Problemas Resolts i Proposats
de Probabilitat i Procesos Estocàstics

M.A. Fiol
Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya
email: `fiol@mat.upc.es`
webpage: `www-ma4.upc.es/~fiol`

Abstract

Es resolen i plantegen diversos problemes de probabilitat, variables aleatòries i processos estocàstics. Per cada problema s'indica, si es coneix, una possible referència (per exemple, 3-[1] significa el problema 3 de la referència [1]) precedida pels símbols "$=$" (igual a); "$\simeq$" (similar a); "$\sim$" (relacionat amb); "$\subset$" (cas particular de); "$\supset$" (generalització de). Pels problemes proposats, s'inclouen solucions i/o possibles indicacions per a la resolució.

1 Probabilitat Combinatòria

Recordem breument els nombres combinatoris més usuals i algunes relacions entre ells. Considerem el conjunt dels primers n nombres naturals $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$.

- **Permutacions de n elements:** Ordenacions possibles dels elements de $\mathbb{N}_n$ (seqüències de longitud n amb tots els elements distints):

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1. \tag{1}$$

- **Variacions de n elements presos de k en k ($k \leq n$):** Possibles seqüencies de longitud k de elements distints de $\mathbb{N}_n$:

$$V_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1); \qquad V_n^n = P_n. \tag{2}$$

- **Combinacions de n elements presos de k en k ($k \leq n$):** Possibles subconjunts de grandària k (cardinalitat) de elements (distints) de $\mathbb{N}_n$:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}; \qquad C_n^k = V_n^k P_k. \tag{3}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \qquad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k = \cdots \tag{4}$$

- **Variacions amb repetició de n elements presos de k en k:** Possibles seqüencies de longitud k de elements (no necessariament distints) de $\mathbb{N}_n$:

$$VR_n^k = n^k. \tag{5}$$

- **Combinacions amb repetició de n elements presos de k en k:** Possibles grups de grandària k de elements (no necesariament distints) de $\mathbb{N}_n$:
$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}. \tag{6}$$

1.1 *De un conjunt Ω amb $n \geq 1$ elements s'escull a l'atzar un subconjunt A. Calculeu la probabilitat que A tingui un nombre parell d'elements.*

Sabem que el nombre total de subconjunts de Ω es $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$. D'altra banda, el nombre de subconjunts amb cardinalitat parella es pot calcular a partir de $\sum_{k \text{ parell}} \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ senar}} \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$, d'on $\sum_{k \text{ parell}} \binom{n}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$. Per tant,
$$\mathrm{P}(|A| \text{ parell}) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$
Aquest resultat també es pot raonar de la següent manera. Si n es parell, per cada conjunt A amb cadinalitat $|A|$ parella n'hi ha un altra, $\overline{A} = \Omega \setminus A$ amb cardinalitat $|\overline{A}| = n - |A|$ senar. Pel cas n senar, considerem un element donat $a \in \Omega$. Aleshores, la "imatge" del conjunt A, amb $|A|$ parell, es el conjunt $A^* := \overline{A} \cup \{a\}$ si $a \in A$, i $A^* := \overline{A} \setminus \{a\}$ si $a \notin A$. Noteu que, en amdós casos, $|A^*|$ es senar.

1.2 (= 1-[1]) *Es genera un nombre de n xifres a l'atzar. Calculeu la probabilitat que surti cap-i-cua.*

El total de nombres de n xifres es 10^n (se suposa que cada xifra pot ésser qualsevol del 10 digits $0, 1, \ldots, 9$; els 0's a l'esquerra també compten). Per altra banda, un nombre cap-i-cua de n xifres $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ queda determinat per les $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ primeres (on $\lceil x \rceil$ indica el nombre sencer més gran no inferior a x), ja que
$$a_n = a_1, \quad a_{n-1} = a_2, \quad \ldots, \quad a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} = a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$
(On $\lfloor x \rfloor$ indica la part sencera de x, o nombre sencer més petit no superior a x. Noteu que, si n és senar, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}$ i, per tant, $a_{(n+1)/2}$ correspon a la xifra "del mig" que no té "cap parella"). Per tant, de tals nombres n'hi ha $10^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, i la probabilitat que es demana és:
$$\mathrm{P}(\texttt{cap-i-cua}) = \frac{10^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{10^n} = \frac{1}{10^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \begin{cases} \frac{1}{10^{n/2}}, & n \text{ parell;} \\ \frac{1}{10^{(n-1)/2}}, & n \text{ senar.} \end{cases}$$

1.3 (= 2-[1]) *Es tira un dau sis vegades. Quina és la probabilitat que surtin el sis resultats diferents?*

El nombre de casos posibles és 6^6 (ja que per a cada tirada hi ha 6 possibles resultats), mentre que el nombre de casos favorables és 6! (possibles ordenacions del sis resultats diferents. Així,
$$\mathrm{P}(\texttt{6 resultas diferents}) = \frac{5!}{6^5} = \frac{5}{324} \approx 0.0154.$$

1.4 (= 3-[1]) *Qué és més probable: Treure alguna vegada un as tirant un dau 4 vegades o treure alguna vegada dos asos tirant dos daus 24 vegades?*

La probabilitat del primer esdeveniment és:

$$\mathrm{P}(\texttt{al menys 1 as en 4 tir.}) = 1 - \mathrm{P}(\texttt{cap as en 4 tir.}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177,$$

mentre que la probabilitat del segon esdeveniment és

$$\mathrm{P}(\texttt{algun doble as en 24 tir.}) = 1 - \mathrm{P}(\texttt{cap doble as en 24 tir.}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914.$$

Per tant, la primera probabilitat és la més gran.

1.5 (= 5-[1]) *Una baralla francesa sense comodins té 52 cartes (4 pals, 13 nombres o valors). Calculeu la probabilitat de les següents jugades en una mà de poker (5 cartes):* `parella` *(dues cartes del mateix nombre);* `doble parella` *(dues cartes d'un valor i dues cartes d'un altre valor);* `trio` *(tres cartes del mateix nombre);* `escala` *(cinc cartes en seqüència o valors consecutis, a on els asos poden utilitzar-se com primer o com últim de la serie);* `color` *(cinc cartes del mateix pal);* `full` *(tres cartes d'un valor y dues cartes d'un altre valor);* `poker` *(quatre cartes del mateix nombre);* `escala de color` *(cinc cartes en seqüència del mateix pal);* `escala real` *(és la jugada màxima possible, les cinc cartes son* `A,K,Q,J,10` *del mateix pal).*

En cada cas, utilitzem la fórmula "casos favorables" partit per "casos possibles". Noteu que, al fer el recompte, a vegades es consideren les cartes ordenades i altres vegades no. En general, es pot fer de les dues maneres, però sovint una d'elles resulta més fàcil que l'altra. Segons com es faci, és necessari fer el recompte restant alguna quantitat (per exemple, en el cas de la `escala` calculat abaix). Això es degut a que no s'han de comptar les jugades similars de més valor (en el nostre cas, l'`escala de color`).

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\texttt{parella}) &= \frac{C_5^2\cdot 13\cdot V_4^3\cdot 48\cdot 44\cdot 40}{V_{52}^5}\approx 0,4225;\\
\mathrm{P}(\texttt{doble parella}) &= \frac{C_5^4\cdot 3\cdot 52\cdot 3\cdot 48\cdot 3\cdot 44}{V_{52}^5}\approx 0,04753;\\
\mathrm{P}(\texttt{trio}) &= \frac{C_5^3\cdot 52\cdot 3\cdot 2\cdot 48\cdot 44}{V_{52}^5}\approx 0,0211;\\
\mathrm{P}(\texttt{escala}) &= \frac{9(4^5-4)}{C_{52}^5}\approx 0,003924;\\
\mathrm{P}(\texttt{color}) &= \frac{4C_{13}^5}{C_{52}^5}\approx 0,00198;\\
\mathrm{P}(\texttt{full}) &= \frac{C_5^2\cdot 13\cdot V_4^2\cdot 12\cdot V_4^3}{V_{52}^5}\approx 0,00144;\\
\mathrm{P}(\texttt{poker}) &= \frac{13\cdot 48}{C_{52}^5}\approx 0,00024;\\
\mathrm{P}(\texttt{escala de color}) &= \frac{9\cdot 4}{C_{52}^5}\approx 0,0000138;\\
\mathrm{P}(\texttt{escala real}) &= \frac{4}{C_{52}^5}\approx 0,000001539.
\end{aligned}$$

1.6 (= 6-[1]) *Es permuten a l'atzar les 8 lletres* `AAAACTTR`. *Quina és la probabilitat que surti* `CATARATA`*?*

$$\mathrm{P}(\texttt{CATARATA})=\frac{P_4P_2}{P_8}\approx 0,00119.$$

1.7 ($\sim$ 25-[1]) *Donat un grup de n persones, quina és la probabilitat que n'hi hagi dues que celebrin l'aniversari el mateix dia? (Es suposa que tots els anys tenen 365 dies).*

Obviament, la probabilitat esmentada val 0 si $n=1$ i val 1 si $n>365$. Per $2\le n\le 365$ es té:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\texttt{alguna coincidencia}) &= 1-\mathrm{P}(\texttt{tots els aniversaris diferents})\\
&= 1-\frac{V_{365}^n}{VR_{365}^n}=1-\frac{365\cdot 364\cdots(365-n+1)}{365^n}.
\end{aligned}$$

Per exemple, per $n=30$ s'obté $\mathrm{P}(\texttt{alguna coincidencia})\approx 0,7063$.

1.8 ($\sim$ 1.8.2-[3]) *Una moneda amb* $\mathrm{P}(\texttt{cara})=p$, $\mathrm{P}(\texttt{creu})=q$ *es tira repetidament. Quina és la probabilitat que, a la tirada n-ésima ($n\ge 2$),* *(a) A: una cara apareixi per primera vegada?*

(b) B: els nombres de cares i de creus coincideixen?

(c) C: exactament dues cares apareguin juntes (en tirades consecutives)?

(d) D: apareguin exactament dues cares (no necesariament seguides)

(e) E: surtin al menys dues cares?

(a) En aquest cas, a les primeres $n-1$ tirades ha surtit creu. Per tant, $\mathrm{P}(A) = q^{n-1}p$.

(b) Obviament, $\mathrm{P}(B) = 0$ si n és senar. Altrament, sigui $n = 2k$. Aleshores, B significa que han surtit k cares i k creus en qualsevol ordre. Per tant

$$\mathrm{P}(B) = \binom{2k}{k}(pq)^k.$$

(c) Les dues cares poden aparèixer a les tirades $i, i+1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. A les restants tirades surt creu. Per tant,

$$\mathrm{P}(C) = (n-1)p^2q^{n-2}.$$

(d) Les dues cares poden aparèixer a $\binom{n}{2}$ possibles tirades. Per tant,

$$\mathrm{P}(D) = \binom{n}{2}p^2q^{n-2}.$$

(e) L'esdeveniment complementari de E és que surtin només 0 o 1 cares. Per tant,

$$\mathrm{P}(E) = 1 - \mathrm{P}(\overline{E}) = 1 - q^n - npq^{n-1}.$$

1.9 *S'escullen aleatoriament k nombres del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq k$. Calculant la probabilitat de que exactament $i(\leq k)$ nombres escollits no superin el valor k, demostreu l'igualtat:*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i} = \binom{n}{k} \tag{7}$$

a on, per convenció, es pren $\binom{s}{t} = 0$ quan $t < 0$.

Sigui A_i, $1 \leq i \leq k$, l'esdeveniment "s'han escollit exactament i nombres del conjunt $\{1, 2, \ldots, k\}$". Aleshores, aquets i nombres poden formar qualsevol dels C_k^i subconjunts de $\{1, 2, \ldots, k\}$, mentre que la resta dels $k - i$ nombres escollits poden pertanyen a qualsevol dels C_{n-k}^{k-i} subconjunts del conjunt $\{k+1, k+2, \ldots, n\}$ (obviament, aquest nombre es pren com a zero quan $k - i > n - k$). Per tant,

$$\mathrm{P}(A_i) = \frac{C_k^i C_{n-k}^{k-i}}{C_n^k}.$$

Aleshores, com tots els succesos A_i son disjunts, la fórmula (7) es consequencia de $\sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(A_i) = 1$.

Alternativament, (7) tamb es pot demostrar aplicant recursivament (4) (Exercici).

1.10 ($\sim$ 10-[1]) *Sigui* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espai de probabilitat finit, a on l'espai muestral* Ω *consta de* n *sucesos elementals equiprobables, i* $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ *(conjunt de parts de* Ω*). Demostreu que si* n *es primer,* Ω *no conté cap parella de esdeveniments no trivials que siguin independents.*

2 Paràmetres estadístics

2.1 *Un jugador entra a un casino i paga una certa quantitat per a jugar al següent joc: Llancca repetidament un dau fins que treu un* 6*. Si a una tirada treu* k *punts,* $1 \leq k \leq 5$*, se li paga* k *euros. Si treu un* 6*, no se li paga res i el joc acaba. Calculeu quant ha de pagar el jugador perquè el joc sigui just.*

3 Variables aleatòries multidimensionals

3.1 *Sigui* X *una variable exponencial de paràmetre* λ*. Per a cada valor de* $X = x$*, sigui* Y *una variable aleatòria de tipus exponencial desplaccada, amb funció de densitat* $f_{Y|X}(y|x) = u(y-x)\lambda e^{\lambda(y-x)}$ *(on* u *és la funció esglaó o de Heaviside).*

(a) Calculeu la esperancca condicionada $E(Y|X)$ *i comenteu el resultat. Calculeu la mitjana* $E(Y)$ *sense utilitzar la funció de densitat* $f_Y(y)$*.*

(b) Determineu la funció de densitat conjunta $f_{XY}(x,y)$ *i la marginal* $f_Y(y)$*. Comprobeu que el càlcul directe de* $E(Y)$ *dóna el mateix que a l'apartat (a).*

(c) Suposant que, per una certa constant $\alpha \in \mathbb{R}^+$*,* $f_{XY}(x,y) = \alpha e^{-\lambda y}$*,* $y \geq x \geq 0$*, calculeu el valor de* α *i la probabilitat de que al menys una de les dues variables prengui un valor més petit que* 1*.*

4 Estimació de variables aleatòries

4.1 *Donades les variables aleatòries* X, Y*, demostreu que* $\hat{Y} := \alpha X + \beta$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, és la millor estimació lineal de* Y *si, i sols si, la mitjana i variància de* $\hat{Y}$ *coincideixen amb les de* Y*:* $m_{\hat{Y}} = m_Y$*,* $\sigma^2_{\hat{Y}} = \sigma^2_Y$*. En aquest cas, ¿Com estan relacionats els corresponents coeficients de correlació* $\rho_{X\hat{Y}}$ *i* ρ_{XY}*?*

5 Processos estocàstics

5.1 *A partir d'un procés de Poisson* $X(t)$*, amb mitjana* $m(t) = \lambda t$ *i autocovariància* $K(t_1, t_2) = \lambda \min\{t_1, t_2\}$*, es defineix el procés* $Y(t) := X(t+T) - X(t)$*,* $T \in \mathbb{R}^+$*. Es demana:*

(a) Demostreu que, quan $T \to 0$*, aleshores* $Y(t)$ *tendeix (en distribució) a una variable aleatòria de Bernouilli.*

(b) Per un T *donat, calculeu la mitjana i funció d'autocovariància de* $Y(t)$*. ¿És un procés estacionari en sentit ampli?*

(c) *Trobeu la millor estimació lineal de $Y(t_2)$ donada $Y(t_1)$, a on $0 \le t_1 - t_2 \le T$. Comenteu els "casos límit" $\tau \to 0$ i $\tau \to T$ ($\tau := t_1 - t_2$).*

5.2 *A partir de les variables aleatòries independents A, B, de mitjana zero y variàncies σ_A^2, σ_B^2, es defineix el procés estocàstic $X(t) := At + B$. Es demana:*

(a) *La funció de densitat $f_X(x;t)$ (estadística de primer ordre del procés). Expresseu el resultat en termes de les funcions de densitat $f_A(a)$ y $f_B(b)$.*

(b) *La mitjana i funció d'autocorrelació de $X(t)$. ¿És un procés estacionari en sentit ampli?*

(c) *Trobeu la millor estimació lineal homogènia de $X(t_3)$ donades $X(t_1)$, $X(t_2)$, $t_1 \neq t_2 \neq t_3$. Comenteu els casos $t_3 \to t_1$ i $t_3 \to t_2$.*

5.3 *Un procés estocàstic discret X_n, amb temps i estat que prenen valors a $\{0, 1, 2, \ldots\}$, es caracteritza per les següents propietats: (i) $X[0] := 0$; (ii) Si (n_1, n_2), (n_1', n_2') són intervals disjunts, aleshores les variables aleatòries $x[n_2] - x[n_1]$ i $x[n_2'] - x[n_1']$ són independents; (iii) Per a cada interval (n_1, n_2), la variable aleatòria $x[n_2] - x[n_1]$ es binomial amb paràmetres $n = n_2 - n_1$ i $p \in (0, 1)$. Es demana:*

(a) *Dibuixeu una possible realització de X_n i determineu la seva funció de probabilitat (estadística de primer ordre del procés). Calculeu la mitjana $m_X[n]$, autocorrelació $R_X[n_1, n_2]$ i autocovariància $K_X[n_1, n_2]$.*

(b) *Si T és el temps transcorregut fins a la "primera transició"; és a dir, $T := \min\{n | X[n] = 1\}$, calculeu la seva funció de probabilitat ¿De quina variable aleatòria es tracta?.*

(c) *Trobeu la millor estimació lineal de $X[n_1]$ donada $X[n_2]$ distingint els casos $n_2 \ge n_1$ i $n_1 \le n_2$. Comenteu els resultats.*

---

6 Solucions als problemes proposats

1.10 Raoneu primer que dos esdeveniments A, B, son independents quan es compleix $|A||B| = n|A \cap B|$.

2.1 15 euros.

3.1 (a) $E(Y|X) = x + \frac{1}{\lambda}$; és a dir, el valor de X més la mitjana d'una exponencial. Aleshores, $E(Y) = E(E(Y|X)) = \frac{2}{\lambda}$.

(b) $f_{XY}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}$, $y \ge x \ge 0$; $f_Y(y) = \lambda^2 y e^{-\lambda y}$, $y \ge 0$.

(c) $\alpha = \lambda^2$, $P(\{X \le 1\} \cup \{Y \le 1\}) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$.

4.1 $\rho_{X\hat{Y}} = \rho_{XY}$.

5.1 (b) $m_Y(t) = \lambda T$;

$$K_Y(t_1,t_2) = \begin{cases} \lambda(T-\tau), & |\tau| \geq T \\ 0, & \text{altrement,} \end{cases}$$

per tant, es tracta d'un procés estacionari en sentit ampli.

(c) $\widehat{Y(t_1)} = \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) Y(t_2) + \lambda\tau$, que tendeix a $Y(t_2)$ quan $\tau \to 0$, i a λT quan $\tau \to T$ (com era d'esperar).

5.2 (a) $f_X(x;t) = \frac{1}{|t|}\int_{-\infty}^{\infty} f_A(\frac{x-s}{t}) f_B(s)\, ds$

(b) $m_X(t) = 0$, $R_X(t_1,t_2) = \sigma_A^2 t_1 t_2 + \sigma_B^2$; per tant no és estacionari en sentit ampli.

(c) $\widehat{X(t_3)} = \frac{t_2-t_3}{t_2-t_1} X(t_1) + \frac{t_3-t_1}{t_2-t_1} X(t_2)$, que tendeix a $X(t_i)$ quan $t_3 \to t_i$, $i = 1,2$.

5.3 (a) $P_X(k;n) = \mathrm{P}(X[n] = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0,1,\ldots,n$; $m[n] = np$; $R[n_1,n_2] = n_1 n_2 p^2 + pq \min\{n_1,n_2\}$; $K[n_1,n_2] = pq \min\{n_1,n_2\}$.

(b) $P_Y(k) = pq^{k-1}$, $k = 0,1,2,\ldots$ (v.a. geomètrica).

(c) La millor estimació és:

$$\widehat{X[n_1]} = \begin{cases} \frac{n_1}{n_2} X[n_2], & (n_2 \geq n_1) \\ X[n_2] + (n_1 - n_2)p, & (n_1 \geq n_2). \end{cases}$$

En el primer cas, s'obté la part proporcional de $X[n_2]$, que correspon al interval $(0,n_1)$; és a dir, a $X[n_1]$. En el segon cas, la millor estimació és el valor de $X[n_2]$ més la mitjana del nombre de trasicions al interval (n_2,n_1); és a dir la mitjana de $X[n_1] - X[n_2]$.

References

[1] J.M. Aroca, *Probabilitat i Procesos Estocàstics (PIPE)*, Notes de Classe, Dep. de Matemàtica Aplicada IV, UPC.

[2] J.Fàbrega, M.A. Fiol, E. Sanvicente, O. Serra *Variables Aleatòries i Processos Estocàstics. Problemes*, Edicions UPC, Aula Pràctica **19**, Barcelona.

[3] G.R. Grimmet and D.R. Stirzaker *Probability and Random Processes*, Oxford Univ. Press, 1982.