ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

PROCESSAMENT DEL SENYAL- Examen final — Data: 11 de Juny de 2004

Professors: J.B. Mariño, F. Marqués, C. Nadeu, A. Oliveres, J. Vidal — Temps: **3 hores**

- No es poden fer servir llibres, apunts, calculadores programables, telèfons mòbils, etc.
- Durant la realització de l'examen, tots els fulls han de dur el nom de l'estudiant.
- Els exercicis s'han de respondre en fulls separats.
- Tots els resultats s'han de justificar.
- Les notes provisionals es publicaran el 28 de juny. Es podrà presentar al·legacions els dies 29 i 30 de juny a la Secretaria Acadèmica de l'Escola.

Exercici 1 — **4 punts**

L'estàndar JPEG de codificació d'imatges fixes utilitza una transformació cosinus (DCT) del bloc *n*-èssim $\mathbf{U_n}$ de la imatge per obtenir la matriu transformada $\mathbf{V_n}$ que es quantifica i codifica. Ara bé, en lloc de codificar el primer coeficient $V_n(0,0)$ directament, es codifica la diferència amb el del bloc anterior, és a dir, $V_n(0,0)$- $V_{n-1}(0,0)$, suposant $V_{-1}(0,0)=0$.

En aquest exercici volem analitzar un tipus de compressió que, operant sobre vectors de senyal (no matrius) treballa de forma similar a JPEG, és a dir, utilitzant transformació cosinus i codificació diferencial del primer coeficient.

Suposarem que els elements del vector de senyal **U** pertanyen a un procés AR d'ordre 1, de manera que la seva autocorrelació és $r_u(m) = \sigma_u^2\ \rho_1^{|m|}$, i que la matriu **A** de transformació DCT, que aplicada al vector original **U** obté el vector transformat $\mathbf{V=A^TU}$**,** és:

$$\mathbf{A} = C\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{6} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Es demana:

1. Calculeu la constant C per tal que **A** sigui unitària (<u>0,5 punts</u>).

2. Deduïu l'expressió de la matriu $\mathbf{R}_v$ de correlació entre coeficients transformats en funció de la matriu $\mathbf{R}_u$, i trobeu el valor $R_v(0,0)$ en funció de ρ_1 i σ_u^2 (<u>2 punts</u>).

3. Si ρ_1=0.9, calculeu el percentatge de concentració de potència en el primer coeficient transformat V(0). Compareu-lo amb el percentatge corresponent a cada element del vector original i raoneu-ho (<u>1.5 punts</u>).

4. Repetiu l'apartat anterior si ρ_1=0,999. Com canvia el percentatge de concentració de potència i per què? ¿Podeu indicar quina és, aproximadament, la matriu KL en aquest cas de ρ_1 pròxim a 1? (<u>1,5 punts</u>)

Si x(n) és la seqüència $V_n(0)$ corresponent al primer coeficient transformat, volem quantificar l'error de predicció $e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$. Fent la hipòtesi que x(n) pertany a un procés estacionari i que $r_{xx}(1)=\rho_2 . r_{xx}(0)$, es demana:

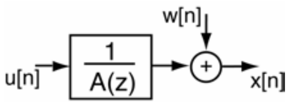
5. Trobeu el coeficient *a* del predictor lineal d'ordre 1 que minimitza l'error quadràtic mitjà $\hat{x}_1(n)$ i la potència de l'error de predicció P_1 en funció de ρ_2. Raoneu sota quina condició aquest predictor d'ordre 1 aconsegueix que les mostres e(n) siguin incorrelades entre elles (<u>2 punts</u>).

6. Si, com en JPEG, no fem servir el predictor $\hat{x}_1(n)$ sinó $\hat{x}_2(n) = x(n-1)$, calculeu la potència de l'error de predicció P_2 en funció de ρ_2. Prenent ρ_2 = 0.5, determineu el quocient entre P_1 i P_2. Calculeu també aquest quocient per a ρ_2=0.9 i compareu-lo amb l'anterior, interpretant el resultat (<u>1.5 punts</u>).

7. Indiqueu avantatges i inconvenients de cada un dels dos predictors en aquesta aplicació de quantificació/codificació per a la transmissió (<u>1 punt</u>).

Exercici 2 **2 punts**

Considerem el model de generació del procés x[n] de la figura on suposarem que tant u[n] com w[n] són processos soroll blanc de mitjana nul·la i potències σ_u^2 i σ_w^2, respectivament, i que estan incorrelats entre ells. Donat x[n], n=0,1,...,N-1, i suposant que A(z) es d'ordre 1 (p=1), és a dir, $A(z) = 1 - \rho z^1$, amb $\rho = 0.9$ i $\sigma_u^2 = 1$, volem estimar l'espectre del procés x(n).



1. Obtenir l'expressió de la densitat espectral de potència en funció de σ_w^2 i justificar que es tracta d'un model ARMA(1,1). (2.5 punts).

2. Escriure l'expressió de l'estimador espectral de Bartlett, $\hat{S}_x^B(e^{j\omega})$, a partir de les dades. A partir del valor a una freqüència determinada $\omega_1$de l'estimador de Bartlett, proposar una estimació de la potència de soroll σ_w^2. (2,5 punts).

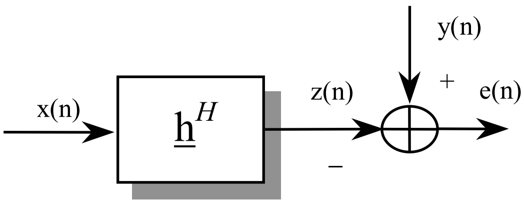
3. Calcular la mitjana i variància de l'estimador de σ_w^2 (2.5 punts)

4. Indicar raonadament quina és la millor elecció, en termes de variància, de ω_1. (2.5 punts).

Notes: Preneu com a aproximació de la variància del periodograma: var $[\hat{S}_x^P(e^{j\omega})] \approx \hat{S}_x^2(e^{j\omega})$

Exercici 3 **4 punts**

Se desea estimar una señal a(n), de la que se observan dos versiones ruidosas x(n) = a(n) + w(n) e y(n) = a(n) + v(n), en las cuales w(n) y v(n) son ruidos de media nula e incorrelados entre sí ($r_{wv}(k)=0$), y a(n) es incorrelado con w(n). Se propone el esquema de la figura:



a) Razónese dónde será posible recuperar la señal a(n), si en z(n) o en e(n). (1.5 puntos)
b) ¿Qué condición debe cumplir la señal v(n) para que el filtro que minimiza la potencia de e(n) minimice también la potencia del error de la estimación de a(n)? (1.5 puntos)
c) Obtenga las ecuaciones del filtro y el valor de la potencia mínima del error. Exprésela en términos de la función de autocorrelación de a(n) y de la respuesta impulsional del filtro. (1.5 puntos)
d) En algunos casos, los coeficientes del filtro pueden llegar a ser muy elevados ($\underline{h}^H\underline{h}$ puede ser muy grande), lo cual es un inconveniente si se desea realizar una implementación en coma fija. A fin de aliviar el problema, se propone diseñar el filtro de Wiener minimizando la potencia del error con la restricción $\underline{h}^H\underline{h} - \alpha = 0$. Justifique que la solución encontrada equivale a añadir a la señal x(n) ruido blanco, de media nula e independiente de la señal x(n) e y(n). (1.5 puntos)

Ahora se pasa a estudiar la adaptación del filtro en el caso anterior, suponiendo que se añade ruido blanco con potencia σ^2 a la señal x(n):

e) Escriba cuál sería la ecuación que actualiza los coeficientes del filtro en el algoritmo de gradiente. (1.5 puntos)
f) Obtenga una cota superior para el paso de adaptación μ que garantice la convergencia del algoritmo. Dad esta cota en función de la potencia del ruido y los autovalores de la matriz de autocorrelacion de x(n). (1.5 puntos)
g) Discuta cómo se ve afectada la velocidad de convergencia al añadir el ruido blanco. (1 punto)