

1— (0.5 punts cada apartat) Raoneu totes les respostes.

- a) Calculeu el nombre d'aplicacions exhaustives de  $[2n]$  a  $[n]$ .
- b) Calculeu  $\varphi(360)$ , on  $\varphi$  és la funció d'Euler.
- c) Calculeu el coeficient de  $x^2y^8$  en  $(2 + x - y)^{10}$ .
- d) Dibuixeu el diagrama de Ferrers i escriviu la partició conjugada de la partició  $(8, 5, 5, 3, 2, 1)$ .
- e) Calculeu el nombre de 3-particions de  $[n]$  tals que una de les parts té cardinal  $r$  fix, on  $1 \leq r \leq n - 2$ .
- f) Quina és la funció generadora ordinària de la successió  $(-1)^n n$ ?
- g) Sigui  $A(x)$  la f.g.o. de la successió  $(a_n)_n$  i  $S(x)$  la f.g.o. de la successió de les seves sumes parcials  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . Trobeu la f.g.o. de la successió de les sumes parcials de  $(s_n)_n$  en funció de  $A(x)$ .
- h) Quantes permutacions  $\sigma$  de  $[n]$  hi ha tals que  $\sigma(i) \neq i$ , per a tot  $i \in [n]$  i, a més,  $\sigma(i) \in [6]$ , si  $i \in [6]$ ?
- i) Calculeu el nombre de solucions enteres no negatives de l'equació

$$x_1 + \cdots + x_n = 2n$$

tals que  $x_i \geq 1$ , per a tot  $i \in [n]$ .

- j) De quina successió és f.g.o. la funció

$$\frac{-3}{1+5x} + \frac{x}{(1-3x)^2} ?$$

2— (2 punts) Resoleu la recurrència donada per  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ , i, si  $n \geq 0$ ,

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = n.$$

3— (3 punts) Un equip de 5 enginyers informàtics, als que direm  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $E$ , ha de realitzar un projecte informàtic que consta de 5 tasques independents  $t_1, \dots, t_5$ . L'enginyer  $A$  no pot fer les tasques  $t_1$  i  $t_4$ ; a  $B$  li és impossible realitzar les tasques  $t_2$  i  $t_5$ ;  $C$  no vol fer la tasca  $t_3$  i, finalment,  $E$  no pot fer la tasca  $t_4$ . Calculeu el nombre de maneres de repartir les tasques entre els 5 enginyers, de manera que persones diferents facin tasques diferents.