Totes les respostes de l'examen han de ser raonades

1. (2 punts)
   (a) Calculeu el nombre de solucions enteres no negatives de l'equació $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ tals que $x_1 \geq 5$ o $x_2 \geq 2$.
   (b) Calculeu quantes seqüències d'ADN de longitud 12 es poden fer amb les lletres de la seqüència TCTAGATATGCA.
   (c) Sigui $T = (V, A)$ un arbre que té exactament n_1 vèrtexs de grau 1, n_2 vèrtexs de grau 2 i n_4 vèrtexs de grau 4. Quina relació han de satisfer n_1, n_2, i n_4?
   (d) Doneu un graf G tal que $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ i $\delta(G)$ siguin tots diferents.

2. (2,5 punts)
   Sigui $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, i sigui $S_k(x)$ la funció generadora dels nombres de Stirling $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}\right)_{n\geq 0}$, és a dir, $S_k(x) = \sum_{n\geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n$. Recordeu que $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ si $n < k$.
   (a) Doneu fórmules per a $\left\{ {n \atop 1} \right\}$ i $\left\{ {n \atop 2} \right\}$, i trobeu $S_1(x)$ i $S_2(x)$.
   (b) Demostreu que $\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n \atop k} \right\}$ per a $n \geq 0$.
   (c) Usant els apartats anteriors, demostreu que $S_3(x) = \dfrac{x^3}{(1-3x)(1-2x)(1-x)}$.

3. (2,5 punts)
   Definim el graf $G = (V, A)$ prenent $V = \mathbb{Z}_{13}$ i dos vèrtexs u i v són adjacents si $u - v$ és un quadrat diferent de zero a $\mathbb{Z}_{13}$.
   (a) Esbrineu si G és regular i calculeu-ne la mida.
   (b) Representeu gràficament un arbre generador de G obtingut mitjançant l'algorisme de recerca en amplada a partir del vèrtex 0.
   (c) Trobeu l'excentricitat del vèrtex 0.
   (d) Esbrineu si el graf G és eulerià i si és hamiltonià.

4. (3 punts)
   Considerem el polinomi irreductible $f(x) = x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ i el cos finit que defineix $\mathbb{F}_{32} = \mathbb{F}_2[x]/f(x)$ i sigui $\alpha = \overline{x} \in \mathbb{F}_{32}$.
   (a) Demostreu que el polinomi $f(x)$ és primitiu.
   (b) Completeu la taula on s'expressen els elements del cos com a potència d'α.
   (c) Esbrineu si $\alpha + 1$ i $\alpha^4 + \alpha^2$ són quadrats; en cas afirmatiu calculeu les seves arreles quadrades.
   (d) Calculeu:
   $$\frac{(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha)^{34} + 1}{\alpha^4 + \alpha^2 + \alpha} + \alpha^2.$$

Taula de l'exercici 4(b).

1	1	α^{16}	
α	α	α^{17}	
α^2	α^2	α^{18}	$\alpha+1$
α^3	α^3	α^{19}	$\alpha^2+\alpha$
α^4	α^4	α^{20}	$\alpha^3+\alpha^2$
α^5		α^{21}	
α^6		α^{22}	
α^7		α^{23}	
α^8		α^{24}	$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha$
α^9	$\alpha^4+\alpha^3+\alpha$	α^{25}	
α^{10}		α^{26}	$\alpha^4+\alpha^2+\alpha+1$
α^{11}		α^{27}	$\alpha^3+\alpha+1$
α^{12}	$\alpha^3+\alpha^2+\alpha$	α^{28}	$\alpha^4+\alpha^2+\alpha$
α^{13}	$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2$	α^{29}	
α^{14}		α^{30}	
α^{15}	$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$	α^{31}	

- **Temps** de 11:30 a 14:30 hores.
- **Puntuació**

  Exercici 1: tots els apartats valen el mateix.

  Exercici 2: 1+0,75+0,75.

  Exercici 3: 0,7+0,7+0,4+0,7.

  Exercici 4: tots els apartats valen el mateix.
- La solució i les notes es penjaran al *Racó* el 2 de juliol a partir de les 17:00 hores.
- La revisió es farà el divendres 4 de juny a les 9:30 hores a l'aula A6101, Campus Nord.

Solució

1.

(a) Calculeu el nombre de solucions enteres no negatives de l'equació $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ tals que $x_1 \geq 5$ o $x_2 \geq 2$.

Siguin $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 | \sum_{i=1}^4 x_i = 10,\ x_1 \geq 5\}$ i $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 | \sum_{i=1}^4 x_i = 10,\ x_2 \geq 2\}$. El nombre que demana l'enunciat és igual al cardinal de $A \cup B$. Calculem:

$$|A| = \binom{10-5+4-1}{4-1},\ |B| = \binom{10-2+4-1}{4-1},\ |A \cap B| = \binom{10-7+4-1}{4-1},$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \binom{8}{3} + \binom{11}{3} - \binom{6}{3} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} + \frac{11!}{3!\cdot 8!} - \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 201.$$

(b) Calculeu quantes seqüències d'ADN de longitud 12 es poden fer amb les lletres de la seqüència TCTAGATATGCA.

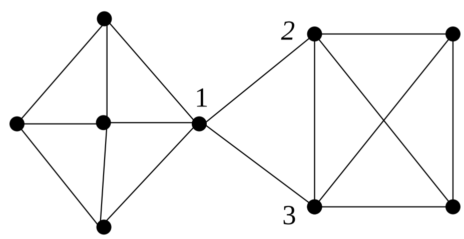
Hi ha 4 T's, 2 C's, 4 A's i 2 G's. El nombre de seqüències és el nombre de permutacions del multiconjunt $TTTTCCAAAAGG$: $\binom{12}{4,2,4,2} = \frac{12!}{(4!)^2\cdot(2!)2} = 207\,900$.

(c) Sigui $T = (V, A)$ un arbre que té exactament n_1 vèrtexs de grau 1, n_2 vèrtexs de grau 2 i n_4 vèrtexs de grau 4. Quina relació han de satisfer n_1, n_2, i n_4?

Per ser T un arbre es té $|A| = |V| - 1$. Atès que $|V| = n_1 + n_2 + n_4$, aplicant el lema de les encaixades es té: $2(n_1 + n_2 + n_4 - 1) = n_1 + 2n_2 + 4n_4$, per tant, $n_1 = 2n_4 + 2$.

(d) Doneu un graf G tal que $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ i $\delta(G)$ siguin tots diferents.

(d) Sigui G el graf dibuixat. Aquest graf té un vèrtex de tall, el vèrtex 1. Atès que totes les arestes de G són a un cicle, no hi ha cap aresta pont, però el conjunt d'arestes $\{12, 13\}$ és de tall. Així $\kappa(G) = 1$; $\lambda(G) = 2$ i $\delta(G) = 3$.



2. Sigui $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, i sigui $S_k(x)$ la funció generadora dels nombres de Stirling $\left(\left\{ n \atop k \right\}\right)_{n\geq 0}$, és a dir, $S_k(x) = \sum_{n\geq 0} \left\{ n \atop k \right\} x^n$. Recordeu que $\left\{ n \atop k \right\} = 0$ si $n < k$.

(a) Doneu fórmules per a $\left\{ n \atop 1 \right\}$ i $\left\{ n \atop 2 \right\}$, i trobeu $S_1(x)$ i $S_2(x)$.

El símbol $\left\{ n \atop k \right\}$ representa el nombre de k-particions d'un n-conjunt. Aleshores, $\left\{ n \atop 1 \right\} = 1$. Per a calcular $\left\{ n \atop 2 \right\}$, observem que les parts d'una 2-partició són un subconjunt no buit i el seu complementari; per tant n'hi ha tantes com el nombre de subconjunts diferents del buit i del total $(2^n - 2)$ partit per 2, ja que no importa l'ordre de les parts; així $\left\{ n \atop 2 \right\} = 2^{n-1} - 1$.

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \textstyle\sum_{n\geq 0} \left\{ n \atop 1 \right\} x^n = \sum_{n\geq 1} x^n = x \sum_{r\geq 0} x^r = \frac{x}{1-x}, \\ S_2(x) &= \textstyle\sum_{n\geq 0} \left\{ n \atop 2 \right\} x^n = \sum_{n\geq 2} (2^{n-1} - 1) x^n = \sum_{n\geq 2} 2^{n-1} x^n - \sum_{n\geq 2} x^n \\ &= \textstyle 2x^2 \sum_{n\geq 2} 2^{n-2} x^{n-2} - x^2 \sum_{n\geq 2} x^{n-2} = 2x^2 \sum_{r\geq 0} 2^r x^r - x^2 \sum_{r\geq 0} x^r = \frac{2x^2}{1-2x} - \frac{x^2}{1-x} = \frac{x^2}{(1-2x)(1-x)}. \end{aligned}$$

(b) Demostreu que $\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n \atop k} \right\}$ per a $n \geq 0$.

Sigui X un conjunt de cardinal $n+1$ i sigui $x \in X$ qualsevol. El símbol $\left\{ {n+1 \atop k} \right\}$ representa el nombre de k-particions del conjunt X; aquestes poden ser de dos tipus:

(T1) tals que una part sigui $\{x\}$;

(T2) tals que la part a la que pertany x tingui cardinal ≥ 2.

Així, $\left\{ {n+1 \atop k} \right\}$ és la suma del nombre de particions tipus T1 i de les de tipus T2.

Si una partició $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ és de tipus T1 vol dir que una de les parts és igual a $\{x\}$. Aleshores si eliminem aquesta part de la partició el que obtenim és una $(k-1)$-partició del conjunt $X - \{x\}$. I vicerversa, donada una $(k-1)$-partició de $X - \{x\}$, si li afegim la part $\{x\}$ obtenim una k-partició de X del tipus T1. Per tant, el nombre de particions de tipus T1 com $\left\{ {n \atop k-1} \right\}$.

Si la partició és de tipus T2 vol dir que l'element x pertany a una de les parts, però que aquesta part també conté altres elements del conjunt X. Si eliminem l'element x de la partició, seguim tenint k parts no buides, per tant obtenim una k-partició del conjunt $X - \{x\}$. Ara bé, si donada una k-partició de $X - \{x\}$ volem construir una k-partició de X, això ho podem fer de k maneres diferents, perquè hem d'escollir a quina de les k parts afegirem l'element x. Per tant, el nombre de k-particions de X del tipus T2 és $k\left\{ {n \atop k} \right\}$.

(c) Usant els apartats anteriors, demostreu que $S_3(x) = \dfrac{x^3}{(1-3x)(1-2x)(1-x)}$.

Escrivim l'equació del segon apartat per $k = 3$:

$$\left\{ {n+1 \atop 3} \right\} = \left\{ {n \atop 2} \right\} + 3\left\{ {n \atop 3} \right\} \qquad n \geq 0.$$

Si apliquem les regles de manipulació de funcions generadores, obtenim

$$\begin{aligned}
\left(\left\{ {n+1 \atop 3} \right\}\right)_{n\geq 0} &\overset{FG}{\longleftrightarrow} \frac{S_3(x) - \left\{ {0 \atop 3} \right\}}{x} = \frac{S_3(x)}{x} \\
\left(\left\{ {n \atop 2} \right\}\right)_{n\geq 0} &\overset{FG}{\longleftrightarrow} S_2(x) \\
\left(3\left\{ {n \atop 3} \right\}\right)_{n\geq 0} &\overset{FG}{\longleftrightarrow} 3S_3(x)
\end{aligned}$$

Per tant obtenim la següent relació entre les funcions generadores:

$$\frac{S_3(x)}{x} = S_2(x) + 3S_3(x)$$

de la qual es dedueix:

$$S_3(x) = \frac{xS_2(x)}{1-3x} = \frac{x^3}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}$$

usant la fórmula trobada al primer apartat.

3. Definim el graf $G = (V, A)$ prenent $V = \mathbb{Z}_{13}$ i dos vèrtexs u i v són adjacents si $u - v$ és un quadrat diferent de zero a $\mathbb{Z}_{13}$.

La taula de quadrats diferents de zero de $\mathbb{Z}_{13}$ és la següent:

x	$1,12$	$2,11$	$3,10$	$4,9$	$5,8$	$6,7$
x^2	1	4	9	3	12	10

Els quadrats diferents de zero formen el conjunt $Q = \{1,4,9,3,12,10\} = \{1,3,4,9,10,12\}$. Notem que $-Q = \{-1,-3,-4,-9,-10,-12\} = \{12,10,9,4,3,1\} = Q$, per tant, si si $u - v \in Q$, aleshores $v - u \in Q$.

(a) Esbrineu si G és regular i calculeu-ne la mida.

Cada vèrtex u és adjacent als sis vèrtexs de $u+Q = \{u+1, u+3, u+4, u+9, u+10, u+12\}$. Per tant, G és regular de grau $d=6$. L'ordre del graf és 13. Segons el lema de les encaixades aplicat a un graf 6-regular, tenim

$$2|A| = 13 \cdot d = 13 \cdot 6,$$

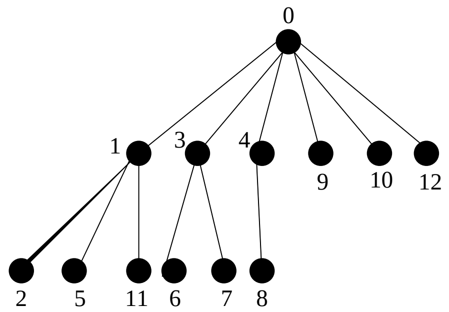
d'on la mida és $|A| = 39$.

(b) Representeu gràficament un arbre generador de G obtingut mitjançant l'algorisme de recerca en amplada a partir del vèrtex 0.

Visitem primer el vèrtex 0 per on comença la recerca. A continuació visitem els vèrtexs adjacents a 0, que són els de $Q = \{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$. Els adjacents a 1 són els de

$$1 + Q = \{2, 4, 5, 10, 11, 0\},$$

entre els quals els encara no visitats són 2, 5 i 11. A continuació visitem els adjacents a 3 encara no visitats, que són 6 i 7. Finalment, visitem l'únic adjacent a 4 encara no visitat, que és 8. L'arbre és el següent:



(c) Trobeu l'excentricitat del vèrtex 0.

Tal com es veu a l'arbre anterior, els vèrtexs més llunyans de 0 són a distància 2 de 0. Per tant, el vèrtex 0 té excentricitat 2.

(d) Esbrineu si el graf G és eulerià i si és hamiltonià.

Segons (b), G admet un arbre generador. Per tant, G és connex. A més a més, tot vèrtex té grau 6, que és parell. Per tant, G és un graf eulerià.

El graf G també és hamiltonià: les adjacències obtingudes sumant el quadrat 1 donen el cicle hamiltonià: $0-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-0$.

4. Considerem el polinomi irreductible $f(x) = x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ i el cos finit que defineix $\mathbb{F}_{32} = \mathbb{F}_2[x]/f(x)$ i sigui $\alpha = \overline{x} \in \mathbb{F}_{32}$.

(a) Demostreu que el polinomi $f(x)$ és primitiu.

El polinomi $f(x)$ serà primitiu si és irreductible (ho és segons l'enunciat) i α és un element primitiu del cos $\mathbb{F}_2[x]/f(x)$. Només cal veure que l'ordre d'α és $2^5 - 1 = |\mathbb{F}_{32}^*|$, és a dir, que $\alpha^k \neq 1$ per a tot enter k divisor de 31, $k \neq 31$. Atès que 31 és un nombre primer i $\alpha^1 \neq 1$, l'ordre d'α és 31. (De fet, tots els elements de $\mathbb{F}_{32}^*$, llevat de 1, tenen ordre 31, és a dir, són elements primitius)

(b) Completeu la taula on s'expressen els elements del cos com a potència d'α.

Per completar la taula tenim en compte que $2\beta = 0$, per a tot $\beta \in \mathbb{F}_{32}$, i que α és una arrel del polinomi $f(x)$, és a dir, $\alpha^5 + a^2 + 1 = 0$ i per tant $\alpha^5 = \alpha^2 + 1$.

1	1	α^{16}	$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha + 1$
α	α	α^{17}	$\alpha^4 + \alpha + 1$
α^2	α^2	α^{18}	$\alpha + 1$
α^3	α^3	α^{19}	$\alpha^2 + \alpha$
α^4	α^4	α^{20}	$\alpha^3 + \alpha^2$
α^5	$\alpha^2 + 1$	α^{21}	$\alpha^4 + \alpha^3$
α^6	$\alpha^3 + \alpha$	α^{22}	$\alpha^4 + \alpha^2 + 1$
α^7	$\alpha^4 + \alpha^2$	α^{23}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
α^8	$\alpha^3 + \alpha^2 + 1$	α^{24}	$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$
α^9	$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha$	α^{25}	$\alpha^4 + \alpha^3 + 1$
α^{10}	$\alpha^4 + 1$	α^{26}	$\alpha^4 + \alpha^2 + \alpha + 1$
α^{11}	$\alpha^2 + \alpha + 1$	α^{27}	$\alpha^3 + \alpha + 1$
α^{12}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$	α^{28}	$\alpha^4 + \alpha^2 + \alpha$
α^{13}	$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2$	α^{29}	$\alpha^3 + 1$
α^{14}	$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1$	α^{30}	$\alpha^4 + \alpha$
α^{15}	$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$	α^{31}	1

(c) Esbrineu si $\alpha + 1$ i $\alpha^4 + \alpha^2$ són quadrats; en cas afirmatiu calculeu les seves arreles quadrades.

Sabem que en un cos de característica 2 tots els elements són quadrats. Mirant la taula es té $\alpha + 1 = \alpha^{18} = (\alpha^9)^2$; per tant, l'arrel és α^9 (només n'hi ha una ja que $\beta = -\beta$ a $\mathbb{F}_{32}$). Atès que estem en característica 2, $\alpha^4 + \alpha^2 = (\alpha^2 + \alpha)^2$; per tant l'arrel és $\alpha^2 + \alpha$. D'una altra manera, tenint que $\alpha^4 + \alpha^2 = \alpha^7 = \alpha^{7+31} = (\alpha^{19})^2$, per tant l'arrel és $\alpha^{19} = \alpha^2 + \alpha$.

(d) Calculeu:

$$\frac{(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha)^{34} + 1}{\alpha^4 + \alpha^2 + \alpha} + \alpha^2.$$

Usant la taula i el fet que $\beta^{31} = 1$ i $\beta^{-k} = \beta^{31-k}$, per a tot $\beta \in \mathbb{F}_{32}$ i $1 \leq k \leq 30$, es té

$$\begin{aligned} \tfrac{(\alpha^3+\alpha^2+\alpha)^{34}+1}{\alpha^4+\alpha^2+\alpha} + \alpha^2 &= \tfrac{(\alpha^{12})^3+1}{\alpha^{28}} + \alpha^2 = (\alpha^{36} + 1)\alpha^{-28} + \alpha^2 \\ &= (\alpha^5 + 1)\alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2\alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^5 + \alpha^2 = 1. \end{aligned}$$