como una conexión a tierra
- Al conectar un conductor a tierra, el exceso de carga sufre un balance (la tierra suministra o recibe tanta carga como sea necesaria para mantenerlo a V=0)
- Conexión a tierra no implica necesariamente carga nula. De hecho se puede usar la conexión a tierra transitoria para cargar un conductor inicialmente neutro (ver ejemplos)
- Usos prácticos: seguridad (protección contra descargas) y apantallamiento electromagnético

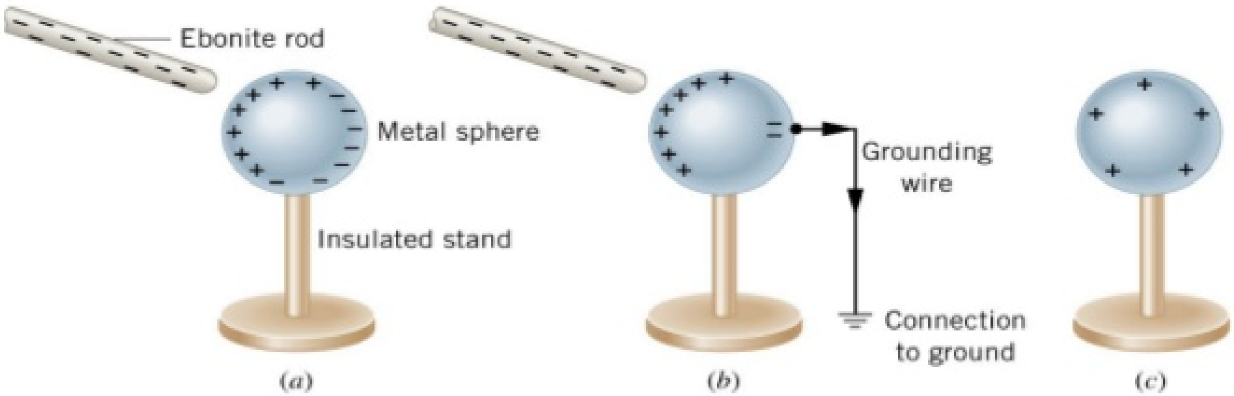
Conexión a tierra



Enlace al video: https://www.youtube.com/watch?v=EfQhhVrevpE

Conexión a tierra

- Carga por inducción



- Bring charged object **near** a neutral conductor.
- Opposite charges are attracted, like charges repel
- Attach grounding wire to far side
  - Repelled charge will spread out into the wire
- Disconnect wire, then remove charged object

Apéndice - Condensador de placas plano-paralelas (resumen)

- Resumen de expresiones prácticas (en el vacío):

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad Q = C\Delta V \qquad \sigma = \frac{Q}{A} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\Delta V}{d}$$

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \qquad \mathrm{u} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Las expresiones de la energía “U” y la energía por unidad de volumen “u”, se discutirán en un tema posterior

- Si el condensador permanece **conectado** a los bornes de la batería:

$$\Delta V = \Delta V_{batería} = constante$$

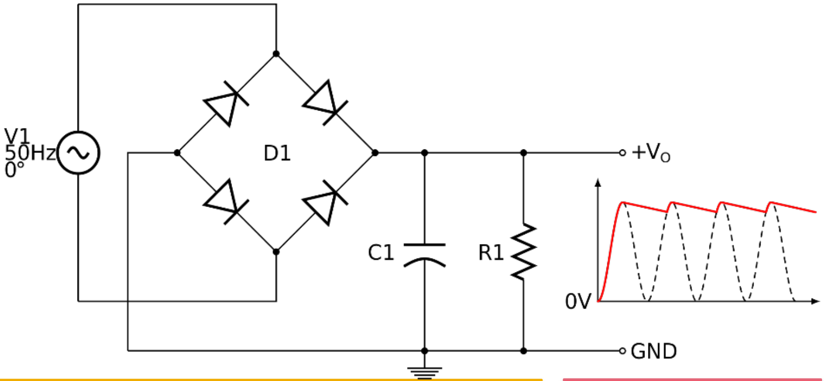
- Si el condensador permanece **desconectado** (aislado):

$$Q = Q_{inicial} = constante$$

Apéndice – Aplicaciones tecnológicas de los condensadores

- Los condensadores son componentes de uso muy frecuente en electrónica.
- Su capacidad se puede establecer mediante su geometría o introduciendo un dieléctrico entre las placas (Tema 3)
- Entre sus aplicaciones se puede mencionar:
  - Almacenamiento de energía (p.ej. Flash)
  - Amortiguar fluctuaciones de voltaje (rizado) en fuentes de alimentación (regulación, mediante conexión en paralelo)
  - Filtros de ruido
  - Osciladores





Apéndice – Aplicaciones tecnológicas de los condensadores

https://www.youtube.com/watch?v=7jpS3FHmoWU

Diapositivas adicionales

Ejercicio: dos superficies esféricas conductoras concéntricas de radios R y 2R tienen cargas positivas 2q y q, respectivamente. Obtener la diferencia de potencial entre ambas. Calcular nuevamente su valor en caso de conectar a tierra: a) la esfera interior, b) la esfera exterior.

Solución:

Esencialmente tenemos el caso de un condensador esférico visto anteriormente:

$$V_2 - V_1 = -\int_R^{2R} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-1}{2R} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\, R} < 0$$

a) Si conectamos a tierra la esfera exterior, aunque cambie la carga de la esfera exterior (que pasará a ser -2q) y su potencial (que pasará a ser nulo), la diferencia de potencial seguirá siendo la misma, ya que por la ley de Gauss el campo en la región entre esferas no varía.

b) Si conectamos a tierra la esfera interior, ésta quedará a potencial nulo y cierta carga q', por tanto:

$$0 = V_\infty - V_1 = -\int_R^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_R^{2R} \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}dr - \int_{2R}^{\infty} \frac{q'+q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}dr =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'}{2R} - \frac{q'}{R} + \frac{q'+q}{\infty} - \frac{q'+q}{2R}\right) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q'+q}{2R} \Rightarrow 2q'+q = 0$$

De modo que la carga de la esfera interior será q'=-q/2. A partir de aquí el problema es idéntico a los casos anteriores pero usando este nuevo valor de la carga:

$$V_2 - V_1 = V_2 = \frac{q}{16\pi\varepsilon_0\, R} > 0$$

Nota: nótese que en el caso b) q' no es –q como intuitivamente pudiera pensarse, y la forma correcta de hallarla es la arriba expuesta. Lo que si ocurrirá es que habrá una carga –q'=+q/2 en la sup. interior de la esfera exterior y q+q'=+q/2 en la exterior

Tema 2b
Energía electrostática

Física (780000)

Grado en Ingeniería de Computadores (grupo 1ºA, lunes mañana)

Curso 2019/2020 – Primer Cuatrimestre

Universidad de Alcalá

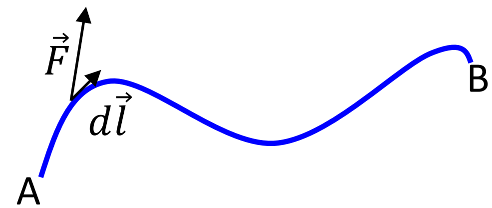
R. Gómez Herrero

Departamento de Física y Matemáticas

Introducción: Energía y trabajo (repaso)

- Trabajo realizado por una fuerza durante un trayecto AB:

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



Ejemplo: fuerza constante según el eje X y desplazamiento de longitud $L=x_2-x_1$ a lo largo de dicha dirección:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = F \cdot (x_2 - x_1) = F \cdot L$$

- Si la fuerza corresponde a un campo conservativo, el trabajo no dependerá del trayecto escogido entre los puntos inicial y final → podemos definir una energía potencial U tal que su diferencia entre los puntos inicial y final vale:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -W_{12}$$

Introducción: Energía y trabajo (repaso)

- Nótese el criterio de signos:

  <u>$W > 0 \Rightarrow \Delta U < 0$:</u> el campo de fuerzas está dirigido a favor del desplazamiento (el campo de fuerzas hace trabajo positivo) => la energía potencial disminuye

  <u>$W < 0 \Rightarrow \Delta U > 0$:</u> el campo de fuerzas está dirigido en contra del desplazamiento (hace un trabajo negativo) => la energía potencial aumenta

  <u>Ejemplo</u>: sea una masa m en un campo gravitatorio. La fuerza recibe el nombre de peso (m·g). Si el cuerpo cae, el peso hace un trabajo positivo ($W>0$) y la energía potencial disminuye ($\Delta U < 0$). Si el cuerpo asciende en contra del campo gravitatorio, el peso hace un trabajo negativo ($W<0$) y la energía potencial aumenta ($\Delta U > 0$). Esa diferencia de energía puede aportarla por ejemplo una energía cinética inicial o provenir del trabajo de una fuerza externa F'. Dicha fuerza realizaría un trabajo $W' = -W = +\Delta U$

Energía potencial electrostática

- Sea una carga q en un campo electrostático. El trabajo realizado por el campo para recorrer un trayecto AB será:

$$\mathrm{W_{AB}} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \mathrm{q} \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Como sabemos, la integral que aparece es la **circulación** del campo eléctrico, y al ser el campo conservativo, su valor es independiente del camino AB (solo depende de los puntos inicial y final) siendo posible definir un potencial V tal que:

$$V_B - V_A = -\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow W_{AB} = -(V_B - V_A)q$$

Energía potencial electrostática

- Es decir, podemos definir una energía potencial electrostática U tal que:

$$\Delta U_{AB} = (U_B - U_A) = (V_B - V_A)q$$

- Significado de V => ΔV corresponde a la diferencia de energía potencial electrostática por unidad de carga
  Unidades de V: Voltios (1 V = 1 J / C)
  Unidades de U: Julios (1 J = 1 N·m)

*También eV = $1.6 \cdot 10^{-19}$ J

- Tal como ya vimos, una carga positiva se mueve a favor de $\vec{E}$, en sentido de V decreciente (tendencia natural a mínima energía potencial, al igual que ocurre en la gravedad).

- Una carga negativa se mueve contra $\vec{E}$, en sentido de V creciente, como q<0 esto significa nuevamente mínima energía potencial (mayor valor absoluto, pero negativa).

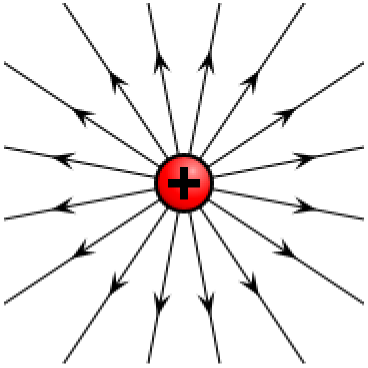
Energía potencial electrostática: origen de potencial

- Hasta ahora hemos hablado de diferencias de energía potencial
- Para definir la energía potencial electrostática en un punto podemos usar un nivel de referencia:
  - Si no hay cargas en el infinito: $V_\infty \rightarrow 0$ => Definimos V en un punto como la diferencia de potencial entre dicho punto y el origen de potencial V_∞
  - Análogamente definimos la energía potencial electrostática de una carga en un punto como la diferencia de energía potencial entre dicho punto y el origen de energía potencial situado en el infinito. Es decir, como el trabajo necesario para traer la carga desde el infinito hasta su posición actual. Nótese que con este criterio una carga negativa en una posición con potencial positivo tendría energía potencial negativa.

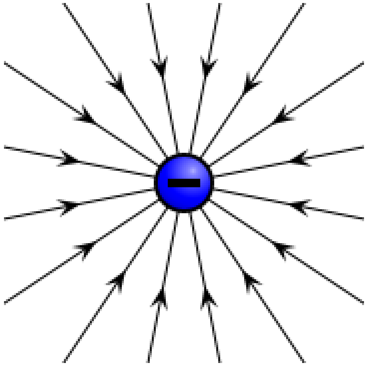
- Recordatorio de campo y potencial creados por cargas puntuales

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

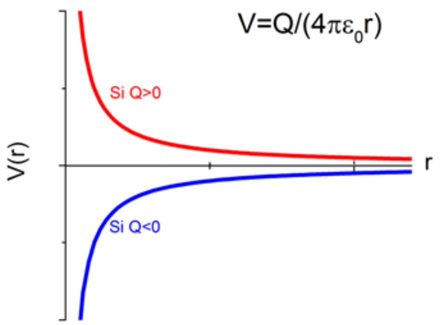
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$



Carga puntual positiva



Carga puntual negativa



Líneas de campo: radiales hacia fuera. El módulo del campo decrece con el cuadrado de la distancia

Lineas equipotenciales: círculos concéntricos. El potencial decrece como el inverso de la distancia y es positivo en todo el espacio (tiende a infinito sobre la carga y a 0 en $r \rightarrow \infty$)

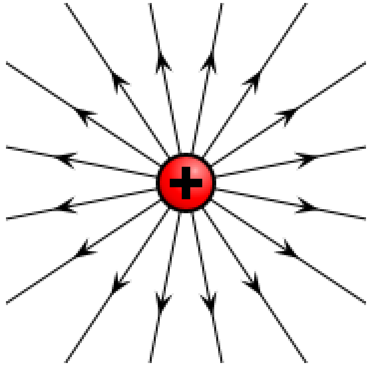
Líneas de campo: radiales hacia dentro. El módulo del campo decrece con el cuadrado de la distancia

Lineas equipotenciales: círculos concéntricos. El potencial decrece como el inverso de la distancia y es negativo en todo el espacio (tiende a menos infinito sobre la carga y a 0 en $r \rightarrow \infty$)

- Nótese que las líneas de campo van dirigidas de mayor a menor potencial en ambos casos
- Significado de V(r): trabajo por unidad de carga que hay que hacer contra el campo para traer la carga desde el origen de potencial hasta el punto r
- La tendencia natural de las cargas es moverse hacia la zona de menor energía potencial

Energía potencial electrostática

- Recordatorio de campo y potencial creados por cargas puntuales

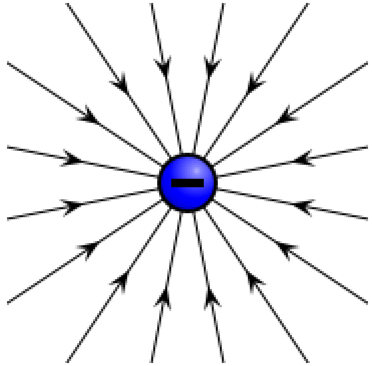


Carga puntual positiva

Si r →0, V →∞
Si r →∞, V →0
V>0 en todo el espacio

Una carga positiva q situada en cualquier zona del espacio a su alrededor, tendría energía potencial positiva, y su tendencia natural es alejarse del centro (reducir su energía potencial, haciéndola lo más cercana a cero posible)

Una carga negativa tendría energía potencial negativa en todo el espacio, y su tendencia natural es acercarse al centro (reducir su energía potencial, haciéndola lo más negativa posible)



Carga puntual negativa

Si r →0, V →-∞
Si r →∞, V →0
V<0 en todo el espacio

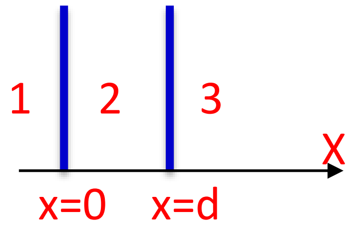
Una carga positiva q, tendría energía potencial negativa en todo el espacio, y su tendencia natural es acercarse al centro (reducir su energía potencial, haciéndola lo más negativa posible)

Una carga negativa tendría energía potencial positiva en todo el espacio, y su tendencia natural es alejarse del centro (reducir su energía potencial, haciéndola lo más cercana a cero posible)

$$U(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

Ejercicio (cuestión de examen)

Dos planos paralelos igualmente cargados positivamente, distan 1 m . Si damos el valor cero al potencial del plano de la derecha. Estudiar como variará la energía potencial electrostática de un electrón en función de su posición



Solución cualitativa:

Denotemos las zonas 1, 2, 3 según lo indicado en la figura

Como los planos tienen carga positiva, el campo apuntará hacia la izquierda en la zona 1, será nulo en la zona 2 y apuntará a la derecha en la zona 3.

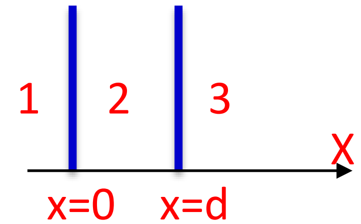
El campo siempre apunta en dirección de potencial decreciente, por tanto V crecerá al moverse hacia la derecha en la zona 1, será constante en la zona 2 y decrecerá al seguir hacia la derecha en la zona 3. Además, como el potencial es una función continua, tendrá valor nulo en toda la zona 2, y por tanto será negativo en las zonas 1 y 3.

Como la carga del electrón es negativa, su energía potencial será positiva en la zona 1 (decreciente al moverse a la derecha), nula en la zona 2 y positiva en la zona 3 (creciente al moverse hacia la derecha)

Ejercicio (cuestión de examen)

Dos planos paralelos igualmente cargados positivamente, distan 1 m . Si damos el valor cero al potencial del plano de la derecha. Estudiar como variará la energía potencial electrostática de un electrón en función de su posición

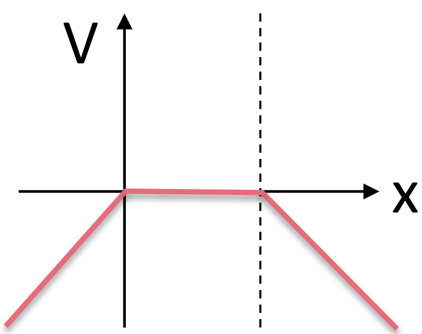
Solución analítica:

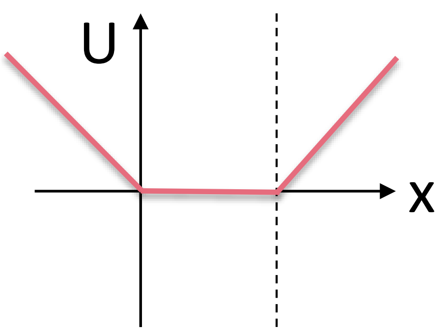


$$\vec{E}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{j} & x < 0 \\ 0 & 0 < x < d \\ +\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{j} & x > d \end{cases}$$

Integrando entre 0 y x estas expresiones:

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}x & x < 0 \\ 0 & 0 < x < d \\ -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}(x-d) & x > d \end{cases}$$





Y la energía será: $U = -e \cdot V$

Energía electrostática de una distribución discreta de carga

- Sean 3 cargas q_1, q_2, q_3. El trabajo necesario para traerlas del infinito a $\mathbf{r}_1$ sucesivamente será:

Primera carga. si no existe un campo previo, $W = 0$

Segunda carga. Se moverá en el potencial creado por la primera carga, por tanto:

$$W_2 = q_2 \cdot V_{12} = q_2 \cdot \frac{K_e q_1}{r_{12}}$$

Tercera carga. Se moverá en el potencial creado por la primera y segunda carga:

$$W_3 = q_3 \cdot (V_{13} + V_{23}) = q_3 \cdot \left(\frac{K_e q_1}{r_{13}} + \frac{K_e q_2}{r_{23}} \right)$$

Por tanto la energía potencial del sistema (trabajo necesario para traer las 3 cargas del infinito) será:

$$U = q_2 V_{12} + q_3 V_{13} + q_3 V_{23} = \frac{K_e q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{K_e q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{K_e q_2 q_3}{r_{23}} =$$

Energía electrostática de una distribución discreta de carga

- Generalización a un sistema de n cargas puntuales. Nótese que no hay términos del tipo $q_i \cdot q_i$ y que cada posible combinación $q_i \cdot q_j$ no aparece duplicada como $q_j \cdot q_i$

$$U = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} q_j \; V_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{K_e q_i q_j}{r_{ij}}$$

Alternativamente, podemos incluir los términos duplicados en el sumatorio y dividir entre dos el resultado:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{K_e q_i q_j}{r_{ij}}}$$

Energía electrostática de una distribución continua de carga

- Generalización a una distribución continua caracterizada por una densidad de carga ρ ocupando un volumen V del espacio donde existe un potencial V debido a la propia distribución:

$$U = \frac{1}{2}\int_V V(\vec{r})dq = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\tau$$

- Análogamente, para una distribución superficial de carga con densidad σ en cierta superficie S:

$$U = \frac{1}{2}\int_S V(\vec{r})dq = \frac{1}{2}\int_S \sigma(\vec{r})V(\vec{r})ds$$

Energía electrostática de un conductor cargado

- Para un conductor cargado, podemos expresar la energía electrostática utilizando la capacidad, definida en el tema anterior. Supongamos que vamos añadiendo carga en elementos infinitesimales hasta alcanzar una carga total Q. El potencial V irá variando según V=q/C, por tanto:

$$W = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Es decir, la energía potencial electrostática de un conductor cargado, se puede expresar como:

$$\boxed{U_{conductor} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2}$$

Energía electrostática de un condensador

- El desarrollo para un condensador de capacidad C, carga Q y diferencia de potencial ΔV es análogo:

$$U_{condensador} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

- El trabajo necesario para cargar un conductor o un condensador puede interpretarse como el trabajo necesario para crear el campo eléctrico que éste produce
- En esos términos, podemos hablar de la energía electrostática almacenada en un condensador como la energía del campo electrostático

$$U_{condensador} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}d^2E^2$$

Energía electrostática de un condensador

Ejercicio (cuestión de examen)

Sea un condensador de placas plano-paralelas. Se carga conectándolo a una fuente de tensión constante. Una vez cargado se separan las placas hasta una distancia triple de la original. Deducir en qué factor cambiará la energía potencial electrostática almacenada en el condensador

Solución:

Como el condensador permanece conectado, el proceso ocurrirá a diferencia de potencial constante (igual a la suministrada por la batería). Lo más adecuado es usar la expresión de la energía en función de V y C:

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}V^2$$

$$U' = \frac{1}{2}C'V'^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{3d}V^2 = \frac{1}{3}U$$

$\Rightarrow$ La energía se reduce a la tercera parte de su valor inicial

Como C disminuye, Q disminuirá. La energía será devuelta a la batería (que se recarga).

Ejercicio

Repetir la cuestión anterior suponiendo que la operación de separación de placas se realiza tras desconectar la batería

Solución:

Como el condensador permanece aislado, el proceso ocurrirá a carga constante (igual a la inicial, cuando estaba conectado a la batería). Lo más adecuado es usar la expresión de la energía en función de Q y C:

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{d}{\epsilon_0 A}Q^2$$

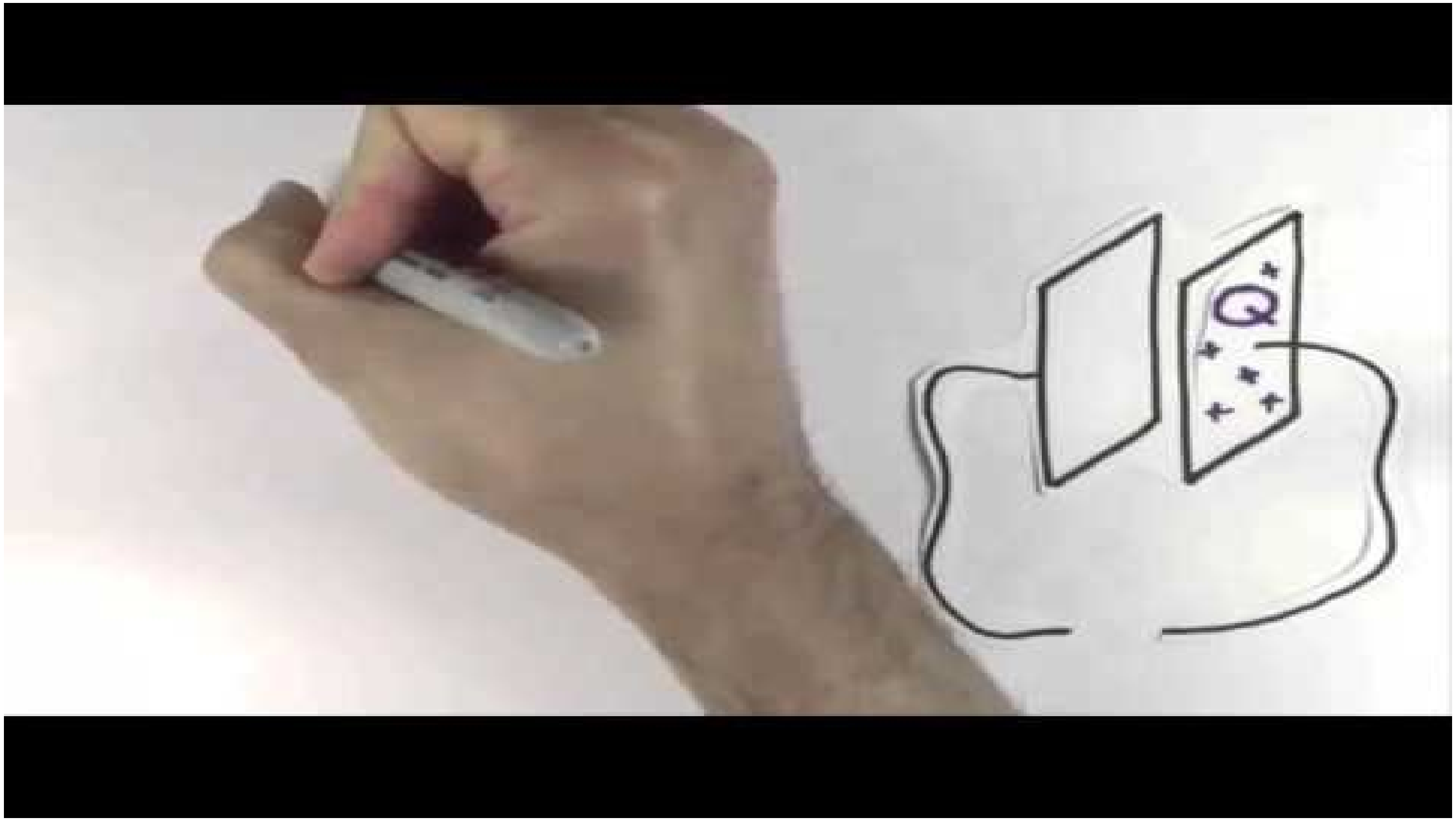
$$U' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C'} = \frac{1}{2}\frac{3d}{\epsilon_0 A}Q^2 = 3U$$

$\Rightarrow$ La energía se triplica

Como C disminuye, el valor de V=Q/C aumentará. El aumento de energía proviene de la fuerza externa que tira de las placas (que se atraen entre sí y oponen resistencia).

Energía electrostática de un condensador

- ¿Por qué aparece el factor ½ y no tenemos simplemente el producto Q·V? Tal como expresa la formulación diferencial realizada, según se desplazan elementos de carga, V va variando. Explicación cualitativa en el vídeo:



https://www.youtube.com/watch?v=q6o7WrP88pA

Densidad de energía del campo electrostático

- Teniendo en cuenta que el volumen entre placas es A·d:

$$U_{condensador} = \frac{1}{2} V \epsilon_0 E^2$$

- Es decir, la energía por unidad de volumen del campo electrostático en el vacío se puede definir como:

$$\mathrm{u} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

- Este resultados es generalizable a cualquier otro sistema

Densidad de energía del campo electrostático

$$\text{u} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad\qquad \text{U} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_V E^2 \, d\tau$$

Estos resultados para el vacío se pueden generalizar para incluir el caso de medios materiales:

$$U_{cond} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}d^2E^2 = \frac{1}{2}Ad\, D \cdot E$$

$$\text{u} = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} \qquad\qquad \text{U} = \frac{1}{2}\int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

Expresión que incluye a la anterior como caso particular

Apéndice – balance energético en condensadores

Separación de placas de un condensador

- Las placas de un condensador tienen cargas opuestas y por tanto se atraen y hay que ejercer fuerza (aportar trabajo externo) para separarlas
- Al aumentar la separación, *C* disminuye: $C' = \frac{\epsilon_0 A}{d'} < C$
  - Si la separación ocurre en un condensador aislado (Q=cte), U aumentará (ΔV=Q/C aumenta y el trabajo externo aportado al separar las placas se emplea en aumentar U)

$$U' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C'} > U$$

  - Si la separación ocurre mientras se permanece conectado a una batería (ΔV= cte), U disminuirá (Q=CΔV se reduce y el trabajo externo aportado acaba devuelto a la batería, la cual se recarga con la carga devuelta desde el condensador):

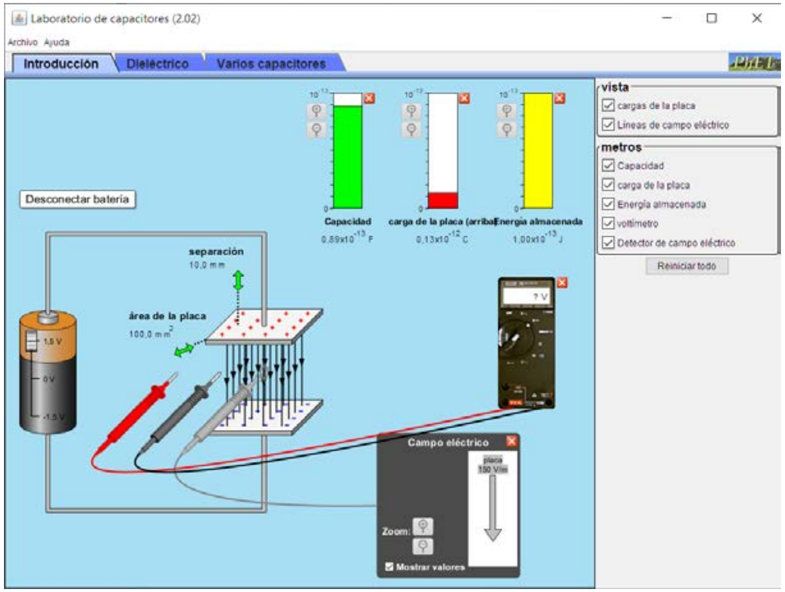
$$U' = \frac{1}{2}C'(\Delta V)^2 < U$$

Trabajo propuesto

Analizar el cambio de la capacidad, carga, diferencia de potencial y energía potencial electrostática de un condensador de placas plano-paralelas en los casos de reducción de espacio entre placas

Ayuda: simulación interactiva (usar la casilla "Energía almacenada")

https://phet.colorado.edu/es/simulation/capacitor-lab



Tema 3a

Fundamentos microscópicos de la corriente eléctrica

Física (780000)

Grado en Ingeniería de Computadores (grupo 1ºA, lunes mañana)

Curso 2019/2020 – Primer Cuatrimestre

Universidad de Alcalá

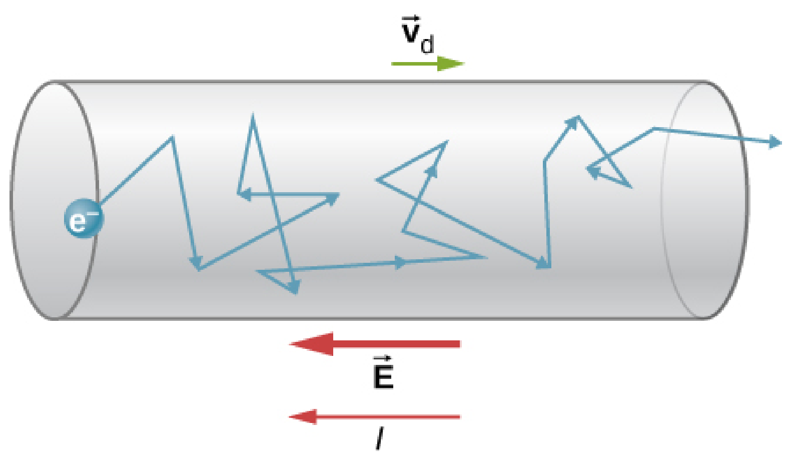
R. Gómez Herrero

Departamento de Física y Matemáticas

- En este tema estudiaremos la corriente eléctrica, fenómeno constituido por **cargas en movimiento**. El proceso por el cual se produce dicho movimiento de cargas en un medio se llama **conducción** eléctrica.
- Este movimiento o flujo de carga eléctrica a través del espacio vacío o de un medio material ocurre en distintas situaciones, en última instancia debido a la presencia de un campo eléctrico:
  - Rayo en una tormenta (ruptura dieléctrica del aire)
  - Flujo de electrones en un cable o en el filamento de una bombilla
  - Haz de iones en un acelerador de partículas

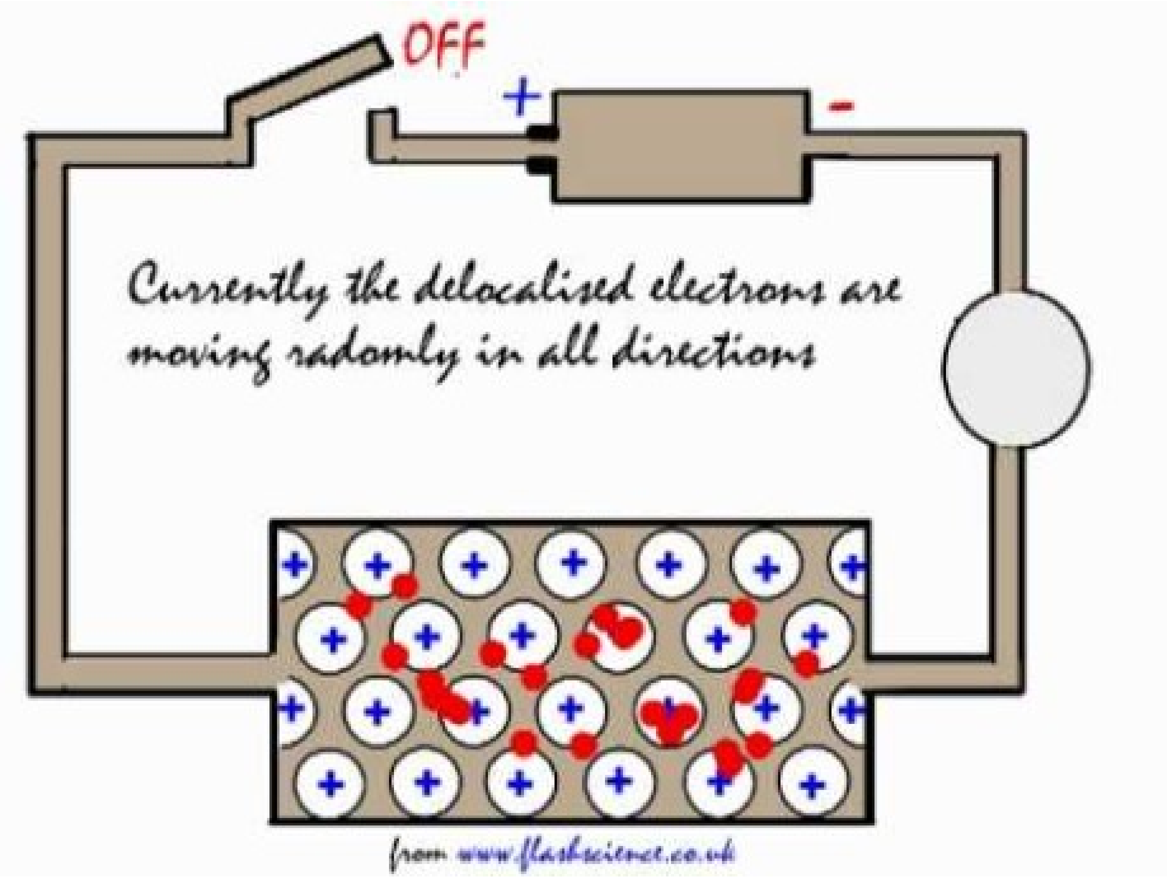

Introducción

- Cuando sometemos un conductor a un campo eléctrico, las cargas libres del conductor sufrirán la fuerza de Coulomb y por consiguiente se acelerarán, comenzando a desplazarse
- Sin embargo, dicha velocidad se superpone a la agitación térmica y al producirse el movimiento dentro de un medio material, existirán colisiones que entorpecerán el movimiento de las cargas
- Globalmente existirá un avance neto de las cargas con cierta velocidad media neta según la dirección del campo aplicado (velocidad de deriva o de arrastre)



Ver también simulación java simplificada:
https://phet.colorado.edu/es/simulation/battery-resistor-circuit
(o copia local)

Introducción



https://www.youtube.com/watch?v=DbKECtWNm8k

Intensidad

- La **intensidad (I)** o **corriente eléctrica** es la carga eléctrica neta que atraviesa cierta superficie por unidad de tiempo:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

La intensidad se expresa en $C \cdot s^{-1}$ en sistema internacional ($C \cdot s^{-1}$=Amperio). Aunque se especifique una dirección y sentido, I no es un vector.

- Por convenio se asume que la intensidad describe el sentido de movimiento de cargas positivas. Aunque en muchos casos los portadores son electrones (carga negativa) y por tanto su movimiento real ocurre en sentido contrario a la intensidad.

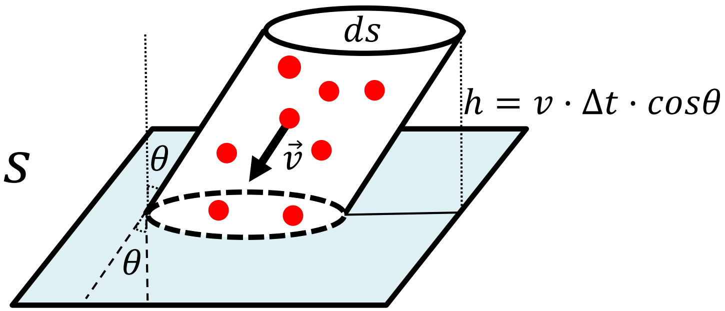
Corriente eléctrica: punto de vista microscópico

- Consideremos un elemento de volumen microscópico en un conductor donde existe movimiento de cargas.
- Sea $\vec{v}$ la velocidad media de avance de cada carga (velocidad de arrastre o de deriva), $d\vec{s}$ un elemento de superficie (formando un ángulo θ con la velocidad), y *n* el número de cargas móviles por unidad de volumen (cada una de ellas con carga *q*). Pasado un tiempo Δt, la carga ΔQ que ha atravesado la superficie será la contenida en un cilindro inclinado, de altura $v \cdot \Delta t \cdot \cos\theta$ y base ds:

$$vol = (v \cdot \Delta t \cdot \cos\theta) \cdot ds$$

$$\Delta Q = n \cdot q \cdot vol = n \cdot q \cdot v \cdot \Delta t \cdot cos\theta \cdot ds$$

$$= n \cdot q \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s} \cdot \Delta t$$



Corriente eléctrica: punto de vista microscópico

- La intensidad que atraviesa el elemento de superficie $d\vec{s}$ será:

$$dI = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n \cdot q \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s} = \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Donde se ha definido la densidad de corriente $\vec{J}$ como:

$$\boxed{\vec{J} = n \cdot q \cdot \vec{v}}$$

(carga por unidad de área y tiempo)

- Si consideramos una superficie macroscópica S en vez de un elemento diferencial, la intensidad que la atraviesa vendrá dada por la integral superficial de $\vec{J}$:

$$\boxed{I = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}}$$

Corriente eléctrica: punto de vista microscópico

Ejemplo: Calcular la densidad de corriente y la velocidad de arrastre de los electrones en un cable de cobre de 3 mm^2 de sección por el que circula una intensidad de 100 mA, sabiendo que la densidad del cobre es 8,95 g/cm^3 y que cada átomo contribuye con un electrón libre a la conducción (masa atómica del cobre M= 63,54 g/mol)

En primer lugar hallamos la densidad de corriente a partir de la intensidad y la sección:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = J \cdot S \Rightarrow J = \frac{I}{S} = \frac{0{,}1\ A}{3 \cdot 10^{-6} m^2} = 3{,}33 \cdot 10^4 A\ m^{-2}$$

Por otra parte, el número de átomos por unidad de volumen N, vendrá dado por el producto entre el número de moles por unidad de volumen y el número de Avogadro. Además, como cada átomo contribuye con un electrón a la conducción, la densidad de portadores n tendrá ese mismo valor

$$n = N = \frac{\rho}{M} \cdot N_A = \frac{8{,}95\ g/cm^3}{63{,}54\ g/mol} 6{,}023 \cdot 10^{23} mol^{-1} = 8{,}48 \cdot 10^{22} cm^{-3} = 8{,}48 \cdot 10^{28} m^{-3}$$

A partir de los valores de J y n es inmediato hallar v_d:

$$J = n \cdot q \cdot v_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{n \cdot e} = \frac{3{,}33 \cdot 10^4 A\ m^{-2}}{8{,}48\ \cdot 10^{28} m^{-3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} C} = 2{,}46 \cdot 10^{-8} m\ s^{-1} = 0{,}88\ cm/h$$

Nótese que aunque v_d es muy pequeña (muy inferior a la velocidad térmica media), los electrones no necesitan recorrer un circuito completo para que circule la corriente

Corriente eléctrica: punto de vista microscópico

Ejemplo: Utilizando el modelo de Bohr del átomo de H y conociendo el radio de la primera órbita a_0 = 0.529 Å y la masa del electrón m_e= $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) Calcular el número de revoluciones que realiza el electrón en 1s

b) Calcular la intensidad a la que equivale

Velocidad en la órbita: $\frac{m_e\, v^2}{r} = \frac{K_e q_e^2}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{K_e q_e^2}{r m_e}}$ $=2.2 \cdot 10^6$ m/s

Frecuencia (revoluciones/s): $f = \frac{v}{2\pi r}$ $=6.6 \cdot 10^{15}$ s^{-1}

Intensidad equivalente (carga/s en un punto): $I = \frac{dq}{dt} = q_e \cdot f$ $=1.05 \cdot 10^{-3}$ A=1.05 mA

Ejemplo: Un haz de protones de 2 mm de diámetro es acelerado bajo una d.d.p. de 10^4 V. Si posee una densidad de portadores homogénea $n=3.35 \cdot 10^{10}$ m^{-3}, calcular la corriente a la que equivale ($m_p=1.6.10^{-27}$ kg).

Solución: paso previo, hallar la velocidad por conservación energía: $v=1.41 \cdot 10^6$ m/s

$J=n \cdot q \cdot v=7.58 \cdot 10^{-3}$ Cm^{-2} s^{-1} => $I = J \cdot S = J \cdot \pi \cdot r^2 = 2.38 \cdot 10^{-8}$ A

Corriente eléctrica: punto de vista microscópico

En resumen:

- $\vec{J}$ es un vector que representa el valor local de la cantidad de carga por unidad de área y tiempo que atraviesa una superficie
- *I* es un escalar que representa el valor local de la cantidad de carga que atraviesa la superficie por unidad de tiempo
- A nivel microscópico, el valor de $\vec{J}$ (y por tanto de I) crece si aumenta la densidad de portadores de carga, la carga de cada uno de ellos o su velocidad media $\vec{v}$ en la dirección de $\vec{J}$
- En la mayoría de los materiales la temperatura reducirá el valor de $\vec{v}$, ya que supone un aumento el número de colisiones microscópicas (agitación térmica)

Corriente eléctrica: punto de vista microscópico

Notas:

- Las cargas se mueven por la acción de un campo eléctrico (causa última de la existencia de J e I)
- Aunque se pueda definir una velocidad media de los portadores, a nivel microscópico hay colisiones y v es realmente variable
- Como se ha mostrado en los ejemplos realizados, la velocidad de arrastre es extremadamente lenta (pocos cm/h). Lo que se propaga por el cable a velocidades cercanas a la de la luz es la "señal" del campo eléctrico. Vídeo y simulación ilustrativos:

  https://www.youtube.com/watch?v=QGGHMYN3Ni0

  https://phet.colorado.edu/es/simulation/signal-circuit

Ley de Ohm generalizada, conductividad

- Para medios homogéneos, lineales e isótropos, existe una relación lineal entre la causa (el campo eléctrico E) y el efecto (la aparición de J):

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \text{(Ley de Ohm)}}$$

σ= conductividad (constante que depende del medio)

- Si hay pocas colisiones σ es alta y J será alta, dado que la velocidad media de las cargas es alta, y decimos que el medio es un buen conductor eléctrico. Al contrario, en un mal conductor (σ baja) el mismo E dará lugar a una J más baja.

Conductividad desde el punto de vista microscópico

- En ausencia de colisiones, el campo eléctrico haría aumentar la velocidad de arrastre las cargas produciendo una aceleración constante:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m}$$

- Pero en los medios reales, la agitación térmica dará lugar a colisiones que frenan las cargas. Se puede definir un tiempo de relajación τ (tiempo medio entre colisiones) de modo que la velocidad de arrastre promedio sea $a \cdot \tau$, y la densidad de corriente se puede expresar entonces como:

$$J = n \cdot q \cdot a \cdot \tau = n \cdot q \cdot \tau \cdot \frac{Eq}{m} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{q}^2 \cdot \tau \cdot m^{-1} \cdot E$$

- Si comparamos con la ley de Ohm $J = \sigma \cdot E$, deducimos que la conductividad se puede expresar como:

Conductividad desde el punto de vista microscópico

$$\sigma = \mathrm{n} \cdot \mathrm{q}^2 \cdot \tau \cdot m^{-1}$$

Nótese que el medio conduce mejor cuanto mayores sean n, q, τ y cuanto menor sea m

Definiendo ahora la **movilidad μ** de los portadores como:

$$\mu = q \cdot \tau \cdot m^{-1}$$

La conductividad se puede reescribir como:

$$\sigma = \mathrm{n} \cdot \mathrm{q} \cdot \mu$$

Si en un medio hay más de un tipo de portador de carga, la conductividad vendrá dada por la suma de las contribuciones de todos ellos:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{n_i} \cdot \mathrm{q_i} \cdot \mu_i = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{n_i} \cdot \mathrm{q_i^2} \cdot \tau \cdot m_i^{-1}$$

Conductividad y resistividad

- También es habitual caracterizar a un medio usando la **resistividad ρ**, inversa de la conductividad ($\rho = 1/\sigma$).
- Unidades:

  Intensidad (I): $C \cdot s^{-1}$ = Amperio = A

  Densidad de corriente (J): $C \cdot m^{-2} \cdot s^{-1} = A \cdot m^{-2}$

  Conductividad (σ): $A \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$ = Ohmio$^{-1} \cdot m^{-1} = \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$

  Resistividad (ρ): $A^{-1} \cdot V \cdot m = \Omega \cdot m$

  Diferencia de potencial (V): Voltio = $V = J \cdot C^{-1} = N \cdot m \cdot C^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$

  Campo eléctrico (E): $V \cdot m^{-1} = N \cdot C^{-1} = kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$

  Las unidades fundamentales en S.I. son kg, m, s, A (no C!), K, mol, cd

  También conviene conocer: Ω^{-1} = Siemens = mho

  (S.I.) (en desuso)

Conductividad Eléctrica a 295ºK

Li 1,07 9,32	Be 3,08 3,25	... Conductividad Eléctrica x $10^7/\Omega$ m -o- x $10^5/\Omega$ cm Resistividad Eléctrica x $10^{-8}\Omega$ m -o- x $10^{-6}\Omega$ cm										B	C	N	O	F	Ne ... ...
Na 2,11 4,75	Mg 2,33 4,30	...										Al 3,65 2,74	Si	P	S	Cl	Ar ... ...
K 1,39 7,19	Ca 2,78 3,6	Sc 0,21 46,8	Ti 0,23 43,1	V 0,50 19,9	Cr 0,78 12,9	Mn 0,072 139	Fe 1,02 9,8	Co 1,72 5,8	Ni 1,43 7,0	Cu 5,88 1,70	Zn 1,69 5,92	Ga 0,67 14,85	Ge	As	Se	Br	Kr ... ...
Rb 0,80 12,5	Sr 0,47 21,5	Y 0,17 58,5	Zr 0,24 42,4	Nb 0,69 14,5	Mo 1,89 5,3	Tc 0,7 14	Ru 1,35 7,4	Rh 2,08 4,8	Pd 0,95 10,5	Ag 6,21 1,61	Cd 1,38 7,27	In 1,14 8,75	Sn 0,91 11,0	Sb 0,24 41,3	Te	I	Xe ... ...
Cs 0,50 20,0	Ba 0,26 39,0	La 0,13 79,0	Hf 0,33 30,6	Ta 0,76 13,1	W 1,89 5,3	Re 0,54 18,6	Os 1,10 9,1	Ir 1,96 5,1	Pt 0,96 10,4	Au 4,55 2,20	Hg* 0,10 95,9	Tl 0,61 16,4	Pb 0,48 21,0	Bi 0,086 116,0	Po 0,22 46,0	At	Rn ... ...
Fr	Ra	Ac	...														
...			Ce 0,12 81,0	Pr 0,15 67,0	Nd 0,17 59,0	Pm ,,, ,,,	Sm 0,10 99,0	Eu 0,11 89	Gd 0,070 134	Tb 0,090 111,0	Dy 0,11 90,0	Ho 0,13 77,7	Er 0,12 81,0	Tm 0,16 62,0	Yb 0,38 26,4	Lu 0,19 53,0	...
...			Th 0,66 15,2	Pa	U 0,39 25,7	Np 0,085 118,0	Pu 0,070 143,0	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr	...

Datos de Kittel, Introduction to Solid State Physics, 7th Ed.
Referenced to G. T. Meaden, Electrical resistance of metals, Plenum, 1965.

Estudio de la Resistividad
Relación con las Propiedades Eléctricas Microscópicas

* Líquido

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu

Ley de Ohm: forma clásica - Resistencia

- La formulación más habitual de la ley de Ohm para circuitos se hace en función de la diferencia de potencial y la intensidad en lugar de J y E
- Sea un conductor homogéneo e isótropo de longitud L y sección S, con una diferencia de potencial V entre sus extremos. Dado que E=V/L:

$$I = \vec{J} \cdot \vec{S} = \sigma \cdot \vec{E} \cdot \vec{S} = \sigma \cdot \frac{V}{L} S$$

Despejando V: $V = \frac{L}{\sigma S} I = \frac{\rho L}{S} I$

Definiendo ahora la **resistencia R** como $\mathrm{R} = \rho L / S$:

$$\boxed{V = R \cdot I \qquad \text{(ley de Ohm)}}$$

Las unidades de R son los Ohmios (Ω =V/A)

Ejemplo (cuestión corta de examen):

Sea un hilo conductor cilíndrico. Si se reducen a la mitad su longitud y el radio de su sección, deducir en que factor variará su resistencia.

Solución:

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{\rho L}{\pi r^2}$$

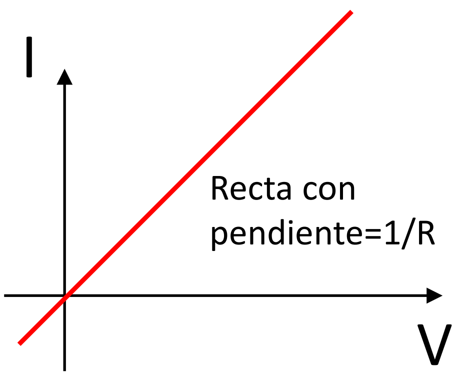
$$R' = \frac{\rho L'}{\pi r'^2} = \frac{\rho \frac{L}{2}}{\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\rho L}{2\pi \frac{R^2}{4}} = \frac{2\rho L}{\pi R^2} = 2R$$

Por tanto, la resistencia se duplica

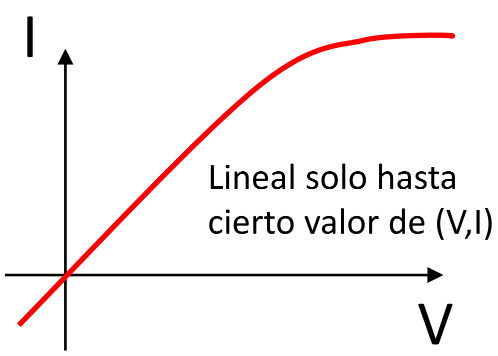
Ley de Ohm: forma clásica - Resistencia

- Existe variación de ρ (y por tanto de R) con la temperatura y dicha variación depende del material.
- Muchos materiales son óhmicos (relación entre V e I lineal), al menos sobre cierto intervalo de valores (V,I)
- Pero existen materiales no óhmicos donde se pierde la linealidad (R varía según varía V). Esto puede deberse entre otras cosas a la temperatura (p.ej. el filamento de una bombilla incandescente)

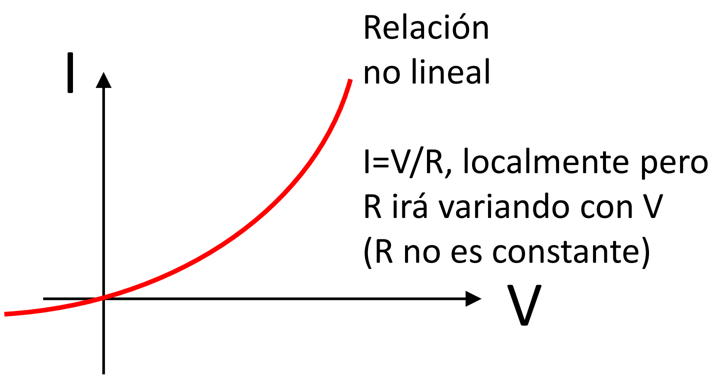
Óhmico ideal



Óhmico real



No óhmico



Ejemplo - Resistividad y resistencia

Ejemplo: Calcular la resistencia por unidad de longitud de un hilo metálico con resistividad 1.5·10^6 Ohm·m, de 0.321 mm de radio. Si se mantiene una diferencia de potencial de 10 V entre los extremos de un hilo de dicho material con una longitud de 10 m, calcular la intensidad y la densidad de corriente que circulará por el hilo.

<u>Solución abreviada</u>

Relación entre resistencia y resistividad: $\mathrm{R} = \frac{\rho L}{S} \Rightarrow \frac{R}{L} = \frac{\rho}{\pi r^2} = 4.63\ \Omega/m$

Si el hilo mide 10m, la resistencia sería: R=$4.63\ \Omega/m \cdot 10\ m = 46.3\ \ \Omega$

La intensidad (corriente) se calcula utilizando la ley de Ohm: $I = \frac{V}{R} = 0.216\ A$

El módulo del vector densidad de corriente será: $J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2} = 0.67 \cdot 10^6\, \frac{C}{m^2 s}$

Ejemplo - Resistividad y propiedades microscópicas

Ejemplo: Si el hilo del ejemplo anterior fuera cobre, con una densidad de 8.95 g/cm^3 y una resistividad de 5·10^{-8} Ohm·m, determinar la velocidad de arrastre de los electrones en el hilo (velocidad media en el sentido de la corriente), asumiendo que cada átomo contribuye con un electrón a la conducción. Hallar el campo eléctrico en el interior del conductor (Masa atómica del cobre: M_{Cu}=63.54 g/mol. Asumir que J es la resultante del ejemplo anterior).

<u>Solución abreviada:</u>

$d = 8950 \text{ kg m}^{-3}$ sea N el número de moles. El número portadores por unidad de volumen será:

$$n = N \cdot \frac{N_{Av}}{V} = \frac{m}{M}\frac{N_{Av}}{V} = d\frac{N_{Av}}{M} = 8{,}48 \cdot 10^{27} m^{-3}$$

Usando ahora la expresión microscópica de la densidad e corriente:

$$J = nqv = nev \Rightarrow v = \frac{J}{ne} = 4{,}9 \cdot 10^{-4} m s^{-1}$$

Por último, el campo eléctrico vendrá dado por la ley de Ohm generalizada:

$$J = \sigma E = \rho^{-1} E \Rightarrow E = \rho J = 0{,}00335\, N C^{-1}$$

Apéndice
Introducción a los semiconductores y sus aplicaciones

Física (780000)

Grado en Ingeniería de Computadores (grupo 1ºA, lunes mañana)

Curso 2019/2020 – Primer Cuatrimestre

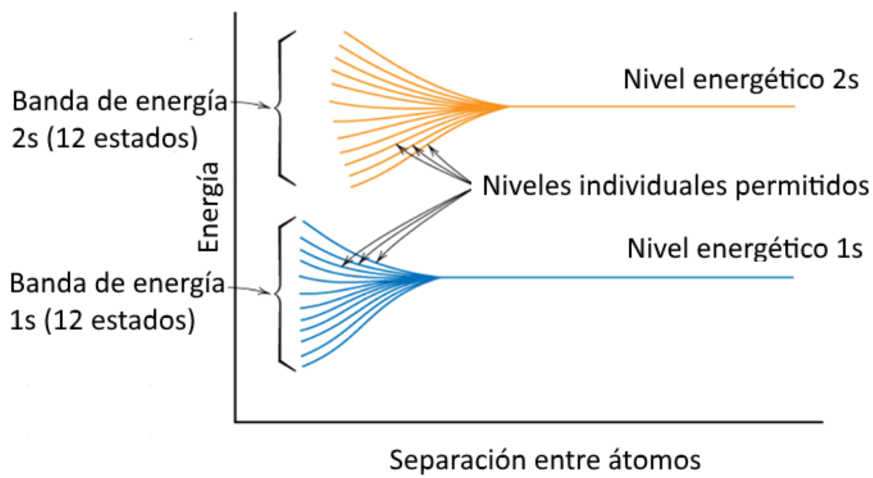
Universidad de Alcalá

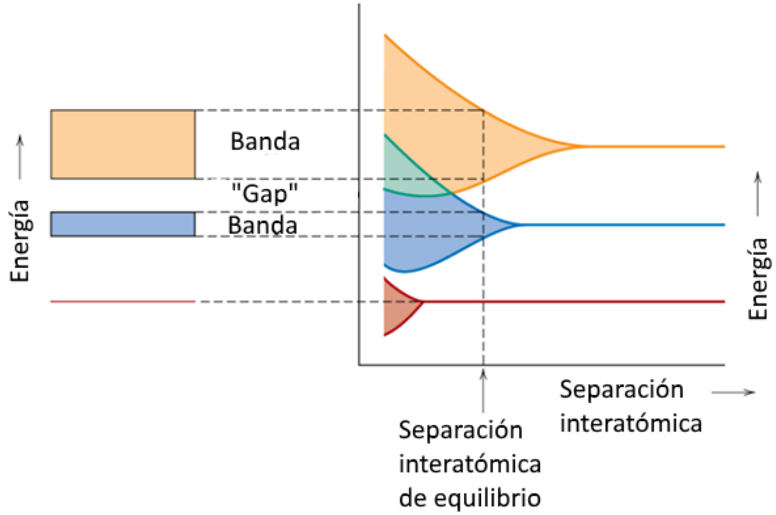
R. Gómez Herrero

Departamento de Física y Matemáticas

Teoría de bandas en sólidos

- Los niveles de energía de los electrones en los átomos aislados normalmente tienen gran separación energética
- Al acercar átomos, la estructura de niveles se modifica (se desdobla). El desdoblamiento se multiplica a medida que se aproximan más los átomos entre sí. En una red cristalina, el desdoblamiento termina por dar lugar a bandas casi continuas de estados posibles de energía, separadas por bandas de estados prohibidos (**banda prohibida** o “gap” (brecha))

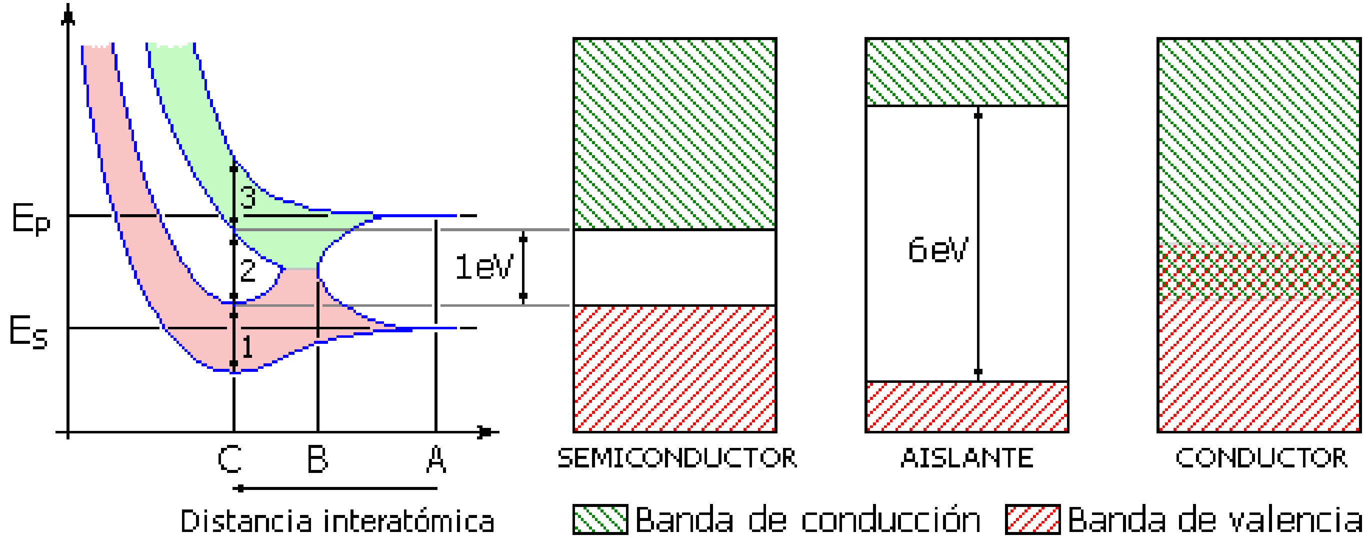




Figuras adaptadas de Callister & Rethwisch: Fundamentals of Materials Science and Engineering (2015)

Teoría de bandas en sólidos

- Las bandas superiores son las de valencia y de conducción:
  - **Banda de valencia**: banda de energía más alta que contiene electrones
  - **Banda de conducción**: banda de energía más baja que contiene estados no ocupados por electrones. En ella los electrones son casi libres y por tanto contribuyen a la conducción de corriente eléctrica con facilidad
- La estructura de los niveles de bandas, y en concreto la separación entre las bandas de valencia y conducción y su estado de llenado, determinará el comportamiento del material en cuanto a la conducción eléctrica.



Teoría de bandas en sólidos

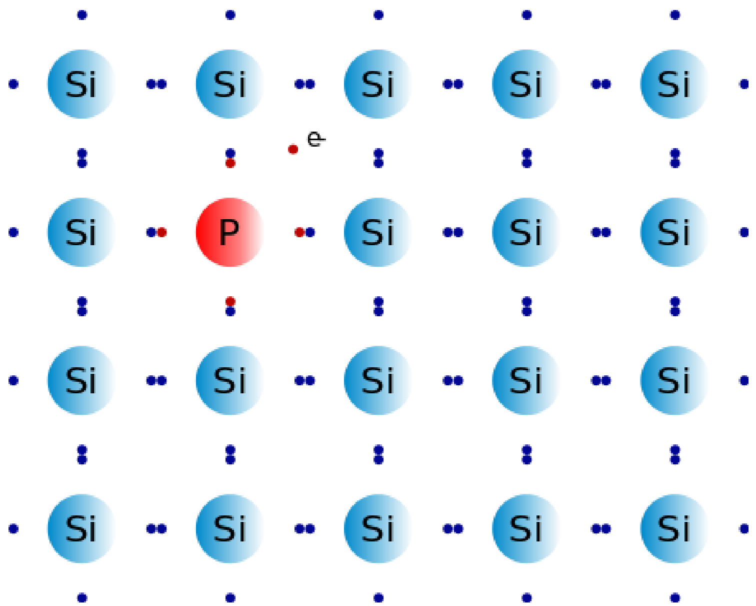
- **Aislantes:** Mucha separación entre ambas bandas (comparada con la energía de excitación térmica). Los electrones no pueden saltar entre ambas bandas. Por tanto no hay electrones libres y no existe conducción de la electricidad. Ejemplo: diamante (gap de 6 eV)
- **Conductores:** o bien la banda de valencia no está llena (con lo cual es también banda de conducción) o existe muy poca separación o solapamiento entre las energías de las bandas de valencia y de conducción, de modo que los electrones bajo la acción de un campo eléctrico pueden saltar a la banda de conducción y moverse por el material. Ejemplo: metales como el cobre o el oro
- **Semiconductores:** poca separación (del orden de 1 eV). Existe conducción pero pobre. Por ejemplo subiendo la temperatura se consigue excitar algunos electrones que pasan a la banda de conducción inicialmente vacía (al contrario que en los conductores, su resistividad decrece con la temperatura). Ejemplos: silicio, germanio, arseniuro de galio.

  Ejemplo: fotoconductor (enlace a simulación interactiva básica).

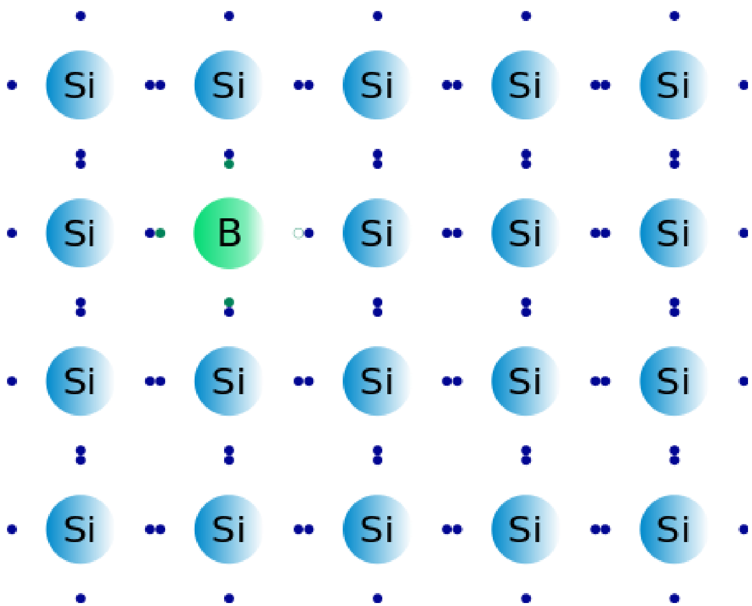
Semiconductores

- En semiconductores es habitual es regular la estructura de bandas introduciendo deliberadamente átomos ajenos al material (dopado), por eso se distingue entre semiconductores **intrínsecos** (puros) y **extrínsecos** (dopados con impurezas). En estos últimos la presencia de átomos de impureza crea nuevos niveles energéticos que facilitan la conducción:
  - Si el nuevo nivel está cerca de la banda de conducción, permite a los electrones saltar a la banda de conducción (**semiconductor tipo N (negativo), dopado con impurezas “donadoras” de electrones**)
  - Si el nuevo nivel está cerca de la banda de valencia, permite que algunos electrones abandonen la banda de valencia. Los huecos que aparecen en dicha banda se comportan como portadores positivos de carga (**semiconductor tipo P (positivo), dopado con impurezas “aceptoras” de electrones**). Los huecos no son verdaderas partículas portadoras y los que se mueven realmente son los electrones.

- Ejemplos de dopado de semiconductores:



Tipo N: sustituyendo un Si por P, se dona un electrón



Tipo P: sustituyendo un Si por B, se pierde un electrón (se genera un hueco)

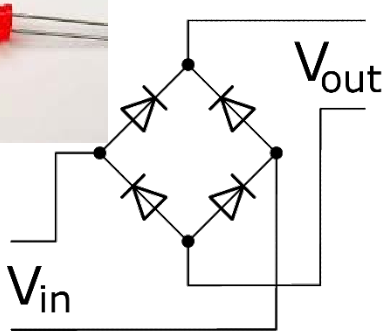
Semiconductores

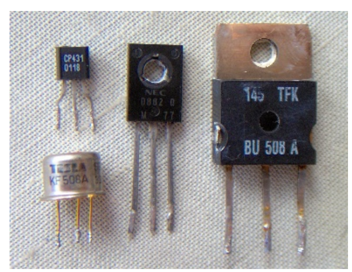
- Semiconductores extrínsecos de tipo P y de tipo N

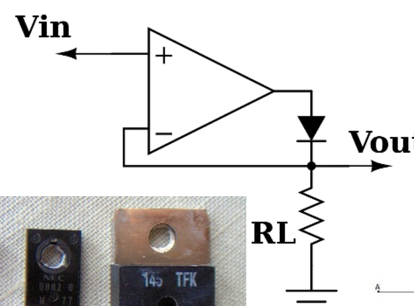
https://youtu.be/fFVU7-kfPe8

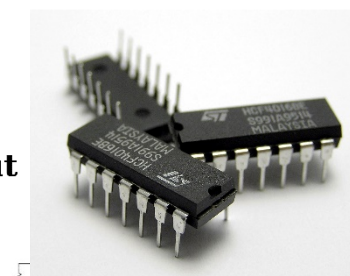
Semiconductores – Aplicaciones tecnológicas

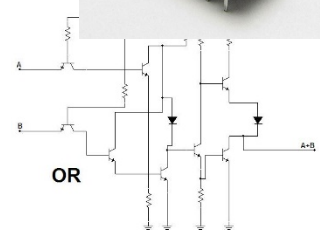
- Entre otros usos, los semiconductores son empleados en células fotovoltaicas (paneles solares) y sobre todo son la base de muchos componentes electrónicos como:
  - Diodos (dejan pasar la corriente en una sola dirección). Los de tipo LED emiten luz al paso de dicha corriente
  - Transistores : normalmente cuentan con tres terminales, dependiendo la señal entre dos de ellos de la existente en la otra combinación. Cumplen múltiples funciones en circuitos electrónicos (amplificador, oscilador, conmutador, rectificador)
  - Circuitos integrados (chips): integración de grandes cantidades de transistores en un encapsulado miniaturizado. Base de la electrónica digital





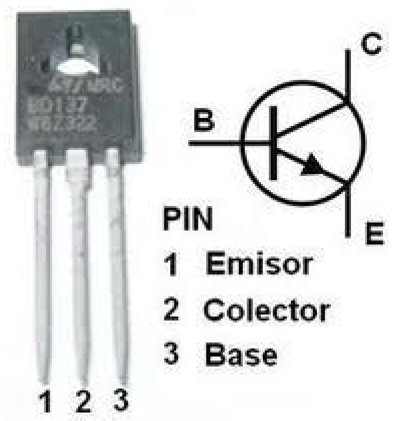


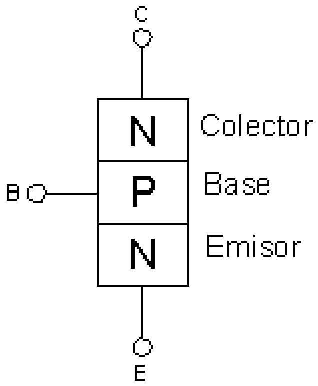


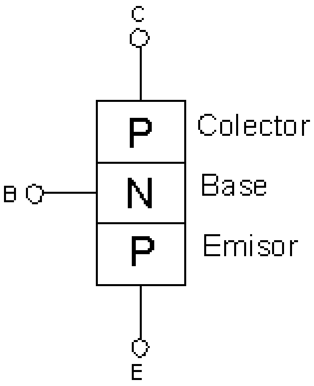


Semiconductores – El transistor

- Tres terminales (emisor, base, colector) dos uniones npn o pnp
- Algunas funciones en electrónica:
  - Permitir o negar el paso de señales en función de una pequeña señal aplicada entre base y emisor (función de interruptor)
  - Función de amplificador: aumenta el tamaño de la señal aplicada







Video explicativo: https://www.youtube.com/watch?v=558eFxgz1Dc

Tema 3b
Circuitos de corriente continua

Física (780000)

Grado en Ingeniería de Computadores (grupo 1ºA, lunes mañana)

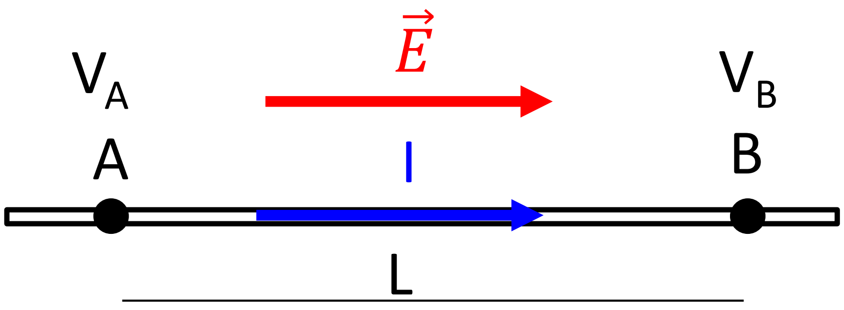
Curso 2019/2020 – Primer Cuatrimestre

Universidad de Alcalá

R. Gómez Herrero

Departamento de Física y Matemáticas

- La base para el estudio de circuitos de corriente continua es la ley de Ohm:



$V_A > V_B$ => el campo eléctrico se dirige desde A hacia B y las cargas positivas se mueven en dicha dirección.

$E = (V_A - V_B) \cdot L = V \cdot L$ (aquí V denota diferencia de potencial, por brevedad no usamos la notación ΔV)

Criterio de signos: I sigue la dirección en que se moverían cargas positivas (aunque los portadores sean electrones y se muevan realmente en dirección opuesta)

$$\boxed{\mathbf{I = V/R}}$$

$$\boxed{\mathbf{V = R \cdot I}}$$

Materiales óhmicos: $R = \rho L/S$ = constante

Potencia disipada en un conductor

- Cuando cierta cantidad de carga ΔQ se desplaza en el conductor de un punto A a otro de potencial menor B, reduce su energía potencial electrostática:

$$\Delta U = \Delta Q \cdot (V_B - V_A) = -\Delta Q \cdot V < 0$$

Por tanto la energía perdida por unidad de tiempo será:

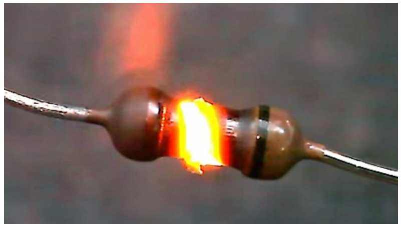
$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cdot V = V \cdot I$$

Potencia disipada en un conductor

- Esta energía perdida por unidad de tiempo se disipa en forma de calor generado por las colisiones microscópicas (**efecto Joule**: aumento de la temperatura del material). La potencia disipada por tanto será:

$$\boxed{P = V \cdot I = R \cdot I^2 = V^2/R}$$

- Un dato relevante es la potencia máxima que puede disipar un conductor (valor de P por encima del cual el conductor puede sufrir daños). Para una R fija, esto limita el valor de (V,I), que debe mantenerse siempre por debajo de la curva $V=P_{max}/I$



Potencia disipada en un conductor

Ejercicio:

Calcular la máxima corriente segura que puede circular por una resistencia de 1.8 kΩ clasificada por el fabricante con 0.5 W de potencia máxima

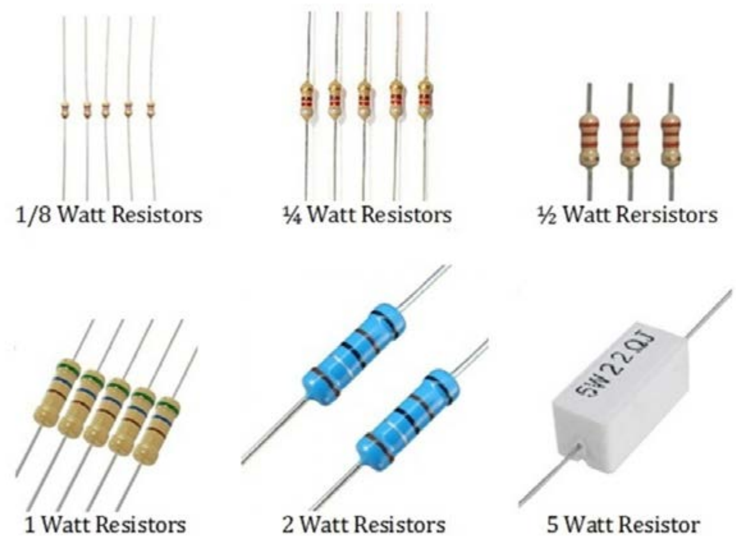
<u>Solución:</u>

Dado que tenemos que hallar la intensidad máxima, partimos de la expresión de la potencia en función de la intensidad:

$$P = RI^2 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{P}{R}} \Rightarrow I_{max} = \sqrt{\frac{P_{max}}{R}} = \sqrt{\frac{0.5\,W}{1.8 \cdot 10^3 \Omega}} = 0{,}016\,A = 1{,}6\,mA$$

(Nótese que W=J/s=V·A y que Ω=V/A)

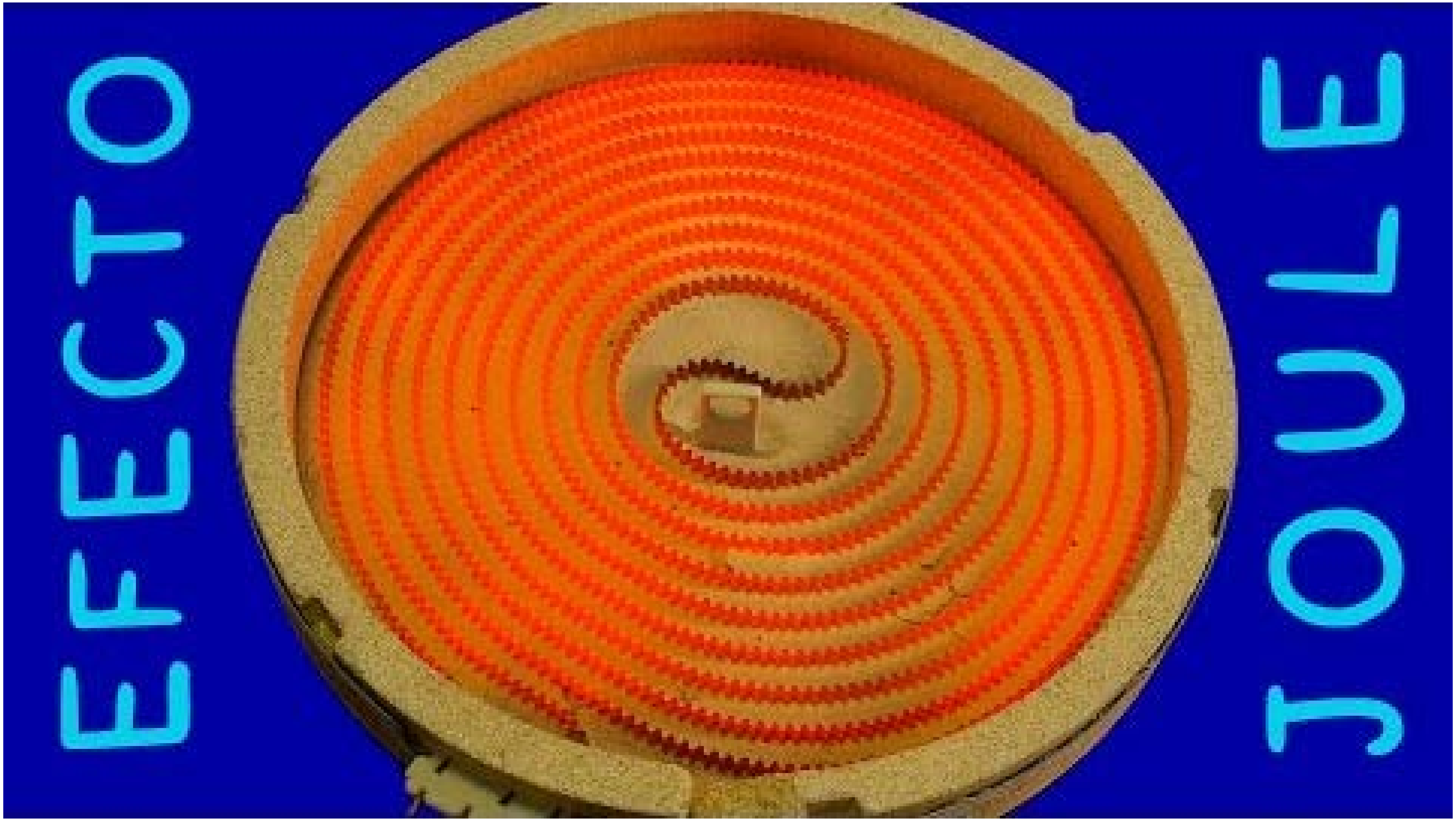
La máxima potencia es un parámetro importante a la hora de seleccionar componentes en el diseño de circuitos, puesto que si se supera el valor suministrado por el fabricante, tarde o temprano la resistencia sufrirá daños



Resistividad, resistencia y efecto Joule

https://www.youtube.com/watch?v=PFf8FcWyZco

Resistividad, resistencia y efecto Joule



https://youtu.be/3dwNzK1fiJ8

Aplicación del efecto Joule en fusibles de protección:

https://www.youtube.com/watch?v=2MWwwrOQOUc

https://www.youtube.com/watch?v=4szbWvMmzKY
(en español)

Corriente, voltaje y sus efectos en el cuerpo humano:

https://www.youtube.com/watch?v=9iKD7vuq-rY

Potencia disipada en un conductor

Ejemplo

4.- En la tabla siguiente se dan los valores del voltaje "V" en bornes e intensidad "I" de la corriente de tres lámparas de incandescencia de 110 V.

	100 W (wolframio)	40 W (wolframio)	48 W (carbón)
V (voltios)	I (amperios)	I (amperios)	I (amperios)
5	0.20	0.10	0.009
10	0.25	0.14	0.021
20	0.35	0.17	0.60
40	0.50	0.22	0.15
60	0.62	0.27	0.23
80	0.73	0.31	0.31
100	0.83	0.35	0.39
120	0.91	0.37	0.47

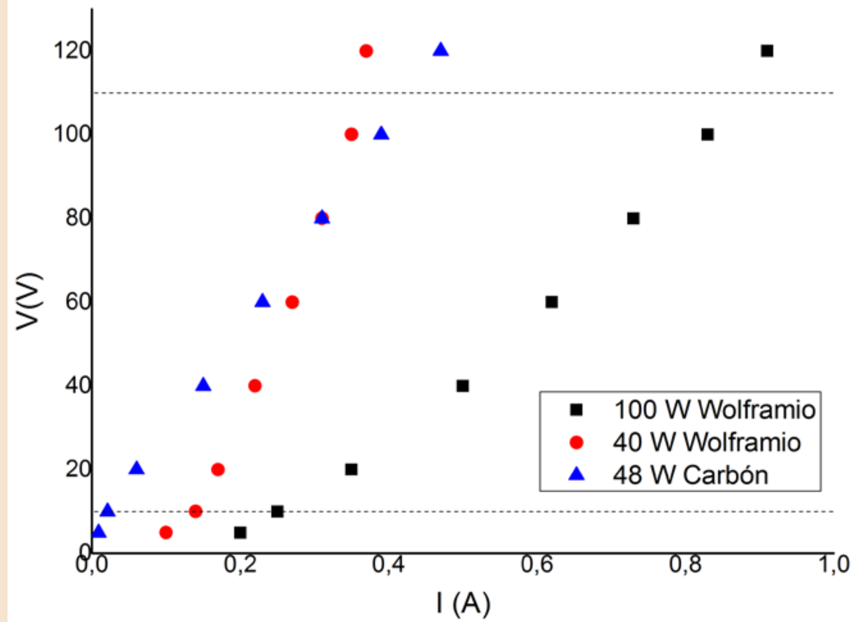
a) Construir una gráfica voltaje-intensidad para cada lámpara.

b) Hallar la resistencia de cada lámpara para voltajes de 10 V y 110 V. ¿Qué lámpara tiene mayor y menor resistencia a 110 V?

c) ¿Qué lámparas tienen coeficiente térmico de resistencia positivo y cuáles negativo?

d) Calcular la potencia real absorbida por cada lámpara a un voltaje de 110 V.

e) Si las lámparas de 100 W y 40 W se conectasen en serie a una línea de 110 V, ¿cuál será la corriente en cada una y el voltaje en sus bornes?



a) Vemos que el comportamiento más lineal (óhmico)corresponde a la lámpara de carbón de 48 W (azul)

Potencia disipada en un conductor

Ejemplo (continuación)

b.1) Para 10V aplicamos la ley de Ohm en la forma R=V/I:

$$R_{100W} = 40\Omega \quad R_{40W} = 71{,}4\Omega \quad R_{48W} = 476{,}2\Omega$$

b.1) Para 110V realizamos una interpolación lineal entre las dos últimas filas:

$$R_{100W} = 126{,}4\Omega \quad R_{40W} = 305{,}6\Omega \quad R_{48W} = 255{,}8\Omega$$

c) Coeficiente de temperatura α: $R = \frac{\rho L}{S}$ $\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$

Si la resistividad crece con la temperatura (α positivo): PTC (conductor)

Si la resistividad decrece con la temperatura (α negativo): NTC (semiconductor)

En este caso vemos que las lámparas de 100 y 40 W presentan una mayor resistencia al crecer V (y por tanto T), mientras que la lámpara de 48 W se comporta al contrario.

d) Potencia disipada a 110V. Usando P=VI:

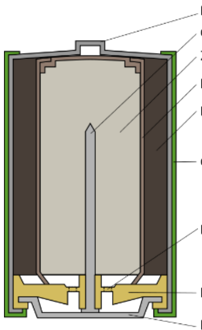
$$P_{100W} = 95{,}7 \text{ W} \quad P_{40W} = 39{,}6W \quad P_{48W} = 47{,}3\ W$$

e) Hallamos la R equivalente (suma) y aplicamos la ley de Ohm:

$$I = \frac{110V}{(126{,}4+305{,}6)\Omega} = 0{,}255A$$

$$V_{100W} = R_{100W} \cdot I = 32{,}2\ V;\ V_{40W} = R_{40W} \cdot I = 76{,}8\ V; (V_{100W} + V_{40W} = 110V)$$

- También es posible transformar (parte de) esta energía en otras formas de energía además de calor, por ejemplo energía mecánica (ejemplo: motores eléctricos).
- Distinguimos dos tipos de elementos en un circuito eléctrico:
  - Elementos pasivos: consumen energía eléctrica y la transforman en otro tipo de energía. Ejemplo: resistencias.
  - Elementos activos: generan energía eléctrica a partir de otro tipo de energía. Ejemplos:
    - Pilas o baterías: transforman energía química en eléctrica
    - Dinamo: genera energía mecánica en eléctrica

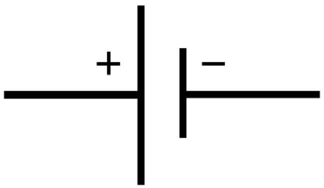


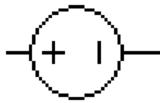
Algunos símbolos habituales en circuitos de C.C.

- Resistencia

- Resistencia variable

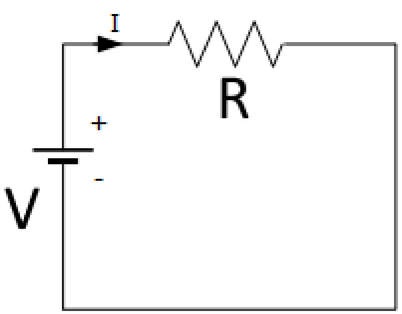
- Fuente o batería de corriente continua





- Voltímetro

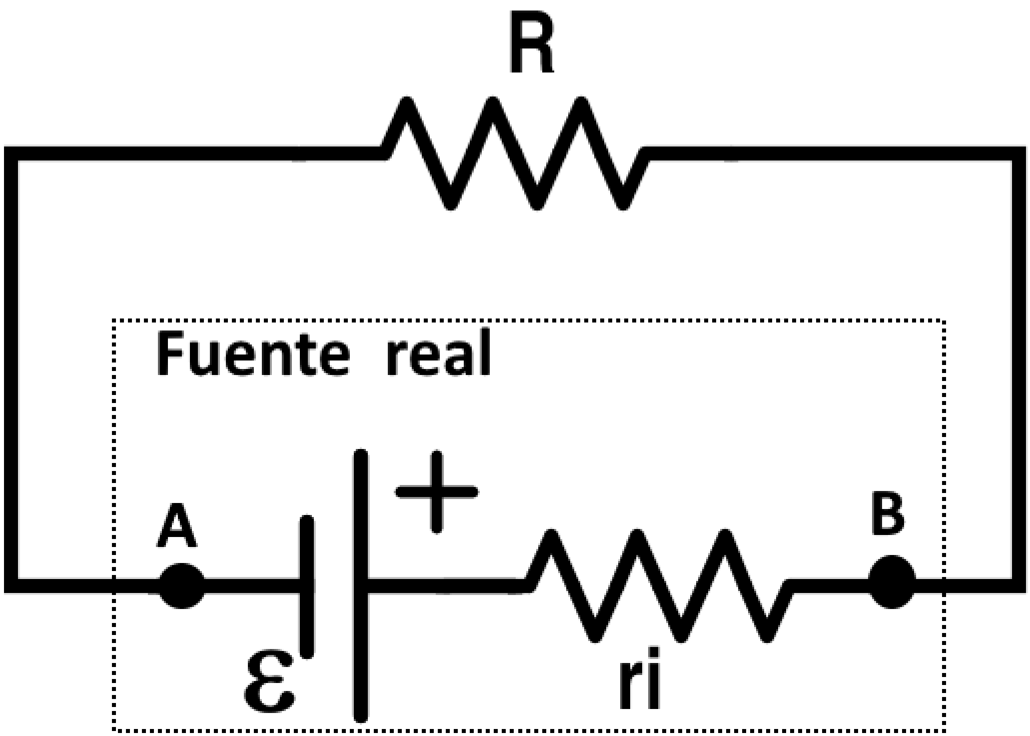
- Amperímetro



Fuentes reales: fuerza electromotriz

- Definimos **fuerza electromotriz** ε de un elemento activo (batería, fuente) como el **trabajo por unidad de carga que éste suministra**. El resultado de este trabajo es elevar la energía potencial electrostática, es decir, crear una diferencia de potencial en virtud de la cual se pueda suministrar corriente a un circuito
- <u>Un batería ideal</u> mantendría entre sus bornes una <u>diferencia de potencial igual a su fuerza electromotriz</u> independientemente de los elementos conectados al circuito
- <u>Las baterías reales</u> tienen cierta **resistencia interna r_i,** y la propiedad anterior deja de cumplirse ya que existe una pequeña caída de potencial dentro de la propia fuente.

Fuentes reales: fuerza electromotriz

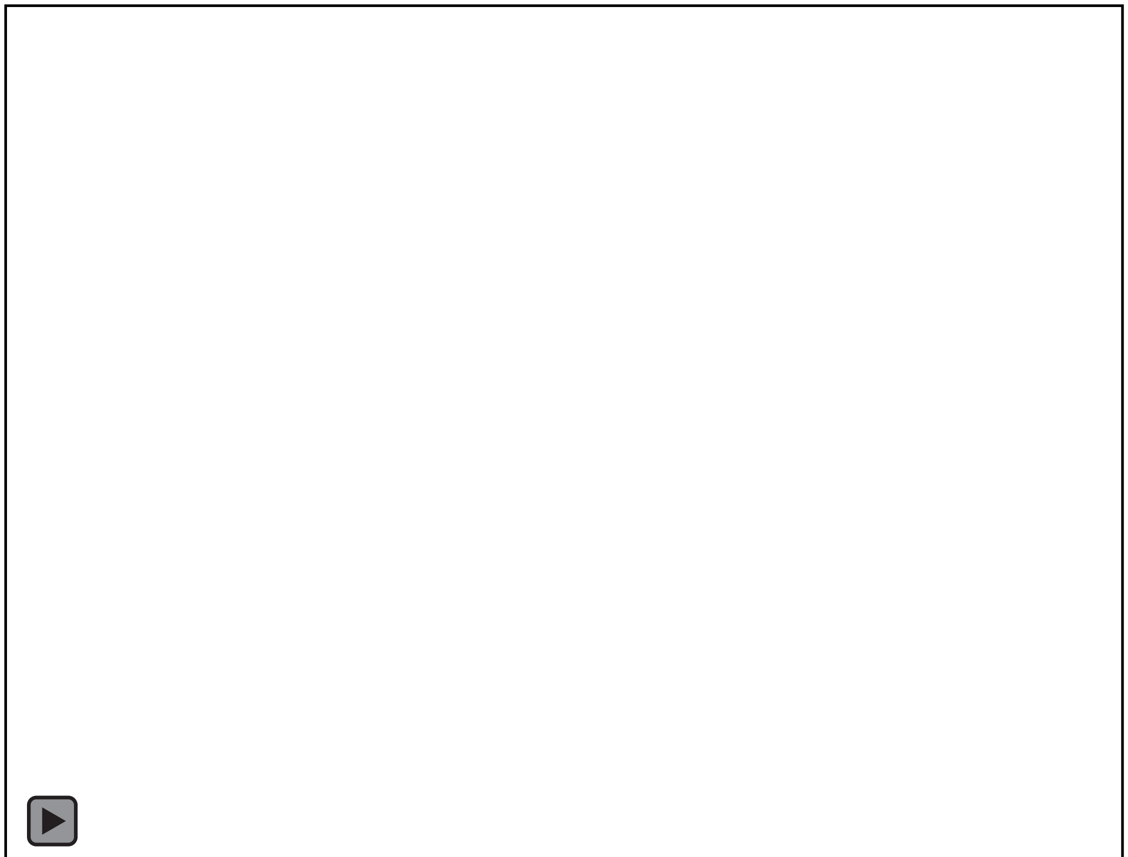


Fuente o batería real: $V_B - V_A = \varepsilon - r_i \cdot I < \varepsilon$

Fuente ideal: $r_i = 0 \Rightarrow V_B - V_A = \varepsilon$

Fuentes reales: fuerza electromotriz

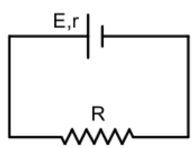
- Analogía energética con un flujo de agua. La pila actúa como “bombeador” de cargas (aumenta su energía potencial), de forma que luego “caen” a menor potencial



https://faraday.physics.utoronto.ca/IYearLab/Intros/DCI/Flash/WaterAnalogy.html

Fuentes reales: fuerza electromotriz

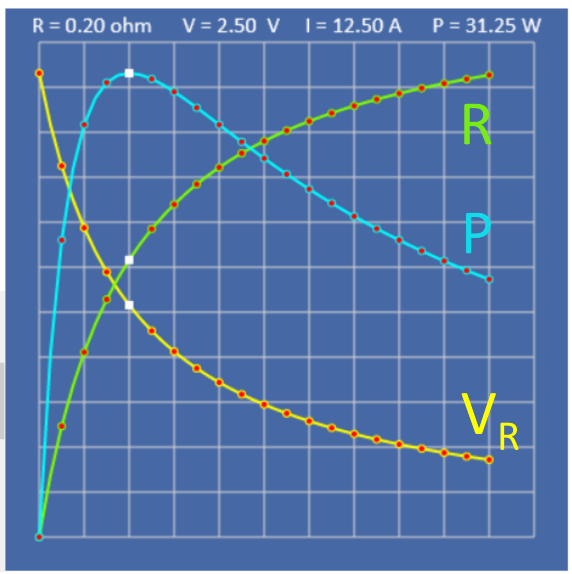
- Teorema de máxima transferencia de potencia: la máxima transmisión de potencia por parte de una fuente de CC se logrará cuando se conecte a ella una resistencia igual a su resistencia interna:



E=5 V r=0.2 Ω

External Resistance (in ohm)	Potential Difference (in volt)	Current (in A)	Power (in W)
0.20	2.50	12.50	31.25
0.25	2.78	11.11	30.86
0.30	3.00	10.00	30.00
0.35	3.18	9.09	28.93
0.40	3.33	8.33	27.78
0.45	3.46	7.69	26.63
0.50	3.57	7.14	25.51
0.55	3.67	6.67	24.44

Animation by Surendranath.B. Hyderabad, India



$$\varepsilon = (R + r)I = (R + r)\frac{V_{Res}}{R}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

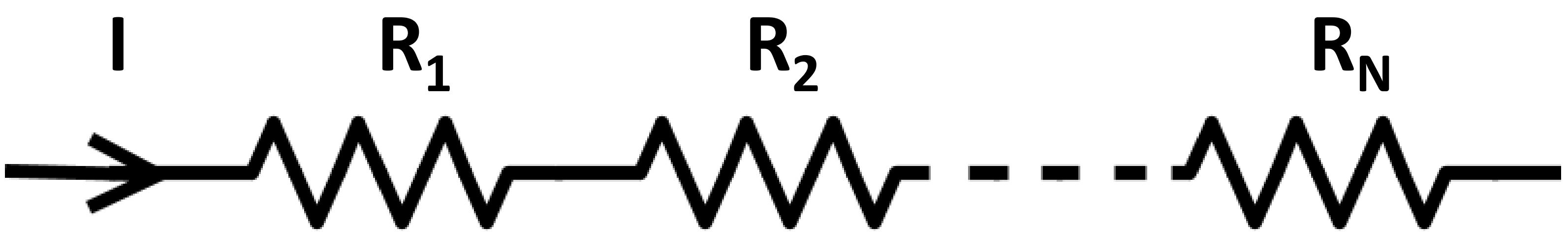
$$P = RI^2 = R\frac{\varepsilon^2}{(R + r)^2}$$

$$P_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}, \text{ cuando } R = r$$

- Resistencia equivalente: es la que sustituiría en el circuito al conjunto de resistencias originales transportando la misma corriente I y estando sometida a la misma diferencia de potencial V
- <u>Resistencias en serie.</u> Comparten la misma I, por tanto

$$V = IR_1 + IR_2 + \cdots + IR_N = I(R_1 + R_2 + \cdots + R_N) = IR_{eq}$$

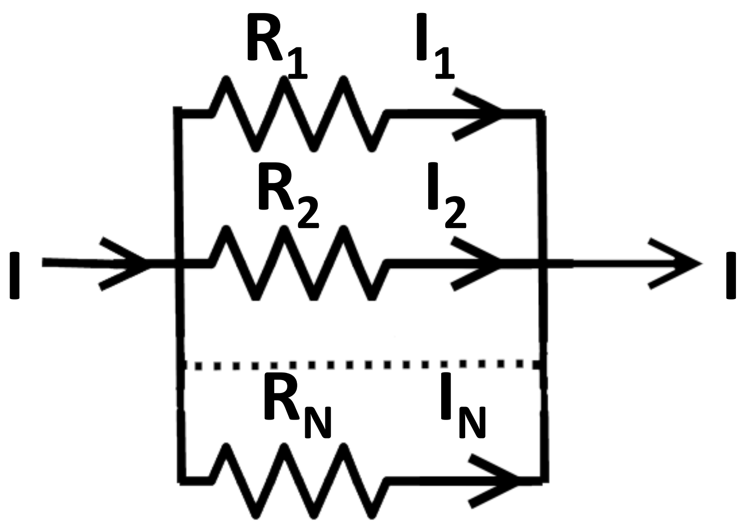
$$\Rightarrow \boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N}$$



- Resistencias en paralelo. Comparten la misma caída de potencial V. Teniendo además en cuenta que la intensidad total es la suma de las intensidades en cada rama:

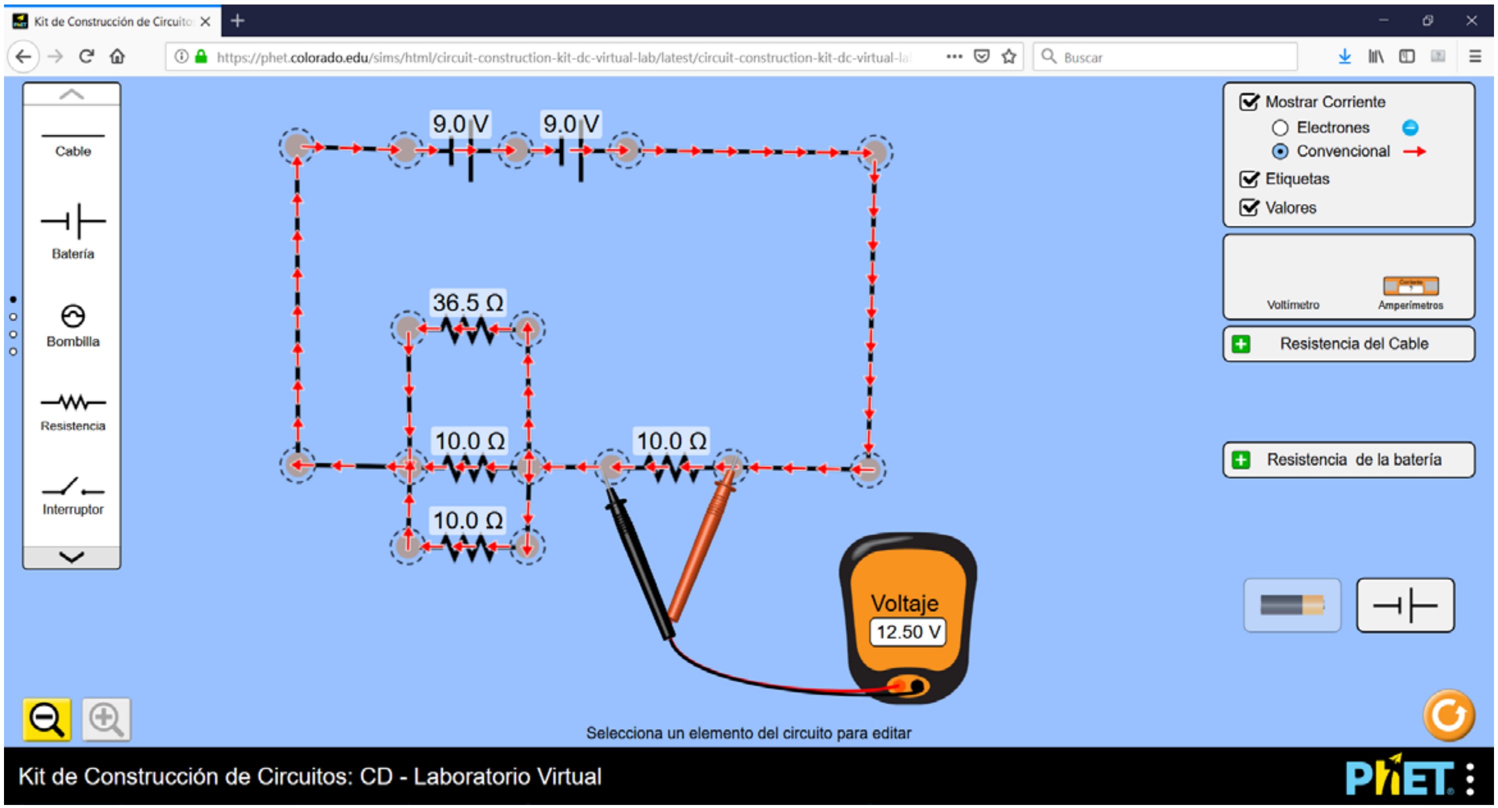
$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_N = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \cdots + \frac{V}{R_N} = \frac{V}{R_{eq}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}}$$



Asociaciones de resistencias

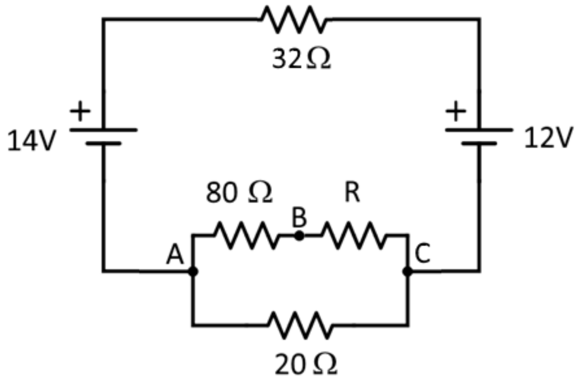
- Simulador virtual de circuitos de CC:



HTML5: https://phet.colorado.edu/es/simulation/circuit-construction-kit-dc-virtual-lab

Java: https://phet.colorado.edu/es/simulation/legacy/circuit-construction-kit-dc

Ejemplo (problema de examen): Sea el circuito de CC de la figura. Sabiendo que por la resistencia de 32 Ω circula una intensidad de 40 mA: a) Hallar el valor de la resistencia R. b) Determinar la potencia que suministra o absorbe cada fuente, así como la potencia disipada entre los puntos A y C



Solución abreviada:

a) La resistencia equivalente del bloque comprendido entre los puntos A y C será (usar expresiones serie y paralelo):

$$R_{AC} = \frac{20R + 1600\ \Omega}{R + 100\ \Omega}$$

De modo que la resistencia total del circuito será:

$$R_{TOT} = R_{AC} + 32\Omega = \frac{52R + 4800\ \Omega}{R + 100\ \Omega}$$

Resulta obvio que la corriente circulará en sentido horario y la batería de la derecha recibirá corriente por su polo positivo en vez de suministrarla. Aplicando la ley de las mallas:

$$40 \cdot 10^{-3} A \cdot \frac{52R + 4800\ \Omega}{R + 100\ \Omega} = 14V - 12V = 2V \Rightarrow R = 100\Omega$$

b)Las potencias serán:

$$P_{14V} = \epsilon \cdot I = 14V \cdot 0{,}04A = 0{,}56\ W\ (suministrada)$$

$$P_{12V} = \epsilon \cdot I = 12V \cdot 0{,}04A = 0{,}48\ W\ (absorbida)$$

$$P_{14V} = R_{TOT}\ I^2 = 18\Omega \cdot 0{,}04^2 A^2 = 0{,}0288\ W\ (disipada) \quad balance\!: 0{,}56 = 0{,}0288 + 32 \cdot 0{,}04^2 + 0{,}48$$

Asociaciones de resistencias

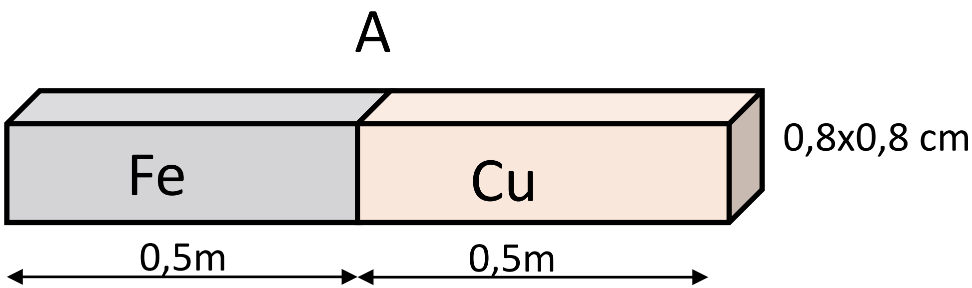
Ejercicio: Sea un conductor A está formado uniendo extremo contra extremo dos barras prismáticas de 0,5 m de longitud, una de hierro y otra de cobre, ambas de sección cuadrada de 0,8 cm de lado. Otro conductor B consiste en dos barras unidas lateralmente, una de cobre y otra de hierro, ambas de 1 m de longitud y sección 0,4x0,8 cm:

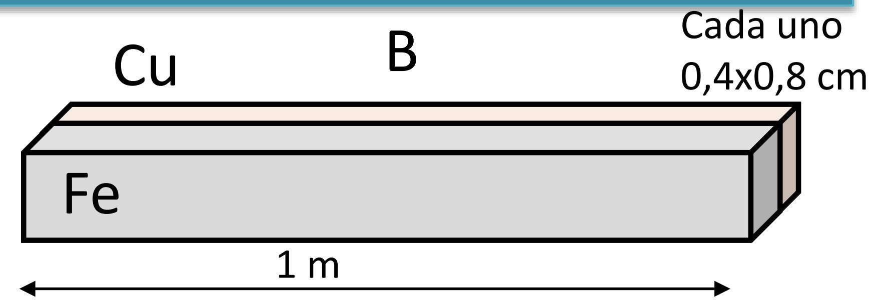
a) Hallar la resistencia de los conductores A y B.
b) ¿En cuál de los dos conductores componentes se disipará mayor potencia si sometemos al conductor A a una diferencia de potencial ΔV?
c) ¿Y si lo hacemos con el conductor B?

Datos: resistividades a temperatura ambiente:

$\rho_{Fe}=10{,}0\cdot 10^{-6}\ \Omega cm$, $\rho_{Cu}=1{,}77\cdot 10^{-6}\ \Omega cm$.

Asociaciones de resistencias





<u>Solución abreviada:</u>

a) Aplicando directamente la definición de resistencia a cada componente, pasando todas las unidades al SI, y teniendo en cuenta que el montaje A es en serie y el B en paralelo:

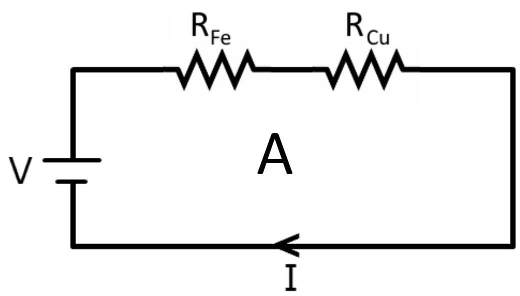
<u>CONDUCTOR A (serie):</u>

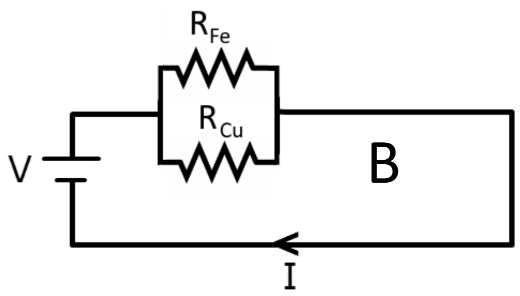
$$\left\{\begin{array}{l} R_{Fe} = \dfrac{\rho_{Fe} L_{Fe}}{S_{Fe}} = \dfrac{10 \cdot 10^{-8} \Omega\, m\; 0{,}5\, m}{0{,}008^2 m^2} = 0{,}78 \cdot 10^{-3} \Omega \\ R_{Cu} = \dfrac{\rho_{Cu} L_{Cu}}{S_{Cu}} = \dfrac{1{,}77 \cdot 10^{-8} \Omega\, m\; 0{,}5\, m}{0{,}008^2 m^2} = 0{,}14 \cdot 10^{-3} \Omega \end{array}\right. \Rightarrow R_A = R_{Fe} + R_{Cu} = 9{,}2 \cdot 10^{-4}\ \Omega$$

<u>CONDUCTOR B (paralelo):</u>

$$\left\{\begin{array}{l} R_{Fe} = \dfrac{\rho_{Fe} L_{Fe}}{S_{Fe}} = \dfrac{10 \cdot 10^{-8} \Omega\, m\; 1\, m}{0{,}004 \cdot 0{,}008\, m^2} = 3{,}125 \cdot 10^{-3} \Omega \\ R_{Cu} = \dfrac{\rho_{Cu} L_{Cu}}{S_{Cu}} = \dfrac{1{,}77 \cdot 10^{-8} \Omega\, m\; 1\, m}{0{,}004 \cdot 0{,}008\, m^2} = 5{,}53 \cdot 10^{-4} \Omega \end{array}\right. \Rightarrow R_B = \frac{R_{Fe} + R_{Cu}}{R_{Fe} R_{Cu}} = 4{,}7 \cdot 10^{-4}\ \Omega$$

Nótese como RB es menor que las resistencias componentes





b) Montaje serie. Circula la misma $I = V_{bat}/R_A$ por ambos conductores. Expresamos P en función de I:

$$P = VI = RI^2 \Rightarrow \quad P_{Fe} = R_{Fe}I^2; \qquad P_{Cu} = R_{Cu}I^2$$

Como $R_{Fe} > R_{Cu} \Rightarrow P_{Fe} > P_{Cu}$ A una I dada, el Fe disipa más calor porque conduce peor la electricidad

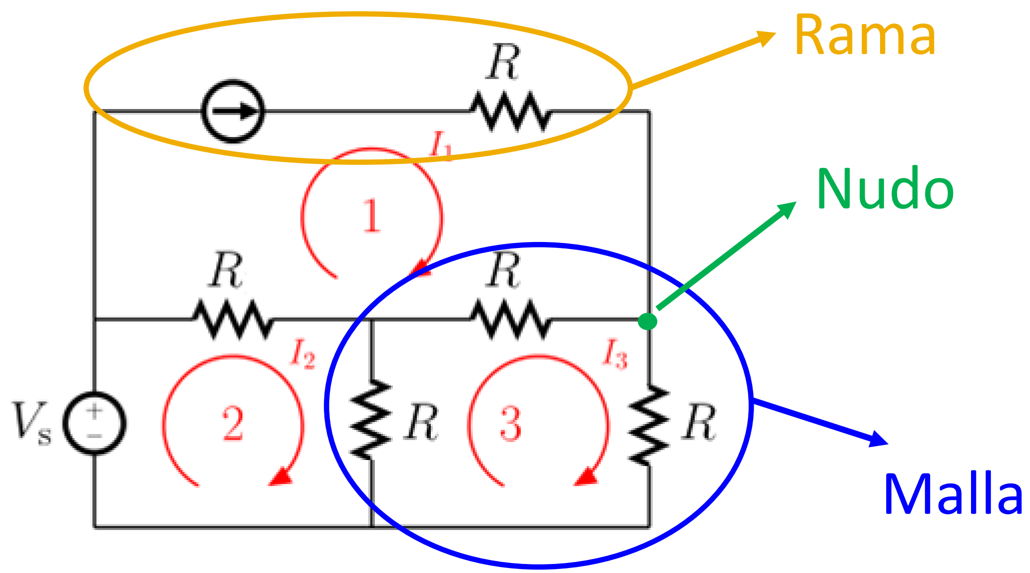
c) Montaje paralelo. Ambos conductores están sometidos a la misma $V = V_{bat}$. Expresamos P en función de V:

$$P = VI = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \quad P_{Fe} = \frac{V^2}{R_{Fe}}; \qquad P_{Cu} = \frac{V^2}{R_{Cu}}$$

Como $R_{Fe} > R_{Cu} \Rightarrow P_{Fe} < P_{Cu}$ A una V dada, el Fe disipa menos calor porque conduce peor la electricidad y esto supone menos paso de corriente

Elementos de un circuito

- **Elemento:** componente con dos (o más) bornes (terminales) que forma parte del circuito. Por ejemplo, una resistencia.
- **Conductor:** hilo que une los componentes en un circuito y que se considera de resistencia despreciable
- **Rama:** unión de elementos de un circuito formando un conjunto con solo dos terminales
- **Malla:** trayectoria cerrada por la unión de varias ramas.
- **Nudo (o nodo):** es el punto de conexión entre dos o más ramas (donde concurren 3 o más conductores). Se representa normalmente mediante un punto.



Reglas de Kirchhoff

Permiten abordar la resolución de circuitos complejos compuestos por varias mallas. La primera ley se refiere a intensidades y la segunda a voltajes.

Ley de los nudos: la suma de las intensidades que concurren en un nudo es igual a cero. Básicamente es una consecuencia de la conservación de la carga: si la carga no se destruye ni se crea en el nudo, el balance total de corriente entrante debe ser igual al de corriente saliente

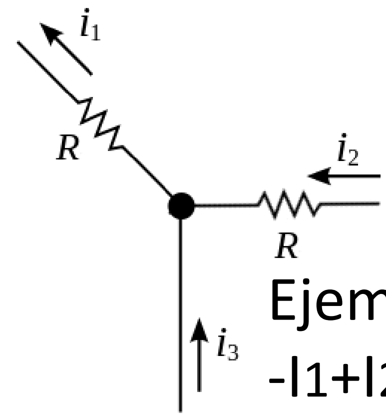
Ley de las mallas: la suma algebraica de fuerzas electromotrices en un bucle cerrado (malla) es equivalente a la suma de algebraica de caídas de potencial en dicha malla. Es una consecuencia de la conservación de la energía

Veamos ahora su formulación matemática:

Ley de los nudos:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} I_i = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = 0}$$

siendo N el número de hilos que concurren en el nudo



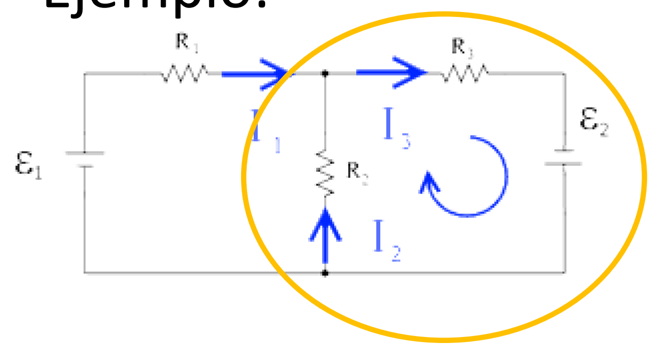
Ejemplo:

-I1+I2+I3=0

Ley de las mallas:

$$\sum_{i=1}^{N} V_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{i=1}^{N} R_i \cdot I_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i}$$

Ejemplo:



$R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = \varepsilon_2$

Resolución práctica de circuitos de C.C.

1) Identificar cada rama "i" y asignar un sentido arbitrario a las intensidades "I_i" que circulan por cada una de ellas

2) Identificar los nudos y plantear la primera regla de Kirchhoff asignando signo negativo a intensidades salientes y signo positivo a intensidades entrantes. Nótese que no hace falta plantear todos los nudos puesto que una de las ecuaciones será redundante

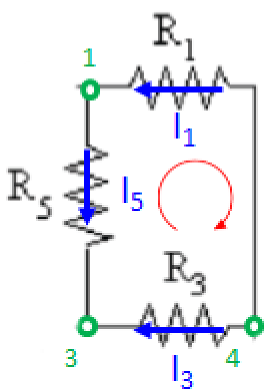
3) Identificar las mallas. Definir un sentido arbitrario para la intensidad circulante en cada malla. Formular la segunda regla de Kirchhoff para cada malla, teniendo en cuenta el siguiente criterio de signos para las caídas de potencial "$R_i \cdot I_i$" y las f.e.m. "ε_i":
   - ε_i es positiva si la intensidad es entrante en la parte negativa de la fuente y saliente en la parte positiva. En caso contrario es negativa
   - $R_i \cdot I_i$ es positiva si I_i sigue el sentido arbitrario definido al marcar la malla y negativa en caso contrario

4) Resolver el sistema de ecuaciones resultantes. Nótese que si se formulan todas las mallas posibles, habrá ecuaciones redundantes. Las mallas que son la composición de otras no aportan información nueva.

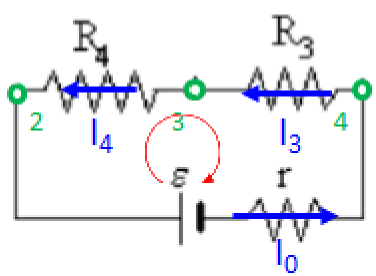
Resolución práctica de circuitos de C.C.

Recordar que la elección del sentido de la intensidad en cada rama y el sentido de circulación considerado positivo en cada malla son una elección arbitraria PERO una vez seleccionados hay que marcar los signos de forma consecuente en las ecuaciones de nodos y mallas.

Ejemplos de signos para las ecuaciones de las mallas:



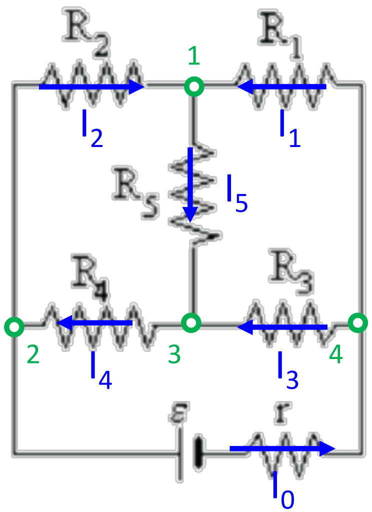
I_1 e I_5 serían negativas por ir dirigidas contra el sentido considerado positivo en la malla (flecha circular roja)
I_3 sería positiva al ir a favor



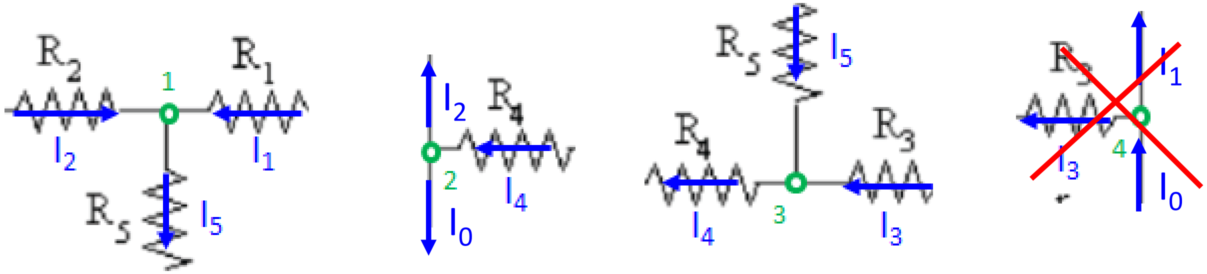
I_0, I_3 e I_4 serían negativas al ir contra el sentido considerado positivo (flecha roja)
La fem ε se escribiría en el miembro derecho de la ecuación con signo positivo, ya que el sentido de la circulación definido por la flecha roja sale del polo positivo y entra en el negativo

Resolución práctica de circuitos de C.C.

<u>Ejemplo:</u> En el circuito de la figura la f.e.m. de la pila es de 6 V y su resistencia interna de 10 Ohmios. Las resistencias: R_1, R_2, R_3, R_4 y R_5, valen respectivamente 100, 200, 300, 400 y 500 Ohmios. Hallar la potencia disipada en la red y su resistencia equivalente.



<u>Nodos.</u> Hasta 4 ecuaciones, una de ellas redundante
Formularemos solo 3 de ellas:



6 incógnitas

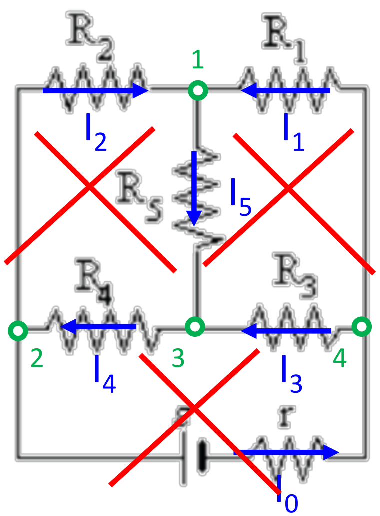
$$I_1 + I_2 - I_5 = 0$$

$$-I_0 - I_2 + I_4 = 0$$

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

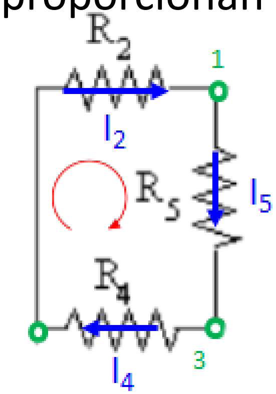
Resolución práctica de circuitos de C.C.

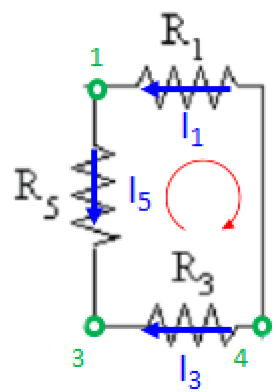
Ejemplo: En el circuito de la figura la f.e.m. de la pila es de 6 V y su resistencia interna de 10 Ohmios. Las resistencias: R_1, R_2, R_3, R_4 y R_5, valen respectivamente 100, 200, 300, 400 y 500 Ohmios. Hallar la potencia disipada en la red y su resistencia equivalente.

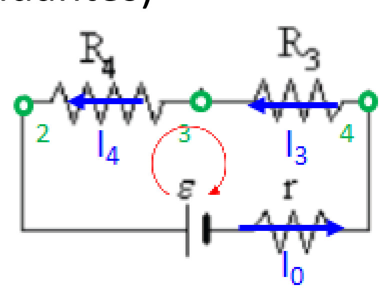


6 incógnitas

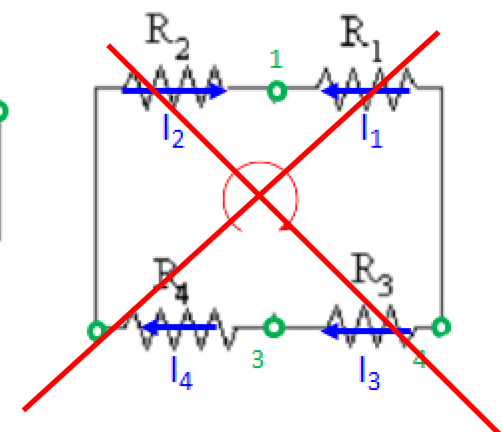
Mallas. Hasta 7 ecuaciones, solo necesitamos 3 (las mallas compuestas proporcionan ecuaciones redundantes)







Nótese que esta fem aparecería como positiva al formular la segunda regla de Kirchhoff (la flecha circular roja "sale" del positivo y entra en el negativo)



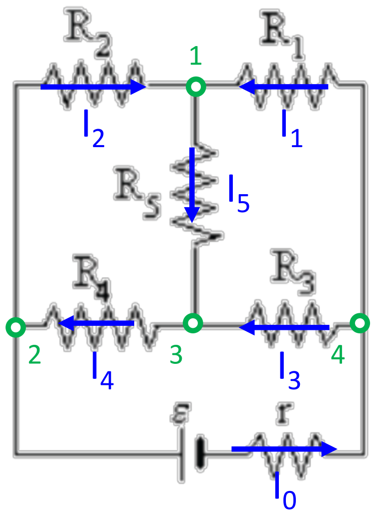
$$200I_2 + 400I_4 + 500I_5 = 0$$

$$-100I_1 + 300I_3 - 500I_5 = 0$$

$$-10I_0 - 300I_3 - 400I_4 = 6$$

Resolución práctica de circuitos de C.C.

<u>Ejemplo:</u> En el circuito de la figura la f.e.m. de la pila es de 6 V y su resistencia interna de 10 Ohmios. Las resistencias: R_1, R_2, R_3, R_4 y R_5, valen respectivamente 100, 200, 300, 400 y 500 Ohmios. Hallar la potencia disipada en la red y su resistencia equivalente.

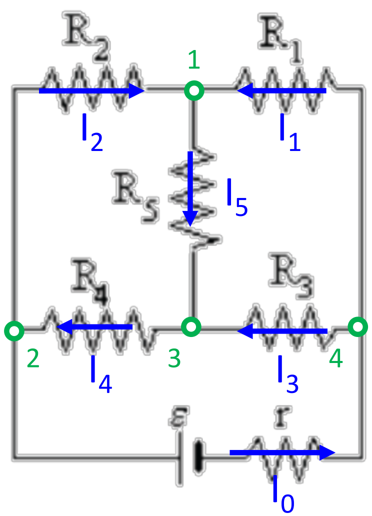


Combinando nudos y mallas obtenemos un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas:

$$
\begin{cases}
I_1 + I_2 - I_5 = 0 \\
-I_0 - I_2 + I_4 = 0 \\
I_3 - I_4 + I_5 = 0 \\
200 I_2 + 400 I_4 + 500 I_5 = 0 \\
-100 I_1 + 300 I_3 - 500 I_5 = 0 \\
-10 I_0 - 300 I_3 - 400 I_4 = 6
\end{cases}
$$

Resolución práctica de circuitos de C.C.

Ejemplo: En el circuito de la figura la f.e.m. de la pila es de 6 V y su resistencia interna de 10 Ohmios. Las resistencias: R_1, R_2, R_3, R_4 y R_5, valen respectivamente 100, 200, 300, 400 y 500 Ohmios. Hallar la potencia disipada en la red y su resistencia equivalente.



Solución:

I_0 = -27.3 mA

I_1 = -19.6 mA

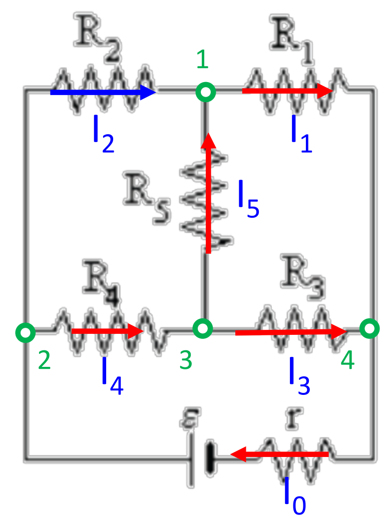
I_2 = +18.8 mA

I_3 = -7.8 mA

I_4 = -8.5 mA

I_5 = -0.74 mA

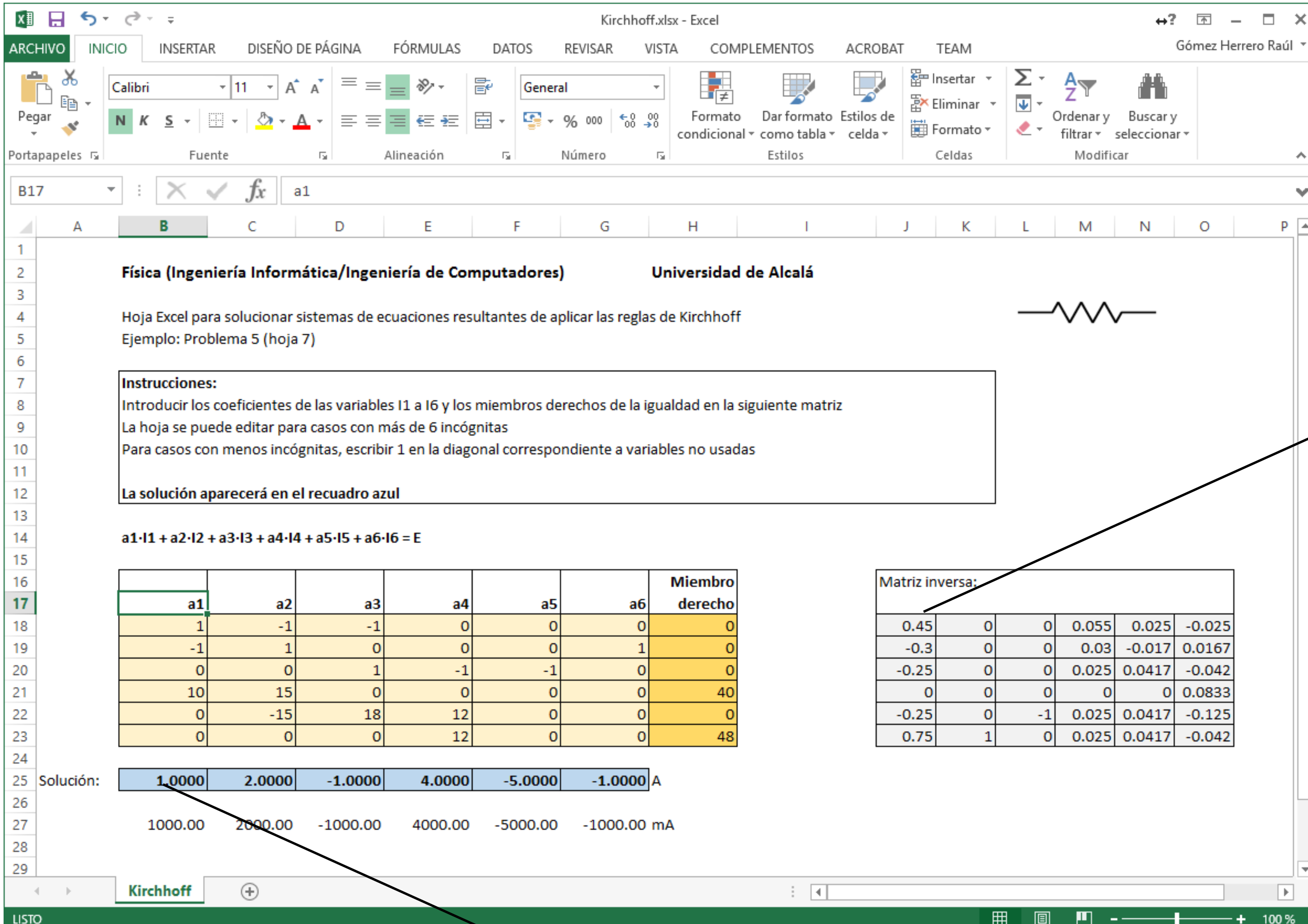
El sentido real de las corrientes será:



Resistencia equivalente: $\varepsilon = \left(R_{eq} + r\right) I_0 \Rightarrow R_{eq} = 208.4\ \Omega$

Potencia disipada: P= $\varepsilon \cdot \mathrm{I}_0 = 0.165$ W.

Además se puede comprobar que P también es igual a la suma de potencias disipadas en cada rama (suma de los productos $R_i \cdot I_i^2$)



Kirchhoff.xlsx - Excel

Física (Ingeniería Informática/Ingeniería de Computadores) Universidad de Alcalá

Hoja Excel para solucionar sistemas de ecuaciones resultantes de aplicar las reglas de Kirchhoff
Ejemplo: Problema 5 (hoja 7)

Instrucciones:
Introducir los coeficientes de las variables I1 a I6 y los miembros derechos de la igualdad en la siguiente matriz
La hoja se puede editar para casos con más de 6 incógnitas
Para casos con menos incógnitas, escribir 1 en la diagonal correspondiente a variables no usadas

La solución aparecerá en el recuadro azul

a1·I1 + a2·I2 + a3·I3 + a4·I4 + a5·I5 + a6·I6 = E

a1	a2	a3	a4	a5	a6	Miembro derecho
1	-1	-1	0	0	0	0
-1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	-1	-1	0	0
10	15	0	0	0	0	40
0	-15	18	12	0	0	0
0	0	0	12	0	0	48

Matriz inversa:

0.45	0	0	0.055	0.025	-0.025
-0.3	0	0	0.03	-0.017	0.0167
-0.25	0	0	0.025	0.0417	-0.042
0	0	0	0	0	0.0833
-0.25	0	-1	0.025	0.0417	-0.125
0.75	1	0	0.025	0.0417	-0.042

Solución:	1.0000	2.0000	-1.0000	4.0000	-5.0000	-1.0000	A
	1000.00	2000.00	-1000.00	4000.00	-5000.00	-1000.00	mA

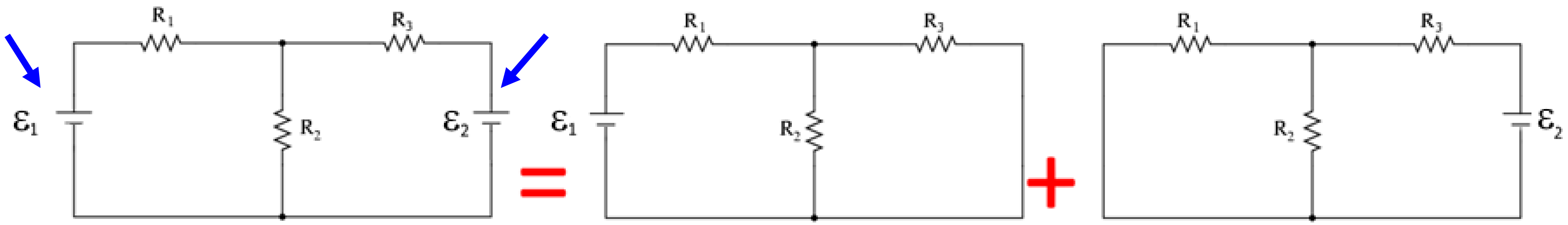
Kirchhoff

=MINVERSA(B18:G23)

=TRANSPONER(MMULT(J18:O23;H18:H23))

Apéndice: Otros elementos de análisis de circuitos

- Principio de superposición: Si en una red lineal, existen dos o más fuentes, la intensidad que circula por el circuito será la suma de las intensidades que produciría cada una de ellas si sólo existiera ella en el circuito.

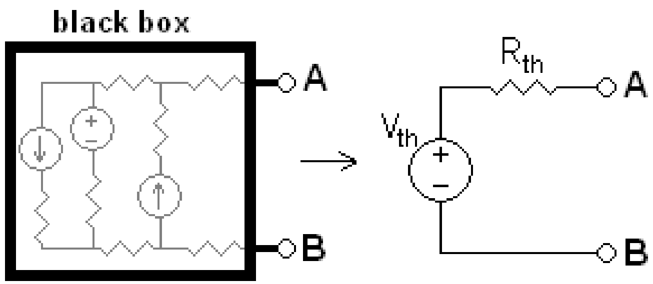


- Procedimiento práctico:
  - resolver ambos circuitos por separado, hallando las intensidades en cada rama en cada uno de ellos
  - Sumar las intensidades de ambos circuitos (con su signo) para hallar la intensidad resultante en el circuito combinado

Apéndice: Otros elementos de análisis de circuitos

- Resistencia de entrada de una red. Es la resistencia equivalente que "vería" una fuente de f.e.m. conocida ε conectada a los bornes de dicha red. Si no conocemos los componentes de la red, se puede calcular midiendo la intensidad I y usando la ley de Ohm: $R = \varepsilon/I$

- Teorema de Thévenin: Una parte de un circuito activo entre dos terminales se comporta como un circuito equivalente compuesto únicamente por una fuente y cierta resistencia en serie llamada resistencia de salida



- Teorema de Norton: Similar al teorema de Thévenin, pero el circuito equivalente consta de una fuente y una resistencia en paralelo con ella