Introducción a la Lógica. Parcial 2 **Abril 2007** **Tiempo: 90 min.**

1: (3 puntos) Cinco individuos, llamémosles 1,2,3,4 y 5, van de juerga en un solo coche. Todos excepto el individuo 2 son conductores (tienen carnet). Si 3 y 4 beben, 1 también lo hace. El individuo 2 hace siempre todo lo contrario que 1, y 3 siempre imita lo que hace 4, quien a su vez hace siempre lo contrario que 5. El personaje 5 no quiere morir en accidente, por lo que no bebe si beben todos los demás conductores.

Sabiendo todo esto, ¿es cierto que 5 bebe si y sólo si 2 bebe? Formaliza cada frase y demuéstralo usando DPLL, explicando muy brevemente qué haces y qué concluyes.

`SOLUCIÓN:` Usando k (con k en 1..,5) para denotar "k bebe", se obtienen las cláusulas siguientes:
"Si 3 y 4 beben, 1 tambien lo hace": $\neg 3 \vee \neg 4 \vee 1$.
"2 hace siempre todo lo contrario que 1", dos cláusulas: $\neg 1 \vee \neg 2$, y $1 \vee 2$.
"3 siempre imita lo que hace 4", dos cláusulas: $\neg 3 \vee 4$, y $3 \vee \neg 4$.
"4 hace siempre todo lo contrario que 5", dos cláusulas: $\neg 4 \vee \neg 5$, y $4 \vee 5$.
"5 no bebe si beben todos los demás conductores": $\neg 1 \vee \neg 3 \vee \neg 4 \vee \neg 5$.
Hay que ver si esto tiene $5 \leftrightarrow 2$ como consecuencia lógica, es decir, si es insatisfactible si añadimos las cláusulas correspondientes a $\neg(5 \leftrightarrow 2)$, que son $5 \vee 2$ y $\neg 5 \vee \neg 2$. Puesto que DPLL acaba con el modelo $5\ \neg 4\ \neg 3\ 1\ \neg 2$, no es cierto que 5 bebe si y sólo si 2 bebe (no damos aquí la secuencia de pasos de DPLL, porque puede ser de diversas maneras).

2: (3.5 puntos) Una universidad quiere que hagamos sus horarios, un conocido problema NP-completo. Hay 400 asignaturas, con una hora semanal de clase cada una. La semana tiene 40 horas lectivas. Nos dan una lista de profesores donde, por cada uno de ellos, figura la lista de las asignaturas que imparte, y una lista de estudiantes con, por cada estudiante, la lista de asignaturas de las que se ha matriculado. Evidentemente, no pueden impartirse simultáneamente dos asignaturas si tienen el mismo profesor, ni si tienen un mismo estudiante entre sus matriculados.

A: Suponiendo que siempre hay aulas suficientes, expresa este problema como una CNF, usando 16000 símbolos p_{ij} que significan: "la asignatura i se imparte en la hora j".

B: ¿Cómo cambiarías o extenderías tu solución si además te dieran por cada profesor una lista de horas en las que no puede dar clase?

C: ¿Y si además te dijeran que hay sólo 10 aulas? (en este punto **C** no es necesario dar detalles).

`SOLUCIÓN:` Nota: Los apartados A y B son muy similares a los sudokus, o el coloreado de grafos:

A: Damos cláusulas que indican que:
– cada asignatura se da como mínimo en una de las 40 horas:
$p_{1,1} \vee \ldots \vee p_{1,40} \quad \ldots \quad p_{400,1} \vee \ldots \vee p_{400,40}$ (por cada asignatura, 1 cláusula de 40 literales)
– cada asignatura i se da como máximo en una de las 40 horas:
$\neg p_{i,1} \vee \neg p_{i,2} \quad \ldots \quad \neg p_{i,39} \vee \neg p_{i,40}$ (por cada asignatura i, 40 sobre 2 cláusulas de 2 literales)
– por cada par de asignaturas i e i' incompatibles entre sí (por compartir profesor o algún alumno) indicamos que no coinciden en ninguna de las 40 horas:
$\neg p_{i,1} \vee \neg p_{i',1} \quad \ldots \quad \neg p_{i,40} \vee \neg p_{i',40}$ (por cada par (i, i'), 40 cláusulas de 2 literales).

B: Si el profe de la asignatura i no puede dar clase en la hora j, una cláusula de un solo literal $\neg p_{i,j}$.

C: (Apartado no tan fácil como los anteriores, para los que desean sacar un sobresaliente).
Hay varias soluciones posibles:
1. Añadir clausulas diciendo por cada hora j, y por cada subconjunto de 11 asignaturas $i1, ..., i11$, que al menos una de ellas no se imparte: $\neg p_{i1,j} \vee \ldots \vee \neg p_{i11,j}$. Son 40 veces 400 sobre 11 clausulas.
2. Cambiar a notación $p_{i,j,k}$, donde la k indica el número de aula. Hay que añadir cláusulas que expresen, entre otras cosas, que en cada aula en cada hora hay como máximo una asignatura.
3. Usar sumadores o contadores para expresar por cada hora j que $p_{1,j} + ... + p_{400,j} \leq 10$.

3: (3.5 puntos) Definimos:

- *Negando* un literal de la forma $\neg p$ obtenemos p, y negando un literal p obtenemos $\neg p$.
- Si C es una cláusula, C^{-1} es la cláusula obtenida al negar todos sus literales.
- Si S es un conjunto de cláusulas $\{C_1, \ldots, C_n\}$, entonces S^{-1} es $\{C_1^{-1}, \ldots, C_n^{-1}\}$.
- Dada una interpretación I, su negación I^{-1} se define: $I^{-1}(p) = 1 - I(p)$ para todo $p \in \mathcal{P}$.
- Una cláusula de *DualHorn* es una cláusula con como mucho un literal negativo.
- La regla deductiva de la *Resolución Unitaria Dual* es:

$$\frac{\neg p \qquad p \vee C}{C} \qquad \textit{Resolución Unitaria Dual}$$

A: Demuestra que un conjunto de cláusulas S es satisfactible si y sólo si S^{-1} es satisfactible.

B: Demuestra que $\Box \in \mathit{ResUnitDual}(S)$ si y solo si $\Box \in \mathit{ResUnit}(S^{-1})$.

C: Demuestra que la Resolución Unitaria Dual es refutacionalmente completa para conjuntos de cláusulas de DualHorn. Expresa primero claramente qué es lo que hay que demostrar.

Ayuda: está permitido usar (sin demostrarla) la completitud refutacional de la resolución unitaria para cláusulas de Horn.

`SOLUCIÓN:`

A: Demostramos que S satisfactible implica S^{-1} satisfactible. Esto también da la implicación inversa, porque $(S^{-1})^{-1} = S$. Demostramos que $I \models S$ implica $I^{-1} \models S^{-1}$. $I \models S$ implica que para toda cláusula C de S tenemos $I \models C$, es decir, que hay un literal l en C tal que $I \models l$. Pero entonces I^{-1} satisface a la negación de l, por lo que $I^{-1} \models C^{-1}$. Luego $I^{-1} \models S^{-1}$.

B: A dos cláusulas $\neg p$ y $p \vee C$ se les puede aplicar Resolución Unitaria Dual, obteniendo C, si y sólo si a p y $\neg p \vee C^{-1}$ se les puede aplicar Resolución Unitaria, obteniendo C^{-1}. Es decir, todo paso del proceso de clausura para calcular $\mathit{ResUnitDual}(S)$ tiene su paso correspondiente al calcular $\mathit{ResUnit}(S^{-1})$ y vice versa, por lo que $\Box \in \mathit{ResUnitDual}(S)$ si y sólo si $\Box \in \mathit{ResUnit}(S^{-1})$.
(Nota: esto se puede formalizar más, por inducción, pero no lo exigiremos en la corrección).

C: Hay que demostrar que si S es un conjunto insatisfactible de cláusulas de DualHorn, entonces $\Box \in \mathit{ResUnitDual}(S)$. Tenemos:

S insatisfactible, lo cual implica (por el apartado A)
S^{-1} insatisfactible, lo cual implica (por compl.refut. de $\mathit{ResUnit}$ para S^{-1}, que es de Horn)
$\Box \in \mathit{ResUnit}(S^{-1})$, lo cual implica (por el apartado B)
$\Box \in \mathit{ResUnitDual}(S)$.