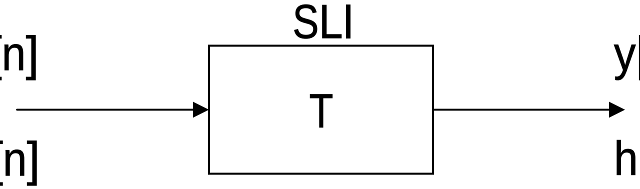
4.1: Transformada Z

- Definición y convergencia
- Propiedades
- Transformada Z inversa



$x[n]$	$y[n]$
$\delta[n]$	$h[n]$
$e^{j\omega n}$	$H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}$
z^n	$H(z)\, z^n$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Definición

- Previo: h[n] Respuesta impulsional
  H(z) Función de transferencia

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

- Generalización: x[n] secuencia
  X(z) Transformada Z de x[n]

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

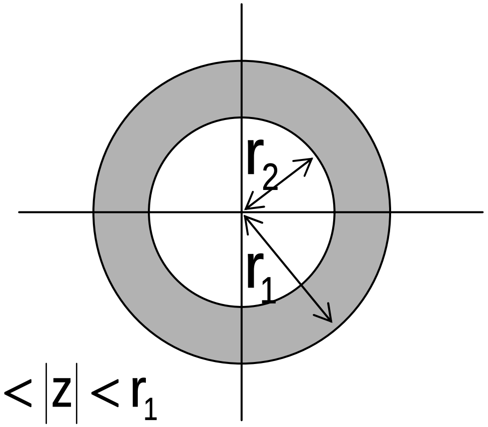
- Función compleja de variable compleja
- Serie de potencias $\Rightarrow$ convergencia?

Convergencia. ROC

- ROC (<u>R</u>egion <u>O</u>f <u>C</u>onvergence): Región del plano z en que hay convergencia uniforme
- X(z) se define en la ROC $\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] z^{-n} \right| < \infty \qquad z \in ROC$
- X(z) es analítica en la ROC

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] z^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x[n]| |z|^{-n} + x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n}$$

converge si $|z| < r_1$ converge si $|z| > r_2 \Rightarrow r_2 < |z| < r_1$



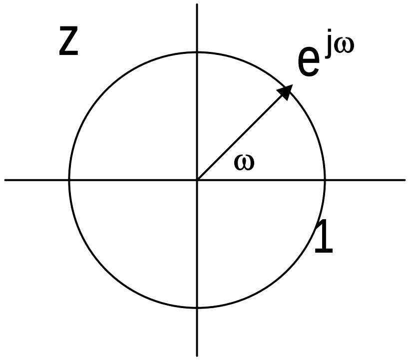
- $r_1 > r_2 \Leftrightarrow$ ROC anillo circular centrado en z=0
- $r_1 < r_2 \Leftrightarrow$ No existe ROC. No existe transformada Z
  - Ejemplos $\quad x[n] = e^{j\omega n} \qquad x[n] = \mathrm{sen}\,\omega n / n$

Relación con la transformada de Fourier

- Transformada Z: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$
- Transformada de Fourier: $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

$X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$ sólo cierto si $\{z/|z|=1\}\in ROC$

- En tal caso:
  - $X(e^{j\omega})$ converge uniformemente a una función continua con todas las derivadas continuas
  - x[n] es sumable en valor absoluto
- Generalización $e^{j\omega}\Rightarrow z$
- Aplicaciones distintas
  - Transformada de Fourier: análisis de señales
  - Transformada Z: estudio de sistemas



Ejemplos (I)

$$x[n]=\begin{cases}1 & -N\le n\le N\\ 0 & \text{otro}\end{cases}=\delta[n+N]+\ldots+\delta[n+1]+\delta[n]+\delta[n-1]+\ldots+\delta[n-N]$$

$$X(z)=\underline{z^{N}+\ldots+z^{1}}+1+\underline{z^{-1}+\ldots+z^{-N}}=\sum_{n=-N}^{N}z^{-n}=\frac{z^{N}-z^{-(N+1)}}{1-z^{-1}}$$

$$z\neq\infty \qquad z\neq 0 \qquad \mathrm{ROC}=\mathbb{C}-\{0,\infty\}$$

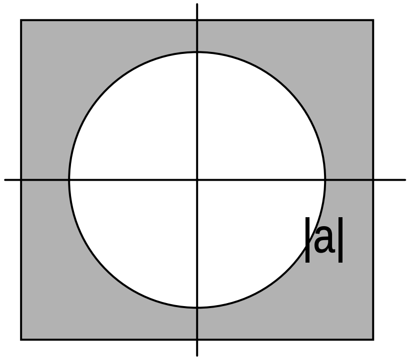
- En general, la ROC de una secuencia de <u>longitud finita</u> es todo el plano z salvo posiblemente z=0 y z=∞
  - x[n]=0 n<0 (causal), la ROC es todo el plano menos z=0
  - x[n]=0 n>0 la ROC es todo el plano menos z=∞

Ejemplos (II)

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\left|az^{-1}\right| < 1 \qquad |z| > |a|$$



$$|a| < 1 \qquad \{z / |z| = 1\} \in \mathrm{ROC} \qquad X\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$|a| > 1 \qquad \{z / |z| = 1\} \notin \mathrm{ROC} \qquad X\left(e^{j\omega}\right) \neq X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} \qquad X\left(e^{j\omega}\right) \ \text{no converge}$$

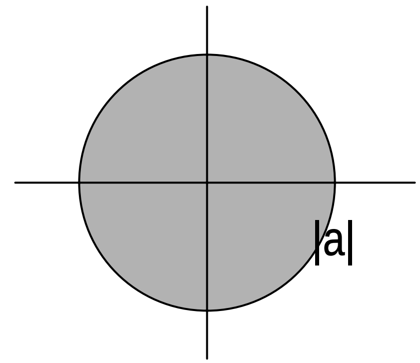
$$a = 1 \qquad \{z / |z| = 1\} \notin \mathrm{ROC} \qquad X\left(e^{j\omega}\right) \neq X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$x[n] = u[n] \qquad U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad U\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k2\pi)$$

Ejemplos (III)

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{-1}z\right)^n = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$



$$\left|a^{-1}z\right| < 1 \qquad\qquad |z| < |a|$$

- Diferentes secuencias pueden tener la misma expresión algebraica de la transformada Z
- Siempre se ha de especificar la ROC

$$x[n] = a^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| < |a|$$

Propiedades

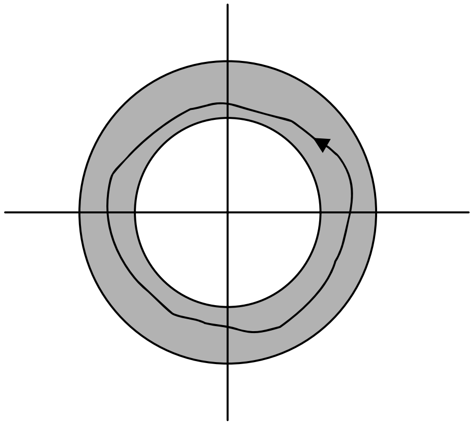
$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \qquad R_X = \{r_2 < |z| < r_1\}$$

$$y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) \qquad R_Y$$

- Linealidad $\quad ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{Z} aX(z) + bY(z) \quad$ Al menos $\quad R_X \cap R_Y$
- Retardo $\quad x[n-k] \xleftrightarrow{Z} z^{-k}X(z) \quad R_X$ a excepción posiblemente de z=0 y z=∞
- Convolución $\quad x[n] * y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z) \quad$ Al menos $\quad R_X \cap R_Y$
- Escalado en z $\quad (z_o)^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z/z_o) \quad \{|z_o| r_2 < |z| < |z_o| r_1\}$
- Reflexión en n $\quad x[-n] \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1}) \quad \{1/r_1 < |z| < 1/r_2\}$
- Derivación en z $\quad nx[n] \xleftrightarrow{Z} -zX'(z) \quad R_X$ a excepción posiblemente de z=0 y z=∞
- Conjugación $\quad x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*) \quad R_X$

Transformada inversa

- Método formal
  - A partir del teorema de Cauchy de variable compleja



$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

  - C: camino cerrado incluido en la ROC rodeando el origen en sentido antihorario
  - método formal no práctico

- Métodos prácticos
  - Inspección
  - Desarrollo en serie
  - Descomposición en fracciones (caso racional)

Inspección Desarrollo en serie

$$X(z)=\ln\left(1-az^{-1}\right) \qquad |z|>a$$

$$Y(z)=-zX'(z)=-\frac{az^{-1}}{1-az^{-1}}$$

$$y[n]=-a^{n}u[n-1]$$

$$X(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n}}{n}z^{-n}$$

$$x[n]=-\frac{a^{n}}{n}u[n-1]$$

Desarrollo en fracciones

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{Q} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{P} a_i z^{-i}}=\frac{b_o\prod_{i=1}^{Q}\left(1-c_i z^{-1}\right)}{a_o\prod_{i=1}^{P}\left(1-d_i z^{-1}\right)} \qquad c_i, d_i \neq 0$$

- Si los polos son simples

Si Q<P $\quad X(z)=\sum_{i=1}^{P}\frac{A_i}{1-d_i z^{-1}} \qquad A_i=\left(1-d_i z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=d_i}$

Si Q≥P $\quad X(z)=Q(z)+\frac{R(z)}{D(z)}=\sum_{i=0}^{Q-P} B_i z^{-i}+\sum_{i=1}^{P}\frac{A_i}{1-d_i z^{-1}}$

$$A_i=\left(1-d_i z^{-1}\right)\frac{R(z)}{D(z)}\bigg|_{z=d_i}=\left(1-d_i z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=d_i}$$

- Si los polos son múltiples existe un desarrollo análogo

Ejemplo

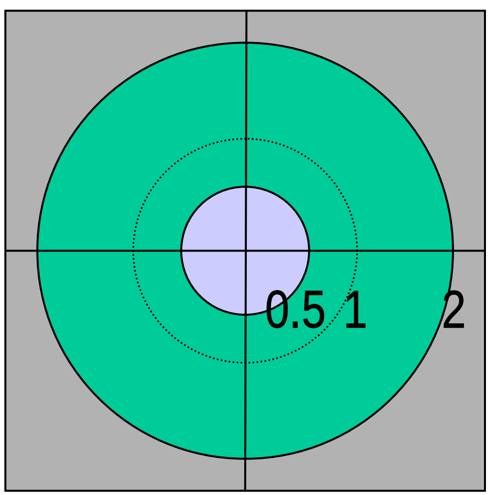
$$X(z)=\frac{3+z^{-1}+z^{-2}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}}$$

$$\begin{array}{rrr|l}
z^{-2}+ & z^{-1}+ & 3 & z^{-2}-\;2.5z^{-1}+\;1 \\ \hline
-z^{-2}+ & 2.5z^{-1}- & 1 & 1 \\ \hline
 & 3.5z^{-1}+ & 2 &
\end{array}$$

$$X(z)=1+\frac{2+3.5z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}}=1+\frac{A_1}{1-2z^{-1}}+\frac{A_2}{1-0.5z^{-1}}$$

$$A_1=\left.\frac{2+3.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\right|_{z=2}=5$$

$$A_2=\left.\frac{2+3.5z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right|_{z=0.5}=-3$$



La ROC no tiene polos

$$2<|z| \qquad x_1[n]=\delta[n]+5\cdot 2^n u[n]-3\cdot 0.5^n u[n]$$

$$0.5<|z|<2 \qquad x_2[n]=\delta[n]-5\cdot 2^n u[-n-1]-3\cdot 0.5^n u[n]$$

$$|z|<0.5 \qquad x_3[n]=\delta[n]-5\cdot 2^n u[-n-1]+3\cdot 0.5^n u[-n-1]$$

Resumen

- Transformada Z $\quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad$ ROC

- Relación con Transformada de Fourier $\quad X\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} \quad \{z / |z| = 1\} \in \text{ROC}$

- Transformada Z inversa:
  - formal $\quad x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$
  - prácticos:
    - ✓ inspección
    - ✓ desarrollo en serie
    - ✓ desarrollo en fracciones