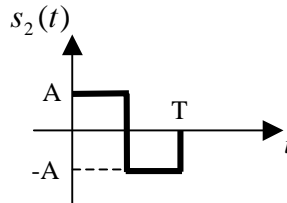
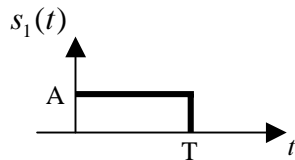
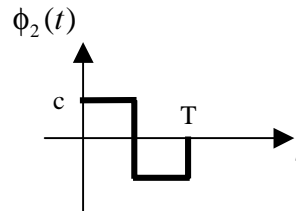
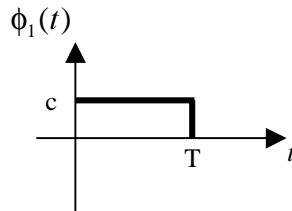


Una secuencia cuaternaria de símbolos independientes y equiprobables  $m_1 = '11'$ ,  $m_2 = '10'$ ,  $m_3 = '00'$  y  $m_4 = '01'$  es transmitida mediante las formas de onda:



$s_3(t) = -s_1(t)$  ;  $s_4(t) = -s_2(t)$ , usando como base:



- Halle el valor de  $c$  para que la base sea ortonormal. Determine y dibuje la constelación de señal en el espacio de señal determinado por esa base. Expresé  $A$  en función de la energía promedio por símbolo.
- Dibuje el diagrama de bloques del sistema de transmisión incluyendo canal, ruido, filtros adaptados correspondientes a la base dada y detector óptimo. ¿Cuál debe ser el instante de muestreo para obtener el vector señal correspondiente al instante  $mT$ -ésimo?
- Calcule la probabilidad de error de símbolo  $P_e$  y de bit  $BER$  del sistema en función de la  $E_b/N_o$  para canal ideal y ruido blanco gaussiano. El ruido presenta una densidad espectral de potencia  $S_n(f) = N_o/2$ .

Supóngase a partir de ahora que el canal es de la forma  $h_c(t) = \delta(t) - \lambda\delta(t - T/2)$  con  $0 < \lambda < 1$

**NOTA:** Tenga en cuenta que la señal digital puede escribirse como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{i[n]}(t - nT) \quad \text{siendo} \quad \{s_{i[n]}(t)\} \equiv s_i(t); \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{y que puede descomponerse como :}$$

$$s_{i[n]}(t) = \alpha_{n,1}\phi_1(t) + \alpha_{n,2}\phi_2(t) = \alpha_1(n)\phi_1(t) + \alpha_2(n)\phi_2(t)$$

- d) Demuestre que el vector de señal a la salida de los filtros adaptados (información relevante) y tras el muestreo en los instantes dados en el apartado b) viene dado por :

$$\begin{aligned} r_1(m) &= d\alpha_1(m) + e\alpha_2(m) + f\alpha_1(m-1) + g\alpha_2(m-1) + n_1(m) \\ r_2(m) &= h\alpha_1(m) + i\alpha_2(m) + j\alpha_1(m-1) + k\alpha_2(m-1) + n_2(m) \end{aligned}$$

Determine los valores de las constantes d, e, f, g, h, i, j, k.

- e) Dibuje la constelación de la señal detectada a la salida de los filtros adaptados a partir de las expresiones indicadas en el apartado d). Calcule la nueva probabilidad de error de símbolo  $P_e$ .
- f) Considere la rama que contiene la información relevante  $r_1(m)$  indicada en el apartado d) y que está afectada por ISI tanto de las componentes cruzadas de los símbolos actual y pasados. Diseñe las ecuaciones de un filtro ecualizador de cuatro coeficientes que permite recuperar la componente  $\alpha_1(m)$  con mínimo error cuadrático medio (Wiener).
- g) Razone los motivos por los que el ecualizador indicado en el apartado anterior puede ser mejorado al no utilizar toda la información disponible para ecualizar la señal  $r_1(m)$ . Represente cualitativamente y describa brevemente el diagrama de ecualización que permitiría mejorar las prestaciones del ecualizador dado en el apartado e).

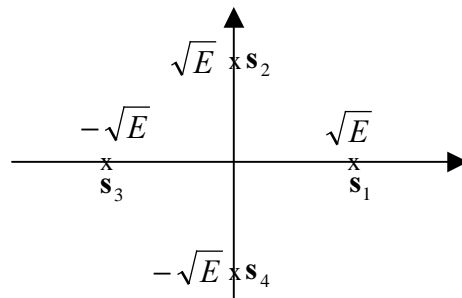
### Solución

a) Normalización  $\int_0^T \phi_1^2(t)dt = \int_0^T \phi_2^2(t)dt = c^2T = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{T}}$

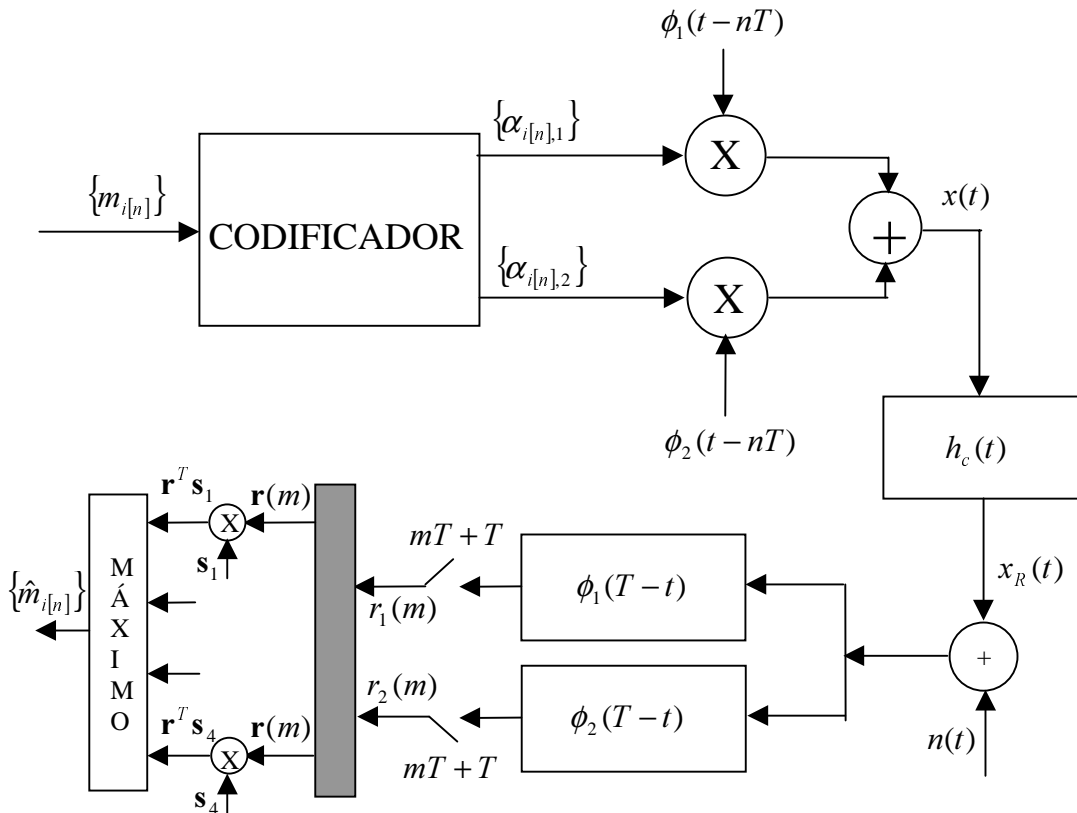
$$E_i = A^2T; i=1,2,3,4; \quad P_i = \frac{1}{4}; i=1,2,3,4; \quad E = \sum_{i=1}^4 P_i E_i = A^2T \Rightarrow A = \sqrt{\frac{E}{T}}$$

$$s_1(t) = \sqrt{E}\phi_1(t) = -s_3(t) \quad s_2(t) = \sqrt{E}\phi_2(t) = -s_4(t)$$

$$\mathbf{s}_1 = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{s}_2 = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{s}_3 = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{s}_4 = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



b)



c) Si el canal es ideal no habrá ISI y la salida de los filtros adaptados vendrá dada por:

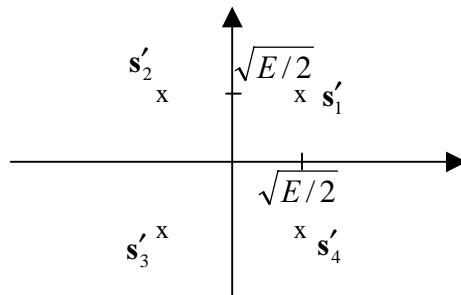
$$r_1(m) = \alpha_1(m) + n_1(m)$$

$$r_2(m) = \alpha_2(m) + n_2(m)$$

Siendo  $\alpha_1(m)$  y  $\alpha_2(m)$  las componentes del vector  $\mathbf{s}_{i[m]}$

$n_1(m)$  y  $n_2(m)$  son las componentes independientes del ruido con valor medio nulo y varianza  $N_0/2$

Para calcular la probabilidad de error se gira la constelación  $45^\circ$  en sentido antihorario (equivalente los ejes en sentido horario)



La función densidad de probabilidad es invariante ante el giro. Los cuatro vectores tienen la misma probabilidad de detección. Al ser equiprobables coincidirá con la probabilidad de detección total.

$$P_{d_i} = P_{d_1} = P_d = \int_0^\infty \int_0^\infty (\pi N_0)^{-1} e^{-\frac{1}{N_0}(r_1 - \sqrt{E/2})^2} e^{-\frac{1}{N_0}(r_2 - \sqrt{E/2})^2} dr_1 dr_2 = \left[ 1 - Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) \right]^2$$

La probabilidad de error de símbolo será:

$$P_e = 1 - P_d = 2Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) \cong 2Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

Dado que se transmite un código de Gray, el error en un símbolo se traduce prácticamente en el error en un bit, por tanto la BER es la mitad de la probabilidad de símbolo.

$$BER = P_{eb} \cong \frac{1}{2} P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

d) La componente i-ésima del vector observado viene dada por

$$r_i(m) = [x(t) * h_c(t) + n(t)] * \phi_i(T-t) \Big|_{t=mT+T} ; i=1,2$$

sustituyendo:

$$r_j(m) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\alpha_1(n)\phi_1(t-nT) + \alpha_2(n)\phi_2(t-nT)] * h_c(t) + n(t) \right\} * \phi_j(T-t) \Big|_{t=mT+T}$$

$$r_j(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_1(n) \{ R_{\phi_1\phi_j}[(m-n)T] - \lambda R_{\phi_1\phi_j}[(m-n)T - T/2] \} + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_2(n) \{ R_{\phi_2\phi_j}[(m-n)T] - \lambda R_{\phi_2\phi_j}[(m-n)T - T/2] \} + n_j(m)$$

$$\text{siendo } n_j(m) = n(t) * \phi_j(T-t) \Big|_{t=mT+T} \quad j=1,2$$

Teniendo en cuenta que las funciones base están limitadas a la duración del intervalo de pulso:

$$r_j(m) = \alpha_1(m) [R_{\phi_1\phi_j}(0) - \lambda R_{\phi_1\phi_j}(-T/2)] + \alpha_2(m) [R_{\phi_2\phi_j}(0) - \lambda R_{\phi_2\phi_j}(-T/2)] \\ - \lambda \alpha_1(m-1) R_{\phi_1\phi_j}(T/2) - \lambda \alpha_2(m-1) R_{\phi_2\phi_j}(T/2) + n_j(m)$$

Las autocorrelaciones y correlaciones cruzadas de las funciones base son:

$$R_{\phi_1\phi_1}(0) = R_{\phi_2\phi_2}(0) = 1; \quad R_{\phi_1\phi_1}(-T/2) = R_{\phi_1\phi_1}(T/2) = 1/2; \\ R_{\phi_1\phi_2}(0) = R_{\phi_2\phi_1}(0) = 0; \quad R_{\phi_2\phi_2}(-T/2) = R_{\phi_2\phi_2}(T/2) = -1/2; \\ R_{\phi_1\phi_2}(-T/2) = R_{\phi_2\phi_1}(T/2) = -1/2; \quad R_{\phi_1\phi_2}(T/2) = R_{\phi_2\phi_1}(-T/2) = 1/2$$

Sustituyendo se obtiene finalmente:

$$r_1(m) = (1 - \lambda/2)\alpha_1(m) - \lambda/2\alpha_2(m) - \lambda/2\alpha_1(m-1) + \lambda/2\alpha_2(m-1) + n_1(m)$$

$$r_2(m) = \lambda/2\alpha_1(m) + (1 + \lambda/2)\alpha_2(m) - \lambda/2\alpha_1(m-1) + \lambda/2\alpha_2(m-1) + n_2(m)$$

Es interesante escribir el resultado en forma vectorial:

$$\mathbf{r}(m) = \mathbf{s}(m) + \mathbf{A}_0^T \mathbf{s}(m) + \mathbf{A}_1^T \mathbf{s}(m-1) + \mathbf{n}(m)$$

siendo:

$$\mathbf{r}(m) = \begin{bmatrix} r_1(m) \\ r_2(m) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}(m) = \begin{bmatrix} \alpha_1(m) \\ \alpha_2(m) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_0 = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_1 = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se ve claramente que el símbolo  $\mathbf{s}(m)$  se ve afectado no sólo por la ISI del símbolo anterior, sino por la del propio símbolo.

e) En principio hay 16 posibles salida en cada rama. La tabla de valores es la siguiente:

$\alpha_1(m)/\sqrt{E}$	$\alpha_2(m)/\sqrt{E}$	$\alpha_1(m-1)/\sqrt{E}$	$\alpha_2(m-1)/\sqrt{E}$	$[r_1(m) - n_1(m)]/\sqrt{E}$	$[r_2(m) - n_2(m)]/\sqrt{E}$
1	0	1	0	1- $\lambda$	0
1	0	0	1	1	$\lambda$
1	0	-1	0	1	$\lambda$
1	0	0	-1	1- $\lambda$	0
0	1	1	0	- $\lambda$	1
0	1	0	1	0	1+ $\lambda$
0	1	-1	0	0	1+ $\lambda$
0	1	0	-1	- $\lambda$	1
-1	0	1	0	-1	- $\lambda$
-1	0	0	1	-1+ $\lambda$	0
-1	0	-1	0	-1+ $\lambda$	0
-1	0	0	-1	-1	- $\lambda$
0	-1	1	0	0	-1- $\lambda$
0	-1	0	1	$\lambda$	-1
0	-1	-1	0	$\lambda$	-1
0	-1	0	-1	0	-1- $\lambda$

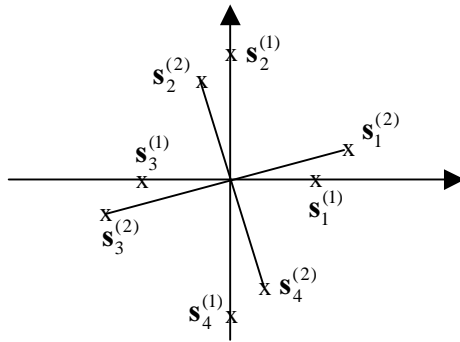
Puede observarse que en realidad hay 8 vectores posibles. Esto quiere decir que cuando se transmite el vector  $\mathbf{s}_i(m)$   $i=1,2,3,4$  pueden recibirse dos vectores diferentes dependiendo del vector transmitido en el instante  $(m-1)$ ésimo. De acuerdo con la tabla:

$$\mathbf{s}_1^{(1)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_1^{(2)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_2^{(1)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -\lambda \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_2^{(2)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\lambda \end{bmatrix}$$

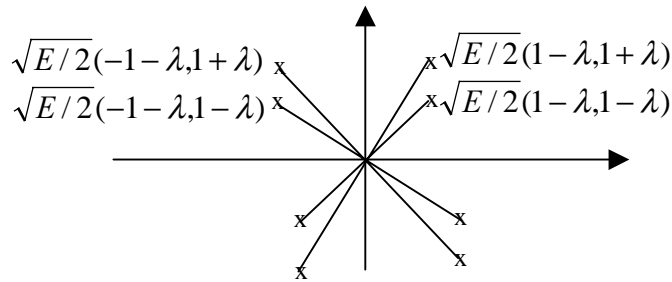
$$\mathbf{s}_3^{(1)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -1+\lambda \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_3^{(2)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -1 \\ -\lambda \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_4^{(1)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \lambda \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_4^{(2)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Obsérvese que  $\mathbf{s}_3^{(k)} = -\mathbf{s}_1^{(k)}$  y  $\mathbf{s}_4^{(k)} = -\mathbf{s}_2^{(k)}$

Gráficamente:



Girando de nuevo los ejes 45° en sentido horario



La probabilidad de detección para  $s_1$  y  $s_3$  son las mismas, así como las de  $s_2$  y  $s_4$

$$P_{d_1} = P_{d_3} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - Q \left[ (1-\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ 1 - Q \left[ (1-\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\} \left\{ 1 - Q \left[ (1+\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\}$$

$$P_{d_2} = P_{d_4} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - Q \left[ (1+\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ 1 - Q \left[ (1-\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\} \left\{ 1 - Q \left[ (1+\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\}$$

$$P_d = \frac{1}{2} P_{d_1} + \frac{1}{2} P_{d_2} \cong 1 - Q \left[ (1-\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \text{ para } \lambda \text{ suficientemente grande}$$

$$P_e \cong Q \left[ (1-\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right]$$

f) El filtro de Wiener minimiza el error cuadrático medio entre la salida del filtro y  $\alpha_1(m-L)$  siendo L un retardo, en principio arbitrario, comprendido entre 0 y 3.

(Puede comprobarse numéricamente que en este ejercicio L=1 es el que proporciona el error cuadrático medio más pequeño)

$$e(m) = \alpha_1(m-L) - \sum_{k=0}^3 h_k r_1(m-k)$$

$$\xi = E\{e^2(m)\}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_l} = E\left\{2e(m) \frac{\partial e(m)}{\partial h_l}\right\} = E\{-2e(m)r_1(m-l)\} = -2\left[R_{\alpha_1 r_1}(l-L) - \sum_{k=0}^3 h_k R_{r_1}(l-k)\right] = 0;$$

$$l=0,1,2,3$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_{r_1}(0) & R_{r_1}(-1) & R_{r_1}(-2) & R_{r_1}(-3) \\ R_{r_1}(1) & R_{r_1}(0) & R_{r_1}(-1) & R_{r_1}(-2) \\ R_{r_1}(2) & R_{r_1}(1) & R_{r_1}(0) & R_{r_1}(-1) \\ R_{r_1}(3) & R_{r_1}(2) & R_{r_1}(1) & R_{r_1}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\alpha_1 r_1}(-L) \\ R_{\alpha_1 r_1}(-L+1) \\ R_{\alpha_1 r_1}(-L+2) \\ R_{\alpha_1 r_1}(-L+3) \end{bmatrix}$$

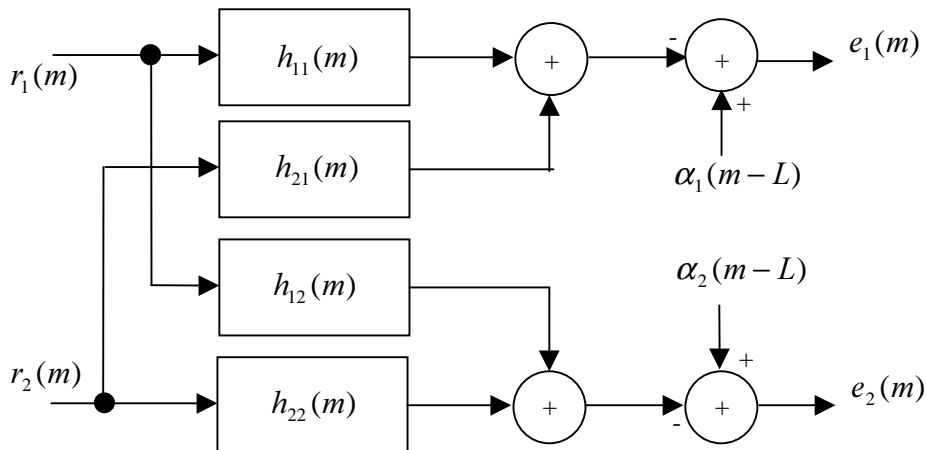
Para símbolos independientes:

$$R_{r_1}(n) = E\{r_1(m+n)r_1(m)\} = \left[(1-\lambda+\lambda^2)\frac{E}{2} + \frac{N_0}{2}\right]\delta(n) - \frac{\lambda}{2}\frac{E}{2}\delta(n+1) - \frac{\lambda}{2}\frac{E}{2}\delta(n-1)$$

$$R_{\alpha_1 r_1}(n) = E\{\alpha_1(m+n)r_1(m)\} = (1-\frac{\lambda}{2})\frac{E}{2}\delta(n) - \frac{\lambda}{2}\frac{E}{2}\delta(n+1)$$

Donde se ha tenido en cuenta que  $E\{\alpha_1^2(m)\} = E\{\alpha_2^2(m)\} = \frac{E}{2}$  y que  $E\{\alpha_1(m)\alpha_2(m)\} = 0$  ya que siempre una de las dos componentes se anula.

- h) El ecualizador puede ser mejorado utilizando la información de la rama inferior. Para ello pueden utilizarse 4 filtros ( de 4 coeficientes cada uno, por ejemplo) como los indicados en la figura.



La magnitud a minimizar sería  $\xi = E\{e_1^2(m) + e_2^2(m)\}$

