1. (5 punts)
   (a) (1 punt) Definició de graf.
   (b) (1 punt) Definició d'arbre.
   (c) (0.5 punts) Proveu que els grafs 2-regulars tenen igual la mida i l'ordre.
   (d) (0.5 punts) Doneu, en funció de $r$ i $s$, l'ordre, la mida, la seqüència de graus i el diàmetre del graf bipartit complet $K_{r,s}$ amb parts de cardinals $r$ i $s$.
   (e) (0.5 punts) Siguin $G = (V, A)$ un graf eulerià d'ordre parell i $u$ un element que no és vèrtex de $G$. Construïu el graf $G' = (V', A')$ on $V' = V \cup \{u\}$ i $A' = A \cup \{uv : v \in V\}$. Esbrineu si $G'$ és eulerià.
   (f) (0.5 punts)Demostreu que és veritat o poseu un contraexemple: si un graf és hamiltonià, aleshores tots els vèrtexs tenen grau $\geq 2$.
   (g) (0.5 punts) Trobeu els grafs $G$ tals que $G$ i $G^c$ són arbres.
   (h) (0.5 punts) Un arbre té $[7]$ com a conjunt de vèrtexs i $\{12, 13, 14, 35, 36, 67\}$ com a conjunt d'arestes. Doneu la seva seqüència de Prüfer.

2. (3 punts; tots el apartats valen igual.) Per a cada natural $n \geq 3$ definim el graf $G_n$ prenent com a vèrtexs les permutacions de $[n]$, i cada permutació és adjacent a les permutacions obtingudes transposant dos símbols de posicions consecutives; és a dir, una permutació $a_1a_2a_3 \cdots a_n$ és adjacent a les permutacions

$$a_2a_1a_3 \cdots a_n, \quad a_1a_3a_2 \cdots a_n, \quad a_1a_2a_4a_3a_5 \cdots a_n, \quad \ldots \quad a_1 \cdots a_{n-1}a_{n-2}a_n, \quad a_1a_2 \cdots a_na_{n-1}.$$

   (a) Representeu gràficament el graf $G_3$.
   (b) Calculeu l'ordre i la mida de $G_n$.
   (c) Demostreu que, per a tot vèrtex de $G_n$, hi ha un cicle de longitud 6 que el conté.
   (d) Doneu un camí del graf $G_5$ que tingui inici al vèrtex 53142 i final al vèrtex 12345.
   (e) Esbrineu per a quins valors de $n$ el graf $G_n$ és connex.
   (f) Esbrineu per a quins valors de $n$ el graf $G_n$ és eulerià.

3. (2 punts; tots els apartats valen igual.) Considereu el graf complet $K_{n+1}$ amb $\{0, \ldots, n\}$ com a conjunt de vèrtexs. Pondereu aquest graf assignant a cada aresta $\{i, j\}$ amb $i < j$ el pes $ni + j$.
   (a) Demostreu que totes les arestes del graf tenen pesos diferents.
   (b) Calculeu el pes d'un arbre generador minimal en funció de $n$.

## Solució

### Problema 1

(a) Un *graf* és una parella ordenada $G = (V, A)$ on $V$ és un conjunt finit no buit i $A$ és un subconjunt de $\mathcal{P}_2(V)$ (el conjunt format pels subconjunts de $V$ de cardinal 2.)

(b) Una arbre és un graf connex i sense cicles.

(c) Sigui $G = (V, A)$ un graf 2-regular. Aplicant el lema de les encaixades i tenint en compte que $g(u) = 2$ per a tot $u \in V$, tenim

$$2|A| = \sum_{u \in V} g(u) = \sum_{u \in V} 2 = 2|V|,$$

d'on $|A| = |V|$ com es volia demostrar.

(d) L'ordre és $r + s$. La mida és $rs$. Hi ha $r$ vèrtexs de grau $s$ i $s$ vèrtexs de grau $r$, així que la seqüència de graus és

$$r, \overset{s)}{\ldots}, r, s, \overset{r)}{\ldots}, s.$$

La distancia entre dos vèrtexs diferents de diferents parts és 1, i la distància entre dos vèrtexs diferents de la mateixa part és 2. Per tant, si $r = s = 1$, el diàmetre és 1 i, en els altres casos, el diàmetre és 2.

(e) Com que $G$ és eulerià, és connex i $g_G(v)$ és parell per a tot $v \in V$. Aleshores, per a tot $v \in V$, tenim $g_{G'}(v) = g_G(v)+1$, que és un nombre senar. Per tant, $G'$ té vèrtexs de grau senar i no és eulerià.

(f) Tot vèrtex $u$ pertany al cicle hamiltonià, per tant és adjacent a dos altres vèrtexs del cicle. Així que el grau de $u$ és, almenys, dos.

(g) Sigui $G$ un arbre d'ordre $n$; la seva mida és $n - 1$. El complementari de $G$ té mida

$$\binom{n}{2} - (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) - (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Com que $G^c$ és un arbre, la seva mida també ha de ser $n - 1$, així que $n$ ha de complir

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) = n - 1.$$

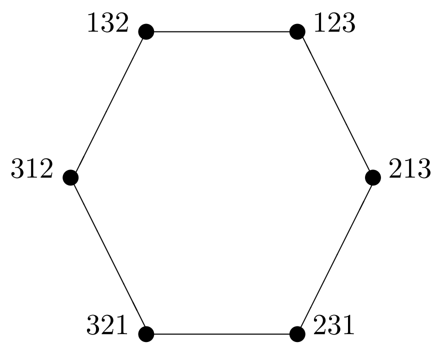
La solució $n = 1$ correspon al graf trivial $K_1$. Si $n > 1$, simplifiquem $n - 1$ i obtenim $(n - 2)/2 = 1$, és a dir, $n = 4$. Arbres d'ordre 4 només hi ha l'estrella $K_{1,3}$ i el trajecte $T_4$. El complementari de $K_{1,3}$ no és connex. El complementari de $T_4$ és un altre $T_4$.

Per tant, la resposta és $K_1$ i $T_4$.

(h) 11336.

**Problema 2**

(a)




(b) L'ordre és el nombre de permutacions de $n$, és a dir, $n!$. Notem que el graf és $(n-1)$-regular. Aplicant el lema de les encaixades, si la mida és $m$, tenim $2m = (n-1) * n!$, per tant la mida és $m = n! * (n-1)/2$.

(c) Considerem un vèrtex $a_1 a_2 \cdots a_n$. Abreugem $a_4 \cdots a_n$ per $c$; així, podem escriure el vèrtex $a_1 a_2 a_3 c$. Aleshores

$$a_1a_2a_3c \sim a_2a_1a_3c \sim a_2a_3a_1c \sim a_3a_2a_1c \sim a_3a_1a_2c \sim a_1a_3a_2c \sim a_1a_2a_3c$$

és un cicle de longitud 6 que passa pel vèrtex donat. (La resposta de l'apartat (a) suggeriex com fer el cicle).

(d) $53142 \sim 51342 \sim 15342 \sim 15324 \sim 15234 \sim 12534 \sim 12354 \sim 12345$.

(e) Afirmem que el graf $G_n$ és connex per a tot $n \geq 3$. Per a això, és suficient veure que hi ha un camí des de qualsevol vèrtex $a_1 \cdots a_n$ al vèrtex $12 \cdots n$. Si a $a_1 \cdots a_n$, 1 és a la posició $i_1$ , aleshores recorrent les $i_1 - 1$ arestes corresponents a transposar 1 amb el símbol anterior, s'obté un vèrtex $v_1$ amb 1 a la primera posició. A continuació, si 2 és a la posició $i_2$ de $v_1$, recorrent $i_2 - 2$ arestes des de $v_1$ s'obte un vèrtex $v_2$ amb les dues posicions inicials 12. Iterant el procediment, s'obté un camí de $a_1 \cdots a_n$ a $12 \cdots n$. Per tant, el graf és connex.

(f) Com que el graf és connex i $(n-1)$-regular, resulta ser eulerià si, i només si, $n-1$ és parell, és a dir, si $n$ és senar.

**Problema 3**

(a) Considerem dues arestes $ab$ i $cd$ amb $a < b$ i $c < d$. Si tenen el mateix pes, $na + b = nc + d$, d'on $n(a-c) = d-b$. Com que $0 \leq b, d \leq n$, tenim $n \geq |d-b|$. Si $a \neq c$, tenim $n \geq |d-b| = n|a-c| > n$, el que és contradictori. Per tant, $a = c$ i $d - b = n(a-c) = 0$, és a dir $d = b$. Les dues arestes, doncs, són la mateixa.

(b) Les arestes de menor pes són les arestes 01, 02, ..., $0n$, de pesos respectius $1, 2 \ldots, n$. Aquestes arestes formen un arbre generador isomorf a un graf estrella de vèrtex central 0. El pes d'aquest arbre és

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n-1).$$