UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona **DEPARTAMENT DE TSC**	**Comunicaciones II** 9 Juny 2006 Data notes provisionals: 22 Juny 2006 (19h) Període d'al.legacions: 23 a 28 de Juny 2006 Data notes revisades: 30 de Juny 2006

Professors: Montserrat Nájar, Ana Pérez Neira, Javier Rodríguez Fonollosa, Gregori Vázquez.

Informacions addicionals:

- Durada de la prova: 3 hores

Problema 1

En este problema se analizan las modulaciones de tipo QAM cuadradas *perfectas* como QPSK (4-QAM), 16-QAM, 64-QAM, 256-QAM, es decir M-QAM con $M = 2^{2b}$, y su utilización modulando de forma independiente y con tamaños de constelación posiblemente distintos subportadoras en un sistema OFDM. Todos los cálculos pueden realizarse directamente sobre los equivalentes paso bajo complejos.

En primer lugar definimos la siguiente modulación M-QAM en banda base como:

$$s_b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_m[n] j(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(I_m[n] + jQ_m[n]\right) j(t - nT) \quad ; \quad j(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Donde $s_m[n]$ es el símbolo complejo transmitido en el periodo de símbolo nT. Las componentes en fase y cuadratura contienen cada una de ellas b bits independientes y toman los valores $I_m[n], Q_m[n] = \left(\frac{2m-1-\sqrt{M}}{2} d\right)$; $m \in \left\{1, \cdots, \sqrt{M}\right\}$; $\sqrt{M} = 2^b$. Se supone recepción en banda base en presencia de ruido gaussiano blanco aditivo (AWGN) complejo $w_I(t) + jw_Q(t)$ independientes entre si y de densidad espectral $S_{w_I}(f) = S_{w_Q}(f) = \frac{N_0}{2}$.

a) Calcule la energía por bit E_b en función de d y de M para las componentes en fase y cuadratura. Utilice la expresión proporcionada en la nota de ayuda.

b) Suponiendo codificación Gray en cada componente obtenga justificadamente una expresión de la probabilidad de error de bit de la modulación M-QAM exprésela mediante la función $Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left(-\frac{l^2}{2}\right) dl$ en función de M y de $\frac{E_b}{N_0}$.

c) Utilizando la función inversa de $Q(x)$, que denominamos $Q^{-1}(y)$ y que se define como: $Q^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = Q(x)$, proporcione una expresión de la $\frac{E_b}{N_0}$ necesaria para asegurar una probabilidad de error dada BER en función de M y BER.

Las constelaciones M-QAM se utilizan frecuentemente para modular las subportadoras de esquemas OFDM con prefijo cíclico definidas según la expresión siguiente:

$$s_b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{s}_{mk}[n] j_k(t - nT) \quad ; \quad j_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T - T_{CP}}} \exp\left(j2p \frac{k}{T - T_{CP}} (t - T_{CP})\right) \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \quad ; \quad k \in \{0, \cdots, N-1\}$$

En donde $\mathbf{s}_{mk}[n]$ se define con componentes en fase y cuadratura igual que $\mathbf{s}_m[n]$ en los apartados anteriores y **con un número de bits** b_k **y tamaño de la constelación** M_k **posiblemente distinto en cada subportadora** k. En el receptor se utilizará un banco de filtros adaptados que ignora la parte de señal transmitida durante el periodo cíclico:

$$y_k(t) = \begin{cases} j_k^*(T-t) \quad ; \quad t \in [0, T-T_{CP}] \\ 0 \quad ; \quad t \notin [0, T-T_{CP}] \end{cases}$$

d) La utilización del prefijo cíclico tiene como consecuencia que la potencia transmitida no se aprovecha íntegramente en el receptor. Exprese la energía por bit utilizada en transmisión en la subportadora k, E_{bk} en función de la varianza de los símbolos $E_{s_k} = E\left[\left|\mathbf{s}_{mk}[n]\right|^2\right]$, de M_k y de $g_{CP} = \frac{T_{CP}}{T}$.

NOTA: Inicie a partir del siguiente apartado en una hoja nueva.
Copie los resultados de los apartados b) y d)

e) Suponiendo transmisión en canal lineal e invariante con el tiempo de respuesta impulsional equivalente en banda base $h_c(t)$ de duración inferior a T_{CP} **proporcione razonadamente** una expresión matricial del vector de la señal recibida a la salida de los filtros adaptados $\mathbf{y}$ en función de $H_c[k] = \int_0^{T_{CP}} h_c(t) \exp\left(-j2p \frac{k}{T-T_{CP}} t\right) dt$ y del vector de símbolos transmitidos:

$$\mathbf{s}_m = \begin{bmatrix} s_{m1} \\ \vdots \\ s_{mN} \end{bmatrix}$$

A partir de ahora supondremos:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_c \mathbf{s}_m + \mathbf{n}_I + j\mathbf{n}_Q \quad ; \quad \mathbf{n}_I, \mathbf{n}_Q : N(\mathbf{0}, \tfrac{N_0}{2}\mathbf{I})$$

f) Demuestre que la detección independiente en cada suportadota es óptima según el criterio MAP con símbolos equiprobables. Suponiendo conocido el canal de forma perfecta, proporcione una expresión de la probabilidad de error en cada subportadora en función de E_{bk}, de M_k, de g_{CP} y de $H_c[k]$.

g) Utilizando la función $Q^{-1}(y)$ definida en el apartado c), calcule $\frac{E_b}{N_0}$ necesaria utilizando una constelación 16-QAM en canal ideal para asegurar una probabilidad de error dada BER. **En la expresión de la probabilidad de error calculada en el apartado anterior, considere exclusivamente el argumento de la función** $Q(x)$ (es decir, desprecie los términos lineales o multiplicativos de la función $Q(x)$ de la BER). Indique los valores mínimos de $\left|H_c[k]\right|^2$ que permitirían la utilización de una constelación 4-QAM (QPSK) y 64-QAM en la subportadora k con aproximadamente la misma probabilidad de error BER y la misma $\frac{E_b}{N_0}$.

Problema 2 (a iniciar en hoja nueva)

En las transmisiones cable multiportadora, las denominadas interferencias FEXT introducen acoplo entre las diferentes comunicaciones a una misma frecuencia. A continuación se estudiarán posibles técnicas para combatir la degradación que este acoplo introduce. Considere que a una frecuencia la transmisión entre K comunicaciones o usuarios se puede modelar como

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\,\mathbf{a} + \mathbf{n} \qquad \textbf{(1)}$$

en donde $\mathbf{a}$ recoge los símbolos de las K usuarios, $\mathbf{a} = \left[a_1\ a_2 \cdots a_K\right]^T$ con $a_i \in \{\pm A\}$, siendo símbolos independientes y equiprobables, **H** es el canal que modela el acoplo que sufren los *K* usuarios

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \cdots & & h_{1K} \\ h_{21} & 1 \cdots & h_{2K} \\ \vdots & \ddots & \\ h_{K1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

El ruido del canal es blanco, Gaussiano de densidad espectral $S_w(f)=No/2$ que, después de ser filtrado en el receptor por un banco de filtros ortonormales, resulta $\mathbf{n} = \left[n_1\, n_2 \cdots n_K\right]^T$. Finalmente $\mathbf{y} = \left[y_1\ y_2 \cdots y_K\right]^T$ contiene la salida de los K filtros adaptados después de ser muestreada correctamente.

a) Suponiendo receptores monousuario, obtenga una cota de la BER, en función de A, No y de los coeficientes de **H**, para la comunicación i=1 e indique qué condición se ha de cumplir para que $BER \leq 0.5$

Con el objetivo de eliminar las interferencias entre los usuarios se considera que tanto el transmisor como el receptor conocen el canal y se propone, en el caso más general, ecualizar en transmisión con una matriz **E** que multiplica a los símbolos $\mathbf{a}$ antes de ser transmitidos y en recepción con una matriz **R** que multiplica a los símbolos $\mathbf{y}$ a la salida de los filtros adaptados. Por lo tanto, considere

$$\mathbf{r} = \mathbf{RHE}\,\mathbf{a} + \mathbf{Rn}$$

Si cada matriz de canal se puede descomponer como $\mathbf{H} = \mathbf{UVW}^T$ en donde

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I} \quad \mathbf{W}^T\mathbf{W} = \mathbf{I} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 \cdots & v_2 & \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots & 0 \cdots & v_K \end{bmatrix}$$

b) Indique cuáles son las matrices de ecualización del transmisor, **E**, y del receptor, **R**, para que la comunicación final quede como **r = V a + z**

c) Demuestre que, en el caso del apartado anterior, el receptor óptimo es un receptor mono-usuario y obtenga la BER para cada usuario en función de la A, No y de la ganancia resultante de la ecualización.

A continuación, y con el objeto de mejorar la transmisión se modifica la potencia con la que se transmite cada símbolo de cada usuario, de modo que la señal recibida a la salida del ecualizador pasa a ser

$$\mathbf{r} = \mathbf{V\,C\,a} + \mathbf{z} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 \cdots & c_2 & \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 \cdots & 0 \cdots & c_K \end{bmatrix}$$

d) Obtenga la nueva BER de cada comunicación y dé el valor de cada c_j, j=1...K que hace que todas las BER sean iguales.

NOTA: Inicie a partir del siguiente apartado en una hoja nueva.

A partir de ahora, considere el caso de 2 comunicaciones, es decir, K=2, con $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$. Para este caso $\mathbf{U} = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$

e) Teniendo en cuenta este canal, si se define la Energía de bit total, Eb, como la suma de las energías de los dos usuarios: $E_b = E_{b1} + E_{b2}$, halle el valor de la Eb total entre los 2 usuarios que se ha de transmitir en el caso del apartado **d** y obtenga la BER de cada usuario en función de dicha Eb total.

En lugar de repartir la cancelación de interferencias entre transmisor y receptor se propone a continuación hacerlo únicamente en uno de los extremos.

f) Diseñe para el caso K=2 expuesto cuál es el decorrelador (forzador de ceros) que tendría que emplearse en el transmisor o en el receptor con el objetivo de anular la interferencia multiusuario.

g) Calcule, en función de la Eb total transmitida, la BER que se obtiene cancelando en el transmisor y después cancelando en el receptor. Compare ambos resultados

h) Indique cuál de los tres esquemas de cancelación (apartados **e** y **g**) es más conveniente en términos de BER a igualdad de Eb total transmitida.

i) Conside el caso de K=2 y plantee cuál sería el diseño del receptor óptimo. A su vez dé una cota de la BER.

Notas de ayuda

$$\frac{1}{P}\sum_{m=1}^{P}\left(\frac{2m-1-P}{2}\right)^2 = \frac{P^2-1}{12} \qquad \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ac-bd)}\begin{pmatrix} c & -d \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Resolución Ejercicio 1

a.-

$$y = a_1 + \sum_{i=2}^{K} h_{1i} a_i + n$$

$$BER \le Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_o}\left|1 - \sum_{j=2}^{K}\left|h_{1j}\right|\right|^2}\right)$$

$$BER < 0.5 \qquad si \qquad \sum_{j=2}^{K}\left|h_{1j}\right| < 1$$

b.-

$$\mathbf{r} = \mathbf{V}\,\mathbf{a} + \mathbf{z} = \mathbf{R}\,\mathbf{H}\,\mathbf{E}\,\mathbf{a} + \mathbf{R}\,\mathbf{n}$$

$$Si \quad \mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{W}^T$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{W} \quad en \quad transmision$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}^T en \quad recepción$$

c.-

r(k)=v(k) a(k) + z(k)

$$s_z^2 = E\left\{\left|z(k)\right|^2\right\} = E\left\{\mathbf{U}^T\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{U}\right\} = \frac{N_o}{2}$$

$$BER_k = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_o}\left|v_k\right|^2}\right)$$

d.-

r(k)=v(k) c(k) a(k) + z(k)

$$BER_k = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_o}\left|v_k\right|^2\left|c_k\right|^2}\right)$$

$$BER_k = BER \quad si \quad \left|c_k\right| = \frac{1}{\left|v_k\right|}$$

e.-

$$E_b = E_{b1} + E_{b2} = A^2\,\frac{40}{9}$$

$$BER_k = Q\left(\sqrt{\frac{9}{40}\,2\,\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

f.-

Si sólo en transmisión: $\mathbf{E} = \mathbf{H}^{-1} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$

Si sólo en recepción: $\mathbf{R} = \mathbf{H}^{-1}$

g.-

Con ecualización en transmisión

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\,\mathbf{H}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{n} = \mathbf{a} + \mathbf{n}$$

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_o}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{2.5}}\right)$$

$$E_b = \left|\mathbf{H}^{-1}\mathbf{a}\right|^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left\|\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right\|^2 = 2.5A^2\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Con ecualización en recepción

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\,\mathbf{a} + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{n} = \mathbf{a} + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{n}$$

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{s_n^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{2.5}}\right)$$

$$E_b = 2A^2$$

$$s_n^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left|n_1 - 0.5n_2\right|^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{N_o}{2} 2.5$$

Ambas BER coinciden

h.-

En los tres casos, las BER coinciden.

Resolución Ejercicio 2

En este problema se analizan las modulaciones de tipo QAM cuadradas *perfectas* como QPSK (4-QAM), 16-QAM, 64-QAM, 256-QAM, es decir M-QAM con $M = 2^{2b}$, y su utilización modulando de forma independiente y con tamaños de constelación posiblemente distintos subportadoras en un sistema OFDM. Todos los cálculos pueden realizarse directamente sobre los equivalentes paso bajo complejos.

En primer lugar definimos la siguiente modulación M-QAM en banda base como:

$$s_b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_m[n] j(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(I_m[n] + jQ_m[n]\right) j(t-nT) \quad ; \quad j(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

Donde $s_m[n]$ es el símbolo complejo transmitido en el periodo de símbolo nT. Las componentes en fase y cuadratura contienen cada una de ellas b bits independientes y toman los valores $I_m[n], Q_m[n] = \left(\frac{2m-1-\sqrt{M}}{2} d\right)$; $m \in \left\{1, \cdots, \sqrt{M}\right\}$; $\sqrt{M} = 2^b$. Se supone recepción en banda base en presencia de ruido gaussiano blanco aditivo (AWGN) complejo $w_I(t) + jw_Q(t)$ independientes entre si y de densidad espectral $S_{w_I}(f) = S_{w_Q}(f) = \frac{N_0}{2}$.

a) Calcule la energía por bit E_b en función de d y de M para las componentes en fase y cuadratura. Utilice la expresión proporcionada en la nota de ayuda.

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_2 M} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^{\sqrt{M}} \left(\frac{2m-1-\sqrt{M}}{2} d\right)^2 = \frac{2d^2}{\log_2 M} \frac{M-1}{12} = \frac{(M-1)d^2}{6\log_2 M}$$

b) Suponiendo codificación Gray en cada componente obtenga justificadamente una expresión de la probabilidad de error de bit de la modulación M-QAM exprésela mediante la función $Q(x) \triangleq \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left(-\frac{l^2}{2}\right) dl$ en función de M y de $\frac{E_b}{N_0}$.

$$P_e^I = P_e^Q = P_e^{\sqrt{M}PAM} = \frac{1}{\sqrt{M}}\left(Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) + (\sqrt{M}-2)2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) + Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right) = \frac{2\sqrt{M}-2}{\sqrt{M}} Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{M}-2}{\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Con codificación Gray $BER^I = BER^Q = \frac{1}{b} P_e^I = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_2 M} \frac{2\sqrt{M}-2}{\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right) =$

$$= \frac{4}{\log_2 M}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$BER^{M-QAM} = \tfrac{1}{2} BER^I + \tfrac{1}{2} BER^Q = \frac{4}{\log_2 M}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

c) Utilizando la función inversa de $Q(x)$, que denominamos $Q^{-1}(y)$ y que se define como: $Q^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = Q(x)$, proporcione una expresión de la $\frac{E_b}{N_0}$ necesaria para asegurar una probabilidad de error dada BER en función de M y BER.

$$BER = \frac{4}{\log_2 M}\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right) \Rightarrow BER\frac{\log_2 M}{4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)} = Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right) \Rightarrow Q^{-1}\left(BER\frac{\log_2 M}{4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)}\right) = \sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{M-1}{3\log_2 M}\left[Q^{-1}\left(BER\frac{\log_2 M}{4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)}\right)\right]^2$$

Las constelaciones M-QAM se utilizan frecuentemente para modular las subportadoras de esquemas OFDM con prefijo cíclico definidas según la expresión siguiente:

$$s_b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{s}_{mk}[n]j_k(t-nT) \quad ; \quad j_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}}\exp\left(j2p\frac{k}{T-T_{CP}}(t-T_{CP})\right)\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \quad ; \quad k\in\{0,\cdots,N-1\}$$

En donde $\mathbf{s}_{mk}[n]$ se define con componentes en fase y cuadratura igual que $\mathbf{s}_m[n]$ en los apartados anteriores y **con un número de bits** b_k **y tamaño de la constelación** M_k **posiblemente distinto en cada subportadora** k. En el receptor se utilizará un banco de filtros adaptados que ignora la parte de señal transmitida durante el periodo cíclico:

$$y_k(t) = \begin{cases} j_k^*(T-t) & ; \quad t\in[0,T-T_{CP}] \\ 0 & ; \quad t\notin[0,T-T_{CP}] \end{cases}$$

d) La utilización del prefijo cíclico tiene como consecuencia que la potencia transmitida no se aprovecha íntegramente en el receptor. Exprese la energía por bit utilizada en transmisión en la subportadora k, E_{bk} en función de la varianza de los símbolos $E_{s_k} \triangleq E\left[\left|\mathbf{s}_{mk}[n]\right|^2\right]$, de M_k y de $g_{CP} = \frac{T_{CP}}{T}$.

$$E_{bk}\log_2 M_k = E\left[\int_{nT}^{(n+1)T}\left|\mathbf{s}_{mk}[n]j_k(t-nT)\right|^2 dt\right] = \frac{1}{T-T_{CP}}\int_{nT}^{(n+1)T}E\left[\left|\mathbf{s}_{mk}[n]\right|^2\right]dt = \frac{T}{T-T_{CP}}E_{s_k} = \frac{1}{1-g_{CP}}E_{s_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{bk} = \frac{1}{\log_2 M_k(1-g_{CP})}E_{s_k}$$

NOTA: Inicie el siguiente apartado en una hoja nueva.
Copie los resultados de los apartados b) y d)

e) Suponiendo transmisión en canal lineal e invariante con el tiempo de respuesta impulsional equivalente en banda base $h_c(t)$ de duración inferior a T_{CP} **proporcione razonadamente** una expresión matricial del vector de la señal recibida a la salida de los filtros adaptados **y** en función de $H_c[k] = \int_0^{T_{CP}} h_c(t)\exp\left(-j2p\frac{k}{T-T_{CP}}t\right)dt$ y del vector de símbolos transmitidos:

$$\mathbf{s}_m = \begin{bmatrix} s_{m1} \\ \vdots \\ s_{mN} \end{bmatrix}$$

Ignorando inicialmente la presencia del ruido:

$$y_k[n]=y_k((n+1)T)=\left(s_b(t)*h(t)\right)*y_k(t)\Big|_{t=(n+1)T}=\int_{nT+T_{CP}}^{(n+1)T}\left(s_b(l)*h_c(l)\right)j_k^*(-nT+l)dl=$$

$$\sum_{l=0}^{N-1}\int_{nT+T_{CP}}^{(n+1)T}\int_0^{T_{CP}}h_c(t)\mathbf{s}_{ml}[n]\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}}\exp\left(j2p\tfrac{l}{T-T_{CP}}(l-t-nT-T_{CP})\right)\Pi\left(\tfrac{l-t-nT-T/2}{T}\right)}_{j_l(l-t-nT)}$$

$$\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}}\exp\left(-j2p\tfrac{k}{T-T_{CP}}(l-nT-T_{CP})\right)}_{j_k^*(l-nT)}dl\,dt=$$

$$\tfrac{1}{T-T_{CP}}\sum_{l=0}^{N-1}\int_{nT+T_{CP}}^{(n+1)T}\mathbf{s}_{ml}[n]\exp\left(j2p\tfrac{l-k}{T-T_{CP}}(l-nT-T_{CP})\right)dl\int_0^{T_{CP}}h_c(t)\exp\left(-j2p\tfrac{l}{T-T_{CP}}t\right)dt=$$

$$=\tfrac{1}{T-T_{CP}}\sum_{l=0}^{N-1}H_c\left(\tfrac{l}{T-T_{CP}}\right)\mathbf{s}_{ml}[n]\int_0^{T-T_{CP}}\exp\left(j2p\tfrac{l-k}{T-T_{CP}}a\right)da=$$

$$=\sum_{l=0}^{N-1}H_c\left(\tfrac{l}{T-T_{CP}}\right)\mathbf{s}_{ml[n]}d[k-l]=H_c\left(\tfrac{k}{T-T_{CP}}\right)\mathbf{s}_{mk}[n]$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_{N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_c[0] & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & H_c[N-1]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{s}_{m0}\\ \vdots\\ \mathbf{s}_{m(N-1)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_0^I\\ \vdots\\ b_{N-1}^I\end{bmatrix}+j\begin{bmatrix}b_0^Q\\ \vdots\\ b_{N-1}^Q\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{H}_c\mathbf{s}_m+\mathbf{n}_I+j\mathbf{n}_Q$$

A partir de ahora supondremos:

$$\mathbf{y}=\mathbf{H}_c\mathbf{s}_m+\mathbf{n}_I+j\mathbf{n}_Q\quad;\quad\mathbf{n}_I,\mathbf{n}_Q\sim N(\mathbf{0},\tfrac{N_0}{2}\mathbf{I})$$

f) Demuestre que la detección independiente en cada suportadota es óptima según el criterio MAP con símbolos equiprobables. Suponiendo conocido el canal de forma perfecta, proporcione una expresión de la probabilidad de error en cada subportadora en función de E_{bk}, de M_k, de g_{CP} y de $H_c[k]$.

$$\hat{\mathbf{s}}_m=\arg\min_{\mathbf{s}_m}\left\|\mathbf{y}-\mathbf{H}_c\mathbf{s}_m\right\|^2=\arg\min_{s_{m0}\cdots s_{m(N-1)}}\sum_{k=0}^{N-1}\left|y_k-H_c[k]s_{mk}\right|^2=\arg\min_{s_{m0}\cdots s_{m(N-1)}}\sum_{k=0}^{N-1}e_k(s_{mk})$$

equivalente a:

$$s_{m0}=\arg\min_{s_{m0}}e_0(s_{m0})=\arg\min_{s_{m0}}\left|y_0-H_c[0]s_{m0}\right|^2$$

$$\vdots$$

$$s_{m(N-1)}=\arg\min_{s_{m(N-1)}}e_{N-1}(s_{m(N-1)})=\arg\min_{s_{m(N-1)}}\left|y_{N-1}-H_c[N-1]s_{m(N-1)}\right|^2$$

En cada portadora la recepción es M_k-QAM, por tanto:

$$BER_k=\tfrac{4}{\log_2 M_k}\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{M_k}}\right)Q\left(\sqrt{\tfrac{3\log_2 M_k}{M_k-1}\tfrac{|H_c[k]|^2E_{bk}(1-g_{CP})}{N_0}}\right)$$

g) Utilizando la función $Q^{-1}(y)$ definida en el apartado c), calcule $\frac{E_b}{N_0}$ necesaria utilizando una constelación 16-QAM en canal ideal para asegurar una probabilidad de error dada BER. **En la expresión de la probabilidad de error calculada en el apartado anterior, considere exclusivamente el**

argumento de la función $Q(x)$ (es decir, desprecie los términos lineales o multiplicativos de la función $Q(x)$ de la BER). Indique los valores mínimos de $\left|H_c[k]\right|^2$ que permitirían la utilización de una constelación 4-QAM (QPSK) y 64-QAM en la subportadora k con aproximadamente la misma probabilidad de error BER y la misma $\frac{E_b}{N_0}$.

$$BER = BER_k\Big|_{\substack{M_k=16\\ H_c[k]=1}} = \tfrac{3}{4} Q\left(\sqrt{\tfrac{4}{5}\tfrac{E_{bk}(1-g_{CP})}{N_0}}\right) \approx Q\left(\sqrt{\tfrac{4}{5}\tfrac{E_{bk}(1-g_{CP})}{N_0}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_{bk}}{N_0} = \frac{1}{4(1-g_{CP})}\left[Q^{-1}\left(BER\right)\right]^2 = \frac{E_b}{N_0}$$

$$\frac{3\log_2 4}{4-1}\frac{\left|H_c^{4-QAM}[k]\right|^2 E_b(1-g_{CP})}{N_0} \geq \frac{4}{5}\frac{E_b(1-g_{CP})}{N_0} \Rightarrow \left|H_c^{4-QAM}[k]\right|^2 \geq \frac{2}{5}$$

$$\frac{3\log_2 64}{64-1}\frac{\left|H_c^{4-QAM}[k]\right|^2 E_b(1-g_{CP})}{N_0} \geq \frac{4}{5}\frac{E_b(1-g_{CP})}{N_0} \Rightarrow \left|H_c^{64-QAM}[k]\right|^2 \geq \frac{42}{15}$$

Nota de ayuda