Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA **Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions**	**Com-I.** 18 de juny de 2009 *Notes Provisionals: 29 juny 2009* *Període d'Alegaciones:* *30 juny2009 – 1 juliol 2009* *Notas Definitivas: 3 juliol 2009*

Professors: M.Cabrera, J. Fernández Rubio, J. Sala
Informacions addicionals:
- Duració de l'examen: 2h45'
- Entregueu per separat els tres problemes en paquets separats de fulls doblegats per la meitat.
- No es permet l'ús de telèfons mòbils i calculadores durant la realització de l'examen. No es poden utilitzar ni en la seva funcionalitat de rellotge.
- Durant la realització de l'examen s'ha de tenir visible un document identificatiu amb fotografia.

PROBLEMA 1

Els sistemes superheterodins realitzen la conversió de senyal pas banda (senyal de ràdio-freqüència o RF) a banda base (BB) en dues etapes:

- **etapa 1**: de RF a freqüència intermitja (FI) a partir de la freqüència d'oscil.lador local f_{OL}
- **etapa 2**: de FI a BB a partir de la freqüència intermitja f_{FI} .

En absència de soroll, el senyal a l'entrada de l'etapa 1 correspon a la superposició d'una modulació analògica pas banda centrada a la freqüència portadora $f_{\mathrm{C}} = f_{\mathrm{OL}} + f_{\mathrm{FI}}$ (senyal útil) amb una possible interferència centrada a la freqüència imatge $f_{\mathrm{IM}} = f_{\mathrm{OL}} - f_{\mathrm{FI}}$. En aquest exercici analitzem el desmodulador de Hartley com etapa 1.
En la resolució, utilitzarem que en el filtrat d'un senyal pas banda x(t) per una resposta impulsional pas banda h(t): y(t) = h(t)*x(t), els equivalents pas baix respectius verifiquen: $b_y(t) = \frac{1}{2} \cdot b_h(t) * b_x(t)$, quan la freqüència central f_0 de x(t), h(t) i y(t) és molt més gran que l'amplada de banda de x(t) o de h(t).

1) Especifiqui un filtre pas banda H(f) (<u>filtre GIRADOR figura 2</u>) per tal de que es verifiqui:
   <u>**Condició**</u>: El filtre pas banda H(f) centrat a f_{FI} i <u>d'amplada de banda limitada</u> a B_{FI} és tal que per qualsevol senyal pas banda d'entrada centrat a f_{FI} i d'amplada de banda inferior a B_{FI} , efectua un gir de fase $\alpha = e^{j\psi}$ sobre el senyal equivalent pas baix: $b_{out}(t) = \alpha \cdot b_{in}(t)$.
   Proporcioni: l'equivalent pas baix b_h(t) de la resposta impulsional, la resposta impulsional h(t) i la resposta en freqüència H(f).

2) Es demana que determini l'equivalent pas baix $b_y(t)$ del senyal y(t) de la figura 1 per quan el senyal d'entrada ve expressat per la suma d'una component de senyal útil $x_U(t)$ i una component de senyal imatge $x_{IM}(t)$ de la forma següent,
$$x(t) = \underbrace{\mathrm{Re}\left[b_U(t)\exp\left(j2\pi\left(f_{\mathrm{OL}} + f_{\mathrm{FI}}\right)t\right)\right]}_{x_U(t)} + \underbrace{\mathrm{Re}\left[b_{IM}(t)\exp\left(j2\pi\left(f_{\mathrm{OL}} - f_{\mathrm{FI}}\right)t\right)\right]}_{x_{IM}(t)}$$
   Considerant que la resposta impulsional del filtre pas banda, de banda B_{FI} , ve donada per $h_{FI}(t) = \mathrm{Re}\left[b_{FI}(t)\exp\left(j2\pi f_{\mathrm{FI}}t\right)\right]$, demostri que $b_y(t)$ es pot expressar com segueix (determini els coeficients a i b i el senyal $f(t)$ en funció de θ i $b_{FI}(t)$),
$$b_y(t) \quad = \quad \left(a \cdot b_U(t) \quad + \quad b \cdot b_{IM}^*(t)\right) * f(t)$$

3) Suposi que a l'entrada del sistema de la figura 2 té el mateix senyal d'entrada que en l'apartat 2),
$$x(t) = \underbrace{\mathrm{Re}\left[b_U(t)\exp\left(j2\pi\left(f_{\mathrm{OL}} + f_{\mathrm{FI}}\right)t\right)\right]}_{x_U(t)} + \underbrace{\mathrm{Re}\left[b_{IM}(t)\exp\left(j2\pi\left(f_{\mathrm{OL}} - f_{\mathrm{FI}}\right)t\right)\right]}_{x_{IM}(t)}$$

Utilitzant adequadament el resultat de l'apartat 2) (treballi a partir dels equivalents pas baix), determini (3.a) i (3.b) per garantir que a la sortida del desmodulador de Hartley només tenim la contribució del senyal $x_U(t)$, expressada com:

$$y(t) = \mathrm{Re}\left[\lambda \cdot b_U(t) \cdot \exp\left(2\pi f_{\mathrm{FI}} t\right)\right]$$

(3.a) quines condicions han de complir els filtres pas banda $H_1(f)$ i $H_2(f)$ (o els seus equivalents pas baix). L'equivalent pas baix de la resposta impulsional de qualsevol dels filtres ha de ser real.

(3.b) les fases ψ del GIRADOR en funció de la fase ϕ dels mescladors.

(3.c) determini també el valor de la fase ϕ que maximitza el valor de λ, i el valor de λ.

4) quan el senyal de sortida del desmodulador de Hartley ve expressat per $y(t) = \frac{1}{2} a(t) \cdot \cos\left(2\pi f_{IF} t\right)$, estimi quina és l'expressió del senyal útil d'entrada en absència de senyal imatge.

NOTA: , $\cos(\beta_1+\beta_2) = \cos(\beta_1)\cos(\beta_2) - \sin(\beta_1)\sin(\beta_2)$

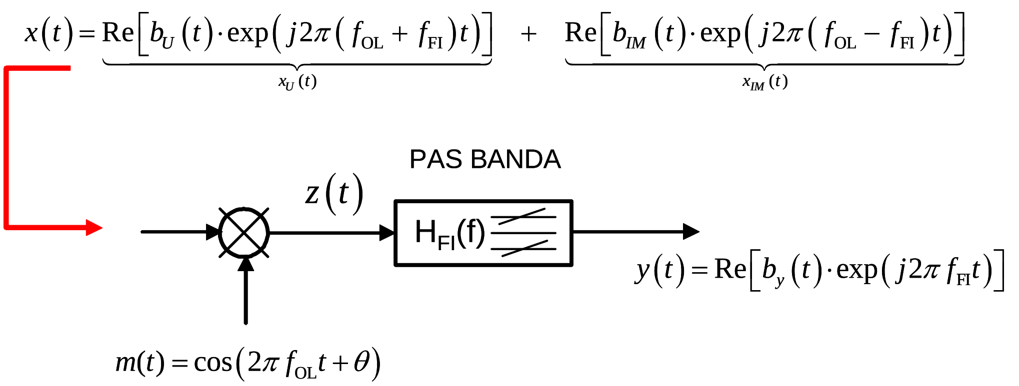


Figura 1: esquema bàsic per l'anàlisi del desmodulador de Hartley

DESMODULADOR DE HARTLEY

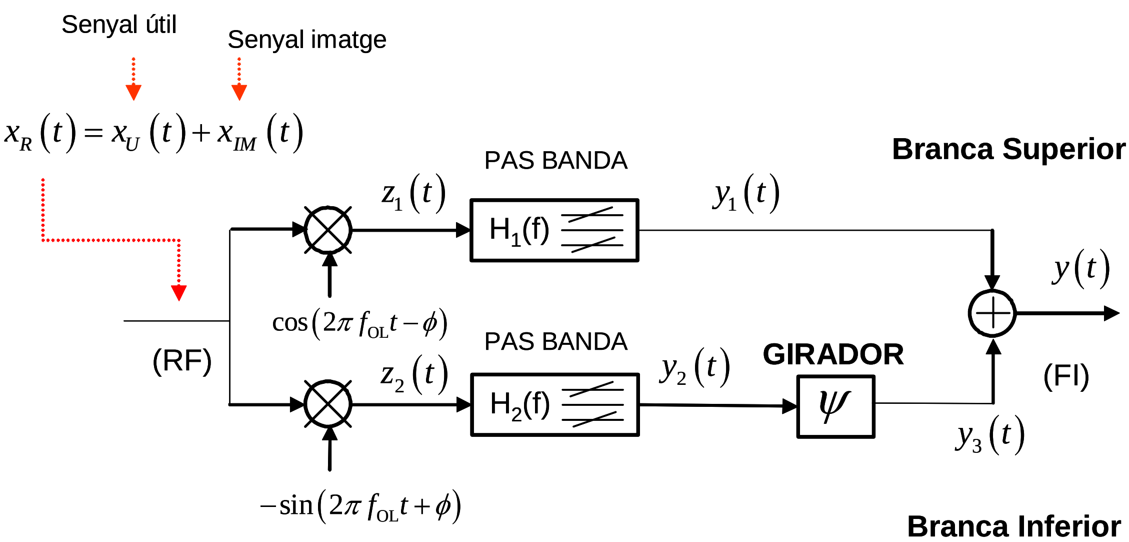


Figura 2: desmodulador de Hartley (tots els senyals de la figura són senyals reals)

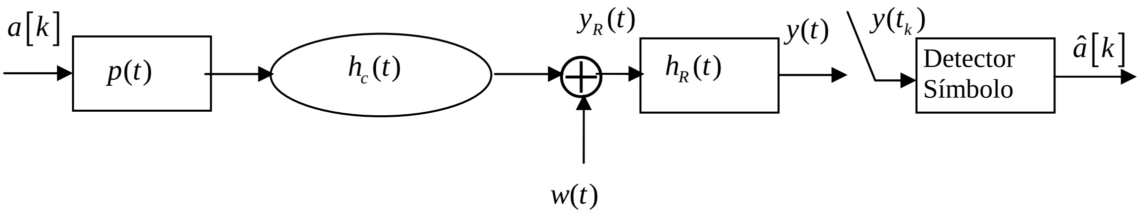
PROBLEMA 2

1) Tenim un sistema definit per $y(t)=\left(x(t)\cdot\cos\left(2\pi f_{\mathrm{OL}}t\right)\right)*h(t)$, on $x(t)=n(t)$ és un soroll pas banda de densitat espectral de potència $S_{nn}(f)=\frac{N_0}{2}\Pi\left(\frac{f-\left(f_{\mathrm{OL}}+f_{\mathrm{FI}}\right)}{B_{FI}}\right)+\frac{N_0}{2}\Pi\left(\frac{f+\left(f_{\mathrm{OL}}+f_{\mathrm{FI}}\right)}{B_{FI}}\right)$, $B_{FI}\leq f_{\mathrm{FI}}$, $h(t)$ és la resposta impulsional d'un filtre pas banda uniforme i de guany unitat, d'amplada de banda B_{FI} , i centrat a freqüència f_{FI}. Indiqui si el soroll de sortida del sistema serà ciclo-estacionari i calculi i dibuixi la seva densitat espectral de potència (densitat promig si resultés ser ciclo-estacionari).

2) Suposi que tenim un senyal DBL $y(t)=\frac{1}{2}a(t)\cdot\cos\left(2\pi f_{IF}t\right)+n(t)$, i que la densitat espectral del soroll ve donada per $S_{nn}(f)=\frac{N_0}{2}\Pi\left(\frac{f-f_{FI}}{B_{FI}}\right)+\frac{N_0}{2}\Pi\left(\frac{f+f_{FI}}{B_{FI}}\right)$. Determini la màxima banda que pot tenir el senyal pas baix $a(t)$ en funció de B_{FI} i f_{FI} , proposi el receptor per recuperar el senyal d'informació $a(t)$ i avaluï la relació senyal soroll a la sortida del receptor en funció dels paràmetres P_a, N_0, B_{FI}, B_a , on P_a, B_a representen la potència i amplada de banda del senyal pas baix $a(t)$, respectivament.

PROBLEMA 3

Se considera el siguiente esquema de comunicaciones digitales banda base:



La secuencia de símbolos estadísticamente independientes $a[k]$ corresponde a una codificación de 2 niveles Unipolar: $a_m = \{0, +A\}$, de símbolos equiprobables. El pulso elegido en el transmisor, $p(t)$, es rectangular, de duración igual al tiempo de símbolo T y de energía unidad. El canal es ideal $\left(h_c(t) = \delta(t)\right)$, w(t) es un ruido blanco, gaussiano, estacionario, de media 0, y densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$. El instante de muestreo es $t_k = (k+1)T$.

Se pide:

a) Obtenga E_b, la energía media transmitida por bit.

Si el filtro receptor utilizado es

$$h_R(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T'}{2}}{T'}\right); \qquad T' = (1+\alpha)T; \qquad 0 < \alpha < 0.5$$

b) Obtenga la expresión de la señal a la salida del filtro receptor y dibuje la forma del pulso resultante en este punto. Identifique en las muestras $y(t_k)$, el término útil, ISI si hay y término de ruido. Caracterice estadísticamente el término de ruido.

c) Dé las dos funciones de densidad de probabilidad de las muestras obtenidas condicionadas $f_y(y|0), f_y(y|A)$ y diseñe el umbral de decisión óptimo.

En los 3 apartados restantes considere que el filtro receptor utilizado es

$$h_R(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T'}{2}}{T'}\right); \qquad T' = (1-\alpha)T; \qquad 0 < \alpha < 0.5$$

d) Obtenga la expresión de la señal a la salida del filtro receptor y dibuje la forma del pulso resultante en este punto. Identifique en las muestras $y(t_k)$, el término útil, ISI si hay y término de ruido. Caracterice estadísticamente el término de ruido.

e) Dé las dos funciones de densidad de probabilidad de las muestras obtenidas condicionadas $f_y(y|0), f_y(y|A)$ y diseñe el umbral de decisión óptimo.

f) Calcule la probabilidad de error en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$.

PROBLEMA 1

Com hem vist a classe de teoria:

$$b_y(t) = \frac{1}{2} b_h(t) * b_x(t)$$

1) Necessàriament, per girar la fase, i per ser limitat en banda a B_{FI}.

$$b_{out}(t) = \frac{1}{2} b_h(t) * b_{in}(t) = \alpha \cdot b_{in}(t)$$

$$b_h(t) = \left(2\alpha \cdot \delta(t)\right) * B_{\text{FI}} \operatorname{sinc}\left(B_{\text{FI}} t\right) \leftrightarrow B_h(f) = 2\alpha \cdot \Pi\left(\frac{f}{B_{\text{FI}}}\right) = 2e^{j\psi} \cdot \Pi\left(\frac{f}{B_{\text{FI}}}\right)$$

$$b_h(t) = 2\alpha B_{\text{FI}} \operatorname{sinc}\left(B_{\text{FI}} t\right) = 2e^{j\psi} B_{\text{FI}} \operatorname{sinc}\left(B_{\text{FI}} t\right)$$

La resposta impulsional serà

$$h(t) = \operatorname{Re}\left[b_h(t) \exp\left(j 2\pi f_{\text{FI}} t\right)\right] = 2B_{\text{FI}} \operatorname{sinc}\left(B_{\text{FI}} t\right) \cos\left(2\pi f_{\text{FI}} t + \psi\right)$$

La resposta en freqüència serà

$$h(t) = \frac{1}{2} b_h(t) e^{j2\pi f_{\text{FI}} t} + \frac{1}{2} b_h^*(t) e^{-j2\pi f_{\text{FI}} t} \leftrightarrow H(f) = \frac{1}{2} B_h\left(f - f_{\text{FI}}\right) + \frac{1}{2} B_h^*\left(-\left(f + f_{\text{FI}}\right)\right)$$

$$H(f) = \alpha \cdot \Pi\left(\frac{f - f_{\text{FI}}}{B_{\text{FI}}}\right) + \alpha^* \cdot \Pi\left(\frac{f + f_{\text{FI}}}{B_{\text{FI}}}\right) = e^{j\psi} \cdot \Pi\left(\frac{f - f_{\text{FI}}}{B_{\text{FI}}}\right) + e^{-j\psi} \cdot \Pi\left(\frac{f + f_{\text{FI}}}{B_{\text{FI}}}\right)$$

2) Tenim, per $s = \pm 1$ (sumarem les contribucions respectives al final, perquè el sistema és lineal),

$$\operatorname{Re}\left[b(t) \exp\left(j 2\pi\left(f_{\text{OL}} + s \cdot f_{\text{FI}}\right) t\right) \cdot \cos\left(2\pi f_{\text{OL}} t + \theta\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[b(t) \exp\left(j\left(2\pi\left(2 f_{\text{OL}} + s \cdot f_{\text{FI}}\right) t + \theta\right)\right)\right] + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[b(t) \exp\left(j\left(2\pi s \cdot f_{\text{FI}} t - \theta\right)\right)\right]$$

El terme a freqüència doble queda eliminat a la sortida del filtre. Per tant, considerant només el terme a freqüència intermitja a l'entrada del filtre,

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[b(t) \exp\left(j\left(2\pi s \cdot f_{\text{FI}} t - \theta\right)\right)\right] = \begin{cases} s = +1 \quad , \quad \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} b(t) e^{-j\theta} \cdot \exp\left(j 2\pi f_{\text{FI}} t\right)\right] \\ s = -1 \quad , \quad \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} b^*(t) e^{+j\theta} \cdot \exp\left(j 2\pi f_{\text{FI}} t\right)\right] \end{cases}$$

Introduïnt ara l'equivalent pas baix de la resposta impulsional, tenim,

$$b_y(t) = \begin{cases} s = +1 \quad , & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} b(t) e^{-j\theta} * b_{\mathrm{FI}}(t) \\ s = -1 \quad , & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} b^*(t) e^{+j\theta} * b_{\mathrm{FI}}(t) \end{cases}$$

Per tant, només ens cal sumar les contribucions respectives posant el valor de b(t) que correspongui a cada valor de s tenim,

$$b_y(t) = b_y(t)\Big|_{s=+1} + b_y(t)\Big|_{s=-1}$$
$$= \left(\frac{1}{4} b_U(t) e^{-j\theta} + \frac{1}{4} b_{IM}^*(t) e^{+j\theta} \right) * b_{\mathrm{FI}}(t)$$

On per inspecció directa veiem els valors a,b, f(t) que es demanaven.

3) Per la branca superior considerem $\theta_1 = -\phi$

Per la branca inferior,

$$-\sin(2\pi f_{\mathrm{OL}} t + \phi) = \cos\left(2\pi f_{\mathrm{OL}} t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2\pi f_{\mathrm{OL}} t + \theta_2) \quad \to \quad \theta_2 = \phi + \frac{\pi}{2}$$

Per tant, els equivalents pas baix en cada punt són,

$$b_{y_1}(t) = \left(\frac{1}{4} b_U(t) e^{-j\theta_1} + \frac{1}{4} b_{IM}^*(t) e^{+j\theta_1} \right) * b_{h_1}(t) = \frac{1}{4}\left(b_U(t) e^{+j\phi} + b_{IM}^*(t) e^{-j\phi} \right) * b_{h_1}(t)$$

$$b_{y_3}(t) = e^{j\psi} \cdot \left(\left(\frac{1}{4} b_U(t) e^{-j\theta_2} + \frac{1}{4} b_{IM}^*(t) e^{+j\theta_2} \right) * b_{h_2}(t) \right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(b_U(t) e^{-j\left(\phi + \frac{\pi}{2} - \psi\right)} + b_{IM}^*(t) e^{+j\left(\phi + \frac{\pi}{2} + \psi\right)} \right) * b_{h_2}(t)$$

Per tant la suma dels equivalent pas baix 1 i 3 ha de cancel.lar la component imatge i deixar la component de senyal útil (limitant en banda !),

$$b(t) = \frac{1}{4}\left(e^{+j\phi} b_{h_1}(t) + e^{-j\left(\phi + \frac{\pi}{2} - \psi\right)} b_{h_2}(t) \right) * b_U(t) + \frac{1}{4}\left(e^{-j\phi} b_{h_1}(t) + e^{+j\left(\phi + \frac{\pi}{2} + \psi\right)} b_{h_2}(t) \right) * b_{IM}^*(t)$$

[1] $$\frac{1}{4}\left(e^{+j\phi} b_{h_1}(t) + e^{-j\left(\phi + \frac{\pi}{2} - \psi\right)} b_{h_2}(t) \right) = \lambda \cdot \delta(t) * B_{FI} \operatorname{sinc}(B_{FI} t)$$

[2] $$\frac{1}{4}\left(e^{-j\phi} b_{h_1}(t) + e^{+j\left(\phi + \frac{\pi}{2} + \psi\right)} b_{h_2}(t) \right) = 0$$

Podem fer,

$$b_{h_1}(t) = b_{h_1}(t) = B_{FI}\,\mathrm{sinc}(B_{FI}t) \quad \rightarrow \quad [1] \quad \lambda = \frac{1}{4}\left(e^{+j\phi} + e^{-j\left(\phi+\frac{\pi}{2}-\psi\right)}\right)$$

$$\rightarrow \quad [2] \quad e^{-j\phi} + e^{+j\left(\phi+\frac{\pi}{2}+\psi\right)} = 0$$

$$e^{j(\pi-\phi)} = e^{+j\left(\phi+\frac{\pi}{2}+\psi\right)} \rightarrow \quad \pi-\phi = \phi+\frac{\pi}{2}+\psi$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - 2\phi$$

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(e^{+j\phi} + e^{-j(\phi+2\phi)}\right) = e^{-j\phi}\cdot\frac{1}{2}\cos(2\phi)$$

El valor màxim el podem obtenir per $\phi = 0$.

4) tenim,

$$\mathrm{Re}\left[\lambda \cdot b_U(t)\exp\left(j2\pi f_{\mathrm{FI}}t\right)\right] \quad = \quad \mathrm{Re}\left[e^{-j\phi}\frac{1}{2}\cos(2\phi)\cdot b_U(t)\exp\left(j2\pi f_{\mathrm{FI}}t\right)\right] \quad = \quad \frac{1}{2}a(t)\cos\left(2\pi f_{\mathrm{FI}}t\right)$$

estimem per tant que amb els següents valors es compliria la igualtat, si posem els filtres com en l’apartat anterior

$$b_U(t) = a(t)$$
$$\phi = 0$$
$$x_U(t) = a(t)\cos\left(2\pi\left(f_{\mathrm{OL}} + f_{\mathrm{FI}}\right)t\right)$$

Solución problema 2

1)

$$y(t) = z(t) * h(t); z(t) = n(t)\cos 2\pi f_{OL} t$$

$$R_z(t+\tau, t) = E\{z(t+\tau)z(t)\} = E\{n(t+\tau)n(t)\cos 2\pi f_{OL}(t+\tau)\cos 2\pi f_{OL} t\} =$$
$$= \frac{1}{2} R_n(\tau)\left[\cos 2\pi f_{OL}\tau + \cos 2\pi f_{OL}(2t+\tau)\right]$$

$z(t)$ es un proceso cicloestacionario con periodo $T = \frac{1}{2 f_{OL}}$

$$\overline{R}_z(\tau) = \frac{1}{2} R_n(\tau)\cos 2\pi f_{OL}\tau$$

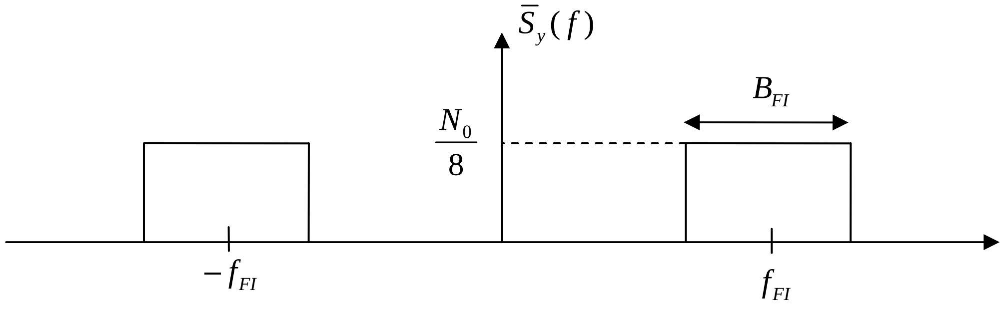
$$\overline{S}_z(f) = \frac{1}{4}\left[S_n(f - f_{OL}) + S_n(f + f_{OL})\right] =$$
$$= \frac{N_0}{8}\left[\Pi\left(\frac{f - 2 f_{OL} - f_{FI}}{B_{FI}}\right) + \Pi\left(\frac{f - f_{FI}}{B_{FI}}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_{FI}}{B_{FI}}\right) + \Pi\left(\frac{f + 2 f_{OL} + f_{FI}}{B_{FI}}\right)\right]$$

$$R_y(t+\tau, t) = E\{y(t+\tau)y(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} z(t+\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} z(t-\beta)h(\beta)d\beta\right\} =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\{z(t+\tau-\alpha)z(t-\beta)\}h(\alpha)h(\beta)d\alpha d\beta =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_z(t+\tau-\alpha, t-\beta)h(\alpha)h(\beta)d\alpha d\beta$$

$y(t)$ es también un proceso cicloestacionario con el mismo periodo $T = \frac{1}{2 f_{OL}}$

$$\overline{R}_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_y(t+\tau, t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_z(t+\tau-\alpha, t-\beta)dt\right]h(\alpha)h(\beta)d\alpha d\beta =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{R}_z(\tau+\beta-\alpha)h(\alpha)h(\beta)d\alpha d\beta = \overline{R}_z(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$\overline{S}_y(f) = \overline{S}_z(f)\left|H(f)\right|^2 = \frac{N_0}{8}\left[\Pi\left(\frac{f - f_{FI}}{B_{FI}}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_{FI}}{B_{FI}}\right)\right]$$



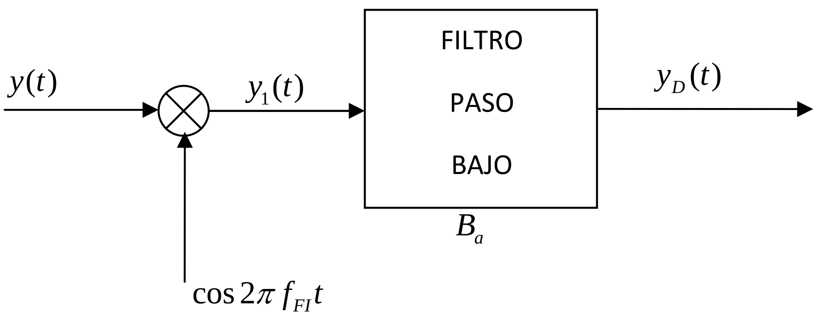
2)

$$y(t) = \frac{1}{2}a(t)\cos 2\pi f_{FI}t + n(t)$$

$$R_y(t+\tau,t) = E\{y(t+\tau)y(t)\} = \frac{1}{4}R_a(\tau)\left[\cos 2\pi f_{FI}\tau + \cos 2\pi f_{FI}(2t+\tau)\right] + R_n(\tau)$$

$$\overline{S}_y(f) = \frac{1}{8})\left[S_a(f-f_{FI}) + S_a(f+f_{FI})\right] + S_n(f)$$

Suponemos y(t) salida filtro paso banda de recepción. Entonces: $2B_a \le B_{FI}; B_a < f_{FI}$

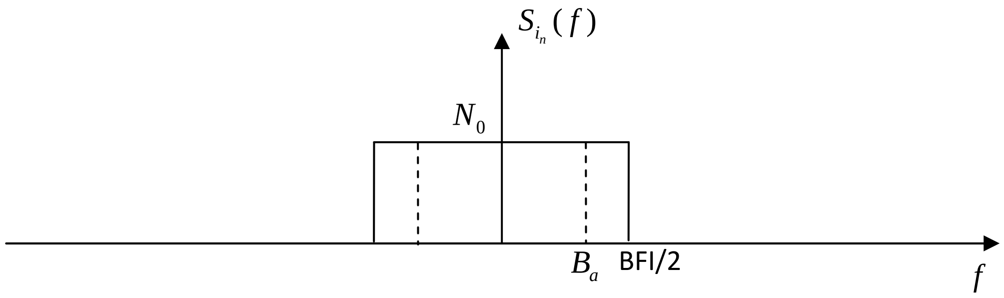


$$y_1(t) = y(t)\cos 2\pi f_{FI}t = \mathrm{Re}\left\{b_y(t)e^{j2\pi f_{FI}t}\right\}\mathrm{Re}\left\{e^{j2\pi f_{FI}t}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{b_y(t) + b_y(t)e^{j4\pi f_{FI}t}\right\}$$

$$y_D(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{b_y(t)\right\} = \frac{1}{4}a(t) + \frac{1}{2}i_n^{'}(t)$$

$$P_{y_D} = \frac{1}{16}P_a + \frac{1}{4}P_{i_n^{'}}$$

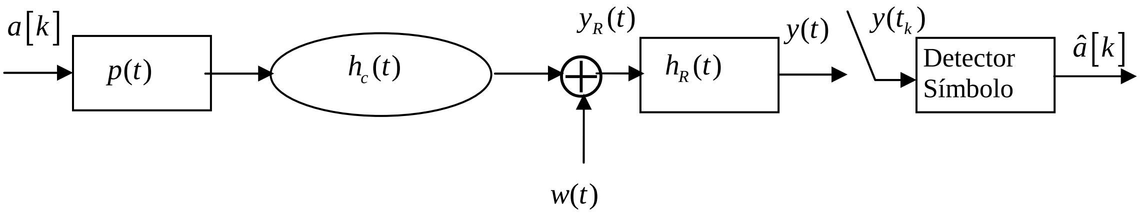
$i_n^{'}(t)$ es la resultante de filtrar $i_n(t)$ con el filtro paso bajo.



$$P_{y_0} = \frac{1}{16} P_a + \frac{B_a N_0}{2}$$

$$SNR_D = \frac{P_a}{8 B_a N_0}$$

Ejercicio
Se considera el siguiente esquema de comunicaciones digitales banda base:



La secuencia de símbolos estadísticamente independientes $a[k]$ corresponde a una codificación de 2 niveles Unipolar: $a_m = \{0, +A\}$, de símbolos equiprobables. El pulso elegido en el transmisor, $p(t)$, es rectangular, de duración igual al tiempo de símbolo T y de energía unidad. El canal es ideal $\left(h_c(t) = \delta(t)\right)$, w(t) es un ruido blanco, gaussiano, estacionario, de media 0, y densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$. El instante de muestreo es $t_k = (k+1)T$.

Se pide:

a) Obtenga E_b, la energía media transmitida por bit.

Si el filtro receptor utilizado es

$$h_R(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T'}{2}}{T'}\right); \qquad T' = (1+\alpha)T; \qquad 0 < \alpha < 0.5$$

b) Obtenga la expresión de la señal a la salida del filtro receptor y dibuje la forma del pulso resultante en este punto. Identifique en las muestras $y(t_k)$, el término útil, ISI si hay y término de ruido. Caracterice estadísticamente el término de ruido.

c) Dé las dos funciones de densidad de probabilidad de las muestras obtenidas condicionadas $f_y(y|0)$, $f_y(y|A)$ y diseñe el umbral de decisión óptimo.

En los 3 apartados restantes considere que el filtro receptor utilizado es

$$h_R(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T'}{2}}{T'}\right); \qquad T' = (1-\alpha)T; \qquad 0 < \alpha < 0.5$$

d) Obtenga la expresión de la señal a la salida del filtro receptor y dibuje la forma del pulso resultante en este punto. Identifique en las muestras $y(t_k)$, el término útil, ISI si hay y término de ruido. Caracterice estadísticamente el término de ruido.

e) Dé las dos funciones de densidad de probabilidad de las muestras obtenidas condicionadas $f_y(y|0)$, $f_y(y|A)$ y diseñe el umbral de decisión óptimo.

f) Calcule la probabilidad de error en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$.

RESOLUCIÓN

a) La energía media transmitida por bit para la modulación PAM 2Unipolar es:

$$E_b = \tfrac{1}{2} E\left[a_m^2\right] E_p = \tfrac{1}{2}\left(0 + A^2\right) = \tfrac{1}{2} A^2$$

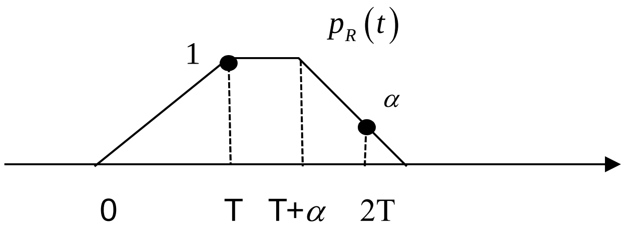
b) La expresión de la señal a la salida del filtro adaptado es igual a:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\, p(t-nT) * h_R(t) + w(t) * h_R(t) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\, p(t-nT) * \tfrac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\tfrac{t-\frac{T'}{2}}{T'}\right) + n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\, p_R(t-nT) + n(t)$$

$$p_R(t-nT) = p(t) * \tfrac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\tfrac{t-\frac{T'}{2}}{T'}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\tfrac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) * \tfrac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\tfrac{t-\frac{T'}{2}}{T'}\right)$$

El dibujo del pulso resultante es igual a:



Las muestras de señal quedan como:

$$y(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\, p_R\left((k+1)T - nT\right) + n(t_k) =$$

$$a[k]\, p_R(T) + a[k-1]\, p_R(2T) + n(t_k) =$$

$$a[k] + a[k-1]\alpha + n(t_k)$$

En la expresión obtenida, el primer término es el término útil, el segundo término corresponde a la ISI y el tercero es la muestra de ruido.
Con $n(t_k)$, muestras de ruido gaussianas de media cero y varianza

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f) \left|H_R(f)\right|^2 df = \tfrac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|h_R(t)\right|^2 dt = \tfrac{N_0}{2} \tfrac{1}{T} \int_{0}^{+T(1+\alpha)} 1 dt = \tfrac{N_0}{2}(1+\alpha)$$

c) Las muestras de señal condicionadas al símbolo 0 cumplen:

$$y(t_k)\big|0 = a[k-1]\alpha + n(t_k)$$

$$\Rightarrow f_y(y|0) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(y)^2\right) + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(y-\alpha A)^2\right)\right)$$

Las muestras de señal condicionadas al símbolo +A cumplen:

$$y(t_k)|+A = +A + a[k-1]\alpha + n(t_k)$$
$$\Rightarrow f_y(y|+A) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(y-A)^2\right) + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}\left(y-(1+\alpha)A\right)^2\right)\right)$$

Cálculo del umbral óptimo:

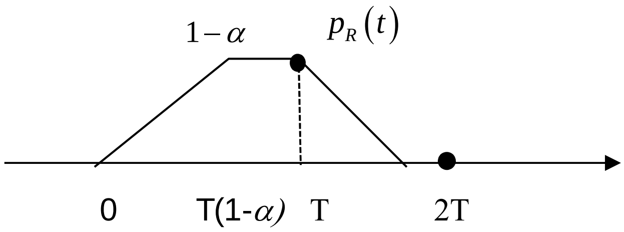
$$P_e = \tfrac{1}{2}\left(\int_{+\gamma}^{+\infty} f_y(y|0)\,dy + \int_{-\infty}^{+\gamma} f_y(y|+A)\,dy\right) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial P_e}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow f_y(\gamma|0) = f_y(\gamma|A)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(\gamma-A)^2\right) + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}\left(\gamma-(1+\alpha)A\right)^2\right)\right) =$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}\gamma^2\right) + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(\gamma-\alpha A)^2\right)\right) \Rightarrow$$
$$\gamma = \tfrac{1+\alpha}{2}A$$

El anterior umbral se podría también deducir gráficamente.

d) En este caso la expresión de la señal a la salida del filtro adaptado es igual a:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\,p_R(t-nT) + n(t)$$
$$p_R(t-nT) = \tfrac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\tfrac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) * \tfrac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\tfrac{t-\frac{T'}{2}}{T'}\right)$$

Y el dibujo del pulso resultante es igual a:



Las muestras de señal quedan como:

$$y(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\,p_R\left((k+1)T-nT\right) + n(t_k) =$$
$$a[k]\,p_R(T) + n(t_k) = a[k](1-\alpha) + n(t_k)$$

En la expresión obtenida, el primer término es el término útil, la ISI es nula y el segundo es la muestra de ruido.
Con $n(t_k)$, muestras de ruido gaussianas de media cero y varianza

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)\left|H_R(f)\right|^2 df = \tfrac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|h_R(t)\right|^2 dt = \tfrac{N_0}{2}\tfrac{1}{T}\int_{0}^{+T(1-\alpha)} 1\,dt = \tfrac{N_0}{2}(1-\alpha)$$

e) Las muestras de señal condicionadas al símbolo 0 cumplen:

$$y(t_k)\big|0 = n(t_k) \Rightarrow f_y\left(y|0\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(y)^2\right)$$

Las muestras de señal condicionadas al símbolo +A cumplen:

$$y(t_k)\big|{+A} = +A(1-\alpha) + n(t_k) \Rightarrow f_y\left(y|{+A}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}\left(y-(1-\alpha)A\right)^2\right)$$

Cálculo del umbral óptimo:

$$P_e = \tfrac{1}{2}\left(\int_{+\gamma}^{+\infty} f_y\left(y|0\right)dy + \int_{-\infty}^{+\gamma} f_y\left(y|{+A}\right)dy\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P_e}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow f_y\left(\gamma|0\right) = f_y\left(\gamma|A\right)$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}\gamma^2\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}\left(\gamma-(1-\alpha)A\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\gamma = \tfrac{1-\alpha}{2}A$$

El anterior umbral se podría también deducir gráficamente.

f) Y la probabilidad de error es igual a:

$$P_e = \tfrac{1}{2}\left(\Pr\left(\text{error}|0\right) + \Pr\left(\text{error}|{+A}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left(\int_{\frac{A}{2}(1-\alpha)}^{+\infty} f_y\left(y|0\right)dy + \int_{-\infty}^{\frac{A}{2}(1-\alpha)} f_y\left(y|{+A}\right)dy\right) =$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\int_{\frac{A}{2}(1-\alpha)}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(y)^2\right)dy + \int_{-\infty}^{\frac{A}{2}(1-\alpha)} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}\left(y-(1-\alpha)A\right)^2\right)dy\right) =$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\int_{+\frac{A}{2}\frac{(1-\alpha)}{\sigma}}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda^2\right)d\lambda + \int_{-\infty}^{-\frac{A}{2}\frac{(1-\alpha)}{\sigma}} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda^2\right)d\lambda\right)$$

$$Q\left(\tfrac{A(1-\alpha)}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\tfrac{A^2(1-\alpha)^2}{2N_0(1-\alpha)}}\right) = Q\left(\sqrt{(1-\alpha)\tfrac{E_b}{N_0}}\right)$$

Si se quiere mantener, la probabilidad de error respecto al caso en que el filtro receptor se halla bien diseñado ($\alpha = 0$) se debería aumentar la energía media por bit en $10\log_{10}(1-\alpha)$ dB.