1.4: Sistemas caracterizados por ecuaciones en diferencias finitas

- Repaso matemático
- Sistema caracterizado por EDF
- Propiedades
- Respuesta impulsional
- Función de transferencia

Repaso matemático (I)

- Ecuación en diferencias finitas (EDF) lineal con coeficientes constantes:

$$\sum_{i=0}^{P} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{Q} b_i x[n-i], \quad P,Q < \infty, \quad a_i, b_i \text{ constantes}$$

Orden = Max(P,Q)

- Ecuación recurrente: $$y[n] = \sum_{i=0}^{Q} \frac{b_i}{a_0} x[n-i] - \sum_{i=1}^{P} \frac{a_i}{a_0} y[n-i], \quad a_0 \neq 0$$

- Ecuación no recurrente: $$y[n] = \sum_{i=0}^{Q} \frac{b_i}{a_0} x[n-i]$$

- Solución:

$$y[n] = y_H[n] + y_P[n]$$

Solución homogénea
(solución cuando x[n]=0)

Solución particular

Repaso matemático (II)

◆ Solución homogénea:

- Estudio de la ecuación característica

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{P} a_i y[n-i] = 0 \\ y_h[n] \Rightarrow \alpha z^n \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{EC: \quad \sum_{i=0}^{P} a_i z^{-i} = 0}$$

- Solución de la EC = $\{z_k\}$ (raíces simples)

$$\boxed{y_h[n] = \sum_{k=1}^{P} \alpha_k z_k^n}$$

◆ Solución Particular:

"En general" $y_p[n]$ es de la misma forma que $x[n]$

	$x[n]$	$y_p[n]$
Constante	A	K
Exponencial	Az^n	Kz^n
Polinomio	An^M	$\Sigma\, k_i n^i$
Seno/coseno	$A\cos(\omega n)$	$K_1 \mathrm{sen}(\omega n)$ +
	$B\mathrm{sen}(\omega n)$	$K_2\cos(\omega n)$

Repaso matemático: Ejemplo

- EDF de orden 1: $y[n] - a\, y[n-1] = x[n]$, $x[n]=x=\text{constante}$

- Solución homogénea $y_H[n]$: Ecuación característica: $1 - a\, z^{-1} = 0$

  $z = a$ raíz simple $\Rightarrow$ $\boxed{y_H[n] = \alpha\, a^n}$

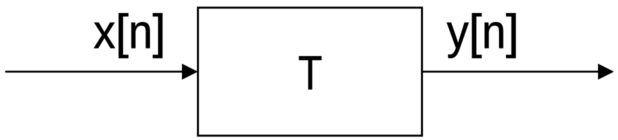
- Solución particular $y_p[n]$: $x[n]$ constante $\Rightarrow$ $y_p[n]$ constante

  $y - a\, y = x$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = x / (1-a) = y_p[n]}$

- Solución $y[n]$: $\boxed{y[n] = \alpha\, a^n + x / (1-a)}$

  (Conjunto de soluciones)

Sistema caracterizado por EDF



$$\text{TQ} \quad \sum_{i=0}^{P} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{Q} b_i x[n-i]$$

- Cálculo de la salida:

$$a_0 y[n] = \sum_{i=0}^{Q} b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^{P} a_i y[n-i] \quad \text{(suponiendo causalidad)}$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{i=0}^{Q} b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^{P} a_i y[n-i]\right]$$

- En la práctica: Suponemos que en el instante n(=0), aplicamos x[n] al sistema que empieza a comportarse según una EDF:

$$y[0] = \frac{1}{a_0}\left[b_0 x[0] - \sum_{i=1}^{P} a_i y[-i]\right], \qquad (x[n] = 0, n < 0)$$

$\Rightarrow$ Es necesario conocer {y[-1],...,y[-P]} : Condiciones iniciales
(La EDF no es una caracterización completa del sistema)

Ejemplo

$y[n] - a\,y[n-1] = x[n], \quad \forall n \geq 0, \qquad y[-1]=B$

- Señal de entrada: $x[n] = b\,u[n]$

n	0	1	2
y[n]	$aB+b$	$a^2B+ab+b$	$a^3B+a^2b+ab+b$

$n \geq 0$: $y[n] = ay[n-1] + b$

- Respuesta general:

$$y[n] = a^{n+1}B + b\sum_{k=0}^{n} a^k$$

$$= a^{n+1}B + b\,\frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad n \geq 0$$

$$= \left[a\left(B - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \underbrace{\frac{b}{1-a}}\right] u[n]$$

Respuesta con excitación nula (solución homogénea)

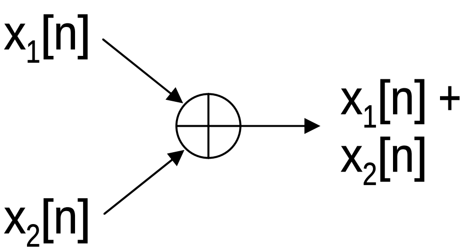
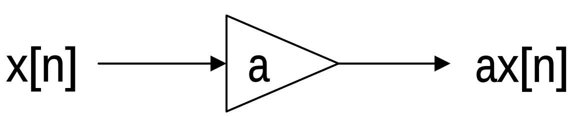
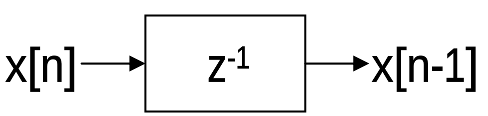
Respuesta en reposo (solución particular)

Interés práctico: Realización

- **Ejemplo 1: Acumulador** $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$
  - Formulación directa $\Rightarrow$ Suma infinita (no es realizable)
  - Formulación con EDF $\Rightarrow$ $$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$
    $$y[n] - y[n-1] = x[n] \quad \text{(EDF)}$$
    Una suma
- **Ejemplo 2: Promediador**
  - Formulación directa $\Rightarrow$ $$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] = \frac{1}{M}\left(x[n] + \ldots + x[n-M+1]\right)$$
    $$y[[n-1] = \frac{1}{M}\left(x[n-1] + \ldots + x[n-M]\right)$$
  - Formulación con EDF $\Rightarrow$ $$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{M}\left(x[n] - x[n-M]\right)$$

Implementación

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{i=0}^{Q} b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^{P} a_i y[n-i]\right]$$

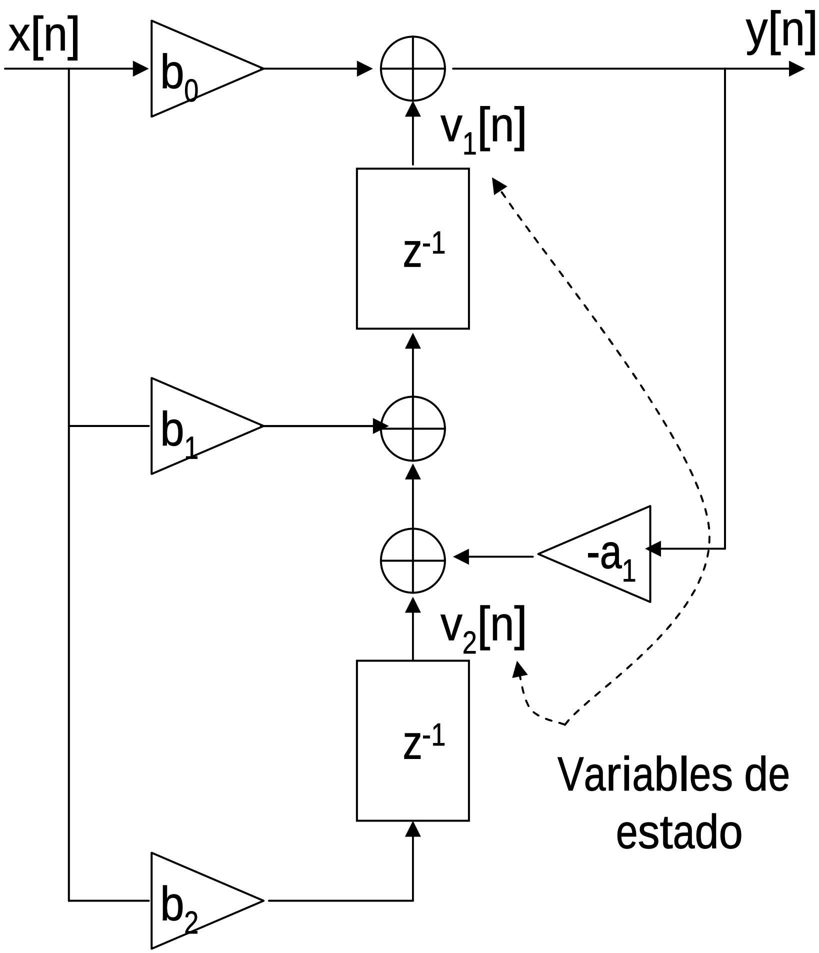
Suma	Multiplicación	Retardo
		

$h[n] = \delta[n-1]$

$H(z) = \Sigma\delta[n-1]z^{-n}$

$= z^{-1}$

Ejemplo: sistema de orden 2



- Ecuaciones del sistema:

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0x[n] + v_1[n] \\ v_1[n+1] &= b_1x[n] + v_2[n] - a_1y[n] \\ v_2[n+1] &= b_2x[n] \end{aligned}$$

- Relación entrada / salida:

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0x[n] + b_1x[n-1] + v_2[n-1] \\ &\quad - a_1y[n-1] \\ y[n] &= b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] \\ &\quad - a_1y[n-1] \end{aligned}$$

$$y[n] + a_1y[n-1] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2]$$

Propiedades de los sistemas EDF

- <u>Caso teórico</u>: $\sum_{i=0}^{P} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{Q} b_i x[n-i], \quad \forall n$

Si $\{y_1[n],x_1[n]\}$ y $\{y_2[n],x_2[n]\}$ satisfacen la EDF

$\Rightarrow$ también lo hace $\{\alpha y_1[n]+\beta y_2[n],\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]\}$

$\Rightarrow$ Sistema lineal ?

Si $\{y[n],x[n]\}$ satisface la EDF

$\Rightarrow$ también lo hace $\{y[n-M],x[n-M]\}$

$\Rightarrow$ Sistema invariante con el tiempo ?

Propiedades de los sistemas EDF

- Caso práctico: $\sum_{i=0}^{P} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{Q} b_i x[n-i], \quad \forall n \geq 0$, condiciones iniciales

Un sistema definido por EDF con condiciones iniciales es lineal e invariante si y sólo si está en reposo: $y[-i]=0,\ 1 \leq i \leq P$

Ejemplo: $y[n] - a\,y[n-1] = x[n],\ \forall\, n \geq 0,\ y[-1]=B$

	$y_1[n] = T\{x_1[n]=\delta[n]\}$	$y_2[n] = T\{x_2[n]= 2\delta[n]\}$
n=0	$y_1[0] = aB+1$	$y_2[0] = aB+2$
n=1	$y_1[1] = a^2B+a$	$y_2[1] = a^2B+2a$
n=2	$y_1[2] = a^3B+a^2$	$y_2[2] = a^3B+2a^2$
n	$y_1[n] = a^{n+1}B+a^n$	$y_2[n] = a^{n+1}B+2a^n$

$$2y_1[n] \neq y_2[n] \text{ , si } B \neq 0$$

Propiedades de los sistemas EDF

- <u>Caso particular</u>: $$y[n]=\sum_{i=0}^{Q}\frac{b_i}{a_0}x[n-i],$$ sistema no recurrente

$\Rightarrow$ Siempre en reposo

$\Rightarrow$ Siempre lineal e invariante

$\Rightarrow$ Respuesta impulsional:

$$h[n]=T\{\delta[n]\}=\sum_{i=0}^{Q}\frac{b_i}{a_0}\delta[n-i]$$

$$=\begin{cases} b_n/a_0, & 0\le n\le Q \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Respuesta impulsional (I)

- Sistema en reposo $\Rightarrow$ Sistema lineal e invariante: $h[n]=T\{\delta[n]\}$

- Ejemplo: $y[n] + ay[n-1] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2], \quad \forall n\geq 0,\ y[-1]=0$

  $h[n] = -a\, h[n-1] + b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + b_2\delta[n-2],\ h[-1]=0$

<u>Cálculo 1</u>

$h[n] = 0,\ n<0$

$h[0] = b_0$

$h[1] = -\, ab_0 + b_1$

$h[2] = a^2b_0 - ab_1 + b_2 = a^2 (b_0 - b_1/a + b_2 /a^2)$

$h[3] = -\, a^3 (b_0 - b_1/a + b_2 /a^2)$

......

$h[n] = (-\, a)^n (b_0 - b_1/a + b_2 /a^2), \quad n \geq 2$

$$h[n] = (-\, a)^n (b_0 - b_1/a + b_2 /a^2)\, u[n-2] + b_0\, \delta[n] + (-\, ab_0 + b_1)\, \delta[n-1]$$

Respuesta impulsional (II)

- La exponencial puede empezar en n=0:

$$h[n]=\left(b_0-\frac{b_1}{a}+\frac{b_2}{a^2}\right)(-a)^n u[n]+\alpha\delta[n]+\beta\delta[n-1]$$

$$\begin{cases} n=0, \quad h[0]=b_0-\dfrac{b_1}{a}+\dfrac{b_2}{a^2}+\alpha=b_0 \\ n=1, \quad h[1]=\left(b_0-\dfrac{b_1}{a}+\dfrac{b_2}{a^2}\right)(-a)+\beta=-ab_0+b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{b_1}{a}-\dfrac{b_2}{a^2} \\ \beta=\dfrac{b_2}{a} \end{cases}$$

$$h[n]=\left(b_0-\frac{b_1}{a}+\frac{b_2}{a^2}\right)(-a)^n u[n]+\left(\frac{b_1}{a}-\frac{b_2}{a^2}\right)\delta[n]+\frac{b_2}{a}\delta[n-1]$$

Respuesta impulsional (III)

Cálculo 2 $n<0$, Sistema en reposo $h[n] = 0$

$n>2$, Entrada = 0 $\Rightarrow$ Salida=respuesta libre

Ecuación característica: $1+a\,z^{-1}=0$ $\Rightarrow$ $z=-a$

$h[n] = \alpha\,(-a)^n\,u[n-3]$

$$h[n] = \alpha\,(-a)^n\,u[n-3] + \beta_1\,\delta[n] + \beta_2\,\delta[n-1] + \beta_3\,\delta[n-2]$$

$$\alpha = \left(b_0 - \frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a^2}\right) \qquad \beta_1 = b_0 \qquad \beta_2 = \left(-ab_0 + b_1\right) \qquad \beta_3 = a^2\left(b_0 - \frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a^2}\right)$$

Función de transferencia

- Respuesta a z^n: Si el sistema es lineal e invariante

  $\Rightarrow$ z^n autofunción del sistema

- H(z): $x[n] = A\,z^n \quad \Rightarrow \quad y[n] = H(z)\,A\,z^n$

$$\sum_{i=0}^{P} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{Q} b_i x[n-i]$$

$$\sum_{i=0}^{P} a_i\, H(z)\, A z^{n-i} = \sum_{i=0}^{Q} b_i A z^{n-i}$$

$$H(z) \sum_{i=0}^{P} a_i\, z^{-i} = \sum_{i=0}^{Q} b_i z^{-i}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{Q} b_i\, z^{-i}}{\sum_{i=0}^{P} a_i\, z^{-i}}$$

Función racional de variable z^{-1}

Resumen

$$\sum_{i=0}^{P} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{Q} b_i x[n-i]$$

- Interés práctico: implementación
- Lineal e invariante:
  - Funciona $\forall$ n
  - Funciona n $\geq$ 0 y en reposo

$\Rightarrow$ Respuesta impulsional

$\Rightarrow$ Función de transferencia (Función racional)