ETSETB
Matemàtiques de la Telecomunicació

Problemes
Sèries i Transformada de Fourier

Anna Lladó
Departament de Matemàtica Aplicada IV

Setembre del 2008

Aquesta és una col.lecció de problemes pensada com a complement per conèixer i entendre aquesta assignatura. Som conscients que amb el temps lectiu disponible no és possible resoldre tots els exercicis presentats aquí, però considerem que d'aquesta manera donem més flexibilitat al professorat per triar els exercicis que, segons les circumstàncies, consideri més adients. Pensem també que és indispensable pel seu aprenentatge que l'alumne intenti resoldre alguns exercicis pel seu compte.

Hem evitat incloure problemes amb càlculs llargs i complicats, destacant l'aspecte comprensiu d'aquesta assignatura, essencial en aquests estudis d'Enginyeria de Telecomunicació.

Els problemes estan ordenats per Capítols seguint l'ordre del curs, al final dels quals trobareu les solucions. Hem pensat que també era convenient incloure problemes apareguts en controls i exàmens dels darrers anys, així com la seva resolució.

Confiem que us sigui d'utilitat i confiem també que els vostres comentaris (que podeu enviar a allado@ma4.upc.edu) ajudaran a millorar el resultat.

Anna Lladó

Barcelona, Setembre del 2008

Índex

Capítol 1

Sèries de Fourier

1.1 Preliminars

1. Sigui X un espai euclidià complex. Justifiqueu quines de les següents afirmacions són certes.

   (a) Per tot $x, y \in X$ es compleix,
   $$\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x + y, x - y \rangle.$$

   (b) Per tot $x, y \in X$ es compleix,
   $$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

2. Sigui X un espai vectorial amb un producte escalar. Proveu que per tot parell de successions convergents de X, $x_n \to x$ i $y_n \to y$, sempre es compleix que

   (a)
   $$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle,$$
   el producte escalar és continu.

(b)

$$\|x_n\| \to \|x\|,$$

la norma és continua.

3. Sigui X l'espai vectorial real dels polinomis de grau menor que tres. Per tot $x(t), y(t) \in X$ definim

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \sum_{k=-1}^{1} x(k)y(k).$$

(a) Comproveu que és un producte escalar. Quina és la norma i la distància associada?

(b) Trobeu una base ortogonal de X.

(c) Quin és el polinomi de grau ú que millor aproxima a la funció $x(t) = t^2 - 2t$ en X.

4. Considereu el sistema $S = \{1, x, \cos x\}$ en l'espai $\mathcal{C}[a, b]$ sobre $\mathbb{R}$ amb el producte escalar habitual.

Trobeu tots els intervals $[a, b]$ pels quals S és ortogonal.

5. Considereu la successió de polinomis $\{t^n\}_{n\geq 0}$ definits a l'interval $[-1, 1]$.

(a) Comproveu que són de $L^2[-1, 1]$

(b) Proveu que són linealment independents a $L^2[-1, 1]$. Són ortogonals en aquest espai?

(c) Obteniu, a partir de $\{t^n\}_{n\geq 0}$, els quatre primers termes d'un conjunt de polinomis, $\{P_n(t)\}_{n\geq 0}$, anomenats de *Legendre*, que són ortonormals a $L^2[-1, 1]$.

6. Considereu l'espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ de les funcions reals continues definides a l'interval $[-\pi, \pi]$ amb el producte escalar habitual.

Proveu que en aquest espai la successió de funcions $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma un sistema ortogonal no complet.

Recordeu: *Un sistema numerable d'un espai vectorial mètric és complet si l'únic element de l'espai ortogonal a tots els altres és el zero.*

7. Sabent que $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ és una base ortogonal complexa a l'espai $L^2(-\pi,\pi)$. Comproveu que les següents successions són bases en els espais que s'indiquen.
   (a) $\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $L^2(-\pi,\pi)$.
   (b) $\{1, \cos nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $L^2(0,\pi)$.
   (c) $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $L^2(0,\pi)$.

8. Sabent que $\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una base de Fourier del espai $L^2(-\pi,\pi)$. Deduïu la base corresponent a l'espai $L^2(0,4\pi)$.

9. Sigui $f(t)$ una funció real definida a l'interval $[a,b]$. Trobeu la transformació afí (el canvi de variable), $t=\alpha+\beta x$, que permet expressar $f(t)$ com una funció $g(x)$ definida a l'interval
   (a) $[0,2L]$.
   (b) $[-L,L]$.

10. Donat $L\in\mathbb{R}^+$, comproveu que les següents successions són bases ortogonals a l'espai $L^2(0,L)$.
    (a) $\{1, \cos 2n\frac{\pi}{L}t, \sin 2n\frac{\pi}{L}t\}\}_{n\in\mathbb{N}}$.
    (b) $\{\cos(2n-1)\frac{\pi}{L}t, \sin(2n-1)\frac{\pi}{L}t\}_{n\in\mathbb{N}}$.

11. Comproveu que les següents successions són bases ortogonals a l'espai $L^2(0,L/2)$, on $L\in\mathbb{R}^+$.
    (a) $\{1, \cos 2n\frac{\pi}{L}t\}_{n\in\mathbb{N}}$.
    (b) $\{\cos(2n-1)\frac{\pi}{L}t\}_{n\in\mathbb{N}}$.
    (c) $\{\sin 2n\frac{\pi}{L}t\}_{n\in\mathbb{N}}$.
    (d) $\{\sin(2n-1)\frac{\pi}{L}t\}_{n\in\mathbb{N}}$.

12. Sigui $f(t)$ una funció real definida a l'interval $[-L, L]$. Dibuixeu les simetries corresponents als casos següents.

    (a) $f(t) = f(L + t)$.
    (b) $f(t) = -f(L - t)$.
    (c) $f(t) = f(-t), \quad f(t) = f(L + t)$.
    (d) $f(t) = f(-t), \quad f(t) = -f(L + t)$.
    (e) $f(t) = -f(-t), \quad f(t) = f(L + t)$.
    (f) $f(t) = -f(-t), \quad f(t) = -f(L + t)$.

13. Trobeu i representeu les components parell i imparell de les següents funcions,

    (a) $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$
    (b) $g(t) = t \sin t - \sin 2t$.

14. Siguin $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ i $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funcions T-periòdiques. Proveu que les funcions,

    (a) $x \pm y$,
    (b) $x \cdot y$,
    (c) αx, $\alpha \in \mathbb{R}$,

    són també T-periòdiques.

15. Siguin x i y dues funcions reals periòdiques amb períodes respectius, $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$.

    Demostreu que la funció $x + y$ és T-periòdica només si $T_1/T_2 \in \mathbb{Q}$. En aquest cas, quina és la relació entre T i T_1, T_2?

16. Estudieu si són periòdiques les següents funcions i, si és el cas, trobeu el seu període mínim.

(a) $\cos t + \sin(2t/3)$.

(b) $\sin 2\pi t + \cos 3\pi t$.

(c) $\sin t + \sin \pi t$.

(d) $\sum_{n>0} \sin nt$.

17. Representem per ω_0 la freqüència angular fonamental. Comproveu que per qualsevol amplitud $A \in \mathbb{R}^+$ i qualsevol fase $\phi \in \mathbb{R}$, les funcions

$$A\sin(\omega_0 t + \phi), \qquad A\cos(\omega_0 t + \phi),$$

són periòdiques amb període fonamental $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

18. Sigui $x(t)$ una funció T-periòdica. Proveu que per qualsevol $\alpha \in \mathbb{R}$ es compleix,

$$\int_\alpha^{\alpha+T} x(t)dt = \int_0^T x(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt.$$

1.2 Sèries de Fourier

19. Sigui $B = \{\phi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de $L^2(a,b)$. Si aproximem una funció $x(t) \in L^2(a,b)$ per una combinació lineal finita d'elements de B,

$$x(t) \approx \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n(t) = S_N(t),$$

proveu que l'error de l'aproximació $E_N = \|x - S_N\|$ és mínim si els coeficients a_n són els de Fourier.

Obteniu l'igualtat de Perseval fent $\lim_{N\to\infty} E_N$.

20. Donada la sèrie complexa de Fourier d'una funció T-periòdica,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2\pi}{T}int}.$$

(a) Proveu que per tot $n \in \mathbb{N}$ es compleix $c_{-n} = \overline{c_n}$.

(b) Trobeu la relació que hi ha entre els coeficients de la corresponent sèrie de Fourier real (o trigonomètrica),

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos \frac{2\pi}{T} nt + b_n \sin \frac{2\pi}{T} nt),$$

i aquests coeficients.

(c) Quina és la relació inversa?

21. Trobeu la sèrie trigonomètrica de Fourier de la següent funció

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & t \in (0, \pi) \\ 0, & t \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

(a) Amb quin tipus de convergència s'aproxima a $f(t)$?. Trobeu com aplicació el valor de la sèrie numèrica

$$\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

(b) Quina és la sèrie trigonomètrica de Fourier de la funció $g(t) = t^2$ per $t \in [-\pi, \pi]$?

22. Considereu la funció T-periòdica,

$$f(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (0, T/2) \\ 0, & t \in (-T/2, 0) \end{cases}$$

amb sèrie de Fourier,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(\frac{2\pi}{T} nt) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T} nt).$$

Proveu que la funció $x(t)$ amb $t \in (0, T/2)$, admet els següents desenvolupaments,

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(\frac{2\pi}{T} nt),$$

$$x(t) = 2 \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sin(\frac{2\pi}{T} nt).$$

23. Sigui $f(t)$ una funció real T-periòdica tal que $\forall t \in (0, T)$ compleix

$$|f(t)| = |f(T-t)|.$$

Classifiqueu i dibuixeu les simetries de $f(t)$ respecte $t = T/2$ que permeten expressar $f(t)$ amb les següents sèries de Fourier.

   (a)
$$f(t) = a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(\frac{2\pi}{T} nt).$$

   (b)
$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sin(\frac{2\pi}{T} nt).$$

24. Considereu la funció $x(t) = t$ per $t \in [0, \pi)$.
   (a) Quina és la seva sèrie en sinus de Fourier?
   (b) Quina és la seva sèrie en cosinus de Fourier?
   (c) Deduïu el valor de la sèrie, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$.

25. Donada la *funció de salt*

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,1) \\ -1, & t \in (-1,0) \end{cases}$$

   (a) Dibuixeu i definiu la seva extensió periòdica $\widetilde{x}(t)$.
   (b) Representeu les seves primeres sumes parcials trigonomètriques de Fourier i comproveu el fenomen de Gibbs.

26. Donada la *funció pols quadrat*,

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq |t| < 1. \end{cases}$$

   (a) Definiu la seva extensió periòdica $\widetilde{x}(t)$, anomenada *tren d'impulsos unitaris*.
   (b) Calculeu la seva sèrie de Fourier complexa.

(c) Com s'aproxima aquesta sèrie a $\widetilde{x}(t)$? Per qualsevol $n \in \mathbb{Z}$, a quin valor convergeix la sèrie en els punts $t = 2n \pm \frac{1}{2}$?

(d) Deduïu el valor de la serie numèrica,

$$\{\cdots, -1/7, 1/5, -1/3, 1, 1, -1/3, 1/5, -1/7 \cdots\}.$$

27. Considereu la *funció signe* definida a l'interval $(-\pi, \pi)$,

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \pi) \\ -1, & t \in (-\pi, 0) \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

(a) Trobeu la seva sèrie de Fourier real.

(b) Deduïu-ne, sense fer càlculs, la sèrie trigonomètrica de Fourier de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \pi/2 \\ -1, & \pi/2 < |x| < \pi \\ 0, & |x| = \pi/2 \end{cases}$$

(c) Per $t \in [-\pi, \pi]$, trobeu la sèrie de Fourier de la funció integral

$$g(t) = \int_{-\pi}^{t} \operatorname{sgn}(u) du.$$

(d) Comproveu que al derivar la sèrie obtinguda en el apartat anterior obtenim la sèrie del primer apartat.

28. Considereu la funció $x(t) = t(\pi - t)$ a l'interval $[0, \pi)$.

(a) Obteniu la seva sèrie en sinus.

(b) Trobeu el valor de la constant c que fa mínima la següent integral

$$I = \int_{0}^{\pi} |x(t) - c \sin t|^2 dt.$$

(c) Fent servir el Teorema de Perseval calculeu $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^6}$.

29. Trobeu la sèrie trigonomètrica de Fourier per $t \in [-\pi, \pi]$ de la funció quadràtica
$$x(t) = at^2 + bt + c, \quad \text{amb} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

30. Calculeu la sèrie trigonomètrica de Fourier de les següents funcions.
    (a) $\sin(t + 2)$.
    (b) $\sin^2 t$.
    (c) $\sin^5 t$.

31. Obteniu les sèries de Fourier de les següents funcions definides a tot $\mathbb{R}$.
    (a) $x(t) = |\sin t|$.
    (b) $y(t) = \begin{cases} \sin t, & \sin t > 0 \\ 0, & \sin t < 0 \end{cases}$

32. Calculeu les sèries de Fourier de les següents funcions i estudieu com convergeixen a les funcions corresponents.
    (a)
    $$x(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \end{cases}$$
    (b)
    $$y(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/4 \\ -4|t| + 2, & 1/4 < |t| < 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq |t| < 1 \end{cases}$$

33. Donat el desenvolupament trigonomètric de Fourier d'un senyal T-periòdic,
$$x(t) = a_0 + \sum_{n>0} a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nt) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T}nt),$$
    (a) Deduïu la seva expressió com a suma d'harmònics, és a dir,
    $$x(t) = A_0 + \sum_{n>0} A_n \cos(\frac{2\pi}{T}nt + \phi_n).$$

(b) Doneu les correspondències entre els coeficients de Fourier i les amplituds A_n i fases ϕ_n dels harmònics corresponents.

(c) Quina és la component contínua del senyal?

1.3 Solucions

1. (a) Només és certa si el producte escalar és real.
   (b) Sempre és certa.

2. -

3. (a) $\|x\|^2 = \sum_{k=-1}^{1} x^2(k)$,
   $d(x,y) = \|x-y\| = (\sum_{k=-1}^{1}(x(k)-y(k))^2)^{1/2}$.
   (b) $1, t, t^2 - 2/3$.
   (c) $p(t) = (2/3) - 2t$.

4. $[-n\pi, n\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) -
   (b) No són ortogonals.
   (c) $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$, $P_2(t) = (3t^2-1)/2$, $P_3(t) = (5t^3-3t)/2$.

6. Per qualsevol funció constant $f(t) = c \neq 0$, $f(t) \in \mathcal{C}[-\pi,\pi]$ i

$$\langle f(t), \sin nt\rangle = c\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt = 0.$$

7. -

8. Fent el canvi $t = \frac{x}{2} - \pi$ obtenim $\{1, \cos\frac{n}{2}x, \sin\frac{n}{2}x\}_{n\in\mathbb{N}}$.

9. (a) Fent el canvi $t = a + \frac{b-a}{2L}x$, obtenim $g(x)$ amb $x \in [0, 2L]$.
   (b) Fent el canvi $t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2L}x$, obtenim $g(x)$ amb $x \in [-L, L]$.

10. -

11. -

12. -

13. (a) $f_p(t) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-t}/2, & t > 0 \\ e^{t}/2, & t < 0. \end{array} \right.$, $\quad f_i(t) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-t}/2, & t > 0 \\ -e^{t}/2, & t < 0. \end{array} \right.$

    (b) $g_p(t) = t \sin t, \quad g_i(t) = -\sin 2t.$

14. -

15. $T = mcm\{T_1, T_2\}$.

16. (a) És 6π-periòdica.

    (b) És 3-periòdica.

    (c) No és periòdica.

    (d) És 2π-periòdica.

17. -

18. -

19. -

20. (a) -

    (b) $a_0 = 2c_0,\ a_n = c_n + c_{-n}$ i $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

    (c) $c_0 = a_0/2,\ c_n = (a_n - ib_n)/2$ i $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$.

21.

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt) + \frac{1}{\pi}\sum_{n>0} \frac{\pi^2(2n-1)^2-4}{(2n-1)^3}\sin(nt).$$

(a) La funció no està definida pels multiples imparells de π i a la resta la convergència és puntual. Així per $t = 0$ obtenim,

$$\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(b)

$$g(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt) + \frac{2}{\pi}\sum_{n>0} \frac{\pi^2(2n-1)^2-4}{(2n-1)^3}\sin(nt).$$

22. -

23. (a) Per $f(t) = f(T-t)$ tenim una simetria parell respecte $t = T/2$ i per tant $f(t) = f(-t)$, $t \in [-T/2, T/2]$. D'on $b_n = 0$, $n > 0$.
   (b) Simetria imparell respecte $t = T/2$ i per tant $f(t) = -f(-t)$, $t \in [-T/2, T/2]$. D'on $a_n = 0$, $n \geq 0$.

24. (a) $x(t) = 2\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)$.
   (b) $x(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n>0} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$.
   (c) $\frac{\pi}{4}$.

25. (a) $\widetilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \cup_{n\in\mathbb{Z}}(2n, 2n+1) \\ -1, & t \in \cup_{n\in\mathbb{Z}}(2n-1, 2n) \end{cases}$
   (b) $S_N(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{\sin((2k-1)\pi t)}{2k-1}, \quad t \in \mathbb{R}$.

26. (a) $\widetilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & t \in I_1 = (-1/2, 1/2) \cup_{n>0} (2n-1, 2n) \cup_{n<0} (2n, 2n+1) \\ 0, & t \in I_0 = \mathbb{R} \setminus (I_1 \cup \{\pm 1/2\} \cup \pm\mathbb{N}). \end{cases}$
   Observeu que $\widetilde{x}(t)$ no està definida per $t \in \pm\mathbb{N} \cup \{\pm 1/2\}$.

(b)

$$\widetilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} e^{in\pi t}.$$

(c) $\forall t \in I_0 \cup I_1$ la sèrie convergeix puntualment a $\widetilde{x}(t)$ i $\forall t \in \pm\mathbb{N} \cup \{\pm 1/2\}$ la sèrie convergeix a $1/2$.

(d) π.

27. (a)

$$\operatorname{sgn}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin((2n-1)t)}{2n-1}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

(b) Amb el canvi $t = x + \pi/2$ desplacem f, $\pi/2$ a la dreta, i per tant

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos(2n-1)x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c)

$$g(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos((2n-1)t)}{(2n-1)^2}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

(d) -

28. (a) $x(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n>0} \frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)^3}$.

(b) $c = 8/\pi, \quad E = \frac{\pi^6 - 960}{30\pi} = 0,1474.$

(c) $\pi^6/960$.

29.

$$x(t) = (\frac{a\pi^2}{3} + c) + 4a \sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt) + 2b \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt).$$

30. Per tot $t \in \mathbb{R}$,

(a) $\sin(t+2) = \sin 2 \cos t + \cos 2 \sin t$.

(b) $\sin^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$.

(c) $\sin^5 = \frac{5}{8}\sin t - \frac{5}{16}\sin 3t + \frac{1}{16}\sin 5t$.

31. (a) $x(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$.

    (b) $y(t) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}(\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}) + \frac{\sin t}{2\pi}$.

32. (a) $x(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)}{\pi}t$.

    (b) $y(t) = \frac{3}{8} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n>0}\frac{1}{n^2}(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{n\pi}{2})\cos(n\pi t)$.

    Les dues sèries convergeixen uniformement a les funcions corresponents.

33. (a) -

    (b) $a_n = A_n\cos\phi_n, \quad b_n = -A_n\sin\phi_n$.

    (c) $A_0 = a_0$.

Capítol 2

Transformada de Fourier

2.1 Enunciats

Per simplificar notacions aquí fem servir la variable $\omega = 2\pi f$.

1. Calculeu la transformada de Fourier de la següent funció, per $T \in \mathbb{R}^+$.

$$x(t) = \begin{cases} T - |t|, & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

2. Donades dues funcions reals $x(t)$ i $y(t)$, demostreu les següents afirmacions.

   (a)
$$\int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} X(\omega)\overline{Y}(\omega)d\omega.$$

   (b)
$$\mathcal{F}[x(-t)] = X(-\omega).$$

3. Trobeu la transformada de Fourier de la funció real $f(at+b)$ amb $a \neq 0$. Interpreteu els resultats pels següents valors dels paràmetres.

   (a) $b = 0$.

   (b) $a = 1$.

   (c) $a > 1$.

   (d) $a < 1$.

4. Trobeu la transformada de Fourier d'un senyal amb amplitud moduladora $f(t)$,
$$s(t) = f(t)\sin(\omega_0 t).$$

5. Per $a \in \mathbb{R}^+$ trobeu la transformada de Fourier de les següents funcions,

   (a) $x(t) = e^{-a|t|}$.

   (b) $y(t) = e^{-a^2t^2}$.

6. Sigui $x(t)$ és una funció real. Si $X(\omega)$ és la transformada de Fourier de $x(t)$, proveu que es compleix,

   (a) $X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$.

   (b) Si $x(t)$ és parell, $X(\omega)$ és una funció real parell.

   (c) Si $x(t)$ és imparell, $X(\omega)$ és una funció imaginària imparell.

7. Sigui $x(t)$ és una funció imaginaria pura. Si $X(\omega)$ és la transformada de Fourier de $x(t)$, proveu que es compleix,

   (a) $X(-\omega) = -\overline{X(\omega)}$.

   (b) Si $x(t)$ és parell, $X(\omega)$ és una funció imaginaria parell.

   (c) Si $x(t)$ és imparell, $X(\omega)$ és una funció real imparell.

8. Sigui $f(t)$ una funció real tal que $f(t) = 0$ si $t < 0$. A partir de les transformades cosinus/sinus de Fourier de $f(t)$, definides respectivament per $\omega > 0$,

$$F_C(\omega) = \int_{t>0} f(t)\cos(\omega t)dt, \qquad F_S(\omega) = \int_{t>0} f(t)\sin(\omega t)dt.$$

comproveu que es compleix,

   (a)
   $$F((\omega) = F_C(\omega) - jF_S(\omega).$$

   (b) Si $f(t)$ és parell,
   $$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{t>0} F_C(\omega)\cos(\omega t)d\omega.$$

   (c) Si $f(t)$ és imparell,
   $$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{t>0} F_S(\omega)\sin(\omega t)d\omega.$$

9. Considereu la *funció pols quadrat*,

$$u(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Calculeu la transformada de Fourier de les següents funcions

   (a) $u(t)$.
   (b) $x(t) = u(t) - u(t-1)$.
   (c) $y(t) = e^{-3|t|}(u(t) - u(t-1))$.

10. Considereu la *funció pols rectangular* definida per $a \in \mathbb{R}^+$,

$$p_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

   (a) Calculeu $\mathcal{F}[p_a(t)]$ i comproveu que és real i parell.
   (b) Calculeu $\mathcal{F}[p_a(t-a)]$. És real?

(c) Calculeu $\mathcal{F}[(p_a * p_a)(t)]$.

11. Considereu la *funció signe*

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

Fet servir que

$$\lim_{a \to 0^+} e^{-a|t|} sgn(t) = sgn(t),$$

calculeu $\mathcal{F}[sgn(t)]$. Comproveu que és una funció imparell.

12. Sabent que, per tota funció $x(t)$ contínua en $t = t_0$ es verifica

$$\int_a^b \delta(t - t_0) x(t) dt = \begin{cases} x(t_0), & t_0 \in (a, b) \\ 0, & t_0 \notin (a, b) \end{cases},$$

comproveu que

(a)
$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0}.$$

(b)
$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - \omega_0)] = \frac{e^{i\omega_0 t}}{2\pi} = x(t).$$

(c)
$$\mathcal{F}[e^{i\omega t_0}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

(d)
$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t - t_0)} d\omega.$$

13. Considereu la *funció de l'esglaó unitari o funció de Heaviside*

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Per $t \neq 0$ feu servir que

$$h(t) = \frac{1}{2}(1 + sgn(t))$$

per calcular

(a) $\mathcal{F}[h(t)]$.
(b) $\mathcal{F}[e^{-at}h(t)]$, $a \in \mathbb{R}^+$.
(c) $\mathcal{F}[te^{-at}h(t)]$, $a \in \mathbb{R}^+$.

14. Trobeu el producte de convolució de les següents parelles de funcions.

(a) $x(t) = e^{-at}h(t), \quad y(t) = e^{-bt}h(t), \quad a, b > 0.$
(b) $f(t) = h(t)\sin t, \quad g(t) = h(t)\cos t.$

15. Fent servir la propietat de convolució, trobeu la transformada inversa de Fourier de la funció,

$$F(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)^2}.$$

16. Les transformades de Fourier de les funcions periòdiques es poden definir mitjançant impulsos. Per qué no es poden calcular directament a partir de la definició?

Comproveu que

(a) $\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] = -i\pi[\delta(t - t_0) - \delta(t + t_0)]$.
(b) $\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi[\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)]$.

17. Si $x(t)$ és una funció T-periòdica amb freqüència fonamental $\omega_0 = 2\pi/T$, aleshores la seva sèrie de Fourier és

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega_0 t}.$$

Comproveu que la seva transformada de Fourier és un tren d'impulsos. És a dir,

$$\mathcal{F}[x(t)] = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(\omega - n\omega_0).$$

18. Calculeu la transformada de Fourier del *tren d'impulsos unitaris* de duració d i periode T

$$\delta_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(\omega - n\omega_0).$$

19. Considereu la funció $x(t) = \cos^2 t$.

    (a) Calculeu la seva transformada de Fourier $X(\omega)$.

    (b) Si $Y(\omega)$ és la transformada de Fourier d'un senyal $y(t) \in Ł_1(\mathbb{R})$, expresseu $F(\omega) = X(\omega) * Y(\omega)$ en termes de $Y(\omega)$.

    (c) Trobeu la transformada de Fourier inversa de $F(\omega)$.

20. Sigui $F(\omega)$ la transformada de Fourier d'una funció continua, $f(t)$. Trobeu, en termes de $F(\omega)$, la transformada de Fourier de la funció

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

21. Fent servir el Teorema de Parseval comproveu que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi.$$

22. Fent servir la transformació de Fourier, trobeu una solució de l'equació diferencial,

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = e^{-t}u(t).$$

23. Fent servir la transformada de Fourier de $x(t) = e^{-a|t|}$, proveu que una solució de l'equació $x''(t) - x(t) = -2e^{-t}u(t)$ és

$$x(t) = \int_0^{\infty} e^{-|t-s|} e^{-s} ds.$$

2.2 Solucions

Observació: Aquí fem servir la notació, $\omega = 2\pi f$.

1. $X(\omega) = \frac{1-e^{-(3+i\omega)}}{3+i\omega}$.
2. -
3. $F(\omega) = \frac{e^{j\omega\frac{b}{a}}}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$.
   (a) $b = 0$, canvi d'escala.
   (b) $a = 1$, translació.
   (c) $a > 1$, dilatació en el temps.
   (d) $a < 1$, contracció en el temps.
4. $S(\omega) = \frac{1}{2j}[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$.
5. (a) $X(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$.
   (b) $Y(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$.
6. -
7. -
8. -
9. (a) $U(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}$.
   (b) $X(\omega) = \frac{\sin(\omega T}{\omega}$.
   (c) $Y(\omega) = \frac{\sin^2 \omega T}{\omega^2}$.
10. (a) $\mathcal{F}[p_a(t)] = \frac{2\sin a\omega}{\omega}$.
    (b) $\mathcal{F}[p_a(t-a)] = \frac{2e^{-i\omega a}\sin a\omega}{\omega}$.
    (c) $\mathcal{F}[(p_a * p_a)(t)] = 4\frac{\sin^2 a\omega}{\omega^2}$.
11. $\mathcal{F}[sgn(t)] = \begin{cases} \frac{2}{i\omega}, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$
12. -
13. (a) $\mathcal{F}[h(t)] = \begin{cases} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$

(b) $\mathcal{F}[e^{-at}h(t)] = \frac{1}{(a+i\omega)}$.

(c) $\mathcal{F}[te^{-at}h(t)] = \frac{1}{(a+i\omega)^2}$.

14. (a) $x(t) * y(t) = \frac{e^b - e^a}{a-b} e^{-t} h(t)$.

    (b) $f(t) * g(t) = \frac{1}{2} t \sin t$.

15. $f(t) = te^{-t}u(t)$.

16. Per que no són absolutament integrables.

17. -

18. $\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T} n)$.

19. (a) $X(\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega) + \frac{1}{4}\delta(\omega - \frac{1}{\pi}) + \delta(\omega + \frac{1}{\pi})))$.

    (b) $Y(\omega) = \frac{1}{2}Y(\omega) + \frac{1}{4}(Y(\omega - \frac{1}{\pi}) + Y(\omega + \frac{1}{\pi})))$.

    (c) $f(t) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2it} + \frac{1}{4}e^{-2it})y(t) = x(t)y(t)$.

20. $F(\omega) = \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$.

21. -

22. $x(t) = e^{-t}(1 - \cos t)u(t)$.

23. $x(t) = \begin{cases} (t + 1/2)e^{-t} & t > 0 \\ e^{-t}/2 & t < 0 \end{cases}$

Capítol 3

Transformada Discreta de Fourier

3.1 Enunciats

1. Donada una seqüència $\{x_k\}_{0\leq k<N}$, proveu que la seva transformada discreta de Fourier $\{X_n\}_{0\leq n<N}$ s'estén periòdicament amb període N, és a dir, per qualsevol $m\in\mathbb{Z}$ es compleix, $X_{n+mN}=X_n$.

2. Sigui $\{X_n\}_{0\leq n<N}$ la seqüència transformada discreta de Fourier d'un senyal discret, $\{x_k\}_{0\leq k<N}$. Proveu que $\{x_k\}_{0\leq k<N}$ s'estén periòdicament amb període N, és a dir, per tot $m\in\mathbb{Z}$ es compleix, $x_{k+mN}=x_k$.

3. Sigui $\{x_k\}_{0\leq k<N}$, un senyal discret real. Proveu que si N és parell, aleshores l'informació de la seva transformada discreta de Fourier, $\{X_n\}_{0\leq n<N}$, està continguda en els $N/2+1$ primers termes, és a dir, per tot $0\leq n<N/2$ es compleix que $X_{N/2-n}=\overline{X_{N/2+n}}$

4. Calculeu la transformada discreta de Fourier dels següents senyals

(a) $\{x_k\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1\}$.

(b) $\{x_k\} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$.

3.2 Solucions

1. -

2. -

3. -

4. (a) $\{X_n\} = \{0, 0, 0, 6, 0, 0\}$.

   (b) $\{X_n\} = \{0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0\}$.

Capítol 4

Problemes resolts

1. *Considereu la funció* $x(t) = \cos 2t/3$.

   (a) Trobeu la sèrie de Fourier complexa de $x(t)$ *a l'interval* $[0, 3\pi/2)$.

   (b) Doneu la sèrie de Fourier en sinus de $x(t)$ *en el mateix interval. Interpreteu el resultat per a* $t = 0$.

   (c) Determineu el valor de la constant c *que minimitza la integral*

$$I = \int_0^{3\pi/2} (x(t) - c \sin 4t/3)^2 dt$$

   i calculeu aquest valor mínim.

Resolució:

(a) La sèrie de Fourier complexa de $x(t)$ a l'interval $[0, T)$ és

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}, \quad \text{amb} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2\pi int/T} dt.$$

Com que $T = 3\pi/2$, tenim

$$c_n = \frac{2}{3\pi} \int_0^{3\pi/2} \cos \frac{2t}{3} e^{-4int/3} dt = \frac{2}{3\pi} \int_0^{3\pi/2} \frac{e^{2ti/3} + e^{-2ti/3}}{2} e^{-4int/3} dt =$$

$$= \frac{1}{3\pi} \int_0^{3\pi/2} e^{2ti(1-2n)/3} + e^{-2ti(1+2n)/3} dt = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{1 - e^{i\pi(1-2n)}}{1-2n} + \frac{e^{-i\pi(1+2n)} - 1}{1+2n}\right) =$$

$$= \frac{i}{2\pi}(\frac{2}{1-2n} - \frac{2}{1+2n}) = \frac{4ni}{\pi(1-4n^2)}.$$

Per tant la sèrie que es demana és,

$$\frac{4i}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{1-4n^2}e^{4int/3}.$$

(b) La sèrie de Fourier en sinus de $x(t)$ a $[0, L)$ és la restricció en aquest interval de sèrie de Fourier de l'extensió *imparell* de $x(t)$ a $[-L, L)$, és a dir,

$$\sum_{n\geq 1} b_n \sin\frac{\pi nt}{L}, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x(t)\sin\frac{\pi nt}{L}dt.$$

Com que $L = 3\pi/2$, tenim

$$b_n = \frac{4}{3\pi}\int_0^{3\pi/2}\cos\frac{2t}{3}\sin\frac{2nt}{3}dt =$$

$$= \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi/2}\left(\sin\frac{2(n+1)t}{3} + \sin\frac{2(n-1)t}{3}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\frac{1+(-1)^n}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{n-1}) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{4k}{4k^2-1}, & n = 2k; \\ 0, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Per tant,

$$\frac{8}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{k}{4k^2-1}\sin\frac{4kt}{3}.$$

Per a $t = 0$ la sèrie val zero, mentre que $x(0) = 1$. Això és perquè la sèrie aproxima l'extensió *imparell* a $[-3\pi/2, 3\pi/2)$ de la restricció de $x(t)$ a $[0, 3\pi/2)$, que té una discontinuïtat de salt a l'origen (el límit per l'esquerra a l'origen val -1).

(c) El valor de c que minimitza la integral I és el coeficient de Fourier $c = \langle x(t), \sin\frac{4}{3}t\rangle$ que, d'acord amb l'apartat anterior, és $c = 8/3\pi$. El valor de la integral és llavors

$$I = \|x(t) - \frac{8}{3\pi}\sin\frac{4}{3}t\|^2 = \|x(t)\|^2 - |\frac{8}{3\pi}|^2\|\sin\frac{4}{3}t\|^2,$$

on,

$$\|x(t)\|^2 = \int_0^{3\pi/2}\cos^2\frac{2t}{3}dt = \int_0^{3\pi/2}\frac{1+\cos\frac{4t}{3}}{2}dt = \frac{3\pi}{4},$$

$$\|\sin\frac{4}{3}t\|^2 = \int_0^{3\pi/2} \sin^2\frac{4t}{3}dt = \int_0^{3\pi/2} \frac{1-\cos\frac{8t}{3}}{2}dt = \frac{3\pi}{4}.$$

De manera que

$$I = \frac{3\pi}{4}(1 - \frac{64}{9\pi^2}).$$

□

2. (a) *Determineu la sèrie de Fourier en sinus a l'interval* $[0,1]$ *de*

$$x(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1/2 \\ -t+1 & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Determineu els punts on la sèrie convergeix a $1/4$.

(b) *Sigui* $\hat{x}(t)$ *l'extensió imparell i periòdica (de periode 2) de* $x(t)$ *a tot* $\mathbb{R}$.

Determineu la sèrie de Fourier trigonomètrica de les funcions $z(t) = \hat{x}(t-1/2)$, $u(t) = \int_0^t z(s)ds$ *i de* $v(t) = z'(t)$ *(definint* $v(-1) = v(0) = v(1) = 0$*).*

És cert que la derivada terme a terme de la sèrie de $v(t)$ *coincideix amb* $v'(t)$ *en els punts on* v *és derivable?*

Resolució:

(a) La successió $\{\sin k\pi t, k = 1, 2, \ldots\}$ és ortogonal i completa a l'interval $[0,1]$. La sèrie de Fourier de $x(t)$ respecte d'aquesta base és

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi t),$$

on els coeficients b_k es calculen com

$$b_k = 2\int_0^1 x(t)\sin(k\pi t)dt =$$

$$= 2\left(\int_0^{1/2} t\sin(k\pi t)dt + \int_{1/2}^1 (1-t)\sin(k\pi t)dt\right).$$

Fent el canvi $u = 1-t$ a la segona integral, s'obté

$$\int_{1/2}^1 (1-t)\sin(k\pi t)dt = (-1)^{k+1}\int_0^{1/2} u\sin(k\pi u)du,$$

d'on, per a k parell, $b_k = 0$.

Si $k = 2r+1, r \geq 0$, integrant per parts,

$$b_{2r+1} = 4 \int_0^{1/2} t \sin((2r+1)\pi t) dt =$$

$$= \frac{4}{(2r+1)^2\pi^2} \sin((2r+1)\pi/2) = \frac{4(-1)^r}{(2r+1)^2\pi^2}.$$

d'on la sèrie de Fourier és

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^2} \sin((2r+1)\pi t) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left(\sin \pi t - \frac{1}{9} \sin(3\pi t) + \frac{1}{25} \sin(5\pi t) - \dots \right),$$

Com que $x(t)$ és contínua, $x(0) = x(1)$ i x és derivable llevat del punt $t = 1/2$, la sèrie és puntualment convergent a tots els punts del seu domini. En particular, convergeix a $1/4$ en els punts on $x(t) = 1/4$, és a dir, $t = 1/4, 3/4$.

(b) De $\sin((2r+1)\pi(t-1/2)) = (-1)^{r+1} \cos(2r+1)\pi t)$, tenim

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t-1/2) &= \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r+1} \sin((2r+1)\pi(t-1/2)) = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r+1} b_{2r+1} \cos((2r+1)\pi t) = \\
&= -\frac{4}{\pi^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^2} \cos((2r+1)\pi t) = \\
&= -\frac{4}{\pi^2} \left(\cos(\pi t) + \frac{1}{9} \cos(3\pi t) + \frac{1}{25} \cos(5\pi t) + \dots \right).
\end{aligned}$$

En particular, per a $t = 1$ s'obté $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^2} = 4/\pi^2$.

La funció $z(t)$ és contínua en $\mathbb{R}$, de manera que la sèrie anterior es pot integrar terme a terme i convergeix a una primitiva de $z(t)$, és a dir,

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t z(s)ds = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^2}\int_0^t \cos((2r+1)\pi s)ds = \\ &= -\frac{4}{\pi^3}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^3}\sin((2r+1)\pi t) = \\ &= -\frac{4}{\pi^3}\left(\sin \pi t + \frac{1}{27}\sin(3\pi t) + \frac{1}{125}\sin(5\pi t) + \dots\right). \end{aligned}$$

D'altra banda, la funció $z(t)$ és derivable en $\mathbb{R}$ llevat dels punts $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, i la seva derivada és, fora d'aquests punts $v(t) = (-1)^{\lfloor t \rfloor}$, que és contínua i derivable a trossos. Així doncs, la sèrie de l'apartat (2) es pot derivar terme a terme i convergeix a la derivada $z(t)$, és a dir,

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{4}{\pi^2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)}\sin((2r+1)\pi t) = \\ &= \frac{4}{\pi^2}\left(\sin(\pi t) + \frac{1}{3}\sin(3\pi t) + \frac{1}{5}\sin(5\pi t) + \dots\right). \end{aligned}$$

Notem que $v'(t) = 0$ a tots els punts on és derivable, mentre que la derivada terme a terme de la sèrie anterior no és idènticament nul·la. Per tant, la derivada terme a terme no coincideix amb la derivada de $v(t)$ (noteu que $v(t)$ tés discontinuïtats de salt).

$\square$

3. *Considereu la funció*

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & 1 < t \le 2 \end{cases}$$

(a) *Calculeu la sèrie de Fourier en cosinus de $f(t)$ a $[0, 2]$. Quins són els seus tres primers termes?*

(b) *Fent servir el valor de la sèrie en $t = 1$, doneu el valor de la sèrie numèrica*

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r-1)^2}.$$

Resolució:

(a) Clarament $f(t) \in L^2[0,2]$, ja que $\int_0^2 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 (2-t)^2 dt = 7/3 < \infty$. Sabem per tant que la sèrie de Fourier de $f(t)$ convergirá en mitjana quadràtica cap a $f(t)$ en l'interval $[0,2]$.

Com que la successió $\{\cos(n\pi/l)t, n \geq 0\}$ és ortogonal i completa a l'interval $[0,l]$, la sèrie de Fourier de $f(t)$ en l'interval $[0,2]$ respecte d'aquesta base té la forma,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi/2)t.$$

Per obtenir els coeficients a_n considerem l'extensió parell $\tilde{f}(t)$ de $f(t)$ a l'interval $[-2,2]$. Així, tenim

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \tilde{f}(t)\cos(n\pi/2)tdt = \int_0^2 f(t)\cos(n\pi/2)tdt.$$

En particular,

$$\frac{a_0}{2} = \int_0^1 (2-t)dt = \frac{3}{4}.$$

Per a $n > 0$

$$a_n = \int_0^1 (2-t)\cos(n\pi/2)tdt = \frac{4}{n\pi}\sin(n\pi/2) - \int_0^1 t\cos(n\pi/2)tdt.$$

Integrant per parts,

$$\int_0^1 t\cos(n\pi/2)tdt = \frac{2}{n\pi}t\sin(n\pi/2)t)|_0^1 + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos(n\pi/2)t)|_0^1,$$

que, substituït a l'expressió anterior, dóna

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left(\sin(n\pi/2) + \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi/2))\right)$$

Així doncs, la sèrie

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(n\pi)^2} + \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi/2) - \frac{4}{(n\pi)^2}\cos(n\pi/2)\right)\cos(nt\pi/2)$$

convergeix en mitjana quadràtica cap a $f(t)$ en l'interval $[0,2]$.

Els tres primers termes de la sèrie són:

$$\frac{3}{4} + \frac{2(\pi+2)}{\pi^2}\cos(t\pi/2) + \frac{2}{\pi^2}\cos(t\pi) + \cdots$$

(b) En $t = 1$, la funció $f(t)$ té una discontinuïtat de salt i sabem per tant que la sèrie en aquest punt convergeix al valor mig del salt, $1/2$.

La sèrie en $t = 1$ només té termes parells amb $n = 2r$ i es pot escriure com

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} (1 - \cos(r\pi)) \cos(r\pi) =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} (\cos(r\pi) - 1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} ((-1)^r - 1) =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2s-1)^2}.$$

D'aquí doncs,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2s-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

□

4. *Considereu la funció $f(x) = cosx$.*

   (a) Calculeu la sèrie de Fourier en sinus de $f(x)$ a l'interval $[0, \pi]$.

   (b) A partir de la sèrie obtinguda en l'apartat anterior obteniu la sèrie de Fourier en cosinus d'una primitiva de $f(x)$. Justifiqueu la resposta.

Resolució:

(a) Sabem que la successió $\{\sin(kt), k \geq 1\}$ és ortogonal i completa a l'interval $[0, \pi]$ i per tant les sèries de Fourier respecte d'aquesta base són de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt).$$

Per obtenir els coeficients b_k considerem l'extensió imparell $\tilde{f}(x)$ de $f(x) = \cos x$ a l'interval $[-\pi, \pi]$. Així, tenim

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) \sin(kx) dx.$$

Fent servir la igualtat

$$\cos x \sin(kx) = \frac{1}{2}(\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)),$$

Per $k = 1$ tenim

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2x) = 0$$

i per $k > 1$,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x))dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k+1}(1-\cos(k+1)\pi) + \frac{1}{k-1}(1-\cos(k-1)\pi)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(1-\cos(k+1)\pi)\left(\frac{2k}{k^2-1}\right).$$

Així, per a k imparell tenim que $b_k = 0$ i, per a $k = 2r$ parell,

$$b_k = \frac{4k}{\pi(k^2-1)} = \frac{8r}{\pi(4r^2-1)}.$$

de manera que la sèrie de Fourier és

$$\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{8r}{(4r^2-1)}\sin(2rx). \tag{4.1}$$

(b) Com que l'extensió imparell $\tilde{f}(x)$ de la funció $f(x) = \cos x$ a l'interval $[-\pi, \pi]$ és una funció contínua a trossos, la integral de la sèrie (4.1) convergeix a la integral d'aquesta extensió. En altres paraules, la sèrie

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{x}(\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{8r}{(4r^2-1)}\sin(2rx))dx \\ = &\sum_{r=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{x}\frac{1}{\pi}\frac{8r}{4r^2-1}\sin(2rx)dx \\ = &\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{4}{4r^2-1}(1-\cos(2rx)) \end{aligned}$$

convergeix a una primitiva de $\tilde{f}(x)$, que en l'interval $[0, \pi]$ coincideix amb $\sin x$.

$\square$

5. *Considereu la funció*

$$f(t) = \begin{cases} 2-t & 0 \le t \le 1 \\ t-2 & 1 < t \le 2 \end{cases}$$

(a) *Calculeu la sèrie trigonomètrica parell de Fourier de $f(t)$ a $[0,2]$.*

(b) *Fent servir l'apartat anterior, determineu el valor de la sèrie numèrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(c) *Quin és el desenvolupament en sèrie de Fourier de $f(4t)$ a $(-\pi/2, \pi/2)$?*

(d) *Quina és la millor aproximació en mitjana quadràtica de $f(t)$ a $[-\pi, \pi]$ fent servir les funcions $\{1, \cos t, \cos 2t, \sin t, \sin 2t\}$?*

Resolució:

(a) La sèrie trigonomètrica de Fourier a $[-\pi, \pi]$ de $x(t)$ és

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

on

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(kt) dt, \; k \ge 0 \;\; b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(kt) dt, \; k \ge 1.$$

Com que, $f(t)$ és una funció imparell, tenim $a_k = 0, \; k \ge 0$. D'altra banda, $f(t)\sin(kt)$ és una funció parell, de manera que

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} t \sin(kt) dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t) \sin(kt) dt \right).$$

Fent el canvi $u = \pi - t$ a la segona integral, s'obté

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t) \sin(kt) dt = (-1)^{k+1} \int_0^{\pi/2} t \sin(kt) dt,$$

de manera que $b_k = 0$ per a k parell. Per a $k = 2r+1, r \geq 0$, integrant per parts,

$$b_{2r+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\sin((2r+1)t)dt =$$

$$= \frac{4}{(2r+1)^2\pi}\sin(2r+1)(\pi/2) = \frac{4(-1)^r}{(2r+1)^2\pi}.$$

La sèrie és doncs

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{4(-1)^r}{(2r+1)^2\pi}\sin(2r+1)t =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin t - \frac{1}{9}\sin(3t) + \frac{1}{25}\sin 5t - \cdots\right).$$

(b) Com que $f(t)$ és una funció contínua, la seva sèrie de Fourier convergeix puntualment a $f(t)$ per a cada t. En particular, per a $t = \pi/2$, donat que $\sin(2k+1)\pi/2 = (-1)^k$,

$$\frac{\pi}{2} = f(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}\sin(2k+1)t = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

d'on

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(c) La sèrie trigonomètrica de Fourier d'una funció $g(t) \in L^2(-\pi/2, \pi/2)$ a $(-\pi/2, \pi/2)$ és

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(2kt) + b_k\sin(2kt)).$$

Del primer apartat, si $g(t) = f(4t)$,

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{4(-1)^r}{(2r+1)^2\pi}\sin(2r+1)4t = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{4(-1)^r}{(2r+1)^2\pi}\sin 2(4r+2)t,$$

de manera que $a_k = 0, k \geq 0$ i $b_{4r+2} = \frac{4(-1)^r}{(2r+1)^2\pi}$ i $b_k = 0$ si k no és de la forma $k = 4r+2$ amb r enter.

(d) La família $\{1, \cos t, \cos 2t, \sin t, \sin 2t\}$ és ortogonal a $[-\pi/2, \pi/2]$ (forma part de la base trigonomètrica en aquest interval). La millor aproximació en mitjana quadràtica té doncs per coeficients els de Fourier, que ja s'han calculat al primer apartat. Així el resultat és $(4/\pi)\sin t$.

$\square$

6. *Considereu la funció*

$$f(t) = \begin{cases} t+3, & t \in [-3,\ 0) \\ -t, & t \in [0,\ 3] \end{cases}$$

(a) *Trobeu la sèrie de Fourier complexa de $f(t)$ a l'interval $[-3, 3]$. Doneu el valor al que convergeix aquesta sèrie en $t = 0$ i en $t = \pm 3$.*

(b) *Trobeu la sèrie de Fourier en cosinus de $f(t)$ a l'interval $[0, 3]$. Estudieu la seva convergència, puntual i uniforme.*

(c) *Donada una funció qualsevol $x(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ tal que $x'(t), x''(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ trobeu la transformada de Fourier de la funció següent,*

$$g(t) = e^{it\pi/2} x'(t) x''(t).$$

Resolució:

(a) La sèrie de Fourier complexa de $f(t)$ a l'interval $[-3, 3]$ és

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi nt/3}, \qquad \text{amb} \quad c_n = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} f(t) e^{-i\pi nt/3} dt,$$

on,

$$c_n = \frac{1}{6}\left(\int_{-3}^{0}(t+3)e^{-i\pi nt/3}dt - \int_{0}^{3} te^{-i\pi nt/3}dt\right).$$

Per a $n = 0$ tenim

$$c_0 = \frac{1}{6}\left(\int_{-3}^{0}(t+3)dt - \int_{0}^{3} tdt\right) = 0.$$

Per a $n \neq 0$, integrant per parts,

$$\int te^{-i\pi nt/3} = \left(\frac{3it}{\pi n} + \frac{9}{(\pi n)^2}\right) e^{-i\pi nt/3},$$

de manera que

$$\int_{-3}^{0} te^{-i\pi nt/3}dt - \int_{0}^{3} te^{-i\pi nt/3}dt =$$

$$= \frac{18}{(\pi n)^2}(1-\cos(\pi n)) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{36}{(\pi(2k+1))^2}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

D'altra banda,

$$3\int_{-3}^{0} e^{-i\pi nt/3}dt = \frac{9i}{\pi n}(1-e^{-i\pi n}) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{18i}{\pi(2k+1)}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Per tant la sèrie que es demana és,

$$\frac{3}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{i}{2k+1} + \frac{2}{\pi(2k+1)^2}\right)e^{i\pi(2k+1)t/3}$$

Per a $t = 0$, la sèrie val $3/2$ mentre que $f(0) = 0$. Això és degut la discontinuïtat de salt que té $f(t)$ a l'origen (el límit per l'esquerra a l'origen val 3). De forma anàloga, la sèrie a $t = 3$ val $-3/2$ ja que l'extensió periòdica de f té límit -3 per l'esquerra i 0 per la dreta.

(b) La sèrie de Fourier en cosinus de $f(t)$ a $[0,3]$ és la sèrie de Fourier trigonomètrica de la seva extensió *parell* a $[-3,3]$ restringida a $[0,3]$, és a dir,

$$\sum_{n\geq 1} a_n \cos\frac{\pi nt}{3}, \qquad a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\cos\frac{\pi nt}{3}dt$$

on,

$$a_0 = \frac{-2}{3}\int_0^3 tdt = -3,$$

i, per a $n > 0$,

$$a_n = \frac{-2}{3}\int_0^3 t\cos\frac{\pi nt}{3}dt = \frac{-2}{3}\left(\frac{3t}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{3}\bigg|_0^3 - \frac{3}{n\pi}\int_0^3 \sin\frac{n\pi t}{3}dt\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^3 \sin\frac{n\pi t}{3}dt = -\frac{6}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ parell;} \\ \frac{12}{\pi^2(2k+1)^2}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Així tenim la sèrie

$$-\frac{3}{2}+\frac{12}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{3}.$$

(c) Si $X(\omega)$ és la transformada de $x(t)$, aleshores

$$\begin{aligned} x'(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega X(\omega) \\ x''(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} -\omega^2 X(\omega). \end{aligned}$$

Així doncs,

$$x'(t)x''(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = -\frac{1}{2\pi}((i\omega X(\omega)) * (\omega^2 X(\omega)).$$

D'altra banda, la transformada de $e^{it\pi/2} = e^{-it(-\pi/2)}$ és $2\pi\delta(\omega + \pi/2)$. Per tant,

$$e^{it\pi/2}x'(t)x''(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\omega+\pi/2) * Y(\omega) = Y(\omega+\pi/2).$$

□

7. *Considereu la funció*

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t|\leq 1 \\ 0 & \textit{altrament} \end{cases}$$

(a) Calculeu la transformada de Fourier $Y(\omega)$ de

$$y(t) = \begin{cases} \Lambda(t-1) & t\geq 0 \\ -\Lambda(t+1) & t\leq 0 \end{cases}$$

(b) Calculeu $\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2 df$.

(c) Representeu gràficament la funció $z(t) = y(t)*(\delta(t)+\delta(t-4)+\delta(t+4))$ i calculeu la seva transformada de Fourier $Z(\omega)$. Determineu els zeros de $Z(\omega)$.

Resolució:

Tenim $\Lambda(t) = (\Pi * \Pi)(t)$ que té per transformada de Fourier

$$\hat{\Lambda}(\omega) = \mathcal{F}(\Lambda)(\omega) = (\mathcal{F}(\Pi))^2(\omega) = \left(\frac{sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2.$$

(a) La funció $y(t)$ es pot escriure com $y(t) = \Lambda(t-1) - \Lambda(t+1)$. Fent servir les propietats de la transformada de Fourier,

$$Y(\omega) = e^{-j\omega}\mathcal{F}(\Lambda)(\omega) - e^{j\omega}\mathcal{F}(\Lambda)(\omega) =$$
$$= -\left(\frac{sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2 2j\sin(\omega).$$

(b) D'acord amb la identitat de Parseval, i fent ús de les simetries de $y(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |y(\omega)|^2 d\omega = 4\int_0^1 t^2 dt = 4/3.$$

(c) La funció $z(t)$ es pot escriure com

$$z(t) = y(t)*\delta(t)+y(t)*\delta(t-4)+y(t)*\delta(t+4) = y(t)+y(t+4)+y(t-4).$$

La seva transformada de Fourier és

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= Y(\omega) + e^{4j\omega}Y(\omega) + e^{-4j\omega}Y(\omega) = Y(\omega)(1 + 2\cos(4\omega)) \\ &= -\left(\frac{sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2 2j\sin(\omega)(1 + 2\cos(4\omega)). \end{aligned}$$

La transformada $Z(\omega)$ s'anul.la als zeros de $\sin(\omega)$ ($\omega = k \in \mathbb{Z}$) i quan $\cos(4\omega) = -1/2$, és a dir, per a $\omega = k{+}2k{+}1)\pi\pm, \pi/4\ k \in \mathbb{Z}$.

□

8. (a) *Calculeu la transformada de Fourier de* $f(t) = e^{-2|t|}$.

   (b) *Calculeu la transformada de Fourier de* $g(t) = (\frac{2}{1+t^2})^2$.

   (c) *Calculeu la transformada de* $h(t) = e^{-|t|}cos2t$.

Resolució:

(a) Aplicant la definició,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}e^{-i\omega t}dt + \int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-i\omega t}dt \\ &= \frac{e^{t(2-i\omega)}}{2-i\omega}|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-t(2+i\omega)}}{2+i\omega}|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2-i\omega} + \frac{1}{2+i\omega} = \frac{4}{4+\omega^2}. \end{aligned}$$

(b) Del primer apartat i fent servir la linealitat de la transformada de Fourier, tenim que

$$e^{-|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Pel principi de dualitat,

$$\frac{2}{1+t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi e^{-|\omega|}.$$

Ara, pel teorema de convolució,

$$\left(\frac{2}{1+t^2}\right)^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^2(e^{-|\omega|} \star e^{-|\omega|}).$$

Si $\omega > 0$,

$$\begin{aligned}
e^{-|\omega|} \star e^{-|\omega|} &= \int_{-\infty}^{0} e^u e^{-(\omega-u)}du + \int_0^{\omega} e^{-u}e^{-(\omega-u)}du + \int_{\omega}^{\infty} e^{-u}e^{\omega-u}du \\
&= e^{-\omega}\int_{-\infty}^{0} e^{2u}du + e^{-\omega}\int_0^{\omega} du + e^{\omega}\int_{\omega}^{\infty} e^{-2u}du \\
&= e^{-\omega}(1+\omega).
\end{aligned}$$

Un càlcul similar per a $\omega < 0$ dóna

$$\begin{aligned}
e^{-|\omega|} \star e^{-|\omega|} &= \int_{-\infty}^{\omega} e^u e^{-(\omega-u)}du + \int_{\omega}^{0} e^{u}e^{\omega-u}du + \int_{0}^{\infty} e^{-u}e^{\omega-u}du \\
&= e^{-\omega}\int_{-\infty}^{\omega} e^{2u}du + e^{\omega}\int_{\omega}^{0} du + e^{\omega}\int_{0}^{\infty} e^{-2u}du \\
&= e^{\omega}(1+\omega).
\end{aligned}$$

d'on

$$\left(\frac{2}{1+t^2}\right)^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^2 e^{-|\omega|}(1+\omega).$$

(c) Pel teorema de convolució, i fent servir la transformada de $\cos 2t$ en termes de la funció δ,

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right) \star \pi(\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)) \\
&= \frac{1}{1+(\omega-2)^2} + \frac{1}{1+(\omega+2)^2}.
\end{aligned}$$

□

9. *Sigui* $x(t) = \cos(2\pi t/3) + 2\sin(\pi t/3)$.

   (a) *Calculeu la transformada discreta de Fourier* $(X(n))_{0\leq n<6}$ *de la seqüència* $\{x_k\}_{0\leq k<6}$ *que s'obté mostrejant* $x(t)$ *en els punts* $t_k = k$, *amb* $0 \leq k < 6$, *a l'interval* $[0,6)$.

   (b) *Calculeu la sèrie de Fourier exponencial de* $x(t)$ *a l'interval* $[0,6)$, $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/6}$.
   Comproveu que per $0 \leq n < N$ *es compleix la següent relació*

$$X(n) = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN}.$$

Resolució:

(a) Escrivim

$$x_1(t) = \cos(2\pi t/3), \quad x_2(t) = \sin(\pi t/3).$$

Les seqüències que s'obtenen al mostrejar $x(t)$ en els instants $t_k = k$, $0 \leq k < N$, són

$$(x_1(k))_{0\leq k<6} = (1, -1/2, -1/2, 1, -1/2, -1/2)$$
$$(x_2(k))_{0\leq k<6} = (0, \sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2, 0, -\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2)$$

Per $1 \leq i \leq 2$ la transformada de $(x_i(k))_{0\leq k<6}$ és

$$X_i(n) = \sum_{k=0}^{5} x_i(k) e^{-2\pi ink/6}, \; 0 \leq n \leq 5.$$

Com que $x(t)$ és real i N és parell, per simetria es compleix que

$$X(N/2+n) = \overline{X(N/2-n)}, \quad 0 \leq n < N/2$$

així només cal calcular els quatre primers valors de $X_1(n)$ i $X_2(n)$. Posant $r = e^{-\pi i/3}$, tenim

$$X_i(n) = \sum_{k=0}^{5} x_i(k) r^{nk}, \; 0 \leq n \leq 3.$$

Per tant la matriu de la transformació és,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 \\ 1 & r^2 & r^4 & 1 & r^2 & r^4 \\ 1 & r^3 & 1 & r^3 & 1 & r^3 \end{pmatrix}.$$

Així,

$$\begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_1(1) \\ X_1(2) \\ X_1(3) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = (0,0,3,0).$$

D'on $(X_1(n))_{0\leq n<6} = (0,0,3,0,3,0)$.
De forma similar tenim,

$$\begin{pmatrix} X_2(0) \\ X_2(1) \\ X_2(2) \\ X_2(3) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}(0,-i2\sqrt{3},0,0).$$

D'on $(X_2(n))_{0\leq n<6} = (0,-3i,0,0,0,3i)$.

(b) La sèrie de Fourier de $x(t)$ a $[0,6)$ és,

$$x(t) = \frac{e^{2\pi it/3} + e^{-2\pi t/3}}{2} + \frac{e^{\pi it/3} - e^{-\pi it/3}}{i} =$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2(2\pi t/6)} + ie^{-2\pi t/6} - ie^{2\pi t/6} + \frac{1}{2}e^{2(2\pi t/6)}.$$

D'on, $c_{-2} = 1/2$, $c_{-1} = i$, $c_0 = 0$, $c_1 = -i$, $c_2 = 1/2$, i $c_n = 0$ per $n > 2$ i $n < -2$.
De forma directa veiem que per $0 \leq n \leq 2$, $X(n) = 6c_n$ i per $3 \leq n \leq 5$, $X(n) = 6c_{n-6}$.
Hem comprovat per tant que per tot $0 \leq n < N$ es compleix

$$X(n) = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN},$$

tal com volíem. □

Per tant el valor de la seqüència transformada és,

$$(X(n))_{0\leq n<6} = (0, -6i, 3, 0, 3, 6i).$$

□

10. *Sigui* $u(n) = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1)$. *Per a cada nombre natural* m, *indiquem per* $v_m = u^{*m}$ *el producte de convolució de la seqüència* u *per ella mateixa* m *vegades.*

    Determineu la transformada discreta de Fourier de v_m.

Resolució:

La transformada discreta de Fourier de $u(n)$ és

$$U(k) = \sum_{n=0}^{7} u(n)e^{-i(\pi/4)kn}.$$

Si denotem per $r = e^{-i(\pi/4)}$, tenim

$$U(k) = 1 + r^k - r^{2k} - r^{3k} + r^{4k} + r^{5k} - r^{6k} - r^{7k} =$$

$$= 1 + r^k - r^{2k} - r^{3k} + (-1)^k + r^{3k} - r^{2k} - r^k =$$

$$= 1 + (-1)^k - 2r^{2k}.$$

Com que $r^2 = -i$ per $0 \leq k < 8$ tenim,

$$U(k) = (0, 2i, 4, -2i, 0, 2i, 4, -2i).$$

Fent servir el teorema de convolució, tenim $V_m(k) = (U(k))^m$, d'on

$$V_m = (0, (2i)^m, 4^m, (-2i)^m, 0, (2i)^m, 4^m, (-2i)^m).$$

□

11. *Considerem la seqüència* $v = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1)$. *Determineu la transformada discreta de Fourier de* v *i de* $v * v$.

Resolució:

La transformada discreta de Fourier de $v = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1)$ és

$$\begin{aligned} V(k) &= \sum_{n=0}^{7} v(n) e^{-j(\pi/4)kn} \\ &= e^{-j(\pi/4)k} - e^{-j(\pi/4)3k} + e^{-j(\pi/4)5k} - e^{-j(\pi/4)7k} \\ &= e^{-j(\pi/4)k} - e^{j(\pi/4)k} + e^{j(\pi/4)k} - e^{-j(\pi/4)k} \\ &= 4j \sin((\pi/4)k), \end{aligned}$$

és a dir,

$$V = (0, 4j, 0, -4j, 0, 4j, 0, -4j).$$

Fent servir el teorema de convolució, tenim que la transformada discreta de Fourier de $v * v$ és $V(k) = (U(k))^r$, d'on

$$V = (0, -16, 0, -16, 0, -16, 0, -16).$$

$\square$