

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACION UPC**Profesores: M. Cabrera, J. Fernández-Rubio, E. Monte, G. Vázquez**

En un sistema de comunicaciones binario polar de símbolos equiprobables y estadísticamente independientes entre sí, se tiene a la salida del filtro adaptado a la función generadora del espacio de señal, un ruido gaussiano y de media nula cuya varianza depende del símbolo transmitido (Este efecto es típico de determinados sistemas de almacenamiento en disco):

Así, se transmite $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \varphi(t-nT)$ con $\alpha[n] = \pm \frac{d}{2}$ y donde $\varphi(t)$ es una función ortonormal. El modelo

de señal a la salida del filtro adaptado a $\varphi(t)$, tras el muestreo de cada símbolo, es el siguiente:

$$y[k]_{(\alpha[k]=d/2)} = +\frac{d}{2} + \beta[k]_{(\alpha[k]=d/2)} \quad \text{ó bien} \quad y[k]_{(\alpha[k]=-d/2)} = -\frac{d}{2} + \beta[k]_{(\alpha[k]=-d/2)}$$

modelo de señal que pone de manifiesto que la potencia de ruido en detección depende del símbolo transmitido.

Las variables de ruido son gaussianas en ambos casos, estadísticamente independientes entre sí, de media nula pero de varianzas diferentes: $\beta[k]_{(\alpha[k]=-d/2)} : N(0, \sigma_0^2)$, $\beta[k]_{(\alpha[k]=+d/2)} : N(0, \sigma_1^2)$.

Considere $\sigma_0^2 = 2\sigma_1^2$ a lo largo de todo el ejercicio.

1. Obtenga las ecuaciones asociadas a las dos regiones de decisión del receptor óptimo MAP: $(\max_{S_m} f_y(y/S_m)P(S_m))$

2. Calcule el umbral o umbrales de decisión en función de la distancia entre símbolos d . Para ello considere

$$\sigma_1^2 = \frac{d^2}{2}. \text{ Dibuje las regiones de decisión obtenidas.}$$

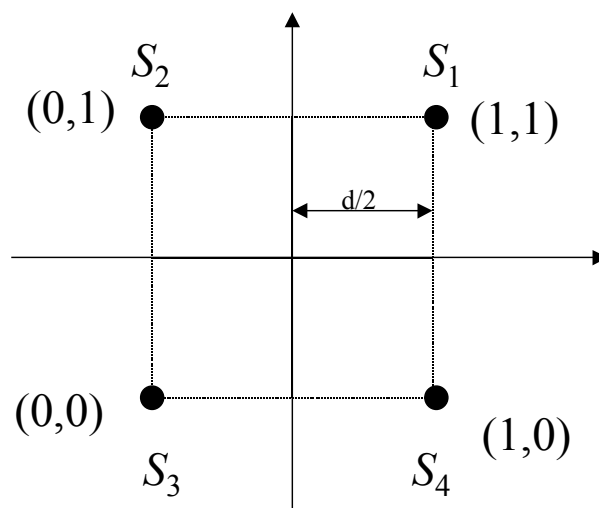
3. Calcule la BER consultando el área de la gaussiana de la tabla adjunta. Para ello obtenga la expresión general exacta y aproxime al consultar la tabla mediante las dos gaussianas de mayor área.

4. Compare el resultado del apartado anterior con la BER que se obtendría si únicamente se colocara un umbral en $\gamma = 0$

Suponga ahora que la modulación es bidimensional, compuesta por *dos* señales PAM como la descrita en el problema anteriormente sobre *dos* pulsos ortonormales $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] \varphi_1(t-nT) + \alpha_2[n] \varphi_2(t-nT); \text{ con vectores } \mathbf{S}_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm d/2 \\ \pm d/2 \end{pmatrix}$$

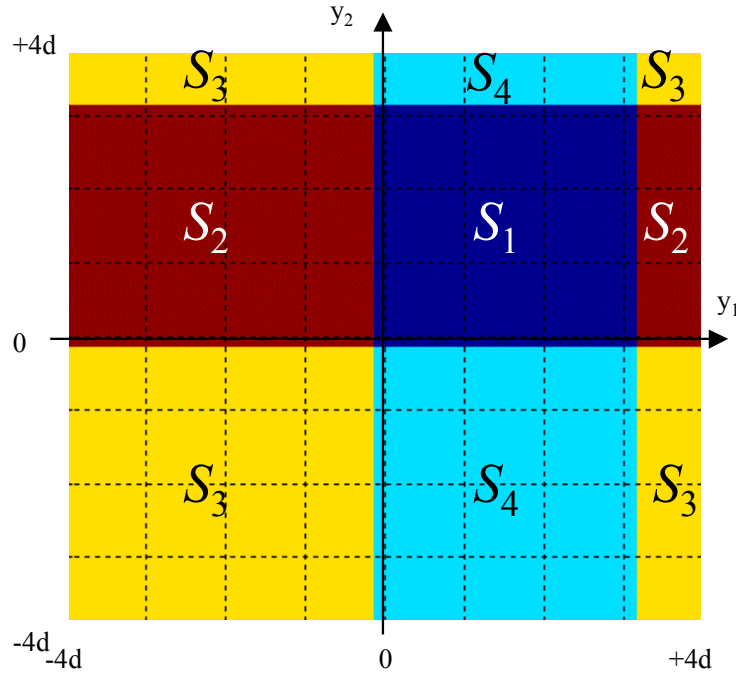
Para el vector de ruido, cada una de las dos coordenadas tiene varianza σ_1^2 ó σ_0^2 en función del correspondiente bit de señal transmitido. Es decir, se tiene varianza σ_1^2 si la coordenada es positiva y varianza σ_0^2 si la coordenada es negativa.



Así, por ejemplo, el vector de señal detectado, condicionado por el símbolo transmitido S_2 , presenta las siguientes expresión y distribución estadística:

$$Y[n]_{(S[n]=S_2)} = S_2 + N = \begin{pmatrix} -d/2 \\ +d/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \text{ con } E[|\beta_1|^2] = \sigma_0^2 \quad E[|\beta_2|^2] = \sigma_1^2 \quad E[\beta_1\beta_2] = 0$$

5. Ante la dificultad de cálculo de las 4 regiones de decisión para este caso, se ha realizado una simulación mediante ordenador. La siguiente figura, indica para cada punto $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, el símbolo para el cual $f_y(Y|S_m)P(S_m)$ es máximo. En función de la figura, decida cuales deben ser las 4 regiones de decisión del detector MAP.



El cuadrado cuyo máximo viene dado por S_1 , se halla delimitado por los puntos:
 $(-0.14d, -0.14d), (-0.14d, +3.14d), (+3.14d, -0.14d), (+3.14d, +3.14d)$.

6. Calcule la probabilidad de error exacta condicionada al símbolo S_2 , $P(\text{error} / S_2)$ en función de $\frac{E_b}{N_0}$. Considere

$$\sigma_0^2 = 2\sigma_1^2, \text{ y } \sigma_1^2 = N_0 / 2.$$

7. Calcule de nuevo la probabilidad anterior suponiendo el detector subóptimo con umbrales: $y_1 = 0$; $y_2 = 0$.
8. Comparando únicamente las gaussianas de mayor área de los dos apartados anteriores, ¿cuál ha sido la pérdida en dB de $\frac{E_b}{N_0}$ con el detector subóptimo respecto al detector MAP?

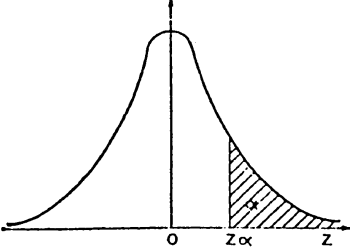
Distribución normal $N(0, 1)$										
$\int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \alpha$ 										
z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
2,4	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
2,7	0,00256	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139
z_α	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	0,00135	0,00136	0,00137	0,00138	0,00139	0,00140	0,00141	0,00142	0,00143	0,00144
4	0,00135	0,00136	0,00137	0,00138	0,00139	0,00140	0,00141	0,00142	0,00143	0,00144
5	0,00135	0,00136	0,00137	0,00138	0,00139	0,00140	0,00141	0,00142	0,00143	0,00144
6	0,00135	0,00136	0,00137	0,00138	0,00139	0,00140	0,00141	0,00142	0,00143	0,00144

Tabla Área de la Gaussiana.

"LECCIONES DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES"; Vicente Quesada, Alfonso García. Ed: Díaz de Santos.

RESOLUCIÓN (M. Cabrera):

1. **Obtenga las ecuaciones asociadas a las dos regiones de decisión del receptor óptimo MAP:**
 $(\max_{S_m} f_y(y/S_m)P(S_m))$

El modelo de señal a la salida del filtro adaptado a $\varphi(t)$, tras el muestreo de cada símbolo, es el siguiente:

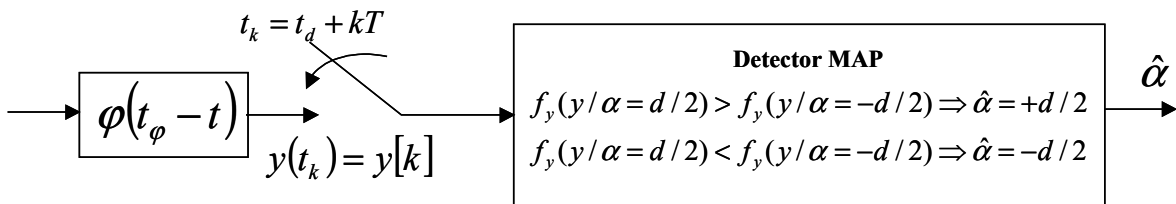
$$y[k]_{(\alpha[k]=d/2)} = +\frac{d}{2} + \beta[k]_{(\alpha[k]=d/2)} \quad \text{ó bien} \quad y[k]_{(\alpha[k]=-d/2)} = -\frac{d}{2} + \beta[k]_{(\alpha[k]=-d/2)}$$

Por tanto las respectivas funciones de densidad de probabilidad condicionadas, prescindiendo de la dependencia temporal para simplificar notación, son:

$$f_y(y/\alpha = d/2) = f_\beta((y - d/2)/\alpha = d/2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(y - d/2)^2}{2\sigma_1^2}\right): N(d/2; \sigma_1^2)$$

$$f_y(y/\alpha = -d/2) = f_\beta((y + d/2)/\alpha = -d/2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(y + d/2)^2}{2\sigma_0^2}\right): N(-d/2; \sigma_0^2)$$

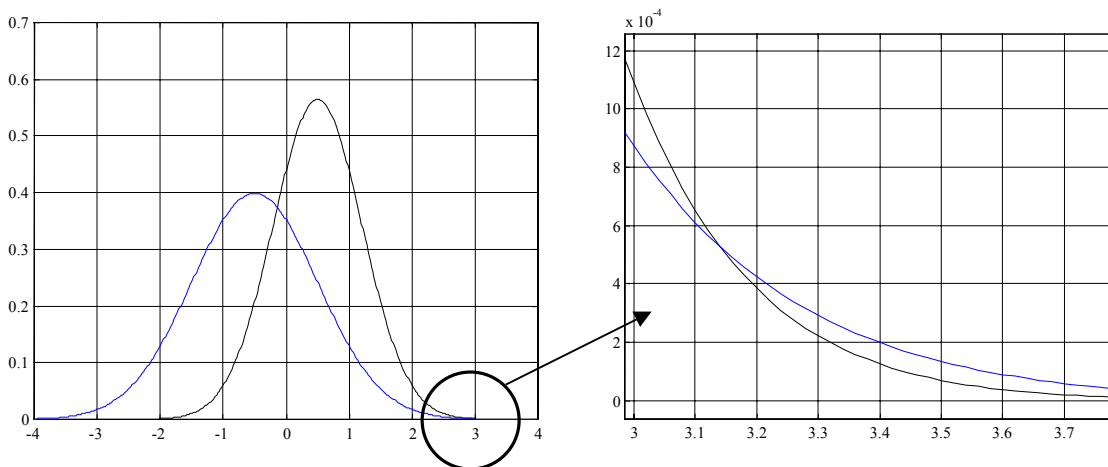
Dado que los dos posibles valores para la coordenada $\alpha[k]$ son equiprobables, el criterio de Máxima probabilidad A Posteriori (MAP) se reduce a determinar para cada posible punto de señal recibido $y[k]$, el símbolo $d/2$ ó $-d/2$ para el que la correspondiente función de densidad de probabilidad es máxima. Véase la siguiente figura para entender mejor el procedimiento:



Por tanto, la ecuación a resolver para hallar el umbral ó umbrales de decisión será:

$$f_y(y/\alpha = +d/2) \stackrel{> +d/2}{< -d/2} f_y(y/\alpha = -d/2)$$

La siguiente figura representa las dos funciones de densidad de probabilidad, y por tanto a partir de ellas se puede predecir de forma intuitiva los dos umbrales que se han de obtener:



En estos gráficos se representa en negro $f_y(y/\alpha = +d/2)$ ("es la gaussiana más alta") y en azul $f_y(y/\alpha = -d/2)$. El eje de abscisas se halla normalizado por la distancia entre símbolos d .

2. Calcule el umbral o umbrales de decisión en función de la distancia entre símbolos d . Para ello considere

$$\sigma_1^2 = \frac{d^2}{2}. \text{ Dibuje las regiones de decisión obtenidas.}$$

En este apartado se ha de resolver la siguiente ecuación, con el fin de hallar los valores de $y=\gamma$ que delimitan ambas regiones de decisión. Es decir, las inecuaciones de detector MAP se cumplen con igualdad en los puntos que delimitan las dos regiones.

$$\begin{aligned} f_y(\gamma/\alpha = d/2) &= f_y(\gamma/\alpha = -d/2) \Rightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{\left(\gamma + \frac{d}{2}\right)^2}{2\sigma_0^2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{\left(\gamma - \frac{d}{2}\right)^2}{2\sigma_1^2}\right) \Rightarrow \\ -\frac{\ln(\sigma_0^2)}{2} - \frac{1}{2\sigma_0^2} \left(\gamma^2 + d\gamma + \frac{d^2}{4}\right) &= -\frac{\ln(\sigma_1^2)}{2} - \frac{1}{2\sigma_1^2} \left(\gamma^2 - d\gamma + \frac{d^2}{4}\right) \Rightarrow \\ \gamma^2 \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\right) - d\gamma \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_0^2}\right) + \frac{d^2}{4} \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right) &= 0 \Rightarrow (*) \\ \text{considerando } \sigma_0^2 &= 2\sigma_1^2 \text{ y } \sigma_1^2 = \frac{d^2}{2} \\ \frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2} &= \frac{1}{2d^2} \quad \frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_0^2} = \frac{3}{2d^2} \\ \text{sustituyendo así en la ecuación (*) se obtiene} \\ \frac{\gamma^2}{2d^2} - \frac{3d\gamma}{2d^2} + \frac{d^2}{4} \frac{1}{2d^2} - \frac{1}{2} \ln 2 &= 0 \\ \text{y por tanto la ecuación de segundo grado a resolver queda como:} \\ \gamma^2 - 3d\gamma + \frac{d^2}{4} - d^2 \ln 2 &= 0 \end{aligned}$$

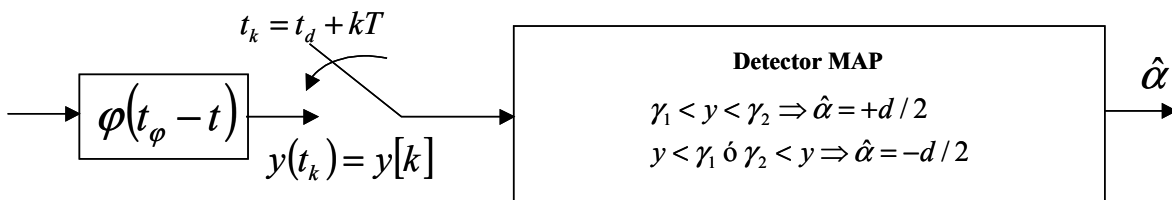
$$\begin{aligned} \text{cuya solución viene dada por los valores: } \gamma_1 &= -0.1411d \\ \gamma_2 &= +3.1411d \end{aligned}$$

Por tanto:

La Región correspondiente a $-d/2$, viene dada por: $y < \gamma_1; y > \gamma_2$

La Región correspondiente a $+d/2$, viene dada por: $\gamma_1 < y < \gamma_2$

Por tanto, el detector MAP se reduce ahora a:



3. Calcule la BER consultando el área de la gaussiana de la tabla adjunta. Para ello obtenga la expresión general exacta y aproxime al consultar la tabla mediante las dos gaussianas de mayor área.

Dado que el sistema es binario, la BER coincide con la probabilidad de error de símbolo:

$$\begin{aligned}
BER &= \frac{1}{2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_y(y/\alpha = -d/2) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\gamma_1} f_y(y/\alpha = +d/2) dy + \frac{1}{2} \int_{\gamma_2}^{+\infty} f_y(y/\alpha = +d/2) dy = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(y+d/2)^2}{2\sigma_0^2}\right) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\gamma_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(y-d/2)^2}{2\sigma_1^2}\right) dy + \frac{1}{2} \int_{\gamma_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(y-d/2)^2}{2\sigma_1^2}\right) dy = \\
&= \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{\gamma_1 + d/2}{\sigma_0}\right) - Q\left(\frac{\gamma_2 + d/2}{\sigma_0}\right) + Q\left(\frac{d/2 - \gamma_1}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{\gamma_2 - d/2}{\sigma_1}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{0.359d}{d}\right) - Q\left(\frac{3.641d}{d}\right) + Q\left(\frac{0.641\sqrt{2}d}{d}\right) + Q\left(\frac{2.6411\sqrt{2}d}{d}\right) \right)
\end{aligned}$$

La expresión anterior que es exacta, se va a aproximar a continuación por las dos áreas mayores:

$$BER \cong \frac{1}{2} (Q(0.359) + Q(0.905)) = \frac{1}{2} (0.3594 + 0.1841) = 0.2717$$

NOTA: En la resolución anterior se ha considerado el área de la gaussiana como $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda$

4. Compare el resultado del apartado anterior con la BER que se obtendría si únicamente se colocara un umbral en $\gamma = 0$

Si únicamente se coloca el umbral $\gamma = 0$ Por tanto:

La Región correspondiente a $-d/2$, viene dada por: $y < 0$

La Región correspondiente a $+d/2$, viene dada por: $0 < y$

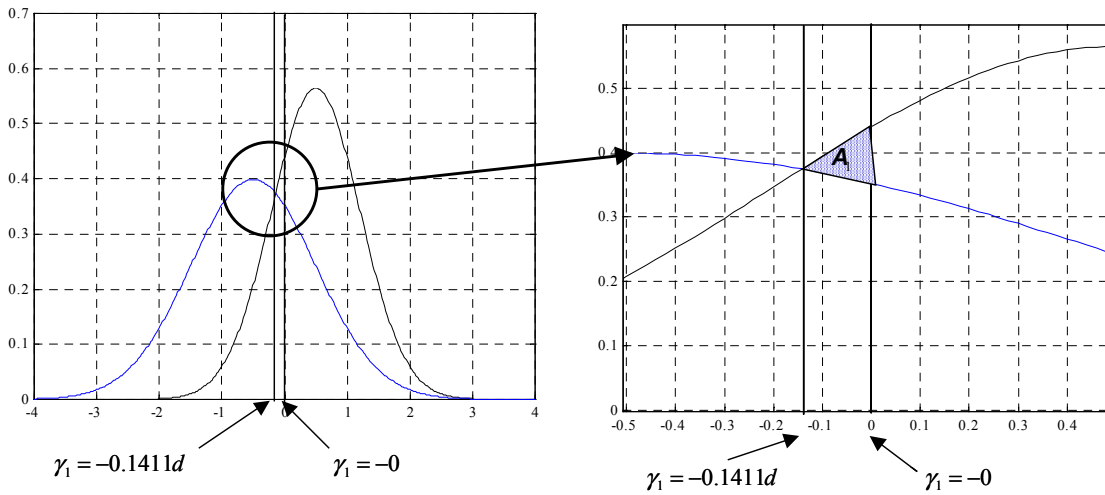
Y por tanto:

$$\begin{aligned}
BER &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f_y(y/\alpha = -d/2) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f_y(y/\alpha = +d/2) dy = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(y+d/2)^2}{2\sigma_0^2}\right) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(y-d/2)^2}{2\sigma_1^2}\right) dy = \\
&= \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{d}{2\sigma_0}\right) + Q\left(\frac{d}{2\sigma_1}\right) \right) = \frac{1}{2} (Q(0.5) + Q(0.7071)) = \frac{1}{2} (0.3085 + 0.2389) = 0.2737
\end{aligned}$$

Por tanto ha habido un incremento de errores de un 0.2%

Aunque el incremento de error es poco significativo en %, gráficamente se justifica del siguiente modo: El desplazamiento del umbral óptimo γ_1 hacia el origen provoca un aumento de la BER, que se puede interpretar como la suma de el área A_1 en la figura:

$$BER_{apdo4} = BER_{apdo3} + A_1$$



5. Ante la dificultad de cálculo de las 4 regiones de decisión para este caso, se ha realizado una simulación mediante ordenador. La siguiente figura, indica para cada punto $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, el símbolo para el cual $f_Y(Y|S_m)P(S_m)$ es máximo. En función de la figura, decida cuales deben ser las 4 regiones de decisión del detector MAP.

Evidentemente, la figura nos da el resultado del criterio MAP, es decir, la zona de decisión del símbolo S_m corresponde con la parte del plano en que $f_Y(Y|S_m)P(S_m)$ es máximo. Por tanto:

Región S_1 : $(-0.14d < y_1 < +3.14d; -0.14d < y_2 < +3.14d)$

Región S_2 : $(y_1 < -0.14d; -0.14d < y_2 < +3.14d) \cup (+3.14d < y_1; -0.14d < y_2 < +3.14d)$

Región S_3 : $(y_1 < -0.14d; y_2 < -0.14d) \cup (y_1 < -0.14d; +3.14d < y_2) \cup (+3.14d < y_1; y_2 < -0.14d) \cup (+3.14d < y_1; +3.14d < y_2)$

Región S_4 : $(-0.14d < y_1 < +3.14d; y_2 < -0.14d) \cup (-0.14d < y_1 < +3.14d; +3.14d < y_2)$

6. Calcule la probabilidad de error exacta condicionada al símbolo S_2 , $P(\text{error} / S_2)$ en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

Considere $\sigma_0^2 = 2\sigma_1^2$, y $\sigma_1^2 = N_0 / 2$.

La Región S_2 , se halla formada por dos áreas, de color rojo en la figura bidimensional. La probabilidad de error cuando se ha transmitido el símbolo S_2 , será la probabilidad de que el vector de ruido provoque la desviación del punto

transmitido: $\begin{pmatrix} -d/2 \\ +d/2 \end{pmatrix}$ fuera de dicha región. Por tanto

$$\begin{aligned}
 P(\text{error} / S_2) &= \Pr(\beta_2 > 3.14d - d/2) + \Pr(\beta_2 < d/2 + 0.14d) + \\
 &\Pr(d/2 - 0.14d < \beta_1 < 3.14d + d/2; d/2 + 0.14d < \beta_2 < 3.14d - d/2) \\
 &= Q\left(\frac{2.64d}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{0.64d}{\sigma_1}\right) + \left(Q\left(\frac{0.36d}{\sigma_0}\right) - Q\left(\frac{3.64d}{\sigma_0}\right)\right) \left(1 - Q\left(\frac{2.64d}{\sigma_1}\right) - Q\left(\frac{0.64d}{\sigma_1}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Dado que $E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{d^2}{4}$ y $\sigma_1^2 = \frac{N_0}{2}$, $\sigma_0^2 = N_0$ y “despreciando las Q^2 ”

$$\begin{aligned}
 P(\text{error} / S_2) &\cong Q\left(\sqrt{(2.64)^2 8 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{(0.64)^2 8 \frac{E_b}{N_0}}\right) + \left(Q\left(\sqrt{(0.36)^2 4 \frac{E_b}{N_0}}\right) - Q\left(\sqrt{(3.64)^2 4 \frac{E_b}{N_0}}\right)\right) \\
 &= Q\left(\sqrt{55.76 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{3.277 \frac{E_b}{N_0}}\right) + \left(Q\left(\sqrt{0.5184 \frac{E_b}{N_0}}\right) - Q\left(\sqrt{53 \frac{E_b}{N_0}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

7. **Calcule de nuevo la probabilidad anterior suponiendo el detector subóptimo con umbrales:** $y_1 = 0$; $y_2 = 0$.

Las nuevas regiones de decisión son:

Región S_1 : $(0 < y_1; 0 < y_2)$

Región S_2 : $(y_1 < 0; 0 < y_2)$

Región S_3 : $(y_1 < 0; y_2 < 0)$

Región S_4 : $(0 < y_1; y_2 < 0)$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 P(\text{error} / S_2) &= \Pr(\beta_2 < -d/2) + \Pr(\beta_1 > d/2) - \Pr(\beta_2 < -d/2; \beta_1 > d/2) \\
 &= Q\left(\frac{0.5d}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{0.5d}{\sigma_0}\right) - Q\left(\frac{0.5d}{\sigma_1}\right) \cdot Q\left(\frac{0.5d}{\sigma_0}\right)
 \end{aligned}$$

Dado que $E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{d^2}{4}$ y $\sigma_1^2 = \frac{N_0}{2}$, $\sigma_0^2 = N_0$ y “despreciando las Q^2 ”

$$P(\text{error} / S_2) \cong Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

8. **Comparando únicamente las gaussianas de mayor área de los dos apartados anteriores, ¿cuál ha sido la pérdida**

en dB de $\frac{E_b}{N_0}$ con el detector subóptimo respecto al detector MAP?

Para hacer la comparación con las probabilidades aproximadas a las gaussianas de mayor área se comparará:

$$\begin{aligned}
 P(\text{error} / S_2)_{\text{MAP}} &\cong Q\left(\sqrt{3.277 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{0.5184 \frac{E_b}{N_0}}\right) \\
 P(\text{error} / S_2)_{\text{Suboptimo}} &\cong Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)
 \end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra la variación en dB al comparar las gaussianas de menor área entre sí y de mayor área entre sí:

$\sqrt{\cdot}$ (Argumento Q)	MAP	Sub-óptimo	Pérdida de $\frac{E_b}{N_0}$ en lineal	Pérdida de $\frac{E_b}{N_0}$ en dB
Mayor área	$0.5184 \frac{E_b}{N_0}$	$\frac{E_b}{N_0}$	$10 \log_{10}(0.5185)$	-2.8 dB
Menor área	$3.277 \frac{E_b}{N_0}$	$2 \frac{E_b}{N_0}$	$10 \log_{10}\left(\frac{3.277}{2}\right)$	+2.14 dB

Dado que en la aproximación final, quedan dos “áreas de gaussiana” para cada caso, no se puede generalizar para este caso la pérdida global de $\frac{E_b}{N_0}$, ya que depende precisamente de este cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Además únicamente se ha calculado la probabilidad de error condicionada a uno de los 4 símbolos, y dado que los 4 no tienen regiones simétricas para el detector MAP, ni funciones de densidad de probabilidad de igual varianza, un estudio exhaustivo de la pérdida de $\frac{E_b}{N_0}$, requeriría el cálculo de la probabilidad de error completa.