APUNTS PROPIETAT DE:
MÀRIUS SERRA LÓPEZ

PER QUALSEVOL DUBTE O CONSULTA RESPECTE ELS APUNTS O EL QUE FACI FALTA ESCRIURE A:
tirantloblanc84@hotmail.com

(l'assumpte ha de ser: Apunts ETSETB)

QUALSEVOL ERROR PRESENT S'ATRIBUEIX AL PROFE DE L'ASSIGNATURA QUE ME LA VA IMPARTIR!!

15-09-03 ①

EDOS

PROFE: JOSEP MARIA OLM
MÓDUL: C3 - P1 D108 (No hi ha el nom a la porta)
HORARIS: DILLUNS (17h-18h) / DIJOUS (20h-21h)
mail: joln@mat.upc.es

NOTA: max { 10% LAB + 30% PARCIAL + 60% EX. FINAL (test) }

CEPET: - Problemes d'EDOS
- Guió de la 1a Pràctica (Mètodes Numèrics)
- Apunts (T1: Notes sobre equacions diferencials
T4: Transformada de Laplace)

TEMARI:

1. Equacions diferencials de primer ordre.
2. Equacions diferencials d'ordre superior.
3. Sistemes d'equacions diferencials
4. Estudi qualitatiu d'equacions diferencials.
5. Transformada de Laplace
6. Problemes de contorn.

Lab: 61 → (16-10), (13-11), (11-12)

BIBLIOGRAFIA:

1. Simmons. (Hi és tot)
Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas.
Ed. ~~Mc~~ Graw-Hill 517.9 Sim
2. Braun (Hi ha tot excepte Laplace y T6)
Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones
Grupo Ed. Iberoam (517.9 Bra)
3. Boyce, Di Prima (TOT) (517.9 Boy)
Ecuaciones diferenciales (problemes)

LLIBRES COMPLEMENTARIS: PROBLEMES

4. Kiseliov, Krasnov, Makarenko (poc Laplace, res T6)
Problemas de EDOS (517.9 Kis)
5. Bronson / Ecuaciones dif. ~~diversas~~ modernas / Differential Ecuations (NO T4) (517.9(076) Bro
6. Manual de formulas y tablas matemáticas. (M-51/45) → Magatzem

TEMA 1 16-09-03

EQUACIONS DIFERENCIALS DE PRIMER ORDRE:

1. Introducció:

Equació diferencial: relació d'igualtat on la funció incognita és una derivada primera o superior.

Funció que es deriva → variable dependent

Variable respecte la qual es deriva → variable independent.

Ex: $\frac{dy}{dx} = 2x$ / $y' = 2x$ / $dy - 2x\,dx = 0$

→ Diferents notacions

Interés de les EDO'S:

Són la traducció al llenguatge matemàtic de molts problemes de la ciencia i l'enginyeria.

Ex: $F = m\frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}$

$E = L\frac{di}{dt} + iR$

Ordre d'una equació diferencial:

Ve donat per l'ordre de la derivada d'ordre més alt que apareix a l'equació.

Ex: $y'' + xy' - 2y^2 = 7e^x \Rightarrow$ Ordre 2. (2n ordre)

Tipus d'equacions diferencials:

1) ED en derivades parcials (EDP)

Ex: $u = u(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = (x+y)u$$

2) ED ordinaries (EDOS):

no hi apareixen derivades parcials.

Expressió genèrica d'una EDO de 1r ordre:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{o bé} \qquad y' = f(x,y)$$

Def:

Diem que $y = \phi(x)$ és solució de la ED ordinaria

$y' = f(x,y)$ en $I = (a,b) \subset \mathbb{R} \iff \phi'(x) = f(x, \phi(x)), \ \forall x \in I$

• És a dir, l'equació ha de complir L'EDO.

Ex: $y' = 2x \underset{\text{Solució}}{\Longrightarrow} y = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (x^2)' = 2x \to 2x = 2x$

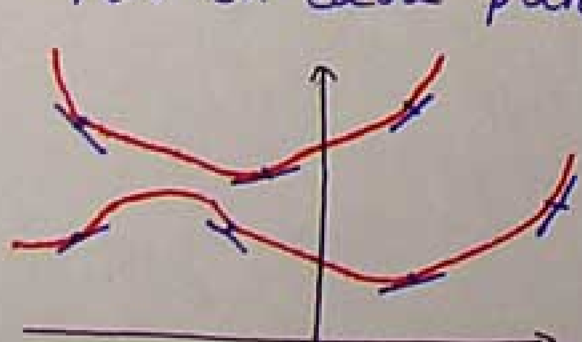
$\underset{\text{Solució}}{\Longrightarrow} y = x^2 + 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (x^2+1)' = 2x \to 2x = 2x$

$\underset{\text{No es solució}}{\Longrightarrow} y = x \qquad (x)' = 2x \to 1 = 2x$

Interpretació geomètrica:

Considerem $y' = f(x,y)$

Busquem y i coneixem y' (el pendent de la recta tangent a $y(x)$ en cada punt).

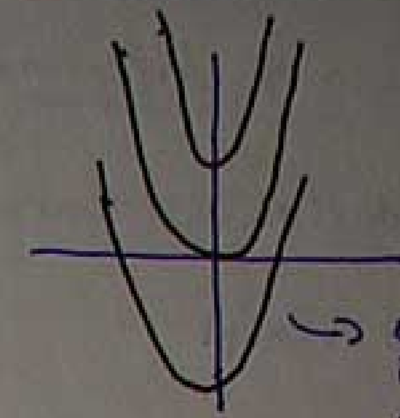


Ara, una solució o <u>corba integral</u> $y = \Phi(x)$ és una funció tal que en cada punt (x,y) el pendent de la recta tangent a ella val $f(x,y)$.

$\hookrightarrow$ Dibuix: camp de direcions de l'EDO

Sobre les solucions:

Partim de l'exemple $y' = 2x$



1) Integrem-la: $\frac{dy}{dx} = 2x$

$$dy = 2x\,dx \Rightarrow \int dy = \int 2x\,dx \Rightarrow y = 2\int x\,dx = x^2 + C$$

$$y(x) = x^2 + C$$

2) Si busquem la solució que passa per el punt $(1,3)$

Per tant: $3 = 1^2 + C \rightarrow C = 2$

$$y(x) = x^2 + 2 \Rightarrow \underline{\text{Solució particular}}$$

Def:

Donada l'EDO $y' = f(x,y)$

1) Anomenem "<u>integral general</u>" o "<u>solució general</u>" de l'EDO a la família uniparamètrica $y \notin \Phi(x,C)$ tq $\phi'(x,C) = f(x, \phi(x,C))$

Uniparamètrica $\equiv$ Depén d'un sol paràmetre.

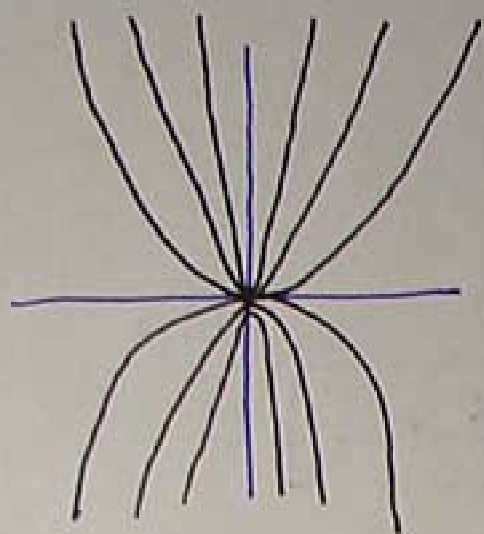
2) Anomenem <u>solució particular</u> de l'EDO a tota funció $y = \varphi(x)$ tq $\underbrace{\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))}_{\text{n'és solució}}$

Normalment $\exists \bar{C}$ (valor concret de C), tq $\phi(x, \bar{C}) = \phi(x)$

3) El problema que representa trobar la corba tq $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ es coneix com a <u>problema de valor inicial</u> (PVI)

Obtenció de l'EDO que satisfà una família uniparamètrica de corbes:

Ex: Suposem la família uniparametrica de corbes $y = Cx^2$



Busquem l'EDO que la satisfà:

Via 1) $\frac{dy}{dx} = \frac{d(Cx^2)}{dx}$

DERIVEM:

$y' = 2Cx$

ELIMINEM EL PARÀMETRE "C": $y = Cx^2 \rightarrow C = \frac{y}{x^2}$

$y' = 2\frac{y}{x^2} \cdot x \rightarrow \boxed{y' = \frac{2y}{x}}$

Via 2)

$y = Cx^2 \qquad C = \frac{y}{x^2}$

DERIVEM: $\frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right)$

$0 = \frac{\frac{dy}{dx} \cdot x^2 - 2xy}{(x^2)^2} \nearrow \quad 0 = \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4} \quad xy' = 2y$

$0 = \frac{y'x - 2y}{x^3} \nearrow \boxed{y' = \frac{2y}{x}}$

18-09-03

2. RESOLUCIÓ D'EDO's

2.1 Variables separades (o separables):

Són de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \iff g(y)\,dy = f(x)\,dx \iff$$

$$\iff \boxed{\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + K}$$

1b

$xyy' = 1 - x^2$

$y\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{x}$ $\qquad \int y\,dy = \int\left(\frac{1-x^2}{x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x} - x\right)dx$

$\frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + K$

$y^2 = 2\ln x - x^2 + C \implies \boxed{y^2 = \ln x^2 - x^2 + C}$

2.2 Eq. dif. Homogènies:

Def: Diem que una $f(x,y)$ és homogènia de grau "n" $\iff$

$\iff f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

Ex: $f(x,y) = x^2 + xy$

$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 xy = \lambda^2(x^2+xy) = \lambda^2 f(x,y)$

Def:

L'EDO $y' = f(x,y)$ és homogènia $\iff$ $f(x,y)$ és homogènia de grau zero.

Així: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x,y) = f(x,y)$

Si prenem $\lambda = \frac{1}{x} \rightarrow f\left(\frac{1}{x}\cdot x, \frac{1}{x}y\right) = f(x,y)$

$\downarrow$

$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x,y)$

Si ara fem el canvi de variable, $\boxed{u = \frac{y}{x}}$ llavors podrem separar les variables.

$u = \frac{y}{x} \iff y = ux$

$\boxed{y' = u'x + u\cdot 1 = u'x + u}$

Portem-ho a l'EDO:

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$u'x + u = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1, u)$$

$$\frac{du}{dx}x = f(1,u) - u \longrightarrow \frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x}$$

$\Downarrow$

Només cal integrar!!
+
Desfer el canvi de variable!

11

$$(y - xy')^2 = x^2 + y^2$$

$$y - xy' = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$xy' = y - \sqrt{x^2+y^2}$$

$$y' = \frac{y - \sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

Comprovem la Homogenietat:

VIA I)

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y - \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}}{\lambda x} =$$

$$= \frac{\lambda y - \lambda\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda x} = \frac{y - \sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

$\hookrightarrow$ Es veu que és homogènia

VIA II)

Escriure $f(x,y)$ com a funció de y/x

$$\frac{y - \sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} =$$

$$= \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Resolem:

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

CANVI $\Rightarrow$ $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux$

$y' = u'x + u$

$$u'x + \cancel{u} = \cancel{u} - \sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{du}{dx}x = -\sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{du}{-\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$$

Integrem:

D'on surt aquesta K? ERRONI

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\int \frac{dx}{x} + K \Rightarrow \int \frac{ch\, s \cdot ds}{\sqrt{1+sh^2 s}} = \frac{s^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\operatorname{argsh}^2 u\right) =$$

$-\ln|x| = \ln\frac{1}{|x|}$

$u = sh\, s$
$du = ch\, s\, ds$

$$= \frac{1}{2}\ln^2\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) \Rightarrow \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \ln\frac{K}{|x|}$$

$$\frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{K}{x} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{x^2-K^2}{2K}}$$

2.2.1 Eq. Reduïbles a homogènies:

Són de la forma:

$$\boxed{y' = \frac{ax+bx+c}{dy+fx+e}}$$

1) $ad-bc \neq 0$

Canvi: $y = v+k$, $x = u+h$ $\quad \left.\begin{array}{l} ak+bh=-e \\ ck+dh=-f \end{array}\right\} \Rightarrow$ Trobem k i h $\quad \left| \begin{array}{l} y'=v' \\ x'=u' \end{array} \right.$

2) $ad-bc=0$

Canvi: $z = ax+by$ $\quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} - a\right) : b$

2.3 Equacions lineals:

Són de la forma:

$$\boxed{y' + a(x)y = f(x)}$$

on $a(x), f(x) \to$ continues

* Definim l'operador:

$$\boxed{\begin{array}{l} L: C^1 \longrightarrow C \\ y \longmapsto L[y] = \left(\frac{d}{dx} + a(x)\right)[y] = \frac{dy}{dx} + a(x)y \end{array}}$$

Prop:

*L és lineal

Dem:

Cal veure que: $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$

$\forall y_1, y_2 \in C^1 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

L'Algebra lineal ens diu que les solucions de l'EDO són de la forma:

$$L[y] = f(x) \to \{ y \in C^1, \ y = y_p + \ker\{L\} \}$$

on y_p és una solució particular de l'EDO, és a dir

$$L[y_p] = f(x)$$

1) f) $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$ — Schaum —

Comprovem: $\left[\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]' = \frac{\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)'}{u+\sqrt{1+u^2}} = \frac{1+\frac{\cancel{2}u}{\cancel{2}\sqrt{1+u^2}}}{u+\sqrt{1+u^2}} =$

$= \frac{\cancel{\sqrt{1+u^2}+u}}{\sqrt{1+u^2}\,\cancel{\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$

2) Alternativament

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \underset{\substack{u=\sinh z\\ du=\cosh z\,dz}}{=} \int \frac{\cosh z\,dz}{\sqrt{1+\sinh^2 z}} = \int \frac{\cosh z\,dz}{\sqrt{\cosh^2 z}} = \int dz = \sinh z = \operatorname{arcsinh} u$$

— Schaum —

cal tenir present que $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

3) Per veure l'equivalència entre resultats cal tenir present la definició de $\sinh z$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Així, $\operatorname{arcsinh}(u) = \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sinh\left[\operatorname{arcsinh}(u)\right] = \sinh\left[\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right] \Leftrightarrow$

$\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$ … $-\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

z.z., $\operatorname{arcsinh}(u) = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) \iff$

$$\iff \sinh\left[\operatorname{arcsinh}(u)\right] = \sinh\left[\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right] \iff$$

$$\iff u = \frac{e^{\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)} - e^{-\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)}}{2} \iff$$

$$\iff u = \frac{u + \sqrt{1+u^2} - \frac{1}{u+\sqrt{1+u^2}}}{2} \iff$$

$$\iff u = \frac{\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)^2 - 1}{2\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)} \iff$$

$$\iff u = \frac{u^2 + \cancel{1} + u^2 + 2u\sqrt{1+u^2} - \cancel{1}}{2\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)} \iff$$

$$\iff u = \frac{2u\,\cancel{\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)}}{2\,\cancel{\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)}} \iff$$

$$\iff u = u \quad \text{OK!}$$

Dem:

Sigui y_1, y_2 solucions:

$$L[y_1] = f(x) \quad ; \quad L[y_2] = f(x)$$

$$L[y_1] - L[y_2] = 0$$

$$L[y_1 - y_2] = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 \in \operatorname{Ker}\{L\}$$

Continuant...

Així les solucions són de la forma:

$$\underbrace{y_G}_{\text{General}}(x) = \underbrace{y_H(x)}_{\text{Base de Ker}L} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{Solució particular de l'equació general } L[y]=f(x)}$$

Base de Ker L ↓ Solució general de l'equació homogènia $L[y]=0$

Cerca de y_H i y_p:

* y_H]

$$L[y_H] = 0$$

Mirar si és una resta

$$y'_H + a(x)\,y_H = 0$$

$$\frac{dy_H}{y_H} = -a(x)\,dx$$

$$\ln y_H = -\int a(x)\,dx + C$$

$$y_H(x) = K \cdot \exp\left\{-\int a(x)\,dx\right\}$$

* y_p] Mètode de variació de constants:

$$y_p(x) = K(x) \cdot \exp\left\{-\int a(x)\,dx\right\} \simeq K(x) \cdot y_H$$

i ho portem a l'equació:

$$y_p' + a(x)\,y_p = f(x) \Rightarrow K'(x) \cdot \exp\left\{-\int a(x)dx\right\} - K(x) \cdot a(x) \cdot \cancel{\exp}\left\{-\int a(x)dx\right\} +$$

$$+ a(x) \cdot K(x) \cdot \cancel{\exp}\left\{-\int a(x)dx\right\} = f(x)$$

$$K(x) = \int f(x) \cdot \exp\left\{\int a(x)dx\right\} dx$$

2a

$$y' - y \cdot tg\, t = \cos t \Rightarrow \text{EDO lineal } (y' + a(x)y = f(x))$$

La solució serà: $y_G(t) = y_H(t) + y_P(t)$

y_H |

$$y'_H - y_H\, tg\, t = 0$$

$$\frac{dy_H}{y_H} = tg\, t\, dt$$

$$\ln y_H = -\ln \cos t + C$$

$$y_H(t) = \frac{K}{\cos t}$$

y_P |

$$y_P = \frac{K(t)}{\cos t}$$

$$y'_P - y_P \cdot tg\, t = \cos t$$

$$\frac{K' \cdot \cos t + K \cancel{\sin t}}{\cos^2 t} - \frac{K}{\cancel{\cos t}} \cdot \frac{\cancel{\sin t}}{\cos t} = \cos t$$

$$\frac{K'}{\cos t} = \cos t$$

$$dK = \cos^2 t \cdot dt$$

$$K = \int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t$$

$$y_G(t) = \frac{K}{\cos t} + \frac{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t}{\cos t} = \boxed{\frac{K}{\cos t} + \frac{t}{2\cos t} + \frac{1}{2}\sin t}$$

* Equacions reduibles a lineals:

1) EDO de BERNOULLI

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \xRightarrow{\text{Canvi}} z = y^{1-\alpha}$$ Ex → Exercici 7

2) EDO de RICCATI

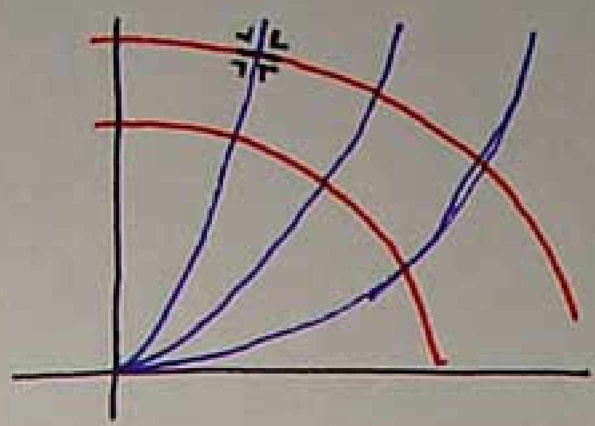
$$y' = q(x) + p(x)y + r(x)y^2 \xRightarrow{\text{Canvi}} z = y - y_1 \rightarrow \text{Bernoully}$$

↳ Sabem que $y_1(x)$ solució

3. Aplicacions:

22-09-03 ⑥

3.1 Trajectories ortogonals:



Les corbes ortogonals són aquelles tq en [redacted] els punts d'intersecció les seves tangents formen angles rectes.

* Siguin m_1, m_2 els pendents de 2 corbes ortogonals en el punt (x_0, y_0) $\Rightarrow$ $\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$

* Sigui $y' = f(x,y)$ l'EDO satisfeta per una família de corbes $\Rightarrow$ les trajectories ortogonals (TO) a ella satisfan: $\boxed{\frac{-1}{y'} = f(x,y)}$

* En general: $\left.\begin{array}{l} F(x,y,y')=0 \\ F(x,y,\frac{-1}{y'})=0 \end{array}\right\}$ són les EDO's de TO.

10.b

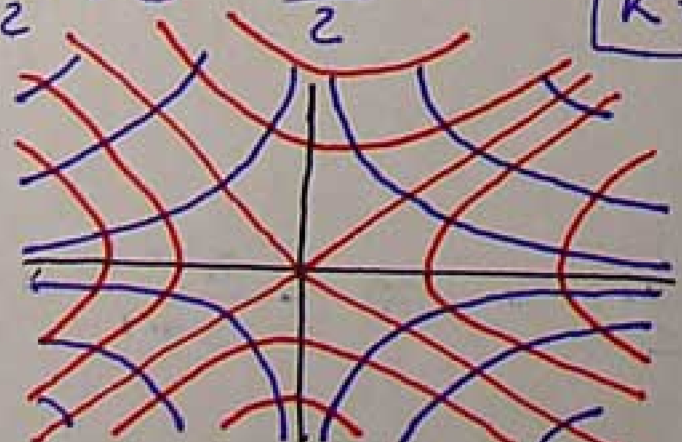
$xy = c \Rightarrow$ EDO + TO

EDO) $y + \frac{dy}{dx}x = 0 \Rightarrow y + xy' = 0$

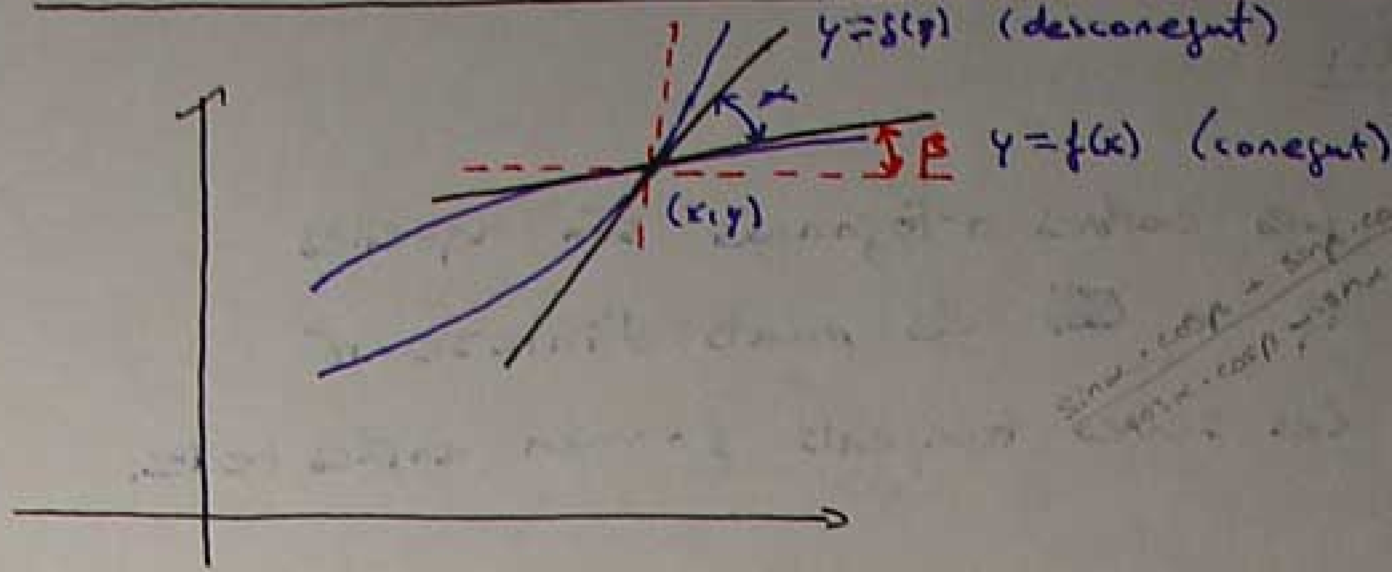
$\boxed{y' = -\frac{y}{x}}$ $\rightarrow$ La edo que satisfa a la familia $xy = c$ (de corbes).

TO) $\frac{-1}{y'} = -\frac{y}{x} \Rightarrow x = yy' \Rightarrow xdx = ydy$

$\frac{x^2}{2} + c = \frac{y^2}{2}$ $\boxed{K = y^2 - x^2}$ $\Rightarrow$ Trajectories ortogonals



* Famílies de corbes que es tallen formant un angle α:



$$\boxed{g'(x) = tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}}$$

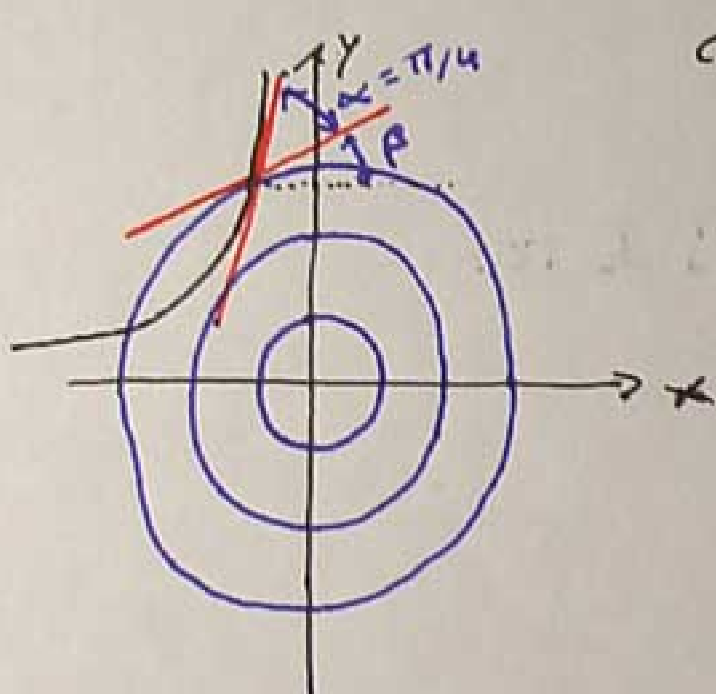
Notem $tg\,\alpha = \lambda$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{\lambda + f'(x)}{1 - \lambda f'(x)}}$$

Exemple:

Tret d'un control: Trobar les corbes que tallen les circumferències centrades a (0,0) amb un angle de $\frac{\pi}{4}$ rad.



$$y^2 + x^2 = R^2$$

$$2yy' + 2x = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{2y}$$

$$\boxed{y' = -\frac{x}{y}}$$

$$y' = tg\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$$

$$y' = \frac{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)}{1 - \left(\frac{-x}{y}\right)} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{y-x}{y+x}}$$ Homogènia

Canvi: $z = y/x$

$$y = z \cdot x \rightarrow y' = xz' + z$$

Portem-la a l'EDO:

$$xz' + z = \frac{zx - x}{zx + x} \Rightarrow z'x = \frac{z-1}{z+1} - z \Rightarrow -\frac{z^2+1}{z+1} = z'x$$

$$\frac{1+z}{1+z^2}\,dz = -\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{1+z^2}+\frac{z}{1+z^2}\right)dz = \operatorname{arctg}(z)+\frac{1}{2}\ln(1+z^2) = -\ln|x|+C$$

Desfent:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \ln\frac{K}{|x|} \qquad \underline{K>0}$$

3.2. Models matemàtics:

3.2.1. Desintegració radioactiva:

Les substàncies radioactives es desintegren a una velocitat proporcional a la quantitat de substància present.

Notant $Q(t) \rightarrow$ quantitat de substància a l'instant "t".

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -K\cdot Q(t), \quad K>0$$

$$\frac{dQ}{Q} = -K\,dt \implies \ln Q = -Kt+\overline{C}$$

$$Q(t) = e^{-Kt+\overline{C}} = e^{\overline{C}}\cdot e^{-Kt}$$

$$\boxed{Q(t) = K_1\cdot e^{-Kt}}$$

$$\ln\frac{Q_1}{2Q_2} = -KT$$

$$\ln\frac{1}{2} = -KT$$

$$\boxed{KT = \ln 2}$$

Condició inicial: $Q(t_0) = Q_0$

$$Q_0 = K_1\cdot e^{-Kt_0} \qquad K_1 = Q_0\,e^{Kt_0} \qquad Q(t) = Q_0\cdot e^{-K(t-t_0)}$$

Per trobar K, cal conèixer una altre dada. P.ex. $Q(t_1)=Q_1$

$$\implies Q_1 = Q_0\cdot e^{-K(t_1-t_0)}$$

$$\ln\frac{Q_1}{Q_0} = -K(t_1-t_0) \qquad \boxed{K = \frac{\ln Q_0-\ln Q_1}{t_1-t_0}}$$

* La K es sol donar en termes de vida mitjana: és el temps "t" necessari p/ una certa substancia es redueixi a la meitat.

* Els períodes de semidesintegració de U_{238} i afins són de l'ordre de 10^9 anys i permeten datar esdeveniments geològics llunyans.

Carboni 14

$T = 5568$ anys (període semidesintegració)

S'usa per datar l'edat d'objectes d'origen químic, fins a 50.000 anys. En realitat es mesura el nº de desintegracions per minut i gram, que sorgeix d'una llei eq. a l'anterior.

18

$1950 \rightarrow \quad 0'97 \rightarrow Q_1$

$6'68 \rightarrow Q_0 \qquad T = 5568$ anys

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-k(t-t_0)}$$

$$kT = \ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{T} \simeq \frac{\ln 2}{5568}$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = e^{-k\Delta T}$$

$$\Delta T = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{Q_0}{Q_1}\right) = \frac{5568}{\ln 2} \cdot \ln \frac{6'68}{0'97} \simeq 15.500 \text{ anys}$$

3.2.2 Dinàmica de poblacions:

* Llei de Malthus

Per $t \approx t_0 \rightarrow$ funciona

Per $t \approx \infty \rightarrow p_0 \approx \infty \rightarrow$ No funciona

$$\frac{dp}{dt} = kp \Rightarrow p(t) = p_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$$

* Llei logística

$$\frac{dp}{dt} = kp - \lambda p^2 \Rightarrow \boxed{p(t) = \frac{k \cdot p_0}{\lambda p_0 + (k-\lambda) p_0 \cdot e^{-k(t-t_0)}}}$$

Noten que per $t \to \infty \Rightarrow p(t) \to \frac{k}{\lambda}$

21

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p(30-p) \quad . \quad p_0 = 10\cdot 10^6$$

* Obtenint α:

$$\frac{dp}{dt} = \beta p \qquad p(t) = p_0 \cdot e^{\beta t}$$

$$2\cancel{p_0} = \cancel{p_0}\cdot e^{\beta t} \Rightarrow \beta = \frac{\ln 2}{t} = \frac{\ln 2}{50}$$

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = \alpha(30-p)\Big|_{p=10\cdot 10^6} = \beta \Rightarrow \alpha(30-10) = \frac{\ln 2}{50}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\ln 2}{1000}}$$

23-09-03

$$\alpha dt = \frac{dp}{p(30-p)}$$

$$\int \frac{dp}{p(30-p)} = \frac{1}{30}\int \frac{1}{p}dt + \frac{1}{30}\int\frac{1}{30-p}dp = \frac{1}{30}\left[\ln p - \ln(30-p)\right] = \alpha t + k$$

$$\frac{1}{30}\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{30-p}\right]dp = \alpha dt$$

$$\ln\left(\frac{p}{30-p}\right) = 30\alpha t + K$$

$$\boxed{\frac{p}{30-p} = ke^{30\alpha t}} \Rightarrow \text{Solució general}$$

$$p(t_0) = p_0$$

$$\frac{p_0}{30-p_0} = K\cdot e^{30\alpha t_0} \Rightarrow \boxed{K = \frac{p_0}{30-p_0}\cdot e^{-30\alpha t_0}}$$

<u>SOLUCIÓ PARTICULAR:</u>

$$\frac{p(30-p_0)}{p_0(30-p)} = e^{+30\alpha(t-t_0)}$$

$p_0 = 10M$ Sabem

$\Delta t \,/\, p_1 = 2p_0 = 20M$ Volem

$$\frac{20(30-10)}{10(30-20)} = e^{30\alpha\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\cdot \ln 2}{30\frac{\ln 2}{1000}} \approx \boxed{66'6 \text{ anys}}$$

i.e. → id est (es a dir)

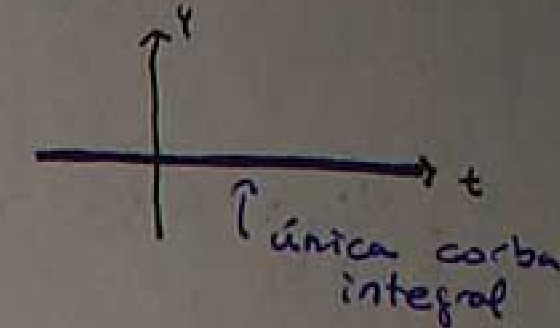
4. Teoremes d'existencia, unicitat i dependencia continua (PVI):

Ens interesa buscar condicions per tal que un problema de valor inicial (PVI) tingui solució i sigui única., i.e., condicions que garanteixen que per cada punt passa una única corba integral.

Exemples patològics:

1) $y'^2 + y^2 = 0$

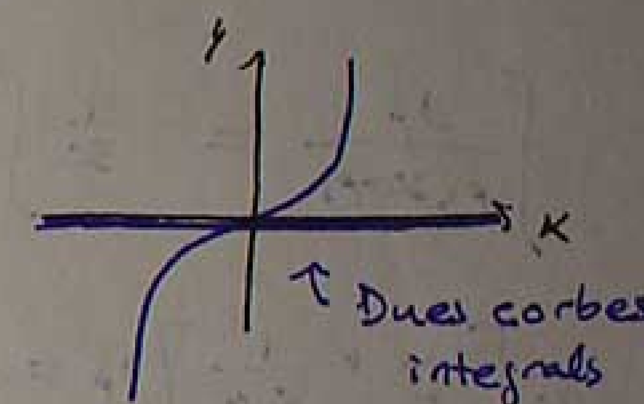
$y'^2 = -y^2 \Rightarrow \boxed{y=0}$ Solució única $\forall t$



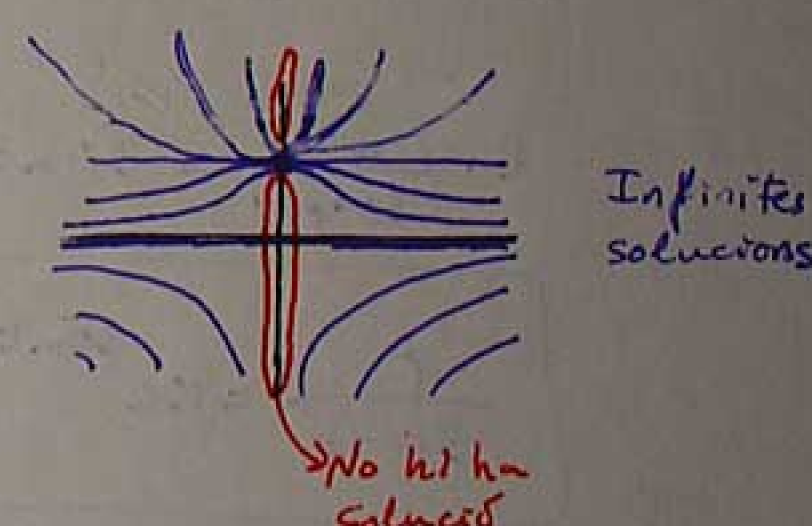
$\hookrightarrow \begin{cases} \exists \text{ sol única que passi per } (t_0, 0), \forall t_0 \\ \nexists \text{ sol que passi per } (t_0, y_0),\ y_0 \neq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Solucions $\Rightarrow \begin{cases} \text{integrant} \to y_1(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3 \\ \text{A simple vista} \to y_2(t) = 0 \end{cases}$



3) $ty' = 2y(y-1) \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = \frac{1}{1-ct^2} \\ y_2(t) = 0 \end{cases}$



Teorema 1 (Existència i unicitat):

Donat el PVI $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Considerem el rectangle: $D = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ amb $a, b > 0$

Si es verifica:

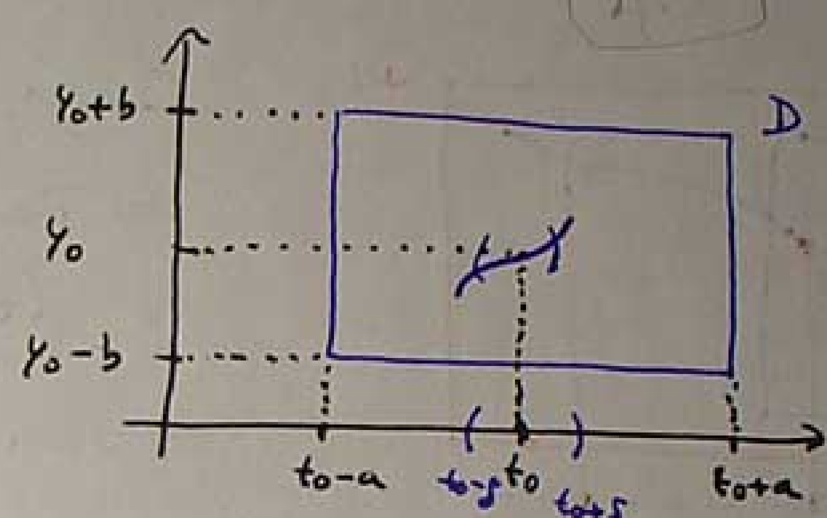
1) $f(t,y)$ és continua en D

2) Condició de Lipschitz: $\exists\, L>0$ tq $\forall\,(t_1,y_1),(t_2,y_2)\in D$

resulta $|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L\,|y_1-y_2|$

Aleshores, el PVI anterior té solució única $y(t)$ en un interval $(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$, $0<\delta\leq a$

Gràficament



Sobre les condicions:

1) Implica $f(t,y)$ afitada en D

$\Rightarrow \exists\, M>0,\ |f(t,y)|<M$

De fet: $\delta=\inf\{a, \frac{b}{M}\}$

2) Les f que les satisfan es diuen lipschitzianes.

* En una dimensió implica pendent de la recta secant afitada.
* Es satisfà, en particular, si $\frac{\partial f}{\partial y}$ existeix i es continua en D, ja que, aleshores, suposant $y_1<y_2$, pel Teo. Valor mitjà:

$$f(t,y_2)-f(t,y_1)=\frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\,(y_1-y_2) \qquad y_1<\xi<y_2$$

Prenent valors absoluts:

$$|f(t,y_2)-f(t,y_1)| \leq \underbrace{\sup_{(t,\xi)\in D}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\right\}}_{L}\,|y_2-y_1|$$

3) La condició és suficient.

Ex:

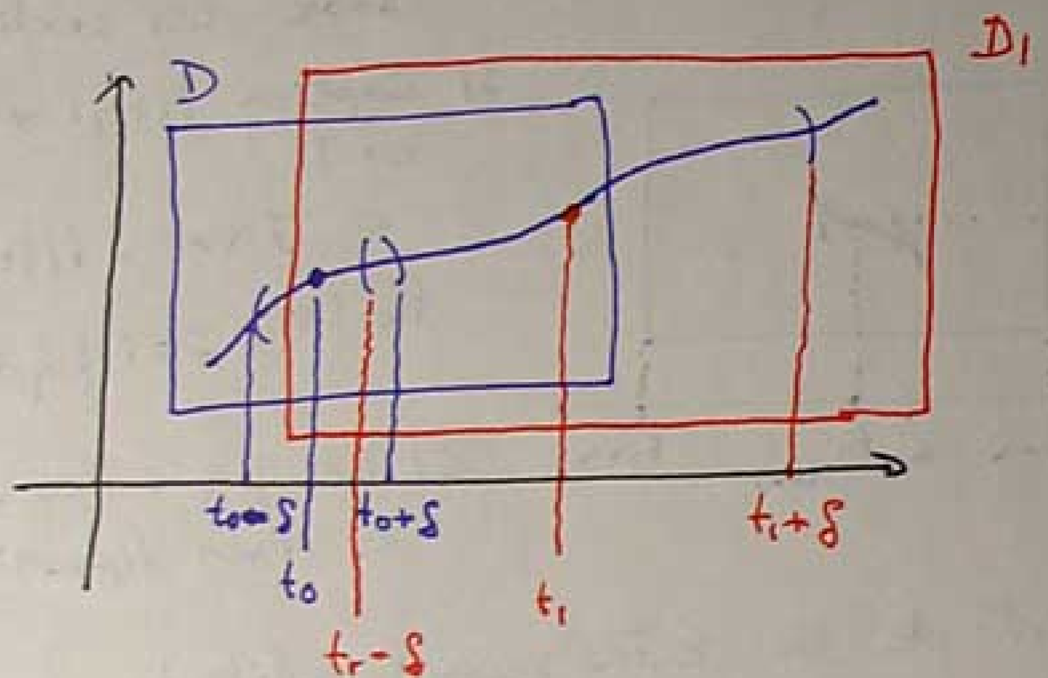
1) $y' = y^{2/3} = f(t,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}} \Rightarrow \text{Problemes a } y=0$$

2) $y' = \dfrac{2y(y-1)}{t} = f(t,y) \Rightarrow$ Problemes de continuïtat per $t=0$

Observació:

Per prolongar l'interval de definició, existència, de la solució.



Quan tot va bé a $D_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Tenim solució a $(t_0 - \delta, t_1 + \delta_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ hem prolongat la solució.

Def:

Diem que una solució és maximal quan no admet més solucions.

Obs:

Interessa un resultat que garanteixi l'existència de solucions maximals.

Teorema 2

Si $f(t,y)$ i $\dfrac{\partial f(t,y)}{\partial t}$ són continues en un domini obert i [redacted] connex $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

El PVI $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$

amb $(t_0, y_0) \in \Omega$, admet una única solució maximal $y(t)$ definida en un cert interval obert I que conté t_0.

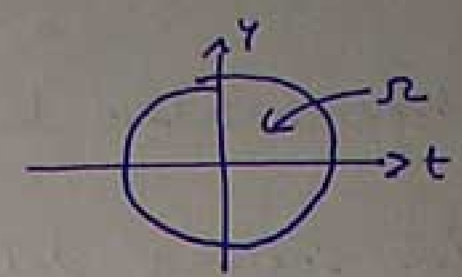
Obs:

1) El teorema dóna condicions suficients.

2) La solució sempre és dins Ω i $(t, y(t)) \subset \Omega$, $\forall t \in I$

Ex:

1) $\dfrac{dy}{dt} = \sqrt{1-(t^2+y^2)}$

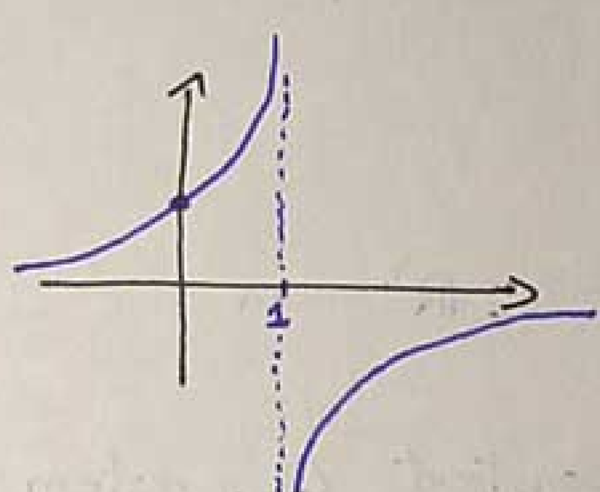


$\Omega = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tq } t^2+y^2 < 1\}$

Qualsevol solució maximal és definida a $I \subset (-1,1)$

2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad \Omega = \mathbb{R}^2$

El fet que $\Omega = \mathbb{R}^2$ no garanteix que la solució, existeixi arreu, ja que és $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$



i l'interval I és $I = (-\infty, 1)$

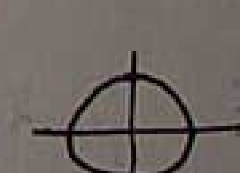
Teorema 3:

25-01-03

Si $f(t,y)$ i $\dfrac{\partial f(t,y)}{\partial y}$ són continues en tot $\mathbb{R}^2$ i l'interval de definició d'una solució maximal $y(t)$ té "un" extrem finit en $t = \alpha$

$$\Longrightarrow \lim_{t \to \alpha} |y(t)| = \infty$$

Ex: $y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow$ les solucions estan definides en un tancat de $\mathbb{R}$ (són les trajectories de les circumferencies).



El teo. 3 es compleix pk $f(t,y) = -\frac{x}{y}$ no és contínua en tot $\mathbb{R}^2$.

Teorema 4:

(Dependencia continua de les solucions d'una EDO respecte de les condicions inicials i els paràmetres).

Si $f(t, y, \overset{\text{paràmetre}}{\alpha})$ és diferenciable de classe C^r en tots els seus arguments $\Longrightarrow$ la solució del PVI $\left\{\begin{array}{l} y' = f(t, y, \alpha) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\}$, que notem $y = y(t, t_0, y_0, \alpha)$ també és de ~~clase~~ classe C^r en tots els seus arguments.

Així, per exemple, per $\overline{y_0}$ proper a y_0 i $\overline{\alpha}$ propera a α, tindríem que la solució $y(t, t_0, \overline{y_0}, \overline{\alpha})$ es manté propera a $y(t, t_0, y_0, \alpha)$.

El següent resultat proporciona una fita del error.

Teorema 5:

Donat el PVI $\left\{\begin{array}{l} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\}$, essent $(t_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ on $f(t, y)$ és contínua i lipschitziana amb constant L, notem $y(t)$ la sol. exacta i $x(t)$ una sol. aproximada en el següent sentit:

$$|x'(t) - y'(t)| \leq \varepsilon \quad \text{i} \quad |x(t_0) - y(t_0)| \leq \varepsilon_0$$

Aleshores es satisfà:

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon \cdot e^{L|t - t_0|} + \frac{\varepsilon}{L}\left[e^{L(t - t_0)} - 1\right]$$

En particular, T unitats de temps després de t_0, tindrem:

$$\left| x(t_0 + T) - y(t_0 + T) \right| \leq \varepsilon_0 \cdot e^{LT} + \frac{\varepsilon}{L}\left[e^{LT} - 1\right]$$

2 b) $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3 \Rightarrow$ Lineal $\left[y' + a(x) y = f(x) \right]$

y_H)

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = 0$$

$$\frac{\cancel{y}\, dy}{dx} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{2dx}{x+1}$$

$$\ln y + C \qquad 2\ln(x+1)$$

$$Ky = (x+1)^2$$

$$y_H = K(x+1)^2$$

y_p)

$$y_p = K(x)(x+1)^2$$

$$y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3$$

$$K'(x+1)^2 + 2\cancel{(x+1)}K(x) - \frac{2}{x+1}\cancel{K(x)}(x+1)^2 = (x+1)^3$$

$$\frac{dK}{dx} = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} \qquad \frac{dK}{dx} = (x+1) \quad . \quad K(x) = \frac{(x+1)^2}{2}$$

$$y_p = \frac{(x+1)^4}{2}$$

y_G)

$$y_G = K(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2} = \boxed{(x+1)^2 \left[K + \frac{(x+1)^2}{2} \right] = y_G}$$

d) $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

$$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y \Rightarrow \frac{dx}{dy} - x\cos y = \sin 2y \quad \text{(LINEAL)}$$

3 $y' + xy^2 - (2x^2+1)y = 1 - x - x^3$

$$y = x + \frac{1}{v} \qquad \frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{-dv/dx}{v^2}\right) = \boxed{1 - \frac{v'}{v^2} = y'}$$

$$1 - \frac{v'}{v^2} + x^3 + \frac{x}{v^2} + \frac{2x^2}{v} - (2x^2+1)\left(x + \frac{1}{v}\right) = 1 - x - x^3$$

$$\cancel{1} - \frac{v'}{v^2} + \cancel{x^3} + \frac{x}{v^2} + \cancel{\frac{2x^2}{v}} - \cancel{2x^3} - \cancel{\frac{2x^2}{v}} \cancel{-x} - \frac{1}{v} = \cancel{1} \cancel{-x} \cancel{-x^3}$$

$$-\frac{v'}{v^2} + \frac{x}{v^2} - \frac{1}{v} = 0$$

$$-v' + x - v = 0$$

$$\boxed{v' + v = x} \Rightarrow \text{LINEAL}$$

$v_H)$ $v_H(x) = Ce^{-x} \Leftarrow \dfrac{dv}{dx} = -v$

$v_p)$
$$\left.\begin{aligned} &v_p(x) = C(x)\cdot e^{-x} \\ &C'e^{-x} - \cancel{Ce^{-x}} + \cancel{Ce^{-x}} = x \\ &dC = x\cdot e^{x}\,dx \\ &C(x) = e^{x}(x-1) \end{aligned}\right\} \quad v_p(x) = (x-1)$$

$v_G)$ $\boxed{v_G = \dfrac{C}{e^{x}} + x - 1} \Rightarrow$ Desfem: $\boxed{y(x) = x + \dfrac{1}{Ce^{-x} + x - 1}}$

4 $y' = f(ax+by)$

$z = ax + by$

$z' = a + by'$

$\frac{z'-a}{b} = y'$

$\frac{z'-a}{b} = f(z)$

$z' = a + bf(z)$

$\frac{dz}{a+bf(z)} = dx \Rightarrow$ Funció de variables separables es pot integrar i per tant té solució.

↳ No es necessari demanar que $b \neq 0$, pk llavors ja no cal fer el canvi, es pot separar directament.

5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay+bx+e}{cy+dx+f} \qquad a \nexists \quad ad - cb \neq 0$$

$y = v + k \qquad y' = v'$

$x = u + h \qquad x' = u'$

Numerador: $a(v+k) + b(u+h) + e$

Denominador: $c(v+k) + d(u+h) + f$

$av + bu + ak + bh + e = av + bu$

$cv + du + ck + dh + f = cv + du$

$$\left.\begin{array}{l} ak + bh = -e \\ ck + dh = -f \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Per k sist. sigui compatible determinat, s'ha de complir que el det $= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow ad - cb \neq 0$

L'equació dif. quedaria:

$\frac{dv}{du} = \frac{av+bu}{cv+du} \Rightarrow$ Edo Homogènia

b) $ad - bc = 0$

$\Updownarrow$

$\exists \lambda \ \text{t.q.} \ \lambda(a,b) = (c,d)$

$\Downarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + bx + e}{\lambda a y + \lambda b x + f} = \frac{ay + bx + e}{\lambda(ay + bx) + f} \overset{\text{Canvi}}{\Rightarrow} \boxed{z = ay + bx}$$

6a

$$(2x + 5 - 4y)\, y' = x - 2y + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 3}{2x - 4y + 5} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0 \qquad \begin{aligned} z &= x - 2y \\ z' &= 1 - 2y' \end{aligned}$$

JA EL TENIM FET, EL VAI FER EN ELS PROBLEMES.

6b

$$(x - y + 3)\,dx + (3x + y + 1)\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{3x + y + 1}{x - y + 3}\right)^{-1} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned} v &= y - k \\ u &= x - h \end{aligned}\right\} \begin{aligned} dv &= dy \\ du &= dx \end{aligned} \qquad \frac{dv}{du} = -\left(\frac{3(u+h) + (v+k) + 1}{(u+h) - (v+k) + 3}\right)^{-1}$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u - v + h - k + 3}{3u + v + 3h + k + 1} \qquad \left.\begin{aligned} h + (-k) &= -3 \\ 3h + k &= -1 \end{aligned}\right\} \boxed{\begin{aligned} k &= 2 \\ h &= -1 \end{aligned}}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{v - u}{3u + v}$$ ... MUST BE CONTINUED

$\Rightarrow$ Homogènia ($zu = v$)

7

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \qquad z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\cdot y'$$

$$z = y^{1-\alpha} \qquad y' = \frac{z'\cdot y^{\alpha}}{1-\alpha}$$

$$\frac{z'\cdot y^{\alpha}}{1-\alpha} + p(x)\cdot y^{1-\alpha} = q(x)y^{\alpha}$$

$\Big\downarrow$ Dividim per $\frac{y^{\alpha}}{y^{\alpha}}$

$$\frac{z'\cdot y^{\alpha}}{(1-\alpha)\cdot y^{\alpha}} + \frac{p(x)\cdot y}{y^{\alpha}} = q(x)\frac{y^{\alpha}}{y^{\alpha}}$$

8a

$xy' + y = x^4y^3$ Bernoulli amb $\alpha = 3$.

$z = y^{-2}$: Canvi

$$z' = -2y^{-3}\cdot y' \Rightarrow y' = \frac{z'\cdot y^3}{-2}$$

$$\frac{z'xy^3}{-2} + y = x^4y^3 \xRightarrow{\frac{1}{y^3}} \frac{z'x}{-2} + y^{-2} = x^4$$

$$z' = -2x^3 + \frac{2y^{-2}}{x}$$

8b

$$2y'\cdot\sin x + y\cos x = y^3(x\cos x - \sin x)$$

$$y' + \underbrace{\frac{1}{2\,tg\,x}}_{p(x)}y = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{tg\,x} - 1\right)}_{q(x)}y^3$$

9

Previ:

PVI $\left\{\begin{array}{l} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\}$ equival a resoldre $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds$

És a dir tota solució del PVI ho és de la eq. integral i al revés.

Dem: $\Leftarrow$)

Siguí $y(t)$; $\begin{array}{l} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \quad \left| \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, y(s))\, ds \xrightarrow{} 0 \Rightarrow y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$)

$$\begin{array}{l} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \Rightarrow y' = f(t,y) \qquad t = s \;\Downarrow\; dt = ds$$

$y = y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

$$dy = f(t, y(t))\, dt$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \Rightarrow y - y_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

9a a) $y(t) = 1 + \int_0^t y(s)\, ds$

Equivalent al PVI $\left\{ \begin{array}{l} y' = y(s)\Big]_0^t \Rightarrow y' = y \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$

$$\frac{dy}{y} = dx \qquad y = ke^x \Rightarrow y_0 = ke^0 = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\boxed{y(x) = e^x}$$

b) $y(t) = t + \int_0^t y^2(s)\, ds$ Equival al PVI $\left\{ \begin{array}{l} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx \qquad \text{arctg}\, y = x + c \Rightarrow y = \text{tg}(x + c) \qquad 0 = \text{tg}(c)$$

$$\boxed{y = \text{tg}\, x} \qquad c = 0$$

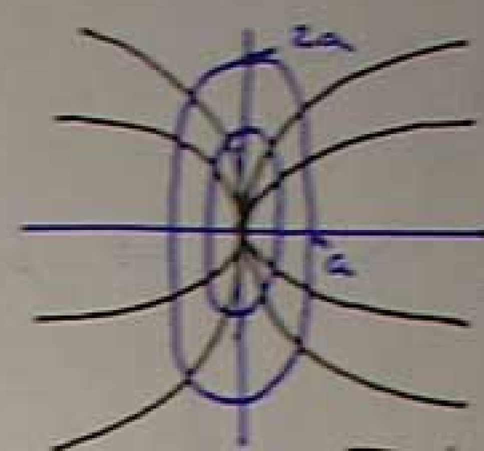
10 a) $x^2+y^2=R^2$

EDO: $2x+2yy'=0 \Rightarrow \boxed{y'=-\frac{x}{y}}$

TO: $y'=\frac{y}{x}$ | $\ln y=\ln x+c$

$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ | $\boxed{y=kx}$

c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4a^2}=1$



EDO: $x^2+\frac{y^2}{4}=a^2$

$2x+\frac{2}{4}yy'=0$

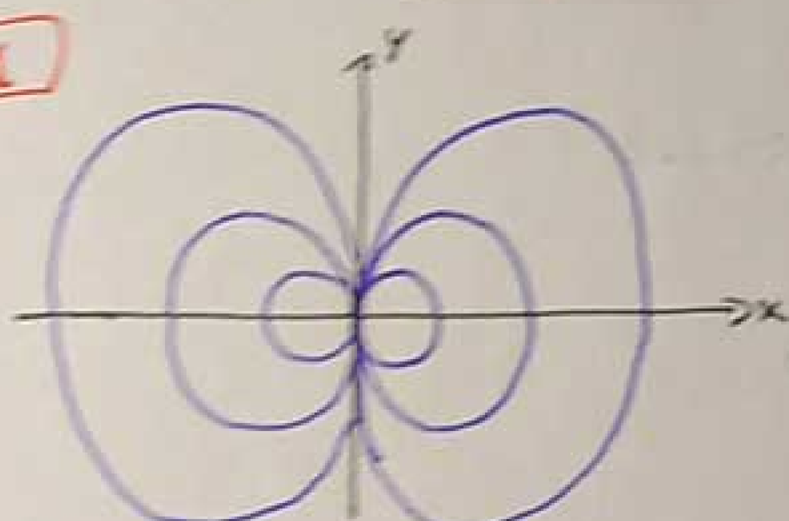
$y'=\frac{-4x}{y}$

TO: $y'=\frac{y}{4x}$

$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{4x} \Rightarrow \ln y=\frac{1}{4}\ln x+c$

$\boxed{y^4=kx}$

11



$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$(x-a)^2+y^2=R^2=a^2$

$x^2+\cancel{a^2}-2ax+y^2=\cancel{a^2}$

$a=\frac{x^2+y^2}{2x}$

$$0=\frac{(2x+2yy')2x+2(x^2+y^2)}{4x^2}=\frac{2(x+yy')x+(x^2+y^2)}{2x^2}=0$$

$2x^2+2yy'x-(x^2+y^2)=0$

$y'=\frac{x^2+y^2}{2yx}$

TO: $y'=\frac{-2yx}{x^2+y^2}$ EDO Homogénea!! $\boxed{y=ux}$ ...

TEORIA:

$$\boxed{\begin{array}{ll} y=y(x): & \text{RTangent en } (x_0,y_0) \Rightarrow y-y_0=y'(x_0)(x-x_0) \\ & \text{RNormal en } (x_0,y_0) \Rightarrow y-y_0=\frac{-1}{y'(x_0)}(x-x_0) \end{array}}$$

12 Busquem $y=y(t)$

R. Normal: $y-y_0=\frac{-1}{y'(x_0)}(x-x_0)$

$\exists (a,b) \Rightarrow -(y_0-b)=\frac{+1}{y'(x_0)}(x_0-a) \Rightarrow b-y_0=\frac{-1}{y'(x_0)}(a-x_0) \quad \forall (x_0,y_0)$

$\Rightarrow b-y=\frac{-1}{y'}(a-x)$

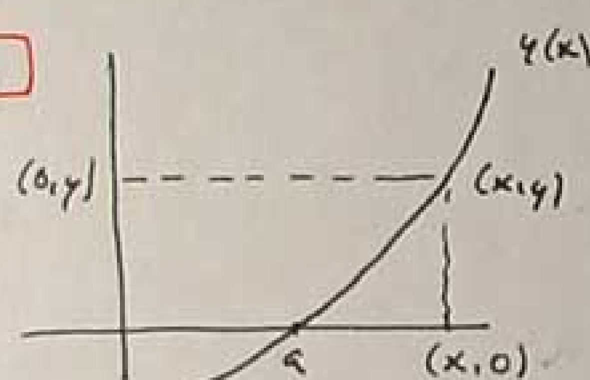
$(b-y)\,dy=-(a-x)\,dx$

Circumferencia de centre (a,b)

$\frac{(y-b)^2}{2}=-\frac{(x-a)^2}{2}+K \Longrightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=C}$

30-09-03

13



$\int_a^x y(s)\,ds=\frac{K}{3}xy \quad K=1,2$

$y=\frac{K}{3}(y+xy')$

$3y-Ky=xy'$

$\frac{dy}{y}=\frac{3-K}{Kx}dx$

$\ln y=\left(\frac{3}{K}-1\right)\ln x+\bar{C}$

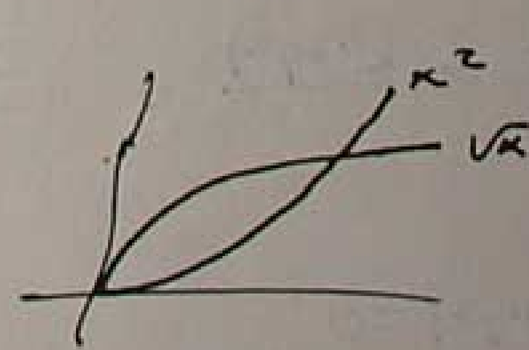
$\downarrow$

$y(x)=Cx^{\frac{3}{K}-1}$

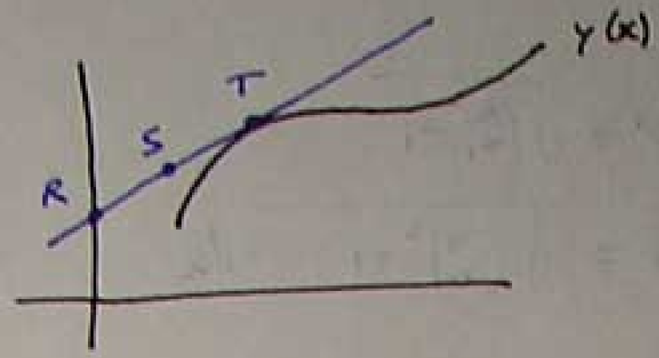
$K=1 \rightarrow y(x)=Cx^2$

$K=2 \rightarrow y(x)=C\sqrt{x}$

$\Longrightarrow$



14



$y(2)=1$

RT a "T":

$$y-y_0 = y'(x_0)(x-x_0)$$

R) $x_R=0 \quad y_R = y_0 - x_0 y'(x_0)$

S) $x_S = \frac{x_0}{2}$

$$y_S = \frac{y_0+y_R}{2} = \frac{y_0+y_0-x_0y'(x_0)}{2}$$

$$y_S = y_0 - \frac{x_0 y'(x_0)}{2}$$

$$S = \left(\frac{x_0}{2},\, y_0 - \frac{x_0 y'(x_0)}{2}\right)$$

$\forall (x_0, y_0)$ de la corba buscada

$\Downarrow$

$$S = \left(\frac{x}{2},\, y - \frac{xy'}{2}\right)$$

S s'ha de situar sobre $2y = x^2$

$\Updownarrow$

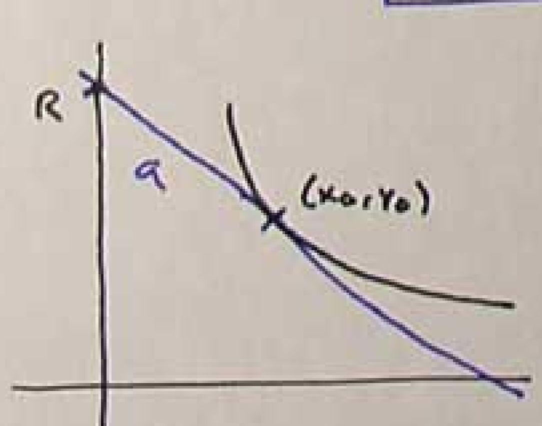
$2y - xy' = \frac{x^2}{4}$ } EDO a Integrar $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y' - \frac{2}{x}y = -\frac{x}{4} \Rightarrow$ Lineal

$$\Rightarrow \quad \underbrace{y(x) = x^2\left(C - \tfrac{1}{4}\ln|x|\right) \quad \text{amb} \quad y(2)=1}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{4}\left(1 + \ln 2 - \ln|x|\right)}$$

15



RT) $y - y_0 = y'(x_0)(x-x_0)$

R) $x_R = 0 \quad y_R = y_0 - x_0 y'(x_0)$

$$a^2 = (x_0-0)^2 + (y_0-y_R)^2$$

$$x_0^2 + (y_0 - (y_0 - x_0y'(x_0)))^2 = a^2$$

$$x_0^2 + x_0^2(y'(x_0))^2 = a^2$$

$\forall (x_0, y_0)$ de la corba

Per tant ho escrivim:

$$x^2 + x^2 y'^2 = a^2 \qquad 1 + y'^2 = \frac{a^2}{x^2} \qquad y' = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1}$$

$$x^2(1 + y'^2) = a^2 \qquad y'^2 = \left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1 \qquad dy = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1} \cdot dx$$

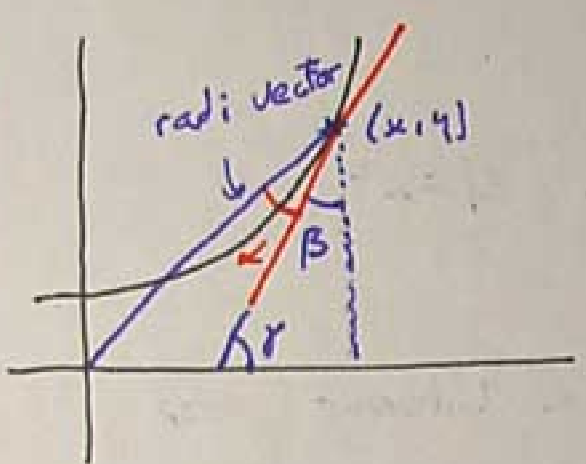
Fem la integral:

$$\int \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1} \cdot dx = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx = \underset{t^2 = a^2 - x^2}{\cdots} = \boxed{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a}{2} \ln \left[\frac{\sqrt{a^2 - x^2} - d}{\sqrt{a^2 + x^2} - d}\right] + C}$$

Manipulant més:

$$\pm y = \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + C$$

16



$$tg(\alpha + \beta) = \frac{x}{y} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{K + \frac{1}{y'}}{1 - \frac{K}{y'}} \qquad tg\,\alpha = K \qquad tg\,\beta = \frac{1}{tg\,\gamma} = \frac{1}{y'}$$

$\Downarrow$

Resoldre l'EDO

19

$${}^{226}Ra \longrightarrow {}^{222}Rn \qquad T = 1622 \text{ anys}$$

$${}^{222}Rn \longrightarrow {}^{218}Po \qquad T = 3'28 \text{ dies}$$

$$\Delta Q_{RA} = -K\, Q_{RA} \cdot \Delta t$$

$$\Delta Q_{RN} = -\beta\, Q_{RN} \cdot \Delta t + |\Delta Q_{RA}|$$

A curra

$$\begin{cases} \Delta Q_{RA} = -\alpha\, Q_{RA} \cdot \Delta t \\ \Delta Q_{RN} = -\beta\, Q_{RN} \Delta t + \alpha\, Q_{RA} \cdot \Delta t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\Delta Q_{RA}}{\Delta t} = -\alpha Q_{RA} \\ \frac{\Delta Q_{RN}}{\Delta t} = -\beta Q_{RN} + \alpha Q_{RA} \end{cases}$$

16

$\Delta t \to 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dQ_{RA}}{dt} = -\alpha Q_{RA} \implies \boxed{Q_{RA}(t) = ke^{-\alpha t} = Q_{RA_0} e^{-\alpha t}} \\ \dfrac{dQ_{RN}}{dt} = -\beta Q_{RN} + \alpha Q_{RA} \end{array} \right.$

$Q_{RA_0} = Q_{RA_0}(0)$

EDO LINEAL

$\Downarrow$

Integrant:

$$Q_{RN}(t) = Ce^{-\beta t} - \frac{\alpha Q_{RA_0}}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t}$$

$Q_{RN_0} = Q_{RN_0}(0)$

$$\boxed{Q_{RN}(t) = Q_{RN_0} e^{-\beta t} - \frac{\alpha Q_{RA_0}}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t}}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\ln 2}{T_{Ra}}} \qquad \boxed{\beta = \frac{\ln 2}{T_{RN}}}$$

20

$$\frac{dp}{dt} = \overset{0'012}{\alpha} p - 10^{-5} p^2 - 2 \qquad p(0) = 10^5 \quad p(t) = ? \quad p(+\infty) = ?$$

$\hookrightarrow$ variables separables

$$\frac{dp}{\alpha p - 10^{-5} p^2 - 2} = dt \implies 10^5 \frac{dp}{1200 p - p^2 - 200000} = dt$$

22

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv \implies \frac{dv}{dt} = -g - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\lambda} v \implies \frac{dv}{dt} = -g - \lambda v \implies \text{LINEAL}$$

v_H)

$$\frac{dv}{dt} + \lambda v = 0 \;, \implies \frac{dv}{\lambda v} = -dt \qquad \boxed{v_H = ke^{-\lambda t}}$$

v_p)

$v_p = \alpha \implies$ Ktant.

$v_p' = 0$

$0 + \lambda\alpha = -g \implies \boxed{\alpha = -g/\lambda}$

$$\boxed{v(t) = ke^{-\lambda t} - \frac{g}{\lambda}}$$

$v(0) = v_0 = k - g/\lambda$

$$\boxed{v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} - g/\lambda}$$

$$h\,\text{màx} \implies v = 0 \implies \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right)e^{-\lambda t} - \frac{g}{\lambda} = 0 \implies \boxed{T = \frac{1}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{\lambda v_0}{g}\right)}$$

$$h\,\text{màx} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = v \\ h(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Resoldre.}$$

$$\Downarrow$$

$$h(t) = \frac{1}{\lambda}\left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right)\left[1 - e^{-\lambda t}\right] - \frac{g}{\lambda}t \qquad h_{\text{màx}} = h(t)$$

2-10-03

16 ... CONTINUANT

$$\frac{x}{y} = \frac{k + \frac{1}{y'}}{1 - \frac{k}{y'}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{ky'+1}{y'-k}$$

$$y' = \frac{kx+y}{x-ky} \quad \text{EDO HOMOGÈNIA}$$

$$y = ux \qquad y' = u + u'x$$

$$u'x + u = \frac{kx+ux}{x-kux} \Rightarrow u'x = \frac{k+u}{1-ku} - u$$

$$u'x = \frac{k+u-u+ku^2}{1-ku} \qquad \frac{1-ku}{k(1+u^2)}\,du = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{k}\int \frac{du}{(1+u^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{2u\,du}{1+u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{k}\,\text{arctg}(u) - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x + \overline{C}$$

$$\frac{1}{k}\,\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln x + \overline{C}$$

$$\frac{1}{k}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = \ln x + \overline{C}$$

$$\frac{1}{k}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \cancel{\frac{1}{2}\ln x^2} = \cancel{\ln x} + \overline{C}$$

$$\frac{1}{k}\,\text{arctg}(\text{tg}\,\theta) - \frac{1}{2}\ln(r^2) = \overline{C}$$

$$\frac{\theta}{k} = \ln r + \overline{C}$$

$$e^{\theta/k} = e^{\overline{C}}\cdot r \Rightarrow \boxed{r(\theta) = C\cdot e^{\theta/k}}$$

23

$$m\frac{dv}{dt} = -Kv^2 \Rightarrow \alpha = \frac{K}{m}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\alpha v^2 \\ v(0) &= v_0 \end{aligned}\right\} \quad v(t) = \frac{v_0}{1+\alpha v_0 t}$$

$$\frac{dh}{dt} = v \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{v_0}{1+\alpha v_0 t}$$

$$h(t) = \frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha v_0 t) + C \qquad h(0)=0 \Rightarrow C=0$$

$$\left.\begin{aligned} v(t) &= \frac{v_0}{1+\alpha v_0 t} \\ h(t) &= \frac{1}{\alpha}\ln(1+v_0 t\cdot\alpha) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{t \approx 8'K\cdot 10^{-3}\,s}$$

24

$$\frac{dT}{dt} = k(T-T_0)$$

$$\frac{dT}{dt} = KT - KT_0 \Rightarrow T' - KT = -KT_0 \rightarrow \text{LINEAL}$$

$$T(t) = T_0 + Ce^{kt}$$ $\Rightarrow$ El refredament en 15 min de $100° \rightarrow 60°$ permet trobar la K.

$$\boxed{t = 60\text{ min}}$$

* Pràctiques

METODES NUMÈRICS DE RESOLUCIÓ D'EDOS:

Donat el PVI (o de Cauchy) $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

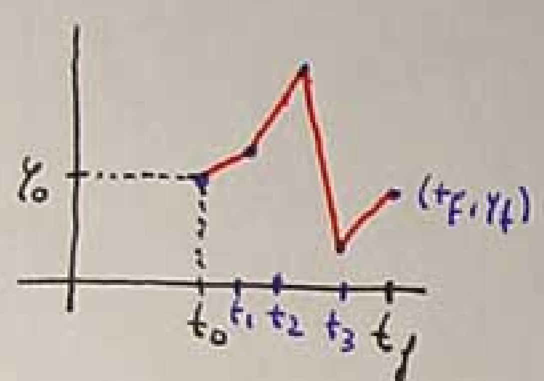
Intentarem aproximar la solució numèricament.

Objectiu:

Trobar $y(t_f)$ per a un cert $t_f > t_0$

1r. Mètode:

MÈTODE D'EULER



- Dividim $[t_0, t_f]$ en subintervals (N parts iguals) de longitud $h = \frac{t_f - t_0}{N} \rightarrow$ pas d'integració
- Aproximem $y(t)$ per la recta tangent.

$$y(t) = y(\bar{t}) + y'(\bar{t})(t - \bar{t})$$

$$y(t) = y(\bar{t}) + f(\bar{t}, y(\bar{t}))(t - \bar{t})$$

Iteració

$$y(t_1) = y(t_0) + f(t_0, y(t_0))(t_1 - t_0)$$

$$y(t_2) = y(t_1) + f(t_1, y(t_1))(t_2 - t_1)$$

$$\vdots$$

$$y(t_k) = y(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))(t_k - t_{k-1})$$

Si $y(t_k) = y_k$ $\quad h = t_k - t_{k-1}$

$\Rightarrow y_k = y_{k-1} + f(t_{k-1}, y_{k-1}) \cdot h \qquad y' = f$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k) \cdot h}$$

Control de l'error:

- En cada iteració → el comès en aproximar una funció per la recta tangent ⇒ diem que és de 2n ordre $[O(h^2)]$ pk el terme quadràtic del desenvolupament de Taylor l'afita.

- Error acumulat → $\varepsilon_r = O(h)$

2. Mètode d'Euler millorat ó de Runge-Kutta:

Pas d'integració ↓ ⇒ Error ↓

Problema → cost computacional

Interessen mètodes que presentin un error d'ordre superior ⇒ la idea és prendre + ~~temps~~ termes en el desenvolupament de Taylor.

TEMA 2: Eq Diferencials de segon ordre

1. INTRODUCCIÓ:

Def: Anomenem l'equació diferencial ordinaria d'ordre "n" a la relació de la forma:

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

Def: Anomenem solució de l'EDO (1) en un interval real ($I \in \mathbb{R}$) a tota funció $y = y(x)$, $y \in C^n(I)$, tq $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ $\forall x \in I$

Ex: $y = kx + c$ es solució de $y'' = 0$

* Condicions suficients d'$\exists!$ de solucions: $\exists!$ - Existència única

TEOREMA:

Donada l'EDO (1), amb $f: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.q.

1) f contínua en D

2) $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ existeixen i són contínues a D respecte $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$

Aleshores:

$\forall (x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$, $\exists!$ $y = y(x)$ solució de (1) en un cert interval de x_0, verificant $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0)$.

Ex: $\left.\begin{array}{l} y''=0 \\ y'(0)=1 \\ y(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Satisfà el teorema

Solució: $\boxed{y = x}$.

2. REDUCCIÓ DE L'ORDRE

En alguns casos es pot reduir l'ordre de l'EDO d'ordre "n" fent manipulacions elementals:

1) $y^{(n)} = f(x) \Rightarrow$ integrem successivament

$\hookrightarrow y^{(n-1)} = \int f(x)dx + K_0$

$\hookrightarrow y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)dx\right]dx + K_0x + K_1$

Ex: $y''' = x$

$y'' = \frac{x^2}{2} + K_0$

$y' = \frac{x^3}{6} + K_0 x + K_1$

$y = \frac{x^4}{24} + \frac{K_0 x^2}{2} + K_1 x + K_2$

2) $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \Rightarrow$ Falten les primeres $k-1$ derivades.

Canvi de variable: $\boxed{p = y^{(k)}} \Rightarrow$ Nova EDO d'ordre $n-k$

Recordar desfer el canvi. Integrar k vegades. $y(x) = \int \cdots_k \int p(x)dx + P_{k-1}(x)$

Ex: $y^{(5)} - \frac{1}{x} y^{(4)} = 0 \Rightarrow p = y^{(4)} \Rightarrow p' - \frac{1}{x} p = 0$

6-10-03

3) $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \Rightarrow$ No hi ha variable independent

El canvi: $\boxed{p = y'} \rightarrow$ redueix l'ordre en 1 grau

*Molt útil si és de segón grau, pk queda de 1r grau.

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}} \Leftarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = p}$$

$$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = \left[\frac{dp}{dy}\frac{dp}{dy} + p\frac{d^2p}{dy^2}\right]p = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy}}$$

Un cop fet això tindrem: $F(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0 \Rightarrow$ Si es pot resoldre

Obtindrem: $p = p(y)$; caldria desfer el canvi: $\frac{dy}{dx} = p(y)$

$\boxed{\frac{dy}{p(y)} = dx \Rightarrow \text{Si podem integrar, ja estarà}}$

Ex: 1c) $yy'' - y'^2 = 0$

$y' = p \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$

$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{p}\,dp}{p^{\cancel{2}}} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p = \ln y + \bar{C} \Rightarrow \boxed{p = C_1 y}$

Desfem canvi:

$\frac{dy}{dx} = p(y) = C_1 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln y = C_1 x + \bar{C_2}$

$$\boxed{y(x) = C_2 e^{C_1 x}}$$

3. EDOS LINEALS D'ORDRE n:

Def: Anomenem <u>EDO lineal d'ordre n</u> a tota EDO de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

On $b(x)$, $a_i(x)$ continues $\forall i$ de $a_i(x)$

<u>Obs:</u>

1) Si $b(x)=0 \Rightarrow$ EDO Homogènia

2) Si $a_n(x) \neq 0 \quad \forall x \Rightarrow$ L'EDO es pot escriure:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = \mp(x)$$

Encara més; notant:

$$f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = \mp(x) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x)\, y^{(i)}$$

↳ L'EDO RESULTA

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Essent:

a) $f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ contínua

b) $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} = -p_k(x)$ contínua $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$

} Satisfà el TEO. $\exists !$ de solucions

Teorema:

Donades $\{p_0(x), \ldots, p_{(n-1)}(x), f(x)\}$ contínues en $I=(\alpha, \beta)$,

el PVI (o problema de Cauchy)

$$\left.\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x) y' + p_0(x) y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}\right\}$$ té solució única $\forall x_0 \in I$

3.1 Operador derivació:

Def: Definim l'operador derivació D

$$D: C^1(I) \longrightarrow C(I)$$
$$y \longmapsto Dy = \frac{dy}{dx} = y'$$

Obs:

$$y^{(i)} = D^{(i)} y = (\underbrace{D \circ \ldots \circ D}_{\overrightarrow{i \text{ vegades composat}}})(y)$$

D'aquesta manera definim:

$$L: C^n(I) \longrightarrow C(I)$$
$$y \longmapsto L[y]$$

On: $L = D^n + D^{n-1} \cdot p_{n-1}(x) + \cdots + p_1(x) \cdot D + p_0 \cdot \underset{\text{identitat}}{\mathbb{I}}$

Segons això, l'EDO inicial es pot escriure:

$$L[y] = f(x)$$

Obs:

L'EDO homogènia associada és: 1) $L[y]=0$

2) $L[\alpha y_1+\beta y_2]=\alpha L[y_1]+\beta L[y_2]$ lineal

Teorema:

La solució general de l'EDO $L[y]=f(x)$ és de la forma

$y_G(x)=y_H(x)+y_p(x)$

On: $y_H \rightarrow$ solució de la homogènia $\equiv \ker\{L\}$

$y_p \rightarrow$ Solució particular de l'EDO. $(L[y_p]=f(x))$

3.2 Dependencia lineal de funcions:

Def: Diem que $\{y_1(x),\dots,y_n(x)\}$ són linealment dependents, en $I \Leftrightarrow$ la combinació lineal

$\alpha_1 y_1(x)+\dots+\alpha_n y_n(x)=0$

admet alguna solució diferent a la trivial $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq(0,\dots,0)$ $\forall x\in I$. En cas contrari direm que són linealment independents.

Ex: 1) $\{1,\cos^2x,\sin^2x\}$

$\alpha_1\cdot 1+\beta\cdot\cos^2x+\gamma\sin^2x=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

en cas que: $\beta=\gamma=-\alpha$

L.D en $\mathbb{R}$ ↳ linealment dependents

Ex: 2) $\{1,x,x^2\}$

$\alpha+\beta x+\gamma x^2=0 \Rightarrow$ Suposem que són LD

↳ Com a molt es pot anul·lar dos cops, per tant no s'anul·la en tot un interval.

CONTRADICCIÓ

Obs:

1/ El fet que $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ intersequin en un punt no destrueix la indep. lineal.

2/ El fet que no intersequin no garanteix la indep. lineal.

EINA ÚTIL:

Introduim una eina d'estudi de la dependencia lineal: El Wronskià

Def:

Sigui $\{y_1 \cdots y_n\} \in C^n(I)$

Anomenem determinant de Wronsky o Wronskià de $\{y_1 \cdots y_n\}$ en $x \in I$ a:

$$W[y_1, \dots, y_n](\cancel{x}) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Prop:

Si $\{y_1 \cdots y_n\}$ són LD (Linealment dep.) en $I \Rightarrow W[y_1 \cdots y_n](x) = 0 \ \forall x \in I$

Dem:

$\{y_1 \cdots y_n\}$ són LD $\Rightarrow \exists \ \alpha_1 y_1 + \cdots \alpha_n y_n = 0 \ \forall x \in I$

$$\alpha_1 y_1' + \cdots \alpha_n y_n' = 0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0$$

Matriu del sistema: $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ amb $\alpha_i \neq 0$

$$M = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

És un sistema homogeni $n \times n$ amb solució diferent de la trivial $\Rightarrow$ el det. de la matriu del sistema $= 0 \Rightarrow W[y_1 \dots y_n](x) = 0 \ \forall x \in I$

Obs:

1) El recíproc del teorema no és, en general cert.

És a dir, $W[y_1 \dots y_n](x) = 0 \not\Rightarrow LD$

Ex: $y_1(x) = \begin{cases} x^2 & -1 < x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

Provar que:

Són LI

$W = 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$

$y_2(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

* 2) Ara bé, en el cas que $\{y_1 \dots y_n\}$ solució d'una EDO lineal homogènia, sí que $\boxed{W = 0 \Leftrightarrow LD}$

3.3 EDO lineal homogènia:

1) Volem la solució general de:

$$L[y] = 0$$

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + p_1(x) y' + p_0(x) \mathrm{I} = 0$$

2) Aquesta solució vindria donada per una base del $\ker\{L\}$

Així, si $\ker\{L\} = \{y_1 \dots y_n\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n \qquad \lambda_i \text{ const. arbitràries}$$

Def:

Donada l'EDO $L[y]=0$, direm que $y_1 \cdots y_n$ en constitueixen un sistema fonamental de solucions quan $\ker\{L\} = \{y_1 \cdots y_n\}$, és a dir, quan:

a) $y_1 \cdots y_n$ solucions

b) $W(y_1 \cdots y_n) \neq 0$ (LI)

Prop:

Donades $y_1 \cdots y_n \in C^{\infty}(I)$ i $W(y_1 \cdots y_n)(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 \cdots y_n$ són SF d'una única EDO lineal homogènia d'ordre n.

Dem:

Es pot comprovar que $W(y_1 \cdots y_n, y) = 0$ és l'EDO en qüestió!

Ex: Buscar l'EDO que té $\{e^t, e^{-t}\}$ com a SF

a) Comproven que són LI:

$$W = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Trobem-lo:

$$W(e^t, e^{-t}, y) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} & y \\ e^t & -e^{-t} & y' \\ e^t & e^{-t} & y'' \end{vmatrix} = e^t \cdot e^{-t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & y' \\ 1 & 1 & y'' \end{vmatrix} = 0$$

$$W(e^t, e^{-t}, y) = 0 = -y'' + y' + y + y - y'' - y' = -2(y'' - y) = 0$$

$$\boxed{y'' - y = 0}$$

3.4. Reducció de l'ordre - Mètode de d'Alambert:

No hi ha procediment general per resoldre $L[y]=0$, excepte en el cas de coeficients constants. Ara bé, si saben que $y(x), y_1(x)$ és solució de $L[y]=0$.

El canvi $\boxed{y(x) = y_1(x)\cdot \int u\cdot dx}$ $\Rightarrow$ Rebaixa l'ordre a primer grau.

Ex: $xy'' - xy' + y = 0$

a) comprovar que $y_1(x) = x$ és solució

b) trobar un SF

a) $y_1 = x$

$y_1' = 1 \quad \Rightarrow \quad x\cdot 0 - x1 + x = 0$

$y_1'' = 0 \qquad\qquad 0 = 0$ OK!!

b) Fem el canvi: $y = x\int u$

$$y' = x\cdot u + \int u$$

$$y'' = u + xu' + u$$

$$x[u + xu' + u] - x[xu + \int u] + x\int u = 0$$

$$xu + x^2u' + xu - x^2u - \cancel{x\int u} + \cancel{x\int u} = 0$$

$$2xu + x^2u' - x^2u = 0$$

$$x^2u' = x^2u - 2xu$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{x^2 - 2x}{x^2} \Rightarrow \frac{du}{u} = \left(1 - \frac{2}{x}\right)dx$$

$$\ln u = x - 2\ln x + C_1$$

$$u = C_1e^x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow y_2(x) = x\int\left[e^x + \frac{1}{x^2}\right]dx =$$

Perquè és una suma?

$C_1 = 1$

$$= x\left(e^x - \frac{1}{x}\right) = \boxed{xe^x - 1}$$

$SF = \{x, xe^x - 1\}$

3.5 Variació de constants:

Generalitzem el mètode de les EDO's de 1r ordre:

- Busquem una solució particular de:

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\, y' + p_0 y = f(x)$$

- Sabem que $\{y_1 \dots y_n\}$ són SF de $L[y] = 0$
- Assagem solució particular de la forma:

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + \dots + c_n(x) y_n(x) = \sum_i c_i(x)\, y_i(x)$$

- Quan portem y_p a $L[y] = f(x)$ ens trobem amb una equació i "n" incògnites $\rightarrow$ ens calen $n-1$ equacions més.

Per trobar-les, fem:

$$y_p' = \sum_i c_i' \cdot y_i + \sum_i c_i y_i' \Rightarrow \text{imposem } \sum_i c_i' y_i = 0$$

$$y_p'' = \sum_i c_i' \cdot y_i' + \sum_i c_i y_i'' \Rightarrow \text{imposem } \sum_i c_i' y_i' = 0$$

$$\vdots$$

$$y_p^{(n-1)}(x) = \sum_i c_i' \cdot y_i^{(n-2)} + \sum_i c_i y_i^{(n-1)} \Rightarrow \text{imposem } \sum_i c_i' y_i^{(n-2)} = 0$$

De moment tenim $n-1$ eq. del tipus $\sum_i c_i' y_i^{(k)} = 0$, $k = 0, \dots, n-2$

Tornem a derivar:

$$y_p^{(n)} = \sum_i c_i y_i^{(n-1)} + \sum_i c_i y_i^{(n)}$$

c_i hauria de ser prima, no?

Portem-ho a l'EDO:

$$\sum_i c_i' y_i^{(n-1)} + \sum_i c_i y_i^{(n)} + p_{n-1}(x) \sum c_i y_i^{(n-1)} + \dots + p_1(x) \sum_i c_i y_i' +$$

$$+ p_0(x) \sum c_i y_i = f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_i c_i' y_i^{(n-1)} + \sum_i c_i \underbrace{\left[y_i^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y_i^{(n-1)} + \dots + p_1(x) y_i' + p_0(x) y_i \right]}_{\text{Val zero } \forall i \text{, pk són solucions de la Homogènia}} = f(x)$$

El sistema que queda és:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i c_i' y_i^{(k)} = 0 \qquad k = 0, \dots, n-2 \\ \displaystyle\sum_i c_i' y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

Matricialment:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}}_{\text{El seu det. és el Wronskià}} \begin{bmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

↳ No s'anul·la

↳ solució única

Designant: $\overline{W}(y_1 \dots y_n)(x)$ la matriu associada al Wronskià podem escriure:

$$\overline{W}(y_1, \dots, y_n)(x) \cdot \begin{bmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{bmatrix} = \overline{W}^{-1}(y_1 \dots y_n)(x) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

↳ Només falta integrar!!

Ex: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$

a/ Provar que $\{\sin x, \cos x\}$ és SF de l'Homogènia.

b) Trobar la solució general.

a/

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{LI}$$

També són solució $\Rightarrow$ SF!!

$$y_p(x) = c_1(x)\sin x + c_2(x)\cos x$$

$$y_p'(x) = c_1'(x)\sin x + c_1(x)\cos x + c_2'(x)\cos x - c_2(x)\sin x$$

$$c_1'\sin x + c_2'\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i c_i' y_i^{(n-1)} = 0$$

$$y_p'(x) = c_1(x)\cos x - c_2(x)\sin x$$

Portem-ho a l'EDO:

$$-c_1\cancel{\sin x} + c_1'\cos x - c_2'\sin x - c_2\cancel{\cos x} + c_1\cancel{\sin x} + c_2\cancel{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$c_1'\cos x - c_2'\sin x = \frac{1}{\cos x}$$

$\Downarrow$ Es pot passar directament al

$$\begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos x} \end{bmatrix}$$

Aillant s'obté:

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\operatorname{tg} x \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \ln|\cos x| \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y_G(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x \sin x + \ln|\cos x| \cdot \cos x =$$

$$= (c_1 + x)\sin x + (c_2 + \ln|\cos x|)\cos x$$

$$\boxed{y_G(x) = (c_1 + x)\sin x + (c_2 + \ln|\cos x|)\cos x}$$

constants

4. EDO's LINEALS D'ORDRE n, HOMOGÈNIES i ~~AMB~~ COEFICIENTS KTES:

Són del tipus:

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad a_i \in \mathbb{R}, \forall i \qquad (1)$$

Mitjançant l'operador D, resulta:

$$P(D) = D^{(n)} + a_{n-1} \cdot D^{(n-1)} + \dots + a_1 D + a_0 \cdot \mathbb{I}$$

és clar que (1) es pot escriure:

$$P(D) y = 0$$

i a més,

$$P(D) : C^{(n)}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^{(n)}(\mathbb{R})$$

és un endomorfisme.

* El $\ker\{P(D)\} \to$ conjunt de solucions!

Def:

Donada l'EDO (1), $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{R}_n[x]$ rep el nom de <u>polinomi característic</u> associat a ella.

Obs:

Pel TFA (Teorema fundamental de l'Àlgebra) $\Rightarrow$ $p(\lambda)$ factoritza!

Així, si $\lambda_1 \dots \lambda_r \in \mathbb{C}$ són les seves arrels, amb multiplicitats respectives $k_1 \dots k_r$ t.q. $\sum_i k_i = n$ $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \quad p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \_\_\_\_ \cdot (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

Aleshores admetem sense dem.:

Prop:

1) $P(D) = (D - \lambda_1 \mathbb{I})^{k_1} \circ \dots \circ (D - \lambda_r \mathbb{I})^{k_r}$

2) $\operatorname{Ker} P(D) = \operatorname{Ker}(D - \lambda_1 \mathbb{I})^{k_1} \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker}(D - \lambda_r \mathbb{I})^{k_r}$

Obs:

La base de $\operatorname{Ker}(P(D))$ es trobarà per reunió de bases de $\operatorname{Ker}(D - \lambda_i \mathbb{I})^{k_i}$. $\Longrightarrow$ Busquem quin aspecte tenen.

Prop:

$$(D - \lambda \cdot \mathbb{I})^k y = e^{\lambda x} \cdot D^k (e^{-\lambda x} \cdot y) \qquad \equiv (D - \lambda \mathbb{I})^k \cdot y = 0$$

Dem: Es fa per inducció sobre k.