PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial (B) **10 de novembre de 2003**

1. A un centre de comunicacions arriben n línies de tipus 1, n línies de tipus 2 i n línies de tipus 3. Certa operació de control requereix triar a l'atzar tres del total de línies entrants. Tenim tres indicadors: A s'encen si hem triat alguna línia de tipus 1, B si n'hem triat alguna de tipus 2, i C si n'hem triat alguna de tipus 3.

   (a) Quina és la probabilitat que estiguin encesos els tres indicadors?

   (b) Quina és la probabilitat que només estigui encès l'indicador A? Quin és el límit d'aquesta i l'anterior probabilitat quan $n \to \infty$?

   (c) Fixeu $n = 10$ i estudieu la independència dels indicadors A i B.

   (d) També pel cas $n = 10$: Sabent que hi ha un sol indicador apagat quina és la probabilitat que A estigui encès?

Resolució:

Indiquem els esdeveniments de forma que, per exemple, $A\overline{B}C =$"A encès, B apagat i C encès", 112="n'hem triat dues de tipus 1 i una de tipus 2".

(a)

$$P(ABC) = P(123) = \frac{n \cdot n \cdot n}{\binom{3n}{3}} = \frac{n^3}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3!}} = \frac{2n^2}{(3n-1)(3n-2)} = \frac{2n^2}{9n^2 - 9n + 2}.$$

(b)

$$P(A\overline{BC}) = P(111) = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{3n}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3!}} = \frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} = \frac{n^2 - 3n + 2}{27n^2 - 27n + 6}.$$

$\lim P(ABC) = 2/9$ i $\lim P(A\overline{BC}) = 1/27$. Quan n és molt gran les tres seleccions de línia són independents de manera que $P(123) = 3! \cdot (1/3)^3$ i $P(111) = (1/3)^3$.

(c) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \binom{20}{3}/\binom{30}{3} = 146/203 = 0.719$. $P(B)$ val el mateix per simetria entre tipus de línia. $P(AB) = P(123) + P(112) + P(122) = 10^3/\binom{30}{3} + 2 \cdot \binom{10}{2} \cdot 10/\binom{30}{3} = 95/203 = 0.468$. [també es pot fer $P(AB) = 1 - P(\overline{A} \text{ o } \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{AB}) = 1 - 2 \cdot \binom{20}{2}/\binom{30}{3} + \binom{10}{3}/\binom{30}{3}$]

Com $P(AB) \neq P(A)P(B)$, no són independents.

(d)

$$P(A|\text{ un apagat }) = 1 - P(\overline{A}|\text{ un apagat }) = 1 - \frac{P(\overline{A}BC)}{P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) + P(AB\overline{C})} = \frac{2}{3}$$

Lògic. Degut a la simetria entre tipus de línia, sabent que hi han k indicadors encesos la probabilitat que A sigui un d'ells val $k/3$.

2. El consum elèctric en un pis durant un dia és una variable aleatòria X amb funció de densitat

$$f_X(x) = Kxe^{-x/a}, \qquad x > 0$$

on a és una constant.

(a) Determineu la constant K i calculeu la funció de distribució de X.

(b) En un edifici hi ha 7 pisos independents. En cadascun hi ha un dispositiu que falla quan $X > 3a$. En un dia de funcionament, quina és la probabilitat que algun falli?

(c) El cost de manteniment del dispositiu per dia val

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si } X < a, \\ X/a & \text{si } a < X < 3a, \\ 6 & \text{si } X > 3a. \end{cases}$$

Trobeu la funció de distribució de la variable aleatòria C.

(d) Calculeu el cost mitjà de manteniment.

Resolució:

Integrant per parts trobem la primitiva $\int xe^{-x/a}dx = -a(x+a)e^{-x/a}$.

(a) $1 = -Ka(x+a)e^{-x/a}|_0^\infty = Ka^2$ d'on $K = 1/a^2$. Per $x > 0$:

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(x')dx' = -(\frac{x'}{a}+1)e^{-x'/a}|_0^x = 1 - (\frac{x}{a}+1)e^{-x/a}.$$

(b) Per un dispositiu la probabilitat de fallar val $p = P(X > 3a) = 1 - F_X(3a) = 4e^{-3} = 0.2$. $P(\text{falli algun de 7}) = 1 - P(\text{ningun falla}) = 1 - (1-p)^7 = 0.7887$.

(c) Per $c < 1$, $F_C(c) = 0$.

Per $c = 1$, $F_C(1) = P(X < a) = F_X(a) = 1 - 2e^{-1}$.

Per $1 \leq c < 3$, $F_C(c) = P(\frac{X}{a} < c) = F_X(ac) = 1 - (c+1)e^{-c}$.

Per $3 \leq c < 6$, $F_C(c) = 1 - 4e^{-3}$.

Per $c \geq 6$, $F_C(c) = 1$.

C és una variable mixta. F_C és discontínua en $c = 1$ i en $c = 6$.

(d) Pel teorema de l'esperança:

$$E[C] = \int_0^a 1 \cdot f_X(x)dx + \int_a^{3a} \frac{x}{a} f_X(x)dx + \int_{3a}^\infty 6 f_X(x)dx$$

$$= F_X(a) + I + 6(1 - F_X(3a)) = 1 + 3e^{-1} + 7e^{-3} = 2.4521$$

ja que $F_X(a) = 1 - 2e^{-1}$, $I = \int_a^{3a} \frac{x^2}{a^3} e^{-x/a} dx = \int_1^3 t^2 e^{-t} dt = 5e^{-1} - 17e^{-3}$ i $1 - F_X(3a) = 4e^{-3}$.