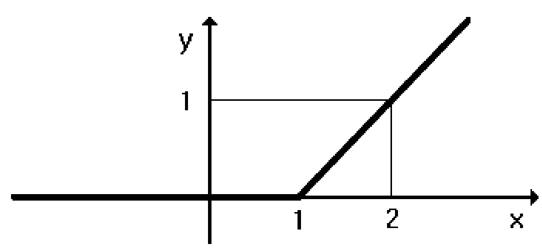
PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS
3 de novembre de 1997

1. Un experiment $\mathcal{E}$ genera nombres aleatoris X que poden prendre valors $0, 1, 2, \ldots$ amb probabilitats $P_X(k) = Ae^{-k}$.
   (a) Determineu la constant A i l'esperança de X.
   (b) En dues repeticions de $\mathcal{E}$ quines són les probabilitats que el segon sigui menor, igual o major que el primer?

2. Tirem un dau (cares numerades de 1 a 6) i el resultat és N. Després generem una variable X, exponencial de paràmetre $\lambda = \frac{1}{N}$.
   (a) Si $X > 3$ calculeu la probabilitat que el dau hagués tret un 6.
   (b) Considereu la variable X que resulta quan $N = 2$. Donada $Y = g(X)$ amb g la funció del dibuix, calculeu i dibuixeu la funció de distribucio de Y i calculeu $E[Y]$.
   (c) Que valen $P(Y = 0)$ i P(Y=1)?



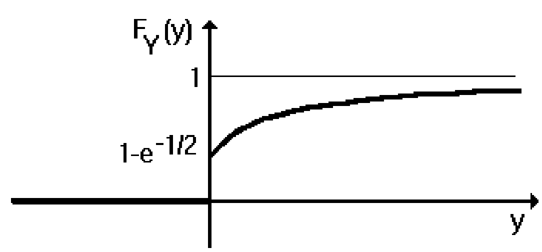
Solució:

1. (a)
$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} Ae^{-k} = A\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-1})^k = \frac{A}{1-e^{-1}} \Rightarrow A = 1-e^{-1}.$$
$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kAe^{-k} = A\sum_{k=0}^{\infty} k(e^{-1})^k = (1-e^{-1})\frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} = \frac{1}{e-1}.$$
(Fent servir
$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{-k} = \frac{1}{1-x}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kx^{-k} = x\frac{d}{dx}S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.)$$

(b) Amb la fórmula de la probabilitat total:
$$P(X_2 = X_1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_2 = X_1 | X_1 = k)P(X_1 = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty}(Ae^{-k})^2 = A^2\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-2})^k = \frac{(1-e^{-1})^2}{1-e^{-2}} = \frac{e-1}{e+1}.$$
Per simetria $P(X_2 > X_1) = P(X_2 < X_1)$ i també $P(X_2 = X_1) + P(X_2 > X_1) + P(X_2 < X_1) = 1$. Llavors
$$P(X_2 > X_1) = P(X_2 < X_1) = \frac{1}{2}(1 - P(X_2 = X_1)) = \frac{1}{2}(1 - \frac{e-1}{e+1}) = \frac{1}{e+1}.$$

2. (a) Apliquem Bayes
$$P(N = 6 | X > 3) = \frac{P(X > 3 | N = 6)P(N = 6)}{\sum_{n=0}^{6} P(X > 3 | N = n)P(N = n)}.$$
$$P(N = n) = \frac{1}{6}, \qquad P(X > 3 | N = n) = \int_3^{\infty} \frac{1}{n}e^{-x/n}dx = e^{-3/n}.$$
$$P(N = 6 | X > 3) = \frac{e^{-3/6}\frac{1}{6}}{\sum_{n=0}^{6} e^{-3/n}\frac{1}{6}} = \frac{e^{-1/2}}{e^{-3} + e^{-3/2} + e^{-1} + e^{-3/4} + e^{-3/5} + e^{-1/2}} = 0.267$$

(b) X es exponencial de paràmetre $\lambda = 1/2$. Llavors, per $x > 0$, $F_X(x) = 1 - e^{-x/2}$ i $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$. $Y = X - 1$ si $X > 1$ i 0 altrament. Per tant, si $y > 0$, $Y \le y$ equival a $X \le Y + 1$.
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ P(X \le 1) = 1 - e^{-1/2} & y = 0 \\ F_X(y+1) = 1 - e^{-(y+1)/2} & y > 0 \end{cases}$$



$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_1^{\infty} (x-1) \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = 2e^{-1/2}$$

(c)

$$P(Y=0) = P(X \leq 1) = F_X(1) = 1 - e^{-1/2},$$

$$P(Y=1) = P(X=0) = 0.$$

($P(X=0)=0$ per ser X contínua.)