Examen Final d'Equacions Diferencials

13 de juny de 2006

Publicació de notes: 23 de juny de 2006.

Sol.licitut de revisions: de 23 de juny a 27 de juny de 2006.

Raoneu totes les respostes

1. (a) Doneu les condicions necessàries i suficients per a que $M(t)$ sigui una matriu fonamental del sistema $X' = AX$. Sota aquestes condicions, proveu que $e^{-At}M(t)$ és una matriu constant. (2.5pt)

   (b) Determineu $f(x)$ sabent que $f(0) = 1$ i que les trajectòries ortogonals a la família de corbes $\{y = f(x) + k\}_k$ són les solucions de $(f'(x))^2 y' = f(x)$. (2.5pt)

   (c) Trobeu una solució $x(t)$, $y(t)$ de l'equació $xx' - yy' = t$ verificant $x(0) = y(0) = 0$. La solució, és única? (2.5pt)

   (d) Donada la matriu $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, calculeu e^{tA}. (2.5pt)

2. (a) Determineu per a quins valors de a existeixen dos funcions y_1, y_2 linealment independents verificant $y^{(4)} + 2y'' + ay' + y = y^{(3)} + y'' + y' + y = 0$. (2pt)

   (b) Trobeu l'equació diferencial de les corbes $y(x) = ax - x\ln(1 + bx) + x\ln x$, $a, b \in \mathbb{R}$. (3pt)

   (c) Trobeu la solució general de l'equació $x^3y'' - (xy' - y)^2 = 0$, fent el canvi de variables $x = e^t, y = ue^t$. (5pt)

3. Considereu el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & y(x^2 - y^2) \\ y' & = & -2x(x^2 - y^2) \end{array}\right.$$

   (a) Trobeu els seus punts d'equilibri. Què es pot dir, a partir de l'estudi de les corresponents linealitzacions, de la seva estabilitat? (4pt)

   (b) Feu el retrat de fases del sistema. Establiu l'estabilitat dels punts d'equilibri que no hagueu pogut decidir en l'apartat a). (4pt)

   (c) Sigui $(x(t), y(t))$ la solució que passa per $(0, 1)$ en $t = 0$. Calculeu $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t))$. (2pt)

4. (a) Donat $N \in \mathbb{N}$, considereu el problema de valor inicial

$$y'' + y = \sum_{k=0}^{N} \delta(t - 2\pi k), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

   on δ és la delta de Dirac. Trobeu-ne la solució. Calculeu $\lim_{N\to\infty} y(2\pi N + \pi/2)$. (7pt)

   (b) Determineu els valors propis i les funcions pròpies del problema de contorn $y'' + k^2y = 0$, $y(-1) = y(1) = 0$. (3pt)