Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS

Processament del Senyal

Data d'examen:	15 de Juny de 2006
Data notes provisionals:	26 de Juny de 2006, 17h
Període d'al.legacions:	28 de Juny de 2006, 13h
Data notes revisades:	30 de Juny de 2006

Professors: Meritxell Lamarca, José B. Mariño, Ferran Marqués, Climent Nadeu, Albert Oliveras.

Informacions addicionals:

- Durada de la prova: 3h.
- No es poden fer servir llibres, apunts, telèfons mòbils, etc.
- Es pot utilitzar calculadora.
- El D.N.I. ha d'estar sempre visible.
- Durant la realització de l'examen, tots els fulls han de dur el nom de l'estudiant.
- Els exercicis s'han de respondre en fulls separats.
- *Respondre l'exercici 4 en el full adjunt.*
- Tots els resultats s'han de justificar.

Exercici 1 (45 minuts)

Se pretende recuperar la señal s(n), a la cual en el proceso de transmisión se ha añadido una interferencia $i_1(n)$ así como un ruido blanco $w_1(n)$, ambas señales incorreladas con la señal s(n) y entre sí, dando lugar a la señal conjunta z(n)

$$z(n) = s(n) + i_1(n) + w_1(n)$$

Para recuperar la señal s(n), se dispone de una señal v(n)

$$v(n) = i_2(n) + w_2(n)$$

donde la señal $i_2(n)$ está correlada con $i_1(n)$ e incorrelada con el resto de señales, y el ruido $w_2(n)$ es blanco y está incorrelado con el resto de señales.

a) Proponed una configuración del filtro de Wiener que, a partir de z(n) y v(n), proporcione la señal transmitida s(n) con el menor error posible. Identificad las señales que aparecen en la configuración propuesta con las señales definidas en el caso general del filtro de Wiener (x(n): datos, d(n): referencia y e(n): error). A partir de la ecuación que determina la solución del filtro de Wiener ($\underline{\underline{R}}_x \, \underline{h} = \underline{r}_{dx}$) expresad la solución en términos de las correlaciones entre las distintas señales.

b) Las características de las distintas señales varían con el tiempo, haciendo necesario el uso de sistemas adaptativos. Suponiendo que la adaptación se realiza mediante el algoritmo LMS, discutid los siguientes puntos:

- Si varían los coeficientes del filtro de Wiener.
- Cómo afecta la nueva situación a la convergencia del filtro.
- Cómo varía la velocidad de convergencia.
- Cómo varía el desajuste relativo ($M \approx \mu \text{Traza}(\underline{\underline{R}}_x)$) de la solución obtenida.

suponiendo que el parámetro μ (paso de adaptación) no varía para cada una de las situaciones que se proponen:

- La potencia de la señal s(n) aumenta.
- La potencia de la señal $w_2(n)$ aumenta.
- La correlación entre las señales $i_1(n)$ e $i_2(n)$ disminuye (tiende a cero) manteniendo cada señal su autocorrelación.

Responded razonadamente en la tabla de la hoja adjunta.

Exercici 2 (1 hora)

Volem observar la influència que té l'estimador de l'autocorrelació en la determinació dels coeficients de predicció lineal per al cas d'una sinusoïde immersa en soroll blanc. Així, doncs, el procés $x(n)$ que es vol analitzar és:

$$x(n) = \cos(2\pi f n + \phi) + w(n)$$

on ϕ és una variable aleatòria uniformement distribuïda entre 0 i 2π, i $w(n)$ és soroll blanc de mitjana zero, variància σ^2 i independent de ϕ.

Es demana:

a) Indiqueu l'expressió de l'autocorrelació $r(m)$ del procés. Calculeu els valors exactes de l'autocorrelació $r(m)$ per a $0 \leq m \leq 2$, suposant f=0.25 i σ^2=0.05.

b) Definint el valor predit de $x(n)$ com a

$$\hat{x}(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2),$$

deduïu les dues equacions que permeten determinar els coeficients a_1 i a_2 òptims (en el sentit de mínim error quadràtic mitjà) a partir dels valors de $r(m)$. Trobeu l'expressió del coeficient a_2 en funció d'aquests valors. Calculeu el coeficient exacte a_2 amb els valors de $r(m)$ determinats a l'apartat ***a)***.

Normalment no es coneixen els valors de $r(m)$, de manera que s'han d'estimar a partir d'un conjunt de mostres de $x(n)$. Considerarem els dos estimadors bàsics de l'autocorrelació i estudiarem com el valor d'a_2 obtingut amb les equacions de l'apartat anterior és afectat pel tipus d'estimador de l'autocorrelació que s'utilitzi.

c) Escriviu l'expressió de l'estimador esbiaixat de l'autocorrelació $\hat{r}(m)$ en funció del nombre de mostres disponibles N. Considerant les N=4 mostres del senyal $x(0)$=1.05, $x(1)$=-0.03, $x(2)$=-0.94 i $x(3)$=0.07, calculeu els valors de $\hat{r}(m)$ per a $0 \leq m \leq 2$. Observeu les diferències amb els tres valors de $r(m)$ calculats a l'apartat ***a)*** i raoneu-les en termes de biaix i variància de l'estimador espectral. Raoneu com canviarien aquestes diferències si N fos molt gran.

d) Doneu l'expressió de l'estimador sense biaix $\check{r}(m)$ en funció de l'estimador esbiaixat $\hat{r}(m)$ i de N. Suposant que $r^2(1)$ és negligible per als dos estimadors, trobeu la relació entre els valors de a_2 estimats amb cada un d'ells ($\check{a}_2$ i $\hat{a}_2$, respectivament). Calculeu els valors de $\check{a}_2$ i $\hat{a}_2$ que s'obtenen a partir de les 4 mostres de $x(n)$ de l'apartat ***c)***.

Sobre l'exemple anterior de N=4 mostres acabem d'observar que l'estimador sense biaix funciona millor que l'altre en l'estimació de a_2. Per veure si aquest resultat és generalitzable, estudiarem a continuació el biaix i la variància dels estimadors $\check{a}_2$ i $\hat{a}_2$.

e) Suposant que es coneix el valor de la potència del procés (i, per tant, no necessita ser estimat), i suposant com abans que $r^2(1)$ és negligible per als dos estimadors, determineu el valor del biaix de $\check{a}_2$ i de $\hat{a}_2$ en funció de a_2 i N. Trobeu també l'expressió de la variància de $\check{a}_2$ en funció de la variància de $\hat{a}_2$ i N.

f) Feu un esbós de les funcions de densitat de probabilitat de $\check{a}_2$ i $\hat{a}_2$ sobre una mateixa gràfica, suposant que tenen una estadística gaussiana. Considereu els dos casos següents: ***1)*** N=4 i variància de $\hat{a}_2$ igual a 0.25; ***2)*** N=40 i variància de $\hat{a}_2$ igual a 0.01. Feu els comentaris que considereu pertinents.

7.5

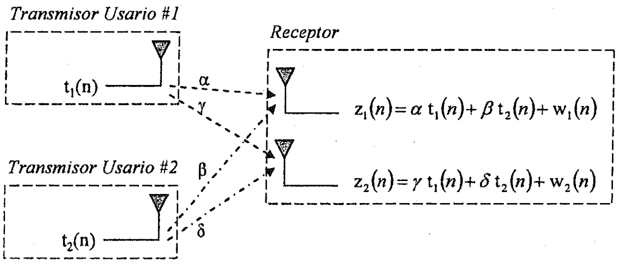
Exercici 3 (1hora 15 minuts)

En este ejercicio se propone la comparación de dos alternativas para el diseño de un detector multiusuario en un sistema de acceso múltiple en comunicaciones inalámbricas. Se considera un sistema con diversidad espacial dotado de dos antenas en recepción, tal y como se describe a continuación.

Considere el sistema de la figura, donde:

- $t_1(n)$ y $t_2(n)$ son las señales correspondientes a dos usuarios distintos, independientes entre sí, con media nula y varianza A^2
- α, β, γ y δ son los coeficientes de propagación del canal
- $z_1(n)$ y $z_2(n)$ son las señales recibidas en cada antena de recepción
- $w_1(n)$ y $w_2(n)$ son las componentes de ruido Gaussiano blanco en cada antena, incorreladas entre sí con media nula y varianza σ^2

Considere además que las señales, $t_1(n)$ y $t_2(n)$ son independientes de las componentes de ruido $w_1(n)$ y $w_2(n)$.



Se desea comparar dos algoritmos para la estimación de $t_1(n)$ y $t_2(n)$ a partir de la observación de $z_1(n)$ y $z_2(n)$: el estimador lineal MMSE y el estimador de máxima verosimilitud (ML). Se pide:

a) Se definen los vectores $\underline{t}$ y $\underline{z}$ como:

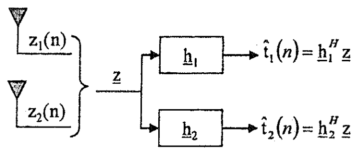
$$\underline{t}=\begin{bmatrix} t_1(n) \\ t_2(n) \end{bmatrix} \qquad \underline{z}=\begin{bmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \end{bmatrix}$$

Identifique las variables $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$, $\underline{\underline{S}}$ y $\underline{w}$ que describen el sistema con formulación vectorial con los parámetros de la figura anterior

$$\underline{z}=\underline{s}_1\, t_1(n)+\underline{s}_2\, t_2(n)+\underline{w}=\underline{\underline{S}}\,\underline{t}+\underline{w}$$

b) Halle la matriz de autocorrelación de $\underline{t}$ ($\underline{\underline{R}}_t$) y de $\underline{z}$ ($\underline{\underline{R}}_z$).

c) Considere el estimador lineal de la figura:



Halle el valor del filtro $\underline{h}_1$ que minimiza el error cuadrático medio entre $t_1(n)$ y $\hat{t}_1(n)$. Halle también el valor del filtro $\underline{h}_2$ que minimiza el error cuadrático medio entre $t_2(n)$ y $\hat{t}_2(n)$. Exprese la estimación $\underline{\hat{t}}_{MMSE}=[\hat{t}_1(n)\ \hat{t}_2(n)]^T$ en función de $\underline{\underline{S}}$, A^2 y σ^2.

d) Halle la estimación de máxima verosimilitud (ML) de los datos $\underline{\hat{t}}_{ML}$ a partir de la observación $\underline{z}$.

e) Haga uso de la identidad $\underline{\underline{M}}^H(\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{M}}^H+m\,\underline{\underline{I}})^{-1}=(\underline{\underline{M}}^H\underline{\underline{M}}+m\,\underline{\underline{I}})^{-1}\,\underline{\underline{M}}^H$ para relacionar el estimador ML obtenido en el apartado ***c)*** y el estimador lineal MMSE obtenido en el apartado ***d)***: bajo qué condiciones de SNR coinciden ambos estimadores?

f) (Pregunta opcional) En la práctica, las señales transmitidas $t_1(n)$ y $t_2(n)$ corresponden a modulaciones digitales, por lo que sólo pueden tomar un número discreto de valores. ¿En qué cambiaría el planteamiento de los apartados ***c)*** y ***d)*** si realizáramos el diseño para una modulación BPSK, es decir $t_1(n), t_2(n)\in\{\pm A\}$?

Nota.- La densidad de probabilidad conjunta de N variables aleatorias complejas conjuntamente gaussianas con media $\underline{m}_x$ y covarianza $\underline{\underline{C}}_x$ responde a la expresión

$$f(\underline{x})=\frac{1}{\pi^N\det\left(\underline{\underline{C}}_x\right)}\exp\left(-\left(\underline{x}-\underline{m}_x\right)^H\underline{\underline{C}}_x^{-1}\left(\underline{x}-\underline{m}_x\right)\right)$$