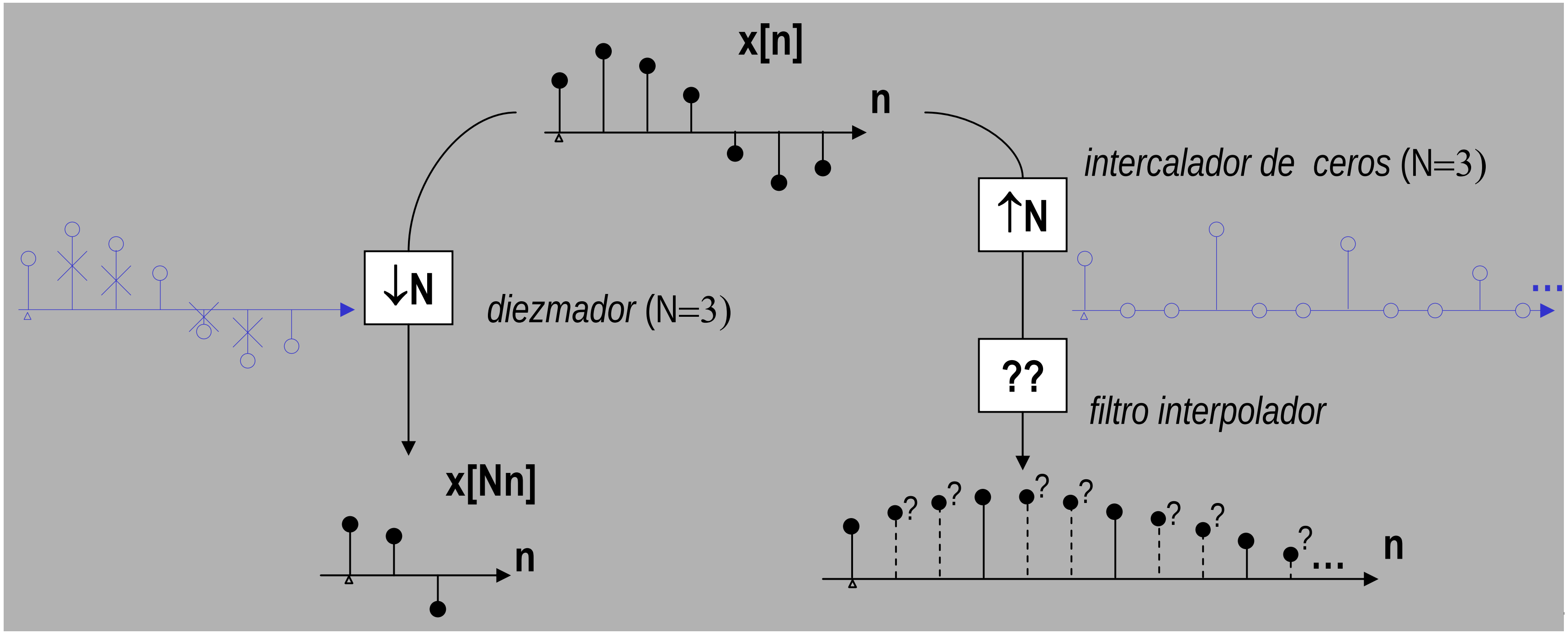
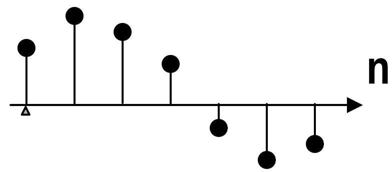
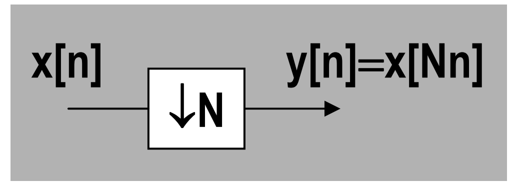
3.2: Diezmado e Interpolación

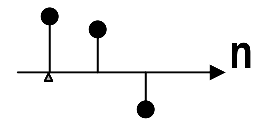
- Diezmado de secuencias discretas
- Interpolación de secuencias discretas
- Relación con el entorno analógico



Diezmado de secuencias discretas

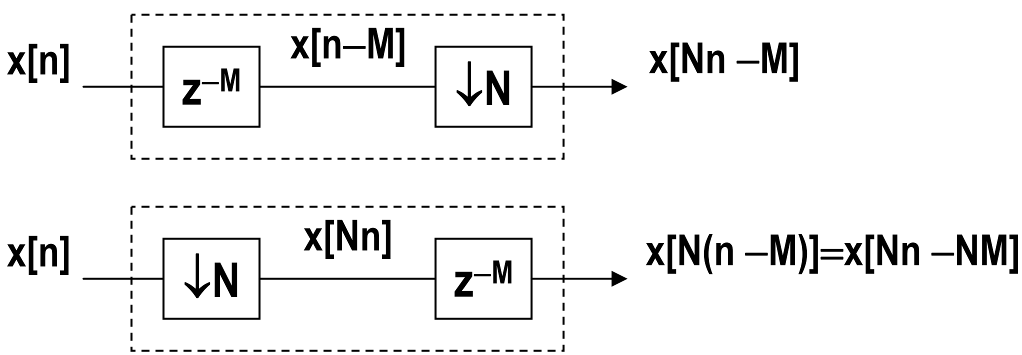




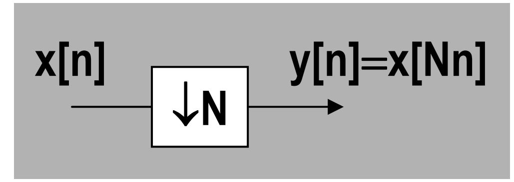


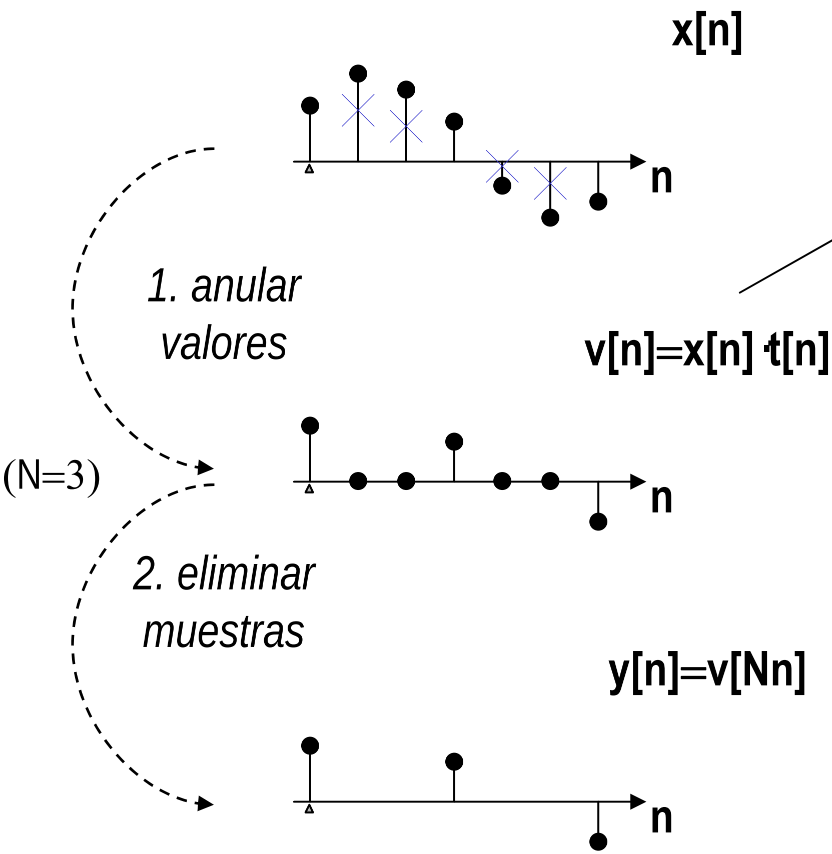
(N=3)

- **Un diezmador (N>1) es un sistema discreto**
  - **lineal**
  - **no causal** (Nn>n si n>0)
  - **estable** (BIBO: "bounded input bounded output")
  - **variante:** los dos sistemas siguientes no son equivalentes:



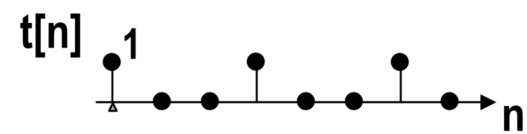
Descomposición teórica del proceso de diezmado





Secuencia intermedia:

$$v[n]=\begin{Bmatrix} x[n] & n=0,\pm N,\pm 2N\ldots \\ 0 & \text{otro} \quad n \end{Bmatrix} = x[n]\cdot t[n]$$



donde

$$t[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n+rN] \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

DFS:
$X_o[k]=1$
$0\le k\le N-1$

Análisis frecuencial del diezmado

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow N} \longrightarrow y[n]=x[Nn]$$

1. Transformada de la secuencia intermedia

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\overbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right)}^{t[n]} e^{-j\omega n} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)})$$

réplicas espectrales cada $2\pi/N$

2. Transformada de la secuencia diezmada: y[n]=x[Nn]=v[Nn]

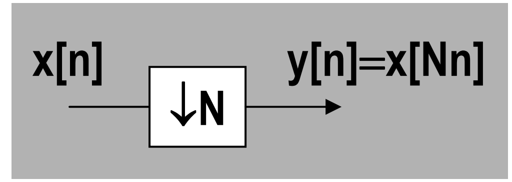
$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[Nn]e^{-j\omega n} =$$

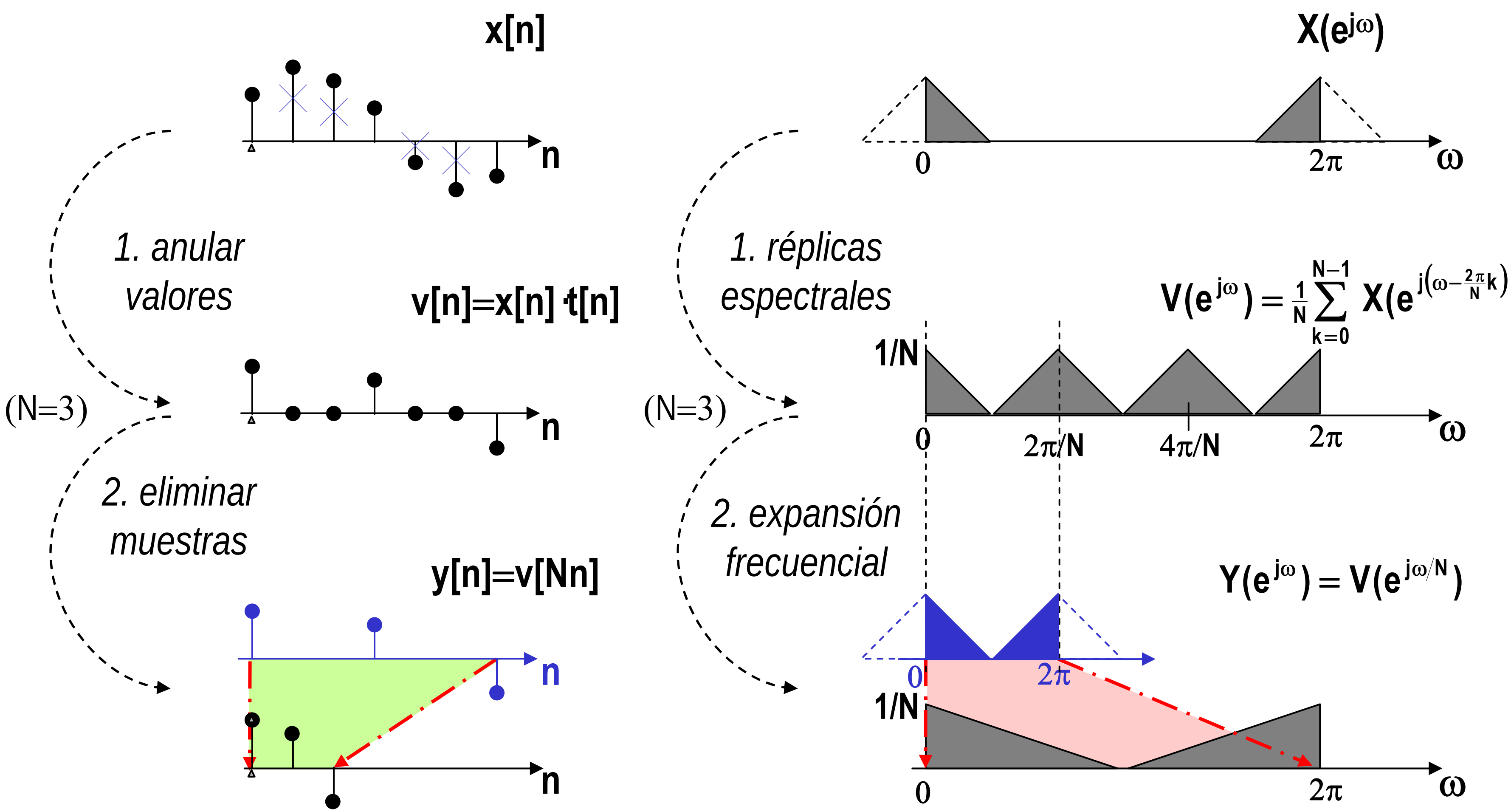
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m]e^{-j\omega m/N} = V(e^{j\omega/N}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\left(\frac{\omega}{N}-\frac{2\pi}{N}k\right)})$$

↑ m=Nn posible, ya que $v[m]=0 \quad m\neq Nn$

expansión frecuencial xN

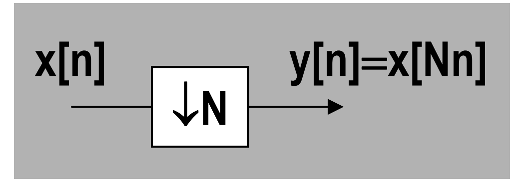
Esquema de diezmado





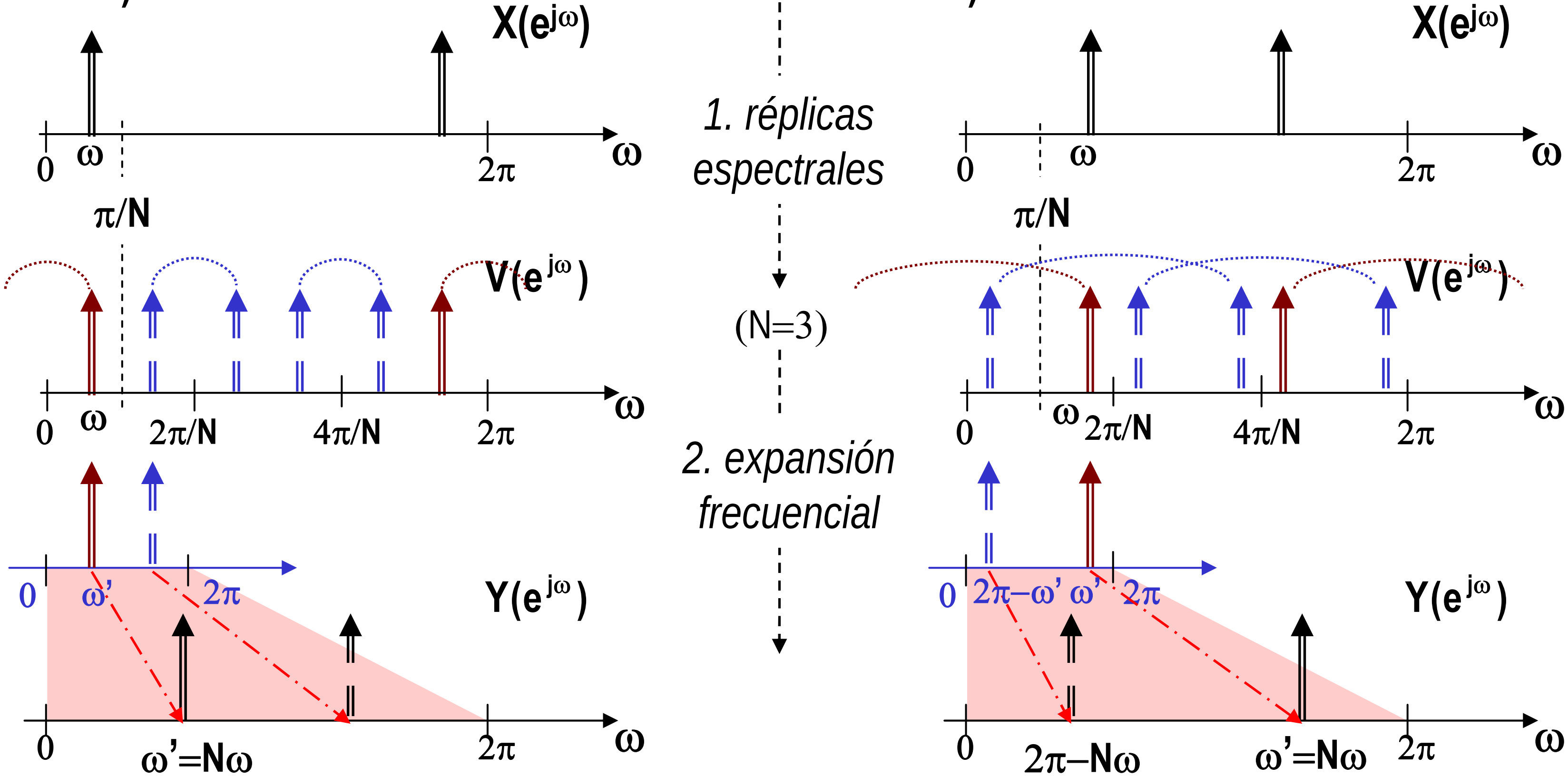
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{N}-\frac{2\pi}{N}k\right)}\right)$$

Ejemplo: diezmado de un tono



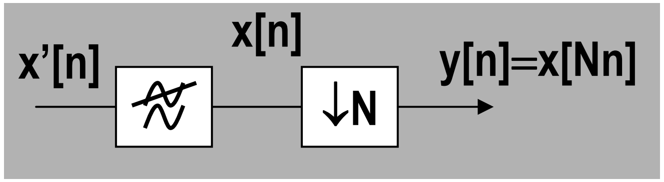
- $x[n] = \sin \omega n \quad \Rightarrow \quad y[n] = x[Nn] = \sin \omega N n = \sin \omega' n, \quad \omega' = N\omega$

caso a) $\omega \leq \pi/N$ caso b) $\omega > \pi/N$



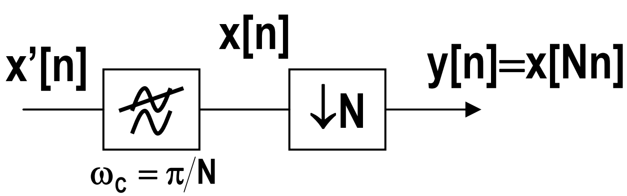
En general, $|N\omega \pm 2\pi k|$

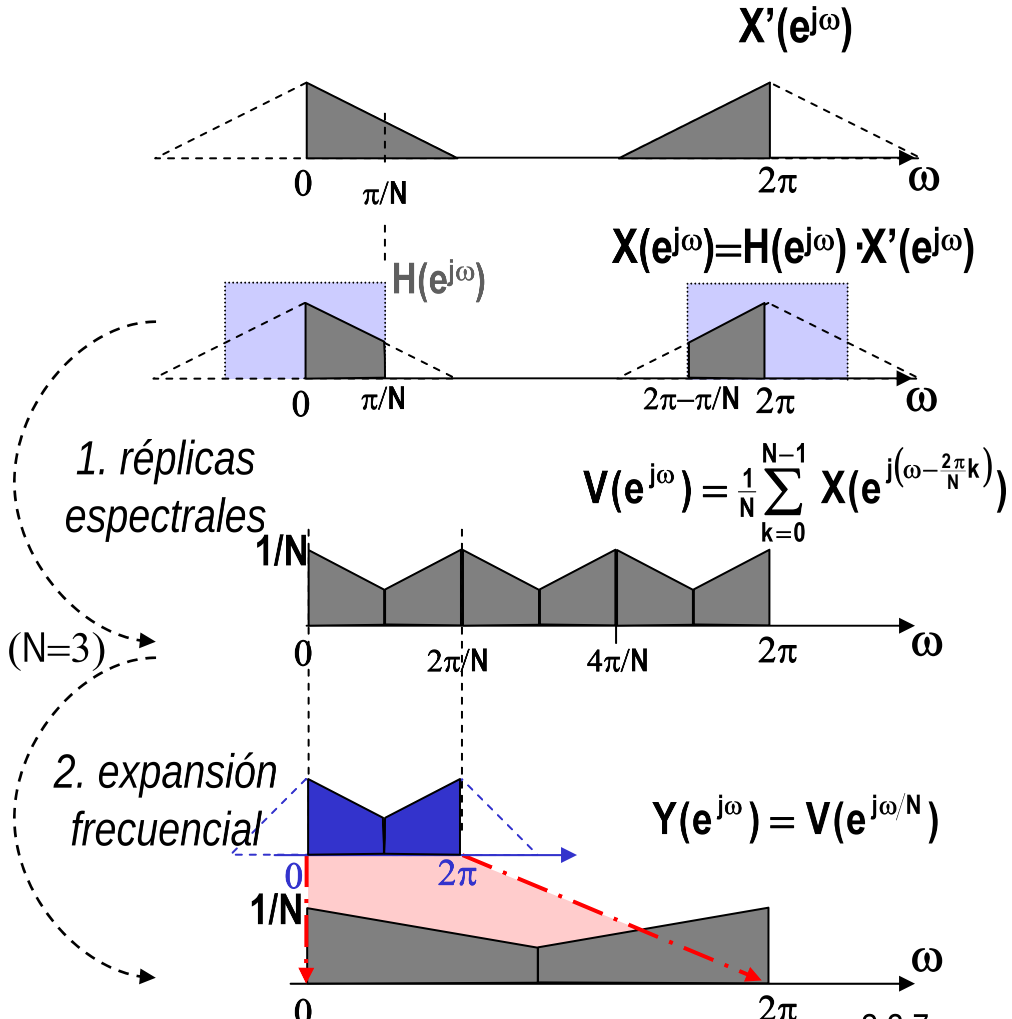
Necesidad de filtro previo



- En general, si el ancho de banda de la secuencia x[n] es mayor que π/N, se producirá "aliasing"

- Para evitar pérdida de información debida al solapamiento espectral, es preciso insertar un filtro paso-bajo $H(e^{j\omega})$ con frecuencia de corte $\omega_c=\pi/N$ antes del diezmado



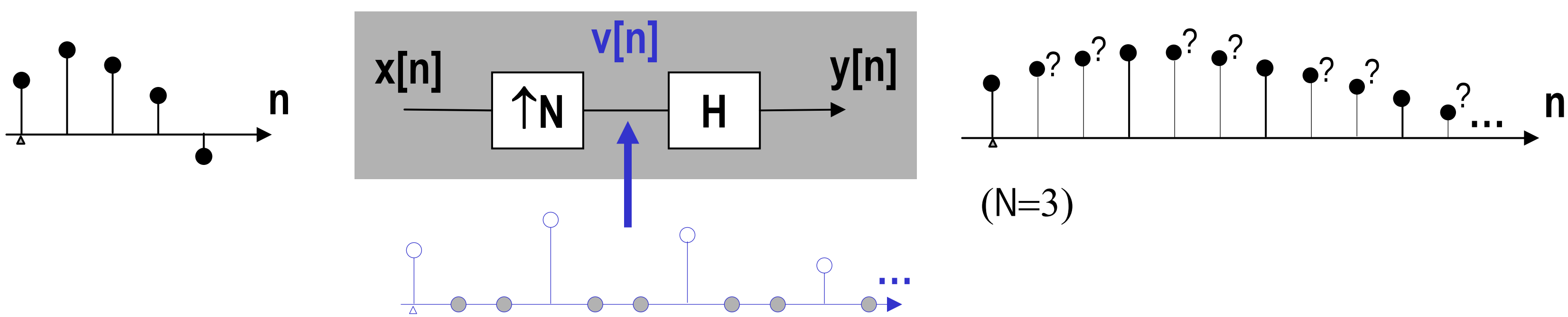


Interpolación de secuencias discretas

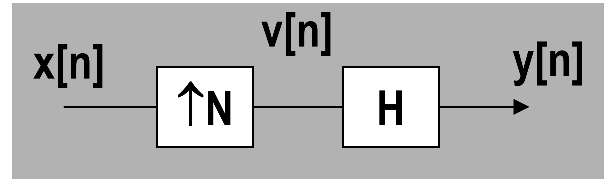
- La interpolación es una operación que comprende los pasos siguientes:

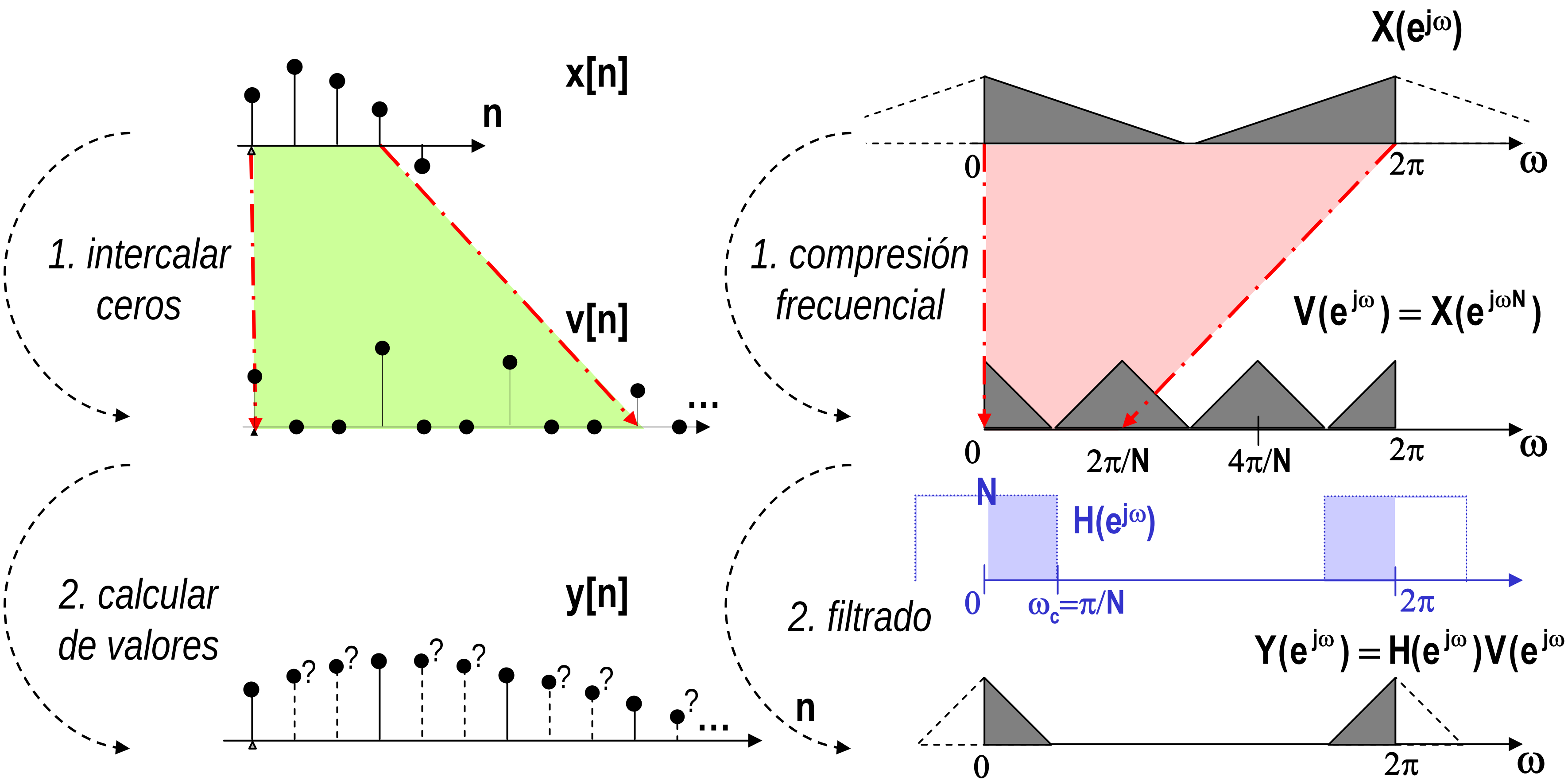
  1. Se intercalan N–1ceros entre cada dos muestras consecutivas de la secuencia original mediante un intercalador de ceros (simbolizado por ↑N)

  2. Un filtro “ interpolador” adecuado, calcula los valores de las muestras intercaladas



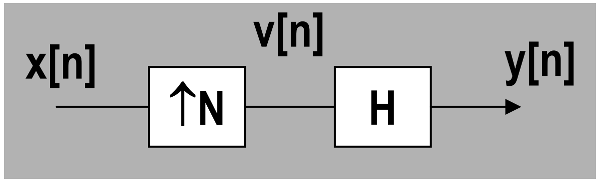
Esquema de la interpolación



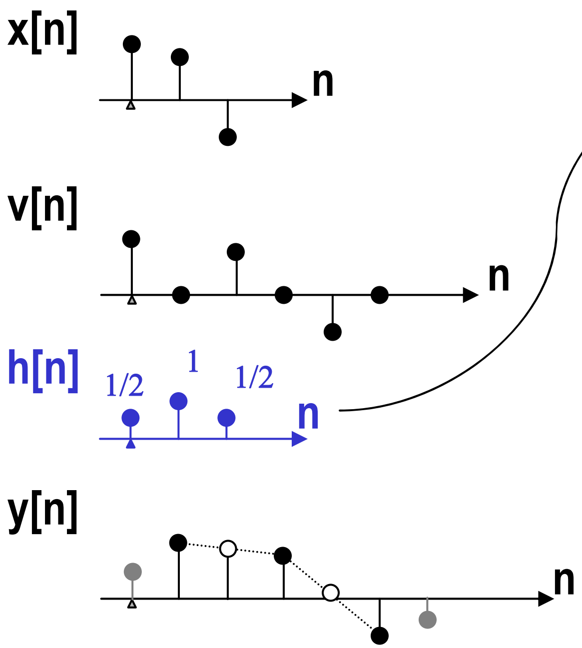


$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega N})$$

Ejemplo: interpolación lineal

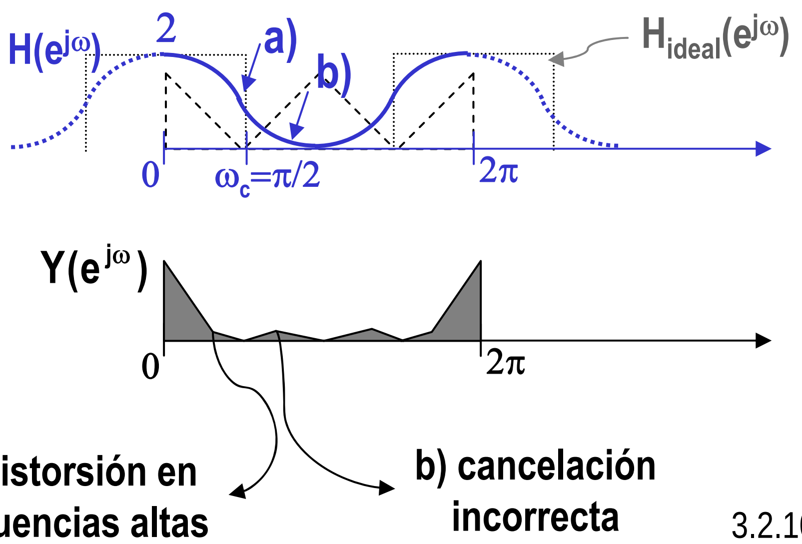


◆ Regla de interpolación lineal con N=2

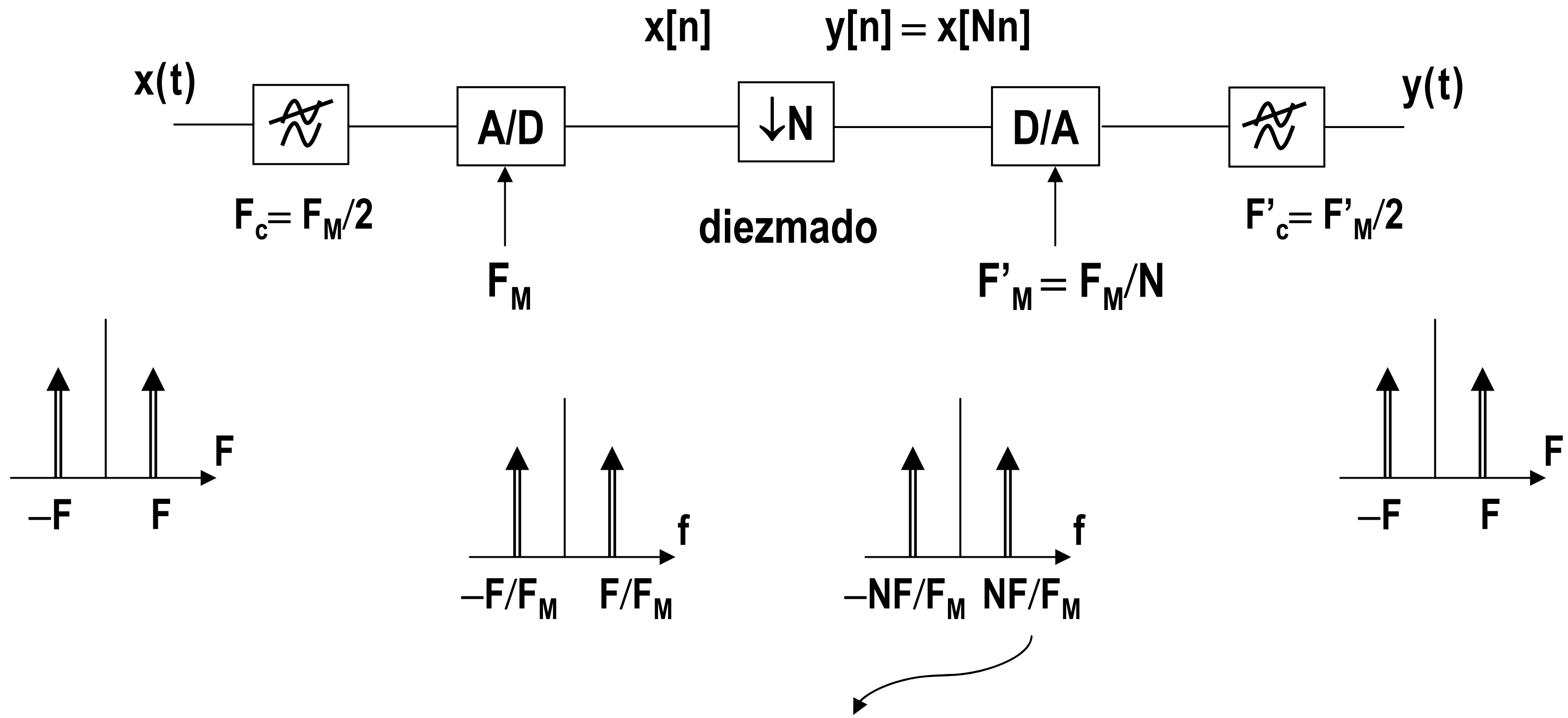


$$h[n] = \{\underline{1/2}, 1, 1/2\} \quad \text{(causal)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega} = e^{-j\omega}(1+\cos\omega)$$



Relación con el entorno analógico

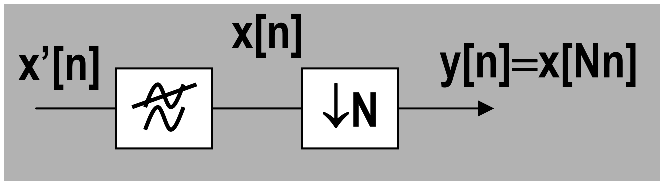


Suponiendo que no se produce aliasing:

$$NF/F_M < 1/2$$

Resumen

Diezmado



$x[n]$

1. anular valores

$v[n]=x[n]\cdot t[n]$

2. eliminar muestras

$y[n]=v[Nn]=x[Nn]$

$X(e^{j\omega})$

1. réplicas espectrales

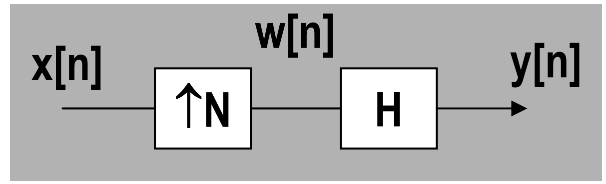
$$V(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X\left(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)}\right)$$

2. expansión frecuencial

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{N}-\frac{2\pi}{N}k\right)}\right)$$

Es necesario un filtro paso-bajo con frecuencia de corte $\omega_c=\pi/N$ antes del diezmado para evitar aliasing

Interpolación



$x[n]$

1. intercalar ceros

$w[n]$

2. calcular valores

$y[n]$

$X(e^{j\omega})$

1. compresión frecuencial

$$W(e^{j\omega})=X(e^{j\omega N})$$

2. filtro interpolador

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega N})$$

El filtro interpolador ideal es un paso-bajo con frecuencia de corte $\omega_c=\pi/N$ y amplitud N en la banda de paso