Senyal i Sistemes II
17 de Gener de 2007

Data notes provisionals: 24 de Gener
Període d'al.legacions: 24 a 26 de Gener
Data notes revisades: 30 de Gener

Professors: J.R. Casas, J. Hernando, J.B. Mariño, E. Monte, P. Salembier.

Informacions addicionals:

- Durada de la prova: 1h 15 min
- Responeu a cada problema en fulls separats.
- No podeu utilitzar ni llibres, ni apunts, ni taules, ni formularis, ni calculadora, ni telèfon mòbil.
- Poseu un document d'identificació en un lloc visible.
- El vostre nom ha de figurar en tots els fulls que utilitzeu, en format: COGNOMS, NOM.
- Justifiqueu tots els resultats. Els resultats sense justificació no seran valorats en la correcció.

Problema 1 — 4 puntos

Se sabe que la respuesta $y[n]$ de un sistema lineal, invariante, causal y estable a la secuencia

$$x[n]=\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)u[n]$$

cumple $y[n]=0$ para $n>2$. Se pide:

a) Dibujar el diagrama de ceros y polos del sistema.
b) La función de transferencia del sistema $H(z)$, si la respuesta a $(-1)^n$ es $(-1)^n$.
c) La respuesta impulsional del sistema $h[n]$
d) Los valores de las muestras de $y[n]$
e) La respuesta $y_2[n]$ a la secuencia $x_2[n]=(-1)^n u[n]$

Problema 2 — 3 puntos

Dada la secuencia: $x_0[n]=\{\cdots,0,\ \underline{2},-1,\ 0,-1,\ 2,\ 0,\cdots\}$

a) Calcular la transformada de Fourier $X_0(e^{j\omega})$ de $x_o[n]$, y esboce el módulo de $X_0(e^{j\omega})$ indicando los valores que toma en $\{0,\ \pi/2, \pi,\ 3\pi/2\}$

Muestreamos $X_0(e^{j\omega})$ con M=3 muestras para crear $X_3[k]$ y con N=5 para crear $X_5[k]$

b) Obtener las $IDFT_3\{X_3[k]\}$ y $IDFT_5\{X_5[k]\}$ mediante las propiedades del muestreo en frecuencia, indicando claramente si se produce aliasing en tiempo y en caso de que se produzca, dónde se produce.

Creamos la señal $x_p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_o[n+Mk]$ con $M=6$

c) Calcule la transformada de Fourier de $x_p[n]$ y esboce el módulo de dicha transformada (Nota: recordamos que $\cos(\pi/3)=1/2$)

Problema 3 **3 puntos**

Considere el sistema siguiente:

$$x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 2} \xrightarrow{y[n]} \boxed{\uparrow 2} \rightarrow z[n]$$

Suponemos que $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n) = \left\{\cdots, \underline{1}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \cdots\right\}$. Se pide:

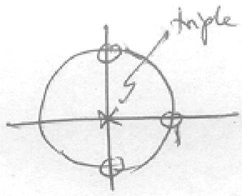
a) Indicar las componentes frecuenciales de y[n] y z[n].
b) Calcular los valores de y[n] y su expresión analítica.
c) Calcular los valores de z[n] y escribir su expresión analítica como $z[n] = A\left(\cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)\right)$ indicando los valores de A, ω_1 y ω_2.
d) Calcular las autocorrelaciones de x[n], y[n] y z[n]
e) Calcular la correlación cruzada entre x[n] e y[n]
f) Calcular la correlación cruzada entre x[n] y z[n]

SOLUCIONES

Problema 1

$x(n) = \left(\frac{1}{2} + \cos\frac{\pi}{2}n\right) u(n) \rightarrow y[n] = 0 \; , \; n > 2$

a) $H(e^{j0}) = H(e^{\pm j\frac{\pi}{2}}) = 0$



b) $H(z) = K(1 - z^{-1})(1 + z^{-2})$ $\Big\{ \; H(z) = \frac{1}{4}(1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3})$

$H(-1) = 1$

c) $h(n) = \frac{1}{4}\left(\delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3]\right)$

d) $y(n) = x[n] * h[n] \rightarrow y[0] = \frac{1}{2} \; , \; y[1] = -\frac{1}{4} \; , \; y[2] = \frac{1}{4}$

e) " $\rightarrow y[n] = \{\ldots 0, 0, \frac{1}{4}, -\frac{2}{4}, \frac{3}{4}, -1, 1, -1, \ldots\}$

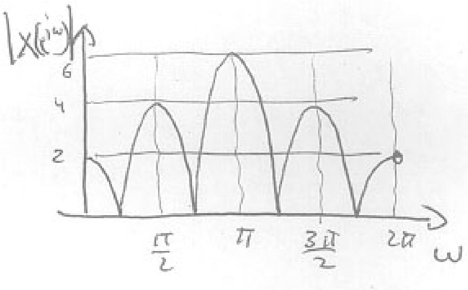
$y(n) = \frac{1}{4}\delta(n) - \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{3}{4}\delta[n-2] + (-1)^n u[n-3]$

Problema 2

a) $x_0(n) = \{\ldots, 0, \underline{2}, -1, 0, -1, 2, 0, \ldots\}$

$$X(e^{j\omega}) = 2 - e^{-j\omega} - e^{-j3\omega} + 2e^{-j4\omega} = 2e^{-j2\omega}(2\cos 2\omega - \cos\omega)$$

ω	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\lvert X(e^{j\omega})\rvert$	2	4	6	4



b) • $IDFT_3\{X_3[k]\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-3r]$ para $0 \le n \le 3$

$IDFT_3\{X_3(k)\} = \{\underline{1}, 1, 0\}$

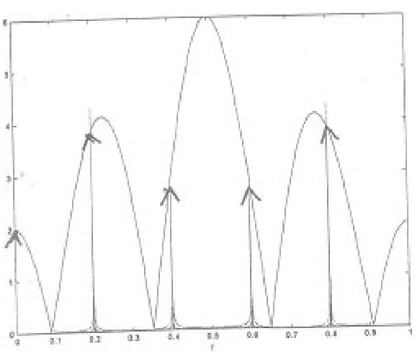
• $IDFT_5\{X_5[k]\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-5r]$ para $0 \le n \le 5$

$\Rightarrow$ como la duración de $x(n)$ es menor que 5

$IDFT_5\{X_5[k]\} = \{\underline{2}, -1, 0, -1, 2\}$

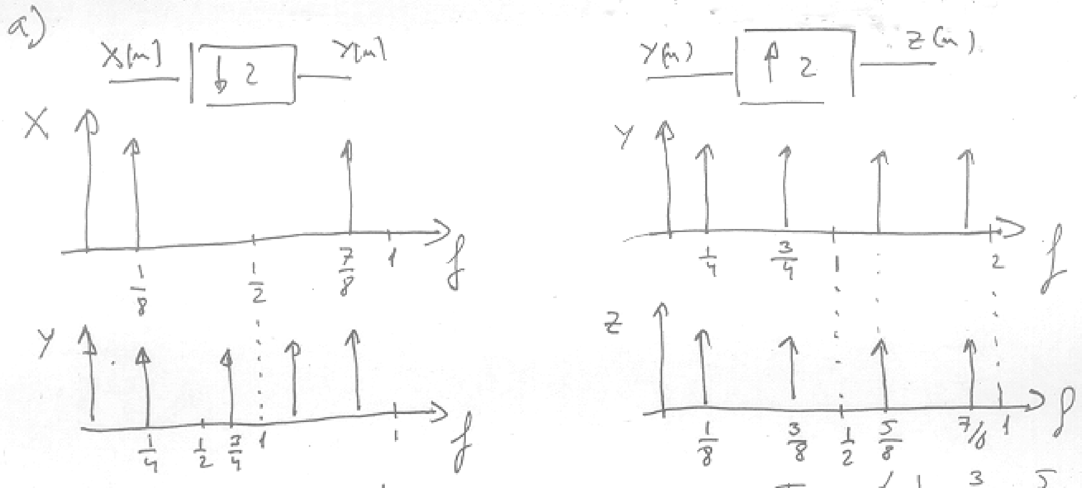
c) $$x_p(n) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} X_6[k]\, e^{j\frac{2\pi}{6}kn}$$

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{6}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{5} 2e^{-j\frac{2\pi k n}{6}}\left[2\cos\left(2\pi\tfrac{1}{3}k\right) - \cos\left(2\pi\tfrac{1}{6}k\right)\right]\cdot\delta\left(\omega - 2\pi r - \tfrac{2\pi}{6}k\right)$$



Problema 3

a)



Componentes = { 1/4, 3/4 }

componentes = { 1/8, 3/8, 5/8, 7/8 }

b) $Y[n] = \cos(\pi/2\, n)$ $\quad Y[n] = \{ \dots, \underline{1}, 0, -1, 0, 1, \dots \}$

c) $z[n] = \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \times \frac{1}{8} n\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \times \frac{3}{8} n\right)$

$z[n] = \{ \dots, \underline{1}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0 \dots \}$

d) Como la autocorrelación de $A\cos(\omega_0 n)$ es $\frac{A^2}{2} \cos \omega_0 m$

tenemos: $r_{xx}[m] = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} m\right)$ $\quad r_{yy}[m] = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} m\right)$

$r_{zz}[m] = \frac{1}{8} \cos\left(2\pi \times \frac{1}{8} m\right) + \frac{1}{8} \cos\left(2\pi \times \frac{3}{8} m\right) + \emptyset$

Nota: la correlación cruzada entre senoides de frecuencia diferente es cero.

e) Por ser componentes a frecuencias diferentes $r_{xy}[m] = 0$

f) Como sólo coinciden en la componente a $\pi/4$

$r_{xz}[m] = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} m\right)$