Control de Comunicacions Òptiques

Grup 10 - 27 de Maig de 2011

Temps : 1h 15' *Nom:*

TEST (6 punts)

Marqueu la resposta correcta. Cada resposta correcta suma 0,4 punts mentre que cada resposta errònia resta 0,1 punts.

1. *En l'actualitat, els fotodiodes més utilitzats en els sistemes de comunicació per fibra òpica són*
   a) *els tipus PIN quan es necessita una sensibilitat del receptor elevada.*
   b) *els tipus APD quan es necessita tenir una amplada de banda del receptor elevada.*
   c) *els tipus PIN.*
   d) *els tipus APD.*
2. *L'expressió de l'eficiència quàntica d'un fotodetector en funció de la seva responsivitat (R) i de la longitud d'ona del senyal òptic incident (λ) és la següent:*
   a) $\eta = R\dfrac{h \cdot c}{q \cdot \lambda}$ b) $\eta = R\dfrac{h \cdot \lambda}{q \cdot c}$ c) $\eta = R\dfrac{q \cdot \lambda}{h \cdot c}$ d) $\eta = R\dfrac{q \cdot c}{h \cdot \lambda}$
3. *L'efecte allau d'un fotodetector APD es pot dir que*
   a) *augmenta tant la responsivitat del fotodetector com el seu temps de resposta.*
   b) *augmenta la responsivitat del fotodetector a la vegada que disminueix el seu temps de resposta.*
   c) *disminueix la responsivitat del fotodetector a la vegada que augmenta el seu temps de resposta.*
   d) *disminueix tant la responsivitat del fotodetector com el seu temps de resposta.*
4. *En un procés de detecció directa emprant un fotodiode PIN,*
   a) *sempre domina el soroll tèrmic.*
   b) *sempre domina el soroll shot.*
   c) *quan la potència òptica del senyal rebut és elevada domina el soroll tèrmic mentre que quan la potència és reduïda domina el soroll shot.*
   d) *quan la potència òptica del senyal rebut és reduïda domina el soroll tèrmic mentre que quan la potència és elevada domina el soroll shot.*
5. *La sensibilitat en una detecció ASK heterodina ideal, respecte una detecció PSK homodina ideal, és:*
   a) *6 dB millor* b) *6 dB pitjor* c) *3 dB millor* d) *3 dB pitjor*
6. *En un procés de fotodetecció d'un senyal NRZ ideal emprant un fotodetector PIN ideal incideixen de mitjana 20 fotons per bit, quina serà la probabilitat d'error prenent el criteri de decisió vist a classe ?.*
   a) $2.1 \cdot 10^{-18}$ b) $1 \cdot 10^{-9}$ c) $2.3 \cdot 10^{-5}$ d) $3.4 \cdot 10^{-3}$
7. *A un receptor li arriba un senyal digital òptic de 10 Gb/s, modulat en intensitat i de 3^a finestra. Si es vol que la SNR en el procés de fotodetecció sigui superior a 10dB, la potència òptica rebuda ha de ser en qualsevol cas superior a:*
   a) *-19 dBm* b) *-49 dBm* c) *-79 dBm* d) *-109 dBm*
8. *Un fotodetector de tipus PIN té un corrent de foscor de 16 μA. Aquest està dissenyat per a detectar senyals amb modulació d'intensitat a 10 Gb/s. Determineu la desviació típica del número d'electrons per bit corresponents al corrent de foscor.*
   a) $\sigma_m = 10^2$ b) $\sigma_m = 10^3$ c) $\sigma_m = 10^4$ d) $\sigma_m = 10^5$
9. *Per a detectar un senyal NRZ ideal es disposa d'un receptor amb fotodetector del tipus PIN amb eficiència quàntica unitat i corrent de foscor menyspreable. Treballant amb una probabilitat d'error de 10^{-9}, el receptor presenta una variància del soroll tèrmic 200 vegades superior a la de soroll shot. Aplicant les aproximacions que considereu justificades, determineu el nombre mitjà de fotons per bit rebuts.*
   a) *14.400* b) *7.200* c) *3.600* d) *1.800*

10. *En un receptor òptic basat en un fotodiode APD s'ha optimitzat el factor de multiplicació (F(M) = M) per tal de maximitzar la SNR quan la potència òptica és P. Si la potència òptica passa de manera sobtada a ser 4P, determineu la millora en la SNR (assumiu un corrent de foscor menyspreable).*

a) 8/7 *b) 12/5* *c) 16/3* *d) 20*

11. *En un enllaç per fibra òptica (α=0.25 dB/km) amb un receptor ideal, el transmissor emet polsos òptics ideals de $\langle n_1 \rangle = 10^4$ i $\langle n_0 \rangle = 10^2$ fotons per al bit "1" i "0" respectivament. Si s'exigeix un factor de qualitat Q=9, quina és la màxima longitud permesa de l'enllaç ?.*

a) 80 Km *b) 100 Km* *c) 160 Km* *d) 200 Km*

12. *Un enllaç per fibra òptica està caracteritzat per:*
    - *Font làser ideal que emet 2 mW a tercera finestra*
    - *Format de modulació NRZ a 2.5 Gb/s*
    - *Fibra monomode estàndard (D=16 ps/Km/nm, α=0.2 dB/Km a 1550 nm)*
    - *Fotodetector APD (R=0.7, M=100, F_{APD}=10 dB, soroll tèrmic i corrent de foscor menyspreables)*

    Trobeu la distància màxima de l'enllaç (limitada per atenuació) si s'exigeix una probabilitat d'error de 10^{-9} .

a) 100 Km *b) 200 Km* *c) 300 Km* *d) 400 Km*

13. *Continuant amb l'exercici anterior, indiqueu a quants Km ens quedem del límit quàntic.*

a) 25 Km *b) 50 Km* *c) 75 Km* *d) 100 Km*

14. *En un procés de detecció homodina d'un senyal modulat en fase emprant un fotodiode ideal, la sensibilitat (valor mitjà de fotons per bit) per una probabilitat d'error 10^{-9} és de:*

a) 72 *b) 36* *c) 18* *d) 9*

15. *Sigui un sistema de transmissió digital ASK heterodí (P_1=P, P_0=0) la longitud del qual no està limitada per la dispersió de la fibra sinó per l'atenuació de l'enllaç que és de 0.3 dB/Km. Determineu en quant variaria la longitud màxima de l'enllaç si la modulació emprada fos PSK amb detecció heterodina. Assumiu que al transmissor es disposa d'un làser de potència òptica P en ambdós casos i que la modulació és completament ideal.*

a) Augmentaria en 20 Km *b) Disminuiria en 20 Km*

c) Augmentaria en 30 Km *d) Disminuiria en 30 Km*

PROBLEMA (4 punts)

Marqueu la resposta correcta. Cada resposta correcta suma 0,4 punts mentre que cada resposta errònia resta 0,1 punts.

En un sistema de transmissió digital per fibra òptica el receptor està basat en un fotodiode PIN. Existeix la possibilitat de substituïr-lo per un APD amb la mateixa eficiència quàntica η, un guany M i un factor de soroll F=M. En tots dos casos el corrent de foscor és menyspreable i la variància del número de portadors per bit corresponents al soroll tèrmic total és σ_p^2. Tenint en compte que el senyal rebut respon a una modulació d'intensitat NRZ ideal, amb un número mitjà de fotons rebuts per al bit "1" igual a $\langle n \rangle$, responeu a les qüestions següents:

1) *Trobeu el guany que maximitza la SNR en el cas d'haver emprat el fotodetector APD. Preneu com a referència per al càlcul de la SNR el nivell de senyal dels bits "1".*

   a) $M_{opt}^2 = \dfrac{3\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$ *b)* $M_{opt}^2 = \dfrac{2\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$ *c)* $M_{opt}^3 = \dfrac{2\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$ *d)* $M_{opt}^3 = \dfrac{3\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$

2) *Un cop optimitzat el guany de l'APD, trobeu l'expressió de la SNR màxima.*

   a) $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{\sigma_p/2}}\right)^{4/3}$ *b)* $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{\sigma_p/2}}\right)^{4/3}$ *c)* $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{\sigma_p/2}}\right)^{1/3}$ *d)* $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{\sigma_p/2}}\right)^{1/3}$

3) *Determineu la condició que ha de complir el número mitjà de fotons per bit rebuts per tal de garantir una millora de la SNR respecte el cas d'haver emprat el fotodiode PIN.*

   a) $\langle n_a\rangle > \dfrac{2\sigma_p^2}{\eta}$ *b)* $\langle n_a\rangle > \dfrac{\sigma_p^2}{\eta}$ *c)* $\langle n_a\rangle < \dfrac{2\sigma_p^2}{\eta}$ *d)* $\langle n_a\rangle < \dfrac{\sigma_p^2}{\eta}$

4) *Si la SNR màxima estigués 10 dB per sota de la SNR en el límit quàntic i l'eficiència quàtica fos del 80%, determineu la relació entre la variància del soroll tèrmic i el número mitjà de fotons per bit "1".*

   a) $\sigma_p^2 \approx 16\langle n\rangle$ *b)* $\sigma_p^2 \approx 61\langle n\rangle$ *c)* $\sigma_p^2 \approx 160\langle n\rangle$ *d)* $\sigma_p^2 \approx 610\langle n\rangle$

5) *Ara el mateix fotodiode APD és optimitzat per tal de maximitzar el paràmetre de qualitat Q. Doneu l'expressió del guany òptim en aquest cas.*

   a) $M_{opt}^3 = \dfrac{8\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$ *b)* $M_{opt}^2 = \dfrac{8\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$ *c)* $M_{opt}^3 = \dfrac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$ *d)* $M_{opt}^2 = \dfrac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$

6) *Un cop optimitzat el guany, trobeu l'expressió del factor de qualitat màxim.*

   a) $Q_{max}^2 = \dfrac{(\eta\langle n\rangle)^2}{8\sigma_p}$ *b)* $Q_{max}^3 = \dfrac{(\eta\langle n\rangle)^2}{8\sigma_p}$ *c)* $Q_{max}^2 = \dfrac{(\eta\langle n\rangle)^2}{4\sigma_p}$ *d)* $Q_{max}^3 = \dfrac{(\eta\langle n\rangle)^2}{4\sigma_p}$

7) *Si la Q màxima fos un 25% de la Q en el límit quàntic i l'eficiència quàtica fos del 80%, determineu la relació entre la variància del soroll tèrmic i el número mitjà de fotons per bit "1".*

   a) $\sigma_p^2 \approx 16\langle n\rangle$ *b)* $\sigma_p^2 \approx 26\langle n\rangle$ *c)* $\sigma_p^2 \approx 36\langle n\rangle$ *d)* $\sigma_p^2 \approx 46\langle n\rangle$

8) *Es defineix la sensibilitat del receptor com el número mitjà de fotons per bit que garanteix un cert paràmetre de qualitat Q. Trobeu la sensibilitat del receptor APD si el guany d'aquest ha estat optimitzat per tal d'assolir la millor sensibilitat possible.*

   a) $\langle n_a\rangle = \dfrac{Q^2}{\eta}\sqrt{\dfrac{Q}{2}\sigma_p}$ *b)* $\langle n_a\rangle = \dfrac{Q^2}{\eta}\sqrt{2Q\sigma_p}$ *c)* $\langle n_a\rangle = \dfrac{Q}{\eta}\sqrt{\dfrac{Q}{2}\sigma_p}$ *d)* $\langle n_a\rangle = \dfrac{Q}{\eta}\sqrt{2Q\sigma_p}$

9) *Donat un factor de qualitat Q, quina condició s'ha de donar per a que la sensibilitat millori respecte el PIN ?.*

   a) $Q > 2\sigma_p$ *b)* $Q > \dfrac{\sigma_p}{2}$ *c)* $Q < 2\sigma_p$ *d)* $Q < \dfrac{\sigma_p}{2}$

10) *Si la sensibilitat òptima fos 10 cops superior a la del límit quàntic (seguint la definició de l'apartat 8) i l'eficiència quàtica fos del 80%, determineu la desviació típica del soroll tèrmic per a un paràmetre de qualitat Q=6.*

   a) $\sigma_p \approx 48$ *b)* $\sigma_p \approx 54$ *c)* $\sigma_p \approx 60$ *d)* $\sigma_p \approx 66$

Resolució:

1-5) La SNR en el cas de l'APD és la següent:

$$SNR_{APD} = \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{F\eta\langle n\rangle + \dfrac{\sigma_p^2}{M^2}} = \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{M^x\eta\langle n\rangle + \dfrac{\sigma_p^2}{M^2}}$$

$$F = M^x$$

El guany de l'APD es pot optimitzar per tal de maximitzar la SNR:

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(SNR_{APD}\right) = -\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2\left(x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle - 2\dfrac{\sigma_p^2}{M^3}\right)}{\left(M^x\eta\langle n\rangle + \dfrac{\sigma_p^2}{M^2}\right)^2} = 0 \rightarrow x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle = 2\frac{\sigma_p^2}{M^3} \rightarrow M^{x+2} = \frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$$

$$\rightarrow M_{opt} = \left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}} \xrightarrow{x=1} \left(\frac{2\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{3}}$$

La condició de millora de l'APD envers el PIN ve determinada per la condició $M_{opt} > 1$:

$$M_{opt} = \left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}} > 1 \rightarrow \frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle} > 1 \rightarrow \langle n\rangle < \frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta} \rightarrow \langle n_a\rangle < \frac{\sigma_p^2}{x\,\eta} \xrightarrow{x=1} \frac{\sigma_p^2}{\eta}$$

L'expressió de la SNR maximitzada és la següent:

$$SNR_{max} = \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\left(\dfrac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{x}{x+2}}\eta\langle n\rangle + \sigma_p^2\left(\dfrac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{-\frac{2}{x+2}}} = \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\dfrac{2\sigma_p^2}{x}\left(\dfrac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{-\frac{2}{x+2}} + \sigma_p^2\left(\dfrac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{-\frac{2}{x+2}}}$$

$$= \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\sigma_p^2\left(\dfrac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{-\frac{2}{x+2}}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\sigma_p^2}\frac{x}{x+2}\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{2}{x+2}} = \eta\langle n\rangle\frac{2}{x+2}\underbrace{\left(\frac{x\,\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{x}{x+2}}}_{M_{opt}^{-x}} \xrightarrow{x=1} \frac{2}{3}\eta\langle n\rangle\underbrace{\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}}}_{M_{opt}^{-1}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{\sigma_p/2}}\right)^{\frac{4}{3}}$$

La SNR màxima es pot posar en funció de la SNR del límit quàntic per tal de veure quina penalització hi haurà. Després es pot trobar quina condició s'ha de donar per tal de que aquesta sigui de 10 dB:

$$SNR_{max} = \underbrace{\langle n\rangle}_{SNR_{LQ}}\overbrace{\frac{2\eta}{x+2}\underbrace{\left(\frac{x\,\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{x}{x+2}}}_{M_{opt}^{-x}}}^{\text{penalització}} \xrightarrow{x=1} \underbrace{\langle n\rangle}_{SNR_{LQ}}\underbrace{\frac{2\eta}{3}\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}}}_{1/10} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2\eta}{3}\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{10} \rightarrow \left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{20\eta} \rightarrow \frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2} = \left(\frac{3}{20\eta}\right)^3 \rightarrow \sigma_p^2 = \langle n\rangle\frac{\eta}{2}\left(\frac{20}{3}\eta\right)^3$$

$$\xrightarrow{\eta=4/5} \sigma_p^2 \approx 61\langle n\rangle$$

6-7) L’expressió del paràmetre de qualitat Q per l’APD és la següent:

$$Q_{APD}=\frac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{F\eta\langle n\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}+\frac{\sigma_p}{M}}=\frac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}+\frac{\sigma_p}{M}}$$

$$F=M^x$$

El guany de l’APD es pot optimitzar per tal de maximitzar el paràmetre Q:

$$Q_{APD}=\frac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}+\frac{\sigma_p}{M}}$$

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}+\frac{\sigma_p}{M}\right)=\frac{x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle-2\frac{\sigma_p^2}{M^3}}{2\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}}-\frac{\sigma_p}{M^2}=0\rightarrow\frac{x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle-2\frac{\sigma_p^2}{M^3}}{2\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}}=\frac{\sigma_p}{M^2}$$

$$x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle-2\frac{\sigma_p^2}{M^3}=\frac{\sigma_p}{M^2}2\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}$$

$$\left(x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle\right)^2+\cancel{4\frac{\sigma_p^4}{M^6}}-x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle 4\frac{\sigma_p^2}{M^3}=\frac{\sigma_p^2}{M^4}4\left(M^x\eta\langle n\rangle+\cancel{\frac{\sigma_p^2}{M^2}}\right)$$

$$\left(x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle\right)^{\cancel{2}}-\cancel{x}\,\cancel{M^{x-1}}\,\cancel{\eta\langle n\rangle}\,4\frac{\sigma_p^2}{M^3}=\frac{\sigma_p^2}{M^4}4M^x\eta\langle n\rangle=\frac{\cancel{x}}{x}\frac{\sigma_p^2}{M^3}4\,\cancel{M^{x-1}}\,\cancel{\eta\langle n\rangle}$$

$$x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle=4\frac{\sigma_p^2}{M^3}\left(1+\frac{1}{x}\right)\rightarrow\qquad M_{opt}^{x+2}=\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\xrightarrow{x=1}M_{opt}^3=\frac{8\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$$

La condició de millora de l’APD envers el PIN ve determinada per la condició $M_{opt}>1$:

$$M_{opt}=\left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{x+2}}>1\rightarrow\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\left(\frac{x+1}{x^2}\right)>1\rightarrow\langle n\rangle<\frac{4\sigma_p^2}{\eta}\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\rightarrow\langle n_a\rangle<\frac{2\sigma_p^2}{\eta}\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\xrightarrow{x=1}\frac{4\sigma_p^2}{\eta}$$

El paràmetre Q maximitzat té la següent expressió:

$$Q_{APD,max}=\frac{M_{opt,Q}\,\eta\langle n\rangle}{\sqrt{M_{opt,Q}^{x+2}\eta\langle n\rangle+\sigma_p^2}+\sigma_p}=\frac{\left(\frac{x+1}{x^2}\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}\eta\langle n\rangle}{\sqrt{\frac{x+1}{x^2}\frac{4\sigma_p^2}{\cancel{\eta\langle n\rangle}}\cancel{\eta\langle n\rangle}+\sigma_p^2}+\sigma_p}=\frac{\left(\frac{x+1}{x^2}\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}\eta\langle n\rangle}{\sigma_p\left(1+\underbrace{\sqrt{1+4\frac{x+1}{x^2}}}_{\frac{x+2}{x}}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2\sigma_p}{x}\right)^{\frac{2}{x+2}}\left(\frac{x+1}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}\eta\langle n\rangle}{\sigma_p\frac{2}{x}(x+1)}=\left(\frac{x}{2\sigma_p}\right)^{\frac{x}{x+2}}\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x+2}}\xrightarrow{x=1}\frac{1}{2}\left(\frac{\eta^2\langle n\rangle^2}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

El paràmetre Q també es pot posar en funció de la del límit quàntic per tal de veure quina penalització hi haurà. Després es pot trobar quina condició s'ha de donar per tal de que aquesta sigui 1/4 (25%):

$$Q_{APD,max} = \left(\frac{x}{2\sigma_p}\right)^{\frac{x}{x+2}} \left(\frac{\eta\langle n\rangle}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x+2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\eta\langle n\rangle}{x+1}} \left(\frac{x}{2\sigma_p}\right)^{\frac{x}{x+2}} \left(\frac{\eta\langle n\rangle}{x+1}\right)^{\frac{x}{2(x+2)}} = \underbrace{\sqrt{\langle n\rangle}}_{Q_{LQ}} \underbrace{\sqrt{\frac{\eta}{x+1}} \left(\frac{\eta\langle n\rangle}{4\sigma_p^2}\frac{x^2}{x+1}\right)^{\frac{x}{2(x+2)}}}_{\text{penalització}}$$

$$\xrightarrow{x=1} \underbrace{\sqrt{\langle n\rangle}}_{Q_{LQ}} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\eta^2 \frac{\sqrt{\langle n\rangle}}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{3}}}_{1/4}$$

$$\to \frac{1}{2}\left(\eta^2 \frac{\sqrt{\langle n\rangle}}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \to \eta^2 \frac{\sqrt{\langle n\rangle}}{\sigma_p} = \frac{1}{8} \to \sigma_p = 8\eta^2\sqrt{\langle n\rangle} \to \sigma_p^2 = 64\eta^4\langle n\rangle \xrightarrow{\eta=4/5} \sigma_p^2 \approx 26\langle n\rangle$$

8-10) El guany de l'APD es pot ajustar per tal d'optimitzar la sensibilitat del receptor. Un cop l'APD està optimitzat, la relació entre el factor Q i el número mitjà de fotons per bit <n> queda fixat. Així doncs, per tal de trobar la sensibilitat optimitzada només cal aïllar de l'expressió de la Q màxima trobada anteriorment:

$$Q_{APD,max} = \left(\frac{x}{2\sigma_p}\right)^{\frac{x}{x+2}} \left(\frac{\eta\langle n\rangle}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} \to \langle n\rangle = \frac{(x+1)}{\eta} Q_{APD,max}^{\frac{x+2}{x+1}-2+2} \left(\frac{2\sigma_p}{x}\right)^{\frac{x}{x+1}} = \frac{(x+1)}{\eta} Q_{APD,max}^2 \left(\frac{2\sigma_p}{x\,Q_{APD,max}}\right)^{\frac{x}{x+1}} \to$$

$$\to \langle n\rangle_{min} = (x+1)\frac{Q^2}{\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}} \to \langle n_a\rangle_{min} = (x+1)\frac{Q^2}{2\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}} \xrightarrow{x=1} \frac{Q}{\eta}\sqrt{2Q\sigma_p}$$

Si es vol trobar l'expressió de la M òptima en aquest cas només cal prendre l'expressió de la M òptima trobada anteriorment i substituïr el número mitjà de fotons per bit:

$$\langle n\rangle_{min} = (x+1)\frac{Q^2}{\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}}$$

$$M_{opt} = \left(\frac{4\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{x+2}} = \left(\frac{4\sigma_p^2}{\cancel{\eta}\,\cancel{(x+1)}\,\frac{Q^2}{\cancel{\eta}}\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}}}\left(\frac{\cancel{x+1}}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{x+2}} = \left(\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{-x}{x+1}+2}\right)^{\frac{1}{x+2}} = \left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{1}{x+1}} \xrightarrow{x=1} \left(\frac{2\sigma_p}{Q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

S'arriba a les mateixes expressions seguint el procediment d'optimització de la sensibilitat.

$$Q_{APD} = \frac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle + \frac{\sigma_p^2}{M^2}} + \frac{\sigma_p}{M}} \to \langle n\rangle_{APD} = \frac{Q}{\eta}\left(QM^x + 2\frac{\sigma_p}{M}\right) \to \langle n_a\rangle_{APD} = \frac{Q}{2\eta}\left(QM^x + 2\frac{\sigma_p}{M}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(QM^x + 2\frac{\sigma_p}{M}\right) = xQM^{x-1} - \frac{2\sigma_p}{M^2} = 0 \to xQM^{x-1} = \frac{2\sigma_p}{M^2} \to M^{x+1} = \frac{2\sigma_p}{xQ}$$

$$M_{opt,Q} = \left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{1}{x+1}} \xrightarrow{x=1} \sqrt{\frac{2\sigma_p}{Q}}$$

$$\langle n_a\rangle_{min} = \frac{Q}{2\eta}\left(Q\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}} + 2\sigma_p\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{-\frac{1}{x+1}}\right) = \frac{Q}{2\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{x}\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}-1} + 2\sigma_p\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{-\frac{1}{x+1}}\right) =$$

$$= \frac{Q}{\cancel{2}\eta}\cancel{2}\sigma_p\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{-\frac{1}{x+1}}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{Q\sigma_p}{\eta}\left(\frac{xQ}{2\sigma_p}\right)^{\frac{1}{x+1}}\left(\frac{x+1}{x}\right) = (x+1)\frac{Q^2}{2\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}} \xrightarrow{x=1} \frac{Q}{\eta}\sqrt{2Q\sigma_p}$$

La condició de millora de l'APD envers el PIN ve determinada per la condició $M_{opt} > 1$:

$$M_{opt,Q} = \left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{1}{x+1}} > 1 \rightarrow \frac{2\sigma_p}{xQ} > 1 \rightarrow \sigma_p > \frac{xQ}{2} \xrightarrow{x=1} \frac{Q}{2}$$

El factor de penalització respecte el límit quàntic:

$$\langle n_a \rangle_{min} = (x+1)\frac{Q^2}{2\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}} \xrightarrow{x=1} \frac{Q}{\eta}\sqrt{2Q\sigma_p}$$

$$\langle n_a \rangle_{min} = (x+1)\frac{Q^2}{2\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}} = \underbrace{\frac{Q^2}{2}}_{\langle n_a \rangle_{LQ}} \underbrace{\frac{(x+1)}{\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}}}_{\text{penalització}} \xrightarrow{x=1} \underbrace{\frac{Q^2}{2}}_{\langle n_a \rangle_{LQ}} \underbrace{\frac{2}{\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{Q}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{penalització}}$$

$$\rightarrow \frac{2}{\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{Q}\right)^{\frac{1}{2}} = 10 \rightarrow \sigma_p = 25\frac{Q}{2}\eta^2 \rightarrow \sigma_p = 25\frac{Q}{2}\eta^2 \xrightarrow{\eta=4/5} 8Q \xrightarrow{Q=6} 48$$