COMUNICACIONS II
9 de Juny de 2009

Data notes provisionals: 26 de Juny
Període d'al·legacions: fins 30 de Juny
Data notes revisades: 3 de Juliol

Professors: Montse Nájar, Ana I. Pérez, Gregori Vázquez.

Informacions addicionals:

- Duració de l'examen: 2 hores.
- Les respostes dels diferents problemes s'entregaran separadament

Ejercicio 1

Una modulación digital queda descrita por un alfabeto de cuatro símbolos equiprobables, dados por:

$$s_m(t) = a_n \cos(\omega_0 t) + b_n \cos((\omega_0 + \Delta)t) \quad 0 \le t \le T$$

El ruido $w(t)$ en recepción es Gaussiano, de media nula y con densidad espectral de potencia $S_{ww}(f) = 4N_0$. Considere que $a_n = \pm A$, $b_n = \pm B$, con $A > 0$, $B > 0$, $B > A$ y que $\omega_0 T$ es arbitrariamente grande. Todos los términos son estadísticamente independientes.

a. Determine todos los valores de Δ para los que los términos de ruido a la salida de los filtros adaptados a las formas de onda sean estadísticamente independientes. Tome el valor mínimo de Δ para el resto del ejercicio.

Solución:
Las componentes de ruido relevante a la salida de los dos filtros adaptados para un canal AWGN serán independientes si y sólo si los dos filtros son ortogonales. Las dos dimensiones del espacio son ortogonales si $\Delta x T = n\pi$ con $n \in Z^+$. El mínimo desplazamiento en frecuencia es para $n = 1$, de modo que $\Delta_{mín} = \pi / T$.

b. Encuentre una base ortonormal del espacio de la señal y represente el alfabeto en dicha base.

Solución:
Para $\omega_o T$ arbitrariamente grande, una posible base ortonormal es la siguiente:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_o t);\ 0 \le t \le T$$

$$\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos((\omega_o + \Delta_{mín})t);\ 0 \le t \le T$$

La constelación es de la forma:

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{T}{2}} \begin{bmatrix} \pm A \\ \pm B \end{bmatrix} \quad con\ B > A$$

c. Obtenga *analíticamente* y represente el receptor de mínima probabilidad de error de símbolo mediante las regiones de decisión óptimas.

Solución:

A partir de la teoría general de detección óptima de mínima probabilidad de error de símbolo, el detector óptimo es el habitual MAP. Para este caso, cada dimensión es portadora de un bit de información independiente a la salida de cada filtro adaptado. La potencia de ruido es la misma para los dos filtros adaptados, pero las amplitudes de información relevante están desbalanceadas:

$$\upsilon_1 = \pm A\sqrt{\frac{T}{2}} + \beta_1; \quad \upsilon_2 = \pm B\sqrt{\frac{T}{2}} + \beta_2; \quad E\left[\beta_k^2\right] = 4N_o$$

d. Obtenga la *BER* del sistema anterior en función de la energía promedio de bit de la constelación para el caso particular de B=2A.

Solución:

Las decisiones a las salidas de los dos filtros adaptados son independientes. La BER exacta es de la forma:

$$BER = \frac{1}{2}Q\left(\frac{\sqrt{A^2T/2}}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{\sqrt{B^2T/2}}{\sigma}\right) \quad con: \sigma = \sqrt{4N_o}$$

para $B = 2A$. En términos de energía promedio de bit, tenemos que:

$$E_b = \frac{T}{4}\left(A^2 + B^2\right) = \frac{5}{4}TA^2$$

e. En este apartado consideramos que el receptor es móvil y que las amplitudes A y B son variables aleatorias, estadísticamente independientes y ambas distribuidas de acuerdo a una función densidad de probabilidad Rayleigh:

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}, \; x \geq 0$$

con $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$. Si tenemos en cuenta que $Q(y) \leq e^{-y^2/2}$, $y \geq 0$, obtenga una cota superior para la BER del sistema dado en (c.).

Solución:

Nos centramos en el primer término, dado que para el segundo podemos tomar $B = 2A$. La BER es aleatoria, dado que las amplitudes de las dos componentes del espacio lo son. El valor promedio supone el cálculo de las esperanzas asociadas:

$$E[BER] = \frac{1}{2}E_A\left[Q\left(\frac{\sqrt{A^2T/2}}{\sigma}\right)\right] + \frac{1}{2}E_B\left[Q\left(\frac{\sqrt{B^2T/2}}{\sigma}\right)\right]$$

En particular:

$$E_A\left[Q\left(\sqrt{A^2T/8N_o}\right)\right] \leq E_A\left[\exp\left(-A^2T/16N_o\right)\right] = \int_0^{+\infty}\exp\left(-A^2T/16N_o\right)f_A(A)dA$$

Con un integrando de primitiva inmediata a partir de la siguiente:

$$\int 2x\exp\left(-x^2\right)dx = -\exp\left(-x^2\right) + C$$

Ejercicio 2

Considere un sistema de 2 usuarios en donde la señal recibida es

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\alpha_1[n].\varphi_1\left(t-nT-\tau_1\right)+\alpha_2[n].\varphi_2\left(t-nT-\tau_2\right)\right)+w(t) \qquad con\begin{cases}\alpha_1[n]\in\sqrt{E_b}\,\{-1,1\}\\ \alpha_2[n]\in\sqrt{E_b}\,\{-1,1\}\end{cases}$$

siendo w(t) ruido Gaussiano blanco de media cero y con $S_w(f)=N_o/2$. $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son las formas de onda recibidas tales que

$$\int\varphi_i(t-\tau_i)\varphi_j(t)dt=\begin{cases}0 & \tau_i=0 \quad i\neq j\\ 1 & \tau_i\neq 0 \quad i=j\\ \rho_i & \tau_i\neq 0\end{cases}$$

El receptor es un banco de filtros adaptados a $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$, no sincronizados con la señal recibida, es decir, que no tienen en cuenta ni τ_1 ni τ_2. La señal muestreada a la salida de dichos filtros se puede formular para un instante de símbolo como

$$\underline{y}=\underline{\underline{H}}.\underline{x}+\underline{w} \qquad con \qquad \underline{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix};\quad \underline{x}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix};\quad \underline{w}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$$

a.- Halle cada elemento de la matriz H, h_{ij}, i,j=1,2 en función de $\rho_i,\ i=1,2$. Obtenga la correlación de $\underline{w}$.

Solución:

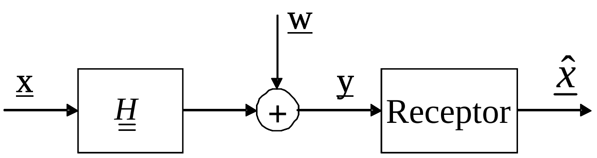
Según la formulación indicada en $\underline{y}=\underline{\underline{H}}.\underline{x}+\underline{w}$ no hay ISI, sino ICI. En un instante de símbolo la señal en cada rama i=1,2 es:

$$y_i(t)=\left[\alpha_1(k).\varphi_1\left(t-nT-\tau_1\right)+\alpha_2(k).\varphi_2\left(t-nT-\tau_2\right)+w(t)\right]*\varphi_i\left(T-t\right)\Big|_{t=t_k}$$

Dada las propiedades de correlación entre $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$, se obtiene que:

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \rho_2\\ \rho_1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} \qquad R_w=\frac{N_o}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

A continuación se trata de estudiar diferentes diseños para el receptor de la figura



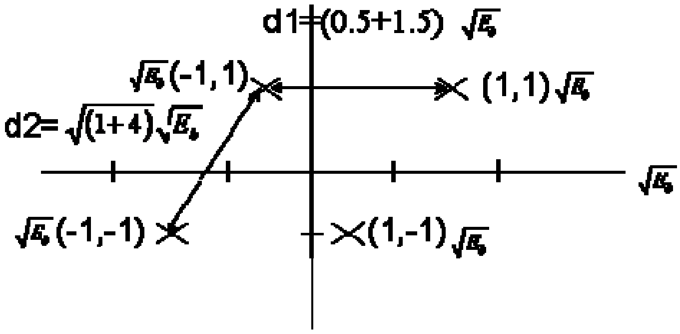
A partir de ahora considere $\underline{\underline{H}}=\begin{bmatrix}1 & 0.5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

b.- Formule el criterio MAP para detectar $\underline{x}$ a partir de $\underline{y}$. Dibuje la constelación de los símbolos recibidos y dé una cota de la probabilidad de error de usuario en función de la Eb/No.

Solución

El ruido es blanco y el criterio MAP se formula como $\min_{\underline{x}}\left|\underline{y}-\underline{\underline{H}}.\underline{x}\right|^2$

La constelación es



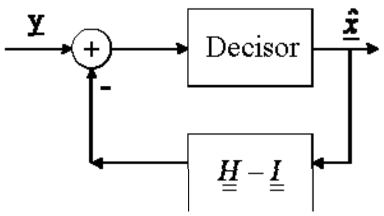
Si se acota la probabilidad de error de cada usuario según distancias mínimas se obtiene que:

$$p_{e_1} = Q\left(\frac{d_1}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$$

$$p_{e_2} = Q\left(\frac{d_2}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

Con el objetivo de reducir la complejidad del detector se proponen a continuación tres alternativas.

c.- Considere que el receptor es el de la siguiente figura. Para SNR suficientemente altas se supone que $\underline{\hat{x}} = \underline{x}$; formule la señal, $\underline{v}$, justo a la entrada del decisor



A partir de $\underline{v}$ la decisión de cada usuario se hace independientemente con un cuantificador binario. Calcule la probabilidad de error para cada usuario en función de la Eb/No. Para ello considere que, en la práctica, la detección correcta del usuario 1 dependerá de que el usuario 2 se detecte también correctamente con una cierta probabilidad que hay que hallar.

Solución

$$\underline{v} = \underline{y} - \left(\underline{\underline{H}} - \underline{\underline{I}}\right).\underline{x} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$p_{e_1} = 1 - p_c = 1 - p_{c_1}.p_{c_2}$$

$$con \quad p_{c_1} = 1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right) \quad y \quad p_{c_2} = 1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$$

$$p_{e_2} = Q\left(\frac{d_2}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$$

d.- Para evitar el problema de propagación de errores que presenta el diseño del apartado c) para baja SNR, el segundo receptor alternativo es un decorrelador seguido de detección independiente en cada rama. Diseñe el decorrelador y halle la probabilidad de error en función de la Eb/No y compare con los apartados **b** y **c**.

Solución

El decorrelador es el filtro $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{H}}^{-1} \quad con \quad \underline{\underline{H}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Para hallar la probabilidad de error se ha de obtener primero la matriz de correlación del ruido

$$\underline{\underline{H}}^{-1}.\underline{\underline{H}}^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la detección se hace independiente en cada rama se obtiene la siguiente probabilidad de error para cada usuario

$$p_{e_1} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{1.25\, N_o}}\right)$$

$$p_{e_2} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$$

La probabilidad de error para el usuario 1 empeora respecto a los apartados anteriores, debido al carácter subóptimo del decorrelador.

e.- Como tercera opción se propone emplear un filtro de mínimo error cuadrático medio, seguido de detección independiente en cada rama. Formule el criterio de diseño MMSE, obtenga el filtro en función de la matriz H y de la correlación de $\underline{w}$. Dé una expresión para la matriz de correlación del error resultante. Compare cualitativamente el diseño con el realizado en el apartado d)

Solución

$$E\left\{\left|\underline{\underline{A}}^H \underline{y} - \underline{x}\right|^2\right\}\Big|_{\min_A} \quad \Rightarrow \quad E\left\{\left(\underline{\underline{A}}^H \underline{y} - \underline{x}\right)\underline{y}^T\right\} = \underline{\underline{0}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = E_b \underline{\underline{R}}_y^{-1} \underline{\underline{H}}$$

$$\underline{\underline{R}}_y = E_b \underline{\underline{H}}\underline{\underline{H}}^H + R_w \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = E_b \left(E_b \underline{\underline{H}}\underline{\underline{H}}^H + R_w\right)^{-1} \underline{\underline{H}}$$

La matriz de correlación del error resultante es

$$\underline{\underline{R}}_E = \underline{\underline{R}}_x - E_b^2 \underline{\underline{H}}^H \underline{\underline{R}}_y^{-1} \underline{\underline{H}}$$

Es un ruido coloreado. Respecto al decorrelador el MMSE tiene en cuenta ICI y ruido a su salida. Únicamente cuando la ICI sea mucho mayor que el ruido, ambos filtros tendrán prestaciones parecidas.