MATEMÀTICA DISCRETA - FIB 04–IV–2008

Resolució del primer examen parcial Grup 40

(La durada de l'examen és de dues hores. Responeu cada pregunta en un full diferent. Justifiqueu totes les respostes.)

1. (8×0.6 punts)

i) Vuit treballadors han de realitzar k tasques. És possible assignar 3 treballadors a cada tasca de manera que cada treballador estigui assignat a 5 tasques?

Apliquem el principi de comptar de dues maneres. Sigui T el conjunt de les tasques i P el conjunt dels treballadors, i considerem el conjunt

$$A = \{(p,t) : \text{ el treballador } p \text{ està assignat a la tasca } t\} \subset P \times T.$$

Comptant respecte a les tasques tenim que $|A| = 3k$ i comptant respecte als treballadors $|A| = 8 \cdot 5$. Com que no hi ha cap k enter tal que $3k = 40$, deduïm que la distribució demanada és impossible.

ii) De quantes maneres es poden repartir 17 regals (diferents) entre 10 persones?

Podem veure la repartició com una aplicació que assigna una persona a cada regal, per tant tenim 10^{17} possibilitats.

iii) Quin és el coeficient de $x^5y^3z^2$ en $(x-2y+3z)^{10}$?

Aplicant directament el teorema del multinomi obtenim que el coeficient demanat és $\binom{10}{5,3,2}(-2)^3 3^2$.

iv) Un cangur es troba a la teulada del mòdul A1 del Campus Nord i vol arribar saltant de teulada en teulada fins al mòdul D6. Només pot saltar d'un mòdul a un que tingui la mateixa lletra i el següent número o el mateix número i la següent lletra. Quants recorreguts diferents pot fer el cangur?

Diguem que un salt és horitzontal H si va d'un mòdul a un altre amb la mateixa lletra, i que és vertical V si va d'un mòdul a un altre amb el mateix número. Aleshores qualsevol recorregut del cangur conté 5 salts horitzontals i tres de verticals. Per tant el número de recorreguts és igual al número de paraules de longitud 8 amb 3 V's i 5 H's, que és $\binom{8}{3}$.

v) Doneu la fórmula dels nombres de Catalan i demostreu que és igual a $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$.

$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{(2n+1)2n!}{(2n+1)(n+1)!n!} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$.

vi) Trobeu la funció generadora del nombre de maneres de pagar n euros usant monedes de 1 euro de Finlàndia i de Grècia i monedes de 2 euros d'Irlanda. (Considereu diferents les monedes de països diferents.)

Podem pensar que són particions de l'enter n on les parts tenen mida 1 o 2, i on a més les parts de mida 1 poden ser finlandeses o gregues. Per tant, la resposta és

$$\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2},$$

on intepretem que el primer factor compta les parts de mida 1 finlandeses i el segon factor les gregues.

vii) Trobeu la funció generadora de la successió $(0,0,0,3,2\cdot 9,3\cdot 27,4\cdot 81,\ldots)$

Trobem primer la funció generadora de $(n3^n)_{n\geq 0}$*. Com que* $(3^n)_{n\geq 0}$ *té per FG* $B(x)=1/(1-3x)$*, per obtenir la de* $(n3^n)_{n\geq 0}$ *només cal derivar* $B(x)$ *i multiplicar el resultat per* x*. Això ens dóna*

$$(n3^n)_{n\geq 0} \leftrightarrow \frac{3x}{(1-3x)^2}.$$

Com que $(n3^n)_{n\geq 0}$ és la successió $(0,3,2\cdot 9,3\cdot 27,4\cdot 81,\ldots)$, per obtenir la FG que ens demanen només cal multiplicar la que ja tenim per x^2. Per tant la resposta és

$$\frac{3x^3}{(1-3x)^2}.$$

viii) Trobeu la funció generadora de $(a_n)_{n\geq 0}$ sabent que satisfà la recurrència $a_{n+2}=2a_n+1$ i que $a_0=3$ i $a_1=0$.

Sigui $A(x)$ *la FG de* $(a_n)_{n\geq 0}$*. Com que* $a_{n+2}-2a_n-1=0$*, la funció generadora de la successió* $(a_{n+2}-2a_n-1)_{n\geq 0}$ *ha de ser igual a* 0*. Aplicant les regles de manipulació de FG's, calculem:*

$$\frac{A(x)-3}{x^2}-2A(x)-\frac{1}{1-x}=0.$$

Resolent aquesta equació arribem a la resposta:

$$A(x)=\frac{x^2+3-3x}{(1-2x^2)(1-x)}.$$

2. (2 punts) Determineu el nombre de paraules de longitud n en l'alfabet $\{0,1,2,3\}$ tals que no hi ha cap 0 més a la dreta d'un 2.

(És el problema 2.77 de la llista de problemes de l'assignatura.)

Sigui A_n *el conjunt de paraules descrites a l'enunciat i sigui* a_n *el seu cardinal. Donada una paraula de* A_n*, si afegim un 1, un 2 o un 3 al final obtenim una paraula de* A_{n+1}*. D'aquesta manera tenim totes les paraules de* A_{n+1} *excepte les que acaben en* 0*. Ara bé, si una paraula de* A_{n+1} *acaba en* 0*, en les* n *primeres posicions no hi pot haver cap 2, però altrament no hi ha cap altra restricció. Per tant, el nombre de paraules de* A_{n+1} *que acaben en* 0 *és* 3^n*. Això ens porta a la següent equació recurrent per a* a_n*:*

$$a_{n+1}=3a_n+3^n, n\geq 0, \quad a_0=1, a_1=4.$$

Es tracta d'una recurrència lineal amb coeficients constants no homogènia. Com que la FG del terme no homogeni és $1/(1-3x)$*, el teorema RLnoH ens diu que la funció generadora de* $(a_n)_{n\geq 0}$ *és de la forma*

$$A(x)=\frac{P(x)}{(1-3x)(1-3x)},$$

on $P(x)$ *és un polinomi de grau com a molt* 2*. Per obtenir* a_n *cal extreure el coeficient de* x^n *en* $A(x)$*. Fent-ho directament o aplicant el teorema de la funció generadora racional tenim que la forma genèrica de* a_n *és* $a_n=(A+Bn)3^n$*, on* A *i* B *són constants. Per a determinar-les imposem les condicions inicials i deduïm que* $A=1$ *i* $B=1/3$*.*

3. En una certa república el parlament consta de 47 escons. Hi ha cinc partits que es presenten a les eleccions: els Astronautes, les Ballarines, els Cosmonautes, els Distrets i els Escèptics.

(a) (1 punt) De quantes maneres es poden repartir els escons entre els partits? Trobeu la probabilitat que tots els partits tinguin representació al parlament.

Una repartició dels escons correspon a una solució de l'equació

$$A + B + C + D + E = 47, \quad A, B, C, D, E \geq 0.$$

Sabem que aquesta equació té $\binom{47+5-1}{47} = \binom{51}{4}$ *solucions.*

La probabilitat que ens demanen és el quocient entre el nombre de distribucions on tothom té almenys un escó (casos favorables) i el nombre de distribucions totals (casos possibles). Per tant, només cal calcular el nombre de solucions de

$$A + B + C + D + E = 47, \quad A, B, C, D, E \geq 1,$$

que és $\binom{47-1}{5-1} = \binom{46}{4}$. *Per tant la probabilitat és*

$$\frac{\binom{46}{4}}{\binom{51}{4}} = \frac{46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}{51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 47}.$$

(b) (1.5 punts) Els analistes polítics creuen que l'estabilitat de la república estarà en perill si ni les Ballarines ni els Distrets ni els Escèptics aconsegueixen 16 o més escons. Quants resultats possibles de les eleccions hi ha que garanteixen estabilitat?

Hem de calcular el nombre de solucions de

$$A + B + C + D + E = 47 \textit{ amb } B \geq 16 \textit{ o } D \geq 16 \textit{ o } E \geq 16.$$

Per a fer-ho apliquem el PIE, prenent S_B, S_D, S_E *les solucions amb* $B \geq 16, D \geq 16, E \geq 16$, *respectivament. Tenim*

$$|S_B| + |S_D| + |S_E| - |S_B \cap S_D| - |S_B \cap S_E| - |S_D \cap S_E| + |S_B \cap S_D \cap S_E|.$$

Fixem-nos que la darrera intersecció és buida, ja que no pot ser que tots tres partits treguin 16 o més escons, per tant només cal calcular el cardinal de S_B *i el de* $S_B \cap S_D$.

El nombre de solucions de

$$A + B + C + D + E = 47 \textit{ amb } B \geq 16, A, C, D, E \geq 0$$

és el mateix que de

$$A + B' + C + D + E = 31 \textit{ amb } B' \geq 0, A, C, D, E \geq 0,$$

per tant és $\binom{35}{4} = |S_B|$.

El nombre de solucions de

$$A + B + C + D + E = 47 \textit{ amb } B \geq 16, D \geq 16, A, C, E \geq 0$$

és el mateix que de

$$A + B' + C + D' + E = 15 \textit{ amb } B' \geq 0, D' \geq 0, A, D, E \geq 0,$$

per tant és $\binom{19}{4} = |S_B \cap S_D|$.

Posant-ho tot junt, obtenim la resposta

$$3\binom{35}{4} - 3\binom{19}{4}.$$

(c) (0.7 punts) Un cop celebrades les eleccions s'ha d'escollir la mesa del parlament, que consta d'un president i de quatre vocals (els vocals tenen tots el mateix rang). Com que els Distrets han aconseguit 23 escons, volen o bé la presidència i un vocal o bé tres vocals, però com que la resta de partits sumen majoria no estan disposats a cedir més que això. De quantes maneres es poden repartir els càrrecs entre els diputats de manera que es satisfacin aquestes condicions?

Sigui A el nombre de maneres de repartir els càrrecs tals que els Distrets obtenen exactament el president i un vocal, i sigui B les maneres de fer-ho tals que els Distrets obtenen exactament tres vocals. Hem de calcular $|A| + |B|$*, ja que la resta de partits no están disposats a cedir ni un vocal més.*

$|A| = 23 \cdot 22 \cdot \binom{24}{3}$ *(escollim el president i el vocal entre els diputats de D, i escollim 3 vocals entre els 24 diputats que no són de D; els vocals són indistingibles entre ells, així que hem d'escollir el subconjunt de 3 diputats que seran vocals).*

$|B| = \binom{23}{3} \cdot 24 \cdot 23$ *(escollim els tres vocals entre els diputats de D i el president i el vocal que falta entre la resta de diputats).*

En total $22 \cdot 23\binom{24}{3} + 23 \cdot 24\binom{23}{3}$.