Senyals i Sistemes I	**Exàmen Final T07: 7 de Gener de 2008**	**Duració: 3h**

Publicació Notes Provisionals: 22-1-08 **Al.legacions: 23-1-08** **Publicació Notes Definitives: 25-1-08**

No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

Exercici 1

El sistema de la figura 1a) se utiliza para transmitir las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ grabadas simultáneamente por dos sensores. Las señales tienen un ancho de banda de 4 KHz cada una. El sistema forma una señal compuesta, $x_m(t)$, formada por la suma de la señal del sensor 1, la del sensor 2 modulado a la frecuencia f_m=13 KHz, y un tono a la frecuencia mitad ($f_m/2$) que servirá en recepción para sincronizar en frecuencia y fase el oscilador del receptor: $x_m(t) = x_1(t) + x_2(t).A.\cos(2\pi f_m t + \phi) + \cos(2\pi f_m t/2)$

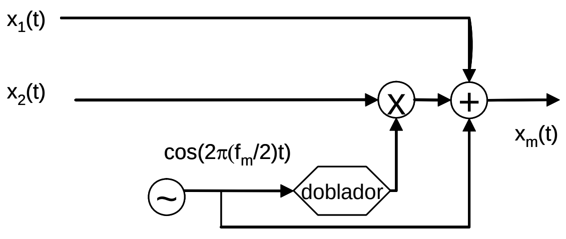


Figura 1a): emisor

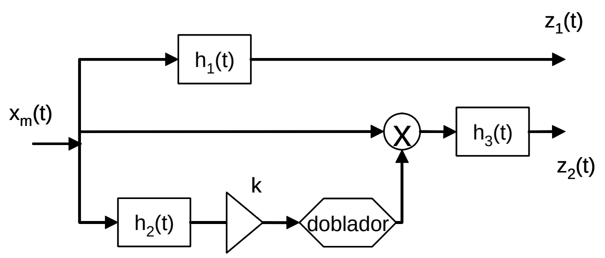


Figura 1b): receptor

En la Figura 1b) se muestra el sistema que recuperará las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Se pide:

Análisis del esquema (5 puntos)

a) Transformada de Fourier $X_m(f)$ de la señal compuesta $x_{m(}t)$. Ancho de banda de $x_m(t)$. Dibuje $X_m(f)$ (suponga un $X_1(f)$ y un $X_2(f)$ a su elección para hacer los dibujos).

b) Tanto en el transmisor como en el receptor se va a generar el coseno a la frecuencia de f_m Hz a partir de un tono a la frecuencia de $f_m/2$ Hz. En el esquema está marcado con el bloque rotulado con '*doblador*' Proponga un sistema que realice esta operación. Puede utilizar dispositivos no lineales (por ejemplo cuadráticos, limitadores, recortadores, etc), y los filtros ideales que necesite. Dibuje el diagrama de bloques y obtenga, para el sistema propuesto por Ud. los valores exactos de amplitud A y fase ϕ de la sinusoide resultante.

c) Suponga que a la salida del doblador se tiene exactamente A cos $(2\pi f_m t + \phi)$. Deduzca analíticamente las especificaciones de los filtros ideales $h_1(t)$ y $h_3(t)$ para que se cumpla $z_1(t)=x_1(t)$ y $z_2(t)=x_2(t)$

Filtro $h_2(t)$ (5 puntos)

En recepción se precisa aislar, mediante un filtro paso banda $h_2(t)$, el tono a la frecuencia $f_m/2$ para aplicarlo al *doblador* y poder recuperar $x_2(t)$. El filtro paso banda va a realizarse por transformación de frecuencias a partir de un prototipo paso bajo de Butterworth de ganancia unidad. La transformación se realizará por medio de $\varphi = \dfrac{f^2 - f_0^2}{f}$. El filtro paso banda debe rechazar la información adyacente, correspondiente a la información de los dos sensores, con una atenuación de, al menos, 40dB y debe estar centrado a la frecuencia $f_0 = \sqrt{f_{a1} f_{a2}}$. Estos datos conforman las especificaciones y se muestran en la figura 1c). El punto a la frecuencia f_0 simboliza que la atenuación a f_0 debe ser 0dB

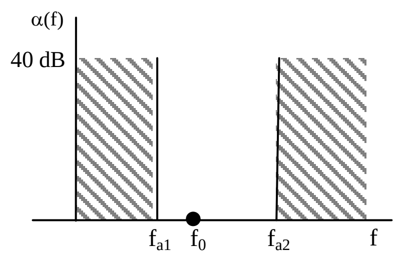


Figura 1c): Plantilla

Se pide

d) Determine los valores f_{a1}, f_{a2} y f_0

e) Especificaciones de atenuación del prototipo paso bajo

f) Diseñe el prototipo paso bajo mediante un filtro de Butterworth (módulo de la respuesta frecuencial) que se ajuste a las especificaciones, y determine exactamente el valor numérico de ϕ_c, frecuencia de corte a 3dB, para los ordenes: **(f.1)** orden n=1 y **(f.2)** orden n=2

g) Por medio de la transformación de frecuencias, obtenga la respuesta frecuencial del filtro paso banda resultante. Calcule la atenuación que producirá el filtro paso banda a la frecuencia $f_{m/2}$=6,5 KHz, tanto si se parte de un filtro prototipo paso bajo de orden 1 como de un filtro de orden 2. Aunque no se permite calculadora, debe serle posible, al menos, aproximar a uno de estos valores 5dB, 10dB, 15dB, 20dB, 25dB, 30dB

Exercici 2

En algunes aplicacions de processament del senyal resulta necessari fer ús de la durada d'un senyal real x(t), definida com $D_x = t_f^x - t_i^x$ on t_f^x i t_i^x representen respectivament els instants final i inicial de x(t). Per alguns senyals de durada no finita $(D_x \to \infty)$, com ara l'exponencial, resulta interessant associar-li una mesura finita de durada, anomenada durada eficaç o efectiva. En aquest exercici es presenten algunes mesures de durada eficaç i es proposa l'estudi d'algunes de les seves propietats.

a) Si $x(t) \leftrightarrow X(f)$, dedueixi la transformada inversa y(t) de $Y(f) = \frac{d}{df}[X(f)] = \dot{X}(f)$.

b) Demostri que la mesura de durada eficaç $d_1^x \equiv \frac{1}{A_x}\int_{-\infty}^{\infty} t^2.x(t).dt$, on $A_x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t).dt$, es pot calcular com $d_1^x = k\frac{\ddot{X}(0)}{X(0)}$ en el domini freqüencial i dedueixi el valor de la constant k. Expressi en funció de la seva transformada de Fourier X(f) i/o les seves derivades, totes avaluades a f=0, el centroide de x(t) definit com $C_x \equiv \frac{1}{A_x}\int_{-\infty}^{\infty} t.x(t).dt$.

c) Es defineix una segona mesura de durada eficaç $d_2^x = \frac{1}{A_x}\int_{-\infty}^{\infty}(t - C_x)^2.x(t).dt$. Comprovi justificadament que les dues mesures de durada estan relacionades per l'expressió $d_2^x = d_1^x - C_x^2$.

A continuació es pretén estudiar algunes propietats d'aquestes dues mesures de duració eficaç. Seria desitjable que les seves propietats coincidissin amb aquelles associades a la durada real D_x.

d) La durada D_x d'un senyal x(t) no canvia quan aquest pateix un gir, $z_1(t)=x(-t)$, o un desplaçament temporal, $z_2(t)=x(t-t_0)$, verificant-se $D_{z1}= D_{z2}= D_x$. Dedueixi justificadament si cadascuna de les mesures de durada eficaç també ho verifiquen. Es a dir, expressi d_1^{z1}, d_1^{z2} i d_2^{z1}, d_2^{z2} en funció de d_1^x i d_2^x respectivament.

e) Quan dos senyals es convolucionen $z_3(t)=x(t)*y(t)$, la durada del senyal resultant és la suma de durades dels senyals a convolucionar, $D_{z3}=D_x+D_y$. Dedueixi justificadament si les mesures de durada efectiva d_1^x i d_2^x també ho verifiquen.

f) A partir de les propietats anteriors, raoni quina mesura de durada eficaç li sembla més adequada. Quina condició hauria de complir un senyal x(t) per a què ambdues mesures ens proporcionin un mateix valor. Doni un exemple de senyal x(t) exponencial on succeeixi això.

Exercici 3

Sea la señal real $x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_b(t - T - 2nT)$

a) Demuestre que $x(t)$ es periódica y encuentre su desarrollo en serie de Fourier, $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k.e^{j2\pi k f_x t}$

b) Encuentre su densidad espectral así como su función autocorrelación, expresada como una serie sinusoidal.

Considere ahora la señal $y_1(t)= x(t-T)$

c) Encuentre su desarrollo en serie de Fourier en función de los coeficientes del DSF de $x(t)$, C_k

d) Calcule la correlación cruzada, $R_{xy_1}(\tau)$ en función de $R_{xx}(\tau)$ (no en función de los coeficientes C_k). ¿Cumple $R_{xy_1}(\tau)$ alguna propiedad de simetría?

e) Sea $z_1(t)=x(t)+y_1(t)$, calcule la autocorrelación de $z_1(t)$ en función de $R_{xx}(\tau)$.

Considere ahora la señal $y_2(t) = x(\sqrt{2}.t)$.

f) Calcule la densidad espectral y la autocorrelación de $y_2(t)$ en función de C_k.

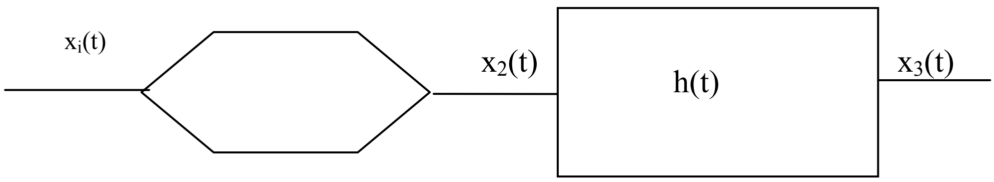
g) Demuestre que si $x_b(t)$ tiene media nula, las señales $x(t)$ e $y_2(t)$ son incorreladas.

Exercici 1

a) $x_m(t) = x_1(t) + Ax_2(t)\cos(2\pi f_m t + \phi) + \cos(2\pi f_m t/2)$

$X_m(f) = X_1(f) + (A/2)[X_2(f - f_m)e^{j\phi} + X_2(f + f_m)e^{-j\phi}] + (1/2)[\delta(f - f_m/2) + \delta(f + f_m/2)]$

b)



Una posible solución es la de la figura; el primer bloque es un sistema no lineal de característica cuadrática $x_2(t) = x_1^2(t)$; el segundo bloque es un filtro lineal e invariante que bloquea la continua (cero de transmisión a f=0) y tiene ganancia 2 a la frecuencia f_m.

$x_1(t) = \cos(2\pi f_m t/2)$
$x_2(t) = \cos^2(2\pi f_m t/2) = (1/2)(1 + \cos(2\pi f_m t))$
$x_3(t) = \cos(2\pi f_m t)$

$A=1$; $\phi=0$

c) Para obtener $X_1(f)$ a partir de $X_m(f)$, el filtro $H_1(f)$ es un filtro paso bajo ideal de ganancia 1 y ancho de banda 4KHz

A la entrada de h3(t) se tiene

$x_m(t)\, A\cos(2\pi fmt+\phi) =$

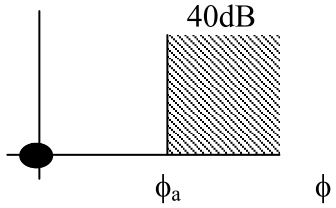
$Ax_1(t)\cos(2\pi fmt+\phi) + A^2 x_2(t)\cos^2(2\pi fmt+\phi) + (A/2)\cos(2\pi(3f_m/2)t+\phi) + (A/2)\cos(2\pi(f_m/2)t+\phi) =$

$= Ax_1(t)\cos(2\pi fmt+\phi) + (A^2/2)\, x_2(t) + (A^2/2)\, x_2(t)\cos^2(2\pi 2fmt+2\phi) + (A/2)\cos(2\pi(3f_m/2)t+\phi) + (A/2)\cos(2\pi(f_m/2)t+\phi)$

Para que a la salida se obtenga $x_2(t)$ el filtro $h_3(t)$ debe tener ganancia $2/A^2$ y ancho de banda 4KHz

d) f_{a1}= 4KHz; f_{a2}= 9KHz; f0=6KHz

e) ϕ_a= (9-4)KHz= 5KHz



f.1) $|H(\phi)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\phi}{\phi_c}\right)^2}$

$\alpha(\phi)$= 10 log(1+$(\phi/\phi_c)^2$)

En $\phi=\phi_a$ tenemos una atenuación de 40dB

40= 10 log(1+$(\phi_a/\phi_c)^2$) → $(\phi_a/\phi_c)^2=10^4-1\approx 10^4$ → $\phi_c=\phi_a/10^2$ =50 Hz

f.2) $|H(\phi)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\phi}{\phi_c}\right)^4}$

$\alpha(\phi)$= 10 log(1+$(\phi/\phi_c)^4$)

En $\phi=\phi_a$ tenemos una atenuación de 40dB

40= 10 log(1+$(\phi_a/\phi_c)^4$) → $(\phi_a/\phi_c)^4=10^4-1\approx 10$ → $\phi_c=\phi_a/10$ =500 Hz

g.1) $$|H(f)|^2 = \left.\frac{1}{1+\left(\dfrac{\phi}{\phi_c}\right)^2}\right|_{\phi=\frac{f^2-f_0^2}{f}} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\dfrac{f^2-f_0^2}{f}}{\phi_c}\right)^2}$$

La atenuación a $f_m/2$ será

$\phi_{m/2}$= $(6,5^2-6^2)10^3/6.5\approx 1\ 10^3$ (exacto 0.96KHz)

$\alpha(\phi_{m/2})$= 10 log(1+$(\phi_{m/2}/\phi_c)^2$) = 10 log(1+$(1/0.05)^2$) = 26dB

y para el filtro g.2

$$|H(f)|^2 = \left.\frac{1}{1+\left(\dfrac{\phi}{\phi_c}\right)4}\right|_{\phi=\frac{f^2-f_0^2}{f}} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\dfrac{f^2-f_0^2}{f}}{\phi_c}\right)^4}$$

$\alpha(\phi_{m/2})$= 10 log(1+$(\phi_{m/2}/\phi_c)^4$) = 10 log(1+$(1/0,5)^4$) = 12,3 dB

Resolució Exercici 2

a) Si $x(t) \leftrightarrow X(f)$ i es defineix $Y(f) = \frac{d}{df}\left[X(f)\right]$, derivant la integral de Tansformada de Fourier resulta **y(t)= -j2π tx(t)**

b) Aplicant la propietat $X(0) = A_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).dt$, i la transformada de l'apartat a), resulta $d_1^x = k\frac{\ddot{X}(0)}{X(0)}$ amb $\boldsymbol{k = \frac{-1}{(2\pi)^2}}$

Anàlogament s'obté $\boldsymbol{C_x \equiv \frac{1}{A_x}\int_{-\infty}^{\infty} t.x(t).dt = \frac{j}{2\pi}\frac{\dot{X}(0)}{X(0)}}$.

c) Desenvolupant $d_2^x \equiv \frac{1}{A_x}\int_{-\infty}^{\infty}(t - C_x)^2\, x(t).dt$ s'arriba a l'expressió $\boldsymbol{d_2^x = d_1^x - C_x^2}$

d) Si $z_1(t)=x(-t)$ s'aplica a les definicions temporals de d_1^x i d_2^x en resulta $\boldsymbol{d_1^{z1} = d_1^x}$ **i** $\boldsymbol{d_2^{z1} = d_2^x}$

Si $z_2(t)=x(t-t_0)$ anàlogament $\boldsymbol{d_1^{z2} = d_1^x + 2t_0C_x + t_0^2}$. Fent ús de la relació de l'apartat c) i $C_{z2}=C_x+t_0$ s'arriba a $\boldsymbol{d_2^{z2} = d_2^x}$

e) Si $z_3(t)=x(t)*y(t) \leftrightarrow Z_3(f)=X(f).Y(f)$. Aplicant la definició del domini freqüencial (apartat b) $\boldsymbol{d_1^{z3} = d_1^x + d_1^y + 2C_xC_y}$

Fent ús de la relació de l'apartat c) i la propietat de convolució $C_{z3}=C_x+C_y$ s'arriba a $\boldsymbol{d_2^{z3} = d_2^x + d_2^y}$

f) d_2^x és la mesura més adequada perquè verifica les mateixes propietats que D_x, ja que un gir o un desplaçament del senyal no afecta al seu valor i verifica la propietat de duració de la convolució.

d_1^x només funciona correctament per senyals centrats a l'origen ($C_x=0$). En aquest cas $d_1^x = d_2^x$ (veure apartat c)

Exemples de senyals exponencials on succeeix això: $x(t) = e^{-|t|}$ o $x(t)=y(t+C_y)$ on $y(t) = e^{-at}u(t)$

Problema 3. Sea la señal real $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(t - T - 2nT)$

(a) Demuestre que $x(t)$ es periódica y encuentre su desarrollo en serie de Fourier (DSF), $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_x t}$

Solución: Es una señal periódica, con periodo $2T$:

$$x(t+2T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(t + 2T - T - 2nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(t - T - 2(n-1)T)$$

Llamando $m = n - 1$,

$$x(t+2T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_b(t - T - 2mT) = x(t)$$

En cuando a su DSF:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(t-T) * \delta(t - 2nT) = x_b(t-T) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2nT)$$

Su transformada de Fourier es,

$$X(f) = \mathcal{F}\{x_b(t-T)\} \cdot \mathcal{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2nT) \right\} = e^{-j2\pi fT} X_b(f) \cdot \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{2T})$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\pi k} X_b(\frac{k}{2T})}{2T} \delta(f - \frac{k}{2T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{X_b(\frac{k}{2T})}{2T} \delta(f - \frac{k}{2T})$$

La transformada inversa es la serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{X_b(\frac{k}{2T})}{2T} e^{j\pi \frac{k}{T} t}$$

(b) Encuentre la densidad espectral así como su función de autocorrelación (expresada como una serie sinosoidal).

Solución: Para una señal periódica (de potencia media finita), la densidad espectral es:

$$S_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \delta(f - \frac{k}{T_0})$$

En particular, para esta señal,

$$S_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{X_b(\frac{k}{2T})}{2T} \right|^2 \delta(f - \frac{k}{2T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|X_b(\frac{k}{2T})|^2}{4T^2} \delta(f - \frac{k}{2T})$$

La densidad espectral es par, por lo que $c_k = c_{-k}$, como puede comprobarse en este caso particular. Consecuentemente, la autocorrelación, $R_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{xx}(f)\}$, se puede expresar como una suma de cosenos:

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|X_b(\frac{n}{2T})|^2}{4T^2} e^{j\pi \frac{n}{T} \tau}$$

$$= \frac{|X_b(0)|^2}{4T^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|X_b(\frac{n}{2T})|^2}{4T^2} \left(e^{-j\pi \frac{n}{T} \tau} + e^{j\pi \frac{n}{T} \tau}\right)$$

$$= \frac{|X_b(0)|^2}{4T^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|X_b(\frac{n}{2T})|^2}{2T^2} \cos(\frac{n\pi}{T} \tau)$$

Considere ahora la señal $y_1(t) = x(t-T)$.

(c) Encuentre su desarrollo en serie de Fourier en función de los coeficientes del DSF de $x(t)$, c_k.

Solución:
Substituyendo en el DSF de $x(t)$:

$$y_1(t) = x(t-T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{j\pi\frac{k}{T}(t-T)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{-jk\pi} e^{j\pi\frac{k}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k c_k\, e^{j\pi\frac{k}{T}t}$$

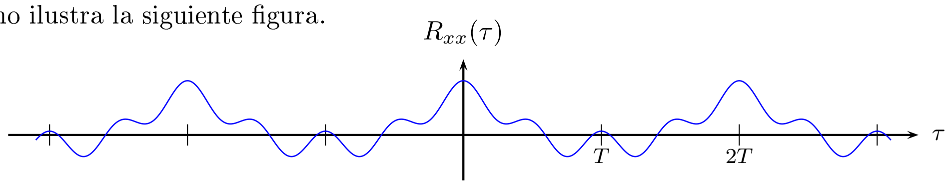
Llamando d_k a los coeficientes del DSF de $y_1(t)$, $d_k = (-1)^k c_k$.

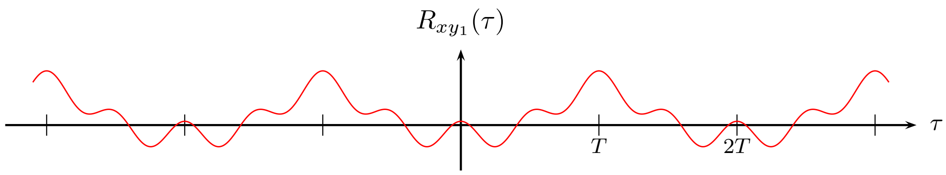
(d) Calcule la correlación cruzada, $R_{xy_1}(\tau)$ en función de $R_{xx}(\tau)$ (no en función de los coeficientes c_k). ¿Cumple R_{xy_1} alguna propiedad de simetría?

Solución: La autocorrelación compara $x(t)$ con $x(t-\tau)$. Y la correlación cruzada, en este caso, compara $x(t)$ con $x(t-T-\tau)$. Por tanto, la correlación cruzada no es más que la autocorrelación retardada.
En efecto, utilizando la expresión de la correlación de señales de potencia media finita,

$$\begin{aligned} R_{xy_1}(\tau) &= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} x(t) y_1^*(t-\tau)dt \\ &= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} x(t) x^*(t-T-\tau)dt \\ &= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} x(t) x^*(t-(\tau+T))dt = R_{xx}(\tau+T) \end{aligned}$$

En cuanto a la simetría, como $R_{xx}(\tau)$ es par, y de periodo $2T$, al desplazarla T también es par, tal y como ilustra la siguiente figura.





Analíticamente:

$$R_{xy_1}(-\tau) = R_{xx}(-\tau+T) = R_{xx}(\tau-T)$$

ya que $R_{xx}(\tau)$ es par. Y como es periódica, de periodo $2T$,

$$R_{xy_1}(-\tau) = \ldots = R_{xx}(\tau+2T-T) = R_{xx}(\tau+T) = R_{xy_1}(\tau)$$

Como ya adelantábamos, $R_{xy_1}(\tau)$ es par.

(e) Sea $z_1(t) = x(t) + y_1(t)$ Calcule la autocorrelación de $z_1(t)$ en función de $R_{xx}(\tau)$.

Solución:

$$R_{z_1z_1}(\tau) = R_{xx}(\tau) + R_{xy_1}(\tau) + R_{y_1y_1}(\tau) + R_{y_1x}(\tau)$$

Como $x(t)$ es real, todas las correlaciones son reales. Y sabiendo que R_{xy_1} es par:

$$R_{y_1x}(\tau) = R^*_{xy_1}(-\tau) = R_{xy_1}(-\tau) = R_{xy_1}(\tau)$$

En cuanto a $R_{y_1y_1}(\tau)$, su valor es $R_{xx}(\tau)$, ya que la autocorrelación no cambia al retardar la señal. (Al comparar una señal con ella misma retardada, no importa el origen de tiempos sobre el que se define la señal).

Por tanto,

$$R_{z_1 z_1}(\tau) = 2R_{xx}(\tau) + 2R_{xx}(\tau + T)$$

Considere ahora la señal $y_2(t) = x(\sqrt{2}t)$.

(f) Calcule la densidad espectral y la autocorrelación de $y_2(t)$ en función de c_k.

Solución: Al comprimir la señal, $y_2(t)$ también es periódica. Para calcular la densidad espectral buscaremos su DSF, en función de c_k de $x(t)$:
Partiendo del DSF de $x(t)$,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{2T} t}$$

el DSF de $y_2(t)$ es:

$$y_2(t) = x(\sqrt{2}t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{2T} \sqrt{2}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{\sqrt{2}T} t}$$

Como se puede observar, los coeficientes de su DSF son los mismos que los de $x(t)$, y su periodo es $\sqrt{2}T$.
La transformada de Fourier de $Y_2(f)$ es:

$$Y_2(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta\left(f - \frac{k}{\sqrt{2}T}\right)$$

La densidad espectral es:

$$S_{y_2 y_2}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \delta\left(f - \frac{k}{\sqrt{2}T}\right)$$

Y la autocorrelación:

$$R_{y_2 y_2}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{S_{y_2 y_2}(f)\right\} = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|^2 \cos(2\pi \frac{k}{\sqrt{2}T}\tau) = R_{xx}(\sqrt{2}\,\tau)$$

(g) Demuestre que si $x_b(t)$ tiene media nula, las señales $x(t)$ e $y_2(t)$ son incorreladas.

Solución: Dos señales son incorreladas si su correlación cruzada es cero. Podemos expresar $x(t)$ e $y_2(t)$ mediante su DSF ya que sabemos que la correlación cruzada entre fasores es nula si las frecuencias son distintas y la unidad si son la misma frecuencia. Recordando los DSF,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{2T} t} \qquad\qquad y_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{\sqrt{2}T} t}$$

Entonces,

$$R_{xy_2}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k c_m^* \, R_{e^{j2\pi \frac{k}{2T} t},\, e^{j2\pi \frac{m}{\sqrt{2}T} t}}(\tau)$$

Las frecuencias de los fasores son distintas para cualquier k y m distintos de 0: para que fueran iguales debería cumplirse que $\frac{k}{2T} = \frac{m}{\sqrt{2}T}$, es decir, $\frac{k}{m} = \sqrt{2}$, pero, como bien sabemos, $\sqrt{2}$ es irracional.
Por tanto,

$$R_{xy_2}(\tau) = c_0 c_0^* = |c_0|^2 = \left|\frac{X_b(0)}{2T}\right|^2$$

La correlación es una constante. Será nula, si lo es $X_b(0)$, que es el área de $x_b(t)$. Por tanto, su valor medio (área/duración) ha de ser nulo.