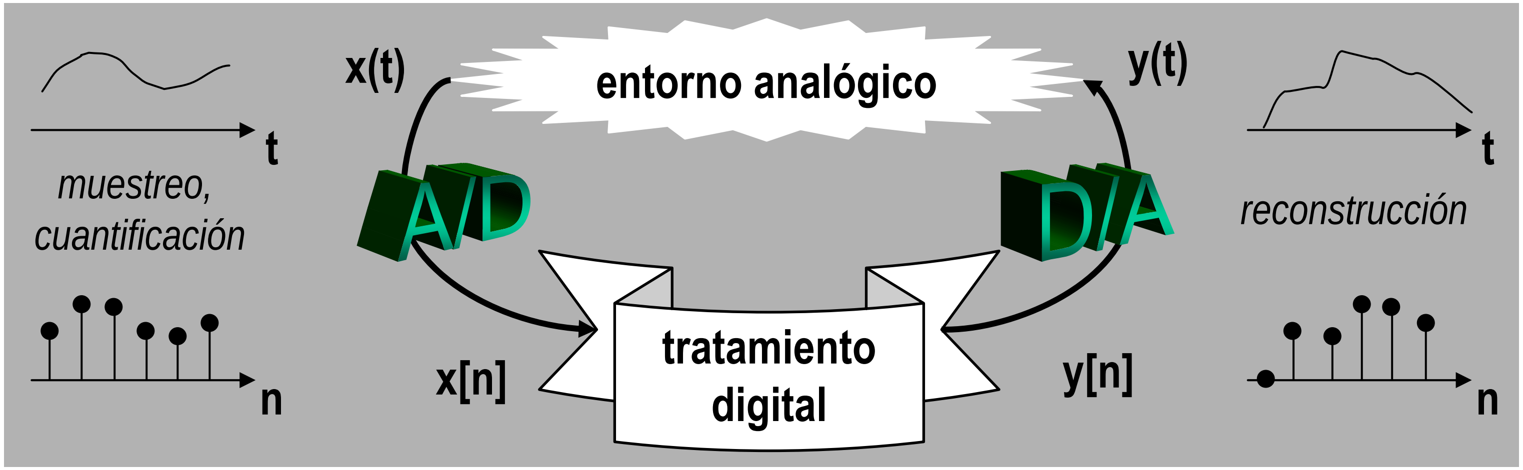
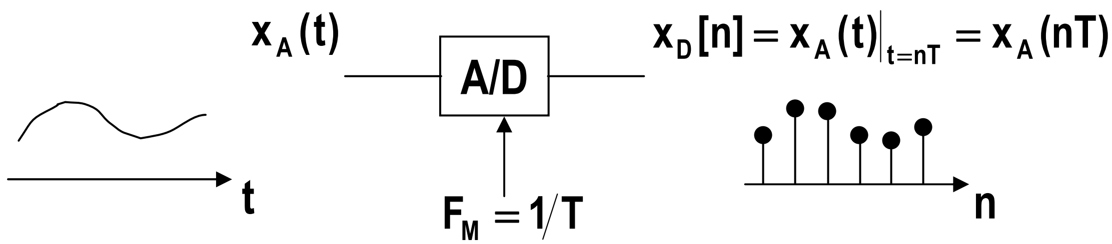
3.1: Muestreo y reconstrucción de señales analógicas

- Muestreo
- Reconstrucción
  - Conversión D/A ideal: Teorema de muestreo
  - Conversión D/A práctica



Muestreo de señales analógicas



- **Relación entre las transformadas**

$$X_A(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_A(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$X_D(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_D[n] e^{-j\omega n} \underset{\substack{\uparrow \\ \omega = \Omega T \\ x_D[n] = x_A(nT)}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_A(nT) e^{-j\Omega T n} =$$

$$= \mathcal{F}\left\{ x_A(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod.} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{conv.}}}{=} \frac{1}{2\pi} X_A(j\Omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(j\Omega - j\tfrac{2\pi}{T}k) =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_A(j\Omega - j\tfrac{2\pi}{T}k) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_A(j\Omega - j\Omega_m k)$$

Espectro de la señal muestreada

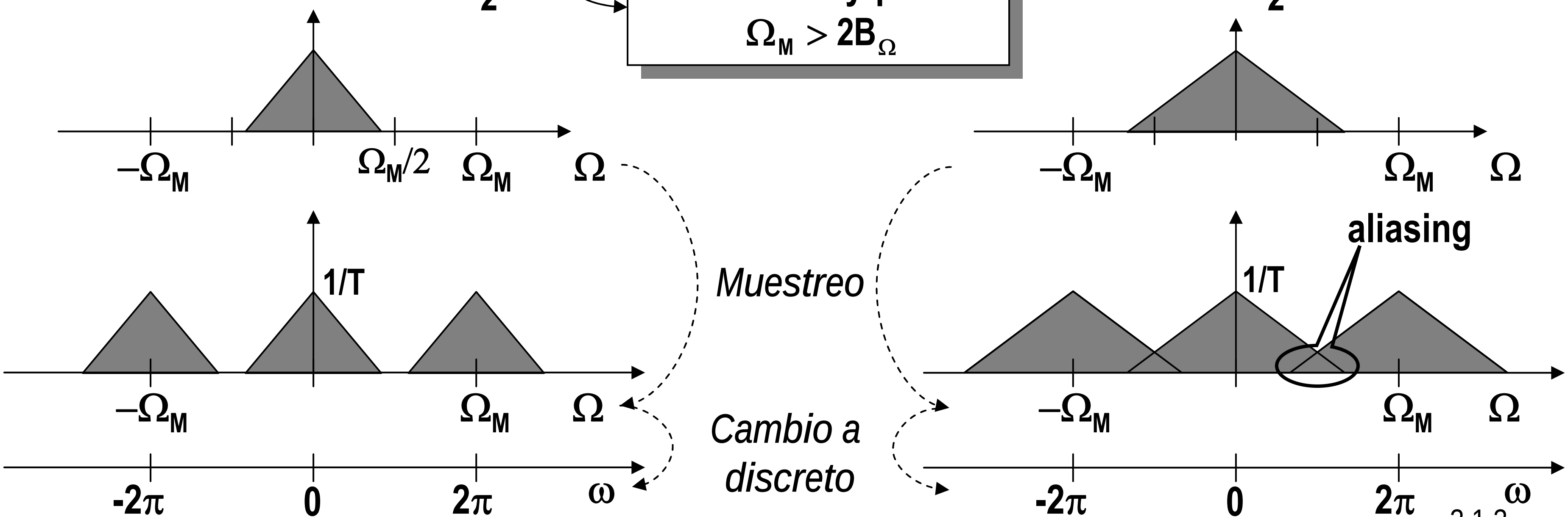
- **Conversión:** $X_D(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_A(j\Omega - j\underline{\underline{\Omega_M}}k)$

- **Señal de banda limitada:** $X_A(j\Omega) = 0 \quad \text{para} \quad |\Omega| \geq B_\Omega$

caso $B_\Omega < \frac{\Omega_M}{2}$

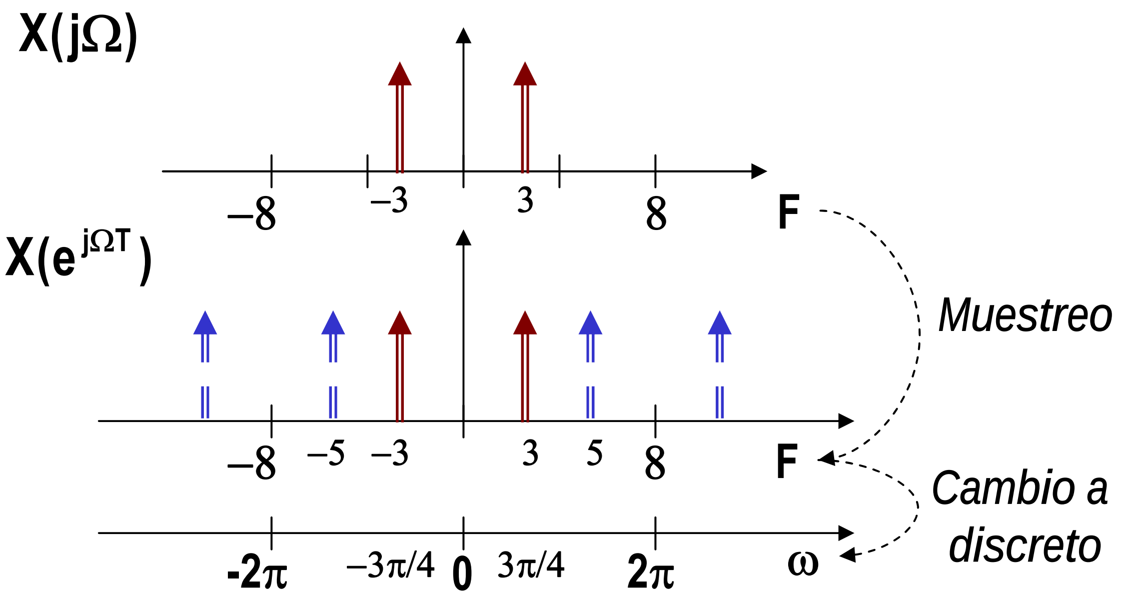
Criterio de Nyquist:
$\Omega_M > 2B_\Omega$

caso $B_\Omega \geq \frac{\Omega_M}{2}$

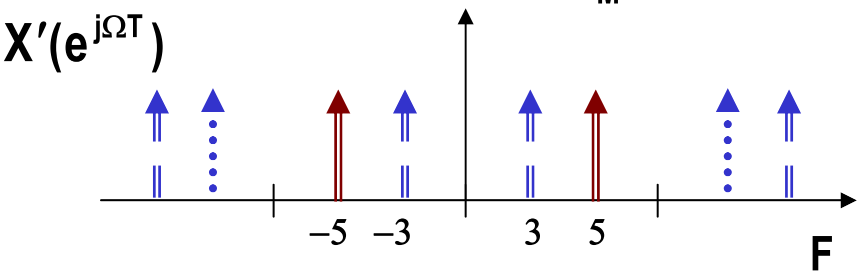


Muestreo de una sinusoide

- **Sinusoide de frecuencia $F=3$kHz muestreada a $F_M=8$kHz**



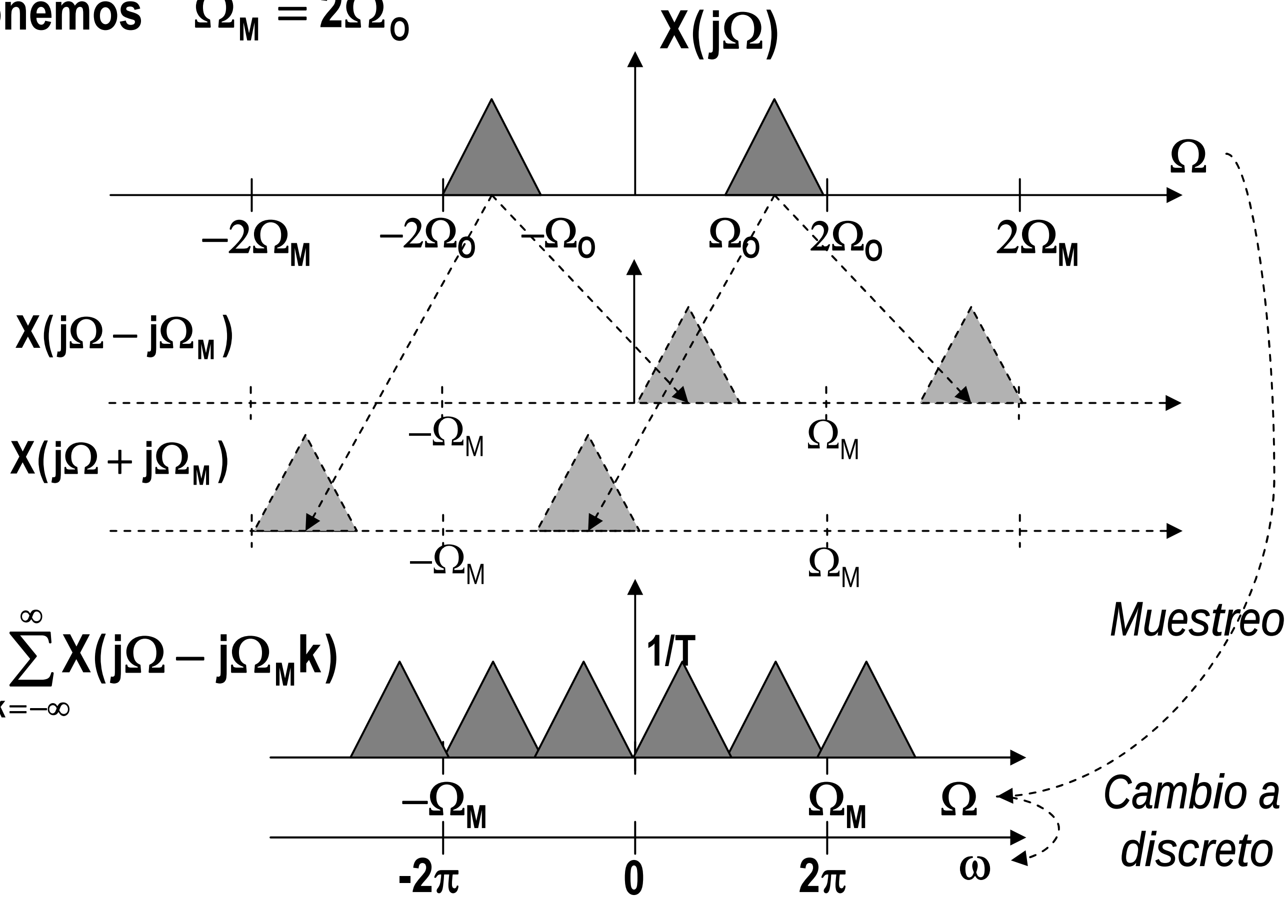
- **indistinguible de $F=5$kHz muestreada a $F_M=8$kHz**



Muestreo de una señal paso-banda

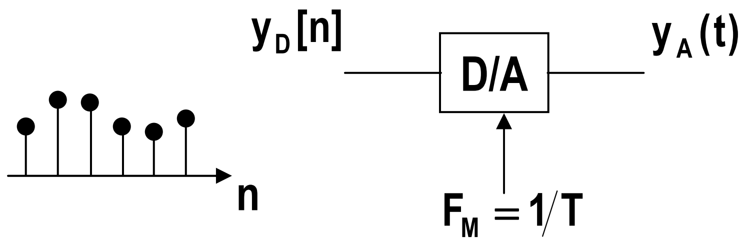
- **Señal paso banda:** $X(j\Omega) = 0$ **para** $|\Omega| < \Omega_o$ **y** $|\Omega| > 2\Omega_o$

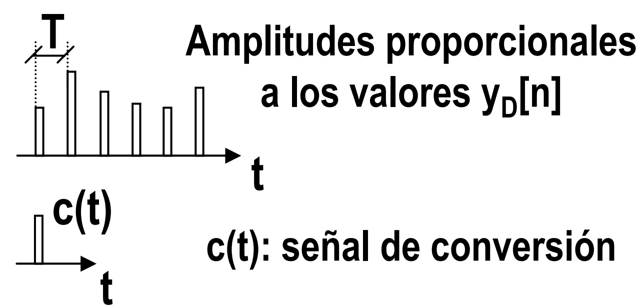
  suponemos $\Omega_M = 2\Omega_o$



$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\Omega - j\Omega_M k)$$

Reconstrucción de señales analógicas





- **Señal reconstruida**

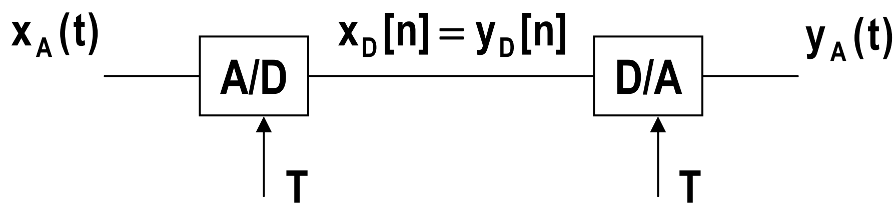
$$y_A(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_D[n] \cdot c(t - nT)$$

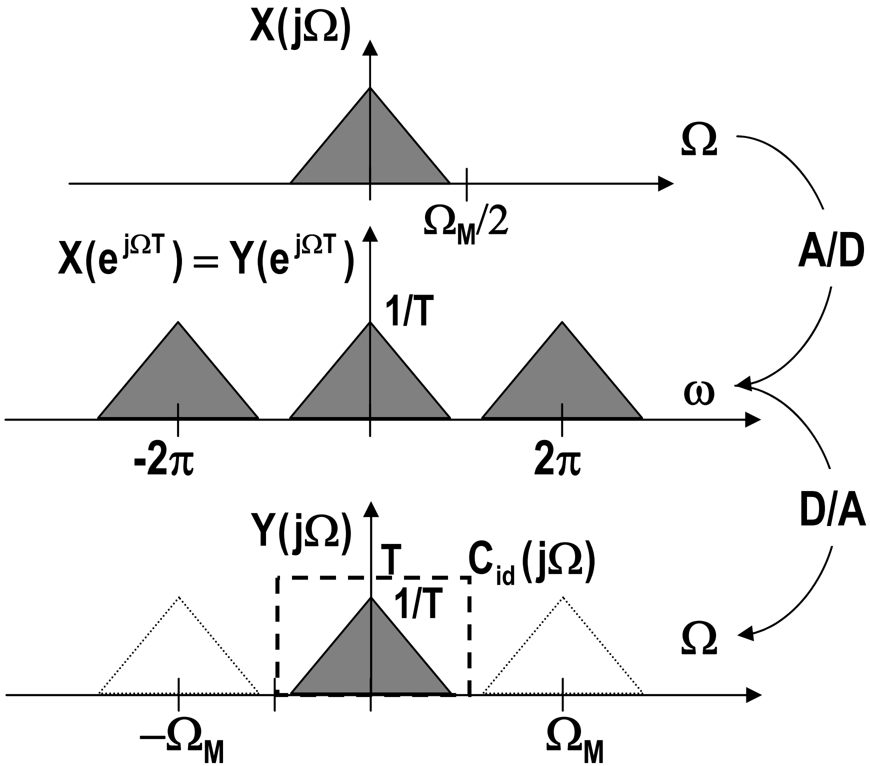
$$\Big\updownarrow FT$$

$$Y_A(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_D[n] \cdot C(j\Omega) e^{-j\Omega T n} \underset{\substack{\uparrow \\ \omega = \Omega T,\, FT}}{=} C(j\Omega) Y_D(e^{j\Omega T})$$

La señal analógica reproduce la transformada de Fourier de la señal discreta modificada por la transformada de la señal de conversión: C(jΩ)

Conversión D/A ideal: Teorema de muestreo





Suponemos que la conversión A/D satisface el criterio de Nyquist, $\Omega_M > 2B_\Omega$

Dado que $Y_A(j\Omega) = C(j\Omega)Y_D(e^{j\Omega T})$

para que $x(t) = y(t)$ $\left(X(j\Omega) = Y(j\Omega)\right)$

la señal de conversión ideal sería:

$$C_{id}(j\Omega) = \begin{cases} T & -\Omega_m/2 < \Omega < \Omega_m/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

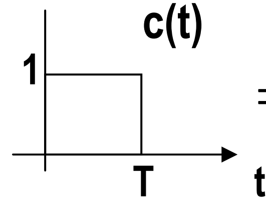
pero

$$c_{id}(t) = FT^{-1}\{C_{id}(j\Omega)\} = \frac{\sin \Omega_M t/2}{\Omega_M t/2}$$

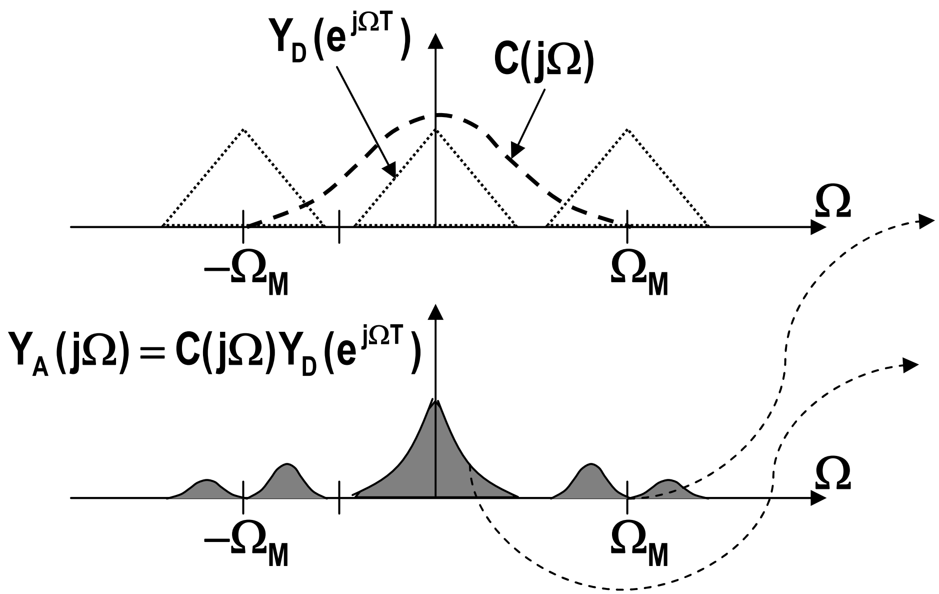
es no causal y de duración infinita!

Conversión D/A práctica

- **Señal de conversión causal y simple:**



$$\Rightarrow \quad C(j\Omega) = e^{-j\Omega T/2} \cdot T \cdot \frac{\sin \Omega T/2}{\Omega T/2}$$



- **Eliminación deficiente de alias**

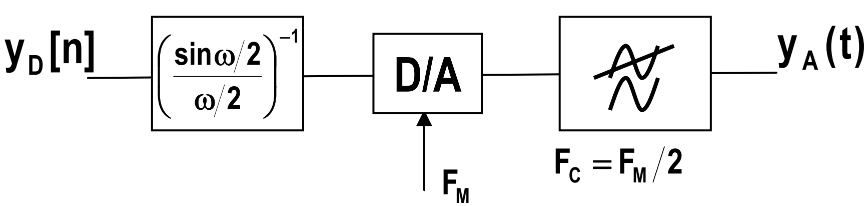
  $\Rightarrow$ necesidad del filtro reconstructor

- **Distorsión del espectro**

  $\Rightarrow$ compensar antes de la conv. D/A

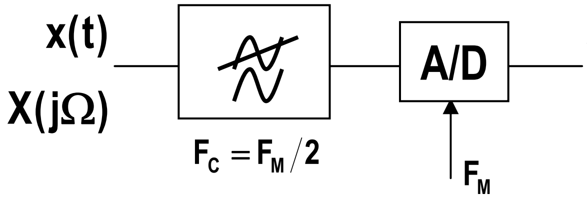
$$H_{pred}(e^{j\omega}) = \left(\frac{\sin \omega/2}{\omega/2} \right)^{-1}$$

(filtro de predistorsión)



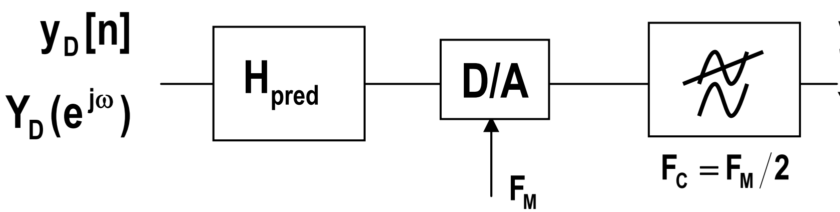
Resumen

- **Muestreo**



$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\Omega - j\Omega_M k)$$

- **Reconstrucción**



$$Y_A(j\Omega) = C(j\Omega)\, H_{pred}(e^{j\omega})\, Y_D(e^{j\omega})$$