PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial **16 d'abril de 2008**

1. Dos jugadors realitzen alternativament un joc fins que algun d'ells guanya. El joc té tres resultats possibles A, B i C amb probabilitats p_A, p_B i p_C respectivament. Si un jugador treu el resultat A guanya. Si el jugador treu el resultat B perd i es declara guanyador l'altre jugador. Si treu el resultat C li passa el torn a l'altre jugador.

   (a) Quina és la probabilitat que guanyi la partida el primer jugador?

   (b) Particularitzeu el resultat anterior al cas que el joc consisteixi en tirar 4 monedes, sent A treure 4 cares i B treure 2 cares i 2 creus.

   (c) Quantes vegades s'ha de fer el joc de l'apartat anterior com a mínim per tal que la probabilitat de treure alguna vegada el resultat A sigui major que 0,6?

Resolució:

(a) Denotem $J1, J2$ els jugadors.

$P(\text{Guanya } J1) = P(J1 \text{ acaba treient } A) + P(J2 \text{ acaba treient } B)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_C^{2k} p_A + \sum_{k=0}^{\infty} p_C^{2k+1} p_B = (p_A + p_B p_C) \sum_{k=0}^{\infty} (p_C^2)^k = \frac{p_A + p_B p_C}{1 - p_C^2}.$$

(b) $p_A = \frac{1}{2^4}$, $p_B = \binom{4}{2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} = \frac{6}{2^4}$ i $p_C = 1 - p_A - p_B = \frac{9}{2^4}$.

$$P(\text{Guanya } J1) = \frac{\frac{1}{16} + \frac{6}{16} \cdot \frac{9}{16}}{1 - (\frac{9}{16})^2} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

(c) Volem $P(\text{Algun } A \text{ en } N \text{ jugades}) > 0{,}6$. Tenim $P(\text{Algun } A \text{ en } N \text{ jugades}) = 1 - P(\text{Ningun } A \text{ en } N \text{ jugades}) = 1 - P(\overline{A})^N$.

Així, ha de ser $P(\overline{A})^N < 0{,}4$, d'on $N > \frac{\ln 0{,}4}{\ln(15/16)} = 14{,}19$. Llavors cal $N \geq 15$.

2. El consum elèctric d'un usuari durant un dia és una variable aleatòria X exponencial de valor mitjà 5 els dies laborables (dilluns a divendres) i de valor mitjà 2 els caps de setmana.

   (a) Si un dia $X > 4$, quina és la probabilitat que aquest dia sigui diumenge?

   (b) Quina és la funció de densitat del consum elèctric en un dia triat a l'atzar?

   (c) El cost a pagar pel consum d'un dia laborable ve donat per la variable $Y = g(X)$ on:

   $$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

   Calculeu la funció de distribució i l'esperança de la variable aleatòria Y.

   (d) Els dies de cap de setmana es cobra una quota especial si el consum és major que 4. Si N és el nombre de setmanes que passen fins que hem de pagar aquesta quota, digueu quin tipus de variable és N i què val la seva esperança.

Resolució:

(a) Anomenem D_i, $i = 1, \ldots, 7$ els dies de la setmana. $P(X > x|D_i) = e^{-\lambda x}$ amb $\lambda = \frac{1}{5}$ per $i = 1, \ldots, 5$ i $\lambda = \frac{1}{5}$ per $i = 6, 7$. Per Bayes:

$$P(D_7|X > 4) = \frac{P(X > 4|D_7)P(D_7)}{\sum_{i=1}^{7} P(X > 4|D_i)P(D_i)} = \frac{e^{-\frac{4}{2}}\frac{1}{7}}{e^{-\frac{4}{5}}\frac{5}{7} + e^{-\frac{4}{2}}\frac{2}{7}} = \frac{1}{5e^{\frac{6}{5}} + 2} = 0{,}05376.$$

(b) $f(x) = \sum_{i=1}^{7} f(x|D_i)P(D_i) = \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\frac{5}{7} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\frac{2}{7} = \frac{1}{7}(e^{-\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{2}})$, per $x > 0$.

(c)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1, \\ P(X < 2) = 1 - e^{-\frac{2}{5}} & \text{si } y = 1, \\ P(\frac{X}{2} < y) = 1 - e^{-\frac{2y}{5}} & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

$$E[Y] = \int_0^2 1 \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx + \int_2^\infty \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx = 1 + \frac{5}{2}e^{-\frac{2}{5}} = 2{,}6758.$$

(d) La probabilitat que un dia de cap de setmana haguem de pagar la quota val $p = P(X > 4) = e^{-\frac{4}{2}} = e^{-2}$. La probabilitat que una setmana ens toqui pagar la quota és:

$$P(\text{Pagar en una setmana}) = 1 - P(\text{No pagar } D_6 \text{ ni } D_7) = 1 - (1-p)^2 = 2e^{-2} - e^{-4}.$$

El nombre de setmanes N fins que passa això és una variable geomètrica d'esperança:

$$\overline{N} = \frac{1}{2e^{-2} - e^{-4}} = 3{,}96.$$