

### 3 Ondas planas uniformes

Según se vio con detalle en el capítulo 2, las ecuaciones de Maxwell son la expresión matemática de las leyes que gobiernan el comportamiento espacio-temporal de los campos electromagnéticos:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

con

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_o \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \quad (3.1a)$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_o} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}} \quad (3.1b)$$

Utilizándolas, junto con la definición del campo electromagnético, en la expresión del trabajo realizado por éste sobre una distribución de carga eléctrica, se deduce el teorema de Poynting, que proporciona expresiones para la densidad volúmica de energía almacenada en el campo eléctrico<sup>1</sup>

$$u_e = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

y en el campo magnético<sup>1</sup>

$$u_m = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

---

<sup>1</sup> Cuando el medio es lineal.

así como para la densidad y el sentido del flujo de potencia asociada al campo

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \quad (3.2)$$

donde  $\vec{\mathcal{P}}$  recibe el nombre de vector de Poynting instantáneo.

Las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de distribuciones espaciales de campo que se propagan, lo que se conoce como ondas electromagnéticas; el teorema de Poynting permite determinar el flujo de potencia asociado a la onda. La verificación experimental por Hertz, en 1888, de la existencia de las ondas electromagnéticas, completó la verificación de la validez de las ecuaciones de Maxwell.

Las ondas electromagnéticas juegan un papel fundamental en el mundo físico y ocupan un lugar central en la ingeniería y, en particular, en las ingenierías electrónica y de telecomunicación; la luz y el calor del sol nos llegan mediante ondas electromagnéticas; la potencia asociada a las ondas electromagnéticas se utiliza en ingeniería como vehículo para transmitir información a distancia: radio, televisión, comunicaciones por satélite, telefonía móvil son algunos ejemplos donde la utilización de las ondas electromagnéticas es evidente. Pero las ondas no sólo se utilizan cuando no existe un “tendido” material de un punto a otro. En las líneas telegráficas y telefónicas suficientemente largas es imposible soslayar los fenómenos ondulatorios y, desde finales del siglo XIX, las ecuaciones que rigen el comportamiento de las ondas guiadas por líneas de transmisión se conocen, con cierta dosis de familiaridad, como “ecuaciones de los telegrafistas”; en las grandes instalaciones de comunicaciones por satélite se utilizan guías de onda conductoras huecas para llevar la energía desde los equipos de emisión hasta la antena emisora y desde la antena receptora a los equipos de recepción; mediante guías de onda dieléctricas (fibras ópticas) se conducen las ondas electromagnéticas en el infrarrojo cercano que portan la información en los sistemas que forman la espina dorsal de los sistemas de comunicaciones terrestres modernos.

Por razones didácticas, en este capítulo nos ceñiremos al estudio de ondas electromagnéticas que se propagan libremente en un medio homogéneo, y aun a un tipo de onda particular, pero de gran importancia en la práctica, conocido como onda plana uniforme. En el capítulo 4 se introducirán los principios fundamentales del guiado de ondas y en el capítulo 5 se presentarán en detalle los métodos de análisis de sistemas de guiado reales.

### 3.1 Ecuación de onda

Consideremos una región del espacio en la que no haya fuentes primarias (cargas y corrientes) de los campos:  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ . En esa región las ecuaciones de Maxwell se simplifican a

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} &= 0 & \nabla \times \vec{\mathcal{H}} &= \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales permite apreciar de manera cualitativa el origen de las ondas electromagnéticas: un campo  $\vec{\mathcal{B}}$  en la primera de las ecuaciones (3.3) da lugar, en general, a un campo  $\vec{\mathcal{E}}$  variable; éste, a través de la relación constitutiva (3.1a) supone un campo  $\vec{\mathcal{D}}$  variable, que, a su vez, produce un campo  $\vec{\mathcal{H}}$  variable según la última de las ecuaciones (3.3); el campo  $\vec{\mathcal{H}}$  variable supone, según la relación constitutiva (3.1b), un campo  $\vec{\mathcal{B}}$  variable, y así sucesivamente.

Volvamos ahora al caso general en que en la zona del espacio considerada pueda haber cargas y corrientes, pero consideremos el caso simplificado, pero que se encuentra muy a menudo en la práctica, de que el medio sea lineal; entonces

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}} &= \varepsilon \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{\mathcal{B}} &= \mu \vec{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si además el medio es isótropo,  $\varepsilon$  y  $\mu$  son escalares y, si es homogéneo, no dependen de las coordenadas espaciales. Bajo esas suposiciones, que se cumplen en muchos medios de interés práctico, las ecuaciones de Maxwell se reducen a:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\mathcal{E}} &= -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} &= 0 \\ \nabla \times \vec{\mathcal{H}} &= \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Es de notar que, mientras que desde un punto de vista físico los campos fundamentales son  $\vec{\mathcal{E}}$  y  $\vec{\mathcal{B}}$ , en una situación como la que se está considerando existe un paralelismo matemático entre  $\vec{\mathcal{E}}$  y  $\vec{\mathcal{H}}$ , como lo muestra el sistema de ecuaciones anterior sobre todo en regiones donde  $\rho = 0$  y  $\vec{\mathcal{J}} = 0$ . La técnica para resolver el sistema de ecuaciones anterior consiste en reducir el número de ecuaciones diferenciales aunque sea a costa de aumentar el orden de las derivadas. Por ejemplo, tomando el rotacional de ambos miembros de la primera ecuación, se tiene

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{\mathcal{H}} \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta que

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} \quad (3.7)$$

y que, según (3.5),  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon}$  y  $\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$ , la expresión (3.6) se reduce a

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{J}}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \quad (3.8)$$

donde se ha definido la “laplaciana”<sup>1</sup> del vector  $\vec{\mathcal{E}}$  como<sup>2</sup>

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \hat{x} \nabla^2 \mathcal{E}_x + \hat{y} \nabla^2 \mathcal{E}_y + \hat{z} \nabla^2 \mathcal{E}_z \quad (3.9)$$

La expresión básica (3.8) es, desde el punto de vista matemático, una ecuación de onda vectorial – porque la variable dependiente  $\vec{\mathcal{E}}$  es un vector – tridimensional – porque, en general, el operador laplaciana supone derivadas respecto de las tres coordenadas espaciales. Si se toma el rotacional de ambos miembros de la cuarta ecuación en (3.5) se llega a una ecuación de onda similar para  $\vec{\mathcal{H}}$ :

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} = \nabla \times \vec{\mathcal{J}}$$

<sup>1</sup> Estrictamente, la laplaciana es un operador escalar. El significado del operador  $\nabla^2$  aplicado a un vector se da en la expresión (3.9).

<sup>2</sup> La definición (3.9) no se puede generalizar para el empleo de componentes del vector que no sean las de las coordenadas cartesianas. En cambio, puede utilizarse cualquier tipo de coordenadas para expresar las componentes cartesianas del vector y para evaluar las laplacianas que actúan sobre ellas.

A la vista de estas expresiones, está claro que la solución de la ecuación de onda dependerá de la distribución de cargas y corrientes que dan origen al campo, y también de las condiciones de contorno que deban satisfacer los campos en los límites entre regiones homogéneas. La forma matemática de la solución (pero no la situación física que describe) también puede depender del sistema de coordenadas utilizado, que, a su vez, se elegirá de acuerdo con la geometría de la situación que se esté estudiando. En este capítulo nos limitaremos al estudio del caso particular de las llamadas ondas planas uniformes. En el capítulo 5 se verán diversos tipos de ondas planas no uniformes, en relación con sistemas de guía de onda. En el capítulo 6, al introducir el fenómeno de radiación, se verán formas aproximadas de ondas esféricas.

### 3.1.1 Ondas planas uniformes con dependencia espacio-temporal arbitraria

Consideremos de nuevo que estamos estudiando el campo electromagnético en una región desprovista de fuentes primarias. En esa región los campos obedecen a las ecuaciones (3.3) y las ecuaciones de onda de  $\vec{\mathcal{E}}$  y de  $\vec{\mathcal{H}}$  se vuelven homogéneas, es decir, desaparecen los términos independientes o de fuerza. Nótese que la situación que se está considerando es más común de lo que a primera vista pudiera parecer: las fuentes – cargas y corrientes – que dan lugar al campo ocupan un volumen limitado, y fuera de él, si el medio es lineal, isótropo y homogéneo, los campos obedecen a las ecuaciones (3.3) y a las ecuaciones de onda homogéneas

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10 \text{ a})$$

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10 \text{ b})$$

que de ellas se deducen. Además, el estudio de cierto tipo particular de solución para estas ecuaciones nos permitirá describir de manera ilustrativa y sencilla el fenómeno fundamental – la aparición de ondas electromagnéticas – que se quiere poner de manifiesto.

Como las dos ecuaciones de onda anteriores están matemáticamente desacopladas (en cada una de ellas sólo aparece una variable dependiente), en principio podemos estudiar su solución por separado. Nos concentraremos para empezar en la ecuación de onda del campo eléctrico, aunque nada impediría comenzar con la del campo magnético. Para hacer aún más sencilla la matemática y que ésta no oscurezca el aspecto físico que se pretende resaltar, efectuaremos una hipótesis simplificadora más, a saber: que del examen de las condiciones de contorno que tiene que cumplir la solución matemática de (3.10) para que adquiera significado físico se puede deducir que

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{\mathcal{E}} = \frac{\partial}{\partial y} \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (3.11)$$

Es de notar que las condiciones de contorno hipotéticamente utilizadas para deducir la condición anterior nos remiten en última instancia a las fuentes que se encuentran fuera de la región en que estamos estudiando el campo, pues de ellas dependerán los valores del campo en el contorno. Las condiciones (3.11) llevarán a un tipo particular de solución conocido como *onda plana uniforme*, que, curiosamente, y a pesar de todas las simplificaciones efectuadas para llegar a él, representa muy bien situaciones de interés práctico y, en especial, el campo en regiones lo suficientemente alejadas de las fuentes que lo producen. Si, simplificando aún más, puede suponerse que

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x \hat{x} \quad (3.12)$$

entonces la ecuación de onda (3.8) se reduce a

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2} = 0 \quad (3.13)$$

que es una ecuación de onda unidimensional – porque ahora, si se cumple (3.11), sólo hay dependencia respecto de una variable – escalar – porque se ha supuesto, según (3.12), que el campo eléctrico sólo tiene una componente<sup>1</sup> – y homogénea. La forma general de la solución de tal ecuación es

$$\mathcal{E}_x = f_1(z - vt) + f_2(z + vt) \quad (3.14)$$

donde

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (ms^{-1}) \quad (3.15)$$

es una constante que tiene unidades de velocidad; en particular, si el medio fuese el vacío,

$\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$  y  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c$ . La expresión (3.14) se conoce como solución de

d'Alembert y puede comprobarse que, en efecto, es solución de la ecuación (3.13) por sustitución en ella. Debe tenerse en cuenta que (3.14) es una *solución formal*, esto es, que indica cómo ha de ser la *forma general* de la expresión matemática de la solución de (3.13); las expresiones concretas de las funciones  $f_1(s)$  y  $f_2(s)$  dependerán de las condiciones iniciales y de contorno en cada caso.

---

<sup>1</sup> En cualquier caso, la ecuación de onda vectorial no es más que la expresión compacta de tres ecuaciones de onda escalares.

Así, con las suposiciones efectuadas, el campo eléctrico tendrá la forma general

$$\vec{\mathcal{E}} = [f_1(z - vt) + f_2(z + vt)]\hat{x} \quad (3.16)$$

La interpretación física de la solución (3.14) – o de (3.16) – es la de sendas distribuciones de campo que se propagan respectivamente en las direcciones  $+z$  y  $-z$  con velocidad  $v$ , *conservando su forma a medida que la posición de la distribución cambia*, como se indica en la figura 3.1; ahora bien, una distribución espacial de una magnitud física (campo eléctrico en este caso) que se propaga es lo que se conoce como onda. En este caso hablaremos de onda plana porque en todos los puntos de un plano – el plano perpendicular al eje  $Z$ , tal como se han tomado los ejes de coordenadas – el campo toma el mismo valor.

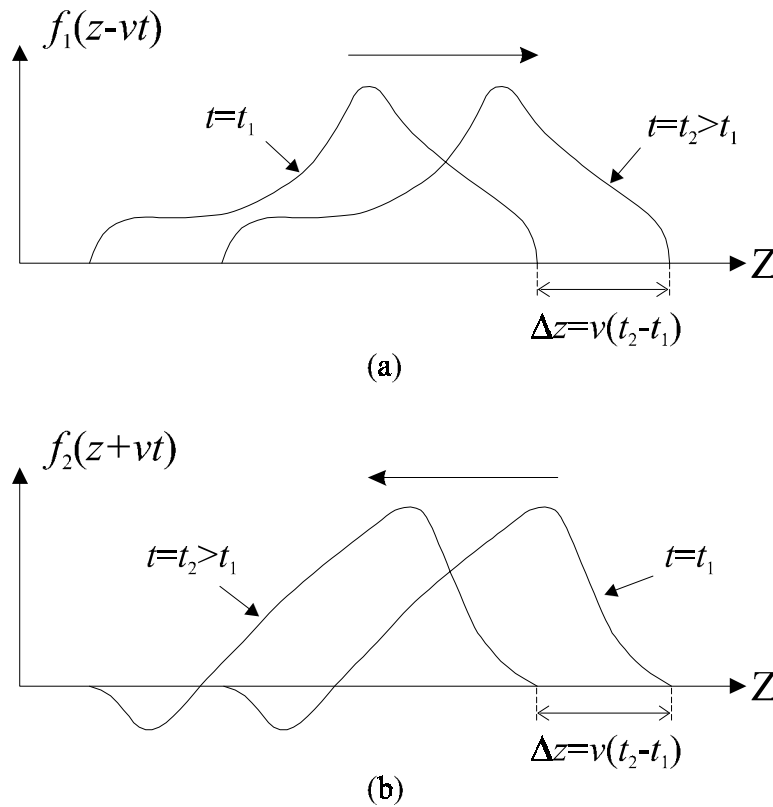


Fig. 3.1 Ondas progresiva (a) y regresiva (b) de campo eléctrico

Como se ha discutido al principio de la sección 3.1, en general no puede existir un campo eléctrico variable con el tiempo, como el dado por la expresión (3.16), sin que exista simultáneamente un campo magnético. Es fácil ver que, en este caso, el campo magnético ha

de ser formalmente similar al campo eléctrico, ya que ambos obedecen a la misma ecuación de onda homogénea (3.10).

Como  $\vec{\mathcal{H}}$  obedece a la misma ecuación que  $\vec{\mathcal{E}}$ , su solución general debe tener las mismas propiedades. Pero además,  $\vec{\mathcal{H}}$  *no es* independiente de  $\vec{\mathcal{E}}$ , porque está relacionado con éste a través de las ecuaciones de Maxwell; así, el comportamiento concreto – y no sólo el general – de  $\vec{\mathcal{H}}$  está ligado con el comportamiento concreto de  $\vec{\mathcal{E}}$ ; en efecto, según la primera de las ecuaciones (3.5)

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad (3.17)$$

Así, sustituyendo (3.16) en (3.17), se llega a

$$[f_1'(z-vt) + f_2'(z+vt)]\hat{y} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad (3.18)$$

donde  $f_1'(s) = \frac{d}{ds}f_1(s)$  y  $f_2'(s) = \frac{d}{ds}f_2(s)$ . Integrando ahora los dos miembros de la expresión (3.18) respecto del tiempo, se obtiene

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu v} [f_1(z-vt) - f_2(z+vt)]\hat{y} \quad (3.19)$$

que tiene una clara relación con la expresión del campo eléctrico (3.16). El producto  $\mu v$  en la expresión (3.19) tiene unidades de impedancia, como se ve fácilmente considerando que las unidades de  $\vec{\mathcal{E}}$  son V/m y las de  $\vec{\mathcal{H}}$  A/m. Por esa razón recibe el nombre de *impedancia intrínseca del medio* y se denota por  $\eta$ . Teniendo en cuenta la definición de  $v$  (3.15), una expresión alternativa de  $\eta$  es

$$\eta = \mu v = \mu \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\Omega)$$

donde, para subrayar el hecho de que  $\eta$  tiene unidades de impedancia, se han indicado explícitamente en el Sistema Internacional. Por ejemplo, en el vacío,  $\mu = \mu_o$ ,  $\epsilon = \epsilon_o$  y  $\eta = \eta_o \approx 376,63 \Omega \approx 120\pi \Omega$ . Así, la expresión (3.19) del campo magnético puede reescribirse



$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\eta} [f_1(z - vt) + f_2(z + vt)] \hat{y} \quad (3.20)$$

El resultado de la integración de la ecuación (3.18) respecto del tiempo se podría haber escrito de manera más general

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\eta} [f_1(z - vt) - f_2(z + vt)] \hat{y} + \vec{h}(\vec{r})$$

donde  $\vec{h}(\vec{r})$  sería un campo magnetostático – ya que, en la región de interés  $\nabla \cdot \vec{h}(\vec{r}) = 0$ ,  $\nabla \times \vec{h}(\vec{r}) = 0$  – y, por lo tanto, desacoplado de  $\vec{\mathcal{E}}$ . Por otra parte, la solución para  $\vec{\mathcal{E}}$  de la ecuación (3.13) podría haberse escrito de forma más general

$$\vec{\mathcal{E}} = [f_1(z - vt) + f_2(z + vt)] \hat{x} + \vec{e}(\vec{r})$$

con  $\vec{e}(\vec{r})$  un campo electrostático –  $\nabla \cdot \vec{e}(\vec{r}) = 0$ ,  $\nabla \times \vec{e}(\vec{r}) = 0$  en la región de interés – y, por lo tanto, desacoplado de  $\vec{\mathcal{H}}$ . Estos términos estáticos no tienen interés para nosotros en este contexto de campos variables con el tiempo y, por lo tanto, los obviaremos en la discusión.

De la expresión del campo magnético (3.19) está claro que también puede expresarse como la combinación de una onda progresiva de campo magnético

$$p_1(z - vt) = \frac{1}{\eta} f_1(z - vt)$$

y una onda regresiva de campo magnético

$$p_2(z + vt) = \frac{1}{\eta} f_2(z + vt)$$

como se ha representado gráficamente en la figura 3.2.

Si ahora calculamos la densidad de flujo de potencia asociado al campo electromagnético de la onda que se acaba de calcular, dado por el vector de Poynting (expresión (3.2)), se encuentra

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}} &= \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} = \\ &= [f_1(z - vt) + f_2(z + vt)] \hat{x} \times \frac{1}{\eta} [f_1(z - vt) + f_2(z + vt)] \hat{y} = \\ &= \frac{1}{\eta} [f_1^2(z - vt) - f_2^2(z + vt)] \hat{z} \end{aligned} \quad (3.21)$$

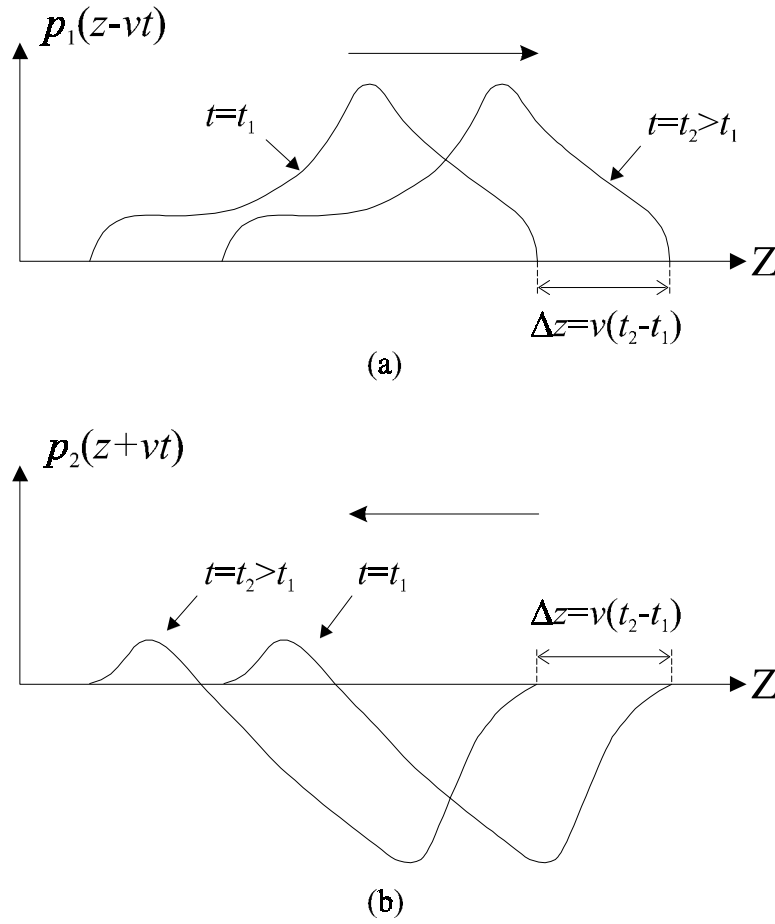


Fig. 3.2 Ondas progresiva (a) y regresiva (b) de campo magnético

La expresión (3.21) admite la interpretación de que el flujo de potencia total es la superposición de un flujo de potencia asociado a la onda electromagnética progresiva en el sentido de ésta dado por

$$\bar{\mathcal{P}}_+ = \frac{1}{\eta} f_1^2(z-vt) \hat{z} = \eta p_1^2(z-vt) \hat{z} \quad (3.22)$$

y de un flujo de potencia asociado a la onda electromagnética regresiva en el sentido de ésta, dado por

$$\vec{\mathcal{P}}_- = -\frac{1}{\eta} f_2^2(z+vt) \hat{z} = -\eta p_2^2(z+vt) \hat{z} \quad (3.23)$$

La figura 3.3 resume gráficamente la relación entre los campos eléctrico y magnético y el vector de Poynting dados respectivamente por las ecuaciones (3.16), (3.20), (3.22) y (3.23). Es de notar, sin embargo, que *una figura no puede en general dar de manera sencilla toda la información contenida en las expresiones matemáticas*. Así, la figura 3.3 intenta mostrar la situación a lo largo del eje  $Z$ ; ahora bien, como se ha supuesto que no hay variación de los campos en  $x$  ni en  $y$ , tal descripción gráfica aplica igualmente a los campos y vector de Poynting a lo largo de cualquier eje paralelo al eje  $Z$ . El intento de completar la representación en este sentido llevaría a un emborronamiento de la figura que la haría inútil.

Se podría haber efectuado un desarrollo similar al que se acaba de efectuar suponiendo  $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_y \hat{y}$ , con lo que se hubiese obtenido  $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_x \hat{x}$ . Una solución más general puede expresarse como combinación de ambos desarrollos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= f_1(z-vt) \hat{x} + g_1(z-vt) \hat{y} + \\ &+ f_2(z+vt) \hat{x} + g_2(z+vt) \hat{y} \\ \vec{\mathcal{H}} &= \frac{1}{\eta} [f_1(z-vt) \hat{y} - g_1(z-vt) \hat{x}] + \\ &+ \frac{1}{\eta} [-f_2(z+vt) \hat{y} + g_2(z+vt) \hat{x}] \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde  $f_1$  y  $g_1$  representan ondas progresivas y  $f_2$  y  $g_2$  ondas regresivas. Sin embargo, si se mantiene la condición de que los campos no tengan dependencia en  $x$  ni en  $y$  ( $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ ), las ecuaciones  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$  y  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0$  imponen que  $\mathcal{E}_z = 0$ ,  $\mathcal{H}_z = 0$ . Puede comprobarse también que los campos eléctrico y magnético dados por (3.24) son perpendiculares entre sí:  $\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0$ .

Asimismo, los desarrollos efectuados partiendo de la ecuación de onda para  $\vec{\mathcal{E}}$  podrían haberse llevado a cabo de manera completamente análoga a partir de la ecuación de onda para  $\vec{\mathcal{H}}$ .

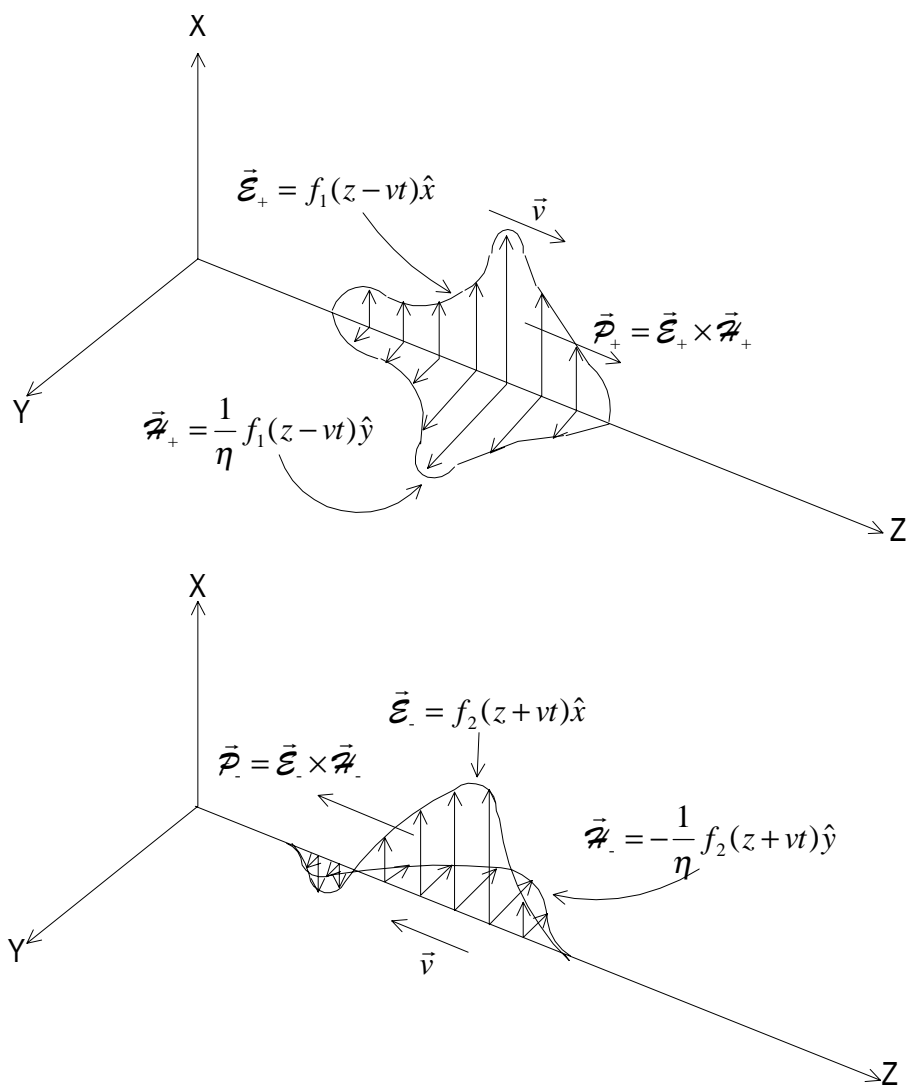


Fig. 3.3 Representación gráfica de la relación entre campo eléctrico, magnético y vector de Poynting

### 3.2 Ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente

A pesar de no ser más que un caso muy particular, y con una expresión matemática especialmente sencilla, de onda electromagnética, las ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente presentan curiosamente un gran interés desde el punto de vista práctico. Eso es debido a una, o a la combinación, de por lo menos las razones siguientes:

- a) Suficientemente lejos de una antena, los campos electromagnéticos que ésta radia son descritos con muy buena aproximación por ondas planas uniformes.
- b) Para muchos tipos de modulación empleados en sistemas de radiocomunicaciones, el ensanchamiento del espectro que la modulación produce alrededor de la frecuencia de la portadora puede despreciarse desde el punto de vista de los fenómenos de radiación y propagación, de manera que, por lo que respecta a los cálculos electromagnéticos, se puede suponer que se está en régimen senoidal permanente.
- c) Una situación general de campos con dependencia temporal senoidal puede descomponerse como superposición de (en general infinitas) ondas planas uniformes.

Antes de empezar a usar la notación matemática fasorial apropiada para describir magnitudes en régimen senoidal permanente, puede resultar útil estudiar la forma particular que toman las expresiones del ejemplo de la sección 3.1 en este caso.

El régimen senoidal permanente supone que la dependencia temporal de los campos debe ser como  $\cos(\omega t + \varphi)$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular o pulsación, de unidades rad/s, relacionada con la frecuencia  $f$  de unidades Hz por  $\omega = 2\pi f$ . Eso implica, remitiéndonos al ejemplo desarrollado en la sección 2, que las funciones  $f_1(z - vt)$  y  $f_2(z + vt)$  que aparecían en las expresiones del campo, ya no pueden ser cualesquiera, sino que las condiciones de contorno están imponiendo que  $f_1$  sea de la forma

$$f_1(z - vt) = A \cos \left[ \frac{1}{v} \omega (vt - z) + \varphi_1 \right] = A \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{v} z + \varphi_1 \right) \quad (3.25 \text{ a})$$

y

$$f_2(z + vt) = B \cos \left[ \frac{1}{v} \omega (vt + z) + \varphi_2 \right] = B \cos \left( \omega t + \frac{\omega}{v} z + \varphi_2 \right) \quad (3.25 \text{ b})$$

Definiendo el número de onda  $k$  (con unidades SI de  $m^{-1}$ ) como

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (3.26)$$

las expresiones (3.25) se escriben

$$f_1(z - vt) = A \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$$

$$f_2(z + vt) = B \cos(\omega t + kz + \varphi_2)$$

Utilizando estas expresiones en las generales (3.24), se llega a las expresiones de ondas planas uniformes progresiva y regresiva en régimen senoidal permanente que se propagan en la dirección de  $Z$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(z, t) = & E_{ox}^+ \cos(\omega t - kz + \varphi_x^+) \hat{x} + E_{oy}^+ \cos(\omega t - kz + \varphi_y^+) \hat{y} + \\ & + E_{ox}^- \cos(\omega t + kz + \varphi_x^-) \hat{x} + E_{oy}^- \cos(\omega t + kz + \varphi_y^-) \hat{y} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}(z, t) = & \frac{1}{\eta} [E_{ox}^+ \cos(\omega t - kz + \varphi_x^+) \hat{y} - E_{oy}^+ \cos(\omega t - kz + \varphi_y^+) \hat{x}] + \\ & + \frac{1}{\eta} [-E_{ox}^- \cos(\omega t + kz + \varphi_x^-) \hat{y} + E_{oy}^- \cos(\omega t + kz + \varphi_y^-) \hat{x}] \end{aligned}$$

donde los superíndices “+” se refieren a ondas que se propagan en el sentido positivo del eje  $Z$  y los superíndice “-” a las que se propagan en el sentido negativo.

Sirviéndonos de la notación fasorial introducida en el capítulo 2, podemos escribir la misma información que contienen las expresiones (3.27) de una manera mucho más compacta; así, el campo eléctrico vendrá dado en forma fasorial por:

$$\vec{E} = \vec{E}_c^+ e^{-jkz} + \vec{E}_c^- e^{jkz} \quad (3.28)$$

con

$$\vec{E}_c^+ = E_{ox}^+ e^{j\varphi_x^+} \hat{x} + E_{oy}^+ e^{j\varphi_y^+} \hat{y} \quad (3.29 \text{ a})$$

$$\vec{E}_c^- = E_{ox}^- e^{j\varphi_x^-} \hat{x} + E_{oy}^- e^{j\varphi_y^-} \hat{y} \quad (3.29 \text{ b})$$

Según se sabe ya, el campo instantáneo puede recuperarse a partir de (3.28) como  $\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re}[\vec{E} e^{j\omega t}]$ . Del mismo modo, el fasor campo magnético será

$$\vec{H} = \vec{H}_c^+ e^{-jkz} + \vec{H}_c^- e^{jkz}$$

con

$$\vec{H}_c^+ = \frac{1}{\eta} E_{ox}^+ e^{j\varphi_x^+} \hat{y} - \frac{1}{\eta} E_{oy}^+ e^{j\varphi_y^+} \hat{x} \quad (3.30 a)$$

$$\vec{H}_c^- = -\frac{1}{\eta} E_{ox}^- e^{j\varphi_x^-} \hat{y} + \frac{1}{\eta} E_{oy}^- e^{j\varphi_y^-} \hat{x} \quad (3.30 b)$$

El ejemplo siguiente muestra una situación idealizada en la que se generan ondas planas uniformes.

**Ejemplo 3.1:** *Campo producido por una distribución laminar infinita de corriente uniforme que depende senoidalmente del tiempo.*

Consideremos una hoja de corriente uniforme infinita, de frecuencia  $f$ . Supongamos que, por comodidad, tomamos los ejes de coordenadas de manera que la hoja esté contenida en el plano  $z=0$  y venga caracterizada por un fasor  $\vec{J}_s = J_{so} \hat{x}$  (Fig. 3.4).

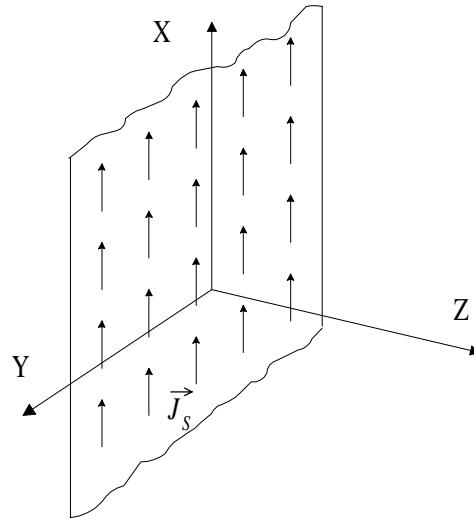


Fig. 3.4 *Distribución laminar de corriente en el plano  $z=0$  dirigida según el eje  $X$*

Como la fuente de los campos (en este caso la distribución laminar de corriente) varía con el tiempo de manera senoidal, en régimen permanente todos los campos deben hacerlo también. Dada la geometría del problema, parece razonable suponer que los campos producidos puedan ser en forma de ondas planas uniforme

que se alejen de la distribución de corriente; si nuestra hipótesis fuese incorrecta, nos daríamos cuenta de ello al no poder satisfacer las condiciones de contorno de los campos en el plano  $z = 0$ . Esto nos lleva a considerar que, para  $z > 0$ , tengamos una onda que se propaga en la dirección del eje  $Z$  y en el sentido de las  $z$  crecientes; en efecto, dada la forma de la distribución de corriente, no hay nada que favorezca la propagación en una dirección dada, y no en otra, distinta de la perpendicular al plano  $z = 0$  (nótese que, aunque en la figura 3.4 las flechas que representan  $\vec{J}_s$  vayan en el sentido de las  $x$  crecientes, esto no es más que una limitación de la representación gráfica, puesto que  $\vec{J}_s$  es un fasor, y la corriente instantánea irá, durante algunas partes del período, en el sentido de la figura, mientras que en otras irá en sentido opuesto. De la misma manera, para  $z < 0$  supondremos que existe una onda que se propaga en el sentido de las  $z$  decrecientes. Formalmente:

Para  $z > 0$

$$\vec{E} = \vec{E}_c^+ e^{-jkz}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_c^+ e^{-jkz}$$

con

$$\vec{E}_c^+ = E_x^+ \hat{x} + E_y^+ \hat{y} \quad (3.31)$$

$$\vec{H}_c^+ = H_x^+ \hat{x} + H_y^+ \hat{y} \quad (3.32)$$

donde  $E_x^+$ ,  $E_y^+$ ,  $H_x^+$  y  $H_y^+$  son constante complejas que, de acuerdo con (3.30 a), se relacionan de la manera siguiente:

$$E_y^+ = -\eta H_x^+ \quad (3.33 \text{ a})$$

$$E_x^+ = \eta H_y^+ \quad (3.33 \text{ b})$$

Para  $z < 0$

$$\vec{E} = \vec{E}_c^- e^{jkz}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_c^- e^{jkz}$$

con

$$\vec{E}_c^- = E_x^- \hat{x} + E_y^- \hat{y} \quad (3.34)$$

$$\vec{H}_c^- = H_x^- \hat{x} + H_y^- \hat{y} \quad (3.35)$$

donde de nuevo  $E_x^-$ ,  $E_y^-$ ,  $H_x^-$  y  $H_y^-$  son constantes que, según (3.30 b) se relacionan mediante



$$E_y^- = \eta H_x^- \quad (3.36 \text{ a})$$

$$E_x^- = -\eta H_y^- \quad (3.36 \text{ b})$$

Las constantes que aparecen en la expresión de las ondas pueden ponerse en relación con la corriente que da lugar a ellas mediante las condiciones de contorno a que deben obedecer los campos en  $z = 0$ . Según lo visto en el capítulo 2, para que la solución tenga sentido físico, en  $z = 0$  hay que exigir

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

donde, en nuestro caso

$$\hat{n} = \hat{z}$$

$$\vec{H}_2 : \text{campo magnético en } z = 0^+$$

$$\vec{H}_1 : \text{campo magnético en } z = 0^-$$

$$\vec{E}_2 : \text{campo eléctrico en } z = 0^+$$

$$\vec{E}_1 : \text{campo eléctrico en } z = 0^-$$

Así tendremos

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_c^+$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_c^-$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_c^+$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_c^-$$

Teniendo en cuenta las formas de  $\vec{E}_c^+$ ,  $\vec{E}_c^-$ ,  $\vec{H}_c^+$  y  $\vec{H}_c^-$  dadas por las expresiones (3.31), (3.34), (3.32) y (3.35), las relaciones (3.33) y (3.36), y las condiciones de contorno que deben satisfacer los campos, se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$H_x^+ - H_x^- = 0$$

$$H_y^+ - H_y^- = -J_{so}$$

$$H_x^+ + H_x^- = 0$$

$$H_y^+ + H_y^- = 0$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}
 H_y^+ &= -\frac{J_{so}}{2} \\
 H_y^- &= \frac{J_{so}}{2} \\
 H_x^+ &= H_x^- = 0
 \end{aligned}$$

Se ha conseguido satisfacer las condiciones de contorno; así pues, las hipótesis efectuadas al principio eran correctas y, efectivamente, el campo para  $z > 0$  tiene la forma de una onda plana uniforme que se propaga según las  $z$  crecientes:

$$\begin{aligned}
 \vec{H} &= -\frac{J_{so}}{2} e^{-jkz} \hat{y} \\
 \vec{E} &= -\eta \frac{J_{so}}{2} e^{-jkz} \hat{x}
 \end{aligned}$$

mientras que para  $z < 0$  tiene la forma de una onda plana uniforme que se propaga según las  $z$  decrecientes:

$$\begin{aligned}
 \vec{H} &= \frac{J_{so}}{2} e^{jkz} \hat{y} \\
 \vec{E} &= -\eta \frac{J_{so}}{2} e^{jkz} \hat{x}
 \end{aligned}$$

### 3.2.1 Ecuación de onda en régimen senoidal permanente

La descripción matemática de ondas planas en régimen senoidal permanente que se propagan en direcciones arbitrarias puede sistematizarse a partir del estudio de las soluciones de la ecuación de onda en régimen senoidal permanente. En el apartado 3.1 se habían escrito las ecuaciones de onda a que obedecen los campos eléctrico y magnético instantáneos en una zona libre de fuentes de un medio lineal e isótropo. Por ejemplo, para el campo eléctrico se tenía

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.8)$$

Siguiendo la regla explicada en el capítulo 2 para escribir ecuaciones de los fasores a partir de las ecuaciones de los campos instantáneos, la ecuación a la que obedece el fador campo eléctrico es

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu \epsilon \omega^2 \vec{E} = 0 \quad (3.37)$$

Teniendo en cuenta la definición de la velocidad de propagación (3.15) y la del número de onda (3.26), éste puede ponerse

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

con lo que la ecuación (3.37) se reescribe

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (3.38)$$

Evidentemente, el campo  $\vec{H}$  obedece también a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

### 3.2.2 Solución correspondiente a la onda plana uniforme

Una posible solución de la ecuación de Helmholtz a la que obedece  $\vec{E}$  es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.39)$$

donde

$\vec{E}_c$  es un vector, en general complejo, uniforme (que no depende de  $\vec{r}$ );

$\vec{r}$  es el vector de posición ( $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ ) del punto en que se evalúa el campo;

$\vec{k}$  es el llamado *vector de propagación*, o de onda; es un vector uniforme de unidades  $\text{m}^{-1}$  cuyo módulo es el número de onda  $k$ , y que, por tanto, puede expresarse como  $\vec{k} = k\hat{k}$ , donde  $\hat{k}$  es un vector unitario en principio arbitrario.

Como se discutirá en lo que sigue, esta solución de la ecuación de Helmholtz (3.38), corresponde a una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente, que se propaga en el sentido dado por  $\hat{k}$ . Evidentemente, el estudio de la forma de los campos de una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente podría haberse empezado por  $\vec{H}$  en vez de por  $\vec{E}$ , y la elección de hacerlo a partir del campo eléctrico ha sido completamente arbitraria.

**Ejemplo 3.2** *Comprobación de que la expresión (3.39) es efectivamente una solución de la ecuación (3.38).*

Para ello comprobaremos que cuando la expresión se sustituye en la ecuación, ésta se convierte en una identidad. Así pues, sustituiremos  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$  en el primer miembro de (3.38):

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = \nabla^2 \vec{E}_c e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_c \nabla^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

donde se ha tenido en cuenta que el operador laplaciana no actúa sobre el vector uniforme  $\vec{E}_c$ . A continuación hay que calcular  $\nabla^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ , para lo que notaremos que la laplaciana de un campo escalar no es más que la divergencia de su gradiente:

$$\nabla^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \nabla \cdot \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Calcularemos, pues, en primer lugar  $\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ ; para ello utilizaremos por comodidad y sencillez coordenadas cartesianas, teniendo en cuenta que

$$\vec{k} = k \hat{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$$

donde  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  son las componentes cartesianas de  $\vec{k}$ . Así, si escribimos también el vector de posición  $\vec{r}$  utilizando sus componentes cartesianas descritas en términos de coordenadas cartesianas

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

tendremos que el producto escalar  $\vec{k} \cdot \vec{r}$ , que aparece en el argumento de la exponencial cuyo gradiente queremos calcular, se escribe

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

A partir de ahí es elemental el cálculo del gradiente:

$$\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \nabla e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} = -j(k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (3.40)$$

Así,

$$\nabla^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \nabla \cdot \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \nabla \cdot (-j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})$$

Ahora bien,  $\vec{k}$  es un vector y  $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$  un escalar. Si tenemos en cuenta la relación general de cálculo vectorial

$$\nabla \cdot (a\vec{b}) = \nabla a \cdot \vec{b} + a\nabla \cdot \vec{b} \quad (3.41)$$

y que  $\vec{k}$  es uniforme, la expresión de  $\nabla \cdot (-j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})$  queda

$$\nabla \cdot (-j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) = -j\vec{k} \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Pero  $\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$  ya fue calculado unas cuantas líneas más arriba, y utilizando el resultado obtenido, llegamos finalmente al cálculo de la laplaciana

$$\begin{aligned} \nabla^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} &= \nabla \cdot \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \nabla \cdot (-j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) = -j\vec{k} \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \\ &= -j\vec{k} \cdot (-j\vec{k}) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -k^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned}$$

Así,  $\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = -k^2 \vec{E}_c e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ , y es evidente que la ecuación de Helmholtz (3.38) se convierte en una identidad.

Si bien se ha comprobado en el ejemplo anterior que el campo dado por la expresión (3.39) es solución de la ecuación de Helmholtz, ello no asegura que ese campo corresponda a una solución de las ecuaciones de Maxwell en una zona desprovista de fuentes; para que sí lo sea es preciso asegurar que, de acuerdo con ley de Gauss, en una zona de un medio lineal desprovisto de fuentes, se satisfaga<sup>1</sup>

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.42)$$

Vamos a ver que eso impone una condición sobre el vector uniforme  $\vec{E}_c$ , a saber, que  $\hat{k} \cdot \vec{E}_c = 0$ , donde  $\hat{k}$  es el vector unitario en la dirección y sentido del vector de onda  $\vec{k}$ . Para ello sustituiremos la expresión del campo eléctrico dada por (3.39) en (3.42):

<sup>1</sup> La razón es que, en el proceso para llegar a la ecuación de Helmholtz, se ha simplificado  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$  (ver la expresión (3.7); el hecho de que la misma se refiera a un campo instantáneo y no a un campo fasorial es irrelevante); para ello se consideró que, puesto que  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , efectivamente  $\nabla \nabla \cdot \vec{E} = 0$ . Ahora bien, podría darse  $\nabla \nabla \cdot \vec{E} = 0$ , sin que fuese nula la divergencia de  $\vec{E}$ , por lo que hay que asegurar esto último. En el ejemplo para dependencia temporal arbitraria del apartado 3.1, la suposición a priori de que las derivadas en  $x$  y en  $y$  sean nulas y que no haya componente en  $z$  garantiza  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ .

$$\nabla \cdot (\vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) = 0 \quad (3.43)$$

Teniendo en cuenta que  $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$  es un escalar, que  $\vec{E}_c$  es un vector uniforme, de manera que  $\nabla \cdot \vec{E}_c = 0$ , aplicando la relación (3.41) al miembro de la izquierda de (3.43), y teniendo en cuenta la relación (3.40) se obtiene

$$\nabla \cdot (\vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) = \nabla e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \vec{E}_c = -j\vec{k} \cdot \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0$$

El hecho de que  $j\vec{k} \cdot \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0$  independientemente de  $\vec{r}$  implica que debe cumplirse  $\vec{k} \cdot \vec{E}_c = 0$ , y, por lo tanto, también

$$\hat{k} \cdot \vec{E}_c = 0 \quad (3.44)$$

En el ejemplo siguiente se identifica el vector  $\hat{k}$  en la expresión del campo eléctrico y se comprueba que ésta corresponde a una onda plana uniforme, ya que satisface la relación (3.44).

**Ejemplo 3.3** Comprobar que el campo eléctrico  $\vec{E} = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$  corresponde a una onda plana uniforme.

Para proceder a la comprobación, hay que verificar que la expresión anterior puede reducirse a la forma general  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$  y que  $\vec{k} \cdot \vec{E}_c = 0$  o  $\hat{k} \cdot \vec{E}_c = 0$ .

Identificando términos vemos que

$$\vec{E}_c = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})$$

Además, puesto que, en general

$$\vec{k} = k\hat{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$$

se tiene que

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

De modo que el exponente debe ser

$$k_x x + k_y y + k_z z = \sqrt{2}\pi y + \sqrt{2}\pi z$$

Identificando coeficientes en la expresión anterior se llega a que

$$k_x = 0$$

$$k_y = \sqrt{2\pi}$$

$$k_z = \sqrt{2\pi}$$

luego

$$\vec{k} = \sqrt{2\pi} \hat{y} + \sqrt{2\pi} \hat{z}$$

Es elemental verificar ahora que, en efecto,  $\vec{k} \cdot \vec{E}_c = 0$  y, por lo tanto, la expresión de partida corresponde al campo eléctrico de una onda plana uniforme.

### 3.2.3 Características de la onda plana uniforme

Cuando se tiene experiencia en el manejo de la notación fasorial para vectores cuyas componentes dependen del tiempo senoidalmente, las propiedades físicas del campo instantáneo pueden deducirse directamente de la inspección del fasor. En el nivel presente es, no obstante, ilustrativo “bajar”, a partir de la expresión fasorial, hasta la expresión del campo instantáneo, para analizar las características de la onda plana uniforme y poner de manifiesto el significado físico de algunos parámetros que se definirán.

Según se vio en el capítulo 2, el campo instantáneo se obtiene a partir del campo fasorial multiplicando éste por  $e^{j\omega t}$  y tomando la parte real del producto. Para el campo eléctrico instantáneo se tendrá, pues,  $\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}]$ . Si el campo obedece a la expresión de una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente (3.39), tendremos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{j\omega t}] \quad (3.45)$$

Ahora bien,  $\vec{E}_c$  puede escribirse de manera explícita

$$\vec{E}_c = E_{ox} e^{j\varphi_x} \hat{x} + E_{oy} e^{j\varphi_y} \hat{y} + E_{oz} e^{j\varphi_z} \hat{z} \quad (3.46)$$

donde  $E_{oi}$  y  $\varphi_i$  ( $i = x, y, z$ ) son respectivamente un real positivo y un real que corresponden a los módulos y las fases de las componentes de  $\vec{E}_c$ ; así, sustituyendo (3.46) en (3.45) se obtiene

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = E_{ox} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x) \hat{x} + E_{oy} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_y) \hat{y} + E_{oz} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_z) \hat{z}$$

Para ver que este campo representa *ondas que se propagan en la dirección de  $\hat{k}$* , representaremos una componente de  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  a lo largo de un eje  $L$  paralelo a  $\vec{k}$  (Fig. 3.5). Si sobre ese eje definimos un vector de posición  $\vec{r}_o$  que tomamos como el origen de la coordenada  $l$  que nos define la posición sobre  $L$ , el vector de posición  $\vec{r}$  de un punto sobre el eje vendrá dado por  $\vec{r} = \vec{r}_o + l\hat{k}$ . Así, para  $\vec{r}$  a lo largo de la dirección del eje  $L$ , una componente  $i$  cualquiera ( $i = x, y, z$ ) del campo vendrá dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(\vec{r}, t) &= E_{oi} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot (\vec{r}_o + l\hat{k}) + \varphi_i) = E_{oi} \cos(\omega t - kl - \vec{k} \cdot \vec{r}_o + \varphi_i) = \\ &= E_{oi} \cos\left[\omega\left(t - \frac{k}{\omega}l\right) - \vec{k} \cdot \vec{r}_o + \varphi_i\right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

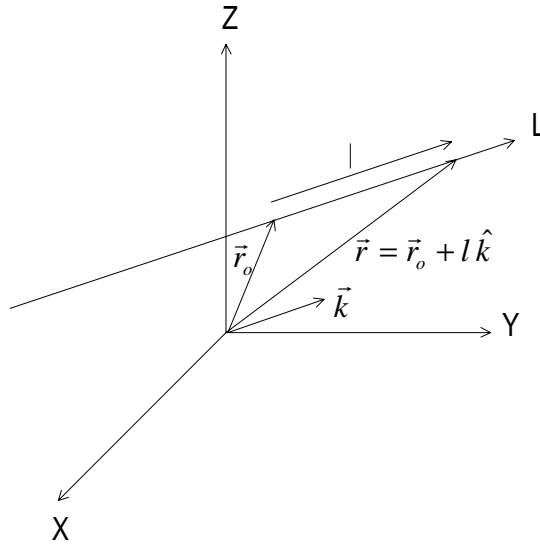


Fig. 3.5 Sistema de coordenadas y convenios de notación utilizados en el estudio de las características de las ondas planas uniformes



Ahora bien, esta expresión tiene la forma general  $f\left(t - \frac{l}{v}\right)$ , con  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$  (ver expresión (3.26)), y corresponde, por tanto (ver apartado 3.1), a una *onda que se propaga en el sentido de las  $l$  crecientes con dicha velocidad*. En el apartado 3.1, donde no se especificaba dependencia temporal concreta, no se podía determinar la forma de la función  $f\left(t - \frac{l}{v}\right)$ ; vemos así que el régimen senoidal permanente fuerza a que esa forma sea senoidal. En la figura 3.6 se representa una componente del campo en dos instantes de tiempo sucesivos. Nótese el paralelismo de esta figura con la figura 3.1 (a) y con la figura 3.2 (a): una distribución de campo que se desplaza hacia la derecha de las figuras; en el caso de la figura 3.1 (a) y de la figura 3.2 (a) se representó una distribución genérica, mientras que en la figura 3.6 la suposición de régimen senoidal permanente impone forma senoidal a la distribución: es decir, la dependencia temporal senoidal da lugar, en este caso, a una dependencia espacial también senoidal. De hecho, de la inspección del tercer miembro de las igualdades (3.47) es evidente que, si el período temporal es  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  s, el período espacial será

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (m) \quad (3.48)$$

tal como se ha indicado en la figura 3.6. El período espacial se llama *longitud de onda*, y representa la distancia entre dos puntos en una dirección paralela a la de propagación entre los que la diferencia de fase (argumento del coseno en la expresión (3.47)) de la onda es  $2\pi$  – lo que, desde el punto de vista físico, dada la periodicidad de las funciones

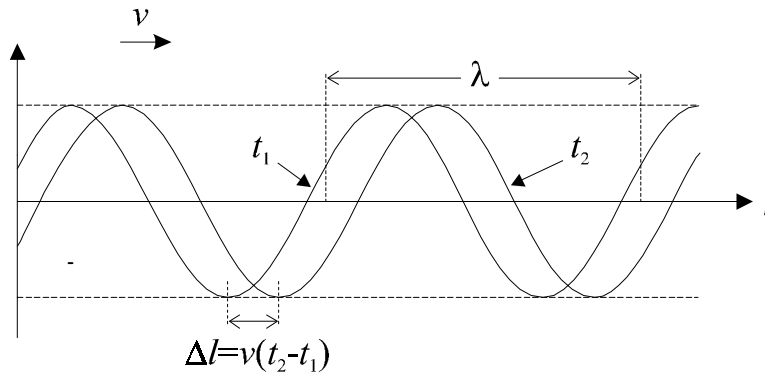


Fig. 3.6 Representación gráfica de una componente del campo a lo largo de la dirección  $L$  en dos instantes de tiempo

trigonométricas, supone el mismo valor de campo. Teniendo en cuenta la definición (3.26) del número de onda  $k$  y la de la velocidad de propagación  $v$  (3.15), sustituyéndolas en la definición (3.48) de la longitud de onda y teniendo en cuenta que la frecuencia  $f$  y la frecuencia angular (pulsación)  $\omega$  se relacionan mediante  $\omega = 2\pi f$ , se obtiene una expresión alternativa para la longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{v}{f} \quad (3.49)$$

Siguiendo con el paralelismo con la situación analizada en el apartado 3.1 y al principio de 3.2, notaremos que, puesto que el campo que estamos estudiando cumple, según se ha visto,  $\vec{E}_c \cdot \hat{k} = 0$ , y  $\hat{k}$  es un vector real, tendremos

$$\text{Re}[\hat{k} \cdot \vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}] = \hat{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.50)$$

de donde es evidente que, análogamente a lo que sucedía en esos casos, en que la dirección de propagación era según  $Z$ , el *campo eléctrico es* también ahora *perpendicular a la dirección de propagación*, definida en este caso por el vector  $\hat{k}$ .

En el ejemplo que sigue se encuentra la dirección de propagación y la longitud de onda a partir de la expresión del campo eléctrico.

**Ejemplo 3.4** *Determinar la dirección de propagación y la longitud de onda de la onda plana uniforme cuyo campo eléctrico es  $\vec{E} = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$ .*

En el ejemplo 3.3 ya se comprobó que dicho campo corresponde efectivamente al de una onda plana uniforme. Se determinó al mismo tiempo que  $\vec{k} = \sqrt{2}\pi \hat{y} + \sqrt{2}\pi \hat{z}$ . De esta expresión, es inmediato que  $k = 2\pi$ , y, por lo tanto, el vector unitario que indica la dirección y sentido de propagación es

$$\hat{k} = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z}$$

En la figura 3.7 se representa la relación entre  $\hat{k}$  y un frente de onda, paralelo al eje  $X$  y que corta a los ejes  $Y$  y  $Z$  a  $45^\circ$ .

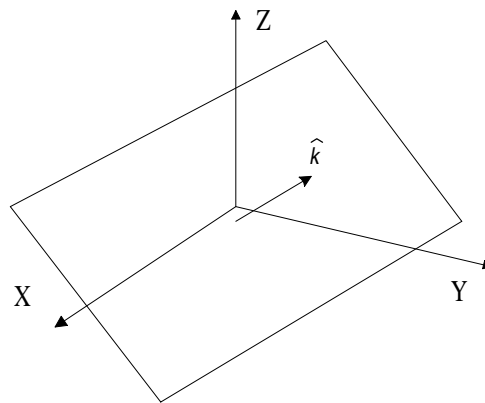


Fig. 3.7 Relación entre  $\hat{k}$  y un frente de onda para la onda plana uniforme del ejemplo 3.4

La longitud de onda es, según (3.48)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Si las unidades de  $x$  e  $y$  en la expresión de  $\vec{E}$  vienen dadas en  $m$ , las de  $k$  serán  $m^{-1}$ , y tendremos

$$\lambda = 1\,m$$

Si la propagación tiene lugar en el vacío,  $v = c = 3 \times 10^8\,m/s$ , con lo que la frecuencia del generador que está dando lugar a la onda es

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8\,m/s}{1\,m} = 3 \times 10^8\,Hz = 300\,MHz$$

En el ejemplo siguiente efectuaremos un ejercicio recíproco del anterior: a partir de la especificación de la dirección de propagación y de la frecuencia de una onda plana uniforme, determinaremos el vector de onda.

**Ejemplo 3.5** Una onda plana uniforme de frecuencia 300 MHz se propaga en el vacío en una dirección que forma con los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  ángulos  $\alpha_x = 45^\circ$ ,  $\alpha_y = 60^\circ$  y  $\alpha_z = 60^\circ$  respectivamente (Fig. 3.8). Determinar el vector de propagación.

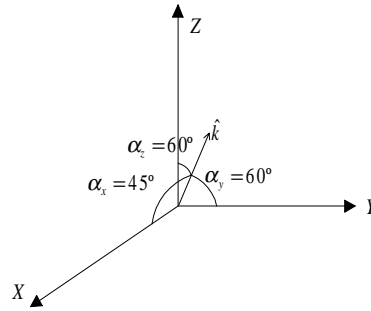


Fig. 3.8 Dirección de propagación especificada por el enunciado del ejemplo 3.5

Comprobamos en primer lugar que  $\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1$ , como debe ser para una dirección bien especificada. Entonces

$$\hat{k} = \cos \alpha_x \hat{x} + \cos \alpha_y \hat{y} + \cos \alpha_z \hat{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} + \frac{1}{2} \hat{z}$$

El módulo del vector de onda puede calcularse, según (3.26), como

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v}$$

Como la onda se propaga en el vacío,  $v = c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , y como la frecuencia es  $f = 300 \text{ MHz} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , tenemos

$$k = \frac{2\pi \times 3 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 2\pi \text{ m}^{-1}$$

de donde el vector de onda es

$$\vec{k} = k \hat{k} = \sqrt{2\pi} \hat{x} + \pi \hat{y} + \pi \hat{z} \quad m^{-1}$$

La forma del campo eléctrico sería

$$\vec{E} = \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \vec{E}_c e^{-j\pi(\sqrt{2}x+y+z)}$$

con  $\vec{E}_c$  que satisface  $\vec{k} \cdot \vec{E}_c = 0$ .

En cuanto al campo magnético  $\vec{H}$ , como ya se comentó, obedece también a la ecuación de Helmholtz tridimensional, y, de hecho, hubiésemos podido iniciar el estudio de las ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente a partir de él, en vez de haberlo hecho a partir de  $\vec{E}$ , como también se comentó. No obstante, una vez hemos empezado el estudio con  $\vec{E}$ , y supuesta ya determinada la forma concreta de éste que corresponde a una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente, podemos calcular  $\vec{H}$  a partir de  $\vec{E}$  utilizando las ecuaciones de Maxwell, como ya se hizo en el estudio del apartado 3.1 para ondas con dependencia temporal arbitraria. En efecto, según la ley de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

de donde

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}$$

y sustituyendo en esta última expresión la del campo eléctrico correspondiente a la onda plana uniforme (3.39), se tiene

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times (\vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (3.51)$$

Ahora bien, según el cálculo vectorial, el rotacional del producto de un escalar por un vector puede escribirse

$$\nabla \times (a\vec{b}) = \nabla a \times \vec{b} + a \nabla \times \vec{b} \quad (3.52)$$

Aplicando este resultado al rotacional del producto del escalar  $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$  por el vector  $\vec{E}_c$  en (3.51), y teniendo en cuenta que  $\vec{E}_c$  es un vector uniforme, se obtiene

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu} \nabla e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \times \vec{E}_c$$

Utilizando ahora el resultado (3.40) en la expresión anterior se llega a

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\vec{k}}{\omega\mu} \times \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.53)$$

Teniendo en cuenta que  $\vec{k} = k\hat{k} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{k}$ , y que  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  el campo magnético puede escribirse de manera equivalente

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.54)$$

o también, puesto que estamos partiendo de que  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$ ,

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E} \quad (3.55)$$

Cualquiera de las expresiones (3.53) a (3.55) puede utilizarse para calcular el campo magnético de una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente si se conoce su campo magnético. El ejemplo siguiente ilustra el cálculo del campo magnético de una onda plana uniforme a partir de su campo eléctrico.

**Ejemplo 3.6** *El campo eléctrico de una onda plana uniforme es  $\vec{E} = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$ . Calcular el campo magnético correspondiente.*

Este es el campo eléctrico que ya aparecía en los ejemplos 3.3 y 3.4, del que sabemos que efectivamente corresponde a una onda plana uniforme que se propaga en una dirección y sentido identificados por el vector  $\hat{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$ . Así, el campo magnético puede encontrarse directamente por aplicación de la expresión (3.55):

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{E_o}{\eta} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z} \right) \times (\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z}) e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)} = \\ &= -\frac{E_o}{\eta} \frac{\sqrt{2}}{2} (2j\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}) e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)} \end{aligned}$$

Por otra parte, del examen de (3.54) está claro que, para una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_c e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (3.56)$$

donde  $\vec{H}_c$  es un vector uniforme dado por

$$\vec{H}_c = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}_c$$

(a título ilustrativo, en el resultado del ejemplo 3.6,  $\vec{H}_c = -\frac{E_o}{\eta} \frac{\sqrt{2}}{2} (2j\hat{x} - \hat{y} + \hat{z})$ ).

Utilizando la identidad vectorial

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

está claro que

$$\hat{k} \cdot \vec{H}_c = \hat{k} \cdot \left( \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}_c \right) = \vec{E}_c \cdot \left( \hat{k} \times \frac{\hat{k}}{\eta} \right) = 0 \quad (3.57)$$

ya que el producto vectorial de dos vectores con la misma dirección es nulo.

Así, de (3.56), vemos que el campo magnético de la onda plana uniforme en régimen senoidal permanente tiene la misma forma general que el campo eléctrico, y la expresión (3.57) muestra asimismo que el vector uniforme  $\vec{H}_c$  de la expresión (3.56) cumple una relación análoga a la ya discutida  $\hat{k} \cdot \vec{E}_c = 0$ . Por lo tanto, el campo magnético presentará propiedades análogas a las estudiadas para el campo eléctrico y, en particular, el campo instantáneo  $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})$  será perpendicular en todo momento a la dirección de propagación:

$$\hat{k} \cdot \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.58)$$

Además

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{H} e^{j\omega t}] = \text{Re}\left[\frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E} e^{j\omega t}\right] = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \quad (3.59)$$

luego el campo magnético instantáneo  $\vec{\mathcal{H}}$  es *perpendicular en todo momento* al campo eléctrico instantáneo  $\vec{\mathcal{E}}$ . De hecho, la expresión (3.59) está diciendo que los vectores  $[\hat{k}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}]$  están definiendo un triedro trirectángulo positivo. Esta situación se describe

gráficamente en la figura 3.9. Además, como  $\hat{k}$  es perpendicular a  $\vec{\mathcal{E}}$ , de (3.59) resulta que, en todo instante

$$|\vec{\mathcal{H}}| = \frac{|\vec{\mathcal{E}}|}{\eta}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{|\vec{\mathcal{E}}|}{|\vec{\mathcal{H}}|} = \eta \quad (3.60)$$

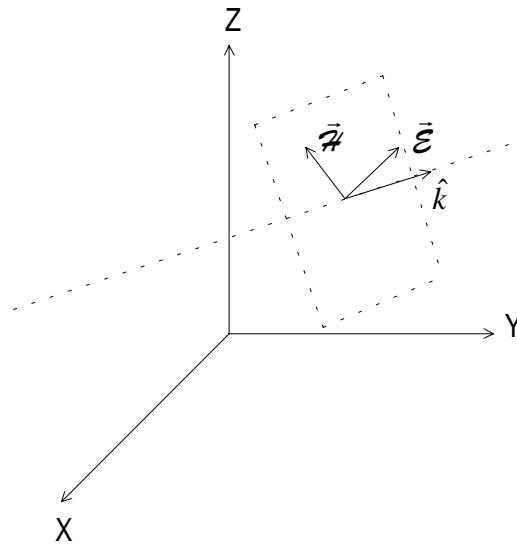


Fig. 3.9 Representación gráfica del campo eléctrico y magnético instantáneos de una onda plana uniforme en un punto e instante dados

En el caso de que el campo que se hubiese calculado en primer lugar hubiese sido el magnético, el campo eléctrico puede deducirse a partir de aquél siguiendo un procedimiento totalmente paralelo al que se siguió para deducir el campo magnético a partir del eléctrico. En efecto, en puntos donde no hay densidad de corriente, como en el caso que estamos considerando, la ley de Ampère-Maxwell se reduce a

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$$

de donde

$$\vec{E} = -\frac{j}{\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H} \quad (3.61)$$



Si el campo magnético corresponde al de una onda plana uniforme sabemos que su forma es

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.56)$$

con  $\vec{H}_c$  un vector uniforme. Sustituyendo en (3.61) y utilizando (3.52) y (3.40) se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{j}{\omega\epsilon} \vec{H}_c \times \nabla e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \eta \vec{H}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \times \hat{k} = \\ &= \eta \vec{H} \times \hat{k} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Como ejercicio, el lector puede comprobar que, si parte de la expresión del campo magnético a que se llegó en el ejemplo 3.6, aplicando la expresión del último miembro de (3.62) recuperará el campo eléctrico de los enunciados de los ejemplos 3.3, 3.4 y 3.6.

Utilizando el hecho de que  $\vec{E} \cdot \hat{k} = 0$  y  $\vec{H} \cdot \hat{k} = 0$  y las propiedades del triple producto vectorial, es muy fácil pasar de la expresión de  $\vec{E}$  en función de  $\vec{H}$  a la expresión de  $\vec{H}$  en función de  $\vec{E}$  y viceversa, como se discute en el siguiente ejercicio.

**Ejemplo 3.7.** *Deducción de la expresión de  $\vec{E}$  en función de  $\vec{H}$  a partir de la expresión de  $\vec{H}$  en función de  $\vec{E}$  para una onda plana uniforme.*

Partimos de que, para una onda plana uniforme

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E} \quad (3.55)$$

Multiplicando vectorialmente los dos miembros de la expresión anterior por  $\hat{k}$  se tiene

$$\hat{k} \times \vec{H}(\vec{r}) = \hat{k} \times \left( \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E} \right)$$

y utilizando la identidad

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (3.63)$$

se llega a

$$\hat{k} \times \vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} (\hat{k} \cdot \vec{E}) - \vec{E} (\hat{k} \cdot \frac{\hat{k}}{\eta}) = -\frac{\vec{E}}{\eta}$$

Ahora bien,  $\hat{k} \cdot \vec{E} = 0$  y  $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$  de donde

$$\vec{E} = -\eta \hat{k} \times \vec{H}(\vec{r}) = \eta \vec{H}(\vec{r}) \times \hat{k}$$

como se había deducido en (3.62).

El mismo procedimiento puede emplearse para encontrar la expresión de  $\vec{H}$  en función de  $\vec{E}$  a partir de la de  $\vec{E}$  en función de  $\vec{H}$ .

Las ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente pueden utilizarse para introducir una serie de elementos terminológicos que podrán ser utilizados más adelante en otras situaciones más complejas. Por ejemplo:

\* *Frente de onda*: se entiende, en general, por frente de onda el lugar geométrico de los puntos del espacio en que una componente cualquiera del campo tiene la *misma fase* en un instante dado. Siendo la fase el argumento de las funciones seno o coseno que aparecen en la expresión de las componentes del campo, la condición de fase constante es que

$$\theta(\vec{r}, t) = \omega t - \alpha(\vec{r}) = Cte$$

En el caso particular de una onda plana uniforme,  $\alpha(\vec{r}) = -\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi$ , con  $\varphi$  constante, por lo que la condición anterior se convierte en

$$\theta(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi = Cte \quad (3.64)$$

Como el frente de onda se define a partir de una fase uniforme en un *instante dado*,  $t$  es una constante en la expresión anterior; asimismo, como en una onda plana uniforme  $\varphi$  es también constante, resulta que un frente de onda viene definido por la condición

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = Cte$$

que puede ponerse de manera más explícita, utilizando la definición de producto vectorial, como

$$k_x x + k_y y + k_z z = Cte$$

para ver claramente que se trata de la ecuación de un plano. Incidentalmente, ésta es precisamente la causa de la denominación de *onda plana*. El adjetivo *uniforme* viene de que, sobre un frente de onda, el campo es uniforme (no varía de un punto a otro). En el capítulo 5, dedicado a propagación guiada, se verán ondas que son planas, pero no uniformes. Al tratar de radiación en el capítulo 6 aparecerán ondas esféricas (cuyos frentes de onda son esferas).

\* *Velocidad de fase en una dirección dada  $\hat{u}$* : si ahora se deja transcurrir el tiempo, deberemos desplazarnos para que, a medida que el tiempo cambia, la fase permanezca constante. La velocidad de fase en una dirección dada es la velocidad ficticia a la que un hipotético observador debería desplazarse en esa dirección para “ver” siempre la misma fase.

En el caso de una onda plana uniforme, la fase de una componente arbitraria del campo viene dada por (3.64). Si la dirección elegida es la definida por  $\hat{k}$ , los vectores de la posición del observador hipotético vendrán dados por (Fig. 3.5)

$$\vec{r} = \vec{r}_o + l \hat{k}$$

donde  $\vec{r}_o$  es el vector de posición inicial y  $l$  es la coordenada en la dirección  $\hat{k}$  a partir de  $\vec{r}_o$ , de manera que la fase en función del tiempo y de  $l$  vendrá dada por

$$\theta(l, t) = \omega t - kl - \vec{k} \cdot \vec{r}_o + \varphi = Cte \quad (3.65)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\vec{k} \cdot \hat{k} = k$ . Para permanecer en el mismo frente de onda,  $l$  debe cambiar de tal manera que  $\theta$  sea constante en función del tiempo, es decir  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ .

Ahora bien, teniendo en cuenta la expresión (3.65) de la fase, la condición de derivada temporal nula resulta en

$$\omega - k \frac{dl}{dt} = 0$$

Pero  $\frac{dl}{dt}$  es precisamente la velocidad  $v_{\hat{k}}$  a la que hay que desplazarse a lo largo de la dirección  $\hat{k}$  para permanecer sobre el frente de onda, de manera que

$$v_{\hat{k}} = \frac{dl}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$$

Es decir, los frentes de onda, perpendiculares a la dirección  $\hat{k}$ , se propagan paralelamente a sí mismos con velocidad  $v$ . Además, obviamente, la distancia entre dos frentes de onda sucesivos correspondiente a fases idénticas (salvo un término aditivo  $2\pi$ ) es la longitud de onda  $\lambda$ .

Supongamos ahora que la dirección elegida es definida por  $\hat{u} \neq \hat{k}$  (Fig. 3.10). Ahora, para un observador que se desplace desde el punto de referencia en esa dirección

$$\vec{r} = \vec{r}_o + l \hat{u}$$

donde  $l$  es ahora la coordenada según  $\hat{u}$ . La fase del campo será ahora, sustituyendo la expresión anterior en (3.64),

$$\theta(l, t) = \omega t - l \vec{k} \cdot \hat{u} - \vec{k} \cdot \vec{r}_o + \phi$$

y la condición para permanecer sobre el mismo frente de onda a medida que transcurre el tiempo es

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - \vec{k} \cdot \hat{u} \frac{dl}{dt} = 0$$

donde ahora  $\frac{dl}{dt}$  es la velocidad  $v_{\hat{u}}$  a la que debería desplazarse según  $\hat{u}$  el hipotético observador. Así

$$v_{\hat{u}} = \frac{dl}{dt} = \frac{\omega}{\vec{k} \cdot \hat{u}} = \frac{\omega}{k \hat{k} \cdot \hat{u}}$$

que teniendo en cuenta las definiciones (3.26) de  $k$  y (3.15) de  $v$  puede también escribirse

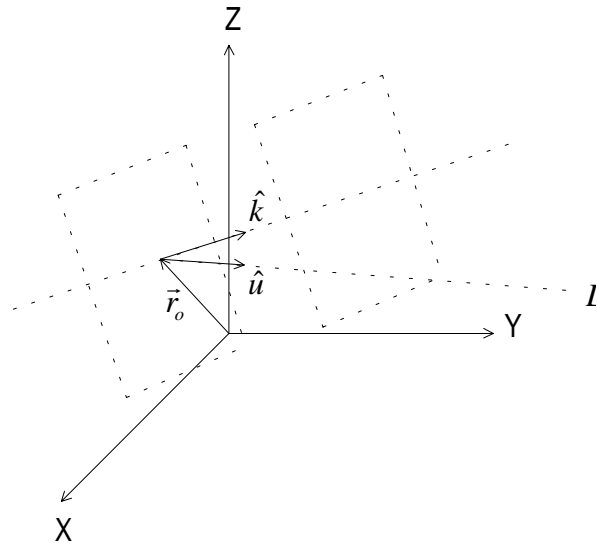


Fig. 3.10 Representación geométrica para el cálculo de la velocidad de fase en la dirección definida por  $\hat{u}$

$$v_{\hat{u}} = \frac{1}{\hat{k} \cdot \hat{u} \sqrt{\mu \epsilon}}$$

Puesto que  $\hat{k} \cdot \hat{u} \leq 1$ , resulta que  $v_{\hat{u}} \geq v$ . Esto no contraviene ningún principio relativista, puesto que  $v_{\hat{u}}$  no corresponde a la velocidad de ningún ente físico.

El concepto de velocidad de fase puede parecer artificioso en el contexto de las ondas planas uniformes y, ciertamente, no hubiese sido imprescindible introducirlo para la inteligibilidad del resto del presente capítulo; su utilidad aparecerá claramente en el capítulo 5, dedicado a propagación guiada, en relación con conceptos de impedancia y de dispersión; introducirlo ahora tiene la ventaja de la simplicidad matemática de la situación concreta con que se ilustra.

En resumen, para una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente que se propague en la dirección y sentido indicado por un vector unitario arbitrario  $\hat{k}$ , se tiene

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \vec{H} &= \vec{H}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}\end{aligned}$$

con  $\vec{k} = k \hat{k}$ , y  $\vec{E}_c$  y  $\vec{H}_c$  vectores (en general complejos) uniformes tales que

$$\begin{aligned}\vec{H}_c &= \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}_c \\ \vec{E}_c &= \eta \vec{H}_c \times \hat{k}\end{aligned}\tag{3.66}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{k} \cdot \vec{E}_c &= 0 \\ \hat{k} \cdot \vec{H}_c &= 0\end{aligned}\tag{3.67}$$

de donde se deduce que  $[\vec{E}, \vec{H}, \hat{k}]$  definen un triedro trirrectángulo positivo (Fig. 3.9).

### 3.2.4 Densidad de flujo de potencia asociada a la onda

Desde el punto de vista de la ingeniería es importante determinar el flujo de potencia asociado a una onda electromagnética. En su momento se vio que la densidad de flujo de potencia instantáneo asociado al campo electromagnético viene dada por

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \quad (3.2)$$

Ahora bien, en régimen senoidal permanente, los campos instantáneos se obtienen a partir de los fasores como  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E} e^{j\omega t}]$  y  $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{H} e^{j\omega t}]$ . Pero las partes reales anteriores pueden escribirse de manera más explícita como semisuma del fasor más su conjugado

$$\begin{aligned} \text{Re}[\vec{E} e^{j\omega t}] &= \frac{1}{2}(\vec{E} e^{j\omega t} + \vec{E}^* e^{-j\omega t}) \\ \text{Re}[\vec{H} e^{j\omega t}] &= \frac{1}{2}(\vec{H} e^{j\omega t} + \vec{H}^* e^{-j\omega t}) \end{aligned}$$

lo que, sustituyendo en (3.2), da

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{4}(\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t} + \vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H} + \vec{E}^* \times \vec{H}^* e^{-2j\omega t}) \quad (3.68)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H} = 2 \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

y que

$$\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t} + \vec{E}^* \times \vec{H}^* e^{-2j\omega t} = 2 \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t}]$$

la expresión (3.68) se escribe

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] + \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t}]$$

En esta última expresión  $\frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$  es un vector real independiente del tiempo ( $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son fasores); por otra parte,  $\vec{E} \times \vec{H}$  es un vector complejo independiente del tiempo que puede escribirse explícitamente en función de sus partes real e imaginaria como

$$\vec{E} \times \vec{H} = \vec{a} + j\vec{b}$$

con  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  vectores reales independientes del tiempo. Utilizando esta expresión, es inmediato que

$$\frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t}] = \frac{1}{2} \vec{a} \cos 2\omega t - \frac{1}{2} \vec{b} \sin 2\omega t$$

donde se ve que  $\frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t}]$  posee una periodicidad temporal de período  $T_p = \frac{\pi}{\omega}$  y, por lo tanto, no contribuye a la densidad de flujo de potencia media. Ésta vendrá dada por el vector de Poynting medio

$$\vec{P}(\vec{r}) = \langle \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) dt$$

y el resultado será

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] \quad \text{W} / \text{m}^2 \quad (3.69)$$

Este importante *resultado es general para campos en régimen senoidal permanente*. En el caso particular de que el campo corresponda a una onda plana uniforme, los fasores que intervienen en la expresión (3.69) vendrán dados, como ya se ha visto, por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.39)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.56)$$

donde  $\vec{E}(\vec{r})$  y  $\vec{H}(\vec{r})$  se relacionan mediante las expresiones (3.55) y (3.62) y cumplen  $\hat{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$ ,  $\hat{k} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0$ . Así

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E} \times \left( \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}^* \right) \right] \quad (3.70)$$

que, utilizando la identidad vectorial (3.63), se convierte en

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2\eta} \text{Re}[\hat{k}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) - \vec{E}^*(\hat{k} \cdot \vec{E})]$$

Pero como  $\hat{k} \cdot \vec{E} = 0$ , resulta

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2\eta} \text{Re}[\hat{k}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*)]$$

Ahora bien, está claro que  $\vec{E} \cdot \vec{E}^* \equiv |\vec{E}|^2$  es real, y, siendo también  $\hat{k}$  un vector real, la expresión anterior puede escribirse

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}|^2 \hat{k}$$

Puesto que, según (3.39),  $|\vec{E}| = |\vec{E}_c|$ , el vector de Poynting medio puede ponerse también como

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}_c|^2 \hat{k}$$

Asimismo, si, al aplicar a la onda plana uniforme la expresión general del vector de Poynting medio, se pone  $\vec{E}$  en función de  $\vec{H}$  mediante la expresión (3.62), en vez de  $\vec{H}$  en función de  $\vec{E}$  como se hizo en la expresión (3.70), se obtiene

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[\eta \vec{H} \times \hat{k} \times \vec{H}^*]$$

que, utilizando de nuevo la identidad vectorial (3.63), el hecho de que  $\hat{k} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0$  y la definición  $\vec{H} \cdot \vec{H}^* \equiv |\vec{H}|^2$  lleva a

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \eta |\vec{H}|^2 \hat{k}$$

o, alternativamente, dado que, según (3.56),  $|\vec{H}| = |\vec{H}_c|$ , a

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \eta |\vec{H}_c|^2 \hat{k}$$

La utilización de estas relaciones se ilustra con el siguiente ejemplo.



**Ejemplo 3.8** El campo magnético de una onda plana uniforme responde a la expresión  $\vec{H} = H_o \left[ \left( 1 - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{x} - \left( \sqrt{2} + j \frac{1}{2} \right) \hat{y} + j \frac{3}{2} \hat{z} \right] e^{-j\pi(\sqrt{2}x+y+z)}$ . Determinar la forma del vector de Poynting y, si la onda transporta una densidad media de flujo potencia de  $1 \text{ mW/m}^2$ , calcular  $|H_o|$ .

En la expresión del campo debe identificarse  $e^{-j\pi(\sqrt{2}x+y+z)} = e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$ . Siguiendo la técnica de los ejemplo 3.3 y 3.4, se encuentra que la forma del argumento de la exponencial supone que  $\vec{k} = \sqrt{2}\pi \hat{x} + \pi \hat{y} + \pi \hat{z}$  y  $\hat{k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} + \frac{1}{2} \hat{z}$ , de donde se comprueba que  $\hat{k} \cdot \vec{H} = 0$  y, por lo tanto, que el campo dado corresponde efectivamente al de una onda plana uniforme. El vector de Poynting medio puede entonces calcularse como

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \eta |\vec{H}_c|^2 \hat{k}$$

donde

$$\begin{aligned} |\vec{H}_c|^2 &= \\ |H_o|^2 \left[ \left( 1 - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{x} - \left( \sqrt{2} + j \frac{1}{2} \right) \hat{y} + j \frac{3}{2} \hat{z} \right] \cdot \left[ \left( 1 + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{x} - \left( \sqrt{2} - j \frac{1}{2} \right) \hat{y} - j \frac{3}{2} \hat{z} \right] &= \\ 6|H_o|^2 \end{aligned}$$

Así pues,

$$\vec{P}(\vec{r}) = 3\eta |\vec{H}_o|^2 \hat{k}$$

Una densidad de flujo de potencia es de  $1 \text{ mW} / \text{m}^2$  significa que

$$3\eta |\vec{H}_o|^2 = 1 \text{ mW} / \text{m}^2$$

de donde, suponiendo propagación en el vacío ( $\eta \approx 120\pi \Omega$ )

$$|H_o| \approx 9,4 \times 10^{-4} \text{ A/m}$$

### 3.3 Polarización de las ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente

Se llama *polarización* de un campo vectorial al *tipo de trayectoria* que describe el extremo (o afijo) del vector campo instantáneo.

Contra lo que a primera vista pudiera parecer, la polarización que presente el campo electromagnético no es una cuestión de índole puramente teórica, sino que, por el contrario, presenta un gran interés práctico. La razón para ello estriba en que la polarización tiene efectos en la interacción de una onda con materiales.

Por ejemplo, cuando se trata de captar energía de una onda a frecuencias radioeléctricas, la polarización influirá en la eficacia de la antena que se use. De hecho, una antena puede diseñarse para captar energía de una onda con determinada polarización y ser “ciega” a otro tipo de polarización (polarizaciones ortogonales). A su vez, una antena optimizada para recibir ondas con determinada polarización, dará lugar a ondas con ese mismo tipo de polarización cuando se use en emisión.

En la práctica, esto se emplea para “reutilizar” el espectro electromagnético, sin que señales a (casi) la misma frecuencia se interfieran mutuamente, gracias a la discriminación de polarización que efectúa la antena receptora. La reutilización del espectro se encuentra, por ejemplo, en los sistemas de difusión de televisión desde satélites, en que se emiten canales cuyos espectros se superponen, sin que se interfieran mutuamente gracias al empleo de polarizaciones ortogonales.

Por otra parte, el tipo de polarización también puede influir en la propagación cuando hay inhomogeneidades en el medio (proximidad de la tierra, presencia de la ionosfera...).

#### 3.3.1 Descripción matemática de la polarización

En el apartado 3.2.3 se vio que los campos eléctrico y magnético instantáneos de una onda plana uniforme son, en todo instante y punto, perpendiculares al vector de propagación:

$$\hat{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.50)$$

$$\hat{k} \cdot \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.58)$$

Aunque las propiedades físicas de los campos no dependen del sistema de coordenadas en que éstos se representen, el hecho de que sean perpendiculares a  $\hat{k}$  hace

cómodo utilizar una *base ortogonal* constituida por  $\hat{k}$  y dos vectores unitarios, que llamaremos  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  perpendiculares a  $\hat{k}$ :

$$\hat{k} \cdot \hat{e}_1 = 0$$

$$\hat{k} \cdot \hat{e}_2 = 0$$

y perpendiculares entre sí:

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$$

de tal manera que  $[\hat{k}, \hat{e}_1, \hat{e}_2]$  definan un triedro trirrectángulo positivo:

$$\hat{k} \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k} \quad (3.71)$$

$$\hat{e}_2 \times \hat{k} = \hat{e}_1$$

Nótese que, como se ilustra en la figura 3.11, existe un grado de libertad en la definición de  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ : la elección de uno de ellos es arbitraria, siempre que se cumpla la condición de perpendicularidad respecto a  $\hat{k}$ ; el otro viene inmediatamente impuesto por la relación  $\hat{k} \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$  o  $\hat{e}_2 \times \hat{k} = \hat{e}_1$ .

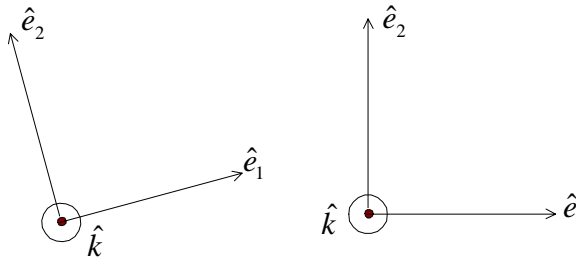


Fig. 3.11 Posibles elecciones de los vectores unitarios  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$

El interés de utilizar esta base es que, en ella, por ser perpendiculares en todo momento a la dirección de propagación,  $\vec{\mathcal{E}}$  y  $\vec{\mathcal{H}}$  sólo tienen dos componentes: en  $\hat{e}_1$  y en  $\hat{e}_2$ . Así, por ejemplo

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = E_{o1} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1) \hat{e}_1 + E_{o2} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_2) \hat{e}_2 \quad (3.72)$$

De esta expresión, se sigue inmediatamente que la trayectoria que describe el afijo de  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  en un punto dado en función del tiempo es una elipse. En efecto, es una relación matemática conocida que una elipse en el plano  $XY$  puede expresarse paramétricamente como

$$x = x_o \cos(t + \alpha)$$

$$y = y_o \cos(t + \beta)$$

donde  $t$  es el parámetro que, al tomar valores reales, da los distintos puntos  $(x, y)$  de la elipse. Lo anterior también puede expresarse en términos del vector  $\vec{a}$  cuyo extremo recorre los puntos de la elipse en función del parámetro  $t$  (Fig. 3.12):

$$\vec{a} = x_o \cos(t + \alpha) \hat{x} + y_o \cos(t + \beta) \hat{y}$$

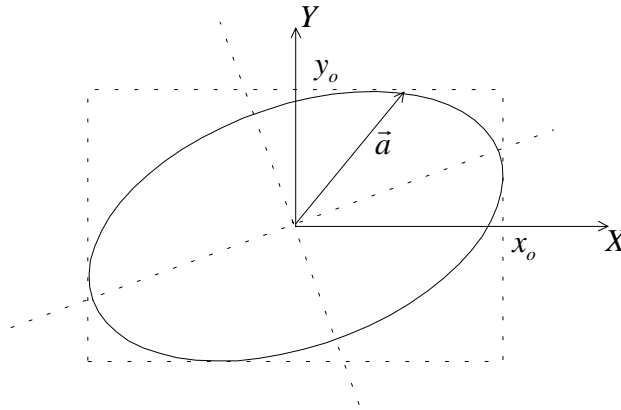


Fig. 3.12 *Elipse en el plano  $XY$  centrada en el origen*

Comparando esta expresión con la del campo eléctrico (3.72), es evidente que ambas son formalmente idénticas, con las correspondencias

$$x_o \leftrightarrow E_{o1}$$

$$y_o \leftrightarrow E_{o2}$$

$$t \leftrightarrow \omega t$$

$$\alpha \leftrightarrow \phi_1 - \vec{k} \cdot \vec{r}$$

$$\beta \leftrightarrow \phi_2 - \vec{k} \cdot \vec{r}$$

$$\hat{x} \leftrightarrow \hat{e}_1$$

$$\hat{y} \leftrightarrow \hat{e}_2$$

Así pues, el extremo de  $\vec{\mathcal{E}}$  describe en función del tiempo una trayectoria elíptica<sup>1</sup>, a la que da una vuelta completa cada  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , en el plano determinado por  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ , perpendicular a la dirección de propagación (Fig. 3.13).

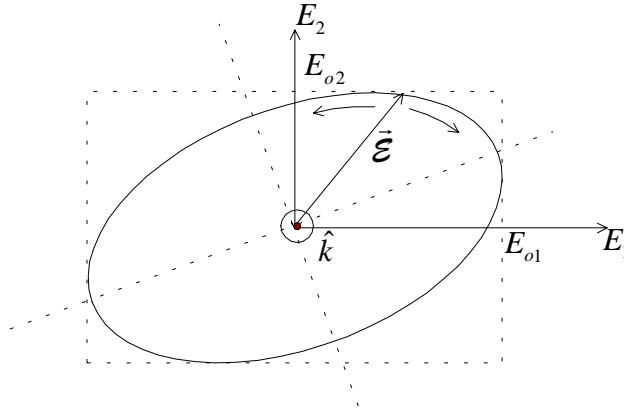


Fig. 3.13 *Elipse de polarización del campo eléctrico, contenida en el plano definido por  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ , perpendicular a  $\hat{k}$ . El sentido de giro sugerido por las flechas dependerá del desfase entre las componentes en  $\hat{e}_1$  y en  $\hat{e}_2$*

Como se deduce fácilmente de (3.72), en la base definida por  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  y  $\hat{k}$  el fasor del campo eléctrico se escribe

$$\vec{E}(\vec{r}) = (E_{o1}e^{j\varphi_1}\hat{e}_1 + E_{o2}e^{j\varphi_2}\hat{e}_2)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (3.73)$$

Para poder deducir de una ojeada las características de la elipse de polarización que se estudiarán en el apartado siguiente, resulta cómodo definir los parámetros

$$p = \frac{E_{o2}}{E_{o1}} \quad (3.74 \text{ a})$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (3.74 \text{ b})$$

<sup>1</sup> Se puede demostrar que, en general, los afijos de los campos en régimen senoidal permanente siempre describen trayectorias elípticas. En una situación general de régimen senoidal permanente las características de las elipses pueden variar de un punto a otro; en el caso particular de las ondas planas, las características son las mismas en todo punto del espacio.

En efecto, la expresión (3.73) puede escribirse sacando  $E_{o1}e^{j\varphi_1}$  factor común

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_{o1}e^{j\varphi_1} \left( \hat{e}_1 + \frac{E_{o2}}{E_{o1}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} \hat{e}_2 \right) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

que, definiendo la constante compleja  $C = E_{o1}e^{j\varphi_1}$  y utilizando las definiciones (3.74), se reduce a

$$\vec{E}(\vec{r}) = C \left( \hat{e}_1 + pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_2 \right) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.75)$$

A partir de esta última expresión, y utilizando la relación (3.55) y las propiedades (3.71) de  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ , puede deducirse el fasor campo magnético

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{C}{\eta} \left( \hat{e}_2 - pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_1 \right) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.76)$$

Comparando las expresiones (3.75) y (3.76) con las expresiones genéricas para los fasores campo eléctrico y magnético (3.39) y (3.56) se deduce que, con la base y notación adoptadas,

$$\vec{E}_c = C \left( \hat{e}_1 + pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_2 \right) \quad (3.77 \text{ a})$$

$$\vec{H}_c = \frac{C}{\eta} \left( \hat{e}_2 - pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_1 \right) \quad (3.77 \text{ b})$$

Refiriéndose a las expresiones de los fasores de los campos (3.75) y (3.76), es de notar que la información sobre la polarización no está en los términos de fase  $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$ , que indican simplemente que se trata de ondas que se propagan en el sentido indicado por  $\hat{k}$ ; la información sobre la polarización tampoco está en la constante multiplicativa  $C$  de las expresiones (3.77), cuyo cambio supone simplemente modificaciones en la amplitud y en el origen de tiempos que afectan por igual a todas las componentes de los campos; así pues, *la información sobre polarización está contenida en el factor  $\hat{e}_1 + pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_2$  de la expresión del fasor campo eléctrico o, alternativamente, en el fasor  $\hat{e}_2 - pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_1$  de la expresión del campo magnético.* En suma, *identificando los parámetros  $p$  y  $\Delta\varphi$  en las expresiones de los campos, se pueden deducir las características de la elipse de polarización que se presentan en el apartado que sigue.*

### 3.3.2 Características de la elipse de polarización

Desde un punto de vista práctico, la elipse de polarización está caracterizada no sólo por sus propiedades geométricas (orientación y relación axial), sino también por el sentido de giro del afijo del campo a su alrededor. En efecto, en un sistema de radiocomunicaciones interesa cómo están orientadas las antenas respecto de la elipse de polarización de las ondas que reciben; pero una antena puede también captar preferentemente una onda cuyo campo gire en un sentido determinado, o, alternatively, se pueden diseñar antenas que generen ondas con las mismas características de la elipse de polarización, pero sobre las cuales el campo “gire” en sentido contrario.

A continuación se presentan las expresiones matemáticas que describen las características de la elipse de polarización. En el caso de las características puramente geométricas, las expresiones se dan sin demostrar; el lector interesado puede referirse a textos de análisis geométrico.

\* *Orientación*: la orientación de la elipse es el ángulo que el eje mayor forma con una dirección de referencia. Por ejemplo, si tomamos como tal la que define  $\hat{e}_1$  (Fig. 3.14), mediante consideraciones geométricas se llega a que

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 E_{o1} E_{o2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{E_{o1}^2 - E_{o2}^2} \quad (3.78)$$

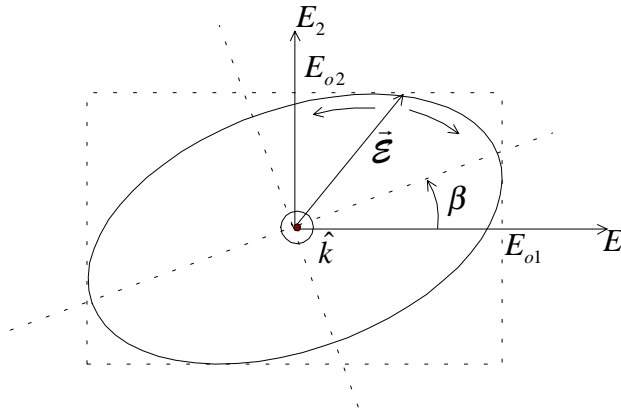


Fig. 3.14 Orientación de la elipse de polarización

donde  $E_{o1}$ ,  $E_{o2}$ ,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  se han definido en la expresión (3.72). Utilizando las definiciones (3.74), la expresión (3.78) puede ponerse de forma más compacta

$$\beta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 \cos \Delta \varphi}{\frac{1}{p} - p} \quad (3.79)$$

Nótese que la orientación de la elipse que describe  $\vec{\mathcal{H}}$  está girada  $90^\circ$  respecto de la que describe  $\vec{\mathcal{E}}$  (Fig. 3.15), ya que  $\vec{\mathcal{E}}$  y  $\vec{\mathcal{H}}$  son en todo momento perpendiculares y, además, la relación entre sus módulos es constante (expresión (3.60)).

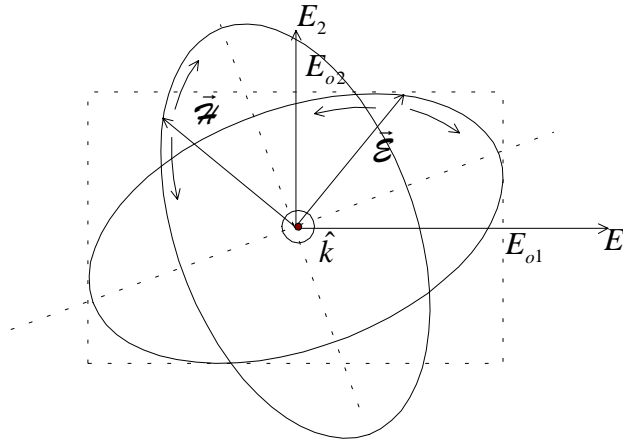


Fig. 3.15 Elipses de polarización del campo eléctrico y del campo magnético

\* *Relación axial*: es la relación entre el eje mayor y el eje menor de la elipse. De nuevo, mediante consideraciones geométricas, se deduce que la relación axial  $R$  puede expresarse como

$$R = \frac{|\vec{\mathcal{E}}|_{\text{máx}}}{|\vec{\mathcal{E}}|_{\text{mín}}} = \frac{|\vec{\mathcal{H}}|_{\text{máx}}}{|\vec{\mathcal{H}}|_{\text{mín}}} = \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \left( \frac{\sin \Delta \varphi}{1/p + p} \right)^2}}{1 - \sqrt{1 - 4 \left( \frac{\sin \Delta \varphi}{1/p + p} \right)^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.80)$$

donde  $p$  y  $\Delta \varphi$  han sido definidos en las expresiones (3.74).

Es práctica común expresar la relación axial en dB como

$$R_{dB} = 20 \log R \quad (3.81)$$



\* *Sentido de giro*: es fácil determinar el sentido de giro del campo cuando describe la elipse de polarización estudiando el signo de la derivada temporal del ángulo  $\delta$  que forma el campo respecto de una dirección de referencia (Fig. 3.16). En efecto, tal como se ha definido el sentido positivo de  $\delta$  en la figura 3.16, si  $\frac{d\delta}{dt} > 0$  el sentido de giro de  $\vec{\mathcal{E}}$  será contrario al de las agujas del reloj, y en el sentido de éstas si  $\frac{d\delta}{dt} < 0$ . Ahora bien, en vez de estudiar directamente el signo de la derivada temporal de  $\delta$ , resulta más sencillo determinar el de su tangente; refiriéndonos a la expresión (3.72) y a la figura 3.13,  $\text{tg } \delta$  se expresa fácilmente como

$$\text{tg } \delta = \frac{E_{o2} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_2)}{E_{o1} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1)}$$

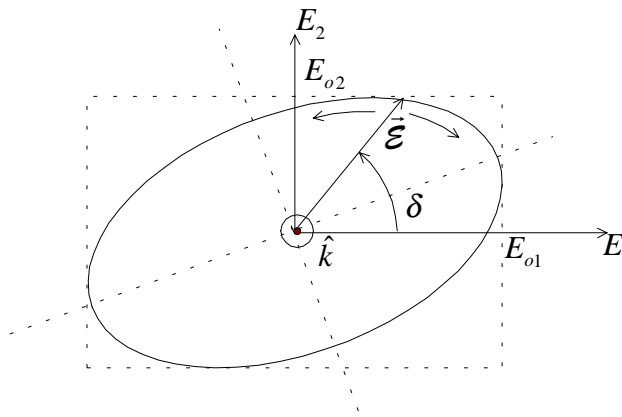
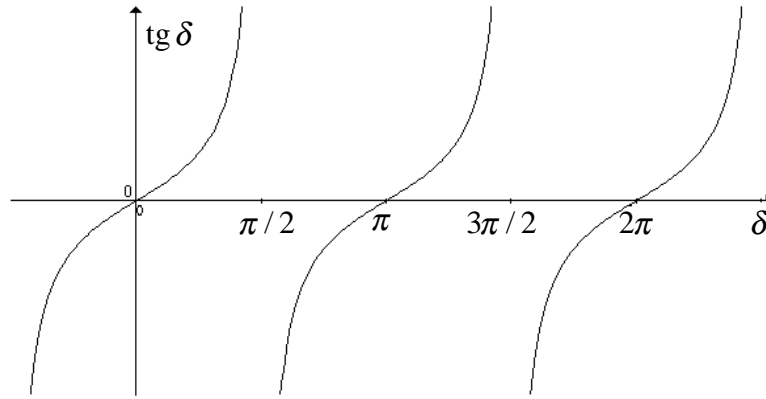


Fig. 3.16 *Angulo instantáneo que forma el campo con una dirección de referencia*

Además, como

$$\frac{d \text{tg } \delta}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \delta} \frac{d\delta}{dt}$$

y  $\frac{1}{\cos^2 \delta}$  es positivo, el signo de  $\frac{d \text{tg } \delta}{dt}$  es el mismo que el de  $\frac{d\delta}{dt}$ . Esto puede verse también a partir de la representación gráfica de  $\text{tg } \delta$  (Fig. 3.17). En efecto, si recorremos el gráfico en el sentido de  $\delta$  creciente ( $\frac{d\delta}{dt} > 0$ ),  $\text{tg } \delta$  es también siempre creciente

Fig. 3.17 Representación gráfica de  $\text{tg } \delta$ 

( $\frac{d \text{tg } \delta}{dt} > 0$ ), mientras que si lo hacemos en el sentido de  $\delta$  decreciente,  $\text{tg } \delta$  será siempre decreciente.

Así, derivando la expresión de  $\text{tg } \delta$  y utilizando a continuación las definiciones (3.74) se tiene

$$\frac{d \text{tg } \delta}{dt} = -\frac{E_{o2}}{E_{o1}} \omega \frac{\text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)}{E_{o1} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1)} = -p\omega \frac{\text{sen } \Delta\varphi}{E_{o1} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1)}$$

Como  $p$ ,  $\omega$  y  $\cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1)$  son magnitudes positivas, el signo de  $\frac{d \text{tg } \delta}{dt}$  – y, por lo tanto, el de  $\frac{d\delta}{dt}$  – depende únicamente del de  $\text{sen } \Delta\varphi$ , es decir, del valor de  $\Delta\varphi$ . Así, se tendrán las situaciones siguientes:

–  $-\pi < \Delta\varphi < 0$ . En este caso  $\frac{d}{dt} \text{tg } \delta > 0$ , luego  $\frac{d}{dt} \delta > 0$ ; así, refiriéndonos a

cualquiera de las figuras entre la figura 3.13 y la figura 3.16, el sentido de giro del afijo del campo alrededor de la elipse de polarización quedará fijado en sentido antihorario (Fig. 3.18). Es de notar que en esas figuras el vector  $\hat{k}$  viene hacia el lector, es decir, se está representando el campo desde la perspectiva de un observador que “ve” venir la onda. Obviamente, si la perspectiva del observador fuese la de “ver” alejarse la onda, el sentido de rotación del campo sería el opuesto: horario o a derechas (para hacerse una idea, basta mirar la figura 3.18 al trasluz desde el otro lado del papel). En ingeniería, es costumbre, al describir el sentido de giro del campo, hacerlo

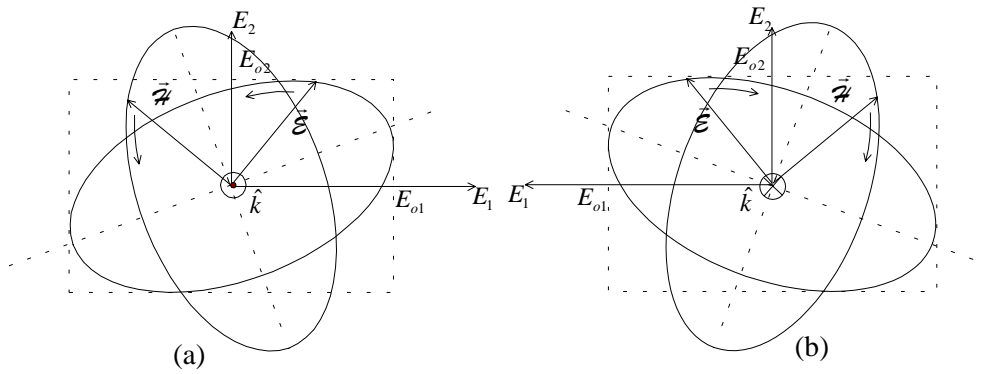


Fig. 3.18 Sentido de giro de los campos alrededor de la elipse de polarización cuando  $-\pi < \Delta\phi < 0$ : (a) viendo venir la onda; (b) viendo alejarse la onda (polarización “a derechas”)

desde la perspectiva del observador que “ve” alejarse la onda<sup>1</sup>. Así, en este caso, diremos que la polarización es “a derechas”.

$0 < \Delta\phi < \pi$ . Ahora  $\frac{d}{dt} \tan \delta < 0$  y, por lo tanto,  $\frac{d}{dt} \delta < 0$ ; luego en cualquiera de las figuras entre la figura 3.13 y la figura 3.16 el sentido de giro del afijo del vector campo será horario. De nuevo, utilizando el convenio aceptado en ingeniería, diremos no obstante que el sentido de giro es *antihorario* o *a izquierdas*, pues así se apreciaría desde la perspectiva de “ver” alejarse la onda (Fig. 3.19).

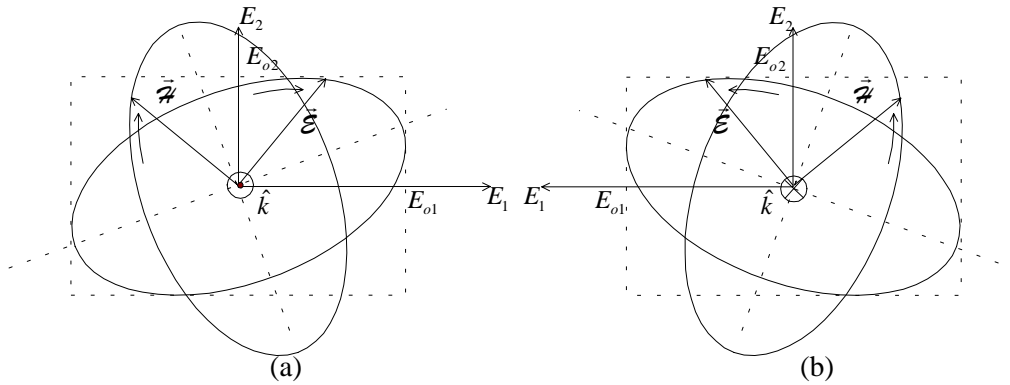


Fig. 3.19 Sentido de giro de los campos alrededor de la elipse de polarización cuando  $0 < \Delta\phi < \pi$ : (a) viendo venir la onda; (b) viendo alejarse la onda (polarización “a izquierdas”)

<sup>1</sup> En los textos de física, el convenio suele ser el contrario.

Para recordar cómo hay que definir el sentido de giro de acuerdo con el convenio de la ingeniería puede emplearse la siguiente regla mnemotécnica: si se coloca el dedo pulgar de una mano apuntando en el sentido de propagación de la onda y se desea que los extremos de los otros cuatro dedos indiquen el sentido de giro del campo, cuando la polarización sea a derechas la mano que habrá que usar será la derecha, mientras que habrá que emplear la mano izquierda para una polarización con giro a izquierdas.

Como ya se hizo notar en su momento, en el caso que estamos estudiando de ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente, las características de la elipse de polarización son las mismas en cualquier punto del espacio (aunque los campos instantáneos diferirán en general de un punto a otro, excepto sobre los frentes de onda y en frentes de onda que disten  $\lambda$ ).

**Ejemplo 3.9** *Determinar las características de polarización de una onda plana uniforme cuyo campo eléctrico viene dado por  $\vec{E} = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$ .*

Se trata del campo eléctrico ya introducido en el ejemplo 3.3, para el que ya se comprobó que corresponde efectivamente a una onda plana uniforme y se determinó en el ejemplo 3.4 que  $\hat{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$ . Para expresar el campo en una base en la que sólo tenga dos componentes, como la de las expresiones (3.71), podemos identificar arbitrariamente  $\hat{e}_1 = \hat{x}$ . Efectivamente, aunque aún no conociésemos  $\hat{k}$  explícitamente, como debe cumplirse  $\vec{E}_c \cdot \hat{k} = 0$  y  $\vec{E}_c = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})$  (ver ejemplo 3.3), se sigue que  $\hat{x} \cdot \hat{k} = 0$ . Utilizando la primera de las relaciones (3.71) se encuentra inmediatamente

$$\hat{e}_2 = \hat{k} \times \hat{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$$

Así  $\vec{E}_c$  puede escribirse

$$\vec{E}_c = E_o(\hat{e}_1 + j\sqrt{2}\hat{e}_2) = E_o(\hat{e}_1 + \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}}\hat{e}_2)$$

Comparando esta expresión con (3.77), se identifica  $p = \sqrt{2}$ ,  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ , de donde se deduce que:

\* El ángulo de orientación, respecto de la dirección definida por  $\hat{e}_1 = \hat{x}$ , de la elipse que describe el campo eléctrico es  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . En este caso, al utilizar la expresión

(3.79) aparecen en principio dos posibles valores para  $\beta$ , a saber, 0 y  $\frac{\pi}{2}$ , ya que  $\cos \Delta\varphi = 0$  y el arcotangente puede valer 0 o  $\pi$ . Para decidir entre ellos basta con interpretar el numerador del argumento del arcotangente como una ordenada y el denominador como una abscisa. Como el denominador es en este caso negativo, ello indica que el ángulo que hay que tomar es  $\pi$ .

\* La relación axial de la elipse de polarización es (expresiones (3.80) y (3.81))  $R = \sqrt{2}$  o  $R_{dB} = 3 \text{ dB}$ .

\* El sentido de giro del campo alrededor de la elipse de polarización es *a izquierdas* ( $0 < \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} < \pi$ ).

### 3.3.3 Casos especiales: polarización lineal y polarización circular

Los casos particulares de polarización que se estudian a continuación presentan un doble interés: por un lado, son polarizaciones muy utilizadas en sistemas de radiocomunicaciones en la práctica (por ejemplo, la polarización lineal se utiliza para la radiodifusión en onda media y para la difusión de televisión en UHF; algunos sistemas de difusión de televisión por satélite utilizan polarización circular). Por otro lado, una onda con una polarización arbitraria puede ponerse siempre como superposición de dos ondas con polarizaciones ortogonales; las polarizaciones lineales vertical y horizontal, así como las polarizaciones circulares con sentidos de giro opuestos<sup>1</sup>, constituyen bases especialmente cómodas para expresar cualquier polarización arbitraria y calcular de manera sencilla fenómenos de reflexión y refracción (como se verá en el capítulo 4), de propagación en medios anisótropos y en medios no recíprocos, interferencias en sistemas de radiocomunicaciones, etc.

<sup>1</sup> El concepto de ortogonalidad puede generalizarse a vectores que puedan ser complejos. Dos vectores, en general complejos,  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son ortogonales si  $\vec{a} \cdot \vec{b}^* = 0$

### Polarización lineal

Una onda posee polarización lineal si en las expresiones (3.75) y (3.76) o (3.77) se da una de las siguientes condiciones:

$$p = 0 \text{ o } p = \infty$$

$$\text{o}$$

$$\Delta\varphi = 0 \text{ o } \Delta\varphi = \pm\pi$$

En cualquiera de esos casos, es fácilmente comprobable que la relación axial  $R$  dada por la expresión (3.80) se hace infinita, lo que significa que la elipse se reduce a un segmento.

Por ejemplo, si  $p = 0$ , entonces, según las expresiones (3.73) y (3.77 a),  $\vec{E}_c = E_{o1}e^{j\varphi_1}\hat{e}_1 = C\hat{e}_1$ , y la elipse de polarización se reduce a un segmento según la dirección de  $\hat{e}_1$  (Fig. 3.20 (a)). Si  $\hat{e}_1$  fuese paralelo a la tierra, se diría que la polarización es horizontal. Si  $p = \infty$ , entonces, de manera análoga  $\vec{E}_c = E_{o2}e^{j\varphi_2}\hat{e}_2 = C\hat{e}_2$ , y la elipse de polarización se convierte en un segmento en la dirección de  $\hat{e}_2$  (Fig. 3.20 (b)). Si  $\hat{e}_2$  fuese perpendicular a la tierra, se diría que la polarización es vertical.

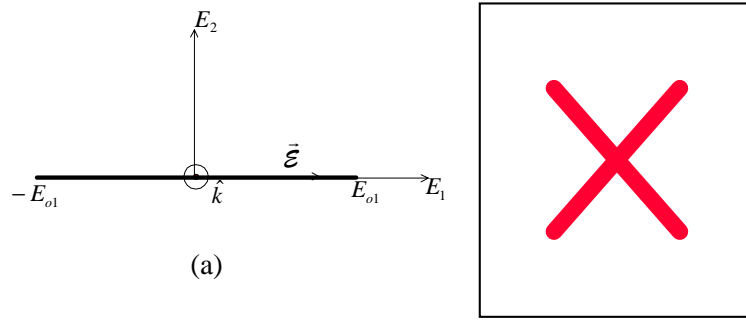


Fig. 3.20 Polarización lineal cuando  $p = 0$  (a);  $p = \infty$  (b)

Si  $\Delta\varphi = 0$  o  $\Delta\varphi = \pm\pi$ , según (3.77 a) se tendrá  $\vec{E}_c = C(\hat{e}_1 \pm p\hat{e}_2)$ , o bien, teniendo en cuenta que  $\hat{e}_1 \pm p\hat{e}_2$  es un vector real perpendicular a la dirección de propagación y llamando  $\hat{e}$  a un vector unitario en la dirección de  $\hat{e}_1 \pm p\hat{e}_2$ ,  $\vec{E}_c = C'\hat{e}$ , lo que indica que la elipse de polarización se reduce a un segmento en la dirección de  $\hat{e}$  (Fig. 3.21).

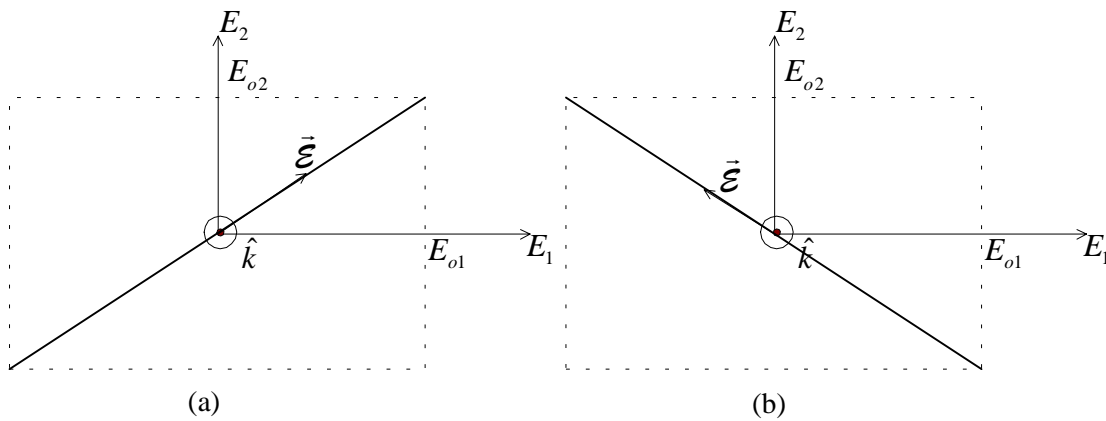


Fig. 3.21 Polarización lineal cuando  $\Delta\varphi = 0$  (a);  $\Delta\varphi = \pm\pi$  (b).

En cualquier caso, en una onda plana polarizada linealmente las componentes de las partes uniformes de los campos eléctrico y magnético,  $\vec{E}_c$  y  $\vec{H}_c$ , estarán en fase.

**Ejemplo 3.10** El campo magnético de una onda plana uniforme es  $\vec{H}(\vec{r}) = H_o(\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y})e^{-j\pi(\sqrt{2}x+y+z)}$ . Determinar el tipo de polarización del campo.

Visto el argumento de la exponencial, el vector de onda es el mismo que se determinó en el ejemplo 3.5,  $\vec{k} = \sqrt{2}\pi\hat{x} + \pi\hat{y} + \pi\hat{z}$ ; se satisface, pues,  $\vec{k} \cdot \vec{H} = 0$ , por lo que el campo dado corresponde efectivamente al de una onda plana uniforme.

En este caso se tiene  $\vec{H}_c = H_o(\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y})$ : todas las componentes de  $\vec{H}_c$  están en fase, por lo que la polarización es lineal. La dirección de la polarización de  $\vec{H}$  viene definida por el vector unitario

$$\hat{e}_h = \frac{\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y}}{|\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y}|} = \frac{\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x} - \frac{\sqrt{6}}{3}\hat{y}$$

El campo eléctrico estará a su vez polarizado en la dirección perpendicular dada por

$$\hat{e}_e = \hat{e}_h \times \hat{k} = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x} - \frac{\sqrt{6}}{3}\hat{y} \right) \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{6}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{6}\hat{y} + \frac{3\sqrt{3}}{6}\hat{z}$$

### Polarización circular

Una onda está polarizada circularmente si en las expresiones (3.75) y (3.76) o (3.77) de los fasores que la representan se encuentra

$$p = 1$$

y simultáneamente

$$\Delta\varphi = \pm\pi/2$$

En esas condiciones la relación axial de la elipse de polarización, dada por la expresión (3.80), se hace  $R = 1$ , lo que significa que, al ser sus dos ejes iguales, la elipse se ha reducido a una circunferencia. Cabe distinguir dos casos de polarización circular; en efecto, ateniéndonos a la discusión sobre el sentido de giro del campo alrededor de la elipse de polarización desarrollada en el apartado 3.3.2, resultará que, si  $\Delta\varphi = \pi/2$ , estamos en el caso de que  $0 < \Delta\varphi < \pi$ , y, por lo tanto, hablaremos de *polarización circular a izquierdas* (Fig. 3.22). La parte uniforme del faser campo eléctrico vendrá dado, particularizando la expresión (3.77 a), por

$$\vec{E}_c = C(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2)$$

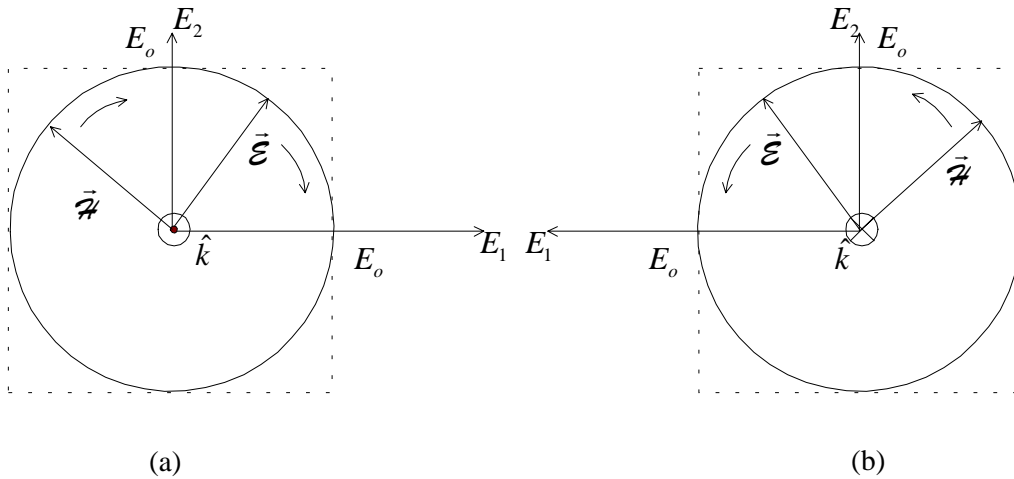


Fig. 3.22 Polarización circular a izquierdas: (a) viendo venir la onda; (b) viendo alejarse la onda

De manera completamente análoga, si  $\Delta\varphi = -\pi/2$ , la onda estará *polarizada circularmente a derechas* (Fig. 3.23) y la parte uniforme del faser campo eléctrico será

$$\vec{E}_c = C(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2)$$



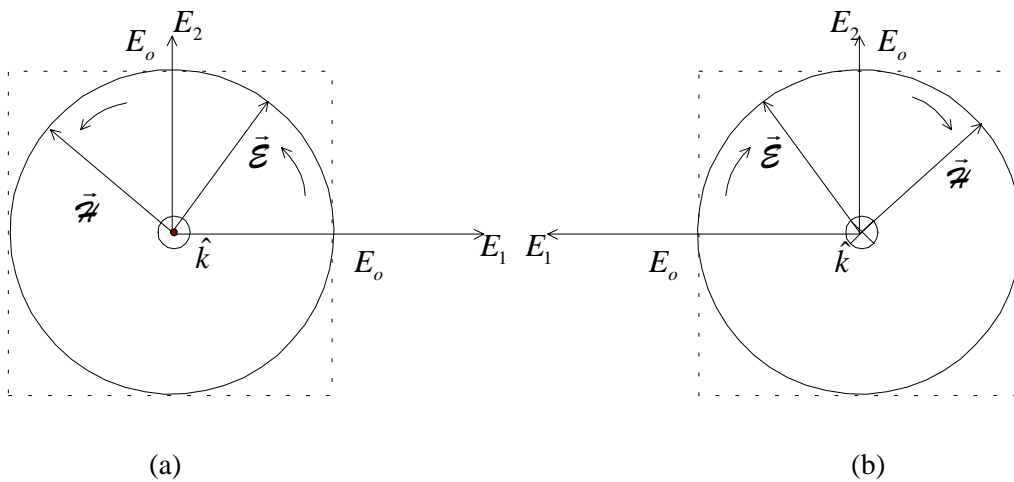


Fig. 3.23 Polarización circular a derechas: (a) viendo venir la onda; (b) viendo alejarse la onda

Ya se indicó anteriormente, al hablar de la polarización de las ondas planas uniformes en general, que toda la información sobre la polarización está contenida en  $\vec{E}_c$ ; así, lo que caracteriza una polarización circular es la posibilidad de escribir  $\vec{E}_c$  como un vector proporcional a  $\hat{e}_1 \pm j\hat{e}_2$ .

Según se discutió al principio de la sección, en el estudio de ciertas situaciones de interés práctico puede resultar conveniente expresar una onda plana uniforme con una polarización arbitraria como superposición de dos ondas con polarizaciones ortogonales<sup>1</sup>; por ejemplo, como superposición de dos ondas polarizadas linealmente según direcciones perpendiculares, o de dos ondas polarizadas circularmente con sentidos de giro del campo opuestos. La posibilidad de la descomposición en dos polarizaciones lineales ortogonales es obvia a partir de la expresión

$$\vec{E}(\vec{r}) = C(\hat{e}_1 + pe^{j\Delta\varphi}\hat{e}_2)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

que no es más que la suma de una onda plana uniforme polarizada linealmente según  $\hat{e}_1$ :

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = C\hat{e}_1 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

y de una onda plana uniforme polarizada según  $\hat{e}_2$ :

<sup>1</sup> Atendiendo a la definición de ortogonalidad de la nota al pie de la página 253, los vectores reales  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  son ortogonales, y también lo son los vectores  $\hat{e}_1 + j\hat{e}_2$  y  $\hat{e}_1 - j\hat{e}_2$ .

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = C p e^{j\Delta\phi} \hat{e}_2 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Existen elementos que permiten seleccionar la componente de la onda en una dirección dada; tales elementos, cuyo principio de funcionamiento, que no será detallado aquí, puede variar según la frecuencia de utilización, se llaman polarizadores, y la función que realizan se ilustra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.11** *Un polarizador es un elemento utilizado para cancelar una de las dos componentes en que podemos descomponer los campos de una onda plana que lo atraviese, de manera que, a su salida, siempre se tendrá una polarización lineal. La única característica que debemos conocer del polarizador, a fin de averiguar cómo será la onda transmitida, es la orientación de su eje respecto a la dirección de polarización de la onda incidente.*

Considérese el esquema mostrado en la figura 3.24. La onda que llega al polarizador tiene una polarización arbitraria, de manera que, según los ejes elegidos, podremos expresar el campo eléctrico en la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0(\hat{x} + p e^{j\Delta\phi} \hat{y}) e^{-jkz}$$

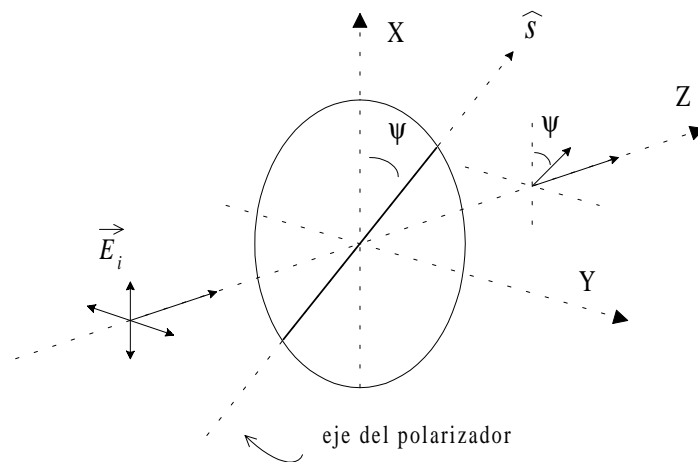


Fig. 3.24 Análisis del campo resultante tras atravesar un polarizador

El eje del polarizador representa la dirección permitida de paso, de forma que cualquier otra componente de campo será atenuada o reflejada. Según el esquema esa dirección es

$$\hat{s} = \hat{x}\cos\psi + \hat{y}\sin\psi$$

Y el campo eléctrico de la onda transmitida resulta:

$$\vec{E}(\vec{r}) = (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{s}) \hat{s} = E_0 (\cos\psi + pe^{j\Delta\varphi} \sin\psi) \hat{s} e^{-jkz}$$

Para comprobar que el campo también se puede poner como superposición de ondas polarizadas circularmente en sentidos opuestos, utilizaremos la observación anterior de que lo que caracteriza la expresión de una onda plana polarizada circularmente es su proporcionalidad a un vector complejo de la forma  $\hat{e}_1 \pm j\hat{e}_2$ , donde  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  son vectores reales del mismo módulo y perpendiculares entre sí. Así, notaremos que el vector  $\hat{e}_1$  puede escribirse como

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{2}(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2) + \frac{1}{2}(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2)$$

y, análogamente

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{2}j(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2) - \frac{1}{2}j(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2)$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.75) se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = C \left[ \frac{1}{2}(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2) + \frac{1}{2}(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2) - j\frac{1}{2}pe^{j\Delta\varphi}(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2) + j\frac{1}{2}pe^{j\Delta\varphi}(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2) \right] e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

de donde, agrupando términos, se llega a

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{C}{2}(1 - jpe^{j\Delta\varphi})(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{C}{2}(1 + jpe^{j\Delta\varphi})(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

que no es más que la superposición de una onda polarizada circularmente a izquierdas:

$$\vec{E}_I(\vec{r}) = \frac{C}{2}(1 - jpe^{j\Delta\varphi})(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

como lo indica el factor  $\hat{e}_1 + j\hat{e}_2$  y, como lo muestra el factor  $\hat{e}_1 - j\hat{e}_2$ , de una onda polarizada circularmente a derechas

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{C}{2}(1 + jpe^{j\Delta\varphi})(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

que es la posibilidad que se quería hacer patente.

**Ejemplo 3.12** Descomponer una onda plana uniforme cuyo campo eléctrico es  $\vec{E} = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$  en dos ondas polarizadas circularmente en sentidos opuestos.

Este campo ya fue tratado en el ejemplo 3.9, donde se discutió que una posible elección de vectores unitarios perpendiculares a la dirección de propagación es  $\hat{e}_1 = \hat{x}$ ,  $\hat{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$ . Asimismo se determinó que, con esta elección,

$p = \sqrt{2}$ ,  $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ . Así pues, la onda plana del enunciado puede ponerse como superposición de una onda plana polarizada circularmente a izquierdas cuyo campo eléctrico será

$$\vec{E}_I(\vec{r}) = \frac{E_o}{2}(1 + \sqrt{2})(\hat{x} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$$

y de una onda plana polarizada circularmente a derechas, con campo eléctrico

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{E_o}{2}(1 - \sqrt{2})(\hat{x} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$$

### 3.4 Propagación de ondas planas uniformes en medios con pérdidas

En lo visto hasta ahora, figura la suposición implícita de que los medios en que se propagan las ondas electromagnéticas no presentan pérdidas: la amplitud de las ondas planas uniformes que se han analizado no sufría disminución alguna a medida que la onda se propagaba. Esto es una suposición excelente en el caso de propagación en el vacío, pero puede dejar de serlo en medios materiales. En lo que sigue discutiremos desde un punto de vista macroscópico el origen de las pérdidas en medios materiales y analizaremos el efecto de esas pérdidas en la propagación de ondas planas uniformes.

#### 3.4.1 Permitividad y permeabilidad complejas

Hasta ahora, al considerar la relación entre los campos instantáneos  $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  por una parte, y  $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)$  por otra, en un medio isótropo lineal, se ha supuesto una relación de proporcionalidad

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{D}} &= \epsilon \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{\mathcal{B}} &= \mu \vec{\mathcal{H}}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Sin embargo, ésa no es la relación lineal más general que se pueda suponer. En efecto, en la teoría de sistemas lineales, una relación lineal entre una magnitud “de entrada” y una magnitud “de salida” no se reduce a  $y(t) = k x(t)$ , sino que viene dada (Fig. 3.25) por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

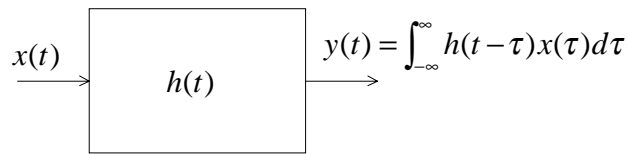


Fig. 3.25 Relación entre la salida y la entrada de un sistema lineal invariante con el tiempo de respuesta impulsional  $h(t)$

Así, la relación lineal más general entre  $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  es

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\epsilon}(\vec{r}, t - \tau) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \tau) d\tau\tag{3.82}$$

donde  $h_{\epsilon}(\vec{r}, t)$  es la respuesta impulsional que relaciona en el tiempo la “respuesta”  $\vec{\mathcal{D}}$  a la entrada  $\vec{\mathcal{E}}$  en el punto  $\vec{r}$ . La respuesta impulsional pone de manifiesto que el medio, de cuya interacción con el campo  $\vec{\mathcal{E}}$  da una representación macroscópica, no responde, en general, instantáneamente a una excitación; si lo hiciera, la respuesta impulsional tomaría la forma particular  $h_{\epsilon}(\vec{r}, t) = \epsilon(\vec{r})\delta(t)$  y encontraríamos la relación manejada hasta ahora  $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ .

Si suponemos ahora que estamos en régimen senoidal permanente, podemos denotar a los fasores correspondientes por  $\vec{D}(\vec{r}, \omega)$  y  $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ , donde la frecuencia angular  $\omega$  se ha indicado explícitamente para facilitar la discusión. La relación (3.82) entre campos instantáneos implica que los fasores, que contienen la información de los campos variables con frecuencia  $\omega$ , se relacionan mediante

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

donde  $\epsilon(\vec{r}, \omega)$  es la transformada de Fourier de  $h_e(\vec{r}, t)$

$$\epsilon(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_e(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt$$

y, por lo tanto, una magnitud en general compleja, aunque  $h_e(\vec{r}, t)$  es real.

El hecho de que  $\epsilon(\vec{r}, \omega)$  sea complejo indica que existe un desfase entre  $\vec{D}(\vec{r}, \omega)$  y  $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ , que es la manifestación, a nivel macroscópico, de un intercambio de energía entre el campo y la materia a nivel microscópico. En medios materiales en equilibrio térmico, o próximos a él la parte imaginaria de  $\epsilon$  es negativa, por lo que, cuando interesa resaltar explícitamente el carácter complejo de la permitividad, suele escribirse

$$\epsilon(\vec{r}, \omega) = \epsilon'_i(\vec{r}, \omega) - j\epsilon''_i(\vec{r}, \omega)$$

donde, tanto  $\epsilon'_i$  como  $\epsilon''_i$  son positivos. En ese caso, como se verá en el próximo apartado, la interacción del campo con el medio resulta en cesión de energía del campo a la materia, y se dice que el medio presenta pérdidas.

De manera similar podría razonarse que en la relación entre los fasores  $\vec{B}(\vec{r}, \omega)$  y  $\vec{H}(\vec{r}, \omega)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \mu(\vec{r}, \omega)\vec{H}(\vec{r}, \omega)$ ,  $\mu(\vec{r}, \omega)$  puede ser, en general, complejo. Habitualmente, su parte imaginaria será también negativa, por lo que suele escribirse

$$\mu(\vec{r}, \omega) = \mu'_i(\vec{r}, \omega) - j\mu''_i(\vec{r}, \omega)$$

con  $\mu'_i$  y  $\mu''_i$  positivos; de nuevo, esta situación da lugar a pérdidas de energía del campo electromagnético<sup>1</sup>.

Otra causa de pérdidas, que puede tratarse como una contribución a la parte imaginaria negativa de la permitividad eléctrica, es la conductividad del medio con el que interactúe el campo. En efecto, consideremos de nuevo la ley de Ampère-Maxwell en régimen senoidal permanente en un medio lineal:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\epsilon \vec{E}$$

<sup>1</sup> Suministrando energía a ciertos materiales, puede conseguirse que  $\epsilon''_i$  o  $\mu''_i$  se hagan negativos; en esas condiciones puede llegarse a situaciones en que sea el medio el que ceda energía al campo. Se habla entonces de un *medio activo*. Ese es el fundamento de los dispositivos láser.

Si en el medio no hay fuentes independientes, pero presenta una conductividad  $\sigma$  finita, la densidad de corriente y el campo eléctrico estarán relacionados por la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Sustituyendo esta última expresión de la densidad de corriente en la ley de Ampère-Maxwell, tendremos

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega\epsilon \vec{E}$$

Sacando factor común  $j\omega$  en el término de la derecha, la expresión anterior se escribe

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \left( \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E}$$

Comparando esta última expresión con la de la ley de Ampère-Maxwell en un medio lineal de conductividad nula:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$$

es obvio que el efecto de la conductividad es funcionalmente el mismo que el de dar lugar a una parte imaginaria de valor  $-\frac{\sigma}{\omega}$ . Si además consideramos explícitamente que  $\epsilon$  pueda tener una parte imaginaria debida al tiempo de respuesta finito de la polarización, la ley de Ampère-Maxwell se escribirá

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \left( \epsilon'_i - j \frac{\sigma + \omega\epsilon''_i}{\omega} \right) \vec{E}$$

O bien, definiendo

$$\epsilon' = \epsilon'_i \quad (3.83 \text{ a})$$

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} + \epsilon''_i \quad (3.83 \text{ b})$$

la ley de Ampère-Maxwell termina escribiéndose

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')\vec{E} \quad (3.84)$$

donde es obvia la contribución de la conductividad  $\sigma$  a una parte imaginaria negativa de  $\epsilon$  efectiva.

### 3.4.2 Ondas planas uniformes en un medio con pérdidas

En el apartado anterior se razonó que los parámetros constitutivos – permitividad eléctrica y permeabilidad magnética – de un medio lineal que aparecen en las ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente pueden ser complejos. Se adelantó además que, cuando la parte imaginaria de esos parámetros es negativa, eso traduce desde un punto de vista macroscópico mecanismos de pérdidas del medio por los cuales el campo electromagnético cede energía a la materia. En lo que sigue vamos a ilustrar los efectos de estas pérdidas a partir del análisis del caso particular, pero suficientemente importante por sí mismo, de la propagación de ondas planas en un medio lineal y homogéneo que las presente.

Desde el punto de vista matemático el estudio se hace muy sencillo si notamos que, al escribir las ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente en una región desprovista de fuentes independientes:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$$

la forma matemática es la misma tanto si  $\epsilon$  y  $\mu$  son reales como complejos. Por lo tanto, campos de la forma de los que corresponden a ondas planas uniformes como las estudiadas en el apartado 3.2:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}\end{aligned}$$

siguen siendo solución de las ecuaciones de Maxwell, sin más que tener en cuenta que las constantes  $\epsilon$  y  $\mu$  que aparecen en la definición del número de onda:

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

y en la de la impedancia intrínseca del medio:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

son , en general complejas.



Aunque la solución sea formalmente idéntica a la considerada hasta ahora para la onda plana uniforme, en que  $\epsilon$  y  $\mu$  habían sido tomados como reales, el hecho de que estos parámetros tomen valores complejos tiene consecuencias físicas que se discuten a continuación. Para simplificar matemáticamente la discusión, pero sin que ello suponga pérdida alguna de generalidad, supondremos propagación en el sentido de  $\hat{z}$  – con lo que  $\vec{k} = k \hat{z}$  – y que las pérdidas del medio sólo se manifiestan en una permitividad eléctrica compleja  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  con  $\epsilon'$  y  $\epsilon''$  positivos. Así, tendremos

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_c e^{-jkz} \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{\hat{z}}{\eta} \times \vec{E}_c e^{-jkz}\end{aligned}$$

donde ahora  $k$  es complejo por serlo  $\epsilon$ . En efecto, en la figura 3.26 se ilustra de manera cualitativa la relación entre una permitividad eléctrica compleja de parte imaginaria negativa

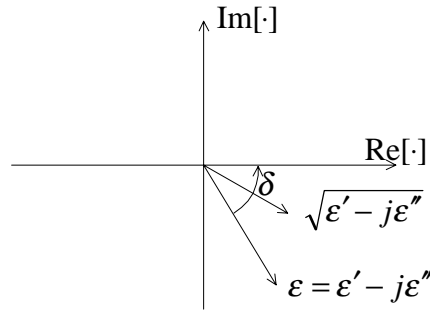


Fig. 3.26 Relación entre un valor complejo de permitividad, de parte imaginaria negativa, y su raíz cuadrada

y su raíz cuadrada: el resultado que hay que tener en cuenta es que la raíz cuadrada también tiene parte imaginaria negativa, por lo que se podrá poner

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{\mu(\epsilon' - j\epsilon'')} = \beta - j\alpha \quad (3.85)$$

donde  $\beta$ <sup>1</sup> y  $\alpha$  son constantes positivas en el caso común de que  $\epsilon''$  sea positivo. De manera cuantitativa, teniendo en cuenta que

<sup>1</sup> A pesar de utilizar el mismo símbolo, esta constante  $\beta$  no debe confundirse con el ángulo de orientación de la elipse de polarización definido en el apartado 3.3.2.

$$k^2 = \omega^2 \mu (\epsilon' - j\epsilon'') = (\beta - j\alpha)^2$$

se llega, igualando partes reales e imaginarias, al par de ecuaciones

$$\begin{aligned}\omega^2 \mu \epsilon' &= \beta^2 - \alpha^2 \\ \omega^2 \mu \epsilon'' &= 2\beta\alpha\end{aligned}$$

de las cuales se despeja

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon'} \left\{ \frac{[1 + \operatorname{tg}^2 \delta]^{1/2} + 1}{2} \right\}^{1/2} \quad (3.86 \text{ a})$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon'} \left\{ \frac{[1 + \operatorname{tg}^2 \delta]^{1/2} - 1}{2} \right\}^{1/2} \times \operatorname{signo}(\epsilon'') \quad (3.86 \text{ b})$$

donde se ha utilizado la llamada *tangente de pérdidas*, que se define como

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$$

Nótese que  $-\delta$  es la fase de la permitividad compleja  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  (Fig. 3.26).

Así, los fasores campo eléctrico y campo magnético podrán escribirse

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (3.87 \text{ a})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_c e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (3.87 \text{ b})$$

con  $\vec{H}_c = \frac{\hat{z}}{\eta} \times \vec{E}_c$  y  $\vec{E}_c$  un vector uniforme.

El factor  $e^{-j\beta z}$  en la expresión de los campos indica que la onda se propaga en el sentido de  $\hat{z}$  con una velocidad de fase (ver los razonamientos efectuados al final del apartado 3.2.3)

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

Por esta razón  $\beta$  se suele llamar *constante de propagación*. Sus unidades son las mismas que las del número de onda  $k$ , o sea,  $m^{-1}$ , aunque para distinguir que es la parte real del

número de onda complejo y que, por lo tanto, pone de manifiesto el desfase propio de la propagación, a menudo se le asignan unidades de  $rad\ m^{-1}$ , donde hay que recordar que el radián ( $rad$ ) es una unidad adimensional.

Asimismo, el factor  $e^{-\alpha z}$  expresa la atenuación que la onda experimenta a medida que progresa según  $\hat{z}$ , razón por la cual  $\alpha$  recibe el nombre de *constante de atenuación*; sus unidades son también de  $m^{-1}$ , aunque a menudo, para distinguirla de la constante de propagación, se le asignan unidades de  $neper\ m^{-1}$ , donde el neper es, como el radián, una unidad adimensional.

De nuevo, aunque toda la información sobre los campos en régimen senoidal permanente está contenida en los fasores, puede resultar instructivo efectuar una representación gráfica de una componente arbitraria de un campo instantáneo para asimilar mejor la situación física. La expresión de dicha componente será

$$\mathcal{E}_i = E_{oi} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_i)$$

donde todas las magnitudes que aparecen son reales y  $E_{oi}$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son positivos. La representación gráfica aparece en la figura 3.27, donde se observa que, a medida que un frente de onda (un punto de la forma de onda, correspondiente a una fase determinada, en la representación bidimensional de la figura) progresa, la amplitud del campo disminuye; la

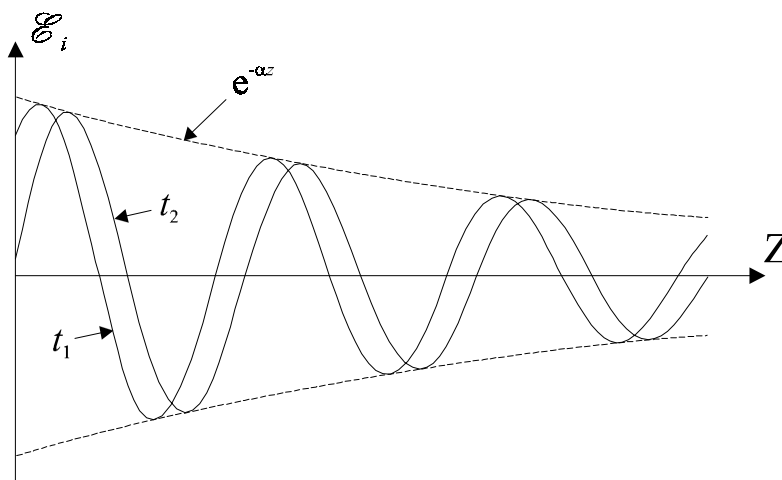


Fig. 3.27 Representación gráfica, en dos instantes sucesivos, de una componente del campo eléctrico instantáneo de una onda plana uniforme que se propaga en un medio con pérdidas

distancia entre puntos sucesivos a lo largo de la dirección de propagación con la misma fase será

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

mientras que la amplitud de la onda disminuye como  $e^{-\alpha z}$ .

Es evidente, a partir de las expresiones (3.87), que

$$|\vec{E}(z + \Delta z)|^2 = |\vec{E}(z)|^2 e^{-2\alpha \Delta z} < |\vec{E}(z)|^2$$

y que  $|\vec{H}|^2$  obedece a una relación idéntica. Por lo tanto, si calculamos el vector de Poynting  $\vec{P}$ , que es proporcional a  $|\vec{E}|^2$  y a  $|\vec{H}|^2$  en un plano arbitrario correspondiente a una  $z$  dada, y en un plano  $\Delta z$  más allá en la dirección de las  $z$  crecientes (Fig. 3.28), su módulo será menor en el plano  $z + \Delta z$ :

$$P(z + \Delta z) < P(z)$$

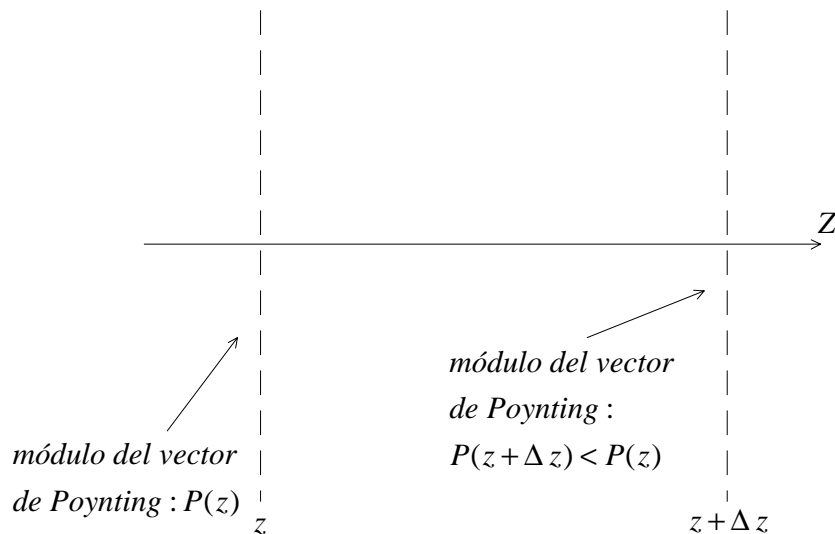


Fig. 3.28 Disipación de potencia en una onda electromagnética que se propaga en un medio con pérdidas: el módulo del vector de Poynting disminuye a medida que la onda se propaga

El principio de conservación de la energía indica, pues, que ha pasado energía de la onda al medio. Se dice que el medio presenta pérdidas y que disipa potencia (del campo electromagnético). La onda va perdiendo la potencia que transporta a medida que se propaga.

### 3.4.3 Casos límite: *buen dieléctrico y buen conductor*

En el apartado anterior se consideró el caso de una onda plana que se propagaba en un medio genérico con pérdidas, y se encontraron las expresiones generales – con la limitación de que las pérdidas se manifiesten a través de una permitividad compleja – para la constante de propagación  $\beta$  y la constante de atenuación  $\alpha$ . La constante de propagación define la longitud de onda y la de atenuación el decrecimiento de la amplitud de las componentes de los campos a medida que la onda se propaga.

Resulta interesante encontrar expresiones aproximadas para la longitud de onda y la constante de atenuación para dos casos límite que se encuentran a menudo en situaciones de interés práctico.

La expresión (3.86 b) indica que, cuanto menor sea la tangente de pérdidas de un medio, menor será la atenuación que experimente una onda que se propague por él y, por lo tanto, menor la pérdida de la potencia que la onda transporta. Así pues, cuando se estén diseñando sistemas en los que una onda deba propagarse por un medio material, será conveniente que éste presente una pequeña tangente de pérdidas. Se dice que un medio es un *buen dieléctrico* cuando se da la condición

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \ll 1 \quad (3.88)$$

Un valor típico de la tangente de pérdidas de un dieléctrico utilizado en la práctica, por ejemplo, en la construcción de circuitos de microondas, puede ser  $\operatorname{tg} \delta \approx 10^{-4}$ . Si se cumple la condición (3.88), las expresiones (3.86) admiten las siguientes aproximaciones mediante un desarrollo en serie de Taylor limitado al orden más bajo distinto de 0 y no nulo:

$$\beta \approx k' \left[ 1 + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right] \quad (3.89 \text{ a})$$

$$\alpha \approx \frac{1}{2} k' \operatorname{tg} \delta \quad (3.89 \text{ b})$$

donde se ha definido  $k' = \omega \sqrt{\mu \varepsilon'}$ . Asimismo, la impedancia intrínseca del medio podrá aproximarse por

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \approx \eta' \left\{ \left[ 1 + \frac{3}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right] + j \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta \right\}$$

donde  $\eta' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$ . En la práctica se toma el valor dado por la expresión (3.89 b) para calcular la atenuación, mientras que la constante de propagación y la impedancia intrínseca se aproximan por

$$\beta \approx k' \quad (3.90)$$

y

$$\eta \approx \eta'$$

Es de notar que en el buen dieléctrico, según las expresiones (3.89 b) y (3.90),  $\alpha \ll \beta$ , lo que desde el punto de vista práctico significa que la onda debe propagarse a lo largo de muchas longitudes de onda para que la atenuación sea apreciable (Fig. 3.29).

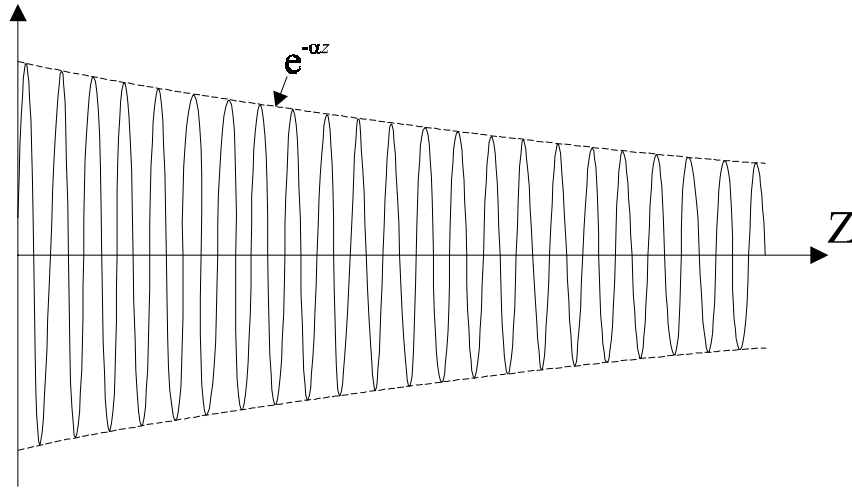


Fig. 3.29 Propagación de una onda plana uniforme en un buen dieléctrico: la atenuación es pequeña en el espacio de una longitud de onda

En la práctica a menudo las ondas interactúan con buenos conductores (por ejemplo, en guías de onda, como se verá en el capítulo 5, o en una antena). Atendiendo a las expresiones (3.83), se definirá un *buen conductor* como un medio en el que el efecto de la conductividad es predominante frente a la constante dieléctrica, o, lo que es lo mismo, en el que la corriente a que da lugar el campo eléctrico, según la ley de Ohm, es mucho mayor que la corriente de desplazamiento. Formalmente esto se traduce en que

$$|\sigma \vec{E}| \gg |\omega \epsilon \vec{E}|$$

o, simplemente,

$$\sigma \gg \omega \epsilon'_i, \omega \epsilon''_i \quad (3.91)$$

Nótese que el comportamiento de un medio como un buen conductor depende de la frecuencia de la trabajo. La expresión anterior supone que en la expresión de la ley de Ampère-Maxwell para un medio con pérdidas (3.84) la permitividad compleja  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  podrá aproximarse por

$$\epsilon \approx -j \frac{\sigma}{\omega}$$

Así, el número de onda complejo será

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \approx \omega \sqrt{\mu \left( -j \frac{\sigma}{\omega} \right)} = \frac{1-j}{\delta_p} \quad (3.92)$$

donde  $\delta_p$  es una constante con unidades de longitud que recibe le nombre de *profundidad de penetración*. Elaborando la expresión anterior se deduce fácilmente la de  $\delta_p$

$$\delta_p = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \sigma f}} \quad (3.93)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio,  $\sigma$  su conductividad y  $f$  la frecuencia. Identificando en el término de la derecha de (3.92)  $\alpha$  y  $\beta$ , según (3.85), se obtiene

$$\frac{1-j}{\delta_p} = \beta - j\alpha$$

de donde

$$\beta = \frac{1}{\delta_p}$$

$$\alpha = \frac{1}{\delta_p}$$

La expresión anterior de  $\alpha$  muestra que la profundidad de penetración  $\delta_p$  representa la distancia sobre la que la amplitud de los campos de una onda plana que se

propaga en un buen conductor se reduce en un factor  $e$ ; al mismo tiempo, la expresión de  $\beta$  indica que la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\delta_p$$

Esta situación se muestra gráficamente en la figura 3.30, y las magnitudes típicas de la profundidad de penetración en un conductor real se ilustran mediante el ejemplo siguiente.

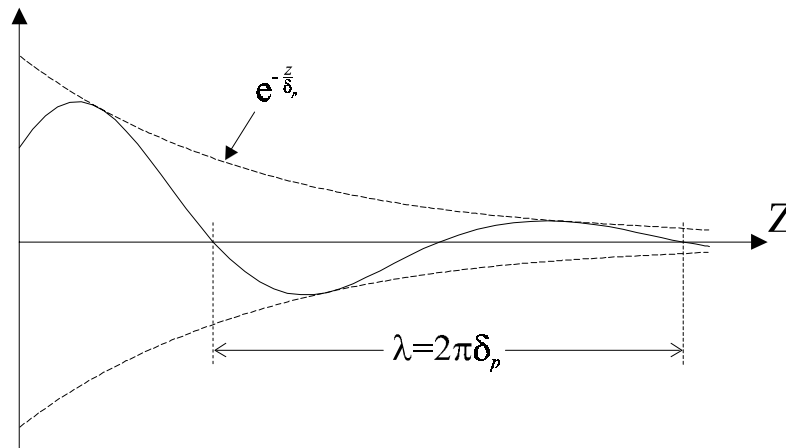


Fig. 3.30 Propagación de una onda plana uniforme en un buen conductor. Las constantes de propagación y de atenuación son iguales

### Ejemplo 3.13. Profundidad de penetración en el cobre.

El cobre presenta una conductividad de  $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ , y es un material diamagnético, por lo que, con buena aproximación  $\mu \approx \mu_0$ . Sustituyendo los valores anteriores en la expresión (3.93), se obtiene para el cobre

$$\delta_p = \frac{66,1}{\sqrt{f}} \text{ mm}$$

donde la frecuencia debe expresarse en  $\text{Hz}$ . Así, para  $f = 50 \text{ Hz}$  se encuentra  $\delta_p = 9,35 \text{ mm}$ , mientras que para  $f = 500 \text{ MHz}$  la profundidad de penetración se ha reducido a  $\delta_p = 2,96 \text{ } \mu\text{m}$ . Esta es la razón por la que, en muchas aplicaciones



de radiofrecuencia puede suponerse, por lo menos en primera aproximación, que los campos en el interior de un buen conductor son despreciables.

Resulta interesante también examinar a qué frecuencia dejaría de cumplirse en el cobre la condición (3.91). Para ello impondremos la igualdad  $\sigma = \omega \epsilon$  y supondremos que  $\epsilon \approx \epsilon_o$ . Despejando la frecuencia se encuentra que la igualdad anterior se daría para  $f \approx 10^{18} \text{ Hz}$  que es una frecuencia correspondiente a rayos X. Hay que tomar este cálculo con precaución, porque, conforme la frecuencia aumenta, aparecerán fenómenos que harán que los valores considerados para la conductividad y la permitividad se aparten de los que se han tomado para el cálculo. Sin embargo, el cálculo es ilustrativo de que puede esperarse que el cobre se comporte como un buen conductor hasta frecuencias muy altas.

También es interesante comparar la profundidad de penetración  $\delta_p$  y la longitud de onda en el conductor  $2\pi\delta_p$  con la longitud de onda a la misma frecuencia en el aire. Tomando la frecuencia de  $500 \text{ MHz}$ , encontramos que en el aire  $\lambda = 60 \text{ cm} \gg \delta_p$ . Tomando  $\lambda$  como medida representativa de las distancias sobre las que el campo varía de manera apreciable en el aire, resulta razonable pensar que, cuando una onda procedente del aire interactúe con la superficie de un buen conductor, éste podrá considerarse, si se da la condición  $\lambda \gg \delta_p$ , como localmente plano.

Si calculamos la impedancia intrínseca del buen conductor, encontramos que, puesto que  $\epsilon \approx -j \frac{\sigma}{\omega}$ ,

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \approx \sqrt{j \frac{\mu \omega}{\sigma}} = (1 + j) R_s \Omega$$

donde el parámetro  $R_s$ , con unidades de  $\Omega$ , se llama resistencia superficial, o resistencia de un cuadrado de superficie. De la expresión anterior, y atendiendo a la definición de la profundidad de penetración  $\delta_p$ , resulta que

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta_p}$$

o, teniendo en cuenta la expresión (3.93) de  $\delta_p$ ,

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}} \quad (3.94)$$

Así, la impedancia intrínseca en un buen conductor tiene una parte imaginaria igual a la parte real; ambas son menores cuando la conductividad es mayor y crecen con la frecuencia como  $\sqrt{f}$ .

El significado de la resistencia superficial puede ilustrarse considerando una onda plana uniforme que se propaga hacia el interior de un conductor, perpendicularmente a su superficie. El sistema de coordenadas se toma de manera que el origen de coordenadas esté en la superficie y el eje  $Z$  sea perpendicular a la misma (Fig. 3.31); la onda se supone polarizada linealmente, de manera que el campo eléctrico sea

$$\vec{E} = E_o e^{-\frac{z}{\delta_p}} e^{-j\frac{z}{\delta_p}} \hat{x}$$

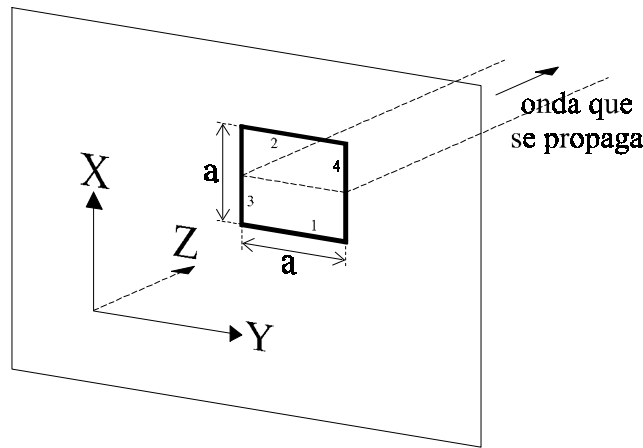


Fig. 3.31 Ilustración del significado de la impedancia superficial

La densidad de corriente será entonces

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma E_o e^{-\frac{z}{\delta_p}} e^{-j\frac{z}{\delta_p}} \hat{x} \quad (3.95)$$

Consideremos un cuadrado de lado  $a$  sobre la superficie del conductor, como se representa en la figura 3.31, con dos de sus lados, los numerados en la figura como 1 y 2,

perpendiculares al eje  $X$ . Como el campo magnético es perpendicular a la dirección de propagación, según la ley de Faraday tendremos

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -j\omega\mu \int_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$$

siempre que  $C$  sea un contorno contenido en un plano perpendicular a la dirección de propagación; en efecto,  $S$  puede ser cualquier superficie limitada por ese contorno y si, en particular, elegimos la superficie contenida en el plano perpendicular a la dirección de propagación, vemos inmediatamente que el flujo de  $\vec{H}$  debe ser nulo. Pero que  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , es equivalente a que la circulación de  $\vec{E}$  entre dos puntos cualesquiera sea independiente del camino elegido, lo cual implica que es posible definir, en un plano perpendicular a la dirección de propagación, una “diferencia de potencial” de manera no ambigua. En particular, podemos calcular esa tensión entre los lados 1 y 2 de la figura 3.31 a partir de la expresión de  $\vec{E}$  para  $z = 0$ :

$$V_{12} = \int_1^2 \vec{E}(z=0) \cdot d\vec{l} = E_o a$$

Consideremos ahora la superficie constituida por una tira de anchura  $a$  y longitud infinita, que se extienda hacia el interior del conductor desde su superficie, perpendicularmente a ella y esté limitada en ésta por el lado 1 (Fig. 3.31). Si calculamos la corriente  $I$  que la atraviesa, tendremos

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_0^\infty \int_{y_o}^{y_o+a} \vec{J} \cdot dy dz \hat{x} = a \int_0^\infty \vec{J} \cdot \hat{x} dz$$

donde  $y_o$  es la coordenada  $y$  del extremo izquierdo del lado 1. Teniendo en cuenta la expresión (3.95) de la densidad de corriente, se encuentra que la expresión anterior da para la corriente

$$I = \frac{E_o a}{R_s (1 + j)}$$

Esta corriente es la que atraviesa el lado 1 del cuadrado “por debajo” de la superficie, y, al no depender de  $x$ , es obviamente la misma que atraviesa por debajo el lado 2 o cualquier línea que una el lado 3 del cuadrado al lado 4. Podemos, pues, decir que ésta es la corriente que atraviesa el cuadrado por debajo de su superficie. Teniendo en cuenta, además, que hemos calculado que la tensión entre el lado 1 y el lado 2 del cuadrado es  $V_{12} = E_o a$ , la expresión anterior puede ponerse como

$$\frac{V_{12}}{I} = (1 + j)R_s$$

Interpretando que el cuadrado es un elemento “accesible” desde su superficie, y que  $I$  es la corriente que lo atraviesa en el sentido del lado 1 al lado 2 cuando se le aplica en su superficie una tensión entre esos lados  $V_{12}$ , puede llamarse impedancia del cuadrado de superficie (o impedancia superficial) a la magnitud

$$Z_s = \frac{V_{12}}{I} = (1 + j)R_s$$

que coincide con la impedancia intrínseca del medio. A la parte real de dicha impedancia se le llama, por razones obvias, resistencia del cuadrado de superficie o resistencia superficial.

De nuevo, la resistencia superficial no es una magnitud que posea un interés puramente teórico. Cuando se calcula la constante de atenuación debida a las pérdidas en los conductores en líneas de transmisión, o en guías de onda reales, se encuentran expresiones que dependen de la geometría de la sección recta de la línea de transmisión o guía, en las que la resistencia superficial es un parámetro que aparece como una constante de proporcionalidad. Cuanto “mejor” es un conductor (mayor su conductividad  $\sigma$ ), menor es su resistencia superficial, como lo indica la expresión (3.94). En el ejemplo siguiente se ilustra la evolución de la resistencia superficial del cobre en función de la frecuencia.

**Ejemplo 3.14.** *Cálculo de la resistencia superficial en el cobre.*

Tomando los datos para el cobre del ejemplo 3.13 y utilizando la expresión (3.94), se encuentra que a  $50\text{ Hz}$  la resistencia superficial es  $R_s = 1,8 \times 10^{-6} \Omega$ , mientras que a  $500\text{ MHz}$  es  $R_s = 5,82 \times 10^{-3} \Omega$ , ya que la resistencia superficial crece como  $\sqrt{f}$ .

## PROBLEMAS – CAPÍTULO 3

1. Una onda electromagnética plana uniforme se propaga en el vacío con un campo eléctrico dado por

$$\vec{E} = E_o (\hat{x} + j \hat{y}) e^{-j\sqrt{2}\pi z}.$$

- ¿En qué dirección y sentido se propaga la onda?
- ¿Cuál es su frecuencia?
- ¿Qué tipo de polarización tiene?
- Si  $E_o = 1 \mu V / m$ , calcular la potencia media que la onda transporta por unidad de superficie.

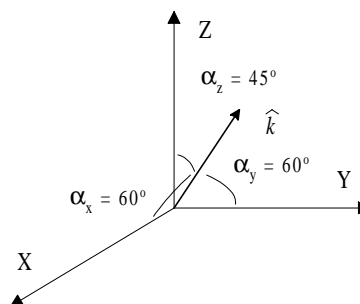
2. El campo eléctrico de una onda que se propaga en el vacío es

$$\vec{E} = \frac{E_o}{2} \left[ (\sqrt{2} + j) \hat{x} + (\sqrt{2} - j) \hat{y} + j\sqrt{2} \hat{z} \right] e^{-j\pi(x+y+\sqrt{2}z)}$$

con  $E_o$  real. Determinar:

- La frecuencia de la onda.
- La dirección de propagación.
- El tipo de polarización.
- Las expresiones de los campos eléctrico y magnético instantáneos.
- Si la onda transporta una densidad de flujo de potencia media de  $100 \mu W / m^2$ , ¿cuánto vale  $E_o$ ?

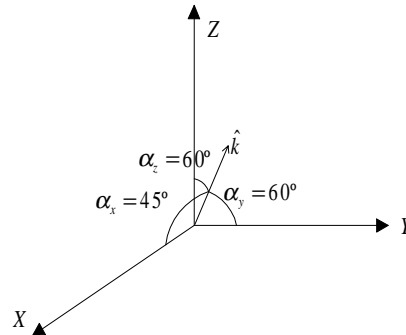
3. Una onda plana uniforme de frecuencia  $f = 3 GHz$ , polarizada linealmente, se propaga en el vacío en una dirección cuyos cosenos directores son  $l = \frac{1}{2}$ ,  $m = \frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Determinar los campos eléctrico y magnético instantáneos en cualquier punto del espacio sabiendo que en  $t = 0$ ,  $\vec{r} = 0$  el campo eléctrico instantáneo vale



$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r} = 0, t = 0) = -\frac{1}{2} E \hat{x} - \frac{1}{2} E \hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2} E \hat{z}$$

y su módulo es máximo.

4. Una onda plan uniforme de frecuencia  $600\text{ MHz}$ , polarizada circularmente a derechas, se propaga en el vacío en una dirección y sentido tales que el vector de onda forma ángulos de  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $60^\circ$  con los sentidos positivos de los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  respectivamente. La onda transporta una densidad de flujo de potencia media de  $100\text{ }\mu\text{W}/\text{m}^2$ . En el instante  $t=0$ , en el origen de coordenadas el campo magnético está contenido en el plano  $z=0$  y forma un ángulo agudo con el sentido positivo del eje  $X$ .

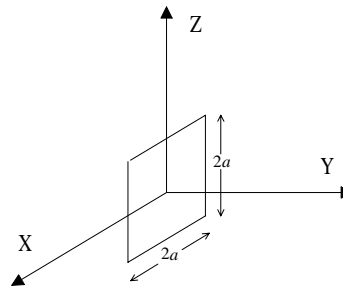


- Determinar el vector de onda.
- Determinar el vector unitario en la dirección y sentido del campo magnético en  $t=0$  y en el origen de coordenadas.
- Determinar la expresión del campo magnético  $\vec{H}$ .
- Determinar la expresión del campo eléctrico  $\vec{E}$ .

5. Una onda plana uniforme de frecuencia  $f=900\text{ MHz}$  se propaga en el vacío. Los ejes de coordenadas se han tomado de tal manera que la onda se propaga en el sentido positivo del eje  $Z$ . La onda está polarizada elípticamente a derechas. En  $t=0$ ,  $z=0$  el campo eléctrico instantáneo vale  $1\hat{x}\text{ V/m}$ , y su módulo es máximo. La onda transporta una densidad media de flujo de potencia de  $2\text{ mW}/\text{m}^2$ .

- Encontrar las expresiones de los fasores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ .
- ¿Cuál es el menor  $t>0$  para el cual el campo eléctrico instantáneo en  $z=0$  está contenido en la dirección  $Y$ ?
- ¿Cuánto vale la relación axial de la elipse de polarización?

6. Dos ondas planas uniformes de igual amplitud y frecuencia se propagan en el vacío en el sentido positivo del eje  $Z$ . Ambas están polarizadas circularmente, una de ellas a derechas y la otra a izquierdas. El campo eléctrico instantáneo de la onda polarizada a derechas en  $\vec{r}=0$  y  $t=0$  es  $\vec{\mathcal{E}}_p(\vec{r}=0, t=0) = E_o\hat{x}$ , mientras que para la onda polarizada a izquierdas se tiene  $\vec{\mathcal{E}}_l(\vec{r}=0, t=0) = -E_o\hat{y}$ .

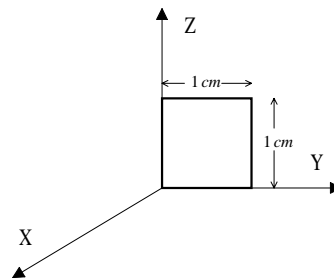


- Escribir las expresiones de los fasores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  de las dos ondas.

- b) Describir el tipo de polarización de la onda resultante de la superposición de las dos anteriores.
- c) Hallar la densidad de potencia media que transporta la onda resultante.
- d) Obtener la fuerza electromotriz inducida en una espira cuadrada, de lado  $2a$ , centrada en el origen de coordenadas y situada en el plano  $y = 0$ , con sus lados paralelos a los ejes  $X$  y  $Z$ .
- e) Encontrar el mínimo valor de la frecuencia de la onda para el cual la fuerza electromotriz inducida en la espira del apartado anterior es máxima en  $t = 0$ .

7. El campo eléctrico de una onda plana uniforme es de la forma  $\vec{E} = E_o e^{-jkz} \hat{y}$ , con  $k$  el número de onda y  $E_o$  en general un escalar complejo.

- a) ¿Cuál es la dirección y sentido de propagación de la onda?
- b) ¿Cuál es la polarización de la onda?
- c) ¿Cuál es el campo magnético de la onda?
- d) Si la frecuencia de la onda es  $f = 300 \text{ MHz}$  y transporta una densidad de flujo de potencia de  $0,33 \text{ nW/m}^2$ , calcular  $k$  y  $E_o$  (suponer que se ha tomado el origen de tiempos de tal manera que para  $t = 0$ ,  $z = 0$  el campo eléctrico es máximo y dirigido según  $\hat{y}$ ).
- e) Calcular el fasor de la fuerza electromotriz inducida en una espira cuadrada de  $1 \text{ cm}$  de lado situada como se indica en la figura.



8. El campo magnético de una onda plana uniforme que se propaga en el vacío es

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{E_o}{\eta_o} \left[ (1+j)\hat{x} + j\sqrt{2} e^{j\pi/4} \hat{z} \right] e^{jk y}$$

donde  $E_o$  es una constante real y  $\eta_o$  la impedancia intrínseca del vacío

- a) Determinar la dirección y sentido de propagación de la onda. Si la frecuencia es  $1 \text{ GHz}$ , ¿cuánto valen la longitud de onda  $\lambda$  y el número de onda  $k$ ?
- b) Escribir la expresión del campo eléctrico.
- c) Determinar el tipo de polarización y el sentido de giro de los campos.
- d) Escribir la expresión del vector de Poynting.

9. El campo magnético instantáneo de una onda plana uniforme que se propaga en el aire es

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = H_o \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} \right) \sin \left[ \omega t - \frac{1}{2} (x + y + \sqrt{2} z) \right] \text{ A/m}$$

con  $H_o$  real.

- a) Escribir el fasor campo magnético  $\vec{H}(\vec{r})$ .
- b) Determinar el vector unitario  $\hat{k}$  que indica la dirección y sentido de propagación de la onda. Comprobar que, en efecto, el campo magnético dado corresponde a una onda plana uniforme.
- c) Determinar la frecuencia de la onda.
- d) Determinar el fasor del campo eléctrico.
- e) Si  $H_o = 2,30 \times 10^{-3} \text{ A/m}$ , calcular la densidad de flujo de potencia asociada a la onda.

**10.** Una onda atraviesa dos polarizadores dispuestos perpendicularmente a la dirección de propagación, con orientaciones arbitrarias y, en general, distintas en cada uno de ellos. La onda incidente está polarizada linealmente. Explicar si el orden de los polarizadores es importante

- a) para determinar la dirección de polarización del campo de la onda que emerge del segundo polarizador;
- b) para determinar la densidad de flujo de potencia que transporta la onda emergente.

Responder a las misma preguntas (preguntas c) y d)) para el caso en que la onda incidente tenga polarización circular.