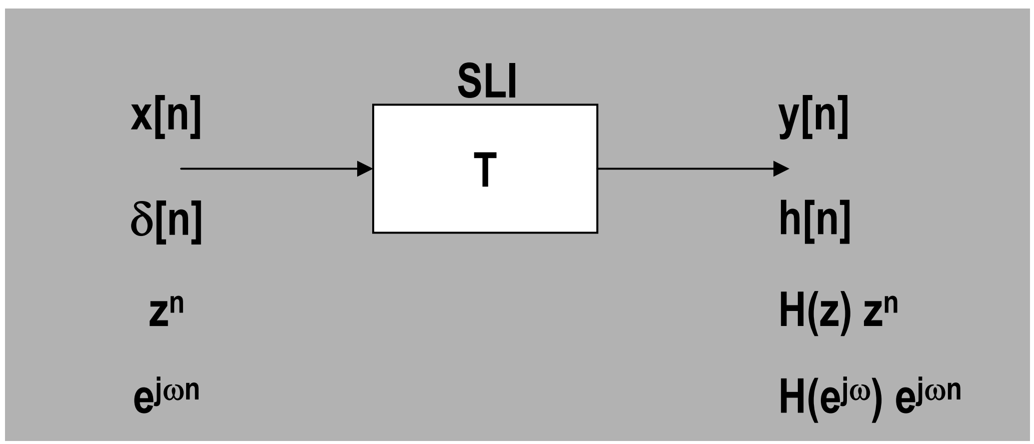
2.1: Transformada de Fourier

- Motivación
- Definición y ejemplos
- Propiedades
- Teoremas de la transformada
- Transformada de secuencias EF y PMF



Motivación (I)

Caracterización de un Sistema Lineal e Invariante (SLI).

- **En el tiempo, la respuesta impulsional h[n] caracteriza al sistema.**

  Cálculo de la respuesta mediante descomposición en suma de impulsos y superposición de las respuestas a cada impulso (convolución).

$$x[n] = \delta[n] \qquad\qquad y[n] = h[n]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \;\longrightarrow\; \boxed{\text{SLI}} \;\longrightarrow\; y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] = h[n] * x[n]$$

- **¿Existe una caracterización similar en frecuencia?**

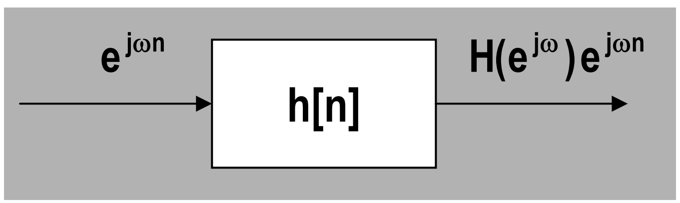
  Conocemos la respuesta de un SLI a una exponencial compleja...

$$x[n] = z^n \;\longrightarrow\; \boxed{\text{SLI}} \;\longrightarrow\; y[n] = H(z)\,z^n, \text{ donde } H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,z^{-k}$$

$$x[n] = e^{j\omega n} \qquad\qquad y[n] = H(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}, \text{ caso particular } z = e^{j\omega}$$

Motivación (II)

- La respuesta frecuencial, $H(e^{j\omega})$, caracteriza el comportamiento del sistema para una componente frecuencial

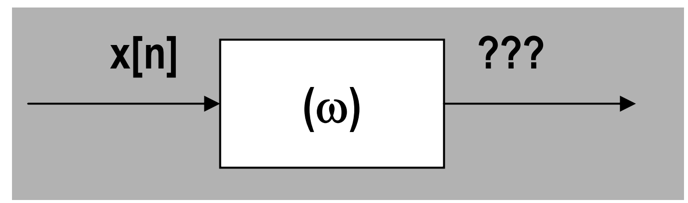


- $H(e^{j\omega})$ se puede calcular a partir de la secuencia respuesta impulsional h[n]

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j\omega n}$$

- $H(e^{j\omega})$ es medible en el laboratorio

- ¿Podemos caracterizar el comportamiento en frecuencia del sistema en general?



- ¿Sería útil generalizar el cálculo para cualquier secuencia x[n]?

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

- ¿Qué representaría entonces $X(e^{j\omega})$?

Transformada de Fourier: definición

- **Definición**
  - **transformación directa:** $$x[n] \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$
  - **transformación inversa:** $$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{FT^{-1}} x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega$$
- **Observaciones**
  - **$X(e^{j\omega})$ es una función compleja, de variable real (ω) y periódica (2π)**
  - **Si x[n] es sumable en valor absoluto, la serie de potencias que define la transformada de Fourier converge uniformemente**

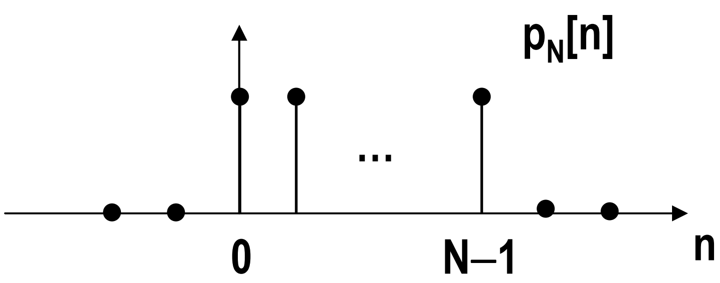
$$\lim_{N\to\infty} \left| X(e^{j\omega}) - \sum_{n=-N}^{N} x[n] e^{-j\omega n} \right| = 0$$

  - **La transformación inversa se obtiene interpretando la transformación directa como un desarrollo en serie de Fourier de $X(e^{j\omega})$. En este caso, x[n] se calcula como el coeficiente n-ésimo.**

Transformada de Fourier: ejemplos (I)

- **Pulso de N muestras**

$$p_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{para otro } n \end{cases}$$



- **Transformada del pulso**

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_N[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega N/2}}{e^{-j\omega/2}} \frac{e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

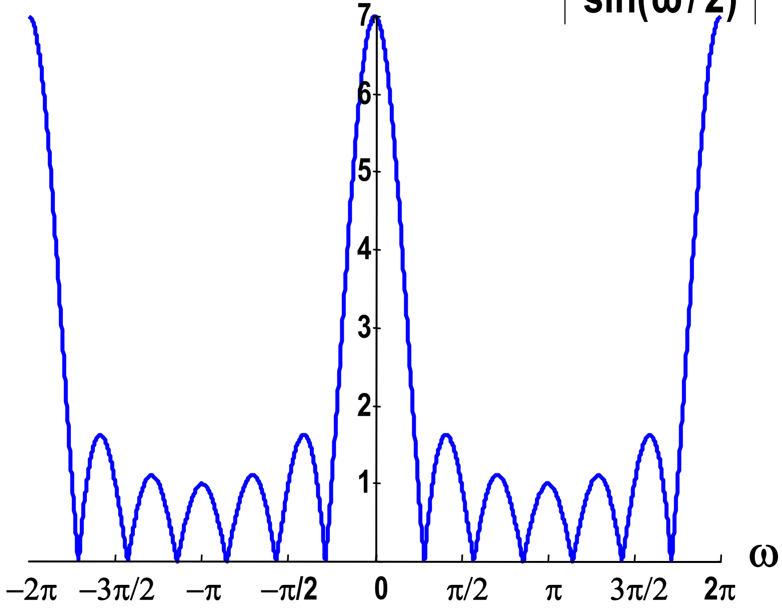
- ceros en $\frac{\omega N}{2} = \pi k \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{N} k$ $\quad k \neq 0$ entero

Transformada de Fourier: ejemplos (II)

- **Transformada del pulso: representación gráfica (para N=7)**

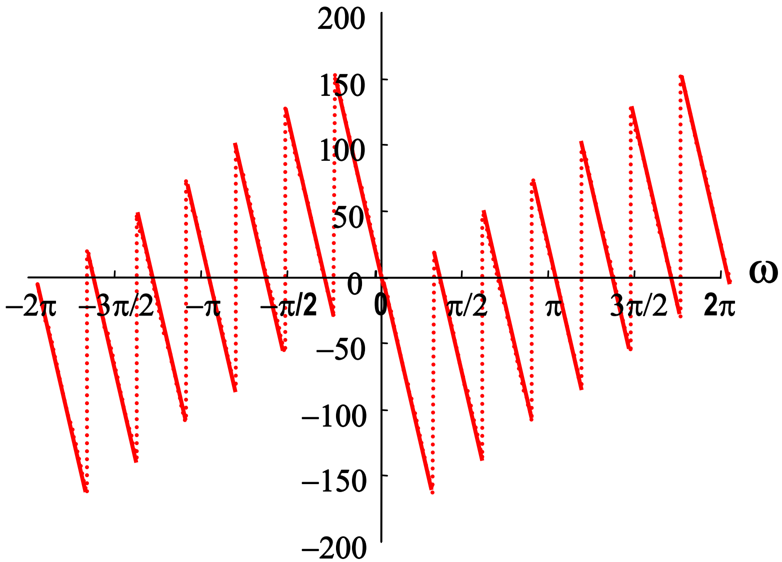
Módulo

$$|P_N(e^{j\omega})| = \left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$



Fase

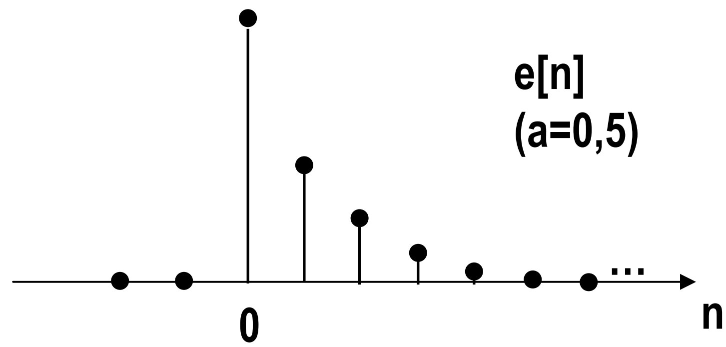
$$\angle P(e^{j\omega}) \quad \text{(en grados)}$$



Transformada de Fourier: ejemplos (III)

- **Exponencial causal**

$$e[n] = a^n u[n]$$



- **Transformada**

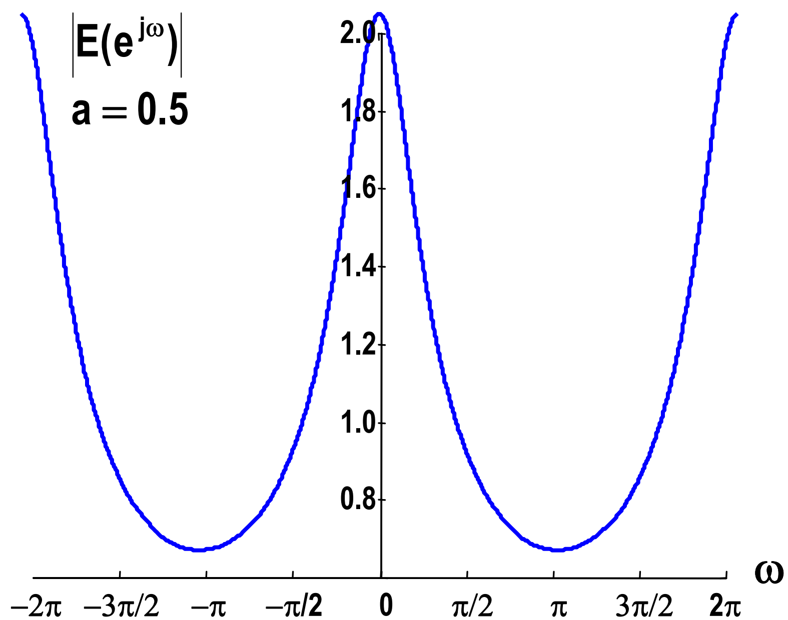
$$E(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|ae^{-j\omega}\right| < 1 \Leftrightarrow |a| < 1$$



Propiedades de la transformada de Fourier (I)

- **Propiedades de simetría:**

$$x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$
$$x[-n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{-j\omega})$$
$$x^*[n] \xleftrightarrow{FT} X^*(e^{-j\omega})$$
$$x^*[-n] \xleftrightarrow{FT} X^*(e^{j\omega})$$

por tanto,

$$x[n] = x[-n] \quad \text{(par)} \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \quad \text{(par)}$$
$$x[n] = -x[-n] \quad \text{(impar)} \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega}) \quad \text{(impar)}$$
$$x[n] = x^*[n] \quad \text{(real)} \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad \text{(hermítica)}$$
$$x[n] = -x^*[n] \quad \text{(imag)} \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) = -X^*(e^{-j\omega})$$

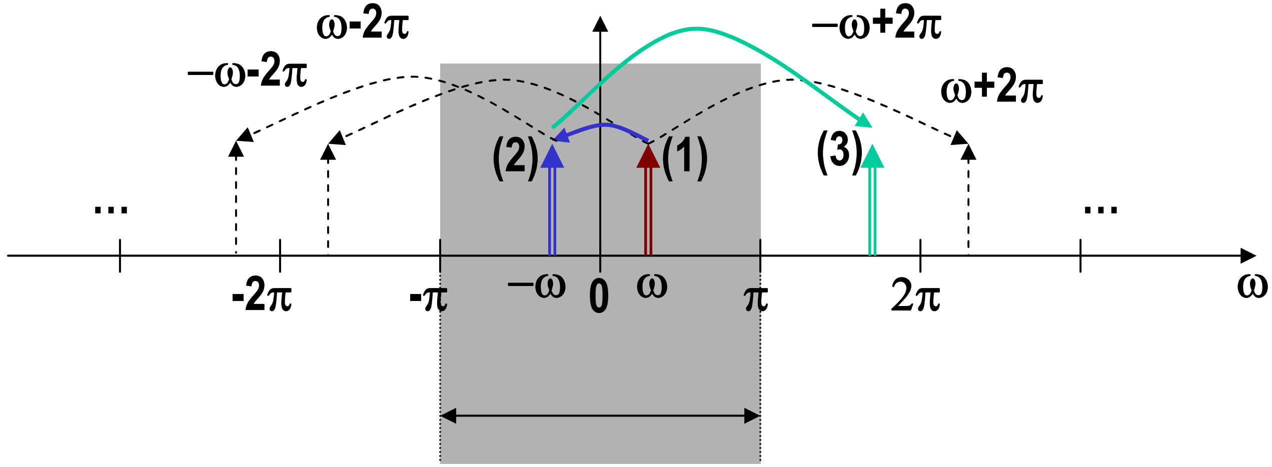
$$x[n] \text{ real y par} \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) \text{ real y par}$$
$$x[n] \text{ imag. e impar} \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) \text{ real e impar}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Propiedades de la transformada de Fourier (II)

- **Periodicidad:** $X(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega+2\pi k)}\right) \quad \forall k$ entero

en el caso x[n] real, $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) = X^*\left(e^{j(2\pi k-\omega)}\right) \quad \forall k$ entero

$\uparrow$ (1) $\qquad \uparrow$ (2) $\qquad \uparrow$ (3)



Intervalo fundamental [-π, π]

Teoremas de la transformada de Fourier (I)

- **Linealidad** $\quad ax_1[n]+bx_2[n] \xleftrightarrow{FT} aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega}) \quad \forall a,b,x_1,x_2$

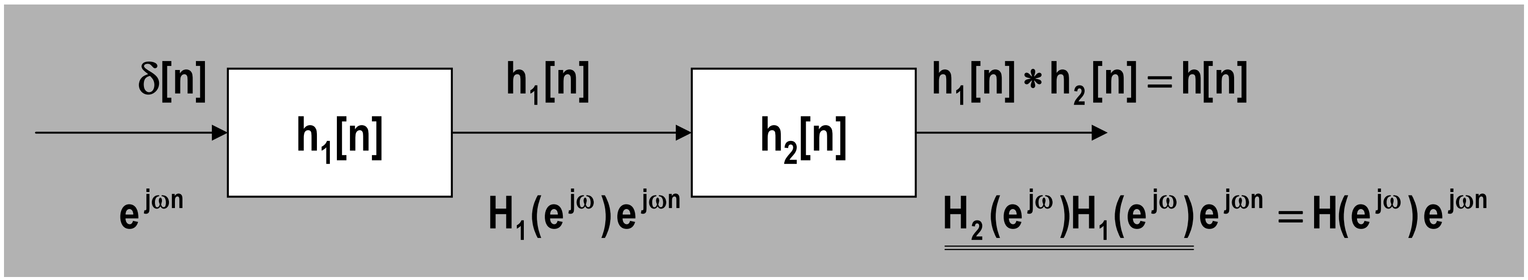
- **Desp. temporal (retardo)** $\quad x[n-k] \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega k}X(e^{j\omega}) \quad \forall k$

- **Desp. frecuencial (modulación)** $\quad e^{j\omega_o n}x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{j(\omega-\omega_o)}) \quad \forall \omega_o$

Teoremas de la transformada de Fourier (II)

- **Convolución** $\quad h_1[n] * h_2[n] \quad \overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad H_1(e^{j\omega})\,H_2(e^{j\omega})$

  demostración



en general, $\quad y[n] = h[n] * x[n] \quad \overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\,X(e^{j\omega})$

donde $H(e^{j\omega}) = TF\{h[n]\}$

o bien $H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) / X(e^{j\omega})$

- **Enventanado** $\quad x_1[n] \cdot x_2[n] \quad \overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\lambda})\,X_2(e^{j(\omega-\lambda)})\,d\lambda$

$$\equiv X_1(e^{j\omega}) \circledast_{2\pi} X_2(e^{j\omega})$$

(convolución periódica)

Teoremas de la transformada de Fourier (III)

- **Derivación**

$$n\,x[n] \xrightarrow{FT} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

- **Igualdad de Parseval**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,Y^*(e^{j\omega})\,d\omega$$

demostración

$$\left.\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,y^*[k-n]\right|_{n=0}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} x[n] & \xrightarrow{FT} & X(e^{j\omega}) \\ y^*[-n] & \xrightarrow{FT} & Y^*(e^{j\omega}) \end{array}\right\} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,y^*[k] \overset{\downarrow}{=} \left. x[n] * y^*[-n]\right|_{n=0} =$$

$$= FT^{-1}\left\{X(e^{j\omega})\,Y^*(e^{j\omega})\right\}\Big|_{n=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,Y^*(e^{j\omega})\,d\omega$$

- **caso particular x[n]=y[n]:**

(permite el cálculo de la energía en tiempo o en frecuencia)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

Extensión a otras secuencias

- La transformada de Fourier se ha definido para x[n] sumable en valor absoluto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right| < \infty \xrightarrow[]{\text{condición suficiente}} X(e^{j\omega}) \text{ existe}$$

(la serie que la define converge uniformemente:)

$$\lim_{N\to\infty} \left| X(e^{j\omega}) - \sum_{n=-N}^{N} x[n] e^{-j\omega n} \right| = 0$$

- ¿Es extensible a otras secuencias?
  - u[n]
  - $\sin \omega n$, $\cos \omega n$
  - secuencias periódicas
  - …

Secuencias de Energía Finita (EF)

- **Energía de una secuencia x[n]:**

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2$$

- **Transformada de Fourier de una secuencia de Energía Finita (EF)**

$$\text{si} \quad E_x < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X(e^{j\omega}) - \sum_{n=-N}^{N} x[n] e^{-j\omega n} \right|^2 d\omega = 0$$

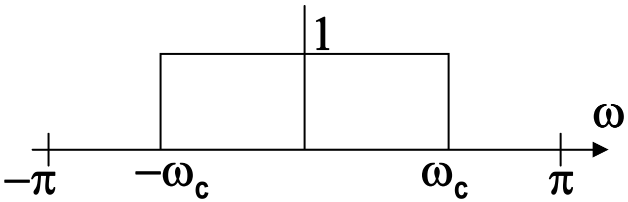
x[n] de energía finita

convergencia cuadrática: energía del error ⌫ 0
($X(e^{j\omega})$ puede presentar discontinuidades)

Secuencias EF: ejemplo

- **Filtro paso bajo ideal**

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$



$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\omega_c n}{n}$$

- **h[n] no sumable en valor absoluto, pero de Energía Finita**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|^2 \le \frac{\omega_c^2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

su transformada converge cuadráticamente a $H(e^{j\omega})$

sistema no causal e inestable

Secuencias de Potencia Media Finita (PMF)

- **Potencia media de una secuencia x[n]:**

$$\overline{P_x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

- **Transformada de Fourier de una secuencia de Potencia Media Finita (PMF)**

si $\overline{P_x} < \infty \quad \Rightarrow \quad X(e^{j\omega})$ existe, si admitimos la presencia de $\delta(\omega)$

con $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\delta(\omega)d\omega = f(0)$ para $f(\omega)$ continua en $\omega = 0$

Secuencias PMF: ejemplos

- **Secuencia constante**

$$x[n]=1\quad\begin{cases}\text{no sumable en v.a.}\\ E_x=\infty\\ \overline{P_x}=1\end{cases}\qquad\xrightarrow{TF} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

  - **demostración:** $$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\pi\delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega=1\quad\forall n$$

- **Escalón unidad**

$$u[n]\xrightarrow{FT}\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)+\frac{1}{1-e^{-j\omega}}$$

$$\overline{P_u}=\tfrac{1}{2}$$

- **Componente frecuencial**

$$e^{j\omega_o n}\quad\xrightarrow{FT}\quad 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_o-2\pi k)$$

$$e^{j\omega_o n}u[n]\quad\xrightarrow{FT}\quad \pi\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_o-2\pi k)+\frac{1}{1-e^{-j(\omega-\omega_o)}}$$

Resumen

- **Caracterización frecuencial de secuencias y sistemas lineales e invariantes**

$$h[n] \xrightarrow{FT} H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\begin{array}{ccccc} x[n] & & & & y[n] = h[n] * x[n] \\ & \longrightarrow & \boxed{h_1[n]} & \longrightarrow & \\ X(e^{j\omega}) & & & & Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \end{array}$$

- **Propiedades y teoremas de la transformada**
  - simetría, periodicidad
  - linealidad, retardo, modulación, convolución, enventanado, derivación, Parseval
- **Extensión a secuencias EF y PMF**
  - convergencia cuadrática
  - $\delta(\omega)$