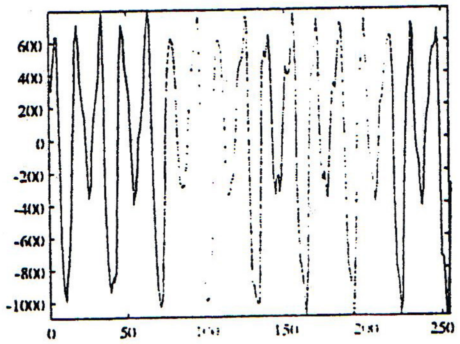
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

PROCESADO DE SENYAL — 14 de Enero de 1999

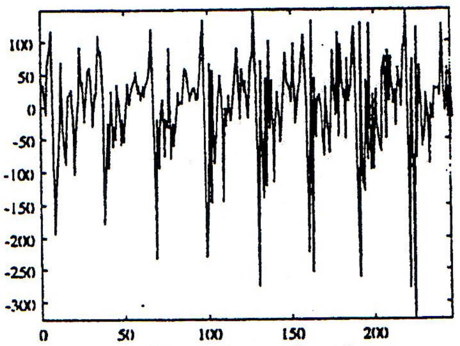
Profesores: J. Hernando, M. A. Lagunas, E. Monte, J. Vidal — **Tiempo: 3 h.**

Ejercicio 1

Se pretende construir un codificador de voz basado en la predicción "a corto plazo" de la señal, es decir usando un predictor de 10 coeficientes. La señal de entrada (voz) y salida (error de predicción) cuando los coeficientes del predictor son los óptimos están representadas en la figura:



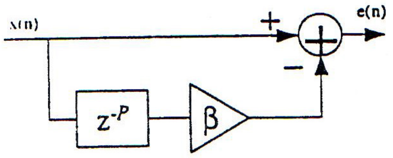
Señal de voz



Error de predicción

a) Explique brevemente porqué en la señal de error de predicción $x(n)$ aparece una periodicidad y esboce la densidad espectral de potencia del error de predicción.

Se propone que, antes de cuantificar el error de predicción, se utilice otro predictor "a largo plazo" que aproveche la correlación temporal de $x(n)$ y blanquee la señal completamente. El predictor será de un solo coeficiente y los parámetros a determinar son el valor del coeficiente β y el del retardo P (ver figura siguiente).



Se pide que:

b) Encuentre el valor de β (en función de P) que minimiza la potencia de $e(n)$.

c) Sustituyendo el valor anterior, obtenga una expresión para $J = \mathrm{E}\{e^2(n)\}$. En vista de la expresión, indique un método para encontrar el valor óptimo de P.

d) Esboce $|H(\omega)|^2$ con $H(\omega) = \dfrac{E(\omega)}{X(\omega)}$ para $\beta = 1$ y un valor genérico de P.

e) A partir de $|H(\omega)|^2$ y de la densidad espectral de potencia de $x(n)$ encontrada en el apartado a), razone por qué la densidad espectral de potencia de $e(n)$ es plana.

Ejercicio 2

Definido un filtro FIR según la ecuacion y(n)=$\underline{A}_n^T.\underline{X}_n$ siendo:

$$A_n^T = [a(0), a(1)......, a(Q-1)] \qquad X_n^T = [x(n), x(n-1),......., x(n-Q+1)]$$

donde el superíndice (T) indica traspuesto, se pretende analizar el comportamiento de éste cuando se desea obtener una salida y(n) lo mas proxima a una señal de referencia d(n) en sentido de mínimo error cuadratico medio ξ. El metodo de diseño es adaptativo usando el algoritmo LMS.

Responda a las siguientes preguntas:

1) Considerando que en el instante n el filtro implementado es $\underline{A}_n$, demuestre que el error cuadrático medio (MSE) ξ vendría dado por la expresión:

$$\xi_n = \xi_{min} + \underline{a}_n^T \underline{\underline{R}}\, \underline{a}_n$$

donde $\underline{a}_n = A_n - A_{opt}$, A_{opt} es la solución de Wiener, $\underline{\underline{R}}$ es la matriz de autocorrelación de la señal de entrada $x(n)$ de orden Q, y ξ_{min}es la potencia del error para la solución óptima de Wiener.

2) Dado que $\underline{A}_n$, en un algoritmo estocástico como el LMS, pasa a ser un vector de variables aleatorias, entonces también ξ_n será una variable aleatoria. Demuestre que el valor esperado de ξ_n viene dado por

$$E\{\xi_n\} = \xi_{min} + traza(\underline{\underline{\Delta}}_n \underline{\underline{R}})$$

donde $traza(.)$ indica la suma de los elementos de la diagonal y $\underline{\underline{\Delta}}_n$ es la matriz de correlación $\underline{\underline{\Delta}}_n = E\{\underline{a}_n.\underline{a}_n^T\}$

(NOTA: Úsese la relación general $\underline{b}^T \underline{\underline{R}}\, \underline{b} = \sum_i \sum_j r_{i,j} b_i b_j$).

Considere a partir de ahora que la regla de adaptación de los coeficientes es $\underline{A}_{n+1} = \underline{A}_n + \mu.\underline{X}_n.(d(n) - y(n))$ y que se encuentra en la zona donde el algoritmo ha convergido, es decir,

$$E\{\underline{a}_{n+1}.\underline{a}^T_{n+1}\} = E\{\underline{a}_n.\underline{a}_n^T\} = \underline{\underline{\Delta}}$$

Además, considere para resolver el próximo apartado que $E\{\varepsilon(n) X_n \underline{a}_n^T\} = -\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{\Delta}}$ siendo $\varepsilon(n) = d(n) - y(n)$.

3) Busque una expresión para $traza(\underline{\underline{\Delta}}\underline{\underline{R}})$ en la convergencia a partir del cálculo de $E\{\underline{a}_{n+1}.\underline{a}_{n+1}^T\}$ y suponiendo independencia estadística entre $\varepsilon(n)$ y x(n). Usando la expresión encontrada demuestre que el desajuste del algoritmo LMS viene dado por:

$$M = \frac{E(\xi) - \xi_{min}}{\xi_{min}} = \left(\frac{\mu}{2}\right) traza(\underline{\underline{R}})$$

4) Calcule cómo se incrementa el desajuste del algoritmo si los coeficientes del filtro, comprendidos entre +1 y −1, se cuantifican con b bits y cómo ha de modificarse el parámetro de adaptación μ para hacer que el desajuste se mantenga igual que sin cuantificación de coeficientes. Modele el cuantificador como una fuente de ruido sobre cada coeficiente, siendo estos ruidos independientes entre si.

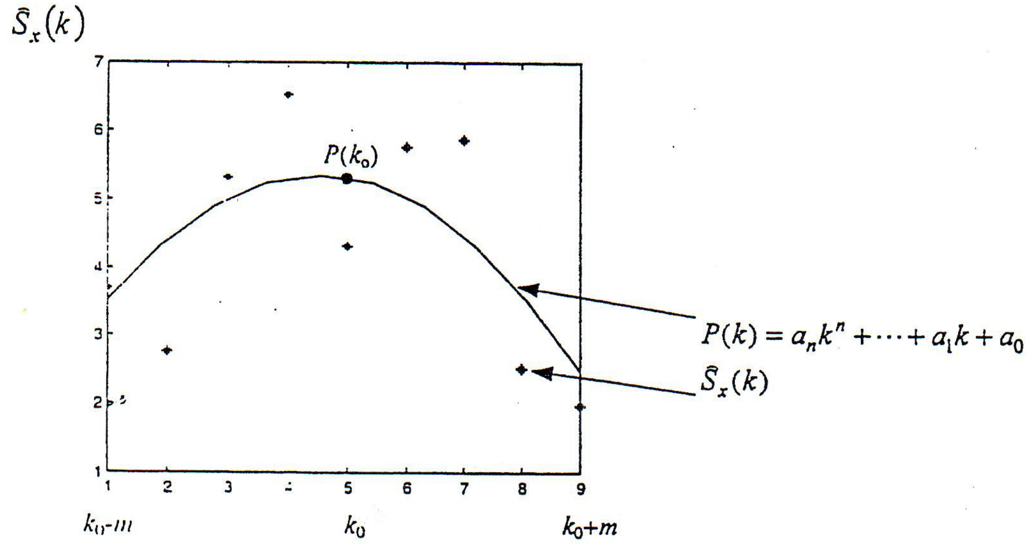
5) Demuestre que el desajuste permite conocer la relación señal ($d(n)$) a ruido ($\varepsilon(n)$) SNR a la salida del filtro adaptativo en comparación a la optima según la siguiente relación:

$$M = \left(\frac{SNR_{opt}}{SNR}\right) - 1$$

Ejercicio 3

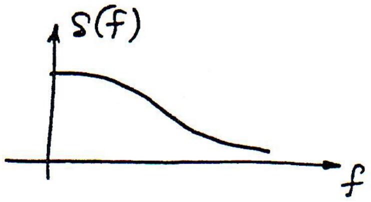
El objetivo de este problema es estudiar un método de alisado de espectros (Savitzky-Golay) que permite remediar el problema de la variancia en la estimación del periodograma.

Partiendo de N puntos equiespaciados del periodograma $\hat{S}_x(k)$ (con k=[0,…, N-1]), se calcula una nueva estimación $P(k)$ para cada valor de k consistente en una interpolación polinómica de grado n usando los valores $\hat{S}_x(k-m),\ldots, \hat{S}_x(k),\ldots, \hat{S}_x(k+m)$ (ver la figura). Obsérvese que calcularemos un polinomio distinto por punto del espectro.

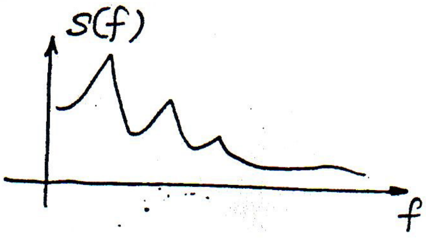


1) Justifique la elección del grado adecuado del polinomio para los espectros siguientes:

Paso bajo suave:



Paso bajo con picos:



2) Queremos hacer una estimación de los coeficientes del interpolador $P(k) = a_2k^2 + a_1k + a_0$ siguiendo el criterio de error cuadrático mínimo. Plantee las ecuaciones para encontrar $[a_2, a_1, a_0]$ si se usan los valores del espectro: $\hat{S}_x(k_0 - m), \cdots, \hat{S}_x(k_0), \cdots, \hat{S}_x(k_0 + m)$

En los siguientes apartados considere que $P(k) = a_0$.

3) Calcule la resolución del estimador, como separación mínima de dos picos espectrales para que éstos puedan identificarse.

4) Calcule la varianza del estimador suponiendo que la covarianza entre muestras del periodograma es cero.

5) Comente el compromiso que se ha de tomar en la elección de m.