PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial **4 de maig de 2001**

1. Quina és la probabilitat que tirant sis vegades un dau de sis cares surtin alguna vegada les cares **1** i **2**?

   Resolució:

   Siguin els esdeveniments A_1 = "surt algun **1**", A_2 = "surt algun **2**"

$$P(A_1 \text{ i } A_2) = 1 - P(\overline{A_1} \text{ o } \overline{A_2}) = 1 - (P(\overline{A_1}) + P(\overline{A_2}) - P(\overline{A_1} \text{ i } \overline{A_2}))$$

$$= 1 - (\frac{5}{6})^6 - (\frac{5}{6})^6 + (\frac{4}{6})^6 = 0.418.$$

2. El temps de vida d'una bombeta és una variable exponencial de valor mitjà 2 anys. En una zona hi han 1000 bombetes funcionant. Quina és la probabilitat que passat un any n'estiguin funcionant més de 600?

   Resolució:

   La probabilitat que una bombeta duri més d'un any val $p = 1 - F(1)$ on $F(x)$ és la funció de distribució d'una variable exponencial de paràmetre $\lambda = 1/2$. Així $p = e^{-0.5}$. El nombre N de bombetes funcionant passat un any és una variable binomial amb $n = 1000$ i $p = e^{-0.5}$. Per calcular la probabilitat $P(N > 600)$ utilitzem l'aproximació normal (teorema de DeMoivre-Laplace) amb $m = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

$$P(N > 600) = 1 - F_N(600) \sim 1 - \frac{1}{2}(1 + \text{erf}(\frac{600 - 1000e^{-0.5}}{\sqrt{2}\sqrt{1000e^{-0.5}(1 - e^{-0.5})}}))$$

$$= 0.5 + 0.5\,\text{erf}(0.29892) = 0.664.$$

3. La variable aleatòria X és uniforme en $[-\pi, \pi]$. $Y = g(X)$ on

$$g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

   Calculeu:

   (a) La funció de distribució de la variable aleatòria Y.

   (b) Les probabilitats $P(Y = 0), P(Y = 0.5), P(0 < Y < 1)$.

   (c) L'esperança i la variança de la variable aleatòria $Z = 2Y + 1$.

   (d) La densitat condicionada $f_Y(y|Y \neq 0)$.

Resolució:

(a) En la gràfica de la funció g veiem que $\Omega_Y = [0,1]$.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = 0 \\ 1 - \frac{\arccos y}{\pi} & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

ja que $F_Y(0) = P(Y = 0) = P(X \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]) = \pi/(2\pi) = 1/2$ (les probabilitats associades a X les calculem com 'longitud del conjunt'/(2π)). Si $0 < y < 1$, l'esdeveniment $Y < y$ correspon a $X \in [-\pi, -\arccos y] \cup [\arccos y, \pi]$ que té longitud $2\pi - 2\arccos y$.

(b) La variable Y és una variable mixta que té comportament discret només en $Y = 0$ (únic punt de discontinuïtat de F_Y). Com s'ha vist abans, $P(Y = 0) = 1/2$. $P(Y = 0.5) = 0$. $P(0 < Y < 1) = P(0 < Y \leq 1) = F_Y(1) - F_Y(0) = 1/2$.

(c) Per la linealitat de l'esperança, $E[Z] = 2E[Y] + 1$, $E[Z^2] = 4E[Y^2] + 4E[Y] + 1$. Pel teorema de l'esperança, $E[Y] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$, $E[Y^2] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \frac{dx}{2\pi} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2} \frac{dx}{2\pi} = 1/4$. Llavors $E[Z] = \frac{2}{\pi} + 1$, $E[Z^2] = 2 + \frac{4}{\pi}$, $V[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2 = 1 - \frac{4}{\pi^2}$.

(d) $f_Y(y|Y \neq 0) = dF_Y(y|Y \neq 0)/dy$ i , per $0 < y < 1$,

$$F_Y(y|Y \neq 0) = P(Y \leq y|Y \neq 0) = \frac{P(0 < Y \leq y)}{P(Y \neq 0)} = \frac{F_Y(y) - F_Y(0)}{P(Y \neq 0)}$$

$$= \frac{1/2 - \arccos y/\pi}{1/2} = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos y,$$

d'on, per $0 < y < 1$,

$$f_Y(y|Y \neq 0) = \frac{2}{\pi\sqrt{1 - y^2}}.$$