Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA **DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS**	**Senyals i Sistemes II** Data d'examen: 16-5-2008

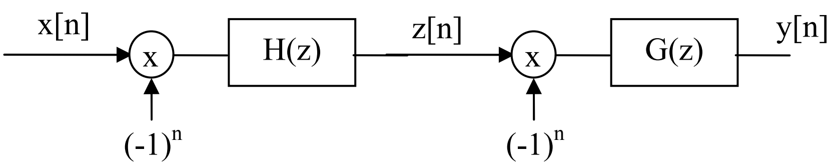
Professors: G. Haro, J. Hernando, J.B. Mariño, A. Oliveras, J. Ruiz, J. Salavedra, P. Salembier.
Codi de la prova: **230 11485 64 0 00**

Temps: 1 h 45 min

- Responeu a cada problema en <u>fulls separats</u>.
- El vostre nom ha de figurar en tots els fulls que utilitzeu, en format: COGNOMS, NOM.
- Justifiqueu tots els resultats. Els resultats sense justificació no seran valorats en la correcció.
- No podeu utilitzar llibres, apunts, taules, formularis, calculadores o telèfon mòbil.

Problema 1: **5 punts**

Considere el sistema de la figura:

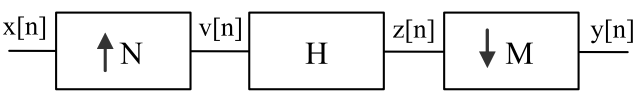


donde la respuesta impulsional del sistema H(z) es $h[n]=\delta[n]-3/4\ \delta[n-1]+1/8\ \delta[n-2]$ y X(z), Z(z) e Y(z) corresponden a las transformadas Z de las señales x[n], z[n] e y[n] respectivamente. Responda las siguientes preguntas:

a) Calcular la función de transferencia del sistema H(z).
b) Dibujar el diagrama de polos y ceros de H(z) indicando su ROC.
c) Expresar Z(z) en función de X(z) y la función de transferencia del sistema H(z).
d) Si $x[n] = (-1/2)^n u[n]$ encontrar la expresión de z[n].
e) Expresar Y(z) en función de X(z), H(z) y G(z).
f) Encontrar la expresión de G(z) en función de H(z) para que y[n]=x[n].
g) Dibujar el diagrama de polos y ceros de G(z) para el caso del apartado anterior.
h) Bajo la misma condición del apartado f), justificar qué condición han de satisfacer los ceros y polos del sistema H(z) para que el sistema G(z) pueda ser causal y estable.

Problema 2: **3 punts**

Una señal paso banda entre 2 y 3 kHz ha sido muestreada a 8kHz, resultando en la secuencia x[n]. Se desea generar una versión y[n] de dicha señal muestreada a 12kHz. Para ello se hace uso del esquema de la figura, donde el filtro H es un filtro paso bajo. Se pide:



a) Las relaciones N y M de interpolación y diezmado en el esquema.

b) Representar la transformada de Fourier de las secuencias x[n], v[n], z[n] e y[n].
c) Los límites ω_p y ω_a de la banda de paso y banda atenuada del filtro, respectivamente.
d) Suponiendo que el filtro es un filtro FIR causal y se diseña mediante la aplicación de la ventana rectangular a la respuesta impulsional de un filtro ideal, obtener la longitud L impar mínima para que el filtro satisfaga las especificaciones obtenidas en c).
e) Obtener la respuesta impulsional del filtro y señalar los ordinales de las muestras nulas. ¿Cuál es la longitud práctica de la respuesta impulsional?

Problema 3: 2 punts

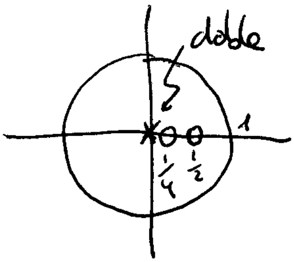
Considere el sistema cuya respuesta impulsional es un pulso causal de M muestras: $p_M[n]$. Se pide:

a) Obtenga la salida y[n] para la entrada $p_L[n]$ (pulso de L muestras) si L<M y tanto L como M son pares.
b) Qué desplazamiento debemos aplicar a y[n] para que la transformada de Fourier de la secuencia resultante sea real y par.
c) Sea $Y(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de y[n]. Calcule $DFT^{-1}_N\{Y(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}\}$ con N=M.
d) Calcule el valor mínimo de M para obtener una salida nula cuando la entrada es $\cos(\pi n/5)$.

PROBLEMA 1

a) $H(z) = 1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)$

b)



ROC: $|z| > 0$

c) $Z(z) = H(z) \cdot TZ\{x[n] \cdot (-1)^n\} = H(z) \cdot X(-z)$

d) $x[n] = (-1/2)^n u[n] \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$

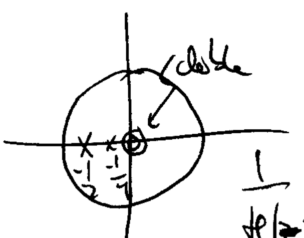
$$Z(z) = H(z) \cdot X(-z) = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}} = 1 - \frac{1}{4}z^{-1}$$

$$z[n] = TZ^{-1}\{Z(z)\} = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]$$

e) $Y(z) = G(z) \cdot Z(-z) = G(z) \cdot H(-z) \cdot X(z)$

f) $G(z) = \frac{1}{H(-z)}$

g)



$\frac{1}{H(-z)}$

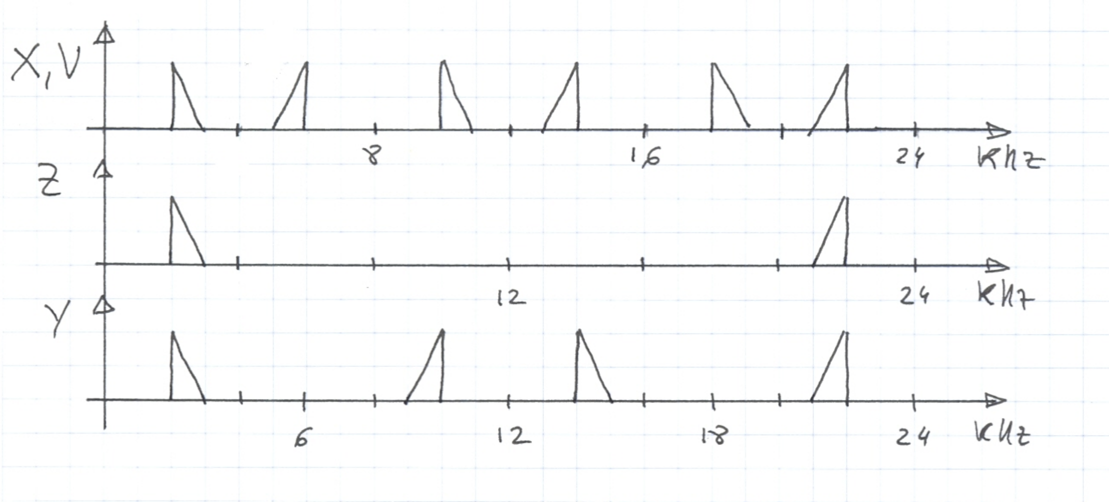
ROC: $|z| > \frac{1}{2}$

h) Ceros de $H(z)$ dentro del círculo de radio unidad.

PROBLEMA 2:

a) En el proceso de cambio de frecuencia de muestreo la relación entre las mismas viene dada por $F_{m2} / F_{m1} = N/M$. En nuestro caso, esta relación es 12 / 8 = 3 /2 = N / M, de donde puede establecerse N = 3 y M = 2.

b) Representadas en función de la frecuencia analógica, las transformadas son:



c) El filtro interpolador es más restrictivo que el diezmador, por tanto las especificaciones han de corresponder al primero. En términos de frecuencias analógicas la banda de paso del filtro paso bajo interpolador ha de extenderse hasta 3 kHz (la frecuencia más alta de la señal) y la banda atenuada ha de comenzar en 5 kHz (la frecuencia más baja del primer alias). En conclusión:

$$\omega_p = 2\pi\ 3/24 = 2\pi\ 1/8$$
$$\omega_a = 2\pi\ 5/24 = 2\pi\ 5/24$$

d) La anchura de la banda de transición del filtro es igual a la anchura del lóbulo principal de la transformada de Fourier de la ventana. En nuestro caso:

$$\omega_a - \omega_p = 2\pi\ 1/12 = 2\pi\ 2/L$$

por lo que L = 25 (ya que ha de ser impar).

e) El filtro ideal de partida tiene como frecuencia de corte $\omega_c = 2\pi\ 1/2N = 2\pi\ 1/6$ y una ganancia N = 3, siendo su respuesta impulsional

$$h_i[n] = N\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}n}{\frac{\pi}{3}n}$$

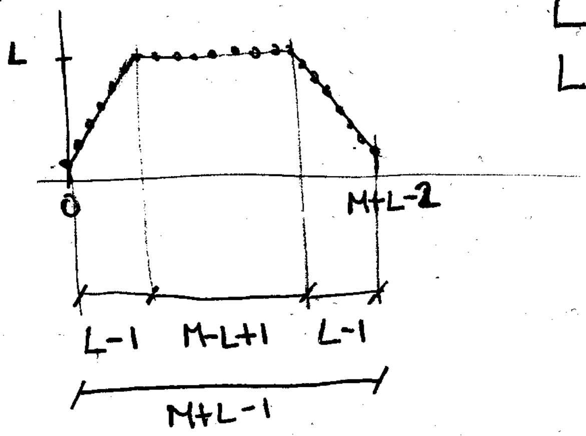
Así la respuesta impulsional del filtro interpolador causal es

$$h[n] = N\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c(n-\frac{L-1}{2})}{\omega_c(n-\frac{L-1}{2})}p_L[n] = \frac{\sin\frac{\pi}{3}(n-12)}{\frac{\pi}{3}(n-12)}p_{25}[n]$$

que se anula para n = 3 k + 12, siendo k un entero. En particular se anulan las muestras n = 0 y n = 24. De este modo, la longitud práctica de la respuesta impulsional del filtro es L = 23.

Problema 3

a) $y[n] = p_M[n] * p_L[n]$



$L < M$

L y M pares

$$y[n] = \begin{cases} n+1 & \text{si } 0 \leq n \leq L-2 \\ L & \text{si } L-1 \leq n \leq M-1 \\ M+L-1-n & \text{si } M \leq n \leq M+L-2 \end{cases}$$

b) Por las propiedades de simetría de la transformada de Fourier sabemos que la transformada de Fourier de una secuencia real y par también es real y par.

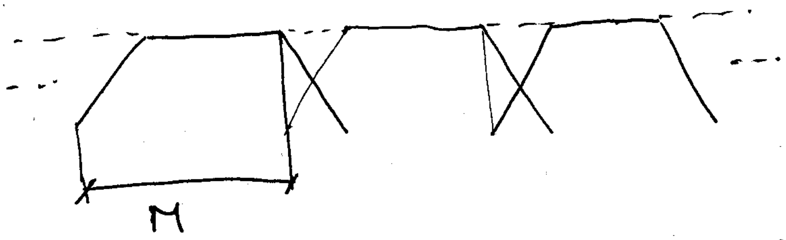
Si centramos $y[n]$ en 0 conseguiremos una secuencia par, para ello la desplazamos $\frac{M+L-2}{2}$ obteniendo así:

$$y'[n] = y\left[n + \frac{M+L}{2} - 1\right]$$

Nota: $y'[n]$ es real porque $y[n]$ es real y el desplazamiento no cambia esta propiedad.

c) $Y(e^{j\omega}) = TF\{y[n]\}$

$$DFT_N^{-1}\left\{ Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{N}} \right\}\Bigg|_{N=M} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[n - rM] = L$$



d) $y[n] = p_M[n] * x[n] \longrightarrow Y(e^{j\omega}) = P_M(e^{j\omega})\, X(e^{j\omega})$

$$P_M(e^{jw}) = e^{-jw\frac{M-1}{2}} \frac{\sin(wM/2)}{\sin(w/2)}$$

$$Y(e^{jw}) = P_M(e^{jw})\, X(e^{jw})$$

Si $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)$ entonces $X(e^{jw})$ solo es diferente de cero en

$$w = \pm \frac{\pi}{5} \quad (+2\pi K \text{ , } K \text{ entero})$$

Para que $Y(e^{jw})$ sea nula con el mínimo valor de M deseamos que el primer cero de $Y(e^{jw})$ coincida con $\pi/5$

$$Y\left(e^{j\frac{\pi}{5}}\right) = 0 \longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{5}\frac{M}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{\cancel{\pi}}{5}\frac{M}{2} = \cancel{\pi} \rightarrow M = 10$$