FUNCIÓN	EXPRESIÓN		TRANSFORMADA
PULSO RECTANGULAR	$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$\longleftrightarrow$	$T\cdot sinc(Tf)$
PULSO TRIANGULAR	$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$\longleftrightarrow$	$T\cdot sinc^2(Tf)$
GAUSSIANA	$e^{-\pi(bt)^2}$	$\longleftrightarrow$	$\left(\frac{1}{b}\right)e^{-\pi\left(\frac{f}{b}\right)^2}$
EXPONENCIAL CAUSAL	$e^{-bt}\cdot u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{b+j2\pi f}$
EXPONENCIAL SIMÉTRICA	$e^{-b\|t\|}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2b}{b^2+(2\pi f)^2}$
SINC	$sinc(Tf)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{f}{T}\right)$
SINC CUADRADA	$sinc^2(Tt)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{T}\Lambda\left(\frac{f}{T}\right)$
CONSTANTE	1	$\longleftrightarrow$	$\delta(f)$
FASOR	$e^{j(2\pi f_o t+\phi)}$	$\longleftrightarrow$	$e^{j\phi}\delta(f-f_o)$
SENOIDE	$\cos(2\pi f_o t+\phi)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}\left[e^{j\phi}\delta(f-f_o)+e^{-j\phi}\delta(f+f_o)\right]$
IMPULSO	$\delta(t-t_o)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-j2\pi f t_0}$
TREN DE DELTAS	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_o)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{T_o}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left((f-\frac{n}{T_o})\right)$
SIGNO	$sign(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{j\pi f}$
ESCALÓN UNITARIO	$u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$

OPERACIÓN	FUNCIÓN	TRANSFORMADA
LINEALIDAD	$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$	$a \cdot X_1(f) + b \cdot X_2(f)$
ESCALADO TEMPORAL	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
CONVOLUCIÓN	$x(t) * y(t)$	$X(f) \cdot Y(f)$
DESPLAZAMIENTO TEMPORAL	$x(t - t_o)$	$X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_o}$
DESPLAZAMIENTO FRECUENCIAL	$x(t) \cdot e^{j2\pi f_o t}$	$X(f - f_o)$
DUALIDAD	$X(t)$	$x(-f)$
DERIVACIÓN TEMPORAL	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n \cdot X(f)$
INTEGRACIÓN TEMPORAL	$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\delta(t)$
MULTIPLICACIÓN POR t	$t^n \cdot x(t)$	$(-j2\pi)^{-n} \frac{d^n X(f)}{df^n}$
MODULACIÓN	$x(t) \cdot \cos(2\pi f_o t + \phi)$	$\frac{1}{2}\left[e^{j\phi} \cdot X(f - f_o) + e^{-j\phi} \cdot X(f + f_0)\right]$
PRODUCTO (VENTANAS)	$x(t) \cdot v(t)$	$X(f) * V(f)$
CONJUGADO	$v^*(t)$	$V^*(-f)$

TEMA 1. SEÑALES Y SISTEMAS

1. SEÑALES.

1.1. ESCALADO,GIRO Y RETARDO.

Las tres operaciones **no son lineales:** al combinarlas será importante saber en qué orden se realizarán. Dada una señal, para saber el orden de las operaciones:

$$x(-(a(t-t_0)))$$

1. Si la t lleva un signo negativo, sacarlo factor común.
2. Si la t lleva un escalado, sacarlo factor común.
3. Lo que queda, es el desplazamiento.

Recordar que las operaciones sólo afectan a la variable independiente.

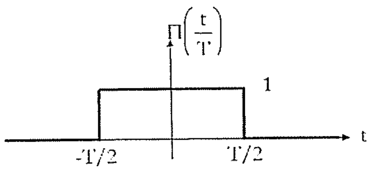
EJERCICIO 1.

Si tenemos $x(1-3t)$ calcula lo que obtendríamos si:

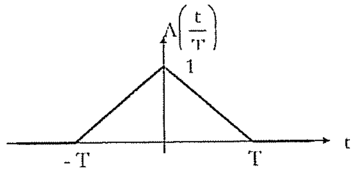
- Retardamos 2 segundos:
- Escalamos con a=2:
- Giramos:

1.2. SEÑALES BÁSICAS.

PULSO RECTANGULAR

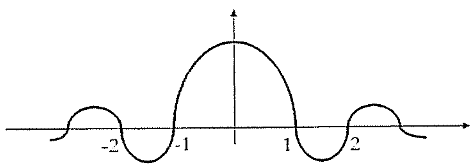


PULSO TRIANGULAR



FUNCIÓN SINC(T).

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



La forma de la función sinc(t) siempre es la misma. Lo importante a la hora de trabajar con ella es saber dónde se anula, es decir, la posición de sus ceros. Para buscar los ceros, hay que igualar todo lo que tenemos dentro del paréntesis a un entero, k, y buscar los valores de t para k=0 (máximo) y para k = 1, -1, 2, -2 (ceros).

1.3. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DELTA.

P1. PRODUCTO DE UNA FUNCIÓN POR LA FUNCIÓN DELTA:

$$\boxed{x(t)\cdot\delta(t-t_0)=x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)}$$

P2. ESCALADO TEMPORAL:

$$\boxed{\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)}$$

P3. LA FUNCIÓN DELTA ES PAR:

$$\boxed{\delta(t)=\delta(-t)}$$

P4. RELACIÓN CON EL ESCALÓN UNITARIO:

$$\boxed{u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau} \qquad \boxed{\frac{\partial u(t)}{\partial t}=\delta(t)}$$

Hay que saberse de memoria todas sus propiedades y tener bien claro que valen tanto en tiempo como en frecuencia.

EJERCICIO 2.

Calcula:

$$x(t)\cdot\delta(2-4t)= \qquad \int_{t-1}^{t+2} e^{-(t-\tau)}\cdot\delta(\tau-1)d\tau=$$

$$F\left\{\prod\left(\frac{t-1}{2}\right)*\cos(\pi t)\right\}= \qquad F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-nT+\frac{T}{2}\right)\right\}=$$

1.4. PROPIEDADES GENERALES DE LAS SEÑALES.

- **SEÑAL PAR:** $\boxed{x(t) = x(-t)}$
- **SEÑAL IMPAR:** $\boxed{x(t) = -x(-t)}$
- **DESCOMPOSICIÓN:** $\boxed{x(t) = x_p(t) + x_s(t)}$
  - ✓ **PARTE PAR :** $x_p(t) = \boxed{x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}}$
  - ✓ **PARTE IMPAR :** $x_s(t) = x_s(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$
- **PERIODICIDAD:** $\boxed{x(t) = x(t + T_0) \qquad T_0 : \text{periodo}}$

2. SISTEMAS.

2.1. PROPIEDADES GENERALES.

- **LINEALIDAD:** $\boxed{T\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = aT\{x_1(t)\} + bT\{x_2(t)\} = ay_1(t) + by_2(t)}$
- **INVARIANZA:** $\boxed{T\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)}$
- **CAUSALIDAD:** $\boxed{y(t) = F\{x(-\infty), \ldots\ldots, x(t)\}}$
- **ESTABILIDAD:** $\boxed{|x(t)| \leq A \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \leq B}$

Las propiedades se tienen que analizar **siempre a partir de la relación entrada salida** del sistema.

LINEALIDAD.

En general, los sistemas que hacen operaciones no lineales (elevar al cuadrado, valor absoluto, raíz cuadrada, etc) son no lineales.

Los que hacen operaciones lineales (integrales, derivadas, productos) sí que pueden ser lineales, pero hay que comprobarlo.

EJERCICIO 3.

Comprueba la linealidad del siguiente sistema: $y(t) = (x(t)+1)\cdot \cos(\omega_0 t)$

INVARIANZA:

Recordar que en los integradores siempre hay que hacer cambio de variable para comprobar la invarianza y cuidado con los sistemas que lleven convoluciones de por medio, que sólo se retrasa uno de los dos miembros de la convolución.

EJERCICIO 4.

Comprueba la invarianza de los siguientes sistemas:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+2} e^{-(t-\tau)}\cdot x(\tau-1)d\tau$$

$$y(t) = [[x(t) * h(t)]\cdot \cos(2\pi f_0 t)] * g(t)$$

$$y(t) = x(2t) * h(t)$$

CAUSALIDAD.

Lo único que importa es la **entrada, x(t)** (valores presentes y/o pasados de la entrada).

EJERCICIO 5.

Comprueba la causalidad de los siguientes sistemas:

$$y(t) = (t+10)\cdot x(t-10)$$

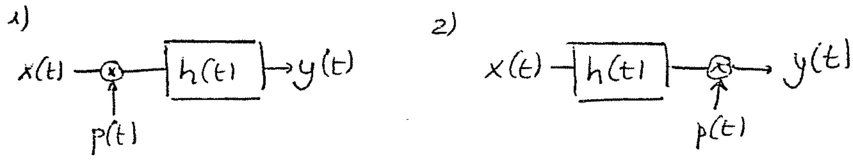
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot \delta(t-nT)$$

$$y(t) = (2t)\cdot x\left(\frac{t}{2}-1\right)$$

Cuando partes del sistema son L.I. (tienen h(t)), la causalidad dependerá siempre de ellas. Si todos los elementos de sistema son causales, el global también lo será. El hecho de que alguno sea no causal, no garantiza que el global no pueda serlo.

EJERCICIO 6.

Comprueba (discute) la causalidad de los siguientes sistemas.



ESTABILIDAD.

Cuando partes del sistema son L.I. (tienen h(t)), la estabilidad también es probable que dependa de ellas.

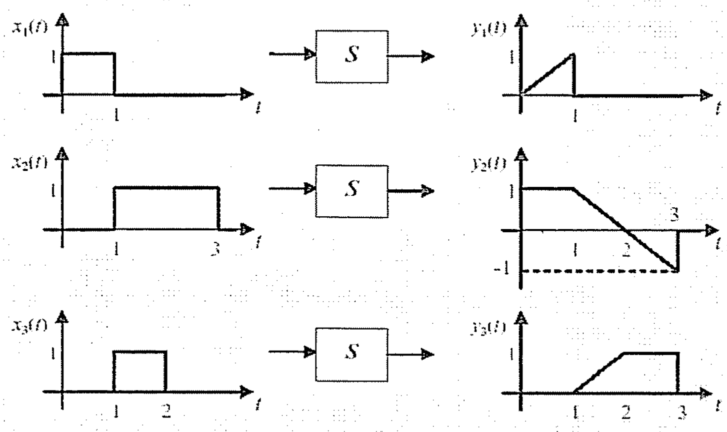
Si todos los elementos de sistema son estables (acotados), el global también lo será. El hecho de que alguno sea no estable, no garantiza que el global no pueda serlo.

EJERCICIO 7.

Comprueba la estabilidad de los sistemas del ejercicio 6.

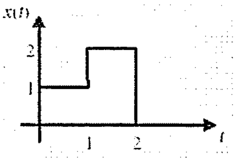
EJERCICIO 8

Dado un sistema lineal, del cual conocemos las siguientes relaciones entrada-salida:



Responde a las siguientes preguntas, justificando la respuesta:

a) ¿Es un sistema causal?
b) ¿Es un sistema invariante?
c) ¿Tiene memoria?
d) Calcula la salida si a su entrada tenemos:



2.2. SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES.

2.1.1. RESPUESTA IMPULSIONAL Y ECUACIÓN DE CONVOLUCIÓN.

$$\boxed{h(t) = T\{\delta(t)\}}$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = x(t) * h(t)}$$

Recordad además **la relación entre respuesta impulsional y respuesta al escalón:**

$$h(t) = \frac{dT\{u(t)\}}{dt}$$

EJERCICIO 9.

Calcula la respuesta impulsional de un SLI si se conoce que $T\{u(t)\} = \prod\left(\frac{t}{T}\right)$.

EJERCICIO 10:

Calcula las siguientes convoluciones (no hace falta que resuelvas las integrales, déjalas indicadas):

a) $x(t) = \left|\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right| \cdot \prod\left(\frac{t}{T}\right)$ $\qquad h(t) = \prod\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$

b) $x(t) = e^{-t} \cdot u(t)$ $\qquad h(t) = e^{t-2} \cdot \prod\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$

2.2.2. PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN.

✓ **CONMUTATIVA :** $\boxed{x(t) * h(t) = h(t) * x(t)}$

✓ **ASOCIATIVA .**

$$\boxed{x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = h_1(t) * (x(t) * h_2(t)) = h_2(t) * (x(t) * h_1(t))}$$

✓ **DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA SUMA .**

$$\boxed{x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_{eq}(t)}$$

La convolución no es distributiva respecto al producto.

$$(x(t) \cdot y(t)) * h(t) \neq (x(t) * y(t)) h(t)$$

El orden de las operaciones se indica con **paréntesis**.

2.2.3. PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS L.I.

➢ **MEMORIA .** $h(t) = a \cdot \delta(t)$

➢ **SISTEMA INVERSO .** $\boxed{h_{eq}(t) = h(t) * h_{inv}(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)}$ $\Rightarrow h(t) \rightarrow$ invertible

➢ **CAUSALIDAD .** $\boxed{h(t) = 0 \quad \forall\ t < 0}$

➢ **ESTABILIDAD.** $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty}$ $\Leftarrow\Rightarrow \lim_{t \to \pm\infty} h(t) = 0$

2.2.4. PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN CON δ(t).

1. **CONVOLUCIÓN DE UNA SEÑAL CON δ(t):**

$$\boxed{x(t) * \delta(t - t_o) = x(t - t_o)}$$

2.2.5. PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN PARA S.L.I.

1. $\boxed{y(t-t_0) = x(t-t_0) * h(t) = x(t) * h(t-t_0)}$
2. $\boxed{x(t-t_0) * h(t-t_0) = y(t-2t_0)}$
3. $\boxed{x(at) * h(at) = \frac{1}{|a|} \cdot y(at)}$

$x(at) * h(bt) \neq y(t)$

no hi ha relació

TEMA 2. TRANSFORMADA DE FOURIER.

2.1. DEFINICIONES BÁSICAS.

- **TRANSFORMADA:** $\boxed{X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt}$
- **ANTITRANSFORMADA:** $\boxed{x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df}$
- **RELACIONES:** $\boxed{x(0)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)df}$ $\boxed{X(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt}$

2.2. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA.

2.2.1. PROPIEDADES GENERALES. (VER TABLA)

EJERCICIO 11.

Calcula las siguientes transformadas:

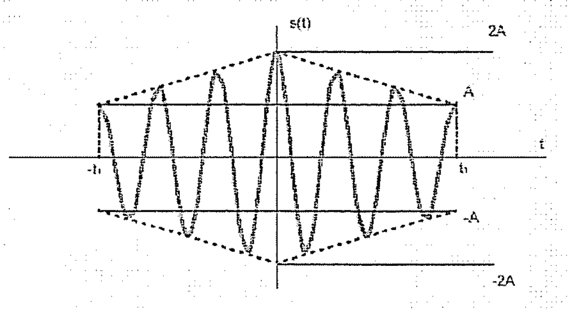
A) $x_1(t)=\dfrac{d}{dt}\left[\sin c\left(\dfrac{t}{2}\right)*\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)\right]$

B) $x_2(t)=\begin{cases}1-t^2 & \text{si } 0\le t\le 1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$

C) $x_3(t)=\dfrac{4}{\pi^2 t^2}\cdot\sin^2(2t)$

D) $x_4(t)=\sin^2(\pi t)+\cos(2\pi t)\cdot\cos(4\pi t)$

E)



2.2.2. PROPIEDADES DE SIMETRÍA.

- **X(T) REAL Y PAR:**

$$x(t)=x^*(t)\overset{T.F.}{\leftrightarrow}X(f)=X^*(-f) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{array}{c} X(-f)=X^*(-f) \\ X(f)=X^*(f) \end{array}}$$
$$x(t)=x(-t)\overset{T.F.}{\leftrightarrow}X(f)=X(-f)$$

<u>Si x(t) es REAL y PAR, X(f) es REAL y PAR.</u>

- **X(T) REAL E IMPAR:**

$$x(t)=x^*(t)\overset{T.F.}{\leftrightarrow}X(f)=X^*(-f) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{array}{c} -X(-f)=X^*(-f) \\ X(f)=-X^*(f) \end{array}}$$
$$x(t)=-x(-t)\overset{T.F.}{\leftrightarrow}X(f)=-X(-f)$$

<u>Si x(t) es REAL e IMPAR, X(f) es IMPAR e IMAGINARIA PURA.</u>

- **X(T) REAL:**

$$\boxed{x(t)=x^*(t)\overset{T.F.}{\leftrightarrow}X(f)=X^*(-f)}$$

Cualquier señal la podemos expresar en función de su módulo y su fase como:

$$X(f)=|X(f)|e^{j\phi_x(f)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{array}{c} |X(f)|=|X(-f)| \\ \phi_X(f)=-\phi_X(-f) \end{array}}$$
$$X^*(-f)=|X(f)|e^{-j\phi_x(-f)}$$

<u>Si x(t) es REAL, el módulo de X(f) es PAR y la fase de X(f) es IMPAR.</u>

- **TEOREMA DE PARSEVAL:** $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot y^*(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\cdot Y^*(f)df}$

EJERCICIO 12.

Para $x(t)=\prod\left(\frac{t}{T}\right)$, sin calcular su transformada, obtener:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} X(f)df=$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df=$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\cdot e^{j\pi f}df=$

EJERCICIO 13.

Dada una señal x(t), relaciona las siguientes expresiones con su transformada de Fourier:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot x(t)dt =$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot x(t)dt =$

IMPORTANTE: FASE LINEAL.

Que un sistema tenga fase lineal quiere decir que:

$$\boxed{H(f) = |H(f)| \cdot e^{j\phi_H(f)} \quad donde \quad \phi_H(f) = -2\pi f t_0 \left(o, en\ general,\ \underbrace{\alpha}_{const.} \cdot f \right)}$$

Además, la salida del sistema siempre es $y(t) = x(t) * h(t) = k \cdot x(t - t_0)$, es decir, una versión retardada de la entrada.

Si una señal tiene fase lineal, entonces se cumple siempre que:

1. La señal tiene un máximo en t_0.
2. La señal tiene simetría par con respecto a t_0.

EJERCICIO 14.

Calcula la salida (en tiempo) de un SLI real con respuesta impulsional h(t) real, cuando la entrada es $x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$. ¿Cuándo podremos afirmar que la salida es una versión retardada de la entrada?

1.3. SEÑALES PERIÓDICAS.

- **TRANSFORMADA DE UNA SEÑAL PERÓDICA:**

$$\boxed{x(t) \quad \text{periódica} \overset{TF}{\leftrightarrow} X(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_b\left(\frac{n}{T}\right)\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)}$$

- **DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER:**

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j2\pi\frac{n}{T}t} \qquad \text{donde} \quad c_n = \frac{X_b\left(\frac{n}{T}\right)}{T}}$$

Coeficientes pares:

$$\boxed{x(t) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)}$$

Coeficientes impares:

$$\boxed{x(t) = 2j \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)}$$

CASO PARTICULAR: SENOS Y COSENOS.

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2} \qquad \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j}}$$

- **SEÑALES PERIÓDICAS A TRAVÉS DE SLI:**

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_b(t-nT) \qquad \text{donde} \quad y_b(t) = x_b(t) * h(t)}$$

$$\boxed{Y(f) = X(f)\cdot H(f) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X_b\left(\frac{n}{T}\right)\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)\right]\cdot H(f)}$$

- ✓ **DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER:**

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_b(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j2\pi\frac{n}{T}t} \qquad \text{donde} \quad c_n = \frac{X_b\left(\frac{n}{T}\right)\cdot H\left(\frac{n}{T}\right)}{T}}$$

EJERCICIO 15.

Para las siguientes señales:

1. Calcula su D.S.F.
2. Calcula y dibuja su transformada de Fourier.

$$x(t) = \sin^2(\pi t) + \cos(2\pi t) \cdot \cos(4\pi t)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot \Lambda\left(\frac{t - 2nT}{T}\right)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot g(t - 4nT) \qquad \text{donde} \quad G(f) = 0 \quad \forall f \geq \frac{1}{T}$$

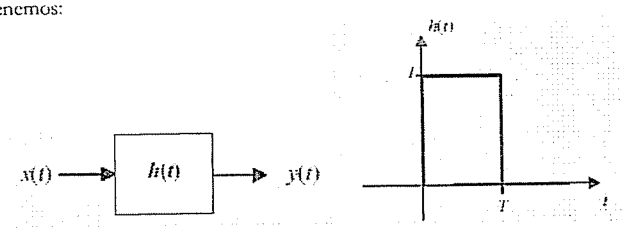
$$x(t) = \text{sign}(\sin(\pi t))$$

EJERCICIO 16.

$$\text{Dada } x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x_0\left(t - n\frac{T}{2}\right), \text{con } x_0(t) = \prod\left(\frac{t}{T/2}\right).$$

A) Calcula su DSF.

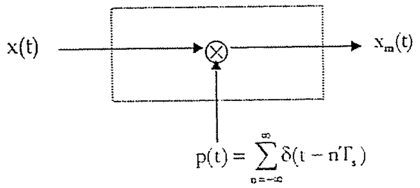
Si ahora tenemos:



B) Calcula y(t).

1.4. MUESTREO.

1.4.1. MUESTREO IDEAL



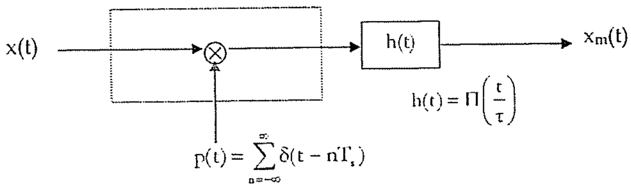
$$x_m(t) = x(t) \cdot p(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s)$$

$$\boxed{X_m(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{1}{T_s}\right)}$$

✓ **CONDICIÓN DE NYQUIST:**

Para que no exista aliasing, x(t) debe ser **limitada en banda** y $\boxed{f_s \geq 2B}$

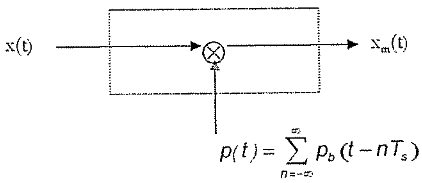
1.4.2. MUESTREO REAL



$$\boxed{x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_s}{\tau}\right)}$$

$$\boxed{X_m(f) = \left[\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)\right] \cdot \tau \cdot \operatorname{sinc}(\tau f)}$$

1.4.3. MUESTREO NATURAL



$$\boxed{x_m(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_b(t - nT_s)}$$

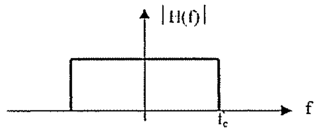
$$\boxed{X_m(f) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_b\left(\frac{n}{T_s}\right) \cdot X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)}$$

TEMA 3. DISEÑO DE FILTROS.

1. INTRODUCCIÓN.

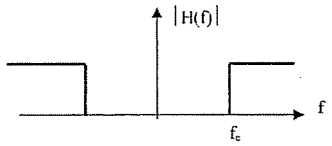
1.1. TIPOS DE FILTROS.

- **Filtro Paso Bajo.**



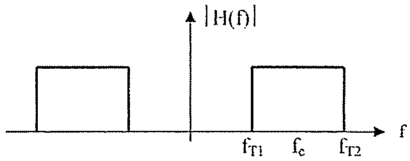
La frecuencia a partir de la cual el filtro deja o no pasar es la que llamamos **frecuencia de corte del filtro (f_c).**

- **Filtro Paso Alto.**



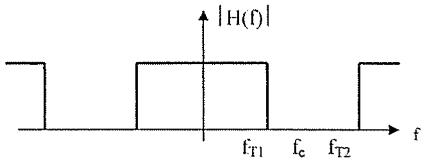
Tiene un comportamiento dual al anterior.

- **Filtro Paso Banda.**



En este caso, definimos f_c como la **frecuencia central** del filtro, y f_{T1} y f_{T2} como las **frecuencias de corte** inferior y superior, respectivamente.

- **Filtro Paso Banda Eliminada.**



Este filtro tiene un comportamiento dual al anterior.

ACLARACIONES:

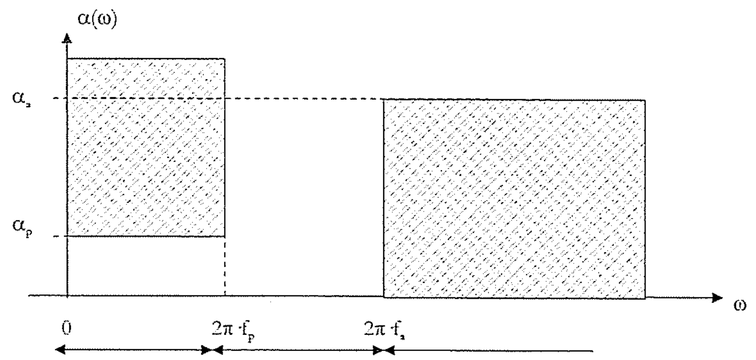
- ✓ En este tema nos centraremos principalmente en el estudio del filtro paso bajo, para después generalizar para el resto de filtros.
- ✓ En el diseño de filtros, nos interesa estudiar el módulo de la respuesta frecuencial, ya que la fase la obtendremos una vez lleguemos a obtener el módulo.
- ✓ Normalmente sólo dibujaremos las frecuencias positivas del filtro, ya que es simétrico respecto al origen.

1.2. ATENUACIÓN.

Definimos la atenuación como:

$$\boxed{\alpha(\omega) = 10\log\frac{H_{ref}^2}{|H(\omega)|^2} \quad \text{donde} \quad H_{ref} = H_{max}}$$

La plantilla de especificación de atenuación del filtro es:



Banda de paso *Banda de transición* *Banda atenuada*

Respecto a la plantilla de atenuación del filtro podemos decir que:

- ✓ Se tolera una atenuación máxima α_p en la banda de paso (**atenuar poco es dejar pasar**).
- ✓ Se tolera una atenuación mínima α_s en la banda atenuada (**atenuar mucho es eliminar**).
- ✓ Se establece una banda de transición (ω_p,ω_s) entre las bandas de paso y de atenuación, a fin de permitir la adaptación de la atenuación a los límites impuestos en ambas bandas.

CONSTANTES DE DISCRIMINACIÓN Y SELECTIVIDAD:

$$k_d = \sqrt{\frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}} \qquad\qquad k_s = \frac{\omega_p}{\omega_s}$$

Cuanto **mayor** sea la **discriminación** (**mayor diferencia entre** α_p y α_s) o **mayor** sea la **selectividad** (**menor diferencia entre** ω_p y ω_s), mayor orden necesita el filtro.

UN FILTRO IDEAL TIENE UNA KS = 1.

13. LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA.

$$\alpha(\omega) = 10\log\left(1 + F(\omega^2)\right)$$

$$F(\omega^2) = 10^{\frac{\alpha(\omega)}{10}} - 1$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{H_{máx}^2}{\left(1 + F(\omega^2)\right)}$$

$$F(\omega^2) = \frac{H_{máx}^2}{|H(\omega)|^2} - 1$$

✓ **EXPRESIÓN DE LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA.**

$$F(\omega^2) = k^2 \frac{\omega^{2n_o} \prod_{i=1}^{L} \left(\omega^2 - \omega_{oi}^2\right)^2}{\omega^{2p_o} \prod_{i=1}^{P} \left(\omega^2 - \omega_{\infty i}^2\right)^2}$$

donde:

- ω_{oi} son los **ceros de atenuación finitos** (los que no están ni en cero ni en infinito).
- $\omega_{\infty i}$ son los **ceros de transmisión finitos** (los que no están ni en cero ni en infinito).
- n_o es el número de **ceros de atenuación en el origen.**
- p_o es el número de **ceros de transmisión en el origen.**

$p_\infty = q - p$, siendo:

$q = n_o + 2L \rightarrow$ número de ceros de atenuación origen + finitos.

$p = p_o + 2P \rightarrow$ números de ceros de transmisión origen + finitos.

✓ Si $p_\infty > 0$: En el infinito existen p_∞ ceros de transmisión (la función tiende a infinito, con $6 \cdot p_\infty$ dB/octava o con $20 \cdot p_\infty$ dB/década).

✓ Si $p_\infty < 0$: En el infinito existen $(-p_\infty)$ ceros de atenuación (la función tiende a cero, con $6 \cdot p_\infty$ dB/octava o con $20 \cdot p_\infty$ dB/década).

✓ Si $p_\infty = 0$: En el infinito no existen ni ceros de atenuación ni ceros de transmisión (la función tiende a constante).

De todas formas, el orden del filtro (n) cumple que:

n = Ceros Atenuación TOTALES=Ceros Transmisión TOTALES= máx (p,q)

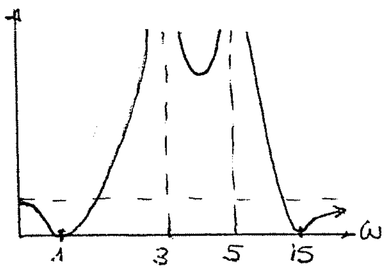
RECORDAR QUE ORIGEN E INFINITO SE CUENTAN UNA SÓLA VEZ.

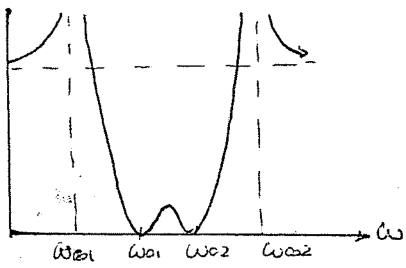
	$\alpha(\omega)$	$F(\omega^2)$	$\lvert H(\omega)\rvert^2 = \dfrac{H^2_{máx}}{(1+F(\omega^2))}$
Ceros Atenuación	0	0	$H^2_{máx}$
Ceros Transmisión	∞	∞	0
Pulsación a 3 dB	3	1	$\dfrac{H^2_{máx}}{2}$

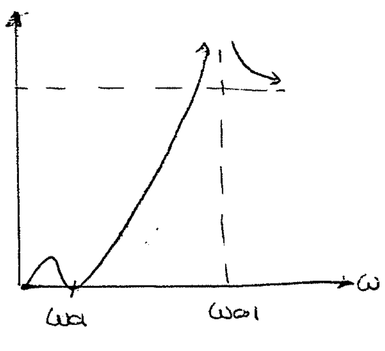
EJERCICIO 17.

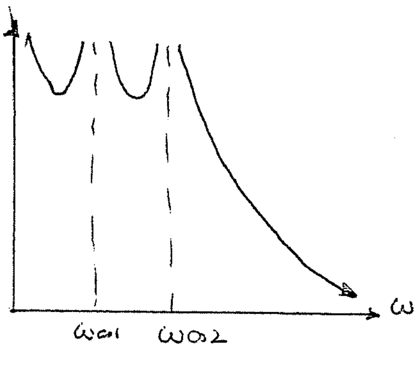
Para los siguientes filtros:

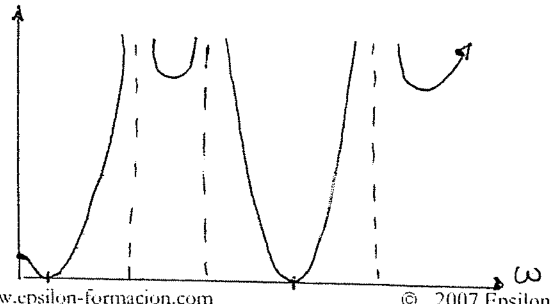
1. Expresión para la función característica de orden mínimo.
2. Identifica el tipo de filtro (paso bajo, alto, etc).
3. Orden.
4. Dibuja el módulo de su respuesta frecuencial.
5. Comportamiento para la at4enuación en origen e infinito.











2. TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN.

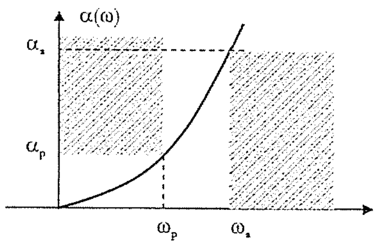
2.1. APROXIMACIÓN DE BUTTERWORTH.

2.1.1. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA Y ATENUACIÓN.

La función característica de un filtro de Butterwoth tiene la forma:

$$\boxed{F(\omega^2) = k^2\omega^{2n}}$$

donde **n es el orden del filtro.** La función de atenuación para un filtro paso bajo diseñado mediante la aproximación de Butterwoth es:



$$\alpha(\omega) \le \alpha_p \quad \text{para} \quad |\omega| \le \omega_p$$
$$\alpha(\omega) \ge \alpha_s \quad \text{para} \quad |\omega| \ge \omega_s$$

Posición y número de ceros de atenuación: están todos en el origen, y hay n.
Posición y número de ceros de atenuación: están todos en infinito, y hay n.
Comportamiento asintótico en infinito: crece con 6n dB/octava o con 20n dB/década.

2.1.2. ORDEN DEL FILTRO.

Se define el orden de un filtro de Butterworth como: $\boxed{n \ge \dfrac{\log\ k_d}{\log\ k_s}}$

REVISAR DE TEORÍA LA DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DEL ORDEN.

2.1.3. AJUSTE.

✓ **A LA BANDA DE PASO.**

Si ajustamos a la banda de paso, caso más habitual, obligamos a la función de atenuación a pasar por el punto (α_p,ω_p). En este caso, la constante toma el valor:

$$\alpha_p = \alpha(\omega_p) = 10\log(1 + F(\omega_p^2)) = 10\log(1 + k^2 \cdot \omega_p^{2n})$$

$$\boxed{k^2 = \frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}{\omega_p^{2n}}}$$

Si el orden se consigue con la igualdad (de la fórmula), la curva de atenuación toca la plantilla tanto en (α_p,ω_p) como en (α_a,ω_a).

Si el orden se coge con la desigualdad, la curva de atenuación toca la plantilla en (α_p,ω_p), pero pasa por encima de α_a ($\alpha(\omega_a) > \alpha_a$).

✓ **A LA BANDA ATENUADA.**

Si ajustamos a la banda atenuada, obligamos a la función de atenuación a pasar por el punto (α_a,ω_a). En este caso, la constante toma el valor:

$$\alpha_a = \alpha(\omega_a) = 10\log(1 + F(\omega_a^2)) = 10\log(1 + k^2 \cdot \omega_a^{2n})$$

$$\boxed{k^2 = \frac{10^{\frac{\alpha_a}{10}} - 1}{\omega_a^{2n}}}$$

Si el orden se consigue con la igualdad (de la fórmula), la curva de atenuación toca la plantilla tanto en (α_p,ω_p) como en (α_a,ω_a).

Si el orden se coge con la desigualdad, la curva de atenuación toca la plantilla en (α_a,ω_a), pero pasa por debajo de α_p ($\alpha(\omega_p) < \alpha_p$).

SI NOS NOS DICEN NADA, BUTTERWORTH SE AJUSTA A BANDA DE PASO.

2.1.4. FILTRO NORMALIZADO A LA FRECUENCIA DE CORTE A 3 DB.

Si definimos ω_c (frecuencia de corte a 3 dB) como:

$$\alpha(\omega_{3dB}) = 10\log(1 + F(\omega_{3dB}^2)) = 3 = 10\log(2)$$

o lo que es lo mismo, el valor de ω que hace que la función característica valga 1 :

$$\boxed{F(\omega_{3dB}^2) = 1}$$

En el caso del Butterworth, se obtiene:

Ajuste a Banda de Paso: $\boxed{\omega_c = \omega_p \left(10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1\right)^{-1/2n}}$

Ajuste a Banda Atenuada: $\boxed{\omega_c = \omega_a \left(10^{\frac{\alpha_a}{10}} - 1\right)^{-1/2n}}$

En cualquier caso, la función característica de Butterworth admite la expresión:

$$\boxed{F(\omega^2) = \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

2.1.5. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA, H(S).

Sólo nos queda ahora hallar la expresión de la respuesta frecuencial del filtro. Si recordamos:

$$|H(s)|^2 = H(s)\cdot H^*(-s) = \left.\frac{H_{máx}^2}{1 + F(\omega^2)}\right|_{\omega = -js}$$

Por tanto, las frecuencias propias del filtro (los polos de la función de transferencia H(s)) serán las raíces del semiplano izquierdo de la ecuación:

$$1 + F(-s^2) = 0, \quad \text{con} \quad s = j\omega$$

Para garantizar la estabilidad del filtro, sólo nos quedaremos con aquellas **raíces** que se hallen en el **semiplano izquierdo**. En el caso de Butterworth normalizado a 3 dB:

$$\boxed{s_i = \omega_c \cdot e^{j\theta_i}, \ \text{donde} \ \theta_i = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\cdot(i-1) \quad \text{con } i = 1,\ldots,n}$$

EJERCICIO 18.

La señal presente a la entrada de un receptor toma la forma:

$$x_R(t) = x_1(t) + x_2(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

siendo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ señales paso bajo con un ancho de banda B=15 kHz.

A) Calcula y dibuja $X_R(f)$, indicando el mínimo valor de f_0 para que se puedan recuperar por separado $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

Suponga a partir de este punto que f_0 = 100 kHz y queremos diseñar un filtro para recuperar $x_1(t)$. Se pide:

B) Dibuja la plantilla de especificaciones para la atenuación, si admitimos una atenuación máxima de 3 dB en la banda de paso y mínima de 20 dB en la banda atenuada.

C) Si se diseña el filtro mediante un Butterworth de orden 3, calcula la expresión de la función característica del mismo si ajustamos a la banda de paso.

D) Repite el apartado anterior con ajuste a la banda atenuada.

E) Si ajustamos a banda de paso, dibuja la función de atenuación, indicando el número y la multiplicidad de los ceros de atenuación y transmisión. Marca claramente los puntos de contacto de la atenuación con la plantilla, así como en comporatmiento asintótico en el infinito.

F) Repite el apartado anterior ajustando a banda atenuada.

G) Ajustando a banda de paso, se normaliza el filtro a su pulsación de corte a 3 dB. Dibuja la plantilla del filtro normalizado y calcula la expresión de la función característica, $F(\Omega^2)$.

H) Calcula el valor de la atenuación mínima que introduce el filtro sobre $x_2(t)$.

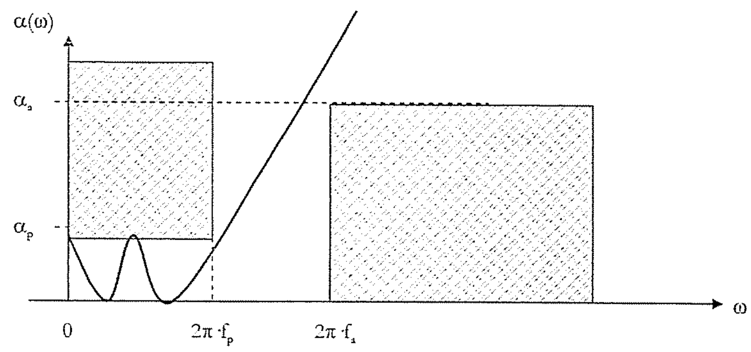
2.2. FILTROS DE CHEBYCHEV.

2.2.1. ATENUACIÓN Y FUNCIÓN CARACTERÍSTICA.

La expresión de la función característica de un filtro de Chebychev es:

$$\boxed{F(\omega^2) = \varepsilon^2 c_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}$$

La función de atenuación de un filtro de Chebychev tiene la forma:



Posición y número de ceros de atenuación: están todos entre $(-\omega_p, \omega p)$, y hay n.
Posición y número de ceros de atenuación: están todos en infinito, y hay n.
Comportamiento asintótico en infinito: crece con 6n dB/octava o con 20n dB/década.

✓ **POLINOMIOS DE CHEBYCHEV:**

$$\boxed{c_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cdot ar\cos(x)) & |x| < 1 \\ \cosh(n \cdot ar\cosh(x)) & |x| \geq 1 \end{cases}}$$

Los polinomios de Chebychev cumplen la siguiente **ecuación de recurrencia:**

$$\boxed{c_n(x) = 2x \cdot c_{n-1}(x) - c_{n-2}(x)} \qquad \text{donde} \qquad \begin{matrix} c_0(x) = 1 \\ c_1(x) = x \end{matrix}$$

- Los polinomios de grado par son funciones pares ($\alpha(0) > 0$)
- Los de grado impar son funciones impares ($\alpha(0) = 0$).
- **$c_n(1)=1$, para cualquier n.**

2.2.2. ORDEN DEL FILTRO.

Se define el orden de un filtro de Chebychev como:

$$\boxed{n \geq \frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{k_d}\right)}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{k_s}\right)}}$$

REVISAR DE TEORÍA LA DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DEL ORDEN.

Gráficamente, se puede encontrar el orden del filtro a partir de la función característica como el número de cortes de $F(\omega^2)$ por una línea que la corta en la banda de paso.

Si el orden del polinomio es par, la atenuación en el origen es mayor que 0. Si el orden es impar, la atenuación en el origen vale 0.

2.2.3. AJUSTE.

✓ A LA BANDA DE PASO.

Si ajustamos a la banda de paso, caso más habitual, obligamos a la función de atenuación a pasar por el punto (α_p,ω_p). En este caso, la constante toma el valor:

$$\alpha_p = \alpha(\omega_p) = 10\log\left(1 + F(\omega_p^2)\right) = 10\log\left(1 + \varepsilon^2 \underbrace{c_n^2\left(\frac{\omega_p}{\omega_p}\right)}_{c_n(1)=1}\right)$$

$$\boxed{\varepsilon^2 = 10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}$$

Si el orden se consigue con la igualdad (de la fórmula), la curva de atenuación toca la plantilla tanto en (α_p,ω_p) como en (α_s,ω_s).

Si el orden se coge con la desigualdad, la curva de atenuación toca la plantilla en (α_p,ω_p), pero pasa por encima de α_s ($\alpha(\omega_s) > \alpha_s$).

✓ **A LA BANDA ATENUADA.**

Si ajustamos a la banda atenuada, obligamos a la función de atenuación a pasar por el punto (α_s,ω_s). En este caso, la constante toma el valor:

$$\alpha_s = \alpha(\omega_s) = 10\log\left(1+F(\omega_s^2)\right) = 10\log\left(1+\varepsilon^2 \underbrace{c_n^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}_{\text{es un n}^\circ}\right)$$

$$\boxed{\varepsilon^2 = \frac{10^{\frac{\alpha_s}{10}}-1}{c_n^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}}$$

Si el orden se consigue con la igualdad (de la fórmula), la curva de atenuación toca la plantilla tanto en (α_p,ω_p) como en (α_s,ω_s).

Si el orden se coge con la desigualdad, la curva de atenuación toca la plantilla en (α_s,ω_s), pero pasa por debajo de α_p $(\alpha(\omega_p) < \alpha_p)$.

SI NOS NOS DICEN NADA, CHEBYCHEV SE AJUSTA A BANDA DE PASO.

2.2.3. POSICIÓN DE LOS CEROS DE ATENUACIÓN.

Los ceros de la función característica se hallan en los ceros del polinomio:

$$n \cdot \arccos(x) = \frac{\pi}{2}(2i-1) \quad i = 1,\dots,n$$

$$x = \cos\frac{\pi}{2n}(2i-1) \quad i = 1,\dots,n$$

De este modo, se deduce que los ceros de atenuación ω_{oi} de la aproximación de Chebychev son:

$$\boxed{\omega_{oi} = \omega_p \cos\frac{\pi}{2n}(2i-1) \quad i = 1,\dots,n}$$

2.2.4. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA, H(S).

Tal y como habíamos dicho en el apartado anterior, las frecuencias propias de la función de transferencia del filtro son las raíces del semiplano izquierdo de la ecuación:

$$F(-s^2) = -1$$

En este caso, las raíces se pueden expresar como:

$$\boxed{s^i_{CH} = \omega_p \cdot \left[\frac{1}{2}\cdot\left(r-\frac{1}{r}\right)\cdot\cos\theta_i + j\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(r-\frac{1}{r}\right)\cdot\sin\theta_i\right]}$$

donde:

$$\boxed{r = \left(\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}\right)^{1/n}}$$

$$\boxed{\theta_i = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}\cdot(i-1) \quad \text{con } i = 1,\dots,n}$$

EJERCICIO 19.

Se desea diseñar un filtro con las siguientes especificaciones para la atenuación:

$\alpha_p = 1$ dB $\qquad \alpha_a = 10$ dB

$\omega_p = 2 \qquad \omega_s = 6$

Si escogemos la aproximación de Chebychev, se pide:

- **A)** Si el orden mínimo del filtro para cumplir las especificaciones es 3, dibuja la atenuación del filtro, indicando lospuntos de contacto con la plantilla.
- **B)** Dar la expresión de la función característica $F(\omega^2)$, ajustando a la banda de paso.
- **C)** Posición y número de ceros de atenuación y ceros de transmisión.
- **D)** Determinar la pulsación de corte a 3 dB, ω_{3dB}. (no es necesario calcularla, basta con dejar indicada la ecuación)
- **E)** Dibujar $|H(\omega)|^2$, indicando todos los valores de interés.

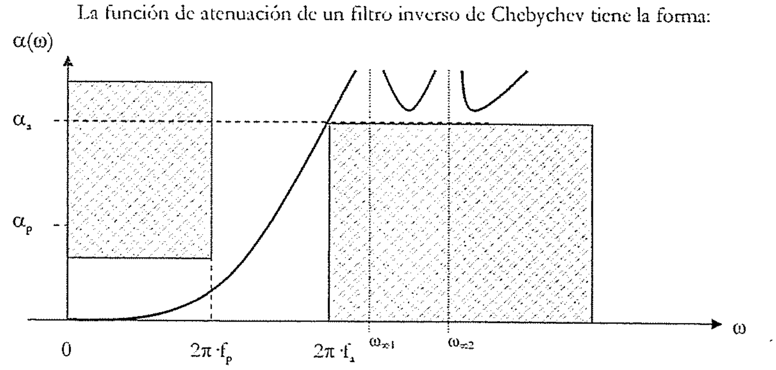
2.3. FILTRO INVERSO DE CHEBYCHEV.

2.3.1. ATENUACIÓN, FUNCIÓN CARACTERÍSTICA Y ORDEN DEL FILTRO.

La función característica de la aproximación inversa de Chebychev es:

$$\boxed{F(\omega^2) = \frac{1}{\varepsilon^2 c_n^2\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)}}$$

La función de atenuación de un filtro inverso de Chebychev tiene la forma:



Posición y número de ceros de atenuación: están todos en el origen , y hay n.
Posición y número de ceros de atenuación: están todos en la banda atenuada, y hay n.
Comportamiento asintótico en infinito:

- Si el orden es PAR, tiende a CONSTANTE con -6 dB/octava o con -20 dB/década.
- Si el orden es IMPAR, tienede a INFINITO con 6 dB/octava o con 20 dB/década.

EL ORDEN DEL INVERSO ES EL MISMO QUE EL DE CHEBYCHEV.

Gráficamente, se puede encontrar el orden del filtro a partir de la función característica como el número de cortes de $F(\omega^2)$ por una línea que la corta en la banda atenuada.

Si el orden del polinomio es par, la atenuación en el infinito tiende a una constante. Si el orden es impar, la atenuación en el infinito se va a infinito.

2.2.3. AJUSTE.

✓ **A LA BANDA ATENUADA.**

Si ajustamos a la banda atenuada, caso más habitual, obligamos a la función de atenuación a pasar por el punto (α_a,ω_a). En este caso, la constante toma el valor:

$$\alpha_a=\alpha(\omega_a)=10\log\left(1+F(\omega_a^2)\right)=10\log\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2\underbrace{c_n^2\left(\frac{\omega_a}{\omega_a}\right)}_{c_n(1)=1}}\right)\Rightarrow\boxed{\frac{1}{\varepsilon^2}=10^{\frac{\alpha_a}{10}}-1}$$

Si el orden se consigue con la igualdad (de la fórmula), la curva de atenuación toca la plantilla tanto en (α_p,ω_p) como en (α_a,ω_a).

Si el orden se coge con la desigualdad, la curva de atenuación toca la plantilla en (α_a,ω_a), pero pasa por debajo de α_p $(\alpha(\omega_p)<\alpha_p)$.

✓ **A LA BANDA DE PASO.**

Si ajustamos a la banda de paso, obligamos a la función de atenuación a pasar por el punto (α_p,ω_p). En este caso, la constante toma el valor:

$$\alpha_p=\alpha(\omega_p)=10\log\left(1+F(\omega_p^2)\right)=10\log\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2\underbrace{c_n^2\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)}_{\text{es un n}^\circ}}\right)\Rightarrow\boxed{\frac{1}{\varepsilon^2}=\left(10^{\frac{\alpha_p}{10}}-1\right)\cdot c_n^2\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)}$$

Si el orden se consigue con la igualdad (de la fórmula), la curva de atenuación toca la plantilla tanto en (α_p,ω_p) como en (α_a,ω_a).

Si el orden se coge con la desigualdad, la curva de atenuación toca la plantilla en (α_p,ω_p), pero pasa por encima de α_a $(\alpha(\omega_a)>\alpha_a)$.

SI NOS NOS DICEN NADA, INVERSO DE CHEBYCHEV SE AJUSTA A BANDA ATENUADA

2.3.3. POSICIÓN DE LOS CEROS DE TRANSMISIÓN.

Como se pude deducir de la expresión de la función característica del filtro, los ceros de transmisión $\omega_{\infty i}$ son aquellas pulsaciones para las que:

$$c_n\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)=0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\omega_{\infty i}=\frac{\omega_s}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}(2i-1)\right)} \qquad i=1,\ldots,n.}$$

Además, se cumple que:

$$\boxed{\omega_{\infty i}=\frac{\omega_s\cdot\omega_p}{\omega_{0i}}}$$

2.2.4. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA, H(S).

Por último, nos quedaría hallar la función de transferencia del filtro. Para esto, al igual que ya hemos hecho para las anteriores aproximaciones anteriores, será necesario solucionar la ecuación:

$$F(-s^2)=-1$$

En este caso se cumple que $\boxed{s^i_{ICH}=\frac{\omega_s\cdot\omega_p}{s^i_{CH}}}$

EJERCICIO 20.

Se desea diseñar un filtro con las siguientes especificaciones para la atenuación:

$\alpha_p=3$ dB $\qquad \alpha_s=10$ dB

$\omega_p=2 \qquad$ Primer cero de transmision en $\omega_\infty=5$

Si escogemos la aproximación de Chebychev, se pide:

- **A)** Si el orden mínimo del filtro para cumplir las especificaciones es 4, dibuja la atenuación del filtro, indicando lospuntos de contacto con la plantilla.
- **B)** Dar la expresión de la función característica $F(\omega^2)$, ajustando a la banda de paso.
- **C)** Posición y número de ceros de atenuación y ceros de transmisión.
- **D)** Determinar el valor exacto de ω_s.
- **E)** Comportamiento asintótico de la función el infinito.
- **F)** Dibujar $|H(\omega)|^2$, indicando todos los valores de interés.

3. TRANSFORMACIÓN DE FRECUENCIAS.

3.1. TRANSFORMACIÓN PASO BAJO-PASO ALTO.

La trasformación que utilizamos en este caso es:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{s}} \qquad \boxed{\Omega = -\frac{1}{\omega}}$$

Donde se cumple que:

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega_p &= \frac{1}{\omega_p} \\ \Omega_a &= \frac{1}{\omega_a} \end{aligned}}$$

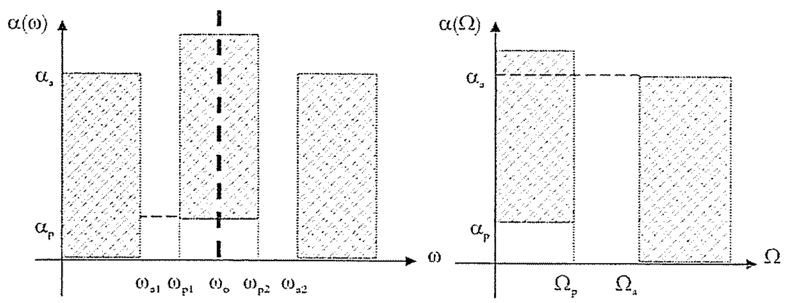
3.2. TRANSFORMACIÓN PASO BAJO-PASO BANDA.

La transformación paso bajo-paso banda presenta la expresión general:

$$\boxed{\lambda = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s}} \qquad \boxed{\Omega = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega}}$$

Si se verifica simetría, se cumple que:

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_o^2 \\ &|\omega_2 - \omega_1| = \Omega_{transf.} \end{aligned}}$$



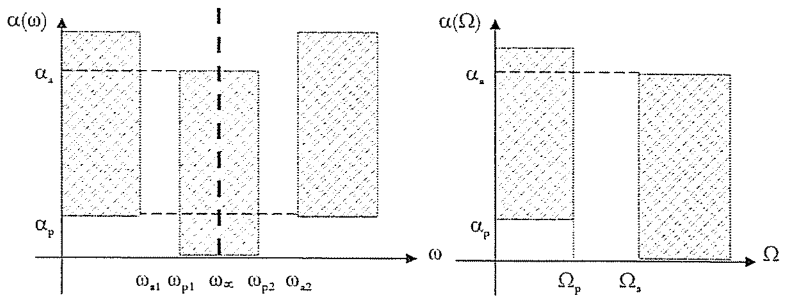
3.3 TRANSFORMACIÓN PASO BAJO-PASO BANDA ELIMINADA.

La expresión general de la transformación paso bajo-paso banda eliminada es:

$$\boxed{\lambda = \frac{s}{s^2 + \omega_\infty^2}} \qquad \boxed{\Omega = \frac{\omega}{\omega_\infty^2 - \omega^2}}$$

Si se verifica simetría, se cumple:

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_\infty^2 \\ \dfrac{1}{|\omega_2 - \omega_1|} = \Omega_{\text{transf.}} \end{array}}$$



TEMA 4. CORRELACIÓN Y ESPECTRO DE SEÑALES DETERMINISTAS

4.1. DEFINICIONES BÁSICAS.

✓ **POTENCIA INSTANTÁNEA:** $p(t) = |x(t)|^2$

✓ **ENERGÍA:** $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

✓ **POTENCIA MEDIA:** $P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

✓ **TIPOS DE SEÑALES.**

Señales de Energía Finita (E.F.): $0 < E_x < \infty$.

- Una señal de E.F. tiene potencia media nula ($P_x=0$).
- Todas las señales de duración finita son de E.F.
- En general, todas la señales con duración frecuencial finita son de E.F.
- También existen señales de duración infinita que son de E.F (la sinct(t), la exponencial causal).

Señales de Potencia Media Finita (P.M.F.): $0 < P_x < \infty$.

- Una señal de P.M.F. tiene energía infinita ($E_x=\infty$).
- Todas las señales periódicas son de P.M.F.
- También son de P.M.F. u(t) o sign(t).

4.2. SEÑALES DE ENERGÍA FINITA.

➢ **TEOREMA DE PARSEVAL.**

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df}$$

4.2.1. CORRELACIÓN CRUZADA DE SEÑALES DE E.F.

➢ **CORRELACIÓN Y DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGÍA CRUZADA.**

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt}$$

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)}$$

$$\boxed{S_{xy}(f) = \text{T.F.}\{R_{xy}(\tau)\} = X(f) \cdot Y^*(f)}$$

✓ **PROPIEDADES**

P1. $|R_{xy}(\tau)|^2 \leq E_x E_y$

P2. $R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$

P3. Si x(t) e y(t) son reales: $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$

➢ **AUTOCORRELACIÓN DE UNA SEÑAL DE E.F.**

$$\boxed{R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) x^*(t) dt} \qquad \boxed{R_{xx}(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)}$$

$$\boxed{S_{xx}(f) = \text{T.F.}\{R_{xx}(\tau)\} = X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2 \geq 0}$$

✓ **PROPIEDADES**

P1. $R_{xx}(0) = E_x$

P2. $|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$

P3. $R_{xx}(\tau) = R_{xx}^*(-\tau)$, la autocorrelación es una señal hermítica.

P4. Si x(t) es real, $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$, la autocorrelación es real y par.

➢ CÁLCULO DE ENERGÍA

1. $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

2. $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

3. $E_x = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

4. $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

➢ ENERGÍA DE LA SUMA DE DOS SEÑALES.

Sea z(t) = x(t) + y(t), donde x(t) e y(t) son señales de E.F.. Entonces:

$$R_{zz}(\tau) = z(\tau) * z^*(-\tau) = [x(\tau) + y(\tau)] * [x^*(-\tau) + y^*(-\tau)] = \ldots = R_{xx}(\tau) + R_{yy}(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)$$

$$E_z = R_{zz}(0) = E_x + E_y + R_{xy}(0) + R_{yx}(0)$$

- Si $R_{xy}(0) + R_{yx}(0) = 0 \Rightarrow$ x(t) e y(t) son señales **incoherentes.**
- Si $R_{xy}(0) = R_{yx}(0) = 0 \Rightarrow$ x(t) e y(t) son señales **ortogonales.**
- Si $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0 \Rightarrow$ x(t) e y(t) son señales **incorreladas.**

En cualquiera de estos tres casos se cumple que:

$$E_z = E_x + E_y$$

Si dos señales no se tocan en frecuencia, son incorreladas.

4.2. SEÑALES DE POTENCIA MEDIA FINITA.

➢ CORRELACIÓN Y AUTOCORRELACIÓN DE SEÑALES DE PMF.

$$\boxed{R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t+\tau)y^*(t)dt} \qquad \boxed{R_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t+\tau)x^*(t)dt}$$

✓ **PROPIEDADES**

P1. $\left|R_{xy}(\tau)\right|^2 \le P_x P_y$

P2. $R_{xy}(\tau)=R_{yx}^*(-\tau)$

P3. Si x(t) e y(t) son reales: $R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau)$

P1. $\left|R_{xx}(\tau)\right| \le P_x$, $R_{xx}(0)=P_x$

P2. $R_{xx}(\tau)=R_{xx}^*(-\tau)$

P3. Si x(t) es real: $R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau)$

➢ FORMA PRÁCTICA DE CALCULAR AUTOCORRELACIONES PARA SEÑALES DE P.M.F.

PERIÓDICAS

$$\boxed{R_{xx}(\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|c(m)\right|^2 e^{j2\pi m \tau/T_0}}$$

$$\boxed{S_{xx}(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|c(m)\right|^2 \delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)}$$

Caso importante: $\boxed{x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\phi) \quad \Rightarrow \quad R_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cdot\cos(2\pi f_0\tau)}$

NO PERIÓDICAS

$$\boxed{x_T(t)=x(t)\cdot\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow R_{x_Tx_T}(\tau)=x_T(t)*x_T^*(-t) \overset{Transf.Fourier}{\Rightarrow} S_{x_Tx_T}(f)=\left|X_T(f)\right|^2}$$

$$\boxed{R_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}R_{x_Tx_T}(\tau) \overset{Transf.Fourier}{\Rightarrow} S_{xx}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}S_{x_Tx_T}(f)}$$

> **POTENCIA DE LA SUMA DE DOS SEÑALES.**

Sea z(t) = x(t) + y(t), donde x(t) e y(t) son señales de P.M.F. Entonces:

$$R_{zz}(\tau) = R_{xx}(\tau) + R_{yy}(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)$$

$$P_z = R_{zz}(0) = P_x + P_y + R_{xy}(0) + R_{yx}(0)$$

- Si $R_{xy}(0) + R_{yx}(0) = 0 \Rightarrow$ x(t) e y(t) son señales <u>incoherentes.</u>
- Si $R_{xy}(0) = R_{yx}(0) = 0 \Rightarrow$ x(t) e y(t) son señales <u>ortogonales.</u>
- Si $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0 \Rightarrow$ x(t) e y(t) son señales <u>incorreladas.</u>

En cualquiera de estos tres casos se cumple que:

$$P_z = P_x + P_y$$

<u>Si dos señales no se tocan en frecuencia, son incorreladas.</u>

CÁLCULO DE POTENCIA

1. $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

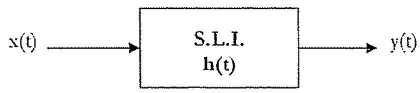
2. $P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 df = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_T x_T}(f)df$

3. $P_x = R_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

4. $P_x = R_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} R_{x_T x_T}(0)$

SEÑALES PERIÓDICAS $\quad P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c(m)|^2$

4.3. CORRELACIÓN Y DENSIDAD ESPECTRAL A TRAVÉS DE SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES.



RELACIONES PARA CORRELACIÓN:

$$\boxed{\begin{aligned} &R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau) \\ &R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) \\ &R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \end{aligned}}$$

SEÑALES DE E.F.

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

SEÑALES DE P.M.F.

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

RELACIONES PARA DENSIDAD ESPECTRAL:

$$\boxed{\begin{aligned} &S_{xy}(f) = S_{xx}(f)\cdot H^*(f) \\ &S_{yx}(f) = S_{xx}(f)\cdot H(f) \\ &S_{xy}(f) = S_{xx}(f)\cdot H(f)\cdot H^*(f) = S_{xx}(f)\cdot |H(f)|^2 \end{aligned}}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{SEÑALES E.F.} \\ &\text{SEÑALES P.M.F.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{xx}(f) = \text{T.F.}\{R_{xx}(\tau)\}$$