Control de Comunicacions Òptiques

Grup 10 - 17 de Desembre de 2010

Temps : 1h 15’ Nom:

TEST (6 punts)

Marqueu la resposta correcta. Cada resposta correcta suma 0,4 punts mentre que cada resposta errònia resta 0,1 punts.

1. La definició d’eficiència quàntica en un fotodetector en funció de la potència òptica incident (P) i del corrent elèctric lliurat (I) és la següent:

   a) $\eta = \frac{I \cdot hf}{P \cdot q}$ b) $\eta = \frac{P \cdot q}{I \cdot hf}$ c) $\eta = \frac{I \cdot q}{P \cdot hf}$ d) $\eta = \frac{P \cdot hf}{I \cdot q}$

2. Comparant el fotodetector APD amb el PIN:
   a) La responsivitat és inferior però l’ample de banda és major
   b) La responsivitat és major però l’ample de banda és inferior
   c) Tant la responsivitat com l’ample de banda són superiors
   d) Tant la responsivitat com l’ample de banda són inferiors

3. En un procés de fotodetecció emprant un APD, si el factor multiplicatiu (M) creix,
   a) es redueix la influència del soroll shot mentre que la influència del soroll tèrmic augmenta.
   b) es redueix la influència del soroll tèrmic mentre que la influència del soroll shot augmenta.
   c) es redueix la influència del soroll tèrmic mentre que la influència del soroll shot es manté.
   d) es redueix la influència del soroll shot mentre que la influència del soroll tèrmic es manté.

4. En un procés de detecció coherent d’un senyal amb modulació de la intensitat:
   a) La variància dels “1” és molt major que la variància dels “0”
   b) La variància dels “1” és molt menor que la variància dels “0”
   c) La variància dels “1” és aproximadament igual que la variància dels “0”
   d) La variància dels “0” és zero

5. Assumint bits i filtres “ideals”, assenyaleu quina relació hi ha entre la variància del número d’electrons per bit σ_e^2 i la variància de fotocorrent σ_i^2, després del procés de fotodetecció.

   a) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 \left(T_b/q\right)^2$ b) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 \left(q/T_b\right)^2$ c) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 \left(T_b/q\right)$ d) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 \left(q/T_b\right)$

6. En un receptor òptic basat en un fotodiode APD es compleix que el factor de soroll segueix una funció $F(M) = M^x$ on M és el factor de guany del dispositiu. En aquestes condicions es pot trobar un valor òptim per al factor de guany que maximitza la SNR en recepció. L’expressió resultant, en funció de la potència òptica rebuda P, la responsivitat del receptor $\Re$, el corrent de foscor I_D, la variància de corrent de soroll tèrmic σ_{th}^2 i de l’amplada de banda equivalent de soroll B, és la següent:

   a) $M_{opt}^{x+1} = \frac{2\sigma_{th}^2}{xqB\left(\Re P + I_D\right)}$ b) $M_{opt}^{x+2} = \frac{2\sigma_{th}^2}{xqB\left(\Re P + I_D\right)}$ c) $M_{opt}^{x+1} = \frac{\sigma_{th}^2}{xqB\left(\Re P + I_D\right)}$ d) $M_{opt}^{x+2} = \frac{\sigma_{th}^2}{xqB\left(\Re P + I_D\right)}$

7. Es disposa d’un fotodetector tipus APD amb una eficiència quàntica η, un paràmetre de guany M, un factor de soroll $F=M^x$ i un soroll tèrmic (adimensional) σ_p^2. Assenyaleu quina condició s’ha de complir per tal de que les màximes prestacions, en quant a SNR, siguin millors que les d’un fotodetector tipus PIN amb la mateixa eficiència quàntica i el mateix nivell de soroll tèrmic. Preneu un número de fotons mitjà per unitat de temps $\langle n \rangle$ i un corrent de foscor nul.

   a) $\sigma_p^2 < \frac{x}{2}\eta\langle n \rangle$ b) $\sigma_p^2 > \frac{x}{2}\eta\langle n \rangle$ c) $\sigma_p < \frac{x}{2}\eta\langle n \rangle$ d) $\sigma_p > \frac{x}{2}\eta\langle n \rangle$

8. Continuant amb l’exercici anterior, trobeu la condició de millora en quant a la sensibilitat del receptor per a una modulació de la intensitat en format NRZ ideal i un paràmetre de qualitat de referència Q.

   a) $\sigma_p^2 < \frac{x}{2}Q$ b) $\sigma_p^2 > \frac{x}{2}Q$ c) $\sigma_p < \frac{x}{2}Q$ d) $\sigma_p > \frac{x}{2}Q$

9. A un receptor de comunicacions òptiques li arriben $\langle n\rangle$ fotons per unitat de temps T. La màxima relació senyal a soroll a la que es pot arribar (assumint llum coherent i potència òptica constant) és:

a) $\langle n\rangle$ b) $2\langle n\rangle$ c) $\langle n\rangle/2$ d) Depèn del nivell de soroll tèrmic

10. Determineu la màxima distància de transmissió d'un senyal amb modulació de la intensitat NRZ ideal a R_b [bit/s] amb una potència òptica mitjana P_T per una fibra amb un paràmetre d'atenuació α [dB/Km] si es disposa d'un receptor ideal (límit quàntic) i es demana una probabilitat d'error de 10^{-9}.

a) $10/\alpha\cdot\log\left(P_T/\left(18\cdot hf\cdot R_b\right)\right)$ b) $10/\alpha\cdot\log\left(P_T/\left(10\cdot hf\cdot R_b\right)\right)$

c) $10/\alpha\cdot\log\left(P_T/\left(18\cdot hf\cdot 2R_b\right)\right)$ d) $10/\alpha\cdot\log\left(P_T/\left(10\cdot hf\cdot 2R_b\right)\right)$

11. En un enllaç per fibra òptica (α=0.2 dB/km) amb un receptor ideal, el transmissor emet polsos òptics ideals de $\langle n_1\rangle=10^4$ i $\langle n_0\rangle=10^2$ fotons per al bit "1" i "0" respectivament. Si s'exigeix un factor de qualitat Q=9, quina és la màxima longitud permesa de l'enllaç ?

a) 50 Km b) 100 Km c) 150 Km d) 200 Km

12. En un receptor òptic basat en un fotodetector PIN (soroll tèrmic i corrent de foscor menyspreables) es rep una potència P_1 = P per al bit "1" i P_0 = 0 per al bit "0" per a garantir una probabilitat d'error BER = 10^{-9} . Determineu l'increment en la potència òptica mitjana necessària per mantenir la BER si s'afegeix un corrent de foscor que incrementa un 50% el nivell de corrent mitjà dels "1". Assumiu una estadística Gaussiana en tot moment:

a) 2.9 dB b) 3.8 dB c) 5.7 dB d) 7.6 dB

13. En un receptor òptic el fotodiode APD, amb factor de soroll F(M) = $M^{0.7}$ i corrent de foscor menyspreable, s'ha optimitzat per tal de maximitzar la SNR quan la potència òptica rebuda és P. Si la potència òptica passa de manera sobtada a ser 2P, determineu la variació que ha experimentat la SNR. **El valor exacte era +3.6 dB**

a) +4 dB b) +6 dB c) -4 dB d) -6 dB

14. Un fotodiode APD presenta un corrent de foscor nul, una eficiència quàntica η, un paràmetre de guany M, un factor de soroll F(M)=M i rep una potència òptica constant durant un temps τ. El guany de l'APD s'ha optimitzat per a maximitzar la SNR. Siguin M_1 i M_2 dos valors de M per als quals s'obté la mateixa SNR. Trobeu el valor de M_{opt} si M_2 = $2M_1$ = 100.

a) 49 b) 59 c) 69 d) 79

15. Trobeu la distància màxima de transmissió d'un senyal de 5 Gb/s amb modulació PSK ideal i detecció homodina si la potència de pic del transmissor és de 5 mW i l'atenuació de l'enllaç és de 0.3 dB/Km. Preneu una longitud d'ona d'operació de 1550 nm i una BER=10^{-9}.

a) 168 Km b) 178 Km c) 188 Km d) 198 Km

PROBLEMA (4 punts)

Marqueu la resposta correcta. Cada resposta correcta suma 0,4 punts mentre que cada resposta errònia resta 0,1 punts.

Un fotodiode APD amb factor de soroll en excés F(M) = M, eficiència quàntica $\eta = 0.9$ i corrent de foscor menyspreable és utilitzat en un sistema de comunicacions òptiques. El guany de multiplicació (M) ha estat optimitzat per a obtenir la màxima relació senyal a soroll (SNR). El soroll tèrmic total ve caracteritzat per una variància (adimensional) σ_p^2.

1) Trobeu l'expressió de la SNR màxima en funció del número de fotons mitjà per unitat de temps $\langle n \rangle$.

a) $\frac{2}{3}\eta\langle n\rangle\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ b) $\frac{3}{2}\eta\langle n\rangle\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ c) $\frac{1}{3}\eta\langle n\rangle\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{2}{3}}$ d) $\frac{1}{3}\eta\langle n\rangle\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{3}{2}}$

2) Obteniu el valor del guany de multiplicació òptim (M_{opt}) per a que la relació senyal a soroll (SNR) estigui únicament 20 dB per sota de la relació senyal a soroll en el límit quàntic.

a) 15 b) 30 c) 45 d) 60

3) Calculeu la millora aproximada (en dB) introduïda en la SNR quan M és l'òptim (SNR màxima) respecte el cas M=1. Suposeu, en aquest cas i de manera puntual, que el corrent de foscor no és menyspreable.

a) 13 dB b) 31 dB c) 26 dB d) 62 dB

4) Un cop el fotodiode està optimitzat es produeix un increment sobtat de la potència de soroll tèrmic d'un 100%. Determineu la reducció percentual de la SNR que s'ha produït. Suposeu, en aquest cas i de manera puntual, que el corrent de foscor no és menyspreable.

a) 25 % b) 50 % c) 75 % d) 100 %

5) Donada una SNR exigida, determineu el número de fotons mitjà per unitat de temps mínim $\langle n\rangle_{\min}$ que la garanteix.

a) $\frac{2\sigma_p}{\eta}\left(\frac{2}{3}SNR\right)^{\frac{2}{3}}$ b) $\frac{2\sigma_p}{\eta}\left(\frac{3}{4}SNR\right)^{\frac{3}{4}}$ c) $\frac{2}{\eta}\sqrt{\sigma_p}\left(\frac{2}{3}SNR\right)^{\frac{2}{3}}$ d) $\frac{2}{\eta}\sqrt{\sigma_p}\left(\frac{3}{4}SNR\right)^{\frac{3}{4}}$

Considereu ara el mateix fotodiode que detecta un senyal digital modulat en intensitat en format NRZ ideal. El número mitjà de fotons per bit "1" és $\langle n_1\rangle$. Aquest cop, el guany de multiplicació (M) ha estat optimitzat per a obtenir la mínima probabilitat d'error (BER).

6) Trobeu l'expressió del paràmetre de qualitat un cop optimitzat (Q_{max}) en funció de $\langle n_1\rangle$.

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ b) $\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sigma_p^2}\right)^{\frac{2}{3}}$ c) $\frac{1}{2}\left(\frac{\eta^2\langle n_1\rangle^2}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{3}}$ d) $\frac{1}{2}\left(\frac{\eta^2\langle n_1\rangle^2}{\sigma_p}\right)^{\frac{2}{3}}$

7) Obteniu el valor del guany de multiplicació òptim (M_{opt}) per a que el paràmetre de qualitat sigui únicament 10 cops inferior al paràmetre de qualitat en el límit quàntic (Q_{LQ}).

a) 15 b) 30 c) 45 d) 60

8) Calculeu la millora aproximada (en dB) introduïda en la Q quan M és l'òptim (Q màxima) respecte M=1. Per a calcular la millora en dB cal que empreu l'expressió 20·log(Q).

a) 7 dB b) 17 dB c) 27 dB d) 37 dB

9) Un cop el fotodiode està optimitzat es produeix un increment sobtat de la potència de soroll tèrmic d'un 100%. Determineu la reducció percentual de la Q que s'ha produït.

a) 13 % b) 36 % c) 64 % d) 87 %

10) Donada una Q exigida, determineu el número mitjà de fotons per bit "1" mínim $\langle n_1\rangle_{\min}$ que la garanteix.

a) $\frac{2\sigma_p}{\eta}\sqrt{2Q\sigma_p}$ b) $\frac{2Q}{\eta}\sqrt{2Q\sigma_p}$ c) $\frac{\sigma_p}{2\eta}\sqrt{2Q\sigma_p}$ d) $\frac{Q}{2\eta}\sqrt{2Q\sigma_p}$

Resolució:

1) Trobeu l'expressió de la SNR màxima en funció del número de fotons mitjà per unitat de temps $\langle n\rangle$.

Partim de l'expressió de la SNR en partícules prenent un corrent de foscor $\langle m_D\rangle$ electrons per unitat de temps.

$$SNR_{APD}=\frac{\eta^2\langle n\rangle^2}{M^x\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(M^x\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)+\frac{\sigma_p^2}{M^2}\right)=xM^{x-1}\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)-2\frac{\sigma_p^2}{M^3}=0\rightarrow M_{opt}^{x+2}=\frac{2\sigma_p^2}{x\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)}$$

$$SNR_{\max}=\frac{\eta^2\langle n\rangle^2}{\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)}\right)^{\frac{x}{x+2}}\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)+\sigma_p^2\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)}\right)^{\frac{-2}{x+2}}}=$$

$$=\frac{\eta^2\langle n\rangle^2}{\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)}\right)^{\frac{x}{x+2}}\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)}\xrightarrow{x=1,\ \langle m_D\rangle=0}\frac{2}{3}\eta\langle n\rangle\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

2) Obteniu el valor del guany de multiplicació òptim (M_{opt}) per a que la relació senyal a soroll (SNR) estigui únicament 20 dB per sota de la relació senyal a soroll en el límit quàntic.

$$SNR_{\max}=\frac{\eta\langle n\rangle}{M_{opt}^x\left(1+\frac{\langle m_D\rangle}{\eta\langle n\rangle}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)}\xrightarrow{x=1,\ \langle m_D\rangle=0}\frac{2}{3}\frac{\eta\langle n\rangle}{M_{opt}}=\frac{1}{100}\underbrace{\langle n\rangle}_{SNR_{LQ}}\rightarrow M_{opt}=\eta\frac{200}{3}\xrightarrow{\eta=0.9}60$$

3) Calculeu la millora aproximada (en dB) introduïda en la SNR quan M és l'òptim (SNR màxima) respecte el cas M=1. Suposeu, en aquest cas i de manera puntual, que el corrent de foscor no és menyspreable.

Aïllem el soroll tèrmic de l'expressió de la M_{opt}:

$$M_{opt}^{x+2}=\frac{2\sigma_p^2}{x\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)}\rightarrow\sigma_p^2=\frac{x}{2}\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)M_{opt}^{x+2}$$

Ara l'apliquem a la SNR quan M=1:

$$SNR_{M=1}=\frac{\eta^2\langle n\rangle^2}{\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle+\sigma_p^2}=\frac{\eta\langle n\rangle}{\left(1+\frac{\langle m_D\rangle}{\eta\langle n\rangle}\right)\left(1+\frac{x}{2}M_{opt}^{x+2}\right)}$$

Ara la relacionem amb la SNR òptima:

$$SNR_{\max}=\frac{\eta\langle n\rangle}{M_{opt}^x\left(1+\frac{\langle m_D\rangle}{\eta\langle n\rangle}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)}=\underbrace{\frac{\eta\langle n\rangle}{\left(1+\frac{\langle m_D\rangle}{\eta\langle n\rangle}\right)\left(1+\frac{x}{2}M_{opt}^{x+2}\right)}}_{SNR_{M=1}}\underbrace{\frac{\left(1+\frac{x}{2}M_{opt}^{x+2}\right)}{M_{opt}^x\left(1+\frac{x}{2}\right)}}_{\approx\frac{x}{x+2}M_{opt}^2}\xrightarrow[M_{opt}=60]{x=1}1200\ \left(\sim 31\ dB\right)$$

Per tant la millora és d'aproximadament 31 dB.

4) Un cop el fotodiode està optimitzat es produeix un increment sobtat de la potència de soroll tèrmic d'un 100%. Determineu la reducció percentual de la SNR que s'ha produït. Suposeu, en aquest cas i de manera puntual, que el corrent de foscor no és menyspreable.

$$SNR_{2\sigma_p^2} = \frac{\eta^2\langle n\rangle^2}{M_{opt}^x\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)+\dfrac{2\sigma_p^2}{M_{opt}^2}} = \frac{\eta\langle n\rangle}{M_{opt}^x\left(1+\dfrac{\langle m_D\rangle}{\eta\langle n\rangle}\right)(1+x)}$$

$$\sigma_p^2 = \frac{x}{2}\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)M_{opt}^{x+2}$$

$$\frac{SNR_{2\sigma_p^2}}{SNR_{\max}} = \frac{\dfrac{\eta\langle n\rangle}{M_{opt}^x\left(1+\dfrac{\langle m_D\rangle}{\eta\langle n\rangle}\right)(1+x)}}{\dfrac{\eta\langle n\rangle}{M_{opt}^x\left(1+\dfrac{\langle m_D\rangle}{\eta\langle n\rangle}\right)\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}} = \frac{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}{(1+x)} \xrightarrow{x=1} 0.75 \quad (reducci\acute{o}\ d'un\ 25\%)$$

5) Donada una SNR exigida, determineu el número de fotons mitjà per unitat de temps mínim $\langle n\rangle_{\min}$ que la garanteix.

La relació entre SNR i $\langle n\rangle$ quan l'APD està optimitzat és única. Només cal aïllar de l'expressió de SNR_{max}:

$$SNR_{\max} = \frac{\eta^2\langle n\rangle^2}{\left(\dfrac{2\sigma_p^2}{x\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)}\right)^{\frac{x}{x+2}}\left(\eta\langle n\rangle+\langle m_D\rangle\right)\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} \xrightarrow{\langle m_D\rangle=0} \frac{\eta\langle n\rangle}{\left(\dfrac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{x}{x+2}}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^{\frac{2x+2}{x+2}}}{\left(\dfrac{2\sigma_p^2}{x}\right)^{\frac{x}{x+2}}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} \rightarrow \langle n\rangle_{\min} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{2\sigma_p^2}{x}\right)^{\frac{x}{2x+2}}\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)SNR\right)^{\frac{x+2}{2x+2}} \xrightarrow{x=1} \frac{2}{\eta}\sqrt{\sigma_p}\left(\frac{3}{4}SNR\right)^{\frac{3}{4}}$$

6) Trobeu l'expressió del paràmetre de qualitat un cop optimitzat (Q_{max}) en funció de $\langle n_1\rangle$.

$$Q\frac{M\,\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{M^{x+2}\eta\langle n_1\rangle+\sigma_p^2}+\sigma_p} = \frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\dfrac{\sigma_p^2}{M^2}}+\dfrac{\sigma_p}{M}}$$

$$\frac{\partial}{\partial M}\left\{\sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}+\frac{\sigma_p}{M}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\dfrac{\sigma_p^2}{M^2}}}\left(xM^{x-1}\eta\langle n_1\rangle-2\frac{\sigma_p^2}{M^3}\right)-\frac{\sigma_p}{M^2}=0$$

$$xM^{x-1}\eta\langle n_1\rangle-2\frac{\sigma_p^2}{M^3} = \frac{\sigma_p}{M^2}2\sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}$$

$$xM^{x+1}\frac{\eta\langle n_1\rangle}{2\sigma_p}-\frac{\sigma_p}{M} = \sqrt{M^x\eta\langle n_1\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}$$

$$x^2M^{\cancel{2}x+2}\frac{\eta^{\cancel{2}}\langle n_1\rangle^{\cancel{2}}}{4\sigma_p^2}+\cancel{\frac{\sigma_p^2}{M^2}}-xM^{\cancel{x+1}}\cancel{\frac{\eta\langle n_1\rangle}{M}} = \cancel{M^x}\,\cancel{\eta\langle n_1\rangle}+\cancel{\frac{\sigma_p^2}{M^2}}$$

$$x^2M^{x+2}\frac{\eta\langle n_1\rangle}{4\sigma_p^2}-x=1 \rightarrow M^{x+2} = \frac{x+1}{x^2}\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle} \rightarrow M_{opt} = \left(\frac{x+1}{x^2}\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}$$

$$Q_{\max} = \frac{M_{opt}\,\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{M_{opt}^{x+2}\eta\langle n_1\rangle + \sigma_p^2} + \sigma_p} = \frac{\left(\frac{x+1}{x^2}\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{\frac{x+1}{x^2}\frac{4\sigma_p^2}{\cancel{\eta\langle n_1\rangle}}\cancel{\eta\langle n_1\rangle} + \sigma_p^2} + \sigma_p} = \frac{\left(\frac{x+1}{x^2}\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}\eta\langle n_1\rangle}{\sigma_p\left(1+\underbrace{\sqrt{1+4\frac{x+1}{x^2}}}_{\frac{x+2}{x}}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2\sigma_p}{x}\right)^{\frac{2}{x+2}}\left(\frac{x+1}{\eta\langle n_1\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}\eta\langle n_1\rangle}{\sigma_p\frac{2}{x}(x+1)} = \left(\frac{x}{2\sigma_p}\right)^{\frac{x}{x+2}}\left(\frac{\eta\langle n_1\rangle}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{2}\left(\frac{\eta^2\langle n_1\rangle^2}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

7) Obteniu el valor del guany de multiplicació òptim (M_{opt}) per a que el paràmetre de qualitat sigui únicament 10 cops inferior al paràmetre de qualitat en el límit quàntic (Q_{LQ}).

Primer posem el soroll tèrmic en funció de Mopt i després ho posem dins de l'expressió de la Q:

$$M_{opt}^{x+2} = \frac{x+1}{x^2}\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n_1\rangle} \rightarrow \sigma_p^2 = \frac{\eta\langle n_1\rangle}{4}\frac{x^2}{x+1}M_{opt}^{x+2}$$

$$Q_{\max} = \frac{\eta\langle n\rangle_1}{\sqrt{M_{opt}^{x}\eta\langle n_1\rangle + \frac{\eta\langle n_1\rangle}{4}\frac{x^2}{x+1}M_{opt}^{x}} + \sqrt{\frac{\eta\langle n_1\rangle}{4}\frac{x^2}{x+1}M_{opt}^{x}}} = \frac{\sqrt{\eta\langle n_1\rangle}}{\sqrt{M_{opt}^{x}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{x^2}{x+1}} + \sqrt{\frac{1}{4}\frac{x^2}{x+1}}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\eta\langle n_1\rangle}{M_{opt}^{x}}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{x^2}{x+1}} - \sqrt{\frac{1}{4}\frac{x^2}{x+1}}\right) = \frac{1}{10}\underbrace{\sqrt{\langle n_1\rangle}}_{Q_{LQ}} \rightarrow M_{opt}^{x} = 100\eta\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{x^2}{x+1}} - \sqrt{\frac{1}{4}\frac{x^2}{x+1}}\right)^2}_{\xrightarrow{x=1}\frac{1}{2}} \xrightarrow[\eta=0.9]{x=1} 45$$

8) Calculeu la millora aproximada (en dB) introduïda en la Q quan M és l'òptim (Q màxima) respecte M=1. Per a calcular la millora en dB cal que empreu l'expressió 20·log(Q).

$$\sigma_p^2 = \frac{\eta\langle n_1\rangle}{4}\frac{x^2}{x+1}M_{opt}^{x+2}$$

$$Q_{M=1} = \frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{\eta\langle n_1\rangle + \sigma_p^2} + \sigma_p} = \frac{\eta\langle n_1\rangle}{\sqrt{\eta\langle n_1\rangle + \frac{\eta\langle n_1\rangle}{4}\frac{x^2}{x+1}M_{opt}^{x+2}} + \sqrt{\frac{\eta\langle n_1\rangle}{4}\frac{x^2}{x+1}M_{opt}^{x+2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\eta\langle n_1\rangle}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{x^2}{x+1}M_{opt}^{x+2}} + \sqrt{\frac{1}{4}\frac{x^2}{x+1}M_{opt}^{x+2}}} \xrightarrow{M>>1} \frac{\sqrt{\eta\langle n_1\rangle}}{\sqrt{\frac{x^2}{x+1}M_{opt}^{x+2}}}$$

$$\frac{Q_{\max}}{Q_{M=1}} = \sqrt{\frac{\cancel{\eta\langle n_1\rangle}}{\cancel{M_{opt}^{x}}}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{x^2}{x+1}} - \sqrt{\frac{1}{4}\frac{x^2}{x+1}}\right)\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x+1}M_{opt}^{\cancel{x}+2}}}{\cancel{\sqrt{\eta\langle n_1\rangle}}} \xrightarrow[M_{opt}^{x}=45]{x=1} 22.5 \qquad \left(20\log(\ ) \approx 27\ dB\right)$$

S'obté una millora de 27 dB.

9) Un cop el fotodiode està optimitzat es produeix un increment sobtat de la potència de soroll tèrmic d'un 100%. Determineu la reducció percentual de la Q que s'ha produït.

$$2\sigma_p^2 = \frac{\eta \langle n \rangle_1}{2} \frac{x^2}{x+1} M_{opt}^{x+2}$$

$$Q_{2\sigma_p^2} = \frac{\eta \langle n_1 \rangle}{\sqrt{M_{opt}^x \eta \langle n_1 \rangle + \frac{\eta \langle n_1 \rangle}{2} \frac{x^2}{x+1} M_{opt}^x} + \sqrt{\frac{\eta \langle n_1 \rangle}{2} \frac{x^2}{x+1} M_{opt}^x}} = \sqrt{\frac{\eta \langle n_1 \rangle}{M_{opt}^x}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{x+1}} - \sqrt{\frac{1}{2} \frac{x^2}{x+1}} \right)$$

$$\frac{Q_{2\sigma_p^2}}{Q_{\max}} = \frac{\cancel{\sqrt{\frac{\eta \langle n_1 \rangle}{M_{opt}^x}}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{x+1}} - \sqrt{\frac{1}{2} \frac{x^2}{x+1}} \right)}{\cancel{\sqrt{\frac{\eta \langle n_1 \rangle}{M_{opt}^x}}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{x^2}{x+1}} - \sqrt{\frac{1}{4} \frac{x^2}{x+1}} \right)} \xrightarrow{x=1} \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} = 0.87 \qquad (reducció\ d'un\ 13\%)$$

10) Donada una Q exigida, determineu el número mitjà de fotons per bit "1" mínim $\langle n_1 \rangle_{\min}$ que la garanteix.

La relació entre Q i $\langle n_1 \rangle$ quan l'APD està optimitzat és única. Només cal aïllar de l'expressió de $Q_{\max}$:

$$Q_{\max} = \left(\frac{x}{2\sigma_p} \right)^{\frac{x}{x+2}} \left(\frac{\eta \langle n_1 \rangle}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{x+2}} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{2} \left(\frac{\eta^2 \langle n_1 \rangle^2}{\sigma_p} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\langle n_1 \rangle_{\min} = (x+1) \frac{1}{\eta} \left(\frac{2\sigma_p}{x} \right)^{\frac{x}{x+1}} \underbrace{Q^{\frac{x+2}{x+1}}}_{Q^{2-\frac{x}{x+1}}} = (x+1) \frac{Q^2}{\eta} \left(\frac{2\sigma_p}{xQ} \right)^{\frac{x}{x+1}} \xrightarrow{x=1} \frac{2Q}{\eta} \sqrt{2Q\sigma_p}$$