Problemes de Matemàtica Discreta

editats per Josep M. Brunat
i actualitzats per Anna de Mier, Montserrat Maureso i Mercè Mora

Setembre 2008

Presentació

La col·lecció de problemes que presentem corresponen al temari de l'assignatura Matemàtiques 3 de la Facultad d'Informàtica de Barcelona. Aquesta assignatura és hereva de la Matemàtica Discreta del pla d'estudis anterior i molt bona part del material que recollim aquí prové dels problemes proposats a classe i d'examens de Matemàtica Discreta. He fet una selecció i ordenació d'aquest material generat per molts professors al llarg de més de deu anys. Certament, també problemes de temes nous, com els nombres de Catalan i de Bell, particions d'un enter, funcions generadores i polinomis i cossos finits són temes, per esmentar potser els més significatius.

Aquesta assignatura s'ha fet per primera vegada el quadrimestre de tardor del curs 2004/2005 i vam posar a disposició del alumnes esborranys parcials d'aquesta col·lecció. Ara en donem la primera versió completa. Tot i les revisions que hem fet, és segur que hi ha errades. Agrairem molt que ens les feu saber: `Josep.M.Brunat@upc.edu`

He utilitzat un format i macros de LaTeXdeguts a José Luis Ruiz. L'alumne Dani Armengol ha fet tots els dibuixos i m'ha ajudat en l'edició. El meu agraïment a tots dos.

Josep M. Brunat
Barcelona, gener de 2005

Cal agrair a professors i estudiants, especialment als professors Mercè Mora i Julian Pfeifle, les moltes esmenes suggerides i que hem incorporat a aquesta segona versió.

Josep M. Brunat
Barcelona, setembre de 2005

La col·lecció de problemes ha estat actualitzada per les professores Anna de Mier, Montserrat Maureso i Mercè Mora.

Josep M. Brunat
Barcelona, febrer de 2008

En aquesta versió s'ha canviat l'ordre dels capítols respecte les versions anteriors, però no el contingut de la col·lecció.

Montserrat Maureso
Barcelona, setembre de 2008

Índex

1
Polinomis i cossos finits

Sigui $a \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$. Es diu que a és un *divisor de zero* si existeix $b \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$ tal que $ab = 0$. Es diu que a és *invertible* o *unitari* si existeix $b \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$ tal que $ab = 1$.

1.1 Trobeu tots els divisors de zero i tots els invertibles de $\mathbb{Z}_{30}$.

1.2 Demostreu que cada element no nul de $\mathbb{Z}_m$ és invertible o divisor de zero.

Resoleu les equacions següents a $\mathbb{Z}_m$ per al m que s'indica en cada cas.

1.3 $3x = 2, \quad m = 7.$

1.4 $17x = 14, \quad m = 21.$

1.5 $43x = 15, \quad m = 23.$

1.6 $128x = 833, \quad m = 1001.$

Resoleu els sistemes d'equacions lineals següents en el cos $\mathbb{F}_5$.

1.7
$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 1 \\ x & + & 4y & = & 4 \end{array}\right\}.$$

1.8
$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 1 \\ 3x & + & y & = & 4 \end{array}\right\}.$$

1.9
$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right\}.$$

1.10
$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & & & = & 2 \\ x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 3y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}.$$

1.11 Sigui p un primer i considereu el cos $\mathbb{F}_p$. Un *quadrat* de $\mathbb{F}_p$ és un element de la forma x^2 per a algun $x \in \mathbb{F}_p$. Demostreu:

1) Si $p = 2$, cada element és un quadrat.
2) Si $p > 2$ i $a \in \mathbb{F}_p$, l'equació $x^2 = a$ té exactament dues solucions oposades si a és un quadrat diferent de zero, una si $a = 0$ i cap si a no és un quadrat.
3) Si $p > 2$, exactament la meitat dels elements diferents de zero són quadrats.

Resoleu les equacions següents a $\mathbb{F}_p$ per al p que s'indica a cada cas.

1.12 $x^2+x+1=0, \quad p=5.$

1.13 $x^2-x+2=0, \quad p=7.$

1.14 $5x^2+9x+5=0, \quad p=11.$

1.15 $x^2+x+10=0, \quad p=13.$

1.16 $4x^2+14x+4, \quad p=17.$

1.17 $3x^2+6x+9=0, \quad p=19.$

Trobeu el quocient i el residu de la divisió de $a(x)$ per $b(x)$ a $\mathbb{F}_p[x]$ en els casos següents:

1.18 $a(x)=x^6+x^5+x^2+x+1, \quad b(x)=x^3+x^2+1, \quad p=2.$

1.19 $a(x)=x^6+2x^5+x^2-x+2, \quad b(x)=2x^2+2x+1, \quad p=3.$

1.20 $a(x)=x^6+2x^5+x^2-x+2, \quad b(x)=2x^2+2x+1, \quad p=5.$

1.21 $a(x)=x^6+3x^5+4x^2+4x+6, \quad b(x)=2x^2+2x+3, \quad p=7.$

1.22 $a(x)=x^7+4x^5+3x^2+8x+9, \quad b(x)=x^3+2x^2+7x+10, \quad p=11.$

Obteniu la identitat de Bezout per les parelles de polinomis $a(x)$ i $b(x)$ següents a l'anell de polinomis que s'indica:

1.23 $a(x)=x^7+1, \quad b(x)=x^5+x^3+x+1, \quad \mathbb{F}_2[x].$

1.24 $a(x)=x^5+x+1, \quad b(x)=x^6+x^5+x^4+1, \quad \mathbb{F}_2[x].$

1.25 $a(x)=x^5+x^4+x^2+x+1, \quad b(x)=x^2+x+1, \quad \mathbb{F}_2[x].$

1.26 $a(x)=x^7+x^6+x^5+x^4+x^2+x+1, \quad b(x)=x^3+x^2+x, \quad \mathbb{F}_2[x].$

1.27 $a(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1, \quad b(x)=x^3+1, \quad \mathbb{F}_3[x].$

1.28 $a(x)=2x^5+x^4-x^3-2x^2+x+1, \quad b(x)=x^4-2x^3-x^2-x-2, \quad \mathbb{F}_3[x].$

1.29 $a(x)=x^8+2x^5+x^3+x^2+1, \quad b(x)=2x^6+x^5+2x^3+2x^2+2, \quad \mathbb{F}_3[x].$

1.30 $a(x)=x^5+3x^3+x^2+2x+2, \quad b(x)=x^4+3x^3+x+2, \quad \mathbb{F}_5[x].$

Feu la llista de tots els polinomis mònics i irreductibles de $\mathbb{F}_p[x]$ de grau $\leq n$ per als valors de p i n que s'indiquen:

1.31 $p=2$, $n=4$.

1.32 $p=3$, $n=3$.

1.33 $p=5$, $n=2$.

1.34 $p=7$, $n=2$.

Poseu com a producte de factors irreductibles de $\mathbb{F}_p[x]$ els polinomis següents:

1.35 $x^2 + x + 1, \quad p = 3.$

1.36 $x^3 + x + 2, \quad p = 3.$

1.37 $x^4 - x^2 + 1, \quad p = 3.$

1.38 $x^4 + x^3 + x + 1, \quad p = 3.$

1.39 $x^2 + 1, \quad p = 5.$

1.40 $3x^3 + 4x^2 + 3, \quad p = 5.$

1.41 $x^3 + x - 1, \quad p = 5.$

1.42 $x^3 - x + 1, \quad p = 23.$

1.43 Calculeu el nombre de polinomis mònics irreductibles de $\mathbb{F}_7[x]$ de graus 2, 3, 4, 5 i 6

1.44 Sigui p un enter primer. Calculeu la probabilitat que un polinomi de segon grau de $\mathbb{F}_p[x]$ escollit a l'atzar sigui irreductible.

1.45 Demostreu que si p és primer i $a, b \in \mathbb{F}_p$, aleshores $(a+b)^p = a^p + b^p$.

1.46 Sigui K un cos. Determineu $a, b, c \in K$ per tal que el polinomi $x^3 - ax^2 + bx - c \in K[x]$ tingui per arrels a, b i c.

1.47 Determineu a per tal que els polinomis $x^2 + 2x + a$ i $x^3 + 5x^2 + 5x + 4$ de $\mathbb{F}_7[x]$ tinguin dues arrels comunes.

1.48 Sigui p un nombre primer i d un enter $d \geq p$. Tots els polinomis considerats són de $\mathbb{F}_p[x]$.

1) Proveu que un polinomi $f(x)$ s'anul·la en tot $i \in \mathbb{F}_p$ si, i només si, $x^p - x$ divideix $f(x)$.
2) Calculeu el nombre de polinomis mònics de $\mathbb{F}_p[x]$ de grau d que s'anul·len en tot $i \in \mathbb{F}_p$.
3) Demostreu que un polinomi $f(x)$ de grau d no té arrels a $\mathbb{F}_p$ si, i només si, és de la forma

$$f(x) = g(x) + (x^p - x)h(x)$$

   on $g(x)$ és un polinomi de grau $< p$ sense arrels i $h(x)$ és un polinomi arbitrari de grau $d - p$.
4) Trobeu el nombre $S_d(p)$ de polinomis mònics de grau d de $\mathbb{F}_p[x]$ que no tenen arrels a $\mathbb{F}_p$.
5) Sigui $M_d(p)$ el nombre de polinomis mònics de grau d de $\mathbb{F}_p[x]$. Calculeu

$$\lim_{p \to \infty} \frac{S_d(p)}{M_d(p)}.$$

6) Trobeu tots els polinomis mònics de grau 4 de $\mathbb{F}_3[x]$ sense arrels a $\mathbb{F}_3$.

1.49 Trobeu tots els primers p tals que els polinomis $f(x) = x^2+3x+1$ i $g(x) = x^6+2x^5+x+1$ defineixen les mateixes funcions a $\mathbb{F}_p$.

1.50 Sigui $\mathbb{F}_q$ un cos finit i
$$h(x) = \prod_{\beta \in \mathbb{F}_q} (x - \beta).$$
Demostreu que dos polinomis $f(x)$ i $g(x)$ defineixen la mateixa funció a $\mathbb{F}_q$ si, i només si, $h(x)$ divideix $f(x) - g(x)$.

1.51 Per a cert cos finit $\mathbb{F}_q$ de característica p es compleix la igualtat $x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - 9x + 1)(x^2 + 9x + 1)$ a $\mathbb{F}_q[x]$. Trobeu els possibles valors de p.

Sigui K un cos. La derivada d'un polinomi $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[x]$ és el polinomi $f' = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$.

1.52 Demostreu que, per a tot $f, g \in K[x]$ es compleix $(f + g)' = f' + g'$.

1.53 Demostreu que, per a tot $\lambda \in K$ i $f \in K[x]$ es compleix $(\lambda f)' = \lambda f'$.

1.54 Demostreu que, per a tot $f, g \in K[x]$ es compleix $(fg)' = f'g + fg'$.

1.55 Demostreu que la derivada d'un polinomi constant és el polinomi 0. Caracteritzeu els cossos en els que també es compleix el recíproc: si la derivada d'un polinomi és 0, aleshores el polinomi és constant.

1.56 Sabem que $f(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ és un polinomi tal que $\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$ és un cos on $\alpha^9 = \alpha^3 + \alpha \neq 0$. Determineu $f(x)$.

1.57 Considereu el polinomi $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

1) Demostreu que $f(x)$ és irreductible.
2) Calculeu els inversos de $1 + \alpha$ i $1 + \alpha^2 + \alpha^3$ a $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[x]/(f(x))$.
3) Expresseu l'invers de $1 + \alpha$ com a suma de potències d'ell mateix.

1.58 Considereu el polinomi $f(x) = 1 + x + x^6 \in \mathbb{F}_2[x]$.

1) Demostreu que $f(x)$ és irreductible.
2) Calculeu els inversos dels elements α, $1+\alpha^2+\alpha^3$ i $1+\alpha^3+\alpha^4$ al cos $\mathbb{F}_{64} = \mathbb{F}_2[x]/(1+x+x^6)$.
3) Trobeu un element primitiu d'aquest cos.

1.59 Proveu que el polinomi $x^4+x^3+x^2+x+1 \in \mathbb{F}_2[x]$ és irreductible però que no és primitiu.

1.60 Considereu el polinomi $f(x) = x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

1) Demostreu que $f(x)$ és primitiu.

2) Trobeu els ordres dels elements α^4, $\alpha+\alpha^2$ i α^5 a $\mathbb{F}_{16}=\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$.

1.61 Considereu el polinomi $f(x)=x^3+x^2+1\in\mathbb{F}_2[x]$.

1) Comproveu que $f(x)$ és primitiu.

2) Escriviu la taula de logaritmes de $\mathbb{F}_8=\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$ en base α.

3) Construïu la taula de la multiplicació d'aquest cos.

1.62 Considereu el quocient $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1)$.

1) Comproveu que es tracta del cos $\mathbb{F}_8$.

2) Feu una llista dels seus elements.

3) Calculeu les successives potències de α i esbrineu si és primitiu.

4) Calculeu l'ordre de cadascun dels elements de $\mathbb{F}_8^*$.

5) Utilitzant aquesta taula de logaritmes, calculeu:

$$\frac{(\alpha+\alpha^2)^3}{\alpha^3+\alpha^2+1}+\left(1+(1+\alpha+\alpha^3)^{20}+(\alpha+\alpha^{14}+\alpha^2)^3\right)^4+1+\frac{\alpha}{(\alpha^2+\alpha+1)^3}.$$

1.63 Comproveu que el polinomi t^4+t+1 és irreductible a $\mathbb{F}_2[t]$. Sigui α la classe de t a $\mathbb{F}_{16}=\mathbb{F}_2[t]/(t^4+t+1)$. En aquest cos, resoleu els sistemes d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcl}(\alpha^3+\alpha^4)x+(\alpha^4+\alpha^8)y & = & \alpha^9+\alpha^{12}\\ (\alpha^6+\alpha^8)x+(\alpha^9+\alpha^{12})y & = & \alpha^{12}+\alpha^{16}\end{array}\right\}.$$

El polinomi $f(x)=x^3+x^2+1\in\mathbb{F}_2[x]$ és primitiu. En el cos $\mathbb{F}_8=\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$, resoleu els sistemes d'equacions següents:

1.64

$$\left.\begin{array}{rl}u+v+w & =1+\alpha\\ (1+\alpha)u+(1+\alpha^2)v+\alpha^3w & =0\\ (1+\alpha)u+\alpha^2v+\alpha w & =1+\alpha+\alpha^2\end{array}\right\}.$$

1.65

$$\left.\begin{array}{rl}(1+\alpha)u+(1+\alpha^2)v+\alpha^3w & =0\\ (1+\alpha)u+\alpha^2v+\alpha w & =0\end{array}\right\}.$$

1.66

1) Proveu que el polinomi $f(x)=x^5+x^2+1\in\mathbb{F}_2[x]$ és primitiu.

2) Sigui α la classe de x a $\mathbb{F}_{32} = \mathbb{F}_2[x]/(f(x))$. Expresseu l'element
$$\alpha^5 + \alpha^{23} + \frac{\alpha^2 + \alpha^4}{1 + \alpha^{12}}$$
com a potència de α.

Considereu un cos finit $\mathbb{F}_q$ de característica p. Una *arrel quadrada* de $z \in \mathbb{F}_q$ és un $x \in \mathbb{F}_q$ tal que $x^2 = z$. Un *quadrat* és un element que té arrel quadrada, és a dir, un element de la forma x^2 per a algun $x \in \mathbb{F}_q$. Denotem per Q el conjunt de quadrats no nuls de $\mathbb{F}_q$ i sigui $N = \mathbb{F}_q^* \setminus Q$. Tenim la reunió disjunta $\mathbb{F}_q = Q \cup \{0\} \cup N$. El conjunt de quadrats és $Q \cup \{0\}$.

1.67 Sigui p un primer senar i $\mathbb{F}_q$ un cos de característica p. Demostreu que:

1) exactament la meitat dels elements $\mathbb{F}_q^*$ són quadrats;
2) l'equació $x^2 = d$ té dues solucions si $d \in Q$, una si $d = 0$ i cap si $d \in N$;
3) si $a, b, c \in \mathbb{F}_q$, $a \in \mathbb{F}_q^*$ i $d = b^2 - 4ac$, l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ té dues solucions si $d \in Q$, una si $d = 0$ i cap si $d \in N$.

1.68 Sigui p un primer senar, $\mathbb{F}_q$ un cos finit de característica p senar i α un element primitiu de $\mathbb{F}_q$. Demostreu:

1) α^k té arrel quadrada si, i només si, k és parell;
2) $\alpha^{(q-1)/2} = -1$;
3) -1 té arrel quadrada a $\mathbb{F}_q$ si, i només si, $q \equiv 1 \pmod 4$.

1.69 Considereu el cos $\mathbb{F}_q$ amb $q = 2^r$, $r \geq 1$. Demostreu que:

1) tot element de $\mathbb{F}_q$ és un quadrat;
2) l'equació $x^2 = d$ té exactament una solució a $\mathbb{F}_q$, per a tot $d \in \mathbb{F}_q$.

1.70 Calculeu les arrels quadrades de $\alpha + 1$ i $\alpha^2 + \alpha$ a $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$.

1.71 Trobeu una representació explícita de $\mathbb{F}_{25}$ i calculeu les arrels quadrades de -1.

1.72 Considereu el polinomi $f(x) = 2 + 2x + x^2 \in \mathbb{F}_3[x]$, que és primitiu, i el cos $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(f(x))$.

1) Trobeu els elements de $\mathbb{F}_9$ que són quadrats.
2) Resoleu l'equació $\alpha t^2 - 2\alpha t + (\alpha + 2) = 0$.

1.73 Demostreu que el polinomi $f(x) = x^2 + x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$ és primitiu. Sigui $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/f(x)$. Comproveu que $t = 1 + \alpha$ és una solució de l'equació

$$(2 + \alpha)t^3 + 2\alpha t^2 + (2 + 2\alpha)t + 1 = 0,$$

i trobeu les altres solucions de l'equació.

1.74 Sigui $\mathbb{F}_q$ un cos finit de q elements, amb $q \neq 2$.

1) Calculeu la suma de tots els elements de $\mathbb{F}_q$.

2) Sigui n un natural tal que $n \not\equiv 0 \pmod{q-1}$. Calculeu $\displaystyle\sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} \beta^n$.

3) Sigui $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ de grau $k < q - 1$. Calculeu $\displaystyle\sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} f(\beta)$.

1.75 Sigui $\mathbb{F}_q$ un cos finit de característica $\neq 2$. Calculeu el producte de tots els elements de $\mathbb{F}_q^*$.

1.76

1) Demostreu que el polinomi $x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$ és irreductible.

2) Sigui $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$ i α la classe de x a $\mathbb{F}_9$. Expresseu tots els elements de $\mathbb{F}_9^*$ com a potències de α.

3) Factoritzeu el polinomi $p(x) = x^2 + 2x + 2$ a $\mathbb{F}_9[x]$.

4) Sigui S el conjunt de totes les successions (x_n) d'elements de $\mathbb{F}_9$ que compleixen la recurrència

$$x_n + 2x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0, \quad \text{per } n \geq 2.$$

Calculeu el cardinal de S.

5) Demostreu que si una successió (x_n) és de S, aleshores és de la forma $x_n = ar_1^n + br_2^n$ on a i b són de $\mathbb{F}_9$ i r_1, r_2 són les arrels de $p(x)$.

6) Demostreu que totes les successions de S admeten un període comú i trobeu-lo.

1.77 Sigui α un element primitiu del cos finit $\mathbb{F}_q$ de q elements. Per cada n tal que $\alpha^n \neq -1$ es defineix el logaritme de Jacobi $J(n)$ per

$$\alpha^n + 1 = \alpha^{J(n)}.$$

1) Feu una construcció explícita de $\mathbb{F}_9$, trobeu un primitiu α i feu la taula dels $J(n)$.

2) Demostreu que $\alpha^m + \alpha^n = \alpha^{m+J(n-m)}$.

1.78 El *solitari* és un joc per a un únic jugador que es juga en un tauler com el de la figura. A l'inici, totes les caselles tenen una fitxa, excepte la central. Per fer un moviment cal tenir dues fitxes i un forat alineats i consecutius. La fitxa de l'extrem es posa al forat i s'elimina la fitxa central. L'objectiu és eliminar totes les fitxes excepte una. El problema és esbrinar en quines posicions pot quedar aquesta única fitxa.

1) Comproveu que el polinomi $x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ és primitiu.

Considerem el cos $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ i sigui α la classe de x. Posem coordenades enteres a les posicions del taulell prenent la posició central com a origen de coordenades. Identifiquem una situació del joc mitjanant el conjunt S de les coordenades de les caselles ocupades. Per cada situació S definim

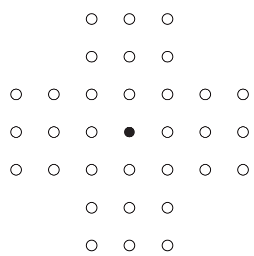
$$A(S) = \sum_{(k,l)\in S} \alpha^{k+l}, \qquad B(S) = \sum_{(k,l)\in S} \alpha^{k-l}.$$

on les operacions es fan a $\mathbb{F}_4$. Demostreu,

1) si S_0 és la situació nicial, aleshores $(A(S_0), B(S_0)) = (1, 1)$;

2) si S és una situació i T la situació obtinguda després de fer un moviment, aleshores $(A(S), B(S)) = (A(T), B(T))$.

3) si queda només una fitxa, aquesta només pot quedar en una de les posicions $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(-3, 0)$, $(0, -3)$.



2
Principis d'enumeració

2.1 S'escullen cinc punts de l'interior d'un triangle equilàter de costat 1. Demostreu que almenys n'hi ha dos que disten com a molt 1/2.

2.2 S'escullen deu punts de l'interior d'un triangle equilàter de costat 1. Demostreu que almenys n'hi ha dos que disten com a molt 1/3.

2.3 S'escullen cinc punts de l'interior d'un quadrat de costat 2. Demostreu que almenys n'hi ha dos que disten com a molt $\sqrt{2}$.

2.4 Demostreu que en un conjunt de 12 enters n'hi ha com a mínim dos tals que la seva diferència és divisible per 11.

2.5 Demostreu que, donats $n+1$ nombres diferents de $[2n]$, n'hi ha dos de consecutius.

2.6 Demostreu que en una classe de 50 estudiants n'hi ha almenys cinc que tenen l'aniversari el mateix mes.

2.7 En una classe hi ha 32 nois i un cert nombre de noies. Cada noi coneix cinc noies i cada noia coneix vuit nois. Calculeu el nombre d'estudiants de la classe.

2.8 Tenim un cert nombre de 4-subconjunts de [8] tals que cada element de [8] pertany exactament a tres dels subconjunts. Calculeu el nombre de 4-subconjunts i escriviu una col·lecció de 4-subconjunts que satisfaci les condicions.

2.9 Esbrineu si és possible trobar una col·lecció de 3-subconjunts de [8] de forma que cada element de [8] pertanyi exactament a cinc d'aquests subconjunts.

2.10 Es tenen nou 8-subconjunts de [12] i cada element de [12] pertany exactament a ℓ dels subconjunts. Calculeu el valor de ℓ.

2.11 Esbrineu si és possible trobar nou 7-subconjunts de [12] de forma que cada element de [12] pertanyi exactament al mateix nombre de subconjunts.

2.12 Un 1-*disseny* amb paràmetres (n, r, k, ℓ) és un n-conjunt X i una col·lecció $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_r\}$ de k-subconjunts de X tals que cada element de X pertany exactament a ℓ subconjunts de $\mathcal{B}$. Proveu que els paràmetres (n, r, k, ℓ) d'un 1-disseny compleixen $kr = n\ell$.

2.13 Proveu que el conjunt d'enters positius amb tots els dígits diferents és finit. Compteu-los.

2.14 Calculeu de quantes formes diferents es poden escollir un president, un secretari i un tresorer en una comissió de deu persones suposant que els càrrecs són incompatibles.

2.15 Calculeu el nombre de números de telèfon de cinc dígits que tenen algun dígit repetit.

2.16 Calculeu de quantes maneres es poden escollir un quadrat negre i un quadrat blanc en un taulell d'escacs de forma que no estiguin tots dos a la mateixa fila ni a la mateixa columna.

2.17 Calculeu de quantes formes es poden col·locar vuit torres en un taulell d'escacs de forma que no n'hi hagi dues a la mateixa fila ni a la mateixa columna.

2.18 Calculeu el nombre d'enters de $n \geq 2$ dígits significatius que no contenen dos dígits iguals consecutius.

2.19

1) Calculeu la probabilitat que en un grup de n persones n'hi hagi dues que compleixin anys el mateix dia.

2) Trobeu el mínim nombre n de persones que hi ha d'haver en un grup per tal que la probabilitat que n'hi hagi dues amb el mateix aniversari sigui superior a 0.5.

2.20 En una quadrícula de $n \times n$ quadrats considerem els rectangles formats per quadrats que s'hi poden dibuixar. Dos rectangles són diferents si no coincideixen les dimensions o la posició. Calculeu:

1) El nombre de rectangles de dimensions $k \times m$ fixades que s'hi poden fer.

2) El nombre de rectangles d'amplada k fixada que s'hi poden fer.

3) El nombre total de rectangles que s'hi poden fer.

2.21 Sigui n un enter positiu i $T = \{(i, j, k) \ : \ 0 \leq i, j < k, \ k \in [n]\}$.

1) Demostreu que si $k \in [n]$, el nombre d'elements de T amb la tercera component igual a k és k^2.

2) Proveu que $|T| = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

3) Calculeu el cardinals dels conjunts següents:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(i,j,k) \in T \ : \ 0 \leq i < j < k\}, \\ T_2 &= \{(i,j,k) \in T \ : \ 0 \leq i = j < k\}, \\ T_3 &= \{(i,j,k) \in T \ : \ 0 \leq j < i < k\}. \end{aligned}$$

4) A partir dels dos apartats anteriors demostreu que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

2.22 Esbrineu quants nombres de telèfon de n dígits hi ha tals que el 2 apareix almenys tres cops.

2.23 Compteu el nombre de maneres de posar en fila m homes i n dones sense que hi hagi dos homes de costat.

2.24 Compteu el nombre de maneres de posar en fila m homes i n dones de forma que tots els homes estiguin junts.

2.25 Proveu que existeixen $\binom{n-1}{k-1}$ k-subconjunts de $[n]$ dos a dos no disjunts.

2.26 Sigui $n \geq 1$ un enter i definim $n^* = n/2$ si n és parell i $n^* = (n-1)/2$ si n és senar. Demostreu que existeixen $\binom{n}{n^*}$ subconjunts de $[n]$ tal que cap d'ells està contingut en cap altre.

2.27 Sigui $n \geq 0$ és un enter i considereu la seqüència de binomials

$$\binom{n}{0}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{n}.$$

Demostreu que la seqüència és primer creixent, arriba a un màxim i després és decreixent. Trobeu els valors de k per als quals s'obté el màxim.

2.28 Sigui p un nombre primer i k un enter tal que $0 < k < p$. Proveu:

1) $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$.

2) $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$.

Demostreu les igualtats següents:

2.29 $$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}, \qquad n \geq r \geq k \geq 0.$$

2.30 $$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}, \qquad n \geq k \geq 1.$$

2.31 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$

2.32 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m}=\binom{m+n+1}{m+1}, \qquad n\geq m\geq 0.$

2.33 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}, \qquad n\geq m\geq 0.$

2.34 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}.$

2.35 $\displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}2^{(n-2i)}=\frac{3^n+1}{2}.$

2.36 Calculeu el nombre de maneres de distribuir n boles idèntiques en m capses etiquetades, algunes de les quals poden quedar buides.

2.37 Calculeu el nombre de termes que s'obtenen en desenvolupar l'expressió $(x+y+z)^n$ i agrupar al màxim tots els termes amb els mateixos exponents.

2.38 Calculeu el nombre de resultats possibles en llençar n daus indistingibles.

2.39 Siguin $n, a_1, \ldots, a_r$ enters no negatius i sigui $a = a_1 + \cdots + a_r \leq n$. Demostreu que el nombre de solucions $(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{Z}^r$ de l'equació $x_1 + \cdots + x_r = n$ amb $x_1 \geq a_1, \ldots, x_r \geq a_r$ és

$$\binom{n-a+r-1}{n-a}.$$

2.40 Calculeu el nombre de maneres diferents de comprar n entrepans si hi ha tres tipus disponibles i en volem, almenys, dos de cada tipus.

2.41 Calculeu el nombre de k-subconjunts de $[n]$ tals que no contenen dos enters consecutius.

2.42 Demostreu que si p és primer i $n_1 + \cdots + n_k = p$ amb $p > n_i \geq 0$ per a $i \in [k]$, aleshores

$$\binom{p}{n_1, \ldots, n_k}$$

és divisible per p.

2.43 Calculeu el nombre de paraules d'onze lletres que es poden formar amb les onze lletres de la paraula ABRACADABRA.

2.44 Esbrineu quants nombres de telèfon de 11 dígits hi ha tals que totes les xifres parelles apareixen exactament dos cops.

2.45 Suposem que $n_1 + \cdots + n_k = n$, n_i enter, $n_i \geq 0$ per a $i \in [k]$. Demostreu que

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_k}{n_k}.$$

2.46 Demostreu que si $a + b + c = n$, aleshores

$$\binom{n}{a, b, c} = \binom{n-1}{a-1, b, c} + \binom{n-1}{a, b-1, c} + \binom{n-1}{a, b, c-1}.$$

Calculeu el coeficient de

2.47 $x^5y^3z^2$ en $(x + y + z)^{10}$.

2.48 x^3yz^4t en $(x + y + z + t)^9$.

2.49 $x^2y^3zt^3$ en $(2x + 3y - z + \frac{t}{2})^9$.

2.50 x^3yz^4 en $(x + \frac{1}{x} + y + z)^8$.

Demostreu les fórmules següents relatives als nombres de Stirling de segon tipus:

2.51 $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1.$

2.52 $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}.$

2.53 $\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \left\{ {r \atop k-1} \right\}.$

2.54 Demostreu que el nombre d'aplicacions exhaustives de $[n]$ en $[k]$ és $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$.

2.55 Es tenen n boles numerades i n caixes numerades. Calculeu el nombre de maneres de repartir les boles dins les caixes de forma que

1) no quedi cap caixa buida;
2) quedin exactament dues caixes buides;
3) quedin almenys tres caixes buides.

2.56 Calculeu el nombre de maneres diferents en que es pot factoritzar el nombre 510510 en exactament tres factors més grans que 1, essent l'ordre dels factors irrellevant. Quin és aquest nombre si l'ordre dels factors importa?

2.57 Calculeu el nombre de maneres de repartir n estudiants en k aules (diferents) si no pot quedar cap aula buida.

2.58 Calculeu el nombre de diagrames de Ferrers que es poden encabir en un rectangle $m \times n$.

Trobeu les conjugades de les particions següents:

2.59 $1+1+2+4=8$.

2.60 $1+1+1+4+5+6=18$.

2.61 $2+2+3+5+5=17$.

2.62 $1+1+1+1+1+2+3+4+8=21$.

2.63 Demostreu que el nombre de particions de n amb una o dues parts és $1+\lfloor n/2 \rfloor$.

2.64 Proveu que el nombre de particions de n tals que cada part és 1 o 2 és igual que el nombre de particions de $n+3$ en dues parts diferents.

2.65 Demostreu que el nombre de particions de n en com a molt m parts és igual que el nombre de particions de $n+m(m+1)/2$ en m parts diferents.

2.66 Siguin n i k enters positius, amb $n>k$. Demostreu que el nombre de particions de n amb exactament k parts és igual que el nombre de particions de $n-k$ en un màxim de k parts.

2.67 Sigui $p_k(n)$ el nombre de particions de l'enter n en exactament k parts. Demostreu que $p_k(n)=p_k(n-k)+p_{k-1}(n-k)+\cdots+p_1(n-k)$.

2.68 Proveu que el nombre de particions de n en exactament tres parts coincideix amb el nombre de particions de $2n$ en tres parts tals que la suma de dues qualsevol de les parts és més gran que la tercera.

2.69 Sigui $x=(x_1,\ldots,x_r)$ una partició de n amb $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_r$. Demostreu que si $x'=(x'_1,\ldots,x'_s)$ és la partició conjugada de x, aleshores $x'_i=\#\{x_j : x_j \geq i\}$ per a tot $i \in [x_1]$.

2.70 Siguin $x=(x_1,\ldots,x_r)$, $x_1 \geq \cdots \geq x_r$ i $y=(y_1,\ldots,y_s)$, $y_1 \geq \cdots \geq y_s$ dues particions d'un enter n. Demostreu que x i y són conjugades si, i només si,

$$x_1=s, \quad y_1=r, \quad x_i+y_j \neq i+j-1 \quad (i \in [r], j \in [s]).$$

2.71 Proveu que hi ha tantes particions autoconjugades de n com particions de n amb una part k^2 i la resta de mida parella i menor o igual que $2k$ per a algun k.

2.72 Proveu que el nombre de particions de n autoconjugades amb la part més gran igual a k és igual que el nombre de particions autoconjugades de $n-2k+1$ amb la part més gran $\leq k-1$. Calculeu el nombre de particions de 41 autoconjugades amb la part més gran igual a 11.

2.73 (Problema dels votants) En una elecció entre dos candidats A i B hi ha $2n$ electors. Calculeu de quantes maneres pot sortir l'escrutini de forma que el resultat final sigui d'empat i que el candidat A no tingui mai menys vots que el candidat B.

2.74 Calculeu el nombre de paraules $x_1 \cdots x_n$ de longitud n en l'alfabet $[n]$ tals que $x_j \leq j$ per a $j \in [n]$ i $x_j \leq x_{j+1}$ per a $j \in [n-1]$.

2.75 Considereu un polígon convex de $n+2$ vèrtexs. Es divideix en triangles mitjançant $n-1$ diagonals (segments que uneixen vèrtexs). Demostreu que el nombre de tals triangulacions és el n-è nombre de Catalan C_n.

2.76 Hi ha $2n$ punts marcats en una circumferència. Es volen fer n parelles i unir cada parella de punts per un segment de forma que aquests segments no es tallin. Demostreu que el nombre de formes en què això es pot fer és el n-è nombre de Catalan C_n.

2.77 Demostreu la fórmula següent (anomenada fórmula d'Euler) per als nombres de Catalan: $C_n = \dfrac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}{(n+1)!}$.

2.78 Demostreu la fórmula recurrent següent pels nombres de Catalan C_n: $(n+1)C_n = (4n-2)C_{n-1}$.

2.79 En una classe de 67 estudiants n'hi ha 47 que saben francès, 35 que saben alemany i 23 que saben les dues llengües. Esbrineu quants n'hi ha que no saben ni francès ni alemany. Si, a més, n'hi ha 20 que saben rus, dels quals 12 saben també francès, 11 alemany i 5 les tres llengües, calculeu quants n'hi ha que no saben cap de les llengües.

2.80 Tres francesos, tres anglesos i un suec han de seure en un banc de forma que no n'hi hagi tres d'un mateix país que seguin de costat. De quantes maneres es pot fer això? I si només exigim que no n'hi hagi dos del mateix país que seguin junts?

2.81 Compteu els enters entre 1 i 1000 que no són divisibles ni per 2, ni per 3, ni per 5.

Calculeu el nombre de solucions enteres no negatives de les equacions següents amb les condicions que s'indiquen a cada cas.

2.82 $x+y+z=20, \quad x \geq 10$ o $y \geq 5$.

2.83 $x+y+z=20, \quad x \leq 10$ o $y \leq 3$.

2.84 $x+y+z+w=20, \quad x \leq 6,\ y \leq 7,\ z \leq 8,\ w \leq 9$.

2.85 $x+y+z+t=50, \quad 2 \leq x \leq 17,\ 3 \leq y \leq 18,\ 4 \leq z \leq 19,\ 5 \leq t \leq 20$.

2.86 $x+y+z+t=50, \quad 2 \leq x \leq 17,\ 3 \leq y \leq 23$.

2.87 A l'entrada d'un castell n cavallers lliuren sengles espases i, a la sortida, les espases es tornen a l'atzar. Trobeu la probabilitat que exactament k cavallers, $0 \leq k \leq n$, rebin les seves pròpies espases.

2.88 Escriviu tots els desarranjaments de $[n]$ per $n \in [4]$.

2.89 Proveu que el nombre d_n de desarranjaments de n compleix

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 1, \quad d_n = (n-1)d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}.$$

2.90 En una de les versions de la màquina Enigma emprada per codificar missatges secrets, s'escollien tres rotors d'un conjunt de cinc i es col·locaven en ordre a la màquina. Cada dia s'escollia un conjunt ordenat de tres rotors de forma que cap dels escollits estigués en la mateixa posició que el dia anterior. Fixat l'arranjament d'un dia, calculeu quantes possibles seleccions hi ha per al dia següent.

2.91 Calculeu el nombre de permutacions de [8] que no contenen cap de les formes 12, 34, 56, 78.

2.92 Calculeu quantes permutacions del multiconjunt $\{a, a, a, b, b, b, c, c, c\}$ hi ha en les que no aparegui la mateixa lletra tres vegades consecutives.

2.93 Determineu el nombre de paraules de longitud n en l'alfabet $\{a, b, c, d\}$ en les que cada lletra apareix almenys una vegada.

3
Funcions generadores

Trobeu les funcions generadores ordinàries de les successions següents, en la forma més compacta possible:

3.1 $a_n = 4^n$.

3.2 $a_n = 3^{2n}$.

3.3 $a_n = n + 1$.

3.4 $a_n = 3(-2)^n + n$.

3.5 $a_n = n^2$.

3.6 $a_n = n3^{n-1}$.

3.7 $a_n = (n + 1)(n + 2)$.

3.8 $a_n = (-1)^n n$.

3.9 $a_n = 5 \cdot 7^n - 4 \cdot 3^{n-1}$.

3.10 $a_n = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

3.11 $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \ldots)$.

3.12 $(0, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0 \ldots)$.

3.13 $a_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ és parell;} \\ 3, & \text{altrament.} \end{cases}$

3.14 $a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \leq 3; \\ (-1)^{n-1}6, & \text{si } n \geq 4. \end{cases}$

3.15 $a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \leq 5; \\ n, & \text{altrament.} \end{cases}$

3.16 $a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \equiv 2 \pmod 3; \\ 1, & \text{altrament.} \end{cases}$

3.17 $a_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ és parell;} \\ 2^k, & \text{si } n = 2k - 1. \end{cases}$

Sigui $A(x)$ la funció generadora ordinària de la successió $(a_n)_{n\geq 0}$. Trobeu les funcions generadores ordinàries corresponents a les successions següents en funció de $A(x)$.

3.18 $(a_n + c)_{n\geq 0}$.

3.19 $(na_n)_{n\geq 0}$.

3.20 $(a_{n+h})_{n\geq 0}$, $h > 0$ fixat.

3.21 $(0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

3.22 $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, \ldots)$.

3.23 $(0, 0, 1, a_3, a_4, a_5, \ldots)$.

3.24 $(a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n)_{n\geq 0}$.

3.25 $(a_{n+2} - a_{n+1} - n)_{n\geq 0}$.

3.26 $(na_{n+1})_{n\geq 0}$.

Descomponeu en fraccions parcials i trobeu el coeficient de x^n de les sèries formals de potències de les funcions racionals següents:

3.27 $\dfrac{3+4x}{2-x-x^2}$.

3.28 $\dfrac{4+x-x^2}{3-5x+x^2+x^3}$.

3.29 $\dfrac{2+x+x^2}{6+11x+6x^2+x^3}$.

3.30 $\dfrac{1+3x}{1-3x^2+2x^3}$.

3.31 $\dfrac{-5+3x}{6-11x+6x^2-x^3}$.

3.32 $\dfrac{39+9x+6x^2}{-14-9x+6x^2+x^3}$.

Calculeu,

3.33 $1+2+\cdots+n$.

3.34 $1^2+2^2+\cdots+n^2$.

3.35 $1^3+2^3+\cdots+n^3$.

3.36 $1^4+2^4+\cdots+n^4$.

3.37 $1{\cdot}2{\cdot}3+2{\cdot}3{\cdot}4+3{\cdot}4{\cdot}5+\cdots+n(n+1)(n+2)$.

3.38 $a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n,\ a\in\mathbb{R}$.

3.39 Trobeu la funció generadora ordinària de la successió (a_n) els termes de la qual representen el nombre de formes de repartir n llibres diferents entre quatre persones.

3.40 Sigui c_r el nombre de formes d'obtenir r tirant quatre daus diferents. Trobeu la funció generadora ordinària de la successió (c_r).

3.41 Sigui b_r el nombre d'enters n compresos entre 0 i 10^m-1 tals que la suma de les xifres de n en base 10 és r. Trobeu la funció generadora de (b_r).

3.42 Sigui a_n el nombre de maneres diferents en què poden tenir-se n euros amb bitllets de 20, 10 i 5 i monedes de 1 i 2 euros. Trobeu la funció generadora ordinària de la succesió (a_n).

Trobeu la funció generadora ordinària de cadascuna de les successions recurrents següents:

3.43 $a_0=a_1=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n \quad (n\geq 0)$.

3.44 $a_0=2,\ a_1=3,\ a_n=2a_{n-2}+1 \quad (n\geq 2)$.

3.45 $a_0=1,\ a_{n+1}=2a_n+4^n \quad (n\geq 0)$.

3.46 $a_0=1,\ a_{n+1}=2a_n+n\alpha^n \quad (\alpha\in\mathbb{R},\ n\geq 0)$.

Resoleu les recurrències següents:

3.47 $a_0=1,\ a_1=3,\ a_{n+2}-3a_{n+1}-4a_n=0 \quad (n\geq 0)$.

3.48 $a_0 = 2,\ a_1 = 0,\ a_2 = -2,\ a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0 \quad (n \geq 0).$

3.49 $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad (n \geq 0).$

3.50 $a_1 = 8,\ a_2 = 4,\ a_3 = 24,\ a_{n+3} - 4a_{n+2} - 4a_{n+1} + 16a_n = 0\ (n \geq 1).$

3.51 $a_1 = 4,\ a_2 = 8,\ a_3 = 20,\ a_{n+3} - 5a_{n+2} + 8a_{n+1} - 4a_n = 0 \quad (n \geq 1).$

3.52 $a_0 = 0,\ a_1 = -9,\ a_2 = -1,\ a_3 = 21, a_{n+4} - 5a_{n+3} + 6a_{n+2} + 4a_{n+1} - 8a_n = 0 \quad (n \geq 0).$

3.53 $a_0 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2^{n-1} \quad (n \geq 0).$

3.54 $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_n = 4a_{n-2} + (-2)^{n-1} \quad (n \geq 3).$

3.55 $a_0 = 2,\ a_1 = -6,\ a_{n+2} + 8a_{n+1} - 9a_n = 8 \cdot 3^{n+1} \quad (n \geq 0).$

3.56 $a_0 = 0,\ a_{n+1} = a_n + n \quad (n \geq 0).$

3.57 $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = n \quad (n \geq 0).$

3.58 $a_0 = 1,\ a_{n+1} - 2a_n = 4^n \quad (n \geq 0).$

3.59 $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = n \quad (n \geq 0).$

3.60 $a_0 = \lambda,\ a_{n+1} - \alpha a_n = \beta \quad (\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ n \geq 0).$

3.61 $a_0 = \lambda,\ a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^n \quad (\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ n \geq 0).$

3.62 $a_0 = 1,\ a_{n+1} - 2a_n = n\alpha^n \quad (n \geq 0).$

3.63 $a_0 = 2,\ a_{n+1}^2 = 5a_n^2$, sabent que $a_n \geq 0$ per a tot $n \geq 0$.

3.64 $a_1 = 12,\ a_2 = 60, n(n+1)a_{n+2} - 5n(n+2)a_{n+1} + 4(n+1)(n+2)a_n = 0 \quad (n \geq 1).$

3.65 $a_0 = 1,\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \quad (n \geq 1).$

3.66 $a_0 = 1,\ a_1 = \phi = (1 + \sqrt{5})/2,\ a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n \geq 0).$

3.67 $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_{n+2} = a_{n+1}a_n \quad (n \geq 0).$

3.68 Siguin (a_n), (b_n) i (c_n) tres successions definides per $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ i

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Calculeu la funció generadora ordinària de (a_n) i trobeu una fórmula per a (a_n).

3.69 La successió z_n està definida per

$$z_0 = 1, \qquad z_{n+1} = \frac{z_n - a}{z_n - b},$$

on $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \neq 1$.

1) Demostreu que si (a_n) compleix $a_{n+1}/a_n = z_n - b$, aleshores

$$a_{n+2} + (b-1)a_{n+1} + (a-b)a_n = 0.$$

2) Si $a = 0$ i $b = 2$, trobeu una fórmula per z_n.

3.70 Tot resolent cert problema, es diu que una persona és al nivell n quan li falten n etapes per arribar a la solució. A cada nivell té 5 alternatives, dues que la porten al nivell $n-1$ i tres que són millors, en el sentit que la porten directament al nivell $n-2$. Sigui a_n el nombre de maneres d'arribar a la solució des del nivell n. Trobeu a_n sabent que a_1=2.

3.71 Un sistema permet d'emetre tres senyals diferents, un dels quals dura un segon i, els altres, dos segons cadascun. Trobeu el nombre de senyals diferents que es poden emetre en n segons suposant que no hi ha cap temps mort entre cada dos senyals.

3.72 S'estima que la facturació d'una empresa és cada any la mitjana entre la de l'any anterior i la de l'any següent. Si les vendes el 1990 són v_0 i les del 1991 són v_1, calculeu les vendes de l'any $1990 + n$.

3.73 El joc de les torres de Hanoi consta de tres pals verticals A, B i C i de n discs de radis diferents que, al principi, són apilats de gran (a sota) a petit (dalt), travessats pel pal A. L'objectiu és col·locar la pila en idèntica posició però al pal B. L'única jugada permesa és passar el disc més alt d'una pila a la posició superior d'una altra pila, sense cobrir, però, un disc més petit. Trobeu la relació recurrent per al nombre mínim de jugades necessàries per completar el joc i resoleu-la.

3.74 Considerem n rectes al pla en posició general (cada dues no paral·leles, cada tres no concurrents).

1) Calculeu en quantes regions queda dividit el pla.

2) Calculeu quantes d'aquestes regions són no fitades.

3.75 Calculeu el nombre de paraules de longitud n en l'alfabet $\{0, 1, 2\}$ tals que cada dígit és igual o superior a l'anterior.

3.76 Considerem el conjunt de totes les paraules de longitud n en l'alfabet $\{0, 1, 2\}$.

1) Trobeu quantes n'hi ha que continguin dos símbols consecutius iguals.

2) Trobeu quantes n'hi ha que no tinguin ni dos uns consecutius ni dos dosos consecutius.

3.77 Determineu el nombre de paraules de longitud n en l'alfabet $\{0, 1, 2, 3\}$ tals que no tenen cap 3 més a la dreta d'un 0.

3.78 Trobeu el nombre de paraules de longitud n en l'alfabet $\{0, 1, 2, 3\}$ tals que tenen un nombre parell de zeros.

3.79 En el pla hi ha dos punts pintats de groc i n punts pintats de verd. Només es permet dibuixar segments que tenen per extrems punts de diferents colors.

1) Proveu que el nombre mínim de segments que cal dibuixar per tal que tots els punts quedin connectats és $n + 1$.
2) Calculeu de quantes maneres diferents es poden dibuixar $n + 1$ segments de forma que tots els punts quedin connectats.

3.80 Trobeu el nombre de maneres diferents de pujar una escala de n graons si en cada pas en pugem un o dos.

3.81 Calculeu el nombre de subconjunts de $[n]$ que no contenen dos enters consecutius.

3.82 Calculeu el nombre de formes d'enrajolar un passadís rectangular de mides $n \times 2$ si es disposa de rajoles de mides 2×1 i no es poden trencar rajoles.

3.83 Una bandera s'ha de dissenyar amb n franges horitzontals d'igual mida. Cada franja pot ésser vermella, blava, verda o groga. Calculeu el nombre de banderes que es poden dissenyar en els casos següents:

1) No hi ha cap restricció sobre el color de cada franja.
2) Franges consecutives no poden tenir el mateix color.
3) Franges consecutives no poden tenir el mateix color i les franges dels extrems tampoc no poden ésser del mateix color.

3.84 Es disposa d'una caixa de k colors. Calculeu de quantes maneres es poden pintar els vèrtexs d'un polígon regular de n costats de forma que vèrtexs contigus tinguin colors diferents.

En els tres problemes següents f_n denota el n-è nombre de Fibonacci: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ i $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ per a tot $n \geq 2$. Demostreu

3.85 $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$ $(n \geq 0)$.

3.86 $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n+1} = f_{2n+2}$ $(n \geq 0)$.

3.87 $f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$ $(n \geq 0)$.

3.88 La funció generadora $A(x)$ d'una successió $(a_n)_{n\geq 0}$ satisfà l'equació $(A(x))^2 - A(x) + x = 0$ i sabem que $a_0 = 1$. Trobeu una expressió algebraica per a $A(x)$.

3.89 Trobeu la funció generadora ordinària la successió recurrent $a_0 = 2,\ a_1 = 2,\ a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0 = 2a_{n+2},\ n \geq 0$.

3.90 Trobeu la funció generadora ordinària del nombre de particions de n tals que cada part apareix com a molt dues vegades.

3.91 Trobeu la funció generadora ordinària del nombre de particions de n tals que cada part és una potència de dos.

3.92 Trobeu la funció generadora ordinària del nombre de particions de n tals que la part més petita és 5.

3.93 Demostreu que el nombre de particions de n en parts diferents coincideix amb el nombre de particions de n en parts senars.

3.94 Demostreu que el nombre de particions de n tals que cap nombre parell apareix més d'una vegada com a una part coincideix amb el nombre de particions de n tals que cada part apareix com a molt tres vegades.

Trobeu la funció generadora exponencial de cadascuna de les successions següents:

3.95 $a_n = a^n$.

3.96 $a_n = n$.

3.97 $a_n = n(n-1)$.

3.98 $a_n = n^2$.

3.99 Resoleu la recurrència $\quad a_0 = a_1 = 1, \quad a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0 = 2^n a_n$.

4
Conceptes bàsics de grafs

4.1 Doneu tots els grafs que tenen $V = \{a, b, c\}$ com a conjunt de vèrtexs i representeu-los gràficament.

4.2 Sigui V un conjunt de cardinal n. Calculeu el nombre de grafs que tenen V com a conjunt de vèrtexs.

4.3 Calculeu el nombre de grafs de mida 4 que tenen $[4]$ com a conjunt de vèrtexs.

4.4 Calculeu el nombre de grafs que tenen conjunt de vèrtexs $[7]$ i mida 16.

4.5 Siguin $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{ab, af, ad, be, de, ef\}$ i $G = (V, A)$. Determineu tots els subgrafs de G d'ordre 4 i mida 4.

4.6 Sigui $V = \{a, b, c, d\}$ i $A = \{ab, ac, ad, dc\}$. Determineu, llevat d'isomorfismes, tots els subgrafs del graf $G = (V, A)$.

4.7 Demostreu que dos grafs amb el mateix ordre $n \leq 3$ són isomorfs si, i només si, tenen la mateixa mida.

4.8 Determineu, llevat d'isomorfismes, tots els grafs d'ordre quatre i mida dos.

Els cinc problemes següents fan referència al graf G definit com segueix. El conjunt de vèrtexs és $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, i dos vèrtexs u i v són adjacents si existeix $s \in \{1, 4\}$ tal que $|u - v| \equiv s \pmod 9$. Determineu l'ordre, la mida, el nombre de components connexos i el *girth* dels subgrafs de G següents:

4.9 El subgraf induït pels vèrtexs parells.

4.10 El subgraf induït pels vèrtexs senars.

4.11 El subgraf induït pel conjunt $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

4.12 El subgraf generat per les arestes que uneixen vèrtexs consecutius.

4.13 El subgraf generat per les arestes que uneixen un vèrtex parell i un de senar.

4.14 Siguin $n \geq 3$ i $0 \leq k \leq n$ enters i considereu el graf complet K_n amb $[n]$ com a conjunt de vèrtexs.

1) Calculeu la mida del subgraf induït per $[k]$.
2) Calculeu quantes arestes hi ha que tinguin un extrem a $[k]$ i l'altre a $[n] \setminus [k]$.
3) Calculeu la mida del subgraf induït per $[n] \setminus [k]$.
4) Emprant els resultats anteriors, demostreu que

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}.$$

4.15 Calculeu el nombre de subgrafs etiquetats de K_n d'ordre 4 i mida 5 que contenen exactament dos triangles.

4.16 Determineu el nombre de grafs no isomorfs d'ordre 20 i mida 188.

4.17 Siguin S un conjunt i $\mathcal{C}$ un conjunt finit de subconjunts de S. El *graf intersecció* $I(\mathcal{C})$ és el graf que té $\mathcal{C}$ com a conjunt de vèrtexs i dos vèrtexs $A, B \in \mathcal{C}$ són adjacents si $A \cap B \neq \emptyset$.

1) Siguin $S = [6]$ i $\mathcal{C} = \{\{1,2\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{5,6\}\}$. Representeu gràficament el graf $I(\mathcal{C})$.
2) Considereu el graf G que té $[4]$ com a conjunt de vèrtexs i arestes 12, 23, 34 i 41. Per a cada $i \in [4]$, considereu el conjunt S_i format pel vèrtex i i les dues arestes incidents amb i: $S_1 = \{1, 12, 41\}, S_2 = \{2, 12, 23\}, S_3 = \{3, 23, 34\}, S_4 = \{4, 41, 34\}$. Siguin $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ i $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Demostreu que $I(C)$ és isomorf a G.
3) Demostreu que si G és un graf, aleshores existeixen un conjunt S i un conjunt finit $\mathcal{C}$ de subconjunts de S tals que G és isomorf al graf intersecció $I(\mathcal{C})$.

Demostreu:

4.18 Si un graf és d'ordre n i mida $> n^2/4$, aleshores no és bipartit.

4.19 Si un graf és regular de grau senar, aleshores té ordre parell.

4.20 Els grafs 2-regulars tenen iguals la mida i l'ordre.

4.21 Si un graf és un 1-regular, aleshores té ordre parell.

4.22 No existeixen grafs regulars d'ordre múltiple de 4 i mida senar.

4.23 En tot graf d'ordre $n \geq 2$ hi ha almenys dos vèrtexs del mateix grau.

4.24 Si un graf té grau mínim 1, grau màxim k, i ordre $n > rk$ per a cert enter $r \geq 1$, aleshores G té almenys $r+1$ vèrtexs amb el mateix grau.

4.25 Sigui G un graf d'ordre 9 tal que tots els vèrtexs tenen grau 5 o 6. Proveu que hi ha un mínim de 5 vèrtexs de grau 6 o un mínim de 6 vèrtexs de grau 5.

4.26 Sigui G un graf d'ordre ≥ 7 tal que tots els vèrtexs tenen grau > 5. Demostreu que G té mida ≥ 21.

4.27 En Teo Comptagrafs i la seva dona organitzen una festa on es reuneixen un total de 5 parelles. Es produeixen un cert nombre de salutacions però, com és natural, ningú no saluda la pròpia parella. A la sortida en Teo pregunta a tothom quantes persones ha saludat i rep nou respostes diferents.

1) Si una persona ha fet n salutacions, quantes n'ha fet la seva parella?

2) Quantes persones ha saludat en Teo i quantes la seva dona?

4.28 Demostreu que existeix un graf d-regular d'ordre n si, i només si, $d \leq n-1$ i dn és parell.

4.29 Demostreu que si un graf és d'ordre senar i regular de grau $d \geq 1$, aleshores no és bipartit.

Per a cadascun dels casos següents, examineu si existeixen grafs d'ordre 5 de forma que els graus dels vèrtexs siguin els valors donats. Si existeixen, doneu-ne un exemple.

4.30 3, 3, 2, 2, 2.

4.31 4, 4, 3, 2, 1.

4.32 4, 3, 3, 2, 2.

4.33 3, 3, 3, 2, 2.

4.34 3, 3, 3, 3, 2.

4.35 5, 3, 2, 2, 2.

4.36 Un graf té ordre 13 i 3 components connexos. Demostreu que un dels components té un mínim de 5 vèrtexs.

4.37 Sigui G un graf d'ordre $n \geq 2$ tal que cada vèrtex té grau $\geq (n-1)/2$. Demostreu que G és connex i que té diàmetre ≤ 2.

4.38 Sigui G un graf d'ordre n, diàmetre D i grau màxim $k \geq 2$. Demostreu que

$$n \leq \begin{cases} 2D+1 & \text{si } k = 2; \\ \dfrac{k(k-1)^D - 2}{k-2} & \text{si } k > 2. \end{cases}$$

4.39 Sigui G un graf d'ordre n que té dos components connexos que són grafs complets. Demostreu que la mida de G és, almenys, $(n^2 - 2n)/4$.

4.40

1) Siguin K un graf amb exactament dos components connexos isomorfs a K_1 i K_{n-1} i sigui G un graf d'ordre n amb exactament dos components connexos. Demostreu que la mida de K és més gran o igual que la mida de G.

2) Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i k components connexos. Demostreu que $n - k \leq |A| \leq (n-k)(n-k+1)/2$.

3) Sigui G un graf d'ordre n i mida $> (n-1)(n-2)/2$. Demostreu que G és connex.

4.41 Sigui G un graf tal que el grau de cada vèrtex és ≥ 2. Demostreu que G té algun cicle.

4.42 Demostreu que si tots els vertexs d'un graf tenen grau dos, aleshores tots els seus components connexos són cicles.

4.43 Sigui uv una aresta pont d'un graf connex d'ordre > 2. Demostreu que u o v és un vèrtex d'articulació.

4.44 Sigui $G = (V, A)$ un graf connex i $z \notin V$. Sigui $G + z$ el graf que té $V \cup \{z\}$ com a conjunt de vèrtexs i $A \cup \{zv : v \in V\}$ com a conjunt d'arestes. Demostreu que $G + z$ no té vèrtexs d'articulació.

4.45 Demostreu que un graf 3-regular té un vèrtex de tall si, i només si, té alguna aresta pont.

4.46 Trobeu el més petit n tal que existeix un graf 3-regular d'ordre n que té una aresta pont.

4.47 Sigui G un graf bipartit, connex, d-regular i d'ordre $n \geq 3$. Proveu que G no té arestes pont.

4.48 Demostreu que un graf és 2-connex si, i només si, per a cada dos vèrtexs diferents existeix un cicle que els conté.

4.49 Sigui $G = (V, A)$ un graf n-connex i $z \notin V$. Sigui $G + z$ el graf que té $V \cup \{z\}$ com a conjunt de vèrtexs i $A \cup \{zv : v \in V\}$ com a conjunt d'arestes. Demostreu que $G + z$ és $(n+1)$-connex.

Trobeu la vèrtex connectivitat i l'aresta-connectivitat dels grafs següents:

4.50 El trajecte d'ordre n, T_n.

4.51 El cicle d'ordre n, C_n.

4.52 El graf complet d'ordre n, K_n.

4.53 El graf bipartit complet $K_{m,n}$.

4.54 El graf roda d'ordre n, W_n.

4.55 El graf $G = ([6], \{12,\ 14,\ 23,\ 34,\ 45,\ 46,\ 56\})$.

4.56 Sigui G un graf d'ordre $n \geq 1$ i mida m que no té cap cicle de longitud 3.

1) Demostreu que si u i v són vèrtexs de G adjacents, aleshores $g(u) + g(v) \leq n$.

2) Proveu que si $n = 2k$, aleshores $m \leq k^2$.

3) Proveu que $m \leq n^2/4$.

4.57 Demostreu que:

1) En tot graf tot recorregut tancat de longitud senar conté un cicle de longitud senar.

2) Existeixen grafs que tenen recorreguts tancats de longitud parella que no contenen cicles.

4.58 Demostreu que en un graf connex dos camins de longitud màxima tenen com a mínim un vèrtex en comú, però no necessàriament una aresta comuna.

4.59 Sigui G un graf connex no bipartit. Demostreu que entre cada dos vèrtexs qualssevol de G existeixen un recorregut de longitud senar i un de longitud parella.

4.60 Demostreu que si G és un graf de grau mínim d, aleshores G conté un camí de longitud d.

4.61 Demostreu que si un graf té exactament dos vèrtexs de grau senar, aleshores existeix un camí que va d'un a l'altre.

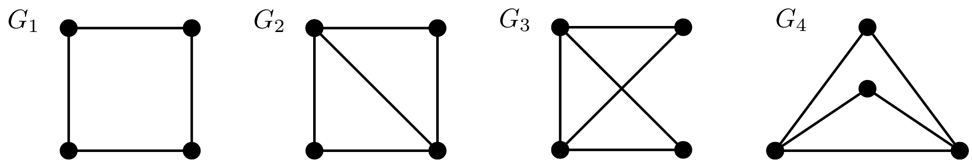
4.62 Sigui $G = (V, A)$ un graf connex i sigui $P = \{v \in V \ : \ D(G - v) < D(G)\}$.

1) Demostreu que si $u \in P$, aleshores existeix $v \in V$ tal que $d_G(u, v) = D(G)$.

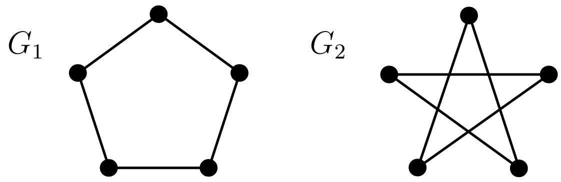
2) Demostreu que $|P| \leq 2$.

Classifiqueu per classes d'isomorfia els grafs següents:

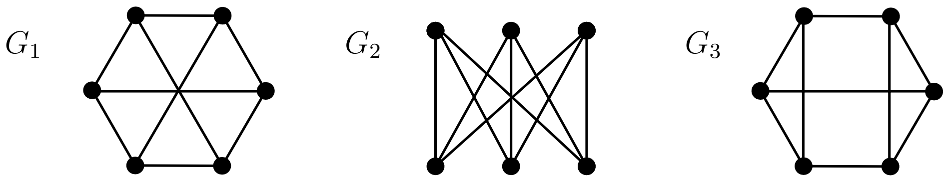
4.63



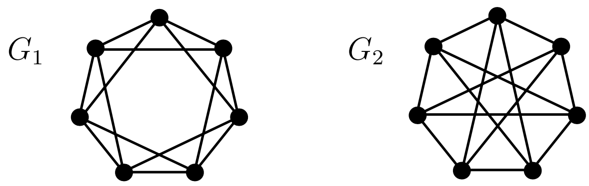
4.64



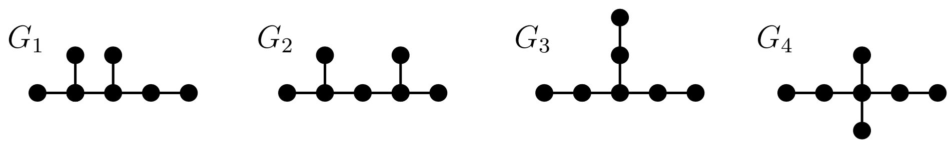
4.65



4.66



4.67



Calculeu el nombre d'automorfismes dels grafs següents:

4.68 El graf trajecte T_n d'ordre n.

4.69 El graf bipartit complet $K_{r,s}$

4.70 El graf cicle C_n d'ordre n.

4.71 Construïu un graf connex, d'ordre 8, sense cicles i sense automorfismes no trivials que tingui la menor mida possible.

4.72 Sigui G un graf tal que l'únic automorfisme que té és la identitat. Proveu:

1) Si u i v són dos vèrtexs diferents de grau 1, aleshores $d(u, v) > 2$.

2) Existeix un vèrtex de grau ≥ 3.

4.73 Si $G = (V, A)$ un graf. Demostreu que $f \colon V \to V$ és un automorfisme de G si, i només si, f és un automorfisme del graf G^c complementari de G.

4.74 Demostreu que el complementari d'un graf no connex és connex.

4.75 Sigui G un graf i v un vèrtex de G. Demostreu que $(G - v)^c = G^c - v$.

4.76 Demostreu que si v és un vèrtex de tall d'un graf G, aleshores v no és un vèrtex de tall de G^c.

4.77 Proveu que el complementari d'un graf regular és regular.

4.78 Trobeu, llevat d'isomorfismes, tots els grafs 4-regulars d'ordre 7.

4.79 Demostreu que no hi ha grafs autocomplementaris d'ordre 3, però sí d'ordres 4 i 5.

4.80 Demostreu que un enter $n \geq 1$ és l'ordre d'un graf autocomplementari si i només si n és congru amb 0 o amb 1 mòdul 4.

4.81 Sigui G un graf autocomplementari d'ordre n, $n \equiv 1 \pmod 4$. Demostreu que hi ha un nombre senar de vèrtexs de grau $(n-1)/2$ i, per tant, que G conté, com a mínim un vèrtex de grau $(n-1)/2$.

4.82 Demostreu que un graf autocomplementari d'ordre $n \geq 4$ té diàmetre 2 o 3.

4.83 Demostreu que si G és un graf d'ordre $n \geq 6$, aleshores o G o G^c contenen un triangle.

4.84 Demostreu que si G és un graf d'ordre $n \geq 10$, aleshores o G conté un K_4 o G^c conté un K_3.

4.85 Demostreu que si G és un graf d'ordre $n \geq 20$, aleshores G o G^c contenen un K_4.

4.86 Demostreu que un graf connex amb tots els vèrtexs de grau parell no té arestes pont.

4.87 Demostreu que si un graf és regular d'ordre parell i mida senar, aleshores no és eulerià.

4.88 Trobeu els valors de n tals que el graf complet K_n és eulerià.

4.89 Esbrineu si és possible posar en successió totes les fitxes d'un dòmino de forma que coincideixen les puntuacions dels extrems en contacte i que els dos extrems lliures tinguin la mateixa puntuació. Si és possible, expliciteu una solució.

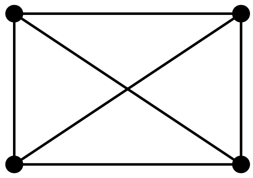
4.90 Trobeu els valors de m i n tals que el graf bipartit complet $K_{m,n}$ és eulerià.

4.91 Trobeu els valors de n tals que el n-cub és eulerià.

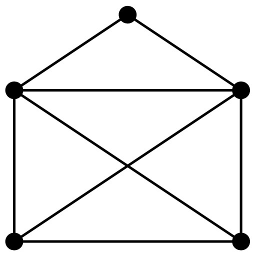
4.92 Sigui G un graf d'ordre senar tal que G i G^c són connexos. Demostreu que G és eulerià si, i només si, G^c és eulerià.

Esbrineu si els dibuixos següents es poden dibuixar sense aixecar el llapis del paper i sense repetir cap línia

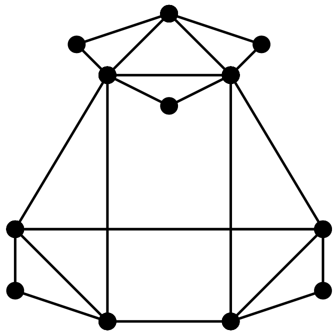
4.93



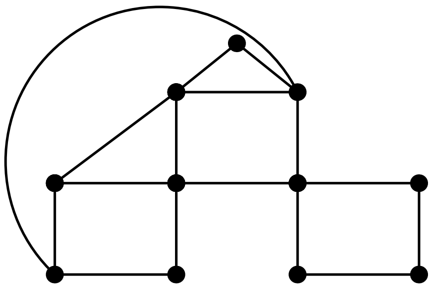
4.94



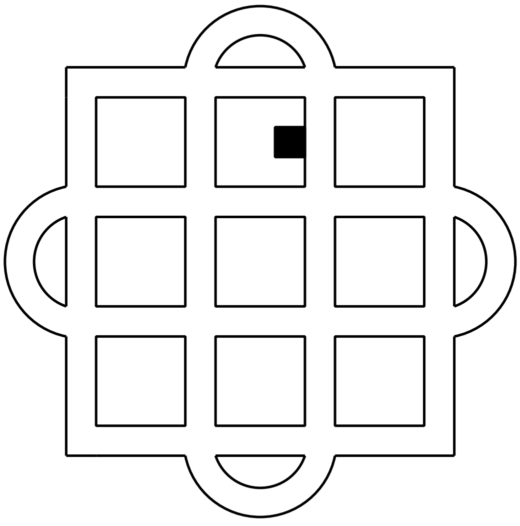
4.95



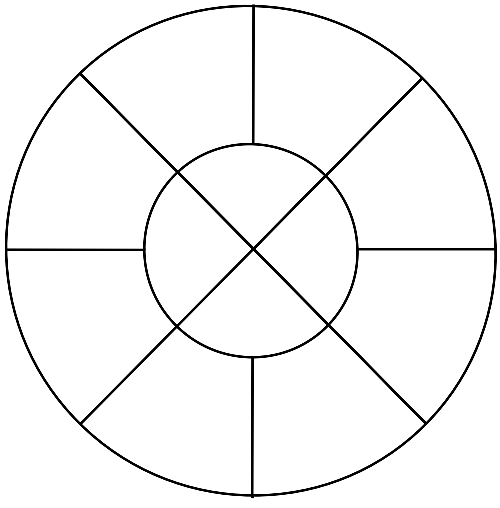
4.96



4.97 Un carter ha de recórrer tots els carrers d'una urbanització per repartir les cartes. El plànol de la urbanització és el de la figura, on és marcat el lloc de l'oficina de correus. Proposeu un recorregut del carter que comenci i acabi a l'oficina de correus de forma que la distància recorreguda sigui mínima.



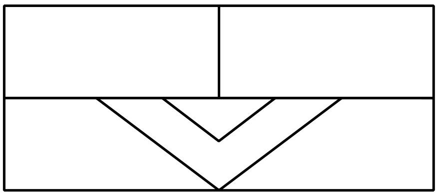
4.98 Trobeu el mínim nombre de vegades que s'ha d'aixecar el llapis del paper per dibuixar la figura sense repetir cap línia.



En cadascun dels casos següents, esbrineu si és possible dibuixar una línia contínua tancada que talli exactament una vegada cada segment interior del rectangle.

4.99

4.100



4.101 Sigui G un graf que té exactament dos components connexos que són eulerians. Trobeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir per obtenir un graf eulerià.

4.102 Sigui $G = (V, A)$ un graf connex. Demostreu que A admet una partició en exactament k senderons oberts sense extrems comuns si, i només si, G conté exactament $2k$ vèrtexs de grau senar.

4.103 Sigui $n \geq 3$ enter. Calculeu el nombre subgrafs generadors de K_n que són cicles.

4.104 Demostreu que si un graf bipartit és hamiltonià, aleshores les parts estables tenen el mateix cardinal.

4.105 Sigui G un graf bipartit que té un camí hamiltonià i siguin V_1 i V_2 les parts estables. Demostreu que $||V_1| - |V_2|| \leq 1$.

4.106 Demostreu que un graf bipartit $K_{m,n}$ d'ordre ≥ 3 és hamiltonià si, i només si, $m = n$.

4.107 Demostreu que si $n \geq 1$ i $m = n + 1$, aleshores el graf bipartit complet $K_{m,n}$ té un camí hamiltonià.

4.108 Sigui G un graf hamiltonià que no és un cicle. Demostreu que G té almenys dos vèrtexs de grau ≥ 3.

4.109 Sigui G un graf hamiltonià que no és un cicle. Demostreu que si G té dos vèrtexs no adjacents de grau 3, aleshores té almenys un altre vèrtex de grau ≥ 3.

4.110 Sigui G un graf d'ordre $n \geq 2$ tal que cada vèrtex té grau $\geq (n-1)/2$. Demostreu que G té un camí hamiltonià.

4.111 Sigui G un graf d-regular d'ordre $\geq 2d+2$, amb $d \geq 1$. Demostreu que el complementari de G és hamiltonià.

4.112 Sigui T un arbre d'ordre n tal que T^c té un camí hamiltonià. Demostreu que el grau màxim de T és $\leq n-2$.

4.113 Demostreu que si G és un graf d'ordre n i mida $\geq \binom{n-1}{2} + 2$, aleshores G és hamiltonià.

4.114 Sigui G un graf que té exactament dos components connexos que són hamiltonians. Trobeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir per obtenir un graf hamiltonià.

4.115 Sigui G un graf amb dos vèrtexs no adjacents de grau 3 i la resta de grau menor o igual que dos. Proveu que G no és hamiltonià.

Siguin $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ dos grafs connexos amb $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Definim el graf $G_1 \square G_2 = (V, A)$ per $V = V_1 \times V_2$ i dos vèrtexs $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ són adjacents si, i només si, $u_1 = v_1$ i $u_2v_2 \in A_2$ o $u_1v_1 \in A_1$ $u_2 = v_2$. Demostreu,

4.116 Si G_1 i G_2 són eulerians, aleshores $G_1 \square G_2$ és eulerià.

4.117 Si $G_1 \square G_2$ és eulerià, aleshores G_1 i G_2 són eulerians o bé tenen ordre parell.

4.118 Si G és hamiltonià, aleshores $G \square K_2$ és hamiltonià.

4.119 Trobeu els valors de n per als quals el n-cub és hamiltonià..

Sigui $G = (V, A)$ un graf. El *graf línia* de G, LG és el graf que té per vèrtexs les arestes de G i dos vèrtexs de LG són adjacents si, com a arestes de G, són incidents.

4.120 Proveu que si G és eulerià, aleshores LG és hamiltonià.

4.121 Trobeu un graf G tal que LG sigui hamiltonià però que G no sigui eulerià.

4.122 Proveu que si G és eulerià, aleshores LG és eulerià.

4.123 Trobeu un graf G tal que LG sigui eulerià, però G no.

4.124 Proveu que si G és hamiltonià, aleshores LG és hamiltonià.

4.125 Trobeu un graf G tal que LG sigui hamiltonià, però G no.

Sigui $G = (V, A)$ un graf connex no trivial. Es defineix un graf $c(G)$ prenent com a conjunt de vèrtexs $V \cup A$ i dos vèrtexs són adjacents si són dos vèrtexs de G adjacents, o són una aresta de G i un extrem d'aquesta aresta, o són dues arestes de G incidents.

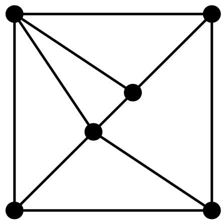
4.126 Sigui G un cicle de longitud 3. Trobeu $c(G)$.

4.127 Proveu que si G és un graf connex no trivial, aleshores $c(G)$ té un subgraf generador eulerià.

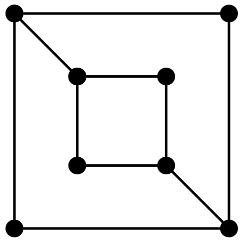
4.128 Proveu que si G té un subgraf generador eulerià, aleshores $c(G)$ és hamiltonià.

Trobeu, si existeix, un circuit eulerià i un cicle hamiltonià en els grafs següents:

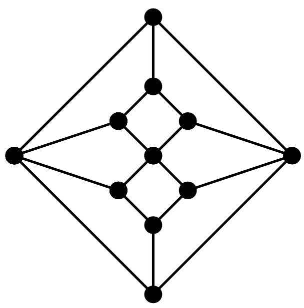
4.129



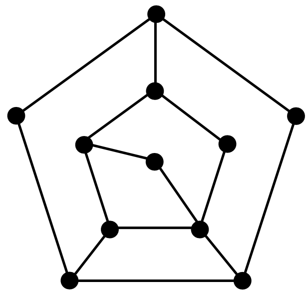
4.130



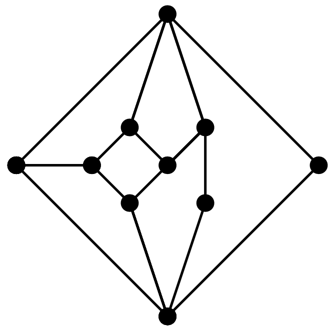
4.131



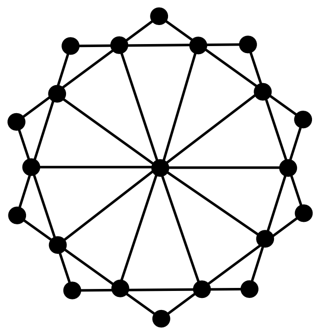
4.132



4.133



4.134



Trobeu les matrius d'adjacència i d'incidència (amb una ordenació adequada dels vèrtexs i de les arestes) dels grafs següents:

4.135 El graf nul d'ordre 5, N_5.

4.136 El graf complet d'ordre 5, K_5.

4.137 El graf cicle d'ordre 5, C_5.

4.138 El graf trajecte d'ordre 5, T_5.

4.139 El graf bipartit complet $K_{2,3}$.

4.140 El graf roda d'ordre 6, W_6.

4.141 Sigui A una matriu quadrada d'ordre n, binària, simètrica i amb tots els termes diagonals iguals a zero. Demostreu que A és la matriu d'adjacència d'un graf d-regular si, i només si, d és un valor propi de A de vector propi $(1, \ldots, 1)$.

4.142 Demostreu que G és un graf bipartit si, i només si, admet una matriu d'adjacència de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ A^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

4.143 Sigui A la matriu d'adjacència d'un graf G. Demostreu que la traça de A^2 es el doble de la mida de G.

4.144 Sigui A la matriu d'adjacència d'un graf G que té t subgrafs cicles d'ordre 3. Demostreu que la traça de A^3 és $6t$.

5
Arbres

5.1 Per a cada enter $n \geq 1$, sigui a_n el nombre d'arbres no isomorfs d'ordre n. Demostreu els valors de la taula següent:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	1	1	2	3	6	11

5.2 Determineu els arbres que són grafs regulars.

5.3 Sigui T_1 un arbre d'ordre n i mida 17 i T_2 un arbre d'ordre $2n$. Calculeu n i l'ordre i la mida de T_2.

5.4 Caracteritzeu els grafs amb la propietat que tot subgraf connex és un subgraf induït.

5.5 Calculeu el nombre d'arestes que cal afegir a un bosc de k component connexos per a obtenir un arbre.

5.6 Proveu que tot arbre d'ordre $n \geq 2$ és un graf bipartit.

5.7 Determineu els arbres que són grafs bipartits complets.

5.8 Calculeu el nombre de camins de longitud ≥ 1 que hi ha en un arbre d'ordre $n \geq 2$.

5.9 Trobeu tots els grafs G tals que G i G^c són arbres.

5.10 Trobeu el màxim ordre que pot tenir un graf connex de mida 30.

5.11 Demostreu que en un arbre tot vèrtex de grau ≥ 2 és d'articulació.

5.12 Trobeu un graf connex tal que tot vèrtex de grau ≥ 2 sigui d'articulació però no sigui arbre.

5.13 Proveu que si v és un vèrtex de grau d d'un arbre T, aleshores $T - v$ té exactament d components connexos.

5.14 Demostreu que si G és un graf d'ordre ≥ 2 que té exactament una fulla, aleshores G té algun cicle.

5.15 Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Proveu que el nombre de fulles de T és

$$2 + \sum_{g(u) \geq 3} (g(u) - 2).$$

5.16 Sigui $T = (V, A)$ un arbre d'ordre $n \geq 3$. Proveu que el nombre de fulles de T és

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{v \in V} |g(v) - 2|.$$

5.17 Sigui G un graf connex de grau màxim k que té n_i vèrtexs de grau i per a cada $i \in [k]$. Demostreu que si

$$n_1 = 2 + \sum_{i=3}^{k} (i - 2) n_i,$$

aleshores G és un arbre.

5.18 Sigui G un graf connex que només té vèrtexs de grau 1 i de grau 4. Sigui k el nombre de vèrtexs de grau 4. Demostreu que G és un arbre si, i nomes si, el nombre de fulles és $2k+2$.

5.19 Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 2$ i de grau màxim k. Proveu que T té un mínim de k fulles.

5.20 Proveu que una seqüència d'enters positius $d_1, \ldots, d_n$ és la seqüència de graus d'un arbre d'ordre n si, i només si, es compleix $d_1 + \cdots + d_n = 2(n - 1)$.

5.21 Proveu que tot arbre d'ordre ≥ 3 conté algun vèrtex w tal que (i) $g(w) \geq 2$; (ii) tot vèrtex adjacent a w amb, com a màxim una excepció, és de grau 1.

5.22 Sigui T un arbre d'ordre 7 amb un mínim de tres vèrtexs de grau 1 i un mínim de dos vèrtexs de grau 3.

1) Trobeu la seqüència de graus de T.

2) Trobeu, llevat d'isomorfismes, tots els arbres que tenen aquesta seqüència de graus.

5.23 Sigui T un arbre d'ordre 12 que té exactament 3 vèrtexs de grau 3 i exactament un vèrtex de grau 2.

1) Trobeu la seqüència de graus de T.

2) Trobeu dos arbres no isomorfs amb aquesta seqüència de graus.

5.24 Proveu que un arbre d'ordre $n \geq 2$ té exactament dues fulles si, i només si, és isomorf al graf trajecte T_n.

5.25 Proveu que un arbre d'ordre $n \geq 3$ té exactament $n-1$ fulles si, i només si, és isomorf al graf estrella $K_{1,n-1}$.

5.26 Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 3$. Proveu que T és de diàmetre 2 si, i només si, T és isomorf al graf estrella $K_{1,n-1}$.

5.27 Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Demostreu que T té grau màxim $n-1$ si, i només si, T és isomorf al graf estrella $K_{1,n-1}$.

5.28 Proveu que, llevat d'isomorfisme, hi ha un únic arbre d'ordre n i grau màxim $n-2$.

5.29 Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 3$. Demostreu que T té grau màxim 2 si, i només si, T és isomorf al graf trajecte T_n.

5.30 Proveu que per a $n \geq 6$, hi ha exactament tres arbres no isomorfs de grau màxim $n-3$.

5.31 Demostreu que el centre d'un arbre està format per un vèrtex o per dos vèrtexs adjacents.

5.32 Sigui G un graf d'ordre n i mida m. Demostreu que les propietats següents són equivalents:

(a) El graf G és connex i té un únic cicle.

(b) Existeix una aresta a de G tal que $G-a$ és un arbre.

(c) El graf G és connex i $n=m$.

5.33 Sigui G un graf que no és arbre d'ordre n i mida $m=n-1$.

1) Proveu que G té almenys un component connex que és arbre i almenys un que no és arbre.

2) Proveu que si G té exactament dos components connexos, aleshores el que no és arbre té exactament un cicle.

5.34 Demostreu que tot graf connex d'ordre ≥ 2 té almenys dos vèrtexs que no són d'articulació.

5.35 Sigui G un graf connex d'ordre n. Proveu que G conté un subgraf connex d'ordre k per a cada $k \in [n]$.

5.36 Sigui G un graf connex d'ordre n i mida m. Considerem el graf $T(G)$ que té per vèrtexs els arbres generadors de G i dos arbres generadors T_1 i T_2 són adjacents si existeixen arestes e_1 de T_1 i e_2 de T_2 tals que $T_1 - e_1 = T_2 - e_2$. Demostreu que $T(G)$ és connex de diàmetre $\leq \min\{n-1, m-n+1\}$.

5.37 Indiqueu quina seqüència de Prüfer correspon a cadascun dels arbres que tenen el conjunt $[4]$ com a conjunt de vèrtexs.

Trobeu les seqüències de Prüfer dels arbres següents:

5.38 $T = ([6], \{12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 56\})$.

5.39 $T = ([5], \{12,\ 13,\ 24,\ 35\})$.

5.40 $T = ([8], \{12,\ 13,\ 14,\ 18,\ 25,\ 26,\ 27\})$.

5.41 $T = ([15], \{12,\ 13,\ 24,\ 25,\ 36,\ 37,\ 48,\ 49,\ 5\ 10,\ 5\ 11,\ 6\ 12,\ 6\ 13,\ 7\ 14,\ 7\ 15\})$.

Trobeu els arbres que tenen les seqüències de Prüfer següents:

5.42 $(4, 4, 3, 1, 1)$.

5.43 $(6, 5, 6, 5, 1)$.

5.44 $(1, 8, 1, 5, 2, 5)$.

5.45 $(4, 5, 7, 2, 1, 1, 6, 6, 7)$.

5.46 Determineu els arbres que tenen seqüències de Prüfer constants.

5.47 Determineu els arbres que tenen seqüències de Prüfer de longitud 1.

5.48 Determineu els arbres que tenen seqüències de Prüfer amb tots els termes diferents.

5.49 Calculeu el nombre d'arbres diferents amb conjunt de vèrtexs $[7]$ tals que $g(2) = g(3) = 3$, $g(5) = 2$ i la resta de vèrtexs tenen grau 1.

5.50 Calculeu el nombre d'arbres diferents amb conjunt de vèrtexs $[11]$ tals que tenen 1 vèrtexs de grau 4, 2 vèrtexs de grau 3, 2 vèrtexs de grau 2 i 6 vèrtexs de grau 1.

Calculeu el nombre d'arbres generadors dels grafs següents:

5.51 El graf cicle d'ordre n, C_n.

5.52 El graf bipartit complet $K_{2,r}$.

5.53 El graf $G = ([4], \{13, 14, 23, 24, 34\})$.

5.54 El graf $G = ([5], \{12, 13, 23, 25, 34, 35, 45\})$.

Les taules següents representen grafs ponderats sense vèrtexs aïllats. Comproveu que són connexos i trobeu, per a cadascun, un arbre generador minimal, un arbre generador maximal, i els pesos dels arbres generadors òptims.

5.55

aresta	ab	ac	ae	bc	bd	cd	ce	de
pes	11	5	9	3	18	13	4	12

5.56

aresta	ab	ad	bc	be	cf	de	dg	ef	eh	fi	gh	hi
pes	1	7	2	8	9	3	10	4	11	12	5	6

5.57

aresta	ab	ae	ad	bc	bd	cd	cg	de	df	dg	ef	fg
pes	1	6	2	5	3	8	1	10	3	4	5	2

5.58

aresta	ab	ad	bc	bd	be	bf	cf	de	dg	dh	ef	eh	fh	fi	gh	hi
pes	5	2	4	3	5	6	3	7	6	8	1	3	4	4	4	2

5.59

aresta	ab	ad	ae	bc	be	bf	ci	de	dg	dj	eh	ek	fh	fi	gj	hk	hl
pes	35	20	10	70	20	20	45	40	60	25	23	25	25	12	55	21	10

5.60 Siguin $K = (V, A, \omega)$ un graf ponderat, T un arbre generador minimal de K, $e^* = uv$ una aresta de K que no és de T, i e una aresta que pertany a l'únic camí de T d'origen u i extrem v. Demostreu que $\omega(e) \leq \omega(e^*)$.

5.61 Demostreu que si en un graf ponderat totes les arestes tenen pesos diferents, aleshores hi ha un únic arbre generador minimal.

5.62 Sigui T un arbre generador minimal d'un graf ponderat G. Demostreu que T és l'únic arbre generador minimal si, i només si, cada aresta e que no és de T té un pes major que totes les altres arestes del cicle format afegint e a T.

5.63 Sigui G un graf ponderat i sigui S un conjunt d'arestes de G que no formen cap cicle. Trobeu un algorisme per trobar l'arbre generador de pes mínim de G que contingui totes les arestes de S.

Respostes

1 Polinomis i cossos finits

1.1 Divisors de zero: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27 i 28.
Invertibles: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 i 29.

1.3 $x = 3$.

1.4 $x = 7$.

1.5 $x = 18$.

1.6 $x = 812$.

1.7 No té solució.

1.8 $x = 2$, $y = 3$.

1.9 $x = 2$, $y = 3$, $z = 0$.

1.10 $x = 2 + 3t$, $y = 3 + 4t$, $z = t$, on $t \in \mathbb{F}_5$.

1.12 No té solució.

1.13 $x = 4$.

1.14 $x = 3$ i $x = 4$.

1.15 $x = 6$.

1.16 $x = 10$ i $x = 12$.

1.17 $x = 5$ i $x = 12$.

1.18 $x^3 + 1$,
x.

1.19 $2x^4 + 2x^3 + 2x$;
2.

1.20 $3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;
$4x + 1$.

1.21 $4x^4 + x^3 + 2x$;
$5x + 6$.

1.22 $x^4 + 9x^3 + x^2 + 2x + 9$;
$5x^2 + 2x + 7$.

1.23 $x + 1 = a(x)(x^3 + x^2) + b(x)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$.

1.24 $1 = a(x)(x^5+x^4+x^3+x^2+x)+b(x)(x^4+x+1)$.

1.25 $1 = a(x) + b(x)(x^3 + x)$.

1.26 $1 = a(x)(x + 1) + b(x)(x^5 + x^4 + x^2)$.

1.27 $1 = a(x)x + b(x)(2x^2 + 2x + 1)$.

1.28 $1 = a(x)(x^3 + 2x + 1) + b(x)(x^4 + x^3)$.

1.29 $x^2+2 = a(x)(x^3+x^2+x+1)+b(x)(x^5+2x^4+2x^2+x+2)$.

1.30 $1 = a(x)(3x^3+x^2+x+3)+b(x)(2x^4+3x^3+x^2+x)$.

1.31
x
$x+1$
x^2+x+1
x^3+x+1
x^3+x^2+1
x^4+x+1
x^4+x^3+1
$x^4+x^3+x^2+x+1$

1.32
x
$x+1$
$x+2$
x^2+1
x^2+x+2
x^2+2x+2
x^3+2x+1
x^3+2x+2
x^3+x^2+2
x^3+x^2+x+2
x^3+x^2+2x+1
x^3+2x^2+1
x^3+2x^2+x+1
x^3+2x^2+2x+2

1.33
x
$x+1$
$x+2$
$x+3$
$x+4$
x^2+2
x^2+3
x^2+x+1
x^2+x+2
x^2+2x+3
x^2+2x+4
x^2+3x+3
x^2+3x+4
x^2+4x+1
x^2+4x+2

1.34
x
$x+1$
$x+2$
$x+3$
$x+4$
$x+5$
$x+6$
x^2+1
x^2+2
x^2+4
x^2+x+3
x^2+x+4
x^2+x+6
x^2+2x+2
x^2+2x+3
x^2+2x+5
x^2+3x+1
x^2+3x+5
x^2+3x+6
x^2+4x+1
x^2+4x+5
x^2+4x+6
x^2+5x+2
x^2+5x+3
x^2+5x+5
x^2+6x+3
x^2+6x+4
x^2+6x+6

1.35 $(x+2)^2$.

1.36 $(x+1)(x^2+2x+2)$.

1.37 $(x^2+1)^2$.

1.38 $(x+1)^4$.

1.39 $(x+3)(x+2)$.

1.40 $3(x+4)(x+2)^2$.

1.41 x^3+x+4.

1.42 $(x+3)(x+10)^2$.

1.43 De grau 2: 21; grau 3: 112; grau 4: 588; grau 5: 3360 i grau 7: 19544.

1.44 $\frac{p-1}{2p}$

1.46 a arbitrari i $b = c = 0$ o bé $a = -1$, $b = -1$ i $c = 1$.

1.47 $a = 6$.

1.48

2) p^{d-p}

4) $S_d(p) = (p-1)^p p^{d-p}$

5) $1/e$

6) $x^4 + 2x^2 + 1$
$x^4 + 2x^2 + 2$
$x^4 + 1$
$x^4 + x + 2$
$x^4 + 2x + 2$
$x^4 + x^2 + 2$
$x^4 + x^2 + x + 1$
$x^4 + x^2 + 2x + 1$
$x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
$x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2$
$x^4 + x^3 + 2x + 1$
$x^4 + x^3 + 2$
$x^4 + x^3 + x + 2$
$x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2$
$x^4 + x^3 + x^2 + 1$
$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$
$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 2$
$x^4 + 2x^3 + x + 1$
$x^4 + 2x^3 + 2x + 2$
$x^4 + 2x^3 + 2$
$x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 2$
$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
$x^4 + 2x^3 + x^2 + 1$

1.49 $p \in \{2, 3, 5\}$.

1.51 $p \in \{2, 3, 13\}$

1.55 Els de característica zero.

1.56 $f(x) = x^4 + x + 1$.

1.57 $(1+\alpha)^{-1} = \alpha^3 + \alpha = (1+\alpha)^2 + (1+\alpha)^3$ i $(1+\alpha^2+\alpha^3)^{-1} = \alpha^2 + \alpha^3$.

1.58

2) $\alpha^{-1} = 1 + \alpha^5$, $(1+\alpha^2+\alpha^3)^{-1} = \alpha^3 + \alpha^5$ i $(1+\alpha^3+\alpha^4)^{-1} = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$.

3) $\alpha = [x]$ és primitiu.

1.60 $ord(\alpha^4) = 15$, $ord(\alpha + \alpha^2) = 15$ i $ord(\alpha^5) = 3$.

1.61

2) $\alpha = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha^2$, $\alpha^3 = \alpha^2 + 1$, $\alpha^4 = \alpha^2 + \alpha + 1$, $\alpha^5 = \alpha + 1$, $\alpha^6 = \alpha^2 + \alpha$, $\alpha^7 = 1$.

3)

	0	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
α	0	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	1
α^2	0	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	1	α
α^3	0	α^3	α^4	α^5	α^6	1	α	α^2
α^4	0	α^4	α^5	α^6	1	α	α^2	α^3
α^5	0	α^5	α^6	1	α	α^2	α^3	α^4
α^6	0	α^6	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5

1.62

2) $0, 1, \alpha, \alpha+1, \alpha^2, \alpha^2+\alpha, \alpha^2+1, \alpha^2+\alpha+1$.

3) $\alpha = \alpha$
$\alpha^2 = \alpha^2$
$\alpha^3 = \alpha + 1$
$\alpha^4 = \alpha^2 + \alpha$
$\alpha^5 = \alpha^2 + \alpha + 1$
$\alpha^6 = \alpha^2 + 1$

$\alpha^7 = 1$
α és primitiu.

4) Tots tenen ordre 7 excepte 1 que té ordre 1.

5) α^6.

1.63 $x = \alpha^8 = \alpha^2 + 1$, $y = \alpha^{12} = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$.

1.64 $u = \alpha^2$, $v = \alpha^4$, $w = 0$.

1.65 $u = (1 + \alpha + \alpha^2)w$, $v = (\alpha + \alpha^3)w$, $w = w$.

1.66

2) α^{22}

1.70 $(\alpha^2 + \alpha + 1)^2 = \alpha + 1$; $(\alpha^2)^2 = \alpha^2 + \alpha$.

1.71 $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{F}_5[x]/(x^2+x+2)$, $\alpha = [x]$; arrels de -1: 2 i 3.

1.72

1) $0, 1, \alpha^2 = \alpha + 1, \alpha^4 = 2, \alpha^6 = 2\alpha + 2$.

3) No té solució.

1.73 $t = \alpha^2$ i $t = \alpha^5$.

1.74

1) 0.

2) 0.

3) 0.

1.75 -1.

1.76

2) α, $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\alpha^3 = 2\alpha + 1$, $\alpha^4 = 2$, $\alpha^5 = 2\alpha$, $\alpha^6 = 2\alpha + 2$, $\alpha^7 = \alpha + 2$, $\alpha^8 = 1$.

3) $x^2 + 2x + 2 = (x - \alpha)(x - (1 + 2\alpha))$.

4) 81.

6) Període comú: 8.

2 Enumeració

2.7 52.

2.8 6; $\{1,4,6,8\}$, $\{1,3,6,8\}$, $\{1,3,5,8\}$, $\{2,3,5,7\}$, $\{2,4,5,7\}$, $\{2,4,6,7\}$.

2.9 No és possible.

2.10 6.

2.11 No és possible.

2.13 N'hi ha 8.877.690.

2.14 720.

2.15 69.760.

2.16 768.

2.17 40320.

2.18 9^n.

2.19 $1 - \dfrac{(365)_n}{365^n}$; $n \geq 23$.

2.20 $(n - k + 1)(n - m + 1)$; $(n - k + 1)n(n + 1)/2$; $\binom{n+1}{2}^2$.

2.21 $|T_1| = |T_3| = \dbinom{n+1}{3}$;

$|T_2| = \binom{n+1}{2}$.

2.22 $10^n - 9^{n-2}(n^2 + 17n + 162)/2$.

2.23 $\binom{n+1}{m} n!\, m!$.

2.24 $m!\,(n+1)!$

2.27 El màxim s'obté per a $k = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$.

2.36 $\binom{n+m-1}{n}$.

2.37 $\binom{n+2}{2}$.

2.38 $\binom{5+n}{5}$.

2.40 $\binom{n-4}{2}$.

2.41 $\binom{n-k+1}{k}$.

2.43 83.160

2.44 6.237.000.

2.47 2.520.

2.48 2.520.

2.49 -68.040.

2.50 280.

2.55 $n!$; $\dfrac{n!}{2}\left\{ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right\}$;
$\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k)! \left\{ \begin{matrix} n \\ n-k \end{matrix} \right\}$.

2.56 301; 1806.

2.57 $k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

2.58 $\binom{m+n}{n}$.

2.59 $4 + 2 + 1 + 1 = 8$.

2.60 $6 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 18$.

2.61 $5 + 5 + 3 + 2 + 2 = 17$.

2.62 $8 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 21$.

2.73 $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

2.74 $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

2.79 8; 6.

2.80 3.816; 648.

2.81 266.

2.82 181.

2.83 210.

2.84 251.

2.85 2.265.

2.86 9.576.

2.87 $\dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

2.88 $n = 1$: no n'hi ha. $n = 2$: 21. $n = 3$: 312, 231. $n = 4$: 4123, 3421, 3142, 4321, 2413, 2341, 2143, 3412, 4312.

2.90 32.

2.91 24.024.

2.92 1314.

2.93 $4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4$.

3 Funcions generadores

3.1 $1/(1-4x)$.

3.2 $1/(1-9x)$.

3.3 $1/(1-x)^2$.

3.4 $3/(1+2x) + x/(1-x)^2$.

3.5 $x/(1-x)^2 + 2x^2/(1-x)^3$.

3.6 $x/(1-3x)^2$.

3.7 $2/(1-x)^3$.

3.8 $-x/(1+x)^2$.

3.9 $5/(1-7x) - 4/3(1-3x)$.

3.10 $(x+1)/(1-2x^2)$.

3.11 $x^4/(1-x)$.

3.12 $x^2/(1-x^2)^2$.

3.13 $(2+3x)/(1-x^2)$

3.14 $-6x^4/(1+x)$.

3.15 $-(x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5)+x/(1-x)^2$.

3.16 $(x+1)/(1-x^3)$

3.17 $(1+2x-2x^2-2x^3)/((1-x^2)(1-2x^2))$.

3.18 $A(x) + c/(1-x)$.

3.19 $xA'(x)$.

3.20 $(A(x) - a_0 - a_1x - \cdots - a_{h-1}x^{h-1})/x^h$.

3.21 $A(x) - a_0$.

3.22 $(A(x) + A(-x))/2$.

3.23 $A(x) - (a_0 + a_1x + a_2x^2) + x^2$.

3.24 $\big((x^2+3x+1)A(x) - (3x+1)a_0 - a_1x\big)/x^2$.

3.25 $((1+x)A(x) - (1+x)a_0 + a_1x)/x^2 - x/(1-x)^2$.

3.26 $A'(x) - (A(x) - a_0)/x$.

3.27 $(7/3)/(1-x) - (5/3)/(2+x)$; $7/3 - 5(-1/2)^n/6$.

3.28 $(1/2)/(1-x)+1/(1-x)^2-(1/2)/(3+x)$; $n + 3/2 - (-1/3)^n/6$.

3.29 $1/(x+1) - 4/(x+2) + 4/(3+x)$; $(-1)^n + (-1/2)^{n-1} - 4(-1/3)^{n+1}$.

3.30 $(-2/9)/(1+2x) + (1/9)/(-1+x) + (4/3)/(-1+x)^2$; $(12n + 11 + (-2)^{n+1})/9$.

3.31 $-1/(1-x) + 1/(x-2) - 2/(x-3)$; $2(1/3)^{n+1} - (1/2)^{n+1} - 1$.

3.32 $3/(x-2) - 2/(x+1) + 5/(x+7)$; $-3(1/2)^{n+1} - 2(-1)^n - 5(-1/7)^{n+1}$.

3.33 $(n+1)n/2$.

3.34 $n(n+1)(2n+1)/6$.

3.35 $n^2(n+1)^2/4$.

3.36 $n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$.

3.37 $n(n+1)(n+2)(n+3)/4$.

3.38 Si $a = 0$, 0. Si $a = 1$, $n(n+1)/2$. Si $a \neq 0, 1$, $a(na^{n+1} - (n+1)a^n + 1)/(1-a)^2$.

3.39 $1/(1-4x)$.

3.40 $(x + x^2 + \cdots + x^6)^4$.

3.41 $(1 + x + x^2 + \cdots + x^9)^m$.

3.42 $1/((1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20}))$.

3.43 $1/(1-x+x^2)$.

3.44 $(2+x-2x^2)/(1-x)(1-2x^2)$.

3.45 $(1-3x)/(1-4x)(1-2x)$.

3.46 $1/(1-2x) + \alpha x^2/(1-2x)(1-\alpha x)^2$.

3.47 $a_n = ((-1)^n + 4^{n+1})/5$.

3.48 $a_n = 5 - 4 \cdot 2^n + 3^n$.

3.49 $a_n = (8 - 6n + (-2)^n)/9$.

3.50 $a_n = 3 \cdot 2^n - 4(-2)^n/3 - 4^n/6$.

3.51 $a_n = 4 + (n-1) \cdot 2^n$.

3.52 $a_n = (n^2 - n - 3)2^n + 3(-1)^n$.

3.53 $a_n = (3^{n+1} - 2^n)/2$.

3.54 $a_n = 5 \cdot 2^{n-3} - 3(-2)^{n-3} - n(-2)^{n-2}$.

3.55 $a_n = 3^n + (-9)^n$.

3.56 $a_n = \dbinom{n}{2}$.

3.57 $a_n = (-6n + 19 \cdot 4^n + 35(-2)^n)/54$.

3.58 $a_n = 2^{n-1} + 2^{2n-1}$.

3.59 $a_n = \left((-2)^{n+3} + 3^{n+2} - 6n - 1\right)/36$.

3.60 Si $\alpha = 0$, $a_0 = \lambda$ i $a_n = \beta$ per a $n \geq 1$. Si $\alpha = 1$, $a_n = \lambda + n\beta$. Si $\alpha \neq 0, 1$, $a_n = \lambda\alpha^n + \beta(1-\alpha^n)/(1-\alpha)$.

3.61 Si $\alpha = 0$, $a_0 = \lambda$ i $a_n = \beta^{n-1}$ per a $n \geq 1$. Si $\alpha \neq 0$ i $\alpha = \beta$, $a_n = (\lambda + n/\alpha)\alpha^n$. Si $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq \beta$, $a_n = \lambda \cdot \alpha^n + (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)$.

3.62 Si $\alpha = 0$, $a_n = 2^n$.
Si $\alpha = 2$, $a_n = (4 - n + n^2)2^{n-2}$. Si $\alpha \neq 0, 2$, $a_n = \dfrac{(\alpha-2)^2 + \alpha}{(\alpha-2)^2} \cdot 2^n + \dfrac{2(1-\alpha)}{(\alpha-2)^2} \cdot \alpha^n + \dfrac{1}{(\alpha-2)} \cdot (n+1) \cdot \alpha^n$.

3.63 $a_n = 2 \cdot (\sqrt{5})^n$.

3.64 $a_n = 3n \cdot 2^{2n-1} + 6n$.

3.65 $a_n = 1/(n+1)$.

3.66 $a_n = \phi^n$.

3.67 $a_n = 2^{f_n}$ on f_n és el n-è nombre de Fibonacci.

3.68 $(1-3x)/((1-x)(1-4x))$;
$a_n = (2 + 4^n)/3$.

3.69 $z_n = 3/(1 - (-2)^{n+1})$.

3.70 $a_n = (3^{n+1} + (-1)^n)/4$.

3.71 $(2^{n+1} + (-1)^n)/3$.

3.72 $v_n = v_0 + (v_1 - v_0)n$.

3.73 $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$; $a_n = 2^n - 1$.

3.74 $(n^2 + n + 2)/2$; $2n$.

3.75 $(n+2)(n+1)/2$.

3.76 $3^n - 3 \cdot 2^{n-1}$; $\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)/2$.

3.77 $a_n = (3+n)3^{n-1}$.

3.78 $(2^n + 4^n)/2$.

3.79 $n \cdot 2^{n-1}$.

3.80 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.

3.81 $\big((5+3\sqrt{5})/10\big)\,\phi^n + \big((5-3\sqrt{5})/10\big)\,\bar{\phi}^n$, on $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ i $\bar{\phi} = (1-\sqrt{5})/2$.

3.82 $\big((2+\sqrt{5})/19\big)\,\phi^n + \big((2-\sqrt{5})/19\big)\,\bar{\phi}^n$, on $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ i $\bar{\phi} = (1-\sqrt{5})/2$.

3.83 4^n; $4 \cdot 3^{n-1}$; $3^n + 3 \cdot (-1)^n$.

3.84 $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

3.88 $(1+\sqrt{1-4x})/2$.

3.89 $(1-\sqrt{1-4x^2(1+x)})/x^2$.

3.90 $\prod_{i\geq 1}(1+x^i+x^{2i})$.

3.91 $1/\left(\prod_{i\geq 0}(1-x^{2^i}\right)$.

3.92 $x^5/\left(\prod_{i\geq 5}(1-x^i)\right)$.

3.95 e^{ax}.

3.96 xe^x.

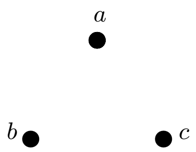
3.97 x^2e^x.

3.98 $x(x+1)e^x$.

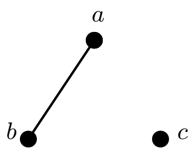
3.99 $a_n = 1/n!$.

4 Grafs

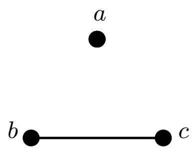
4.1



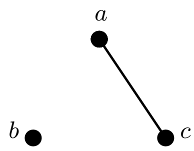
$(V, \emptyset)$



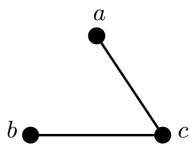
$(V, \{ab\})$



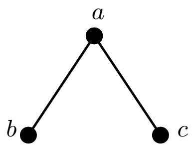
$(V, \{bc\})$



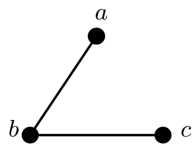
$(V, \{ca\})$



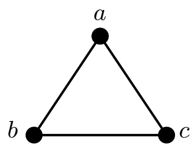
$(V, \{bc, ca\})$



$(V, \{ca, ab\})$



$(V, \{ab, bc\})$



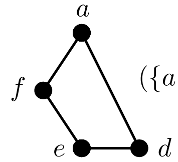
$(V, \{ab, bc, ca\})$

4.2 $2^{n(n-1)/2}$.

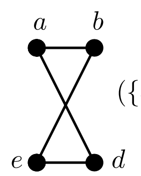
4.3 15.

4.4 20349.

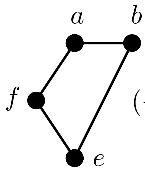
4.5



$(\{a, d, e, f\}, \{ad, de, ef, fa\})$

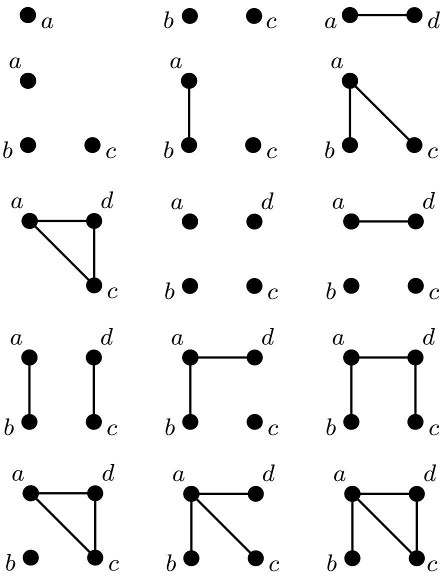


$(\{a, b, e, d\}, \{ab, be, ed, da\})$



$(\{a, b, e, f\}, \{ab, be, ef, fa\})$

4.6



4.8

4.9 5; 3; dues; no definit.

4.10 4; 2; dues; no definit.

4.11 5; 5; una; 5.

4.12 9; 8; una; no definit.

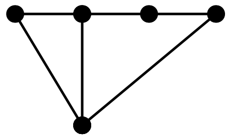
4.13 9; 8; una; no definit.

4.15 $n(n-1)(n-2)(n-3)/4$.

4.16 2.

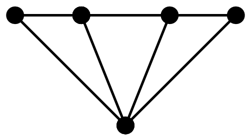
4.27 $8-n$; 4 en Teo i 4 la parella.

4.30



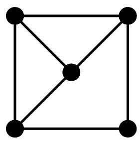
4.31 No existeix.

4.32



4.33 No existeix.

4.34



4.35 No existeix.

4.46 10.

4.50 $k(T_n) = \lambda(T_n) = 1$.

4.51 $k(C_n) = \lambda(C_n) = 2$.

4.52 $k(K_n) = n-1 = \lambda(K_n)$.

4.53 $k(K_{m,n}) = \lambda(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$

4.54 $k(W_n) = 3 = \lambda(W_n)$.

4.55 $k(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$

4.63 $\{G_1\}$ i $\{G_2, G_3, G_4\}$.

4.64 $\{G_1, G_2\}$.

4.65 $\{G_1, G_2\}$ i $\{G_3\}$.

4.66 $\{G_1, G_2\}$.

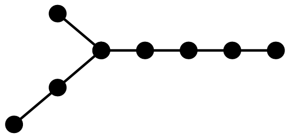
4.67 $\{G_1\}$, $\{G_2\}$, $\{G_3\}$ i $\{G_4\}$.

4.68 2.

4.69 $r!s!$ si $r \neq s$; $2(r!)^2$ si $r = s$.

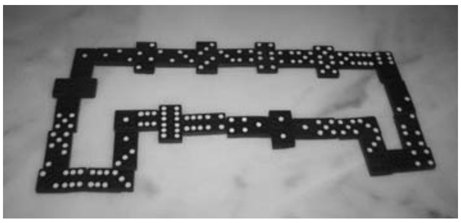
4.70 $2n$.

4.71



4.88 n senar.

4.89



4.90 m i n parells.

4.91 n parell.

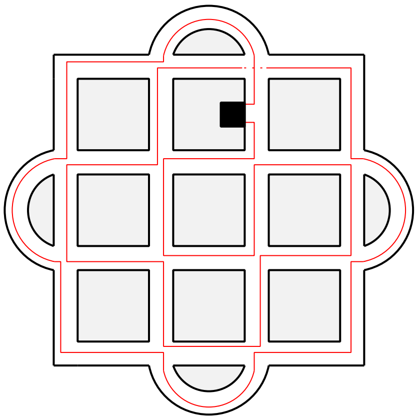
4.93 No.

4.94 Sí.

4.95 Sí.

4.96 Sí.

4.97



4.98 5.

4.99 No.

4.100 Sí.

4.101 Si els dos components són complets, 4; altrament, 3.

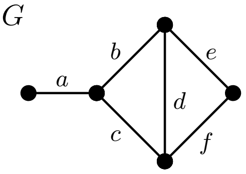
4.103 $\frac{1}{2}(n-1)!$

4.114 Dues.

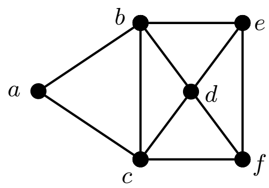
4.119 $n \geq 2$

4.121

G

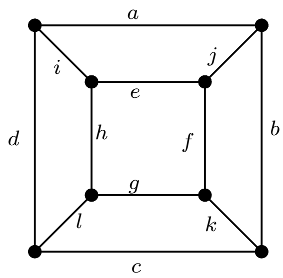


$L(G)$

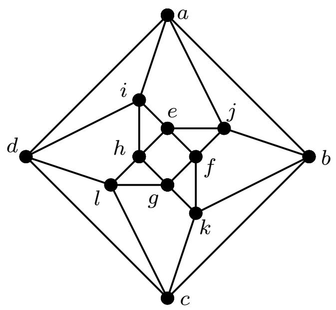


4.123

G

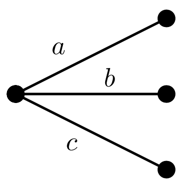


$L(G)$

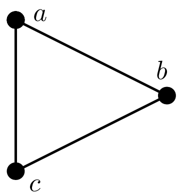


4.125

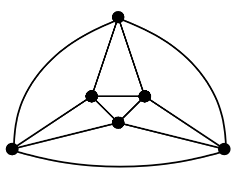
G



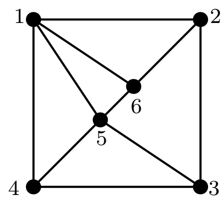
$L(G)$



4.126



4.129 No eulerià. Sí hamiltonià:



4.130 No existeixen.

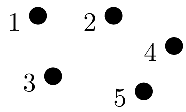
4.131 No existeixen.

4.132 No existeixen.

4.133 No existeixen.

4.134 No existeixen.

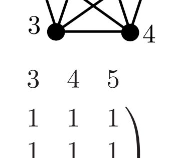
4.135



$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array} \\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

No té matriu d'incidència.

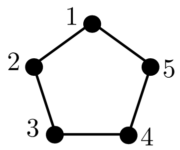
4.136



$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array} \\ \begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccccccccc} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

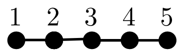
4.137



$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{ccccc} 12 & 23 & 34 & 45 & 51 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

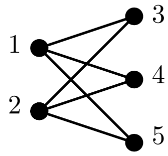
4.138



$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccc} 12 & 23 & 34 & 45 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

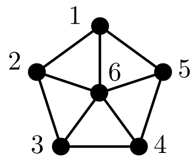
4.139



$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccccc} 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4.140



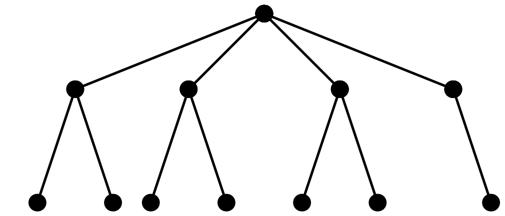
$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccccccccc} 12 & 16 & 23 & 26 & 34 & 36 & 45 & 46 & 51 & 56 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

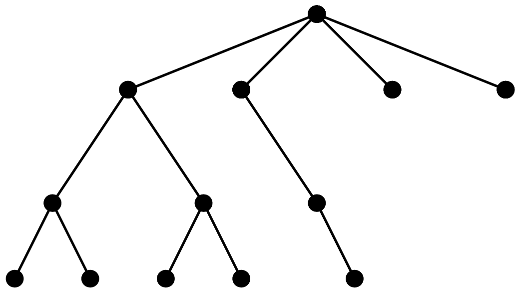
5 Arbres

5.2 K_1 i K_2.

5.3 $n = 18$; ordre de T_2: 36; mida de T_2: 35.



5.4 Els boscos.



5.5 $k - 1$.

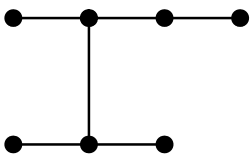
5.7 Els grafs estrella $K_{1,r}$.

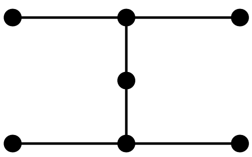
5.8 $n(n-1)$.

5.9 K_1 i T_4.

5.10 31.

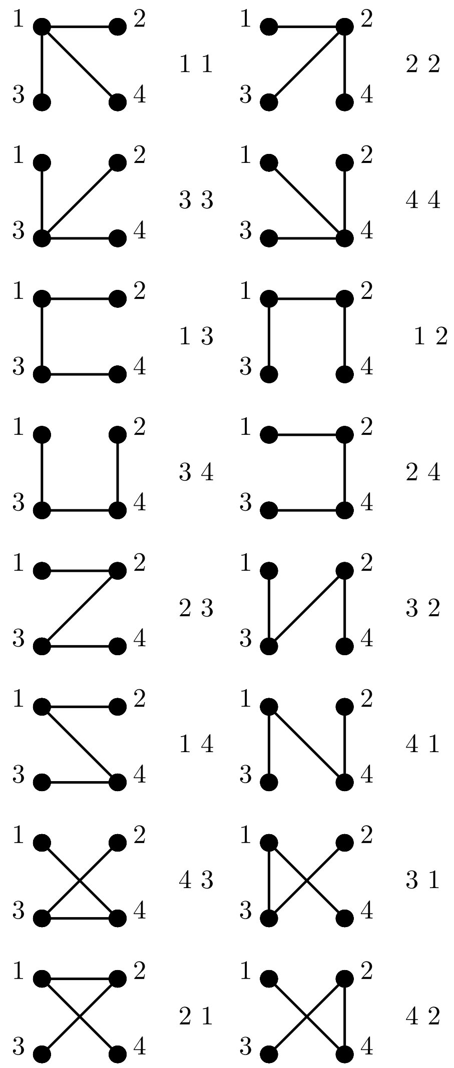
5.22 3,3,2,1,1,1,1.





5.23 4,3,3,3,2,1,1,1,1,1,1,1.

5.37



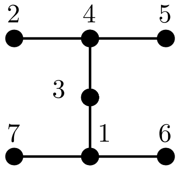
5.38 1 1 1 5.

5.39 2 1 3.

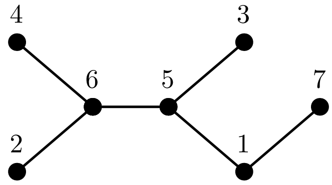
5.40 1 1 2 2 2 1.

5.41 4 4 2 5 5 2 1 3 6 6 3 7 7.

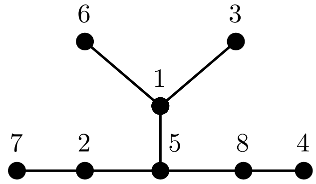
5.42



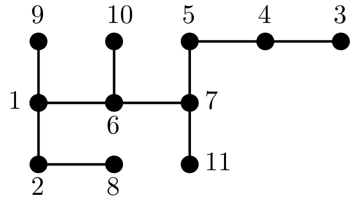
5.43



5.44



5.45



5.46 Els grafs estrella.

5.47 Els trajectes d'ordre 3.

5.48 Els trajectes d'ordre $n \geq 4$.

5.49 30.

5.50 209563200.

5.51 n.

5.52 $r2^{r-1}$.

5.53 8.

5.54 21.

5.55 Minimal: ac, bc, ce, de; 24.
Maximal: ab, bd, cd, de; 54.

5.56 Minimal:
ab, ad, bc, de, dg, ef, gh, hi; 38.

Maximal:
ad, be, cf, dg, eh, fi, gh, hi; 68.

5.57 Minimal: ab, ad, cg, df, ef, fg; 14.
Maximal: ae, bc, cd, de, dg, ef; 38.

5.58 Minimal:
ad, bc, bd, cf, ef, eh, gh, hi; 22.
Maximal:
ab, bc, be, bf, de, dg, dh, fi; 45.

5.59 Minimal:
ad, ae, be, bf, ci, dj, eh, fi, gj, hk, hl; 261.
Maximal:
ab, bc, be, ci, de, dg, eh, ek, fh, gj, hl; 408.