ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACION UPC

Profesores: M. Cabrera, J. Fernández-Rubio, E. Monte, G. Vázquez **Duración: 3h'**

AVISOS IMPORTANTES:

- ***El examen debe entregarse en 4 partes separadas (2 por ejercicio) según se indica en el enunciado.***
- El profesor/a puede retirar cualquier hoja de examen en la que no figure el nombre.
- No se corregirá ningún examen entregado fuera del aula correspondiente.

Fechas de publicación de notas:

- Notas provisionales: 29 de enero, 15h, módulo D5
- Plazo de alegaciones por escrito: De 29 de enero (una vez se hayan publicado las notas) a 30 de enero a las 15h, Entregar directamente en Módulo D5, Despacho 112 o buzón de Margarita Cabrera. No se revisarán exámenes cuyas alegaciones no cumplan las condiciones anteriores.
- Notas definitivas: 1 de febrero, módulo B3.

Ejercicio 1

4En el presente ejercicio se estudia un sistema de comunicaciones móviles en el que *3 usuarios acceden simultáneamente* mediante un multiplexado de las señales por división en código. La información transmitida por los 3 usuarios es estadísticamente independiente entre sí. Se pretende analizar la calidad con que la estación base detecta a los 3 usuarios que se hallan compartiendo el sistema. La señal transmitida *por cada uno de los usuarios* es de la forma:

$$s_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_i[k] c_i(t-kT); \quad i=1,2,3$$

donde $b_i[k]$ indica el bit 'k-ésimo' transmitido por el usuario 'i-ésimo', tal que $b_i[k] = \pm A$ con equiprobabilidad e independencia estadística.

La señal $c_i(t)$ representa el código o *firma* correspondiente al usuario "i-ésimo", siendo de la forma:

$$c_i(t) = \frac{1}{\sqrt{LT_c}} \sum_{l=0}^{L-1} c_i[l] p(t-lT_c), \text{ con } p(t) = \Pi\left(\frac{t-T_c/2}{T_c}\right)$$

donde T_c representa el tiempo de chip y L es el número de chips por símbolo, de modo que:

$$T=L\,T_c.$$

Suponga que L=8 y que las secuencias de chips para los códigos son las siguientes:

l =	0	1	2	3	4	5	6	7
$c_i[l]$; i=1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1
$c_i[l]$; i=2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
$c_i[l]$; i=3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1

En la estación base se reciben las 3 señales en un entorno de ruido aditivo blanco con densidad espectral $N_0/2$ Watts/Hz y gaussiano (canal *AWGN*) y se detectan de forma conjunta las señales de los 3 usuarios.

$$\text{Señal Recibida: } y(t) = \sum_{i=1}^{3} s_i(t) + w(t) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_i[k] c_i(t-kT) + w(t)$$

a) Con los códigos de chip dados en la tabla anterior, dibuje las 3 funciones código $c_i(t)$, i=1,2,3 y demuestre que cumplen las condiciones de ortonormalidad, es decir, $R_{c_i c_j}(nT) = \delta[i-j]\delta[n]$. Calcule la energía media transmitida por bit E_b.

b) En la estación base se realiza una demodulación conjunta de los 3 usuarios. Para ello se interpreta la señal recibida como un nuevo símbolo más general $\mathfrak{s}_m(t)$ en el que está contenida la información de los tres usuarios. Obviamente, el nuevo alfabeto $\{\mathfrak{s}_m(t)\}_{1\le m\le M}$ es más sofisticado que el asociado a cada usuario individualmente. La nueva señal compuesta por los tres usuarios admite la habitual representación del tipo $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{s}_{m[k]}(t-kT) + w(t)$:

- Obtenga la dimensión del espacio de la señal y una base ortonormal de dicho espacio.
- Obtenga el tamaño del nuevo alfabeto y la expresión resultante para los diferentes M símbolos $\mathfrak{s}_m(t)$ de dicho alfabeto.
- Indique las componentes de cada uno de los símbolos en la base ortonormal del espacio, es decir calcule su representación vectorial. Exprese dichas componentes en función de la energía promedio de bit E_b.
- Calcule la probabilidad de cada uno de los símbolos.

> *Suponga, a partir de ahora, que el usuario "i=3" se halla mucho más lejos de la estación base que los usuarios "i=1" y "i=2" y que sufre una atenuación de 6dB en recepción respecto a los otros dos:*
>
> $$y(t) = s_1(t) + s_2(t) + \frac{1}{2}s_3(t) + w(t)$$

c) Con la base generadora elegida en el apartado b), realice de nuevo la representación vectorial de los símbolos (analítica y gráficamente).

NOTA: Inicie el siguiente apartado en una hoja nueva. En la misma escriba la expresión obtenida para la base generadora así como la representación gráfica del espacio de señal del apartado anterior.

d) Dibuje ~~el esquema del receptor óptimo~~ según un criterio MAP para la detección conjunta de la información transmitida por los tres usuarios. Calcule de forma exacta , sin realizar ninguna aproximación, la probabilidad de error de símbolo (P_e) en función de la E_b / N_o .

e) Suponga ahora, que cada uno de los 3 usuarios se detecta por separado, ¿Cómo modificaría el esquema del receptor óptimo del apartado "d"?. Calcule la BER_i asociada a cada uno de los 3 usuarios (i=1,2,3).

f) Comente porqué si dejara de existir ortogonalidad entre las funciones código $R_{c_i c_j}(nT) = \rho\delta[n]\;\; i \ne j$, la BER correspondiente al usuario "3" se degradaría más respecto a los usuarios "1" y "2" (Efecto Near-Far). Justifíquelo a partir de las expresiones de las coordenadas de los vectores recibidos.

Ejercicio 2

Un sistema digital ASK-PSK (APK) puede describirse en términos de señales complejas (señal analítica y paso bajo) y sistemas complejos (sistema analítico y equivalente paso bajo). De esta forma, el espacio de señal es unidimensional en el campo de los números complejos. Para ello hay que definir el producto escalar en dicho campo como: $\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)^* dt$

La señal APK puede escribirse como: $s(t) = \Re e[a_s(t)]$ siendo $a_s(t)$ la señal analítica:

$$a_s(t) = b_s(t)\, e^{j\omega_c t}$$

$$b_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n p(t-nT)$$

La señal $b_s(t)$ es la señal paso bajo y f_c la frecuencia portadora tal que $f_c T = N$

$\{\xi_n\} = \xi_i = A_i\, e^{j\phi_i}$; $i = 1,\cdots,M$ **son los símbolos complejos del alfabeto.**

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

A_i :amplitud del símbolo.

ϕ_i : fase del símbolo.

a) Demuestre que $a_s(t)$ puede escribirse como: $a_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \phi(t-nT)$

Siendo $\phi(t) = p(t)\, e^{j\omega_c t}$ $2\pi f_c(t-nT) = 2\pi f_c t - 2\pi f_c nT$

¿Qué relación existe entre las amplitudes A_i y la energía promedio por símbolo?. Considere los símbolos equiprobables.

Si el canal es ideal AWGN, la señal recibida será: $a_{s_R}(t) = a_s(t) + a_n(t)$ siendo $a_n(t)$ la señal analítica del ruido paso banda.

El receptor realiza la operación: $r[m] = \langle a_{s_R}(t), \phi(t-mT)\rangle$

b) Demuestre, de acuerdo con la operación del receptor, que: $r[m] = \xi_m + n[m]$. Demuestre que el ruido complejo tiene la forma

$$n[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{mT}^{(m+1)T} b_n(t)dt$$

Considerando que las componentes I&Q ($b_n(t) = i_n(t) + jq_n(t)$) son estadísticamente independientes entre sí de media nula y cada una de ellas de potencia N_0 demuestre que la potencia de la muestra de ruido es $E\left[|n[n]|^2\right] = 2N_0$

c) Si el canal $h_c(t)$ no es ideal, demuestre que la salida $r[m]$ puede escribirse como:

$$r[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{mT}^{(m+1)T} b_s(t) * \left[h_c(t)e^{-j\omega_c t}\right] dt + n[m] \qquad \text{(Ecuación 1)}$$

Para ello recuerde que la señal analítica de la señal recibida cumple $a_{s_r}(t) = a_s(t) * h_c(t)$.

d) Si $h_c(t)=\delta(t)+\alpha\delta(t-T/8)$, demuestre a partir de la ecuación 1,

$r[m]=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{mT}^{(m+1)T}\left[b_s(t)+\alpha e^{-j\omega_c\tau}b_s(t-\tau)\right]dt+n[m]$ y compruebe que: $r[m]=\alpha_0\xi_m+\alpha_1\xi_{m-1}+n[m]$.

Determine los valores de las cantidades complejas α_0 y α_1 sabiendo que $f_cT=N=8M+1$;

M: entero

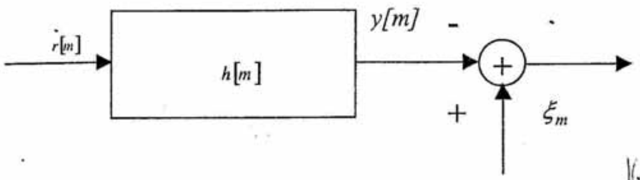
Interprete el efecto de α_0 sobre la constelación de símbolos en el plano complejo.

NOTA: Inicie el siguiente apartado en una hoja nueva. En la misma escriba los valores obtenidos para α_0 y α_1

e) Con objeto de combatir la ISI se utiliza un ecualizador complejo de dos coeficientes,

$h[m]=h_0\delta[m]+h_1\delta[m-1]$, con h_0 y h_1 complejos.

El ecualizador minimiza el error cuadrático medio: $\zeta=E\{e[m]e^*[m]\}$



$|(y[m])-\xi[m])|^2$ $\cancel{(y[m]-\xi[m])^*}$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial h_l}{\partial h_l^*}=\frac{\partial h_l^*}{\partial h_l}=0$

Obtenga los coeficientes del filtro en función de α_0 y α_1.

f) Obtenga el error cuadrático medio mínimo, así como la potencia del ruido a la salida y la ISI resultante a la salida del ecualizador.

g) Interprete en términos de sistemas reales todas las operaciones del receptor, tanto del producto escalar, como del ecualizador.

$b_s(t)\,e^{j\omega_c t}+\alpha b_s(t-T/8)\,e^{j\omega_c(t-T/8)}$