

1. Dos jugadors, A i B tenen una moneda cadascun. La moneda del jugador A té probabilitat p_1 de treure cara mentres que per la del jugador B aquesta probabilitat val p_2 . Els jugadors fan un joc consistent en tirar alternativament la seva moneda començant per A . Guanya el primer que treu cara.

Quina relació ha d'haber entre p_1 i p_2 per tal que el joc sigui just?

2. En un concurs s'encen una bombeta en un instant aleatori X exponencial de valor mitjà 1. El concursant fa una aposta prèvia indicant l'instant β que ell creu que s'encendrà la bombeta. Calculeu:

- (a) La probabilitat que l'aposta difereixi de X en menys d'una unitat.
- (b) El millor valor de la constant β (a priori) si el premi és proporcional a $e^{-|X-\beta|}$.

3. X és una variable aleatòria contínua amb $\Omega_X = [0, \infty)$ i $f_X(x) = 1/(x+1)^2, x > 0$. Definim una nova variable $Y = g(X)$ on

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ x - 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calculeu i dibuixeu les funcions de distribució de X i de Y .

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES!!

Puntuació: 3, 4, 3

1. Dos jugadors, A i B tenen una moneda cadascun. La moneda del jugador A té probabilitat p_1 de treure cara mentres que per la del jugador B aquesta probabilitat val p_2 . Els jugadors fan un joc consistent en tirar alternativament la seva moneda començant per A . Guanya el primer que treu cara.

Quina relació ha d'haber entre p_1 i p_2 per tal que el joc sigui just?

Resolució:

Si A és l'esdeveniment "guanya A " i B l'esdeveniment "guanya B ". El joc serà just si $P(A) = P(B)$. Com $P(A) + P(B) = 1$, cal que $P(A) = 1/2$. Per guanyar A , hem de tenir que A treu cara la primera tirada o A treu creu, B treu creu i A treu cara, o A treu creu, B treu creu, A treu creu, B treu creu i A treu cara, etc. Així, si $q_i = 1 - p_i$ és la probabilitat de treure creu per cada moneda,

$$\begin{aligned} P(A) &= p_1 + q_1 q_2 p_1 + (q_1 q_2)^2 p_1 + (q_1 q_2)^3 p_1 + \cdots = p_1 \sum_{k=0}^{\infty} (q_1 q_2)^k = \frac{p_1}{1 - q_1 q_2} \\ &= \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \end{aligned}$$

La condició $P(A) = 1/2$ dona lloc a

$$p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}.$$

Això implica la condició adicional $p_1/(1-p_1) \leq 1$ d'on també s'ha de verificar $p_1 \leq 1/2$.

2. En un concurs s'encen una bombeta en un instant aleatori X exponencial de valor mitjà 1. El concursant fa una aposta prèvia indicant l'instant β que ell creu que s'encendrà la bombeta. Calculeu:

- (a) La probabilitat que l'aposta difereixi de X en menys d'una unitat.
- (b) El millor valor de la constant β (a priori) si el premi és proporcional a $e^{-|X-\beta|}$.

Resolució:

(a) L'esdeveniment és $|X - \beta| < 1$, és a dir $\beta - 1 < X < \beta + 1$. La densitat de X és $f_X(x) = e^{-x}$. Si $\beta > 1$, l'interval $[\beta - 1, \beta + 1]$ està inclòs en el domini de X i

$$P(\beta - 1 < X < \beta + 1) = \int_{\beta-1}^{\beta+1} e^{-x} dx = e^{-\beta+1} - e^{-\beta-1} = e^{-\beta}(e - e^{-1}).$$

Si $\beta < 1$

$$P(\beta - 1 < X < \beta + 1) = \int_0^{\beta+1} e^{-x} dx = 1 - e^{-\beta-1}.$$

(b) Com el premi és funció de la variable aleatòria X , La millor β és la que maximitza la seva esperança. Per tant calculem

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= E[e^{-|X-\beta|}] = \int_0^\infty e^{-|x-\beta|} e^{-x} dx = \int_0^\beta e^{x-\beta} e^{-x} dx + \int_\beta^\infty e^{-x+\beta} e^{-x} dx \\ &= e^{-\beta} \int_0^\beta dx + e^\beta \int_\beta^\infty e^{-2x} dx = (\beta + \frac{1}{2})e^{-\beta}. \end{aligned}$$

Per trobar el màxim resollem $0 = dQ(\beta)/d\beta = (\frac{1}{2} - \beta)e^{-\beta}$ i acabem veient que el màxim està en $\beta = 1/2$.

3. X és una variable aleatòria contínua amb $\Omega_X = [0, \infty)$ i $f_X(x) = 1/(x+1)^2, x > 0$. Definim una nova variable $Y = g(X)$ on

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ x-1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calculeu i dibuixeu les funcions de distribució de X i de Y .

Resolució:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \int_0^x \frac{dx'}{(x'+1)^2} = \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

De la gràfica de $g(x)$ veiem que $\Omega_Y = [0, \infty)$. $F_Y(y) = 0$ per $y < 0$. En $y = 0$, $F_Y(0) = P(0 < X < 1) = F_X(1) = 1/2$. Així el 0 és un punt de discontinuïtat. Per $y > 0$, $F_Y(y) = P(X < y+1) = F_X(y+1) = (y+1)/(y+2)$. Resumint, Y és una variable mixta amb distribució:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ \frac{y+1}{y+2} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$