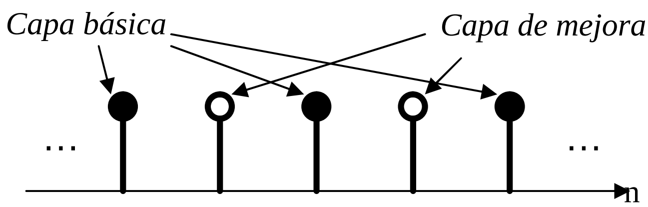
PROCESSAMENT DEL SENYAL (ETSETB)

EXAMEN DEL 22 DE JUNY DE 2007

Exercici 1

En transmisión de vídeo es habitual que un sistema de transmisión dé servicio a receptores heterogéneos; es decir, receptores con características distintas tales como su capacidad de procesado o la resolución de su pantalla. Una de las soluciones para poder transmitir un único flujo de datos que sea útil para los distintos tipos de receptores es la denominada codificación escalable. En este ejercicio se va a estudiar un caso sencillo de codificación escalable mediante predicción.
Se va a tratar el caso de tener dos tipos de receptores con resoluciones distintas, permitiendo uno reproducir el doble de píxeles que el otro tanto en horizontal como en vertical, y se va a estudiar únicamente la predicción sobre una línea de la imagen.
Inicialmente, se transmite la información necesaria para reproducir la señal de baja resolución (capa básica de la codificación escalable). En este caso simplificado, se toman las muestras pares de la señal. Esta señal diezmada se codifica mediante predicción. Para generar la señal de alta resolución, se debe transmitir las muestras impares. Estas muestras se codifican mediante interpolación (predicción no causal) sobre las muestras pares ya transmitidas (capa de mejora de la codificación escalable). En ambos casos se transmite el error de predicción.



Se supone que la señal que representa la línea de una imagen (z[n]) se puede modelar como un proceso AR(1), donde el coeficiente de correlación entre muestras consecutivas es r y la potencia del ruido blanco generador es s_w^2.

<u>*Capa básica*</u>

a) *Determinad la potencia del proceso z[n].*

Por ser un proceso AR(1) se tiene la siguiente ecuación

$$r_z[l] = r\, r_z[l-1] + s_w^2 d[l]$$

Evaluando la expresión en $l = 0$ y $l = 1$ se tiene

$$r_z[0] = r\, r_z[-1] + s_w^2 \qquad\qquad r_z[1] = r\, r_z[0]$$

Como la señal z[n] es real, $r_z[l] = r_z[-l]$ y despejando

$$r_z[0] = \frac{s_w^2}{1 - r^2}$$

b) *Calculad los coeficientes del filtro de Wiener de orden 2 que permite predecir las muestras pares de la señal z[n]. Razonad el resultado.*

Si sólo disponemos de las muestras pares, el filtro de orden 2 procesará las muestras z[n-2] y z[n-4] para obtener una estimación de z[n]. Así, el vector de entrada al filtro (vector de datos x[n]) y la señal de referencia (d[n]) serán

$$\underline{x}^T[n] = \left[z[n-2], z[n-4]\right] \qquad d[n] = z[n] \qquad \text{donde } n \text{ es par.}$$

La solución de Wiener genérica $R_x\hat{\vec{h}} = \vec{r}_{xd}$ queda

$$R_x = \begin{bmatrix} r_z[0] & r_z[-2] \\ r_z[2] & r_z[0] \end{bmatrix} \qquad \vec{r}_{xd} = \begin{bmatrix} r_z[2] \\ r_z[4] \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} r_z[0] & r^2 r_z[0] \\ r^2 r_z[0] & r_z[0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 r_z[0] \\ r^4 r_z[0] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & r^2 \\ r^2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 \\ r^4 \end{bmatrix} \qquad \text{y solucionando el sistema} \qquad \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La señal resultante de realizar el submuestreo (tomar únicamente las muestras pares) es a su vez un proceso AR(1) y, por lo tanto, con un filtro de un único coeficiente es suficiente para realizar la predicción.

c) *Calculad la ganancia de codificación (G_b) de las muestras pares definida como el cociente entre la potencia de la señal y la potencia del error.*

La potencia del error viene dado por

$$E\left\{|e[n]|^2\right\} = r_d[0] - \vec{h}^T\vec{r}_{xd} = r_z[0] - r^2 r_z[2] = r_z[0](1 - r^4)$$

Por tanto, la ganancia de la capa básica es

$$G_b = \frac{s_z^2}{s_e^2} = \frac{r_z[0]}{r_z[0](1-r^4)} = \frac{1}{1-r^4}$$

<u>*Capa de mejora*</u>

Se supone que las muestras pares de la señal han sido perfectamente recuperadas en recepción.

d) *Calculad los coeficientes del filtro de Wiener de orden 2 que permite estimar las muestras impares de la señal z[n] mediante interpolación de las muestras pares contiguas. Razonad el resultado.*

En este caso, se tiene ya las muestras pares y lo que se pretende es interpolar entre ellas las muestras impares. Así, el vector de entrada al filtro (vector de datos x[n]) y la señal de referencia (d[n]) serán

$$\underline{x}^T[n] = \left[z[n], z[n-2]\right] \qquad d[n] = z[n-1] \qquad \text{donde } n \text{ es par.}$$

La solución de Wiener genérica $R_x\hat{\vec{h}} = \vec{r}_{xd}$ queda

$$R_x=\begin{bmatrix} r_z[0] & r_z[-2] \\ r_z[2] & r_z[0]\end{bmatrix} \qquad \vec{r}_{xd}=\begin{bmatrix} r_z[-1] \\ r_z[1]\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} r_z[0] & r^2 r_z[0] \\ r^2 r_z[0] & r_z[0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\,r_z[0] \\ r\,r_z[0]\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & r^2 \\ r^2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r \\ r\end{bmatrix} \qquad \text{y solucionando el sistema} \qquad \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1\end{bmatrix}=\frac{r}{1+r^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix}$$

En este caso, la señal que se está prediciendo también es un AR(1) pero al hacer la predicción con dos muestras que están a distancia uno, ambas muestras son relevantes, e igualmente relevantes, para la predicción.

e) *Calculad la ganancia de codificación (G_m) sobre las muestras impares definida como el cociente entre la potencia de la señal y la potencia del error.*

La potencia del error viene dado por

$$E\left\{|e[n]|^2\right\}=r_d[0]-\vec{h}^T\vec{r}_{xd}=r_z[0]-\frac{r}{1+r^2}r_z[1]-\frac{r}{1+r^2}r_z[-1]=r_z[0]\frac{1-r^2}{1+r^2}$$

Por tanto, la ganancia de la capa de mejora es

$$G_m=\frac{s_z^2}{s_e^2}=\frac{r_z[0]}{r_z[0]\frac{1-r^2}{1+r^2}}=\frac{1+r^2}{1-r^2}$$

<u>Comparación con el sistema clásico (no escalable)</u>

Una medida de la calidad del sistema se obtiene comparando las prestaciones de la representación escalable de la señal a máxima resolución (capa básica más capa de mejora) con las prestaciones de la representación que se obtendría codificando directamente la señal z[n] a máxima resolución.

f) *Calculad el filtro de Wiener que permite predecir la señal z[n] y la ganancia de codificación definida como el cociente entre la potencia de la señal y la potencia del error. Comparad la ganancia obtenida con la ganancia promedio de la representación escalable de la señal a máxima resolución definida como el cociente entre la potencia de la señal y la media geométrica de las potencias de los errores de las capas básica y de mejora.*

Si se toman todas las muestras de la señal z[n], se tiene el caso de un proceso AR(1) y, por tanto, con un filtro de un único coeficiente se tiene el estimador óptimo. En este caso, el vector de entrada al filtro (vector de datos <u>x</u>[n]) y la señal de referencia (d[n]) serán

$$x[n]=z[n] \qquad d[n]=z[n-1]$$

y la ecuación de Wiener $R_x\hat{\vec{h}}=\vec{r}_{xd}$ queda

$$r_z[0]h_0=r_z[-1]=r\,r_z[0] \qquad \Rightarrow \qquad h_0=r$$

$$E\left\{\left|e[n]\right|^2\right\} = r_d[0] - \vec{h}^T \vec{r}_{xd} = r_z[0] - r\, r_z[1] = r_z[0](1 - r^2)$$

Por tanto, la ganancia en el sistema no escalable es

$$G = \frac{s_z^2}{s_e^2} = \frac{r_z[0]}{r_z[0](1 - r^2)} = \frac{1}{1 - r^2}$$

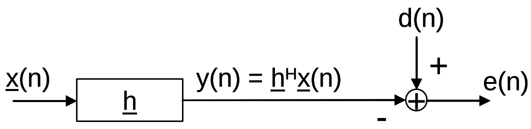
La ganancia promedio de la representación escalable viene dada por:

$$\overline{G} = \sqrt{G_b G_m} = \sqrt{\frac{1}{1 - r^4}\frac{1 + r^2}{1 - r^2}} = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - r^2\right)^2}} = \frac{1}{1 - r^2} = G$$

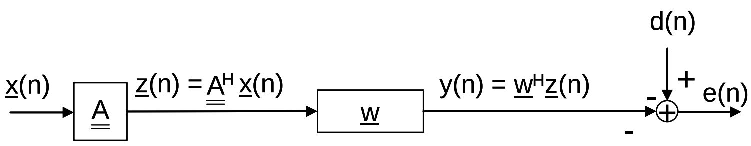
De hecho, la igualdad se consigue porque se ha supuesto que en todo el proceso de codificación no se tiene ni pérdidas (no se ha cuantificado ni las muestras de la señal ni los coeficientes de los filtros) ni es necesario enviar más información que la estricta para codificar las muestras. En un caso real, la ganancia promedio sería menor que la del sistema no escalable.

Ejercicio 2

Considere el filtro de Wiener de la figura:



Se desea obtener los coeficientes de este filtro $\underline{\mathbf{h}}_{opt}$ *mediante los algoritmos de gradiente y del LMS, que proporcionan aproximaciones* $\underline{\mathbf{h}}_k$ *de manera iterativa. Es conocido que las prestaciones de estos algoritmos dependen de la dispersión de autovalores de la matriz de autocorrelación de* $\underline{\mathbf{x}}(n)$ $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_x = E\{\underline{\mathbf{x}}(n)\underline{\mathbf{x}}^H(n)\}$*. En la práctica, con frecuencia la señal de entrada x(n) no puede elegirse libremente, por lo que la convergencia del algoritmo de gradiente está determinada por* $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_x$*.*
En este ejercicio se propone la modificación del esquema de la figura anterior a fin de mejorar esta convergencia. El nuevo esquema aplica un prefiltrado sobre $\underline{\mathbf{x}}(n)$ *con una matriz cuadrada* $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$*, de manera que se define una nueva señal* $\underline{\mathbf{z}}(n) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^H \underline{\mathbf{x}}(n)$ *y se aplica sobre ella un nuevo filtro de Wiener con coeficientes* $\underline{\mathbf{w}}$*:*



Se pide:

a) *Considere una matriz* $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ *genérica. ¿Cuál debe ser la relación entre* $\underline{\mathbf{h}}$ *y* $\underline{\mathbf{w}}$ *a fin de que ambos esquemas sean equivalentes?*

Observant el gràfic podem establir:

$$\left.\begin{aligned} y[n] &= \underline{h}^h \underline{x}[n] \\ y[n] &= \underline{w}^H \underline{z}[n] = \underline{w}^H \underline{\underline{A}}^H \underline{x}[n] = \left(\underline{\underline{A}}\underline{w}\right)^H \underline{x}[n] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{h} = \underline{\underline{A}}\underline{w}$$

b) *Halle la expresión del filtro de Wiener* $\underline{\mathbf{w}}_{opt}$ *en función de* $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$*, la autocorrelación de* $\underline{\mathbf{x}}(n)$ *y la correlación cruzada de d(n) y* $\underline{\mathbf{x}}(n)$*.*

El filtre de Wiener ve donat per $\underline{w}_{opt} = \underline{\underline{R}}_z^{-1}\underline{p}_z$ on

$$\underline{\underline{R}}_z = E\{\underline{z}[n]\underline{z}^H[n]\} = \underline{\underline{A}}^H E\{\underline{x}[n]\underline{x}^H[n]\}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{R}}_x \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{p}_z = E\{\underline{z}[n]d^*[n]\} = \underline{\underline{A}}^H E\{\underline{x}[n]d^*[n]\} = \underline{\underline{A}}^H \underline{p}_x$$

Substituint: $\underline{w}_{opt} = \underline{\underline{R}}_z^{-1}\underline{p}_z = \left(\underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{R}}_x \underline{\underline{A}}\right)^{-1}\underline{\underline{A}}^H \underline{p}_x = \left(\underline{\underline{R}}_x \underline{\underline{A}}\right)^{-1}\underline{p}_x = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{R}}_x^{-1}\underline{p}_x$

Alternativament, si $\underline{h} = \underline{\underline{A}}\underline{w}$ i $\underline{h}_{opt} = \underline{\underline{R}}_x^{-1}\underline{p}_x$ llavors $\underline{w}_{opt} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{h}_{opt} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{R}}_x^{-1}\underline{p}_x$

c) *Formule la ecuación de actualización de* $\underline{w}$ *en la iteración k+1 del algoritmo de gradiente (*$\underline{w}_{k+1}$*) en función del gradiente del error cuadrático medio respecto a* $\underline{w}$*. Exprese el resultado en función de* $\underline{w}_k$*, el paso de actualización m,* $\underline{\underline{A}}$*, la autocorrelación de* $\underline{x}(n)$ *y la correlación cruzada de d(n) y* $\underline{x}(n)$*.*

$$\underline{w}_{k+1} = \underline{w}_k - m\nabla_k e^2 = \underline{w}_k - m\left(\underline{\underline{R}}_z \underline{w}_k - \underline{p}_z\right) = \underline{w}_k - m\left(\underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{R}}_x \underline{\underline{A}}\underline{w}_k - \underline{\underline{A}}^H \underline{p}_x\right)$$

d) *Justifique que la actualización de los coeficientes* $\underline{\mathbf{w}}_{k+1}$ *según el resultado del apartado anterior es equivalente a la actualización de los coeficientes* $\underline{\mathbf{h}}_{k+1}$ *según la ecuación:*

$$\underline{\mathbf{h}}_{k+1} = \underline{\mathbf{h}}_k - m\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^H\,Ñ_h x$$

siendo x el error cuadrático medio.

$\underline{h}_{k+1} = \underline{\underline{A}}\underline{w}_{k+1}$, premultiplicant l'expressió obtinguda en *c)* per $\underline{\underline{A}}$:

$$\underline{h}_{k+1} = \underline{\underline{A}}\underline{w}_{k+1} = \underline{\underline{A}}\underline{w}_k - m\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{R}}_x \underline{\underline{A}}\underline{w}_k - m\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^H \underline{p}_x$$

$$\underline{h}_{k+1} = \underline{h}_k - m\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{R}}_x \underline{h}_k - m\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^H \underline{p}_x$$

$$\underline{h}_{k+1} = \underline{h}_k - m\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^H\left(\underline{\underline{R}}_x \underline{h}_k - m\underline{p}_x\right) = \underline{h}_k - m\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^H\nabla_k e^2$$

e) *Considere el caso en que* $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{L}}^{-½}$*, siendo la descomposición en autovalores y autovectores de*
$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_x = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^H$*. Justifique que en este caso la actualización de los coeficientes* $\underline{\mathbf{h}}_{k+1}$ *es:*

$$\underline{\mathbf{h}}_{k+1} = \underline{\mathbf{h}}_k - m\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}_x^{-1}\,Ñ_h x$$

La matriu d'autovalors $\underline{\underline{\Lambda}}$ és diagonal i té coeficients reals, de manera que $\underline{\underline{\Lambda}}^{-½}\left(\underline{\underline{\Lambda}}^{-½}\right)^H = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1}$. Per tant:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^H = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{\Lambda}}^{-½}\left(\underline{\underline{\Lambda}}^{-½}\right)^H \underline{\underline{Q}}^H = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{\Lambda}}^{-1}\underline{\underline{Q}}^H = \underline{\underline{R}}_x^{-1}$$

$$\underline{h}_{k+1} = \underline{h}_k - m\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^H\nabla_k e^2 = \underline{h}_k - m\underline{\underline{R}}_x^{-1}\nabla_k e^2$$

f) *Analice la convergencia del error de coeficientes* $\underline{\mathbf{v}}_k = \underline{\mathbf{h}}_{opt} - \underline{\mathbf{h}}_k$ *de la ecuación del apartado e) en función de los autovalores de la matriz* $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_x$ *e indique las ventajas de este algoritmo frente al algoritmo de gradiente clásico.*

$$\left.\begin{array}{l} \underline{h}_{k+1} = \underline{h}_k - m\underline{\underline{R}}_x^{-1}\left(\underline{\underline{R}}_x \underline{h}_k - \underline{p}_x\right) = \underline{h}_k - m\left(\underline{h}_k - \underline{\underline{R}}_x^{-1}\underline{p}_x\right) \\ \underline{h}_{opt} = \underline{\underline{R}}_x^{-1}\underline{p}_x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{h}_{k+1} - \underline{h}_{opt} = (1-m)\underline{h}_k - (1-m)\underline{h}_{opt} = (1-m)\left(\underline{h}_k - \underline{h}_{opt}\right)$$

Si definim $\underline{v}_k = \underline{h}_k - \underline{h}_{opt}$ i $\underline{v}_{k+1} = \underline{h}_{k+1} - \underline{h}_{opt}$ llavors:

$$\underline{v}_{k+1} = (1-m)\underline{v}_k = (1-m)^{k+1}\underline{v}_0$$

on es pot observar que l'error de tots els coeficients ($\underline{v}_k = \underline{h}_k - \underline{h}_{opt}$) decreixen amb la mateixa constant de temps $(1-m)$. Així doncs, aquest algorisme no té la dependència de la rapidesa de convergència amb la dispersió d'autovalors de la matriu que caracteritza el LMS. Aquí la velocitat de convergència només depèn de la m triada.

g) *¿Cuál es el valor de m que permite la convergencia más rápida del algoritmo del apartado* ***e****) a la solución* $\underline{\mathbf{h}}_{opt}$*? Discuta la conveniencia de emplear este valor si en vez de emplear el algoritmo de gradiente se sustituye el gradiente por su estimación instantánea, obteniendo una versión modificada del algoritmo del LMS.*

La convergència més ràpida la obtindrem per $m = 1$, és a dir l'error és nul en una sola iteració.

En el cas d'utilitzar una estimació instantània del gradient del error (cas del LMS) seria recomanable un valor $m < 1$ ja que en aquest cas l'error de desajust creix amb m.

Ejercicio 3

Es vol filtrar un senyal $\underline{x}$*, que està format per un senyal estacionari* $\underline{s}$ *i un soroll estacionari* $\underline{w}$*:*

$$\underline{x} = \underline{s} + \underline{w}$$

El filtrat de $\underline{x}$ *el podem plantejar vectorialment com la transformació del vector de senyal* $\underline{x}$ *amb una matriu quadrada* $\underline{\underline{H}}$ *per tal d'obtenir el senyal filtrat* $\underline{y} = \underline{\underline{H}}\,\underline{w}$*.*

L'objectiu d'aquest filtrat és el de minimitzar l'error quadràtic mitjà entre $\underline{s}$ *i* $\underline{y}$*. Suposant que el senyal i el soroll són reals, tenen mitjana nul·la i són independents entre ells, es pot demostrar que el filtre òptim* $\underline{\underline{H}}_o$ *que minimitza l'error quadràtic mitjà entre* $\underline{s}$ *i* $\underline{y}$ *ve donat per* $\underline{\underline{H}}_o = \underline{\underline{R}}_s\,\underline{\underline{R}}_x^{-1}$*.*

Es demana:

h) *Demostrar que, si* $\underline{w}$ *és soroll blanc, els autovectors de les matrius d'autocorrelació dels senyals* $\underline{s}$ *i* $\underline{x}$ *són els mateixos. Quina és la relació entre els autovalors de* $\underline{\underline{R}}_s$ *i de* $\underline{\underline{R}}_x$ *si la potència del soroll és* s_w^2*?*

Com que $\underline{s}$ i $\underline{w}$ són independents es cumpleix que

$$\underline{\underline{R}}_x = E\left\{\underline{x}\underline{x}^T\right\} = E\left\{(\underline{s}+\underline{w})(\underline{s}+\underline{w})^T\right\} = E\left\{\underline{s}\underline{s}^T\right\} + E\left\{\underline{w}\underline{w}^T\right\} = \underline{\underline{R}}_s + \underline{\underline{R}}_w$$

i gràcies a l'ortogonalitat dels autovectors de la matriu d'autocorrelació

$$\left.\begin{array}{r}\underline{\underline{R}}_S = \underline{\underline{Q}}_S\,\underline{\underline{\Lambda}}_S\,\underline{\underline{Q}}_S^T \\ \underline{\underline{R}}_W = s_W^2\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{Q}}_S\left(s_W^2\underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{Q}}_S^T\end{array}\right\} \quad \underline{\underline{R}}_X = \underline{\underline{Q}}_S\left(\underline{\underline{\Lambda}}_S + s_W^2\underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{Q}}_S^T$$

Per tant, els autovectors i autovalors de $\underline{\underline{R}}_X$ són:

$$\underline{\underline{R}}_X = \underline{\underline{Q}}_X\,\underline{\underline{\Lambda}}_X\,\underline{\underline{Q}}_X^T \Rightarrow \begin{cases}\underline{\underline{Q}}_X = \underline{\underline{Q}}_S \\ \underline{\underline{\Lambda}}_X = \underline{\underline{\Lambda}}_S + s_W^2\underline{\underline{I}}\end{cases}$$

i) *Demostrar que, en el cas que el soroll sigui blanc, el filtre òptim $\underline{\underline{H}}_o$ pot expressar-se com $\underline{\underline{H}}_o = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{\Sigma}}\,\underline{\underline{Q}}^T$, on $\underline{\underline{Q}}$ és la transformació de Karhunen-Loève (Hotellin).*

La transformació KL ve donada pels autovectors de la matriu d'autocorrelació, és a dir $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}}_S = \underline{\underline{Q}}_X$. Substituint:

$$\underline{\underline{H}}_o = \underline{\underline{R}}_S\underline{\underline{R}}_X^{-1} = \underline{\underline{Q}}_S\,\underline{\underline{\Lambda}}_S\,\underline{\underline{Q}}_S^T\underline{\underline{Q}}_X\,\underline{\underline{\Lambda}}_X^{-1}\,\underline{\underline{Q}}_X^T = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{\Lambda}}_S\underline{\underline{\Lambda}}_X^{-1}\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{\Sigma}}\,\underline{\underline{Q}}^T$$

sent $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}}_S\underline{\underline{\Lambda}}_X^{-1}$ una matriu diagonal amb coeficients $s_i = \dfrac{l_{S_i}}{l_{S_i} + s_W^2}$

j) *Quina és la matriu d'autocorrelació dels vector transformats $\underline{X}$, $\underline{S}$ i $\underline{W}$ en funció dels autovalors de $\underline{\underline{R}}_S$ i de la potència del soroll s_w^2?*

$$\underline{X} = \underline{\underline{Q}}^T\underline{x} \Rightarrow E\left\{\underline{X}\,\underline{X}^T\right\} = \underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{R}}_X\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\Lambda}}_S + s_W^2\underline{\underline{I}}$$
$$\underline{S} = \underline{\underline{Q}}^T\underline{s} \Rightarrow E\left\{\underline{S}\,\underline{S}^T\right\} = \underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{R}}_S\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\Lambda}}_S$$
$$\underline{W} = \underline{\underline{Q}}^T\underline{w} \Rightarrow E\left\{\underline{W}\,\underline{W}^T\right\} = \underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{R}}_W\underline{\underline{Q}} = s_W^2\underline{\underline{I}}$$

k) *Raonar per què la matriu $\underline{\underline{\Sigma}}$ és una matriu diagonal.*

L'estimació de $\underline{S}$ a partir de $\underline{X}$ es fa mitjançant el filtrat $\underline{Y}$ = $\underline{S}$ = $\underline{\underline{\Sigma}}$ $\underline{X}$. Degut a que les components de $\underline{X}$, $\underline{S}$, $\underline{W}$ estan incorrelades entre si (les matrius d'autocorrelació respectives són diagonals), l'única mostra de $\underline{X}$ que aporta informació per a l'estimació i-èssima de $\underline{S}$ és la component i-èssima de $\underline{X}$. En conseqüència, la matriu de filtrat òptima $\underline{\underline{\Sigma}}$ és diagonal.