PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial **7 de novembre de 2007**

1. Un sistema de transmissió funciona assignant freqüències dins d'un conjunt discret $\nu_i, i = 1, 2, \ldots, 12$, on $\nu_i < \nu_j$ per $i < j$. Hi ha tres dispositius $D_i, i = 1, 2, 3$, de manera que quan un usuari demana el servei, el sistema li assigna un dispositiu a l'atzar i després una de les freqüències associades al dispositiu, també a l'atzar. D_1 té associades $\nu_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, D_2 té associades $\nu_i, i = 7, 8, 9, 10$ i D_3 té associades $\nu_i, i = 11, 12$.

(a) Quina és la probabilitat que a un usuari se li assigni una freqüència ν tal que $\nu_5 < \nu < \nu_9$?

(b) Si un usuari té assignada una freqüència ν tal que $\nu > \nu_8$, quines són les probabilitats de trobar-se en cadascun dels dispositius?

(c) Un usuari repeteix l'accés al sistema fins que se li assigna alguna de les freqüències ν_1, ν_7 o ν_{11}. Quin és el nombre mitjà d'accessos que fa?

(d) 20 usuaris accedeixen de manera independent al sistema. Quina és la probabilitat que no hi hagi més d'un usuari assignat a ν_{12}?

(e) 150 usuaris accedeixen dues vegades al sistema. Quin és el nombre mitjà d'usuaris que els toca la mateixa freqüència les dues vegades?

2. Considereu la funció $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida $F(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

(a) Demostreu que és la funció de distribució d'una variable aleatòria contínua X. Quina és la funció de densitat d'aquesta variable?

(b) Trobeu la funció de densitat de la variable aleatòria $Y = e^X$. Calculeu les probabilitats $P(1 < Y < 2)$ i $P(-1 < Y < 1)$.

(c) Es defineix la variable $Z = g(X)$ on:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < x < \ln 2, \\ 1 & \text{si } \ln 2 < x < \ln 3, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Calculeu la funció de probabilitat i la variància de Z.

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES!!