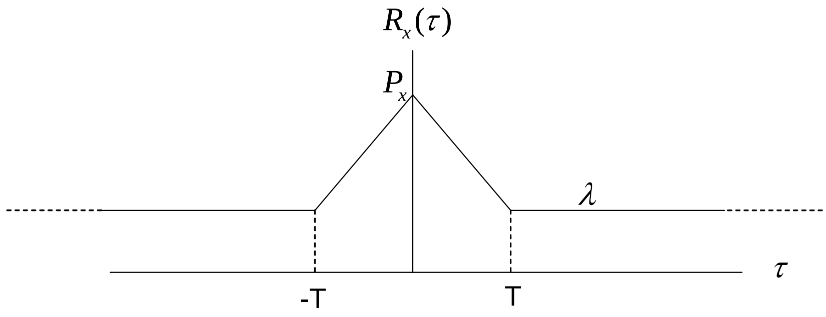
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación de Barcelona
CONTROL DE COMUNICACIONES I
Grupo 20 14 de marzo de 2008
Profesor: Jaume Riba **Duración: 2h**

Se prohíbe el uso de teléfonos móviles durante la realización del examen. No se pueden utilizar ni en su funcionalidad de reloj. Durante la realización del examen debe tener visible un documento identificativo con fotografía. Todos los apartados tienen igual puntuación y deben responderse justificadamente.

Sea $x(t)$ un proceso real estacionario gausiano de media μ_x, potencia P_x y autocorrelación

$$R_x(\tau) = \lambda + \left(P_x - \lambda\right)\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right).$$



---

1) Halle el valor de λ sabiendo que las variables aleatorias $x(0)$ y $x(T)$ son incorreladas.
Solución. Al ser incorreladas, la esperanza de su producto debe ser igual al producto de las medias y este es el valor de la autocorrelación evaluada en T. Por tanto:

$$\lambda = \mu_x^2$$

Se definen los procesos:

$$y(t) = \alpha x(t) + \beta x(t-T)$$

$$z(t) = \beta x(t) - \alpha x(t-T)$$

donde α y β son constantes.

---

2) Halle la media estadística de $y(t)$ y de $z(t)$.
Solución. La media de la suma es igual a la suma de las medias. Por tanto:

$$\mu_y = \left(\beta + \alpha\right)\mu_x$$

$$\mu_z = \left(\beta - \alpha\right)\mu_x$$

Se definen las variables aleatorias $Y = y(0)$ y $Z = z(0)$.

---

3) Halle la función de densidad de probabilidad de Y y Z ($f_Y(Y)$ y $f_Z(Z)$).
Solución. Al ser x(t) un proceso gausiano, sus muestras son variables aleatorias gausianas. Y y Z son combinación lineal de variables aleatorias gausianas y por tanto son gausianas:

$$f_Y(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{\left(Y-\mu_Y\right)^2}{2\sigma_Y^2}} \qquad f_Z(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} e^{-\frac{\left(Y-\mu_Z\right)^2}{2\sigma_Z^2}}$$

Tanto Y como Z son la suma de dos variables aleatorias incorreladas. Por lo tanto, su varianza es igual a la suma de las varianzas de cada término:

$$\sigma^2 \triangleq \sigma_Y^2 = \sigma_Y^2 = \left(\beta^2 + \alpha^2\right)\left(P_x - \mu_x^2\right)$$

4) Justifique que $f_Y(Y) = f_Z(Y - c)$ y halle el valor de c.

Solución. Al ser iguales sus varianzas, las funciones de densidad (gausianas en ambos casos) solo difieren en un desplazamiento igual a la diferencia de las medias:

$$c = \mu_y - \mu_z$$

5) Dibuje $f_Z(Z)$ para el caso particular de $\alpha = \beta = 1$.

Solución. Al ser en este caso Z de media nula, su función de densidad es una campana de Gauss centrada en el origen.

6) Halle $E[Y\,Z]$.

Solución.

$$Y = \alpha x(0) + \beta x(-T)$$

$$Z = \beta x(0) - \alpha x(-T)$$

Al hacer la esperanza del producto, aparece el término Ex(0)x(-T). Por estacionariedad, es igual a E(x(0)x(T) y por incorrelación es igual a la media al cuadrado. Por otra parte, Ex(0)x(0)=Ex(-T)x(-T) (también por estacionariedad). Por tanto:

$$E[Y\,Z] = \left(\beta^2 - \alpha^2\right)\mu_x^2$$

7) ¿Son Y y Z ortogonales?

Solución. En general no. Sólo lo son si $|\beta| = |\alpha|$.

¿Son incorreladas?

Solución. Calculamos el producto de medias:

$$\mu_Y \mu_Z = \left(\beta + \alpha\right)\mu_x\left(\beta - \alpha\right)\mu_x = \left(\beta^2 - \alpha^2\right)\mu_x^2$$

Como que éste coincide con $E[Y\,Z]$, comprobamos que sí son incorreladas.

¿Son independientes?

Solución. Al ser incorreladas y gausianas, son independientes.

Se define el proceso:

$$a(t) = y(t)z(t)$$

---

8) Halle la media estadística de $a(t)$.

Solución. Por estacionariedad, la media de a(t) es $\mu_a = E[Y\,Z] = \left(\beta^2 - \alpha^2\right)\mu_x^2$.

9) Halle la potencia de $a(t)$. [Verifique la validez del resultado obtenido observando el caso particular en que $\lambda = P_x$ (proceso determinista constante, $x(t) = \lambda$).]

Solución. Al ser Y y Z variables aleatorias independientes, y(t) y z(t) (evaluadas en el mismo t) son también independientes. Por tanto:

$$P_a = E\left[a^2(t)\right] = E\left[y^2(t)z^2(t)\right] = P_y P_z$$

Expresamos cada potencia como la varianza más la media al cuadrado. Desarrollamos términos y resulta:

$$P_y = \left(\beta^2+\alpha^2\right)P_x + 2\beta\alpha\mu_x^2$$

$$P_z = \left(\beta^2+\alpha^2\right)P_x - 2\beta\alpha\mu_x^2$$

Finalmente:

$$P_a = \left(\beta^2+\alpha^2\right)^2 P_x^2 - 4\beta^2\alpha^2\mu_x^4$$

Se define el proceso:

(derivada de x(t))

---

10) Halle y dibuje la densidad espectral de potencia de $b(t)$.

Solución. La derivación es el resultado de pasar x(t) por un sistema de respuesta frecuencial $j2\pi f$, por tanto:

$$S_b(f) = 4\pi^2 f^2 S_x(f)$$

Por tanto, sólo falta calcular el espectro de x(t). A partir de la expresión de su autocorrelación, realizamos la transformada de Fourier de ambos términos, con lo que resulta:

$$S_x(f) = \lambda\delta(f) + \left(P_x-\lambda\right)T\left(\frac{\sin\left(\pi fT\right)}{\pi fT}\right)^2 = \lambda\delta(f) + \frac{1}{T\pi^2}\left(P_x-\lambda\right)\sin^2\left(\pi fT\right)\frac{1}{f^2}$$

Finalmente:

$$S_b(f) = 4\pi^2 f^2 S_x(f) = \frac{4}{T}\left(P_x-\lambda\right)\sin^2\left(\pi fT\right) = \frac{2}{T}\left(P_x-\lambda\right)\left(1-\cos\left(2\pi fT\right)\right)$$

Se definen los promedios temporales

$$\hat{E}_b = \int b^2(t)dt \qquad \hat{P}_b = \left\langle b^2(t)\right\rangle = \lim_{Q\to\infty}\frac{1}{2Q}\int_{-Q}^{Q} b^2(t)dt$$

---

11) ¿Cuál de ellos es finito para toda realización de $b(t)$? Justifique el resultado encontrando la relación general entre $E[\hat{P}_b]$ y $R_b''(0)$.

Solución: El área de $S_b(f)$ no es finita con lo que la potencia media tampoco. Por ello, ninguno de los promedios temporales indicados es finito.

12) Demuestre que $R_b(\tau) = \gamma\delta(\tau+T) + \varepsilon\delta(\tau) + \phi\delta(\tau-T)$ y halle el valor de γ , ε y ϕ .

Nota: $\sin^2(\pi fT) = \left(1-\cos(2\pi fT)\right)/2$.

Solución. Se trata de calcular la transformada inversa de Fourier de

$$S_b(f) = \frac{2}{T}\left(P_x-\lambda\right)\left(1-\cos\left(2\pi fT\right)\right)$$

que es:

$$R_b(\tau) = \frac{2}{T}\left(P_x-\lambda\right)\left(\delta(\tau) - 0.5\delta(\tau-T) - 0.5\delta(\tau+T)\right)$$

Identificando:

$$\gamma = \phi = -\frac{1}{T}\left(P_x - \lambda\right)$$

$$\varepsilon = \frac{2}{T}\left(P_x - \lambda\right)$$

Se define el proceso:

$$c(t) = b(t)\cos\left(2\pi f_o t\right)$$

---

13) Halle el mínimo valor de f_o que convierte $c(t)$ en ruido blanco de espectro $S_c(f) = K$. Halle el valor de K.

Solución:

Como resultado del producto con la cosenoide tenemos:

$$S_c(f) = \frac{1}{4}\left(S_b(f - f_o) + S_b(f + f_o)\right)$$

$$= \frac{1}{2T}\left(P_x - \lambda\right)\left(2 - \cos\left(2\pi\left(f - f_o\right)T\right) - \cos\left(2\pi\left(\left(f + f_o\right)\right)T\right)\right)$$

Para que el espectro sea plano, debemos imponer que:

$$\cos\left(2\pi\left(f - f_o\right)T\right) = -\cos\left(2\pi\left(f + f_o\right)T\right)$$

lo que se cumple para:

$$2\pi f_o T = \pi / 2$$

Por lo tanto:

$$f_o = \frac{1}{4T}$$

14) ¿Es $c(t)$ un proceso estacionario?

Solución. No. Visto en clase.

Se define el proceso:

$$d(t) = \frac{1}{NT}\int_{t-NT}^{t} x(\tau)d\tau \quad para \;\; N > 100$$

---

15) Halle aproximadamente la variancia de $d(t)$.

Solución:

En general tenemos:

$$P_d = \int R_x(\tau) R_h^e(\tau) d\tau$$

donde $R_h^e(\tau) = \frac{1}{NT}\Lambda\left(\frac{\tau}{NT}\right)$.

Restando la media al cuadrado resulta la varianza:

$$\sigma_d^2 = \left(P_x - \lambda\right)\frac{1}{NT}\int \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)\Lambda\left(\frac{\tau}{NT}\right)d\tau$$

Para N grande, el triángulo ancho es prácticamente constante en la zona de integración con lo que:

$$\sigma_d^2 \approx \left(P_x - \lambda\right)\frac{1}{NT}\int \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)d\tau = \frac{P_x - \mu_x^2}{N}$$

Se define el proceso complejo:

$$g(t) = i_g(t) + jq_g(t)$$

tal que:

$$i_g(t) = x(t)\cos(2\pi f_1 t + \theta)$$

$$q_g(t) = x(t)\sin(2\pi f_1 t + \theta)$$

donde $f_1 > 0$ *y* θ *es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre* $-\pi/2$ *y* $\pi/2$.

---

16) Halle la media de $g(t)$.

Solución:

Escribimos g(t) de forma compacta en modo complejo:

$$g(t) = x(t)e^{j2\pi f_1 t}e^{j\theta}$$

lo que permite la factorización de los términos independientes.

Haciendo la esperanza y aplicando independencia entre x(t) y θ:

$$\mu_g(t) = \mu_x e^{j2\pi f_1 t}\mu_\theta$$

Mediante el teorema de la esperanza:

$$\mu_\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j\theta}d\theta = \frac{2}{\pi}$$

Por tanto:

$$\mu_g(t) = \frac{2\mu_x}{\pi}\mu_x e^{j2\pi f_1 t}$$

17) Halle la autocorrelación y autocorrelación complementaria de $g(t)$.

$$R_g(\tau) = R_x(\tau)e^{j2\pi f_1 \tau}$$

$$\tilde{R}_g(\tau) = R_x(\tau)e^{j2\pi f_1 \tau}e^{j2\pi 2 f_1 t}E\left[e^{j2\theta}\right]$$

De nuevo con el teorema de la esperanza se comprueba que:

$$E\left[e^{j2\theta}\right] = 0$$

18) ¿Para qué valor de μ_x es $g(t)$ un proceso circular?

Solución. Para ser circular, (y al ser estacionario) la complementaria debe ser igual a la media al cuadrado. Como la complementaria es nula, $g(t)$ es circular si $\mu_x = 0$.

19) ¿Para qué valor de μ_x son $i_g(t)$ y $q_g(t)$ procesos independientes?

Solución. $\mu_x = 0$.