EJERCICIOS DE COMUNICACIONES II

Tema 3: TRANSMISIÓN DIGITAL A TRAVÉS DE CANALES AWGN LIMITADOS EN BANDA

CUATRIMESTRE OTOÑO 07

Ejercicio 1. Densidad Espectral

Sea una modulación PAM binaria, polar y de símbolos equiprobables:

$$s(t)=\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\alpha\left[i\right]\varphi(t-iT) \qquad \varphi(t)=\sqrt{r}\sin c(rt) \qquad \alpha\left[i\right]=\pm d/2 \qquad T=\frac{1}{r}$$

La señal s(t) se transmite a través de un canal que presenta distorsión, y ésta se puede modelar según la siguiente respuesta impulsional:

$$h_c(t)=h_0\delta(t)+h_1\delta(t-T)$$

La señal recibida es por tanto $y_r(t)=s(t)*h_c(t)+w(t)$

w(t) es ruido blanco gaussiano de media nula y densidad espectral No/2

La señal se recibe con un filtro adaptado al pulso transmitido ϕ(t): ($h_r(t)=\dfrac{1}{E_p}sinc(rt)$). A la salida del filtro receptor se tendrá por tanto: $y(t)=s(t)*h_c(t)*h_r(t)+n(t)$

a) Calcule y dibuje la densidad espectral de s(t). Deje el resultado en función de *d r*.

Calcule la densidad espectral de la señal a la salida del canal, es decir de s(t)*h_c(t). Deje el resultado en función de d,r,h_0,h_1. Dibújela si h_0=1, h_1=-1.

Ejercicio 2. Media estadística de un proceso.

La media estadística de una modulación digital se define como:

$$\mu_x(t)=E\ x(t)$$

donde $x(t)$ es el proceso estocástico definido como:

$$x(t)=\sum_k s_{m[k]}(t-kT)$$

En general, la media es una función determinista del tiempo.

Halle y dibuje $\mu_x(t)$ para las siguientes modulaciones considerando símbolos equiprobables:

a) 8-PAM con pulso rectangular de duración T y amplitudes mA

b) 8-PSK con pulsos cosenoidals de duración T, amplitud A y fases $2\pi m/8$.

c) 8-PPM con pulsos de duración T/M y amplidud A.

d) 8-PDM con pulso de duración mT/(M-1) y amplitud A.

Ejercicio 3. Densidad Espectral

Sea $a(k)$ una secuencia estacionaria de símbolos binarios equiprobables e independientes pertenecientes al alfabeto {1,-1}.

Sea $b(k)$ una secuencia de símbolos pertenecientes al alfabeto {2,0,-2} que se obtiene pasando la secuencia binaria $a(k)$ por el filtro discreto de respuesta impulsional [1,-1], es decir,
$b(k) = a(k) - a(k-1)$.

Sea $c(k)$ una secuencia de símbolos pertenecientes al alfabeto {2,0,-2} que se obtiene pasando la secuencia binaria $a(k)$ por el filtro discreto de respuesta impulsional [1,1], es decir,
$c(k) = a(k) + a(k-1)$.

Considere una señal PAM de la forma:
$$x(t) = \sum_k s(k)\,p(t-kT)$$

Halle y dibuje el espectro de $x(t)$ para los siguientes casos:

a) $s(k) = b(k)$, y $p(t)$ pulso rectangular en tiempo de t=0 a t=T y energía unitaria.

b) $s(k) = c(k)$, y $p(t)$ pulso rectangular en frecuencia de f= -1/(2T) a f= 1/(2T) y energía unitaria.

Ejercicio 4. Densidad Espectral

Halle y dibuje el espectro de la modulación bi-ortogonal.
$$p_0(t) = p(t)$$
$$p_1(t) = p(t - T/2)$$
$$p_2(t) = -p_0(t)$$
$$p_3(t) = -p_1(t)$$
con $p(t)$ un pulso de duración T/2 y energía unitaria.

Símbolos equiprobables e independientes.

Ejercicio 5. Ecualización

Se requiere transmitir una secuencia de bits equiprobables e independientes a una velocidad de r_b=1000 bps, sobre un canal que presenta distorsión lineal. Para ello se modula en banda base una secuencia de pulsos en amplitud (PAM) a 4 niveles, eligiendo una señalización polar de separación A volts. entre símbolos.

La energía del pulso transmitido p(t) es $E=\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t)\,dt$. En recepción se diseña un filtro adaptado $h_{FA}(t)$ al pulso p(t) a fin de obtener pulsos de Nyquist $p_\beta(t)$, 0% rolloff (β=0).

$$p_\beta(t) = p_0(t) = p(t)*h_{FA}(t)$$

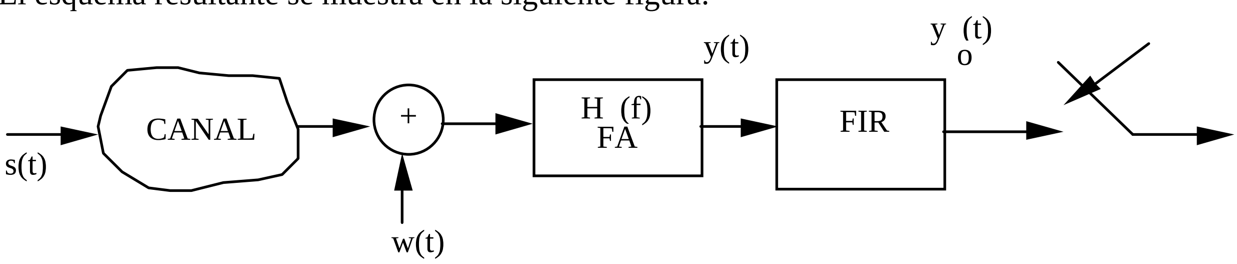
El ruido que presenta el canal w(t), es estacionario blanco gaussiano y de media nula $S_W(f) = \frac{\eta}{2}$

La distorsión lineal que presenta el canal se puede modelar mediante la siguiente respuesta impulsional $h_C(t)$.

$$h_C(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-ia}\,\delta(t - i\,T) \qquad 0 < \alpha < 1$$

siendo T el periodo de símbolo. La ecualización del canal se realiza mediante un filtro FIR de 2 coeficientes colocado a la salida del filtro adaptado.

El esquema resultante se muestra en la siguiente figura:



$$s(t) = \sum_k a_k \; p(t - kT)$$

a.- Obtenga las expresiones temporales y frecuenciales del pulso transmitido p(t) y de la respuesta del filtro adaptado $h_{FA}(t)$. ¿Cuál es el ancho de banda de transmisión necesario?.

b.- Calcule la potencia de ruido a la salida del filtro adaptado. Calcule la potencia de ruido a la salida del filtro FIR en función de los coeficientes del mismo.

c.- Calcule las muestras de la señal y(t) a la salida del filtro adaptado en los instantes de muestreo $t_k=kT$. Distinga el término de ISI y el término de ruido.

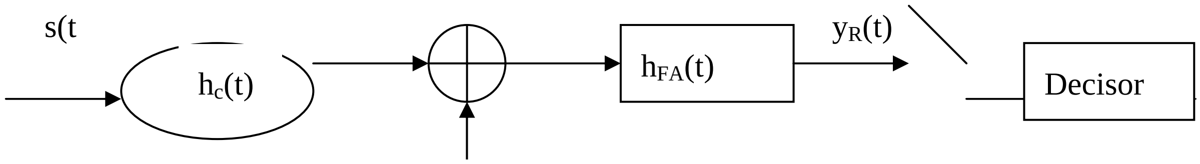
d.- Calcule las muestras de la señal $y_o(t)$ a la salida del filtro FIR en los instantes de muestreo $t_k=kT$. Distinga el término de ISI y el término de ruido, en función de los coeficientes del filtro si es necesario.

e.- Plantee el sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes del filtro FIR mediante un criterio de mínimo error cuadrático medio (solución de Wiener), en función de la potencia de ruido a la salida del filtro adaptado σ_n^2, de la varianza de los símbolos transmitidos σ_a^2, y de la constante del canal α. Considere el error como la diferencia entre las muestras a la salida del filtro FIR, $y_o(kT)$ y los símbolos transmitidos a_k.

f.- Resuelva el sistema anterior para el caso particular de que no hubiera ruido (σ_n^2 =0) y compruebe que en esta situación el error cuadrático medio resultante es nulo y la ISI remanente a la salida del filtro FIR es nula.

Ejercicio 6. Ecualización

Sea x(t) una señal de ancho de banda 10KHz. La misma se muestrea a su frecuencia de Nyquist y se cuantifica uniformemente a 8 bits/muestra. La secuencia de bits obtenida se puede considerar como una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes entre sí. A partir de dicha secuencia se modula una señal s(t), PAM Polar a 4 niveles, mediante pulsos rectangulares p(t):



w(t) $S_w(f)=\frac{N_o}{2}$

$$s(t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a[i]p(t-iT) \qquad a[i]=\pm\tfrac{A}{2},\pm\tfrac{3A}{2} \qquad p(t)=\Pi\left(\tfrac{t-T/2}{T}\right) \qquad E_b=\frac{E\left[s^2(t)\right]}{r_b}$$

w(t) es ruido aditivo blanco y gaussiano. $h_{FA}(t)$ es el filtro adaptado al pulso transmitido p(t). En el decisor los umbrales de detección son -A, 0 , +A.

a) Obtenga la velocidad de símbolo r=1/T.

b) Calcule la BER en función de la E_b/N_o si $h_c(t)=\delta(t)$. Indique cuales son los instantes de muestreo óptimos.

c) Calcule la BER en función de la E_b/N_o si $h_c(t)=\alpha.\delta(t)$ y se mantiene el receptor del apartado anterior, con α=0.9. Realice los cálculos en función de α, y sustituya por su valor al final del apartado.

Considere a partir de este punto $h_c(t) = 0.5\delta(t) +0.5\,\delta(t-T/4)$

d) Calcule el pulso resultante $p_R(t)$ a la salida del Filtro Adaptado de la figura. Proponga de nuevo los instantes de muestreo óptimos y en función de ellos de la forma del pulso discretizada $p_R(n)$. De la expresión de las muestras de la señal recibida $y_R(t_n)$ y distinga en ellas los términos de señal deseada, ISI y ruido.

e) Calcule los 2 coeficientes de un filtro FIR que ecualize la forma de onda recibida según el criterio de Mínimos Cuadrados.

f) Calcule las muestras del pulso resultante a la salida del ecualizador. ¿Qué valor máximo de ISI se producirá para cada una de las muestras? Calcule la potencia de ruido a la salida del equalizador.

NOTA: $\underline{c}=\left(\underline{\underline{P}}_R^T\,\underline{\underline{P}}_R\right)^{-1}\underline{\underline{P}}_R^T\,\underline{v}$ es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones $\left(\underline{\underline{P}}_R^T\,\underline{\underline{P}}_R\right)\underline{c}=\underline{\underline{P}}_R^T\,\underline{v}$

Ejercicio 7. Densidad Espectral

Considere una modulación digital binaria de la forma:

$$y(t) = \sum_k s_{m[k]}(t - kT) + w(t)$$

donde m=0,1, y $w(t)$ es ruido gausiano blanco de densidad No/2. Se utilizan los siguientes símbolos:

$s_0(t) = A\gamma_0(t)$ con probabilidad P_0

$s_1(t) = -A\gamma_1(t)$ con probabilidad $(1 - P_0)$

Las funciones base son:

$\gamma_0(t) = p(t)$

$\gamma_1(t) = p(t - T/2)$

y $p(t)$ es un pulso rectangular de energía unitaria y de duración $T/2$.

a) Halle las componentes de los símbolos en el espacio de señal: $\underline{\mathbf{s}}_0$, $\underline{\mathbf{s}}_1$.

b) Halle el centroide de la constelación: $\underline{\boldsymbol{\mu}} = E\left[\underline{\mathbf{s}}\right]$ y la media de $y(t)$, $\mu_y(t) = E\left[y(t)\right]$. A partir del desarrollo en serie de Fourier de la media, halle la parte impulsiva del espectro, $S_y(f)_{imp}$.

c) Halle la matriz de covarianza de los símbolos, $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = E\left[\left(\underline{\mathbf{s}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\left(\underline{\mathbf{s}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)^T\right]$. Halle las funciones de autocorrelación y correlación cruzada de las funciones base. A partir del resultado obtenido, halle la parte continua del espectro, $S_y(f)_{cont} = \frac{1}{T}\int tr\left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\tau)\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$.

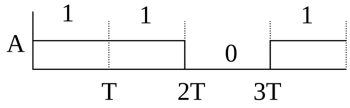
d) Dibuje el espectro de $y(t)$, $S_y(f) = S_y(f)_{imp} + S_y(f)_{cont}$.

e) Considere que $P_0 = 1/2$ y halle la probabilidad de error de bit en función de Eb/No. ¿Cuál sería la probabilidad de error y el espectro si la señal transmitida fuera $y'(t) = y(t) - \mu_y(t)$?

Ejercicio 8. Ecualización

Considere una transmisión digital binaria de R_b bits/sec con niveles 0 y A y pulso rectangular de duración $T=1/R_b$.

$$s(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\, p_T(t-kT)$$



b_k es la secuencia de bits (0 y 1) y las probabilidades de cada bit son P(1) y P(0), siendo $P(1)=\beta P(0)$ con $\beta<1$. Considere que el ruido es gausiano y blanco de densidad No/2.

a) Diseñe el receptor óptimo detallando la respuesta impulsional de los filtros y el instante óptimo de muestreo. Calcule el umbral óptimo de decisión en función de A, β y Eb/No.

Considere en adelante que el umbral se sitúa en el punto medio de los dos niveles.

b) Si β =1/9, ¿qué pérdida equivalente de Eb/No supone dicha ubicación del umbral, aproximadamente? ¿Es dicha pérdida importante para una Eb/No de 10dB?

c) Halle la energía media de bit. Obtenga la BER en función de la Eb/No. ¿Para qué valores de β las prestaciones del sistema son superiores a las correspondientes a una señalización con niveles A y -A?

Considere que el canal de transmisión presenta la siguiente respuesta impulsional:

$$h(t) = (1-\alpha)\delta(t) + \alpha\delta(t-T/2) \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

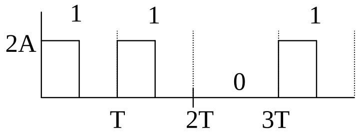
Considere en adelante que los símbolos son equiprobables.

d) Si la pérdida de Eb/No máxima tolerada es de 3dB, halle el máximo valor de α, α_{max}, que puede tolerar el sistema.

e) Diseñe un forzador de ceros de 3 coeficientes. Halle la ISI y el ruido residual a la salida del mismo. Compruebe que para $\alpha=\alpha_{max}$ (hallada en el apartado anterior) las prestaciones han mejorado.

Para evitar la necesidad de ecualización, se utiliza un pulso de duración T/2 y de amplitud doble, manteniendo la velocidad de bit:

$$s(t) = 2A\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\, p_{T/2}(t-kT)$$



El receptor utilizado, sin embargo, continúa siendo el mismo.

f) Halle la BER en función de Eb/No. Discuta en general las ventajas y desventajas de esta solución.

Ejercicio 9. ISI entre coordenadas y Ecualización

Sea una secuencia de bits equiprobables b[m] (r_b=250Kbps) que se transmite mediante una modulación digital s(t). El alfabeto resultante es de 4 símbolos, es decir, cada 2 bits dan lugar a una forma de onda diferente.

- Los bits se codifican según la siguiente tabla, para dar lugar a dos secuencias de amplitudes *a[n]* y *b[n]*

bits	a_m	c_m
00	-d/2	-d/2
01	-d/2	+d/2
11	+d/2	+d/2
10	+d/2	-d/2

- La señal modulada es: $s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m[n]}(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(a_m[n]f(t-nT)-c_m[n]g(t-nT)\right)$

  con $f(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\,\text{sen}(2\pi\frac{t}{T})\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ y $g(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\,\text{sen}(4\pi\frac{t}{T})\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$. Observe que *f(t)* y *g(t)* son ortogonales entre sí y ambas son de energía=1.
- La señal resultante *s(t)* se transmite por un canal ideal de ruido *w(t)*, aditivo blanco y gaussiano de media nula, $S_w(f)=\frac{N_0}{2}$, (Canal AWGN).

Se pide:

a) Obtenga la expresión de las 4 formas de onda transmitidas $\{s_m(t), m=1,2,3,4\}$, según el par de bits codificado en cada tiempo de símbolo: {00, 01, 11, 10}. ¿Cuál es la velocidad de símbolo en símbolos/seg?

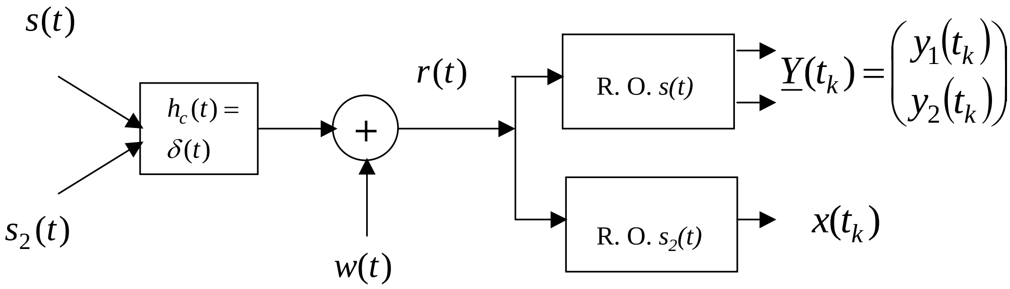
b) Identifique la dimensión del espacio de señal y dé una base ortonormal generadora del mismo. Dibuje las funciones de la base.

c) Para cada una de las señales obtenidas en el apartado "a" obtenga el vector representante $\underline{S}_m$ y dibuje el espacio de señal sobre la base generadora obtenida. Calcule la energía media transmitida por bit E_b en función de la distancia mínima entre símbolos.

d) Dibuje el diagrama de bloques del receptor óptimo MAP. ¿Cual es el instante de muestreo óptimo t_k para detectar el símbolo "k-ésimo"? Señale las 4 zonas de decisión obtenidas sobre el espacio de señal dibujado en el apartado "c".

e) Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$.

Se va a considerar ahora, la transmisión de una nueva señal s_2(t) ; $s_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha[n]p(t-nT)$ simultáneamente a la transmisión de *s(t)* y compartiendo por tanto el mismo canal, según se indica en la siguiente figura:



Sobre la señal s_2(t) considere las amplitudes $\alpha[n] = \pm$ d/2 con equiprobabilidad e independencia estadística y el pulso $p(t) = \sqrt{\frac{1}{T}}\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$. La velocidad de símbolo r=1/T coincide con la velocidad de símbolo de la señal *s(t)*.

f) Demuestre que el vector recibido en el Receptor Óptimo **R. O. *s(t)*,** no se va a ver afectado por la nueva señal s_2(t) . Como paso previo, ponga cada una de las coordenadas del vector $\underline{Y}(t)$ en función de las correlaciones cruzadas $R_{pf}(t) = p(t) * f(-t)$ y $R_{pg}(t) = p(t) * g(-t)$ y particularice posteriormente en $t=t_k$. No es necesario que calcule estas funciones de correlación, sólo necesita su valor en t=0 para resolver este apartado.

Suponga a partir de este punto que no existe un sincronismo de símbolo entre ambas señales. En el caso más extremo se tendrá una diferencia sobre el origen de tiempos de T/2: $s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n]p\left(t - nT - \frac{T}{2}\right)$. En este caso el vector recibido en el Receptor Óptimo R. O. *s(t)*, sí se verá afectado por la señal s_2(t): $\underline{Y}(t_k) = \underline{S}_m(t_k) + \underline{ISI}(t_k) + \underline{N}(t_k)$.

g) Calcule de nuevo cada una de las coordenadas del vector $\underline{Y}(t)$ en función de las correlaciones cruzadas $R_{pf}(t)$ y $R_{pg}(t)$ y particularice posteriormente en $t=t_k$. Demuestre que tan solo la primera coordenada se verá afectada por la señal s_2(t) ($y_1[k] = y_1(t_k) = a[k] + p\alpha[k-1] - p\alpha[k] + \beta_1[k]$; p<1) y calcule el valor de p. No es necesario que calcule estas funciones de correlación, sólo necesita su valor en t=-T/2,+T/2. Calcule todos los posibles valores que puede tomar el vector $\underline{ISI}(t_k)$ así como la probabilidad de cada valor.

h) Dibuje para esta nueva situación, los vectores recibidos $\underline{S}_m(t_k) + \underline{ISI}(t_k)$ sobre el espacio de señal y calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$.

Se propone para la situación anterior, minimizar el efecto de la ISI obtenida, mediante una ecualización de mínimo error cuadrático medio (Filtro de Wiener). Para ello se estudiará el efecto únicamente sobre la primera coordenada del vector $\underline{Y}(t_k)$. Independientemente de lo obtenido en el apartado anterior, considere:

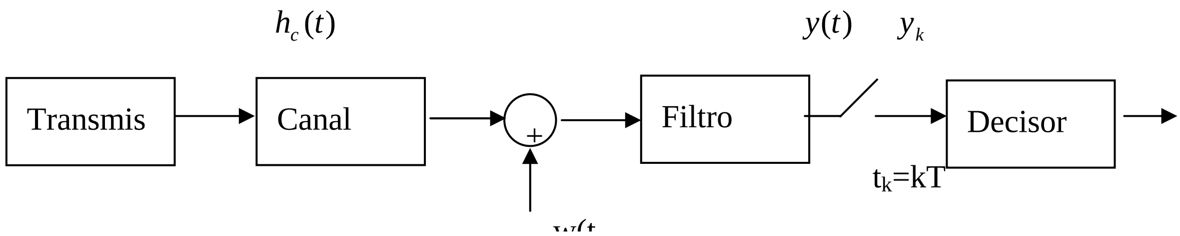
1ª COORDENADA DE PRIMER RECEPTOR:
$y_1[k] = y_1(t_k) = a[k] + p\alpha[k-1] - p\alpha[k] + \beta_1[k]$; p<1

SEÑAL EN EL SEGUNDO RECEPTOR:
$x[k] = x\left(t_k + \frac{T}{2}\right) = \alpha[k] + qa[k+1] - qa[k] + \beta[k]$, q<1

i) Plantee las ecuaciones que minimizan el error: $\varepsilon = E\left\{\left|y_{eq}(t_k) - a[k]\right|^2\right\}$ en función de los coeficiente h_i: $y_{eq}(t_k) = y_{eq}[k] = h_1 y_1[k] + h_2 x[k] + h_3 x[k-1]$. Calcule con el máximo detalle la expresión de todas las correlaciones que aparecen en el sistema matricial obtenido. Puede dejar el resultado en función de las constantes p y q.

Ejercicio 10. Ecualización

Considere la transmisión por un canal de comunicaciones con propagación multicamino:



La señalización es binaria, con pulso conformador $p_T(t)$ de duración no superior al tiempo de bit (T) y con niveles $b_k \in (-A, A)$ equiprobables. El receptor utiliza un filtro adaptado al pulso $p_T(t)$. El ruido $w(t)$, es blanco y Gaussiano, de densidad espectral de potencia $N_o/2$.

En particular se estudia el caso en que únicamente hay dos caminos de propagación, pudiendo entonces modelar la respuesta impulsional del canal como:

$$h_c(t) = \delta(t) - \alpha\delta(t-\tau) \qquad 0 < \tau < \mathrm{T} \qquad \alpha > 0$$

El camino secundario llega al receptor con una inversión de signo y con un retardo τ inferior al tiempo de bit (T) de la señal digital transmitida, lo cual en la práctica produce un desvanecimiento de la señal, además de interferencia intersimbólica (ISI).

a) Demuestre que las muestras de la señal a la entrada del decisor pueden definirse como:

$$y_k = b_k - \frac{\alpha}{R_p(0)}\left(b_k R_p(\tau) + b_{k-1} R_p(T-\tau)\right) + n_k$$

siendo $R_p(t)$ la función de autocorrelación del pulso transmitido $p_T(t)$.

b) Halle la potencia del ruido detectado, n_k.

Se propone la evaluación y comparación del efecto multicamino en dos sistemas distintos de transmisión. Para la evaluación se particularizará el valor del retardo $\tau = \mathrm{T}/2$.

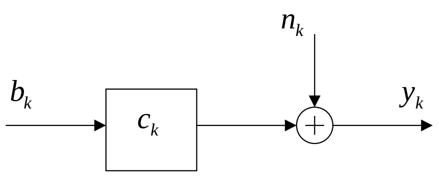
SISTEMA 1

Considere el pulso transmitido igual a un pulso rectangular de duración T.

c) Obtenga los niveles de señal a la entrada del decisor.

d) Obtenga la BER del sistema de forma exacta en función de la E_b/N_0 de transmisión y α.

e) Obtenga el canal discreto equivalente del sistema, c_k, definido según la figura:



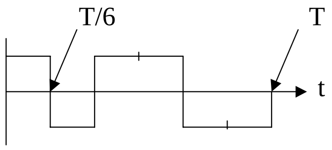
f) Diseñe un ecualizador de infinitos coeficientes, a insertar a la entrada del decisor.

g) Obtenga la nueva BER en función de la Eb/No de transmisión y α. En concreto, para α=3/4, obtenga aproximadamente la ganancia equivalente en términos de Eb/No, con respecto a la BER obtenida en d).

Nota: $\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta}$ para $-1 < \beta < 1$

SISTEMA 2

Considere la utilización de un pulso transmitido como el representado en la figura.



h) Utilizando ahora el filtro adaptado al nuevo pulso transmitido, obtenga los valores de señal a la entrada del decisor y comente cómo se modifica la ISI del sistema.

i) Obtenga la BER del sistema en función de la Eb/No de transmisión y α. En concreto, para α=3/4, obtenga aproximadamente la ganancia equivalente en términos de Eb/No, con respecto a la BER obtenida en d).

¿Cuáles cree que pueden ser las ventajas e inconvenientes de ambos sistemas?

Ejercicio 11. Ecualización.

Al transmitir una modulación biortogonal, el modelo obtenido para el vector detectado a la salida del proyector de señal formado por los filtros adaptados: $\varphi_1(t-t_\varphi),\varphi_2(t-t_\varphi)$ se puede expresar como:
$\mathbf{y}[k]=\begin{pmatrix}\gamma & 0.1\gamma\\ 0.1\gamma & \gamma\end{pmatrix}\mathbf{s}[k]+\mathbf{n}[k]=\mathbf{Ps}[k]+\mathbf{n}[k]$ donde el vector de ruido se distribuye: $\mathbf{n}[k]: N\left(\mathbf{0},\frac{N_0}{2}\mathbf{I}\right)$.

Para eliminar la ICI se propone una ecualización a partir de una matriz de 4 coeficientes: $\mathbf{H}=\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}$, con lo que la señal a la salida del ecualizador se puede expresar según: $\mathbf{y}_Q[k]=\mathbf{Hy}[k]=\mathbf{HPs}[k]+\mathbf{n}_Q[k]$

Se pide:

a) Calcule la matriz $\mathbf{H}=\mathbf{H}_{FZ}$, cuando el criterio aplicado es el forzador de ceros (FZ).

b) Calcule la distribución estadística del nuevo vector de ruido: $\mathbf{n}_Q[k]$.

c) Suponiendo que se mantienen los umbrales de decisión: $y_1=0, y_2=0$, obtenga la BER en función de los coeficientes de la matriz de ecualización $\mathbf{H}$.

d) Calcule la matriz $\mathbf{H}=\mathbf{H}_{MMSE}$, cuando el criterio aplicado es el de mínimo error cuadrático medio: $\min\left(\left\|\mathbf{y}_Q[k]-\mathbf{s}[k]\right\|^2\right)$.

e) Demuestre que si el ruido es nulo ambas soluciones coinciden: $\mathbf{H}_{MMSE}=\mathbf{H}_{FZ}$.

Ejercicio 12. Ecualización y FTO

Considere una transmisión digital binaria por un canal discreto equivalente de respuesta impulsional:
$c(k) = [1, 2\alpha, 3\alpha^2]$

Como consecuencia de la distorsión introducida por el canal, las muestras a la salida del filtro adaptado del receptor son $r(k) = a(k) \otimes c(k)$, siendo $a(k)$ los símbolos de valores A y –A, y $\otimes$ el operador convolución. Considere ruido aditivo blanco Gausiano de densidad No/2.

a) Diseñe un forzador de ceros de tres coeficientes en el receptor, $q(k)$, $k \in \{0,1,2\}$.

b) Halle el canal discreto equivalente total $c'(k) = c(k) \otimes q(k)$, y una cota de la BER.

c) Demuestre que puede expresar la transformada Z del ecualizador como $Q(z) = \left(1 + \beta z^{-1}\right)^2$, e indique cuál es el valor de β.

d) Usando la propiedad anterior, diseñe dos filtros terminales óptimos de dos coeficientes en el transmisor ($q_T(k)$, $k \in \{0,1\}$) y en el receptor ($q_R(k)$, $k \in \{0,1\}$) de tal modo que no se modifique el canal equivalente total ni la energía de los símbolos transmitidos.

e) Halle una cota de la BER y evalúe la mejora de los filtros terminales con respecto a la ecualización en términos de ganancia equivalente de Eb/No.