Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS

Senyals i Sistemes II
Data d'examen: 10-6-2008
Data notes provisionals: 20-6-2008
Període d'al·legacions: 26-6-2008
Data notes revisades: 3-7-2008

Professors: G. Haro, J. Hernando, J.B. Mariño, A. Oliveras, J. Ruiz, J. Salavedra, P. Salembier.
Codi de la prova: **230 11485 65 0 00**

Temps: 1 h 30 min

- Responeu a cada problema en fulls separats.
- El vostre nom ha de figurar en tots els fulls que utilitzeu, en format: COGNOMS, NOM.
- Justifiqueu tots els resultats. Els resultats sense justificació no seran valorats en la correcció.
- No podeu utilitzar llibres, apunts, taules, formularis, calculadores o telèfon mòbil.

Problema 1: 3,5 punts

La correlació normalitzada entre dues seqüències d'energia finita es defineix com:

$$\rho_{xy}[m] = \frac{r_{xy}[m]}{\sqrt{E_x . E_y}}$$

a) Expressi en funció de les transformades de Fourier dels dos senyals, $X(e^{j\omega})$ i $Y(e^{j\omega})$:

a.1) La transformada de Fourier de $\rho_{xy}[m]$

a.2) $\rho_{xy}[0]$

b) Dedueixi justificadament la relació existent entre $\rho_{xy}[m]$ i $\rho_{yx}[m]$

c) Si $s[n]=a.x[n]$ i $v[n]=b.y[n]$, on a i b són valors reals i positius, dedueixi justificadament la relació existent entre $\rho_{sv}[m]$ i $\rho_{xy}[m]$. Quina conclusió se'n desprèn d'aquest resultat?

d) La funció $\rho_{yx}[m]$ pot prendre un marge limitat de valors, el qual s'estudiarà en aquest apartat.

d.1) Quan $y[n]=x[n]$, la correlació anterior esdevé l'autocorrelació normalitzada $\rho_x[m]$. Dedueixi el marge de possibles valors que pot prendre $\rho_x[m]$. On s'aconsegueix el seu valor màxim?

d.2) Expressi en funció de $\rho_{xy}[m]$ i de les energies E_x i E_y, la mesura de distància entre aquests senyals definida com $D[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n-m] - y[n]|^2$

d.3) A partir dels resultats anteriors, discuteixi el valor màxim que pot prendre $\rho_{xy}[m]$ pel supòsit de senyals reals d'energia finita

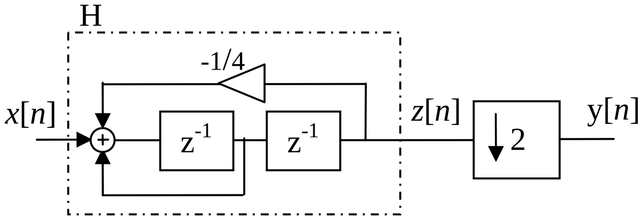
e) Pels senyals $x[n] = \frac{\sin(\omega_x n)}{\pi n}$ i $y[n] = \frac{\sin(\omega_y (n-n_0))}{\pi (n-n_0)}$, on $0 < \omega_x \le \omega_y < \pi$ i n_0 enter,. es demana:

e.1) Calculi $\rho_{xy}[m]$

e.2) On s'aconsegueix el seu valor màxim? Quant val? En quin cas s'aconseguiria que valgués la unitat?

Problema 2: 3 punts

Considere el siguiente sistema causal y estable H seguido por un diezmado por 2



a) Escribir la ecuación en diferencias finitas que define el sistema H
b) Encontrar la respuesta frecuencial del sistema H y dibujar aproximadamente su módulo
c) Expresar la transformada de Fourier de la señal y[n] en función de la transformada de Fourier de x[n]

Si la señal de entrada x[n] es una secuencia periódica $x[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_0[n+Pr]$ de periodo P=2 y $x_0[n]=\{\underline{a},b\}$ es una señal de duración 2. Se pide:

d) Demostrar que z[n] también será una secuencia periódica
e) Encontrar la expresión de la transformada de Fourier de x[n] en función de la transformada de Fourier discreta con N=4 muestras de $x_0[n]$, $X_4[k]=DFT_4\{x_0[n]\}$
f) Si a=1 y b=0 encontrar la expresión de z[n] e y[n]

Problema 3: **3,5 punts**

La respuesta de un sistema causal y estable $H_1(z)$ de orden 2 a $x[n]=2^n\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$ es $y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. Se pide:

a) Ceros de $H_1(z)$
b) Polos de $H_1(z)$
c) Función de transferencia $H_1(z)$, incluidas la constante multiplicativa y la ROC. Comprobar que la respuesta del sistema a $x[n]=1$ es $y[n]=20$
d) Diagrama de polos y ceros de $H_1(z)$ y justificar que no puede ecualizarse en módulo y fase con un sistema causal y estable
e) Encontrar la función de transferencia de un sistema $H_2(z)$ con el mismo módulo de la respuesta frecuencial que $H_1(z)$ que sí pueda ecualizarse en módulo y fase con un sistema causal y estable
f) Encontrar la función de transferencia de un sistema causal y estable $H_e(z)$ que ecualiza $H_1(z)$ en módulo
g) Encontrar la función de transferencia $H_3(z)$ de un sistema FIR de orden 3 tal que la combinación en cascada de $H_1(z)$ y $H_3(z)$ equivale a un sistema causal y estable $H_{lin}(z)$ de fase lineal. Dibujar el diagrama de polos y ceros de $H_{lin}(z)$
h) Dibujo de la fase $\varphi(\omega)$ de la respuesta frecuencial de $H_{lin}(z)$ en el intervalo $0\le\omega<\pi$, considerando $-\pi<\varphi(\omega)\le\pi$

PROBLEMA 1

a) a.1) $\rho_{xy}[n] = \dfrac{x[m] * y^*[-m]}{\sqrt{E_x E_y}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \bar{S}_{xy}(e^{j\omega}) = \dfrac{X(e^{j\omega})\, Y^*(e^{j\omega})}{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Y(e^{j\omega})|^2 d\omega\right]^{1/2}}$

a.2) $\rho_{xy}[0] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \bar{S}_{xy}(e^{j\omega})\, d\omega$, a partir de la $\mathcal{F}^{-1}$.

b) $\boxed{\rho_{yx}[m] = \dfrac{y[m] * x^*[-m]}{\sqrt{E_x E_y}}} = \dfrac{\left(x[-m] * y^*[m]\right)^*}{\sqrt{E_x E_y}} = \dfrac{r^*_{xy}[-m]}{\sqrt{E_x E_y}} = \boxed{\rho^*_{xy}[-m]}$

c) $\boxed{\rho_{sv}[m] = \dfrac{s[m] * v^*[-m]}{\sqrt{E_s E_v}}} = \dfrac{a\, x[m] * b\, y^*[-m]}{\sqrt{a^2 E_x\, b^2 E_y}} = \dfrac{\cancel{ab}\, r_{xy}[m]}{\cancel{ab}\sqrt{E_x E_y}} = \boxed{\rho_{xy}[m]}$

$\left.\begin{array}{l} E_s = a^2 E_x \\ E_v = b^2 E_y \end{array}\right\}$

El valor de $\rho_{xy}[m]$, a diferència de $r_{xy}[m]$, no depèn de l'amplitud dels senyals implicats.

d) d.1) Una propietat $r_x[m]$ diu $|r_x[m]| \leq E_x = r_x[0] \Rightarrow \dfrac{|r_x[m]|}{E_x} \leq 1$

i resulta $\boxed{|\rho_x[m]| \leq 1} \Rightarrow$ MÀXIM $\rho_x[0] = 1$ ja que $\text{MAX}\{r_x[m]\} = r_x[0] = E_x$

d.2) $D[m] = E_x + E_y - r_{xy}[m] - r^*_{xy}[m] = E_x + E_y - 2\,\text{Re}\{r_{xy}[m]\} \Rightarrow$

$D[m] = E_x + E_y - 2\sqrt{E_x E_y}\, \text{Re}\{\rho_{xy}[m]\}$

d.3) $D[m] = E_x + E_y - 2\sqrt{E_x E_y}\, \rho_{xy}[m]$

$\rho_{xy}[m]$ MÀXIM $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} D[m] = 0 \\ y[n] = x[n-m] \\ \Downarrow \\ E_y = E_x \end{array}\right.$

$\boxed{\rho_{xy}[\text{MAX}] = \dfrac{E_x + E_y}{2\sqrt{E_x E_y}} = \Big\}\, E_x = E_y \Big\{ = \dfrac{2\cancel{E_x}}{2\cancel{E_x}} = 1}$

e) e.1) $\left.\begin{array}{l} X(e^{j\omega}) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right) \\ Y(e^{j\omega}) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_y}\right) \\ E_x = \frac{\omega_x}{\pi} \;,\; E_y = \frac{\omega_y}{\pi} \end{array}\right\}$ Segons a.1) $\bar{S}_{xy}(e^{j\omega}) = \dfrac{\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right) e^{-j\omega m_0}}{\sqrt{\omega_x \omega_y}/\pi}$ ja que $\omega_x \leq \omega_y$

Aplicant F^{-1}

$$e_{xy}[n] = \sqrt{\frac{W_x}{W_y}}\ \frac{\sin(W_x(n-n_0))}{W_x(n-n_0)}$$

E.2) $$\max\{e_{xy}[n]\} = \sqrt{\frac{W_x}{W_y}} \leq 1$$

$$\| $$

$$e_{xy}[n_0] = \sqrt{\frac{W_x}{W_y}}$$

$e_{xy}[n_0] = 1$ si $W_x = W_y$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = y[n]$$

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

- [ ] E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
- [ ] E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona
- [ ] Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura: SiS 2 : PROBLEMA 2

Cognoms

Nom

Pàgina ____ de ____

A) $\begin{cases} z[n] = v[n-1] \\ v[n] = v[n-1] + x[n-1] - \frac{1}{4} z[n-1] \end{cases} \xrightarrow{TZ} \begin{cases} Z(z) = z^{-1} V(z) \\ V(z) = z^{-1} V(z) + z^{-1} X(z) - \frac{1}{4} z^{-1} Z(z) \end{cases}$

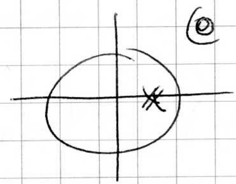
POR LO TANTO:

$$Z(z) \cdot \left[1 - z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}\right] = z^{-2} X(z) \Rightarrow \boxed{z[n] - z[n-1] + \frac{1}{4} z[n-2] = x[n-2]}$$

B) $$H(z) = \frac{Z(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}} \Rightarrow$$

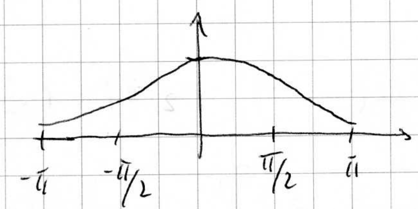
Polos: $z = 1/2$ (doble)

Ceros: $z = \infty$ (doble)



$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{-j2\omega}}{1 - e^{-j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega}}$$

↑ estable



c) $$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} Z(e^{j\omega/2}) + \frac{1}{2} Z(e^{j(\frac{\omega}{2} - \pi)}) = \frac{1}{2} Z(e^{j\omega/2}) + \frac{1}{2} Z(-e^{j\frac{\omega}{2}})$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j\omega/2}) \cdot H(e^{j\omega/2}) + \frac{1}{2} X(-e^{j\omega/2})\, H(-e^{j\omega/2})$$

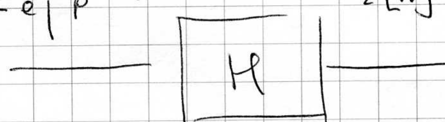
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j\omega/2}) \frac{e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega/2} + \frac{1}{4} e^{-j\omega}} + \frac{1}{2} X(-e^{j\omega/2}) \frac{+e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega/2} + \frac{1}{4} e^{-j\omega}}$$

D) si $x[n]$ periódica de periodo P $\Rightarrow$ $x[n] = \sum_{k=0}^{P-1} \frac{X_0[k]}{P} e^{j\frac{2\pi}{P}kn}$

Y ADEMÁS UN SISTEMA L.I. $e^{j\omega_0 n}$ ES AUTOFUNCIÓN CON SALIDA $H(e^{j\omega_0}) \cdot e^{j\omega_0 n}$

POR LO QUE SI

$$x[n] = \sum_{k=0}^{P-1} \frac{X_0[k]}{P} e^{j\frac{2\pi}{P}kn}$$



$$z[n] = \sum_{k=0}^{P-1} \frac{X_0[k]}{P} \cdot H(e^{j\frac{2\pi}{P}k}) \cdot e^{j\frac{2\pi}{P}kn}$$

$\Downarrow$

$z[n]$ ES PERIÓDICA

E) Si $x_0[n] = \{\underline{a}, b\}$ con $L_{x_0} = 2$ (duración 2) entonces:

$$X_4[k] = DFT_4\{x_0[n]\} = X_0(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \frac{2\pi}{4}k}$$

Pero también:

$$X_2[k] = DFT_2\{x_0[n]\} = X_0(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \frac{2\pi}{2}k}$$

Así que: $X_2[k] = X_4[2k] \quad 0 \leq k \leq 1$

y como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{1} \frac{X_2[k]}{2} e^{j\frac{2\pi}{2}kn} = \sum_{k=0}^{1} \frac{X_4[2k]}{2} e^{j\pi kn}$$

$$X(e^{j\omega}) = TF\{x[n]\} = \frac{X_4[0]}{2} \cdot 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi r) + \frac{X_4[2]}{2} \cdot 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \pi + 2\pi r)$$

F) Si $x_0[n] = \{\underline{1}, 0\} \Rightarrow X_2[k] = \{\underline{1}, 1\}$

$$y \quad x[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j\pi n} = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$$

$$z[n] = \frac{1}{2}\left(H(1) + H(-1)\cdot(-1)^n\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{4}{9}(-1)^n\right) = 2 + \frac{2}{9}(-1)^n$$

$$y[n] = z[2n] = 2 + \frac{2}{9} = \frac{20}{9} \quad \text{cte.}$$

Problema 3

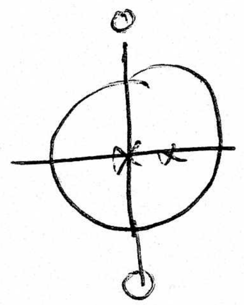
a) $z_i = 2e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm 2j$

b) $p_i = \frac{1}{2}, 0$

c) $H_1(z) = K \dfrac{(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = K_1 \dfrac{1+4z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

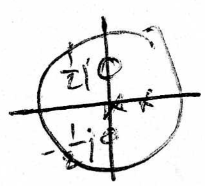
$H(1) = 20 \rightarrow K_1 = 2$ $\qquad |z| > \frac{1}{2}$

d)



No puede ecualizarse en módulo y fase por un sistema causal y estable por no ser de fase mínima

e) $H_2(z)$

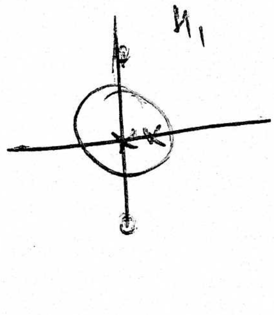


$H_2(z) = K_2 \dfrac{1+\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

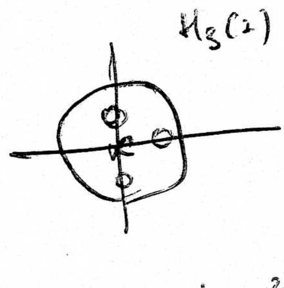
$|H_1(1)| = |H_2(1)| \rightarrow K_2 = \pm 4K_1$

f) $H_e(z) = K_e \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}}$

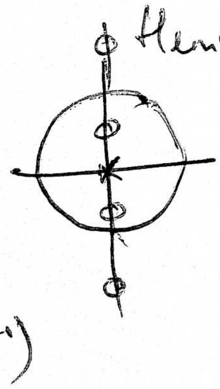
g)



$*$

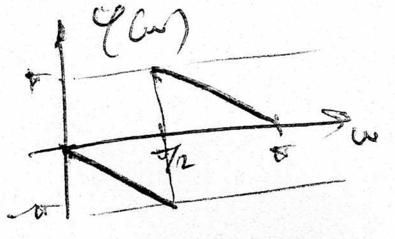


$=$



$H_3(z) = K_3\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$

h)



ó