

2 Ecuaciones de Maxwell

En el capítulo anterior se trataron las leyes fundamentales que rigen la electrostática y la magnetostática sin tener en cuenta la dependencia o la variación temporal de los campos, las cargas o las corrientes. Para ello se siguió un método inductivo partiendo de la expresión de las fuerzas de Coulomb para el caso eléctrico, y de las fuerzas entre circuitos de corriente dada por Ampère para el magnético. En este segundo capítulo trataremos la situación más general en que las magnitudes consideradas cambian con el tiempo. Para ello, seguiremos un método deductivo, partiendo de cuatro leyes obtenidas de forma experimental, llamadas *ecuaciones de Maxwell*. Estas leyes relacionan entre sí el campo eléctrico, el magnético y las cargas y corrientes que los crean. Dichas ecuaciones fueron obtenidas de forma empírica por distintos científicos a lo largo del siglo XIX, y fue precisamente James Clerk Maxwell (1831-1879) quien, aparte de introducir un nuevo término en una de ellas, se dio cuenta de que con tan sólo estas cuatro leyes se describe por completo el electromagnetismo.

El capítulo se ha dividido en siete secciones con el objetivo de explicar los cimientos de la teoría electromagnética. Empezaremos presentando las ecuaciones de Maxwell en forma integral para el vacío con el objetivo de obtener una visión de la física que encierran. Sin embargo, estas ecuaciones no son útiles para resolver los problemas habituales en electromagnetismo con lo que, en la segunda sección buscaremos una formulación alternativa más útil: la forma diferencial. En la tercera sección, introduciremos las características de los medios materiales en las ecuaciones y en la sección cuarta las condiciones que deben cumplir los campos en la discontinuidad entre distintos medios. Los aspectos energéticos asociados a los campos electromagnéticos serán tratados en la sección quinta. Llegados a este punto, ya se habrá establecido la teoría necesaria para comprender los temas restantes del libro. Las dos últimas secciones constituyen dos casos particulares de especial interés: la obtención de las ecuaciones para los potenciales en régimen estático, así enlazaremos con el capítulo anterior, y las ecuaciones de Maxwell para variaciones armónicas en el tiempo, con lo que introduciremos el marco en el que se desarrolla el resto del libro.

2.1 Ecuaciones de Maxwell en forma integral en el vacío

En esta sección estudiaremos las ecuaciones de Maxwell en forma integral para el vacío. Estas ecuaciones son cuatro y algunas de ellas ya han sido tratadas en el capítulo anterior, sin embargo, como pretendemos que este capítulo sea autoconsistente, volveremos a tratar cada una de ellas, describiendo experimentos que ponen de manifiesto estas leyes. También trataremos otro principio fundamental como es el de conservación de la carga.

2.1.1 Ley de Gauss para el campo eléctrico

Supongamos que tomamos una esfera con una carga Q y la rodeamos con otra esfera conductora hueca, tal como muestra la figura 2.1a. Entonces, en las superficies de la esfera hueca se induce una carga igual a la de la esfera interna, del mismo signo en el exterior y de signo contrario en el interior. Además, la carga inducida no depende de la distancia r entre esferas. Es decir, que hay algo entre las esferas que se mantiene constante y que además es proporcional a la carga. Este algo precisamente es el “número” de líneas de campo eléctrico. Si queremos calcular el “número” total de líneas, las deberemos integrar (sumar) sobre una superficie que rodee la esfera central, es decir, calcular su flujo. Esta es precisamente la ley de Gauss: *el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie*. Matemáticamente la escribiremos:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

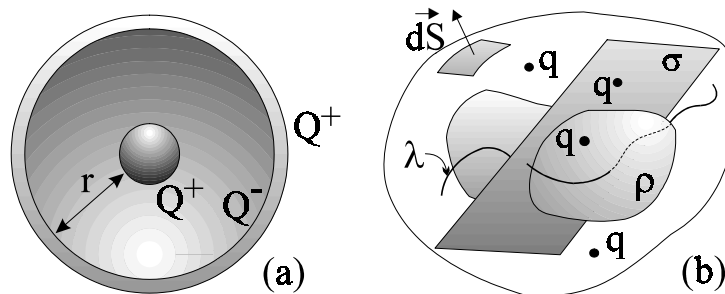


Fig. 2.1 (a) Inducción de cargas sobre superficies conductoras y (b) contribución neta de la carga total sobre la que aplicamos Gauss

¿Qué implica la ley de Gauss? En general, cuando se calcula el flujo sobre una superficie cerrada de cualquier campo vectorial, obtenemos las fuentes de dicho campo, entendiendo como fuentes los puntos donde nacen o mueren las líneas de campo. Aquí,

Gauss está identificando las fuentes del campo eléctrico, es decir las cargas y en definitiva nos está diciendo que en el interior de una superficie nacen o mueren líneas de campo tan sólo si hay cargas. En la sección 1.1.3 hay algunos ejemplos de aplicación de la ley de Gauss.

Consideraciones sobre la ley de Gauss para \vec{E} :

- a) En Q , tal como muestra la figura 2.1b, se ha incluido la contribución de la carga neta total, ya sea en forma de densidades o en forma puntual, encerrada por la superficie S . Por lo tanto, la carga total puede ser escrita como:

$$Q = \int_{V'} \rho(\vec{r}') \cdot dV' + \int_{S'} \sigma(\vec{r}') \cdot dS' + \int_{C'} \lambda(\vec{r}') \cdot dl' + \sum_i q_i$$

Con la prima (\vec{r}', V', \dots) indicamos que integramos sobre las cargas, que además deben estar incluidas dentro de la superficie S elegida. Para un recordatorio sobre las densidades de carga consúltese la sección 1.1.2

- b) ϵ_0 es una constante de proporcionalidad llamada permitividad del vacío de valor $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.
- c) El vector $d\vec{S}$ es perpendicular a la superficie y, por convenio, *en el caso de superficies cerradas, siempre señala hacia afuera del volumen* (Fig. 2.1b)
- d) La ecuación de Gauss es aplicable tanto a campos estáticos como variables en el tiempo. En consecuencia, nos está diciendo que la dependencia temporal del campo eléctrico será del mismo tipo que la de las cargas que lo crean.

2.1.2 Ley de Gauss para el campo magnético

Al igual que el campo eléctrico, ahora nos preguntaremos cuál es el flujo del campo magnético. Pues bien, *el flujo sobre una superficie cerrada del campo magnético siempre debe ser nulo*:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.2)$$

Naturalmente, que el flujo sea nulo no implica que \vec{B} también lo sea. ¿Qué es lo que ocurre? Como hemos dicho anteriormente, si el flujo de un campo da sus fuentes, aquí Gauss implica que no hay fuentes de campo magnético, es decir, no tenemos “cargas” magnéticas o, como también se les conoce, monopolos magnéticos. En consecuencia, al no haber fuentes, las líneas de campo no nacen ni mueren en un punto, con lo que a la fuerza deben ser líneas

de campo cerradas. Entonces, si consideramos una superficie cerrada, o bien las líneas de campo están completamente rodeadas por la superficie, o bien entran en un punto y salen por otro punto diferente, con lo que su flujo será nulo.

Ejemplo 2.1: *Flujo a través de una superficie cerrada del campo eléctrico creado por un dipolo y del campo magnético creado por una espira.*

En la figura 2.2 se han representado las dos configuraciones propuestas y las líneas de campo que crean. En este ejemplo vemos que si calculamos el flujo a través de la superficie de color gris claro el resultado es nulo en ambos casos (entran tantas líneas como salen). A partir de aquí, se podría pensar que los dos campos son campos magnéticos, ya que se cumple la segunda ecuación de Maxwell. Sin embargo, en el primer caso el cálculo del flujo depende de la superficie tomada. Como ejemplo tomaremos la superficie gris oscuro. En el dipolo todas las líneas de campo salen de la superficie y el flujo no es nulo (toma el valor correspondiente a la carga que encierra). En cambio, para el campo magnético esto no ocurre: tomemos la superficie que tomemos las líneas de campo siempre entran en la superficie por un punto y salen por otro distinto, atravesando la región encerrada. Como conclusión, no podemos asegurar si un campo determinado es un campo magnético si no somos capaces de demostrar que su flujo es nulo para cualquier superficie.

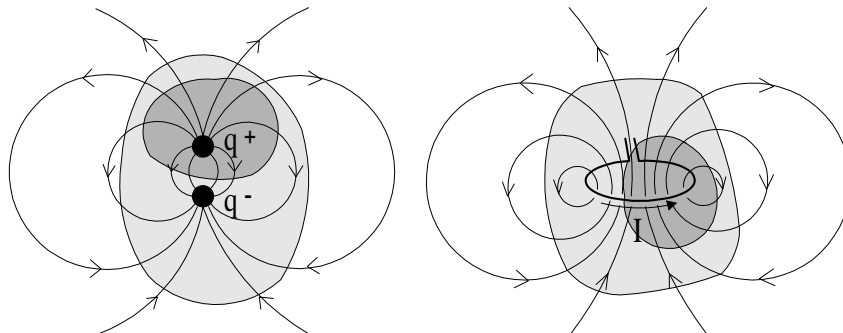


Fig. 2.2 Campos creados por un dipolo eléctrico (izquierda) y por una espira o dipolo magnético (derecha)

2.1.3 Ley de Faraday

Las dos leyes anteriores dan cuenta de la presencia de fuentes de campo del tipo surtidor (cargas positivas) o sumidero (cargas negativas) o la no existencia de éstas (campo magnético). Sin embargo, el campo puede ser creado por otras causas. Las ecuaciones de

Faraday, que tratamos a continuación, y la ecuación de Ampère-Maxwell tratan esta situación.

Supongamos que tenemos un circuito que rodea un imán, el cual crea un campo al que llamamos inducción magnética (\vec{B}), además, en los extremos del circuito conectamos un voltímetro tal como muestra la figura 2.3a. En este experimento observaremos que si el imán permanece en reposo el voltímetro no detecta una diferencia de potencial entre los bornes del circuito. En cambio, si el imán se mueve, el voltímetro detecta una diferencia de potencial, es decir aparece una fuerza electromotriz (*f.e.m.*). La expresión matemática de la *f.e.m.* es:

$$f.e.m. = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

con lo cual aparece un campo eléctrico. ¿Qué es lo que produce la *f.e.m.*? Evidentemente no es tan sólo la existencia del campo magnético creado por el imán, ya que en este caso, aun con el imán en reposo tendríamos *f.e.m.* El efecto tiene que estar relacionado con la variación de \vec{B} en la región cercana al circuito. Por otro lado, se puede ver que cambiando las dimensiones del circuito, el valor de la *f.e.m.* es distinto al anterior. Al cambiar la geometría del circuito, lo que estamos haciendo es cambiar el “número” de líneas de campo que lo atraviesa, es decir, el flujo. Así obtenemos la ley de Faraday que nos dice que *la variación del flujo de campo magnético con el tiempo crea campos eléctricos*, y por lo tanto induce una *f.e.m.* en el circuito considerado. En forma matemática se escribe:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.3)$$

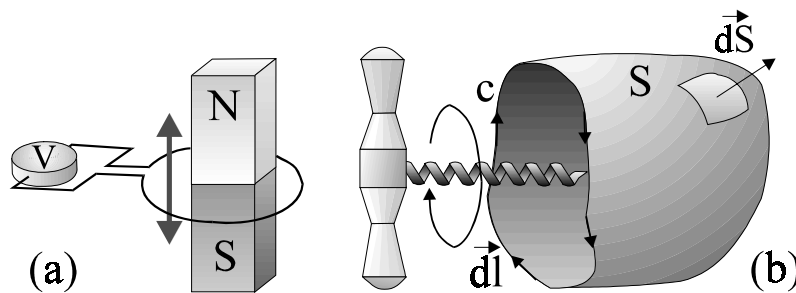


Fig. 2.3 (a) Manifestación de la ley de Faraday y (b) relación entre el sentido de cálculo de la circulación y diferencial de superficie o regla del sacacorchos

Consideraciones sobre la ley de Faraday:

- Tal como muestra la figura 2.3b, la dirección de $d\vec{l}$ y $d\vec{S}$ están relacionadas por la regla del sacacorchos: si giramos el sacacorchos en el sentido de $d\vec{l}$, su sentido de avance indicará el sentido de $d\vec{S}$.
- La superficie S es cualquier superficie abierta con la única condición de que su contorno sea C .
- El significado del signo negativo en el término de la derecha indica que la corriente inducida en el circuito a su vez crea un campo magnético que *se opone a la variación del flujo*, es decir, al cambio de estado (ley de Lenz). Así pues, el campo magnético creado por la corriente inducida irá en la misma dirección que \vec{B} si éste disminuye (derivada temporal negativa) y en la dirección contraria al campo si \vec{B} aumenta (derivada temporal positiva).
- La derivada temporal en ocasiones aparece dentro de la integral de flujo. El hecho de introducirla dentro significa que no consideramos las variaciones temporales del circuito de integración. En algunos ejemplos que analizamos consideramos que dicho circuito varía con el tiempo, con lo que estamos utilizando exactamente la expresión (2.3).

Ejemplo 2.2: Considérese un circuito rectangular como el mostrado en la figura 2.4a situado perpendicularmente a un campo magnético variable en el tiempo de la forma $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \hat{z}$. Determinar la fuerza electromotriz inducida en la espira conductora.

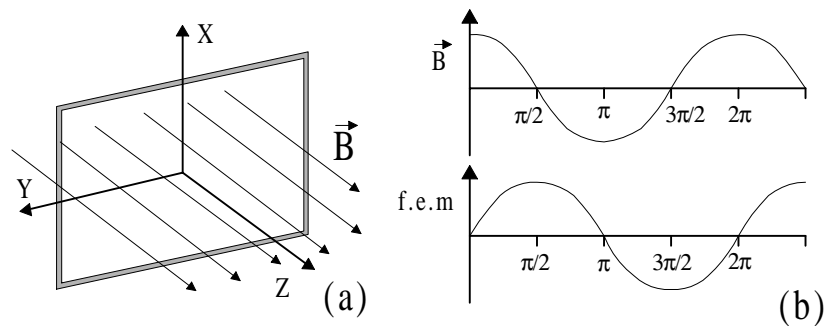


Fig. 2.4 Inducción de fuerza electromotriz sobre una espira

Primero tenemos que determinar el sentido de cálculo de la circulación del campo eléctrico. Tomaremos dicho sentido contrario a las agujas del reloj para así

tener el diferencial de superficie en la dirección del campo magnético (regla del sacacorchos, Fig. 2.3b). Así pues, tal y como hemos determinado los ejes de coordenadas, tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= B_0 \cos \omega t \hat{z} \\ d\vec{S} &= dx dy \hat{z}\end{aligned}$$

Entonces el flujo de campo magnético será:

$$\int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^b \int_0^a B_0 \cos \omega t \cdot dx dy = B_0 ab \cos \omega t$$

y a partir de la ecuación de Faraday encontramos la fuerza electromotriz derivando el flujo:

$$f.e.m. = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = ab B_0 \omega \sin \omega t \quad V$$

Este ejemplo muestra claramente la ley de Lenz. Cuando el campo magnético externo decrece (pendiente negativa del campo en la Fig. 2.4b), la fuerza electromotriz es positiva, es decir, la intensidad de corriente va en el sentido de integración que hemos tomado (figura 2.4b). El resultado, como se verá en la ley de Ampère, es que esta corriente crea un campo magnético que se suma al ya existente: se opone al descenso del campo externo. En cambio, cuando el campo magnético externo aumenta (pendiente positiva), la intensidad cambia de sentido (*f.e.m.* negativa) y crea un campo magnético contrario al campo externo: se opone al aumento del campo externo.

Ejemplo 2.3: *Fuerza electromotriz inducida en una espira que gira en un campo magnético constante.*

La figura 2.5 muestra un esquema de la situación planteada. Aquí la variación de flujo no es debida a la variación temporal del campo. El flujo cambiará debido a que la superficie de cálculo varía de dirección al girar la espira. El diferencial de superficie viene definido por $d\vec{S} = dl dz \hat{n}$ donde dl es paralelo al lado horizontal de la espira, dz al vertical y el vector unitario \hat{n} es perpendicular a la superficie. La dependencia temporal de \hat{n} vendrá dada por la proyección en cada instante de tiempo sobre la base vectorial asociada a los ejes de coordenadas como:

$$\hat{n} = \cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y}$$

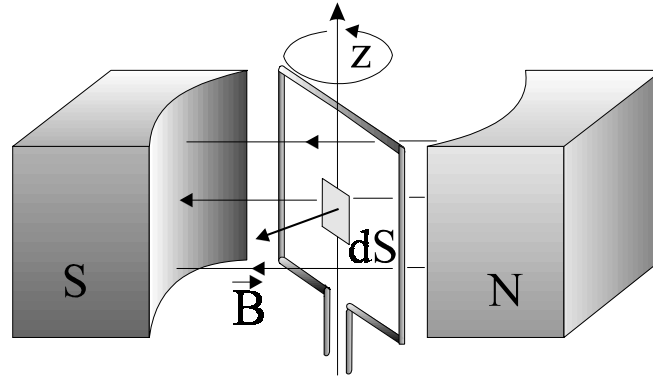


Fig. 2.5 Generador de corriente alterna

Ya estamos en disposición de calcular el flujo de campo magnético

$$\int_0^b \int_0^a B_0 \hat{x} \cdot (\cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y}) dl dz = ab B_0 \cos \omega t$$

Si derivamos con respecto del tiempo obtenemos la fuerza electromotriz:

$$f.e.m. = ab B_0 \omega \sin \omega t \quad V$$

El principio utilizado en este ejemplo para producir una fuerza electromotriz constituye la base de los generadores de corriente alterna.

2.1.4 Ley de Ampère-Maxwell

Supongamos el montaje experimental de la figura 2.6a consistente en un hilo conductor y un imán próximo a éste. Si por el conductor no pasa corriente, no se observa ningún efecto sobre el imán. En cambio, si por el conductor pasa corriente, el imán experimentará una fuerza (se moverá). Al ser el imán un material eléctricamente neutro, la fuerza sólo puede ser de origen magnético. La ley de Ampère justifica este hecho, al afirmar que *las corrientes crean campos magnéticos*, de acuerdo con:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.4)$$

es decir, la circulación del campo magnético sobre un circuito cerrado es proporcional a la intensidad de corriente que atraviesa cualquier superficie que tenga por contorno el circuito.

Consideraciones sobre la ecuación de Ampère:

- Nuevamente, la relación entre $d\vec{l}$ y $d\vec{S}$ viene dada por la regla del sacacorchos (Fig. 2.4b)
- La superficie S es cualquier superficie abierta con la única condición de que su contorno sea C .
- μ_o es una constante de proporcionalidad llamada permeabilidad magnética del vacío de valor $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / m}$
- Aunque en el término de la derecha hemos considerado una densidad de corriente volúmica, consideraremos incluidas todas las contribuciones de corrientes que atraviesen dicha superficie, es decir, intensidades y densidades superficiales (ver la sección 1.3.2), con lo cual el término de la derecha podría escribirse en función de una intensidad total I como:

$$\mu_o I = \mu_o \left(\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_l \vec{J}_s \cdot \hat{\tau} dl + \sum_k I_k \right)$$

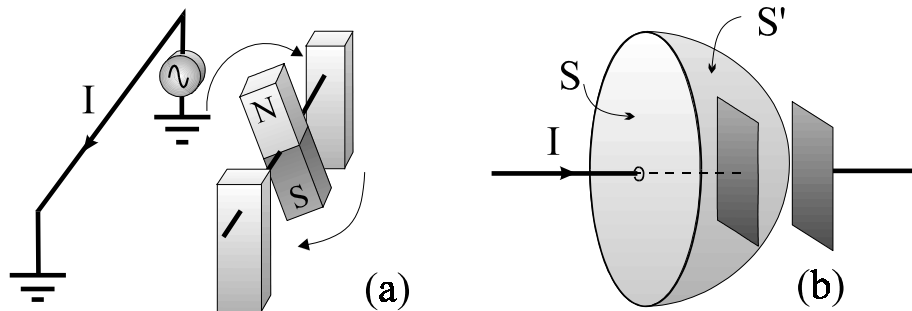


Fig. 2.6 (a) Manifestación del campo magnético creado por una corriente y (b) caso práctico en que la ecuación de Ampère no se cumple al cambiar de superficie

Ahora bien, ¿la ecuación de Ampère es una ley universal? Para responder esta pregunta aplicaremos Ampère en el ejemplo de la figura 2.6b, donde se considera un hilo conductor que llega a las placas de un condensador durante el proceso de carga. Si nos situamos sobre el conductor y elegimos un circuito C y una superficie de cálculo S , la superficie está atravesada por una intensidad y como hemos comentado se cumple:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I$$

En cambio, si tomamos la superficie de cálculo S' que pasa por el condensador, vemos que ésta no está atravesada por ninguna corriente, luego:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Con lo cual, al obtener resultados distintos, no se cumple la ecuación de Ampère.

La solución a esta incongruencia fue dada por Maxwell al darse cuenta de que a la ecuación de Ampère le falta un término. Dicho término debía estar relacionado con la concentración de carga en las placas del condensador y su desplazamiento de un lado al otro del condensador (de la teoría de circuitos sabemos que para que pase corriente por un circuito con condensadores, dicha corriente debe variar con el tiempo, y por lo tanto también las cargas en las placas del condensador). A este nuevo término se le llamó corriente de desplazamiento. Añadiendo el nuevo término, la ahora ley de Ampère-Maxwell viene dada por:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \left(I + \epsilon_o \int_s \frac{\partial E}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right) \quad (2.5)$$

Consideraciones sobre el término de Maxwell:

- a) El nombre de corriente de desplazamiento es una designación histórica. Este término en general no está relacionado con ninguna corriente, aunque en el ejemplo considerado sí lo está.
- b) La introducción de este término fue propuesta por Maxwell tras una deducción teórica a partir del principio de conservación de la carga que trataremos en la siguiente sección, donde se comenta el proceso seguido por el científico.
- c) El término de Maxwell tiene una gran importancia dentro del electromagnetismo ya que predice la existencia de ondas electromagnéticas. Si nos fijamos en las ecuaciones de Faraday y de Ampère-Maxwell vemos que los campos variables en el tiempo, una vez creados por las corrientes y las cargas, pueden sustentarse el uno al otro. Es decir, un campo magnético variable en el tiempo, según Faraday, crea un campo eléctrico, que a su vez también variará en el tiempo y, según Maxwell, éste crea un campo magnético, con lo cual el ciclo generador queda cerrado. De esta manera, los campos pueden subsistir sin la necesidad de cargas ni corrientes, y por lo tanto, pueden propagarse. Este es el principio de la propagación de ondas electromagnéticas, predicho teóricamente por Maxwell y más tarde demostrado experimentalmente por Hertz.

Ejemplo 2.4 Tenemos un condensador plano compuesto de dos discos. Considerando los efectos de bordes, el campo eléctrico en su interior puede ser aproximado por:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \sin \omega t \hat{z} \quad \rho < \rho_0$$

donde ρ_0 es el radio efectivo de los discos. Encontrar el campo magnético entre las placas del condensador.

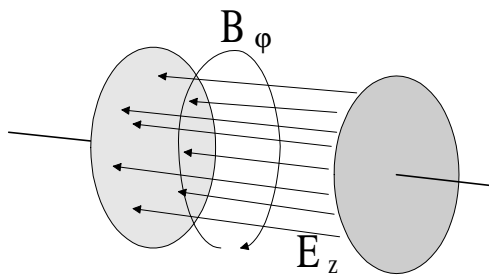


Fig. 2.7 Líneas de campo eléctrico y magnético entre las placas de un condensador

Para resolver este problema utilizaremos la ley de Ampère-Maxwell. La figura 2.7 muestra un esquema del condensador y los campos. Por cuestiones de simetría, supondremos que el campo magnético sólo puede tener componentes en la dirección de la coordenada ϕ . Para encontrar el módulo, calculamos la variación temporal del campo eléctrico

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \omega \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \cos \omega t \hat{z}$$

Y a partir de aquí tendremos que calcular el flujo. Para ello realizaremos la integral en la zona en que la expresión del campo tiene validez tomando como contorno una circunferencia de radio ρ

$$\begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} &= \mu_0 \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\rho E_0 \omega \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \cos \omega t \hat{z} \cdot \rho d\rho d\phi \hat{z} = \\ &= \mu_0 \epsilon_0 2\pi \omega E_0 \left[\frac{\rho^2}{2} - \left(\frac{\rho^4}{4\rho_0^2} \right) \right] \cos \omega t \end{aligned}$$

Este resultado, según Maxwell debe ser igual a la circulación del campo magnético en el contorno de la superficie de integración. Por simetría, el campo magnético en el contorno es constante con lo que la circulación queda:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \hat{\phi} \cdot \rho d\phi \hat{\phi} = 2\pi \rho B$$

donde se ha tomado el sentido de integración siguiendo la regla del sacacorchos. Comparando los dos resultados podemos aislar y encontrar el campo magnético en el volumen interior del condensador como

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \omega E_0 \left[\frac{\rho}{2} - \left(\frac{\rho^3}{4\rho_0^2} \right) \right] \cos \omega t \hat{\phi}$$

2.1.5 Principio de conservación de la carga.

Como se ha comentado, las ecuaciones de Maxwell describen todo el electromagnetismo; sin embargo, existe un principio fundamental anterior a la deducción de las ecuaciones de Maxwell: el principio de conservación de la carga. Este principio dice que *la carga total no se crea ni se destruye y si hay variaciones en una región determinada del espacio es porque la carga abandona dicha región* (hay corrientes). Este principio viene descrito por la llamada *ecuación de continuidad* que, en forma integral se expresa como:

$$-\frac{d}{dt} Q = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.6)$$

Es decir, la variación de carga en el interior de una superficie cerrada es igual a la intensidad de corriente que atraviesa esta superficie (flujo). Este principio está implícito en las ecuaciones de Ampère-Maxwell y de Gauss para el campo eléctrico. Vamos a deducir la ecuación de continuidad, aunque este cálculo tan sólo tiene interés para aquellos estudiantes inquietos que quieran profundizar en el electromagnetismo. En su deducción tenemos que aplicar Ampère-Maxwell para dos superficies distintas S_1 y S_2 pero con el mismo contorno C (ver Fig. 2.8), es decir:

$$\begin{aligned} \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \int_{S_1} \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \int_{S_2} \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (2.7)$$

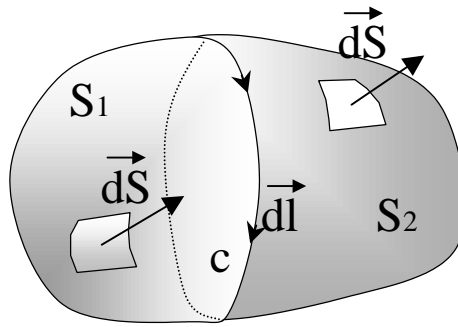


Fig. 2.9 Superficies necesarias en la deducción de la ecuación de continuidad

Es evidente que los dos miembros de la derecha deben de ser iguales (recordemos que no dependen de la superficie) y que los diferenciales de superficie en ambos casos siguen la regla del sacacorchos. En la Fig. 2.8 se observa que ambas superficies encierran un volumen; así, podemos transformar las integrales para una superficie abierta en una integral para una superficie cerrada. Para ello, los diferenciales de superficie deben apuntar hacia fuera con lo que simplemente debemos cambiando el sentido de \vec{dS} para la superficie S_2 y sumar ambas integrales. El resultado es:

$$\oint_s \left(\vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS} = \int_{S1} \left(\vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS} - \int_{S2} \left(\vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS}$$

donde el signo negativo de la integral para S_2 viene de invertir la dirección de \vec{dS} . Sin embargo, de (2.7) sabemos que los dos miembros de la derecha son iguales, con lo que se cumple

$$\oint_s \left(\vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS} = 0 \quad (2.8)$$

Separando este resultado en dos integrales tenemos:

$$\oint_s \vec{J} \cdot \vec{dS} = - \oint_s \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{dS} = - \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_o \oint_s \vec{E} \cdot \vec{dS} = - \frac{\partial}{\partial t} Q \quad (2.9)$$

donde, al aplicar Gauss en la última igualdad, se ha encontrado la ecuación de continuidad.

En esta sección hemos partido de las ecuaciones de Gauss y Ampère-Maxwell para deducir la ecuación de continuidad. El proceso que siguió Maxwell para deducir el término de corriente de desplazamiento fue justamente el contrario al mostrado aquí: a partir de Gauss y la ecuación de continuidad completó la ecuación de Ampère. Además, utilizó la forma diferencial de las ecuaciones de continuidad y de Gauss en la deducción.

2.1.7 Ecuaciones fundamentales del electromagnetismo

Como resumen de la sección, las ecuaciones de Maxwell en el vacío donde se ha considerando todas las cargas y corrientes presentes en la región de cálculo son:

$$\begin{aligned}\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} && \text{Ley de Gauss para } \vec{E} \\ \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 && \text{Ley de Gauss para } \vec{B} \\ \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} && \text{Ley de Faraday} \\ \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_o \left(I + \epsilon_o \int_s \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right) && \text{Ley de Ampère-Maxwell}\end{aligned}$$

Se debería añadir la ecuación de continuidad, aunque ésta ya esté incluida en las ecuaciones de Maxwell:

$$-\frac{d}{dt} Q = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Durante toda la sección hemos hablado de los campos, sus propiedades y relaciones; sin embargo, en ningún momento hemos hablado del efecto que producen los campos sobre las cargas. Este efecto no está incluido en las ecuaciones de Maxwell y viene determinado por la expresión de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)) \quad (2.10)$$

donde \vec{v} es la velocidad de la carga y el signo “ \times ” indica producto vectorial.

2.2 Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial

En la sección anterior hemos tratado las ecuaciones de Maxwell en forma integral. Esta representación de las ecuaciones de Maxwell es útil para obtener una interpretación de

la física que encierran los fenómenos electromagnéticos. Sin embargo, estas ecuaciones sólo pueden ser utilizadas en problemas muy concretos en que la geometría del sistema presenta simetrías que facilitan la integración. Si nos fijamos en los problemas de la sección 2.1, los hemos podido resolver porque presentaban una geometría sencilla y era fácil resolver las integrales que aparecían. Así pues, se hace necesario obtener otras relaciones más potentes y más fácilmente aplicables para cualquier caso, es decir, que no dependan de la geometría. Pero atención, estas relaciones deben conservar la misma información que presentan las ecuaciones ya vistas, el problema sigue siendo el mismo: describir el electromagnetismo. La solución consiste en derivar a partir de la forma integral unas relaciones entre los campos y sus fuentes *para cada punto del espacio*. Como resultado obtenemos las ecuaciones en función de los operadores divergencia y rotacional. Estos son operadores diferenciales siendo ésta la razón por la que las nuevas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones de Maxwell en forma diferencial. Por supuesto, la nueva formulación conserva la misma física que su forma integral, ya que las hemos derivado a partir de éstas, y como *sólo dependen de cada punto del espacio* son independientes de la geometría y, por lo tanto, mucho más útiles. En esta sección vamos a recordar los operadores diferenciales que nos aparecen, insistiendo en su significado físico, para después derivar las ecuaciones en forma diferencial. Para ello utilizaremos el teorema de la divergencia y de Stokes.

2.2.1 Significado de divergencia y rotacional

El teorema de la divergencia es un teorema matemático que se cumple para cualquier campo vectorial. Este teorema relaciona el flujo de un campo sobre una superficie cerrada con la integral sobre el volumen encerrado por la superficie de una magnitud llamada divergencia. Es decir:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{A} \cdot dv \quad (2.11)$$

donde \vec{A} es cualquier campo vectorial. Para interpretar el teorema y el significado de divergencia, la podemos aislar como:

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \quad (2.12)$$

Este resultado muestra que la divergencia es el flujo que atraviesa una superficie cerrada, pero que además, al estar dividido por ΔV , es una densidad de flujo. Pero, ¿qué significado tiene la divergencia? Para contestar esta pregunta debemos partir del concepto de densidad de flujo (Ec. 2.12) y recordar que el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada nos da las fuentes en su interior. De (2.12) se ve que la divergencia se calcula sobre una superficie cada vez más pequeña (hacemos el límite), de manera que al final obtenemos el flujo que surge de un único punto, por lo tanto, la divergencia nos dice *si en un punto*

determinado hay una fuente del campo, o dicho de otra manera, si en este punto nacen o mueren líneas de campo.

La divergencia es un operador diferencial, y para encontrar su expresión en un sistema de coordenadas determinado debemos partir de la ecuación (2.12). De esta manera podemos encontrar la divergencia para coordenadas cartesianas como:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Normalmente, al igual que la definición del gradiente de un campo escalar, la divergencia se escribe en función del operador $\vec{\nabla}$ (nabla) utilizado en análisis vectorial. Este operador en coordenadas cartesianas viene definido por

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

con lo que la divergencia puede definirse a partir del producto escalar entre el operador $\vec{\nabla}$ y el campo vectorial, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) = \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

A partir de este momento, para referirnos a la divergencia de un campo utilizaremos la notación $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ en vez de $\operatorname{div} \vec{A}$.

En ocasiones es conveniente utilizar otro tipo de coordenadas que en general serán curvilíneas, como es el caso de las coordenadas cilíndricas o esféricas. La expresión de la divergencia en esos sistemas de coordenadas puede consultarse en el anexo B.

Ejemplo 2.5: Dado el campo vectorial expresado en coordenadas esféricas

$$\vec{A} = \frac{k}{r^n} \hat{r}$$

comprobar el teorema de la divergencia considerando el volumen entre dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 .

Primero calcularemos el flujo a través de las superficies $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ con lo que necesitamos conocer la expresión del diferencial de superficie, que será:

$$d\vec{S} = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \cdot \hat{n}$$

donde \hat{n} debe ser un vector unitario que señala hacia el exterior del volumen. Como muestra la figura 2.9, la dirección de \hat{n} depende de la superficie tomada

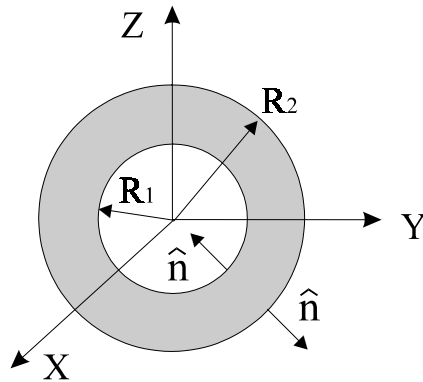


Fig. 2.9

$$R_1 \rightarrow \hat{n} = -\hat{r}$$

$$R_2 \rightarrow \hat{n} = \hat{r}$$

A continuación integramos para cada una de las superficies

$$\begin{aligned} \int_{S_{R1}} \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k}{R_1^n} R_1^2 \hat{r} \cdot (-\hat{r}) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi &= \\ -4\pi \frac{k}{R_1^{n-2}} \end{aligned}$$

$$\int_{S_{R2}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k}{R_2^n} R_2^2 \hat{r} \cdot \hat{r} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi \frac{k}{R_2^{n-2}}$$

con lo cual el flujo queda:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = 4\pi k \left[\frac{1}{R_2^{n-2}} - \frac{1}{R_1^{n-2}} \right]$$

Para comprobar el teorema de la divergencia falta obtener la integral de volumen de la divergencia. Así pues, la divergencia en coordenadas esféricas es:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{k}{r^n} \right) = \frac{1}{r^2} (2-n) \frac{k}{r^{n-1}} = (2-n) \frac{k}{r^{n+1}}$$

e integrando

$$\begin{aligned}\int_v \nabla \cdot \vec{A} dV &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (2-n) \frac{k}{r^{n+1}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 4\pi(2-n)k \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^{n-1}} = \\ &= 4\pi k \left[\frac{1}{R_2^{n-2}} - \frac{1}{R_1^{n-2}} \right]\end{aligned}$$

obtenemos el mismo resultado que en el caso anterior, con lo que se satisface el teorema.

La expresión del campo utilizada en el ejemplo corresponde a campos centrales. En concreto, cuando $n=2$, corresponde a una carga puntual en el origen, y como resultado el flujo total sería nulo, ya que en el volumen entre las dos esferas no hay carga. El campo para $n>2$ corresponde a un modelo simplificado del campo creado por un átomo, en que el campo creado por el núcleo (carga central positiva) es paulatinamente apantallado por la nube electrónica (carga negativa) que lo rodea.

El otro operador que aparece en la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell es el rotacional y, para conocer su significado, debemos utilizar el teorema de Stokes. El teorema de Stokes se cumple para cualquier campo vectorial y nos relaciona la circulación a lo largo de un circuito cerrado con un flujo a través de cualquier superficie abierta que tenga como contorno dicho circuito. En concreto, la circulación del campo vectorial con el flujo de su rotacional. Matemáticamente se escribe:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (2.13)$$

donde el sentido de giro de la circulación y el del diferencial de superficie están relacionados por la regla del sacacorchos. Para obtener el significado del rotacional, lo expresaremos en función de la circulación. Entonces el rotacional en la dirección perpendicular a la superficie ΔS viene dado por:

$$\text{rot } \vec{A} \big|_{\hat{n}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \quad (2.14)$$

Aquí nos encontramos con una densidad de circulación (está dividido por ΔS). Al hacer el límite, el resultado será la densidad superficial de circulación alrededor de un punto, o lo que es lo mismo, la cantidad de campo que gira a su alrededor. Un ejemplo del significado de rotacional lo tenemos en dinámica de fluidos. Si consideramos un fluido en un canal, la velocidad en el centro del canal será máxima, mientras que si nos acercamos a las paredes disminuirá debido al rozamiento y la viscosidad del fluido (los vectores de velocidad son más pequeños en la figura 2.10a). Para ver que efecto tiene esta no uniformidad del

campo, introduciremos una pequeña rueda con aspas en el canal y la colocaremos en distintas posiciones. Si la colocamos en el centro, la rueda no girará ya que la velocidad a ambos lados de la rueda es la misma y el momento de las fuerzas resultante es nulo. En cambio, en cualquier otro punto excepto en el centro, la velocidad en un lado de la rueda será mayor que en el otro, con lo cual el momento de las fuerzas no es nulo y la rueda girará. Entonces diremos que el campo de velocidades tiene un rotacional no nulo fuera del centro, cuyo valor dependerá de lo rápido que gire la rueda. El ejemplo también ilustra cuál es la causa de la existencia del rotacional: la no uniformidad del campo en alguna de las direcciones transversales a éste. Si el campo tuviera un valor constante o tan sólo variable en la dirección del vector, no habría desigualdad entre las fuerzas a ambos lados de la rueda y ésta no giraría. Así pues, *el rotacional nos detecta la no uniformidad del campo*.

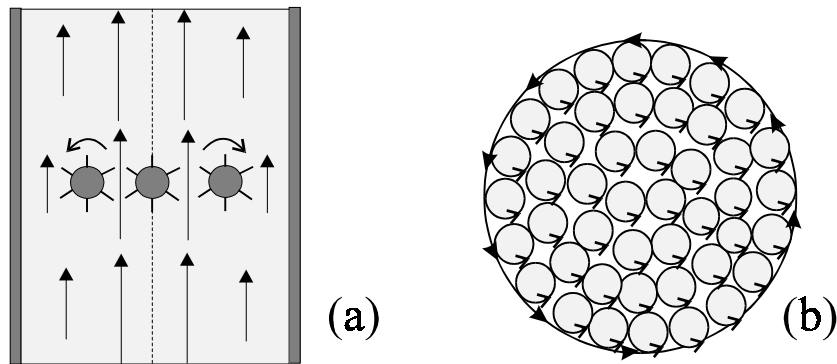


Figura 2.10 (a) Significado de rotación en dinámica de fluidos y (b) resultado de sumar el rotacional

Volvamos al concepto de densidad superficial de circulación. En la figura 2.10b vemos de forma esquemática cómo la suma de pequeñas circulaciones da la circulación en el contorno, ya que en el interior, la circulación alrededor de dos puntos consecutivos se contrarresta en la zona de contacto. Esto es precisamente lo que nos dice el teorema de Stokes: si integramos ésta sobre la superficie, el resultado final es la circulación en el contorno.

Nuevamente si queremos encontrar una expresión para el rotacional debemos partir de la ecuación (2.14). Entonces el rotacional es:

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

En coordenadas cartesianas, este resultado del rotacional se puede escribir como el producto vectorial del operador nabla por el campo

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

ecuación en la que aparece la nomenclatura que utilizaremos para definir el operador rotacional : $\nabla \times \vec{A}$.

Cuando calculamos el rotacional en otras coordenadas, el resultado no es directamente el producto vectorial entre el operador nabla y el vector, sino que nuevamente aparecen los coeficientes métricos que multiplicaban las coordenadas angulares. El rotacional en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

y para coordenadas esféricas

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

La forma desarrollada de ambas expresiones se muestra en el anexo B.

Ejemplo 2.6: Dado el campo vectorial $\vec{A} = xyz \hat{x} + x^2 y \hat{y}$ comprobar el teorema de Stokes para un camino cerrado sobre el plano $z=1$, dada por la curva $y = 1 - x^2$ y la intersección con $y=0$.

Empezaremos calculando la circulación de nuestro campo, que dividiremos en dos partes: integral sobre $y=0$ y sobre $y = 1 - x^2$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{y=0} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{y=1-x^2} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

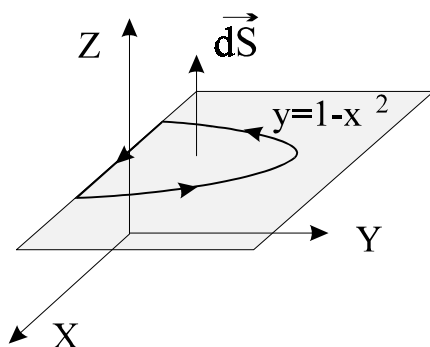


Fig. 2.11

En la primera integral, el campo es nulo cuando $y=0$, con lo que el resultado será nulo. Para resolver la segunda integral necesitamos encontrar el diferencial de longitud. En coordenadas cartesianas el diferencial de longitud viene dado por:

$$d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

Como estamos en el plano $z=1$ no hay variación en z con lo que $dz=0$. A continuación pondremos dy en función de dx sacando diferenciales a la ecuación de la curva

$$dy = d(1 - x^2) = -2x dx$$

con lo que el diferencial de longitud queda $d\vec{l} = (\hat{x} - 2x \hat{y}) dx$. Si introducimos el diferencial en la segunda integral obtenemos

$$\int_{y=1-x^2} (xyz \hat{x} + x^2 y \hat{y})(\hat{x} - 2x \hat{y}) dx = \int_1^{-1} (x(1-x^2) \hat{x} + x^2(1-x^2) \hat{y})(\hat{x} - 2x \hat{y}) dx$$

donde en la expresión del campo se ha escrito la coordenada y en función de x y la coordenada z se ha sustituido por 1. Haciendo el producto escalar la integral resultante es

$$\int_1^{-1} (x - 3x^3 + 2x^5) dx = 0$$

Con este resultado ya hemos encontrado la circulación. Para comprobar el teorema de Stokes debemos encontrar el flujo del rotacional, que viene dado por:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x^2 y & 0 \end{vmatrix} = xy \hat{y} + (2xy - xz) \hat{z}$$

El diferencial de superficie será $d\vec{S} = dx dy \hat{z}$, donde el sentido se ha tomado según la regla del sacacorchos. Si calculamos el flujo

$$\int_{-1}^1 \int_0^{y=1-x^2} (xy \hat{y} + (2xy - xz) \hat{z}) \cdot \hat{z} dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^{y=1-x^2} (2xy - xz) dy dx = 0$$

obtenemos el mismo resultado que para la circulación, con lo que hemos comprobado el teorema.

En este ejemplo se ha calculado la circulación para un camino cerrado de un campo y ha dado un resultado no nulo. Como se vio en estática, cuando esto ocurre diremos que el campo no es conservativo. Desde otro punto de vista, de Stokes vemos que si el rotacional de un campo es nulo, automáticamente la circulación será nula para cualquier camino cerrado, con lo cual el campo es conservativo. Esta es la razón por la que a un campo conservativo también se le llama irrotacional.

2.2.3 Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell

En los dos apartados anteriores hemos introducido los teoremas de la divergencia y Stokes. A continuación obtendremos la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell utilizando estos dos teoremas.

La ecuación de Gauss para el campo eléctrico la podemos escribir en función de la densidad de carga volúmica como:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

De esta ecuación vemos que Gauss nos está relacionando un flujo con otra integral de volumen. Si aplicamos el teorema de la divergencia a la integral de flujo, obtenemos:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

igualdad que se debe cumplir para cualquier volumen, y la única posibilidad para que se cumpla para cualquier volumen es que las dos funciones dentro de la integral sean la misma. Así pues, podemos escribir:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.15)$$

que corresponde a la ley de Gauss en forma diferencial para el campo eléctrico. Esta ecuación muestra que la fuente del campo eléctrico en un punto es la densidad de carga, o dicho de otra manera, que en un punto determinado nacen o mueren líneas de campo si su densidad de carga no es nula.

Ejemplo 2.7: Tenemos una esfera de radio R con una densidad de carga volúmica $\rho = kr$. Encontrar el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.

Este es un típico ejemplo de aplicación de la ecuación de Gauss para el campo eléctrico en forma integral. Sin embargo también se puede utilizar su forma diferencial. La geometría del problema hace lógica la utilización de coordenadas esféricas; además, por simetría sólo tendremos componente en la dirección radial r . La expresión de la divergencia para el vector desplazamiento entonces se reduce a

$$\begin{aligned} r < R & \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{kr}{\epsilon_0} \\ r > R & \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0 \end{aligned}$$

Si resolvemos la ecuación para $r < R$ tenemos

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{kr^3}{\epsilon_0} \Rightarrow r^2 E_r = \frac{kr^4}{4\epsilon_0} + C$$

Como que para $r = 0$ ambos miembros de la igualdad han de ser nulos, la constante de integración debe ser nula: $C = 0$. Así, el campo en el interior de la esfera es:

$$\vec{E} = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \quad r < R$$

Falta resolver la ecuación para $r > R$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0 \Rightarrow r^2 E_r = B \Rightarrow E_r = \frac{B}{r^2} \quad r > R$$

donde falta por determinar la constante de integración B . Como se justificará en la sección 2.4, este caso se resuelve teniendo en cuenta que el campo debe de ser igual a un lado y a otro de la superficie de la esfera. Así, para $r = R$ se cumple

$$\frac{k R^2}{4\epsilon_0} = \frac{B}{R^2} \Rightarrow B = \frac{k R^4}{4\epsilon_0}$$

con lo que el campo eléctrico en el exterior de la esfera es:

$$\vec{E} = \frac{k}{4\epsilon_0} \frac{R^4}{r^2} \hat{r}$$

Vamos a aplicar ahora el teorema de la divergencia a la ley de Gauss para el campo magnético, y así obtener su forma diferencial. Siguiendo el mismo razonamiento visto para el campo eléctrico, obtenemos:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.16)$$

resultado que muestra que, al ser la divergencia nula en cualquier punto del espacio, no hay fuentes de tipo surtidor o sumidero y las líneas de campo no nacen ni mueren en ningún punto particular, con lo que deben de ser cerradas.

Ejemplo 2.8: Tenemos un campo magnético del cual conocemos dos de sus componentes

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot S}{r^3} \sin \theta \quad B_z = 0$$

Encontrar la componente B_r .

Para encontrar la componente del campo magnético que falta aprovecharemos el hecho de que su divergencia siempre es nula. La divergencia en coordenadas esféricas, y teniendo en cuenta que la componente B_z es nula, queda:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r \sin \theta B_\theta)}{\partial \theta} = 0$$

con lo cual ambos términos han de ser iguales pero de signo contrario. Introduciendo B_θ en la expresión de la divergencia tenemos:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r \sin \theta B_\theta)}{\partial \theta} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{r^4} \cos \theta$$

con lo cual

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{r^2} \cos\theta \Rightarrow r^2 B_r = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{r} \cos\theta \Rightarrow B_r = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{r^3} \cos\theta$$

donde se ha hallado la componente radial del campo magnético.

Continuaremos la transformación de las ecuaciones de Maxwell con la ley de Faraday que, si recordamos, en forma integral es:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Si aplicamos el teorema de Stokes a la circulación, la ecuación puede escribirse

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

donde de nuevo la igualdad debe cumplirse para cualquier superficie y, por lo tanto, los campos sobre los que se calcula el flujo deben ser iguales. Suprimiendo las integrales se obtiene la ley de Faraday en forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (2.17)$$

Esta ecuación nos está diciendo que el rotacional del campo eléctrico, es decir, su no uniformidad o circulación en un punto, es debida a la variación temporal del campo magnético, con lo cual, el campo eléctrico en régimen dinámico no es conservativo.

Ejemplo 2.9: Encontrar el campo magnético asociado al siguiente campo eléctrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{V}{\ln(a/b)} \cdot \frac{\sin(\pi z/l)}{\rho} \cos(\omega t) \hat{\rho}$$

Por definición un campo eléctrico debe cumplir las ecuaciones de Maxwell. y en concreto Faraday. Así, podemos utilizar Faraday para encontrar el campo magnético. Para ello, calcularemos el rotacional en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_\rho}{\partial z} \hat{\phi} = \frac{V}{\ln(a/b)} \frac{\pi \cos(\pi z/l)}{\rho} \cos(\omega t) \hat{\phi}$$

resultado que debe ser igual a la variación temporal del campo magnético. Integrando respecto del tiempo obtendremos el campo magnético:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= \frac{V}{\ln(a/b)} \frac{\pi \cos(\pi z/l)}{\rho} \cos(\omega t) \hat{\phi} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{B} &= \left[\frac{-V}{\ln(a/b)} \frac{\pi \cos(\pi z/l)}{\rho \omega} \sin(\omega t) + C \right] \hat{\phi} \end{aligned}$$

donde C es una constante de integración independiente del tiempo que permite la posible existencia de campos estáticos.

La siguiente transformación es para la ley de Ampère-Maxwell que en forma integral la podemos escribir

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \mu_0 \left(\vec{J}_v + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

donde hemos escrito la intensidad de corriente en función de la densidad de corriente volúmica. Si aplicamos Stokes a la circulación obtenemos:

$$\oint_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \left(\vec{J}_v + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Y como la igualdad debe cumplirse para cualquier superficie, la ecuación de Ampère-Maxwell en forma diferencial es:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_v + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.18)$$

Así pues, las no uniformidades del campo o la circulación en un punto tendrán dos posibles causas, la variación temporal del campo eléctrico (similar al caso de Faraday) o la existencia de corrientes en dicho punto.

Ejemplo 2.10: Encontrar para qué valor de la pulsación ω las expresiones para los campos eléctrico y magnético encontradas en el ejemplo anterior cumplen las ecuaciones de Maxwell en una zona sin corrientes ni cargas.

El hecho de que se cumpla las ecuaciones de Maxwell implica que si tomamos la expresión encontrada del campo magnético, aplicando Ampère-Maxwell debemos reencontrar la expresión original del campo eléctrico. Si calculamos el rotacional obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho B_{\phi} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial B_{\phi}}{\partial z} \hat{\rho} = \\ &= \frac{-V}{\ln(a/b)} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{\omega} \frac{\sin(\pi z/l)}{\rho} \cos(\omega t) \hat{\rho} \end{aligned}$$

sin considerar las constantes de integración, el campo eléctrico es:

$$\begin{aligned}\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{-V}{\ln(a/b)} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{\omega \mu} \frac{\sin(\pi z/l)}{\rho} \cos(\omega t) \hat{\rho} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{-V}{\ln(a/b)} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0} \frac{\sin(\pi z/l)}{\rho} \sin(\omega t) \hat{\rho}\end{aligned}$$

En esta expresión del campo aparecen unas constantes que no aparecían en la expresión inicial. Sin embargo, ambas expresiones deben ser iguales para que cumplan las ecuaciones de Maxwell y efectivamente sean campos eléctricos. Comparando vemos que debe cumplirse

$$\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0} = 1$$

y aislando obtenemos que la pulsación debe ser $\omega = \pi / l \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

Por último, queda por transformar la ecuación de continuidad que en forma integral era

$$-\frac{d}{dt}Q = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Si aplicamos el teorema de la divergencia y escribimos la carga en forma de integral de la densidad, tenemos:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \nabla \cdot \vec{J} \, dV$$

ecuación que debe cumplirse para cualquier volumen, con lo cual los términos en el interior de las integrales son iguales y la ecuación de continuidad en forma diferencial queda

$$-\frac{d}{dt} \rho = \nabla \cdot \vec{J} \quad (2.20)$$

2.3 Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

La materia está compuesta por átomos y estos átomos los podemos considerar como un núcleo con carga positiva rodeado de una nube de electrones. Los electrones siempre están en movimiento alrededor del núcleo y girando sobre sí mismos. Como vemos, desde un punto de vista electromagnético la materia está constituida de cargas y corrientes. Como tal, los campos electromagnéticos afectarán al medio desplazando las cargas y modificando las corrientes. A su vez, la nueva disposición de cargas y corrientes modificará los campos. Tener en cuenta todas estas contribuciones por separado es una tarea prácticamente imposible. En consecuencia, se hace necesario obtener unas ecuaciones de Maxwell que incluyan de forma sencilla estas cargas y corrientes siguiendo criterios de promediado. El resultado será las ecuaciones de Maxwell para medios materiales que describirán la relación entre los campos macroscópicos (no tienen en cuenta la distribución exacta de cargas y corrientes). A continuación introduciremos estas ecuaciones sin insistir en la deducción matemática ya que se ha realizado en las secciones 1.2 y 2.2. En el análisis, clasificaremos los materiales en tres tipos: conductores, dieléctricos y magnéticos.

2.3.1 Campos en presencia de medios conductores

Los conductores son materiales caracterizados por la presencia de electrones libres o de conducción. Estos electrones los podemos considerar como una aportación de cada átomo al conjunto del material sin estar localizados en un punto determinado. De esta manera, forman una nube de electrones constantemente en movimiento que se verán afectados por la presencia de campos externos. El flujo electrónico inducido por campos externos es lo que se conoce como corrientes de conducción. Nuestro objetivo es caracterizar este comportamiento

para cada material. Así pues, debemos analizar el movimiento electrónico en presencia de un campo eléctrico, por lo que utilizaremos la ley de Newton

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \cdot \vec{E}$$

donde m indica la masa de electrón y $-e$ su carga. Resolviendo la ecuación, la velocidad de los electrones queda:

$$\vec{v} = -\frac{e \cdot \vec{E}}{m} t \quad m / s$$

Conocida la densidad de electrones por unidad de volumen N , la densidad de carga será $-eN$. Entonces podemos encontrar la densidad de corriente como:

$$\vec{J} = (-e \cdot N) \cdot \vec{v} = \frac{N \cdot e^2 \vec{E}}{m} t \quad A / m^2$$

Esta expresión muestra que la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico y que aumenta indefinidamente con el tiempo. Este razonamiento es erróneo ya que las corrientes no pueden hacerse infinitas. Además, experimentalmente se ve que adquieren un valor determinado que depende de cada material. ¿Cuál es la razón por la que no aumenta indefinidamente? La respuesta es que se producen choques entre los electrones móviles y los átomos fijos, con lo cual serán frenados periódicamente y se llegará a un equilibrio. El efecto de frenado se puede caracterizar por un tiempo τ que depende de cada material y que nos indica el tiempo promedio entre choque y choque. Así, la densidad de corriente queda:

$$\vec{J} = \frac{N \cdot e^2 \tau}{m} \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (2.21)$$

En esta ecuación aparece el parámetro fundamental por el que caracterizaremos las propiedades conductoras de un material: la conductividad σ . Algunos valores típicos de conductores y aislantes vienen dados en la tabla 2.1.

Si queremos incluir los efectos de la conductividad en las ecuaciones de Maxwell, la densidad de corriente de conducción debe ser introducida en la ecuación de Ampère-Maxwell quedando:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_s \left(\sigma \vec{E} + \epsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (2.22)$$

Material	Conductividad ($\Omega \cdot m$) ⁻¹
Plata	$6.1 \cdot 10^7$
Cobre	$5.7 \cdot 10^7$
Oro	$4.1 \cdot 10^7$
Aluminio	$3.5 \cdot 10^7$
Agua del mar	4
Silicio	$3.9 \cdot 10^{-4}$
Agua destilada	10^{-4}
Vidrio	10^{-12}
Cera	10^{-17}

Tabla 2.1 Conductividad de algunos materiales

Al hablar de conductores, nos referiremos a ellos haciendo la distinción entre buen conductor y conductor perfecto. Las características del buen conductor las trataremos en la sección 3.5.

Un conductor perfecto es un medio idealizado en que $\sigma \rightarrow \infty$, es decir, en que no hay colisiones y la velocidad de los electrones es infinita. En muchas de las aplicaciones que estudiaremos, por simplicidad, nos interesará considerar los conductores perfectos. Así pues, debemos analizar las consecuencias que tendrá considerar una conductividad infinita. Para extraerlas nos tendremos que fijar en la ecuación (2.22), ya que debe seguir cumpliéndose. Una conductividad infinita, al cumplirse la igualdad, implica que el campo magnético debe ser infinito, situación que es físicamente imposible. Si queremos evitar que el término de la derecha dé infinito, el campo eléctrico que aparece en la ecuación debe ser nulo y así contrarrestarla conductividad infinita. Precisamente, la principal característica de los conductores perfectos es que *el campo eléctrico en su interior es nulo*, propiedad que será reafirmada en la sección 2.5.2 desde un punto de vista energético. Vamos a ver que consecuencias se deducen de la nulidad del campo eléctrico dentro de un conductor perfecto:

- De la ley de Faraday vemos que si el término de la izquierda es nulo, y por lo tanto también el término de la derecha, el campo magnético debe ser independiente del tiempo para que la derivada se anule. Así pues, *dentro de un conductor perfecto sólo pueden haber campos magnetostáticos*.
- En la aproximación estática el campo eléctrico es el gradiente de la función potencial; luego, si el campo es nulo, se cumple $\nabla\Phi = 0$. En consecuencia, el potencial eléctrico debe ser constante en todo el volumen, y por lo tanto un *conductor perfecto es un volumen equipotencial*. Además, desde un punto de vista matemático, al ser el campo eléctrico el gradiente del potencial, siempre es perpendicular a las superficies equipotenciales, *el campo exterior sobre la superficie del conductor siempre es*

perpendicular a ésta. Esta última propiedad también es aplicable a campos dinámicos y será justificada en la sección 2.4.1.

- c) En el interior de un conductor perfecto no pueden haber cargas, en caso contrario se crearía un campo eléctrico. Debe entenderse entonces que existen dos densidades volúmicas de carga, una negativa, formada por la nube de electrones libres, y otra positiva, debida a la red iónica, que se cancelan punto a punto en el interior del conductor.
- d) Que en el interior de un conductor no haya carga neta no significa que en un conductor no pueda haberlas: en un conductor perfecto las cargas están siempre sobre su superficie en forma de densidad de carga superficial.
- e) Existe una relación biunívoca entre la densidad de carga superficial y el campo eléctrico exterior: la carga se distribuirá de manera que contrarreste el campo exterior, manteniendo el campo nulo dentro del conductor. Esta relación la encontraremos nuevamente en la sección 2.4.1.

2.3.2 Materiales dieléctricos

Los dieléctricos son materiales eléctricamente neutros en que los electrones están ligados a los átomos o moléculas que lo forman. Así pues, los electrones no pueden trasladarse libremente y por lo tanto no crearán corrientes de conducción, es decir, son materiales aislantes. El efecto de los campos eléctricos sobre estos materiales se limita a un pequeño desplazamiento de las cargas respecto sus posiciones originales. Como se vio en el capítulo primero, este efecto se conoce con el nombre de *polarización*. Aquí, vamos a repetir los conceptos básicos de este fenómeno, pero desde un punto de vista más intuitivo, y ver como caracterizarlo.

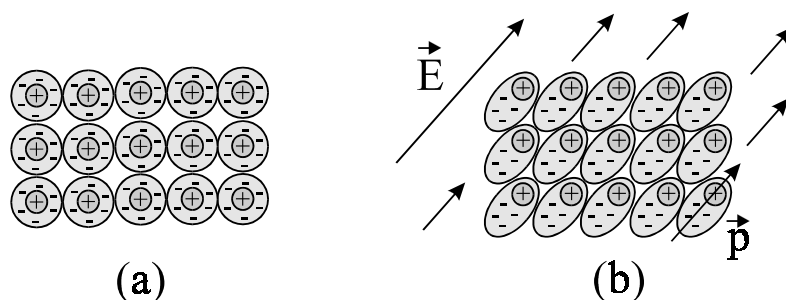


Fig. 2.12 Ejemplo de polarización eléctrica

La figura 2.12 muestra de forma esquemática el efecto de la polarización. En un primer momento tenemos los átomos neutros, uno junto a otro, de manera que la carga total es nula. Bajo la acción de un campo eléctrico, las cargas negativas y positivas se desplazarán en sentidos contrarios formando cada átomo un dipolo eléctrico de momento dipolar $\vec{p} = q \cdot \vec{\delta}$. El material en su conjunto también presentará un momento dipolar total inducido que será la suma de los momentos de los átomos, entonces diremos que el material está *polarizado*. El valor del momento dipolar del material para un campo eléctrico dado, aparte de las características del material, dependerá de sus dimensiones, con lo cual, en caso de conocerlo, no define el estado del material. Por esta razón, es preferible conocer y trabajar con densidades de momento dipolar o *Polarización*:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta v} = \frac{d\vec{p}}{dv} \quad (C/m^2) \quad (2.2.3)$$

Ejemplo 2.12: Efecto de la introducción de un material dieléctrico en un condensador de placas planas:

Para entender cómo nos afecta la polarización o la aparición de cargas ligadas en el cálculo de los campos eléctricos vamos a considerar el efecto de introducir un material entre las placas de un condensador.

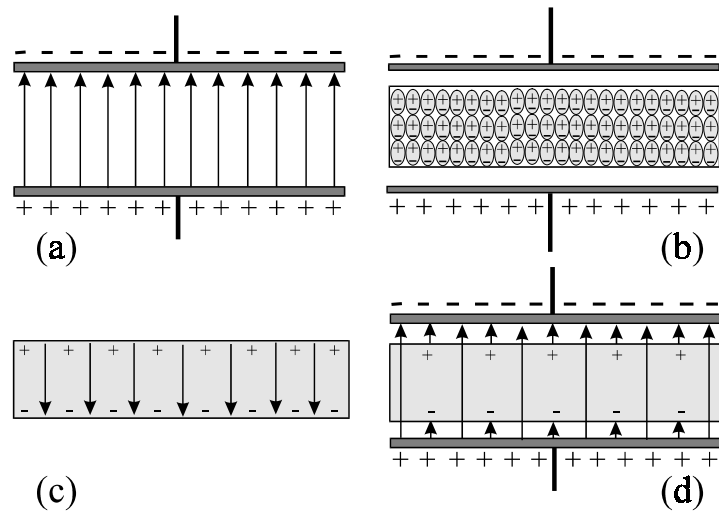


Figura 2.13 Origen del aumento de capacidad en un condensador debido a la introducción de un dieléctrico

La figura 2.13a representa un condensador plano donde se han trazado las líneas de campo eléctrico. En la siguiente figura, donde se ha introducido un dieléctrico, vemos como el material, que consideraremos compuesto por una infinidad de átomos, se polariza. La carga total del material es nula, como lo era inicialmente (igual número de cargas positivas y negativas). Sin embargo, en el interior del material podemos agrupar la carga negativa de un dipolo con la positiva del dipolo que está inmediatamente debajo. El resultado de esta agrupación se muestra en la figura 2.17c, donde aparece una densidad de carga en las superficies superior e inferior del dieléctrico, con lo que el material crea un campo que va en sentido contrario al creado por el condensador. Si sumamos los dos campos, como muestra en la figura 2.17d, las líneas de campo en el interior del material disminuirán respecto las que había en el condensador sin dieléctrico, es decir, disminuye el campo total en el interior del condensador. En consecuencia, la diferencia de potencial entre placas también disminuye y por lo tanto su capacidad aumenta ($C=Q/V$).

Este ejemplo muestra cómo la existencia de una polarización está relacionado con la aparición de densidades de carga en el material. A estas cargas la llamaremos ligadas y las indicamos por el subíndice b (*bounded*), siendo una consecuencia del desplazamiento de las cargas que forman el dieléctrico. Esta denominación se da en contraposición a la carga libre, indicada por el subíndice f (*free*) y que no es propia del material pero que puede introducirse de forma artificial. La expresión matemática de las densidades de carga ligada superficiales y volúmicas se dedujeron en la sección 1.2 y vienen dadas por

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \qquad \rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} \qquad (2.2.4)$$

donde \hat{n} es un vector unitario normal a la superficie del material y dirigido hacia el exterior. En la figura 2.14 podemos ver el significado de estas expresiones. La simple existencia de dipolos implica la aparición de densidades de carga superficiales, pero como muestra la figura 2.14a será máxima en las superficies perpendiculares a la dirección de \vec{P} y mínima en las paralelas ya que tendremos tanto cargas positivas como negativas. Así que, cuanto mayor sea el ángulo entre \vec{P} y \hat{n} , menor será la densidad de carga superficial, como se ve si contamos las cargas que tocan a las distintas superficies en la figura 2.14a.

La densidad de carga volúmica está asociada a la no uniformidad o no homogeneidad de la polarización que puede ser debida a variaciones estructurales de la materia o a la presencia de densidades de carga libre. En la figura 2.14b se muestra un caso de material no homogéneo donde la polarización es mayor en la parte superior (hay más moléculas) que en la inferior del material. Si agrupamos las cargas entre distintos dipolos (los rodeados por la línea) una de las cargas negativas no queda contrarrestada, con lo que aparecerá una densidad de carga volúmica neta. Dicho de otra manera, el aumento de la polarización es debido a la presencia de esta carga, es decir, es la fuente de la polarización, con lo cual debe estar relacionado por la divergencia

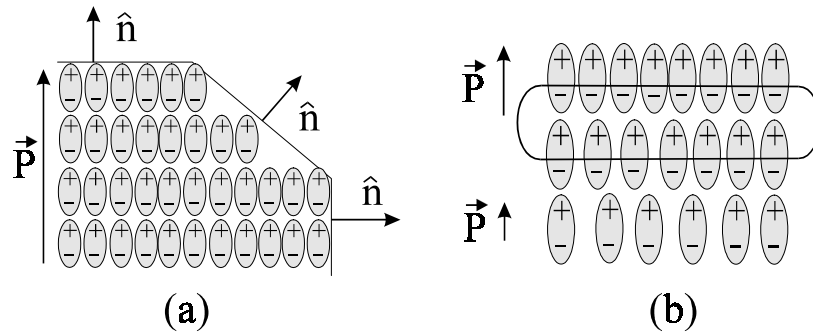


Fig. 2.14 Significado de las densidades de carga ligada

Si queremos obtener las ecuaciones de Maxwell para medios materiales deberemos introducir (2.24) en aquellas ecuaciones en que aparezcan las cargas, en concreto en la ecuación de Gauss para el campo eléctrico. Como vimos en la sección 1.2.3, la ley de Gauss entonces se escribe:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f \quad (2.25)$$

donde ρ_f y Q_f son respectivamente la densidad de carga y la carga total libre en el interior de la superficie, y \vec{D} es el vector desplazamiento definido como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (C/m^2) \quad (2.26)$$

Si observamos la nueva ecuación de Gauss, vemos que sólo depende de las cargas libres, es decir, no consideramos los efectos del material; luego en el cálculo de la divergencia o del flujo tampoco nos afectará la presencia del material. Esta es la razón por la que introducimos el vector desplazamiento, porque *necesitamos una magnitud, como es la divergencia de \vec{D} , que no dependa de las características del material.*

El siguiente paso consiste en buscar una definición más compacta del vector desplazamiento en función del campo eléctrico. Para ello debemos recordar que la polarización es un efecto inducido por el campo eléctrico; luego tiene que ser una función dependiente de éste, y por supuesto de las características del material. Si queremos determinar esta función, que no conocemos, la podemos descomponer en series de Taylor, con lo que la polarización queda:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \left(\chi_e^{(1)}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) + \chi_e^{(2)}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \right. \\ \left. + \chi_e^{(3)}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \dots \right)$$

donde $\chi_e^{(i)}$ son los coeficientes de Taylor (adimensionales) que reciben el nombre de susceptibilidad eléctrica del medio y deben ser hallados experimentalmente. Es importante darse cuenta que *la susceptibilidad eléctrica sólo depende del medio y por lo tanto lo caracteriza*. En general, son tensores donde el valor de los coeficientes depende del material y de la posición \vec{r} y el superíndice indica el orden. Según las características de la susceptibilidad podemos clasificar los materiales en los siguientes grupos:

- a) Medios lineales: Como vemos la polarización incluye términos en los que aparecen potencias del campo eléctrico. Entonces diremos que el medio es no lineal. Si la susceptibilidad de orden mayor a uno ($i > 1$) es nula entonces el medio es lineal ya que la dependencia de la polarización con el campo eléctrico es lineal.
- b) Medios isótropos: El hecho de que la susceptibilidad sea un tensor implica que las propiedades del material dependen de la dirección del campo eléctrico. Si esto no ocurre y la polarización del medio es independiente de la dirección del campo, diremos que el medio es isótropo. Entonces cada uno de los tensores puede ser substituido por funciones escalares.
- c) Medios homogéneos: Los coeficientes del tensor susceptibilidad son funciones que dependen de la posición con lo que las propiedades del material dependerán del punto considerado. Si las propiedades son las mismas para cualquier punto del material, como por ejemplo en un cristal perfecto, diremos que el medio es homogéneo. Entonces los coeficientes del tensor son constantes.

A lo largo del libro, por cuestiones de simplicidad, nos limitaremos a medios lineales isótropos y homogéneos, con lo que χ_e es un escalar. Entonces la relación entre campo eléctrico y polarización se reduce a

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.2.7)$$

Podemos aprovechar este resultado e introducirlo en la expresión del vector desplazamiento para obtener éste directamente en función de las características del material y del campo eléctrico

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

de donde podemos definir dos nuevos parámetros que caracterizan y describen las propiedades del medio material: la permitividad relativa del medio

$$\epsilon_r = (1 + \chi_e)$$

y la permitividad del medio

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (F/m)$$

En definitiva hemos encontrado que los medios dieléctricos pueden ser caracterizados por la susceptibilidad χ_e , la permitividad relativa ϵ_r o la permeabilidad del medio ϵ

Como resultado, para medios lineales isótropos y homogéneos, el vector desplazamiento puede escribirse simplemente en función del campo eléctrico como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (2.28)$$

con lo que la ecuación de Gauss simplemente queda:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

De esta manera, los medios dieléctricos lineales isótropos y homogéneos pueden ser analizados como si estuviéramos en el vacío, pero substituyendo ϵ_0 por ϵ . En la sección 1.2 puede encontrarse ejemplos resueltos en los que intervienen medios dieléctricos.

Volviendo al ejemplo del condensador, ahora podemos dar otra interpretación de por qué aumenta la capacidad. La capacidad para un condensador plano puede escribirse en función de sus dimensiones como $C = \epsilon S / d$, donde d es la distancia entre conductores y S su superficie. En este caso la capacidad aumenta porque al introducir un material aumenta la permitividad del medio, mientras que en la interpretación inicial era debido a la disminución de la diferencia de potencial.

2.3.3 Materiales magnéticos

A escala microscópica la materia está formada por electrones en movimiento, por lo tanto crearán y se verán afectados por los campos magnéticos. En esta sección trataremos cómo estas corrientes contribuyen al campo macroscópico total. Todos los materiales contienen electrones en movimiento; luego desde un punto de vista estricto todos los materiales son magnéticos. Sin embargo para nosotros, los materiales magnéticos son aquellos en que los efectos magnéticos macroscópicos son importantes.

De forma simplificada, los materiales pueden ser considerados como un conjunto de pequeñas espiras. El efecto de los campos magnéticos sobre el material consiste en una reorientación de las espiras (Fig. 2.15); entonces diremos que el material está *magnetizado*.

Las espiras están caracterizada por el momento dipolar magnético $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$, y el momento magnético total del material será la suma de los momentos de cada espira. Para caracterizar los efectos magnéticos utilizaremos la densidad de momento magnético o *magnetización*: