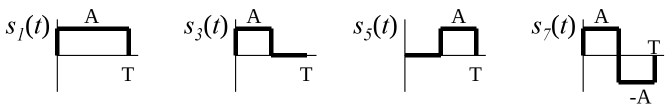
CONTROL DE COMUNICACIONES II 4 Mayo del 2001

- **Es importante que explique y justifique todos lo resultados del ejercicio. Los planteamientos, dibujos y resultados sin explicación no serán evaluados.**
- **Tenga en cuenta que ningún apartado requiere desarrollos matemáticos largos.**
- **Para el cálculo de probabilidades de error, utilice justificadamente aquellas aproximaciones que crea convenientes.**
- **Dispone de la solución de este ejercicio en internet: www.edicionsupc.es/bustia**

Considere una modulación digital M-ària que utiliza las siguientes formas de onda:



$s_2(t)= - s_1(t)$ $s_4(t)= - s_3(t)$ $s_6(t) = -s_5(t)$ $s_8(t)= - s_7(t)$

donde T es el tiempo de símbolo. Suponga símbolos equiprobables e independientes.

a) Halle una posible base ortonormal y obtenga las componentes de los símbolos $s_i(t)$ sobre dicha base.

b) Teniendo en cuenta las formas de onda de la base, y tomando como ancho de banda de la modulación hasta el final del primer lóbulo secundario del espectro, halle el ancho de banda necesario del canal para poder transmitir a una velocidad de R_b=144Kbits/sec.

c) Para poder transmitir digitalmente una señal analógica de ancho de banda de B_a=8KHz, y considerando una R_b=144Kbits/sec, ¿cuál seria el número máximo de bits de cuantificación de los conversores A/D y D/A?

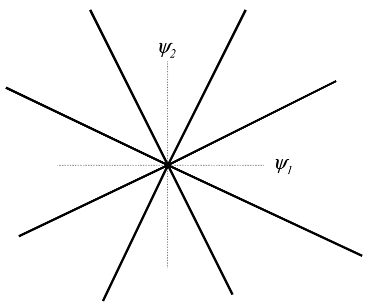
d) Dibuje la constelación y proponga justificadamente la asignación más conveniente de las ternas de bits a cada símbolo.

e) Describa el receptor óptimo, indicando los instantes óptimos de muestreo y dibujando las regiones de decisión sobre la constelación. ¿Es necesario que el receptor conozca el valor de A?

f) Halle la energía media de bit, E_b.

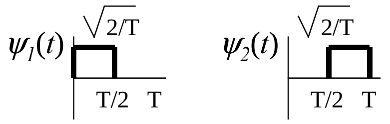
g) Halle aproximadamente la probabilidad de error de bit en función de la E_b/N_o (considere canal ideal y ruido gausiano blanco de densidad espectral de potencia $N_o/2$).

h) Para simplificar el diseño del receptor se propone dividir el espacio de señal en ocho sectores iguales de valor $2\pi/8$, tal como se indica en la figura. Utilizando estas nuevas regiones de decisión, y mediante razonamientos geométricos, determine aproximadamente la pérdida (en dB) de E_b/N_o con respecto al receptor óptimo. Discuta las posible ventajas de dicho diseño.



SOLUCION

a) Una posible base ortonormal es la mostrada en la figura:



Las componentes de los símbolos sobre la base, definidas como

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \int s_i(t)\Psi_1(t)dt \\ \int s_i(t)\Psi_2(t)dt \end{bmatrix}$$

son:

$$\mathbf{s}_1 = A\sqrt{\frac{T}{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = A\sqrt{\frac{T}{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_5 = A\sqrt{\frac{T}{2}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_7 = A\sqrt{\frac{T}{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = A\sqrt{\frac{T}{2}}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = A\sqrt{\frac{T}{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_6 = A\sqrt{\frac{T}{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_8 = A\sqrt{\frac{T}{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

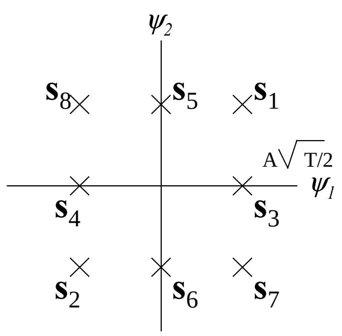
b) Con símbolos incorrelados, el espectro viene determinado por el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de las formas de onda de la base. Las dos formas de onda de la base tienen el cero de su lóbulo principal en 2/T, y el segundo cero en 4/T. Tomamos, pues, como ancho de banda B=4/T. Al tratarse de M=8 símbolos, tenemos tres bits por símbolo, con lo que el tiempo de símbolo es T=3Tb. Por tanto el ancho de banda necesario es de:

$$B = \frac{4}{T} = \frac{4}{3T_b} = \frac{4R_b}{3} = 192\text{KHz}$$

c) El teorema de Nyquist nos exige una frecuencia de muestreo de $F_s=2B_a$. Si cada muestra se cuantifica con b bits, tenemos una velocidad de bit de $R_b=bF_s$. Considerando una R_b=144Kbits/sec, resulta:

$$b = \frac{R_b}{2B_a} = 9 \text{ bits / muestra}$$

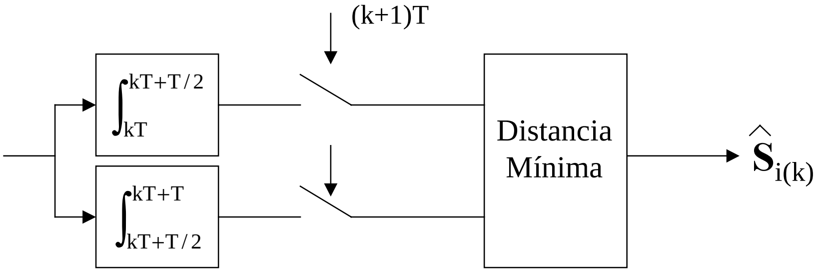
d) La constelación es:



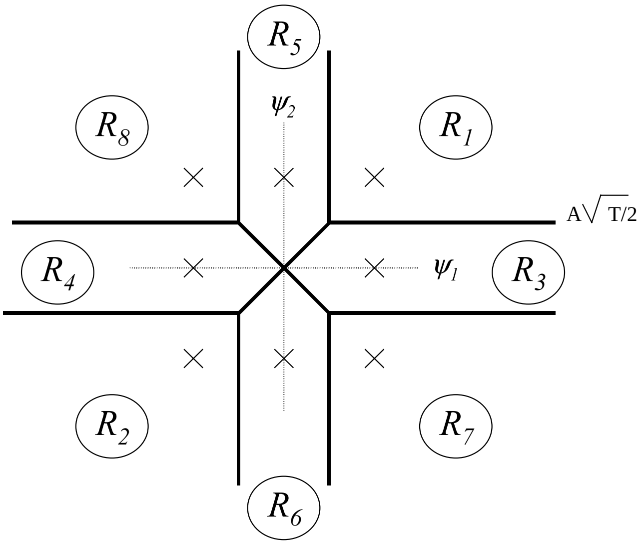
La mejor codificación es aquella en que los símbolos cercanos, sobre los que se darán la mayoría de los errores, sólo difieren en un bit. Para ello, puede utilizarse la siguiente codificación de Gray:

$\mathbf{s}_3 \longrightarrow 000$
$\mathbf{s}_1 \longrightarrow 001$
$\mathbf{s}_5 \longrightarrow 011$
$\mathbf{s}_8 \longrightarrow 010$
$\mathbf{s}_4 \longrightarrow 110$
$\mathbf{s}_2 \longrightarrow 111$
$\mathbf{s}_6 \longrightarrow 101$
$\mathbf{s}_7 \longrightarrow 100$

e) El receptor óptimo puede implementarse, por ejemplo, por medio de dos integradores de duracin T/2, seguidos del detector ML:



Las regiones de decisión en el espacio de la señal que se corresponden con el criterio ML o de mínima distancia son:



Tal como se observa en la figura anterior, las fronteras de decisión requieren del conocimiento de la amplitud A, y por lo tanto, el receptor debe conocer dicho valor o estimarlo mediante algún control automático de ganancia.

f) Hallamos primero las energías individuales de cada símbolo:

$$E_1 = E_2 = E_7 = E_8 = A^2T$$

$$E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = \frac{1}{2}A^2T$$

Por lo tanto, la energía media de símbolo es:

$$E_s = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} E_i = \frac{1}{8}\left(4A^2T + 4\frac{1}{2}A^2T\right) = \frac{3}{4}A^2T$$

Finalmente, teniendo en cuenta que se trata de una modulación de 3 bits por símbolo, podemos calcular la energía media de bit como:

$$E_b = \frac{E_s}{3} = \frac{1}{4}A^2T$$

g) Para el cálculo de la probabilidad de error de símbolo utilizamos la siguiente aproximación:

$$P_s \approx \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} K_i Q\left(\frac{d_{i\ min}}{2\sigma}\right)$$

En nuestra constelación, tenemos los siguientes valores de distancia mínima (di min) y número de vecinos próximos (Ki):

$$d_{i\ min} = A\sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$K_i = 2$$

con independencia del símbolo considerado. Por tanto:

$$P_s \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{8\sigma^2}}\right)$$

A partir de la expresión de E_b del apartado f), expresamos A^2 en función de la energía de bit:

$$A^2 = \frac{4E_b}{T}$$

Teniendo en cuenta que el valor de la potencia de ruido es:

$$\sigma^2 = \frac{N_o}{2}$$

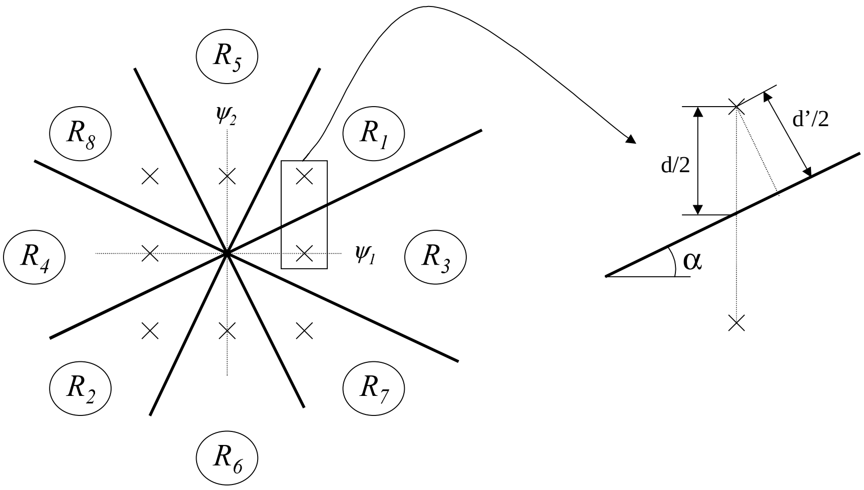
resulta:

$$P_s \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

Finalmente, dado que la codificación empleada es la de Gray, y haciendo la aproximación de que la mayoría de los errores se dan entre símbolos próximos, la probabilidad de error de bit puede expresarse como:

$$P_b \approx \frac{1}{3}P_s \approx \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

h) Las nuevas regiones de decisión son las siguientes:



Se observa como la distancia a las fronteras de decisión queda reducida con respecta al caso del detector óptimo..

El factor de reducción es el coseno del angulo α:

$$\frac{d'}{2}=\frac{d}{2}\cos(\alpha)=\frac{d}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{16}\right)=\frac{d}{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Siguiendo los mismos pasos que el apartado anterior, obtenemos:

$$P_b=\frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)$$

con lo que la pérdida de Eb/No es:

$$10\log\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=-0.6877\text{dB}$$

La ventaja de utilizar dichas fronteras es la sencillez del receptor y, en particular, que no se requiere del conocimiento de la amplitud A (obsérvese que las nuevas regiones no cambian ante un cambio de A).