ANÀLISI VECTORIAL ETSETB 06-06-2006 (JUSTIFIQUEU ELS PASSOS)

1. Sigui $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2 - y^2 - 2xy + z\ln z$.

   (a) Calculeu el domini de $\mathbf{F}$ i raoneu si és un conjunt obert, tancat, fitat, compacte o arc-connex.

   (b) Demostreu que en un entorn del punt $(x,y,z) = (0,0,1)$ l'equació $\mathbf{F}(x,y,z) = 0$ defineix implícitament z com a funció de x i y.

   (c) De la funció $z(x,y)$ obtinguda a l'apartat anterior, calculeu-ne el polinomi de Taylor de grau més petit o igual que 2 en un entorn de $(0,0)$.

   (d) És $(0,0)$ un punt crític de $z(x,y)$? En cas afirmatiu estudieu-ne el caràcter.

   (e) Doneu, si existeix, l'equació del pla tangent a la gràfica de la funció $z(x,y)$ en el punt $(0,0,z(0,0))$.

2. (a) Considerem el conjunt $B \subset \mathbb{R}^3$ definit per les inequacions $x^2 + y^2 + z \le \pi/2$, $z \ge \alpha$ i $0 \le y \le x\tan\alpha$, on el paràmetre α pertany a l'interval $(0,\pi/4)$. Calculeu el valor de α per tal que el volum de B sigui màxim.

   (b) Calculeu

$$\int_0^6 \mathrm{d}x \int_{\frac{3}{2}x-3}^{x} e^{(3x-2y)^2}\,\mathrm{d}y$$

3. Siguin C la corba intersecció de les superfícies $S_1{:}\,x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i $S_2{:}\,y + z = 2$, i els camps vectorials $\mathbf{F}(x,y,z) = (z, x^2, 0)$ i $\mathbf{G}(x,y,z) = (0,1,2x)$.

   (a) Calculeu mitjançant una integral de línia la circulació de $\mathbf{F}$ al llarg de C (indiqueu-ne el sentit).

   (b) Calculeu mitjançant una integral de superfície el flux de $\mathbf{G}$ a través de la porció de superfície S_2 interior a S_1 (indiqueu-ne el sentit).

   (c) Estudieu la relació entre els camps vectorials $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}$.

4. Siguin $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-6)^2$ i D la frontera de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z^2 ,\ z \ge y + 2\}$.

   (a) Dibuixeu el conjunt D.

   (b) Justifiqueu l'existència de mínim absolut de la funció $f(x,y,z)$ en el conjunt D.

   (c) Calculeu, si existeixen, els extrems absoluts de $f(x,y,z)$ en el conjunt D.

1

(a) $F(x,y,z) = x^2 - y^2 - 2xy + z\ln z$

Com que $\ln z$ està definit només per valors positius de z,
$\mathrm{Dom}\, F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$.

És un conjunt obert, ja que $\forall (x,y,z) \in \mathrm{Dom}F$, la bola de centre (x,y,z) i radi $z/2$ està continguda en el conjunt.

No és tancat ja que no conté la seva frontera, que és el pla $\{z=0\}$.

No és compacte perquè no és tancat.

No és fitat perquè no existeix cap bola que el contingui.

Dos punts de $\mathrm{Dom}F$ sempre es poden unir per un camí contingut en el conjunt (per exemple, un segment), i per tant $\mathrm{Dom}F$ és arc-connex.

(b) observem que $(0,0,1) \in \mathrm{Dom}F$ i $F(0,0,1) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y - 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \ln z \implies$$

les derivades parcials de F són contínues en $\mathrm{Dom}F$
$\implies F \in \mathcal{C}^1(\mathrm{Dom}F)$.

D'altra banda, $\nabla F(0,0,1) = (0,0,1)$, i per tant, aplicant el Teorema de la Funció Implícita sabem que $\exists\, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ obert tq $(0,0) \in \mathcal{U}$ i $\exists V \subset \mathbb{R}$ obert tq $1 \in V$ i $\exists$ una aplicació $z: \mathcal{U} \to V$ tq $z(0,0) = 1$ i $\forall (x,y) \in \mathcal{U}$ es satisfà $F(x,y,z(x,y)) = 0$

Sabem també que $z(x,y)$ és de classe $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{U}$.
(en realitat és $\mathcal{C}^\infty$, perquè F ho és)

(c) Del T. Funció Implícita sabem que

$\forall (x,y) \in U \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y), \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \right) = -\frac{1}{1+\ln z} (2x-2y, -2y-2x$

és a dir $\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y-2x}{1+\ln z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y+2x}{1+\ln z}$.

Com que $z(0,0)=1$, llavors $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=0 \ \text{ i } \ \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0}$

D'altra banda,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(1+\ln z)(-2) - (2y-2x)\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+\ln z)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = -2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(1+\ln z)\cdot 2 - (2y+2x)\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+\ln z)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{(1+\ln z)\, 2 - (2y-2x)\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+\ln z)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0,0) = 2$$

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{(0,0)} = 2$ perquè $z \in C^2$

El polinomi de Taylor demanat és

$$P_2(x,y) = z(0,0) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)\cdot y +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)\cdot x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0,0)\cdot xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)\cdot y^2 \right]$$
$$= 1 - x^2 + 2xy + y^2$$

(d) Com que $\nabla z(0,0) = (0,0) \Rightarrow (0,0)$ punt crític de $z(x,y)$

D'altra banda, $Hz(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_2 = -8 < 0$

$\Rightarrow (0,0)$ és un punt de sella de $z(x,y)$

Exercici 2(a):

La inequació $x^2 + y^2 + z \leq \pi/2$ descriu l'interior d'un paraboloide convex (vist des de $+\infty$) amb el vèrtex al punt $(0, 0, \pi/2)$. La condició $z \geq \alpha$ és satisfeta pels punts que estan *per sobre* d'un pla perpendicular a l'eix del paraboloide. L'última condició ($0 \leq x \leq y \leq x \tan\alpha$) selecciona una *rodanxa* d'aquest paraboloide limitada, en el primer octant, pels plans *verticals* $y = 0$ i $y = x\tan\alpha$, que s'intersequen a l'eix z (vegeu la Figura 1). El conjunt B projectat sobre el pla $z = 0$ és un sector circular d'angle α (vegeu la Figura 2). El radi d'aquest sector es troba fent la intersecció de la superfície del paraboloide ($z = \pi/2 - x^2 - y^2$) amb el pla $z = \alpha$ i val $\sqrt{\pi/2 - \alpha}$.

El volum del conjunt B es pot calcular en coordenades cilíndriques (ρ, φ, z). La integral de z s'estén des del pla *horitzontal* $z = \alpha$ fins la superfície del paraboloide ($z = \pi/2 - \rho^2$). Les integrals de ρ i de φ s'estenen a tot el domini de la Figura 2:

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \int_0^\alpha \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}-\alpha}} \rho\, \mathrm{d}\rho \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\rho^2} \mathrm{d}z \\ &= \int_0^\alpha \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}-\alpha}} \mathrm{d}\rho \left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\rho - \rho^3\right) \\ &= \alpha\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2\right) = \frac{1}{4}\alpha\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2 \end{aligned}$$

Derivant respecte a α i igualant a zero:

$$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \text{o} \qquad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

L'únic punt que pertany al domini és $\alpha = \frac{\pi}{6}$, que dóna el màxim demanat, la qual cosa pot comprovar-se amb la segona derivada o bé amb criteris geomètrics.

FIGURA 1:

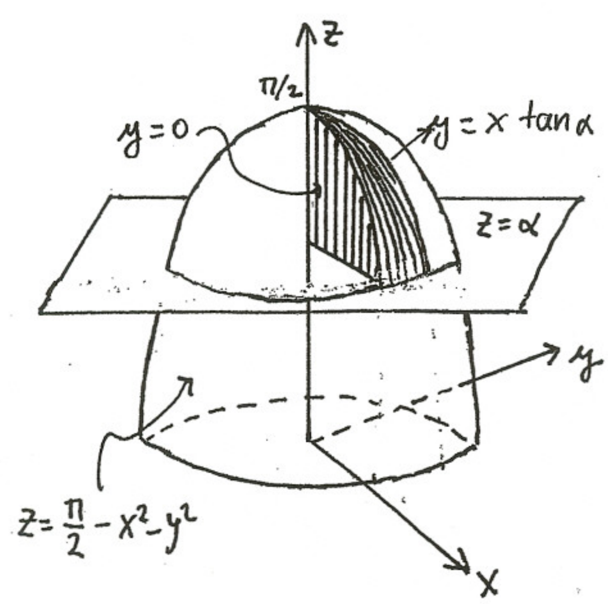
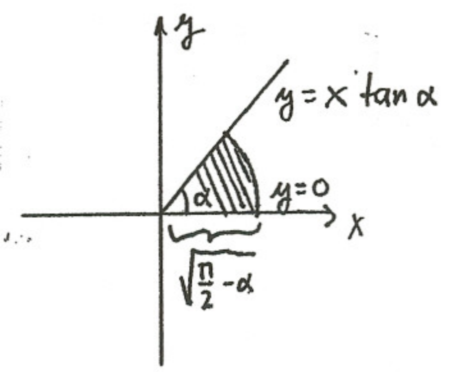


FIGURA 2:



(e) L'equació del pla tangent a la gràfica de la funció $z(x,y)$ en $(0,0)$ és:

$$z = z(0,0) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)\cdot y$$, és a dir

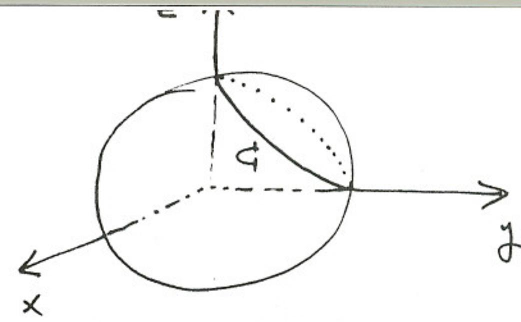
l'equació és $\boxed{z = 1}$.

(e) L'equació del pla tangent a la gràfica de la funció $z(x,y)$ en $(0,0)$ és:

$$z = z(0,0) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)\cdot y \,,$$ és a dir

l'equació és $\boxed{z = 1}$.

3 $\quad C = S_1 \cap S_2$

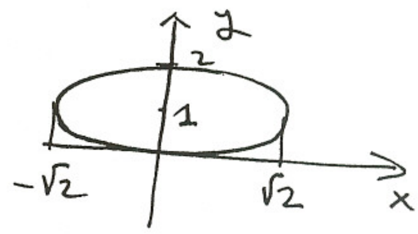


$S_1 = \{ x^2+y^2+z^2=4 \} \subset \mathbb{R}^3$

$S_2 = \{ y+z=2 \} \subset \mathbb{R}^3$

(a) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=4 \\ y+z=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to x^2+y^2+(2-y)^2=4 \to \dots \to \frac{x^2}{2}+(y-1)^2=1 \\ \to z=2-y \end{array}$

$\Rightarrow$ El pla S_2 talla l'esfera S_1 en una circumferència C i la projecció de C en el pla XY és l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{2}+(y-1)^2=1$.



Per tant podem parametritzar C de la següent manera:

$\vec{\alpha} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longmapsto (\sqrt{2}\cos t,\ 1+\sin t,\ 1-\sin t)$ $\quad \Rightarrow \quad \vec{F}(x,y,z) = (z, x^2, 0)$

$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{\alpha} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (1-\sin t,\ 2\cos^2 t,\ 0) \cdot (-\sqrt{2}\sin t,\ \cos t,\ -\cos t)\, d$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{2}\sin t + \sqrt{2}\sin^2 t - 2\cos^3 t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos 2t) - 2\cos t\,(1-\sin^2 t)\right) dt =$$

$$= \sqrt{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t - 2\sin t + 2\,\frac{\sin^3 t}{3} \Bigg|_0^{2\pi} = \boxed{\sqrt{2}\pi}$$

(b) Sigui $T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + (y-1)^2 \le 1 \}$.

Parametritzem la porció de superfície de S_2 interior a S_1

$\vec{\sigma} : T \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (x,\ y,\ 2-y)$

Exercici 2(b):

El domini de la integral és el triangle indicat en la Figura 3. Fent el següent canvi de variables lineal (i, per tant, injectiu):

$$u = 3x - 2y \qquad\qquad v = x,$$

l'integrand queda e^{u^2}. El jacobià del canvi $(x,y) \to (u,v)$ és -2 i, per tant, el valor absolut del jacobià del canvi $(u,v) \to (x,y)$ és $\frac{1}{2}$. El domini d'integració en el pla UV s'obté analitzant cadascun dels tres trams de la frontera del domini en el pla XY:

$$y = x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u = v$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = -2y \\ v = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

$$y = \frac{3}{2}x - 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = 6 \\ v = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u = 6$$

Les rectes $u = v$, $v = 0$ i $u = 6$ defineixen el triangle de la Figura 4. La integral, per tant, s'escriu:

$$\int_0^6 \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v \; e^{u^2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\int_0^6 \mathrm{d}u \; e^{u^2} u = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{u^2}\right]_0^6 = \frac{1}{4}\left(e^{36} - 1\right).$$

FIGURA 3:

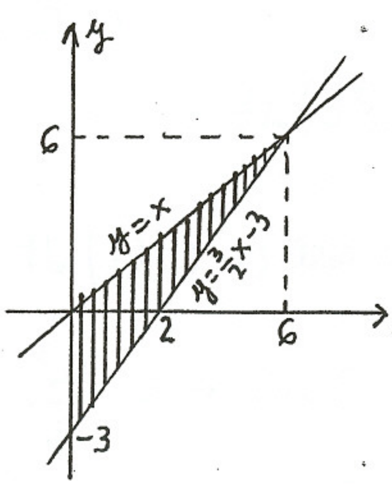
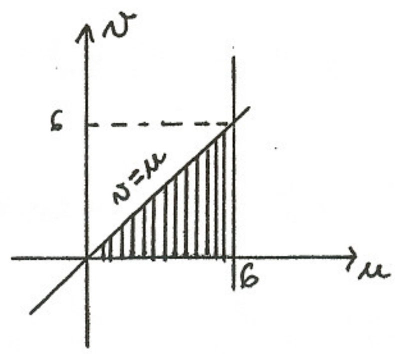


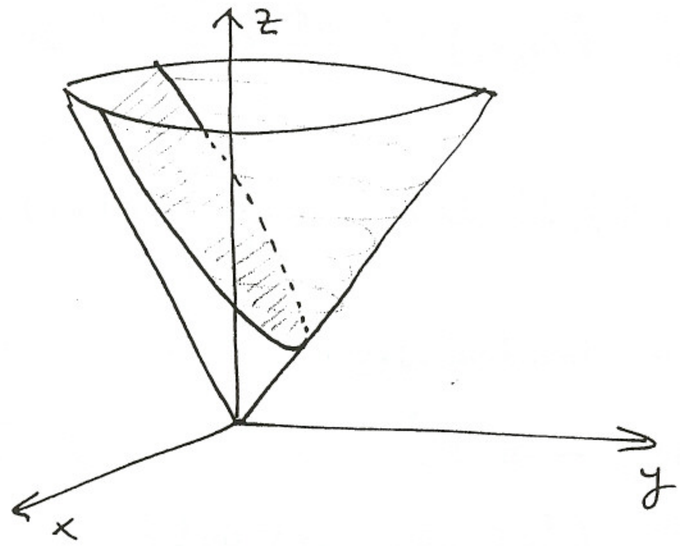
FIGURA 4:



(4) $D = \mathrm{Fr}\,\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le z^2,\ z \ge y+2 \}$

(a) $x^2+y^2=z^2 \to$ con

$z = y+2 \to$ pla paral·lel a la generatriu del con, $z=-y$



D està format per dues superfícies (un tros de con, S_1 i un tros de pla, S_2), de manera que $S_1 \cap S_2 =$ paràbola

(b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+(z-6)^2 = d^2((x,y,z),(0,0,6))$,

on d és la distància euclídia.

Com que D no és fitat, no hi ha punts a distància màxima. D'altra banda tenim garantida l'existència de punts a distància mínima (punt o punts de D més propers a $(0,0,6)$).

(c) Càlcul dels candidats a mínim absolut de f

* $\mathring{D} = \emptyset \Rightarrow$ No hi ha candidats a l'interior.

* Candidats a la superfície cònica S_1:

$g(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

$\nabla(f+\lambda g) = (2x+2\lambda x,\ 2y+2\lambda y,\ 2(z-6)-2\lambda z) = \bar{0}$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} = (1,0,0), \quad \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = (0,1,-1) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,1)$$

$G(x,y,z) = (0,1,2x)$

$$\int_S \vec{G}\, d\vec{\sigma} = \iint_T \vec{G}(\vec{\sigma}(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} \right) dx\, dy =$$

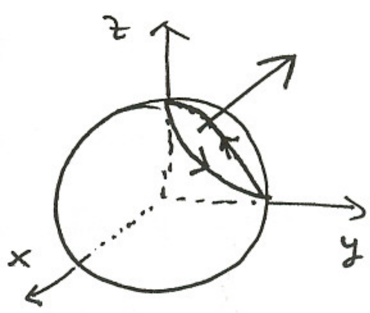
$$= \iint_T (0,1,2x)\cdot(0,1,1)\, dx\, dy = \iint_T (1+2x)\, dx\, dy$$

Usem el canvi de coordenades

$$g : [0,1] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad ; \; Jg(r,t) = \sqrt{2}\, r$$
$$(r,t) \longmapsto (\sqrt{2}\, r \cos t,\; 1 + r \sin t)$$

$$\Longrightarrow \int_S \vec{G}\, d\vec{\sigma} = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 (1 + 2\sqrt{2}\, r \cos t)\sqrt{2}\, r\, dr = \ldots = \boxed{\sqrt{2}\,\pi}$$

(c) $$\mathrm{Rot}\, \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x^2 & 0 \end{vmatrix} = (0,1,2x) = \vec{G}$$



Observem que la circulació calculada a l'apartat a) és en el sentit indicat al dibuix, i el flux a través de la superfície és en la direcció del vector $(0,1,1)$. Per tant, es confirma el Teorema de Stokes:

$$\int_S \mathrm{Rot}\, \vec{F} = \oint_C \vec{F}\, d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda=-1 \Rightarrow z=3 \Rightarrow x^2+y^2=9 \Rightarrow \\ \text{ó} \\ y=0 \Rightarrow x=\pm z \Rightarrow \ldots \end{cases}$$

$\boxed{C_1: \{z=3,\ x^2+y^2\le 9,\ y\le 1\}}$ tros de circumf.

s'obtenen punts de C_1, ja considerats.

* Candidats a la superfície plana, S_2

$h(x,y,z) = z-y-2$

$\nabla(f+\mu h) = (2x,\ 2y-\mu,\ 2(z-6)+\mu) = \vec{0} \Rightarrow x=0,$

$\{2(z-6)+2y=0,\ z-y-2=0\} \Rightarrow \boxed{P_1=(0,2,4)}$

* Candidats a la paràbola $S_1\cap S_2$

$\nabla(f+\alpha g+\beta h) = (2x+2\alpha x,\ 2y+2\alpha y-\beta,\ 2(z-6)-2\alpha z+\beta) =$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=\pm z = z-2 \Rightarrow \boxed{P_2=(0,-1,1)} \\ \text{ó} \\ \lambda=-1 \rightarrow \mu=0 \rightarrow 2(z-6)+2z=0 \Rightarrow z=3 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2=3^2-1^2 \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{P_3=(2\sqrt{2},1,3),\ P_4=(-2\sqrt{2},1}$

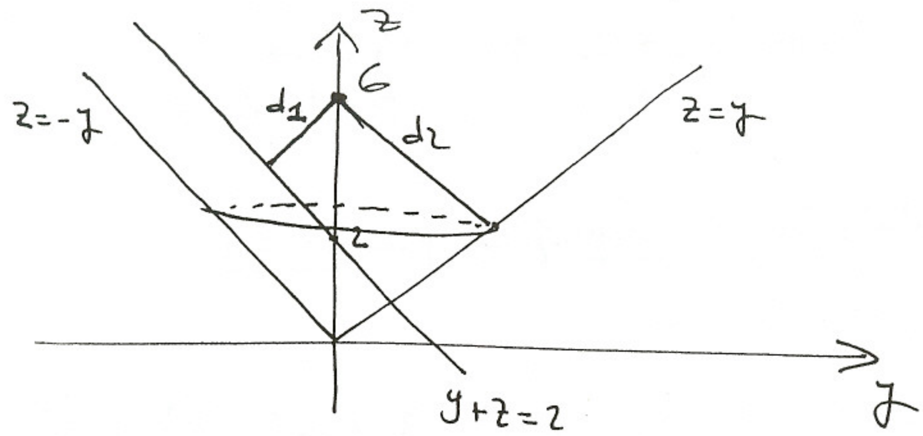
Avaluació dels candidats

$f(C_1) = 9+(3-6)^2 = 18$

$f(P_1)=8$, $f(P_2)=26$, $f(P_3)=f(P_4)=18$

Conclusió: $\boxed{\begin{array}{l} P_1=(0,2,4) \text{ punt de mínim absolut} \\ 8 \text{ és el valor mínim de } f \text{ en } D. \end{array}}$

Alternativa:



El valor mínim de f en D serà la més petita de les següents distàncies: $d_1 =$ distància del punt $(0,0,6)$ al pla $y+z=2$, $d_2 =$ dist. del punt $(0,0,6)$ al con, i després aixecat al quadrat.

Per la simetria del dibuix, veiem que $d_1 < d_2$, i per tant hem de calcular $d_1 = d\left((0,6),\ y=z+2\right)$, al pla $x=0$

$$d\left((\alpha,\beta),\ ay+bz=c\right) = \frac{|a\alpha+b\beta-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1.0+1.6-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{}$$

$\Rightarrow$ El valor mínim de f serà $(2\sqrt{2})^2 = 8$

El punt de mínim és $P = \{x=0\} \cap \{y+z=2\} \cap \{z-6=-(y-0)\}$

$\Rightarrow \boxed{P=(0,2,4)}$