# Funcions generadores

## 2.1 Fraccions parcials

Recordem un parell de resultats sobre fraccions parcials que s'utilitzen en diferents contextos (càlcul de primitives, per exemple) i que ens seran d'utilitat.

**2.1.1 Proposició (Fraccions parcials)** *Siguin $a(x)$ i $b(x)$ polinomis de $\mathbb{C}[x]$ tals que $b(x)$ admet una factorització $b(x) = b_1(x)b_2(x)$ amb $b_1(x)$ i $b_2(x)$ polinomis relativament primers, $\deg a(x) < \deg b(x)$, i $b(0) \neq 0$. Aleshores existeixen polinomis $f_1(x), f_2(x)$ únics tals tals que*

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{f_1(x)}{b_1(x)} + \frac{f_2(x)}{b_2(x)}, \quad \deg f_1(x) < \deg b_1(x), \quad \deg f_2(x) < \deg b_2(x).$$

Si $b(x) = \beta(\alpha_1 - x)^{m_1} \cdots (\alpha_k - x)^{m_k}$ per certs nombres complexos $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, aleshores una aplicació repetida de la proposició anterior dóna una descomposició

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{h_1(x)}{(\alpha_1 - x)^{m_1}} + \cdots + \frac{h_k(x)}{(\alpha_k - x)^{m_k}},$$

on $h_i(x)$ és un polinomi de grau $\deg h_i(x) < m_i$. A més, cadascuna de les fraccions anteriors es pot descompondre com segueix:

**2.1.2 Proposició** *Siguin $\alpha \neq 0$ un nombre complex, $m \geq 1$ un enter i $h(x)$ un polinomi amb $\deg h(x) < m$. Aleshores existeixen constants $M_1, \ldots, M_m$ tals que*

$$\frac{h(x)}{(\alpha - x)^m} = \frac{M_1}{\alpha - x} + \frac{M_2}{(\alpha - x)^2} + \cdots + \frac{M_m}{(\alpha - x)^m}.$$

Els coeficients $M_1, \ldots, M_m$ s'obtenen fent la suma de fraccions de la dreta i igualant el numerador amb $h(x)$:

$$M_1(\alpha - x)^{m-1} + M_2(\alpha - x)^{m-2} + \cdots + M_m = h(x). \tag{2.1}$$

Igualant els coeficients de $x^i$ per a cada $i = 0, \ldots, m-1$ als dos costats, s'obté un sistema de $m$ equacions lineals en les $m$ incògnites $M_1, \ldots, M_m$, la solució del qual dóna els valors cercats. Alternativament, en lloc d'igualar coeficients, es poden donar $m$ valors diferents a la $x$ i s'obté també un sistema d'equacions lineals. (Remarquem que la descomposició en fraccions anteriors es pot fer en altres cossos, no només en $\mathbb{C}$, però mentre el mètode d'igualar coeficients és vàlid en general, el mètode de donar valors a $x$ no és admissible en cossos finits com els que es tractarem al capítol 5).

**2.1.3 Exemple** Descomposem en fraccions parcials la funció racional

$$\frac{18 - 11x + x^2}{9 - 15x + 7x^2 - x^3}.$$

El denominador admet la factorització $9 - 15x + 7x^2 - x^3 = (1 - x)(3 - x)^2$. Per tant,

$$\begin{aligned}\frac{18 - 11x + x^2}{9 - 15x + 7x^2 - x^3} &= \frac{M}{1 - x} + \frac{N}{3 - x} + \frac{P}{(3 - x)^2} \\ &= \frac{M(3 - x)^2 + N(1 - x)(3 - x) + P(1 - x)}{(1 - x)(3 - x)^2}.\end{aligned}$$

La funció inicial i la final són iguals i tenen el mateix denomirador; per tant, els numeradors també són iguals:

$$\begin{aligned}18 - 11x + x^2 &= M(3 - x)^2 + N(1 - x)(3 - x) + P(1 - x) \\ &= 9M + 3N + P + (-P - 4N - 6M)x + (M + N)x^2\end{aligned}$$

Això dóna el sistema en les tres incògnites $M$, $N$ i $P$ format per les tres equacions

$$M + N = 1, \quad P + 4N + 6M = 11, \quad 9M + 3N + P = 18,$$

el qual té solució $(M, N, P) = (2, -1, 3)$. Per tant,

$$\frac{18 - 11x + x^2}{9 - 15x + 7x^2 - x^3} = \frac{2}{1 - x} - \frac{1}{3 - x} + \frac{3}{(3 - x)^2}.$$

## 2.2 Successions i funcions generadores

Una *sèrie de potències* és una sèrie del tipus $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, on $(a_n)$ és una successió de nombres reals. Recordem el teroema següent de l'anàlisi:

**2.2.1 Teorema** *Sigui $(a_n)$ una successió de nombres reals i suposem que existeix un real $K$ tal que $|a_n| < K^n$ per a tot $n \geq 1$. Aleshores la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ convergeix absolutament per a tot $x \in (-1/K, 1/K)$ i la seva suma és una funció $A(x)$ definida en aquest interval. A més, $A(x)$ té derivades de tots els ordres i, per a tot $n \geq 0$, es compleix*

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}.$$

*Recíprocament, sigui $A(x)$ és una funció definida en un interval $(-1/K, 1/K)$ i amb derivades de tots els ordres, i definim $a_n = A^{(n)}(0)/n!$ per a tot $n \geq 0$. Aleshores $A(x)$ és la suma de la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.*

En les condicions del teorema, s'identifica la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ amb la seva suma $A(x)$ i es diu que $A(x)$ és la *funció generadora ordinària* de la successió $(a_n)$. També emprarem la notació $(a_n) \longleftrightarrow A(x)$.

Els resultats següents són de demostració rutinària i estableixen relacions entre successions i les seves funcions generadores.

**2.2.2 Proposició** *Siguin* $(a_n) \longleftrightarrow A(x)$, $(b_n) \longleftrightarrow B(x)$, $\alpha$ *un nombre real i* $m \geq 1$ *un enter. Aleshores es compleixen les propietats següents:*

(i) (Suma) $(a_n) + (b_n) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots) \longleftrightarrow A(x) + B(x)$.

(ii) (Producte per un escalar) $\alpha(a_n) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots) \longleftrightarrow \alpha A(x)$.

(iii) (Desplaçament a la dreta) $(0, \overset{n)}{\ldots}, 0, a_0, a_1, \ldots) \longleftrightarrow x^n A(x)$.

(iv) (Desplaçament a l'esquerra) $(a_m, a_{m+1}, \ldots) \longleftrightarrow (A(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{m-1}x^{m-1})/x^m$.

(v) (Substitució de $x$ per $\alpha x$) $(\alpha^n a_n) = (a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \alpha^3 a_3, \ldots) \longleftrightarrow A(\alpha x)$.

(vi) (Substitució de $x$ per $x^m$) $(a_0, 0, \overset{m-1)}{\ldots}, 0, a_1, \overset{m-1)}{\ldots}, 0, a_2, \ldots) \longleftrightarrow A(x^m)$.

(vii) (Derivació) $((n+1)a_{n+1})) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots) \longleftrightarrow A'(x)$.

(viii) (Integració) $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \ldots) \longleftrightarrow \int_0^x A(t)d(t)$.

(ix) (Producte) *Si* $(c_n)$ *està definida per*

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0,$$

*aleshores* $(c_n) \longleftrightarrow A(x)B(x)$.

(x) (Sumes parcials) *Si* $(s_n)$ *està definida per* $s_n = a_0 + \cdots + a_n$, *aleshores*

$$(s_n) = (a_0 + \cdots + a_n) \longleftrightarrow A(x)/(1-x).$$

Sigui $m \geq 0$. Atès que $\binom{m}{n} = 0$ si $n \geq m+1$, el teorema del binomi es pot escriure

$$(1+x)^m = \sum_{n\geq 0} \binom{m}{n} x^n,$$

i interpretar-lo en el sentit que la funció generadora ordinària de $a_n = \binom{m}{n}$ és $(1+x)^m$. Estendrem ara aquesta versió del teorema del binomi per a exponents reals. Sigui $r \in \mathbb{R}$ i $n$ un enter no negatiu. Definim el nombre binomial

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}. \tag{2.2}$$

**2.2.3 Teorema (del binomi)** *Sigui* $r \in \mathbb{R}$. *Aleshores la funció generadora ordinària de la successió* $\binom{r}{n}$ *és*

$$(1+x)^r = \sum_{n\geq 0} \binom{r}{n} x^n.$$

**Demostració:** La derivada $n$-èsima de $A(x) = (1+x)^r$ és

$$A^{(n)}(x) = r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n}.$$

Llavors $A^{(n)}(0) = r(r-1)\cdots(r-n+1)$ i obtenim

$$\frac{A^{(n)}(0)}{n!} = \binom{r}{n}. \qquad \square$$

**2.2.4 Corol·lari** *Per a tot enter $m \geq 1$, es compleix*

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n\geq 0} \binom{m+n-1}{m-1} x^n.$$

**Demostració:** Aplicant (2.2) en el cas que $r = -m$, tenim

$$\binom{-m}{n} = (-1)^n \binom{m+n-1}{n} = (-1)^n \binom{m+n-1}{m-1}.$$

Emprem ara el teorema del binomi i substituïm $x$ per $-x$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^m} &= \sum_{n\geq 0} \binom{-m}{n} (-x)^n \\
&= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \binom{m+n-1}{m-1} (-1)^n x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \binom{m+n-1}{m-1} x^n. \qquad \square
\end{aligned}$$

Notem que per a $m = 1$ obtenim el resultat ben conegut

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n.$$

que indica que la funció generadora ordinària de la successió constant 1 és $1/(1-x)$.

**2.2.5 Proposició** *Sigui*

$$A(x) = \frac{P(x)}{(1-\lambda_1 x)^{m_1} \cdots (1-\lambda_r x)^{m_r}}$$

*on $m_1, \ldots, m_r$ són enters positius, $P(x)$ és un polinomi de grau $< m_1 + \cdots + m_r$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ nombres reals no nuls. Aleshores la successió $(a_n)$ de funció generadora $A(x)$ és de la forma*

$$a_n = \sum_{i=1}^{r} Q_i(n) \lambda_i^n,$$

*on $Q_i(n)$ és un polinomi en $n$ de grau $\leq m_i - 1$.*

**Demostració:** En la descomposició de $A(x)$ en fraccions parcials, una funció de la descomposició és de la forma $M/(1-\lambda_i x)^t$ amb i $1 \leq t \leq m_i$. Aleshores,

$$\frac{M}{(1-\lambda_i x)^t} = M \sum_{n\geq 0} \binom{n+t-1}{t-1} (\lambda_i x)^n$$

i el coeficient de $x^n$ és

$$M \binom{n+t-1}{t-1} \lambda^n.$$

Ara, $\binom{n+t-1}{t-1}$ és un polinomi en $n$ de grau $t-1$. Per tant, la suma de les fraccions corresponents a $\lambda_i$ és de la forma $Q_i(n)\lambda_i^n$ on $Q_i(n)$ és un polinomi en $n$ de grau $\leq m_i - 1$. $\square$

**2.2.6 Exemple** Trobem la successió de funció generadora

$$A(x) = \frac{18 - 11x + x^2}{9 - 15x + 7x^2 - x^3}.$$

Emprem la descomposició de $A(x)$ en fraccions parcials que hem fet a l'exemple 2.1.3 i després emprem el corol·lari 2.2.4:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{18 - 11x + x^2}{9 - 15x + 7x^2 - x^3} \\ &= \frac{2}{1-x} - \frac{1}{3-x} + \frac{3}{(3-x)^2} \\ &= \frac{2}{1-x} - \frac{1/3}{1-x/3} + \frac{1/3}{(1-x/3)^2} \\ &= 2\sum_{n\geq 0} x^n - \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\binom{n+1}{1}\left(\frac{x}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(2 + \frac{n}{3^{n+1}}\right) x^n. \end{aligned}$$

La successió corresponent és, doncs, $a_n = 2 + \dfrac{n}{3^{n+1}}$.

**2.2.7 Exemple** Sigui $\lambda \neq 0$ un nombre real. Calculem la funció generadora ordinària $A(x)$ de $(n \cdot \lambda^n)$. D'acord amb la proposició 2.2.5, $A(x)$ és de la forma

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{Mx + N}{(1-\lambda x)^2} \\ &= (Mx + N)\sum_{n\geq 0}\binom{n+1}{1}\lambda^n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} M(n+1)\lambda^n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} N(n+1)\lambda^n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(Mn\lambda^{n-1} + N(n+1)\lambda^n)x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}((M+\lambda N)n + \lambda N)\lambda^{n-1}x^n. \end{aligned}$$

Per tant, $a_n = n \cdot \lambda^n = ((M + \lambda N)n + \lambda N)\lambda^{n-1}$ per a tot $n$. Prenent $n = 0$, obtenim $0 = N$; prenent $n = 1$, resulta $M = \lambda$. Per tant,

$$A(x) = \frac{\lambda x}{(1-\lambda x)^2}.$$

**2.2.8 Exemple** Sigui $\lambda \neq 0$ un nombre real. Calculem la funció generadora ordinària $A(x)$ de

$(n^2 \cdot \lambda^n)$. D'acord amb la proposició 2.2.5, $A(x)$ és de la forma

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{Mx^2+Nx+P}{(1-\lambda x)^3} \\ &= M\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}\lambda^n x^{n+2} + N\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}\lambda^n x^{n+1} + P\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}\lambda^n x^{n+1} \\ &= M\sum_{n\geq 0}\binom{n}{2}\lambda^{n-2}x^n + N\sum_{n\geq 0}\binom{n+1}{2}\lambda^{n-1}x^n + P\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}\lambda^n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(M\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}\lambda + P\binom{n+2}{2}\lambda^2\right)\lambda^{n-2}x^n. \end{aligned}$$

Per tant, per a tot $n$ es compleix

$$n^2\lambda^n = a_n = \left(M\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}\lambda+P\binom{n+2}{2}\lambda^2\right)\lambda^{n-2}$$

o, equivalentment,

$$n^2\lambda^2 = a_n = M\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}\lambda+P\binom{n+2}{2}\lambda^2.$$

Donant a $n$ els valors 0, 1 i 2 i resolent el sistema resultant s'obté $(M,N,P)=(\lambda^2,\lambda,0)$. Així, doncs,

$$(n^2\lambda^n)\leftrightarrow A(x)=\lambda x\frac{\lambda x+1}{(1-\lambda x)^3}.$$

**2.2.9 Exemple** Calculem $s_n = 1^2+\cdots+n^2$. La funció generadora ordinària de $(n^2)$ és de la forma $P_2(x)/(1-x)^3$, on $P_2(x)$ és un polinomi de grau $\leq 2$. (L'exemple anterior dóna $P_2(x)$ amb exactitud, però com veurem, no cal). D'acord amb la regla de les sumes parcials, la funció generadora de $(s_n)$ és $P_2(x)/(1-x)^4$, la qual cosa implica que $s_n$ admet una expressió

$$s_n = Mn^3+Nn^2+Pn+Q.$$

per certs valors de $M,N,P,Q$. Imposant els valors $s_0=0$, $s_1=1$, $s_2=5$ i $s_3=14$, s'obté el sistema d'equacions

$$Q=0,\quad M+N+P=1,\quad 8M+4N+2P=5,\quad 27M+9N+3P=14,$$

que té solució $(M,N,P,Q)=(1/3,1/2,1/6,0)$. Per tant,

$$s_n=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

## 2.3 Recurrencies lineals amb coeficients constants

Una successió $(a_n)$ satisfà una *recurrència lineal d'ordre $k$* (amb coeficients constants) si existeixen nombres reals $c_1,\ldots,c_k$ i una successió $(f(n))$ tals que

$$a_{n+k}+c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\cdots+c_ka_n=f(n) \tag{2.3}$$

per a tot $n\geq 0$. Si $f(n)=0$ per a tot $n$, la recurrència es diu *homogènia*.

**2.3.1 Proposició** *Sigui* $(a_n)$ *una successió que satifà la recurrència lineal*

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n = f(n)$$

*i sigui* $F(x)$ *la funció generadora ordinària de* $(f(n))$*. Aleshores*

$$(a_n) \longleftrightarrow A(x) = \frac{P_{k-1}(x) + x^k F(x)}{1 + c_1 x + \cdots + c_k x^k}$$

*on* $P_{k-1}(x)$ *és un polinomi de grau* $\leq k-1$*, els coeficients del qual estan unívocament determinats per* $a_0, \ldots, a_{k-1}$*.*

**Demostració:** Transformem la recurrència en termes de la funció generadora ordinària $A(x)$ de $(a_n)$.

$$\frac{1}{x^k}(A(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{k-1} x^{k-1}) \\ + \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{1}{x^{k-i}}(A(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{k-i-1} x^{k-i-1}) = F(x)$$

Multiplicant per $x^k$ i aïllant $A(x)$, obtenim el resultat. $\square$

Sigui $(a_n)$ una successió que satifà una recurrència

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n = f(n).$$

El polinomi $C(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_k$ s'anomena *polinomi característic* de la recurrència i com veurem tot seguit, les seves arrels determinen la factorització del polinomi $1+c_1x+\cdots+c_kx^k$ que apareix a l'expressió de la funció generadora ordinària $A(x)$ de $(a_n)$.

**2.3.2 Proposició** *Si el polinomi* $C(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_k$ *admet la factorització* $C(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_r)^{m_r}$*, amb tots els* $\lambda_i \neq 0$*, aleshores el polinomi* $D(x) = 1 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$ *admet la factorització* $D(x) = (1-\lambda_1 x)^{m_1} \cdots (1-\lambda_r x)^{m_r}$

**Demostració:** Notem que $C(x) = x^k D(1/x)$. Si $\lambda \neq 0$ és una arrel de $C(x)$, aleshores $D(1/\lambda) = 0$ i, per tant, $(x - \frac{1}{\lambda}) = -\frac{1}{\lambda}(1-\lambda x)$ és un factor de $D(x)$. $\square$

Veurem ara com aplicar els resultats anteriors per, donada una successió definida mitjançant els valors inicials $a_0, \ldots, a_{k-1}$ i una recurrència lineal amb coeficients constants,

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + \cdots + c_k a_n = f(n), \tag{2.4}$$

trobar una forma explícita de la successió $(a_n)$, la qual s'anomena *solució* de la recurrència. Aquí considerarem només el cas que $f(n)$ és de la forma

$$f(n) = \sum_{i=1}^{p} R_i(n) \mu_i^n$$

on $R_i(x)$ és un polinomi en $n$. Aleshores, la funció generadora $F(x)$ de $(f(n))$ és una funció racional i el denominador de $F(x)$ és de la forma $(1-\mu_1 x)^{s_1} \cdots (1-\mu_p x)^{s_p}$ amb $s_i = \deg R_i(x) + 1$. Siguin $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les arrels del polinomi característic de la recurrència i $m_1, \ldots, m_r$ les multiplicitats respectives. La funció generadora $A(x)$ de $(a_n)$ també és una funció racional de la forma

$$A(x) = \frac{P_{k-1}(x) + x^k F(x)}{1 + c_1 x + \cdots + c_k x^k} == \frac{P_{k-1}(x) + x^k F(x)}{(1-\lambda_1 x)^{m_1} \cdots (1-\lambda_r x)^{m_r}} = \frac{P_{t-1}(x)}{(1-\rho_1 x)^{t_1} \cdots (1-\rho_s x)^{t_e}},$$

on $(1-\rho_1 x)^{t_1} \cdots (1-\rho_s x)^{t_e} = (1-\lambda_1 x)^{m_1} \cdots (1-\lambda_r x)^{m_r} (1-\mu_1 x)^{s_1} \cdots (1-\mu_p x)^{s_p}$, $t = t_1 + \cdots + t_e$ i $P_{k-1}(x)$ i $P_{t-1}(x)$ són polinomis de graus menors o iguals que $k-1$ i $t-1$ respectivament. La proposició 2.2.5 assegura que $(a_n)$ té la forma

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} Q_i(n) \rho_i^n \tag{2.5}$$

on $Q_i(n)$ és un polinomi en $n$ de grau $\leq t_i - 1$. El total de coeficients dels polinomis $Q_i(n)$ és $t = t_1 + \cdots + t_e$. Coneguts $a_0, \ldots, a_k$, aplicant la recurrència podem calcular $a_{k+1}, \ldots, a_{t-1}$. Donant els valors $n = 0, \ldots, t-1$ a (2.5) obtenim un sistema d'equacions lineals, la solució del qual dóna els coeficients cercats.

**2.3.3 Exemple** Trobem la forma explícita de la successió definida per

$$a_0 = 1,\ a_1 = 4,\ a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n.$$

La funció generadora de $f(n) = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$ és de la forma

$$F(x) = \frac{3}{1-2x} + \frac{7}{1-3x} = \frac{Q_1(x)}{(1-2x)(1-3x)}.$$

on $Q_1(x)$ és un polinomi de grau 1. El polinomi característic de la recurrència és $C(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. Per tant, tenim,

$$A(x) = \frac{P_1(x) + x^2 F(x)}{(1-3x)^2} = \frac{P_3(x)}{(1-2x)(1-3x)^3},$$

on $P_3(x)$ és un polinomi de grau com a molt 3. Per tant, $a_n$ és de la forma

$$a_n = M \cdot 2^n + \left(Nn^2 + Pn + Q\right) \cdot 3^n. \tag{2.6}$$

Hem de determinar quatre coeficients i disposem de dos valors inicials $a_0 = 1$, $a_1 = 4$. Calculem-ne dos més: $a_2 = 6a_1 - 9a_0 + 3 + 7 = 25$, $\quad a_3 = 6a_2 - 9a_1 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 141$. Posant a (2.6) els valors $n = 0, 1, 2, 3$ obtenim el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} M + Q &=& 1 \\ 2M + 3N + 3P + 3Q &=& 4 \\ 4M + 36N + 18P + 9Q &=& 25 \\ 8M + 243N + 81P + 27Q &=& 141 \end{array}\right\}.$$

que té solució $(M, N, P, Q) = (3, 7/18, 17/18, -2)$, la qual cosa dóna

$$a_n = 3 \cdot 2^n + \left(\frac{7}{18}n^2 + \frac{17}{18}n - 2\right) \cdot 3^n.$$

## 2.4 Nombres de Catalan

Al capítol anterior hem vist la recurència satisfeta pels nombres de Catalan $C_n$. Aqui trobarem la funció generadora dels nombres $C_n$ i, a partir d'ella, els seus valors.

**2.4.1 Proposició** *La funció generadora de la successió $(C_n)$ definida per*

$$C_0 = 1, \quad C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0, \tag{2.7}$$

*és*

$$A(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x}),$$

*i, per a tot $n \geq 0$,*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

**Demostració:** Sigui $(C_n) \longleftrightarrow A(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$. Tenim,

$$\begin{aligned} (A(x))^2 &= \left(\sum_{i\geq 0} C_i x^i\right)\left(\sum_{j \geq 0} C_j x^j\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} (C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_n C_0) x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} C_{n+1} x^n. \end{aligned}$$

Per tant,

$$x(A(x))^2 = \sum_{n \geq 0} C_{n+1} x^{n+1} = A(x) - 1.$$

Així, la funció $A(x)$ compleix $x(A(x))^2 - A(x) + 1 = 0$. Clarament, per a $x = 0$ tenim $A(0) = 1 = C_0$. Per a $x \neq 0$, resolem aquesta equació de segon grau en la incògnita $A(x)$:

$$A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

La funció generadora de la successió $(C_n)$ està unívocament determinada, per tant només un dels dos signes anteriors és el correcte. Ara, $A(x)$, com a funció de $x$, és continua a l'interval de convergència. Si prenem el signe $+$, la funció tendeix a $\infty$ quan $x$ tendeix a zero, mentre que la funció generadora hauria de tendir a $A(0) = 1$; això és el que passa prenent el signe $-$. Per tant,

$$A(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x}).$$

Per trobar els valors de $C_n$, desenvolupem per Taylor:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2x}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{2}4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4^2x^2}{2!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4^3x^3}{3!} - \cdots\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2x}\left\{\frac{1}{2}4x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4^2x^2}{2!} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4^3x^3}{3!} + \cdots\right\} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{2!} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4^2x^2}{3!} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4^3x^3}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

Clarament, $C_0 = 1$ compleix la fórmula de l'enunciat. Per a $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n (n+1)!} \cdot 4^n \\ &= \frac{2^n}{(n+1)!} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \\ &= \frac{2^n}{(n+1)!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \\ &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \qquad \square \end{aligned}$$

## 2.5 Particions d'enters

Sigui $p(n)$ el nombre de particions de l'enter positiu $n$. Convenim que $p(0) = 0$. Per calcular la funció generadora de $(p(n))$ considerarem primer el nombre $p(n| \leq k)$ de particions de $n$ tals que totes les parts són $\leq k$; per $k = n$ obtindrem $p(n)$.

**2.5.1 Proposició** *Si $k$ és un enter positiu,*

$$(p(n| \leq k)) \longleftrightarrow \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}.$$

**Demostració:** Tenim

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)} = \left(\sum_{n_1 \geq 0} x^{n_1}\right)\left(\sum_{n_2 \geq 0} x^{2n_2}\right)\cdots\left(\sum_{n_k \geq 0} x^{kn_k}\right).$$

El coeficient de $x^n$ en aquest producte és el nombre de solucions enteres no negatives de l'equació

$$n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k = n.$$

Ara, aquestes solucions estan en bijecció amb les particions de $n$ amb parts $\leq k$; la bijecció està donada per

$$(n_1, \ldots, n_k) \longleftrightarrow 1 + \overset{n_1)}{\cdots} + 1 + 2 + \overset{n_2)}{\cdots} + 2 + \cdots + k + \overset{n_k)}{\cdots} + k.$$

Per tant, el coeficient de $x^n$ dóna és $p(n| \leq k)$. $\square$

Prenent $k = n$ a la proposició anterior, obtenim

**2.5.2 Corol·lari**

$$(p(n)) \longleftrightarrow \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}.$$

Arguments del mateix tipus permeten obtenir els resultats llistats a continuació. En cada cas es dóna la funció generadors ordinària del nombre de particions $n$ en parts amb la propietat que s'indica.

(i) parts parelles menors o igual que $2k$: $\big((1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2k})\big)^{-1}$.

(ii) parts senars menors o igual que $2k-1$: $\big((1-x)(1-x^3)\cdots(1-x^{2k-1})\big)^{-1}$.

(iii) parts parelles: $\prod_{i\geq 1}(1-x^{2i})^{-1}$.

(iv) parts senars: $\prod_{i\geq 1}(1-x^{2i-1})^{-1}$.

(v) parts diferents: $\prod_{i\geq 1}(1+x^i)$

A títol d'exemple, demostrarem mitjançant funcions generadores un resultat que ja hem provat mitjançant diagrames de Ferrers.

**2.5.3 Proposició** *Sigui $n$ un enter positiu. El nombre de particions de $n$ en parts diferents és igual que el nombre de particions de $n$ en parts senars.*

**Demostració:** Siguin $D(x)$ i $S(x)$ les funcions generadores del nombre de particions de $n$ en parts diferents i en parts senars, respectivament. Utilitzant les fórmules anteriors, tenim:

$$\begin{aligned} D(x) &= \prod_{i\geq 1}(1+x^i) \\ &= \frac{\prod_{i\geq 1}(1+x^i)\prod_{i\geq 1}(1-x^i)}{\prod_{i\geq 1}(1-x^i)} \\ &= \frac{\prod_{i\geq 1}(1-x^{2i})}{\prod_{i\geq 1}(1-x^i)} \\ &= \frac{1}{\prod_{i\geq 1}(1-x^{2i-1})} \\ &= S(x). \qquad \square \end{aligned}$$

## 2.6 Funció generadora exponencial

La *funció generadora exponencial* d'una successió $(a_n)$ és la funció

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

S'utilitza la notació $(a_n) \overset{\text{fge}}{\longleftrightarrow} A(x)$.

**2.6.1 Exemple** $(1,1,\dots) \overset{\text{fge}}{\longleftrightarrow} \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x = E(x)$.

**2.6.2 Exemple** Fixat un enter positiu $n$, calcularem la funció generadora exponencial del nombre $a(n)_k$ de $k$-permutacions de $[n]$:

$$a(n)_k = \binom{n}{k} k! = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Notem que

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} a(n)_k \frac{x^k}{k!}.$$

Per tant, $(a(n)_k) \overset{\text{fge}}{\longleftrightarrow} (1+x)^n$.

Remarcarem només dues propietats que relacionen operacions amb successions amb les corresponents funcions geneadores exponencials.

**2.6.3 Proposició** *Sigui* $(a_0, a_1, \ldots) \overset{\text{fge}}{\longleftrightarrow} A(x)$. *Es compleixen les propietats següents:*

(i) $(a_1, a_2, \ldots) \overset{\text{fge}}{\longleftrightarrow} A'(x)$;

(ii) *si la successió* $(b_n)$ *està definida per* $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$, *aleshores* $(b_n) \overset{\text{fge}}{\longleftrightarrow} A(x)e^x$.

**Demostració:** (i) Com que $A(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$, tenim

$$A'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n.$$

(ii)

$$\begin{aligned}
A(x)e^x &= \left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!}\right) x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k\geq 0} a_{n-k} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}\right) x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \binom{n}{k}\right) x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \overset{\text{fge}}{\longleftrightarrow} (b_n). \qquad \square
\end{aligned}$$

## 2.7 Desarranjaments

Recordem que un desarranjament d'un conjunt finit $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ és una aplicació bijectiva $\sigma\colon T \to T$ tal que $\sigma(t_i) \neq t_i$ per a tot $t_i \in T$. El nombre $d_n$ de desarranjaments de $T$ només depèn del cardinal $n$ de $T$, per la qual cosa se sol prendre $T = [n]$. Certament, $d_1 = 0$ i $d_2 = 1$. La proposició següent dóna una recurrència que compleix la successió $(d_n)$.

**2.7.1 Proposició** *Per a tot $n \geq 3$ es compleix*

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

**Demostració:** Fixat $i \in [n]$, $i \neq n$, desarranjaments $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ tals que $\sigma(n) = i$ i $\sigma(i) \neq n$ n'hi ha tants com desarranjaments de $[n] \setminus \{n\}$, és a dir, $d_{n-1}$. Comptant per tots els $i \neq n$, en resulten $(n-1)d_{n-1}$.

Fixat $i \in [n]$, $i \neq n$, desarranjaments $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ tals que $\sigma(n) = i$ i $\sigma(i) = n$ n'hi ha tants com desarranjaments de $[n] \setminus \{i, n\}$, és a dir, $d_{n-2}$. Comptant ara per a tots els $i \neq n$, en resulten $(n-1)d_{n-2}$.

Ara, per a qualsevol desarranjament $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$, si $\sigma(n) = i$, aleshores o bé $\sigma(i) = n$ o bé $\sigma(i) \neq n$; per tant, $\sigma$ està comptat en exactament un dels dos grups anteriors. Per això, $d_n = (n-1)d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}$. $\square$

Com que $d_1 = 0$ i $d_2 = 1$, podem definir de forma natural $d_0$ de forma que es complexi la recurrència anterior: prenent $n = 2$, obtenim $1 = d_2 = d_1 + d_0 = d_0$. Per tant, considerarem com a valors inicials de $d_n$ els valors $d_0 = 1$ i $d_1 = 0$.

**2.7.2 Proposició** $(d_n) \stackrel{\text{fge}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-x} e^{-x}$.

**Demostració:** Sigui $D(x) \stackrel{\text{fge}}{\longleftrightarrow} (d_n)$. El nombre de permutacions de $[n]$ que tenen exactament $k$ elements fixos és $\binom{n}{k} d_{n-k}$. Per tant,

$$n! = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

D'acord amb 2.6.3, la fge de $n!$ és $e^x D(x)$. Per tant,

$$e^x D(x) = \sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x},$$

d'on

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \qquad \square$$

**2.7.3 Corol·lari** $d_n = n! \left( 1 - 1 + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{n!} \right)$.

**Demostració:** Només cal multiplicar per $n!$ el coeficient de $x^n$ a

$$\frac{1}{1-x} e^{-x} = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots). \qquad \square$$

## 2.8 Nombres de Stirling i de nombres de Bell

Recordem que una *$k$-partició* d'un conjunt $A$ és un conjunt $\{A_1, \ldots, A_k\}$ de $k$ subconjunts de $A$ que compleixen les tres propietats següents:

(i) $A_i \neq \emptyset$ per a tot $i \in [n]$;

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ per a tot $i, j \in [n],\ i \neq j$;

(iii) $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$.

Els conjunts $A_i$ es diuen les *parts* de la partició.

El *nombre de Stirling* (de segon tipus) $\left\{ {n \atop k} \right\}$ és el nombre de $k$-particions de $[n]$. Certament, aquest nombre coincideix amb el nombre de $k$-particions de qualsevol conjunt de cardinal $n$.

**2.8.1 Proposició** *Siguin $n$ i $k$ enters positius.*

(i) $\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1$;

(ii) *si $1 < k < n$, aleshores* $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$.

**Demostració:** (i) Hi ha una única 1-partició de $[n]$, que és $\{[n]\}$. Hi ha una única $n$-partició de $[n]$, que és $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$.

(ii) Sigui $a \in [n]$. Les $k$-particions de $[n]$ és classifiquen en dues: (1) Aquelles tals que $\{a\}$ n'és una part; d'aquestes n'hi ha tantes com $(k-1)$-particions de $[n] \setminus \{a\}$, és a dir, $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$. (2) Aquelles tals que $\{a\}$ no és una part. Aquestes es poden obtenir de les $k$-particions de $[n] \setminus \{a\}$ i després afegint $a$ a alguna de les $k$ parts. N'hi ha $k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$. Per tant, $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$. $\square$

Notem que la proposició anterior permet el càlcul recurrent dels nombres $\left\{ {n \atop k} \right\}$ per valors enters positius de $n$ i $k$ amb $1 \leq k \leq n$. Estendrem ara la definició a tots els valors no negatius de $n$ i $k$ de forma que es generalitzin les propietats de la proposició anterior.

En primer lloc, notem que si $k > n \geq 1$, aleshores $[n]$ no té cap $k$-partició, de forma que $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$. L'extensió d'aquesta propietat per a $n = 0$ dóna

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = 0, \quad k > n \geq 0.$$

En segon lloc, substituint a la recurrència $k$ per 1 i $n$ per $n+1$, obtenim

$$1 = \left\{ {n+1 \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop 0} \right\} + \left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop 0} \right\} + 1,$$

per la qual cosa hem de definir $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ per a tot $n \geq 1$. Finalment, per a $n = k = 1$, la recurrència dóna

$$1 = \left\{ {1 \atop 1} \right\} = \left\{ {0 \atop 0} \right\} + \left\{ {0 \atop 1} \right\} = \left\{ {0 \atop 0} \right\}.$$

La taula següent dóna els valors de $\left\{ {n \atop k} \right\}$ per valors petits de $n$ i $k$ amb el sobreentès que els valors no consignats són zero.

| $n$ | $\left\{ {n \atop 0} \right\}$ | $\left\{ {n \atop 1} \right\}$ | $\left\{ {n \atop 2} \right\}$ | $\left\{ {n \atop 3} \right\}$ | $\left\{ {n \atop 4} \right\}$ | $\left\{ {n \atop 5} \right\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 |

Trobarem ara una expressió dels nombres de Stirling mitjançant funcions generadores. Sigui $S_k(x) = \sum_{n\geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n$ la funció generadora ordinària de les $k$-particions de $n$. Sabem $S_0(x) = 1$, així que estudiarem el cas $k \geq 1$.

**2.8.2 Proposició** *Si $n \geq k \geq 1$,*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

**Demostració:** La traducció de la recurrència 2.8.1 en termes de funcions generadores és

$$S_k(x) = xS_{k-1}(x) + kxS_kx.$$

Aïllant $S_k(x)$ i iterant, obtenim

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{x}{(1-kx)} S_{k-1}(x) \\ &= \frac{x}{(1-kx)} \frac{x}{(1-(k-1)x)} S_{k-2}(x) \\ &= \cdots \\ &= \frac{x^k}{(1-kx)(1-(k-1)x)\cdots(1-x)}. \end{aligned}$$

La descomposició en fraccions parcials

$$\frac{1}{(1-kx)(1-(k-1)x)\cdots(1-x)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{M_j}{1-jx}$$

dóna

$$1 = \sum_{j\in[k]} M_j \prod_{t\in[k]\setminus\{j\}} (1-tx).$$

Per calcular els $M_j$ donem els valors $x = 1/j$:

$$\begin{aligned} 1 &= M_j \prod_{t\in[k]\setminus\{j\}} (1 - t\frac{1}{j}) \\ &= M_j \cdot \frac{1}{j^{k-1}} \cdot \prod_{t\in[k]\setminus\{j\}} (j-t) \\ &= M_j \cdot \frac{1}{j^{k-1}} \cdot (j-1)(j-2)\cdots 1(-1)(-2)\cdots(j-k) \\ &= M_j \cdot \frac{1}{j^{k-1}} \cdot (j-1)!\,(k-j)!\,(-1)^{k-j}. \end{aligned}$$

d'on resulta

$$M_j = (-1)^{k-j} \frac{j^{k-1}}{(j-1)!\,(k-j)!}.$$

Tenim,

$$S_k(x) = x^k \sum_{j=1}^{k} \frac{M_j}{1-jx} = x^k \sum_{j=1}^{k} M_j \sum_{n\geq 0} j^n x^n$$

i el coeficient de $x^n$ en aquesta sèrie és

$$\begin{aligned}
\left\{ {n \atop k} \right\} &= \sum_{j=1}^{k} M_j \cdot j^{n-k} \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \cdot \frac{j^{k-1}}{(j-1)!\,(k-j)!} \cdot j^{n-k} \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \cdot \frac{j^{n-1}}{(j-1)!\,(k-j)!} \frac{j \cdot k!}{j \cdot k!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \cdot \frac{k!}{j!(k-j)!} j^n \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n. \qquad \square
\end{aligned}$$

El *nombre de Bell* $B_n$ es defineix per

$$B_0 = 1, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Notem que, per $n \geq 1$, $B_n$ és el nombre de particions de $[n]$. Els nombres de Bell compleixen la recurrència següent:

**2.8.3 Proposició** *$B_0 = 1$, $\quad B_{n+1} = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} B_{n-k}$.*

**Demostració:** En tota partició de $[n+1]$, l'element 1 està en alguna part de $k+1$ elements per a alguna $k$, $0 \leq k \leq n$. Hi ha $\binom{n}{k}$ formes de triar els restants elements de la part que conté 1 i, per cadascuna d'aquestes seleccions, hi ha $B_{n-k}$ particions dels $n-k$ elements que queden. Els principis del producte i d'addició donen el resultat. $\square$

**2.8.4 Proposició** *$(B_n) \overset{\text{fge}}{\longleftrightarrow} e^{e^x - 1}$.*

**Demostració:** Sigui $(B_n) \overset{\text{fge}}{\longleftrightarrow} B(x)$. Tenim,

$$B'(x) \overset{\text{fge}}{\longleftrightarrow} (B_{n+1}) = \left( \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} B_{n-k} \right) \overset{\text{fge}}{\longleftrightarrow} B(x) e^x.$$

Així, $B'(x) = B(x)e^x$, d'on $B'(x)/B(x) = e^x$. Això comporta $\ln B(x) = e^x + K$ per a certa constant $K$. Com que $B(0) = B_0 = 1$, posant $x = 0$ obtenim $0 = \ln 1 = 1 + K$, és a dir, $K = -1$. Per tant, $\ln B(x) = e^x - 1$. Prenent expoencials obtenim el resultat. $\square$

Josep M. Brunat
Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
Febrer 2006