

1 Campos eléctricos y magnéticos en condiciones estáticas

En este primer capítulo se revisarán los conceptos fundamentales de la teoría electromagnética en condiciones estáticas, esto es, *sin considerar variaciones temporales en las fuentes ni en los campos producidos por ellas*. A pesar de la evidente limitación de este análisis, lo cierto es que resulta muy instructivo, porque revela la naturaleza y las características esenciales de los campos y de las demás magnitudes físicas relacionadas. En la realidad muchos fenómenos electromagnéticos no se desarrollan en condiciones estáticas, pero sus variaciones temporales son lentas en comparación con los tiempos propios de los fenómenos básicos y de los medios materiales que intervienen, por lo que en esas ocasiones bastaría con asignar a los campos las mismas variaciones temporales de las fuentes, una vez calculados aquéllos mediante los métodos propios del análisis estático.

Se ha pretendido que este capítulo sirva en buena medida de repaso a cuestiones que ya se han visto en cursos anteriores de Física y, a la vez, se busca introducir al lector en la metodología, la notación y el tipo de herramientas matemáticas que se utilizan a lo largo de todo el libro.

1.1 El campo eléctrico en el vacío

1.1.1 Ley de Coulomb. Definición de campo eléctrico

La ley de Coulomb cuantifica la fuerza que ejercen entre sí dos cuerpos cargados eléctricamente, la cual aparece como un dato de experiencia.

Consideremos dos cuerpos cargados, con cargas q_1 y q_2 respectivamente, de dimensiones reducidas respecto a la distancia que los separa, d . Se comprueba que la fuerza que cada uno de ellos ejerce sobre el otro es:

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (1.1)$$

donde el subíndice 12 quiere decir “sobre 1 debido a 2”. La dirección en que se ejercen tales fuerzas es la de la línea que une ambas cargas. ϵ_0 es la permitividad dieléctrica del vacío, de

valor 8,85418 Faradios / metro (F/m).

La fuerza ejercida sobre un cuerpo no parece tener una existencia real si la separamos del objeto sobre el que actúa. Sin embargo, en teoría electromagnética se trabaja con el concepto de *campo*, como fuerza ejercida por unidad de carga, independientemente de si está causando o no algún efecto sobre otros cuerpos próximos: se define *el campo eléctrico* $\vec{E}(\vec{r})$ en un punto \vec{r} del espacio, creado por un cuerpo cargado, como la fuerza que ejercería sobre la unidad de carga positiva si estuviera situada en dicho punto. Habitualmente se expresa en forma de límite, queriendo indicar que dicha carga de prueba no altera la distribución original de cargas cuyo campo medimos.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_p \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_p} \quad (N/C) = (V/m) \quad (1.2)$$

1.1.2 Cargas puntuales y distribuciones de carga

Cuando se consideran los efectos eléctricos de un cuerpo cargado a distancias mucho mayores que sus propias dimensiones podemos hacer la suposición de que se trata de un objeto de dimensiones despreciables, y que ocupa un único punto del espacio. Esta idealización recibe el nombre de *carga puntual*. La carga puntual se caracteriza por el valor de su carga eléctrica y la posición que ocupa respecto a un determinado sistema de coordenadas. El campo eléctrico creado por una carga puntual, de acuerdo con la definición de campo del apartado anterior y la ley de Coulomb, debe ser:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (1.3)$$

donde \vec{r} es el punto en que medimos el campo y \vec{r}_0 es la posición de la carga puntual de valor q . El vector $\vec{r} - \vec{r}_0$ dividido por su módulo es el vector unitario que indica la dirección del campo.

Las fuerzas que diferentes causas físicas ejercen en un punto de un determinado objeto se suman vectorialmente para dar lugar a una fuerza resultante única. El principio de superposición es aplicable a los campos creados por diferentes distribuciones de carga. El campo eléctrico creado por una distribución de cargas puntuales q_i situadas en puntos \vec{r}_i será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (1.4)$$

con la única salvedad de que si medimos en un punto $\vec{r} = \vec{r}_i$, donde está situada una de las cargas, debería eliminarse la contribución de esa carga q_i , puesto que una carga puntual no ejerce fuerza alguna sobre sí misma.

El estudio de los sistemas de cargas puntuales suele ser un primer paso para abordar otras situaciones más generales. Usualmente la carga se distribuye en la materia semejando un continuo de carga. Para expresarlo matemáticamente se definen las densidades de carga. La densidad volúmica de carga es:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq}{dv} \quad (C/m^3) \quad (1.5)$$

definida en el volumen del cuerpo cargado y nula fuera de él. En muchas ocasiones la carga tiende a concentrarse específicamente en la superficie del medio, por lo que debe utilizarse la densidad superficial de carga:

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{ds} \quad (C/m^2) \quad (1.6)$$

El campo eléctrico creado por un diferencial de carga situado en un punto \vec{r}' es:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.7)$$

y atendiendo a la totalidad de la carga que pueda estar presente en un medio continuo, utilizando (1.5) y (1.6):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds' \right] \quad (1.8)$$

En la ecuación (1.8) se utiliza la notación habitual a lo largo de todo el libro cuando aparezcan procedimientos integrales:

- \vec{r} representa el punto de campo: allí donde se evalúa la magnitud física;
- \vec{r}' es el punto de fuente, y depende de las variables de integración.

Esta ecuación es el primer resultado con aplicación inmediata para el cálculo del campo. Cuando se conoce la distribución de carga y se obtiene el campo eléctrico mediante la ecuación (1.8) se dice que se está aplicando un método de *integración directa*.

Ejemplo 1.1: Calcule el campo eléctrico creado por un plano muy extenso en el que existe una densidad superficial de carga homogénea.

Consideremos un plano de carga de extensión ilimitada como el mostrado en la figura. Trataremos de calcular la magnitud del campo eléctrico que crea en un determinado punto situado a una distancia d del plano. Por comodidad situaremos el origen de coordenadas bajo el punto donde buscamos el campo, pues es equivalente a cualquier otra elección. Los radiovectores \vec{r}' que señalan a los diferentes diferenciales de carga podemos tomarlos por parejas, opuestos respecto al origen, para poner de manifiesto la simetría del problema: se comprueba que el campo total debe ir dirigido en la dirección perpendicular al plano, pues cualquier otra componente se cancelará al integrar.

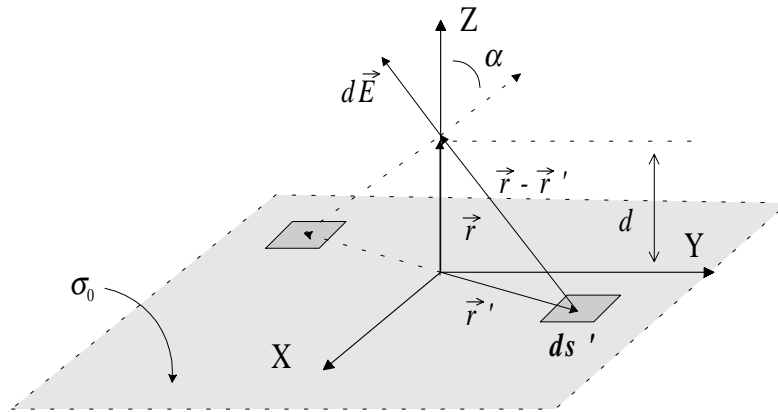


Fig. 1.1 Plano infinito con densidad de carga superficial constante

La expresión diferencial es $d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_0 ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$ y $dE_z = |d\vec{E}| \cos \alpha$

donde $\cos \alpha = \frac{r}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$.

$$\text{De allí llegamos a } E_z(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma_0 r ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Después de obtener la integral que debe resolverse el siguiente paso consiste en escribir correctamente las variables y los diferenciales:

$$\vec{r} = d \hat{z} \quad \vec{r}' = x' \hat{x} + y' \hat{y} \quad ds' = dx' dy'$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -x' \hat{x} - y' \hat{y} + d \hat{z} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = (x'^2 + y'^2 + d^2)^{1/2}$$

y finalmente se obtiene $E_z(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{(x'^2 + y'^2 + d^2)^{3/2}} dx' dy'.$

Esa integral se resuelve fácilmente utilizando coordenadas polares sobre el plano. El resultado es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{z} \quad V/m$$

El campo final es constante e independiente de la posición en que lo midamos (salvo el signo cambiado a un lado y otro del plano). Esto tiene sentido, ya que al ser un plano de extensión infinita no existe término de comparación para saber si se está cerca o lejos de él.

Ejemplo 1.2: Cálculo del campo eléctrico creado por una esfera de radio R cargada con una densidad volúmica constante.

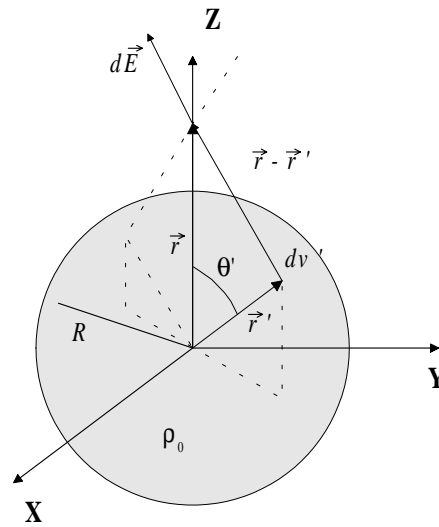


Fig. 1.2 Simetrías en el cálculo del campo creado por una esfera con densidad de carga homogénea

Al igual que en el ejemplo precedente ocurre que las contribuciones diferenciales de los diferentes puntos del volumen se cancelan parcialmente. La componente final de campo deberá ser radial.

Situamos el origen de coordenadas en el centro de la esfera. Nos limitaremos a calcular el campo sobre un punto del eje Z, que al fin es igual a cualquier otro punto: el campo final sólo puede depender de la distancia a la esfera y todas las direcciones radiales son equivalentes.

$$dE_z(\vec{r}) = |d\vec{E}(\vec{r})| \cos \alpha \quad \text{y} \quad \cos \alpha = \frac{r - r' \cos \theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

La integral que debe calcularse es $E_z(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{r - r' \cos \theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$

donde $|\vec{r} - \vec{r}'| = (x'^2 + y'^2 + (d - z')^2)^{1/2}$.

Por la geometría del problema es más adecuado utilizar coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x' = r' \sin \theta' \cos \varphi' \\ y' = r' \sin \theta' \sin \varphi' \\ z' = r' \cos \theta' \end{cases}$$

La integral resultante es: $E_z(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{(d - r' \cos \theta') r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'}{(r'^2 - 2dr' \cos \theta' + d^2)^{3/2}}$

que, a pesar de su aparente dificultad, puede resolverse con un cambio de variable:

$$r'^2 - 2dr' \cos \theta' + d^2 = t^2 \quad \rightarrow \quad 2dr' \sin \theta' d\theta' = 2tdt$$

El resultado final es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \hat{r} & \text{si } r > R \\ \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \hat{r} & \text{si } r < R \end{cases}$$

1.1.3 Ley de Gauss

Se comprueba que, en cualquier situación e independientemente de la forma de la distribución de carga que produce el campo, *el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga neta contenida en el volumen interior*:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T|_S}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{v'} \rho(r) dv' \quad (1.9)$$

Esta relación recibe el nombre de *ley de Gauss*. Puede demostrarse fácilmente a partir de la expresión integral de \vec{E} si se recuerda el concepto de ángulo sólido:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \left(\int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \right) \cdot d\vec{s} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \rho(\vec{r}') \left(\oint_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dv' \end{aligned}$$

porque el término que ahora aparece en la integral de superficie es *la definición del ángulo sólido subtendido por un ds , situado en una posición \vec{r} , respecto al vértice situado en \vec{r}'* . Entonces:

$$\oint_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \begin{cases} 4\pi & \text{para puntos } \vec{r}' \text{ interiores a } S \\ 0 & \text{para puntos } \vec{r}' \text{ exteriores a } S \end{cases} \quad (1.10)$$

por lo que la ecuación (1.9) se satisface.

La ley de Gauss en su forma integral tiene gran interés para deducir otras propiedades del campo eléctrico en contextos particulares, y la utilizaremos con frecuencia en lo sucesivo. También tiene enorme utilidad para el cálculo directo del campo eléctrico, aunque sólo en aquellos problemas donde las distribuciones de carga son suficientemente simétricas.

Ejemplo 1.3: *Obtégase el campo eléctrico producido por una superficie esférica de radio R cargada con una densidad superficial de carga homogénea σ_0 .*

Debido a la simetría de la distribución de carga el campo eléctrico ha de ser de la forma: $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(\vec{r})\hat{r}$.

La existencia de otras componentes (E_θ y E_φ) o la dependencia con los ángulos esféricos no parecen posibles en esta situación (Fig. 1.3). Entonces la ley de Gauss permite obtener el campo:

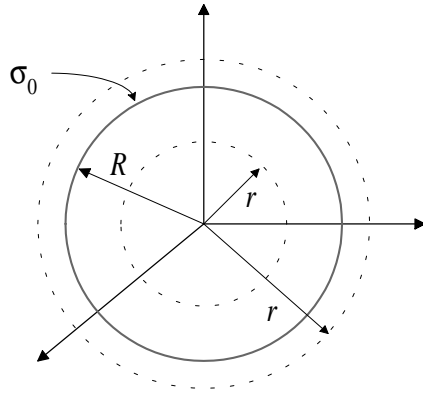


Fig. 1.3

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S E_r(r) \hat{r} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T|_S}{\epsilon_0}$$

Se elige una superficie cerrada donde realizar el cálculo (superficie gaussiana), en la que el campo eléctrico tenga un valor constante en módulo. Para este problema es una superficie esférica de radio r arbitrario.

$$E_r(r) r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{Q_T|_S}{\epsilon_0} \quad Q_T|_S = \begin{cases} 4\pi R^2 \sigma_0 & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

de donde el campo resulta:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

Ejemplo 1.4: Obtenga el campo eléctrico producido por un plano infinito de carga con densidad superficial homogénea, a partir de la ley de Gauss.

De nuevo el primer paso consiste en tratar de visualizar de forma intuitiva cuál debe ser la dirección del campo eléctrico en cada punto, y de qué variables espaciales puede depender.

Una hipótesis razonable es suponer que: $\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z) \hat{z}$ de acuerdo con la situación reflejada en la figura 1.4.

La superficie elegida es S , con forma de caja rectangular, situada simétricamente respecto al plano. En el cálculo del flujo del campo sólo intervienen las bases, de dimensiones S_b , puesto que las paredes laterales son paralelas al campo.

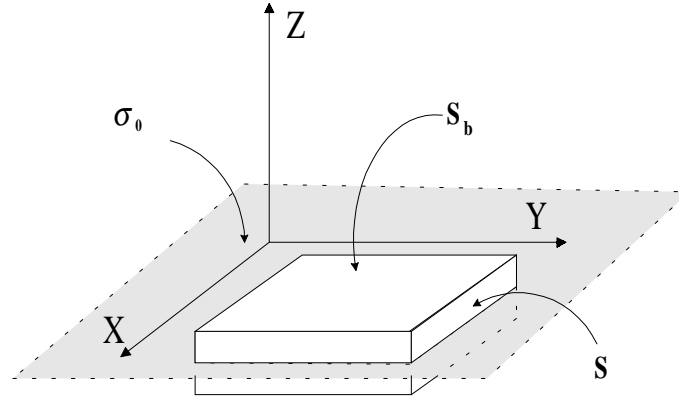


Fig. 1.4 Aplicación de la ley de Gauss a un plano extenso con carga homogénea

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2 \int_{S_b} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2E_z(z) S_b$$

$$Q_T = \sigma_0 S_b$$

de donde $E_z(z) = \sigma_0 / 2\epsilon_0$, que en realidad no depende de z . Es el mismo resultado que se obtuvo por integración directa en el ejemplo 1.1. Para tener en cuenta el cambio de signo a un lado y otro del plano podemos escribir:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \hat{z} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z}.$$

1.1.4 Potencial eléctrico. Carácter conservativo del campo electrostático

Un campo eléctrico produce una fuerza sobre las cargas eléctricas de las proximidades. Cuando las cargas son libres y no experimentan otras fuerzas de ligadura serán arrastradas por la acción del campo. Entonces el campo realiza un desplazamiento físico de las cargas y, por tanto, un trabajo. El potencial eléctrico es la medida de ese trabajo por unidad de carga.

La magnitud que inicialmente tiene sentido físico no es tanto el potencial en cada punto del espacio como la diferencia de potencial entre dos puntos, que se define:

$$\Delta\phi_{BA} = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (V) \quad (1.11)$$

La integral de línea del campo eléctrico es un trabajo por unidad de carga. *La diferencia de potencial entre dos puntos es entonces el trabajo que realiza el campo al trasladar una carga positiva unidad de un punto al otro.* El signo negativo que antecede a la integral es un convenio arbitrario, pero universal y firmemente establecido, de la definición.

$\Delta\phi_{BA}$ es la diferencia de potencial entre el punto B y el A. Se cumple $\Delta\phi_{BA} = -\Delta\phi_{AB}$.

La ecuación (1.11) tiene un significado unívoco debido a una importante propiedad del campo eléctrico, y es su carácter conservativo. Ocurre que *podemos definir la diferencia de potencial entre dos puntos atendiendo únicamente a sus posiciones, sin especificar la trayectoria que deba seguirse para ir de uno al otro*, porque realmente el resultado de la integral no variaría en cualquier caso. Más adelante se probará esta afirmación. De acuerdo con ello podríamos elegir un punto como referencia de potencial y asignar un valor para la función potencial en cada punto del espacio respecto a esa referencia. Esto se hace en la práctica tomando los puntos del infinito (muy alejados de cualquier distribución de carga que consideremos) como referencia u origen de potencial.

$$\Delta\phi_{B\infty} = -\int_{\vec{r}_\infty}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \phi(\vec{r}_B) - \phi(\vec{r}_\infty) = \phi(\vec{r}_B) \quad (1.12)$$

donde el potencial en el infinito toma valor nulo. *El potencial creado por una distribución de carga en un punto del espacio equivale entonces al trabajo que realiza el campo para llevar la carga positiva unidad desde dicho punto hasta el infinito.* El campo eléctrico tiene también valor cero en el infinito (asumiendo siempre que no hay carga en el infinito), por lo que la ecuación (1.12) equivale a:

$$\phi(\vec{r}) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.13)$$

La relación inversa entre el potencial y el campo se puede deducir a partir de esta última expresión.

$$d\phi = -\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \Rightarrow \phi(\vec{r} + d\vec{l}) - \phi(\vec{r}) = -E(\vec{r})\hat{e} \cdot d\vec{l} \hat{l}$$

y por tanto:

$$E(\vec{r})(\hat{l} \cdot \hat{e}) = -\frac{\phi(\vec{r} + d\vec{l}) - \phi(\vec{r})}{dl}$$

El valor máximo de la igualdad anterior se alcanza cuando tomamos un diferencial de trayectoria tal que $\hat{l} = \hat{e}$, donde \hat{e} es la dirección del campo eléctrico en el punto considerado. Entonces *el campo eléctrico es, en módulo, el valor máximo de la derivada direccional del potencial en cada punto, y lleva como dirección aquélla en la que la derivada direccional del potencial se hace máxima*. Eso es exactamente la definición de gradiente de una función.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) \quad (1.14)$$

Un campo vectorial que puede obtenerse como gradiente de una función escalar se denomina *irrotacional* o *conservativo*.

La última característica que debe reseñarse es que la circulación del campo eléctrico a lo largo de una trayectoria cerrada es siempre nula:

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -\oint_C d\phi = \phi_{\vec{r}_A} - \phi_{\vec{r}_A} \equiv 0 \quad (1.15)$$

Continuidad del potencial

La función potencial es continua en cualquier situación. Esto es consecuencia de su relación con el campo eléctrico. Si existiera una discontinuidad del potencial significaría que el campo eléctrico se hace infinito en el punto de discontinuidad, lo que no es posible físicamente.

Ejemplo 1.5: Calcule el potencial eléctrico creado en todo el espacio por la esfera de carga volúmica homogénea del ejemplo 1.2

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \hat{r} & r > R \\ \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \hat{r} & r < R \end{cases}$$

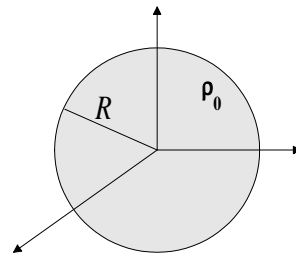


Fig. 1.5

Utilizamos la ecuación (1.13). Podemos utilizar cualquier trayectoria que nos lleve hasta el infinito, pero lo lógico es elegir: $d\vec{l} = dr \hat{r}$. Y se obtiene:

$$r < R$$

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 + C_1$$

$$r > R$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r} + C_2$$

Para calcular las constantes C_1 y C_2 disponemos de dos condiciones:

- el potencial debe cancelarse en el infinito;
- ha de ser continuo en $r = R$.

El resultado final es:

$$r < R$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

$$r > R$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r}$$

1.1.5 Representación espacial del campo y del potencial: líneas de campo y superficies equipotenciales

La representación gráfica de los fenómenos eléctricos se realiza mediante líneas de campo y superficies equipotenciales. *Las líneas de campo son trayectorias continuas tangentes en cada punto del espacio al vector campo eléctrico.* En problemas estáticos, tales como los que estamos considerando, tienen su origen siempre en cargas positivas (o en el infinito) y su final en cargas negativas (o en el infinito). Esto es obligado, puesto que lo que describen es la trayectoria que seguiría una carga positiva abandonada a la acción del campo.

En coordenadas cartesianas un campo tiene la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r}) \hat{x} + E_y(\vec{r}) \hat{y} + E_z(\vec{r}) \hat{z}$$

y el diferencial de longitud genérico es:

$$d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

Las ecuaciones diferenciales que deben resolverse para obtener las trayectorias de las líneas de campo son las que resultan al imponer la condición de paralelismo:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (1.16)$$

La densidad de líneas debe tomarse proporcionalmente a la intensidad del campo en cada zona del espacio.

Por otro lado, *las superficies equipotenciales son el conjunto de los lugares geométricos del espacio en los que el potencial toma el mismo valor.*

$$\phi(\vec{r}) = \phi_i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

donde se eligen los valores para $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ según el criterio de representación que se quiera adoptar. Las superficies equipotenciales y las líneas de campo son perpendiculares allí donde se cruzan: es una consecuencia necesaria de la relación entre campo eléctrico y potencial.

1.1.6 Relación entre el potencial eléctrico y la densidad de carga

El potencial puede obtenerse directamente a partir de las densidades de carga del problema. Sustituyamos la ecuación (1.8) en (1.13):

$$\phi(\vec{r}) = - \int \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \right] \cdot \hat{r} dr = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \rho(\vec{r}') \left[\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dr \right] dv'$$

El problema, por tanto, consiste en resolver la ecuación en r de esa expresión. Resulta algo largo y no lo haremos aquí, pero se propone al lector como ejercicio. El resultado es:

$$\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dr = - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Sustituyendo arriba obtenemos:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (1.18)$$

que es la expresión integral del potencial.

Ejemplo 1.6: A la vista de la ecuación (1.18) deduzca la forma del potencial eléctrico creado por una carga puntual situada en un punto \vec{r}_0 .

La relación entre el campo y el potencial es de integración-derivación, y, consecuentemente, lineal. El principio de superposición es válido para el potencial. De la expresión (1.18) se deduce que la contribución al potencial total de cada diferencial de carga es:

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{con} \quad dq = \rho(\vec{r}') dv'$$

Si tenemos una carga puntual el potencial creado en cualquier punto del espacio debe ser:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (1.19)$$

Ejemplo 1.7: Obtenga el campo y el potencial creados por dos cargas puntuales de valores $+q$ y $-q$ situadas sobre el eje Z en las posiciones $+\frac{s}{2}$ y $-\frac{s}{2}$. Realice una aproximación para el caso en que nos situemos en puntos muy alejados de las cargas.

La expresión del potencial es:
$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \frac{s}{2}\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \frac{s}{2}\hat{z}|} \right].$$

Para hacer la aproximación a grandes distancias trabajaremos con esa función.

$$|\vec{r} \mp \frac{s}{2}\hat{z}| = \left(x^2 + y^2 + \left(z \mp \frac{s}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(r^2 \mp sz + \frac{s^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = r \left(1 \mp s \frac{z}{r^2} + \frac{s^2}{4r^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

si $r \gg s$ podemos hacer la siguiente aproximación:

$$|\vec{r} \mp \frac{s}{2}\hat{z}|^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp s \frac{z}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{1}{2} s \frac{z}{r^2} \right) = \frac{1}{r} \pm \frac{1}{2} s \frac{z}{r^3}$$

y de allí llegamos a:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \frac{s}{2}\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \frac{s}{2}\hat{z}|} \approx s \frac{z}{r^3}$$

La expresión aproximada para el potencial es:

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs}{r^2} \cos\theta \quad (1.20)$$

El campo eléctrico puede obtenerse ahora a partir del potencial.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qs}{r^3} \cos\theta \\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs}{r^2} \sin\theta & \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0 \end{cases}$$

y de allí:
$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs}{r^3} (2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}) \quad (1.21)$$

Ejemplo 1.7 (continuación): *Represente gráficamente las líneas de campo y las superficies equipotenciales correspondientes al problema anterior.*

Líneas de campo: Las componentes (esféricas) del campo eléctrico son:

$$E_r = K \frac{2qs}{r^3} \cos\theta \quad E_\theta = K \frac{qs}{r^3} \sin\theta \quad E_\varphi = 0$$

y en coordenadas esféricas el diferencial de longitud genérico:

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\varphi}$$

Por lo que la ecuación que rige las trayectorias es:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} = 2 \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta}$$

y la solución general: $r = C \sin^2 \theta$, donde la constante C toma valores diversos para las diferentes trayectorias.

Superficies equipotenciales: La ecuación que se obtiene es $r^2 = C' \cos \theta$.

En la figura se muestra la forma de las superficies (línea delgada) y las líneas de campo (línea gruesa) en un plano.

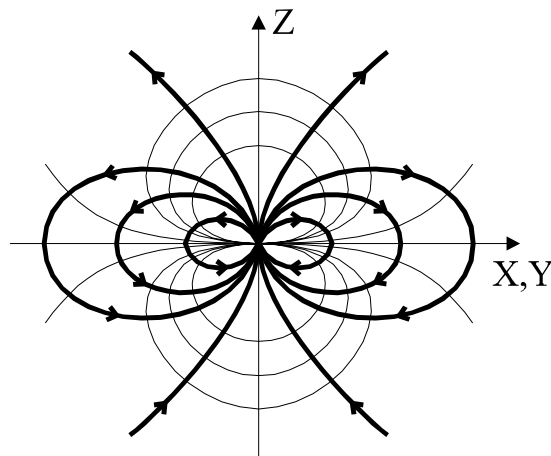


Fig. 1.6 Líneas de campo y superficies equipotenciales para un dipolo eléctrico orientado verticalmente

1.1.7 El campo eléctrico y el potencial en conductores

Los conductores se caracterizan por contener en su estructura una muy alta densidad de portadores de carga libres. El modelo microscópico más sencillo nos muestra al conductor como una red iónica de carga positiva rodeada de una nube de electrones. En presencia de campos eléctricos esta nube de electrones se desplaza dentro de los límites del conductor en busca de la posición de mínima energía (equilibrio estable), en la que las interacciones eléctricas quedan compensadas.

En el equilibrio cesa cualquier fuerza sobre cualesquiera de los portadores móviles en el conductor, y por lo tanto, la primera condición que debe satisfacerse es:

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv 0 \quad \forall \vec{r} \quad (1.22)$$

Esa suposición la aplicaremos siempre en electrostática y, como veremos en posteriores capítulos, también es habitual en dinámica (con ondas electromagnéticas), aunque con algunas restricciones. La consecuencia inmediata de la ecuación (1.22) es que la diferencia de potencial entre dos puntos del conductor es siempre nula, y *los medios conductores son entonces volúmenes equipotenciales*.

Si elegimos una superficie cerrada cualquiera que englobe un volumen dentro del conductor (Fig. 1.7) y calculamos el flujo del campo eléctrico obtendremos:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \equiv 0$$

y como ese resultado no depende de la superficie elegida debemos concluir que:

$$\rho(\vec{r}) \equiv 0 \quad \forall \vec{r} \subset V \quad (1.23)$$

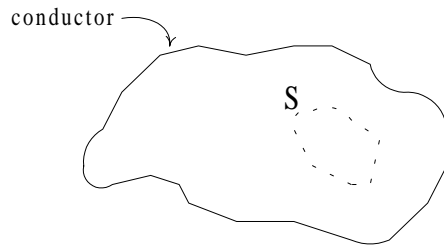


Fig. 1.7 Ley de Gauss en el interior de un conductor

El resultado anterior no implica que no haya cargas eléctricas en el interior del conductor, puesto que permanece la red iónica y los electrones libres; sin embargo, ambas distribuciones de carga se cancelan punto a punto, de manera que no hay carga neta ni efectos eléctricos macroscópicos. Podría escribirse:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_{iones}^+(\vec{r}) + \rho_{electr.}^-(\vec{r}) \equiv 0$$

Si aplicamos la ley de Gauss a una superficie cerrada que no está íntegramente contenida dentro del medio conductor la situación es diferente (Fig. 1.8).

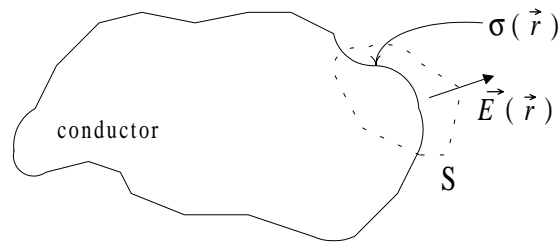


Fig. 1.8 *Ley de Gauss aplicada en una superficie S que engloba una parte de la superficie de un conductor*

En este caso no debe esperarse que el campo eléctrico sea necesariamente cero dentro del volumen definido por la superficie gaussiana; entonces puede existir un flujo de campo a través de ella, y eso nos indica que en general hay algún tipo de distribución de carga englobada por la superficie. *Existe usualmente en los conductores una densidad superficial de carga eléctrica.* Aparece cuando el conductor posee una carga global neta distinta de cero (ha sido cargado de algún modo), o por efecto del desplazamiento de la nube electrónica, que se ha redistribuido para neutralizar campos externos que pretendían instalarse dentro del conductor.

Ejemplo 1.8: *Una esfera conductora de radio R está cargada con una carga neta Q . ¿Cómo se distribuye esta carga en la esfera?*

Debe distribuirse exclusivamente por la superficie, puesto que en el conductor en equilibrio no puede haber carga volúmica.

Además la densidad superficial de carga será homogénea, como cabe esperar de la simetría del conductor, y porque ya vimos que una densidad esférica de carga constante no produce campo eléctrico neto en los puntos del interior de la esfera (Ej. 1.3), lo que es necesario en este caso al tratarse de un conductor (Ec. 1.22).

La densidad superficial de carga dejará de ser homogénea si situamos la esfera conductora en el seno de un campo eléctrico externo. Más adelante (ejemplo 1.10) se tratará con detalle este problema.

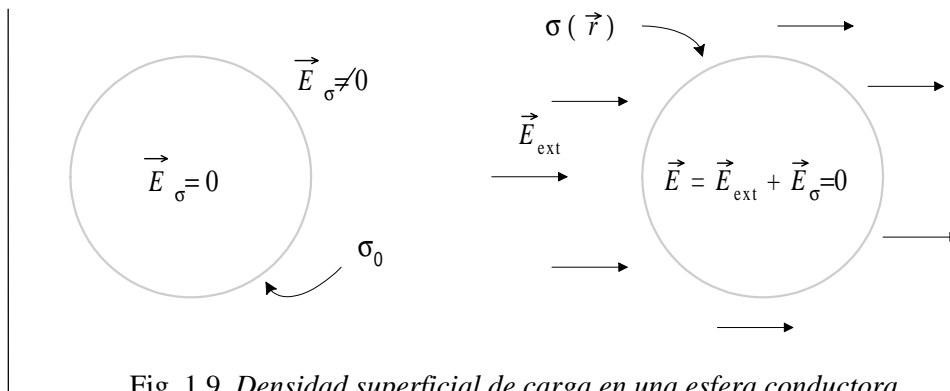


Fig. 1.9 Densidad superficial de carga en una esfera conductora

Ejemplo 1.9: Considérese una barra conductora cilíndrica, de longitud L , radio a , y con carga neta Q . ¿Cómo se distribuye la carga por la superficie de la barra en ausencia de campos externos?

Este problema, a pesar de su aparente sencillez, no puede ser resuelto si no es mediante métodos numéricos.

Las condiciones que deben satisfacerse son:

$$\begin{aligned} i) \quad & \oint_S \sigma(\vec{r}) ds = Q \\ ii) \quad & \phi(\vec{r}) = cte \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \subset \text{barra} \end{aligned}$$

Dividimos el conductor en pequeñas secciones transversales, de longitud Δl , de manera que podamos asignar a la superficie lateral de cada sección i un valor constante de densidad superficial de carga σ_i (Fig. 1.10). Hacemos la aproximación además de que las superficies circulares de ambos extremos de la barra tienen una densidad de carga constante σ_e .

Las ecuaciones anteriores se escriben ahora de la forma:

$$\begin{aligned} i) \quad & 2\pi a^2 \sigma_e + \sum_{i=1}^N 2\pi a \Delta l \sigma_i = Q \\ ii) \quad & \left| E_{ext.izq.}^j \right| + \sum_{i=1}^{j-1} \left| E_i^j \right| = \left| E_{ext.dcho.}^j \right| + \sum_{i=j+1}^N \left| E_i^j \right| \end{aligned}$$

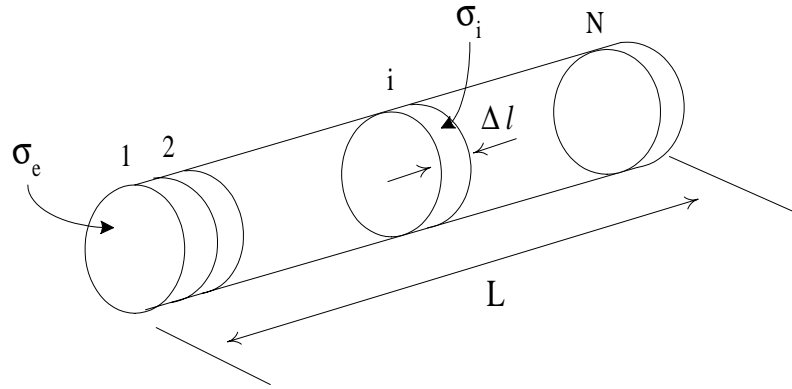


Fig. 1.10 Partición de una barra conductora para el cálculo de la distribución de carga por un método numérico

La ecuación ii) es otra forma de escribir que el campo debe ser cero en todos los puntos de la barra: las secciones situadas a la izquierda de una sección j cualquiera han de producir un campo igual en módulo (de sentido contrario) al que las secciones de la derecha producen en esa misma sección. Las expresiones de los campos se pueden tomar en primera aproximación como:

$$\begin{aligned} |E_{ext,izq.}^j| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_e \pi a^2}{\left[(j - \frac{1}{2}) \Delta l\right]^2} & |E_{ext,dcho.}^j| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_e \pi a^2}{\left[(N - j + \frac{1}{2}) \Delta l\right]^2} \\ |E_i^j| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_i \Delta l 2\pi a}{\left[(j - i) \Delta l\right]^2} \end{aligned}$$

donde el cálculo del campo se ha realizado en el centro de cada sección de barra.

De esta manera obtenemos un sistema de $N/2+1$ ecuaciones (si N par), y el mismo número de incógnitas. La precisión del cálculo es función de N , pero también mejorará si utilizamos expresiones para el campo menos aproximadas que la escritas arriba. Por ejemplo, esto puede ser especialmente importante cuando se considera la contribución al campo total sobre una sección de las secciones más próximas a ella (i y j cercanos). En ese caso, una mejor expresión es:

$$|E_i^j| = \frac{\sigma_i}{2\epsilon_0} a \left[\frac{1}{\left[a^2 + \left(|j-i| - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta l^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[a^2 + \left(|j-i| + \frac{1}{2}\right)^2 \Delta l^2\right]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

La expresión primera es, de hecho, el límite de esta última si se cumple que $(j-i) \Delta l \gg a$. Por otra parte se sobreentiende que la validez del procedimiento está supeditada a tomar un número suficiente de secciones, de modo que $a \gg \Delta l$.

Por último debe señalarse que la consideración de carga homogénea en las bases puede ser insuficiente si la barra es gruesa. En general debería permitirse una variación radial, descomponiendo cada base en anillos con densidades diferentes.

1.1.8 El campo eléctrico en la superficie de un conductor

La carga eléctrica superficial de un conductor provoca la aparición de campos eléctricos en sus inmediaciones. *El campo eléctrico es siempre perpendicular a la superficie del conductor*, que es una superficie equipotencial. Si no fuese así las cargas superficiales estarían en movimiento continuo, debido a la componente tangencial no nula del campo. En la figura 1.11 se muestra cualitativamente la forma de los campos en las proximidades de un conductor en dos situaciones típicas.

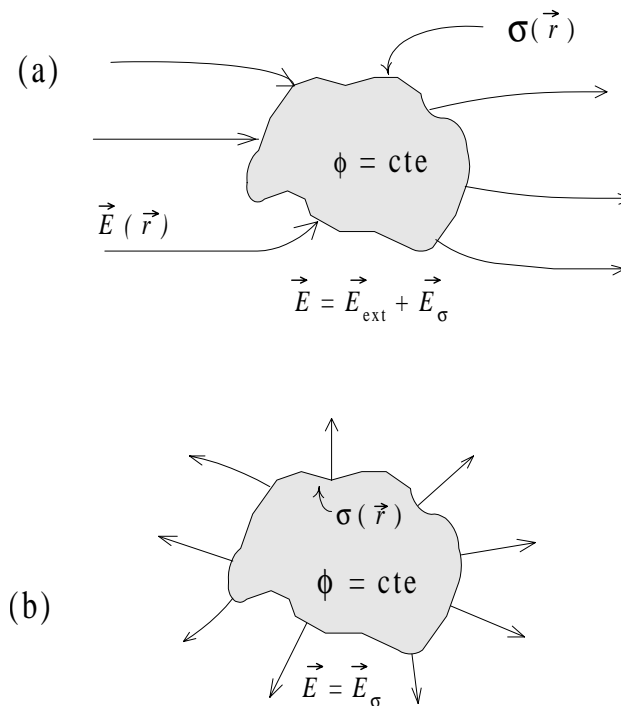


Fig. 1.11 a) Campo eléctrico en presencia de un conductor;
b) campo eléctrico producido por un conductor cargado

En la primera de ellas un campo externo provoca la aparición de una densidad superficial de carga, $\sigma(\vec{r})$, cuyo campo se suma al campo externo para dar el campo final.

En el segundo caso no hay campo exterior pero el conductor está cargado, por lo que produce su propio campo E_σ , mediante la densidad superficial de carga.

La relación entre la densidad superficial de carga y el valor del campo eléctrico en cada punto de la superficie se obtiene como una consecuencia de la ley de Gauss aplicada a este caso particular. Sea una superficie cerrada en forma de cajita, situada de forma que intersecta con la superficie del conductor (Fig. 1.12). Denominamos h a la altura de la cajita y S_b a la superficie de su base.

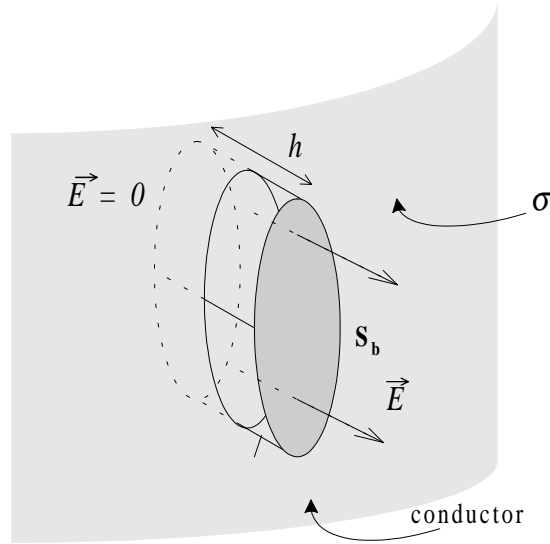


Fig. 1.12

El flujo del campo a través de la superficie gaussiana es:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T|_S}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_b} \sigma(\vec{r}) dS$$

Si llevamos la expresión al límite, cuando h tiende a cero y cuando S_b tiende a un valor diferencial dS_b , estamos examinando el campo en un punto de la superficie. El campo es nulo en la parte interna del conductor y, por tanto, podemos escribir:

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{r}) dS_b$$

y de allí:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (1.24)$$

donde \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie dirigido hacia fuera del conductor en el punto considerado.

1.1.9 Problemas de potencial. Ecuaciones de Laplace y Poisson

Las expresiones integrales del campo y del potencial eléctricos, como funciones de las densidades de carga [Ecs. (1.8) y (1.18)], son útiles cuando se conocen de antemano tales distribuciones. Sin embargo ésta no es con mucho la situación habitual. Por lo general la presencia de conductores y, como se verá más adelante, de dieléctricos, provoca la aparición de distribuciones de carga difíciles de hallar. Es por eso que el planteamiento típico de los problemas electromagnéticos puede ser integral, pero más frecuentemente es diferencial. Usualmente nos enfrentaremos a ecuaciones diferenciales que deben resolverse para alguna zona del espacio, y donde tenemos fijadas ciertas condiciones de contorno que deberán satisfacerse. En este apartado nos centraremos en las ecuaciones usuales para el campo y el potencial.

La ley de Gauss en forma diferencial es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (1.25)$$

que se obtiene de la expresión integral por aplicación del teorema de la divergencia. Es la ecuación diferencial primera para el campo eléctrico. A diferencia de la expresión integral ahora *tenemos una relación entre el campo y la densidad de carga que debe cumplirse punto a punto en la zona del espacio que se considere*. Es fácil de ver entonces que la condición que debe satisfacer el campo en aquellos puntos del espacio donde no haya carga eléctrica (aunque exista carga en las proximidades) es la de tener divergencia nula.

Del carácter conservativo del campo eléctrico se deduce la segunda ecuación, que es:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.26)$$

Esta ecuación está estrechamente relacionada con la ecuación (1.14), en la que se expresaba el campo como el menos gradiente del potencial eléctrico. En realidad todo gradiente de una función escalar es irrotacional (su rotacional es nulo), y viceversa: si un campo vectorial es irrotacional es seguro que podrá hallarse una función escalar tal que su gradiente coincida con el campo vectorial.

Sustituyendo el campo en la ecuación (1.25) en función del potencial tendremos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla \phi) \equiv -\nabla^2 \phi \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (1.27)$$

que se denomina *ecuación de Poisson*. La divergencia de un gradiente es la laplaciana, ∇^2 , del campo escalar. En coordenadas cartesianas se expresa sencillamente como:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

y físicamente viene a representar la variación promedio del potencial en los alrededores inmediatos de cada punto del espacio. En los problemas habituales de potencial esta ecuación debe resolverse para obtener una solución genérica, y quedarán dos constantes por determinar mediante condiciones de contorno. Singular importancia tiene la ecuación diferencial del potencial en aquellos puntos del espacio en los que no hay carga eléctrica, denominada *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.28)$$

La solución general de esta ecuación es también parte de la solución de la ecuación de Poisson, a la que habrá que añadir la solución particular en función de la carga eléctrica. La expresión en cartesianas de la laplaciana se ha escrito arriba. Para los otros dos sistemas habituales de coordenadas puede consultarse el anexo B.

Ejemplo 1.10: Una esfera conductora sin carga neta, de radio a , se sitúa en el seno de un campo eléctrico constante, de módulo E_0 . Obtenga la distribución final del campo eléctrico, el potencial de la esfera y la densidad de carga resultante.

Por acción del campo eléctrico la nube de electrones de la esfera conductora se redistribuye, acercándose a la superficie en la dirección contraria a la de \vec{E} . Aparece una densidad de carga superficial no homogénea en el conductor. Como tal distribución no es fácilmente calculable no podemos tratar de obtener \vec{E} ó $\phi(\vec{r})$ directamente por procedimientos integrales. La alternativa es obtener la solución de la ecuación de Laplace en el espacio que circunda a la esfera:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{para } r > a.$$

Tomaremos el campo eléctrico externo en la dirección Z por comodidad:

$$\vec{E}_{ext}(\vec{r}) = E_0 \hat{z}$$

El problema tiene entonces simetría azimutal, y todas las magnitudes implicadas (densidad superficial de carga, campo y potencial finales) , han de ser invariantes con el ángulo ϕ . La ecuación de Laplace es ahora:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1.29)$$

y la solución a esta ecuación es bien conocida:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(A_i r^i + B_i r^{-(i+1)} \right) P_i(\cos \theta) \quad (1.30)$$

donde $P_i(\cos \theta)$ representa el polinomio de Legendre de orden i . Los polinomios de Legendre son aquellos que satisfacen la ecuación diferencial del mismo nombre, y, en la práctica se obtienen mediante la fórmula de Rodrigues:

$$P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} (x^2 - 1)^i$$

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \quad \dots$$

El que puedan ser necesarios más o menos términos del sumatorio en la ecuación (1.30) depende de las condiciones de contorno que deban satisfacerse. En nuestro problema particular estas condiciones son:

$$i) \quad \phi(r = a) = cte. \quad y \quad ii) \quad \vec{E}(\vec{r}) \Big|_{r \rightarrow \infty} = E_0 \hat{z}$$

La primera condición fuerza la relación: $A_i = -B_i a^{-(2i+1)} \quad \forall i$. Por otro lado el campo eléctrico debe ser:

$$\begin{cases} E_r(r, \theta) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\sum \left(i A_i r^{i-1} - (i+1) B_i r^{-(i+2)} \right) P_i(\cos \theta) \\ E_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\sum \left(A_i r^{i-1} + B_i r^{-(i+2)} \right) \frac{dP_i(\cos \theta)}{d\theta} \\ E_\phi(r, \theta) = 0 \end{cases}$$

y su valor limite cuando nos alejamos de la esfera :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \hat{z} = E_0 (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$$

que es el campo externo sin perturbar por la presencia de la esfera. Esta segunda condición fuerza la cancelación de todos los términos de la ecuación (1.30) salvo los dos primeros: $A_i, B_i = 0 \quad \forall i > 1$ y además: $A_1 = -E_0$ y $B_1 = -A_1 a^3 = E_0 a^3$.

La solución es finalmente:

$$\vec{E}(r, \theta) = E_0 \hat{z} + \frac{1}{r^3} E_0 a^3 (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

La densidad de carga resultante en la esfera es:

$$\sigma(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} \big|_S = \epsilon_0 E_r \big|_{r=a} = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

Por último debe añadirse que el potencial en la esfera está indeterminado. No tenemos ninguna referencia respecto a la que medirlo porque el campo exterior está infinitamente extendido en el espacio, desde $z = -\infty$ hasta $z = +\infty$, y esta suposición implica que hay cargas en el infinito, que son las que están produciendo el campo. Consecuentemente no podemos fijar un potencial de referencia en el infinito.

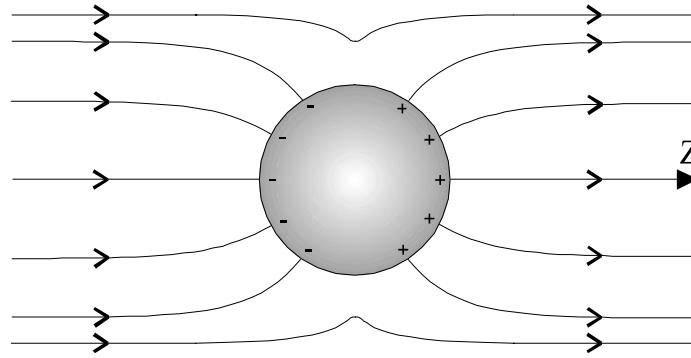


Fig. 1.13 Esfera conductora en el seno de un campo eléctrico uniforme

Ejemplo 1.11 : Un cable coaxial está formado por dos conductores cilíndricos, de radios a y b . El conductor exterior se pone a potencial V y el interior se conecta a tierra. Obtenga el campo eléctrico entre los conductores.

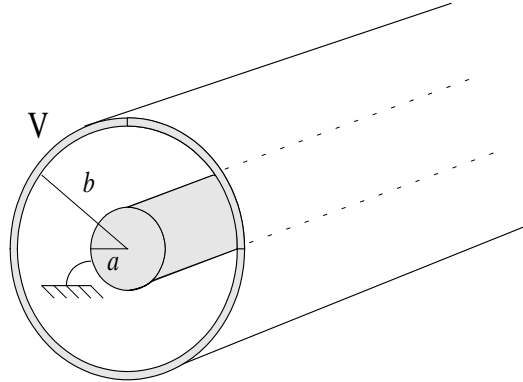


Fig. 1.14 Cable coaxial

Debido a la simetría cilíndrica del problema podemos asegurar que las densidades superficiales de carga en los conductores serán homogéneas, aunque de momento desconozcamos su valor. Esa consideración nos permitiría aplicar la ley de Gauss en forma integral para obtener el campo que, posteriormente, pondríamos en relación con la diferencia de potencial V entre los conductores. Esa vía se propone como ejercicio.

La alternativa es obtener la función potencial mediante la resolución de la ecuación de Laplace. Podemos afirmar que nuestro potencial sólo será función del radio: $\phi(\vec{r}) = \phi(\rho)$, y por tanto:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = 0$$

La solución a esa ecuación es: $\phi(\rho) = A \ln \rho + B$, y por aplicación de las condiciones de contorno: $\phi(\rho = a) = 0$, $\phi(\rho = b) = V$, se llega a:

$$\phi(\rho) = V \frac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)} \quad \text{y} \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{V}{\rho \ln(b/a)} \hat{\rho}$$

Ejemplo 1.12: Una esfera conductora hueca, sin carga neta, de radio interior a y exterior b , contiene en su interior una carga puntual de valor q , en alguna posición arbitraria \vec{r}_0 . ¿Cuál será el campo en el exterior de la esfera?

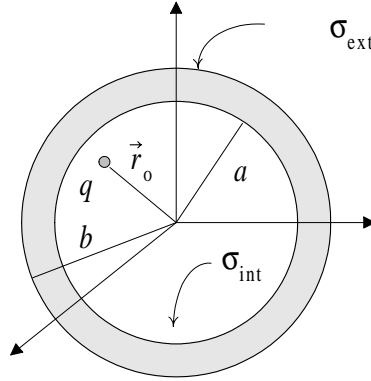


Fig. 1.15

Utilizamos de nuevo la ecuación de Laplace para calcular el potencial en el exterior. Debe observarse que si situamos la esfera conductora centrada en el origen de coordenadas podremos asegurar que el potencial externo es de la forma

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r) \quad \forall r > b$$

y esto sin conocer cómo sean las distribuciones de carga del problema. La razón es que quien manda a la hora de determinar las condiciones de contorno para el potencial es únicamente la superficie equipotencial que constituye el conductor. En estas circunstancias, de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, podemos deducir que la forma del potencial será:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{A}{r} + B \quad \forall r > b$$

donde, además, $B=0$ por la condición de potencial nulo en el infinito. No sabemos cuál es el potencial de la esfera, y nos queda la constante A sin determinar. Para finalizar el problema debemos aplicar la ley integral de Gauss, lo que resulta útil porque ahora sabemos que el campo exterior sólo tiene componente radial, consecuentemente con la forma del potencial. El resultado final es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \forall r > b$$

Por tanto, el conductor realiza un apantallamiento parcial de la carga eléctrica situada en su interior: no en lo que se refiere a su valor neto, que da la magnitud del campo, pero sí en cuanto a que no importa cuál sea su posición en el interior de la esfera. Compruebe que si la esfera conductora estuviese conectada a un potencial fijo V el valor del campo en el exterior sería independiente también del valor de la carga puntual.

1.1.10 Condiciones que determinan el campo en una región

La segunda identidad de Green es un teorema matemático que establece:

$$\int_V [\phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \phi] dv = \oint_S \left[\phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds \quad (1.31)$$

para cualesquiera funciones escalares ϕ y Ψ definidas en el volumen V , y con S la superficie cerrada que limita a V .

Si identificamos la función ϕ con nuestra función potencial y elegimos:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{función de Green}) \quad (1.32)$$

se obtiene una expresión de interés para el potencial:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left[\phi \frac{\partial \Psi}{\partial n'} - \frac{\partial \phi}{\partial n'} \Psi \right] ds' \quad (1.33)$$

donde $\rho(\vec{r})$ es la densidad volúmica de carga y n es la normal a la superficie en cada punto. La ecuación precedente no tiene para nosotros tanto una importancia práctica como teórica. Su significado es que *el potencial en un cierto volumen depende exclusivamente de la carga interior al volumen y de las condiciones de contorno en la superficie cerrada que lo rodea*. Tal superficie puede ser una superficie física de separación con algún otro medio, o una superficie imaginaria, definida de modo matemático, gráfico, o de alguna otra manera.

El teorema de unicidad del potencial está basado en la ecuación (1.33) y se enuncia así: *“fijadas la densidad volúmica de carga en un determinado volumen y las condiciones de contorno, para el potencial y para su derivada respecto a la normal, en la superficie que lo limita, el valor del potencial en todo el volumen está unívocamente determinado”*.

En la práctica suelen encontrarse dos tipos de superficies: superficies conductoras y la superficie del infinito. Podría tratarse también de una superficie dieléctrica, en un cambio de medio, pero de momento no trataremos esa posibilidad.

Cuando tenemos *una superficie conductora* ocurre que la derivada del potencial respecto a la normal en cada punto coincide con el campo eléctrico en la superficie. Entonces el campo no es realmente independiente del valor de la carga interna al volumen y del valor del potencial en el conductor, por lo que, de hecho, no constituye una condición separada. Si se conoce $\rho(\vec{r})$ en el volumen y el potencial en la superficie, el problema está, pues, unívocamente determinado. A esta clase de problemas se les denomina *problemas de Dirichlet*. La alternativa es que conozcamos la densidad volúmica de carga y el valor de la derivada del potencial respecto a la normal (el campo) en la superficie. En ese caso quedará una constante por determinar al calcular el potencial. Se habla entonces de *problema de Neumann*.

La *superficie del infinito* puede tratarse como una superficie conductora a potencial cero (si no hay carga en el infinito). Desde este punto de vista el problema de potencial donde se conoce la densidad de carga presente en el espacio ilimitado es un problema de Dirichlet, y su solución general es la dada por la ecuación (1.18).

Ejemplo 1.13: Una esfera conductora hueca de radio interior a y exterior b se conecta a un potencial V . A una distancia d del centro de la esfera ($d > b$) se encuentra una carga puntual de valor q . ¿Cuál es el potencial en el interior de la esfera?

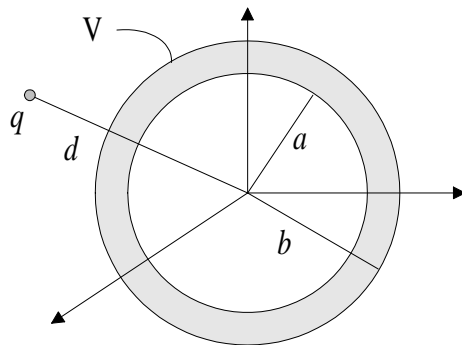


Fig. 1.16

En el interior debe cumplirse $\nabla^2 \phi = 0$ y además la condición de contorno $\phi(r = a) = V$. Como se trata de un problema de Dirichlet tendrá solución única, y como que la simple función $\phi(\vec{r}) = V$ satisface ambas condiciones, ésta debe ser la solución buscada. Obsérvese que se trata de un volumen cerrado, tal como se estableció al hablar de la unicidad del potencial. De nuevo un conductor conectado a una tensión externa apantalla el efecto de una carga eléctrica.

La utilidad práctica del teorema de unicidad consiste en que *nos permite ignorar las densidades superficiales de carga existentes en la superficie límite del volumen donde calculamos el potencial, así como otras posibles cargas exteriores al volumen*. Esa información, que sería imprescindible si planteáramos el problema por medio del cálculo integral directo, la sustituimos por el conocimiento de la condición de contorno.

Método de las imágenes

El método de cálculo que se sigue usualmente en la práctica es un método inverso, denominado *método de las imágenes*. Cuando en nuestro problema intervienen densidades superficiales inducidas por la presencia de otras distribuciones de carga, de manera que su cálculo es complicado, lo que se hace *es crear una situación equivalente a la actual pero de más fácil resolución*. La equivalencia se consigue reproduciendo artificialmente las condiciones de contorno por la inclusión de cargas externas al volumen de interés.

Ejemplo 1.14: Calcule el campo eléctrico producido en todo el espacio por una carga puntual situada frente a un plano conductor conectado a tierra.

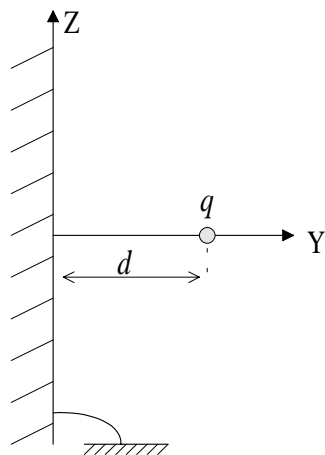


Fig. 1.17

A pesar de su aparente sencillez, el problema no puede resolverse de forma directa, porque la presencia de la carga puntual provoca la aparición de una densidad superficial de carga: los portadores libres del conductor tenderán a concentrarse en alguna medida en el punto del plano más cercano a la carga puntual, atraídos por ésta. Pero esa densidad de carga inducida no puede calcularse de forma sencilla.

La alternativa es plantear un problema equivalente, donde las características esenciales del problema queden inalteradas.

Lo esencial a un problema de potencial, de Neumann o de Dirichlet, es la carga existente en el interior del volumen considerado y las condiciones de contorno alrededor del mismo. La primera objeción para considerar este caso como un problema bien definido de potencial es que no es un volumen cerrado, y, sin embargo, podemos tomar la superficie del infinito para completarlo. En la figura 1.18 se muestra el esquema de este planteamiento.

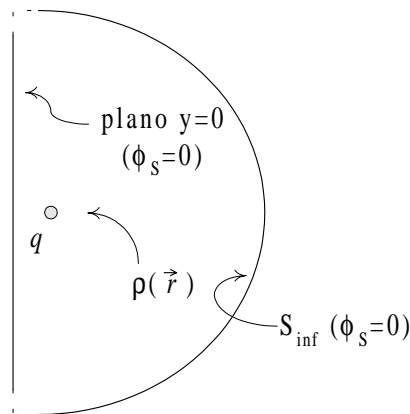


Fig. 1.18 La misma situación de la figura anterior aparece como un problema de Dirichlet al considerar la superficie del infinito

La cuestión es ahora obtener una situación equivalente resoluble. Esto se consigue eliminando el plano conductor y situando una carga imagen al otro lado del plano, como aparece en la figura 1.19.

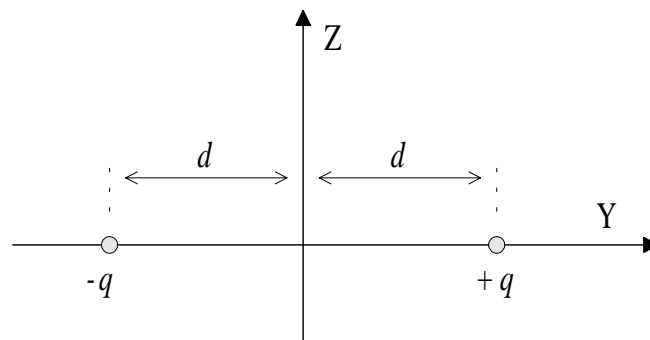


Fig. 1.19 Problema equivalente al representado en la figura 1.17

Si la nueva carga es de igual valor y distinto signo a la original y está situada a la misma distancia del plano, es claro que el potencial en el plano $y=0$ será nulo. Por otro lado, el potencial en el infinito permanece igual a cero. Entonces *el problema original y el de la figura 1.19, en cuanto que problemas de potencial, son el mismo en el semiespacio derecho, y la solución de ambos es idéntica.*

Tendremos:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - d\hat{y}|} + \frac{-q}{|\vec{r} - (-d\hat{y})|} \right) \quad y \geq 0$$

y

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - d\hat{y}}{|\vec{r} - d\hat{y}|^3} - \frac{\vec{r} + d\hat{y}}{|\vec{r} + d\hat{y}|^3} \right) \quad y > 0$$

En cuanto al semiespacio izquierdo (en el problema original) no puede haber ninguna duda:

$$\phi(\vec{r}) = 0, \quad \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad y < 0$$

Ejemplo 1.15: a) Comprobar que dos cargas puntuales de valor q y q' alineadas con el origen de coordenadas, y situadas a una distancia d y d' respectivamente del mismo, dan lugar a una superficie equipotencial esférica de radio a , centrada en el origen y con valor de potencial cero cuando se satisfacen las siguientes relaciones:

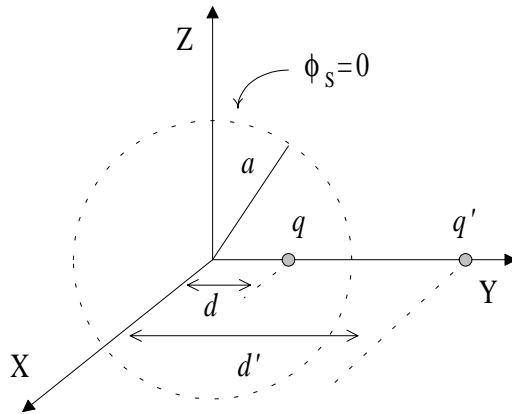


Fig. 1.20

$$q' = -q \frac{a}{d}$$

$$d' = a^2/d$$

El potencial creado por ambas cargas en todo el espacio es:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{(x^2 + (y-d)^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{q'}{(x^2 + (y-d')^2 + z^2)^{1/2}} \right)$$

Si examinamos el valor del potencial en $r=a$, utilizando los valores de d' y q' propuestos:

$$\phi(r=a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(a^2 - 2yd + d^2)^{1/2}} - \frac{a/d}{(a^2 - 2ya^2/d + a^4/d^2)^{1/2}} \right)$$

y después de algunas operaciones, se comprueba que es igual a cero.

b) Utilizar el resultado anterior para calcular mediante el método de las imágenes el potencial en el interior de la esfera del ejemplo 1.12 .

El resultado anterior se puede interpretar en el sentido de que la imagen de una carga puntual respecto a un conductor esférico a potencial cero es otra carga puntual, de valor y posición bien precisas.

En el ejemplo 1.12 teníamos una carga puntual q en el interior de una esfera hueca conductora. Supongamos que dicha carga está en la posición $r_0\hat{y}$. Una situación equivalente de fácil resolución debería reproducir la condición del potencial en $r=a$ (radio interno de la cavidad) para permitirnos ignorar el conductor. Para ello situamos otra carga puntual en el exterior, de valor q' y en la posición d' que se daban en el apartado anterior. Este es un buen inicio, porque ya tenemos un potencial uniforme allí donde estaba la cara interna de la esfera. Pero no reproduce completamente la situación porque en nuestro problema (ejemplo 1.12) el potencial de la esfera no era nulo. ¿Cómo resolver esta eventualidad?

$$\text{El potencial de la esfera es: } \phi(r=a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

Acudiendo de nuevo al teorema de unicidad se puede afirmar que el potencial en el interior es:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - r_0\hat{y}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{|\vec{r} - a^2/r_0\hat{y}|}$$

Razónelo.

1.1.11 Energía electrostática

Toda distribución espacial de carga posee una energía potencial eléctrica, porque es capaz de realizar un trabajo sobre otras cargas. Cuando hablamos de energía potencial estamos implícitamente reconociendo una referencia de energía cero, respecto a la que medimos los sucesivos incrementos de energía que pueda recibir algún elemento de nuestro

sistema. Es importante en las cuestiones relacionadas con la energía explicitar con claridad cuál es nuestro sistema y cuál es la referencia de energía nula que estamos tomando.

La energía potencial eléctrica debe coincidir con la energía de formación del sistema: aquella energía que fue necesario aportar para construir la distribución de carga a partir de una situación inicial de máxima dispersión (energía nula).

La energía electrostática se considera de modo diverso si tratamos con densidades continuas de carga o con colecciones de cargas puntuales. La carga puntual es una aproximación ideal, pero propiamente no tiene sentido físico, y el motivo es precisamente que para concentrar una cantidad finita de carga en un volumen nulo necesitaríamos aplicar una energía infinita. En sistemas de cargas puntuales se habla con más propiedad de energía de reunión que de energía de formación del sistema.

Considérese *un conjunto de N cargas puntuales* de valores q_i situadas en posiciones \vec{r}_i . Vamos a tratar de calcular la energía que hubo que aplicar para formar el sistema, partiendo de una situación inicial en la que las cargas estaban infinitamente separadas unas de otras. Para ello iremos trayendo ordenadamente las cargas desde el infinito hasta sus posiciones respectivas, y contabilizando los aportes de energía sucesivos.

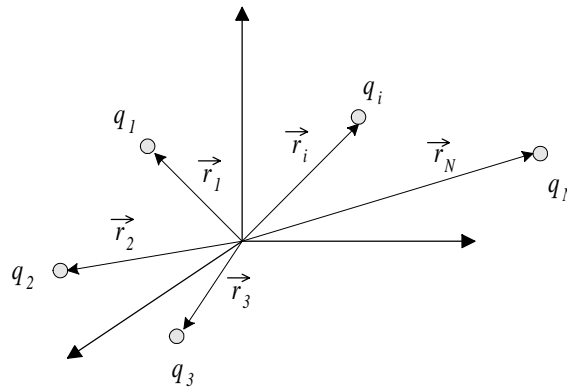


Fig. 1.21 Sistema de N cargas puntuales

$$\begin{aligned}
 U_{\text{inicial}} &= 0 \\
 q_1 &\rightarrow \vec{r}_1 ; & \Delta U_1 &= 0 \\
 q_2 &\rightarrow \vec{r}_2 ; & \Delta U_2 &= q_2 \phi_1(\vec{r}_2) \\
 q_3 &\rightarrow \vec{r}_3 ; & \Delta U_3 &= q_3 (\phi_1(\vec{r}_3) + \phi_2(\vec{r}_3)) \\
 &\vdots & & \\
 q_N &\rightarrow \vec{r}_N ; & \Delta U_N &= q_N \sum_{i=1}^N \phi_i(\vec{r}_N)
 \end{aligned}$$

La energía final es:

$$U = \sum_{i=1}^N \Delta U_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi(\vec{r}_i) \quad (1.34)$$

Se empleó la notación $\phi_j(\vec{r}_i)$ para el potencial creado por la carga q_j en el punto \vec{r}_i y $\phi(\vec{r}_i)$ para el potencial creado en \vec{r}_i por todas las cargas excepto la que ocupa esa posición, q_i . La comprobación de la ecuación (1.34) se propone como ejercicio.

Para un continuo de carga $\rho(\vec{r})$ es aplicable la misma filosofía, pero ahora en vez de agregar cargas puntuales tendremos que ir formando el sistema mediante diferenciales de carga. La expresión final de la energía en este caso será:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dv \left(+ \frac{1}{2} \int_S \sigma(\vec{r}) \phi(\vec{r}) ds \right) \quad (1.35)$$

donde añadimos la integral de superficie en el caso de que exista también una densidad superficial de carga en la distribución.

1.1.12 Energía electrostática asociada al campo eléctrico

Las expresiones anteriores parecen dar a entender que la energía de una distribución de cargas está limitada espacialmente al propio volumen que ocupan las cargas. Sin embargo no es esa la única manera de verlo: puesto que una distribución de carga es capaz de realizar un trabajo sobre otras cargas distantes parece más adecuado asociar la energía al campo o al potencial creado en todo el espacio. A partir de la ecuación (1.35) puede buscarse una expresión alternativa.

$$\rho(\vec{r}) = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi$$

$$\rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) = -\epsilon_0 \phi(\vec{r}) \nabla^2 \phi \quad (1.36)$$

Utilizaremos la igualdad: $\nabla \cdot (\phi \vec{E}) = \phi \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \phi \cdot \vec{E} = \phi(-\nabla^2 \phi) + (-|\vec{E}|^2)$, de donde: $-\phi \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\phi \vec{E}) + |\vec{E}|^2$. Sustituyendo esta última en (1.36) y después en (1.35) llegamos a:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\int_V |\vec{E}|^2 dv + \int_V \nabla \cdot (\phi \vec{E}) dv \right)$$

A partir de allí podríamos extender el volumen de integración a todo el espacio, ya que el resultado no debe variar. Si integramos hasta el infinito la segunda integral se cancela:

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \vec{E}) dv = \oint_{S_{\text{inf}}} \phi \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow 0$$

porque cuando $r \rightarrow \infty$ tenemos $\phi \rightarrow 1/r$, $|\vec{E}| \rightarrow 1/r^2$, $ds \rightarrow r^2$ aun en el caso en que el campo y el potencial decrezcan de la forma más lenta posible, siempre que hablemos de distribuciones de carga limitadas. La expresión final es:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2 dv \quad (1.37)$$

que es la habitualmente utilizada.

Ejemplo 1.16: Calcule la energía de una distribución esférica de carga de radio R y densidad volúmica de carga homogénea ρ_0 .

Haremos el cálculo directo integrando las contribuciones de energía que se precisan para formar la esfera, trayendo diferenciales de carga desde el infinito. Por sencillez tomaremos capas concéntricas de radio r creciente y espesor dr .

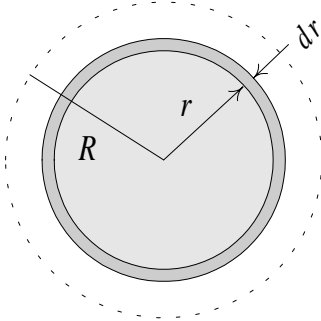


Fig. 1.22

Para depositar cada diferencial de carga debemos aportar una energía dada por

$$dU = \phi(r) dq$$

donde $\phi(r)$ es el potencial creado por la carga precedente en el límite de la esfera en formación:

$$\phi(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r^2$$

$$U = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \rho_0 4\pi \int_0^R r^2 r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0^2}{15\epsilon_0} R^5 \quad (J)$$

Verifique este resultado utilizando la ecuación (1.37).

1.1.13 Aproximación del potencial a grandes distancias. Desarrollo multipolar del potencial

En los problemas técnicos no se precisa habitualmente de una solución exacta, sino que resulta más que suficiente disponer de resultados con cierto grado de aproximación. Esto es aplicable a todos los problemas de Ingeniería. Los modelos que se utilizan son simplificaciones que se ajustan de alguna manera a la realidad física, sin contemplarla totalmente. En teoría electromagnética se han desarrollado formulaciones sencillas que omiten a propósito algunas características de los campos para centrarse en lo que en una situación dada resulta esencial. La aproximación más típica es la que presentaremos ahora para el caso del potencial eléctrico estático: la de *grandes distancias* o, también llamada, *de campo lejano*. Más adelante en este curso, y en otros posteriores, se volverá sobre este modelo, para el estudio de los sistemas radiantes y de la difracción.

Consideremos una distribución de carga arbitraria, limitada espacialmente, situada en las proximidades del origen de coordenadas.

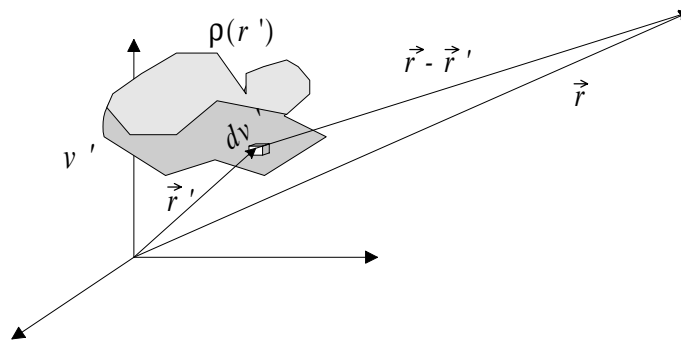


Fig. 1.23 Cálculo del potencial a grandes distancias

El potencial eléctrico creado en cualquier punto del espacio es:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Buscaremos una aproximación de esta función cuando $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg |\vec{r}'| \quad \forall \vec{r}'$, es decir, cuando medimos el potencial a grandes distancias de la distribución de carga. Para conseguirlo desarrollamos en serie de Taylor la función en \vec{r}' del integrando. La fórmula en el caso de tres variables es:

$$f(\vec{r}) = f(0) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \bigg|_{x_i=0} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_{x_i, x_j=0} x_i x_j + \dots$$

alrededor del punto $\vec{r} = 0$.

Aplicamos el anterior desarrollo a la función $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ como función de \vec{r}' :

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} \left(\sum_i \sum_j (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}) x_i x_j \right) + \dots$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker ($= 0$ si $i \neq j$; $= 1$ si $i = j$).

Sustituyendo en la expresión del potencial obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_{V'} \rho(\vec{r}') dv' + \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} \sum_i \sum_j \left(\int_{V'} (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') dv' \right) + \dots \right\} \quad (1.38) \end{aligned}$$

Usualmente son suficientes esos tres términos para obtener una buena aproximación al potencial, y aun puede bastar con los dos primeros. En el caso de que no sea así, quizá no sea una buena idea buscar una aproximación por este procedimiento y deba pensarse en un método numérico. Las expresiones integrales de la ecuación (1.38) reciben el nombre de *momentos de la distribución de carga*.

$$\left. \begin{aligned} \text{momento monopolar (escalar): } Q_T &= \int_{V'} \rho(\vec{r}') dv' & (C) \\ \text{momento dipolar (vector): } \vec{p} &= \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' & (C \cdot m) \\ \text{m. cuadripolar (tensor): } Q_{ij} &= \frac{1}{2} \int_{V'} (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') dv' & (C \cdot m^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

Estos momentos, y los sucesivos de orden superior, caracterizan con aproximación creciente la forma de la distribución de carga. El potencial se escribe entonces:

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_T}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}^T \mathbf{Q} \vec{r}}{r^5} + \dots \quad (1.40)$$

Ejemplo 1.17: Calcular el potencial creado a grandes distancias por las dos cargas puntuales de la figura 1.24 mediante los dos primeros términos de (1.40).

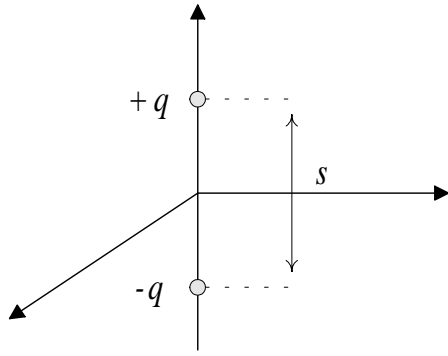


Fig. 1.24

El momento monopolar es la carga total: $Q_T = 0$.

La expresión del momento dipolar es, para cargas puntuales:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Y, en nuestro caso, tendremos:

$$\vec{p} = +q \cdot \frac{s}{2} \hat{z} + (-q) \cdot \frac{s}{2} \hat{z} = qs\hat{z} \quad (1.41)$$

El potencial resulta ser en primera aproximación:

$$\phi(\vec{r}) \approx 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs\hat{z} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs}{r^2} \cos\theta$$

Compruebe que es igual al obtenido en el ejemplo 1.7.

Ejemplo 1.18: Calcule el potencial que crean a grandes distancias cuatro cargas puntuales situadas en el plano YZ de forma que ocupan los vértices de un cuadrado de lado l . Las cargas tienen magnitudes iguales y signos alternados (Fig. 1.25).

El momento monopolar es nulo. El momento dipolar lo calcularemos igual que en el ejemplo anterior:

$$\vec{p} = 0 \cdot q + l\hat{z} \cdot (-q) + l\hat{y} \cdot (-q) + l(\hat{y} + \hat{z}) \cdot q = 0$$

En este caso estamos obligados a calcular el momento de tercer orden para obtener alguna aproximación.

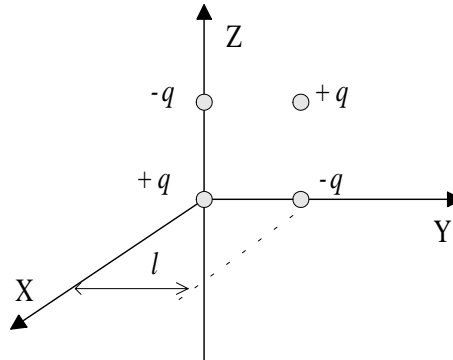


Fig. 1.25 Cuadripolo

La integral de la expresión general vuelve a ser sustituida por un sumatorio sobre las cargas:

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \sum_m (3x_i^m x_j^m - r^m{}^2 \delta_{ij}) q_m$$

Las variables x_i^m, x_j^m son las componentes del vector posición de la carga q_m ; r^m es el módulo del vector. La siguiente tabla facilitará el cálculo, que debe hacerse con cuidado:

m	q_m	x^m	y^m	z^m	r^m
1	$+q$	0	0	0	0
2	$-q$	0	0	l	l
3	$+q$	0	l	l	$\sqrt{2} l$
4	$-q$	0	l	0	l

Se obtiene:

$$Q_{11} = Q_{xx} = 0 \quad Q_{yy} = 0 \quad Q_{zz} = 0$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = 0$$

$$Q_{xz} = Q_{zx} = 0$$

$$Q_{yz} = Q_{zy} = \frac{3}{2} l^2 q y$$

y sustituyendo en la ecuación (1.40): $\vec{r}' \cdot \vec{Q} \vec{r} = 3l^2 q yz$, que podemos pasar a coordenadas esféricas utilizando: $y = r \sin\theta \sin\varphi$ y $z = r \cos\theta$. Resulta:

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3l^2 q}{2r^3} \sin 2\theta \sin \varphi$$

Dependencia de los momentos con el origen de coordenadas

En los ejemplos anteriores se han situado las distribuciones de carga próximas al origen de coordenadas, pero surge la cuestión de si los momentos de segundo y tercer orden hubieran resultado diferentes de haber elegido otra posición para las cargas y, por tanto, si el potencial podría haber variado en función de esa elección.

El momento monopolar, por definición, es independiente de la posición de la distribución de carga. Los demás momentos sí pueden variar. Veámoslo con el momento dipolar.

Consideremos una distribución de carga arbitraria, a la que referenciaremos según dos sistemas de coordenadas diferentes, uno desplazado respecto al otro, tal como se muestra en la figura 1.26. Calcularemos el momento dipolar desde uno y otro.

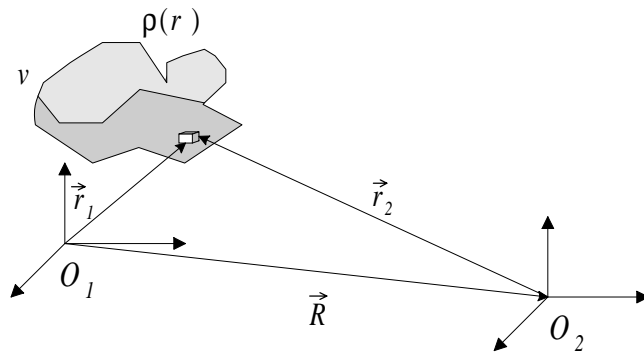


Fig. 1.26 Dependencia de \vec{p} con la elección del origen

Se cumple $\rho(\vec{r}_1) = \rho(\vec{r}_2)$ cuando $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{R}$. Entonces:

$$\vec{p}_2 = \int_V \vec{r}_2 \rho(\vec{r}_2) dv = \int_V (\vec{r}_1 - \vec{R}) \rho(\vec{r}_1) dv = \vec{p}_1 - \vec{R} Q \quad (1.42)$$

Por tanto el momento dipolar es independiente del origen tomado sólo si la carga total de la distribución es nula. Resultados semejantes se obtendrían para los momentos de orden superior.

Ejemplo 1.19: Repita el cálculo del momento cuadripolar para la distribución de cargas del ejemplo anterior tomando el origen de coordenadas en el centro del cuadrado.

Comprobará que el momento cuadripolar no varía en este caso. Observe que los momentos de orden inferior en esa distribución son nulos. En realidad ese resultado responde, con un orden más, a la deducción que se acaba de hacer.

1.1.14 Dipolo real y dipolo ideal

El cálculo de los momentos permite realizar aproximaciones cuando nos alejamos de la distribución de cargas, pero también resultan extremadamente útiles cuando las dimensiones de la distribución son muy pequeñas, pues ambas situaciones son equivalentes: se satisface la condición $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg r'$.

Junto al concepto de carga puntual (momento monopolar puro o monopolio ideal) se pueden considerar los de dipolo ideal y cuadripolo ideal. Ambos tienen aplicación en el estudio de las interacciones de los campos eléctricos con la materia.

El dipolo ideal puede definirse como una distribución formada por dos cargas puntuales de igual magnitud y signo opuesto (dipolo real), cuando la distancia que las separa tiende a cero, pero de manera que se mantiene constante el momento dipolar. De acuerdo con el ejemplo 1.17 (Ec. 1.41), esto implica que el valor q ha de tender simultáneamente a infinito. Como resultado se obtiene una distribución puntual, pero caracterizada exclusivamente por su momento dipolar (y por su posición), de la misma forma que el valor de su momento monopolar caracteriza completamente a la carga puntual.

El potencial creado en el espacio por un dipolo ideal es (vid. la ecuación (1.40)):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (1.43)$$

donde \vec{r}_0 es la posición del dipolo. Ahora ya no se trata de una aproximación, sino del valor exacto del potencial, debido a la dimensión nula del dipolo.

En la misma forma si tomamos las cuatro cargas puntuales del ejemplo 1.18 y las colapsamos a un punto de forma que se mantenga el valor de su momento cuadripolar obtendremos un cuadripolo ideal, caracterizado exclusivamente por el valor de ese momento y su posición.

1.1.15 El dipolo ideal en presencia de campos eléctricos externos

Sea un dipolo ideal situado en el seno de un campo eléctrico externo producido por alguna distribución de cargas lejana. ¿Cuál es la influencia del campo sobre el dipolo?

Para verlo imaginemos que el dipolo consta de dos cargas puntuales de distinto signo separadas una distancia δ . La energía potencial del dipolo en una determinada posición es:

$$U_{dip} = +q\phi(\vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{\delta}) + (-q)\phi(\vec{r}_0 - \frac{1}{2}\vec{\delta}) = q\left[\phi(\vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{\delta}) - \phi(\vec{r}_0 - \frac{1}{2}\vec{\delta})\right]$$

$$U_{dip} = q\left(-\vec{E}_{ext}(\vec{r}_0) \cdot \vec{\delta}\right) = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}(\vec{r}_0) \quad (1.44)$$

Este resultado tiene dos importantes implicaciones:

- si el campo eléctrico externo es uniforme, entonces el dipolo buscará el equilibrio (estado de energía mínima) orientándose en la dirección del campo;
- si el campo no es uniforme, el dipolo se orientará con él, pero además se desplazará buscando la zona donde el campo es más intenso.

1.2 El campo electrostático en presencia de medios dieléctricos

Los medios dieléctricos, o aislantes, no poseen portadores de carga libres, capaces de desplazarse a través del medio bajo la influencia de campos eléctricos; sin embargo, las moléculas que forman su estructura pueden sufrir cambios en su orientación o pequeños desplazamientos. A este efecto se le denomina *polarización* del material. Un medio dieléctrico polarizado crea a su vez un campo eléctrico que se superpone al campo excitador, dando lugar a un campo final en el equilibrio diferente al que ocuparía el espacio si no hubiese dieléctrico.

El estudio de los fenómenos electrostáticos en medios dieléctricos se realiza a partir de modelos microscópicos en los que se asume la existencia de dipolos ideales como los elementos constitutivos del material. Estos dipolos simulan el estado de polarización atómica o molecular.

Existen básicamente dos tipos de medios dieléctricos: los *dieléctricos polares*, constituidos por moléculas orientadas eléctricamente, y los *dieléctricos no polares*, en los que las moléculas tienen un momento dipolar nulo cuando sobre ellas no actúan campos externos. Los primeros no presentarán usualmente un efecto macroscópico neto de forma espontánea, porque el estado de mínima energía coincide con aquel en que las orientaciones de los dipolos elementales son arbitrarias, y el efecto global se cancela. La presencia de un campo exterior es lo que provoca una orientación preferente de los dipolos en la dirección del campo, y un efecto macroscópico medible. En el caso de los dieléctricos no polares, un

campo exterior puede todavía producir un desequilibrio microscópico de las cargas, con lo que provoca simultáneamente la creación y la orientación de los dipolos, con efectos netos apreciables.

En una primera aproximación, el simple modelo que se acaba de bosquejar es suficiente. Es claro, sin embargo, que existirán moléculas o cristales elementales cuyo comportamiento eléctrico deba caracterizarse más cuidadosamente, por ejemplo con la inclusión de cuádrupolos elementales.

En teoría de campos estamos interesados en el estudio de los efectos macroscópicos, sin ánimo de averiguar con detalle lo que ocurra a escala atómica o molecular. De hecho, el modelo atómico, por su naturaleza discreta, es el modelo opuesto a la teoría de campos clásica que, por definición, sólo trata con medios continuos. Por esto un átomo, una molécula, un portador de carga, o un grupo pequeño de ellos, no tienen una consideración particular. Es más, ni siquiera se consideran, puesto que no son capaces de producir efectos apreciables a escala macroscópica.

Cuando tomamos un diferencial de volumen o de superficie en un material dieléctrico se asume que *el número de dipolos elementales contenidos en él es muy elevado*. Las consideraciones que se hacen referentes al modelo atómico son las necesarias para construir un modelo útil y realista, que proporcione resultados válidos macroscópicamente.

La consecuencia de lo anterior es que sólo tratamos con *valores medios* de campo, o de potencial, existentes en los diferentes puntos del medio material, pero que desde luego no coinciden con los valores del campo *microscópico* o *campo local* que pueda haber en dichos puntos. Es, por otra parte, el campo medio, o campo a escala macroscópica, el que tiene interés, pues el campo local será una función complicada de la posición, cuyas fluctuaciones tienen poca relevancia para nuestro estudio.

1.2.1 Vector polarización

Consideremos un diferencial de volumen en un medio dieléctrico polar. En su interior existen numerosos dipolos elementales (microscópicos) con orientaciones arbitrarias. La suma de todos los momentos dipolares microscópicos es un diferencial de momento dipolar.

$$d\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \quad (1.45)$$

Cuando el medio está inmerso en el seno de un campo eléctrico, los dipolos elementales se orientan en la dirección del campo. La inspección del momento dipolar diferencial de los diferenciales de volumen nos da información de la presencia y del valor del campo eléctrico total que está actuando sobre el material. Se define el vector polarización como la densidad de momento dipolar por unidad de volumen.

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{d\vec{p}}{dv} \quad (C/m^2) \quad (1.46)$$

Esta magnitud define completamente el estado de polarización del medio, en la misma medida que el momento dipolar es una caracterización completa de un dipolo elemental. Es un campo vectorial definido en todo el volumen del dieléctrico, que tomará habitualmente diferentes valores en los diferentes puntos del material, ya que el estado de polarización no tiene por qué ser uniforme. En figura 1.27 se representa esquemáticamente todo lo anterior.

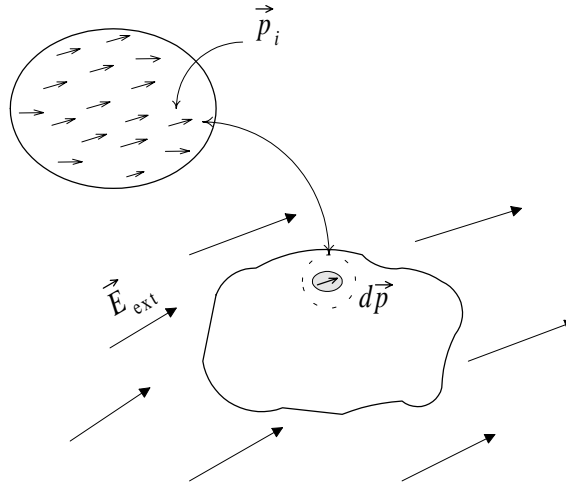


Fig. 1.27 *Dieléctrico polarizado por efecto de un campo eléctrico exterior*

El dieléctrico polarizado contribuye al campo total por efecto de la orientación mayoritaria de los dipolos elementales. La contribución del dieléctrico se puede obtener mediante el vector polarización de acuerdo con las expresiones (1.43) y (1.46):

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}') dv' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

de donde resulta:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (1.47)$$

Obsérvese que el potencial dado por la ecuación (1.47) no es el potencial presente en el espacio, sino únicamente la contribución del dieléctrico, del mismo modo que el campo eléctrico que se deduzca de éste no será el campo total presente, sino una parte de él. Conviene resaltar que en el equilibrio el dieléctrico está también, en cierta medida, autopolarizado, y unas zonas del medio influyen en las restantes para dar lugar a la polarización final, pero todo ello está incluido en el vector $\vec{P}(\vec{r})$.

1.2.2 Relación entre el vector polarización y el campo eléctrico. Tipos de dieléctricos

En Electrostática -al igual que en multitud de situaciones que se verán más adelante durante el curso, incluso cuando se consideran casos con variación temporal- buscamos siempre el estudio de las interacciones eléctricas en el equilibrio, o en estado estacionario. En el caso de los dieléctricos ocurre que, cuando son polarizados por un campo exterior, las diferentes partes del medio ejercen entre sí una influencia recíproca. *Lo importante no es, por tanto, la magnitud del campo externo que comenzó el proceso de polarización, sino el campo global que finalmente se establece en cada punto del medio*

La magnitud del efecto de polarización dieléctrica depende del tipo de material considerado. En medios *lineales, homogéneos e isótropos* se escribe:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.48)$$

donde χ_e (“chi sub-e”) es la susceptibilidad eléctrica del medio, adimensional y positiva.

En medios *inhomogéneos* se mantiene la misma relación, pero la susceptibilidad es función de la posición: $\chi_e = \chi_e(\vec{r})$.

En los llamados medios *anisótropos*, como son los materiales cristalinos no cúbicos, las peculiares fuerzas de ligadura existentes en su estructura condicionan la magnitud del efecto de polarización, de forma diferente según la dirección del campo polarizador. Existen, entonces, direcciones de fácil y de difícil polarización. Para caracterizar estos medios, la susceptibilidad se convierte en un tensor. En medios anisótropos lineales tendremos:

$$\chi_e = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

y los vectores \vec{P} y \vec{E} no son paralelos en general.

Por fin, en medios *no lineales* la polarización varía fuertemente en función de la intensidad de campo aplicado, y no existe una relación sencilla entre el campo eléctrico y el vector polarización:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e(\vec{E}(\vec{r})) \vec{E}(\vec{r})$$

En este tipo de medios, de creciente interés tecnológico, suele desarrollarse la función de susceptibilidad alrededor del punto $E = 0$ mediante una serie de Taylor:

$$P_i = \epsilon_0 \left(\chi_{ij} E_j + \chi_{ijk} E_j E_k + \chi_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots \right)$$

donde los subíndices $i, j, k, l (= 1, 2, 3)$ denotan las diferentes componentes. En la expresión de arriba se han omitido los sumatorios sobre los índices mudos (j ; j y k ; j, k y l , respectivamente). La aparición de tensores de diferentes órdenes indica anisotropía.

En adelante nos limitaremos al caso más usual de medios lineales e isotrópicos.

El estado de polarización de un dieléctrico está determinado por el vector polarización. Sin embargo, este vector no será usualmente un dato conocido desde el principio, por lo que debemos desarrollar con más profundidad la teoría para poder enfrentarnos a problemas reales. Con este objetivo se introduce la consideración explícita de las densidades de carga propias del dieléctrico, esto es, las que constituyen los dipolos inducidos en el material, que se denominan densidades de carga ligada. El trabajar con estas densidades de carga no reporta beneficios, usualmente, en problemas prácticos, porque, como veremos más adelante, se han desarrollado herramientas más directas y poderosas, pero sirven para cimentar la teoría en que se basan esos otros métodos.

Una porción de dieléctrico puede considerarse constituida por un continuo de dipolos elementales, tal como se ha explicado, pero también como una agrupación de carga eléctrica. Para verlo realizamos el siguiente desarrollo.

Se cumple en general: $\nabla \cdot (\psi \vec{A}) = \nabla \psi \cdot \vec{A} + \psi \nabla \cdot \vec{A}$. Apliquemos esa relación para el caso particular en que:

$$\psi(\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{y} \quad \vec{A}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}')$$

obtendremos, con el operador actuando sobre las variables 'prima':

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \vec{P}'(\vec{r}') + \frac{\nabla' \cdot \vec{P}'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

en donde se utilizó la relación: $\nabla' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$.

De todo ello, utilizando la ecuación (1.47), resulta que el potencial producido por el dieléctrico polarizado es de la forma:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{-\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (1.50)$$

Este resultado es importante, porque nos dice que un dieléctrico polarizado puede caracterizarse equivalentemente mediante dos magnitudes relacionadas con el vector polarización, que son:

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n}|_S &\equiv \sigma_b(\vec{r}) \\ -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) &\equiv \rho_b(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.51)$$

y que se denominan, respectivamente, *densidad superficial* y *densidad volúmica de carga ligada* (*bounded*). De la ecuación (1.50) es inmediato ver que tales magnitudes realizan el papel de verdaderas densidades de carga, y un estudio más detallado, que aquí no haremos, nos demostraría que tales densidades existen y son resultado de la polarización del medio.

1.2.3 Ley de Gauss en medios dieléctricos. Vector desplazamiento eléctrico

El hallazgo de las densidades de carga ligadas tiene un interés conceptual y teórico elevado, aun cuando en problemas prácticos pueden no utilizarse. En este apartado las incluiremos para generalizar la ley de Gauss a aquellas situaciones en las que intervienen medios dieléctricos junto a otras distribuciones de cargas libres.

Consideremos una superficie cerrada que contiene en su interior un medio dieléctrico, en el que, a su vez, se ha introducido una distribución de cargas libres. Por lo dicho hasta ahora es claro que las cargas libres producirán un campo que polarizará al dieléctrico, y que esto provocará la aparición de ciertas densidades de carga ligada en el medio. La ley de Gauss aplicada sobre la superficie debe escribirse ahora en la forma:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{Q_f + Q_b}{\epsilon_0} \quad (1.52)$$

donde Q_f y Q_b son las cargas totales libres y ligadas contenidas en el interior de la superficie considerada. Escrita en forma diferencial, tendremos, para cualquier punto del interior la relación:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0} \quad (1.53)$$

de donde podemos escribir:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f + (-\nabla \cdot \vec{P})$$

y

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

La magnitud $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ resulta ser extremadamente útil, porque está estrechamente relacionada con el campo eléctrico, pero su divergencia, a diferencia del propio campo \vec{E} , sólo depende de la densidad de carga libre. Se define el vector:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (C/m^2) \quad (1.54)$$

denominado *vector desplazamiento eléctrico* y que resulta de gran utilidad para tratar problema en los que intervienen medios dieléctricos.

La relación entre el campo eléctrico y el vector polarización viene dada por la susceptibilidad del medio, según se escribió en la ecuación (1.48). Sustituyendo en la ecuación anterior llegamos a:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.55)$$

con lo que la relación entre el vector desplazamiento y el campo es todavía más evidente. Se define:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (1.56)$$

como la permitividad relativa o constante dieléctrica del medio, y

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (F/m) \quad (1.57)$$

como su permitividad dieléctrica.

El vacío tiene susceptibilidad eléctrica nula y constante dieléctrica unidad. En el aire la susceptibilidad es despreciable y su constante dieléctrica se toma también la unidad en la mayoría de las situaciones. Los medios líquidos y sólidos tienen susceptibilidades apreciables y su constante dieléctrica es siempre mayor que uno.

El vector desplazamiento puede escribirse entonces en la forma:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.58)$$

Y la forma general de la ley de Gauss se escribe:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho \quad (1.59)$$

donde se sobreentiende que ρ es únicamente la densidad de carga libre. O en forma integral:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q|_S \quad (1.60)$$

donde Q es la carga total libre encerrada por la superficie.

Ejemplo 1.20: Una esfera conductora de radio a posee una carga neta Q , y está rodeada de una cubierta esférica de material dieléctrico, con $\epsilon_r = 9$ y grosor d . Calcular el campo eléctrico en todo el espacio.

Sabemos que, por la simetría del problema, la carga libre se ha de distribuir uniformemente por la superficie conductora esférica.

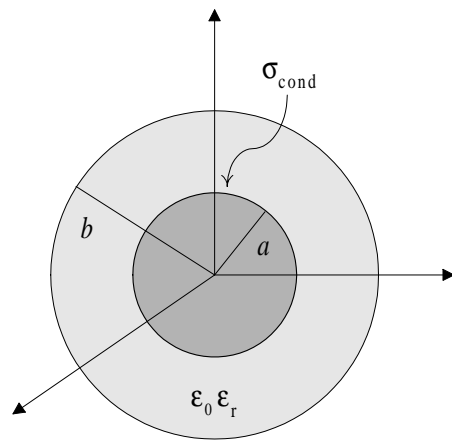


Fig. 1.28

$$\sigma_{cond}|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

El campo producido por la carga libre polariza la cubierta dieléctrica, y aparecerán cargas ligadas.

Si trabajásemos con el campo tendríamos que tenerlas en cuenta. La forma de ignorarlas es utilizar el vector desplazamiento al aplicar la ley de Gauss.

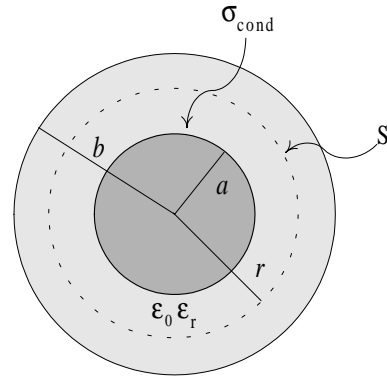
Es claro que $\vec{D}(\vec{r}) = D_r(r) \hat{r}$ en todo el espacio.

$$a < r < b$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = D_r(r) 4\pi r^2 = Q_f|_S = Q$$

$$D_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1}{9\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$



$$b < r$$

Queda exactamente igual en cuanto a $\vec{D}(\vec{r})$. El campo eléctrico en el exterior resulta:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Ejemplo 1.24 (Continuación): Obtenga el vector polarización y las densidades de carga ligadas del dieléctrico en el ejemplo anterior.

Tan sólo debemos aplicar las fórmulas correspondientes:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \frac{8}{9} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\rho_b(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{8}{9} \frac{Q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

$$\sigma_b(r=a) = \vec{P} \cdot (-\hat{r})|_{r=a} = -\frac{8}{9} \frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_b(r=b) = \vec{P} \cdot \hat{r}|_{r=b} = \frac{8}{9} \frac{Q}{4\pi b^2}$$

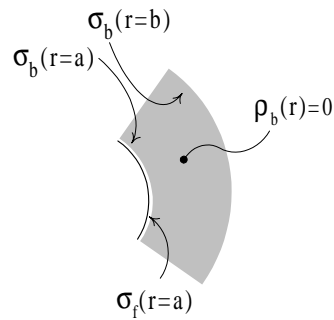


Fig. 1.29

Observe que el campo creado por las cargas ligadas se opone al campo polarizador. Esta situación es habitual, por lo que en ocasiones se habla de campo *despolarizador*.

Volveremos más adelante sobre problemas prácticos en los que intervienen medios dieléctricos. Veamos ahora algunas cuestiones adicionales.

Conservación de la carga en medios dieléctricos

Si un medio dieléctrico no posee carga neta es claro que no la adquirirá por el sólo hecho de polarizarse. En consecuencia, la carga ligada total debe ser cero. Esta afirmación se prueba inmediatamente:

$$Q_b = \int_V \rho_b(\vec{r}) dv + \oint_S \sigma_b ds = - \int_V \nabla \cdot \vec{P} dv + \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} ds \equiv 0$$

pues ambas integrales son la misma, por el teorema de la divergencia.

Relación entre la carga libre y la carga ligada

Las densidades superficiales de carga ligada aparecen siempre que se polariza un dieléctrico, como consecuencia de la terminación abrupta del medio. *La densidad volúmica de carga ligada es, sin embargo, un efecto excepcional*, que no se da en los casos más usuales. ‘Grosso modo’ puede adelantarse que la densidad volúmica aparece siempre y cuando se rompa la homogeneidad del medio, sea por su propia estructura, o por la inclusión de cargas libres.

Pueden probarse las siguientes relaciones:

- En medios homogéneos:

$$\rho_b(\vec{r}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_f(\vec{r}) \quad (1.61)$$

- En medios inhomogéneos:

$$\rho_b(\vec{r}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_f(\vec{r}) - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} \nabla \epsilon_r(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.62)$$

En el primer caso sólo podremos encontrar carga ligada volúmica en aquellos puntos del medio donde se haya introducido carga libre. En medios no homogéneos se induce carga ligada volúmica por la propia variación de la permitividad.

1.2.4 Ecuación de Poisson generalizada

La relación diferencial entre el potencial eléctrico y las cargas cuando se trabaja con medios dieléctricos será, en cualquier situación:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0} \quad (1.63)$$

Pero esta relación es poco útil, porque la densidad volúmica de carga ligada no será conocida.

En el caso de que nuestro medio sea homogéneo (utilizamos la ecuación (1.61)) obtendremos:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon_r \epsilon_0} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (1.64)$$

Y por último, en medios inhomogéneos, la ecuación de Poisson tiene una forma más complicada:

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \epsilon_r \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (1.65)$$

Ejemplo 1.25: Una carga puntual de valor q , situada en el origen de coordenadas, está rodeada de un dieléctrico inhomogéneo, cuya permitividad es:

$$\epsilon_r(r) = 2 - \frac{r}{a}$$

que ocupa un volumen esférico de radio a . Obtenga el potencial eléctrico dentro y fuera del dieléctrico.

La carga puntual polariza al dieléctrico. Como éste es inhomogéneo debe esperarse, en general, que se induzca una cierta densidad volúmica de carga ligada. La resolución mediante la ecuación de Poisson resultaría complicada (Ec. 1.65).

Aprovechamos la simetría esférica del problema para utilizar la ley de Gauss:

$$\vec{D}(\vec{r}) = D_r(r) \hat{r}$$

Esto es aplicable tanto en el dieléctrico como fuera de él. Tomamos superficies gaussianas esféricas, y la carga libre contenida en ellas no varía con el radio, por lo que resulta:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

en todo el espacio.

El campo eléctrico será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{(2 - r/a)\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad 0 < r < a$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad r > a$$

A partir del campo puede obtenerse el potencial, mediante la relación:

$$\phi(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} :$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r} \quad r > a$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4a} \left(6 + \ln(r/2a-r) - \frac{2a}{r} \right) \quad r < a$$

Como ejercicio adicional puede comprobarse que la ecuación de Poisson en el medio dieléctrico resulta:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{4a-3r}{r(2a-r)} \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad r < a$$

y que la solución obtenida la satisface.

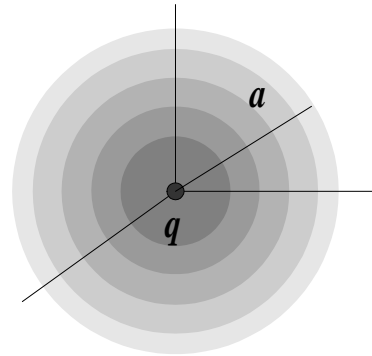


Fig. 1.30

1.2.5 Energía electrostática en presencia de medios dieléctricos

En el apartado 1.1.11 se trató sobre el tema de la energía almacenada por las distribuciones de carga en el vacío. El proceso seguido para llegar a las expresiones matemáticas que nos dan cuenta del valor de esa magnitud fue el de ir formando la distribución de carga desde una situación inicial de máxima dispersión e ir contabilizando los aportes de energía que se precisan, hasta alcanzar la situación final.

Cuando intervienen medios dieléctricos la situación se complica por la aparición de las densidades de carga ligada. En una primera aproximación podríamos tratar de repetir la metodología anterior, partiendo de un sistema de cargas puntuales para extender el resultado a un continuo de carga.

Si consideramos un medio dieléctrico homogéneo, que ocupa todo el espacio, y vamos situando, una a una, cargas puntuales que traemos desde el infinito, se observará que junto a cada carga puntual se forma una distribución proporcional de carga ligada, según la relación que se dedujo para dieléctricos homogéneos (Ec. 1.61):

$$\rho_b(\vec{r}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_f(\vec{r})$$

En el caso de cargas puntuales esta relación se convierte en: $q_b = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} q_f$, que indica que junto a cada carga puntual libre aparece una carga puntual ligada.

El efecto de estas cargas puntuales adicionales es el de reducir el valor efectivo de la carga original, disminuyendo el valor del potencial y del campo creado por ésta en sus inmediaciones. Al traer nuevas cargas puntuales el potencial que se opone a ellas será el potencial conjunto creado por las que llegaron previamente y sus cargas ligadas respectivas. Este razonamiento puede extenderse a un continuo, y la energía final del conjunto resulta:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \rho_f(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dv$$

donde la influencia del dieléctrico se reflejará en el valor del potencial.

En un caso más realista, en el que el dieléctrico esté limitado espacialmente y pueda ser inhomogéneo, la situación es, sin embargo, básicamente la misma: al realizar los aportes de carga libre aparecerán carga ligada superficial y carga ligada volúmica, en puntos diferentes a aquellos en que se sitúa la carga libre, pero el resultado debe ser el mismo, con la única excepción de tener que incluir carga superficial libre en caso de que exista:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \rho_f(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dv + \frac{1}{2} \int_s \sigma_f(\vec{r}) \phi(\vec{r}) ds \quad (1.66)$$

A partir de ésta última expresión, y procediendo análogamente a como se hizo en el apartado 1.1.12, obtenemos:

$$U = \frac{1}{2} \int_{v_\infty} \vec{D} \cdot \vec{E} dv \quad (1.67)$$

que es la expresión comúnmente utilizada.

1.2.6 Sistemas de conductores. Condensadores

Sea un sistema formado por varios conductores, no conectados entre sí, situados en el vacío, y de geometrías arbitrarias. Sea Q_j la carga neta de cada conductor. Podemos imaginar que habrá conductores sin carga y otros cargados, y, dentro de éstos, unos tendrán carga positiva y otros carga negativa. La solución del potencial en el espacio entre los conductores es una cierta función $\phi(\mathbf{r})$, que satisface la ecuación de Laplace en el espacio, donde suponemos que no hay carga, y las condiciones de contorno en cada conductor. Si alteramos la carga original en un conductor, por ejemplo multiplicando su valor por un cierto factor k , variará el potencial en todo el espacio y también en todos los demás conductores. Pero ¿de qué manera?

La respuesta se sigue de atender al teorema de unicidad del potencial y al principio de superposición, aplicable también a los potenciales.

Para ello debemos partir de una situación inicial hipotética en que solamente uno de los conductores posee carga neta, por ejemplo el conductor i , con Q_i culombios. Suponiendo que efectivamente ocurre así escribamos el potencial como:

$$\phi(\vec{r}) = \phi_i(\vec{r}) + \sum_{j \neq i} \phi_j(\vec{r})$$

donde $\phi_i(\mathbf{r})$ es el potencial producido en todo el espacio por el conductor cargado y los $\phi_j(\mathbf{r})$ son los potenciales individuales creados por cada uno de los otros conductores, los cuales, a pesar de no poseer carga neta, también contribuyen al potencial total, porque aparecen densidades superficiales de carga debido al influjo del conductor cargado. Multipliquemos ahora la carga del conductor i por un factor k . Ocurre que la función

$$k\phi(\vec{r}) = k\phi_i(\vec{r}) + k \sum_{j \neq i} \phi_j(\vec{r})$$

también satisface la ecuación de Laplace por ser k una simple constante. Respecto a las condiciones de contorno tendremos que si el potencial se ha multiplicado por k entonces el

campo también aparecerá multiplicado por ese factor, y la densidad de carga en los conductores será ahora:

$$\sigma|_S = \epsilon_0 k \vec{E} \cdot \hat{n}|_S$$

pero esto es coherente en el caso del conductor cargado, y también en los demás, cuya carga neta seguirá siendo cero.

Como todas las condiciones se satisfacen y la solución al problema del potencial es única debe concluirse que esa es la solución. Este razonamiento podría aplicarse sucesivamente a todos los conductores, tomándolos uno a uno como el único conductor cargado del sistema. La solución final sería la suma de las soluciones parciales pensadas en esta forma.

La conclusión que se sigue es que si multiplicamos por un cierto factor la carga de un conductor entonces la contribución que ese conductor tiene en la construcción del potencial total, y, en particular, su contribución al potencial de los otros conductores, se multiplica por el mismo factor. De allí que el potencial en cada conductor debe poder escribirse como:

$$\phi_j = \sum_i p_{ij} Q_i \quad (1.68)$$

donde p_{ij} son los coeficientes de potencial. La expresión anterior afirma que para cada conductor debe ser posible encontrar unos coeficientes tales que multiplicados por las cargas netas del sistema nos den su potencial.

La expresión (1.68) podría escribirse al revés, invirtiendo la matriz:

$$Q_i = \sum_j c_{ij} \phi_j \quad (1.69)$$

A los nuevos coeficientes se les denomina coeficientes de capacidad (si $i = j$) o coeficientes de inducción electrostática ($i \neq j$).

Todos los coeficientes mencionados en este apartado dependen exclusivamente de la geometría del sistema de conductores. En el caso de incluir dieléctricos lineales en el sistema los coeficientes variarán, pero la situación será esencialmente la misma.

Sistemas de dos conductores. Condensadores

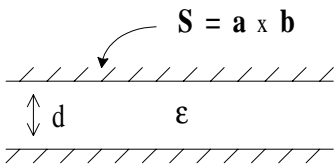
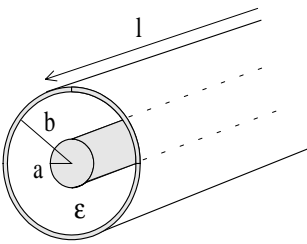
Particular interés práctico tienen los sistemas constituidos por dos conductores, y donde uno de ellos está rodeado por el otro. Forman entonces un condensador. La particularidad es que la diferencia de potencial entre ambos no puede ser modificada por las variaciones de carga en un tercer conductor externo, sino que éstas afectarán simultáneamente a los dos en la misma medida.

Los condensadores se utilizan para almacenar carga de forma transitoria en los circuitos eléctricos. La carga almacenada es proporcional a la diferencia de potencial entre sus armaduras, y la constante de proporcionalidad es la *capacidad* del condensador.

$$Q = C \Delta\phi = CV; \quad C = \frac{Q}{V} \quad (F) \quad (1.70)$$

Q es la carga neta de uno de los conductores. En el otro deberá ser $-Q$, como puede probarse fácilmente. En el caso de incluir dieléctricos lineales entre las placas que forman el condensador la expresión anterior seguirá teniendo el mismo significado. Las posibles cargas ligadas en el dieléctrico no constituyen propiamente carga almacenada por el condensador, ya que no es carga extraída del circuito al que está conectado. La carga ligada influiría no obstante en atenuar el campo interno del condensador, y entonces con menor diferencia de potencial aplicada el dispositivo puede almacenar la misma carga. Por tanto la inclusión de dieléctricos en los condensadores aumenta su capacidad, de forma proporcional a su constante dieléctrica.

Las geometrías más típicas de los condensadores y su capacidad se muestran a continuación.

<p>Condensador plano</p> <p>($a, b \gg d$)</p>		$C = \frac{ab\epsilon}{d}$
<p>Condensador cilíndrico</p> <p>($l \gg b-a$)</p>		$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} l$

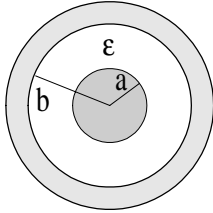
Condensador esférico		$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$
----------------------	---	--

Fig. 1.31

La energía almacenada por un condensador puede obtenerse mediante la expresión (1.67) una vez calculados los campos presentes, pero es bien sabido por teoría de circuitos que existe una expresión más simple si se conoce la capacidad, y es:

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

Cuestiones de repaso:

- 1) El campo electrostático tiene siempre su origen en cargas positivas y el final en cargas negativas (o en el infinito). Explique cuál es la razón física de ese hecho.
- 2) ¿Qué condiciones se precisan para que en una determinada situación podamos utilizar la ley de Gauss para el cálculo directo del campo eléctrico?
- 3) ¿Cómo disminuye el campo eléctrico creado por las siguientes distribuciones de carga a medida que nos alejamos de ellas: a) un plano infinito de carga; b) un hilo infinito; c) una esfera cargada; d) un dipolo; e) un cuadripolo? Considere densidades homogéneas en las tres primeras.
- 4) El hecho de que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada sea nulo no implica que el campo deba ser nulo en todos los puntos de la superficie, ni en el volumen encerrado por ella. Dé ejemplos reales que lo confirmen.
- 5) Si nos desplazamos sobre una superficie y medimos un potencial eléctrico constantemente nulo sobre ella, ¿qué podremos afirmar acerca del campo eléctrico en los puntos de esa superficie?

- 6) ¿La densidad de carga superficial libre sobre un conductor debe tener el mismo signo en cualquier punto? Demuéstrelo en caso afirmativo o proponga un contraejemplo en caso negativo.
- 7) En un conductor no podemos fijar a la vez la carga neta y el potencial, porque cualquiera de esas dos magnitudes condiciona el valor de la otra. Busque ejemplos sencillos que sostengan esa afirmación.
- 8) Los conductores (con carga neta nula) ¿atraen a las cargas eléctricas?
- 9) ¿En que situaciones es adecuado el método de las imágenes para el cálculo del potencial? ¿Qué se precisa para poder aplicar ese método?
- 10) El vector desplazamiento eléctrico ¿depende de las densidades de carga ligadas? O dicho de otro modo, ¿depende de los medios dieléctricos presentes en las inmediaciones?
- 11) Habitualmente no se incluyen explícitamente las densidades superficiales de carga en las *ecuaciones diferenciales* del campo o del potencial (Gauss y Laplace). ¿De qué modo se tienen entonces en cuenta al resolver los problemas por esos métodos?
- 12) ¿Podría en algún caso ser negativa la susceptibilidad eléctrica de un material?
- 13) En determinados medios \vec{D} y \vec{E} no son necesariamente paralelos. ¿En cuáles?
- 14) Los dieléctricos (sin carga neta) ¿atraen a las cargas eléctricas de sus inmediaciones?
- 15) ¿Cómo se obtiene la energía potencial de un dieléctrico polarizado por un campo exterior?
- 16) La presencia de un dieléctrico provoca siempre una disminución de la intensidad de campo eléctrico respecto a la misma situación sin dieléctrico (se supone en los casos en que el dieléctrico no altera la distribución de líneas de campo previa). ¿Por qué?
- 17) Un condensador con una geometría y unas dimensiones dadas aumenta su capacidad proporcionalmente a la constante dieléctrica cuando introducimos un dieléctrico homogéneo entre sus armaduras. ¿Por qué?
- 18) Un condensador con un dieléctrico no lineal entre sus armaduras no respondería al concepto tradicional de condensador (aunque podría tener gran utilidad práctica) ¿Por qué?

1.3 El campo magnetostático en el vacío

1.3.1 Introducción

Un fenómeno físico se llama estacionario cuando está en equilibrio -puede permanecer indefinidamente en esa situación si no intervienen otros factores externos- pero de tal manera que algunas variables macroscópicas varían en el tiempo. Tal es el caso habitual en el que se habla de campo magnético en condiciones estáticas, o de campo magnetostático. A diferencia de lo que ocurre en Electrostática ahora debemos considerar *las cargas eléctricas en movimiento*, ya que *es en esa situación cuando producen un campo magnético o detectan su presencia*. La primera experiencia científica equivalente a la atracción o repulsión entre cargas eléctricas (ley de Coulomb) dentro del magnetismo fue realizada por Oersted, quien comprobó la existencia de fuerzas entre hilos conductores largos cuando ambos eran recorridos por corrientes eléctricas, en 1820. Sin embargo el físico danés no comprendió ni supo formalizar en una expresión matemática el fenómeno que allí sucedía.

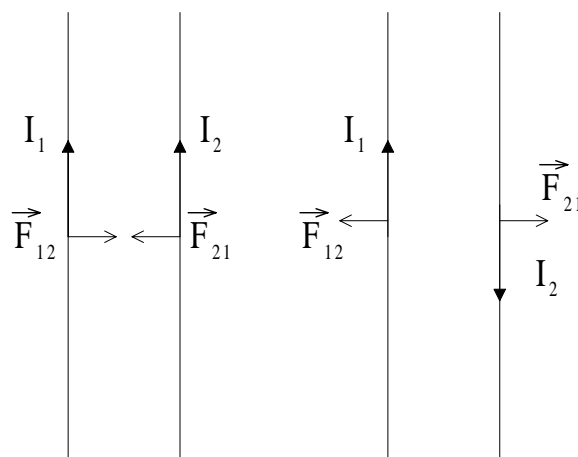


Fig. 1.32 *Atracción y repulsión entre corrientes constantes debido a interacciones de tipo magnético*

Oersted observó también que cuando una corriente suficientemente intensa atravesaba una superficie en la que se habían espolvoreado limaduras de hierro, éstas se orientaban formando círculos concéntricos alrededor del hilo. Ahora sabemos que las limaduras estaban dibujando el campo magnético producido por la corriente eléctrica, pero en aquel momento no se encontró explicación satisfactoria.

Las fuerzas de atracción y repulsión magnéticas se conocían desde la antigüedad, debido a la existencia de minerales con propiedades magnéticas, que se comportan como imanes intrínsecos. De igual manera, el campo magnético terrestre propició la invención de

la brújula en el siglo XVI. Sin embargo, el mismo nombre castellano de “brújula” sugiere el desconocimiento real que se tenía y el halo de misterio que tales fenómenos despertaban en nuestros antepasados. A principios del siglo XIX los científicos no estaban mucho mejor en cuanto a la comprensión global de los mismos.

Ampère dedujo la fórmula matemática de *la fuerza entre circuitos de corriente*, el equivalente magnético de la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (1.71)$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, de valor $4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)}$. Cada diferencial de circuito por donde circula una de las corrientes interacciona con un diferencial cualquiera del otro circuito. Eso sería suficiente para caracterizar una fuerza entre diferenciales de longitud; sin embargo, la continuidad de las corrientes precisa de la consideración de los dos circuitos completos.

1.3.2 Densidad e intensidad de corriente. Ley de Ohm

En teoría de campos electromagnéticos trabajamos básicamente con magnitudes definidas en amplias zonas del espacio, como son los campos escalares o vectoriales, y tratamos de establecer las relaciones que existen entre ellos. La corriente eléctrica no es una excepción. Usualmente precisaremos conocer no sólo la cantidad de carga eléctrica que atraviesa una determinada sección de conductor por unidad de tiempo, sino también la manera en que se distribuyen espacialmente esas cargas en movimiento. La densidad de corriente proporciona esa información. Su relación con la carga eléctrica es:

$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v} \quad \left(\frac{A}{m^2}\right) \quad (1.72)$$

cuando es una densidad volúmica de carga la que se desplaza a cierta velocidad v , dando lugar a la corriente eléctrica. Se habla entonces de *densidad volúmica de corriente*.

Más habitual es el caso en que la corriente esté producida por una densidad superficial de carga:

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) \vec{v} \quad \left(\frac{A}{m}\right) \quad (1.73)$$

y se denomina entonces *densidad superficial de corriente*.

Otro modo alternativo de escribirla es en función de la concentración de portadores libres por unidad de volumen, N . Asumimos que la velocidad de las cargas puede variar de un punto a otro del volumen considerado, y resulta:

$$\vec{J}(\vec{r}) = N q \vec{v}(\vec{r}) \quad \left(\frac{A}{m^2}\right) \quad (1.74)$$

donde q es la carga de cada portador.

Se denomina *intensidad de corriente* al flujo de carga eléctrica que atraviesa por unidad de tiempo una sección determinada del medio. Se escribe:

$$I|_S = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} \quad (A) \quad (1.75a)$$

o, para el caso de densidades superficiales (laminares) de corriente:

$$I|_L = \int_L \vec{J}_s(\vec{r}) \cdot \hat{n} dl \quad (A) \quad (1.75b)$$

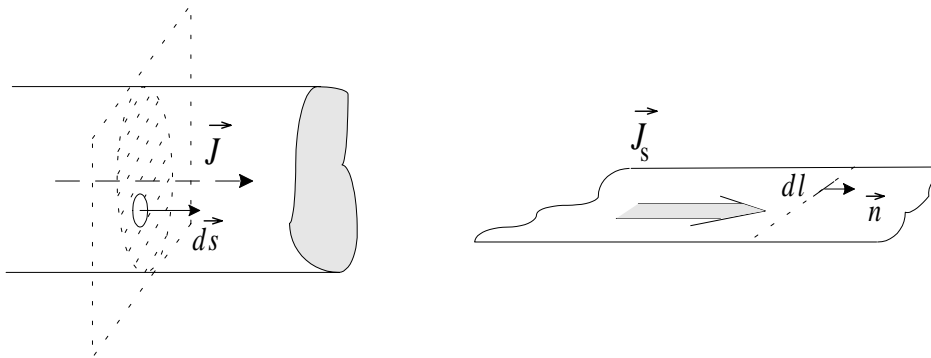


Fig. 1.33 Densidades de corriente volúmica y superficial

Con los subíndices S y L se quiere indicar que la intensidad de corriente ha de estar siempre referida a una sección particular. En problemas circuitales se sobreentiende que nos referimos a la sección del circuito. En otros casos más generales debe explicitarse, si es que no existe una sección claramente definida. La intensidad de corriente se escribe también de la forma:

$$I = \left. \frac{dq}{dt} \right|_S \quad (1.76)$$

donde se expresa la relación entre el diferencial de carga dq y el intervalo temporal dt que tarda en atravesar la sección considerada.

Origen físico de la corriente

Las cargas eléctricas se desplazan debido a dos causas principales:

- i) el cuerpo en el que están situadas las cargas se mueve;
- ii) las cargas libres de un medio conductor son arrastradas por un campo eléctrico.

En el primer caso se habla de corrientes de *convección*, y en el segundo de corrientes de *conducción*. Estamos interesados principalmente en el segundo tipo.

Las corrientes de conducción obedecen a la *ley de Ohm*:

$$\vec{J} = g\vec{E} \quad (1.77)$$

donde g es la conductividad del medio, y cuyas unidades son $(1/\Omega \cdot m)$. Habitualmente se expresa la conductividad con la letra griega σ , pero no utilizaremos de momento ese símbolo para que no haya confusión con la densidad superficial de carga.

La conductividad es una característica propia de cada material, y puede variar de forma apreciable con la temperatura del medio. Depende a su vez de otros dos parámetros, como son la movilidad de los portadores, μ , y su densidad volúmica:

$$g = \mu \rho \quad (1.78)$$

Utilizando esta expresión en (1.77) y comparándola con la (1.72) tenemos:

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \quad (1.79)$$

que se denomina *velocidad de arrastre* de los portadores. En realidad, no se corresponde con la velocidad física de los portadores, ya que éstos están sometidos a un movimiento térmico aleatorio, sino que se trata de la *velocidad media en la dirección predominante*, que da lugar a una corriente macroscópica apreciable. Habitualmente la velocidad de arrastre no supera el orden de los cm por segundo.

Ocurre que, aun estando sometidos a un campo eléctrico constante, los portadores de un medio conductor no pueden acelerarse indefinidamente, debido a los choques que sufren entre sí y con los átomos del medio. Esa resistencia a su avance puede modelarse como un rozamiento viscoso, y es lo que lleva a una velocidad límite, que es la velocidad de arrastre.

La conductividad varía con la temperatura. En el caso de *medios conductores* el efecto de un aumento de la temperatura es el de incrementar la agitación térmica del medio, lo que hace aumentar el número de choques de los portadores por unidad de tiempo. Consecuentemente su movilidad y la conductividad disminuyen. En *medios semiconductores* ocurre lo mismo pero ahora es más importante el incremento de pares electrón-hueco, por lo que el efecto neto de un incremento de temperatura es el aumento de la conductividad.

1.3.3 Ecuación de continuidad. Corrientes estacionarias

Cualquier tipo de corriente eléctrica produce un campo magnético en sus inmediaciones. Por el momento nos interesa considerar tan *solo aquellas corrientes que no producen acumulación ni vaciamiento de carga en las secciones del conductor por las que fluyen*. A tales corrientes se les denomina *estacionarias*.

Considérese un tubo de corriente como el representado en la figura 1.34, por el que circula una cierta densidad volúmica. Evaluaremos el efecto que tiene sobre las cargas del medio el paso de dicha corriente.

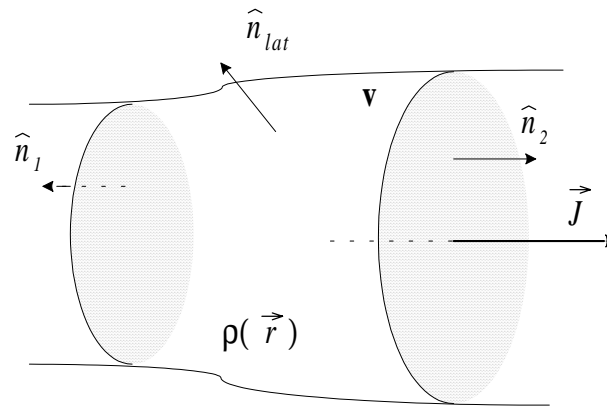


Fig. 1.34

El flujo de corriente a través de la superficie que rodea a la porción de conductor elegida es:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int \vec{J} \cdot \hat{n}_1 ds_1 + \int \vec{J} \cdot \hat{n}_2 ds_2 + \int \vec{J} \cdot \hat{n}_{lat} ds_{lat}$$

Si asumimos que la densidad de corriente es tangente a la superficie lateral en todo punto del volumen considerado y perpendicular a las secciones circulares tendremos:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int J ds_2 - \int J ds_1 = -\frac{d}{dt} Q_V \quad (1.80)$$

puesto que si existe alguna diferencia entre la corriente que atraviesa la segunda superficie y la que atraviesa la primera debe haber una variación neta de la carga en el volumen, Q_V .

Una corriente que arrastra constantemente la misma carga a través de las diferentes secciones por las que fluye se denomina *estacionaria*, y no hay variaciones de la carga a su paso. Tales corrientes se caracterizan por la expresión:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall S \quad (1.81)$$

La expresión más general siguiendo el razonamiento anterior, para cualquier tipo de corriente, sea o no estacionaria, es:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} Q_V = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}) dv$$

y de ahí resulta:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\int_V \frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t} dv \quad (1.82a)$$

que se denomina *ecuación de continuidad*. Por aplicación del teorema de la divergencia se obtiene la forma diferencial de esta igualdad:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.82b)$$

y, de ahí, que una corriente estacionaria se caracteriza por cumplir: $\nabla \cdot \vec{J} = 0$.

1.3.4 Ley de Biot y Savart

Una carga puntual que se mueve con velocidad v en el seno de un campo magnético exterior sufre una fuerza magnética cuya expresión, debida a Lorentz, es:

$$\vec{F}_M = q \vec{v} \times \vec{B}_{ext} \quad (1.83)$$

La fuerza entre circuitos de corriente de Ampère (Ec. 1.71) puede expresarse también de un modo equivalente tomando diferenciales de uno de los circuitos de corriente, que pasamos a considerar *como inmerso en el campo magnético creado por el otro*.

$$d\vec{F}_{21} = dq_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1 = \rho(\vec{r}) S dl_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1 = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

donde S es la sección del circuito; y para que ambos enfoques coincidan el campo magnético creado por el primer circuito, como se comprueba fácilmente, debe escribirse en la forma:

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (1.84)$$

que se conoce con el nombre de *Ley de Biot y Savart*, y que nos permite obtener el campo magnético mediante integración directa si conocemos las corrientes que lo producen.

La forma más general de esta ley, en el caso de que no pueda hacerse la aproximación de corrientes filiformes, sino que ocupen una cierta sección, será:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (1.85)$$

y la expresión de la fuerza ejercida sobre otra posible corriente situada en su seno:

$$\vec{F} = \int_V \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dv \quad (1.86)$$

lo que no es sino una extensión de la fuerza de Lorentz a todas las cargas en movimiento del circuito.

De nuevo, entonces, estamos sustituyendo el concepto de fuerza a distancia entre hilos o circuitos de corriente por el concepto de campo y de interacciones de los campos con otros circuitos.

Ejemplo 1.26: *Calcule el campo magnético creado por un hilo de corriente muy largo por el que circula una intensidad de corriente I .*

Tomaremos el origen de coordenadas sobre el propio hilo, a la altura del punto donde tratamos de calcular el campo. La expresión general del diferencial es:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

donde, siguiendo la notación habitual: \vec{r} es el punto donde calculamos el campo; \vec{r}' es el radiovector que apunta al diferencial de circuito considerado.

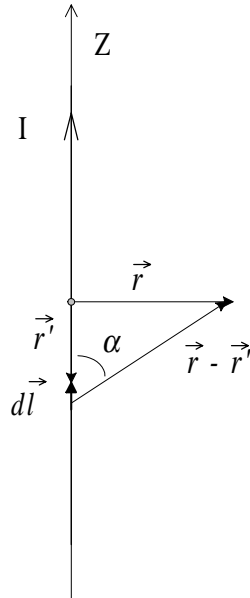


Fig. 1.35

Las expresiones de los diferentes términos que aparecen son:

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho}$$

$$\vec{r}' = z' \hat{z}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (\rho^2 + z'^2)^{1/2}$$

$$d\vec{l} = dz' \hat{z}$$

Cada diferencial de campo magnético queda de la forma:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dz' |\vec{r} - \vec{r}'| \sin \alpha}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \hat{\phi}$$

$$\text{donde } \sin \alpha = \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

El campo total resulta:
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \hat{\phi},$$

y tras resolver la integral:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\rho} \hat{\phi} \quad (1.87)$$

Ejemplo 1.27: Utilice el resultado anterior para calcular el campo magnético creado por un plano de corriente supuestamente infinito con una densidad de corriente superficial $\vec{J} = J_0 \hat{z}$ (Fig. 1.36).

El problema podría resolverse directamente con una integración completa del plano de corriente (Fig. 1.36) siguiendo la ley de Biot y Savart para el caso de una corriente superficial:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{J}_s(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds'$$

Sin embargo en el ejemplo anterior ya se realizó la integral según el eje Z para un hilo de corriente. Vamos a tomar el plano como formado por un continuo de hilos de corriente diferenciales, e integraremos la contribución al campo magnético total de cada uno de ellos.

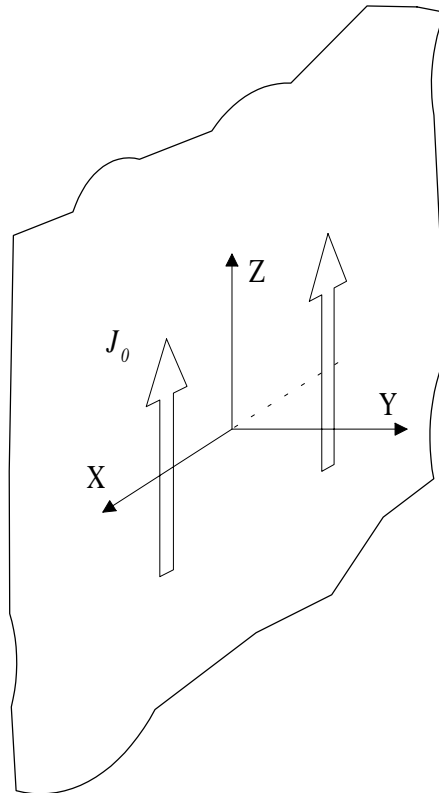


Fig. 1.36 Plano de corriente

Además existe una simetría apreciable al considerar la contribución conjunta de un par de hilos de corriente situados a ambos lados del punto donde realizamos el cálculo.

Tomemos un punto del eje Y tal que:

$$\vec{r} = y \hat{y}$$

En la figura siguiente (1.37) se aprecia que la contribución neta del plano deberá tener una única componente, de modo que podemos escribir:

$$dB_x = |d\vec{B}| \cos \alpha$$

donde

$$\cos \alpha = \frac{y}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

El resultado del ejemplo anterior nos permite escribir para un hilo diferencial:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} dI \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

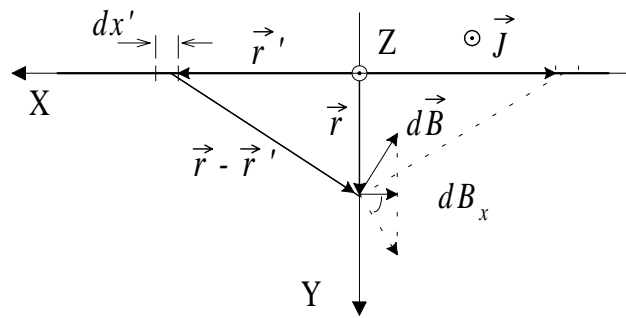


Fig. 1.37 Cancelación de las componentes del campo no paralelas al plano

El diferencial de intensidad será: $dI = J_0 dx'$ (razónelo), y la expresión del diferencial de campo:

$$dB_x = -\frac{\mu_0}{2\pi} J_0 \frac{y dx'}{(x'^2 + y^2)}$$

y finalmente:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mp \frac{\mu_0}{2\pi} J_0 \hat{x} \quad (y > 0, y < 0) \quad (1.88)$$

Al igual que ocurría en el caso del plano infinito de carga tenemos un campo constante en todo el espacio, independiente de la distancia del plano al punto donde se mida.

1.3.5 Carácter solenoidal del campo magnético

Las líneas de campo magnético siguen siempre trayectorias cerradas o, como en el ejemplo anterior, que se cierran en el infinito. Un campo vectorial con esa propiedad se denomina *campo solenoidal*.

Si se compara ese comportamiento con el del campo electrostático se llega a la conclusión de que el campo magnético carece de un tipo de fuente generadora comparable a las cargas eléctricas, en las que comienza o termina siempre el campo electrostático. Esto equivale a afirmar que *no existen monopolos magnéticos*, o, lo que es lo mismo, *cargas magnéticas individualizables*. Debido al origen netamente experimental de toda la teoría clásica del electromagnetismo debe concluirse que tal afirmación no es un resultado teórico, sino una constatación experimental. Pudiera ocurrir que en situaciones particulares llegasen a encontrarse cargas magnéticas aisladas, y entonces la teoría desarrollada aquí debería ser modificada para tratar con esos casos.

Matemáticamente *el carácter solenoidal de un campo vectorial se pone de manifiesto en que su divergencia es nula en todo punto*. Podemos comprobarlo a partir de la ley de Biot y Savart.

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' = \int_{V'} \nabla \cdot \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dv'$$

aplicaremos la igualdad vectorial genérica: $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$, y dos de los términos que aparecen son:

$$\nabla \times \vec{J}(\vec{r}') = 0 \quad , \text{ porque el operador actúa sobre } \vec{r} \text{ y no sobre } \vec{r}' ;$$

$$\nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0 \quad , \text{ como para el campo electrostático,}$$

por lo que resulta:

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (1.89)$$

Esta expresión es equivalente por el teorema de la divergencia a:

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall S \text{ cerrada} \quad (1.90)$$

La última igualdad afirma que *el flujo de cualquier campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre nulo*. Una afirmación así ha de ser considerada como un resultado fundamental del magnetismo y, de hecho, de toda la teoría electromagnética, porque ocurre que esta característica se mantiene incluso en condiciones dinámicas, como se verá en el próximo capítulo.

1.3.6 Ley de Ampère

A diferencia de lo que ocurría con el campo electrostático, que es irrotacional (conservativo), la circulación del campo magnético a lo largo de una trayectoria cerrada no es nula en general.

De acuerdo con la expresión de la fuerza magnética de Lorentz debe concluirse que la fuerza que experimenta una carga móvil debido a la presencia de un campo magnético es siempre perpendicular a su trayectoria (a su velocidad instantánea) y, por tanto, que *el campo no realiza trabajo en ningún momento sobre la carga*:

$$\int_C \vec{F}_M \cdot d\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_M \cdot \vec{v} dt = q \int_{t_1}^{t_2} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \equiv 0$$

Sin embargo la circulación de \vec{B} a lo largo de una trayectoria no se relaciona directamente con el cálculo del trabajo. La *ley de Ampère* establece que la circulación de \vec{B} a lo largo de un camino cerrado es proporcional a la intensidad de corriente que atraviesa la superficie limitada por el camino:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.91)$$

Por aplicación del teorema de Stokes obtenemos la forma diferencial de esta ley:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.92)$$

que se ha de cumplir punto a punto en el espacio donde tales magnitudes estén definidas. La ley de Ampère puede obtenerse por cálculo directo a partir de la expresión integral de Biot y Savart. En esa deducción se comprueba *que la ley dada por (1.91) y (1.92) se aplica únicamente al caso de corrientes estacionarias*.

Es interesante observar que en aquellos puntos del espacio donde no hay corrientes sí que tendremos un campo magnético irrotacional. Para determinadas situaciones se aprovecha ese hecho para definir un potencial escalar magnético, del mismo modo que en electrostática. No obstante, la utilidad de tal potencial es limitada y no se empleará aquí.

1.3.7 Cálculo de \vec{B} mediante la ley de Ampère en forma integral

Del mismo modo que se empleó la ley de Gauss en electrostática la ley de Ampère puede servir como un camino rápido para encontrar el campo magnético en situaciones con suficiente simetría espacial. Nuevamente es preciso que sepamos intuir a priori cuál será la dirección del campo magnético y de qué variables pueda depender, para aplicar este método con garantías.

Si existe una determinada trayectoria cerrada en el espacio, en la que \vec{B} es constante en módulo y paralelo a cada $d\vec{l}$, entonces podemos escribir:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C dl = BL = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.93)$$

y el valor del campo magnético se obtiene inmediatamente.

Ejemplo 1.28: Calcule el campo magnético creado por un conductor largo, de sección cilíndrica y radio a , por el que circula una densidad de corriente homogénea.

Por inspección de la expresión de Biot y Savart y de la geometría del problema se puede deducir que el campo magnético será de la forma:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(\rho) \hat{\phi}$$

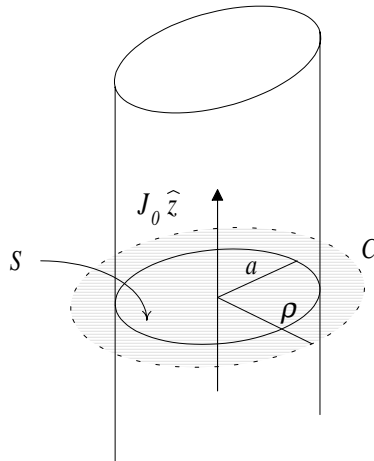


Fig. 1.38

Tomaremos como circuito para aplicar la ley de Ampère una circunferencia centrada alrededor del cable.

En la figura 1.38 se muestra el circuito para puntos del exterior del conductor.

$$d\vec{l} = \rho d\phi \hat{\phi}$$

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi \rho B_\phi(\rho)$$

$$\mu_0 \int_C \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \pi a^2 J_0$$

$$\text{De donde el resultado es: } B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 \pi a^2}{2\pi \rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad (\rho > a).$$

En puntos interiores al cable es válido el mismo planteamiento. Compruebe que el resultado es ahora:

$$B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0}{2} J_0 \rho \quad (\rho < a)$$

Puede añadirse un comentario adicional: *el campo magnetostático no se anula en el interior de un conductor*, como acaba de verse en el ejemplo precedente. De hecho no se acierta a encontrar ninguna razón por la que tal cancelación debiera suceder. En los capítulos siguientes se comprueba que esta situación cambia al considerar campos variables en el tiempo.

Ejemplo 1.29: Utilice la ley de Ampère para calcular el campo magnético creado por el conductor plano del ejemplo 1.27.

Como primer paso debemos hacernos una idea intuitiva de cómo será el campo magnético, en cuanto a su dirección y en cuanto a su dependencia con las variables espaciales. Para eso nos es útil volver a considerar el plano de corriente como una sucesión de hilos paralelos con idénticas corrientes. Podemos imaginar cómo será la contribución conjunta de todos los hilos al campo magnético global

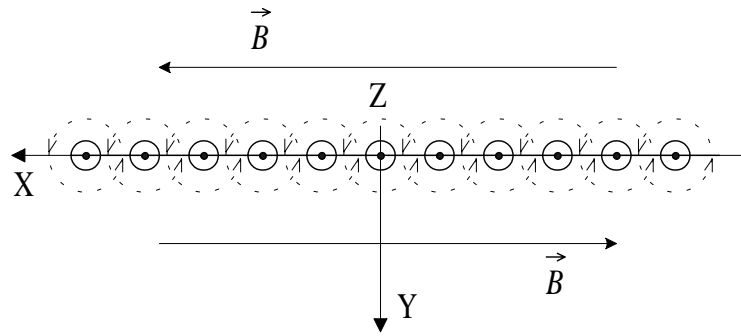


Fig. 1.41

y la única posibilidad razonable es suponer que $\vec{B}(\vec{r}) = B_x(y) \hat{x}$.

Elegimos un contorno en forma de rectángulo, situado simétricamente respecto al plano de corriente, con dos lados paralelos al campo magnético y los otros dos perpendiculares.

Compruebe que de esta forma la ley de Ampère da el mismo resultado obtenido en el ejemplo 1.27.

El potencial vector, \vec{A}

Todo campo solenoidal puede ser expresado como el rotacional de otro campo. Podemos entonces introducir un campo vectorial auxiliar estrechamente relacionado con el campo magnético, que se denomina *potencial vector magnético*, $\vec{A}(\vec{r})$, de tal manera que:

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) \quad (1.94)$$

En algunas áreas del electromagnetismo, en especial en problemas de radiación, el potencial vector sirve para simplificar la resolución matemática de los problemas. Se hablará de todo ello más adelante.

La definición del potencial vector magnético queda incompleta con la ecuación (1.94). Un campo vectorial, según el teorema matemático de Helmholtz, *precisa del conocimiento de su rotacional y de su divergencia, para quedar completamente definido*. En problemas estáticos se completa la definición forzando que el potencial vector tenga divergencia nula:

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad (1.95)$$

A esta condición se le denomina *norma de Coulomb*.

Las ecuaciones (1.94) y (1.95), junto a la ley de Ampère, llevan a una ecuación diferencial para el potencial vector de la forma:

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad (1.96)$$

cuya obtención se propone como ejercicio. La solución general, por similitud con la ecuación de Poisson del potencial eléctrico y su expresión integral, es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (1.97)$$

A primera vista esta expresión es más sencilla que la ley de Biot y Savart. Por tanto una vía alternativa para calcular el campo magnético a partir de las corrientes es obtener primero el potencial vector mediante (1.97), y calcular después el campo haciendo su rotacional (Ec. 1.94).

Ejemplo 1.30: *Obtenga el potencial vector creado por una espira de corriente de radio a situada en el plano XY, por la que circula una corriente I .*

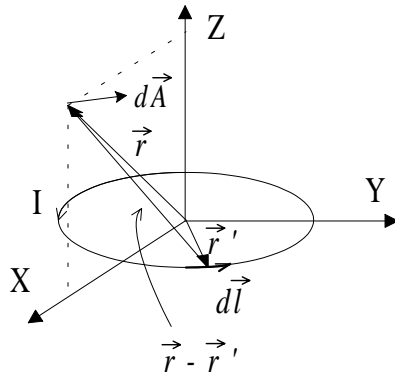


Fig. 1.42

Tomaremos, por sencillez, un punto sobre el plano XZ para hacer el cálculo. Debido a la simetría cilíndrica del problema, sirve para obtener un resultado totalmente general.

$$\vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$$

$$\vec{r}' = a\hat{\rho}$$

Pasamos a coordenadas cilíndricas y resulta:

$$\vec{r}' = a \cos \varphi' \hat{x} + a \sin \varphi' \hat{y} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \left[(x - a \cos \varphi')^2 + (-a \sin \varphi')^2 + z^2 \right]^{1/2}$$

e integramos las contribuciones de toda la espira:

$$\vec{A}(\vec{r})|_{\varphi=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\varphi \hat{\phi}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Sin embargo, se aprecia que la contribución de los diferenciales de corriente tomados dos a dos cancelan las componentes en x (Fig. 1.43).

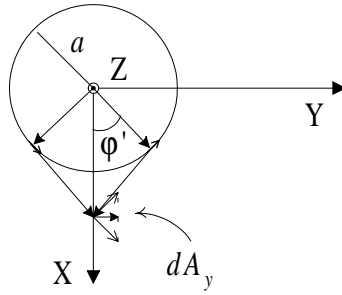


Fig. 1.43

Y, por tanto, sólo es necesario integrar dA_y :

$$dA_y = |d\vec{A}| \cos \alpha \quad \text{con} \quad \cos \alpha = \cos \varphi'$$

La integral que debe resolverse es, finalmente:

$$A_y = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{(\rho^2 - 2a\rho \cos \varphi' + a^2 + z^2)^{1/2}}$$

que, desafortunadamente, no tiene solución analítica sencilla y deberá resolverse numéricamente. Más adelante deduciremos una solución aproximada a este problema (ejemplo 1.31).

Cálculo numérico del campo magnético: método de los segmentos

La expresión de Biot y Savart suele derivar en integrales sin solución analítica en muchos casos reales; la ley de Ampère en forma integral sólo es útil para extraer el valor del campo magnético en situaciones de elevada simetría; por fin, el potencial vector, aun con una expresión integral aparentemente simple, tampoco proporciona un método inmediato para el cálculo de \vec{B} , como pudo comprobarse en el ejemplo anterior, donde ni siquiera una espira circular en el origen resultó un problema fácil.

Es evidente que la teoría desarrollada hasta ahora tiene un alto interés teórico y práctico, y nos permitirá seguir avanzando hacia resultados cada vez más importantes en la comprensión de los fenómenos magnéticos. Sin embargo cuando nos enfrentamos a la necesidad simple y llana de obtener el campo creado en el espacio por un bobinado con una particular geometría tendremos que recurrir a métodos numéricos de integración.

Existe un método que en esas situaciones puede reportarnos cierta comodidad, llamado *método de los segmentos* (o *sticks*), que supone un paso más de desarrollo que la integración numérica directa de la expresión de Biot y Savart. Este método se describe a continuación.

Considérese un segmento de hilo conductor de longitud l recorrido por una corriente I , situado en una posición y con una orientación arbitrarias (Fig. 1.44).

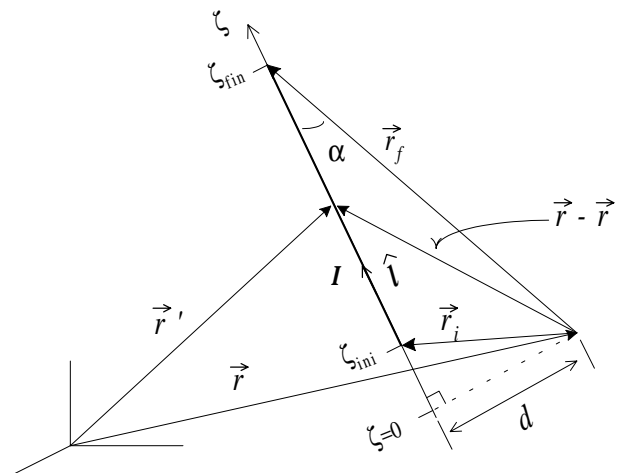


Fig. 1.44 Esquema básico utilizado en el método de los segmentos de corriente

Tal situación no es físicamente posible al no haber continuidad en la corriente, pero eso no le quita valor práctico: *si podemos obtener una expresión sencilla para el campo magnético creado por un segmento arbitrario de corriente podemos atacar otras geometrías más complicadas descomponiéndolas en una sucesión de segmentos similares.*

Definamos los siguientes radiovectores de acuerdo con la figura anterior:

- \vec{r} señala al punto donde calculamos el campo;
- \vec{r}' es un punto cualquiera del segmento de corriente;
- \vec{r}_i y \vec{r}_f señalan el comienzo y el fin del segmento, desde el punto de cálculo;
- $\vec{l} = l\hat{l}$ es el vector en la dirección de la corriente, y de módulo igual a la longitud del segmento de corriente.

Denominamos d a la distancia (mínima) desde la recta que contiene al segmento al punto de cálculo. Se pueden probar las siguiente igualdades que se utilizarán a continuación:

$$d = \frac{|\vec{r}_f \times \vec{l}|}{l} \quad \zeta_{ini} = \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{l}}{l} \quad \zeta_{fin} = \frac{\vec{r}_f \cdot \vec{l}}{l}$$

El integrando de la ley de Biot y Savart puede expresarse en la forma:

$$d\vec{l}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = d\zeta \frac{\vec{r}_f \times \hat{l}}{l} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

con $|\vec{r} - \vec{r}'| = (\zeta^2 + d^2)^{1/2}$. Tras operar resulta:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\zeta_{ini}}^{\zeta_{fin}} \frac{\vec{r}_f \times \vec{l} d\zeta}{l(\zeta^2 + d^2)^{3/2}} = \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{r}_f \times \vec{l}}{|\vec{r}_f \times \vec{l}|^2} \left(\frac{\vec{r}_f \cdot \vec{l}}{|\vec{r}_f|} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{l}}{|\vec{r}_i|} \right) \quad (1.98)$$

Esta expresión resulta eficiente como subrutina para un programa numérico de cálculo del campo magnético de uso general.

1.3.8 Aproximación de \vec{B} a grandes distancias. Momento dipolar magnético

Frecuentemente estaremos interesados en conocer el campo magnético que se establece a grandes distancias de una distribución de corriente dada. Para disponer de una expresión general debemos proceder de forma análoga a como hicimos en electrostática (vid.

sección 1.1.13): se desarrolla el potencial vector magnético en serie de Taylor y se obtienen aproximaciones válidas mediante el empleo de los *momentos* de la fuente.

La situación en la práctica es algo diferente al caso electrostático por dos motivos: primero, porque no existen monopolos magnéticos, y *el momento de primer orden de cualquier distribución de corriente se cancela*; en segundo lugar, porque *el momento de segundo orden, o momento dipolar, raramente se anula en las distribuciones reales*, con lo que los momentos de orden superior pierden gran parte de su interés. Se demuestra que, como aproximación suficiente en la mayoría de ocasiones, se puede escribir:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1.99)$$

donde \vec{m} es el momento dipolar magnético de la distribución, que se define como:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dv \quad (1.100)$$

A partir del potencial vector obtenemos el campo magnético:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3} \quad (1.101)$$

Las expresiones (1.99) y (1.101) son válidas siempre que se evalúen a distancias mucho mayores que la dimensión física de la distribución de corrientes.

Ejemplo 1.31: Calcule el momento dipolar magnético de un circuito plano de corriente que encierra un área S y por el que circula una corriente I .

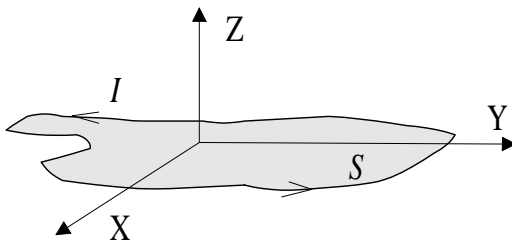


Fig. 1.45

A pesar de la aparente indefinición del problema la solución es única como se verá.

La expresión del momento dipolar para el caso de un hilo de corriente es:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times I d\vec{l}$$

La integral que se debe resolver es: $\oint_C \vec{r} \times d\vec{l}$, y en la figura 1.46 se muestra que, independientemente de donde situemos el origen, estamos haciendo un cálculo del área del circuito mediante triángulos rectángulos de base diferencial:

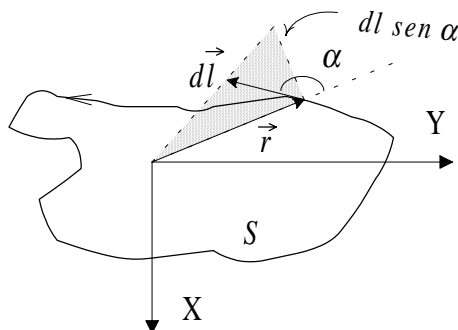


Fig. 1.46

Luego el resultado es:

$$\vec{m} = I S \hat{n} \quad (1.102)$$

donde \hat{n} es la normal al circuito en el sentido que corresponda al sentido de giro de la corriente, según el criterio de la mano derecha.

Ejemplo 1.31: Obtenga el campo magnético creado a grandes distancias por una espira circular de radio a por la que circula una corriente I .

Tratamos la espira como un dipolo magnético centrado en el origen.

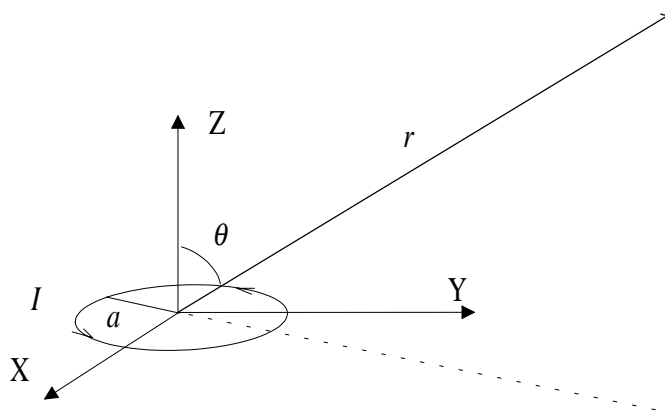


Fig. 1.47

De (1.102) tenemos: $\vec{m} = I \pi a^2 \hat{z}$. El potencial vector resulta:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \pi a^2 \hat{z} \times r \hat{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \pi a^2}{r^2} \sin \theta \hat{\phi}$$

y el campo magnético:

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3 (m_0 \cos \theta) \hat{r} - m_0 \hat{z}]$$

o, en una forma más habitual, utilizando $\hat{z} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta$:

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [2 m_0 \cos \theta \hat{r} + m_0 \sin \theta \hat{\theta}] \quad (1.103)$$

Obsérvese la similitud exacta de esta expresión con la del campo eléctrico creado por un dipolo eléctrico a grandes distancias.

1.4 Campos magnéticos en medios materiales

Desde el punto de vista de su comportamiento frente a campos magnéticos los medios materiales pueden considerarse como formados por una infinidad de dipolos magnéticos elementales o microscópicos. Estos dipolos existen en la realidad, y son el resultado de los movimientos de traslación de los electrones del medio alrededor de los núcleos atómicos y de su rotación o *spin*. El efecto conjunto de esos movimientos en términos de desplazamiento de carga podría parecer despreciable, pero lo cierto es que a escala macroscópica los efectos son más que apreciables: de forma evidente en los imanes permanentes. La traslación alrededor de los núcleos y la rotación electrónica son verdaderas, aunque peculiares, corrientes eléctricas, cuyos efectos magnéticos pueden medirse. Cuando estas corrientes se consideran en su conjunto en un cierto volumen de material, se denominan corrientes de magnetización. En los siguientes apartados veremos resumidamente cómo se generan y cómo se caracterizan esas corrientes, y los campos magnéticos que producen.

1.4.1 Fuerzas sobre un dipolo magnético

Si situamos un dipolo magnético en el seno de un campo magnético exterior el circuito que constituye el dipolo experimentará una fuerza que vendrá dada por una ecuación similar a la (1.86):

$$\vec{F} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}$$

En el caso de que el campo magnético sea *uniforme*, o con variaciones espaciales muy lentas en comparación con el tamaño del circuito tendremos:

$$\vec{F} = I \left(\oint_C d\vec{l} \right) \times \vec{B}_{ext} = 0 \quad \text{ya que} \quad \oint_C d\vec{l} \equiv 0 \quad \forall C \text{ cerrado}$$

por lo que el dipolo permanecerá en su lugar al no experimentar una fuerza neta. Si calculamos el momento de las fuerzas ejercidas sobre el circuito respecto a un cierto eje previamente definido la situación puede cambiar:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \oint_C \vec{r}_{aje} \times d\vec{F} = I \oint_C \vec{r}_{aje} \times (d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}) = \\ &= I \oint_C (\vec{r}_{aje} \cdot \vec{B}_{ext}) d\vec{l} - I \vec{B}_{ext} \oint_C \vec{r}_{aje} \cdot d\vec{l} = I \oint_C (\vec{r}_{aje} \cdot \vec{B}_{ext}) d\vec{l} \end{aligned}$$

Entonces el momento de fuerzas se cancela cuando \vec{r}_{aje} y \vec{B}_{ext} son perpendiculares en todo punto. En el caso de un circuito plano esto ocurre cuando el campo magnético es perpendicular al plano del circuito. Se puede comprobar que el momento resulta finalmente (siempre que el campo magnético sea uniforme):

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_{ext} \quad (1.104)$$

por lo que el dipolo tiende a orientarse en la dirección del campo magnético externo (hasta cancelar el momento de las fuerzas magnéticas).

En los medios materiales ocurre este fenómeno: *los dipolos magnéticos no abandonan su posición por la influencia del campo, pero se orientan con él*. Entonces el material pasa a estar magnetizado y crea a su vez campos magnéticos macroscópicos.

1.4.2 Vector magnetización

Se define el vector magnetización en un medio material como la densidad de momento dipolar por unidad de volumen.

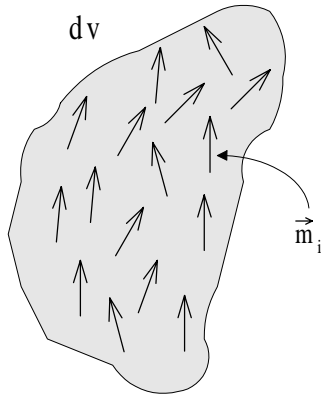


Fig. 1.48

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{\sum \vec{m}_i}{dv} = \frac{d\vec{m}}{dv} \quad (\text{A/m}) \quad (1.105)$$

El vector magnetización caracteriza de forma completa al material magnetizado, de modo que si llegamos a conocer el valor de ese vector en todos los puntos del material podremos calcular inmediatamente los efectos magnéticos que puede producir en sus inmediaciones.

Utilizando la anterior ecuación junto a la (1.99) resulta inmediatamente:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (1.106)$$

que es el potencial vector creado en todo el espacio por el material magnetizado. Si existe otro campo magnético en el espacio -el que provocó la magnetización del medio, por ejemplo- se superpondrá al calculado mediante esa expresión.

El problema de la ecuación (1.106) es que usualmente no conocemos a priori el valor del vector magnetización, por lo que no es un camino práctico para resolver problemas reales.

1.4.3 Densidades de corriente de magnetización

La magnetización macroscópica, medible, de un medio material es el resultado de infinidad de corrientes microscópicas que circulan, aproximadamente, en el mismo sentido y en planos paralelos. *El conjunto de esas corrientes equivale a ciertas densidades de corriente macroscópicas*, que se describen a partir del vector magnetización como:

$$\vec{J}_M(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) \quad \vec{J}_{SM}(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n} \Big|_S \quad (1.107)$$

donde $\vec{J}_M(\vec{r})$ es la *densidad volúmica de corriente de magnetización* y $\vec{J}_{SM}(\vec{r})$ la *densidad superficial de corriente de magnetización*. El vector \hat{n} es el vector unitario normal a cada punto de la superficie y dirigido hacia fuera del volumen del material.

1.4.4 Ley de Ampère en medios magnéticos. Intensidad de campo magnético

El comportamiento magnético de un medio material viene dado por las corrientes de magnetización creadas en él. Esto se pone de manifiesto al examinar la ley de Ampère en esta nueva situación, que ahora deberá escribirse:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M) \quad (1.108)$$

Si hacemos ahora uso de la primera expresión dada en (1.107) tendremos:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J} \quad (1.109)$$

Esto permite definir el campo magnético \vec{H} , o intensidad de campo magnético, en la forma:

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (A/m) \quad (1.110)$$

con lo que la forma final de la ley de Ampère para este campo es:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad \text{o} \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.111)$$

El sentido de la definición de \vec{H} es el mismo que el del vector desplazamiento \vec{D} en electrostática: *las expresiones (1.111) permiten trabajar en el seno de medios materiales de igual modo que si estuviésemos en el vacío*, teniendo en cuenta de forma explícita únicamente las corrientes libres (usualmente corrientes de conducción).

1.4.5 Relación entre el campo magnético y el vector magnetización

La cuestión que falta ahora por abordar es de qué manera actúa un campo magnético externo para producir una magnetización en un material, y de qué magnitud es esa magnetización.

La primera cuestión ya se ha explicado en los apartados precedentes. Un campo externo tiende a orientar localmente los dipolos microscópicos en su misma dirección. El que el campo logre una orientación más o menos importante y cuál sea la densidad de dipolos orientables en el material dependerá ya del tipo de medio que estemos considerando.

Se establece la relación entre la intensidad de campo magnético en los diferentes puntos de un medio material y el valor del vector magnetización resultante mediante la expresión:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (1.112)$$

donde χ_m es la llamada *susceptibilidad magnética del medio*. La mayoría de las sustancias, como agua, madera, papel, muchos minerales y muchos metales y aleaciones, como aluminio, latón, acero, plata, oro, cobre,... tienen una susceptibilidad magnética extraordinariamente pequeña. Esto significa que no se magnetizan apreciablemente aun en presencia de campos magnéticos intensos. Por contra existen metales y aleaciones altamente magnéticos. En éstos suele ocurrir que la relación entre vector magnetización y campo magnético no es lineal, y entonces debe escribirse:

$$\vec{M} = \chi_m (\vec{H}) \vec{H} \quad (1.113)$$

Limitándonos por el momento al caso lineal podemos llegar a la clásica relación entre \vec{B} y \vec{H} sustituyendo la ecuación (1.112) en la (1.110):

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} \quad (1.114)$$

de donde se llega a:

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (1.115)$$

Se definen:

$$\begin{aligned} \mu_r &= 1 + \chi_m \\ \mu &= \mu_0 \mu_r \quad (H/m) \end{aligned} \quad (1.116)$$

como las permeabilidades relativa y absoluta, respectivamente, del material. Y de allí:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (1.117)$$

Ejemplo 1.32: Un hilo largo por el que circula una corriente I está rodeado por un tubo cilíndrico de radios a y b (interior y exterior, respectivamente). El tubo es concéntrico con el hilo y podemos suponerlo también muy largo. El tubo tiene una permeabilidad magnética μ . Obtenga el campo magnético en todo el espacio.

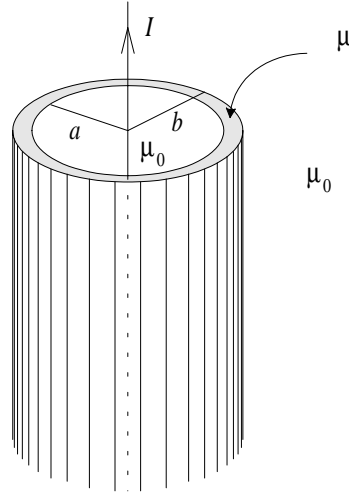


Fig. 1.49

La sucesión de acontecimientos hasta llegar al régimen estacionario es como sigue:

- La corriente I crea un campo magnético inicial alrededor del hilo, en la dirección ϕ .
- Ese primer campo magnetiza al material que forma el tubo, y aparecen corrientes de magnetización.
- Las corrientes de magnetización modifican el campo creado por el hilo en, al menos, alguna región del espacio.

Procederemos a calcular el campo final que se establece en todo el espacio. Según la ley de Ampère para el vector \vec{H} la circulación de este campo a lo largo de una trayectoria cerrada sólo depende de las corrientes libres del problema. Podemos escribir:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \Big|_s$$

para cualquier contorno cerrado C . La geometría del problema nos indica que el campo magnético debe ser de la forma: $\vec{H}(\vec{r}) = H_\phi(\rho)\hat{\phi}$, en cualquier zona del espacio.

La ecuación anterior aplicada a un contorno circular, a diferentes distancias del hilo, lleva a:

$$H_\phi(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} \quad \forall \rho$$

En particular esto es cierto para la región ocupada por el tubo de material magnético ($a < \rho < b$). De ahí que las corrientes de magnetización sean:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times \chi_m \vec{H} = \dots = 0$$

$$\vec{J}_{SMa}|_{\rho=a} = \vec{M} \times \hat{n}|_{\rho=a} = \chi_m \frac{I}{2\pi a} \hat{\phi} \times (-\hat{\rho}) = \chi_m \frac{I}{2\pi a} \hat{z}$$

$$\vec{J}_{SMb}|_{\rho=b} = \vec{M} \times \hat{n}|_{\rho=b} = \chi_m \frac{I}{2\pi b} \hat{\phi} \times (+\hat{\rho}) = -\chi_m \frac{I}{2\pi b} \hat{z}$$

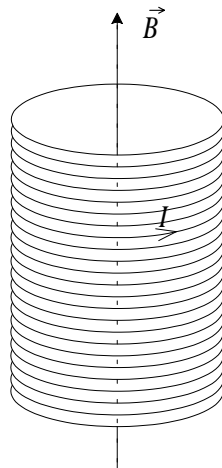
El campo magnético \vec{B} será:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi \rho} \hat{\phi} \quad \text{para } \rho < a \text{ y para } \rho > b$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu \frac{I}{2\pi \rho} \hat{\phi} \quad a < \rho < b$$

Como ejercicio adicional vuelva a calcular \vec{B} a partir de la corriente original más las corrientes de magnetización, situando todas ellas en el vacío. Deberá obtenerse el mismo resultado, lo que confirma el método utilizado.

Ejemplo 1.33: Considérese un bobinado en forma cilíndrica, muy largo, de radio a , con cierta densidad de espiras por unidad de longitud, n , en la forma que muestra la figura, y por el que circula una corriente I . El arrollamiento es lo suficientemente denso como para suponer que todas las vueltas son espiras planas. Obtenga el campo magnético producido en el interior del bobinado.



Una aproximación adecuada es suponer que fuera de la bobina no existe campo magnético, y que éste se concentra en el interior, donde, a su vez, podemos asumir que es constante, y dirigido en la dirección del eje del cilindro.

Éstas son hipótesis válidas sólo si consideramos de hecho que la bobina es infinitamente larga.

Fig. 1.50

La forma de resolver el problema mediante la ley de Ampère es trazar un circuito en la dirección del campo:

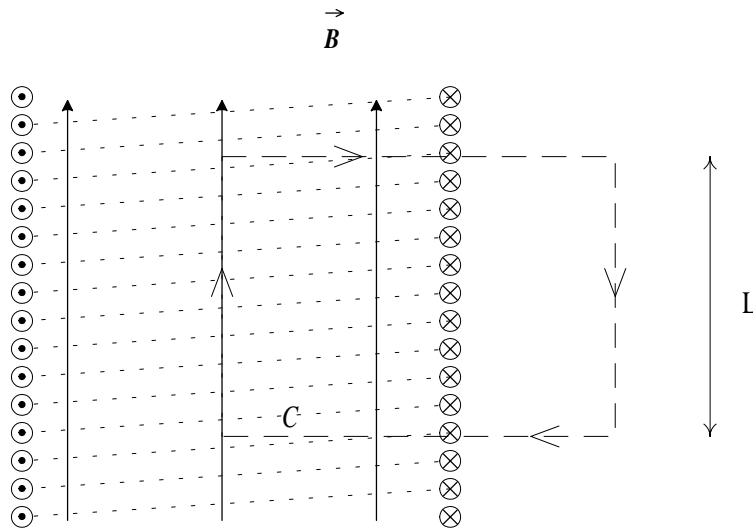


Fig. 1.51

Solamente en uno de los tramos de C existe circulación. El resultado final es:

$$B \cdot L = \mu_0 n L I \quad \rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 n I \hat{z}$$

Ejemplo 1.34: Un bobinado tiene forma toroidal, de radio medio global r_0 , y radio de la sección a , con $r_0 \gg a$. Está formado por N espiras de cable distribuidas de forma homogénea y suficientemente densa, tal como se muestra en la figura 1.52 a), como para que el campo magnético producido pueda considerarse confinado dentro del bobinado y de valor constante en toda la sección.

- Calcule el campo magnético cuando por la bobina circula una corriente I .
- Repita el cálculo considerando que el arrollamiento se ha realizado alrededor de un núcleo de material magnético con permeabilidad μ .
- Obtenga el campo magnético producido en una pequeña apertura de grosor d practicada en el núcleo (Fig. 1.52 b).

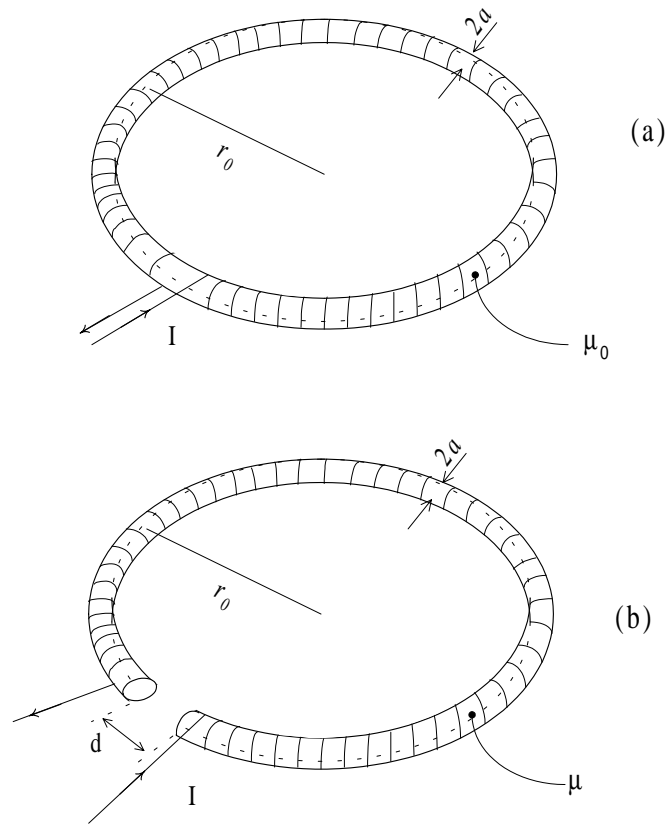


Fig. 1.52 Bobina toroidal

Podemos aplicar de nuevo la ley de Ampère para hacer todos estos cálculos.

a) El circuito elegido no es otro que la circunferencia de radio r_0 que atraviesa el centro de todas las espiras, puesto que el campo magnético seguirá también esa trayectoria.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Big|_S \rightarrow B_\phi 2\pi r_0 = \mu_0 N I$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_0} \hat{\phi}$$

b) En caso de tener un núcleo de material magnético aparecerán corrientes de magnetización. Debemos trabajar con el campo \vec{H} ante la imposibilidad de calcular a priori tales corrientes. El resultado es:

$$\vec{H} = \frac{NI}{2\pi r_0} \hat{\phi} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \frac{\mu NI}{2\pi r_0} \hat{\phi}$$

c) Para resolver este último apartado, que es el más interesante en la práctica, mantenemos la aproximación de que el campo magnético es constante en la sección del núcleo magnético y también ahora en el entrehierro, lo que desde luego ya es más discutible, al dejar de estar confinado el campo. Servirá, sin embargo, como primera estimación.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_n(2\pi r_0 - d) + H_e d = NI$$

Disponemos de otra igualdad para completar el problema, que viene dada por el hecho de que *las componentes normales del campo magnético \vec{B} a un lado y otro de la superficie de separación de dos medios son siempre iguales*. Ésta es una consecuencia del carácter solenoidal de \vec{B} que se verá con detalle en el próximo capítulo junto con las demás condiciones de contorno aplicables en problemas electromagnéticos. Esa condición nos lleva a la igualdad:

$$\mu H_n = \mu_0 H_e$$

y, finalmente a:

$$H_e = \frac{\mu NI}{\mu_0(2\pi r_0 - d) + \mu d}$$

1.4.6 Tipos de medios magnéticos

Los medios materiales se clasifican de acuerdo con el tipo de respuesta frente a campos externos.

En aquellos materiales en los que *el movimiento de traslación de los electrones alrededor de los átomos* tienen una influencia preponderante el valor de susceptibilidad magnética es negativo. Lo que ocurre es que las corrientes microscópicas tienden a oponerse a los cambios de flujo magnético que produce el campo magnetizador exterior. Estos medios reciben el nombre de *diamagnéticos*, y lo son, por ejemplo, el cobre, el oro, la plata, el diamante, el mercurio y el agua. En cualquier caso, el efecto es muy pequeño, y la susceptibilidad magnética oscila entre -10^{-5} y -10^{-8} .

Cuando el *efecto de rotación o spin* de los electrones supera al efecto diamagnético, el material pasa a tener una susceptibilidad positiva. Son los materiales *paramagnéticos*. Ejemplos de este tipo son: aluminio, sodio, magnesio, tungsteno y titanio. De nuevo sus valores de susceptibilidad son del orden de 10^{-5} .

Los materiales de más interés desde el punto de vista industrial para aplicaciones magnéticas son los llamados *ferromagnéticos*, que se caracterizan por una elevada susceptibilidad, por una dependencia no lineal del vector magnetización con la intensidad de campo magnético y por poseer memoria de la su situación magnética previa, que da lugar al conocido ciclo de histéresis. No haremos aquí una caracterización completa de tales medios, sino que nos limitaremos a señalar algunas de sus propiedades más interesantes.

Los medios ferromagnéticos poseen unos valores de permeabilidad magnética μ_r mucho más elevados que cualquier otro tipo de medios. Sin embargo, no se trata de un valor constante, sino de una función de la intensidad de campo H presente en el interior del material. En la figura 1.53 se representa una forma característica de esa función. En ella se muestra simultáneamente la evolución del campo B .

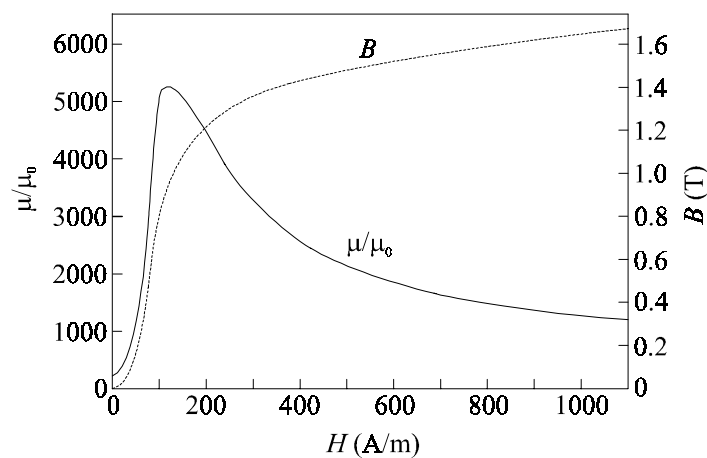


Figura 1.53: Permeabilidad y curva de magnetización de un material ferromagnético

A la gráfica B - H en el primer cuadrante se le denomina *curva de magnetización* del material. La mostrada en la figura es la correspondiente al hierro templado. El valor máximo que toma la permeabilidad relativa en este caso es de 5.200. Existen aleaciones donde este valor es todavía mucho mayor.

Las propiedades magnéticas de estos medios derivan de su estructura iónica. Los dipolos magnéticos constituyentes tienden a orientarse espontáneamente en una misma dirección porque de ese modo alcanzan una situación de energía interna mínima. Lo que impide que un material de este tipo esté permanentemente magnetizado hasta la saturación es que tal orientación de dipolos no es uniforme, sino que se forman *dominios* o pequeños volúmenes de material con orientaciones diversas, de manera que desde un punto de vista macroscópico el efecto es más moderado y admite crecimiento y disminución. En la figura 1.54 se muestra esquemáticamente un trozo de material ferromagnético sin magnetización neta y los dos procesos que en la práctica le pueden llevar a mostrar cierto grado de

magnetización por efecto de un campo externo. La teoría de los dominios fue propuesta por Weiss en 1907 y fue comprobada bastantes años más tarde de forma experimental.

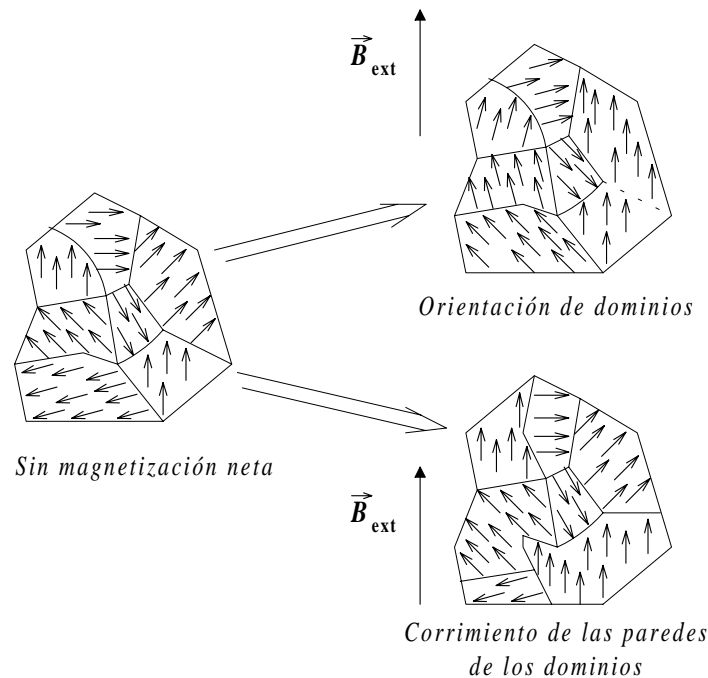


Fig. 1.54 Magnetización de un medio ferromagnético

Con estas consideraciones puede interpretarse la forma de la gráfica 1.53: en un primer momento el material se magnetiza fácilmente, hasta alcanzar un valor próximo a la saturación. A partir de ese momento un posterior crecimiento del campo H produce un crecimiento moderado y lineal de B , de acuerdo con el término $\mu_0 H$, porque la orientación de los dominios y, por tanto, el valor del término M de magnetización, ya no pueden mejorar. En ocasiones se representa únicamente el término $\mu_0 M$ en función de H , lo que da lugar a una curva asintóticamente plana.

Muchos materiales ferromagnéticos tienen memoria de su estado magnético previo: cuando desaparece el campo externo los dominios mantienen en parte sus orientaciones anteriores, y el material conserva una magnetización remanente. Al invertir el sentido del campo externo aplicado se describe otra curva hasta que el material queda magnetizado en sentido contrario. Si se repite el proceso se obtiene el ciclo completo de histéresis (Fig. 1.55). El valor de B cuando H alcanza un valor nulo (disminuyendo desde la saturación) se denomina *campo remanente* o *remanencia* del material. El valor de H cuando B llega a valer cero (al aumentar H en sentido inverso desde la saturación) se denomina *campo coercitivo* o *coercitividad* del medio. Ambos valores caracterizan al material ferromagnético. Es

importante notar que en ninguno de los dos puntos anteriores $-(0, B_r)$ o $(-H_c, 0)$ tenemos realmente al material desmagnetizado, como es evidente si recordamos la expresión más general:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \text{ ahora con } \vec{M} = \chi_m(\vec{H})$$

Cuando una pieza o una herramienta se magnetiza accidentalmente la forma que se emplea en la práctica para desmagnetizarla consiste en aplicarle un campo magnético intenso, de tipo senoidal y de amplitud decreciente, de manera que el estado magnético del material vaya recorriendo ciclos de histéresis sucesivos, cada vez más pequeños, hasta llegar de nuevo al origen de la curva B-H, en la que $B = \mu_0 H = \mu_0 M = 0$.

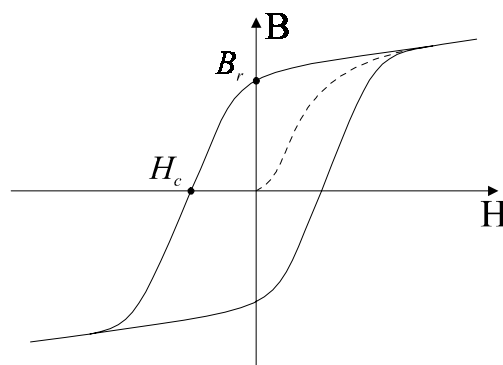


Fig. 1.53 Ciclo de histéresis y valores característicos

Cuando se desea, por el contrario, disponer de un imán permanente de buena calidad es deseable que el estado de magnetización sea estable. El valor del campo coercitivo, H_c , del material da idea de la persistencia de la magnetización frente a campos externos.

Por último debe señalarse que existe un valor de temperatura, llamado temperatura de Curie, por encima de la cual el medio pierde, al menos parcialmente, sus propiedades magnéticas. La agitación térmica se hace tan elevada que la orientación ordenada de los dipolos ya no es posible.

Algunos materiales ferromagnéticos usuales y sus características se muestran en la tabla siguiente.

Material	B_r (T)	H_c (A/m)	T_c (°C)
Acero (al Co)	0,97	$0,19 \times 10^5$	
Ferritas cerámicas	0,39	$2,5 \times 10^5$	450
Alnico 5	1,25	$0,55 \times 10^5$	700-850
$SmCo_5$	0,9	$6,5 \times 10^5$	500-750
Sm_2Co_{17}	1,12	$4,7 \times 10^5$	780-850
Nd,Dy-Fe,Co-B	1,2	$9,5 \times 10^5$	500

1.4.7 Flujo magnético, inductancia y energía magnética

El flujo de un campo magnético a través de una superficie es:

$$\phi_M = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (\text{Wb, Weber}) \quad (1.118)$$

donde C es el contorno en que se apoya la superficie no cerrada S .

La presencia de un flujo magnético a través de la superficie limitada por un circuito denota la existencia de una corriente eléctrica y, por tanto, de *una cierta cantidad de energía disponible*. Esa corriente podría hacerse fluir a través de una resistencia, y se transformaría en calor por efecto Joule, o podría utilizarse para cargar un condensador, y se almacenaría en forma de campo eléctrico. Sin embargo, mientras no se realice ninguna de esas operaciones, la energía está almacenada en forma de campo magnético en el circuito que lo produce. Es cierto que un circuito real tendrá una resistencia no nula y por tanto la energía irá disipándose lentamente, pero también podríamos imaginar que disponemos de un anillo superconductor, en el que la corriente puede circular ininterrumpidamente sin pérdida alguna. La cuestión es ¿de qué manera podemos medir la energía asociada al campo magnético o, si se prefiere, a la corriente eléctrica?

La significación física del flujo de campo magnético fue descubierta por Faraday, y de allí que esta cuestión deba tratarse en conexión con el fenómeno de inducción electromagnética y la ley de Faraday. Se tratará de forma sistemática en el capítulo siguiente. De momento nos conformaremos con apuntar algunos resultados.

La ley de Faraday cuantifica el hecho experimental de que *una variación del flujo de campo magnético en un circuito provoca la aparición de una fuerza electromotriz (f.e.m.) en dicho circuito*. A partir de allí podemos intuir que existe una relación directa entre variación temporal de flujo magnético y energía por unidad de carga, ya que la f.e.m. tiene en realidad dimensiones de tensión (1 voltio = 1 julio/culombio). Entonces, el producto *flujo magnético x corriente* tiene dimensiones de energía.

De lo anterior, y por puro análisis dimensional del problema, podemos afirmar que cuando en un circuito por el que circula una corriente medimos un cierto flujo de campo magnético es seguro que la energía almacenada tiene que ver con ambas magnitudes. Además, el flujo magnético a que da lugar una determinada corriente depende no sólo del valor de la corriente sino también de la geometría del circuito. Interviene entonces un parámetro que se denomina *autoinductancia* del circuito, y que *mide la cantidad de flujo magnético por unidad de corriente* que el circuito puede producir. Suele escribirse en forma diferencial:

$$L = \frac{d\phi_M}{dI} \quad (H, \text{henrios}) \quad (1.119)$$

si bien en circuitos rodeados de medios lineales puede prescindirse de las derivadas. La variación de flujo magnético que produce entonces una variación de corriente es

$$d\phi_M = L dI$$

Cuando dos o más circuitos están próximos físicamente, la variación de corriente en un circuito provoca la variación del flujo magnético que atraviesa al otro, o a los otros. Se dice que los circuitos están *magnéticamente acoplados* y existe entre ellos un intercambio de energía que puede cuantificarse mediante la ley de Faraday. Cuál sea la variación de flujo magnético en un circuito 1 debido a una variación de corriente en otro circuito 2 depende de la geometría de los circuitos y de su posición relativa. Se define el *coeficiente de inductancia mutua* (M_{12}) para dar cuenta de este efecto. Ahora podemos escribir:

$$\begin{aligned} d\phi_1 &= L_1 dI_1 + M_{12} dI_2 \\ d\phi_2 &= M_{21} dI_1 + L_2 dI_2 \end{aligned} \quad (1.120)$$

aunque se comprueba que $M_{12} = M_{21}$ o, en general, para cualquier número de circuitos: $M_{ij} = M_{ji}$.

Finalmente podemos adelantar que la energía magnética almacenada en un conjunto de N circuitos magnéticamente acoplados es:

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \sum_{j=1}^N M_{ij} I_j \quad \text{donde} \quad M_{ii} = L_i \quad (1.121)$$

y para el caso de un único circuito: $U_M = \frac{1}{2} L I^2$.

Pasando a una situación más general, no necesariamente circuital, puede probarse que la energía magnética se escribe en la forma:

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dv \quad (1.122)$$

Ejemplo 1.35: *Obtégase la autoinductancia del bobinado toroidal del ejemplo anterior (1.34 a)).*

Se calculó previamente el campo magnético existente en el interior de la bobina:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_0} \hat{\phi}$$

El número de espiras atravesadas por el flujo magnético es N y la sección de cada una de ellas es conocida. Entonces el flujo total es:

$$\phi = N \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_0} \pi a^2$$

donde a es el radio del solenoide. La inductancia es, por tanto:

$$L = \frac{d\phi}{dI} = \frac{\mu_0 N^2}{2r_0} a^2 \quad (H)$$

Cuestiones de Repaso:

- 1) ¿Qué significa que el campo magnetostático sea un campo solenoidal? ¿Qué otro campo vectorial solenoidal se ha tratado en este capítulo?
- 2) ¿Qué condiciones se precisan para que en una determinada situación podamos utilizar la ley de Ampère para el cálculo directo del campo magnético?
- 3) ¿Cómo disminuye el campo magnético creado por las siguientes distribuciones de corriente a medida que nos alejamos de ellas: a) un plano infinito de corriente; b) un hilo infinito; c) un dipolo magnético. Considere densidades homogéneas en las dos primeras.

- 4) Si la circulación del campo magnético a lo largo de una trayectoria cerrada es nula ¿qué puede deducirse de ese hecho?
- 5) Escriba las unidades en el S.I. y las expresiones matemáticas que definen a los campos vectoriales siguientes: \vec{J} , \vec{J}_s , \vec{B} , \vec{M} , \vec{H} .
- 6) El campo magnético \vec{B} ¿es más o menos intenso en un medio magnético o en el vacío? Supóngase que la forma de las líneas de campo no varían por la inclusión del material. (Tómese como referencia la situación del ejemplo 1.32).
- 7) ¿Qué tipos de medios magnéticos existen? Describa brevemente sus características.
- 8) ¿Puede extraerse energía de un imán permanente? Dicho de otro modo ¿puede utilizarse para realizar un trabajo neto?
- 9) Además del método de inversiones mencionado en la sección 1.4.6 utilizado para desmagnetizar una pieza de material ferromagnético ¿qué otro método, aparentemente más directo, podría utilizarse? ¿Qué ventajas tiene el primero sobre ese segundo método?.

PROBLEMAS - CAPÍTULO 1

Campo electrostático

1. Desde el punto de vista electrostático la Tierra puede considerarse como una esfera conductora con carga negativa y rodeada de una atmósfera cargada positivamente. El valor del campo eléctrico en la superficie es de unos 200 V/m, y a una altura de 2000 m. disminuye hasta unos 20 V/m. Hasta esa altura, $h = 2000$ m., la densidad volúmica de carga en la atmósfera puede considerarse constante. El radio de la Tierra es $R = 6,4 \times 10^6$ m.

- ¿Cuál es el sentido del campo eléctrico en la atmósfera?
- Obtenga la densidad de carga superficial media de la Tierra.
- Calcule la densidad de carga volúmica de la atmósfera hasta la altura h indicada.
- Si tomamos el potencial de la Tierra como referencia (cero voltios) ¿cuál será su valor a 2000 m?

(NOTA: Puede aproximarse el problema mediante una geometría plana, ya que $h \ll R$).

2. Un determinado modelo atómico muestra al átomo constituido por una carga puntual de valor q , en el vacío, situada en el origen de coordenadas, rodeada de una densidad volúmica de carga $\rho(\vec{r})$. Las expresiones de la densidad de carga y del potencial *total* creado en el espacio son:

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad \phi(\vec{r}) = K \frac{\exp(-r/a)}{r}$$

donde a es el llamado radio efectivo del átomo. Calcule:

- la carga total del átomo;
- el valor de la constante K en función de a y de q ;
- el campo eléctrico en el espacio.

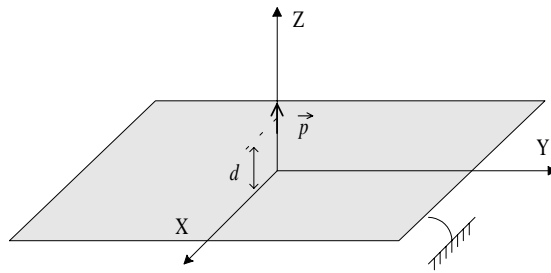
3. Una carga puntual de valor q está situada enfrente de un plano conductor extenso conectado a tierra, y a una distancia d , del mismo modo que en el ejemplo 1.14 (Fig. 1.17). A partir de los resultados que se obtuvieron entonces calcule:

- la densidad superficial de carga inducida en el plano conductor;
- la carga total que contiene esa densidad superficial;
- la fuerza que el plano realiza sobre la carga.

4. Un dipolo real de momento dipolar $\vec{p} = q s \hat{z}$ está situado a una distancia d de un plano conductor muy extenso y conectado a potencial cero, como se muestra en la figura 1.

- a) Calcule el campo eléctrico producido en el semiespacio $z > 0$.
- b) Escriba la aproximación usual del campo eléctrico a grandes distancias del dipolo.

Fig. 1



5. Una corona esférica de material dieléctrico, de radio interior a y radio exterior b , posee una polarización permanente de la forma:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{r}{a} P_0 \hat{r}$$

Suponiendo que no hay carga libre en el dieléctrico calcule: a) todas las densidades de carga presentes; b) el campo eléctrico en todo el espacio; c) la diferencia de potencial entre las superficies interior y exterior de la corona.

6. Una esfera dieléctrica de radio R y situada en el origen de coordenadas tiene una polarización permanente y homogénea, en la forma $\vec{P} = P_0 \hat{z}$. No tiene carga libre. Resuelva ordenadamente las siguientes cuestiones:

- a) Obtenga las densidades de carga ligada volúmica y superficial;
- b) ¿qué valor toma la laplaciana del potencial dentro y fuera de la esfera?;
- c) el potencial tiene la forma

$$\phi(r, \theta) = Ar^{-n} f(\theta) \quad \text{o} \quad \phi(r, \theta) = Br^m g(\theta)$$

¿Qué expresión puede utilizar para el interior de la esfera? ¿y para el exterior?

- d) escriba las condiciones de contorno para los campos \vec{E} y \vec{D} . (Vid. Capítulo 2).
- e) calcule el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.
- f) calcule el momento dipolar de la esfera.

7. Calcule la fuerza que ejercen entre sí las placas de un condensador plano cuando se carga mediante una diferencia de potencial V . Tómense los datos siguientes: d , separación entre placas; S , superficie de cada placa; ϵ , permitividad del dieléctrico entre las placas (lineal y homogéneo). Despréciense los efectos de borde.

8. Considérese la estructura de la figura, formada por una esfera conductora de radio a , con dos cubiertas metálicas concéntricas, la primera de radios interior y exterior b y c , respectivamente, y la segunda de radios d y e . Entre los conductores hay aire. Se sabe que el conductor intermedio está aislado y que no posee carga neta.

- ¿Qué relación existe entre los flujos de campo eléctrico a través de dos superficies cerradas que engloban el centro del sistema y contenidas respectivamente en las zonas $a < r < b$ y $c < r < d$?
- Se conecta la esfera interior a un potencial V respecto a la cubierta externa. Calcule el campo eléctrico en todos los puntos $0 < r < d$.
- Calcule las densidades superficiales de carga en $r=a$ y $r=b$.
- Obtenga la capacidad del sistema.

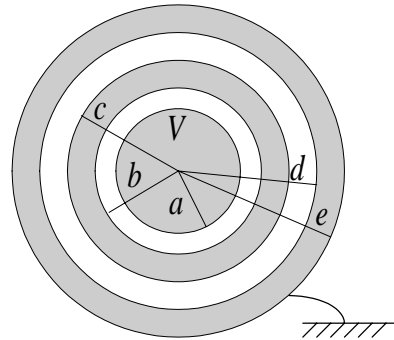
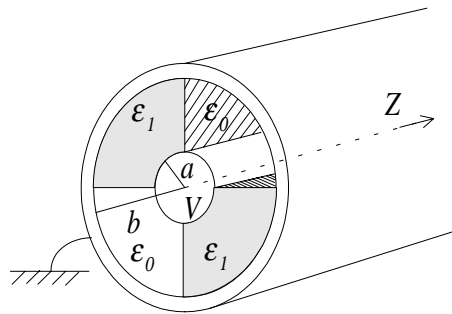


Fig. 2

9. Considérese un cable coaxial formado por un conductor cilíndrico central de radio a , y otro conductor, concéntrico con el primero, de radio interior b . Entre ambos conductores hay unas fijaciones de material dieléctrico en la forma en que se muestra en la figura. El dieléctrico es lineal y homogéneo, de permitividad ϵ_1 . El espacio restante es aire. Se conecta el conductor interior a un potencial V y el exterior a tierra. Se comprueba que la distribución de potencial que resulta entre ambos conductores sólo depende de la distancia ρ al eje Z . De acuerdo con esa información obtenga:

- La función potencial en todo el espacio comprendido entre los conductores;
- el campo eléctrico;
- la capacidad por unidad de longitud del cable.

Fig. 3



10. Se desea calcular la capacidad de una línea de transmisión formada por un cable conductor cilíndrico, de radio R , situado a una altura h de tierra, y el propio plano de tierra, como se muestra en la figura 4. La tierra se comporta como un plano conductor infinito. El potencial electrostático en el espacio comprendido entre los dos conductores es de la forma:

$$\phi(x, y) = \frac{V}{\ln\left(\frac{h+D}{h-D}\right)} \left\{ \ln(x^2 + (y+D)^2) - \ln(x^2 + (y-D)^2) \right\}$$

$$\text{donde } D = \sqrt{h^2 - R^2}$$

- Compruebe que la expresión dada para la función potencial es la adecuada al problema.
- Calcule la densidad superficial de carga en el plano de tierra.
- Obtenga la capacidad por unidad de longitud de la línea.

NOTA: La ecuación de una circunferencia de radio R y centrada en el punto (x_0, y_0) es:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

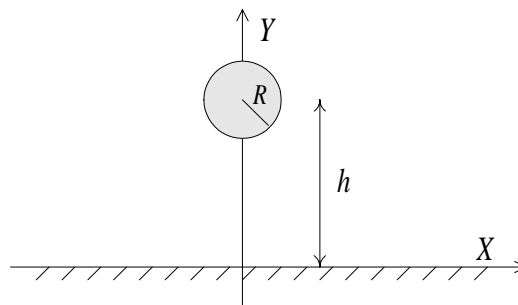


Fig. 4

11. Un condensador cilíndrico largo está formado por dos conductores concéntricos de radios exterior b e interior $b/4$, separados por un dieléctrico no homogéneo, cuya constante dieléctrica es:

$$\epsilon_r(\rho) = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{b}{\rho} \right)$$

En el dieléctrico no hay carga libre adicional. Conectamos el conductor interior a tierra y el conductor exterior a un potencial V . Conteste ordenadamente a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuáles son los campos \vec{D} y \vec{E} entre las armaduras del condensador?
- ¿Cuál será la carga total del dieléctrico?
- ¿Cuál es la capacidad por unidad de longitud?
- ¿Qué cantidad de energía eléctrica almacena el condensador?

12. Las armaduras de cierto condensador plano son dos placas metálicas cuadradas de lado $a = 30$ cm., distantes entre sí $d_1 = 1$ cm. Se carga el condensador con una diferencia de potencial $V_1 = 2000$ V.

- Obtenga la capacidad del condensador, despreciando los efectos de borde.
- Se *aísla* el condensador cargado de la fuente de tensión y *se separan* las armaduras hasta una distancia $d_2 = 3$ cm.
 - ¿Cuánto vale la carga de las armaduras?
 - ¿Cuál es la diferencia de potencial V_2 final?
 - ¿Qué trabajo hubo que realizar para separar las armaduras?
- En la posición d_2 se *conectan* las armaduras a una fuente de tensión constante igual a la tensión V_2 final del apartado anterior, y *vuelven a desplazarse* las armaduras a la posición inicial d_1 . ¿Cuál será la carga final del condensador?.

Campos magnetostáticos

13. Dos láminas muy delgadas y extensas de un material conductor están dispuestas paralelamente, y separadas una distancia d . Cada una de ellas conduce una densidad de corriente superficial homogénea de módulo J_0 , aunque de sentido contrario en una y otra lámina. Obtenga: a) el campo magnético en las tres zonas del espacio: sobre las láminas, entre ellas y debajo; b) la fuerza que realiza una lámina sobre la otra por unidad de superficie.

14. Una bobina de forma cilíndrica tiene radio a y longitud h , con N espiras densamente arrolladas y distribuidas uniformemente. Por ellas circula una corriente I . Calcule el campo magnético producido en el eje de la bobina mediante la Ley de Biot y Savart.

15. Para la misma bobina del problema anterior realice los siguientes cálculos:

- el campo magnético producido en el centro del solenoide;
- el campo magnético en el mismo punto con la suposición de que la longitud de la bobina tiende a infinito (ó $h \gg a$), manteniéndose la densidad de espiras por unidad de longitud;
- la relación h/a mínima para que el resultado del apartado b) pueda tomarse como solución del problema a) con un error no mayor del 2%.

16. Una partícula con carga q , masa m y una velocidad inicial v_0 penetra en una zona del espacio en la que existe un campo magnético uniforme, de módulo B , y dirigido perpendicularmente a la dirección inicial de la partícula. Mediante la expresión de la fuerza de Lorentz y la ley fundamental de la dinámica puede comprobarse que la trayectoria seguida por la partícula será circular. Obtenga el radio y la frecuencia de giro.

17. La misma partícula del problema anterior se introduce en el campo magnético con un ángulo α respecto a la dirección de B . En este caso la partícula describirá una trayectoria helicoidal.

- Compruebe que la velocidad de la partícula toma la forma:

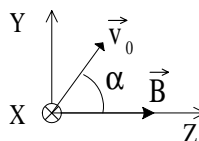
$$v_x(t) = v_0 \sin \alpha \sin \omega t$$

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha \cos \omega t$$

$$v_z(t) = v_0 \cos \alpha$$

- Obtenga el radio de cada vuelta;

- la velocidad lineal y la angular;
- el periodo;
- la distancia entre vueltas.



18. Una partícula se introduce en una zona del espacio en la que existe un campo magnético B y un campo eléctrico E , ambos uniformes. El campo eléctrico está dirigido en la dirección original de la partícula y el campo magnético es perpendicular.

- Obtenga la nueva trayectoria de la partícula.
- Compruebe que su dirección de desplazamiento neto es perpendicular a ambos campos.
- Compruebe que la velocidad media de la partícula en esa dirección es independiente del tipo de partícula cargada que se considere.

19. El efecto Hall se utiliza habitualmente para medir el valor de campo magnético presente en alguna zona del espacio. Este efecto consiste en la aparición de una diferencia de potencial entre dos de las caras de un trozo de material semiconductor cuando es atravesado por una corriente I en presencia de un campo magnético. De acuerdo con la figura calcule la relación entre la tensión de Hall, V_H , y el campo magnético B . (El fundamento físico del efecto Hall es de nuevo la fuerza magnética de Lorentz que experimentan los portadores de carga al moverse en el seno de un campo magnético).

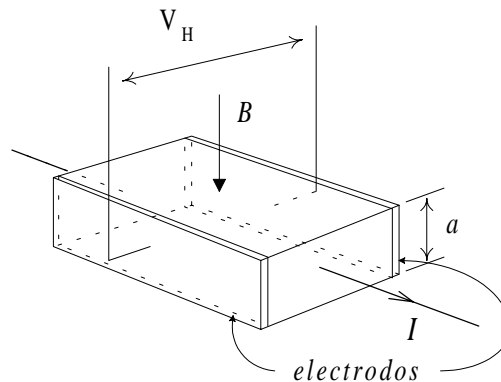


Fig. 5

20. La aguja magnetizada de una brújula se comporta como un dipolo magnético: en presencia de un campo magnético externo tenderá a orientarse con él. En ausencia de otros campos tenderá por tanto a mantener la orientación del campo magnético terrestre.

- Situamos la aguja a 1 cm de un hilo conductor largo (Fig. 6.a), orientado en la dirección norte-sur. Hacemos circular una intensidad de corriente de valor I , y la aguja gira un ángulo de 45 grados. Determinar el valor de la intensidad de corriente. Tómese el módulo del campo magnético terrestre de $20 \mu\text{Tesla}$.
- Se busca ahora *el mismo efecto* con una espira de corriente de radio 1 cm y situada a 15 cm de la aguja (Fig. 6.b). Obtenga la corriente que deberá circular por la espira para conseguirlo.

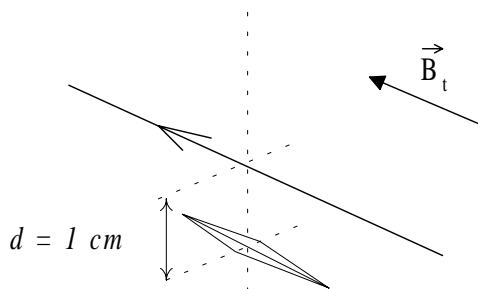


Fig. 6.a

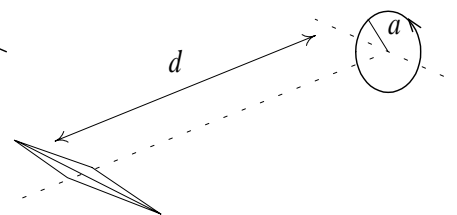


Fig. 6.b

21. Un imán en forma de U como el de la figura 7 ejerce una fuerza de atracción que viene dada, de forma aproximada, por la expresión:

$$F = \frac{\phi^2}{\mu_0 S}$$

donde ϕ es el flujo magnético a través de la sección S del imán. Se ha supuesto que la pieza atraída tiene el mismo valor de permeabilidad magnética que el material de que está formado el imán.

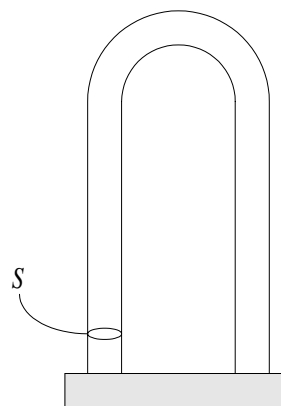


Fig. 7

- a) Trate de comprobar ‘*grosso modo*’ esa expresión mediante el cálculo de la fuerza que el imán ejerce sobre las corrientes superficiales de magnetización inducidas en el objeto.
- b) Considere un núcleo de hierro dulce de la misma forma que el imán anterior, con N espiras arrolladas en él, y por las que circula una corriente I . La longitud media total del núcleo más el entrehierro es l . Calcule el peso máximo que puede levantar el electroimán con los siguientes datos: $l=20$ cm, $S=1$ cm², $N=100$, $I=0,5$ A. Utilícese $\mu_r=2000$.

22. Un motor sin escobillas (*brushless*) está formado por varios devanados independientes, con diferentes orientaciones, dispuestas en el estátor (la parte fija del motor) alrededor de un rotor formado por el eje y un imán permanente que lo rodea. Las corrientes que alimentan los devanados son variables en el tiempo. El número de devanados depende de la estabilidad que se pretenda en el giro del motor. La posición instantánea del rotor se determina de forma continua mediante células de efecto Hall, que controlan las fases de las corrientes. Trate de dibujar un esquema posible para un motor de este tipo.

23. Calcular la autoinductancia por unidad de longitud de un cable coaxial formado por un hilo delgado de radio a y un conductor exterior concéntrico de radio b , separados por un medio de permeabilidad magnética μ . Suponga que ambos conductores son muy delgados en comparación con la separación $b-a$.

24. Calcule la inductancia por unidad de longitud de una línea bifilar formada por dos hilos delgados de radio a , paralelos, con una separación entre sus centros igual a d . El dieléctrico que mantiene unidos los hilos es no magnético.