Estos dos ejercicios tienen el objetivo de permitirle una auto-evaluación de conceptos clave de señales deterministas (asignatura SIS1). Es muy importante en especial el concepto de autocorrelación de señales de potencia finita.

Ejercicio 1:
Para las siguientes señales, halle la potencia P_x, la trasformada de Fourier $X(f)$, la autocorrelación $R_x(\tau)$ y la densidad espectral de potencia $S_x(f)$. Dibuje $S_x(f)$ y verifique que se cumple el teorema de Parseval.

a) $x(t) = Ae^{j(2\pi f_o t+\theta)}$

b) $x(t) = A\cos\left(2\pi f_o t + \theta\right)$

c) $x(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Pi\left(\dfrac{t-nT}{T/2}\right)$

[Sugerencia: utilice el desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$ para resolver el apartado c).]

Ejercicio 2:
Halle la potencia y la densidad espectral de potencia de la siguiente señal:
$x(t) = A\cos\left(2\pi f_o t\right) + B\cos\left(2\pi f_1 t + \theta\right)$
en los siguientes casos:
a) $f_o \neq f_1$
b) $f_o = f_1$

Estos dos ejercicios tienen el objetivo de permitirle una auto-evaluación de conceptos clave de probabilidad y variable aleatoria. Es muy importante en especial el teorema de la esperanza para el cálculo de medias, variancias y correlaciones estadísticas.

Ejercicio 3:
Sea α una variable aleatoria real uniformemente distribuida entre 0 y 2π.
Sea β una variable aleatoria que es función de α:

$$\beta = A\cos^2(\alpha)$$

a) Halle la variancia de β, es decir, $\sigma_\beta^2 = E\left[\left(\beta - \mu_\beta\right)^2\right]$.

b) Halle la correlación de ambas variables, es decir $\nu_{\alpha,\beta} = E\left[\alpha\beta\right]$.

c) ¿Son α y β variables aleatorias incorreladas? Razone la respuesta.

d) ¿Son α y β variables aleatorias ortogonales? Razone la respuesta.

e) ¿Son α y β variables aleatorias independientes? Razone la respuesta.

Ejercicio 4:
Repita el ejercicio anterior considerando que α es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre $-\pi$ y π.

Estos ejercicios son ejemplos de cálculo de promedios estadísticos de procesos a partir de una descripción analítica de los mismos. Se aplican conceptos de incorrelación, independencia y probabilidad condicionada que pertenecen a asignaturas previas (PIPE).

Ejercicio 5:
Sea α una variable aleatoria real uniformemente distribuida entre 0 y A.
Sea θ una variable aleatoria binaria de valores $\pi/2$ y $-\pi/2$ con probabilidades prob($\theta=\pi/2$)=0.5 y prob($\theta=-\pi/2$)=0.5.

Considere el proceso:
$$x(t)=\alpha\cos\left(2\pi f_o t+\theta\right)$$

a) Dibuje varias realizaciones del proceso.

Suponga primero que α y θ son independientes.
b) Halle la media y la autocorrelación (estadísticas) del proceso.

Suponga ahora que α y θ son dependientes pero incorreladas.
c) Halle la media y la autocorrelación (estadísticas) del proceso.

Suponga finalmente que α y θ son dependientes del siguiente modo:
Si $\theta=\pi/2$ entonces α está uniformemente distribuida entre 0 y $A/2$
Si $\theta=-\pi/2$ entonces α está uniformemente distribuida entre $A/2$ y A.
d) Halle la media y la autocorrelación (estadísticas) del proceso.

Ejercicio 6:
Sea el proceso:
$$x(t)=\alpha\Pi\left(\frac{t}{T}\right)+\beta\Pi\left(\frac{t-T}{T}\right)$$
donde α y β son variables reales uniformemente distribuidas entre 0 y A.

a) Dibuje varias realizaciones del proceso.

Suponga primero que α y β son independientes.
b) Halle la media y la autocorrelación (estadísticas) del proceso.

Suponga ahora que α y β son dependientes pero incorreladas.
c) Halle la media y la autocorrelación (estadísticas) del proceso.

Suponga finalmente que α y β son dependientes del siguiente modo:
Si $0\le\alpha<A/2$ entonces β está uniformemente distribuida entre 0 y $A/2$
Si $A/2\le\alpha<A$ entonces β está uniformemente distribuida entre $A/2$ y A.
d) Halle la media y la autocorrelación (estadísticas) del proceso.

Estos ejercicios son sobre los conceptos de estacionariedad, cicloestacionariedad y circularidad.

Ejercicio 7:
Considere el proceso:

$$x(t) = y(t)e^{j2\pi f_o t}$$

donde $y(t)$ es un p.a.e. (proceso aleatorio estacionario) real en sentido amplio de media nula.

a) ¿Es $x(t)$ estacionario en sentido amplio?
b) ¿Es $x(t)$ estacionario de segundo orden?
c) ¿Existe algún ciclo-periodo en $x(t)$?

Ejercicio 8:
Considere el proceso:

$$x(t) = \alpha a(t) + j\beta b(t)$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son p.a.e. en sentido amplio, reales y de idéntica media y autocorrelación.

α es una variable uniformemente distribuida entre 0 y 1.
β es una variable aleatoria gausiana de media $1/2$ y varianza σ_β^2.
α, β, $a(t)$ y $b(t)$ son independientes entre sí (a pares).

a) Halle la autocorrelación y la autocorrelación complementaria de $x(t)$.
b) ¿Para qué valor de σ_β^2 es $x(t)$ un proceso circular?

Nota: observe en este ejercicio la necesidad de asumir independencia (y no sólo incorrelación) entre los procesos y las variables aleatorias para poder llegar al resultado final.

Este ejercicio permite evaluar el impacto que tiene (sobre el espectro) el efecto Doppler (movimiento del usuario) en un canal de comunicaciones móviles.

Ejercicio 9:
Halle y dibuje en detalle el espectro del siguiente proceso:

$$x(t) = y(t)\cos\left(2\pi\alpha t + \theta\right)$$

donde $y(t)$ es un proceso estacionario en sentido amplio cuyo espectro es:

$$S_y(f) = \begin{cases} \frac{P_x}{2B} & |f| \le B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

α es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre $-B/2$ y $B/2$ y θ una variable aleatoria uniformemente distribuida entre $-\pi$ y π.

Nota: suponga que $y(t)$, α y θ son mutuamente independientes.

Ejercicio 10:

$x(t) = y(t)\cos\left(2\pi\alpha t\right)$

$$S_y(f) = \begin{cases} \dfrac{P_y}{2B} & \left|f\right| \leq B \\ 0 & \left|f\right| > B \end{cases}$$

$prob\left(\alpha = B\right) = p$
$prob\left(\alpha = 2B\right) = 1 - p$

Halle la potencia media de $x'(t)$ (la derivada de $x(t)$).

Ejercicio 11:

Considere el proceso x(t) de ancho de banda B y espectro:

$$S_x(f)=\begin{cases} A & \text{en } 0\le |f| < B/3 \\ A/2 & \text{en } B/3\le |f| < 2B/3 \\ A/4 & \text{en } 2B/3\le |f| < B \end{cases}$$

que se transmite por un canal ideal y con ruido aditivo w(t) de espectro:

$$S_w(f)=\begin{cases} N_o/4 & \text{en } 0\le |f| < B/3 \\ N_o/2 & \text{en } B/3\le |f| < 2B/3 \\ N_o & \text{en } 2B/3\le |f| < B \end{cases}$$

Evalúe la mejora de calidad que ofrecen los filtros terminales óptimos, calculando el siguiente factor en decibelios:

$$G=10\log_{10}\left(\frac{SNR_{FTO}}{SNR}\right)$$

donde *SNR* es la relación señal a ruido obtenida en el receptor sin usar filtrado en transmisión, y SNR_{FTO} es la relación señal a ruido en el receptor usando filtros terminales óptimos.

Ejercicio 12:

Considere la señal paso banda:

$$x(t) = A\left(\frac{1}{2} + \sin\left(2\pi f_1 t\right)\right)\cos\left(2\pi f_o t + \theta\right)$$

con $f_o > f_1$

a) Halle y dibuje la envolvente de $x(t)$.
b) Halle y dibuje la frecuencia instantánea de $x(t)$.
c) Halle la transformada de Hilbert de $x(t)$.

Ejercicio 13:

Considere la señal paso banda:
$x(t) = y(t)\cos\left(2\pi f_o t\right)$
con $f_o > 10B$
donde B es el ancho de banda del proceso $y(t)$ en banda base.

La señal atraviesa un canal cuyo módulo y fase son:

$$\left|H(f)\right| = \begin{cases} K - \left(f - f_o\right)\beta & \text{para } f_o - 3B < f < f_o + 3B \\ 0 & \text{fuera} \end{cases} \quad \text{y} \quad \left|H(f)\right| = \left|H(-f)\right|$$

$$\phi_H(f) == \begin{cases} \phi_o - \left(f - f_o\right)\gamma & \text{para } f_o - 3B < f < f_o + 3B \\ 0 & \text{fuera} \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi_H(f) = -\phi_H(-f)$$

Halle la señal recuperada en un demodulador coherente. ¿En qué condiciones la distorsión es nula?

Ejercicio 14:

Repita el problema anterior para el caso de una modulación en quadratura:
$x(t) = y(t)\cos\left(2\pi f_o t\right) + z(t)\sin\left(2\pi f_o t\right)$
donde el objetivo del demodulador coherente es recuperar solamente y(t).

Ejercicio 15 (análisis del efecto “Donald Duck”):

Considere la señal paso banda:
$x(t) = y(t)\cos\left(2\pi f_o t\right)$
con $f_o >> B$.
$B = 8KHz$ es el ancho de banda del proceso $y(t)$ en banda base. $y(t)$ es una señal de voz. En particular, considere una realización concreta de $y(t)$ que consiste en una señal periódica correspondiente a una vocal de una palabra:

$$y(t) = A\cos\left(2\pi f_u t\right) + B\cos\left(2\pi 2 f_u t\right)$$

donde $f_u = 500Hz$ es el “pitch” o frecuencia fundamental de la persona que habla. Observe que esta vocal presenta la componente fundamental y un segundo armónico a la frecuencia doble.

Es conocido que en la recepción coherente en banda lateral única (opción que disponen algunos receptores de radio para la recepción de emisoras de onda corta) se produce una modificación del tono de la persona que habla en el caso de que la frecuencia del dial no esté bien ajustada. La voz suena extraña y a veces ininteligible (típico efecto “Donald Duck” de Single Side Band).

Considere un receptor que coge sólo la banda lateral superior de $x(t)$ y luego genera la componente I (multiplicación por el oscilador más filtrado paso-bajo de ancho B) con un oscilador local que presenta un error de frecuencia. Concretamente, el oscilador local del receptor es:

$$2\cos\left(2\pi\left(f_o + \Delta f\right)t + \varepsilon\right)$$

y el error de frecuencia está en el margen:

$$\left|\Delta f\right| \leq 200Hz$$

a) Halle la expresión de la señal obtenida en la rama I del demodulador coherente.

b) Para $\left|\Delta f\right| > 0$, ¿es periódica la señal que escucha?

c) Si Δf es negativo, el “pitch” aparente de la persona, ¿sube o baja?

d) Repita los apartados anteriores para el caso de una demodulación en banda lateral inferior.

Ejercicio 16

Se quieren transmitir dos procesos x(t) y y(t) a un mismo usuario.
a(t) tiene potencia unitaria y ancho de banda B=10KHz.
b(t) tiene potencia unitaria y ancho de banda B=1KHz.

La señal transmitida es:
$x(t) = A\left(a(t)\cos\left(2\pi f_o t\right) + b(t)\sin\left(2\pi f_o t\right)\right)$
con $f_o = 100KHz$.

El canal es ideal y no atenúa.

El ruido aditivo del canal tiene un espectro:
$S_w(t) = 10^{-12} f^2$

a) Dibuje el demodulador coherente indicando los anchos de banda de todos los filtros para recuperar a(t) y b(t) con la máxima calidad posible. Tenga en cuenta que estas dos señales tienen ancho de banda distinto.

b) Halle la potencia de transmisión necesaria para que a(t) se escuche con una SNR=20dB (100 en lineal). En estas condiciones, ¿con qué SNR se escucha b(t)?

c) Evalúe cuánto error de fase puede tolerar en el oscilador del receptor para que las SNRs en demodulación no se degraden más de 3dB (la mitad en lineal).

Ejercicio 17

Se debe transmitir una señal x(t) paso banda BLU superior de la forma:
$x_T(t) = A\left(y(t)\cos\left(2\pi f_o t\right) - h_y(t)\sin\left(2\pi f_o t\right)\right)$
donde y(t) tiene un ancho de banda B=4KHz y espectro plano en el mismo. La señal BLU transmitida tiene una potencia P_T y una frecuencia portadora f_o . No hay limitación tecnológica en lo elevada que pueda ser esta frecuencia.

La transmisión se hace por un canal que se comporta como un derivador y después es degradada con ruido blanco de densidad $S_w(t) = N_o / 2$. La señal recibida es pues:
$x_R(t) = x_T^{'}(t) + w(t)$

A la salida de la rama Q del demodulador coherente se obtiene:
$Q(t) = Cy(t) + d(t) + q_n(t)$
donde $d(t)$ es debida a la distorsión del canal y $q_n(t)$ es debida al ruido.

Se mide la calidad de la señal demodulada mediante la relación de potencia de señal con potencia de distorsión más ruido:
$$SINR = \frac{Pot\left(By(t)\right)}{Pot\left(d(t) + q_n(t)\right)}$$
y se exige una calidad mínima de SINR=17dB (500 en lineal).

El criterio de diseño que se adopta es que la distorsión $d(t)$ y el ruido $q_n(t)$ sobre la señal demodulada presenten igual potencia.

a) Halle C y la expresión de d(t).

b) Halle el valor de la frecuencia portadora fo más adecuado según el criterio propuesto.

c) Halle la mínima relación P_T / N_o requerida en transmisión.

Ejercicio 18

La BER exacta de una 4-PAM (M=4) admite la siguiente expresión general:

$$BER = \sum_{i=0}^{M-2} K_i Q\left(\sqrt{\alpha_i \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Para el caso particular de M=4, y símbolos equiprobables y equiespaciados de centroide nulo (4-PAM polar), halle los coeficientes K_0, K_1, K_2, α_0, α_1 y α_2 en los siguientes casos:

a) Codificación de los símbolos con código binario natural.

b) Codificación de los símbolos con código Gray.

c) Identifique el término relevante en cada uno de los apartados anteriores.