

**Tema 3: Modulaciones Digitales a Través de
Canales Limitados en Banda
COMII
ETSETB-UPC**

Este documento pretende ser una ayuda para el estudio del tema 3 de la asignatura COMII de la ETSETB (Plan de Ing. en Telecomunicaciones), UPC.

Algunos de los desarrollos presentados en la versión de este año, enfatizan en mayor grado que las versiones anteriores el trabajo con nomenclatura vectorial y matricial. En parte, es debido a la colaboración en la preparación de la docencia de esta asignatura, con el resto de profesores de Comunicaciones II.

Margarita Cabrera
Profesora de Comunicaciones II
Dept. TSC
ETSETB-UPC
Septiembre, 2009

3 MODULACIONES DIGITALES A TRAVÉS DE CANALES LIMITADOS EN BANDA. 1

3.1	Introducción.....	1
3.2	Autocorrelación y Densidad Espectral	2
3.2.1	Momentos estadísticos de las secuencias de coordenadas	2
3.2.2	Cálculo de la media estadística del proceso.....	7
3.2.3	Cálculo de la función de autocorrelación.	8
3.2.4	Potencia Media	10
3.2.5	Densidad Espectral.	10
3.2.6	Ejemplos Densidad Espectral.	11
3.3	Interferencia Inter-simbólica: ISI.....	17
3.3.1	Estructura del vector de datos recibido para el caso de canal ideal.	17
3.3.2	Estructura del vector de datos recibido para el caso de canal NO ideal y dimensión $L=1$	18
3.3.3	Estructura del vector de datos recibido para el caso de canal NO ideal y dimensión $L>1$	20
3.3.4	Ejemplo de canal de comunicaciones con ISI.....	23
3.4	Pulsos de Nyquist.....	27
3.4.1	Diseño de pulsos para $L=1$	27
3.4.2	Condiciones de ISI = 0 en el dominio del tiempo:.....	28
3.4.3	Condiciones de ISI = 0 en el dominio de la frecuencia:	29
3.4.4	Ejemplo	29
3.4.5	Pulsos coseno realzado	30
3.4.6	Diseño de pulsos para $L>1$	34
3.5	Ecualización para dimensión de espacio de señal $L=1$.	36
3.5.1	Criterios de medida de ISI.....	36
3.5.2	Estrategias de compensación de ISI.....	37
3.5.3	Filtrado de tipo FIR	39
3.5.4	Criterio de Forzador de Ceros.....	40
3.5.5	Ruido a través del ecualizador discreto	41
3.5.6	Criterio MSE	43
3.5.7	Ejemplo de Ecualización.	46
3.5.8	Metodología en el diseño de un ecualizador FIR.....	50
3.6	Filtros Terminales Óptimos.....	51
3.6.1	Objetivos	51
3.6.2	Autocorrelación del pulso transmitido.....	53
3.6.3	Obtención de las funciones de transferencia de los FTO.....	53
3.7	Ejercicios Propuestos	56
3.7.1	Ejercicio 1	56
3.7.2	Ejercicio 2.....	56
3.8	Apéndice: Estacionariedad de $y[k]$	57

NOTACIÓN DE VARIABLES MATEMÁTICAS:

En general se representan los escalares en cursiva y minúscula: a

En general se representan los vectores en negrita y minúscula: \mathbf{a}

En general se representan las matrices en negrita y mayúscula: \mathbf{A}

$$\sin(x) = \text{sen}(x)$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$$

3 MODULACIONES DIGITALES A TRAVÉS DE CANALES LIMITADOS EN BANDA.

3.1 *Introducción*

En este capítulo se tratan las modulaciones digitales en banda base, cuando el canal de transmisión no es ideal, ya sea por estar limitado en banda, o bien por presentar una función de transferencia con distorsión lineal para todo el ancho de banda ocupado por la señal útil.

El tema se inicia con el cálculo de la función de autocorrelación y de la función de densidad espectral de las modulaciones digitales. En principio se considera un espacio de señal multidimensional. Posteriormente se presentan ejemplos en una dimensión.

En este apartado también se definen los conceptos de Interferencia InterSimbólica (ISI) e Interferencia InterCoordenadas (ICI), aunque en la práctica no se distinguirá entre ambos tipos de interferencia y se tratarán conjuntamente.

Se introducen los pulsos coseno realzado como los más utilizados para evitar la ISI en un canal limitado en banda.

Finalmente, tanto la ecualización como el diseño de Filtros Terminales Óptimos (FTO), se presentan para un espacio de señal de dimensión $L=1$. La generalización de técnicas de ecualización a espacios de señal de dimensión mayor se tratará en el último tema del programa.

3.2 Autocorrelación y Densidad Espectral

En el cálculo de la función de auto-correlación y de la función de densidad espectral de una señal modulada digitalmente, se parte de la siguiente expresión:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_m(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_l[n] \varphi_l(t-nT) \quad (3.1)$$

Se considera la modulación $s(t)$, como un proceso aleatorio, donde las diferentes coordenadas forman L procesos discretos estacionarios y por tanto los valores $\alpha_l[n]$ son variables aleatorias. Las funciones $\varphi_l(t)$ son funciones deterministas de energía finita.

En este apartado se analizan las siguientes funciones:

- Media estadística $\mu_s(t)$ y función de Autocorrelación $R_s(t+\tau, t)$ del proceso $s(t)$. Ambas funciones, en general, resultan periódicas en tiempo, por lo que el proceso $s(t)$, se clasifica como cicloestacionario.
- Función Correlación promedio temporal $\hat{R}_s(\tau)$ del proceso $s(t)$.
- Función de Densidad espectral $S_s(f)$ del proceso $s(t)$.

Con el fin de agilizar y compactar la formulación, se presenta en parte de los análisis la versión vectorial de los desarrollos. Para la expresión (3.1) resulta, dicha versión resulta:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{s}[n] \boldsymbol{\varphi}(t-nT)$$

donde el símbolo “n-ésimo” se puede expresar en forma vectorial como:

$$\mathbf{s}[n] = \begin{pmatrix} \alpha_1[n] \\ \vdots \\ \alpha_L[n] \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_L(t) \end{pmatrix};$$

3.2.1 Momentos estadísticos de las secuencias de coordenadas

En el desarrollo de la autocorrelación del proceso $s(t)$, aparecerán por tanto las diferentes funciones de correlación cruzada y de autocorrelación entre las diferentes secuencias de coordenadas. Dichas secuencias se modelan como procesos aleatorios discretos y estacionarios. Si la secuencia de bits a partir de la que se realiza la codificación de símbolo, es estacionaria, también se cumple la propiedad de estacionariedad para la secuencia de símbolos resultante y por lo tanto para sus coordenadas.

La característica de estacionariedad se traduce en las siguientes propiedades para los momentos estadísticos de primer y de segundo orden de las secuencias:

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha_l}[k] &= E[\alpha_l[k]] = \mu_{\alpha_l}; \\ R_{\alpha_l \alpha_j}[n+k, n] &= E[\alpha_l[n+k] \alpha_j[n]] = R_{\alpha_l \alpha_j}[k] \end{aligned} \quad (3.2)$$

La función de covarianza se relaciona con los momentos anteriores según:

$$\begin{aligned}
C_{\alpha_i \alpha_j} [k] &= E \left[\left(\alpha_i [n+k] - \mu_{\alpha_i} \right) \left(\alpha_j [n] - \mu_{\alpha_j} \right) \right] \\
R_{\alpha_i \alpha_j} [k] &= C_{\alpha_i \alpha_j} [k] + \mu_{\alpha_i} \mu_{\alpha_j}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

El cálculo de las funciones anteriores puede realizarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\mu_{\alpha_i} &= E [\alpha_i [k]] = \sum_{m=1}^M \Pr(\underline{s}_m) \alpha_{ml} [k] \\
R_{\alpha_i \alpha_j} [k] &= E [\alpha_i [n+k] \alpha_j [n]] = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \Pr(\mathbf{s}_m, \mathbf{s}_{m'}) \alpha_{ml} [n+k] \alpha_{m'j} [n]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

En el desarrollo de (3.4), las coordenadas con doble subíndice $\alpha_{ml} [n]$ deben interpretarse del siguiente modo. El primer subíndice m indica la señal determinada dentro del espacio de señal, $1 \leq m \leq M$ y el segundo subíndice l , indica la coordenada l -ésima, $1 \leq l \leq L$.

Si los símbolos se han codificado a partir de los bits "SIN MEMORIA", las expresiones (3.2) y (3.3) se simplifican, así como su cálculo. En esta situación $\Pr(\mathbf{s}_m, \mathbf{s}_{m'}) = \Pr(\mathbf{s}_m) \Pr(\mathbf{s}_{m'})$ y las variables $\alpha_i [n+k]; \alpha_j [n]$ son estadísticamente independientes entre sí.

$$\begin{aligned}
R_{\alpha_i \alpha_j} [k] &= E [\alpha_i [n+k] \alpha_j [n]] = E [\alpha_i [n+k]] E [\alpha_j [n]] = \mu_{\alpha_i} \mu_{\alpha_j} \\
k &\neq 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
C_{\alpha_i \alpha_j} [k] &= C_{\alpha_i \alpha_j} [0] \delta [k] \\
R_{\alpha_i \alpha_j} [k] &= C_{\alpha_i \alpha_j} [0] \delta [k] + \mu_{\alpha_i} \mu_{\alpha_j}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

A continuación se calculan las funciones anteriores para algunos casos de modulaciones digitales unidimensionales ($L=1$).

Vectorizando las expresiones anteriores, se definen las siguientes funciones:

Vector media de la secuencia de símbolos:

$$\boldsymbol{\mu}_s = E [\mathbf{s} [n]] = \begin{pmatrix} \mu_{\alpha_1} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_L} \end{pmatrix}$$

Matriz de Correlación de la secuencia de símbolos:

$$\mathbf{R}_s [m] = E [\mathbf{s} [n+m] \mathbf{s}^H [n]] = \begin{pmatrix} R_{\alpha_1 \alpha_1} [0] & R_{\alpha_1 \alpha_2} [-1] & \vdots & R_{\alpha_1 \alpha_L} [-L] \\ R_{\alpha_2 \alpha_1} [1] & R_{\alpha_2 \alpha_2} [0] & \vdots & R_{\alpha_2 \alpha_L} [1-L] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{\alpha_L \alpha_1} [L] & R_{\alpha_L \alpha_2} [L-1] & \vdots & R_{\alpha_L \alpha_L} [0] \end{pmatrix}$$

Matriz de Covarianza de la secuencia de símbolos:

$$\mathbf{C}_s[m] = E\left[(\mathbf{s}[n+m] - \boldsymbol{\mu}_s)(\mathbf{s}[n] - \boldsymbol{\mu}_s)^H\right] = \mathbf{R}_s[m] - \boldsymbol{\mu}_s \boldsymbol{\mu}_s^H$$

Cuando la secuencia de símbolos se codifica sin memoria, las funciones anteriores se simplifican:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_s[m] &= \mathbf{C}_s[0] \delta[m] \\ \mathbf{R}_s[m] &= \mathbf{C}_s[0] \delta[m] + \boldsymbol{\mu}_s \boldsymbol{\mu}_s^H\end{aligned}$$

Señal 2PAM polar

Es una codificación sin memoria, por lo que el resultado deberá coincidir con (3.6).

Probabilidad	$b[n]$	$\alpha_1[n]$
P_0	0	$-\frac{d}{2}$
P_1	1	$+\frac{d}{2}$

Tabla 1. Codificación de símbolos para 2PAM polar

Probabilidad	$b[n]; b[n+1]$	$\alpha_1[n]; \alpha_1[n+1]$	$\alpha_1[n] \alpha_1[n+1]$
$P_0 P_0$	00	$-\frac{d}{2} - \frac{d}{2}$	$+\frac{d^2}{4}$
$P_1 P_0$	10	$+\frac{d}{2} - \frac{d}{2}$	$-\frac{d^2}{4}$
$P_0 P_1$	01	$-\frac{d}{2} + \frac{d}{2}$	$-\frac{d^2}{4}$
$P_1 P_1$	11	$+\frac{d}{2} + \frac{d}{2}$	$+\frac{d^2}{4}$

Tabla 2. Codificación de dos símbolos para 2PAM polar

A partir de la Tabla 1, Tabla 2 y de (3.4) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mu_{\alpha_1} &= \frac{d}{2}(P_1 - P_0) \\ R_{\alpha_1}[0] &= \frac{d^2}{4} = E_b \\ R_{\alpha_1}[k] &= \frac{d^2}{4}(P_1 - P_0)^2 + \frac{d^2}{4}(1 - (P_1 - P_0)^2)\delta[k] = \\ &= \frac{d^2}{4}(P_1 - P_0)^2 + d^2 P_0 P_1 \delta[k]\end{aligned}$$

para el caso de símbolos equiprobables las expresiones anteriores se reducen a:

$$\mu_{\alpha_1} = 0 \quad R_{\alpha_1}[k] = \frac{d^2}{4} \delta[k] = E_b \delta[k]$$

Señal 2PAM UNI-polar

Es una codificación sin memoria, por lo que el resultado deberá coincidir con (3.6).

Probabilidad	$b[n]$	$\alpha_1[n]$
P_0	0	0
P_1	1	d

Tabla 3. Codificación de símbolos para 2PAM UNIpolar

Probabilidad	$b[n]; b[n+1]$	$\alpha_1[n]; \alpha_1[n+1]$	$\alpha_1[n] \alpha_1[n+1]$
--------------	----------------	------------------------------	-----------------------------

$P_0 P_0$	00	0;0	0
$P_1 P_0$	10	$d;0$	0
$P_0 P_1$	01	$0;d$	0
$P_1 P_1$	11	$d;d$	$+d^2$

Tabla 4. Codificación de dos símbolos para 2PAM UNipolar

A partir de la Tabla 3, Tabla 4 y de (3.4) se obtiene:

$$\mu_{\alpha_1} = dP_1$$

$$R_{\alpha_1}[k] = d^2 P_1 P_0 \delta[k] + d^2 P_1^2$$

para el caso de símbolos equiprobables las expresiones anteriores se reducen a:

$$\mu_{\alpha_1} = \frac{d}{2} \quad R_{\alpha_1}[k] = \frac{d^2}{4} \delta[k] + \frac{d^2}{4} = \frac{E_b}{2} \delta[k] + \frac{E_b}{2}$$

Señal 2PAM BIpolar

Es una codificación CON memoria. Cuando el bit es '0', la señal se codifica a 0 voltios. Cuando el bit es '1', la señal se codifica a $\pm A$ volts. de forma alternada. Este ejemplo se desarrolla únicamente para bits equiprobables $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$.

Al igual que en 2PAM polar y en 2PAM Unipolar, la base ortonormal generadora del espacio de

señal es de dimensión $L=1$, $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$.

Probabilidad	$b[n]$	$\alpha_1[n]$	$s_m(t)$
$P_0 = \frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{P_1}{2} = \frac{1}{4}$	1	$+d$	$A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$
$\frac{P_1}{2} = \frac{1}{4}$	1	$-d$	$-A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

Tabla 5. Codificación de símbolos para 2PAM Bipolar

Probabilidad	$b[n]; b[n+1]$	$\alpha_1[n]; \alpha_1[n+1]$	$\alpha_1[n] \alpha_1[n+1]$
$\frac{1}{4}$	00	0;0	0
$\frac{1}{4}$	10	$\pm d; 0$	0
$\frac{1}{4}$	01	$0; \pm d$	0
$\frac{1}{4}$	11	$\pm d; \mp d$	$-d^2$

Tabla 6. Codificación de dos símbolos para 2PAM BIpolar

Pro b.	$b[n]; b[n+1]; b[n+2]$	$\alpha_1[n]; \alpha_1[n+1]; \alpha_1[n+2]$	$\alpha_1[n+2] \alpha_1[n]$
$\frac{1}{8}$	000	0;0;0	0
$\frac{1}{8}$	001	$0; 0; \pm d$	0
$\frac{1}{8}$	010	$0; \pm d; 0$	0

$\frac{1}{8}$	011	$0; \pm d; \mp d$	0
$\frac{1}{8}$	100	$\pm d; 0; 0$	0
$\frac{1}{8}$	101	$\pm d; 0; \mp d$	$-d^2$
$\frac{1}{8}$	110	$\pm d; \mp d; 0$	0
$\frac{1}{8}$	111	$\pm d; \mp d; \pm d$	$+d^2$

Tabla 7. Codificación de tres símbolos para 2PAM BIpolar

A partir de Tabla 5, Tabla 6, Tabla 7 y de (3.4) se obtiene:

$$\mu_{\alpha_1} = d \frac{P_1}{2} - d \frac{P_0}{2} + 0P_0 = 0$$

$$R_{\alpha_1}[0] = d^2 \frac{1}{4} + d^2 \frac{1}{4} = \frac{d^2}{2}; R_{\alpha_1}[\pm 1] = -\frac{d^2}{4}; R_{\alpha_1}[\pm 2] = d^2 \frac{1}{8} - d^2 \frac{1}{8} = 0$$

La expresión anterior se generaliza del siguiente modo:

$$R_{\alpha_1}[k] = \begin{cases} \frac{d^2}{2} = E_b & k = 0 \\ -\frac{d^2}{4} = -\frac{E_b}{2} & k = \pm 1 \\ 0 & |k| > 1 \end{cases}$$

Señal 2PPM

Es una codificación sin memoria. En este ejemplo se aplica directamente (3.6) sobre la Tabla 8.

Probabilidad	$b[n]$	$\alpha_1[n]$	$\alpha_2[n]$
P_0	0	$+\frac{d}{\sqrt{2}}$	0
P_1	1	0	$+\frac{d}{\sqrt{2}}$

Tabla 8. Codificación de símbolos para 2PPM

Debido a que la dimensión del espacio de señal es $L=2 > 1$, se presentan directamente las funciones matriciales y/o vectoriales.

$$\boldsymbol{\mu}_s = \frac{d}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_s[0] = \frac{d^2}{2} \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_s[0] = \mathbf{R}_s[0] - \boldsymbol{\mu}_s \boldsymbol{\mu}_s^H = \frac{d^2}{2} P_0 P_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_s[m] = \frac{d^2}{2} P_0 P_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \delta[m] + \frac{d^2}{2} \begin{pmatrix} P_0^2 & P_0 P_1 \\ P_0 P_1 & P_1^2 \end{pmatrix}$$

para el caso de símbolos equiprobables $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$, la función matricial de correlación se reduce a:

$$\boldsymbol{\mu}_s = \frac{d}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{E_b}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_s[0] = \frac{d^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{E_b}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_s[0] = \mathbf{R}_s[0] - \boldsymbol{\mu}_s \boldsymbol{\mu}_s^H = \frac{d^2}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{E_b}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_s[m] = \frac{d^2}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \delta[m] + \frac{d^2}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{E_b}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \delta[m] + \frac{E_b}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_s[0] = \frac{E_b}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_s[m] = \frac{E_b}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; m \neq 0$$

Señales Biortogonales

Es una codificación sin memoria. En este ejemplo se aplica directamente (3.6) sobre la Tabla 9. Se considera desde un principio equiprobabilidad de bits.

Probabilidad	$b[2n] \ b[2n+1]$	$\alpha_1[n]$	$\alpha_2[n]$
$\frac{1}{M} = \frac{1}{4}$	11	$+\frac{d}{2}$	$+\frac{d}{2}$
$\frac{1}{M} = \frac{1}{4}$	01	$-\frac{d}{2}$	$+\frac{d}{2}$
$\frac{1}{M} = \frac{1}{4}$	00	$-\frac{d}{2}$	$-\frac{d}{2}$
$\frac{1}{M} = \frac{1}{4}$	10	$+\frac{d}{2}$	$-\frac{d}{2}$

Tabla 9. Codificación de símbolos para Biortogonales. Bits equiprobables.

Debido a que la dimensión del espacio de señal es $L=2 > 1$, se presentan directamente las funciones matriciales y/o vectoriales.

$$\boldsymbol{\mu}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_s[0] = \mathbf{R}_s[0] = \frac{d^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{2} \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}_s[m] = \frac{d^2}{2} \mathbf{I} \delta[m]$$

3.2.2 Cálculo de la media estadística del proceso

A partir de la expresión de la señal modulada digitalmente (3.1), se calcula en esta sección su función de media estadística:

$$\begin{aligned} \mu_s(t) &= E[s(t)] = E \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_l[n] \varphi_l(t-nT) \right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L E[\alpha_l[n]] \varphi_l(t-nT) = \sum_{l=1}^L \mu_{\alpha_l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_l(t-nT) \end{aligned} \quad (3.7)$$

La versión vectorial de la expresión anterior se muestra como una secuencia de productos escalares:

$$\mu_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_s^T \Phi(t-nT)$$

De (3.7) se deduce que:

$$E[s(t)] = E[s(t+nT)] \quad (3.8)$$

El proceso $s(t)$ resulta cicloestacionario en media.

3.2.3 Cálculo de la función de autocorrelación.

A partir de la expresión de la señal modulada digitalmente (3.1), se calcula en esta sección su función de autocorrelación del proceso:

$$\begin{aligned} R_s(t+\tau, t) &= E[s(t+\tau)s(t)] = \\ &= E \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_l[m] \varphi_l(t+\tau-mT) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_j[n] \varphi_j(t-nT) \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j} [m-n] \varphi_l(t+\tau-mT) \varphi_j(t-nT) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Considerando el carácter estacionario de la secuencia de coordenadas se realiza el cambio de la variable de sumatorio: $k=m-n$, con lo que $m=n+k$. La función de autocorrelación para el proceso queda:

$$R_s(t+\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j} [k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_l(t+\tau-(n+k)T) \varphi_j(t-nT) \quad (3.10)$$

A continuación, se analiza la propiedad de periodicidad en tiempo para la función obtenida.

En la expresión obtenida (3.10), se define:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_l(t+\tau-(n+k)T) \varphi_j(t-nT) = \\ &= \varphi_l(t+\tau-kT) \varphi_j(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \end{aligned} \quad (3.11)$$

se observa que la autocorrelación obtenida en (3.10) depende del origen de tiempos t , de forma periódica, con periodo igual al tiempo de símbolo: T

Es decir, se cumple:

$$R_s(t+\tau, t) = R_s(t+nT+\tau, t+nT) \quad (3.12)$$

El proceso $s(t)$ resulta cicloestacionario en correlación.

Como paso previo al cálculo de la densidad espectral se trabajará con la media temporal en un periodo, de la función de autocorrelación obtenida en (3.12)

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_T R_s(t+\tau, t) dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j} [k] \int_T f(t) dt \quad (3.13)$$

La integral a resolver, consiste en un sumatorio infinito de integrales con periodos de integración continuos y no solapados del mismo integrando:

$$\begin{aligned} \int_T f(t) dt &= \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_l(t+\tau-(n+k)T) \varphi_j(t-nT) dt = \\ &\left\{ \lambda = t-nT \right\} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-nT}^{(1-n)T} \varphi_l(\lambda+\tau-kT) \varphi_j(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (3.14)$$

dado que el integrando en la expresión anterior no depende de n , se obtiene:

$$\int_T f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(\lambda+\tau-kT) \varphi_j(\lambda) d\lambda = R_{\varphi_l \varphi_j}(\tau-kT)$$

y sustituyendo en (3.13), se obtiene la función de correlación promedio temporal:

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j} [k] R_{\varphi_l \varphi_j}(\tau-kT) \quad (3.15)$$

La expresión (3.15) resultante para la autocorrelación promediada del proceso $s(t)$, depende de las correlaciones cruzadas entre las L secuencias de coordenadas (procesos discretos) y de las correlaciones cruzadas entre las L funciones de la base $\varphi_l(t)$ (señales deterministas de energía finita).

Finalmente se resume el desarrollo de (3.10) a (3.15) utilizando la notación matricial:

Función de autocorrelación:

$$R_s(t+\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\varphi}^T(t+\tau-(n+k)T) \mathbf{R}_s[k] \boldsymbol{\varphi}(t-nT)$$

Cálculo de la función de autocorrelación promedio:

$$\begin{aligned} \hat{R}_s(\tau) &= \frac{1}{T} \int_T R_s(t+\tau, t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\varphi}^T(\lambda+\tau-kT) \mathbf{R}_s[k] \boldsymbol{\varphi}(\lambda) d\lambda = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \text{Traza}(\mathbf{R}_s[k] \mathbf{R}_\varphi(\tau-kT)) \end{aligned}$$

donde

- Los elementos de la matriz $\mathbf{R}_\varphi(\tau)$ son $(\mathbf{R}_\varphi(\tau))_{ij} = R_{\varphi_i \varphi_j}(\tau)$
- Las funciones de correlación cruzada entre diferentes funciones de la base, se diseñan para que cumplan las condiciones $R_{\varphi_i \varphi_j}(kT) = \delta[k] \delta[i-j]$, que como se muestra más adelante dentro de este tema, son las condiciones de ISI nula.
- Traza es la suma de los elementos de la diagonal.

3.2.4 Potencia Media

Cálculo de la Potencia Media:

$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T R_s(t, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T E[s^2(t)] dt = \hat{R}_s(0) =$$

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j} [k] R_{\phi_l \phi_j} [-k] = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L R_{\alpha_l \alpha_l} [0] = \frac{E_s}{T} = \frac{E_b}{T_b} \quad (3.16)$$

Justificación de la relación obtenida en (3.16) entre la potencia media P_s y la energía media de símbolo E_s :

$$E_s = \sum_{m=1}^M \Pr(\mathbf{s}_m) E_m = \sum_{m=1}^M \Pr(\mathbf{s}_m) \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}^2 =$$

$$\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \Pr(\mathbf{s}_m) \alpha_{ml}^2 = \sum_{l=1}^L R_{\alpha_l} [0]$$

3.2.5 Densidad Espectral.

Para un proceso cicloestacionario, se calculará la densidad espectral a partir de la función de autocorrelación promedio

$$S_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.17)$$

Al calcular la transformada de Fourier de (3.15) y considerando que:

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j} [k] R_{\phi_l \phi_j} (\tau - kT) =$$

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j} [k] \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT) * R_{\phi_l \phi_j} (\tau)$$

se obtiene:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha_l \alpha_j} [k] \exp(-jk2\pi fT) =$$

$$\frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L S_{\phi_l \phi_j}(f) S_{\alpha_l \alpha_j}(f) \quad (3.18)$$

donde

$$S_{\alpha_l \alpha_j}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha_l \alpha_j} [k] \exp(-jk2\pi fT)$$

A continuación se va a dividir la expresión obtenida en 2 sumatorios, atendiendo a la expresión de las correlaciones de las secuencias de coordenadas en función de medias y covarianzas estadísticas (3.3):

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{\alpha_l \alpha_j}[k] \exp(-jk2\pi fT) +$$

$$\frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) \mu_{\alpha_l} \mu_{\alpha_j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(-jk2\pi fT)$$

y aplicando que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(-jk2\pi fT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k\frac{1}{T})$ se obtiene la siguiente expresión para la función de densidad espectral:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L C_{\alpha_l \alpha_j}[k] \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) \exp(-jk2\pi fT) \quad (3.19)$$

$$+ \frac{1}{T^2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_{\alpha_l} \mu_{\alpha_j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_l(kr) \Phi_j^*(kr) \delta(f - kr)$$

La expresión resultante (3.19) muestra, que las medias estadísticas de las L secuencias de coordenadas producen en general $\delta(f - mr)$ en el espectro de $s(t)$.

Definiendo la función vectorial $\Phi(f) = \begin{pmatrix} \Phi_1(f) \\ \vdots \\ \Phi_L(f) \end{pmatrix}$ la versión matricial de (3.19) queda como:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi^T(f) \mathbf{C}[k] \Phi^*(f) \exp(-jk2\pi fT) + \frac{1}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi^T(kr) \mu_s \mu_s^H \Phi^*(kr) \delta(f - kr)$$

Para el caso de codificación de símbolos sin memoria $C_{\alpha_l \alpha_j}[k] = C_{\alpha_l \alpha_j}[0] \delta[k]$, la expresión anterior queda como:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L C_{\alpha_l \alpha_j}[0] \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) + \frac{1}{T^2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_{\alpha_l} \mu_{\alpha_j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_l(kr) \Phi_j^*(kr) \delta(f - kr)$$

La correspondiente versión matricial resulta:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \Phi^T(f) \mathbf{C}[0] \Phi^*(f) + \frac{1}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi^T(kr) \mu_s \mu_s^H \Phi^*(kr) \delta(f - kr) \quad (3.20)$$

3.2.6 Ejemplos Densidad Espectral.

En esta sección se particularizan las expresiones obtenidas para la correlación promediada (3.15) y para la densidad espectral (3.19) para diferentes casos de modulaciones de pulsos en amplitud (PAM).

Al particularizar las expresiones obtenidas para una dimensión, $L=1$. Para la correlación promediada de (3.15) se deduce:

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha_1 \alpha_1}[k] R_{\varphi_1 \varphi_1}(\tau - kT) \quad (3.21)$$

Para la densidad espectral de (3.19) se deduce:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha_1}[k] |\Phi_1(f)|^2 \exp(-jk2\pi fT) \quad (3.22)$$

o bien:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{\alpha_1}[k] |\Phi_1(f)|^2 \exp(-jk2\pi fT) + \frac{1}{T^2} |\mu_{\alpha_1}|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\Phi_1(kr)|^2 \delta(f - kr) \quad (3.23)$$

Modulación 2PAM Polar (Bits equiprobables)

En este tipo de modulación los bits se codifican sin memoria.

Propiedades de Secuencia de coordenadas:

$$\mu_{\alpha_1} = 0 \quad R_{\alpha_1}[k] = \frac{d^2}{4} \delta[k] = E_b \delta[k]$$

Propiedades Funciones de la base con pulsos sin retorno a cero (NRZ):

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \quad \Phi_1(f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \exp(-j\pi fT)$$

Por tanto:

$$S_s(f) = \frac{E_b}{T_b} \left| \frac{\sin(\pi fT_b)}{\sqrt{T_b} \pi f} \right|^2 = E_b \text{sinc}^2(fT_b) = E_b \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_b}\right) \quad (3.24)$$

donde $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

Propiedades Funciones de la base con pulsos con retorno a cero (RZ):

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right) \quad \Phi_1(f) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \frac{\sin(\pi fT/2)}{\pi f} \exp(-j\pi fT/2)$$

Por tanto:

$$S_s(f) = \frac{E_b}{2} \text{sinc}^2\left(f \frac{T_b}{2}\right) = \frac{E_b}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{2f_b}\right) \quad (3.25)$$

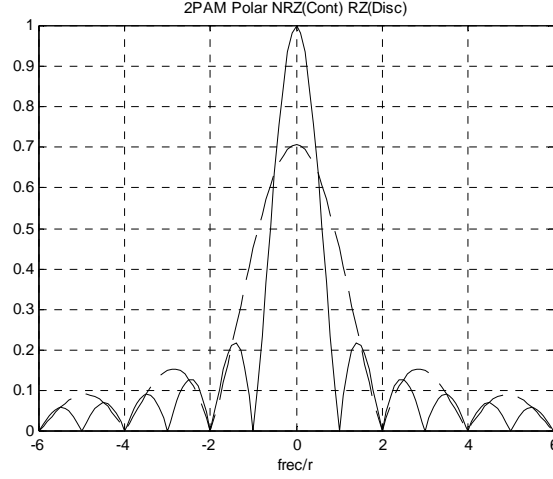


Figura 1 Espectro 2PAM Polar NRZ (3.24) y RZ (3.25), $E_b = 1$. Para facilitar la visión del espectro se ha representado la raíz cuadrada de la densidad espectral

Modulación 2PAM UNIPolar (Bits equiprobables)

En este tipo de modulación los bits se codifican sin memoria.

Propiedades de Secuencia de coordenadas:

$$\mu_{\alpha_1} = \frac{d}{2} \quad R_{\alpha_1}[k] = \frac{d^2}{4} \delta[k] + \frac{d^2}{4} = \frac{E_b}{2} \delta[k] + \frac{E_b}{2} \quad C_{\alpha_1}[k] = \frac{E_b}{2} \delta[k]$$

Propiedades Funciones de la base con pulsos sin retorno a cero (NRZ):

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \quad \Phi_1(f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \exp(-j\pi f T)$$

Por tanto:

$$S_s(f) = \frac{E_b}{2} \frac{1}{T} \left| \frac{\sin(\pi f T)}{\sqrt{T} \pi f} \right|^2 + \frac{1}{T^2} \frac{E_b}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin(\pi k r T)}{\sqrt{T} \pi k r} \right|^2 \delta(f - k r) = \frac{E_b}{2} \left| \text{sinc}(f T) \right|^2 + \frac{1}{T} \frac{E_b}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \text{sinc}(k r T) \right|^2 \delta(f - k r) = \frac{E_b}{2} \text{sinc}^2(f T) + \frac{1}{T} \frac{E_b}{2} \delta(f) \quad (3.26)$$

Propiedades Funciones de la base con pulsos con retorno a cero (RZ):

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right) \quad \Phi_1(f) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f} \exp(-j\pi f T/2)$$

Por tanto:

$$S_s(f) = \frac{E_b}{2} \frac{1}{T} \left| \frac{\sin(\pi f \frac{T}{2})}{\sqrt{\frac{T}{2}} \pi f} \right|^2 + \frac{1}{T^2} \frac{E_b}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin(\pi k r \frac{T}{2})}{\sqrt{\frac{T}{2}} \pi k r} \right|^2 \delta(f - k r) = \frac{E_b}{4} \left| \text{sinc}\left(f \frac{T}{2}\right) \right|^2 + \frac{1}{T} \frac{E_b}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \text{sinc}\left(k r \frac{T}{2}\right) \right|^2 \delta(f - k r) \quad (3.27)$$

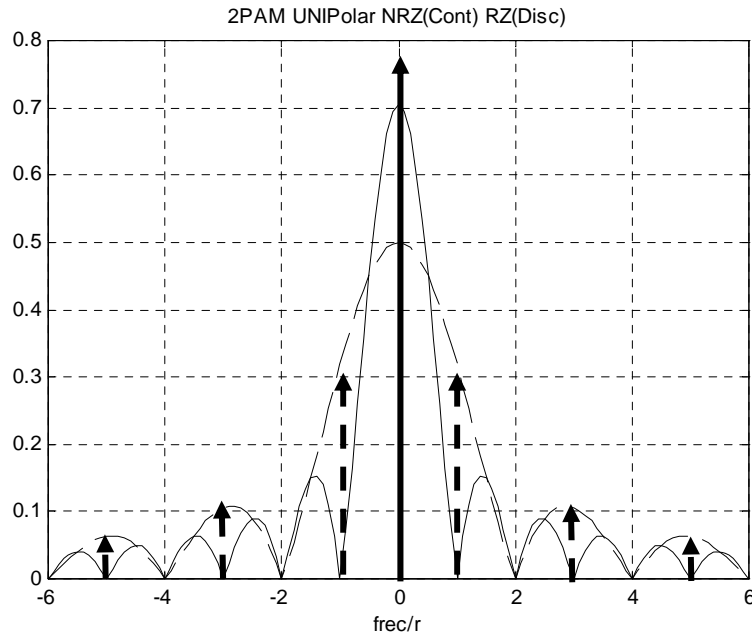


Figura 2 Espectro 2PAM UniPolar NRZ (3.26) y RZ (3.27), $E_b = 1$. Para facilitar la visión del espectro se ha representado la raíz cuadrada de la densidad espectral

Modulación Bipolar o AMI (Bits equiprobables)

En este tipo de modulación los bits se codifican con memoria.

Las propiedades estadísticas de la secuencia de coordenadas se hallan calculadas en 3.2.1 y en resumen son:

$$\mu_{\alpha_1} = 0 \quad R_{\alpha_1}[k] = \begin{cases} \frac{d^2}{2} = E_b & k = 0 \\ -\frac{d^2}{4} = -\frac{E_b}{2} & k = \pm 1 \\ 0 & |k| > 1 \end{cases}$$

Propiedades Funciones de la base con pulsos sin retorno a cero (NRZ):

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \quad \Phi_1(f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \exp(-j\pi f T)$$

Por tanto, al aplicar (3.22):

$$\begin{aligned} S_s(f) &= \frac{1}{T} \frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi^2 f^2} \left(-\frac{E_b}{2} e^{j2\pi f T} + E_b - \frac{E_b}{2} e^{-j2\pi f T} \right) \\ &= E_b \text{sinc}^2(fT) (1 - \cos(2\pi f T)) = 2E_b \text{sinc}^2(fT) \sin^2(\pi f T) \end{aligned} \quad (3.28)$$

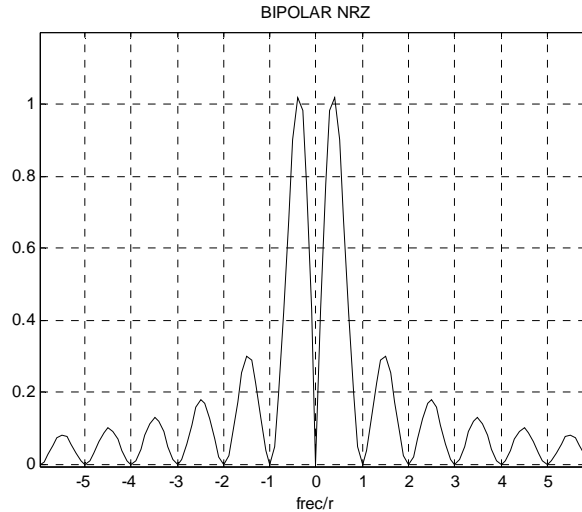


Figura 3 Espectro 2PAM BIPolar NRZ (3.28), $E_b = 1$. Para facilitar la visión del espectro se ha representado la raíz cuadrada de la densidad espectral

Como conclusión de los ejemplos revisados en esta sección es de destacar la relación obtenida entre la densidad espectral de la señal modulada $S_s(f)$ y la densidad espectral de la función de la base $S_{\phi_1}(f) = |\Phi_1(f)|^2$. Para las modulaciones en que la codificación de símbolo se realiza sin memoria se obtiene que ambas funciones son proporcionales, es decir tienen la misma forma en el dominio de la frecuencia. Véanse los ejemplos de PAM polar y unipolar. Para las modulaciones en que la codificación de símbolo se realiza con memoria se obtiene que ambas funciones no son proporcionales, es decir no tienen la misma forma en el dominio de la frecuencia, ya que la correlación existente entre símbolos consecutivos provoca una conformación del espectro. Véase el ejemplo de Bipolar.

Modulación 2PPM (Bits equiprobables):

Dado que se trata de una modulación sin memoria, se puede aplicar directamente la expresión (3.20), donde los diferentes parámetros y funciones, que intervienen se particularizan a la modulación 2PPM como:

$$\Phi(f) = TF[\phi(t)] = TF\left[\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{T}}\Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) \\ \sqrt{\frac{2}{T}}\Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right) \end{pmatrix}\right] = \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f} \begin{pmatrix} \exp(-j\pi f \frac{T}{2}) \\ \exp(-j\pi f \frac{3T}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_s[0] = \frac{d^2}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_s \boldsymbol{\mu}_s^H = \frac{d^2}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto y distinguiendo entre el espectro continuo y el espectro discontinuo en frecuencias:

$$S_s(f) = S_c(f) + S_d(f)$$

Se obtiene para el espectro continuo:

$$\begin{aligned}
S_c(f) &= \frac{1}{T} \Phi^T(f) C[0] \Phi^*(f) = \\
&= \frac{1}{T} \frac{2}{T} \left(\frac{\sin(\pi f T / 2)}{\pi f} \right)^2 \begin{pmatrix} \exp(-j\pi f T / 2) & \exp(-j\pi f 3T / 2) \end{pmatrix} \frac{d^2}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(j\pi f T / 2) \\ \exp(j\pi f 3T / 2) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{d^2}{16} \sin^2 \left(f \frac{T}{2} \right) (2 - \exp(-j\pi f T) - \exp(+j\pi f T)) = \\
&= \frac{E_b}{4} \sin^2 \left(f \frac{T}{2} \right) (1 - \cos(\pi f T)) = \\
&= \frac{E_b}{2} \sin^2 \left(f \frac{T}{2} \right) \sin^2 \left(\pi f \frac{T}{2} \right)
\end{aligned}$$

Y el espectro discontinuo como:

$$\begin{aligned}
S_d(f) &= \frac{1}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi^T(kr) \mu_s \mu_s^H \Phi^*(kr) \delta(f - kr) = \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{T} \left(\frac{\sin(\pi k / 2)}{\pi k} \right)^2 \begin{pmatrix} \exp(-jk \frac{\pi}{2}) & \exp(-j\pi 3k \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \frac{d^2}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(j\pi k \frac{\pi}{2}) \\ \exp(j\pi 3k \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \delta(f - kr) = \\
&= \frac{E_b}{8T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sin^2 \left(\frac{k}{2} \right) (2 + \exp(-j\pi k) + \exp(+j\pi k)) \delta(f - kr) = \\
&= \frac{E_b}{4T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sin^2 \left(\frac{k}{2} \right) (1 + \cos(\pi k)) \delta(f - kr) = \\
&= \frac{E_b}{2T} \delta(f)
\end{aligned}$$

El espectro resultante es por tanto:

$$S_s(f) = S_c(f) + S_d(f) = \frac{E_b}{2} \sin^2 \left(f \frac{T}{2} \right) \sin^2 \left(\pi f \frac{T}{2} \right) + \frac{E_b}{2T} \delta(f) \quad (3.29)$$

Es de destacar que el hecho de que exista covarianza cruzada no nula entre las diferentes coordenadas ha provocado conformación espectral. Dicha propiedad se puede formular del siguiente modo:

$$C_s[0] \neq \sigma_\alpha^2 \mathbf{I} \Rightarrow S_s(f) \neq \text{cte} \Phi_l(f)$$

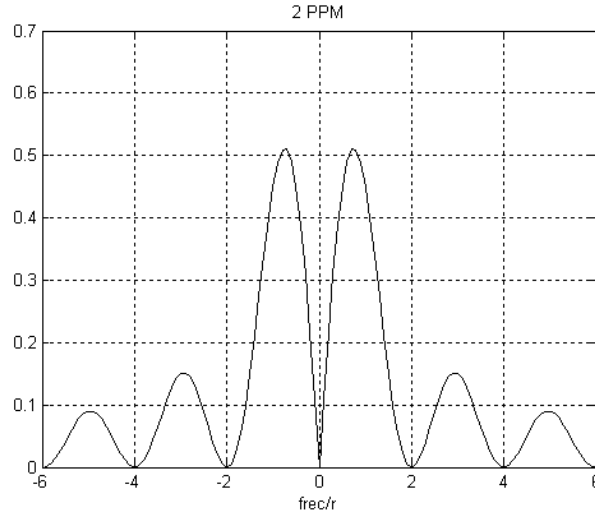


Figura 4 Espectro 2PPM (3.29), $E_b = 1$. Para facilitar la visión del espectro se ha representado la raíz cuadrada de la densidad espectral

3.3 Interferencia Inter-simbólica: ISI

En esta sección se analiza el efecto de los canales AWGN NO ideales sobre señales moduladas digitalmente. El concepto de interferencia Intersimbólica aparece y es de gran importancia en el análisis de la calidad de los sistemas de modulaciones digitales, ya que ha dado lugar al desarrollo de temáticas tan importantes como ecualización.

Al revisar la estructura del receptor óptimo MAP, se obtiene:

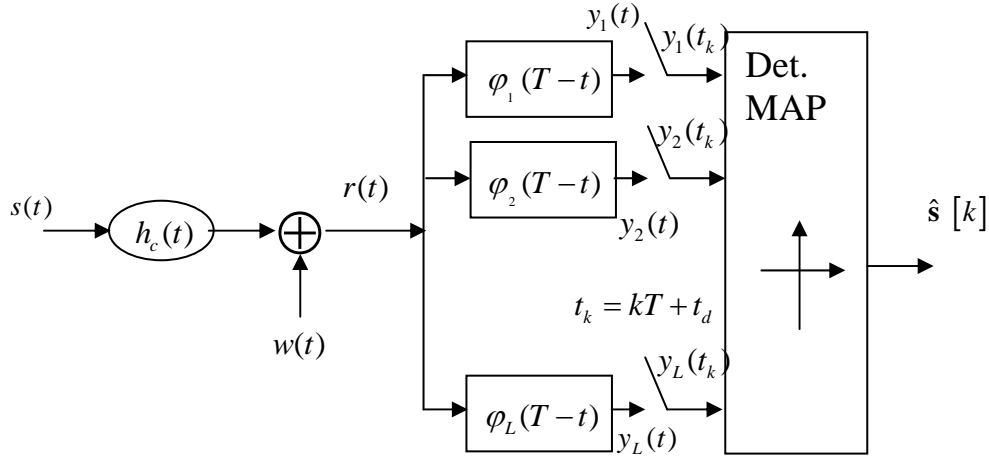


Figura 5 Estructura Receptor Óptimo MAP

3.3.1 Estructura del vector de datos recibido para el caso de canal ideal.

A continuación se calcula la expresión obtenida para el vector de salida del proyector en el espacio de señal de la Figura 5, para el caso de canal ideal.

Para simplificar el desarrollo se considera que la respuesta impulsional del canal es $h_c(t) = \delta(t)$ y por tanto la señal recibida puede expresarse según:

$$r(t) = s(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_j[n] \phi_j(t - nT) + w(t) \quad (3.30)$$

A la salida de cada filtro adaptado de respuesta impulsional $\phi_l(T-t)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} y_l(t) &= s(t) * \phi_l(T-t) + w(t) * \phi_l(T-t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_j[n] \phi_j(t - nT) * \phi_l(T-t) + \beta_l(t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_j[n] R \phi_j \phi_l(t - T - nT) + \beta_l(t) \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde se ha considerado la siguiente relación para señales de energía finita:

$$\begin{aligned} \phi_j(t - nT) * \phi_l(T-t) &= \phi_j(t) * \phi_l(-t) * \delta(t - nT) * \delta(t - T) = \\ &= R \phi_j \phi_l(t) * \delta(t - (n+1)T) = R \phi_j \phi_l(t - (1+n)T) \end{aligned}$$

Para detectar el vector $\mathbf{s}[k]$ se han de muestrear las diferentes salidas en: $t_k = kT + T$, con lo que las correspondientes muestras cumplen:

$$y_l(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_j[n] R\varphi_j \varphi_l(t_k - (n+1)T) + \beta_l(t_k) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_j[n] R\varphi_j \varphi_l((k-n)T) + \beta_l(t_k) \quad (3.32)$$

En la expresión anterior, teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad que han de cumplir las funciones de la base generadora:

$$R\varphi_j \varphi_l((k-n)T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j((k-n)T + \lambda) \varphi_l(\lambda) d\lambda = \delta[j-l] \delta[k-n] \quad (3.33)$$

es decir:

$$R\varphi_l \varphi_l(nT) = \delta[n]$$

$$R\varphi_j \varphi_l(nT) = 0; \quad \forall n; \quad j \neq l$$

se obtiene el valor adecuado para las muestras a la salida de los filtros adaptados de la Figura 5:

$$y_l(t_k) = y_l[k] = \alpha_l[k] + \beta_l(t_k) \quad (3.34)$$

y por tanto se puede expresar el vector detectado como:

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{y}[k] = \begin{pmatrix} y_1(t_k) \\ y_2(t_k) \\ \vdots \\ y_L(t_k) \end{pmatrix} = \mathbf{s}[k] + \mathbf{n}(t_k) = \begin{pmatrix} \alpha_1[k] \\ \alpha_2[k] \\ \vdots \\ \alpha_L[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1(t_k) \\ \beta_2(t_k) \\ \vdots \\ \beta_L(t_k) \end{pmatrix} = \mathbf{s}[k] + \mathbf{n}[k] \quad (3.35)$$

3.3.2 Estructura del vector de datos recibido para el caso de canal NO ideal y dimensión $L=1$.

Para el caso de canal no ideal, y dimensión de la base $L=1$, la expresión de la única coordenada a la salida del filtro adaptado se calcula a continuación. La señal recibida es:

$$r(t) = s(t) * h_c(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] \varphi_1(t - nT) * h_c(t) + w(t) \quad (3.36)$$

A la salida del filtro adaptado de respuesta impulsional $\varphi_1(T-t)$ se obtiene:

$$y_1(t) = s(t) * h_c(t) * \varphi_1(T-t) + w(t) * \varphi_1(T-t) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] \varphi_1(t - nT) * h_c(t) * \varphi_1(T-t) + \beta_1(t) \quad (3.37)$$

Se define en este punto una nueva función correspondiente a la influencia del canal sobre la autocorrelación de las funciones de la base generadora. Llamaremos $p_{jl}(t)$ a la función resultante a la salida del filtro adaptado “ l ” cuando la entrada al canal es la función $\varphi_j(t)$

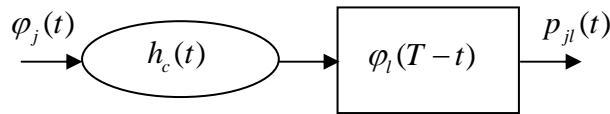


Figura 6 Funciones resultantes a la salida del filtro adaptado.

$$p_{jl}(t) = \varphi_j(t) * h_c(t) * \varphi_l(T-t) = R\varphi_j\varphi_l(t-T) * h_c(t) \quad (3.38)$$

La nueva expresión para la salida del proyector de señal en este caso será:

$$y_l(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] p_{11}(t-nT) + n_1(t) \quad (3.39)$$

La influencia del canal ha provocado la aparición de funciones no ideales a la salida del filtro adaptado. (Cuando el canal era ideal: $p_{11}(t) = \varphi_1(t) * h_c(t) * \varphi_1(T-t) = \varphi_1(t) * \varphi_1(T-t) = R\varphi_1(t-T)$).

En la nueva situación las diferentes muestras del pulso resultante $p_{11}(t)$ tomadas cada T seg. a partir del máximo provocarán interferencia intersimbólica: ISI. En la Figura 7 se muestra el resultado para un pulso determinado y en la Figura 8 para una secuencia de bits determinada.

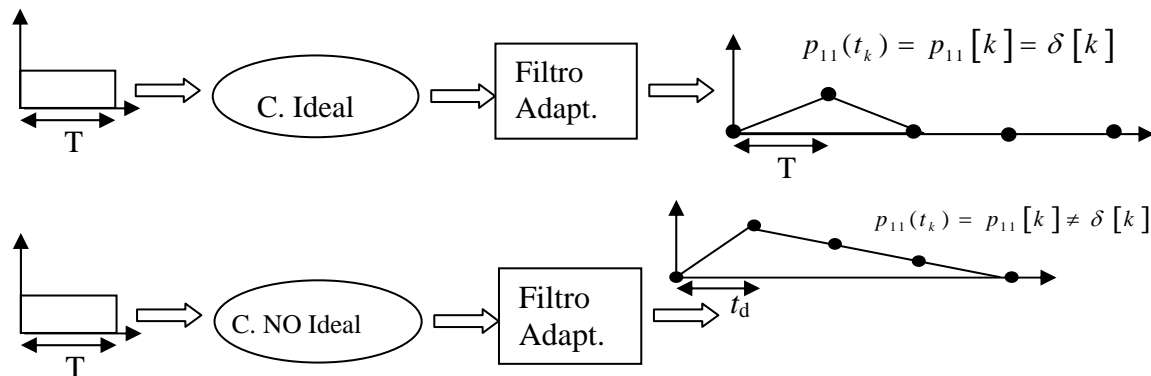


Figura 7 Ejemplo de función resultante a la salida del filtro adaptado.

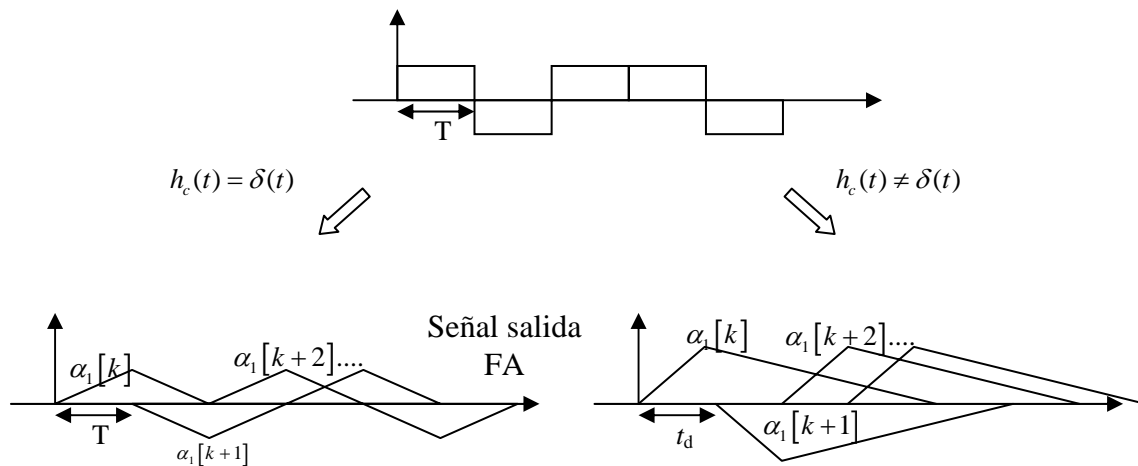


Figura 8 Ejemplo de secuencia resultante a la salida del filtro adaptado

Para detectar el símbolo $\mathbf{s}[k]$ se muestrea en el instante de muestreo: $t_k = t_d + kT$ donde t_d representa el instante para el cual el pulso resultante $p_{11}(t)$ presenta un máximo.

$$y_1(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] p_{11}(t_d + (k-n)T) + \beta_1(t_k) \quad (3.40)$$

Para analizar mejor la expresión (3.40), supongamos que las únicas muestras no nulas de la función $p_{11}(t)$ resultantes son $1 + L_c$: $\{p_{11}(t_d), p_{11}(t_d + T), \dots, p_{11}(t_d + L_c T)\}$, cuyo ejemplo puede verse en la Figura 9 para $L_c = 2$

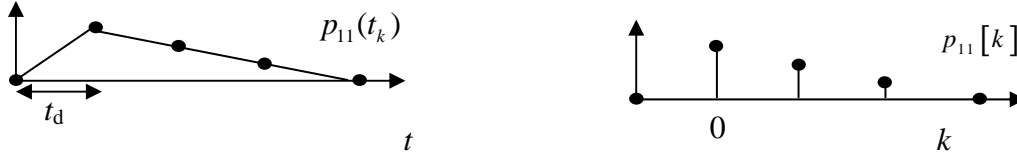


Figura 9 Analogía entre pulso analógico y pulso discreto

La señal muestreada a la salida del filtro adaptado resulta:

$$\begin{aligned} y_1(t_k) &= \sum_{n=k-L_c}^k \alpha_1[n] p_{11}(t_d + (k-n)T) + \beta_1(t_k) = \\ &\alpha_1[k] p_{11}(t_d) + \alpha_1[k-1] p_{11}(t_d + T) + \dots + \alpha_1[k-L_c] p_{11}(t_d + L_c T) + \beta_1(t_k) = \\ &\alpha_1[k] p_{11}[k] + \alpha_1[k-1] p_{11}[k-1] + \dots + \alpha_1[k-L_c] p_{11}[k+L_c] + \beta_1(t_k) = \\ &\alpha_1[k] * p_{11}[k] + \beta_1[k] \end{aligned} \quad (3.41)$$

En (3.41) el primer sumando $\alpha_1[k] p_{11}[k]$ corresponde al término útil, el último $\beta_1[k]$ a la muestra de ruido y el resto constituyen la denominada ISI. La salida muestreada, salvo ruido, se interpreta como una convolución discreta entre la secuencia de símbolos $\alpha_1[k]$ y la respuesta impulsional discreta resultante $p_{11}[k]$.

3.3.3 Estructura del vector de datos recibido para el caso de canal NO ideal y dimensión $L > 1$

Para el caso de canal ideal ($h_c(t) = \delta(t)$) y dimensión del espacio de señal $L > 1$, la ortogonalidad entre las diferentes funciones se expresa a través de la función representada en la Figura 7:

$$p_{jl}(t) = \varphi_j(t) * h_c(t) * \varphi_l(T-t) = R\varphi_j\varphi_l(t-T) * h_c(t) = R\varphi_j\varphi_l(t-T)$$

cuya versión discreta es:

$$p_{jl}[k] = p_{jl}(t_k) = R\varphi_j\varphi_l(kT) = \delta[j-l]\delta[k] \quad (3.42)$$

Para el caso de canal no ideal y $L > 1$, además del efecto descrito en el apartado 3.3.2, la ortogonalidad entre las diferentes funciones (3.42), deja de cumplirse, por lo que la expresión para el vector $\mathbf{y}[k]$ es diferente a la de la ecuación (3.35). Su cálculo se desarrolla a continuación.

La señal recibida es:

$$r(t) = s(t) * h_c(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_j [n] p_j(t - nT) * h_c(t) + w(t) \quad (3.43)$$

A la salida de cada filtro adaptado de respuesta impulsional $\varphi_l(T - t)$ se obtiene:

$$y_l(t) = s(t) * h_c(t) * \varphi_l(T - t) + w(t) * \varphi_l(T - t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_j [n] p_j(t - nT) * h_c(t) * \varphi_l(T - t) + \beta_l(t)$$

Utilizando la definición (3.38) la nueva expresión para las coordenadas a la salida del proyector de señal es:

$$y_l(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_j [n] p_{jl}(t - nT) + \beta_l(t) \quad (3.44)$$

y por tanto para detectar el vector $\mathbf{s}[k]$ al muestrear se obtiene:

$$y_l(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_j [n] p_{jl}(t_d + (k - n)T) + \beta_l(t_k) \quad (3.45)$$

Para analizar mejor la expresión (3.45), supongamos que las únicas muestras no nulas de las funciones $p_{jl}(t)$ resultantes son $1 + L_c$: $\{p_{jl}(t_d), p_{jl}(t_d + T), \dots, p_{jl}(t_d + L_c T)\}$, en este caso (3.45) se puede escribir como:

$$y_l(t_k) = \sum_{n=k-L_c}^k \sum_{j=1}^L \alpha_j [n] p_{jl}(t_d + (k - n)T) + \beta_l(t_k) = \sum_{n=k-L_c}^k (\alpha_1 [n] p_{1l}(t_d + (k - n)T) + \dots + \alpha_l [n] p_{ll}(t_d + (k - n)T) + \dots + \alpha_L [n] p_{Ll}(t_d + (k - n)T)) + \beta_l(t_k) \quad (3.46)$$

- El termino útil en la coordenada anterior es: $\alpha_l[k] p_{ll}(t_d)$
- Los términos de ISI son $\alpha_l[k - i] p_{ll}(t_d + iT)$
- Los términos de ICI (Interferencia entre Coordenadas) son $\alpha_j[k] p_{jl}(t_d)$
- Los términos de ISI+ICI son $\alpha_j[k - i] p_{jl}(t_d + iT)$

La expresión anterior con ayuda de notación vectorial, se puede escribir de forma más compacta:

$$\begin{aligned}
y_l(t_k) &= \sum_{n=k-L_c}^k \sum_{j=1}^L \alpha_j[n] p_{jl}(t_d + (k-n)T) + \beta_l(t_k) = \\
&= \sum_{n=k-L_c}^k \sum_{j=1}^L \alpha_j[n] p_{jl}[k-n] + \beta_l[k] = \\
&= \sum_{n=k-L_c}^k (\alpha_1[n] p_{1l}[k-n] + \dots + \alpha_l[n] p_{ll}[k-n] + \dots + \alpha_L[n] p_{Ll}[k-n]) \\
&+ \beta_l[k] = \\
&= \sum_{n=k-L_c}^k (p_{1l}[k-n] \quad \dots \quad p_{Ll}[k-n]) \begin{pmatrix} \alpha_1[n] \\ \vdots \\ \alpha_L[n] \end{pmatrix} + \beta_l[k]
\end{aligned} \tag{3.47}$$

y llamando

$$\mathbf{p}_l[k] = \begin{pmatrix} p_{1l}[k] \\ \vdots \\ p_{Ll}[k] \end{pmatrix}; \quad \mathbf{s}[n] = \begin{pmatrix} \alpha_1[n] \\ \vdots \\ \alpha_L[n] \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

la ecuación (3.47) se transforma en:

$$y_l(t_k) = \sum_{n=k-L_c}^k \mathbf{p}_l^T[k-n] \mathbf{s}[n] + \beta_l[k] = \sum_{i=0}^{L_c} \mathbf{p}_l^T[i] \mathbf{s}[k-i] + \beta_l[k] \tag{3.49}$$

Considerando el vector completo a la salida del proyector de señal:

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{y}[k] = \sum_{n=k-L_c}^k \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T[k-n] \\ \mathbf{p}_2^T[k-n] \\ \vdots \\ \mathbf{p}_L^T[k-n] \end{pmatrix} \mathbf{s}[n] + \mathbf{n}[k] = \sum_{n=k-L_c}^k \mathbf{P}[k-n] \mathbf{s}[n] + \mathbf{n}[k] \tag{3.50}$$

La interferencia producida en (3.50) es debida tanto a cruce entre símbolos correspondientes a diferentes instantes de tiempo, como a cruce entre coordenadas (ISI+ICI). Nótese que en el caso ideal (Canal sin distorsión) se tendría:

$$\mathbf{P}[i] = \mathbf{I} \delta[i] \Rightarrow \mathbf{y}(t_k) = \mathbf{y}[k] = \mathbf{s}[k] + \mathbf{n}[k] \tag{3.51}$$

En la Figura 10 se muestra el esquema vectorial resultante, obtenido en el caso general de que el canal no sea ideal. La parte hardware del transmisor, el canal de comunicaciones y la parte hardware del receptor, quedan simbolizadas, mediante el canal multidimensional discreto de respuesta impulsional $\mathbf{P}[k]$ y suma de vector de ruido multidimensional y de estadística gaussiana $\mathbf{n}[k]$. Coloquialmente, podemos decir, que el esquema inferior, representa una “foto” del sistema de comunicaciones, desde la perspectiva del espacio de señal, donde todas las señales y sistemas son discretos.

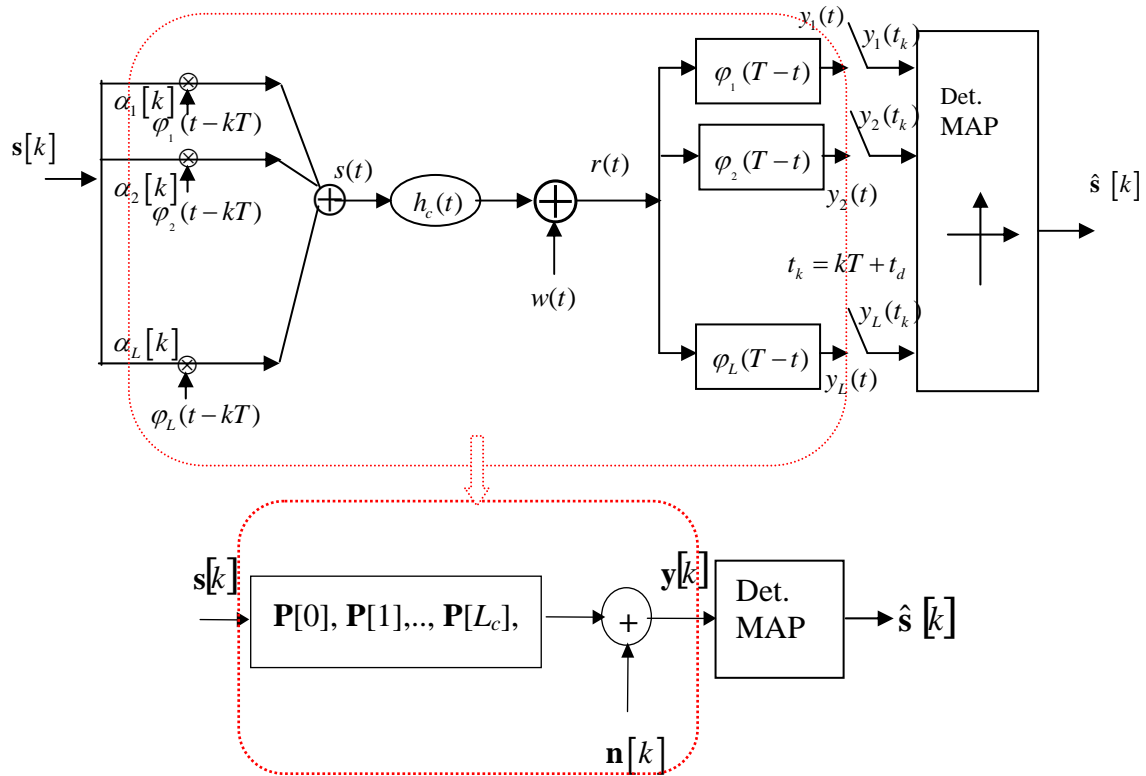


Figura 10 Representación Vectorial del receptor MAP para el caso de canal con respuesta impulsional NO ideal. En general, entre el proyector de espacio de señal y el detector MAP, en situaciones con niveles considerables de interferencia se requerirá aplicar técnicas de minimización de interferencias.

3.3.4 Ejemplo de canal de comunicaciones con ISI

Con el objeto de ilustrar los efectos del canal no ideal sobre la señal transmitida, se analiza en este apartado, la influencia sobre el espacio de señal y sobre la BER, de un canal discreto resultante no ideal de respuesta impulsional para un caso particular.

Se considera la modulación biortogonal, cuyo espacio de señal se muestra en la Figura 11.

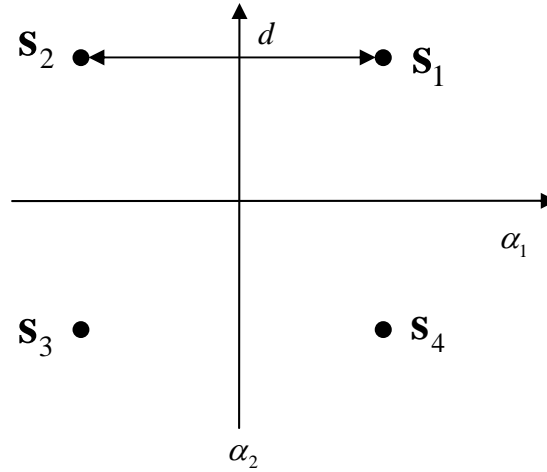


Figura 11 Espacio de señal para la modulación biortogonal.

El canal equivalente de la Figura 10, presenta la respuesta impulsional:

$$\mathbf{P}[k] = \begin{pmatrix} \gamma & 0.2\gamma \\ 0.2\gamma & \gamma \end{pmatrix} \delta[k] + \begin{pmatrix} 0.2\gamma & 0 \\ 0 & 0.2\gamma \end{pmatrix} \delta[k-1]$$

Y el vector de ruido es gaussiano: $\mathbf{n}[k] : \mathcal{N}(\mathbf{0}, \frac{N_0}{2} \mathbf{I})$

Por tanto, el vector recibido se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}[k] &= \begin{pmatrix} \gamma & 0.2\gamma \\ 0.2\gamma & \gamma \end{pmatrix} \mathbf{s}[k] + \begin{pmatrix} 0.2\gamma & 0 \\ 0 & 0.2\gamma \end{pmatrix} \mathbf{s}[k-1] + \mathbf{n}[k] = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & 0.2\gamma \\ 0.2\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1[k] \\ \alpha_2[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2\gamma & 0 \\ 0 & 0.2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1[k-1] \\ \alpha_2[k-1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta[k] \\ \beta[k] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma\alpha_1[k] + 0.2\gamma\alpha_2[k] + 0.2\gamma\alpha_1[k-1] \\ \gamma\alpha_2[k] + 0.2\gamma\alpha_1[k] + 0.2\gamma\alpha_2[k-1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta[k] \\ \beta[k] \end{pmatrix} = \\ &= \gamma \begin{pmatrix} \alpha_1[k] \\ \alpha_2[k] \end{pmatrix} + 0.2\gamma \begin{pmatrix} \alpha_2[k] + \alpha_1[k-1] \\ \alpha_1[k] + \alpha_2[k-1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta[k] \\ \beta[k] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El segundo sumando de la última expresión, representa la ISI+ICI provocada por el canal no ideal y en función del símbolo actual, $s[k]$ y del símbolo inmediatamente anterior $s[k-1]$ toma los valores mostrados en la tabla siguiente:

$s[k] = \begin{pmatrix} \alpha_1[k] \\ \alpha_2[k] \end{pmatrix}$	$s[k-1] = \begin{pmatrix} \alpha_1[k-1] \\ \alpha_2[k-1] \end{pmatrix}$	ISI+ICI $0.2\gamma \begin{pmatrix} \alpha_2[k] + \alpha_1[k-1] \\ \alpha_1[k] + \alpha_2[k-1] \end{pmatrix}$	&	$s[k] = \begin{pmatrix} \alpha_1[k] \\ \alpha_2[k] \end{pmatrix}$	$s[k-1] = \begin{pmatrix} \alpha_1[k-1] \\ \alpha_2[k-1] \end{pmatrix}$	ISI+ICI $0.2\gamma \begin{pmatrix} \alpha_2[k] + \alpha_1[k-1] \\ \alpha_1[k] + \alpha_2[k-1] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ +\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ +\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} +0,4 \\ +0,4 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ +\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ +\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ +0,4 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ +\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} -0,4 \\ -0,4 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} +0,4 \\ 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -0,4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ +\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ +\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} +0,4 \\ 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ +\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ +0,4 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ +\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ +\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} -0,4 \\ +0,4 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -0,4 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} +0,4 \\ -0,4 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} +\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{d}{2}\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En recepción, sin considerar el ruido se tiene el espacio de señal representado en la Figura 12.

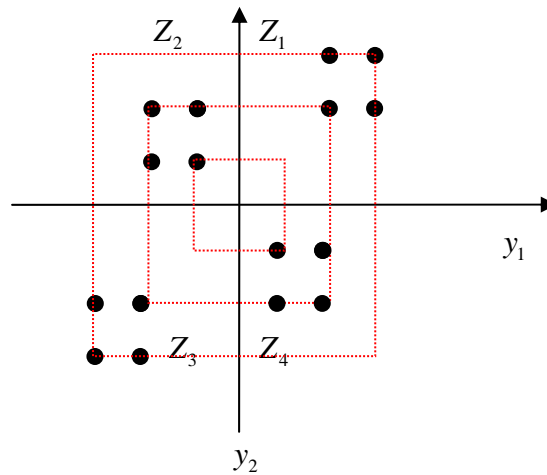


Figura 12 Espacio de señal recibido (en ausencia de ruido). Cada punto transmitido, estadísticamente llega a generar 4 puntos de señal en recepción. Los puntos correspondientes a los vértices del cuadrado intermedio, se corresponden con los 4 puntos de señal transmitidos (atenuados por γ). Los puntos correspondientes a los vértices del cuadrado más pequeño, representan la situación más degradada, ya que la distancia mínima de dichos puntos a las fronteras de decisión es de $0,6\gamma \frac{d}{2}$.

Al calcular la probabilidad de error, para este tipo de señal, se obtiene:

$$P_e = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Pr(e | \mathbf{s}_m)$$

El primero de los sumandos se calcula como:

$$\begin{aligned} \Pr(e | \mathbf{s}_1) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Pr(e | \mathbf{s}[k] = \mathbf{s}_1, \mathbf{s}[k-1] = \mathbf{s}_m) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m=1}^M \left(1 - \int_{Z_1} f_y(\mathbf{y} | \mathbf{s}[k] = \mathbf{s}_1, \mathbf{s}[k-1] = \mathbf{s}_m) d\mathbf{y} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(1 - Q\left(\gamma \frac{d}{2\sigma}\right) \right)^2 \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \left(1 - Q\left(\gamma \frac{1,4d}{2\sigma}\right) \right)^2 \right) + \\ &= \frac{1}{4} 2 \left(1 - \left(1 - Q\left(\gamma \frac{d}{2\sigma}\right) \right) \left(1 - Q\left(\gamma \frac{1,4d}{2\sigma}\right) \right) \right) \simeq Q\left(\gamma \frac{d}{2\sigma}\right) + Q\left(\gamma \frac{1,4d}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

Y el resto se deducen de forma análoga:

$$\begin{aligned} \Pr(e | \mathbf{s}_3) &= \Pr(e | \mathbf{s}_1) \simeq Q\left(\gamma \frac{d}{2\sigma}\right) + Q\left(\gamma \frac{1,4d}{2\sigma}\right) \\ \Pr(e | \mathbf{s}_2) &= \Pr(e | \mathbf{s}_4) \simeq Q\left(\gamma \frac{d}{2\sigma}\right) + Q\left(\gamma \frac{0,6d}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

Con lo que definitivamente que la probabilidad de error es:

$$\begin{aligned} P_e &\simeq \frac{1}{2} Q\left(\gamma \frac{0,6d}{2\sigma}\right) + Q\left(\gamma \frac{d}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\gamma \frac{1,4d}{2\sigma}\right) = \\ &= \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{(0,6)^2 \gamma^2 2 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{2\gamma^2 \frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{(1,4)^2 \gamma^2 2 \frac{E_b}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

Comparando el resultado anterior, con la probabilidad de error que se obtiene en condiciones de canal ideal:

Respuesta impulsional con canal ideal: $\mathbf{P}_{ideal}[k] = \gamma \mathbf{I} \delta[k] = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \delta[k]$

Probabilidad de error con canal ideal: $P_{e,ideal} \simeq 2Q\left(\sqrt{2\gamma^2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$

La degradación en pérdida de $\frac{E_b}{N_0}$ en el peor de los casos se mide a partir de la mayor área de gaussiana:

$$10 \log_{10} \left(\frac{2\gamma^2 \frac{E_b}{N_0}}{(0,6)^2 2\gamma^2 \frac{E_b}{N_0}} \right) = -20 \log_{10}(0,6) = 4,43 \text{ dB}$$

Es decir, para mantener la probabilidad de error para el canal de este ejemplo, respecto al caso de canal ideal, se debe incrementar en 4,43 dB la energía transmitida por bit.

3.4 Pulsos de Nyquist

El objetivo de este apartado consiste en llegar a diseñar pulsos a la salida del filtro adaptado que cumplan dos condiciones:

- ISI=0
- Sean limitados en banda.

La segunda condición es necesaria, porque en general el ancho de banda sin distorsión disponible de un canal es limitado. Considérese un canal sin distorsión hasta un ancho de banda determinado: B_c . Implícitamente se van a diseñar las funciones de la base generadora del espacio de señal.

La condición de ISI=0, se analiza sobre los pulsos resultantes a la salida de los filtros adaptados:

$$\begin{aligned} p_{jl}(t) &= \varphi_j(t) * h_c(t) * \varphi_l(t_\varphi - t) \\ &= \varphi_j(t) * \delta(t - t_c) * \varphi_l(t_\varphi - t) = R_{\varphi_j \varphi_l}(t) * \delta(t - t_d) \end{aligned} \quad t_d = t_\varphi + t_c \quad (3.52)$$

y se interpreta como:

$$p_{jl}(t_d + kT) = R_{\varphi_j \varphi_l}(kT) = \delta[k] \delta[j - l] \quad (3.53)$$

En (3.53) se ha supuesto que el canal solo produce un retardo sobre la señal: t_c . Esto significa que presenta una función de transferencia plana para el margen de frecuencias de ocupación de las funciones de la base generadora de señal y a efectos de convolución en el dominio temporal $h_c(t) = \delta(t - t_c)$. Por otro lado el retardo del filtro adaptado $\varphi_l(t_\varphi - t)$, t_φ , depende de la función $\varphi_l(t)$ a diseñar, ya que el retardo se elige para que el filtro adaptado sea causal.

Por tanto, en (3.53) el retardo acumulado total es

$$t_d = t_\varphi + t_c$$

La condición respecto al ancho de banda se traduce en:

$$|P_{jl}(f)| = |\Phi_j(f) \Phi_l^*(f)| = 0; \quad |f| \geq B_c$$

Por tanto, para cualquier función de la base el máximo ancho de banda de ocupación permitido es de B_c Hz.

3.4.1 Diseño de pulsos para L=1.

La señal recibida a la salida del filtro adaptado se expresa como:

$$r(t) = s(t) * h_c(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] p_1(t - nT) * h_c(t) + w(t)$$

A la salida del filtro adaptado de respuesta impulsional $\varphi_1(t_\varphi - t)$ se obtiene:

$$y_1(t) = s(t) * h_c(t) * \varphi_1(t_\varphi - t) + w(t) * \varphi_1(t_\varphi - t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] p_{11}(t - nT) + \beta_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] R_{\varphi_1}(t - t_d - nT) + \beta_1(t) \quad (3.54)$$

En la Figura 13 se muestra el esquema correspondiente para un canal de ancho de banda B_c Hz.

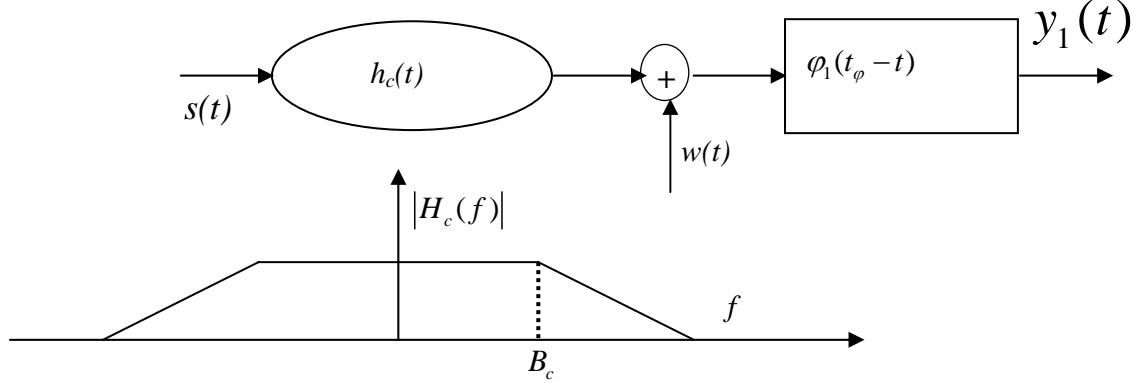


Figura 13 Diagrama de bloques para canal limitado en banda y $L=1$

Por tanto, se requiere diseñar funciones $\varphi_1(t)$ que cumplan las siguientes condiciones:

$$\text{ISI}=0: \quad R_{\varphi_1}(kT) = \delta[k]$$

$$\text{Ancho de banda limitado:} \quad |\Phi_1(f)| = 0; \quad |f| \geq B_c$$

De este modo al muestrear la salida del FA (3.54) se obtiene:

$$y_1(t_k) = y_1(t_d + kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] R_{\varphi_1}((k - n)T) + n_1(t_k) = \alpha_1[k] + n_1(t_k) \quad (3.55)$$

Revisando las condiciones que debe cumplir la función de autocorrelación $R_{\varphi_1}(t)$ para obtener ISI nula, tal como se ha considerado en (3.55) se obtiene tanto el requerimiento que se ha de cumplir en el dominio del tiempo como el requerimiento que se ha de cumplir en el dominio de la frecuencia:

3.4.2 Condiciones de ISI = 0 en el dominio del tiempo:

Sea la función resultante a la salida del filtro adaptado:

$$p_{11}(t) = \varphi_1(t) * \delta(t - t_c) * \varphi_1(t_\varphi - t) = R_{\varphi_1}(t - t_c - t_\varphi) = R_{\varphi_1}(t - t_d) \quad (3.56)$$

Para evitar la interferencia intersimbólica al muestrear la señal en $t_k = t_d + kT$ se debe cumplir:

$$R_{\varphi_1}(t_n - t_d) = R_{\varphi_1}(nT + t_d - t_d) = R_{\varphi_1}[nT] = \delta[n]$$

es decir:

$$R_{\varphi_1}(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{\varphi_1}(nT) \delta(t-nT) = \delta(t) \quad (3.57)$$

3.4.3 Condiciones de ISI = 0 en el dominio de la frecuencia:

En el dominio de la frecuencia, calculando la Transformada de Fourier, TF de (3.57)

$$S_{\varphi_1}(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = r \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_{\varphi_1}(f - nr) = 1 \quad (3.58)$$

Por tanto la autocorrelación $R_{\varphi_1}(t)$ debe cumplir las condiciones de ISI nula en el dominio del tiempo (3.57) y en el dominio de la frecuencia (3.58). Estas dos condiciones son equivalentes, es decir una implica la otra.

De (3.58) se deduce que en el dominio de la frecuencia, al considerar funciones $\varphi_1(t)$ limitadas en banda, su función de densidad espectral debe presentar cierta simetría respecto a la frecuencia $f = \frac{r}{2}$.

$$S_{\varphi_1}\left(\frac{r}{2} - f\right) = \frac{1}{r} - S_{\varphi_1}\left(\frac{r}{2} + f\right) \quad (3.59)$$

En el diseño de funciones $\varphi_1(t)$ que cumplen las condiciones de ISI=0, una metodología adecuada consiste en seguir los siguientes pasos:

1. Elección de $S_{\varphi_1}(f)$
2. Obtención de $\Phi_1(f) = \sqrt{S_{\varphi_1}(f)}$
3. Obtención de $\varphi_1(t) = \text{TF}^{-1}[\Phi_1(f)]$

3.4.4 Ejemplo

Una primera función limitada en banda y que cumple las condiciones de ISI=0 viene dada por la función sinc:

$$R_{\varphi_1}(t) = \text{sinc}(rt) \quad S_{\varphi_1}(f) = |\Phi_1(f)|^2 = \frac{1}{r} \Pi\left(\frac{f}{r}\right) \quad (3.60)$$

es una función que cumple las condiciones de ISI=0 y su ancho de banda es $r/2$. En la Figura 14 se ilustran las condiciones de ISI=0 de forma gráfica:

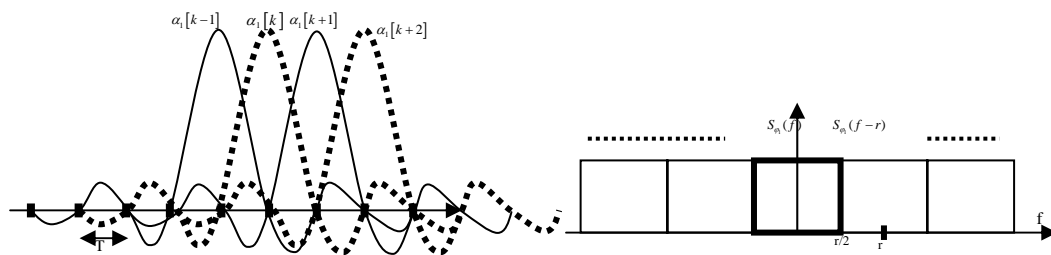


Figura 14 Condiciones de ISI=0, en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

A partir de (3.60) se obtiene:

$$\Phi_1(f) = \frac{1}{\sqrt{r}} \Pi\left(\frac{f}{r}\right) \quad \varphi_1(t) = \sqrt{r} \text{sinc}(rt)$$

Inconvenientes prácticos que presenta esta función:

- Un pequeño error de sincronismo Δt al muestrear provoca valores de ISI proporcionales a $1/k$:

$$\begin{aligned} y_1(t_k + \Delta t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] \text{sinc}((k-n)Tr + \Delta tr) + \beta_1(t_k) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] \frac{\text{sen}((k-n)\pi + \Delta tr\pi)}{(k-n)\pi + \Delta tr\pi} + \beta_1(t_k) \end{aligned}$$

- Las funciones a implementar en Tx y en Rx son Filtro Paso Bajo Ideal con Banda de Transición nula, por lo que son difícilmente implementables.

$$\Phi_1(f) = \frac{1}{\sqrt{r}} \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

3.4.5 Pulsos coseno realzado

Además de la función $R_{\varphi_1}(t)$ del ejemplo mostrado anteriormente, existen muchas otras funciones limitadas en banda y que cumplen las condiciones de ISI nula obtenidas en (3.58). Las funciones denominadas *coseno realzado* son las más utilizadas en la práctica. Dichas funciones (RC ó Raised Cosinus a partir de este punto) en el dominio temporal presentan la siguiente expresión:

$$R_{\varphi_1}(t) = p_{RC}(t) = \text{sinc}(rt) p_{\beta}(t) = \text{sinc}(rt) \frac{\cos(2\pi\beta t)}{1 - (4\beta t)^2} \quad (3.61)$$

De (3.61) se observa que se hallan parametrizadas por el parámetro β , y dado que $p_{\beta}(t)$ se halla

limitada en banda ($P_{\beta}(f) = \frac{\pi}{4\beta} \cos\left(\frac{\pi f}{2\beta}\right) \Pi\left(\frac{f}{2\beta}\right)$) a β Hz. en el dominio frecuencial las denominadas funciones *coseno realzado* presentan las siguientes características también parametrizadas por el parámetro β .

$$P_{RC}(f) = \frac{1}{r} \Pi\left(\frac{f}{r}\right) * P_{\beta}(f) = \begin{cases} \frac{1}{r} \cos^2\left(\frac{\pi}{4\beta}\left(|f| - \frac{r}{2} + \beta\right)\right) & \frac{r}{2} - \beta < |f| < \frac{r}{2} + \beta \\ 0 & |f| < \frac{r}{2} - \beta \text{ or } \frac{r}{2} + \beta < |f| \end{cases} \quad (3.62)$$

De (3.62) se deduce que el ancho de banda de las funciones RC es de $B_{RC} = \frac{r}{2} + \beta$ Hz. Para estas

funciones se define además el factor de roll-off α ó de exceso de ancho de banda como: $\alpha = \frac{\beta}{r/2}$. En estas condiciones se cumple que $0 \leq \alpha \leq 1$ y en general suele darse en %.

La ecuación (3.61) se re-escribe en función de α como:

$$R_{\phi_1}(t) = p_{RC}(t) = \text{sinc}(rt) \frac{\cos(\pi\alpha rt)}{1 - (2\alpha rt)^2}$$

La ecuación (3.62) se re-escribe en función de α como:

$$P_{RC}(f) = \begin{cases} \frac{1}{r} & |f| < \frac{r}{2}(1-\alpha) \\ \frac{1}{r} \cos^2\left(\frac{\pi}{2\alpha r}\left(|f| - \frac{r}{2}(1-\alpha)\right)\right) & \frac{r}{2}(1-\alpha) < |f| < \frac{r}{2}(1+\alpha) \\ 0 & \frac{r}{2}(1+\alpha) < |f| \end{cases}$$

En la Tabla 10 se muestra el ancho obtenido para diferentes factores de roll-off:

% Roll-off	α	β	B_{RC}
0%	0	0	$\frac{r}{2}$
50%	0,5	$\frac{r}{4}$	$\frac{3r}{4}$
100%	1	$\frac{r}{2}$	r

Tabla 10. Ancho de banda de las funciones RC.

Tanto de (3.61) como de (3.62) puede comprobarse que la función RC 0% roll-off coincide con: $p_{RC}(t)_{0\%} = \text{sinc}(rt)$. A medida que aumenta el factor de roll-off se obtiene una característica frecuencial más suave en la banda de transición y la caída de los lóbulos laterales en el dominio del tiempo es del orden de $1/r^3$, por lo que se han solventado en parte los inconvenientes que presenta la función $p_{RC}(t)_{0\%}$. El caso opuesto a esta función viene dado por el factor de roll-off del 100 %:

$$p_{RC}(t)_{100\%} = \frac{\text{sinc}(2rt)}{1 - (2rt)^2} \quad p_{RC}(f)_{100\%} = \frac{1}{r} \cos^2\left(\frac{\pi f}{2r}\right) \Pi\left(\frac{f}{2r}\right) \quad (3.63)$$

De (3.63) puede observarse que esta función además de cumplir (3.58) presenta ceros adicionales en el dominio del tiempo. En la Figura 15, corresponde a la función de lóbulos laterales de nivel más bajo.

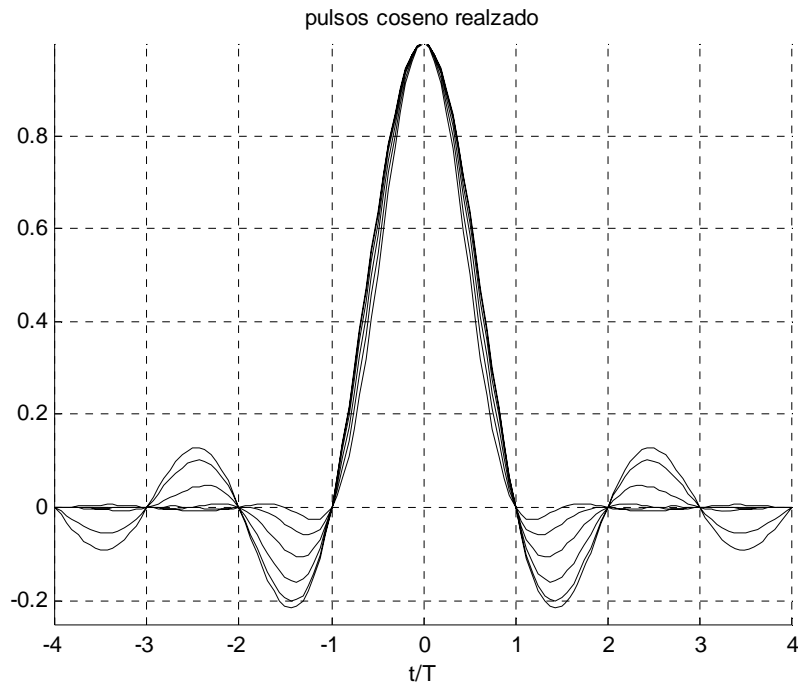


Figura 15 Pulsos Coseno realizado en el dominio del tiempo $\alpha = 0, 20, 40, 60, 80, 100\%$ rolloff

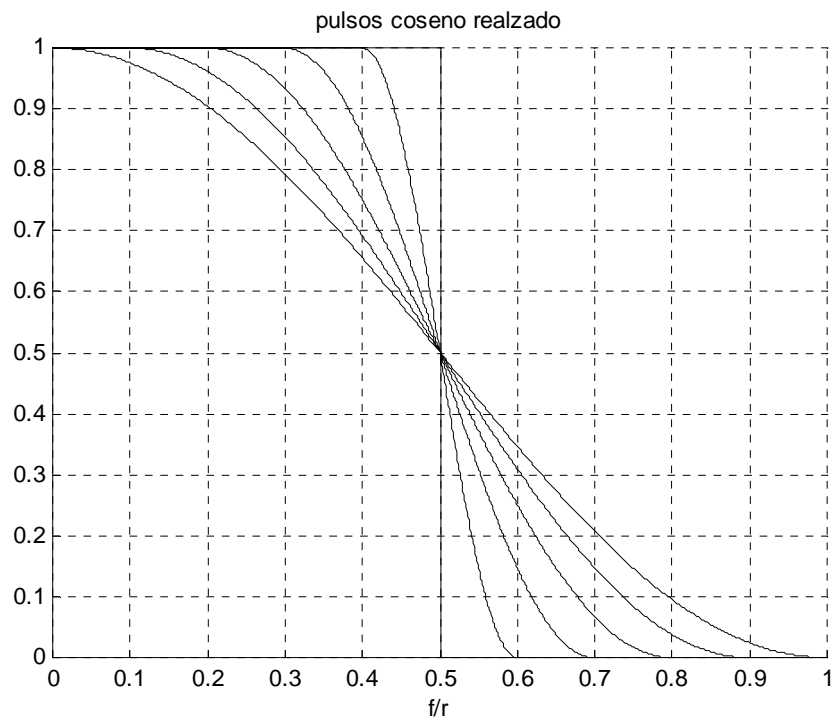


Figura 16 Pulsos Coseno realizado en el dominio de la frecuencia $\alpha = 0, 20, 40, 60, 80, 100\%$ rolloff

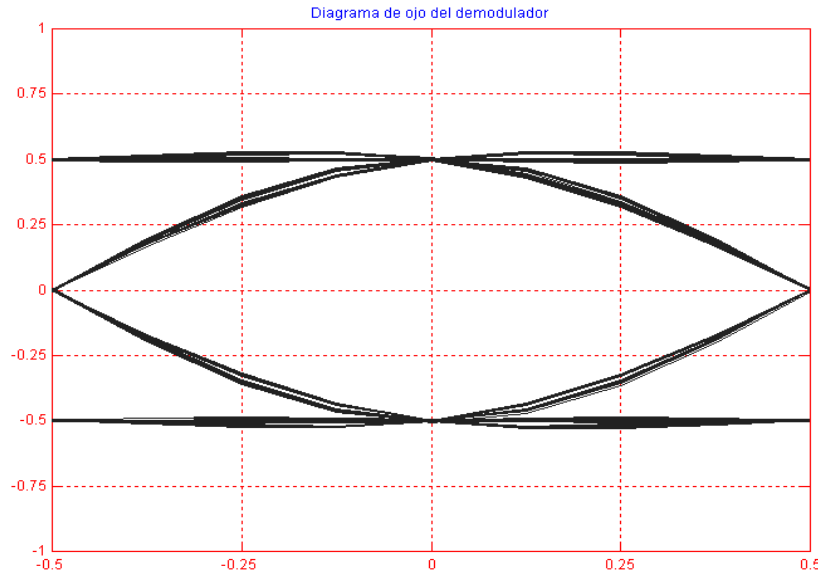


Figura 17 Diagrama de ojo. 100% roll-off.

Al utilizar las funciones o pulsos RC a la salida del filtro adaptado, las funciones $\varphi_1(t)$ resultantes se denominan *Square Root Raised Cosinus*:

$$\varphi_{SRRC}(t) * \varphi_{SRRC}(-t) = R_{\varphi_{SRRC}}(t) = p_{RC}(t) \quad (3.64)$$

Cuya función característica es

$$\Phi_{SRRC}(f) = \sqrt{\Phi_{CR}(f)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r}} & |f| < \frac{r}{2} - \beta \\ \frac{1}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\pi}{4\beta}\left(|f| - \frac{r}{2} + \beta\right)\right) & \frac{r}{2} - \beta < |f| < \frac{r}{2} + \beta \\ 0 & \frac{r}{2} + \beta < |f| \end{cases} \quad (3.65)$$

y por tanto en el dominio temporal:

$$\varphi_{SRRC}(t) = \frac{\sin \pi(r - 2\beta) + 8\beta t \cdot \cos \pi(r + 2\beta)}{\pi \sqrt{r} (1 - (8\beta t)^2)} \quad (3.66)$$

La ecuación (3.65) se re-escribe en función de α como:

$$\Phi_{SRRC}(f) = \sqrt{\Phi_{CR}(f)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r}} & |f| < \frac{r}{2}(1 - \alpha) \\ \frac{1}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha r}\left(|f| - \frac{r}{2}(1 - \alpha)\right)\right) & \frac{r}{2}(1 - \alpha) < |f| < \frac{r}{2}(1 + \alpha) \\ 0 & \frac{r}{2}(1 + \alpha) < |f| \end{cases}$$

La ecuación (3.66) se re-escribe en función de α como:

$$\varphi_{SRRC}(t) = \frac{\sin \pi t r (1 - \alpha) + 4 \alpha r t \cdot \cos \pi t r (1 + \alpha)}{\pi t \sqrt{r} (1 - (4 \alpha r t)^2)}$$

En la Figura 18 se muestra el esquema resultante y en la Figura 19 las funciones $\varphi_1(t)$, que como puede comprobarse no presentan ceros cada Tseg.

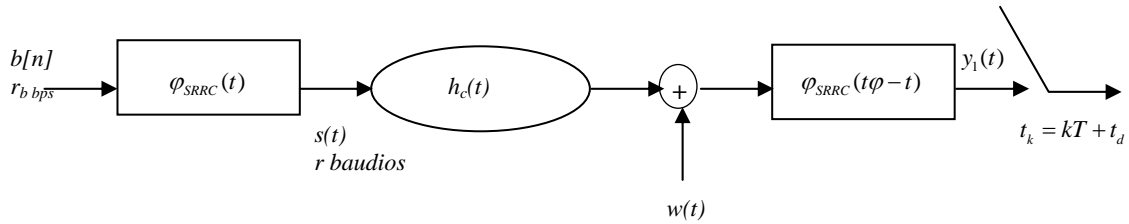


Figura 18 Sistema resultante para $L=1$ y pulsos RC a la salida del filtro adaptado.

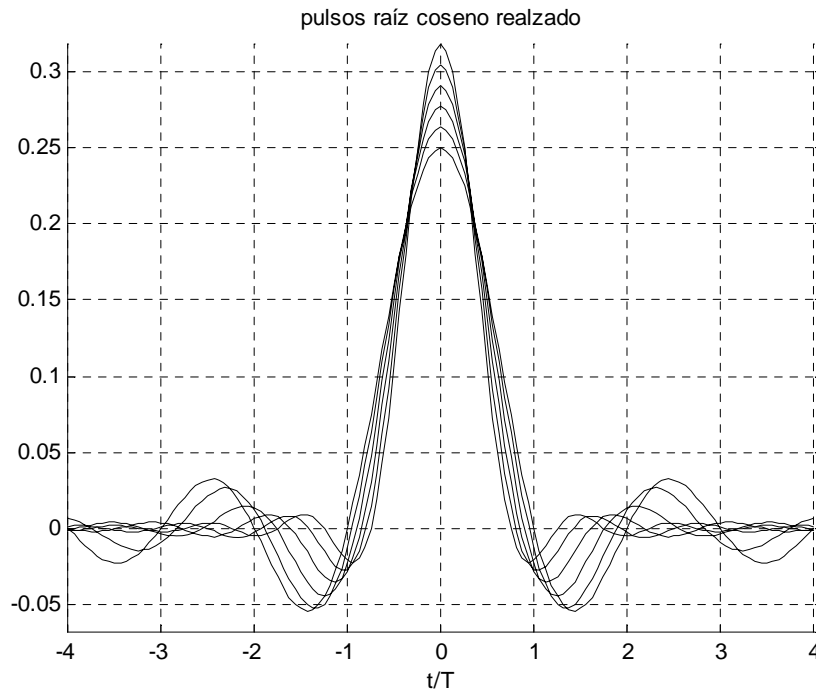


Figura 19 Funciones $\varphi_{SRRC}(t)$.

3.4.6 Diseño de pulsos para $L>1$

Para el caso general las condiciones de ISI=0 se traducen en

$$\mathbf{R}_\varphi = \mathbf{I} \delta[k]$$

O bien en formato escalar:

$$R_{\varphi_j \varphi_l}(kT) = \delta[k] \delta[j-l] \quad (3.67)$$

Es decir:

$$\begin{aligned} R_{\varphi_j \varphi_l}(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \\ (\varphi_j(t) * \varphi_l(-t)) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \delta[j-l] \end{aligned}$$

La equivalencia de la expresión anterior en el dominio de la frecuencia es:

$$\begin{aligned} \Phi_j(f) \Phi_l^*(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \frac{1}{T}) = \\ r \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_j(f - nr) \Phi_l^*(f - nr) = \delta[j-l] \end{aligned} \quad (3.68)$$

cuya demostración es análoga a la desarrollada en la sección 0 para $l=j$. Por tanto, las funciones $\Phi_1(f), \dots, \Phi_L(f)$ deben cumplir (3.68) además del ancho de banda limitado:

$$\frac{r}{2} \leq B_{\phi_i} \leq r$$

Ejemplo dimensión L=2

Para modulaciones QAM con pulsos de raíz de coseno realzado descritos (3.66), se puede elegir la siguiente base que cumple las condiciones de ISI nula (3.67).

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= +\sqrt{2} \cos(2\pi f_c t + \theta_c) \varphi_{SRRC}(t) \\ \varphi_2(t) &= -\sqrt{2} \sin(2\pi f_c t + \theta_c) \varphi_{SRRC}(t) \\ f_c &= \frac{N}{T} \end{aligned}$$

3.5 Ecualización para dimensión de espacio de señal $L=1$.

Tal como se ha demostrado en la sección 3.3.2 para dimensión $L=1$, cuando la respuesta impulsional del canal produce ISI sobre la señal modulada, a efectos de muestreo a la salida del filtro adaptado, $y_1[k]$ equivale a la convolución de la secuencia de símbolos $\alpha_1[k]$ con la respuesta impulsional discreta equivalente $p_{11}[k]$ además de la componente de ruido.

$$y_1[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] p_{11}[k-n] + \beta_1[k] = \alpha_1[k] * p_{11}[k] + \beta_1[k] \quad (3.69)$$

NOTA: Dado que en esta sección únicamente se consideran espacios de señal de dimensión $L=1$, se prescindirá en el resto de la misma de los subíndices $_1$ ó $_{11}$, con el objeto de simplificar nomenclatura en la formulación.

En estas condiciones la ecuación (3.69) se re-escribe como:

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] p[k-n] + \beta[k] = \alpha[k] * p[k] + \beta[k]$$

En general la presencia de ISI es inevitable a la salida del filtro adaptado a las funciones de la base. Aún en el caso de haber elegido un ancho de ocupación en el margen de frecuencias en las que la respuesta del canal es ideal, ya sea por problemas tecnológicos de implementación o por desconocimiento exacto de la propia función de transferencia del canal es inevitable la existencia de imperfecciones en la etapa de muestreo de la señal.

3.5.1 Criterios de medida de ISI

Existen diversos criterios para medir la ISI sobre el pulso discreto resultante. A continuación se presentan tres criterios diferentes:

Criterio ISI máxima muestra residual:

Este tipo de criterio es el más simple de todos y en general suficiente para medir las ganancias de ecualización. Al utilizar un ecualizador se compara la ISI del pulso resultante a la salida del ecualizador, con el pulso presente a la entrada del ecualizador.

Si sobre $p[k]$ se distingue entre muestra principal ó máxima y muestras de ISI residual, una medida sencilla de la ISI, consiste en evaluar la máxima muestra residual sobre la función $p[k]$ comparada respecto al máximo.

$$ISI_{dB} = 20 \log_{10} \left(\left| \frac{p[k]_{MAX}}{p[k]_{ISI_MAX}} \right| \right) \quad (3.70)$$

En la Figura 20 se muestra un ejemplo gráfico de pulso resultante a la salida del filtro adaptado.

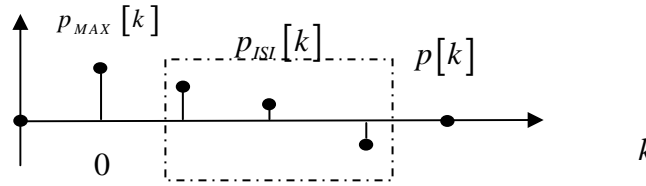


Figura 20 Ejemplo gráfico de pulso resultante discreto a la salida del filtro adaptado.

Criterio ISI máxima:

El presente criterio [Proakis], describe los efectos de reducción de distancia mínima entre símbolos recibidos y umbrales de detección, ya que consiste en analizar el peor caso que se puede dar, cuando todos los símbolos que contribuyen al término de ISI se suman en fase.

$$ISI_{MAX(dB)} = 20 \log_{10} \left(\frac{|p[k]_{MAX}|}{\sum_{k, k \neq k_{max}} |p[k]|} \right) \quad (3.71)$$

Criterio ISI cuadrática:

Este criterio se suele aplicar cuando se tienen muchos símbolos contribuyendo en el término de ISI. El término de ISI se interpreta en conjunto como un nuevo término de ruido gaussiano y se calcula la probabilidad de error, considerando que la potencia de ruido total se incrementa con la potencia del término de ISI.

$$ISI_{CUA(dB)} = 10 \log_{10} \left(\frac{(p[k]_{MAX})^2}{\sum_{k, k \neq k_{max}} (p[k])^2} \right) \quad (3.72)$$

3.5.2 Estrategias de compensación de ISI.

Suponiendo que los efectos de la ISI se limitan a $L_c + 1$ muestras según la siguiente expresión:

$$y[k] = \sum_{n=k}^{k-L_c} \alpha[n] p[k-n] + \beta[k] \quad (3.73)$$

Existen diferentes tipos de solución para eliminar o minimizar en valor absoluto las muestras de ISI residual.

El detector de secuencias de máxima verosimilitud (Criterio ML) basado en la observación de la secuencia $y[k]$ detecta la secuencia de símbolos $\hat{\alpha}[k]$ de forma óptima. El algoritmo de Viterbi constituye un método de implementación práctica de este detector. En la decisión de cada símbolo $\hat{\alpha}[k]$ minimiza la distancia euclídea entre una posible secuencia de símbolos $\hat{\alpha}[k], \hat{\alpha}[k-1], \dots, \hat{\alpha}[k-L_c]$ y las muestras de señal recibidas $\hat{y}[k], \hat{y}[k-1], \dots, \hat{y}[k-L_c]$. Si la longitud del canal equivalente L_c es elevada este método se vuelve computacionalmente muy ineficiente.

Alternativas de tipo práctico, aunque sub-óptimas, pasan por soluciones de ecualización ya sea en un único terminal (transmisor o receptor) o mediante un par de filtros terminales óptimos. Estas soluciones pueden implementarse analógicamente a través de filtros terminales (soluciones hardware) o bien digitalmente (soluciones software). En este último caso se pueden plantear como soluciones fijas,

especialmente si el canal es invariante con el tiempo, o bien soluciones adaptativas, que obviamente serán adecuadas en caso de canales variantes con el tiempo.

En las figuras que siguen se presentan diagramas de bloques correspondientes a diferentes alternativas de las comentadas.

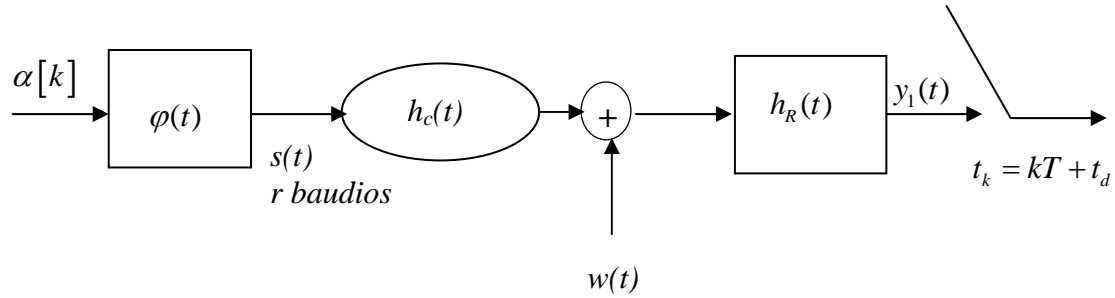


Figura 21 Esquema de Transmisión/Recepción con ecualización analógica. La condición de diseño del filtro $h_R(t)$ es $\varphi(t) * h_c(t) * h_R(t) = R_\varphi(t - t_d)$.

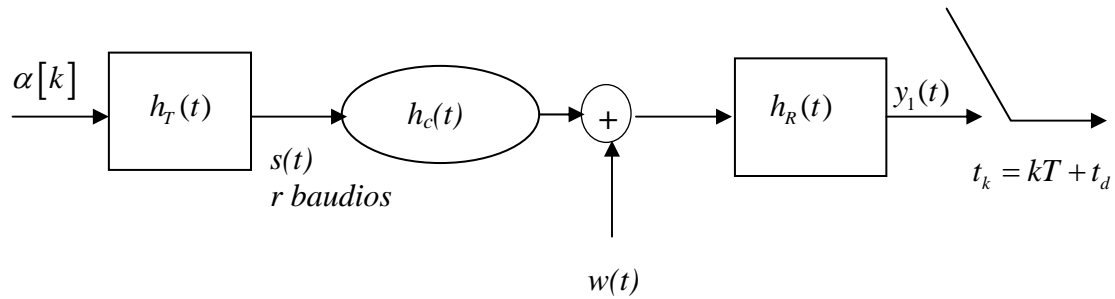


Figura 22 Esquema de Transmisión/Recepción con filtros terminales óptimos analógicos. La condición de diseño de los filtros $h_T(t), h_R(t)$ es $h_T(t) * h_c(t) * h_R(t) = R_\varphi(t - t_d)$ y simultáneamente maximizar el cociente $\frac{y_1(t_k)}{\sigma}$.

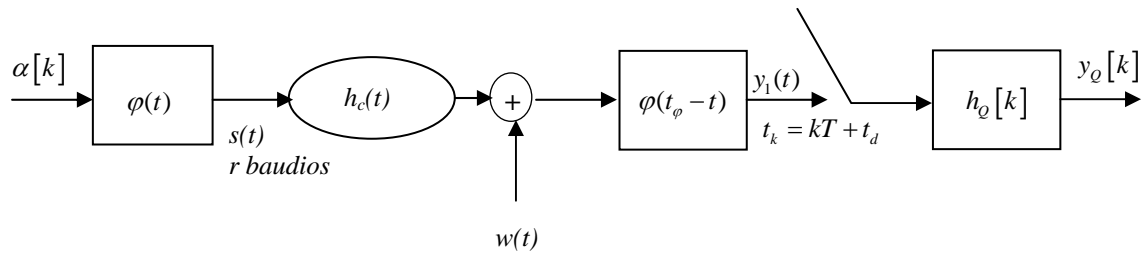


Figura 23 Esquema de Transmisión/Recepción con ecualización discreta. La condición de diseño del filtro $h_Q[k]$ es $p[k] * h_Q[k] = \delta[k - k_0]$.

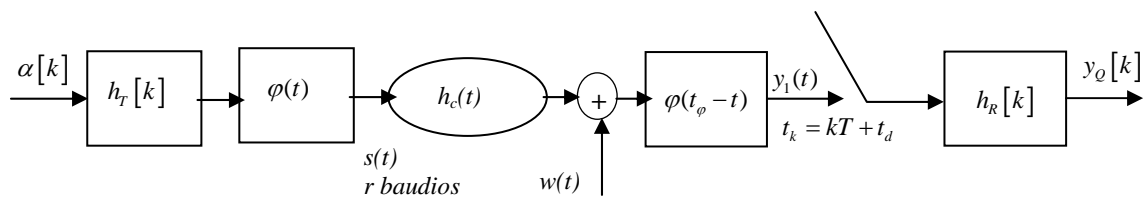


Figura 24 Esquema de Transmisión/Recepción con filtros terminales óptimos discretos. La condición de diseño de los filtros $h_T[k]$, $h_R[k]$ es $h_T[k] * p[k] * h_R[k] = \delta[k - k_0]$ y simultáneamente maximizar el cociente $\frac{y_1(t_k)}{\sigma}$.

3.5.3 Filtrado de tipo FIR

De todos los posibles esquemas, en este apartado se van a analizar dos posibles soluciones de ecualización discreta, tal como se presentan en la Figura 23. En ambas la respuesta impulsional del ecualizador $h_Q[k]$ es de Respuesta Impulsional Finita (FIR):

$$h_Q[k] = \sum_{l=0}^{L_Q} h[l] \delta[k - l] \quad (3.74)$$

por lo que:

$$y_Q[k] = \sum_{l=0}^{L_Q} h[l] y_1[k - l] \quad (3.75)$$

En la Figura 25 se muestra un esquema de este tipo de ecualizador.

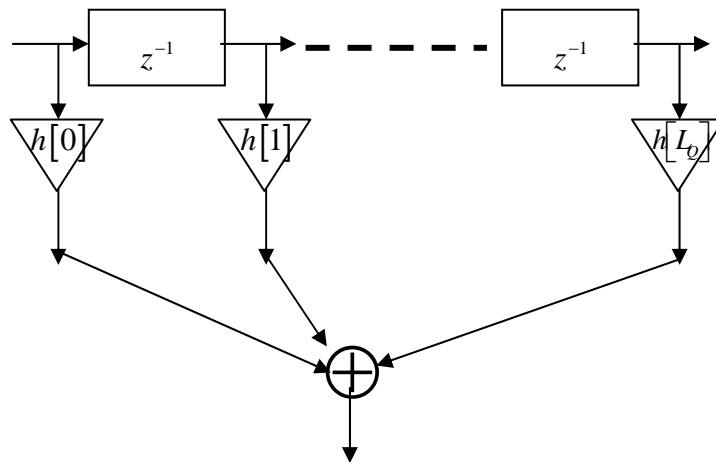


Figura 25 Esquema de un ecualizador discreto de tipo FIR

Al diseñar un filtro según este esquema se debe hallar:

- El número de coeficientes $L_Q + 1$. En general a mayor número de coeficientes mejor se consigue el criterio de diseño, sin embargo, por cuestiones de rapidez y de eficiencia computacional es de interés que no sea un número muy elevado.
- Los $L_Q + 1$ coeficientes $h[l]$ según un criterio determinado.

El criterio de diseño de *forzador de ceros* se basa en hallar la respuesta impulsional $h_Q[k]$ de modo que se cumpla la ecuación de diseño (3.76) con mínimo error cuadrático. El término de ruido con este criterio no se controla.

$$p[k] * h_Q[k] = \delta[k - k_0] \quad (3.76)$$

El criterio de **MSE** (*MinimumSquareError*) se basa en hallar la respuesta impulsional $h_Q[k]$ de modo que se minimice el error cuadrático medio entre la salida del ecualizador y la secuencia de símbolos transmitida, por tanto se actúa simultáneamente sobre los términos de ISI y de ruido.

$$\varepsilon_{MSE} = E \left[\left| y_Q[k] - \alpha[k - k_0] \right|^2 \right] \quad (3.77)$$

Tanto en (3.76) como en (3.77), la elección del índice k_0 , representa un retardo del pulso ecualizado respecto al pulso a la entrada del ecualizador. En el apartado 3.5.7, se muestra un ejemplo con ambos tipos de ecualizadores.

3.5.4 Criterio de Forzador de Ceros

Suponiendo que la duración de la función discreta que representa el sistema $p[k]$ es de duración limitada a $L_c + 1$, y que el ecualizador a diseñar es de $L_Q + 1$ coeficientes, el número máximo de ecuaciones no nulas obtenidas a partir de (3.77), es de $L_Q + L_c + 1$, equivalente a las como mucho $L_Q + L_c + 1$ muestras no nulas de la función discreta resultante a la salida del ecualizador $p_Q[k]$.

$$p_Q[k] = p[k] * h_Q[k] = \sum_{l=0}^{L_Q} h_Q[l] p[k-l] \quad (3.78)$$

El sistema de ecuaciones de forma detallada es:

$$\begin{pmatrix} p[0] & 0 & : & 0 \\ p[1] & p[0] & : & 0 \\ p[2] & p[1] & : & 0 \\ \vdots & \vdots & : & \vdots \\ 0 & 0 & : & p[L_c] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_Q[0] \\ h_Q[1] \\ \vdots \\ h_Q[L_Q] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_Q[0] \\ p_Q[1] \\ p_Q[2] \\ \vdots \\ p_Q[L_c + L_Q] \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

En la el sistema de ecuaciones anterior, cada fila representa una “foto” de las muestras a la entrada y a la salida de los retardadores de la Figura 25 para los tiempos $k = 0, 1, \dots, L_c + L_Q$.

Para simplificar nomenclatura la ecuación (3.79) puede escribirse en forma matricial:

$$\mathbf{P}\mathbf{h} = \mathbf{p}_Q \quad (3.80)$$

donde:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p[0] & 0 & : & 0 \\ p[1] & p[0] & : & 0 \\ p[2] & p[1] & : & 0 \\ \vdots & \vdots & : & \vdots \\ 0 & 0 & : & p[L_c] \end{pmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_Q[0] \\ h_Q[1] \\ \vdots \\ h_Q[L_Q] \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_Q = \begin{pmatrix} p_Q[0] \\ p_Q[1] \\ p_Q[2] \\ \vdots \\ p_Q[L_c + L_Q] \end{pmatrix}$$

Dado que en el sistema de ecuaciones a resolver hay $L_Q + L_c + 1$ ecuaciones y $L_Q + 1$ incógnitas, se resuelve normalmente buscando el vector solución \mathbf{h} que minimiza la norma del error al cuadrado \mathcal{E}_{FZ} :

$$\mathcal{E}_{FZ} = \|\mathbf{P}\mathbf{h} - \mathbf{p}_Q\|^2 \quad (3.81)$$

Al desarrollar la norma anterior se obtiene:

$$\mathcal{E}_{FZ} = (\mathbf{P}\mathbf{h} - \mathbf{p}_Q)^T (\mathbf{P}\mathbf{h} - \mathbf{p}_Q) = \mathbf{h}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{h} - \mathbf{p}_Q^T \mathbf{P} \mathbf{h} - \mathbf{h}^T \mathbf{P}^T \mathbf{p}_Q + \mathbf{p}_Q^T \mathbf{p}_Q \quad (3.82)$$

Derivando la función \mathcal{E}_{FZ} respecto a cada una de las componentes del vector \mathbf{h} , e igualando a cero dichas derivadas a través del vector gradiente, se obtiene el vector $\hat{\mathbf{h}}$ que minimiza (3.81).

$$\nabla_{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}_{FZ}}{\partial h_Q[0]} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{FZ}}{\partial h_Q[1]} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{FZ}}{\partial h_Q[L_Q]} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{h} - \mathbf{P}^T \mathbf{p}_Q = \mathbf{0} \quad (3.83)$$

La solución obtenida para los coeficientes

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{p}_Q = \text{pinv}(\mathbf{P}) \mathbf{p}_Q \quad (3.84)$$

La matriz $\text{pinv}(\mathbf{P}) = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T$, se denomina matriz pseudoinversa de \mathbf{P} . Si \mathbf{P} es invertible la matriz pseudoinversa coincide con la inversa.

3.5.5 Ruido a través del ecualizador discreto

En este apartado se va a analizar estadísticamente la componente de ruido a través del ecualizador discreto. Dado que a la salida del ecualizador las muestras continúan siendo gaussianas, la potencia o varianza del ruido resultante determinará la probabilidad de error a través del denominador del argumento del área de la función gaussiana: $Q(\cdot)$.

En este análisis se considera únicamente componente de ruido a través del receptor según el esquema de la Figura 26.

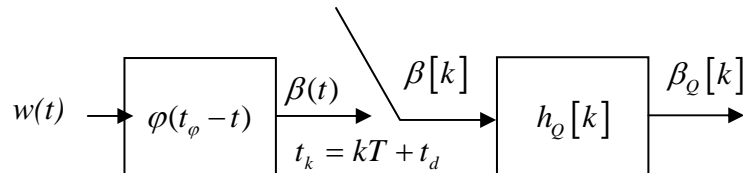


Figura 26 Componente de ruido a través del esquema receptor.

La componente de ruido a la salida del filtro adaptado presenta una distribución Gaussiana:

$$\begin{aligned}\beta[k] &: N\left(0, \frac{N_0}{2}\right) \\ \beta_Q[k] &= \sum_{l=0}^{L_Q} h[l] \beta[k-l] : N\left(0, \sigma_Q^2\right)\end{aligned}\quad (3.85)$$

El ruido discreto $\beta[k]$ es blanco tal como se demuestra a continuación mediante el cálculo de su función de autocorrelación:

$$\begin{aligned}R_\beta[k] &= E[\beta[l+k] \beta[l]] = E[\beta(t_{l+k}) \beta(t_l)] = \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \varphi(t_\varphi - (t_{k+l} - \lambda)) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} w(\gamma) \varphi(t_\varphi - (t_l - \gamma)) d\gamma\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_\varphi - (t_{k+l} - \lambda)) \int_{-\infty}^{\infty} E[w(\lambda) w(\gamma)] \varphi(t_\varphi - (t_l - \gamma)) d\gamma d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_\varphi - (t_{k+l} - \lambda)) \int_{-\infty}^{\infty} R_w(\lambda - \gamma) \varphi(t_\varphi - (t_l - \gamma)) d\gamma d\lambda = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_\varphi - (t_{k+l} - \lambda)) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - \gamma) \varphi(t_\varphi - (t_l - \gamma)) d\gamma d\lambda = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_\varphi - (t_{k+l} - \lambda)) \varphi(t_\varphi - (t_l - \lambda)) d\lambda = \\ &= \frac{N_0}{2} R_\varphi(t_l - t_{k+l}) = \frac{N_0}{2} R_\varphi(-kT) = \frac{N_0}{2} \delta[k]\end{aligned}$$

El ruido discreto ecualizado $\beta_Q[k]$ deja de ser blanco tal como se demuestra a continuación mediante el cálculo de su función de autocorrelación:

$$\begin{aligned}R_{\beta_Q}[k] &= E[\beta_Q[l+k] \beta_Q[l]] = E[\beta_Q(t_{l+k}) \beta_Q(t_l)] = \\ &= E\left[\sum_{j=0}^{L_Q} h[j] \beta[k+l-j] \sum_{i=0}^{L_Q} h[i] \beta[l-i]\right] = \\ &= \sum_{j=0}^{L_Q} h[j] \sum_{i=0}^{L_Q} h[i] E[\beta[k+l-j] \beta[l-i]] = \\ &= \sum_{j=0}^{L_Q} h[j] \sum_{i=0}^{L_Q} h[i] R_\beta[k-j+i] = \sum_{j=0}^{L_Q} h[j] \sum_{i=0}^{L_Q} h[i] \frac{N_0}{2} \delta[k-j+i] = \\ &= \frac{N_0}{2} \sum_{j=0}^{L_Q} h[j] h[j+k] = \frac{N_0}{2} R_h[k]\end{aligned}$$

La potencia de ruido a la salida del ecualizador varía respecto a la potencia del ruido a la entrada.

$$\sigma_{\beta_Q}^2 = R_{\beta_Q}[0] = \frac{N_0}{2} \sum_{j=0}^{L_Q} h^2[j] = \frac{N_0}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{h} \quad (3.86)$$

Es habitual medir la variación de potencia de ruido en dB. Se dice que el incremento de potencia de ruido a través del filtro FIR es:

$$\left(\frac{\sigma_{\beta_Q}^2}{\sigma_{\beta}^2} \right)_{dB} = 10 \log_{10} \left(\sum_{j=0}^{L_Q} h^2[j] \right) \quad (3.87)$$

Nota:

De forma análoga al cálculo de la autocorrelación de la secuencia de ruido, $\beta[k]$, para dimensión $L > 1$ se puede demostrar que la correlación cruzada entre dos secuencias de ruido, $\beta_l[k], \beta_j[k]$, correspondientes a salidas de dos filtros adaptados cumple:

$$\begin{aligned} R_{\beta_l \beta_j}[k] &= E[\beta_l[l+k] \beta_j[l]] = \\ &= \frac{N_0}{2} R_{\varphi_l \varphi_j}(-kT) = \frac{N_0}{2} \delta[k] \delta[l-j] \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\mathbf{R}[k] = E[\mathbf{n}[l+k] \mathbf{n}^T[l]] = \frac{N_0}{2} \mathbf{I} \delta[k]$$

3.5.6 Criterio MSE

La función de error a minimizar es :

$$\varepsilon_{MSE} = E \left[\left| y_Q[k] - \alpha[k - k_0] \right|^2 \right] \quad (3.88)$$

que en función de los coeficientes del filtro se traduce en:

$$\varepsilon_{MSE} = E \left[\left| \sum_{l=0}^{L_Q} h[l] y[k-l] - \alpha[k - k_0] \right|^2 \right] \quad (3.89)$$

Derivando la función ε_{MSE} respecto a cada una de las componentes del vector \mathbf{h} , e igualando a cero dichas derivadas a través del vector gradiente, se obtiene el vector $\hat{\mathbf{h}}$ que minimiza (3.89).

La derivada l -ésima es:

$$\frac{\partial \varepsilon_{MSE}}{\partial h[l]} = E \left[y[k-l] \left(\sum_{j=0}^{L_Q} h[j] y[k-j] - \alpha[k - k_0] \right) \right] = 0 \quad (3.90)$$

que se traduce en la siguiente ecuación de diseño:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{L_Q} h[j] E[y[k-l] y[k-j]] &= E[y[k-l] \alpha[k - k_0]] \Rightarrow \\ \sum_{j=0}^{L_Q} h[j] R_y[j-l] &= E[y[k-l] \alpha[k - k_0]] \end{aligned} \quad (3.91)$$

NOTA: Véase el apéndice 3.8, para la justificación de la siguiente propiedad:

$$R_y[k] = R_y[-k] = E[y[k+l]y[l]]$$

El término de la derecha en (3.91) se simplifica para una secuencia de símbolos $\alpha[k]$ de media nula y codificada sin memoria. En esta situación:

$$R_\alpha[k] = \sigma_\alpha^2 \delta[k] \quad (3.92)$$

y la simplificación mencionada queda:

$$\begin{aligned} E[y[k-l]\alpha[k-k_0]] &= \\ E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n]p[k-l-n]\alpha[k-k_0]\right] + E[\beta[k-l]\alpha[k-k_0]] &= \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p[k-l-n]E[\alpha[n]\alpha[k-k_0]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p[k-l-n]R_\alpha[n-k+k_0] &= \\ \sigma_\alpha^2 p[k_0-l] \end{aligned} \quad (3.93)$$

En el desarrollo de (3.93) se considera a todos los efectos que las coordenadas de señal útil y las coordenadas de ruido se hallan incorreladas:

$$E[\alpha[k]\beta[n]] = 0, \quad \forall k, n$$

Aunque el desarrollo se puede continuar para el caso general, considerando (3.93), la ecuación (3.91) se reduce a:

$$\sum_{j=0}^{L_Q} h[j]R_y[j-l] = \sigma_\alpha^2 p[k_0-l] \quad (3.94)$$

A continuación se desarrolla la ecuación (3.94) para $l = 0..L_Q$.

$$\begin{aligned} l=0 &\Rightarrow R_y[0]h[0] + R_y[-1]h[1] + .. + R_y[-L_Q]h[L_Q] = \sigma_\alpha^2 p[k_0] \\ l=1 &\Rightarrow R_y[1]h[0] + R_y[0]h[1] + .. + R_y[1-L_Q]h[L_Q] = \sigma_\alpha^2 p[k_0-1] \\ &..... \\ l=L_Q &\Rightarrow R_y[L_Q]h[0] + R_y[L_Q-1]h[1] + .. + R_y[0]h[L_Q] = \sigma_\alpha^2 p[k_0-L_Q] \end{aligned}$$

En forma matricial queda como:

$$\begin{pmatrix} R_y[0] & R_y[-1] & : & R_y[-L_Q] \\ R_y[1] & R_y[0] & : & R_y[1-L_Q] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_y[L_Q] & R_y[L_Q-1] & : & R_y[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[L_Q] \end{pmatrix} = \sigma_\alpha^2 \begin{pmatrix} p[k_0] \\ p[k_0-1] \\ \vdots \\ p[k_0-L_Q] \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

que para sintetizar nomenclatura puede escribirse como:

$$\mathbf{R}_y \mathbf{h} = \sigma_a^2 \mathbf{p}[k_0 - l] \quad (3.96)$$

donde la matriz de correlación de la señal de entrada es cuadrada y no singular:

$$\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} R_y[0] & R_y[-1] & : & R_y[-L_Q] \\ R_y[1] & R_y[0] & : & R_y[1-L_Q] \\ : & : & : & : \\ R_y[L_Q] & R_y[L_Q-1] & : & R_y[0] \end{pmatrix}$$

y los vectores de (3.96) son:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h[0] \\ h[1] \\ : \\ h[L_Q] \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}[k_0 - l] = \begin{pmatrix} p[k_0] \\ p[k_0 - 1] \\ : \\ p[k_0 - L_Q] \end{pmatrix}$$

La solución para el diseño de los coeficientes del filtro, mediante el criterio MSE es:

$$\mathbf{h} = \sigma_a^2 \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{p}[k_0 - l] \quad (3.97)$$

El cálculo teórico de los diferentes elementos de la matriz \mathbf{R}_y , lleva también a una expresión particular para el caso de símbolos de media nula y codificados sin memoria.

Sea el elemento:

$$\begin{aligned} R_y[m] &= E[y[k+m]y[k]] = \\ E\left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n]p[k+m-n] + \beta[k+m]\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha[l]p[k-l] + \beta[k]\right)\right] &= \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} E[\alpha[n]\alpha[l]]p[k+m-n]p[k-l] + E[\beta[k+m]\beta[k]] &= \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_\alpha[n-l]p[k+m-n]p[k-l] + \frac{N_0}{2}\delta[m] \end{aligned} \quad (3.98)$$

Aplicando la propiedad (3.92) a (3.98), se obtiene:

$$\begin{aligned} R_y[m] &= \sigma_a^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p[k+m-l]p[k-l] + \frac{N_0}{2}\delta[m] = \\ \sigma_a^2 R_p[m] + \frac{N_0}{2}\delta[m] \end{aligned} \quad (3.99)$$

En definitiva se obtiene la siguiente propiedad para la matriz de correlación:

$$\mathbf{R}_y = \sigma_\alpha^2 \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_\beta = \sigma_\alpha^2 \mathbf{R}_p + \frac{N_0}{2} \mathbf{I} \quad (3.100)$$

Al diseñar un filtro MSE, es importante en la aplicación del desarrollo anterior considerar las condiciones para las cuales se ha obtenido la solución:

- Secuencia de símbolos $\alpha[n]$ de media nula y codificada sin memoria.
- Secuencia de ruido a la salida del filtro adaptado $\beta[k]$ blanco.

En cualquier otra situación, trabajando con espacios de señal de dimensión $L=1$, se ha de rehacer el desarrollo desde la ecuación (3.91).

Tanto este criterio, como el forzador de ceros, son aplicables con espacios de señal de dimensión $L>1$. En cualquier caso nunca es aconsejable aplicar las fórmulas memorizadas. La metodología debe ser, para el caso MSE:

1. Formular la función de error a minimizar.
2. Derivar respecto a los coeficientes a diseñar e igualar a cero las derivadas obtenidas.
3. Aplicar todas las funciones de correlación de símbolos $\alpha_l[n]$, funciones $p_{ij}[k]$ y señales de ruido $\beta_l[k]$ que se conozcan o se puedan calcular.
4. Hallar los coeficientes de diseño.

Es interesante comprobar, que la solución mínimo MSE, al considerar potencia de ruido nula, coincide con la solución del forzador de ceros.

3.5.7 Ejemplo de Ecualización.

Sea el siguiente pulso resultante a la salida del filtro adaptado y una vez se ha muestreado la señal:

$$y(t_k) = 0.1\alpha[k+1] + \alpha[k] + 0.1\alpha[k-1] + \beta(t_k)$$

El pulso discreto equivalente es: $p[k] = 0.1\delta[k+1] + \delta[k] + 0.1\delta[k-1]$, sobre el cual el valor de ISI (3.71) se mide como $ISI_{dB} = 20 \log_{10} \left(\left| \frac{1}{0.1+0.1} \right| \right) = +14dB$

Solución de Forzador de Ceros

Al aplicar el criterio de Forzador de Ceros para diseñar un ecualizador FIR de 3 coeficientes ($L_Q = 2$) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese, que el máximo a la salida se ha colocado retardado una muestra respecto al máximo a la entrada. Es decir, sobre el pulso a la entrada del ecualizador, el máximo se halla en $k=1$, mientras que a la salida del ecualizador, se ha colocado en $k_0 = 2$ según (3.76). Ello es debido a que se desea anular una muestra de ISI residual existente antes del máximo en el pulso a ecualizar $p[k]$.

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \text{pinv} \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.101 \\ 1.02 \\ -0.101 \end{pmatrix}$$

El pulso equivalente a la salida del ecualizador es:

$$p_Q[k] = h_1 p[k+1] + h_2 p[k] + h_3 p[k-1] = -0.0101 \delta[k+1] + 0.001 \delta[k] + 0.9998 \delta[k-1] + 0.0010 \delta[k-2] + -0.0101 \delta[k-3]$$

sobre el cual el valor de ISI (3.71) se mide como $ISI_{dB} = 20 \log_{10} \left(\left| \frac{0.9998}{2(0.0101+0.001)} \right| \right) = +33.07 dB$, por tanto se ha mejorado del orden de 19 dB el nivel de ISI debido a la ecualización.

El incremento de potencia de ruido resultante a la salida del ecualizador (3.87), es de:

$$\left(\frac{\sigma_{\beta_Q}^2}{\sigma_{\beta}^2} \right)_{dB} = 10 \log_{10} \left(\sum_{j=0}^2 h^2[j] \right) = 0.2562 dB$$

Cálculo de la probabilidad de error aproximada para la solución FZ a partir de la reducción de la distancia de los símbolos recibidos respecto al umbral de detección.

En la solución hallada mediante el criterio FZ, se calcula a continuación la repercusión que los dos factores tienen sobre la probabilidad de error. Suponiendo una modulación binaria y polar, la probabilidad de error para el pulso no ecualizado y considerando únicamente las gaussianas de argumento menor (peor caso de ISI), es igual a:

$$\begin{aligned} P_e &\cong KQ \left(\left(p[0] - p[-1] - p[+1] \right) \frac{d}{2\sigma_{\beta}} \right) = \\ &KQ \left(\sqrt{\left(p[0] - p[-1] - p[+1] \right)^2 2 \frac{E_b}{N_0}} \right) = \\ &KQ \left(\sqrt{(0.8)^2 2 \frac{E_b}{N_0}} \right) \end{aligned}$$

Y la probabilidad de error del pulso ya ecualizado considerando únicamente las gaussianas de argumento menor (peor caso de ISI), es igual a:

$$\begin{aligned} P_e &\cong K_1 Q \left(\left(|p[1]| - |p[-1]| - |p[0]| - |p[+2]| - |p[+3]| \right) \frac{d}{2\sigma_{\beta}} \right) = \\ &K_1 Q \left(\sqrt{\frac{\left(|p[1]| - |p[-1]| - |p[0]| - |p[+2]| - |p[+3]| \right)^2}{\sum_{j=0}^2 h^2[j]} 2 \frac{E_b}{N_0}} \right) = \\ &K_1 Q \left(\sqrt{(0.9008)^2 2 \frac{E_b}{N_0}} \right) \end{aligned}$$

Las constantes K, K_1 , dependen de las probabilidades a priori de los símbolos. Para el caso de equiprobabilidad resultan $K = \frac{1}{4}, K_1 = \frac{1}{16}$.

Para este ejemplo, las ganancias totales de ecualización, se calculan como: $10\log_{10}\left(\frac{0.909}{0.8^2}\right) = 1.48dB$

Cálculo de la probabilidad de error aproximada para la solución FZ al modelar la ISI como una variable aleatoria gaussiana.

Una alternativa para el cálculo de la probabilidad de error, consiste en modelar la ISI residual como una variable gaussiana. La aproximación es válida cuando el número de muestras de ISI es muy elevado, aunque no sea el caso del ejemplo visto se calcula a continuación para el ejemplo analizado.

Suponiendo una modulación binaria y polar, la probabilidad de error para el pulso no ecualizado, es igual a:

$$P_e \cong Q\left(\frac{p[0]d}{2(\sigma_{ISI} + \sigma_\beta)}\right)$$

y por analogía con (3.72)

$$\sigma_{ISI}^2 = \frac{\sum_{k, k \neq k_{\max}} (p[k])^2}{(p[k]_{\max})^2}$$

Solución de MMSE con $\sigma_\alpha^2 = \frac{N_0}{2}$

Al aplicar el criterio de mínimo MSE, en la función (3.77) de nuevo elegimos retardar una muestra el máximo con el objeto de anular una muestra de ISI residual previa al máximo existente a la entrada del ecualizador, por lo que en este método se elige $k_0 = 1$.

$$\varepsilon_{MSE} = E\left[\left|y_Q[k] - \alpha[k-1]\right|^2\right]$$

Para diseñar un ecualizador FIR de 3 coeficientes y considerando una modulación MPAM de símbolos equiprobables se obtiene:

$$\mathbf{R}_y = \sigma_\alpha^2 \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_\beta = \sigma_\alpha^2 \mathbf{R}_p + \frac{N_0}{2} \mathbf{I}$$

con

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} 1.02 & 0.2 & 0.01 \\ 0.2 & 1.02 & 0.2 \\ 0.01 & 0.2 & 1.02 \end{pmatrix}$$

Suponiendo $\sigma_\alpha^2 = \frac{N_0}{2}$, el sistema de ecuaciones a resolver queda:

$$\begin{pmatrix} 2.02 & 0.2 & 0.01 \\ 0.2 & 2.02 & 0.2 \\ 0.01 & 0.2 & 2.02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese, que el máximo a la salida se ha colocado retardado una muestra respecto al máximo a la entrada.

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \text{inv} \begin{pmatrix} 2.02 & 0.2 & 0.01 \\ 0.2 & 2.02 & 0.2 \\ 0.01 & 0.2 & 2.02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.005 \\ 0.495 \\ 0.005 \end{pmatrix}$$

El pulso equivalente a la salida del ecualizador es:

$$p_Q[k] = h_1 p[k+1] + h_2 p[k] + h_3 p[k-1] = \\ 0.00005\delta[k-1] + 0.05\delta[k] + 0.4951\delta[k-1] + 0.05\delta[k-2] + 0.00005\delta[k-3]$$

sobre el cual el valor de ISI (3.71) se mide como $ISI_{dB} = 20\log_{10} \left(\left| \frac{0.495}{2(0.05+0.00005)} \right| \right) = +13.88dB$, por tanto apenas ha variado el nivel de ISI con la ecualización.

El incremento de potencia de ruido resultante a la salida del ecualizador (3.87), es de:

$$\left(\frac{\sigma_{\beta_Q}^2}{\sigma_{\beta}^2} \right)_{dB} = 10\log_{10} \left(\sum_{j=0}^2 h^2[j] \right) = -6.108dB$$

Al utilizar la solución MMSE la potencia de ruido ha decrementado en 6dB, sin embargo el nivel de ISI no ha disminuido, y dado que el nivel de señal máximo también se ha decrementado en 6 dB aproximadamente, es una solución poco adecuada en este caso. La justificación de este comportamiento, viene dada por la condición utilizada para las varianzas de símbolo y de ruido: $\sigma_{\alpha}^2 = \frac{N_0}{2}$. Aproximadamente la dispersión de ruido es equivalente a la zona ocupada en el espacio de señal por los propios símbolos del alfabeto. Sobre el espacio de señal recibido, resulta mucho más grave el efecto del ruido que el efecto de la propia ISI. En la medida de lo posible, la solución obtenida para el ecualizador MMSE se dedica a combatir el ruido.

Solución de MMSE con $\sigma_{\alpha}^2 = 5 \frac{N_0}{2}$

Si la solución MMSE se implementa suponiendo $\sigma_{\alpha}^2 = 5 \frac{N_0}{2}$, el sistema de ecuaciones a resolver queda:

$$\begin{pmatrix} 1.22 & 0.2 & 0.01 \\ 0.2 & 1.22 & 0.2 \\ 0.01 & 0.2 & 1.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \text{inv} \begin{pmatrix} 1.22 & 0.2 & 0.01 \\ 0.2 & 1.22 & 0.2 \\ 0.01 & 0.2 & 1.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0472 \\ 0.8351 \\ -0.0472 \end{pmatrix}$$

El pulso equivalente a la salida del ecualizador es:

$$p_Q[k] = h_1 p[k+1] + h_2 p[k] + h_3 p[k-1] = \\ -0.0047\delta[k-1] + 0.0363\delta[k] + 0.8257\delta[k-1] + 0.0363\delta[k-2] - 0.0047\delta[k-3]$$

sobre el cual el valor de ISI (3.71) se mide como $ISI_{dB} = 20\log_{10} \left(\left| \frac{0.8257}{2(0.0047+0.0363)} \right| \right) = +20.06dB$, por tanto se ha mejorado del orden de 6dB el nivel de ISI debido a la ecualización.

El incremento de potencia de ruido resultante a la salida del ecualizador (3.87), es de:

$$\left(\frac{\sigma_{\beta_Q}^2}{\sigma_{\beta}^2} \right)_{dB} = 10 \log_{10} \left(\sum_{j=0}^2 h^2[j] \right) = -1.5371 \text{ dB}$$

En esta situación, se disminuye la potencia de ruido en 1,5 dB y se mejora la ISI en unos 6 dB.

3.5.8 Metodología en el diseño de un ecualizador FIR

Para concluir, el tema de la ecualización digital, en este apartado se suman los pasos a seguir al optar por un diseño sencillo de tipo FIR (Software).

En general el orden del filtro L_Q viene dado por las condiciones de diseño y el problema se reduce a calcular el vector formado por los $L_Q + 1$ coeficientes que forman la respuesta impulsional del filtro. A partir de este punto:

1. Se forma el sistema de ecuaciones a resolver, mediante el criterio FZ, MSE o cualquier otro.
2. Se resuelve el sistema de ecuaciones, invirtiendo la matriz de sistema para el caso MSE y a partir de la matriz pseudoinversa para el caso FZ.
3. Se evalúa el diseño obtenido, midiendo la ISI residual sobre el pulso resultante a la salida del ecualizar y midiendo la variación de la potencia de ruido.

Aún, queda un grado de libertad, en la metodología planteada, consistente en el tiempo en el que se ubica el máximo a la salida del ecualizador: k_0 . Se recomienda, que se elija para su ubicación una situación simétrica respecto al pulso a la entrada del ecualizador. Por ejemplo, si el máximo a la entrada del ecualizador, se presenta como la primera muestra no nula, se recomienda mantener esta situación a la salida $k_0 = 0$. Si el máximo a la entrada del ecualizador, se presenta justo en el centro de todas las muestras no nulas, se recomienda reproducir, también esta situación a la salida, lo que equivale a $k_0 > 0$. Siguiendo esta estrategia se consigue la mejor solución mantener la ISI residual a la salida del ecualizador a los menores valores posibles.

Aunque los pasos 1, 2 y 3 de la metodología presentada, se han adaptado al caso de dimensión $L=1$, en general, se puede aplicar a situaciones de dimensión mayor con ICI o bien ICI+ISI.

3.6 Filtros Terminales Óptimos

Sea el sistema de la Figura 24, en el que se ha incluido un par de filtros terminales $h_T[k]$, $h_R[k]$, con el objeto de compensar efectos no deseados sobre la señal transmitida. El esquema es equivalente al mostrado en la Figura 27, desde la perspectiva de analizar el sistema discreto resultante.

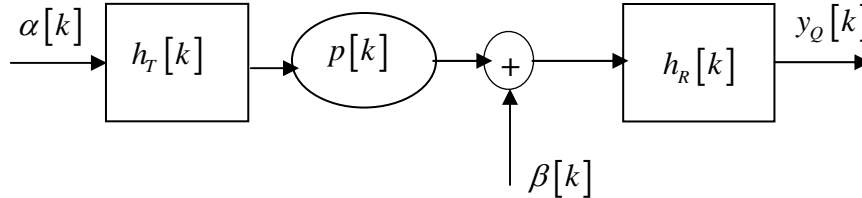


Figura 27 Esquema resultante con filtros terminales $h_T[k]$, $h_R[k]$

3.6.1 Objetivos

En el diseño de los filtros terminales óptimos, se pretende hallar las respuestas impulsionales discretas $h_T[k]$, $h_R[k]$, tales que:

- Se ecualiza perfectamente el canal: $h_T[k] * p[k] * h_R[k] = \delta[k - k_0]$
- Se maximiza el cociente $\frac{d}{2\sigma_Q}$, donde d es distancia mínima entre símbolos y σ_Q^2 es la varianza de la coordenada de ruido a la salida del sistema. Maximizar este cociente equivale a minimizar la probabilidad de error, tal como se deduce directamente de (3.101).
- La energía media transmitida por bit E_b , es un valor fijo determinado. Esta condición se impone para evitar que la solución que maximiza el cociente $\frac{d}{2\sigma}$, pase por hacer tender la energía media E_b a un valor infinito.

Se considera que la longitud del filtro transmisor $h_T[k]$ es de $1 + L_T$ coeficientes y que la longitud del filtro receptor $h_R[k]$ es de $1 + L_R$ coeficientes.

Al considerar una modulación MPAM, de símbolos equiprobables y umbrales de decisión óptimos MAP (puntos medios entre cada dos símbolos), codificación Gray y $\frac{E_b}{N_0} > 1$, la BER se aproxima por:

$$BER = \frac{2(M-1)}{bM} Q\left(\sqrt{\left(\frac{d}{2\sigma_Q}\right)^2}\right) \quad (3.101)$$

El argumento de la función $Q(\cdot)$ depende de los dos filtros a diseñar. La varianza del ruido resultante a la salida del sistema, se ha calculado en el apartado 3.5.5:

$$\sigma_{\beta_Q}^2 = \frac{N_0}{2} \sum_{j=0}^{L_R} h_R^2[j] \quad (3.102)$$

La distancia mínima entre símbolos d depende a su vez del filtro transmisor, a través de la energía media transmitida por bit. Obsérvese que para esta situación, el cálculo de la energía media por bit transmitida no se deduce únicamente como suma de coordenadas al cuadrado de los vectores de señal, debido a la presencia de ISI sobre la señal transmitida, que es provocada por el transmisor $h_T[k]$. A continuación se presenta el cálculo sistematizado de dicha energía.

- La expresión de la señal transmitida es

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] p_T[t - nT] \quad (3.103)$$

- El pulso resultante a la salida del transmisor es:

$$p_T[t] = \sum_{n=0}^{L_T} h_T[n] \varphi[t - nT] \quad (3.104)$$

- La autocorrelación promediada de la señal transmitida se expresa como

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_\alpha[m] R_{p_T}[\tau - mT] \quad (3.105)$$

- La energía media transmitida por símbolo es

$$E_s = P_s T = \hat{R}_s(0) T = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_\alpha[m] R_{p_T}[mT] \quad (3.106)$$

- La autocorrelación de la secuencia de símbolos $\alpha[k]$ para una modulación MPAM polar es:

$$R_\alpha[m] = \sigma_\alpha^2 \delta[m] = \frac{M^2-1}{12} d^2 \delta[m] \quad (3.107)$$

- La energía media transmitida por símbolo se reduce a (Ver apartado 3.6.2)

$$E_s = \sigma_\alpha^2 R_{p_T}[0] = \frac{M^2-1}{12} d^2 \sum_{n=0}^{L_T} h_T^2[n] \quad (3.108)$$

- La energía media transmitida por bit es $E_b = \frac{E_s}{b}$
- La distancia mínima entre símbolos se relaciona con la energía media transmitida por bit según:

$$\frac{d^2}{4} = \frac{3bE_b}{(M^2-1) \sum_{n=0}^{L_T} h_T^2[n]} \quad (3.109)$$

Aplicando (3.109) y (3.102), la expresión (3.101) se reduce a

$$BER = \frac{2(M-1)}{bM} Q \left(\sqrt{\frac{6b}{(M^2-1)} \frac{1}{\sum_{n=0}^{L_T} h_T^2[n] \sum_{m=0}^{L_R} h_R^2[m]} \frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (3.110)$$

El objetivo de diseño de los filtros terminales óptimos, para una energía transmitida por bit E_b fija, se reduce a obtener los $1 + L_T$ coeficientes de $h_T[k]$ y los $1 + L_R$ coeficientes de $h_R[k]$ que minimizan el denominador del argumento de la función $Q(\cdot)$:

$$\min \left(\sum_{n=0}^{L_T} h_T^2[n] \sum_{m=0}^{L_R} h_R^2[m] \right) \quad (3.111)$$

3.6.2 Autocorrelación del pulso transmitido

En el cálculo de la función de la energía media de símbolo E_s en (3.108) se requiere la función de autocorrelación del pulso transmitido.

La expresión del pulso transmitido en (3.104) se deduce a partir de la señal transmitida:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{L_T} h[i] \alpha[i-n] \varphi(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \sum_{i=0}^{L_T} h[i] \varphi(t-iT-nT) \quad (3.112)$$

El pulso resultante es una señal determinista de energía finita.

$$\begin{aligned} R_{p_T}(\tau) &= p_T(\tau) * p_T(-\tau) = \\ &= \sum_{n=0}^{L_T} h_T[n] \varphi(\tau-nT) * \sum_{m=0}^{L_T} h_T[m] \varphi(-\tau-mT) = \\ &= \sum_{n=0}^{L_T} h_T[n] \sum_{m=0}^{L_T} h_T[m] \varphi(\tau) * \delta(\tau-nT) * \varphi(-\tau) * \delta(\tau+mT) = \\ &= \sum_{n=0}^{L_T} h_T[n] \sum_{m=0}^{L_T} h_T[m] R_\varphi(\tau) * \delta(\tau-(n-m)T) = \\ &= \sum_{n=0}^{L_T} h_T[n] \sum_{m=0}^{L_T} h_T[m] R_\varphi(\tau-(n-m)T) \end{aligned} \quad (3.113)$$

De (3.113) se obtiene la expresión utilizada para la energía del pulso.

$$E_{p_T} = R_{p_T}(0) = \sum_{n=0}^{L_T} h_T[n] \sum_{m=0}^{L_T} h_T[m] R_\varphi((n-m)T) = \sum_{n=0}^{L_T} h_T^2[n] \quad (3.114)$$

Donde se ha utilizado la condición de ISI nula $R_\varphi((n-m)T) = \delta[n-m]$.

3.6.3 Obtención de las funciones de transferencia de los FTO

La función (3.111) a minimizar, se desarrolla a continuación con el objeto de obtener un término sobre el que aplicar la desigualdad de Schwartz:

$$\mathcal{E}_{FTO} = \sum_{n=0}^{L_T} h_T^2[n] \sum_{m=0}^{L_R} h_R^2[m] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |H_T(f)|^2 df \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |H_R(f)|^2 df \quad (3.115)$$

Con las transformadas de Fourier:

$$H_T(f) = \sum_{n=0}^{L_T} h_T[n] \exp(-j2\pi n f); \quad H_R(f) = \sum_{n=0}^{L_R} h_R[n] \exp(-j2\pi n f);$$

La desigualdad de Schwartz: $\int u^2 \int v^2 \geq \left| \int uv \right|^2$ se cumple con igualdad cuando $u = \lambda v$, donde λ es cualquier constante de proporcionalidad.

En (3.115), $u = |H_T(f)|$; $v = |H_R(f)|$, por lo que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |H_T(f)|^2 df \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |H_R(f)|^2 df \geq \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |H_T(f) H_R(f)| df \right|^2 = \varepsilon_{FTO}$$

Eligiendo

$$|H_T(f)| = \lambda |H_R(f)| \quad (3.116)$$

junto con la ecuación de ecualización $h_T[k] * p[k] * h_R[k] = \delta[k - k_0]$, en el dominio de la frecuencia:

$$H_T(f) P(f) H_R(f) = e^{-j2\pi f k_0} \quad (3.117)$$

Da lugar a las siguientes expresiones para los filtros:

$$|H_T(f)|^2 = \lambda \frac{1}{|P(f)|}; \quad |H_R(f)|^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{|P(f)|} \quad (3.118)$$

En (3.118), la constante λ equivale a una normalización de los coeficientes de los filtros y se elige de tal modo que la energía media transmitida por bit E_b , sea la requerida según la ecuación (3.109).

Con los filtros diseñados,

$$\varepsilon_{FTO} = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |H_T(f) H_R(f)| df \right|^2 = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{1}{|P(f)|} df \right|^2$$

Y la BER mínima obtenida con los FTOs, es:

$$BER = \frac{2(M-1)}{bM} Q \left(\sqrt{\frac{6b}{(M^2-1)} \frac{1}{\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{1}{|P(f)|} df \right|^2} \frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (3.119)$$

Como conclusión, es de destacar, que los filtros terminales óptimos que minimizan la BER, ecualizan por igual la función de transferencia del canal, según se deduce de las ecuaciones (3.118). Sin embargo, el procedimiento utilizado en este apartado, aunque óptimo, es poco realista, debido a la dificultad de tener que aproximar las funciones de transferencia obtenidas, $H_T(f)$, $H_R(f)$ mediante sistemas FIR.

En la práctica, siempre que se conozca previamente el canal equivalente $p[n]$, se ecualizará de tal modo que $h_T[n] = h_R[-n]$, reduciendo en general el nivel de ISI resultante, aunque sin llegar a anularla totalmente como sería lo ideal.

Los pasos a seguir en el diseño ideal de FTO se suman por tanto del siguiente modo:

- a) Cálculo de la transformada de Fourier del canal discreto equivalente:

$$P(f) = |P(f)| e^{j2\pi\phi_P(f)} = \sum_k p[k] e^{-j2\pi f k}$$

- b) Obtención de las funciones de transferencia:

$$H_T(f) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{|P(f)|}} e^{j2\pi\phi_T(f)}$$

$$H_R(f) = \frac{1}{\sqrt{|\lambda P(f)|}} e^{j2\pi\phi_R(f)} = \frac{1}{\sqrt{|\lambda P(f)|}} e^{-j2\pi(k_0 + \phi_P(f) + \phi_T(f))}$$

- c) Cálculo de la constante λ ajustándola a la energía media de bit E_b

$$\frac{d^2}{4} = \frac{3bE_b}{(M^2-1) \sum_{n=0}^{L_T} h_T^2[n]} = \frac{3bE_b}{(M^2-1) \int \lambda |P(f)| df} \Rightarrow \lambda = \frac{12bE_b}{(M^2-1)d^2 \int |P(f)| df}$$

- d) Cálculo de la respuesta impulsional de los ecualizadores como la aproximación FIR de:

$$h_R[k] \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H_R(f) e^{j2\pi f k} df \quad ; \quad h_T[k] \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H_T(f) e^{j2\pi f k} df$$

3.7 Ejercicios Propuestos

3.7.1 Ejercicio 1

Sea una modulación PAM binaria, polar y de símbolos equiprobables:

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \alpha[i] \varphi(t-iT) \quad \varphi(t) = \sqrt{r} \sin c(rt) \quad \alpha[i] = \pm d/2 \quad T = \frac{1}{r}$$

La señal $s(t)$ se transmite a través de un canal que presenta distorsión, y ésta se puede modelar según la siguiente respuesta impulsional:

$$h_c(t) = h_0 \delta(t) + h_1 \delta(t-T)$$

La señal recibida es por tanto $y_r(t) = s(t) * h_c(t) + w(t)$

$w(t)$ es ruido blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $N_0/2$

La señal se recibe con un filtro adaptado al pulso transmitido $\phi(t)$: ($h_r(t) = \frac{1}{E_p} \text{sinc}(rt)$). A la salida

del filtro receptor se tendrá por tanto: $y(t) = s(t) * h_c(t) * h_r(t) + n(t)$

a) Calcule y dibuje la densidad espectral de $s(t)$. Deje el resultado en función de d y r .

Calcule la densidad espectral de la señal a la salida del canal, es decir de $s(t) * h_c(t)$. Deje el resultado en función de d, r, h_0, h_1 . Dibújela si $h_0=1, h_1=-1$.

3.7.2 Ejercicio 2

Al transmitir una modulación biortogonal, el modelo obtenido para el vector detectado a la salida del proyector de señal formado por los filtros adaptados: $\varphi_1(t-t_\varphi), \varphi_2(t-t_\varphi)$ se puede expresar como:

$$\mathbf{y}[k] = \begin{pmatrix} \gamma & 0.1\gamma \\ 0.1\gamma & \gamma \end{pmatrix} \mathbf{s}[k] + \mathbf{n}[k] = \mathbf{P}\mathbf{s}[k] + \mathbf{n}[k] \quad \text{donde el vector de ruido se distribuye:}$$

$$\mathbf{n}[k] : N\left(\mathbf{0}, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}\right).$$

Para eliminar la ICI se propone una ecualización a partir de una matriz de 4 coeficientes:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{con lo que la señal a la salida del ecualizador se puede expresar según:}$$

$$\mathbf{y}_Q[k] = \mathbf{H}\mathbf{y}[k] = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{s}[k] + \mathbf{n}_Q[k]$$

Se pide:

- Calcule la matriz $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{FZ}$, cuando el criterio aplicado es el forzador de ceros (FZ).
- Calcule la distribución estadística del nuevo vector de ruido: $\mathbf{n}_Q[k]$.
- Suponiendo que se mantienen los umbrales de decisión: $y_1 = 0, y_2 = 0$, obtenga la BER en función de los coeficientes de la matriz de ecualización \mathbf{H} .
- Calcule la matriz $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{MMSE}$, cuando el criterio aplicado es el de mínimo error cuadrático medio: $\min \left(\|\mathbf{y}_Q[k] - \mathbf{s}[k]\|^2 \right)$.
- Demuestre que si el ruido es nulo ambas soluciones coinciden: $\mathbf{H}_{MMSE} = \mathbf{H}_{FZ}$.

3.8 Apéndice: Estacionariedad de $y[k]$

Tal como se analiza en el apartado 3.1, el proceso $y(t)$ es cicloestacionario con periodicidad de periodo igual al tiempo de símbolo T . Para un espacio de señal de dimensión $L=1$, la expresión obtenida para la correlación es:

$$R_y(t + \tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_\alpha[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(t + \tau - (n+k)T) \varphi(t - nT) \quad (3.120)$$

con lo que:

$$R_y(t + \tau, t) = R_y(t + nT + \tau, t + nT)$$

Al tomar muestras del proceso $y(t)$ a tiempo $t_k = t_d + kT$, la secuencia obtenida es un proceso discreto estacionario en correlación, debido a que las muestras se toman a una frecuencia de muestreo coincidente con el periodo de cicloestacionariedad. Esta propiedad se demuestra en el siguiente desarrollo.

Sea la secuencia:

$$y[k] = y(t_k)$$

Su función de autocorrelación se define como:

$$\begin{aligned} R_y[l + m, l] &= E[y[l + m] y[l]] = E[y(t_{l+m}) y(t_l)] = \\ R_y(t_d + (l + m)T, t_d + lT) &= R_y(t_d + mT, t_d) \end{aligned} \quad (3.121)$$

De (3.121) se deduce que

$$R_y[l + m, l] = R_y[m]$$

La paridad de la función de autocorrelación se demuestra de forma análoga:

$$R_y[m] = R_y(t + mT, t) = R_y(t, t - mT) = R_y[-m] \quad (3.122)$$

Por tanto se deduce:

Para un proceso aleatorio continuo cicloestacionario en correlación, de cicloperiodo T , el proceso discreto resultante, a la frecuencia de muestreo $f_m = \frac{1}{T}$ resulta estacionario en correlación.