ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACION UPC
Asignatura: COMUNICACIONES II (Cuatrimestre 3A)
Examen Final **18 de enero de 1999**
Profesores: M. Cabrera, J. Fernández-Rubio, G. Vázquez **Duración: 3h**

- Recuerde que su nombre debe figurar "claramente" en todas las hojas de examen.
- No se corregirá ningún ejercicio presentado fuera del aula correspondiente.
- Entregue los ejercicios en hojas separadas.

Ejercicio 1

Mediante el presente ejercicio se va a proponer la introducción de técnicas de codificación correlativa, que permitan adaptar el espectro de la señal que se transmite a la función de transferencia del canal. El objetivo de las mismas, consiste en minimizar la distorsión introducida por el canal, en el caso de que éste no presente un comportamiento ideal en el ancho de banda de transmisión.

Considere una secuencia de símbolos binarios y equiprobables $b[k] = \pm\frac{A}{2}$ que modula en amplitud una secuencia de pulsos $p(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$, dando lugar a la modulación PAM polar

$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b[k]p(t - kT)$.

a) Calcule y dibuje la densidad espectral de la señal $s(t)$.

b) Si $s(t)$ es transmitida por un canal AWGN (Canal ideal de ruido aditivo blanco y gaussiano), calcule la BER del sistema. Para ello considere los siguientes datos:

$S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ =10^{-6} Watts/Hz

El filtro receptor se halla adaptado al pulso transmitido:

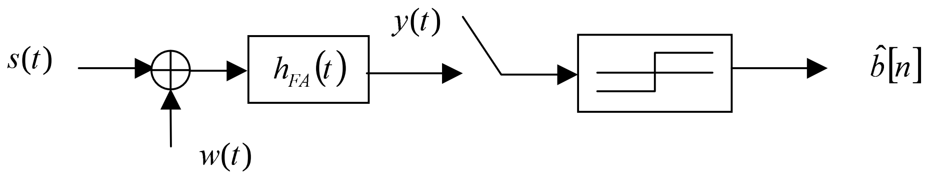


FIGURA 1

La potencia transmitida es $S_T = E[s^2(t)] = 25$mWatts. r_b= 1 Kbits/seg

Umbral de recepción óptimo. Instantes de muestreo: t_n=(n+1)T

Suponga a partir de este punto que el canal presenta un cero a la frecuencia $f = \frac{1}{3T} = \frac{r}{3}$. Si se consigue que el espectro de la señal transmitida presente un nulo a la misma frecuencia, el efecto del canal sobre la señal apenas causará distorsión, con lo que se podrá seguir considerando **canal ideal.**

Para conseguir lo anterior se propone pre-codificar los símbolos del siguiente modo:

$a[n] = b[n] + \alpha.b[n-3]$, dando lugar a la siguiente señal transmitida:

$s_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]p(t - kT)$

c) Calcule el valor de α necesario para conseguir que el espectro de la nueva señal transmitida $s_1(t)$ presente un nulo a la frecuencia deseada $f = \frac{1}{3T} = \frac{r}{3}$

Continúe a partir de este apartado considerando el valor de α genérico ($|\alpha| \leq 1$).

d) Si el receptor de la figura 1 desconoce que se ha introducido una codificación correlativa, la detección sufrirá de ISI. Suponiendo que no se modifica la estructura del receptor de la figura 1, calcule y represente gráficamente la ISI introducida sobre la señal. Calcule para ello la expresión de la señal muestreada $y(t_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b[k] p_R(t_n - kT) + n(t_n)$, a la salida del filtro adaptado en los instantes de muestreo considerados: $t_n=(n+1)T$, donde $p_R(t)$ es el pulso resultante a la salida del filtro respecto a la secuencia $b[k]$.

e) Diseñe un Forzador de Ceros de 4 coeficientes que reduzca la ISI anterior. Obtenga la ISI resultante a la salida del ecualizador. Para ello calcule la expresión de la señal muestreada a la salida del ecualizador en los instantes de muestreo considerados: $t_n=(n+1)T$. Deje el resultado en función del parámetro α. Justifique el hecho de que para el valor de α obtenido en el apartado c. el nivel de la ISI residual obtenida a la salida del ecualizador es la misma que la que se observa sin ecualización (no mejora).

Como alternativa a la solución de ecualización propuesta en el apartado anterior, se propone realizar una codificación diferencial sobre los bits previamente a su transmisión. El esquema resultante seria:

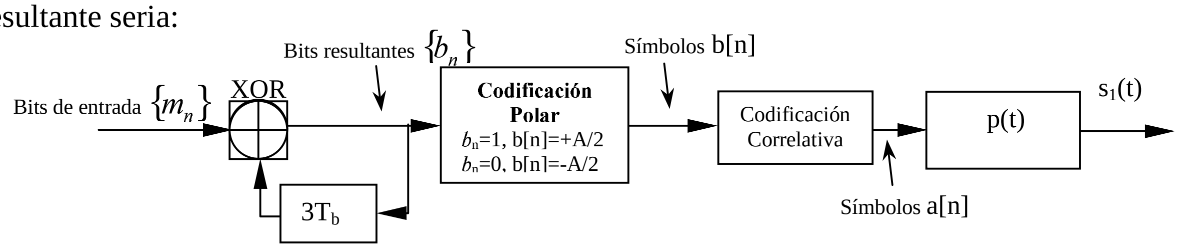


FIGURA 2

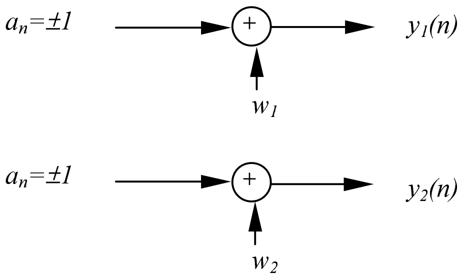
f) Demuestre que manteniendo el filtro adaptado de la figura 1 y modificando los umbrales de detección a $\pm\frac{A}{2}$, se pueden decodificar los bits transmitidos sin ambigüedad, es decir, sin verse afectados por la ISI. Para ello calcule previamente todos los posibles niveles que puede tomar la secuencia de símbolos a[n] así como sus probabilidades. Trabaje con el valor de α calculado en el apartado c.

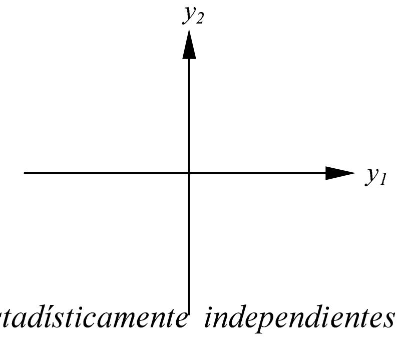
g) Calcule de nuevo la BER del sistema manteniendo la potencia de la señal transmitida $s_1(t)$ a 25 mWatts y la velocidad binaria r_b a 1 Kbit/seg.

NOTA $Q(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}k} e^{-k^2/2}$ Esta expresión es bastante precisa para k>3

Ejercicio 2

Símbolos binarios (denotados como $\boldsymbol{s_1}$ y $\boldsymbol{s_2}$) *equiprobables* y *estadísticamente independientes,* se asocian respectivamente a amplitudes $a_n=+1$ para el símbolo $\boldsymbol{s_1}$ y $a_n=-1$ para $\boldsymbol{s_2}$. Para protegerlos frente al ruido, se transmiten con diversidad (redundancia), es decir, en paralelo, de modo que las decisiones en recepción se toman a partir de dos observaciones $[y_1(n);\ y_2(n)]$ distintas del mismo símbolo transmitido a_n, según el esquema siguiente:





donde w_1 y w_2 son dos ruidos ***no*** gaussianos, *estadísticamente independientes* con funciones densidad de probabilidad iguales, tales que:

$$p_{w_1}(w) = p_{w_2}(w) = \frac{1}{2}e^{-|w|}$$

De modo que la señal recibida, representada de forma vectorial, toma la siguiente forma:

$$\underline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2) = \underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{w}} = (a_n, a_n) + (w_1, w_2)$$

En estas condiciones, conteste a los siguientes apartados:

a. Obtenga la expresión de la función densidad de probabilidad *conjunta* del vector de ruido $\underline{\boldsymbol{w}}$.

b. Obtenga la expresión de la función densidad de probabilidad de los datos observados $\underline{y}$ cuando se transmiten los símbolos $\boldsymbol{s_1}$ y $\boldsymbol{s_2}$, es decir:

$$p(\underline{\mathbf{y}}/\mathbf{s}_1) \text{ y } p(\underline{\mathbf{y}}/\mathbf{s}_2)$$

en función de la estadística conjunta del ruido obtenida en el apartado a.

c. Demuestre que el detector óptimo bajo un criterio MAP (Maximum a Posteriori) en recepción es tal que el símbolo decidido satisface:

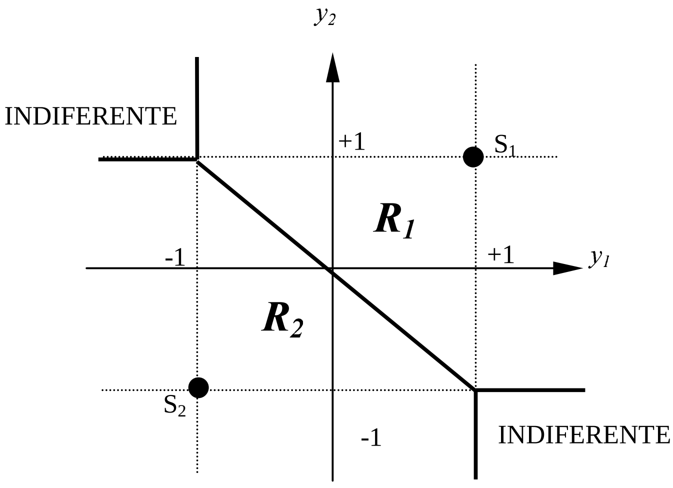
$$\hat{s}_i \Rightarrow max_{\hat{s}_i} \quad p(\underline{\mathbf{y}}/s_i)p(s_i)$$

d. Demuestre que las reglas de decisión que definen las regiones de decisión de los símbolos $\boldsymbol{s_1}$ y $\boldsymbol{s_2}$ son las siguientes:

$$R_1: \quad |y_1 - 1| + |y_2 - 1| \leq |y_1 + 1| + |y_2 + 1|$$

$$R_2: \quad |y_1 - 1| + |y_2 - 1| \geq |y_1 + 1| + |y_2 + 1|$$

e. Según el resultado indicado en el apartado d., la regla de decisión óptima MAP queda de la siguiente forma:



Justifique la existencia de dos regiones donde la decisión es indiferente al ser la observación totalmente ambigua.

f. Si sustituimos las reglas de decisión del apartado d. por las dos siguientes mucho más simples:

$$R_1: \quad (y_1 + y_2) > 0$$
$$R_2: \quad (y_1 + y_2) < 0$$

¿Es este nuevo receptor también óptimo si los símbolos son equiprobables? Justifique la respuesta.

Según la nueva regla de decisión del apartado anterior, consideraremos como nueva variable de decisión la variable $y = y_1 + y_2$.

g. Indique que dos valores tomará la nueva variable y en ausencia de ruido (puntos de señal) y sitúe el umbral de decisión. Plantee el cálculo de la BER del sistema en función de las dos nuevas funciones de densidad de probabilidad genéricas: $f_y(y/s_1)$ y $f_y(y/s_2)$.

h. Halle una de las dos funciones de densidad de probabilidad condicionadas de la nueva variable, por ejemplo la condicionada al símbolo s_1: $f_y(y/s_1)$.

Recuerde que la función densidad de probabilidad de la suma de dos variables aleatorias estadísticamente independientes es la convolución de sus dos funciones densidad de probabilidad: $f_y(y) = f_{y_1}(y) * f_{y_2}(y)$

Calcule la BER del sistema.