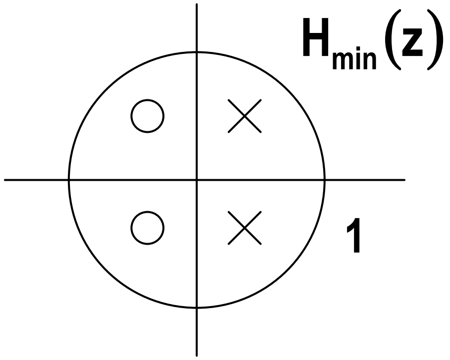
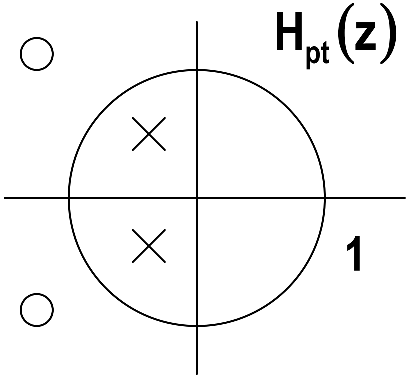
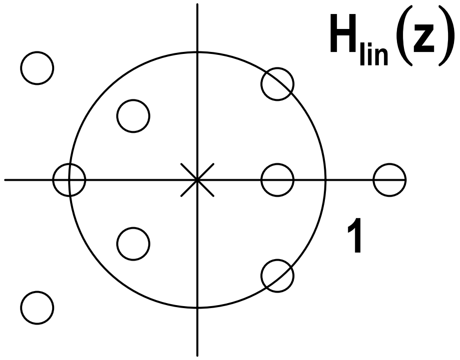
4.4: Sistemas especiales

- **Sistemas de fase mínima**
  - ➢ **Células pasa-todo**
  - ➢ **Sistema inverso**
- **Sistemas FIR de fase lineal**
  - ➢ **Simetrías**
  - ➢ **Tipos**



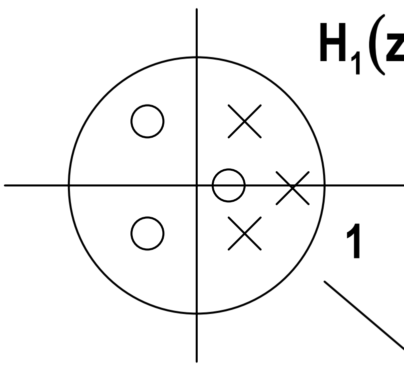




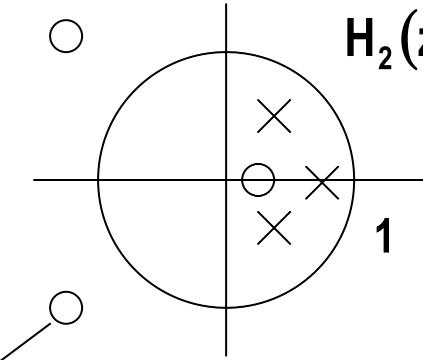
Caracterización de un sistema a partir de su módulo

$M^2(\omega) = H(z)H(1/z)\big|_{z=e^{j\omega}}$ $\Rightarrow$ **Varios sistemas pueden tener el mismo módulo**

$H_1(z)$

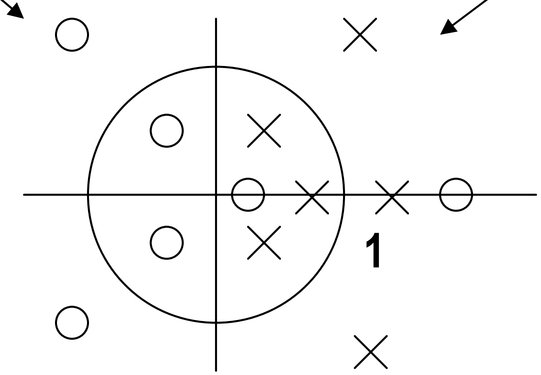


$H_2(z)$



$H_1(z)H_1(1/z)$

$H_2(z)H_2(1/z)$



$$z_k = re^{j\theta}$$

$$\frac{1}{z_k} = \frac{1}{r}e^{-j\theta}$$

$$\left.\begin{array}{l} H_1(z) \\ H_2(z) \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{Mismo módulo}$$

Sistema de fase mínima

Diagrama de polos
y ceros de $H_1(z)H_1(1/z)$ $\Rightarrow \begin{cases} \text{Ceros} & \{c_k, 1/c_k\} \\ \text{Polos} & \{p_k, 1/p_k\} \end{cases}$

$$\exists \text{ un sistema único con } \begin{cases} \text{Ceros} & \{|c_k| < 1\} \\ \text{Polos} & \{|p_k| < 1\} \end{cases}$$

Sistema de fase mínima

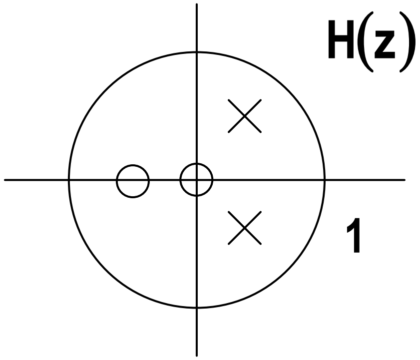
El módulo caracteriza un único sistema de fase mínima

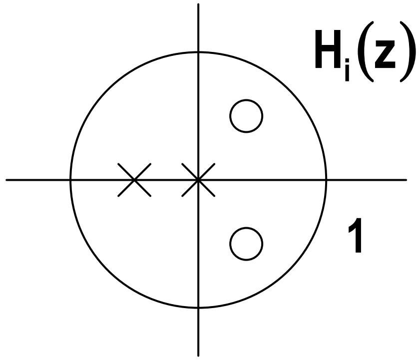
Sistemas de fase mínima

- H(z) causal y estable
- Se dice que H(z) es fase mínima si existe un sistema (inverso) causal y estable con función de transferencia

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$$

- Polos y ceros dentro del círculo unidad $|c_k|, |p_k| < 1$
- Excursión de fase nula $\Delta\varphi_{fm} = \varphi_{fm}(\pi) - \varphi_{fm}(-\pi) = 0$
- El sistema inverso también es de fase mínima

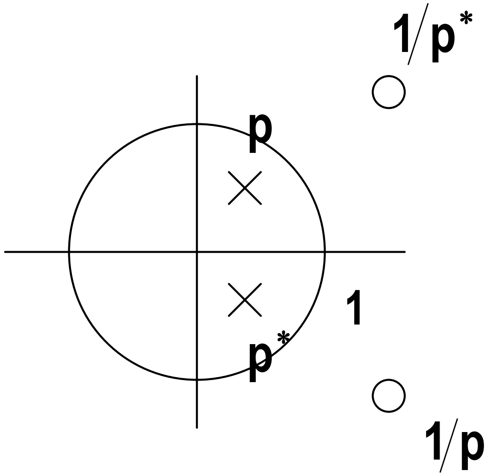




Células pasa-todo

- Respuesta frecuencial con módulo constante
- Ceros y polos inversos conjugados $\quad c_k = 1/p_k^{*}$

$$H_{pt}(z) = \frac{\prod_{k=1}^{P}\left(-p_k^{*}\right)\left(1-\frac{1}{p_k^{*}}z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{P}\left(1-p_k z^{-1}\right)} = \frac{z^{-P}D^{*}\left(1/z^{*}\right)}{D(z)}$$



$$M_{pt}^{2}(\omega) = H\left(e^{j\omega}\right)H^{*}\left(e^{j\omega}\right) = 1$$

$$1/z^{*}\Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{j\omega}$$

$$\varphi_{pt}(\omega) = -P\omega - 2\arg\left[D\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

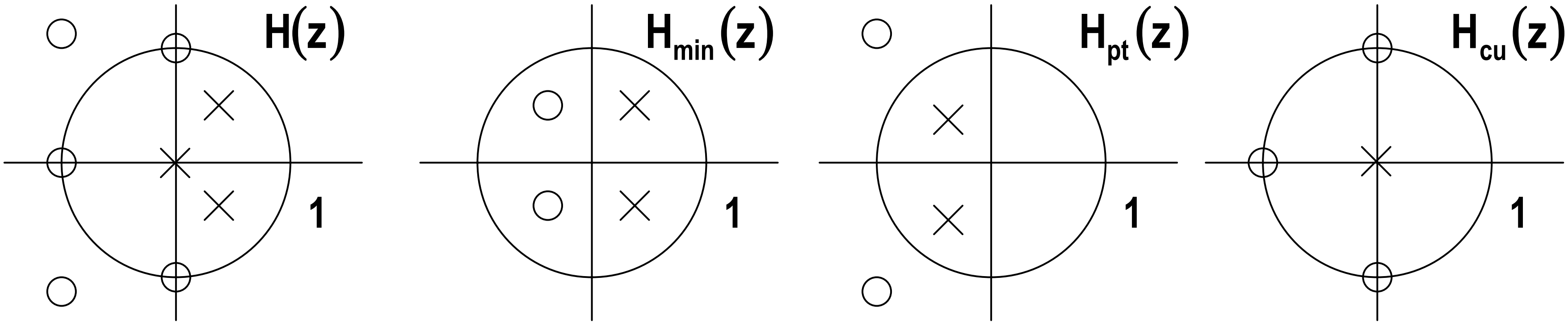
- Sistema causal y estable: polos dentro del círculo unidad y ceros fuera
  - Fase decreciente
  - Excursión de fase $\quad \Delta\varphi_{pt} = \varphi_{pt}(\pi) - \varphi_{pt}(-\pi) = -2\pi P$

Descomposición

- La H(z) de cualquier sistema causal y estable puede expresarse como

$$H(z) = H_{min}(z) H_{pt}(z) H_{cu}(z)$$

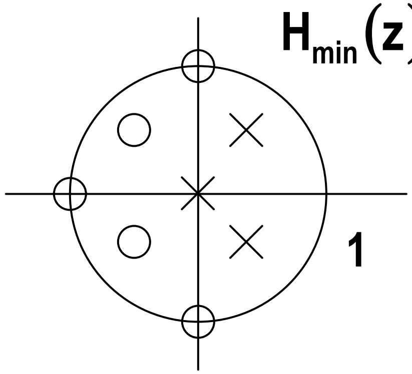
  - $H_{min}(z)$ sistema de fase mínima $\quad |c_k|, |p_k| < 1$
  - $H_{pt}(z)$ célula pasa-todo $\quad c_k = 1/p_k^*$
  - $H_{cu}(z)$ recoge los posibles ceros en la circunferencia unidad $\quad |c_k| = 1$



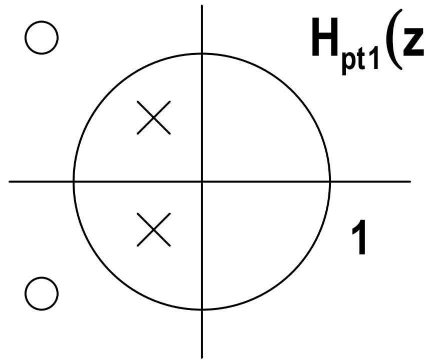
Sistemas con mismo $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$

- Fijado $H_{min}(z)H_{cu}(z)$ y tomando diferentes $H_{pt}(z)$ podemos obtener diferentes H(z) con el mismo $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$

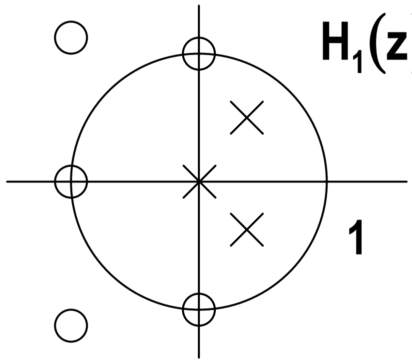
$H_{min}(z)H_{cu}(z)$



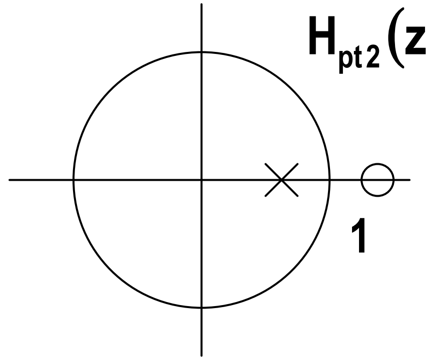
$H_{pt1}(z)$



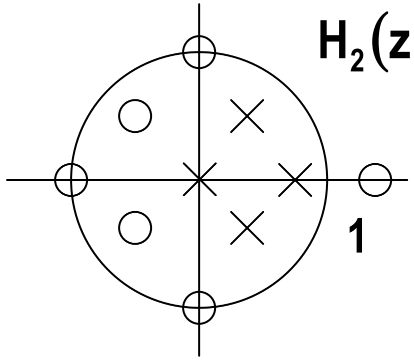
$H_1(z)$



$H_{pt2}(z)$



$H_2(z)$



- Sólo tiene excursión de fase nula el sistema de fase mínima
- Conclusión: $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ no determina de forma única $H(z)$

  sí “ $H_{min}(z)$

Ecualización

$$x[n] \rightarrow \boxed{H_d(z)} \rightarrow \boxed{H_e(z)} \rightarrow y[n] \approx x[n]$$

- $H_d(z)$ de fase mínima

$$H_d(z) = H_{mín}(z) \qquad H_e(z) = H_i(z) = \frac{1}{H_{mín}(z)} \qquad H_T(z) = H_d(z)H_e(z) = 1$$

Ecualización de módulo y fase

- $H_d(z)$ de fase no mínima

$$H_d(z) = H_{min}(z)H_{pt}(z) \qquad H_e(z) = \frac{1}{H_{mín}(z)} \qquad H_T(z) = H_d(z)H_e(z) = H_{pt}(z)$$

Ecualización de módulo

  - Puede modificarse la fase con una célula pasa-todo

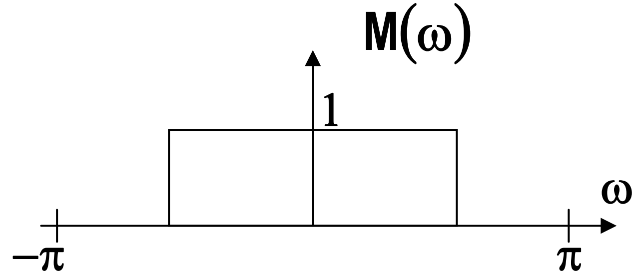
- $H_d(z) = H_{min}(z)H_{pt}(z)H_{cu}(z)$

$$H_e(z) = \frac{1}{H_{mín}(z)} \qquad H_T(z) = H_d(z)H_e(z) = H_{pt}(z)H_{cu}(z)$$

No ecualizable

Interés de la fase lineal

- **Filtro ideal en la banda B con fase lineal**

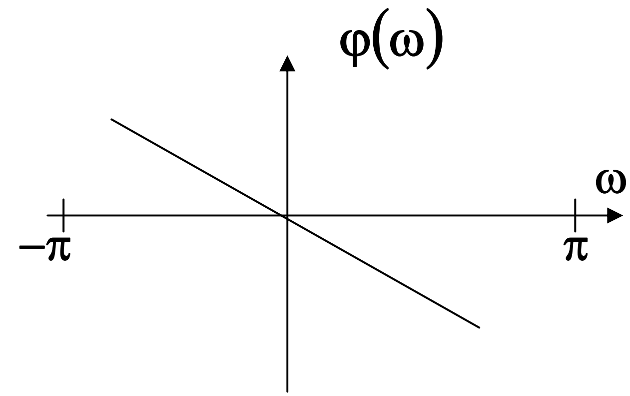


$$M(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in B\\ 0 & \text{fuera}\end{cases}\qquad \varphi(\omega)=-\alpha\omega$$

- **Si** $X(e^{j\omega})=0 \quad \omega\notin B$

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega}$$

$$y[n]=x[n-\alpha]$$



- **No hay distorsión de fase, sólo retardo**
- **Es posible diseñar filtros <u>discretos</u> de fase lineal**

Fase lineal generalizada

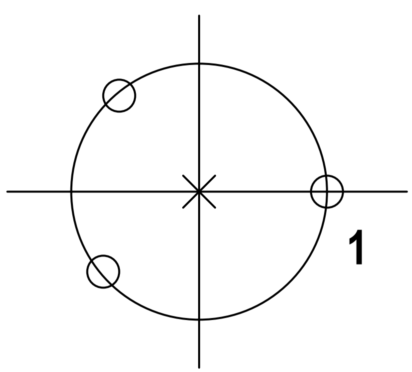
$$\varphi(\omega) = -\alpha\omega + \beta + \pi k(\omega)$$

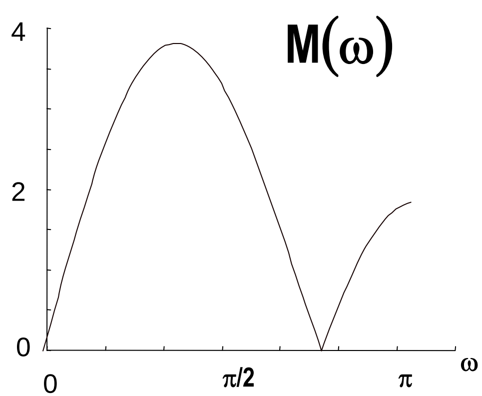
$2\alpha \in Z$ $\qquad H(z) = 1 + z^{-1}$ $\qquad \varphi(\omega) = -\dfrac{\omega}{2}$

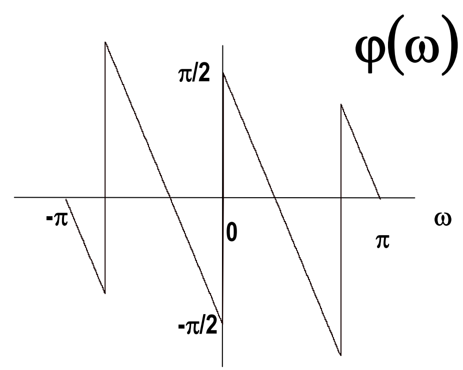
$\beta = \begin{cases} 0 \\ \pi/2 \end{cases}$ **Salto de π debido a cero simple de H(z) en z=1 (de M(ω) en $\omega = 0$)**

$H(z) = 1 - z^{-1}$ $\qquad \varphi(\omega) = -\dfrac{\omega}{2} + \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{signo}(\omega)$

$k(\omega) \in Z$ **Saltos de π debidos a los ceros simples (o multiplicidad impar) de M(ω)**







Respuesta impulsional

- **Supondremos que el sistema es real**

$$\varphi(\omega)=\frac{1}{2j}\ln\left[\frac{H(z)}{H(1/z)}\right]\Bigg|_{z=e^{j\omega}}$$

$$k(\omega)\in Z$$

$$\left.\frac{H(z)}{H(1/z)}\right|_{z=e^{j\omega}}=e^{j2\varphi(\omega)}=e^{-j2\alpha\omega+j2\beta+j2\pi k(\omega)}=\pm e^{-j2\alpha\omega}$$

$$\beta=\begin{cases}0 & \Rightarrow \quad + \quad \Rightarrow \quad \text{par}\\ \pi/2 & \Rightarrow \quad - \quad \Rightarrow \quad \text{impar}\end{cases}$$

$$H(z)=\pm z^{-2\alpha}H(1/z) \qquad h[n]=\pm h[2\alpha-n]$$

- **Supondremos que el sistema es causal**

$$h[n]=0 \quad n<0 \quad \Rightarrow \quad h[n]=0 \quad n>2\alpha \quad \Rightarrow \quad \text{FIR}$$

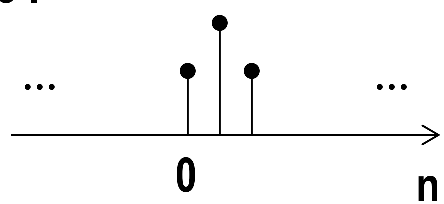
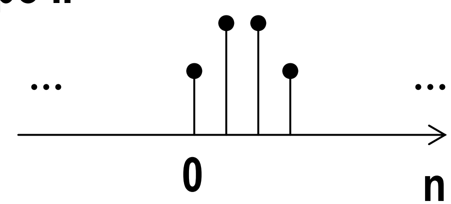
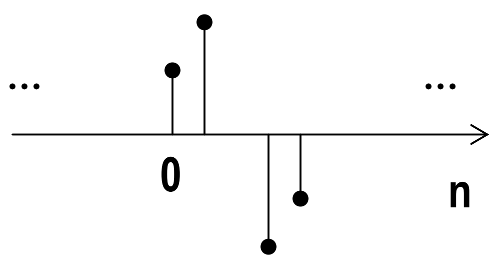
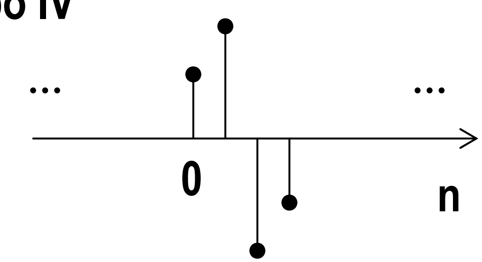
- **FIR causal $\Rightarrow$ todos los polos en z=0**

$$H(z)=\sum_{n=0}^{M}h[n]z^{-n} \qquad M=2\alpha=L-1$$

M orden
L longitud

$$h[n]=\pm h[M-n]=\pm h[L-1-n]$$

Tipos

Longitud L / Simetría	impar	par
par	Tipo I 	Tipo II 
impar	Tipo III 	Tipo IV 

Posición de ceros

$$H(z) = \pm z^{-M} H(1/z)$$

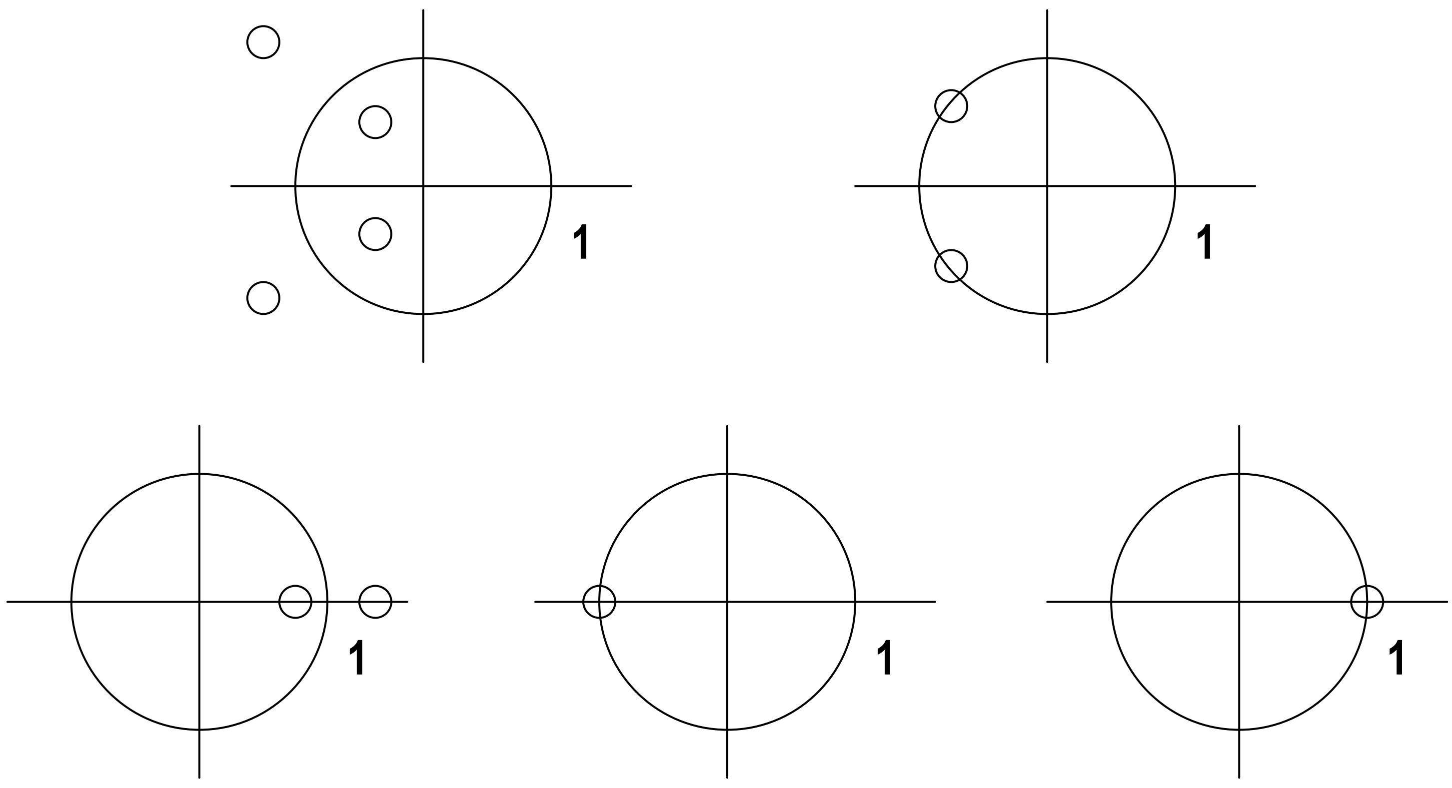
- Si $c \neq 0$ es un cero, c^{-1} también ha de serlo
- Los ceros en z=1 y z=-1 no han de presentarse necesariamente emparejados pues son los inversos de sí mismos
- El tipo puede forzar ceros simples o de multiplicidad impar en z=1 ó z=-1 :
  - Tipo I: No hay ceros forzados
  - Tipo II: Cero en z=-1 ($\omega=\pi$)

$$H(z) = z^{-M} H(1/z) \Rightarrow H(-1) = (-1)^{-M} H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

  - Tipo III: Cero en z=1 ($\omega=0$) y z=-1 ($\omega=\pi$)
  - Tipo IV: Cero en z=1 ($\omega=0$)

Configuraciones básicas

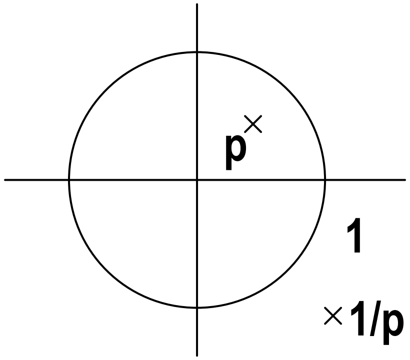
- Real: ceros conjugados
- Fase lineal: ceros inversos



Posición de polos

$$H(z) = \pm z^{-M} H(1/z)$$

- Si $p \neq 0$ es un polo, p^{-1} también ha de serlo



- Un sistema de fase lineal, causal y estable no puede tener polos excepto en $z=0$

Respuesta frecuencial

$$\varphi(\omega) = -\alpha\omega + \beta + \pi k(\omega)$$

- **h[n] simetría par (β=0)**

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\alpha\omega} H_r\left(e^{j\omega}\right) \qquad H_r\left(e^{j\omega}\right) \quad \text{Real: cambios de signo} \Leftrightarrow \text{saltos de } \pi$$

$$F^{-1}\left\{H_r\left(e^{j\omega}\right)\right\} = F^{-1}\left\{e^{j\alpha\omega} H\left(e^{j\omega}\right)\right\} = h[n+\alpha] = h[2\alpha - (n+\alpha)] = h[-n+\alpha]$$

$$\Rightarrow \quad F^{-1}\left\{H_r\left(e^{j\omega}\right)\right\} \quad \text{Par en n (centrada en n=0)} \quad \Rightarrow \quad H_r\left(e^{j\omega}\right) \quad \text{Par en } \omega$$

- **h[n] simetría impar (β=π/2)**

$$H\left(e^{j\omega}\right) = je^{-j\alpha\omega} H_r\left(e^{j\omega}\right) \qquad H_r\left(e^{j\omega}\right) \quad \text{Real e impar en } \omega$$

Resumen propiedades

Tipo	Ceros forzados	Orden M	Longitud L=M+1	Retardo α=M/2	β	Simetría h[n]
I	-	par	impar	entero	0	par
II	z=-1 ($\omega=\pi$)	impar	par	entero+1/2	0	par
III	z=1,-1 (ω=0,π)	par	impar	entero	$\pi/2$	impar
IV	z=1 (ω=0)	impar	par	entero+1/2	$\pi/2$	impar

- Manteniendo simetría par, pasar de L impar a L par hace aparecer un cero en $\omega=\pi$
- No puede diseñarse un filtro elimina banda con orden impar
- Un derivador o un transformador de Hilbert han de ser de tipo III o IV, pues ha de haber un cero en ω=0.

Ejemplos

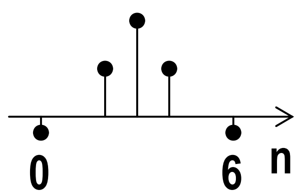
- **Diseño por enventanado de filtro FIR paso bajo de fase lineal**

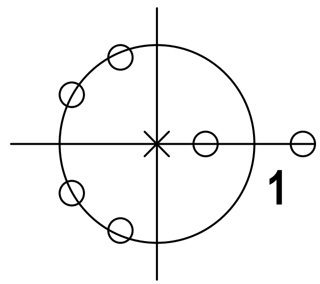
$$M(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & \text{fuera}\end{cases}\qquad h[n]=\frac{\omega_c}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{L-1}{2}\right)\omega_c\right)}{\left(n-\frac{L-1}{2}\right)\omega_c}\qquad n=0,\ldots,L-1$$

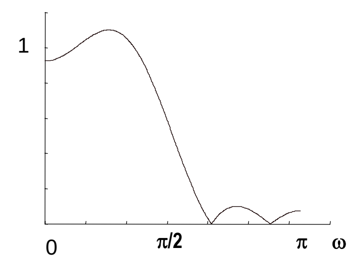
$$\varphi(\omega)=-\frac{L-1}{2}\omega$$

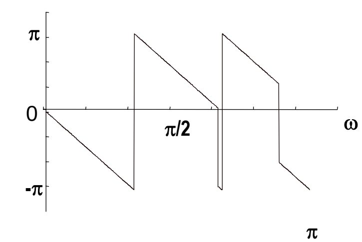
simetría par

$\omega_c=\frac{\pi}{2}$ **Longitud impar (L=7)**

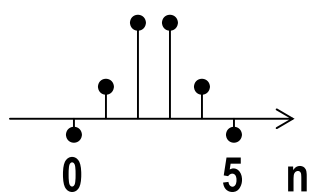


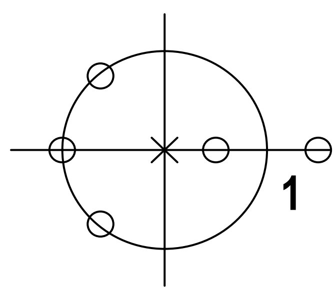


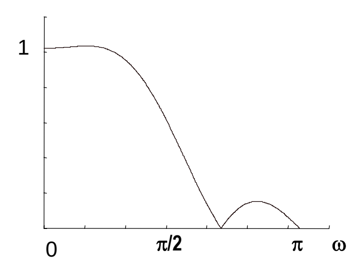


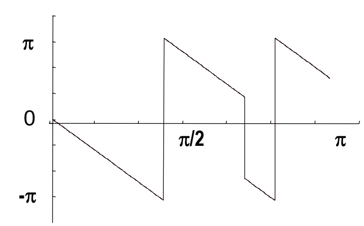


$\omega_c=\frac{\pi}{2}$ **Longitud par (L=6)**







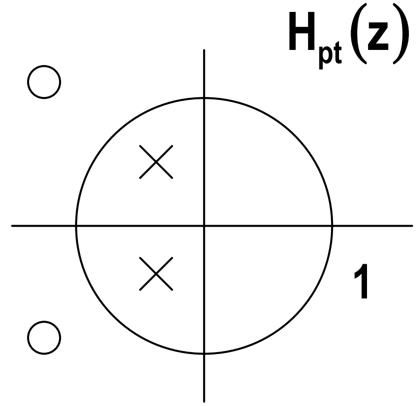


Resumen

- **Pasa-todo**

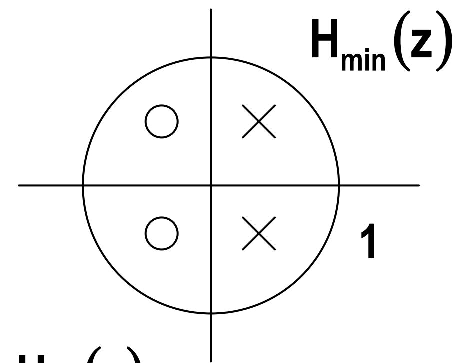
$$M_{pt}(\omega) = 1$$

$$c_k = 1/p_k^*$$



- **Fase mínima**
  - **Si H(z) causal y estable, 1/H(z) causal y estable**

$$|c_k|, |p_k| < 1$$



- **Fase lineal (real y causal)**

$$\varphi(\omega) = -\alpha\omega + \beta + \pi k(\omega)$$

$$h[n] = \pm h[2\alpha - n] \qquad \Rightarrow \text{FIR}$$

$$c_i = 1/c_j$$