PROCESADO DE SEÑAL

20 DE ENERO DE 2003

DE 9:00 A 12:00 (TRES HORAS)

El examen consta de tres ejercicios de igual valor a efectos de calificación. Ha de realizar los ejercicios sin ninguna clase de documentación, libros, notas o apuntes. El único papel que puede usar es el que le distribuya el profesor en el aula. Escriba su nombre (dos apellidos y el nombre) con mayúsculas siempre antes de escribir en las hojas. La corrección de cada ejercicio la realiza un profesor diferente, así pues realice cada ejercicio en hojas separadas.

PRIMER EJERCICIO

En el filtrado de mínimo error cuadrático medio de datos $\{\underline{X}(n)\}$, cuando estos se encuentran altamente correlados, la matriz de correlación $\underline{\underline{R}} = E\left[\underline{X}(n).\underline{X}^H(n)\right]$ puede ser singular y carecer de inversa $\underline{\underline{R}}^{-1}$. Para solventar el problema del diseño del filtro transversal o FIR de vector de coeficientes $\underline{W}$, a partir de los datos mencionados y de una secuencia de entrenamiento o referencia $\{d(n)\}$, se minimiza la siguiente función de coste:

$$\underline{W} = \frac{\min imo}{segun\ \underline{W}}\left(\xi[\underline{W}] = E\left(|e(n)|^2\right) + \alpha\|\underline{W}\|^2\right)$$

siendo α un escalar real y constante con el índice n, $\|\underline{W}\|^2 = \underline{W}^H.\underline{W}$ y $e(n) = d(n) - \underline{W}^H.\underline{X}(n)$ el error de filtrado.

Responda a las siguientes cuestiones.

a.- Obtenga la expresión del filtro óptimo que minimiza la función $\xi(\underline{W})$ en condiciones estacionarias

b.- Describa el papel que desempeña la constante α en la solución encontrada en el apartado anterior. ¿Bajo que condiciones adoptaría un valor positivo, nulo o negativo dicha constante?

c.- Obtenga la ecuación de un filtro adaptativo basado en el gradiente estocástico (instantáneo o LMS) de la función $\xi(\underline{W})$.

d.- Demuestre que el filtro adaptativo del apartado anterior converge en media a la solución obtenida en el primer apartado, es decir, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty}\left[E\left(\underline{W}(n)\right)\right] = \underline{W}_{optimo}$$

e.- Encuentre los limites del paso de adaptación o "step-size" μ en los que el filtro adaptativo converge a la solución deseada.

f.- Indique una cota superior para el tiempo de convergencia del algoritmo adaptativo anterior.

SEGUNDO EJERCICIO

El objetivo de este ejercicio es el de analizar dos procedimientos para reducir la variancia de la estimación del periodograma. Se supondrá que la serie temporal es estacionaria, de media cero y densidad espectral de potencia $S(f_k)$, y que el periodograma de N muestras de la serie temporal es $\hat{S}(f_k)$ a la frecuencia discreta de $f_k = k/N$; además, la variancia del periodograma a una frecuencia determinada es $\sigma^2_{\hat{S}(f_k)}$ y su valor esperado a la misma frecuencia es $m_{\hat{S}(f_k)}$.

a) Escriba la ecuación del filtro de Wiener que permite estimar el canal del usuario 1, mediante la minimización de la función:

$$\hat{h}_1 = \underset{h_1}{\arg\min}\left(\underline{e}^T.\underline{e}\right)$$

$$\underline{e} = \underline{y} - \underline{s}_1.\hat{h}_1 \quad ; \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ . \\ y(N-1) \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} s_1(0) \\ .. \\ s_1(N-1) \end{bmatrix}$$

b) Calcule el sesgo $E_w\left\{\hat{h}_1\right\} - h_1$.

c) Calcule la varianza de $\hat{h}_1$.

II. Estimación multiusuario

Una alternativa, que permitiría eliminar el problema del sesgo, consiste en realizar una estimación conjunta de los dos canales h_1 y h_2, para lo cual se formula la ecuación (1) de manera vectorial:

$$y(n) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + w(n) = \underline{h}^T.\underline{s}_n + w(n)$$

d) Escriba la ecuación que permite estimar los canales de ambos usuarios, en función de la matriz de secuencias piloto y la señal recibida, a partir del problema de optimización:

$$\underline{\hat{h}} = \underset{\underline{h}}{\arg\min}\left(\underline{e}^T.\underline{e}\right)$$

$$\underline{e} = \underline{y} - \underline{\underline{S}}.\underline{h} \quad ; \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ .. \\ y(N-1) \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \underline{s}_1 & \underline{s}_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{s}_i = \begin{bmatrix} s_i(0) \\ .. \\ s_i(N-1) \end{bmatrix}; i = 1,2$$

e) Calcule el sesgo de la estimación $E_w\left(\underline{\hat{h}}\right) - \underline{h}$. ¿Es necesario que se cumpla $\rho = 0$ para que el estimador sea no sesgado?

f) Calcule la varianza de los canales estimados como los valores de la diagonal de $E_w\left(\underline{\hat{h}}.\underline{\hat{h}}^T\right)$ menos el correspondiente valor esperado elevado al cuadrado y su dependencia de ρ. Es decir:

$$\mathrm{var}^2(h_i) = \textit{Elemento i de la diagonal } E\left\{\underline{\hat{h}}.\underline{\hat{h}}^T\right\} - E^2(h_i) \qquad i = 1,2$$

g) Como conclusión, suponga que se existe un desajuste en las potencias recibidas de cada usuario tal que $h_2 = 100h_1$ y que $\rho = 0.1$. Compare los sesgos y varianzas para cada una de las estrategias de estimación y valore cual es más conveniente.

En la primera parte del ejercicio se estudiara un suavizado mediante un filtrado paso bajo. La estimación de la densidad espectral suavizada es $\tilde{S}(f_k) = \underline{g}^T \underline{\hat{S}}(f_k)$, con $\underline{g} = [g_{-M} \cdots g_0 \cdots g_M]$ y $\underline{\hat{S}}(f_k) = [\hat{S}(f_{k-M}) \ldots \hat{S}(f_k) \ldots \hat{S}(f_{k+M})]^T$ y el filtro paso bajo $\underline{g}$ es tal que $\underline{g}^T \underline{1} = 1$, con $\underline{1} = [1 \ \cdots \ 1]^T$. Se aplicara este filtro a las frecuencias: $f_{k-M} > 0$ y $f_{k+M} < 1/2$. Además, se asumirá que $\hat{S}(f_{k-j})$ y $\hat{S}(f_{k-i})$ están incorrelados para $f_{k-j} \neq f_{k-i}$.

a.- Calcule el valor esperado y variancia de la estimación $\tilde{S}(f_k)$, en función del valor esperado $m(\hat{S}(f_k))$ y la variancia del periodograma $\sigma^2_{\hat{S}(f_k)}$, considere, para el filtro paso bajo, un pulso rectangular $\underline{g} = \frac{1}{2M+1}\underline{1}$. Tome como margen de frecuencias $f_{k-M} > 0$ y $f_{k+M} < 1/2$.

……

La segunda parte del ejercicio consiste en estudiar un suavizado del espectro mediante una ventana exponencial de tramas de datos que no se superponen. Al igual que el caso anterior, se supone que el resultado de hacer el periodograma sobre la trama ρ-esima es. $\hat{S}_\rho(f_k)$

La estimación de la densidad espectral suavizada es $\tilde{S}_\rho(f_k) = \alpha.\tilde{S}_{\rho-1}(f_k) + (1-\alpha).\hat{S}_\rho(f_k)$, con $0 < \alpha < 1$, siendo $\hat{S}_0(f_k) = 0$. También, se asumirá que $\hat{S}_j(f_k)$ y $\hat{S}_i(f_k)$ están incorreladas para $i \neq j$.

b.- Calcule el valor esperado de $\tilde{S}_\rho(f_k)$ para un 'l' arbitrario en función de un vector de memoria $\underline{\alpha} = \lfloor \alpha^\rho, \alpha^{\rho-1}, \ldots, \alpha^2, \alpha \rfloor$ y el valor asintótico de $E\{\tilde{S}_\rho(f_k)\}$ cuando $\rho \to \infty$

c.- Calcule la variancia de $\tilde{S}_\rho(f_k)$ para un 'l' arbitrario, y el valor asintótico cuando $\rho \to \infty$

TERCER EJERCICIO

Se estudiaran dos posibilidades distintas para la estimación de canal en un entorno de comunicaciones multiusuario. Suponga que dos terminales de comunicaciones móviles pretenden transmitir a un receptor situado en la estación base. A fin de poder construir un receptor coherente, cada usuario transmite periódicamente y de manera síncrona con el otro usuario, una secuencia de *N* símbolos (secuencia piloto) que se usará para estimar el canal de propagación en el receptor usando los principios del filtro de Wiener. Se supondrá, en todo el ejercicio, que el canal de propagación *h* es de un solo coeficiente (es decir, el canal no presenta selectividad en frecuencia).

Bajo estas hipótesis, se puede escribir la señal recibida, durante el periodo de transmisión de la secuencia piloto, como la suma de las señales transmitidas por ambos usuarios $s_1(n)$ y $s_2(n)$ alteradas por los respectivos canales más un ruido blanco de media cero $w(n)$ y potencia σ_w^2:

$$y(n) = h_1 s_1(n) + h_2 s_2(n) + w(n) \qquad n = 0, \ldots, N-1 \tag{1}$$

I. Estimación monousuario

En este caso la estimación del canal del usuario 1 se efectúa suponiendo desconocida la secuencia piloto del usuario 2. Suponga que la correlación cruzada entre secuencias piloto es

$$r_{S1S2} = \underline{s}_1^T.\underline{s}_2 = \rho\sqrt{r_{S1S1}.r_{S2S2}} = N.\rho \quad con \quad |\rho| < 1$$

Donde se ha asumido que los símbolos que se transmiten son de módulo unidad.