

Tema 2: TRANSMISIÓN DIGITAL A TRAVÉS DE CANALES AWGN

**COMII
ETSETB-UPC**

Este documento pretende ser una ayuda para el estudio del tema de modulaciones digitales de pulsos de la asignatura COMII de la ETSETB (Plan de Ing. en Telecomunicaciones), UPC.

En ningún caso puede sustituir las clases presenciales impartidas por los profesores de la asignatura, sin duda con mayor cantidad de explicaciones y ejemplos que ayudan a entender la materia y evidentemente con todas las ventajas que suponen dichas clases para ambas partes.

Así mismo aquí se tratan algunos aspectos de forma muy escueta, por lo que es altamente recomendable ampliar la visión de los mismos en libros de texto más completos y con mayor cantidad de ejercicios, como por ejemplo los referenciados al final del documento.

Margarita Cabrera
Profesora de Comunicaciones II
Dept. TSC
ETSETB-UPC
Septiembre 2009

2	Tema 2: Transmisión digital a través de canales AWGN.....	1
2.1	Modulaciones de Pulsos (PM Pulse Modulation)	1
2.1.1	Modulaciones PAM (Pulse Amplitude Modulation)	3
2.1.2	Modulaciones PPM (Pulse Position Modulation).....	4
2.1.3	Ejemplo de Señales Biortogonales	5
2.1.4	Modulaciones QAM	5
2.2	Representación Geométrica. Espacio de Señal	6
2.2.1	Base ortonormal.....	6
2.2.2	Propiedades y definiciones	6
2.2.3	Representación temporal	7
2.2.4	Energía media	8
2.2.5	Ejemplos de modulaciones digitales de pulsos rectangulares sobre el espacio de señal.....	8
2.2.6	Búsqueda de base por Gram-Schmidt.....	11
2.2.7	Conclusiones de espacio de señal.	13
2.3	Receptor óptimo para PM y canal AWGN.....	14
2.3.1	Equivalencia entre correladores y filtros adaptados.	15
2.3.2	Caracterización estadística del ruido	17
2.3.3	Detector óptimo: Criterio MAP.	19
2.3.4	Elección de las zonas de decisión:.....	22
2.4	BER para PM y canal AWGN	25
2.4.1	Demostración de que mediante el criterio MAP se minimiza la Probabilidad de error para PAM (L=1).	26
2.4.2	Cálculo de la BER para PAM.	27
2.4.3	Cálculo de la BER para PPM.....	30
2.4.4	Señales Biortogonales.....	32
2.4.5	Señales QAM Cuadradas.....	34
2.5	Cotas para la BER.....	36
2.5.1	Ejemplo: Señales M-Ortogonales	37
2.6	Comparación de Modulaciones PM.....	38
2.6.1	Señales PAM	38
2.6.2	Comparación 2PPM-2PAM.....	39
2.6.3	Señales M-Ortogonales.....	40
2.7	Apéndice: Área de la Gaussiana.	41
2.8	Ejercicios Propuestos	44
2.8.1	Ejercicio 1: Ortogonalización GS	44
2.8.2	Ejercicio 2: MAP y Cálculo de Probabilidad de error.	44
2.8.3	Ejercicio 3: Modulación ortogonal.	45
2.9	Referencias Bibliográficas	45

NOTACIÓN DE VARIABLES MATEMÁTICAS:

En general se representan los escalares en cursiva y minúscula: *a*

En general se representan los vectores en negrita y minúscula: **a**

En general se representan las matrices en negrita y mayúscula: **A**

2 Tema 2: Transmisión digital a través de canales AWGN

En este tema se definen y tratan modulaciones digitales formadas por pulsos rectangulares, tanto en banda base como en radiofrecuencia. Se analiza la calidad del sistema a través de la BER (Bit Error Rate o Probabilidad de detección de bits erróneos) cuando las señales se transmiten a través de canales de comunicación ideales de ruido aditivo blanco y gaussiano (AWGN Additive White Gaussian Noise) y el detector es óptimo bajo el criterio de Máxima Probabilidad a Posteriori haber recibido la señal (Criterio MAP). Como herramienta matemática se introduce el apartado de espacio de señal con el objeto de operar con las señales de trabajo representadas mediante vectores.

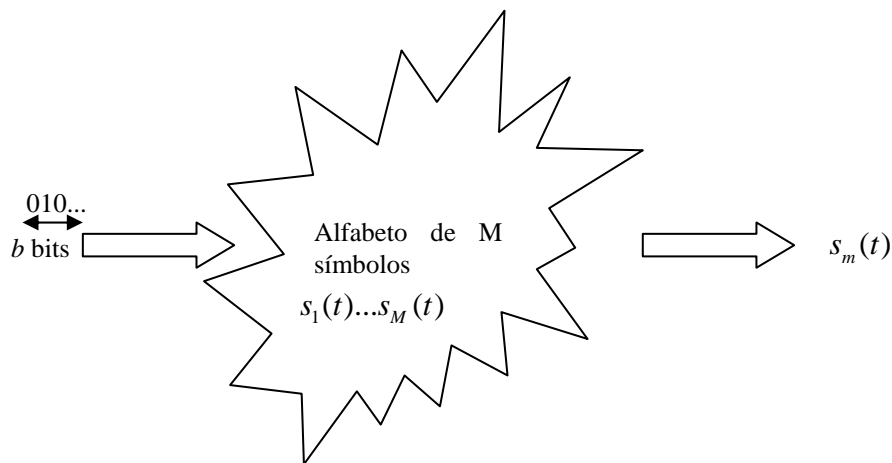
2.1 Modulaciones de Pulsos (PM Pulse Modulation)

En un sistema de comunicaciones digitales, se tomará como punto de partida una secuencia de bits $b[n]$ que se ha de transmitir a la velocidad de r_b bps. Por tanto el tiempo en media disponible para transmitir cada bit es el tiempo o periodo de bit: $T_b = 1/r_b$.

En principio se consideran bits estadísticamente independientes entre sí. Es decir:

$$\begin{aligned} P_0 &= \Pr(b[n] = 0) \\ P_1 &= \Pr(b[n] = 1) \end{aligned} \quad P_0 + P_1 = 1 \quad (2.1)$$

En general mediante un "mapeo de señal" se codificarán los bits para dar lugar a una secuencia de símbolos. Cada símbolo equivale a la transmisión de una función o señal continua en tiempo. Si los bits se agrupan de " b " en " b " se necesitará un alfabeto de al menos $M=2^b$ símbolos distintos.



La secuencia de símbolos resultante se produce a una velocidad de r símbolos/seg. o baudios y el tiempo en media disponible para transmitir cada símbolo es el tiempo o periodo de símbolo: T . Esta velocidad, obviamente se halla relacionada con la velocidad de bit. En las fórmulas que siguen pueden verse las principales relaciones entre los parámetros que hacen referencia a la velocidad, tanto de bits como de símbolos.

$$T_b = \frac{1}{r_b} \quad r = \frac{r_b}{b} \quad T = \frac{1}{r} \quad T = bT_b \quad (2.2)$$

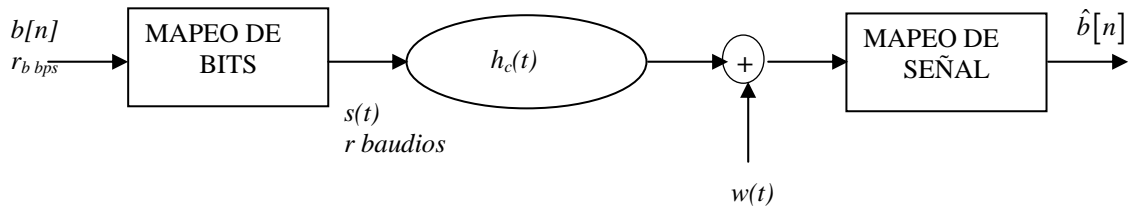


Figura 1 Esquema General de un sistema de comunicaciones digitales.

Cualquier Modulación Digital se puede representar como:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_m(t - kT) \quad (2.3)$$

donde cada señal transmitida en el tiempo $s_m(t)$ pertenece al alfabeto total de señales $\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$ con probabilidad $\Pr(\mathbf{S}_m)$

Intuitivamente, la fórmula anterior se interpreta del siguiente modo: Cada “ b ” bits determinan un símbolo $s_m(t)$ del alfabeto de señales

NOTA: Una forma aún más detallada de expresar la señal modulada digitalmente es la siguiente:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m[k]}(t - kT) \quad (2.4)$$

donde en (2.4) el subíndice m se utiliza para indicar el símbolo del alfabeto asignado en el periodo de tiempo correspondiente al símbolo k . En este capítulo en general se prescindirá de la indicación $[k]$ con el objeto de simplificar notación. $\Pr(\mathbf{S}_m) = \Pr(s_{m[k]}(t - kT) = s_m(t - kT))$

A cada posible señal $s_m(t)$ del alfabeto le denominaremos símbolo y representa un conjunto de “ b ” bits. El tamaño del alfabeto (M) se corresponde así con el número de bits/símbolo (b): $M = 2^b$

Se define la energía media de símbolo como:

$$E_s = E[E_m] = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} E_m \quad \text{con} \quad E_m = \int s_m^2(t) dt \quad (2.5)$$

Y la energía media transmitida por bit como:

$$E_b = \frac{E_s}{b} \quad (2.6)$$

El parámetro E_b influye directamente en la calidad del sistema, a través de la probabilidad de error, como se puede ver en apartados posteriores.

A continuación se describen diferentes modulaciones formadas por pulsos rectangulares, a las que en general denominaremos PM (Pulse Modulation).

2.1.1 Modulaciones PAM (Pulse Amplitude Modulation)

Mediante PAM se distinguen las modulaciones cuyas funciones símbolo $s_m(t)$ se hallan formadas por un pulso $p(t)$ y se diferencian entre sí a través de la amplitud. $s_m(t) = a_m p(t)$

En este apartado se presentan modulaciones tales que

En una modulación de pulsos en amplitud PAM: $s_m(t) = a_m \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

Ver las tablas para M=2 y M=4 niveles

BITS	Símbolo m	$\Pr(s_m(t))$	$s_m(t)$
0	1	P_o	$-A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$
1	2	P_I	$A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

Tabla 1. Mapeo de bits para 2PAM Polar. Probabilidades de bit: P_o, P_I , con $P_o + P_I = 1$.

Para la modulación 2PAM de la Tabla 1 se obtiene $E_b = E_s = A^2 T$

Los parámetros de amplitud (A volts) y duración de símbolo (T seg.), representan los parámetros físicos de la modulación.

BITS	Símbolo m	$\Pr(s_m(t))$	$s_m(t)$
0	1	P_o	0
1	2	P_I	$A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

Tabla 2. Mapeo de bits para 2PAM Uni Polar. Probabilidades de bit: P_o, P_I , con $P_o + P_I = 1$.

Para la modulación 2PAM de la Tabla 2 se obtiene $E_b = E_s = P_I A^2 T$

BITS	Símbolo m	$\Pr(s_m(t))$	$s_m(t)$
0 0	1	$P_o P_o$	$-3A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$
0 1	2	$P_o P_I$	$-A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$
1 1	3	$P_I P_I$	$A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$
1 0	4	$P_I P_o$	$3A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

Tabla 3. Mapeo de bits para 4PAM Polar.

Para la modulación 2PAM de la Tabla 3 se obtiene $2E_b = E_s = A^2T(9 - 8P_1)$

Con equiprobabilidad de bits ($P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$) se obtiene $E_b = \frac{5}{2}A^2T$

2.1.2 Modulaciones PPM (Pulse Position Modulation)

En una modulación de pulsos en posición PPM: $s_m(t) = A\Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2M} - (m-1)\frac{T}{M}}{\frac{T}{M}}\right)$, Ver ejemplos de asignación de señales en las tablas para $M=2$ y para $M=4$

BITS	Símbolo m	$\Pr(s_m(t))$	$s_m(t)$
0	1	P_o	$A\Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right)$
1	2	P_1	$A\Pi\left(\frac{t - 3T/4}{T/2}\right)$

Tabla 4. Mapeo de bits para 2PPM.

Para la modulación 2PPM de la Tabla 4 se obtiene $E_b = E_s = \frac{1}{2}A^2T$

BITS	Símbolo m	$\Pr(s_m(t))$	$s_m(t)$
00	1	$P_o P_o$	$A\Pi\left(\frac{t - T/8}{T/4}\right)$
01	2	$P_o P_1$	$A\Pi\left(\frac{t - 3T/8}{T/4}\right)$
11	3	$P_1 P_1$	$A\Pi\left(\frac{t - 5T/8}{T/4}\right)$
10	4	$P_1 P_o$	$A\Pi\left(\frac{t - 7T/8}{T/4}\right)$

Tabla 5. Mapeo de bits para 4PPM.

Para la modulación 4PPM de la Tabla 4 se obtiene $2E_b = E_s = \frac{1}{M}A^2T = \frac{1}{4}A^2T$

2.1.3 Ejemplo de Señales Biortogonales

Se denomina así al conjunto de señales que son ortogonales dos a dos. En la siguiente tabla se muestra un caso particular para $M=4$ señales.

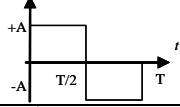
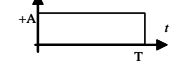
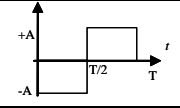
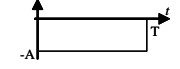
BITS	Símbolo m	$P(s_m(t))$	$s_m(t)$
00	1	$P_o P_o$	
01	2	$P_o P_l$	
11	3	$P_l P_l$	
10	4	$P_l P_o$	

Tabla 6. Ejemplo de mapeo de bits para señales biortogonales y $M=4$.

Para la modulación del ejemplo de la Tabla 6 se obtiene $2E_b = E_s = A^2 T$

2.1.4 Modulaciones QAM

Las modulaciones QAM son señales paso banda en las que las componentes I&Q a su vez corresponden a modulaciones PAM, por lo que la señal modulada se puede expresar como:

$$s(t)_{QAM} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (I[n] p(t-nT) A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - Q[n] p(t-nT) A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c))$$

Considerando que el cociente $\frac{f_c}{T}$ es un número entero positivo, y pulsos $p(t)$ rectangulares de duración T y normalizados para ser de energía igual a 1, atendiendo a la expresión dada en (2.3), se puede expresar el alfabeto de esta modulación como:

$$s_m(t)_{QAM} = I_m p(t) A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - Q_m p(t) A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

En la expresión anterior, cada uno de los $M = 2^b$ símbolos, queda determinado por el par de amplitudes (I_m, Q_m) .

Cálculo de Energía:

$$\text{si } E[I_m Q_m] = 0 \Rightarrow E_s = E[I_m^2 + Q_m^2] \frac{1}{2} A_c^2 T \quad (2.7)$$

2.2 Representación Geométrica. Espacio de Señal

En este apartado se va a definir el espacio de señal como un espacio multidimensional en el que mediante vectores se representa cada una de las señales específicas del alfabeto de símbolos o conjunto de señales elegido para transmitir los bits. Para ello se buscará un nuevo conjunto de funciones reales o complejas de energía finita que formen una base ortonormal generadora de las señales a transmitir. Es decir, cualquier señal del alfabeto de símbolos ha de poder expresarse como combinación lineal de las funciones de la base ortonormal.

2.2.1 Base ortonormal

Sea el conjunto de funciones $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_L(t)\}$ con $L \leq M$ una base generadora del espacio de señales $\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$.

La base generadora cumple las propiedades de ortonormalidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(t) \varphi_j^*(t) dt = \delta[l - j], \quad 1 \leq i, j \leq L \quad (2.8)$$

Así cualquier señal del alfabeto $s_m(t)$, se puede expresar en función de las funciones $\varphi_l(t)$ base generadora:

$$s_m(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} \varphi_l(t) \quad (2.9)$$

donde cada coordenada se puede obtener mediante el producto escalar o proyección de la señal $s_m(t)$ sobre la función de la base $\varphi_l(t)$.

$$\alpha_{ml} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_m(t) \varphi_l^*(t) dt \quad (2.10)$$

* simboliza complejo conjugado, por tanto es relevante cuando se trabaja con señales reales.

Una nueva representación del símbolo "m" del alfabeto viene dada a partir del vector formado por las correspondientes coordenadas α_{ml} en la base generadora:

$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \\ \vdots \\ \alpha_{mL} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

A la representación gráfica de los vectores (para una, dos ó tres dimensiones) se le denominará representación del espacio de señal o constelación de la señal.

2.2.2 Propiedades y definiciones

A continuación se revisan algunas de las propiedades y/o definiciones de geometría vectorial euclídea tanto desde la perspectiva de señales como desde la perspectiva de vectores.

Producto escalar: Energía cruzada entre dos señales del espacio de señal

$$\begin{aligned}
E_{mn} &= \left\langle s_m(t), s_n(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s_m(t) s_n^*(t) dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} \phi_l(t) \sum_{k=1}^L \alpha_{nk}^* \phi_k^*(t) dt = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L \alpha_{ml} \alpha_{nk}^* \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_l(t) \phi_k^*(t) dt = \\
&= \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L \alpha_{ml} \alpha_{nk}^* \delta[l-k] = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} \alpha_{nl}^* = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{n1}^* \\ \vdots \\ \alpha_{nL}^* \end{pmatrix} = \mathbf{s}_m^T \mathbf{s}_n^*
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Norma de un vector o señal: Energía

Es un caso particular de la expresión (2.12)

$$\begin{aligned}
E_m &= \left\langle s_m(t), s_m^*(t) \right\rangle = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} \alpha_{ml}^* = \\
&= \mathbf{s}_m^T \mathbf{s}_m^* = \|\mathbf{s}_m\|^2
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Distancia al cuadrado entre dos señales del espacio de señal

$$\begin{aligned}
d_{mn}^2 &= \left\langle s_m(t) - s_n(t), s_m(t) - s_n(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_m(t) - s_n(t)|^2 dt = \\
&= \|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n\|^2 = E_m + E_n - 2E_{mn}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Condición de Ortogonalidad entre señales o vectores

$$E_{mn} = \mathbf{s}_m^T \mathbf{s}_n^* = \int_{-\infty}^{+\infty} s_m(t) s_n^*(t) dt = 0 \tag{2.15}$$

2.2.3 Representación temporal

Se revisa en esta sección la representación de la señal en (2.3) aprovechando la nomenclatura vectorial.

Al expresar cada una de las funciones del espacio de señal se obtiene la siguiente correspondencia entre dominio temporal y espacio vectorial:

$$s_m(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} \phi_l(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \\ \vdots \\ \alpha_{mL} \end{pmatrix}$$

La expresión anterior corresponde al símbolo transmitido en $0 \leq t \leq T$.

Al considerar la dependencia temporal, para el símbolo k -ésimo a transmitir se tendrá

$$s_m(t - kT) = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[k] \varphi_l(t - kT) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s}_m[k] = \begin{pmatrix} \alpha_{m1}[k] \\ \alpha_{m2}[k] \\ \vdots \\ \alpha_{mL}[k] \end{pmatrix}$$

Y por tanto la expresión definitiva es:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_m(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[k] \varphi_l(t - kT) \quad (2.16)$$

2.2.4 Energía media

La expresión para la energía media definida en (2.5) se expresa a partir de los vectores de señal.

$$E_s = E[E_m] = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} E_m = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} \|\mathbf{s}_m\|^2 \quad (2.17)$$

En general, interesa dar este parámetro en función de la mínima distancia entre dos símbolos que se tiene en el espacio de señal.

2.2.5 Ejemplos de modulaciones digitales de pulsos rectangulares sobre el espacio de señal

En esta sección se retoman los ejemplos vistos para PAM, PPM y señales biortogonales y se analizan mediante su representación vectorial.

Las coordenadas de los diferentes vectores, se expresan en función de parámetros físicos, o de distancia mínima entre símbolos d , o de Energía media de bit E_b . Aunque las 3 expresiones son equivalentes, las dos últimas son de utilidad en apartados posteriores de cara a la evaluación de la probabilidad de error.

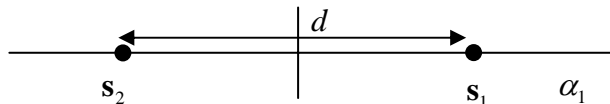
Modulaciones 2PAM

Base ortonormal: $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right); L=1$

Vectores del espacio de señal: Con distancia entre símbolos $d = d_{12}$; $E_s = E_b = \frac{1}{4} d^2$

$$\mathbf{s}_1 = (A\sqrt{T}) = \sqrt{E_b} = \frac{d}{2}$$

$$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_1 = -\sqrt{E_b} = -\frac{d}{2}$$



El parámetro d , representa la distancia mínima entre dos símbolos en su representación geométrica. Evidentemente se halla relacionado con los parámetros físicos de amplitud y duración de símbolo (A, T). En general en este capítulo se relaciona con la energía media de bit E_b , y se utiliza como parámetro de referencia respecto al cual se calculan todas las coordenadas de los vectores del espacio de señal.

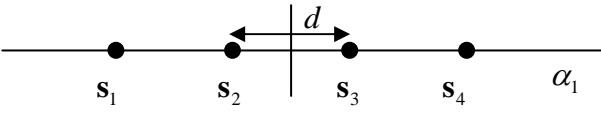
Modulaciones 4PAM (bits equiprobables)

Base ortonormal: $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right); L=1$

Vectores del espacio de señal: (Con distancia *mínima* entre símbolos d)

$$E_s = \frac{5}{4} d^2; \quad E_b = \frac{5}{8} d^2$$

$$\mathbf{s}_4 = -\mathbf{s}_1 = \left(3A\sqrt{T}\right) = \frac{3}{2}d = \sqrt{\frac{18}{5}}E_b$$

$$\mathbf{s}_3 = -\mathbf{s}_2 = \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{2}{5}}E_b$$


Modulaciones MPAM (bits equiprobables)

Base ortonormal: $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right); L=1$

Vectores del espacio de señal: Con distancia *mínima* entre símbolos d

$$\mathbf{s}_m = \frac{2m-M-1}{2} d = \sqrt{\frac{12}{(M^2-1)}} E_s = \sqrt{\frac{12b}{(M^2-1)}} E_b$$

$$m = 1..M$$

$$E_s = \sum_{m=1}^M \left(\frac{2m-1-M}{2} d \right)^2 = \frac{M^2-1}{12} d^2; \quad E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{M^2-1}{12b} d^2$$

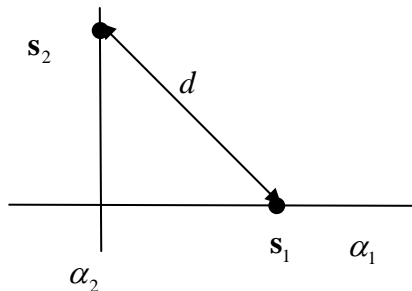
NOTA: En el cálculo anterior se ha utilizado: $\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}; \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

Modulaciones 2PPM

Base ortonormal: $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right); \quad L=2$

Vectores del espacio de señal:

Con distancia entre símbolos $d = d_{12}; \quad E_s = E_b = \frac{1}{2} d^2$



$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} A\sqrt{\frac{T}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ A\sqrt{\frac{T}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$

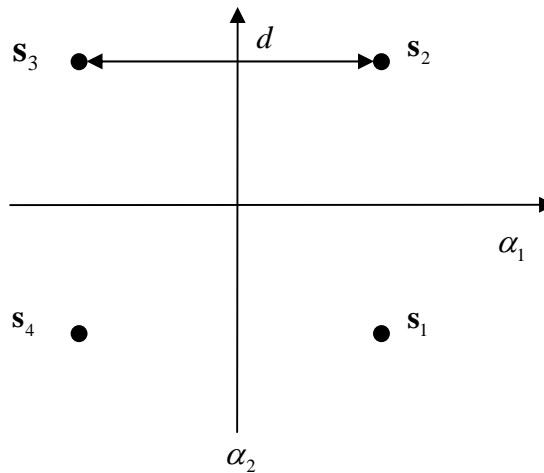
Modulaciones Biortogonales

Base ortonormal: $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right)$ $\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right)$; $L=2$

Vectores del espacio de señal. Con distancia mínima d ; $E_s = 2E_b = \frac{1}{2}d^2$

$$\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} A\sqrt{\frac{T}{2}} \\ -A\sqrt{\frac{T}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ -\sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} A\sqrt{\frac{T}{2}} \\ A\sqrt{\frac{T}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$



Modulaciones QAM

El espacio de señal resultante es dimensión $L=2$. Las dos funciones generadoras trabajando con pulsos rectangulares según se ha definido en 2.1.4 resultan.

$$\varphi_i(t) = +\sqrt{2}p(t)\cos(2\pi f_c t + \theta_c); \quad \varphi_q(t) = -\sqrt{2}p(t)\sin(2\pi f_c t + \theta_c)$$

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right); \quad T = NT_c; \quad \theta_c = 0$$

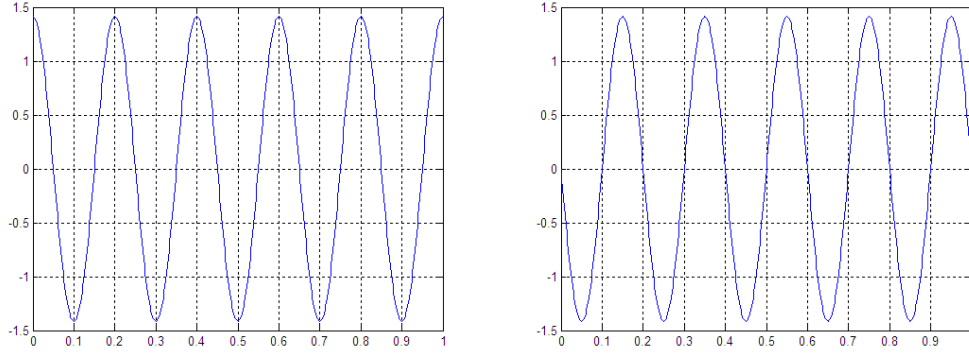


Figura 2 Ejemplo de funciones $\varphi_i(t)$, $\varphi_q(t)$. El eje temporal se halla normalizado al tiempo de símbolo para un ejemplo de $N=5$.

En estas condiciones la señal QAM expresada queda expresada mediante las funciones dadas:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha_i[n] \varphi_i(t - nT) + \alpha_q[n] \varphi_q(t - nT) \right) \quad (18)$$

con $\alpha_i[n] = \frac{A_c}{\sqrt{2}} I[n]$ $\alpha_q[n] = \frac{A_c}{\sqrt{2}} Q[n]$

2.2.6 Búsqueda de base por Gram-Schmidt

En general, se puede hallar la base ortonormal generadora $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_L(t)\}$ a partir de la observación de las señales $\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$. Cuando no se encuentra directamente la base, a partir de esta observación, se ha de aplicar algún método sistemático, como por ejemplo el que se explica en esta sección para señales reales:

Sea el espacio de señal: $\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$. A partir del mismo se obtendrá la base de funciones, $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_L(t)\}$ con $L \leq M$ que lo genera aplicando la siguiente metodología:

- Obtención de la función $\varphi_1(t)$ a partir de la normalización de la primera señal $s_1(t)$

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \quad (2.19)$$

- Obtención de la función $\varphi_2(t)$ restando a la señal $s_2(t)$ su proyección sobre $\varphi_1(t)$ y normalizando.

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= s_2(t) - \langle s_2(t), \varphi_1(t) \rangle \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) &= \frac{\psi_2(t)}{\sqrt{E_{\psi_2}}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

- Y en general: Obtención de la función $\varphi_l(t)$ restando a la señal $s_l(t)$ su proyección sobre $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_{l-1}(t)\}$ y normalizando

$$\begin{aligned}\psi_l(t) &= s_l(t) - \sum_{k=1}^{l-1} \langle s_l(t), \varphi_k(t) \rangle \varphi_k(t) \\ \varphi_l(t) &= \frac{\psi_l(t)}{\sqrt{E_{\psi_l}}}\end{aligned}\quad (2.21)$$

Si la dimensión del espacio de señal es $< M$, en alguno de los pasos anteriores se obtiene $\psi_l(t) = 0$ y no se genera la correspondiente función $\varphi_l(t) = 0$, reduciendo de este modo la dimensión de la base respecto al espacio de señal.

Ejemplo de aplicación para modulaciones Biortogonales

Obtención de la función $\varphi_1(t)$:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) - \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right)$$

Obtención de la función $\varphi_2(t)$:

$$\psi_2(t) = s_2(t) - \langle s_2(t), \varphi_1(t) \rangle \varphi_1(t) = s_2(t) \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

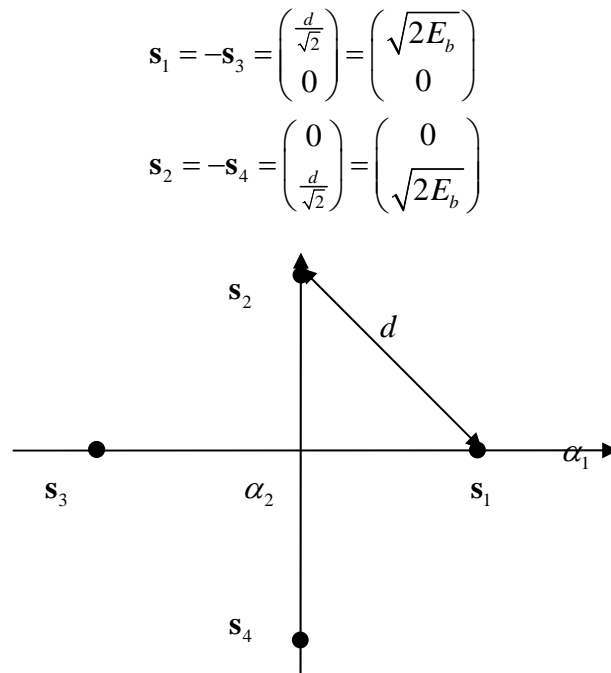
Aunque se intenten encontrar más funciones a partir de este punto, se anulan:

$$\psi_3(t) = s_3(t) - \langle s_3(t), \varphi_1(t) \rangle \varphi_1(t) - \langle s_3(t), \varphi_2(t) \rangle \varphi_2(t) = 0$$

$$\psi_4(t) = s_4(t) - \langle s_4(t), \varphi_1(t) \rangle \varphi_1(t) - \langle s_4(t), \varphi_2(t) \rangle \varphi_2(t) = 0$$

Vectores del espacio de señal. Con distancia mínima d ;

$$E_s = 2E_b = \frac{1}{2} d^2$$



Comparando este ejemplo con el del apartado 2.2.5 puede observarse que en general la base ortonormal generadora no es única ni la representación geométrica, pero sí la energía media de símbolo E_s , la energía media de bit E_b y las distancias entre símbolos.

2.2.7 Conclusiones de espacio de señal.

La expresión de las señales del alfabeto en forma vectorial utilizando una base ortonormal de funciones generadoras, presenta las siguientes ventajas, siempre que la dimensión L sea menor que el número de señales M

Facilita el cálculo de la probabilidad de error
Simplifica el diseño del detector MAP.

2.3 Receptor óptimo para PM y canal AWGN

El diseño del receptor se plantea a partir de las expresiones vectoriales de la señal. En la Figura 3 se representa el receptor óptimo MAP basado en la representación de señal mediante la base generadora:

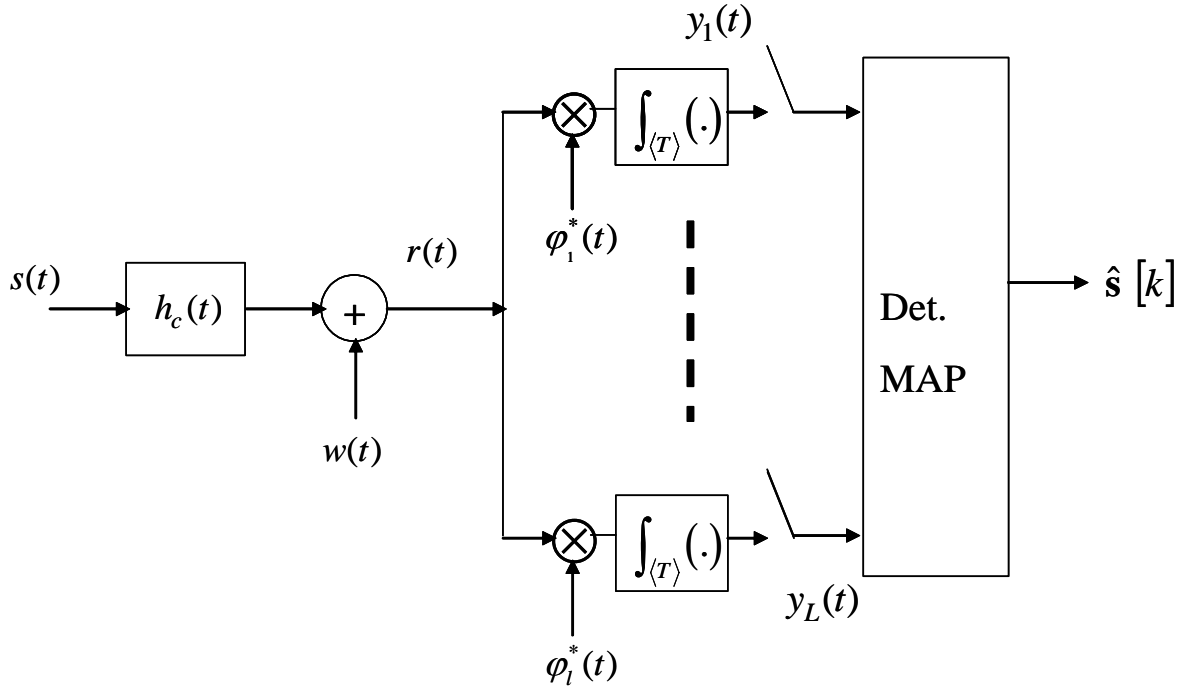


Figura 3 Sistema Receptor de comunicaciones digitales. Proyector sobre espacio de señal basado en correladores y Detector MAP.

En el resto del capítulo se considerarán únicamente señales reales

La señal de ruido $w(t)$ se considera proceso aleatorio estacionario real blanco y Gaussiano. Así su función de correlación y su función de densidad espectral son:

$$\begin{aligned} R_w(\tau) &= \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \\ S_w(f) &= \frac{N_0}{2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

En la Figura 4, se muestra la representación Vectorial del mismo, para el caso en que el canal sea AWGN y que por tanto $h_c(t) = \delta(t)$.

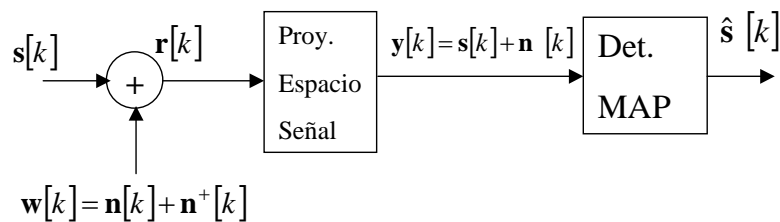


Figura 4 Representación Vectorial del receptor MAP para el caso de canal AWGN.

En la representación anterior, las coordenadas del vector a la salida del proyector coinciden con las muestras de las diferentes salidas de los correladores de la Figura 3. Al proyectar la señal de ruido sobre el espacio de señal, se eliminará el ruido ortogonal ($n^+(t)$) al espacio de señal. En el dominio temporal este proceso puede expresarse como:

$$w(t) = n(t) + n^+(t) = \sum_{l=1}^L \langle w(t), \varphi_l(t) \rangle \varphi_l(t) + n^+(t) \quad (2.23)$$

Denominando:

$$\begin{aligned} \beta_l(t_0) &= \beta_l[0] = \langle w(t), \varphi_l(t) \rangle \\ \beta_l(t_k) &= \beta_l[k] = \langle w(t), \varphi_l(t - kT) \rangle \end{aligned}$$

El ruido resultante a la salida del proyector de señal, para el instante de muestreo correspondiente al símbolo k -ésimo es por tanto:

$$n(t_k) = \sum_{l=1}^L \beta_l[k] \varphi_l(t) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{y}[k] = \begin{pmatrix} y_1(t_k) \\ y_2(t_k) \\ \vdots \\ y_L(t_k) \end{pmatrix} = \mathbf{s}[k] + \mathbf{n}(t_k) = \begin{pmatrix} \alpha_1[k] \\ \alpha_2[k] \\ \vdots \\ \alpha_L[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1(t_k) \\ \beta_2(t_k) \\ \vdots \\ \beta_L(t_k) \end{pmatrix} = \mathbf{s}[k] + \mathbf{n}[k] \quad (2.25)$$

El vector a la entrada del detector MAP, se halla formado por el vector de señal transmitido más el vector de ruido aditivo. Cada coordenada se divide a su vez en coordenada de señal útil y coordenada de ruido.

$$y_l(t_k) = y_l[k] = \alpha_l[k] + \beta_l(t_k) \quad (2.26)$$

Todos los vectores que intervienen en (2.25) son variables aleatorias multidimensionales. La señal útil es una variable aleatoria discreta \mathbf{s}_m , caracterizada por las probabilidades a priori: $\Pr\{\mathbf{s}_m\}$. El vector de ruido \mathbf{n} , es una variable aleatoria multidimensional gaussiana. Sus parametros estadísticos se estudian en 2.3.2. El vector de señal recibida $\mathbf{y}[k]$ es también una variable aleatoria multidimensional.

2.3.1 Equivalencia entre correladores y filtros adaptados.

Al transmitir pulsos de forma continuada la señal transmitida se describe como (2.16):

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_m(t - kT)$$

con lo cual, cada una de las coordenadas del vector de señal recibido, se puede expresar en función del tiempo como:

$$y_l((n+1)T) = y_l(t)|_{t=nT} = \int r(\tau) \varphi_l(\tau - nT) d\tau = \int (s(\tau) + w(\tau)) \varphi_l(\tau - nT) d\tau \quad (2.27)$$

La integral anterior, demuestra que cada correlador del esquema propuesto para el receptor óptimo es equivalente a un sistema lineal e invariante con el tiempo de respuesta impulsional: $\varphi_l(T - \tau)$. La equivalencia entre ambos sistemas queda representada en la Figura 5.

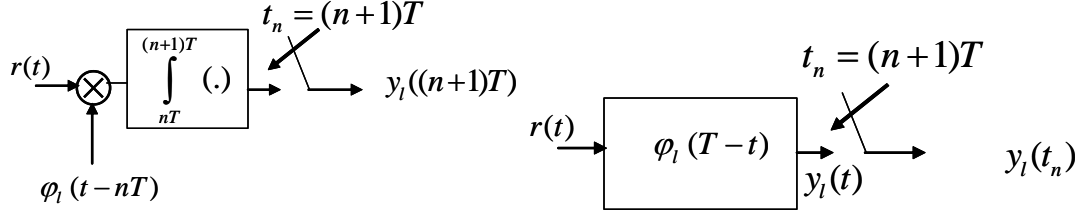


Figura 5 Equivalencia entre correlador y filtro adaptado (FA) a partir de la función de la base generadora $\varphi_l(t)$

Obsérvese que a la salida del correlador se obtiene la siguiente expresión:

$$y_l((n+1)T) = \int_{nT}^{(n+1)T} r(\tau) \varphi_l(\tau - nT) d\tau \quad (2.28)$$

Y a la salida del filtro adaptado (FA) se obtiene:

$$z(t) = r(t) * \varphi_l(T - t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) \varphi_l(T - (t - \tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) \varphi_l(\tau - t + T) d\tau;$$

Al muestrear en $t = (n+1)T$ se obtiene:

$$\begin{aligned} z(t) \Big|_{t=(n+1)T} &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) \varphi_l(\tau - (n+1)T + T) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) \varphi_l(\tau - nT) d\tau = \int_{nT}^{(n+1)T} r(\tau) \varphi_l(\tau - nT) d\tau = y_l((n+1)T) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por tanto, el esquema del proyector sobre el espacio de señal de la Figura 3 se puede representar a partir de sistemas lineales e invariantes cuya respuesta impulsional es FA a las funciones de la base generadora según el esquema de la Figura 6.

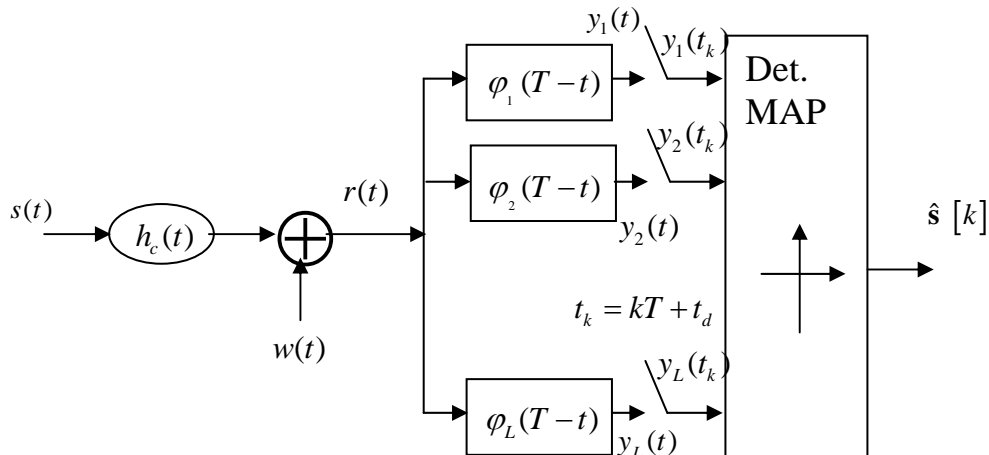


Figura 6 Sistema Receptor de comunicaciones digitales. Proyector sobre espacio de señal basado en FA y Detector MAP.

Siguiendo con el desarrollo se obtiene una expresión para la dependencia temporal del vector de señal recibido:

$$\begin{aligned}
 y_l(nT) = y_l[n] &= \int \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_m(\tau - kT) \varphi_l(\tau - nT) d\tau + \beta_l(nT) = \\
 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_{mj}[k] &\int \varphi_j(\tau - kT) \varphi_l(\tau - nT) d\tau + \beta_l(nT) = \\
 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_{mj}[k] &R_{\varphi_j \varphi_l}((n-k)T) + \beta_l(nT)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

En la ecuación anterior se ha utilizado la definición de correlación cruzada de señales deterministas de energía finita, en este caso las propias funciones de la base generadora son señales deterministas de energía finita.

$$R_{\varphi_j \varphi_l}(\tau) = \int \varphi_j(\lambda + \tau) \varphi_l(\lambda) d\lambda$$

Asumiendo que $R_{\varphi_j \varphi_l}((n-k)T) = \delta[i-j] \delta[n-k]$, propiedad evidente para modulaciones de pulsos rectangulares, se obtiene

$$y_l[n] = \alpha_l[n] + \beta_l[n]$$

es decir:

$$\mathbf{y}[n] = \begin{pmatrix} y_1[n] \\ \vdots \\ y_L[n] \end{pmatrix} = \mathbf{s}_m[n] + \mathbf{n}[n] \tag{2.31}$$

En el tema 3, la ecuación (2.31) se generaliza para el caso de canales no ideales.

2.3.2 Caracterización estadística del ruido

En este apartado se caracterizan las coordenadas de los vectores de ruido resultantes de la proyección sobre el espacio de señal (PES). Es obvio que la caracterización no depende de si la PES se realiza con correladores o con FA. Las muestras de ruido son idénticas para ambas situaciones.

En el desarrollo se modela el ruido de canal $w(t)$ como estacionario, de media nula, estadísticamente independiente a la señal modulada blanco y gaussiano. Correlación y densidad espectral se muestran en (2.22).

La coordenada de ruido para el símbolo k -ésimo en (2.26) presenta las siguientes propiedades estadísticas.

$$\beta_l[k] = \int_{kT}^{(k+1)T} w(t) \varphi_l(t - kT) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \varphi_l(t - kT) dt \tag{2.32}$$

Momentos estadísticos de primer orden:

$$E[\beta_l] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\varphi_l(t-kT)dt\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[w(t)]\varphi_l(t-kT)dt = 0 \quad (2.33)$$

Momentos estadísticos de segundo orden:

$$\begin{aligned} E[\beta_l[k]\beta_j[m]] &= \\ E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\varphi_l(t-kT)dt \int_{-\infty}^{+\infty} w(\lambda)\varphi_j(\lambda-mT)d\lambda\right] &= \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[w(t)w(\lambda)]\varphi_l(t-kT)\varphi_j(\lambda-mT)dtd\lambda &= \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_w(t-\lambda)\varphi_l(t-kT)\varphi_j(\lambda-mT)dtd\lambda &= \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2}\delta(t-\lambda)\varphi_l(t-kT)\varphi_j(\lambda-mT)dtd\lambda &= \\ \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\lambda)\varphi_l(t-kT)\varphi_j(\lambda-mT)dtd\lambda &= \\ \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(\lambda-kT)\varphi_j(\lambda-mT)d\lambda &= \\ \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(\gamma+mT-kT)\varphi_j(\gamma)d\gamma = \frac{N_0}{2} R_{\varphi_l\varphi_j}((m-k)T) \end{aligned}$$

$$E[\beta_l[k]\beta_j[m]] = \frac{N_0}{2} R_{\varphi_l\varphi_j}((m-k)T) = \frac{N_0}{2} \delta[k-m]\delta[l-j] \quad (2.34)$$

En (2.34) se aplica la siguiente propiedad para las funciones de la base generadora:

$$R_{\varphi_l\varphi_j}(nT) = R_{\varphi_l\varphi_j}[n] = \delta[n]\delta[l-j]$$

Para $n=0$, la propiedad sale directamente de la condición de ortonormalidad (2.8). Para $n \neq 0$ la propiedad es obvia si las funciones de la base generadora son de duración menor o igual al tiempo de símbolo T . En el tema siguiente se verán funciones cuya duración es mayor a la del tiempo de símbolo y que cumplen la condición exigida.

Nota:

En el resto del capítulo se prescinde de la notación con dependencia temporal, la cual se retomará en el próximo tema:

Las coordenadas de ruido, son estacionarias y por tanto la f.d.p. del vector de ruido no depende de k . Para simplificar por tanto la nomenclatura:

$$\mathbf{s}_m = \mathbf{s}_m[k]; \mathbf{y} = \mathbf{y}[k]; \mathbf{n} = \mathbf{n}[k]; \beta_l = \beta_l[k]$$

Cálculo de la f.d.p. del vector de ruido.

De (2.34) se deduce que dos coordenadas de ruido diferentes entre sí son incorreladas y por ser gaussianas también estadísticamente independientes. Así las funciones de densidad de probabilidad (f.d.p.) correspondientes, son distribuciones normales.

$$\beta_l : N(0, \sigma^2); \quad \sigma^2 = \frac{N_0}{2}$$

$$f_{\beta_l}(\beta_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta_l^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{\beta_l^2}{N_0}\right) \quad (2.35)$$

Debido a la independencia estadística entre las variables aleatorias de ruido $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$, la f.d.p. conjunta, correspondiente a la f.d.p. del vector de ruido, puede expresarse como:

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = f_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L) = \prod_{l=1}^L f_{\beta_l}(\beta_l) =$$

$$\prod_{l=1}^L \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{\beta_l^2}{N_0}\right) = \frac{1}{(\sqrt{\pi N_0})^L} \exp\left(-\frac{\sum_{l=1}^L \beta_l^2}{N_0}\right) =$$

$$\frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{N_0}\right) \quad (2.36)$$

En esta situación diremos que la distribución del vector de ruido es gaussiana multidimensional:

$$\mathbf{n} = N\left(0, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}\right)$$

2.3.3 Detector óptimo: Criterio MAP.

Criterio MAP. Maximizamos la probabilidad del símbolo \mathbf{s}_m a “posteriori”, es decir, una vez recibido el vector de señal \mathbf{y} .

Por tanto la función a maximizar es:

$$\Pr(\mathbf{s}_m | \mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m)}{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})} \Pr(\mathbf{s}_m) \quad (2.37)$$

A la salida del detector MAP de la Figura 3 y de la Figura 4 se detecta el símbolo $\hat{\mathbf{s}}_m$ que maximiza la función (2.37), por tanto, un modo de obtenerlo es evaluando dicha función para $m=1, \dots, M$.

El desarrollo que sigue muestra nuevas expresiones para dicho detector.

La f.d.p. del vector recibido \mathbf{y} condicionada por el símbolo \mathbf{s}_m se expresa a partir de la f.d.p. del vector de ruido \mathbf{n} (2.36). Dado que $\mathbf{y} | \mathbf{s}_m = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$, se entiende que una vez seleccionada la condición de que el símbolo transmitido es \mathbf{s}_m , el vector de datos detectado es igual al vector aleatorio de ruido, más un valor determinado \mathbf{s}_m , es decir, más un vector determinista, por ello las f.d.p. de \mathbf{y} y de \mathbf{n} coinciden salvo en media.

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}_m}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) = f_{\mathbf{n}}(\mathbf{y} - \mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0}\right) \quad (2.38)$$

y sustituyendo en (2.37) se obtiene la siguiente regla de decisión:

$$\hat{\mathbf{s}}_{m-MAP} = \max_{\mathbf{s}_m} \left(\Pr(\mathbf{s}_m | \mathbf{y}) \right) = \max_{\mathbf{s}_m} \left(\frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0}\right) \Pr(\mathbf{s}_m) \right) \quad (2.39)$$

Dado que la función a maximizar es positiva para cualquier valor de \mathbf{y} y de \mathbf{s}_m , su maximización es equivalente a maximizar su logaritmo, por ser la función logaritmo monótona creciente, por tanto:

$$\hat{\mathbf{s}}_{m-MAP} = \max_{\mathbf{s}_m} \left(-\frac{L}{2} \ln(\pi N_0) - \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0} + \ln(\Pr(\mathbf{s}_m)) \right)$$

donde pueden eliminarse los términos que no dependen de \mathbf{s}_m :

$$\hat{\mathbf{s}}_{m-MAP} = \min_{\mathbf{s}_m} \left(\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0} - \ln(\Pr(\mathbf{s}_m)) \right) \quad (2.40)$$

Por tanto, con el vector de señal recibido \mathbf{y} , la función anterior debe ser evaluada para cada símbolo posible del alfabeto \mathbf{s}_m , con el objeto de decidir el que nos de un valor mínimo de la función (2.40).

Observaciones:

- Si el entorno es muy ruidoso (N_0 valor muy elevado), el criterio MAP conduce a elegir el símbolo más probable.
- Si los símbolos son equiprobables: $\Pr(\mathbf{s}_m) = \frac{1}{M}$, la probabilidad a priori de cada símbolo no depende de "m", y el criterio MAP, se reduce a un criterio de mínima distancia euclídea:

$$\hat{\mathbf{s}}_{m-MAP} = \min_{\mathbf{s}_m} \left(\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 \right)$$

Al desarrollar la ecuación (2.40) se obtiene:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{s}_m\|^2 - 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle = \|\mathbf{y}\|^2 + E_m - 2 \int y(t) s_m(t) dt \quad (2.41)$$

Por tanto y prescindiendo de los términos que no dependen del símbolo "m-ésimo", una nueva expresión para la función a optimizar es:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_{m-MAP} &= \max_{\mathbf{s}_m} \left(\langle y(t), s_m(t) \rangle - \frac{E_m}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr(\mathbf{s}_m)) \right) = \\ &= \max_{\mathbf{s}_m} \left(\int y(t) s_m(t) dt - \frac{E_m}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr(\mathbf{s}_m)) \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para el diseño del detector MAP sobre canales de ruido aditivo gaussiano, por tanto, es de interés en el cálculo de zonas de decisión tener presentes cualquiera de las siguientes expresiones y aplicar en cada caso la más conveniente:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_{m-MAP} = \\ \min_{\mathbf{s}_m} \left(\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 - N_0 \ln(\Pr(\mathbf{s}_m)) \right) = \\ \max_{\mathbf{s}_m} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle - \frac{E_m}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr(\mathbf{s}_m)) \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Para constelaciones con energía igual para todos los símbolos y/o símbolos equiprobables, se podrán realizar las correspondientes simplificaciones.

A continuación se presentan dos diagramas de bloques diferenciados (aunque equivalentes) para el receptor óptimo (MAP) según se desarrolle la ecuación (2.41) o la ecuación (2.42).

- Estructura 1 (Figura 7): Banco de L correladores o L filtros adaptados, ecuación (2.41). Interesa si $L < M$, dado que se reduce el número de correladores a implementar y por lo tanto el hardware del receptor se simplifica respecto al diagrama de la segunda estructura.
- Estructura 2 (Figura 8): Banco de M correladores o M filtros adaptados, ecuación (2.42). Interesa si $L = M$, dado que no se reduce el número de correladores a implementar o hardware respecto a la estructura 1.

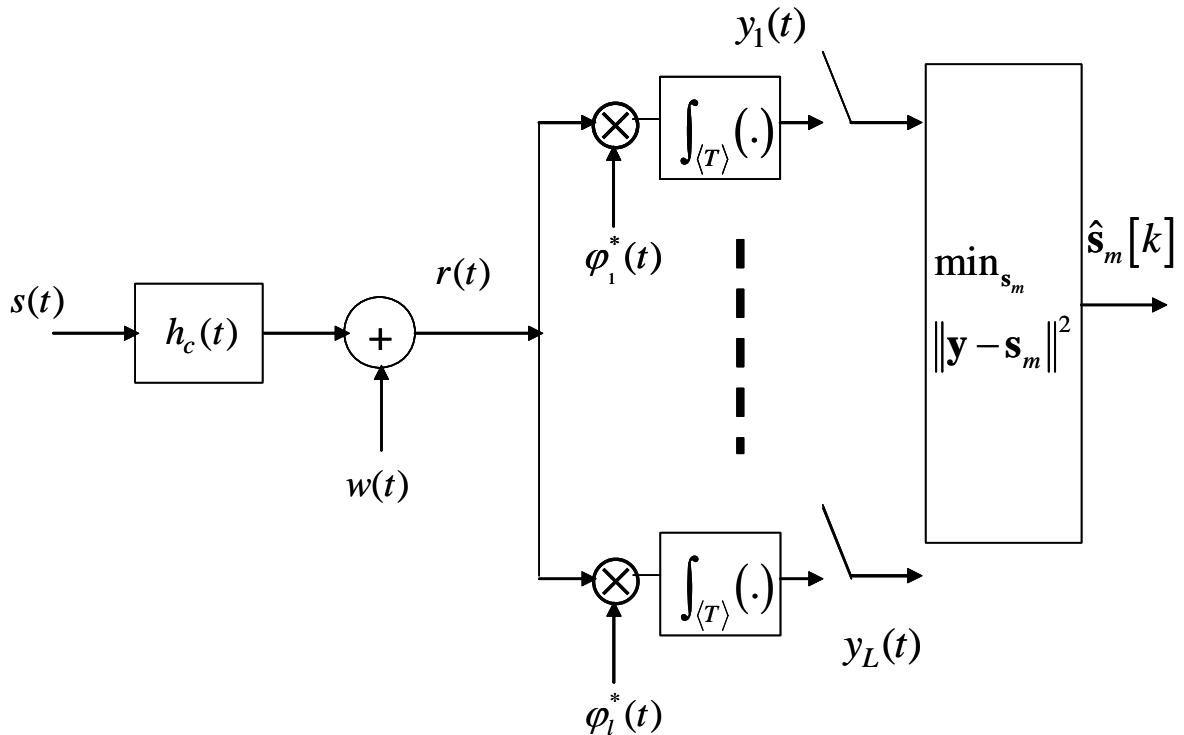


Figura 7 RO-MAP. Banco de L correladores o L filtros adaptados. Símbolos equiprobables.

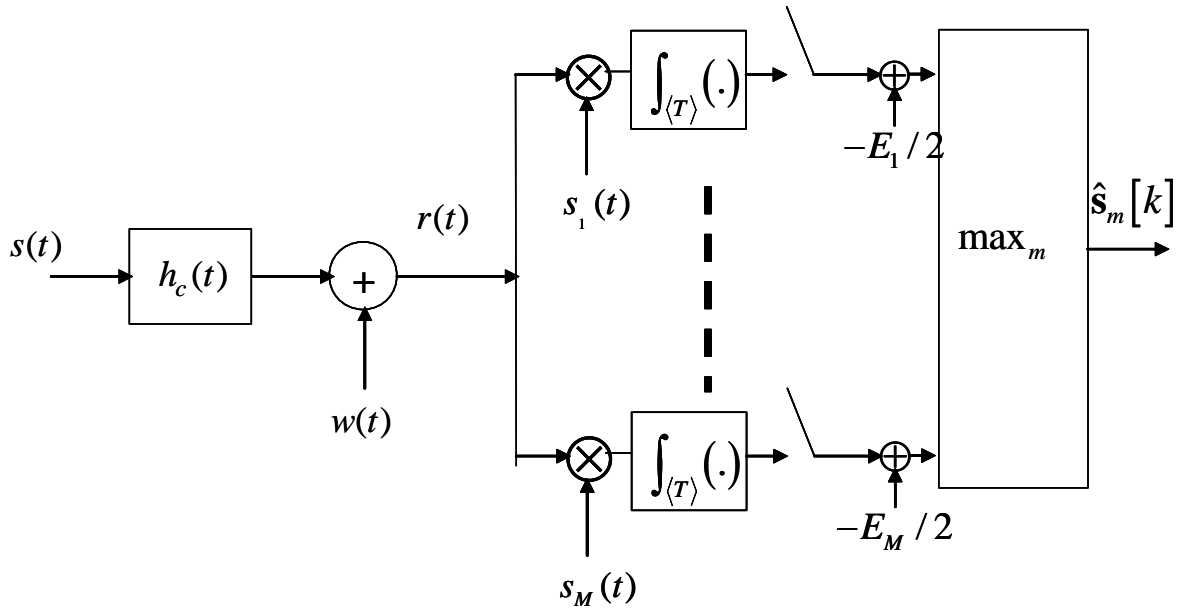


Figura 8 R0-MAP. Banco de M correladores o M filtros adaptados. Símbolos equiprobables.

Un esquema práctico del RO se muestra a continuación, distinguiendo entre la parte que se realiza mediante “Hardware” y la parte que se realiza mediante “software”.

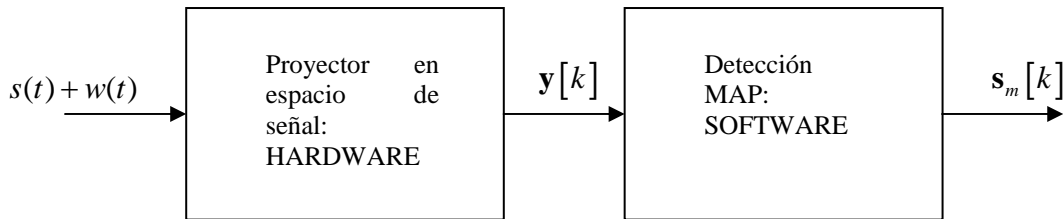


Figura 9 Esquema general de implementación del receptor óptimo MAP

Y llamando a la métrica de detección $\Lambda_m = \Lambda_m[k] = \Pr(\mathbf{s}_m | \mathbf{y})$, el algoritmo a implementar en la parte de software sería

```

For m=1:M
    AMAX=0
    max=0
    Compute Am
    If Am > AMAX then
        AMAX = Am
        max=m
    endif
endfor

```

2.3.4 Elección de las zonas de decisión:

La aplicación del criterio MAP para la decisión de los símbolos, divide el espacio de señal recibida en M zonas o regiones de decisión \mathbf{Z}_m . Para cada tipo de modulación se pueden calcular los umbrales o fronteras de cada zona. En función del punto o vector de señal recibida \mathbf{y} , se puede disponer de la información respecto a que símbolo \mathbf{s}_m , maximiza la correspondiente métrica MAP. En una detección de símbolos en tiempo real, no es necesario calcular las M métricas diferentes para cada vector de señal

recibida, sino que automáticamente, en función de la zona de decisión en la que se haya detectado este vector \mathbf{y} , se producirá la estimación del correspondiente símbolo. El algoritmo descrito en la Figura 9 se simplifica por ello del siguiente modo:

```

For m=1:M
  If Y[K] is in Zm then
    max=m
    goto STOP
  endif
endfor
STOP

```

Véanse a continuación 2 ejemplos de cálculo de zonas de decisión.

Ejemplo 1: 2PAM

En 2PAM se tienen dos símbolos de igual energía, la función a minimizar se reduce a:

$$\hat{\mathbf{s}}_{m-MAP} = \max_{\mathbf{s}_m} \left(\langle \mathbf{y}(t), \mathbf{s}_m(t) \rangle + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr(\mathbf{s}_m)) \right)$$

$$\text{Bajo la hipótesis } \mathbf{s}_m = \mathbf{s}_2 = -\sqrt{E_b} \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_2 \rangle = -y_1 \sqrt{E_b}$$

$$\text{Bajo la hipótesis } \mathbf{s}_m = \mathbf{s}_1 = +\sqrt{E_b} \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_1 \rangle = +y_1 \sqrt{E_b}$$

Por tanto el criterio de decisión se traduce en:

$$\begin{aligned}
 & +y_1 \sqrt{E_b} + \frac{N_0}{2} \ln(P_1) \underset{<_{s_2}}{>_{s_1}} -y_1 \sqrt{E_b} + \frac{N_0}{2} \ln(P_0) \quad \Rightarrow \\
 & y_1 \underset{<_{s_2}}{>_{s_1}} \frac{N_0}{4\sqrt{E_b}} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) = \gamma
 \end{aligned}$$

El umbral de decisión γ , divide el espacio de señal recibida en dos zonas de decisión: \mathbf{Z}_1 y \mathbf{Z}_2 .

Ejemplo 2: Señales Biortogonales: $M=4$

Vectores de señal útil y probabilidades:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2E_b} \\ 0 \end{pmatrix}; & \Pr(\mathbf{s}_1) &= P_0^2 \\
 \mathbf{s}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E_b} \end{pmatrix}; & \Pr(\mathbf{s}_2) &= P_1 P_0 \\
 \mathbf{s}_3 &= -\begin{pmatrix} \sqrt{2E_b} \\ 0 \end{pmatrix}; & \Pr(\mathbf{s}_3) &= P_1^2 \\
 \mathbf{s}_4 &= -\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E_b} \end{pmatrix}; & \Pr(\mathbf{s}_4) &= P_0 P_1
 \end{aligned}$$

Cálculo del umbral o frontera entre $\mathbf{s}_1; \mathbf{s}_2$

De la ecuación (2.42):

$$\begin{aligned}
(y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} \sqrt{2E_b} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{N_0}{2} \ln(P_0^2) \Big|_{s_2}^{s_1} (y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E_b} \end{pmatrix} + \frac{N_0}{2} \ln(P_1 P_0) &\Rightarrow \\
y_1 + \frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) \Big|_{s_2}^{s_1} y_2 &\Rightarrow y_2 \Big|_{s_1}^{s_2} y_1 + \gamma
\end{aligned}$$

$$\text{con } \gamma = \frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right)$$

Cálculo del umbral o frontera entre $\mathbf{s}_3; \mathbf{s}_2$

$$\begin{aligned}
(y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} -\sqrt{2E_b} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{N_0}{2} \ln(P_1^2) \Big|_{s_2}^{s_3} (y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E_b} \end{pmatrix} + \frac{N_0}{2} \ln(P_1 P_0) &\Rightarrow \\
-y_1 + \frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \Big|_{s_2}^{s_3} y_2 &\Rightarrow y_2 \Big|_{s_3}^{s_2} -y_1 - \gamma
\end{aligned}$$

Cálculo del umbral o frontera entre $\mathbf{s}_3; \mathbf{s}_4$

$$\begin{aligned}
(y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} -\sqrt{2E_b} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{N_0}{2} \ln(P_1^2) \Big|_{s_4}^{s_3} (y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2E_b} \end{pmatrix} + \frac{N_0}{2} \ln(P_1 P_0) &\Rightarrow \\
-y_1 + \frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \Big|_{s_4}^{s_3} -y_2 &\Rightarrow y_2 \Big|_{s_4}^{s_3} y_1 + \gamma
\end{aligned}$$

Cálculo del umbral o frontera entre $\mathbf{s}_1; \mathbf{s}_4$

$$\begin{aligned}
(y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} \sqrt{2E_b} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{N_0}{2} \ln(P_0^2) \Big|_{s_4}^{s_1} (y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2E_b} \end{pmatrix} + \frac{N_0}{2} \ln(P_1 P_0) &\Rightarrow \\
+y_1 + \frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) \Big|_{s_4}^{s_1} -y_2 &\Rightarrow y_2 \Big|_{s_4}^{s_1} -y_1 - \gamma
\end{aligned}$$

Obsérvese que si $P_0 = P_1 \Rightarrow \gamma = 0$

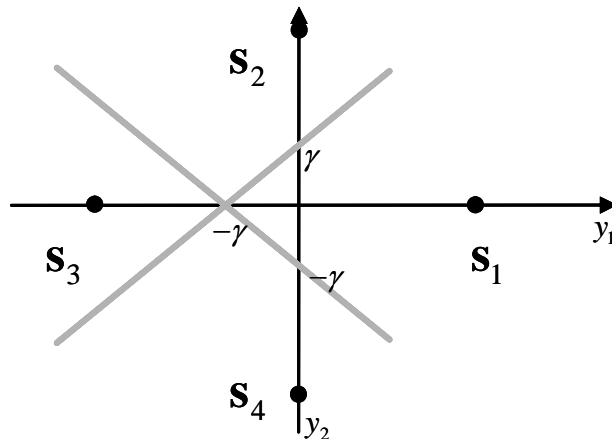


Figura 10 Zonas de decisión MAP para el caso de señales biortogonales del apartado 2.2.6 Se ha supuesto $P_0 > P_1$ y por tanto $\gamma > 0$.

En la Figura 10 se observan las zonas de decisión MAP obtenidas para el ejemplo de señales biortogonales definido en la Tabla 6 y con la base ortonormal hallada en el apartado 2.2.6

2.4 BER para PM y canal AWGN

Como cálculo previo a la BER (Bit Error Rate), en la mayoría de las situaciones se obtendrá la probabilidad de error en el símbolo.

Se define la BER como el porcentaje de bits detectados erróneamente en el receptor.

Se define la probabilidad de error de símbolo P_e como el porcentaje de símbolos detectados erróneamente en el receptor

Ambas se hallan relacionadas y se consideran el parámetro de calidad para medir el comportamiento del sistema de comunicaciones digitales.

Sea la probabilidad de error de símbolo:

$$P_e = \int_{\mathbb{R}^L} \Pr(\text{error} | \mathbf{y}) f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

En el desarrollo que sigue se demuestran dos propiedades:

- I) El criterio MAP coincide con el criterio de minimizar la probabilidad de error.
- II) La probabilidad de error se puede calcular como el promedio estadístico de las probabilidades de error condicionadas a cada uno de los símbolos:

Considerando:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^L &= Z_1 \oplus Z_2 \oplus \dots \oplus Z_M \\ Z_i \cap Z_j &= \emptyset \\ \bigcup_{m=1}^M Z_m &= \mathbb{R}^L \end{aligned}$$

Demostración de I):

$$\begin{aligned}
P_e &= \int_{\mathbb{R}^L} \Pr(\text{error}|\mathbf{y}) f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\
&= \sum_{m=1}^M \int_{Z_m} \Pr(\text{error}|\mathbf{y}) f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\
&= \sum_{m=1}^M \int_{Z_m} 1 - \Pr(\mathbf{s}_m|\mathbf{y}) f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\
&= \sum_{m=1}^M \int_{Z_m} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \sum_{m=1}^M \int_{Z_m} \Pr(\mathbf{s}_m|\mathbf{y}) f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\
&= 1 - \sum_{m=1}^M \int_{Z_m} \Pr(\mathbf{s}_m|\mathbf{y}) f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}
\end{aligned}$$

De la expresión anterior se deduce que para minimizar la probabilidad de error, en cada zona de decisión Z_m la probabilidad $\Pr(\mathbf{s}_m|\mathbf{y})$ debe ser máxima (Criterio MAP).

Demostración de II): A partir de la última expresión de la probabilidad de error:

$$\begin{aligned}
P_e &= 1 - \sum_{m=1}^M \int_{Z_m} \Pr(\mathbf{s}_m|\mathbf{y}) f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\
&= 1 - \sum_{m=1}^M \int_{Z_m} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) \Pr(\mathbf{s}_m) d\mathbf{y} = \\
&= 1 - \sum_{m=1}^M \Pr(\mathbf{s}_m) \left(1 - \int_{\mathbb{R}^L - Z_m} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) d\mathbf{y} \right) = \\
&= \sum_{m=1}^M \Pr(\mathbf{s}_m) \int_{\mathbb{R}^L - Z_m} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) d\mathbf{y}
\end{aligned}$$

La expresión anterior directamente se interpreta como:

$$P_e = \sum_{m=1}^M \Pr(e/\mathbf{s}_m) \Pr(\mathbf{s}_m) \quad (2.44)$$

A partir de (2.44) se estima la BER. Evidentemente en los casos binarios no se hará distinción entre ambas probabilidades:

$$M = 2 \Rightarrow BER = P_e \quad (2.45)$$

La utilización de umbrales óptimos MAP minimiza la BER. Esta afirmación se demuestra en las siguientes secciones para una dimensión y para el caso general.

2.4.1 Demostración de que mediante el criterio MAP se minimiza la Probabilidad de error para PAM (L=1).

La demostración para el caso general es la propiedad I. En este apartado se particulariza para el caso de dimensión L=1.

Sea una modulación MPAM. Se debe disponer de $M - 1$ umbrales de decisión γ_m ; $m = 1..M - 1$ para dividir el espacio de señal recibida unidimensional y_1 en M zonas de decisión \mathbf{Z}_m ; $m = 1..M$:

La regla de decisión puede formularse como:

$$\begin{aligned} y_1 < \gamma_1 &\Rightarrow \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_1 \\ \gamma_{m-1} < y_1 < \gamma_m &\Rightarrow \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_m; \quad 2 \leq m \leq M - 1 \\ \gamma_{M-1} < y_1 &\Rightarrow \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_M \end{aligned}$$

Si añadimos los siguientes umbrales totalmente relevantes;

$$\gamma_0 = -\infty; \quad \gamma_M = +\infty$$

la probabilidad de error puede expresarse como:

$$\begin{aligned} P_e &= \sum_{m=1}^M \Pr(e|\mathbf{s}_m) \Pr(\mathbf{s}_m) = \\ &\Pr(\mathbf{s}_1) \int_{\gamma_1}^{+\infty} f_{y_1}(y_1|\mathbf{s}_1) dy_1 + \\ &\sum_{m=2}^{M-1} \Pr(\mathbf{s}_m) \left(\int_{-\infty}^{\gamma_{m-1}} f_{y_1}(y_1|\mathbf{s}_m) dy_1 + \int_{\gamma_m}^{+\infty} f_{y_1}(y_1|\mathbf{s}_m) dy_1 \right) + \\ &\Pr(\mathbf{s}_M) \int_{-\infty}^{\gamma_{M-1}} f_{y_1}(y_1|\mathbf{s}_M) dy_1 = \\ &\sum_{m=2}^M \left(\Pr(\mathbf{s}_{m-1}) \int_{\gamma_{m-1}}^{+\infty} f_{y_1}(y_1|\mathbf{s}_{m-1}) dy_1 + \Pr(\mathbf{s}_m) \int_{-\infty}^{\gamma_{m-1}} f_{y_1}(y_1|\mathbf{s}_m) dy_1 \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Para hallar el mínimo de P_e en (2.46) respecto a cada uno de los umbrales: $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \dots, \gamma_{M-1}$, se deriva e iguala a cero:

$$\frac{\partial P_e}{\partial \gamma_{m-1}} = -\Pr(\mathbf{s}_{m-1}) f_{y_1}(\gamma_{m-1}|\mathbf{s}_{m-1}) + \Pr(\mathbf{s}_m) f_{y_1}(\gamma_{m-1}|\mathbf{s}_m) = 0 \quad (2.47)$$

El resultado obtenido para las zonas de decisión es equivalente a maximizar la función MAP de (2.37).

Falta realizar esta demostración para casos de dimensión $L > 1$.

2.4.2 Cálculo de la BER para PAM.

Caso binario: 2PAM

En 2PAM se tienen dos símbolos:

$$\text{Bajo la hipótesis } \mathbf{s}_m = \mathbf{s}_2 = -\sqrt{E_b} \quad y_1 = \alpha_{21} + \beta_1 : N\left(-\frac{d}{2}, \frac{N_0}{2}\right)$$

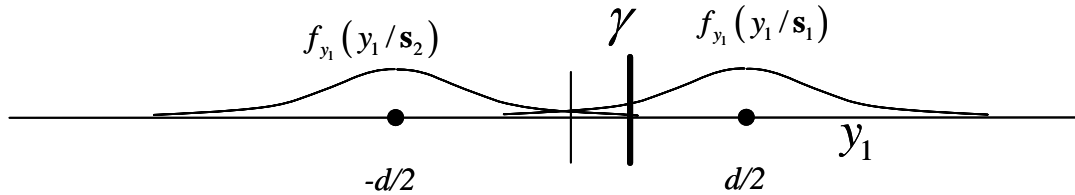
$$\text{Bajo la hipótesis } \mathbf{s}_m = \mathbf{s}_1 = +\sqrt{E_b} \quad y_1 = \alpha_{11} + \beta_1 : N\left(+\frac{d}{2}, \frac{N_0}{2}\right)$$

Y al aplicar el criterio MAP se ha obtenido en 2.3.3 el umbral de decisión óptimo γ :

$$y_1 \begin{matrix} > s_1 \\ < s_2 \end{matrix} \frac{N_0}{4\sqrt{E_b}} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) = \frac{N_0}{2d} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) = \gamma$$

Además:

$$\begin{aligned} \text{BER} &= P_e = \Pr(s_1) \Pr(e/s_1) + \Pr(s_2) \Pr(e/s_2) = \\ &= P_1 \Pr(y_1 < \gamma/s_1) + P_0 \Pr(y_1 > \gamma/s_2) = \\ &= P_1 \int_{-\infty}^{\gamma} f_{y_1}(y_1/s_1) dy_1 + P_0 \int_{\gamma}^{+\infty} f_{y_1}(y_1/s_2) dy_1 = \\ &= P_1 \int_{-\infty}^{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - d/2)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 + P_0 \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 + d/2)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 = \\ &= P_1 \int_{-\infty}^{\frac{\gamma - d/2}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda + P_0 \int_{\frac{\gamma + d/2}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda = \\ &= P_1 Q\left(\frac{-\gamma + d/2}{\sigma}\right) + P_0 Q\left(\frac{\gamma + d/2}{\sigma}\right) \end{aligned}$$



Obsérvese que con símbolos equiprobables se obtiene:

$$\gamma = 0 \Rightarrow \text{BER} = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

El apéndice al final de este tema contiene la definición de la función $Q(x)$, área de la Gaussiana

Para comprobar que el umbral óptimo minimiza la BER en un caso particular, a continuación se evalúa la expresión anterior suponiendo dos opciones distintas para el umbral óptimo:

Ejemplo:

Suponemos: $\frac{d}{\sigma} = 10$; $P_1 = P_0 = \frac{1}{2}$; $\gamma_1 = \gamma_{opt} = 0$; $\gamma_2 = 0.2 \frac{d}{\sigma} \neq \gamma_{opt} = 0$

$$\text{BER}(\gamma_1) = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q(5) = 8 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{BER}(\gamma_2) = \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{0.4d}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{0.6d}{\sigma}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(Q(4) + Q(6) \right) = \frac{1}{2} \left(8 \cdot 10^{-4} + 10^{-9} \right) \cong 4 \cdot 10^{-4} \gg \text{BER}(\gamma_1)$$

Caso general: Cálculo de la BER para MPAM

En MPAM se tienen M símbolos. Se considerará la situación de símbolos equiprobables:

Bajo la hipótesis $\mathbf{s}_m = a_m = (2m - M - 1) \frac{d}{2}$ $y_m = \alpha_{m1} + \beta_1 : N\left(\alpha_{m1}, \frac{N_0}{2}\right)$

$$\Pr(\mathbf{s}_m) = \frac{1}{M}$$

Y al aplicar el criterio MAP se han de obtener los umbrales de decisión óptimos $\gamma_m; m = 1..M-1$:

$$\hat{\mathbf{s}}_{mMAP} = \max_{\mathbf{s}_m} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle - \frac{E_m}{2} \right)$$

El umbral γ_m constituye la frontera entre las regiones de decisión correspondientes a \mathbf{s}_m y a \mathbf{s}_{m+1}

$$\begin{aligned} y_1 \alpha_m - \frac{1}{2} \alpha_m^2 &\begin{matrix} >^{s_m} \\ <_{s_{m+1}} \end{matrix} y_1 \alpha_{m+1} - \frac{1}{2} \alpha_{m+1}^2 & \Rightarrow \\ y_1 (\alpha_{m+1} - \alpha_m) &\begin{matrix} >^{s_{m+1}} \\ <_{s_m} \end{matrix} + \frac{1}{2} (\alpha_{m+1}^2 - \alpha_m^2) & \Rightarrow \\ y_1 &\begin{matrix} >^{s_{m+1}} \\ <_{s_m} \end{matrix} + \frac{1}{2} (\alpha_{m+1} + \alpha_m) = \gamma_m = \alpha_{m+1} - \frac{d}{2} = \alpha_m + \frac{d}{2} \end{aligned}$$

Cálculo de la Probabilidad de error:
$$P_e = \sum_{m=1}^M \Pr(\mathbf{s}_m) \Pr(e/\mathbf{s}_m) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Pr(e/\mathbf{s}_m)$$

Para los dos símbolos extremos coincide la probabilidad de error debido a las simetrías de las funciones de densidad de probabilidad gaussianas:

$$\begin{aligned} \Pr(e/\mathbf{s}_1) = \Pr(e/\mathbf{s}_M) &= \int_{-\infty}^{\gamma_{M-1}} f_{y_1}(y_1/s_M) dy_1 = \int_{-\infty}^{\alpha_M - \frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - \alpha_M)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) dy_1 = \int_{+\frac{d}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) dy_1 = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

Símbolos centrales, $m=2..M-1$:

$$\begin{aligned} \Pr(e/\mathbf{s}_m) &= \int_{-\infty}^{\gamma_{m-1}} f_{y_1}(y_1/s_m) dy_1 + \int_{\gamma_m}^{+\infty} f_{y_1}(y_1/s_m) dy_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha_m - \frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - \alpha_m)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 + \int_{\alpha_m + \frac{d}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - \alpha_m)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 = 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de error de símbolo total resulta:

$$P_e = \frac{1}{M} \left(Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + (M-2)2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \right) = \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right).$$

A partir de la expresión anterior y considerando: $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ y $E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{M^2-1}{12b} d^2$

Se obtiene:
$$P_e = \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Con el objeto de obtener la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, se considerará:

- Codificación binaria de tipo Gray, de forma que dos símbolos colindantes solo se diferencian en uno de los b bits.

- Cociente $\frac{E_b}{N_0} \gg 1$, de modo que cuando se produce un error, se asumirá que solo se produce entre dos símbolos colindantes y por lo tanto un símbolo erróneo equivale a un bit erróneo y $b-1$ bits correctos. Por tanto, la BER resulta b veces menor que la P_e .

Se aproxima:
$$\text{BER} = P_b \cong \frac{P_e}{b} = \frac{2M-2}{bM} Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

2.4.3 Cálculo de la BER para PPM

En 2PPM se tienen dos símbolos:

Bajo la hipótesis $\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} : N(\mathbf{s}_1, \sigma^2 \mathbf{I}) = N\left(\begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}\right)$$

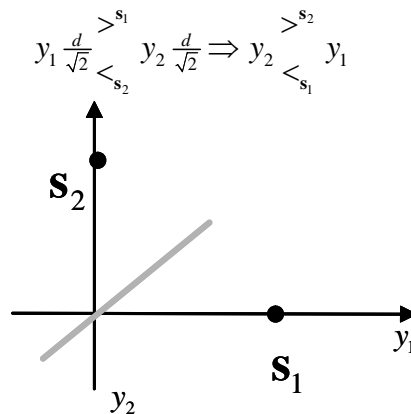
Bajo la hipótesis $\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}_2 + \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} : N(\mathbf{s}_2, \sigma^2 \mathbf{I}) = N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}\right)$$

Considerando símbolos equiprobables la búsqueda del umbral óptimo se puede obtener a partir de una métrica relativamente sencilla, ya que son símbolos de igual energía:

$$\hat{\mathbf{s}}_{m_{MAP}} = \max_{\mathbf{s}_m} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle) = \max_{\mathbf{s}_m} (\mathbf{y}^T \mathbf{s}_m)$$

Por tanto:



El cálculo de la probabilidad de error a partir de la figura conlleva la resolución de una integral doble en la que las dos variables no se pueden operar de forma independiente. Ello es debido a que las fronteras de decisión no son paralelas y/o perpendiculares a los ejes.

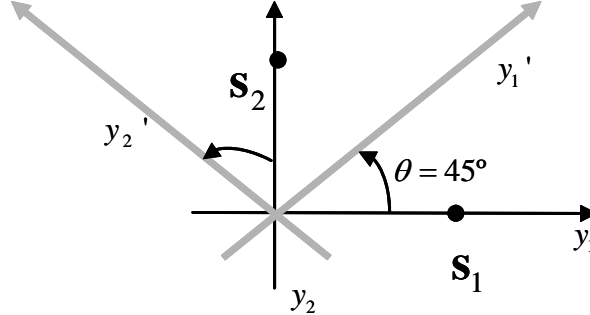
Por ejemplo:

$$\Pr(e / \mathbf{s}_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{y_1}^{+\infty} f_y(\mathbf{y} / \mathbf{s}_1) dy_2 dy_1$$

Para evitar este problema, se realiza a continuación una rotación de ejes, mediante un giro de $\theta = 45^\circ$.

La matriz de rotación es de la forma: $M(\theta) = \begin{pmatrix} +\cos(\theta) & +\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & +\cos(\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$

Obsérvese en la figura el giro que se debe hacer:



Implícitamente se ha realizado un cambio de base, pasando de la base ortonormal $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ a una nueva base $\{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$ que también resulta ortonormal.

La nueva base ortonormal generadora corresponde a un giro de 45° de la base original:

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \cos \theta \varphi_1(t) + \sin \theta \varphi_2(t) \\ \psi_2(t) &= -\sin \theta \varphi_1(t) + \cos \theta \varphi_2(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} &= M(\theta) \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(\theta) & +\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & +\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} &= M^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ +\sin(\theta) & +\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Los vectores de señal cambian las coordenadas respecto al nuevo sistema de referencia (Las coordenadas respecto al nuevo sistema se distinguirán con el supra índice '):

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1' &= M(\theta) \mathbf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{s}_2' &= M(\theta) \mathbf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ +\frac{d}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

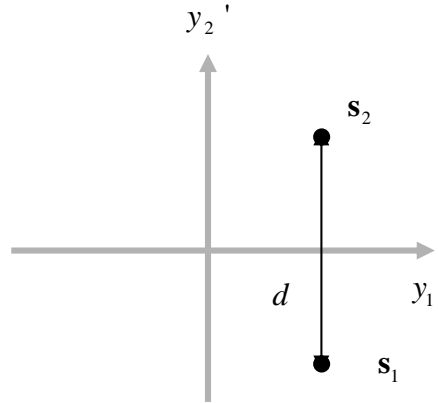
La distribución de las nuevas coordenadas de ruido es de nuevo una f.d.p. gaussiana bidimensional, con vector de medias nulo y matiz de covarianzas diagonal, tal como se demuestra a continuación:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 - \beta_2 \end{pmatrix} \\ E \left[\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ E \left[\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{N_0}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\beta_1' \sim N(0, \sigma^2); \quad \beta_2' \sim N(0, \sigma^2); \quad \sigma^2 = \frac{N_0}{2}$$

La representación de señal respecto a las nuevas coordenadas queda reflejada en la siguiente figura:



La BER se puede calcular de este modo como una integral simple, únicamente a partir de la variable y_2' .

La expresión resultante es:

$$\begin{aligned} P_b &= \Pr(e/s_2') = \Pr(e/s_1') = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_{y'}(\mathbf{y}' | \mathbf{s}_1') dy_2' dy_1' = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_{y_2'}(y_2' | \mathbf{s}_1') f_{y_1'}(y_1' | \mathbf{s}_1') dy_2' dy_1' = \\ &= \int_0^{+\infty} f_{y_2'}(y_2' | \mathbf{s}_1') dy_2' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_{y_1'}(y_1' | \mathbf{s}_1') dy_1' = \int_0^{+\infty} f_{y_2'}(y_2' | \mathbf{s}_1') dy_2' = \\ &= Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

Este resultado también se puede obtener del siguiente modo:

$$\begin{aligned} P_b &= \Pr(e/s_2') = \Pr(e/s_1') = \Pr(\beta_1' > \frac{d}{2}) = \\ &= \int_{\frac{d}{2}}^{+\infty} f_{\beta_1'}(\beta_1') d\beta_1' = \int_{\frac{d}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\beta_1')^2}{\sigma^2}\right) d\beta_1' = \\ &= Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

2.4.4 Señales Biortogonales.

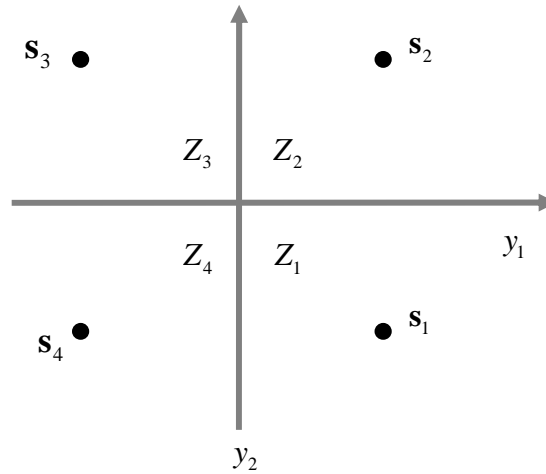
Para el cálculo de la BER con señales biortogonales se retomará el ejemplo del apartado 2.2.5:

Vectores del espacio de señal. Con distancia mínima d ; $E_s = 2E_b = \frac{1}{2}d^2$

$$\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ -\sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$

Asumiendo equiprobabilidad entre símbolos es fácil de comprobar que las cuatro regiones de decisión se corresponden con los cuatro cuadrantes.



Se desarrolla a continuación, el cálculo de la probabilidad de error. Por simetría las 4 probabilidades de error condicionadas coinciden, con lo que (2.44) se traduce en:

$$P_e = \Pr(e/\mathbf{s}_1) = \Pr(e/\mathbf{s}_2) = \Pr(e/\mathbf{s}_3) = \Pr(e/\mathbf{s}_4)$$

Un modo de calcular esta probabilidad es:

$$\begin{aligned} \Pr(e/\mathbf{s}_4) &= 1 - \int_{Z_4} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_4) d\mathbf{y} = \int_{Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_4) d\mathbf{y} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_4) dy_2 dy_1 + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^0 f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_4) dy_2 dy_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{y_1}(y_1|\mathbf{s}_4) dy_1 \int_0^{+\infty} f_{y_2}(y_2|\mathbf{s}_4) dy_2 + \int_0^{+\infty} f_{y_1}(y_1|\mathbf{s}_4) dy_1 \int_{-\infty}^0 f_{y_2}(y_2|\mathbf{s}_4) dy_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 + \frac{d}{2})^2}{\sigma^2}\right) dy_1 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_2 + \frac{d}{2})^2}{\sigma^2}\right) dy_2 + \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_2 + \frac{d}{2})^2}{\sigma^2}\right) dy_2 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 + \frac{d}{2})^2}{\sigma^2}\right) dy_1 = \\ &= Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) = 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

Otra posibilidad de cálculo es (sin detallar las integrales implícitas):

$$\begin{aligned}
\Pr(e|\mathbf{s}_4) &= \Pr(\mathbf{y} \in Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 / \mathbf{s}_4) = \\
&= \Pr(y_1 > 0, y_2 > 0 | \mathbf{s}_4) + \Pr(y_1 < 0, y_2 > 0 | \mathbf{s}_4) + \Pr(y_1 > 0, y_2 < 0 | \mathbf{s}_4) = \\
&= \Pr(y_1 > 0 | \mathbf{s}_4) \cdot \Pr(y_2 > 0 | \mathbf{s}_4) + \Pr(y_1 < 0 | \mathbf{s}_4) \cdot \Pr(y_2 > 0 | \mathbf{s}_4) + \Pr(y_1 > 0 | \mathbf{s}_4) \Pr(y_2 < 0 | \mathbf{s}_4) = \\
&= Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) + Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) = \\
&= 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{d}{2\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Otra posibilidad de cálculo es:

$$\begin{aligned}
\Pr(e / \mathbf{s}_4) &= \Pr(\beta_1 > \frac{d}{2}) + \Pr(\beta_2 > \frac{d}{2}) - \Pr(\beta_1 > \frac{d}{2}) \Pr(\beta_2 > \frac{d}{2}) = \\
&= \int_{\frac{d}{2}}^{+\infty} f_{\beta_1}(\beta_1) d\beta_1 + \int_{\frac{d}{2}}^{+\infty} f_{\beta_2}(\beta_2) d\beta_2 - \int_{\frac{d}{2}}^{+\infty} f_{\beta_1}(\beta_1) d\beta_1 \int_{\frac{d}{2}}^{+\infty} f_{\beta_2}(\beta_2) d\beta_2 = \\
&= \int_{\frac{d}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\beta_1)^2}{\sigma^2}\right) d\beta_1 + \int_{\frac{d}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\beta_2)^2}{\sigma^2}\right) d\beta_2 \\
&\quad - \int_{\frac{d}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\beta_1)^2}{\sigma^2}\right) d\beta_1 \int_{\frac{d}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\beta_2)^2}{\sigma^2}\right) d\beta_2 = \\
&= 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{d}{2\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Suponiendo $\frac{E_b}{N_0} \gg 1$

$$P_b \cong Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

2.4.5 Señales QAM Cuadradas.

Como ejemplo de este tipo de constelaciones, se tiene 16QAM, 64QAM, 256QAM. Los símbolos se distribuyen en forma de cuadrado. En cada lado se tienen \sqrt{M} símbolos y en el interior del cuadrado hay $(\sqrt{M}-2)(\sqrt{M}-2)$ símbolos interiores.

Tanto para la primera coordenada como para la segunda, los posibles valores de la constelación son:

$$\begin{aligned}
\alpha_{m1} &= \pm \frac{d}{2}, \pm \frac{3d}{2}, \dots, \pm \frac{(\sqrt{M}-1)d}{2}; \\
\alpha_{m2} &= \pm \frac{d}{2}, \pm \frac{3d}{2}, \dots, \pm \frac{(\sqrt{M}-1)d}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que la energía media de símbolo es:

$$E_s = bE_b = E[\alpha_{m1}^2] + E[\alpha_{m2}^2] = \frac{M-1}{6} d^2$$

En el cálculo de la probabilidad de error se tienen tres tipos de símbolos:

- Para los cuatro símbolos de los vértices la probabilidad de error condicionada es aproximadamente: $2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$
- Para los $(\sqrt{M}-2)(\sqrt{M}-2)$ símbolos interiores la probabilidad de error condicionada es aproximadamente: $4Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$
- Para los $4(\sqrt{M}-2)$ símbolos laterales la probabilidad de error condicionada es aproximadamente: $3Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$

Promediando las probabilidades de error condicionadas para el caso de símbolos equiprobables se tiene:

$$P_e = \frac{1}{M} \left(4.2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + 4(\sqrt{M}-2)3Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + (\sqrt{M}-2)^2 4Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \right) = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

Por lo que la BER queda como:

$$P_b = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{b\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3b}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

2.5 Cotas para la BER

En este apartado se desarrolla una cota superior para la probabilidad de error. Se aplicará cuando ésta no se puede integrar de forma exacta sin recurrir a integrales de gran complejidad.

Sea un espacio de señal, en el que los M símbolos son equiprobables:

$$P_e = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Pr(e | \mathbf{s}_m) \quad (2.48)$$

La probabilidad condicionada al símbolo \mathbf{s}_m , se halla acotada superiormente:

$$\Pr(e | \mathbf{s}_m) = \sum_{i=1, i \neq m}^M \Pr(\mathbf{s}_i | \mathbf{s}_m) \leq \sum_{i=1, i \neq m}^M Q\left(\frac{d_{mi}}{2\sigma}\right) \quad (2.49)$$

donde d_{mi} es la distancia entre símbolos:

$$d_{mi}^2 = \|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_i\|^2 \quad (2.50)$$

La ecuación (2.49), de nuevo se vuelve a acotar, utilizando la mínima distancia $d_{m-MIN} = \min\{d_{m1}, \dots, d_{mM}\}$ de todas las referenciadas en (2.49):

$$\Pr(e | \mathbf{s}_m) \leq \sum_{i=1, i \neq m}^M Q\left(\frac{d_{mi}}{2\sigma}\right) \leq (M-1)Q\left(\frac{d_{m-MIN}}{2\sigma}\right)$$

Y sustituyendo en (2.48):

$$P_e \leq \frac{(M-1)}{M} \sum_{m=1}^M Q\left(\frac{d_{m-MIN}}{2\sigma}\right) \leq (M-1)Q\left(\frac{d_{MIN}}{2\sigma}\right) \quad (2.51)$$

Donde de nuevo $d_{MIN} = \min\{d_{1-MIN}, \dots, d_{M-MIN}\}$ y es el parámetro que a lo largo de este tema se denomina d .

$P_e \leq (M-1)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \quad (2.52)$
--

Nota:

En función de la constelación, esta cota puede ser inferior. Por ejemplo para PSK, dado que cada símbolo tiene solo “2 símbolos vecinos a la mínima distancia, se suele sustituir el $M-1$ por 2. Para QAM cuadrado, dado que el máximo número de vecinos que presenta cada símbolo es 4, se suele sustituir el $M-1$ por 4.

2.5.1 Ejemplo: Señales M-Ortogonales

Sea un alfabeto de M señales ortogonales de la forma:

Es decir:

$$\langle s_m(t), s_n(t) \rangle = 0; \quad m \neq n$$

En esta situación las funciones de la base coinciden con las señales del alfabeto, salvo normalización:

$$L = M; \quad \varphi_m(t) = \frac{s_m(t)}{\sqrt{E_m}}$$

Los vectores resultantes son:

$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sqrt{bE_b} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; m = 1..M; \Pr\{\mathbf{s}_m\} = \frac{1}{M}$$

La energía media de bit es: $E_b = \frac{d^2}{2b}$

Al aplicar el criterio MAP a esta constelación de símbolos equiprobables y de igual energía, se obtiene según (2.43):

$$\hat{\mathbf{s}}_{m-MAP} = \max_{\mathbf{s}_m} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle) = \max_{\mathbf{s}_m} \left(y_m \frac{d}{\sqrt{2}} \right) = \max_{\mathbf{s}_m} (y_m)$$

Es decir, según el criterio MAP, la decisión del símbolo viene dada por la coordenada máxima del vector recibido.

El cálculo exacto de la probabilidad de error se obtiene como:

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - \Pr\{\mathbf{y} \in Z_m | \mathbf{s}_m\} = 1 - \Pr\{y_1 < y_m, y_2 < y_m, \dots, y_M < y_m\} \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y_m} \dots \int_{-\infty}^{y_m} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) dy_1 dy_2 \dots dy_M dy_m = \\ &= 1 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_m - \frac{d}{\sqrt{2}}}{\sigma} \right)^2} Q\left(\frac{-y_m}{\sigma}\right)^{M-1} dy_m - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_m - \frac{d}{\sqrt{2}}}{\sigma} \right)^2} \left(1 - Q\left(\frac{y_m}{\sigma}\right)\right)^{M-1} dy_m \end{aligned}$$

La expresión anterior, numéricamente es una integral tabulada, sin embargo, en muchas ocasiones se suele calcular directamente la cota superior de esta probabilidad por ser bastante ajustada a la probabilidad exacta dada.

La probabilidad de error se halla acotada según (2.51) por:

$$P_e \leq (M-1)Q\left(\frac{d_{MIN}}{2\sigma}\right) = (M-1)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{b \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

2.6 Comparación de Modulaciones PM

En este apartado se compara la BER de las diferentes modulaciones estudiadas respecto a la $\frac{E_b}{N_0}$ en dB.

En este apartado, se considera equiprobabilidad de símbolos y umbrales óptimos MAP en todas las situaciones.

2.6.1 Señales PAM

Aplicando $BER = P_b \cong \frac{P_e}{b} = \frac{2M-2}{bM} Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$ se obtienen los resultados de la Figura 11

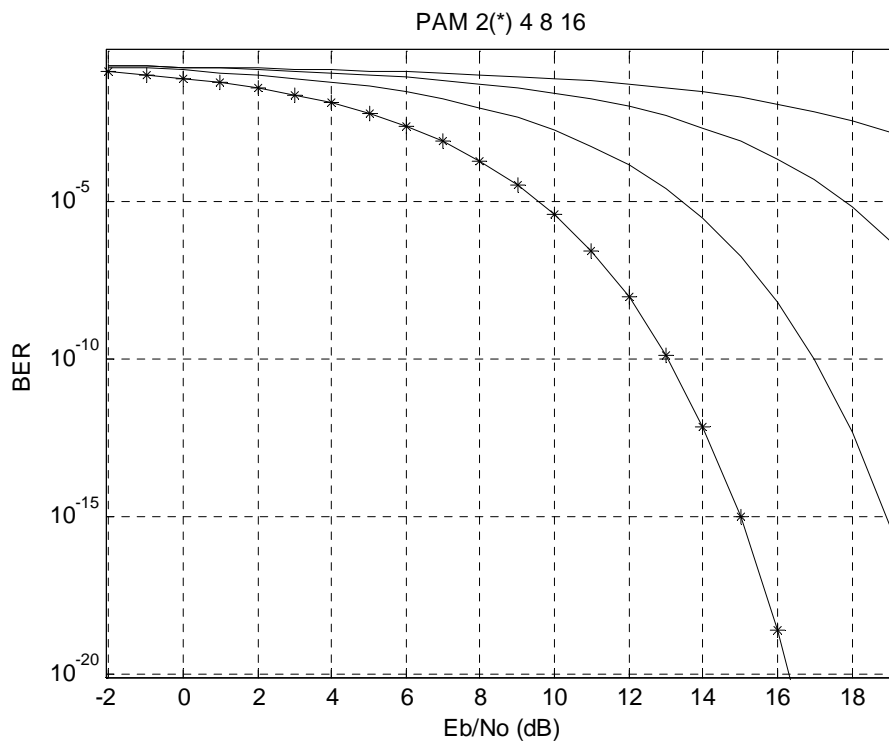


Figura 11 BER en función de la E_b/N_0 para MPAM, $M=2(*)$, 4, 8, 16

Se observa que para valores constantes de $\frac{E_b}{N_0}$ y de velocidad de bit (r_b), con el aumento del número de niveles:

- Aumenta la BER (Inconveniente)
- Disminuye el ancho de banda de transmisión que en general es proporcional a la velocidad de símbolo (Ventaja).

$$B_T \simeq r = \frac{r_b}{b}$$

2.6.2 Comparación 2PPM-2PAM

Para 2PAM: $\text{BER} = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$

Para 2PPM: $\text{BER} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

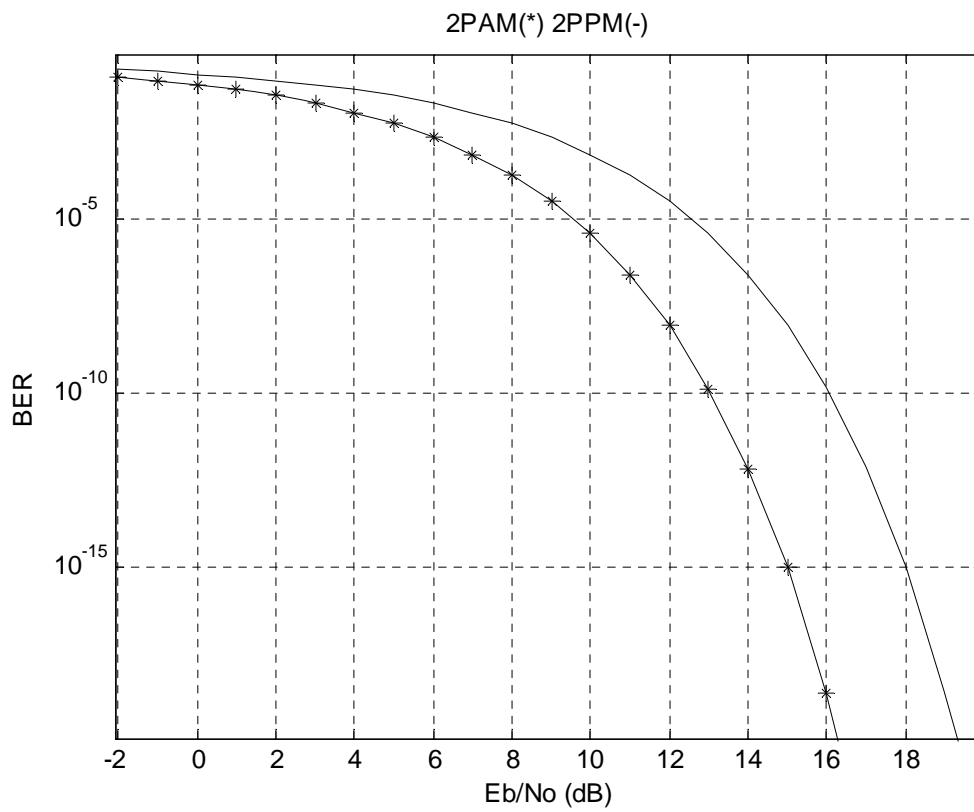


Figura 12 BER en función de la E_b/N_0 2PAM-PPM

2.6.3 Señales M-Ortogonales

Aplicando $BER \cong \frac{(M-1)}{b} Q\left(\sqrt{b \frac{E_b}{N_0}}\right)$ se obtienen los resultados de la Figura 13

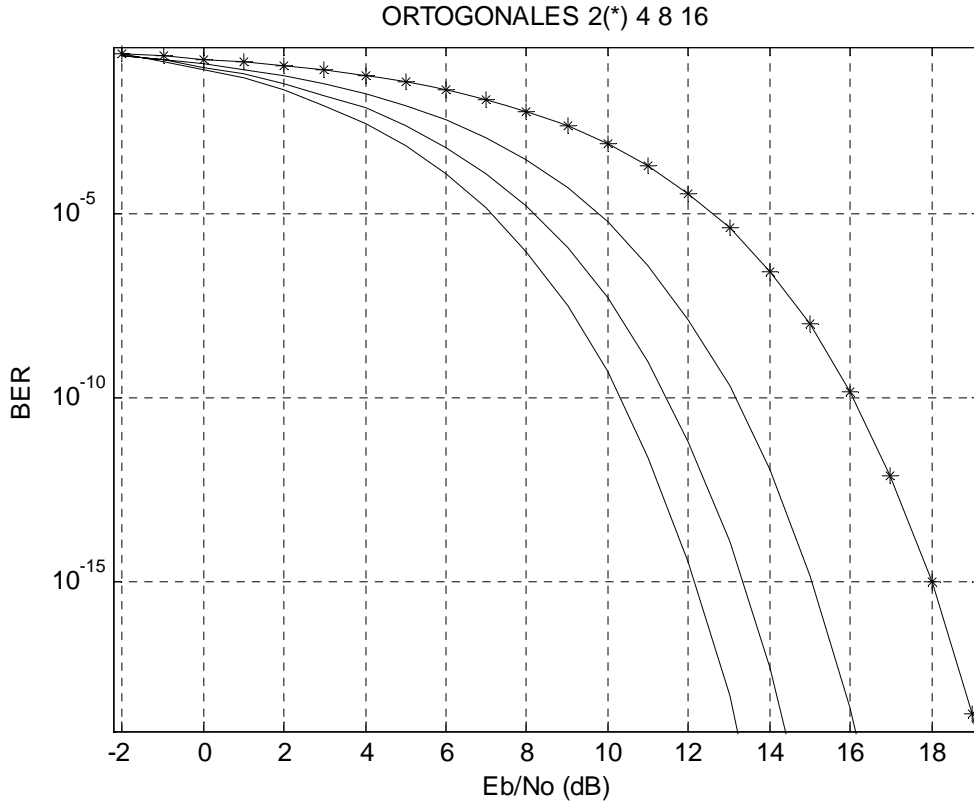


Figura 13 BER en función de la Eb/No M Señales Ortogonales (PPM)

Se observa que para valores constantes de $\frac{E_b}{N_0}$ y de velocidad de bit (r_b), con el aumento del número de niveles:

- Disminuye la BER (Ventaja)
- Aumenta el ancho de banda de transmisión (Inconveniente).

Para valorar el aumento de ancho de banda, se tomará como ejemplo una modulación PPM en la que cada una de las $M=L$ funciones de la base generadora se puede expresar del siguiente modo:

$$\varphi_l(t) = \sqrt{\frac{M}{T}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2M} - (l-1)\frac{T}{M}}{\frac{T}{M}}\right)$$

$$|\Phi_l(f)| = \sqrt{\frac{M}{T}} \left| \frac{\sin(\pi f \frac{T}{M})}{\pi f} \right|$$

Si se aproxima el ancho de banda de la señal PPM M-aria, por el ancho de banda del lóbulo principal del espectro, se obtiene:

$$B_T \approx \Delta B = 2 \frac{M}{T} = 2Mr = 2 \frac{M}{b} r_b$$

de donde se demuestra que el ancho de banda, efectivamente aumenta con el número de niveles $M = 2^b$.

2.7 Apéndice: Área de la Gaussiana.

Sea $0 \leq x < +\infty$

Se define:

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \quad (2.53)$$

Observe que: $Q(0) = \frac{1}{2}$

A partir de (2.53) es fácilmente comprobable que:

- $\int_{-x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = 1 - Q(x)$
- $\int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = Q(x)$
- $\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = 1 - Q(x)$

Relaciones con las funciones erf y erfc.

Sea $0 \leq x < +\infty$

Se define la función de error:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda \quad (2.54)$$

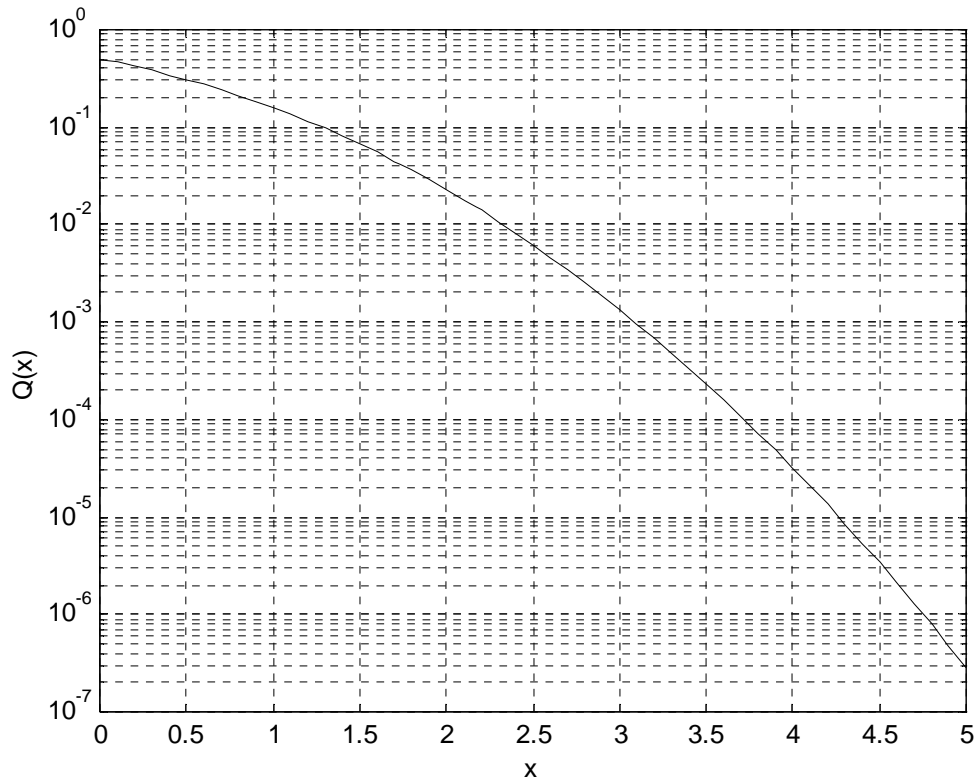
y la función de error complementario:

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = 1 - \text{erf}(x) \quad (2.55)$$

Mediante adecuados cambios de variable se puede comprobar que:

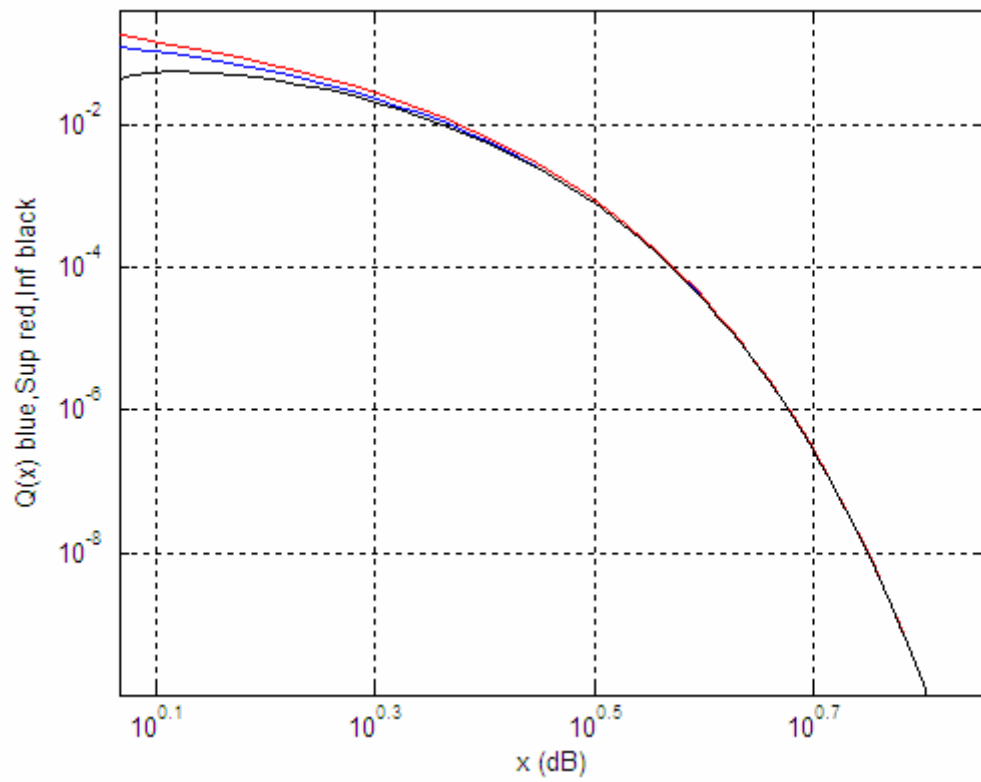
$$\begin{aligned} \text{erfc}(x) &= 2Q(\sqrt{2}x) \\ Q(x) &= \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

La siguiente figura muestra los valores de $Q(x)$ para $0 \leq x \leq 5$



En la siguiente expresión se muestra una cota inferior (facilitada por el profesor Josep Sala) y una cota superior de la función $Q(x)$. Ambas expresiones son válidas para aproximar la función $Q(x)$ para valores de $x > 0.5$ según puede apreciarse en la figura adjunta.

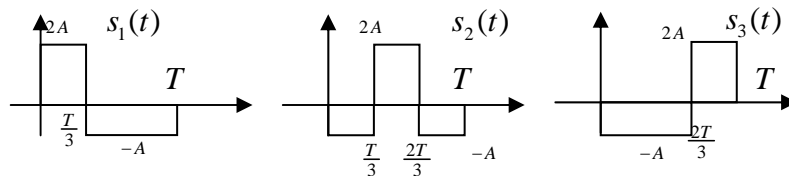
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \leq Q(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$



2.8 Ejercicios Propuestos

2.8.1 Ejercicio 1: Ortogonalización GS

En la figura se representan las señales correspondientes a un alfabeto de $M=3$



Se pide:

- Calcule la distancia entre señales $d = \sqrt{\int (s_i(t) - s_j(t))^2 dt}$ en función de los parámetros A, T .
- Aplice Gram-Schmidt para hallar una base generadora y ortonormal de dimensión $L=2$. Observe que puede simplificar cálculos si utiliza que $s_3(t) = -s_1(t) - s_2(t)$.
- Obtenga las coordenadas de las 3 señales sobre la base hallada y póngalas en función de la distancia d . Observe que puede simplificar cálculos si utiliza que $s_3(t) = -s_1(t) - s_2(t)$.
- Halla la energía media de símbolo E_s en función de d .

Suponiendo que los símbolos se transmiten con equiprobabilidad a través de un canal ideal de ruido aditivo y gaussiano $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$, la f.d.p. del vector de detectado y condicionado por el símbolo

$$\text{transmitido es } f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi N_0})^2} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2\right)$$

- Aplice el criterio MAP para hallar la frontera de decisión entre 2 símbolos cualesquiera y deduzca por simetría el resto de fronteras de decisión para delimitar las 3 regiones Z_i . Dibuje las zonas sobre el espacio de señal recibida.
- ¿Qué dificultar supondría el cálculo de la probabilidad de error exacta?
- Obtenga una cota superior para la probabilidad de error P_e en función de E_s .

2.8.2 Ejercicio 2: MAP y Cálculo de Probabilidad de error.

Se desea transmitir una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes entre sí transmitiendo una energía por bit E_b y a una velocidad de r símbolos/seg constante.

En función de la demanda del usuario, se utilizará un tamaño de alfabeto variable $M = 2^b$, para dar curso a una velocidad de bit r_b variable. La base generadora del espacio de señal, es de dimensión $L = b$ funciones $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_L(t)\}$ ortonormales, construyendo los símbolos según:

$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} \pm \frac{d}{2} \\ \vdots \\ \pm \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$

La señal se transmite por un canal ideal $h_c(t) = \delta(t)$ de ruido $w(t)$ blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$, se proyecta en el espacio de señal y se detecta según un detector MAP.

Se pide:

- Calcular la energía media de bit E_b , en función de la distancia mínima entre símbolos d .
- Dibujar el receptor y el espacio de señal para $L = b = 3$.

- c) Dar una expresión para las fronteras de decisión para el caso general de dimensión L .
- d) Calcular la probabilidad de error P_e exacta en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ para el caso general de dimensión L .
- e) Dar una expresión aproximada para la BER suponiendo elevado el cociente $\frac{E_b}{N_0}$ para el caso general de dimensión L .

Binomio de Newton:

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a^{N-n} b^n \quad \text{con} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

2.8.3 Ejercicio 3: Modulación ortogonal.

Se desea transmitir una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes entre sí transmitiendo una energía por bit E_b . Se dispone de un alfabeto de $M = 4$ señales:

$$s_m(t) = A \sin\left(2\pi \frac{2^{m-1}}{T} t\right) \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right); \quad m = 1, 2, 3, 4$$

La señal se transmite por un canal ideal $h_c(t) = \delta(t)$ de ruido $w(t)$ blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$, se proyecta en el espacio de señal y se detecta según un detector MAP.

Se pide:

- a) Calcule una base ortonormal de funciones generadoras del espacio de señal y dibújelas.
- b) Obtenga la distancia mínima entre símbolos d y la energía de bit E_b en función de los parámetros físicos de la modulación: A, r_b .
- c) Dar una cota superior para la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$

2.9 Referencias Bibliográficas

Carlson A. Bruce, "Communication Systems", McGraw-Hill

Proakis, Salehi, "Communication Systems Engineering", Prentice Hall.