ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS DE TELECOMUNICACIÓ DE BARCELONA

Examen final COMUNICACIONS II **17 de Juny (Durada: 3 hores)**

Professors: M. Nájar, A. Pérez Neira, J. Riba, J. Rodríguez Fonollosa
Data de publicació de les notes provisionals: 29 de Juny a les 18 hores
Presentació d'alegacions a secretaria acadèmica el dia 30 de Juny
Notes definitives: 2 de Juliol a les 18 hores

Problema 1

La expresión general de la señal recibida por un receptor multiusuario es:

$$r(t) = s(t) + w(t) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{E_{bk}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_k[n]\varphi_k'(t - nT) + w(t),$$

con

$$\varphi_k'(t) = \varphi_k(t) * h_k(t)$$

En donde N es el número de usuarios, T es el periodo de símbolo (de todos los usuarios), las funciones $\varphi_k(t)$ para $k \in \{1, \cdots N\}$ son reales, tienen una duración limitada a un símbolo y forman una base ortonormal:

$$\varphi_k(t) = 0, t \notin [0,T] \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_l(t)dt = \delta[k-l]$$

$h_k(t)$ representa la respuesta impulsional del canal de cada usuario k y $w(t)$ es ruido gaussiano blanco aditivo (AWGN) con densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$, y E_{bk} es la energía por bit recibida para el usuario k.

Los símbolos transmitidos por cada usuario son independientes entre sí, equiprobables y se utiliza una codificación BPSK para todos ellos:

$$s_k[n] \in \{-1, 1\}$$

1.1 Caso ideal (20 puntos)

Inicialmente se considerará un canal de propagación ideal, $h_k(t) = \delta(t)$ para todos los usuarios:

a) Proponga un esquema de receptor que proporcione una detección de los símbolos transmitidos para el usuario $k = 1$.

b) Calcule la BER de este usuario en función de E_{b1} / N_0.

1.2 Caso con dispersión temporal. Receptor óptimo multiusuario (30 puntos)

A continuación consideraremos una situación más realista en la que el canal de propagación produce una pequeña dispersión temporal de forma que su duración está limitada a T_c siendo ésta muy inferior al periodo de símbolo, $T_c \ll T$. En este caso las funciones $\varphi_k(t)$ que forman una base ortonormal dejan de ser ortogonales una vez atraviesan el canal de propagación. Se define:

$$\rho_{kl} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_l'(t)dt$$

Para detectar la señal transmitida por cada usuario de forma centralizada se considera el diseño de un receptor multiusuario formado por un banco de filtros adaptados a las funciones $\varphi_k(t)$. De esta forma la salida de cada filtro adaptado sigue la expresión:

$$y_k(t) = r(t) * \varphi_k(T - t)$$

c) Ignorando la presencia de los símbolos transmitidos en el instante $(n-1)T$ (es decir, ignorando todos los $s_k[n-1]$) obtenga la expresión de las muestras a la salida de los filtros adaptados en el instante $(n+1)T$:

$$y_k[n] \triangleq y_k((n+1)T),$$

en función de los coeficientes de correlación ρ_{kl}, de E_{bl}, de los símbolos transmitidos en el instante nT, $s_l[n]$ y de $\beta_k[n] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\varphi_k(\tau - nT)d\tau$.

d) (*NOTA: la resolución de este apartado no es necesaria para proseguir el problema*) Obtenga la expresión exacta de $y_k[n]$ en función de ρ_{kl}, de $\alpha_{kl} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_l'(t+T)dt$ y de las energías de los bits E_{bl}. Justifique porqué son despreciables los términos ignorados en el apartado c).

e) Proponga una expresión matricial del vector de muestras a la salida de los filtros adaptados

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

en el instante n=0 utilizando la matriz **R**, el vector de símbolos transmitidos por cada usuario **s** y el vector **n**:

$$\mathbf{R} \triangleq \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{bmatrix}, \mathbf{s} \triangleq \begin{bmatrix} \sqrt{E_{b1}}s_1 \\ \vdots \\ \sqrt{E_{bN}}s_N \end{bmatrix}, \mathbf{n} \triangleq \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix}$$

f) Indique la expresión a minimizar para obtener la estimación óptima del vector de símbolos transmitido por cada usuario a partir del vector **y**.

NOTA: Inicie el siguiente apartado en una hoja nueva. En la misma escriba la expresión obtenida en el apartado e).

1.3 Caso con dispersión temporal. Decorrelador (30 puntos).

A continuación se propone multiplicar el vector a la salida de los filtros adaptados **y** por una matriz de forma que se decorrelen los distintos usuarios y se obtenga una expresión del tipo:

$$\mathbf{y}' \triangleq \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{n}'$$

g) Indique como calcular la matriz **A**.

h) Proponga una expresión que proporcione una estimación de los símbolos transmitidos por el usuario 1 a partir del elemento y_1' del vector $\mathbf{y}'$.

i) Para dos usuarios (N=2) y considerando $\rho_{11} = \rho_{22} = 1$ y $\rho_{12} = \rho_{21} = \rho$, calcule la matriz **A**, la expresión de y_1' y la BER que se obtendría utilizando este receptor en función de E_{b1}/N_0.

1.4 Caso con dispersión temporal y errores de estimación de la matriz de covarianza para dos usuarios (20 puntos).

Ahora seguimos considerando tan sólo dos usuarios (N=2). En la práctica, y debido a errores en la estimación de los canales, la matriz de correlación no puede obtenerse de forma exacta y la señal a la salida del decorrelador para el usuario 1 es:

$$y_1 \approx \sqrt{E_{b1}}s_1 + \varepsilon\sqrt{E_{b2}}s_2 + n_1'$$

j) Estudie la degradación sobre la BER calculada en el receptor anterior que produciría este efecto en función de ε y de la relación entre energías por bit recibidas para ambos usuarios:

$$\gamma \triangleq \sqrt{\frac{E_{b2}}{E_{b1}}}$$

Para ello suponga que la expresión obtenida en el apartado i) es $BER = Q\left(\sqrt{a}\right)$

Problema 2

El objetivo de este ejercicio es evaluar las prestaciones de un sistema de comunicaciones en el que se transmiten simultáneamente una señal de datos en el canal en fase y una señal de control en el canal en cuadratura. Los símbolos de datos d_k y los símbolos de control c_n son equiprobables y presentan señalización polar {1,-1}. Las velocidades de transmisión son diferentes $r_d = 1/T_d$ para datos y $r_c = 1/T_c$ para control, tal que $r_d = \mathrm{N}\, r_c$.

La señal transmitida es:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_d d_k p_d(t - kT_d)\cos(2\pi f_c t + \theta_c) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c c_n p_c(t - nT_c) sen(2\pi f_c t + \theta_c)$$

$$p_d(t) = \frac{1}{\sqrt{T_d}} \Pi\left(\frac{t - T_d/2}{T_d}\right)$$

$$p_c(t) = \frac{1}{\sqrt{T_c}} \Pi\left(\frac{t - T_c/2}{T_c}\right)$$

Donde $f_c = M r_d \quad M \gg 1$

a) Obtenga la densidad espectral de la señal $s(t)$ y la potencia transmitida en el canal de datos P_d y en el canal de control P_c.

Considere que el canal introduce ruido Gaussiano y blanco con densidad espectral $S_w(f) = N_0/2$

b) Diseñe el receptor óptimo para la recuperación de los datos y de la señal de control.

c) Halle la BER para los bits de datos en función de la relación E_{bd}/N_0 y para los bits de control en función de la relación E_{bc}/N_0 , siendo E_{bd} y E_{bc} las energías medias de los bits de datos y de control, respectivamente. Determine la relación entre las potencias transmitidas P_d y P_c para obtener igual probabilidad de error en la recepción de datos y de control.

Suponga en el resto del ejercicio que $E_b = E_{bd} = E_{bc}$.

Considere que el oscilador local del receptor genera la portadora $\cos(2\pi f_c t + \theta_L)$, siendo θ_L determinista.

d) Obtenga las componentes en fase $I_k = I((k+1)T_d)$ y cuadratura $Q_n = Q((n+1)T_c)$ muestreadas a la salida de los filtros adaptados del receptor.

e) Halle la cota de la BER para la máxima distorsión producida por la interferencia mutua de los canales en fase y en cuadratura para los bits de datos y para los bits de control en función de la E_b/N_0.

NOTA: Inicie los siguientes apartados en una hoja nueva. En la misma escriba las expresiones obtenidas en el apartado d).

En la recepción de la señal de control, es equivalente utilizar el filtro adaptado al pulso $p_c(t)$ a utilizar el filtro adaptado al pulso $\frac{\sqrt{T_d}}{\sqrt{T_c}} p_d(t)$, definiendo Q_k como las muestras a la salida de este filtro a velocidad r_d de forma que: $Q_n = \sum_{k=nN}^{(n+1)N-1} Q_k$

f) Defina la matriz **A** que permite expresar las componentes en fase I_k y cuadratura Q_k según la siguiente notación matricial:

$$\begin{bmatrix} I_k \\ Q_k \end{bmatrix} = \sqrt{E_b}\mathbf{A}\begin{bmatrix} d_k \\ c_n/N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_I \\ \beta_Q \end{bmatrix}$$

g) A partir de la expresión anterior diseñe un sistema corrector de la interferencia entre los canales fase y cuadratura que permita recuperar los símbolos de datos y de control. Compruebe que la solución consiste en una rotación del espacio de señal.

h) Obtenga la BER del sistema después de la corrección.

Suponga ahora que la fase del oscilador local del receptor es una variable aleatoria gaussiana, independiente de los datos, con media θ_c y varianza σ_c^2, tal que $|\theta_L - \theta_c| \ll 1$.

i) A partir del apartado d) obtenga aproximadamente el incremento de ruido equivalente en los canales de datos y de control debido al error de sincronismo.

j) Halle la nueva BER para los bits de datos y para los bits de control en función de la E_b/N_0.