1 Tema 1: Topologia de $\mathbb{R}^n$.

Prob. 8

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La curva de nivel 0 son los ejes coordenados, como se obtiene facilmente al hacer $f(x,y) = 0$. Para ver las otras curvas de nivel utilizaremos coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos\theta & r > 0 \\ y = r\sin\theta & 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$ tendremos:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \sin 2\theta.$$

Las curvas de nivel k de esta función son $\sin 2\theta = k$ por lo que $k \in [-1,1]$ y además: $2\theta = \arcsin k = \alpha$, lo que admite las siguientes soluciones: $2\theta = \alpha + 2n\pi$ y $2\theta = \pi - \alpha + 2n\pi$, así se obtienen los cuatro ángulos: $\theta = \alpha/2$, $\theta = \alpha/2 + \pi$, $\theta = \pi/2 - \alpha/2$ y $\theta = \pi/2 - \alpha/2 + \pi$.

De esta forma obtenemos las dos rectas:

$y = mx$ donde $m = \tan(\alpha/2) = \tan(\frac{1}{2}\arcsin k)$.

$y = m'x$ donde $m' = \tan(\pi/2 - \alpha/2) = \cot(\alpha/2) = 1/m$, excluyendo el origen en ambas.

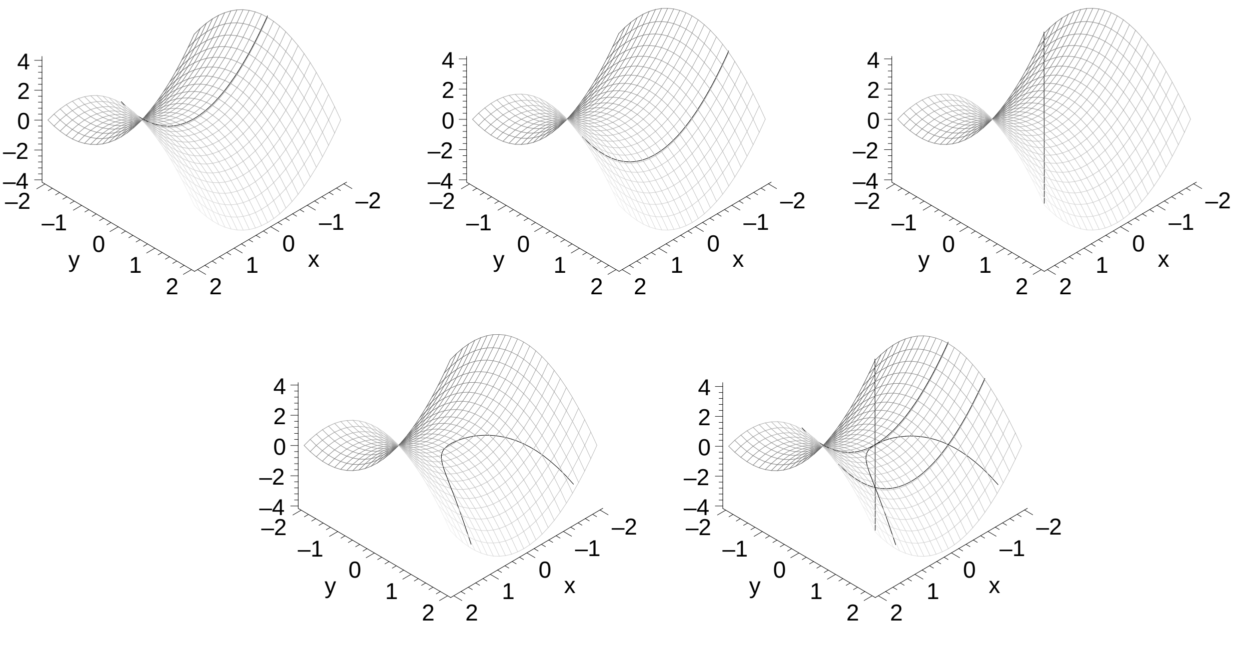
Prob. 9

$f(x,0)$ representa el corte de las superficies $\begin{cases} z = x^2 - y^2 & \text{Paraboloide hiperbólico} \\ y = 0 & \text{Plano}XZ \end{cases}$

$f(x,1)$ el corte de $\begin{cases} z = x^2 - y^2 & \text{Paraboloide hiperbólico} \\ y = 1 & \text{Plano paralelo al } XZ \text{ por } (0,1,0) \end{cases}$

$f(x,x)$ el corte de $\begin{cases} z = x^2 - y^2 & \text{Paraboloide hiperbólico} \\ y = x & \text{Plano bisector del primer octante} \end{cases}$

$f(x,x^2)$ el corte de $\begin{cases} z = x^2 - y^2 & \text{Paraboloide hiperbólico} \\ y = x^2 & \text{Cilindro parabólico} \end{cases}$



Prob. 10

Sea $b \in B$ fijo. Demostraremos que el conjunto$A+b = \{z = x+b,\ x \in A\}$ es abierto. En efecto sea $z = a+b \in A+b$, como $a \in A$ y A es abierto, existe un $r > 0$ tal que la bola $B(a,r)$ está contenida en A. Probemos que la bola $B(a+b,r)$ está contenida en $A+b$. En efecto, si $x \in B(a+b,r)$ se tiene $\|x-(a+b)\| = \|(x-b)-a\| < r$, entonces $x - b \in B(a,r) \subset A$, luego $x = (x-b)+b \in A+b$. Así pues, para todo punto de $A+b$ existe una bola de centro ese punto, contenida en $A+b$, lo que prueba que es un abierto. Entonces:

$$A + B = \bigcup_{b\in B}(A+b)$$

es abierto ya que la unión de abiertos es abierta.

De un forma intuitiva $A+b$ es un abierto, dado que al sumar a los elementos de un conjunto de $\mathbb{R}^n$ un punto o vector de $\mathbb{R}^n$ se obtiene el mismo conjunto "desplazado".

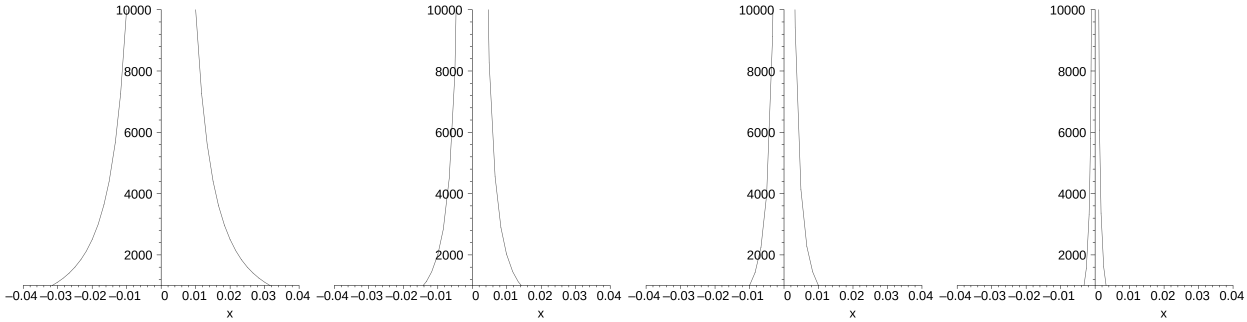
Prob. 11

Sea $f(x) = \sqrt{x^2(x^2-1)}$ el punto 0 es un punto aislado del dominio de $f(x, y)$. Como función de dos variables se puede tomar $f(x, y) = \sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)}$ y entonces el punto $(0, 0)$ es aislado.

Prob. 12

Primero veamos gráficamente $A_1,\ A_5,\ A_{10}$ y A_{100}.

Una forma de justificar que cada A_n es un abierto es que su complementario, $\mathbb{R}^n - A_n$, es un cerrado. $\mathbb{R}^n - A_n$ es cerrado pues contiene a su frontera. Otra forma es considerar la función continua $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f_n(x, y) = nx^2y$ y observar que $A_n = f_n^{-1}(-\infty, 1)$.



Prob. 13

Una familia de cerrados cuya unión no sea un cerrado es:

$A_n = [-1 + 1/n, 1 - 1/n] \times [-1 + 1/n, 1 - 1/n],\ n \in \mathbb{N}^*$
$A_1 = [0, 0] \times [0, 0] = \{(0, 0)\}$
$A_2 = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$
$A_3 = [-2/3, 2/3] \times [-2/3, 2/3]$
...
$A_{100} = [-99/100, 99/100] \times [-99/100, 99/100]$
...
La unión es $\bigcup A_n = (-1, 1) \times (-1, 1)$.

Prob. 14

(a) Una norma en un espacio vectorial E es una aplicación $p : E \to \mathbb{R}$ que cumpla:

$\bullet p(x) \geq 0,\ p(x) = 0\ sii\ x = 0.$

$\bullet p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$

$\bullet p(x + y) \leq p(x) + p(y).$

En nuestro caso:

1. $p_1(x, y) = |x| + |y| \geq 0$ y evidentemente $p_1(x, y) = 0\ sii\ x = 0\ y = 0$.
   $p_\infty(x, y) = max(|x|, |y|) \geq 0$ y $p_\infty(x, y) = 0\ sii\ x = 0\ y = 0$.
2. $p_1(\lambda(x, y)) = p_1(\lambda x, \lambda y) = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda| p_1(x, y)$.
   $p_\infty(\lambda(x, y)) = p_\infty(\lambda x, \lambda y) = max(|\lambda x|, |\lambda y|) = |\lambda| max(|x|, |y|) = |\lambda| p_\infty(x, y)$.
3. $p_1((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = p_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2| \leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| =$
   $= p_1(x_1, y_1) + p_1(x_2, y_2)$.
   $p_\infty((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = p_\infty(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = max(|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|) \leq max(|x_1| + |x_2|, |y_1| + |y_2|) \leq$
   $\leq max(|x_1|, |y_1|) + max(|x_2| + |y_2|) = p_\infty(x_1, y_1) + p_\infty(x_2, y_2)$.

(b) $B_1((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ |x| + |y| < 1\}$.

$B_2((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$.

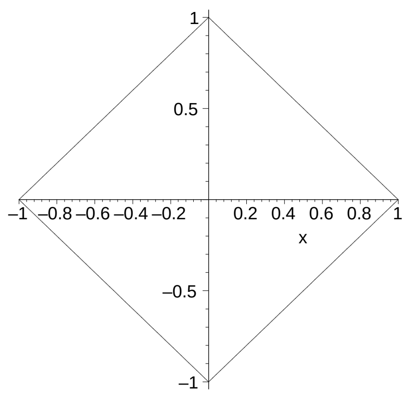
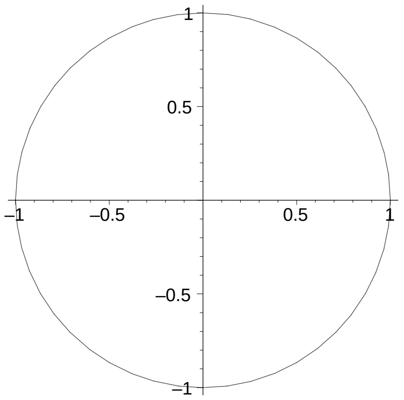
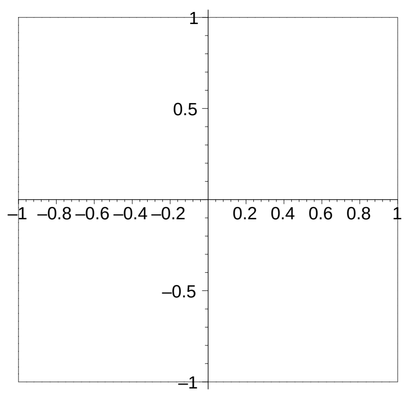
$B_\infty((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ \max(|x|, |y|) < 1\}$.

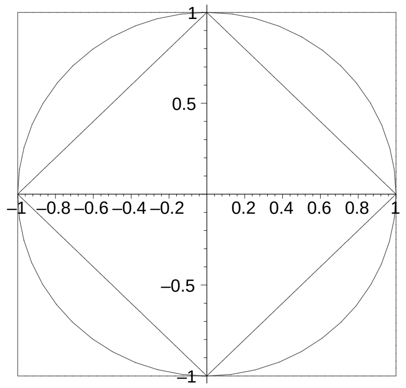
(c) Recuerdese que $|x_i| \leq \|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$ y por consiguiente $\max(|x|, |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$ y así se tiene $\|(x, y)\|_\infty \leq \|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_1$. Luego $B_1((0, 0), 1) \subseteq B_2((0, 0), 1) \subseteq B_\infty((0, 0), 1)$.

Veamos ahora que $\|(x, y)\|_1 \leq \sqrt{2}\|(x, y)\|_2$. En efecto,

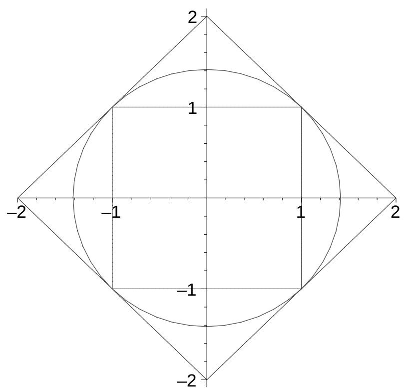
$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$ y como $(|x| - |y|)^2 \geq 0$

entonces $|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \geq 0$, esto es $2|x||y| \leq |x|^2 + |y|^2$. Por tanto, $(|x| + |y|)^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$.



Igualmente $\|(x,y)\|_2 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_\infty$ ya que $\|(x,y)\|_2^2 \leq 2\|(x,y)\|_\infty^2$, pues $|x|^2+|y|^2 \leq 2[\max(|x|,|y|)]^2$. Como $\|(x,y)\|_1 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_2 \leq 2\|(x,y)\|_\infty$, entonces $B_\infty((0,0),1) \subseteq B_2((0,0),\sqrt{2}) \subseteq B_1((0,0),2)$.



(d) $p_{\frac{1}{2}}[(\frac{1}{2},0)+(0,\frac{1}{2})] = p_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 2$, sin embargo, $p_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2},0)+p_{\frac{1}{2}}(0,\frac{1}{2}) = 1$.

Prob. 15

(a) Sea $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, definimos:

$\|x\|_1 = |x_1|+\ldots+|x_n|$

$\|x\|_2 = (|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$

$\|x\|_\infty = \max(|x_1|,\ldots,|x_n|)$.

Es inmediato que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$. Por otra parte, como $\|x\|_2^2 = |x_1|^2+\ldots+|x_n|^2 \leq n\|x\|_\infty^2$ se deduce que $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

(b) Dos normas p y q en un espacio vectorial E son equivalentes si y sólo si existen números estrictamente positivos M y N tales que $p(x)\leq Mq(x)$ y $q(x)\leq Np(x)$, $\forall x\in E$.

Demostremos en primer lugar que si una sucesión $\{x_n\}$ converge a x respecto de la norma p, también converge a x respecto de la norma q. En efecto, $\forall\epsilon>0$ consideremos $\frac{\epsilon}{N}>0$, por ser $\{x_n\}$ convergente a x respecto de la norma p, existe un n_0 tal que $p(x_n-x_0)<\frac{\epsilon}{N}$, $\forall n\geq n_0$, luego $q(x_n-x_0)<Np(x_n-x_0)<\epsilon$, $\forall n\geq n_0$. Es decir $\{x_n\}$ converge a x respecto de la norma q.

Veamos ahora que si S es un conjunto abierto respecto de la norma p, lo es también respecto de la norma q. Sea $x\in S$, respecto de la norma p existe una bola $B(x,\epsilon)\subset S$. Consideremos la bola $B(x,\frac{\epsilon}{M})$ respecto de la norma q. Si $y \in B(x, \frac{\epsilon}{M})$ entonces $p(y-x) \leq Mq(y-x) < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$, luego $y \in S$, y, por tanto, S es abierto respecto la norma q.

2 Tema 2: Límites y continuidad.

Prob. 9

$$0 \leq \left|\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2+xy}\right| \leq \frac{|x^\alpha||y^\beta|}{|x^2+y^2|-|xy|} \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}{|x^2+y^2|-\frac{|x^2+y^2|}{2}} \leq \frac{|x^2+y^2|^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq 2(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}$$

Si $\alpha+\beta-2>0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Igualmente se puede hacer la acotación en coordenadas polares:

$$0 \leq \left|\frac{r^\alpha \cos^\alpha(\theta) r^\beta \sin^\beta(\theta)}{r^2(1+\cos\theta\sin\theta)}\right| \leq r^{\alpha+\beta-2}\frac{|\cos^\alpha(\theta)\sin^\beta(\theta)|}{|1+\frac{1}{2}\sin(2\theta)|} \leq r^{\alpha+\beta-2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2r^{\alpha+\beta-2}$$

obteniendose tambien que si $\alpha+\beta-2>0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Prob. 10

Únicamente hay que ver si existe límite y vale 0 en los puntos de la forma $(a,0)$ y $(0,b)$.

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,0)} a\cos\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi}{y}$$

que sólo existe y vale 0 si $a=0$ o bien $\frac{\pi}{a} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$. Es decir, en los puntos $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}, 0\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Análogamente, la función es continua en los puntos de la forma $\left(0, \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Prob. 11

(a)

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{3x^2+2y^2}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{3x^2+2y^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{xmx}{3x^2+2m^2x^2}\right) = \frac{m}{3+2m^2}$$

luego no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) = 1$$

luego no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(c) No existen ni $\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ ni $\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ luego no existen los límites reiterados.

Sin embargo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$.

Prob. 12

(a) $\mathrm{Tr}(x,y,z,t) = x+t$ es continua por ser función polinómica.

$\det(x,y,z,t) = xt - yz$, es continua por la misma razón.

(b)

i. $\{$matrices invertibles$\} = \det^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$ es un conjunto abierto por ser imagen inversa por una función continua de un conjunto abierto.

ii. $\{$matrices con determinante 1$\} = \det^{-1}(\{1\})$ es un conjunto cerrado por ser imagen inversa por una función continua de un conjunto cerrado.

iii. {matrices con traza nula } $= \mathrm{Tr}^{-1}(\{0\})$ es un conjunto cerrado por ser imagen inversa por una función continua de un conjunto cerrado.

(c) $\mathrm{Tr}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}) = x_{11} + x_{22} + \ldots + x_{nn}$ por ser una función polinómica es continua.
$\det(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn})$, es continua por la misma razón. El resto es análogo al apartado (b) anterior.

Prob. 13

Si $x \in \overline{A} \Rightarrow$ existe una sucesión en $\{x_n\} \subset A$ tal que $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ ya que f es una función continua en $\mathbb{R}^n \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$ pues $f(x_n) \in f(A)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, luego $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Prob. 14

Si A no es compacto o bien no es cerrado o no es acotado.

Si A no es cerrado, existe un $a \in \mathrm{Fr}A$ tal que $a \notin A$. La función $f(x) = \dfrac{1}{\|x-a\|}$ es continua en A y sin embargo no es acotada en A.

Si A no es acotado, la función $f(x) = \|x\|$ es continua en A pero no es acotada.

Por consiguiente A debe ser compacto.

Prob. 15

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{y\to b} g(y) = c$ no siempre $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$. Se propone aqui un contraejemplo. Observemos que 0 pertenece al dominio de g pero g no es continua en 0.

3 Tema 3: Derivación.

Prob. 23

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\mu(a+h,b+k)-\mu(a,b)-bh-ak}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(a+h)(b+k)-ab-bh-ak}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Luego existe una transformación lineal $T(h,k) = bh+ak$ tal que $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\mu(a+h,b+k)-\mu(a,b)-T(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$, por tanto, μ es diferenciable en (a,b) y $\mathrm{D}\mu(a,b)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = bh+ak$, esto es, $\mathrm{D}\mu(a,b) = (b \quad a)$.

Prob. 24

(a) Como $0 \le \left|\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \sqrt{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$$

.

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}^2$.

(b) Sea $\vec{u} = (h,k)$.

$$\mathrm{D}_{\vec{u}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{th|tk|}{\sqrt{(th)^2+(tk)^2}}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{th|t||k|}{t|t|\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

(c) f no es difernciable en $(0,0)$, pues si lo fuera $\mathrm{D}_{\vec{u}}f(0,0)$ sería lineal respecto de h y k.

Prob. 25

f no es continua en $(0,0)$ pues

$$\lim_{y\to 0} f(\lambda y^2, y) = \lim_{y\to 0} \frac{\lambda y^4}{\lambda^2 y^4 + y^4} = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$$

La derivada direccional en el punto $(0,0)$ en la dirección (a,b) vale:

$$\mathrm{D}_{(a,b)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3ab^2}{t(t^2a^2+t^4b^4)} = \begin{cases} \dfrac{ab^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Prob. 26

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2y(x^2+y^2)-2xy2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0}{t} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$. Este límite no existe puesto que $\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)}\dfrac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 0$ y $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)}\dfrac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2y^3}{y^4} = \pm\infty$, por tanto, la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x(x^2+y^2)-2xy2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0}{t} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

La función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no es continua en $(0,0)$ puesto que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Por tanto $f(x,y)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. En $(0,0)$ f no es diferenciable ya que no es continua en ese punto $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx) = \dfrac{2m}{1+m^2}$.

(b) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

y $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{h(t,0)-h(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0}{t} = 0$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

como: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,mx) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{m^3x^3}{(x^2+m^2x^2)^{3/2}} = \dfrac{m^3}{(1+m^2)^{3/2}}$ la función $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$.

Lo mismo ocurre con la función $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ dada la simetría de $h(x,y)$ respecto de x e y.

Por tanto, $h(x,y)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Veamos si es diferenciable en $(0,0)$ aplicando la condición de tangencia:

$$\lim_{(k,l)\to(0,0)}\frac{h(k,l)-h(0,0)-\mathrm{D}h(0,0)\begin{pmatrix} k \\ l\end{pmatrix}}{\|(k,l)\|} = \lim_{(k,l)\to(0,0)}\frac{\dfrac{kl}{\sqrt{k^2+l^2}}}{\sqrt{k^2+l^2}} = \lim_{(k,l)\to(0,0)}\frac{kl}{k^2+l^2}$$

límite que no existe, luego la función no es diferenciable en $(0,0)$.

(c)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{\pi}{x+y} - \frac{\pi(x^2+y^2)}{(x+y)^2}\cos\frac{\pi}{x+y}$$

Esta función no está definida en los puntos $(a,-a)$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(a,-a) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{u(a+t,-a)-u(a,-a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left((a+t)^2+a^2\right)\sin\dfrac{\pi}{t}}{t}$ para que exista este límite $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(a+t)^2+a^2}{t}$ ha de valer 0 y esto sólo ocurre si $a=0$ y entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0)=0$.

Asi $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{\pi}{x+y} - \dfrac{\pi(x^2+y^2)}{(x+y)^2}\cos\dfrac{\pi}{x+y} & \text{si } (x+y)\neq 0 \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$ y no existe en los otros puntos.

Análogamente para la función $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Veamos si u es de clase C^1 en $(0,0)$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2x\sin\frac{\pi}{x+y} - \frac{\pi(x^2+y^2)}{(x+y)^2}\cos\frac{\pi}{x+y}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{\pi(x^2+y^2)}{(x+y)^2}\cos\frac{\pi}{x+y}$$

que no existe puesto que

$\lim_{x\to 0} -\dfrac{\pi(x^2+(mx)^2)}{(x+(mx))^2}$ depende de m. Luego la función $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$.

En el abierto $\mathbb{R}^2 - \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$ la función es de clase C^1 y aplicando la condición de tangencia veremos la diferenciabilidad en $(0,0)$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{u(h,k)-u(0,0)-\mathrm{D}u(0,0)\begin{pmatrix} h \\ k\end{pmatrix}}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^2+k^2)\sin\dfrac{\pi}{h+k}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\sin\dfrac{\pi}{h+k} = 0.$ Por tanto sí es diferenciable en $(0,0)$.

Prob. 27

Podemos usar la función $f(x,y)=\sqrt{3+e^x\cos y+5\sin y}$.

Dado que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{e^x\cos y}{2\sqrt{3+e^x\cos y+5\sin y}}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-e^x\sin y+5\cos y}{2\sqrt{3+e^x\cos y+5\sin y}}$

entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{1}{4}=0.25$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\dfrac{5}{4}=1.25$ y

$\sqrt{3+e^x\cos y+5\sin y} = f(0,0)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+o(\|(x,y)\|)\approx 2+0.25x+1.25y$ en una vecindad de $(0,0)$ y por tanto

$f(-0.1,0.05)=\sqrt{3+e^{-0.1}\cos 0.05+5\sin 0.05}\approx 2+0.25(-0.1)+1.25(0.05)=2.0375.$

Prob. 28

(a) En una vecindad del punto $(12,-5)$ la función $f(x,y)$ viene definida por $f(x,y)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{-xy}$ y es diferenciable en dicho punto.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(12,-5) = \left.\left(\frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{-xy\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2y^2}\right)\right|_{(12,-5)} = \left.\frac{-y^2}{x(x^2+y^2)}\right|_{(12,-5)} = \frac{-25}{2028}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(12,-5) = \left.\frac{-x^2}{y(x^2+y^2)}\right|_{(12,-5)} = \frac{144}{845}.$$

El vector normalizado es $u=\dfrac{v}{\|v\|}=\left(\dfrac{7}{25},-\dfrac{24}{25}\right)$. Luego

$$\mathrm{D}_u f(a) = \begin{pmatrix}\dfrac{-25}{2028} & \dfrac{144}{845}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{7}{25}\\[2mm] -\dfrac{24}{25}\end{pmatrix} = -0.167$$

(b) como f es diferenciable en $(1,-1,1)$ y el vector normalizado es $u=\dfrac{v}{\|v\|}=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{35}},\dfrac{5}{\sqrt{35}},\dfrac{1}{\sqrt{35}}\right)$, entonces

$$\mathrm{D}_u f(a) = (0\quad -3\quad -1)\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{\sqrt{35}}\\[2mm] \dfrac{5}{\sqrt{35}}\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{35}}\end{pmatrix} = -\frac{16}{\sqrt{35}}$$

Prob. 29

Se calcula primero $f\circ g$.

$(f\circ g)(t)=f(g(t))=(2+t)(1-t)(1+t)=-t^3-2t^2+t+2$ su derivada es $(f\circ g)'(t)=-3t^2-4t+1$ y $(f\circ g)'(0)=1$.

Otra forma de hacerlo es aplicar la regla de la cadena.

$$J(f\circ g)(t) = Jf(g(t))Jg(t) = \begin{pmatrix}1-t^2 & (2+t)(1+t) & (2+t)(1-t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$$J(f\circ g)(0) = (1\ \ 2\ \ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Prob. 30

Calculamos primero $g\circ f$, $(g\circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(e^x, x+y) = (e^x - x - y, \cos(e^x(x+y)), e^x - x - y)$, y su matriz jacobiana es

$$J(g\circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} e^x - 1 & -1 \\ -\sin(e^x(x+y))(e^x(x+y)+e^x) & -\sin(e^x(x+y))\,e^x \\ e^x - 1 & -1 \end{pmatrix},$$

luego $J(g\circ f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Por otra parte, como $Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $Jg(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -v\sin(uv) & -u\sin(uv) \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

entonces $Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $Jg(f(0,0)) = Jg(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

y aplicando la regla de la cadena, $J(g\circ f)(0,0) = Jg(f(0,0))Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Prob. 31

Sea $f(x,y) = h(x)k(y)$, la igualdad $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ se convierte en $h'(x)k(y) = h(x)k'(y)$, luego $\dfrac{h'(x)}{h(x)} = \dfrac{k'(y)}{k(y)} = a$ (a constante). Resolviendo estas ecuaciones, se obtiene $h(x) = C_1 e^{ax}$ y $k(y) = C_2 e^{ay}$ por lo que $f(x,y) = Ae^{a(x+y)}$ con $A > 0$.

Prob. 32

Sea f de clase C^1, entonces f es homogénea de de grado $p \iff \mathrm{D}f(x)\cdot x = pf(x)$.

$\Rightarrow$

Sea $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, consideremos $f(\lambda x)$ y $\lambda^p f(x)$ como funciones de λ. Por ser f homogénea, ambas funciones son idénticas, luego sus derivadas respecto de λ, en $\lambda = 1$, coincidirán. Veamos cuáles son estas derivadas:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{\phi_x} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda x & \longmapsto & f(\lambda x) \end{array}$$

como $f(\lambda x) = (f\circ\phi_x)(\lambda)$ si aplicamos la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f(\lambda x) = \mathrm{D}f(\lambda x)\circ \mathrm{D}\phi_x(\lambda) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\lambda x)\ \ldots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x) + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)$$

Por otra parte, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda^p f(x)) = p\lambda^{p-1}f(x)$ y por tanto $x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x) + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x) = p\lambda^{p-1}f(x)$ en particular para $\lambda = 1$ tenemos $x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x)$ esto es $\mathrm{D}f(x)\cdot x = pf(x)$.

$\Longleftarrow$

Consideremos la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(\lambda) = f(\lambda x) - \lambda^p f(x)$ con $x \in U$ y calculemos su derivada respecto de λ.

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x) + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x) - p\lambda^{p-1}f(x) = \frac{1}{\lambda}pf(\lambda x) - p\lambda^{p-1}f(x) = \frac{p}{\lambda}(f(\lambda x) - \lambda^p f(x)) = \frac{p}{\lambda}g(\lambda).$$

Luego $g(\lambda)$ es la solución del problema de valor inicial $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\lambda} & = \dfrac{p}{\lambda}g \\ g(1) & = 0 \end{cases}$.

La ecuación $\dfrac{\mathrm{d}g}{g} = \dfrac{p}{\lambda}$ tiene por solución general $g(\lambda) = k\lambda^p$ y, si $g(1) = 0$ entonces $k = 0$, lo que implica $g(\lambda) = 0$ para todo λ y como consecuencia $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$.

(a) $f(x,y)=xy^2-x^3+2x^2y$ veamos si es homogénea y de qué grado, $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x(\lambda y)^2-(\lambda x)^3+2(\lambda x)^2\lambda y=\lambda^3(xy^2-x^3+2x^2y)=\lambda^3 f(x,y)$ luego es homogénea de grado 3.

Por otro lado $\mathrm{D}f(x,y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(y^2-3x^2+4xy \quad 2xy+2x^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=xy^2-3x^3+4x^2y+2xy^2+2x^2y=3f(x,y)$.

(b) Si $g(x,y,z)=\sqrt{x^3+y^3+z^3}$ entonces $g(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\sqrt{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3+(\lambda z)^3}=\lambda^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^3+y^3+z^3}=$ $=\lambda^{\frac{3}{2}}g(x,y,z)$, por tanto g es homogénea de grado $\frac{3}{2}$.

De otra forma $\mathrm{D}g(x,y,z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3+z^3}} & \dfrac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3+z^3}} & \dfrac{3z^2}{2\sqrt{x^3+y^3+z^3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=$
$=\dfrac{3x^3}{2\sqrt{x^3+y^3+z^3}}+\dfrac{3y^3}{2\sqrt{x^3+y^3+z^3}}+\dfrac{3z^3}{2\sqrt{x^3+y^3+z^3}}=\dfrac{3}{2}g(x,y,z)$.

(c) Igualmente $h(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $h(\lambda x,\lambda y)=\dfrac{\lambda x}{\sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}}=h(x,y)$ (observese que $\lambda>0$), con lo que h es homogénea de grado 0.

Si calculamos $\mathrm{D}h(x,y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ obtenemos $\begin{pmatrix} \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0\cdot h(x,y)$.

(d) Por último $k(x,y)=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ y $k(\lambda x,\lambda y)=k(x,y)$ luego grado de homogeneidad 0 que también se obtiene si hacemos $\mathrm{D}k(x,y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{-y}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}} & \dfrac{1}{2x\sqrt{\frac{y}{x}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$

Prob. 33

(a) $f(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^x(x\cos y-y\sin y+2\cos y)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^x(-x\cos y-2\cos y+y\sin y)$.

Por tanto $\Delta f(x,y)=0$, luego f es función armónica.

(b) $g(x,y)=x^3y-xy^3$.

$\dfrac{\partial g}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=6xy$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}=x^3-3xy^2$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-6xy$. Por tanto $\Delta g(x,y)=0$.

(c) $h(x,y,z)=-\dfrac{1}{r}$ con $r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{r^3-x3r^2\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{r^6}\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}.$$

Análogamente $\dfrac{\partial h}{\partial y}=\dfrac{y}{r^3}$ y $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3y^2}{r^5}$.

Igualmente $\dfrac{\partial^2 h}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3z^2}{r^5}$ con lo que $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0$.

Prob. 34

Si partimos de $f(x,y)=xg\left(\dfrac{-y}{x}\right)+yh\left(\dfrac{y}{x}\right)$ se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=g\left(\frac{-y}{x}\right)+xg'\left(\frac{-y}{x}\right)\left(\frac{y}{x^2}\right)+yh'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right)=g+\frac{y}{x}g'-\frac{y^2}{x^2}h'.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{-y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{-y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{-y}{x}\right)+\frac{2y^2}{x^3}h'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^3}{x^4}h''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y^2}{x^3}g''+\frac{2y^2}{x^3}h'+\frac{y^3}{x^4}h''.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x}g'\left(\frac{-y}{x}\right)+\frac{1}{x}g'\left(\frac{-y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{-y}{x}\right)-\frac{2y}{x^2}h'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x^3}h''\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2}g''-\frac{2y}{x^2}h'-\frac{y^2}{x^3}h''.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-g'\left(\frac{-y}{x}\right)+h\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}h'\left(\frac{y}{x}\right)=-g'+h+\frac{y}{x}h'.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x}g''\left(\frac{-y}{x}\right) + \frac{1}{x}h'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}h'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}h''\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}g'' + \frac{2}{x}h' + \frac{y}{x^2}h''.$$

Por tanto,

$$x^2 f_{xx} + 2xyf_{yx} + y^2 f_{yy} = x^2\left(\frac{y^2}{x^3}g'' + \frac{2y^2}{x^3}h' + \frac{y^3}{x^4}h''\right) + 2xy\left(-\frac{y}{x^2}g'' - \frac{2y}{x^2}h' - \frac{y^2}{x^3}h''\right) + y^2\left(\frac{1}{x}g'' + \frac{2}{x}h' + \frac{y}{x^2}h''\right) = 0.$$

Prob. 35

Como $f_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h}$ necesitamos conocer $f_x(a,0)$.

$f_x(a,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h,0) - f(a,0)}{h} = 0$. Luego, $f_{xx}(0,0) = 0$.

Análogamente $f_{yy}(0,0) = 0$

Por otra parte, $f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$, calculamos $f_y(a,0)$.

$$f_y(a,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{a^2 \arctan \frac{k}{a} - k^2 \arctan \frac{a}{k}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{a^2 \arctan \frac{k}{a}}{k} = a$$

como se obtiene aplicando L'Hopital.

Por tanto, $f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{h-0}{h} = 1$.

$f_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \dfrac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k}$. Calculamos $f_x(0,b)$.

$$f_x(0,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,b) - f(0,b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \arctan \frac{b}{h} - b^2 \arctan \frac{h}{b}}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{b^2 \arctan \frac{h}{b}}{h} = -b$$

.

Por tanto, $f_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \dfrac{-k-0}{k} = -1$.

Prob. 36

Todas las funciones son de clase C^∞, por el Teorema de la función inversa tienen inversa local de clase C^∞ en los puntos donde no se anula el jacobiano.

(a) $\det Jf(x,y) = \begin{vmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & -2y \end{vmatrix} = -x(4y^2 + x)$.

Luego podemos asegurar que f es inversible en $\mathbb{R}^2 - \big(\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,y) \mid x = -4y^2\}\big)$

(b) $\det Jg(x,y) = 2e^{x+y}(e^y - e^x)$. Luego sabemos que g es inversible en $\{(x,y) \mid y \neq x\}$

(c) Observemos que la función h sólo está definida en $\{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0\}$.

$\det Jh(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{z}} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \dfrac{1}{8\sqrt{xyz}}$. Luego, h es inversible en $\{(x,y,z) \mid x,y,z > 0\}$.

(d) $\det Jk(x,y,z) = (y-x)(z-x)(x-y)$, la función es inversible en los puntos donde las coordenadas son diferentes dos a dos.

Prob. 37

(a) $\operatorname{Dom} f = \{(x,y) \mid 1 + xy > 0\}$ y $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

$\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$ y $\operatorname{Im} f = \{(x,y) \mid x > 0, y = \dfrac{x^2+1}{2x}\}$ puesto que $y = \cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = \dfrac{e^{2t}+1}{2e^t} = \dfrac{x^2+1}{2x}$ con $x = e^t$.

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{1+xy}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{1+xy}$, f es de clase C^∞ en su dominio. Igualmente, $g_1'(t) = e^t$ y $g_2'(t) = \sinh t$, por lo que la función g es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. Por lo que f y g son difenciables.

(b) $f(0.07, 1.05) = f(0,1) + \left.\begin{pmatrix} \dfrac{y}{1+xy} & \dfrac{x}{1+xy} \end{pmatrix}\right|_{(0,1)} \begin{pmatrix} 0.07 \\ 0.05 \end{pmatrix} = 0 + (1 \;\; 0) \begin{pmatrix} 0.07 \\ 0.05 \end{pmatrix} = 0.07$.

(c) $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(e^t, \cosh t) = \ln\left(\dfrac{e^{2t}+3}{2}\right)$ que es derivable con continuidad para todo t y como $(f \circ g)'(t) = \dfrac{2e^{2t}}{e^{2t}+3} \neq 0$, es inversible en $\mathbb{R}$. En particular, $(f \circ g)(0) = \ln 2$ y $(f \circ g)'(0) = \frac{1}{2}$, por lo que $((f \circ g)^{-1})'(\ln 2) = 2$

(d) $(g\circ f)(x,y)=g(f(x,y))=g(\ln(1+xy))=\left(e^{\ln(1+xy)}\ ,\ \cosh(\ln(1+xy))\right)=\left(1+xy\ ,\ \dfrac{2+2xy+x^2y^2}{2(1+xy)}\right)$. Por tanto $\det J(g\circ f)(x,y)=\begin{vmatrix} y & x \\ \dfrac{2xy^2+x^2y^3}{2(1+xy)^2} & \dfrac{2x^2y+x^3y^2}{2(1+xy)^2}\end{vmatrix}=\dfrac{2x^2y^2+x^3y^3}{2(1+xy)^2}-\dfrac{2x^2y^2+x^3y^3}{2(1+xy)^2}=0$ en todo punto del dominio de $(g\circ f)$ el jacobiano es nulo asi pues no existe inversa diferenciable.

Prob. 38

(a) Veamos que $\phi: W\to W$ es una aplicación biyectiva tal que ella y su inversa son al menos de clase C^1.

Sea $(u,v)\in W$ evidentemente $\phi(u,v)=\left(\sqrt{\dfrac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)\in W$, si $\phi(u_1,v_1)=\phi(u_2,v_2)$ entonces:

$$\left.\begin{array}{rcl}\sqrt{\dfrac{u_1}{v_1}} &=& \sqrt{\dfrac{u_2}{v_2}}\\ \sqrt{u_1v_1} &=& \sqrt{u_2v_2}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl}\dfrac{u_1}{v_1} &=& \dfrac{u_2}{v_2}\\ u_1v_1 &=& u_2v_2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl}u_1v_2 &=& u_2v_1\\ u_1v_1 &=& u_2v_2\end{array}\right\}\text{ ambas ecuaciones implican}$$

$u_1=u_2$ y $v_1=v_2$, recuérdese que $u,\ v\in(0,\infty)$, luego ϕ es inyectiva.

Sea $(a,b)\in W$ veamos si existe $(u,v)\in W$ tal que $\phi(u,v)=(a,b)$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{rcl}\sqrt{\dfrac{u}{v}} &=& a\\ \sqrt{uv} &=& b\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl}\dfrac{u}{v} &=& a\\ uv &=& b^2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl}u &=& va^2\\ uv &=& b^2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl}u &=& ab\\ v &=& \dfrac{b}{a}\end{array}\right\}\text{ luego } \phi \text{ es biyectiva y tanto } \phi$$

como ϕ^{-1} son de clase C^∞ en W.

(b) Por la regla de la cadena tenemos:

$$J(f\circ\phi)(u,v)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(f\circ\phi)}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial(f\circ\phi)}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(\phi(u,v)) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\phi(u,v))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\phi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial v}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{u}{2v\sqrt{uv}}\\ \dfrac{v}{2\sqrt{uv}} & \dfrac{u}{2\sqrt{uv}}\end{pmatrix}.$$

Como lo que necesitamos son las parciales de f respecto de x e y:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(f\circ\phi)}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial(f\circ\phi)}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{u}{2v\sqrt{uv}}\\ \dfrac{v}{2\sqrt{uv}} & \dfrac{u}{2\sqrt{uv}}\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\left(u^{\frac12}v^{\frac12}\frac{\partial f}{\partial u}-u^{-\frac12}v^{\frac32}\frac{\partial f}{\partial v}\quad u^{\frac12}v^{-\frac12}\frac{\partial f}{\partial u}+u^{-\frac12}v^{\frac12}\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

De donde se deduce que: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=2u\dfrac{\partial f}{\partial u}$.

(c) Sea $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=2$ por el apartado (b) $2u\dfrac{\partial f}{\partial u}=2$ luego $\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{1}{u}$ de donde $f(u,v)=\ln u+K(v)$ como $u=xy$ y $v=\dfrac{y}{x}$ se tiene que $f(x,y)=\ln(xy)+K\left(\dfrac{y}{x}\right)$ siendo K una función arbitraria derivable.

Prob. 39

Sea $F:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $F(x,y,z,u,v)=(y^2-2z-u^2-v^2,\ xy-u^3-v,\ z-uv)$ F es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^5$ y $F(3,3,2,2,1)=(0,0,0)$. Como $\mathrm{D}F(x,y,z,u,v)=\begin{pmatrix}0 & 2y & -2 & -2u & -2v\\ y & x & 0 & -3u^2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -v & -u\end{pmatrix}$ entonces $\mathrm{D}F(3,3,2,2,1)=\begin{pmatrix}0 & 6 & -2 & -4 & -2\\ 3 & 3 & 0 & -12 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$.

Además como $\begin{vmatrix}0 & 6 & -2\\ 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-18\neq 0$ por el teorema de la función implícita se pueden expresar, en alguna vecindad de $(3,3,2,2,1)$, $x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)$ y también

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(2,1) & \frac{\partial x}{\partial v}(2,1) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(2,1) & \frac{\partial y}{\partial v}(2,1) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(2,1) & \frac{\partial z}{\partial v}(2,1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -12 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prob. 40

(a) Dado que todas las derivadas parciales de F son distintas de 0 por el teorema de la función implícita puede expresarse cada variable en función de las otras dos.

(b) $$\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0 \;\Rightarrow F(x(y,z),y,z) = 0 \;\Rightarrow F_x x_z + F_z = 0 \;\Rightarrow x_z = -\frac{F_z}{F_x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \;\Rightarrow F(x,y(x,z),z) = 0 \;\Rightarrow F_y y_x + F_x = 0 \;\Rightarrow y_x = -\frac{F_x}{F_y}$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \;\Rightarrow F(x,y,z(x,y)) = 0 \;\Rightarrow F_y + F_z z_y = 0 \;\Rightarrow z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Por tanto $y_x z_y x_z = -\dfrac{F_x F_y F_z}{F_y F_z F_x} = -1$.

4 Tema 4: Aplicaciones geométricas de la derivación.

Prob. 18

(a) Si $\vec{c}(t) = \vec{p} + \lambda(t)\vec{u}$ entonces $\vec{c}'(t) = \lambda'(t)\vec{u}$ y $\vec{c}''(t) = \lambda''(t)\vec{u}$ así tanto $\vec{c}'(t)$ como $\vec{c}''(t)$ pertenecen al espacio $\langle \vec{u} \rangle$, luego son linealmente dependientes.

Supongamos ahora que $\vec{c}''(t) = \mu(t)\vec{c}'(t)$, como $\vec{c}''(t)\cdot\vec{c}'(t) = \mu(t)\vec{c}'(t)\cdot\vec{c}'(t)$ entonces $\mu(t) = \dfrac{\vec{c}''(t)\cdot\vec{c}'(t)}{\vec{c}'(t)\cdot\vec{c}'(t)}$ lo que implica que la función $\mu(t)$ es continua ya que $\vec{c}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t$ y $\vec{c}$ es de clase C^2. Sea $\vec{c}(0) = \vec{c}_0$ y $\vec{c}'(0) = \vec{v}_0$, la ecuación vectorial lineal de 2^0 orden $\vec{c}''(t) = \mu(t)\vec{c}'(t)$ con valores iniciales $\vec{c}(0) = \vec{c}_0$ y $\vec{c}'(0) = \vec{v}_0$ tiene la solución única $\vec{c}(t)$ cuya primera componente se calcula mediante el problema de valor inicial:

$$\left.\begin{array}{rcl} x''(t) & = & \mu(t)x'(t) \\ x(0) & = & c_0^1 \\ x'(0) & = & v_0^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x''(t)}{x'(t)} = \mu(t) \Rightarrow x'(t) = k e^{\int_0^t \mu(u)\mathrm{d}u}$$

como $x'(0) = v_0^1$, se tiene $x'(t) = v_0^1 e^{\int_0^t \mu(u)\mathrm{d}u}$, y de aqui $x(t) = v_0^1 \int_0^t e^{\int_0^s \mu(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s + l$ que al imponer la condición $x(0) = c_0^1$ queda finalmente $x(t) = c_0^1 + v_0^1 \int_0^t e^{\int_0^s \mu(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s$. Análogamente se obtiene $y(t)$. Por tanto, $\vec{c}(t) = \vec{c}_0 + \vec{v}_0\lambda(t)$ con $\lambda(t) = \int_0^t e^{\int_0^s \mu(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s$.

(b) Si $\vec{c}(t) = \vec{p} + \lambda(t)\vec{u} + \mu(t)\vec{v}$ se tiene

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{c}'(t) & = & \lambda'(t)\vec{u} + \mu'(t)\vec{v} \\ \vec{c}''(t) & = & \lambda''t)\vec{u} + \mu''(t)\vec{v} \\ \vec{c}'''(t) & = & \lambda'''(t)\vec{u} + \mu'''(t)\vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{c}'(t),\quad \vec{c}''(t),\quad \vec{c}'''(t)\ \in \langle \vec{u},\ \vec{v} \rangle$$

luego son linealmente dependientes.

Prob. 19

(a) La pendiente del vector $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ es $\dfrac{h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$ y la de un camino diferenciable es la de su vector tangente. Dada la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (tu_1, tu_2, f(p + t\mathbf{u}))$ $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (u_2, u_2, \nabla f(p + t\mathbf{u})\cdot\mathbf{u})$, entonces $\boldsymbol{\gamma}'(0) = (u_2, u_2, \nabla f(p)\cdot\mathbf{u})$ es un vector cuya pendiente vale $\dfrac{\nabla f(p + t\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \nabla f(p + t\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} = f'(a, \mathbf{u})$, dado que f es diferenciable y $\mathbf{u}$ unitario.

(b) El vector tangente a la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t, at)$ es $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (-\omega\sin\omega t, \omega\cos\omega t, a) \neq \vec{0}$ y por tanto su pendiente vale $\dfrac{a}{\sqrt{(-\omega\sin\omega t)^2 + (\omega\cos\omega t)^2}} = \dfrac{a}{\omega} = \text{cte}.$

Prob. 20

(a) Sabemos que $R^T(t)R(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{21}(t) & a_{31}(t) \\ a_{12}(t) & a_{22}(t) & a_{32}(t) \\ a_{13}(t) & a_{23}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Como $\left(R^T(t)R(t)\right)' = (R^T)'(t)R(t) + R^T(t)R'(t) = (I)' = (0)$ esto es:

$$\begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{21}(t) & a'_{31}(t) \\ a'_{12}(t) & a'_{22}(t) & a'_{32}(t) \\ a'_{13}(t) & a'_{23}(t) & a'_{33}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{21}(t) & a_{31}(t) \\ a_{12}(t) & a_{22}(t) & a_{32}(t) \\ a_{13}(t) & a_{23}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular para $t = 0$ y como $R(0) = I$ se tiene

$$\begin{pmatrix} a'_{11}(0) & a'_{12}(0) & a'_{13}(0) \\ a'_{21}(0) & a'_{22}(0) & a'_{23}(0) \\ a'_{31}(0) & a'_{32}(0) & a'_{33}(0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a'_{11}(0) & a'_{21}(0) & a'_{31}(0) \\ a'_{12}(0) & a'_{22}(0) & a'_{32}(0) \\ a'_{13}(0) & a'_{23}(0) & a'_{33}(0) \end{pmatrix}$$

esto es $[R'(0)]^T = -R'(0) \Rightarrow R'(0)$ es antisimétrica.

(b) Veamos que se cumple para la matriz $R(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$R^T R = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ y } R'(t) = \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t & -\omega\cos\omega t & 0 \\ \omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es antisimétrica.

Prob. 21

$$f(x) = (x)^t A(x) = (x_1 \;\; x_2 \;\; ... \;\; x_n) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = (x_1 \;\; ... \;\; x_n) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (0 \; ... \; 1 \; ... \; 0) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 \;\; ... \;\; x_n) \begin{pmatrix} A_{1i} \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{ni} \end{pmatrix} + (A_{i1} \;\; ... \;\; A_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 2\,(x_1 \;\; ... \;\; x_n) \begin{pmatrix} A_{1i} \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{ni} \end{pmatrix} \text{ ya que } A \text{ es simétrica.}$$

Por consiguiente

$$\nabla f(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 2\,(x_1 \;\; ... \;\; x_n) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} = 2xA.$$

Prob. 22

Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = xyz$ y (x_0, y_0, z_0) un punto de la superficie, en forma implíta, $f(x, y, z) = c$ con $c = x_0y_0z_0$ y como $c > 0$, $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ y $z_0 \neq 0$.

El plano tangente a la superficie de nivel de f, que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$, tiene por ecuación $\langle x - P, \nabla f(P)\rangle = 0$, y como $\nabla f(P) = (y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)$ queda $y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$ y si simplificamos $y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z = 3c$.

Determinemos ahora los puntos de corte con los ejes coordenados:

Si $y = 0$, y $z = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{3c}{y_0z_0} \;\Rightarrow \left(\dfrac{3c}{y_0z_0}, 0, 0\right)$ corte con el eje X, análogamente $\left(0, \dfrac{3c}{x_0z_0}, 0\right)$ y $\left(0, 0, \dfrac{3c}{x_0y_0}\right)$ son, respectivamente, los cortes con los ejes Y y Z y por tanto el volumen del tetraedro determinado por el plano tangente y los tres planos coordenados vale $V = \dfrac{27c^3}{6x_0^2y_0^2z_0^2} = \dfrac{9c}{2}$.

Prob. 23

Suponiendo que la ecuación $F(x,y,z)=0$ defina a y como función de x y z, $y=f(x,z)$, se tiene la superficie parametrizada $\mathbf{\Phi}(x,z)=(x,f(x,z),z))$ para la que $T_x=\dfrac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x}=\left(1,\dfrac{\partial f}{\partial x},0\right)$ y $T_z=\dfrac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial z}=\left(0,\dfrac{\partial f}{\partial z},1\right)$.

Por otra parte como $F(x,f(x,z),z)=0$ derivando respectivamente en x y z se obtiene:

$$\begin{array}{l} F_x+F_y y_x=F_x+F_y f_x=0 \;\Rightarrow\; f_x=-\dfrac{F_x}{F_y} \;\Rightarrow\; T_x=\left(1,-\dfrac{F_x}{F_y},0\right)\\ F_z+F_y y_z=F_z+F_y f_z=0 \;\Rightarrow\; f_z=-\dfrac{F_z}{F_y} \;\Rightarrow\; T_z=\left(0,-\dfrac{F_z}{F_y},1\right)\end{array}$$

y entonces el P.V.F de $\mathbf{\Phi}(x,z)=T_x\wedge T_z=\left(-\dfrac{F_x}{F_y},-1,-\dfrac{F_z}{F_y}\right)=-\dfrac{\nabla F}{F_y}$

Prob. 24

Si $r(u,v)=(f(u),v,p-u-v)$ entonces $T_u(u,v)=(f'(u),0,-1)$ y $T_v(u,v)=(0,1,-1)$ por lo que

$T_u\times T_v=\begin{vmatrix} i & j & k\\ f'(u) & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(1,f'(u),f'(u))=(1,1,1)$ luego $f'(u)=1 \;\Rightarrow\; f(u)=u+c$.

Para ver de qué superficie se trata como $r(u,v)=(u+c,v,p-u-v)=(x,y,z)$ se tiene el sistema

$\left.\begin{array}{l} x=u+c\\ y=v\\ z=p-u-v\end{array}\right\}$ del que si eliminamos u y v se obtiene $x+y+z=C$, o sea un plano.

Prob. 25

La ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x,y)=2ax+2bxy+4cy^2$ en el punto $(1,1,2a+2b+4c)$ es

$z=f(1,1)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)=2a+2b+4c+(2a+2b)(x-1)+(2b+8c)(y-1)$

como ha de ser ortogonal al vector $(1,0,-1)$ se tiene

$(2a+2b,2b+8c,-1)=\lambda(1,0,-1)$ lo que da el sistema $\left.\begin{array}{r} 2a+2b=1\\ b+4c=0\end{array}\right\}$.

La derivada direccional de f en $(1,-1)$ siguiendo la dirección $(1,0)$, como f es diferenciable en dicho punto, vale $f'((1,-1),(1,0))=\langle \operatorname{grad} f(1,-1),(1,0)\rangle=\langle(2a-2b,2b-8c),(1,0)\rangle=2a-2b$ y, dado que ha de ser nula se obtiene $a-b=0$.

Así se tiene el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} a-b=0\\ 2a+2b=1\\ b+4c=0\end{array}\right\}$ que tiene como solución $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$ y $c=\dfrac{-1}{16}$

Prob. 26

Sea $\boldsymbol{\gamma}(v)=(x(v),y(v),f(x(v),y(v)))$,con $f(x,y)=a^2x^2+b^2y^2$, una expresión paramétrica de la curva de máxima pendiente sobre la superficie $z=f(x,y)$ que pasa por el punto $(\frac{1}{a},\frac{1}{b},2)$.

Sabemos que $\operatorname{grad} f(x,y)$ da la dirección de máximo crecimiento de $f(x,y)$ en cada punto. Por consiguiente, la proyección de $\boldsymbol{\gamma}(t)$ sobre el plano XY será la curva de $\mathbb{R}^2$ $(x(v),y(v))$ tal que su vector tangente en cada punto, $(x'(v),y'(v))$, tendrá la misma dirección que $\operatorname{grad} f(x,y)$. Esto es, $(x'(v),y'(v))=\lambda'\nabla f(x(v),y(v))=\lambda'(2a^2x(v),2b^2y(v))=\lambda(a^2x(v),b^2y(v))$.

De donde $\left.\begin{array}{l} x'(v)=\lambda a^2x(v)\\ y'(v)=\lambda a^2y(v)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x'(v)}{x(v)}=\lambda a^2\\ \dfrac{y'(v)}{y(v)}=\lambda a^2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(v)=c_1e^{\lambda a^2v}\\ y(v)=c_2e^{\lambda b^2v}\end{array}\right\}\Rightarrow f(x(v),y(v))=c_1e^{\lambda 2a^2v}+c_2e^{\lambda 2b^2v}$.

Por tanto una posible parametrización de la curva de máxima pendiente es

$\boldsymbol{\gamma}(v)=\left(c_1e^{\lambda a^2v},c_2e^{\lambda b^2v},c_1e^{\lambda 2a^2v}+c_2e^{\lambda 2b^2v}\right)$ que imponiendole que pase por $(\frac{1}{a},\frac{1}{b},2)$, por ejemplo para $v=0$, se obtiene $c_1=\dfrac{1}{a}$ y $c_2=\dfrac{1}{b}$ si además hacemos el cambio de variable $t=\lambda v$ se obtiene

$\boldsymbol{\gamma}(t)=\left(\dfrac{e^{a^2t}}{a},\dfrac{e^{b^2t}}{b},e^{2a^2t}+e^{2b^2t}\right)$.

Prob. 27

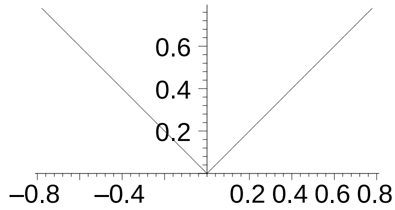
Existe $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ para todo $t\neq 0$ vamos a calcular $\boldsymbol{\gamma}'(0)=(x'(0),y'(0))$.

$x'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x(h)-x(0)}{h}$. Ahora bien,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{x(h)-x(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^{h^2}}=0$$
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{x(h)-x(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^{h^2}}=0$$
Así pues $x'(0)=0$.

Análogamente se calculan $y'(0)$ y las sucesivas derivadas. Por consiguiente podemos afirmar que $\boldsymbol{\gamma}$ es de clase C^∞.

Veamos que $\boldsymbol{\gamma}$ es inyectiva. Sean t_1 y $t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $t_1 \neq t_2$. Si t_1 y t_2 tienen signo distinto sus imagenes son distintas puesto que están en diferentes cuadrantes. Si t_1 y t_2 tienen el mismo signo, $\boldsymbol{\gamma}(t_1)\neq\boldsymbol{\gamma}(t_2)$ ya que la función exponencial es inyectiva.



No existe tangente a la gráfica en $(0,0)$ luego no es una curva regular en dicho punto. Tampoco es paramétricamente regular en $(0,0)$ ya que $\boldsymbol{\gamma}'(0)=(0,0)$.

Prob. 28

(a) $\mathrm{J}(g\circ f)(x,y)=\mathrm{J}g(f(x,y))\mathrm{J}f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(f(x,y)) & \frac{\partial g}{\partial y}(f(x,y))\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y\\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix}.$

Como $f(0,0)=(1,0)$ se tiene

$\mathrm{J}(g\circ f)(0,0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)\end{pmatrix}$

Por otra parte, la ecuación del plano tangente a la gráfica de g en $(1,0,1)$ viene dada por $z=g(1,0)+\frac{\partial g}{\partial x}(1,0)(x-1)+\frac{\partial g}{\partial y}(1,0)y$ y como por hipótesis esta ecuación es $2x+y-z=1$, deducimos que $\frac{\partial g}{\partial x}(1,0)=2$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(1,0)=1$, y como $g(1,0)=1$ la ecuación del plano tangente a la gráfica de $g\circ f$ en el punto $(0,0,1)$ es

$z=(g\circ f)(0,0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g\circ f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial g\circ f}{\partial y}(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1+\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=$

$=1+2x+y$ con lo que la ecuación buscada es

$2x+y-z=-1$.

(b) Los puntos de corte de las curvas de nivel son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x,y)=1\\ f_2(x,y)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} e^x\cos y=1\\ e^x\sin y=0\end{array}\right\}$$

Sus soluciones son los puntos $\{(0,2k\pi)\ \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

El vector gradiente es ortogonal a la curva y como $\nabla f_1(0,2k\pi)=(1,0)$ y $\nabla f_2(0,2k\pi)=(0,1)$ son ortogonales entre sí, las curvas se cortan ortogonalmente en dichos puntos.

Prob. 29

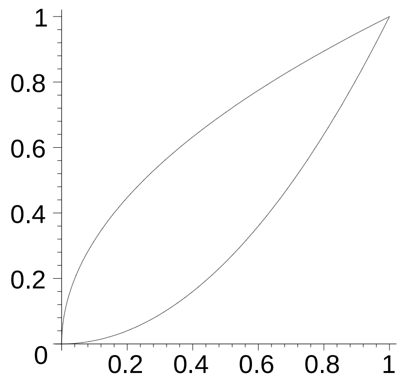
Sean $\boldsymbol{\alpha}(t)=(-t,t^2)$ y $\boldsymbol{\beta}(s)=(s^2,s)$. Para calcular sus puntos de corte, resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} s^2=-t\\ s=t^2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} s^2=-t\\ s^2=t^4\end{array}\right\}\Rightarrow t^4=-t\Rightarrow t(t^3+1)=0$$

Sus soluciones son $\begin{array}{lll} t=0 & s=0 & \boldsymbol{\alpha}(0)=\boldsymbol{\beta}(0)=(0,0)\\ t=-1 & s=1 & \boldsymbol{\alpha}(-1)=\boldsymbol{\beta}(1)=(1,1)\end{array}$

Observar que $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son parametrizaciones de las parábolas $y=x^2$ e $y^2=x$ respectivamente.

Como $\boldsymbol{\alpha}'(0)=(-1,0)$ y $\boldsymbol{\beta}'(0)=(0,1)$ en $(0,0)$ se cortan ortogonalmente. Por otra parte, $\boldsymbol{\alpha}'(-1)=(-1,-2)$ y $\boldsymbol{\beta}'(1)=(2,1)$ por lo que las curvas se cortan en $(1,1)$ bajo un ángulo cuyo coseno vale $\frac{4}{5}$.



Prob. 30

(a) Veamos si $x^3+y^3-3axy=0$ es una curva regular. Consideremos $F(x,y)=x^3+y^3-3axy$ evidentemente F es de clase C^∞ y como $\mathrm{J}F=\begin{pmatrix}3x^2-3ay & 3y^2-3ax\end{pmatrix}$ tiene rango máximo salvo en los puntos
$\left.\begin{array}{l}3x^2-3ay=0\\3y^2-3ax=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}x^2=ay\\y^2=ax\end{array}\right\}$ que tiene por solución los puntos $(0,0)$ y (a,a) de ellos el primero es de la curva y el segundo para que sea de la curva se requiere que $2a^3=3a^3$ que no tiene solución $(a>0)$, por tanto C es regular en todo punto salvo, quizás, en el $(0,0)$.

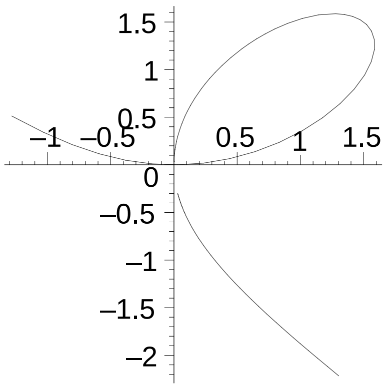
(b) Para ver si $\boldsymbol{\gamma}(t)$ es una parametrización regular, como $t\neq -1$ la función es continua y además como
$\boldsymbol{\gamma}'(t)=\left(\dfrac{-6at^3+3a}{(1+t^3)^2},\dfrac{-3at^4+6at}{(1+t^3)^2}\right)$ también es C^∞ sólo queda ver si $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ se anula para algún t.
$\left.\begin{array}{r}-6at^3+3a=0\\-3at^4+6at=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}t^3=\frac{1}{2}\\t(2-t^3)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\\t=0 \text{ o } t=\sqrt[3]{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{\gamma}'(t)\neq(0,0)\ \forall t\neq -1$ por consiguiente $\boldsymbol{\gamma}$ es una curva paramétrica regular.

(c) Como $\boldsymbol{\gamma}'(t)=\left(\dfrac{-6at^3+3a}{(1+t^3)^2},\dfrac{-3at^4+6at}{(1+t^3)^2}\right)$ entonces $\boldsymbol{\gamma}'(0)=(3a,0)$.

(d) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(\frac{3at}{1+t^3},\frac{3at^2}{1+t^3}\right)=(0,0)$ se puede decir que $\boldsymbol{\gamma}(0)=\boldsymbol{\gamma}(\infty)=\boldsymbol{\gamma}(-\infty)$ sin embargo la pendiente de $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ es $m(t)=\dfrac{-3at^4+6at}{-6at^3+3a}$ por lo que $m(0)=0$, $lim_{t\to\infty}m(t)=+\infty$ y $lim_{t\to-\infty}=-\infty$.
pero $\boldsymbol{\gamma}'(\infty)=lim_{t\to\infty}\boldsymbol{\gamma}'(t)=\left(\dfrac{-6at^3+3a}{(1+t^3)^2},\dfrac{-3at^4+6at}{(1+t^3)^2}\right)=(0,0)$ y la pendiente vale $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{-3at^4+6at}{-6at^3+3a}=\infty$.

(e) Como $x(t)=\dfrac{3at}{1+t^3}$ e $y(t)=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$ entonces
$$x^3(t)+y^3(t)=\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)^3+\left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)^3=3a\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)\left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)=3ax(t)y(t)$$
lo que prueba que la gráfica de $\boldsymbol{\gamma}$ está en C. Queda por comprobar que todo punto de C es la imagen de $\boldsymbol{\gamma}$ para algún t, y que $\boldsymbol{\gamma}$ es inyectiva. En efecto
Sea (x_0,y_0) un punto de C, entonces $x_0^3+y_0^3=3ax_0y_0$ y podemos considerar $x_0\neq 0$ pues si $x_0=0$ se tiene $y_0=0$ y ya sabemos que $\boldsymbol{\gamma}(0)=(0,0)$. Del sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l}x_0=\dfrac{3at}{1+t^3}\\y_0=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{array}\right\}$ deducimos que
$t=\dfrac{y_0}{x_0}$ y $\boldsymbol{\gamma}\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)=\left(\dfrac{3a\dfrac{y_0}{x_0}}{1+\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^3},\dfrac{3a\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^2}{1+\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^3}\right)=\left(\dfrac{x_0 3ax_0y_0}{x_0^3+y_0^3},\dfrac{y_0 3ax_0y_0}{x_0^3+y_0^3}\right)=(x_0,y_0)$ (si tenemos en cuenta $(x_0,y_0)\in C$) con lo que si $x_0\neq 0$ todo punto de C está en $\boldsymbol{\gamma}$ por tanto $\boldsymbol{\gamma}:\mathbb{R}-\{-1\}\to C$ es sobreyectiva es además inyectiva ya que el sistema
$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3at_1}{1+t_1^3}=\dfrac{3at_2}{1+t_2^3}\\ \dfrac{3at_1^2}{1+t_1^3}=\dfrac{3at_2^2}{1+t_2^3}\end{array}\right\}$ sólo tiene por solución $t_1=t_2$.

(f) El apartado (d) pone de manifiesto que no es una curva regular en $(0,0)$. Se pone a continuacón la gráfica de la curva. La imagen, por $\boldsymbol{\gamma}$, del intervalo $(-1,0)$ está en el segundo cuadrante la de $(0,\infty)$ en el primero y el intervalo $(-\infty,-1)$ da la parte de curva del tercer cuadrante.



Prob. 31

Sabemos que la curva $\boldsymbol{\gamma}(t)=(a(t),0,c(t))$, $t\in[d,e]$, al girar alrededor del eje OZ, genera la superficie de revolución, S, parametrizada por $\mathbf{g}(t,\phi)=(a(t)\cos\phi, a(t)\sin\phi, c(t))$, donde $\mathbf{g}: A=\ [d,e]\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ (vease problema 17).

La curva $\phi=f(t)$, en A, origina la curva L, que se puede parametrizar por $\boldsymbol{\beta}(t)=(a(t)\cos f(t), a(t)\sin f(t), c(t))$, en S.

Nos piden el ángulo formado por dicha curva en un punto cualquiera, $\mathbf{g}(t_0,\phi_0)$ y el meridiano que pasa por dicho punto, $\phi=\phi_0$ cuya parametrización puede ser $R_{\phi_0}=\{(a(t)\cos\phi_0, a(t)\sin\phi_0, c(t))\},\ t\in[d,e]$.

Para calcular dicho ángulo tenemos que determinar los vectores tangentes a dichas curvas que son respectivamente $\boldsymbol{\beta}'(t_0)=(a'(t_0)\cos f(t_0)-a(t_0)f'(t_0)\sin f(t_0), a'(t_0)\sin f(t_0)+a(t_0)f'(t_0)\cos f(t_0), c'(t_0))=$
$=(a'(t_0)\cos\phi_0-a(t_0)f'(t_0)\sin\phi_0, a'(t_0)\sin\phi_0+a(t_0)f'(t_0)\cos\phi_0, c'(t_0))$ y
$R'_{\phi_0}=(a'(t_0)\cos\phi_0, a'(t_0)\sin\phi_0, c'(t_0))$ su producto escalar vale
$(\boldsymbol{\beta}'(t_0)\mid R'_{\phi_0})=(a'(t_0)\cos\phi_0-a(t_0)f'(t_0)\sin\phi_0)a'(t_0)\cos\phi_0+(a'(t_0)\sin\phi_0+a(t_0)f'(t_0)\cos\phi_0)a'(t_0)\sin\phi_0+$
$+c'(t_0)^2=[a'(t_0)]^2+[c'(t_0)]^2$ y las normas son respectivamente
$\|\boldsymbol{\beta}'(t_0)\|^2=[a'(t_0)]^2+[a(t_0)]^2[f'(t_0)]^2+[c'(t_0)]^2$ y
$\|R'_{\phi_0}\|^2=[a'(t_0)]^2+[c'(t_0)]^2$ y entonces $\cos\alpha=\dfrac{(\boldsymbol{\beta}'(t_0)\mid R'_{\phi_0})}{\|\boldsymbol{\beta}'(t_0)\|\ \ \|R'_{\phi_0}\|}$ más sencillamente

$$\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{[a(t_0)]^2[f'(t_0)]^2}{[a'(t_0)]^2+[c'(t_0)]^2}$$

.

Prob. 32

Para que el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(-y,x,0)$ sea tangente a la esfera $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1$ en el punto (x_0,y_0,z_0) se tiene que cumplir que $\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)$ y $\mathbf{f}(x_0,y_0,z_0)$ sean ortogonales, que es cierto para todo punto, ya que $\langle\nabla F(x_0,y_0,z_0),\mathbf{f}(x_0,y_0,z_0)\rangle=\langle(2x_0,2y_0,2z_0),(-y_0,x_0,0)\rangle=0$ luego la esfera y el campo vectorial $\mathbf{f}$ son ortogonales.

En el caso de la función $\mathbf{g}(x,y,z)=(x,y,z)$ se tiene $\langle\nabla F(x_0,y_0,z_0),\mathbf{g}(x_0,y_0,z_0)\rangle=\langle(2x_0,2y_0,2z_0),(x_0,y_0,z_0)\rangle=2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$ que sólo es nulo si $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$ punto que no pertenece a la esfera por tanto no son ortogonales.

La ortogonalidad de la función $\mathbf{h}(x,y,z)=(y,x,z)$ y la esfera se da en los puntos que cumplan $\langle\nabla F(x_0,y_0,z_0),\mathbf{h}(x_0,y_0,z_0)\rangle=\langle(2x_0,2y_0,2z_0),(y_0,x_0,z_0)\rangle=4x_0^2y_0^2+2z_0^2=0$ los puntos de la esfera que verifican $4x_0^2y_0^2+2z_0^2=0$ son aquelos tales que $x^2+y^2-2xy=0$, esto es $(x-y)^2=0$ por tanto se trata de las circunferencias intersección de la esfera con los planos $x-y=1$ y $x-y=-1$.

5 Tema 5: Estudio local de funciones.

Prob. 17

Podemos utilizar la función $f(x,y)=x^y$ y hacer su desarrollo en torno del punto $(1,1)$.
$x^y=(1+(x-1))^{1+(y-1)}=(1+(x-1))\,(1+(x-1))^{(y-1)}=(1+(x-1))\,(1+(x-1)(y-1))=$
$=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+o_2$ (teniendo en cuenta que $(1+x)^m=1+mx+m(m-1)x^2/2+...$).
Así pues se tiene $P_2(u,v)=1+u+uv$ por lo que $0.97^{1.07}\approx P_2(-0.03,0.07)=1-0.03-0.030.07=0.9679$.

Prob. 18

Para desarrollar la función $F(x,y)=\ln(1+x^2+xy+y^2)+\int_0^{g(x,y)} f(t)\ \mathrm{d}t$ en un entorno del punto $(0,1)$ buscamos primero el desarrollo de $\ln(1+x^2+xy+y^2)$ para lo cual tenemos en cuenta que

$1+x^2+xy+y^2=a+bx+c(y-1)+dx^2+ex(y-1)+f(y-1)^2=2+x+2(y-1)+x^2+x(y-1)+(y-1)^2=2\left(1+\frac{x}{2}+(y-1)+\frac{x^2}{2}+\frac{x(y-1)}{2}+\frac{(y-1)^2}{2}\right)$

por lo que

$\ln(1+x^2+xy+y^2)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}+(y-1)+\frac{x^2}{2}+\frac{x(y-1)}{2}+\frac{(y-1)^2}{2}\right)=$

$=\ln 2+\left(\frac{x}{2}+(y-1)+\frac{x^2}{2}+\frac{x(y-1)}{2}+\frac{(y-1)^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+(y-1)+\frac{x^2}{2}+\frac{x(y-1)}{2}+\frac{(y-1)^2}{2}\right)^2 ...=$

$=\ln 2+\frac{x}{2}+(y-1)+\frac{3x^2}{8}$ ..., por tanto $P_2'(x,y)=\ln 2+\frac{x}{2}+(y-1)+\frac{3x^2}{8}$.

Obtengamos ahora el polinomio *Taylor* de la función $h(x,y)=\int_0^{g(x,y)} f(t)\ \mathrm{d}t=(\sigma\circ g)(x,y)$ donde $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función $\sigma(x)=\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ y si recordamos que

$g(0,1)=0,\ g_x(0,1)=2,\ g_y(0,1)=-3,\ g_{xx}(0,1)=\frac{3}{4},\ g_{xy}(0,1)=\frac{5}{4}$ y $g_{yy}(0,1)=\frac{5}{4}$

se tiene

$h_x(x,y)=\sigma'\left(g(x,y)\right)g_x(x,y)=f\left(g(x,y)\right)g_x(x,y)\to h_x(0,1)=2.$

$h_y(x,y)=\sigma'\left(g(x,y)\right)g_y(x,y)=f\left(g(x,y)\right)g_y(x,y)\to h_y(0,1)=-3.$

$h_{xx}(x,y)=f'\left(g(x,y)\right)g_x(x,y)g_x(x,y)+f\left(g(x,y)\right)g_{xx}(x,y)\to h_{xx}(0,1)=\frac{1}{4}.$

$h_{yy}(x,y)=f'\left(g(x,y)\right)g_y(x,y)g_y(x,y)+f\left(g(x,y)\right)g_{yy}(x,y)\to h_{yy}(0,1)=\frac{1}{8}.$

$h_{xy}(x,y)=f'\left(g(x,y)\right)g_x(x,y)g_y(x,y)+f\left(g(x,y)\right)g_{xy}(x,y)\to h_{xy}(0,1)=2.$

con lo que nos queda el siguiente polinomio $P_2''(x,y)=2x-3(y-1)+\frac{x^2}{8}+2x(y-1)+\frac{(y-1)^2}{16}$

Así pues el desarrollo de $F(x,y)$ será $P_2(x,y)=P_2'(x,y)+P_2''(x,y)=\ln 2+\frac{5}{2}x-2(y-1)+\frac{1}{2}x^2+2x(y-1)+\frac{1}{16}(y-1)^2$

Prob. 19

Además de como sugiere el enunciado se puede hacer de la siguiente forma.

$Z(x,y)=Z(0,0)+Z_x(0,0)x+Z_y(0,0)y+\frac{1}{2}\left(Z_{xx}(0,0)x^2+2Z_{xy}(0,0)xy+Z_{yy}(0,0)y^2\right).$

Determinaremos las derivadas parciales de la función $Z(x,y)$ utilizando que la ecuación dada define implícitamente $z=Z(x,y)$ en un entorno de $(0,0,0)$ por tanto podemos escribir $1+Z(x,y)+\sin(Z(x,y))-(x+1)^2(y+1)^2=0$ que si derivamos respecto de x obtenemos

$Z_x(x,y)+\cos(Z(x,y))Z_x(x,y)-2(x+1)(y+1)^2=0$ ecuación que en el punto $(0,0)$, y si tenemos en cuenta que $Z(0,0)=0$, nos da $2Z_x(0,0)-2=0\ \to Z_x(0,0)=1$ e igualmente obtendríamos $Z_y(0,0)=1$. Volviendo a derivar respecto de x e y queda

$Z_{xx}(x,y)+\cos(Z(x,y))Z_{xx}(x,y)-\sin(Z(x,y))Z_x^2(x,y)-2(y+1)^2=0$ que en $(0,0)$ se obtiene $Z_{xx}(0,0)=1$. El mismo valor se obtiene para $Z_{yy}(0,0)$.

La derivación respecto de y es

$Z_{xy}(x,y)+\cos(Z(x,y))Z_{xy}(x,y)-\sin(Z(x,y))Z_x(x,y)Z_y(x,y)-4(x+1)(y+1)=0$ y por tanto $Z_{xy}(0,0)=2$. Luego

$Z(x,y)=x+y+\frac{1}{2}\left(x^2+4xy+y^2\right).$

Prob. 20

Recordemos la expresión integral del término complementario de la formula de *Taylor* para funciones $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Sea h una función definida en $[a,b]$ de clase C^{k+1}, entonces:

$$h(b)=h(a)+h'(a)(b-a)+...+\frac{1}{k!}h^{(k)}(b-a)^k+\frac{1}{k!}\int_0^b(b-x)^k h^{(k+1)}(x)\mathrm{d}x$$

Consideremos ahora la funcón de una variable $\phi:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $\phi(t)=f(a+t\mathbf{u})$, por la expresión anterior se tiene:

$$\phi(1)=\phi(0)+\phi'(0)+...+\frac{1}{k!}\phi^{(k)}+\frac{1}{k!}\int_0^1(1-t)^k\phi^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$$

como $\phi'(0) = \nabla f(a) \cdot \mathbf{u} = f'(a; \mathbf{u})$

$$\phi''(0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j = f''(a; \mathbf{u})$$

...

$$\phi^{(k)}(0) = f^{(k)}(a; \mathbf{u})$$

$$\phi^{(k+1)}(t) = f^{(k+1)}(a + t\mathbf{u}; \mathbf{u})$$

sustituyendo tenemos:

$$f(a+\mathbf{u}) = f(a) + f'(a; \mathbf{u}) + ... + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a; \mathbf{u}) + \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-t)^k f^{(k+1)}(a + t\mathbf{u}; \mathbf{u}) \mathrm{d}t$$

Prob. 21

(a) Los puntos críticos de $f(x,y) = x^5 y + y^5 x + xy$ son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{r} 5x^4 y + y^5 + y = 0 \\ x^5 + 5y^4 x + x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y(5x^4 + y^4 + 1) = 0 \\ x(x^4 + 5y^4 + 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0, \quad y = 0$$ luego el único punto crítico es el $(0,0)$.

Para estudiar su naturaleza determinamos la matriz *Hessiana* que es

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 20x^3 y & 5x^4 + 5y^4 + 1 \\ 5x^4 + 5y^4 + 1 & 20y^3 x \end{pmatrix}$$ que en $(0,0)$ da $\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si aplicamos el criterio de *Sylvester* tenemos $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = -1$, por tanto es punto de silla.

(b) Para la función $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ con $(x,y) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ el sistema que nos da los puntos críticos es

$$\left.\begin{array}{r} \cos x - \sin(x+y) = 0 \\ \cos y - \sin(x+y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \cos x - \sin(x+y) = 0 \\ \cos y = \cos x \end{array}\right\}.$$

La segunda ecuación tiene las soluciones $y = x$ e $y = 2\pi - x$.

Si hacemos $y = x$ en la primera ecuación queda

$$\cos x - \sin 2x = 0 \rightarrow \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad x = \dfrac{3\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad x = \dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right\}$$ y así se obtienen

los puntos $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

Si ahora sustituimos $y = 2\pi - x$ nos da

$\cos x - \sin \pi = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ o $x = \dfrac{3\pi}{2}$ y los puntos son $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Como $\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\sin y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$ se tendrá

$$\mathrm{H}f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -1 \end{array} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ punto de silla.}$$

$$\mathrm{H}f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \Delta_1 = -2 \\ \Delta_2 = -1 \end{array} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ punto de silla.}$$

$$\mathrm{H}f\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -1 \end{array} \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ punto de silla.}$$

$$\mathrm{H}f\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 3 \end{array} \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ mínimo local.}$$

$$\mathrm{H}f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \Delta_1 = -1 \\ \Delta_2 = \dfrac{3}{4} \end{array} \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ máximo local.}$$

$$\mathrm{H}f\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array} \rightarrow \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \text{ máximo local.}$$

(c) Para la función $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ los puntos críticos los encontraremos resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{r} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$$ que tiene como única solución $x = y = z = 0$ y por tanto el punto $(0,0,0)$ es el único punto crítico.

La matriz *Hesiana* de $f(x,y,z)$ es $\mathrm{H}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -1 \\ \Delta_3 = 2 \neq 0 \end{matrix} \quad \to (0,0,0)$ punto de silla.

(d) Si $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$ los puntos en los que se anula el gradiente se obtienen resolviendo

$$\left.\begin{matrix} 2x + yz = 0 \\ 2y + xz = 0 \\ 4z + xy = 0 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x = -\dfrac{yz}{2} \\ 2y - \dfrac{yz^2}{2} = 0 \\ 4z - \dfrac{y^2 z}{2} = 0 \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} x = -\dfrac{yz}{2} \\ y(4 - z^2) = 0 \to \begin{cases} y = 0 \\ z = \pm 2 \end{cases} \\ z(8 - y^2) = 0 \to \begin{cases} z = 0 \\ y = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \end{matrix}$$

luego los puntos críticos son $(0,0,0)$, $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2)$, $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 2)$, $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2)$ y $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -2)$ y si evaluamos la matriz *Hesiana* en los puntos obtenemos

$$\mathrm{H}f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 4 \\ \Delta_3 = 8 \end{matrix} \to (0,0,0) \text{ mínimo local.}$$

$$\mathrm{H}f(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 2 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 \neq 0 \end{matrix} \to (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2) \text{ punto de silla.}$$

$$\mathrm{H}f(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2\sqrt{2} \\ 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 \neq 0 \end{matrix} \to (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 2) \text{ punto de silla.}$$

$$\mathrm{H}f(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2\sqrt{2} \\ -2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 \neq 0 \end{matrix} \to (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2) \text{ punto de silla.}$$

$$\mathrm{H}f(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2\sqrt{2} \\ -2 & 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 \neq 0 \end{matrix} \to (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -2) \text{ punto de silla.}$$

Prob. 22

(a) Para ver que si una función $f(x)$ tiene un mínimo en un punto p, la *Hesiana* de f , $\mathrm{H}f(p)$, es semidefinida positiva, tengamos en cuenta que el desarrollo *Taylor* de un función en un punto p se puede expresar

$f(x) = f(p) + \langle \nabla f(p), x - p \rangle + \dfrac{1}{2}(x-p)\mathrm{H}f(p)(x-p)^T + o_2$

Si fijamos un vector $\mathbf{u}$ y consideramos la función $\phi(t) = f(p + t\mathbf{u})$ su desarrollo de *Taylor* será

$\phi(t) = f(p + t\mathbf{u}) = f(p) + \langle \nabla f(p), t\mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2}t^2\mathbf{u}\mathrm{H}f(p)\mathbf{u}^T + o_2 = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2}\phi''(0)t^2 + o_2$

Si f tiene un mínimo en $p \in U$ la función $\phi(t)$ tiene que tener igualmente un mínimo en $t = 0$ y por tanto $\phi'(0) = 0$ y $\phi''(0) \geq 0$ y como $\phi''(0) = \mathbf{u}\mathrm{H}f(x)\mathbf{u}^T$ deducimos que la forma cuadrática, $\mathrm{H}f(p)$, ha de ser semidefinida positiva.

Un enunciado análogo cuando en el punto p tenemos un máximo es: si f tiene en $p \in U$ un máximo entonces la *hessiana*, $\mathrm{H}f(p)$, ha de ser semidefinida negativa.

(b) Para ver que el recíproco es falso sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^4$ que como se puede comprobar tiene por punto crítico el $(0,0)$ y su matriz *hessiana* en este punto es

$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 0 \end{matrix} \to$ que es semidefina positiva. En este caso el $(0,0)$ es un mínimo ya que $f(0,0) = 0$ y $f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Sin embargo la función $f(x,y) = x^2 - y^4$ también tiene en $(0,0)$ un punto crítico, cuya matriz *hessiana*, $\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es semidefida positiva pero el punto $(0,0)$ es un punto de silla ya que $f(0,0) = 0$, $f(x,0) = x^2 \geq 0$ y $f(0,y) = -y^4 \leq 0$.

Prob. 23

(a) Sabemos que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua en el compacto A, de clase C^2 en el interior de A donde tambien se cumple que $\Delta f > 0$ vamos a ver que el máximo absoluto de f, que evidentemente existe, tiene que darse en la frontera de A.

Supongamos que el máximo se diera en $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ según lo visto en el problema anterior la *hessiana* de f

$$\mathrm{H}f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

tiene que ser semidefinida negativa y por tanto sus valores propios tienen que ser ≤ 0 y no todos nulos.

El polinomio caracteríistico es

$$\lambda^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) \lambda + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 = 0$$

Por tanto, $\lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) < 0$ contra la hipótesis, luego el máximo de f ha de estar en $\mathrm{Fr}A$.

(b) Si $\Delta f < 0$ en $\mathring{A}$, el mínimo de f no se alcanza en el interior de A sino en su frontera.

Veamos si estas dos afirmaciones son tambien ciertas si $A \subset \mathbb{R}^n$.

Sea $\Delta f > 0$ en $\mathring{A}$ y $\mathbf{x_0} \in \mathring{A}$ un máximo de f entonces $\mathrm{H}f(\mathbf{x_0})$ es semidefina negativa y sus valores propios menores o iguales que 0 y no todos nulos. Su polinomio característico $|\mathrm{H}f(\mathbf{x_0}) - \lambda I| = 0$ es de la forma $\lambda^n + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{H}f(\mathbf{x_0}))\,\lambda^{n-1} + ... + \det \mathrm{H}f(\mathbf{x_0}) = 0$ donde $\Delta f(\mathbf{x_0}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{H}f(\mathbf{x_0})) = \lambda_1 + ... + \lambda_n < 0$, contra la hipótesis.

Análogamente si $\Delta f < 0$ en $\mathring{A}$, el mínimo de f no se alcanza en el interior de A sino en su frontera.

Prob. 24

(a) Los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ condicionados a $x^2 + y^2 = 1$ si pretendemos obtenerlos por *Lagrange* se obtiene el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla (x^2 + y^2) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{c} (2x, 2y) = \lambda (2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

sistema compatible e indeterminado, que tiene la solución $\lambda = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$ como conclusión todos los puntos de la condición son extremo (máximo y mínimo).

(b) Para la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ con la condición $2x + 3y = 0$ tenemos

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla (x^2 + y^2) \\ 2x + 3y = 0 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{c} (2x, 2y) = \lambda (2, 3) \\ 2x + 3y = 0 \end{array} \right.$$

que tiene como solución $\lambda = x = y = 0$. Fácilmente vemos que la función tiene en $(0, 0)$ un mínimo. El hecho de que λ sea cero indica que no hace falta tener en cuenta la condición, la función tiene un mínimo en $(0, 0)$ independientemente de la condición.

Prob. 25

(a) Vamos a probar que si M es el espacio de matrices 2×2 tales que $\det M = 1$ entonces M es una hipersuficie regular dentro de $M_2(\mathbb{R})$.

En efecto si recordamos que identificamos $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ con (x, y, z, t) las matrices M cumplen $G(x, y, z, t) = xt - yz - 1 = 0$, es decir son el conjunto de nivel 0 de $G(x, y, z, t)$ y para que sea regular se necesita que G sea al menos de clase C^1, evidente, y la matriz *jacobiana* tenga rango máximo pero $\mathrm{J}G(x, y, z, t) = (t \;\; -z \;\; -y \;\; x)$ que solo es nula en $(0, 0, 0, 0)$ punto o matriz que no es de M, luego es regular.

(b) Consideremos $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $f(A) = \mathrm{Tr}(A) = x + t$ si llamamos f_o a la restricción de f a M, es decir $f_o = f|_M$ los puntos críticos de $f|_M$ son los que cumplan

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla f(x, y, z, t) = \lambda \nabla G(x, y, z, t) \\ xt - yz - 1 = 0 \end{array} \right.$$ sistema que tiene por solución los puntos $(1, 0, 0, 1)$ y $(-1, 0, 0, -1)$.

(c) Veamos que la aplicación $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $g(x, y, z) = \left(x, y, z, \dfrac{1 + yz}{x} \right)$ es una parametrización regular de M en un entorno de $(1, 0, 0, 1)$.

En efecto si en la ecuación $G(x,y,z,t) = xt - yz - 1 = 0$ despejamos t se obtiene $t = \dfrac{1+yz}{x}$ y como la matriz *jacobiana* de g, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{1+yz}{x^2} & \dfrac{z}{x} & \dfrac{y}{x} \end{pmatrix}$, en el punto $(1,0,0)$ tiene rango máximo g es regular.

(d) Sea $\bar{f} = f \circ g$, $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, vamos a estudiar el caracter de los puntos $(1,0,0,1)$ y $(-1,0,0,-1)$ en $f|_M$ obtenidos en el apartado (b).

$$\mathrm{J}\bar{f} = (1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{1+yz}{x^2} & \dfrac{z}{x} & \dfrac{y}{x} \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1+yz}{x^2} \ \ \frac{z}{x} \ \ \frac{y}{x}\right)$$

Por tanto los puntos críticos de $\bar{f}$ son $(1,0,0)$ y $(-1,0,0)$ para estudiar su naturaleza determinamos la *Hessiana* de $\bar{f}$ en dichos puntos.

$$\mathrm{H}\bar{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{2(1+yz)}{x^3} & -\dfrac{z}{x^2} & -\dfrac{y}{x^2} \\ -\dfrac{z}{x^2} & 0 & \dfrac{1}{x} \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} & 0 \end{pmatrix} \to \mathrm{H}\bar{f}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ que tiene los valores propios $-1, \ 1$ y 2 por tanto $f|_M$ tiene en $(1,0,0,1)$ un punto de silla.

Igualmente $\mathrm{H}\bar{f}(-1,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ que tiene los valores propios $-1, \ 1$ y -2 por tanto $f|_M$ tiene en $(-1,0,0,-1)$ un punto de silla.

(e) M es un cerrado de $\mathbb{R}^4$ ya que es la antiimagen del cerrado $\{1\}$ de la función continua $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y,z,t) = xz - yt$, pero no está acotado como se ve con las matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix} \in M$.

f_o no está acotado pues $f\left(a, 0, 0, \dfrac{1}{a}\right) = a + \dfrac{1}{a}, \ a \in \mathbb{R}$.

Prob. 26

(a) La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{i,j} A_{ij} x^i x^j$ es continua y la esfera unidad de $\mathbb{R}^n$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}$ es un compacto por tanto $f|_S$ alcanza extremos absolutos.

(b) Si x es un extremo absoluto de $f|_S$, entonces por el metodo de extremos condicionados de *Lagrange* x ha de satisfacer el sistema $\left.\begin{array}{c} \nabla f = 2\lambda(x_1, ..., x_n) \\ x_1^2 + ... + x_n^2 = 1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} 2Ax = 2\lambda x \\ x_1^2 + ... + x_n^2 = 1 \end{array}\right\}$ de la primera ecuación se obtiene que x es un vector propio de A con valor propio λ.

(c) Si x es un vector propio de A y unitario se cumple que $Ax = \lambda x$ y $x_1^2 + ... + x_n^2 = 1$ y por tanto $f(x) = x^T A x = \lambda x \cdot x = \lambda$.

(d) Los extremos de f en S corresponden a los valores propios de A sean a el menor de los valores propios y b el mayor de ellos y recordando que si f es continua en un conexo S, $f(S)$ es un conexo (un conexo en $\mathbb{R}$ es un intervalo) entonces $f(S) = [a, b]$.

Prob. 27

La ecuación $\mathrm{J}f = \lambda \mathrm{J}g$, es decir $(x - a \ \ y - b \ \ z - c) = \lambda(A \ \ B \ \ C)$, y la condición proporcionan el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x = a + \lambda A \\ y = b + \lambda B \\ z = c + \lambda C \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} Ax = Aa + \lambda A^2 \\ By = Bb + \lambda B^2 \\ Cz = Cc + \lambda C^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{array}\right\} \to \lambda = \frac{-Aa - Bb - Cc - D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

y conocido λ podremos determinar $x, \ y$ y z.

Por otro lado como $x - a = \lambda A$, $y - b = \lambda B$ y $x - c = \lambda C$ tenemos

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}\left((x-a)^2 + (y-b)^2 + (x-c)^2\right) = \frac{1}{2}\lambda^2(A^2 + B^2 + C^2) = \frac{1}{2}\frac{(Aa + Bb + Cc + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Si observamos que los extremos de f condicionados a g corresponde con la mitad del cuadrado de la distancia del punto (a,b,c) al plano $Ax+By+Cz+D=0$ tendremos que la distancia del punto P al plano π, $d(P,\pi)$, vale
$$d(P,\pi)=\sqrt{2\frac{1}{2}\frac{(Aa+Bb+Cc+D)^2}{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Prob. 28

Vamos a determinar los extremos de la función $f(x,y,z)=x^2+2y^2-z$ con la condición $x^2+y^2+z^2=1$ para ello resolvemos el sistema
$$\left.\begin{array}{r}2x=2\lambda x\\ 4y=2\lambda y\\ -1=2\lambda z\\ x^2+y^2+z^2=1\end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{lcl}x(\lambda-1)=0 & \rightarrow & x=0 \text{ o } \lambda=1\\ y(\lambda-2)=0 & \rightarrow & y=0 \text{ o } \lambda=2\\ -1=2\lambda z & & \\ x^2+y^2+z^2=1 & & \end{array}$$
Si $x=0$ e $y=0$ entonces $z=\pm1$ así obtenemos los puntos $(0,0,1)$ y $(0,0,-1)$.

Si $\lambda=1$ e $y=0$ entonces $z=-\dfrac{1}{2}$ y $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ obteniendose los puntos $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,-\dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,-\dfrac{1}{2}\right)$

Si $\lambda=2$ y $x=0$ entonces $z=-\dfrac{1}{4}$ e $y=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ en este caso se obtienen otros dos puntos $\left(0,\dfrac{\sqrt{15}}{4}-\dfrac{1}{4}\right)$ y $\left(0,-\dfrac{\sqrt{15}}{4}-\dfrac{1}{4}\right)$.

Como se trata de una función continua en un compacto hay máximo y mínimo absolutos sólo nos queda evaluar f en los puntos obtenidos para saber el máximo absoluto.

$f(0,0,1)=-1,\quad f(0,0,-1)=1,\quad f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4},$ y

$f\left(0,\dfrac{\sqrt{15}}{4}-\dfrac{1}{4}\right)=f\left(0,-\dfrac{\sqrt{15}}{4}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{17}{8}$ que es por tanto el máximo absoluto.

Prob. 29

Para encontrar los extremos de $f(x,y)=a^2x^2+b^2y^2$ sobre la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ resolvemos las ecuaciones
$$\left\{\begin{array}{l}\lambda b^2x=a^2x \;\rightarrow\; x=0 \text{ o } \lambda=\dfrac{a^2}{b^2}\\[2ex] \lambda a^2y=b^2y \;\rightarrow\; y=0 \text{ o } \lambda=\dfrac{b^2}{a^2}\\[2ex] b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\end{array}\right.$$
Si $x=0$ entonces $y=\pm b$ y si $y=0$ se tiene $x=\pm a$ y tenemos los puntos críticos $(0,\pm b)$ y $(\pm a,0)$ como se trata de una función continua en un compacto, sólo nos queda evaluar la función en dichos puntos.

$f(\pm a,0)=a^4$ y $f(0,\pm b)=b^4$ dado que $a>b$ el máximo de f es a^4.

Prob. 30

Para determinar los extremos de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ en el compacto $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z\geq 0,$ $x+y+z\leq 1\}$ primeramente hallaremos los puntos críticos dentro del compacto, es decir los puntos que cumplan $\mathrm{D}f(x,y,z)=(2x,2y,2z)=(0,0,0)$ que sólo lo cumple el $(0,0,0)$.

Ahora buscaremos los puntos críticos de f condicionados a los cuatro planos que constituyen la frontera del compacto, $x=0,\ y=0,\ z=0$ y $x+y+z=1$ y de ellos los que pertenecen al interior de K, es decir los cuatro problemas

$\left\{\begin{array}{l}(2x,2y,2z)=\lambda(1,0,0)\\ x=0\end{array}\right. \rightarrow$ se obtiene el punto $(0,0,0)\in K$.

El mismo punto dan $\left\{\begin{array}{l}(2x,2y,2z)=\lambda(0,1,0)\\ y=0\end{array}\right.$ y $\left\{\begin{array}{l}(2x,2y,2z)=\lambda(0,0,1)\\ z=0\end{array}\right.$ ahora queda

$\left\{\begin{array}{l}(2x,2y,2z)=\lambda(1,1,1)\\ x+y+z=1\end{array}\right. \rightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$ así obtenemos el punto $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

Luego determinamos los puntos críticos de f restringida a las seis curvas que pertenecen a la frontera de K, es decir

$C_1\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\ z=0\end{array}\right.\quad C_2\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\ y=0\end{array}\right.\quad C_3\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\ x=0\end{array}\right.\quad C_4\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right.\quad C_5\left\{\begin{array}{l}x=0\\ z=0\end{array}\right.\quad C_6\left\{\begin{array}{l}y=0\\ z=0\end{array}\right.$

$f|C_1$ da el punto $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$, $f|C_2$ el punto $\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$, $f|C_3$ da el punto $\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ y $f|C_4,\ f|C_5$ y $f|C_6$ dan los vértices $(0,0,1),\ (0,1,0)$ y $(1,0,0)$.

Al evaluar f en todos estos puntos obtenemos que el máximo se da en los puntos $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ y $(1,0,0)$ y vale 1 y el mínimo en $(0,0,0)$ y vale 0.

Geometricamente es facil ver que los conjuntos de nivel de f son esferas centradas en el origen, de estás la menor con puntos en K es la de radio 0 y la mayor la de radio 1.

Prob. 31

Para determinar los extremos, en el compacto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0,\ x \leq y,\ x+y \geq -3\}$, de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + y + x$ primero buscamos los puntos críticos de f

$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 1 = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{array}\right\}$ que da el punto $(-1,-1) \notin \operatorname{Int} K$.

Sobre $y = x$ la función vale $f(x,x) = h(x) = x^2 + 2x$ y entonces $h'(x) = 2x + 2$ que vale 0 para $x = -1$ y tenemos el punto $(-1,-1)$.

Sobre la recta $y = -3 - x$ nos queda $f(x, -3-x) = g(x) = 3x^2 + 9x + 6$ cuya derivada, $g'(x) = 6x + 9$, se anula para $x = -\dfrac{3}{2}$ lo que nos da el punto $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ que es un vértice de la región.

En la recta $y = 0$ tenemos $f(x,0) = x^2 + x$ y así obtenemos el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Entre los puntos $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(-3,0)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ y $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ están el máximo que es 6 y se da en $(-3,0)$ y el mínimo que se alcanza en $(-1,-1)$ y es -1.

Prob. 32

Buscaremos los puntos críticos de $f(x,y) = x + 3xy - 2y^2$ en el interior del compacto, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$, y los condicionados a la frntera de k y consideramos además los cuatro vértices $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ y $(1,-1)$.

Libres: $\left.\begin{array}{r} 1 + 3y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{array}\right\}$ que da el punto $\left(-\dfrac{4}{9}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

Condicionados:

$\left.\begin{array}{r} 1 + 3y = 0 \\ 3x - 4y = \lambda \\ y = 1 \end{array}\right\}$ no da ningún punto y lo mismo ocurre con $y = -1$.

$\left.\begin{array}{r} 1 + 3y = 0 \\ 3x - 4y = \lambda \\ x = \pm 1 \end{array}\right\}$ se obtienen los puntos $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$ y $\left(-1, -\dfrac{3}{4}\right)$.

El máximo absoluto es $\dfrac{17}{8}$ en $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$ y el mínimo es -6 y se alcanza en el punto $(-1,1)$.

Prob. 33

(a) Los puntos críticos de $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-(x^2+y^2)}$ son los que satisfagan el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 2xe^{1-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - 3y^2) = 0 \ \rightarrow\ x = 0 \text{ o } x^2 + 3y^2 = 1 \\ 2ye^{1-(x^2+y^2)}(3 - x^2 - 3y^2) = 0 \ \rightarrow\ y = 0 \text{ o } x^2 + 3y^2 = 3 \end{array}\right.$$

Con lo que se obtienen los puntos $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$.

Como $\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{1-(x^2+y^2)}(1 - 5x^2 - 3y^2 + 2x^4 + 6x^2y^2) & 4xye^{1-(x^2+y^2)}(-4 + x^2 + 3y^2) \\ 4xye^{1-(x^2+y^2)}(-4 + x^2 + 3y^2) & 2e^{1-(x^2+y^2)}(3 - 15y^2 - x^2 + 2x^2y^2 + 6y^4) \end{pmatrix}$ se tiene

$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \Delta_1 = 2e \\ \Delta_2 = 12e \end{array} \rightarrow (0,0)$ mínimo local.

$\mathrm{H}f(0,1) = \mathrm{H}f(0,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \Delta_1 = -4 \\ \Delta_2 = 48 \end{array} \rightarrow (0,1)$ y $(0,-1)$ máximos locales.

$\mathrm{H}f(1,0) = \mathrm{H}f(-1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \Delta_1 = -4 \\ \Delta_2 = -16 \end{array} \rightarrow (1,0)$ y $(-1,0)$ puntos de silla.

(b) Si ahora imponemos la restricción $x^2 + y^2 = 1$ tendremos

$\left.\begin{array}{r} 2xe^{1-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - 3y^2) = 2\lambda x \\ 2ye^{1-(x^2+y^2)}(3 - x^2 - 3y^2) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\}$ sistema que tiene como solución los puntos $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$.

$(0,0)$ da el mínimo absoluto que es 0 el máximo absoluto es 3 y se alcanza en $(0,1)$ y $(0,-1)$.

Prob. 34

(a) Obtemos los puntos críticos de $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y)$ si resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r}\cos(x+y) - \sin(x-y) = 0\\ \cos(x+y) + \sin(x-y) = 0\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}\cos(x+y) = 0\\ \sin(x-y) = 0\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c}(x+y) = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\ k \in \mathbb{Z}\\ \\ (x-y) = h\pi\ h \in \mathbb{Z}\end{array}\right\} \to$$

$$\to \begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} + h\dfrac{\pi}{2}\\ y = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} - h\dfrac{\pi}{2}\end{array} \text{ así los puntos } \left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} + h\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} - h\frac{\pi}{2}\right) \text{ con } k,\ h \in \mathbb{Z} \text{ son puntos críticos.}$$

Para estudiar la naturaleza de estos puntos consideremos las ecuaciones $\left.\begin{array}{c}(x+y) = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\\ (x-y) = h\pi\end{array}\right\}$

Si k y h son pares $f(x,y) = 2$ por tanto son puntos de máximo.

Si k y h son impares $f(x,y) = -2$ por tanto son puntos de mínimo.

Tanto si k es par y h impar, o viceversa, $f(x,y) = 0$ pero en un entorno de esos puntos la función tanto puede ser mayor que 0 como menor por tanto son punos de silla.

(b) El único punto crítico de f que está en el interior del cuadrado $[\frac{\pi}{2}, \pi] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$ es $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Sobre la frontera $x = \frac{\pi}{2}$ tendremos $h(y) = f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \cos y + \sin y$ y se obtiene el punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ por simetría en la frontera $y = \frac{\pi}{2}$ tendremos el punto $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

En las rectas $x = \pi$ e $y = \pi$ tenemos los puntos $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ y $\left(\pi, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Consideramos tambien los cuatro vértices $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, (π, π) y $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$.

Si evaluamos la función en estos puntos se obtiene que el máximo es 1 y se alcanza en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y (π, π), el mínimo está en los puntos $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ y vale -1.

Prob. 35

Como T es un compacto y la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{(2x+y-2)^2}{5}$ es continua, tendremos máximo y mínimo absolutos.

Los extremos libres en el interior de T satisfacen el sistema $\left.\begin{array}{c}9x + 2y = 4\\ 2x + 6y = 2\end{array}\right\}$ así se obtiene $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \in \operatorname{Int} T$.

Sobre la frontera $y = 0$ se tiene $g(x) = f(x, 0) = x^2 + \dfrac{(2x-2)^2}{5}$ que tiene el punto crítico $\left(\frac{4}{9}, 0\right)$.

En $x = 0$ obtenemos $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Como $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre la recta $2x + y = 0$, basta resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c}x = \lambda\\ 2y = \lambda\\ 2x + y - 2 = 0\end{array}\right\} \text{ que nos proporciona el punto } \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) \text{ y si tenemos en cuenta los vértices } (0,0),\ (0,2) \text{ y } (1,0)$$

vemos que el máximo es 4, se alcanza en $(0,2)$ y el mínimo es $\frac{2}{5}$ y se da en $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

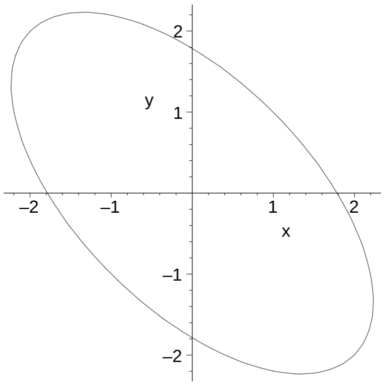
Prob. 36

Otro posible enunciado del problema es: determinar los vértices y semiejes de la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$ (vease figura).

Se trata de buscar los extremos de la función distancia al origen, o su cuadrado por comodidad, $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, con la condición de pertenecer a la elipse.

Resolveremos pues el sistema $\left.\begin{array}{r}x = \lambda(5x + 3y)\\ y = \lambda(5y + 3x)\\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c}\dfrac{x}{y} = \dfrac{5x + 3y}{5y + 3x} \to y = \pm x\\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16\end{array}\right\}$

Así obtenemos los puntos $(1,1)$ y $(-1,-1)$, en los que la función vale $\sqrt{2}$, que son puntos de mínimo, y los puntos $(2,-2)$ y $(-2,2)$ que son de máximo y la función vale $2\sqrt{2}$.



Prob. 37

El volumen de un depósito cilíndrico de radio r y altura h es $V = \pi r^2 h$ que ha de valer 1, la condición, la función que vamos a extremar es la superficie, es decir $S(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$ suponemos incluidas las dos tapas.

$(2\pi h + 4\pi r\ ,\ 2\pi r) = \lambda(2\pi hr\ ,\ \pi r^2)$ y obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} h + 2r = \lambda hr \\ 2r = \lambda r^2 \\ \pi r^2 h = 1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} h = 2r \\ \lambda = \dfrac{2}{r}(r \neq 0) \\ \\ \pi r^2 h = 1 \end{array}\right\} \text{Por lo tanto } r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \text{ y } r = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

Prob. 38

Queremos buscar los extremos de $U(x,y,z) = mgz$ en los puntos de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ por tanto

$(0,0,mg) = \lambda(2x,2y,2z)\ \Rightarrow\ x = y = 0,\ \text{y}\ z = \dfrac{mg}{2\lambda}$

valores que llevados a la condición queda $\dfrac{m^2g^2}{4\lambda^2} = R^2\ \Rightarrow\ \lambda = \pm\dfrac{mg}{2R}\ \Rightarrow\ z = \pm R$

Como se trata de un función continua en un compacto hay máximo absoluto en el punto $(0,0,R)$ y mínimo absoluto en $(0,0,-R)$.

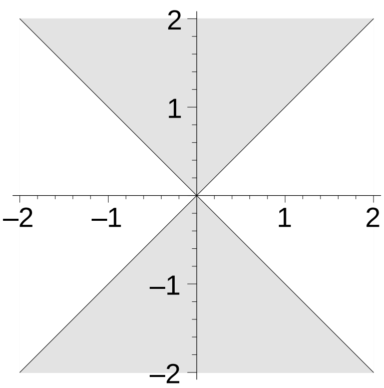
Los puntos críticos de una función potencial, U lo es, son puntos de equilibrio y si es un mínimo se trata de equilibrio estable, caso del punto $(0,0,R)$, en $(0,0,-R)$ tenemos equilibrio inestable.

6 Tema 6: Integración.

Prob. 23

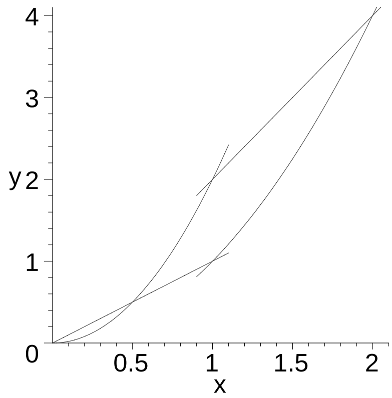
Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ |x| \leq |y| \leq 2\}$ (vease figura).

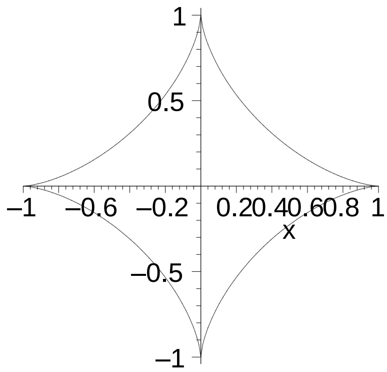
$$\int\!\!\int_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 (x^2+y^2)\mathrm{d}y = 4\int_0^2 \left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{64}{3}$$



Prob. 24

(a) La región $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ |a \leq \dfrac{y}{x} \leq b,\ \alpha \leq \dfrac{y}{x^2} \leq \beta\}$, con $0 < a < b$ y $0 < \alpha < \beta$ cuya área se nos pide (vease figura) sugiere el cambio de variable $(u,v) = \phi(x,y) = \left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{y}{x^2}\right)$. La aplicación ϕ^{-1} transforma el rectángulo $T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 |\ a \leq u \leq b,\ \alpha \leq v \leq \beta\}$ en Q por tanto:





$$\text{área} = \int\int_Q \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_T |\mathrm{J}(u,v)|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Para determinar el $\mathrm{J}(u,v)$ se puede proceder de dos maneras:

1. $(x,y) = \phi^{-1}(u,v) = \left(\frac{u}{v}, \frac{u^2}{v}\right)$ y entonces

$$\mathrm{J}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{u^2}{v^3}$$

2. Por el teorema de la función inversa:

$$\mathrm{J}\phi^{-1}(u,v) = \frac{1}{\mathrm{J}\phi(x,y)} = \frac{1}{\mathrm{J}\phi(\phi^{-1}(u,v))}$$

$$\mathrm{J}(x,y) = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{y}{x^4}$$

Por tanto $\mathrm{J}(u,v) = \dfrac{1}{\mathrm{J}(x,y)} = \dfrac{x^4}{y} = \dfrac{u^2}{v^3}$

$$\text{área} = \int\int_Q \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}u \int_\alpha^\beta \frac{u^2}{v^3}\mathrm{d}v = \frac{1}{6}(b^3 - a^3)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right)$$

(b) La región $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \le \sqrt[3]{a^2}$ (vease figura) es simétrica respecto de los ejes, por tanto calcularemos el área de la parte correspondiente al primer cuadrante y multiplicamos por 4 lo que obtengamos.

Hacemos el cambio de variable $\boldsymbol{\alpha} : (0,\infty) \times (0,\pi/2) \to (0,\infty) \times (0,\infty)$ definido por $(x,y) = \boldsymbol{\alpha}(r,\phi) = (r^3\cos^3\phi, r^3\sin^3\phi)$, entonces:

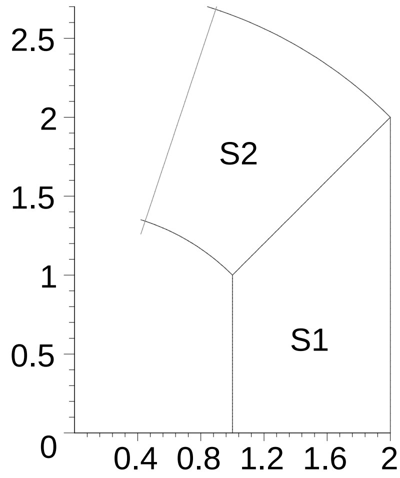
$$\mathrm{J}(r,\phi) = \begin{vmatrix} 3r^2\cos^3\phi & -3r^3\cos^2\phi\sin\phi \\ 3r^2\sin^3\phi & 3r^3\sin^2\phi\cos\phi \end{vmatrix} = 9r^5\sin^2\phi\cos^2\phi$$

$$\text{área} = 4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\int_0^{\sqrt[3]{a}} 9r^5\sin^2\phi\cos^2\phi\ \mathrm{d}r = \frac{3}{4}a^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos(4\phi))\mathrm{d}\phi = \frac{3}{8}\pi a^2$$

Prob. 25

Como $y = x$ corresponde en coordenadas polares con $\phi = \pi/4$, $y = -x$ con $\phi = 3\pi/4$ e $y = 1$ con $r = 1/\sin\phi$ tenemos

$$\int\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\mathrm{d}\phi\int_0^{1/\sin\phi} r\ f(r\cos\phi, r\sin\phi)\mathrm{d}r$$



Prob. 26

La región S_1 es la comprendida entre las rectas $y=0$, $y=x$, $x=1$ y $x=2$ (vease figura). Por tanto

$$\int\int_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^x(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\int_1^2 x^3\ \mathrm{d}x=5$$

Para integrar en la región S_2, como está comprendida entre dos circuferencias, $2\le x^2+y^2\le 8$, y dos rectas, $y=x$ e $y=3x$, haremos un cambio a polares:

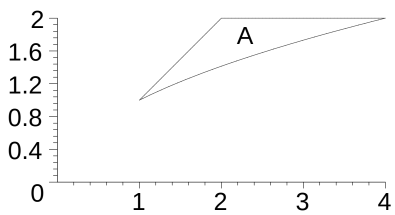
$$\int\int_{S_2}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_{\pi/4}^{\arctan 3}\mathrm{d}\phi\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}}r^3\ \mathrm{d}r=15(\arctan 3-\frac{\pi}{4})=15\arctan\frac{1}{2}$$

ya que si hacemos $\alpha=\arctan 3-\dfrac{\pi}{4}$ entonces

$\arctan 3=\alpha+\dfrac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ 3=\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}\ \Rightarrow\ 3-3\tan\alpha=\tan\alpha+1\ \Rightarrow\ \tan\alpha=\dfrac{1}{2}$

Asi pues: $\displaystyle\int\int_{S_1\cup S_2}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=5+15\arctan\frac{1}{2}$

Prob. 27



Para invertir el orden de integración en $I=\displaystyle\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\ \mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\ \mathrm{d}y$ tengamos en cuenta que esto equivale a $I=\displaystyle\int\int_A\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ donde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ y\le x\le y^2,\ 1\le y\le 2\}$ (vease figura). Por tanto

$$I=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\ \mathrm{d}x=\int_1^2-\frac{2y}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)\ \mathrm{d}y=\frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

Prob. 28

(a) Para derivar $F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin(tx)}{t}\ \mathrm{d}t$ tengamos en cuenta la regla de *Leibniz*:

$$F'(x)=\int_{x^2}^{x^3}\cos(tx)\ \mathrm{d}t+3x^2\frac{\sin x^4}{x^3}-2x\frac{\sin x^3}{x^2}=\frac{4\sin x^4-3\sin x^3}{x}.$$

(b) Si $F(x,y)=\int_0^x\cos(ty)\ \mathrm{d}t$ entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\cos(xy)$$

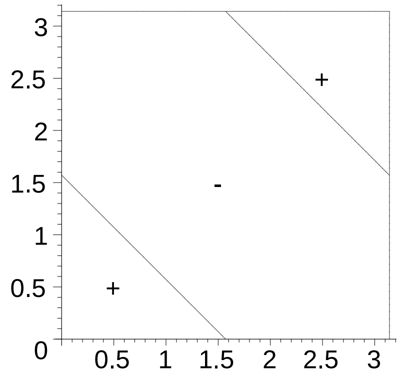
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_0^x -t\sin(ty)\ \mathrm{d}t = \frac{x}{y}\cos(xy) - \frac{1}{y^2}\sin(xy).$$

(c) Para $F(x,y) = \displaystyle\int_1^x e^{y-t}\ \mathrm{d}t$ se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{y-x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_1^x e^{y-t}\ \mathrm{d}t = e^y(e^{-1} - e^{-x}) = F(x,y).$$

Prob. 29



La función $\cos(x+y)$ tiene una distribución de signos como indica la figura, es decir:

$\cos(x+y) > 0$ si $0 < x+y < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos(x+y) < 0$ para $\dfrac{\pi}{2} < x+y < \dfrac{3\pi}{2}$ y por último $\cos(x+y) > 0$ si $\dfrac{3\pi}{2} < x+y < 2\pi$. Por tanto

$$\int\int_Q f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}y \int_0^\pi |\cos(x+y)|\ \mathrm{d}x$$

Si $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ entonces $\displaystyle\int_0^\pi |\cos(x+y)|\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2-y} \cos(x+y)\ \mathrm{d}x + \int_{\pi/2-y}^{\pi} -\cos(x+y)\ \mathrm{d}x = 2.$

Para $\dfrac{\pi}{2} \le y \le \pi$ entonces $\displaystyle\int_0^\pi |\cos(x+y)|\ \mathrm{d}x = \int_0^{3\pi/2-y} -\cos(x+y)\ \mathrm{d}x + \int_{3\pi/2-y}^{\pi} \cos(x+y)\ \mathrm{d}x = 2.$

Así $\displaystyle\int\int_Q f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}y \int_0^\pi |\cos(x+y)|\ \mathrm{d}x = \int_0^\pi 2\ \mathrm{d}y = 2\pi.$

Prob. 30

Sean $D = [0,1]\times[0,1]$ y $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 2y & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

f es una función acotada en D y discontinua en todo D salvo en los puntos de la recta $y = \dfrac{1}{2}$. Como el conjunto de puntos de discotinuidad no tiene medida nula por el teorema de *Lebesgue* no existe $\displaystyle\int\int_D f$.

Por la misma razón no existe $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}x$ para cada $y \in [0,1]$, salvo si $y = \dfrac{1}{2}$, luego no existe $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}x$.

Para estudiar la existencia de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}y$ consideremos,

1. Si $x \in \mathbb{Q}$, $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}y = \int_0^1 1\ \mathrm{d}y = 1$
2. Si $x \notin \mathbb{Q}$, $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}y = \int_0^1 2y\ \mathrm{d}y = 1.$

Por tanto, para todo $x \in [0,1]$ $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}y = 1$ y así se tiene que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}y = 1.$

Prob. 31

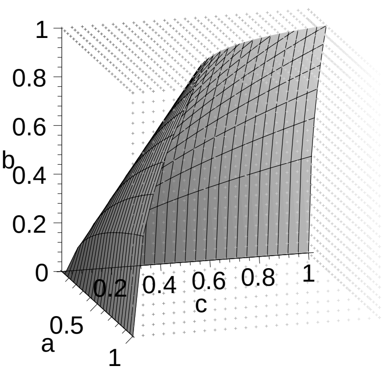
(a) Vamos a calcular el volumen de $A \subset R \times [z_1, z_2]$, con $R \subset \mathbb{R}^2$ algún rectángulo compacto.

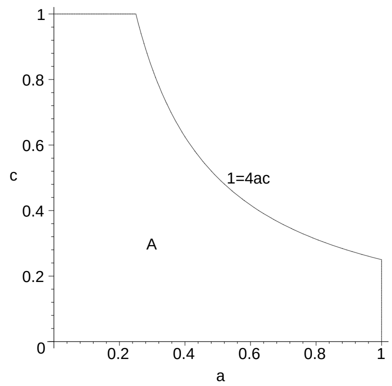
$\mathrm{Vol}(A) = \iiint_A \chi_A \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}z = \iint_R \chi_A \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z = \int_{z_1}^{z_2} \text{área}(A_z) \; \mathrm{d}z$, donde área$(A_z)$ es el área para una z fija.

(b) Es una consecuencia de (a).

(c) Evidente como consecuencia de (b) ambos cilindros tienen las mismas secciones horizontales que son circulos de área π.

Prob. 32





Calcularemos la probabilidad mediante el cociente del volumen de la figura definida por los puntos favorables con el volumen de la definida por los puntos posibles:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{volumen puntos favorables}}{\text{volumen puntos posibles}}$$

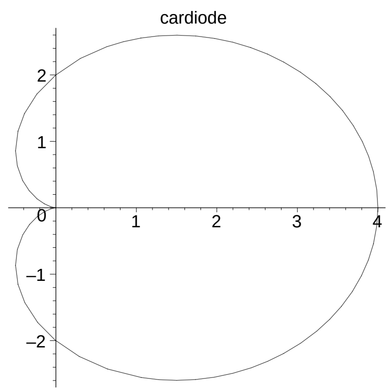
El volumen de los puntos posibles es el volumen de $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ que vale uno.

Los punto favorables son los que definen la región $b^2 - 4ac \geq 0$, con $a, \; b, \; c \in [0,1]$, esto es $\{(a, c, b) | \; b \geq 2\sqrt{a}\sqrt{c}, \; a, c, b \; \in [0,1]$ (en la figura los que estan dentro del cubo y por encima de la superficie). Este volumen vale:

$\iint_A \mathrm{d}a \; \mathrm{d}c \int_{2\sqrt{a}\sqrt{c}}^{1} \mathrm{d}b = \iint_A (1 - 2\sqrt{a}\sqrt{c}) \mathrm{d}a \; \mathrm{d}c = \int_0^{1/4} \mathrm{d}a \int_0^1 (1 - 2\sqrt{a}\sqrt{c}) \; \mathrm{d}c + \int_{1/4}^{1} \mathrm{d}a \int_0^{1/(4a)} (1 - 2\sqrt{a}\sqrt{c}) \; \mathrm{d}c =$
$= 0.1388888889 + 0.1155245301 = 0.2544134190$

Es decir una probabilidad del 25%.

Prob. 33



Recordemos las coordenadas del centro de masa de un solido plano que ocupa una región A:

$\overline{x} = \dfrac{\iint_A x\delta(x,y) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y}{\iint_A \delta(x,y) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y}$, $\overline{y} = \dfrac{\iint_A y\delta(x,y) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y}{\iint_A \delta(x,y) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y}$ donde $\delta(x,y)$ es la densidad superficial.

Integraremos en polares dado que la curva que define la regón la tenemos definida así.

$\iint_A x \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{a(1+\cos\phi)} r^2 \cos\phi \; \mathrm{d}r = \dfrac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} (\cos\phi + 3\cos^2\phi + 3\cos^3\phi + \cos^4\phi) \; \mathrm{d}\phi = \dfrac{5\pi a^3}{4}.$

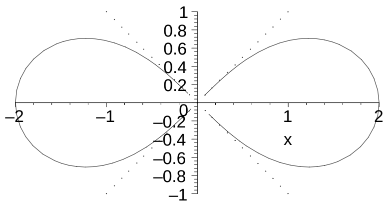
$$\iint_A \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{a(1+\cos\phi)} r\ \mathrm{d}r = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\phi+\cos^2\phi)\ \mathrm{d}\phi = \frac{3\pi a^2}{2} \text{ entonces } \overline{x} = \frac{5}{6}a.$$

Por otro lado:

$$\iint_A y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{a(1+\cos\phi)} r^2\sin\phi\ \mathrm{d}r = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(\sin\phi+3\cos\phi\sin\phi+3\cos^2\phi\sin\phi+\cos^3\phi\sin\phi)\ \mathrm{d}\phi = 0$$

y por tanto $\overline{y} = 0,\ \Rightarrow\ (\overline{x},\overline{y}) = (\frac{5}{6}a, 0)$.

Prob. 34



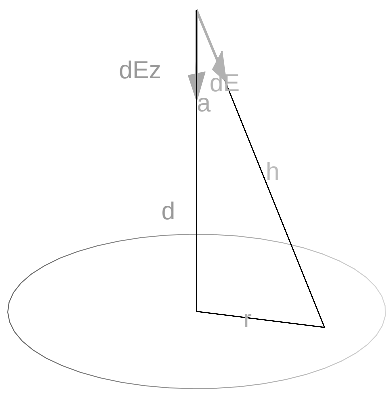
El momento de inercia, respecto de un eje perpendicular al plano, de una región A es:

$I = \iint_A d^2(x,y)\delta(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, donde $d(x,y)$ es la distancia al origen. En nuestro caso si consideramos la densidad superficial constante $\delta(x,y) = \delta$ y teniendo en cuenta simetrías de la región tendremos

$I = \iint_A (x^2+y^2)\delta\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 4\iint_{A_1}(x^2+y^2)\delta\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 4\delta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\phi\int_0^{a\sqrt{cos2\phi}} r^3\ \mathrm{d}r = \frac{\pi}{8}a^4\delta$, resultado que hay que expresar en función de la masa m, que es lo que se conoce, y como $\delta = $ densidad superficial $= \dfrac{m}{\text{área (A)}}$

$$\text{área}(A) = 4\iint_{A_1} r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}r = 4\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\phi\int_0^{a\sqrt{cos2\phi}} r\ \mathrm{d}r = a^2\ \Rightarrow\ I = \frac{\pi m a^4}{8a^2} = \frac{\pi}{8}ma^2.$$

Prob. 35



La carga que contiene cada diferencial de área dA crea un campo eléctrico, $d\mathbf{E}$, vector dirigido desde el punto del eje hacia el elemento diferencial de área. Dada la simetría del disco, las componentes horizontales de los vectores $d\mathbf{E}$ se compensan y, por consiguiente, el campo resultante $\mathbf{E}$ sólo tiene componente en el eje Z (vease figura). Calculemos su valor:

Como $dE = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\sigma dA}{h^2}$, entonces $dE_z = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\sigma dA}{h^2}\cos a$. Además, $h^2 = d^2 + r^2$ y $\cos a = \dfrac{d}{h} = \dfrac{d}{\sqrt{d^2+r^2}}$. Por consiguiente, ya que $\sigma = br$, se tiene

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{bdr^2}{(d^2+r^2)^{3/2}}\ \mathrm{d}r = \frac{db}{2\epsilon_0}\int_0^R r^2(d^2+r^2)^{-3/2}\ \mathrm{d}r = \frac{db}{2\epsilon_0}\left(-\frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}} + \ln\frac{R+\sqrt{d^2+R^2}}{d}\right)$$

.

Prob. 36

Un diferencial de masa, dm, crea en el punto $P = (0,0,d)$ un diferencial de fuerza que llamaremos $d\mathbf{F}$. Por la simetría de la esfera, y como en el problema anterior, la suma de las componentes horizontales será nula, por tanto sólo nos ocuparemos de la componente vertical dF_z.

Si consideramos en el punto P una masa unitaria, $dF = k\dfrac{dm}{h^2}$, donde k es la constante gravitatoria y h la distancia de dm al punto P.

$dF_z = k\dfrac{dm}{h^2}\cos a = k\delta\dfrac{dV}{h^2}\cos a = k\delta\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{h^2}\cos a$, donde δ es la densidad de la bola.

Como $h = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-d)^2}$ y $\cos a = \dfrac{d-z}{h}$ se tiene

$$F_z = \iiint_V dF_z = k\ \delta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} (d-z)\ \left[r^2+(z-d)^2\right]^{3/2}\ r\mathrm{d}r = k\ \frac{\delta 4\pi R^3}{3d^2} = k\frac{M}{d^2}$$

donde M es la masa total de la esfera y por tanto queda probado que la fuerza es la misma que si se coloca toda la masa en el centro de la esfera.

Prob. 37

Como en los problemas anteriores sólo queda componente vertical de la fuerza cuyo valor es:

$$dF_z = dF\cos\theta = k\frac{dm}{d^2}\cos\theta = k\delta\frac{dV}{d^2} = k\delta\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{d^2(x,y,z)}$$

e integrando

$$F_z = \iiint_V \mathrm{d}F_z = k\delta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\alpha}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{d/\cos\theta}^{(d+h)/\cos\theta}\mathrm{d}r = 2\pi k\delta h(1-\cos\alpha)$$

.

Prob. 38

(a) Sean $f(x) = \left[\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right]^2$ y $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ para ver que $(f(x)+g(x))$ es constante veamos que su derivada vale 0.

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) = 2\left[\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right]e^{-x^2} + \int_0^1 \dfrac{-2x(1+t^2)}{1+t^2}e^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t =$

$= 2\left[\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right]e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$

si en el segundo sumando hacemos el cambio de variable $u = xt$, con lo que $\mathrm{d}u = x\mathrm{d}t$, se tiene

$(f(x)+g(x))' = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t - 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d} = 0 \Rightarrow f(x)+g(x) = \mathrm{cte}$

y como $f(0)+g(0) = 0 + \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan t|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

así $f(x)+g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) Por lo deducido anteriormente

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)+g(x)] = \frac{\pi}{4} = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right]^2 + \lim_{x\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t\right]^2 + 0$$

así se obtiene $\left[\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t\right]^2 = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Prob. 39

(a) Sean $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ (integral de *Dirichlet*) y $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$.

si derivamos $F(\lambda)$ se obtiene

$F'(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty -te^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sin t\ \mathrm{d}t$

que integrando por partes nos queda:

$F'(\lambda) = -1 + \lambda^2\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}\ \sin t\ \mathrm{d}t = -1 - \lambda^2 F'(\lambda)$ es decir $F'(\lambda) = \dfrac{-1}{1+\lambda^2} \Rightarrow F(\lambda) = -\arctan\lambda + C$.

Si hacemos el límite en el infinito de $F(\lambda)$ tendremos

$$\lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = 0$$

lo que nos permiti encontrar el valor de C ya que

$$\lim_{\lambda\to\infty}(-\arctan\lambda + C) = 0 \;\Rightarrow\; C = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; F(\lambda) = -\arctan\lambda + \frac{\pi}{2}$$

(b) Por otra parte $\lim\limits_{\lambda\to 0} F(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = I.$

Por tanto, $\lim\limits_{\lambda\to 0} F(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to 0}(-\arctan\lambda + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$

Por consiguiente, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$

Prob. 40

Hacemos el cambio de variable $(u,v) = \phi(x,y) = \left(\left(\frac{x}{a}\right)^p, \left(\frac{y}{b}\right)^q\right)$ cuyo inverso es $(x,y) = \phi^{-1}(u,v) = \left(au^{1/p}, bv^{1/q}\right)$

El *jacobiano* de ϕ^{-1} es $\mathrm{J}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{a}{p}u^{\frac{1-p}{p}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{q}v^{\frac{1-q}{q}} \end{vmatrix} = \frac{ab}{pq}u^{\frac{1-p}{p}}v^{\frac{1-q}{q}}.$

Ademas $\phi^{-1}(C) = A$ siendo $C = \{(u,v)|\; u>0,\; v>0,\; u+v\le 1\}$ y $A = \{(x,y)|\; x>0,\; y>0,\; (\frac{x}{a})^p + (\frac{y}{b})^q \le 1\}$ y como $f(x,y) = x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$ se tiene

$$\int_A f = \int_C f\circ\phi^{-1}|\mathrm{J}(u,v)| = \int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^{1-u}\frac{ab}{pq}u^{\frac{1-p}{p}}v^{\frac{1-q}{q}}a^{\alpha-1}u^{\frac{\alpha-1}{p}}b^{\beta-1}v^{\frac{\beta-1}{q}}\,\mathrm{d}v = \frac{a^\alpha b^\beta}{pq}\int_0^1 u^{\frac{\alpha-p}{p}}\,\mathrm{d}u\int_0^{1-u}v^{\frac{\beta-q}{q}}\,\mathrm{d}v$$

Pero $\displaystyle\int_0^{1-u} v^{\frac{\beta-q}{q}}\,\mathrm{d}v = \left.\frac{v^{\frac{\beta-q}{q}+1}}{\frac{\beta-q}{q}+1}\right|_0^{1-u} = \frac{q}{\beta}(1-u)^{\beta/q} \;\Rightarrow\; \int_A f = \frac{a^\alpha b^\beta}{pq}\,\frac{q}{\beta}\int_0^1 u^{\frac{\alpha-p}{p}}\,(1-u)^{\beta/q}\,\mathrm{d}u$

Si tenemos en cuenta que $\displaystyle\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ en nuestro caso $\begin{cases} \dfrac{\alpha-p}{p} = m-1 & \Rightarrow \quad m = \dfrac{\alpha}{p} \\[2ex] \dfrac{\beta}{q} = n-1 & \Rightarrow \quad n = \dfrac{\beta}{q}+1 \end{cases}$

se tiene:

$\displaystyle\int_A f = \frac{a^\alpha b^\beta}{pq}\,\frac{q}{\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+1\right)}$ y como la función Γ cumple $m\Gamma(m) = \Gamma(m+1)$ nos queda

$$\int_A f = \frac{a^\alpha b^\beta}{pq}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+1\right)}$$

Algunas propiedades de la función Γ o función *factorial generalizada*:
Definición: $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$
Recurrencia: $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, en particular si $x = n$ entero positivo $\Gamma(n+1) = n!$
Algunos valores: $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (se obtienen aplicando la definición).

Prob. 41

Se trata de calcular $S_n = \displaystyle\int_A 1$ donde A es el recinto del primer cuadrante limitado por los ejes coordenados y la curva $x^{2/n} + y^{2/n} = a^{2/n}$, no tenemos mas que aplicar el problema anterior con $p = q = \dfrac{2}{n}$, $a = b$ y $\alpha = \beta = 1$.

$$S_n = \int_A 1 = \frac{a^2n^2}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{a^2n^2}{4}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}{n\Gamma(n)}$$

Supongamos ahora n par es decir $n = 2k$ entonces $S_n = \dfrac{a^2n^2}{4}\,\dfrac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}{n\Gamma(n)} = a^2k^2\,\dfrac{[(k-1)!]^2}{2k(2k-1)!} = a^2\,\dfrac{[(k)!]^2}{(2k)!}$ ya que k es entero.

Como $(2k)! = 2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)...1 = \underbrace{2k2(k-1)2(k-2)...1}_{k\text{ factores pares}}\underbrace{(2k-1)(2k-3)(2k-5)...1}_{k\text{ factores impares}} =$

$= 2^k\;(2k-1)!!\;k! = 2^k\;(n-1)!!\;k!.$

Donde $(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)(2k-5)...1.$

Además $n!! = 2k(2k-2)...2 = 2^k k! \;\Rightarrow\; k! = \dfrac{n!!}{2^k}.$

Por tanto $S_n = a^2 \dfrac{[(k)!]^2}{2^k\ (n-1)!!\ k!} = a^2 \dfrac{n!!\ k!}{2^k\ 2^k\ (n-1)!!\ k!} = \dfrac{a^2}{2^n} \dfrac{n!!}{(n-1)!!}$

Estudiemos ahora el caso de n impar, $n = 2k+1$

$$S_n = \frac{a^2n^2}{4} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}{n\Gamma(n)} = \frac{a^2(2k+1)^2}{4} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\right]^2}{(2k+1)\Gamma(2k+1)}$$

pero $\Gamma\left(\dfrac{2k+1}{2}\right) = \dfrac{2k-1}{2} \Gamma\left(\dfrac{2k-1}{2}\right) = \dfrac{2k-1}{2} \dfrac{2k-3}{2} \Gamma\left(\dfrac{2k-3}{2}\right) = \underbrace{\dfrac{2k-1}{2} \dfrac{2k-3}{2} \dfrac{2k-5}{2} \cdots \dfrac{1}{2}}_{k-terminos} \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) =$
$\dfrac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^k}$

y también $(2k+1)\Gamma(2k+1) = (2k+1)! = (2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)...1 = (2k+1)(2k)!!(2k-1)!!$.

Por tanto $S_n = \dfrac{a^2(2k+1)^2}{4} \dfrac{[(2k-1)!!\sqrt{\pi}]^2}{2^{2k}(2k+1)(2k)!!(2k-1)!!} = \dfrac{a^2(2k+1)^2}{2^{2k+1}(2k+1)} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{a^2}{2^n} \dfrac{n!!}{(n-1)!!} \dfrac{\pi}{2}$.

7 Tema 7: Integrales de linea y de superficie.

Prob. 12

(a) Sean $\boldsymbol{\alpha} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\boldsymbol{\alpha}(t) = (R\cos t, R\sin t)$ una parametrización de la circunferencia C, $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$ su vector tangente y $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = R$ su norma.

Entonces $\displaystyle\oint_c (x^2+y^2)\ \mathrm{d}l = \int_0^{2\pi} R^2R\ \mathrm{d}t = 2\pi R^3$.

(b) Una parametrización de la helice es $\boldsymbol{\alpha} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Entonces $\boldsymbol{\alpha}(0) = (1, 0, 0)$ y $\boldsymbol{\alpha}(\pi) = (-1, 0, \pi)$, su vector tangente es $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ y su norma $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{2}$. Por tanto,

$$\int_{(1,0,0)}^{(-1,0,\pi)} (xy+z^2)\ \mathrm{d}l = \int_0^{\pi} (\sin t\cos t + t^2)\ \sqrt{2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}\pi^3}{3}.$$

Prob. 13

(a) Sean $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy, 3z, 5yz)$ y $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t+1, t^3-1, t^2)$. Entonces $\boldsymbol{\gamma}(-1) = (0, -2, 1)$, $\boldsymbol{\gamma}(1) = (2, 0, 1)$ y $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (1, 3t^2, 2t)$ y, por tanto,

$$\int_{(0,-2,1)}^{(2,0,1)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{-1}^{1} (\mathbf{F} \circ \boldsymbol{\gamma})(t) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (10t^6 + 11t^4 - 8t^3 - 2t - 2)\ \mathrm{d}t = \frac{114}{35}$$

.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, xz-y)$, el segmento de recta desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 2, 4)$ tiene una parametrización $\boldsymbol{\alpha}(t) = (0, 0, 0) + t[(1, 2, 4) - (0, 0, 0)] = (t, 2t, 4t),\ t \in [0, 1]$.

Así $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,2,4)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_0^1 (t, 2t, 4t^2-2t) \cdot (1, 2, 4)\ \mathrm{d}t = \frac{23}{6}$

(c) Planteamos directamente la integral correspondiente.

$$\oint_C \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{y-x}{x^2+y^2}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a\cos t + a\sin t}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}, \frac{a\sin t - a\cos t}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\right) \cdot (-a\sin t, a\cos t)\ \mathrm{d}t = -2\pi.$$

(d) Una parametrización de la curva C, $\left\{ \begin{array}{l} y = 2x^2 \\ z = 0 \end{array} \right.$, es $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, 2t^2, 0)$ con lo que $\boldsymbol{\alpha}(0) = (0, 0, 0)$ y $\boldsymbol{\alpha}(1) = (1, 2, 0)$, así se tiene

$$\int_C (3xy, -y^2, e^z) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_0^1 (6t^3, -4t^4, 1) \cdot (1, 4t, 0)\mathrm{d}l = \int_0^1 (-16t^5 + 6t^3)\mathrm{d}t = -\frac{7}{6}.$$

(e) Una parametrización de una circunferencia situada en un plano Π con centro en el punto (x_0, y_0, z_0) y radio R es $\boldsymbol{\alpha}(t) = (x_0, y_0, z_0) + R\cos t\mathbf{u} + R\sin t\mathbf{v}$ con $t \in [0, 2\pi]$ donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores ortogonales y unitarios del plano Π.

En nuestro caso Π es el plano de ecuación $x + y + z = 1$, el centro es el pnuto $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ y el radio vale 2. Falta encontrar los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Como los puntos $(1, 0, 0)$ y el centro de la circuferencia son del plano, el vector $(1, 0, 0) - \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ es del plano, que normalizado queda $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1)$. El otro vector lo obtendremos haciendo el producto vectorial del ortogonal al plano $(1, 1, 1)$ y el obtenido anteriormente, es decir, $(1, 1, 1) \wedge (2, -1, -1) = (0, 3, -3)$ que normalizado queda $\mathbf{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$.

Por tanto, la parametrización de la circuferencia es $\boldsymbol{\alpha}(t) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{2\cos t}{\sqrt{6}}(2, -1, -1) + \frac{2\sin t}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) =$
$= \left(\frac{1}{3} + \frac{4\cos t}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3} - \frac{2\cos t}{\sqrt{6}} + \sqrt{2}\sin t, \frac{1}{3} - \frac{2\cos t}{\sqrt{6}} - \sqrt{2}\sin t\right).$

Observese que la curva se recorre en el sentido de las agujas del reloj vista desde el origen.

Su vector tangente es $\boldsymbol{\alpha}'(t) = \left(-\frac{4\sin t}{\sqrt{6}}, \frac{2\sin t}{\sqrt{6}} + \sqrt{2}\cos t, \frac{2\sin t}{\sqrt{6}} - \sqrt{2}\cos t\right).$

Por tanto si llamamos $I = \oint_C y \ \mathrm{d}x + z \ \mathrm{d}y + x \ \mathrm{d}z$ se tiene

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{2\cos t}{\sqrt{6}} + \sqrt{2}\sin t\right) \left(-\frac{4\sin t}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2\cos t}{\sqrt{6}} - \sqrt{2}\sin t\right) \left(\frac{2\sin t}{\sqrt{6}} + \sqrt{2}\cos t\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{3} + \frac{4\cos t}{\sqrt{6}}\right) \left(\frac{2\sin t}{\sqrt{6}} - \sqrt{2}\cos t\right) \right] \ \mathrm{d}t = -\frac{12\pi}{\sqrt{3}}$$

(f) La recta que va desde el punto $(2, 1, \frac{\pi}{2})$ hasta $(2, 1, \pi)$ la podemos parametrizar mediante $\boldsymbol{\alpha}(t) = \left(2, 1, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right)$ con $t \in [0, 1]$ y entonces $\boldsymbol{\alpha}'(t) = \left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right)$. Luego

$$\int_C \sin^2 z \ \mathrm{d}x + x\sin(2z) \ \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right), 0, 2\sin(\pi + \pi t)\right) \cdot \left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right) \ \mathrm{d}t = \int_0^1 -\pi \ \sin(\pi t) \ \mathrm{d}t = -2.$$

Prob. 14

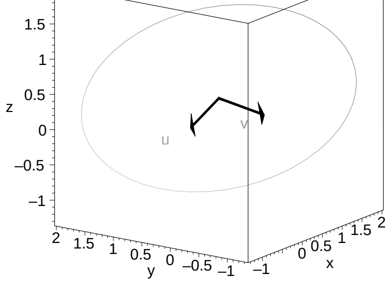
Se puede resolver el problema de dos formas:

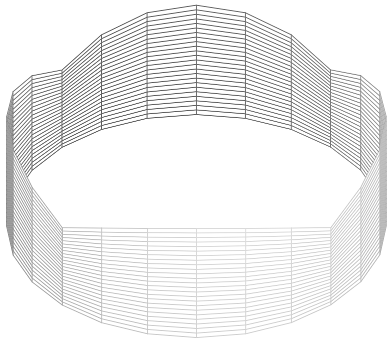
1. Una parametrización del camino C, no necesariamente cerrado, es $\boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, con $t \in [a, b]$, que al estar situado en la esfera unitaria centrada en el origen satisface $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1$ y si derivamos $2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + 2z(t)z'(t) = 0$. Por tanto
$$\int_C \frac{\mathrm{d}x}{yz} + \frac{\mathrm{d}y}{zx} + \frac{\mathrm{d}z}{xy} = \int_a^b \left[\frac{x'(t)}{y(t)z(t)} \ + \ \frac{y'(t)}{z(t)x(t)} \ + \ \frac{z'(t)}{x(t)y(t)}\right] \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)}{x(t)y(t)z(t)} \ \mathrm{d}t = 0.$$
2. La circulación que queremos calcular $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}x}{yz} \ + \ \frac{\mathrm{d}y}{zx} \ + \ \frac{\mathrm{d}z}{xy}$ también se puede escribir como $\displaystyle\int_C \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$, donde $\mathbf{f}(x, y, z) = \dfrac{1}{xyz}\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector posición. Para cualquier curva sobre la esfera su vector tangente es ortogonal al vector posición y por tanto a $\mathbf{f}$. Luego la circulación es nula.

Prob. 15

Se puede hacer de dos maneras:

1. Una integral de línea de un campo escalar a lo largo de una curva C es un sumatorio de cada elemento de arco por el correspondiente valor de la función. Si la función es la altura de una valla, la integral de línea nos da su área. En nuestro caso se trata de una valla circular centrada en el origen de radio 1 cuya altura vale $h(x, y) = |x| + |y|$. Por tanto
$$\text{área} = \oint_C h(x, y) \ \mathrm{d}l = \int_0^{2\pi} (|\cos t| \ + \ |\sin t|) \ \mathrm{d}t = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \ \mathrm{d}t + 2\int_0^{\pi} \sin t \ \mathrm{d}t = 8.$$
2. De manera general $\displaystyle\int_S 1 \ \mathrm{d}S$ es el área de la superficie S.





En nuestro caso una parametrización de la superficie S es $\boldsymbol{\sigma}(t,z) = (\cos t, \sin t, z)$, con $0 \le t \le 2\pi$, y $0 \le z \le |\cos t| + |\sin t|$, por lo que $\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} = (\cos t, \sin t, 0)$ y, por tanto, $\|\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z}\| = 1$. Así pues,

$$\text{área} = \int_S 1 \, \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \int_0^{|\cos t|+|\sin t|} \mathrm{d}z = 4\int_0^{\pi/2} (\cos t + \sin t)\, \mathrm{d}t = 8.$$

Prob. 16

El centro de masa de un sólido de densidad $\delta(x,y,z)$ es el punto de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, donde

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_V x\,\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\displaystyle\int_V \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V},\quad \overline{y} = \frac{\displaystyle\int_V y\,\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\displaystyle\int_V \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V} \ \text{ y } \ \overline{z} = \frac{\displaystyle\int_V z\,\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\displaystyle\int_V \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V}$$

.

Aquí se trata de un sólido plano con densidad constante, luego

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_S x\,\mathrm{d}S}{\displaystyle\int_S \mathrm{d}S},\quad \overline{y} = \frac{\displaystyle\int_S y\,\mathrm{d}S}{\displaystyle\int_S \mathrm{d}S} \ \text{ y } \ \overline{z} = \frac{\displaystyle\int_S z\,\mathrm{d}S}{\displaystyle\int_S \mathrm{d}S}$$

.

Una parametrización de S es $\boldsymbol{\sigma}(x,y) = (x, y, 1-x-y)$, con $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$ por lo que $\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial y} = (1,1,1)$ y por tanto $\|\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial y}\| = \sqrt{3}$. Así pues

$\displaystyle\int_S x\,\mathrm{d}S = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \sqrt{3}\,x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{6}$ además $\displaystyle\int_S \mathrm{d}S = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \sqrt{3}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \rightarrow\ \overline{x} = \frac{1}{3}.$

Análogamente $\overline{y} = \overline{z} = \dfrac{1}{3}$. El centro de gravedad es $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Prob. 17

Mediante coordenadas esféricas parametrizamos la porción de esfera por la función vectorial

$\boldsymbol{\sigma} : [0, 2\pi] \times [\arccos\dfrac{a}{r}, \arccos\dfrac{b}{r}] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\boldsymbol{\sigma}(\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$.

Sabemos que $\|\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \phi}\| = r^2\sin\theta$. Así las coordenadas del centro de masa son

$$\overline{x} = \frac{\int_S x\,\mathrm{d}S}{\int_S \mathrm{d}S} = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\arccos\frac{a}{r}}^{\arccos\frac{b}{r}} r^3\sin^2\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\arccos\frac{a}{r}}^{\arccos\frac{b}{r}} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta} = \frac{0}{2\pi r(a-b)} = 0$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_S y\,\mathrm{d}S}{\displaystyle\int_S \mathrm{d}S} = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\arccos\frac{a}{r}}^{\arccos\frac{b}{r}} r^3\sin^2\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\arccos\frac{a}{r}}^{\arccos\frac{b}{r}} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta} = 0$$

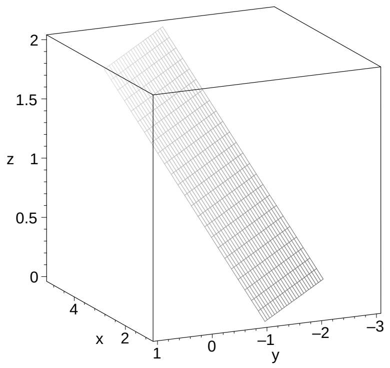
$$\overline{z} = \frac{\displaystyle\int_S z\,\mathrm{d}S}{\displaystyle\int_S \mathrm{d}S} = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\arccos\frac{a}{r}}^{\arccos\frac{b}{r}} r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\arccos\frac{a}{r}}^{\arccos\frac{b}{r}} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\pi r(a^2-b^2)}{2\pi r(a-b)} = \frac{a+b}{2}$$

El centro de gravedad es $\left(0, 0, \dfrac{a+b}{2}\right)$.

Prob. 18

(a) La superficie S definida por $\mathbf{g}(t,u) = (t+u, t-u, t)$, $(t,u) \in T = [0,2]\times[1,3]$ esun plano (vease figura) que tiene por producto vectorial fundamental $\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}\times\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} = (1,1,-2)$ y entonces el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ a través de S valdrá

$$\text{Flujo} = \int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\int_T (\mathbf{F}\circ\mathbf{g})\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}u = \int_0^2 \mathrm{d}t\int_1^3 \left((t+u)^2, (t-u)^2, t^2\right)\cdot(1,1,-2)\ \mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^2 \mathrm{d}t\int_1^3 2u^2\ \mathrm{d}u = \frac{104}{3},$$ flujo "hacia abajo" (la tercera componente del $P.V.F$ es negativa).



(b) El paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $0 < z < 1$ se parametriza por $\boldsymbol{\sigma}(x,y) = (x, y, 1-x^2-y^2)$ con $(x,y), \in \{(x,y)|\ 0 < x^2+y^2 < 1$ además $\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \theta}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \phi} = (2x, 2y, 1)$ y por tanto el flujo de $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, -y, 1)$ a través de S es:

$$\text{Flujo} = \int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\int_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y,-y,1)\cdot(2x,2y,1)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\int_{x^2+y^2\le 1}\frac{2xy-2y^2+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

que integrando en coordenadas polares

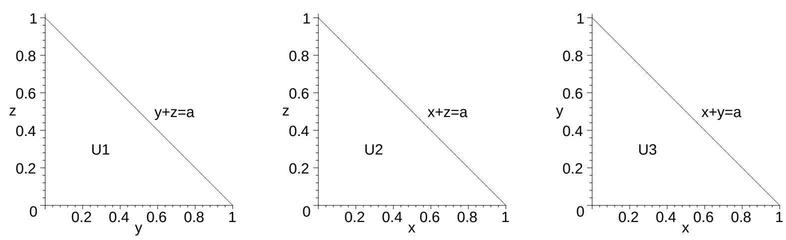
$$\text{Flujo} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^1 \frac{2r^2\cos\phi\sin\phi - 2r^2\sin^2\phi + 1}{r}\ r\ \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3},$$ flujo "hacia arriba".

(c) El campo vectorial es el mismo que en el problema anterior y la superficie es la semiesfera inferior centrada en origen y de radio 1 que podemos parametrizar mediante $\boldsymbol{\sigma}(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, $(\theta,\phi) \in [\pi/2, \pi]\times[0, 2\pi]$ y entonces $T_\theta\times T_\phi = \sin\theta\boldsymbol{\sigma}(\theta,\phi)$ y el flujo vale:

$$\text{Flujo} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin\theta}{|\sin\theta|}(\sin\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, 1)\cdot(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)\ \mathrm{d}\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi}\sin\phi\cos\phi\mathrm{d}\phi\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi}\sin^2\phi\mathrm{d}\phi\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\ \mathrm{d}\theta = -\frac{\pi(\pi+8)}{4}$$ en dirección radial.

(d) Las parametrizaciones $\boldsymbol{\sigma_i} : Ui \to \mathbb{R}^3$ y los vectores ortogonales de las cuatro superficies que limitan la pirámide son

para la superficie $S_1,\ x = 0,$	$\boldsymbol{\sigma_1}(y,z) = (0,y,z),\ (y,z)\in U1$	$T_y\times T_z = (1,0,0)$
para la superficie $S_2,\ y = 0,$	$\boldsymbol{\sigma_2}(y,z) = (x,0,z),\ (x,z)\in U2$	$T_x\times T_z = (0,-1,0)$
para la superficie $S_3,\ z = 0,$	$\boldsymbol{\sigma_3}(y,z) = (x,y,0),\ (x,y)\in U3$	$T_x\times T_y = (0,0,1)$
para la superficie $S_4,\ x+y+z = a,$	$\boldsymbol{\sigma_4}(x,y) = (x,y,a-x-y),\ (x,y)\in U3$	$T_x\times T_y = (1,1,1)$



Los flujos correspondientes son

a través de S_1 $\quad \displaystyle\int\int_{U1}(y,z,0)\cdot(1,0,0)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z=\frac{a^3}{6}$ $\quad$ entrante

a través de S_2 $\quad \displaystyle\int\int_{U2}(0,z,x)\cdot(0,-1,0)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z=-\frac{a^3}{6}$ $\quad$ saliente

a través de S_3 $\quad \displaystyle\int\int_{U3}(y,0,x)\cdot(0,0,1)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{a^3}{6}$ $\quad$ entrante

a través de S_4 $\quad \displaystyle\int\int_{U3}(y,a-x-y,x)\cdot(1,1,1)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{a^3}{2}$ $\quad$ saliente

Flujo total saliente $\dfrac{a^3}{2}-\dfrac{a^3}{6}-\dfrac{a^3}{6}-\dfrac{a^3}{6}=0.$

(e) Las seis superficies frontera del cubo sus parametrizaciones, regiones y vectores ortogonales son:

para la superficie $S_1,\ x=0,\quad \boldsymbol{\sigma_1}(y,z)=(0,y,z),\ (y,z)\in[0,1]\times[0,1]\quad T_y\times T_z=(1,0,0)$
para la superficie $S_2,\ x=1,\quad \boldsymbol{\sigma_2}(y,z)=(0,y,z),\ (y,z)\in[0,1]\times[0,1]\quad T_y\times T_z=(1,0,0)$
para la superficie $S_3,\ y=0,\quad \boldsymbol{\sigma_3}(y,z)=(x,0,z),\ (x,z)\in[0,1]\times[0,1]\quad T_x\times T_z=(0,-1,0)$
para la superficie $S_4,\ y=1,\quad \boldsymbol{\sigma_4}(y,z)=(x,0,z),\ (x,z)\in[0,1]\times[0,1]\quad T_x\times T_z=(0,-1,0)$
para la superficie $S_5,\ z=0,\quad \boldsymbol{\sigma_5}(y,z)=(x,y,0),\ (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\quad T_x\times T_y=(0,0,1)$
para la superficie $S_6,\ z=1,\quad \boldsymbol{\sigma_6}(y,z)=(x,y,0),\ (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\quad T_x\times T_y=(0,0,1)$

Los flujos a través de cada una de estas superficies son:

a través de S_1 $\quad \displaystyle\int_0^1\int_0^1(0,-y^2,yz)\cdot(1,0,0)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z=0$

a través de S_2 $\quad \displaystyle\int\int_{[0,1]\times[0,1]}(4z,-y^2,yz)\cdot(1,0,0)\cdot(0,-1,0)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z=2$ $\quad$ saliente

a través de S_3 $\quad \displaystyle\int\int_{[0,1]\times[0,1]}(4xz,0,0)\cdot(0,-1,0)\cdot(0,-1,0)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z=0$

a través de S_4 $\quad \displaystyle\int\int_{[0,1]\times[0,1]}(4xz,-1,z)\cdot(0,-1,0)\cdot(0,-1,0)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z=1$ $\quad$ entrante

a través de S_5 $\quad \displaystyle\int\int_{[0,1]\times[0,1]}(0,-y^2,0)\cdot(0,0,1)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=0$

a través de S_5 $\quad \displaystyle\int\int_{[0,1]\times[0,1]}(4x,-y^2,y)\cdot(0,0,1)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{1}{2}$ $\quad$ saliente

por tanto tenemos un flujo saliente de valor $2-1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

(f) Como en el apartado c) parametrizamos la esfera mediante

$\boldsymbol{\sigma}(\theta,\phi)=(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta),\ (\theta,\phi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$ y entonces $T_\theta\times T_\phi=\sin\theta\boldsymbol{\sigma}(\theta,\phi)$.

Por otro lado el campo vectorial evaluado en la esfera queda

$\mathbf{F}\circ\boldsymbol{\sigma}(\theta,\phi)=(\sin\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi,\ \sin\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi,\ 5\cos^3\theta)$

Así el flujo en dirección radial o saliente vale:

$$\text{flujo}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin\theta(\sin\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi,\ \sin\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi,\ 5\cos^3\theta)\cdot(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)\mathrm{d}\theta=$$
$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta+5\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=4\pi.$$

(g) Una parametrizacion del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ z>0$ es $\boldsymbol{\sigma}(\theta,\phi)=(a\sin\theta\cos\phi,b\sin\theta\sin\phi,c\cos\theta)$ con $(\theta,\phi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$ y entonces $T_\theta\times T_\phi=\sin\theta\boldsymbol{\sigma}(\theta,\phi)=\sin\theta(bc\sin\theta\cos\phi,ac\sin\theta\sin\phi,ab\cos\theta)$. El campo vectorial en los puntos del elipsoide vale

$F(\boldsymbol{\sigma}(\theta,\phi))=(b\sin\theta\sin\phi,\ -b^2c\sin^2\theta\sin^2\phi\cos\theta,\ bc^2\sin\theta\sin\phi\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta\cos^2\phi)$.

Así el flujo radial vale

$$\int_0^{2\pi}dif\phi\int_0^{\pi}(\underbrace{b^2c\sin^3\theta\sin\phi\cos\phi}_{0}-\underbrace{ab^2c^2\sin^4\theta\sin^3\phi\cos\theta}_{0}+\underbrace{ab^2c^2\cos^3\theta\sin^2\theta\sin\phi}_{0}-\underbrace{a^3b\cos\theta\sin^3\theta\cos^2\phi)}_{-\frac{1}{4}a^3b\pi}=$$
$$=-\frac{1}{4}a^3b\pi$$

(h) Parametrizamos la parte de esfera $x^2+y^2+z^2=9$ comprendida entre $z=1$ y $z=2$ mediante $\boldsymbol{\sigma}(\theta,z)=\left(\sqrt{9-z^2}\cos\theta,\ \sqrt{9-z^2}\sin\theta,\ z\right),\ (\theta,z)\in[0,2\pi]\times[1,2]$ su producto vectorial fundamental vale $T_\theta\times T_z=\left(\sqrt{9-z^2}\cos\theta,\ \sqrt{9-z^2}\sin\theta,\ z\right)$ y como $F(\boldsymbol{\sigma}(\theta,z))=\left(z-\sqrt{9-z^2}\sin\theta,\ \sqrt{9-z^2}\cos\theta-z,\ z-\sqrt{9-z^2}\cos\theta\right)$ tendremos un flujo radial de valor

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \left(-z\sqrt{9-z^2}\sin\theta + z^2\right) \mathrm{d}z = \frac{14}{3}\pi$$

.

(i) Podemos parametrizar el cono mediante $\boldsymbol{\sigma}(\theta, z) = \left(\sqrt{2}z\cos\theta,\ \sqrt{3}z\sin\theta,\ z\right)$, $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ y entonces $T_\theta \times T_z = \left(\sqrt{3}z\cos\theta,\ \sqrt{2}z\sin\theta,\ -\sqrt{6}z\right)$ por tanto tendremos un flujo de

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \left(\sqrt{6}z^2\cos^2\theta + \sqrt{3}z^2\cos\theta + \sqrt{2}z^2\sin\theta - \sqrt{6}z^2\sin^2\theta - \sqrt{6}z\right) \mathrm{d}z = -\sqrt{6}\pi$$

en dirección Z negativa, por tanto un flujo de valor $\sqrt{6}\pi$ hacia arriba.

Prob. 19

El flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a través de una superficie S se calcula mediante la integral $\displaystyle\int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}S$ donde $\mathbf{n}$ es un vector ortogonal a S y unitario. En nuestro caso como el campo es constante y la superficie es un plano se tiene

flujo $= \displaystyle\int_S (2, -3, 1) \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}S = (2, -3, 1) \cdot \mathbf{n} \int_S \mathrm{d}S = (2, -3, 1) \cdot \mathbf{n}\ \pi a^2$

pero $(2, -3, 1) \cdot \mathbf{n} = \|(2, -3, 1)\|\ \|\mathbf{n}\|\ \cos\alpha = \|(2, -3, 1)\|\ \cos\alpha$, donde α es el ángulo formado por $(2, -3, 1)$ y $\mathbf{n}$, expresión que presenta un máximo si $\alpha = 0$ lo que implica planos ortogonales a $(2, -3, 1)$, es decir, de ecuación $2x - 3y + z = k$.

8 Tema 8: Teoremas integrales del análisis vectorial.

Prob. 19

(a) Vamos a comprobar la igualdad $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{G}$ determinando ambos miembros.

Sean $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$ entonces

$\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \operatorname{div}(F_2G_3 - F_3G_2, F_3G_1 - F_1G_3, F_1G_2 - F_2G_1) = G_1(F_{3y} - F_{2z}) + G_2(F_{1z} - F_{3x}) +$
$+ G_3(F_{2x} - F_{1y}) + F_1(G_{2z} - G_{3y}) + F_2(G_{3x} - G_{1z}) + F_3(G_{1y} - G_{2x})$

Por otro lado $\mathbf{G} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{F} = (G_1, G_2, G_3) \cdot (F_{3y} - F_{2z}, F_{1z} - F_{3x}, F_{2x} - F_{1y}) = G_1(F_{3y} - F_{2z}) + G_2(F_{1z} - F_{3x}) +$
$+ G_3(F_{2x} - F_{1y})$

igualmente $\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{G} = (F_1, F_2, F_3) \cdot (G_{3y} - G_{2z}, G_{1z} - G_{3x}, G_{2x} - G_{1y}) = F_1(G_{3y} - G_{2z}) + F_2(G_{1z} - G_{3x}) +$
$+ F_3(G_{2x} - G_{1y})$ y, por tanto,

$\mathbf{G} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{G} = G_1(F_{3y} - F_{2z}) + G_2(F_{1z} - F_{3x}) + G_3(F_{2x} - F_{1y}) + F_1(G_{2z} - G_{3y}) + F_2(G_{3x} - G_{1z}) +$
$F_3(G_{1y} - G_{2x}) = \operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$

(b) Se trata de comprobar la igualdad $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}$

$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = \operatorname{rot}(F_{3y} - F_{2z}, F_{1z} - F_{3x}, F_{2x} - F_{1y}) = (F_{1xx} + F_{2yx} + F_{3zx} - F_{1xx} - F_{1yy} - F_{1zz}, F_{1yx} + F_{2yy} +$
$+F_{3zy} - F_{2xx} - F_{2yy} - F_{2zz}, F_{1zx} + F_{2yz} + F_{3zz} - F_{3xx} - F_{3yy} - F_{3zz}) = (F_{1xx} + F_{2yx} + F_{3zx}, F_{1yx} + F_{2yy} +$
$+F_{3zy}, F_{1zx} + F_{2yz} + F_{3zz}) - (F_{1xx} + F_{1yy} + F_{1zz}, F_{2xx} + F_{2yy} + F_{2zz}, F_{3xx} + F_{3yy} + F_{3zz}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{F}) -$
$\Delta\mathbf{F}$

Prob. 20

$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g) = \operatorname{div}((f_x, f_y, f_z) \times (g_x, g_y, g_z)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(f_yg_z - f_zg_y) + \dfrac{\partial}{\partial y}(f_zg_x - f_xg_z) + \dfrac{\partial}{\partial z}(f_xg_y - f_yg_x).$

Desarrollando esta expresión se comprueba que vale 0.

Prob. 21

(a) El vector velocidad se obtiene mediante el producto vectorial del vector $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega(t, x, y, z))$ y el vector $(x, y, 0)$ es decir:

$\mathbf{v}(t, x, y, z) = \boldsymbol{\omega} \wedge (x, y, 0) = (-y\omega, x\omega, 0)$. Por tanto

$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(x\dfrac{\partial\omega}{\partial z}, y\dfrac{\partial\omega}{\partial z}, 2\omega + x\dfrac{\partial\omega}{\partial x} + y\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right) = \left(0, 0, 2\omega + x\dfrac{\partial\omega}{\partial x} + y\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right)$ ya que ω no depende de z.

(b) Si ω solo depende de $\rho(x,y)$ donde $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ para que $\mathbf{v}$ sea irrotacional se tiene que cumplir:

$\operatorname{rot}\mathbf{v}=0 \;\Rightarrow\; 2\omega + x\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+y\dfrac{\partial\omega}{\partial y}$ pero

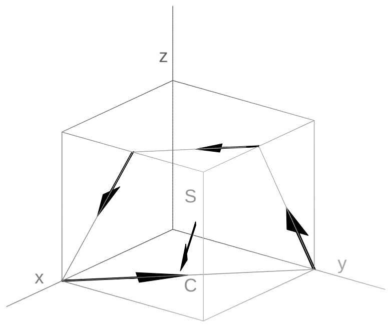
$\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=\omega'(\rho)\dfrac{x}{\rho}$ e igualmente $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=\omega'(\rho)\dfrac{y}{\rho}$ por lo que queda

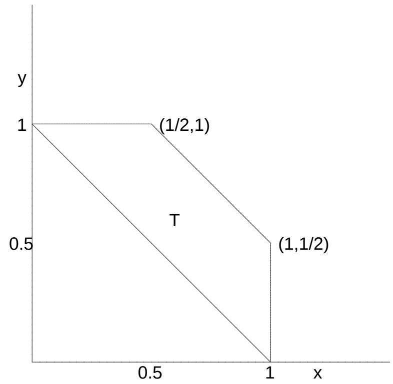
$0=2\omega(\rho)+\omega'(\rho)\dfrac{x^2+y^2}{\rho} \;\Rightarrow\; 2\omega(\rho)+\rho\omega'(\rho)=0$ ecuación diferencial cuya solución es

$\dfrac{\omega'(\rho)}{\omega(\rho)}=-\dfrac{2}{\rho} \;\Rightarrow\; \ln\omega(\rho)=-\ln\rho^2+C \;\Rightarrow\; \omega(\rho)=\dfrac{A}{\rho^2}.$

Prob. 22

(a) En la figura viene representada la curva C intersección del plano S con el cubo recorrida en el sentido que nos piden asi como el vector ortogonal al plano correspondiente a la orientación de la curva. Para calcular la





circulación del vector $\mathbf{F}(x,y,z)=(3xz+yz,3xz-3yz,2xy)$ a lo largo de C aplicamos el teorema de *Stokes* y tendremos:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}=\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=\int_S(-x+3y,3x-y,2z)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Parametrizamos la superficie S por $\boldsymbol{\alpha}: T\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ donde $\boldsymbol{\alpha}(x,y)=(x,y,2x+2y-2$ y T es el recinto de la figura. Entonces $\dfrac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial x}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial y}=(-2,-2,1)$ y, por tanto,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}=\int\int_T(-x+3y,3x-y,4x+4y-4)\cdot(2,2,-1)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y=$$
$$=4\text{área}(T)=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{2}.$$

(b) En este caso tenemos:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}=\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=\int\int_S(-1,-1,-1)\cdot\frac{(2,2,1)}{3}\;\mathrm{d}S=-\frac{5}{3}\text{área}(S).$$

Para calcular el área de S aplicamos la regla del coseno:

$\cos\gamma=\dfrac{\text{área}(T)}{\text{área}(S)}$ donde γ es el ángulo que forman los vectores $(0,0,1)$ y $(2,2,1)$, área(S) y área(T) son respectivamente el área de la elipse intersección y la de su proyección (vease figura). Por tanto

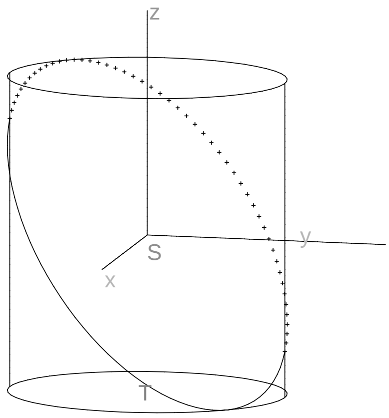
$\text{área}(S)=\dfrac{\text{área}(T)}{\cos\gamma}=\dfrac{3\pi}{1/3}=9\pi$ y la circulación vale

$\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}=-\frac{5}{3}\;9\pi=-15\pi$ en el sentido que nos piden.

(c) La figura muestra la intersección de la esfera, de centro $(1,1,0)$ y radio $\sqrt{2}$, con el plano $x+y=2$. Se trata de una circunferencia que es frontera de cualquiera de las tres superficies siguientes: el circulo determinado por la esfera en el plano y cada una de las semiesferas determinadas por el plano. Elegimos el círculo para aplicar el teorema de *Stokes*.

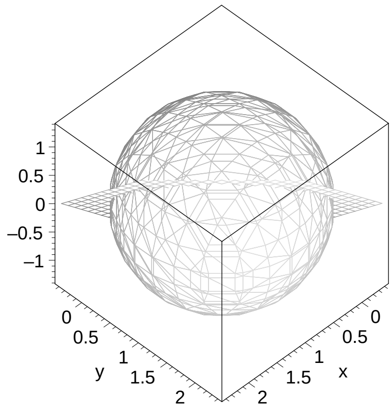
$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}=\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=\int\int_S(-1,-1,-1)\cdot\frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}\;\mathrm{d}S=-\frac{2}{\sqrt{2}}\text{área}(S)$$

Como el plano pasa por el centro de la esfera tenemos por intersección un circulo máximo y su área es 2π. Luego



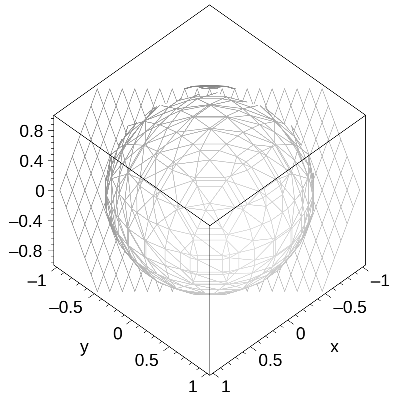
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{2}{\sqrt{2}}\ 2\pi = -2\sqrt{2}\pi.$$

Observemos que como el vector ortogonal al plano elegido es el $(1, 1, 0)$ la circulación calculada es en el sentido del problema.



(d) Como en el caso anterior también la intersección es un circulo máximo cuya área es π por tanto la circulación vale:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\int_S (2,2,2)\cdot \frac{(2,2,1)}{3}\,\mathrm{d}S = \frac{10\pi}{3}.$$



Prob. 23

. Como $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (a,a,a)$ resulta más sencillo aplicar el teorema de *Stokes*.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \pi$$

donde S es la superficie parametrizada por $\boldsymbol{\alpha}: T\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{\alpha}(x,y) = (x,y,1-x-y)$ y $T = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$.

Como $\dfrac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial y} = (1,1,1)$ se tiene

$$\pi = \int\int_T (a,a,a)\cdot(1,1,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3a\pi, \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{3}.$$

Prob. 24

La superficie es una porción de cono con vértice en el punto $(0,0,2)$. Por el teorema de *Stokes*, el flujo de $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ a través de la porción de cono coincide con la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=4$ en el plano $z=0$ cuya parametrización puede ser $\boldsymbol{\alpha}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$ con $0\le t\le 2\pi$, es decir:

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} (2\cos t, 8\cos^3 t, -24\cos t\sin^2 t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t, 0)\,\mathrm{d}t = 12\pi.$$

Prob. 25

Como en el problema 23 se tiene

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\int_T (1,2,3)\cdot(1,1,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 6\int\int_T \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 6\pi$$

.

Prob. 26

Sean C una curva regular cerrada cualquiera contenida en S, y $S*$ la porción de S limitada por C. Como $\mathbf{f}$ es ortogonal a S la circulación de $\mathbf{f}$ a lo largo de C es nula. Por tanto

$0 = \int_C \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int\int_{S*} \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot \mathbf{n}\mathrm{d}S$, para toda curva$C$ $\Rightarrow$ $\operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n} = 0$, $\Rightarrow$ $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ y $\mathbf{n}$ son ortogonales, es decir, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ es tangente a S.

Prob. 27

(a) Si aplicamos el teorema de *Gauss* como $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 0$ tenemos $\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial S} 0\;\mathrm{d}V = 0.$

(b) $\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial S} \operatorname{div}\mathbf{F}\;\mathrm{d}V = 2\int_{-1}^1 \mathrm{d}y\int_{-1}^1 \mathrm{d}z\int_{-1}^1 x\;\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^1 y\;\mathrm{d}y\int_{-1}^1 \mathrm{d}z\int_{-1}^1 \mathrm{d}x + 2\int_{-1}^1 \mathrm{d}y\int_{-1}^1 z\;\mathrm{d}z\int_{-1}^1 \mathrm{d}x = 0.$

(c) $\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial S} 2\;\mathrm{d}V = 2\int_{-1}^1 \mathrm{d}y\int_{-1}^1 \mathrm{d}z\int_{-1}^1 \mathrm{d}x = 16.$

Prob. 28

Como $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) = 0$, si aplicamos el teorema de *Gauss* tenemos $\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\ \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial S} 0\ \mathrm{d}V = 0$.

Prob. 29

Como la divergencia de $\mathbf{F}$ es nula podemos aplicar el teorema de *Gauss* si completamos la superficie S, que no es cerrada, con S_1, la parte del plano XY que cumple $x^2 + y^2 \leq 1$. Por tanto:

$$\int_{S\cup S_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial(S\cup S_1)} \mathrm{div}\,\mathbf{F}\ \mathrm{d}V = 0, \ \Rightarrow \ \int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

donde el flujo a través de S se calcula en dirección radial y de S_1 hacia "abajo". Así tenemos

$$\int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_{S_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int\int_{S_1} (ye, x\cos z, x\cos y - b)\cdot(0,0,-1)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_{S_1} (x\cos y - b)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int\int_{S_1} x\cos y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y - b\int\int_{S_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -b\pi.$$

Observemos que si $f(x,y) = x\cos y$ entonces $f(x,y) = -f(-x,y)$ luego $\int\int_{S_1} x\cos y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.
Como queremos que el flujo sea π entonces $b = -1$.

Prob. 30

Las superficies S_1 y S_2 forman una superficie cerrada y sea V el recinto limitado por ellas. Por el teorema de *Gauss* se tiene: $\displaystyle\int_{S_1\cup S_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{F}\ \mathrm{d}V = \frac{a\sqrt{2}}{3}\int_V \mathrm{d}V$

Si efectuamos el cambio de coordenadas $(x,y,z) = \Phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, 2 + r\cos\theta)$ tendremos

$$\int_V \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{3\pi/4}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{-2/\cos\theta} r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r = \frac{8\pi}{3}.$$

Por tanto $\displaystyle\int_{S_1\cup S_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \int_{S_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{16\sqrt{2}a\pi}{9}$

Para que ambos flujos sean iguales a tiene que ser 0.

Prob. 31

Si tenemos un campo constante, $\mathbf{f}(x,y,z) = (a,b,c)$, su divergencia es nula y aplicando el teorema de *Gauss* el flujo a través de una superficie cerrada S es nulo.

Como aplicación de lo anterior

$$\int_S \cos(\mathbf{a},\mathbf{n})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\int_S \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{d}S = \int_S \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Prob. 32

Sean $\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ y $r(x,y,z) = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ si queremos expresar $\displaystyle\int_S r^\alpha\mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ como una integral en al región U tenemos que aplicar el teorema de *Gauss*. Calculemos la divergencia de $r^\alpha\mathbf{r}$

$$\mathrm{div}(r^\alpha\mathbf{r}) = r^\alpha\,\mathrm{div}\,\mathbf{r} + \nabla r^\alpha\cdot\mathbf{r} = 3r^\alpha + \alpha r^{\alpha-2}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = (3+\alpha)r^\alpha$$

y por tanto

$$\int_S r^\alpha\mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_U (3+\alpha)r^\alpha \mathrm{d}V = (3+\alpha)\int_U r^\alpha \mathrm{d}V.$$

Si $\alpha = 0$ obtenemos el triple del volumen de la región U.

Prob. 33

(a) Visto desde el origen el ángulo sólido de todo el espacio, dada la definición, es el área de una esfera de radio unidad es decir 4π, igualmente la de un octante será $\pi/2$.

(b) Aunque en el enunciado no se dice, $\mathbf{r}$ indica el vector posición de un punto cualquiera de M. Designemos por S_a la superficie formada por la porción de los radios vectores comprendidos entre los puntos de las fronteras de las superficies M_a y M. La frontera de la región U la constituyen M, M_a y S_a. Si utilizamos el teorema de *Gauss* en U y teniendo en cuenta el problema anterior se tiene

$$\int_{M\cup M_a\cup S_a} \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\mathbf{n}_{ext}\mathrm{d}S = \int_U \mathrm{div}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}\mathrm{d}V = 0 \text{ ya que } \mathrm{div}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

Como $\displaystyle\int_{S_a} \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\mathbf{n}_{ext}\mathrm{d}S$ es nula por ser $\mathbf{r}$ ortogonal a $\mathbf{n}$, nos queda

$\displaystyle\int_M \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{M_a} \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, ambas en dirección radial, pero

$$\int\int_{M_a} \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\int_{M_a} \frac{\mathbf{r}}{a^3}\cdot\frac{\mathbf{r}}{a}\ \mathrm{d}S = \frac{1}{a^2}\int_{M_a}\mathrm{d}S = \frac{1}{a^2}\text{área}(M_a).$$

Para demostrar que no depende del radio de la esfera aplicamos el teorema de *Gauss* a la región cónica W, comprendida entre M_a y la correspondiente región M_b situada sobre la esfera de centro O y radio b, obteniendose

$$\frac{1}{a^2}\text{área}(M_a) = \frac{1}{b^2}\text{área}(M_b).$$

Por tanto $\displaystyle\int_M \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \text{área}(M_1) = |\Omega(M)|$ (medida del ángulo sólido).

(c) Sea M_a la región de esfera $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z > a\cos\alpha$. Parametrizamos esta superficie por $\boldsymbol{\sigma}(\theta,\phi) = a\sin\theta\cos\phi, a\sin\theta\sin\phi, a\cos\theta),\ (\theta,\phi)\in(0,2\pi)\times(0,\alpha)$ cuyo producto vectorial fundamental tiene de norma $a^2\sin\theta$. Por tanto, según el apartado anterior tenemos

$$|\Omega(M)| = \frac{1}{a^2}\int\int_{M_a}\mathrm{d}S = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\alpha} a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = 2\pi(1-\cos\alpha).$$

Prob. 34

Sea U la región $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$, si tenemos en cuenta el teorema de *Gauss* y recordamos el cálculo de una derivada direccional en un punto para una función diferenciable, $D_{\mathbf{v}}f(a) = \nabla f(a)\cdot\mathbf{v}$, se tiene

$$\int\int_S f\ \frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}}\ \mathrm{d}S = \int\int_S f\ \nabla g\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{d}S = \int_S f\ \nabla g\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_U \mathrm{div}(f\ \nabla g)\ \mathrm{d}V$$

pero $\mathrm{div}(f\ \nabla g) = f\,\mathrm{div}(\nabla g)+\nabla f\cdot\nabla g = f\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g = \nabla f\cdot\nabla g$ y como $\mathrm{div}(g\ \nabla f) = g\nabla^2 f+\nabla g\cdot\nabla f$ se tiene $x+y+z = x+y+\nabla g\cdot\nabla f$, por lo que $\mathrm{div}(f\ \nabla g) = z$. Así pues $\displaystyle\int\int_S f\ \frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}}\ \mathrm{d}S = \int_U z\ \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 abc^2r^3\sin\theta\cos\theta\ \mathrm{d}r = 0$, que también se puede deducir sin plantear la integral dado que $f(x,y,z)=z$ cumple $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$ y la región es simétrica respecto del plano XY.

Prob. 35

(a) $\displaystyle\int\int_S \phi\ \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\ \mathrm{d}S = \int_S \phi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \mathrm{div}(\phi\ \nabla\phi)\mathrm{d}V = \int_V \left(\phi\nabla^2\phi+\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)\mathrm{d}V$ por tanto

$$\int_V \|\nabla\phi\|^2\ \mathrm{d}V = -\int_V \phi\nabla^2\phi\ \mathrm{d}V + \int\int_S \phi\ \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\ \mathrm{d}S$$

.

(b) Si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones del problema se cumple que $\left\{\begin{array}{lll}\nabla^2\phi_1 = h & \text{en} & V\\ \dfrac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{n}} = g & \text{en} & S\end{array}\right.$ y $\left\{\begin{array}{lll}\nabla^2\phi_2 = h & \text{en} & V\\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial\mathbf{n}} = g & \text{en} & S\end{array}\right.$.

Sea $\psi = \phi_1-\phi_2$ entonces $\nabla^2\psi = \nabla^2(\phi_1-\phi_2) = \nabla^2\phi_1-\nabla^2\phi_2 = 0$, en V, y $\dfrac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = \dfrac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{n}}-\dfrac{\partial\phi_2}{\partial\mathbf{n}} = 0$, en S, lo que implica, si tenemos en cuenta el apartado a),

$$\int_V \|\nabla\psi\|^2\ \mathrm{d}V = 0\ \Rightarrow\ \|\nabla\psi\|^2 = 0\ \Rightarrow\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = 0\ \Rightarrow$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0\ \Rightarrow\ \psi = cte\ \Rightarrow\ \phi_1-\phi_2 = cte.$$

(c) Sean $\mathbf{f_1}$ y $\mathbf{f_2}$ dos campos vectoriales con igual rotacional y divergencia en V y la misma componente en la dirección ortogonal a S, hacemos $\mathbf{g} = \mathbf{f_1}-\mathbf{f_2}$ se tiene

$\mathrm{rot}\,\mathbf{g} = \mathrm{rot}(\mathbf{f_1}-\mathbf{f_2}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{f_1}-\mathrm{rot}\,\mathbf{f_2} = 0,\ \Rightarrow\ \mathbf{g} = \nabla\phi$, si suponemos que se dan las condiciones necesaria. Igualmente

$\mathrm{div}\,\mathbf{g} = \mathrm{div}(\mathbf{f_1}-\mathbf{f_2}) = \mathrm{div}\,\mathbf{f_1}-\mathrm{div}\,\mathbf{f_2} = 0,\ \Rightarrow\ \mathrm{div}\,\mathbf{g} = \nabla^2\phi = 0$, además

$\mathbf{g}\cdot\mathbf{n} = (\mathbf{f_1}-\mathbf{f_2})\cdot\mathbf{n} = 0,\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \mathrm{grad}\,\phi\cdot\mathbf{n} = \mathbf{g}\cdot\mathbf{n} = 0.$

Por consiguiente la función ϕ satisface el sistema $\left\{\begin{array}{lll}\nabla^2\phi = 0 & \text{en} & V\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{en} & S\end{array}\right.$ del cual la función nula es solución.

Del apartado anterior se deduce que ϕ ha de ser constante y, por tanto, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{f_1} = \mathbf{f_2}$.

Prob. 36

Supongamos que el problema de *Newman* para la ecuación del potencial tenga solución y sea ésta u_0. Entonces $\Delta u_0 = f$ en Ω y $\dfrac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = g$ en $\Gamma = \partial\Omega$.

Por el teorema de *Gauss* se tiene
$\int\int_\Gamma \nabla u_0 \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}S = \int_\Omega \Delta u_0\ \mathrm{d}V, \Rightarrow \int\int_\Gamma g\ \mathrm{d}S = \int_\Omega f\ \mathrm{d}V$ condición necesaris para que u_0 sea solución del problema.

Prob. 37

Sabemos que $u(r,\theta,\phi)$ cumple $\nabla^2 u = u$ si $r < 1$ y $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \sin\theta$ en $r = 1$ entonces se tiene
$\int_{r\leq 1} u\ \mathrm{d}V = \int_{r\leq 1} \nabla^2 u\ \mathrm{d}V = \int\int_{r=1} \nabla u \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}S = \int\int_{r=1} \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\ \mathrm{d}S = \int\int_S \sin\theta\ \mathrm{d}S$

Una parametrización de la esfera $r = 1$ es $\boldsymbol{\alpha}(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ cuyo producto vectorial fundamental tiene de norma $|\sin\theta| = \sin\theta$ luego
$\int_{r=1} \sin\theta\ \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta = \pi^2$.

Prob. 38

Recordemos que el gradiente de un producto es $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$ y por tanto se tiene

$$\oint_C (u\nabla v + v\nabla u)\ \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_C \nabla(uv)\ \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

por ser la circulación de un gradiente a lo largo de una curva cerrada.

Prob. 39

Se trata de probar que $\phi\mathbf{f}$ conservativo $\iff \nabla\phi$ y $\mathbf{f}$ son proporcionales.

$\Rightarrow$

Si $\phi\mathbf{f}$ es conservativo se tiene que $\dfrac{\partial(\phi f_1)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\phi f_2)}{\partial x} \Rightarrow \phi\dfrac{\partial f_1}{\partial y} + f_1\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = \phi\dfrac{\partial f_2}{\partial x} + f_2\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ y como $\mathbf{f}$ es conservativo cumple $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ con lo que la ecuación anterior queda $f_1\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = f_2\dfrac{\partial\phi}{\partial x} \Rightarrow \mathbf{f}$ y $\nabla\phi$ paralelos.

$\Leftarrow$

Si $\mathbf{f} = \lambda\nabla\phi \Rightarrow \phi\mathbf{f} = \lambda\phi\nabla\phi = \dfrac{\lambda}{2}\ \nabla\phi^2 = \nabla\left(\dfrac{\lambda}{2}\phi^2\right) \Rightarrow \phi\mathbf{f}$ conservativo.

Prob. 40

Si observamos los campos vectoriales de los tres primeros apartados todos son de la forma $g(r)\mathbf{r}$. Veamos que son conservativos calculando su rotacional

$\operatorname{rot} g(r)\mathbf{r} = g(r)\operatorname{rot}\mathbf{r} + \nabla g(r)\wedge\mathbf{r} = 0 + \dfrac{g'(r)}{r}\mathbf{r}\wedge\mathbf{r} = 0.$

Luego los tres campos cumplen la condición necesaria de gradiente.

(a) Sea $\mathbf{f} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ se trata de un campo vectorial C^∞ en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. Por tanto es conservativo en todo simplemente conexo que no contenga el origen. Su potencial escalar ha de ser tal que $\nabla\varphi(r) = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

Como $\nabla\varphi(r) = \dfrac{\varphi'(r)}{r}\mathbf{r}$ se tiene $\varphi'(r) = 1 \Rightarrow \varphi(r) = r + k$

(b) Análogamente al apartado anterior $\dfrac{\mathbf{r}}{r^2}$ es conservativo en todo simplemente conexo que no contenga al origen.

Calcularemos su potencial escalar resolviendo la ecuación $\dfrac{\varphi'(r)}{r}\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{r}}{r^2} \Rightarrow \varphi'(r) = \dfrac{1}{r} \Rightarrow \varphi(r) = \ln r + k.$

(c) También se trata de un campo conservativo pero en este caso en $\mathbb{R}^3$, y su función potencial cumple

$\dfrac{\varphi'(r)}{r}\mathbf{r} = r^\alpha\mathbf{r} \Rightarrow \varphi'(r) = r^{\alpha+1} \Rightarrow \varphi(r) = \dfrac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2} + k.$

(d) En este caso $\operatorname{rot}\mathbf{f}(x,y,z) = (0, 3z^2 - 3z^2, 2x - 2x) = \mathbf{0}$ y por tanto campo conservativo en $\mathbb{R}^3$.

Su función potencial, $\varphi(x,y,z)$, cumple

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(x,y,z) = & \int(2xy+z^3)\ \mathrm{d}x & = x^2y + xz^3 + A(y,z) \\ \varphi(x,y,z) = & \int x^2\ \mathrm{d}y & = x^2y + B(x,z) \\ \varphi(x,y,z) = & \int 3xz^2\ \mathrm{d}z & = xz^3 + C(x,y) \end{array}\right. \Rightarrow \varphi(x,y,z) = x^2y + xz^3 + k.$$

(e) Para esta función $\operatorname{rot}\mathbf{f}(x,y,z)=(2xy-2xy,y^2-y^2,2yz-2yz)=\mathbf{0}$ y por tanto campo conservativo en $\mathbb{R}^3$. Su función potencial se obtiene

$$\left\{\begin{array}{lll}\varphi(x,y,z)= & \int y^2z\ \mathrm{d}x & =xy^2z+A(y,z)\\ \varphi(x,y,z)= & \int 2xyz\ \mathrm{d}y & =xy^2z+B(x,z)\\ \varphi(x,y,z)= & \int (xy^2-1)\ \mathrm{d}z & =xy^2z-z+C(x,y)\end{array}\right. \Rightarrow \varphi(x,y,z)=xy^2z-z+k.$$

Prob. 41

Como la $\operatorname{div}(y,z,x)=0$ este campo vectorial tiene potencial vector. Se trata de encontrar $P(x,y,z)$ para que $\operatorname{rot}(P(x,y,z),(x-z)y,0)=(y,z,x)$.

$$\left(y,\frac{\partial P}{\partial z},y-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=(y,z,x)\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{r}P(x,y,z)=\dfrac{z^2}{2}+A(x,y)\\ P(x,y,z)=-xy+\dfrac{y^2}{2}+B(x,z)\end{array}\right. \Rightarrow P(x,y,z)=-xy+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+k.$$

Prob. 42

Como $\operatorname{div}(y-z,z-x,x-y)=0$ y además $\mathbf{f}$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, existe $\mathbf{g}(x,y,z)$ tal que $\operatorname{rot}\mathbf{g}(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$. Se ha de resolver el sistema $\left(\dfrac{\partial g_3}{\partial y}-\dfrac{\partial g_2}{\partial z},\dfrac{\partial g_1}{\partial z}-\dfrac{\partial g_3}{\partial x},\dfrac{\partial g_2}{\partial x}-\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\right)=(y-z,z-x,x-y)$, para ello podemos hacer una cualquiera de las componentes de $\mathbf{g}$ nula, por ejemplo g_1

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial g_3}{\partial y}-\dfrac{\partial g_2}{\partial z}=y-z\\ -\dfrac{\partial g_3}{\partial x}=z-x\quad\Rightarrow\quad g_3(x,y,z)=\frac{x^2}{2}-xz+A(y,z)\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}=x-y\quad\Rightarrow\quad g_2(x,y,z)=\frac{x^2}{2}-xy+B(y,z)\end{array}\right.$$

si hacemos $A(y,z)=0$, tenemos

$-\dfrac{\partial B}{\partial z}(y,z)=y-z\ \Rightarrow\ B(y,z)=\dfrac{z^2}{2}-yz+C(y)$ donde C es cualquier función derivable, por ejemplo la función nula. De esta forma obtenemos $\mathbf{g}(x,y,z)=\left(0,\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{z^2}{2}-xy-yz,\dfrac{x^2}{2}-xz\right)$

Prob. 43

(a) La aplicación del teorema de *Green* nos da

$$\oint_C\left(y^2\cos x-2e^y\right)\ \mathrm{d}x+\left(2y\sin x-2xe^y\right)\ \mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le\pi}0\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(b) La ecuación de la circunferencia también se expresa mediante $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{34}{16}$ y por tanto su centro está en $\left(\dfrac{3}{4},-\dfrac{5}{4}\right)$ y su radio vale $\dfrac{\sqrt{34}}{4}$. Aplicando el teorema de *Green*, si llamamos R a la región interior a la circufencia, tenemos

$$\oint_C\left(2xe^{x^2-y^2}-4y\right)\ \mathrm{d}x-\left(2ye^{x^2-y^2}-4x\right)\ \mathrm{d}y=\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2ye^{x^2-y^2}-4x\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2xe^{x^2-y^2}-4y\right)\right]\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$=8\iint_R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\ \text{área}(R)=17\pi.$$

(c) Tenemos una circunferencia de radio $\sqrt{2}$, si llamamos R a su interior tenemos

$$\oint_C\mathbf{f}\cdot\ \mathrm{d}\mathbf{l}=\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-x+\sin x\sin y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(y-\cos x\cos y\right)\right]\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_R-2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\pi.$$

(d) $$\oint_C\mathbf{f}\cdot\ \mathrm{d}\mathbf{l}=\iint_{x^2+y^2\le1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^2+e^y\sin y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(xy+x^2y\right)\right]\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le1}-x^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$=-\int_0^1 r^3\ \mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{4}.$$

(e) La cicloide no es una curva cerrada para poder aplicar el teorema de *Green* la cerramos con el eje X y si llamamos respectivamente camino C^- a la cicloide recorrida en sentido antihorario, C_1 a la parte del eje X desde $(0,0)$ hasta $(2\pi a,0)$ y R a la región interior a ambas curvas tenemos

$$\oint_{C_1\cup C^-}\left(x^2+y^2\right)\ \mathrm{d}x+x\left(1+2y\right)\ \mathrm{d}y=\iint_R 1\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\text{área}(R).$$

Una manera de determinar el área de R sería buscar la ecuación $y=f(x)$ de la cicloide y entonces se tiene área$(R) = \int_0^{2\pi a} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi a} y\ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)\ \mathrm{d}t = 3\pi a^2$.

Si recordamos que sólo queremos la circulación a lo largo de C y en sentido horario, nos queda $\displaystyle\int_C (x^2+y^2, x(1+2y)\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{C_1} \left(x^2+y^2\right)\ \mathrm{d}x + x\,(1+2y)\ \mathrm{d}y - 3\pi a^2 = \int_0^{2\pi a} (t^2,t)\cdot(1,0)\ \mathrm{d}t - 3\pi a^2 = \frac{8\pi^3 a^3}{3} - 3\pi a^2$.

Prob. 44

(a) Como Dom $\mathbf{f} = \{(x,y) \mid x+\sqrt{x^2+y^2} > 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) \mid x \le 0\}$, $\mathbf{f}$ es de clase C^1 y, por tanto lo es un abierto que contiene al rectángulo R. Luego puede aplicarse el teorema de *Green*.

(b) Como aplicación de dicho teorema se tiene

$$\int_{\partial R} \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2 + y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}\ )\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^4 \mathrm{d}x \int_0^2 y^2\ \mathrm{d}y = 8.$$

Prob. 45

Es un problema que podemos resolver de tres formas diferentes:

1. Como aplicación del prob. 15 calculamos la circulación del campo $\mathbf{f}(x,y) = (0,x)$ a lo largo de la frontera orientada, de la región cuya área queremos medir. Si consideramos los caminos $\mathbf{c_1}(t) = (t,0),\ t \in (0, 2\pi R)$ y $\mathbf{c_2}(t) = (R(t-\sin t), R(1-\cos t)),\ t\in(0,2\pi)$, tendremos

$$\text{área} = \oint_{C_1\cup C_2^-} (0,x)\ \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_0^{2\pi R} (0,t)\cdot(1,0)\ \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} (0, R(t-\sin t))\cdot(R(1-\cos t), R\sin t)\ \mathrm{d}t =$$
$$= R^2\int_0^{2\pi} (\sin^2 t - t\sin t)\ \mathrm{d}t = 3\pi R^2.$$

2. Hacemos el cambio de variable $(x,y) = \boldsymbol{\varphi}(r,t) = (r(t-\sin t), r(1-\cos t)),\ (r,t)\in(0,R)\times(0,2\pi)$ cuyo *Jacobiano* vale

$$\mathrm{J}(r,t) = \begin{vmatrix} t-\sin t & 1-\cos t \\ r(1-\cos t) & r\sin t \end{vmatrix} = r(-2 + t\sin t + \cos t)$$

Se puede observar que la función $y(t) = -2 + t\sin t + \cos t,\ \ t\in(0,2\pi)$ es negativa. Por tanto,

$$\text{área} = \iint_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{(0,R)\times(0,2\pi} |\mathrm{J}(r,t)|\ \mathrm{d}r\mathrm{d}t = \int_0^R r\ \mathrm{d}r\int_0^{2\pi} (2 - t\sin t - \cos t)\ \mathrm{d}t = \frac{R^2}{2}(4\pi+2\pi) = 3\pi R^2.$$

2. Por último podemos hacer como en problema 43 e) supongamos que las ecuaciones $x = R(t-\sin t)$ y $y = R(1-\cos t)$ nos permitan expresar y como función de x, $y = f(x)$

área $= \displaystyle\int_0^{2\pi R} f(x)\ \mathrm{d}x$ si en esta integral hacemos el cambio de variables $x = R(t-\sin t)$ obtenemos

$$\text{área} = \int_0^{2\pi} R(1-\cos t)R(1-\cos t)\ \mathrm{d}t = 3\pi R^2$$

Prob. 46

Empecemos por definir el vector $\mathbf{n}$, supongamos que la curva C tiene la parametrización $\boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, $t\in(a,b)$, con la orientación positiva, entonces el vector normal unitario exterior a D es $\mathbf{n} = \dfrac{(y'(t), -x'(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}$.

Si recordamos el teorema de *Green*: $\displaystyle\oint_{C=\partial(D)} P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ tenemos

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{d}r = \int_a^b (P,Q)\cdot\frac{(y'(t),-x'(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}\ \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\ \mathrm{d}t = \oint_c -Q\mathrm{d}x + P\mathrm{d}y = \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Se puede enunciar como: el flujo saliente a través de una curva cerrada coincide con la integral de la divergecia en el interior de la curva.

Prob. 47

(a) Si tenemos en cuenta el cálculo de la derivada direccional y el resultado del problema anteriorm, se tiene

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\ \mathrm{d}l = \oint_C \nabla f\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{d}l = \iint_R \operatorname{div}(\nabla f)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(b) Si $u(x,y)=x^2+3y^2$ y $\mathbf{n}$ es la normal exterior a la circunferencia $x^2+y^2=4$ se tiene

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\ \mathrm{d}l = \oint_C \nabla u \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}l = \oint_C (2x,6y)\cdot \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}l = \int_0^{2\pi} (4\cos t, 12\sin t)\cdot \frac{(2\cos t, 2\sin t)}{2}\ 2\ \mathrm{d}t =$$
$$\int_0^{2\pi} (8\cos^2 t + 24\sin^2 t)\ \mathrm{d}t = 32\pi.$$

Como aplicación del apartado anterior:

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\ \mathrm{d}l = \iint_{x^2+y^2\leq 4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\leq 4} 8\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 32\pi.$$

Prob. 48

Todo campo vectorial $\mathbf{f}: A\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en A, abierto simplemente conexo, y que satisface $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ es conservativo. Reciprocamente si $\mathbf{f}$ es conservativo entonces $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

(a) $\mathbf{f}$ es C^∞ en $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$ y $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x$, luego no es conservativo.

(b) $\mathbf{f}$ es C^∞ en $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$ y $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$, luego es conservativo.

Calculemos su potencial escalar

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=y & \Rightarrow & \varphi(x,y)=\displaystyle\int y\ \mathrm{d}x = xy+A(y) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=x & \Rightarrow & \varphi(x,y)=\displaystyle\int x\ \mathrm{d}y = xy+B(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x,y)=xy+C$$

(c) $\mathbf{f}$ es C^∞ en $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x-3x^2$ y $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-3x$, luego no es conservativo.

(d) $\mathbf{f}$ es C^∞ en $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-e^{x-y}(x+y)$ y $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-e^{x-y}(x+y)$, luego es conservativo, y su función potencial es:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=e^{x-y}(1+x+y) & \Rightarrow & \varphi(x,y)=\displaystyle\int e^{x-y}(1+x+y)\ \mathrm{d}x = e^{x-y}(x+y)+A(y) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=e^{x-y}(1-x-y) & \Rightarrow & \varphi(x,y)=\displaystyle\int e^{x-y}(1-x-y)\ \mathrm{d}y = e^{x-y}(x+y)+B(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\varphi(x,y)=e^{x-y}(x+y)+C.$$

(e) $\mathbf{f}$ es C^∞ en $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{2x}{(y+x^2)^2}$ y $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{2x}{(y+x^2)^2}$, por tanto es conservativo, con función potencial :

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x}{y+x^2} & \Rightarrow & \varphi(x,y)=\displaystyle\int \frac{2x}{y+x^2}\ \mathrm{d}x = \ln|y+x^2|+A(y) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{y+x^2} & \Rightarrow & \varphi(x,y)=\displaystyle\int \frac{1}{y+x^2}\ \mathrm{d}y = \ln|y+x^2|+B(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x,y)=\ln|y+x^2|+C.$$

Prob. 49

(a) Como el campo vectorial (x,y) es conservativo, con potencial escalar $\phi(x,y)=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+C$, la integral de línea es independiente del camino y se puede calcular evaluando su potencial escalar en los extremos, es decir:

$$\int_C x\ \mathrm{d}x + y\ \mathrm{d}y = \int_{(0,\varphi(0))}^{(2\pi,\varphi(2\pi))} \nabla(\phi(x,y))\ \mathrm{d}\mathbf{l} = \phi(2\pi,\varphi(2\pi))-\phi(0,\varphi(0)) = 2\pi^2+\frac{1}{2}\left(\varphi^2(2\pi)-\varphi^2(0)\right).$$

(b) En este caso tenemos un campo conservativo y su función potencial es

$\phi(x,y)=\displaystyle\int_a^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t+\int_b^y \psi(t)\ \mathrm{d}t,$ a yb reales y la integral de línea vale:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\ \mathrm{d}x+\psi(y)\ \mathrm{d}y = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \nabla\phi(x,y)\ \mathrm{d}\mathbf{l} = \phi(x_2,y_2)-\phi(x_1,y_1) =$$
$$= \int_a^{x_2} \varphi(t)\ \mathrm{d}t+\int_b^{y_2} \psi(t)\ \mathrm{d}t - \left(\int_a^{x_1} \varphi(t)\ \mathrm{d}t+\int_b^{y_1} \psi(t)\ \mathrm{d}t\right) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\ \mathrm{d}t+\int_{y_1}^{y_2} \psi(t)\ \mathrm{d}t.$$

(c) Primeramente se comprueba que

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{4x^2y}{(x^2+y^2+1)^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{4x(y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}\right) = \dfrac{8xy(x^2-y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^3}$ por tanto, tiene potencial escalar que vamos a determinar resolviendo el sistema

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{4x^2y}{(x^2+y^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x,y) = \int \frac{4x(y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{2(y^2+1)}{x^2+y^2+1} + A(y)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{4x(y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x,y) = \int -\frac{4x^2y}{(x^2+y^2+1)^2}\ \mathrm{d}y = \frac{2x^2}{x^2+y^2+1} + B(x)$$

como las dos expresiones deben coincidir se tiene

$$-\frac{2(y^2+1)}{x^2+y^2+1} + A(y) = \frac{2x^2}{x^2+y^2+1} + B(x) \ \Rightarrow\ A(y) - B(x) = 2 \ \Rightarrow\ A(x) = cte,\ B(y) = cte.$$

Podemos tomar como función potencial tanto $\varphi(x,y) = -\dfrac{2(y^2+1)}{x^2+y^2+1} + C_1$ como $\varphi(x,y) = \dfrac{2x^2}{x^2+y^2+1} + C_2$

Así la integral de línea vale

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{4x(y^2+1)\ \mathrm{d}x - 4x^2y\ \mathrm{d}y}{(x^2+y^2+1)^2} = \varphi(2,2) - \varphi(1,0) = -\frac{1}{9}.$$

Prob. 50

(a) Para demostrar que la función $f(x,y) = \displaystyle\int_0^1 (xP(tx,ty) + yQ(tx,ty))\ \mathrm{d}t$ es un potencial escalar del campo $\mathbf{F} = (P,Q)$ veamos que se cumple $\nabla f(x,y) = (P,Q)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^1 \left[P(tx,ty) + xt\frac{\partial P(tx,ty)}{\partial x} + yt\frac{\partial Q(tx,ty)}{\partial x}\right]\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left[P(tx,ty) + xt\frac{\partial P(tx,ty)}{\partial x} + yt\frac{\partial P(tx,ty)}{\partial y}\right]\ \mathrm{d}t =$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[tP(tx,ty)\right]\ \mathrm{d}t = \left. tP(tx,ty)\right|_{t=0}^{t=1} = P(x,y)$$

Igualmente se obtiene $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$ y por tanto la igualdad $\nabla f(x,y) = (P,Q)$.

Una interpretación de lo anterior puede ser la siguiente:

Sea C la recta que une el origen de coordenadas, $(0,0)$, con un punto cualquiera, (x,y), cuya parametrización puede ser $\boldsymbol{\alpha}(t) = (tx,ty),\ 0 \le t \le 1$ entonces se tiene

$$f(x,y) = \int_0^1 (xP(tx,ty) + yQ(tx,ty))\ \mathrm{d}t = \int_C \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t)\ \mathrm{d}t$$

y como consecuencia, una manera de determinar el potencial escalar de un campo conservativo es calcular la circulación de dicho campo a lo largo de la recta C.

(b) Como aplicación de lo anterior el potencial escalar del campo $(x+2y, 2x+y^3)$ es

$$f(x,y) = \int_C \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t))\cdot\boldsymbol{\alpha}'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (tx+2ty, 2tx+t^3y^3)\cdot(x,y)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 t(x^2+4xy)+t^3y^4\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{4}y^4.$$

Prob. 51

(a) Para que la ecuación diferencial $(bx^2y+y^3)\mathrm{d}x + (x^3+bxy^2)\mathrm{d}y = 0$ sea exacta se tiene que cumplir que $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3+bxy^2) = 3x^2+by^2$ coincida con $\dfrac{\partial}{\partial y}(bx^2y+y^3) = bx^2+3y^2$ lo que implica $b=3$.

Para resolver la ecuación diferencial se calcula el potencial escalar $\varphi(x,y)$ del campo $(3x^2y+y^3, x^3+3xy^2)$ y la solución general viene dada por $\varphi(x,y) = C$ donde C es una constante arbitraria. En nuestro caso la solución es $x^3y+xy^3 = C$.

(b) En este caso para que $\dfrac{\partial}{\partial x}(bx-6y+10) = b$ sea igual que $\dfrac{\partial}{\partial y}(3x-5y+7) = -5$, luego $b=-5$.

La solución de la ecuación diferencial es $\dfrac{3}{2}x^2 - 5xy - 3y^2 + 7x + 10y = C$.

Prob. 52

(a) Si multiplicamos la ecuación diferencial por el factor $\mu(xy)$ se tiene

$$(\mu(xy)y^2)\ \mathrm{d}x + (\mu(xy)(1+xy))\ \mathrm{d}y = 0$$

que para que sea exacta se requiere que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(xy)(1+xy)) = y(1+xy)\mu'(xy) + y\mu(xy) \ \text{ y } \ \frac{\partial}{\partial y}(\mu(xy)y^2) = xy^2\mu'(xy) + 2y\mu(xy)$$

sean iguales, es decir

$$y(1+xy)\mu'(xy)+y\mu(xy)=xy^2\mu'(xy)+2y\mu(xy)\ \Rightarrow\ \frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)}=1\ \Rightarrow\ \mu(xy)=Ke^{xy}$$

Si tomamos $K=1$ la ecuación queda $y^2e^{xy}\ \mathrm{d}x+(1+xy)e^{xy}\ \mathrm{d}y=0$ cuya solución es

$$ye^{xy}=C$$

(b) En este caso la ecuación queda $(3xy-2y^2)\mu(xy)\ \mathrm{d}x+(2x^2-3xy)\mu(xy)\ \mathrm{d}y=0$

La condición de que sea exacta implica que se cumpla

$$(4x-3y)\mu(xy)+y(2x^2-3xy)\mu'(xy)=(3x-4y)\mu(xy)+x(3xy-2y^2)\mu'(xy)$$

Ecuación diferencial que se puede expresar como $\dfrac{\mu'(xy)}{\mu(xy)}=\dfrac{1}{xy}$ y que resuelta nos da $\mu(xy)=Kxy$, en particular tomamos $K=1$.

Con todo esto la ecuación queda $(3x^2y^2-2xy^3)\ \mathrm{d}x+(2x^3y-3x^2y^2)\ \mathrm{d}y=0$, cuya solución es $x^3y^2-x^2y^3=C$.

(c) En este caso al multiplicar por el factor integrante e imponerle que sea exacta se obtiene

$$(3x^2y^2+1)\mu(xy)+y(x^3y^2+x)\mu'(xy)=(3x^2y^2-1)\mu(xy)+x(x^2y^3-y)\mu'(xy)$$

que simplificada da $\dfrac{\mu'(xy)}{\mu(xy)}=-\dfrac{1}{xy}$ por tanto un factor integrante es $\dfrac{1}{xy}$ y la ecuación pasa a ser $(xy^2-\dfrac{1}{x})\ \mathrm{d}x+(x^2y+\dfrac{1}{y})\ \mathrm{d}y=0$ con solución $\dfrac{x^2y^2}{2}+\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|=C$.

(d) La condición de que $\mu\left(\dfrac{y}{x}\right)$ sea factor integrante se traduce en la igualdad

$(3x^2+2xy)\mu\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x^2}(x^3+x^2y)\mu'\left(\dfrac{y}{x}\right)=(3x^2+6xy)\mu\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{1}{x}(3x^2y+3xy^2)\mu'\left(\dfrac{y}{x}\right)$

y simplificando se obtiene $\dfrac{\mu'\left(\frac{y}{x}\right)}{\mu\left(\frac{y}{x}\right)}=-(1+\dfrac{y}{x})$ ecuación que resuelta nos da, como posible solución

$\mu\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{1}{1+y/x}=\dfrac{x}{x+y}$

Por tanto la ecuación queda $3x^2y\ \mathrm{d}x+x^3\ \mathrm{d}y=0$ con solución $x^3y=C$.

(e) En este caso se trata de buscar la función $\phi(y)$ que cumpla la igualdad

$-\phi(y)=\phi(y)(1+2xy)+\phi'(y)(y+xy^2)\ \Rightarrow\ \dfrac{\phi'(y)}{\phi(y)}=\dfrac{-2}{y}\ \Rightarrow\ \phi(y)=\dfrac{C}{y^2}$, si hacemos $C=1$ nos queda $(\dfrac{1}{y}+x)\ \mathrm{d}x-\dfrac{x}{y^2}\ \mathrm{d}y=0$ ecuación diferencial exacta con solución $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=C$.

(f) La ecuación $\phi(xy^2)(y^4-2y^2)\ \mathrm{d}x+\phi(xy^2)(3xy^3-4xy+y)\ \mathrm{d}y=0$ es exacta si se cumple que

$$\phi'(xy^2)y^2(3xy^3-4xy+y)+\phi(xy^2)(3y^3-4y)=\phi'(xy^2)2xy(y^4-2y^2)+\phi(xy^2)(4y^3-2y^2)\ \Rightarrow$$

$\dfrac{\phi'(xy^2)}{\phi(xy^2)}=\dfrac{1}{1+xy^2}$ con solución $\phi(xy^2)=C(1+xy^2)$ que para $C=1$ da lugar a la ecuación

$(1+xy^2)(y^4-2y^2)\ \mathrm{d}x+(1+xy^2)(3xy^3-4xy+y)\ \mathrm{d}y=0$ cuya solución es $xy^2(y^2-2)(xy^2+2)+y^2=C$.

(g) Para este problema si multiplicamos la ecuación por $\phi(xy)$ y le imponemos que sea exacta se obtiene $\dfrac{\phi'(xy)}{\phi(xy)}=\dfrac{-2}{xy}$ una de cuyas soluciones es $\phi(xy)=\dfrac{1}{x^2y^2}$ y por tanto la ecuación queda

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x^2y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{xy^2}\right)\mathrm{d}y=0$$

su solución es $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{xy}=C$ esto es, $x^2+y^2-Cxy-1=0$.

(h) La ecuación multiplicada por $\dfrac{1}{x^2}\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ da

$\dfrac{y}{x^2}\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)\ \mathrm{d}x + \dfrac{1}{x}(x^2y-1)\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)\ \mathrm{d}y = 0$ que imponiéndole que sea exacta se obtiene

$$-\frac{y}{x^2}\left(xy-\frac{1}{x}\right)\phi'\left(\frac{y}{x}\right)+\phi\left(\frac{y}{x}\right)\left(y+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{y}{x^3}\phi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\phi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{\phi'\left(\frac{y}{x}\right)}{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{x}{y} \Rightarrow \phi\left(\frac{y}{x}\right)=C\frac{y}{x}$$

Si multiplicamos la ecuación por $\dfrac{y}{x^3}$ resulta

$\dfrac{y^2}{x^3}\ \mathrm{d}x + \left(y^2-\dfrac{y}{x^2}\right)\ \mathrm{d}y = 0$ cuya solución es $-\dfrac{3y^2}{x^2}+2y^3 = C.$

(i) Para encontrar el factor integrante se ha de resolver la ecuación

$$2x\phi(xy^2)+x^2y^2\phi'(xy^2) = (2y-x)\phi(xy^2)+2xy(y^2-xy)\phi'(xy^2)$$

una de cuyas soluciones es $\phi(xy^2) = \dfrac{1}{xy^2}$ por lo que la ecuación queda

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\ \mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}\ \mathrm{d}y = 0 \ \Rightarrow\ \ln|x| - \frac{x}{y} = C.$$

Prob. 53

La ecuación multiplicada por $\phi(ax+by)$ queda

$\phi(ax+by)P(x,y)\ \mathrm{d}x + \phi(ax+by)Q(x,y)\ \mathrm{d}y = 0$ que para que sea exacta ha de verificar

$$\phi(ax+by)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)+a\phi'(ax+by)Q(x,y) = \phi(ax+by)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)+b\phi'(ax+by)P(x,y)$$

y por tanto

$$\frac{\phi'(ax+by)}{\phi(ax+by)} = \frac{Q_x(x,y)-P_y(x,y)}{bP(x,y)-aQ(x,y)}$$

ecuación diferencial resoluble si $\dfrac{Q_x(x,y)-P_y(x,y)}{bP(x,y)-aQ(x,y)}$ es alguna función integrable de $ax+by$, es decir

$$\frac{Q_x(x,y)-P_y(x,y)}{bP(x,y)-aQ(x,y)} = f(ax+by)$$

y entonces

$$\ln|\phi(ax+by)| = \int f(t)\ \mathrm{d}t + C.$$

y el factor integrante es $\phi(ax+by) = Ke^{\int f(t)\ \mathrm{d}t}$ donde $t = ax+by$.