PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial (A) **15 de novembre de 2004**

1. Un sistema transmet una successió de símbols binaris $x_1x_2x_3\ldots$.

   En la modalitat A: $P(x_1=1)=\frac{1}{3}$. Si $x_n=1$, x_{n+1} pren valors 0, 1 equiprobables mentres que si $x_n=0$, x_{n+1} val 1 amb probabilitat $\frac{3}{4}$.

   En la modalitat B: Els símbols són independents amb valors 0, 1 equiprobables.

   (a) Tirem una moneda justa per elegir la modalitat. Si el segon símbol és un 0, quina és la probabilitat que estem en la modalitat B?

   (b) En la modalitat A, quina és la funció de probabilitat del tercer símbol?

   (c) En la modalitat B, sigui M el nombre de uns en els 10 primers símbols, i N el nombre de uns seguits en la primera aparició del valor 1. Què valen els valors mitjans d'aquestes variables?

   (d) En la modalitat A. Sigui $p_n=P(x_n\!=\!1)$. Trobeu una relació entre p_n i p_{n-1}. Què val el límit quan $n\to\infty$ de p_n?

   Resolució:

   (a) $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$. $P(x_2\!=\!0|B)=\frac{1}{2}$.
   $P(x_2\!=\!0|A)=P(x_2\!=\!0|x_1\!=\!0)P(x_1\!=\!0)+P(x_2\!=\!0|x_1\!=\!1)P(x_1\!=\!1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.
   Per Bayes

$$P(B|x_2\!=\!0)=\frac{P(x_2\!=\!0|B)P(B)}{P(x_2\!=\!0|A)P(A)+P(x_2\!=\!0|B)P(B)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}.$$

   (b) Ja hem vist que $P(x_2\!=\!0|A)=1/3$. Ara

   $P(x_3\!=\!0|A)=P(x_3\!=\!0|x_2\!=\!0)P(x_2\!=\!0)+P(x_3\!=\!0|x_2\!=\!1)P(x_2\!=\!1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$.

   $P(x_3\!=\!1|A)=P(x_3\!=\!1|x_2\!=\!0)P(x_2\!=\!0)+P(x_3\!=\!1|x_2\!=\!1)P(x_2\!=\!1)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$.

   (c) M és binomial amb $n=10$ i $p=1/2$, d'on $E[M]=np=5$.

   N és geomètrica amb $p=1/2$, d'on $E[N]=1/p=2$.

   (d) $p_n=P(x_n=1|x_{n-1}=0)P(x_{n-1}=0)+P(x_n=1|x_{n-1}=1)P(x_{n-1}=1)=\frac{3}{4}(1-p_{n-1})+\frac{1}{2}p_{n-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}p_{n-1}$.

   Prenent límits en els dos costats trobem $p_\infty=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}p_\infty$ d'on $p_\infty=3/5$.

   (La solució de l'equació en diferències finites val $p_n=\frac{16}{15}(-\frac{1}{4})^n+\frac{3}{5}$.)

2. Considerem una variable aleatòria contínua X amb $\Omega_X = [0, a]$ i funció de densitat $f_X(x) = K(a - x)$ per $0 < x < a$.

   (a) Calculeu la constant K, l'esperança $E[X]$, la variància $V[X]$, i els moments m_n.

   (b) Fixeu $a = 2$. Calculeu la funció de densitat de $Y = \sqrt{X}$.

   (c) Fixeu $a = 3$. Calculeu la funció de distribució de X.

   (d) També pel cas $a = 3$. Calculeu i dibuixeu la funció de distribució de $Z = g(X)$ on

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

   (e) Calculeu l'esperança de la variable Z de l'anterior apartat.

Resolució:

(a) $1 = \int_0^a K(a-x)dx = Ka^2/2$. $K = 2/a^2$. $m_n = \int_0^a x^n \frac{2}{a^2}(a-x)dx = \dfrac{2a^n}{(n+1)(n+2)}$.
$E[X] = m_1 = a/3$. $V[X] = m_2 - m_1^2 = a^2/6 - a^2/9 = a^2/18$.
(b) La relació és monòtona amb una única solució $x = y^2$. $\Omega_Y = [0, \sqrt{2}]$,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}(2 - x)\frac{1}{1/(2\sqrt{x})} = 2y - y^3, \qquad 0 < y < \sqrt{2}.$$

(c) $F_X(x) = \int_0^x \frac{2}{9}(3 - x')dx' = \dfrac{6x - x^2}{9}, \quad 0 \leq x \leq 3.$
(d) En la gràfica de g veiem que $F_Z(z) = 0$ per $z < 0$ i $F_Z(z) = 1$ per $z \geq 1$. Per $0 \leq z < 1$

$$F_Z(z) = P(1 - z < X < z + 2) = F_X(z + 2) - F_X(1 - z) = \frac{2z + 1}{3}.$$

És una variable mixta amb discontinuïtat en $z = 0$ on passa de 0 a 1/3.
(e) Pel teorema de l'esperança $E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$.

$$E[Z] = \frac{2}{9}\{\int_0^1 (1 - x)(3 - x)dx + \int_2^3 (x - 2)(3 - x)dx\} = \frac{1}{3}.$$