

Seleccioneu una sola resposta de les quatre possibles, i marqueu la casella corresponent al full de respostes, ordenades en la columna de l'esquerra

1- Un dipolo eléctrico de momento dipolar \mathbf{p} se encuentra en el interior de una superficie cilíndrica cerrada. El flujo a través de esta superficie es:

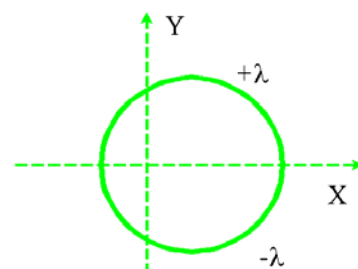
- a) Positivo si el eje del cilindro es paralelo a \mathbf{p}
- b) Positivo si el eje del cilindro es perpendicular a \mathbf{p}
- c) Nulo en cualquier caso
- d) No se puede calcular de una manera sencilla dado que el campo eléctrico del dipolo no presenta simetría cilíndrica

2- Una esfera de radio R está cargada con una densidad de carga por unidad de volumen uniforme. Si la carga total de la esfera es Q , la intensidad del campo eléctrico en un punto del **interior** de la esfera a distancia r del centro vale

- a) $Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$
- b) $Qr/(12\pi\epsilon_0 R^3)$
- c) $4Qr/(3\pi\epsilon_0 R^3)$
- d) $Qr/(4\pi\epsilon_0 R^3)$

3- La circunferencia de la figura está cargada con una densidad lineal de carga que vale $+\lambda$ en la semicircunferencia superior y $-\lambda$ en la inferior.

- a) En todos los puntos del eje X el campo tiene dirección y sentido $-\mathbf{j}$
- b) En todos los puntos del eje X el campo tiene dirección y sentido $+\mathbf{j}$
- c) En los puntos del eje X interiores a la circunferencia el campo tiene dirección y sentido $-\mathbf{j}$ y en los exteriores $+\mathbf{j}$
- d) En los puntos del eje X interiores a la circunferencia el campo tiene dirección y sentido $+\mathbf{j}$ y en los exteriores $-\mathbf{j}$



4- Los tambores (conductores cilíndricos) de dos fotocopadoras A y B tienen las siguientes dimensiones (longitud x diámetro): A (42x8) cm y B (28x3.0) cm. Si el campo eléctrico en la superficie lateral de los dos tambores ha de ser el mismo, la carga del tambor B, Q_B , ha de ser aproximadamente

- a) $Q_B = 9 Q_A/16$
- b) $Q_B = Q_A/4$
- c) $Q_B = 3Q_A/32$
- d) $Q_B = 9 Q_A/64$

5- Dos esferas conductoras A y B de radios de $r_A = 4,0$ cm y $r_B = 3,0$ cm están situadas a 2,0 m de distancia. La esfera A tiene una carga $Q_A = 14,0$ nC y la B está descargada. Si las conectamos con un hilo conductor, el potencial de las dos esferas una vez alcanzado el equilibrio vale aproximadamente

- a) 1800V
- b) 6300 V
- c) 1350V
- d) 3150 V

6- El plano $z=0$ es una superficie **sin carga libre** que separa dos medios dieléctricos de constantes dieléctricas $\epsilon_1=2$ (para $z<0$) y $\epsilon_2=3$ (para $z>0$). Si en un punto $P_1(x, y, -\delta)$ del medio 1, muy cerca de la superficie de separación (es decir, $\delta \ll 1$), el campo vale $\mathbf{E}_1 = (2,0 \mathbf{i} + 3,0 \mathbf{j} - 6,0 \mathbf{k})$ N/C, el campo \mathbf{E}_2 en el punto $P_2(x, y, +\delta)$ del medio 2 valdrá

- a) $\mathbf{E}_2 = (3,0 \mathbf{i} + 4,5 \mathbf{j} - 9,0 \mathbf{k})$ N/C
- b) $\mathbf{E}_2 = (2,0 \mathbf{i} + 3,0 \mathbf{j} - 4,0 \mathbf{k})$ N/C
- c) $\mathbf{E}_2 = (1,3 \mathbf{i} + 2,0 \mathbf{j} - 4,0 \mathbf{k})$ N/C
- d) $\mathbf{E}_2 = (2,0 \mathbf{i} + 3,0 \mathbf{j} - 9,0 \mathbf{k})$ N/C

7- El plano $z=0$ separa un medio dieléctrico de constante dieléctrica $\epsilon_1=2$ (para $z<0$) del vacío ($z>0$). Si en un punto $P_1(x, y, -\delta)$ del medio 1, muy cerca de la superficie de separación ($\delta \ll 1$), el campo vale $\mathbf{E}_1 = (2,0 \mathbf{i} + 3,0 \mathbf{j} - 6,0 \mathbf{k})$ N/C, la densidad superficial de carga ligada que habrá en el punto $P(x, y, 0)$ de la superficie de separación, vale

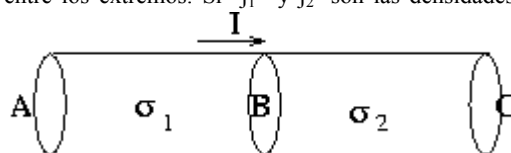
- a) $\sigma_1' = -12 \epsilon_0$
- b) $\sigma_1' = +3 \epsilon_0$
- c) $\sigma_1' = -6 \epsilon_0$
- d) $\sigma_1' = +6 \epsilon_0$

8- En un punto de un medio dieléctrico de constante dieléctrica $\epsilon_1=2$, el campo eléctrico vale $\mathbf{E}_1 = (2,0 \mathbf{i} + 3,0 \mathbf{j} - 6,0 \mathbf{k})$ N/C, la energía por unidad de volumen que hay en ese punto, vale

- a) $\eta = 49 \epsilon_0/2$
- b) $\eta = 49 \epsilon_0$
- c) $\eta = 98 \epsilon_0$
- d) $\eta = 4 \epsilon_0$

9- Dos hilos conductores, de igual sección recta (S), igual longitud (l) pero distinta conductividad ($\sigma_2 = 2\sigma_1$), se colocan uno a continuación del otro y se establece una diferencia de potencial entre los extremos. Si j_1 y j_2 son las densidades de corriente en cada conductor

- a) $j_2 = 2 j_1$
- b) $j_2 = j_1$
- c) $E_2 = E_1$
- d) $E_2 = 2 E_1$



10- En el ejercicio anterior

- a) $(V_A - V_B) = 2 (V_B - V_C)$
- b) $(V_A - V_B) = (V_B - V_C)$
- c) $(V_A - V_B) = 0,5 (V_B - V_C)$
- d) la disipación de energía por efecto Joule es la misma en ambos conductores.

11- Per mesurar la relació q/m d'una partícula carregada inicialment en repòs, se n'accelera un feix, sotmetent-lo a una diferència de potencial V . Després es fa entrar en una regió on hi ha un camp magnètic uniforme \mathbf{B} , perpendicular a la velocitat d'entrada. S'observa que el radi de la trajectòria de les partícules és R , per tant

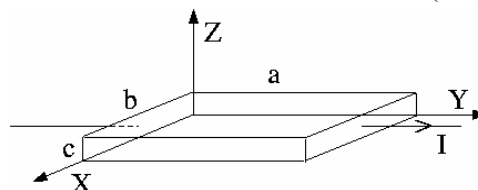
- a) $q/m = (2V)^2/(BR)^2$
- b) $q/m = (2V)/(BR)^2$
- c) $q/m = (2V)^2/(BR)$
- d) $q/m = (2V)/(BR)$

12- En un experiment d'efecte Hall, per una mostra paralelepípedica de dimensions $a \times b \times c$, s'hi fa passar un corrent elèctric I paral·lel a l'eix OY , tal com indica la figura. El camp magnètic és uniforme sobre la mostra i paral·lel a OZ , $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$

- a) apareixerà una diferència de potencial, V_H , entre les cares superior e inferior de la mostra (cares perpendiculars a l'eix OZ)
- b) apareixerà una diferència de potencial, V_H , entre les cares del davant i del darrera de la mostra (cares perpendiculars a OX)

Podem trobar la densitat de portadors de càrrega en la mostra, n , mesurant B_0 , I , V_H , ja que:

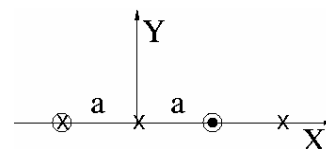
- c) $n = IB / qaV_H$
- d) $n = IB / qbV_H$



13- Tenim dos fils de corrent paral·lels que porten corrents iguals I , en sentits oposats, i tallen el pla del dibuix en els punts $(-a, 0)$ i $(a, 0)$ tal com indica la figura. Volem trobar el camp magnètic en diferents punts indicats en el pla del dibuix :

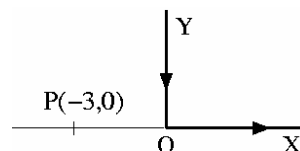
- a) $B(0, 0) = 0$
- b) $B(2a, 0) = 0$
- c) $B(0, 0) = \mu_0 I / (\pi a)$

- d) $\mathbf{B}(0, a)$ té la direcció de l'eix horitzontal



14- Un fil molt llarg que transporta un corrent de 5 A es doblega en angle recte, i el vèrtex de l'angle es posa a l'origen dels eixos XY de coordenades. El corrent baixa per l'eix OY i circula com indica el dibuix. En el punt $P(-3, 0)$ cm

- a) El mòdul del camp magnètic que crea el tros de fil horitzontal val $5/3 \times 10^{-5}$ T
- b) El mòdul del camp magnètic que crea el tros de fil vertical val 0 T
- c) El mòdul del camp total val $10/3 \times 10^{-5}$ T
- d) El mòdul del camp total val $5/3 \times 10^{-5}$ T



15- Un cable coaxial molt llarg està format per dos conductors cilíndrics concèntrics, el primer massís de radi a , i el segon de gruix negligible, de radi b ($a < b$), que porten corrents iguals (I) en sentit oposat. Considereu la llei d'Ampère per tal de trobar el camp \mathbf{B} creat en les diferents zones de l'espai, en funció de la distància r , distància d'un punt a l'eix dels cilindres conductors.

- a) no es pot aplicar la llei d'Ampère en aquest problema per trobar el camp \mathbf{B} , no hi ha prou simetria
- b) a l'exterior dels cilindres conductors, per $r > b$, el camp magnètic decreix amb la distància com $1/r$
- c) per $r < a$ el camp magnètic és zero;
- d) per $a < r < b$ el camp \mathbf{B} ve donat per $\mu_0 I / (2\pi r)$

16- Per dues espires concèntriques de radis R_1 i $R_2 = 100 R_1$ hi circulen corrents I_1 i I_2 . El coeficient d'inducció mútua de les espires val aproximadament

- a) $\mu_0 \pi R_2 / 2$
- b) $\mu_0 \pi R_1 / 2$
- c) $5000 \mu_0 \pi R_1$
- d) $\mu_0 \pi R_1 / 200$

17- En un solenoide recte de coeficient d'autoinducció L , podem expressar l'energia emmagatzemada quan hi circula una intensitat de corrent I que crea un camp \mathbf{B} a dintre del solenoide, per una de les expressions:

- a) $\frac{1}{2} L I^2$
- b) $\frac{1}{2} L I$
- c) $\frac{1}{2} B^2 / \mu_0$
- d) $\frac{1}{2} \mu_0 B^2$

18- Donat un camp vectorial $\mathbf{A} = C xy \mathbf{j} - C xz \mathbf{k}$ (on C és una constant)

- a) pot representar un camp electrostàtic;
- b) pot representar un camp magnètic;
- c) representa un camp conservatiu
- d) pot representar un camp electrostàtic, creat per una densitat volúmica de càrrega const.

19- Un camp magnètic ve donat per l'expressió: $\mathbf{B} = C t \mathbf{k}$ (on C és una constant no nul·la i t el temps)

- a) no pot representar un camp magnètic
- b) hi ha d'haver un camp elèctric no conservatiu
- c) hi ha d'haver un camp elèctric conservatiu de divergència no nul·la
- d) la circulació del camp elèctric al llarg d'un camí tancat depèn del temps

20- El camp magnètic en una ona electromagnètica plana sinusoidal és de la forma $\mathbf{B} = B_0 \sin(\omega t - kx) \mathbf{j}$; el camp elèctric ha de ser

- a) $\mathbf{E} = (B_0/c) \sin(\omega t - kx) \mathbf{j}$
- b) $\mathbf{E} = B_0 c \sin(\omega t - kx) \mathbf{j}$
- c) $\mathbf{E} = -(B_0/c) \sin(\omega t - kx) \mathbf{k}$
- d) $\mathbf{E} = -B_0 c \sin(\omega t - kx) \mathbf{k}$

Problema 1

Una lámina conductora se coloca en el plano $z = 0$ conectada a un potencial $V = 0$ V, siendo éste el potencial del infinito. Frente a la lámina conductora en el punto $(0,0,a)$, siendo a mucho menor que cualquiera de las dimensiones de la lámina (que se puede considerar infinita), se coloca una carga puntual Q . Se puede demostrar que el potencial electrostático que crea este sistema en cualquier punto con $z > 0$ es el mismo que se tendría si sustituyésemos la lámina conductora por una carga de valor $-Q$ (carga imagen), situada en el punto $(0,0,-a)$.

- Exprese el potencial que crearía la carga Q y su imagen en un punto genérico de coordenadas (x,y,z) .
- Compruebe que el potencial y el campo eléctrico que crearía este sistema de dos cargas, cumplen las propiedades que deberían tener en la superficie de la lámina conductora en $z=0$.

Aplicando la equivalencia entre las dos distribuciones:

- Exprese la energía de formación del sistema lámina-carga.
- Deduzca la expresión del campo eléctrico que crearía el sistema lámina-carga puntual en $z=0$.
- Exprese la densidad de carga superficial en función de las coordenadas (x,y) del plano $z=0$.
- Demuestre que la carga total de la lámina es $-Q$.

Ayuda para obtener la carga total de la lámina: note que la densidad de carga sólo depende de la distancia ρ al eje Z (donde $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$).

Problema 2

Per un conductor cilíndric massís molt llarg de radi R passa un corrent de intensitat total I que està distribuït uniformement en tota la secció transversal del conductor.

- Calculeu el vector densitat de corrent \mathbf{j} en els punts interiors ($r < R$) del conductor.
- Calculeu el vector camp magnètic \mathbf{B} en els punts situats a distància $r < R$ de l'eix del conductor.
- Calculeu el flux magnètic per unitat de longitud a través de la superfície indicada a la figura 1.
- Calculeu la densitat d'energia magnètica dins el conductor i l'energia emmagatzemada per unitat de longitud a dintre del conductor.

Suposem que per defecte de fabricació el conductor té un petit forat de radi r_0 al llarg del conductor, situat en el punt que indica la figura 2.

- Apliqueu el principi de superposició (el forat es pot considerar un conductor recorregut per un corrent de sentit contrari al que circula pel conductor massís) per calcular i dibuixar el vector camp magnètic \mathbf{B} que crea el conductor defectuós en els punts O i P de la figura 2. Suposeu que el corrent real surt del pla del paper.
- Calculeu la força que actuarà sobre una partícula carregada q que arriba al punt P amb velocitat $\mathbf{v} = -v_0 \mathbf{i}$ m/s.

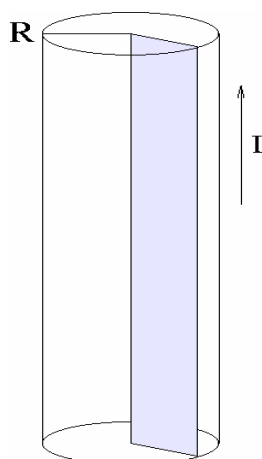


Figura 1

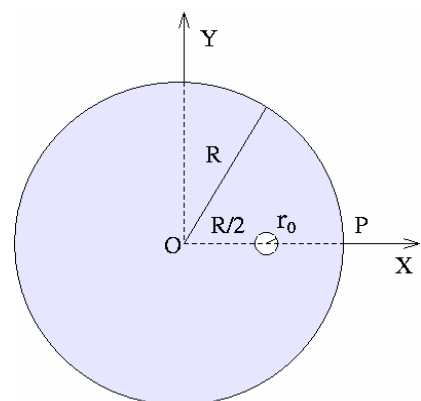


Figura 2

Examen Final Gener 2005

PROBLEMA 1

Enunciat

Una lámina conductora se coloca en el plano $z=0$ conectada a un potencial $V=0V$, siendo éste el potencial del infinito. Frente a la lámina conductora en el punto $(0,0,a)$, siendo a mucho menor que cualquiera de las dimensiones de la lámina (que se puede considerar infinita), se coloca una carga puntual Q . Se puede demostrar que el potencial electrostático que crea este sistema en cualquier punto con $z>0$ es el mismo que se tendría si sustituyésemos la lámina conductora por una carga de valor $-Q$. (carga imagen), situada en el punto $(0,0,-a)$.

a) Expresa el potencial que crearía la carga Q y su imagen en un punto genérico de coordenadas (x,y,z) .

b) Compruebe que el potencial y el campo eléctrico que crearía este sistema de dos cargas, cumplen las propiedades que deberían tener en la superficie de la lámina conductora en $z=0$.

Aplicando la equivalencia entre las dos distribuciones:

c) Expresa la energía de formación del sistema lámina-carga.

d) Deduzca la expresión del campo eléctrico que crearía el sistema lámina- carga puntual en $z=0$.

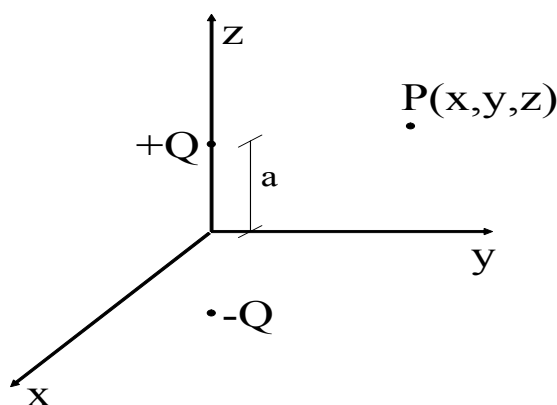
e) Expresa la densidad de carga superficial en función de las coordenadas (x,y) del plano $z=0$.

f) Demuestre que la carga total de la lámina es $-Q$.

Ayuda para obtener la carga total de la lámina: note que la densidad de carga sólo depende de la distancia ρ al eje Z (donde $\rho=(x^2+y^2)^{1/2}$).

Solució

a)



Per superposició: el potencial electroestàtic és la suma dels potencials creats per les càrregues Q i $-Q$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} + C,$$

(on C és una constant)

b) Si $V=0$ en el pla $z=0$ i a l'infinit, ha de ser $C=0$.

Com que aquest pla és equipotencial, el camp elèctric ha de ser perpendicular al pla $z=0$. Com també ho ha de ser pel fet de ser a la superfície d'un conductor, per tant els dos sistemes (càrrega Q i pla conductor), (càrrega Q , càrrega $-Q$) són equivalents, pel que fa al camp i potencial creats en els punts $z=0$, $z>0$.

c) Ja que són equivalents, ho trobarem en el sistema més senzill de dues càrregues puntuals, $-Q, Q$. El treball que cal fer per portar les càrregues de l'infinit a les seves posicions finals és:

$$W_{-Q} = 0$$

$$W_Q = +QV_{-Q}(0,0,a) = Q \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 2a} = \frac{-Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

d) Podem trobar el camp \mathbf{E} de dues maneres diferents:

$$1) \mathbf{E} = -\nabla V$$

$$2) \mathbf{E} = \mathbf{E}_Q + \mathbf{E}_{-Q}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\left(x^2 + y^2 + (z-a)^2\right)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-a)\mathbf{k}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{\left(x^2 + y^2 + (z+a)^2\right)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z+a)\mathbf{k})$$

$$\text{A } z=0 \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{-Qa\mathbf{k}}{\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

que és perpendicular al pla $z=0$ com ja sabíem.

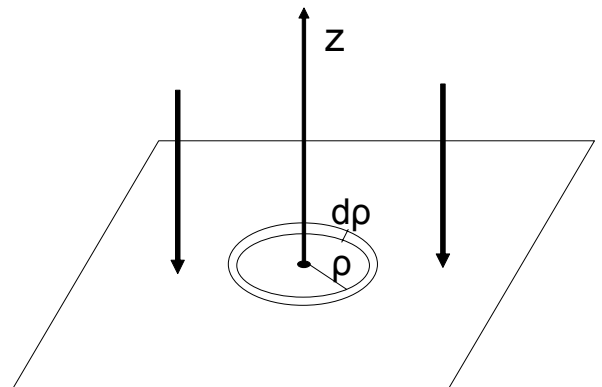
e) A la superfície d'un conductor es verifica

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}, \text{ on per } z > 0 \quad \mathbf{n} = \mathbf{k}$$

La densitat superficial de càrrega és

$$\sigma(x,y) = \frac{-Qa}{2\pi \left(x^2 + y^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

f) La càrrega total del pla $Q_p = \int_{\text{plano}} \sigma dS$



ja que σ depèn de $x^2 + y^2$, que és el quadrat de la distància a l'eix z , $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, els elements de superfície convenients són anells prims de radi ρ , de gruix $d\rho$, $dS = 2\pi\rho d\rho$

$$Q_p = \int_{\rho=0}^{\rho=\infty} \frac{-Qa}{2\pi(\rho^2 + a^2)^{3/2}} 2\pi\rho d\rho = \frac{+Qa}{(\rho^2 + a^2)^{1/2}} \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\infty} = 0 - \frac{Qa}{(0 + a^2)^{1/2}} = -Q$$

PROBLEMA2

Enunciat

Per un conductor cilíndric massís molt llarg de radi R hi passa un corrent de intensitat total I que està distribuït uniformement en tota la secció transversal del conductor.

a) Calculeu el vector densitat de corrent j en els punts interiors ($r < R$) del conductor.

b) Calculeu el vector camp magnètic B en els punts situats a distància $r < R$ de l'eix del conductor.

c) Calculeu el flux magnètic per unitat de longitud a través de la superfície indicada a la figura 1.

d) Calculeu la densitat d'energia magnètica dins el conductor i l'energia emmagatzemada per unitat de longitud dintre del conductor.

Suposem que per defecte de fabricació el conductor té un petit forat de radi r_0 al llarg del conductor, situat en el punt que indica la figura 2.

e) Apliqueu el principi de superposició (el forat es pot considerar un conductor recorregut per un corrent de sentit contrari al que circula pel conductor massís) per calcular i dibuixar el vector camp magnètic B que crea el conductor defectuós en els punts O i P de la figura 2. Supposeu que el corrent real surt del pla del paper.

f) Calculeu la força que actuarà sobre una partícula carregada q que arriba al punt P amb una velocitat $v = -v_0$ i m/s.

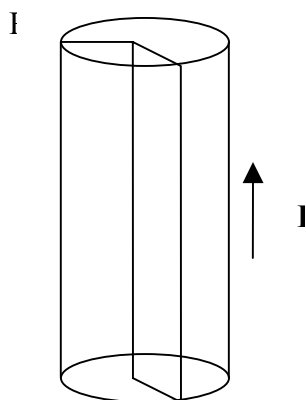


Figura 1

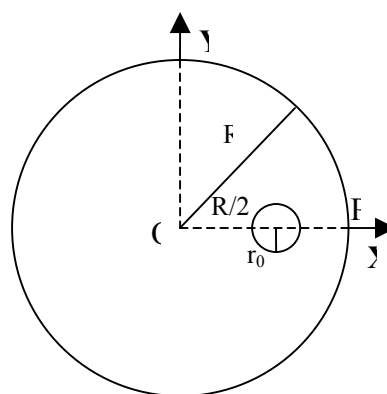


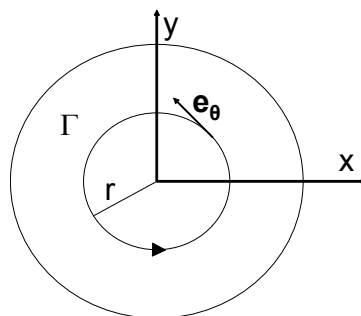
Figura 2

Solució

a) $\mathbf{j} = \frac{I}{\pi R^2} \mathbf{k}$

b) Per simetria, les línies de camp són circumferències en plans perpendiculars al conductor.

Si apliquem la Llei d'Ampère a un camí tancat tal com l'indicat a la figura, prenent el sentit de la circulació en el mateix sentit del camp:



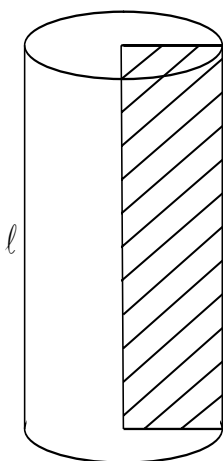
$$\int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{on } d\mathbf{S} = dS \mathbf{k}.$$

Com que el mòdul del camp és el mateix en tots els punts del camí, tenim

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\Gamma} B d\ell = B \int_{\Gamma} d\ell = B 2\pi r \\ \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} &= \mu_0 \int_S \frac{I}{\pi R^2} dS = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \pi r^2 \end{aligned}$$

Per tant a l'interior, $\mathbf{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R^2} r \mathbf{e}_\theta$, $r < R$

c)



$$\phi_M = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int B dS$$

ja que $d\mathbf{S} = dS \mathbf{e}_\theta$. Com que el camp només depèn de r , considerem elements de superfície de la forma $dS = \ell dr$, on ℓ és la longitud del conductor

$$\phi_M = \int_{r=0}^{r=R} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \ell dr = \mu_0 \frac{I}{4\pi} \Rightarrow \frac{\phi_M}{\ell} = \mu_0 \frac{I}{4\pi}$$

d) La densitat d'energia magnètica η

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2}{4\pi^2 R^4} r^2$$

L'energia magnètica U emmagatzemada a l'interior del conductor

$$U = \int_{\text{interior conductor}} \eta d\text{Vol}$$

on η només depèn de r : podem considerar elements de volum com anells cilíndrics de gruix dr : $d\text{Vol} = 2\pi r \ell dr$,

$$U = \int_{r=0}^{r=R} \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2}{4\pi^2 R^4} r^2 2\pi r \ell dr = \frac{1}{16} \mu_0 I^2 \frac{\ell}{\pi} \Rightarrow \frac{U}{\ell} = \frac{1}{16} \mu_0 \frac{I^2}{\pi}$$

e) Per superposició:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_H + \mathbf{B}_A$$

\mathbf{B}_H = Camp creat pel fil massís

\mathbf{B}_A = Camp que crearia un corrent que anés pel forat en sentit contrari al del fil massís,

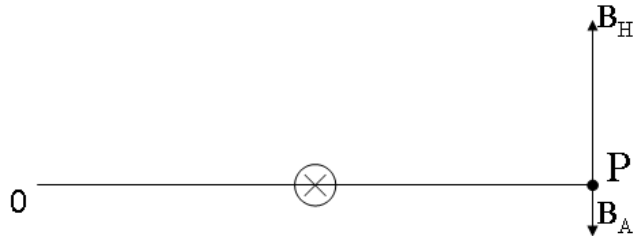
$$I_A = \frac{I}{\pi R^2} \pi r_0^2 = \frac{I}{R^2} r_0^2, \text{ cap a dins del pla del paper}$$

En 0: $\mathbf{B}_H = 0$

\mathbf{B}_A és el camp creat per I_A en un punt de l'exterior

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_A}{R/2} \mathbf{j} = \mu_0 \frac{I r_0^2}{\pi R^3} \mathbf{j}$$

En P:



$$\mathbf{B}_H = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \mathbf{j}, \quad \mathbf{B}_A = \mu_0 \frac{I_A}{2\pi R/2} (-\mathbf{j}) = \mu_0 \frac{I r_0^2}{\pi R^3} (-\mathbf{j})$$

$$\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{1}{2r} - \frac{r_0^2}{R^3} \right) \mathbf{j}$$

$$\text{f) } \mathbf{F} = -q v_0 \mathbf{i} \wedge \mathbf{B}_P = -q \frac{v_0 \mu_0 I}{\pi} \left(\frac{1}{2R} - \frac{r_0^2}{R^3} \right) \mathbf{k}$$