Permutaciones y Probabilidades

M.A. Fiol
ETSE de Telecomunicació
Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya
email: fiol@mat.upc.es

March 10, 2005

Abstract

Se plantean y resuelven algunos problemas relacionados con permutaciones y probabilidades. En particular, se comprueba que la probabilidad de que, en un "baile aleatorio", n parejas iniciales queden totalmente "desparejadas" tiende, si n es grande, a la inversa del número e.

1 Permutaciones

Recordemos primero algunas cuestiones básicas sobre números combinatorios (ver, por ejemplo, [1, 2]). Una *permutación* de n elementos, pertenecientes, por ejemplo, al conjunto $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$, es una cierta ordenación de los mismos. El número de tales ordenamientos distintos se denota por P_n. Por ejemplo, es obvio que $P_1 = 1$ y, cuando $n = 2$, tenemos las posibles permutaciones 12 y 21; de manera que $P_2 = 2$. Las permutaciones con $n = 3$ elementos pueden construirse a partir de cada una de las anteriores intercalando el 3 en las (tres) posibles posiciones. Así, a partir de 12 obtenemos 12**3**, 1**3**2, **3**12; mientras que 21 da lugar a 21**3**, 2**3**1, **3**21; por tanto, $P_3 = 6$. En general, cada permutación de $n-1$ elementos da lugar a n permutaciones de n elementos, de manera que se cumple:

$$\begin{aligned} P_n &= nP_{n-1} \\ &= n(n-1)P_{n-2} \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 2P_1 = n! \end{aligned}$$

Una permutación de n elementos, o *n-permutación*, puede verse también como una aplicación biyectiva π del conjunto $\mathbb{N}_n$ en sí mismo. Por ejemplo, en el caso $n = 4$, la 4-permutación 3412 equivale a la aplicación π definida por

$$\pi(1) = 3, \pi(2) = 4, \pi(3) = 1, \pi(4) = 2.$$

Con esta notación, notar que el valor de $\pi(i) \in \mathbb{N}_n$ es el número que ocupa la posición i-ésima, $i \in \mathbb{N}_n$. Entonces, se dice que una permutación fija un elemento $i \in \mathbb{N}_n$ cuando $f(i) = i$. En la *notación cíclica* de una permutación π, se escriben entre paréntesis una serie de números, cada uno de los cuales tiene como imagen al siguiente (el "siguiente" del último es el primero). Por ejemplo, la 7-permutación $\pi = (451)(26)$ significa que:

$$\begin{aligned} &\pi(4) = 5, \quad \pi(5) = 1, \quad \pi(1) = 4; \\ &\pi(2) = 6, \quad \pi(6) = 2; \\ &\pi(3) = 3, \quad \pi(7) = 7. \end{aligned}$$

Notar que los ciclos de longitud 1 o *bucles*, correspondientes a los elementos 3 y 7 que quedan fijos, se omiten. Como los paréntesis indican ciclos, el orden en el que se escriben o su primer número no importan. Por ejemplo, la permutación anterior también puede escribirse en la forma $\pi = (62)(145)$.

2 El Problema de la Secretaria Despistada

El problema que nos planteamos resolver es el siguiente:

- **El problema de las cartas:** *Una secretaria tiene que enviar n cartas, con sus correspondientes sobres, a n destinatarios distintos. Sin mirar, introduce cada carta en un sobre cualquiera. ¿Cúal es la probabilidad de que ninguna carta esté en el sobre correcto?*

Otra versión del mismo problema es la que sigue:

- **El problema del baile:** *En una reunión de n parejas, cada chica elige al azar a un chico para bailar. ¿Cúal es la probabilidad de que ninguna pareja bailen juntos?*

Una distribución concreta de n cartas en n sobres queda representada por una n-permutación π, donde $\pi(i) = j$ indica que *el sobre i contiene la carta j.*

Así, el sobre i contiene su carta correcta si y sólo si la permutación π fija el elemento i: $\pi(i) = i$.
Según lo anterior, si aplicamos la fórmula de la probabilidad combinatoria; es decir, número de "casos favorables" partido por el número de "casos posibles", resulta que la probabilidad pedida, que denotaremos por $p(n)$ es:

$$p(n) = \frac{f(n)}{P_n} = \frac{1}{n!} f(n), \tag{1}$$

donde $f(n)$ representa el número de n-permutaciones que *no* fijan ningún elemento.
El valor de $f(n)$ puede calcularse recurrentemente a partir del siguiente razonamiento:

(i) Cada $(n-1)$-permutación que no fija ningún elemento genera $n-1$ n-permutaciones del mismo tipo. Basta "intercalar" el elemnto n en las $n-1$ posibles posiciones entre los elementos $1, 2, \ldots, n-1$. Por ejemplo, la 6-permutación (26)(1354) genera las 7-permutaciones:

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{7}26)(1354), & (2\mathbf{7}6)(1354), \\ (26)(\mathbf{7}1354), & (26)(1\mathbf{7}354), \\ (26)(13\mathbf{7}54), & (26)(135\mathbf{7}4). \end{array}$$

(ii) Cada $(n-1)$-permutación que fija exactamente un elemento i (de las cuales hay $(n-1)f(n-2)$; porque $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ y los demás elementos no quedan fijados) genera una n-permutación del mismo tipo. Basta "intercalar" el elemento n en el 1-ciclo del elemento fijado i . Por ejemplo, la 6-permutación (13654)—que fija el 2—genera la 7-permutación (27)(13654).

Por consiguiente, el número $f(n)$ de n-permutaciones que no fijan ningún elemento cumple la fórmula de recurrencia:

$$f(n) = (n-1)f(n-1) + (n-1)f(n-2) \tag{2}$$

con valores iniciales $f(1) = 0$ y $f(2) = 1$. Entonces, usando (6), la probabilidad $p(n)$ satisface

$$p(n) = \frac{n-1}{n} p(n-1) + \frac{1}{n} p(n-2) \tag{3}$$

de donde

$$np(n) = (n-1)p(n-1) + p(n-2) \tag{4}$$

con $p(1) = 0$ y $p(2) = \frac{1}{2}$.
Antes de resolver esta recurrencia, notar que los coeficientes de $p(n-1)$ y $p(n-2)$ en (3) son números entre 0 y 1. Esto sugiere su posible interpretación en términos de probabilidades. Para tal fin, razonaremos con la situación planteada en el problema del baile. Supongamos que, en un momento dado, hay $n-1$ parejas bailando y entra una nueva pareja. Entonces, la probabilidad $p(n)$ de que, una vez que la nueva chica ha elegido aleatoriamente a un chico, nadie esté bailando con su pareja se obtiene al sumar las probabilidades de los dos sucesos (disjuntos) siguientes:

(i) Ninguna de las chicas está bailando con su pareja, caso que se produce con probabilidad $p(n-1)$, y la chica que entra elige para bailar a uno cualquira de los chicos que encuentra bailando (por tanto, distinto de su propia pareja) lo que sucede con probabilidad $\frac{n-1}{n}$;

(ii) Hay exactamente una chica, digamos i, que está bailando con su pareja, lo que sucede con probabilidad $p(n-2)$ ya que las otras $n-2$ bailan con otros; y la chica que entra elige para bailar al chico de dicha pareja i, con probabilidad $\frac{1}{n}$.

Para resolver la recurrencia (4), se reescribe en términos del incremento entre probabilidades sucesivas. Es decir, con la notación

$$\Delta(n) := p(n) - p(n-1), \tag{5}$$

la fórmula (4) queda

$$n\Delta(n) = -\Delta(n-1),$$

con $\Delta(2) = p(2) - p(1) = \frac{1}{2}$. De este modo, aplicando sucesivamente la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta(n) &= -\frac{1}{n}\Delta(n-1) \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\Delta(n-2) \\ &= -\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\Delta(n-3) \\ &\vdots \\ &= (-1)^n \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 3}\Delta(2) \\ &= (-1)^n \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Por tanto, usando lo anterior y (5), se obtiene:

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{(-1)^n}{n!} + p(n-1) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + p(n-2) \\ &\vdots \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{(-1)^3}{3!} + p(2) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + -\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}, \end{aligned}$$

que es más cómodo escribir en la forma

$$p(n) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \tag{6}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}.$$

Notar que la sucesión de sumas $S_n := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, parece converger rápidamente porque el sumando n-ésimo $\frac{(-1)^n}{n!}$ tiende a cero muy rápidamente. El cálculo de los primeros valores de $p(n)$ parece confirmar este hecho:

$$\begin{aligned} p(1) &= 0, \\ p(2) &= 0.5, \\ p(3) &= 0.33\ldots, \\ p(4) &= 0.375, \\ p(5) &= 0.366\ldots, \\ p(6) &= 0.3680\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

De hecho, recordando el desarrollo de Taylor de la función exponencial en torno al punto $x = 0$ (McLaurin):

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

resulta que, cuando $n \to \infty$, la suma $S_n = p(n)$ tiende a e^{-1}:

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = e^{-1} = 0.36787944\ldots$$

3 Ejercicios

Los desarrollos anteriores sugieren una serie de problemas que listamos a continuación.

1. Reescribiendo (2) en términos de $D(n) := f(n) - nf(n-1)$, $n = 2, 3, \ldots$, demostrar que $D(n) = (-1)^n$ y, a partir de ahí, obtener una fórmula para $f(n)$.

2. Demostrar la expresión (6) a partir de la fórmula de inclusión-exclusión:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_i \mathrm{P}(A_i) &- \textstyle\sum_{i<j} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) \\ &+ \textstyle\sum_{i<j<k} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\vdots \\ &(-1)^n \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n), \end{aligned}$$

donde A_i es el suceso *"el sobre i contiene la carta (correcta) i"*.

3. En el problema de la secretaria, calcular la probabilidad de que ponga *exactamente una* carta en el sobre correcto.

4. Generalizar el problema anterior al caso en que queden exactamente m cartas, $1 \leq m \leq n$, en los sobres que les corresponden.

References

[1] F. Comellas, J. Fàbrega, A.S. Lladó i O. Serra, *Matemàtica Discreta*, Politext **26**, Edicions UPC, Barcelona, 1994.

[2] J. Fàbrega, Combinatòria, `http://www-ma4.upc.edu/~matjfc/comb_slides.pdf`