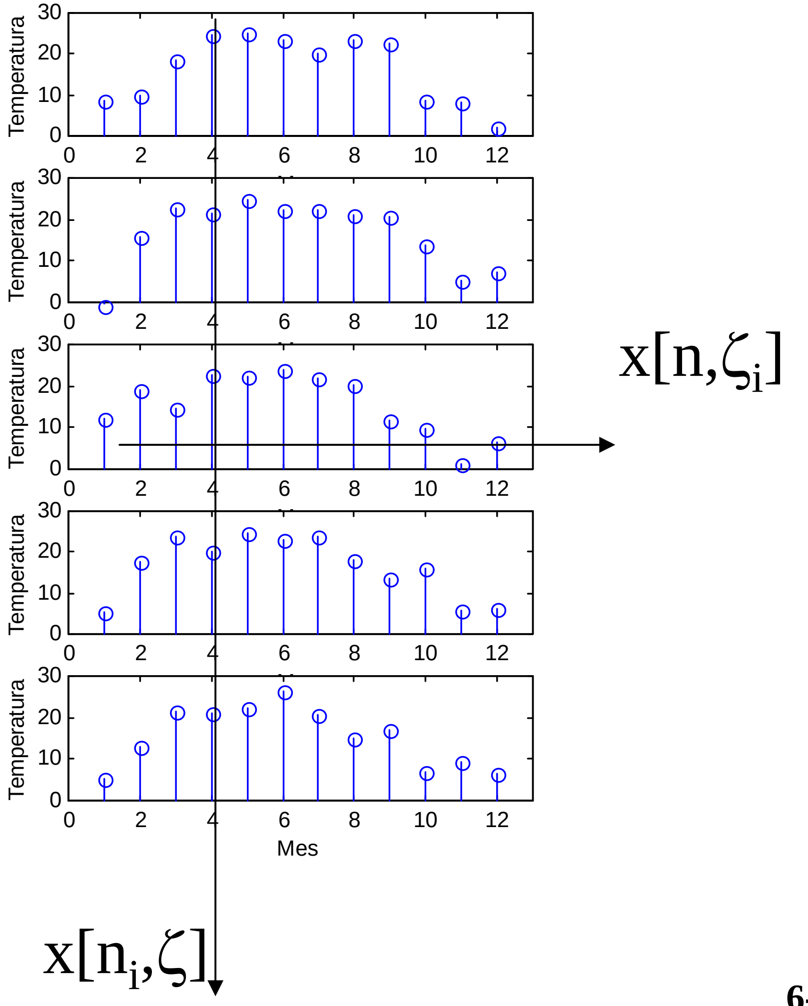
6. Señales Aleatorias

- Procesos aleatorios discretos
- Procesos y sistemas lineales e invariantes
- Densidad espectral de potencia
- Estimación espectral

- Utilidad
  - Caracterización de la señal en sistemas de comunicación
  - Caracterización del ruido.

Procesos aleatorios discretos

- Definición: Un proceso aleatorio discreto es una regla para asignar una señal $x[n,\zeta]$ a cada realización ζ
  - Un proceso estocástico -> familia de funciones de los parámetros ζ y n
- Ejemplo: Serie climática:
  - temperatura mensual, ζ= año; n=mes
  - Eje vertical: Variable aleatoria, $x[n_i,\zeta]$
  - Eje horizontal: Realización, $x[n,\zeta_i]$
- Caracterización de un proceso
  - Funciones de distribución
  - Momentos



Caracterización de un proceso aleatorio

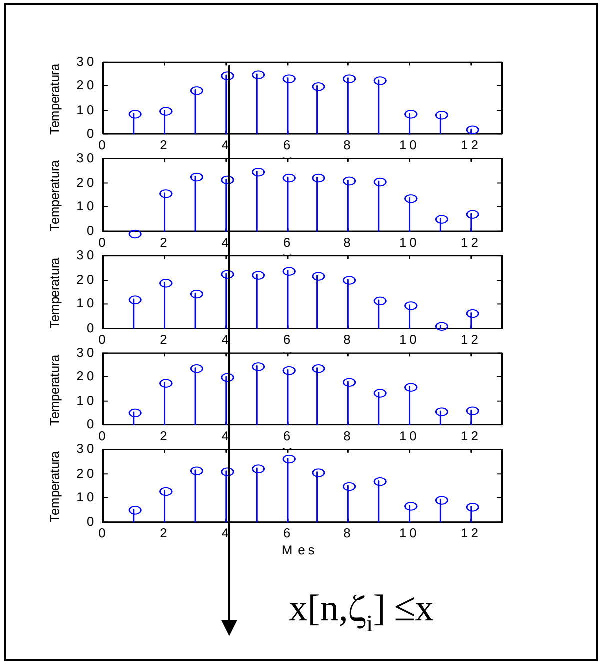
- Distribución de primer orden: $F(x,n)=P\{x[n] \leq x\}$
  - Interpretación frecuencial: Dadas N realizaciones $x[n,\zeta_i]$ ($i=0,\ldots N-1$) y observamos que se produce k veces que $x[n,\zeta_i] \leq x$, el valor de la distribución será: $F(x,n) \cong \frac{k}{N}$
  - Pdf: $f(x,n) = \frac{dF(x,n)}{dx}$
- Generalización:
  - Distribución de segundo orden:

    $F(x_1, x_2; n_1, n_2)=P\{x[n_1] \leq x_1, x[n_2] \leq x_2\}$

    Pdf: $f(x_1,x_2;n_1,n_2) = \frac{\partial^2 F(x_1,x_2;n_1,n_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$
  - Para una distribución conjunta de orden arbitrario:

    $F(x_1, \ldots,x_k; n_1, \ldots, n_k)=P\{x[n_1] \leq x_1, \ldots,x[n_k] \leq x_k\}$

    Pdf: $f(x_1,\ldots,x_k;n_1,\ldots,n_k) = \frac{\partial^k F(x_1,\ldots,x_k;n_1,\ldots,n_k)}{\partial x_1 \cdots \partial x_k}$



Caracterización del proceso mediante momentos de primer y segundo orden (I)

- Justificación: En sistemas de telecomunicación muchas veces sólo interesa el valor central de la señal y su dispersión alrededor de este valor.
- Media: Valor central del proceso (momento de primer orden):

$$m_x[n] = E\{x[n]\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;n)\,dx$$

- Autocorrelación proceso (momento de segundo orden) :

$$r_x[n_1,n_2] = E\{x[n_1]x^*[n_2]\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x^*_2 f(x_1 x_2; n_1, n_2)\,dx_1 dx_2$$

  - ✓ Poténcia del proceso: $P_x[n] = r_x[n,n]$

- Autocovariancia: Dispersión alrededor del valor central.

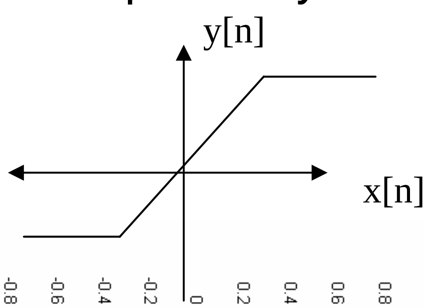
$$c_x[n_1,n_2] = E\{(x[n_1]-m_x[n_1])(x[n_2]-m_x[n_2])^*\} = r_x[n_1,n_2] - m_x[n_1]m^*_x[n_2]$$

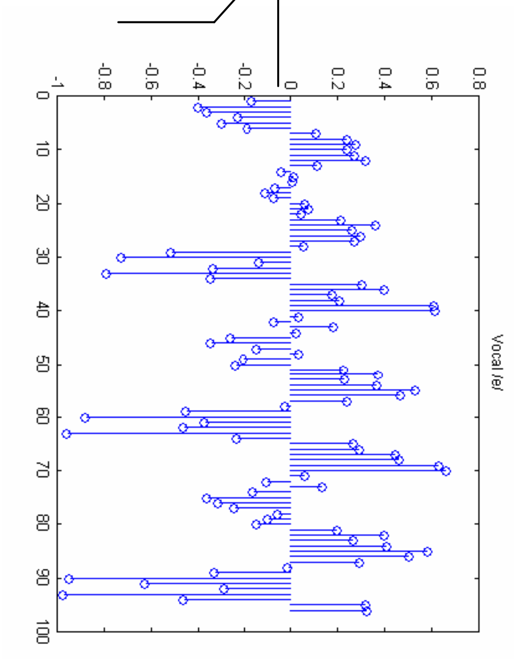
  - ✓ varianza del proceso: $\sigma_x^2[n] = c_x[n,n] = P_x[n] - |m_x[n]|^2$

Nota: observar que los cálculos se realizan para un ‘n’ dado y todas las realizaciones.

Caracterización del proceso mediante momentos de primer y segundo orden (II)

- Ejemplo de la utilidad de la medida de dispersión
  - Diseño de amplificadores con saturación: (Diseñar el nivel de saturación para garantizar que no haya saturación en un % del tiempo)





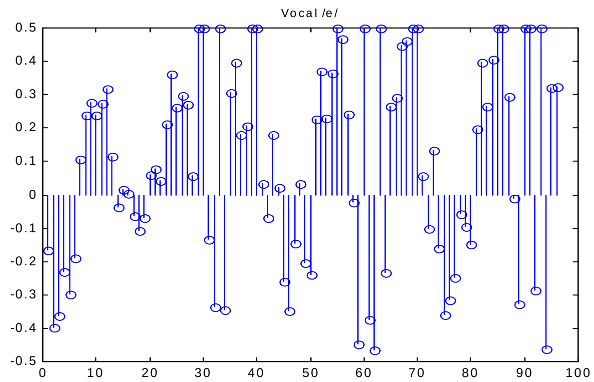
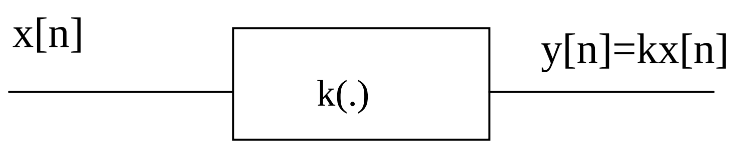
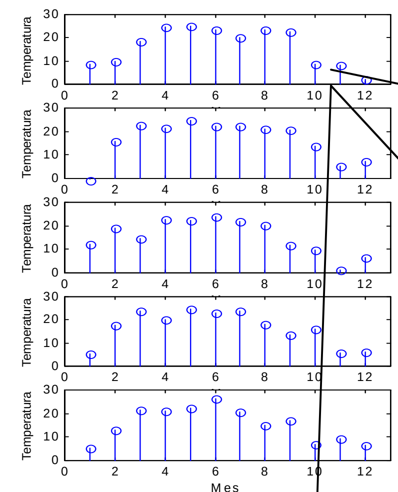


Diagrama del amplificador:

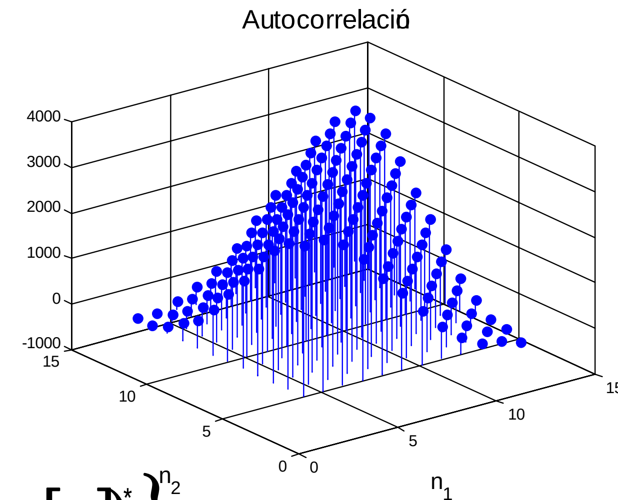


Caracterización del proceso mediante momentos de primer y segundo orden (III)

- Ejemplo para el caso de la serie de temperaturas.

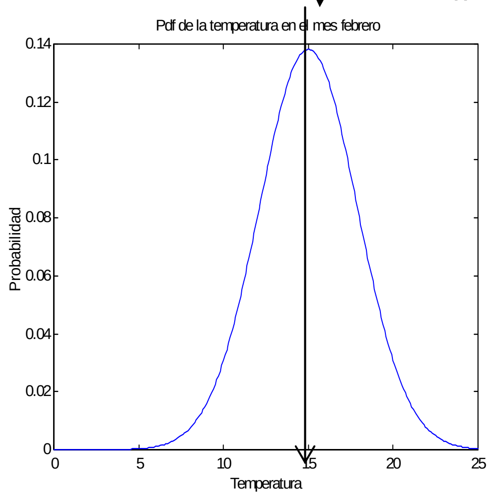


$$r_x[n_1,n_2]=E\{x[n_1]x^*[n_2]\}$$

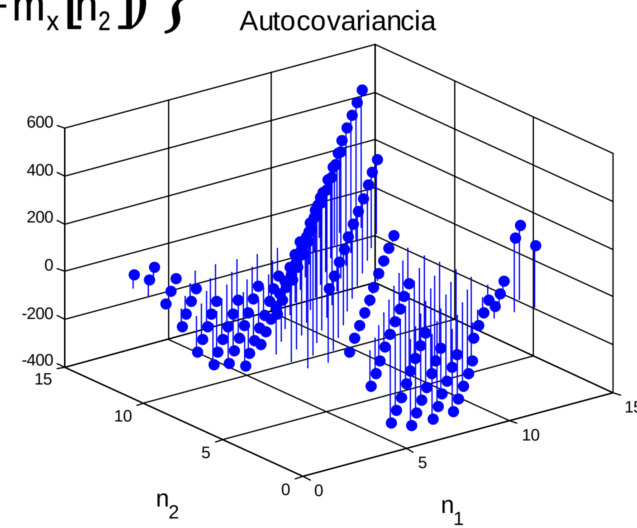


$$m_x[n]=E\{x[n]\}$$

$$c_x[n_1,n_2]=E\{x[n_1]-m_x[n_1])(x[n_2]-m_x[n_2])^*\}^{n_2}$$



Nota: el cálculo es sobre la esperanza de las realizaciones.



Ejemplo: Proceso gausiano.

- Caso de dimensión 1

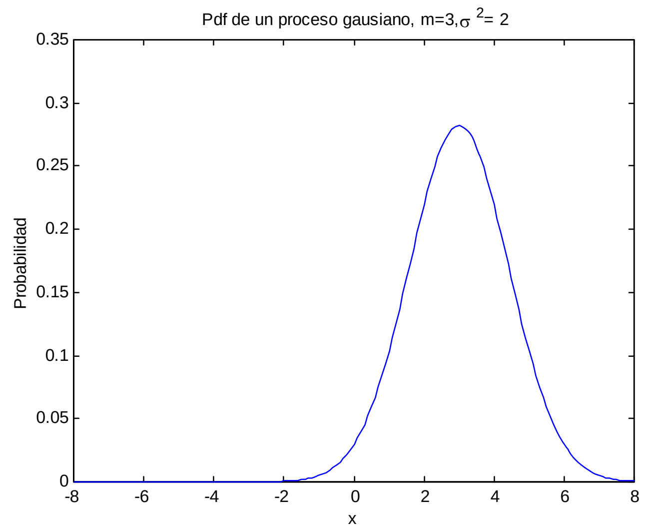
$$f(x,n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi c_x[n,n]}}e^{-\frac{(x-m_x[n])^2}{2c_x[n,n]}}$$

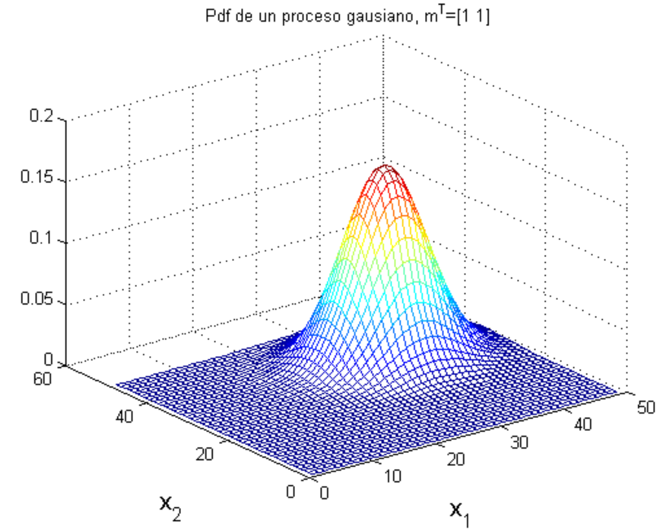
- Caso de dimensión 2

$$f(x_1,x_2,n_1,n_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{|\underline{\underline{C}}|}}e^{-\frac{(\underline{x}-\underline{m}_x)^T\underline{\underline{C}}^{-1}(\underline{x}-\underline{m}_x)}{2}}$$

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\qquad \underline{m}_x=\begin{bmatrix}m_x[n_1]\\m_x[n_2]\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}=\begin{bmatrix}c_x[n_1,n_1] & c_x[n_1,n_2]\\c_x[n_2,n_1] & c_x[n_2,n_2]\end{bmatrix}$$





Similitud entre procesos

- Correlación cruzada $r_{xy}[n_1,n_2]=E\{x[n_1]y^*[n_2]\}$
- Covarianza

$$c_{xy}[n_1,n_2]=E\left\{(x[n_1]-m_x[n_1])(y[n_2]-m_y[n_2])^*\right\}=r_{xy}[n_1,n_2]-m_x[n_1]m^*{}_y[n_2]$$

- Procesos independientes / incorrelados
  - Independencia: $E\{x[n]y^*[n]\}=E\{x[n]\}E\{y^*[n]\}$
  - Incorrelados: $c_{xy}[n_1,n_2]=0 \quad \forall n_1,n_2$
- Procesos independientes => procesos incorrelados (no a la inversa)

$$c_{xy}[n_1,n_2]=E\left\{x[n_1]y[n_2]^*\right\}-m_x[n_1]m^*{}_y[n_2]=E\{x[n_1]\}E\left\{y[n_2]^*\right\}-m_x[n_1]m^*{}_y[n_2]=0$$

Procesos Estacionarios

- Procesos estacionaros en sentido estricto:
  - Las propiedades del proceso son invariantes respecto a cambios en el origen de tiempos.
  - Primer orden: $f(x,n) = f(x,n+n_0)$
    - ✓ Significado: La pdf es común para todo n
    - ✓ como consecuencia: $m_x[n] = m_x$
  - Segundo orden:

$$f(x_1,x_2,n_1,n_2) = f(x_1,x_2,n_1+m,n_2+m) = f(x_1,x_2,n_1-n_2,0) = f(x_1,x_2,n)$$

    - ✓ Significado: La pdf sólo depende de la diferencia entre muestras para todas las realizaciones.
    - ✓ Consecuencia: $r_x[n_1,n_2] = r_x[n_1-n_2]$
  - Para el caso general: $f(x_1,\ldots,x_n,n_1,\ldots,n_n) = f(x_1,\ldots,x_n,n_1+m,\ldots,n_n+m)$

Estacionaridad (II)

- Estacionaridad en sentido amplio:

  - Unicamente las propiedades de los dos primeros momentos son invariantes respecto a cambios en el origen de tiempos:

$$E\{x[n]\} = m_x$$

$$E\{x[n_1]x^*[n_2]\} = r_x[n_1, n_2] = r_x[n_1 - n_2] = r_x[m]$$

$$r_x[m] = r_x[n+m, n] = E\{x[n+m]x^*[n]\}$$

    - ✓ Los otros momentos pueden (o no) cumplir esta propiedad.

Ergodicidad

- En general los momentos de un proceso son desconocidos: han de estimarse.
- Idea: Sustituir la esperanza estadística por el promedio temporal.
- Proceso ergódico en media:
  - para una realización ζ :

$$\left.\begin{aligned} m_x[n] &= E\{x[n]\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;n)\,dx \\ \hat{m}_x &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n;\xi] \end{aligned}\right\} \quad \hat{m}_x = m_x$$

    - ✓ Necesidad de estacionaridad

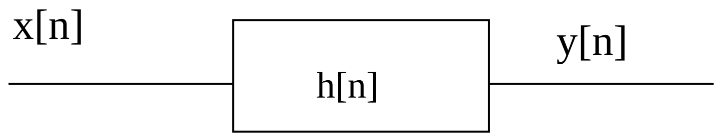
- Proceso ergódico en correlación:
  - para una realización ζ :

$$\left.\begin{aligned} r_x[n+m,n] &= E\{x[n+m]x^*[n]\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x^*{}_2 f(x_1,x_2;n+m,n)\,dx_1 dx_2 \\ \hat{r}_x[m] &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n+m;\xi]x^*[n;\xi] \end{aligned}\right\} \quad \hat{r}_x[m] = r_x[m]$$

    - ✓ Necesidad de estacionaridad

6.2. Procesos y sistemas lineales e invariantes

- Proceso resultante y[n] de filtrar otro proceso x[n]:
  - $y[n] = T\{x[n]\} = x[n] * h[n]$



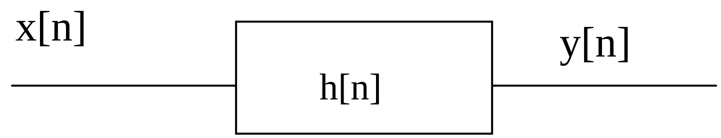
  - Media de un proceso estacionario a la salida del sistema:

$$m_y = E\{x[n] * h[n]\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]\, x[k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]\, E\{x[k]\} =$$

$$= m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k] = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]\, z^{-k} \Big|_{Z=1} = m_x H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0}$$

Procesos y sistemas lineales e invariantes (II)

- Proceso resultante y[n] de filtrar otro proceso x[n]:
  - $y[n] = T\{x[n]\} = x[n]*h[n]$



  - Correlación cruzada entre el proceso de entrada y el de salida:

$$r_{xy}[m]=E\{x[n+m]y^*[n]\}=E\left\{x[n+m]\sum_{k=-\infty}^{\infty}x^*[n-k]h^*[k]\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h^*[k]E\{x[n+m]x^*[n-k]\}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h^*[k]r_x[m+k]\Big|_{c.v.\quad k=-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h^*[-k]r_x[m-k]=r_x[m]*h^*[-m]$$

  - Autocorrelación del proceso de salida en función de la entrada y el sistema:

$$r_y[m]=E\{y[n+m]y^*[n]\}=r_x[m]*r_h[m]$$

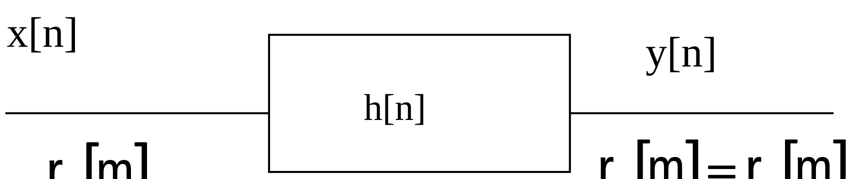
6.3. Densidad espectral de potencia (I)

- Definición de densidad espectral de potencia:

$$S_x\left(e^{j\omega}\right) = F\{r_x[m]\}$$

$$P_x = E\left\{|x[n]|^2\right\} = r_x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

- Densidad espectral de potencia a la salida de un sistema lineal:



$$r_x[m] \qquad\qquad r_y[m] = r_x[m] * r_h[m]$$

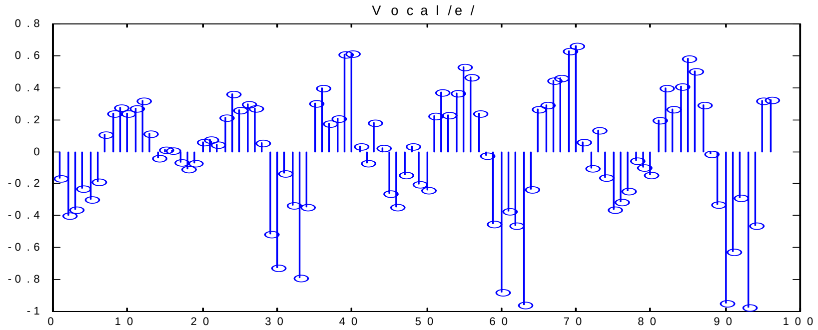
$$\mathrm{TF}\downarrow \qquad\qquad \mathrm{TF}\downarrow$$

$$S_x\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{TF}\{r_x[m]\} \qquad S_y\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{TF}\{r_x[m] * h[m] * h\ [-m]\} = S_x\left(e^{j\omega}\right)\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$

6.3. Densidad espectral de potencia (II)

◆ Ejemplo:vocal /e/ filtrada paso bajo:

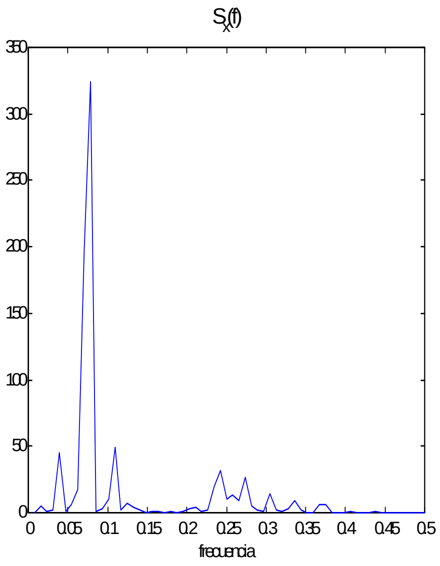
» **x[n]**

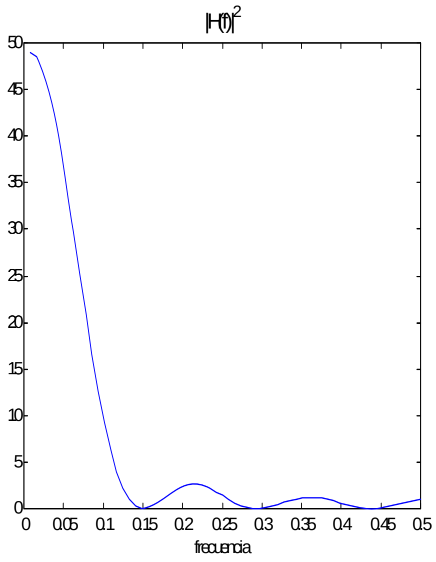


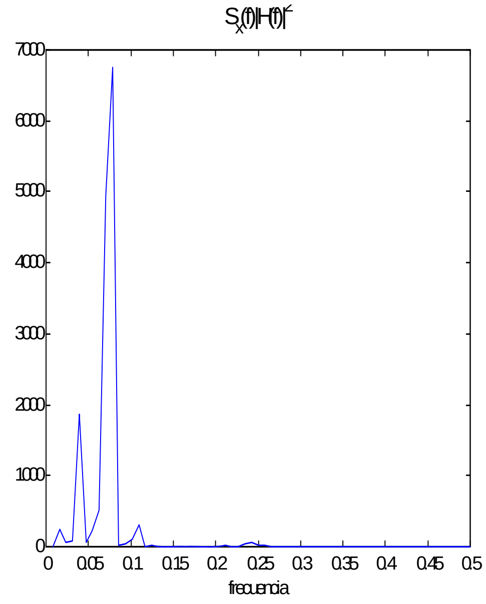
$$S_x\left(e^{j\omega}\right) = TF\{r_x[m]\}$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$

$$S_y\left(e^{j\omega}\right) = S_x\left(e^{j\omega}\right)\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$







Ejemplo: Densidad espectral de un proceso.

- **Dada la realización ζ de un proceso**:
  - x[n,ζ] =A(ζ)e$^{j(\omega (\xi)\, n+\theta (\xi))}$
  - Este proceso está formado por tres variables aleatorias independientes:
    - A(ζ), ω (ξ) ,θ (ξ)
- **La autocorrelación del proceso será:**

$$r_x[m] = E\left\{x[n+m,\xi]x^*[n,\xi]\right\} = E\left\{Ae^{j(\omega(n+m)+\theta)}A^*e^{-j(\omega(n)+\theta)}\right\} = E\left\{|A|^2 e^{j\omega m}\right\} =$$

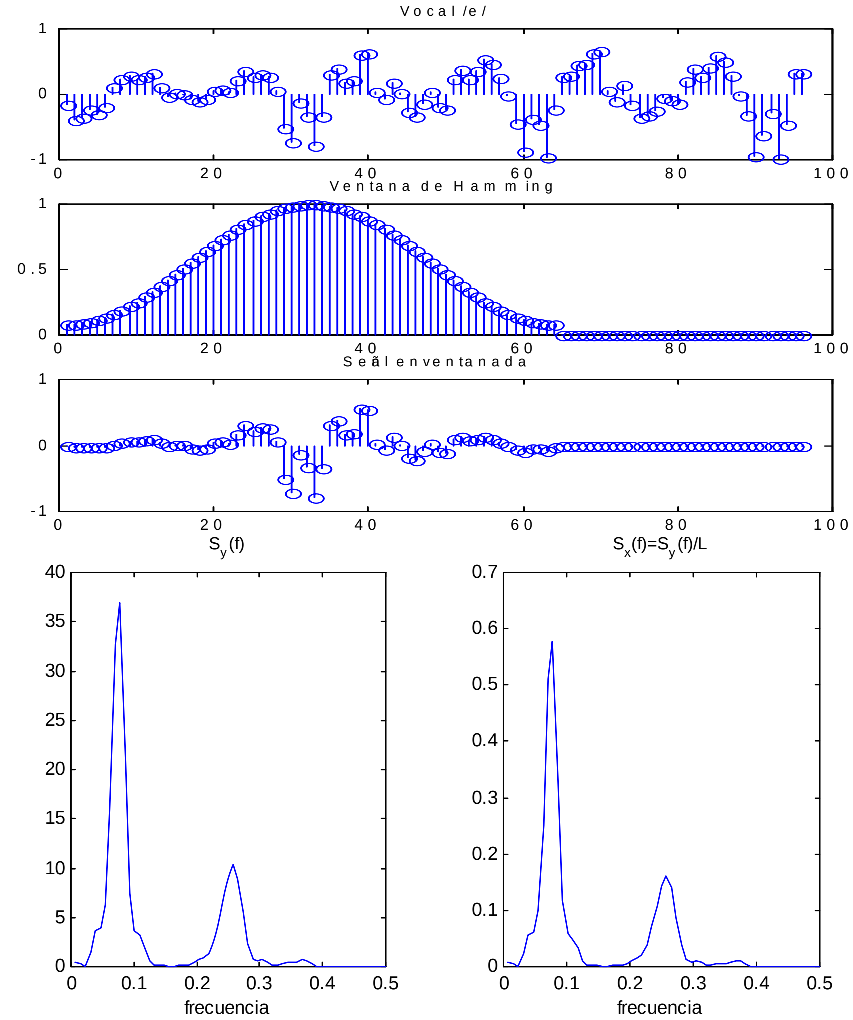
$$= \{por\ independencia\} = E\left\{|A|^2\right\}E\left\{e^{j\omega m}\right\} = E\left\{|A|^2\right\}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega m} f_w(\omega)d\omega$$

- **Como el espectro es:** $S_x(w) = F\{r_x[m]\}$ **por tanto:** $S_x(w) = E\left\{|A|^2\right\}2\pi f_w(w)$
- **Significado: S$_x$(ω) es proporcional a la densidad de probabilidad de la componente frecuencial y a la potencia de A.**

6.4 Estimación de la densidad espectral de poténcia

- Proceso para estimar el espectro de una señal
  - a)Enventanado de x[n] para obtener una secuencia de energía finita: y[n]=x[n]v[n]
  - b) Calculo de la F{.} de la secuencia enventanada: $Y(e^{jwm}) = \sum_{n=0}^{L-1} y[n] e^{-jwm}$
  - c)Determinar la densidad espectral mediante el promedio de la densidad de energía de y[n] por su longitud.

$$\hat{S}_x\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{L} S_y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{L}\left|Y\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = F\left\{\frac{1}{L} r_y[m]\right\}$$



Estimación espectral. Comentarios

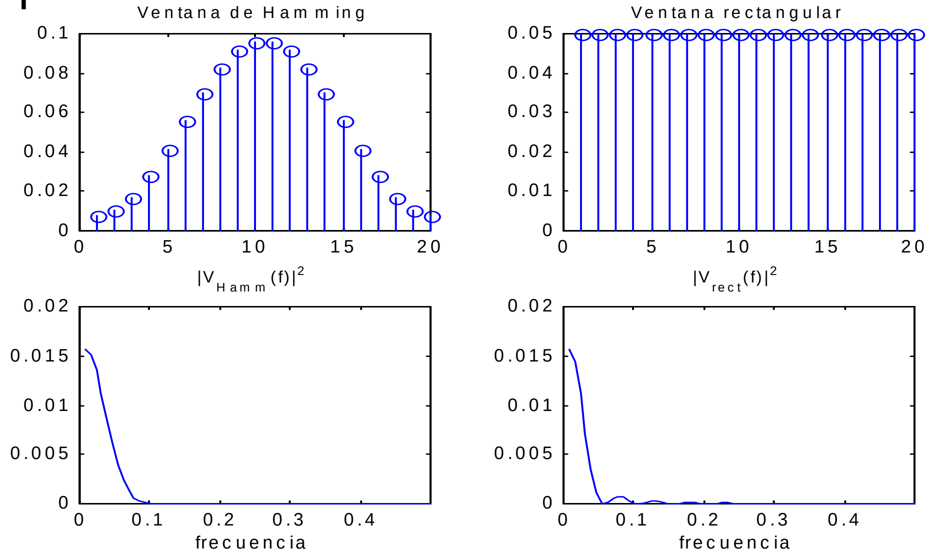
- Es $\hat{S}_X\left(e^{j\omega}\right)$ una buena estimación de $S_x\left(e^{j\omega}\right)$?
- Condición para que la estimación proporcione:
  - $E\left\{\hat{S}_x\left(e^{j\omega}\right)\right\} = S_x\left(e^{j\omega}\right)$ Promedio de estimaciones igual al valor real.
  - $Var\left\{\hat{S}_x\left(e^{j\omega}\right)\right\} = 0$ Variancia de la estimación nula.
- La esperanza de la estimación de la autocorrelación es: $E\{\hat{r}_x[m]\} = \frac{1}{L} r_x[m] r_v[m]$
  - ✓ Sesgo debido a la ventana (coeficientes de $\hat{r}_x[m]$ diferentes según m)
- El espectro tiene la forma:

$$E\left\{\hat{S}_x\left(e^{jw}\right)\right\} = F\left\{\frac{1}{L} r_x[m] r_v[m]\right\} = \frac{1}{2\pi L}\int_{-\pi}^{\pi} \left|V\left(e^{j(w-\vartheta)}\right)\right|^2 S_x\left(e^{j\vartheta}\right) d\vartheta$$

  - La estimación es sesgada pues $S_x\left(e^{j\omega}\right)$ se observa a través de la convolución con $V\left(e^{j\omega}\right)$

Estimación Espectral

- Condiciones que ha de cumplir la ventana:
  - $V\left(e^{j\omega}\right)$ ha de tener el lóbulo principal estrecho
    - (minimizar ensanchamiento de los picos)
  - $V\left(e^{j\omega}\right)$ ha de tener una relación lóbulo principal al secundario alta
    - (minimizar el leakage)
  - Debe estar normalizada, para no falsear la medida de potencia : $\frac{1}{2\pi L}\int_{-\pi}^{\pi}\left|V\left(e^{j(w)}\right)\right|^2 dw = 1 \qquad \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}\left|v[n]\right|^2 = 1$
  - Ejemplos:



Estimación espectral

- Periodograma
  - Estimación mediante una ventana rectangular.
  - Problema: variancia de la estimación elevada.
- Soluciones
  - Promediado de periodogramas (Método de Barlet)
    - ✓ Se basa en que la variancia del promedio de N espectros decrece como $1/\sqrt{N}$
  - Enventanado de la autocorrelación (Método de Blackman-Tuckey)
    - ✓ Se basa en hacer un filtrado paso bajo del espectro estimado para disminuir la variancia. $\hat{S}_x\left(e^{j\omega}\right) = TF\{\hat{r}_x[m]v[n]\}$

Resumen

- Proceso aleatorio x[n,ζ] está definido por:
  - Realización y tiempo (v.a.)
- Caracterización general de un proceso: $f(x_1,\ldots,x_k;n_1,\ldots,n_k) = \dfrac{\partial^k F(x_1,\ldots,x_k;n_1,\ldots,n_k)}{\partial x_1 \cdots \partial x_k}$
- Caracterización por momentos: $m_x[n] \quad r_x[n_1,n_2] \quad c_x[n_1,n_2]$
- Procesos estacionarios en sentido estricto :

$$f(x_1,\ldots,x_n,n_1,\ldots,n_n) = f(x_1,\ldots,x_n,n_1+m,\ldots,n_n+m)$$

  - ✓ En sentido amplio afecta sólo a media y variancia.
- Representación espectral: $S_x(e^{j\omega}) = F\{r_x[n_1,n_2]\}$
  - Interpretación en función de la pdf: $S_x(w) = E\{|A|^2\} 2\pi f_w(w)$
- Ergodicidad: permite calcular los momentos como promedios temporales.
- Estimación espectral:

$$\hat{S}_x(e^{j\omega}) = F\left\{\frac{1}{L} r_y[m]\right\} \qquad E\{\hat{S}_x(e^{jw})\} = \frac{1}{2\pi L}\int_{-\pi}^{\pi} \left|V\left(e^{j(w-\vartheta)}\right)\right|^2 S_x(e^{j\vartheta})\, d\vartheta$$

  - Periodograma: usa ventana rectangular.