APUNTS PROPIETAT DE:
MÀRIUS SERRA LÓPEZ

PER QUALSEVOL DUBTE O CONSULTA RESPECTE ELS APUNTS O EL QUE FACI FALTA ESCRIURE A:
tirantloblanc84@hotmail.com

(l'assumpte ha de ser: Apunts ETSETB)

QUALSEVOL ERROR PRESENT S'ATRIBUEIX AL PROFE DE L'ASSIGNATURA QUE ME LA VA IMPARTIR!!

Ara ja podem resoldre:

$$(D - \lambda \cdot \mathbb{I})^K y = 0$$

$$e^{\lambda x} \cdot D^K (e^{-\lambda x} y) = 0$$

$$D^K (e^{-\lambda x} y) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\lambda x} y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{K-1} x^{K-1}$$

$$y = e^{+\lambda x} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{K-1} \cdot x^{K-1})$$

$\Rightarrow \{ e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, e^{\lambda x} \cdot x^{K-1} \}$ és SF de $(D - \lambda \mathbb{I})^K y = 0$

9-10-03

Resumint:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

amb $p_c(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + \lambda a_1 + a_0$

1) Descomposem: $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{K_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{K_r}$

2) Escribim la solució general:

$$y = \sum_{i=1}^{r} (c_{i0} + c_{i1} x + \ldots + c_{iK_i - 1} x^{K_i - 1}) e^{\lambda_i x}$$

Ex:

Trobar la solució general de:

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

1) $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda^1 + \lambda^0 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$

2) $\boxed{y(x) = (c_0 + c_1 x) e^{x} + (c_2) e^{-x}}$

PROBLEMA ($p(\lambda)$ amb arrels complexes → interessa donar solucions en forma real):

Si $\lambda = a + ib$ arrel de $p(\lambda) \Rightarrow \bar{\lambda} = a - ib$ arrel de $p(\lambda)$

$$\Downarrow$$

El el SF apareixen termes del tipus $\{ x^j e^{\lambda x}, x^j e^{\bar{\lambda} x} \}$

Sabem que:

$$e^{\lambda x} = e^{ax + ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$j \equiv$ exponent qualsevol

$$e^{\bar{\lambda} x} = e^{ax - ibx} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$$

$$e^{ax} \cdot \cos bx = \frac{e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda} x}}{2} \qquad e^{ax} \cdot \sin bx = \frac{e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda} x}}{2i}$$

$$L\left[e^{ax} \cdot \cos bx \cdot x^j \right] = L\left[\frac{x^j e^{\lambda x} + x^j e^{\bar{\lambda} x}}{2} \right] = \frac{1}{2} \left\{ L\left[\cancelto{0}{x^j e^{\lambda x}}\right] + L\left[\cancelto{0}{x^j e^{\bar{\lambda} x}}\right] \right\} = 0$$

$$L\left[e^{ax} \cdot \sin bx \cdot x^j \right] = \cdots = 0$$

* Així doncs, en el SF canviem $\{ x^j e^{\lambda x}, x^j e^{\bar{\lambda} x} \} \to \{ x^j e^{ax} \cdot \cos bx, x^j e^{ax} \cdot \sin bx \}$

Per tant els factors $\left[\lambda - (a+ib) \right]^k \cdot \left[\lambda - (a-ib) \right]^k$

els hi correspon:

$$y(x) = e^{ax} \left(\alpha_0 \cos bx + \beta_0 \sin bx + (\alpha_1 \cos bx + \beta_1 \sin bx) x + \ldots + (\alpha_{k-1} \cos bx + \beta_{k-1} \sin bx) x^{k-1} \right)$$

x^{k-1}

Ex:

1) $y'' + (-3y') + 2y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

$$\boxed{y(x) = (c_0)e^{x} + c_1 e^{2x}}$$

2) $y''' - y' = 0$

$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$$\boxed{y(x) = c_0 + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}}$$

3) $y'' + 4y' + 5y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = (\lambda + 2 - i)(\lambda + 2 + i)$

$\lambda = -2 \pm i$

$$\boxed{y(x) = e^{-2x}(c_0 \cos x + c_1 \sin x)}$$

4) $y'' + a^2 y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + a^2 = (\lambda - ai)(\lambda + ai)$

$$\boxed{y(x) = e^{0x}(c_0 \cos ax + c_1 \sin ax) = c_0 \cos ax + c_1 \sin ax}$$

5) $y'''' + 2y'' + y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2$

$$\boxed{y(x) = e^{0x}\big((c_0 \cos x + c_1 \sin x) + (c_2 \cos x + c_3 \sin x)x\big)}$$

6) $y^{(10)} - 2y^{(9)} - 2y^{(8)} - 2y^{(7)} + 2y^{(5)} + 2y^{(4)} + 2y^{(3)} - y^{(2)} = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)(\lambda - i)^2(\lambda + i)^2$

$y(x) = e^{0x}(c_0 + c_1 x) + e^{x}(c_2 + c_3 x + c_4 x^2) + e^{-x}(c_5) + e^{0x}(c_6 \cos x + c_7 \sin x) + e^{0x}(c_8 \cos x + c_9 \sin x)$

Observació:

En determinats casos, l'observació d'un cert SF permet trobar l'EDO corresponent sense pasar pel Wronskià.

Ex: $SF = \{e^t, te^t, t^2e^t\}$

$$\Downarrow$$

$$p(\lambda) = (\lambda-1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y''' - 3y'' + 3y' - y = 0}$$

Ex:

$SF = \{e^{2x}, \sin x, \cos x\}$

$$p(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-i)(\lambda+i) = (\lambda-2)(\lambda^2+1) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

$$\boxed{y''' - 2y'' + y' - 2 = 0}$$

5. EQ. LINEALS COMPLETES A COEFICIENTS CONSTANTS:

Recordem que interessa resoldre l'equació:

$$L[y] = f(x)$$

Sabem que:

$$y_G(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

Ja l'hem fet → l'acabem de fer

Per trobar:

$y_p(x)$; $L[y_p] = f(x)$ tenim 3 vies:

1) Variació de constants
2) Mètode de la conjectura prudent
3) Mètode del polinomi anul·lador

5.1. Mètode de la Conjectura Prudent:

S'usa quan l'aspecte de $f(x)$ coincideix amb algun de la llista adjunta, i cal assajar la y_p allà proposada.

Obs:

Si $f(x)$ és convinació lineal de funcions del tipus:

$$f(x) = \sum_i \alpha_i f_i(x)$$

assajarem: $y_p(x) = \sum \alpha_i y_{p_i}(x)$

Ex:

1) $y'' + y = x^2 + x$

y_H) $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$

$y_H(x) = \cos x + \sin x$

y_p) ~~$x^2+x = x(x+1)$~~

$y_p(x) = a + bx + cx^2$

$$\left. \begin{array}{l} y' = 2cx + b \\ y'' = 2c \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Es porta a l'EDO} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{array}$$

$$\boxed{y_G(x) = c_0 \cos x + c_1 \sin x + x^2 + x - 2}$$

2) $y'' + y = e^{3x}(x-2)$

y_H) $p(\lambda) = (\lambda + i)(\lambda - i)$ $\quad y_H(x) = c_0 \cos x + c_1 \sin x$

y_p) $y_p(x) = e^{3x}(a + bx)$ ...

donde $f_i(x)$ son de la forma (3), en virtud del p
de superposición se busca una solución particular y_p de la ecuación (1) de la forma

$$y_p = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i y_{ip}$$

He aquí un cuadro sinóptico de las formas de soluciones particulares para distintas formas de segundos miembros.

№ de orden	$f(x)$ Segundo miembro de la ecuación diferencial	$P(\lambda)$ Raíces de la ecuación característica	Forma de la solución particular, donde $k = \max(m, n)$
I	$P_m(x)$ Polinomi de grau "m"	1. El número 0 no es raíz de la ecuación característica	$\widetilde{P}_m(x)$ pol. grau "m"
		2. El número 0 es raíz de la ecuación característica de orden s	$x^s \widetilde{P}_m(x)$
II	$P_m(x)\, e^{\alpha x}$ (α es real)	1. El número α no es raíz de la ecuación característica	$\widetilde{P}_m(x)\, e^{\alpha x}$
		2. El número α es raíz de la ecuación característica de orden s	$x^s \widetilde{P}_m(x)\, e^{\alpha x}$
III	$P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \operatorname{sen} \beta x$	1. Los números $\pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica	$\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x$
		2. Los números $\pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica de orden s	$x^s (\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x)$
IV	$e^{\alpha x}[P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \operatorname{sen} \beta x]$	1. Los números $\alpha \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica	$(\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x)\, e^{\alpha x}$
		2. Los números $\alpha \pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica de orden s	$x^s (\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x)\, e^{\alpha x}$

8-442

3) $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$

y_H) $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$

$y_H(x) = e^{-2x}(c_0 + c_1 x)$

y_p) $y_p(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$

4) $y'' + 4y = \cos 2x$

y_H) $p(\lambda) = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$

$y_H(x) = c_0 \cos 2x + c_1 \sin 2x$

y_p) $y_p(x) = x(a\cos 2x + b\sin 2x)$

13-10-03

5.2. Mètode del polinomi anul·lador:

1) Tenim $P(D)y = b(x)$

$P(D)y - b(x) = 0$

2) Suposem que coneixem $Q(D)$ on $Q(D)\cdot b(x) = 0$ on $Q(D)$ té grau mínim (hem d'entendre-ho com que $Q(D)y = 0$ és l'EDO lin. homogènia a coef. constants més senzilla, de la qual $b(x)$ n'és sol. particular).

3) Ens plantegem resoldre:

$Q(D)\left[P(D)y - b(x)\right] = 0$

$Q(D)\cdot P(D)y - Q(D)b(x) = 0$

$\boxed{Q(D)P(D)y = 0}$ → La seva solució general conté la de $P(D)y = 0$ i té una solució particular de $P(D)y = b(x)$

Ex: $y^{(IV)} - 16y = t^4$

* y_H) $y^{(IV)} - 16y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 16 = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-2i)(\lambda+2i)$$

$$y_H(t) = c_0 e^{2t} + c_1 e^{-2t} + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t$$

* y_p) $Q(D) = D^5$ ja que $D^5(t^4) = 0$

Aleshores resolem $D^5(D^4 - 16\mathbb{I})y = 0$

$$(D^9 - 16D^5)y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^9 - 16\lambda^5 = \lambda^5(\lambda^4 - 16) = \lambda^5(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-2i)(\lambda+2i)$$

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \underbrace{c_5 e^{2t} + c_6 e^{-2t} + c_7 \cos 2t + c_8 \sin 2t}_{\text{Sol. anterior}}$$

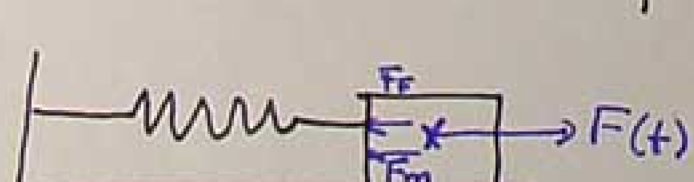
Fixem $c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = 0$ i Assagem:

$y_p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4$ en

$y^{(IV)} + (-16y) = t^4 \Rightarrow$ Per determinar les constants.

6. APLICACIONS DE LES EDO'S de 2n ORDRE:

6.1 Vibracions mecàniques: l'oscil·lador harmònic



$F(t) \to$ Força externa

$F_f \to$ Força fregament: $-vb$

$F_m \to$ Força de Hooke: $-kx$

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) - bv - kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t) - b\frac{dx}{dt} - kx \nearrow \quad F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx$$

Aleshores:

a) $F(t) \equiv 0 \rightarrow$ Vibracions lliures $\begin{cases} \text{- Amb esmorteiment } (b \neq 0) \\ \text{- Sense esmorteiment } (b = 0) \end{cases}$

b) $F(t) \neq 0 \rightarrow$ Vibracions forçades $\begin{cases} \text{- Sense esmorteiment } (b = 0) \\ \text{- Amb esmorteiment } (b \neq 0) \end{cases}$

* $x_H(t)$ /

$$m x'' + b x' + K x = 0$$

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + b\lambda + K = 0$$

$$\lambda = \frac{-b^2 \pm \sqrt{b^2 - 4mK}}{2m} = \frac{-b^2}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

Notem: $\gamma = \frac{b}{m}$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow$ freq. natural del sistema

$$\Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

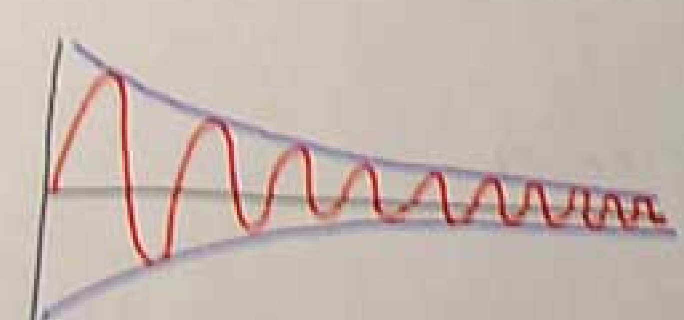
3 casos:

1) $\gamma < \omega_0 \Rightarrow$ O.H. Infraesmorteït

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

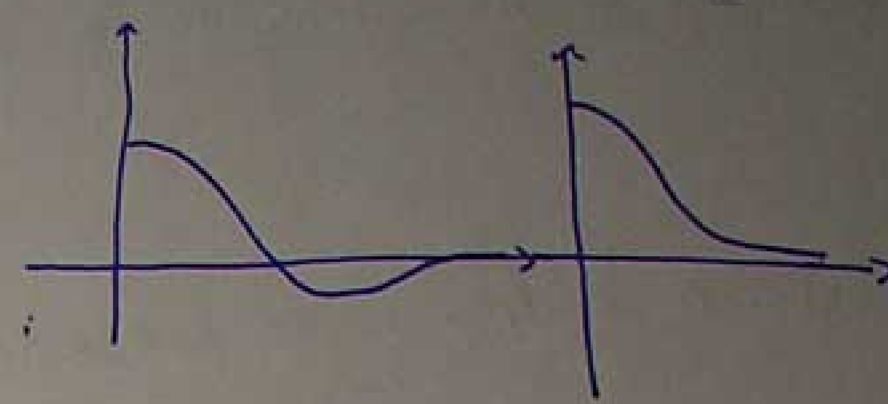
$$\lambda = -\gamma \pm i\omega_1$$

$$x_H(t) = e^{-\gamma t}\left(c_0 \cos \omega_1 t + c_1 \sin \omega_1 t\right) = A e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi)$$



2) $\gamma = \omega_0$ O.H amb esmorteiment crític:

$\lambda = -\gamma \rightarrow$ multiplicitat 2.



$$x_H(t) = (c_0 + c_1 t)\, e^{-\gamma t}$$

3) $\gamma > \omega_0$ O.H. sobreesmorteit:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$x_H(t) = c_0 \cdot e^{-\lambda_1 t} + c_1 e^{-\lambda_2 t}$$

Obs:

En els casos 2 i 3 no hi ha pràcticament vibració. Depenent de les C.I. es tallarà l'eix d'abscisses un cop com a molt.

* $x_p(t)$

Suposem una exitació periòdica del tipus:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Pel mètode de la conjectura prudent, s'obté:

$$x_p(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \beta)}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \qquad \beta = \operatorname{arctg} \frac{b\omega}{K - \omega^2 m}$$

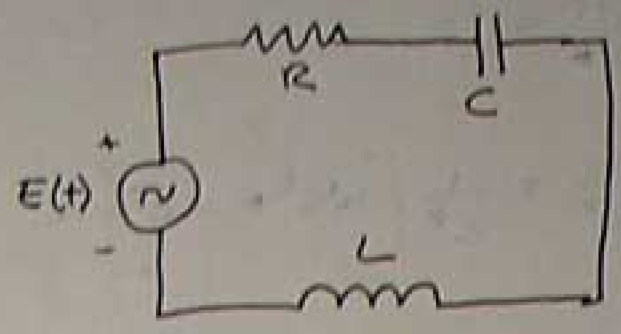
* $x_G(t)$

$$x_G(t) = \underbrace{x_H(t)}_{\text{Règim transitori}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{Règim estacionari}}$$

Notem que $\lim_{t\to\infty} x_H(t) = 0$

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} x_G(t) = x_p(t)$

6.2. Xarxes elèctriques:



$$E(t) = Ri + \underbrace{\frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau}_{=Q/C} + L\frac{di}{dt} \qquad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{E(t) = R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}} \Rightarrow$$ Simètric al sistema mecànic

PROBLEMES:

1 a)

$$x = y''^2 + 1$$

$$y'' = \pm\sqrt{x-1} \Rightarrow y^{n)} = f(x)$$

$$y' = \pm\int\sqrt{x-1}\,dx + C_0 = \pm\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C_0$$

$$\boxed{y = \pm\frac{4}{15}(x-1)^{5/2} + C_0 x + C_1}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} xy'' + y' = x^2 \\ y' = p \Rightarrow y'' = p' \end{array}\right\} \Rightarrow xp' + p = x^2 \Rightarrow$$ Lineal de primer ordre

$$y' + a(x)y = f(x)$$

* $xp' + p = 0$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln p = -\ln x + \overline{C_0} \qquad p = \frac{C_0}{x}$$

* $p_p(x) = \dfrac{C_0(x)}{x} \rightarrow p' = \dfrac{C_0'x - C_0}{x^2}$

$$x\frac{C_0'x - C_0}{x^2} + \frac{C_0}{x} = x^2$$

$$C_0' = x^2$$

$$C_0(x) = \frac{x^3}{3} \rightarrow p_p(x) = \frac{x^2}{3}$$

* $p(x) = \dfrac{C_0}{x} + \dfrac{x^2}{3} \Rightarrow y' = \dfrac{C_0}{x} + \dfrac{x^2}{3} \Rightarrow \boxed{y = C_0\ln(x) + \dfrac{x^3}{9} + C_1}$

2

$$x^3 y'' = (y - xy')^2$$

$$x = e^t \quad y = ue^t \Rightarrow dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(u\cdot e^t\right)\frac{1}{e^t} = \frac{1}{e^t}\left[u'e^t + ue^t\right] =$$

$$= u + \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[u + \frac{du}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[u + \frac{du}{dt}\right]\frac{dt}{dx}$$

$$= \left[\frac{du}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2}\right]\cdot e^{-t}$$

Portem-ho a l'EDO:

$$e^{3t}\cdot e^{-t}\left[\frac{du}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2}\right] = \left[ue^t - e^t\left(u + \frac{du}{dt}\right)\right]^2$$

$$\cancel{e^{2t}}\left(u' + u''\right) = \cancel{e^{2t}}\left(\cancel{u} - \cancel{u} + u'\right)^2$$

$$\boxed{u' + u'' = (u')^2}$$

Canvi:

$$p = u' \Rightarrow p' + p = p^2 \Rightarrow p' = p^2 - p$$

$$\frac{dp}{p^2 - p} = dt$$

$$\left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right]dp = dt \Rightarrow \ln(p-1) - \ln(p) = t + \overline{c_0}$$

$$\frac{p-1}{p} = c_0 e^t \Rightarrow p(t) = \frac{1}{1 - c_0 e^t}$$

$$u = \int \frac{dt}{1 - c_0 e^t} \qquad e^t\frac{du}{dx} = \frac{1}{1 - c_0 x} \Rightarrow du = \frac{1}{x(1 - c_0 x)} = \left[\frac{c_0}{1 - c_0 x} + \frac{1}{x}\right]dx$$

$x = e^t \quad dx = e^t dt$

$u(x) = -\ln(1-c_0x) + \ln x + \bar{c}_1$

$y = ue^t = ux$

$\frac{y}{x} = \ln \frac{c_1 x}{1-c_0x} \Rightarrow y(x) = x\ln\frac{c_1x}{1-c_0x}$

Sol. particular.

$y(1)=1$
$y'(1)=1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y(x) = x\ln\frac{ex}{1-(e+2)x}}$

[3] 14-10-03

$L[y] = y'' + y$

a) $L[\cos t] = (\cos t)'' + \cos t = -\cos t + \cos t = 0$

$L[\sin t] = (\sin t)'' + \sin t = -\sin t + \sin t = 0$

$L[e^t] = (e^t)'' + e^t = e^t + e^t = 2e^t$

b) $y'' + y = e^t$

~~...~~ $W(\cos t, \sin t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$SF = \{\cos t, \sin t\}$

H) $y'' + y = 0 \quad y_H(t) = c_0\cdot\cos t + c_1\cdot\sin t$

P) $y_p(t) = \frac{1}{2}e^t$

$y_G(t) = c_0\cdot\cos t + c_1\sin t + \frac{1}{2}e^t$

$y(0) = 1 = c_0 + \frac{1}{2} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2}$

$y'(0) = 0 \quad y'(t) = -c_0\sin t + c_1\cos t + \frac{1}{2}e^t$

$y'(0) = \frac{1}{2} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{-1}{2}$

$\boxed{y_G(t) = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^t}$

5 $y'' + p(t)y' + \mathcal{F}(t)y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y_1, y_2 \to \text{solucions en } I \\ \exists\, t_0 \,/\, y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Provar } y_1, y_2 \text{ son LD en } I$$

1) Com que y_1, y_2 són solucions d'una EDO lineal homogènia $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_1, y_2$ LD $\Rightarrow W(y_1, y_2) = 0 \quad \forall t \in I$

2) Com que y_1, y_2 solucions d'una EDO lineal homogènia $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Si $\exists t_0$; $W(y_1, y_2)(t_0) = 0 \Rightarrow W(y_1, y_2)(t) = 0 \quad \forall t \in I$

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Per (2) $\Rightarrow W(y_1, y_2) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow$ per (1) $\Rightarrow y_1, y_2$ LD

4 $y'' + p(t)y' + Q(t)y = 0 \qquad P, Q$ continues

Una corba ~~...~~ es tangent a l'eix d'abssices

$\Leftrightarrow$ La funció i la derivada s'anul·len en un punt.

$y'' = -P(t)y' - Q(t)y = f(t, y, y')$

1) $f(t, y)$ és contínua $\forall (t, y, y')$ ja que P, Q continues

2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \underset{\text{contínua}}{\underset{\downarrow}{-Q(t)}} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y'} = \underset{\text{contínua}}{\underset{\downarrow}{-P(t)}}$

$\Rightarrow$ És verifica el teorema d'Existència i unicitat de solucions de l'EDO a tot arreu.

7 $SF = \{1, t, \dots, t^{n-1}\} \Rightarrow y^{(n)} = 0$

8 $y'' + \frac{2}{t}y' + y = 0$ Comprovar: $y_1(t) = \frac{\sin t}{t}$ = solució

$y'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$ $y'' = \frac{(\cos t - t\sin t - \cos t)t^2 - 2t(t\cos t - \sin t)}{t^4}$

$-\frac{\sin t}{t} - \frac{2\cos t}{t^2} + 2\frac{\sin t}{t^3} + 2\frac{\cos t}{t^2} - 2\frac{\sin t}{t^3} + \frac{\sin t}{t} = 0$

↳ N'és solució !!

Com que coneixem una solució:

Fem el canvi $\Rightarrow y = y_1 \int u$

$y = \frac{\sin t}{t} \int u$

Treballem però amb y_1 sense substituir

$y' = y_1' \int u + y_1 u$

$y'' = y_1'' \int u + y_1' u + y_1' u + y_1 u' = y_1'' \int u + 2y_1' u + y_1 u'$

$y_1'' \int u + 2y_1' u + y_1 u' + \frac{2}{t} y_1' \int u + \frac{2}{t} y_1 u + y_1 \int u = 0$

$\Big(\underbrace{y_1'' + \frac{2}{t}y_1' + y_1}_{0}\Big)\int u + 2y_1' u + y_1 u' + \frac{2}{t} y_1 u = 0$

$\Downarrow$

PK y_1 solució

$2\left(y_1' + \frac{y_1}{t}\right)u + y_1 u' = 0$

$\frac{du}{u} = -2\left(\frac{y_1'}{y_1} + \frac{1}{t}\right)dt \Rightarrow \ln u = -2\ln y_1 - 2\ln t + C$

Aleshores tenim:

a) Una solució $\bar{y}(t)$; $\bar{y}(t_0) = \bar{y}'(t_0) = 0$ amb $t_0 \in \mathbb{R}$

b) Sabem que $y=0$ és solució de l'EDO i satisfà

$y(t) = y'(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ i en particular per $t = t_0$

$\Rightarrow$ Pel Teo. 31 $\Rightarrow \bar{y}(t) = 0$

6 2 vies:

1) Llarga

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha t} & e^{\beta t} & y \\ \alpha e^{\alpha t} & \beta e^{\beta t} & y' \\ \alpha^2 e^{\alpha t} & \beta^2 e^{\beta t} & y'' \end{vmatrix} = 0$$

2) Curta

↳ Pel que sabem d'EDO's lineals homogènies a coef. constants

$e^{\alpha t}, e^{\beta t}$, $\alpha \neq \beta$

són SF d'una d'aquestes EDO's amb pol. característic

$$p(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) = \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta$$

$\Rightarrow$ L'EDO és: $\boxed{y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y = 0}$

Cas general:

$\Rightarrow \{e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_n t}\}$, $\alpha_i \neq \alpha_j \quad \forall i \neq j$

$p(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_n)$

L'EDO és: $\boxed{(D - \alpha_1 \mathbb{I}) \circ \dots \circ (D - \alpha_n \mathbb{I})\, y = 0}$

$$\ln u = -2\ln(t\,y_1) + C$$

$$u = \frac{K}{(y_1 t)^2} = \frac{K}{\sin^2 t}$$

Recordem: $y_2 = y_1 \int u$

$$\int \frac{K}{\sin^2 t}\,dt =$$

$$= -\cot g\, t$$

$$y_2 = -\frac{\sin t}{t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\cos t}{t}$$

Així doncs:

$$\boxed{y(t) = \frac{c_2 \sin t + c_1 \cos t}{t}}$$

9 $\quad y'' + 4t\,y' + Q(t)\,y = 0$

$\exists\ y_1, y_2$ solució $\qquad \frac{y_2}{y_1} = t \Rightarrow y_2 = t \cdot y_1 \qquad y_2' = y_1 + t y_1'$

$$y_2'' = y_1' + y_1' + t y_1'' = t y_1'' + 2 y_1'$$

$$t y_1'' + 2 y_1' + 4t y_1 + 4t^2 y_1' + Q(t) y_1 = 0$$

$$\underbrace{t(y_1'' + 4t y_1' + Q(t) y_1)}_{0 \to \text{per ès solució}} + 2 y_1' + 4t y_1 = 0$$

$$2y_1' + 4ty_1 = 0$$

Ens queda:

$$y_1' + 2ty_1 = 0$$

$$\frac{dy_1}{dt} + 2ty_1 = 0 \Rightarrow \frac{dy_1}{y_1} = -2t\,dt$$

$$\ln y_1 = -t^2$$

$$y_1 = e^{-t^2} \qquad y_2 = t\cdot y_1 = t\cdot e^{-t^2}$$

$$SF = \{ e^{-t^2}, t\cdot e^{-t^2} \}$$

$$\boxed{y(t) = e^{-t^2}(c_0 + c_1 t)}$$

Per trobar $Q(t)$ imposem que $y_1 = e^{-t^2}$ satifa l'EDO

$$y_1' = -2te^{-t^2}$$

$$y_1'' = -2\left(e^{-t^2} + (-2t^2e^{-t^2})\right)$$

$$\cancel{e^{-t^2}}(4t^2-2) + 4t(-2t\cancel{e^{-t^2}}) + Q(t)\cancel{e^{-t^2}} = 0$$

$$-4t^2 - 2 + Q(t) = 0$$

$$\boxed{Q(t) = 4t^2 + 2}$$

10 d) $y'' - 2y' + 5y = 0$ 16-10-03

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \qquad \lambda = 1 \pm 2i$$

$$y(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^x$$

12 a/ $y'' + y = \cos x$

H) $y'' + y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$

$y_H = C_0 \cos x + C_1 \sin x$

P) $y_p(x) = x(A\cos x + B\sin x)$

$y'_p(x) = (C + Dx)\cos x + (D - Cx)\sin x$

$y''_p(x) = (2D - Cx)\cos x - (2C + Dx)\sin x$

$\Rightarrow$ Portant-ho a l'EDO

~~2D = Cx~~ $2D\cos x - 2C\sin x = \cos x \Rightarrow \boxed{D = \frac{1}{2} \quad C = 0}$

$$\boxed{y_G(x) = C_0 \cos x + C_1 \sin x + \frac{x}{2}\cos x}$$

b/ $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

H) $\rightarrow$ Mirar 10d) $\lambda = 1 \pm 2i$

$y_H(x) = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

P/ $y_p(x) = x(A'\cos 2x + B'\sin 2x)e^x \Rightarrow A' = 0 \quad B' = \frac{1}{4}$

$y_G(x) = e^x\left[A\cos 2x + \left(B + \frac{x}{4}\right)\sin 2x\right]$

c/ $y''' - y'' + y' - y = xe^x$

$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$

H/ $y_H(x) = Ae^x + B\cos x + C\sin x$

P/ $y_p(x) = x(e^x)(c + dx) \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \quad d = \frac{1}{4}$

$$\boxed{y_G(x) = e^x\left(A - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) + B\cos x + C\sin x}$$

d) $y^{v)} + 2y''' + y' = 2x$

$p(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2+1)^2 = \lambda(\lambda-i)^2(\cancel{\lambda}+i)^2$

H) $y_H(x) = A + (B + Cx)\cos x + (D + Ex)\sin x$

P) $y_p(x) = x(A' + B'x) = A'x + B'x^2$

$y_p'(x) = A' + 2B'x \qquad y_p''' = y_p^{iv)} = y_p^{v)} = 0$

$y_p''(x) = 2B'$

$A' + 2B'x = 2x \qquad \boxed{A'=0} \quad \boxed{B'=1}$

$$\boxed{y_G(x) = A + (B + Cx)\cos x + (D + Ex)\sin x + x^2}$$

13 a) $y'' - 9y = e^x + x + \sin 2x$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 9 = (\lambda-3)(\lambda+3)$

H) $y_H(x) = c_0 e^{3x} + c_1 e^{-3x}$

P) $y_p(x) = Ae^x + (B + Cx) + (D\cos 2x + E\sin 2x)$

$y_G(x) = (c_0 e^{2x} + c_1 e^{2x} + A)e^x + (B + Cx) + (D\cos 2x + E\sin 2x)$

* Al buscar y_p en el full no hi ha cap cas, però sí la suma de casos separats. La sol. final és la suma de cada un.

* Tb es pot fer raons trigonomètriques

14 a) $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$

H) $y_H(x) = e^{3x}(A + Bx) = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$

$SF = \{e^{3x}, xe^{3x}\}$

P) $y_p(x) = A(x)e^{3x} + B(x)xe^{3x}$

$$\begin{bmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & (3x+1)e^{3x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{3x}}{x^2} \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{Dividir per } e^{3x}} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 3 & 3x+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{x^2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A' &= \frac{-1}{x} \\ B' &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}}$$

~~$A' = A(x)$~~
~~$B' = B(x)$~~

$A(x) = -\ln x$
$B(x) = -\frac{1}{x}$

$y_G(x) = (A + Bx - 1 - \ln x)e^{3x}$

15 a) $y'' - y' = x \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = \cancel{(\lambda-1)(\lambda+1)}$

H] $y_H(x) = A + Be^x$

P] $y_p(x) = x(C + Dx) = Cx + Dx^2$

$\left.\begin{array}{l} y_p'(x) = C + 2Dx \\ y_p''(x) = 2D \end{array}\right\} \rightarrow$ Portem a l'EDO $\Rightarrow \quad 2D - C - 2Dx = x$

$\left.\begin{array}{l} 2D - C = 0 \\ -2D = 1 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} D = -\frac{1}{2} \\ C = -1 \end{array}}$

$y_G(x) = A + Be^x - x - \frac{1}{2}x^2$

$\left.\begin{array}{l} y_G(0) = A + B = 1 \\ y_G'(x) = Be^x - 1 - x \\ y_G'(0) = B - 1 = 0 \end{array}\right\} \boxed{B = 1} \quad \boxed{A = 0}$

$$\boxed{y_G(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2}}$$

16 $y' - 3y = \frac{5}{4}e^{4t} - \frac{1}{4} + 4\int_0^t y \qquad \left[\int_0^t y(s)\,ds\right] = \overset{\text{primitiva}}{Y(t)} - Y(0) \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \left[\int_0^t\right]' = y(t)$

Derivem l'edo: $\Rightarrow \quad y'' - 3y' = 5e^{4t} + 4y$

↳ És de 2a ordre, per tant surten 2 constants a la solució $F(c_0, c_1, x)$. Com que la solució ha de complir l'EDO inicial a qualsevol t, ho fem per $t=0$ i substituïm.

17 1) $\omega \neq a$ Si $a = 0$

↳ $y_{11}(t) = \dfrac{1 - \cos\omega t}{\omega^2}$

Si $a \neq 0$

↳ $y_{12}(t) = \dfrac{\cos at - \cos\omega t}{\omega^2 - a^2}$

2) $\omega = a$ Si $a = 0$

↳ $y_{21}(t) = \frac{1}{2}t^2$

Si $a \neq 0$

↳ $y_{22}(t) = \dfrac{t\sin at}{2a}$

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{1 - \cos\omega t}{\omega^2} \overset{\text{H\^{o}p}}{=} \lim_{\omega\to 0} \frac{t\sin\omega t}{2\omega} \overset{\text{H\^{o}p}}{=} \lim_{\omega\to 0} \frac{t^2\cos\omega t}{2} = \frac{t^2}{2} = y_{21}(t)$$

$$\lim_{\omega\to a} \frac{\cos at - \cos\omega t}{\omega^2 - a^2} \overset{\text{H\^{o}p}}{=} \lim_{\omega\to 0} \frac{t\sin\omega t}{2\omega} \overset{\text{H\^{o}p}}{\underset{?}{=}} \lim_{\omega\to 0} \frac{t^2\cos\omega t}{2} = \frac{t^2\cos at}{2} = y_{22}(t)$$

20-10-03

18 $t^2y'' + ty' - y = 3t^2$

t^n es aspecte de sol. en l'homogenia

$$\left.\begin{array}{l} y' = nt^{n-1} \\ y'' = n(n-1)t^{n-2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{A l'EDO} \rightarrow \quad n(n-1)t^n + nt^n - t^n = 0$$

$$t^n\left[n(n-1) + n - 1\right] = 0$$

$$t^n(n-1)\left[n+1\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad n = 1 \ \vee \ n = -1$$

Així les solucions són $\boxed{y = t}$ $\boxed{y = \frac{1}{t}}$ SF $\{t, \frac{1}{t}\}$

PS

$y_p = c_1(t)\cdot t + c_2(t)\frac{1}{t}$ $\Rightarrow$ L'equació s'escriu $y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2} = 3$

$$\begin{bmatrix} t & \frac{1}{t} \\ 1 & \frac{-1}{t^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}t^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} c_1(t) = \frac{3t}{2} \\ \\ c_2(t) = \frac{-1}{2}t^3 \end{array}$$

$$y_p(t) = \frac{3t^2}{2} + \left(\frac{-1}{2}t^2\right] = t^2$$

Sol. general:

$$\boxed{y(t) = c_1 t + \frac{c_2}{t} + t^2}$$

$\frac{dt}{ds} = e^s \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{e^s}$

19 Eq. Euler:

$t^n\cdot y^{(n)} + a_{n-1}\cdot t^{n-1}\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 t y' + a_0 y = 0 \Rightarrow$ Canvi $t = e^s$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = e^{-s}\frac{dy}{ds} = e^{-s}\cdot\dot{y}$$

$$s = \ln t \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} = e^{-s} \qquad \dot{y} = \frac{dy}{ds}$$

$$y'' = \frac{d}{dt}(y') = \frac{d(e^{-s}\cdot\dot{y})}{dt} = \frac{d}{ds}(e^{-s}\cdot\dot{y})\frac{ds}{dt} = \left[\ddot{y}e^{-s} - e^{-s}\dot{y}\right]e^{-s} =$$

$$= e^{-2s}\left[\ddot{y} - \dot{y}\right]$$

$$y''' = \frac{d}{dt}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = \frac{d}{dt}\left[(\ddot{y} - \dot{y})e^{-2s}\right] = \frac{d}{ds}\left[(\ddot{y} - \dot{y})e^{-2s}\right]e^{-s} =$$

$$= \left[(\dddot{y} - \ddot{y})e^{-2s} - 2e^{-2s}(\ddot{y} - \dot{y})\right]e^{-s} = e^{-3s}\left[\dddot{y} - 3\ddot{y} - 2\dot{y}\right]$$

$$y^{(k)} = e^{-ks} \cdot \underbrace{F_k(y^{(k)}, \dots, y')}_{\text{Lineal a coef. const.}}$$

Ho portem a l'EDO:

$$t^n \cdot y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k y^{(k)} = 0$$

$$\cancel{e^{ns} \cdot e^{-ns}}\, F_n(y^{(n)} \dots y') + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cancel{e^{ks} \cdot e^{-ks}}\, F_k(y^{(k)} \dots y') = 0$$

Treiem com a factors comuns de les derivades, resulta l'EDO lineal amb coef. const.

20

$$t^2 y'' - t y' + y = 0 \Rightarrow \text{canvi } t = e^s \qquad \frac{ds}{dt} = e^{-s}$$

$$y' = \dot{y} e^{-s} \qquad y'' = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2s}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{ds} \qquad \ddot{y} = \frac{d^2y}{ds^2}$$

⇓ EDO

$$(\ddot{y} - \dot{y})e^{2s} \cdot e^{-2s} - e^{s} \cdot e^{-s} \cdot \dot{y} + y = 0$$

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

$$y(s) = e^s(c_0 + c_1 s)$$

Desfent canvi:

$$\boxed{y(t) = t\left[c_0 + c_1 \ln t\right]}$$

(21) $y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$

SF $\{y_1, y_2\}$

a/ $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$

$$\frac{dW}{dt} = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - (y_1'' y_2 + y_2' y_1') = -y_1'' y_2 + y_1 y_2'' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$$

b/ $p_1 = \frac{-W'}{W}$

Com SF és solució:

$y_1'' + p_1 y_1' + p_0 y_1 = 0 \Rightarrow y_1'' = -p_1 y_1' - p_0 y_1$

$y_2'' + p_1 y_2' + p_0 y_2 = 0 \Rightarrow y_2'' = -p_1 y_2' - p_0 y_2$

$$W' = y_1 \cdot y_2'' - y_1'' \cdot y_2 = -p_1 y_2' y_1 - \cancel{p_0 y_2 y_1} + p_1 y_1' y_2 + \cancel{p_0 y_1 y_2}$$

$-W = -y_1 y_2' + y_1' y_2$

$$\frac{-W'}{W} = \frac{-p_1 (y_2' y_1 - y_1' y_2)}{y_1' y_2 - y_1 y_2'} \qquad \frac{-W'}{W} = p_1$$

c/ $\frac{W'}{W} = -p_1$

$$\frac{dW}{W} = -p_1(t)\,dt \Rightarrow \int_{W(t_0)}^{W(t)} \frac{dW}{W} = -\int_{t_0}^{t} p_1(t)\,dt \Rightarrow$$

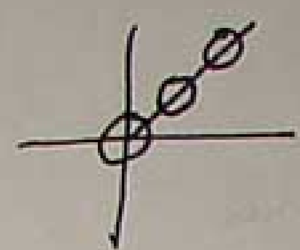
$$\Rightarrow \ln W \Big|_{W(t_0)}^{W(t)} = -\int_{t_0}^{t} p_1(t)\,dt \Rightarrow \ln \frac{W(t)}{W(t_0)} = -\int_{t_0}^{t} p_1(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{W(t)}{W(t_0)} = e^{-\int_{t_0}^{t} p_1(t)\,dt} \Rightarrow \underline{\underline{W(t) = W(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p_1(t)\,dt}}}$$

d) $y^{(n)} + p_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_0 y = 0$

$W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} p_{n-1}(s)\,ds}$

22



$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad \Rightarrow x=y \Rightarrow a=b$

$(x-a)^2+(y-a)^2=R^2$

$x^2+a^2-2xa+y^2+a^2-2ay=R^2$

$x^2+y^2-2a(x+y)=R^2$

$\frac{d}{dx}$: $2x+2yy'-2a-2ay' = \cancel{2}x+\cancel{2}yy'-\cancel{2}a(1+y')=0$

$\frac{x+yy'}{1+y'}=a$

$\frac{d}{dx}$:

$$\frac{(1+y'y'+yy'')(1+y')-y''(x+yy')}{(1+y')^2}=0$$

$(1+y')\left[1+(y')^2\right]+yy''+\cancel{yy'y''}-y''x-\cancel{yy'y''}=0$

$$\boxed{(y-x)y''+\left[1+(y')^2\right](1+y')=0}$$

24

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

d/dx: $2(x-a)+2(y-b)y'=0$

$x-a+yy'-by'=0$

d/dx: $1+(y')^2+yy''-by''=0$

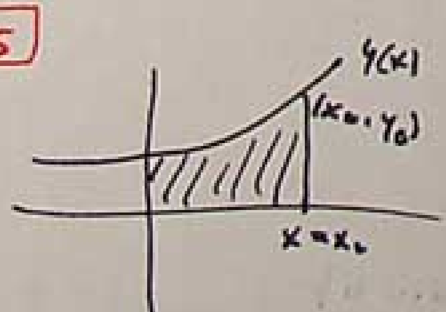
$1+(y')^2+y''(y-b)=0$

$b=\frac{1+(y')^2}{y''}+y$

d/dx: $0=\frac{2y'(y'')^2-y'''(1+y'^2)}{y''^2}+y'$

$$\boxed{\left[1+(y')^2\right]y''' = 3y'(y'')^2=0}$$

25



$y'(x_0)=\int_0^{x_0} y(s)\,ds \quad \forall (x_0,y_0)$

$y'(x)=\int_0^{x} y(s)\,ds \xrightarrow{d/dx} y''=y$

$y''-y=0$ → EDO H Coef. Const

$p(\lambda)=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$

$y(t)=Ae^{t}+Be^{-t}$

$y'(0)=0$ $\quad y'(t)=Ae^{t}-Be^{-t} \Rightarrow A=B$

$y(t)=A(e^{t}+e^{-t})=2A\,\mathrm{ch}\,t$

21-10-03

TEMA 3:

SISTEMES D'EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINARIES DE 1r ORDRE

1. Introducció

Def: Un sistema d'EDO's de 1r ordre, és de la forma

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t; x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t; x_1, \dots, x_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Ex:

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_2 t \\ x_2' = x_1 x_2 - \sin t \end{cases}$$

Obs:

Notant $X = (x_1 \dots x_n)$

$F = (f_1, \dots, f_n)$

el sistema es pot escriure $X' = F(t, X)$

Def: Diem que $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ és solució de (1) $\Leftrightarrow$ $\varphi' = F(t, \varphi)$, és a dir, sii compleix totes les eq. del sistema.

TEOREMA ($\exists !$):

Sigui $f_1, \dots, f_n$ amb $f_i : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(t; x_1 \dots x_n) \longmapsto f_i(t; x_1 \dots x_n)$

tq

1) $f_i(t, x_1 \dots x_n)$ contínua $\forall i$

2) $\dfrac{\partial f_i(t, x_1 \dots x_n)}{\partial x_j}$ contínues $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $\forall i \in \{1 \dots n\}$

Aleshores donat $(t_0, X_0) \in D$ tq $X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$, el problema de Cauchy $\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$, $F = (f_1 \dots f_n)$ té solució única $X = X(t)$ en un cert entorn de t_0.

Def:

Diem que un sistema és *autònom* quan és de la forma $X' = F(X)$
(t no apareix explícitament).

Obs:

Qualsevol sistema no autònom es pot transformar en autònom amb un canvi de variable:

$$X' = F(t, X) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = t \\ x'_{n+1} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X' = F(x_{n+1}, X) \\ x'_{n+1} = 1 \end{array} \right.$$

Nota:

1) Tota EDO d'ordre n es pot convertir en un sistema d'ordre 1.

$$x^{(n)} = f(t, x^{(n-1)}, \dots, x', x)$$

fent el canvi:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ \vdots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

Ex:

$$y''' + (y')^2 + 3y = e^t \qquad y(0) = 1 \;,\; y'(0) = y''(0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ x_3 = y'' \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = x_3 \\ \underset{y'''}{x_3'} = e^t - 3x_1 - x_2^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1(0) = 1 = y(0) \\ x_2(0) = 0 = y'(0) \\ x_3(0) = 0 = y''(0) \end{array}$$

2) El recíproc no sempre és possible i no tot sistema es pot convertir en una EDO. Si es pot en sist. lineals.
El metode s'anomena: mètode del operador derivació (D) i no és útil amb $n \geq 3$

__Ex:__

$$\begin{cases} x' = x - y - t^2 \\ y' = x + 3y + 2t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Dx = x - y - t^2 \longrightarrow -y = Dx - x + t^2 \\ Dy = x + 3y + 2t^2 \longrightarrow D[x - Dx - t^2] = x + 3(x - Dx - t^2) + 2t^2 \end{cases}$$

$$Dx - D^2x - Dt^2 = 4x - 3Dx - t^2$$

$$t^2 - 2t = D^2x - 4Dx + 4x$$

$$x'' - 4x' + 4x = t^2 - 2t$$

$$\hookrightarrow x(t) = \left((c_1 + c_2 t)e^{2t} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\right)$$

$\vdots$

$$y(t) = x - Dx - t^2$$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ $\quad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2}$

$(\lambda - 2)^2$

$a + bt + ct^2$

$2c - 4(b + 2ct) + 4a + 4bt + 4ct^2 = t^2 - 2t$

$2c - 4b - 8ct + 4a + 4bt + 4ct^2 = t^2 - 2t$

$2c - 4b + 4a = 0$

$-8c + 4b = -2$

$4c = 1$

$c = \frac{1}{4}$ $\quad b = 0$ $\quad a = -\frac{1}{8}$

2. SISTEMES D'EDOS LINEALS DE 1r ORDRE

2.1 Definicions:

Def: Un sistema lineal de primer ordre és del tipus:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

Matricialment: $\quad \underline{X}' = A(t) \cdot \underline{X} + B(t) \quad (2)$

on $\underline{X} = (x_1 \dots x_n)$

$A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_{ij = 1, \dots, n}$

$B(t) = \left(b_1(t), \dots, b_n(t)\right)$

Def:

$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ és solució de (2) ⇒ matriu en $I \subset \mathbb{R}$

$\iff \varphi' = A(t)\varphi + B(t) \quad \forall t \in I$, essent $\varphi_i \in C^1$

Ex:

Comprovar que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ i $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ són solució de

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} X$$

$$X_1' = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$X_2' = \begin{bmatrix} 18 \\ 30 \end{bmatrix} e^{6t} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} e^{6t} = \begin{bmatrix} 18 \\ 30 \end{bmatrix} e^{6t}$$

Prop:

Si $a_{ij}(t)$, b_j contínues, $\forall t \in I$ ⇒ donat (t_0, X_0),

el problema de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} X' = A(t) \cdot X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right\}$ té solució única $\forall t_0 \in I$.

Dem:

Apliquem directament el teorema d'existència i unicitat

$$f_i = \sum a_{ij} \cdot x_j + b_i \longrightarrow \text{contínues a } I \times \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij} \longrightarrow \text{contínues a } I \times \mathbb{R}^n$$

Def:

Diem que el sistema (2) és homogeni $\Leftrightarrow$ $B(t) = 0$, és a dir, quan és de la forma: $X' = A(t) \cdot X$

* Introduïm l'operador L t.q. $L[X] = [D - A(t)]X =$
$$= DX - A(t)X = X' - A(t) \cdot X$$

Amb L, el sistema (2) resulta:
$$L[X] = B(t)$$

Obs:

1) L lineal $\Rightarrow$ $L[\alpha X + \beta X_2] = \ldots = \alpha L[X_1] + \beta \cdot L[X]$

2) El sistema homogeni associat a $L[X] = B(t)$ és $\Rightarrow$ $L[X] = 0$

Prop:

La solució general de $L[X] = B(t)$ és de la forma
$$X_G(t) = X_H(t) + X_p(t)$$

on X_h $\Rightarrow$ solució general de l'homogenia $L[X] = 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ CL d'una base de $Ker[L]$

X_p $\Rightarrow$ solució particular d'el sistema complet: $L[x_p] = B(t)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ variació de constants.

2.2. Dependència lineal:

Siguin $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ vectors tals que les seves components són funcions definides en un cert $I \subset \mathbb{R}$

$$x_{ij} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad X_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto x_{ij}(t) \qquad t \mapsto (x_{i1}(t), \ldots, x_{in}(t))$$

Def:

Diem que $X_1, \dots, X_n$ són LD en $t_0 \in I \Leftrightarrow \exists\, \lambda_1 \dots \lambda_n$ no tots nuls talque $\lambda_1 X_1(t_0) + \dots + \lambda_n X_n(t_0) = \vec{0}$

En cas contrari diem que són LI en I

Def:

Diem que $X_1, \dots, X_n$ són LD en $I \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow$ són LD $\forall t \in I$.

En cas contrari són LI en I.

Prop:

Si $X_1, \dots, X_n$ LD en $I \Rightarrow \det[X_1, \dots, X_n](t) = 0 \quad \forall t \in I$

Obs:

1) El recíproc és en general fals

Ex:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin t \end{bmatrix} \quad \det\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 \cos t + \lambda_2 \sin t = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow LI$$

2) El recíproc és cert quan $X_1 \dots X_n$ són solució d'un sist. lineal homogeni. $X' = A(t) \cdot X$

2.3 Sistemes homogenis

Volem resoldre $X' = A(t) \cdot X$ o equivalentment $L[X] = 0. \Rightarrow$ base del $\ker[L]$

Prop:

$X_1 \dots X_n$ són solució de $L[X] = \vec{0}$ en I. Aleshores són LI. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det[X_1 \dots X_n](t) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

Obs:

De fet quan $\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_n$ són solució de $L[\mathbb{X}]=\vec{0}$ es pot provar que:

a/ Si $\exists t_0 \in I$; $\det(\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_n)(t_0) = 0 \Rightarrow$ el det ~~no~~ s'anula $\forall t \in I$

b/ $\neq 0 \Rightarrow$ " " no s'anula mai en I.

Prop:

$\dim \operatorname{Ker}\{L\} = n$

Def:

Sigui $\operatorname{Ker}\{L\} = \{\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n\}$, Aleshores:

1) Diem que $\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_n$ és un sistema fonamental de solucions.

2/ La matriu $\Phi(t) = (\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_n)(t)$ es coneix com a matriu fonamental (MF)

Obs:

Si $\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_n$ és SF de $\mathbb{X}' = A(t)\cdot\mathbb{X} \Rightarrow$ la solució general és de la forma

$$\mathbb{X}(t) = \lambda_1 \mathbb{X}_1(t) + \dots + \lambda_n \mathbb{X}_n(t)$$

Ex:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$$

a/ Forma matricial?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}}_{\mathbb{X}'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{X}}$$

b/ Comprovar que:

$\mathbb{X}_1 = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$ $\mathbb{X}_2 = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ és SF

$$\mathbb{X}_1' = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}$$

$\mathbb{X}_2$ tb ho compleix. Perquè sigui SF han de ser LI.

$$\det \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0 \quad \forall t$$

c/ MF?

$$MF = \Phi = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

d/ sol. general

1) $\mathbb{X} = \lambda_1 \mathbb{X}_1 + \lambda_2 \mathbb{X}_2 = \lambda_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$

ó 2) $\begin{cases} x_1(t) = \lambda_1 \cos t + \lambda_2 \sin t \\ x_2(t) = -\lambda_1 \sin t + \lambda_2 \cos t \end{cases}$

Prop:

Sigui $\Phi(t) = (X_1 \dots X_n)$ MF de $X' = A(t)\cdot X$. Aleshores

1) $\Phi' = A\cdot\Phi$

2) $\exists\, \Phi^{-1}(t) \Rightarrow \det(\Phi) \neq 0$

3) $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\det M \neq 0 \Rightarrow \Phi(t)\cdot M$ és també MF

4) Donada $\hat{\Phi}$ MF, $\exists\, C \in M_n(\mathbb{R})$; $\hat{\Phi}(t) = \Phi(t)\cdot C$

5) $\forall\, X(t)$ solució ; $\exists\, \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ y $X(t) = \Phi(t)\cdot\vec{\lambda}$

dem 4)

$\Phi(t)$ MF $\Rightarrow \exists\, \Phi^{-1}(t)$

Construim matriu $H(t) = \Phi^{-1}(t)\cdot\hat{\Phi}(t)$

Cal provar que $H(t)$ es una matriu de constants ($H(t) = C$).

Això es fa veient que $H'(t) = 0$

Llavors $C = \Phi^{-1}(t)\cdot\hat{\Phi}(t) \rightarrow C\cdot\Phi(t) = \hat{\Phi}(t)$

Veiem-ho:

$$H' = (\Phi^{-1})'\,\hat{\Phi} + \Phi^{-1}\,\hat{\Phi}' = (\Phi\cdot\Phi^{-1})' = (I)' = 0$$

$$(\Phi^{-1})' = \Phi^{-1}\cdot\Phi'\cdot\Phi^{-1}$$

2.4 Equació completa i variació de constants:

1) Tenim $X' = A(t)\cdot X + B(t)$

2) Sabem que X_h és tal que $X_h' = A(t)\cdot X_h \Rightarrow$

$\Rightarrow$ si $\Phi(t)$ MF $\Rightarrow X_h = \Phi(t)\cdot\vec{c}$

3) Assagem $X_p = \Phi(t)\cdot\vec{C}(t)$

Portem-ho a (1)

$$\Phi' \cdot \vec{c} + \Phi \cdot \vec{c}\,' = A\Phi \cdot \vec{c} + B(t)$$

$$\cancel{A\Phi\vec{c}} + \Phi\vec{c}\,' = \cancel{A\Phi\vec{c}} + B(t)$$

$$\vec{c}\,' = \Phi^{-1}(t) \cdot B(t) \Rightarrow \quad \vec{c}(t) = \int \Phi^{-1}(t) \cdot B(t) \cdot dt$$

4) Solució general:

$$X_G = \Phi(t) \cdot \vec{c} + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \cdot B(t) \cdot dt = \Phi(t) \left[\vec{c} + \int \Phi^{-1}(t) B(t)\, dt \right]$$

5) Suposem que el PVI $\begin{cases} X' = A(t) X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

- Designem $F(t) = \int \Phi^{-1} B\, dt$

- $X(t_0) = X_0 = \Phi(t_0) \left[\vec{c} + F(t_0) \right]$

$$\vec{c} = \Phi^{-1}(t_0) \cdot X_0 - F(t_0)$$

- $X_G = \Phi \left[\Phi^{-1}(t_0) X_0 - F(t_0) + \int \Phi^{-1}(t) B(t)\, dt \right] =$

$$= \Phi(t) \left[\Phi^{-1}(t_0) X_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) B(s)\, ds \right]$$

Per tant:

$$\boxed{X_G(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0) X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) B(s)\, ds}$$

Ex:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

Exemple anterior però amb $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t^{-1} \end{bmatrix}$

$$X_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\, B(t)\, dt = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}}_{\Phi} \int \underbrace{\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}}_{\Phi^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{bmatrix}}_{B} dt$$

$$X_p(t) = \begin{bmatrix} \cos t \cdot \ln|\cos t| + t\sin t \\ -\sin t \cdot \ln|\cos t| + t\cos t \end{bmatrix}$$

3. SISTEMES DE 1r ORDRE, LINEALS i AMB COEFICIENTS CONSTANTS

3.1. Introducció

- D'entrada vull solucionar $X' = A(t) \cdot X \quad A \in M_n(\mathbb{R})$
- Sabem que en 1a dimensió $\rightarrow x' = ax \iff x(t) = ke^{at}$
- Per analogia seria interessant trobar la sol. com:

$$X(t) = e^{At} \cdot \vec{k}$$

$$X'(t) = Ae^{At} \cdot \vec{k} = AX$$

3.2 Exponencials d'operadors:

Sabem que $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \dots$

Def:

Donat $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definim

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}A^n$$

Nota: La definició només té sentit si la sèrie és convergent.

Prop:

$e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}A^n$ és absolutament convergent.

Propietats:

1) $AB = BA \Rightarrow e^{At+Bt} = e^{At} \cdot e^{Bt}$

2) En particular $\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At}$

3) Si $D = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow e^{Dt} = P^{-1} \cdot e^{At} \cdot P$

4) $\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = A \cdot e^{At}$

27-10-03

3.3 Solució del problema:

* Sigui el sistema : $X' = AX$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = e^{At} \cdot \vec{K}} \longrightarrow \text{Solució general}$$

Veiem que: $X' = Ae^{At} \cdot \vec{K} = AX \longrightarrow$ soluciona el sistema

* Considerem el PVI $\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

$X(t) = e^{At} \cdot \vec{K}$ sol. general

$X(t_0) = e^{At_0} \vec{K} \Rightarrow \vec{K} = e^{-At_0} \cdot X(t_0) = e^{-At_0} \cdot X_0$

$\Rightarrow$ La solució del PVI és:

$$X(t) = e^{At} \cdot e^{-At_0} \cdot X_0 = e^{A(t-t_0)} \cdot X_0$$

$$\boxed{X(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot X_0} \quad (*)$$

• Relació amb la matriu fonamental:

Prop:

Sigui $\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X}$

1) Si $\Phi(t)$ n'és SF $\Rightarrow \begin{cases} e^{At} = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(0) \\ e^{A(t-t_0)} = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0) \end{cases}$

2) e^{At} és MF

Dem 1)

$\Phi(t)$ MF $\Rightarrow \Phi' = A\Phi \underset{(*)}{\Longrightarrow} \Phi(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot \Phi(t_0)$

$$\Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

Dem 2)

$$e^{At} = \underbrace{\underbrace{\Phi(t)}_{MF} \cdot \underbrace{\Phi^{-1}(0)}_{M \text{ no singular}}}_{MF \ \to \text{ veure apartat } 2.3}$$

• Solució general del cas no homogeni:

a/ $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + B(t) \longrightarrow \mathbf{X}_G(t) = \Phi(t)\left[\vec{C} + \int \Phi^{-1}(t) \cdot B(t) \cdot dt\right]$

Això es pot escriure:

$$\mathbf{X}_G(t) = e^{At}\left[\vec{K} + \int e^{-At} \cdot B(t) \cdot dt\right]$$

b)

PVI $\begin{cases} \mathbf{X}' = A\mathbf{X} + B(t) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{X}_G(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{X}_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As} B(s)\, ds}$

CALCULAR e^{At}:

1) Suposem que $A \rightsquigarrow$ diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & \lambda_k & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & \cdots & & 0 \\ \vdots & \lambda_k^n & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n^n \end{bmatrix} \rightarrow \text{Elevem diagonal a "n"}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \sum_{n\geq 0} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda_n^n \cdot t^n}{n!} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}$$

2) Si A diagonalitzable i $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ és la seva matriu diagonal en la base de VEP's donada per P $\Rightarrow$

$$\Rightarrow D = P^{-1} \cdot A \cdot P \qquad A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{At} = P \cdot e^{Dt} \cdot P^{-1}}$$

3) Quan A no diagonalitza → aprendrem a trobar un SF.

3.4 Obtenció d'un sistema fonamental:

Sigui $X' = AX$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Prop:

Si X_0 es un VEP d'A amb VAP associat $\lambda \Rightarrow \boxed{X(t) = e^{\lambda t} \cdot X_0}$

és solució del sistema amb CI $X(0) = X_0$

Dem:

$$A \cdot X = A e^{\lambda t} X_0 = e^{\lambda t} \underbrace{A X_0}_{\lambda X_0} = \lambda e^{\lambda t} X_0 = X'(t)$$

$$X(0) = e^{\lambda \cdot 0} \cdot X_0 = X_0$$

Nota:

Sigui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ amb polinomi característic

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k} \qquad \lambda_i \in \mathbb{C} \qquad \sum_i r_i = n$$

Recordem que A diagonalitza $\Leftrightarrow \dim \ker (A - \lambda_i I) = r_i \quad \forall i$

Prop:

Sigui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalitzable amb,

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$$

VAP's d'A amb VEP's: $\vec{v}_{11}, \dots \vec{v}_{1r_1}, \dots \vec{v}_{k1}, \dots \vec{v}_{kr_k}$

Aleshores:

$$\{ e^{\lambda_1 t} \vec{v}_{11}, \dots, e^{\lambda_1 t} \vec{v}_{1r_1}, \dots e^{\lambda_k t} \cdot \vec{v}_{k1}, \dots e^{\lambda_k t} \vec{v}_{kr_k} \}$$ es un SF.

Dem:

Són solució per la propietat anterior i són LI perquè, per $t=0$ tenim $\{ \vec{v}_{11}, \dots, \vec{v}_{kr_k} \}$ que són base de $\mathbb{R}^n$

* Que passa amb les arrels complexes:

<u>Prop:</u> 1) Si $\vec{X} = \vec{X_1} + i\vec{X_2}$ és solució complexa del sistema $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ són solucions reals.

2) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ és VAP d'$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ amb VEP $\vec{v}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\bar{\lambda}$ és VAP d'A amb vep $\bar{\vec{v}}$.

<u>Dem:</u>

1) $\vec{X}' = \vec{X}_1' + \vec{X}_2' \cdot i$

$$A\vec{X} = A(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2) = A\vec{X}_1 + iA\vec{X}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{X}' = A\vec{X} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{X}_1' = A\vec{X}_1 \\ \vec{X}_2' = A\vec{X}_2 \end{cases}$$

2) $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \overline{A\vec{v}} = \overline{\lambda\vec{v}} \Rightarrow \bar{A}\bar{\vec{v}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{v}} \Rightarrow A\bar{\vec{v}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{v}}$

Sigui doncs $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ VAP d'A amb VEP $\vec{v} = \vec{v_1} + i\vec{v_2}$

$$e^{\lambda t}\cdot\vec{v} = e^{(\lambda_1 + i\lambda_2)t}(\vec{v_1} + i\vec{v_2}) = \dots =$$

$$= \underbrace{e^{\lambda_1 t}(\vec{v_1}\cos\lambda_2 t - \vec{v_2}\sin\lambda_2 t)}_{\text{Solució real}} + i\underbrace{e^{\lambda_1 t}(\vec{v_1}\sin\lambda_2 t + \vec{v_2}\cos\lambda_2 t)}_{\text{Solució real}}$$

* Per tant en el SF canviem $\{e^{\lambda t}\vec{v}, e^{\bar{\lambda}t}\cdot\bar{\vec{v}}\}$ per les dues solucions reals $\{e^{\lambda_1 t}\vec{w_1}, e^{\lambda_1 t}\vec{w_2}\}$

* Que passa si A no diagonalitza $\Rightarrow$ Cas general

Prop: Sigui $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_n)^{r_n}$ $\quad \sum_i r_i = n$

Característic de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Aleshores:

1) $\dim \operatorname{Ker} (A - \lambda_i \mathbb{I})^{r_i} = r_i$

2) $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} (A - \lambda_i \mathbb{I})^{r_i}$

Prop:

Sigui λ arrel de multiplicitat r del pol. característic d'A, i sigui $\operatorname{Ker} (A - \lambda_i \mathbb{I})^r = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} = r$

Aleshores $\forall i \in (1, \dots, r)$

1) $(A - \lambda \mathbb{I})^{k+r} \cdot \vec{v}_i = \vec{0} \quad \forall k \geq 0$

2) $(A - \lambda \mathbb{I})^{r-1} \cdot \vec{v}_i \in \operatorname{Ker} (A - \lambda \mathbb{I})$

3) $e^{At} \cdot \vec{v}_i = e^{\lambda t} \left[\sum_0^{r-1} \frac{t^n}{n!} (A - \lambda \mathbb{I})^n \cdot \vec{v}_i \right]$

4) $e^{At} \cdot \vec{v}_i$ és solució del sistema $X' = AX$

5) $e^{\lambda t} (A - \lambda \mathbb{I})^{r-1} \cdot \vec{v}_i$ és solució del sistema $X' = AX$

Dem 3:

$$e^{At}\cdot\vec{v_i} = e^{\lambda t}\cdot e^{(A-\lambda \mathbb{I})t}\cdot\vec{v_i} = e^{\lambda t}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{t^n(A-\lambda\mathbb{I})^n}{n!}\vec{v_i}\right]$$

Σ es trunca a $r-1$ pk els següents termes s'anulen..

Dem 5:

Notem $\vec{w_i} = (A-\lambda\mathbb{I})^{r-1}\cdot\vec{v_i} \in Ker\,(A-\lambda\mathbb{I})$

$\Downarrow$

$\vec{w_i}$ VEP DE VAP $\lambda \Longrightarrow e^{\lambda t}\cdot\vec{w_i}$ solució del sistema

Obs:

Compte amb apartat 5 anterior. Ha sortit a més d'un exàmen.

Prop:

Siguin $\{\lambda_i\}_{i=1\dots k}$ els VAP's de A amb multiplicitat respectiva $\{r_i\}_{i=1\dots k}$. Siguin $Ker\,(A-\lambda_i\mathbb{I})^{r_i} = \{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_r\}$

Aleshores, un SF de solució de $X' = AX$ ve donat per

$$\left\{ e^{\lambda_i t}\sum_{n=0}^{r_i-1}\frac{t^n(A-\lambda_i\mathbb{I})^n}{n!}\vec{v}_{i_1},\ \dots,\ e^{\lambda_i t}\sum_{n=0}^{r_i-1}\frac{t^n(A-\lambda_i\mathbb{I})^n}{n!}\cdot\vec{v}_{i_n}\right\}$$

Obs:

1) Notant $\Phi(t)$ MF $\Rightarrow e^{At} = \Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(0)$

2) Quan hi hagi VAP's complexes ($\mathbb{C}$), buscarem les solucions reals fent:

$$\underset{\substack{\lambda=\lambda_1+i\lambda_2 \\ \vec{v}=\vec{v}_1+i\vec{v}_2}}{e^{\lambda t}\cdot\vec{v}} = \dots = \underset{\text{real}}{x_1} + \underset{\text{real}}{x_2}\, i$$

EXEMPLES:

1. $\mathbb{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbb{X} = A\mathbb{X}$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-5) \Rightarrow A \text{ diagonalitza}$$

$\underline{\lambda = -1}$

$$A + \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker}(A+\mathbb{I}) = \langle (1,-1) \rangle$$

$$\mathbb{X}_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{1a solució}$$

$\underline{\lambda = 5}$

$$(A - 5\cdot\mathbb{I}) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker}(A - 5\mathbb{I}) = \langle (1,2) \rangle$$

$$\mathbb{X}_2(t) = e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sistema fonamental ⇒ Matriu fonamental

$$SF \ \left\{ e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$MF \longrightarrow \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

<u>Exponencial: e^{At}</u>

$$e^{At} = \Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & 2e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & 2e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

* Solució general:

$$X(t) = \Phi(t)\cdot \vec{c} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & 2e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} \\ -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{5t} \end{bmatrix}$$

1 2

3 $x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}$

$x_2(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{5t}$

* Calcul de e^{At} per canvi de base:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = P\cdot e^{Dt}\cdot P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$X' = AX \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \qquad \lambda = 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda = \frac{+2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \begin{cases} \lambda = 1-i \\ \lambda = 1+i \end{cases}$$

$\lambda = 1$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A - I) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$X_1(t) = e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1+i$

$$(A - (1+i)\mathbb{I}) = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker}(A-(i+1)\mathbb{I}) = \langle (0, i, 1) \rangle$$

$$\vec{X}(t) = e^{(1+i)t}\begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = e^{t}\cdot e^{it}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\vec{v}_1 \\ \cap \\ \mathbb{R}}} + i\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\vec{v}_2 \\ \cap \\ \mathbb{R}}}\right) =$$

$$= e^{t}(\cos t + i\sin t)(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) = \underbrace{e^{t}(\cos t\cdot\vec{v}_1 - \vec{v}_2\sin t)}_{X_3} + \underbrace{ie^{t}(\cos t\,\vec{v}_2 + \vec{v}_1\sin t)}_{X_2}$$

$$X_3(t) = e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \qquad X_2(t) = e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

*Matriz Fonamental (MF)

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t}\cos t & -e^{t}\sin t \\ 0 & e^{t}\sin t & e^{t}\cos t \end{bmatrix} = e^{t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

* e^{At}:

$$e^{At} = \Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(0) = e^{t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = e^{t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

* Condició inicial:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\cdot X(t_0) \underset{\substack{\uparrow \\ t_0=0 \\ X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}{=} e^{At}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ \cos t - \sin t \\ \sin t + \cos t \end{bmatrix}$$

Alternativa:

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \vec{c}$$

$$X(0) = \Phi(0) \cdot \vec{c} = X_0 \iff \left.\begin{array}{r} I \cdot \vec{c} = X_0 \\ \vec{c} = X_0 \end{array}\right\} \boxed{X(t) = \Phi(t) \cdot X_0}$$

Exemple:

$$X' = AX \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = -(\lambda-2)^3$$

$\lambda = 2$

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} f(A - 2I) = \langle (0,0,1), (1,2,0) \rangle$$

$\dim \operatorname{Ker} = 2$

$\hookrightarrow A$ no diagonalitza

$$\operatorname{Ker}(A - 2I)^3 = \mathbb{R}^3 = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$$

$$\mathbb{R}^n = \oplus \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i}$$

$$3 = \operatorname{Ker}(A - 2I)^3$$

$$SF = \left\{ e^{2t} \sum_{n=0}^{2} \frac{t^n}{n!} (A - 2I)^n \cdot \vec{e_1},\ e^{2t} \sum_{n=0}^{2} \frac{t^n}{n!} (A - 2I)^n \cdot \vec{e_2},\ e^{2t} \sum_{n=0}^{2} \frac{t^n}{n!} (A - 2I)^n \vec{e_3} \right\}$$

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A - 2I) \cdot \vec{e_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2I)\, \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2I)^2 \vec{e_1} = (A - 2I)^2 \vec{e_2} = (A - 2I)^3 \vec{e_3} = \vec{0}$$

$$(A - 2I) \cdot \vec{e_3} = \vec{0}$$

$$SF = \Big\{ e^{2t}\left[\mathbb{I}\vec{e_1} + t(A-2\mathbb{I})\vec{e_1} + \frac{t^2}{2}(A-2\mathbb{I})^2 \cdot \vec{e_1} \right],$$

$$e^{2t}\left[\mathbb{I}\vec{e_2} + t(A-2\mathbb{I})\vec{e_2} + \frac{t^2}{2}(A-2\mathbb{I})^2 \vec{e_2} \right],$$

$$e^{2t}\left[\mathbb{I}\vec{e_3} + t(A-2\mathbb{I})\vec{e_3} + \frac{t^2}{2}(A-2\mathbb{I})^2 \vec{e_3} \right] \Big\} =$$

$$= \left\{ e^{2t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \right), e^{2t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right), e^{2t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$\Phi(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1-2t & t & 0 \\ -4t & 1+2t & 0 \\ -2t & t & 1 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \vec{C}.$$

TEST 14-01-03

* $\boxed{11}$ Si $e^{t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \rightarrow$ és solució de $X' = AX$

Llavors tb és solució:

a) $e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $e^{2t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

$e^{\lambda t}(A-\lambda\mathbb{I})^{n-1} \cdot \vec{v} \Rightarrow$ N'és solució

TORNANT AL ÚLTIM PROBLEMA: 30-10-03

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2 \text{ VAP } m = 3$$

Agafem $\vec{v}_0 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ solució? $\qquad e^{\lambda t}(A - \lambda \mathbb{I})^{r-1} \cdot \vec{v} \to$ solució

$$\vec{X}'(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A \cdot \vec{X}(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$ SÍ, és solució

En el sistema fonamental, els últims vectors són del ker.
↳ de cada component

TEST 27-06-03

* Sigui: $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + te^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$ una solució de $\vec{X}'(t) = A\vec{X}$

És fals que:

a) A es const. i $\det A = 0$ → $\det(A - 2\mathbb{I}) = 0$ (VAP's tret de solució)
$\det(A - 0\mathbb{I}) = \det(A) = 0$

b) $e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$ solució

c) $e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ solució

Constant pq la solució és d'aquesta forma.

d) A és constant i 2 es VAP doble

PROBLEMES:

1

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/t^2 & 2/t \end{pmatrix}$$

a/

1) $\Phi' = A \cdot \Phi$?

2) $\det \Phi \neq 0$?

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$$

1/ $\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot \Phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Es compleix:

2/ $\det \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} = -t^2$ Per $t=0$ no és MF, però a $t=0$ no existeix la matriu A.

b/

$X = A(t) \cdot X + b(t)$ $\quad X(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad b(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ t^2 \end{pmatrix}$

$$X_G(t) = \Phi(t)\vec{c} + \vec{X}_p$$

$$X_p(t) = \Phi(t) \cdot \vec{c}(t)$$

Sistema: $X' = A(t)X + b(t)$

$X_p' = \Phi' \cdot \vec{c} + \Phi \cdot \vec{c}\,' \Rightarrow \Phi' \cdot \vec{c} + \Phi \cdot \vec{c}\,' = A \cdot \Phi \cdot \vec{c} + B(t)$ $\qquad \Phi' = A\Phi$

$$\Downarrow$$

$$\Phi \vec{c}\,' = B(t)$$

~~$\vec{c}\,' = B(t)$~~ $\boxed{\vec{c}\,' = \Phi^{-1} \cdot B(t)}$

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{t}\begin{bmatrix} -\frac{1}{t} & 1 \\ 2 & -t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^4 \\ t^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{t}\begin{bmatrix} -t^3 + t^2 \\ 2t^4 - t^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1' = -t^2 + t \\ c_2' = 2t^3 - t^2 \end{matrix}$$

$$\vec{c}_1(t) = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \qquad \vec{c}_2(t) = \frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{3}$$

$$X_G(t) = \Phi(t)\cdot\vec{c} + \Phi(t)\cdot\begin{bmatrix} -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{3} \end{bmatrix}$$

CI:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \Phi(2)\cdot\vec{c} + \Phi(2)\begin{pmatrix} \overbrace{-\frac{8}{3} + 2}^{-2/3} \\ \underbrace{8 - \frac{8}{3}}_{16/3} \end{pmatrix} = \Phi(2)\cdot\vec{c} + \Phi(2)\cdot\begin{bmatrix} -2/3 \\ 16/3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \Phi^{-1}(2)\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/3 \\ 16/3 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{t^5}{6} + \frac{t^4}{6} + \frac{29}{12}t^2 - \frac{25}{3} \\ -\frac{t^4}{6} + \frac{2t^3}{3} + \frac{29}{6}t - \frac{25}{3} \end{bmatrix}$$

2

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= x_1\cdot\sin t - x_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad x_1(t) = c_1\cdot e^{-t}$$

$$x_2' = c_1 e^{-t}\cdot\sin t - x_2$$

$$x_2' + x_2 = c_1\cdot e^{-t}\cdot\sin t$$

$$\Downarrow$$

$$x_2(t) = c_2 e^{-t} - c_1\cdot\cos t\cdot e^{-t}$$

Matriu fonamental:

$$\bar{\Phi}(t) = e^{-t}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\cos t & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow\; c_1 & \quad\uparrow\; c_2 \end{array} \end{array} \qquad \bar{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq I$$

$$\Phi(t) = \bar{\Phi}(t)\cdot\bar{\Phi}^{-1}(0)$$

↓ Look

$$\Phi(0) = \bar{\Phi}(0)\cdot\bar{\Phi}^{-1}(0) = I$$

$$\Phi(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\cos t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\cos t & 1 \end{bmatrix}$$

b) $X(0) = (2,-2)$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \underset{\substack{\| \\ I}}{\Phi(0)} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\cos t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\cos t \end{bmatrix}}}$$

3

$$X_G = \langle \ker L \rangle + X_p$$

$$X_1 = \vec{u}_3 - \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \qquad X_2 = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -e^t \cdot \cos t \\ e^t \cdot \sin t \end{bmatrix}$$

$$\det(X_1 \cdot X_2) = e^t \begin{vmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & +\sin t \end{vmatrix} = e^t \neq 0 \ \forall t \Rightarrow LI$$

$$X_G(t) = \begin{bmatrix} \sin t & -e^t \cos t \\ \cos t & e^t \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\begin{matrix} c_1 = 3 \\ c_2 = 1 \end{matrix}}$$