MATEMÀTICA DISCRETA - FIB 25/10/2007
Primer examen parcial Grup 20

1.

a) (0,5 punts) Determina el coeficient de $x^{10}y^5$ en $(x+y-2)^{20}$.

b) (0,5 punts) Calcula de quantes maneres 6 nens poden seure en sengles cadires amb els noms respectius de forma que només dos seguin a la seva cadira.

c) (0,5 punts) Dóna la definició de partició d'un enter.

d) (0,5 punts) Calcula el nombre de camins que hi ha a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ des del punt $(0,0)$ al punt $(2n,0)$, $n \geq 1$, si els únics moviments permesos són de (i,j) cap a $(i+1, j \pm 1)$.

e) (0,5 punts) Dóna la funció generadora ordinària de la successió de les particions de n tals que les parts senars apareixen com a molt un cop.

f) (0,5 punts) Dóna la successió que té per funció generadora ordinària $\dfrac{1}{(1-4x)^5}$.

g) (1 punt) Sigui $A(x)$ la funció generadora ordinària de la successió $(a_n)_{n\geq 0}$. Determina la funció generadora ordinària de la successió

$$(a_0+1, 1, a_2+1, 2, a_4+1, 3, a_6+1, 4, ...).$$

h) (1 punt) Dóna la funció generadora ordinària de la successió $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ $a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n + 2^n$, $n \geq 0$.

2. Es tenen vuit persones en un recinte.

a) (0,5 punts) Determina de quantes maneres es poden repartir aquestes persones en 3 sales de forma que a la primera n'hi hagi 3, a la segona 4 i a la tercera 1.

b) (1 punt) Determina de quantes maneres es poden repartir 30 folis de forma que les dues persones més grans en rebin exactament 2 cadascuna, les quatre persones més joves en rebin almenys 3 cadascuna, i la resta en rebi almenys 1.

c) (2 punts) Determina de quantes maneres es poden fer 3 grups de forma que Marisa i Leo mai siguin al mateix grup, i que Victor, Lucas i Ignasi no formin un dels grups.

d) (1,5 punts) Suposa que hi ha 4 homes i 4 dones. En un taulell es col.loca cada dia la foto de la persona que serà el líder del grup aquell dia, al costat de la foto del líder del dia anterior (tots poden ser líders més d'un cop i en dies consecutius).
Sigui a_n el nombre de seqüències de fotos que es poden tenir al taulell el dia n-èsim tal que almenys hi hagi consecutives les fotos de dues dones. Planteja la recurrència que satisfà $(a_n)_{n\geq 0}$ i dóna les condicions inicials.

Solucions possibles

1.

a) Pel teorema del multinomi, $(x+y-2)^{20} = \sum_{\substack{i,j,k\in[20]\\ i+j+k=20}} \binom{20}{i,j,k} x^i y^j (-2)^k$. Així, el coeficient de $x^{10}x^5$ és

$$\binom{20}{10,5,5}(-2)^5 = -32\frac{20!}{10!5!5!} = -1489872384.$$

b) $\binom{6}{2}d_4 = \frac{6\cdot 5}{2}4!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}) = 135.$

c) Una partició d'un enter $n \geq 1$ és una seqüència d'enters positius $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k$ tals que $x_1 + \cdots + x_k = n$.

d) Per construir un camí des del punt $(0,0)$ al punt $(2n,0)$, amb les restriccions de l'enunciat, cal a cada punt intermig (i,j) triar si es suma 1 o -1 a la segona coordenada, tenint en compte que s'ha de "pujar" o "baixar" el mateix nombre de vegades. Per tant, el nombre de camins de $(0,0)$ al punt $(2n,0)$ és igual al nombre de paraules de longitud $2n$ en l'alfabet $\{1,-1\}$ tals que tenen el mateix nombre de 1's que de -1's; i aquest és $\binom{2n}{n}$.

e) El nombre de particions de n amb les parts senars apareixent com a molt un cop és igual al nombre de solucions de $n = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + \cdots + nk_n$, amb $0 \leq k_i \leq 1$ si i senar, i $k_i \geq 0$ si i és parell. Aleshores, la funció generadora és:

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3)(1+x^4+x^8+\cdots)(1+x^5)(1+x^6+x^{12}+\cdots)\cdots \\ = \prod_{i\geq 1}(1+x^{2i-1})\prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^{2i}} = \prod_{i\geq 1}\frac{1+x^{2i-1}}{1-x^{2i}}.\end{aligned}$$

f) Pel teorema del binomi generalitzat es té $(1-4x)^{-5} = \sum_{n\geq 0}\binom{-5}{n}(-4)^n x^n$. Els coeficients de la sèrie són:

$$\begin{aligned}\binom{-5}{n}(-4)^n &= (-4)^n\frac{(-5)(-6)\dots(-5-n+1)}{n!} \\ &= (-4)^n(-1)^n\frac{5\cdot 6\cdot\dots\cdot(n+5-1)}{n!} = 4^n\binom{n+5-1}{n}.\end{aligned}$$

La successió $\left(4^n\binom{n+4}{4}\right)_{n\geq 0}$ té per funció generadora $(1-4x)^{-5}$.

g)

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (a_n)_{n\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots) & \longleftrightarrow & A(x) \\
 & (a_n(-1)^n)_{n\geq 0} = (a_0, -a_1, a_2, -a_3, \ldots) & \longleftrightarrow & A(-x) \\
(1) & \dfrac{(a_n)_{n\geq 0} + (a_n(-1)^n)_{n\geq 0}}{2} = (a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \ldots) & \longleftrightarrow & \dfrac{A(x)+A(-x)}{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (1,1,1,1,1,\ldots) & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1-x} \\
(2) & (1,0,1,0,1,\ldots) & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1-x^2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (1,2,3,4,\ldots) & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{(1-x)^2} \\
 & (1,0,2,0,3,0,\ldots) & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{(1-x^2)^2} \\
(3) & (0,1,0,2,0,3,0,\ldots) & \longleftrightarrow & \dfrac{x}{(1-x^2)^2}
\end{array}
$$

La successió de l'enunciat és suma de les successions (1), (2) i (3), per tant, la seva FGO és la suma de les FGO d'aquestes: $\dfrac{A(x)+A(-x)}{2} + \dfrac{1+x-x^2}{(1-x^2)^2}$.

h) Sigui $A(x)$ la FGO de la successió $(a_n)_{n\geq 0}$. Per les propietats de manipulació de funcions generadores ordinàries, la FGO de la successió $(a_{n+1})_{n\geq 0}$ és $(A(x)-a_0)/x$, i la FGO de $(a_{n+3})_{n\geq 0}$ és $(A(x)-a_0-a_1x-a_2x^2)/x^3$. La successió $(2^n)_{n\geq 0}$ té per FGO $(1-2x)^{-1}$. Atès que $a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n + 2^n$, les funcions generadores han de complir la mateixa relació, així:

$$
\begin{aligned}
\frac{A(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^3} &= 3\frac{A(x)-a_0}{x} + 2A(x) + \frac{1}{1-2x} \\
(1-3x^2-2x^3)A(x) &= x + \frac{x^3}{1-2x} \\
A(x) &= \frac{x^3-2x^2+x}{(1-2x)(1-3x^2-2x^3)}.
\end{aligned}
$$

2.

a) Repartir les persones en les sales és el mateix que seleccionar 3 persones per col.locar-les a la sala 1, sense que importi l'ordre de la selecció, de les que queden seleccionar-ne 4, sense importar l'ordre, per anar a la sala 2, i el que queda va a la sala 1. Així el nombre de maneres de fer-ho és: $\binom{8}{3}\binom{5}{4} = \binom{8}{3,4,1} = \frac{8!}{3!4!1!} = 280$.

b) Etiquetem les persones de l'1 al 8 segons l'ordre decreixent d'edat. Sigui x_i el número de folis que li assignem a la persona i. Es reparteixen 2 folis a les persones 1 i 2, i en queden

26 per repartir. Aleshores, el nombre de maneres de repartir els 26 folis restants, segons el criteri de l'enunciat, és igual al nombre de solucions enteres no negatives de

$$x_3 + \cdots + x_8 = 30 \text{ tals que } \; x_3 \geq 1,\; x_4 \geq 1,\; x_5 \geq 3,\; x_6 \geq 3,\; x_7 \geq 3,\; x_8 \geq 3.$$

Aquest nombre és igual a $\binom{(6-1)+26-(2\cdot 1+4\cdot 3)}{(6-1)} = \binom{17}{5} = 6188.$

c) Sigui

$X = \{$3-particions de les 8 persones$\}$
$S = \{$3-particions de les 8 persones amb les condicions de l'enunciat$\}$
$A = \{$3-particions de les 8 persones tals que Leo i Marisa siguin al mateix grup$\}$
$B = \{$3-particions de les 8 persones tals que Victor, Lucas i Ignasi formin un grup$\}$

Aleshores, $|S| = |A^c \cap B^c| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$. Es té, $|X| = \left\{ {8 \atop 3} \right\}$. Si Leo i Marisa han de ser al mateix grup, podem considerar que tenim una única persona, llavors $|A| = \left\{ {7 \atop 3} \right\}$. Si Victor, Lucas i Ignasi formen un grup n'hi ha prou en repartir les 5 persones romanents en dos grups, per tant $|B| = \left\{ {5 \atop 2} \right\}$. Així $|A \cap B| = \left\{ {4 \atop 2} \right\}$.

Per calcular els nombres d'Stirling recordem que $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$ i que $\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$, per a $1 \leq k < n$:

k	$\left\{ {2 \atop k} \right\}$	$\left\{ {3 \atop k} \right\}$	$\left\{ {4 \atop k} \right\}$	$\left\{ {5 \atop k} \right\}$	$\left\{ {6 \atop k} \right\}$	$\left\{ {7 \atop k} \right\}$	$\left\{ {8 \atop k} \right\}$
2	1	3	7	15	31	63	127
3		1	6	25	90	301	966

Aleshores, $|S| = \left\{ {8 \atop 3} \right\} - \left\{ {7 \atop 3} \right\} - \left\{ {5 \atop 2} \right\} + \left\{ {4 \atop 2} \right\} = 966 - 301 - 15 + 7 = 657.$

d) Escriurem D per representar una dona i H per representar un home qualsevol del grup. Es té $a_1 = 0$, ja que és impossible tenir dues dones consecutives amb un sol dia. Per $n = 2$ l'única seqüència possible és DD, així $a_2 = 4^2 = 16$.

En general, si s'està al dia n-èsim, la seqüència de fotos pot començar per H o per D. Comptem quantes n'hi ha de cada tipus per obtenir a_n. Si comença per H les dues dones consecutives han de ser a la seqüència dels $n-1$ dies restants, per tant hi ha $4 \cdot a_{n-1}$ seqüències possibles. Si la seqüència comença per D i continua amb una altra D al darrera pot haver qualsevol combinació d'homes i dones, així n'hi ha $4^2 \cdot 8^{n-2}$. Si comença per DH, al igual que abans, les dues dones consecutives han de ser a la seqüència dels $n-2$ dies restants, per tant n'hi ha $4^2 \cdot a_{n-2}$. Aleshores, $a_n = 4^2 \cdot 8^{n-2} + 4^2 a_{n-2} + 4a_{n-1}$, par a tot $n \geq 3$, amb condicions inicials $a_1 = 0$, $a_2 = 16$.

Una altra manera de resoldre-ho. Sigui b_n el nombre de seqüències de fotos que és podem tenir al taulell el dia n-èsim tals que no hagi dues dones consecutives. És a dir, $b_n = 8^n - a_n$, per a tot $n \geq 1$. Es té $b_1 = 8$, ja que no hi haurà dues dones juntes en un sol dia. Per a $n = 2$ és tenen les següents possibilitats HH, HD i DH, per tant $b_2 = 3 \cdot 4^2 = 48$.

Si la seqüència de fotos del dia n-èsim comença per H la seqüència dels $n-1$ dies restants ha de complir la condició, per tant, hi ha $4b_{n-1}$ seqüències possibles. Si comença per D, a continuació ha d'haver un H, i a partir d'aquí no ha d'haver dues dones juntes, així, hi ha $4 \cdot 4 \cdot b_{n-2}$ seqüències diferents. Per tant, $b_n = 4b_{n-1} + 16b_{n-2}$.

Usant la relació $a_n = 8^n - b_n$, es té $a_1 = 0$ i $a_2 = 16$. Com que $b_{n-1} = 8^{n-1} - a_{n-1}$ i $b_{n-2} = 8^{n-2} - a_{n-2}$, es té:

$$\begin{aligned} a_n &= 8^n - b_n = 8^n - (4b_{n-1} + 16b_{n-2}) \\ &= 8^n - 4(8^{n-1} - a_{n-1}) - 16(8^{n-2} - a_{n-2}) = 2 \cdot 8^{n-1} + 4^2 a_{n-2} + 4a_{n-1}. \end{aligned}$$