ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

PROCESADO DE SEÑAL Fecha: 9 de enero de 2003

Profesores: J. Hernando, M. A. Lagunas, A. I. Pérez, G. Vázquez, J. Vidal, **Tiempo: 3 horas**

- No pueden usarse libros, apuntes, calculadoras programables o teléfonos móviles.
- Todas las hojas han de llevar el nombre del alumno.
- Empiece cada ejercicio en una nueva hoja.

Problema 1 (25%)

Se van a comparar dos estimaciones del parámetro autorregresivo *a* de un proceso x(n) real, de media nula, AR de orden 1 a partir de N muestras del mismo, desde x(0) a x(N-1). La primera estimación supondrá gaussianidad y maximizará la verosimilitud de observar el proceso.

a) Demuestre que la función de verosimilitud se puede escribir como

$$f\left(e(1),...,e(N-1)/a\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2p\,s}}\right)^{N-1}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{N-1}\left[x(n)-ax(n-1)\right]^2/2s^{\,2}\right\}$$

donde s es la desviación típica del ruido excitador e(n) del modelo AR(1).

b) Compruebe que maximizar la verosimilitud es equivalente a minimizar $\sum_{n=1}^{N-1} e(n)^2$

c) Escribir la estimación de máxima verosimilitud a_{ML} en términos de las muestras de x(n), n = 0,…, N-1.

La segunda estimación proviene de aplicar las ecuaciones de Yule-Walker (ecuaciones normales) para el modelo AR(1), sobre el estimador sesgado de la correlación. En este caso:

d) Escriba el parámetro *a* en términos de la autocorrelación $r_x(m) = E\{x(n)x(n+m)\}$ del proceso AR.
e) Escriba su estimación a_{YW} en términos de las muestras de x(n), n = 0,…, N-1, usando el estimador sesgado de la autocorrelación

A la vista de las expresiones obtenidas para a_{ML} y a_{YW} en (c) y (e),

f) ¿Cuál de las dos estimaciones garantiza la estabilidad del filtro del modelo?
g) A partir de las ecuaciones del modelo AR de orden 1 extrapole un estimador para $r_x(2)$.

Problema 2 (25%)

El proceso x(n) de media cero y varianza 22, está formado por la suma de una componente de señal y otra de ruido de acuerdo a la siguiente expresión:

$$x(n) = y(n) + w(n) = \sum_{q=0}^{\infty} b^q \ d(n-q) + w(n)$$

Donde $|b|<1$ y tanto d(n) como w(n) son ruido blanco de media nula e independientes entre si. La relación señal a ruido $\frac{E\left\{y^2(n)\right\}}{E\left\{w^2(n)\right\}} = \frac{P_y}{P_w}$ es de 10 dB.

Se pretende diseñar un filtro de Wiener para, a partir de x(n) y con dos coeficientes $\underline{A} = [a(0) \quad a(1)]^T$, obtener una señal filtrada lo más parecida a d(n).

a) Demuestre que la potencia de ruido P_w es igual a 2.
b) Demuestre que el filtro optimo, en el caso de ausencia de ruido, viene dado por $\underline{A}_{opt} = [-b \quad 1]/(1-b)$.

Asumiendo que el autovalor mínimo de la matriz de autocorrelación de x(n), $\underline{\underline{R}}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix}$ es igual a 5.

c) Calcule el paso de adaptación m para un algoritmo LMS de forma que el desajuste sea de un 10% (el desajuste puede calcularse como $M = \frac{m}{2}$ traza$\left(\underline{\underline{R}}\right)$).

La ecuación que describe la evolución del vector de coeficientes en cada muestra $\underline{A}_n$ viene dada por:

$$\underline{A}_n = \left(\underline{\underline{I}} - m\underline{\underline{R}}\right)^n \left(\underline{A}_0 - \underline{A}_{opt}\right) + \underline{A}_{opt}$$

d) ¿Cuál es el número de muestras necesario para que la componente transitoria de la ecuación anterior se reduzca a 1/10 del valor inicial (*Ln*(10)= 2.3 y *Ln*(1-x) $\approx$ -*x*) para x<<1)?

A fin de mejorar la velocidad de convergencia se propone derivar una expresion para el LMS a partir de la función de error (que tiene el mismo mínimo):

$$J = J_{\min} + \left(\underline{A} - \underline{A}_{opt}\right)^H \underline{\underline{R}}^{\,p} \left(\underline{A} - \underline{A}_{opt}\right)$$

e) ¿Cuál es la relación entre el vector gradiente de J para un *p* arbitrario y para *p* = 1? Escriba la ecuación de adaptación de los coeficientes en este caso.
f) ¿Qué valor de *p* acelera más la convergencia?
g) ¿Cuál sería la respuesta al apartado (c) en este caso?

NOTA: $\nabla_{\underline{z}^*}\left(\underline{z}^H \underline{\underline{R}}\underline{z}\right) = \underline{\underline{R}}\underline{z}$ si $\underline{\underline{R}}$ es hermítica.

Problema 3 (25%)

Suponga que una señal x(n) (representada mediante un vector $\underline{x} = [x(n), \ldots, x(n+M-1)]^T$ de media cero y matriz de correlación $\underline{\underline{R}}_x = E\{\underline{x}\underline{x}^H\}$) se transmite a través de un canal ruidoso de forma que la señal recibida viene dada por la expresión:

$$\underline{r}_1 = \underline{x} + \underline{v}$$

donde $\underline{\underline{R}}_v = E\{\underline{v}\underline{v}^H\} = \sigma_v^2 \underline{\underline{I}}$. El error cuadrático observado sobre el vector $\underline{x}$ recepción es por tanto:

$$e^2 = E\{(\underline{r}_1 - \underline{x})^H(\underline{r}_1 - \underline{x})\} = \text{traza}(E\{(\underline{r}_1 - \underline{x})(\underline{r}_1 - \underline{x})^H\}) = M\sigma_v^2$$

De forma alternativa, puede transmitirse una parte de la señal transformada:

$$\underline{y}_2 = \underline{\underline{U}}_P^H \underline{x}$$

ecuación en la que $\underline{\underline{U}}_P = [\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_P]$ contiene P (<M) autovectores de $\underline{\underline{R}}_x$. En el receptor, la señal recibida:

$$\underline{r}_2 = \underline{y}_2 + \underline{v}$$

se procesa de forma lineal para obtener una aproximación de $\underline{x}$ en la siguiente forma:

$$\underline{\hat{x}} = \underline{\underline{U}}_P \underline{r}_2$$

Se pide:

a) Calcule el error cuadrático cometido en el segundo receptor: $e^2 = E\{(\underline{\hat{x}} - \underline{x})^H(\underline{\hat{x}} - \underline{x})\} = \text{traza}(E\{(\underline{\hat{x}} - \underline{x})(\underline{\hat{x}} - \underline{x})^H\})$ en funcion de los autovalores de $\underline{\underline{R}}_x$ y la potencia de ruido.

b) ¿Cuál es el sesgo cometido en esta estimacion de $\underline{x}$?

c) Suponga que los autovalores de $\underline{\underline{R}}_x$ decrecen monótonamente. Razone gráficamente que existen valores de P para los cuales el error cometido con este segundo esquema de transmision/recepcion es inferior al cometido con el primero.

El esquema propuesto intercambia sesgo por varianza del ruido en el receptor. Para eliminar el sesgo, se propone transmitir la señal (de igual potencia) $\underline{y}_3 = K\,\underline{\underline{\Lambda}}^{-1/2}\,\underline{\underline{U}}^H\,\underline{x}$, donde la matriz $\underline{\underline{U}}$ contiene todos los autovectores de $\underline{\underline{R}}_x$, $\underline{\underline{\Lambda}}$ es una matriz diagonal que contiene sus autovalores y $K = \sqrt{r_x(0)}$. La señal recibida es

$$\underline{r}_3 = \underline{y}_3 + \underline{v}$$

y el receptor propuesto será de la forma:

$$\underline{\hat{x}} = (1/K)\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}^{1/2}\,\underline{r}_3$$

d) Demuestre que en este caso no se obtiene ninguna ganancia (en términos de $SNR = r_x(0)/(e^2/M)$) respecto a la transmisión directa comentada en el primer párrafo del ejercicio.

Problema 4 (25%)

En una transmisión de espectro ensanchado, las *N* muestras de señal recibidas en el tiempo de duración de un símbolo *a*(n) pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\underline{r}(n) = \sqrt{P_c}\, a(n)\underline{c} + \underline{i}(n) + \underline{w}(n)$$

donde

P_c	es la potencia de la señal deseada a recuperar (los símbolos *a*(n) son de potencia unidad).
$\underline{c}$	es el código de la señal deseada (se considera conocido, determinista y de norma unidad $\underline{c}^H \underline{c} = 1$),
$\underline{i}$(n)	es una señal interferente incorrelada con la señal deseada
$\underline{w}$(n)	es un vector de ruido Gaussiano estacionario de media nula y potencia s_w^2.

La matriz de correlación de $\underline{r}$(n) viene dada por la expresión $\underline{\underline{R}} = E\left\{\underline{r}(n)\underline{r}(n)^H\right\} = P_c \underline{c}\,\underline{c}^H + \underline{\underline{R}}_i + s_w^2 \underline{\underline{I}}$.

A fin de recuperar la señal deseada, se diseña un filtro FIR $\underline{h}_{opt}$ tal que

$$\min_{\underline{h}} \underline{h}^H \underline{\underline{R}}\underline{h} \qquad sujeto\, a \qquad \underline{h}^H \underline{c} = 1$$

a) Obtenga el filtro óptimo $\underline{h}_{opt}$.

b) Demuestre que el filtro óptimo puede escribirse en función de $\underline{\underline{R}}_n = \underline{\underline{R}}_i + s_w^2 \underline{\underline{I}}$. Utilícese el lema de inversión de matrices, en virtud del cual si $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{B}} + \underline{g}\underline{g}^H$, entonces:

$$\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} + \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{g}\left(1 + \underline{g}^H \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{g}\right)^{-1} \underline{g}^H \underline{\underline{B}}^{-1}$$

c) Si se define la SINR a la salida del filtro como $SINR \triangleq \dfrac{P_c}{\underline{h}^H \underline{\underline{R}}_n \underline{h}}$, demuestre que a la salida del filtro óptimo

$$SINR = P_c \underline{c}^H \left(\underline{\underline{R}}_i + s_w^2 \underline{\underline{I}}\right)^{-1} \underline{c}$$

Considere que la interferencia es otra señal de espectro ensanchado $\underline{i}(n) = \sqrt{P_i}\, b(n)\underline{i}$ donde

P_i	es la potencia de la señal interferente.
b(n)	es el símbolo transmitido por la fuente interferente durante el periodo *n* (que se considera independiente del símbolo *a*(n) transmitido por la señal útil que se desea recuperar). Tambien son de potencia unidad.
$\underline{i}$	es el código de la señal interferente (determinista y de norma unidad $\underline{i}^H \underline{i} = 1$)

en cuyo caso $\underline{\underline{R}}_i = P_i \underline{i}\,\underline{i}^H$.

d) Halle la SINR en función de $\underline{c}^H \underline{i}$.

e) Particularice la expresión para los dos casos siguientes:

$\underline{c}^H \underline{i} = 1$ (señal util e interferente usando el mismo código de espectro ensanchado),
$\underline{c}^H \underline{i} = 0$ (códigos de espectro ensanchado ortogonales),

y comente la capacidad de cancelación de la interferencia que presenta el filtro en función de su orden *N*.

NOTA: $\nabla_{\underline{z}^*}\left(\underline{z}^H \underline{\underline{R}}\underline{z}\right) = \underline{\underline{R}}\underline{z}$ si $\underline{\underline{R}}$ es hermítica.