Senyals i Sistemes I **Exàmen Final P08: 13 de Juny de 2008** **Duració: 3h**

Publicació Notes Provisionals: 26-6-08 **Al.legacions: 27-6-08** **Publicació Notes Definitives: 30-6-08**

No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

Exercici 1

Un filtre es diu adaptat a un senyal v(t) real quan la seva resposta impulsional és $h(t)=v(t_0-t)$. Suposi que t_0 és el valor mínim per aconseguir que el filtre sigui causal. Per tal de realitzar el filtre adaptat al senyal v(t) de la figura 1 s'utilitza el sistema que es mostra en la figura 2.

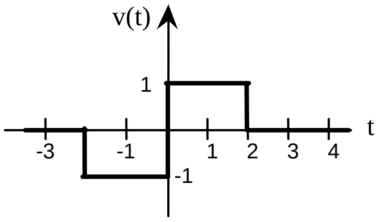


figura 1

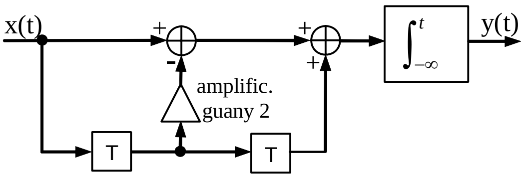


figura 2

a) Estudiï les propietats d'invariància, causalitat i estabilitat del sistema de la figura 2.

b) Comprovi que efectivament el sistema proposat es correspon amb el filtre adaptat al senyal v(t) de la Fig.1. Per a quin valor de T s'aconsegueix això? Quin és el valor de t_0?

c) En un cas general, obtingui la transformada de Fourier del senyal de sortida d'un filtre adaptat a un senyal v(t) real, en funció de V(f) i t_0.

d) Obtingui i representi la sortida del filtre adaptat, tant en temps com en freqüència, quan l'entrada és v(t) de la figura 1.

e) Obtingui la relació entre el valor màxim d'aquesta sortida i l'energia del senyal v(t).

f) Proposi un senyal diferent de v(t), però de la mateixa energia, i comprovi que el màxim de la sortida per aquest senyal no supera al màxim de la sortida corresponent a l'entrada v(t).

Exercici 2

Considerem un senyal real i periòdic $x(t)$ de periode T_0, que ve descrit per la següent expressió, on $x_b(t)$ constitueix el senyal bàsic de l'expansió,

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_b\left(t-nT_0\right) \qquad [1]$$

Considerem també un SLI (Sistema Lineal i Invariant) descrit per la resposta impulsional $h_0(t)=\text{sinc}^2\left(3t/T_0\right)$. Es demana,

a) Determini el DSF del senyal x(t) definit a [1] en funció del valors de $X_b(f)$ i de T_0

b) Determini i dibuixi detalladament l'espectre de densitat de potència $S_{xx}\left(f\right)$ del senyal d'entrada $x(t)$ descrit en [1] en funció dels valors de la transformada de Fourier del senyal bàsic $x_b(t)$ i del periode T_0.

c) Determini i dibuixi detalladament l'espectre de densitat de potència $S_{yy}\left(f\right)$ del senyal de sortida $y(t)$ del SLI especificat per $h_0(t)$ quan a la seva entrada tenim $x(t)$ descrit a [1]. Expressi-ho en funció dels valors de la transformada de Fourier del senyal bàsic $x_b(t)$, del periode T_0.

d) Avaluï la potència de sortida del SLI per a l'escenari específic descrit en l'apartat c).

Tot seguit considerem un model diferent al descrit per [1]: consideri el senyal descrit per l'expressió [2],

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\pi f_c t\right) \cdot x_0\left(t - nT_0\right) \qquad [2]$$

on $x_0(t)$ real. Es demana,

e) Especifiqui tots els valors de f_c, en funció de T_0, pels quals el senyal $x(t)$ és periòdic, independentment del senyal bàsic $x_0(t)$. Especifiqui el valor T del seu periode.

f) Suposant que $x_0(t)$ és parell, proporcioni els coeficients c_n, en funció dels valors de $X_0(f)$, del DSF (Desenvolupament en Sèrie de Fourier) de $x(t)$ definit a [2], així com la freqüència fonamental ν_0 tal que,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot \cos\left(2\pi n \nu_0 t\right) \qquad [3]$$

Exercici 3

Es considera l'esquema de la Figura 3, on x(t) és un senyal pas baix d'ample de banda B_x, i el sistema escalador y(t)=z(at) treballa per valors a>0. Es demana:

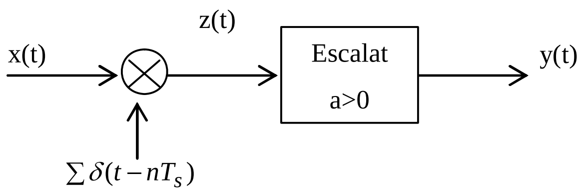


Figura 3

a) Trobi les expressions analítiques dels senyals z(t) i y(t) en funció de x(t). Trobi les seves transformades de Fourier Z(f) i Y(f) expressades en funció de X(f).

b) Dedueixi justificadament el filtre interpolador ideal H(f) que permet recuperar x(at) a partir de y(t). A l'hora d'escollir el valor de T_s, hi ha alguna limitació a tenir en compte? Influeix el valor de a en l'elecció de T_s?

c) Es vol dissenyar aquest filtre interpolador passa baixes mitjançant una Aproximació de Chebyshev. A aquest efecte, es considera que el possible guany associat amb aquest filtre s'implementarà apart. Així el mòdul de la resposta freqüencial del filtre a dissenyar ha de tenir una màxima amplitud corresponent a la unitat. Les toleràncies permeses han de ser tals que la màxima atenuació a la banda de pas no superi els 3dB, i la mínima atenuació a la banda atenuada superi els 25 dB. La freqüència de mostratge que s'està utilitzant és $F_s=3B_x$. Si cal, expressi els resultats en funció de B_x i a:

c.1) Defineixi la plantilla d'especificacions del disseny d'aquest filtre. Influeix el valor de a en el càlcul de l'ordre del filtre?

Si les especificacions d'aquest filtre són satisfetes per una aproximació de Chebyshev d'ordre 3 :

c.2) Trobi l'expressió de $|H(f)|^2$, si s'ha fet l'ajust a la banda de pas. Dibuixi detalladament $|H(f)|$ per $H_{màx}=1$.

c.3) Dibuixi la corba d'atenuació α(f), indicant-hi tots els valors d'interès i els punts on la corba toca a la plantilla.. Estimi el valor mínim de l'atenuació a la banda atenuada (faci totes les aproximacions que cregui oportunes).

c.4) Trobi la posició i multiplicitat de tots els zeros d'atenuació i de transmissió.

(Nota: $C_3(x)=4x^3-3x$, log2=0,3 log3=0,48 log5=0,7 log7=0;84)

Exercici 1

a) Es <u>demostra</u> que el sistema és invariant, causal (si $T \geq 0$) i estable.

b) $h(t) = T\left[\delta(t)\right] = \Pi\left(\dfrac{t - T/2}{T}\right) - \Pi\left(\dfrac{t - 3T/2}{T}\right)$

$= v(t_0 - t)$ si $t_0 = T = 2$

c) Aplicant diverses propietats de la transf. De Fourier s'obté $Y(f) = \left|V(f)\right|^2 e^{-j2\pi f t_0}$

d) $y(t) = v(t) * h(t) = -2\Delta\left(\dfrac{t}{2}\right) + 4\Delta\left(\dfrac{t-2}{2}\right) - 2\Delta\left(\dfrac{t-4}{2}\right)$ $\rightarrow$ gràfica de y(t)

$Y(f) = 16\, sinc^2(2f)\, sin^2(2\pi f)\, e^{-j2\pi 2 f}$ $\rightarrow$ dibuixar mòdul i fase

e) $E_x = 4$, $y_{màx} = y(2) = 4$, per tant la relació demanada és 1

f) Moltes possibilitats. Per exemple:

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right) \quad \rightarrow \quad y(t) = x(t) * h(t) \quad \rightarrow \quad y(t)\big|_{màx} = 2 < 4$$

PROBLEMA 2 [solucions resumides]
Senyals i Sistemes I, examen final primavera 2008 ETSETB

a) DSF:

$$x(t) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp\left(j2\pi \frac{k}{T_o} t \right) \quad , \quad c_k = \frac{1}{T_o} X_b\left(\frac{k}{T_o} \right)$$

b) Espectre de Densitat de Potència:

$$S_{xx}(f) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \delta\left(f - k/T_o \right) \quad , \quad c_k = \frac{1}{T_o} X_b\left(\frac{k}{T_o} \right)$$

c) Espectre de Densitat de Potència a la sortida del filtre:

$$S_{yy}(f) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |d_k|^2 \delta\left(f - k/T_o \right) \quad , \quad d_k = \frac{1}{T_o} X_b\left(\frac{k}{T_o} \right) H\left(\frac{k}{T_o} \right)$$

$$H(f) \quad = \quad \frac{T_o}{3} \Lambda\left(\frac{T_o}{3} f \right)$$

$$S_{yy}(f) \quad = \quad \sum_{k=-2}^{+2} |d_k|^2 \delta\left(f - k/T_o \right)$$ (el filtre és limitat en banda)

d) Potència a la sortida del filtre:

$$P_y \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(f) df \quad = \quad \sum_{k=-2}^{+2} |d_k|^2$$

e) valors de fc:

$$x(t) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\pi f_c t\right) x_0\left(t - kT_0\right)$$

$$x(t+T) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_c T\right) x_0\left(t + T - kT_0\right)$$ amb (m,q) sencers

$$2\pi f_c T = 2\pi m$$

$$T = qT_0$$

$$\boxed{f_c = \frac{m}{q} \cdot \frac{1}{T_0}}$$ (m,q) sencers, sent m/q fracció irreduïble (q=1 és cas particular)

f) DSF d' x(t) anterior:

Periode fonamental : $T = qT_0$

Freqüència fonamental: $\nu_0 = \dfrac{1}{qT_0}$

(cas *q* senar)
Senyal bàsic:

$$x_b(t) = \cos\left(2\pi f_c t\right)\sum_{k=-(q-1)/2}^{(q-1)/2} x_0\left(t - kT_0\right) = \cos\left(2\pi f_c t\right)\cdot x_1(t)$$

Així x1(t) també és parell.

DSF: $x(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_b\left(t - nT\right) \;=\; \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p \exp\left(j2\pi \dfrac{p}{T} t\right)$

$$c_p \;=\; \frac{1}{T} X_b\left(\frac{p}{T}\right) \;=\; \frac{1}{2T} X_1\left(\frac{p}{T} + f_c\right) + \frac{1}{2T} X_1\left(\frac{p}{T} - f_c\right) \;=\; \frac{1}{2T} X_1\left(\frac{p+m}{T}\right) + \frac{1}{2T} X_1\left(\frac{p-m}{T}\right)$$

$c_p \;=\; c_{-p}^{*} \;=\; c_{-p}$ (x(t) real i parell)

$$x(t) \;=\; c_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(c_p \exp\left(j2\pi \frac{p}{T} t\right) + c_{-p} \exp\left(-j2\pi \frac{p}{T} t\right)\right)$$

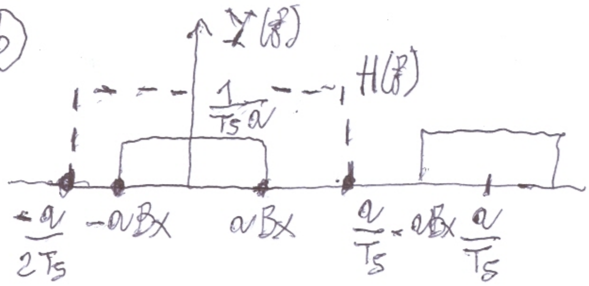
$$=\; c_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} 2c_p \cos\left(2\pi \frac{p}{T} t\right) \;=\; c_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} 2c_p \cos\left(2\pi p\nu_0 t\right)$$

EXERCICI 3

a) $z(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\delta(t-nT_s)$. $y(t)=\sum x(nT_s)\,\delta(at-nT_s)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(nT_s)}{a}\,\delta\left(t-\frac{nT_s}{a}\right)$

$Z(f)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{X\left(f-\frac{n}{T_s}\right)}{T_s}$ $\quad Y(f)=\frac{1}{a}\,Z\left(\frac{f}{a}\right)=\frac{1}{aT_s}\sum_{-\infty}^{+\infty}X\left(\frac{f-\frac{na}{T_s}}{a}\right)$

b)



$\mathcal{F}[x(at)]=\frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$

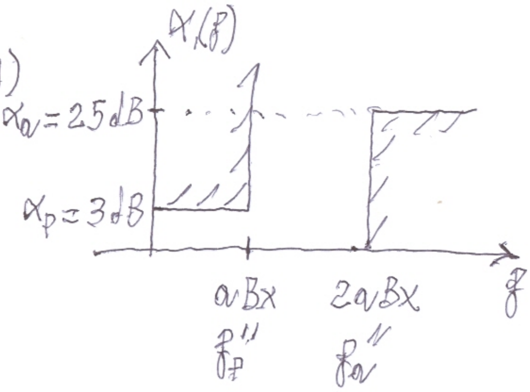
es val:

A PARTIR DE $Y(f)$ ES DEDUEIX $\quad H(f)=T_s\,\Pi\left(\frac{fT_s}{a}\right)$

PER RECUPERAR $x(at)$ CAL EVITAR SOLAPAMENT:

$aB_x\le\frac{a}{T_s}-aB_x \Rightarrow \boxed{T_s\le\frac{1}{2B_x}}$ ON ES VEU QUE a NO INFLUEIX EN L'ELECCIÓ DE T_s

c) c.1)



$\boxed{f_a=\frac{a}{T_s}-aB_x=3aB_x-aB_x=2aB_x}$

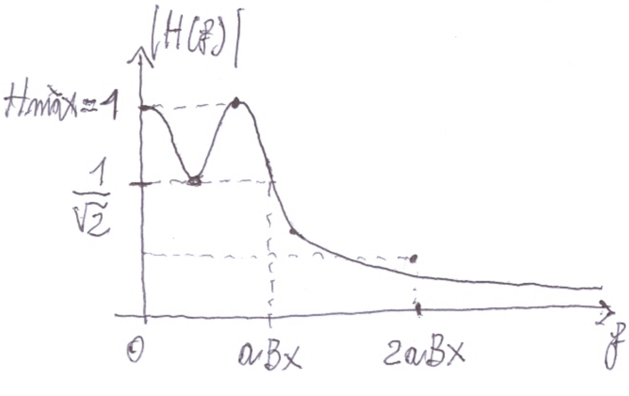
$K_s=\frac{f_p}{f_a}=\frac{1}{2}$

$K_d=\left[\frac{10^{0.3}-1}{10^{2.5}-1}\right]^{\frac{1}{2}}$

CALCUL ORDRE INDEPENDENT DEL VALOR DE a

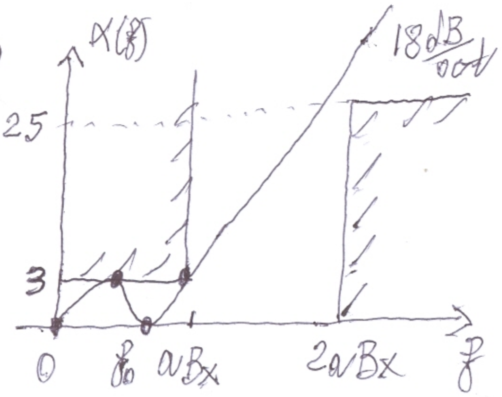
c.2) $\boxed{|H(f)|^2=\frac{H_{max}^2}{1+\varepsilon^2C_3^2\left(\frac{f}{f_p}\right)}=\frac{1}{1+C_3^2\left(\frac{f}{aB_x}\right)}}$ $\quad \varepsilon^2=10^{\frac{\alpha_p}{10}}-1\simeq 2-1=1$

SI $\alpha(f_p)=\alpha_p$



$f_p=aB_x=B_y'$

c.3)



$$\text{MÍNIM}\left[\alpha(f)\right] = \alpha(f_a) = 10\log\left[1+C_3^2(2)\right]$$

$$C_3(2) = 4\cdot 2^3 - 3\cdot 2 = 26$$

$$\alpha(f_a) = 10\log\left[1+26^2\right] \simeq 10\log 26^2$$

$$\boxed{\alpha(f_a) \simeq 20\log 25 = 40\log 5 = 28\,dB}$$

c.1) $3\ ZT$ a $f \to \infty$

$3\ ZA \begin{cases} 1 \text{ a } f=0 \\ 2 \text{ a } f=\pm f_0 \end{cases}$

ON $C_3(f_0)=0 \to 4\left(\frac{f_0}{f_p}\right)^2 - 3 = 0 \to$

$$f_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} f_p = \frac{\sqrt{3}}{2} aBx \simeq f_0$$