Examen Final IL. 1a parte: Lógica Proposicional. Enero 2007. Tiempo: 70 min.

Publicación notas: 29 ene. Revisión: 1 feb. 12h, con solicitud previa via mail razonado el 30 y 31 ene.

---

1. (4 puntos) Demuestra en todo detalle si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones para fórmulas proposicionales cualesquiera F y G. Utiliza sólo las definiciones de la lógica proposicional, de satisfactibilidad, de tautología y de equivalencia y consecuencia lógica.

   a) No puede ocurrir que $F \models G$ y $F \models \neg G$.
   Solución: Falso. Contraejemplo: F es $p \wedge \neg p$ y G es cualquier fórmula. Al ser F insatisfactible, cualquier fórmula es consecuancia lógica de F.

   b) Si $F \models G$ entonces $F \equiv F \wedge G$. (Ayuda: para cada I, distingue dos casos sobre F.)
   Solución: Cierto.
   Tenemos que demostrar, con la ayuda de la hipótesis $F \models G$, que para todo I, I es modelo de F si y solo si I es modelo de $F \wedge G$. Para ello vamos a distinguir dos casos, según cual sea el valor de $eval_I(F)$.
   Caso 1: $eval_I(F) = 0$. En este caso I no es modelo de F. Pero si calculamos $eval_I(F \wedge G)$ tenemos que $eval_I(F \wedge G) = min(eval_I(F), eval_I(G)) = min(0, eval_I(G)) = 0$. En este caso I tampoco es modelo de $F \wedge G$.
   Caso 2: $eval_I(F) = 1$. En este caso I es modelo de F. Pero, como por hipótesis tenemos que $F \models G$, entonces I también es modelo de G (por definición de consecuencia lógica). Así también $eval_I(G) = 1$. Calculando $eval_I(F \wedge G)$ en este caso tenemos que $eval_I(F \wedge G) = min(eval_I(F), eval_I(G)) = min(1, 1) = 1$. En este caso I también es modelo de $F \wedge G$.
   Hemos visto que si $F \models G$ entonces F y $F \wedge G$ tienen los mismos modelos. Esto termina la demostración.
   Como siempre hay distintas maneras de demostrar un mismo hecho a continuación vamos a dar, a modo de ejemplo, otra solución igualmente válida.
   Tenemos que demostrar, con la ayuda de la hipótesis $F \models G$, que todo modelo de F es modelo de $F \wedge G$ y recíprocamente.
   Sea I un modelo cualquiera de F. Como $F \models G$ entonces I también es modelo de G. Así $eval_I(F) = eval_I(G) = 1$ y por consiguiente $eval_I(F \wedge G) = min(eval_I(F), eval_I(G)) = min(1, 1) = 1$. Esto significa que I es modelo de $F \wedge G$.
   Para ver el recíproco, sea I modelo de $F \wedge G$. Esto significa que $1 = eval_I(F \wedge G) = min(eval_I(F), eval_I(G))$. Así necesariamente $eval_I(F) = 1$, o lo que es lo mismo, I es modelo de F.

   c) Si $F \rightarrow G$ es una tautología entonces $G \models F$. **Solución:** Falso.
   Contraejemplo: F es $p \wedge \neg p$ y G es cualquier fórmula satisfactible (por ejemplo p). Es fácil verificar que para estas F y G, $F \rightarrow G = \neg F \vee G$ es tautología, pues $\neg F$ es cierta en cualquier interpretación. Sin embargo F no es consecuencia lógica de G: existe al menos un modelo I de G (porque G es satisfactible), y esta I no es modelo de F (porque F es insatisfactible).

2. (4 puntos) Sea S un conjunto (o conjunción) finito de cláusulas proposicionales.
   Recordemos: si $Res_1(S)$ es el conjunto de las cláusulas obtenibles a partir de S en un solo paso de resolución, definimos

$$\begin{aligned} S_0 &= S \\ S_{i+1} &= S_i \cup Res_1(S_i), \quad \text{para toda } i \geq 0 \end{aligned}$$

a) Demuestra que, para todo par de cláusulas de la forma $p \vee C$ y $\neg p \vee D$, tenemos que $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \models C \vee D$.

Solución: Hay que demostrar que todo modelo de $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D)$ también lo es de $C \vee D$. Sea I un modelo cualquiera de $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D)$. entonces I es modelo tanto de $(p \vee C)$ como de $(\neg p \vee D)$. Vamos a demostrar que I también es modelo de $C \vee D$ distinguiendo dos casos, según $I(p)$ sea 0 o 1.

En el caso en que $I(p) = 0$, como I es modelo de $(p \vee C)$ resulta que I tiene que ser modelo de C. Entonces también I es modelo de $C \vee D$.

En el caso en que $I(p) = 1$, como I es modelo de $(\neg p \vee D)$ resulta que I tiene que ser modelo de D. Entonces también I es modelo de $C \vee D$.

Como hemos visto que en ambos casos I es modelo de $C \vee D$ la demostración ha terminado.

b) Demuestra por inducción que para todo conjunto de cláusulas S tenemos $S \models Res_1(S)$.

Solución: Vamos a demostrar, por inducción sobre n, que si todas las fórmulas $C_1, \ldots, C_n$ son consecuencia lógica de S entonces $S \models C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$. Observa que, por el apartado anterior, todas las cláusulas obtenidas de S mediante un paso de resolución son consecuencia lógica de S. Podemos aplicarlo para demostrar $S \models Res_1(S)$.

Para el caso $n = 1$ es obvio pues hay que demostrar que $S \models C_1$ y sabemos que C_1 es consecuencia lógica de S.

Veamos ahora el paso $n \Rightarrow n+1$. La hipótesis de inducción nos dice que $S \models C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$. Por otro lado $S \models C_{n+1}$, pues todas la fórmulas C_i son consecuencia lógica de S. De ambos hechos se deduce que $S \models (C_1 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge C_{n+1}$. Ahora bien, esta última fórmula $(C_1 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge C_{n+1}$ es precisamente $C_1 \wedge \cdots \wedge C_{n+1}$. Así hemos visto que $S \models C_1 \wedge \cdots \wedge C_{n+1}$.

c) Demuestra (como quieras) que para toda i tenemos $S \equiv S_i$ (puedes usar resultados del ejercicio 1).

Solución: Vamos a demostrar, por inducción sobre i, que $S \equiv S_i$.

Para el caso $i = 0$ basta observar que S i S_0 son la misma cosa.

Veamos ahora el paso $i \Rightarrow i+1$. La hipótesis de inducción nos permite suponer que $S \equiv S_i$. Por otro lado, sabemos (por el apartado anterior) que $S_i \models Res(S_i)$. Utilizando el apartado b) del primer ejercicio tenemos que $S_i \equiv S_i \wedge Res(S_i)$. Pero como esta última fórmula es precisamente S_{i+1} tenemos que $S_i \equiv S_{i+1}$. Juntando ambos hechos llegamos a la conclusión que $S \equiv S_{i+1}$.

(Nota sin importancia para resolver el examen: esto implica que $S \equiv Res(S)$, +porque en el caso proposicional la resolucion termina, es decir, a partir de cierta i todos los S_i son iguales).

3. (2 puntos) Demuestra usando DPLL la verdad o la falsedad de:

a) $p \wedge (q \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg q) \models q \leftrightarrow \neg s$

Solución: Sabemos que la consecuencia lógica es cierta si y sólo si la fórmula $p \wedge (q \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge \neg(q \leftrightarrow \neg s)$ es insatisfactible.

Para utilizar DPLL primero debemos convertir la fórmula a CNF (aunque no se pedía hacer esto tan formalmente):

$p \wedge (q \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge \neg(q \leftrightarrow \neg s)$ [def. de $\leftrightarrow$] $\equiv$
$p \wedge (q \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge \neg(\ (q \rightarrow \neg s)\ \wedge\ (\neg s \rightarrow q)\ )$ [def. de $\rightarrow$] $\equiv$
$p \wedge (q \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge \neg(\ (\neg q \vee \neg s)\ \ \wedge\ \ (\neg\neg s \vee q)\ )$ [idempotencia de $\neg$] $\equiv$
$p \wedge (q \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge \neg(\ (\neg q \vee \neg s)\ \ \wedge\ \ (s \vee q)\ )$ [de Morgan] $\equiv$
$p \wedge (q \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge (\ (\neg\neg q \wedge \neg\neg s)\ \ \vee\ \ (\neg s \wedge \neg q)\ )$ [idempotencia de $\neg$] $\equiv$
$p \wedge (q \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge (\ (q \wedge s)\ \ \vee\ \ (\neg s \wedge \neg q)\ )$ [distributividad de $\vee$] $\equiv$
$p \wedge (q \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge (\ (q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (s \vee \neg s) \wedge (s \vee \neg q)\ )$ [elim. taut.] $\equiv$
$p \wedge (q \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg s) \wedge (s \vee \neg q)$

Si notamos $\neg p$ por $\bar{p}$ tenemos las cláusulas:

1. p
2. $\bar{p} \vee q \vee s$
3. $\bar{q} \vee \bar{s}$
4. $q \vee \bar{s}$
5. $\bar{q} \vee s$

Entonces tenemos la derivación:

$$\emptyset \Longrightarrow_{p1} p \Longrightarrow_{d} p\ q^{d} \Longrightarrow_{p3} p\ q^{d}\ \bar{s} \Longrightarrow_{b5} p\ \bar{q} \Longrightarrow_{p4} p\ \bar{q}\ \bar{s} \Longrightarrow_{f2} Insat$$

que demuestra que la consequencia lógica es cierta.

b) $(\neg p \vee r \vee s) \wedge (q \vee s \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg s \vee q \vee \neg r) \models \neg p \vee q$

Solución:

Similarmente veamos si la fórmula

$$(\neg p \vee r \vee s) \wedge (q \vee s \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg s \vee q \vee \neg r) \wedge \neg(\neg p \vee q)$$

es insatisfactible utilizando DPLL. En este caso el paso a CNF es muy sencillo:

$(\neg p \vee r \vee s) \wedge (q \vee s \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg s \vee q \vee \neg r) \wedge \neg(\neg p \vee q)$ [de Morgan] $\equiv$
$(\neg p \vee r \vee s) \wedge (q \vee s \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg s \vee q \vee \neg r) \wedge \neg\neg p \wedge \neg q$ [idem. de $\neg$] $\equiv$
$(\neg p \vee r \vee s) \wedge (q \vee s \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg s \vee q \vee \neg r) \wedge p \wedge \neg q$ $\equiv$

Así pues, tenemos las cláusulas:

1. $\bar{p} \vee r \vee s$
2. $q \vee \bar{r} \vee s$
3. $r \vee \bar{s}$
4. $q \vee \bar{r} \vee \bar{s}$
5. p
6. $\bar{q}$

Y la derivación
$\emptyset \Longrightarrow_{p5} p \Longrightarrow_{p6} p\ \bar{q} \Longrightarrow_{d} p\ \bar{q}\ r^{d} \Longrightarrow_{p2} p\ \bar{q}\ r^{d}\ s \Longrightarrow_{b4} p\ \bar{q}\ \bar{r} \Longrightarrow_{p1} p\ \bar{q}\ \bar{r}\ s \Longrightarrow_{f3} Insat$
demuestra que la consecuencia lógica es cierta.

Examen Final IL. 2a parte: LPO y Prog. Lógica. Enero 2007. Tiempo: 70 min.

Publicación notas: 29 ene. Revisión: 1 feb. 12h, con solicitud previa via mail razonado el 30 y 31 ene.

---

1. (3.5 puntos) Sea F la fórmula $\exists x\, \forall y\, (\, \exists z\, p(z,y) \wedge \neg p(x,y)\,)$. Contesta sin dar explicaciones:

   a) ¿Cuántos modelos tiene F?
   Solución: (Las explicaciones NO se pedían en el examen. Sólo las ponemos aquí para fines didácticos.)
   Infinitos. (Veremos en el apartado siguiente que es satisfactible y sabemos que en LPO una fórmula satisfactible tiene infinitos modelos).

   b) Escribe un modelo I de F donde D_I es $\{a,b,c\}$.
   Solución: Puede ayudar reescribir la fórmula manteniendo la equivalencia lógica de la manera siguiente: puesto que el cuantificador universal distribuye respecto la conjunción, F es lógicamente equivalente a $\exists x\, (\, \forall y \exists z\, p(z,y) \wedge \forall y\, \neg p(x,y)\,)$ y puesto que x no aparece en la primera subfórmula de la conjunción, también es equivalente a $\forall y \exists z\, p(z,y) \wedge \exists x \forall y\, \neg p(x,y)$. Es inmediato ver que un posible modelo consiste en interpretar p de la manera siguiente:
   $p_I(a,a) = 0,\ p_I(a,b) = 0,\ p_I(a,c) = 0,$
   $p_I(b,a) = 1,\ p_I(b,b) = 1,\ p_I(b,c) = 1,$
   independientemente del valor de $p_I(c,a), p_I(c,b)$ y $p_I(c,c)$.

   c) $F \models \forall x\, p(x,x)$? Demuéstralo.
   Solución: No. El modelo dado en el apartado anterior satisface F pero no satisface $\forall x\, p(x,x)$.

   d) ¿Hay modelos de F cuyo dominio tiene un solo elemento?
   Solución: No. Si un modelo tuviera un solo elemento a, entonces tendríamos que $p_I(a,a) = 1$, debido a la primera subfórmula de la conjunción, y también $p_I(a,a) = 0$ debido a la segunda subfórmula.

2. (3.5 puntos) Considera las siguientes afirmaciones:

   a) Los charlatanes hablan con todo el mundo.
   b) Los solitarios no hablan con nadie.
   c) Los solitarios no son charlatanes.

   ¿Tenemos $a \wedge b \models c$? Formalízalo y demuéstralo por resolución indicando todos los pasos.

   Solución: Consideramos el lenguaje $\mathcal{P} = \{ch^1, s^1, h^2\}$, con el significado siguiente:

   - $ch(x)$ significa que x es charlatán.
   - $s(x)$ significa que x es solitario.
   - $h(x,y)$ significa que x habla con y.

   Entonces la formalización de las afirmaciones es:

   a) $\forall x\, (\, ch(x) \rightarrow \forall y\, h(x,y)\,)$
   b) $\forall x\, (\, s(x) \rightarrow \forall y\, \neg h(x,y)\,)$
   c) $\forall x\, (\, s(x) \rightarrow \neg ch(x)\,)$

Para ver que la consecuencia lógica es cierta veremos que $a \wedge b \wedge \neg c$ es insatisfactible utilizando resolución. Así pues, primero obtendremos una fórmula equisatisfactible en CNF. Los pasos son los siguientes:

1) Introducimos la definición de $\rightarrow$:
   $\forall x\ (\neg ch(x)\ \vee\ \forall y\ h(x,y))\quad \wedge\quad \forall x\ (\neg s(x)\ \vee\ \forall y\ \neg h(x,y))\quad \wedge\quad \neg\forall x\ (\neg s(x)\ \vee\ \neg ch(x))$
2) Movemos negaciones hacia dentro:
   $\forall x\ (\neg ch(x)\ \vee\ \forall y\ h(x,y))\quad \wedge\quad \forall x\ (\neg s(x)\ \vee\ \forall y\ \neg h(x,y))\quad \wedge\quad \exists x\ (s(x)\ \wedge\ ch(x))$
3) Eliminamos conflictos de nombre:
   $\forall x_1\ (\neg ch(x_1)\ \vee\ \forall y_1\ h(x_1,y_1))\ \wedge\ \forall x_2\ (\neg s(x_2)\ \vee\ \forall y_2\ \neg h(x_2,y_2))\ \wedge\ \exists x_3\ (s(x_3)\ \wedge\ ch(x_3))$
4) El movimiento de cuantificadores hacia dentro no puede aplicarse.
5) Skolemizamos introduciendo la constante fresca c:
   $\forall x_1\ (\neg ch(x_1)\ \vee\ \forall y_1\ h(x_1,y_1))\quad \wedge\quad \forall x_2\ (\neg s(x_2)\ \vee\ \forall y_2\ \neg h(x_2,y_2))\quad \wedge\quad s(a)\quad \wedge\quad ch(a)$
6) Movemos cuantificadores hacia fuera:
   $\forall x_1\forall x_2\forall y_1\forall y_2(\ (\neg ch(x_1)\ \vee\ h(x_1,y_1))\quad \wedge\quad (\ \neg s(x_2)\ \vee\ \neg h(x_2,y_2))\quad \wedge\quad s(a)\quad \wedge\quad ch(a)\ )$
7) Aplicación de distributividades no puede aplicarse.

Por lo tanto, tenemos el conjunto de cláusulas:

1) $\neg ch(x_1)\ \vee\ h(x_1,y_1)$
2) $\neg s(x_2)\ \vee\ \neg h(x_2,y_2)$
3) $s(a)$
4) $ch(a)$

Aplicando resolución podemos ver que es insatisfactible:

Resolvente	Cláusulas utilizadas	Unificador
5) $\neg h(a,y_2)$	$2+3$	$\{x_2=a\}$
6) $h(a,y_1)$	$1+4$	$\{x_1=a\}$
7) $\square$	$5+6$	$\{y_1=y_2\}$

Por lo tanto, c es consecuencia lógica de $a \wedge b$.

3. (3 puntos) Queremos obtener en Prolog un predicado `dom(L)` que, dada una lista `L` de fichas de dominó (en el formato de abajo), escriba una cadena de dominó usando *todas* las fichas de `L` y escribe "no hay cadena" si no es posible. Por ejemplo,

```
?- dom( [ f(3,4), f(2,3), f(1,6), f(2,2), f(4,2), f(2,1) ] ).
```

escribe la cadena correcta:

```
[ f(2,3), f(3,4), f(4,2), f(2,2), f(2,1), f(1,6) ].
```

También podemos *girar* alguna ficha como `f(N,M)`, reemplazándola por `f(M,N)`. Así, para

```
?- dom ([ f(4,3), f(2,3), f(1,6), f(2,2), f(2,4), f(2,1) ]).
```

sólo hay cadena si se gira alguna ficha (por ejemplo, hay la misma cadena que antes).

El siguiente programa Prolog aun no tiene en cuenta los posibles giros de fichas, ni tiene implementado el predicado `ok(P)`, que significa: "`P` es una cadena de dominó correcta (tal cual, sin necesidad ya de girar ninguna ficha)":

```
pert_con_resto(X,L,Resto):- concat(L1,[X|L2],L), concat(L1,L2,Resto).

p([],[]).
p(L,[X|P]):- pert_con_resto(X,L,R), p(R,P).

dom(L):-   p(L,P), ok(P), write(P), nl.
dom(_):-   write('no hay cadena'), nl.
```

1) ¿Qué significa el predicado `p(L,P)` para una lista `L` dada?
   Solución: "`P` es una permutación de `L`".
   (De hecho, este predicado viene tal cual, pero con el nombre de "`permutacion`" en vez de "`p`", en la página 13 de los apuntes de esta parte).

2) Escribe el predicado `ok(P)` que falta.
   Solución:

   ```
   ok( [_] ).
   ok( [ f(_,X), f(X,Y) | L ] ):- ok( [ f(X,Y) | L ] ).
   ```

3) Extiende el predicado `p` para que el programa también pueda hacer cadenas girando alguna de las fichas de la entrada.
   Solución: Añadimos el predicado `giro` a `p`, que permite girar (o no) una ficha:

   ```
   p([],[]).
   p(L,[Y|P]) :- pert_con_resto(X,L,R), giro(X,Y), p(R,P).

   giro( F,F ).
   giro( f(A,B), f(B,A) ).
   ```