

**P1.-** Una interpolación por 4 puede realizarse mediante un solo paso (Fig. 1) o mediante dos interpolaciones por 2 sucesivas (Fig. 2). En este problema se analizan los dos esquemas y las condiciones en las que resultan totalmente equivalentes.

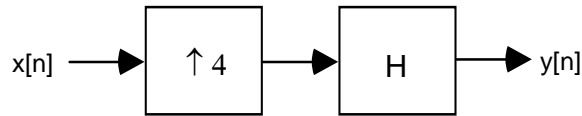


Fig.1

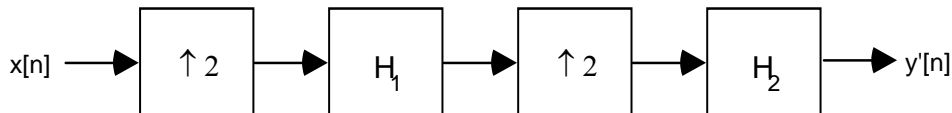


Fig.2

Se pide:

- La expresión de  $Y(e^{j\omega})$ , transformada de Fourier de la secuencia  $y[n]$  obtenida en el primer esquema, en función de  $X(e^{j\omega})$  y la respuesta frecuencial del filtro  $H(e^{j\omega})$ .
- La expresión de  $Y'(e^{j\omega})$ , transformada de Fourier de la secuencia  $y'[n]$  obtenida en el segundo esquema, en función de  $X(e^{j\omega})$  y la respuesta frecuencial de los filtros  $H_1(e^{j\omega})$  y  $H_2(e^{j\omega})$ .
- A partir de las expresiones anteriores obtener la relación que debe haber entre  $H(e^{j\omega})$ ,  $H_1(e^{j\omega})$  y  $H_2(e^{j\omega})$  para que ambos esquemas sean equivalentes.
- Si las respuestas impulsionales de los filtros  $H_1$  y  $H_2$  son  $h_1[n] = h_2[n] = \{1, 2, 1\}$ , calcular la respuesta impulsional de  $H$  para que el primer esquema sea equivalente al segundo.

SOLUCIÓN:

$$(a) \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j4\omega}) H(e^{j\omega})$$

$$(b) \quad \text{Sea } z[n] \text{ la salida del primer interpolador } H_1$$

$$Z(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}) H_1(e^{j\omega})$$

$$Y'(e^{j\omega}) = Z(e^{j2\omega}) H_2(e^{j\omega}) = X(e^{j4\omega}) H_1(e^{j2\omega}) H_2(e^{j\omega})$$

$$(c) \quad H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j2\omega}) H_2(e^{j\omega})$$

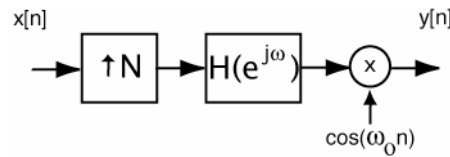
$$(d) \quad h[n] = F^{-1}\{H_1(e^{j2\omega})\} * h_2[n]$$

$$F^{-1}\{H_1(e^{j2\omega})\} = \{1, 0, 2, 0, 1\}$$

$$h[n] = \{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1\}$$

mediante convolución gráfica

**P2.-** Se desea trasladar en frecuencia un canal de telefonía de ancho de banda 3.4 kHz para centrarlo a una frecuencia de 10 kHz. Para ello se va a hacer uso del sistema digital que se muestra en la figura.

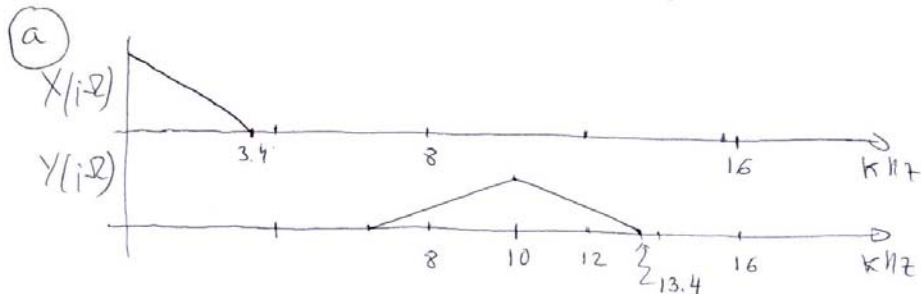
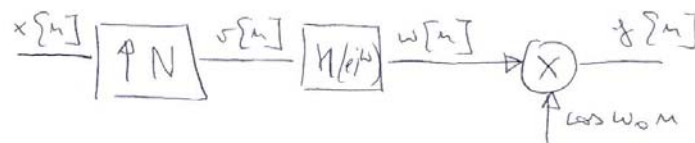


La señal se muestrea a 8 kHz sin aliasing para obtener la secuencia  $x[n]$ , se procesa por el sistema digital para generar  $y[n]$  y se convierte de nuevo a analógica mediante un conversor D/A, que trabaja a una frecuencia de muestreo  $F_m$ , y un filtro reconstructor paso bajo adecuado.

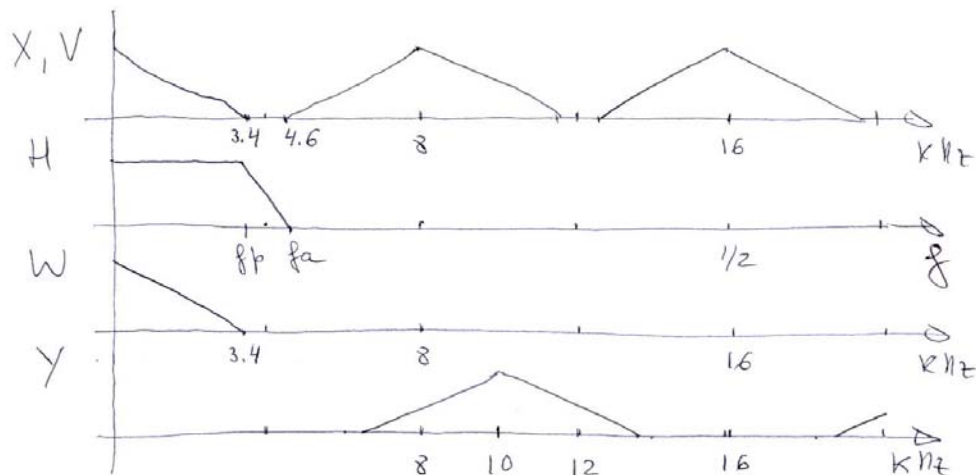
Se pide:

- La menor relación de interpolación  $N$  y la frecuencia de muestreo  $F_m$  que permiten llevar a cabo la operación.
- La frecuencia  $f_0$  del modulador del sistema discreto.
- Las frecuencias de corte de la banda de paso  $f_p$  y banda atenuada  $f_a$  del filtro interpolador.
- Si el filtro interpolador se diseña por el método de la ventana haciendo uso de la ventana rectangular, la frecuencia de corte  $f_c$  del filtro ideal cuya respuesta impulsional se ha de enventanar y la longitud de la misma.

**SOLUCIÓN:**



$$F_m = 4 \cdot 8 \text{ kHz} \geq 2 \cdot 13.4 \text{ kHz} \Rightarrow N = 4, F_m = 32 \text{ kHz}$$



$$b) f_0 = \frac{10}{32} = 0.3125$$

$$c) f_p = \frac{3.4}{32} = 0.10625 \quad f_a = \frac{4.6}{32} = 0.14375$$

$$d) f_c = \frac{1}{2} (f_p + f_a) = \frac{4}{32} = 1/8 = 0.125$$

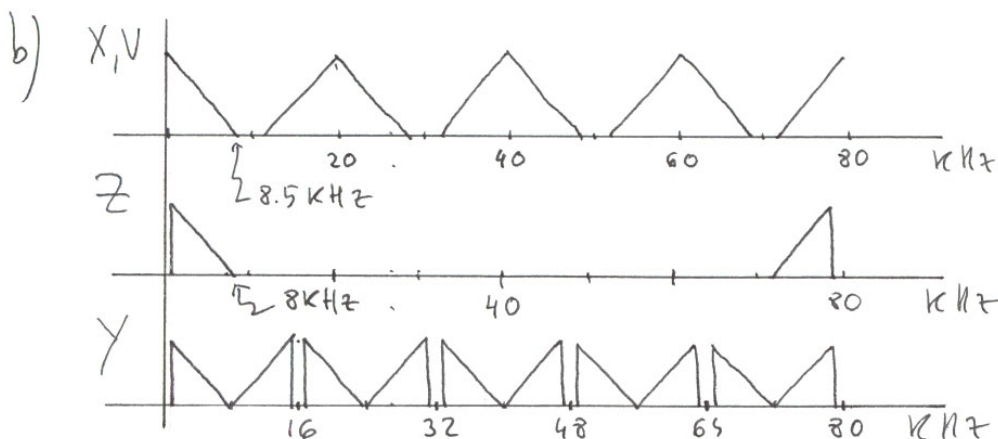
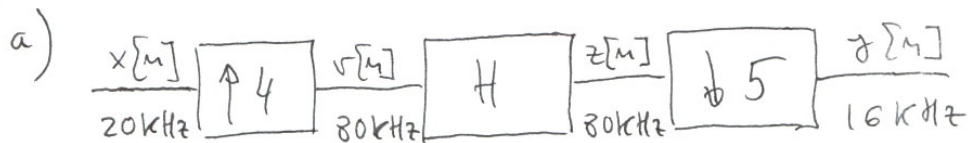
$$\Delta f = f_a - f_p \geq \frac{2}{L} \Rightarrow L \geq \frac{2}{f_a - f_p} = \frac{2}{0.0375} = 53.3$$

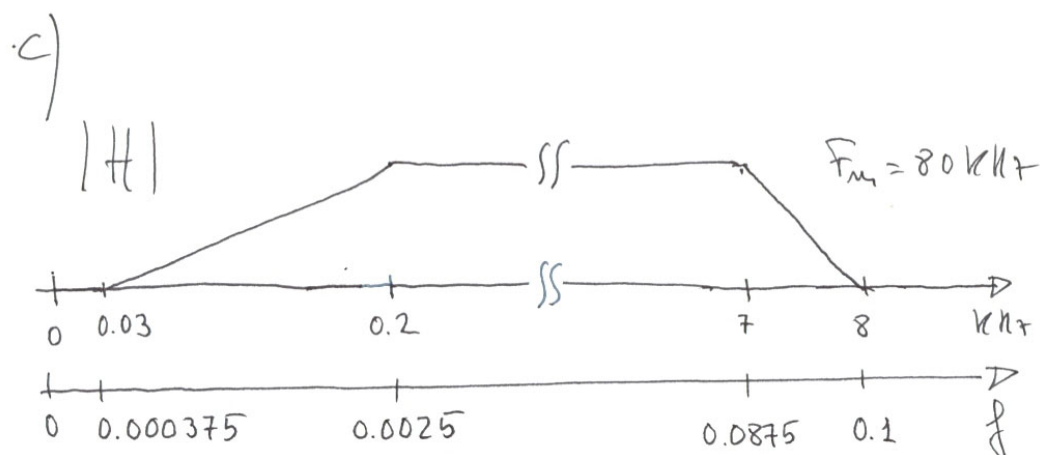
$$L = 54$$

**P3.-** En el marco de un proyecto europeo de investigación, los miembros del grupo de "Procesado del habla" fueron encargados de adquirir señales de voz con una frecuencia de muestreo de 20 kHz. El filtro antialiasing utilizado eliminó los componentes frecuenciales superiores a 8,5 kHz. En la grabación se captó una señal indeseada producida por vibraciones mecánicas subsónicas cuyas componentes frecuenciales son inferiores a los 30 Hz. Para poder utilizar dichas señales en sus propios trabajos de investigación, debieron convertir las señales a una frecuencia de muestreo de 16 kHz, que es la frecuencia de muestreo a la que trabaja su sistema de reconocimiento del habla. El ancho de banda útil de la señal de voz para el sistema de reconocimiento se extiende de 200 Hz a 7 kHz. Se pide:

- El diagrama de bloques del sistema que permite realizar la conversión de señal de voz muestreada a 20 kHz a voz muestreada a 16 kHz.
- Los espectros de todas las secuencias que intervienen en el diagrama de bloques anterior.
- Las frecuencias límites de las bandas atenuadas y la banda de paso del filtro discreto paso banda que, utilizado en el sistema anterior, permite realizar la conversión necesitada y eliminar la señal indeseada captada al realizar la grabación.

**SOLUCIÓN:**





**P4.-** (a partir del PROBLEMA 2.19): La importancia de la transformada discreta de Fourier (DFT) en el tratamiento digital de la señal proviene, en gran parte, de la existencia de métodos eficientes para su cómputo. En este problema se estudia la propiedad de la DFT que permite el establecimiento de los algoritmos rápidos denominados FFT (*fast Fourier transform*). Para ello, considérese el esquema de la figura P2.19-1 donde, a partir de una secuencia  $x[n]$ , se obtienen dos secuencias  $g[n]$  y  $h[n]$  mediante un diezmado por 2 y un adelanto de una muestra.

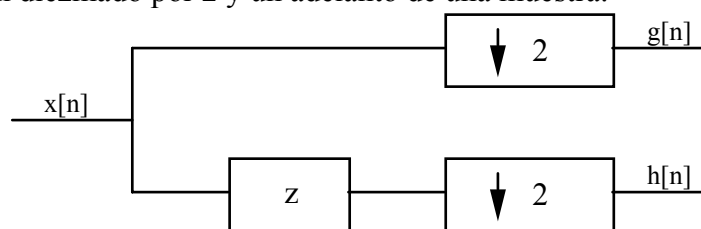


Fig. P2.19-1

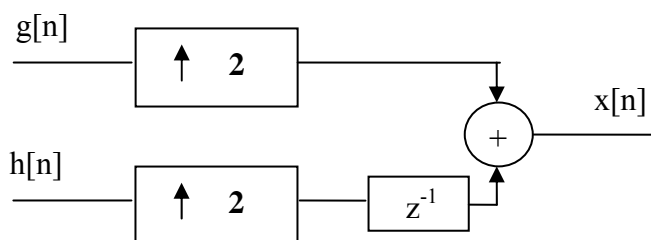
Se pide:

a) Obtenga las señales  $g[n]$  y  $h[n]$ , en función de la entrada  $x[n]$ .

$g[n]$  está formada por las muestras pares de  $x[n]$  y  $h[n]$  por las muestras impares:  
 $g[n] = x[2n]$                        $h[n] = x[2n+1]$

b) Proponga un esquema que permita recuperar  $x[n]$  a partir de  $g[n]$  y  $h[n]$ .

La secuencia  $x[n]$  se recupera intercalando las muestras de  $g[n]$  y  $h[n]$ , como representa el esquema de la figura:



- c) Establezca la relación entre la transformada de Fourier de  $x[n]$  y las transformadas de Fourier de  $g[n]$  y  $h[n]$ .

$$X(e^{j\omega}) = G(e^{2j\omega}) + H(e^{2j\omega})e^{-j\omega} \quad (1)$$

- d) Si  $x[n]$  es una señal de longitud  $N$ , justifique el esquema mostrado en la figura P2.19-2 (que recibe el nombre de *mariposa*) para obtener la DFT de  $N$  puntos de  $x[n]$  a partir de las DFT de  $N/2$  puntos de  $g[n]$  y  $h[n]$ .

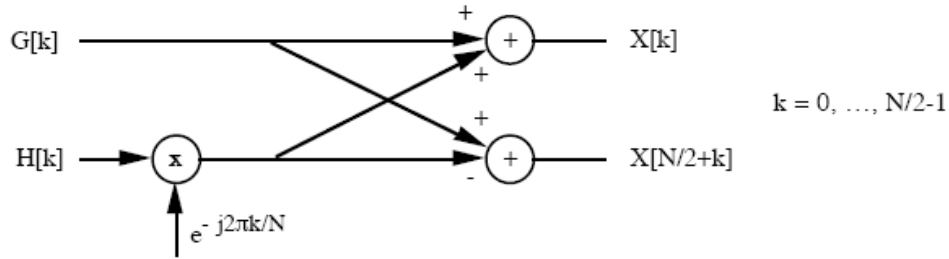


Fig. P2.19-2

Se puede escribir

$$\left. \begin{aligned} X[k] &= X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \\ X[\frac{N}{2}+k] &= X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}(\frac{N}{2}+k)} \end{aligned} \right\} k = 0, \dots, \frac{N}{2}-1$$

que aplicando (1) proporciona:

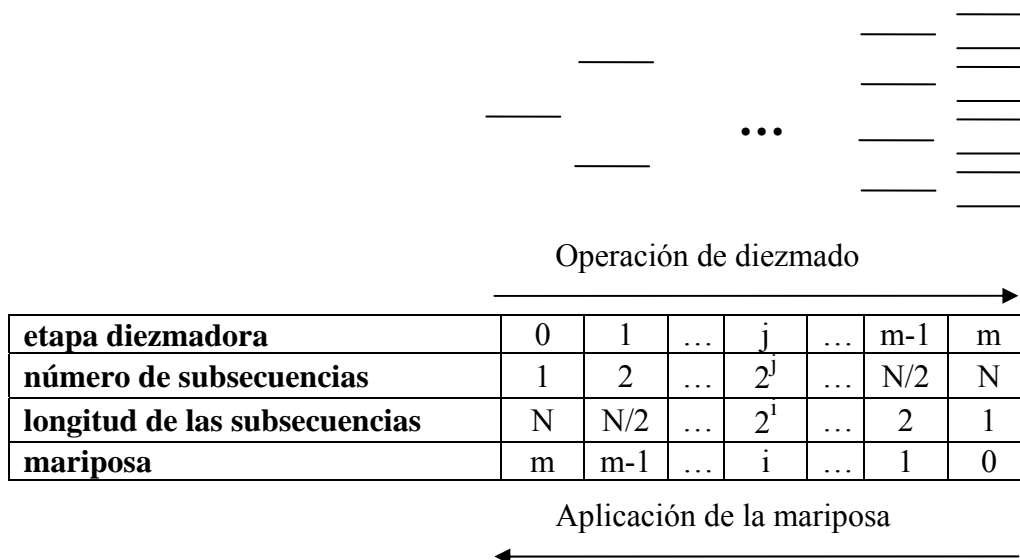
$$\left. \begin{aligned} X[k] &= G(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N/2}k} + H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N/2}k} e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \\ X[\frac{N}{2}+k] &= G(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N/2}k} + H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N/2}k} (-1) e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \end{aligned} \right\} k = 0, \dots, \frac{N}{2}-1$$

que equivale a

$$\left. \begin{aligned} X[k] &= G[k] + H[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \\ X[\frac{N}{2}+k] &= G[k] + H[k] (-1) e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \end{aligned} \right\} k = 0, \dots, \frac{N}{2}-1$$

La representación de estas expresiones conduce a P2.19-2.

Si  $N$  es una potencia de 2 ( $N = 2^m$ ), la descomposición en dos de la secuencia a transformar puede ser aplicada reiteradamente  $m$  veces, hasta que las secuencias  $g[n]$  y  $h[n]$  se reduzcan a una muestra, cuya transformada son ellas mismas. A partir de ahí, la aplicación del esquema de la figura P2.19-2 permitiría calcular la transformada de las subsecuencias generadas y, finalmente, la transformada de  $x[n]$ . Esta idea se representa en la figura siguiente con  $N=8$  y  $m=3$ :



El número total de multiplicaciones complejas necesarias para calcular la DFT a partir de su definición es  $N^2$ , como fácilmente se comprueba. Sin embargo, mediante el algoritmo FFT descrito dicho número es  $(N/2) \log_2 N$ . Este resultado puede establecerse con los dos pasos siguientes:

- 1.- Si  $y[i]$  es el número de multiplicaciones necesarias para calcular la DFT de  $2^i$  muestras, el algoritmo de la figura P2.19-2, que proporciona esta transformada a partir de dos transformadas de  $2^{i-1}$  muestras y la multiplicación de las muestras de una de ellas por la exponencial, permite escribir la recurrencia:

$$y[i] = 2 y[i-1] + 2^{i-1}$$

con  $y[1] = 1$ .

- 2.- Resolviendo por inducción esta ecuación en diferencias puede demostrarse que  $y[m] = (N/2) \log_2 N$ .

Finalmente, para tener una impresión cualitativa del ahorro computacional que puede suponer el uso de la FFT, compare los valores de  $N^2$  y  $(N/2) \log_2 N$  para  $N = 512$  y  $1024$  que se indican en la siguiente tabla.

N	m	$N^2$	$\frac{1}{2} N \log_2 N$
512	9	$0.26 \cdot 10^6$	$2.3 \cdot 10^3 \approx N^2 / 114$
1024	10	$1.05 \cdot 10^6$	$5.1 \cdot 10^3 \approx N^2 / 205$

**P.5.-** ( a propósito del problema 3.5) Se desea demostrar que, para que no se produzca aliasing al muestrear una señal analógica real bajo banda, es condición necesaria y suficiente que

$$k \frac{F_m}{2} \notin (F_{c1}, F_{c2}) \quad (1)$$

donde  $F_m$  es la frecuencia de muestreo y  $F_{c1}$  y  $F_{c2}$  son, respectivamente los límites inferior y superior de la banda de la señal (en el semieje positivo).

**SOLUCION:** Como es sabido, la transformada de Fourier de la señal muestreada es el resultado de la suma de las versiones de la transformada de Fourier de la señal analógica trasladada múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo. Para que no se produzca solapamiento (aliasing) entre componentes frecuenciales al realizar esta suma, es

necesario y suficiente que ningún componente frecuencial de la señal analógica se encuentre a una distancia múltiplo de la frecuencia de muestreo de otro componente frecuencial de la misma. En caso contrario (ver el ejemplo de la figura 1), al desplazar la transformada  $kF_m$  y sumar, se producirá solapamiento inevitablemente.

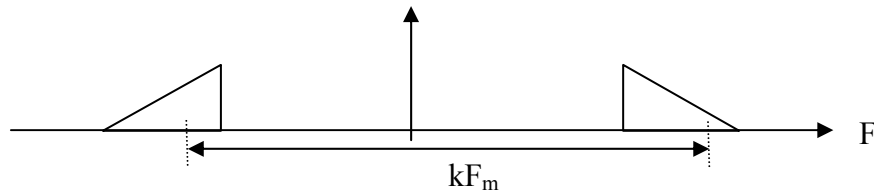


Figura 1

Si no se cumple (1), nos encontraremos en la situación de la figura 2 que es un caso particular de la figura 1. Por lo tanto, se producirá aliasing, lo que prueba la necesidad de (1).

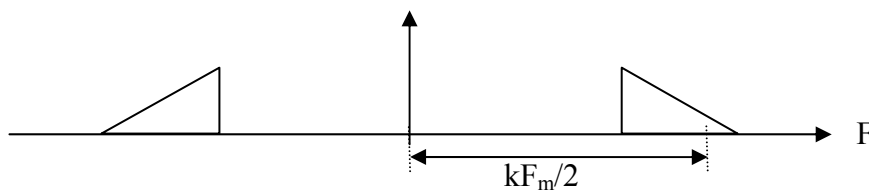


Figura 2

Por el contrario, si se cumple (1), la situación será la de la figura 3 y nunca se producirá aliasing al desplazar la transformada múltiplos enteros de  $F_m$ , lo que prueba la suficiencia.

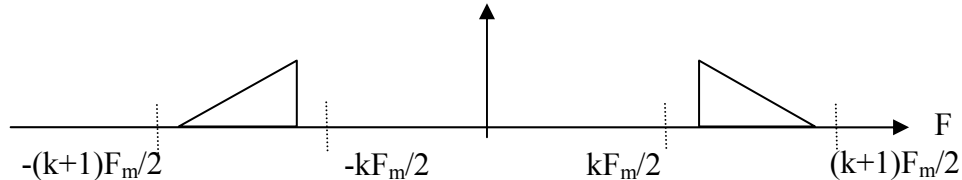
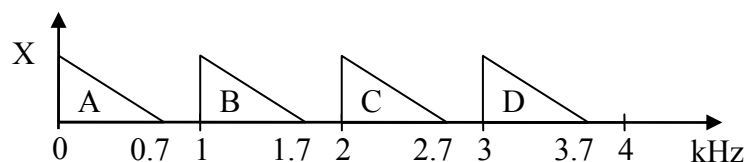


Figura 3

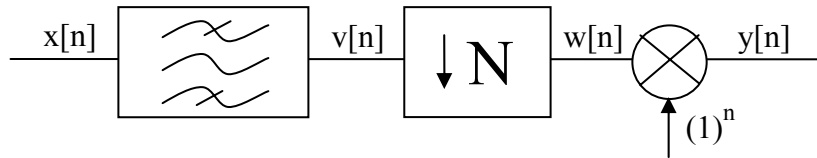
**P6.-** En la figura se muestra la composición de una señal multiplexada de 4 canales muestreada a 8 kHz. Se desea recuperar el canal B en banda base mediante filtrado paso banda y diezmado.



Se pide:

- ¿Cuál es el máximo factor de diezmado que se puede aplicar?
- El diseño del filtro diezmador mediante la ventana de Kaiser, si la atenuación en la banda atenuada ha de ser al menos de 30 dB.

**SOLUCIÓN:** El esquema completo para obtener el canal B se muestra en la figura siguiente, que corresponde a una operación de diezmado más una modulación por  $(-1)^n$  cuya razón se explicará más adelante.



a) La máxima relación de diezmado posible viene dada por el cociente de la frecuencia de muestreo actual de la secuencia ( $F_{m1} = 8$  kHz) y la frecuencia de muestreo más pequeña a la que se puede muestrear la señal paso banda correspondiente al canal B. De acuerdo con el resultado del problema anterior, esta frecuencia de muestreo  $F_{m2}$  ha de cumplir

$$k \frac{F_{m2}}{2} \notin (1 \text{ kHz}, 1.7 \text{ kHz}) \quad (1)$$

por lo que el menor valor posible para  $F_{m2}$  es 1.7 kHz. Por lo tanto,  $N \leq 8 / 1.7 = 4.7$ ; es decir  $N = 4$ , ya que ha de ser entero, y en consecuencia  $F_{m2} = 2$  kHz, que satisface (1).

b) Para separar el canal B de los demás, el filtro paso banda ha de contener en su banda de paso al canal B y sus bandas de paso han de eliminar los demás canales. En consecuencia, las especificaciones del filtro diezmador son:

banda atenuada inferior:  $f_{a1} = 0.7/8 = 0.0875$ ,  $\alpha_{a1} = 30$  dB.

banda de paso:  $f_{p1} = 1/8 = 0.125$ ,  $f_{p2} = 1.7/8 = 0.2125$

banda atenuada superior:  $f_{a2} = 2/8 = 0.25$ ,  $\alpha_{a2} = 30$  dB.

Para obtener este filtro mediante la ventana de Kaiser, debemos enventanar la respuesta impulsional de un filtro paso banda ideal, cuyas frecuencias de corte sean los centros de la bandas de transición:

$$f_{c1} = (f_{a1} + f_{p1}) / 2 = 0.10625$$

$$f_{c2} = (f_{a2} + f_{p2}) / 2 = 0.23125$$

Es decir, un filtro paso banda con frecuencia central  $f_c$  y ancho de banda  $Bf$ :

$$f_c = (f_{c2} + f_{c1}) / 2 = 0.16875$$

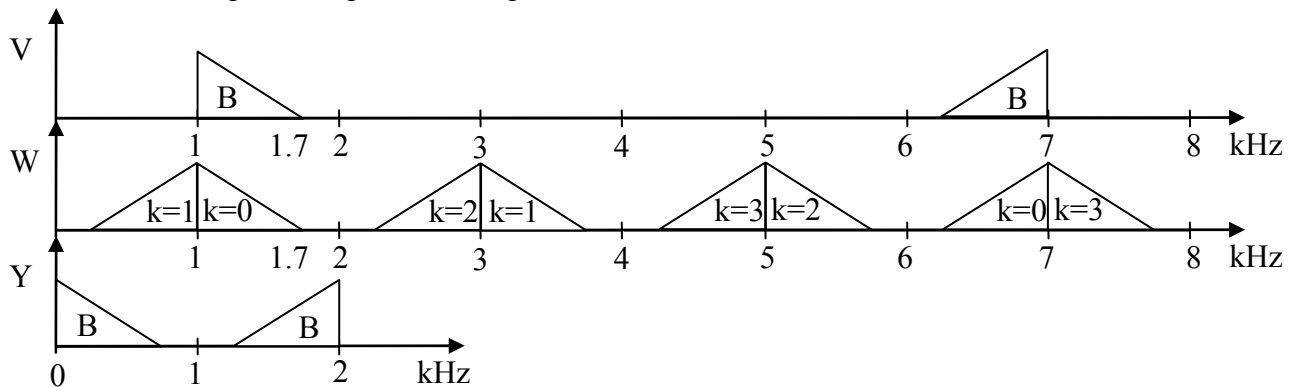
$$Bf = f_{c2} - f_{c1} = 0.125$$

En cuanto a la ventana, de acuerdo con la atenuación especificada para las bandas atenuadas, su parámetro ha de ser  $\beta = 2.1166$  y la longitud ha de proporcionar unas bandas de transición (igual a la anchura del lóbulo principal de su transformada) cuya anchura ha de ser

$$\Delta f = \text{menor} \{ f_{p1} - f_{a1}, f_{a2} - f_{p2} \} = 0.0375$$

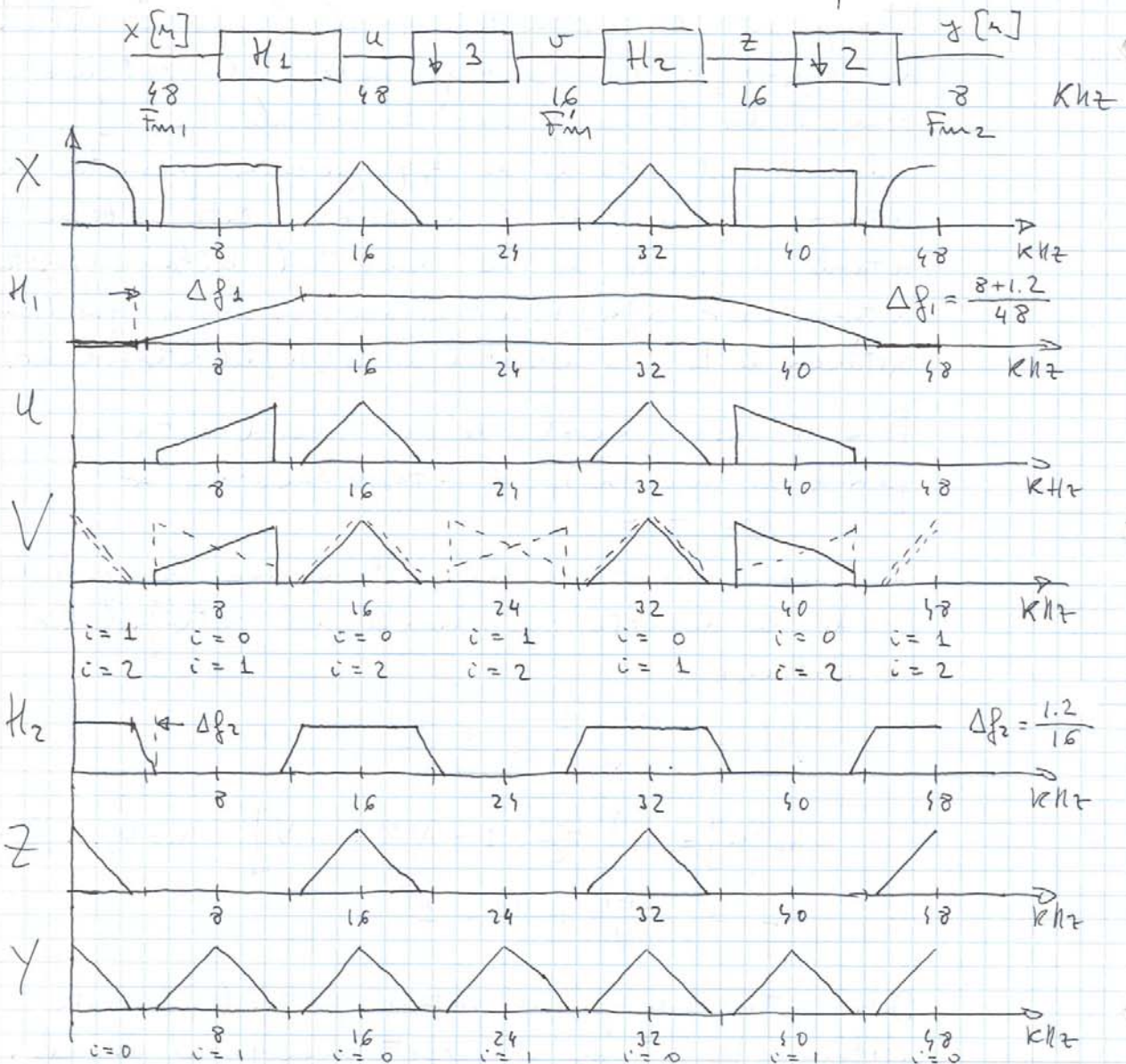
La longitud necesaria es  $L = 41$ .

En la siguiente figura se muestra la transformada de Fourier de la señal filtrada  $v[n]$ , del resultado  $w[n]$  de diezmara ( $k$  indica el índice del alias en la composición del espectro por desplazamiento y suma) y de la secuencia  $y[n]$ , tras la modulación. Se observa que esta última operación permite recuperar la orientación de la banda del canal B.





## Sistema de muestreo en 2 fases



### Coste computacional

(a) Realización en un fase de detección por 6

$$N_{ops} = F_{m2} \cdot L = F_{m2} \cdot cte \frac{1}{\Delta f} \quad \left. \begin{array}{l} \Delta f = 1.2/48 \\ N_{ops} = 0.64 \cdot 10^6 cte \end{array} \right\}$$

(b) Realización en 2 fases

$$N'_{ops} = cte \left( \frac{F_{m1}}{\Delta f_1} + \frac{F_{m2}}{\Delta f_2} \right) = 0.19 \cdot 10^6 cte$$