ESCOLA TECNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

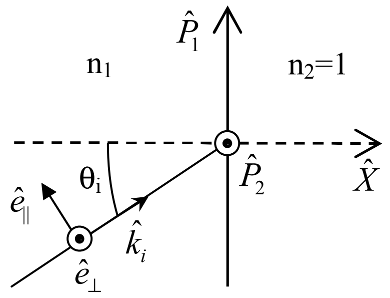
**Examen Final** de **CAMPS ELECTROMAGNÈTICS**

Professors: D. Artigas, F. Dios, J. Recolons — 26.06.2008

Duració: 3h — Publicació de notes provisionals: 02.07.2008

## *Problema 1*

Una ona plana uniforme amb $f$ = 0.3 GHz es propaga en la direcció donada pel vector unitari $\hat{k}_i = (2\hat{x}+\sqrt{3}\hat{y}-3\hat{z})/4$ i incideix just amb l'angle crític des d'un medi dielèctric sobre l'aire. La superfície de separació dielèctric-aire està situada en el pla *Y-Z*. L'ona té una polarització el·líptica a esquerres, amb relació axial $R$ = 2. La densitat de flux de potència mitja es de 7,66 mW/m$^2$.




Trobeu:

a) Angle d'incidència i l'índex de refracció del medi dielèctric.
b) L'expressió dels vectors unitaris paral·lels i perpendiculars al pla d'incidència que s'utilitzen habitualment per expressar l'ona incident (veure esquema).
c) Sabent que l'eix major de l'el·lipse de polarització està orientat perpendicularment al pla d'incidència trobeu el desfasament entre els components paral·lel i perpendicular de l'ona incident.
d) Expressió exacta de l'ona incident.
e) Expressió exacta de l'ona transmesa.

**Solució:**

a) La normal a la sup. de sep. $\hat{n} = -\hat{x}$ i el vector d'ona unitari és $(2\hat{x}+\sqrt{3}\hat{y}-3\hat{z})/4$

$\rightarrow -\hat{n}\cdot\hat{k} = \cos\theta_i \rightarrow \hat{x}\cdot(2\hat{x}+\sqrt{3}\hat{y}-3\hat{z})/4 = \frac{2}{4} \rightarrow \cos\theta_i = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\theta_i = \frac{\pi}{3}}$

Llavors podem trobar l'índex de refracció a partir de la tercera llei d'Snell $n_1 \sin\theta_i = n_2 \cos\theta_t$ i que per l'angle crític $\theta_t = \frac{\pi}{2}$, llavors $n_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \rightarrow \boxed{n_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}}$

b) Un vector perpendicular al pla d'incidència es pot trobar com $\vec{e}_\perp = \hat{k}\times\hat{n}$, però atenció, perquè aquest vector no és unitari ja què $\hat{k}$ i $\hat{n}$ no son perpendiculars entre si. Llavors

$$\frac{2\hat{x}+\sqrt{3}\hat{y}-3\hat{z}}{4}\times(-\hat{x}) = \frac{3\hat{y}+\sqrt{3}\hat{z}}{4} \text{ que normalitzant queda } \boxed{\hat{e}_\perp = \frac{\sqrt{3}\hat{y}+\hat{z}}{2}}.$$

Llavors puc trobar $\hat{e}_\parallel = \hat{k}\times\hat{e}_\perp \rightarrow \hat{e}_\parallel = \frac{2\hat{x}+\sqrt{3}\hat{y}-3\hat{z}}{4}\times\frac{\sqrt{3}\hat{y}+\hat{z}}{2} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}\hat{x}-\hat{y}+\sqrt{3}\hat{z}}{4}}$

c) De l'apartat anterior, per construcció, es compleix $\hat{e}_{\parallel} = \hat{k} \times \hat{e}_{\perp}$, llavors podem identificar $\hat{e}_{\perp} = \hat{e}_1$ i $\hat{e}_{\parallel} = \hat{e}_2$. A més $\hat{e}_{\perp}$ es perpendicular al pla d'incidència. Si l'el·lipse de polarització té el màxim en la direcció de $\hat{e}_{\perp}$ vol dir que l'eix major de l'el·lipse i el vector $\hat{e}_{\perp}$ coincideixen (el·lipse ben orientada), llavors la diferència de fase es $\Delta\varphi = \pm\pi/2$

d) Llavors l'ona incident es pot escriure com:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 [2\hat{e}_{\perp} + j\hat{e}_{\parallel}] e^{-j\vec{k}_i \vec{r}}$$

On s'ha tingut en compte la relació axial i el fet que és polaritzada a esquerres.

Utilitzant el valor del vector de la densitat de flux de potència, tenim:

$$|\vec{P}| = \frac{n_1}{2\eta_0} |\vec{E}|^2 = \frac{2/\sqrt{3}}{2 \cdot 120 \cdot \pi} E_0^2 (4+1) = 7{,}66\ mW/m^2$$

on aïllant → $E_0 \approx 1V/m$

A més necessitem la en nombre d'ona, que serà $\vec{k}_i = n_1 \frac{2\pi f}{c} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$

Llavors podem construir el camp incident com:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \left[\sqrt{3}\hat{y} + \hat{z} + j\frac{2\sqrt{3}\hat{x} - \hat{y} + \sqrt{3}\hat{z}}{4}\right] \exp\left[-j\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(2x + \sqrt{3}y - 3z\right)\right]}$$

e) L'ona transmesa es propaga paral·lela a la superfície de separació (incidència just per l'angle crític), i tenint en comptes que les projeccions dels vectors d'ona sobre la superfície de separació ha de ser igual (lleis d'Snell) →

$$\vec{k}_t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\hat{y} - 3\hat{z}\right) = \pi\left(\hat{y} - \sqrt{3}\hat{z}\right)$$

Les components perpendiculars al pla d'incidència normalment les triàvem que no canvien d'un medi a l'altre, llavors →

$$\hat{e}_{\perp} = \frac{\sqrt{3}\hat{y} + \hat{z}}{2}$$

Les component paral·leles son difícil de visualitzar, però pensem que han de ser perpendiculars a $\hat{e}_{\perp}$ i $\hat{k}$ i han de complir la mateixa regla del producte vectorial que per l'ona incident $\hat{e}_{\parallel} = \hat{k} \times \hat{e}_{\perp}$ (per l'ona reflectida no es així, i es compleix $\hat{e}_{\parallel} = \hat{e}_{\perp} \times \hat{k}$) llavors:

$$\hat{e}_{\parallel} = \frac{\hat{y} - \sqrt{3}\hat{z}}{2} \times \frac{\sqrt{3}\hat{y} + \hat{z}}{2} = \hat{x}$$

Si ara calculem el coeficients de transmissió, ens queden $\tau_{\perp} = 2$ y $\tau_{\parallel} = 2n_1 = 4/\sqrt{3}$. Llavors es pot construir l'ona transmesa com:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \left[2\left(\sqrt{3}\hat{y} + \hat{z}\right) + j\frac{4}{\sqrt{3}}\hat{x}\right] \exp\left[-j\pi\left(y - \sqrt{3}z\right)\right]}$$

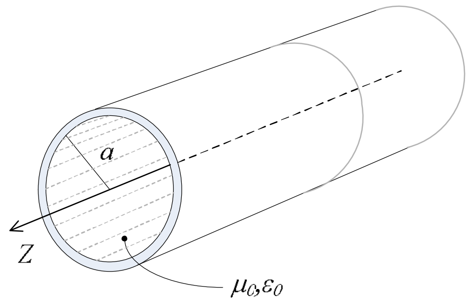
ESCOLA TECNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

**Examen Final** de **CAMPS ELECTROMAGNÈTICS**

Professors: D. Artigas, F. Dios, J. Recolons 26.06.2008

***Problema 2***

Una guía de ondas de pared conductora y sección circular admite soluciones en la forma de ondas tipo TE y tipo TM. El campo magnético de uno de los modos TE es de la forma




$$\vec{H}(\vec{r}) = H_r(\vec{r})\hat{r} + H_j(\vec{r})\hat{j} + H_z(\vec{r})\hat{z}$$

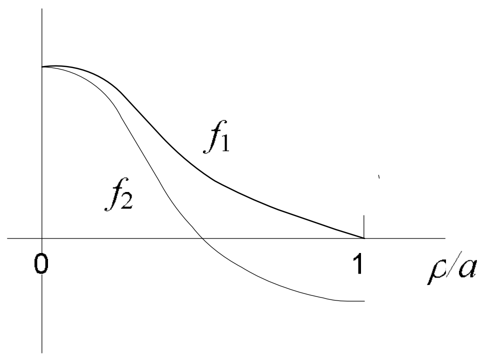
donde

$$H_j(r, j, z) = +j\frac{b}{k_0^2 - b^2} H_0 \frac{1}{r} f(r) \sin j \ \exp(-jb\, z)$$

y

$$H_z(r, j, z) = H_0\ f(r) \cos j \ \exp(-jb\, z)$$

*a)* Obtenga la expresión de la componente $E_r$ (en función de las mismas constantes y de la función $f(r)$ ).
*b)* Calcule la componente $E_j$ .
*c)* Calcule el resto de componentes.
*d)* ¿Qué ecuación diferencial debe satisfacer la función $f(r)$?
*e)* En la gráfica se muestran dos posibles soluciones de la ecuación diferencial anterior ¿Cuál de ellas no puede corresponder a la función $f\ (r)$ del problema? Justificar la respuesta.




**Solución:** (Con la ayuda de las fórmulas para los operadores en coordenadas cilíndricas).
*Advertencia: Pueden obtenerse las componentes en otro orden y utilizando otras igualdades. La que aquí se presenta es no obstante una de las formas más rápidas.*

***a)*** A partir de $\nabla \times \vec{H} = jwe_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \left(\nabla \times \vec{H}\right)_r = jwe_0 E_r$

$$E_r = \frac{-j}{we_0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial j} - \frac{\partial H_j}{\partial z}\right) = \ldots = \underline{jwm_0 \frac{1}{k_0^2 - b^2} H_0 \frac{f(r)}{r} \sin j \ \exp(-jb\, z)}$$

***b)*** A partir de $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, utilizando el hecho de que $\underline{E_z = 0}$ (modo TE)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,E_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial E_j}{\partial r} + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{E_j \; = \; j\frac{wm_0}{k_0^2 - b^2} H_0 \; f'(r)\cos j \; \exp(-jb\; z)}$$

***c)*** Solo falta $H_r$ ya que $E_z = 0$.

A partir de $\nabla \times \vec{E} = -jwm_0 \vec{H} \quad \Rightarrow \quad H_r \; = \; j\frac{1}{wm_0}\left(\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial j}} - \frac{\partial E_j}{\partial z}\right) \Rightarrow$

$$\underline{H_r = -j\frac{b}{k_0^2 - b^2} H_0 \; f'(r)\cos j \; \exp(-jb\; z)}$$

***d)*** La ecuación diferencial para la función $f(r)$ se puede obtener de varias formas:

d1) De la ecuación de onda para la componente longitudinal: $\nabla^2 H_z + k_0^2 H_z = 0$

d2) De la ecuación $\nabla \cdot \vec{H} = 0$

d3) De la igualdad $H_z = j\frac{1}{wm_0}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_j\right) - \frac{\partial E_r}{\partial j}\right]$

En cualquiera de los casos se obtiene: $\underline{f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \left(k_0^2 - b^2 - \frac{1}{r^2}\right)f(r) = 0}$

***e)*** La condición de contorno para la componente de campo eléctrico tangencial a la pared de la guía fuerza a que

$$E_j\,(r = a) = 0 \;\Rightarrow\; f'(r)\big|_{r=a} = 0$$

Esa condición no la satisface la función $f_1$, pero sí la $f_2$.

## Resolució 3r. Problema

a) Potencial vector creat pels dipols.

Utilitzem l'expressió general $\vec{A}(\vec{r}) \cong \mu_0 \dfrac{I\,h}{4\pi} \dfrac{e^{-jkr}}{r} \exp(jk\hat{r}\cdot\vec{r}_0)\,\hat{u}$

Pel dipol situat a l'esquerra tenim $I = aI_1$ , $r_0 = -d\,\hat{y}$ , $\hat{u} = \hat{z}$

Pel dipol central tenim $I = I_1$ , $r_0 = 0$ , $\hat{u} = \hat{z}$

Pel dipol situat a la dreta tenim $I = aI_1$ , $r_0 = d\,\hat{y}$ , $\hat{u} = \hat{z}$

Sumant totes les contribucions i desenvolupant els productes $\hat{r}\cdot\vec{r}_0$ obtenim el resultat

$$\vec{A}(\vec{r}) \cong \mu_0 \frac{I_1\,h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 + 2a\cos(kd\sin\varphi\sin\theta)\right]\hat{z}$$

b) Camp radiat creat pels dipols

Utilitzant l'expressió $\vec{E}_{rad} \cong -j\omega\left(A_\theta\,\hat{\theta} + A_\varphi\,\hat{\varphi}\right)$ i fent el canvi $\hat{z} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$

obtenim

$$\vec{E}_{rad} \cong j\omega\mu_0 \frac{I_1\,h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 + 2a\cos(kd\sin\varphi\sin\theta)\right]\sin\theta\,\hat{\theta}$$

c) Valors del paràmetre *a* i la distància *d* (en funció de $\lambda$) per tal que la radiació del sistema sigui nul·la en la direccions de l'eix *X* i de l'eix *Y* simultàniament

L'expressió del camp radiat, particularitzada per al pla $XY$ $(\theta = \dfrac{\pi}{2})$ val

$$\vec{E}_{rad}\Big|_{\theta=\pi/2} \cong j\omega\mu_0 \frac{I_1\,h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 + 2a\cos(kd\sin\varphi)\right](-\hat{z})$$

Per tant, la condició perquè la radiació sigui nul·la en la direcció de l'eix *X* $(\varphi = 0)$ és

$$a = -\frac{1}{2}$$

i la condició perquè la radiació sigui nul·la en la direcció de l'eix *Y* $(\varphi = \dfrac{\pi}{2})$ és

$$d = m\lambda\,, \text{ amb } m = 1,2,3\ldots$$

d) Diagrama de radiació del sistema en el pla *XY*, per a les condicions obtingudes a l'apartat c)

En les condicions de l'apartat c), l'expressió del camp radiat al pla *XY* queda de la forma

$$\vec{E}_{rad}\Big|_{\theta=\pi/2} \cong j\omega\mu_0 \frac{I_1 h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1-\cos(2m\pi\sin\varphi)\right](-\hat{z})$$

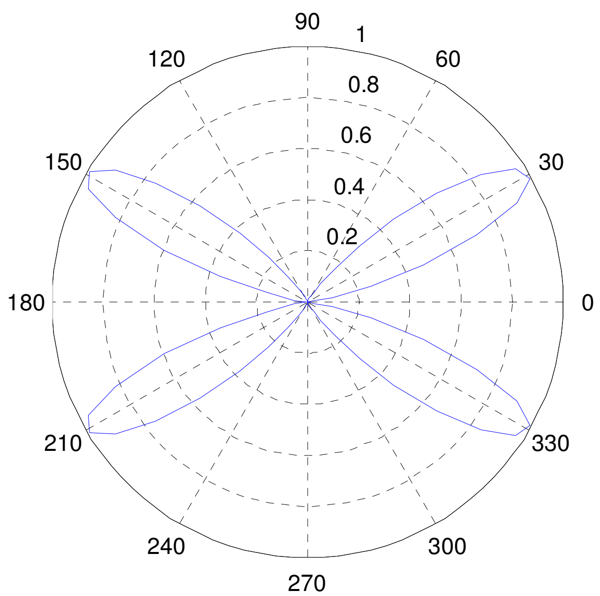
Amb la qual cosa el l'expressió per al diagrama de radiació normalitzat és

$$D(\varphi)\Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{\left|\vec{P}_{rad}(\varphi)\right|_{\theta=\pi/2}}{\left|\vec{P}_{rad}\right|_{\max}} = \frac{1}{4}\left[1-\cos(2m\pi\sin\varphi)\right]^2$$

Les direccions de radiació nul·la compleixen la condició

$$\cos(2m\pi\sin\varphi) = 1$$

Particularitzant-ho per al cas $m = 1$ ($d = \lambda$) obtenim nuls de radiació en les direccions $\varphi = 0, \pi$ i $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ tal com correspon a les condicions exigides a l'apartat c), amb la qual cosa el diagrama de radiació del sistema presenta quatre lòbuls de radiació, tal com mostra la figura




Si considerem valors $m > 1$, llavors hi apareixen lòbuls addicionals.

e) Pel que fa als màxims de radiació, els trobem quan es compleix la condició

$$\cos(2\pi\sin\varphi) = -1 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}$$

Per tant, la radiació serà màxima en les direccions $\varphi = \pm\frac{\pi}{6}$ i $\varphi = \pm\frac{5\pi}{6}$