

1. La princesa Pipelina té un jardí ple de granotes. La probabilitat que una d'aquestes granotes es converteixi en un príncep fantàstic al fer-li un petó val α . El problema és que hi ha una probabilitat $1/4$ que la granota es converteixi en una bruixa horrible que mati a la princesa.

Cansada de ser soltera, Pipelina decideix anar petonejant granotes fins a trobar un príncep. Per a quins valors de α acabar trobant un príncep és més probable que morir en mans de la bruixa?

2. Un node d'una xarxa té n connexions. Cada connexió, amb independència de les altres, pot estar activada amb probabilitat $p_1 = 2/3$. La probabilitat que el node col·lapsi si té k connexions activades val $k/2n$. Calculeu:
 - (a) La probabilitat que el node col·lapsi.
 - (b) Si el node està col·lapsat, la probabilitat que hi hagi només dues connexions activades.
3. X és una variable aleatòria de Cauchy de paràmetre α . Determineu la funció de densitat de la nova variable $Y = \arctan \frac{X}{\alpha}$.

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES!!

Puntuació: 3, 4, 3

1. La princesa Pipelina té un jardí ple de granotes. La probabilitat que una d'aquestes granotes es converteixi en un príncep fantàstic al fer-li un petó val α . El problema és que hi ha una probabilitat $1/4$ que la granota es converteixi en una bruixa horrible que mati a la princesa.

Cansada de ser soltera, Pipelina decideix anar petonejant granotes fins a trobar un príncep. Per a quins valors de α acabar trobant un príncep és més probable que morir en mans de la bruixa?

Resolució:

Per que la princesa acabi trobant un príncep cal que la primera granota surti príncep, o la primera granota no surti res i la segona surti príncep, o la primera no surti res, la segona no surti res i la tercera surti príncep, etc. Si A és l'esdeveniment "acabar trobant un príncep"

$$\begin{aligned} P(A) &= \alpha + (1 - \alpha - \frac{1}{4})\alpha + (1 - \alpha - \frac{1}{4})^2\alpha + (1 - \alpha - \frac{1}{4})^3\alpha + \dots \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha - \frac{1}{4})^k = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha - \frac{1}{4})} = \frac{\alpha}{\alpha + \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Com eventualment la princesa trobarà un príncep o una bruixa, el requisit és $P(A) > 1/2$ que implica

$$\alpha > \frac{1}{4}.$$

(que és el que, obviament, cal esperar.) Hi ha una restricció adicional que ve de $P(\text{granota príncep}) + P(\text{granota bruixa}) + P(\text{granota ordinària}) = 1$. Llavors també ha de ser $\alpha \leq 3/4$.

2. Un node d'una xarxa té n connexions. Cada connexió, amb independència de les altres, pot estar activada amb probabilitat $p_1 = 2/3$. La probabilitat que el node col·lapsi si té k connexions activades val $k/2n$. Calculeu:

- (a) La probabilitat que el node col·lapsi.
 (b) Si el node està col·lapsat, la probabilitat que hi hagi només dues connexions activades.

Resolució:

El nombre de connexions activades és una variable N binomial de paràmetres n, p_1 . La seva funció de probabilitat és

$$P_N(k) = \binom{n}{k} p_1^k q_1^{n-k}.$$

- (a) Sigui C l'esdeveniment "node col·lapsat". L'enunciat ens diu que $P(C|N=k) = k/(2n)$. Ara, amb la fórmula de la probabilitat total

$$P(C) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2n} P_N(k) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^n k P_N(k) = \frac{1}{2n} E[N] = \frac{1}{2n} n p_1 = \frac{p_1}{2} = \frac{1}{3}.$$

- (b) Bayes:

$$P(N=2|C) = \frac{P(C|N=2)P_N(2)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{2n} \binom{n}{2} p_1^2 q_1^{n-2}}{p_1/2} = (n-1) p_1 q_1^{n-2} = \frac{2(n-1)}{3^{n-1}}.$$

3. X és una variable aleatòria de Cauchy de paràmetre α . Determineu la funció de densitat de la nova variable $Y = \arctan \frac{X}{\alpha}$.

Resolució:

La funció $g(x) = \arctan \frac{x}{\alpha}$ és bijectiva de l'interval $(-\infty, \infty)$ a l'interval $(-\pi/2, \pi/2)$. Per tant, $\Omega_Y = (-\pi/2, \pi/2)$ i

$$f_Y(y) = f_X(x) \frac{1}{|dy/dx|} = \frac{\alpha/\pi}{x^2 + \alpha^2} \frac{1}{\frac{1}{1+(\frac{x}{\alpha})^2} \frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\pi}.$$

És a dir, Y és uniforme en $(-\pi/2, \pi/2)$.