4 MODULACIONES PASO-BANDA

4.1 Ejercicio 2 de examen final de T03 (M. Cabrera)

4.1.1 Enunciado

Sea la modulación *2FSK* definida según las siguientes fórmulas.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_c \cos\Big(2\pi\left(f_c + a[n]r\right)t\Big)\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-nT}{T}\right);$$

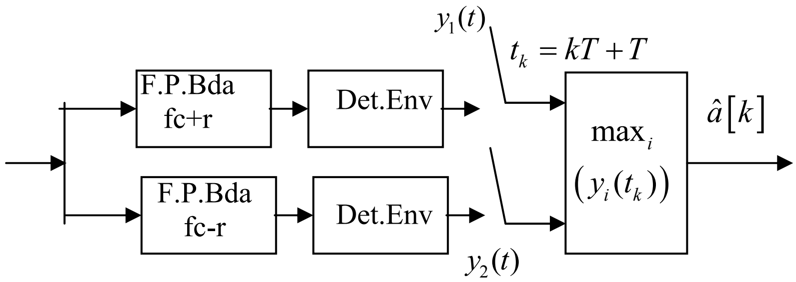
$$f_c = \tfrac{N}{T};\ \ N >> 1 \qquad r = \tfrac{1}{T};\ \ a[n] = \pm 1 \text{ con equiprobabilidad}$$

Se transmite a través de una canal ideal *AWGN*. El objetivo de este ejercicio consiste en comparar la *BER* al demodular mediante un receptor coherente (receptor *MAP*) y al demodular mediante un receptor no coherente.

Se pide:

a) Obtener el espacio de señal, la energía media transmitida por bit E_b, una base generadora ortonormal del espacio de señal, la representación geométrica de las coordenadas del espacio de señal sobre la base.
b) Dibuje un diagrama de bloques del receptor óptimo *MAP*.
c) Calcule la probabilidad de error (*BER*) en función del cociente $\frac{E_b}{N_o}$. (E_b es la energía media transmitida por bit y $\frac{N_o}{2}$ es la densidad espectral del ruido a la entrada del receptor).
d) Calcule la $\frac{E_b}{N_o}$ (dB) necesaria para obtener *BER*=0.1

A continuación se pide analizar la *BER* al utilizar el receptor no coherente (es decir, no se requiere sincronismo de fase de portadora). Ver figura:



El detector de envolvente equivale a detectar el valor absoluto del equivalente paso bajo de la señal a la salida del correspondiente filtro paso banda.
La decisión de símbolo se realiza a partir de las dos variables de decisión reales y positivas:

$$y_1 = y_1(t_k) \geq 0 \qquad y_1(t_k) > y_2(t_k) \Rightarrow \hat{a}[k] = +1$$

$$y_2 = y_2(t_k) \geq 0 \qquad y_1(t_k) < y_2(t_k) \Rightarrow \hat{a}[k] = -1$$

e) Dibuje en el plano las dos regiones de decisión, en función de las dos variables positivas. $y_1 = y_1(t_k), y_2 = y_2(t_k)$.

f) Exprese la BER como una doble integral de las funciones de densidad de probabilidad condicionadas $f_{y_1}(y_1/a[k]=+1)=f_{y_1}(y_1/+1); f_{y_2}(y_2/a[k]=+1)=f_{y_2}(y_2/+1)$ cuando las variables de integración son y_1, y_2, variables aleatorias estadísticamente independientes.

Para $a[k]=+1$, se obtiene $y_1(t_k)=y_1=\left|\frac{d}{\sqrt{2}}+\beta_{1r}+j\beta_{1i}\right|, \quad y_2(t_k)=y_2=\left|\beta_{2r}+j\beta_{2i}\right|$, d es distancia entre símbolos sobre base ortonormal, y con canal AWGN $\beta_{1r},\beta_{1i},\beta_{2r},\beta_{2i}$ son v.a. Gaussianas estadísticamente independientes entre sí, de media nula y varianza $\sigma^2=\frac{N_0}{2}$. En estas condiciones y_1, y_2 presentan las f.d.p, Rice y Rayleigh respectivamente:

- $$f_{y_1}(y_1/a[k]=+1)=f_{y_1}(y_1/+1)=\frac{y_1}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{(y_1)^2+\frac{d^2}{2}}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\frac{y_1}{\sigma^2}\right)u(y_1),$$

  con $I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\exp(x\cos\theta)\,d\theta$.

- $$f_{y_2}(y_2/a[k]=+1)=f_{y_2}(y_2/+1)=\frac{y_2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{(y_2)^2}{2\sigma^2}\right)u(y_2)$$

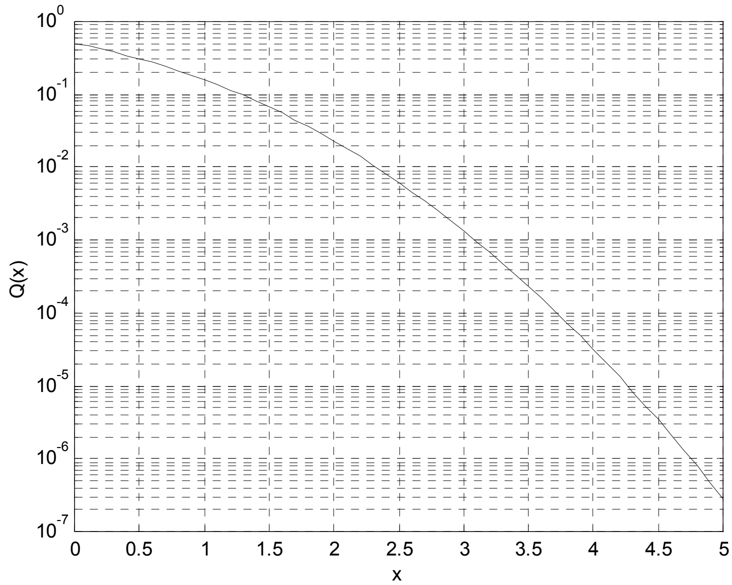
g) Utilizando las fórmulas anteriores demuestre que para el detector no coherente la BER del apartado anterior resulta $\mathrm{BER}=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{d^2}{8\sigma^2}\right)$.

Nota: puede serle de utilidad: $\int_0^{+\infty} f_{y_1}(y_1/+1)\,dy_1=1$.

h) Exprese la BER del apartado anterior en función de $\frac{E_b}{N_o}$.

i) Calcule la $\frac{E_b}{N_o}$ (dB) necesaria para obtener BER=0.1 ¿Cuál es la pérdida en dB por detectar no coherentemente?

Área de la Gaussiana $Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)d\lambda$:



4.1.2 Resolución

a) Obtener el espacio de señal, la energía media transmitida por bit E_b, una base generadora ortonormal del espacio de señal, la representación geométrica de las coordenadas del espacio de señal sobre la base.

Solución:

El tamaño del espacio de señal es M=2
$$s_1(t) = A_c \cos\left(2\pi\left(f_c + r\right)t\right)\Pi\left(\tfrac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$
$$s_2(t) = A_c \cos\left(2\pi\left(f_c - r\right)t\right)\Pi\left(\tfrac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

La energía media transmitida por bit E_b es $E_b = \frac{1}{2}\left(E_1 + E_2\right) = E_1 = \int_0^T \left(s_1(t)\right)^2 dt = \frac{(A_c)^2 T}{2}$

Una base generadora ortonormal , fácilmente deducible al aplicar Gram-Schmidt al espacio de señal:

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} = \sqrt{\tfrac{2}{T}}\cos\left(2\pi\left(f_c + r\right)t\right)\Pi\left(\tfrac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$
$$\varphi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}} = \sqrt{\tfrac{2}{T}}\cos\left(2\pi\left(f_c - r\right)t\right)\Pi\left(\tfrac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$
, dado que $\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = 0$

La representación geométrica de las coordenadas del espacio de señal sobre la base:

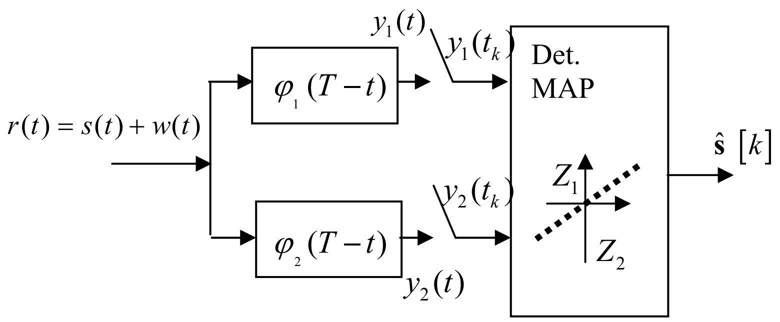
$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} A_c\sqrt{\frac{T}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ A_c\sqrt{\frac{T}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

siendo d la distancia entre los dos símbolos representados sobre la base ortonormal $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ y por tanto $E_b = \frac{d^2}{2}$

b) Dibuje un diagrama de bloques del receptor óptimo *MAP*.

Solución:

Diagrama de bloques del receptor óptimo *MAP* ($t_k = kT + T$)

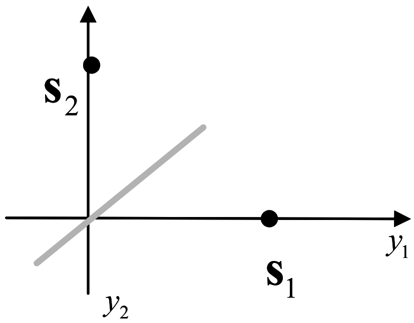


c) Calcule la probabilidad de error (BER) en función del cociente $\frac{E_b}{N_o}$. (E_b es la energía media transmitida por bit y $\frac{N_o}{2}$ es la densidad espectral del ruido a la entrada del receptor).

Solución:

El vector detectado presenta la siguiente f.d.p:

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1(t_k) \\ y_2(t_k) \end{pmatrix}=\mathbf{s}_i+\mathbf{n}=\mathbf{s}_i+\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}: N\left(\mathbf{s}_i,\sigma^2\mathbf{I}\right)=N\left(\mathbf{s}_i,\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ o & \sigma^2 \end{pmatrix}\right)$$

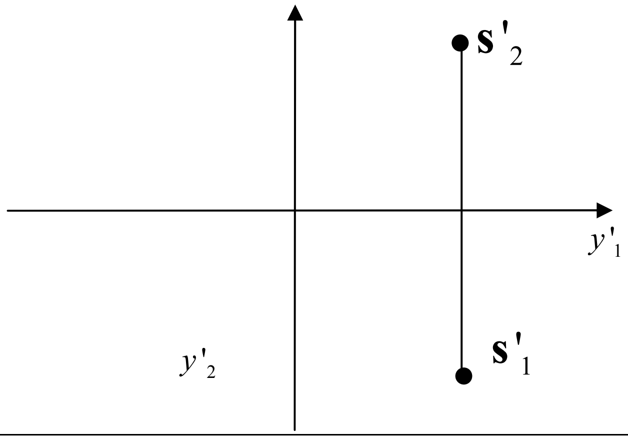


El cálculo de la probabilidad de error a partir de la figura presenta dificultad debido a que la frontera de decisión no es paralela a los ejes.
Si realizamos una rotación de coordenadas girando $\theta=+45^{\circ}$ en sentido horario, se obtiene:

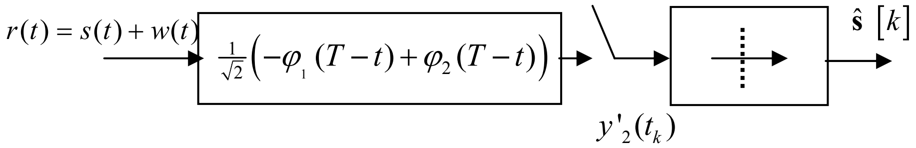
$$\mathbf{y}'=\mathbf{M}(\theta)\mathbf{y}=\mathbf{M}(\theta)\mathbf{s}_m+\mathbf{n}'$$

El nuevo vector de ruido $\mathbf{n}'=\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ presenta también una distribución Gaussiana, de media nula y de matriz de covarianza: $\frac{N_0}{2}\mathbf{I}$. Véase en la siguiente figura la nueva distribución.

$$\mathbf{s}'_1=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{s}_1=\begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{s}'_2=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{s}_2=\begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$



A partir de la figura se obtiene que la nueva coordenada y'_2 es suficiente para realizar la detección: $y'_2 : N\left(\pm\frac{d}{2}, \frac{N_0}{2}\right)$ y que una alternativa para la representación del receptor óptimo MAP es la dada por la figura siguiente:



$$BER = \tfrac{1}{2}\left(\Pr\{y'_2 > 0/\mathbf{s}_1\} + \Pr\{y'_2 < 0/\mathbf{s}_2\}\right) =$$

$$\Pr\{y'_2 > 0/\mathbf{s}_1\} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(y'_2 + \frac{d}{2}\right)^2}{\sigma^2}\right) = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

BER en función de $\frac{E_b}{N_o}$

$$\left(\frac{d}{2\sigma}\right)^2 = \frac{E_b}{N_0} \Rightarrow BER = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

d) Calcule la $\frac{E_b}{N_o}$ (dB) necesaria para obtener BER=0.1

Solución:

$\frac{E_b}{N_o}$ (dB) necesaria para obtener BER=0.1

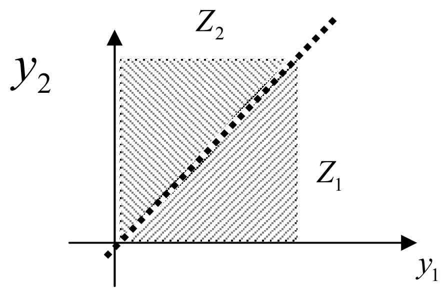
Observando el área de la Gráfica proporcionada, para

$$BER = 0.1 \Rightarrow \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} = 1.3 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 1.69 \Rightarrow \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 2.3dB$$

e) Dibuje en el plano las dos regiones de decisión, en función de las dos variables positivas. $y_1 = y_1(t_k), y_2 = y_2(t_k)$.

Solución:

Regiones de decisión en función de las variables aleatorias detectadas $y_1 = y_1(t_k), y_2 = y_2(t_k)$. La detección se realiza únicamente en el cuadrante superior derecha, dado que las dos variables son positivas:



f) Exprese la BER como una doble integral de las funciones de densidad de probabilidad condicionadas $f_{y_1}(y_1/a[k]=+1)=f_{y_1}(y_1/+1); f_{y_2}(y_2/a[k]=+1)=f_{y_2}(y_2/+1)$ cuando las variables de integración son y_1, y_2, variables aleatorias estadísticamente independientes.

Solución:

$$BER=\tfrac{1}{2}\left(\Pr\left\{y_2>y_1/a[k]=+1\right\}+\Pr\left\{y_2<y_1/a[k]=-1\right\}\right)=$$

$$\Pr\left\{y_2>y_1/a[k]=+1\right\}=\int_0^{+\infty}\int_{y_1}^{+\infty} f_{y_1y_2}(y_1y_2/+1)dy_2dy_1=$$

$$\int_0^{+\infty} f_{y_1}(y_1/+1)\int_{y_1}^{+\infty} f_{y_2}(y_2/+1)dy_2dy_1$$

Deducción de las funciones de distribución $f_{y_1}(y_1/a[k]=+1)=f_{y_1}(y_1/+1); f_{y_2}(y_2/a[k]=+1)=f_{y_2}(y_2/+1)$ *no solicitadas en el examen:*

Para $a[k]=+1$, se obtiene $y_1=\left|\tfrac{d}{\sqrt{2}}+\beta_{1r}+j\beta_{1i}\right|=\left|p+jq\right|$

Donde *p* y *q*, son dos variables aleatorias gaussianas estadísticamente independientes:

$$p=N(\tfrac{d}{\sqrt{2}},\sigma^2); q=N(0,\sigma^2)$$

Realizando el cambio de variable $y\exp(j\theta)=p+jq$, la función de distribución conjunta para las dos nuevas variables aleatorias resulta:

$$f_{y\theta}(y,\theta)=\frac{1}{J\begin{pmatrix} y & \theta \\ p & q\end{pmatrix}} f_{pq}(p,q)$$

donde $\begin{matrix} p=y\cos(\theta) \\ q=y\sin(\theta)\end{matrix}$ y $J\begin{pmatrix} y & \theta \\ p & q\end{pmatrix}=\frac{1}{y}$ es el Jacobiano del cambio de variable.

Así pues:

$$f_{y\theta}(y,\theta) = yf_{pq}(p,q) = yf_p(p)f_q(q) =$$
$$\frac{y}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{\left(p-\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{(q)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{y}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2+\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2-\sqrt{2}dy\cos\theta}{2\sigma^2}\right)$$

Para eliminar la dependencia respecto a la variable aleatoria θ, cuyo rango es $[-\pi,+\pi)$, se debe integrar:

$$f_y(y) = \int_{-\pi}^{+\pi} f_{y\theta}(y,\theta)d\theta = \frac{y}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2+\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\sigma^2}\right)\int_{-\pi}^{+\pi}\exp\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\frac{y\cos\theta}{\sigma^2}\right)d\theta = \frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2+\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\frac{y}{\sigma^2}\right)$$

Por lo que:

- $f_{y_1}(y_1/a[k]=+1) = f_{y_1}(y_1/+1) = \frac{y_1}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{(y_1)^2+\frac{d^2}{2}}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\frac{y_1}{\sigma^2}\right)u(y_1)$ DISTRIB. DE RICE

con $I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\exp(x\cos\theta)\,d\theta$.

Análogamente:

Para $a[k]=+1$, se obtiene $y_2 = |\beta_{1r} + j\beta_{1i}| = |p+jq|$

Donde p y q, son dos variables aleatorias gaussianas estadísticamente independientes:

$$p = N(0,\sigma^2); q = N(0,\sigma^2)$$

Realizando el mismo cambio de variable $y\exp(j\theta) = p + jq$, la función de distribución conjunta para las dos nuevas variables aleatorias resulta:

$$f_{y\theta}(y,\theta) = yf_{pq}(p,q) = yf_p(p)f_q(q) =$$
$$\frac{y}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{(p)^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{(q)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{y}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Para eliminar la dependencia respecto a la variable aleatoria θ, cuyo rango es $[-\pi,+\pi)$, se debe integrar:

$$f_y(y) = \int_{-\pi}^{+\pi} f_{y\theta}(y,\theta)d\theta = \frac{y}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2+\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\sigma^2}\right)\int_{-\pi}^{+\pi}d\theta = \frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Por lo que:

- $f_{y_2}(y_2/a[k]=+1) = f_{y_2}(y_2/+1) = \frac{y_2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{(y_2)^2}{2\sigma^2}\right)u(y_2)$ DISTRIB. DE RAYLEIGH

g) Utilizando las fórmulas anteriores demuestre que para el detector no coherente la BER del apartado anterior resulta $\text{BER} = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{d^2}{8\sigma^2}\right)$.

Solución:

$$BER = \int_0^{+\infty} f_{y_1}(y_1/+1) \int_{y_1}^{+\infty} f_{y_2}(y_2/+1) dy_2 dy_1 =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{y_1}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{(y_1)^2+(d/2)^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\frac{y_1}{\sigma^2}\right) \int_{y_1}^{+\infty} \frac{y_2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{(y_2)^2}{2\sigma^2}\right) dy_2 dy_1 =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{y_1}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{(y_1)^2+(d/2)^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\frac{y_1}{\sigma^2}\right)\left(-\exp\left(-\frac{(y_2)^2}{2\sigma^2}\right)\Bigg|_{y_1}^{+\infty}\right) dy_1 =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{y_1}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{(y_1)^2+(d/2)^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\frac{y_1}{\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{(y_1)^2}{2\sigma^2}\right) dy_1 = \int_0^{+\infty} \frac{y_1}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{2(y_1)^2+(d/2)^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\frac{y_1}{\sigma^2}\right) dy_1$$

Aplicando el cambio de variable $x = \sqrt{2}y_1$

$$BER = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+(d/2)^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{d}{2}\frac{x}{\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{d^2}{8\sigma^2}\right)\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+\frac{d^2}{4}}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{d}{2}\frac{x}{\sigma^2}\right) dx =$$

$$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{d^2}{8\sigma^2}\right)\int_0^{+\infty} f_{y_1}(x/+1) dx = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{d^2}{8\sigma^2}\right)$$

Donde en la integral anterior, el integrando $f_{y_1}(x/+1)$ corresponde a la función Rice $f_{y_1}(y_1/+1)$, habiendo cambiado el parámetro $\frac{d}{\sqrt{2}}$ por $\frac{d}{2}$, pero que sigue siendo de área =1.

h) Exprese la BER del apartado anterior en función de $\frac{E_b}{N_o}$.

Solución:

Dado que $E_b = \frac{d^2}{2}$ y que $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$

$$BER = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{d^2}{8\sigma^2}\right) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)$$

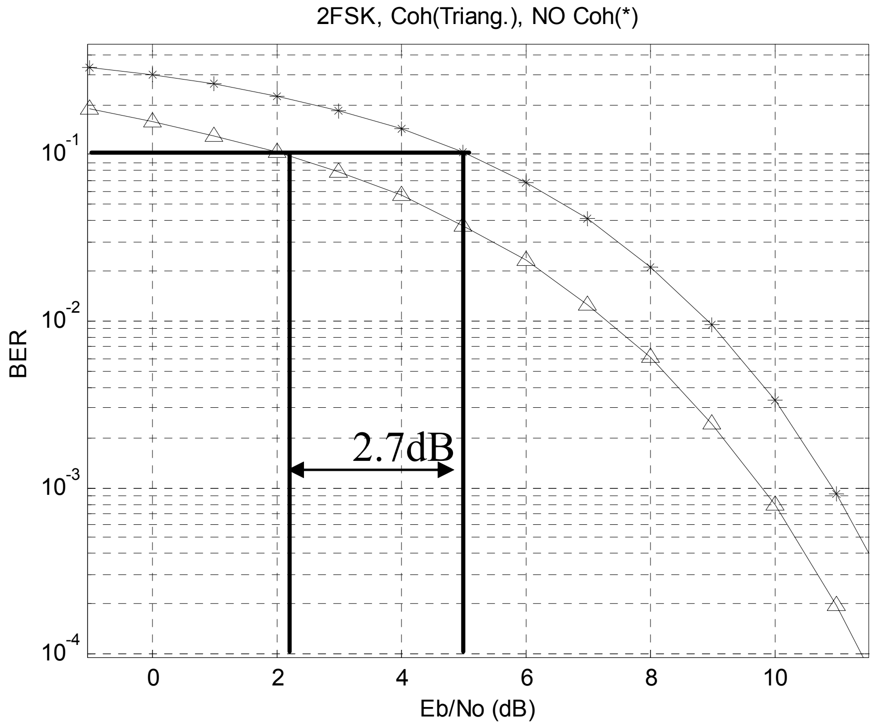
i) Calcule la $\frac{E_b}{N_o}$ (dB) necesaria para obtener BER=0.1 ¿Cuál es la pérdida en dB por detectar no coherentemente?

Solución:

$$BER = \tfrac{1}{2}\exp\left(-\tfrac{E_b}{2N_0}\right) = 0.1 \Rightarrow \tfrac{E_b}{2N_0} = \ln(\tfrac{1}{0.2}) \Rightarrow \left(\tfrac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 5dB$$

La pérdida por detectar no coherentemente es de 2.7 dB. Es decir, con detección no coherente se ha de transmitir 2.7 dB más que en la detección coherente, cuando en ambas estrategias se requiere una BER=0.1.

Ver gráfica adjunta.



5 MODULACIONES AVANZADAS

5.1 Ejercicio enero 2001 examen final (M. Cabrera)

5.1.1 Enunciado

En el presente ejercicio se estudia un sistema de comunicaciones móviles en el que *3 usuarios acceden simultáneamente* mediante un multiplexado de las señales por división en código. La información transmitida por los 3 usuarios es estadísticamente independiente entre sí. Se pretende analizar la calidad con que la estación base detecta a los 3 usuarios que se hallan compartiendo el sistema. La señal transmitida *por cada uno de los usuarios* es de la forma:

$$s_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_i[k] c_i(t-kT); \quad \text{i=1, 2, 3}$$

donde $b_i[k]$ indica el bit 'k-ésimo' transmitido por el usuario 'i-ésimo', tal que $b_i[k] = \pm A$ con equiprobabilidad e independencia estadística.

La señal $c_i(t)$ representa el código o *firma* correspondiente al usuario "i-ésimo", siendo de la forma:

$$c_i(t) = \frac{1}{\sqrt{LT_c}} \sum_{l=0}^{L-1} c_i[l] p(t-lT_c), \text{ con } p(t) = \Pi\left(\frac{t-T_c/2}{T_c}\right)$$

donde T_c representa el tiempo de chip y L es el número de chips por símbolo, de modo que:

$$T = L\, T_c.$$

Suponga que L=8 y que las secuencias de chips para los códigos son las siguientes:

l =	0	1	2	3	4	5	6	7
$c_i[l]$; i=1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1
$c_i[l]$; i=2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
$c_i[l]$; i=3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1

En la estación base se reciben las 3 señales en un entorno de ruido aditivo blanco con densidad espectral $N_0/2$ Watts/Hz y gaussiano (canal *AWGN*) y se detectan de forma conjunta las señales de los 3 usuarios.

Señal recibida: $$y(t) = \sum_{i=1}^{3} s_i(t) + w(t) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_i[k] c_i(t-kT) + w(t)$$

a) Con los códigos de chip dados en la tabla anterior, dibuje las 3 funciones código $c_i(t)$, i=1,2,3 y demuestre que cumplen las condiciones de ortonormalidad, es decir, $R_{c_i c_j}(nT) = \delta[i-j]\delta[n]$. Calcule la energía media transmitida por bit E_b.

b) En la estación base se realiza una demodulación conjunta de los 3 usuarios. Para ello se interpreta la señal recibida como un nuevo símbolo más general $\tilde{s}_m(t)$ en el que está contenida la información de los tres usuarios. Obviamente, el nuevo alfabeto $\{\tilde{s}_m(t)\}_{1 \le m \le M}$ es más sofisticado que el asociado a cada usuario individualmente. La nueva señal compuesta por los tres usuarios admite la habitual representación del tipo $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{s}_{m[k]}(t-kT)+w(t)$.

- Obtenga la dimensión del espacio de la señal y una base ortonormal de dicho espacio.
- Obtenga el tamaño del nuevo alfabeto y la expresión resultante para los diferentes M símbolos $\tilde{s}_m(t)$ de dicho alfabeto.
- Indique las componentes de cada uno de los símbolos en la base ortonormal del espacio, es decir calcule su representación vectorial. Exprese dichas componentes en función de la energía promedio de bit E_b.
- Calcule la probabilidad de cada uno de los símbolos.

Suponga, a partir de ahora, que el usuario i=3 se halla mucho más lejos de la estación base que los usuarios i=1 y i=2 y que sufre una atenuación de 6dB en recepción respecto a los otros dos:

$$y(t)=s_1(t)+s_2(t)+\frac{1}{2}s_3(t)+w(t)$$

c) Con la base generadora elegida en el apartado b), realice de nuevo la representación vectorial de los símbolos (analítica y gráficamente).

d) Dibuje el esquema del receptor óptimo según un criterio MAP para la detección conjunta de la información transmitida por los tres usuarios. Calcule de forma exacta, sin realizar ninguna aproximación, la probabilidad de error de símbolo (P_e) en función de la E_b/N_o.

e) Suponga ahora que cada uno de los 3 usuarios se detecta por separado, ¿cómo modificaría el esquema del receptor óptimo del apartado d)?. Calcule la BER_i asociada a cada uno de los 3 usuarios (i=1,2,3).

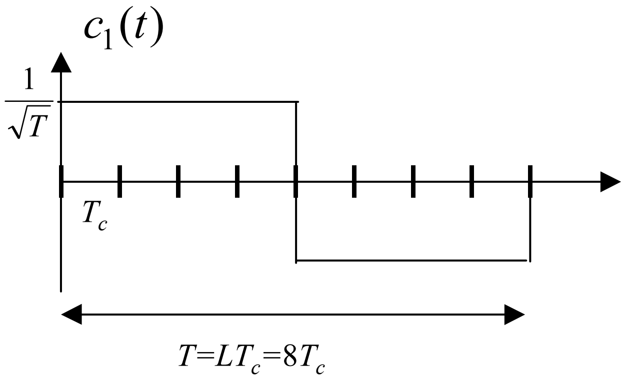
f) Comente por qué, si dejara de existir ortogonalidad entre las funciones código $R_{c_i c_j}(nT)=\rho\delta[n]\ i\neq j$, la BER correspondiente al usuario "3" se degradaría más respecto a los usuarios "1" y "2" (efecto *Near-Far*). Justifíquelo a partir de las expresiones de las coordenadas de los vectores recibidos.

5.1.2 Resolución

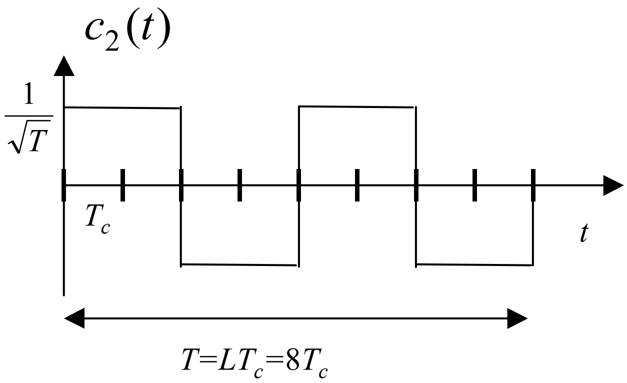
a) Con los códigos de chip dados en la tabla anterior, dibuje las 3 funciones código $c_i(t)$, *i*=1,2,3 y demuestre que cumplen las condiciones de ortonormalidad, es decir, $R_{c_i c_j}(nT) = \delta[i-j]\delta[n]$. Calcule la energía media transmitida por bit E_b.

Solución:

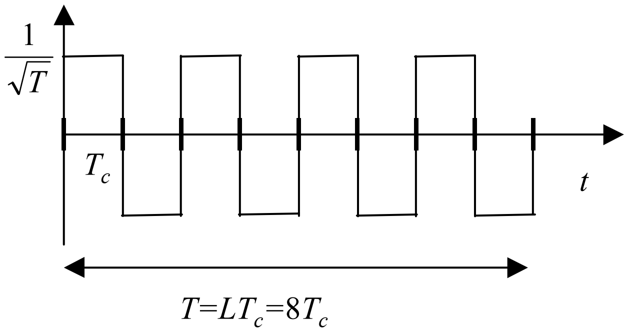
Funciones código c_i(t):
Función correspondiente al usuario *i=1.*



Función correspondiente al usuario *i=2.*



Función correspondiente al usuario *i=3.*



Condiciones de ortogonalidad:

$$R_{c_i c_j}[nT] = \int_0^T c_i(t+nT)c_j(t)dt =$$

$$\int_0^T \sum_{l=1}^{L} c_i[l]p(t+nT-lT_c) \sum_{m=1}^{L} c_j[m]p(t-mT_c)dt =$$

$$\begin{cases} 1 & n=0, i=j \\ 0 & otros\ valores \end{cases}$$

Energía media transmitida por bit: Cada usuario transmite un símbolo por bit de la forma: $\pm Ac_i(t)$, dado que la energía de la función código es siempre =1, la energía transmitida por cada bit es:

$$E_b = A^2$$

igual para todos los usuarios.

b) En la estación base se realiza una demodulación conjunta de los 3 usuarios. Para ello se interpreta la señal recibida como un nuevo símbolo más general $\tilde{s}_m(t)$ en el que está contenida la información de los tres usuarios. Obviamente, el nuevo alfabeto $\{\tilde{s}_m(t)\}_{1\le m\le M}$ es más sofisticado que el asociado a cada usuario individualmente. La nueva señal compuesta por los tres usuarios admite la habitual representación del tipo $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{s}_{m[k]}(t-kT)+w(t)$.

- Obtenga la dimensión del espacio de la señal y una base ortonormal de dicho espacio.
- Obtenga el tamaño del nuevo alfabeto y la expresión resultante para los diferentes M símbolos $\tilde{s}_m(t)$ de dicho alfabeto.
- Indique las componentes de cada uno de los símbolos en la base ortonormal del espacio, es decir, calcule su representación vectorial. Exprese dichas componentes en función de la energía promedio de bit E_b.
- Calcule la probabilidad de cada uno de los símbolos.

Solución:

Expresión de la señal recibida:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_i[k]c_i(t-kT) + w(t) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{3} b_i[k]c_i(t-kT) + w(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{s}_m(t-kT) + w(t)$$

Por tanto: $\tilde{s}_{m[k]}(t) = \sum_{i=1}^{3} b_i[k]c_i(t-kT)$

Alfabeto de símbolos: Existen M=8 símbolos diferentes de expresiones:

$$\tilde{s}_m(t) = \pm Ac_1(t) \pm Ac_2(t) \pm Ac_3(t)$$

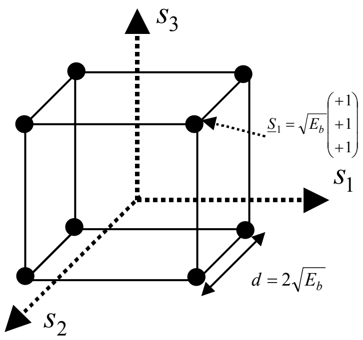
Base ortonormal generadora: $\{c_1(t), c_2(t), c_3(t)\}$ por tanto la dimensión del espacio de señal es=3.

Representación Vectorial: $\underline{\tilde{S}}_m = \begin{pmatrix} \pm A \\ \pm A \\ \pm A \end{pmatrix} = \sqrt{E_b} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

Dado que para cada usuario los bits son equiprobables, los símbolos resultantes también lo son:

$$P_m = \frac{1}{8}; \qquad m = 1..8$$

La representación geométrica de los 8 vectores forma un cubo:



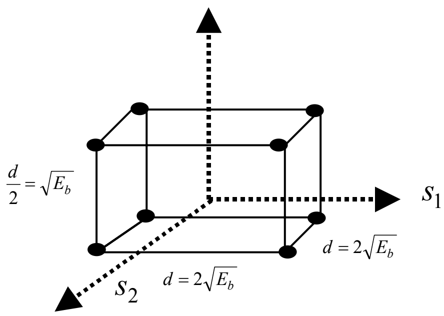
c) Con la base generadora elegida en el apartado b), realice de nuevo la representación vectorial de los símbolos (analítica y gráficamente).

Solución:

Cuando el tercer usuario se atenúa 6 dB, el efecto producido sobre los símbolos consiste en que la tercera coordenada queda dividida por dos:

$$\tilde{s}_m(t) = \pm A c_1(t) \pm A c_2(t) \pm \frac{A}{2} c_3(t)$$

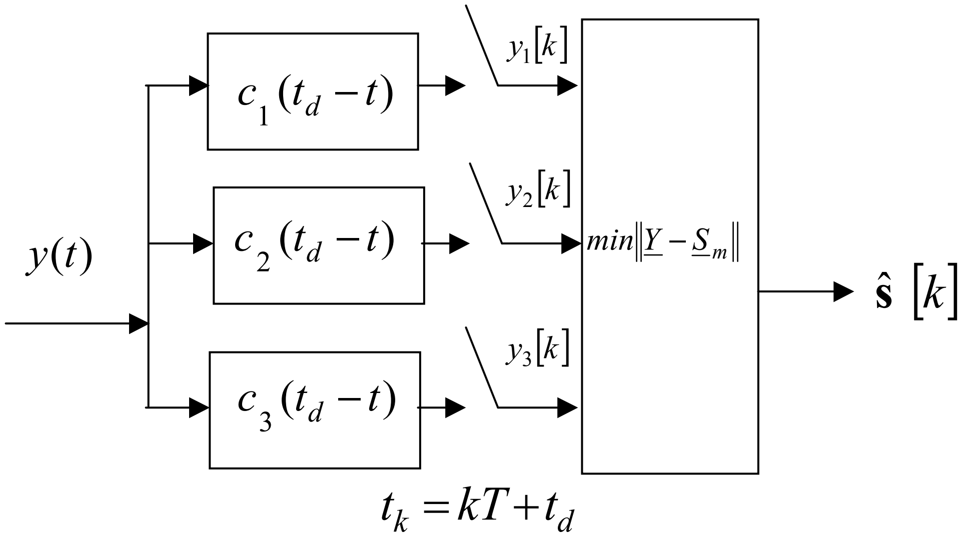
$$\underline{S}_m = \sqrt{E_b} \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



La Energía transmitida por bit $E_b = A^2$, no ha variado respecto a la situación anterior, únicamente ha cambiado la energía recibida.

d) Dibuje el esquema del receptor óptimo según un criterio *MAP* para la detección conjunta de la información transmitida por los tres usuarios. Calcule de forma exacta, sin realizar ninguna aproximación, la probabilidad de error de símbolo (P_e) en función de la E_b / N_o .

Solución:



Cálculo de la probabilidad de error de forma exacta:

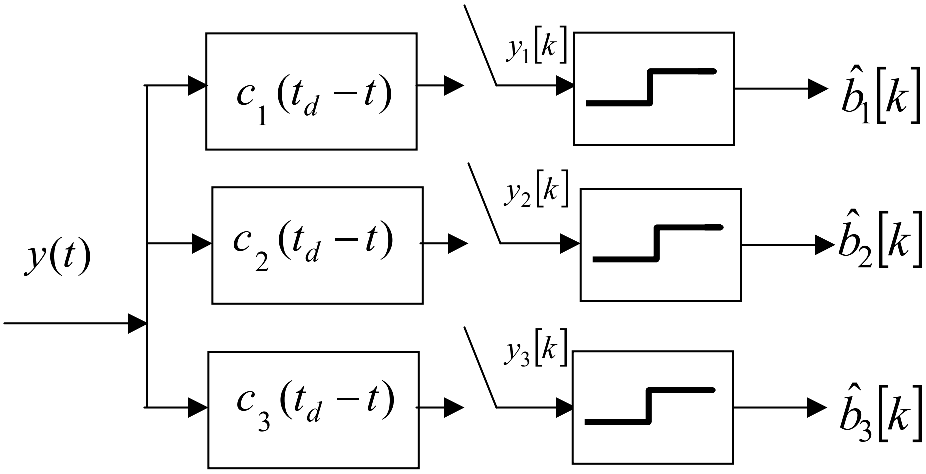
Debido a la simetría, la probabilidad de error es idéntica para los *M*=8 puntos del espacio. Llamando P_{ei} a la probabilidad de error de la componente *i*-ésima y P_{ci} a la probabilidad de detectar correctamente la componente "i" y considerando la independencia estadística entre componentes:

$$P_e = 1 - P_c = 1 - P_{c1}P_{c2}P_{c3} = 1 - (1 - P_{e1})(1 - P_{e2})(1 - P_{e3})$$

$$P_e = 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\right)^2 \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)\right)$$

e) Suponga ahora, que cada uno de los 3 usuarios se detecta por separado, ¿Cómo modificaría el esquema del receptor óptimo del apartado d)?. Calcule la BER_i asociada a cada uno de los 3 usuarios (*i*=1,2,3).

Solución:



$$t_k = kT + t_d$$

$$BER_1 = BER_2 = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$BER_3 = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$

f) Comente porqué si dejara de existir ortogonalidad entre las funciones código $R_{c_i c_j}(nT) = \rho\delta[n]\ \ i \neq j$, la *BER* correspondiente al usuario “3” se degradaría más respecto a los usuarios “1” y “2” (efecto *Near-Far*). Justifíquelo a partir de las expresiones de las coordenadas de los vectores recibidos.

Solución:

Las coordenadas detectadas a las salidas de los filtros adaptados sufren ahora el efecto de las interferencias:

$$y_1[k] = b_1[k] + \rho b_2[k] + \frac{\rho}{2} b_3[k] + n_1[k]$$

$$y_2[k] = \rho b_1[k] + b_2[k] + \frac{\rho}{2} b_3[k] + n_2[k]$$

$$y_3[k] = \rho b_1[k] + \rho b_2[k] + \frac{1}{2} b_3[k] + n_3[k]$$

Evidentemente la tercera coordenada es la que queda más deteriorada.
Si se calcula el nivel de señal deseada a interferencia de otros usuarios (*MAI*), se tiene:

$$20\log\left(\frac{1}{1.5\rho}\right) \text{ para los usuarios "1" y "2"}$$

$$20\log\left(\frac{0.5}{2\rho}\right) \text{ para el usuario "3"}$$

5.2 Ejercicio enero 2003 examen final (M. Cabrera)

5.2.1 Enunciado

La transmisión de prefijo cíclico consiste en enviar una réplica de la última parte del símbolo (T_{cp} seg.) al principio de cada símbolo y es una técnica utilizada para evitar la ISI entre símbolos consecutivos en tiempo. En este ejercicio se analiza su influencia tanto para CDMA (*Code Division Multiple Access*) como para OFDM (*Orthogonal Frequency Division Access*). Se trabajará en ambos casos con las señales equivalentes paso bajo.

Para CDMA suponga que la señal a la entrada del receptor es de la forma: $r(t) = s(t) + w(t)$. Se considerará:

- $w(t)$ ruido real gaussiano de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$
- La señal útil para *K* usuarios síncronos es :

$$s(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k[n] \varphi_k(t - nT) * h_k(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k[n] \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t - nT - \tau) h_k(\tau) d\tau$$

- $h_k(t)$ representa la respuesta impulsional del canal para el usuario *k*. Su duración temporal es menor que la duración del prefijo cíclico T_{cp} para todos los usuarios.
- La función utilizada para transmitir los símbolos del usuario *k* mediante un código de *L* chips, es:

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T - T_{cp}}} \sum_{l=-L_{cp}}^{L-1} c_k[l] \Pi\left(\frac{t - \frac{T_c}{2} - T_{cp} - lT_c}{T_c} \right)$$

Con $c_k[l] = c_k[l + L]$, $T_{cp} = L_{cp} T_c$, $T = T_{cp} + LT_c$ y $L_{cp} < L$.

- Códigos idealmente ortogonales entre sí: $\sum_{l=0}^{L-1} c_k[l] c_j[l] = L\delta[k - j]$
- Los símbolos de todos los usuarios son binarios, equiprobables y polares: $\alpha_k[n] = \pm \frac{d}{2}$

Se pide:

a) Demuestre mediante el dibujo de un caso particular de $\varphi_k(t)$, que las funciones $\varphi_k(t)$ llevan el prefijo cíclico: *L*=10 chips, L_{cp} =3 chips y $c_k[l] = \begin{cases} +1, l \text{ par} \\ -1, l \text{ impar} \end{cases}$

b) Demuestre en general que las funciones $\varphi_k(t)$ son ortonormales en (T_{cp}, T). Es decir: $\int_{T_{cp}}^{T} \varphi_k(t) \varphi_j^*(t) dt = \delta[k - j]$

c) Calcule la energía transmitida por bit y usuario, en función de la distancia entre símbolos *d* y de los parámetros que considere necesarios.

Suponga que el receptor es multiusuario y consiste en un banco de *K* filtros adaptados de respuesta: $g_i(t) = \begin{cases} \varphi_i^*(T - t) & 0 \le t \le T - T_{cp} \\ 0 & otros \end{cases}$. A la salida se realiza el muestreo a $t_m = (m+1)T$.

Se pide:

d) Muestre que la señal a la salida del filtro "*i*": $y_i\left(t_m\right)=\int\limits_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} r\left(\lambda\right)\varphi_i^*(\lambda-mT)d\lambda$ puede expresarse como:

$$y_i(t_m)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\left[m\right]\rho_{ki}+\beta_i\left(t_m\right) \quad \text{con} \qquad \rho_{ki}=\int\limits_0^{T_{cp}} h_k(\tau)\int\limits_{T_{cp}}^{T}\varphi_k(\gamma-\tau)\varphi_i^*\left(\gamma\right)d\gamma d\tau \qquad (1)$$

Observe que en CDMA, mediante la transmisión del prefijo cíclico, se evita la ISI temporal pero no las interferencias entre usuarios.

Nota: Independiente del resultado obtenido en el apartado anterior, considere válida la expresión (1), tanto para CDMA como para OFDM.

e) Demuestre que las componentes de ruido $\beta_i(t_m)$ entre los diferentes filtros se hallan incorreladas. Para ello calcule la expresión $E\left[\beta_k(t_m)\beta_i*(t_m)\right];1\le k\le K,1\le i\le K$.

Agrupando las salidas de los correladores, se obtiene el vector $\mathbf{y}\left(t_m\right)=\begin{pmatrix} y_1(t_m) \\ : \\ y_K(t_m)\end{pmatrix}$. Agrupando las amplitudes binarias de todos los usuarios, se obtiene el vector: $\mathbf{a}\left[m\right]=\begin{pmatrix}\alpha_1\left[m\right] \\ : \\ \alpha_K\left[m\right]\end{pmatrix}$. La matriz cuadrada $\mathbf{R}$ es la formada por los elementos ρ_{ki} de la expresión (1).

La función de densidad de probabilidad conjunta condicionada $f_{\mathbf{y}/\mathbf{a}}(\mathbf{y}(t_m)/\mathbf{a}(m))$ del vector formado por las salidas de los correladores: $\mathbf{y}\left(t_m\right)$, es normal o gaussiana y se halla condicionada por el vector de coordenadas binarias $\mathbf{a}\left(m\right)$. Se pide que calcule:

f) La media o valor esperado condicionado $\boldsymbol{\mu}=E\left[\mathbf{y}(t_m)\middle|\mathbf{a}(m)\right]$

g) La matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}=E\left[(\mathbf{y}(t_m)-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}(t_m)-\boldsymbol{\mu})^T\middle|\mathbf{a}(m)\right]=E\left[\mathbf{n}(t_m)\mathbf{n}(t_m)^T\right]$, donde $\mathbf{n}(t_m)$, es el vector formado por las componentes de ruido $\beta_i(t_m),1\le i\le K$.

Para eliminar la interferencia entre los diferentes usuarios y facilitar de este modo la detección, se propone decorrelar la señal, es decir, trabajar con el nuevo vector:

$$\hat{\mathbf{y}}\left(t_m\right)=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}\left(t_m\right)$$

h) Calcule de nuevo el vector media y la matriz de covarianza del nuevo vector $\hat{\mathbf{y}}\left(t_m\right)$, condicionado por $\mathbf{a}(m)$. (Ver *Nota* al final del ejercicio.)

i) Para el usuario "*i*"se estima $\hat{\alpha}_i\left[m\right]$ a partir de la componente $\hat{y}_i\left(t_m\right)$. Por ser la amplitud a detectar binaria y polar, el umbral de decisión es igual a cero. Si *K*=3 usuarios y

$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}1&\rho&0\\ \rho&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$; $\mathbf{R}^{-1}=\dfrac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}1&-\rho&0\\ -\rho&1&0\\ 0&0&1-\rho^2\end{pmatrix}$, obtenga la expresión de la componente $\hat{y}_1(t_m)$, correspondiente al usuario i=1, identificando señal útil y ruido y demostrando que no hay interferencia entre usuarios.

j) Calcule la BER del usuario i=1 para la situación del apartado anterior, en función del cociente $\dfrac{E_b}{N_0}$, del cociente $\frac{T_{CP}}{T}$ y del coeficiente ρ. Comente la pérdida en dB de $\dfrac{E_b}{N_0}$ respecto al caso de canales ideales.

SEÑAL OFDM

Para OFDM, considere como señal útil $s(t)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_k\left[n\right]\varphi_k\left(t-nT\right)*h(t)$.

- La función $\varphi_k(t)=\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\exp\left(j2\pi kf_0(t-T_{cp})\right)\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ cumple $f_0=\dfrac{1}{T-T_{cp}}$.
- El ruido $w(t)$ es Gaussiano complejo, y tanto su parte real como su parte imaginaria presentan densidad espectral $\frac{N_0}{2}$ y son estadísticamente independientes entre sí.
- K es ahora el número de sub-portadoras. Los símbolos son polares, binarios, equiprobables: $\alpha_k\left[n\right]=\pm\frac{d}{2}$.
- La expresión (1) sigue siendo válida si la duración de la respuesta impulsional del canal *h(t)* es menor que T_{cp}. Observe que en OFDM $h_k(t)=h(t);1\le k\le K$.

k) Demuestre que las funciones $\varphi_k\left(t\right)$ son ortonormales en (T_{cp},T). Calcule la energía transmitida por bit, en función de la distancia entre símbolos d y de los parámetros que considere necesarios.

l) Calcule para OFDM la expresión particular de los coeficientes ρ_{ki} de la expresión (1) en función de la transformada de Fourier de *h(t)*. Observe que en este caso los coeficientes ρ_{ii} pueden ser complejos. Obtenga la expresión de la señal $y_i(t_m)$, identificando señal útil y ruido, complejo en este caso y demostrando que no hay interferencia entre sub-portadoras.

m) Para el usuario "i"se estima $\hat{\alpha}_i\left[m\right]$ a partir de $real\left(\frac{y_i(t_m)}{\rho_{ii}}\right)$. Por ser la amplitud a detectar binaria y polar, el umbral de decisión es igual a cero. Calcule la BER en función del cociente $\dfrac{E_b}{N_0}$ y de los parámetros que considere necesarios. Previamente identifique el término de ruido que queda presente en detección y calcule su potencia. Comente la pérdida en dB de $\dfrac{E_b}{N_0}$ respecto al caso de canal ideal.

Nota:

- Sea el vector aleatorio: $\mathbf{v}$ y la matriz determinista $\mathbf{A}$. Dado $\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{v}$, se cumple $E\left[\mathbf{x}\right]=\mathbf{A}E\left[\mathbf{v}\right]$ y $E\left[\left(\mathbf{x}-E\left[\mathbf{x}\right]\right)\left(\mathbf{x}-E\left[\mathbf{x}\right]\right)^T\right]=\mathbf{ACA}^T$ con $\mathbf{C}=E\left[\left(\mathbf{v}-E\left[\mathbf{v}\right]\right)\left(\mathbf{v}-E\left[\mathbf{v}\right]\right)^T\right]$.

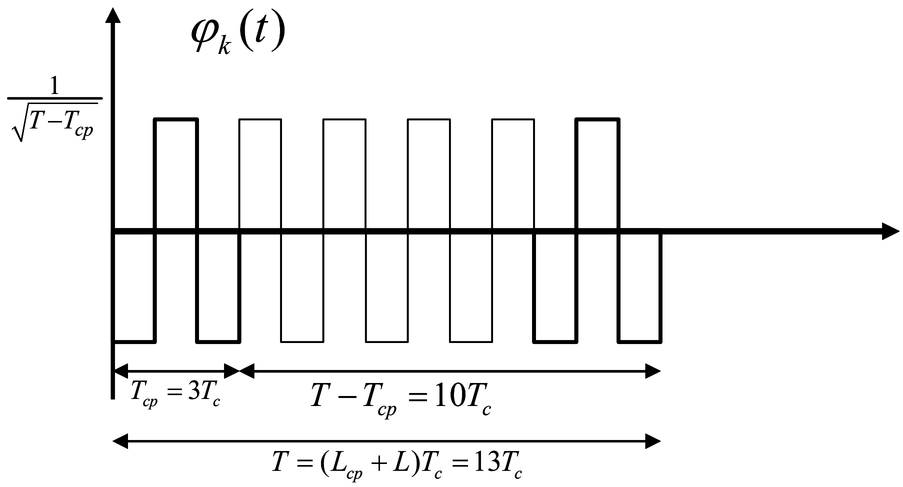
5.2.2 Resolución

SEÑAL CDMA

a) Demuestre mediante el dibujo de un caso particular de $\varphi_k(t)$, que las funciones $\varphi_k(t)$ llevan el prefijo cíclico: L=10 chips, L_{cp} =3 chips y $c_k[l]=\begin{cases} +1, l \text{ par} \\ -1, l \text{ impar}\end{cases}$

Solución:

Para la situación particular de este apartado $\varphi_k(t)=\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\sum_{l=-3}^{9} c_k[l]\Pi\left(\frac{t-3{,}5T_c-lT_c}{T_c}\right)$



En la figura anterior se observa como los tres primeros chips transmitidos son una réplica del final del símbolo.

b) Demuestre en general que las funciones $\varphi_k(t)$ son ortonormales en (T_{cp},T). Es decir: $\int_{T_{cp}}^{T}\varphi_k(t)\varphi_j^*(t)dt=\delta[k-j]$.

Solución:

$$\int_{T_{cp}}^{T}\varphi_k(t)\varphi_j^*(t)dt=\int_{T_{cp}}^{T}\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\sum_{l=-L_{cp}}^{L-1}c_k[l]\Pi\left(\frac{t-\frac{T_c}{2}-T_{cp}-lT_c}{T_c}\right)\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\sum_{n=-L_{cp}}^{L-1}c_j^*[n]\Pi\left(\frac{t-\frac{T_c}{2}-T_{cp}-nT_c}{T_c}\right)dt=$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Para l} \neq \text{n, los pulsos}\\ \text{rectangulares no se solapan}\end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{T-T_{cp}}\sum_{l=0}^{L-1}c_k[l]c_j^*[l]\int_{T_{cp}}^{T}\Pi\left(\frac{t-\frac{T_c}{2}-T_{cp}-lT_c}{T_c}\right)dt=\frac{1}{T-T_{cp}}\sum_{l=0}^{L-1}c_k[l]c_j^*[l]T_c=\frac{T_c}{T-T_{cp}}L\delta[k-j]=\delta[k-j]$$

En la resolución de este apartado se ha supuesto $c_k[i]=\pm1$, es decir, amplitudes unitarias para todos los chips de los códigos correspondientes a todos los usuarios.

c) Calcule la energía transmitida por bit y usuario, en función de la distancia entre símbolos *d* y de los parámetros que considere necesarios.

Solución:

$$E_b = \int_0^T \left(\pm \tfrac{d}{2}\right)^2 \varphi_k^2(t)dt = \tfrac{d^2}{4}\tfrac{1}{T-T_{cp}}\left(L_{cp}+L\right)T_c = \tfrac{d^2}{4}\tfrac{T}{T-T_{cp}}$$

d) Muestre que la señal a la salida del filtro "*i*": $y_i\left(t_m\right) = \int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} r\left(\lambda\right)\varphi_i^*(\lambda - mT)d\lambda$ puede expresarse como:

$$y_i(t_m) = \sum_{k=1}^{K}\alpha_k\left[m\right]\rho_{ki} + \beta_i\left(t_m\right) \quad \text{con} \qquad \rho_{ki} = \int_0^{T_{cp}} h_k(\tau)\int_{T_{cp}}^{T}\varphi_k(\gamma-\tau)\varphi_i^*\left(\gamma\right)d\gamma d\tau \tag{1}$$

Solución:

$$y_i\left(t_m\right) = \int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} r\left(\lambda\right)\varphi_i^*(\lambda-mT)d\lambda = \int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} s\left(\lambda\right)\varphi_i^*(\lambda-mT)d\lambda + \int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} w\left(\lambda\right)\varphi_i^*(\lambda-mT)d\lambda$$

$$\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_k\left[n\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_k\left(\lambda-nT-\tau\right)h_k(\tau)d\tau\varphi_i^*(\lambda-mT)d\lambda + \beta_i(t_m) =$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_k\left[n\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T}\varphi_k\left(\lambda-nT-\tau\right)\varphi_i^*(\lambda-mT)d\lambda h_k(\tau)d\tau + \beta_i(t_m) =$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_k\left[n\right]\int_0^{T_{cp}}\int_{T_{cp}}^{T}\varphi_k\left(\gamma-(n-m)T-\tau\right)\varphi_i^*(\gamma)d\gamma h_k(\tau)d\tau + \beta_i(t_m) =$$

Debido a los límites de integración de las dos integrales, la integral interior únicamente dará un resultado no nulo para *n=m*.

$$\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\left[m\right]\int_0^{T_{cp}}\int_{T_{cp}}^{T}\varphi_k\left(\gamma-\tau\right)\varphi_i^*(\gamma)d\gamma h_k(\tau)d\tau + \beta_i(t_m) = \sum_{k=1}^{K}\alpha_k\left[m\right]\rho_{ki} + \beta_i(t_m)$$

e) Demuestre que las componentes de ruido $\beta_i(t_m)$ entre los diferentes filtros se hallan incorreladas. Para ello calcule la expresión $E\left[\beta_k(t_m)\beta_i{}^*(t_m)\right];1\le k\le K,1\le i\le K$.

Solución:

$$E\left[\beta_k(t_m)\beta_i{}^*(t_m)\right] = E\left[\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} w(\lambda)\varphi_k^*(\lambda - mT)d\lambda \int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} w(\gamma)^* \varphi_i(\gamma - mT)d\gamma\right]$$

$$= \int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T}\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} E\left[w(\lambda)w(\gamma)^*\right]\varphi_i(\gamma - mT)d\gamma\varphi_k^*(\lambda - mT)d\lambda =$$

$$\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T}\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} \tfrac{N_0}{2}\delta(\lambda-\gamma)\varphi_i(\gamma - mT)d\gamma\varphi_k^*(\lambda - mT)d\lambda =$$

$$\tfrac{N_0}{2}\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} \varphi_i(\lambda - mT)\varphi_k^*(\lambda - mT)d\lambda = \tfrac{N_0}{2}\int_{T_{cp}}^{T}\varphi_i(\gamma)\varphi_k^*(\gamma)d\lambda = \tfrac{N_0}{2}\delta\left[k-i\right]$$

f) La media o valor esperado condicionado $\boldsymbol{\mu} = E\left[\mathbf{y}(t_m)\middle|\mathbf{a}(m)\right]$.

Solución:

$$\boldsymbol{\mu} = E\left[\mathbf{y}(t_m)\right] = E\left[\mathbf{Ra}[m] + \mathbf{n}(t_m)\right] = E\left[\begin{pmatrix}\rho_{11} & \cdots & \rho_{K1}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1K} & \cdots & \rho_{KK}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1[m]\\ : \\ \alpha_K[m]\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_1[t_m]\\ : \\ \beta_K[t_m]\end{pmatrix}\right] =$$

$$E\left[\begin{pmatrix}\rho_{11} & \cdots & \rho_{K1}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1K} & \cdots & \rho_{KK}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1[m]\\ : \\ \alpha_K[m]\end{pmatrix}\right] + E\left[\begin{pmatrix}\beta_1[t_m]\\ : \\ \beta_K[t_m]\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\rho_{11} & \cdots & \rho_{K1}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1K} & \cdots & \rho_{KK}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1[m]\\ : \\ \alpha_K[m]\end{pmatrix} = \mathbf{Ra}[m]$$

g) La matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma} = E\left[(\mathbf{y}(t_m)-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}(t_m)-\boldsymbol{\mu})^T\middle|\mathbf{a}(m)\right] = E\left[\mathbf{n}(t_m)\mathbf{n}(t_m)^T\right]$, donde $\mathbf{n}(t_m)$, es el vector formado por las componentes de ruido $\beta_i(t_m), 1 \le i \le K$

Solución:

Aplicando los resultados obtenidos en el apartado e):

$$\boldsymbol{\Sigma} = E\left[\mathbf{n}(t_m)\mathbf{n}(t_m)^T\right] = E\left[\begin{pmatrix}\beta_1(t_m)\\ : \\ \beta_K(t_m)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^*(t_m) & : & \beta_K^*(t_m)\end{pmatrix}\right] = \tfrac{N_0}{2}\mathbf{I}$$

Para eliminar la interferencia entre los diferentes usuarios y facilitar de este modo la detección, se propone decorrelar la señal, es decir, trabajar con el nuevo vector:

$$\hat{\mathbf{y}}(t_m) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}(t_m)$$

h) Calcule de nuevo el vector media y la matriz de covarianza del nuevo vector $\hat{\mathbf{y}}(t_m)$, condicionado por $\mathbf{a}(m)$. (Ver *Nota* al final del ejercicio.)

Solución:

$$E\left[\hat{\mathbf{y}}(t_m)\right] = \mathbf{R}^{-1}E\left[\mathbf{y}(t_m)\right] = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$E\left[\left(\hat{\mathbf{y}}(t_m) - E\left[\hat{\mathbf{y}}(t_m)\right]\right)\left(\hat{\mathbf{y}}(t_m) - E\left[\hat{\mathbf{y}}(t_m)\right]\right)^T\right] = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{\Sigma}\left(\mathbf{R}^{-1}\right)^H = \tfrac{N_0}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}^{-H}$$

Por tanto: $$\hat{\mathbf{y}}(t_m) : N(\mathbf{a}, \tfrac{N_0}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}^{-H})$$

i) Para el usuario "*i*"se estima $\hat{\alpha}_i[m]$ a partir de la componente $\hat{y}_i(t_m)$. Por ser la amplitud a detectar binaria y polar, el umbral de decisión es igual a cero. Si K=3 usuarios y $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{R}^{-1} = \dfrac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\rho^2 \end{pmatrix}$, obtenga la expresión de la componente $\hat{y}_1(t_m)$, correspondiente al usuario *i*=1, identificando señal útil y ruido y demostrando que no hay interferencia entre usuarios.

Solución:

A partir del apartado anterior:

$$\hat{y}_1(t_m) = \alpha_1[m] + \sum_{k=1}^{3}\left(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}\right)_{1k}\beta_k(t_m) = \pm\tfrac{d}{2} + \tfrac{1}{1-\rho^2}\beta_1(t_m) - \tfrac{\rho}{1-\rho^2}\beta_2(t_m)$$

El primer sumando corresponde al término de señal útil y el resto es ruido. No aparece interferencia debida a los usuarios "2" y "3".

j) Calcule la BER del usuario *i*=1, para la situación del apartado anterior, en función del cociente $\dfrac{E_b}{N_0}$, del cociente $\frac{T_{CP}}{T}$ y del coeficiente ρ. Comente la pérdida en dB de $\dfrac{E_b}{N_0}$ respecto al caso de canales ideales.

Solución:

Por ser los símbolos binarios, polares y equiprobales: $BER = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$

Con $\frac{d^2}{4} = E_b\frac{T-T_{cp}}{T} = E_b\left(1-\frac{T_{cp}}{T}\right)$ y $\sigma^2 = E\left[\left(\frac{1}{1-\rho^2}\beta_1(t_m) - \frac{\rho}{1-\rho^2}\beta_2(t_m)\right)^2\right] = \frac{N_0}{2}\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}$

Por tanto: $$BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}\left(1-\frac{T_{cp}}{T}\right)\frac{(1-\rho^2)^2}{\left(1+\rho^2\right)}}\right)$$

Dado que si todos los canales fueran ideales se obtendría: $BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}\left(1-\frac{T_{cp}}{T}\right)}\right)$, la pérdida es igual a $\Delta = 10\log_{10}\left(\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}\right)$. Es decir, el usuario "1" debe aumentar Δ dB la potencia transmitida, para mantener la BER respecto al caso de canales ideales.

SEÑAL OFDM

k) Demuestre que las funciones $\varphi_k(t)$ son ortonormales en (T_{cp}, T). Calcule la energía transmitida por bit, en función de la distancia entre símbolos d y de los parámetros que considere necesarios.

Solución:

Ortonormalidad entre funciones:

$$\int_{T_{cp}}^{T} \varphi_k(t)\varphi_i^*(t)dt = \int_{T_{cp}}^{T} \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\exp\left(j2\pi k f_0(t-T_{cp})\right)\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\exp\left(-j2\pi i f_0(t-T_{cp})\right)dt =$$

$$\frac{1}{T-T_{cp}}\int_{T_{cp}}^{T} \exp\left(j2\pi\left(k-i\right)f_0(t-T_{cp})\right)dt = \delta\left[k-i\right]$$

Cálculo de la energía media de bit: (Aunque en este cálculo se debería considerar la energía cruzada entre funciones en el tramo *(0,T_{cp})*), se considerará nula frente al resto del tiempo: (T_{cp}, T).

$$E_b = \int_0^T \left(\pm\frac{d}{2}\right)^2 \left|\varphi_k(t)\right|^2 dt = \frac{d^2}{4}\frac{T}{T-T_{cp}}$$

l) Calcule para OFDM la expresión particular de los coeficientes ρ_{ki} de la expresión (1) en función de la transformada de Fourier de *h(t)*. Observe que en este caso los coeficientes ρ_{ii} pueden ser complejos. Obtenga la expresión de la señal $y_i(t_m)$, identificando señal útil y ruido, complejo en este caso y demostrando que no hay interferencia entre sub-portadoras.

Solución:

Coeficientes ρ_{ki} :

$$\rho_{ki} = \int_{0}^{T_{cp}} h(\tau) \int_{T_{cp}}^{T} \varphi_k(\gamma-\tau)\varphi_i^*(\gamma) d\gamma d\tau =$$

$$\int_{0}^{T_{cp}} h(\tau) \int_{T_{cp}}^{T} \tfrac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} \exp\left(j2\pi k f_0(\gamma-\tau-T_{cp})\right) \tfrac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} \exp\left(-j2\pi i f_0(\gamma-T_{cp})\right) d\gamma d\tau =$$

$$\tfrac{1}{T-T_{cp}} \int_{0}^{T_{cp}} h(\tau)\exp\left(-j2\pi f_0\tau\right) \int_{T_{cp}}^{T} \exp\left(j2\pi f_0(k-i)(\gamma-T_{cp})\right) d\gamma d\tau =$$

$$\tfrac{1}{T-T_{cp}} \int_{0}^{T_{cp}} h(\tau)\exp\left(-j2\pi f_0\tau\right)(T-T_{cp})\delta[k-i] d\tau = \delta[k-i] \int_{0}^{T_{cp}} h(\tau)\exp\left(-j2\pi k f_0\tau\right) d\tau =$$

$$\delta[k-i] H(kf_0)$$

Expresión de la señal $y_i(t_m)$:

$$y_i(t_m) = H(if_0)\alpha_i[m] + \beta_i(t_m) = \left(H_R(if_0) + jH_I(if_0)\right)\alpha_i[m] + \left(\beta_R(t_m) + j\beta_I(t_m)\right)$$

Al desglosar la coordenada de ruido en parte real y en parte imaginaria, se ha omitido el subíndice de sub-portadora i para simplificar de este modo nomenclatura y dado que las características estadísticas no dependen de la portadora en cuestión. Es evidente en la expresión hallada que no hay interferencias entre sub-portadoras.

m) Para el usuario "i"se estima $\hat{\alpha}_i[m]$ a partir de $real\left(\frac{y_i(t_m)}{\rho_{ii}}\right)$. Por ser la amplitud a detectar binaria y polar, el umbral de decisión es igual a cero. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ y de los parámetros que considere necesarios. Previamente identifique el término de ruido que queda presente en detección y calcule su potencia. Comente la pérdida en dB de $\frac{E_b}{N_0}$ respecto al caso de canal ideal.

Solución:

Señal en Detección:

$$real\left(\tfrac{y_i(t_m)}{\rho_{ii}}\right) = real\left(\tfrac{y_i(t_m)}{H(if_0)}\right) = \alpha_i[m] + real\left[\tfrac{\beta_R(t_m)+j\beta_I(t_m)}{H_R(if_0)+jH_I(if_0)}\right] = \alpha_i[m] + \tfrac{\beta_R(t_m)H_R(if_0)-\beta_I(t_m)H_I(if_0)}{\left|H(if_0)^2\right|}$$

Término de ruido: $\hat{\beta}(t_m) = \frac{\beta_R(t_m)H_R(if_0)-\beta_I(t_m)H_I(if_0)}{|H(if_0)|^2}$

Donde:

$$\beta_R(t_m) = real\left[\int_{T_{cp}+mT}^{(m+1)T} w(\lambda)\varphi_i^*(\lambda - mT)d\lambda\right] = real\left[\int_{T_{cp}}^{T} w(\lambda)\varphi_i^*(\gamma)d\gamma\right] =$$

$$real\left[\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\int_{T_{cp}}^{T} w(\lambda)\exp\left(-j2\pi i f_0(\gamma - T_{cp})\right)d\gamma\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\int_{T_{cp}}^{T} w_R(\lambda)\cos\left(2\pi i f_0(\gamma - T_{cp})\right) + w_I(\lambda)\,\mathrm{sen}\left(2\pi i f_0(\gamma - T_{cp})\right)d\gamma$$

$$\beta_I(t_m) = imag\left[\int_{T_{cp}+mT}^{(m+1)T} w(\lambda)\varphi_i^*(\lambda - mT)d\lambda\right] = imag\left[\int_{T_{cp}}^{T} w(\lambda)\varphi_i^*(\gamma)d\gamma\right] =$$

$$imag\left[\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\int_{T_{cp}}^{T} w(\lambda)\exp\left(-j2\pi i f_0(\gamma - T_{cp})\right)d\gamma\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\int_{T_{cp}}^{T} w_I(\lambda)\cos\left(2\pi i f_0(\gamma - T_{cp})\right) - w_R(\lambda)\,\mathrm{sen}\left(2\pi i f_0(\gamma - T_{cp})\right)d\gamma$$

de donde es sencillo deducir:

$$E\left[\left(\beta_R(t_m)\right)^2\right] = E\left[\left(\beta_I(t_m)\right)^2\right] = \frac{N_0}{2} \qquad y \qquad E\left[\beta_R(t_m)\beta_I(t_m)\right] = 0$$

por lo que la potencia del término de ruido en detección es:

$$\sigma^2 = E\left[\left(\hat{\beta}(t_m)\right)^2\right] = \frac{N_0}{2}\frac{\left(H_R(if_0)\right)^2 + \left(H_I(if_0)\right)^2}{\left|H(if_0)\right|^4} = \frac{N_0}{2}\frac{1}{\left|H(if_0)\right|^2}$$

Cálculo de la BER:

Por ser los símbolos binarios, polares y equiprobales: $BER = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$

Con $\frac{d^2}{4} = E_b\frac{T-T_{cp}}{T} = E_b\left(1 - \frac{T_{cp}}{T}\right)$

Por tanto: $$BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}\left(1 - \frac{T_{cp}}{T}\right)\left|H(if_0)\right|^2}\right)$$

Dado que si todos los canales fueran ideales se obtendría: $BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}\left(1 - \frac{T_{cp}}{T}\right)}\right)$ la pérdida es igual a $\Delta = -20\log_{10}\left(\left|H(if_0)\right|\right)$. Es decir, se debe aumentar Δ dB la potencia transmitida para la sub-portadora i, para mantener la BER respecto al caso de canales ideales.

5.3 Ejercicio junio 2004 examen final (J Rodríguez Fonollosa)

5.3.1 Enunciado

La expresión general de la señal recibida por un receptor multiusuario es:

$$r(t) = s(t) + w(t) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{E_{bk}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_k[n]\varphi'_k(t-nT) + w(t),$$

con

$$\varphi'_k(t) = \varphi_k(t) * h_k(t)$$

En donde N es el número de usuarios, T es el periodo de símbolo (de todos los usuarios), las funciones $\varphi_k(t)$ para $k \in \{1, \cdots N\}$ son reales, tienen una duración limitada a un símbolo y forman una base ortonormal:

$$\varphi_k(t) = 0, t \notin [0,T] \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_l(t)dt = \delta[k-l]$$

$h_k(t)$ representa la respuesta impulsional del canal de cada usuario k y $w(t)$ es ruido gaussiano blanco aditivo (AWGN) con densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$, y E_{bk} es la energía por bit recibida para el usuario k.

Los símbolos transmitidos por cada usuario son independientes entre sí, equiprobables y se utiliza una codificación BPSK para todos ellos:

$$s_k[n] \in \{-1, 1\}$$

Caso ideal (20 puntos)

Inicialmente se considerará un canal de propagación ideal, $h_k(t) = \delta(t)$ para todos los usuarios:

a) Proponga un esquema de receptor que proporcione una detección de los símbolos transmitidos para el usuario $k = 1$.

b) Calcule la BER de este usuario en función de E_{b1}/N_0.

Caso con dispersión temporal. Receptor óptimo multiusuario (30 puntos)

A continuación consideraremos una situación más realista en la que el canal de propagación produce una pequeña dispersión temporal, de forma que la duración de su repuesta impulsional es inferior a T_c, siendo ésta muy inferior al periodo de símbolo, $T_c \ll T$. En este caso las funciones $\varphi_k(t)$ que forman una base ortonormal dejan de ser ortogonales, una vez atraviesan el canal de propagación. Se define:

$$\rho_{kl} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi'_l(t)dt$$

Para detectar la señal transmitida por cada usuario de forma centralizada, se considera el diseño de un receptor multiusuario formado por un banco de filtros adaptados a las funciones $\varphi_k(t)$. De esta forma la salida de cada filtro adaptado sigue la expresión:

$$y_k(t) = r(t) * \varphi_k(T-t)$$

c) Ignorando la presencia de los símbolos transmitidos en el instante $(n-1)T$ (es decir, ignorando todos los $s_k[n-1]$), obtenga la expresión de las muestras a la salida de los filtros adaptados en el instante $(n+1)T$:

$$y_k[n] \triangleq y_k((n+1)T)$$

en función de los coeficientes de correlación ρ_{kl} , de E_{bl} , de los símbolos transmitidos en el instante nT , $s_l[n]$ y de $\beta_k[n] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\varphi_k(\tau - nT)d\tau$.

d) (*NOTA:* la resolución de este apartado no es necesaria para proseguir el problema). Obtenga la expresión exacta de $y_k[n]$ en función de ρ_{kl} , de $\alpha_{kl} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_l'(t+T)dt$ y de las energías de los bits E_{bl} . Justifique por qué los términos ignorados en el apartado c) son despreciables.

e) Proponga una expresión matricial del vector de muestras a la salida de los filtros adaptados

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

en el instante n=0 utilizando la matriz **R**, el vector de símbolos transmitidos por cada usuario **s** y el vector **n**:

$$\mathbf{R} \triangleq \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{bmatrix}, \mathbf{s} \triangleq \begin{bmatrix} \sqrt{E_{b1}}s_1 \\ \vdots \\ \sqrt{E_{bN}}s_N \end{bmatrix}, \mathbf{n} \triangleq \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix}$$

f) Indique la expresión a minimizar para obtener la estimación óptima del vector de símbolos transmitido por cada usuario a partir del vector **y**.

Caso con dispersión temporal. Decorrelador (30 puntos).

A continuación se propone multiplicar el vector a la salida de los filtros adaptados **y** por una matriz, de forma que se decorrelen los distintos usuarios y se obtenga una expresión del tipo:

$$\mathbf{y}' \triangleq \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{n}'$$

g) Indique como calcular la matriz **A**.
h) Proponga una expresión que proporcione una estimación de los símbolos transmitidos por el usuario 1 a partir del elemento y_1' del vector $\mathbf{y}'$.
i) Para dos usuarios (N=2) y considerando $\rho_{11} = \rho_{22} = 1$ y $\rho_{12} = \rho_{21} = \rho$, calcule la matriz **A**, la expresión de y_1' y la BER que se obtendría utilizando este receptor en función de E_{b1} / N_0 .

Caso con dispersión temporal y errores de estimación de la matriz de covarianza para dos usuarios (20 puntos).

Ahora seguimos considerando tan sólo dos usuarios (*N*=2). En la práctica, y debido a errores en la estimación de los canales, la matriz de correlación no puede obtenerse de forma exacta y la señal a la salida del decorrelador para el usuario 1 es:

$$y_1 \approx \sqrt{E_{b1}}s_1 + \varepsilon\sqrt{E_{b2}}s_2 + n_1'$$

j) Estudie la degradación sobre la BER calculada en el receptor anterior que produciría este efecto en función de ε y de la relación entre energías por bit recibidas para ambos usuarios:

$$\gamma \triangleq \sqrt{\frac{E_{b2}}{E_{b1}}}$$

Para ello suponga que la expresión obtenida en el apartado i) es $BER = Q\left(\sqrt{a}\right)$.

5.3.2 Resolución

Caso ideal (20 puntos)

Inicialmente se considerará un canal de propagación ideal, $h_k(t) = \delta(t)$ para todos los usuarios:

a) Proponga un esquema de receptor que proporcione una detección de los símbolos transmitidos para el usuario $k = 1$.

Solución:

En este caso $r(t) = s(t) + w(t) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{E_{bk}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_k[n]\varphi_k(t - nT) + w(t)$ y por tanto:

$$y_1[n] = r(t) * \varphi_1(T - t)\Big|_{t=(n+1)T} =$$

$$\left[\sum_{k=1}^{N} \sqrt{E_{bk}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_k[m]\varphi_k(t - mT) + w(t)\right] * \varphi_1(T - t)\Bigg|_{t=(n+1)T} = \sqrt{E_{b1}}s_1[n] + \beta_1[n]$$

b) Calcule la BER de este usuario en función de E_{b1} / N_0.

Solución:

$$BER = Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\frac{2\sqrt{E_{b1}}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b1}}{N_0}}\right)$$

c) Ignorando la presencia de los símbolos transmitidos en el instante $(n-1)T$ (es decir, ignorando todos los $s_k[n-1]$), obtenga la expresión de las muestras a la salida de los filtros adaptados en el instante $(n+1)T$:

$$y_k[n] \triangleq y_k((n+1)T)$$

en función de los coeficientes de correlación ρ_{kl}, de E_{bl}, de los símbolos transmitidos en el instante nT, $s_l[n]$ y de $\beta_k[n] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\varphi_k(\tau - nT)d\tau$.

Solución:

$$y_k[n] \triangleq y_k((n+1)T) = r(t) * \varphi_k(T - t)\Big|_{t=(n+1)T} =$$

$$\left[\sum_{l=1}^{N} \sqrt{E_{bl}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_l[m]\varphi_l'(t - mT) + w(t)\right] * \varphi_k(T - t)\Bigg|_{t=(n+1)T} \approx \sum_{l=1}^{N} \sqrt{E_{bl}}\rho_{kl}s_l[n] + \beta_k[n]$$

d) Obtenga la expresión exacta de $y_k[n]$ en función de ρ_{kl}, de $\alpha_{kl} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_l'(t+T)dt$ y de las energías de los bits E_{bl}. Justifique por qué los términos ignorados en el apartado c) son despreciables.

Solución:

$$y_k[n] \triangleq y_k((n+1)T) = r(t) * \varphi_k(T-t)\Big|_{t=(n+1)T} =$$

$$\left[\sum_{l=1}^{N} \sqrt{E_{bl}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_l[m]\varphi_l'(t-mT) + w(t)\right] * \varphi_k(T-t)\Bigg|_{t=(n+1)T} =$$

$$\sum_{l=1}^{N} \sqrt{E_{bl}}\,\alpha_{kl} s_l[n-1] + \sum_{l=1}^{N} \sqrt{E_{bl}}\,\rho_{kl} s_l[n] + \beta_k[n]$$

Los términos que dependen de los símbolos en el instante (*m*-1) son despreciables porque si $T_c \ll T$, entonces $\alpha_{kl} \ll \rho_{kl}$.

e) Proponga una expresión matricial del vector de muestras a la salida de los filtros adaptados

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

en el instante n=0 utilizando la matriz **R**, el vector de símbolos transmitidos por cada usuario **s** y el vector **n**:

$$\mathbf{R} \triangleq \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{bmatrix}, \mathbf{s} \triangleq \begin{bmatrix} \sqrt{E_{b1}}s_1 \\ \vdots \\ \sqrt{E_{bN}}s_N \end{bmatrix}, \mathbf{n} \triangleq \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

f) Indique la expresión a minimizar para obtener la estimación óptima del vector de símbolos transmitido por cada usuario a partir del vector **y**.

Solución:

Aplicando el criterio MAP:

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg\max_{\mathbf{s}} \Pr\{\mathbf{s}\,|\,\mathbf{y}\} = \arg\max_{\mathbf{s}} \left[\frac{f_{\mathrm{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s})}{f_{\mathrm{y}}(\mathbf{y})}\Pr\{\mathbf{s}\}\right] = \arg\max_{\mathbf{s}} \left[f_{\mathrm{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s})\Pr\{\mathbf{s}\}\right]$$

en donde $f_{\mathrm{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s})$ el la función de máxima verosimilitud (ML) y $\Pr\{\mathbf{s}\}$ es la probabilidad "a priori" de cada vector símbolos multiusuario **s**.

En el caso de símbolos equiprobables en cada usuario:

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg\max_{\mathbf{s}} f_{\mathrm{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}) \quad ; \quad f_{\mathrm{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}) \sim N(\mathbf{Rs}, \frac{N_0}{2}\mathbf{I}_N) \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg\min_{\mathbf{s}} \left\|\mathbf{y} - \mathbf{Rs}\right\|^2$$

g) Indique como calcular la matriz **A**.

Solución:

Partiendo de:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Rs} + \mathbf{n}$$

Aplicamos la matriz inversa de R en ambos miembros:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Rs} + \mathbf{n}) = \mathbf{s} + \mathbf{n}'$$

Identificando, resulta:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}$$

$$\mathbf{n}' = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{n}$$

h) Proponga una expresión que proporcione una estimación de los símbolos transmitidos por el usuario 1 a partir del elemento y_1' del vector $\mathbf{y}'$.

Solución:

Dado que:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{s} + \mathbf{n}'$$

tenemos:

$$y_1' = [\mathbf{y}']_1 = [\mathbf{s}]_1 + [\mathbf{n}']_1 = \sqrt{E_{b1}}s_1 + \beta_1'$$

Como $E[\mathbf{n}'] = E[\mathbf{R}^{-1}\mathbf{n}] = \mathbf{R}^{-1}E[\mathbf{n}] = \mathbf{0}$ tenemos que $E[\beta_1'] = 0$. La variable aleatoria β_1' es por tanto de media cero y gausiana (por ser combinación lineal de variables Gaussianas), con lo que el detector *ML* de s_1 a partir de y_1' es:

$$Min_{s_1}\left|y_1' - \sqrt{E_{b1}}s_1\right|^2$$
$$Max_{s_1}\sqrt{E_{b1}}s_1 y_1'$$
$$\hat{s}_1 = sign(y_1')$$

i) Para dos usuarios (N=2) y considerando $\rho_{11} = \rho_{22} = 1$ y $\rho_{12} = \rho_{21} = \rho$, calcule la matriz **A**, la expresión de y_1' y la BER que se obtendría utilizando este receptor en función de E_{b1} / N_0 .

Solución:

Para este caso la matriz R toma la forma:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Su inversa es, por tanto:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}}{1-\rho^2}$$

Como el vector de ruido es:

$$\mathbf{n}' = \mathbf{An} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

su primera componente es:

$$\beta_1' = [\mathbf{n}']_1 = \frac{1}{1-\rho^2}(\beta_1 - \rho\beta_2)_1$$

Dado que $E[\beta_1\beta_2] = 0$, tenemos que la varianza del nuevo ruido es:

$$\sigma_1'^2 = E\left[\beta_1'^2\right] = \sigma^2 \frac{1+\rho^2}{\left(1-\rho^2\right)^2}$$

donde $\sigma^2 = N_o / 2$. Recordando que:

$$y_1' = \sqrt{E_{b1}}s_1 + \beta_1'$$

la BER es:

$$BER = Q\left(\frac{\sqrt{E_{b1}}}{\sigma_1'}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_{b1}}{\sigma^2 \frac{1+\rho^2}{\left(1-\rho^2\right)^2}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b1}}{N_o}\frac{\left(1-\rho^2\right)^2}{1+\rho^2}}\right)$$

j) Estudie la degradación sobre la BER calculada en el receptor anterior que produciría este efecto en función de ε y de la relación entre energías por bit recibidas para ambos usuarios:

$$\gamma \triangleq \sqrt{\frac{E_{b2}}{E_{b1}}}$$

Para ello suponga que la expresión obtenida en el apartado i) es $BER = Q\left(\sqrt{a}\right)$.

Solución:

Para calcular la BER, hay que considerar los casos $s_1 = s_2$ y $s_1 = -s_2$, que tienen idéntica probabilidad. Por tanto la BER es:

$$BER = \frac{1}{2}\left(Q\left(\frac{\sqrt{E_{b1}} + |\varepsilon|\sqrt{E_{b2}}}{\sigma_1'} \right) + Q\left(\frac{\sqrt{E_{b1}} - |\varepsilon|\sqrt{E_{b2}}}{\sigma_1'} \right) \right)$$

$$BER \leq Q\left(\frac{\sqrt{E_{b1}} - |\varepsilon|\sqrt{E_{b2}}}{\sigma_1'} \right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_{b1}\left(1-|\varepsilon|\gamma\right)^2}{\sigma^2 \frac{1+\rho^2}{\left(1-\rho^2\right)^2}}} \right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b1}}{N_o}\frac{\left(1-\rho^2\right)^2}{1+\rho^2}\left(1-|\varepsilon|\gamma\right)^2} \right)$$

5.4 Ejercicio enero 2005 examen final (J Rodríguez Fonollosa)

5.4.1 Enunciado

La expresión general de la señal recibida en un sistema multiusuario es:

$$r(t)=\sum_{j=1}^{N}\left(s_j(t)*h_j(t)\right)+w(t)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_j[n]\left(\varphi_j(t-nT)*h_j(t)\right)+w(t)=$$
$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_j[n]\varphi'_j(t-nT)+w(t)$$

En donde las funciones $h_j(t)$ para $j\in\{1,\cdots N\}$ representan la respuesta impulsional del canal de cada usuario, las funciones $\varphi_j(t)$ forman una base ortonormal y los coeficientes $s_j[n]=\pm\sqrt{E_{bj}}$ son los símbolos binarios *equiprobables* transmitidos por el usuario *j* en el instante nT . Las duraciones de la funciones de la base ortonormal y la respuesta impulsional del canal de cada usuario se supondrán inferiores a *T* y *D* respectivamente:

$$\varphi_j(t)=0\ ;\ t<0\ ;\ t\geq T$$
$$h_j(t)=0\ ;\ t<0\ ;\ t\geq D$$
$$D<T$$

El efecto del canal se modela definiendo los siguientes *parámetros*:

$$\rho_{ij}\triangleq\int_0^T\varphi_i(\alpha)\varphi'_j(\alpha)d\alpha\quad;\quad i,j\in\{1,\cdots,N\}$$
$$\xi_{ij}\triangleq\int_0^T\varphi_i(\alpha)\varphi'_j(\alpha+T)d\alpha\quad;\quad i,j\in\{1,\cdots,N\}$$

En cuanto al modelo de ruido, se considerará recepción contaminada con ruido gaussiano blanco aditivo (AWGN), $w(t)$, de densidad espectral $S_w(f)=\dfrac{N_0}{2}$ y se utilizará la *notación*:

$$\beta_i[m]\triangleq\beta_i\left((m+1)T\right)=w(t)*\varphi_i(T-t)\Big|_{t=(m+1)T}.$$

Primera Parte: Supondremos que el número de usuarios es *N*=1.

a) Proponga un esquema del receptor óptimo diseñado suponiendo $h_j(t)=\delta(t)$ (canal ideal).

b) A continuación se analiza el caso de canal no ideal *manteniendo el diseño del apartado anterior*. Teniendo en cuenta las restricciones referidas a las duraciones del canal y de las funciones de la base ortogonal indicadas en el enunciado, proporcione una expresión de la señal obtenida $y_1[m]$ a la salida del filtro adaptado del receptor del apartado a). Utilice la notación y los parámetros definidos en el enunciado.

c) Dibuje la constelación de la señal recibida y exprese $d'_{\min}$ (distancia mínima para canal no ideal) en función de $d_{\min}$ (distancia mínima para canal ideal). Proporcione una expresión de la probabilidad de error en la que se aprecie el impacto del canal no ideal e indique en dB el aumento de energía necesario para compensar esta degradación.

Segunda Parte: A partir de ahora supondremos un número arbitrario de usuarios *N*.

d) Utilizando el receptor diseñado en el apartado a) para el usuario 1 e interpretando convenientemente los coeficientes ρ_{1j} y ξ_{1j}, proporcione una expresión de la señal obtenida a la salida del filtro adaptado $y_1[m]$ (no es necesario incluir la demostración).

e) Suponga, exclusivamente en este apartado, que los coeficientes ξ_{1j} son despreciables, $\xi_{1j} \approx 0$. Indique en este caso cómo se modifica la distancia mínima de la constelación del usuario 1 y proporcione una expresión de la probabilidad de error en la que se vea el impacto de la inteferencia multiusuario.

f) Generalice el resultado del apartado d) y proporcione una expresión matricial de la señal obtenida a la salida de los filtros adaptados a las funciones base de cada uno de los usuarios, es decir, indique:

$$\mathbf{y}[m] \triangleq \begin{bmatrix} y_1[m] \\ \vdots \\ y_N[m] \end{bmatrix}$$

en función de:

$$\mathbf{R} \triangleq \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{G} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{N1} & \cdots & \xi_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}[m] \triangleq \begin{bmatrix} s_1[m] \\ \vdots \\ s_N[m] \end{bmatrix} \quad ; \ \forall m \quad ; \quad \mathbf{n}[m] \triangleq \begin{bmatrix} \beta_1[m] \\ \vdots \\ \beta_N[m] \end{bmatrix} \quad ; \ \forall m$$

g) Una aproximación razonable de los parámetros ξ_{ij} es $\xi_{ij} \approx \rho_{ij}\varepsilon$. Utilizando esta aproximación y álgebra lineal, proporcione una expresión matricial del receptor multiusuario decorrelador, es decir, aquel que permite obtener una detección de cada usuario independiente de las señales de los otros usuarios.

h) Utilizando la definición:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \cdots & \lambda_{NN} \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{R}^{-1}$$

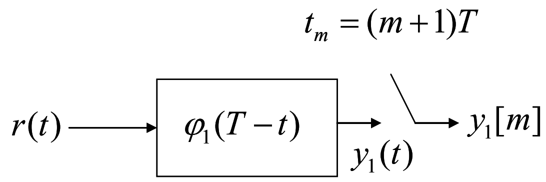
calcule la potencia del ruido en cada una de las salidas del decorrelador del apartado anterior, que denominamos $\frac{N'_i}{2}$, en función de los elementos λ_{ij}. Analizando la disminución de la distancia mínima obtenga una expresión de la probabilidad de error de cada usuario.

5.4.2 Resolución

Primera Parte: Supondremos que el número de usuarios es *N*=1.

a) Proponga un esquema del receptor óptimo diseñado suponiendo $h_j(t) = \delta(t)$ (canal ideal).

Solución:



b) A continuación se analiza el caso de canal no ideal *manteniendo el diseño del apartado anterior*. Teniendo en cuenta las restricciones referidas a las duraciones del canal y de las funciones de la base ortogonal indicadas en el enunciado, proporcione una expresión de la señal obtenida $y_1[m]$ a la salida del filtro adaptado del receptor del apartado a). Utilice la notación y los parámetros definidos en el enunciado.

Solución:

$$r(t) = s_1(t) * h_1(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n]\varphi_1'(t-nT) + w(t)$$

$$y_1[m] = y_1\left((m+1)T\right) = r(t) * \varphi_1(T-t)\Big|_{t=(m+1)T} =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n]\left(\varphi_1'(t-nT) * \varphi_1(T-t)\right) + w(t) * \varphi_1(T-t)\Bigg|_{t=(m+1)T} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n]\int_0^T \varphi_1(T-\tau)\varphi_1'\left((m+1)T-\tau-nT\right)d\tau + \beta((m+1)T) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n]\int_0^T \varphi_1(\alpha)\varphi_1'\left((m-n)T+\alpha\right)d\alpha + \beta((m+1)T) \Rightarrow$$

$$y_1[m] = s_1[m]\rho_{11} + s_1[m-1]\xi_{11} + \beta_1[m]$$

c) Dibuje la constelación de la señal recibida y exprese $d'_{\min}$ (distancia mínima para canal no ideal) en función de $d_{\min}$ (distancia mínima para canal ideal). Proporcione una expresión de la probabilidad de error en la que se aprecie el impacto del canal no ideal e indique en dB el aumento de energía necesario para compensar esta degradación.

Solución:

$$d'_{\min} = 2\sqrt{E_{b1}}\left(|\rho_{11}| - |\xi_{11}|\right) = d_{\min}\left(|\rho_{11}| - |\xi_{11}|\right)$$

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b1}\left(|\rho_{11}| - |\xi_{11}|\right)^2}{N_0}}\right)$$

$$\Delta E_{b1} = 20\log\left(|\rho_{11}| - |\xi_{11}|\right)$$

Segunda Parte: A partir de ahora supondremos un número arbitrario de usuarios N.

d) Utilizando el receptor diseñado en el apartado a) para el usuario 1 e interpretando convenientemente los coeficientes ρ_{1j} y ξ_{1j}, proporcione una expresión de la señal obtenida a la salida del filtro adaptado $y_1[m]$ (no es necesario incluir la demostración).

Solución:

$$y_1[m] = \sum_{j=1}^{N} \rho_{1j} s_j[m] + \sum_{j=1}^{N} \xi_{1j} s_j[m-1] + \beta_1[m]$$

e) Suponga, exclusivamente en este apartado, que los coeficientes ξ_{1j} son despreciables, $\xi_{1j} \approx 0$. Indique en este caso cómo se modifica la distancia mínima de la constelación del usuario 1 y proporcione una expresión de la probabilidad de error en la que se vea el impacto de la interferencia multiusuario.

Solución:

$$d''_{\min} = \left(2\sqrt{E_{b1}}\,|\rho_{11}| - 2\sum_{j=2}^{N}\sqrt{E_{bj}}\,|\rho_{1j}|\right) = d_{\min}\left(|\rho_{11}| - \sum_{j=2}^{N}\sqrt{\frac{E_{bj}}{E_{b1}}}\,|\rho_{1j}|\right)$$

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b1}\left(|\rho_{11}| - \sum_{j=2}^{N}\sqrt{\frac{E_{bj}}{E_{b1}}}\,|\rho_{1j}|\right)^2}{N_0}}\right)$$

f) Generalice el resultado del apartado d) y proporcione una expresión matricial de la señal obtenida a la salida de los filtros adaptados a las funciones base de cada uno de los usuarios, es decir, indique:

$$\mathbf{y}[m] \triangleq \begin{bmatrix} y_1[m] \\ \vdots \\ y_N[m] \end{bmatrix}$$

en función *de:*

$$\mathbf{R} \triangleq \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{G} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{N1} & \cdots & \xi_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}[m] \triangleq \begin{bmatrix} s_1[m] \\ \vdots \\ s_N[m] \end{bmatrix} \;;\; \forall m \quad ; \quad \mathbf{n}[m] \triangleq \begin{bmatrix} \beta_1[m] \\ \vdots \\ \beta_N[m] \end{bmatrix} \;;\; \forall m$$

Solución:

$$\mathbf{y}[m] = \mathbf{Rs}[m] + \mathbf{Gs}[m-1] + \mathbf{n}[m]$$

g) Una aproximación razonable de los parámetros ξ_{ij} es $\xi_{ij} \approx \rho_{ij}\varepsilon$. Utilizando esta aproximación y álgebra lineal, proporcione una expresión matricial del receptor multiusuario decorrelador, es decir, aquel que permite obtener una detección de cada usuario independiente de las señales de los otros usuarios.

Solución:

$$\mathbf{y}[m] = \mathbf{Rs}[m] + \mathbf{Gs}[m-1] + \mathbf{n}[m] \approx \mathbf{Rs}[m] + \mathbf{R}\varepsilon\mathbf{s}[m-1] + \mathbf{n}[m] =$$
$$\mathbf{R}\left(\mathbf{s}[m] + \varepsilon\mathbf{s}[m-1]\right) + \mathbf{n}[m]$$

El decorrelador aplica la matriz inversa al vector recibido:

$$\mathbf{x}[m] = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}[m] = \mathbf{s}[m] + \varepsilon\mathbf{s}[m-1] + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{n}[m] =$$
$$\mathbf{s}[m] + \varepsilon\mathbf{s}[m-1] + \mathbf{n}'[m]$$

$$x_1[m] = s_1[m] + \varepsilon s_1[m-1] + \beta_1'[m]$$
$$\vdots$$
$$x_N[m] = s_N[m] + \varepsilon s_N[m-1] + \beta_N'[m]$$

h) Utilizando la definición:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \cdots & \lambda_{NN} \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{R}^{-1}$$

calcule la potencia del ruido en cada una de las salidas del decorrelador del apartado anterior, que denominamos $\frac{N_i'}{2}$, en función de los elementos λ_{ij}. Analizando la disminución de la distancia mínima obtenga una expresión de la probabilidad de error de cada usuario.

Solución:

$$\frac{N_i'}{2} = E\left[\left|\beta_i'\right|^2\right] = E\left[\left|\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij}\beta_j\right|^2\right] = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij}^2 E\left[\left|\beta_j\right|^2\right] = \frac{N_0}{2}\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij}^2$$

$$d'''_{\min i} = 2\sqrt{E_{bi}}\left(1-|\,\varepsilon\,|\right) = d_{\min i}\left(1-|\,\varepsilon\,|\right)$$

$$BER_i = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bi}\left(1-|\,\varepsilon\,|\right)^2}{N_0\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}^2}}\right)$$