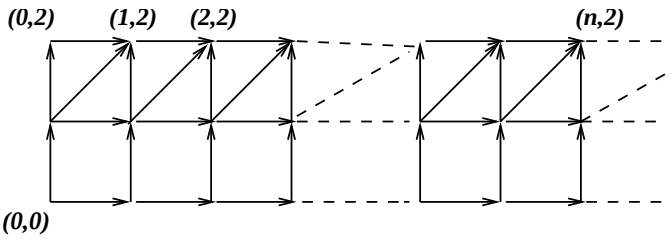
Totes les respostes de l'examen han de ser raonades

1. [3 punts: l'apartat e val 1 punt, la resta 0,5 punts]
   (a) Calcula el nombre de maneres de repartir 12 caramels de maduixa entre 5 nens de forma que cadascun d'ells rebi un nombre parell de caramels.
   (b) Troba la funció generadora ordinària de la successió $(1, 0, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 1, 0, 4, \ldots)$.
   (c) Calcula el nombre de successions recurrents $(a_n)_{n\geq 0}$ que hi ha complint la recurrència $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, per a tot $n \geq 2$, i tals que $a_n \in \mathbb{F}_5$, per a tot $n \geq 0$.
   (d) Dóna un graf G tal que $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$, on $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ i $\delta(G)$ són la vèrtex-connectivitat, l'aresta-connectivitat i el grau mínim de G, respectivament.
   (e) Justifica la veracitat o falsedat de les afirmacions següents:
      i. Tot graf hamiltonià és 2-connex.
      ii. Tot graf 2-connex és hamiltonià.
      iii. Els grafs eulerians no tenen vèrtexs de tall.
      iv. Els grafs eulerians no tenen arestes pont.

2. [2 punts] En el diagrama següent, considerem camins que van del punt $(0, 0)$ al punt $(n, 2)$, $n \geq 0$, seguint la direcció de les fletxes. Sigui a_n el nombre d'aquests camins. Demostra que $a_{n+1} = a_n + 2n + 3$ i troba a_n.



3. [2,5 punts] Sigui $T = (V, A)$ un arbre d'ordre $n \geq 2$. Sigui n_i el nombre de vèrtexs de grau i a T.
   (a) [0,75 punts] Demostra que: $n_1 = 2$ si, i només si, T és isomorf al graf trajecte T_n.
   (b) [0,75 punts] Demostra que: $n_1 = 3$ si, i només si, $n_3 = 1$ i $n_k = 0$, per a tot $k \geq 4$.
   (c) [0,5 punts] Troba, llevat d'isomorfismes, tots els arbres d'ordre 7 amb $n_1 = 3$.
   (d) [0,5 punts] Dóna el nombre d'arbres diferents que hi ha amb conjunt de vèrtexs [7] i $n_1 = 3$.

4. [2,5 punts: l'apartat b val 1 punt, la resta 0,5 punts]
   (a) Troba tots els polinomis irreductibles de grau menor o igual a 3 de $\mathbb{F}_2[x]$.
   (b) Demostra que $x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ és un polinomi primitiu. Sigui $\alpha = \overline{x}$ a $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x^3 + 1)$. Dóna la taula de logaritmes en base α.
   (c) Esbrina si $\alpha + 1$ és un quadrat a $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x^3 + 1)$. En cas afirmatiu, dóna les seves arrels.
   (d) Resol el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} (\alpha^2+1)u + \alpha^3 v & = & \alpha \\ (\alpha+1)u + (\alpha^2+\alpha)v & = & \alpha^3+1 \end{array}\right\}$$

- La solució i les notes es penjaran al *Racó* el 3 de juliol al matí o abans.
- La revisió es farà el 4 de juliol de 14:00 a 15:00 hores a l'aula A6101, Campus Nord.

Una possible solució

Problema 1

(a) Sigui x_i el nombre de parells de caramels que pot rebre el nen i, per a tot $i \in [5]$. El nombre de maneres de repartir 12 (sis parells) de caramels entre 5 nens de forma que cadascun en rebin un nombre parell equival al nombre de solucions de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$. La solució és $\binom{5-1+6}{6}$.

(b) La successió de l'enunciat és la suma de les successions $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ...)$ i $(0, 0, 1, 0, , , 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, ...)$, per tant la seva funció generadora ordinària (fgo) serà la suma de les fgo's d'aquestes dues successions.

La fgo de la successió $\{1\}_{n\geq 0}$ és $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ i la de $\{n+1\}_{n\geq 0}$ és

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

També es pot calcular tenint en compte que la successió $\{n+1\}_{n\geq 0}$ és la successió de les sumes parcials de $\{1\}_{n\geq 0}$. Aleshores, si $A(x)$ és la fgo de $\{1\}_{n\geq 0}$, la funció $A(x)/(1-x)$ és la fgo de $\{n+1\}_{n\geq 0}$.

Usant les propietats següents de les sèries de potències: (1) substitució de x per x^3, i (2) desplaçament a la dreta, s'obté

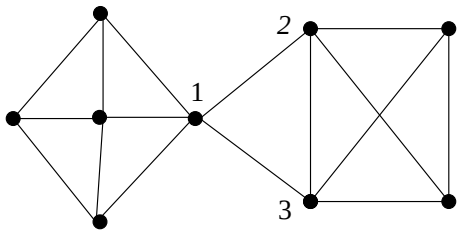
$$\begin{aligned}
(1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,\ldots) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-x^3} \qquad (1)\\
(1,0,0,2,0,0,3,0,0,4,\ldots) &\longleftrightarrow \frac{1}{(1-x^3)^2} \qquad (1)\\
(0,0,1,0,0,2,0,0,3,0,\ldots) &\longleftrightarrow \frac{x^2}{(1-x^3)^2} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Sumant,

$$(1,0,1,0,2,1,0,3,1,0,4,\ldots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x^3} + \frac{x^2}{(1-x^3)^2} = \frac{1+x^2-x^3}{(1-x^3)^2}.$$

(c) La successió recurrent queda determinada per les condicions inicials, en aquest cas pels valors d'a_0 i d'a_1. Atès que els elements són d'un cos finit de 5 elements, el nombre de successions és 5^2.

(d) Sigui G el graf dibuixat. Aquest graf té un vèrtex de tall, el vèrtex 1. Atès que totes les arestes de G són a un cicle, no hi ha cap aresta pont, però el conjunt d'arestes $\{12, 13\}$ és de tall. El Així $\kappa(G) = 1$; $\lambda(G) = 2$ i $\delta(G) = 3$.

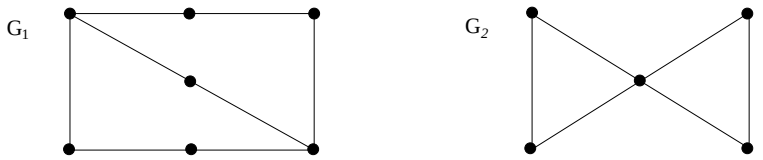


(e)

i. Certa. Un cicle és un graf 2-connex. Com que tot graf hamiltonià conté un subgraf generador que és un cicle, el graf també és 2-connex.

ii. Falsa. El graf G_1 del dibuix és 2-connex però no és hamiltonià, ja que qualsevol cicle que passes per tots els vèrtexs hauria de passar per totes les arestes, el que implicaria que passaria per les tres arestes incidents al vèrtex a, per exemple, i un cicle només passa per dues arestes diferents incidents a un vèrtex.

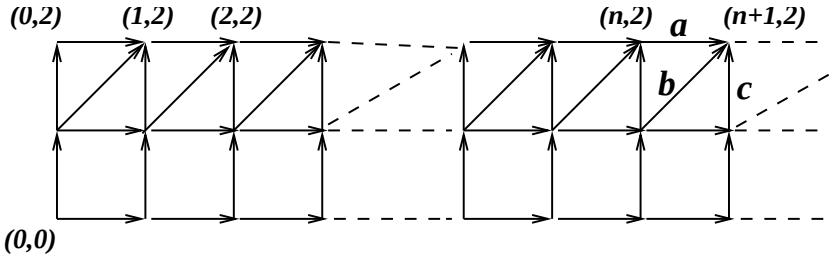
iii. Falsa. El graf G_2 del dibuix és eulerià (connex amb tots els vèrtexs de grau parell) però té un vèrtex de tall.



iv. Certa. Si el graf és eulerià i s'elimina una aresta, el circuit eulerià que tenia el graf és converteix en un senderó eulerià, per tant el graf roman connex.

Problema 2

Per al plantejament de la recurrència, considerem un camí de $(0,0)$ a $(n+1,2)$. Aquest camí ha d'utilitzar una de les arestes a, b, c del dibuix següent per arribar al punt $(n+1,2)$.



Per tant, tenim tres opcions per arribar a $(n+1,2)$.

a) Prendre qualsevol camí de $(0,0)$ a $(n,2)$ i afegir l'aresta a.

b) Prendre qualsevol camí de $(0,0)$ a $(n,1)$ i afegir l'aresta b.

c) Prendre qualsevol camí de $(0,0)$ a $(n+1,1)$ i afegir l'aresta c.

Ara comptem de quants camins diferents ens dóna cadascuna de les opcions. La opció a) proporciona tants camins com maneres d'arribar a $(n,2)$, és a dir, a_n. Per a la opció b), hem de comptar el nombre de maneres d'anar de $(0,0)$ a $(n,1)$. Fixem-nos que un d'aquests camins està completament determinat per la posició del pas vertical que ens porta de l'alçada 0 a l'alçada 1. Com que podem triar entre $n+1$ passes verticals, deduïm que hi ha $n+1$ camins de tipus b). Finalment, per a la opció c) hem de comptar de camins de $(0,0)$ a $(n+1,1)$; aquests ja els hem comptat abans i sabem que n'hi ha $n+2$.

Ajuntant-ho tot tenim que

$$a_{n+1} = a_n + (n+1) + (n+2) = a_n + 2n + 3,$$

tal i com volíem demostrar.

Ara només queda resoldre la recurrència; es tracta d'una recurrència lineal amb coeficients constants i no homogènia. Podem seguir diverses estratègies per resoldre-la.

OPCIÓ 1

El polinomi característic de l'equació recurrent és $x-1$ i la funció generadora del terme no homogeni és

$$\sum_{n\geq 0}(2n+3)x^n = 2\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n + \sum_{n\geq 0}x^n = \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)}.$$

Per tant, la funció generadora de la successió (a_n) és de la forma

$$\frac{P(x)}{(1-x)^3},$$

on $P(x)$ és un polinomi de grau menor o igual que 2.

Com que l'arrel del denominador és 1 i té multiplicitat 3, sabem que a_n serà de la forma $a + bn + cn^2$ per certes constants a, b, c. Per a trobar-les, imposem que es compleixin les condicions inicials. Tenim que $a_0 = 1$, i usant la recurrència (o bé calculant directament) deduïm que $a_1 = 4$ i $a_2 = 9$. Finalment, trobem que $a = 1, b = 2, c = 1$ i per tant $a_n = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

OPCIÓ 2

La solució d'una equació recurrent no homogènia és de la forma $a_n = h_n + p_n$, on h_n és la solució general de l'equació homogènia i p_n és una solució particular de l'equació no homogènia.

L'equació homgènia és $a_{n+1} - a_n = 0$ i té per solució general $a_n = a$, on a és una constant.

El terme no homogeni és $2n + 3 = (2n + 3)(1)^n$. Com que 1 és una arrel de multiplicitat 1 del polinomi característic de la recurrència, tenim que $p_n = (b + cn)n$, on b, c són constants a determinar. Imposem que p_n satisfaci l'equació recurrent no homogènia:

$$(b + c(n + 1))(n + 1) = (b + cn)n + 2n + 3 \Rightarrow b + c(2n + 1) - 2n - 3 = 0 \Rightarrow c = 1, b = 2.$$

Per tant, $a_n = a + 2n + n^2$. Imposant que $a_0 = 1$ deduïm que $a = 1$ i que $a_n = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

OPCIÓ 3

Aquesta recurrència també es pot resoldre pel mètode de substitució "cap enrere":

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2n + 1 = a_{n-2} + 2(n-1) + 1 + 2n + 2 = a_{n-2} + 2(n + (n-1)) + 2 \\ &= a_{n-3} + 2(n + n - 1 + n - 2) + 3 = \cdots = a_0 + 2\sum_{i=0}^{n-1}(n - i) + n = 1 + 2\frac{n(n+1)}{2} + n = (n + 1)^2. \end{aligned}$$

Una altra possible solució

Una altra manera d'atacar el problema és calcular a_n directament, sense usar la recurrència. Observem el següent: tot camí de $(0, 0)$ a $(n, 2)$ està compost de diverses passes horitzontals i, o bé dues passes verticals, o bé una passa vertical i una diagonal. Un camí del primer tipus té n passes horitzontals i dues verticals, per tant en total tenim $\binom{n+2}{2}$ camins, ja que només ens cal escollir la posició de les dues passes verticals dins del camí. En el cas que hi hagi una passa vertical i una diagonal, el nombre de passes horitzontals és $n - 1$; aleshores tenim $\binom{n+1}{2}$ camins, ja que només cal escollir dues posicions, la primera serà la passa vertical i la segona la diagonal (perquè no podem anar en diagonal si abans no hem pujat). Per tant,

$$a_n = \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{2} = \frac{(n+2)(n+1) + (n+1)n}{2} = (n + 1)^2.$$

Per a completar el que ens demana l'enunciat, hem de demostrar també que a_n satisfà la recurrència. Com que per trobar a_n no hem fet servir la recurrència, només ens cal comprovar que $a_n = (n + 1)^2$ la satisfà:

$$a_{n+1} = (n + 2)^2 = ((n + 1) + 1))^2 = (n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1 = (n + 1)^2 + 2n + 3 = a_n + 2n + 3.$$

Solució exercici 3. Suposem que T és un arbre d'ordre n, mida m i grau màxim Δ (és a dir, $n_\Delta \geq 1$ i $n_k = 0$ si $k > \Delta$).

(a)
$\Leftarrow$) Per definició de graf trajecte: si $n \geq 2$, T_n té exactament dos vèrtexs de grau 1 i $n-2$ vèrtexs de grau 2.
$\Rightarrow$) Si $T = (V, A)$ és un arbre d'ordre n i mida m, llavors $m = n - 1$. Pel lema de les encaixades, $\sum_{u \in V} g(u) = 2m$. Però $\sum_{u \in V} g(u) = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \cdots + \Delta n_\Delta$ i $2m = 2(n-1) = 2(n_1+n_2+n_3+n_4+\cdots+n_\Delta-1) = 2n_1+2n_2+2n_3+2n_4+\cdots+2n_\Delta-2$, ja que un arbre d'ordre $n \geq 2$ no té vèrtexs de grau 0. Si igualem i aïllem n_1 obtenim

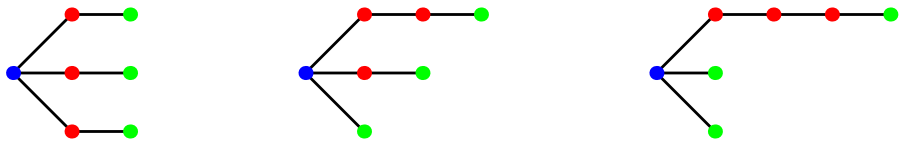
$$n_1 = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \cdots + (\Delta - 2)n_\Delta + 2 \quad (*)$$

Si $n_1 = 2$, llavors $n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \cdots + (\Delta - 2)n_\Delta = 0$. Per ser $n_k \geq 0$ si $k \geq 0$, obtenim $n_3 = n_4 = \cdots = n_\Delta = 0$, que és una contradicció si $\Delta \geq 3$. Per tant, $\Delta \leq 2$.

Per tant, T només té dos vèrtexs u, v de grau 1, i la resta de grau 2. Els vèrtexs $x \neq u, v$ de l'únic $u - v$ camí en T tenen grau almenys 2, i no són adjacents a cap altre vèrtex de l'arbre per ser $\Delta \leq 2$, és a dir, formen un component connex de T. Per ser T connex, T conté només l'$u - v$ camí, és a dir, és isomorf a T_n.

(b) Utilitzem l'equació $(*)$ obtinguda a l'apartat (a).
$\Leftarrow$) Si substituïm $n_3 = 1$ i $n_k = 0$, si $k \geq 4$, a $(*)$, obtenim $n_1 = 3$.
$\Rightarrow$) Si substituïm $n_1 = 3$ a $(*)$, obtenim $1 = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \cdots + (\Delta - 2)n_\Delta$. Per ser tots els sumands ≥ 0, i a partir del segon ≥ 2 si no són nuls, ha de ser $n_k = 0$ per a $k \geq 4$, i conseqüentment, $n_3 = 1$.

(c) Per l'apartat (b), equival a trobar tots els arbres d'ordre 7 amb $n_3 = 1$ i $n_k = 0$, si $k \geq 4$. Per tant, $n_1 = 3$, $n_3 = 1$ i $n_2 = 7 - 1 - 3 = 3$. És a dir, la seqüència de graus de l'arbre és $(3, 2, 2, 2, 1, 1, 1,)$. El vèrtex de grau 3 no pot ser adjacent a tres vèrtexs de grau 1, ja que l'arbre tindria un component connex d'ordre 4 i no seria connex. Per tant, el vèrtex de grau 3 pot ser adjacent a tres vèrtexs de grau 2, o bé a dos vèrtexs de grau 2 i un de grau 1, o bé a 1 vèrtex de grau 2 i dos de grau 1. En els tres casos, l'arbre només es pot completar amb els tres vèrtexs restants d'una manera, llevat d'isomorfismes, tal com es mostra a la figura següent. Per tant, hi ha exactament tres arbres d'ordre 7 amb $n_1 = 3$, llevat d'isomorfismes.



(d) Tal com hem vist a l'apartat (c), equival a comptar el nombre d'arbres diferents amb $V = [7]$ i seqüència de graus $(3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$.

Podem triar el vèrtex de grau 3 de 7 maneres diferents; a continuació els tres vèrtexs de grau 2 de $\binom{6}{3}$ maneres, i els vèrtexs restants tindran grau 1.

Si $u, x, y, z \in [7]$ són els vèrtexs tals que $g(u) = 3$ i $g(x) = g(y) = g(z) = 2$, i la resta tenen grau 1, llavors hi ha tants arbres diferents com seqüències de Prüfer on apareix dues vegades u i una vegada cadascun dels vèrtexs x, y, z, és a dir tants com possibles ordenacions de la permutació amb repetició u, u, v, w, t. N'hi ha $\binom{5}{2,1,1,1}$.

En total hi ha, doncs, $7 \cdot \binom{6}{3}\binom{5}{2,1,1,1} = 7\frac{6!}{3!\,3!}\,\frac{5!}{2!\,1!\,1!\,1!} = 8400$ arbres diferents amb $V = [7]$ i $n_1 = 3$.

Altres maneres de resoldre alguns apartats

Apartat (a) ($\Rightarrow$) Utilitzant resultats coneguts d'arbres: si recordem d'exercicis fets a classe que el nombre de fulles d'un arbre és almenys el grau màxim, en aquest cas tenim $\Delta \leq n_1 = 2$, i acabem com a la resolució anterior.

Apartat (a) ($\Rightarrow$) Demostrem que si T té exactament dues fulles, llavors és isomorf al graf trajecte, per inducció sobre l'ordre de T, $n \geq 2$.

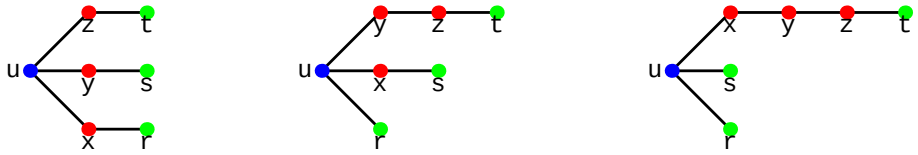
(i) Si $n = 2$ és cert: en aquest cas $n = 2 = n_1$ és un graf amb exactament dos vèrtexs de grau 1, és a dir $T \cong T_2$.

(ii) Per a tot $n \geq 3$, si és cert per a arbres d'ordre $< n$ ho és per a ordre n:

Considerem un arbre T d'ordre n amb exactament dues fulles, u, v. Suposem que $u \sim w$, $w \neq v$. Llavors u no és vèrtex de tall i per tant $T - u$ és un arbre d'ordre $n-1$ tal que: $g_{T-u}(v) = g_T(v) = 1$; $g_{T-u}(w) = g_T(w) - 1$; si $x \neq v, w$ és un vèrtex de $T - u$, llavors $g_{T-u}(x) = g_T(x) \geq 2$. Però l'arbre $T - u$ té almenys dues fulles per ser d'ordre almenys dos. Per tant, $T - u$ té exactament dues fulles, v i w, ja que la resta de vèrtexs tenen grau almenys 2. Per hipòtesi d'inducció, $T - u$ és el graf trajecte amb $n - 1$ vèrtexs. L'arbre T s'obté afegint el vèrtex u que és adjacent al vèrtex w de grau 1 en $T - u$. Per tant, T és el graf trajecte d'ordre n, T_n:

$T - u$ $\qquad\qquad$ T

Apartat (d) Dels tres arbres d'ordre 7 no isomorfs amb $n_1 = 3$ que hem trobat a l'apartat (c), comptem quants n'hi ha de diferents en cada cas si $V = [7]$. Podem etiquetar els 7 vèrtexs de l'arbre de 7! maneres.



(i) $\qquad$ (ii) $\qquad$ (iii)

En el cas (i), si permutem les etiquetes de les tres branques, $\{x, r\}$, $\{y, s\}$ i $\{z, t\}$, obtenim el mateix arbre. Hi haurà, doncs, 7!/3! arbres diferents isomorfs al de la figura (i). En el cas (ii) tots els arbres que s'obtenen són diferents. En el cas (iii), si permutem les etiquetes dels vèrtexs r i s s'obté el mateix arbre. Hi haurà, doncs, 7!/2 arbres diferents isomorfs al de la figura (iii). En total hi haurà $7!/3! + 7! + 7!/2 = 8400$ arbres diferents amb $V = [7]$ i $n_1 = 3$.

Apartat (d) Dels tres arbres d'ordre 7 no isomorfs amb $n_1 = 3$ que hem trobat a l'apartat (c), comptem quants n'hi ha de diferents en cada cas si $V = [7]$.

(i) *Si el vèrtex de grau 3 és adjacent a tres vèrtexs de grau 2:* podem triar el vèrtex u de 7 maneres, després els tres vèrtexs $\{x, y, z\}$ de $\binom{6}{3}$ maneres i finalment podem etiquetar els tres vèrtexs restants r, s, t de 3! maneres diferents. N'hi ha $7 \cdot \binom{6}{3}$ 3!.

(ii) *Si el vèrtex de grau 3 és adjacent a dos vèrtexs de grau 2 i un de grau 1:* podem triar el vèrtex u de 7 maneres; el vèrtex r de 6 maneres; el vèrtex x de 5 maneres; la fulla s adjacent a x de 4 maneres; els vèrtexs y, z, t tals que $u \sim y \sim z \sim t$ de 3! maneres. En total hi ha 7! arbres diferents d'aquest tipus.

(iii) *Si el vèrtex de grau 3 és adjacent a un vèrtex de grau 2 i dos de grau 1:* podem triar el vèrtex u de 7 maneres; els vèrtexs $\{r, s\}$ de $\binom{6}{2}$ maneres; els vèrtexs x, y, z, t tals que $u \sim x \sim y \sim z \sim t$ de 4! maneres. N'hi ha $7 \cdot \binom{6}{2}$ 4!.

En total hi ha $7 \cdot \binom{6}{3}$ $3! + 7! + 7 \cdot \binom{6}{2}$ $4! = 8400$ arbres diferents amb $V = [7]$ i $n_1 = 3$.

Problema 4

(a) Els polinomis irreductibles de grau 1 són: x i $x+1$.

Els polinomis irreductibles de grau $k \geq 2$ són els que no són producte de polinomis de grau més petit que k.

A $\mathbb{F}_2[x]$ hi ha 4 polinomis de grau 2: x^2+ax+b, amb $a, b \in \mathbb{F}_2$. Els polinomis no irreductibles de grau 2 són:

$$x^2, \qquad x(x+1) = x^2+x, \qquad (x+1)^2 = x^2+1,$$

per tant, l'únic polinomi irreductible de grau 2 és x^2+x+1.

Hi ha 8 polinomis de grau 3 a $\mathbb{F}_2[x]$: x^3+ax^2+bx+c, amb $a, b, c \in \mathbb{F}_2$. Els polinomis de grau 3 no irreductibles són:

$$\begin{array}{ccc} x^3, & x^2(x+1) = x^3+x^2, & x(x+1)^2 = x^3+x, \\ (x+1)^3 = x^3+x^2+x+1, & x(x^2+x+1) = x^3+x^2+x, & (x+1)(x^2+x+1) = x^3+1. \end{array}$$

Per tant, els polinomis irreductibles són x^3+x^2+1 i x^3+x+1.

Un altra manera: Recordem que un polinomi de grau 2 o 3 és irreductible si, i només si, no té arrels. Un altra manera seria doncs cercar els polinomis de grau 2 i 3 que no tenen arrels a $\mathbb{F}_2$.

(b) Cal comprovar que el polinomi $f(x) = x^4+x^3+1$ sigui irreductible a $\mathbb{F}_2[x]$ i que $\alpha = \overline{x}$ sigui un element primitiu a $\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$.

Com que $f(0) = f(1) = 1$, el polinomi $f(x)$ no té arrels a $\mathbb{F}_2$ i no descomposa amb polinomis de grau 1. Podria ser que fos producte de dos polinomis irreductibles de grau 2, veiem que no és així. L'únic polinomi de grau 2 irreductible és x^2+x+1, però $(x^2+x+1)^2 = x^4+x^2+1 \neq f(x)$. Per tant, $f(x)$ és irreductible.

Per tal que α sigui primitiu el seu ordre ha de ser $2^4-1 = 15$, és a dir, cap potència α^k, amb $1 \leq k \leq 15$, pot donar 1. Com que l'ordre de qualsevol element de $\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$ és un divisor de 15, només cal comprovar que no són 1 les potències α^k amb $k = 3, 5$. Usant que $\alpha^4 = \alpha^3+1$, s'obté que

$$\begin{aligned} &\alpha^3 \neq 1, \\ &\alpha^5 = \alpha \cdot \alpha^4 = \alpha(\alpha^3+1) = \alpha^4+\alpha = \alpha^3+\alpha+1 \neq 1. \end{aligned}$$

Per tant, l'ordre de α és 15. Donem la taula de logaritmes:

i	α^i
1	α
2	α^2
3	α^3
4	α^3+1
5	$\alpha^3+\alpha+1$
6	$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$
7	$\alpha^2+\alpha+1$
8	$\alpha^3+\alpha^2+\alpha$

i	α^i
9	α^2+1
10	$\alpha^3+\alpha$
11	$\alpha^3+\alpha^2+1$
12	$\alpha+1$
13	$\alpha^2+\alpha$
14	$\alpha^3+\alpha^2$
15	1

(c) Segons la taula $\alpha+1 = \alpha^{12} = (\alpha^6)^2$. L'element $\alpha+1$ és un quadrat amb arrel $\alpha^6 = \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$.

(d) El sistema que s'ha de resoldre, fent ús de la taula de logaritmes, és:

$$\left.\begin{array}{rcl} (\alpha^2+1)u+\alpha^3 v &=& \alpha \\ (\alpha+1)u+(\alpha^2+\alpha)v &=& \alpha^3+1 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha^9 u+\alpha^3 v &=& \alpha \\ \alpha^{12}u+\alpha^{13}v &=& \alpha^4 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha^{12}u+\alpha^6 v &=& \alpha^4 \\ \alpha^{12}u+\alpha^{13}v &=& \alpha^4 \end{array}\right\}$$

Multiplicant la primera equació per α^3 i sumant les dues, s'obté que $v = 0$. Aleshores $\alpha^9 u = \alpha$, és a dir, $u = (\alpha^8)^{-1} = \alpha^{-8 \bmod 15} = \alpha^7 = \alpha^2+\alpha+1$.