MATEMÀTICA DISCRETA - FIB 18-11-2008
Segon examen Grup 10

Justifiqueu les respostes

1. ⟨5 punts⟩ Tots els apartats valen el mateix.

(a) Calculeu quantes cistelles diferents de 10 peces de fruita es poden fer si es pot triar entre albercocs, cireres, nespres i préssecs, i com a mínim ha d'haver una peça de cada.

(b) Sigui n un enter positiu. Demostreu que $\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n\\0\le i,j,k\le n}} \binom{n}{i,j,k} = 3^n$.

(c) Sigui $n \geq 3$ un enter. Calculeu en funció de n el nombre de Stirling $\left\{ {n \atop n-2} \right\}$.

(d) Calculeu la funció generadora ordinària de $(3^{\lfloor n/2 \rfloor})_{n\geq 0}$.

(e) Doneu la funció generadora ordinària de les particions de n tals que les parts senars apareixen com a molt 2 cops.

(f) Doneu la funció generadora exponencial de la successió $(3^{n+2})_{n\geq 0}$.

2. ⟨2 punts⟩ Es tenen 4 llibres iguals d'anglès, 3 de biologia iguals i 3 de ciències econòmiques iguals. Calculeu de quantes maneres es poden col.locar tots aquests llibres en un prestatge de forma que

(a) hagin 3 o 4 llibres d'anglès junts;

(b) no hagi més de 2 llibres d'anglès junts, ni més de 2 de biologia junts ni més de 2 de ciències junts.

3. ⟨2 punts⟩ Doneu la solució general de l'equació recurrent

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n + (n+2)3^n, \forall n \geq 0.$$

Solució:

1.

(a) Calculeu quantes cistelles diferents de 10 peces de fruita es poden fer si es pot triar entre albercocs, cireres, nespres i préssecs, i com a mínim ha d'haver una peça de cada.

Solució: Si les cistelles han de contenir una peça de cada tipus de fruita, n'hi ha prou en comptar de quantes maneres podem triar les 6 peces restants. Hem de sel.leccionar 6 elements del conjunt de {albercocs, cireres, nespres,préssecs} amb repetició i sense importar l'ordre, hi ha $CR(4,6) = \binom{6+4-1}{6} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = 84$ maneres de fer-ho.

(b) Sigui n un enter positiu. Demostreu que $\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n\\ 0\le i,j,k\le n}} \binom{n}{i,j,k} = 3^n$.

Solució: El teorema del binomi generalitzat assegura que

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{i+j+k=n\\ 0\le i,j,k\le n}} \binom{n}{i,j,k} x^i y^j z^k.$$

Es pren $x = y = z = 1$ i s'obté el que ens demanen.
Una altra manera. Considerem el conjunt P_n de les paraules de longitud n en l'alfabet $\{a,b,c\}$, i sigui $U_{i,j,k}$ el subconjunt de P_n que conté les paraules amb i a's, j b's i k c's, $0 \le i,j,k \le n$. Aleshores, es té la partició

$$P_n = \bigcup_{0\le i,j,k\le n} U_{i,j,k}.$$

Atès que $|U_{i,j,k}| = \binom{n}{i,j,k}$ i que la reunió és disjunta, $3^n = |P_n| = \displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n\\ 0\le i,j,k\le n}} \binom{n}{i,j,k}$.

(c) Sigui $n \ge 3$ un enter. Calculeu en funció de n el nombre de Stirling $\left\{ {n \atop n-2} \right\}$.

Solució: $\left\{ {n \atop n-2} \right\}$ representa el nombre de particions en $n-2$ parts d'un n-conjunt. Atès que les parts són no buides, cada part ha de tenir almenys un element i, per tant, queden dos elements, els quals
(1) poden anar junts a una part: tindríem una partició amb una part de cardinal 3 i la resta de parts de cardinal 1; o
(2) poden anar a parts diferents: hi haurien dues parts de cardinal 2 i la resta de cardinal 1.
Així,

$$\begin{aligned} \left\{ {n \atop n-2} \right\} &= \sharp\{\text{particions tipus (1)}\} + \sharp\{\text{particions tipus (2)}\} \\ &= \tbinom{n}{3} + \tbinom{n}{2}\tbinom{n-2}{2} = n(n-1)(n-2)(3n-7)/12. \end{aligned}$$

(d) Calculeu la funció generadora ordinària (fgo) de $(3^{\lfloor n/2 \rfloor})_{n\ge 0}$.

Solució: Tenim que $(3^{\lfloor n/2 \rfloor})_{n\geq 0} = (1,1,3,3,3^2,3^2,\dots)$, aleshores

$$(1,3,3^2,3^3,\dots) \overset{\text{fgo}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-3x}$$

$$(1) \qquad (1,0,3,0,3^2,0,3^3,\dots) \overset{\text{fgo}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-3x^2}$$

$$(2) \qquad (0,1,0,3,0,3^2,0,\dots) \overset{\text{fgo}}{\longleftrightarrow} \frac{x}{1-3x^2}$$

La successió de l'enunciat és suma de les successions (1) i (2), per tant, la seva fgo és la suma de les fgo d'aquestes: $\dfrac{1+x}{1-3x^2}$.

(e) Doneu la funció generadora ordinària de les particions de n tals que les parts senars apareixen com a molt 2 cops.

Solució:

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}(n|\text{ parts senars apareixen com a molt 2 cops}) \\ &= \sharp\{(k_1,k_2,\dots,k_n) | n = 1k_1 + \dots + nk_n,\ 0 \leq k_i \text{ si } i \text{ parell },0 \leq k_i \leq 2 \text{ si } i \text{ senar } \} \\ &= \text{coeficient de } x^n \text{ de } (1+x+x^2)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8+\dots)\dots \end{aligned}$$

Aleshores, la funció generadora ordinària associada és $\displaystyle\prod_{i\geq 1} \frac{1+x^{2i-1}+x^{2(2i-1)}}{1-x^{2i}}$.

(f) Doneu la funció generadora exponencial de la successió $(3^{n+2})_{n\geq 0}$.

Solució: La funció generadora exponencial és:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{3^{n+2}}{n!} x^n = 3^2 \sum_{n\geq 0} \frac{(3x)^n}{n!} = 9\mathrm{e}^{3x}$$

2. Es tenen 4 llibres iguals d'anglès, 3 de biologia iguals i 3 de ciències econòmiques iguals. Calculeu de quantes maneres es poden col.locar tots aquests llibres en un prestatge de forma que

(a) hagin 3 o 4 llibres d'anglès junts;

(b) no hagi més de 2 llibres d'anglès junts, ni més de 2 de biologia junts ni més de 2 de ciències junts.

Solució: Al llarg de l'exercici representarem amb una a els llibres d'anglès, amb una b els de biologia i amb una c els de ciències econòmiques. El símbol $\boxed{xx \overset{t)}{\dots} x}$ significa t llibres de x junts.

(a) Siguin A_3 i A_4 els conjunts de les maneres de col.locar els llibres al prestatge de forma que hagin exactament 3 i 4 llibres d'anglès junts, respectivament. Hem de calcular $|A_3 \cup A_4| = |A_3| + |A_4|$, ja que són conjunts disjunts.

El conjunt A_3 el formen les permutacions de $\boxed{aaa}, a, b, b, b, c, c, c$, de manera que $\boxed{aaa}$ i a no poden està junts. Així, ordenem primer les b's i les c's i tindrem 7 llocs dels quals en triarem 2 on poder col.locar $\boxed{aaa}$ i a. Per tant $|A_3| = \binom{6}{3,3} \cdot 7 \cdot 6 = 840$.

El conjunt A_4 el formen les permutacions dels elements $\boxed{aaaa}, b, b, b, c, c, c$, per tant $|A_4| = \binom{7}{1,3,3} = \frac{7!}{1!3!3!} = 140$. Aleshores, $|A_3 \cup A_4| = 980$.

(b) Considerem:

$$\begin{aligned}
X &= \{\text{permutacions de } a,a,a,a,b,b,b,c,c,c\} \\
N &= \{\text{permutacions de } X \text{ sense } \boxed{aaaa}, \boxed{aaa}, \boxed{bbb} \text{ ni } \boxed{ccc}\} \\
A &= \{\text{permutacions de } X \text{ amb } \boxed{aaaa} \text{ o } \boxed{aaa}\} \\
B &= \{\text{permutacions de } X \text{ amb } \boxed{bbb}\} \\
C &= \{\text{permutacions de } X \text{ amb } \boxed{ccc}\}
\end{aligned}$$

Aleshores, $N = X - A \cup B \cup C$ i $|N| = |X| - |A \cup B \cup C| = \binom{10}{4,3,3} - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$.

Càlcul de $\alpha_1 = |A| + |B| + |C|$:
– Usant l'apartat anterior, tenim que $A = A_3 \cup A_4$.
– Observem que $|B| = |C|$. El cardinal de B és el nombre de permutacions de $a,a,a,a,\boxed{bbb},c,c,c$, per tant $|B| = \binom{8}{4,1,3} = 280$.

Càlcul de $\alpha_2 = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$:
– Tenim que $A \cap B = (A_3 \cup A_4) \cap B = (A_3 \cap B) \cup (A_4 \cap B)$, que és una reunió disjunta. El cardinal de $A_3 \cap B$ és el nombre de permutacions de $\boxed{aaa},a,\boxed{bbb},c,c,c$ tals que $\boxed{aaa}$ i a no estiguin junts. Procedint com a l'apartat a, $|A_3 \cap B| = \binom{4}{1,3} \cdot 5 \cdot 4 = 80$. El cardinal de $A_4 \cap B$ és el nombre de permutacions de $\boxed{aaaa},\boxed{bbb},c,c,c$, per tant, $|A_4 \cap B| = \binom{5}{1,1,3} = 20$.
– Observem que $|A \cap C| = |A \cap B| = 80 + 20 = 100$.
– Atès que $|B \cap C|$ és el nombre de permutacions de $a,a,a,a,\boxed{bbb},\boxed{ccc}$, es té $|B \cap C| = \binom{6}{4,1,1} = 30$.

Càlcul de $\alpha_3 = |A \cap B \cap C|$:
– Anàlogament al cas anterior, es té $A \cap B \cap C = (A_3 \cap B \cap C) \cup (A_4 \cap B \cap C)$, una reunió disjunta.
El conjunt $A_3 \cap B \cap C$ és el de les permutacions de $\boxed{aaa},a,\boxed{bbb},\boxed{ccc}$, tals que $\boxed{aaa}$ i a no estiguin junts. Així, $|A_3 \cap B \cap C| = 2! \cdot 3 \cdot 2 = 12$.
El conjunt $A_4 \cap B \cap C$ és el de les permutacions de $\boxed{aaaa},\boxed{bbb},\boxed{ccc}$, per tant $|A_4 \cap B \cap C| = 3!$.

Aleshores:

$$|N| = |X| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 4200 - (980 + 2 * 280) + (2 * 100 + 30) - 18 = 2872.$$

3. Doneu la solució general de l'equació recurrent

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n + (n+2)3^n, \forall n \geq 0.$$

Solució: Es tracta d'una recurrència lineal no homogènia amb coeficients constants. Resolem-la:
1) $f(n) = (n+2)3^n$. La f.g.o. associada és $F(x) = \frac{Q(n)}{(1-3x)^2}$, on $Q(n)$ és un polinomi de, com a molt grau, 1.
2) $D(x) = 1 - 2x - 3x^2$, mitjançant el polinomi auxiliar $C(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, tenim que $D(x) = (1+x)(1-3x)$.
3) La f.g.o. associada a $(a_n)_{n \geq 0}$ és

$$A(x) = \frac{P_1(x) + x^2 F(x)}{D(x)} = \frac{P_3(x)}{(1+x)(1-3x)^3}$$

amb $P_i(x)$ polinomis de grau com a molt i, $i = 1,3$.
4) La solució general és $a_n = \alpha(-1)^n + (\beta + \gamma n + \delta n^2)3^n$, per a tot $n \geq 0$, on $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ són constants a determinar segons el valors inicials de la successió.