• Gramàtiques incontextuals.

14 Juny 05

• $L=\{a^i b^j c^k \mid i=j+k\} \equiv a^k a^j b^j c^k$ — Primer generem els extrems

$S \rightarrow aSc \mid B$
$B \rightarrow aBb \mid \lambda$

$S \overset{n}{\Rightarrow} a^n S c^n \Rightarrow a^n B c^n \overset{*}{\Rightarrow} a^n a^m b^m c^n \in L$

com a molt hi ha tantes a's com b's i c's $\Rightarrow$ per cada $a <^{b}_{c}$

• $L=\{a^i b^j c^k \mid i \leq j+k\} \equiv a^k a^j b^t b^j c^k c^y$

$S \rightarrow aSc \mid Sc \mid S'$
$S' \rightarrow aS'b \mid S'b \mid \lambda$

• $L=\{w \in a^+b^+c^+ \mid \underbrace{|w| \overset{0}{\equiv} \text{mod } 2}_{\text{parell}} \wedge |w|_a \geq |w|_b\} \equiv \{w \in a^i \underbrace{a^j b^j}_{\substack{2j \\ \text{sempre} \\ \text{parell}}} c^k \mid i \geq 0 \wedge j,k \geq 1 \wedge \underbrace{(i \equiv k \equiv 1 \text{ mod } 2)}_{\substack{L_1 \\ \text{senar+senar} \\ =\text{parell}}}$ $\vee \underbrace{(i \equiv k \equiv 0 \text{ mod } 2)}_{L_2}$

a's addicionals

⇓ dependrà si i, k són senars o parells el fet que $\in$ al llenguatge

$S \rightarrow A \mid B$ — Disjunció en Gramàtiques

$/^* A \Rightarrow \underbrace{a^{2k+1}}_{A} a^j b^j \underbrace{c^{2t+1}}_{C}$

$/^* B \Rightarrow \underbrace{a^{2k}}_{A'} a^j b^j \underbrace{c^{2t}}_{C'}$

$a^j b^j$ ⇓ Producció que és comuna que genera paraules $a^n b^n$ ⇓ B

Gramàtica resultant:

$S \rightarrow ABC \mid A'BC'$

senars:
$A \rightarrow aaA \mid a$ — 1, 3, 5 ..
$C \rightarrow ccC \mid c$

parells:
$A' \rightarrow aaA' \mid \lambda$ — 0, 2, 4, 6 ..
$C' \rightarrow ccC' \mid \lambda$

$B \rightarrow aBb \mid \lambda$

es pot generar λ

⇓

$S \rightarrow ABC \mid A'BC'$
$A \rightarrow aaA \mid a$
$C \rightarrow ccC \mid c$
$A' \rightarrow aaA \mid \lambda$
$C' \rightarrow ccC \mid cc$
$B \rightarrow aBb \mid ab$

• $L=\{xcy \mid (x,y) \in \{a,b\}^* \wedge x^R$ és submot de $y \wedge |x|_{aba}=0\}$

$\equiv \{xcux^R w \mid |x|_{aba}=0\}$

$S \overset{*}{\Rightarrow} xcx^R$

$xcAx^R B$

$S \rightarrow AB$ — possible candidat a mot aba!
$A \rightarrow aCa \mid bAb \mid cB$
$C \rightarrow bDb \mid aCa \mid cB$
$D \rightarrow bAb \mid cB$
$B \rightarrow aB \mid bB \mid \lambda$

$\underbrace{\underbrace{x c B x^R}_{A} \underbrace{B}_{B}}_{S}$

• $\{ ycz \mid y,z \in \{a,b\}^* \wedge |y|_a + |z|_b = \dot{2} \wedge |y| = |z| \}$

senar + senar
parell + parell

$(|y|_a + |z|_b = \dot{2})$ ①
$(|y|_a + |z|_b \neq \dot{2})$ cas ②

podem generar amb els mateixos símbols (aSb bSa) cas ① $\boxed{aSa \quad bSb}$ cas ②

$$\begin{cases} S \to aSb \mid bSa \mid aAa \mid bAb \mid c \\ A \to aAb \mid bAa \mid aSa \mid bSb \end{cases}$$

Exemple → $S \Rightarrow aSb \to aaAab \to \underbrace{aaaAaab}_{4}$
parell!

• $L = \{ a^{\alpha_1} b a^{\alpha_2} b \ldots a^{\alpha_n} b \mid n \geq 1 \wedge \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0 \wedge \exists k : 1 \leq k \leq n : \alpha_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \}$

$$\omega = \underbrace{a^{\alpha_1} b \ldots a^{\alpha_{k-1}}}_{*} b a^{\alpha_k} b \underbrace{a^{\alpha_{k+1}} b \ldots a^{\alpha_n} b}_{(a^* b)^*}$$

Aquí hi ha tantes a's com la suma de les anteriors

aabaaabaaaaa!

$$\begin{cases} S \to S'bB \\ S' \to aS'a \mid bS'b \\ B \to Ab \mid \lambda \;\;](a^*b)^* \\ A \to aA \mid b \;\;]\, a^* \end{cases}$$

la paraula mínima és 2 b's

$S \to AbB$
$A \to aAa \mid bA \mid b$
$B \to BC \mid \lambda$
$C \to aC \mid b$

• $L = \{ \omega \in \{a,b\}^* \mid \omega = \omega^R \wedge \exists x,y \in \{a,b\}^* : \omega = xabay \}$

aba|ba|
ababab

és pot generar

$S \to aAa \mid bSb \mid aba$

(axa) $A \to bBb \mid aAa \mid b$
(abxba) $B \to aCa \mid bSb \mid a$
(abaxaba) $C \to aCa \mid bCb \mid a \mid b \mid \lambda$

abxba abaxaba

cas base: aba x aba
aba

cas rec: axa
abxba

⟹ Justificar que genera cada producció

! Patró tantes produccions com símbols té el patró ...aba. ⟹ 3 produccions.

• $L = \{ xcy \mid x,y \in \{a,b\}^* \wedge |x|_a = 2|y|_b \}$

$|x|_a = 2|y|_b$
falta una a

$S \to Sa \mid bS \mid aAb \mid c$ ¿falta una?
$A \to bA \mid Aa \mid aS$

com ha d'acabar amb una c al mig ⟹ recursivitat està al mig

aAb
aS

! En els palíndroms produccions de l'estil aSb, bSa

axb → falta a
bx xb
ax xa
bxa
axa
bxb

• $L = \{x\#y \mid x,y \in \{a,b\}^* \wedge |x| \neq |y|\}$ De les puntes cap al centre

$(|x|\neq|y|)$ $S \to TST \mid TX\# \mid \#TX$
$(|x|+|y|)$ $X \to TX \mid \lambda$
$T \to a \mid b$

Generem paraules de la mateixa longitud i en un moment donat discernim si volem ↑ el nombre de símbols d'una banda o d'una altra.

• $L = \{a^i b^j c^k \mid (j = i+k) \wedge (i = \dot{3}+2)\}$ → 3 produccions tantes com el mòdul

#a's mult 3
#a's mult 3+1
#a's mult 3+2 ⇒ acabem el mot

$= \{\underbrace{a^i b^i}\underbrace{b^k c^k} \mid i = \dot{3}+2\}$ tenim 2 condicions

$S \to XY$
$(\dot{3})\ X \to aAb$
$(\dot{3}+1)\ A \to a$

$S \to AC$
$(\dot{3})\ A \to aBb$
$(\dot{3}+1)\ B \to aDb$
$(\dot{3}+2)\ D \to aAb \mid \lambda$
$C \to bCc \mid \lambda$

• Lema del Bombament.

Els llenguatges regulars compleixen que:

$\forall N \geq 1\ \forall w \in L : |w| > N : \exists x,y,z : w = xyz \wedge |xy| \leq N \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L.$

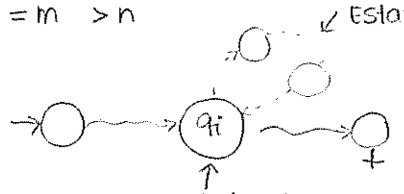
bombament

iterem i vegades el mot intermig i també $\in L$

n estats

$w \in L \quad |w| = m \quad > n$

Estats intermitjos



Estat pel qual s'hi passa dues vegades

condició necessària però no suficient ⇒ farem ús del contrarecíproc. ⇒

*(Contrarecíproc) → per demostrar que un llenguatge no és regular.

> Si $\forall N \geq 1 : \exists w \in L : \forall x,y,z : w = xyz \wedge |xy| \leq N \wedge |y| \geq 1 : \exists i \geq 0 : xy^iz \notin L$
> llavors L no és Regular!!

Exemple: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Demostrem que no és regular pel lema del bombament.

$\forall N \geq 1 \quad w = \underbrace{a^N b^N}_{xyz}$

$\forall x,y,z : w = xyz \wedge |xy| \leq N \wedge |y| \geq 1$

$x = a^i$
$y = a^j$
$z = a^{N-i-j} b^N$

Si agafem un bombament de $k=2$, tenim xy^2z:

$w = a^i a^{2j} a^{N-i-j} b^N = a^{N+j} b^N \notin L \Rightarrow$ L no és regular!

== Demostrem:

1). $L_1 = \{a^n b^m \mid n \overset{\neq}{\leq} m\} \notin Reg.$

$\equiv \{a^n b^{n+\alpha} \mid n \geq 0, \alpha \geq 1\}$

Apliquem el lema del Bombament.

$\forall N \geq 1$, considerem el mot $w = a^N b^{N+c} \in L_1$

considerem una descomposició qualsevol de w en 3 mots x, y, z que satisfacin les condicions del lema

$\Rightarrow \forall x, y, z : w = xyz$ i restriccions $|xy| \leq N \wedge |y| \geq 1$

$j+k \leq N \qquad k \geq 1$

on $x = a^j$

$y = a^k$

$z = a^{N-j-k} b^{N+c}$

$\exists i \geq 0 : xy^iz \notin L : \quad xy^iz = a^j a^{ik} a^{N-j-k} b^{N+c} =$

$= a^{N-j-k+j+ik} b^{N+c} = a^{N+k(i-1)} b^{N+c}$

si volem tenir tantes a's com b's

$\Rightarrow k(i-1) = c$

$ki - k = c$

$i = c/k + 1$ tenim que $1 \leq k \leq N$ degut a les restriccions del lema

$\Rightarrow c \geq 1$

sigui $c = N!$ ⟵ té tots els divisors entre 1 i N i garanteix que la divisió sigui entera c/k

$w = a^N b^{N+N!}$

$i = \frac{N!}{N} + 1 \notin L_1 \Rightarrow L_1$ no reg.

$\Rightarrow a^{N+N!} b^{N+N!} \notin L_1$

Altra versió

mots d'a^*b^* que tenen el mateix nombre d'a's que b's

$L_2 = \overline{L_1} \cap a^*b^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin Reg$

$\overline{L_1} = \{w \in \{a,b\}^* \mid (w = a^n b^m \mid n \leq m) \vee w \notin a^*b^*\}$

si L_1 fos regular $\Rightarrow \overline{L_1} \in Reg \Rightarrow L_2 \in Reg$

com que $L_1 \notin reg \Rightarrow L_2 \notin Reg.$

• $L = \{ ww^R \mid w \in \{a,b\}^* \} \notin REG$

Apliquem el lema del bombament.
Donat un natural $N \geq 1$, considerem el mot $w = a^N bba^N$ de longitud superior a N
Per qualsevol descomposició $w = xyz$ sota les condicions del lema del bombament, s'ha de complir :

$$x = a^j \quad y = a^K \quad z = a^{N-j-K} bba^N$$

Amb bombament $i = 2$ es té : $w = xy^2z = a^j a^{2K} a^{N-j-K} bba^N =$
$= a^{N+K} bba^N \notin L \Rightarrow L \notin REG.$

$\Rightarrow$ El bombament desplaça del centre del mot la subcadena de bb. $\Rightarrow w \neq w^R$

• $L = \{ uu^R v \mid u, v \in \{a,b\}^* \}$

$$L \cap A = B \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{si } B \notin REG \ \wedge \\ A \in REG \end{array} \right. \Rightarrow L \notin REG$$

Sigui $L' = L \cap aba^*bba^*bab = \{ aba^n bba^n bab \mid n \geq 0 \}$
ja que no és possible construir cap prefix de la forma uu^R sense que la subcadena central sigui bb.
Obliga prendre el mateix nombre de a's a esq i dreta

• $L = \{ a^n \mid n \text{ és } \# \text{compost} \}$

Transformar n de compost a primer $\Rightarrow$ complicat!
Complementari

$\overline{L} = \{ a^n \mid n \text{ és primer} \}$
$\forall N \geq 1$, considerem el mot $w = a^p$ on p és el nombre primer mínim + gran que N.
$\Rightarrow w \in \overline{L}$ i $|w| = p \geq N$.
Per qualsevol descomposició de w en xyz sota les condicions del lema tenim $w = xyz$ on

$$x = a^j \quad y = a^k \quad z = a^{p-j-k} \qquad \text{amb } j+k \leq N \text{ i } k \geq 1$$

$\Rightarrow$ cal trobar un valor d'i tal que el mot bombat no pertanyi a $\overline{L}$

$$xy^iz = a^j a^{ik} a^{p-j-k} = a^{p+k(i-1)}$$

si prenem $i = p+1$ ens quedarà $a^{p+k(p+1-1)} = a^{p+kp} = a^{p(k+1)}$
$\notin \overline{L}$ ja que $p(k+1)$ és un nombre compost $\Rightarrow \overline{L} \notin REG$
$\Rightarrow L \notin REG$

- $L = \{ baba^2ba^3 \ldots ba^n \mid n \geq 0 \}$

Dificultat: moltes alternances de a's i b's en els seus primers símbols i això ens obliga a fer una distinció per casos de la localització del submot y dintre d'un prefix de N símbols.

Considerem el complementari

$L^R = \{ a^n b a^{n-1} b \ldots ab \mid n \geq 0 \}$

Ara ja tenim prefixos d'a's arbitràriament llargs i podem aplicar el lema del bombament.

$\forall N \geq 1$, considerem el mot $w = a^N b a^{N-1} b \ldots ab \in L^R$ $\quad x = a^j \; y = a^k \; z = a^{N-j-k} b a^{N-1} \ldots$

Qualsevol bombament $\neq 1$ ens permet veure que $xy^iz \notin L^R$

$i = 2 \Rightarrow a^{N+K} b a^{N-1} \ldots \notin L^R$

$\Rightarrow L^R \notin REG$

$\Rightarrow L \notin REG$

Sabem que si L és regular, LL també ho és. Demostreu que el recíproc és fals $\Rightarrow$ El fet que LL sigui regular no implica que L ho sigui.

Considerem el llenguatge $L = \overline{\{a^n b^n \mid n \geq 0\}} \cup \{\lambda\}$

- L no és regular, perquè es té $L \cap \{a,b\}^+ = \overline{\{a^n b^n \mid n \geq 0\}}$, per tant, $\overline{L \cap \{a,b\}^+} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.
  si L fos regular, la seva $\cap$ amb $\{a,b\}^+$ també ho seria, així com la complementació d'aquesta intersecció, perquè tant la complementació com la intersecció són op que preserven la regularitat. Però, sabem que $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ no ho és.

- LL és regular. Demostrarem que $LL = \{a,b\}^*$. Només cal demostrar $\{a,b\}^* \subseteq LL$. Sigui $w \in \{a,b\}^*$, sempre el podem descompondre en factors $w = xy$ tq $x \in L$ i $y \in L$. Tenim 3 possibilitats:

  1. $w = \lambda \Rightarrow x = \lambda$ i $y = \lambda \Leftarrow \lambda \in L$
  2. $w = a^n b^n$ per algun $n > 0$, $x = a$ i $y = a^{n-1} b^n \Rightarrow$ tant x com $y \in L$
  3. $w \neq a^n b^n$ per cap $n \geq 0$ Fem $\lambda = x$ i $y = w$