

Tema 4: Modulaciones Digitales
COMI
ETSETB-UPC

Este documento pretende ser una ayuda para el estudio del tema 4 de la asignatura COMI de la ETSETB (Plan de Ing. en Telecomunicaciones), UPC.

Margarita Cabrera
Profesora de Comunicaciones I
Dept. TSC
ETSETB-UPC
Noviembre, 2007

1	Modulaciones Digitales	2
1.1	Introducción.....	2
1.2	Modulaciones Digitales en banda base: PAM.....	2
1.2.1	Ejemplos básicos de Modulaciones PAM	4
1.3	Densidad Espectral de modulaciones digitales PAM	8
1.3.1	Autocorrelación de la secuencia de símbolos.....	9
1.3.2	Función de Autocorrelación.	11
1.3.3	Densidad Espectral.	12
1.3.4	Energía media de símbolo y Energía media de bit.	16
1.4	Probabilidad de error y BER (Bit Error Rate) sobre canales ideales AWGN	18
1.4.1	Sistema PAM AWGN	18
1.4.2	Cálculo de la Probabilidad de error 2PAM	19
1.4.3	Cálculo de la probabilidad de error modulación Bipolar	23
1.4.4	Comparación de BER para las tres modulaciones binarias.	25
1.4.5	Cálculo de la probabilidad de error para MPAM	26
1.4.6	Ejemplo: Canal con atenuación.	28
1.4.7	Cociente E_b/N_0	28
1.5	Canales con ISI y FTO	30
1.5.1	Efectos de la ISI en la Probabilidad de error.	30
1.5.2	Pulsos limitados en banda	32
1.5.3	Filtros Terminales Óptimos (FTO).....	33
1.5.4	Ecualización	37
1.5.5	Comparación FTO-Ecualización	40
1.6	Modulaciones Paso-Banda: QAM.....	42
1.6.1	Introducción.....	42
1.6.2	Densidad Espectral de las modulaciones QAM	43
1.6.3	BER para modulaciones digitales paso-banda y detección coherente....	45
1.6.4	BER para modulaciones digitales paso-banda binarias y detección coherente.....	49
1.7	Anexos.....	52
1.7.1	Anexo 1: Área de la Gaussiana	52
1.7.2	Anexo 2: Distribuciones de módulo y fase de una variable aleatoria compleja y Gaussiana	53

Agradezco a M. Pardás la rigurosa revisión realizada sobre este documento.

1 Modulaciones Digitales

1.1 Introducción

La principal diferencia entre los sistemas de comunicaciones analógicos y los digitales radica en la naturaleza del mensaje. En los sistemas de comunicaciones digitales el mensaje a transmitir consiste en una secuencia de bits. Además:

- Los sistemas digitales requieren en general un mayor ancho de banda que los analógicos. (Esta propiedad se puede comprobar cuando un mensaje de naturaleza analógica, se muestrea y cuantifica previamente a su transmisión por un sistema de comunicaciones digital).
- En los sistemas de comunicaciones digitales la calidad se mide mediante la probabilidad de detectar los bits erróneamente.
- Los sistemas digitales presentan capacidad regenerativa frente al ruido.
- En los sistemas digitales se pueden combinar o multiplexar señales de diferente naturaleza entre sí.

El mensaje a transmitir es una secuencia aleatoria de bits $b[n]$ caracterizada por las probabilidades y por la velocidad binaria de transmisión.

Probabilidades: $p_0 = \Pr\{b[n] = 0\}; p_1 = \Pr\{b[n] = 1\}; p_0 + p_1 = 1;$

Velocidad: r_b bps (bits/segundo)

Tiempo de bit: $T_b = \frac{1}{r_b}$ s g.

En general se considera la secuencia de bits como un proceso aleatorio discreto y estacionario. Las probabilidades de que cada uno de los bits sea '0' ó '1' no dependen de los bits anteriores. Por tanto se trata de una secuencia de bits estadísticamente independientes entre sí.

1.2 Modulaciones Digitales en banda base: PAM

En la Figura 1 se puede observar el diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones digitales en banda base. Se consideran modulaciones PAM (Pulse Amplitude Modulation o Modulación de Pulsos por Amplitud).

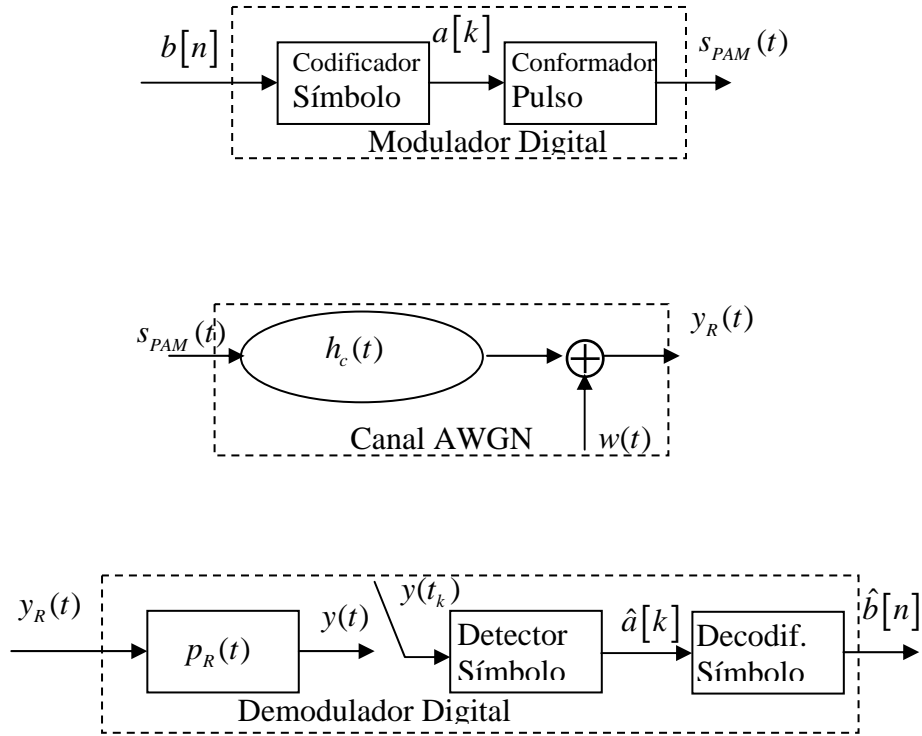


Figura 1 Sistema de Modulaciones Digitales en Banda Base.

Para formar la señal modulada PAM se deben realizar dos funciones: Codificación de símbolos y conformación de pulsos.

Mediante la codificación símbolo se formarán M símbolos a partir de cada b bits, dando lugar a la secuencia de símbolos $a[n]$. En general se cumple $M = 2^b$. La secuencia de símbolos resultante se produce a una velocidad de r símbolos/seg. o baudios y el tiempo en media disponible para transmitir cada símbolo es el tiempo o periodo de símbolo: T . Esta velocidad, obviamente se halla relacionada con la velocidad de bit. En las fórmulas que siguen pueden verse las principales relaciones entre los parámetros que hacen referencia a la velocidad, tanto de bits como de símbolos.

$$T_b = \frac{1}{r_b} \quad r = \frac{r_b}{b} \quad T = \frac{1}{r} \quad T = bT_b$$

Cuando el número de símbolos disponibles es $M=2$, $b=1$ se tiene una modulación binaria y en el resto de situaciones la modulación se denomina multinivel. Los posibles valores que puede tomar $a[n]$ en cada tiempo de símbolo son $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y denominaremos

$$\Pr\{a_m\} = \Pr\{a[n] = a_m\}$$

Cumpléndose que:

$$\sum_{m=1}^M \Pr\{a_m\} = 1$$

Mediante la conformación de pulso se forma la señal modulada y continua en tiempo $s(t)$, asignando a cada “b” bits un símbolo o amplitud $a[n]$ volts. que se transmite multiplicando a un pulso $p(t - nT)$.

Así la expresión obtenida para la señal modulada es:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p(t - nT) \quad (1)$$

1.2.1 Ejemplos básicos de Modulaciones PAM

Según el tipo de codificación utilizado para la secuencia de símbolos o según el pulso elegido de las modulaciones PAM se tendrán modulaciones de distinto tipo.

- Atendiendo a la codificación de símbolos $a[n]$ se clasifican las modulaciones PAM en Polar, Unipolar, Bipolar, etc..
- Atendiendo al pulso elegido $p(t)$ para la modulación se clasifican las modulaciones en NRZ (Non Return to Zero, sin retorno a cero), RZ (Return to Zero, con retorno a cero), modulaciones limitadas en banda, etc. Con el objeto de facilitar el análisis se consideran a lo largo de este tema pulsos normalizados de energía igual a 1:

$$E_p = \int p^2(t) dt = 1$$

Codificación Polar:

Se asignan valores positivos y negativos a la secuencia de símbolos con el objeto de tener polaridad nula.

Tabla para Modulación Polar Binaria. M=2, b=1. Se asigna un bit por símbolo.

Bits $b[n]$	Probabilidades	Símbolos a_m
0	P_0	$-\frac{A}{2}$
1	P_1	$\frac{A}{2}$

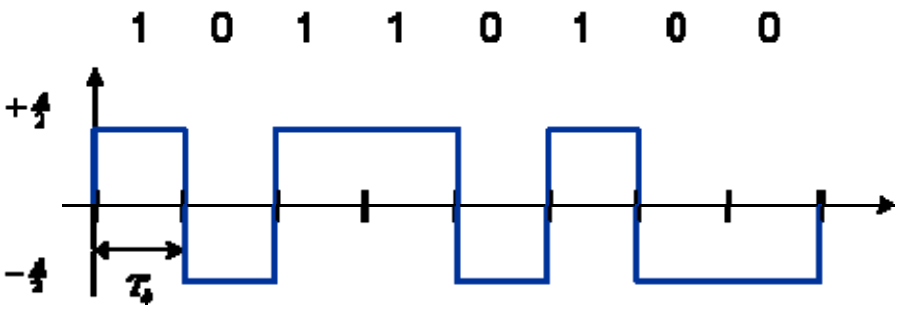


Figura 2 Ejemplo de Modulación PAM Binaria Polar pulso NRZ

Tabla para Modulación Polar de cuatro niveles. M=4, b=2. Se asignan dos bits por símbolo.

Bits $b[n]$	Probabilidades	Símbolos a_m
00	P_0P_0	$-\frac{3}{2}A$
01	P_0P_1	$-\frac{1}{2}A$
11	P_1P_1	$+\frac{1}{2}A$
10	P_1P_0	$+\frac{3}{2}A$

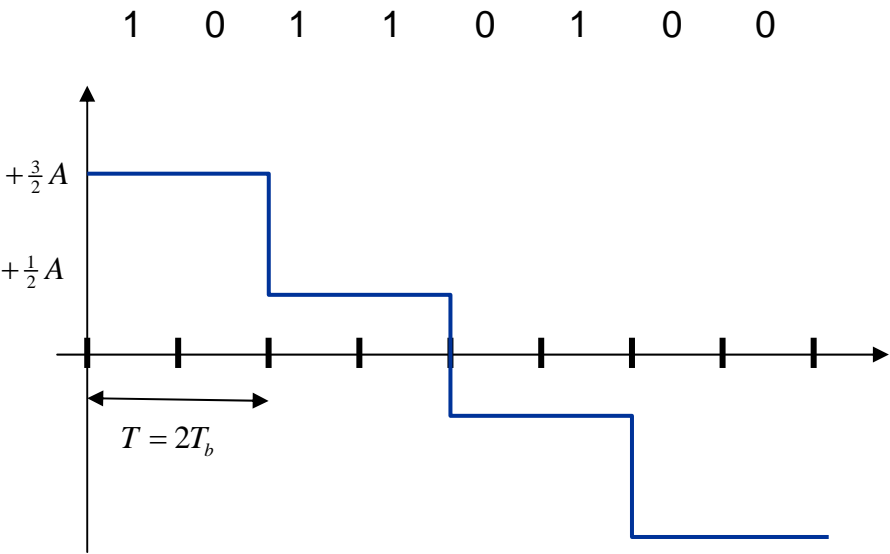


Figura 3 Ejemplo de Modulación PAM Polar M=4 niveles, pulso NRZ

Codificación Unipolar

Se asignan valores a la secuencia de símbolos de polaridad nula o positiva.

Tabla para Modulación UniPolar Binaria. M=2, b=1. Se asigna un bit por símbolo.

Bits $b[n]$	Probabilidades	Símbolos a_m
0	P_0	0

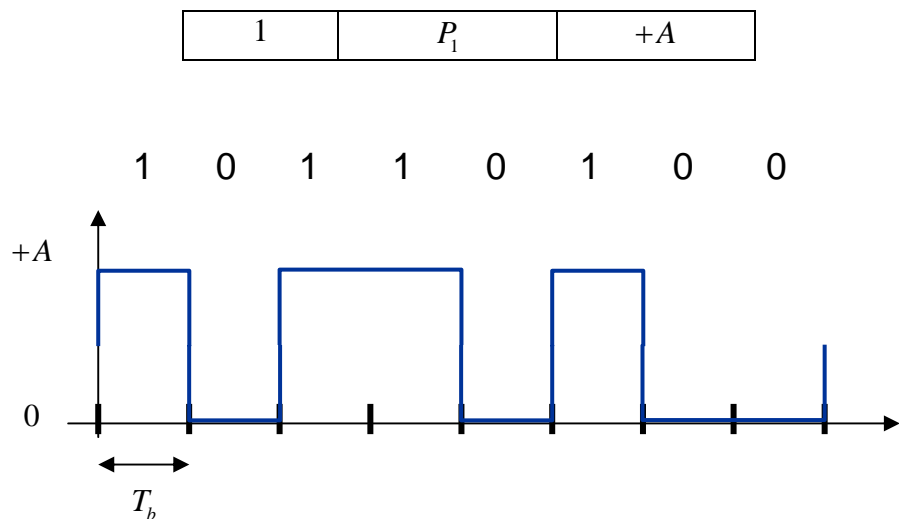


Figura 4 Ejemplo de Modulación PAM Binaria UniPolar pulso NRZ

Tabla para Modulación UniPolar de cuatro niveles. $M=4$, $b=2$. Se asignan dos bits por símbolo.

Bits $b[n]$	Probabilidades	Símbolos a_m
00	P_0P_0	0
01	P_0P_1	$+A$
11	P_1P_1	$+2A$
10	P_1P_0	$+3A$

Codificación Bipolar

Tabla para Modulación BiPolar. $M=2$, $b=1$. Se asigna 1 bit por símbolo: 0 volts para el bit ‘0’ y con alternancia de polaridad para el bit ‘1’.

Bits $b[n]$	Probabilidades	Símbolos a_m
0	P_0	0
1	P_1	$+A$ si '1' anterior se ha codificado negativo $-A$ si '1' anterior se ha codificado positivo

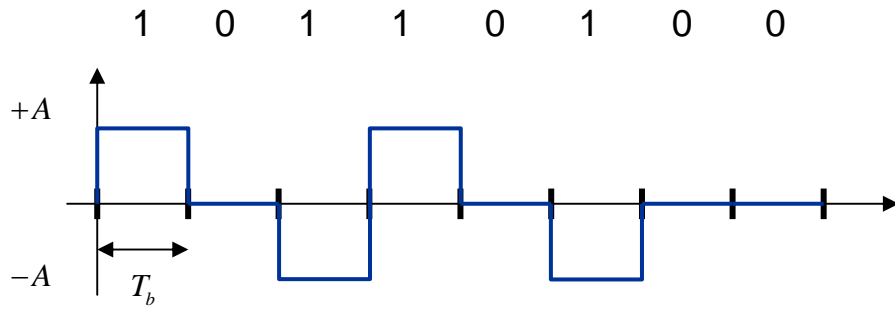


Figura 5 Ejemplo de Modulación PAM Binaria BiPolar pulso NRZ

Tipos de pulso

Cualquiera de los tipos de codificación anterior se puede combinar con diferentes tipos de pulso $p(t)$. Todos los ejemplos de las Figura 2, Figura 3, Figura 4 y Figura 5 se han formado mediante el pulso rectangular de duración igual al tiempo de símbolo:

$$p_{NRZ}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

Nota: En las figuras el pulso no se halla normalizado para tener energía igual a 1.

Otros tipos de pulso son:

Pulso con retorno a cero (RZ). Es un pulso rectangular con duración menor a la del tiempo de símbolo:

$$p_{RZ}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right); \quad \tau < T$$

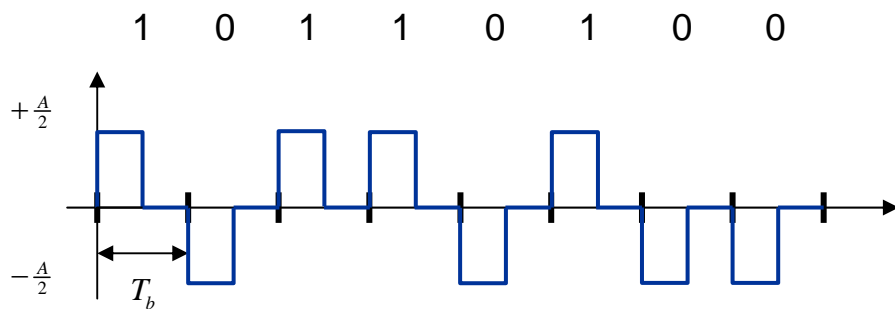


Figura 6 Ejemplo de Modulación PAM Binaria Polar pulso RZ

Tanto el pulso NRZ como el RZ presentan un contenido frecuencial extendido a todo el margen de frecuencias, por lo que no son prácticos para canales de ancho de banda limitado. En estos casos se suelen utilizar los pulsos “Root Raised Cosinus”. El caso más sencillo viene dado por

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \sqrt{r} \text{sinc}(tr)$$

que en el dominio de la frecuencia es igual a:

$$P(f) = \frac{1}{\sqrt{r}} \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

y por tanto el ancho de banda del pulso es $B_p = \frac{r}{2} = \frac{1}{2T}$. A partir de este punto y en este documento se denomina “pulso sinc” a este pulso.

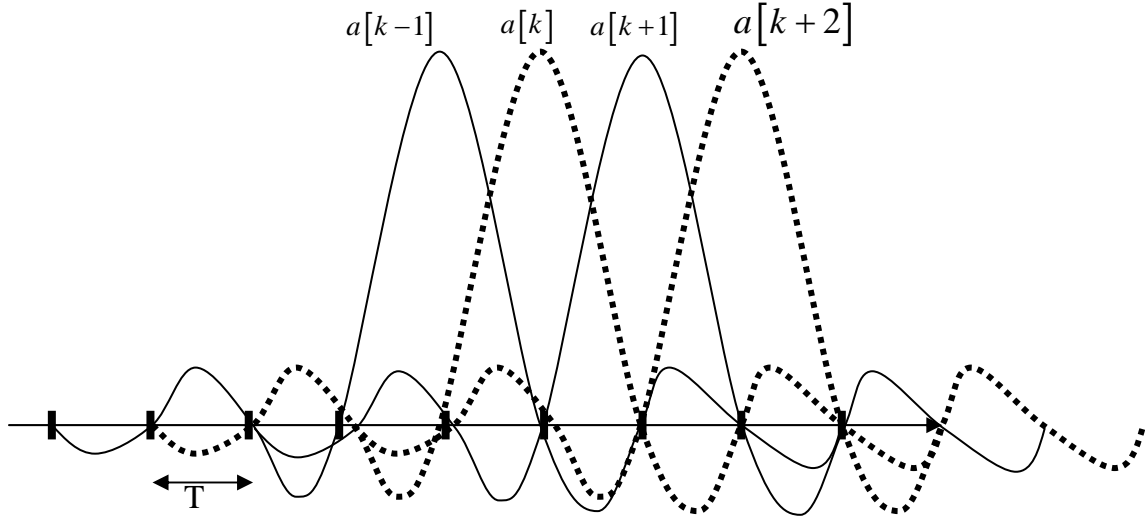


Figura 7 Modulación PAM con pulso sinc.

Las propiedades interesantes al elegir un pulso se suman en la siguiente ecuación:

$$R_p(nT) = E_p \delta[n]$$

Lo que se justifica al utilizar como filtro receptor el filtro adaptado al pulso:

$$s(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p(t - nT) + w(t) \longrightarrow \boxed{p(-t)} \longrightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] R_p(t - nT) + n(t)$$

1.3 Densidad Espectral de modulaciones digitales PAM

Dado que el ancho de banda necesario para adjudicar a una modulación es en general un recurso limitado, es de gran importancia conocer tanto la densidad espectral como el ancho de banda de las señales PAM. Debido a la naturaleza aleatoria de la secuencia de bits, estas señales resultan un proceso aleatorio. La función de autocorrelación de $s(t)$ depende de la función de autocorrelación de la secuencia de símbolos.

1.3.1 Autocorrelación de la secuencia de símbolos

Sea la secuencia de símbolos $a[n]$. En un primer análisis supondremos una secuencia aleatoria estacionaria y codificada sin memoria a partir de los bits. Esta segunda propiedad se traduce en que cada uno de los símbolos se codifica en función de los “b” bits/símbolo correspondientes, independientemente de los bits pasados y/o futuros. Es el caso de la codificación polar y de la codificación unipolar.

En estas situaciones la media estadística de la secuencia de símbolos se define y calcula como:

$$\mu_a[n] = E[a[n]] = \sum_{m=1}^M \Pr\{a_m\} a_m = \mu_a$$

y su función de autocorrelación como:

Definición:

$$R_a[k] = E[a[n+k]a[n]] = C_a[k] + \mu_a^2$$

Cálculo:

$$R_a[k] = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \Pr\{a[n+k] = a_m, a[n] = a_{m'}\} a_m a_{m'}$$

Para procesos codificados sin memoria resulta:

$$C_a[k] = \sigma_a^2 \delta[k]$$

$$R_a[k] = \sigma_a^2 \delta[k] + \mu_a^2 \quad (2)$$

Ejemplo 2PAM Polar de bits equiprobables:

$$\mu_a = 0$$

$$R_a[k] = C_a[k] = \frac{A^2}{4} \delta[k]$$

Ejemplo 2PAM UniPolar de bits equiprobables:

$$\mu_a = \frac{A}{2}$$

$$R_a[0] = \frac{A^2}{2}$$

$$R_a[k] = \frac{A^2}{4} \delta[k] + \frac{A^2}{4}$$

Ejemplo MPAM Polar de bits equiprobables:

Los símbolos resultan equiprobables:

$$a_m = \left\{ -\frac{(M-1)}{2} A, \dots, -\frac{1}{2} A, +\frac{1}{2} A, \dots, +\frac{(M-1)}{2} A \right\} = \frac{(-M-1+2m)}{2} A; \quad m = 1, \dots, M \quad \Pr\{a_m\} = \frac{1}{M}$$

Y por tanto

$$\mu_a = 0$$

$$R_a[k] = C_a[k] = \frac{M^2-1}{12} A^2 \delta[k]$$

En el cálculo de la varianza anterior se han utilizado las siguientes fórmulas de suma de series:

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}; \quad \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Ejemplo Bipolar de bits equiprobables:

Para la codificación bipolar no se cumple la condición de codificación sin memoria y por tanto, los valores de la función de autocorrelación para $k > 0$ deben calcularse directamente.

Probabilidad	$b[n]$	$a[n]$
$P_0 = \frac{1}{2}$	0	0
$\frac{P_1}{2} = \frac{1}{4}$	1	+A
$\frac{P_1}{2} = \frac{1}{4}$	1	-A

Tabla 1. Codificación de símbolos para 2PAM Bipolar

Probabilidad	$b[n]; b[n+1]$	$a[n]; a[n+1]$	$a[n] a[n+1]$
$\frac{1}{4}$	00	0;0	0
$\frac{1}{4}$	10	$\pm A; 0$	0
$\frac{1}{4}$	01	$0; \pm A$	0
$\frac{1}{4}$	11	$\pm A; \mp A$	$-A^2$

Tabla 2. Codificación de dos símbolos para 2PAM Bipolar

Pro b.	$b[n]; b[n+1]; b[n+2]$	$a[n]; a[n+1]; a[n+2]$	$a[n+2] a[n]$
$\frac{1}{8}$	000	0;0;0	0
$\frac{1}{8}$	001	$0; 0; \pm A$	0
$\frac{1}{8}$	010	$0; \pm A; 0$	0
$\frac{1}{8}$	011	$0; \pm A; \mp A$	0
$\frac{1}{8}$	100	$\pm A; 0; 0$	0
$\frac{1}{8}$	101	$\pm A; 0; \mp A$	$-A^2$
$\frac{1}{8}$	110	$\pm A; \mp A; 0$	0

$\frac{1}{8}$	111	$\pm A; \mp A; \pm A$	$+A^2$
---------------	-----	-----------------------	--------

Tabla 3. Codificación de tres símbolos para 2PAM BIpolar

A partir de Tabla 1, Tabla 2, Tabla 3 se obtiene:

$$\mu_a = A \frac{P_1}{2} - A \frac{P_2}{2} + 0P_0 = 0$$

$$R_a[0] = A^2 \frac{1}{4} + A^2 \frac{1}{4} = \frac{A^2}{2}; R_a[\pm 1] = -\frac{A^2}{4}; R_a[\pm 2] = A^2 \frac{1}{8} - A^2 \frac{1}{8} = 0$$

La expresión anterior se generaliza del siguiente modo:

$$R_a[k] = \begin{cases} +\frac{A^2}{2} & k = 0 \\ -\frac{A^2}{4} & k = \pm 1 \\ 0 & |k| > 1 \end{cases}$$

1.3.2 Función de Autocorrelación.

Previamente a la correlación se obtiene la media estadística de la señal modulada:

$$\begin{aligned} \mu_s(t) &= E[s(t)] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p(t-nT)\right] = \\ \mu_a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t-nT) &= \mu_s(t+T) \end{aligned}$$

Véase que depende periódicamente del origen de tiempos.

Autocorrelación de las modulaciones PAM:

$$\begin{aligned} R_s(t+\tau, t) &= E[s(t+\tau)s(t)] = \\ E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a[m] p(t+\tau-mT) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p(t-nT)\right] &= \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p(t+\tau-mT) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[a[m]a[n]] p(t-nT) &= \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p(t+\tau-mT) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_a[m-n] p(t-nT) \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $k = m - n \Rightarrow m = n + k$ se obtiene

$$\begin{aligned} R_s(t+\tau, t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t+\tau-(n+k)T) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_a[k] p(t-nT) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t+\tau-(n+k)T) p(t-nT) \end{aligned}$$

La función obtenida depende del origen de tiempos, pero la dependencia es periódica, como se comprueba a continuación:

$$R_s(t + \tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] f(t)$$

con

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t + \tau - (n+k)T) p(t - nT) = p(t + \tau - kT) p(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Por tanto el proceso $s(t)$ es cicloestacionario y su cicloperiodo tanto en media como en correlación coincide con el periodo de símbolo T .

1.3.3 Densidad Espectral.

La densidad espectral se obtiene aplicando el teorema de Wiener Kinchine:

$$S_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} R_s(t + \tau, t) dt e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{R}_s(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

Por tanto, como paso previo obtenemos la correlación promediada:

$$\begin{aligned} \bar{R}_s(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} R_s(t + \tau, t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t + \tau - (n+k)T) p(t - nT) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^T p(t + \tau - (n+k)T) p(t - nT) dt \end{aligned}$$

En las integrales se puede realizar el cambio de variable: $\lambda = t - nT$

$$\begin{aligned} \bar{R}_s(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-nT}^{-nT+T} p(\lambda + \tau - kT) p(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda + \tau - kT) p(\lambda) d\lambda = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] R_p(\tau - kT) \end{aligned} \quad (3)$$

Por tanto la correlación promediada se obtiene en función de la correlación de símbolos y de la función de autocorrelación del pulso utilizado en la modulación.

La densidad espectral resulta:

$$S_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{R}_s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] |P(f)|^2 e^{-j2\pi fkT}$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T} S_p(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] e^{-j2\pi fkT} \quad (4)$$

Particularizando para señales codificadas sin memoria :

Si en (4) se particulariza al caso de secuencias de símbolos codificados sin memoria aplicando (2):

$$S_s(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} S_p(f) + \frac{\mu_a^2}{T} S_p(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fkT} =$$

$$\frac{\sigma_a^2}{T} S_p(f) + \frac{\mu_a^2}{T^2} S_p(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) =$$

$$\frac{\sigma_a^2}{T} S_p(f) + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_p(\frac{k}{T}) \delta(f - \frac{k}{T}) =$$

$$\frac{\sigma_a^2}{T} S_p(f) + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_p(kr) \delta(f - kr)$$

Ejemplo: PAM Binaria Polar NRZ $|P_{NRZ}(f)| = \left| \frac{\text{sen}(\pi f T)}{\sqrt{T} \pi f} \right|$ y RZ a mitad de símbolo

$$|P_{RZ}(f)| = \left| \frac{\text{sen}(\pi f \frac{T}{2})}{\sqrt{\frac{T}{2}} \pi f} \right|:$$

$$S_{s-NRZ}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} S_p(f) = \frac{A^2}{4} \text{sinc}^2(fT_b)$$

$$S_{s-RZ}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} S_p(f) = \frac{A^2}{8} \text{sinc}^2(f \frac{T_b}{2})$$

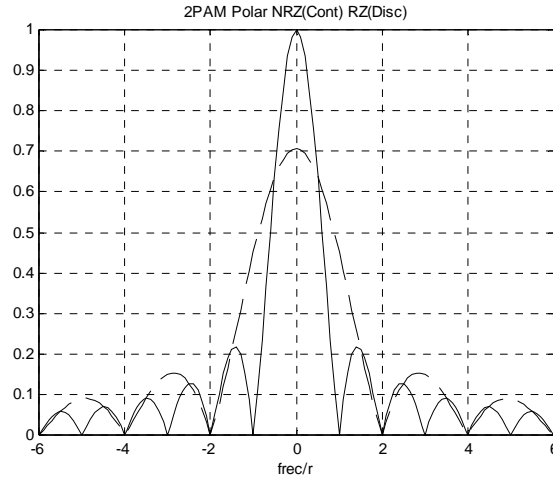


Figura 8 Espectro 2PAM Polar NRZ y RZ. Para facilitar la visión del espectro se ha representado la raíz cuadrada de la densidad espectral

Ejemplo: PAM Binaria UniPolar NRZ $|P_{NRZ}(f)| = \left| \frac{\text{sen}(\pi f T)}{\sqrt{T} \pi f} \right|$ y RZ a mitad de símbolo

$$|P_{RZ}(f)| = \left| \frac{\text{sen}(\pi f \frac{T}{2})}{\sqrt{\frac{T}{2}} \pi f} \right|:$$

$$S_{s-NRZ}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} S_p(f) + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_p(kr) \delta(f - kr) =$$

$$\frac{A^2}{4} \text{sinc}^2(fT_b) + \frac{A^2}{4} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(k) \delta(f - kr_b) =$$

$$\frac{A^2}{4} \text{sinc}^2(fT_b) + \frac{A^2}{4} \frac{1}{T} \delta(f)$$

$$S_{s-RZ}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} S_p(f) + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_p(kr) \delta(f - kr) =$$

$$\frac{A^2}{8} \text{sinc}^2(f \frac{T_b}{2}) + \frac{A^2}{8} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(\frac{k}{2}) \delta(f - kr_b)$$

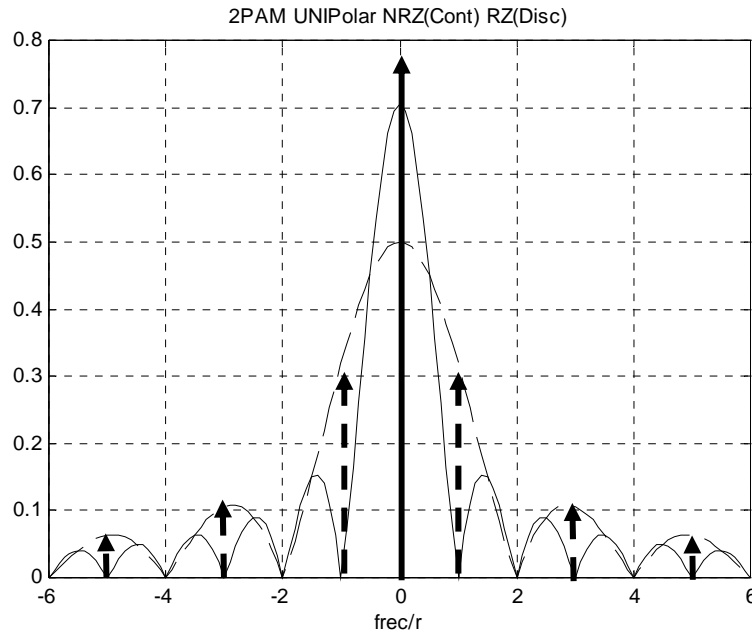


Figura 9 Espectro 2PAM Uni Polar NRZ y RZ. Para facilitar la visión del espectro se ha representado la raíz cuadrada de la densidad espectral

Ejemplo: Bipolar NRZ $|P_{NRZ}(f)| = \left| \frac{\text{sen}(\pi fT)}{\sqrt{T}\pi f} \right|$

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \frac{\sin^2(\pi fT)}{T\pi^2 f^2} \left(-\frac{A^2}{4} e^{j2\pi fT} + \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4} e^{-j2\pi fT} \right)$$

$$= \frac{A^2}{2} \text{sinc}^2(fT) (1 - \cos(2\pi fT)) = A^2 \text{sinc}^2(fT) \text{sen}^2(\pi fT)$$

En este ejemplo la correlación entre símbolos provoca que la densidad espectral de la señal modulada no sea directamente proporcional a la densidad espectral del pulso utilizado. Este efecto se denomina “pulse shaping”. Como puede apreciarse en la Figura 10, se ha obtenido un cero en el origen, lo que hace este tipo de modulación adecuada para comunicaciones en banda base con respuesta de canal defectuosa en el origen.

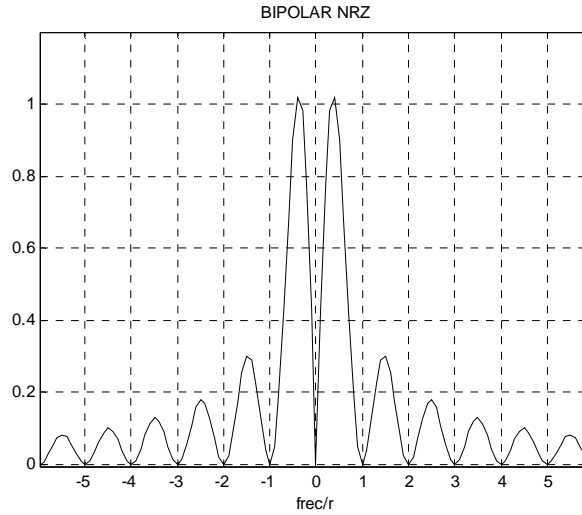


Figura 10 Espectro Bipolar NRZ. Para facilitar la visión del espectro se ha representado la raíz cuadrada de la densidad espectral

1.3.4 Energía media de símbolo y Energía media de bit.

La Energía media de símbolo se halla relacionada con la potencia: $P_s = \frac{E_s}{T}$

Se obtiene

$$E_s = TP_s = T\bar{R}_s(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k]R_p(-kT)$$

$$\text{Dado que por definición } \bar{R}_s(0) = \frac{1}{T} \int_0^T R_s(t, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T E[s^2(t)] dt$$

Una forma equivalente de llegar a la expresión anterior consiste en:

$$\begin{aligned} E_s &= E \left[\int_0^T s^2(t) dt \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E[a[n]a[m]] \int_0^T p(t-nT)p(t-mT) dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_a[n-m] \int_{-mT}^{-mT+T} p(\lambda+mT-nT)p(\lambda) d\lambda = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-mT}^{-mT+T} p(\lambda-kT)p(\lambda) d\lambda = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda-kT)p(\lambda) d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k]R_p(-kT) \end{aligned}$$

Se asume la condición para la función de autocorrelación del pulso utilizado: $R_p(kT) = \delta[k]$. Esta condición es evidente para pulsos de duración menor o igual al tiempo de símbolo mientras que para otro tipos de pulso, como por ejemplo los limitados en banda se justifica en apartados posteriores.

$$E_s = R_a [0]$$

Y la energía media de bit resulta:

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{R_a [0]}{b} = T_b P_s$$

1.4 Probabilidad de error y BER (Bit Error Rate) sobre canales ideales AWGN

En esta sección se aborda el cálculo de la probabilidad de error de símbolo (P_e) y se relaciona con la probabilidad de error de bit (P_b) o BER (Bit Error Rate). En las modulaciones binarias ambas probabilidades coinciden.

1.4.1 Sistema PAM AWGN

El esquema considerado para este análisis se muestra en la Figura 11. Para facilitar un primer análisis se consideran las siguientes condiciones:

- El pulso conformador es de energía igual a 1 $E_p = \int p^2(t)dt = 1$ y su función de autocorrelación $R_p(t) = p(t) * p(-t)$, cumple la condición $R_p(nT) = \delta[n]$
- El canal es ideal $h_c(t) = \alpha\delta(t - t_c)$.
- El ruido $w(t)$ es aditivo blanco y gaussiano de media nula e incorrelado con la señal útil. $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$
- El filtro receptor es un filtro adaptado al pulso transmitido. $p_R(t) = p(t_p - t)$. El retardo t_p se pone en general por cuestiones de causalidad y por tanto es conveniente que sea igual a la duración del pulso $p(t)$. *Esta estrategia proporciona mínima probabilidad de error cuando el ruido de canal es blanco, propiedad que queda demostrada en el apartado posterior de filtros terminales óptimos 1.5.3.*
- El tiempo de muestreo elegido para la detección del símbolo $a[k]$ es $t_k = t_c + t_p + kT$.
- El detector de símbolo consiste en diseñar umbrales para el nivel de señal de tal modo que se minimice la probabilidad de error.

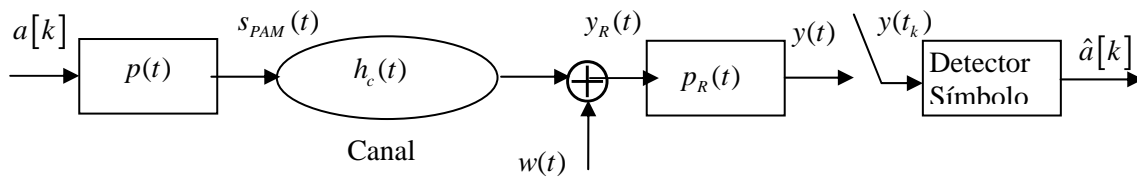


Figura 11 Transmisión de PAM sobre canal AWGN

En estas condiciones la señal a la salida del filtro adaptado se describe como:

$$y(t) = s(t) * h_c(t) * p_R(t) + w(t) * p_R(t) \quad (5)$$

En (5) el término útil resulta:

$$s(t) * h_c(t) * p_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p(t-nT) * h_c(t) * p_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p_y(t-nT)$$

con

$$p_y(t) = p(t) * h_c(t) * p_R(t) = p(t) * \alpha \delta(t-t_c) * p(t_p-t) = \alpha R_p(t-t_c-t_p)$$

y la señal de ruido en (5) resulta

$$n(t) = w(t) * p_R(t)$$

su densidad espectral y potencia son respectivamente:

$$S_n(f) = S_w(f) |P_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |P(f)|^2 \quad P_n = \sigma^2 = \int S_n(f) df = \frac{N_0}{2} E_p = \frac{N_0}{2}$$

es decir, la señal resultante a la salida del filtro adaptado queda:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p_y(t-nT) + n(t)$$

La decisión sobre el símbolo $a[k]$ se realiza a partir de la muestra $y(t_k)$, cuyo desarrollo es:

$$y(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p_y(t_k-nT) + n(t_k)$$

Sustituyendo:

$$p_y(t_c + t_p + kT - nT) = \alpha R_p((k-n)T) = \alpha \delta[k-n]$$

la muestra obtenida resulta:

$$y(t_k) = \alpha a[k] + n(t_k)$$

y debido a la naturaleza gaussiana del ruido resulta una variable aleatoria de distribución gaussiana:

$$y(t_k) | a[k] : N(\alpha a[k], \sigma^2) \quad (6)$$

1.4.2 Cálculo de la Probabilidad de error 2PAM

A partir de (6) se calcula inicialmente la probabilidad de error para el caso binario. En este apartado se simplifica a la situación en que el canal no atenúe: $\alpha = 1$. La regla de

decisión en muestras binarias consiste en decidir un umbral γ . Considerando inicialmente la modulación binaria polar tal que:

$$\begin{aligned}\Pr\{a[k] = a_1 = +\frac{A}{2}\} &= P_1 \\ \Pr\{a[k] = a_2 = -\frac{A}{2}\} &= P_0\end{aligned}$$

El umbral de decisión se utiliza del siguiente modo:

$$\begin{aligned}y = y(t_k) > \gamma &\Rightarrow \hat{a}[k] = a_1 = +\frac{A}{2} \\ y = y(t_k) < \gamma &\Rightarrow \hat{a}[k] = a_2 = -\frac{A}{2}\end{aligned}$$

Dando lugar a la probabilidad de error:

$$P_e = \sum_{m=1}^M \Pr\{\text{error}|a_m\} \Pr\{a_m\} = P_1 \Pr\{\text{error}|a_1\} + P_0 \Pr\{\text{error}|a_2\} \quad (7)$$

Cálculo de las probabilidades de error condicionadas:

$$\begin{aligned}\Pr\{\text{error}|a_1\} &= \Pr\{y < \gamma|a_1\} = \int_{-\infty}^{\gamma} f_y(y|a_1) dy \\ \Pr\{\text{error}|a_2\} &= \Pr\{y > \gamma|a_2\} = \int_{\gamma}^{+\infty} f_y(y|a_2) dy\end{aligned}$$

Sustituyendo en (7) es sencillo determinar el umbral óptimo:

$$P_e = P_1 \int_{-\infty}^{\gamma} f_y(y|a_1) dy + P_0 \int_{\gamma}^{+\infty} f_y(y|a_2) dy$$

función mínima respecto al umbral en:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_e}{\partial \gamma} &= P_1 f_y(\gamma|a_1) - P_0 f_y(\gamma|a_2) = 0 \\ P_1 f_y(\gamma|a_1) &= P_0 f_y(\gamma|a_2)\end{aligned} \quad (8)$$

Comentario dirigido a alumnos COM2. Observar que (8) es el criterio MAP:
 $\max(\Pr\{a_m|y\})$

Para el canal AWGN, la naturaleza gaussiana del ruido determina que las funciones de densidad de probabilidad condicionadas presenten a su vez funciones de densidad de probabilidad gaussianas:

f.d.p. de la muestra de ruido: $f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{n^2}{\sigma^2}}$

muestra detectada: $y|a_m = a_m + n$

f.d.p. de la muestra recibida y condicionada al símbolo a_m :

$$f_y(y|a_m) = f_n(y - a_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-a_m)^2}{\sigma^2}} : N(a_m, \sigma^2)$$

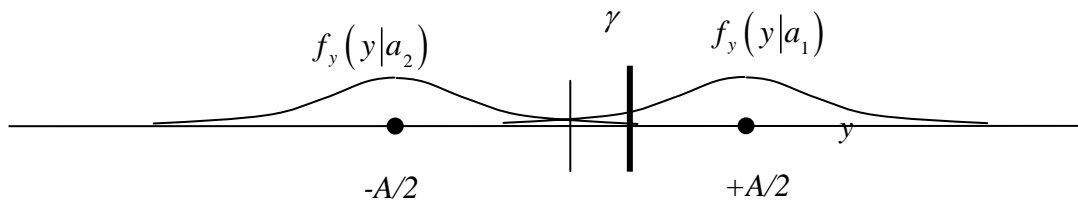


Figura 12 Funciones de densidad de probabilidad de las muestras detectadas y condicionadas (f.d.p) por los símbolos transmitidos para modulación binaria polar.

Aplicándolo al **caso binario polar** para obtener el umbral óptimo según (8):

$$P_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-A/2)^2}{\sigma^2}} = P_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y+A/2)^2}{\sigma^2}} \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{\sigma^2}{A} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) = \begin{cases} > 0; P_0 > P_1 \\ = 0; P_0 = P_1 \\ < 0; P_0 < P_1 \end{cases}$$

Se obtiene la probabilidad de error

$$\begin{aligned} P_e &= P_1 \int_{-\infty}^{\gamma} f_y(y/a_1) dy + P_0 \int_{\gamma}^{+\infty} f_y(y/a_2) dy = \\ &P_1 \int_{-\infty}^{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-A/2)^2}{\sigma^2}\right) dy + P_0 \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y+A/2)^2}{\sigma^2}\right) dy = \\ &P_1 \int_{-\infty}^{\frac{\gamma-A/2}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda + P_0 \int_{\frac{\gamma+A/2}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda = \\ &P_1 Q\left(\frac{-\gamma+A/2}{\sigma}\right) + P_0 Q\left(\frac{\gamma+A/2}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Obsérvese que con símbolos equiprobables se obtiene:

$$\gamma = 0 \Rightarrow P_e = P_b = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

El apéndice al final de este tema contiene la definición de la función $Q(x)$, área de la Gaussiana

Para comprobar que el umbral óptimo minimiza la BER en un caso particular, a continuación se evalúa la expresión anterior suponiendo dos opciones distintas para el umbral óptimo:

Ejemplo:

Suponemos: $\frac{A}{\sigma} = 10$; $P_1 = P_0 = \frac{1}{2}$; $\gamma_1 = \gamma_{opt} = 0$; $\gamma_2 = 0.2 \frac{A}{2} \neq \gamma_{opt} = 0$

$$\text{BER}(\gamma_1) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q(5) = 3 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{BER}(\gamma_2) = \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{0.4A}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{0.6A}{\sigma}\right) \right) = \frac{1}{2} (Q(4) + Q(6)) = \frac{1}{2} (3 \cdot 10^{-5} + 10^{-9}) \cong 1.5 \cdot 10^{-5} \gg \text{BER}(\gamma_1)$$

Considerando la **modulación binaria unipolar**, el umbral óptimo resulta

$$\Pr\{a[k] = a_1 = +A\} = P_1$$

$$\Pr\{a[k] = a_2 = -0\} = P_0$$

$$P_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-A)^2}{\sigma^2}} = P_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2}} \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{\sigma^2}{A} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) + \frac{A}{2} = \begin{cases} > \frac{A}{2}; P_0 > P_1 \\ = \frac{A}{2}; P_0 = P_1 \\ < \frac{A}{2}; P_0 < P_1 \end{cases}$$

Finalmente se obtiene la probabilidad de error

$$\begin{aligned} P_e &= P_1 \int_{-\infty}^{\gamma} f_y(y/a_1) dy + P_0 \int_{\gamma}^{+\infty} f_y(y/a_2) dy = \\ &P_1 \int_{-\infty}^{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-A)^2}{\sigma^2}\right) dy + P_0 \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2}\right) dy = \\ &P_1 \int_{-\infty}^{\frac{\gamma-A}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda + P_0 \int_{\frac{\gamma}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda = \\ &P_1 Q\left(\frac{-\gamma+A}{\sigma}\right) + P_0 Q\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Obsérvese que con símbolos equiprobables se obtiene:

$$\gamma = \frac{A}{2} \Rightarrow P_e = P_b = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

que representa 3 dB de pérdida de $\frac{E_b}{N_0}$ respecto al caso polar. Esta característica es debida a que mediante la modulación unipolar equiprobable, se transmite una media no nula: $\mu_s = \frac{A}{2}$ que no lleva información, y por tanto un elevado porcentaje de la energía transmitida por bit, se gasta o invierte en la transmisión de dicha media. De otro modo se puede formular como:

$$s_{Unipolar}(t) = s_{Polar}(t) + \frac{A}{2}$$

En el apartado 1.4.4, se complementa esta información.

1.4.3 Cálculo de la probabilidad de error modulación Bipolar

El cálculo de la probabilidad de error para la modulación bipolar, se puede plantear como cálculo de probabilidad de error de símbolo (considerando 3 símbolos $-A, 0, +A$) o bien directamente como cálculo de la BER. En el primer planteamiento se parte de tres hipótesis, mientras que en el segundo se parte únicamente de las dos hipótesis binarias. Es decir, los dos símbolos $-A, +A$, se asignan a la misma hipótesis binaria correspondiente al bit '1'.

Además, la estrategia de detección puede operar directamente con las muestras $y(t_k)$, o bien con su valor absoluto. Por otro lado se pueden detectar algunos errores adicionales si se considera al demodular la memoria implícita en la codificación.

En este apartado se plantea directamente el cálculo de la BER para el caso equiprobable $P_1 = P_0 = \frac{1}{2}$, en una detección a partir de las muestras $y(t_k)$ y sin tener en cuenta la información adicional que aporta la codificación con memoria.

Por tanto, las dos hipótesis binarias de partida son:

Si se transmite el bit '0', la muestra detectada es:

$$b[k] = 0 \Rightarrow y(t_k) = y = n$$

y su función de densidad de probabilidad es:

$$f_y(y|0) = f_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma^2}} : N(0, \sigma^2)$$

Si se transmite el bit '1', se tienen dos situaciones equiprobables para la muestra detectada.

$$b[k] = 1 \Rightarrow y(t_k) = y = A + n, \quad -A + n$$

y su función de densidad de probabilidad es:

$$f_y(y|1) = \frac{1}{2} (f_n(y-A) + f_n(y+A)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-A)^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y+A)^2}{\sigma^2}} \right)$$

En la Figura 13, se muestran las funciones de densidad de probabilidad condicionadas, así como un posible nivel a elegir γ para utilizar dos umbrales simétricos: $+\gamma - \gamma$ mediante la siguiente norma de detección:

$$\begin{aligned} -\gamma < y(t_k) < +\gamma &\Rightarrow \hat{b}[k] = 0 \\ (y(t_k) < -\gamma) \cup (+\gamma < y(t_k)) &\Rightarrow \hat{b}[k] = 1 \end{aligned}$$

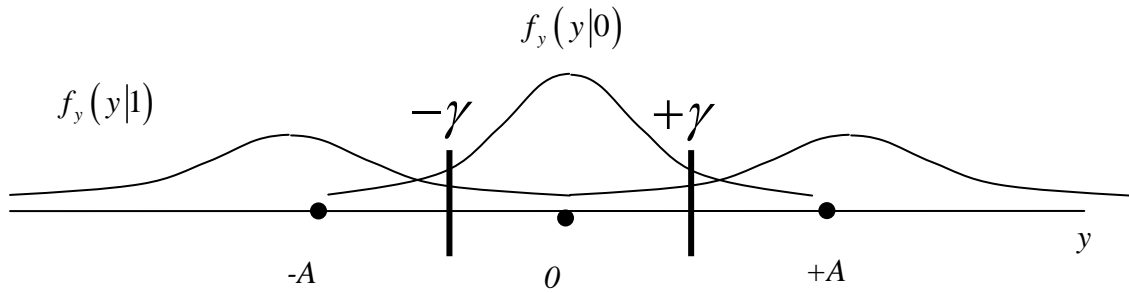


Figura 13 Funciones de densidad de probabilidad de las muestras detectadas y condicionadas (f.d.p) por los símbolos transmitidos para modulación binaria bipolar.

Por tanto, el cálculo de la BER, se plantea como:

$$\begin{aligned} BER &= P_1 \Pr\{error|1\} + P_0 \Pr\{error|0\} = \\ &\frac{1}{2} \left(\Pr\{-\gamma < y < +\gamma|1\} + \Pr\{(y < -\gamma) \cup (+\gamma < y)|0\} \right) = \\ &\frac{1}{2} \left(\int_{-\gamma}^{+\gamma} f_y(y|1) dy + \int_{-\infty}^{-\gamma} f_y(y|0) dy + \int_{+\gamma}^{+\infty} f_y(y|0) dy \right) \end{aligned} \quad (9)$$

El umbral óptimo que minimiza la BER se obtiene derivando la expresión (9).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} BER &= \frac{1}{2} \left(f_y(+\gamma|1) + f_y(-\gamma|1) - f_y(-\gamma|0) - f_y(+\gamma|0) \right) = 0 \Rightarrow \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\gamma-A)^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\gamma+A)^2}{\sigma^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\sigma^2}} \Rightarrow \\ &\frac{1}{2} \left(e^{-\frac{1}{2} \frac{-2\gamma A + A^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{1}{2} \frac{+2\gamma A + A^2}{\sigma^2}} \right) = e^{\frac{+\gamma^2}{2\sigma^2}} ch\left(\frac{\gamma A}{\sigma^2}\right) = 1 \Rightarrow \\ \gamma_{opt} &= \frac{\sigma^2}{A} ch^{-1} \left(e^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}} \right) \end{aligned}$$

A continuación se presenta el desarrollo de la BER, considerando un umbral de detección genérico de la forma $\gamma = p \frac{A}{2}$. Tal como se puede observar en la Figura 12, en un caso habitual el umbral óptimo cumpliría $\frac{A}{2} < \gamma < A$, por lo que en el desarrollo que sigue se considera $1 < p < 2$.

$$\begin{aligned}
 BER &= \\
 &\frac{1}{2} \left(\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-A)^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y+A)^2}{\sigma^2}} \right) dy + \int_{-\infty}^{-\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2}} dy + \int_{+\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2}} dy \right) = \\
 &\frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y+A)^2}{\sigma^2}} dy + \int_{+\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2}} dy = \\
 &\frac{1}{2} \int_{+(2-p)\frac{A}{2\sigma}}^{+(2+p)\frac{A}{2\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2} dy + \int_{+p\frac{A}{2\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2} dy = \\
 &\frac{1}{2} Q\left(\frac{(2-p)A}{2\sigma}\right) - \frac{1}{2} Q\left(\frac{(2+p)A}{2\sigma}\right) + Q\left(p \frac{A}{2\sigma}\right)
 \end{aligned}$$

Finalmente, el resultado anterior en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ queda, $E_b = \frac{A^2}{2}$, $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$:

$$BER = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{(2-p)^2 \frac{E_b}{N_0}}\right) - \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{(2+p)^2 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{p^2 \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (10)$$

El primer sumando en (10), corresponde al término de mayor área, y por tanto al más influyente en el aumento de la BER.

1.4.4 Comparación de BER para las tres modulaciones binarias.

La pérdida en dB de las modulaciones bipolar y unipolar, respecto al caso polar se mide en este apartado únicamente a partir de la gaussiana de menor área y se interpreta como el aumento de energía de bit necesario para mantener la misma probabilidad de error o BER entre modulaciones.

Comparación Bipolar-Polar.

$$10 \log_{10} \frac{(2-p)^2 \frac{E_b}{N_0}}{2 \frac{E_b}{N_0}} = 10 \log_{10} \frac{(2-p)^2}{2}$$

Comparación Unipolar-Polar.

$$10 \log_{10} \frac{\frac{E_b}{N_0}}{2 \frac{E_b}{N_0}} = -3dB$$

Justificación: Al invertir en una modulación bipolar la misma energía por bit que respecto a una modulación polar y en igualdad de condiciones de canal y ruido, los

niveles transmitidos mediante la bipolar se hallan físicamente más junto. Para entender esta propiedad, supóngase que se gasta una energía de bit igual a la unidad:

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{R_a[0]}{b} = \sigma_a^2 = 1$$

Para la modulación polar $\sigma_a^2 = \frac{A^2}{4} = 1 \Rightarrow A = 2$

Para la modulación bipolar $\sigma_a^2 = \frac{A^2}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2}$

Para la modulación Unipolar $\sigma_a^2 = \frac{A^2}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2}$

Es decir, a igual energía invertida por bit, la distancia entre símbolos es de 2 en el caso polar y de $\sqrt{2}$, en los casos bipolar y unipolar. Este fenómeno se ilustra en la Figura 14.

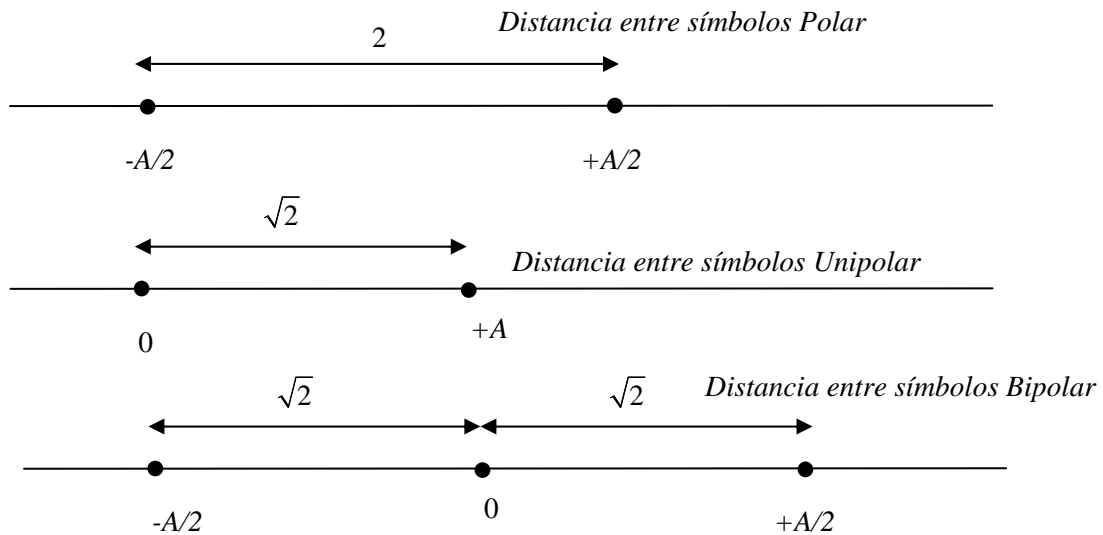


Figura 14 Ejemplo comparativo de distancia entre símbolos.

1.4.5 Cálculo de la probabilidad de error para MPAM

Considerando la modulación M-aria polar de símbolos equiprobables:

$$\Pr\{a[k] = a_m = +\frac{-M-1+2m}{2}A\} = \frac{1}{M}$$

y la siguiente regla de decisión:

$$\begin{aligned} \gamma_{m-1} < y < \gamma_m &\Rightarrow \hat{a}[k] = a_m; \\ m &= 1, \dots, M; \gamma_0 = -\infty; \gamma_M = +\infty; \end{aligned}$$

La probabilidad de error queda:

$$P_e = \sum_{m=1}^M \Pr[a_m] \Pr(e|a_m) = \frac{1}{M} \left(\int_{\gamma_1}^{+\infty} f_y(y|a_1) dy + \sum_{m=2}^{M-1} \left(\int_{-\infty}^{\gamma_{m-1}} f_y(y|a_m) dy + \int_{\gamma_m}^{+\infty} f_y(y|a_m) dy \right) + \int_{-\infty}^{\gamma_{M-1}} f_y(y|a_M) dy \right)$$

los umbrales óptimos resultan:

$$\frac{\partial P_e}{\partial \gamma_m} = 0 \Rightarrow f_y(\gamma_m|a_m) = f_y(\gamma_m|a_{m+1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\gamma_m - a_m)^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\gamma_m - a_{m+1})^2}{\sigma^2}} \Rightarrow$$

$$\gamma_m = \frac{a_m + a_{m+1}}{2} = -\frac{M}{2} A + mA; \quad 1 \leq m \leq M-1$$

Cálculo de la Probabilidad de error:

$$P_e = \sum_{m=1}^M \Pr(a_m) \Pr(error|a_m) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Pr(error|a_m)$$

Para los dos símbolos extremos coincide la probabilidad de error debido a las simetrías de las funciones de densidad de probabilidad gaussianas:

$$\begin{aligned} \Pr(error|a_1) &= \Pr(error|a_M) = \int_{-\infty}^{\gamma_{M-1}} f_y(y|a_M) dy = \int_{-\infty}^{a_M - \frac{A}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-a_M)^2}{\sigma^2}\right) dy = \\ &= \int_{-\frac{A}{2\sigma}}^{\frac{A}{2\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) d\lambda = \int_{-\frac{A}{2\sigma}}^{+\frac{A}{2\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) d\lambda = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

Símbolos centrales, $m=2..M-1$:

$$\begin{aligned} \Pr(error|a_m) &= \int_{-\infty}^{\gamma_{m-1}} f_y(y|a_m) dy + \int_{\gamma_m}^{+\infty} f_y(y|a_m) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{a_m - \frac{A}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-a_m)^2}{\sigma^2}\right) dy + \int_{a_m + \frac{A}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-a_m)^2}{\sigma^2}\right) dy = 2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de error de símbolo total resulta:

$$P_e = \frac{1}{M} \left(Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + (M-2)2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \right) = \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right).$$

A partir de la expresión anterior y considerando: $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ y $E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{M^2-1}{12b} A^2$

Se obtiene:
$$P_e = \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Con el objeto de obtener la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, se considerará:

- Codificación binaria de tipo Gray, de forma que dos símbolos colindantes solo se diferencian en uno de los b bits.
- Cociente $\frac{E_b}{N_0} \gg 1$, de modo que cuando se produce un error, se asumirá que solo se produce entre dos símbolos colindantes y por lo tanto un símbolo erróneo equivale a un bit erróneo y $b-1$ bits correctos. Por tanto, la BER resulta b veces menor que la P_e .

Se aproxima:
$$\text{BER} = P_b \cong \frac{P_e}{b} = \frac{2M-2}{bM} Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

1.4.6 Ejemplo: Canal con atenuación.

Considerando el canal ideal $h_c(t) = \alpha \delta(t - t_c)$, la modulación binaria polar de bits equiprobables y el umbral óptimo en detección $\gamma = 0$:

$$P_e = P_b = Q\left(\alpha \frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\alpha^2 2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

lo que origina una pérdida de $\frac{E_b}{N_0}$ de $10 \log_{10}(\alpha^2)$ dB.

Ejercicio Propuesto:

¿Cómo afectaría al caso MPolar de símbolos equiprobables? Suponga que ajusta los umbrales de detección a los niveles de señal recibidos.

1.4.7 Cociente Eb/No

El cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$ se toma como referencia para comparar la BER de diferentes sistemas de comunicaciones entre sí. A igual energía media transmitida por bit y a igual densidad espectral de ruido, el sistema que presente menor BER es el de mejor comportamiento. La BER respecto a la $\frac{E_b}{N_0}$ suele representarse a escala logarítmica.

Aplicando $\text{BER} = P_b \cong \frac{P_e}{b} = \frac{2M-2}{bM} Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$ se obtienen los resultados de la Figura 15

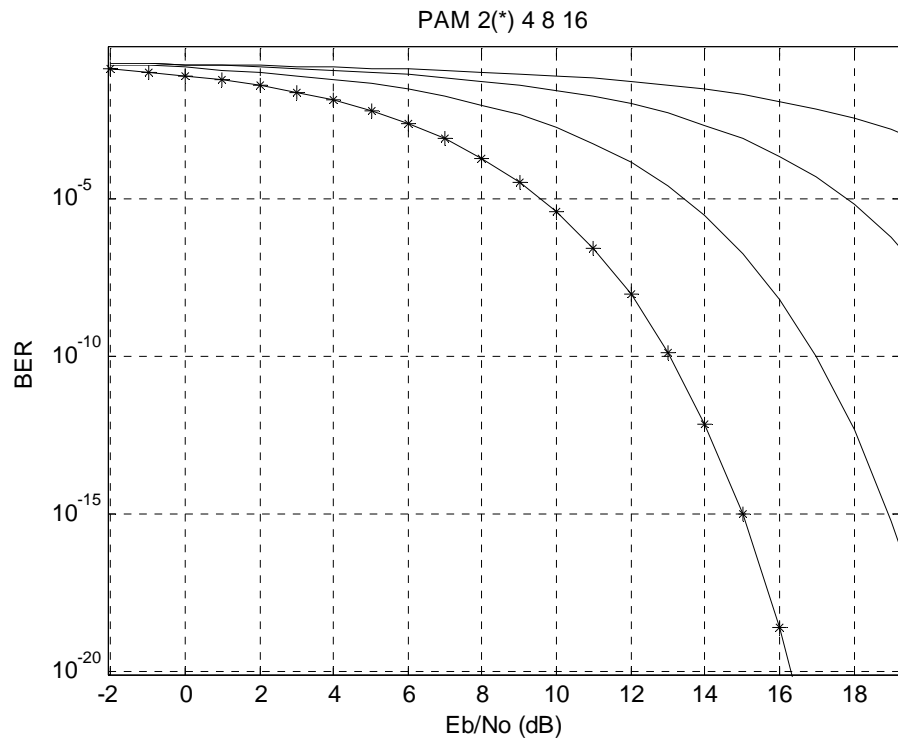


Figura 15 BER en function de la E_b/N_0 para MPAM Polar, $M=2(*)$, 4, 8, 16

Se observa que para valores constantes de $\frac{E_b}{N_0}$ y de velocidad de bit (r_b), con el aumento del número de niveles:

- Aumenta la BER (Inconveniente)
- Disminuye el ancho de banda de transmisión (Ventaja).

1.5 Canales con ISI y FTO

Cuando el canal no es ideal provoca Interferencia InterSimbólica (ISI) en detección, degradando la probabilidad de error.

1.5.1 Efectos de la ISI en la Probabilidad de error.

Para entender mejor este concepto se analiza a continuación los efectos que produce un canal no ideal sobre una modulación para un ejemplo sencillo. Se analiza la BER y se degradación a efectos de $\frac{E_b}{N_0}$ respecto al caso de canal ideal.

Sea la modulación PAM:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p(t - nT)$$

de símbolos binarios equiprobables y codificados de forma polar. La forma del pulso es rectangular NRZ. El canal de transmisión ideal es $h_c(t) = \alpha_0 \delta(t - t_c)$ y el canal de transmisión NO ideal considerado es: $h_c(t) = \alpha_0 \delta(t - t_c) + \alpha_1 \delta(t - t_c - T)$

Manteniendo en recepción el filtro adaptado al pulso transmitido el esquema de la modulación considerado es el mostrado en la Figura 11, cuyos elementos detallados son:

- Pulso de transmisión: $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$
- Filtro adaptado (FA) en recepción: $p_R(t) = p(T - t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$
- Tiempo de muestreo para detectar el símbolo $a[k]$:
 $t_k = kT + t_c + t_p = (k + 1)T + t_c$

Por tanto, la expresión de la señal a la salida del FA es:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p(t - nT) * h_c(t) * p(T - t) + w(t) * p(T - t) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p_y(t - nT) + n(t)$$

donde: $p_y(t) = p(t) * h_c(t) * p(T - t)$

Y tras el muestreo:

$$y(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p_y(t_c + (k + 1 - n)T) + n(t)$$

Análisis de la BER para el caso de canal ideal: $h_c(t) = \alpha_0 \delta(t - t_c)$

- Pulsos a la salida del FA: $p_y(t) = \alpha_0 R_p(t - T - t_c)$. La Figura 16 muestra este pulso cuando el transmitido es el pulso rectangular.
- Muestras de la señal a la salida del FA: $y(t_k) = \alpha_0 a[k] + n(t_k)$. Ver que se hallan libres de ISI.
- BER Resultante: $BER = P_b = Q\left(\sqrt{\alpha_0^2 2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$

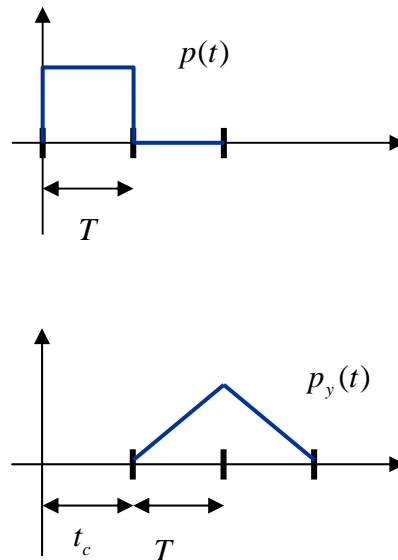


Figura 16 Ejemplo de pulso transmitido y recibido mediante canal ideal.

Análisis de la BER para el caso de canal NO ideal: $h_c(t) = \alpha_0 \delta(t - t_c) + \alpha_1 \delta(t - t_c - T)$

- Pulsos a la salida del FA: $p_y(t) = \alpha_0 R_p(t - T - t_c) + \alpha_1 R_p(t - 2T - t_c)$ ¿¿DIBUJO??
- Muestras de la señal a la salida del FA: $y(t_k) = \alpha_0 a[k] + \alpha_1 a[k - 1] + n(t_k)$. Ver que NO se hallan libres de ISI.
- f.d.p. de las muestras obtenidas a la salida del FA condicionadas al símbolo transmitido: (Se prescinde de dependencia temporal para simplificar notación).

$$f_y(y|a_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y - \alpha_0 \frac{A}{2} - \alpha_1 \frac{A}{2})^2}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y - \alpha_0 \frac{A}{2} + \alpha_1 \frac{A}{2})^2}{\sigma^2}\right) \right)$$

$$f_y(y|a_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y + \alpha_0 \frac{A}{2} - \alpha_1 \frac{A}{2})^2}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y + \alpha_0 \frac{A}{2} + \alpha_1 \frac{A}{2})^2}{\sigma^2}\right) \right)$$

- En detección el umbral óptimo es también $\gamma = 0$. Por tanto es fácil comprobar que la BER resultante es:

$$BER = P_b = \frac{1}{2} \left(Q \left(\frac{(\alpha_0 + \alpha_1)A}{2\sigma} \right) + Q \left(\frac{(\alpha_0 - \alpha_1)A}{2\sigma} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(Q \left(\sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1)^2 2 \frac{E_b}{N_0}} \right) + Q \left(\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_1)^2 2 \frac{E_b}{N_0}} \right) \right)$$

- Medida de la degradación respecto al caso de canal ideal: La comparación se realiza únicamente a partir del área de gaussiana “Q” de argumento menor:

$$10 \log_{10} \left(\frac{\alpha_0^2 2 \frac{E_b}{N_0}}{(\alpha_0 - \alpha_1)^2 2 \frac{E_b}{N_0}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{\alpha_0^2}{(\alpha_0 - \alpha_1)^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0})^2} \right)$$

1.5.2 Pulsos limitados en banda

La situación más habitual en cuanto al canal de comunicaciones disponible, en los sistemas de comunicaciones digitales, consiste en una función de transferencia sin distorsión limitada en banda. En la Figura 17 el ancho de banda disponible sin distorsión es B_c .

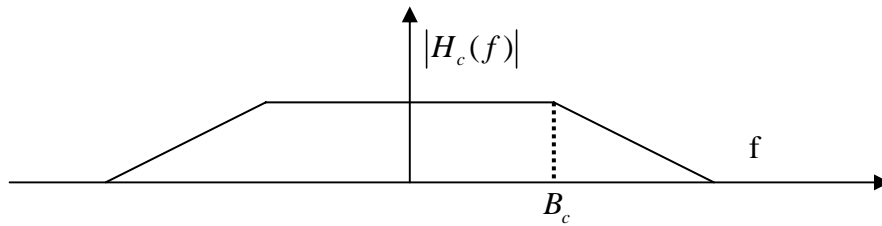


Figura 17 Función de transferencia de canal limitado en banda

En esta situación interesa transmitir pulsos libres de ISI a la salida del filtro receptor, con lo que dichos pulsos $p_y(t) = p(t) * p(-t) = R_p(t)$ deben cumplir las siguientes condiciones en cuanto a su función de correlación:

$$P_y(nT) = \delta[n] \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_y(nT) \delta(t - nT) = P_y(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \delta(t)$$

Que en el dominio frecuencial equivale al caso mostrado en Figura 18.

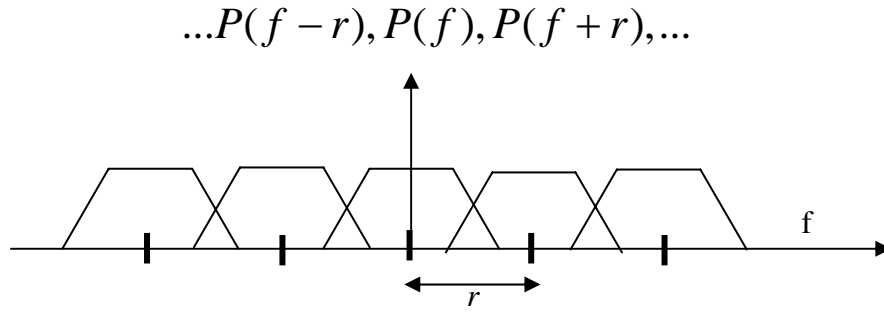


Figura 18 Condiciones de ISI nula en el dominio de la frecuencia.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_y(f - nr) = \frac{1}{r}$$

Siendo los pulsos limitados en banda a r , el anterior criterio equivale a cierta simetría en el dominio de la frecuencia respecto a la frecuencia $\frac{r}{2}$:

$$P_y\left(\frac{r}{2} + \lambda\right) + P_y\left(\frac{r}{2} + \lambda - r\right) = \frac{1}{r}; \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{r}{2} \Rightarrow$$

$$P_y\left(\frac{r}{2} + f\right) + P_y\left(-\frac{r}{2} + f\right) = \frac{1}{r}; \quad 0 \leq f \leq \frac{r}{2}$$

El pulso de menor ancho de banda que cumple el anterior criterio, también denominado “Criterio de Nyquist” es el pulso “sinc”.

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \sqrt{r} \text{sinc}(tr)$$

$$R_p(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \text{sinc}(tr)$$

$$S_p(f) = \frac{1}{r} \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

$$P(f) = \frac{1}{\sqrt{r}} \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

La principal ventaja de este pulso limitado en banda y libre de ISI consiste en su ancho de banda reducido e igual a $\frac{r}{2}$. Sin embargo en la práctica presenta problemas de implementación, debido a que representa un filtro paso bajo ideal. La alternativa práctica, viene dada por los llamados pulsos raíz coseno realzado, que suavizan la banda de transición a costa de un aumento de ancho de banda, medido en tanto por ciento respecto al ancho de banda del pulso sinc. La expresión exacta de este tipo de pulsos se estudiará en COM2.

1.5.3 Filtros Terminales Óptimos (FTO)

En este apartado se presenta la solución óptima para obtener una BER mínima y señal libre de ISI, aún en el caso de canal con distorsión en el ancho de banda utilizado por la señal transmitida. Con el objeto de generalizar la solución, se considera además una distribución espectral de ruido coloreada. La restricción a tener en cuenta, es que la

energía media a transmitir por bit se halla limitada a un valor determinado E_b . De este modo también se limita la potencia transmitida.

En todo el apartado se considera que la modulación es polar y de símbolos equiprobables distanciados A volts.

El esquema considerado se muestra en la Figura 19.

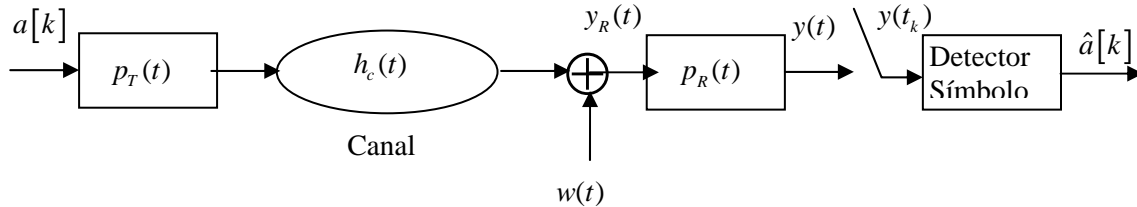


Figura 19 Esquema de modulación PAM con FTO

Consideraciones de Diseño:

- El máximo valor transmitido de energía media por bit es E_b .
- El canal es lineal e invariante con el tiempo y su función de transferencia es $H_c(f) = TF(h_c(t))$.
- El ruido es aditivo, de media nula, incorrelado con la modulación, gaussiano y de densidad espectral $S_w(f)$.

Objetivo de diseño:

Hallar las funciones de transferencia $P_T(f) = TF(p_T(t))$; $P_R(f) = TF(p_R(t))$ tales que

- El pulso resultante a la salida del filtro receptor $p_y(t)$ es un pulso elegido, tal que se halle libre de ISI a la vez que esté limitado en banda al ancho exigido por la modulación. Por ejemplo $p_y(t) = \text{sinc}(r(t - t_d)) = p_T(t) * h_c(t) * p_R(t)$.
- La $BER = P_b = \frac{2(M-1)}{bM} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$ sea mínima, lo que se logra maximizando el cociente $\frac{A}{2\sigma}$, o de forma equivalente su cuadrado.

A continuación se muestra mediante el desarrollo adecuado la relación existente entre el cociente $\frac{A}{2\sigma}$ y las funciones de transferencia $P_T(f)$; $P_R(f)$.

Para una modulación M Polar, se tiene según lo visto en los apartados 1.3.1 y 1.3.4:

- Varianza de símbolos: $\sigma_a^2 = R_a[0] = \frac{M^2-1}{12} A^2$
- Energía media de bit: $E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{\sigma_a^2 R_{p_T}(0)}{b} = \frac{M^2-1}{12b} A^2 R_{p_T}(0)$

Por otro lado:

- Correlación del pulso transmitido en el origen: $R_{p_T}(0) = \int |P_T(f)|^2 df$
- Varianza de ruido a la salida del filtro receptor: $\sigma^2 = \int S_w(f) |P_R(f)|^2 df$

El cociente a maximizar queda:

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{3b}{M^2-1} \frac{E_b}{R_{p_T}(0)\sigma^2} = \frac{3b}{M^2-1} \frac{E_b}{\int |P_T(f)|^2 df \int S_w(f) |P_R(f)|^2 df}$$

Teniendo en cuenta la relación de ecualización en el dominio de la frecuencia:

$$|P_T(f)H_c(f)P_R(f)| = |P_y(f)|$$

Se obtiene:

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{3b}{M^2-1} \frac{E_b}{R_{p_T}(0)\sigma^2} = \frac{3b}{M^2-1} \frac{E_b}{\int \frac{|P_y(f)|^2}{|H_c(f)P_R(f)|^2} df \int S_w(f) |P_R(f)|^2 df}$$

Donde aplicando la desigualdad de Schwartz $\int |u|^2 \int |v|^2 \geq \left| \int uv \right|^2$.

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 \leq \frac{3b}{M^2-1} \frac{E_b}{\left| \int \frac{\sqrt{S_w(f)} |P_y(f)|}{|H_c(f)|} df \right|^2}$$

La desigualdad se cumple con igualdad cuando:

$$\frac{|P_y(f)|}{|H_c(f)P_R(f)|} = \lambda \sqrt{S_w(f)} |P_R(f)| \Rightarrow$$

$$|P_R(f)|^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{|P_y(f)|}{|H_c(f)| \sqrt{S_w(f)}}; \quad |P_T(f)|^2 = \lambda \frac{\sqrt{S_w(f)} |P_y(f)|}{|H_c(f)|}$$

En general, el parámetro λ es libre. Una posible opción, especialmente en condiciones de ruido blanco $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$, consiste en utilizar un factor de escalado λ , para que ambas respuestas coincidan:

$$|P_R(f)|^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{|P_y(f)|}{|H_c(f)|\sqrt{\frac{N_0}{2}}} = |P_T(f)|^2 = \lambda \frac{\sqrt{\frac{N_0}{2}}|P_y(f)|}{|H_c(f)|} \Rightarrow$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{N_0}}$$
(11)

NOTA: Obsérvese una importante conclusión a partir de (11):

Si se utiliza esta estrategia, $|P_R(f)|^2 = |P_T(f)|^2$ coincide con la solución de filtro receptor adaptado al pulso transmitido presentada en el apartado 1.4.1 y asumida en el resto del capítulo.

Finalmente se ajustará la energía media por bit suministrada, por ejemplo mediante el parámetro A , correspondiente a la distancia entre símbolos:

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{\sigma_a^2 R_{p_T}(0)}{b} = \frac{M^2-1}{12b} A^2 R_{p_T}(0) = \frac{M^2-1}{12b} A^2 \int \lambda \frac{\sqrt{S_w(f)}}{|H_c(f)||P_y(f)|} df$$

Además la condición de ecualización se debe cumplir en fase:

$$P_T(f)H_c(f)P_R(f) = P_y(f)$$

y la BER mínima u óptima resulta:

$$BER = P_b = \frac{2(M-1)}{bM} Q \left(\sqrt{\frac{\frac{3b}{M^2-1} E_b}{\left| \int \frac{\sqrt{S_w(f)}|P_y(f)|}{|H_c(f)|} df \right|^2}} \right)$$
(12)

Es de destacar la analogía de los resultados obtenidos con el desarrollo de FTO para modulaciones analógicas en banda base visto en el tema 2 de COM1.

En la práctica los FTO suelen implementarse mediante software. El filtro transmisor óptimo se implementa de tipo FIR previamente a la conformación de un pulso transmisor $p(t)$, cuya función de autocorrelación cumple el criterio de Nyquist. El filtro receptor óptimo se implementa de tipo FIR, una vez que la señal recibida mediante un filtro adaptado a $p(t)$ se ha muestreado. Este tipo de solución es el que se estudia en COM2.

Ejemplo:

Particularizando para un sistema con ruido blanco y canal ideal:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \quad |H_c(f)| = \alpha = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

y para los casos en que se cumpla $p_y(0) = \int |P_y(f)| df = \int P_y(f) df = 1$

se obtiene el mismo resultado ya visto en el apartado 1.4.5.

$$BER = P_b = \frac{2(M-1)}{bM} Q \left(\sqrt{\frac{6b}{(M^2-1)L} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Los filtros terminales obtenidos son, ajustando las constantes $\lambda = \sqrt{\frac{2}{N_0}}$, y queda el esquema de la Figura 11, con la única diferencia de la constante $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, que no afecta a la BER.

$$|P_R(f)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{|P_y(f)|} = |P_T(f)|$$

Con lo que una solución particular de la relación anterior se obtiene al hacer cumplir la condición de ecualización para la fase del sistema. Suponiendo que $p_y(t)$ es un pulso sin ISI, tal que: $\angle_{p_y(t)} = -j2\pi f t_d$ y $p_y(t_d + kT) = \delta[k]$:

$$P_R(f) = P_T^*(f) e^{-j2\pi f t_d} \Rightarrow$$

$$p_R(t) = p_T(t_d - t);$$

$$p_y(t) = p_T(t) * \alpha \delta(t) * p_T(t_d - t) = R_{p_T}(t - t_d)$$

En ambos casos el resultado para la probabilidad de error (MPolar) es idéntico:

$$BER = P_b = \frac{2(M-1)}{bM} Q \left(\sqrt{\frac{6b}{(M^2-1)L} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

1.5.4 Ecualización

La ecualización en comunicaciones digitales, puede desarrollarse mediante soluciones hardware utilizando filtros analógicos o bien mediante soluciones software utilizando filtros discretos, ya sea en recepción tras la etapa de muestreo, o en transmisión directamente sobre la secuencia de símbolos y previamente a la conformación del pulso. En este curso, se van a analizar las estrategias analógicas y se dejan las estrategias discretas para ser estudiadas en la asignatura COM2.

Ecualización analógica en Recepción. Solución Hardware.

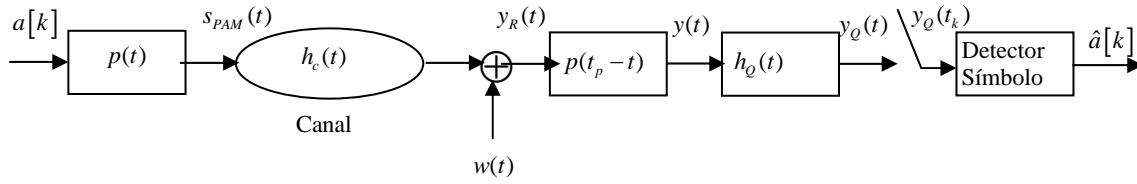


Figura 20 Esquema de Ecualización analógica en Recepción. Solución Hardware

El filtro ecualizador debe cumplir la siguiente condición:

$$p(t) * h_c(t) * p(t_p - t) * h_Q(t) = R_p(t - t_d) = p_y(t)$$

que en el dominio de la frecuencia es:

$$P(f)H_c(f)P^*(f)e^{-j2\pi ft_p}H_Q(f) = |P(f)|^2 e^{-j2\pi ft_d}$$

Por tanto su función de transferencia ideal es:

$$H_Q(f) = \frac{1}{H_c(f)} e^{-j2\pi f(t_d - t_p)} \quad (13)$$

En estas condiciones la señal a la salida del ecualizador puede expresarse como:

$$y_Q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]R_p(t - t_d - nT) + n_Q(t)$$

y en su versión muestreada a $t_k = kT + t_d$

$$y_Q(t_k) = a[k] + n_Q(t_k)$$

donde la muestra de ruido se distribuye según:

$$n_Q(t_k) : N(0, \sigma_Q^2)$$

$$\sigma_Q^2 = \int S_w(f) |P(f)|^2 |H_Q(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int \frac{|P(f)|^2}{|H_c(f)|^2} df$$

La probabilidad de error, se calcula a continuación para una modulación binaria de símbolos estadísticamente independientes y equiprobables codificada polar $E_b = \frac{A^2}{4}$:

$$BER = P_b = Q\left(\frac{A}{2\sigma_Q}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2}{\int \frac{|P(f)|^2}{|H_c(f)|^2} df} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Para el caso particular: $|H_c(f)| = \alpha$ y $\int |P(f)|^2 df = E_p = 1$, se obtiene la solución esperada:

$$BER = P_b = Q\left(\frac{A}{2\sigma_Q}\right) = Q\left(\sqrt{2\alpha^2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Ecualización analógica en Transmisión. Solución Hardware.

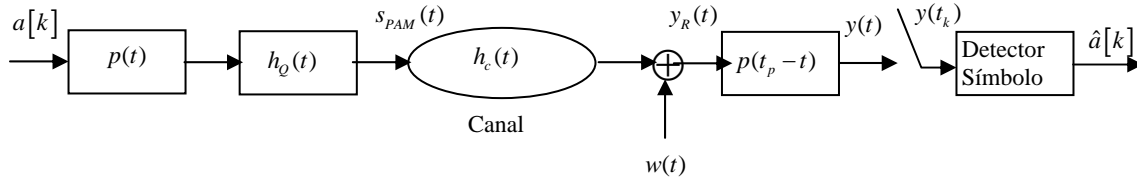


Figura 21 Esquema de Ecualización analógica en Transmisión. Solución Hardware

El filtro ecualizador debe cumplir la siguiente condición:

$$p(t) * h_c(t) * p(t_p - t) * h_Q(t) = R_p(t - t_d) = p_y(t)$$

que en el dominio de la frecuencia es:

$$P(f)H_c(f)P^*(f)e^{-j2\pi f t_p}H_Q(f) = |P(f)|^2 e^{-j2\pi f t_d}$$

Por tanto su función de transferencia ideal es:

$$H_Q(f) = \frac{1}{H_c(f)} e^{-j2\pi f(t_d - t_p)} \quad (14)$$

En estas condiciones a la salida del filtro adaptado la expresión de la señal puede expresarse como:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] R_p(t - t_d - nT) + n(t)$$

y en su versión muestreada a $t_k = kT + t_d$

$$y(t_k) = a[k] + n(t_k)$$

donde la muestra de ruido se distribuye según:

$$n(t_k) : N\left(0, \sigma^2 = \frac{N_0}{2}\right)$$

La probabilidad de error, se calcula a continuación para una modulación binaria de símbolos estadísticamente independientes y equiprobables codificada polar. En la nueva situación la energía media transmitida por bit debe medirse sobre la señal a la salida del transmisor:

$$s_{PAM}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p(t - nT) * h_Q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p_T(t - nT)$$

con $p_T(t) = p(t) * h_Q(t)$

Aplicando la expresión de energía obtenida en el apartado 1.3.4:

$$E_s = E_b = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] R_{p_T}(-kT) = \frac{A^2}{4} R_{p_T}(0) =$$

$$\frac{A^2}{4} \int |P(f)|^2 |H_Q(f)|^2 df = \frac{A^2}{4} \int \frac{|P(f)|^2}{|H_c(f)|^2} df$$

Finalmente puede observarse que la BER resultante es idéntica a la situación de ecualizar en recepción:

$$BER = P_b = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2}{\int \frac{|P(f)|^2}{|H_c(f)|^2} df} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Para el caso particular: $|H_c(f)| = \alpha$ y $\int |P(f)|^2 df = E_p = 1$, se obtiene la solución esperada:

$$BER = P_b = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{2\alpha^2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

1.5.5 Comparación FTO-Ecualización

A continuación se compara la BER obtenida mediante filtros terminales óptimos con la obtenida por las dos opciones de ecualización en recepción y ecualización en transmisión ambas coincidentes.

Para simplificar la comparación, se considera ruido blanco y modulación polar binaria. En una situación más general, la demostración sería análoga y se obtendría por tanto el mismo resultado.

Con las soluciones de ecualización se obtiene:

$$BER = P_b = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2}{\int \frac{|P(f)|^2}{|H_c(f)|^2} df} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Con la solución de FTO se obtiene:

$$BER = P_b = Q \left(\sqrt{\frac{2}{\left| \int \frac{|P_y(f)|}{|H_c(f)|} df \right|^2} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Si para ambas estrategias se considera el mismo pulso resultante en detección:

$$P_y(f) = |P(f)|^2 \Rightarrow$$

$$\left| \int \frac{|P_y(f)|}{|H_c(f)|} df \right|^2 \leq \int \left| \frac{P(f)}{H_c(f)} \right|^2 df \int |P(f)|^2 df = \int \left| \frac{P(f)}{H_c(f)} \right|^2 df E_p = \int \left| \frac{P(f)}{H_c(f)} \right|^2 df$$

Con lo que se concluye que:

$$BER_{FTO} \leq BER_{Eq,Rx} = BER_{Eq,Tx}$$

1.6 Modulaciones Paso-Banda: QAM.

1.6.1 Introducción

Mediante una señal digital PAM se puede modular la amplitud, la frecuencia o la fase de una portadora sinusoidal.

En este tema se analizan únicamente aquellas modulaciones en las que tanto la componente en fase como la componente en cuadratura de la modulación corresponden a modulaciones PAM, denominadas en general modulaciones QAM (Quadrature-Amplitude Modulation).

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(a_i[n] p(t-nT) A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - a_q[n] p(t-nT) A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \right) \quad (15)$$

$$i_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_i[n] p(t-nT)$$

$$q_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_q[n] p(t-nT)$$

En general, se asume que los símbolos son equiprobables, estadísticamente independientes en tiempo y en número M igual a una potencia de 2.

$$\Pr\{a_i[n] + ja_q[n] = (a_i + ja_q)_m = a_m\} = \frac{1}{M}; \quad M = 2^b$$

donde por comodidad se han definido símbolos complejos, haciendo coincidir la parte real del símbolo con el símbolo de la modulación PAM correspondiente a la componente en fase y la parte imaginaria del símbolo con el símbolo de la modulación PAM correspondiente a la componente en cuadratura.

De este modo la señal analítica o envolvente compleja de $s(t)$ y su equivalente paso bajo respecto a la portadora $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$ resultan:

$$a_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((a_i[n] + ja_q[n]) p(t-nT) A_c \exp j(2\pi f_c t + \varphi_c) \right)$$

$$b_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((a_i[n] + ja_q[n]) p(t-nT) \right)$$

En la Figura 22 se muestra el esquema del modulador y en la Figura 23 el esquema del demodulador coherente. Nótese que en general los símbolos son complejos y su detección se puede realizar por separado para la parte real (componente en fase) y para la parte imaginaria (componente en cuadratura) o de forma conjunta.

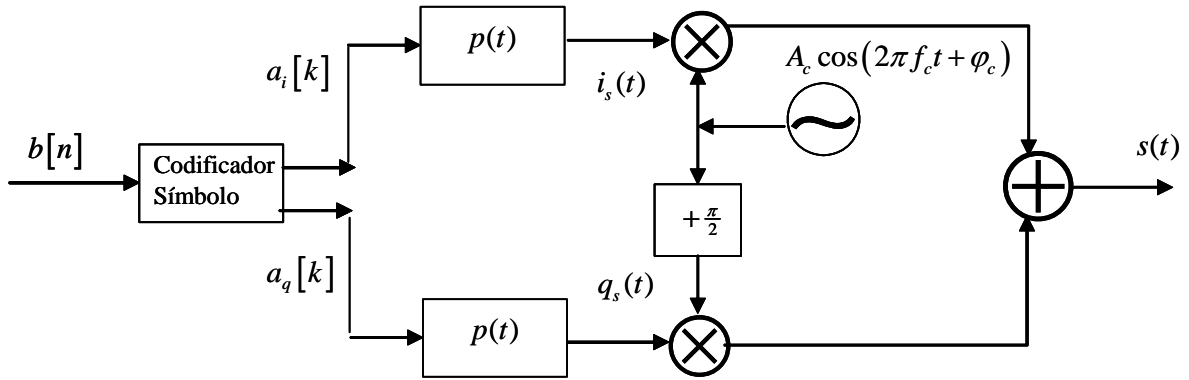


Figura 22 Modulador QAM

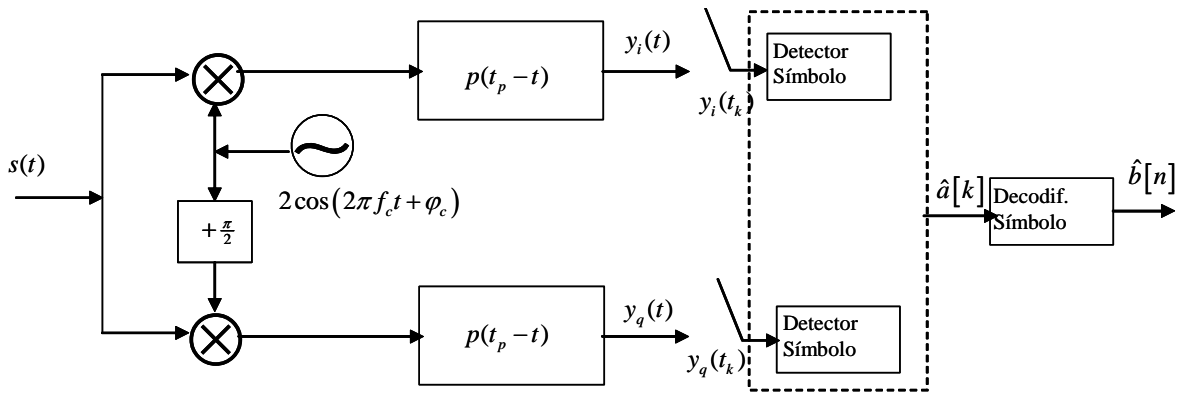


Figura 23 Demodulador Coherente QAM.

1.6.2 Densidad Espectral de las modulaciones QAM

Como paso previo al cálculo de la densidad espectral se obtiene la correlación. Es de destacar que en la mayor parte de las modulaciones QAM no binarias que se utilizan en la práctica se cumplen las siguientes condiciones:

$$R_{i_s}(t + \tau, t) = R_{q_s}(t + \tau, t)$$

$$R_{i_s q_s}(t + \tau, t) = -R_{q_s i_s}(t + \tau, t)$$

ello es debido a que en general las secuencias de símbolos cumplen:

$$R_{a_i}[k] = R_{a_q}[k]$$

$$E[a_i[n]a_q[m]] = 0 \quad \forall m, n$$

Considerando las condiciones anteriores, se cumple que: $R_{i_s q_s}(\tau) = R_{q_s i_s}(\tau) = 0 \Rightarrow$

$$R_s(t+\tau, t) = +\frac{A_c^2}{2} \left(R_{i_s}(t+\tau, t) (\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c (2t+\tau) + 2\varphi_c)) \right) + \\ + \frac{A_c^2}{2} \left(R_{q_s}(t+\tau, t) (\cos(2\pi f_c \tau) - \cos(2\pi f_c (2t+\tau) + 2\varphi_c)) \right)$$

Y asumiendo la condición generalmente utilizada en la práctica: $f_c = Nr$, la correlación anterior resulta cicloestacionaria de cicloperiodo igual a T . Por tanto su versión promediada temporalmente es:

$$\bar{R}_s(\tau) = +\frac{A_c^2}{2} \left(\bar{R}_{i_s}(\tau) + \bar{R}_{q_s}(\tau) \right) \cos(2\pi f_c \tau)$$

Cuando la componente en cuadratura no es nula y $R_{i_s}(t+\tau, t) = R_{q_s}(t+\tau, t)$ se obtiene

$$R_s(t+\tau, t) = +A_c^2 R_{i_s}(t+\tau, t) \cos(2\pi f_c \tau) = +A_c^2 R_{q_s}(t+\tau, t) \cos(2\pi f_c \tau)$$

se obtiene la densidad espectral de una modulación QAM:

$$S_s(f) = TF \left[+A_c^2 \bar{R}_s(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) \right] = \\ \frac{A_c^2}{2} S_{i_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{2} S_{i_s}(f + f_c)$$

donde siempre que se cumpla $R_{a_i}[k] = R_{a_q}[k] = \sigma_{a_i}^2 \delta[k]$, la expresión de la densidad espectral obtenida es:

$$S_s(f) = \frac{A_c^2}{2T} \sigma_{a_i}^2 \left(S_p(f - f_c) + S_p(f + f_c) \right)$$

Energía Media de Símbolo y Energía Media de Bit:

$$E_s = P_s T = T \bar{R}_s(0) = \frac{A_c^2 T}{2} \left(\bar{R}_{i_s}(0) + \bar{R}_{q_s}(0) \right) = \frac{A_c^2}{2} (E_{i_s} + E_{q_s}) \Rightarrow \\ E_b = \frac{A_c^2}{2} (E_{bi_s} + E_{bq_s})$$

Si la **componente en cuadratura es nula** y considerando la situación bastante habitual de relación entera entre las frecuencias: $f_c = Nr$, $N \gg 1$

$$R_s(t+\tau, t) = +\frac{A_c^2}{2} \left(R_{i_s}(t+\tau, t) (\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c (2t+\tau) + 2\varphi_c)) \right)$$

se obtiene la densidad espectral de una modulación (ASK):

$$S_s(f) = TF \left[+\frac{A_c^2}{2} \bar{R}_{i_s}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) \right] = \frac{A_c^2}{4} S_{i_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4} S_{i_s}(f + f_c)$$

Energía Media de Símbolo y Energía Media de Bit:

$$E_s = P_s T = T \bar{R}_s(0) = \frac{A_c^2 T}{2} \left(\bar{R}_{i_s}(0) \right) = \frac{A_c^2}{2} (E_{i_s}) \Rightarrow$$

$$E_b = \frac{A_c^2}{2} (E_{bi_s})$$

1.6.3 BER para modulaciones digitales paso-banda y detección coherente.**Modulaciones ASK (Amplitude Shift Keying)**

En este tipo de modulación los símbolos del equivalente paso bajo, son reales, por tanto no existe componente en cuadratura. La modulación elegida para los símbolos es Unipolar:

$$a_m = (a_i)_m = (m-1)A$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_i[n] p(t-nT) A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c))$$

Tabla para Modulación ASK de cuatro niveles. M=4, b=2. Se asignan dos bits por símbolo.

Bits $b[n]$	Probabilidades	Símbolos a_m
00	$\frac{1}{M}$	0
01	$\frac{1}{M}$	A
11	$\frac{1}{M}$	2A
10	$\frac{1}{M}$	3A

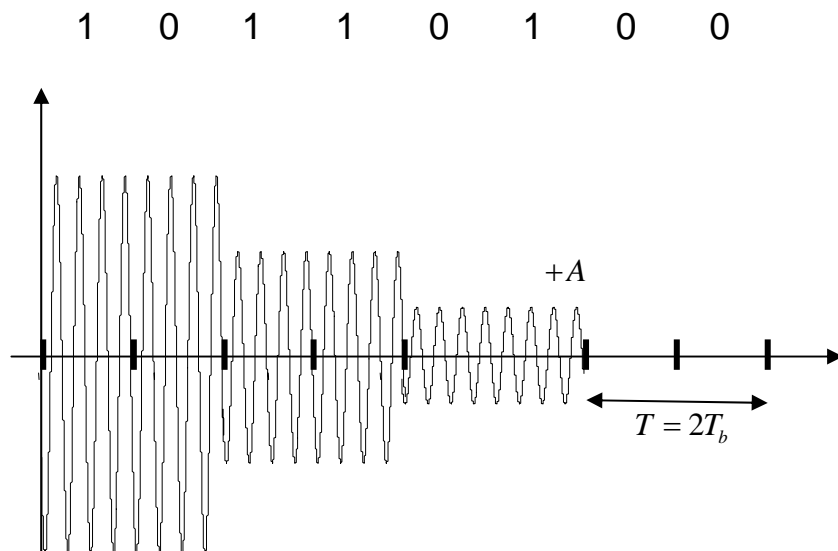


Figura 24 Ejemplo de señal temporal 4ASK

La BER en detección para canal ideal de atenuación cero dB y ruido gaussiano es

$$BER = P_b = \frac{2(M-1)}{bM} Q\left(\frac{AA_c}{2\sigma}\right)$$

La energía media transmitida por bit se relaciona con la amplitud de los símbolos:

$$E_b = \frac{E_s}{b} = T_b P_s = T_b \bar{R}_s(0) = \frac{1}{2b} A_c^2 R_a[0] E_p$$

$$\text{donde } R_a[0] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M-1} (mA)^2 = \frac{A^2}{M} \frac{M(M-1)(2M-1)}{6} = \frac{(M-1)(2M-1)}{6} A^2$$

$$\text{y por tanto } \frac{A^2 A_c^2}{4} = \frac{3b}{(M-1)(2M-1)} E_b$$

La potencia de ruido (suponiendo un filtro receptor paso banda ideal y de ancho de banda igual al de la señal útil recibida, siguiendo el esquema de la Figura 23, se obtiene a partir de la densidad espectral de la componente de ruido queda: $S_{i_n}(f) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_s}\right)$):

$$\sigma^2 = \int S_{i_n}(f) |P(f)|^2 df = N_0 E_p = N_0$$

Finalmente la BER obtenida es:

$$BER = P_b = \frac{2(M-1)}{bM} Q\left(\sqrt{\frac{3b}{(M-1)(2M-1)} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Modulaciones PSK (Phase Shift Keying)

En este tipo de modulación los símbolos del equivalente paso bajo, representados sobre el plano complejo se distribuyen uniformemente sobre el círculo unidad.

$$a_m = (a_i + ja_q)_m = \exp(j\varphi_m) = \exp(j\varphi_1) \exp(j(m-1) \frac{2\pi}{M})$$

$$\begin{aligned} a_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ((\cos \varphi_m[n] + j \sin \varphi_m[n]) p(t-nT) A_c \exp j(2\pi f_c t + \varphi_c)) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t-nT) A_c \exp j(2\pi f_c t + \varphi_c + \varphi[n]) \Rightarrow \\ s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t-nT) A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \varphi_m[n]) \end{aligned}$$

Tabla para Modulación QPSK de cuatro niveles. M=4, b=2. Se asignan dos bits por símbolo.

Bits $b[n]$	Probabilidades	Símbolos φ_m
00	$\frac{1}{M}$	$\frac{\pi}{4}$
01	$\frac{1}{M}$	$\frac{3\pi}{4}$
11	$\frac{1}{M}$	$\frac{5\pi}{4}$
10	$\frac{1}{M}$	$\frac{7\pi}{4}$

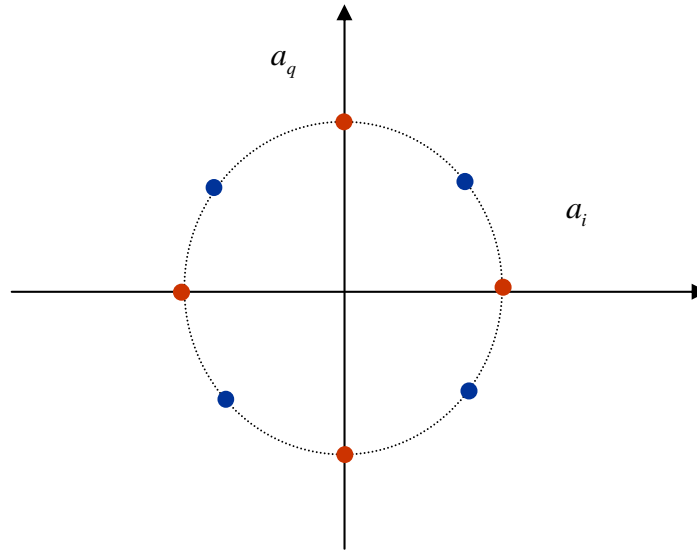


Figura 25 Constelación de símbolos para QPSK (azul) y 8PSK (rojo y azul)

Para calcular la probabilidad de error en detección coherente y dado que el símbolo se detecta a partir de la fase se tiene:

$$y_i(t_k) + jy_q(t_k)|_{s_m} = A_c e^{j\varphi_m} + b_n(t_k) = r(t_k) e^{j\theta(t_k)}$$

La parte real y la parte imaginaria de las muestras complejas de ruido, son variables aleatorias estadísticamente independientes entre sí y presentan una distribución gaussiana de media nula y varianza $\sigma^2 = N_0$.

En estas condiciones y tal como se vio en el tema 3 y como se muestra en 1.7.2 la distribución conjunta del módulo y la fase de las muestras complejas condicionadas es:

$$f_{r,\theta}(r, \theta | \varphi_m) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{A_c^2}{\sigma^2}\right) \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(+\frac{A_c r \cos(\varphi_m - \theta)}{\sigma^2}\right)$$

La distribución marginal para la fase se obtiene como:

$$f_\theta(\theta | \varphi_m) = \int_0^{+\infty} f_{r,\theta}(r, \theta | \varphi_m) dr$$

La BER en detección para canal ideal de atenuación cero dB se calcula según:

$$\text{BER} = P_b \simeq \frac{1}{b} P_e$$

$$P_e = 1 - \int_{\varphi_m - \frac{\pi}{M}}^{\varphi_m + \frac{\pi}{M}} f_{\theta}(\theta | \varphi_m) d\theta$$

y mediante aproximaciones adecuadas se llega al resultado de

$$P_e \simeq 2Q\left(\sqrt{\frac{2bE_b}{N_0}} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$

Modulaciones QAM Cuadradas

Se consideran modulaciones en las que el número de símbolos posibles a transmitir M es potencia de 4. Los b bits que codifican cada símbolo se dividen en $\frac{b}{2}$ para la parte real del símbolo y $\frac{b}{2}$ para la parte imaginaria. De este modo las componentes fase y cuadratura resultan dos modulaciones independientes entre sí y cada una de ellas codifica de forma polar de $M' = \sqrt{M}$ niveles. Tanto la modulación como la detección se puede realizar de modo independiente entre las componentes I&Q.

Tabla para Modulación 16QAM. $M=16$, $M'=4$, $b=2$. Se asignan dos bits por símbolo de componente en fase y dos bits por símbolo de componente en cuadratura.

Bits $b[n+1]b[n+3]$	Símbolos $\text{Re}[a_m]$	Bits $b[n+2]b[n+4]$	Símbolos $\text{Im}[a_m]$
00	$-\frac{3}{2}A$	00	$-\frac{3}{2}A$
01	$-\frac{1}{2}A$	01	$-\frac{1}{2}A$
11	$+\frac{1}{2}A$	11	$+\frac{1}{2}A$
10	$+\frac{3}{2}A$	10	$+\frac{3}{2}A$

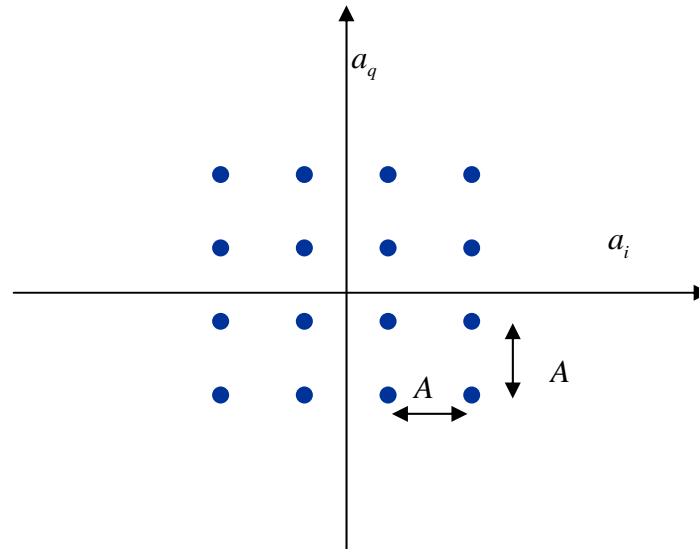


Figura 26 Constelación 16QAM

La BER en detección para canal ideal de atenuación cero dB y ruido gaussiano se puede calcular únicamente para los bits de una componente, ya que coincide

$$BER = P_b = \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\frac{b}{2}\sqrt{M}} Q\left(\frac{AA_c}{2\sigma}\right) = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{b\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{A^2 A_c^2}{4N_0}}\right)$$

La energía media transmitida por bit se relaciona con la amplitud de los símbolos:

$$E_b = \frac{E_s}{b} = T_b P_s = T_b \bar{R}_s(0) = \frac{1}{2b} A_c^2 \left(R_{a_i}[0] + R_{a_q}[0] \right) E_p$$

donde $R_{a_i}[0] + R_{a_q}[0] = 2 \frac{(M-1)^2 - 1}{12} A^2 = \frac{M-1}{6} A^2$

y por tanto $\frac{A^2 A_c^2}{4} = \frac{3b}{M-1} E_b$

Finalmente la BER obtenida es:

$$BER = P_b = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{b\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3b}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

1.6.4 BER para modulaciones digitales paso-banda binarias y detección coherente.

En este apartado se consideran únicamente las modulaciones BPSK (2PSK) y 2ASK. En esta situación solo hay componente en fase, por lo que el esquema del receptor coherente es:

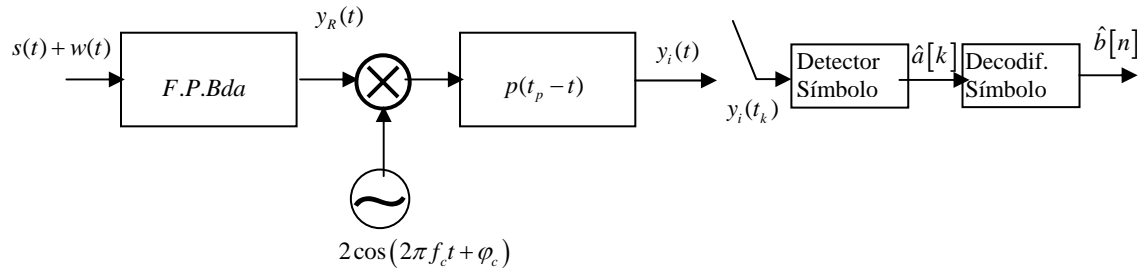


Figura 27 Esquema receptor coherente para modulaciones QAM con componente en cuadratura nula.

Se asume que el filtro paso banda es ideal, se halla centrado a la frecuencia portadora f_c y su ancho de banda es $B_T = 2B_p$

Expresión de la señal a la salida del filtro adaptado:

$$y_i(t) = i_{y_R}(t) * p(t_p - t) = A_c i_s(t) * p(t_p - t) + i_n(t) * p(t_p - t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_i[n] R_p(t - t_p - nT) + n_D(t)$$

y al muestrear en $t_k = kT + t_p$ se obtiene:

$$y_i(t_k) = A_c a_i[k] E_p + n_D(t_k) = A_c a_i[k] + n_D(t_k) =$$

Estadística de la muestra de ruido: $n_D(t_k) : N(0, \sigma^2)$ con

$$\sigma^2 = \int S_{i_n}(f) |P(f)|^2 df = \int N_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_p}\right) |P(f)|^2 df = N_0 E_p = N_0$$

Particularizando al caso **2ASK**: $a_i = 0, A$

La energía media transmitida por bit se relaciona con la amplitud de los símbolos:

$$E_b = T_b P_s = T_b \bar{R}_s(0) = \frac{1}{2} A_c^2 R_{a_i}[0] E_p = \frac{1}{4} A_c^2 A^2$$

y la probabilidad de error resulta:

$$P_b = Q\left(\frac{A_c A}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2 A^2}{4\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Particularizando al caso **BPSK ó 2PSK ó PRK**: $a_i = \pm 1$

La energía media transmitida por bit se relaciona con la amplitud de los símbolos:

$$E_b = T_b P_s = T_b \bar{R}_s(0) = \frac{1}{2} A_c^2 R_{a_i}[0] E_p = \frac{1}{2} A_c^2$$

y la probabilidad de error resulta:

$$P_b = Q\left(\frac{A_c}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Conclusiones: La Ganancia obtenida con BPSK respecto a 2ASK es idéntica a la obtenida con 2Polar respecto a 2Unipolar, como era de esperar.

1.7 Anexos

1.7.1 Anexo 1: Área de la Gaussiana

Sea $0 \leq x < +\infty$

Se define:

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$$

Observe que: $Q(0) = \frac{1}{2}$

A partir de la definición es fácilmente comprobable que:

- si $x < 0 \Rightarrow \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = 1 - Q(-x)$
- si $x < 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = Q(-x)$
- si $x > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = 1 - Q(x)$

Relaciones con las funciones erf y erfc.

Sea $0 \leq x < +\infty$

Se define la función de error:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda$$

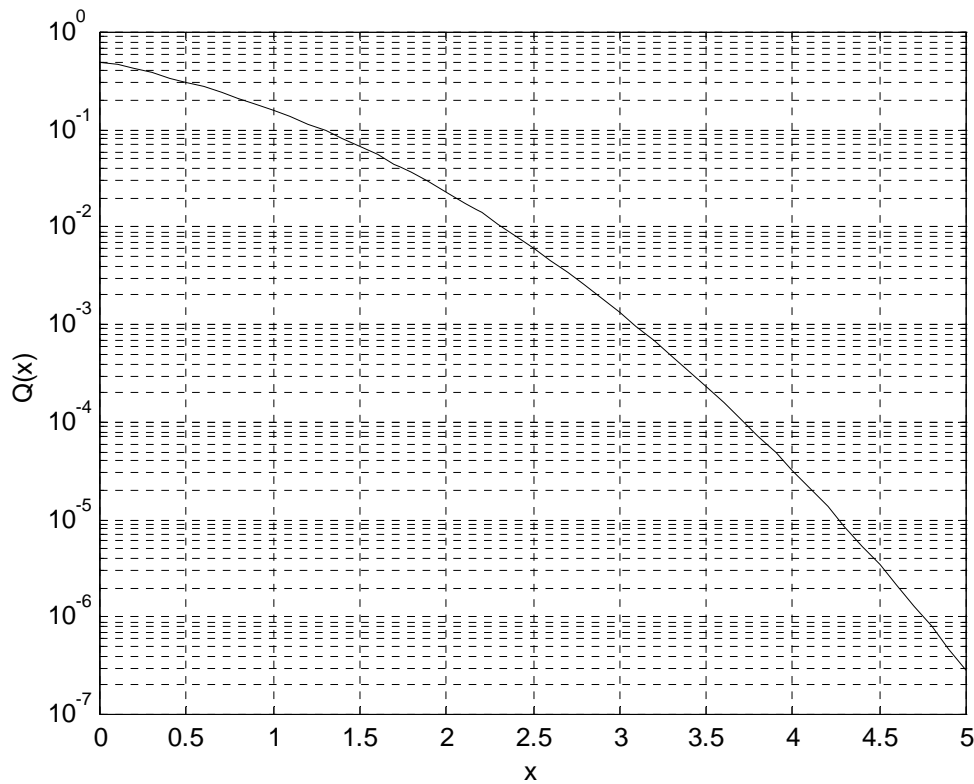
y la función de error complementario:

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = 1 - \text{erf}(x)$$

Mediante adecuados cambios de variable se puede comprobar que:

$$\begin{aligned} \text{erfc}(x) &= 2Q(\sqrt{2}x) \\ Q(x) &= \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) \end{aligned}$$

La siguiente figura muestra los valores de $Q(x)$ para $0 \leq x \leq +5$



1.7.2 Anexo 2: Distribuciones de módulo y fase de una variable aleatoria compleja y Gaussiana

Sean x, y dos variables aleatorias reales con f.d.p. Gaussiana y estadísticamente independientes entre sí. Ambas f.d.p. varianza σ^2 y medias diferentes:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m_x)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m_y)^2}{\sigma^2}\right)$$

Al formar la variable compleja $v = x + jy = r \exp(j\theta)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 f_{r,\theta}(r,\theta) &= r \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m_x)^2}{\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-m_y)^2}{\sigma^2}\right) = \\
 &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2+y^2-2m_x x+m_x^2-2m_y y+m_y^2}{\sigma^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_x^2+m_y^2}{\sigma^2}\right) \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(+\frac{m_x r \cos\theta + m_y r \sin\theta}{\sigma^2}\right) \\
 &\quad 0 \leq r \leq +\infty \\
 &\quad -\pi \leq \theta \leq +\pi
 \end{aligned}$$

Al asumir $m_x + jm_y = Ae^{j\varphi}$

$$\begin{aligned}
 f_{r,\theta}(r,\theta) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{A_c^2}{\sigma^2}\right) \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(+\frac{A_c r (\cos\varphi \cos\theta + \sin\varphi \sin\theta)}{\sigma^2}\right) = \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{A_c^2}{\sigma^2}\right) \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(+\frac{A_c r \cos(\varphi-\theta)}{\sigma^2}\right)
 \end{aligned}
 \quad \begin{aligned}
 &0 \leq r \leq +\infty \\
 &-\pi \leq \theta \leq +\pi
 \end{aligned}$$