Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Senyals i Sistemes I **Exàmen Final P06: 19 de Juny de 2006** **Duració: 3h**

Publicació Notes Provisionals: 27-6-06 **Al.legacions: 28-6-06** **Publicació Notes Definitives: 29-6-06**

No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

Problema 1

Sigui un sistema donat per la relació $y(t)=T[x(t)]$. Es demana:

a) Suposi que un senyal de sortida $y_1(t)=T[x_1(t)]$ es pot descompondre en base a un altre senyal $g(t)$ segons l'equació $y_1(t)= g(t+1) - g(t-1)$. Si som capaços de descompondre $x_1(t)$ de la forma: $x_1(t)= f(t+1) - f(t-1)$, es pot assegurar que en qualsevol cas es verifica $g(t)=T[f(t)]$? Justifiqui detalladament la seva resposta.

b) Suposi que el sistema és lineal i invariant (SLI) i que es coneix $T[u(t)]= (2e^{-2t}-1).u(t)$. Es pot afirmar que la seva resposta impulsional és $h(t)= T[\delta(t)]= (2e^{-2t}-1).\delta(t)$? Justifiqui la seva resposta.

Sigui un sistema SLI amb sortida $y(t) = T[x(t)] = 10\left[\left(1 - e^{-(t+1)}\right)u(t+1) - \left(1 - e^{-(t-1)}\right)u(t-1)\right]$ per l'entrada $x(t) = 4.\prod\left(\frac{t}{2}\right)$.

c) Obtingui la resposta impulsional h(t) del sistema.

d) Analitzi justificadament la causalitat i estabilitat del sistema.

e) Es pot afirmar que: $T[4.\prod(t)]= 10 \left[(1-e^{-(2t+1)}).u(2t+1) - (1-e^{-(2t-1)}).u(2t-1) \right]$? Justifiqui la seva resposta.

f) Discuteixi la veracitat o falsetat de la següent afirmació:

com que $s(t) = 32.\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) = 4.\prod\left(\frac{t}{2}\right) * 4.\prod\left(\frac{t}{2}\right) = x(t) * x(t)$ i el sistema és SLI, <u>llavors</u> la resposta a s(t) serà $z(t)= T[32\Delta(t/2)]= 10 [(1-e^{-(t+1)}).u(t+1) - (1-e^{-(t-1)}).u(t-1)] * 10 [(1-e^{-(t+1)}).u(t+1) - (1-e^{-(t-1)}).u(t-1)] = y(t)*y(t)$.

Problema 2

Sigui un sistema SLI, causal i estable, definit per la seva resposta impulsional h(t) real. També pot caracteritzar-se per la seva funció de transferència $H(s) = \frac{k.(s-z_1).(s-z_2)....(s-z_L)}{(s-p_1).(s-p_2)....(s-p_M)}$.

a) Pels supòsits de dos filtres passa-baixes dissenyats per les aproximacions de Butterworth i Inversa de Chebychev, per ambdós filtres es demana:

a.1) Expressi M i L en funció de l'ordre n del filtre.

a.2) Per n=3, dibuixi (de forma aproximada) el seu diagrama de pols i zeros

a.3) Només pel cas Inversa de Chebychev, dibuixi (de forma aproximada) el diagrama de pols i zeros corresponent a un filtre passa-altes dissenyat per transformació de freqüències a partir del prototip de l'apartat anterior.

Es considera el senyal d'entrada $x(t)=a.\cos(2\pi f_1 t)+ b.\cos(2\pi f_2 t)+ c.\cos(2\pi f_3 t)$ (amb $f_1<f_2<f_3$)

b) Sabent que la sortida del filtre admet la formulació $y(t)=A.\cos(2\pi f_1 t+\phi_1)+ B.\cos(2\pi f_2 t+\phi_2)+ C.\cos(2\pi f_3 t+\phi_3)$, es demana:

b.1) Per la freqüència f_1, expressi justificadament l'amplitud **A** i la fase $\boldsymbol{\phi_1}$ de la sortida en funció de l'amplitud **a** d'entrada i de $H(f) = |H(f)|.e^{j\phi(f)}$.

b.2) Suposant que les 3 freqüències d'entrada pertanyen a la banda de pas del filtre, quina relació han de verificar les fases $\boldsymbol{\phi_1}$, ϕ_2 i ϕ_3 per garantir que la sortida no presenta distorsió de fase.

b.3) Pel senyal de sortida y(t), calculi l'energia E_y, la potència mitjana P_y, l'autocorrelació $R_y(\tau)$ i la densitat espectral $S_y(f)$. Raoni quant val el seu periode T_y si es coneix que f_2 i f_3 són harmònics de f_1?

c) Es vol dissenyar un filtre h(t) que elimini totalment les freqüències f_1 i f_3 presents a l'entrada, i deixi passar f_2 sense atenuació, procurant que l'ordre del filtre sigui el menor possible. L'atenuació a l'origen ha de ser de 20dB. Es demana:

c.1) Dibuixi la corba d'atenuació i el mòdul de la resposta freqüencial del filtre. Indiqui-hi tots els valors d'interés.

c.2) Doni l'expressió exacta de la seva funció característica.

Problema 3

Sigui $x(t)$ un senyal de banda limitada a B Hz.

a) Demostri que $x(t)$ es pot escriure com: $$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_0)\,T_0\,\frac{\sin 2\pi\sigma(t-nT_0)}{\pi(t-nT_0)} \qquad (1)$$

Obtingui la relació existent entre T_0, σ i B. Quan es verifica que $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_0}{T_0}\right)$?

De fet, l'equació (1) es pot entendre com un cas particular del que es coneix com el teorema de mostratge generalitzat (TMG), que es presenta a continuació. Donats N sistemes SLI. caracteritzats per $H_1(f)$, $H_2(f)$, ... , $H_N(f)$, els hi apliquem a tots N el senyal $x(t)$ obtenint-se els senyals de sortida $y_1(t)$, $y_2(t)$, ... , $y_N(t)$, respectivament. El teorema de mostratge generalitzat diu que llavors $x(t)$ es pot escriure com:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[y_1(nT)g_1(t-nT)+y_2(nT)g_2(t-nT)+\cdots+y_N(nT)g_N(t-nT)\right] \qquad (2)$$

on les funcions interpoladores $g_i(t)$ són: $$g_i(t)=T\int_{-B}^{-B+\frac{1}{T}} G_i(f,t)\,e^{j2\pi ft}\,df \qquad (3)$$

i la relació que hi ha d'haver entre els sistemes $H(f)$ i $G(f,t)$ ve donada pel sistema d'equacions:

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} H_1(f)G_1(f,t) & + & \cdots & + & H_N(f)G_N(f,t) & = & 1 \\ H_1(f+F)G_1(f,t) & + & \cdots & + & H_N(f+F)G_N(f,t) & = & e^{j2\pi Ft} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ H_1(f+(N-1)F)G_1(f,t) & + & \cdots & + & H_N(f+(N-1)F)G_N(f,t) & = & e^{j2\pi(N-1)Ft} \end{array}\right. \qquad (4)$$

essent $F=\dfrac{1}{T}=\dfrac{2B}{N}$. A destacar la reducció en un factor N de la freqüència de mostratge ja que la relació entre T de l'equació (2) i T_0 de l'equació (1) és: $T=NT_0$

b) Faci un diagrama de blocs explicatiu del procés de mostratge i reconstrucció (interpolació) proposat en aquest mostratge generalitzat TMG.

c) Compari el procés de mostratge clàssic amb aquest procés de mostratge generalitzat des del punt de vista de la memòria necessària per emmagatzemar les mostres.

d) Entre d'altres coses, amb el TMG es pot demostrar que amb mostratges no uniformes també és possible reconstruir el senyal original. Així, per exemple, amb el TMG es pot demostrar que utilitzant com a senyal de mostratge el senyal periòdic $p(t)$ de la Fig.1, és possible reconstruir $x(t)$, essent $T_0=1/2B$. Obtingui $P(f)$ i comprovi que simplement amb un filtrat passa-baixes no seria possible recuperar $x(t)$ a partir del mostratge de x(t) (x(t).p(t)).

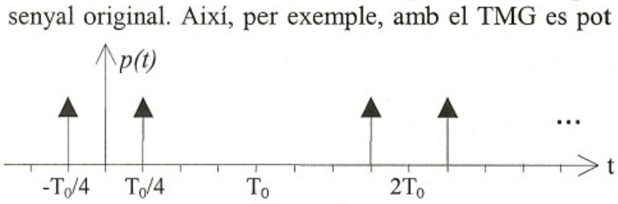


Figura 1

e) Suposi el cas N=2. A partir del TMG es pot demostrar que $x(t)$ es pot escriure com:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x(nT)\frac{\sin^2\left(\pi B(t-nT)\right)}{\pi^2B^2(t-nT)^2}+x'(nT)\frac{\sin^2\left(\pi B(t-nT)\right)}{\pi^2B^2(t-nT)}\right] \quad \text{on} \quad x'(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

Identifiqui per aquest exemple les funcions $H_1(f)$, $H_2(f)$ i $g_1(t)$, $g_2(t)$. Obtingui $G_1(f,t)$ i $G_2(f,t)$ i comprovi que efectivament porten cap a les funcions $g_1(t)$, $g_2(t)$ identificades.

Senyals i Sistemes I :

Resolució d'Exàmen Final

Josep Salavedra Molí

Barcelona, Juny 2006

PROBLEMA 1

a) Si $\underline{T[\cdot]\ \text{SLI}} \Rightarrow$

$$\underset{f(t)}{x_1(t) = f(t+1) - f(t-1)} \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow \underset{g(t)}{g(t+1) - g(t-1) = y_1(t)}$$

b) Si $\boxed{h(t) = (2e^{2t} - 1)\,\delta(t) = (2e^{0} - 1)\,\delta(t) = \delta(t)} \Rightarrow T[u(t)] = u(t) \Rightarrow$ FALS

c) Segons apartat a)

$$\underset{f(t) = 4u(t)}{4\Pi\left(\tfrac{t}{2}\right) = x_1(t)} \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow \underset{g(t) = 10(1-e^{-t})\,u(t)}{y_1(t) = 10\left[(1-e^{-(t+1)})\,u(t+1) - (1-e^{-(t-1)})\,u(t-1)\right]}$$

Si $g(t) = f(t) * h(t) \Rightarrow g'(t) = f'(t) * h(t)$ on $g'(t) = h(t)\cdot 4$

$f'(t) = 4\,\delta(t)$

Així $h(t) = \dfrac{g'(t)}{4} = \dfrac{5}{2} e^{-t} u(t) = h(t)$

d) CAUSAL JA QUE $h(t) = 0$ PER $t < 0$

ESTABLE " " $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \frac{5}{2} < +\infty$

e) $T[x_1(2t)] \stackrel{?}{=} y_1(2t)$ FALS JA QUE $\dfrac{y_1(2t)}{2} = x_1(2t) * h(2t)$.

PERÒ NO ES VERIFICA $y_1(2t) \neq x_1(2t) * h(t)$

f)

$$\underset{s(t) = x(t) * x(t)}{x(t)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \underset{z(t) = s(t) * h(t) = x(t) * y(t) \neq y(t) * y(t)}{y(t)}$$

FALS

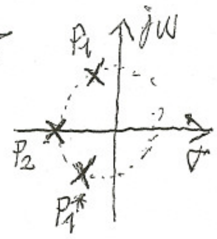
PROBLEMA 2

a) **a.1** BUT → $\underline{M=n,\ L=0}$ ICHE → $M=n,\ L=\begin{cases} n & \text{si } n \text{ parell} \\ n-1 & \text{si } n \text{ senar} \end{cases}$

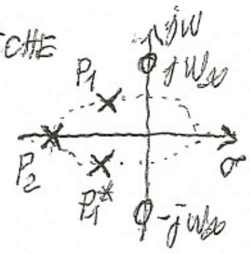
a.2 BUT

$n=3$

Pas-baix



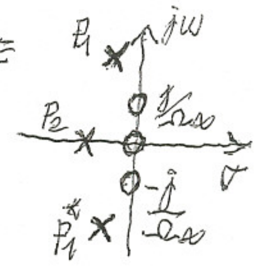
ICHE



a.3 ICHE

$n=3$

Pas-alt



b) **b.1** $\boxed{A = a\,|H(f_1)|}$ i $\boxed{\theta_1 = \phi(f_1)}$

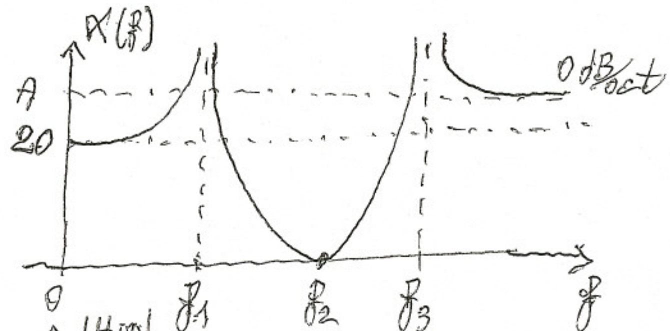
b.2 $\phi(f)$ lineal $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\theta_1}{f_1} = \dfrac{\theta_2}{f_2} = \dfrac{\theta_3}{f_3}}$

b.3 $E_y = \infty$ $\quad P_y = \dfrac{A^2+B^2+C^2}{2}$ $\quad R_y(\tau) = \dfrac{A^2}{2}\cos(2\pi f_1\tau) + \dfrac{B^2}{2}\cos(2\pi f_2\tau) + \dfrac{C^2}{2}\cos(2\pi f_3\tau)$

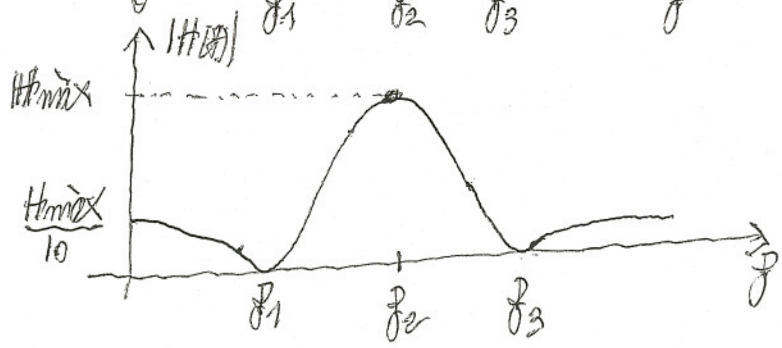
$$S_y(f) = \mathcal{F}[R_y(\tau)] = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)\right] + \frac{B^2}{4}\left[\delta(f-f_2)+\delta(f+f_2)\right] + \frac{C^2}{4}\left[\delta(f-f_3)+\delta(f+f_3)\right]$$

$T_y = \dfrac{1}{f_1}$

c) **c.1**



$A = 20\,dB \Rightarrow f_2^2 = f_1 f_3$

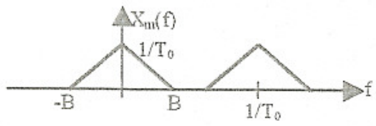


c.2 $$F(\omega^2) = K\,\frac{\left(\omega^2-(2\pi f_2)^2\right)^4}{\left(\omega^2-(2\pi f_1)^2\right)^2\left(\omega^2-(2\pi f_3)^2\right)^2}$$ on $K = 99\left(\dfrac{f_1\cdot f_3}{f_2^2}\right)^4$

Problema 3

a)

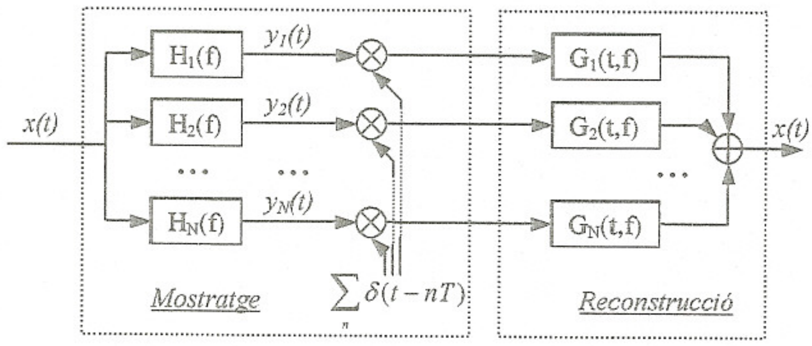
Si



$1/T_0 \ge 2B$ **llavors** $B \le \sigma \le \frac{1}{T_0} - B$

Si $B = \frac{1}{2T_0}$ llavors $x(t) = \sum_n x(nT_0)\frac{\sin 2\pi B(t-nT_0)}{2B\pi(t-nT_0)} = \sum_n x(nT_0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_0}{T_0}\right)$

b)



c) Si amb el procés clàssic tenim $1/T_0$ mostres/seg., ara també ja que tenim $1/T$ most./seg. per cadascun dels N senyals, i per tant en total $N/T=1/T_0$ most./seg.

d)

$$P(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\cos\left(2\pi \frac{T_0}{4}\frac{m}{2T_0}\right)}{2T_0}\delta\left(f - m/2T_0\right)$$

$$P(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}\cos\left(\pi m/4\right)\delta\left(f - m/2T_0\right)$$

Per tant $X_m(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}\cos\left(\pi m/4\right)X\left(f - m/2T_0\right)$

. **Llavors el sumand *X(f)* no està aïllat, ja que intersecta amb els *$X(f \pm 1/2T_0)$*.**

e) $H_1(f)=1$

$$G_2(f,t) = \frac{e^{j2\pi Bt}-1}{j2\pi B}$$

$g_1(t)=\mathrm{sinc}^2(Bt)$

$H_2(f)=j2\pi f$ (derivador). :

$$G_1(f,t) = 1 - j2\pi f\, G_2(f,t) = 1 - \frac{f}{B}(e^{j2\pi Bt}-1)$$

$$g_2(t) = \frac{1}{t\pi^2B^2(2j)^2}\left(e^{j2\pi Bt}-1\right)\left(1-e^{-j2\pi Bt}\right) = \frac{1}{t\pi^2B^2}\left(\frac{e^{j\pi Bt}-e^{-j\pi Bt}}{2j}\right)^2 = \frac{\sin^2(\pi Bt)}{\pi^2B^2t}$$