Examen Final de Comunicaciones II. Enero 2003. EJERCICIO 1

La transmisión de prefijo cíclico consiste en enviar una réplica de la última parte del símbolo (T_{cp} seg.) al principio de cada símbolo y es una técnica utilizada para evitar la ISI entre símbolos consecutivos en tiempo. En este ejercicio se analiza su influencia tanto para CDMA (Complex Division Múltiplex Access) como para OFDM (Orthogonal Frequency Division Access). Se trabajará en ambos casos con las señales equivalentes paso bajo.

Para **CDMA** suponga que la señal a la entrada del receptor es de la forma: $r(t) = s(t) + w(t)$. Se considerará:

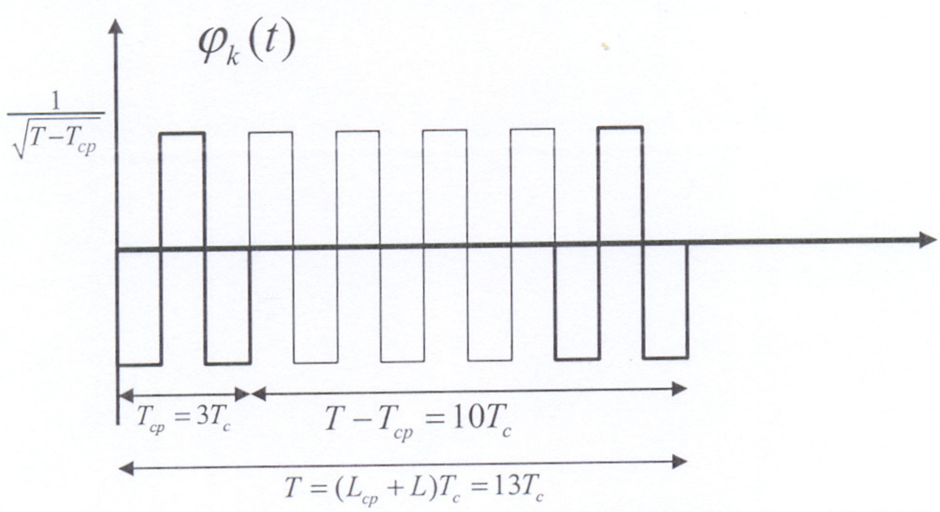
- $w(t)$ ruido real gaussiano de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$
- La señal útil para K usuarios síncronos es $s(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k[n] \varphi_k(t - nT) * h_k(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k[n] \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t - nT - \tau) h_k(\tau) d\tau$
- $h_k(t)$ representa la respuesta impulsional del canal para el usuario k. Su duración temporal es menor que la duración del prefijo cíclico T_{cp} para todos los usuarios.
- La función utilizada para transmitir los símbolos del usuario k mediante un código de L chips, es: $\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T - T_{cp}}} \sum_{l=-L_{cp}}^{L-1} c_k[l] \Pi\left(\frac{t - \frac{T_c}{2} - T_{cp} - lT_c}{T_c}\right)$. Con $c_k[l] = c_k[l+L]$, $T_{cp} = L_{cp}T_c$, $T = T_{cp} + LT_c$ y $L_{cp} < L$.
- Códigos idealmente ortogonales entre sí: $\sum_{l=0}^{L-1} c_k[l] c_j[l] = L\delta[k-j]$
- Los símbolos de todos los usuarios son binarios, equiprobables y polares: $\alpha_k[n] = \pm \frac{d}{2}$

Se pide:

a) Demuestre mediante el dibujo de un caso particular de $\varphi_k(t)$, que las funciones $\varphi_k(t)$ llevan el prefijo cíclico: L=10 chips, L_{cp} =3 chips y $c_k[l] = \begin{cases} +1, l \text{ par} \\ -1, l \text{ impar} \end{cases}$

SOLUCIÓN APARTADO a:

Para la situación particular de este apartado $\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T - T_{cp}}} \sum_{l=-3}^{9} c_k[l] \Pi\left(\frac{t - 3{,}5T_c - lT_c}{T_c}\right)$



En la figura anterior se observa como los tres primeros chips transmitidos son una réplica del final del símbolo.

b) Demuestre en general que las funciones $\varphi_k(t)$ son ortonormales en (T_{cp}, T). Es decir: $\int_{T_{cp}}^{T} \varphi_k(t)\varphi_j^*(t)dt = \delta[k-j]$

SOLUCIÓN APARTADO b:

$$\int_{T_{cp}}^{T} \varphi_k(t)\varphi_j^*(t)dt = \int_{T_{cp}}^{T} \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} \sum_{l=-L_{cp}}^{L-1} c_k[l]\Pi\left(\frac{t-\frac{T_c}{2}-T_{cp}-lT_c}{T_c}\right) \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} \sum_{n=-L_{cp}}^{L-1} c_j^*[n]\Pi\left(\frac{t-\frac{T_c}{2}-T_{cp}-nT_c}{T_c}\right)dt =$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Para } l \neq n \text{, los pulsos} \\ \text{rectangulares no se solapan}\end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{T-T_{cp}} \sum_{l=0}^{L-1} c_k[l]c_j^*[l] \int_{T_{cp}}^{T} \Pi\left(\frac{t-\frac{T_c}{2}-T_{cp}-lT_c}{T_c}\right)dt = \frac{1}{T-T_{cp}} \sum_{l=0}^{L-1} c_k[l]c_j^*[l]T_c = \frac{T_c}{T-T_{cp}} L\delta[k-j] = \delta[k-j]$$

En la resolución de este apartado se ha supuesto $c_k[i] = \pm 1$, es decir amplitudes unitarias para todos los chips de los códigos correspondientes a todos los usuarios.

c) Calcule la energía transmitida por bit y usuario, en función de la distancia entre símbolos d y de los parámetros que considere necesarios.

SOLUCIÓN APARTADO c:

$$E_b = \int_0^T \left(\pm\frac{d}{2}\right)^2 \varphi_k^2(t)dt = \frac{d^2}{4}\frac{1}{T-T_{cp}}\left(L_{cp}+L\right)T_c = \frac{d^2}{4}\frac{T}{T-T_{cp}}$$

Suponga que el receptor es multiusuario y consiste en un banco de K filtros adaptados de respuesta: $g_i(t) = \begin{cases} \varphi_i^*(T-t) & 0 \leq t \leq T-T_{cp} \\ 0 & otros \end{cases}$. A la salida se realiza el muestreo a $t_m = (m+1)T$.

Se pide:

d) Muestre que la señal a la salida del filtro "*i*" : $y_i(t_m) = \int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} r(\lambda)\varphi_i^*(\lambda - mT)d\lambda$ puede expresarse como:

$$y_i(t_m) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k[m]\rho_{ki} + \beta_i(t_m) \quad \text{con} \quad \rho_{ki} = \int_0^{T_{cp}} h_k(\tau)\int_{T_{cp}}^{T} \varphi_k(\gamma-\tau)\varphi_i^*(\gamma)d\gamma d\tau \qquad (1)$$

Observe que en CDMA mediante la transmisión del prefijo cíclico se evita la ISI temporal pero no las interferencias entre usuarios.

SOLUCIÓN APARTADO d:

$$y_i(t_m)=\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} r(\lambda)\varphi_i^*(\lambda-mT)d\lambda=\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} s(\lambda)\varphi_i^*(\lambda-mT)d\lambda+\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} w(\lambda)\varphi_i^*(\lambda-mT)d\lambda$$

$$\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_k[n]\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_k(\lambda-nT-\tau)h_k(\tau)d\tau\varphi_i^*(\lambda-mT)d\lambda+\beta_i(t_m)=$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_k[n]\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T}\varphi_k(\lambda-nT-\tau)\varphi_i^*(\lambda-mT)d\lambda h_k(\tau)d\tau+\beta_i(t_m)=$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_k[n]\int_{0}^{T_{cp}}\int_{T_{cp}}^{T}\varphi_k(\gamma-(n-m)T-\tau)\varphi_i^*(\gamma)d\gamma h_k(\tau)d\tau+\beta_i(t_m)=$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Debido a los limites de integracion de las dos integrales}\\ \text{la integral interior unicamente dara un resultado no nulo}\\ \text{para n = m.}\end{array}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\alpha_k[m]\int_{0}^{T_{cp}}\int_{T_{cp}}^{T}\varphi_k(\gamma-\tau)\varphi_i^*(\gamma)d\gamma h_k(\tau)d\tau+\beta_i(t_m)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k[m]\rho_{ki}+\beta_i(t_m)$$

NOTA: Independiente del resultado obtenido en el apartado anterior, considere válida la expresión (1), tanto para CDMA como para OFDM.

e) Demuestre que las componentes de ruido $\beta_i(t_m)$ entre los diferentes filtros se hallan incorreladas. Para ello calcule la expresión $E[\beta_k(t_m)\beta_i{}^*(t_m)];1\le k\le K,1\le i\le K$.

SOLUCIÓN APARTADO e:

$$E[\beta_k(t_m)\beta_i{}^*(t_m)]=E\left[\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} w(\lambda)\varphi_k^*(\lambda-mT)d\lambda\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} w(\gamma)^*\varphi_i(\gamma-mT)d\gamma\right]$$

$$=\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T}\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T}E\left[w(\lambda)w(\gamma)^*\right]\varphi_i(\gamma-mT)d\gamma\varphi_k^*(\lambda-mT)d\lambda=$$

$$\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T}\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T}\tfrac{N_0}{2}\delta(\lambda-\gamma)\varphi_i(\gamma-mT)d\gamma\varphi_k^*(\lambda-mT)d\lambda=$$

$$\tfrac{N_0}{2}\int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T}\varphi_i(\lambda-mT)\varphi_k^*(\lambda-mT)d\lambda=\tfrac{N_0}{2}\int_{T_{cp}}^{T}\varphi_i(\gamma)\varphi_k^*(\gamma)d\lambda=\tfrac{N_0}{2}\delta[k-i]$$

Agrupando las salidas de los correladores se obtiene el vector $\underline{\mathbf{y}}(t_m)=\begin{pmatrix}y_1(t_m)\\ :\\ y_K(t_m)\end{pmatrix}$. Agrupando las amplitudes binarias de todos los usuarios se obtiene el vector: $\underline{\mathbf{a}}[m]=\begin{pmatrix}\alpha_1[m]\\ :\\ \alpha_K[m]\end{pmatrix}$. La matriz cuadrada $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$, es la formada por los elementos ρ_{ki} de la expresión (1).

La función de densidad de probabilidad conjunta condicionada $f_{\underline{\mathbf{y}}/\underline{\mathbf{a}}}(\underline{\mathbf{y}}(t_m)/\underline{\mathbf{a}}(m))$ del vector formado por las salidas de los correladores: $\underline{\mathbf{y}}(t_m)$, es normal o gaussiana y se halla condicionada por el vector de coordenadas binarias $\underline{\mathbf{a}}(m)$. Se pide que calcule:

f) La media o valor esperado condicionado $\underline{\boldsymbol{\mu}} = E\left[\underline{\mathbf{y}}(t_m)/\underline{\mathbf{a}}(m)\right]$

SOLUCIÓN APARTADO f:

$$\underline{\boldsymbol{\mu}} = E\left[\underline{\mathbf{y}}(t_m)\right] = E\left[\underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\mathbf{a}}[m] + \underline{\mathbf{n}}(t_m)\right] = E\left[\begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{K1} & \cdots & \rho_{KK} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1[m] \\ : \\ \alpha_K[m] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1[t_m] \\ : \\ \beta_K[t_m] \end{pmatrix}\right] =$$

$$E\left[\begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{K1} & \cdots & \rho_{KK} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1[m] \\ : \\ \alpha_K[m] \end{pmatrix}\right] + E\left[\begin{pmatrix} \beta_1[t_m] \\ : \\ \beta_K[t_m] \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{K1} & \cdots & \rho_{KK} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1[m] \\ : \\ \alpha_K[m] \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\mathbf{a}}[m]$$

g) La matriz de covarianza $\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = E\left[(\underline{\mathbf{y}}(t_m) - \underline{\boldsymbol{\mu}})(\underline{\mathbf{y}}(t_m) - \underline{\boldsymbol{\mu}})^T / \underline{\mathbf{a}}(m)\right] = E\left[\underline{\mathbf{n}}(t_m)\underline{\mathbf{n}}(t_m)^T\right]$, donde $\underline{\mathbf{n}}(t_m)$, es el vector formado por las componentes de ruido $\beta_i(t_m), 1 \le i \le K$

SOLUCIÓN APARTADO g: Aplicando los resultados obtenidos en el apartado e:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = E\left[\underline{\mathbf{n}}(t_m)\underline{\mathbf{n}}(t_m)^T\right] = E\left[\begin{pmatrix} \beta_1(t_m) \\ : \\ \beta_K(t_m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1^*(t_m) & : & \beta_K^*(t_m) \end{pmatrix}\right] = \tfrac{N_0}{2}\underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

Para eliminar la interferencia entre los diferentes usuarios y facilitar de este modo la detección, se propone decorrelar la señal, es decir, trabajar con el nuevo vector:

$$\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}\underline{\mathbf{y}}(t_m)$$

h) Calcule de nuevo el vector media y la matriz de covarianza del nuevo vector $\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m)$, condicionado por $\underline{\mathbf{a}}(m)$. (Ver NOTA al final del ejercicio).

SOLUCIÓN APARTADO h:

$$E\left[\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m)\right] = \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}E\left[\underline{\mathbf{y}}(t_m)\right] = \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}$$

$$E\left[\left(\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m) - E\left[\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m)\right]\right)\left(\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m) - E\left[\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m)\right]\right)^T\right] = \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}\left(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}\right)^H = \tfrac{N_0}{2}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}$$

Por tanto: $\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m) : N(\underline{\mathbf{a}}, \tfrac{N_0}{2}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1})$

i) Para el usuario "*i*"se estima $\hat{\alpha}_i[m]$ a partir de la componente $\hat{y}_i(t_m)$. Por ser la amplitud a detectar, binaria y polar, el umbral de decisión es igual a cero. Si K=3 usuarios y $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{R}^{-1} = \dfrac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\rho^2 \end{pmatrix}$, obtenga la expresión de la componente $\hat{y}_1(t_m)$, correspondiente al usuario i=1, identificando señal útil y ruido y demostrando que no hay interferencia entre usuarios.

SOLUCIÓN APARTADO i: A partir del apartado anterior:

$$\hat{y}_1(t_m) = \alpha_1[m] + \sum_{k=1}^{3} \left(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}\right)_{1k} \beta_k(t_m) = \pm\tfrac{d}{2} + \tfrac{1}{1-\rho^2}\beta_1(t_m) - \tfrac{\rho}{1-\rho^2}\beta_2(t_m)$$

El primer sumando corresponde al término de señal útil y el resto es ruido. No aparece interferencia debida a los usuarios "2" y "3".

j) Calcule la BER del usuario $i=1$, para la situación del apartado anterior, en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, del cociente $\frac{T_{CP}}{T}$ y del coeficiente ρ. Comente la pérdida en dB de $\frac{E_b}{N_0}$ respecto al caso de canales ideales.

SOLUCIÓN APARTADO j:

Por ser los símbolos binarios, polares y equiprobables: $BER = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$

Con $\frac{d^2}{4} = E_b \frac{T-T_{cp}}{T} = E_b\left(1-\frac{T_{cp}}{T}\right)$ y $\sigma^2 = E\left[\left(\frac{1}{1-\rho^2}\beta_1(t_m) - \frac{\rho}{1-\rho^2}\beta_2(t_m)\right)^2\right] = \frac{N_0}{2}\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}$

Por tanto:
$$BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}\left(1-\frac{T_{cp}}{T}\right)\frac{(1-\rho^2)^2}{\left(1+\rho^2\right)^2}}\right)$$

Dado que si todos los canales fueran ideales se obtendría: $BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}\left(1-\frac{T_{cp}}{T}\right)}\right)$ la pérdida es igual a $\Delta = 10\log_{10}\left(\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}\right)$. Es decir, el usuario "1" debe aumentar Δ dB la potencia transmitida, para mantener la BER respecto al caso de canales ideales.

SEÑAL OFDM

Para **OFDM**, considere como señal útil $s(t) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k[n]\varphi_k(t-nT) * h(t)$.

- La función $\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\exp\left(j2\pi k f_0(t-T_{cp})\right)\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ cumple $f_0 = \dfrac{1}{T-T_{cp}}$.
- El ruido $w(t)$ es gaussiano complejo, y tanto su parte real como su parte imaginaria presentan densidad espectral $\frac{N_0}{2}$ y son estadísticamente independientes entre sí.
- K es ahora el número de sub-portadoras. Los símbolos son polares, binarios, equiprobables: $\alpha_k[n] = \pm\frac{d}{2}$.
- La expresión (1) sigue siendo válida si la duración de la respuesta impulsional del canal *h(t)* es menor que T_{cp}. Observe que en OFDM $h_k(t) = h(t); 1 \le k \le K$.

k) Demuestre que las funciones $\varphi_k(t)$ son ortonormales en (T_{cp}, T). Calcule la energía transmitida por bit, en función de la distancia entre símbolos *d* y de los parámetros que considere necesarios.

SOLUCIÓN APARTADO k:

Ortonormalidad entre funciones:

$$\int_{T_{cp}}^{T} \varphi_k(t)\varphi_i^*(t)dt = \int_{T_{cp}}^{T} \tfrac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\exp\left(j2\pi kf_0(t-T_{cp})\right)\tfrac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\exp\left(-j2\pi if_0(t-T_{cp})\right)dt =$$

$$\tfrac{1}{T-T_{cp}}\int_{T_{cp}}^{T}\exp\left(j2\pi(k-i)f_0(t-T_{cp})\right)dt = \delta[k-i]$$

Cálculo de la energía media de bit: (Aunque en este cálculo se debería considerar la energía cruzada entre funciones en el tramo *(0,T_{cp})*), se considerará nula frente al resto del tiempo: (T_{cp},T).

$$E_b = \int_0^T \left(\pm\tfrac{d}{2}\right)^2 \left|\varphi_k(t)\right|^2 dt = \tfrac{d^2}{4}\tfrac{T}{T-T_{cp}}$$

l) Calcule para OFDM la expresión particular de los coeficientes ρ_{ki} de la expresión (1) en función de la transformada de Fourier de *h(t)*. Observe que en este caso los coeficientes ρ_{ii} pueden ser complejos. Obtenga la expresión de la señal $y_i(t_m)$, identificando señal útil y ruido, complejo en este caso y demostrando que no hay interferencia entre sub-portadoras.

SOLUCIÓN APARTADO l:

Coeficientes ρ_{ki}:

$$\rho_{ki} = \int_0^{T_{cp}} h(\tau)\int_{T_{cp}}^{T}\varphi_k(\gamma-\tau)\varphi_i^*(\gamma)d\gamma d\tau =$$

$$\int_0^{T_{cp}} h(\tau)\int_{T_{cp}}^{T}\tfrac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\exp\left(j2\pi kf_0(\gamma-\tau-T_{cp})\right)\tfrac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\exp\left(-j2\pi if_0(\gamma-T_{cp})\right)d\gamma d\tau =$$

$$\tfrac{1}{T-T_{cp}}\int_0^{T_{cp}} h(\tau)\exp\left(-j2\pi f_0\tau\right)\int_{T_{cp}}^{T}\exp\left(j2\pi f_0(k-i)(\gamma-T_{cp})\right)d\gamma d\tau =$$

$$\tfrac{1}{T-T_{cp}}\int_0^{T_{cp}} h(\tau)\exp\left(-j2\pi f_0\tau\right)(T-T_{cp})\delta[k-i]d\tau = \delta[k-i]\int_0^{T_{cp}} h(\tau)\exp\left(-j2\pi kf_0\tau\right)d\tau =$$

$$\delta[k-i]H(kf_0)$$

Expresión de la señal $y_i(t_m)$:

$$y_i(t_m) = H(if_0)\alpha_i[m] + \beta_i(t_m) = \left(H_R(if_0)+jH_I(if_0)\right)\alpha_i[m] + \left(\beta_R(t_m)+j\beta_I(t_m)\right)$$

Al desglosar la coordenada de ruido en parte real y en parte imaginaria, se ha omitido el subíndice de sub-portadora "i" para simplificar de este modo nomenclatura y dado que las características estadísticas no dependen de la portadora en cuestión. Es evidente en la expresión hallada que no hay interferencias entre sub-portadoras.

m) Para el usuario "*i*"se estima $\hat{\alpha}_i[m]$ a partir de $real\left(\frac{y_i(t_m)}{\rho_{ii}}\right)$. Por ser la amplitud a detectar, binaria y polar, el umbral de decisión es igual a cero. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ y de los parámetros que considere necesarios. Previamente identifique el término de ruido que queda presente en detección y calcule su potencia. Comente la pérdida en dB de $\frac{E_b}{N_0}$ respecto al caso de canal ideal.

SOLUCIÓN APARTADO m:

Señal en Detección:

$$real\left(\frac{y_i(t_m)}{\rho_{ii}}\right) = real\left(\frac{y_i(t_m)}{H(if_0)}\right) = \alpha_i[m] + real\left[\frac{\beta_R(t_m) + j\beta_I(t_m)}{H_R(if_0) + jH_I(if_0)}\right] = \alpha_i[m] + \frac{\beta_R(t_m)H_R(if_0) - \beta_I(t_m)H_I(if_0)}{\left|H(if_0)^2\right|}$$

Término de ruido: $\hat{\beta}(t_m) = \frac{\beta_R(t_m)H_R(if_0) - \beta_I(t_m)H_I(if_0)}{|H(if_0)|^2}$

Donde

$$\beta_R(t_m) = real\left[\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\int_{T_{cp}}^{T} w(\lambda)\exp(+j2\pi i f_0 \lambda)(T-T_{cp})d\lambda\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\int_{T_{cp}}^{T} w_R(\lambda)\cos\left(2\pi i f_0\lambda(T-T_{cp})\right) - w_I(\lambda)\sin\left(2\pi i f_0\lambda(T-T_{cp})\right)d\lambda$$

$$\beta_I(t_m) = imag\left[\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\int_{T_{cp}}^{T} w(\lambda)\exp(+j2\pi i f_0 \lambda)(T-T_{cp})d\lambda\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\int_{T_{cp}}^{T} w_I(\lambda)\cos\left(2\pi i f_0\lambda(T-T_{cp})\right) + w_R(\lambda)\sin\left(2\pi i f_0\lambda(T-T_{cp})\right)d\lambda$$

de donde es sencillo deducir:

$$E\left[(\beta_R(t_m))^2\right] = E\left[(\beta_I(t_m))^2\right] = \frac{N_0}{2} \qquad \text{y} \qquad E[\beta_R(t_m)\beta_I(t_m)] = 0$$

por lo que la potencia del término de ruido en detección es:

$$\sigma^2 = E\left[\left(\hat{\beta}(t_m)\right)^2\right] = \frac{N_0}{2}\frac{(H_R(if_0))^2 + (H_I(if_0))^2}{|H(if_0)|^4} = \frac{N_0}{2}\frac{1}{|H(if_0)|^2}$$

Cálculo de la BER:

Por ser los símbolos binarios, polares y equiprobables: $BER = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$

Con $\frac{d^2}{4} = E_b\frac{T-T_{cp}}{T} = E_b\left(1-\frac{T_{cp}}{T}\right)$

Por tanto: $$BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}\left(1-\frac{T_{cp}}{T}\right)|H(if_0)|^2}\right)$$

Dado que si todos los canales fueran ideales se obtendría: $BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}\left(1-\frac{T_{cp}}{T}\right)}\right)$ la pérdida es igual a $\Delta = -20\log_{10}\left(|H(if_0)|\right)$. Es decir, se debe aumentar Δ dB la potencia transmitida para la sub-postadora i, para mantener la BER respecto al caso de canales ideales.

NOTA:

- Sea el vector aleatorio: $\underline{\mathbf{v}}$ y la matriz determinista $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. Dado $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{v}}$, se cumple $E[\underline{\mathbf{x}}] = \underline{\underline{\mathbf{A}}}E[\underline{\mathbf{v}}]$ y $E\left[(\underline{\mathbf{x}} - E[\underline{\mathbf{x}}])(\underline{\mathbf{x}} - E[\underline{\mathbf{x}}])^T\right] = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{C}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ con $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = E\left[(\underline{\mathbf{v}} - E[\underline{\mathbf{v}}])(\underline{\mathbf{v}} - E[\underline{\mathbf{v}}])^T\right]$