PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial **7 de novembre de 2007**

1. Un sistema de transmissió funciona assignant freqüències dins d'un conjunt discret $\nu_i, i = 1, 2, \ldots, 12$, on $\nu_i < \nu_j$ per $i < j$. Hi ha tres dispositius $D_i, i = 1, 2, 3$, de manera que quan un usuari demana el servei, el sistema li assigna un dispositiu a l'atzar i després una de les freqüències associades al dispositiu, també a l'atzar. D_1 té associades $\nu_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, D_2 té associades $\nu_i, i = 7, 8, 9, 10$ i D_3 té associades $\nu_i, i = 11, 12$.

(a) Quina és la probabilitat que a un usuari se li assigni una freqüència ν tal que $\nu_5 < \nu < \nu_9$?

(b) Si un usuari té assignada una freqüència ν tal que $\nu > \nu_8$, quines són les probabilitats de trobar-se en cadascun dels dispositius?

(c) Un usuari repeteix l'accés al sistema fins que se li assigna alguna de les freqüències ν_1, ν_7 o ν_{11}. Quin és el nombre mitjà d'accessos que fa?

(d) 20 usuaris accedeixen de manera independent al sistema. Quina és la probabilitat que no hi hagi més d'un usuari assignat a ν_{12}?

(e) 150 usuaris accedeixen dues vegades al sistema. Quin és el nombre mitjà d'usuaris que els toca la mateixa freqüència les dues vegades?

Resolució:

Tenim que $P(\nu_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ per $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $P(\nu_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ per $i = 7, 8, 9, 10$, i $P(\nu_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ per $i = 11, 12$.

(a) $P(\nu_5 < \nu < \nu_9) = P(\nu \in \{\nu_6, \nu_7, \nu_8\}) = P(\nu_6) + P(\nu_7) + P(\nu_8) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{9}$.

(b) Notem primer que $P(\nu > \nu_8) = P(\nu_9) + P(\nu_{10}) + P(\nu_{11}) + P(\nu_{12}) = \frac{1}{2}$.

Ara ens demanen $P(D_i|\nu > \nu_8) = \frac{P(\nu>\nu_8|D_i)P(D_i)}{P(\nu>\nu_8)} = \frac{2}{3}P(\nu > \nu_8|D_i)$.

$P(D_1|\nu > \nu_8) = \frac{2}{3}P(\nu > \nu_8|D_1) = 0$.

$P(D_2|\nu > \nu_8) = \frac{2}{3}P(\nu > \nu_8|D_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

$P(D_3|\nu > \nu_8) = \frac{2}{3}P(\nu > \nu_8|D_3) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$.

(c) El nombre d'accessos és una variable geomètrica amb $p = P(\nu \in \{\nu_1, \nu_7, \nu_{11}\}) = P(\nu_1) + P(\nu_7) + P(\nu_{11}) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$. El seu valor mitjà val $1/p = 36/11 = 3{,}3$.

(d) El nombre d'usuaris assignats a ν_{12} és una variable N binomial amb $n = 20$ i $p = P(\nu_{12}) = \frac{1}{6}$. Que no hi hagi més d'un usuari amb ν_{12} correspon a $N = 0$ o $N = 1$. Així la probabilitat val

$$P(N=0) + P(N=1) = (\frac{5}{6})^{20} + 20 \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^{19} = 0{,}13042.$$

(e) El nombre d'usuaris que els toca la mateixa freqüència les dues vegades és una variable binomial amb $n = 150$ i $p = P(\nu = \nu')$ on ν, ν' són dues freqüències triades independentment. Llavors $p = \sum_k P(\nu = \nu_k) P(\nu' = \nu_k) = 6 \cdot (\frac{1}{18})^2 + 4 \cdot (\frac{1}{12})^2 + 2 \cdot (\frac{1}{6})^2 = \frac{11}{108} = 0{,}10185$, i el nombre mig d'usuaris és $n \cdot p = 15{,}3$.

2. Considereu la funció $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida $F(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

(a) Demostreu que és la funció de distribució d'una variable aleatòria contínua X. Quina és la funció de densitat d'aquesta variable?

(b) Trobeu la funció de densitat de la variable aleatòria $Y = e^X$. Calculeu les probabilitats $P(1 < Y < 2)$ i $P(-1 < Y < 1)$.

(c) Es defineix la variable $Z = g(X)$ on:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < x < \ln 2, \\ 1 & \text{si } \ln 2 < x < \ln 3, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Calculeu la funció de probabilitat i la variància de Z.

Resolució:

(a) És una funció creixent ja que la seva derivada és $F'(x) = \dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = \dfrac{e^{-\infty}}{1 + e^{-\infty}} = \dfrac{0}{1 + 0} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{1 + e^{-x}} = 1$.

A més és contínua. Per tant, és una funció de distribució. La densitat de la corresponent variable aleatòria és la derivada de $F(x)$, que ja hem calculat:

$$f_X(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

(b) $\Omega_Y = [0, \infty)$ ja que la funció e^x pren tots els valors positius. Si $g(x) = e^x$, $g'(x) = e^x$. Així:

$$f_Y(y) = f_X(x) \frac{1}{e^x} = \frac{1}{(1 + e^x)^2} = \frac{1}{(1 + y)^2}.$$

$P(1 < Y < 2) = \int_1^2 \frac{dy}{(1+y)^2} = -\frac{1}{1+y}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}$.

$P(-1 < Y < 1) = \int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} = \frac{1}{2}$.

(c) $\Omega_Z = \{0, 1, 2\}$.

$P_Z(1) = P(\ln 2 < X < \ln 3) = F(\ln 3) - F(\ln 2) = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$.

$P_Z(2) = P(0 < X < \ln 2) = F(\ln 2) - F(0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

$P_Z(0) = 1 - P_Z(1) - P_Z(2) = \frac{3}{4}$.

$E[Z] = 0 \cdot P_Z(0) + 1 \cdot P_Z(1) + 2 \cdot P_Z(2) = \frac{5}{12}$.

$E[Z^2] = 0^2 \cdot P_Z(0) + 1^2 \cdot P_Z(1) + 2^2 \cdot P_Z(2) = \frac{3}{4}$.

$V[Z] = \frac{3}{4} - (\frac{5}{12})^2 = \frac{83}{144} = 0{,}576$.