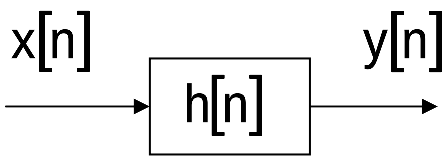
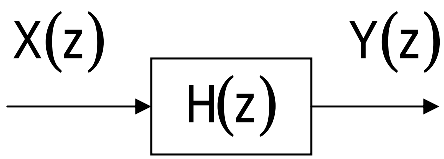
4.2: Análisis de sistemas definidos por EDF

- Función de transferencia
- Diagrama de ceros y polos
- Causalidad y estabilidad
- Análisis de sistemas
- Transformada Z unilateral





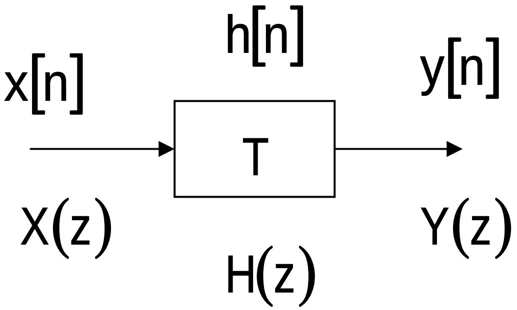
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

Función de transferencia

- Para sistemas lineales e invariantes, tres interpretaciones:
  - Transformada Z de la respuesta impulsional

$$H(z) = TZ\{\, h[n] \,\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, z^{-n}$$



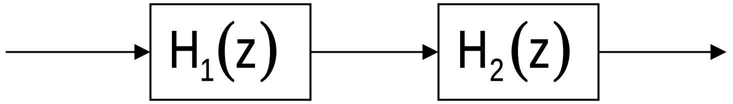
  - Autovalor de la autofunción exponencial

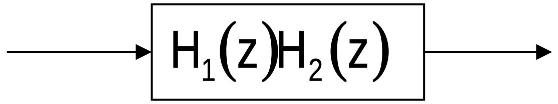
$$x[n] = Az^{n} \qquad\qquad y[n] = H(z)Az^{n}$$

  - Cociente de las transformadas Z de la salida y la entrada

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad\qquad Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$





Sistemas definidos por EDF

- Sup. linealidad e invarianza ($\Leftrightarrow$ condiciones iniciales nulas)
- Función de transferencia racional

$$\sum_{k=0}^{P} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^{P} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{P} a_k z^{-k}}$$

- Concordancia de la necesidad de establecer
  - la causalidad del sistema en la EDF
  - la ROC de H(z)

Ceros y polos

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{P} a_k z^{-k}} = \frac{b_o \prod_{k=1}^{Q} \left(1 - c_k z^{-1}\right)}{a_o \prod_{k=1}^{P} \left(1 - p_k z^{-1}\right)}$$

- H(z) especificada por
  - constante multiplicativa
  - Q ceros c_k $\quad N(c_k) = 0 \Rightarrow H(c_k) = 0$
  - P polos p_k $\quad D(p_k) = 0 \Rightarrow H(p_k) = \infty$

Ceros de transmisión

$$x[n] = c_k{}^n \Rightarrow y[n] = H(c_k) c_k{}^n = 0$$

Raíces de la ecuación característica
Frecuencias propias

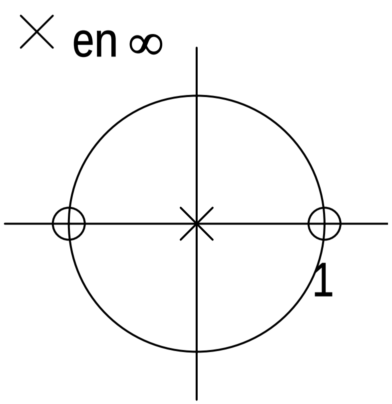
- Además
  - Q>P, Q-P polos en z=0
  - P>Q, P-Q ceros en z=0
  - ni ceros ni polos en z=∞
- Considerando además potencias positivas de z (adelantos en la EDF), posibles ceros y polos en z=0 y z= ∞
- Siempre, nº ceros = nº polos = máx(P,Q) = orden del sistema

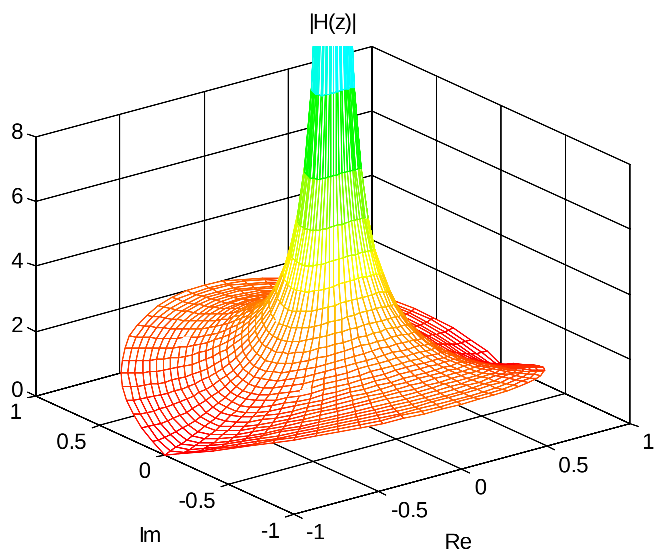
Sistemas reales. Ejemplos (I)

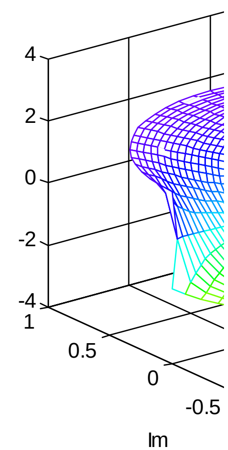
$$h[n]\in\Re \Leftrightarrow a_k, b_k \in \Re \Leftrightarrow H(z)\in\Re \quad \text{para} \quad z\in\Re$$

$$\Rightarrow H(z) = H^*(z^*) \Rightarrow \begin{cases} \text{Propiedad de reflexión} \\ \text{Ceros y polos complejos conjugados} \end{cases}$$

$$H(z) = z - z^{-1}$$





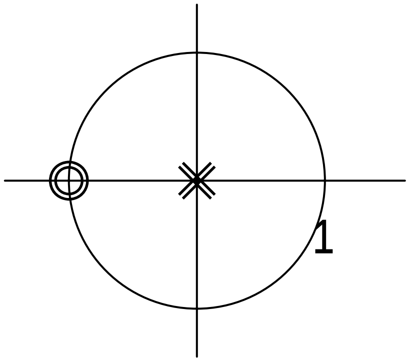


FIR: polinomio, con polos en z=0 y/o z=∞

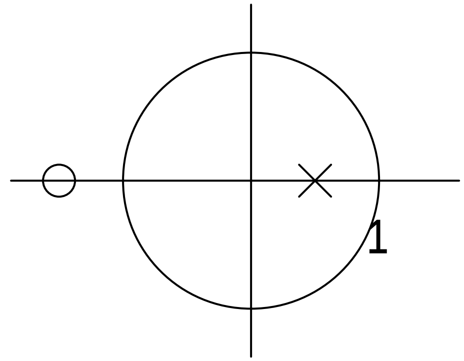
Sistemas reales. Ejemplos (II)

$$H(z) = 0.5 + z^{-1} + 0.5z^{-2} = 0.5\left(1 + z^{-1}\right)^2$$

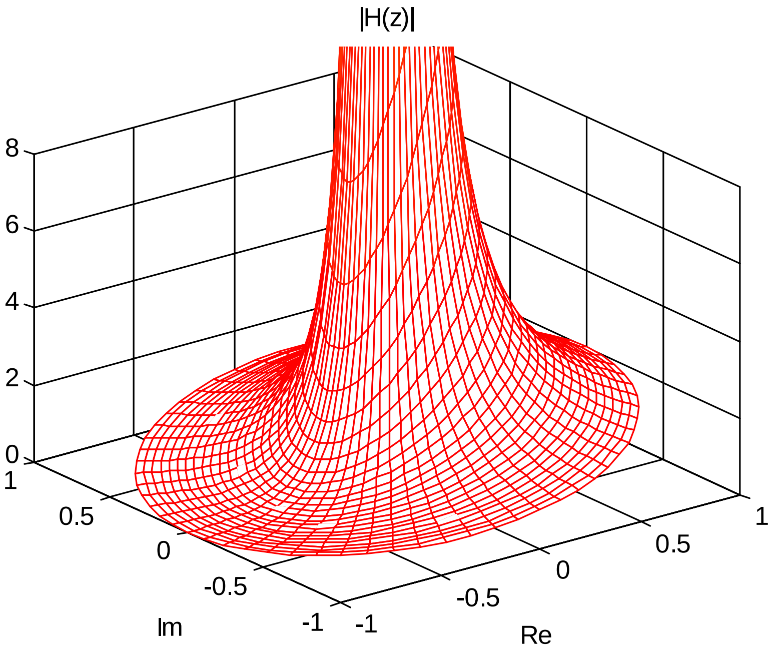
$$H(z) = \frac{1 + 1.5z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

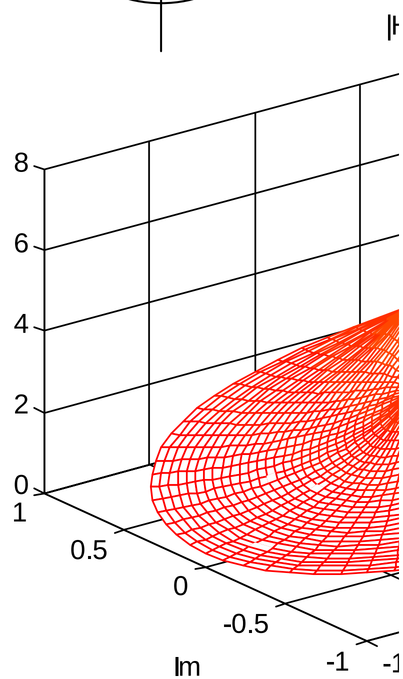


FIR causal:
polos en z=0



IIR



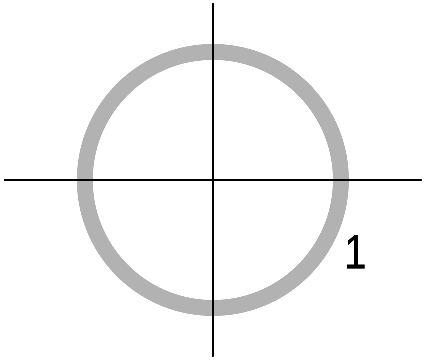


Estabilidad y causalidad (I)

- Estabilidad

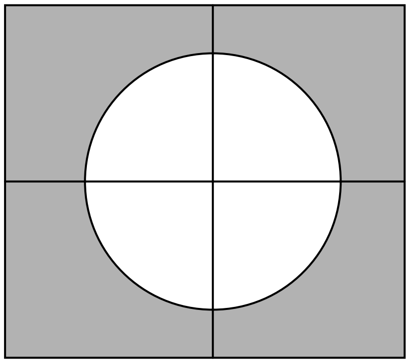
$$\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h[n]z^{-n}\right| < \infty, |z| = 1$$

$$\Leftrightarrow \{z / |z| = 1\} \in \mathrm{ROC}$$



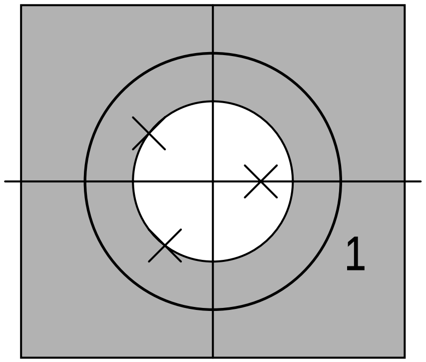
- Causalidad

$$\Leftrightarrow \mathrm{ROC} = \left\{z / |z| > r, r = \max_k \{|p_k|\}\right\}$$



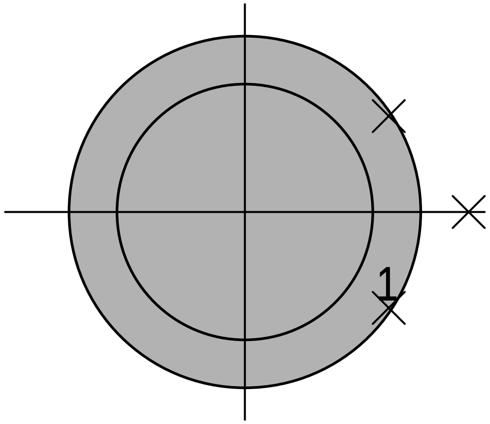
Estabilidad y causalidad (II)

- ROC de H(z) con polos en las fronteras y sin polos en el interior
- Causalidad y estabilidad
  - Polos dentro de la circunferencia de radio unidad



$$\max_k \{|p_k|\} < 1$$

- Anticausalidad y estabilidad
  - Polos fuera de la circunferencia de radio unidad



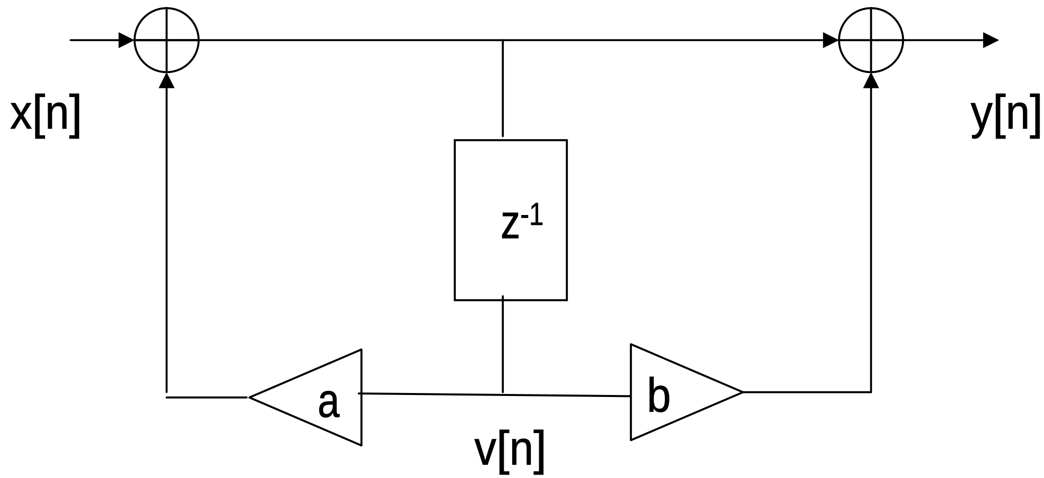
$$\min_k \{|p_k|\} > 1$$

- Circunferencia de radio unidad
  - lugar geométrico de las componentes frecuenciales
  - frontera de estabilidad

Análisis de sistemas. Ejemplo

- Ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} y[n] = x[n] + (a+b)v[n] \\ v[n+1] = x[n] + av[n] \end{cases}$$



- Función de transferencia

$$\begin{cases} Y(z) = X(z) + (a+b)V(z) \\ V(z) = z^{-1}X(z) + az^{-1}V(z) \end{cases}$$

$$V(z) = \frac{z^{-1}X(z)}{1-az^{-1}}$$

$$Y(z) = X(z) + (a+b)\frac{z^{-1}X(z)}{1-az^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+bz^{-1}}{1-az^{-1}}$$

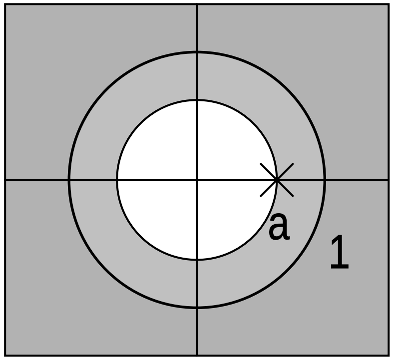
- Relación entrada/salida

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] + bx[n-1]$$

- Respuesta impulsional

$$h[n] = -\frac{b}{a}\delta[n] + \left(1+\frac{b}{a}\right)a^n u[n]$$

Cálculo de la respuesta. Ejemplo



$$H(z)=\frac{1+bz^{-1}}{1-az^{-1}}$$

- Causal $\quad ROC_H=\{z/|z|>|a|\}$
- Estable $\quad |a|<1$

$$x[n]=e^{j\omega n}u[n] \qquad X(z)=\frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}} \qquad ROC_X=\{z/|z|>1\}$$

$$Y(z)=H(z)\cdot X(z)=\frac{1+bz^{-1}}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}}=\frac{A_1}{1-az^{-1}}+\frac{A_2}{1-e^{j\omega}z^{-1}}$$

$$ROC_Y=ROC_X\cap ROC_H$$

$$ROC_Y=\{z/|z|>1\}$$

$$A_1=Y(z)\left(1-az^{-1}\right)\Big|_{z=a}=\frac{1+ba^{-1}}{1-e^{j\omega}a^{-1}}=\frac{a+b}{a-e^{j\omega}}$$

$$A_2=Y(z)\left(1-e^{j\omega}z^{-1}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$y[n]=\underbrace{\frac{a+b}{a-e^{j\omega}}a^n u[n]}_{\text{Respuesta libre}}+\underbrace{H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}u[n]}_{\text{Respuesta forzada}}$$

Transformada Z unilateral

- Si sólo se considera n≥0

$$X^{+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

- Suma
- Multiplicación por escalar

$$ax[n]+by[n]\leftrightarrow aX^{+}(z)+bY^{+}(z)$$

- Retardo

$$x[n-1]\not\leftrightarrow z^{-1}X(z)$$

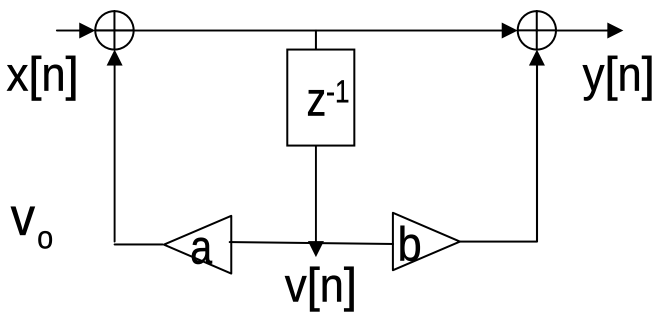
$$y[n]=x[n-1] \qquad n>0$$

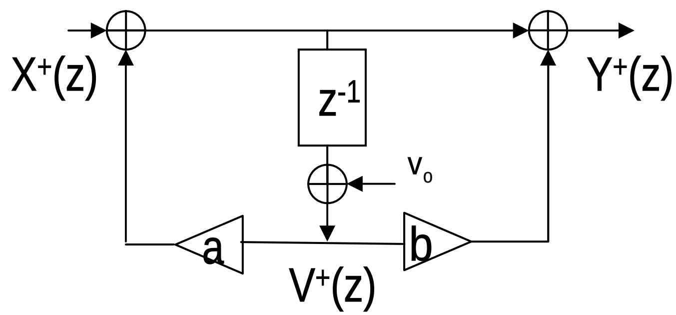
$$y[0]=y_o$$

$$Y^{+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}y[n]z^{-n}=y_o+\sum_{n=1}^{\infty}x[n-1]z^{-n}=y_o+\sum_{m=0}^{\infty}x[m]z^{-m-1}=y_o+z^{-1}X^{+}(z)$$

Sistema con condiciones iniciales. Ejemplo

$v[0] = v_o$





$$\begin{cases} Y^+(z) = X^+(z) + (a+b)V^+(z) \\ V^+(z) = v_o + z^{-1}\left[X^+(z) + aV^+(z)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y^+(z) = X^+(z) + (a+b)V^+(z) \\ V^+(z) = \dfrac{z^{-1}X^+(z) + v_o}{1 - az^{-1}} \end{cases} \Longrightarrow Y(z) = \frac{1+bz^{-1}}{1-az^{-1}}X(z) + \frac{(a+b)}{1-az^{-1}}v_o$$

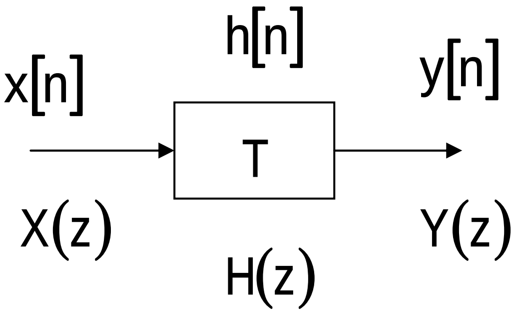
respuesta en reposo

respuesta con excitación nula

Resumen

- Función de transferencia

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$



- Función racional para sistemas EDF

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{P} a_k z^{-k}}=\frac{b_o\prod_{k=1}^{Q}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{a_o\prod_{k=1}^{P}\left(1-p_k z^{-1}\right)}$$

- Sistema causal y estable $\quad \underset{k}{\text{máx}}\{|p_k|\}<1$

- Transformada Z unilateral $\quad X^{+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$