

Indicaciones y sugerencias

Tal como comentamos en la presentación del libro, no creemos que tenga utilidad real el explicar paso a paso la resolución de los problemas. Probablemente ni siquiera sea conveniente, en general, describir las etapas que deben seguirse para llegar al resultado final. Parece preferible estimular al lector a que sea él quien halle la forma de hacerlo.

Se dan a continuación pistas y sugerencias que deben ser suficientes para resolver los problemas de la primera parte. En algún caso, las explicaciones son bastante largas, y se incluyen esquemas y fórmulas porque el problema lo merece. En otros, se dan apenas unas pocas indicaciones. De cualquier manera será interesante que el estudiante deje de leer las pistas tan pronto piense que ha captado el núcleo de la situación planteada. En atención a esta posibilidad, en muchas ocasiones las indicaciones tienen un esquema piramidal o progresivo, yendo de lo más general a lo más concreto. Las primeras frases son ciertas, pero vagas y, poco a poco, se concreta más en torno al problema particular.

Rogamos al estudiante que, desde luego, haga un esfuerzo previo para solucionar cada problema sin mirar ni siquiera estas indicaciones. Un par de minutos de reflexión son suficientes para comprobar si al menos se tiene alguna idea de cuál debe ser el enfoque correcto para la resolución de cada problema.

Ecuaciones de Maxwell en condiciones estáticas

1. a) No es preciso efectuar ningún cálculo para encontrar el flujo a través de la semiesfera. Se deduce inmediatamente de la ley de Gauss.
- b) El flujo del campo eléctrico a través del plano puede resolverse analíticamente, para ello se evalúa la integral de flujo a través del plano $y = d$. El integrando es

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot dx dz \hat{y}$$

donde el producto escalar que aparece, particularizado en los puntos del plano, es $\vec{r} \cdot \hat{y} = d$. El denominador (r^{-3}) debe escribirse en coordenadas cartesianas, particularizándose también para los puntos del plano.

Para resolver la integral, la expresión en coordenadas cartesianas no es la mejor: resulta más sencillo en la práctica utilizar las *coordenadas polares del propio plano* de integración, que podemos denominar ρ' y ϕ' . Obsérvese entonces que las sustituciones que haríamos serían:

$$\begin{cases} dx dz = \rho' d\rho' d\phi' (= ds) \\ x^2 + z^2 = \rho'^2 \end{cases}$$

y los márgenes de integración serán $(-\infty, +\infty)$ para ρ' y $(0, 2\pi)$ para ϕ' . Dibuje un esquema de la situación para comprobar que todo lo anterior es coherente.

Una vez resuelto el apartado b) de forma analítica, observe sin embargo que el resultado era previsible sin necesidad de cálculos, por simple inspección de la situación planteada y de acuerdo con la ley de Gauss.

2. El caso más general que podemos considerar es el representado en la figura 27, donde hemos trazado una superficie gaussiana S genérica que engloba *parcialmente* a un medio dieléctrico polarizado.

Nos piden que evaluemos la expresión $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$ a través de esa superficie y que comprobemos que el resultado es nulo.

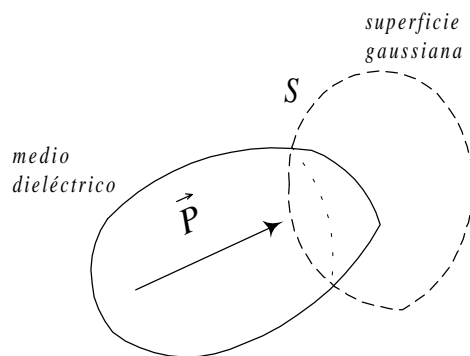


Fig. 27 Una superficie gaussiana arbitraria que engloba parcialmente a un dieléctrico polarizado

El primer paso del desarrollo sería:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} + \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

La integral de flujo del campo eléctrico es igual a la carga total, sea libre o ligada, contenida en el interior del volumen delimitado por S (dividida por ϵ_0), por lo que el problema es el cálculo de la última integral.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{TB} + \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

donde Q_{TB} es la carga total ligada presente en el interior de la superficie S . El enunciado nos dice que no hay carga libre

El vector polarización es nulo fuera del dieléctrico y sólo atraviesa una parte de la superficie gaussiana. En la siguiente figura se señalan las superficies que deberán tenerse en cuenta independientemente.

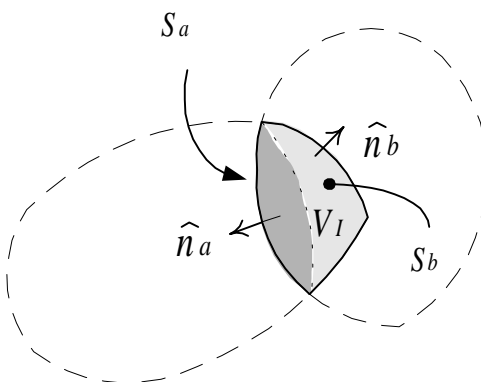


Fig. 28

En la figura 28 el volumen dieléctrico contenido en la superficie gaussiana está representado por V_I . La superficie cerrada que lo limita puede denominarse S_I , que a su vez está formada por dos superficies, S_a y S_b .

Se comprueba inmediatamente que pueden escribirse las igualdades:

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_{S_a} \vec{P} \cdot d\vec{S}_a = \oint_{S_I} \vec{P} \cdot d\vec{S}_I = \int_{S_b} \vec{P} \cdot d\vec{S}_b$$

y las dos últimas integrales pueden expresarse en función de las cargas ligadas, volúmica y superficial.

3. La geometría del problema, incluyendo la forma de la distribución de carga, tiene simetría esférica. En esas condiciones la ecuación de Poisson se reduce a:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

El resultado de esta ecuación es:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{int}}(\vec{r}) &= -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{a} + r^2 \right) - \frac{C_1}{r} + C_2 & \text{si } r \leq a \\ \phi_{\text{ext}}(\vec{r}) &= -\frac{C_3}{r} & \text{si } r \geq a \end{aligned}$$

donde se tuvo ya en cuenta que el potencial debe anularse en el infinito, al tratarse de una situación donde la carga eléctrica está limitada espacialmente.

Observará, sin embargo, que las constantes no pueden determinarse completamente por aplicación de las condiciones de contorno, por lo que es necesario utilizar la ley integral de Gauss para terminar el problema.

5. Las líneas señaladas como a y b en la figura 29 no son posibles.

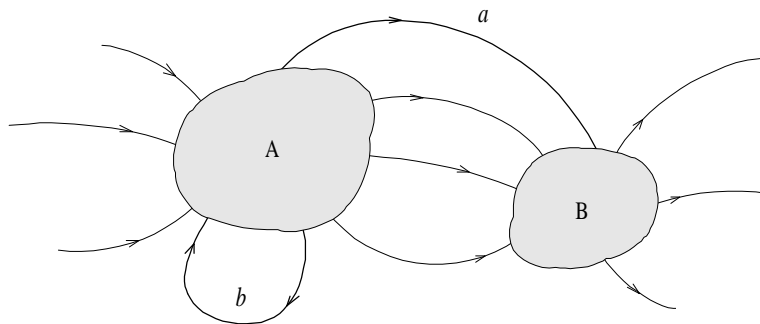


Fig. 29

6. a) Debe expresarse el radiovector \vec{r} en coordenadas cartesianas, al igual que los vectores que indican la posición de la cargas.

b) A grandes distancias ocurre que las coordenadas más adecuadas son las esféricas, debido precisamente a que el dipolo se ve como un punto si nos situamos muy lejos de éste:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg s$$

La aproximación anterior permite escribir las contribuciones, salvo constantes, de cada una de las cargas al potencial total en la forma:

$$\frac{1}{r \left(1 \pm \frac{s}{r} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}}} \cong \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{s}{2r} \cos \theta \right)$$

donde se ha aproximado tomando únicamente los dos primeros términos de la descomposición de Taylor, según:

$$(1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2}x \quad \text{si } x \ll 1$$

7. a) La relación de la componente E_x , la única que debemos considerar, con la distribución de carga es una relación integral.
b) La relación entre el potencial eléctrico y el campo es también integral.
8. a) La densidad de corriente se obtiene de la ley de Ohm una vez conocido el campo eléctrico.
b) La intensidad de corriente es el flujo de la densidad de corriente a través de la sección del medio por el que circulan los portadores.
c) La velocidad media de los portadores de carga está relacionada con la densidad de corriente, con la concentración de portadores y con su carga unitaria. Si no recuerda la expresión, trate de hallarla por simple análisis dimensional.
d) La fuerza magnética se obtiene de la expresión de Lorentz. Hay motivos para pensar que debe cambiar la densidad de corriente, pero probablemente no la intensidad de corriente.
9. Debe ser aplicable la fórmula de la capacidad de un condensador plano infinito. Si no está seguro de cuál es la forma exacta de esa fórmula, utilice el análisis dimensional para deducirla, sabiendo que la capacidad dependerá de la permitividad del medio, de la superficie entre las armaduras y de su separación.
10. a) Se supone que el hilo conductor tiene sección circular. La densidad de corriente *no es uniforme* en la sección del hilo, por lo que no es posible multiplicar simplemente la densidad de corriente por el área. (Por otra parte el resultado obtenido de esa forma en este caso sería una intensidad de corriente dependiente de la coordenada radial, lo cual tiene difícil interpretación.)

- b) Los valores dados son realistas, por lo que el valor de la densidad de corriente que se obtiene es también un valor típico, aunque pueda parecer elevado si se expresa en A/m².
c) Ley de Ampère.

11. Puede resolverse mediante aplicación de la ley integral de Ampère para cada hoja de corriente por separado y después superponiendo los campos. La aplicación de este método –al igual que cuando se aplica la ley integral de Gauss en problemas electrostáticos– exige conocer *a priori* cuál será la dirección del campo, y de qué coordenadas puede depender y de cuáles no. A este respecto considere las láminas de corriente como si fueran de tamaño ilimitado. Conociendo la dirección del campo, uno sabrá cómo trazar la trayectoria cerrada más adecuada para la aplicación de la ley, dentro de la que el campo se ha de mantener constante. Si imagina cada lámina de corriente como una superposición de hilos de corriente paralelos y utiliza la regla de la mano derecha, sabrá cómo se orienta el campo magnético en esta situación.

- 12.** a) La tensión obtenida se debe al fenómeno conocido como inducción electromagnética, cuya primera formulación es la debida a Faraday. La frecuencia es la misma que aquella con la que gira el arrollamiento.
c) Tanto la sección del arrollamiento como el número de espiras representan valores pequeños como para poder producir una tensión elevada, por lo que no debe sorprender que el resultado obtenido sea de milivoltios.

13. Debe utilizarse la ley de Ohm. Se sobreentiende que se está calculando la resistencia que ofrece el cable *a bajas frecuencias*, que es el caso en que puede considerarse la corriente distribuida de forma homogénea en la sección del conductor. A frecuencias medias (digamos entre unos 2 y 15 MHz, según el grosor del cable), la corriente comienza a concentrarse en las paredes del conductor y la resistencia efectiva varía. A frecuencias superiores, el efecto es ya claramente apreciable. En el problema 39 se plantea ese caso.
A bajas frecuencias, y con una densidad de corriente homogénea, la aplicación de la ley de Ohm es suficiente. Para obtener la expresión de la resistencia (Ω) en función de la conductividad, la sección del cable y su longitud, basta razonar qué papel juegan cada una de esas magnitudes y comprobar que la expresión que se va a utilizar es dimensionalmente coherente.

- 14.** La capacidad de un condensador responde a la expresión general:

$$C = \frac{Q}{V}$$

donde Q es la carga (libre y en valor absoluto) que hay en una cualquiera de las placas del condensador. (Se puede demostrar que en un sistema de dos conductores tal que uno de ellos encierra físicamente al otro, se induce la misma carga total Q en uno y en otro, aunque con signos cambiados.) V es la tensión aplicada o diferencia de potencial entre las placas.

Un proceso de cálculo usual consiste en expresar el campo eléctrico que se establece entre las placas en función de la densidad de carga de una de ellas. Después puede expresarse el campo eléctrico en función de V y la carga total almacenada en la placa en función de aquella densidad de carga. Con todo ello se habrá obtenido la relación buscada entre Q y V .

En el problema que se propone puede utilizarse inicialmente la ley integral de Gauss.

Ecuaciones de Maxwell en condiciones dinámicas

15. Efectivamente, los buenos conductores no pueden contener una densidad volúmica de carga neta. Si así sucediera, la divergencia del campo eléctrico no sería nula y, por tanto, tampoco el campo eléctrico. Como la nube de electrones está libre en el conductor, se movería continuamente arrastrado por ese campo, sin llegar nunca al equilibrio, lo cual no sucede. Ahora bien, si por algún procedimiento físico, como un bombardeo iónico, introducimos carga en el conductor, habremos contradecido momentáneamente ese principio de no existencia de carga neta. Lo que ocurre entonces es que el conductor reacciona y se libera del exceso de carga, intercambiándolo con la superficie. La ecuación diferencial que describe el comportamiento de la carga libre desde el instante inicial en que fue introducida es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \rho$$

donde la constante de tiempo τ –al igual que la propia ecuación– puede deducirse de las ecuaciones que se mencionan en el enunciado del problema.

16. a) Debe evaluarse la corriente de portadores libres (ley de Ohm) y la de desplazamiento (el último término de la ecuación de Àmpere-Maxwell). Esta última en su forma en régimen senoidal permanente, puesto que nos dan la información de la frecuencia de la señal. Ambas quedarán en función del campo eléctrico, cuya magnitud se desconoce. No obstante, pueden compararse y se observa que la corriente de conducción es mucho mayor.
- b) Observe que la ecuación que debemos verificar tiene cierta similitud con la que sería la ecuación de onda para el vector campo magnético. En ella aparece la laplaciana de ese vector, que incluye derivadas espaciales de segundo orden. Una operación típica de la que surge la laplaciana es:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad \forall \vec{A}$$

Este apartado debe resolverse en las condiciones de variación temporal arbitraria, sin embargo asumimos que las componentes significativas de mayor frecuencia no excederán el valor del GHz, de modo que el resultado anterior sigue siendo válido.

c) Basta sustituir la expresión que nos dan en la ecuación diferencial anterior y operar. El valor de la constante D se obtiene como función de σ y μ .

d) La relación entre \vec{E} y \vec{H} se obtiene de la ecuación de Àmpere-Maxwell o de la de Maxwell-Faraday. Utilice la que resulte más cómoda en este caso. Si se decide por la primera,

recuerde qué forma particular adopta en el medio que estamos considerando (véase el primer apartado).

e) Comprobará que el campo se extingue rápidamente a medida que penetra en el medio.

17. a) La ecuación de continuidad en forma diferencial y con densidades de corriente y carga volúmicas es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Cuando tratamos con densidades limitadas a una superficie la ecuación es idéntica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s = -\frac{\partial \sigma(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Este resultado puede probarse con un procedimiento similar al que se emplea para deducir la primera expresión.

b) Las suposiciones de partida son que no hay carga inicialmente en el condensador, es decir, para $t = 0$, y que el campo eléctrico sólo tiene componente perpendicular a las placas (esta última suposición es, en definitiva, la de condensador plano infinito).

c) Si trata de hallar el campo magnético mediante la ecuación de Maxwell-Faraday, en forma diferencial, aprovechando que ya tiene el campo eléctrico (obtenido en el apartado anterior) se encontrará con la dificultad de que queda una constante indefinida. No obstante, la idea era lógica y en otras situaciones es el procedimiento más razonable. Para solventar esa dificultad es más útil, en este caso particular, la ecuación de Ampère-Maxwell en forma integral. Debe aplicarla para cada una de las placas, con sus respectivas densidades de corriente, y superponer (sumar) los campos obtenidos.

d) Existen dos caminos para obtener la expresión de la energía almacenada. Uno es utilizar la expresión conocida de Teoría de Circuitos en función de la tensión y de la capacidad del condensador. El otro consiste en integrar, en el volumen del condensador, la densidad de energía eléctrica:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

e) Hay más de una manera de resolver este apartado, pero la más sencilla puede ser utilizar las dos expresiones de cálculo de la energía que se propusieron antes e igualar los resultados que se obtengan. De allí sale el valor de J_0 .

18. a) La expresión del fasor es la habitual: *Amplitud* $\exp(+j \text{ fase})$.

b) La distribución de la carga se obtiene a partir de la densidad de corriente mediante la ecuación de continuidad.

c) La respuesta que uno está tentado a dar inmediatamente es que la densidad de corriente se extingue progresivamente a medida que se propaga en la dirección del eje Z, y eso no es propio de un conductor perfecto. Sin embargo, esa respuesta es más intuitiva que razonada. Trate de buscar una explicación más acorde con las características específicas de los conductores perfectos.

d) La intensidad de corriente se obtiene fácilmente a partir de la densidad de corriente.

19. Una de las propiedades de la transformada de Fourier dice que la transformada de la derivada temporal de una función es igual a la transformada de la función multiplicada por $j\omega$. Algo similar puede aplicarse a cada una de las componentes del campo y a sus transformadas de Fourier espaciales. (Efectivamente, al igual que existe una transformada de Fourier que nos lleva de la dependencia temporal al dominio frecuencial, existe también la transformada de Fourier entre las variables espaciales y las componentes espectrales de variación espacial. De todos modos, esta variante no la usaremos explícitamente todavía en este curso.)
20. Debe decir si las afirmaciones están de acuerdo o no con las ecuaciones que sean aplicables en cada caso, que son las siguientes:
- a) La ecuación que relaciona la corriente con el campo magnético es la de Ampère-Maxwell.
 - b) La misma que antes
 - c) Ley de Ohm (si bien las placas son conductores perfectos).
 - d) Ley de Ampère-Maxwell de nuevo.
 - e) Se aplicaría superposición de los campos creados por cada placa.
 - f) Ley de Maxwell-Faraday.
 - g) Aquí hay dos cuestiones: por un lado la relación que pueda establecerse entre la densidad de corriente y el campo eléctrico o el campo magnético entre las placas y, por otro lado, la ecuación de onda, para el campo eléctrico o para el campo magnético. En definitiva, se trata de ver lo siguiente: ¿fuerza la ecuación de onda a una dependencia espacio-temporal del tipo $\cos(\omega t - kz)$ para los campos, en el caso de régimen senoidal permanente?, y entonces, ¿será obligada la misma dependencia para la corriente?
 - h) De nuevo estamos viendo la relación entre densidad de corriente y campo magnético.
 - i) Ley de Maxwell-Faraday.
21. a) Escriba la expresión del operador nabla a escala real ($\vec{\nabla}$) en función de las variables x, y, z y la expresión del operador a escala de laboratorio ($\vec{\nabla}'$), en función de x', y', z' . Ahora trate de ver la relación entre uno y otro transformando las derivadas. Tenga en cuenta que los vectores unitarios en uno y otro caso son los mismos.
La relación entre las derivadas temporales es casi inmediata (regla de la cadena).
- b) y c) Las ecuaciones de Maxwell deben tener la misma forma a una u otra escala, y con unas u otras variables. Parta de cada una de las ecuaciones expresadas a escala de laboratorio y sustituya operadores y variables para llegar a las ecuaciones a escala real. Llegará entonces por simple comparación a deducir el valor de los diferentes parámetros.
 - d) El proceso es el mismo que para el apartado anterior. Ahora deberá utilizar otras ecuaciones que relacionen el potencial y la intensidad de corriente con las magnitudes cuya regla de transformación ya ha averiguado.
22. a) Basta con calcular la variación del flujo de campo magnético a través de la espira, de acuerdo con la ley de Faraday.
- b) El campo eléctrico está relacionado con la variación temporal del campo magnético mediante la ley de Maxwell-Faraday. Deberá integrar esa ecuación para extraer el valor del campo eléctrico. Utilice coordenadas cilíndricas. Considere que el campo eléctrico sólo tiene componente azimutal, alrededor del eje Z.
Como se comenta en el enunciado, el campo magnético es aproximado. Existe una pequeña variación espacial, pero no se considera explícitamente.

Ondas planas

23. a) La expresión genérica para el campo magnético instantáneo asociado a una onda plana, con polarización lineal, es:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = H_0 \hat{h} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

donde el vector de onda es: $\vec{k} = k \hat{k}$. El número de onda k es función de la frecuencia y de la velocidad característica del medio.

Los vectores \hat{h} y \vec{k} han de ser perpendiculares en una onda plana.

- b) El campo eléctrico se deduce inmediatamente si se conoce el campo magnético y el vector de onda.
- c) Se calcula en la forma general, mediante los fasores \vec{E} y \vec{H} , o a través de la fórmula específica para ondas planas uniformes.
24. a) Siempre que busque el tipo de polarización de una onda, lo primero es averiguar qué desfase existe entre las dos componentes perpendiculares que constituyen el vector. Si ocurriera que el campo no estuviese expresado como una suma de dos componentes perpendiculares, entonces puede ocurrir que sólo haya una componente, por lo que la polarización será forzosamente lineal. O también puede ocurrir que en la expresión no están claramente separadas las componentes perpendiculares. En esos casos debe elegirse una base \hat{e}_1 y \hat{e}_2 (ambos perpendiculares entre sí y perpendiculares al vector de onda) y expresar el vector de campo en función de esa base.
26. y 27. Le servirán las consideraciones del problema 24. A la hora de elegir una base de vectores unitarios y ortogonales \hat{e}_1 y \hat{e}_2 tiene total libertad, puesto que una onda es la misma independientemente de los vectores que elija para representarla. Sin embargo, conviene que lo piense un poco antes de decidirse por alguna, para simplificar el trabajo. Una vez elegido un vector \hat{e}_1 , el otro debería obtenerse como $\hat{e}_2 = \hat{k} \times \hat{e}_1$ para que ambos sean perpendiculares y tengan la orientación correcta que permita utilizar los criterios habituales de sentido de giro.
28. a) Debe escribir la expresión general para una onda plana con polarización arbitraria. Después ha de ir sustituyendo los parámetros genéricos por valores particulares de acuerdo con los datos que se proporcionan.

Se informa de la dirección de propagación de la onda (vector \hat{k}) a través de los ángulos esféricos, φ y θ . El ángulo φ es el que forma con el eje X la proyección del vector sobre el plano XY, mientras que el ángulo θ es el que forma el vector con el eje Z. Cualquier dirección del espacio a partir del origen puede seleccionarse a través de los valores adecuados de φ y θ .

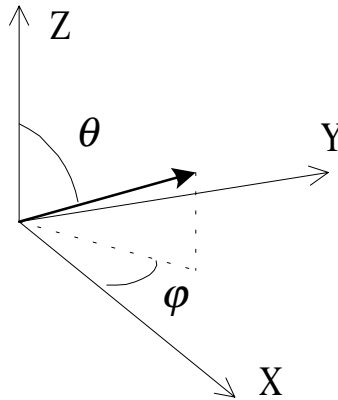


Fig. 30 Los dos ángulos esféricos definen una dirección particular del espacio

- b) Para determinar unívocamente una onda plana deben conocerse los siguientes datos: amplitud (o densidad de potencia), dirección de propagación, tipo de polarización y, en su caso, sentido de giro, relación axial y orientación de la elipse de polarización. No obstante, los cuatro últimos pueden deducirse de la relación entre las amplitudes complejas de las dos componentes ortogonales en que se expresa el campo.
- c) Forzosamente habrá dos soluciones posibles en este apartado.
29. a) Mediante el índice de refracción del medio y el valor de la frecuencia se puede determinar completamente el número de onda, que aparece en la exponencial compleja de la onda.
 b) Se dispone del valor de la densidad de potencia total y del término común de amplitud.
 c) i) Sustituyendo en la expresión del campo tendremos suficiente información.
 ii) Sólo un tipo de polarización permite que el campo instantáneo sea nulo en algún instante.
30. a) No nos dan la dirección concreta en que está orientado el eje del polarizador, por lo que podemos denominarla \hat{s} y dejar los resultados indicados.
 A la salida del primer polarizador el campo forzosamente tendrá polarización lineal en la dirección dada por \hat{s} ; se trata por tanto de calcular la amplitud de la onda. La expresión general es:
- $$\vec{E}_{out} = (\vec{E}_{in} \cdot \hat{s}) \hat{s}$$
- donde se ha omitido el desfase que pueda sufrir esta única componente al atravesar el polarizador.
- Deberá ser capaz de expresar el vector \hat{s} en función de los vectores unitarios cartesianos \hat{x} e \hat{y} y del ángulo que el eje del polarizador forma con uno de los ejes cartesianos.

b) El campo que emergió del primer polarizador vuelve a atravesar otro, y de nuevo con orientación desconocida. Para obtener el campo final deberá entonces seguir los pasos del primer apartado una vez más. Dele el nombre de \hat{s}' al vector unitario en la dirección del eje de ese segundo polarizador. La relación entre la densidad de potencia de la onda inicial y la densidad de potencia de la onda final dependerá del ángulo existente entre los ejes de los polarizadores.

31. a) Tenemos dos elementos ópticos: el polarizador y la lámina dieléctrica con pérdidas. Podemos considerar la onda en tres momentos diferentes:

\vec{E}_{in} , la onda original, antes de atravesar el polarizador;

\vec{E}_{out1} , a la salida del polarizador, antes de atravesar la lámina;

\vec{E}_{out2} , a la salida de la lámina con pérdidas (la que nos dan en el enunciado).

Con la consideración de que la última lámina no puede modificar la polarización de la onda y que sólo afecta a su amplitud, puede hallarse \vec{E}_{out1} en función de \vec{E}_{out2} gracias a la información que nos dan sobre la pérdida de potencia sufrida en la lámina.

Conocida la onda a la salida del polarizador, se tratará ahora de encontrar \vec{E}_{in} , que sabemos tiene polarización elíptica. Se deduce que la onda original ha perdido una componente ortogonal de campo al atravesar el polarizador. De nuevo con la información de la potencia pérdida, puede hallarse la amplitud de esa componente que se perdió. No obstante no parece haber suficiente información para estimar el desfase entre las componentes de la onda original.

b) En el apartado anterior hemos podido calcular el coeficiente de atenuación, α . Existe una relación sencilla entre ese coeficiente α y la conductividad del medio σ cuando se trata de buenos conductores.

c) Conocida la conductividad, la frecuencia y la permitividad es inmediato comprobar la hipótesis de buen conductor.

32. a) El procedimiento a seguir es el general en este tipo de situaciones y similar al que se emplea con los polarizadores. En un polarizador debemos descomponer el campo de la onda incidente en dos componentes ortogonales, con una de ellas paralela al eje del polarizador. Lo que ocurre es que en el polarizador la otra componente es irrelevante porque se atenúa hasta extinguirse. Con una lámina de retardo, sin embargo, las dos componentes son importantes, puesto que lo característico de la lámina es el retardo (o el desfase) que introduce entre ellas.

Sean \hat{s}_1 y \hat{s}_2 los ejes propios y ortogonales de la lámina de retardo. Entonces el campo incidente se expresa en la forma:

$$\vec{E}_{in} = (\vec{E}_{in} \cdot \hat{s}_1) \hat{s}_1 + (\vec{E}_{in} \cdot \hat{s}_2) \hat{s}_2$$

lo que en el fondo no es sino un cambio de base vectorial.

Para obtener el campo a la salida basta con explicitar el desfase que sufre cada componente:

$$\vec{E}_{out} = (\vec{E}_{in} \cdot \hat{s}_1) \hat{s}_1 e^{j\phi_1} + (\vec{E}_{in} \cdot \hat{s}_2) \hat{s}_2 e^{j\phi_2}$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 serán función del trayecto recorrido en el interior de la lámina, del índice de refracción asociado a cada eje y de la longitud de onda.

b) Los pasos a seguir son exactamente los mismos que en el apartado a). Se comprueba que la onda emergente es similar a la obtenida antes, pero con una orientación de la polarización diferente.

33. Aunque el resultado es cualitativamente el mismo, la forma en que ambos elementos lo consiguen es bastante diferente.

34. En la figura 31 se esquematiza el campo incidente y los ejes de la lámina. Tras atravesarla, las componentes de campo proyectadas sobre los ejes quedan desfasadas. ¿Qué campo final darán a la salida cuando vuelvan a sumarse?

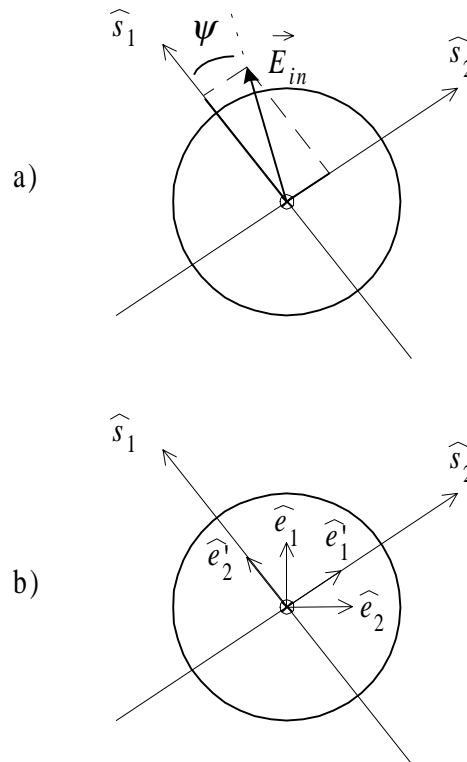


Fig. 31 Esquemas de la descomposición de un campo incidente sobre una lámina anisótropa. a) Incidencia de una onda con polarización lineal; b) incidencia de una onda con polarización circular

En el caso b), en el que la onda incidente es circular, observe que, independientemente de cuál sea la base de vectores en que venga expresada – \hat{e}_1 y \hat{e}_2 –, siempre podríamos cambiarla a otra más conveniente: \hat{e}'_1 y \hat{e}'_2 .

35. Una lámina de retardo tan sólo desfasa una componente de campo respecto de otra, pero no modifica la potencia de la onda. Por lo tanto, el primer elemento no puede ser una lámina de retardo: será un polarizador. El segundo sí es una lámina. Por otra parte, el hecho de que la onda emitida por el láser sea insensible al giro del polarizador nos indica qué tipo de polarización tiene.

Para distinguir de qué tipo de lámina se trata, lo más lógico es colocar primero la lámina de retardo y después el polarizador e interpretar lo que ocurra al girar el polarizador.

36. a) Se trata de despejar A y B , que serán las amplitudes complejas que debemos asignar a cada una de las ondas circulares para que su suma sea igual a una onda con polarización lineal. Observe que se obtiene un resultado general aplicable a cualquier onda polarizada linealmente.

Para despejar cada constante compleja debe multiplicar en cada caso por el complejo conjugado del término complejo que quiera cancelar.

b) El procedimiento es el mismo aunque ahora la expresión de partida es diferente. Debe probar que una onda con polarización elíptica siempre se puede expresar como suma de dos circulares, con sentidos de giro distintos. Entonces debe hallar las amplitudes A y B que satisfacen en general:

$$E_0(\hat{e} + p e^{j\Delta\phi} \hat{e}') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = [A(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2) + B(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2)] e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$(\text{con } \hat{e} \times \hat{e}' = \hat{k} \text{ y } \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k})$$

37. Escriba la expresión general del campo instantáneo de una onda con polarización lineal, con amplitud, fase inicial y frecuencia desconocidas. Particularícela a los puntos e instantes para los que se nos da información. Haga lo mismo con la segunda onda. Podrá obtener de esa forma cuál es la frecuencia de las ondas (nos dicen que es la misma) y también obtendrá qué desfase existe entre ambas.

38. a) $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \pm \hat{k}$. No conocemos el vector de onda, pero si hemos elegido los vectores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 , y sabemos el sentido de giro de la polarización, entonces el signo también queda explicitado.
d) La condición de las fases instantáneas quedan así, según los datos que nos dan:

$$\angle E_y(\vec{r}_0, t) = \angle E_y(\vec{r}_0 + 80\hat{k}, t) + 2m\pi$$

$$\angle E_y(\vec{r}_1, t) = \angle E_y(\vec{r}_1 + 60\hat{k}, t) + 2(n-1)\pi$$

De allí se obtienen dos ecuaciones, en función del número de onda y de los enteros m y n , que sólo tendrán una solución posible dentro del margen de frecuencias que se indica.

39. a) El cálculo del campo magnético, tanto dentro como fuera del hilo, se hace típicamente por aplicación de la ley integral de Ampère.
El campo eléctrico se relaciona directamente con la densidad de corriente mediante la ley de Ohm.

b) Una de las condiciones de contorno conocidas parece indicar que el campo eléctrico del interior del conductor no podrá desaparecer bruscamente fuera de él.

En los apartados siguientes la situación es bastante distinta debido a la variación temporal. Se comprueba experimentalmente que, como efecto secundario, pero unido inevitablemente a la variación en el tiempo, la densidad de corriente tiende a concentrarse en las paredes del conductor.

Para la resolución de los apartados c) y siguientes, debe asumirse que el vector de densidad de corriente mantiene la misma dirección que en el caso estático, según el eje del conductor.

c) Atendiendo a las consideraciones de simetría, la densidad de corriente sólo podrá depender de la distancia al eje del conductor.

d) Compruebe si la corriente sigue siendo de tipo estacionario. Si lo es, no se puede producir acumulación de carga en ningún punto del conductor, ni de forma transitoria ni permanente.

e) Ley de Ohm.

f) De nuevo es una cuestión relacionada con la simetría de la situación.

g) La ecuación se obtiene por el mismo procedimiento que la ecuación de onda, combinando las leyes de Faraday y de Ampère-Maxwell en forma diferencial, y teniendo en cuenta que la densidad de corriente obedece a la ley de Ohm y que se cumple la condición $\sigma \ll \omega\epsilon$, correspondiente a un buen conductor. Utilizando la expresión del rotacional en coordenadas cilíndricas, se obtiene una ecuación diferencial unidimensional de segundo orden para el campo eléctrico.

Incidencia de ondas planas

40. a) y b) Las densidades de carga y de corriente superficiales se obtienen por aplicación de las condiciones de contorno en las que intervienen. Al ser uno de los medios un conductor perfecto, sabemos que el campo eléctrico en su interior deberá ser nulo. Por otra parte, un campo magnético constante, sin variación temporal, sí podría existir, pero no un campo magnético variable como el de una onda plana. Todo lo anterior obliga a obtener la onda reflejada en primer lugar para conocer cuáles son los campos eléctrico y magnético totales en el aire.
c) Este apartado puede responderse a la vista de los resultados obtenidos antes; sin embargo, también puede contestarse *a priori* por simple consideración de la naturaleza del problema.
41. a) La complicación del problema puede provenir del simple hecho de que nuestros ejes de referencia están girados respecto a la superficie de incidencia; sin embargo, eso no debería suponer un serio obstáculo. Considere que la reflexión mantiene la polarización paralela o perpendicular al plano de incidencia (el plano XZ en este caso). Por otra parte, el coeficiente de reflexión para un conductor perfecto toma el valor -1 para cualquiera de ambas polarizaciones.
c) Considere simplemente qué varía y qué no varía al cambiar el ángulo con el que incide la onda.
42. Recuerde que el índice de refracción de cualquier medio es siempre mayor o igual a la unidad. Debe calcular la potencia transmitida en función de la incidente o, alternativamente, la potencia reflejada en función de la incidente, puesto que la reflejada más la transmitida representan la potencia original de la onda. Cualquiera de esas potencias son función de los coeficientes respectivos al cuadrado. Observe que en algún momento deberá elegir el signo adecuado.
43. Tanto en este problema como en el anterior se pretende que tenga una idea de la potencia que pierde una onda electromagnética, debido a las reflexiones, al atravesar medios dieléctricos usuales. Puede obtener, mediante aplicación sucesiva de los coeficientes de transmisión correspondientes, la amplitud de la onda final en función de la amplitud de la onda original. No se consideran ondas reflejadas que, con una segunda reflexión, pueden volver a propagarse en la dirección original, sumándose a la primera onda. Eso es lo que significa ignorar las dobles reflexiones.
44. Los prismas rectos o los diedros metálicos pueden utilizarse como retrorreflectores porque presentan la propiedad de que la onda reflejada emerge en la misma dirección en la que llegó la onda incidente, tal como se pone de manifiesto en la figura del enunciado, y conservando además la práctica totalidad de la potencia original. Sin embargo, en el caso de un prisma dieléctrico, una

retroreflexión eficiente estará condicionada por el hecho previo de que se produzca reflexión total en las caras internas del prisma. Deberá buscar los llamados ángulos críticos del prisma: el ángulo máximo con el que puede incidir sobre la cara de entrada (digamos la cara de la hipotenusa) medido respecto a su normal, de modo que se produzca reflexión total en la cara interna de las otras dos superficies.

45. a) y b) Se trata tan sólo de expresar correctamente el campo incidente en función de los vectores unitarios adecuados, paralelo y perpendicular al plano de incidencia, y de hacer lo mismo para las ondas reflejada y transmitida. Por último, las amplitudes reflejada y transmitida se expresarán en función de la amplitud incidente y de los coeficientes de reflexión y de transmisión. Sin embargo, el primer cálculo que debe hacerse es el del ángulo de incidencia. La información necesaria está en la propia expresión que se da para la onda incidente.
46. a) Al igual que en el problema anterior, debe calcular el ángulo de incidencia, sabiendo que el campo eléctrico oscilará siempre en un plano perpendicular a la dirección de propagación. Esto no es cierto para cualquier onda, pero sí para ondas planas uniformes como las que hasta ahora venimos tratando. Conociendo el campo eléctrico, podrá calcular el vector de onda y del vector de onda puede deducir el ángulo buscado.
- b) El vector \vec{k}_i ya lo habrá obtenido en el apartado anterior. Los vectores de onda \vec{k}_r y \vec{k}_t se obtienen a partir de los ángulos de reflexión y transmisión.
- c), d), e) y f) Por simple aplicación de las expresiones teóricas.
- g) La misma onda significa una onda que tenga la misma polarización, igual frecuencia y transmita la misma potencia que la anterior. No obstante, al hacerla incidir con otro ángulo cambiará la expresión matemática y, en concreto, la dirección del vector de onda (no su módulo) y al menos uno de los vectores unitarios con que se expresa el campo.
47. a) En función del ángulo de incidencia puede escribirse el vector de onda, si bien no se conoce la frecuencia de la onda, y también los vectores unitarios en función de los que se expresará el campo, de acuerdo con la figura 12.
- b) Independientemente del ángulo de incidencia deberemos calcular los coeficientes de reflexión para las dos componentes de la onda, utilizando las fórmulas de Fresnel. En este caso sucede que tales coeficientes son complejos porque estamos en zona de reflexión total. Esa posibilidad había que considerarla, puesto que el índice de refracción del medio 1 es mayor que el del medio 2. Al tratarse de coeficientes complejos se produce un desfase relativo de una componente respecto a la otra, por lo que la polarización puede variar de tipo.
- c) En el caso de reflexión subcrítica los coeficientes de Fresnel se mantienen reales y no puede alterarse el desfase relativo entre las componentes.
48. a) De la figura 13 se observa que el ángulo de transmisión es menor que el ángulo de incidencia, por lo que la ley de Snell nos dirá qué medio tiene mayor índice de refracción.
- b) El apartado anterior deja claro que no podrá producirse en ningún caso reflexión total, y por lo tanto los coeficientes de Fresnel serán reales (se consideran los dos medios dieléctricos ideales sin pérdidas). De ese modo no puede producirse un desfase adicional entre las componentes de la onda. Es interesante que se plantee también la siguiente cuestión: si la onda incidente tiene polarización lineal en una dirección arbitraria ¿serán paralelas a ella en general las polarizaciones de las ondas reflejada y transmitida?

- c) La polarización circular se da bajo dos condiciones: una referente al desfase entre las dos componentes perpendiculares y otra para sus amplitudes. Debe verse si las dos se deben mantener en la reflexión.
- d) Sólo hay un caso particular de incidencia sobre una superficie plana en que no haya onda reflejada.
- e) Existen direcciones de la onda transmitida que, de hecho, no se obtendrán nunca en este caso particular (en el mismo plano de la figura). Piense el porqué.
- f) No se puede afirmar que se cumpla siempre esa relación entre ángulo de incidencia y potencia reflejada, aunque en algún caso sí es cierto. Trate de encontrar un caso en el que sea cierto y otro en el que no.
- g) Se plantea de nuevo el apartado c), si bien incluyendo la onda transmitida y para un ángulo de incidencia particular.
- h) Basta con observar la fórmula del ángulo de Brewster y la información que se tiene de los índices de refracción.
- i) Parece que sí.

49. a) Los campos han de escribirse en función de la amplitud de la onda incidente y del coeficiente adecuado de Fresnel. En cuanto al término de propagación, ocurre que parte de él se convierte en un término de atenuación, en la dirección transversal a la superficie del medio dando lugar a una onda evanescente. El procedimiento general para escribir correctamente los exponentes consiste en partir de la expresión habitual del vector de onda y particularizarlo para el caso de reflexión total:

$$\vec{k}_t = k_0 n_2 (\hat{y} \sin t + \hat{z} \cos t) \quad \text{con} \quad \cos t = -j\gamma$$

- b) Tenga cuidado con la expresión que emplea para obtener el vector de Poynting. Al ser evanescente, ya no se trata de una onda plana uniforme (la amplitud varía dentro de los planos de fase constante).
- c) Del dato que nos dan sale inmediatamente el valor de γ .

50. a) Podría ocurrir que una de las componentes desapareciera en la reflexión, o podría ocurrir también que tras la reflexión el desfase existente entre las componentes de la onda circular se cancelase.
- b) La segunda posibilidad mencionada antes ya no será posible.
 - c) Nos dan implícitamente una relación entre los coeficientes de transmisión paralelo y perpendicular.

51. a) En un conductor *perfecto* el campo eléctrico en el interior es nulo.
- b) La impedancia de onda de una onda plana uniforme puede expresarse siempre de la misma forma:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

sin embargo no siempre la permitividad será un número real.

- c) También las expresiones generales de los coeficientes de reflexión y transmisión son iguales tanto en el caso de que se consideren pérdidas o no. No obstante, los índices de refracción (o las

impedancias de onda, según cómo se expresen aquellos coeficientes) serán reales si no hay pérdidas y complejos si se consideran.

d) Se obtiene por aplicación directa de una fórmula.

e) Ambas expresiones tendrán un término de atenuación en la dirección hacia el interior del conductor. Se trata de una onda plana en un medio con pérdidas.

f) La intensidad de corriente es una magnitud escalar que se obtiene mediante la integral de flujo de la densidad de corriente en la superficie adecuada. En este caso la densidad de corriente es básicamente superficial, pero penetra en alguna medida en el conductor. Desde un punto de vista práctico, puede afirmarse que la densidad de corriente es apreciable, al igual que el campo eléctrico, hasta una distancia de la superficie del orden de la profundidad de penetración. No obstante, a la hora de hacer la integral es más exacto e incluso más cómodo suponer que la densidad de corriente penetra infinitamente en el conductor, si bien con valores exponencialmente decrecientes.

g) La potencia disipada térmicamente en el conductor tiene como expresión general:

$$P_{dis} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv$$

En nuestro caso, ese volumen tendrá dimensiones $1 \times 1 \text{ cm}^2$ en la superficie del conductor y profundidad supuestamente infinita en la dirección de penetración hacia el interior del conductor. A pesar de hacer esa suposición de infinitud el campo y la corriente decrecen demasiado rápido como para que el resultado total pudiera divergir.

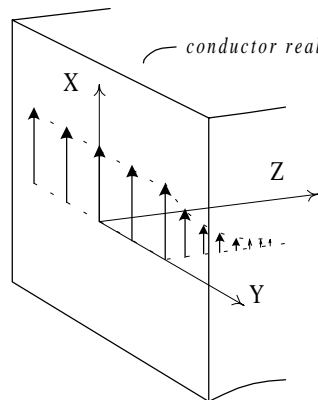


Fig. 32 Penetración del campo eléctrico y la densidad de corriente en un buen conductor

52. Éste es un problema de los denominados de multicapa o de incidencia múltiple. En ellos se consideran dobles, triples y en general, n -ésimas reflexiones de las ondas entre las diferentes superficies de separación entre los medios. Existen dos formas de resolver este tipo de problemas:

- Una de ellas es la de generar las series de ondas producidas después de cierto número de reflexiones y transmisiones de la onda original y proceder después a sumar las series matemáticas que se obtienen, en particular las que dan lugar a la onda transmitida global y a la onda reflejada global. En este procedimiento se utilizan los coeficientes usuales de Fresnel para cada reflexión o transmisión que se considera.
- El otro método, y que formalmente es preferible, trata únicamente con las ondas finales que deberán establecerse en los diferentes medios, una vez alcanzado el régimen estacionario. Este procedimiento no utiliza los resultados conocidos de Fresnel en la

mayor parte de las superficies de separación entre medios, ya que la situación en general es diferente a la supuesta por Fresnel, que sólo consideraba una onda incidente por uno de los lados de la superficie de separación (véase la Fig. 33, en la que se ha representado un caso con cuatro medios y tres superficies de separación.)

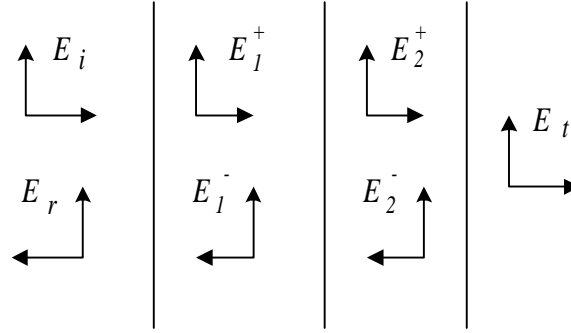


Fig. 33 Ondas estacionarias finales con las que se pueden plantear en general los problemas de multicapas

Una vez escritas las expresiones de los campos, correspondientes a cada una de las ondas que intervienen, deben plantearse y resolverse las ecuaciones debidas a las condiciones de contorno, tanto para los campos eléctricos:

$$\begin{aligned} (\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{\text{tang}}|_{S_1} &= (\vec{E}_1^+ + \vec{E}_1^-)_{\text{tang}}|_{S_1} \\ (\vec{E}_1^+ + \vec{E}_1^-)_{\text{tang}}|_{S_2} &= (\vec{E}_2^+ + \vec{E}_2^-)_{\text{tang}}|_{S_2} \\ (\vec{E}_2^+ + \vec{E}_2^-)_{\text{tang}}|_{S_3} &= (\vec{E}_t)_{\text{tang}}|_{S_3} \end{aligned}$$

como las correspondientes para los campos magnéticos.

a) La reflexión global nula es posible, debido a que la onda reflejada se construye a partir de múltiples contribuciones generadas en las diferentes superficies de separación. La clave es que esas contribuciones se cancelen aprovechando que llevarán entre sí ciertos desfases relativos. Para resolver el problema, sin embargo, basta con suponer que la onda reflejada es nula y buscar después el valor del grosor que permita satisfacer las diferentes condiciones de contorno exigibles en el problema con aquella condición.

b) A partir del resultado obtenido del apartado anterior, puede razonarse en qué forma se conseguirá un refuerzo máximo de las diferentes contribuciones a la onda reflejada. Obsérvese además que en este caso la onda transmitida será mínima.

- 53.** De nuevo se trata de suponer que la onda reflejada se cancela. Entonces deberá buscar los valores del grosor d y del índice n_2 que permite satisfacer las condiciones de contorno bajo aquella suposición.

No se desanime: tanto este problema como el anterior llevan tiempo y papel para llegar a la solución.

Guías de onda

54. a) y b) La ecuación de onda para el vector campo eléctrico tiene la forma usual. En coordenadas cartesianas las ecuaciones escalares para cada componente son iguales. Observe que se indica que los campos no variarán en la dirección del eje Y, pero eso no tiene que ver con que exista o no la componente y del campo.
- c) Sustituyendo en la ecuación de onda escalar por la expresión dada para la componente correspondiente del campo, sale inmediatamente la relación pedida.
- d) Se trata de la condición usual en cuanto a la componente tangencial a la superficie de la pared conductora.
- e) La no existencia de carga libre en el interior de la guía determina la forma de la divergencia del campo eléctrico. Ésta es una condición habitual para guías de onda.
55. a) El valor de la constante de propagación queda determinado para cada modo a partir de la ecuación de dispersión. De esa ecuación se conocen para este caso la frecuencia, las dimensiones de la guía y los valores enteros m y n .
- b) La longitud de onda *en la guía* es la separación entre frentes de onda consecutivos con igual fase en el interior de la guía de ondas. Es una característica de cada modo y no coincide con la longitud de onda en el vacío.
- c) Debe examinarse si son posibles otros modos guiados a la frecuencia que se indica. Los dos modos que tienen más posibilidades de mantener real su constante de propagación son los de menor orden, por lo que debería comenzar por evaluar esa constante para los modos TE_{01} y TE_{20} . Si éstos ya estuvieran en corte, todos los demás lo estarán necesariamente.
- d) La mínima frecuencia a la que es posible propagar algún modo es la frecuencia de corte del modo fundamental. Por debajo de ésta ya no pueden existir modos guiados en la guía.
56. a) El modo fundamental es el que tiene el valor más alto de la constante de propagación, y está, por tanto, más lejos del corte. De la ecuación de dispersión se deduce que los dos modos que, *a priori*, pueden tener la constante de propagación mayor son el TE_{10} y el TE_{01} . La relación entre el ancho y el alto de la guía es la que determina cuál de los dos será el fundamental.
- b) Una vez determinado el modo fundamental (el TE_{10} en este caso) no es inmediato deducir cuál será el siguiente en aparecer en el caso en que fuéramos aumentando la frecuencia. No es necesario que el siguiente sea el TE_{01} , sino que de nuevo hay dos posibilidades y de nuevo depende de la relación entre las dimensiones a y b de la guía.
- c) La condición de existencia de ese margen se traduce en que sea un margen real de frecuencias y no un margen nulo o negativo. Expresándolo matemáticamente:

$$f_{\max} > f_{\min}$$

57. Este problema tiene mucha similitud con el anterior. Se desea diseñar una guía de onda de paredes conductoras a la que se imponen una serie de condiciones. La primera de ellas – la i) – es que la guía sea monomodo en un margen de frecuencias dado. Esa condición atañe a la frecuencia de corte de los modos que puedan estar inmediatamente por encima del fundamental. Junto con la condición ii), quedará especificado también el margen posible de la frecuencia de corte del propio modo fundamental. Por último se nos exige que el siguiente modo en propagarse –por encima del margen de frecuencias en que la guía ha de ser monomodo– sea el TE_{01} y no otro. A partir de la ecuación de dispersión, todas esas condiciones se traducirán en márgenes de valores posibles para las dimensiones de la guía.
58. a) Observe que se está buscando una expresión matemática válida como solución para todo el interior de la guía. Por lo tanto esa expresión debe satisfacer la ecuación de onda y todas las posibles condiciones de contorno. *A priori*, un método alternativo sería dividir el interior de la guía en dos zonas y proponer expresiones diferentes para cada una. Esta segunda opción es la que se muestra en la figura.

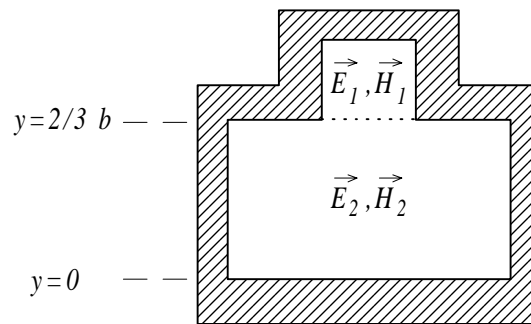


Fig. 34 Planteamiento alternativo del problema 58 para la búsqueda de los modos

En este segundo supuesto ambos campos deberían satisfacer la misma ecuación de onda, porque el medio es el mismo, pero podrían probarse constantes diferentes en una y otra zona. Además a cada expresión se le aplicarían diferentes condiciones de contorno. No obstante, no es probable que en este caso particular se obtengan más modos con este segundo planteamiento.

b) y c) El método a seguir es el mismo que en las guías rectangulares.

59. a) Al decirnos que la guía debe ser monomodo en un margen de frecuencias, nos están dando implícitamente los límites de las frecuencias de corte de tres modos. De allí saldrán los límites pedidos para las dimensiones de la guía.
- b) Piense que añadir un margen de seguridad no significa necesariamente incrementar todos los límites obtenidos antes. En algún caso el margen de seguridad se obtiene decrementándolo.
- c) y d) La potencia transmitida por un modo se obtiene integrando el vector de Poynting en la sección de la guía. Después deberá sustituir los valores por los que se indican para realizar el cálculo.
- e) Ni incrementando la frecuencia hasta 9,0 GHz ni disminuyéndola hasta cerca de 8,0 GHz es probable que varíe apreciablemente la potencia transmitida, ya que las variaciones de la constante de propagación tenderán a compensar en el numerador las variaciones del

denominador. Es más factible rellenar la guía de algún medio dieléctrico distinto del aire. ¿Qué podríamos ganar con eso?

- 60.** a) Es un problema de condiciones de contorno. Observe en qué paredes de la guía se cancelan las componentes y determine de esa forma cuál es cada una de ellas. Sólo hay una asignación correcta.
 b) El orden del modo aparece implícitamente en el dibujo. Fíjese en que las tres componentes tienen el mismo número de semiondas en cada dimensión.
 c) A partir de los resultados anteriores puede escribir la expresión matemática para cada una de las tres componentes de campo eléctrico. A partir de allí podría calcular la forma del campo magnético. La relación entre las amplitudes de cada componente se obtienen fácilmente a partir de dos condiciones: la primera es que se trata de un modo de tipo TM; la segunda es que no hay carga libre en el interior de la guía.
 d) Debe encontrar la frecuencia de corte del modo.
- 61.** a) El campo eléctrico, en cualquiera de los tres medios, sólo tiene componente en la dirección del eje Y. Esa componente es tangencial a las superficies de separación entre los medios, por lo que debe comprobar la condición de contorno correspondiente en las superficies $x = -d$ y $x = d$.
 b) El campo magnético se obtiene fácilmente mediante la ecuación de Maxwell-Faraday. Cuando se conocen cuáles son las componentes de campo eléctrico y magnético, es inmediato deducir si se trata de un onda TEM, TE o TM.
 c) Se piden las tres relaciones que existen entre las constantes. Dos de ellas se obtienen forzando a que las expresiones de los campos cumplan la ecuación de onda. La última condición proviene de la última condición de contorno que falta por aplicar. Es una condición relativa al campo magnético.
- 62.** En este problema la guía de onda tiene una configuración poco usual, con lo cual se debe ir con especial cuidado al aplicar los conocimientos sobre guías de onda metálicas rectangulares. La base fundamental siempre será aplicable, pero no así los resultados finales vistos en teoría para guías con un único dieléctrico.
 a) La primera diferencia con la teoría aparece en la necesidad de dos expresiones para el campo eléctrico, dependiendo de si estamos en el dieléctrico o en el aire. Esto es así porque las propiedades eléctricas en los medios son diferentes y es de esperar que los campos también lo sean. La diferencia está en la dependencia transversal de la amplitud, porque es en esta dirección donde se produce el cambio de medio. El conjunto de ambas expresiones forman un único campo y por lo tanto el término de propagación ($\exp(-j\beta z)$) debe ser el mismo. Si fuera diferente implicaría que la onda se propaga a diferente velocidad dependiendo de si está en el dieléctrico o en el aire. Esto no puede ocurrir debido a las condiciones de contorno en la superficie de separación de ambos dieléctricos.
 Las dos expresiones de momento son simples expresiones matemáticas. Piénsese en qué condiciones debe cumplir para ser un campo electromagnético o de dónde se obtiene la solución de las ondas electromagnéticas. Su comprobación nos dará la relación deseada entre las constantes.
 b) Para hallar el campo magnético, primero debe pensarse qué tipo de onda es y, después, cuál de las expresiones que nos relacionan campo eléctrico y magnético es aplicable en este caso particular. Recuerde que hay expresiones que son fundamentales y por tanto más generales que otras. En caso de duda, cuanto más general sea, más garantías de éxito.

c) Aquí ya no se pueden utilizar los resultados finales vistos en teoría, pero el razonamiento usual sigue siendo válido: los campos en la superficie de separación deben cumplir determinadas condiciones.

d) La relación de dispersión relaciona la constante de propagación β con la frecuencia, las dimensiones, geometría de la guía y las características electromagnéticas del medio material. Debe obtenerse ésta a partir de las relaciones encontradas en el apartado c). Para obtener una relación compacta, debe utilizar la expresión de $\tan(x \pm y)$ dada en el enunciado y dejar escrita la relación en función de α_0 y α_1 . Para obtener la relación explícita en función de β , debe substituirse α_0 y α_1 por las relaciones encontradas en el apartado a).

e) Al imponer una determinada relación entre α_0 y α_1 indirectamente estamos seleccionando cómo serán las soluciones de nuestro problema. La solución trivial es $\alpha_0 = 0$, que básicamente indica que no hay onda propagada. La primera solución no trivial corresponde al modo fundamental. Las siguientes soluciones nos darán los modos que soporta la guía. En este apartado debe utilizarse la expresión $\tan(3x)$.

f) Al imponer $\alpha_1 = 3\alpha_0$, como ya se ha comentado, estamos determinando la solución del problema, es decir, estamos imponiendo condiciones sobre la constante de propagación β , pero también sobre el número de onda k_1 , o lo que es lo mismo, sobre el índice de refracción una vez fijada la frecuencia.

Radiación de antenas elementales

63. a) Los campos radiados por ambos dipolos se superpondrán en todo el espacio. La solución que nos da el enunciado – tanto para el dipolo único como para el conjunto de los dos – corresponde al caso de grandes distancias. La superposición en este caso puede realizarse haciendo algunas simplificaciones, como por ejemplo que el ángulo que forman los radiovectores de posición desde cada dipolo con el eje Z son aproximadamente iguales, o que la distancia entre cada dipolo y el punto de medida del campo son iguales (en lo que respecta al denominador de la expresión de los campos, no en cuanto a su influencia en las fases). También los campos producidos por cada dipolo a grandes distancias pueden considerarse prácticamente paralelos. A todo ello hace referencia la siguiente figura, en la que se ve que realmente se trata de aproximaciones que no podrían hacerse a distancias pequeñas de los dipolos.

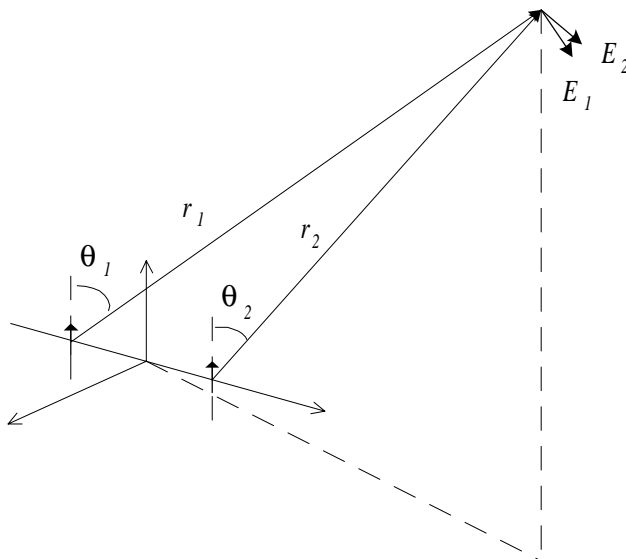


Fig. 35 Superposición de dos campos que se hacen prácticamente paralelos a grandes distancias

La función coseno que aparece en la solución se debe al desfase relativo con que llegan las ondas al punto de medida, procedentes de uno y otro dipolo.

b) Es igual al caso anterior, pero con las contribuciones de los campos individuales inicialmente en contrafase.

c) El campo magnético puede hallarse en la forma general: a partir del campo eléctrico mediante la ley de Maxwell-Faraday. Sin embargo, sabiendo que se trata de un campo radiado a grandes distancias, existe una aproximación mucho más rápida.

d) Para dibujar el diagrama de radiación de un sistema radiante, los pasos son siempre los mismos:

- i) Calcular el vector de Poynting.
- ii) Buscar la dirección en que el vector de Poynting es máximo y calcular dicho valor máximo.
- iii) Normalizar el módulo del vector de Poynting a la unidad, dividiéndolo por aquel valor máximo, con lo que resultará una función de los ángulos esféricos que es precisamente el diagrama de radiación: $t(\theta, \varphi)$.
- iv) Para representarlo gráficamente, sea todo el diagrama en el espacio o bien una sección del mismo, se procede como es usual en representaciones esféricas, en las que los puntos del diagrama responden a la expresión $r = t(\theta, \varphi)$.
- v) Suele ser conveniente buscar en primer lugar los ceros del diagrama de radiación. De esta forma puede obtenerse una representación del diagrama bastante aproximada sin necesidad de calcular muchos puntos.

Para la representación de las diferentes secciones del diagrama de radiación, deben fijarse los valores de los ángulos esféricos que definen cada plano.

e) Debe buscarse el valor kd que maximiza la radiación a lo largo del eje Y, es decir, en el caso $\varphi = \pi/2$. Otra forma, más intuitiva, de resolver este apartado es buscar la longitud de onda en función de la separación entre los dipolos. La condición para que haya un máximo en el eje Y es que los dipolos estén separados una distancia igual a media longitud de onda (sabido que radian en contrafase). Piense por qué es así.

- 64.** a) El campo que proporciona el enunciado corresponde al producido a grandes distancias por un dipolo largo, de longitud $\lambda/2$. En este caso, la corriente que circula por la antena ya no puede suponerse espacialmente uniforme, porque se sabe que realmente se distribuye de forma senoidal a lo largo de la longitud del dipolo. En cualquier caso, todo ello no afecta al tratamiento matemático de los campos a grandes distancias, que seguirán siendo ondas localmente planas.
- b) De nuevo puede utilizarse la aproximación de onda plana.
- c) Siga las indicaciones dadas en el problema anterior. Debido a la simetría cilíndrica de la antena, todas las secciones verticales son equivalentes.

- 65.** En este problema se nos proporciona una expresión aproximada para el potencial vector magnético a grandes distancias que resulta de gran utilidad. El término exponencial añadido a la expresión habitual $-\exp(jk\hat{r} \cdot \vec{r}_0)$ – se encarga de modificar la fase del potencial en puntos lejanos debido al desplazamiento del dipolo respecto al origen.

a) Obtenga los vectores de posición \vec{r}_{01} y \vec{r}_{02} para cada dipolo y obtenga el potencial vector que crea cada uno a grandes distancias. Para escribir adecuadamente el término de fase debido al desplazamiento del dipolo, debe expresar los vectores unitarios cartesianos que aparecen en \vec{r}_{01} y \vec{r}_{02} en coordenadas esféricas, en función de los ángulos θ y φ .

El principio de superposición se aplica también a los potenciales.

b) Aproximación de onda localmente plana.

c) Si hasta ahora no lo ha hecho, dibuje un esquema de la situación planteada. Trate de contestar a este apartado por simple inspección de la geometría del sistema.

Para resolverlo de forma sistemática obtenga el vector de Poynting y el diagrama de radiación. Después busque la condición que debe cumplirse entre las fases de las corrientes para cancelar el diagrama en el caso de $\varphi = \pi/2$.

- 66.** a) El problema es similar al anterior, aunque con un sistema radiante algo más complicado. Escriba correctamente los vectores de posición \vec{r}_{0i} para cada uno de los cuatro dipolos y sustitúyalos en la expresión del potencial vector para cada uno de ellos. Aplique superposición.
 b) Se nos proporciona una expresión aproximada para el campo radiado a grandes distancias a partir del potencial vector. Es una expresión general que puede utilizarse en cualquier situación.
 c), d) y e) Similares a los problemas anteriores. El apartado e) debe tratar de resolverlo por inspección de la situación y después confirmarlo mediante un cálculo sistemático.
- 67.** a) y b) Igual que los anteriores.
 c) Se mencionan los posibles ceros de radiación del sistema, que, como se explicó en las indicaciones al problema 63, son útiles para dibujar correcta y eficientemente el diagrama de radiación. En este caso, las corrientes radian en fase pero su módulo es diferente, así que es más difícil adivinar donde estarán los ceros, si es que los hay.
 d) Al añadir un dipolo más aparecerá otro término en el diagrama de radiación. No obstante, se trata de un dipolo en el origen, por lo que no viene afectado de ningún desfase de desplazamiento respecto al origen. Con la nueva expresión del diagrama de radiación establezca la condición de cancelación a lo largo del eje X (es decir, con $\varphi = 0$).
- 68.** a) Tenga en cuenta que, a diferencia de los otros problemas, en este caso los dipolos están orientados en distintas direcciones. Aplique el principio de superposición utilizando base cartesiana y coordenadas esféricas.
 b) Utilice la expresión dada en el problema 66 para el cálculo del campo radiado.
 c) Examinando los problemas anteriores se ve que el campo eléctrico siempre está orientado en la dirección de las corrientes. En este caso, tenemos que las corrientes de los dipolos están orientadas en distinta dirección; el resultado inmediato es que el campo tendrá dos componentes y, en consecuencia, la polarización no tiene por qué ser lineal. Aquí deben aplicarse los criterios para determinar la polarización vistos en el capítulo de ondas planas uniformes teniendo en cuenta que $\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}$.
 d) Utilícese la aproximación de onda plana.
 e) Proceda como en los problemas anteriores. Tenga en cuenta que en este caso hay lóbulos del diagrama de radiación que son mucho menores que los principales. Calcule algún punto para saber cuáles son y dibuje el diagrama de manera que quede patente qué lóbulos son menores (no es necesario realizarlo a escala)

Soluciones a los problemas

Ecuaciones de Maxwell en condiciones estáticas

$$1. \quad \text{a) } \frac{q}{2\epsilon_0} \quad \text{b) } \frac{q}{2\epsilon_0}$$

$$3. \quad \phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} \left[7a^2 - r^2 \left(1 + \frac{r}{a} \right) \right]$$

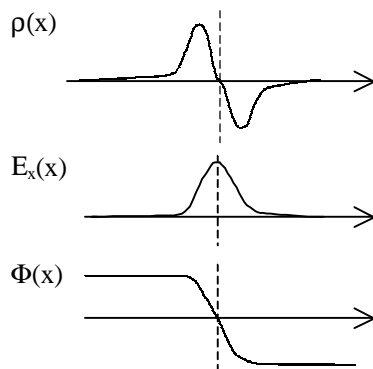
$$4. \quad \vec{E}_{\text{int}}(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \hat{r} \quad \vec{E}_{\text{ext}}(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \hat{r}$$

5. Las líneas de campo eléctrico son siempre perpendiculares en la superficie de los conductores perfectos. Por otra parte, una línea de campo electrostático no puede nacer y morir en el mismo conductor, puesto que violaría su carácter de campo conservativo: esto es, la circulación del campo a través de esa trayectoria no sería nula.

$$6. \quad \text{a) } \Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - s/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + s/2)^2}} \right]$$

$$\text{b) } \Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{s \cos \theta}{r^2}$$

7.



A partir de la ecuación de Gauss en forma diferencial, se deduce que el campo eléctrico se obtiene de la integral de la distribución de carga. Será máximo (en la dirección X^+) justo en la unión, y decrecerá hacia los extremos debido a un efecto de cancelación mutua de las cargas positivas y negativas. La función potencial debe ser, en general, positiva donde la carga es positiva y negativa cuando es negativa. El potencial se obtiene como la circulación del campo eléctrico. La constante de integración de la integral indefinida es la que sirve para establecer la referencia de potencial nulo que se elija.

Si se quiere relacionar la función potencial obtenida con los diagramas de energía típicos de las uniones $p-n$, basta multiplicar la función potencial por la carga del electrón. Tanto los niveles energéticos de la banda de valencia como los de conducción tendrán la forma del potencial, pero, debido a la carga negativa del electrón, estarán invertidos.

8. a) $J_0 = 6,24 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2$ b) $I = 0,312 \text{ A}$ c) $v = 6,24 \text{ mm/s}$
 d) $F_m = 6,24 \cdot 10^{-3} \text{ N/C}$

Variará la distribución espacial de los portadores y, por tanto, la densidad de corriente, pero no hay motivo para suponer que varíe apreciablemente la corriente total.

9. $C = 10.78 \text{ nF}$. Observe que es una capacidad discreta para el tamaño del condensador.

10. a) $I = J_0 0,5\pi a^2$ b) $J_0 = 70.7 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ c) $B(\rho = 0.01) = 20 \text{ } \mu\text{T}$

11. $\vec{B} = -\mu_0 J_0 \hat{x}$ entre las láminas de corriente y nulo (aproximadamente) en el exterior.

12. c) $f = 33.3 \text{ Hz}$; $V_0 = 65.6 \text{ mV}$

13. $R = 3 \Omega$

14. $C = 85.6 \text{ pF}$

Ecuaciones de Maxwell en condiciones dinámicas

15. La densidad de carga neta desaparece rápidamente según la expresión:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) \exp(-t/\tau) \quad \text{donde} \quad \tau = \epsilon/\sigma$$

16. a) $J_{cond} = 5 \cdot 10^7 J_{desp}$

c) $D = (\sigma\mu)^{-1}$

d) $\vec{E}(z, t) = -\frac{z}{2\sigma Dt} \frac{A}{\sqrt{\pi Dt}} \exp(-\frac{z^2}{4Dt}) \hat{y}$

17. a) $\sigma^+(t) = J_0 t$; $\sigma^-(t) = -J_0 t$

b) $E_z = \frac{J_0}{\epsilon_0} t$

c) $H_y = J_x = J_0(a-x)$

d) Energía eléctrica instantánea: $U_e = \frac{1}{2} J_0^2 \frac{abd}{\epsilon_0} t^2 = \frac{1}{2} CV^2$

e) $J_0 = K \frac{\epsilon_0}{d}$

18. a) $\vec{J}(\vec{r}) = J_0 \left(1 - \exp\left(\frac{\rho}{a}\right) \right) \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z) \hat{z}$

$$b) \quad \rho(\vec{r}) = \frac{\beta - j\alpha}{\omega} J_0 \left(1 - \exp\left(\frac{\rho}{a}\right) \right) \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z)$$

c) Porque hay carga neta en su interior, y existirá también un campo eléctrico, lo cual no puede ocurrir en conductores perfectos

$$d) \quad I = -J_0 \pi a^2 \exp(-\alpha z) \cos(\omega t - \beta z)$$

20. a) Sí hay campo, pero no por esa razón.
 b) Sí
 c) No, son conductores perfectos.
 d) Sí
 e) No, tienden a reforzarse entre las placas.
 f) Sí
 g) Sí
 h) No
 i) Sí

21. b) $\mu_r = \frac{\tau e}{lh} \mu'_r \quad \epsilon_r = \frac{h\tau}{le} \epsilon'_r \quad \sigma = \frac{h}{le} \sigma'$
 c) $B' = \frac{l}{\tau e} B \quad D' = \frac{l}{h\tau} D$
 d) $V = e l V' \quad I = h l I'$

22. a) $I = \frac{\omega B_0}{R} \pi a^2 \sin \omega t$
 b) $E_\phi = \frac{1}{2} \rho B_0 \omega \sin \omega t$

Ondas planas

23. a) $\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cos(2\pi \cdot 10^8 t - \frac{2\pi}{3} z)(\hat{x} + \hat{y}) \quad A/m$

b) $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{120}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{y}) e^{-j\frac{2}{3}\pi z} \quad V/m$

c) $\vec{P} = \frac{60}{\pi} \hat{z} \quad W/m^2$

24. a) Polarización lineal

b) $f = 30 \text{ MHz}$

c) $P_m = \frac{E_0^2}{30\pi} W/m^2$

d) $\vec{E}(\vec{r}, t) = (\hat{x} - \hat{y}) E_0 \cos(2\pi f t - 0,2\pi z + \frac{\pi}{3})$

25. a) $\lambda = 1111 \text{ m}$

b) $\lambda = 3.24 \text{ m}$

c) $\lambda = 0.68 \text{ m}$

d) $\lambda = 0.12 \text{ m}$

26. a) lineal

b) circular a derechas

c) lineal

d) elíptica derechas

e) elíptica izquierdas

27. a) circular a izquierdas

b) elíptica a derechas

c) circular a derechas

d) lineal

28. a) Los parámetros que definen la onda son:

$$\hat{k} = 0,25(3\hat{x} + \sqrt{3}\hat{y} + 2\hat{z}) \quad k = 5,87\pi \text{ m}^{-1}$$

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{2}(\hat{x} - \sqrt{3}\hat{y}) \quad \hat{e}_1 = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}\hat{x} - \hat{y} + 2\sqrt{3}\hat{z})$$

$$E_{01} = \sqrt{95} \quad E_{02} = 5 \text{ V/m} \quad \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

- b) Sí, está unívocamente definida.

- c) Los ángulos posibles del eje del polarizador con \hat{e}_1 son $\psi = \pm 45^\circ$.

29. a) $\alpha = 24\pi 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ b) $|A| = 0,5$ c) c₁) circular a derechas c₂) lineal

30. Denominamos α al ángulo que forma el polarizador con el eje de las X.

a) $\vec{E}_{out}(\vec{r}) = E_0 [(1-j)\cos\alpha - (1+j)\sin\alpha] \cdot [\cos\alpha \hat{x} + \sin\alpha \hat{y}] e^{-jkz}$

- b) El primer polarizador puede estar en cualquier posición. El segundo polarizador debe estar girado 45° respecto al primero.

31. a) $\vec{E}_{in}(\vec{r}) = 111,8\pi (\hat{x} + 2e^{j\Delta\varphi}\hat{y})e^{-jkz}$ No hay información acerca de la fase de la onda inicial.

b) $\sigma = 5,5 (\Omega m)^{-1}$

- c) Sí, es correcta.

32. a) $\vec{E}_{out}(\vec{r}) = \sqrt{2}E_0 e^{-jk_0 n_o d} e^{-j\pi/4} e^{-jk_0 z} \hat{x}$

b) $\vec{E}_{out}(\vec{r}) = j\sqrt{2}E_0 e^{-jk_0 n_E d} e^{-j\pi/4} e^{-jk_0 z} \hat{y}$

Ambas expresiones corresponden a una polarización lineal. Comparándolas, vemos que se produce un cambio en la orientación de la polarización: mientras que para $\psi = 45^\circ$ el campo oscila según el eje X, para $\psi = 135^\circ$ lo hace según el eje Y.

33. El polarizador elimina una de las componentes y pierde consecuentemente la mitad de la potencia de la onda (3 dB). La lámina, sin embargo, conserva toda la potencia de la onda.

34. a) La dirección de polarización se mantiene lineal, pero girada un ángulo 2ψ respecto a la original.
b) La polarización de la onda a la salida se mantiene circular, pero se invierte el sentido de giro.

35. El primer elemento debe ser un polarizador, puesto que una lámina no absorbe potencia. El hecho de que la onda sea insensible al giro del polarizador y que la potencia a la salida sea la mitad de la incidente indica que el láser tiene polarización circular. Eventualmente podría ocurrir que el láser tuviera polarización arbitraria, variable en el tiempo, pero no consideraremos esa posibilidad.

Para determinar cómo es la lámina, se sitúa en primer lugar ante la salida del láser. Después se pone el polarizador. Si la lámina es de $\lambda/4$, convertirá la polarización circular del láser en lineal, independientemente de cómo la orientemos. Entonces, al girar el polarizador, observaremos que la potencia recibida por el detector aumenta y disminuye consecuentemente. Si, por el contrario, la lámina es de $\lambda/2$, entonces la polarización a su salida seguirá siendo circular y el giro del polarizador situado a continuación no tendrá efecto.

36. a) $A = \frac{E_0}{2} \hat{e}(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2) \quad ; \quad B = \frac{E_0}{2} \hat{e}(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2)$

b) El campo de la onda con polarización elíptica es $\vec{E}(\vec{r}) = E_0(\hat{e}'_1 + p e^{j\Delta\varphi} \hat{e}'_2) e^{-jkz}$:

$$A = \frac{E_0}{2} (\hat{e}_1 - j\hat{e}_2) \cdot (\hat{e}'_1 + p e^{j\Delta\varphi} \hat{e}'_2) \quad ; \quad B = \frac{E_0}{2} (\hat{e}_1 + j\hat{e}_2) \cdot (\hat{e}'_1 + p e^{j\Delta\varphi} \hat{e}'_2)$$

37. Polarización lineal

38. a) $\hat{k} = \frac{\hat{z} - \sqrt{3}\hat{x}}{2}$

b) Elíptica

c) $\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{10}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{\pi}{4}) - \frac{15}{\sqrt{2}} \hat{e}_2 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{\pi}{4})$

d) $f = 22,5 \text{ MHz}$

39. a) $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{J_0}{\sigma} \hat{z}$; $\vec{H}_{ext}(\vec{r}) = \frac{J_0 R^2}{2\rho} \hat{\phi}$; $\vec{H}_{int}(\vec{r}) = \frac{J_0 \rho}{2} \hat{\phi}$

b) Como las componentes de campo eléctrico tangenciales a las paredes del hilo conductor, a un lado y otro de la superficie, deben ser iguales, entonces debe haber campo eléctrico en el exterior. Quien lo produce no es ninguna acumulación de carga en el hilo, sino la misma batería que alimenta la corriente, y que es quien produce también el campo interior.

c) La densidad de corriente será de la forma $\vec{J}(\vec{r}) = J_z(\rho) \hat{z}$

d) No existirá densidad neta de carga, porque efectivamente la divergencia de la densidad de corriente es nula y, por tanto, sigue siendo una corriente estacionaria. Este resultado es debido a la aproximación acerca de la forma de la corriente, donde no se consideró término de variación espacial de la fase.

e) $\vec{E}(\vec{r}) = E_z(\rho) \hat{z}$

f) No es posible que ninguna componente del campo magnético dependa de z o de ϕ . A la vez, sólo puede haber componente acimutal por la simetría radial de la densidad de corriente.

g) $\frac{d^2 E_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dE_z}{d\rho} + \omega^2 \mu_0 \tilde{\epsilon} E_z = 0$ donde $\tilde{\epsilon} = -j \frac{\sigma}{\omega}$

Es una variante compleja de la ecuación de Bessel.

Incidencia de ondas planas

40. a) $\sigma|_s = 0$; $\vec{J}|_s = 2 \frac{E_{ic}}{\eta} \cos \theta_i e^{-kz \text{ sen } \theta_i} \hat{x}$

b) $\sigma|_s = 2\epsilon_0 E_{ic} \text{ sen } \theta_i e^{-jk_y \text{ sen } \theta_i}$; $\vec{J}|_s = 2 \frac{E_{ic}}{\eta} e^{-jk_z \text{ sen } \theta_i} \hat{z}$

c) Tiene la misma dirección que la componente tangencial de campo eléctrico de la onda.

41. a) $\vec{E}_r(\vec{r}) = -jE_c (\hat{y} - j\hat{z}) e^{-jkx}$

b) Polarización circular a derechas (la onda incidente es a izquierdas).

- b) No, ya que el coeficiente de reflexión es constante ($\rho = -1$) y, por lo tanto, no hay ningún tipo de dependencia de la onda reflejada respecto del ángulo de incidencia.

42. $n_2 = 3$

43. Fracción de potencia transmitida: 0.85 y 0.72 respectivamente

44. $\theta_i = \pm 4.79^\circ$ (con $\alpha = 45^\circ$)

45. a) $\vec{E}_r(\vec{r}) = E_0 \left[\sqrt{6} \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} (\hat{y} + \hat{z}) + (3 - j\sqrt{3}) \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \hat{x} \right] \exp(-j2\pi(z - y))$

b) $\vec{E}_t(\vec{r}) = E_0 \left[\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3} + 2} (\hat{y} - \sqrt{3}\hat{z}) + \frac{2(3 - j\sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} \hat{x} \right] \exp(-j2\pi(\sqrt{3}y + z))$

46. a) $\theta_i = 26.56^\circ$; $\theta_t = 63.43^\circ$

b) $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}(2\hat{y} + \hat{z})$; $\vec{k}_r = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}(-2\hat{y} + \hat{z})$; $\vec{k}_t = \frac{\pi}{\sqrt{5}}(\hat{y} + 2\hat{z})$

c) Elíptica izquierdas

d) $\theta_{Bi} = 26.56^\circ$

e) $\rho_\perp = \frac{3}{5}$; $\rho_\parallel = 0$; $\tau_\perp = \frac{8}{5}$; $\tau_\parallel = 2$

f) $\theta_{ic} = 30^\circ$

g) $\vec{E}_i(\vec{r}) = E_0 \left[\sqrt{5}(\hat{z} - \sqrt{3}\hat{y}) + j \frac{5\sqrt{5}}{2} \hat{x} \right] e^{-j\pi(y + \sqrt{3}z)}$

47. a) $\vec{E}_i(\vec{r}) = E_0 [(\hat{y} \cos \theta_i - \hat{z} \sin \theta_i) + \hat{x} \exp(-j\Delta\varphi)] e^{-jk_0\sqrt{3}(y \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$

b) Casi circular ($\Delta\varphi = 89.86^\circ$)

c) No. No hay posibilidad de alterar las fases.

d) $\vec{E}(\vec{r})|_\perp = \sqrt{2}E_0 e^{-j38\frac{\pi}{180}} \exp(-k_0 z) e^{-jk_0\sqrt{2}y} \hat{x}$

48. a) No. A partir del dibujo se ve que $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} < 1$
- b) Sí. Los coeficientes de transmisión en este caso son magnitudes reales, con lo cual no puede aparecer un desfase entre componentes.
- c) No. Los coeficientes de reflexión para las componentes paralelas y perpendicular en general son distintas, con lo cual, la relación entre componentes p de la onda reflejada no será la unidad, y por lo tanto no puede ser circular.
- d) Depende. Si la onda incidente tiene polarización lineal paralela al plano de incidencia, la onda reflejada será nula para el ángulo de Brewster. Para cualquier otra orientación, siempre tendremos componente perpendicular reflejada.
- e) No. No pueden obtenerse ángulos de transmisión mayores de $\theta_t < \arcsin(n_1/n_2)$
- f) Si la onda tiene componentes perpendicular y paralela, en general, NO se cumple. Puede suceder que la potencia decrezca hasta alcanzar el ángulo de Brewster. A partir de este punto sí que aumenta la potencia reflejada con el ángulo. Sin embargo, para una onda con sólo la componente perpendicular sí que sería cierto.
- g) $\theta_i = 0$
- h) No. El ángulo de Brewster cumple $\theta_{iB} = \pi/2 - \theta_t$, y del dibujo vemos que el ángulo de incidencia siempre es mayor que el de transmisión.
- i) Sí, ya que $n_2 > n_1$

49. a) $\vec{E}_t(\vec{r}) = \tau_{\perp} E_{0x} \hat{x} \exp(-k_0 n_2 \gamma z) \exp(-jk_0 n_2 \beta y)$

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{\tau_{\perp}}{\eta} E_{0x} (j\gamma \hat{y} + \beta \hat{z}) \exp(-k_0 n_2 \gamma z) \exp(-jk_0 n_2 \beta y)$$

con $\beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$, $\gamma = \sqrt{\beta^2 - 1}$ y $\tau_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i - jn_2 \gamma}$

b) $\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\beta}{2\eta} |\tau_{\perp} E_{0x}|^2 \exp(-2k_0 \gamma z) \hat{y}$

c) $\theta_i = 55.75^\circ$

d) $p = 1$, $\Delta\phi \approx -\pi/4$, Polarización elíptica a derechas

50. a) Incidencia supercrítica e incidencia para el ángulo de Brewster.
- b) $n_1 \cos \theta_t = n_2 \cos \theta_i$
- c) $n = 3.14$

51. a) No, puesto que σ es finita.

b) para $f=10$ GHz $\eta_{cond} = 0,3974 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \Omega$

para $f=90$ MHz $\eta_{cond} = 0,0377 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \Omega$

c) para $f=10$ GHz $\tau = 2,11 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

para $f=90$ MHz $\tau = 2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

d) para $f=10$ GHz $\delta_p = 7,12 \mu m$

para $f=90$ MHz $\delta_p = 75 \mu m$

e) $\vec{E}(\vec{r}) = \tau E_0 e^{\frac{1+j}{\delta} z} \hat{x}$ $\vec{J}(\vec{r}) = \sigma \tau E_0 e^{\frac{1+j}{\delta} z} \hat{x}$

f) para $f=10$ GHz $I = 53,1$ mA

para $f=90$ MHz $I = 53$ mA

g) para $f=10$ GHz $P_{dis} = 39$ nW

para $f=90$ MHz $P_{dis} = 3.75$ nW

52. a) $d = m \frac{\lambda_0}{2n_2}$ $m = 1, 2, 3, \dots$ b) $d = (2m - 1) \frac{\lambda_0}{4n_2}$

53. $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$; $d = (2m - 1) \frac{\lambda_0}{4n_2}$

Guías de onda

54. a) $\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0$
- b) $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] E_i = 0 \quad i = x, y, z$
- c) Se satisface la ecuación de onda siempre que $\beta = \sqrt{k^2 - k_x^2}$
- e) A y B deben ser nulas para que se cumpla $\nabla \cdot \vec{E} = 0$
55. a) $\beta = 35.7\pi \text{ m}^{-1}$
- b) $\lambda_g = 5.57 \text{ cm}$
- c) No
- d) $f > f_c = \frac{c}{2a} \approx 6.58 \text{ GHz}$
56. a) $a > b$
- b) $a < 2b$
- c) $a > 1.86 b$
- d) $\frac{a}{2} < b < \frac{a}{1.86}$
- e) $1.95 \text{ cm} < a < 2.025 \text{ cm}$
57. a) $\beta = \sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$
- b) f_{C10}, f_{C01} y f_{C20}
- c) $\frac{3}{46} < a < \frac{3}{44} \quad \frac{3}{88} < b < \frac{3}{50}$
58. a) $k_x = \frac{m\pi}{a}$ y $k_y = \frac{n\pi}{b}$ con m y n múltiplos de 3

b) TE₃₀c) $b < 5 \text{ cm}$

59. a) $a_{\min} = 1,875 \quad a_{\max} = 3,3 \quad b_{\max} = 1,66$

b) $a'_{\min} = 2 \quad a'_{\max} = 3 \quad b'_{\max} = 1,5$

c) $P_m = \frac{\beta ab}{4\omega\mu_0} E_0^2 \text{ W}$

d) $P_{m \text{ MAX}} = 4,34 \text{ MW}$

e) Lo más práctico sería rellenar la guía con un dieléctrico que tenga un campo de ruptura más alto que el aire. De no encontrar ningún dieléctrico adecuado deberíamos probar con otra geometría de guía de ondas.

60. a) $E_1 = E_x \quad ; \quad E_2 = E_y \quad ; \quad E_3 = E_z$

b) TE₁₂ $E_x = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y e^{-j\beta z}$

$$E_y = E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y e^{-j\beta z} \quad \text{con } k_x = \frac{\pi}{a} \quad \text{y} \quad k_y = \frac{2\pi}{b}$$

$$E_z = E_{0z} \sin k_x x \sin k_y y e^{-j\beta z}$$

c) $E_{0x} = -j\beta \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} E_{0z} ; \quad E_{0y} = -j\beta \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} E_{0z}$

d) $f > 25 \text{ GHz}$

61. b)

$$H_x(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\beta}{\omega\mu} E_0 \cos(k_x d) e^{-\gamma(x-d)} e^{-j\beta z} & (x > d) \\ -\frac{\beta}{\omega\mu} E_0 \cos(k_x x) e^{-j\beta z} & (-d < x < d) \\ -\frac{\beta}{\omega\mu} E_0 \cos(k_x d) e^{\gamma(x+d)} e^{-j\beta z} & (x < -d) \end{cases}$$

$$H_z(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{j\gamma}{\omega\mu} E_0 \cos(k_x d) e^{-\gamma(x-d)} e^{-j\beta z} & (x > d) \\ -\frac{jk_x}{\omega\mu} E_0 \sin(k_x x) e^{-j\beta z} & (-d < x < d) \\ \frac{j\gamma}{\omega\mu} E_0 \cos(k_x d) e^{\gamma(x+d)} e^{-j\beta z} & (x < -d) \end{cases}$$

Es un modo tipo TE.

$$c) \quad \beta = \sqrt{n_1^2 k_0^2 + \gamma^2}; \quad \beta = \sqrt{n_2^2 k_0^2 + k_x^2}; \quad \operatorname{tg} k_x d = \frac{\gamma}{k_x}$$

$$62. \quad a) \quad \beta = \sqrt{k_0^2 - \alpha_0^2} \quad \beta = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \alpha_1^2}$$

$$b) \quad \vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{-1}{\mu\omega} [\beta(A \cos \alpha_1 x + B \sin \alpha_1 x) \hat{x} + j\alpha_1(A \sin \alpha_1 x - B \cos \alpha_1 x) \hat{z}] \exp(-j\beta z) & 0 < x < \frac{a}{2} \\ \frac{-1}{\mu\omega} [\beta(C \cos \alpha_0 x + D \sin \alpha_0 x) \hat{x} + j\alpha_0(C \sin \alpha_0 x - D \cos \alpha_0 x) \hat{z}] \exp(-j\beta z) & \frac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

$$c) \quad A = 0$$

$$C \cos \alpha_0 a = -D \sin \alpha_0 a$$

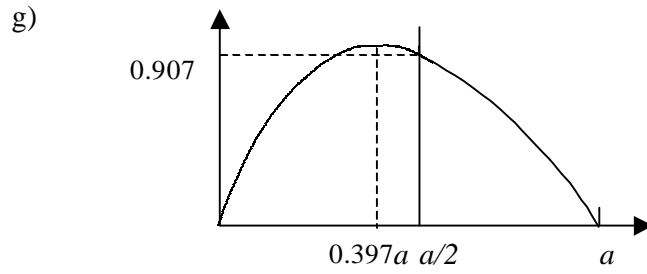
$$B \sin \alpha_1 \frac{a}{2} = C \cos \alpha_0 \frac{a}{2} + D \sin \alpha_0 \frac{a}{2}$$

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_0} B \cos \alpha_1 \frac{a}{2} = C \sin \alpha_0 \frac{a}{2} - D \cos \alpha_0 \frac{a}{2}$$

$$d) \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \tan \alpha_1 \frac{a}{2} = -\tan \alpha_0 \frac{a}{2}$$

$$e) \quad \alpha_0 = \frac{1.3181}{a}$$

$$f) \quad \epsilon_{r1} = 1,352$$



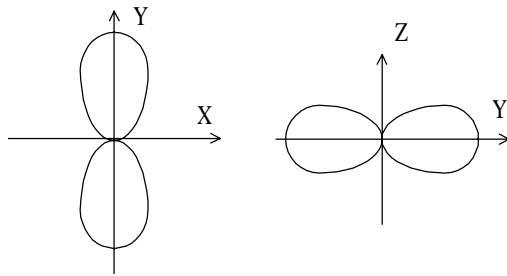
Radiación de antenas elementales

63. b) $\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = 2C \frac{\sin\theta}{r} \sin(kd \sin\theta \sin\varphi) e^{-jkr} \hat{\theta}$

c) $\vec{H}_{rad}(\vec{r}) = 2C \frac{\sin\theta}{r\eta} \sin(kd \sin\theta \sin\varphi) e^{-jkr} \hat{\phi}$

$$\vec{P}_{rad}(\vec{r}) = 2C^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2\eta} \sin^2(kd \sin\theta \sin\varphi) \hat{r}$$

d)



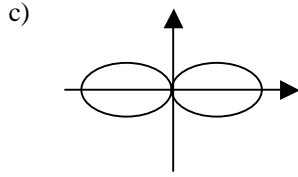
En el plano X-Z no hay radiación.

e) $f = 11.25 \text{ GHz}$

64. a) $\vec{H}_{rad}(\vec{r}) = j \frac{\eta_0 I_0}{2\pi r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} e^{-jkr} \hat{\theta}$

b) $\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\eta_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin^2\theta} \hat{r}$

Z



65. a) $\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = j\omega \frac{\mu_0 l}{4\pi r} \sin\theta [I_1 e^{jkd \cos\theta} + I_2 e^{-jkd \cos\theta}] e^{-jkz} \hat{\theta}$

b) $\vec{H}_{rad}(\vec{r}) = j\omega \frac{\mu_0 l}{4\pi r \eta_0} \sin\theta [I_1 e^{jkd \cos\theta} + I_2 e^{-jkd \cos\theta}] e^{-jkz} \hat{\phi}$

c) $I_2 = I_1 e^{j\pi} = -I_1$

66. a) $\vec{A}_{total} = 4\mu_0 \frac{I_0 h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{z} \cos[kd \sin\theta \cos\varphi] \cos[kd \cos\theta]$

c) $\vec{P}_m(\vec{r}) = 8 \frac{\omega \mu_0}{\eta_0} \left(\frac{I_0 h}{4\pi} \right)^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \sin\theta \cos\varphi \right] \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \cos\theta \right] \hat{r}$. El máximo de

radiación está en la dirección del eje Y.

d) *plano XY*: dos lóbulos en +Y y -Y; *plano XZ*, cuatro pequeños lóbulos en forma de cruz a 45° de los ejes; *plano YZ*: dos lóbulos en +Y y -Y.

e) Deberían invertirse las corrientes de los dos dipolos de una misma vertical respecto a las corrientes de los otros dos.

67. c) $\vec{P}_m(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{2\eta_0} \left(\frac{\mu_0 I_1 h}{4\pi} \right)^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2} (1 + 8 \cos^2 kd \sin\theta \cos\varphi) \hat{r}$

$$t(\theta, \varphi) = \frac{\sin^2\theta}{9} (1 + 8 \cos^2 kd \sin\theta \cos\varphi)$$

No aparecen ceros de radiación. Físicamente, se debe a que los dipolos radian con diferente potencia y sus campos no se cancelan en ninguna dirección.

d) El dipolo del origen debe tener una corriente $I_3 = 3I_1$

68. a) $A_{0y} = j \frac{\mu_0 h}{\sqrt{8\pi}} I_1 \frac{e^{jkr}}{r} e^{j\psi/2}$ $A_{0z} = \frac{\mu_0 h}{\sqrt{8\pi}} I_1 \frac{e^{jkr}}{r} e^{j\psi/2}$

$$\text{b) } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{8\pi}} I_1 \frac{e^{jkr}}{r} e^{j\psi/2} \left[\sin \frac{1}{2}(\pi \cos \theta - \psi)(\cos \theta \sin \varphi \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\phi}) + \right. \\ \left. + j \cos \frac{1}{2}(\pi \cos \theta - \psi) \cos \theta \hat{\theta} \right]$$

$$\text{c) Eje X: el campo es de la forma } \vec{E}(\vec{r}) = C(\vec{r}) \left(\hat{\theta} - j \tan \left(\frac{\psi}{2} \right) \hat{\phi} \right)$$

- $\psi = 0$ lineal dirección \hat{z}
- $\psi = \pi/2$ circular a derechas
- $\psi = \pi$ lineal dirección \hat{y}
- $\psi = -\pi/2$ circular izquierdas
- El resto de casos polarización elíptica. A derechas para $0 < \psi < \pi$ y a izquierdas para $\pi < \psi < 2\pi$.

$$\text{d) } \vec{P}(\vec{r}) = \frac{\omega^2 \mu_0^2 |I_1|^2}{16\eta\pi^2} \frac{1}{r} \left[\sin^2 \left(\frac{1}{2}(\pi \cos \theta - \psi) \right) (\cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \right. \\ \left. + \cos^2 \left(\frac{1}{2}(\pi \cos \theta - \psi) \right) \cos^2 \theta \right] \hat{r}$$

e)

