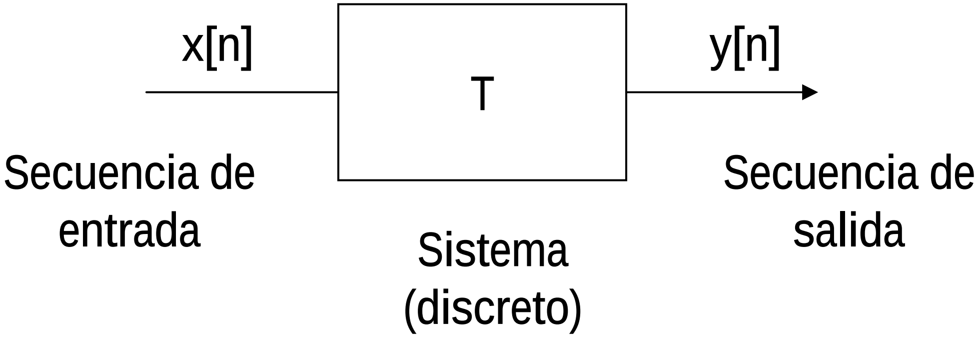
1.1: Secuencias y sistemas

- Secuencias y representación
- Procesado discreto de la señal
- Aplicación del procesado discreto de la señal
- Ejemplos de secuencias
- Sistemas



Secuencias

- **Secuencias:** Conjunto ordenado de números

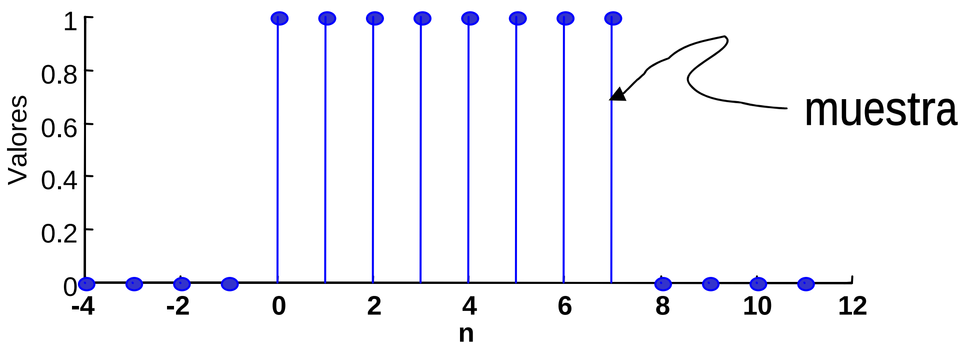
$$x = \{\ x[n]\ \}, -\infty < n < \infty$$

n: Variable entera -> ordinal
tiempo discreto

- **Representación**
  - Analítica:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 7 \quad \text{(Longitud 8)} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

  - Numérica: x[n] = {...,0,0,<u>1</u>,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0...} (<u>1</u> indica x[0])
  - Gráfica:

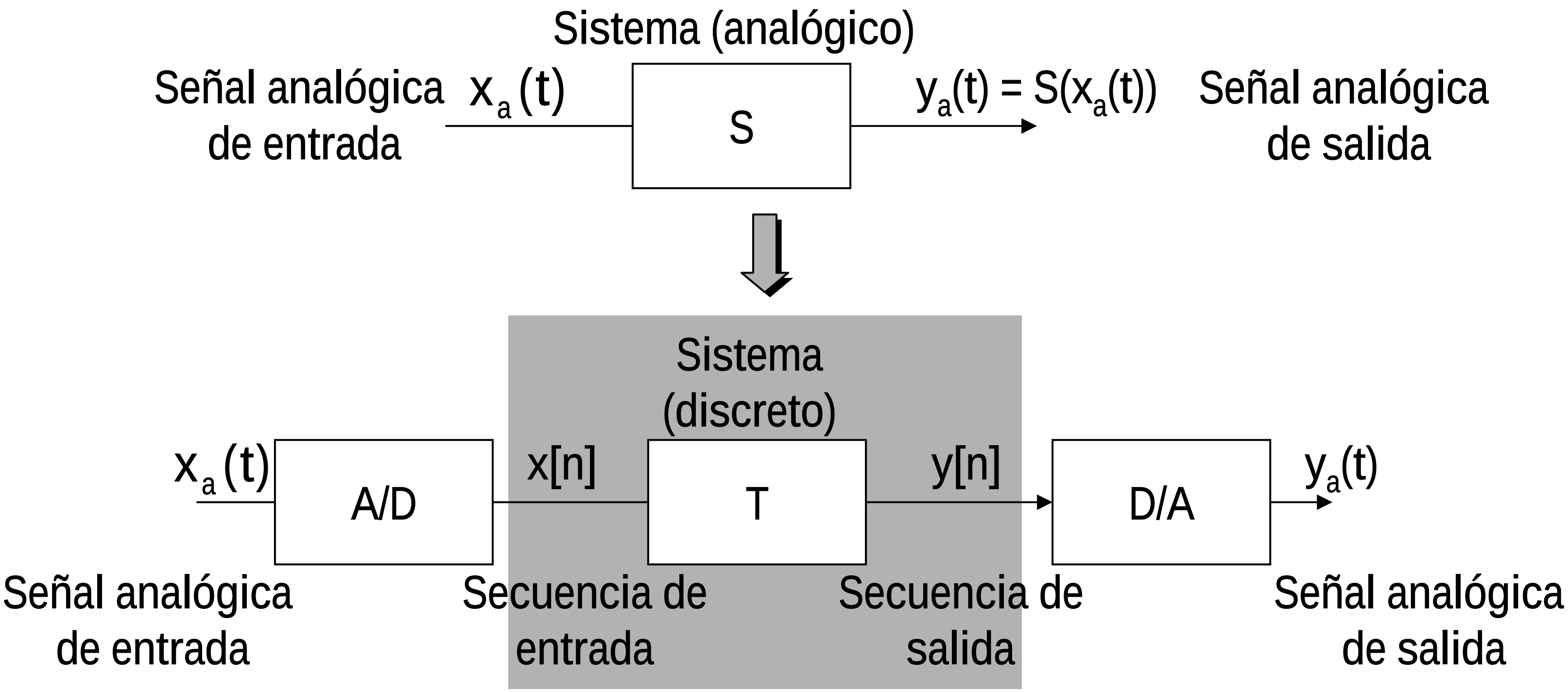


Secuencias y representación binaria

- Representación numérica: $x[n] = \{ ..., \underline{0}, 1, 1, 2, 0, 3, ...\}$
- Representación binaria: `....|00|01|01|10|00|11|....`
- Ventajas de la representación binaria:

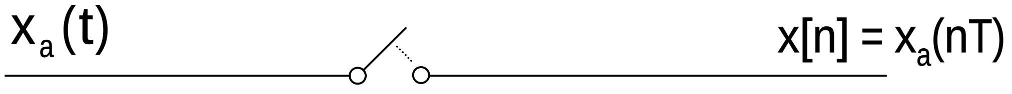
Robustez de la representación	Procesado de la representación
- puede reproducirse de forma exacta	- uso de cualquier sistema discreto
- robusto respecto a los componentes de los sistemas	- "un sistema = muchos sistemas"
	- nuevas perspectivas: - filtros con fase lineal - procesar en el dominio frecuencial - filtros de mediana
	- algoritmos rápidos (FFT)
	- equipos más rápidos

Procesado discreto de señales analógicas

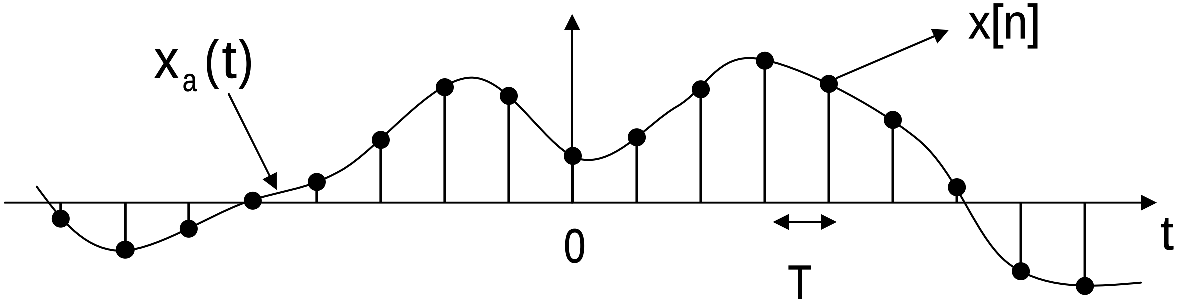


- Señal analógica: $x_a(t)$ se define para t real
- Secuencia discreta: x[n] se define para n entero (¡x[1.5] no existe!)

Proceso de muestreo (ideal)



T = Periodo de muestreo



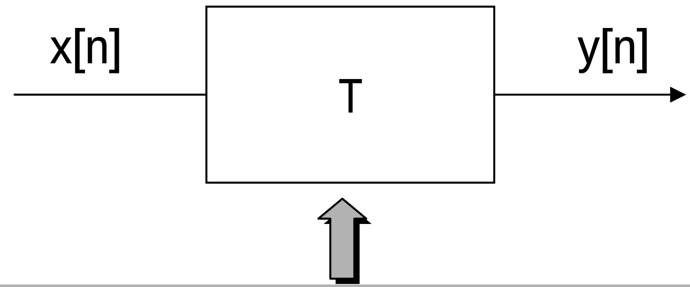
$$x[n] = x_a(nT)$$

Aplicación del procesado digital de la señal

- Telecomunicaciones
  - Filtros
  - Análisis de espectros
  - Codificación de fuente
  - Modulación / detección
  - Mejora de la señal (ecualización, eliminación de ruido, cancelación de eco, etc.)
- Radar, sonar, navegación (GPS)
- Sistemas médicos: ultrasonidos, eeg, etc.
- Instrumentación
- Exploración geofísica
- Gran consumo:
  - CD audio
  - DAT
  - Teléfonos (GSM)
  - Periféricos de PC (módem, etc.)
  - TV digital (satélite)
  - Cámara digital de fotografía
  - Cámara digital de vídeo

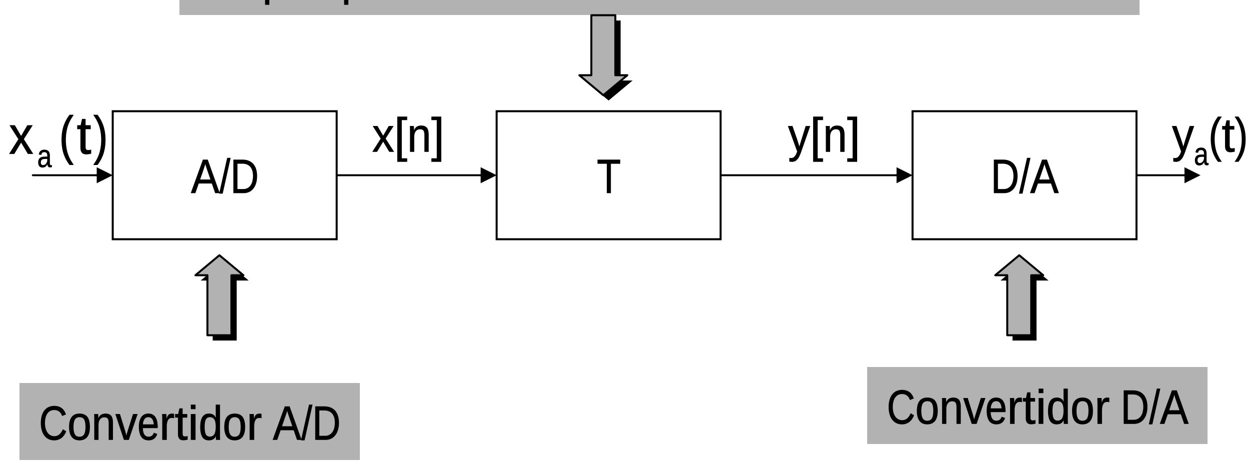
Entorno de trabajo típico

- Entorno discreto:



Ordenador: Microprocesador
DSP: Microprocesador + funciones específicas (convolución, FFT, etc.)
Chip especializado

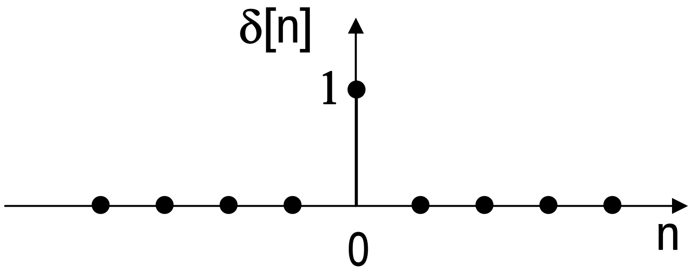
- Entorno analógico:



Ejemplos de secuencias: Impulso y escalón unidad

- Impulso unidad:

$$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & \text{otro caso}\end{cases}$$

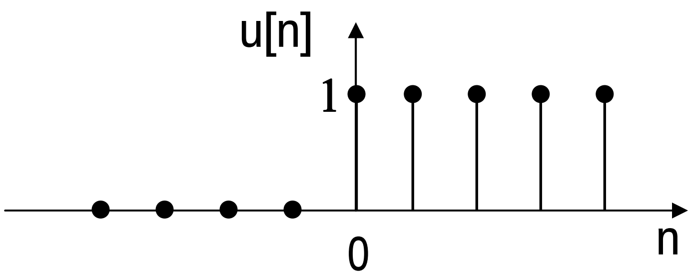


Nota: el impulso unidad no es la distribución Delta de Dirac

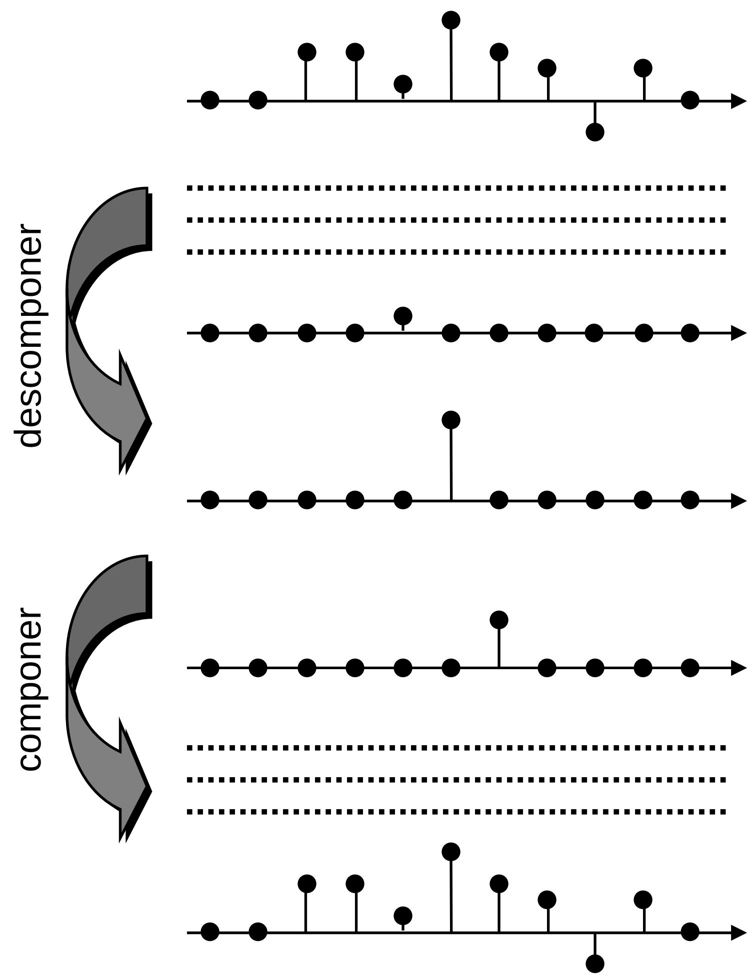
$$¡¡\quad \delta[n]\neq\delta(t)\quad !!\qquad \text{Delta de Dirac}: \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$$

- Escalón unidad:

$$u[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & \text{otro caso}\end{cases}$$



Descomposición de una señal en función de δ[n]



x[n]

x[-1] δ [n+1]

x[0] δ [n]

x[1] δ [n-1]

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

Secuencia exponencial compleja

$$x[n] = Az^n, \quad \text{si } A = |A|e^{j\theta}, \quad z = re^{j\omega}$$

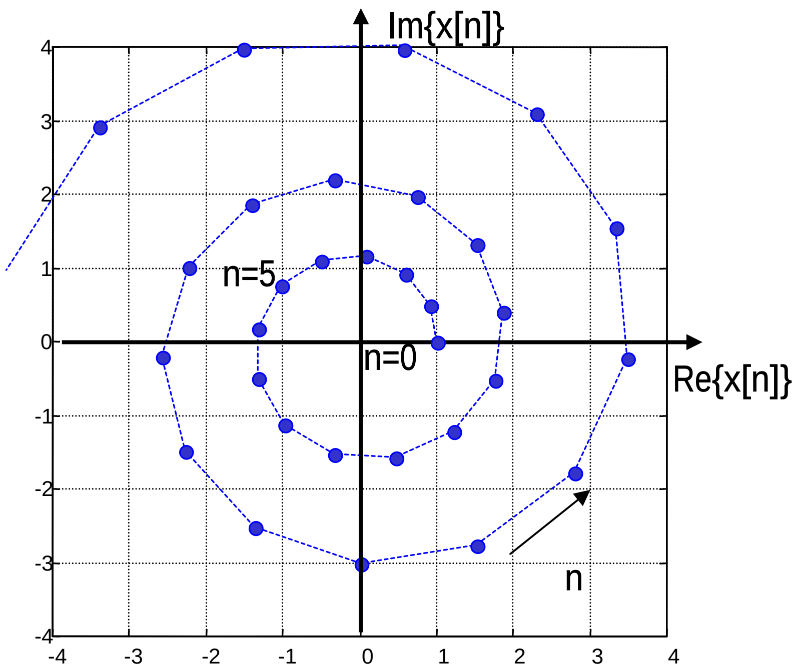
$$= |A|r^n e^{j(\omega n+\theta)}$$

ω: Pulsación

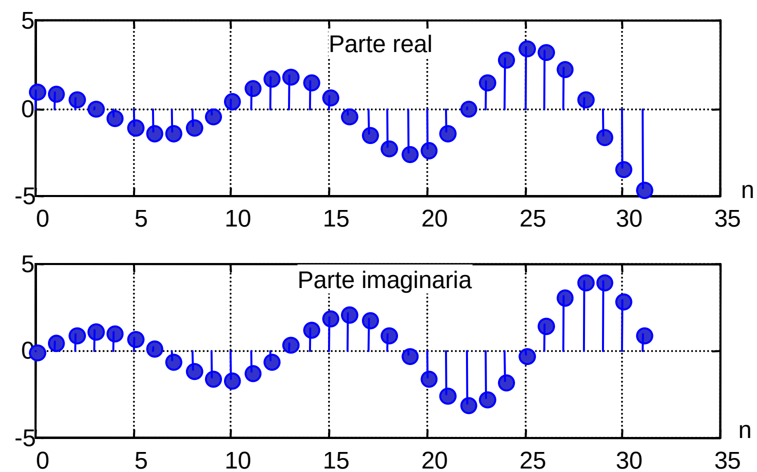
$$= |A|r^n\left(\cos(\omega n+\theta) + j\mathrm{sen}(\omega n+\theta)\right)$$

Caso particular:

- $|z| < 1$: Exponencial decreciente
- $|z| > 1$: Exponencial creciente
- $|z| = 1$: Oscilación mantenida



$$x[n] = (1.05)^n \, e^{j(0.5n)}$$



Componente frecuencial

- Exponencial compleja con r=A=1:

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

- Estudio de la igualdad entre componentes frecuenciales:

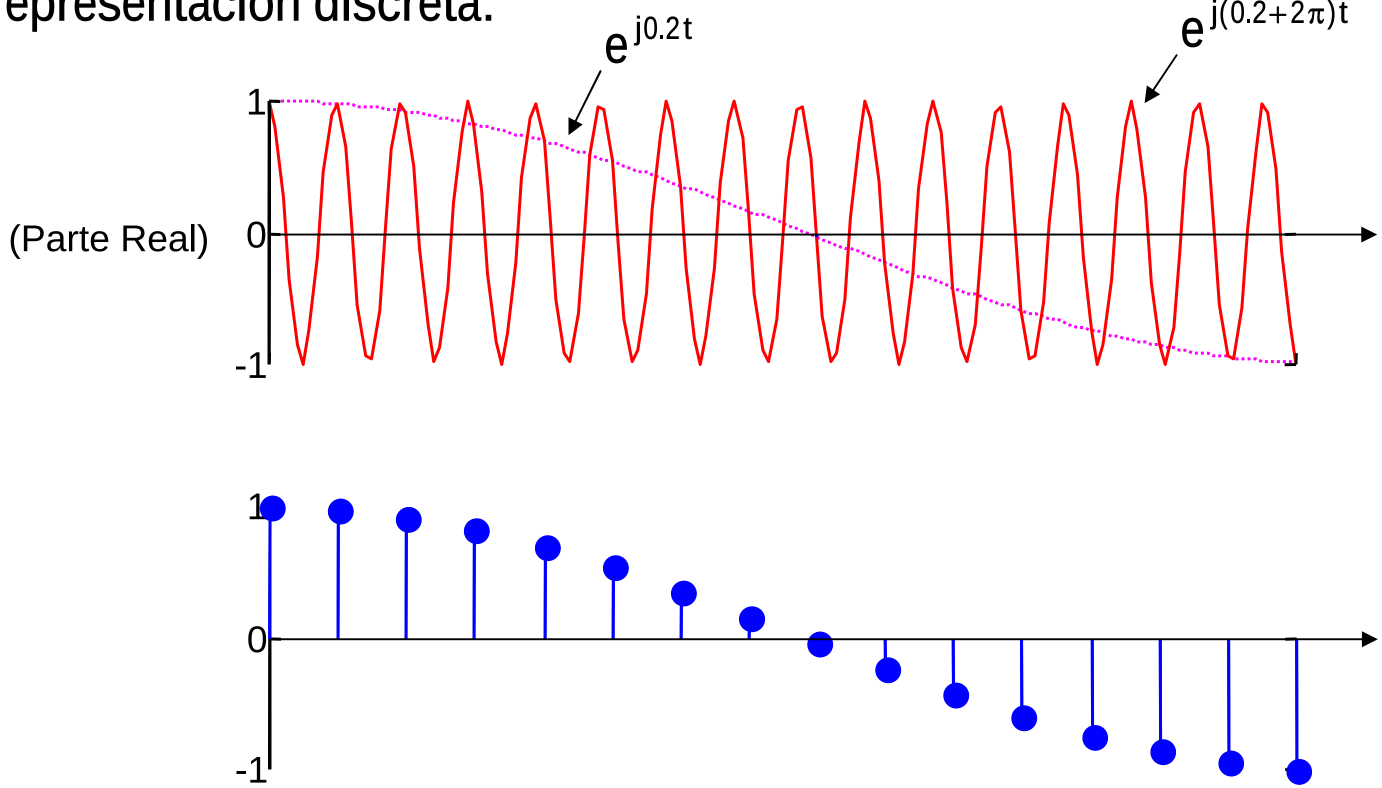
$$x_1[n] \underset{\neq}{\overset{=}{}} x_2[n] \text{ con } \left| \begin{array}{l} x_1[n] = e^{j\omega_1 n} \\ x_2[n] = e^{j\omega_2 n} \end{array} \right.$$

- Estudio de la periodicidad de la componentes frecuenciales:

$$x[n] \underset{\neq}{\overset{=}{}} x[n+P] \text{ con } x[n] = e^{j\omega n}, \quad \forall n$$

Igualdad de componentes frecuenciales (I)

- Dos componentes frecuenciales analógicas diferentes pueden tener la misma representación discreta:



$$\omega_1 \neq \omega_2 \text{ pero } x_1[n] = x_2[n]$$

Igualdad de componentes frecuenciales (II)

- Análisis:

El ejemplo anterior exige

$$x_1[n] = x_2[n] \;\; \text{con} \left| \begin{array}{l} x_1[n] = e^{j\omega_1 n} \\ x_2[n] = e^{j\omega_2 n} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad e^{j\omega_1 n} = e^{j\omega_2 n}, \quad \forall n$$

Esto es posible con

$$\omega_2 = \omega_1 + 2k\pi$$

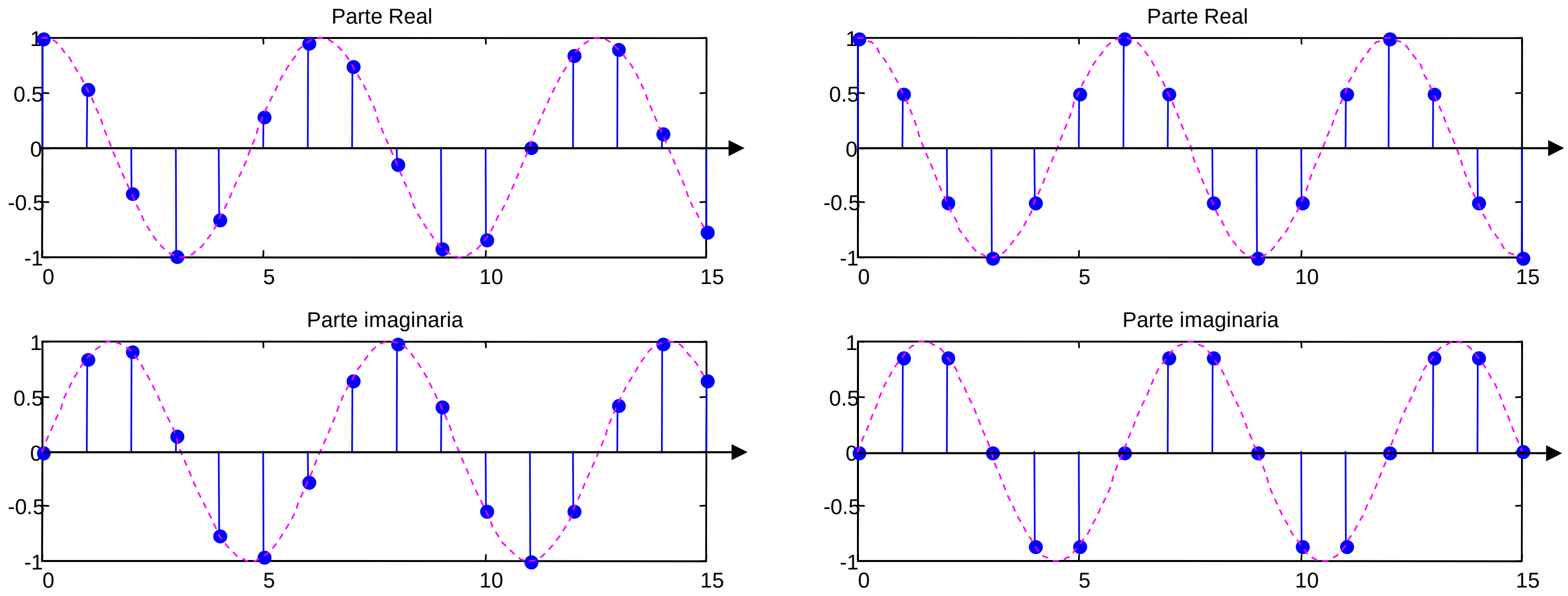
ya que

$$e^{j\omega_1 n} = e^{j(\omega_1 + 2k\pi)n}, \quad \forall k,n \text{ enteros}$$

$\{\,\omega + 2k\pi\,\}$	1) Pulsaciones diferentes 2) Misma forma de onda x[n]

Periodicidad de componentes frecuenciales (I)

- Una componente frecuencial no siempre es periódica:



$$x_1[n] = e^{j1.0n}$$

No periódica

$$x_2[n] = e^{j\frac{\pi}{3.0}n}$$

Periódica

Periodicidad de componentes frecuenciales (II)

- Análisis:

$$x[n] = x[n+P] \text{ con } x[n] = e^{j\omega n}, \text{P entero}$$

$$e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+P)}, \quad \forall n$$

$$e^{j\omega n} = e^{j\omega n}\, e^{j\omega P}, \quad \forall n \quad \Rightarrow e^{j\omega P} = 1$$

$$\omega P = 2k\pi \quad \Rightarrow P = \frac{2k\pi}{\omega} \quad \text{¡Entero!}$$

$$\omega = \frac{2k\pi}{P}$$

Para ser periódica una componente frecuencial discreta ha de tener una frecuencia racional: $f = k/P$ o $\omega=2\pi k/P$

Nota: una componente frecuencial analógica siempre es periódica

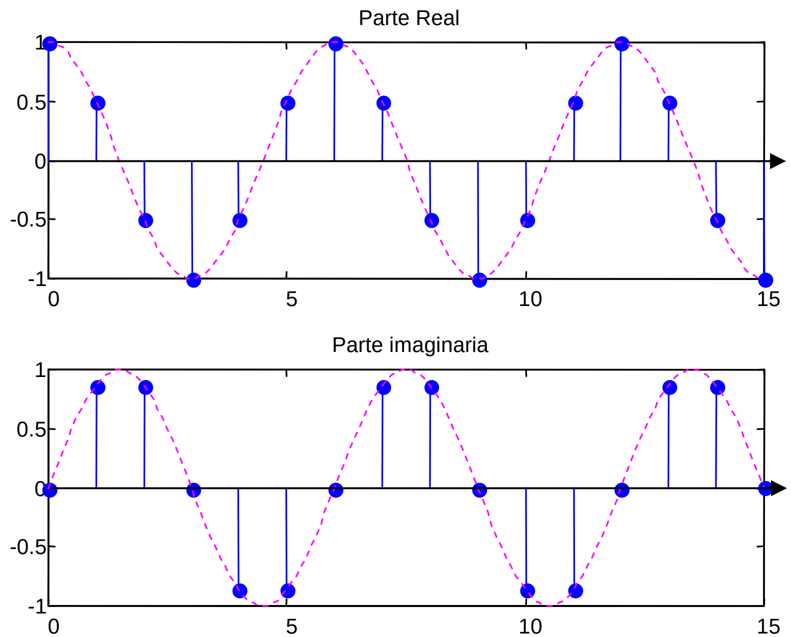
$$e^{j\Omega t} = e^{j\Omega(t+T)}, \quad \forall t, \Omega$$

$$e^{j\Omega T} = 1$$

$$T = 2k\pi / \Omega, \quad \text{real}$$

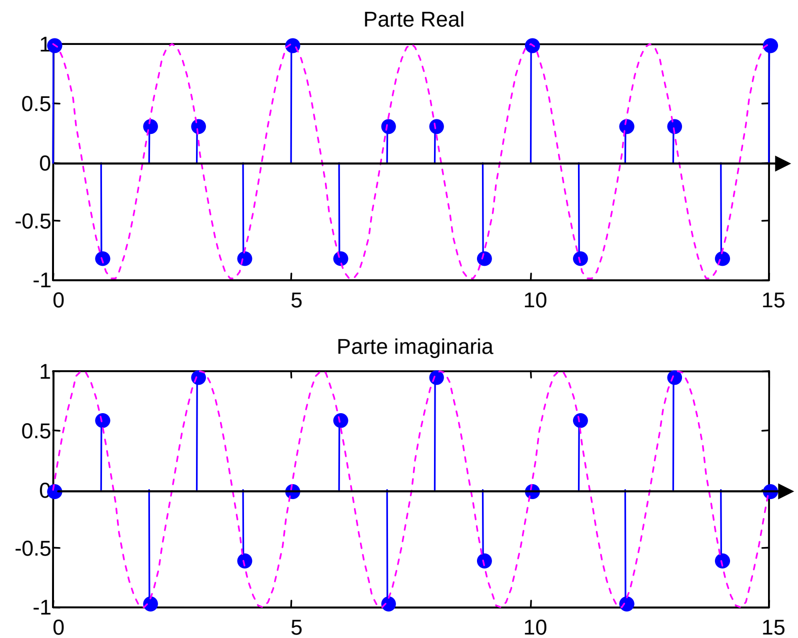
Ejemplos de componentes frecuenciales periódicas

- Ciclos y periodos:



$$x_1[n] = e^{j2\pi\frac{1}{6}n}$$

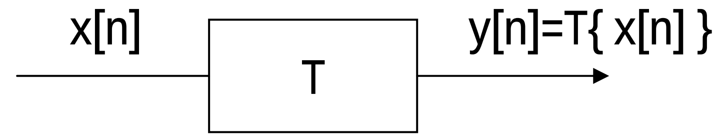
Periodo: 6 muestras
Ciclos: 1 por periodo

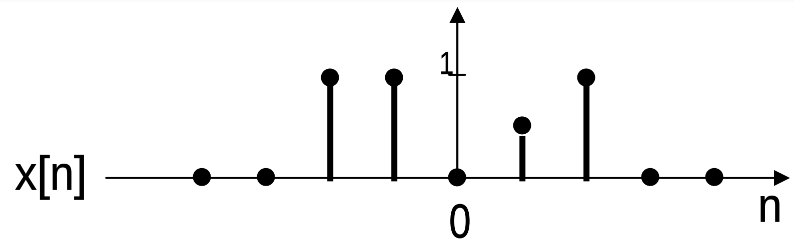


$$x_2[n] = e^{j2\pi\frac{2}{5}n}$$

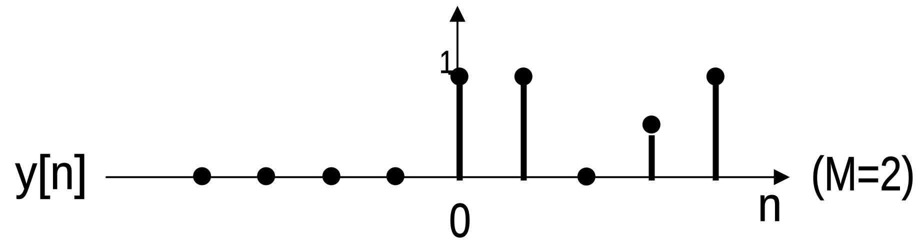
Periodo: 5 muestras
Ciclos: 2 por periodo

Sistemas discretos

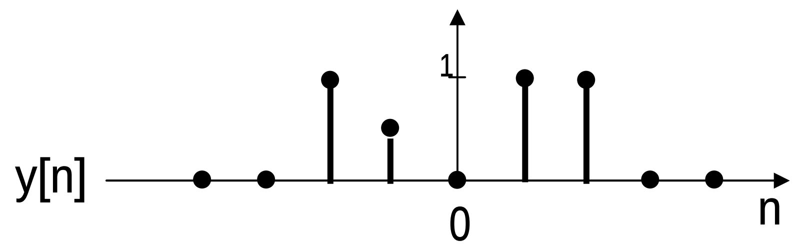




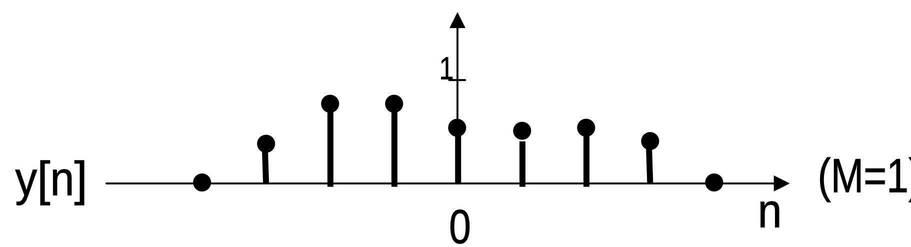
- T1: Retardo
  - $$y[n] = x[n-M]$$



- T2: Reflexión temporal
  - $$y[n] = x[-n]$$

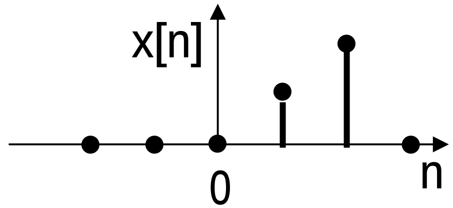


- T3: Promediador
  - $$y[n] = \frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$$

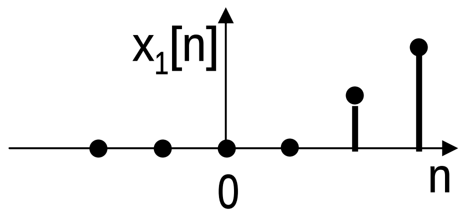


Composición de sistemas (I)

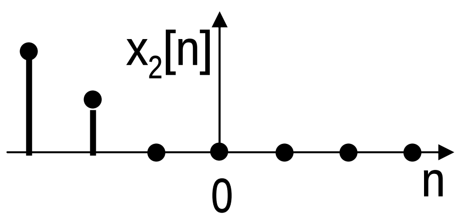
$$T1\{T2\{.\}\} \overset{?}{=} T2\{T1\{.\}\}$$



- Retardo (M=1)

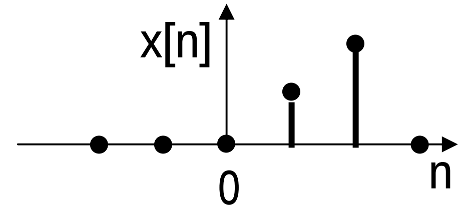


- Reflexión temporal

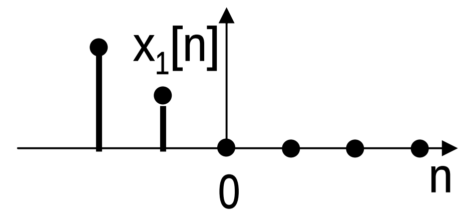


$$\begin{cases} x_1[n] = x[n-1] \\ x_2[n] = x_1[-n] \end{cases}$$

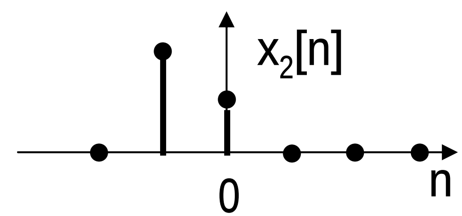
$$\Rightarrow x_2[n] = x[-n-1]$$



- Reflexión temporal



- Retardo (M=1)

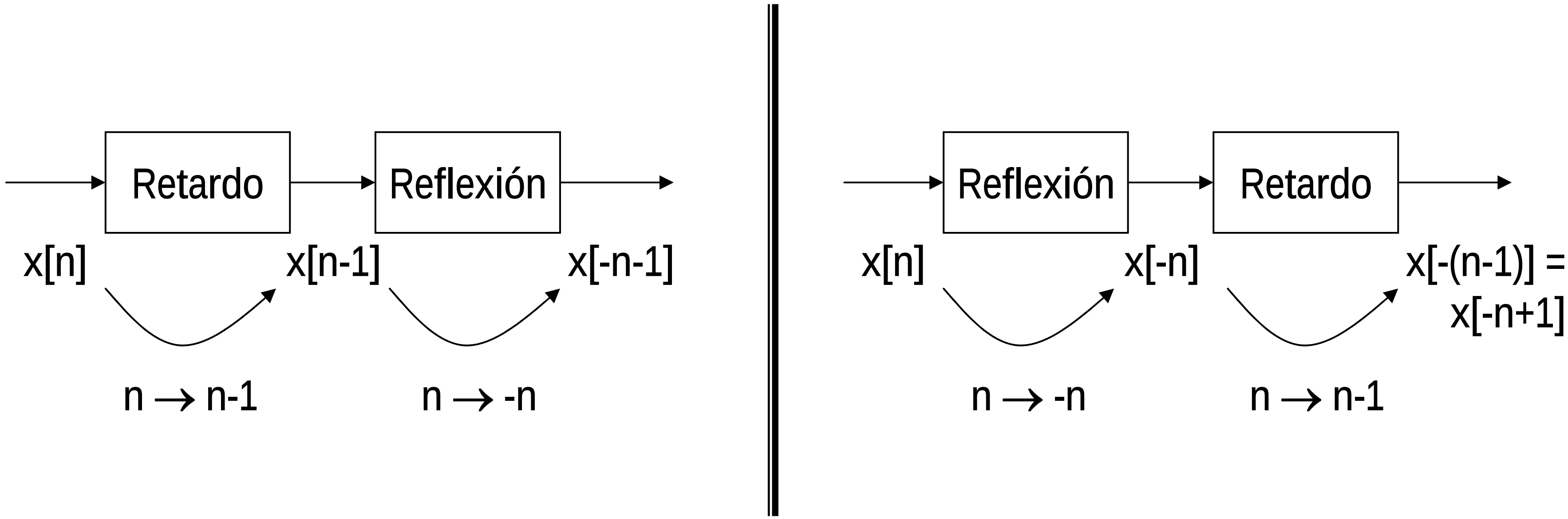


$$\begin{cases} x_1[n] = x[-n] \\ x_2[n] = x_1[n-1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2[n] = x[-(n-1)] = x[-n+1]$$

$$T1\{T2\{.\}\} \neq T2\{T1\{.\}\}$$

Composición de sistemas (II)



Composición de sistemas

$\Downarrow$

Sustitución del parámetro temporal n

Propiedades de los sistemas (I)

- Lineal:

  $x'[n] = a\, x_1[n] + b\, x_2[n]$

  - $T\{x'[n]\} = a\, T\{x_1[n]\} + b\, T\{x_2[n]\}, \ \forall n, a, b, x_1, x_2$

  $\Rightarrow$ El sistema conmuta con la combinación lineal

- Invariante con el tiempo:

  - Si $y[n]= T\{x[n]\} \Rightarrow T\{x[n-M]\} = y[n-M], \forall n, M, x$

  $\Rightarrow$ El sistema conmuta con el retardo

  $\Rightarrow$ El comportamiento del sistema no depende del origen de tiempos

Propiedades de los sistemas (II)

- <u>Causal</u>:
  - $T\{x[n]\} = f\{x[n-k],\ k \geq 0\}$
  - $\Rightarrow$ La salida sólo depende de las entradas pasadas.
- <u>Estable</u>:
  - $\forall x[n]$ tq $\forall n\ |x[n]| < \infty,\ \Rightarrow |y[n]| < \infty$
  - $\Rightarrow$ La respuesta a cualquier entrada acotada es acotada.

Resumen

- Secuencias:
  - $\delta[n]$
  - $u[n]$
  - $z^n \Rightarrow e^{j\omega n}$: componente frecuencial: $\{\omega+2k\pi\}$ misma forma de onda
    $\omega=2k\pi/N$ secuencia periódica
- Sistemas:
  - Composición: sustitución del parámetro temporal n
  - Propiedades: Lineal
    Invariante
    Causal
    Estable