**PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS** **ETSETB**

**Examen Parcial** **23 de novembre de 2000**

1. **Resolució:**

   Les probabilitats que un caràcter sigui vocal o consonant valen $p_V = 5/26$ i $p_C = 21/26$ respectivament.

   (a) $P(\text{alguna vocal en } N \text{ caràcters}) = 1 - P(\text{cap vocal en } N \text{ caràcters}) = 1 - p_C^N$.
   Volem $1 - p_C^N > 0.9 \Rightarrow p_C^N < 0.1 \Rightarrow N \ln p_C < \ln 0.1 \Rightarrow N > \ln 0.1 / \ln p_C = 10.7$.
   Llavors ha de ser $N \geq 11$.

   (b) La longitud dels blocs-c és una variable geomètrica (nombre de caràcters fins que surt vocal) amb $p = p_V$. El seu valor mig és $1/p = 5.2$.
   Sigui $X_c$ el nombre de blocs-c. Contant els principis de bloc, $X_c$ és igual al nombre de posicions en hi ha una consonant precedida de vocal. Així $E[X_c] = 10^3 \cdot p_V p_C = 155$. (El resultat *exacte* per un text de $N$ caràcters és $E[X_c] = p_C^2 + N p_V p_C$.)

   (c) Indiquem $p(x|+y)$ la probabilitat de tenir tipus $x$ en una posició si a la dreta hi ha tipus $y$ i $p(x|-y)$ la probabilitat de tenir tipus $x$ en una posició si a l'esquerra hi ha tipus $y$ $(x, y = V, C)$. Llavors ens demanen $p(V|+V) = 1 - p(C|+V)$. Per Bayes

   $$p(C|+V) = \frac{p(V|-C)p_C}{p_V} = \frac{0.22 \cdot 21/26}{5/26} = 0.924$$

   d'on $p(V|+V) = 0.076$.

2. **Resolució:**

   La forma contínua del teorema de Bayes és

   $$f(x\,|B) = \frac{P(B|X=x)f(x)}{P(B)}.$$

   Com $P(B|X=x)$ val 1 si $x \in B$ i 0 si $x \notin B$ el resultat queda demostrat.

3. **Resolució:**

   (a) Per una variable exponencial $f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ \ x > 0$ i $m = \lambda^{-1}$.

   $$P(X > m) = \int_{\lambda^{-1}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}|_{\lambda^{-1}}^{\infty} = e^{-1},$$

   $$P(X < m) = 1 - P(X > m) = 1 - e^{-1}.$$

   (b) Utilitzant el resultat del problema 2

   $$f(x\,|X > m) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-1}},\ \ x > \lambda^{-1}, \qquad f(x\,|X > m) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-1}},\ \ 0 < x < \lambda^{-1}.$$

   (c)

   $$m^{(+)} = \int_{\lambda^{-1}}^{\infty} x \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-1}} dx = 2\lambda^{-1}, \qquad m^{(-)} = \int_{0}^{\lambda^{-1}} x \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-1}} dx = \frac{e-2}{e-1}\lambda^{-1},$$

   $$\Delta = \frac{2\lambda^{-1} - \frac{e-2}{e-1}\lambda^{-1}}{\lambda^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$