UPC — telecom BCN — Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA **Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions**	**ComII.** 5-12-2008 Grup 10 M.Cabrera. Durada: 1hora 45'.

- ***Inicie todas las hojas que utilice escribiendo su nombre y apellidos.***
- *Deben enumerarse las páginas del examen.*
- *Disponga de un documento identificativo a la vista.*
- *No se permite el uso de calculadora*
- ***DESCONECTE EL TELÉFONO MÓVIL**. No se permite su uso durante la prueba ni en su funcionalidad de reloj.*

Ejercicio 1 (25 %)

- Dé las características que definen una modulación CPFSK (Continuous Phase Frequency Shift Keying). Obtenga que condición debe cumplir el parámetro de sensibilidad de frecuencias f_d, para que los diferentes símbolos correspondan a señales ortogonales entre sí manteniendo mínimo el ancho de banda. Dé un ejemplo conocido de modulación CPFSK binaria.
- Dé las características que definen una modulación CPM que no sea CPFSK. Dé un ejemplo conocido de modulación CPM binaria que no sea CPFSK, describiendo cualitativamente el pulso base utilizado para modular la fase de la señal.

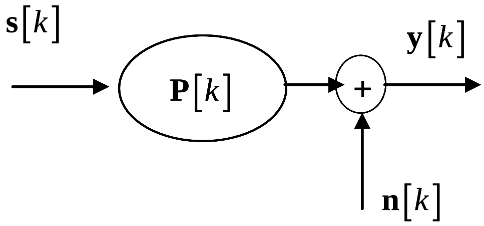
En ningún caso se pide que describa el sistema receptor/detector de señal.
En ningún caso debe dedicar más de dos páginas a la resolución de este ejercicio.

Ejercicio 2 (75%)

Sea una modulación 2PPM de símbolos equiprobables ($\sqrt{E_b}\sqrt{\frac{2}{T}}\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right);\sqrt{E_b}\sqrt{\frac{2}{T}}\Pi\left(\frac{t-3\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right)$).

a. Defina la señal modulada mediante una base ortonormal generadora del espacio de señal. Calcule la función de correlación: $\mathbf{R}_s[k]=E\left[\mathbf{s}[n+k]\mathbf{s}^H[n]\right]$, de la secuencia de símbolos $\mathbf{s}[n]$ y deje el resultado en función de la energía media transmitida por bit E_b.

La señal modulada se transmite por un canal ideal y AWGN de ruido *w(t)* blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f)=\frac{N_0}{2}$. En el receptor se proyecta en el espacio de señal eligiendo como filtros adaptados: $\varphi_l(T-t);l=1,..,L$. Se realiza el muestreo a la salida del proyector de señal con cierto error: $t_k=(k+1)T+\varepsilon T$. $0<=\varepsilon<=\frac{1}{4}$. El sistema discreto equivalente se puede modelar según la siguiente figura.

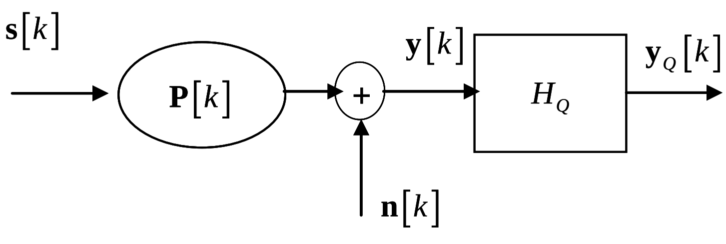


b. Determine la respuesta matricial discreta del canal equivalente:

$$\mathbf{P}(k)=\sum_{i=-1}^{i=+1}\begin{pmatrix} p_{11}[i] & p_{12}[i] \\ p_{21}[i] & p_{22}[i]\end{pmatrix}\delta[k-i]$$

c. Dibuje el espacio de señal recibido en ausencia de ruido y halle una cota de la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ y de los parámetros que considere necesarios. En este apartado se supone que la frontera que delimita las 2 zonas de decisión no se ha modificado por el hecho de muestrear con error.

Se propone minimizar la distorsión generada por el error en el muestreo mediante una matriz ecualizadora de 4 coeficientes según la figura adjunta:



Con

$$\mathbf{y}_Q[k]=\mathbf{H}_Q\mathbf{y}[k]=\begin{pmatrix} y_Q[k] \\ y_Q[k]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1[k] \\ y_2[k]\end{pmatrix}$$

Los coeficientes h_{ii} se diseñan para minimizar la siguiente función de error cuadrático medio: J= $E\left[\left\|\mathbf{y}_Q[k]-\mathbf{s}[k]\right\|^2\right]$.

d. Plantee el o los sistemas de ecuaciones que deben resolverse para hallar los 4 coeficientes con el máximo detalle, en función de los parámetros E_b, N_0, ε.

Resolución Ejercicio 2:

<u>Apartado a)</u> Es una codificación sin memoria. Eligiendo como base ortonormal generadora del espacio de señal: $\sqrt{\frac{2}{T}}\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right);\sqrt{\frac{2}{T}}\Pi\left(\frac{t-3\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right)$, se obtienen los dos vectores:

$$\mathbf{s}_1=\sqrt{E_b}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ \mathbf{s}_2=\sqrt{E_b}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

El vector de media queda:

$$\boldsymbol{\mu}_s=\frac{\sqrt{E_b}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Con lo que

$$\mathbf{R}_s\left[m\right]=\boldsymbol{\mu}_s\boldsymbol{\mu}_s{}^T=\frac{E_b}{4}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix};m\neq 0$$

$$\mathbf{R}_\mathbf{s}\left[0\right]=E\left[\mathbf{s}\left[n\right]\mathbf{s}^H\left[n\right]\right]=\frac{E_b}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{R}_s\left[m\right]=\frac{E_b}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\delta\left[m\right]+\frac{E_b}{4}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}$$

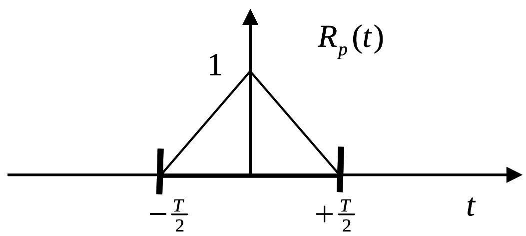
Apartado b) Dado que

$$\varphi_1(t)=\sqrt{\tfrac{2}{T}}\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right);\varphi_2(t)=\sqrt{\tfrac{2}{T}}\Pi\left(\frac{t-3\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right)$$

$$R_{\varphi_1}(t)=R_{\varphi_2}(t)=R_p(t)=\sqrt{\tfrac{2}{T}}\Pi\left(\frac{t}{\frac{T}{2}}\right)*\sqrt{\tfrac{2}{T}}\Pi\left(\frac{-t}{\frac{T}{2}}\right)$$

$$R_{\varphi_1\varphi_2}(t)=R_p(t-\tfrac{T}{4}+3\tfrac{T}{4})=R_p(t+\tfrac{T}{2})$$

$$R_{\varphi_2\varphi_1}(t)=R_p(t+\tfrac{T}{4}-3\tfrac{T}{4})=R_p(t-\tfrac{T}{2})$$



La señal a la salida del filtro adaptado de respuesta impulsional $\varphi_1(T-t)$, se puede expresar como:

$$y_1\left(t\right)=s(t)*\varphi_1\left(T-t\right)+w(t)*\varphi_1\left(T-t\right)=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\left[n\right]R_{\varphi_j\varphi_1}(t-nT-T)+\beta_1(t)=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\alpha_1\left[n\right]R_{\varphi_1\varphi_1}(t-\left(n+1\right)T)+\alpha_2\left[n\right]R_{\varphi_2\varphi_1}(t-\left(n+1\right)T)\right)+\beta_1(t)$$

Al muestrear con error en $t_k = (k+1)T + \varepsilon T$ las muestras obtenidas son igual a:

$$\begin{aligned}
&y_1\left((k+1)T + \varepsilon T\right) = \\
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha_1[n] R_{\varphi_1\varphi_1}\left((k-n+\varepsilon)T\right) + \alpha_2[n] R_{\varphi_2\varphi_1}\left((k-n+\varepsilon)T\right)\right) + \beta_1(t_k) = \\
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha_1[n] R_p\left((k-n+\varepsilon)T\right) + \alpha_2[n] R_p\left((k-n-\tfrac{1}{2}+\varepsilon)T\right)\right) + \beta_1[k] = \\
&R_p(\varepsilon T)\alpha_1[k] + R_p\left((-\tfrac{1}{2}+\varepsilon)T\right)\alpha_2[k] + \beta_1[k] = \\
&(1-2\varepsilon)\alpha_1[k] + 2\varepsilon\alpha_2[k] + \beta_1[k]
\end{aligned}$$

Desarrollando de forma análoga la señal a la salida del segundo filtro adaptado se obtiene:

$$\begin{aligned}
&y_2\left((k+1)T + \varepsilon T\right) = \\
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha_1[n] R_{\varphi_1\varphi_2}\left((k-n+\varepsilon)T\right) + \alpha_2[n] R_{\varphi_2\varphi_2}\left((k-n+\varepsilon)T\right)\right) + \beta_2(t_k) = \\
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha_1[n] R_p\left((k-n+\tfrac{1}{2}+\varepsilon)T\right) + \alpha_2[n] R_p\left((k-n+\varepsilon)T\right)\right) + \beta_2[k] = \\
&R_p\left((-1+\tfrac{1}{2}+\varepsilon)T\right)\alpha_1[k+1] + R_p(\varepsilon T)\alpha_2[k] + \beta_2[k] = \\
&2\varepsilon\alpha_1[k+1] + (1-2\varepsilon)\alpha_2[k] + \beta_2[k]
\end{aligned}$$

En notación vectorial se tiene:

$$\begin{pmatrix} y_1(t_k) \\ y_2(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2\varepsilon) & 2\varepsilon \\ 0 & (1-2\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1[k] \\ \alpha_2[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1[k+1] \\ \alpha_2[k+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1[k] \\ \beta_2[k] \end{pmatrix}$$

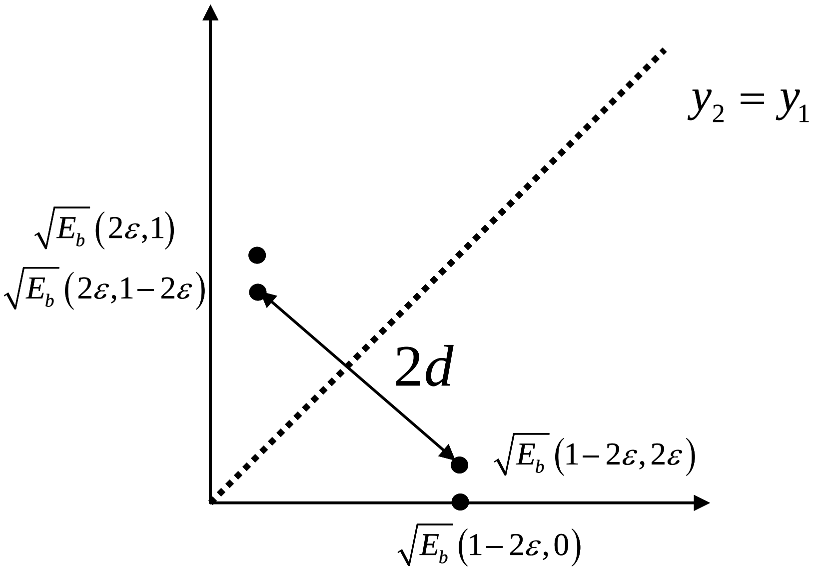
Por lo tanto:

$$\boxed{\mathbf{P}(k) = \begin{pmatrix} (1-2\varepsilon) & 2\varepsilon \\ 0 & (1-2\varepsilon) \end{pmatrix} \delta[k] + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \delta[k+1]}$$

Apartado c) El espacio de señal recibido es:

$$\mathbf{y}[k]\Big|\sqrt{E_b}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{cases}\sqrt{E_b}\begin{pmatrix}1-2\varepsilon\\0\end{pmatrix}+\mathbf{n} & \Pr=\frac{1}{2}\\ \sqrt{E_b}\begin{pmatrix}1-2\varepsilon\\2\varepsilon\end{pmatrix}+\mathbf{n} & \Pr=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\mathbf{y}[k]\Big|\sqrt{E_b}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{cases}\sqrt{E_b}\begin{pmatrix}2\varepsilon\\1-2\varepsilon\end{pmatrix}+\mathbf{n} & \Pr=\frac{1}{2}\\ \sqrt{E_b}\begin{pmatrix}2\varepsilon\\1\end{pmatrix}+\mathbf{n} & \Pr=\frac{1}{2}\end{cases}$$



La frontera que separa las dos zonas de decisión es $y_2 = y_1$, La mínima distancia d al umbral de decisión se puede calcular como el doble de la distancia entre los dos puntos más cercanos al umbral:

$$\left(2d\right)^2 = E_b\left\|\begin{pmatrix}1-2\varepsilon\\2\varepsilon\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\varepsilon\\1-2\varepsilon\end{pmatrix}\right\|^2 = 2E_b\left(1-4\varepsilon\right)^2$$

$$d^2 = \tfrac{1}{2}E_b\left(1-4\varepsilon\right)^2 \Rightarrow$$

$$BER \le KQ\left(\tfrac{d}{\sigma}\right) = KQ\left(\sqrt{\left(1-4\varepsilon\right)^2\tfrac{E_b}{N_0}}\right)$$

<u>Apartado d)</u> La función de error a minimizar equivale a la suma de dos términos, el primero de ellos depende del par de coeficientes h_{11}, h_{12} y el segundo de ellos depende del par de coeficientes h_{21}, h_{22}, tal como se muestra en la siguiente expresión. Así se puede calcular cada par de coeficientes por separado. Se tendrán que resolver dos sistemas de ecuaciones de dos incógnitas cada uno de ellos.

$$J = E\left[\left\|\mathbf{y}_Q[k]-\mathbf{s}[k]\right\|^2\right] = E\left[\left(y_{Q1}[k]-\alpha_1[k]\right)^2\right] + E\left[\left(y_{Q2}[k]-\alpha_2[k]\right)^2\right] =$$
$$E\left[\left(h_{11}y_1[k]+h_{12}y_2[k]-\alpha_1[k]\right)^2\right] + E\left[\left(h_{21}y_1[k]+h_{22}y_2[k]-\alpha_2[k]\right)^2\right]$$

Por otro lado se utilizarán las siguientes expresiones para calcular las esperanzas implícitas que afectan a las muestras $y_i[k]$ y a las coordenadas $\alpha_i[k]$.

$$y_1[k] = (1-2\varepsilon)\alpha_1[k] + 2\varepsilon\alpha_2[k] + \beta_1[k]$$
$$y_2[k] = 2\varepsilon\alpha_1[k+1] + (1-2\varepsilon)\alpha_2[k] + \beta_2[k]$$

Tal como se ha calculado en el apartado a) se tiene que:

$$E\left[\alpha_1^{\,2}[k]\right] = E\left[\alpha_2^{\,2}[k]\right] = \tfrac{1}{2}E_b$$
$$E\left[\alpha_1\ [k]\alpha_2\ [k]\right] = 0$$
$$E\left[\alpha_i\ [k]\alpha_j\ [k+1]\right] = \tfrac{1}{4}E_b$$

SISTEMA DE ECUACIONES 1:

$$\frac{\partial J}{\partial h_{11}} = h_{11}R_{y_1}[0] + h_{12}R_{y_2y_1}[0] - E\left[\alpha_1[k]y_1[k]\right] = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial h_{12}} = h_{11}R_{y_1y_2}[0] + h_{12}R_{y_2}[0] - E\left[\alpha_1[k]y_2[k]\right] = 0$$
$$\left(E_b\,\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}(1-2\varepsilon)^2+4\varepsilon^2 & (1-2\varepsilon)3\varepsilon+2\varepsilon^2\\ (1-2\varepsilon)3\varepsilon+2\varepsilon^2 & (1-2\varepsilon)^2+4\varepsilon^2+(1-2\varepsilon)\varepsilon\end{pmatrix}+\tfrac{N_0}{2}\mathbf{I}\right)\begin{pmatrix}h_{11}\\ h_{12}\end{pmatrix} = E_b\,\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}(1-2\varepsilon)\\ \varepsilon\end{pmatrix}$$

SISTEMA DE ECUACIONES 2:

$$\frac{\partial J}{\partial h_{21}} = h_{21}R_{y_1}[0] + h_{22}R_{y_2y_1}[0] - E\left[\alpha_2[k]y_1[k]\right] = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial h_{22}} = h_{21}R_{y_1y_2}[0] + h_{22}R_{y_2}[0] - E\left[\alpha_2[k]y_2[k]\right] = 0$$
$$\left(E_b\,\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}(1-2\varepsilon)^2+4\varepsilon^2 & (1-2\varepsilon)3\varepsilon+2\varepsilon^2\\ (1-2\varepsilon)3\varepsilon+2\varepsilon^2 & (1-2\varepsilon)^2+4\varepsilon^2+(1-2\varepsilon)\varepsilon\end{pmatrix}+\tfrac{N_0}{2}\mathbf{I}\right)\begin{pmatrix}h_{21}\\ h_{22}\end{pmatrix} = E_b\,\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2\varepsilon\\ (1-\varepsilon)\end{pmatrix}$$