Examen Final Gener 2006

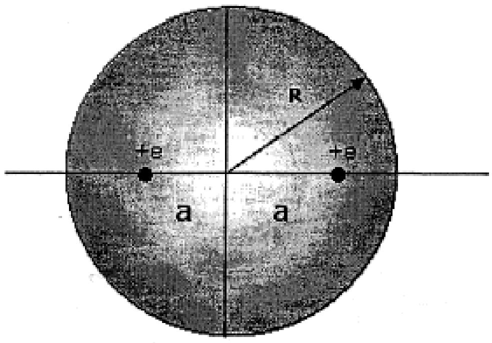
PROBLEMA 1

Enunciat

Una carga Q está uniformemente repartida en el volumen de una esfera de radio R.

a) Obtener a partir del teorema de Gauss el campo en un punto del interior y del exterior de esa esfera. (Expresarlo en función de la carga total Q de la esfera)
b) Calcular la energía de formación de esa distribución esférica. (Expresarlo en función de la carga total Q de la esfera)
c) Obtener la expresión del potencial respecto al infinito en un punto del interior. (Expresarlo en función de la carga total Q de la esfera)

Se considera un modelo de molécula de Hidrógeno al sistema formado por dos cargas puntuales de carga +e colocadas simétricamente en el interior de una esfera de radio R, que contiene una carga -2e uniformemente distribuida en todo el volumen de la misma. Los puntos donde están las cargas puntuales están situados, como se indica en la figura 1, a distancia *a* del centro.



Solució

a)

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \left(\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = cte \right)$$

Per simetria:

$$\phi = \oint_{S_{esfèrica}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_{S_{esfèrica}} E(r)\hat{r}\cdot ds\hat{r} = \oint_{S_{esfèrica}} E(r)\cdot ds = E(r) \oint_{S_{esfèrica}} ds = E(r)\cdot 4\pi r^2$$

- $r \geq R \Rightarrow Q_{\text{int}} = Q$

$$\phi = E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_e(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}}$$

- $r \le R \Rightarrow Q_{\text{int}} = \rho V(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 R^3} r^3 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_i(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}\hat{r}}$$

b)

$$U_{esf} = \int_{r=0}^{R} \eta_E dv + \int_R^\infty \eta_E dv = \int_{r=0}^{R} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_e^2 dv + \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_i^2 dv = \frac{1}{2}QV + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty k_e^2 \frac{Q^2}{\left(R^3\right)^2} r^2 4\pi r^2 dr =$$

$$\frac{1}{2}QV + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{1}{4^2\pi^2{\varepsilon_0}^2}\frac{Q^2}{R^6}4\pi\int_R^\infty r^4 dr = \frac{1}{2}QV + \frac{1}{2}k_e\frac{Q^2}{R^6}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = \frac{1}{2}QV + \frac{1}{2}k_e\frac{Q^2}{R^6}\left[-\left(\frac{r^5}{5}\right)_{r=0} + \frac{R^5}{5}\right] =$$

$$\frac{1}{2}QV + \frac{1}{2}k_e\frac{Q^2}{R^6}\frac{R^5}{5} = \frac{1}{2}Qk_e\frac{Q}{R} + \frac{1}{2}k_e\frac{Q^2}{5R} = \frac{1}{2}k_e\frac{Q^2}{R}\frac{6}{5}$$

$$\boxed{U_{esf} = k_c\frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}}$$

c) $r \ge R \to V(r) = \frac{kQ}{r} \Rightarrow V(R) = \frac{kQ}{R}$

$$r \le R \to V(r) = -\int \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = -\int \frac{kQ}{R^3} r dr = -\frac{kQ}{R^3}\frac{r^2}{2} + C$$

$$\uparrow$$

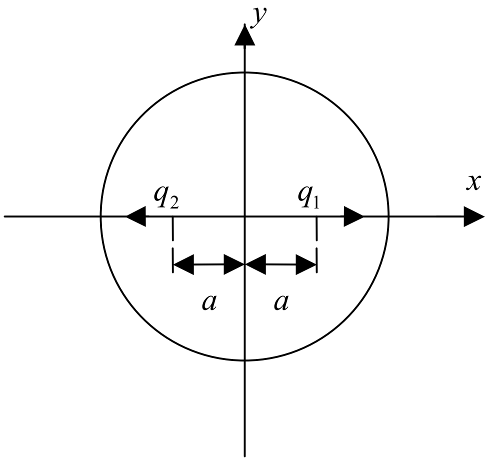
$$\vec{E}(r) // \hat{r} // d\vec{r}$$

$$V\ continua \Rightarrow V(R) = \frac{kQ}{R} = -\frac{kQ}{R^3}\frac{R^2}{2} + C \Rightarrow C = \frac{3}{2}\frac{kQ}{R}$$

$$V(r)_{r\le R} = \frac{kQ}{2R^3}(3R^2 - r^2)$$

$$\boxed{V(r)_{r\le R} = \frac{kQ}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)}$$

d)



$$Q=-2e$$

$$\vec{F}=\vec{F}_{+}+\vec{F}_{-} \qquad \vec{F}=q_{q_1}\vec{E}_{q_1}$$

$$Camp\ sobre\ q_1 \rightarrow \vec{E}_{+}+\vec{E}_{-}$$

$$\vec{E}_{q_1}=\vec{E}_{q2}+\vec{E}_{-}=\frac{k_e(+e)}{(2a)^2}\hat{i}+\frac{kQ}{R^3}r\hat{i}$$

$$Q=-2e\xrightarrow[r=a]{}\vec{E}_{q_1}=\frac{k_e e}{(2a)^2}\hat{i}-\frac{k2e}{R^3}a\hat{i}=0$$

$$\vec{E}_{q_1}=0\ i\ per\ simetria \Leftrightarrow \vec{E}_{q2}=0 \Rightarrow \vec{F}_{q1}=\vec{F}_{q2}=0$$

$$\frac{k_e e}{(2a)^2}=\frac{k2e}{R^3}a \Rightarrow \frac{1}{4a^3}=\frac{2}{R^3} \Rightarrow a^3=\frac{R^3}{8} \rightarrow a=\frac{R}{\sqrt[3]{8}} \qquad \boxed{a=\frac{R}{2}}$$

e) $U_{tot}=U_{esf}+q_1V_{esf}+q_2(V_{esf}+V_{q_1})$

$$\begin{cases} U_{esf}=\frac{3}{5}k_e\frac{Q^2}{R}=\frac{3}{5}k_e\frac{(-2e)^2}{R}=\frac{12}{5}\frac{k_e e^2}{R} \\ q_1V_{esf}=(+e)\frac{k_eQ}{2R^3}(3R^2-a^2)=-k_e\frac{2e^2}{2R^3}\left(3R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)=-k_e e^2\left(\frac{3}{R}-\frac{1}{4R}\right)=-\frac{11}{4}\frac{k_e e^2}{R} \\ q_2(V_{esf}+V_{q_1})=-\frac{11}{4}\frac{k_e e^2}{R}+q_2V_{q_1}=-\frac{11}{4}\frac{k_e e^2}{R}+e\frac{k_2 e}{2a}=-\frac{11}{4}\frac{k_e e^2}{R}+\frac{k_e e^2}{2\frac{R}{2}} \end{cases}$$

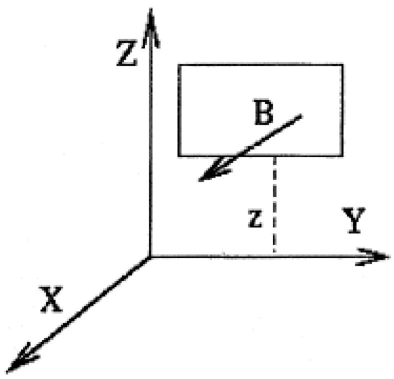
$$U_{tot}=\frac{12}{5}\frac{k_e e^2}{R}-2\cdot\frac{11}{4}\frac{k_e e^2}{R}+\frac{k_e e^2}{R}=\frac{k_e e^2}{R}\left(\frac{12}{5}-\frac{11}{2}+1\right)=-\frac{k_e e^2}{R}\frac{21}{10} \qquad \boxed{U_{tot}=-0'21\frac{k_e e^2}{R}}$$

PROBLEMA 2

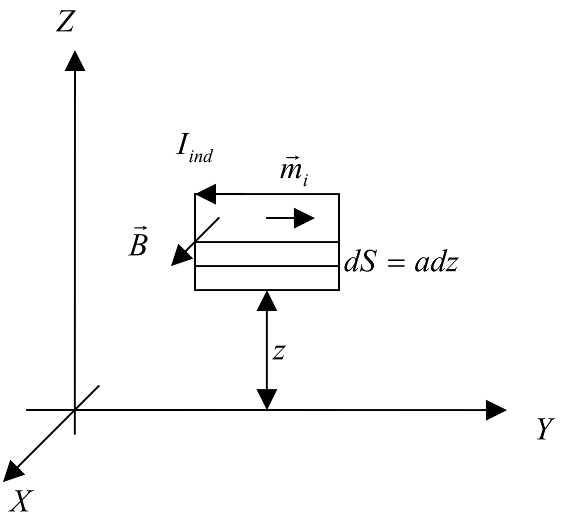
Enunciat

Una espira cuadrada, de lado *a* y resistencia *R* , se encuentra en el plano YZ, de tal manera que, en un instante dado, la posición de la espira queda definida por la coordenada z del lado inferior (que inicialmente supondremos positiva, ver figura). Sobre la espira actúa un campo magnético **B**=A z **i,** siendo A una constante positiva.

a) Expresa en función de z, el flujo del campo magnético a través de la espira. Representa gráficamente la dependencia.
b) Si la espira se está moviendo hacia abajo con una velocidad **v** =-v **k** , calcula la corriente inducida y el vector momento bipolar magnético **m** asociado a esta corriente.
c) Encuentra la expresión de la fuerza que ejercerá el campo magnético sobre cada lado de la espira, y la fuerza total.
d) ¿Cómo cambiarán los resultados de los apartados b) y c) cuando la espira se encuentre totalmente por debajo del eje Y?
e) Si la velocidad inicial de la espira es $\mathbf{v_0}$=- v_0 **k,** indica el tipo de movimiento que describirá, si la única fuerza es la debida al campo **B.**



Solució



$$z > 0$$

$$\vec{B} = B(z)\hat{i} = Az\hat{i}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = A(-v) < 0 \Rightarrow I_{ind} > 0$$

$$\vec{m}_i \mathbin{//} \vec{B} \rightarrow \boxed{\vec{m}_i \mathbin{//} \hat{i}}$$

a)

$$\phi=\int_{S_{espira}}\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_{z}^{z+a}Az\vec{i}\cdot(adz)\cdot\vec{i}=Aa\int_{z}^{z+a}zdz=Aa\left[\frac{z^2}{2}\right]_z^{z+a}=\frac{Aa}{2}\left[(z+a)^2-z^2\right]=\frac{Aa}{2}(a^2+2za)=\frac{Aa^3}{2}+Aa^2z$$

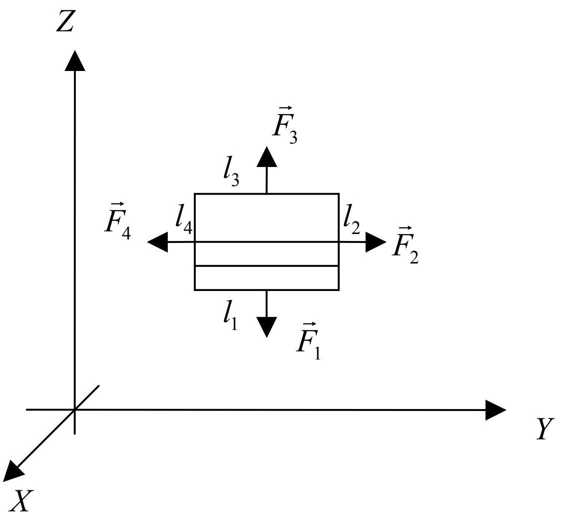
$$\boxed{\phi=\frac{1}{2}Aa^2(a+2z)}\;(Tm^2)$$

b) $\varepsilon_i=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{S}\Rightarrow|\varepsilon_i|=Aa^2v$

$$\boxed{I_{ind}=\frac{\varepsilon_i}{R}=a^2\frac{Av}{R}}\Rightarrow\ |m_i|=I_{ind}a^2=\frac{Av}{R}a^4$$

I_{ind} *en sentit antihorari* $\Rightarrow\vec{m}_i\,//\,\vec{i}$ $\boxed{\vec{m}_i=\frac{Av}{R}a^4\vec{i}}$

c)



$$I=a^2\frac{Av}{R}$$
$$\vec{B}=Az\hat{i}$$
$$\vec{F}_i=I\vec{l}_i\times\vec{B}$$

$$\vec{F}_1=Il_1\hat{j}\times Az\hat{i}=IaAz(-\hat{k})=\frac{A^2v}{R}a^3z(-\hat{k})$$

$$\vec{F}_3=Il_3(-\hat{j})\times A(z+a)\hat{i}=IaA(z+a)\hat{k}=\frac{A^2v}{R}a^3(z+a)\hat{k}$$

$$\vec{F}_2=-\vec{F}_4=\int_z^{z+a}Idl_2\hat{k}\times Az\hat{i}=\int_z^{z+a}IAzdz\hat{j}=IA\left[\frac{z^2}{2}\right]_z^{z+a}\hat{j}=a^2\frac{A^2v}{2R}\left[(z+a)^2-z^2\right]\hat{j}=$$

$$=a^2\frac{A^2v}{2R}(a^2+2az)\hat{j}=a^3\frac{A^2v}{2R}(a+2z)\hat{j}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \frac{A^2 v}{R} a^4 \hat{k}}$$

d) $\vec{B} = A(-z)\hat{i}$ $\qquad \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial(-z)} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial z} < 0$ $\qquad$ *Si l'espira baixa* $\Rightarrow z \downarrow$ *i* $\left|\vec{B}\right| \uparrow$

- *Suposant* ϕ *positiva quan* $\vec{B} // \hat{i}$ $(B_x > 0)$, *el flux continua disminuint* $\Rightarrow$ *el sentit del corrent serà el mateix*
- *Si* B_x *és ara negativa, el sentit de les forces canviarà però* $\vec{F}_4 + \vec{F}_2$ *encara és* $\vec{0}$ *i ara* $F_{1y} > F_{3y}$ $\Rightarrow$ *la força total és la mateixa*

e) *Observem que* $\vec{F} = \dfrac{Aa^3}{R} v\hat{k}$ $\Rightarrow$ *el moviment és el d'una partícula que es mou amb una força de fregament viscós* $\Rightarrow$ *v(t) decau exponencialment.*