TEMA 2 TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS DE MICROONDAS

2.1 INTRODUCCIÓN

En circuitos de baja frecuencia ($D \ll \lambda$), o bien para líneas que soportan modos TEM, se pueden definir tensiones y corrientes. Estas V e I cumplen en un determinado nodo o rama del circuito las leyes de Kirchoff que soportan el análisis circuital matricial con parámetros [Z] o [Y] que son técnicas muy útiles.

Si queremos realizar funciones circuitales con ondas no TEM (guías de onda) será necesario definir unas tensiones y corrientes que permitan el análisis circuital. Esto no lo vamos a hacer formalmente, pero se entiende que a partir de ahora cuando en un circuito general hablemos de V e I serán las conocidas para líneas TEM y baja frecuencia y unas 'equivalentes' (definidas a partir de conceptos de potencia transportada) para las guías de onda. Desde el punto de vista circuital sólo nos interesan las V's y las I's y la relación entre ellas (Z e Y)

Para guías de onda, se definen unas tensiones y corrientes equivalentes de tal manera que:

- La tensión es proporcional al campo eléctrico transversal: $V \alpha E_t$
- La corriente es proporcional al campo magnético transversal: $I \alpha H_t$
- La potencia transportada por el modo se puede calcular a partir de V e I:

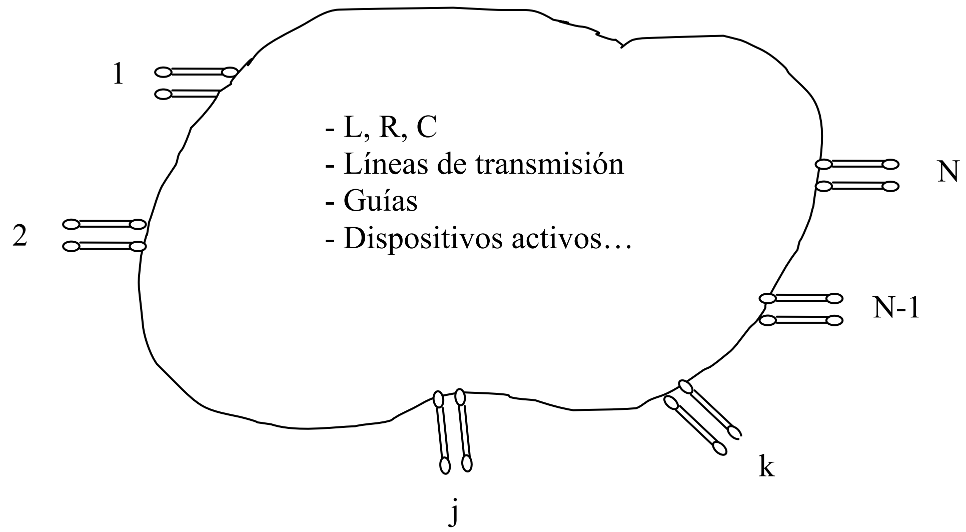
$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[VI^*\right]$$

con V e I las equivalentes.

Por lo tanto, la guía se representará por una línea de transmisión equivalente donde Z_0 es un valor arbitrario.

2.2 CIRCUITO DE MICROONDAS

Un circuito de microondas es una región del espacio arbitraria, que puede contener elementos activos y pasivos, concentrados o distribuidos, que presenta cierto número de accesos (o puertas) en forma de líneas de transmisión o de guías de onda. Atendiendo a la equivalencia entre guía de onda y líneas de transmisión, todos los accesos pueden representarse simbólicamente mediante líneas de transmisión.



2.3 ONDAS DE POTENCIA

Si estuviéramos en el límite de las bajas frecuencias (teoría de circuitos clásica) los pares de terminales, mediante los que representamos cada acceso serían pares físicos. Las tensiones y corrientes en los mismos estarían definidos sin ambigüedad y para caracterizar el circuito desde el exterior podríamos utilizar parámetros [Z], [Y]… o cualquier otro juego de parámetros que caracterice completamente el comportamiento del circuito en términos de corrientes y tensiones en los accesos.

A frecuencias de microondas, algunos (o todos) de los accesos pueden ser extremos de guías de onda. Con las equivalencias que hemos definido y discutido previamente podemos seguir utilizando parámetros habituales en baja frecuencia.

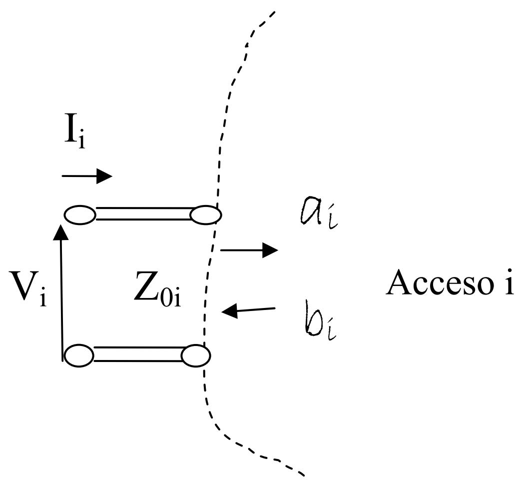
Si tuviésemos que caracterizar en la práctica un circuito de microondas a partir de parámetros basados en tensiones y corrientes nos encontraríamos los siguientes problemas que mediante parámetros basados en ondas no aparecerán:

- Dificultad en la medida de los campos en los que se basan las tensiones y corrientes equivalentes.
- Aunque se llegasen a medir tensiones y corrientes, éstas varían rápidamente con la distancia y de manera complicada, mientras que las ondas progresivas y regresivas lo hacen de manera sencilla.
- A frecuencias de microondas puede resultar difícil realizar los circuitos abiertos que aparecen en la definición de algunos de los parámetros basados en V e I.

La caracterización de cualquier circuito (especialmente ventajosa a frecuencias de microondas) puede hacerse en términos de ondas normalizadas de tensión u ondas de potencia en sus accesos, definidas como:

$$a_i = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{oi}}}$$

$$b_i = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{oi}}}$$



donde:

$$V_i^+ = V_{0i}^+ e^{-j\beta z}$$
$$V_i^- = V_{0i}^- e^{+j\beta z}$$

Convenio: en un acceso, las ondas se consideran progresivas cuando se propagan hacia el circuito y regresivas en caso contrario. Como las tensiones y corrientes en los accesos pueden ponerse en términos de estas ondas:

$$V_i = V_i^+ + V_i^- = \sqrt{Z_{0i}}\left(a_i + b_i\right)$$
$$I_i = I_i^+ + I_i^- = \frac{1}{\sqrt{Z_{0i}}}\left(a_i - b_i\right)$$

O también:

$$a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{V_i}{\sqrt{Z_{0i}}} + \sqrt{Z_{0i}}I_i\right)$$
$$b_i = \frac{1}{2}\left(\frac{V_i}{\sqrt{Z_{0i}}} - \sqrt{Z_{0i}}I_i\right)$$

Está claro que una caracterización en términos de estas ondas es equivalente a una caracterización en términos de V e I.

Si nos fijamos en las últimas expresiones de a_i, b_i, podemos entender estas 'ondas' como entes matemáticos que dependen de V_i, I_i (tensiones y corrientes en los accesos) que nada tienen que ver con las ondas progresivas y regresivas.

La denominación de ondas de potencia viene de que si calculamos la potencia que entra en la red por el acceso i:

$$P_i = \frac{1}{2}\Re\left[V_i I_i^*\right] = \frac{1}{2}\Re\left[\sqrt{Z_{0i}}\left(a_i + b_i\right)\frac{1}{\sqrt{Z_{0i}}}\left(a_i^* - b_i^*\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}|a_i|^2 - \frac{1}{2}|b_i|^2 = \frac{1}{2}\frac{|V_i^+|^2}{Z_0} - \frac{1}{2}\frac{|V_i^-|^2}{Z_0}$$

Y llamamos:

- Potencia de la onda incidente:

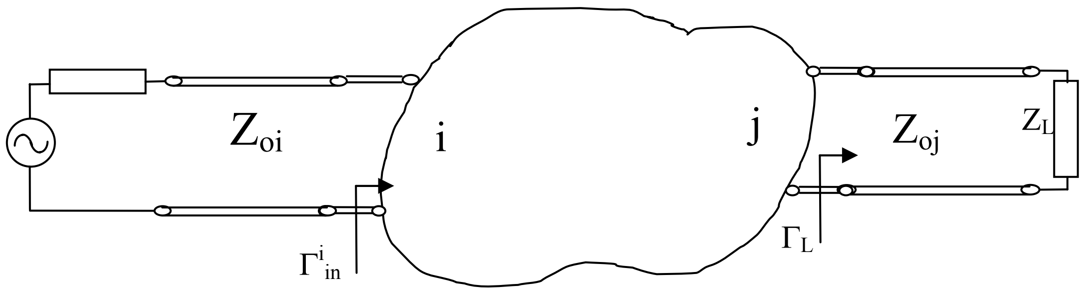
$$P_i^+ = \frac{1}{2}|a_i|^2$$

- Potencia de la onda reflejada:

$$P_i^- = \frac{1}{2}|b_i|^2$$

2.4 COEFICIENTE DE REFLEXIÓN GENERALIZADO

Consideremos dos de los accesos i,j de una red de microondas de N-accesos. Supongamos que el acceso i se encuentra conectado a un generador a través de una línea de transmisión de impedancia característica igual a la de referencia del acceso, y que el acceso j se encuentra conectado a una carga de impedancia Z_j mediante una línea de transmisión de impedancia característica igual a la del acceso. Los otros accesos están cargados de manera arbitraria.



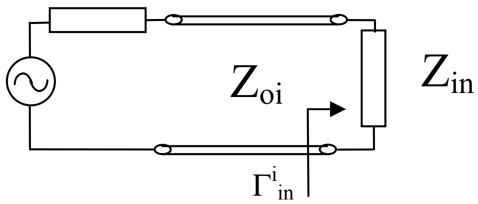
Se define:

1. Coeficiente de reflexión presentado por el circuito en el acceso i:

$$\Gamma_{in}^{i} = \frac{b_i}{a_i}$$

En baja frecuencia, en lugar de coeficiente de reflexión, hubiéramos hablado de impedancia de entrada Z_{in}. La impedancia Z_{in} es la relación entre tensión y corriente a la entrada:

$$Z_{in} = \frac{V_i}{I_i} = \frac{\sqrt{Z_{0i}}\left(a_i + b_i\right)}{\frac{1}{\sqrt{Z_{0i}}}\left(a_i - b_i\right)} = Z_{0i}\frac{\left(a_i + b_i\right)}{\left(a_i - b_i\right)} = Z_{0i}\frac{\left(1 + {b_i}/{a_i}\right)}{\left(1 - {b_i}/{a_i}\right)} = Z_{0i}\frac{1 + \Gamma_{in}}{1 - \Gamma_{in}}$$



Casos particulares:

- Si Γ_{in}=1, el circuito se ve desde la entrada como un circuito abierto. La impedancia Z_{in} es ∞.
- Si Γ_{in}=-1, el circuito se ve desde la entrada como un cortocircuito. La impedancia Z_{in} es 0.
- Si Γ_{in}=0, el circuito se ve desde la entrada como una carga adaptada a la línea. La impedancia Z_{in} es Z_{0i}. Si entonces, la impedancia de generador es también Z_{0i} se dice que el generador está adaptado y la potencia que entrega éste es la máxima posible (potencia disponible de generador). Lo veremos más adelante otra vez.

2. Coeficiente de reflexión presentado por la carga en el acceso j:

$$\Gamma_j = \frac{a_j}{b_j}$$

Y de la misma manera que hemos hecho antes:

$$Z_j = \frac{V_j}{-I_j} = \frac{\sqrt{Z_{0j}}\left(a_j + b_j\right)}{\frac{-1}{\sqrt{Z_{0j}}}\left(a_j - b_j\right)} = Z_{0j}\frac{\left(a_j + b_j\right)}{\left(-a_j + b_j\right)} = Z_{0j}\frac{\left(1 + a_j/b_j\right)}{\left(1 - a_j/b_j\right)} = Z_{0j}\frac{1+\Gamma_j}{1-\Gamma_j}$$

Casos particulares:

- Si Γ_j=1, la carga es un circuito abierto. La impedancia Z_j es ∞.
- Si Γ_j=-1, la carga es un cortocircuito. La impedancia Z_j es 0.
- Si Γ_j=0, es una carga adaptada a la línea. La impedancia Z_j es Z_{0j}. Podemos asegurar que, si por el acceso j sale una onda b_j, seguro que ésta no se refleja en la carga sino que está adaptada y por tanto $a_j = 0$. Diremos que el acceso de salida está adaptado. No entra señal por el acceso j.

Es interesante ver que podemos separar el concepto de coeficiente de reflexión del de ondas progresivas y regresivas en que se basa. En efecto, teniendo en cuenta que:

$$a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{V_i}{\sqrt{Z_{0i}}} + \sqrt{Z_{0i}} I_i\right)$$

$$b_i = \frac{1}{2}\left(\frac{V_i}{\sqrt{Z_{0i}}} - \sqrt{Z_{0i}} I_i\right)$$

Sustituimos en la ecuación que define a Γ_{in}:

$$\Gamma_{in}^i = \frac{b_i}{a_i} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{V_i}{\sqrt{Z_{0i}}} - \sqrt{Z_{0i}} I_i\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{V_i}{\sqrt{Z_{0i}}} + \sqrt{Z_{0i}} I_i\right)} = \frac{\frac{V_i}{I_i} - Z_{0i}}{\frac{V_i}{I_i} + Z_{0i}} = \frac{Z_{in}^i - Z_{0i}}{Z_{in}^i + Z_{0i}}$$

A partir de ahora podemos hablar de coeficiente de reflexión aunque no hayamos puesto ninguna línea en el acceso i. Por eso se llama generalizado. Es siempre respecto a una línea hipotética de impedancia característica la de referencia en ese acceso.

De la misma manera:

$$\Gamma_j = \frac{a_j}{b_j} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{V_j}{\sqrt{Z_{0j}}} + \sqrt{Z_{0j}} I_j\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{V_j}{\sqrt{Z_{0j}}} - \sqrt{Z_{0j}} I_j\right)} = \frac{\frac{V_j}{I_j} + Z_{0j}}{\frac{V_j}{I_j} - Z_{0j}} = \frac{-Z_j + Z_{0j}}{-Z_j - Z_{0j}} = \frac{Z_j - Z_{0j}}{Z_j + Z_{0j}}$$

Finalmente, podemos encontrar las potencias entregadas a los accesos:

- Potencia entregada al acceso i:

$$P_i = \frac{1}{2}|a_i|^2 - \frac{1}{2}|b_i|^2 = \frac{1}{2}|a_i|^2\left(1 - |\Gamma_{in}|^2\right)$$

- Potencia entregada a la carga en el acceso j:

$$P_j = \frac{1}{2}|b_j|^2 - \frac{1}{2}|a_j|^2 = \frac{1}{2}|b_j|^2\left(1 - |\Gamma_j|^2\right)$$

2.5 PARÁMETROS S. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

DEFINICIÓN

Los parámetros S (del inglés "scattering"= dispersión) son los parámetros que relacionan entre sí las ondas entrantes y salientes al circuito y que caracterizan al circuito desde el exterior.

Se definen a partir de la relación matricial:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & .. & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & & & S_{2n} \\ & & & & \\ & & & & \\ S_{n1} & & & & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ \\ a_n \end{bmatrix}$$

O de manera más compacta:

$[b]=[S][a]$,

con $[b]=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{bmatrix}$ $\quad [a]=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ a_n \end{bmatrix}$

A partir de la definición, está claro que [S] es una matriz NxN (con N el número de accesos del circuito) y que su significado es:

Términos de la diagonal S_{ii}

$$S_{ii} = \left.\frac{b_i}{a_i}\right|_{a_k=0\ \forall k\neq i}$$

Es el coeficiente de reflexión que presenta el acceso i cuando todos los demás se encuentran 'adaptados'

¿Qué significa a_k=0?

$$a_k = \frac{1}{2}\left(\frac{V_k}{\sqrt{Z_{0k}}} + \sqrt{Z_{0k}}\, I_k\right) = 0 \rightarrow V_k = -Z_{0k} I_k$$

Significa que el acceso k está terminado con una impedancia igual a la de referencia del acceso.

Términos fuera de la diagonal

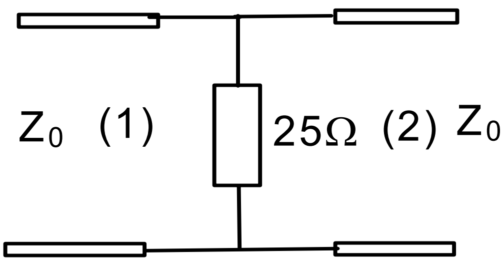
$$S_{ji} = \left.\frac{b_j}{a_i}\right|_{a_k=0\ \forall k\neq i}$$

Coeficiente de transmisión de i a j cuando todos los accesos (excepto el i) están 'adaptados'. Sólo entra señal por el acceso i y miramos cuanta señal sale por el acceso j.

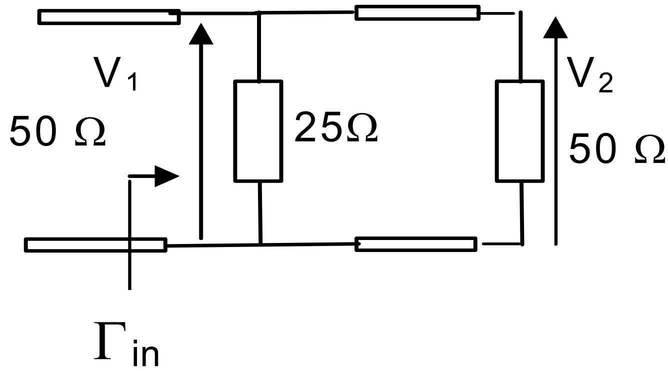
Una vez todos los parámetros S están calculados, podemos decir que cualquier salida se encuentra como combinación lineal de todas las entradas. Podemos ver el circuito como una caja negra y calcular las salidas b en función de las entradas a y los parámetros S.

Ejemplo 1

Calcular los parámetros [S] del siguiente bipuerto referidos los dos accesos a 50 Ω.



- Cálculo de S_{11}:



$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \left.\Gamma_{in}^1\right|_{a_2=0}$$

$$25\|50 = \frac{25\cdot 50}{75} = \frac{50}{3}$$

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in}-50}{Z_{in}+50} = \frac{50/3-50}{50/3+50} = -\frac{1}{2}$$

$$S_{11} = S_{22} = -\frac{1}{2}$$

- Cálculo de S_{21}:

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0}$$

Para poder calcularlo, recurrimos a una relación de tensiones:

$$V_1 = \sqrt{Z_0}\left(a_1 + b_1\right)$$
$$V_2 = \sqrt{Z_0}\left(a_2 + b_2\right)$$

Dividimos una por la otra:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{Z_0}\left(a_2 + b_2\right)}{\sqrt{Z_0}\left(a_1 + b_1\right)} = \frac{\left(a_2 + b_2\right)}{\left(a_1 + b_1\right)}$$

Si particularizamos esta relación de tensiones para $a_2 = 0$:

$$\left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{a_2=0} = \left.\frac{b_2}{a_1 + b_1}\right|_{a_2=0} = \left.\frac{b_2 / a_1}{1 + b_1 / a_1}\right|_{a_2=0} = \frac{S_{21}}{1 + S_{11}}$$

Entonces, despejando el parámetro de transmisión:

$$S_{21} = \left(1 + S_{11}\right)\left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{a_2=0}$$

Esta será la manera que utilizaremos muchas veces para calcular los parámetros de transmisión:

$$S_{ji} = \left(1 + S_{ii}\right)\left.\frac{V_j}{V_i}\right|_{a_j=0}$$

En este ejemplo V_1=V_2 por lo que:

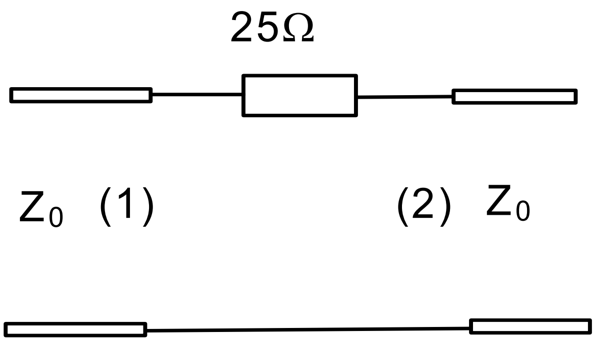
$$S_{21} = 1 + S_{11} = \frac{1}{2}$$

Y entonces,

$$[S] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

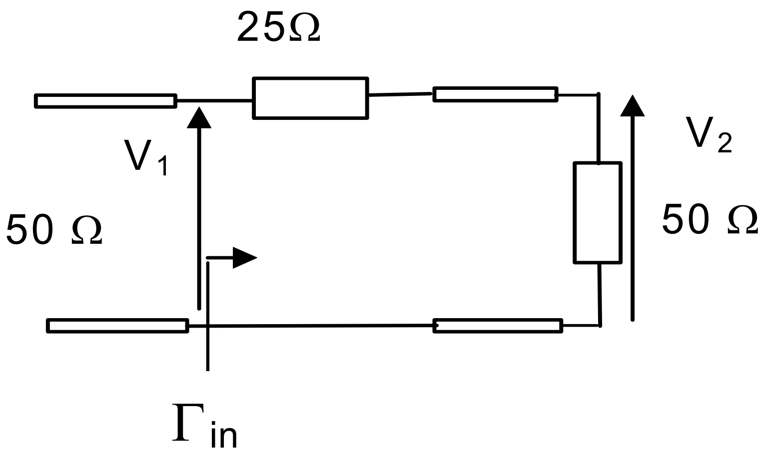
<u>Ejemplo 2</u>

Calcular los parámetros [S] del siguiente bipuerto referidos los dos accesos a 50 Ω.



- Cálculo de S_{11}:

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \left.\Gamma_{in}^{1}\right|_{a_2=0}$$



$$25+50=75\Omega$$
$$\Gamma_{in}=\frac{Z_{in}-50}{Z_{in}+50}=\frac{75-50}{75+50}=\frac{1}{5}$$
$$S_{11}=S_{22}=\frac{1}{5}$$

- Cálculo de S_{21}:

$$S_{21}=\left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0}$$

Para poder calcularlo, recurrimos a una relación de tensiones:

$$S_{21}=\left(1+S_{11}\right)\left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{a_2=0}$$

En este caso, la relación entre las dos tensiones es la de un divisor de tensión:

$$V_2=\frac{50}{50+25}V_1=\frac{2}{3}V_1$$

Entonces,

$$S_{21}=\left(1+S_{11}\right)\left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{a_2=0}=\left(1+\frac{1}{5}\right)\frac{2}{3}=\frac{4}{5}$$

También se podía haber llegado por una relación de corrientes:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{Z_0}}\left(a_1-b_1\right)$$
$$I_2=\frac{1}{\sqrt{Z_0}}\left(a_2-b_2\right)$$

Dividimos una por la otra:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\sqrt{Z_0}\left(a_2 - b_2\right)}{\sqrt{Z_0}\left(a_1 - b_1\right)} = \frac{\left(a_2 - b_2\right)}{\left(a_1 - b_1\right)}$$

Si particularizamos esta relación de tensiones para $a_2 = 0$:

$$\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{a_2=0} = \left.\frac{-b_2}{a_1 - b_1}\right|_{a_2=0} = \left.\frac{-b_2/a_1}{1 - b_1/a_1}\right|_{a_2=0} = \frac{-S_{21}}{1 - S_{11}}$$

Entonces, despejando el parámetro de transmisión:

$$S_{21} = \left(1 - S_{11}\right)\left.\frac{-I_2}{I_1}\right|_{a_2=0}$$

Esta será la manera que utilizaremos muchas veces para calcular los parámetros de transmisión:

$$S_{ji} = \left(1 - S_{ii}\right)\left.\frac{-I_j}{I_i}\right|_{a_j=0}$$

En este ejemplo I_1=-I_2 por lo que:

$$S_{21} = 1 - S_{11} = \frac{4}{5}$$

Y entonces,

$$[S] = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ventajas en la medida práctica:

- No hay que cargar accesos con circuitos abiertos o cortocircuitos (difíciles de hacer a frecuencias de microondas).
- No es necesario poner las cargas directamente en el acceso, sino que pueden conectarse a distancia, conectadas al mismo mediante líneas de transmisión (o guía apropiada) de la impedancia característica de referencia del acceso.
- Es necesario un doble acoplador direccional para separar a_i de b_i (reflectómetro).

PROPIEDADES

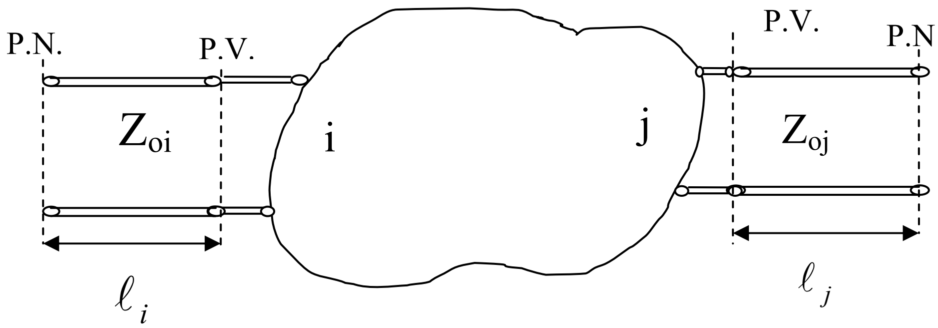
1- DESPLAZAMIENTO DE LOS PLANOS DE REFERENCIA

Una propiedad de los parámetros [S] que los hace muy prácticos a frecuencias de microondas es la forma en que varían si desplazamos los planos de referencia de los accesos del circuito.

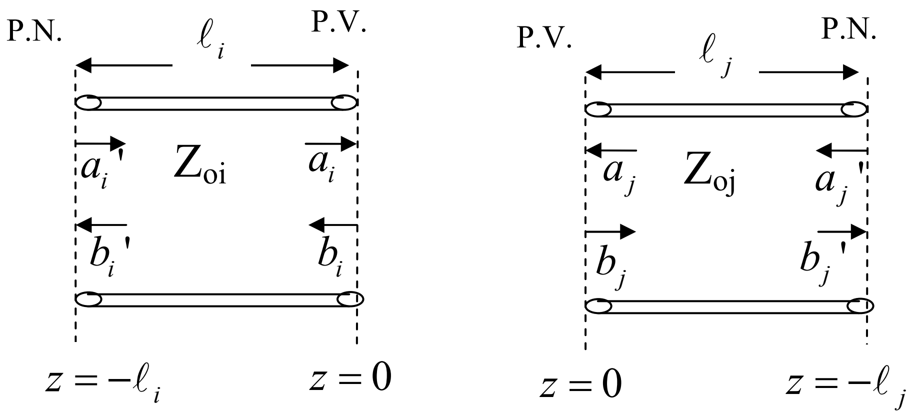
Llamamos:

P.V. : plano de referencia viejo
P.N. : plano de referencia nuevo

Llamaremos [S] a la matriz respecto de los planos de referencia viejos y [S]' a la matriz respecto a los nuevos planos.



Para calcular los elementos de [S]' a partir de los de [S] basta tener en cuenta que, si llamamos $b_k^{'}$, $a_k^{'}$ a las ondas de potencia respecto a los nuevos planos:



La onda a es la que avanza hacia las z positivas:

$$a = \frac{V_0^+ e^{-j\beta z}}{\sqrt{Z_{0i}}} = a_{0i} e^{-j\beta z}$$
$$a_i = a(z=0) = a_{0i}$$
$$a_i' = a(z=-\ell_i) = a_{0i} e^{+j\beta \ell_i}$$

Y la onda b es la que avanza en sentido contrario:

$$b = \frac{V_0^- e^{+j\beta z}}{\sqrt{Z_{0i}}} = b_{0i} e^{+j\beta z}$$
$$b_i = b(z=0) = b_{0i}$$
$$b_i' = b(z=-\ell_i) = b_{0i} e^{-j\beta \ell_i}$$

Y en la otra línea, lo mismo:
La onda a es la que avanza hacia las z positivas:

$$a = \frac{V_0^+ e^{-j\beta z}}{\sqrt{Z_{0j}}} = a_{0j} e^{-j\beta z}$$
$$a_j = a(z=0) = a_{0j}$$
$$a_j' = a(z=-\ell_j) = a_{0j} e^{+j\beta \ell_j}$$

Y la onda b es la que avanza en sentido contrario:

$$b = \frac{V_0^- e^{+j\beta z}}{\sqrt{Z_{0j}}} = b_{0j} e^{+j\beta z}$$
$$b_j = b(z=0) = b_{0j}$$
$$b_j' = b(z=-\ell_j) = b_{0j} e^{-j\beta \ell_j}$$

- Cálculo de cualquier parámetro de la diagonal, por ejemplo el S_{ii}:

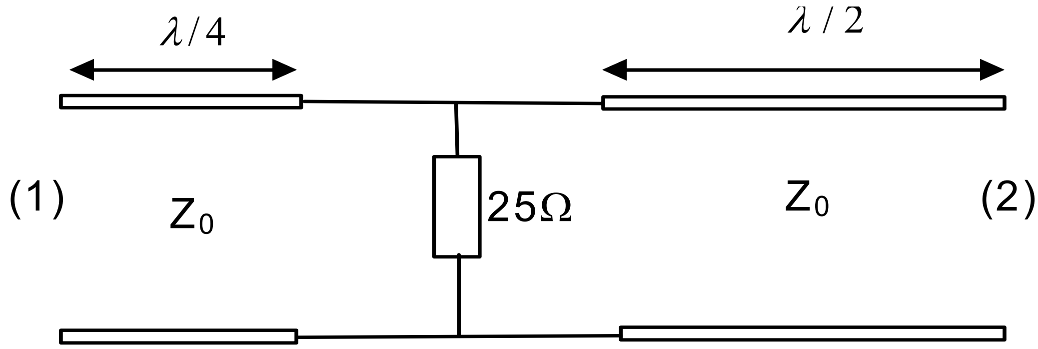
$$S_{ii}' = \left.\frac{b_i'}{a_i'}\right|_{a_k'=0,\forall k\neq i} = \left.\frac{b_i e^{-j\beta \ell_i}}{a_i e^{+j\beta \ell_i}}\right|_{a_k=0,\forall k\neq i} = S_{ii} e^{-2j\beta \ell_i}$$

Observar que, como las líneas añadidas son de impedancia de referencia, la condición $a_k'=0$ es equivalente a la condición $a_k=0$ y por esto la relación entre los dos parámetros es simplemente un cambio de fase.

- Cálculo de cualquier parámetro que no esté en la diagonal, por ejemplo el S_{ji}:

$$S_{ji}'=\left.\frac{b_j'}{a_i'}\right|_{a_k'=0,\forall k\neq i}=\left.\frac{b_j e^{-j\beta\ell_j}}{a_i e^{+j\beta\ell_i}}\right|_{a_k=0,\forall k\neq i}=S_{ji}e^{-j\beta(\ell_i+\ell_j)}$$

Ejemplo



Habíamos llegado a que los parámetros [S] sin las líneas eran:

$$[S]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Al añadir las líneas, los parámetros quedan:

$$S_{11}'=S_{11}\,e^{-j2\beta\ell_1}\Big|_{\beta\ell_1=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}}=S_{11}e^{-j\pi}=-S_{11}=\frac{1}{2}$$

$$S_{21}'=S_{21}\,e^{-j\beta(\ell_1+\ell_2)}\Big|_{\beta(\ell_1+\ell_2)=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{2}\right)}=S_{21}e^{-j3\pi/2}=jS_{21}=\frac{j}{2}$$

$$S_{22}'=S_{22}\,e^{-j2\beta\ell_2}\Big|_{\beta\ell_2=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}}=S_{22}e^{-2j\pi}=S_{22}=-\frac{1}{2}$$

$$S_{12}'=S_{21}'=\frac{j}{2}$$

Con lo que la matriz de parámetros [S] queda:

$$[S]'=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & j\\ j & -1\end{bmatrix}$$

2- CIRCUITO RECÍPROCO

Un circuito recíproco es aquel cuyos elementos constitutivos son recíprocos. Todos los elementos y medios pasivos (excepto ferritas y plasmas) son recíprocos.

En este caso, puede demostrarse que:

$$S_{ij} = S_{ji}$$

Que en el conjunto de la matriz queda:

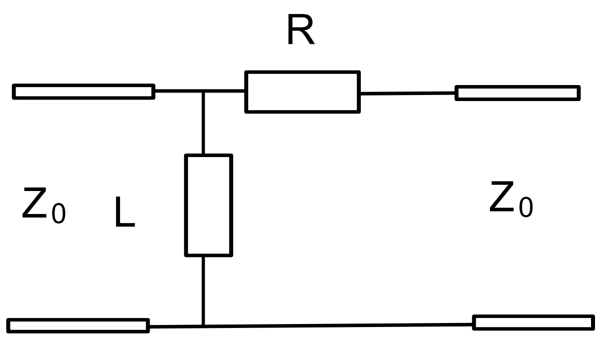
$$[S] = [S]^t$$

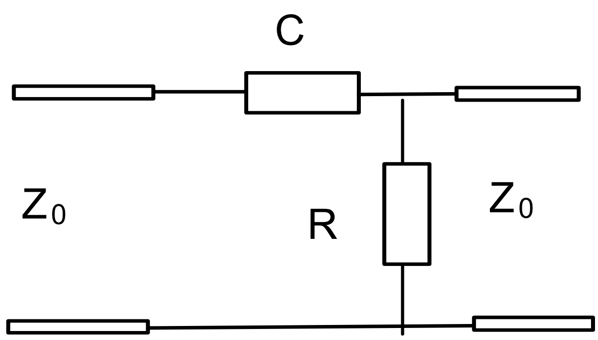
Así, para un circuito de 3 accesos recíproco:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

No son circuitos simétricos, pero son recíprocos: $S_{11} \neq S_{22}$ y $S_{21}=S_{12}$





3- CIRCUITO PASIVO

Un circuito pasivo es aquel que no tiene elementos que añaden potencia de RF (amplificadores, osciladores). Si los elementos no añaden potencia, pueden conservarla o disiparla. En cualquier caso en un circuito pasivo debe cumplirse:

$$\left|S_{ij}\right|^2 = \left.\frac{\left|b_i\right|^2}{\left|a_j\right|^2}\right|_{a_k=0,\forall k\neq j} = \frac{P_{Li}}{P_j^+}$$

Por el principio de conservación de la energía, no puede ser nunca mayor la potencia disipada en la carga del acceso i que la que incide por el acceso j (que parte se refleja). Por lo tanto si el circuito es pasivo se cumple que:

$$\left|S_{ij}\right| \leq 1$$

4- CIRCUITO PASIVO Y SIN PÉRDIDAS

En el caso particular de una red pasiva y sin pérdidas puede demostrarse que:

$$[S][S]^+ = [1]$$

Donde $[S]^+$ es la matriz traspuesta y conjugada (hermítica) de [S]. Se dice que [S] es una matriz unitaria.

Ejemplo 1

Cogemos la matriz del circuito del ejemplo anterior:

$$[S] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz hermítica (traspuesta y conjugada):

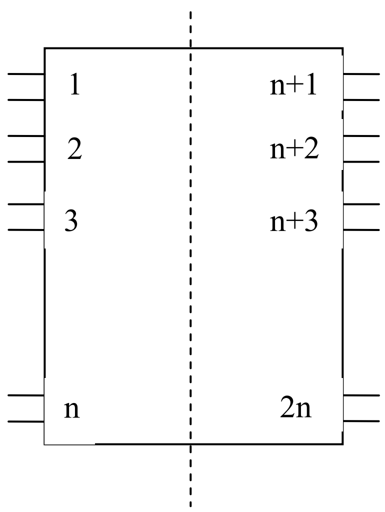
$$[S] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix}$$

$$[S][S]^{+} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2j \\ 2j & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix}$$

Es un circuito con pérdidas.

5- CIRCUITO SIMÉTRICO

Es aquel en el que existe un plano de simetría que no corta ni contiene ningún acceso con un número de accesos par=2N:



Se puede demostrar que la matriz $[S]_{2n \times 2n}$ se puede obtener a partir de cuatro submatrices $[S]_{n \times n}$ tales que:

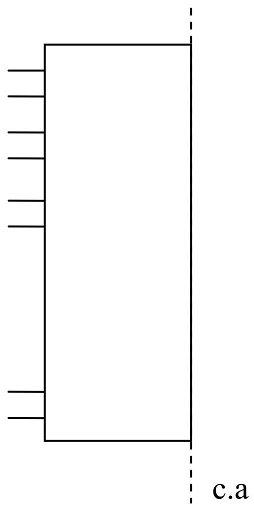
$$[S] = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_1] \end{bmatrix}$$

donde $[S_1]_{n \times n}$ y $[S_2]_{n \times n}$ son iguales a:

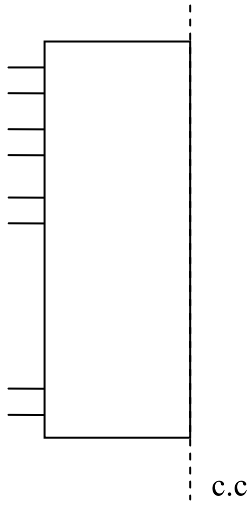
$$[S_1] = \frac{1}{2}\left[\left[S^e\right] + \left[S^o\right]\right]$$

$$[S_2] = \frac{1}{2}\left[\left[S^e\right] - \left[S^o\right]\right]$$

$[S^e]$ es la matriz del circuito que resulta de coger la mitad del circuito original y dejar el plano de simetría en circuito abierto. Se le llama circuito par:



$[S^o]$ es la matriz del circuito que resulta de coger la mitad del circuito original y dejar el plano de simetría en cortocircuito. Se le llama circuito impar:

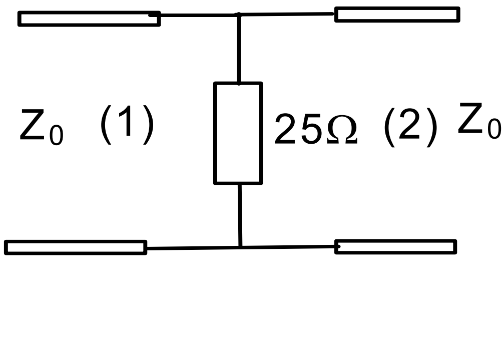


Caso particular: para un bipuerto simétrico:

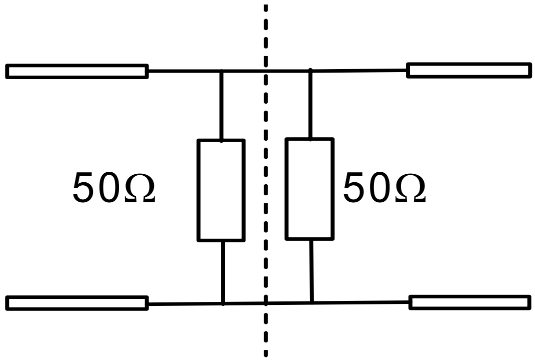
$$[S]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}[\Gamma^e+\Gamma^o] & [\Gamma^e-\Gamma^o]\\ [\Gamma^e-\Gamma^o] & [\Gamma^e+\Gamma^o]\end{bmatrix}$$

Donde Γ^e es el coeficiente de reflexión desde el acceso 1 cuando el plano de simetría se deja en circuito abierto y Γ^o es el coeficiente de reflexión desde el acceso 1 cuando se cortocircuita el plano de simetría.

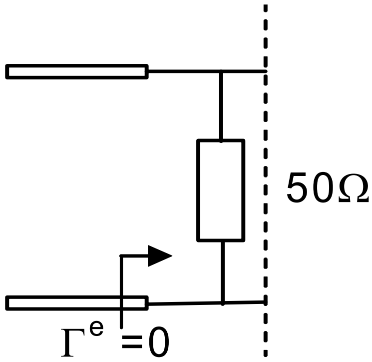
Ejemplo 1



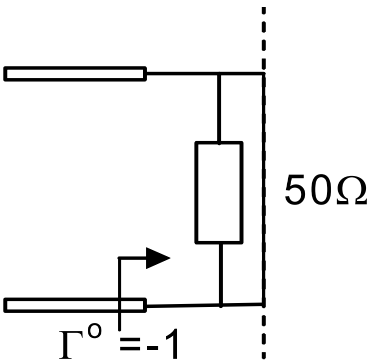
Si dibujamos el circuito con el plano de simetría:



Ahora el circuito par es:

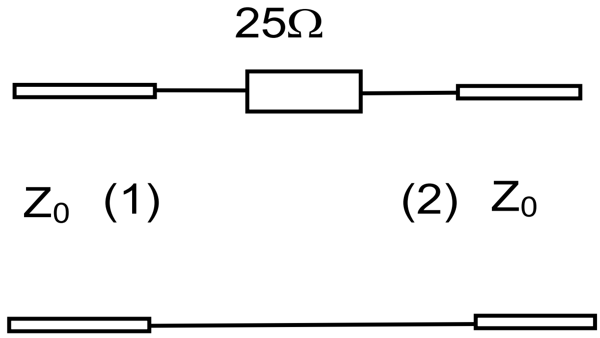


El circuito impar es:

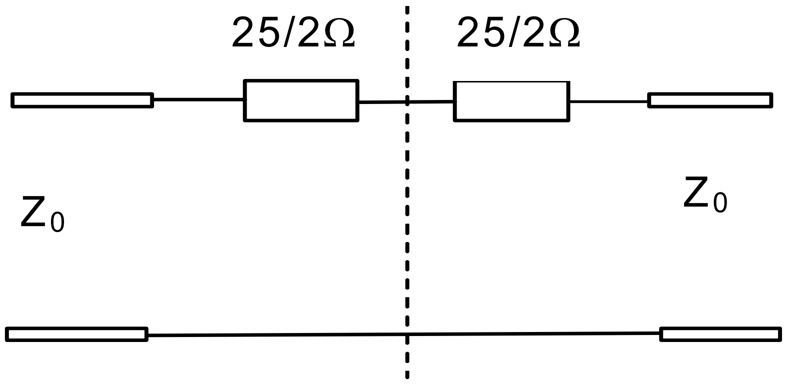


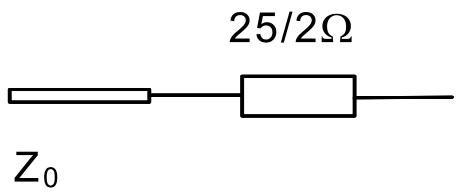
$$[S]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

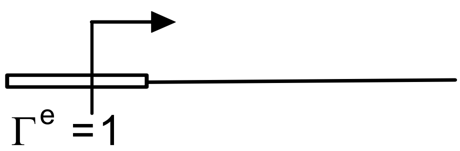
Ejemplo 2

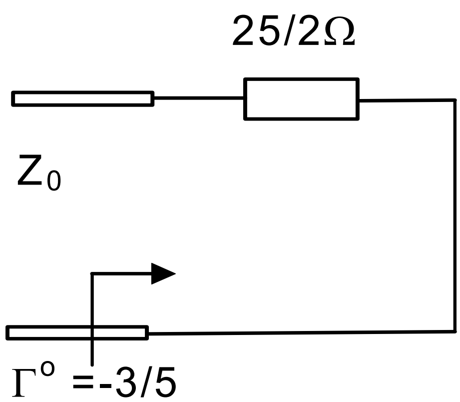


Redibujamos el circuito marcando el plano de referencia:









2.6 ANALISIS DE BIPUERTOS. EJEMPLOS

Un bipuerto es un caso particular de circuito con dos accesos:

La matriz de parámetros [S] es una matriz 2 x 2:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

En la que se pueden dar los siguientes casos particulares:

- Pasivo:

$$|S_{11}|, |S_{12}|, |S_{21}|, |S_{22}| \leq 1$$

- Recíproco:

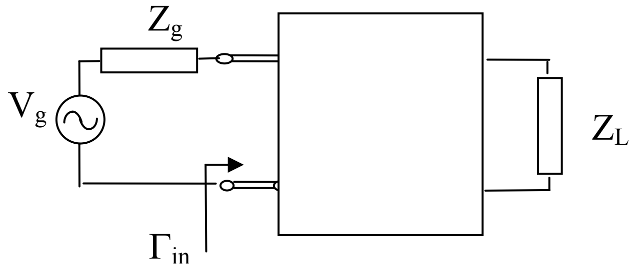
$$S_{12} = S_{21}$$

- Simétrico:

$$S_{12} = S_{21}$$
$$S_{11} = S_{22}$$

El comportamiento de un bipuerto puede caracterizarse mediante las siguientes magnitudes:

1- Impedancia y/o coeficiente de reflexión a la entrada



$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\sqrt{Z_{01}}\left(a_1 + b_1\right)}{\frac{1}{\sqrt{Z_{01}}}\left(a_1 - b_1\right)} = Z_{01}\frac{1+\Gamma_{in}}{1-\Gamma_{in}}$$

Y de la misma manera, despejando el coeficiente de reflexión:

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{Z_{in} - Z_{01}}{Z_{in} + Z_{01}}$$

Mientras no se diga lo contrario, en adelante supondremos que se han tomado iguales las impedancias características de referencia de los accesos de entrada y salida:

$$Z_{01} = Z_{02} = Z_0$$

Nos interesa calcular:

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1}$$

Ahora bien, según las ecuaciones de la matriz [S]:

$$\left[b\right] = \left[S\right]\left[a\right],$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned},$$

Las ondas en el acceso de salida se relacionan por:

$$a_2 = \Gamma_L b_2$$

Y sustituyendo en la segunda:

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}b_2\Gamma_L \,,$$

Despejamos b_2:

$$b_2 = \frac{S_{21}a_1}{1 - S_{22}\Gamma_L}\,,$$

Y sustituimos en la primera:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}\frac{S_{21}\Gamma_L a_1}{1 - S_{22}\Gamma_L}\,,$$

Si ahora sustituimos en la expresión del coeficiente de reflexión a la entrada:

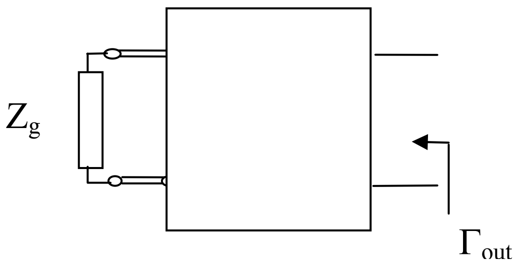
$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L}$$

Nótese que si Γ_L=0 (lo cual significa que el acceso 2 está cargado con Z_0) :

$$\Gamma_{in} = S_{11}$$

Pues Γ_L=0 significa que $a_2 = 0$ que es la definición de S_{11}.

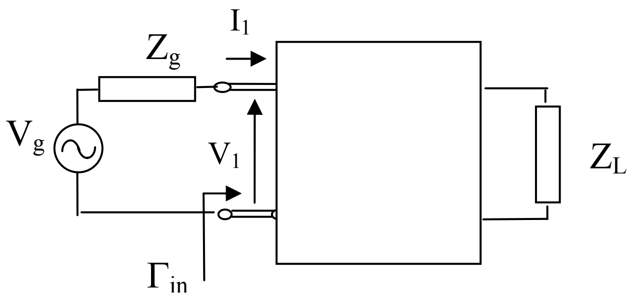
2- **Impedancia o coeficiente de reflexión de salida**



Haciendo un proceso idéntico al anterior, se obtiene:

$$\Gamma_{out} = \frac{b_2}{a_2} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_g}{1 - S_{11}\Gamma_g}$$

3- **Cálculo de la onda** a_1



En el circuito de entrada se puede establecer:

$$V_g = Z_g I_1 + V_1,$$

Y si ahora lo queremos escribir en función de las ondas de potencia, recordando que:

$$V_1 = \sqrt{Z_0}\left(a_1 + b_1\right)$$
$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{Z_0}}\left(a_1 - b_1\right)$$

Sustituimos:

$$V_g = Z_g\left(\frac{1}{\sqrt{Z_0}}\left(a_1 - b_1\right)\right) + \sqrt{Z_0}\left(a_1 + b_1\right),$$

Multiplicamos todos los términos por $\sqrt{Z_0}$:

$$V_g\sqrt{Z_0} = Z_g\left(a_1 - b_1\right) + Z_0\left(a_1 + b_1\right),$$

Entonces, reordenando términos:

$$V_g\sqrt{Z_0} = a_1\left(Z_g + Z_0\right) - b_1\left(Z_g - Z_0\right),$$

Y despejando a_1:

$$a_1 = V_g\frac{\sqrt{Z_0}}{\left(Z_g + Z_0\right)} + b_1\frac{\left(Z_g - Z_0\right)}{\left(Z_g + Z_0\right)},$$

Llamamos:

$$\Gamma_g = \frac{\left(Z_g - Z_0\right)}{\left(Z_g + Z_0\right)},$$

Coeficiente de reflexión de generador.

Definimos:

$$b_s = V_g\frac{\sqrt{Z_0}}{\left(Z_g + Z_0\right)},$$

Es un término que depende del generador y de la referencia Z_0:

$$a_1 = b_s + b_1\Gamma_g,$$

Y además:

$$b_1 = \Gamma_{in} a_1 \text{,}$$

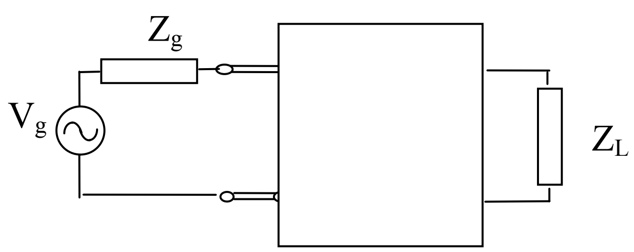
Con lo cual:

$$a_1 = \frac{b_s}{1 - \Gamma_{in}\Gamma_g} \text{,}$$

Si:

$$\Gamma_g = 0 \rightarrow a_1 = b_s$$
$$\Gamma_{in} = 0 \rightarrow a_1 = b_s$$

4- **Ganancia de transferencia de potencia**

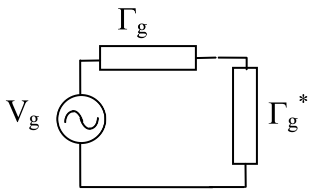


Se define como el cociente entre la potencia entregada a la carga y la potencia disponible de generador:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}}$$

a) Potencia disponible de generador:

Es la máxima potencia que puede entregar un generador. Es la potencia que entregaría a una carga $\Gamma_{in} = \Gamma_g^*$



$$P_{avs} = \frac{1}{2}|a_1|^2\left[1-|\Gamma_{in}|^2\right]\Big|_{\Gamma_{in}=\Gamma_g^*} = \frac{1}{2}|a_1|^2\left[1-|\Gamma_g|^2\right]$$

En este caso:

$$a_1 = \frac{b_s}{1-\Gamma_{in}\Gamma_g}\Bigg|_{\Gamma_{in}=\Gamma_g^*} = \frac{b_s}{1-|\Gamma_g|^2},$$

Sustituyendo queda:

$$P_{avs} = \frac{1}{2}\left|\frac{b_s}{1-|\Gamma_g|^2}\right|^2\left[1-|\Gamma_g|^2\right]$$

Y simplificando:

$$P_{avs} = \frac{1}{2}\frac{|b_s|^2}{1-|\Gamma_g|^2}$$

Sólo depende del generador: Vg y Z_g. Si:

$$b_s = V_g\frac{\sqrt{Z_0}}{\left(Z_g+Z_0\right)},$$

Entonces:

$$|b_s|^2 = |V_g|^2\frac{Z_0}{\left(Z_g+Z_0\right)\left(Z_g+Z_0\right)^*},$$

Y si

$$\Gamma_g = \frac{\left(Z_g - Z_0\right)}{\left(Z_g + Z_0\right)},$$

$$\left|\Gamma_g\right|^2 = \frac{\left(Z_g - Z_0\right)\left(Z_g - Z_0\right)^*}{\left(Z_g + Z_0\right)\left(Z_g + Z_0\right)^*},$$

Sustituyendo:

$$P_{avs} = \frac{1}{2}\frac{\left|V_g\right|^2 \dfrac{Z_0}{\left(Z_g + Z_0\right)\left(Z_g + Z_0\right)^*}}{1 - \dfrac{\left(Z_g - Z_0\right)\left(Z_g - Z_0\right)^*}{\left(Z_g + Z_0\right)\left(Z_g + Z_0\right)^*}} = \frac{1}{2}\frac{\left|V_g\right|^2 Z_0}{\left(Z_g + Z_0\right)\left(Z_g + Z_0\right)^* - \left(Z_g - Z_0\right)\left(Z_g - Z_0\right)^*}$$

Y operando:

$$P_{avs} = \frac{1}{2}\frac{\left|V_g\right|^2 Z_0}{\left(\left|Z_g\right|^2 + \left|Z_0\right|^2 + Z_g Z_o^* + Z_0 Z_g^*\right) - \left(\left|Z_g\right|^2 + \left|Z_0\right|^2 - Z_g Z_o^* - Z_0 Z_g^*\right)}$$

Simplificando:

$$P_{avs} = \frac{1}{2}\frac{\left|V_g\right|^2 Z_0}{\left(2 Z_g Z_o^* + 2 Z_0 Z_g^*\right)}$$

Como que Z_0 es real:

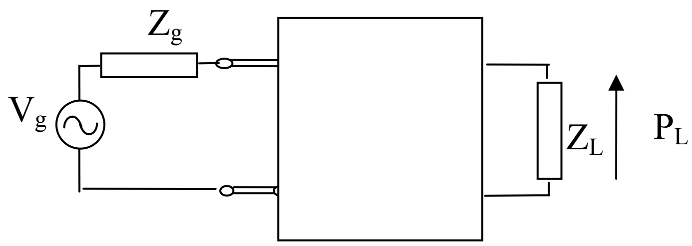
$$P_{avs} = \frac{1}{4}\frac{\left|V_g\right|^2}{\left(Z_g + Z_g^*\right)}$$

Y además la suma de un número complejo y su conjugado es dos veces la parte real de dicho número. Por lo tanto:

$$P_{avs} = \frac{1}{8}\frac{|V_g|^2}{R_g}$$

Que es la ecuación ya conocida de baja frecuencia (donde el valor de V_g es de pico).

b) Potencia disipada en la carga



$$P_L = \frac{1}{2}|b_2|^2 - \frac{1}{2}|a_2|^2 = \frac{1}{2}|b_2|^2\left(1-|\Gamma_L|^2\right)$$

Haciendo uso de las ecuaciones de los parámetros [S], podemos escribir la ecuación para la onda que sale por el acceso 2:

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \text{ ,}$$

Las ondas en el acceso de salida se relacionan por:

$$a_2 = \Gamma_L b_2$$

Y sustituyendo en la segunda:

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}b_2\Gamma_L \text{ ,}$$

Despejamos b_2:

$$b_2 = \frac{S_{21} a_1}{1 - S_{22}\Gamma_L},$$

Y sustituimos en la ecuación de la potencia:

$$P_L = \frac{1}{2}\left|\frac{S_{21} a_1}{1 - S_{22}\Gamma_L}\right|^2 \left(1 - \left|\Gamma_L\right|^2\right)$$

Donde

$$a_1 = \frac{b_s}{1 - \Gamma_{in}\Gamma_g},$$

Sustituyendo queda:

$$P_L = \frac{1}{2}\left|\frac{S_{21}\dfrac{b_s}{1 - \Gamma_{in}\Gamma_g}}{1 - S_{22}\Gamma_L}\right|^2 \left(1 - \left|\Gamma_L\right|^2\right)$$

Y dividiendo una por la otra:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \frac{\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{S_{21}\dfrac{b_s}{1 - \Gamma_{in}\Gamma_g}}{1 - S_{22}\Gamma_L}\right|^2 \left(1 - \left|\Gamma_L\right|^2\right)}{\dfrac{1}{2}\dfrac{\left|b_s\right|^2}{1 - \left|\Gamma_g\right|^2}}$$

Que simplificando queda:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \frac{\left|S_{21}\right|^2 \left(1-\left|\Gamma_L\right|^2\right)\left(1-\left|\Gamma_g\right|^2\right)}{\left|1-\Gamma_{in}\Gamma_g\right|^2 \left|1-S_{22}\Gamma_L\right|^2}$$

Y si ahora sustituimos:

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1-S_{22}\Gamma_L}$$

$$\left|1-\Gamma_{in}\Gamma_g\right|^2 = \left(1-\left(S_{11}+\frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1-S_{22}\Gamma_L}\right)\Gamma_g\right)\left(1-\left(S_{11}+\frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1-S_{22}\Gamma_L}\right)\Gamma_g\right)^*$$

Que reagrupando términos nos queda:

$$\left|1-\Gamma_{in}\Gamma_g\right|^2 \left|1-S_{22}\Gamma_L\right|^2 = \left|1-S_{22}\Gamma_L - \left(S_{11}\left(1-S_{22}\Gamma_L\right)+S_{12}S_{21}\Gamma_L\right)\Gamma_g\right|^2 =$$
$$= \left|1-S_{22}\Gamma_L - S_{11}\Gamma_g + \Delta\Gamma_L\Gamma_g\right|^2$$

Y sustituyendo en la ecuación de la ganancia:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \frac{\left|S_{21}\right|^2 \left(1-\left|\Gamma_L\right|^2\right)\left(1-\left|\Gamma_g\right|^2\right)}{\left|1-S_{22}\Gamma_L - S_{11}\Gamma_g + \Delta\Gamma_L\Gamma_g\right|^2}$$

Que también se puede escribir como:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \frac{\left|S_{21}\right|^2 \left(1-\left|\Gamma_L\right|^2\right)\left(1-\left|\Gamma_g\right|^2\right)}{\left|\left(1-S_{11}\Gamma_g\right)\left(1-S_{22}\Gamma_L\right)-S_{12}S_{21}\Gamma_L\Gamma_g\right|^2}$$

- Parámetros [s] de un bipuerto pasivo sin pérdidas

Para un bipuerto pasivo sin pérdidas se debe cumplir que:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hay cuatro ecuaciones implícitas:

- Primera fila por primera columna:

$$S_{11}S_{11}^* + S_{12}S_{12}^* = \left|S_{11}\right|^2 + \left|S_{12}\right|^2 = 1$$

Despejamos un módulo en función del otro:

$$\left|S_{12}\right|^2 = 1 - \left|S_{11}\right|^2$$

- Segunda fila por segunda columna:

$$S_{21}S_{21}^* + S_{22}S_{22}^* = \left|S_{22}\right|^2 + \left|S_{21}\right|^2 = 1$$

De nuevo despejamos un módulo:

$$\left|S_{21}\right|^2 = 1 - \left|S_{22}\right|^2$$

- Primera fila por segunda columna:

$$S_{11}S_{21}^* + S_{12}S_{22}^* = 0$$

- Segunda fila por primera columna:

$$S_{21}S_{11}^* + S_{22}S_{12}^* = 0$$

Esta última ecuación no aporta nada nuevo, pues es la conjugada de la anterior.

La anterior se puede desdoblar en dos: una de módulos y otra de fases.

- La de módulos:

$$|S_{11}|^2 |S_{21}|^2 = |S_{12}|^2 |S_{22}|^2$$

Si sustituimos los módulos despejados anteriormente:

$$|S_{11}|^2 \left(1 - |S_{22}|^2\right) = \left(1 - |S_{11}|^2\right) |S_{22}|^2$$

Y ahora desarrollamos los paréntesis:

$$|S_{11}|^2 - |S_{11}|^2 |S_{22}|^2 = |S_{22}|^2 - |S_{11}|^2 |S_{22}|^2$$

Simplificamos la ecuación y nos queda:

$$|S_{11}| = |S_{22}|$$

Y por lo tanto:

$$|S_{12}| = |S_{21}| = \sqrt{1 - |S_{11}|^2}$$

- En cuanto a las fases:

$$\varphi_{21} - \varphi_{11} = \pm\pi + \varphi_{22} - \varphi_{12}$$

Y por lo tanto, despejamos una de ellas en función de las demás:

$$\varphi_{22} = \pm\pi + \varphi_{21} + \varphi_{12} - \varphi_{11}$$

Resumiendo, del sistema de ecuaciones original (8 incógnitas: 4 módulos y 4 fases) por ser un sistema pasivo y sin pérdidas quedan sólo 4 incógnitas: 1 módulo y tres fases:

$$[S]=\begin{bmatrix} |S_{11}|e^{j\varphi_{11}} & \sqrt{1-|S_{11}|^2}\,e^{j\varphi_{12}} \\ \sqrt{1-|S_{11}|^2}\,e^{j\varphi_{21}} & |S_{11}|e^{j(\pm\pi+\varphi_{12}+\varphi_{21}-\varphi_{11})} \end{bmatrix}$$

- Parámetros [s] de un bipuerto pasivo sin pérdidas, recíproco

Además de pasivo y sin pérdidas es un circuito recíproco. Por lo tanto:

$$S_{12}=S_{21}$$

Por lo tanto, la ecuación que hay que añadir es la de las fases:

$$\varphi_{12}=\varphi_{21}$$

Que podemos sustituir en la ecuación matricial (3 incógnitas: 1 módulo y dos fases):

$$[S]=\begin{bmatrix} |S_{11}|e^{j\varphi_{11}} & \sqrt{1-|S_{11}|^2}\,e^{j\varphi_{12}} \\ \sqrt{1-|S_{11}|^2}\,e^{j\varphi_{12}} & |S_{11}|e^{j(\pm\pi+2\varphi_{12}-\varphi_{11})} \end{bmatrix}$$

- Parámetros [s] de un bipuerto pasivo sin pérdidas, recíproco y simétrico

Además de pasivo y sin pérdidas, recíproco, es un circuito simétrico. Por lo tanto:

$$S_{11} = S_{22}$$

Por lo tanto, la ecuación que hay que añadir es la de las fases:

$$\varphi_{11} = \varphi_{22}$$

Igualando estas dos fases:

$$\varphi_{11} = \pm\pi + 2\varphi_{12} - \varphi_{11}$$

Despejamos una de las dos fases:

$$\varphi_{12} = \pm\frac{\pi}{2} + \varphi_{11}$$

La fase de los parámetros de transmisión está desfasada $\pi/2$ respecto a la de los parámetros de reflexión.

Ya sólo nos quedan dos incógnitas (un módulo y una fase):

$$[S] = \begin{bmatrix} |S_{11}|e^{j\varphi_{11}} & \pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2}e^{j\varphi_{11}} \\ \pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2}e^{j\varphi_{11}} & |S_{11}|e^{j\varphi_{11}} \end{bmatrix}$$

- Parámetros [s] de un bipuerto pasivo sin pérdidas, recíproco, simétrico con s_{11} real:

De las dos incógnitas que nos quedaban, establecemos la fase igual a 0.

$$\varphi_{11} = 0$$

Sólo nos queda una incógnita, que es un módulo:

$$|S_{11}| = k$$

Los parámetros [S] quedan:

$$[S] = \begin{bmatrix} k & \pm j\sqrt{1-k^2} \\ \pm j\sqrt{1-k^2} & k \end{bmatrix}$$

Y si establecemos la fase a π:

$$\varphi_{11} = \pi$$

Entonces los parámetros [S] quedan:

$$[S] = \begin{bmatrix} -k & \pm j\sqrt{1-k^2} \\ \pm j\sqrt{1-k^2} & -k \end{bmatrix}$$

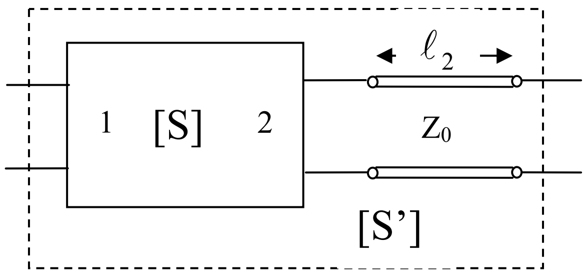
En ambos casos hablaremos de inversor, aunque se establece el convenio de que si $\varphi_{11} = 0$ lo llamaremos <u>inversor de admitancia</u>, mientras que si $\varphi_{11} = \pi$ lo llamaremos <u>inversor de impedancia</u>.

- Conversión de un bipuerto pasivo sin pérdidas, recíproco en un bipuerto que además es simétrico mediante un desplazamiento de los planos de referencia.

Tenemos un bipuerto pasivo, sin pérdidas y recíproco cuyos parámetros [S] se pueden escribir como:

$$[S]=\begin{bmatrix} |S_{11}|e^{j\varphi_{11}} & \sqrt{1-|S_{11}|^2}\,e^{j\varphi_{12}} \\ \sqrt{1-|S_{11}|^2}\,e^{j\varphi_{12}} & |S_{11}|e^{j(\pm\pi+2\varphi_{12}-\varphi_{11})} \end{bmatrix}$$

Si ahora prolongamos el acceso 2 una distancia ℓ_2:



El parámetro S_{11} no cambia,

$$S_{11}'=S_{11}$$

Mientras que el S_{22} sólo cambia en la fase:

$$S_{22}'=S_{22}e^{-j2\beta\ell_2}=|S_{11}|e^{j(\pm\pi+2\varphi_{12}-\varphi_{11})}e^{-j2\beta\ell_2}$$

Si igualamos la fase a la de S_{11} obtendríamos los parámetros S de un circuito pasivo sin pérdidas, recíproco y simétrico:

$$\pm\pi+2\varphi_{12}-\varphi_{11}-2\beta\ell_2=\varphi_{11}$$

Y si ahora despejamos ℓ_2, encontraremos la distancia necesaria para 'simetrizar' el circuito:

$$\beta\ell_2 = \varphi_{12} - \varphi_{11} \pm \pi/2$$

Entonces, los parámetros de transmisión S_{12} y S_{21} también cambian la fase:

$$\varphi_{12}' = \varphi_{12} - \beta\ell_2 = \varphi_{12} - \varphi_{12} + \varphi_{11} \mp \pi/2$$

Que simplificando:

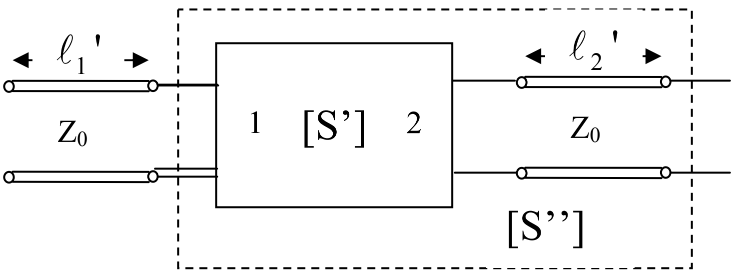
$$\varphi_{12}' = \varphi_{12} - \beta\ell_2 = \varphi_{11} \mp \pi/2$$

Por tanto:

$$[S'] = \begin{bmatrix} |S_{11}|e^{j\varphi_{11}} & \pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2}e^{j\varphi_{11}} \\ \pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2}e^{j\varphi_{11}} & |S_{11}|e^{j\varphi_{11}} \end{bmatrix}$$

- Conversión de un bipuerto pasivo sin pérdidas, recíproco y simétrico en un bipuerto que además s_{11} es real mediante desplazamiento de los planos de referencia.

Si volvemos a desplazar los planos 1 y 2 podemos conseguir que $S_{11}=S_{22}$ un valor real positivo o negativo:



Entonces habríamos conseguido la matriz de un inversor de impedancias o admitancias.

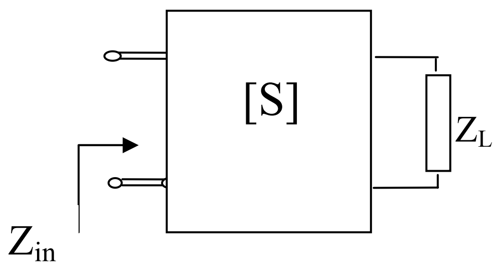
Conclusión: cualquier circuito pasivo, sin pérdidas y recíproco es susceptible de convertirse en un inversor de impedancias o admitancias simplemente añadiendo líneas de referencia a la entrada y a la salida.

INVERSOR DE IMPEDANCIA

Siguiendo el convenio definido anteriormente, los parámetros S de un inversor de impedancia son los de un bipuerto pasivo, sin pérdidas, recíproco y simétrico con S_{11} real y negativo:

$$[S]=\begin{bmatrix} -|S_{11}| & \pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2} \\ \pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2} & -|S_{11}| \end{bmatrix}$$

Veamos cuanto vale la impedancia a la entrada de un dispositivo como este:



$$\Gamma_{in}=S_{11}+\frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1-S_{22}\Gamma_L}$$

Y sustituyendo:

$$\Gamma_{in}=-|S_{11}|+\frac{\left(\pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2}\right)\left(\pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2}\right)\Gamma_L}{1+|S_{11}|\Gamma_L}$$

Operando:

$$\Gamma_{in}=-|S_{11}|-\frac{\left(1-|S_{11}|^2\right)\Gamma_L}{1+|S_{11}|\Gamma_L}=\frac{-|S_{11}|\left(1+|S_{11}|\Gamma_L\right)-\left(1-|S_{11}|^2\right)\Gamma_L}{1+|S_{11}|\Gamma_L}$$

Y simplificando:

$$\Gamma_{in} = \frac{-|S_{11}| - \Gamma_L}{1 + |S_{11}|\Gamma_L}$$

Ahora debemos sustituir en la expresión de Z_{in}:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1+\Gamma_{in}}{1-\Gamma_{in}} = Z_0 \frac{1 + \frac{-|S_{11}| - \Gamma_L}{1 + |S_{11}|\Gamma_L}}{1 - \frac{-|S_{11}| - \Gamma_L}{1 + |S_{11}|\Gamma_L}} = Z_0 \frac{1 + |S_{11}|\Gamma_L - |S_{11}| - \Gamma_L}{1 + |S_{11}|\Gamma_L + |S_{11}| + \Gamma_L}$$

Sacamos factor común en el numerador y denominador:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{\left(1 - |S_{11}|\right)\left(1 - \Gamma_L\right)}{\left(1 + |S_{11}|\right)\left(1 + \Gamma_L\right)}$$

Teniendo en cuenta que:

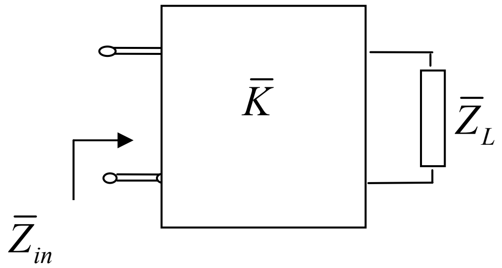
$$Z_L = Z_0 \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L}$$

La expresión de Z_{in} es igual a:

$$Z_{in} = Z_0^2 \frac{\left(1 - |S_{11}|\right)}{\left(1 + |S_{11}|\right)} \frac{1}{Z_L}$$

Es un inversor. La impedancia a la entrada es inversamente proporcional a la impedancia de la carga.

Los inversores de impedancia los caracterizaremos de la siguiente manera:

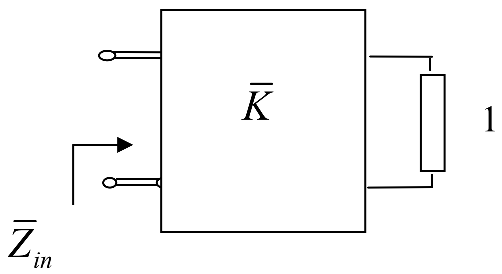


$$\overline{Z}_{in} = \frac{\overline{K}^2}{\overline{Z}_L}$$

donde $\overline{K}$ es real y positivo. Es la constante del inversor.
Convenio: $\overline{K}$<1

- **Parámetros [S] de un inversor de impedancia:**

Cálculo de S_{11}:



$$\overline{Z}_{in} = \frac{\overline{K}^2}{1}$$

Entonces:

$$S_{11} = \frac{\overline{Z}_{in} - 1}{\overline{Z}_{in} + 1} = \frac{\overline{K}^2 - 1}{\overline{K}^2 + 1}$$

Como $\overline{K}$<1, S_{11} es real y negativo.

- Cálculo de S_{21}:

Directamente, se puede escribir:

$$S_{21} = \pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2}$$

Que sustituyendo el valor de S_{11}:

$$S_{21} = \pm j\sqrt{1-\left|\frac{\overline{K}^2-1}{\overline{K}^2+1}\right|^2} = \pm j\sqrt{\frac{\left(\overline{K}^2+1\right)^2-\left(\overline{K}^2-1\right)^2}{\left(\overline{K}^2+1\right)^2}}$$

Y simplificando:

$$S_{21} = \pm j\frac{\sqrt{\left(\overline{K}^4+1+2\overline{K}^2\right)-\left(\overline{K}^4+1-2\overline{K}^2\right)}}{\left(\overline{K}^2+1\right)} = \pm j\frac{2\overline{K}}{\left(\overline{K}^2+1\right)}$$

Por lo tanto, la matriz de un inversor de impedancias es igual a:

$$[S] = \frac{1}{\overline{K}^2+1}\begin{bmatrix} \overline{K}^2-1 & \pm j2\overline{K} \\ \pm j2\overline{K} & \overline{K}^2-1 \end{bmatrix}$$

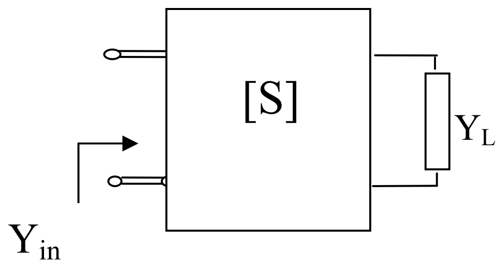
Donde podemos comprobar que el convenio de $S_{11}<0$ es el mismo convenio que suponer que la constante $\overline{K}<1$.

INVERSOR DE ADMITANCIA

Siguiendo el convenio definido anteriormente, los parámetros S de un inversor de admitancia son los de un bipuerto pasivo, sin pérdidas, recíproco y simétrico con S_{11} real y positivo:

$$[S] = \begin{bmatrix} |S_{11}| & \pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2} \\ \pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2} & |S_{11}| \end{bmatrix}$$

Veamos cuanto vale la impedancia a la entrada de un dispositivo como este:



$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L}$$

Y sustituyendo:

$$\Gamma_{in} = |S_{11}| + \frac{\left(\pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2}\right)\left(\pm j\sqrt{1-|S_{11}|^2}\right)\Gamma_L}{1 - |S_{11}|\Gamma_L}$$

Operando y simplificando como antes:

$$\Gamma_{in} = \frac{|S_{11}| - \Gamma_L}{1 - |S_{11}|\Gamma_L}$$

Ahora debemos sustituir en la expresión de Y_{in}:

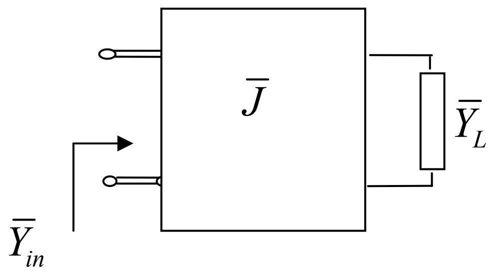
$$Y_{in} = Y_0 \frac{1-\Gamma_{in}}{1+\Gamma_{in}} = Y_0 \frac{1 - \dfrac{|S_{11}| - \Gamma_L}{1 - |S_{11}|\Gamma_L}}{1 + \dfrac{|S_{11}| - \Gamma_L}{1 - |S_{11}|\Gamma_L}} = Y_0 \frac{1 - |S_{11}|\Gamma_L - |S_{11}| + \Gamma_L}{1 - |S_{11}|\Gamma_L + |S_{11}| - \Gamma_L}$$

Al final la expresión de Y_{in} es igual a:

$$Y_{in} = Y_0^2 \frac{\left(1-|S_{11}|\right)}{\left(1+|S_{11}|\right)} \frac{1}{Y_L}$$

Es un inversor. La admitancia a la entrada es inversamente proporcional a la admitancia de la carga.

Los inversores de admitancia los caracterizaremos de la siguiente manera:

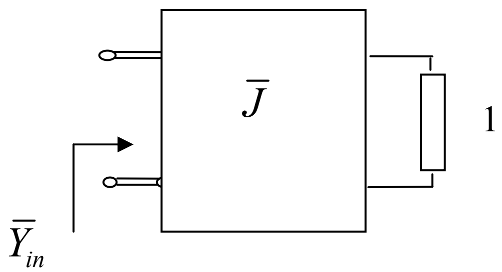


$$\overline{Y}_{in} = \frac{\overline{J}^2}{\overline{Y}_L}$$

donde $\overline{J}$ es real y positivo. Es la constante del inversor.
Convenio: $\overline{J}$<1

- **Parámetros [S] de un inversor de admitancia:**

Cálculo de S_{11}:



$$Y_{in} = \frac{\overline{J}^2}{1}$$

Entonces:

$$S_{11} = \frac{1-\overline{Y}_{in}}{1+\overline{Y}_{in}} = \frac{1-\overline{J}^2}{1+\overline{J}^2}$$

Como $\overline{J}$<1, S_{11} es real y positivo.

- Cálculo de S_{21}:

Llegamos a un resultado similar al del inversor de impedancia:

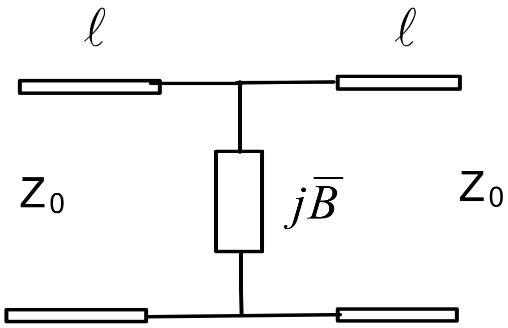
$$S_{21} = \pm j\frac{2\overline{J}}{\left(1+\overline{J}^2\right)}$$

Por lo tanto, la matriz de un inversor de admitancias es igual a:

$$[S] = \frac{1}{\left(1+\overline{J}^2\right)}\begin{bmatrix} 1-\overline{J}^2 & \pm j2\overline{J} \\ \pm j2\overline{J} & 1-\overline{J}^2 \end{bmatrix}$$

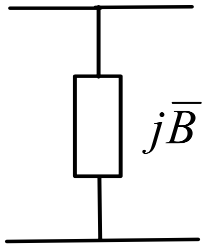
Donde podemos comprobar que el convenio de S_{11}>0 es el mismo convenio que suponer que la constante $\overline{J}$<1.

EJEMPLO DE INVERSOR DE IMPEDANCIA



Es un circuito pasivo, sin pérdidas, recíproco y con las líneas de entrada y salida lo convertiremos en un inversor de impedancia.

- Cálculo de S_{11} del circuito sin las líneas:



$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \left.\Gamma_{in}^{1}\right|_{a_2=0} = \frac{1-\overline{Y}_{in}}{1+\overline{Y}_{in}} = \frac{-j\overline{B}}{2+j\overline{B}}$$

Y si ahora añadimos las líneas, cambia la fase del parámetro:

$$S_{11}' = S_{11}e^{-2j\beta\ell} = \frac{-j\overline{B}}{2+j\overline{B}}e^{-2j\beta\ell}$$

La longitud de las líneas es la que hace que S_{11}' sea real y negativo:

$$S_{11}' = \frac{-j\overline{B}}{2+j\overline{B}}e^{-2j\beta\ell} = \frac{-j\overline{B}\left(2-j\overline{B}\right)}{4+\left|\overline{B}\right|^2}e^{-2j\beta\ell} = \frac{-\overline{B}\left(2j+\overline{B}\right)}{4+\left|\overline{B}\right|^2}e^{-2j\beta\ell}$$

Ahora la fase de S_{11}' es igual a:

$$\varphi_{11} = \pi + arctg\frac{2}{\overline{B}} - 2\beta\ell$$

Y ahora lo igualamos a π:

$$\pi + arctg\frac{2}{\overline{B}} - 2\beta\ell = \pi$$

Entonces, despejando la longitud de las líneas:

$$\ell = \frac{1}{2\beta} arctg\frac{2}{\overline{B}}$$

Donde, si B<0, quedaría una longitud negativa (que se podría solucionar añadiendo una línea de longitud $\lambda/2$.

Y entonces,

$$S_{11} = \frac{-\left|\overline{B}\right|}{\sqrt{4+\left|\overline{B}\right|^2}}$$

Por otro lado, nos interesará conocer B en función de la constante del inversor. Para ello igualamos las expresiones de S_{11}:

$$S_{11} = \frac{-\left|\overline{B}\right|}{\sqrt{4+\left|\overline{B}\right|^2}} = \frac{\overline{K}^2 - 1}{\overline{K}^2 + 1}$$

Y ahora elevamos al cuadrado:

$$\frac{\left|\overline{B}\right|^2}{4+\left|\overline{B}\right|^2} = \frac{\left(\overline{K}^2 - 1\right)^2}{\left(\overline{K}^2 + 1\right)^2}$$

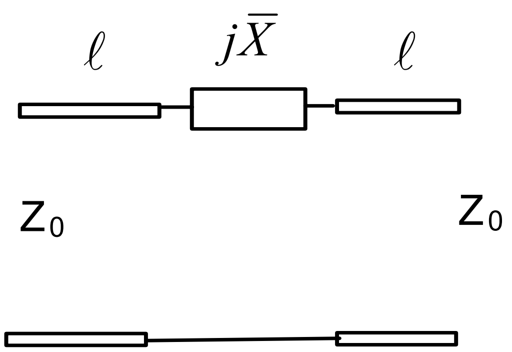
Despejamos B en función de K:

$$\left|\overline{B}\right|^2\left(\overline{K}^2+1\right)^2=\left(\overline{K}^2-1\right)^2\left(4+\left|\overline{B}\right|^2\right)$$
$$\left|\overline{B}\right|^2\left(\overline{K}^4+1+2\overline{K}^2-\overline{K}^4-1+2\overline{K}^2\right)=4\left(\overline{K}^2-1\right)^2$$
$$\left|\overline{B}\right|^2=\frac{\left(\overline{K}^2-1\right)^2}{\overline{K}^2}$$

Ecuaciones de diseño de un inversor de impedancia:

$$\left|\overline{B}\right|=\frac{1-\overline{K}^2}{\overline{K}}$$
$$\ell=\frac{1}{2\beta}arctg\frac{2}{\overline{B}}$$

EJEMPLO DE INVERSOR DE ADMITANCIA

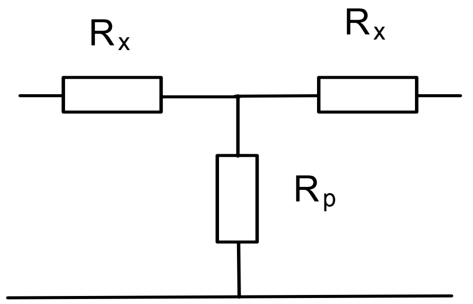


De una forma totalmente similar se encuentran las ecuaciones de diseño de un inversor de admitancia (la fase del S_{11} se iguala a 0):

$$\left|\overline{X}\right|=\frac{1-\overline{J}^2}{\overline{J}}$$
$$\ell=\frac{1}{2\beta}arctg\frac{2}{\overline{X}}$$

Si X<0 (condensador), la longitud queda negativa: se ha de añadir un tramo de $\lambda/2$.

ATENUADOR EN T



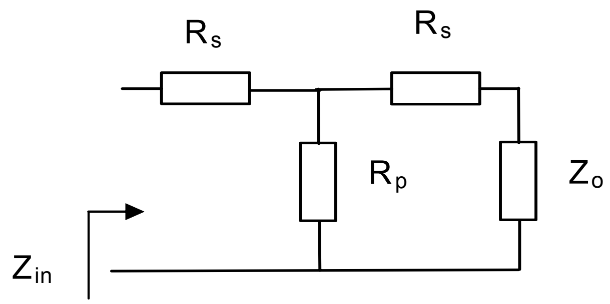
Se trata obviamente de una red con pérdidas, recíproca y simétrica. Tal red constituye un atenuador adaptado (respecto a una impedancia de referencia Z_0) cuando sus parámetros [S] referidos a esa impedancia son:

$$[S]=\begin{bmatrix} 0 & S_{21} \\ S_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo la atenuación:

$$L=-10\log|S_{21}|^2$$

La condición de adaptación se obtiene imponiendo $Z_{in}=Z_0$:



Ahora bien:

$$Z_{in}=R_s+R_p\|[R_s+Z_0]=R_s+\frac{R_p[R_s+Z_0]}{R_p+R_s+Z_0}=Z_0$$

$$R_s\left(R_p+R_s+Z_0\right)+R_p[R_s+Z_0]=Z_0\left(R_p+R_s+Z_0\right)$$

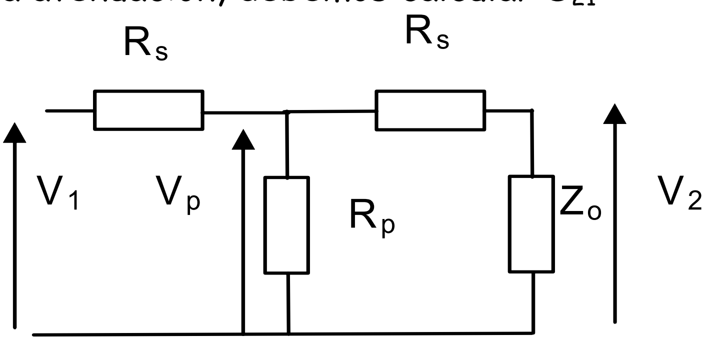
Desarrollamos los paréntesis y simplificamos:

$$R_sR_p + R_s^2 + \cancel{R_sZ_0} + R_pR_s + \cancel{R_pZ_0} = \cancel{Z_0R_p} + \cancel{Z_0R_s} + Z_0^2$$
$$2R_sR_p = Z_0^2 - R_s^2$$

Y si ahora despejamos una de las dos incógnitas:

$$R_p = \frac{Z_0^2 - R_s^2}{2R_s}$$

Esta es la condición de adaptación. Ha de ser $R_s < Z_0$.
Para calcular la atenuación, debemos calcular S_{21}:



$$S_{21} = \left(1 + S_{11}\right)\left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{a_2=0} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{a_2=0}$$

La tensión V_2 se puede poner en función de la tensión en bornes de la resistencia en paralelo V_p:

$$V_2 = \frac{Z_0}{Z_0 + R_S}V_p$$

Y a su vez ésta se puede poner en función de V_1 y de la impedancia Z_{eq} que se ve desde V_p:

$$V_p = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R_S}V_1 = \frac{Z_0 - R_S}{Z_0}V_1$$

Entonces con estas dos ecuaciones se puede escribir:

$$S_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{a_2=0} = \frac{\dfrac{Z_0}{Z_0 + R_S} V_p}{V_1} = \frac{Z_0}{Z_0 + R_S} \frac{Z_0 - R_S}{Z_0}$$

Que simplificando nos lleva a la ecuación:

$$S_{21} = \frac{Z_0 - R_S}{Z_0 + R_S}$$

Por lo tanto:

$$L = -10\log\left|\frac{Z_0 - R_S}{Z_0 + R_S}\right|^2$$

Si partimos del conocimiento de L, entonces:

$$\frac{Z_0 - R_S}{Z_0 + R_S} = 10^{-L/20}$$

Que despejando R_S nos lleva a:

$$R_S = Z_0 \frac{1 - 10^{-L/20}}{1 + 10^{-L/20}}$$

Ejemplo: si queremos L=10 dB con Z_0=50Ω, se obtiene:
R_S=26Ω y R_p=35,14Ω.

Aplicaciones:

- Reducción de la potencia que llega a una carga (protección frente a daño o saturación).
- Reducción de desadaptación:

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} = S_{21}^2\Gamma_L$$

2,7 CIRCUITOS EQUIVALENTES DE DIAFRAGMAS EN GUÍAS

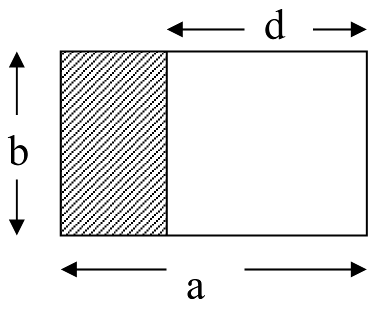
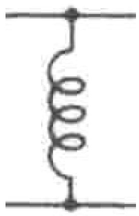
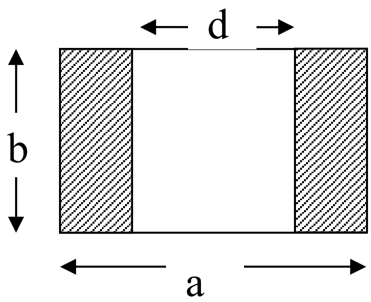
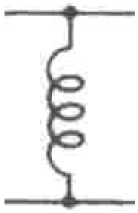
Supongamos una guía por la que se propaga una onda progresiva correspondiente al modo fundamental. Si en la guía hay un obstáculo, el campo correspondiente a esa onda progresiva no puede solo satisfacer las condiciones de contorno en el obstáculo. Aparecerá una onda reflejada y una transmitida, cuya amplitud ya no será igual a la de la onda incidente. Para un obstáculo general, sin embargo, la aparición de la onda reflejada y la modificación de la amplitud de la onda transmitida no bastan para que se satisfagan las condiciones de contorno.

Para poder satisfacer las condiciones de contorno es necesario que se exciten modos de orden superior. Sin embargo, si la frecuencia es tal que sólo está por encima del corte el fundamental, los otros modos decaen exponencialmente con la distancia al obstáculo, y a cierta distancia del mismo los campos vienen dados esencialmente por ondas progresivas y regresivas (en el lado desde el que incide la onda) y ondas progresivas (en el lado opuesto) del modo fundamental.

No obstante, los campos de los modos de orden superior en corte excitados por el obstáculo, almacenan energía. En particular, puede demostrarse que los modos TE en corte almacenan predominantemente energía magnética, mientras que en los modos TM predomina la energía eléctrica.

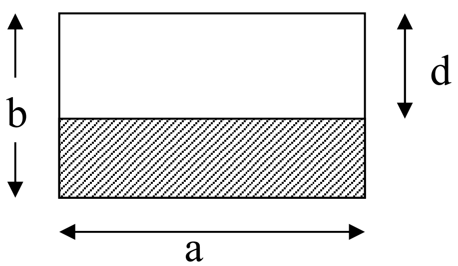
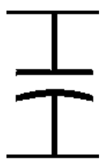
Esto sugiere que, en el modelado de la propagación en guía mediante líneas de transmisión, un obstáculo sin pérdidas puede modelarse mediante elementos reactivos concentrados. Aunque el valor de las reactancias puede ser de determinación difícil y laboriosa (métodos variacionales y otros métodos numéricos) la forma de los diafragmas puede dar información cualitativa sobre el carácter de las reactancias.

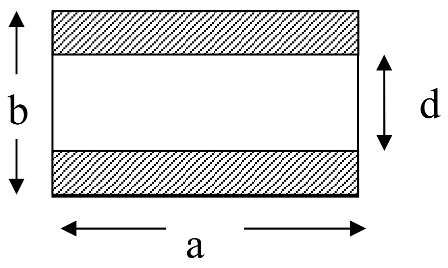
a) Diafragma vertical

		$\overline{B} = -\frac{2\pi}{\beta a}\cot^2\frac{\pi d}{2a}\left(1+\csc^2\frac{\pi d}{2a}\right);$
		$\overline{B} = -\frac{2\pi}{\beta a}\cot^2\frac{\pi d}{2a}\left(1+\frac{a\gamma_3-3\pi}{4\pi}\sin^2\frac{\pi d}{a}\right);$ $\gamma_3=\left[\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2-k_0^2\right]^{\frac{1}{2}}$

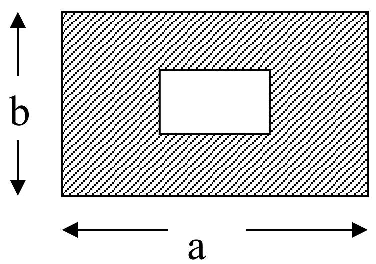
No existe dependencia en y de la condición de contorno ni del campo incidente: modos de orden superior excitados serán TE_{m0} (los TM_{mo} no existen). Por lo tanto la energía almacenada predominantemente será magnética: carácter inductivo. Circuito equivalente: bobina paralelo.

b) Diafragma horizontal

		$\overline{B}=\frac{4\beta b}{\pi}\left[\ln\csc\frac{\pi d}{2b}+\left(\frac{\pi}{b\gamma_1}-1\right)\cos^4\frac{\pi d}{2b}\right];$ $\gamma_1=\left[\left(\frac{\pi}{b}\right)^2-\beta^2\right]^{\frac{1}{2}}$

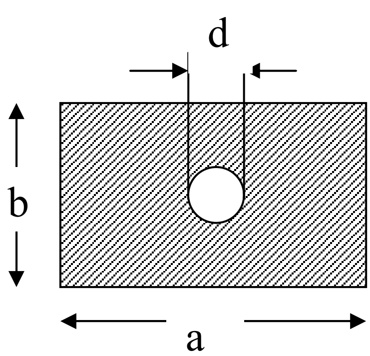
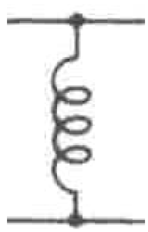
		$\bar{B} = \frac{2\beta b}{\pi}\left[\ln \csc\frac{\pi d}{2b} + \left(\frac{2\pi}{b\gamma_2} - 1\right)\cos^4\frac{\pi d}{2b}\right];$ $\gamma_2 = \left[\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 - \beta^2\right]^{\frac{1}{2}}$

c) Diafragma rectangular

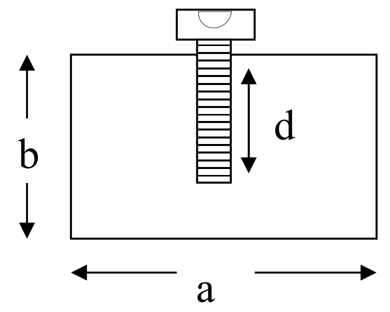
		$\bar{B} = \frac{4\beta b}{\pi}\left[\ln \csc\frac{\pi d}{2b} + \left(\frac{\pi}{b\gamma_1} - 1\right)\cos^4\frac{\pi d}{2b}\right];$ $\gamma_1 = \left[\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 - \beta^2\right]^{\frac{1}{2}}$

Su carácter resonante puede razonarse cualitativamente en base a que es una combinación de los dos anteriores.

d) Apertura circular pequeña (iris)

		$\bar{B} = -\frac{3ab}{\beta d^3}$

e) Tornillo sintonizador



Para valores pequeños de d, su efecto es capacitivo. Sin embargo para valores grandes se comporta como un circuito LC que llega a resonar. Este elemento, montado sobre un carro que pueda deslizarse a lo largo de la guía, se utiliza para adaptar impedancias, pudiendo eliminar reflexiones.