Control de Comunicacions Òptiques

Grup 10 - 11 de Desembre de 2009

Temps : 1h 30’ Nom:

TEST (6 punts)

Marqueu la resposta correcta. Cada resposta correcta suma 0,4 punts mentre que cada resposta errònia resta 0,1 punts.

1. La tensió d’alimentació en els fotodetectors és:
   a) Positiva en el PIN i negativa en l’APD
   b) Negativa en el PIN i positiva en l’APD
   c) Positiva tant en el PIN com en l’APD
   d) Negativa tant en el PIN com en l’APD
2. En un procés de fotodetecció directa d’un senyal amb modulació de la intensitat:
   a) La variància dels “1” és major que la variància dels “0”
   b) La variància dels “1” és menor que la variància dels “0”
   c) La variància dels “1” és igual que la variància dels “0”
   d) La variància dels “0” és zero
3. Considereu un procés de detecció directa d’un senyal òptic amb modulació de la intensitat ideal. Assumint una estadística Gaussiana i un corrent de foscor nul, la relació entre el factor de qualitat Q i la SNR (avaluada en els “1”) és:
   a) $Q^2 \approx$ SNR sempre
   b) $Q^2 \approx$ SNR/4 sempre
   c) $Q^2 \approx$ SNR quan domina el soroll shot i $Q^2 \approx$ SNR/4 quan domina el soroll tèrmic
   d) $Q^2 \approx$ SNR quan domina el soroll tèrmic i $Q^2 \approx$ SNR/4 quan domina el soroll shot
4. Assumint bits i filtres “ideals”, quina relació hi ha entre la variància del número d’electrons per bit σ_e^2 i la variància de fotocorrent σ_i^2, després del procés de fotodetecció:
   a) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 \left(T_b/q\right)^2$ b) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 \left(q/T_b\right)^2$ c) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 \left(T_b/q\right)$ d) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 \left(q/T_b\right)$
5. En una detecció coherent emprant un fotodiode PIN, habitualment el soroll dominant és:
   a) El soroll tèrmic
   b) El soroll shot del làser local
   c) El soroll shot del senyal incident
   d) El corrent de foscor
6. La sensibilitat en una detecció homodina és:
   a) 6 dB millor que en la detecció heterodina
   b) 6 dB pitjor que en la detecció heterodina
   c) 3 dB millor que en la detecció heterodina
   d) 3 dB pitjor que en la detecció heterodina
7. Es disposa d’un fotodiode PIN per a la implementació d’un receptor de comunicacions a 10 Gb/s. A les especificacions del fabricant es pot veure que la capacitància del dispositiu és C_d = 1 pF, quina resistència de càrrega serà necessària si es demana un rise-time (10%-90%) del 25% del període de bit:
   a) $R_L = 11.4\ \mathrm{m}\Omega$ b) $R_L = 11.4\ \Omega$ c) $R_L = 11.4\ \mathrm{K}\Omega$ d) $R_L = 11.4\ \mathrm{M}\Omega$
8. En un procés de fotodetecció d’un senyal NRZ ideal emprant un fotodetector PIN ideal incideixen 20 fotons promig per bit, quina és la probabilitat d’error:
   a) $2.1\cdot10^{-18}$ b) $1.0\cdot10^{-9}$ c) $2.3\cdot10^{-5}$ d) $3.4\cdot10^{-3}$

9. Un fotodiode PIN operant en condicions de límit quàntic (absència de soroll tèrmic, corrent de foscor nul i eficiència quàntica unitat), presenta una probabilitat d'error $P(E)=10^{-10}$ treballant a una longitud d'ona $\lambda=0.87$ μm. El senyal rebut està en format NRZ amb nivell de potència dels "1" P i nivell nul de potència dels "0". Quina és la probabilitat d'error quan $\lambda=1.3$ μm ?:

a) $P(E)=3.2\cdot10^{-15}$ b) $P(E)=1.6\cdot10^{-15}$ c) $P(E)=3.2\cdot10^{-7}$ d) $P(E)=1.6\cdot10^{-7}$

10. Continuant amb l'exercici anterior, quina és la probabilitat d'error mantenint $\lambda=0.87$ μm quan l'eficiència quàntica és del 50 % ?:

a) $P(E)=2\cdot10^{-20}$ b) $P(E)=(1/2)^{1/2}\cdot10^{-20}$ c) $P(E)=2\cdot10^{-5}$ d) $P(E)= (1/2)^{1/2}\cdot10^{-5}$

11. En un receptor òptic basat en un fotodetector PIN (soroll tèrmic i corrent de foscor menyspreables) es rep una potència P_1 = P per al bit "1" i P_0 = 0 per al bit "0" per a garantir una probabilitat d'error BER = 10^{-9} . Determineu l'increment en la potència òptica mitjana necessària si s'afegeix un corrent de foscor que duplica el nivell de corrent mitjà dels "1". Assumiu una estadística Gaussiana en tot moment:

a) $0\ dB$ b) $3\ dB$ c) $6\ dB$ d) $7.7\ dB$

12. En un enllaç per fibra òptica (α dB/km) el receptor basat en fotodiode PIN es pot considerar que interpreta estadístiques gaussianes tot i que el soroll tèrmic és nul. El transmissor làser emet polsos òptics ideals de $\langle n_1\rangle$ i $\langle n_0\rangle \neq 0$ fotons per bit "1" i "0" respectivament. Si s'exigeix un paràmetre de qualitat Q, quina és la màxima longitud permesa de l'enllaç ?:

a) $L \le \frac{10}{\alpha}\log\left\{\frac{\eta}{Q^2}\left(\langle n_1\rangle+\langle n_0\rangle\right)^2\right\}$ b) $L \le \frac{10}{\alpha}\log\left\{\frac{\eta}{Q^2}\left(\langle n_1\rangle-\langle n_0\rangle\right)^2\right\}$

c) $L \le \frac{10}{\alpha}\log\left\{\frac{\eta}{Q^2}\left(\sqrt{\langle n_1\rangle}+\sqrt{\langle n_0\rangle}\right)^2\right\}$ d) $L \le \frac{10}{\alpha}\log\left\{\frac{\eta}{Q^2}\left(\sqrt{\langle n_1\rangle}-\sqrt{\langle n_0\rangle}\right)^2\right\}$

13. Continuant amb l'exercici anterior, assumiu un diferencial entre bits constant $\langle n_1\rangle=\langle n_0\rangle+\Delta n$, determineu el nivell del bit "0" que maximitza la longitud de l'enllaç:

a) $\langle n_0\rangle=0$ b) $\langle n_0\rangle=\Delta n/2$ c) $\langle n_0\rangle=\Delta n$ d) $\langle n_0\rangle=\infty$

14. En un receptor òptic que incorpora un fotodetector APD (corrent de foscor nul, eficiència quàntica perfecta, factor multiplicatiu M i factor de soroll F=M) es rep un senyal amb modulació d'intensitat NRZ ideal. Si el guany M s'ha optimitzat per tal d'optimitzar la sensibilitat del receptor i val 60, calculeu els fotons promig per bit necessaris per a garantir una probabilitat d'error BER = 10^{-9} :

a) $\langle n_a\rangle=1620$ b) $\langle n_a\rangle=2160$ c) $\langle n_a\rangle=2610$ d) $\langle n_a\rangle=6210$

15. En un receptor òptic que incorpora un fotodetector APD (corrent de foscor menyspreable, responsivitat $\Re$, factor multiplicatiu M i factor de soroll F=M) es rep una potència P_1 per al bit "1" i P_0=0 per al bit "0". Si el guany M s'ha optimitzat per tal de maximitzar la SNR en els bits "1", determineu on estarà situat el llindar de decisió òptim:

a) $\ell_{opt} \approx \frac{1}{2}M_{opt}\Re P_1$ b) $\ell_{opt} \approx \frac{1}{4}M_{opt}\Re P_1$ c) $\ell_{opt} \approx \frac{1}{e}M_{opt}\Re P_1$ d) $\ell_{opt} \approx \frac{1}{e^2}M_{opt}\Re P_1$

PROBLEMA (4 punts)

Marqueu la resposta correcta. Cada resposta correcta suma 0,4 punts mentre que cada resposta errònia resta 0,1 punts.

Un receptor de comunicacions òptiques està basat en un fotodiode APD amb una eficiència quàntica η , un factor de guany M , un factor de soroll F = M i una variància del soroll tèrmic total σ_p^2 (adimensional). Assumint que el corrent de foscor és nul, responeu a les següents qüestions.

1) Donat un número mitjà de fotons per bit $\langle n \rangle$ que arriben al fotodetector de forma contínua, trobeu el valor del guany que maximitza la relació senyal a soroll (SNR):

a) $M_{opt} = \left(\dfrac{2\sigma_p^2}{\eta \langle n \rangle} \right)^{\frac{1}{3}}$ b) $M_{opt} = \left(\dfrac{3\sigma_p^2}{\eta \langle n \rangle} \right)^{\frac{1}{2}}$ c) $M_{opt} = \left(\dfrac{\eta \langle n \rangle}{2\sigma_p^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ d) $M_{opt} = \left(\dfrac{\eta \langle n \rangle}{3\sigma_p^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

2) Trobeu el valor de la SNR un cop optimitzada:

a) $SNR_{\max} = \dfrac{2}{3}\eta \langle n \rangle \left(\dfrac{\eta \langle n \rangle}{2\sigma_p^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ b) $SNR_{\max} = \dfrac{3}{2}\eta \langle n \rangle \left(\dfrac{\eta \langle n \rangle}{2\sigma_p^2} \right)^{\frac{1}{3}}$

c) $SNR_{\max} = \dfrac{2}{3}\eta \langle n \rangle \left(\dfrac{\eta \langle n \rangle}{2\sigma_p^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ d) $SNR_{\max} = \dfrac{3}{2}\eta \langle n \rangle \left(\dfrac{\eta \langle n \rangle}{2\sigma_p^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

3) Donat ara un valor de SNR prefixat, trobeu el mínim valor de $\langle n \rangle$ que el garanteix:

a) $\langle n \rangle_{\min} = \dfrac{1}{\eta}\sqrt{\dfrac{\sigma_p}{2}}\left(3\ SNR\right)^{\frac{3}{4}}$ b) $\langle n \rangle_{\min} = \dfrac{1}{\eta}\sqrt{\dfrac{\sigma_p}{2}}\left(3\ SNR\right)^{\frac{4}{3}}$

c) $\langle n \rangle_{\min} = \dfrac{1}{\eta}\sqrt{\dfrac{\sigma_p}{3}}\left(2\ SNR\right)^{\frac{3}{4}}$ d) $\langle n \rangle_{\min} = \dfrac{1}{\eta}\sqrt{\dfrac{\sigma_p}{3}}\left(2\ SNR\right)^{\frac{4}{3}}$

4) Determineu la condició de millora de la SNR d'un APD respecte la d'un PIN amb les mateixes condicions d'eficiència quàntica i soroll tèrmic. Teniu en compte que el factor de soroll ha de complir que F > 1:

a) $\langle n \rangle > 2\dfrac{\sigma_p}{\eta}$ b) $\langle n \rangle > 2\dfrac{\sigma_p^2}{\eta}$ c) $\langle n \rangle < 2\dfrac{\sigma_p}{\eta}$ d) $\langle n \rangle < 2\dfrac{\sigma_p^2}{\eta}$

5) Donat un transmissor de 3ª finestra ideal amb una potència de pic d' 1 mW , una fibra òptica amb una atenuació de 0.2 dB/Km , un nivell de soroll tèrmic $\sigma_p = 100$, una eficiència quàntica perfecta i una velocitat de transmissió de referència R_b = 10 Gb/s ; determineu quan és millor emprar un fotodetector APD segons el criteri de la SNR en funció de la longitud de l'enllaç (L):

a) $L < 79.5\ Km$ b) $L < 179.5\ Km$ c) $L > 79.5\ Km$ d) $L > 179.5\ Km$

6) Assumiu una modulació NRZ ideal. Donat un número mitjà de fotons per bit "1" $\langle n_1 \rangle$ que arriben al fotodetector, trobeu el valor del guany que maximitza el factor de qualitat (Q):

a) $M_{opt} = \left(\frac{8\sigma_p^2}{\eta \langle n_1 \rangle} \right)^{\frac{2}{3}}$ b) $M_{opt} = \left(\frac{8\sigma_p^2}{\eta \langle n_1 \rangle} \right)^{\frac{1}{3}}$ c) $M_{opt} = \left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta \langle n_1 \rangle} \right)^{\frac{1}{3}}$ d) $M_{opt} = \left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta \langle n_1 \rangle} \right)^{\frac{2}{3}}$

7) Trobeu l'expressió del factor Q un cop optimitzat:

a) $Q_{\max} = \frac{1}{3} \left(\frac{\eta^2 \langle n_1 \rangle^2}{\sigma_p} \right)^{\frac{1}{2}}$ b) $Q_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{\eta \langle n_1 \rangle}{\sigma_p^2} \right)^{\frac{1}{3}}$

c) $Q_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{\eta^2 \langle n_1 \rangle^2}{\sigma_p} \right)^{\frac{1}{3}}$ d) $Q_{\max} = \frac{1}{3} \left(\frac{\eta \langle n_1 \rangle}{\sigma_p^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

8) Donat ara un valor de Q prefixat, trobeu el mínim valor de $\langle n_1 \rangle$ que el garanteix:

a) $\langle n_1 \rangle_{\min} = \frac{Q}{\eta} \sqrt{2 \frac{Q}{\sigma_p}}$ b) $\langle n_1 \rangle_{\min} = \frac{Q}{\eta} \sqrt{8 \frac{Q}{\sigma_p}}$

c) $\langle n_1 \rangle_{\min} = \frac{Q}{\eta} \sqrt{2\sigma_p Q}$ d) $\langle n_1 \rangle_{\min} = \frac{Q}{\eta} \sqrt{8\sigma_p Q}$

9) Determineu la condició de millora del factor Q d'un APD respecte la d'un PIN amb les mateixes condicions d'eficiència quàntica i soroll tèrmic. Teniu en compte que el factor de soroll ha de complir que F > 1:

a) $\langle n_1 \rangle < 8 \frac{\sigma_p}{\eta}$ b) $\langle n_1 \rangle > 8 \frac{\sigma_p}{\eta}$ c) $\langle n_1 \rangle < 8 \frac{\sigma_p^2}{\eta}$ d) $\langle n_1 \rangle > 8 \frac{\sigma_p^2}{\eta}$

10) Donades les mateixes condicions que a la qüestió 5) i prenent una modulació NRZ ideal, determineu quan és millor emprar un fotodetector APD segons el criteri del factor Q en funció de la longitud de l'enllaç (L):

a) $L < 49.4\ Km$ b) $L > 49.4\ Km$ c) $L < 149.4\ Km$ d) $L > 149.4\ Km$

Resolució:

1) Donat un número mitjà de fotons per bit $\langle n \rangle$ que arriben al fotodetector de forma contínua, trobeu el valor del guany que maximitza la relació senyal a soroll (SNR):

$$SNR_{APD} = \frac{\left(M\eta\langle n\rangle\right)^2}{M^2 F\eta\langle n\rangle + \sigma_p^2} \xrightarrow{F=M^x} \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{M^x\eta\langle n\rangle + \frac{\sigma_p^2}{M^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(M^x\eta\langle n\rangle + \frac{\sigma_p^2}{M^2}\right) = xM^{x-1}\eta\langle n\rangle - 2\frac{\sigma_p^2}{M^3} = 0 \rightarrow M^{x+2} = \frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle} \rightarrow M_{opt} = \left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}$$

$$\xrightarrow{x=1} \quad M_{opt} = \left(\frac{2\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{3}}$$

2) Trobeu el valor de la SNR un cop optimitzada:

$$SNR_{\max} = \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{x}{x+2}}\eta\langle n\rangle + \sigma_p^2\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{-2}{x+2}}} = \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\underbrace{\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{x}{x+2}}\frac{x}{2}\frac{\eta\langle n\rangle}{\sigma_p^2}}_{\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{-2}{x+2}}}\frac{2}{x}\sigma_p^2 + \sigma_p^2\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{-2}{x+2}}} =$$

$$= \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\sigma_p^2\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{-2}{x+2}}\left(\frac{2}{x}+1\right)} = \frac{\eta\langle n\rangle\frac{2}{x}\frac{x}{2}\frac{\eta\langle n\rangle}{\sigma_p^2}\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{2}{x+2}}}{\left(\frac{2}{x}+1\right)} = \frac{2}{x+2}\eta\langle n\rangle\left(\frac{x}{2}\frac{\eta\langle n\rangle}{\sigma_p^2}\right)^{\frac{x}{x+2}}$$

$$\xrightarrow{x=1} \quad SNR_{\max} = \frac{2}{3}\eta\langle n\rangle\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

3) Donat ara un valor de SNR prefixat, trobeu el mínim valor de $\langle n\rangle$ que el garanteix:

Un cop optimitzat el receptor, la relació entre SNR i $\langle n\rangle$ queda determinada. Així doncs només cal aïllar de l'expressió anterior:

$$SNR_{\max} = \frac{2}{x+2}\left(\frac{x}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{x}{x+2}}\left(\eta\langle n\rangle\right)^{\frac{2x+2}{x+2}} \rightarrow \langle n\rangle = \frac{1}{\eta}\left(\frac{2\sigma_p^2}{x}\right)^{\frac{x}{2x+2}}\left(\frac{x+2}{2}SNR_{\max}\right)^{\frac{x+2}{2x+2}}$$

$$\xrightarrow{x=1} \quad \langle n\rangle = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\sigma_p}{2}}\left(3\ \cdot SNR_{\max}\right)^{\frac{3}{4}}$$

També es pot arribar al mateix resultat aïllant $\langle n\rangle$ de l'expressió de la SNR i després optimitzar-lo respecte M. Aquest camí és molt més llarg.

En aquest punt es pot trobar el factor de guany que minimitza el número de fotons per bit donada una certa SNR, només cal partir de la M òptima que s'ha trobat per a maximitzar la SNR i substituïr $\langle n\rangle$ per l'expressió que la relaciona amb la SNR:

$$M_{opt}=\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}=\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\left(\frac{2\sigma_p^2}{x}\right)^{\frac{x}{2x+2}}\left(\frac{x+2}{2}SNR_{\max}\right)^{\frac{x+2}{2x+2}}}\right)^{\frac{1}{x+2}}=\left(\frac{4}{x(x+2)}\frac{\sigma_p^2}{SNR_{\max}}\right)^{\frac{1}{2x+2}}$$

$$\xrightarrow{x=1}\quad M_{opt}=\left(\frac{4}{3}\frac{\sigma_p^2}{SNR_{\max}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

4) Determineu la condició de millora de la SNR d'un APD respecte la d'un PIN amb les mateixes condicions d'eficiència quàntica i soroll tèrmic. Teniu en compte que el factor de soroll ha de complir que F > 1:

Si s'analitza l'expressió de la SNR es veu com aquesta tendeix a zero tant per a M petites com per a M grans. Matemàticament la M òptima pot ser menor que 1 cosa que no té sentit físic ja que això implicaria que el factor de soroll F fos menor que 1, així doncs l'APD donarà millors prestacions que el PIN (M=1) sempre i quan la M òptima sigui major que 1:

$$M_{opt}=\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}\geq 1\rightarrow\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\geq 1\rightarrow\langle n\rangle\leq\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta}\xrightarrow{x=1}\langle n\rangle\leq 2\frac{\sigma_p^2}{\eta}$$

5) Donat un transmissor de 3ª finestra ideal amb una potència de pic d' 1 mW , una fibra òptica amb una atenuació de 0.2 dB/Km , un nivell de soroll tèrmic $\sigma_p=100$, una eficiència quàntica perfecta i una velocitat de transmissió de referència R_b = 10 Gb/s ; determineu quan és millor emprar un fotodetector APD segons el criteri de la SNR en funció de la longitud de l'enllaç (L):

A l'apartat anterior s'ha determinat la condició per a que l'APD doni millors prestacions que el PIN. Així doncs només cal relacionar-ho amb la potència òptica transmesa i l'atenuació de l'enllaç:

$$\langle n\rangle_{rx}=\underbrace{\langle n\rangle_{tx}}_{\frac{P_{tx}}{hf}T_b}10^{-\frac{\alpha L}{10}}\leq 2\frac{\sigma_p^2}{\eta}\rightarrow L\geq\frac{10}{\alpha}\log\left(\frac{P_{tx}}{hf}T_b\Big/2\frac{\sigma_p^2}{\eta}\right)\approx 79.5\ Km$$

6) Assumiu una modulació NRZ ideal. Donat un número mitjà de fotons per bit "1" $\langle n_1\rangle$ que arriben al fotodetector, trobeu el valor del guany que maximitza el factor de qualitat (Q):

$$Q=\frac{M\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{FM^2\eta\langle n_1\rangle+\sigma_p^2}+\sigma_p}=\frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{F\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}+\frac{\sigma_p}{M}}\xrightarrow{F=M^x}\frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}+\frac{\sigma_p}{M}}$$

Ara es pot minimitzar el denominador per tal de maximitzar Q:

$$\frac{\partial}{\partial M}\left\{\sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}+\frac{\sigma_p}{M}\right\}=\frac{xM^{x-1}\eta\langle n_1\rangle-2\frac{\sigma_p^2}{M^3}}{2\sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}}-\frac{\sigma_p}{M^2}=0$$

$$2\frac{\sigma_p}{M^2}\sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}=xM^{x-1}\eta\langle n_1\rangle-2\frac{\sigma_p^2}{M^3}$$

$$4\frac{\sigma_p^2}{M^4}\left(M^x\cancel{\eta\langle n_1\rangle}+\cancel{\frac{\sigma_p^2}{M^2}}\right)=x^2M^{2x-2}\left(\eta\langle n_1\rangle\right)^{\cancel{2}}+\cancel{4\frac{\sigma_p^4}{M^6}}-4xM^{x-1}\cancel{\eta\langle n_1\rangle}\frac{\sigma_p^2}{M^3}$$

$$4\sigma_p^2M^{x-4}(1+x)=x^2M^{2x-2}\eta\langle n_1\rangle\rightarrow M^{x+2}=\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\frac{1+x}{x^2}\rightarrow M_{opt}=\left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\frac{1+x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x+2}}$$

$$\xrightarrow{x=1}M_{opt}=\left(\frac{8\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\right)^{\frac{1}{3}}$$

7) Trobeu l'expressió del factor Q un cop optimitzat:

$$Q_{\max}=\frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}+\frac{\sigma_p}{M}}=$$

$$=\frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{\left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\frac{1+x}{x^2}\right)^{\frac{x}{x+2}}\eta\langle n_1\rangle+\sigma_p^2\left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\frac{1+x}{x^2}\right)^{\frac{-2}{x+2}}}+\sigma_p\left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\frac{1+x}{x^2}\right)^{\frac{-1}{x+2}}}=$$

$$=\frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\frac{1+x}{x^2}\right)^{\frac{x}{x+2}}\frac{\eta\langle n_1\rangle}{4\sigma_p^2}\frac{x^2}{1+x}}_{\left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\frac{1+x}{x^2}\right)^{\frac{-2}{x+2}}}4\sigma_p^2\frac{1+x}{x^2}+\sigma_p^2\left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\frac{1+x}{x^2}\right)^{\frac{-2}{x+2}}}+\sigma_p\left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\frac{1+x}{x^2}\right)^{\frac{-1}{x+2}}}=$$

$$=\frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sigma_p\left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\frac{1+x}{x^2}\right)^{\frac{-1}{x+2}}\left(1+\underbrace{\sqrt{1+4\frac{1+x}{x^2}}}_{\frac{x+2}{x}}\right)}=\frac{4\sigma_p\left(\frac{\eta\langle n_1\rangle}{4\sigma_p^2}\right)^{\frac{x+1}{x+2}}}{\left(\frac{x^2}{1+x}\right)^{\frac{1}{x+2}}2\frac{x+1}{x}}=\left(\frac{x}{2\sigma_p}\right)^{\frac{x}{x+2}}\left(\frac{\eta\langle n_1\rangle}{1+x}\right)^{\frac{x+1}{x+2}}$$

$$\xrightarrow{x=1}\quad Q_{\max}=\frac{1}{2}\left(\frac{\eta^2\langle n_1\rangle^2}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

8) Donat ara un valor de Q prefixat, trobeu el mínim valor de $\langle n_1 \rangle$ que el garanteix:

Igual que en el cas de la SNR, un cop optimitzat el receptor la relació entre Q i $\langle n_1 \rangle$ queda definida:

$$Q_{\max} = \left(\frac{x}{2\sigma_p} \right)^{\frac{x}{x+2}} \left(\frac{\eta \langle n_1 \rangle}{1+x} \right)^{\frac{x+1}{x+2}} \rightarrow \langle n_1 \rangle = \frac{1+x}{\eta} \left(\frac{2\sigma_p}{x} \right)^{\frac{x}{x+1}} \left(Q_{\max} \right)^{\frac{x+2}{x+1}}$$

$$\xrightarrow{x=1} \langle n_1 \rangle = \frac{Q_{\max}}{\eta} \sqrt{8\sigma_p Q_{\max}}$$

9) Determineu la condició de millora del factor Q d'un APD respecte la d'un PIN amb les mateixes condicions d'eficiència quàntica i soroll tèrmic. Teniu en compte que el factor de guany ha de complir que M > 1:

Seguint una argumentació similar a la de la pregunta 4), la condició de millora és que M sigui major que 1:

$$M_{opt} = \left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta \langle n_1 \rangle} \frac{1+x}{x^2} \right)^{\frac{1}{x+2}} \geq 1 \rightarrow \frac{4\sigma_p^2}{\eta \langle n_1 \rangle} \frac{1+x}{x^2} \geq 1 \rightarrow \sigma_p^2 \geq \frac{\eta \langle n_1 \rangle}{4} \frac{x^2}{1+x} \xrightarrow{x=1} \sigma_p^2 \geq \frac{\eta \langle n_1 \rangle}{8}$$

10) Donades les mateixes condicions que a la qüestió 5) i prenent una modulació NRZ ideal, determineu quan és millor emprar un fotodetector APD segons el criteri del factor Q en funció de la longitud de l'enllaç (L):

Seguint un procediment anàleg, només cal aplicar la condició trobada en la pregunta 9):

$$\langle n \rangle_{rx} = \underbrace{\langle n \rangle_{tx}}_{\frac{P_{tx}}{hf} T_b} 10^{-\frac{\alpha L}{10}} \leq 8 \frac{\sigma_p^2}{\eta} \rightarrow L \geq \frac{10}{\alpha} \log \left(\frac{P_{tx}}{hf} T_b \bigg/ 8 \frac{\sigma_p^2}{\eta} \right) \approx 49.4\ Km$$

Una altra manera de resoltre els apartats 6-8):

En aquest cas potser és més fàcil seguir el camí invers, és a dir, primer minimitzar la sensibilitat per a una Q determinada, i després trobar tant la Q màxima com la M òptima corresponent:

$$Q=\frac{M\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{FM^2\eta\langle n_1\rangle+\sigma_p^2}+\sigma_p}=\frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{F\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}+\frac{\sigma_p}{M}}\xrightarrow{F=M^x}\frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}+\frac{\sigma_p}{M}}$$

$$\to\sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}=\frac{\eta\langle n_1\rangle}{Q}-\frac{\sigma_p}{M}\to M^x\cancel{\eta\langle n_1\rangle}+\cancel{\frac{\sigma_p^2}{M^2}}=\frac{\left(\eta\langle n_1\rangle\right)^{\cancel{2}}}{Q^2}+\cancel{\frac{\sigma_p^2}{M^2}}-2\frac{\cancel{\eta\langle n_1\rangle}}{Q}\frac{\sigma_p}{M}$$

$$\to\frac{\eta\langle n_1\rangle}{Q^2}=M^x+2\frac{\sigma_p}{QM}\qquad\to\qquad\langle n_1\rangle=\frac{1}{\eta}\left(Q^2M^x+2Q\frac{\sigma_p}{M}\right)$$

Ara es minimitza la sensibilitat:

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(Q^2M^x+2Q\frac{\sigma_p}{M}\right)=xQ^2M^{x-1}-2Q\frac{\sigma_p}{M^2}=0\to xQ^{\cancel{2}}M^{x-1}=2\cancel{Q}\frac{\sigma_p}{M^2}\to M_{opt}=\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p}{Q}\right)^{\frac{1}{x+1}}$$

$$\langle n_1\rangle_{\min}=\frac{1}{\eta}\left(Q^2\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p}{Q}\right)^{\frac{x}{x+1}}+2Q\sigma_p\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p}{Q}\right)^{\frac{-1}{x+1}}\right)=\frac{Q^2}{\eta}\left(\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p}{Q}\right)^{\frac{x}{x+1}}+x\frac{2}{x}\frac{\sigma_p}{Q}\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p}{Q}\right)^{\frac{-1}{x+1}}\right)=$$

$$=(1+x)\frac{Q^2}{\eta}\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p}{Q}\right)^{\frac{x}{x+1}}\qquad\xrightarrow{x=1}\qquad\langle n_1\rangle_{\min}=\frac{Q}{\eta}\sqrt{8\sigma_pQ}$$

A l'expressió anterior s'ailla la Q màxima:

$$\langle n_1\rangle_{\min}=\frac{1+x}{\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{x}\right)^{\frac{x}{x+1}}Q^{\frac{x+2}{x+1}}\to Q=\left(\frac{\eta\langle n_1\rangle_{\min}}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x+2}}\left(\frac{x}{2\sigma_p}\right)^{\frac{x}{x+2}}\xrightarrow{x=1}\frac{1}{2}\left(\frac{\eta^2\langle n_1\rangle^2}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Finalment es troba la M òptima en termes de $\langle n\rangle$:

$$M_{opt}=\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p}{Q}\right)^{\frac{1}{x+1}}=\left(\frac{2}{x}\frac{\sigma_p}{\left(\frac{\eta\langle n_1\rangle_{\min}}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x+2}}\left(\frac{x}{2\sigma_p}\right)^{\frac{x}{x+2}}}\right)^{\frac{1}{x+1}}=\left(\frac{\left(\frac{2\sigma_p}{x}\right)^{\frac{2x+2}{x+2}}}{\left(\frac{\eta\langle n_1\rangle_{\min}}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x+2}}}\right)^{\frac{1}{x+1}}=\left(\frac{x+1}{x^2}\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle_{\min}}\right)^{\frac{1}{x+2}}$$

$$\xrightarrow{x=1}\qquad M_{opt}=\left(\frac{8\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\right)^{\frac{1}{3}}$$