EJERCICIOS DE COMUNICACIONES II

ETSETB

Enginyeria de Telecomunicació – 3A

Dept. TSC

QUADRIMESTRE TARDOR 07

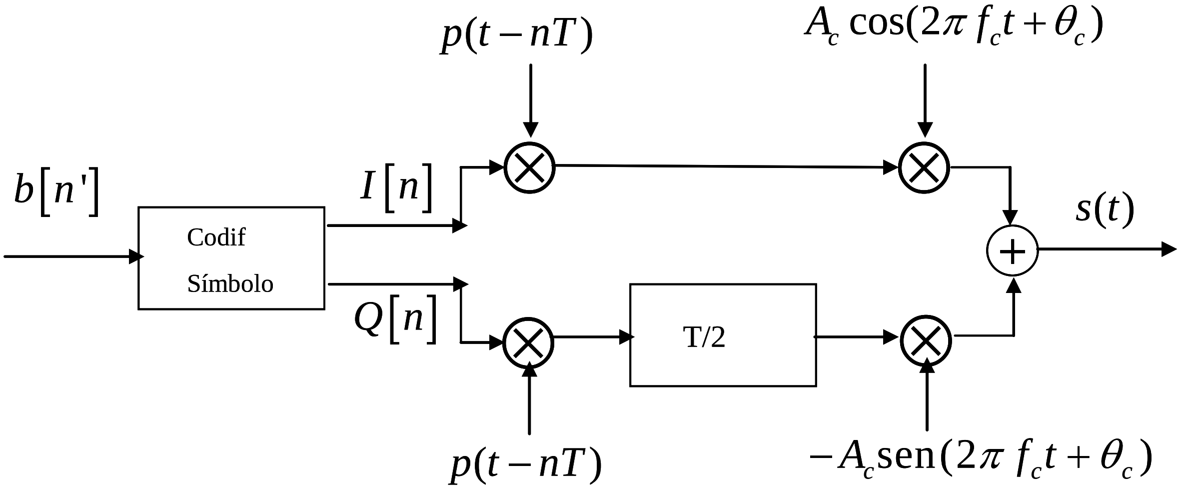
TEMA 4: TRANSIMISION DIGITAL PASO BANDA

TEMA 5: MODULACIONES AVANZADAS

TEMA 4 TRANSIMISION DIGITAL PASO BANDA

Ejercicio 1. OQPSK

Considere el siguiente transmisor



Donde los símbolos $I[n], Q[n]$, son binarios y de valor ± 1 equiprobable y el pulso $p(t)$ es rectangular, de duración igual al tiempo de símbolo. La señal modulada obtenida de esta forma se denomina offset - keyed QPSK (OQPSK)

a.- Dibuje las componentes en fase y cuadratura para la secuencia 10011100. Utilice el dibujo para dibujar la constelación de señal y demuestre que la fase de la señal modulada nunca cambia de forma instantánea más de $\frac{\pm\pi}{2}$ rad.

b.- Obtenga el espectro equivalente paso bajo

c.- Considere ahora que el pulso en vez de ser rectangular es el siguiente

$$p(t) = \cos\frac{2\pi r_b t}{2}\prod\left(\frac{t}{2T_\beta}\right) \qquad T_b=\frac{1}{r_b}$$

d.- Dibuje las componentes en fase y cuadratura para la secuencia 100010111. Utilice el dibujo para obtener la constelación de señal y para calcular la fase $\phi(t) = tg^{-1}\left(\frac{q_s(t)}{i_s(t)}\right)$ en t = kT_b , $0 \le k \le 7$.

e.- Considerando un intervalo arbitrario $2kT_b < t < (2k+1)T_b$ demuestre que la envolvente $s(t)$ es constante para todo t.

f.- Justifique que el espectro equivalente paso bajo es idéntico al de la modulación MSK.

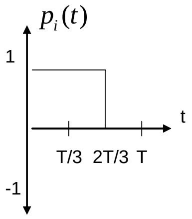
Ejercicio 2. Espacio de señal y ecualización en paso-banda

Considere una modulación digital paso-banda en la que las componentes I y Q son modulaciones de pulso binarias.

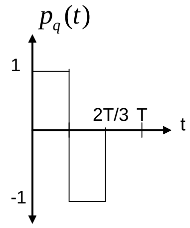
$$s(t) = i_s(t)\cos\left(\frac{2\pi f_o t}{T}\right) - q_s(t)\sin\left(\frac{2\pi f_o t}{T}\right)$$

donde $f_o >> 1/T$. Cada componente utiliza un pulso conformador distinto:

$$i_s(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_i(k)\, p_i(t-kT)$$



$$q_s(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_q(k)\, p_q(t-kT)$$



donde $a_i(k)$ y $a_q(k)$ son los bits equiprobables asociados a cada componente, de valores ± 1.

La señal recibida es $r(t) = h(t) * s(t) + w(t)$ donde $h(t)$ es el canal de transmisión y $w(t)$ es ruido gausiano blanco de densidad No/2. El receptor tiene un error de fase θ en el oscilador local encargado de generar las componentes I y Q.

Considere primero que el canal es ideal: $h(t) = \delta(t)$.

a) Especifique la estructura del <u>receptor óptimo</u>. Explique la <u>ventaja</u> de usar pulsos distintos en cada componente y halle la <u>probabilidad de error de bit exacta</u> en función de Eb/No y θ.

Considere ahora que el canal es $h(t) = \delta(t) + \delta(t - T/3)$.

b) Utilizando el mismo receptor que en a), y analizando las formas de onda a la salida de los filtros adaptados, <u>justifique</u> que dicho canal provoca <u>interferencia entre componentes</u> y halle una <u>cota de la probabilidad de error de bit</u> en función de Eb/No y θ.

c) Especifique la estructura del <u>receptor óptimo</u> para este canal y halle la <u>probabilidad de error de bit exacta</u> en función de Eb/No y θ. <u>Compare</u> el resultado con el apartado a).

Considere finalmente que el canal es $h(t) = \delta(t) + \delta(t - 2T/3)$ y que $\theta = 0$.

d) Analizando de nuevo las formas de onda a la salida de los filtros, halle los canales equivalentes discretos asociados a cada componente. Halle los coeficientes de dos ecualizadores forzadores de ceros (de 4 coeficientes) para cada componente.

e) Halle la probabilidad de error de bit exacta resultante tras insertar los ecualizadores. Compare el resultado con el apartado a).

f) Dé una cota de la probabilidad de error de bit del detector óptimo de secuencias en el caso de transmitir una secuencia de dos símbolos (dos bits consecutivos por componente). Compare el resultado con el apartado a).

Ejercicio 3. Modulación GMSK

El estandard de comunicaciones móviles GSM utiliza una modulación no-lineal denominada GMSK (Gaussian Minimum Shift-Keying). Esta modulación tiene propiedades que la hacen muy adecuada para apliaciones prácticas. Entre ellas, podemos citar:

1.- Es una modulación con envolvente constante, lo que facilita el diseño de los amplificadores de potencia.

2.- Es una modulación con una fase de evolución continua, lo que la convierte en altamente eficiente en ocupación de espectro

3.- Permite ser utilizada en términos de bajo coste; ya que requiere esquemas de detección muy simples

El presente ejercicio permite estudiar dicha modulación a partir de los conceptos y técnicas de modulaciones digitales en banda base

La modulación GMSK se define de la siguiente forma:

Sea una señal PAM digital: $s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_i\, p(t - i\, T_b)$

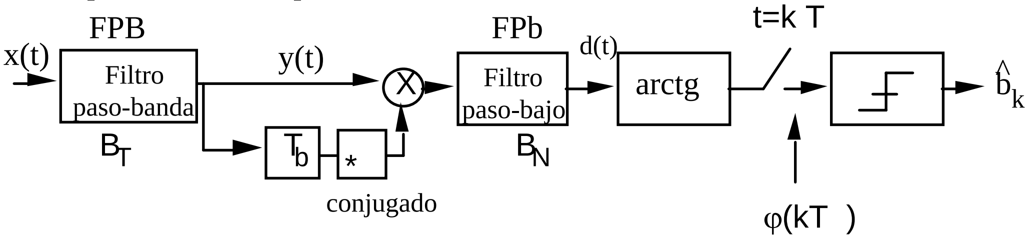
donde $b_i = \pm 1$ con equiprobabilidad T_b: periodo de bit y

$p(t)$: pulso de conformación Gaussiano

Si la señal PAM digital x(t) modula en frecuencia una portadora, la señal analítica x(t) tendrá la forma:

$$x(t) = A \exp[j(2\pi\, f_c t + \phi(t))] \quad \text{con} \quad f_c\, T_b = N; \quad \phi(t) = 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} s(\lambda)\, d\lambda$$

Un posible receptor GMSK adopta la forma



a.- Obtenga la expresión de $\varphi(kT_b)$ en función de los símbolos transmitidos y de los parámetros θ_m definidos como: $\theta_m = 2\pi f_d \displaystyle\int_{(m-1)T_b}^{mT_b} p(\lambda)\, d\lambda$

b.- Si sabemos que $\theta_o >> \theta_k$ para todo $k \neq 0$, justifique el criterio de decisión utilizado, es decir:

$$\hat{b}_k = \text{sign}[\varphi(kT)]$$

c.- Los parámetros utilizados en la práctica, permiten afirmar que:

$$\theta_k \approx 0 \text{ para todo } |k|>1$$

de modo que solo θ_1, θ_{-1}, θ_o son relevantes. Para evaluar el impacto del ISI presente en la detección utilice la fase normalizada

$$\varphi_N(kT) = \frac{\varphi(kT)}{\theta_o}; \qquad \hat{b}_k = \text{sign}[\varphi_N(kT)]$$

obtenga la expresión del ISI máximo en la detección en función de θ_1, θ_{-1}, θ_o

A continuación, considere que la señal x(t) está degradada por ruido paso banda de la forma:

$$n(t) = [n_i(t) + n_q(t)] \exp(jw_c t)$$

donde: $S_n(f) = N_0/2$ Watt/Hz en el ancho de banda de transmisión.

Si la Relación Señal a Ruido es suficientemente Grande para garantizar que la señal recibida está por encima del efecto umbral, obtenga la expresión aproximada para d(t) que sustituye a la obtenida en (a) en términos del ruido de fase

d.- Determine la probabilidad de error del sistema sabiendo que $\theta_k = \theta_{-k}$ y que $\theta_{\pm k}/\theta_o << 1$ para $k>1$. Aproxime la distribución de ruido por una pdf. Gaussiana.

e.- Obtenga el sistema de ecuaciones para diseñar un ecualizador lineal (FIR) de tres coeficientes con un criterio de mínimo error cuadrático medio.

Ejercicio 4. OQPSK y error de fase de portadora.

Considere la siguiente modulación offset QPSK (OQPSK):

$$x(t) = A\sum_k \left(a(k)\,p(t-kT)\cos\left(w_o t\right) - b(k)\,p(t-T/2-kT)\sin\left(w_o t\right)\right)$$

donde $w_o >> \dfrac{2\pi}{T}$, $a(k) \in \{1,-1\}$, $b(k) \in \{1,-1\}$, y $p(t) = \sin\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)$ $(0 \le t \le T)$. Considere bits equiprobables e independientes, y ruido aditivo blanco Gausiano de densidad No/2.

a) Dibuje el receptor óptimo (con filtros adaptados) y dé la expresión de la BER en función de la Eb/No.

Considere en lo que sigue que el oscilador del receptor presenta un error de fase θ.

b) Analice la interferencia entre componentes y dibuje los posibles niveles a la salida del filtro adaptado de la componente I (o bien la Q). ¿Cuál es el máximo valor admisible de θ?

Ayuda: $\sin^2(A) = 0.5\left(1-\cos(2A)\right)$ $\sin(A)\cos(A) = 0.5\sin(2A)$

c) Halle una cota de la BER. Justifique si la modulación OQPSK es más, igual o menos robusta a la presencia de errores de fase que la QPSK sin offset.

Ejercicio 5. PSK y transmisión de portadora

La señal recibida en un sistema PSK coherente está definida por

$$S(t) = A_c \; k\,\mathrm{sen}\,(2\pi f_c \; t) \pm A_c \sqrt{1-k^2} \;\; \cos 2\pi f_c \; t$$

con $0 \le t \le T_b$, el signo +, corresponde al bit '1' y el menos al bit '0'. El primer término es una componente de portadora incluida para sincronizar el receptor con el transmisor.

a.- Demostrar que, en presencia de ruido blanco gaussiano de media nula y densidad espectral de potencia $\frac{No}{2}$ la probabilidad de error total es

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{Eb}{No}(1-k^2)}\right) \qquad \text{con} \qquad Eb = \frac{1}{2}\; A_c^2 \; T_b$$

b.- Si el 10% de la potencia de señal transmitida se dedica a la transmisión de la componente de portadora, determina la Eb/No requerida para lograr una probabilidad de error de 10^{-4} .

c.- Compare este valor de Eb/No con el requerido en un sistema PSK convencional con la misma probabilidad de error.

Ejercicio 6. QPSK y ecualización con error de fase de portadora

(disponible resuelto en comweb.upc.edu)

Se desea transmitir una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes entre sí transmitiendo una energía por bit E_b y a una velocidad de r_b. Se elige una modulación QPSK.

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(I\left[n\right]p\left(t-nT\right)A_c\cos\left(2\pi f_c t+\theta_c\right)-Q\left[n\right]p\left(t-nT\right)A_c\text{sen}\left(2\pi f_c t+\theta_c\right)\right)$$

con

$$I\left[n\right]=-A,+A \quad Q\left[n\right]=-A,+A \qquad f_c=Nr \qquad p(t)=\tfrac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\tfrac{t-T/2}{T}\right) \qquad r=\tfrac{1}{T}=\tfrac{1}{2}r_b$$

La señal se transmite por un canal ideal $h_c(t)=\delta(t)$ de ruido *w(t)* blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f)=\frac{N_0}{2}$.

Se pide:

a) Identificar la dimensión L y la base generadora del espacio de señal.

b) Dibujar la constelación de la señal. Obtener la distancia mínima entre símbolos d en función de los parámetros físicos de la modulación y obtenga la energía promedio E_b en función de la distancia mínima.

c) Suponiendo detección óptima, proporcione sin demostrar, la probabilidad de error del sistema para las consideraciones habituales: codificación Gray y $\frac{E_b}{N_0}$ elevado.

Suponga a partir de este punto que en recepción se generan los siguientes errores. El oscilador que debería dar la señal de portadora $\cos\left(2\pi f_c t+\theta_c\right)$, produce en su lugar $(1+\gamma)\cos\left(2\pi f_c t+\theta_R\right)$. El desfasador que en condiciones ideales debería dar la señal $-\text{sen}\left(2\pi f_c t+\theta_c\right)$, produce en su lugar $-(1-\gamma)\text{sen}\left(2\pi f_c t+\theta_R\right)$. $0<\gamma<0.1$

Se pide:

d) Interprete los errores anteriores desde la perspectiva de espacio de señal. Se sugiere que analice la relación entre las funciones de la base generadas por el receptor y las generadas por el transmisor.

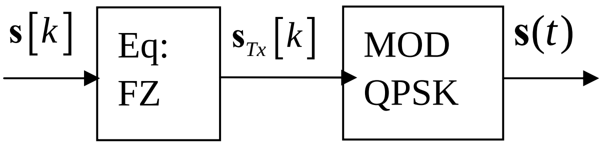
e) Analizar el efecto sobre el vector de símbolos detectado $\mathbf{y}\left[k\right]$, distinguiendo entre señal útil, ICI y ruido. Dibuje la constelación de señal recibida si $0<\theta_R-\theta_c<\frac{\pi}{4}$, suponiendo que se mantienen los umbrales a utilizar en el caso sin errores del apartado c. Comente como es la función de densidad de probabilidad del vector de ruido en este caso.

f) A la vista de los resultados comente como se degradará la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, respecto a la situación del apartado c) para el caso genérico $0<\theta_R-\theta_c<\frac{\pi}{4}$.

Para eliminar la ICI introducida por los errores de la portadora en recepción, se diseña un ecualizador transversal, utilizando el criterio de forzador de ceros:

$$\mathbf{H}[k] = \mathbf{H}_Q \delta[k]$$

Dicho ecualizador se coloca en el transmisor. A partir de este punto se supondrá permanentemente que $\theta_R - \theta_c = \frac{\pi}{4}$.



Se pide:

g) Dar los coeficientes del ecualizador y dibuje la estructura del mismo.

h) Calcule para esta nueva situación la energía promedio E_b en función de la distancia mínima y de los coeficientes del ecualizador, sobre la señal transmitida $s(t)$.

i) Suponiendo que en la detección se mantienen los umbrales a utilizar en el caso sin errores del apartado c así como las mismas consideraciones, dibuje la constelación de señal recibida y calcule la probabilidad de error en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

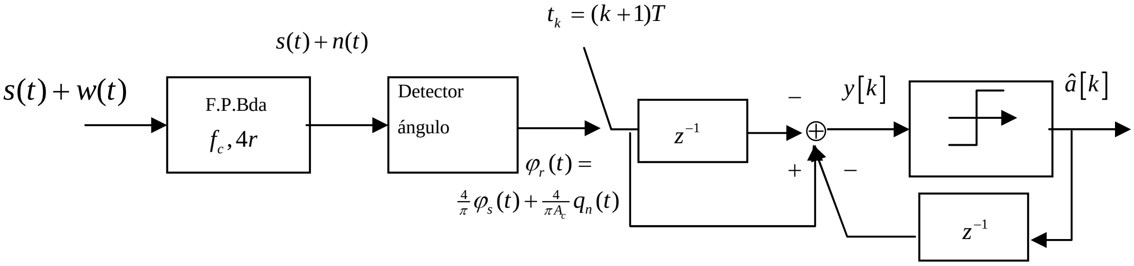
j) A la vista de los resultados compare la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, respecto a la situación del apartado c.

Ejercicio 7. CPM

(disponible resuelto en comweb.upc.edu)

Sea una modulación CPM: $s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \varphi_s(t)\right)$ con $\varphi_s(t) = 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$

La señal $x(t)$ corresponde a una modulación 2PAM polar de símbolos equiprobables $a[n] = a_m = \pm 1$ y pulsos $p(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)\Pi\left(\frac{t-T}{2T}\right)$. La sensibilidad de frecuencias es $f_d = \frac{r}{4} = \frac{1}{4T}$. La señal se transmite a través de un canal AWGN de ruido *w(t)* : $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ y se demodula según el esquema de "Decisión Directed" de la figura:



El ruido de fase se puede aproximar por la componente en cuadratura del ruido paso banda a la salida del filtro receptor y su densidad espectral es: $S_{q_n}(f) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{4r}\right)$

a) Demuestre que la fase instantánea $\varphi_s(t)$ de la señal modulada se puede expresar como una modulación 2PAM de amplitudes $a[n] = a_m = \pm 1$ y calcule la forma temporal de los pulsos que la soportan a los que se denominará $q(t)$.
b) Calcule las muestras $\varphi_s(t_k) = \varphi_s\left((k+1)T\right)$ en función de la secuencia de símbolos $a[n]$.y halle la expresión de las muestras $y[k]$ distinguiendo entre señal útil, ISI y ruido.
c) Caracterice estadísticamente la secuencia de ruido de las muestras $y[k]$.
d) Halle las f.d.p. de las muestras $y(t_k) = y[k]$ condicionadas al símbolo transmitido $a[k] = a_m = \pm 1$ y dado que $P_b = \Pr\left(\hat{a}[k] = -a[k]\right)$.
e) Calcule finalmente la BER$= P_b$ en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$.

Ejercicio 8. 8QAM

Los bits de una secuencia binaria equiprobable, a r_b bits/seg se codifican para dar lugar a dos secuencias de símbolos estadísticamente independientes (I_k, Q_k), correspondientes a dos modulaciones PAM que a su vez modulan una portadora en fase y cuadratura (I&Q) para obtener la señal modulada s(t):

$s(t)=A_c\, i_s(t) \cos(\omega_c t) - A_c\, q_s(t)\, \text{sen}(\omega_c t)$

$i_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k\, p(t-kT_s)$ $\quad$ $q_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k\, p(t-kT_s)$ $\quad$ $p(t) = \Pi\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$

La codificación de línea se realiza del siguiente modo: Cada 3 bits dan lugar a un par (I_k, Q_k) según la siguiente tabla:

bits	000	001	010	011	100	101	110	111
$\mathbf{I_k}$	-1	-3	+1	+3	-1	-3	+1	+3
$\mathbf{Q_k}$	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1

a) Tomando como entrada la secuencia de bits dibuje el esquema del modulador de s(t). Detalle el modo de funcionamiento del codificador de línea. Relacione el periodo de símbolo T_s con la velocidad binaria r_b. Especifique que tipo de modulación se tiene para cada una de las componentes $i_s(t)$ y $q_s(t)$.

b) Obtenga una base ortonormal para generar el espacio de señal de s(t). Dibuje la constelación o espacio de señal sobre la base elegida. Dé la expresión de la energía media por bit E_b en función de todos los parámetros que considere necesarios: A_c, T_s, r_b, etc.

c) La señal s(t) es transmitida por un canal de ruido w(t) aditivo blanco ($S_w(f) = \frac{N_o}{2}$) y gaussiano. Diseñe el receptor óptimo para demodular la señal recibida y obtener la secuencia de bits con la mínima probabilidad de error. Demuestre que dicho receptor lleva implícita la demodulación coherente de las componentes I&Q de la señal recibida.

En los apartados siguientes considere que la relación señal a ruido es lo suficientemente elevada a fin de aproximar $\pm Q^2\left(\sqrt{k\frac{E_b}{N_o}}\right) + Q\left(\sqrt{k\frac{E_b}{N_o}}\right) = Q\left(\sqrt{k\frac{E_b}{N_o}}\right)$ *para cualquier valor de k positivo:*

d)

Obtenga la probabilidad de error parcial de cada uno de los puntos de señal (I_k, Q_k) y la probabilidad de error total de s(t) en función del cociente $\frac{E_b}{N_o}$

e) Halle las probabilidades de error de cada una de las dos componentes I&Q en función del cociente $\frac{E_b}{N_o}$ y relaciónelas con la probabilidad de error total obtenida en el apartado anterior.

Ejercicio 9. QQPSK ó Q^2PSK

Cualquier tipo de modulación digital de M símbolos, se puede expresar del siguiente modo:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_m(t - kT)$$

donde $s_m(t)$ m=1,..,M representan las M señales que definen el llamado espacio de la señal y tienen asociadas un símbolo del alfabeto.

En situaciones en donde la ISI es fuerte o en canales móviles en donde hay desvanecimientos de señal, una modulación útil es Quadrature-Quadrature PSK (QQPSKó Q^2PSK). Esta modulación se presenta como una alternativa a QPSK para reducir el ancho de banda requerido. La modulación QQPSK se define del siguiente modo:

Sea b_n una secuencia de bits estadísticamente independientes y equiprobales, a r_b bit por segundo y codificada de forma polar (+1 volt. bit a ´1´ y -1 volt. bit a ´0´).

$$s(t) = A_c \,\mathrm{Real}[\,(i_s(t) + j\,q_s(t))\,e^{jw_c t}\,]$$

$$i_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{Real}[\,(b_{4k} + j\,b_{4k+1})e^{j\pi rt}\,]\;p(t-kT)$$

$$q_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{Real}[\,(b_{4k+2} + j\,b_{4k+3})e^{j\pi rt}\,]\;p(t-kT)$$

Pulso básico: $p(t) = (\frac{t - T/2}{T})$

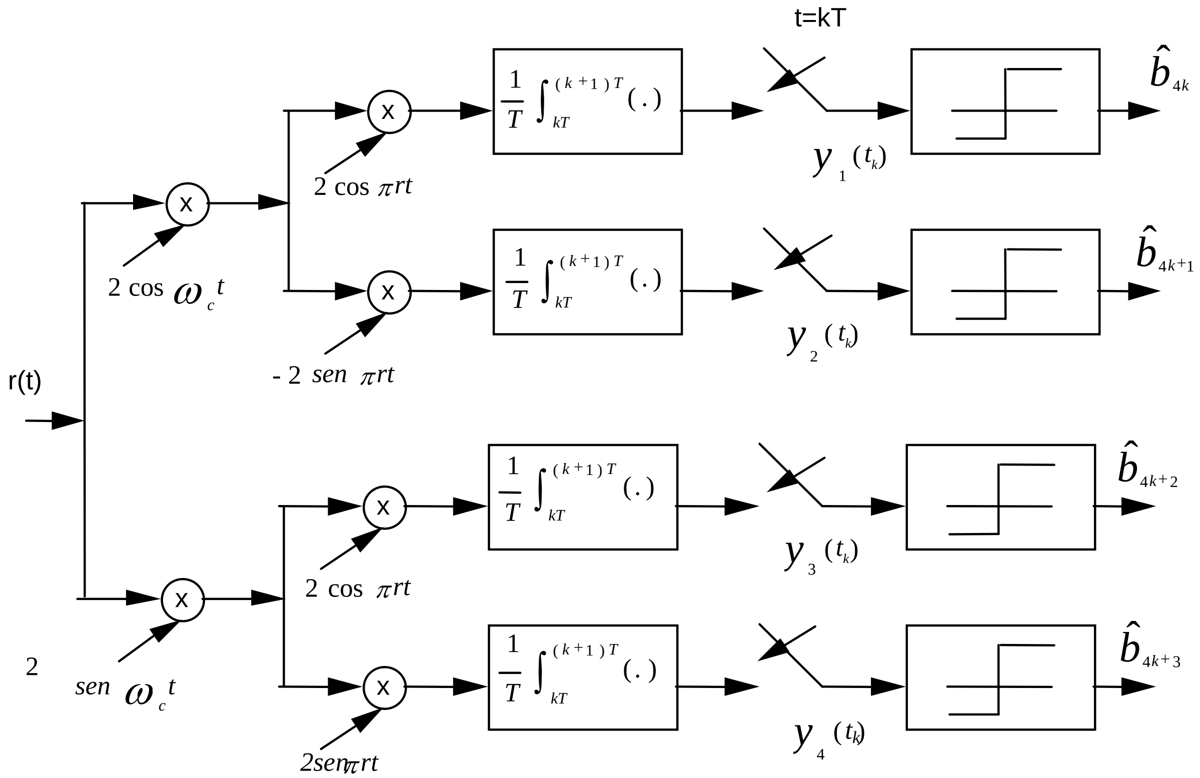
Periodo de señalización: $T = \frac{1}{r} = \frac{4}{r_b}$ segundos

Frecuencia portadora: $f_c = \frac{N}{T}$ Hz con N >> 1

Vemos que frente a QPSK aparece a la mitad de velocidad de transmisión con lo cual es útil en situaciones donde la ISI es fuerte.

a.- Obtenga la energía de cada una de las M=16 señales $s_m(t)$ que generan el espacio de la señal. Observe que cada una de las señales $s_m(t)$ representa la transmisión de una combinación distinta de 4 bits consecutivos. Obtenga la energía media de bit E_b de la modulación QQPSK.

b.- Determine una base de funciones ortonormales $\phi(t)$, generadora del espacio de señal. Calcule el vector $\underline{S}_o$ correspondiente a la representación de la señal $s_o(t)$ sobre dicha base, esto es, las componentes de $\underline{S}_o$ en la nueva base ortonormal. La señal $s_o(t)$ representa los bits "0000".



c.- Se desea demodular s(t), mediante el receptor de la figura. Si a la entrada del mismo se tiene r(t) = s(t) + w(t), donde w(t) es ruido aditivo blanco y gaussiano de media nula, $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$ Watts/Hz, demuestre que cada una de las 4 salidas, permite detectar de modo independiente un único bit, calculando para ello la expresión de las señales $y_i(t)$, i=1,2,3,4. Calcule la la potencia del ruido, σ^2, a la salida de cada uno de los integradores.

d.- Calcule la probabilidad de error a la salida de cada rama. Consiere umbrales óptimos de detección.

e.- Obtenga la (Bit Error Ratio) BER total del sistema en función de la relación de energía $\frac{E_b}{N_0}$

Ejercicio 10. QAM y error de fase

Una señal QAM tiene la siguiente expresión:

$$s(t) = A\,Re\left\{\sum_k \xi_k p(t-kT)e^{j2\pi f_0 t}\right\}; \qquad f_0 T = N \quad entero$$

Donde Re{.} significa parte real, p(t) es un pulso rectangular de duración T y

$$\xi_k = a_{ik} + ja_{qk}$$

siendo a_{ik} y a_{qk} dos variables aleatorias que pueden tomar los valores $\pm 1, \pm 3$ con igual probablidiad.

a.- Calcule la potencia de la señal s(t). Exprese A en función de la energía promedio por bit E_b.

b.- Determine y dibuje el espacio de señal.

c.- Obtenga el receptor óptimo coherente y compruebe que pueden obtenerse por separado las variables a_{ik} y a_{qk}

d.- Halle la probabilidad de error de cada una de las secuencias a_{ik} y a_{qk}, la probabilidad de error de símbolo y la probabilidad de error de bit (BER). Exprésela s en función de la EbN0. Utilice las hipótesis que crea convenientes.

Suponga ahora que el canal de transmisión provoca un desfasaje en la portadora de forma que la señal recibida es

$$s(t) = A\,Re\left\{\sum_k \xi_k p(t-kT)e^{j(2\pi f_0 t+\vartheta)}\right\}$$

el receptor óptimo es el mismo que el obtenido en el apartado c)

e.- Obtenga el nuevo espacio de señal y dibújelo para $\vartheta = 45\,grados$.

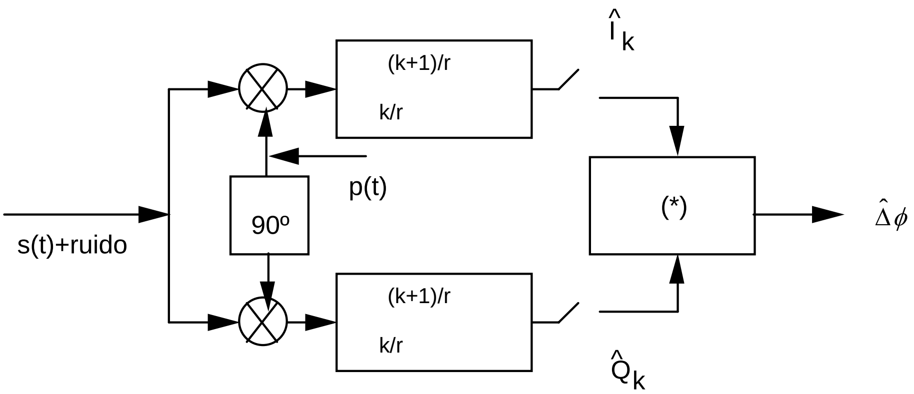
¿Qué ocurre con las salidas del detector óptimo cuando $\vartheta = 90\,grados$ y cuando $\vartheta = 180\,grados$?

Obtenga las probabilidades de error de símbolo para $\vartheta = 180\,grados$.

Ejercicio 11. DPSK

Sea la modulación 4PSK: $s(t) = A_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t + \phi_c + \phi_k) p(t - kT_s)$ con pulso conformador rectangular: $p(t) = \Pi\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$ y 4 valores equiprobables para la fase $\phi_k = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. En recepción se recibe coherentemente con la portadora $p(t) = \frac{2}{A_c}\cos(\omega_c t + \phi_c - \Delta\phi)$ El error de fase $\Delta\phi$ genera cruce de canales I&Q.

A continuación se propone un esquema que permite calcular el error de fase $\Delta\phi$ a fin de recibir coherentemente la señal:

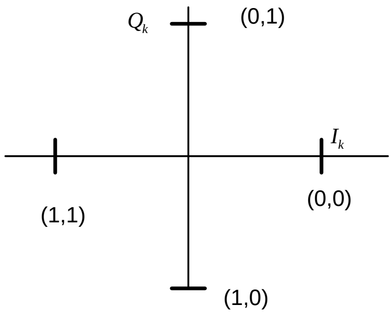


Los dos bloques centrales representan integradores.

(*): $\hat{\Delta}\phi = \frac{1}{M} angle((\hat{I}_k + j\hat{Q}_k)^M)$ M=4

Realice los posteriores análisis sin considerar la presencia de ruido.

1. Detalle la expresión de las componentes I&Q: $i_s(t)$ y $q_s(t)$ de la señal s(t)
2. Obtenga las expresiones de las componentes I&Q recibidas: $\hat{i}_s(t)$ y $\hat{q}_s(t)$
3. Obtenga las expresiones de las muestras: $\hat{I}_k$ y $\hat{Q}_k$
4. Obtenga la expresión de $\hat{\Delta}\phi$ en función de $\Delta\phi$ ¿Para que márgenes de $\Delta\phi$ se cumplirá que $\hat{\Delta}\phi=\Delta\phi$?
5. Si la constelación inicial es la mostrada en la figura, $\Delta\phi=5\pi/8$ y se detecta con la portadora corregida : $\hat{p}(t) = \frac{2}{A_c}\cos(\omega_c t + \phi_c - \Delta\phi + \hat{\Delta}\phi)$ dibuje la constelación resultante para $\hat{I}_k$ y $\hat{Q}_k$



6. A fin de evitar el problema de la detección coherente que no queda completamente resuelta con la técnica analizada, se propone trabajar con la modulación Diferencial PSK (DPSK) que evita tener que demodular sin error de fase. Para ello las fases de la señal s(t) se codifican diferencialmente según la tabla:

$$\phi_k = \phi_{k-1} + \Delta\phi_k$$

bits	00	01	11	10
$\Delta\phi$	0 rad.	π/2 rad.	π rad.	3π/2 rad.

Demuestre que añadiendo el esquema siguiente al demodulador I&Q, en ausencia de ruido la demodulación con $p(t) = \frac{2}{A_c}\cos(\omega_c t + \phi_c - \Delta\phi)$ se realiza correctamente para cualquier valor de $\Delta\phi$.

Ejercicio 12. PAM y ASK

Una fuente de régimen binario r_b =3000 bits/seg se señaliza a 8 niveles con separación $2A$ volts entre niveles. La transmisión digital se realiza sobre un canal ideal con ruido blanco gausiano de densidad $N_o/2$. La señal transmitida es:

$$x_T(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p(t-nT) \qquad a_n = \{-7,-5,-3,-1,1,3,5,7\} \qquad p(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

donde a_n son los símbolos equiprobables con codificación Gray.

A nivel de calidad, se requiere que el sistema presente una BER igual o menor a 10^{-4}.

a) Calcule el ancho de banda de transmisión (ancho hasta el 1er cero del espectro) y la menor E_b/N_o que permite el correcto funcionamiento del sistema. NOTA:

$$\sum_{i=1}^{M/2}(2i-1)^2 = \frac{M}{6}\left(M^2-1\right)$$

Para contestar el apartado anterior ha supuesto que los umbrales de decisión estaban situados en $0,\pm 2A_0,\pm 4A_0,\pm 6A_0$ con A_0 igual a A. Uno de los problemas de la señalización multinivel es que requiere la estimación del nivel de la señal recibida (es decir A) para diseñar los umbrales óptimos. Ello no ocurre con señalización binaria en que el umbral óptimo es cero. Imagine que A_0, que debería estimarse igual a A, se estima con error, es decir:

$$A_0 = A(1+\alpha) \qquad \text{con } \alpha > 0$$

b) En base a la distancia mínima existente entre cada símbolo y los nuevos umbrales, calcule una cota para la nueva BER del sistema. Indique cuánto debería subir la E_b / N_o para compensar el efecto de α sobre la BER. ¿Es posible compensar dicho efecto para cualquier valor de α? (justifique la respuesta)

Se propone a continuación una posible solución al problema anterior consistente en emplear una señalización multinivel sobre dos pulsos diferentes:

$$x_T(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n p_1(t-nT) + A\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n p_2(t-nT)$$

donde:
$$I_n = \cos\left(2\pi\frac{a_n}{16}\right) \qquad Q_n = \operatorname{sen}\left(2\pi\frac{a_n}{16}\right)$$

$p_1(t) = p(2t)$ $\qquad$ $p_2(t) = p_1(t-T/2)$ y $p(t)$ es el mismo pulso empleado en el sistema inicial.

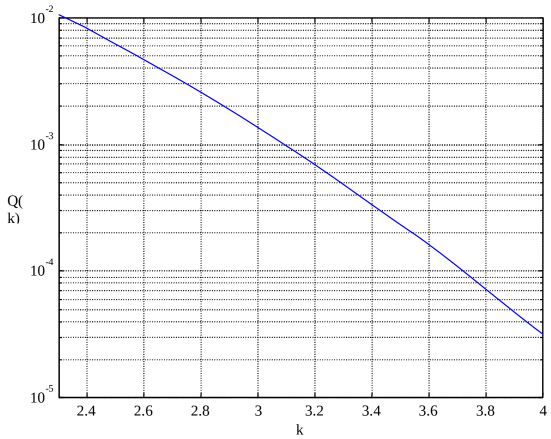
c) Dibuje los pulsos $p_1(t)$ y $p_2(t)$, y demuestre que son ortogonales. Obtenga una base ortonormal $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ y dibuje la constelación en el espacio de señal juntamente con las regiones de decisión óptimas.

d) En base a lo anterior, dibuje la estructura del receptor óptimo. Explique qué estrategia emplearía para la detección de los símbolos y razone por qué el sistema propuesto es insensible a la estimación de la amplitud.

e) Calcule la BER del nuevo sistema en función de la E_b / N_o

f) Calcule la menor E_b / N_o que permite el correcto funcionamiento del sistema para mantener la $\mathrm{BER} = 10^{-4}$ y compárela con respecto al sistema multinivel inicial del apartado a).

g) ¿Cómo ha cambiado el ancho de banda de transmisión con respecto al primer sistema multinivel inicial del apartado a)?



$$Q(k) = \int_k^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

Ejercicio 13. Modulación en cuadratura

Para transmisión via cable se propone el sistema de modulación mostrado en la figura 1.

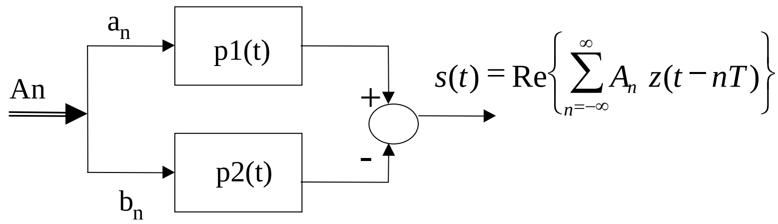


Figura 1

En donde $A_n = a_n + jb_n$ (a_n, b_n= $\pm A, \pm 3A, \ldots, \pm A(\sqrt{M}-1)$ para una modulación de M niveles), a_n y b_n son símbolos estadísticamente independientes y equiprobables; $z(t) = p_1(t) + jp_2(t)$; T=1/r es el periodo de símbolo y $r = 10\, Mbaudios$. En cuanto a los filtros p1(t) y p2(t) son pulsos conformadores paso-banda que se pueden diseñar como: $p_1(t) = p_{rN}(t)\cos 2\pi f_c t$ y $p_2(t) = p_{rN}(t)\,\mathrm{sen}\, 2\pi f_c t$, siendo fc=N/T con N>>1 y $p_{rN}(t)$ un pulso raíz de coseno realzado con roll-off α, es decir, $P_{rN}(f) = \sqrt{P_{Nyquist}(f)}$.

a.- Verificar que $p_2(t) = \hat{p}_1(t)$, es decir, que $p_1(t)$ y $p_2(t)$ son un par transformado de Hilbert. NOTA: Transf. Hilbert{X(f)}= -j.sign(f).X(f).

b.1.- Halle y dibuje en función de $P_{Nyquist}(f)$ la densidad espectral de s(t).

b.2.- Indique el mínimo ancho de banda que puede ocupar dicha señal, calcule su eficiencia espectral y compárela con la del sistema de banda base equivalente, es decir, de $\sqrt{M}$ niveles y de igual velocidad de bit rb. ¿A qué se debe que mantenga la misma eficiencia espectral?

b.3.- Considere que α=100% y se emplea una modulación con M=16. ¿Cuántos usuarios se pueden transmitir simultáneamente multiplexados en frecuencia en un ancho de banda disponible de 40 MHz?

c.- Halle la potencia media de la señal si M= 16.

d.- Diseñe el receptor óptimo en el caso de canal con ruido blanco Gaussiano: halle las respuestas impulsionales de los filtros $h_j(t)$ a emplear y el instante óptimo de muestreo (considere que el retardo global es td=0). Comente la posibilidad de emplear un transformador de Hilbert en recepción.

e.- Demuestre que en cada una de las ramas la señal está libre de ISI.

f.- Razone cómo se ha de codificar la señal de 16 símbolos para que la decisión y decodificación óptimas puedan hacerse en ramas independientes. Diseñe cuáles serían los umbrales de decisión en cada rama.

g.- Considere que el receptor óptimo se puede diseñar como dos ramas independientes y que el ruido del canal es Gaussiano con $S_w(f)=No/2$ (W/Hz). En dichas condiciones, halle la probabilidad de error de símbolo en función de la Eb/No.

Ejercicio 14. QPSK y ecualización compleja.

Sea una modulación QPSK de símbolos equiprobables i estadísticamente independientes entre sí:

$$s(t) = A_c \sum_{i=-\infty}^{+\infty} I[i] p(t-iT)\cos(2\pi f_c t) - A_c \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Q[i] p(t-iT)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$$
$$= i_s(t)\cos(2\pi f_c t) - q_s(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$$

Considere :

Símbolo	I[i]	Q[i]
1	+1	+1
2	-1	+1
3	-1	-1
4	+1	-1

Pulso base $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ y se cumple $f_c = Nr = \frac{N}{T}; N >> 1$

a) De una expresión para las componentes en fase y cuadratura de la señal s(t). Es decir, identifique las señales $i_s(t), q_s(t)$ en la expresión dada para *s(t)*. Obtenga una base ortonormal generadora del espacio de señal. Obtenga las coordenadas de señal respecto a la base dada y dibuje el espacio de señal.

b) Dibuje el esquema receptor óptimo resultante. Si la señal se transmite por un canal ideal de ruido aditivo blanco y gaussiano w(t), $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$, obtenga la *Probabilidad de error* P_e en función de E_b/N_0, siendo E_b la energía media que se transmite por bit.

c) Suponga a partir de ahora que el canal por el que se transmite esta señal produce distorsión que se puede modelar mediante el siguiente equivalente paso bajo para su respuesta impulsional: $b_h(t) = (2 + j0.5)\delta(t) + 0.5\delta(t-T)$

   Recuerde que por tanto el equivalente paso bajo de la señal recibida es $0.5(i_s(t) + jq_s(t)) * b_h(t)$

   Obtenga la expresión de las componentes en fase y cuadratura de la señal recibida.

d) Para la hipótesis de haber transmitido el símbolo 1, calcule la expresión de los vectores de señal recibidos respecto a la base ortonormal calculada en el apartado a: $Y[k/S_1] = S_1[k] + S_{ISI}[k] + N[k]$ y dibújelos en ausencia de ruido sobre el espacio de señal. Es decir, represente vectorialmente $S_1[k] + S_{ISI}[k]$.

e) Considerando que el espacio de señal resultante es simétrico en los 4 cuadrantes y que por tanto la Pe total coincide con la probabilidad de error condicionada al símbolo 1 (Pe/S_1), calcule de nuevo la P_e en función de la Eb/N_0. Para ello utilice las mismas regiones de decisión del apartado b y la misma definición para E_b (Energía media transmitida por bit).

f) Observe que después del muestreo, la respuesta total equivalente del sistema es $h[n] = 0.5(2\delta[n] + 0.5j\delta[n] + 0.5\delta[n-1])$ y que por tanto para diseñar un ecualizador complejo (Forzador de ceros) de dos coeficientes C_0 y C_1 que disminuya la ISI, los coeficientes deben verificar las ecuaciones de diseño: $h[n] * (C_0\delta[n] + C_1\delta[n-1]) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = 1 \end{cases}$

   Calcule los dos coeficientes complejos: C_0, C_1.

g) Obtenga el vector de ISI residual

h) Calcule las autocovarianzas y covarianzas cruzadas del nuevo vector de ruido. ¿Continúan las coordenadas del vector de ruido siendo estadísticamente independientes entre sí? Justifique la respuesta. NOTA: En este apartado obtenga los resultados en función de $C_0=C_{0R}+j\,C_{0I}$ y $C_1=C_{1R}+j\,C_{1I}$ y sustituya por su valor numérico únicamente al final.

i) Para justificar la mejora de la P_e dibuje de nuevo la representación vectorial de las señales ecualizadas en ausencia de ruido para el caso de haber transmitido el símbolo 1. Calcule el aumento de la distancia entre puntos de señal y límites de la correspondiente región de decisión. Compare con la situación sin ecualizar del apartado e.

TEMA 5. MODULACIONES AVANZADAS

Ejercicio 1. CDMA

El estándar de comunicaciones móviles se basa en la transmisión de señales mediante esquemas de espectro ensanchado o CDMA ("Code Division Multiple Access"). Esta técnica consiste en asignar una "firma" o código a cada usuario que le es propia. La "firma" de un usuario "k" es de la forma:

$$g_k(t) = \sum_{n=0}^{L-1} c_k(n)\, p_c(t - nT_c) \qquad 0 \le t \le T$$

en donde: * $c_k(n)$ es una secuencia de ±1 determinada y conocida de longitud L ("chips")
* $p_c(t)$ es un pulso de conformación de cada chip y de duración Tc
* Tc es el periodo de chip
* T es el periodo de símbolo tal que T= L.Tc

Típicamente, se considera que las firmas están normalizadas de modo que son de energía unitaria:

$$E_{gk} = \int_0^T \left|g_k(t)\right|^2 dt = 1$$

y las correlaciones cruzadas entre cada par de firmas son conocidas:

$$\rho_{ij}(\tau) = \int_0^T g_i(t)\, g_j(t+\tau)\, dt \qquad i \le j$$

Cada usuario utiliza su firma para generar su señal, de modo que transmite una señal de la forma:

$$s_k(t) = \sqrt{\xi_k} \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_k(i)\, g_k(t - iT)$$

donde $b_k(i)$=±1 y son los símbolos a transmitir. Por otra parte ξ_k es la energía promedio de bit del usuario k. Fíjese que la señal de cada usuario $s_k(t)$ se pude interpretar como si se tratara de una señal PAM digital con un pulso de conformación $g_k(t)$.

Finalmente, en CDMA todos los usuarios transmiten simultáneamente en el tiempo y en la misma banda de frecuencias, de modo que la señal recibida será de la forma:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{M} s_k(t) + n(t)$$

en donde M es el número de usuarios y n(t) es ruido que se considera Gaussiano Blanco (AWGN) con densidad espectral $S_{nn}(f)=N_o/2$ (Watts/Hz).

Para realizar el problema considere: * M=2 usuarios; $p(b_k(i)=1)=1/3$; $p(b_k(i)=-1)=2/3$ con k=1,2.

* Las firmas se han diseñado de tal modo que son ortonormales, es decir:

$$\rho_{12}(0)=\rho_{21}(0)=0; \quad \rho_{11}(0)=\rho_{22}(0)=1;$$
$$\rho_{12}(\tau)\neq 0 \quad \tau\neq 0; \quad \rho_{21}(\tau)\neq 0 \quad \tau\neq 0;$$

a.- Teniendo presente que la señal recibida por la estación base s(t) es la superposición temporal de las emisiones de los dos usuarios (señal compuesta), indique cuántas posibles formas de onda en s(t) puede observar la estación base durante un tiempo de símbolo (es decir, halle el alfabeto formado por símbolos compuestos). Para ello, especifique las expresiones analíticas de cada una de las formas de onda.
Indique la probabilidad asociada a cada una de las formas de onda.
¿Cuános bits estarán asociados a cada forma de onda s(t), es decir, a cada símbolo compuesto recibido?

b.- Determine la dimensión del espacio de la señal así como las expresiones de una posible base ortonormal de dicho espacio de señal. Dibuje la constelación de la señal s(t) y remarque, de nuevo, la probabilidad asociada a cada símbolo de la constelación.

c.- Calcule y dibuje los umbrales (contornos) de decisión para la detección óptima MAP. Escoja un símbolo y calcule la probabilidad de error del mismo.

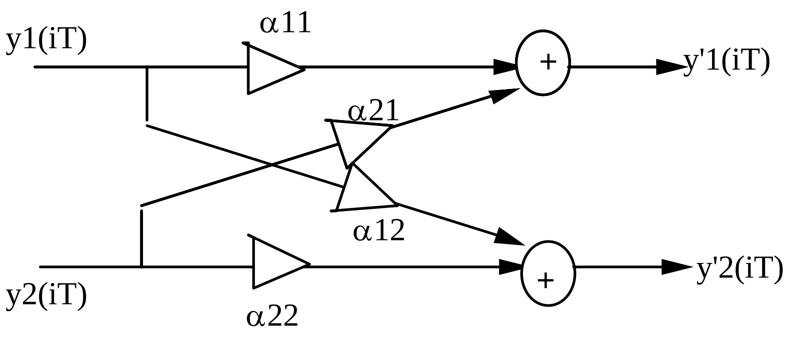
d.- Represente, detallando todas las constantes, el detector óptimo MAP que debería utilizarse en la estación base para recuperar la información de los dos usuarios por separado. A partir de las probabilidades de error de cada usuario, calcule la probabilidad de error del mismo símbolo que escogió en el apartado **c** y compruebe que se obtiene el mismo resultado.

Considere ahora que las firmas g1(t) y g2(t) son de energía unidad ($\rho_{11}(0)=\rho_{22}(0)=1$) pero no son ortogonales entre sí ($\rho_{12}(0)=\rho_{21}(0)=\rho\neq 0;$) y que no se modifica el receptor propuesto en el apartado **d**. Bajo estas condiciones, el receptor detecta a su salida las siguientes señales

$$\text{usuario 1:} \quad y_1(iT)=b_1(iT)+b_2(iT)\rho+\beta_1$$
$$\text{usuario 2:} \quad y_2(iT)=b_1(iT)\rho+b_2(iT)+\beta_2;$$

siendo $\beta 1$ y $\beta 2$ las componentes del ruido en el espacio de señal.
Se observa, por tanto, que aparece interferencia entre usuarios que degrada el sistema.

e.- Obtenga el valor de los coeficientes $\{\alpha_{ij}\}$ i,j=1,2 que permiten recuperar los dos usuarios bajo un criterio de mínimo error cuadrático medio.



Ejercicio 2. BPSK y Diversidad

Considere una señal modulada en BPSK (Binary Shift Keying) con pulso rectangular a una velocidad de r símbolos por segundo y portadora w_o. Dicha señal se transmite por un canal ideal que presenta ruido blanco de densidad espectral Sw(f)=No/2 (Watts/Hz)

a) Dibuje el receptor óptimo e indique cual es la tasa de error del sistema en función de la Eb/No.

Ahora el canal deja de ser ideal y presenta una respuesta constante en todo el margen de frecuencia de la señal transmitida e igual a $\alpha_o.e^{j.\phi_o}$. El nivel de ruido se mantiene y se asume que la respuesta del canal es conocida en el receptor en modulo y fase,

b) Demuestre que el receptor del apartado (a) deja de ser óptimo e indique cuál sería el nuevo receptor que usa el conocimiento de la respuesta del canal.

Para aliviar el problema que presenta la respuesta del canal anterior, que denominaremos con el número cero, puede recurrirse al empleo de diversidad. En este caso, la misma señal se hace llegar por medios diferentes al receptor. Los procedimientos para conseguir diferentes canales pueden ser: en frecuencias diferentes, por transmisores diferentes, con secuencias de ensanchamiento (*spreading*) diferentes.

c) Ponga un esquema de cada una de las posibilidades mencionadas e indique, brevemente, sus características.

A continuación considere que, por cualquiera de los medios mencionados, se consigue hacer llegar la misma información al receptor vía L canales de respuestas $\alpha_k.e^{j.\phi_k}$ (k=0,L-1), todas ellas conocidas al receptor.

d) Dibuje el nuevo receptor y calcule la tasa de error resultante que evidencia la mejora introducida por la diversidad de orden L.

e) Como habría de modificarse el receptor anterior si el 20% de los canales usados tiene una interferencia Gaussiana de nivel J_o (Watts/Hz) y cuál sería la nueva tasa de error.

Considere ahora que se utiliza de nuevo un solo canal de ancho de banda W. Dicho canal puede representarse como:

$$h(t)=\sum_{l=0}^{L-1}c(l).\delta(t-\frac{l}{W})$$

f) Comente lo correcto de esta representación del canal.

Asumiendo la representación anterior como correcta, y que se utiliza una señalización RZ con tiempo de reposo mayor que L/W seg.

g)Demuestre que el receptor para este canal es similar al del apartado (d) y calcule la tasa de error correspondiente. Comente asimismo, que tipo de diversidad se está empleando en este sistema de transmisión.

Ejercicio 3. CDMA, OFDM y prefijo cíclico

Disponible resuelto en colección Edicions UPC

La transmisión de prefijo cíclico consiste en enviar una réplica de la última parte del símbolo (T_{cp} seg.) al principio de cada símbolo y es una técnica utilizada para evitar la ISI entre símbolos consecutivos en tiempo. En este ejercicio se analiza su influencia tanto para CDMA (Code Division Multiple Access) como para OFDM (Othogonal Frequency Division Multiplexing). Se trabajará en ambos casos con las señales equivalentes paso bajo.

Para **CDMA** suponga que la señal a la entrada del receptor es de la forma: $r(t) = s(t) + w(t)$.
Se considerará:

- $w(t)$ ruido real gaussiano de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$
- La señal útil para K usuarios síncronos es $s(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k[n] \varphi_k(t - nT) * h_k(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k[n] \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t - nT - \tau) h_k(\tau) d\tau$
- $h_k(t)$ representa la respuesta impulsional del canal para el usuario *k*. Su duración temporal es menor que la duración del prefijo cíclico T_{cp} para todos los usuarios.
- La función utilizada para transmitir los símbolos del usuario *k* mediante un código de L chips, es: $\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T - T_{cp}}} \sum_{l=-L_{cp}}^{L-1} c_k[l] \Pi\left(\frac{t - \frac{T_c}{2} - T_{cp} - lT_c}{T_c} \right)$. Con $c_k[l] = c_k[l + L]$, $T_{cp} = L_{cp} T_c$, $T = T_{cp} + LT_c$ y $L_{cp} < L$.
- Códigos idealmente ortogonales entre sí: $\sum_{l=0}^{L-1} c_k[l] c_j[l] = L\delta[k - j]$
- Los símbolos de todos los usuarios son binarios, equiprobables y polares: $\alpha_k[n] = \pm \frac{d}{2}$

Se pide:

a) Demuestre mediante el dibujo de un caso particular de $\varphi_k(t)$, que las funciones $\varphi_k(t)$ llevan el prefijo cíclico: L=10 chips, L_c =3 chips y $c_k[l] = \begin{cases} +1, l \text{ par} \\ -1, l \text{ impar} \end{cases}$

b) Demuestre en general que las funciones $\varphi_k(t)$ son ortonormales en (T_{cp}, T). Es decir: $\int_{T_{cp}}^{T} \varphi_k(t) \varphi_j^*(t) dt = \delta[k - j]$

c) Calcule la energía transmitida por bit, en función de la distancia entre símbolos *d* y de los parámetros que considere necesarios.

Suponga que el receptor es multiusuario y consiste en un banco de *K* filtros adaptados de respuesta: $g_i(t) = \begin{cases} \varphi_i^*(T - t) & 0 \le t \le T - T_{cp} \\ 0 & otros \end{cases}$. A la salida se realiza el muestreo a $t_m = (m+1)T$.

Se pide:

d) Demuestre que la señal a la salida del filtro "*i*" : $y_i(t_m) = \int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} r(\lambda) \varphi_i^*(\lambda - mT) d\lambda$

puede expresarse como:

$$y_i(t_m) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k [m] \rho_{ki} + \beta_i (t_m) \quad \text{con} \qquad \rho_{ki} = \int_0^{T_{cp}} h_k(\tau) \int_{T_{cp}}^{T} \varphi_k(\gamma - \tau) \varphi_i^*(\gamma) d\gamma d\tau \qquad (1)$$

Observe que en CDMA mediante la transmisión del prefijo cíclico se evita la ISI temporal pero no las interferencias entre usuarios.

NOTA: Independiente del resultado obtenido en el apartado anterior, considere válida la expresión (1), tanto para CDMA como para OFDM.

e) Demuestre que las componentes de ruido $\beta_i(t_m)$ entre los diferentes filtros se hallan incorreladas. Para ello calcule la expresión $E\left[\beta_k(t_m)\beta_i^*(t_m)\right]; 1 \le k \le K, 1 \le i \le K$

Agrupando las salidas de los correladores se obtiene el vector $\underline{\mathbf{y}}(t_m) = \begin{pmatrix} y_1(t_m) \\ : \\ y_K(t_m) \end{pmatrix}$.

Agrupando las amplitudes binarias de todos los usuarios se obtiene el vector: $\underline{\mathbf{a}}[m] = \begin{pmatrix} \alpha_1[m] \\ : \\ \alpha_K[m] \end{pmatrix}$. La matriz cuadrada $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$, es la formada por los elementos ρ_{ki} de la expresión (1).

La función de densidad de probabilidad conjunta condicionada $f_{\underline{\mathbf{y}}/\underline{\mathbf{a}}}(\underline{\mathbf{y}}(t_m)/\underline{\mathbf{a}}(m))$ del vector formado por las salidas de los correladores: $\underline{\mathbf{y}}(t_m)$, es normal o gaussiana y se halla condicionada por el vector de coordenadas binarias $\underline{\mathbf{a}}(m)$. Se pide que calcule:

f) La media o valor esperado condicionado $\underline{\boldsymbol{\mu}} = E\left[\underline{\mathbf{y}}(t_m)/\underline{\mathbf{a}}(m)\right]$

g) La matriz de covarianza $\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = E\left[(\underline{\mathbf{y}}(t_m) - \underline{\boldsymbol{\mu}})(\underline{\mathbf{y}}(t_m) - \underline{\boldsymbol{\mu}})^T / \underline{\mathbf{a}}(m)\right] = E\left[\underline{\mathbf{n}}(t_m)\underline{\mathbf{n}}(t_m)^T\right]$, donde $\underline{\mathbf{n}}(t_m)$, es el vector formado por las componentes de ruido $\beta_i(t_m), 1 \le i \le K$

Para eliminar la interferencia entre los diferentes usuarios y facilitar de este modo la detección, se propone decorrelar la señal, es decir, trabajar con el nuevo vector:

$$\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1} \underline{\mathbf{y}}(t_m)$$

h) Calcule de nuevo el vector media y la matriz de covarianza del nuevo vector $\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m)$, condicionado por $\underline{\mathbf{a}}(m)$. (Ver NOTA al final del ejercicio).

i) Para el usuario "*i*"se estima $\hat{\alpha}_i[m]$ a partir de la componente $\hat{y}_i(t_m)$. Por ser la amplitud a detectar, binaria y polar, el umbral de decisión es igual a cero. Si K=3 usuarios y $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\rho^2 \end{pmatrix}$, obtenga la expresión de la componente $\hat{y}_1(t_m)$, correspondiente al usuario i=1, identificando señal útil y ruido y demostrando que no hay interferencia entre usuarios.

j) Calcule la BER del usuario *i*=1, para la situación del apartado anterior, en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, del cociente $\frac{T_{CP}}{T}$ y del coeficiente ρ. Comente la pérdida en dB de $\frac{E_b}{N_0}$ respecto al caso de canales ideales.

Para **OFDM**, considere como señal útil $s(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k[n]\varphi_k(t-nT) * h(t)$.

* La función $\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\exp\left(j2\pi kf_0(t-T_{cp})\right)\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ cumple $f_0 = \frac{1}{T-T_{cp}}$.

* El ruido $w(t)$ es gaussiano complejo, y tanto su parte real como su parte imaginaria presentan densidad espectral $\frac{N_0}{2}$ y son estadísticamente independientes entre sí.

* K es ahora el número de sub-portadoras. Los símbolos son polares, binarios, equiprobables: $\alpha_k[n] = \pm\frac{d}{2}$.

* La expresión (1) sigue siendo válida si la duración de la respuesta impulsional del canal *h(t)* es menor que T_{cp}. Observe que en OFDM $h_k(t) = h(t); 1 \le k \le K$.

k) Demuestre que las funciones $\varphi_k(t)$ son ortonormales en (T_{cp}, T). Calcule la energía transmitida por bit, en función de la distancia entre símbolos *d* y de los parámetros que considere necesarios.

l) Calcule para OFDM la expresión particular de los coeficientes ρ_{ki} de la expresión (1) en función de la transformada de Fourier de *h(t).* Observe que en este caso los coeficientes ρ_{ii} pueden ser complejos. Obtenga la expresión de la señal $y_i(t_m)$, identificando señal útil y ruido, complejo en este caso y demostrando que no hay interferencia entre sub-portadoras.

m) Para el usuario "*i*"se estima $\hat{\alpha}_i[m]$ a partir de $real\left(\frac{y_i(t_m)}{\rho_{ii}}\right)$. Por ser la amplitud a detectar, binaria y polar, el umbral de decisión es igual a cero. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ y de los parámetros que considere necesarios.. Previamente identifique el término de ruido que queda presente en detección y calcule su potencia. Comente la pérdida en dB de $\frac{E_b}{N_0}$ respecto al caso de canal ideal.

NOTA:

- Sea el vector aleatorio: $\underline{\mathbf{v}}$ y la matriz determinista $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. Dado $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{v}}$, se cumple $E\left[\underline{\mathbf{x}}\right] = \underline{\underline{\mathbf{A}}}E\left[\underline{\mathbf{v}}\right]$ y $E\left[\left(\underline{\mathbf{x}} - E\left[\underline{\mathbf{x}}\right]\right)\left(\underline{\mathbf{x}} - E\left[\underline{\mathbf{x}}\right]\right)^T\right] = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ con $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = E\left[\left(\underline{\mathbf{v}} - E\left[\underline{\mathbf{v}}\right]\right)\left(\underline{\mathbf{v}} - E\left[\underline{\mathbf{v}}\right]\right)^T\right]$

Ejercicio 4. ICI en OFDM

Disponible resuelto en comweb.upc.edu

En una modulación basada en frecuencias ortogonales el equivalente paso bajo de la señal transmitida se expresa como:

$$b_s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=1}^{N}\alpha_l\left[m\right]\phi_l(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=1}^{N}\alpha_l\left[m\right]\exp\left(j2\pi lrt\right)\tfrac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\tfrac{t-mT}{T}\right)$$
$$r = \tfrac{1}{T}; N >> 1$$

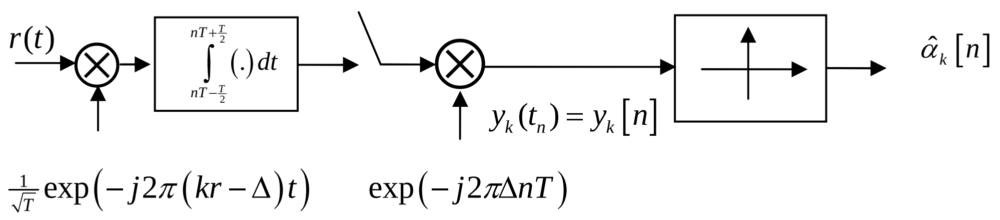
Los símbolos son equiprobables, estadísticamente independientes entre sí y complejos, y corresponden a una modulación QPSK ($\alpha_l\left[m\right] = \pm\frac{d}{2} + j\left(\pm\frac{d}{2}\right)$). La recepción de la señal en canal ideal ($h_c(t) = \delta(t)$) AWGN, y tras la demodulación a banda base, se modela como:

$$r(t) = b_s(t) + n(t)$$

$n(t)$ es el ruido paso bajo complejo de media nula y gaussiano: $n(t) = i_n(t) + jq_n(t)$

$$S_{i_n}(f) = S_{q_n}(f) = N_0; \qquad S_{i_n q_n}(f) = S_{q_n i_n}(f) = 0$$

Cuando en recepción la señal se demodula con un error en la frecuencia portadora de ΔHz y $\Delta << r$ el receptor es equivalente a N sistemas como el mostrado en la figura:



Se pide:

a) Inicialmente se supone error de frecuencia nulo ($\Delta = 0$), halle la probabilidad de error de bit (BER) del sistema en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$.

A partir de este punto considere error de frecuencia no nulo $\Delta \neq 0$ *ya que se propone analizar la degradación producida en el sistema por el error de frecuencia portadora en recepción y se analiza únicamente este efecto sobre la secuencia de símbolos centrales* $\alpha_k\left[n\right]; k = \frac{N}{2}$ *por ser el caso de mayor degradación.*

b) Identifique el término de ICI: $c[n]$ en la correspondiente variable de decisión: $y_{\frac{N}{2}}[n] = A\alpha_{\frac{N}{2}}[n] + c[n] + \beta[n]$, así como el término que afecta al símbolo deseado: *A*.

Se asume gaussianidad para el término de ICI, por tanto, $c[n]$ se puede modelar como una variable aleatoria gaussiana compleja de media nula, independiente tanto de la señal útil como del ruido y de varianza σ_c^2 tanto para la parte real como para la parte imaginaria.

c) Demuestre que la varianza de $c[n]$ es $\sigma_c^2 = \frac{d^2}{4}\left(1-\rho^2\right)$ tanto para la parte real como para la parte imaginaria. Obtenga la expresión del parámetro ρ si $\sum_{n=\frac{-N}{2}+1}^{+\frac{N}{2}} \text{sinc}^2\left(n+\frac{\Delta}{r}\right) \simeq 1$.

d) Calcule la probabilidad de error de bit (BER) en las condiciones dadas y para el símbolo central ($k=\frac{N}{2}$), inicialmente en función del parámetro ρ y del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, y posteriormente evalúe la degradación en dB que produce el error de frecuencia cuando $\frac{\Delta}{r}=0.05$ y $\frac{E_b}{N_0}=5$ respecto a la situación considerada en el primer apartado.

Ejercicio 5. BER y diversidad

Disponible resuelto en comweb.upc.edu

Se desea transmitir una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes entre sí a una velocidad constante de $r_b = \frac{1}{T_b}$ bps y transmitiendo en media una energía por bit E_b.

La señal se transmite por un canal de función de transferencia $H_c(f)$ y ruido *w(t)* blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f)=\frac{N_0}{2}$. En este ejercicio se evalúan las prestaciones de la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, mediante diferentes técnicas que utilizan diversidad frecuencial.

La secuencia de bits se codifica mediante un código binario y polar y se obtiene la secuencia de símbolos: $\alpha[n] = \pm\frac{d}{2}$. A partir de la misma secuencia $\alpha[n]$, en el transmisor se generan dos señales distintas $s_1(t), s_2(t)$:

$$s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n]\varphi_1(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n]\sqrt{\tfrac{2}{T}}\text{sinc}(\tfrac{t-nT}{T})\cos\left(2\pi f_1 t\right);$$

$$s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n]\varphi_2(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n]\sqrt{\tfrac{2}{T}}\text{sinc}(\tfrac{t-nT}{T})\cos\left(2\pi f_2 t\right)$$

$$f_2 = 2f_1; \quad f_1 = \tfrac{N}{T}; \quad N >> 1; \quad T = T_b = \tfrac{1}{r_b} = \tfrac{1}{r}$$

La función de transferencia del canal es: $H_c(f) = \begin{cases} \gamma_1 & f_1 - r < |f| < f_1 + r \\ \gamma_2 & f_2 - r < |f| < f_2 + r \end{cases}$

Con $\gamma_1 \in \mathbb{R}; \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}; \quad \gamma_1 + \gamma_2 \geq 0$

Se pide:

a. Proporcione la expresión de la respuesta impulsional del filtro adaptado (no causal): $\varphi_1(-t)$, necesario para demodular la señal $s_1(t)$. Si a la salida de dicho filtro, la señal se muestrea a $t_k = kT$, obtenga la expresión de las correspondientes muestras $y_1[k] = y_1(t_k)$, y la función densidad de probabilidad de la componente de ruido en dicha muestra. Repita la respuesta con el filtro adaptado $\varphi_2(-t)$ necesario para la demodulación de $s_2(t)$ y su correspondiente salida $y_2[k] = y_2(t_k)$.

ESTRATEGIA 1: Se transmite la señal $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ y se detectan los símbolos a partir de la variable $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$

b. Calcule y dibuje la densidad espectral de la señal transmitida $s(t)$. Obtenga la energía media transmitida por bit en función de *d*. Utilice la expresión proporcionada en las Notas de ayuda.
c. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Comente qué ocurriría si casualmente $\gamma_1 = -\gamma_2$.

ESTRATEGIA 2: Se transmite la señal $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ y se detectan los símbolos a partir de la variable $y[k] = ay_1[k] + by_2[k]$, siendo $a,\ b$ dos constantes a calcular.

d. Determine el valor de la constante *b* en función de *a* para que $y(t_k) = \alpha\left[k\right] + n(t_k)$, es decir $y\left[k\right] = \alpha\left[k\right] + n\left[k\right]$
e. Obtenga los valores de *a* y *b* que minimiza la BER minimizando la varianza σ^2 del ruido $n[k]$.
f. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Comente qué ocurriría si $\gamma_1 = -\gamma_2$.

ESTRATEGIA 3: Se transmite la señal

$$s(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha[2p]\varphi_1(t-2pT) + \alpha[2p+1]\varphi_2(t-2pT) - \alpha[2p+1]\varphi_1(t-2pT-T) + \alpha[2p]\varphi_2(t-2pT-T)\right)$$

y se detectan los símbolos a partir de la variable $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$, que puesta en forma de vector, resulta

$$\mathbf{v}\left[q\right] = \begin{pmatrix} y[2q] \\ y[2q+1] \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \alpha[2q] \\ \alpha[2q+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n[2q] \\ n[2q+1] \end{pmatrix}.$$

g. Obtenga la energía media transmitida por bit en función de *d*.
h. Identifique la matriz de canal $\mathbf{P}$ en la expresión del vector $\mathbf{v}[q]$.

i. Determine una matriz cuadrada $\mathbf{H}$, aplicando el criterio de Forzador de Ceros, tal que:

$$\mathbf{Hv}[q] = \begin{pmatrix} \alpha[2q] \\ \alpha[2q+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n'[2q] \\ n'[2q+1] \end{pmatrix}$$

j. Obtenga la matriz de covarianza del nuevo vector de ruido $\begin{pmatrix} n'[2q] \\ n'[2q+1] \end{pmatrix}$.

k. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. ¿Puede considerarse que el receptor es óptimo si se detectan cada una de las coordenadas (símbolos pares e impares) por separado?

Ejercicio 6. CDMA

La estación base de un sistema CDMA síncrono transmite la señal:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{4} s_k(t) \quad \text{con}$$

$$s_k(t) = A_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_k[n] p_k(t - nT);$$

$$\{b_k[n]\} = \pm 1; k = 1, 2, 4$$

Los pulsos son las funciones de Walsh:

$$p_k(t) = \sum_{l=0}^{3} c_k[l] g(t - lT_c); \quad \mathrm{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{T_c}} \Pi\left(\frac{t - T_c/2}{T_c}\right)$$

Donde los coeficientes de cada función se pueden escribir de manera compacta como los vectores código:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2}[1,-1,1,-1]^T ; \mathbf{c}_2 = \frac{1}{2}[1,1,-1,-1]^T ; \mathbf{c}_3 = \frac{1}{2}[1,-1,-1,1]^T ; \mathbf{c}_4 = \frac{1}{2}[1,1,1,1]^T$$

Las señales 1, 2 y 4 corresponden a la información de tres usuarios mientras que la señal 3 es una señal piloto con bits perfectamente conocidos, útil para identificación de canal y/o ecualización.

a) Dibuje los pulsos $p_k(t)$, halle una base ortonormal y exprese las diferentes señales en función de las funciones base y de las energías promedio por bit de cada señal.

b) Demuestre que la correlación cruzada entre dos pulsos, definida como $r_{p_i p_j}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(t+\tau) p_j(t) dt$, en los múltiplos enteros de T_c, puede escribirse en función de los códigos como:

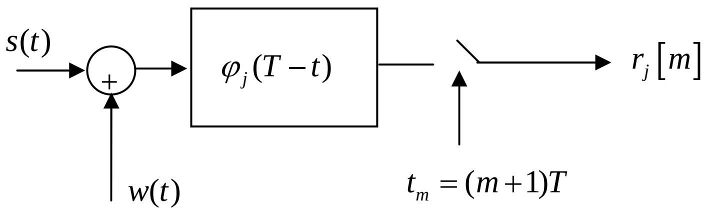
$$r_{p_i p_j}[mT_c] = r_{c_i c_j}[m] = \sum_{l=0}^{3-m} c_i[m+l] c_j[l]; m > 0; r_{c_i c_j}[-m] = r_{c_j c_i}[m]$$

Verifique que la ortogonalidad de los códigos implica la de los pulsos.

Teniendo en cuenta que la correlación entres dos múltiplos enteros contiguos es lineal, dibuje la correlación del pulso piloto $p_3(t)$, $r_{p_3}[\tau]$.

c) Suponiendo ruido blanco gaussiano con una densidad espectral $\frac{N_0}{2}$ y canal ideal,

Obtenga la secuencia de salida de la rama j-ésima para j = 1,2,3,4 del receptor de la figura:



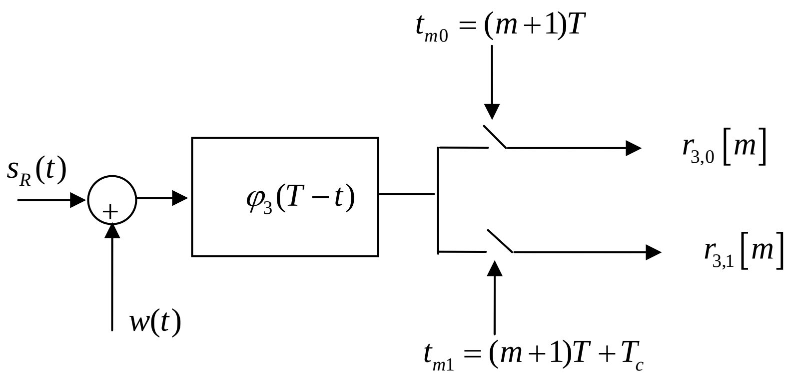
Donde $\varphi_j(t)$ es la función base j-ésima

Sea ahora un canal que presenta una reflexión tal que la señal recibida es de la forma: $s_R(t) = \alpha_0 s(t) + \alpha_1 s(t - T_c)$

d) Obtenga de nuevo la secuencia de salida de la rama j-ésima para j = 1,2,3,4, separando la señal útil, la ISI, la MAI(interferencia de acceso múltiple) y el ruido. Expréselo en forma matricial de la forma:

$$\mathbf{r}[m] = \mathbf{H}[0]\mathbf{s}[m] + \mathbf{H}[1]\mathbf{s}[m-1] + \mathbf{w}[m];$$
$$\mathbf{s}[m] = \left[\sqrt{E_{b_1}}b_1[m], \sqrt{E_{b_2}}b_2[m], \sqrt{E_{b_3}}b_3[m], \sqrt{E_{b_4}}b_4[m]\right]^T$$
$$\mathbf{r}[m] = \left[r_1[m], r_2[m], r_3[m], r_4[m]\right]^T; \mathbf{w}[m] = \left[w_1[m], w_2[m], w_3[m], w_4[m]\right]^T$$

Con objeto de obtener una estima de los parámetros del canal, se utiliza el receptor de la figura para la rama 3 de la señal piloto



e) Obtenga las salidas suponiendo que durante la estima del canal sólo se transmite la señal piloto $s_3(t)$. Suponiendo que los bits de la señal piloto son: $\{b_3[n]\} = 1; \forall n$, obtenga una estima de los coeficientes del canal, α_0, α_1.
Si se dispone de $r_{30}[m]$ y $r_{31}[m]$ para m = 0,1,... K-1, proponga un procedimiento para mejorar la estima de de los coeficientes.