PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial (A) **15 de novembre de 2001**

1. Dos jugadors, A i B tenen una moneda cadascun. La moneda del jugador A té probabilitat p_1 de treure cara mentres que per la del jugador B aquesta probabilitat val p_2. Els jugadors fan un joc consistent en tirar alternativament la seva moneda començant per A. Guanya el primer que treu cara.

   Quina relació ha d'haber entre p_1 i p_2 per tal que el joc sigui just?

   Resolució:

   Si A és l'esdeveniment "guanya A" i B l'esdeveniment "guanya B". El joc serà just si $P(A) = P(B)$. Com $P(A) + P(B) = 1$, cal que $P(A) = 1/2$. Per guanyar A, hem de tenir que A treu cara la primera tirada o A treu creu, B treu creu i A treu cara, o A treu creu, B treu creu, A treu creu, B treu creu i A treu cara, etc. Així, si $q_i = 1 - p_i$ és la probabilitat de treure creu per cada moneda,

$$P(A) = p_1 + q_1q_2p_1 + (q_1q_2)^2p_1 + (q_1q_2)^3p_1 + \cdots = p_1 \sum_{k=0}^{\infty}(q_1q_2)^k = \frac{p_1}{1 - q_1q_2}$$

$$= \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1p_2}$$

   La condició $P(A) = 1/2$ dóna lloc a

$$p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}.$$

   Això implica la condició adicional $p_1/(1-p_1) \leq 1$ d'on també s'ha de verificar $p_1 \leq 1/2$.

2. En un concurs s'encen una bombeta en un instant aleatori X exponencial de valor mitjà 1. El concursant fa una aposta prèvia indicant l'instant β que ell creu que s'encendrà la bombeta. Calculeu:

   (a) La probabilitat que l'aposta difereixi de X en menys d'una unitat.

   (b) El millor valor de la constant β (a priori) si el premi és proporcional a $e^{-|X-\beta|}$.

   Resolució:

   (a) L'esdeveniment és $|X - \beta| < 1$, és a dir $\beta - 1 < X < \beta + 1$. La densitat de X és $f_X(x) = e^{-x}$. Si $\beta > 1$, l'interval $[\beta - 1, \beta + 1]$ està inclos en el domini de X i

$$P(\beta - 1 < X < \beta + 1) = \int_{\beta-1}^{\beta+1} e^{-x}dx = e^{-\beta+1} - e^{-\beta-1} = e^{-\beta}(e - e^{-1}).$$

Si $\beta < 1$

$$P(\beta - 1 < X < \beta + 1) = \int_0^{\beta+1} e^{-x} dx = 1 - e^{-\beta-1}.$$

(b) Com el premi és funció de la variable aleatòria X, La millor β és la que maximitza la seva esperança. Per tant calculem

$$Q(\beta) = E[e^{-|X-\beta|}] = \int_0^{\infty} e^{-|x-\beta|} e^{-x} dx = \int_0^{\beta} e^{x-\beta} e^{-x} dx + \int_{\beta}^{\infty} e^{-x+\beta} e^{-x} dx$$

$$= e^{-\beta} \int_0^{\beta} dx + e^{\beta} \int_{\beta}^{\infty} e^{-2x} dx = (\beta + \frac{1}{2}) e^{-\beta}.$$

Per trobar el màxim resolem $0 = dQ(\beta)/d\beta = (\frac{1}{2} - \beta)e^{-\beta}$ i acabem veient que el màxim està en $\beta = 1/2$.

3. X és una variable aleatòria contínua amb $\Omega_X = [0, \infty)$ i $f_X(x) = 1/(x+1)^2, x > 0$. Definim una nova variable $Y = g(X)$ on

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ x - 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calculeu i dibuixeu les funcions de distribució de X i de Y.

Resolució:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \int_0^x \frac{dx'}{(x'+1)^2} = \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

De la gràfica de $g(x)$ veiem que $\Omega_Y = [0, \infty)$. $F_Y(y) = 0$ per $y < 0$. En $y = 0$, $F_Y(0) = P(0 < X < 1) = F_X(1) = 1/2$. Així el 0 és un punt de discontinuïtat. Per $y > 0$, $F_Y(y) = P(X < y + 1) = F_X(y + 1) = (y + 1)/(y + 2)$. Resumint, Y és una variable mixta amb distribució:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ \frac{y+1}{y+2} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$