ANÀLISI VECTORIAL **ETSETB** **19-01-2006** (JUSTIFIQUEU ELS PASSOS)

1. *Siguin* $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,-2z)$. *Es defineixen les regions* $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ z > \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ *i* $S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2,\ 0<z<\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

   (a) *Determineu un camp vectorial* $\mathbf{g}$ *que sigui potencial vector de* $\mathbf{f}$. **0,5 punts**

   (b) *Calculeu la circulació, en un cert sentit, de* $\mathbf{g}$ *al llarg de* ∂S_1*, frontera o vora de* S_1*. (Com a integral de línia.)* **0,5 punts**

   (c) *Calculeu el flux de* $\mathbf{f}$ *a través de* S_1*, en un cert sentit. (Com a integral de superfície.)* **1 punt**

   (d) *Relacioneu els resultats dels apartats anteriors.* **0,25 punts**

   (e) *Sense cap més càlcul, digueu quin és el flux de* $\mathbf{f}$ *a través de* S_2*, indicant-ne el sentit.* **0,25 punts**

<u>Solució:</u>

(a) El camp $\mathbf{f}$ és solenoidal ja que $\operatorname{div}\mathbf{f} = 0$. Es demana un camp $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ tal que $\mathbf{f} = \operatorname{rot}\mathbf{g}$, és a dir, una solució de les equacions:

$$\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} = x, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} = -2z.$$

Triant $g_2 = 0$ s'obté un possible potencial vector:

$$\mathbf{g}(x,y,z) = (2yz, 0, xy).$$

(Altres solucions són, per exemple, $\mathbf{g}(x,y,z) = (yz, -xz, 0)$ o bé $\mathbf{g}(x,y,z) = (0, -2xz, -xy)$.)

(b) La vora de S_1 és una circumferència de radi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en el pla $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ centrada en l'eix OZ, que es pot parametritzar de la següent manera:

$$\mathbf{l}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 1), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

La circulació demanada és, per tant:

$$\oint_{\partial S_1} \mathbf{g}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \mathbf{g}\left(\mathbf{l}(t)\right)\cdot \mathbf{l}'(t)\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\ \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(c) La superfície S_1 és un casquet esfèric de radi 1, que es pot parametritzar així:

$$\mathbf{s}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\,\cos\varphi, \sin\theta\,\sin\varphi, \cos\theta), \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

El producte vectorial fonamental és:

$$\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\varphi = (\sin^2\theta\,\cos\varphi,\ \sin^2\theta\,\sin\varphi,\ \sin\theta\,\cos\theta).$$

Per tant, el flux demanat serà:

$$\int_{S_1} \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta\ \mathbf{f}\left(\mathbf{s}(\theta,\varphi)\right)\cdot\left(\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\varphi\right) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \left(\sin^3\theta - 2\sin\theta\,\cos^2\theta\right)$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \left(\sin\theta - 3\sin\theta\,\cos^2\theta\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(d) Han de coincidir, d'acord amb el teorema de Stokes i la definició de $\mathbf{g}$:

$$\oint_{\partial S_1} \mathbf{g}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{S_1} \operatorname{rot}\mathbf{g}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S},$$

sempre i quan l'orientació de la superfície i el sentit de la circulació estiguin relacionats mitjançant la regla de la mà dreta.

(e) La superfície S_2 és un con amb vèrtex a l'origen de coordenades que té com a vora la circumferència ∂S_1. Per tant:

$$\int_{S_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{dS} = \oint_{\partial S_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Com que la parametrització triada per ∂S_1, $\mathbf{l}(t)$, recorre la corba en sentit antihorari (quan es projecta sobre el pla XY), aleshores l'orientació de S_2 ha de tenir component z positiva (flux que va cap a l'interior del con).

---

2. (a) *Sigui $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ln(z^2 - x^2 - y^2) \le 0\}$. Discutiu si els conjunts A i $\overline{A}$ són oberts, tancats, compactes o arc-connexos.* **1,25 punts**

(b) *Sigui $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció de classe C^1. Expresseu* **1,25 punts**

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

en coordenades polars.

Solució:

(a) Els punts (x, y, z) del conjunt A han de verificar:

$$0 < z^2 - x^2 - y^2 \le 1.$$

La primera desigualtat descriu els punts de l'interior del con (doble) d'equació $z^2 = x^2 + y^2$, amb vèrtex a l'origen de coordenades i eix OZ. La segona desigualtat és satisfeta pels punts de l'exterior de l'hiperboloide de dos fulls d'equació $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, també d'eix OZ i amb vèrtexs als punts amb $z = \pm 1$. Aquest hiperboloide és interior al con: el con i l'hiperboloide no es tallen mai ja que no es poden verificar alhora les equacions $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ i $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

El conjunt A no és obert (perquè els punts de l'hiperboloide hi són inclosos), tampoc és tancat (ja que els punts del con no hi pertanyen) ni, per tant, compacte. No és arc-connex perquè l'origen de coordenades no pertany al conjunt: consta de dues regions disjuntes.

En canvi, $\overline{A}$ és tancat (per definició) i arc-connex, perquè l'origen de coordenades hi pertany. No és compacte ja que no és fitat.

(b) El canvi a coordenades polars:

$$(x, y) = \mathbf{h}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

té com a matriu jacobiana:

$$\mathbf{Jh} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

La matriu inversa és:

$$(\mathbf{Jh})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix},$$

d'on es llegeix:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\sin\varphi, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\varphi.$$

Aleshores, per la regla de la cadena:

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = r\cos\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + r\sin\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = r\frac{\partial f}{\partial r}.$$

---

3. Sigui $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + 2xy^2 + 12y^2$.

(a) *Trobeu els seus punts crítics en $\mathbb{R}^2$ i determineu, raonadament, si són màxims, mínims o punts de sella.* **0,5 punts**

(b) *Sigui $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0,\ x \geq 1\}$. Trobeu, si existeixen, els punts de D on f ateny valors màxims i mínims.* **1,5 punts**

(c) *Demostreu que $\int_D f \, \mathrm{d}S \leq 9\pi$, essent D el conjunt definit en l'apartat anterior.* **0,5 punts**

Solució:

(a) Cal que es verifiqui:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x^3 + 2xy^2 + 2y^2 = 0 \\ 2x^2y + 4xy + 24y = 0 \end{array} \right.$$

De la segona equació se segueix que $y = 0$ (d'on $x = 0$ per la primera equació) o bé $x^2 + 2x + 12 = 0$. Aquesta darrera equació no té solució real. Per tant, l'únic punt crític és el $(0,0)$, amb $f(0,0) = 0$.
Es tracta d'un mínim relatiu (i absolut) perquè $f(x,y) \geq 0$, ja que és una suma de termes més grans o iguals que zero:

$$f(x,y) = x^4 + y^2 \left(x^2 + 2x + 12\right).$$

L'expressió $x^2 + 2x + 12$ sempre és positiva perquè, com s'ha dit, l'equació $x^2 + 2x + 12 = 0$ no té solucions reals.

(b) El conjunt D és un semicercle de radi 1:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Es tracta d'un conjunt compacte i, per tant, f (que és contínua) assolirà valors màxims i mínims en D. Aquests punts hauran de pertànyer a la frontera ja que no hi ha cap punt crític a l'interior de D.
El mètode dels multiplicadors de Lagrange aplicat a la part de la frontera que és una semicircumferència dóna:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x^3 + 2xy^2 + 2y^2 = \lambda\,(2x - 2) \\ 2x^2y + 4xy + 24y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{array} \right.$$

De la segona equació s'obté $y = 0$ o bé $\lambda = x^2 + 2x + 12$. Hi ha dos punts amb $y = 0$ que verifiquen el sistema: $(0,0)$ (que no pertany a D) i $(2,0)$.
Substituint $\lambda = x^2 + 2x + 12$ i $y^2 = 2x - x^2$ en la primera equació se segueix $x = \frac{3}{2}$. De l'última equació, per tant, s'obtenen dues solucions més en els punts $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
L'anàlisi de la part de la frontera que coincideix amb la recta $x = 1$ també es pot fer amb el mètode dels multiplicadors de Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x^3 + 2xy^2 + 2y^2 = \lambda \\ 2x^2y + 4xy + 24y = 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

L'única solució és el punt $(1,0)$.
Finalment, també cal tenir en compte els punts $(1,1)$ i $(1,-1)$, que és on enllacen les dues parts de la frontera analitzades.
En resum, hi ha sis punts candidats:

$$\begin{array}{rcl} (2,0) & \rightarrow & f(2,0) = 16 \\ \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \rightarrow & f\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 18 \\ \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \rightarrow & f\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 18 \\ (1,0) & \rightarrow & f(1,0) = 1 \\ (1,1) & \rightarrow & f(1,1) = 16 \\ (1,-1) & \rightarrow & f(1,-1) = 16 \end{array}$$

El màxim s'ateny en els punts $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, i el mínim, en el punt $(1,0)$.

(c) Com s'ha vist, per qualsevol punt de D es té que $f(x,y) \leq 18$. Per tant:

$$\int_D f \, \mathrm{d}S \leq 18 \int_D \mathrm{d}S = 18\frac{\pi}{2} = 9\pi,$$

on s'ha tingut en compte que l'àrea del semicercle D és $\frac{\pi}{2}$.

---

4. (a) *Determineu el volum de la regió definida per* $(x-y+3z)^2 + (2y-z)^2 + (3x+z)^2 \leq 1$. **1,25 punts**

   (b) *Trobeu l'àrea de la regió del pla tancada per la corba que, en coordenades polars, té per equació* $r = 3\sin 2\varphi$. **1,25 punts**

Solució:

(a) Fent el canvi de variables:

$$\begin{cases} u = x - y + 3z \\ v = 2y - z \\ w = 3x + z \end{cases}$$

la regió (M) en qüestió es converteix en $N = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2+v^2+w^2 \leq 1\right\}$, és a dir, una esfera en l'espai (u,v,w), de volum igual a $\frac{4}{3}\pi$. El volum demanat serà, per tant:

$$\iiint_M \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint_N |J| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w,$$

on J és el determinant de la matriu jacobiana respecte les variables u, v i w. Derivant l'anterior canvi s'obté la jacobiana respecte les variables x, y i z (inversa de l'anterior):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El seu determinant és -13 i, per tant, $J = -\frac{1}{13}$. Aleshores:

$$\iiint_M \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \frac{4}{39}\pi.$$

(b) La corba només és present al primer i al tercer quadrant ($\sin 2\varphi \geq 0$). A més, l'àrea de la part del tercer quadrant és la mateixa que l'àrea al primer quadrant. Per tant, l'àrea demanada serà:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{3\sin 2\varphi} \mathrm{d}r \; r = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \; \sin^2 2\varphi = \frac{9}{4}\pi.$$
