UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions

Procesado de Señal. 2007-01-19
Notas Provisionales: 26 Enero 2007
Periodo de Alegaciones: 26 y 29 Enero 2007 ***en secretaría***.
Notas Definitivas: 31 Enero 2007

Profesores: M.A. Lagunas, M. Nájar, A. Pérez, J. Riba

Informaciones adicionales:
- Duración de la prueba: 3h
- Entregar en tres partes separadas.
- Se prohíbe el uso de teléfonos móviles durante la realización del examen. No se pueden utilizar ni en su funcionalidad de reloj.
- Durante la realización del examen debe tener visible un documento identificativo con fotografía.

Ejercicio 1 (INICIAR EN HOJA NUEVA)

Dadas 2N-1 muestras de un proceso $\{x\}$ resumidas en el vector $\underline{X} = [x(-N+1) \quad x(-N+2) \quad \ldots \quad x(N-2) \quad x(N-1)]^T$, se sabe que la estructura del proceso es una componente determinista más ruido gaussiano blanco (media nula) y varianza σ^2. Su estructura temporal es x(n)=(A+B.n)+w(n).

a) Pruebe que el vector de datos puede expresarse como $\underline{X} = \underline{\underline{\Phi}}.\underline{a} + \underline{w}$,donde $\underline{w}$ contiene las muestras de ruido, el vector $\underline{a}$ viene dado por $\underline{a} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ y la matriz $\underline{\underline{\Phi}}$ por $\underline{\underline{\Phi}} = [\underline{1} \quad \underline{N}]$ (matriz de 2N-1 por 2).

b) Compruebe que se verifica que

$$\left(\underline{\underline{\Phi}}^H.\underline{\underline{\Phi}}\right)^{-1} = \frac{1}{(2N-1).S}.\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & (2N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(2N-1) & 0 \\ 0 & 1/S \end{bmatrix}$$

siendo $S = \sum_{n=-N+1}^{N-1} n^2 = \frac{N.(N-1).(2N-1)}{3}$

c) Derive el estimador ML del vector $\underline{a}$ y compruebe que es insesgado.

d) Compruebe que la forma del estimador del parámetro B es $B^{ML} = \underline{N}^H.\underline{X}/S$

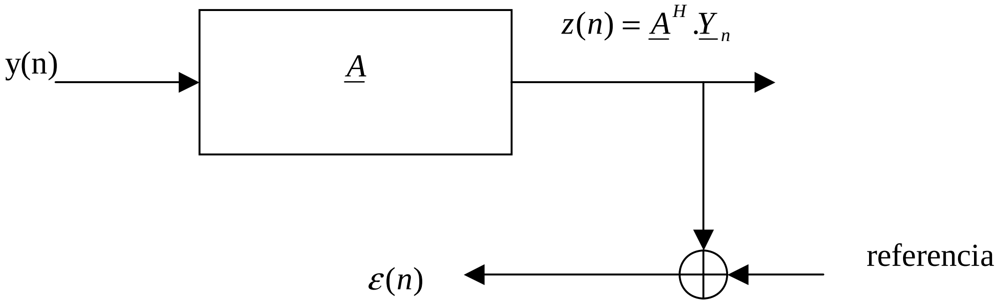
e) Calcule la varianza del estimador del vector $\underline{a}$ y compruebe que los estimadores de A y de B son consistentes (su varianza tiende a cero cuando N tiende a infinito).

Ejercicio 2 (INICIAR EN HOJA NUEVA)

La señal d(n), incorrelada y de potencia unidad, atraviesa un sistema lineal de dos coeficientes $\underline{h}^T = [1 \quad a]$, con a menor que la unidad, dando lugar a la señal x(n). Un sensor recoge dicha señal con ruido blanco aditivo w(n) de varianza σ^2.

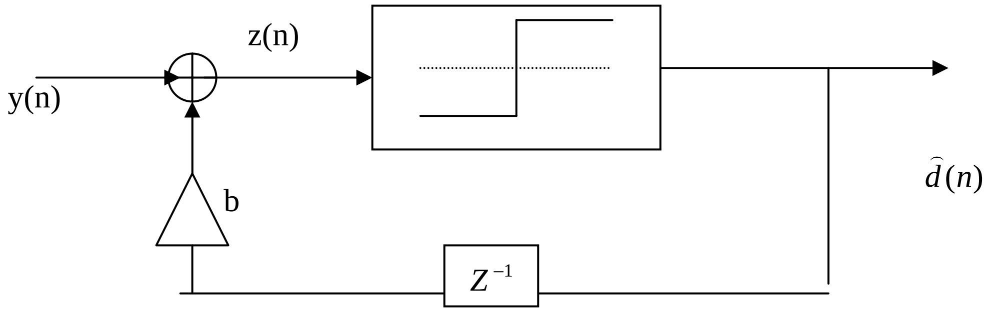
a) Indique la expresión del vector $\underline{Y}_n = \underline{X}_n + \underline{w}_n = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n-1) \end{bmatrix}$ en función de los coeficientes (1,a) del sistema lineal y del vector $\underline{d}_n = [d(n) \quad d(n-1) \quad d(n-2)]$. Asimismo, demuestre que $\underline{\underline{R}} = E\left(\underline{Y}_n.\underline{Y}_n^H\right)$ es igual a $\underline{\underline{H}}.\underline{\underline{H}}^H + \sigma^2.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, definiendo la matriz $\underline{\underline{H}}$.

Se propone recuperar x(n) a partir de y(n) con un filtro de Wiener de dos coeficientes, tomando como referencia d(n-1).



b) Obtenga los coeficientes del filtro de Wiener.
c) Calcule la potencia de error mínimo.
d) Empleando un algoritmo LMS, obtenga la expresión del paso de adaptación μ, para un desajuste del 10%.
e) Suponiendo que el autovalor mínimo de la matriz de correlación es igual a $\left(1+\sigma^2\right)$ obtenga una cota superior para el número de adaptaciones necesarias para la convergencia (potencia del error diez veces menor que la potencia de la referencia).

Considerando que se emplea un esquema de los denominados de "decisión directa" donde la referencia se obtiene de estimar la señal deseada con un detector, tal y como se indica en la figura, de este modo, la salida del filtro sería:
$z(n) = y(n) + b.\hat{d}(n-1)$



f) Suponiendo que la señal a la salida del detector es aproximadamente la correcta (sin errores en la decisión), es decir $\hat{d}(n) = d(n)$, calcule el valor del coeficiente b para que el error cuadrático medio entre z(n) y d(n) sea mínimo.
g) Calcule la potencia de error mínimo.

Ejercicio 3 (INICIAR EN HOJA NUEVA)

Dada una señal bi-dimensional $f(\underline{x})$, con $\underline{x} = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$, que sólo existe para $|x1| \leq D \quad |x2| \leq D$ y cuya transformada de Fourier $F(\underline{w})$, con $\underline{w} = \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \end{bmatrix}$, tiene una densidad espectral que ocupa la zona $w1^2 + w2^2 \leq B^2$, responda a las siguientes preguntas:

a) Deduzca la matriz de muestreo rectangular $\underline{\underline{U}}_R$ que permite obtener la señal discreta $f(\underline{n})$, con $\underline{n} = \begin{bmatrix} n1 \\ n2 \end{bmatrix}$, a partir de $f(\underline{x})$ y sin que exista "aliasing" o solapamiento en el dominio frecuencial.

b) Repita el apartado anterior para el caso en que se emplee muestreo hexagonal con la siguiente matriz de muestreo $\underline{\underline{U}}_H = d.\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$, encontrando el valor de d en función de B.

c) ¿Cual de los dos métodos de muestreo, descritos en los apartados anteriores es mejor? Justifique la respuesta.

d) Indique las razones que motivan el uso de la transformada coseno en lugar de la DFT en procesado de imagen.