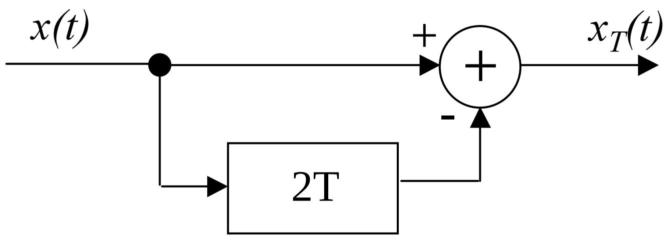
COMUNICACIONES II **ETSETB-UPC**
GRUPO 30 **22-Noviembre-1999**

Ejercicio 1

La codificación correlativa es una técnica de señalización que permite transmitir una secuencia de símbolos con un ancho de banda limitado a $B_T = r/2$ con pulsos en línea diferentes al pulso sinc(rt). Ello es posible gracias a la introducción de una ISI controlada, esto es, una interferencia intersímbolo perfectamente conocida en el receptor. Un ejemplo de este tipo de señalización es el sistema duobinario modificado. Este sistema lo podemos ver de dos maneras diferentes:

1) Introduciendo un correlación entre los símbolos polares independientes y equiprobables $\{a_n\}$ de la forma $b_n = a_n - a_{n-2}$ y transmitiendo la nueva secuencia $\{b_n\}$ con pulsos sinc(rt), es decir $x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sin c\,[r(t-nT)]$

2) Alternativamente filtrando la señal $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sin c\,[r(t-nT)]$ con el filtro de la figura:



Calcule la densidad espectral de la señal digital transmitida en ambos casos y compruebe que da el mismo resultado.

Resolución

1) $S_{x_T}(f) = r|P(f)|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_b(m) e^{-j2\pi f mT}$; $P(f) = \frac{1}{r}\Pi(\frac{f}{r})$

$R_b(m) = E\{b_{m+n}b_n\} = E\{(a_{m+n} - a_{m+n-2})(a_n - a_{n-2})\}$
$R_b(m) = 2R_a(m) - R_a(m+2) - R_a(m-2)$
$R_a(m) = \sigma_a^2\delta(m) \implies R_b(0) = 2\sigma_a^2$; $R_b(-2) = R_b(2) = -\sigma_a^2$; $R_b(m) = 0$; $m \neq 0, \pm 2$
$S_{x_T}(f) = \sigma_a^2\Pi(\frac{f}{r})(2 - e^{j4\pi fT} - e^{-j4\pi fT}) = 2\sigma_a^2\Pi(\frac{f}{r})(1 - \cos 4\pi fT)$
$S_{x_T}(f) = 4\sigma_a^2\Pi(\frac{f}{r})\sin^2 2\pi fT$
2)$S_x(f) = r|P(f)|^2\sigma_a^2$; $h_T(t) = \delta(t) - \delta(t-2T)$; $H_T(f) = 1 - e^{-j4\pi fT}$
$|H_T(f)|^2 = H_T(f)H_T^*(f) = 2 - 2\cos 4\pi fT$
$S_{x_T}(f) = S_x(f)\ |H_T(f)|^2 = 2\sigma_a^2\Pi(\frac{f}{r})(1 - \cos 4\pi fT) = 4\sigma_a^2\Pi(\frac{f}{r})\sin^2 2\pi fT$

Ejercicio 2

Se transmite una señal binaria polar NRZ con símbolos independientes de amplitudes $\{a_n\} = \pm 1$ a una tasa de r =2 Mbps mediante pulsos rectangulares causales de duración T, a través de un canal con respuesta impulsional $h_c(t) = \frac{1}{\sqrt{L}}[\delta(t) - \alpha\delta(t-T)]$, siendo $L|_{dB} = 30$ dBs, la atenuación del canal y $\alpha = 0.2$ y $T = 1/r$. La señal es contaminada con un ruído blanco de densidad espectral $\frac{N_0}{2} = 5.\ 10^{-11}$ wats/Hz. El receptor está formado por un amplificador de ganancia $G = \sqrt{L}$, un filtro adaptado al pulso transmitido y normalizado, un dispositivo que muestrea en los instantes $t_m = mT + T$ y un filtro FIR de 2 coeficientes para ecualizar el canal. Los coeficientes del filtro FIR se obtienen mediante el criterio de error cuadrático medio mínimo entre la señal de salida del filtro y la secuencia de entrenamiento a_n.

a) Halle la expresión de la señal a la entrada del filtro FIR describiendo los términos de señal útil, ISI y ruído.

b) Determine los coeficientes del filtro.

c) Calcule la señal de salida del ecualizador identificando los términos de señal útil, ISI y ruído y compárelos con los de la entrada.

Resolución
a) *Señal a la salida del filtro adaptado*

$y(t) = Gx_T(t) * h_c(t) * h_a(t) + Gw(t) * h_a(t) = Gx_T(t) * h_a(t) * h_c(t) + n(t) \quad ; \quad n(t) = Gw(t) * h_a(t)$
$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p_T\ (t - nT)\ ; \quad p_T\ (t) = \Pi(\frac{t-T/2}{T})\ ;\ h_c(t) = \frac{1}{\sqrt{L}}[\delta(t) - \alpha\delta(t-T)]$
$h_a(t) = \frac{1}{E_{p_T}} p_T\ (T - t)\ ;\ G = \sqrt{L} = \sqrt{1000}$

$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p\ (t - nT) + n(t)\ ;\ p(t) = \ p_T\ (t) * \frac{1}{E_{p_T}} p_T\ (T - t) * [\delta(t) - \alpha\delta(t-T)]$
$y(t) = \frac{1}{E_{p_T}}[R_{p_T}(t - T) - \alpha R_{p_T}(t - 2T)] + n(t)$
Señal a la entrada del filtro FIR
$y(m) = y(mT + T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{E_{p_T}}[R_{p_T}(\frac{m-n}{r}) - \alpha R_{p_T}(\frac{m-n-1}{r})] + n(m) = a_m - \alpha a_{m-1} + n(m)$

$n(m)$ *ruido blanco de densidad* $\sigma_n^2 = G^2 \frac{N_0}{2E_{p_T}} = G^2 \frac{N_0 r}{2}$
b)*Señal a la salida del ecualizador*
$y_{eq}(m) = h_0 y(m) + h_1 y(m-1)$

principio de ortogonalidad

$E\{e(m)y(m-k)\} = 0\ ; \quad k = 0, 1 \quad ; \ e(m) = a_m - y_{eq}(m) = a_m - [h_0 y(m) + h_1 y(m-1)]$

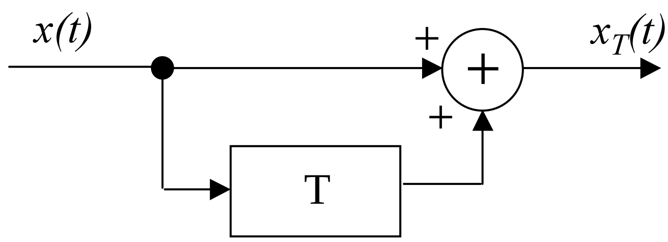
$E\{e(m)y(m-k)\} = r_{ay}(k) - h_0 r_y(k) - h_1 r_y(k-1) = 0$
$r_{ay}(0) = h_0 r_y(0) + h_1 r_y(-1)$
$r_{ay}(1) = h_0 r_y(1) + h_1 r_y(0)$
$r_y(0) = E\{[a_m - \alpha a_{m-1} + n(m)]^2\} = \sigma_a^2(1 + \alpha^2) + \sigma_n^2 = \sigma_a^2(1 + \alpha^2 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2})$
$r_y(-1) = r_y(1) = E\{[a_{m+1} - \alpha a_m + n(m+1)][a_m - \alpha a_{m-1} + n(m)]\} = -\alpha\sigma_a^2$
$r_{ay}(0) = E\{a_m[a_m - \alpha a_{m-1} + n(m)]\} = \sigma_a^2 \quad ; \quad r_{ay}(1) = E\{a_{m+1}[a_m - \alpha a_{m-1} + n(m)]\} = 0$

$1 = ch_0 - \alpha h_1$
$0 = -\alpha h_0 + ch_0$ $\qquad c = 1 + \alpha^2 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2}$
Solución del sistema $\qquad h_0 = \frac{c}{c^2 - \alpha^2} \qquad h_1 = \frac{\alpha}{c^2 - \alpha^2}$
Normalizando $\qquad h_0 = 1 \qquad h_1 = \frac{\alpha}{c}$

c)*Salida del ecualizador*
$y_{eq}(m) = y(m) + \frac{\alpha}{c} y(m-1) = a_m - \alpha a_{m-1} + n(m) + \frac{\alpha}{c}[a_{m-1} - \alpha a_{m-2} + n(m-1)]$
$y_{eq}(m) = a_m + \alpha(\frac{1}{c} - 1)a_{m-1} - \frac{\alpha^2}{c} a_{m-2} + n_{eq}(m) \quad ; \qquad n_{eq}(m) = n(m) + \frac{\alpha}{c} n(m-1)$
valores numéricos
$\alpha = 0.2 \quad ; \quad \sigma_n^2 = 0.01 \quad ; \quad c = 1.05 \quad ; \alpha(\frac{1}{c} - 1) = -0.0095 \quad ; \quad -\frac{\alpha^2}{c} = -0.038$
$\sigma_{n_{eq}}^2 = (1 + \frac{\alpha^2}{c^2})\sigma_n^2 = 1.036\sigma_n^2$

Ejercicio 3

Sea el sistema transmisor de la figura



donde $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sin c\,[r(t-nT)]$. La secuencia de amplitudes $\{a_n\}$ es la señalización polar de la secuencia de símbolos binarios $\{s_n\}$ tales que $s_n = b_n \oplus s_{n-1}$. Los símbolos binarios $\{b_n\}$son independientes y equiprobables.

El canal es ideal y la señal es contaminada por un ruído blanco gaussiano de densidad espectral $\frac{N_0}{2}$. El receptor está formado por un filtro adaptado al pulso sinc(rt) y muestreo en $t_m = mT$

a) Calcule la señal después del muestreo. Compruebe que aunque el sistema presenta ISI, es posible recuperar la señal mediante una decisión simple y sin que se vea afectada por dicha ISI. Para ello considere que se transmite la secuencia binaria $\{b_n\} = 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0$. Calcule los diferentes niveles de amplitud que se obtendrían si no hubiese ruído y comparelos con los símbolos $\{b_n\}$ transmitidos.

b) Plantee las ecuaciones de los umbrales óptimos.

c) Calcule la probabilidad de error exacta, en función de $\frac{E_b}{N_0}$, utilizando una aproximación de los umbrales óptimos.

Resolución

a) $\quad x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \{\sin c[r(t-nT)] + \sin c[r(t-nT-T)]\}$

Filtro adaptado $\qquad h_a(t) = r \sin c(rt)$

Salida filtro adaptado

$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \{\sin c[r(t-nT)] + \sin c[r(t-nT-T)]\} + n(t)$

Señal muestreada

$y(m) = y(mT) = a_m + a_{m-1} + n(m)$

$n(m) \quad$ *ruído blanco gaussiano* $\quad \sigma_n^2 = \frac{N_0 r}{2}$

secuencias

b_n		0	1	1	0	1	1	0	1	0
s_n	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
a_n	$-A/2$	$-A/2$	$A/2$	$-A/2$	$-A/2$	$A/2$	$-A/2$	$-A/2$	$A/2$	$A/2$
$y-n$		$-A$	0	0	$-A$	0	0	$-A$	0	A

$b_n = 0 \Longrightarrow \quad y - n = \pm A$

$b_n = 1 \Longrightarrow \quad y - n = 0$

b) $\quad f_{y_0}(y) = \frac{1}{2}[f_N(y-A) + f_N(y+A)] \qquad P_{e0} = 2\frac{1}{2}[Q(\frac{A-\gamma}{\sigma_n}) - Q(\frac{A+\gamma}{\sigma_n})]$

$f_{y_1}(y) = f_N(y) \qquad P_{e1} = 2Q(\frac{\gamma}{\sigma_n})$

$P_0 P_{e0}(\gamma) = P_1 P_{e1}(\gamma)$

c) $\quad$ *Se aproxima* $\qquad \gamma = A/2$

$P_e = \frac{3}{2}Q(\frac{A}{2\sigma_n}) - Q(\frac{3A}{2\sigma_n})$

$E_b = \frac{S_R}{r} \quad ; \qquad S_R = S_T = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)|1 + e^{j2\pi fT}|^2 df = r\sigma_a^2 \frac{1}{r^2} \int_{-r/2}^{r/2} [2 + 2\cos 2\pi fT] df$

$S_R = \sigma_a^2 = \frac{A^2}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{A^2}{4} = rE_b$

$P_e = \frac{3}{2}Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) - Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) \approxeq \frac{3}{2}Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$