ETSETB-UPC **Tardor 2002**

COMUNICACIONES II EXAMEN FINAL 17 de enero de 2003

Profesores: M. Cabrera, J. Fernández, E. Monte, G. Vázquez 3 horas

---

Entregue el examen en cuatro partes separadas, siguiendo las indicaciones del enunciado.

EJERCICIO 1

La transmisión de prefijo cíclico consiste en enviar una réplica de la última parte del símbolo (T_{cp} seg.) al principio de cada símbolo y es una técnica utilizada para evitar la ISI entre símbolos consecutivos en tiempo. En este ejercicio se analiza su influencia tanto para CDMA como para OFDM. Se trabajará en ambos casos con las señales equivalentes paso bajo.

Para **CDMA** suponga que la señal a la entrada del receptor es de la forma: $r(t) = s(t) + w(t)$. Se considerará:

- $w(t)$ ruido real gaussiano de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$
- La señal útil para *K* usuarios síncronos es
$$s(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k[n] \varphi_k(t-nT) * h_k(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k[n] \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t-nT-\tau) h_k(\tau) d\tau$$
- $h_k(t)$ representa la respuesta impulsional del canal para el usuario *k*. Su duración temporal es menor que la duración del prefijo cíclico T_{cp} para todos los usuarios.
- La función utilizada para transmitir los símbolos del usuario *k* mediante un código de *L* chips, es:
$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} \sum_{l=-L_{cp}}^{L-1} c_k[l] \Pi\left(\frac{t-\frac{T_c}{2}-T_{cp}-lT_c}{T_c}\right)$. Con $c_k[l] = c_k[l+L]$, $T_{cp} = L_{cp}T_c$, $T = T_{cp} + LT_c$ y $L_{cp} < L$.
- Códigos idealmente ortogonales entre sí: $\sum_{l=0}^{L-1} c_k[l] c_j[l] = L\delta[k-j]$
- Los símbolos de todos los usuarios son binarios, equiprobables y polares: $\alpha_k[n] = \pm \frac{d}{2}$

Se pide:

a) Demuestre mediante el dibujo de un caso particular de $\varphi_k(t)$, que las funciones $\varphi_k(t)$ llevan el prefijo cíclico: L=10 chips, L_c =3 chips y $c_k[l] = \begin{cases} +1, l \text{ par} \\ -1, l \text{ impar} \end{cases}$

b) Demuestre en general que las funciones $\varphi_k(t)$ son ortonormales en (T_{cp}, T). Es decir:
$$\int_{T_{cp}}^{T} \varphi_k(t)\varphi_j^*(t)dt = \delta[k-j]$$

c) Calcule la energía transmitida por bit, en función de la distancia entre símbolos *d* y de los parámetros que considere necesarios.

Suponga que el receptor es multiusuario y consiste en un banco de *K* filtros adaptados de respuesta:
$g_i(t) = \begin{cases} \varphi_i^*(T-t) & 0 \le t \le T - T_{cp} \\ 0 & otros \end{cases}$. A la salida se realiza el muestreo a $t_m = (m+1)T$.

Se pide:

d) Demuestre que la señal a la salida del filtro "*i*" : $y_i(t_m) = \int_{mT+T_{cp}}^{(m+1)T} r(\lambda)\varphi_i^*(\lambda - mT)d\lambda$ puede expresarse como:

$$y_i(t_m) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k[m]\rho_{ki} + \beta_i(t_m) \quad \text{con} \quad \rho_{ki} = \int_0^{T_{cp}} h_k(\tau) \int_{T_{cp}}^{T} \varphi_k(\gamma-\tau)\varphi_i^*(\gamma) d\gamma d\tau \qquad (1)$$

Observe que en CDMA mediante la transmisión del prefijo cíclico se evita la ISI temporal pero no las interferencias entre usuarios.

NOTA: Independiente del resultado obtenido en el apartado anterior, considere válida la expresión (1), tanto para CDMA como para OFDM.

e) Demuestre que las componentes de ruido $\beta_i(t_m)$ entre los diferentes filtros se hallan incorreladas. Para ello calcule la expresión $E\left[\beta_k(t_m)\beta_i{}^*(t_m)\right]; 1 \le k \le K, 1 \le i \le K$.

<u>INICIE ESTA PARTE EN UNA HOJA NUEVA.</u>

Agrupando las salidas de los correladores se obtiene el vector $\underline{\mathbf{y}}(t_m) = \begin{pmatrix} y_1(t_m) \\ : \\ y_K(t_m) \end{pmatrix}$. Agrupando las amplitudes binarias de todos los usuarios se obtiene el vector: $\underline{\mathbf{a}}[m] = \begin{pmatrix} \alpha_1[m] \\ : \\ \alpha_K[m] \end{pmatrix}$. La matriz cuadrada $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$, es la formada por los elementos ρ_{ki} de la expresión (1).

La función de densidad de probabilidad conjunta condicionada $f_{\underline{\mathbf{y}}/\underline{\mathbf{a}}}(\underline{\mathbf{y}}(t_m)/\underline{\mathbf{a}}(m))$ del vector formado por las salidas de los correladores: $\underline{\mathbf{y}}(t_m)$, es normal o gaussiana y se halla condicionada por el vector de coordenadas binarias $\underline{\mathbf{a}}(m)$. Se pide que calcule:

f) La media o valor esperado condicionado $\underline{\boldsymbol{\mu}} = E\left[\underline{\mathbf{y}}(t_m)/\underline{\mathbf{a}}(m)\right]$

g) La matriz de covarianza $\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = E\left[(\underline{\mathbf{y}}(t_m)-\underline{\boldsymbol{\mu}})(\underline{\mathbf{y}}(t_m)-\underline{\boldsymbol{\mu}})^T/\underline{\mathbf{a}}(m)\right] = E\left[\underline{\mathbf{n}}(t_m)\underline{\mathbf{n}}(t_m)^T\right]$, donde $\underline{\mathbf{n}}(t_m)$, es el vector formado por las componentes de ruido $\beta_i(t_m), 1 \le i \le K$

Para eliminar la interferencia entre los diferentes usuarios y facilitar de este modo la detección, se propone decorrelar la señal, es decir, trabajar con el nuevo vector:

$$\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}\underline{\mathbf{y}}(t_m)$$

h) Calcule de nuevo el vector media y la matriz de covarianza del nuevo vector $\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t_m)$, condicionado por $\underline{\mathbf{a}}(m)$. (Ver NOTA al final del ejercicio).

i) Para el usuario "*i*"se estima $\hat{\alpha}_i[m]$ a partir de la componente $\hat{y}_i(t_m)$. Por ser la amplitud a detectar, binaria y polar, el umbral de decisión es igual a cero. Si K=3 usuarios y $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\rho^2 \end{pmatrix}$, obtenga la expresión de la componente $\hat{y}_1(t_m)$, correspondiente al usuario i=1, identificando señal útil y ruido y demostrando que no hay interferencia entre usuarios.

j) Calcule la BER del usuario *i*=1, para la situación del apartado anterior, en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, del cociente $\frac{T_{CP}}{T}$ y del coeficiente ρ. Comente la pérdida en dB de $\frac{E_b}{N_0}$ respecto al caso de canales ideales.

INICIE ESTA PARTE EN UNA HOJA NUEVA.

Para **OFDM**, considere como señal útil $s(t)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_k\left[n\right]\varphi_k\left(t-nT\right)*h(t)$.

- La función $\varphi_k(t)=\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\exp\left(j2\pi kf_0(t-T_{cp})\right)\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ cumple $f_0=\dfrac{1}{T-T_{cp}}$.
- El ruido $w(t)$ es gaussiano complejo, y tanto su parte real como su parte imaginaria presentan densidad espectral $\frac{N_0}{2}$ y son estadísticamente independientes entre sí.
- K es ahora el número de sub-portadoras. Los símbolos son polares, binarios, equiprobables: $\alpha_k\left[n\right]=\pm\frac{d}{2}$.
- La expresión (1) sigue siendo válida si la duración de la respuesta impulsional del canal *h(t)* es menor que T_{cp}. Observe que en OFDM $h_k(t)=h(t);1\le k\le K$.

k) Demuestre que las funciones $\varphi_k\left(t\right)$ son ortonormales en (T_{cp},T). Calcule la energía transmitida por bit, en función de la distancia entre símbolos *d* y de los parámetros que considere necesarios.

l) Calcule para OFDM la expresión particular de los coeficientes ρ_{ki} de la expresión (1) en función de la transformada de Fourier de *h(t)*. Observe que en este caso los coeficientes ρ_{ii} pueden ser complejos. Obtenga la expresión de la señal $y_i(t_m)$, identificando señal útil y ruido, complejo en este caso y demostrando que no hay interferencia entre sub-portadoras.

m) Para el usuario "*i*"se estima $\hat{\alpha}_i\left[m\right]$ a partir de $real\left(\frac{y_i(t_m)}{\rho_{ii}}\right)$. Por ser la amplitud a detectar, binaria y polar, el umbral de decisión es igual a cero. Calcule la BER en función del cociente $\dfrac{E_b}{N_0}$ y de los parámetros que considere necesarios.. Previamente identifique el término de ruido que queda presente en detección y calcule su potencia. Comente la pérdida en dB de $\dfrac{E_b}{N_0}$ respecto al caso de canal ideal.

NOTA:

- Sea el vector aleatorio: $\underline{\mathbf{v}}$ y la matriz determinista $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. Dado $\underline{\mathbf{x}}=\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{v}}$, se cumple $E\left[\underline{\mathbf{x}}\right]=\underline{\underline{\mathbf{A}}}E\left[\underline{\mathbf{v}}\right]$ y $E\left[\left(\underline{\mathbf{x}}-E\left[\underline{\mathbf{x}}\right]\right)\left(\underline{\mathbf{x}}-E\left[\underline{\mathbf{x}}\right]\right)^T\right]=\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ con $\underline{\underline{\mathbf{C}}}=E\left[\left(\underline{\mathbf{v}}-E\left[\underline{\mathbf{v}}\right]\right)\left(\underline{\mathbf{v}}-E\left[\underline{\mathbf{v}}\right]\right)^T\right]$

INICIE ESTA PARTE EN UNA HOJA NUEVA.

EJERCICIO 2

En este problema estudiaremos la modulación MSK (Minimum Shift Keying). Se trata de una modulación que es un caso particular de la modulación de fase continua, que estudiaremos como un caso particular de una 2-FSK. Sin pérdida de generalidad, tomaremos como referencia el momento temporal 0, y la influencia de los símbolos anteriores la agruparemos en el término de fase $\vartheta(0)$. La expresión de la modulación será la siguiente:

$$\begin{cases} s_0(t) = \sqrt{\dfrac{2E_b}{T_b}} \cos\left(2\pi f_0 t + \vartheta(0)\right) & 0 \le t \le T_b \\ s_1(t) = \sqrt{\dfrac{2E_b}{T_b}} \cos\left(2\pi f_1 t + \vartheta(0)\right) & 0 \le t \le T_b \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Supondremos que $f_0 > f_1 > 0$ y $f_0 = \dfrac{n_0}{T_b}$; $f_1 = \dfrac{n_1}{T_b}$; es decir que en cada intervalo T_b hay un número entero de ciclos, y que $\vartheta(t)$ es la fase que tenemos en el momento 't'.

a) Exprese el valor de f_c y f_d en función de f_0 y f_1 en;

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(2\pi f_c t + \vartheta(0) \pm 2\pi f_d t\right) \quad 0 \le t \le T_b$$

si consideramos que el símbolo s_0 está asociado con la frecuencia $f_c + f_d$ y que el símbolo s_1 está asociado con la frecuencia $f_c - f_d$

b) Encuentre las componentes en fase y cuadratura de s(t)

$$s(t) = S_I(t)\cos\left(2\pi f_c t\right) - S_Q(t)\sin\left(2\pi f_c t\right) \quad 0 \le t \le T_b$$

y enumere en una tabla los valores que pueden tomar $S_I(t)$ y $S_Q(t)$ en función de la frecuencia transmitida (f_0 ó f_1) suponiendo que $\vartheta(0) = \pm\pi/2$.

c) Si definimos el parametro 'h' como $h = T_b\left(f_0 - f_1\right)$; dé la expresión del equivalente paso bajo $S_I(t) + j\,S_Q(t)$ en función de 'h' y dibuje cómo varia la fase de $S_I(t)$ y $S_Q(t)$ entre $0 \le t \le T_b$. En base a la gráfica anterior indique cuáles son los valores posibles de $\vartheta(KT_b)$ $\forall K$. ¿Cuál es el valor de 'h' que minimiza el ancho de banda y que garantiza la ortogonalidad de $s_0(t)$ y $s_1(t)$?

d) En base a las ecuaciones (1), y suponiendo que $\vartheta(0) = \pm\pi/2$, calcule la base asociada con el espacio de señal y dé la expresión de los vectores asociados a cada uno de los dos símbolos.

e) Dibuje la constelación de señal; indicando la posición de cada uno de los símbolos. Indique también sobre el dibujo la frontera de decisión.

f) En base a consideraciones de distancias en la constelación, y suponiendo que la señal se transmite por un canal ideal de ruido aditivo blanco y gausiano $S_{ww}(f) = N_0/2$, calcule la probabilidad exacta de error por bit, en función del cociente E_b / N_0 .

$COS(\alpha+\beta) = COS(\alpha)COS(\beta) - SIN(\alpha)SIN(\beta)$
$SIN(\alpha+\beta) = SIN(\alpha)COS(\beta) + COS(\alpha)SIN(\beta)$