OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

El plano complejo: forma binómica y modulo-argumental de los números complejos. Operaciones con complejos: Suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación

Parece lógico pensar que la necesidad de contar da lugar a la aparición de lo que hoy conocemos como números naturales (los enteros positivos), la necesidad de repartir nos trae la aparición de los números fraccionarios o decimales, de forma que el déficit nos da paso a la aparición de los números negativos, tanto enteros como fraccionarios, para al alcanzar una cierta sofisticación, ser capaces de realizar raíces cuadradas no exactas que nos traen la aparición de los números irracionales. Pero, además de todos estos tipos de números que conocemos como números reales, existen otros que se denominan números complejos a los que vamos a dedicar este apéndice.

El plano complejo

Por número complejo entendemos dos números reales dados en un orden, al primero de ellos lo llamaremos parte real y al segundo parte imaginaria del número complejo. De lo que acabamos de decir se desprende que para representar números complejos no podemos usar una recta como ocurre con los números reales, necesitaremos emplear un plano. El eje de abscisas del plano lo reservamos para la parte real del número (eje real) y en el eje de ordenadas representamos las parte imaginaria (eje imaginario).

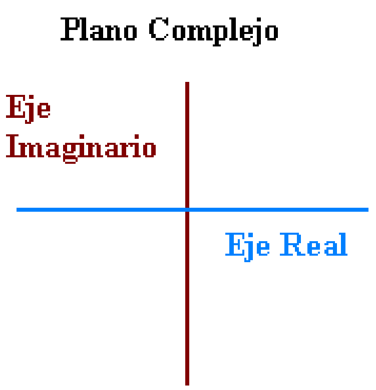

Figura 1

Representación del plano complejo

De la parte real del número complejo poco tenemos que decir, pues al ser un número real su significado es conocido. La parte compleja nace, al realizar raíces de índice par de números reales negativos. Al ser la raíz cuadrada la de índice par más bajo será sobre la que trabajaremos, pues las de índice superior son operaciones realizadas sobre raíces cuadradas.

Si queremos calcular la raíz cuadrada de menos 144 ($\sqrt{-144}$) teniendo en cuenta las propiedades de los radicales, podemos escribir:

$$\sqrt{-144} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{144}$$

el valor de la segunda de las raíces es inmediato, es el número real 12, mientras que somos incapaces de realizar la primera de las raíces en el campo real, para llevar a cabo ese cálculo introducimos los números imaginarios cuya unidad es precisamente la $\sqrt{-1}$, que se representan indistintamente por las letras “i” o “j”, nosotros emplearemos la letra “j”.

De lo anterior obtenemos: $\sqrt{-144} = 12\ \mathrm{j}$, a este número lo llamaremos número imaginario puro o simplemente imaginario y gráficamente se representará en el eje de ordenadas del plano complejo como se muestra en la figura 2. A la hora de denotarlo numéricamente, como no tiene parte real, lo escribiremos como: (0, 12), si bien es más usual emplear: 0 + 12j, o simplemente "12 j".

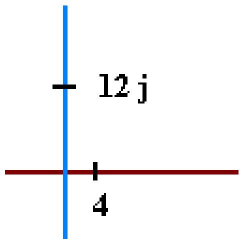

Figura 2

Representación del número real "4" y del imaginario "12 j"

Cuando consideramos un número real, como por ejemplo el número "4", podemos entender que es un número complejo sin parte imaginaria, y lo podemos representar por 4 + 0j (fig 2).

El empleo de esta notación nos insinúa la posibilidad de tratar a los números complejos como monomios o binomios, de modo que los monomios "4" (número real 4) y "12 j" (número imaginario 12 j) los podremos unir como el complejo:

$$4 + 12\,j$$

cuya representación en el plano complejo será un punto en el primer cuadrante o mejor un segmento orientado (vector) de centro en el origen de coordenadas y extremos en el punto del plano (4, 12).

Consideremos un número complejo (N), que de forma genérica representaremos por "$N \equiv a + b\ j$", según hemos dicho más arriba en el plano complejo lo representaremos por el punto N de coordenadas "a" y "b", o por un vector orientado que una el origen "O" con el punto "N", como se muestra en la figura 3. Si miramos la figura, veremos que el segmento orientado (vector) tiene un módulo "M", que será la longitud ON y un argumento "α". Es claro que el módulo "M" se puede calcular fácilmente aplicando el teorema de Pitágoras: $M = \sqrt{a^2 + b^2}$, y el argumento "α" será el ángulo cuya tangente sea la relación entre la parte imaginaria y la real: $\alpha = \mathrm{arctag}\dfrac{b}{a}$.

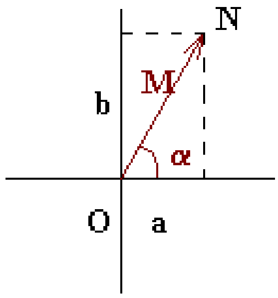

Figura 3
Representación del número complejo "N" expresado en forma binómica y módulo - argumental

Luego un número complejo "N" lo podemos escribir:

- en *forma binómica*: a + b j
- en *forma módulo-argumental o trigonométrica*: $M_{\langle\alpha}$

verificándose que: $M = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\alpha = \mathrm{arctag}\dfrac{b}{a}$.

Naturalmente si partimos de un número complejo expresado en la forma módulo-argumental ($M_{\langle\alpha}$), su representación se obtendrá levantando sobre el eje real un ángulo α , si desde el origen llevamos un segmento de longitud igual al módulo del número complejo, tendremos representado dicho número. Su parte real será la proyección del módulo sobre el eje real, que valdrá $M\cos\alpha$, y su parte imaginaria será $M\,\mathrm{sen}\alpha$. De ahí, que también a veces se diga que el complejo está escrito en forma trigonométrica:

$$M\cos\alpha \ + j\,(M\,\text{sen}\alpha) = M(\cos\alpha + j\,\text{sen}\,\alpha)$$

Es decir, ya podemos pasar un número complejo expresado en una forma a la otra, si bien, el paso de la forma módulo-argumental a la forma binómica nos reproduce un único número complejo, no ocurre así con el paso inverso, veamos porque.

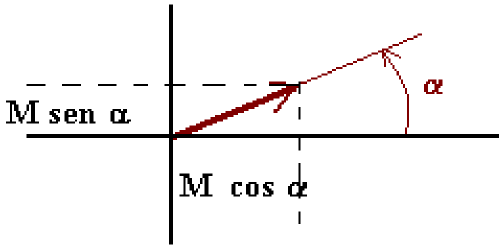

Figura 4
Representación gráfica de un número complejo en la forma módulo-argumental

El argumento del número complejo, lo hemos definido como: $\alpha = \text{arctag}\dfrac{b}{a}$, si recordamos que la tangente de un ángulo es una función periódica de período π, nos daremos cuenta que, en cada circunferencia, existen dos ángulos cuya tangente es la misma, aunque la obtengamos como los cocientes entre $\left(\dfrac{a}{b}\right)$ o entre $\left(\dfrac{-a}{-b}\right)$.

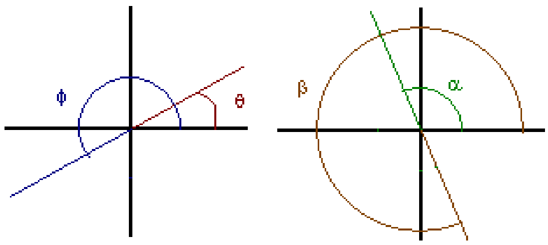

Figura 5
Los ángulos θ y ϕ situados en el segundo y cuarto cuadrante, tienen la misma tangente y es negativa. Los ángulos α y β, situados en el primer y tercer cuadrante, también tiene la misma tangente y es negativa.

Es decir, los ángulos situados en el primer cuadrante tienen tangentes positivas lo mismo que los situados en el tercer cuadrante y los situados en el segundo cuadrante tiene tangentes negativas como los situados en el cuarto cuadrante, debemos representar el número en el plano complejo para saber en que cuadrante está colocado y poder dar, de forma correcta, su expresión binómica.

Operaciones con complejos

Pasemos ahora a revisar las distintas operaciones que podemos realizar con los números complejos.

Suma de números complejos

Al poder tratar los números complejos como binomios, también existirá la suma de números complejos que será el complejo cuya parte real será la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria sea la suma de las partes imaginarias:

$$(a + b\,j) + (c + d\,j) = (a+c) + (b+d)\,j$$

con las propiedades:

- conmutativa: $(a + b\,j) + (c + d\,j) = (c + d\,j) + (a + b\,j)$
- asociativa: $(a + b\,j) + (c + d\,j) + (e + f\,j) = [(a + b\,j) + (c + d\,j)] + (e + f\,j)$
- existencia de un *elemento neutro* para la suma (o nulo): $(a + b\,j) + 0 = (a + b\,j)$
- existencia de un *elemento opuesto*: $(a + b\,j) + [$***Opuesto*** $(a + b\,j)] = 0$

Está claro que si el opuesto a un complejo tiene que reproducir el elemento nulo, la parte real del opuesto será el número opuesto a dicha parte real, ocurriendo lo mismo para la parte imaginaria:

$$[\textit{Opuesto}\ (a + b\,j)] = -a - b\,j$$

El opuesto a un número complejo lo representaremos por: $-(a + b\,j)$

Está claro que el elemento opuesto a un número complejo es su simétrico respecto del origen de coordenadas (ver figura 6), luego en forma módulo-argumental el opuesto a un complejo tendrá el mismo módulo y por argumento el del original más un ángulo llano: $-(M_{\langle\alpha}) = M_{\langle\pi+\alpha}$

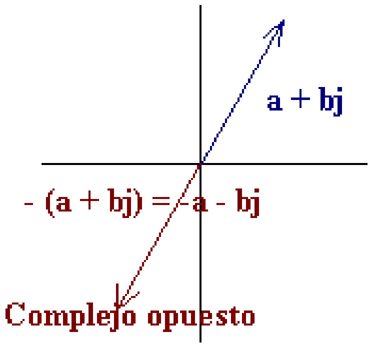

Figura 6
Representación de un número complejo y de su opuesto

Si bien hemos escrito las propiedades de la suma de complejos en forma binómica, es evidente que se podrá realizar la suma de números complejos en la forma módulo-argumental, sin más que tener en cuenta la definición dada para la suma.

Consideremos los números complejos "N" y "L" que expresados en forma módulo-argumental serán:

$$N \equiv N_{\langle\alpha} \ \text{ y } \ L \equiv L_{\langle\beta}$$

La representación gráfica (ver figura 7) del primer complejo " $N_{\langle\alpha}$ " nos permite, al proyectar el complejo sobre el eje real, representar su parte real (lo que por comodidad hemos llamado "a" en la figura), si representamos también el segundo complejo " $L_{\langle\beta}$ ", su proyección sobre el eje real nos dará su parte real (lo que en la figura hemos llamado "c"), el segmento, contado a partir del origen y formado por los dos anteriores nos dará la parte real del número complejo suma. Actuando de la misma manera con las partes imaginarias, tendremos la representación del complejo suma, como se muestra en la figura. La aplicación de la resolución geométrica de triángulos nos permitirá calcular el módulo y el argumento del número complejo suma.

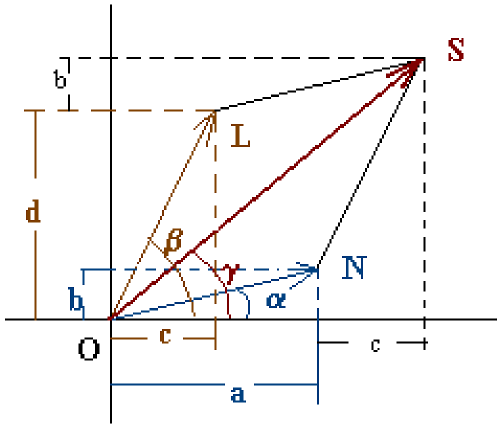

Figura 7
Representación de la suma gráfica de los números complejos el N = a + b j y el L = c + d j, cuya resultante es S = (a+c) + (b+d) j

Después de lo dicho, es evidente que para calcular la suma de dos números complejos es mucho más cómodo poner ambos en forma binómica y sumarlos, para expresarlos luego en la forma módulo-argumental si así nos lo piden.

<u>Diferencia de dos números complejos</u>

La diferencia de dos números complejos será sumar al minuendo el opuesto del sustraendo, siendo por tanto válido todo lo dicho para la suma, excepto, como es lógico, la propiedad conmutativa

$$(a + b\,j) - (c + d\,j) = (a + b\,j) + [-(c + d\,j)] = (a - c) + (b - d)\,j$$

Producto de un número complejo por un número real

Si podemos sumar números complejos, podremos también multiplicar un número complejo por un número real, pues la multiplicación no es más que una suma de sumandos iguales, luego al multiplicar un número complejo (a + b j) por un número real "n" obtendremos un complejo cuya parte real sea la parte real del complejo originario multiplicado por el número real y cuya parte imaginaria sea también el producto del número real por la parte imaginaria del complejo. Si el complejo está expresado en la forma módulo-argumental, tendremos otro complejo de módulo el producto del módulo por el número real y de argumento el mismo si el número real es positivo, si es un número negativo el argumento vendrá aumentado en π. Lo que escrito en forma binómica será:

$$\lambda(a + b\ j) = \lambda a + \lambda b\ j\,.$$

Para la forma módulo-argumental:

$$\lambda \succ 0 \quad \lambda \times \left[M_{\langle\alpha}\right] = (\lambda \cdot M)_{\langle\alpha} \qquad y \qquad \lambda \prec 0$$

$$\lambda \times \left[M_{\langle\alpha}\right] = (|\lambda| \cdot M)_{\langle\alpha+\pi}$$

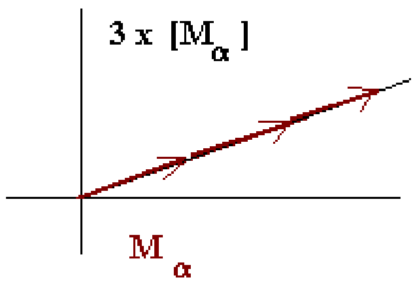

Figura 8
Representación del producto del número complejo M $_\alpha$ por el número real 3

Producto de dos números complejos

Si hemos dicho más arriba que los números complejos se les puede tratar como a los binomios, se podrán multiplicar entre sí, con las mismas reglas que los binomios. Es decir:

$$(a + b\ j)\ x\ (c + d\ j) = ac + bc\ j + ad\ j + bd\ j^2$$

teniendo en cuenta el valor del cuadrado de la unidad imaginaria $\left(j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1\right)$, obtenemos:

$$(ac - bd) + (bc + ad)\ j$$

Si empleamos la forma trigonométrica de los complejos escribiremos:

$$\left[M \cos\alpha + j\, M \operatorname{sen}\alpha\right] \times \left[L \cos\beta + j\, L \operatorname{sen}\beta\right]$$

recordando las expresiones de las funciones trigonométricas de la suma de ángulos, obtenemos que en forma modulo-argumental (trigonométrica) la expresión del producto de dos complejos, resulta:

$$(M \cdot L)\cos(\alpha + \beta) + j\,(M + L)\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

Es decir, el producto de dos números complejos es otro complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos

$$\left[M_{\langle\alpha}\right] \cdot \left[L_{\langle\beta}\right] = \left(M \cdot L\right)_{\langle\alpha+\beta}$$

Como comprobación, tenemos la definición que hemos dado de producto de un número complejo por un número real, el número real tiene de argumento "cero" o π, según sea positivo o negativo y hemos dicho que el producto coincidía con el producto del módulo del complejo por el número real y el argumento era el mismo, le sumábamos cero, o le debíamos sumar un ángulo llano, le sumábamos π .

Veamos que significa multiplicar un número complejo por la unidad imaginaria. Desde luego será otro complejo del mismo módulo y su argumento vendrá aumentado en el de "j", es decir, en $\pi/2$ (ver figura 9)

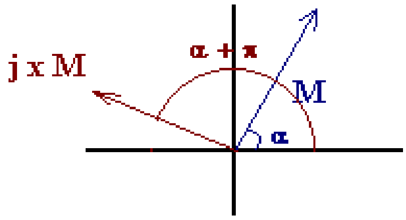

Figura 9
El producto por la unidad imaginaria, resulta girado en $+\frac{\pi}{2}$ respecto de la posición del complejo original

Pasemos ahora a definir **complejo conjugado**. Es el complejo simétrico respecto del eje real. De lo dicho se desprende, que tendrá la misma parte real siendo su imaginaria opuesta. Lo representamos con una recta encima del complejo.

Así, dado el complejo (a + b j) su conjugado, que representamos como $\overline{(a+b\ j)}$, será: (a - b j). Escrito en forma módulo-argumental, tendremos que restar a la circunferencia completa el argumento del complejo original, es decir el conjugado de $M_{\langle\alpha}$ $\left(\overline{M_{\langle\alpha}}\right)$ será: $M_{\langle 2\pi-\alpha}$

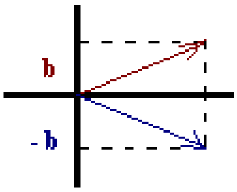

Figura 10
Representación de un número complejo y de su conjugado.

De la definición que hemos dado se desprende que el producto de un complejo por su conjugado es el cuadrado del módulo del complejo:

$$\left(M_{\langle\alpha}\right)\cdot\left(\overline{M_{\langle\alpha}}\right)=\left(M_{\langle\alpha}\right)\cdot\left(M_{\langle 2\pi-\alpha}\right)=M^2\Big|_{\alpha+(2\pi-\alpha)}=M^2$$

<u>Cociente de dos números complejos</u>

La primera aplicación del complejo conjugado, la tenemos al definir una nueva operación la división de números complejos. Para dividir dos complejos, multiplicaremos el dividendo (numerador en forma de quebrado) y el divisor(denominador) por el conjugado del denominador (igual que hacíamos para racionalizar). De este modo, el numerador es el producto de dos complejos, operación que ya sabemos hacer, y el denominador un número real (el cuadrado del módulo del segundo complejo). Tendremos:

$$\frac{a+b\ j}{c+d\ j}=\frac{(a+b\ j)\cdot(c-d\ j)}{(c+d\ j)\cdot(c-d\ j)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,j}{c^2+d^2}$$

Si los complejos los escribimos en forma módulo-argumental (trigonométrica) y, como hemos dicho antes, tenemos en cuenta las expresiones trigonométricas de la diferencia de ángulos, obtenemos:

$$\frac{M\cos\alpha+j\,M\,\mathrm{sen}\alpha}{L\cos\beta+j\,L\,\mathrm{sen}\beta}=\frac{\left(M\cos\alpha+j\,M\,\mathrm{sen}\alpha\right)\cdot(L\cos\beta-j\,L\,\mathrm{sen}\beta)}{(L\cos\beta+j\,L\,\mathrm{sen}\beta)\cdot(L\cos\beta-j\,L\,\mathrm{sen}\beta)}=$$

$$\frac{M}{L}\left[\cos(\alpha-\beta)+j\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

Luego el cociente de dos números complejos es otro complejo de módulo el cociente de los módulos y argumento la diferencia de los de los dos complejos:

$$\frac{M_{\langle\alpha}}{L_{\langle\beta}} = \left(\frac{M}{L}\right)_{\langle\alpha-\beta}$$

Veamos ahora lo que significa dividir un complejo por la unidad imaginaria. También es más cómodo emplear la notación módulo-argumental, pues vemos que será un complejo del mismo módulo y al argumento restarle $\pi/2$, lo que equivale a girar el complejo original $3\pi/2$ (ver figura 11).

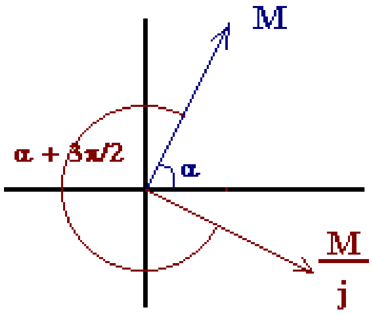

Figura 11
Dividir entre la unidad imaginaria es girar el complejo un ángulo de $-\pi/2$

Potencia de números complejos

Si ya hemos visto como se multiplican complejos, podemos pasar ahora a elevar a una potencia un número complejo. Por definición, la potencia es hacer un producto de tantos factores iguales a la base como unidades tiene el exponente. Por tanto, la potencia un número complejo será otro número complejo cuyo módulo sea igual al módulo del complejo, que es la base, elevado al exponente de la potencia y el argumento tendrá que ser el argumento de la base multiplicado por el exponente:

$$\left(M_{\langle\alpha}\right)^n = \left(M^n\right)_{\langle n\cdot\alpha}$$

En forma binómica, debemos realizar el producto del complejo por sí mismo tantas veces como indique el exponente:

$$\left(a + b\ j\right)^n = \overbrace{(a + b\ j)\cdot(a + b\ j)\cdot\ldots\cdot(a + b\ j)}^{n}$$

de lo que acabamos de decir se desprende la comodidad de utilizar la forma modulo-argumental para elevar un complejo a una potencia.

Raíz de un número complejo

Por último, nos que da ver como se calcula la raíz de un número complejo. Sabemos que la raíz de índice "n" de un número real son "n" números reales, por la misma razón la raíz n-ésima de un número complejo serán "n" números complejos. Para calcularlos, de nuevo es más cómodo hacerlo en la forma módulo-argumental, pues el módulo de todos ellos será el valor absoluto de la raíz de indice "n" del módulo y los argumentos serán:

- el valor del argumento dividido por el índice de la raíz.
- el valor del argumento más una circunferencia, dividido por el índice de la raíz.
- el valor del argumento más dos circunferencias, dividido por el índice de la raíz.
- Así hasta "n - 1" circunferencias.

Las "n" raíces del número complejo serán:

$$\sqrt[n]{\left(M_{\langle\alpha}\right)}=\left|\begin{array}{l}\left(\sqrt[n]{M}\right)_{\langle\frac{\alpha}{n}}\\ \left(\sqrt[n]{M}\right)_{\langle\frac{\alpha+2\pi}{n}}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \left(\sqrt[n]{M}\right)_{\langle\frac{\alpha+(n-1)\cdot 2\pi}{n}}\end{array}\right.$$

Es decir que cada raíz se encuentra girada respecto de la anterior en $\frac{2\pi}{n}$

Veamos un caso sencillo, calcularemos la $\sqrt[4]{16}$. El número real 16 lo podemos escribir como un complejo de módulo 16 y argumento 0: $16=16_{\langle 0}$. Su raíz cuarta serán cuatro números complejos cada uno de ellos de módulo $\left|\sqrt[4]{16}\right|=2$. Las cuatro raíces las denominaremos: R_1, R_2 R_3 y R_4.

Veamos cuales serán sus argumentos: $\left|\begin{array}{l}\frac{0}{4}=0\\ \frac{0+2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\\ \frac{0+4\pi}{4}=\pi\\ \frac{0+6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}\end{array}\right.$

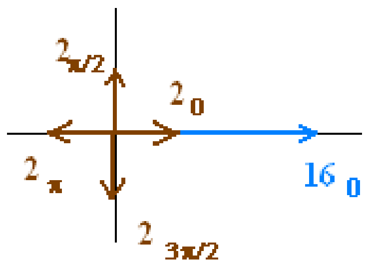

Figura 12
Representación del número real 16 y de sus cuatro raíces cuartas.

Luego obtenemos que: $\sqrt[4]{16}=\left|\begin{array}{l}2_{\langle 0}\\ 2_{\langle\frac{\pi}{2}}\\ 2_{\pi}\\ 2_{\frac{3\pi}{2}}\end{array}\right.$

que como vemos son cuatro complejos de igual módulo que resultan de girar el anterior un ángulo igual a una circunferencia dividida por el índice de la raíz $\left(\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\right)$

En el campo real, para calcular $\sqrt[4]{16}$ recordamos que $\sqrt[4]{16}=\pm\sqrt{\sqrt{16}}$ es decir: $\pm\sqrt{4}=\pm 2$, donde claramente hemos perdido los valores negativos de $\sqrt{16}$, los correspondientes a $\pm\sqrt{-4}$ que sólo tienen sentido en el campo complejo, y valen $\pm 2\,j$ como se muestra en la figura.

Como ejemplo, más completo, calcularemos la raíz cúbica del complejo 15 - 20 j. Según hemos dicho para calcularlo será más cómodo ponerlo en forma módulo argumental

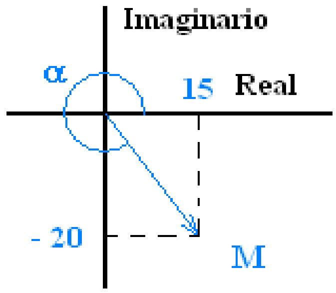

Figura 13
Representación del complejo cuya raíz cúbica queremos calcular

- El módulo será $M = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$
- El argumento será el ángulo cuya tangente sea la relación entre -20 y 15; $\alpha = \text{arctag}\dfrac{-20}{15}$ = -0,93 radianes (-51,13º), que se corresponde con nuestra situación pues el ángulo es del cuarto cuadrante, es decir $\alpha = 5{,}35\ \text{rad}$ (308,87º).

Luego nuestro número complejo es: $25_{\langle 5{,}35}$.

Su raíz cúbica serán tres números complejos todos ellos de módulo: $\sqrt[3]{25}$.

Sus argumentos serán:
$$\left|\begin{array}{lll} \dfrac{5{,}35}{3} & = 1{,}78\ \text{rad} & = 77{,}8^{o} \\ \dfrac{5{,}35 + 2\pi}{3} & = 3{,}88\ \text{rad} & = 197{,}8^{o} \\ \dfrac{5{,}35 + 2 \times 2\pi}{3} & = 5{,}98\ \text{rad} & = 317{,}8^{o} \end{array}\right.$$

Luego sus tres raíces serán:
$$\sqrt[3]{25} = \left|\begin{array}{l} R_1 = \sqrt[3]{25}_{\langle 1{,}78} \\ R_2 = \sqrt[3]{25}_{\langle 3{,}88} \\ R_3 = \sqrt[3]{25}_{\langle 5{,}98} \end{array}\right.$$

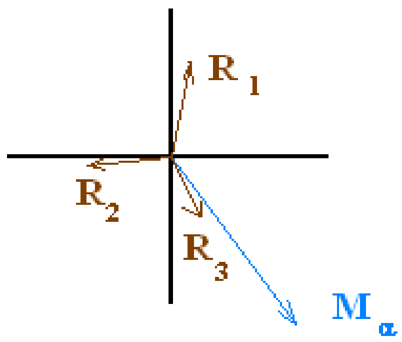

Figura 14
Representación en el plano complejo de un número complejo y de sus tres raíces cúbicas

que como podemos observar en la figura forman cada una con la siguiente un ángulo de $\dfrac{2\pi}{3}$ radianes $\equiv \dfrac{360^{0}}{3}$

ÁLGEBRA VECTORIAL

Operaciones con vectores: suma, diferencia y productos con vectores. Algunas aplicaciones geométricas de los productos entre vectores

La existencia de magnitudes que no van a quedar definidas con el conocimiento de la cantidad y de las unidades en las que expresamos dicha cantidad, lleva a introducir las magnitudes vectoriales. Está claro que cuando decimos: "han transcurrido tres minutos" sabemos que nos referimos a un intervalo temporal, cuyo valor es de tres minutos, no son tres horas, ni cinco minutos, ni tampoco tres segundos. La expresión del valor de la cantidad (con la unidad correspondiente) nos informa de la magnitud a la que hacemos referencia y de la importancia de la cantidad que estamos considerando.

Sin embargo, cuando nos dicen que un automóvil ha conseguido una media de 109 km/h, podemos decir que ha ido bastante deprisa, la cantidad y la unidad empleada nos permite decir eso, pero ¿ha llegado a Málaga? o ¿llegó a Toledo? ¿partió de Barcelona? o ¿inició su recorrido en Madrid?. La velocidad es una de esas magnitudes que para quedar bien definidas, necesitamos conocer, desde luego su valor (que para que tenga todo su significado debemos conocer la unidad de medida empleada), pero también, tanto la dirección de la que hablamos, como el sentido de la misma (no es lo mismo ir de vacaciones, que volver de ellas).

Las magnitudes que quedan caracterizadas con el conocimiento de la cantidad y su unidad, las llamamos magnitudes escalares, mientras que las magnitudes que para quedar definidas necesitamos conocer, además de la unidad empleada, tres números que nos expresen de alguna forma, su valor (módulo) su dirección y su sentido las llamaremos magnitudes vectoriales.

Como de todos es conocido el tratamiento de las magnitudes escalares, vamos a acercarnos, un poco, al manejo de las magnitudes vectoriales.

Operaciones con vectores

Vamos a dedicar este apartado al repasar las operaciones básicas con vectores suponiendo que el lector no tiene suficientes conocimientos sobre las mismas.

Por vector vamos a entender un segmento orientado, se caracterizará por su *módulo* (que es una medida de su longitud), su *dirección* (que es el conjunto de líneas paralelas al segmento) y por su *sentido* (que es el dado por la orientación que hemos tomado). Para trabajar con números reales nos valía con conocer su valor, es decir un número, para trabajar con vectores vamos a necesitar conocer tres características que de alguna manera nos puedan dar su módulo, su dirección y su sentido. Esta será pues una complicación que tendrán los vectores, siempre que tengamos que identificar un vector necesitaremos utilizar o muchas palabras o tres números de los que podamos obtener el módulo la dirección y el sentido del mismo.

Para referirse en un texto un vector se emplea indistintamente o la letra que lo representa escrita en **negrita** (el vector "a" lo escribiremos **a**) o con una flecha o un segmento colocados sobre la letra $\vec{a}$, dejando la escritura en *cursiva*, o sin características especiales, para los escalares o los módulos de los vectores. Nosotros emplearemos, generalmente la flecha sobre la letra para los vectores y la letra, generalmente griega o mayúscula, sin características específicas para los escalares.

Vamos a realizar un repaso de las operaciones con vectores y de las propiedades de las mismas, utilizando básicamente ideas geométricas que por su facilidad de visualización ayudarán a una mejor comprensión de los conceptos que manejaremos.

Suma de vectores

Por suma de dos vectores entendemos otro vector que resulta al unir el origen del primero de los sumandos con el extremo de último de ellos. Por la propia definición de suma, cada vez que realicemos esta operación estamos dibujando un paralelogramo con los dos vectores (sería mas correcto hablar de ellos y sus equipolentes), y tomando la diagonal del mismo como suma de los vectores. Esta claro, que la diagonal será la misma con independencia del orden que usemos para dibujar el paralelogramo, luego la suma de vectores será *conmutativa*.

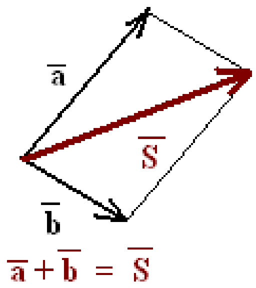

Figura 1
Representación de la suma de dos vectores

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

Por otro lado, si queremos que se nos repita un vector al sumarlo con otro, este otro tendrá que ser simplemente un punto. Es decir *existe el elemento neutro para la suma* o vector nulo ($\vec{0}$) tal que

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

que se caracterizará por tener de módulo cero.

Para obtener el elemento neutro respecto de la suma a partir de un vector cualquiera tendremos que sumarle otro vector del mismo módulo dirección y sentido opuesto ($-\vec{a}$). Ese será el *vector opuesto* al dado, que cumplirá

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

De la definición se deduce que para realizar la suma de tres o más vectores, tendremos que sumar dos de ellos, y al vector que nos resulte sumarle el tercero y así sucesivamente. La suma de vectores tiene pues la propiedad *asociativa*

$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$$

Diferencia de vectores

Como en el caso de números reales vamos a entender por diferencia de dos vectores sumar al minuendo el opuesto del substraendo. Por tanto

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

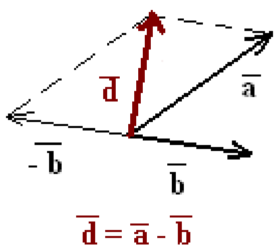

Figura 2
Representación de la diferencia de dos vectores

De la propia definición se desprende que la diferencia no puede ser conmutativa

Producto de un escalar por un vector

Si un vector lo sumamos con el mismo varias veces, es decir lo ponemos a continuación de si mismo varias veces, el resultado será otro vector de la misma dirección y sentido que el original cuyo módulo será igual a tantas veces el módulo del vector como le hemos repetido. Por similitud con la multiplicación de números reales, a esa operación la llamaremos producto de un escalar (λ) por un vector $(\vec{a})$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \overrightarrow{\lambda a}$$

Siendo $\overrightarrow{\lambda a}$ un vector de módulo $\left|\overrightarrow{\lambda a}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, paralelo al vector $\vec{a}$ y de sentido el del vector $\vec{a}$ si $\lambda > 0$ y opuesto al de $\vec{a}$ si $\lambda < 0$.

Esta operación presenta las siguientes propiedades

Existencia de elemento unitario

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

Existencia de elemento nulo

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

Distributiva respecto de la suma de escalares

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$$

Distributiva respecto de la suma de vectores

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

Naturalmente como dividir por un escalar es multiplicar por su inverso, si a un vector lo multiplicamos por el inverso de su módulo, que es un escalar, obtenemos un *vector unitario* (cuyo módulo es la unidad) en la dirección y sentido del vector dado.

$$\vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} = \vec{u}$$

Los vectores, además de poderlos multiplicar por un escalar, también los podemos multiplicar entre sí, según que el resultado sea un escalar o un vector definimos los productos escalar o vectorial entre vectores.

Producto escalar de dos vectores

Por producto escalar de dos vectores entendemos el escalar cuyo valor sea el producto del módulo de uno de los vectores por la proyección del otro sobre él. Normalmente el producto escalar se denota por los dos vectores unidos por el punto de multiplicación dentro de un paréntesis curvo

Producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b} \equiv (\vec{a} \cdot \vec{b})$

En la figura 3 se ve que la proyección del vector $\vec{b}$ sobre la dirección definida por $\vec{a}$, es el segmento OP cuyo valor es igual al módulo del vector $\vec{b}$ multiplicado por el coseno del ángulo que forman las direcciones de los vectores

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|\cdot\overline{OP} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\alpha$$

De la expresión que hemos escrito se obtiene inmediatamente: $\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right) = \left|\vec{a}\right|^2$ lo que nos permite *calcular el módulo de un vector* cualquiera

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)}$$

Por otra parte de la definición se obtiene que *el producto escalar de dos vectores perpendiculares tiene que ser nulo*, pues la proyección de un vector sobre una recta perpendicular a su dirección es un punto

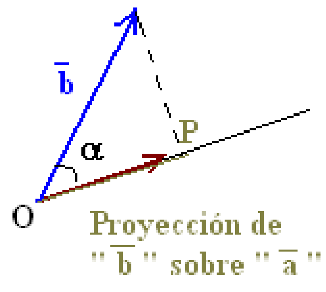

Figura 3
El segmento OP es la proyección del vector $\vec{b}$ sobre la dirección del vector $\vec{a}$

$$\text{Si}\quad \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{a} \text{ es} \perp \text{ a } \vec{b}$$

Si este producto entre dos vectores nos da como resultado un escalar, *no puede existir elemento neutro para el producto escalar de dos vectores*, pues es imposible obtener el vector del que partimos al multiplicarlo escalarmente con otro. Por la misma razón no puede existir el producto escalar de tres vectores, pues el producto de los dos primeros produciría un escalar y el producto por un tercero, realmente sería el producto de un escalar por un vector.

Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores es otro vector, cuyo módulo es el área del paralelogramo formado por los vectores, su dirección es la de la perpendicular al plano definido por los vectores y su sentido el de avance de un tornillo que siga el giro del primer vector (multiplicando) sobre el segundo (multiplicador) por el camino más corto. Normalmente el producto vectorial de dos vectores lo representaremos por ambos vectores unidos por el "aspa" de multiplicación con ambos vectores encerrados en un corchete. Así el producto vectorial $\vec{P}$ de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, lo representaremos como

(Producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$) ≡ $\vec{P} = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$

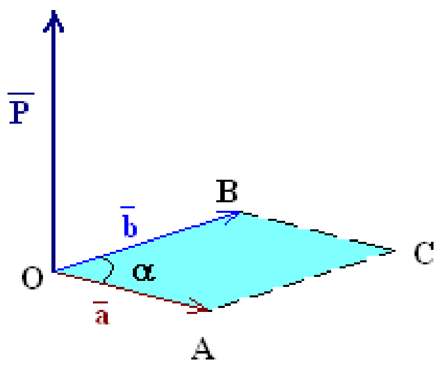

Figura 4
El vector producto vectorial $\vec{P}$ es perpendicular al plano definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Como el área del paralelogramo definido por los vectores (en la figura 4, el paralelogramo OBCA) es la longitud de los lados por el seno del ángulo que forman (tal vez se recuerde mejor que el área del triángulo $\widehat{OAB}$ es el $\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}\,\text{sen}\alpha$, por lo tanto el rectángulo tiene el doble de área) el módulo del producto vectorial de dos vectores será:

$$\left|\vec{P}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\,\text{sen}\alpha$$

Si el sentido viene dado por el de avance de un tornillo que haga girar el multiplicando hacia el multiplicador por el camino más corto, implica que el producto vectorial *no puede tener la propiedad conmutativa.*

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = -\left[\vec{b} \times \vec{a}\right]$$

Por la propia definición de producto vectorial de dos vectores *no puede existir elemento neutro* para el producto, pues no puede existir ningún vector, aunque su módulo sea unitario, que nos reproduzca el vector original, pues por definición el producto vectorial es un vector perpendicular a los dos vectores que se multiplican.

De la última afirmación se desprende que *no puede existir elemento inverso respecto de un vector*, lo que supone que *no existe la división entre vectores*.

Por otro lado, si el producto vectorial tiene por módulo el área del paralelogramo que definen los dos vectores, si dos vectores son paralelos no definen paralelogramo alguno, luego no tiene área. El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo.

$$\text{Si } \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{a} \text{ es paralelo a } \vec{b}$$

El producto vectorial de vectores tiene la *propiedad distributiva respecto de la suma de vectores*

$$\left[\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})\right] = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] + \left[\vec{a} \times \vec{c}\right]$$

Doble producto vectorial

El producto $\vec{a} \times \left[\vec{b} \times \vec{c}\right]$, se le conoce como doble producto vectorial. El lugar donde esté colocado el paréntesis tiene mucha importancia al definir un plano, y no otro, y la dirección del vector producto. Sabemos que el producto $\left[\vec{b} \times \vec{c}\right]$ está contenido en un plano perpendicular al definido por los dos vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Al multiplicar este producto vectorial por el vector $\vec{a}$, el nuevo producto vectorial tiene que dar como resultado un vector perpendicular al $\vec{a}$ y al vector $\left[\vec{b} \times \vec{c}\right]$, es decir, estará situado en el plano definido por los dos vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$, como se representa en la figura 6.

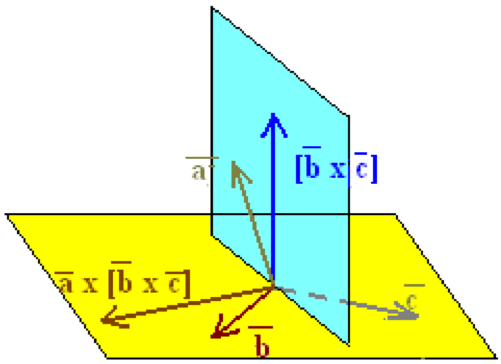

Figura 6

El vector $\left[\vec{b} \times \vec{c}\right]$ está contenido en un plano perpendicular al definido por ambos vectores. El vector $\vec{a} \times \left[\vec{b} \times \vec{c}\right]$ tiene que ser perpendicular tanto al vector $\vec{a}$, como al vector $\left[\vec{b} \times \vec{c}\right]$.

Se puede demostrar (lo que se deja al lector) que el doble producto vectorial puede expresarse como

$$\vec{a} \times \left[\vec{b} \times \vec{c}\right] = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

Por otro lado, se cumple que:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\times\vec{c}=\vec{c}\times\left[\vec{b}\times\vec{a}\right]$$

lo que es evidente pues se realizan dos cambios en el orden de realizar la multiplicación, lo que supone un doble cambio de signo en el producto.

Algunas aplicaciones geométricas de los productos entre vectores

La primera aplicación a la que nos vamos a referir es la posibilidad de asignar *carácter vectorial a las superficies*. Hemos dicho que el producto vectorial de dos vectores tiene por módulo el área del paralelogramo que definen. Cualquier superficie, plana o alabeada, se puede considerar como la suma de infinitos paralelogramos elementales, cuyo área es el producto vectorial de los dos vectores elementales que podemos considerar son sus lados, lo que lleva consigo un sentido de recorrido del perímetro de cada superficie elemental. Por tanto el sentido del recorrido de una superficie abierta nos dirá el sentido del vector superficie correspondiente. Si la superficie encierra un volumen, tomaremos como sentido positivo el dirigido hacia fuera del volumen.

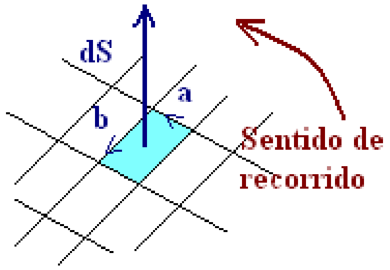

Figura 7
El producto de “a” por “b”, si los consideramos como vectores, da un sentido de recorrido a la superficie del paralelogramo elemental considerado.

Otra aplicación directa del producto entre vectores es el cálculo del *volumen de un paralelepípedo*. Consideremos tres vectores que no sean coplanarios. Definirán un paralelepípedo no recto, cuya base podemos considerar son dos de ellos y el tercero será una de sus aristas laterales.

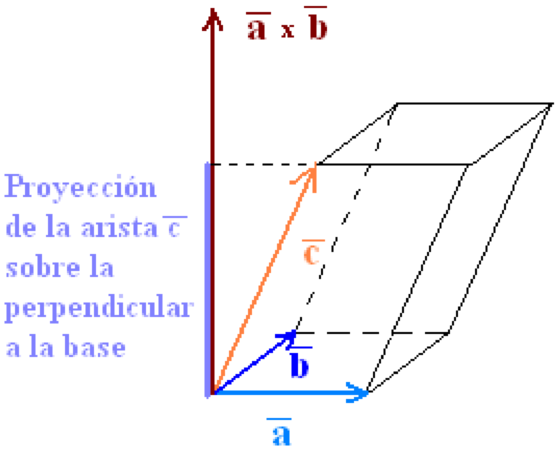

Figura 8
El volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores es al área de la base por la altura (proyección de la arista sobre la perpendicular a al base)

Sabemos que el volumen (V) de un paralelepípedo es el producto del área del polígono base por la altura del prisma. Por definición de producto vectorial de dos vectores, éste es otro vector perpendicular a los mismos cuyo módulo coincide con el área del paralelogramo que forman. También hemos dicho que el producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él, luego al multiplicar escalarmente el vector arista (en la figura 8 el vector $\vec{c}$) por el producto vectorial, en el orden adecuado, de los vectores base $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ obtenemos un escalar (el volumen “V”) cuyo valor será el módulo del vector área de la base por el segmento de perpendicular comprendido entre ambas bases del paralelepípedo (proyección de la arista sobre una perpendicular a las bases).

$$V=\vec{c}\cdot\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$$

Por tanto, podemos asignar un vector a cualquier superficie, según el sentido en el que la recorramos y calcular el volumen de cualquier paralelepípedo como el producto mixto de sus aristas entendidas como vectores.

DERIVADAS

Derivadas parciales. Diferencial de una función de varias variables. Derivada direccional

Derivadas parciales

Un caso que merece una mención especial es el cálculo de la derivada de una función, según una coordenada (al fin y al cabo una dirección), es lo que conocemos como derivada parcial de una función. Conceptualmente dará igual que la función sea escalar o vectorial (ya sabemos que si la función es vectorial lo que estamos diciendo será aplicable a cada coordenada, y tendremos que repetirlo para las otras).

Empezaremos por el caso más fácil de representar, que tengamos una función escalar que depende de dos variables $\lambda = \lambda(x, y)$ [como puede ser la altura de una montaña en función de su longitud y latitud geográfica], de la que nos interesa saber su variación según la dirección del eje "X", y después su variación según el eje "Y".

Por simplicidad, vamos a trabajar con un punto concreto P(a,b), para generalizar lo que obtengamos, tendremos que considerar que lo que obtenemos para el punto P es válido para cualquier otro punto de la función $\lambda = \lambda(x, y)$, pues al punto P no le vamos a poner ninguna condición concreta sólo que sea un punto del plano en el que esté definida la función, es decir exigimos que P sea un punto cualquiera del plano "XY" y que esté definida $\lambda(a, b)$ [en el ejemplo que hemos puesto, que el punto de coordenadas (a,b) esté debajo de la montaña].

Como se ve en la figura 1, la función es representable en tres dimensiones, el plano horizontal (XY) contendrá a las variables independientes y en el eje vertical representamos la función. La variación en la dirección del eje "X" en el punto "P" se verá mejor, si trazamos un plano perpendicular al eje "Y" que pase por "P" (plano y = b), de esta manera obtenemos una figura plana, en ese plano y = b.

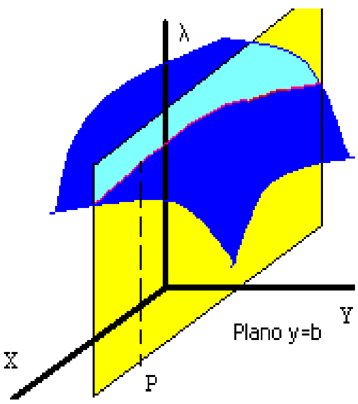

Figura 1
La función será la superficie pintada en azul, el plano, amarillo, corta la superficie en la línea roja

La situación con la que nos encontramos ya es conocida para nosotros, pues tenemos una función en el plano (X, λ) ver figura 2, en el que podemos calcular el cociente entre la variación de λ , y la variación de la variable independiente en este caso "X" ese cociente incremental (que en el ejemplo es negativo) será lo que llamaremos derivada parcial de λ respecto x, y lo representaremos por:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \lambda}{\Delta x} \right)_{y = \text{constante}}$$

De nuevo, como en geometría plana, la derivada nos da información sobre la variación de la función en el punto que nos interesa (en este caso proyección del punto P sobre el eje"X"). Gráficamente vemos que es "lenta" pues es necesario un gran intervalo Δa (en la variable independiente) de variación en la coordenada "X" para obtener una pequeña variación $\Delta\lambda$ de la función, además vemos que esta variación es negativa; es decir que la pendiente de la función es negativa y pequeña, que son las informaciones que podemos obtener de cualquier derivada "total" de una función, en una dimensión [y = f(x)] en un punto.

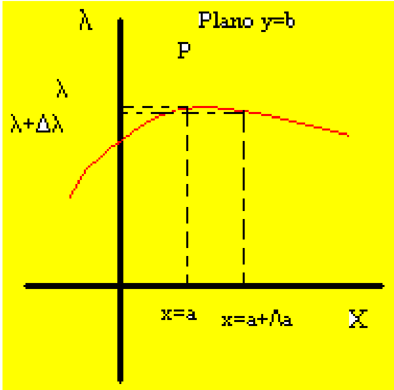

Figura 2

Para saber la variación de la función $\lambda = \lambda(x,y)$ en el punto "P" según la dirección del eje "Y", debemos actuar como en el caso anterior, es decir cortaremos la función por un plano perpendicular al eje "X" que pase por el punto "P", el plano x = a (ver figura 3).

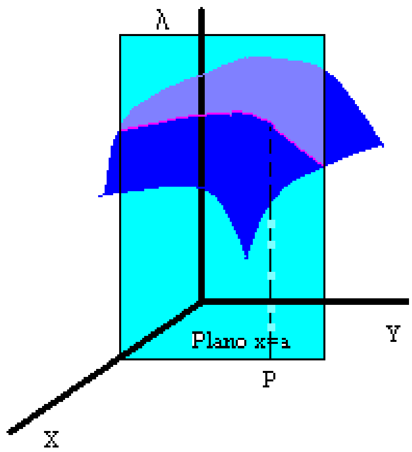

Figura 3

En ese plano, el punto en el que queremos calcular la derivada será el punto [b, $\lambda(b)$]. Al aumentar el valor de la variable independiente "b" en Δb, vemos que la función "λ" pasa de valer $\lambda(b)$ a valer $\lambda(b+\Delta b)$, que, en la figura 4, de nuevo es una cantidad menor.

Por tanto en este plano también, el valor de la función diminuye al aumentar el valor de la variable independiente, lo que nos indica que la derivada parcial de la función "λ" con respecto de "y" manteniendo "X" constante, que será el cociente de $\lambda(b+\Delta b)$ entre Δy, será negativa.

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \left[\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]_{x=cte} = \left[\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta\lambda}{\Delta y}\right]_{x=cte}$$

Cuyo significado geométrico es el de la pendiente de la línea tangente a la curva en ese punto.

Hemos calculado como varía la función $\lambda = \lambda(x,y)$ en el punto P(a,b) cuando se mantienen constante o la variable "x" o la variable "y". Al ser particularizado para el punto en cuestión, la variación de λ con "x" (manteniendo "y" constante e igual a "b") nos dará un número; y para la variación con "y" (manteniendo "x" constante e igual a "a") otro número.

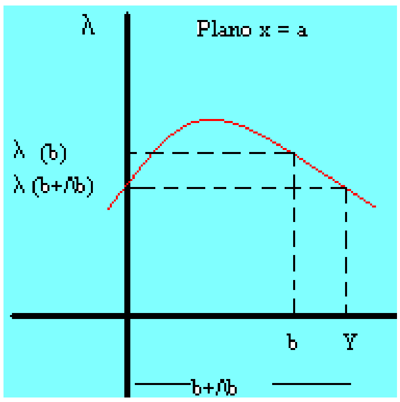

Figura 4

Como es lógico, si trabajamos a x=cte (por ejemplo x=a) pero para cualquier valor de "Y", lo que obtendremos, será una función que nos representará la variación de $\lambda(x,y)$ en el plano x = a. Luego $\left[\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]_{x=a}$ es una función de una variable que nos informa de la variación de la superficie tridimensional $\lambda(x,y)$ [representada en azulón en las figuras], cuando cortamos esta superficie por el plano x = a [plano azul claro], y la $\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right]_{y=b}$ es una función de una variable que nos dice como varía la superficie tridimensional cuando la cortamos por el plano y = b [plano amarillo].

La generalización de lo que hemos dicho será hacer que x vaya tomando los valores 0,1,2,3,... , todos los números reales, es decir que se convierta en parámetro. Luego la $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_{x=cte}$ será una función que representa la variación de la función original $\lambda = \lambda(x,y)$ en cada plano x=cte.

Por la propia definición, podemos calcular las derivadas parciales sucesivas de la función $\lambda = \lambda(x,y)$, si bien tendremos que especificar que variable vamos manteniendo constante, y lo denotaremos por: $\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\right)_{y=cte}$, $\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}\right)$ manteniendo constante primero la variable "y" después la variable "x", y así sucesivamente.

Cuando queramos saber la variación total de la función $\lambda(x,y)$, deberemos saber como varía λ con "X" cuando "Y" es constante, después como varía λ con "Y" cuando "X" es constante multiplicar cada "variación" por lo que nos "movemos" en la dirección correspondiente y esa será la variación total de la magnitud λ. Para expresar en términos matemáticos, lo que acabamos de decir escribimos: $d\lambda = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_{y=cte} dx + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_{x=cte} dy$ que será la expresión de la diferencial de una función de dos variables.

Si la magnitud que debemos estudiar es una función vectorial $\vec{a} = \vec{a}(x,y)$, hemos de tener en cuenta que para estar perfectamente definida en cada punto debemos conocer su módulo su dirección y su sentido, lo que como ya hemos dicho varias veces supone que tendremos tres funciones escalares, y para cada una de ellas podremos hablar de la derivada parcial respecto de cada una de las variables independientes.

<u>Funciones de tres o más variables</u>

Acabamos de analizar el caso de una magnitud escalar que es función de dos variables independientes, que por comodidad de representación hemos supuesto las coordenadas del punto en el plano, y a su vez hemos empleado las coordenadas rectangulares por entender que son con las que el lector se encuentra más familiarizado.

Pasemos ahora a considerar magnitudes que son función de tres o más variables. Esta situación se dará con relativa frecuencia en Física, pues existen una gran cantidad de fenómenos en los que la magnitud que los caracteriza depende de la posición, y no es nada raro encontrarnos con magnitudes que dependen del espacio y del tiempo.

El mayor de los problemas, es entender algo en el espacio de cuatro dimensiones (situación que tendremos si, por ejemplo, queremos describir la presión en un punto de nuestra atmósfera) pues si tenemos la función $\xi = \xi(x, y, z)$ y queremos representarla, necesitaríamos poder dibujar un espacio en el que existieran las coordenadas “X” “Y” “Z” y “ ξ ”, es decir cuatro coordenadas.

Normalmente, por lo que se opta, es por estudiar la función $\xi = \xi(x, y, z)$ primero cortada por el hiperplano (plano en el espacio de cuatro dimensiones) z = cte, luego cortada por y = cte y por último cortada por x = cte. Eso es exactamente lo que nos enseñan en la predicción del tiempo al representarnos las isobaras y decirnos que nos muestran la situación en capas medias de la atmósfera (ellos que tienen toda la información en capas bajas, medias y altas pueden hacer una mejor predicción y más prolongada en el transcurso de los días). Es más, al hablar de lo ocurrido a ese nivel (capas medias de la atmósfera) a lo largo del día anterior, nos tienen que mostrar una secuencia de imágenes (“cine”), superposición de las fotografías estáticas de lo ocurrido a las 8 horas, 9 horas, 10 horas... , así a lo largo de todo el día, (con terminología matemática cortes por planos t = 8h, t =9h, t = 10h ...) frente a la “foto estática” (esta es la situación al mediodía de hoy), para darnos la sensación de una dimensión más. La presión resulta ser función de la posición y del tiempo (cuatro dimensiones)

Por tanto, si la mecánica es trabajar con cortes de la función $\xi(x, y, z, t)$ por hiperplanos, nos encontramos con lo ya estudiado. Consideremos una función $\xi = \xi(x, y, z)$, de lo que acabamos de decir se desprende, que para conocer su variación en el espacio debemos analizar, en primer lugar lo que ocurre cuando z = cte después cuando y = cte y por último cuando es constante “x”. Debemos realizar un primer corte para z =0, lo que equivale a estudiar una función como la $\lambda(x, y)$ que ya hemos hecho en el apartado precedente. Luego el significado de las derivadas parciales será el mismo que el descrito con anterioridad, si bien ahora tendremos que expresar que dos variables independientes son constantes. Tendremos entonces:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{\substack{y=cte\\z=cte}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x}\right)_{\substack{y=cte\\z=cte}} \; ; \; \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{\substack{x=cte\\z=cte}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta y}\right)_{\substack{x=cte\\z=cte}} \; ; \; \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_{\substack{x=cte\\y=cte}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta z}\right)_{\substack{x=cte\\y=cte}}$$

Si el diferencial de una función nos dice como es la variación de la función al considerar las tres dimensiones de las que depende y la derivada parcial nos dice que tipo de variación tenemos al considerar dos de ellas constantes, el diferencial de la función será la suma del tipo de variación según cada variable independiente multiplicada por “la cantidad” que varia esa variable:

$$d\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{\substack{y=cte\\z=cte}} dx + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{\substack{x=cte\\z=cte}} dy + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_{\substack{x=cte\\y=cte}} dz$$

La generalización a un mayor número de variables independientes supone indicar en cada caso cuales son las variables que se mantienen constantes, por ejemplo en el caso de la función $\xi = \xi(x, y, z, t)$, tendremos:

$$d\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{\substack{y=cte\\ z=cte\\ t=cte}} dx + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{\substack{x=cte\\ z=cte\\ t=cte}} dy + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_{\substack{x=cte\\ y=cte\\ t=cte}} dz + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{\substack{x=cte\\ y=cte\\ z=cte}} dt$$

Si la magnitud es una función vectorial debemos, como ya hemos dicho en otras ocasiones, razonar de idéntica manera con las tres funciones escalares que nos darán el módulo la dirección y el sentido del vector correspondiente.

Derivadas direccionales

Supongamos ahora que necesitamos saber la variación según una dirección determinada del escalar, es decir su derivada direccional, según una dirección que forma un ángulo conocido con la normal a la superficie equiescalar en un punto.

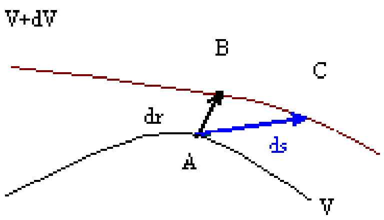

Figura 5

En la figura hemos representado dos líneas equiescalares "V" y "V+dV" de un campo, si en el punto "A" queremos conocer la derivada según la dirección "AC", tendremos que la variación de la magnitud "V" (que es dV) será la derivada según la dirección "AC", que representamos por $\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\text{segun } \vec{u}_s}$, multiplicado por "lo que nos movemos" en esa dirección $ds = |d\vec{s}|$. Por otro lado sabemos que el gradiente , que tiene la dirección de la máxima variación, cumple que $dV = (\nabla V) \cdot d\vec{r}$, siendo $d\vec{r}$ el sentido del vector gradiente. Si llamamos "β " al ángulo que forman los vectores $d\vec{r}$ y $d\vec{s}$, podemos escribir: dV = (L V) · ds ·cos β , ya que $d\vec{r}$ es la proyección de $d\vec{s}$ en la dirección de máxima variación. Luego la derivada en la dirección definida por $d\vec{s}$ será: $\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\text{segun } \vec{u}_s} = (\nabla V) \cdot \cos\beta$

CONCEPTOS DE RADIÁN Y ESTEREORRADIÁN

El radián. Ángulos sólido: El estereorradián

<u>Concepto de radián</u>

Para introducir el concepto de ángulo sólido y de su medida, el estereorradián, vamos a recordar el significado y la medida de otra magnitud plana, ya conocida, el ángulo plano y su medida el radián, que por su similitud nos ayudarán a entender estos dos conceptos de la Geometría en el espacio.

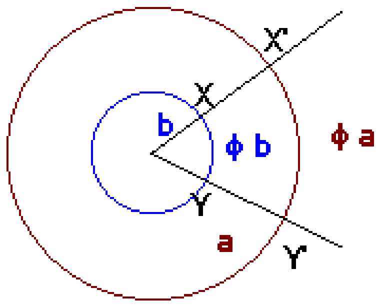

Figura 1
Representación de un único ángulo ϕ , que define dos arcos de distinta longitud en dos circunferencias de distinto radio.

Todos sabemos que el tramo de circunferencia comprendido entre dos puntos cualesquiera, recibe el nombre de arco. Su longitud dependerá del radio de la circunferencia a la que pertenece. Consideremos los arcos XY y X’Y’ que se muestran en la figura, la longitud de ambos es distinta y como sabemos su valor es el del radio multiplicado por el ángulo expresado en radianes: $XY = b \cdot \phi$ y $X'Y' = a \cdot \phi$.

Como recordamos, la razón está en la definición de radián como: “el ángulo que sustenta un arco de longitud un radio”. A un arco cuya longitud sea toda la circunferencia, es decir $2\pi\ r$, le debe corresponder un ángulo cuyo valor sea 2π . Por tanto, para caracterizar un ángulo cualquiera dividimos la longitud del arco que limita entre el radio de la correspondiente circunferencia a la que pertenece, de forma que el ángulo “ ϕ ” es la relación entre el arco $\overset{\frown}{X'Y'}$ y el radio “a”, o entre el arco $\overset{\frown}{XY}$ y el radio “b” $\left(\phi = \dfrac{\overset{\frown}{X'Y'}}{a} = \dfrac{\overset{\frown}{XY}}{b} \right)$.

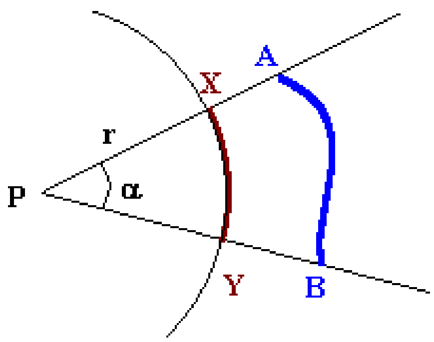

Figura 2
El ángulo α , con el que vemos la figura “AB”, está definido por el arco XY y el radio de la circunferencia a la que pertenece

Cuando queremos saber el ángulo “ α ” que tenemos que abarcar para ver una línea cualquiera desde un punto “P” determinado (ver figura 2 del apéndice), trazamos una circunferencia de radio “r” y centro en “P” y los radios, o sus prolongaciones, que pasan por los extremos de la línea que queremos ver (“A” y “B” en la figura) nos definen los puntos “X” e “Y” del arco correspondiente. La relación entre la longitud del arco “XY” y el radio nos da la medida del ángulo α :

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{XY}}{r}$$

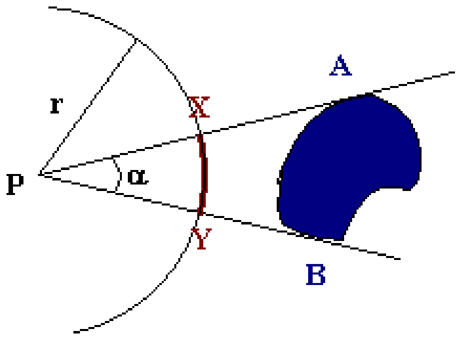

Figura 3
El ángulo α desde el que vemos la figura plana se define por los dos puntos extremos visibles desde "P"

Naturalmente si queremos saber el ángulo abarcado desde un punto determinado "P" por una figura plana (figura 3 del apéndice), la situación será la anterior considerando la línea definida por los extremos visibles desde "P" del perímetro de la figura plana.

Por tanto en el plano quien define los valores de los ángulos son siempre líneas, pues en el plano desde un punto sólo vemos líneas.

Ángulo sólido: Estereorradián

Vamos a establecer las situaciones análogas en el espacio. Cualquier punto del espacio, lo podemos considerar como el centro de una superficie esférica que lo rodea, la cual estará caracterizada por su radio. Si desde el punto miramos hacia el infinito empleando algún artefacto que limite nuestro campo de visión, veremos una porción de esa superficie esférica. Si ahora consideramos una superficie esférica de mayor radio y miramos al infinito en las mismas condiciones que antes, veremos una porción de superficie esférica de mayor tamaño, como se esquematiza en la figura 4. Si observamos la figura con detenimiento, veremos que las dos superficies que divisamos desde "P" (cuyos vértices hemos llamado VXYZ y V'X'Y'Z') se corresponden con el corte de cada superficie esférica con una pirámide de base cuadrangular de vértice en "P". Definimos como *ángulo sólido*, el ángulo del vértice de la pirámide desde el que vemos ambas superficies.

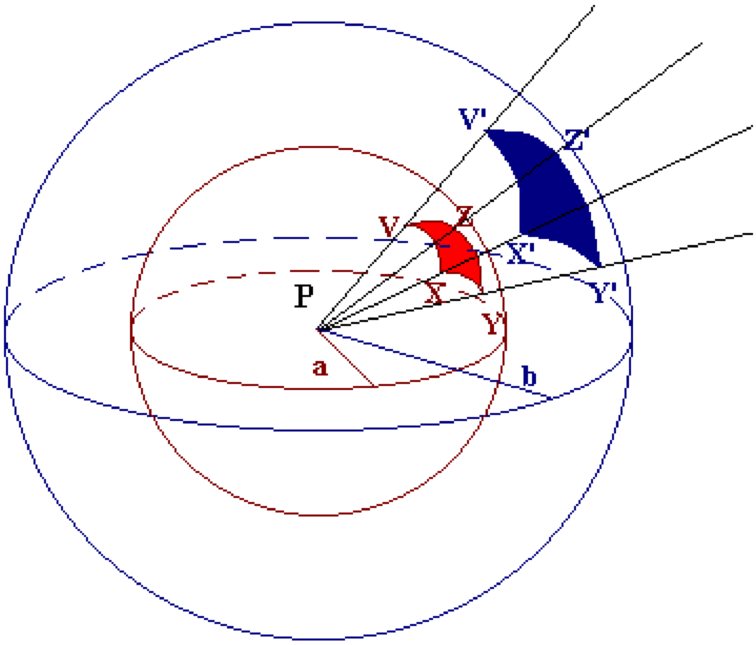

Figura 4
Representación del ángulo sólido subtendido en "P". Se puede apreciar que las superficies limitadas por él en las dos superficies esféricas son distintas, correspondiendo la mayor a la de mayor radio.

Para medir ese ángulo sólido que acabamos de definir, seguiremos un proceso similar al empleado en plana, compararemos la superficie que vemos (la VXYZ o la V'X'Y'Z') con el radio de la esfera a la que pertenece. Realmente si queremos hacer las cosas bien debemos comparar superficies con superficies, igual que en geometría plana comparamos lineas con líneas, luego la medida de cada superficie será la del cuadrado del radio de la esfera correspondiente. Luego el ángulo sólido Ω desde el que divisamos ambas superficies medirá:

$$\Omega = \frac{S_{VXYZ}}{a^2} = \frac{S'_{V'X'Y'Z'}}{b^2}$$

Recordando que el área de la superficie esférica es $S_{Es} = 4\,\pi\,r^2$ nos damos cuenta que a toda la superficie esférica le corresponderá un ángulo sólido de 4π estereorradianes, siempre que definamos un **estereorradián** como **el ángulo sólido desde el que se ve una superficie de área igual al cuadrado del radio de la esfera**.

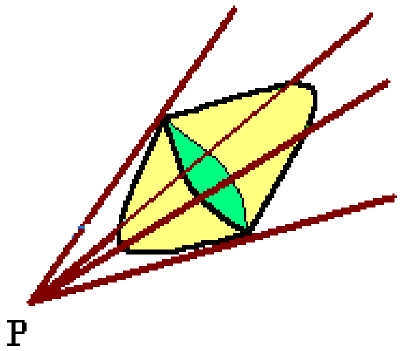

Figura 5
Desde “P” la figura la vemos como la superficie transversal que hemos resaltado

De manera similar a como decíamos para el plano, si queremos saber el ángulo sólido desde el que se “divisa” desde un punto un volumen cualquiera, debemos tener en cuenta que los cuerpos a estos efectos es como si fueran opacos, es decir para nuestro razonamiento, el cuerpo observado queda definido por la superficie externa que divisamos, que es realmente una sección transversal de la figura.

SISTEMAS DE COORDENADAS

Sistemas de coordenadas: cartesianas rectangulares. Cilíndricas. Esféricas

Sistemas de coordenadas

Otra aplicación importante de los productos entre vectores, es la posibilidad de situar un punto en el espacio con absoluta fiabilidad, lo cual como todos sabemos se lleva a cabo empleando un sistema de coordenadas. Para poder hablar de un sistema de coordenadas tenemos que empezar por situar un punto en el espacio que tomaremos como origen de coordenadas, a partir de ese punto, y según el sistema de coordenadas que utilicemos, daremos tres números en un cierto orden y con un significado específico, que llamamos coordenadas del punto en el sistema de coordenadas en cuestión. En aras a la sencillez vamos, a introducir en primer lugar las coordenadas cartesianas rectangulares

Coordenadas cartesianas rectangulares

Consideremos un punto "P" en el espacio, como se muestra en la figura 1, para definir su posición respecto del origen "O" podemos formar el paralelepípedo que definen los tres ejes coordenados con los puntos "O" y "P". De forma que la longitud de las aristas "P_x , P_y y P_z" definen, al considerarlas en su eje correspondiente, el punto "P" respecto del origen "O".

Lo que acabamos de decir, equivale a proyectar el punto "P" sobre el eje "Z", obteniendo así el punto "C" que nos define el segmento P_z , proyectar luego el punto "P" sobre el eje "X" y finalmente sobre el eje "Y", los que nos definirá los segmentos P_x y P_y (normalmente estas proyecciones se suelen realizar proyectando sobre el plano "XY" el punto "P" lo que define el punto "D", para después ser éste el que proyectamos sobre los dos ejes, definiendose los puntos "A" y "B" que nos determinan los segmentos P_x y P_y).

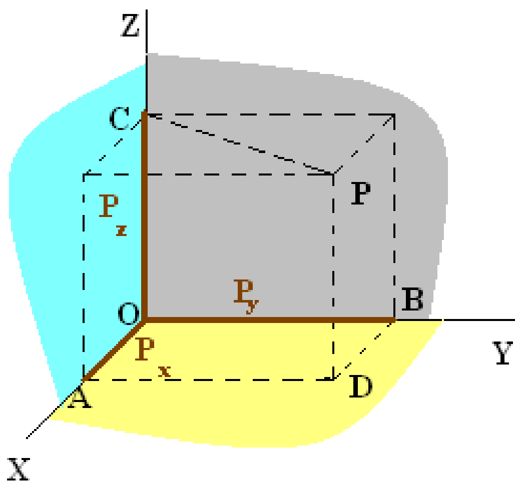

Figura 1
Representación en el espacio de un punto "P". Este punto queda definido por los segmentos P_x , P_y y P_z

Recordemos que el producto escalar de dos vectores es el módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. Si definimos el vector posición ($\vec{r}$) del punto "P" y unos vectores unitarios según los ejes al calcular los productos escalares de $\vec{r}$ por esos vectores unitarios, tendremos las proyecciones del vector posición sobre los tres ejes.

Así, como se muestra en la figura 2, si para el eje "Y" definimos un vector unitario $\vec{u}_y$ el producto $\left(\vec{r}\cdot\vec{u}_y\right)$, valdrá: el módulo de uno de los vectores $\left(\left|\vec{u}_y\right|=1\right)$ multiplicado por la proyección del otro (el vector $\vec{r}$) sobre él, que es el segmento $\overline{OB}$. Repitiendo la misma operación con los tres ejes coordenados, obtendremos los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ al considerar los vectores unitarios $\vec{u}_x$ y $\vec{u}_z$ según los ejes "X" y "Z" respectivamente, como se muestra en la figura 3.

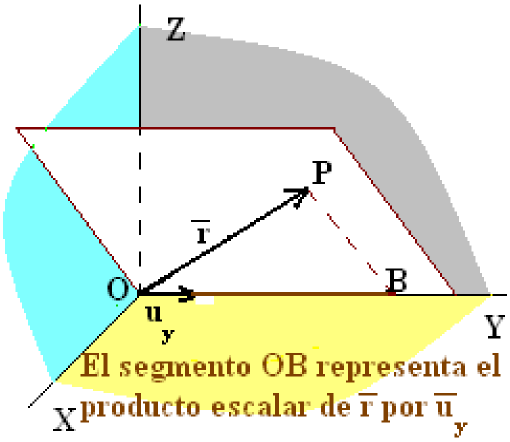

Figura 2

El segmento $\overline{OB}$ es la proyección del vector $\vec{r}$ sobre el eje "Y"

Los tres vectores que hemos definido, cumplen:

- Todos ellos son de módulo unidad.
- El producto vectorial de dos de ellos, en el orden adecuado, nos da como resultado el tercero de ellos (siguen una permutación circular)

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \ ; \ \vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \ ; \ \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y$$

Es decir, forman lo que se conoce como un *sistema ortonormal*.

Por tanto, un punto lo podemos definir en el espacio o por sus coordenadas o por las componentes del vector posición del punto respecto del origen, lo que nos da la posibilidad de expresar en coordenadas rectangulares un vector cualquiera.

En efecto, consideremos un vector cualquiera, como se muestra en la figura 4, del que conocemos sus proyecciones sobre los tres ejes, que hemos representado por r_x, r_y y r_z respectivamente, su producto por los vectores unitarios según los tres ejes dan lugar a tres vectores paralelos a los ejes cuya suma vectorial nos reproduce el vector original $\vec{r}$.

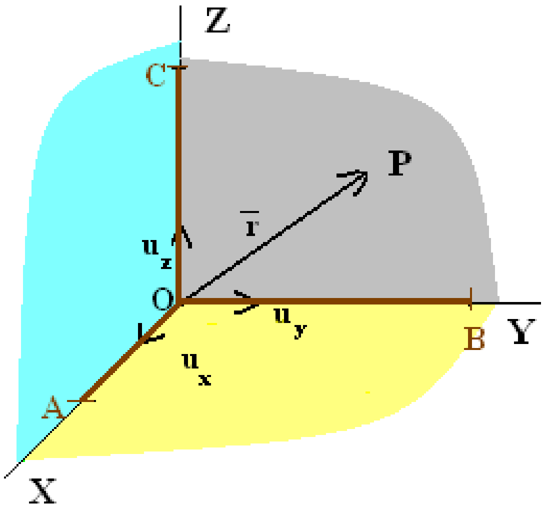

Figura 3

Los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son los productos escalares del vector $\vec{r}$ por los vectores unitarios $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ y $\vec{u}_z$ respectivamente

Por tanto, podemos escribir que $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$ o lo que es lo mismo, $\vec{r} = r_x\vec{u}_x + r_y\vec{u}_y + r_z\vec{u}_z$, siendo r_x, r_y y r_z las componentes cartesianas del vector $\vec{r}$.

Por tanto, la situación de un punto (P) en el espacio en coordenadas rectangulares queda definido por su vector posición $\vec{r}$, que es de la forma

$$\vec{r} = r_x\vec{u}_x + r_y\vec{u}_y + r_z\vec{u}_z$$

Una vez situados en el punto "P", un desplazamiento infinitesimal que nos permita llegar a un punto muy próximo definido por el vector de posición $\vec{r} + d\vec{l}$, supone que la coordenada "X" aumenta en dx, lo que escribiremos como $dx\, \vec{u}_x$, la coordenada "Y" aumentará en dy, lo que escribiremos como $dy\, \vec{u}_y$, y por último la coordenada "Z" aumentará en dz, lo que escribiremos como $dz\, \vec{u}_z$. Por tanto el deslazamiento diferencial será de la forma

$$d\vec{l} = dx\, \vec{u}_x + dy\, \vec{u}_y + dz\, \vec{u}_z$$

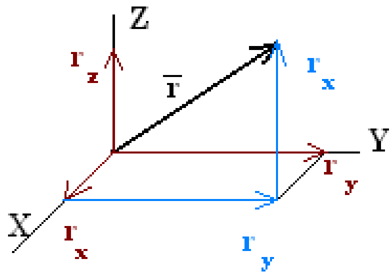

Figura 4
Componentes del un vector

Los tres desplazamientos definen un volumen elemental de aristas "dx", "dy" y "dz", cuyo volumen será el volumen elemental expresado en estas coordenadas. Como según sabemos el volumen de cualquier paralelepípedo es el resultado del producto mixto de los vectores que son sus aristas y también conocemos que los tres vectores son perpendiculares entre sí, el producto mixto $\left[dx\, \vec{u}_x \times dy\, \vec{u}_y\right] \cdot dz\, \vec{u}_z$, que representa el volumen es el producto de los tres módulos, es decir:

$$d\tau = dx\, dy\, dz$$

que es la *expresión del volumen elemental en coordenadas rectangulares.*

Como no siempre la geometría del problema se resuelve con comodidad con las coordenadas rectangulares, se emplean otro tipo de coordenadas, las más empleadas son las cilíndricas y las esféricas.

Coordenadas cilíndricas

El estudio de campos en los que la simetría juega un papel importante, lo cual es cierto en el momento en el que tengamos que realizar un cálculo, puede ser conveniente expresar las magnitudes que entran en juego de una forma distinta a el sistema que hemos empleado hasta ahora (coordenadas rectangulares).

Así, si tenemos un problema en el que la simetría viene dada por una dirección de privilegio y las propiedades de nuestra magnitud se repiten a lo largo de ella, nos resultaría más fácil trabajar con la magnitud si la pudiéramos describir por planos perpendiculares a un eje de esa dirección. Es decir, un punto cualquiera del espacio lo definimos por la distancia al eje (*coordenada radial* ρ) y por la distancia del punto de corte de la perpendicular al eje que pasa por el punto hasta el origen de coordenadas (*coordenada en altura* "z"), que desde luego estará en el eje. Ya tenemos el punto en un plano a una cierta altura y a una distancia del eje, es decir dentro de una circunferencia en ese plano y para dejarlo definido sólo nos

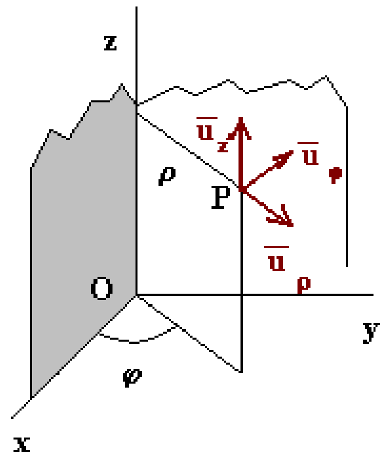

Figura 5
Sistema de coordenadas cilíndricas

hace falta un ángulo (*coordenada azimutal* "φ") y para definirlo un origen de ángulos. Ese es el sistema de coordenadas cilíndricas cuyos vectores unitarios según las coordenadas $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\varphi$ y $\vec{u}_z$ tomados en este orden, son un sistema de referencia ortonormal, es decir cumplen:

$$\vec{u}_\rho \times \vec{u}_\varphi = \vec{u}_z \,;\; \vec{u}_\varphi \times \vec{u}_z = \vec{u}_\rho \;\text{ y }\; \vec{u}_z \times \vec{u}_\rho = \vec{u}_\varphi$$

A partir de un plano en el que definimos un origen y un eje que pasa por él, un punto "P" estará definido si conocemos la distancia al eje (su coordenada radial ρ), la altura sobre el eje desde el origen (su coordenada en altura "z") y el ángulo que tenemos que recorrer para llegar hasta él (su coordenada azimutal φ). El punto P vendrá definido por el vector

$$\vec{r} = \rho\, \vec{u}_\rho + z\, \vec{u}_z$$

Observemos que el ángulo φ no aparece explícitamente en el segundo miembro; está dado por la orientación del vector unitario $\vec{u}_\rho$.

Dada su importancia, vamos a calcular los elementos de longitud correspondientes a los cambios infinitesimales en las coordenadas de un punto. Si las coordenadas "φ" y "z" del punto P permanecen constantes, mientras ρ aumenta en $d\rho$, entonces P se desplaza $d\vec{r} = d\rho\, \vec{u}_\rho$. Por otra parte, si ρ y z se mantienen constantes y ahora φ varía en $d\varphi$, entonces el desplazamiento de P es $d\vec{r} = \rho\, d\varphi\, \vec{u}_\varphi$. Finalmente, para ρ y φ constantes, la variación dz implica $d\vec{r} = dz\, \vec{u}_z$. Para incrementos arbitrarios $d\rho$, $d\varphi$, dz, la variación del vector de posición es

$$d\vec{r} = d\rho\, \vec{u}_\rho + \rho\, d\varphi\, \vec{u}_\varphi + dz\, \vec{u}_z$$

y su módulo será

$$dr = \left[(d\rho)^2 + (\rho\, d\varphi)^2 + (dz)^2\right]^{1/2}$$

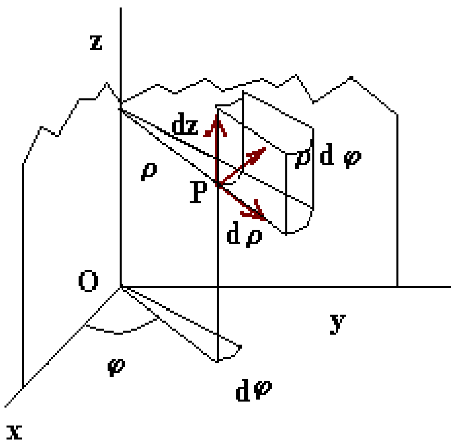

Figura 6
Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas

La figura 6 muestra el elemento de volumen cuyos lados son los elementos de longitud correspondientes a los incrementos infinitesimales en las coordenadas del punto P de la figura 5. El volumen infinitesimal, que de nuevo podemos calcular por el producto triple de los tres desplazamientos infinitesimales que son sus aristas nos da:

$$d\tau = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

que es la expresión del *elemento de volumen en coordenadas cilíndricas*

<u>Coordenadas esféricas</u>

En algunas ocasiones las propiedades del sistema que queremos estudiar, dependen de la distancia a un punto y de la orientación respecto del mismo, en estos casos puede ser útil el empleo de las coordenadas esféricas.

En coordenadas esféricas la posición de un punto P se especifica por la distancia al origen "r" (coordenada radial), el ángulo " θ " entre el eje "Z" y el radio vector y por último por el ángulo azimutal " φ " En el punto P los vectores unitarios son los indicados en la figura 7 $\vec{u}_r$, lleva la dirección del radio vector y sentido hacia P, $\vec{u}_\theta$, es perpendicular al radio vector en el plano que contiene el eje z y el radio vector, y $\vec{u}_\varphi$ es perpendicular a ese plano (igual que en coordenadas cilíndricas el vector posición $\vec{r}$ y el unitario en su dirección $\vec{u}_r$, los denotaremos indistintamente así o por $\vec{\rho}$ y $\vec{u}_\rho$).

Estos tres vectores forman un sistema ortonormal de modo que cumplen:

$$\vec{u}_\rho \times \vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \; ; \; \vec{u}_\theta \times \vec{u}_\varphi = \vec{u}_\rho \; \text{ y } \; \vec{u}_\varphi \times \vec{u}_\rho = \vec{u}_\theta$$

Un punto "P" cualquiera en el espacio viene perfectamente definido por su vector posición $\vec{r} = r\,\vec{u}_r$ donde las coordenadas θ y φ están determinadas por la orientación del vector unitario $\vec{u}_r$. Por tanto, nuevamente, al considerar otro punto cualquiera los vectores unitarios no tienen la misma dirección.

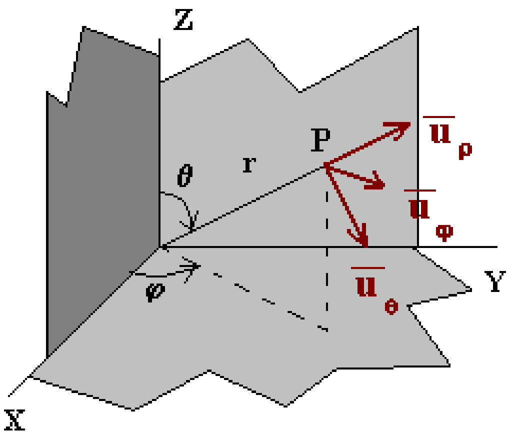

Figura 7
Sistema de coordenadas esféricas

Vamos a calcular los elementos de longitud correspondientes a los cambios infinitesimales en las coordenadas de un punto. Si las coordenadas θ y φ del punto "P" permanecen constantes, mientras ρ aumenta en $d\rho$, entonces P se desplaza $d\vec{r} = d\rho\,\vec{u}_\rho$. Por otra parte si ρ y φ constantes la variación $d\theta$ implica un desplazamiento $\rho\, d\theta\, \vec{u}_\theta$. Por último, para ρ y θ constantes y ahora φ varía en $d\varphi$, entonces el desplazamiento de P es $\rho\,\mathrm{sen}\theta\, d\varphi\, \vec{u}_\varphi$. El elemento de longitud $d\vec{l}$, que corresponde a incrementos arbitrarios de las coordenadas, es

$$d\vec{l} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\, d\theta\,\vec{u}_\theta + \rho\,\mathrm{sen}\theta\, d\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

y su módulo

$$dl = \left[(d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2 + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,(d\varphi)^2\right]^{1/2}$$

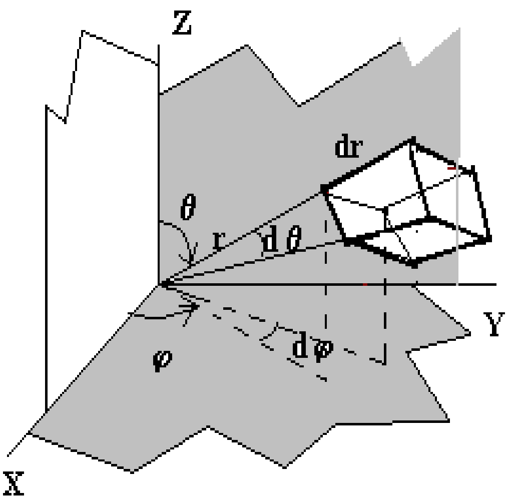

Figura 8
Elemento de volumen en coordenadas esféricas

El volumen elemental definido por los tres desplazamientos infinitesimales, que se representa en la figura 8, lo podemos calcular por el producto mixto de los tres vectores que definen los desplazamientos y vale:

$$d\tau = \rho^2 \operatorname{sen}\theta \; d\rho \; d\theta \; d\varphi$$

que es la expresión del *elemento de volumen en coordenadas esféricas*

Ya podemos por tanto definir un punto en el espacio, describir los desplazamientos elementales del mismo y calcular el volumen de un cuerpo cualquiera en los tres sistemas de coordenadas más comúnmente usados.

DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR

Desarrollo en serie de Taylor

Si tenemos una función de una variable F(x) definida en un intervalo y con "n" derivadas sucesivas en ese intervalo, conocido el valor de la función F(a) en un punto "x = a" del intervalo la función, podemos escribir que:

$$F(x) = F(a) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=a} \cdot (x-a) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{x=a} \cdot (x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^nF}{dx^n}\right)_{x=a} \cdot (x-a)^n + \varepsilon$$

donde " ε " es el error que se comete al parar el desarrollo en el término enésimo, que es menor que una cierta cantidad que también establece el teorema.

$\varepsilon = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(x^*)$, siendo x^* un punto del intervalo y representando por $F^{(n+1)}$ la derivada (n+1)-ésima de la función

El interés de este teorema en aplicaciones físicas está en que muchas veces tenemos que considerar un incremento pequeño de la variable ("x - a" pequeño), de forma que sólo es necesario tomar unos pocos términos para tener una representación satisfactoria de la función. Cuando se toman únicamente los dos primeros términos se dice que es una aproximación de primer orden o lineal; cuando se mantiene hasta el tercero, una aproximación cuadrática o de segundo orden y así sucesivamente.

Veámoslo con un ejemplo: Supongamos que conocido el valor del logaritmo neperiano de 2 (de valor ln2 = 0,69314718), queremos conocer el valor del logaritmo neperiano de un número cercano.

Como la función logarítmica [y = ln(x)] esta definida y tiene infinitas derivadas en el entorno del valor x = 2, podemos realizar un desarrollo en serie de la función para conocer el valor del logaritmo neperiano de un número cercano a "2", como puede ser 2,05. Según hemos escrito más arriba, necesitaremos conocer las derivadas sucesivas de la función, en este caso la función logaritmo neperiano:

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}\ ;\ \frac{d^2}{dx^2}\left[\ln(x)\right] = -\frac{1}{x^2}\ ;\ \frac{d^3}{dx^3}\left[\ln(x)\right] = +\frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}\ ;\ \frac{d^4}{dx^4}\left[\ln(x)\right] = -\frac{6x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4}$$

luego el valor de ln 2,05 será:

$$\ln 2{,}05 = \ln 2 + \left(\frac{1}{x}\right)_{x=2} \cdot (2{,}05-2) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{x^2}\right)_{x=2} \cdot (2{,}05-2)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{x^3}\right)_{x=2} \cdot (2{,}05-2)^3$$
$$+ \frac{1}{4!}\left(-\frac{6}{x^4}\right)_{x=2} \cdot (2{,}05-2)^4 + \ldots$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$\ln 2{,}05 = \ln 2 + \frac{(2{,}05-2)}{2} - \frac{(2{,}05-2)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{(2{,}05-2)^3}{3\cdot 2^3} - \frac{(2{,}05-2)^4}{4\cdot 2^4} + \ldots$$

que operando nos permitirá calcular con mayor o menor aproximación el neperiano del número deseado.

Para aclarar lo que acabamos de decir y teniendo en cuenta que la función que hemos considerado (la función logaritmo neperiano) está tabulada, podemos mirar el valor en el punto que estamos calculando el neperiano (el punto x = 2,05) con lo que obtenemos como "valor exacto" de la función en el punto (ln 2,05 = 0,71783979). Podemos ahora comparar los resultados del desarrollo en serie con el "valor exacto". Para ello vamos a construir una tabla cuya primera columna sea cada término del desarrollo en serie, la segunda columna será el valor de cada uno de los términos del desarrollo, en la tercera el valor que tendremos del ln 2,05 si detenemos el desarrollo en serie en ese término y por último, en la cuarta columna, escribiremos la diferencia entre el "valor exacto" y el calculado empleando el término considerado.

Término	**Valor del término**	**Suma de cada término con los anteriores**	**Diferencia respecto del valor tabulado**
ln 2	0,69314718	0,69314718	$2{,}46\times 10^{-2}$
$\frac{(2{,}05-2)}{2}$	$2{,}5\times 10^{-2}$	0,71814718	$-3{,}07\times 10^{-4}$
$\frac{(2{,}05-2)^2}{2\cdot 2^2}$	$-3{,}125\times 10^{-4}$	0,71783468	$5{,}11\times 10^{-6}$
$\frac{(2{,}05-2)^3}{3\cdot 2^3}$	$5{,}208333\times 10^{-6}$	0,71783989	$-9{,}57\times 10^{-8}$
$\frac{(2{,}05-2)^4}{4\cdot 2^4}$	$-9{,}765625\times 10^{-8}$	0,71783979	$1{,}91\times 10^{-9}$

Observando la tabla podemos comprobar que la aproximación de primer orden nos proporciona un valor del logaritmo neperiano de 2,05 que sólo difiere del "verdadero" en $-3{,}0\times 10^{-4}$, es decir en la cuarta cifra significativa y la aproximación de segundo orden nos acerca al valor "verdadero" con una coincidencia de las cinco primeras cifras significativas, de ahí que con la aproximación lineal o con la cuadrática se obtengan resultados suficientemente buenos en muchos casos.

Es cierto que el grado de linealidad de la función va a ser un factor determinante a la hora de decidir el número de términos a considerar, de ahí la importancia de poder conocer de una manera rápida el error que se comete al detener el desarrollo de Taylor en un término concreto, nuestras necesidades de precisión marcarán hasta que término debemos considerar.

Si calculamos el valor del error que cometemos al parar el desarrollo en cada término, tomando por ejemplo como punto intermedio del entorno el valor x = 2,0125 obtenemos:

$$\varepsilon = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{d^5[\ln(x)]}{dx^5}\right)_{x=2{,}0125} = \frac{(2{,}05-2)^5}{5!}\cdot\frac{24}{2{,}0125^5} = 1{,}7\times10^{-9}$$

es decir el error previsto por este método aproximado ($1{,}7\times10^{-9}$) es del mismo orden de magnitud, y prácticamente el mismo número, que la diferencia que hemos obtenido de forma “exacta” entre el valor del desarrollo en serie y el “valor exacto” de la función.

Veamos cuál es la razón por la que una función continua y con “n+1” derivadas en un intervalo alrededor del punto “x = a” es expresable de la forma que acabamos de exponer y porque le exigimos esas condiciones. Para demostrar la igualdad que supone el desarrollo en serie de Taylor de una función en un intervalo, partimos de la derivada “n+1” de la función en el intervalo (que representaremos por $F^{(n+1)}(x)$), por tanto **debemos exigir a la función que tenga en el intervalo “n+1” derivadas,** lo que implica **que esté definida** en el intervalo. La derivada “n-ésima” la podemos obtener como la integral de la “n+1”:

$\int_a^x F^{(n+1)}(x)\,dx = \left[F^{(n)}(x)\right]_a^x = F^{(n)}(x) - F^{(n)}(a)$, donde $F^{(n)}(a)$ es el valor de la derivada enésima de la función particularizada para x = a, lo que nos da una constante.

Integrando de nuevo obtenemos:

$$\int_a^x\left[\int_a^x F^{(n+1)}(x)\,dx\right]dx = \int_a^x\left[F^{(n)}(x) - F^{(n)}(a)\right]dx = \left[F^{(n-1)}(x)\right]_a^x - (x-a)\cdot F^{(n)}(a) =$$

$= F^{(n-1)}(x) - F^{(n-1)}(a) - (x-a)\cdot F^{(n)}(a)$, donde $F^{(n-1)}(a)$ es de nuevo una constante.

Realizando una tercera integral tenemos:

$$\int_a^x\left[\int_a^x\left[\int_a^x F^{(n+1)}(x)\,dx\right]dx\right]dx = \int_a^x\int_a^x\int_a^x F^{(n+1)}(x)\,(dx)^3 =$$

$$= F^{(n-2)}(x) - F^{(n-2)}(a) - (x-a)\cdot F^{(n-1)}(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}F^{(n)}(a)$$

realizando n +1 integrales tendremos:

$$\underbrace{\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x}_{\leftarrow n+1 \rightarrow} F^{(n+1)}(x)\,(dx)^{(n+1)} =$$

$$= F(x) - F(a) - (x-a)\cdot F'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}F''(a) - \ldots - \frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)$$

reordenando la expresión anterior obtenemos el desarrollo en serie de Taylor para funciones de una variable:

$$\underline{F(x) = F(a) + (x-a)\cdot F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}F''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a) + \varepsilon_n}$$

donde $\varepsilon_n = \underbrace{\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x}_{\leftarrow n+1 \rightarrow} F^{(n+1)}(x)\,(dx)^{(n+1)}$. Para calcular el valor del error que se comete al detener el desarrollo en serie en un orden de derivación determinado, debemos recordar las propiedades de las integrales múltiples nos permiten escribir:

$$\varepsilon_n = \underbrace{\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x}_{\leftarrow n+1 \rightarrow} F^{(n+1)}(x)\,(dx)^{n+1} = \int_a^x F^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

Aplicando el teorema del valor medio de una función que nos dice:

$$\int_a^x g(x)\,dx = (x-a)\,g(x^*)$$

siendo x* un punto del intervalo [a, x].

Realizando n+1 integraciones obtenemos: $\underline{\varepsilon_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(x^*)}$

que será el valor del error en la aproximación realizada al detener el desarrollo en el término enésimo.

Naturalmente, el desarrollo en serie es una aproximación válida para conocer el valor de una función determinada en un punto, cuando se conoce, o se supone conocido, el valor de la función en un punto cercano. Es decir, cuando en todo el desarrollo que hemos realizado, hablábamos de el punto “x = a” y un punto genérico “x”, en la práctica, estamos diciendo que conocemos la función en x = a y queremos saber el valor de la función en “$a + \Delta x$”, con esta notación la expresión del desarrollo en serie será:

$$F(a+\Delta x) = F(a) + \left[F'(x)\right]_{x=a}\cdot(\Delta x) + \frac{1}{2!}\left[F''(x)\right]_{x=a}\cdot(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}\left[F'''(x)\right]_{x=a}\cdot(\Delta x)^3 +$$

$$+\ \frac{1}{n!}\left[F^{(n)}(x)\right]_{x=a}\cdot(\Delta x)^n+\varepsilon_n$$

De manera exactamente análoga se puede tratar una función de varias variables pero incluyendo las derivadas respecto a cada coordenada y las derivadas cruzadas correspondientes, lo que nos permite obtener:

$$F(a+\Delta x,\, b+\Delta y,\, c+\Delta z)=F(a,b,c)\ +$$

$$\left[\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\right)\cdot\Delta x+\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right)\cdot\Delta y+\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right)\cdot\Delta z\right]_{\substack{x=a\\ y=b\\ z=c}}\quad +$$

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot(\Delta x)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot(\Delta y)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\cdot(\Delta z)^2+\right.$$

$$\left.+\,2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cdot(\Delta x)(\Delta y)+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\cdot(\Delta x)(\Delta z)+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\cdot(\Delta y)(\Delta z)\right]_{\substack{x=a\\ y=b\\ z=c}}\ +\ \ldots$$