ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

Assignatura: Senyals i Sistemes II. 2^{on} Control
Data: 30 de Novembre de 2007 **Temps: 1h 30min**
Professors: G. Haro, J. Hernando, J. Mariño, E. Monte, P. Salembier.

- Responeu a cada problema en fulls separats.
- No podeu utilitzar ni llibres, ni apunts, ni taules, ni formularis, ni calculadora, ni telèfon mòbil.
- Poseu un document d'identificació en un lloc visible.
- El vostre nom ha de figurar en tots els fulls que utilitzeu, en format: COGNOMS, NOM.
- Justifiqueu tots els resultats. Els resultats sense justificació no seran valorats en la correcció.

Problema 1: **5 puntos**

Sea un sistema lineal invariante cuya función de transferencia es $H(z) = \dfrac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{5}{2} z^{-1} + z^{-2}}$. Se pide:

a) Dibujar el diagrama de ceros y polos.
b) A partir del diagrama de ceros y polos, definir todas las regiones de convergencia posibles e analizar en cada caso la estabilidad y la causalidad del sistema.

A partir de ahora suponemos que el sistema es estable.

c) Calcular su respuesta impulsional.
d) Si la señal de entrada x[n] = $\{\ldots,0,0,\underline{1},-5/2,1,0,0,\ldots\}$, calcular la transformada z, Y(z), de la señal de salida. Dibujar y[n].
e) Calcular la respuesta a x[n] = cos(πn)

Problema 2: **5 Puntos**

Se ha obtenido de un sistema de medida la señal periódica siguiente:

$$x[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_o[n-5r] \text{ con } x_o[n] = \{\underline{1}, 0, -2, 0, 1\}$$

a) Calcular la transformada de Fourier de $x_o[n]$ y dibujar el módulo y la fase.

b) Expresar $X_o[k]$, la DFT de longitud 5 de $x_o[n]$, en función de la transformada de Fourier de $x_o[n]$.

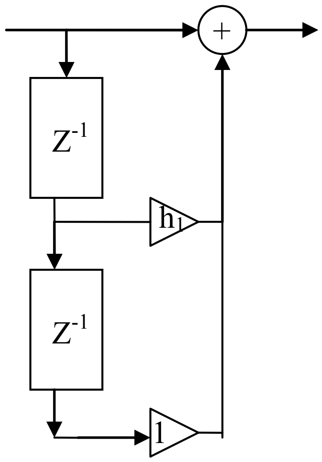
c) Haciendo uso de la DFT $X_o[k]$, expresar $x[n]$ como una combinación lineal de exponenciales y representar su transformada de Fourier.

d) Expresar la autocorrelación de x[n] mediante el uso de la DFT $X_o[k]$.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow 2} \longrightarrow y[n]$$

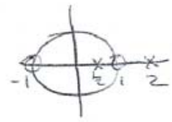
La señal x[n] es diezmada por 2 mediante el sistema de la figura para dar la secuencia y[n].
e) Obtener el periodo P y las muestras del periodo fundamental $y_o[n]$ de y[n].
f) Obtener la potencia de y[n] y compararla con la potencia de x[n].
g) Representar la transformada de Fourier de y[n], indicando la frecuencia de sus componentes frecuenciales.
h) (*Opcional*) Indicar también la potencia de dichos componentes frecuenciales.

i) Suponiendo que la señal x[n] se ha obtenido mediante un conversor A/D con frecuencia de muestreo 5kHz, calcular el valor de h_1 en el sistema de la figura siguiente que permita eliminar la componente a 1kHz de y[n].



SOLUCIÓN Problema 1

a) $H(z) = \dfrac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{5}{2} z^{-1} + z^{-2}}$



b) Regiones de convergencia posibles.

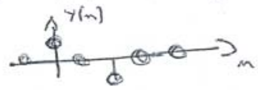
- ROC = $\{ |z| > \frac{1}{2} \cap |z| > 2 \}$ causal inestable
- ROC = $\{ |z| > \frac{1}{2} \cap |z| < 2 \}$ Una componente causal, otra anticausal y sistema estable.
- ROC = $\{ |z| < \frac{1}{2} \cap |z| > 2 \} = \{ \emptyset \}$ sist. incompatible.
- ROC = $\{ |z| < \frac{1}{2} \cap |z| < 2 \}$ no causal, inestable.

c) Respuesta impulsional.

$H(z) = -1 + \dfrac{1}{1 - 2z^{-1}} + \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$; ROC = $\{ |z| > \frac{1}{2} \cap |z| < 2 \}$

$h[n] = -\delta[n] + 2^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

d) $x[n] = \{ \ldots \underline{1}, -5/2, 1, 0 \ldots \} \longrightarrow X(z) = 1 - \frac{5}{2} z^{-1} + z^{-2}$;



$Y(z) = H(z)\, X(z) = 1 - z^{-2}$

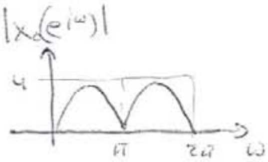
e) $y[n] = H(z)\Big|_{z=-1} x[n] = 0$

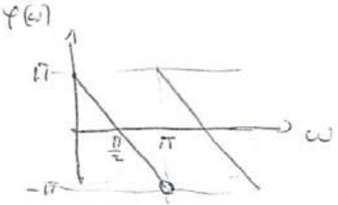
SOLUCIÓN Problema 2

a) $x_0[n] = \{\underline{1}, 0, -2, 0, 1\}$

$\downarrow \; \mathcal{F}\{\cdot\}$

$X_0(e^{j\omega}) = 2e^{-j2\omega}(\cos 2\omega - 1)$

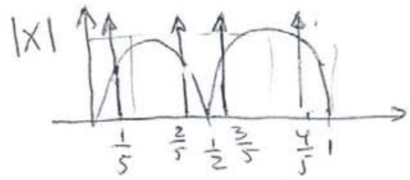




b) $X_0[k] = X_0(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{5}} = 2\, e^{-j\frac{4\pi}{5}k}\left(\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right) - 1\right)$

c) $x[n] = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} X[k]\, e^{j\frac{2\pi k n}{5}} = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} e^{j\frac{2\pi k}{5}(n-2)}\left(\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right) - 1\right)$

$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi k}{5}(n-2)}\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) - 1\right)\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{5} - 2\pi r\right)$



d) Si $x[n] = A e^{j\omega_0 n} \longrightarrow r_{xx}(m) = |A|^2 e^{j\omega_0 m}$

$r_{xx}(m) = \frac{4}{25}\sum_{k=0}^{4}\left(\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right) - 1\right)^2 e^{-j\frac{2\pi k m}{5}} = \frac{8}{25}\left(\cos\frac{4\pi}{5} - 1\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}m\right) +$

$+ \frac{8}{25}\left(\cos\frac{8\pi}{5} - 1\right)^2 \cos\left(2\pi \times \frac{2}{5} m\right)$

e) $x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow 2} \longrightarrow y[n] = \{\ldots, \underbrace{\underline{1}, -2, 1, 0, 0}, 1, -2, 1, 0, 0 \ldots\}$

Periodo $= 5 \qquad y_0[n] = \{1, -2, 1, 0, 0\}$

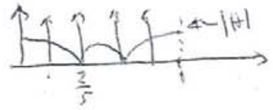
f) $P_y = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} |y(n)|^2 = \frac{6}{5} = P_x$

g) $y_0[n] = \{1, -2, 1, 0, 0\}$; $Y_0(e^{j\omega}) = 2\bar{e}^{j\omega}(\cos\omega - 1)$; $Y_0[k] = 2\bar{e}^{j\frac{2\pi k}{5}}\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) - 1\right)$

$y[n] = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} Y_0[k]\, e^{j\frac{2\pi k n}{5}}$; $Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{4} 2\pi \times \frac{2}{5}\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) - 1\right)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{5} - 2\pi r\right)$

h) Potencia $\quad f = \frac{1}{5} \longrightarrow P_1 = \frac{4}{25}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 1\right)^2 \qquad f_2 = \frac{2}{5} \longrightarrow P_2 = \frac{4}{25}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) - 1\right)^2$

i)



Si $F_m = 2{,}5\,\text{kHz} \Rightarrow 1\,\text{kHz} \rightarrow f = \frac{2}{5}$; $h = \{\underline{1}, h_1, 1\}$;

$H(e^{j\omega}) = 1 + h_1 \bar{e}^{j\omega} + \bar{e}^{j2\omega}$; $H(e^{j\omega}) = \bar{e}^{j\omega}(2\cos\omega + h_1)$; $h_1 = -2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$