— SOLUCIONES —

**ETSE de Telecomunicació**
**Probabilitat i Processos**
**Control**
4 de desembre de 2006

Codi prova: **230–11479–01–0–grup**
Temps: **1h. 20m.**

**1.** Si $X$ es una variable aleatoria geométrica, la probabilidad de que tome un valor par es:

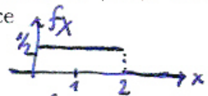
(a) $\frac{p}{1+p}$
(b) $\frac{p}{1+q}$
(c) $\frac{1}{1+q}$
• (d) $\frac{q}{1+q}$

$P_X(k) = q^{k-1}p \; ; \; k=1,2,3,\ldots$

$P(X \text{ PARELL}) = p(q+q^3+\ldots) = pq(1+q^2+\ldots) = pq\frac{1}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}$

**2.** Si $X$ es una variable aleatoria uniforme en $[0,2]$, la variable aleatória condicionada $X|X \geq x_0$, $x_0 \in (0,2)$, tiene una función de densidad que satisface

• (a) $f_{X|X\geq x_0}(1+\frac{x_0}{2}) = \frac{1}{2-x_0}$
(b) $f_{X|X\geq x_0}(0) = \frac{1}{2}$
(c) $f_{X|X\geq x_0}(0) = \frac{1}{4-x_0^2}$
(d) $f_{X|X\geq x_0}(x_0) = \frac{1}{2+x_0}$




$F_{X|X\geq x_0}(x) = \begin{cases} 0 & (x<x_0) \\ \frac{P(x_0\leq X\leq x)}{P(X\geq x_0)} = \frac{(x-x_0)/2}{(2-x_0)/2} & x\in[x_0,2] \\ 1 & (x\geq 2) \end{cases}$

$f_{X|X\geq x_0}(x) = \frac{1}{2-x_0}$ $x\in[x_0,2]$

**3.** Un jugador apuesta que, al lanzar $n$ veces un dado, sacará al menos un 6. Entonces, el mínimo valor de $n$ para que juegue con ventaja es:

(a) 3
• (b) 4
(c) 5
(d) 6

$X$: nº de 6's

$P(X\geq 1) = 1-P(X=0) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \overset{?}{>} \frac{1}{2}$

per $n=4$: $P(X\geq 1) \approx 0.52$

**4.** De un lote de 10 piezas, 7 son correctas y 3 defectuosas. Se elige aleatoriamente un conjunto de 6 piezas del lote. La probabilidad de que en dicho conjunto haya exactamente 2 piezas defectuosas es:

(a) 0.324
• (b) 1/2
(c) 1/10
(d) $\binom{6}{2}(0.3)^2$

$P(2 \text{ PIEZAS DEF.}) = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{4}}{\binom{10}{6}} = \frac{1}{2}$

**5.** Un experimento aleatorio consiste en:

(1) Seleccionar un entero positivo $N$ con probabilidad $P(N=n) = e^{-n}$, $n=1,2,3,\ldots$;

(2) Lanzar una moneda con probabilidad de cara $e^{-N}$.

Entonces, la probabilidad de que el resultado del experimento sea cruz es:

(a) $1-e^{-2n}$
(b) $1/e^2$
(c) $\frac{1}{e^2-1}$
• (d) $\frac{e^2-2}{e^2-1}$

$P(\text{CRUZ}) = 1-P(\text{CARA})$
$= 1-\sum_{m=1}^{\infty} P(\text{CARA}/N=m)P(N=m)$
$= 1-\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m}\cdot e^{-m} = 1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{e^{2m}}$
$= 1-\frac{1}{e^2-1} = \frac{e^2-2}{e^2-1}$

**6.** Sea $A,B,C$ sucesos independientes con $P(A) = \frac{1}{n-1}$, $P(B) = \frac{1}{n}$, $P(C) = \frac{n}{n+1}$, $n>2$. Entonces, la probabilidad $P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C)$ vale

• (a) $\frac{n^3-n-1}{n(n^2-1)}$
(b) $\frac{3n}{n^2-1}$
(c) $1+\frac{1}{n(n^2+1)}$
(d) ninguna de las otras

$P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C) = P(\overline{A})+P(\overline{B})+P(C)-P(\overline{A})P(\overline{B}) - P(\overline{A})P(C)-P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C) = \ldots$

o també:

$P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C) = P(\overline{A\cap B\cap \overline{C}}) = 1-P(A)P(B)P(\overline{C}) = 1-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{n^3-n-1}{n(n^2-1)}$

De Morgan

**7.** Se lanzan simultáneamente tres dados normales. Si la suma es 8, entonces la probabilidad de que dos de los dados saque una puntuación mayor o igual a 3 es:

(a) 4/7
• (b) 3/7
(c) 1/7
(d) 2/7

$S=8$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1+1+6 | 2+1+5 | 3+1+4 ✓ | 4+1+3 ✓ | 5+1+2 | 6+1+1 |
| 1+2+5 | 2+2+4 | 3+2+3 ✓ | 4+2+2 | 5+2+1 | |
| 1+3+4 ✓ | 2+3+3 ✓ | 3+3+2 ✓ | 4+3+1 ✓ | | |
| 1+4+3 ✓ | 2+4+2 | 3+4+1 ✓ | | | |
| 1+5+2 | 2+5+1 | | | | |
| 1+6+1 | | | | | |

$P(D_i\geq 3 \cap D_j\geq 3 | S=8) = \frac{\#\text{cas. fav.}}{\#\text{cas. posibles}} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

**8.** Sea $X$ una variable aleatoria gaussiana de media nula y desviación típica $\sigma$ ¿Cúal es la función de densidad de la variable aleatoria $Y=X^2$, para $y\geq 0$?

(a) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-\frac{k}{2}(\frac{y}{\sigma^2})}$
(b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{\sigma})}$
• (c) $\frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{\sigma^2})}$
(d) $\frac{1}{2\sqrt{2\pi y}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{\sigma^2})}$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$ ; $Y=X^2$ ; $X=\pm\sqrt{Y}$

$f_Y(y) = \sum_{x=\pm\sqrt{y}}\frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \sum_{x=\pm\sqrt{y}}\frac{f_X(x)}{|2x|}$

$= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\frac{1}{2}\frac{y}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma^2}\right)}$

**9.** Sea $X$ es una variable aleatoria definida en el intervalo $[1,2]$, en el que se cumple que $f_X(x)F_X(x) = \frac{1}{2}$. Entonces, el valor de $P(X\leq\frac{3}{2})$ es:

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{\pi}{4}$
• (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(d) $\frac{1}{3}$

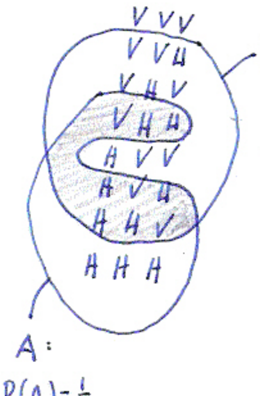
$y = F_X(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f_X(x)$ ; $y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ ; $2y\,dy = dx$

$y^2 = x+c$ ; $y = F_X(x) = \sqrt{x+c}$ ; $F_X(1) = 0 = \sqrt{1+c}$ ; $c=-1$

$F_X(x) = \sqrt{x-1}$ ; $P(X\leq 3/2) = F_X(\frac{3}{2}) = \sqrt{\frac{3}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

**10.** Considérense familias con 3 hijos, y supóngase que las 8 configuraciones posibles VVV, VVH, VHV, etc, son equiprobables. Sea $A$ el suceso que una familia escogida al azar tenga como máximo un varón, y $B$ el suceso que tenga al menos un hijo de cada sexo. Entonces, se cumple:

(a) $P(A)+P(B) = P(A\cup B)$
• (b) $A$ y $B$ son sucesos independientes
(c) $P(A|B) = P(B|A)$
(d) Ninguna de las otras




$B$ : $P(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$P(A\cap B) = \frac{3}{8} = P(A)P(B) \Rightarrow$

$A, B$ IND.

$A$ :
$P(A) = \frac{1}{2}$

—SOLUCIONES—

**ETSE de Telecomunicació**
**Probabilitat i Processos**
**Control**
4 de desembre de 2006

Codi prova: **230–11479–01–1–grup**
Temps: **1h. 20m.**

**1.** Sea $X$ es una variable aleatoria definida en el intervalo $[1, 2]$, en el que se cumple que $f_X(x)F_X(x) = \frac{1}{2}$. Entonces, el valor de $P(X \leq \frac{5}{4})$ es:

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad F_X(x) = \sqrt{x-1}$ (veure #9-0)

(b) $\frac{1}{3}$ $\qquad P(X \leq \frac{5}{4}) = \sqrt{\frac{5}{4}-1} = \frac{1}{2}$

• (c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{\pi}{4}$

**2.** Considérense familias con 3 hijos, y supóngase que las 8 configuraciones posibles VVV, VVH, VHV, etc, son equiprobables. Sea $A$ el suceso que una familia escogida al azar tenga como máximo un varón, y $B$ el suceso que tenga al menos un hijo de cada sexo. Entonces, se cumple:

(a) $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$ $\qquad P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow$ IND

(b) $P(A|B) = P(B|A)$ $\qquad$ (veure #10-0)

(c) Ninguna de las otras

• (d) $A$ y $B$ son sucesos independientes

**3.** De un lote de 10 piezas, 7 son correctas y 3 defectuosas. Se elige aleatoriamente un conjunto de 6 piezas del lote. La probabilidad de que en dicho conjunto haya exactamente 2 piezas defectuosas es:

• (a) 1/2 $\qquad P(\text{2 piezas def.}) = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{4}}{\binom{10}{6}} = \frac{1}{2}$

(b) 1/10

(c) 0.324

(d) $\binom{6}{2}(0.3)^2$

**4.** Un experimento aleatorio consiste en:

(1) Seleccionar un entero positivo $N$ con probabilidad $P(N = n) = e^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

(2) Lanzar una moneda con probabilidad de cara $e^{-N}$.

Entonces, la probabilidad de que el resultado del experimento sea cara es:

• (a) $\frac{1}{e^2-1}$

(b) $\frac{e^2-2}{e^2-1}$ $\qquad P(\text{CARA}) = \sum_{n=1} P(\text{CARA}|N=n)\, P(N=n)$

(c) $1 - e^{-2n}$

(d) $1/e^2$ $\qquad = \ldots = \frac{1}{e^2-1}$ (veure #5-0)

**5.** Sea $A, B, C$ sucesos independientes con $P(A) = \frac{1}{n-1}$, $P(B) = \frac{1}{n}$, $P(C) = \frac{n}{n+1}$, $n > 2$. Entonces, la probabilidad $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C)$ vale

(a) ninguna de las otras

(b) $\frac{3n}{n^2-1}$ $\qquad P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \underset{\text{De Morgan}}{=} P(\overline{A \cap B \cap \overline{C}}) = 1 - P(A \cap B \cap \overline{C})$

(c) $1 + \frac{1}{n(n^2+1)}$ $\qquad \underset{\text{IND}}{=} 1 - P(A)P(B)P(\overline{C}) = \cdots$

• (d) $\frac{n^3-n-1}{n(n^2-1)}$ $\qquad = \frac{n^3-n-1}{n(n^2-1)}$

(veure #6-0)

**6.** Si $X$ es una variable aleatoria geométrica, la probabilidad de que tome un valor impar es:

(a) $\frac{p}{1+q}$ $\qquad P(X \text{ SENAR}) = 1 - P(X \text{ PARELL})$

• (b) $\frac{1}{1+q}$ $\qquad = 1 - \frac{q}{1+q}$ (veure #1-0)

(c) $\frac{q}{1+q}$ $\qquad = \frac{1}{1+q}$

(d) $\frac{p}{1+p}$

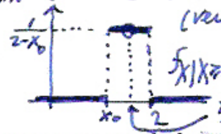
**7.** Si $X$ es una variable aleatoria uniforme en $[0, 2]$, la variable aleatoria condicionada $X|X \geq x_0$, $x_0 \in (0, 2)$, tiene una función de densidad que satisface

(a) $f_{X|X\geq x_0}(0) = \frac{1}{2}$ $\qquad f_{X|X\geq x_0}(x) = \frac{1}{2-x_0}$ ; $x \in [x_0, 2]$

(b) $f_{X|X\geq x_0}(0) = \frac{1}{4-x_0^2}$ $\qquad$ (veure #2-0)

• (c) $f_{X|X\geq x_0}(1 + \frac{x_0}{2}) = \frac{1}{2-x_0}$ $\qquad f_{X|X\geq x_0}(1+\frac{x_0}{2}) = \frac{1}{2-x_0}$

(d) $f_{X|X\geq x_0}(x_0) = \frac{1}{2+x_0}$




$\frac{x_0+2}{2} = 1 + \frac{x_0}{2}$

**8.** Un jugador apuesta que, al lanzar $n$ veces un dado, sacará al menos un 6. Entonces, el mínimo valor de $n$ para que juegue con ventaja es:

(a) 6 $\qquad X$ : nº de 6's

(b) 5 $\qquad P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ (veure #3-0)

• (c) 4 $\qquad$ i el valor mínim de $n$ per el qual

(d) 3 $\qquad P(X \geq 1) \geq \frac{1}{2}$ es $n = 4$ : $P(X \geq 1) \simeq 0.52$

**9.** Se lanzan simultáneamente tres dados normales. Si la suma es 8, entonces la probabilidad de que dos de los dados saque una puntuación mayor o igual a 3 es:

(a) 1/7 $\qquad P(D_i \geq 3 \cap D_j \geq 3 / S = 8) = \frac{\#\text{casos fav.}}{\#\text{casos pos.}} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

(b) 2/7

• (c) 3/7 $\qquad$ (veure #7-0)

(d) 4/7

**10.** Sea $X$ una variable aleatoria gaussiana de media nula y desviación típica $\sigma$ ¿Cuál es la función de densidad de la variable aleatoria $Y = X^2$, para $y \geq 0$?

$\left( f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \right)$
$g(x) = x^2$

(a) $\frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)}$ $\qquad f_Y(y) = \sum_{x=\pm\sqrt{y}} \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \ldots =$

• (b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma^2}\right)}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma y}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma^2}\right)}$ $\qquad = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sigma^2}}$

(d) $\frac{1}{2\sqrt{2\pi y}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma^2}\right)}$

(veure #8-0)