ANÀLISI VECTORIAL ETSETB 22-01-2007

1. *Sigui la funció* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida de la següent manera:* **2,5 punts**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$

(a) *Considereu les corbes de nivell* 0, 2 *i* -2 *de* f. *Escriviu-ne les equacions i dibuixeu-les.*

(b) *Es defineix* $A \subset \mathbb{R}^2$ *com el conjunt format per la unió de les corbes de nivell* 2 *i* -2 *de* f. *Raoneu si* A *és un conjunt obert, tancat, fitat, compacte o arc-connex.*

(c) *Estudieu la continuïtat i diferenciabilitat de* f *en* $\mathbb{R}^2$.

(d) *Sigui* $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ *la derivada direccional de* f *en el punt* $(0,0)$ *segons el vector* $\mathbf{v}$. *Esbrineu per quins vectors unitaris* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, *amb* $v_1, v_2 \geqslant 0$, *es té que* $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ *és màxima i per quins és mínima.*

<u>Solució:</u>

(a) La corba de nivell zero és el conjunt de punts (x,y) que compleixen l'equació $x+y=0$, és a dir, la bisectriu del segon i del quart quadrant (amb l'origen de coordenades inclòs, ja que $f(0,0)=0$).

Els punts de la corba de nivell 2 compleixen les següents equacions:

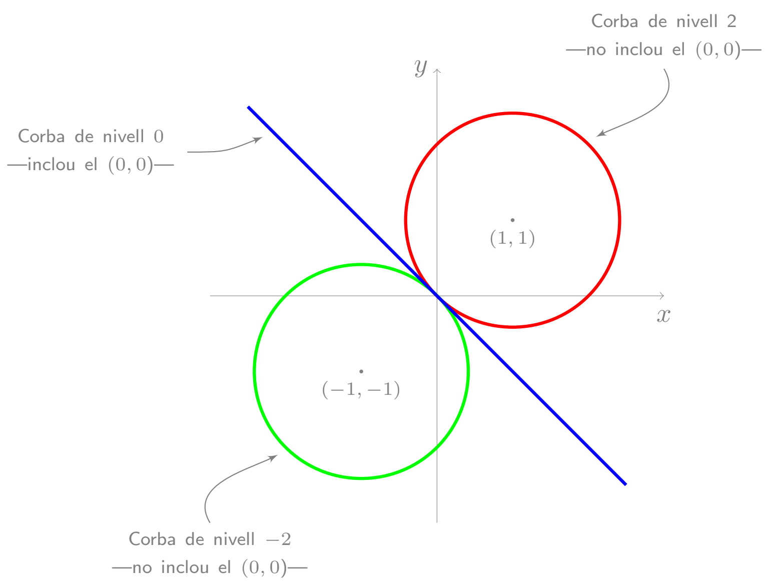
$$f(x,y) = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{x+y} = 2 \quad (\text{amb } x+y \neq 0) \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-2x-2y = 0 \quad (\text{amb } x+y \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \quad (\text{amb } x+y \neq 0),$$

equació que representa una circumferència de radi $\sqrt{2}$ centrada en el punt $(1,1)$, de la qual s'han tret els punts de la bisectriu esmentada anteriorment. L'únic punt en comú d'aquesta bisectriu i la circumferència és el $(0,0)$.

Anàlogament, la corba de nivell -2 és una circumferència de radi $\sqrt{2}$ centrada en el punt $(-1,-1)$, traient-ne l'origen de coordenades:

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2, \qquad \text{amb } (x,y) \neq (0,0).$$



(b) El conjunt A és la reunió de les dues circumferències esmentades en l'apartat anterior, sense el $(0,0)$. Aquest punt és adherent al conjunt A i, per tant, A no és tancat perquè no coincideix amb la seva adherència. En conseqüència, no és compacte (tot i que és fitat). Tampoc és obert perquè l'interior d'A és buit. Com que l'únic punt en comú de les dues circumferències (és a dir, l'origen de coordenades) no pertany a A, aquest conjunt no és arc-connex.

(c) La funció és contínua i diferenciable quan $x+y \neq 0$. En els punts de la recta d'equació $x+y=0$ la funció no és contínua (i, per tant, tampoc serà diferenciable) ja que no hi existeix el límit de f excepte, potser, en el $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y) = \infty, \qquad \text{quan } a \neq 0.$$

En el punt $(0,0)$ el límit de f seguint la bisectriu del segon quadrant dóna 0 mentre que el límit de f seguint la circumferència d'equació $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ dóna 2, ja que aquestes són, respectivament, les corbes de nivell 0 i 2 estudiades en l'apartat (a). Per tant, el límit de f en $(0,0)$ no existeix i f no hi és contínua ni diferenciable.

(d) La derivada direccional de f en el $(0,0)$ segons el vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ val

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2}{tv_1 + tv_2} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 + v_2}.$$

Si el vector $\mathbf{v}$ és unitari, es té que $v_1^2 + v_2^2 = 1$ i, per tant:

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(0,0) = \frac{1}{v_1 + v_2}.$$

Cal trobar el màxim i el mínim d'aquesta funció quan v_1 i v_2 estan sotmesos a les condicions $v_1^2 + v_2^2 - 1 = 0$, $v_1 \geqslant 0$ i $v_2 \geqslant 0$, les quals defineixen una regió compacta en $\mathbb{R}^2$. En primer lloc s'optimitza la funció sotmesa al primer lligam mitjançant el mètode dels multiplicadors de Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{(v_1+v_2)^2} = 2\lambda v_1 \\ \dfrac{-1}{(v_1+v_2)^2} = 2\lambda v_2 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$$

De les dues primeres equacions se segueix que $\lambda\,(v_1 - v_2) = 0$. Com que $\lambda = 0$ no és solució del sistema, és necessari que $v_1 = v_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}}$. Per aquest vector, $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Per últim, les condicions $v_1 \geqslant 0$ i $v_2 \geqslant 0$, a més de restringir les solucions del sistema anterior, obliguen a considerar també els vectors $\mathbf{v} = (1,0)$ i $\mathbf{v} = (0,1)$ com a possibles solucions del problema. Per aquests vectors, $\mathrm{D}_{(1,0)} f(0,0) = \mathrm{D}_{(0,1)} f(0,0) = 1$.

En conclusió, la derivada direccional màxima demanada val 1 quan $\mathbf{v} = (1,0)$ o $\mathbf{v} = (0,1)$ i la mínima val $\frac{1}{\sqrt{2}}$ quan $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. *Sigui la funció $g(x,y) = (x-y)^3 + (x+y)^2$ definida en tot $\mathbb{R}^2$.* **2,5 punts**

(a) *Trobeu i classifiqueu els punts crítics de g.*

(b) *Discutiu per quins valors de k l'equació $g(x,y) = k$ defineix una corba regular.*

(c) *Demostreu que la corba definida per l'equació $x^3 + y^2 = 1$ és regular a tot arreu. Trobeu les circumferències centrades en l'origen que són tangents a aquesta corba i, per cadascuna d'elles, determineu-ne el radi i els seus punts de tangència amb la corba.*

<u>Solució:</u>

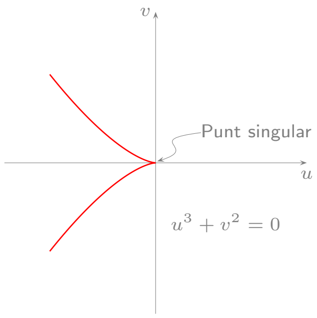
(a) Cal resoldre el següent sistema d'equacions:

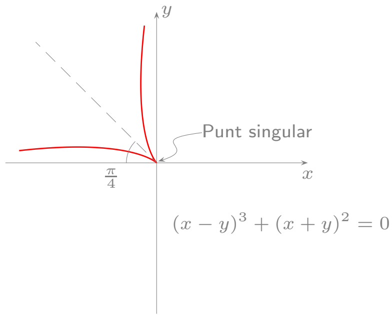
$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 3\,(x-y)^2 + 2\,(x+y) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} = -3\,(x-y)^2 + 2\,(x+y) = 0. \end{cases}$$

Sumant les equacions s'obté $x = -y$. Aleshores, substituint a la primera equació es veu que l'única solució és $x = y = 0$. La matriu hessiana de g en aquest punt és $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, que és degenerada. Tanmateix, $(0,0)$ és un punt de sella ja que $g(t,-t) = (2t)^3$, que té un punt d'inflexió en $t = 0$.

(b) D'acord amb els càlculs de l'apartat anterior, tots els punts de la corba $g(x,y) = k$ són regulars excepte, potser, el $(0,0)$. Aquest punt només pertany a la corba si $k = 0$. La corba $g(x,y) = 0$ es pot escriure com $u^3 + v^2 = 0$, on $u = x - y$ i $v = x + y$. En el pla UV aquesta corba té un punt singular en $(0,0)$. La corba $g(x,y) = 0$, per tant, també tindrà un punt singular en $(x,y) = (0,0)$ ja que s'obté de la corba anterior a partir d'una transformació lineal (un gir de $\frac{\pi}{4}$ en sentit horari i una dilatació):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$





(c) Tots els punts són regulars excepte, potser, els que fan $(3x^2, 2y) = (0,0)$, és a dir, $(x,y) = (0,0)$. Aquest punt, però, no pertany a la corba donada.

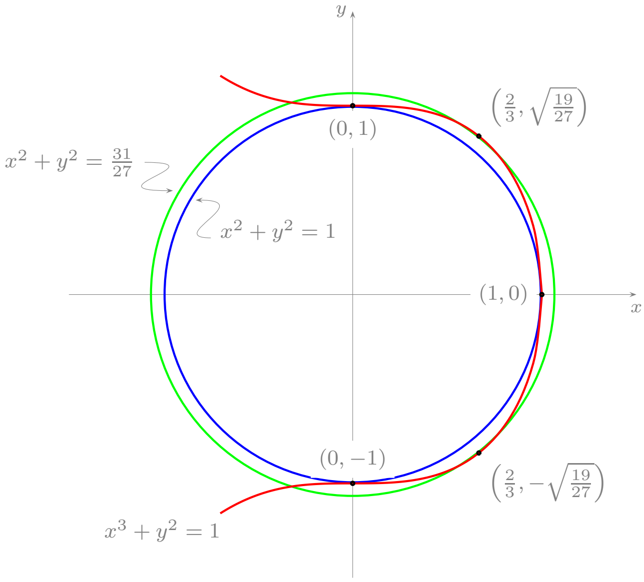
Si les corbes $x^3 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = a$ han de ser tangents caldrà que els vectors tangents siguin paral·lels, és a dir:

$$\begin{cases} 3x^2 = \lambda\, 2x, \\ 2y = \lambda\, 2y. \end{cases}$$

De la segona equació se segueix que $y\,(1-\lambda) = 0$, és a dir, $y = 0$ o bé $\lambda = 1$. Només hi ha un punt de la corba $x^3 + y^2 = 1$ amb $y = 0$, que és el punt $(1,0)$, el qual pertany a la circumferència $x^2 + y^2 = 1$.

Si $\lambda = 1$ la primera equació proporciona dues solucions: $x = 0$ i $x = \frac{2}{3}$. Els punts de la corba amb $x = 0$ són $(0,1)$ i $(0,-1)$, que també pertanyen a la circumferència $x^2 + y^2 = 1$. Aquesta circumferència, per tant, és tangent a la corba $x^3 + y^2 = 1$ en tres punts.

Hi ha dos punts de la corba amb $x = \frac{2}{3}$, de coordenades $\left(\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{19}{27}}\right)$ i $\left(\frac{2}{3}, -\sqrt{\frac{19}{27}}\right)$. Aquests punts pertanyen a una segona circumferència tangent a la corba, l'equació de la qual és $x^2 + y^2 = \frac{31}{27}$.



y
x
$\left(\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{19}{27}}\right)$
$(0,1)$
$x^2+y^2=\frac{31}{27}$
$x^2+y^2=1$
$(1,0)$
$(0,-1)$
$\left(\frac{2}{3}, -\sqrt{\frac{19}{27}}\right)$
$x^3+y^2=1$

3. *Siguin* S_1 *i* S_2 *dues superfícies de* $\mathbb{R}^3$ *definides per les equacions següents:* **2,5 punts**

$$S_1: \quad 4x^2 + 4y^2 = (z-1)^2\,,$$
$$S_2: \quad x^2 + y^2 + z = 0.$$

Es defineixen la corba $C = S_1 \cap S_2$ *i el recinte fitat* V *delimitat per aquestes dues superfícies.*

(a) *Escriviu l'equació de la recta tangent a* C *en el punt* $(1, 0, -1)$.

(b) *Trobeu el volum de* V.

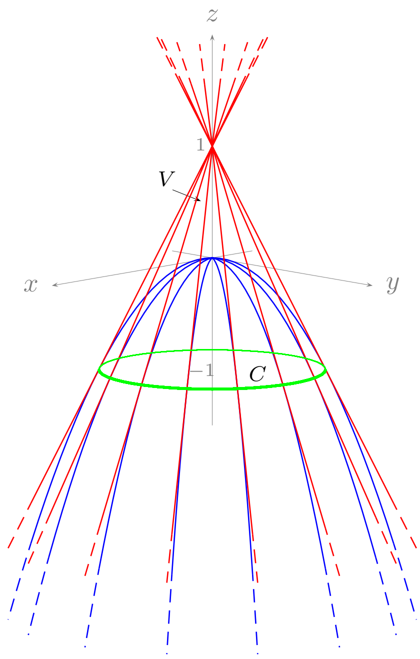
(c) *Ordeneu de menor a major les quantitats següents (no és necessari calcular-les explícitament):*

$$I_1 = \int_V (xy)^9 \, dV, \qquad I_2 = \int_V e^{x^2+y^2+z^2} dV,$$

$$I_3 = \int_V \log\left(\frac{y+2}{4}\right) dV \qquad i \qquad I_4 = \int_V \frac{1}{x^2+z^2+2} \, dV.$$

Solució:

(a) La superfície S_1 és un con (doble) amb el vèrtex al punt $(0,0,1)$. La supefície S_2 és un paraboloide convex (vist des de $z = +\infty$) amb el vèrtex a l'origen de coordenades. L'eix de simetria de les dues superfícies és l'eix OZ.



Com es pot apreciar a la figura, C és una circumferència de radi 1 centrada en el punt $(0, 0, -1)$ el pla de la qual és paral·lel al pla XY. Aquest fet també es pot deduir fent un canvi a coordenades cilíndriques:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos t \\ y = \rho \sin t \\ z = z \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} S_1: & 4\rho^2 = (z-1)^2 \\ S_2: & z = -\rho^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -4z = (z-1)^2 \quad \Rightarrow \quad z = -1 \quad \Rightarrow \quad \rho = 1,$$

el qual dóna una parametrització per la corba C: $(x, y, z) = \boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, -1)$, amb $t \in [0, 2\pi)$. El punt $(1, 0, -1)$ s'obté amb $t = 0$. El vector tangent en aquest punt és $\boldsymbol{\gamma}'(0) = (0, 1, 0)$ i, per tant, la recta demanada tindrà la següent equació:

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + t(0, 1, 0).$$

(b) En coordenades cilíndriques el con i el paraboloide s'expressen amb les equacions $z = 1 - 2\rho$ i $z = -\rho^2$, respectivament. El volum de V serà, per tant:

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho \, \mathrm{d}\rho \int_{-\rho^2}^{1-2\rho} \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \left(\rho - 2\rho^2 + \rho^3\right) \mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{6}.$$

(c)

- La funció $(xy)^9$ és imparell quan es canvia x per $-x$ i, en canvi, V és invariant sota aquest canvi. Per tant, $I_1 = 0$.
- Com que $e^{x^2+y^2+z^2} \geqslant 1$ per a tot punt de V, aleshores $I_2 > \int_V \mathrm{d}V = \frac{\pi}{6}$.
- Quan $(x, y, z) \in V$ es té que $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Per tant, $\frac{1}{4} \leqslant \frac{y+2}{4} \leqslant \frac{3}{4} < 1$, la qual cosa implica que I_3 és negativa.
- Finalment, $0 < \frac{1}{x^2+z^2+2} \leqslant \frac{1}{2} < 1$ per a tot punt de V, ja que $x^2 + z^2 \geqslant 0$. En conseqüència, $0 < I_4 < \int_V \mathrm{d}V = \frac{\pi}{6}$.

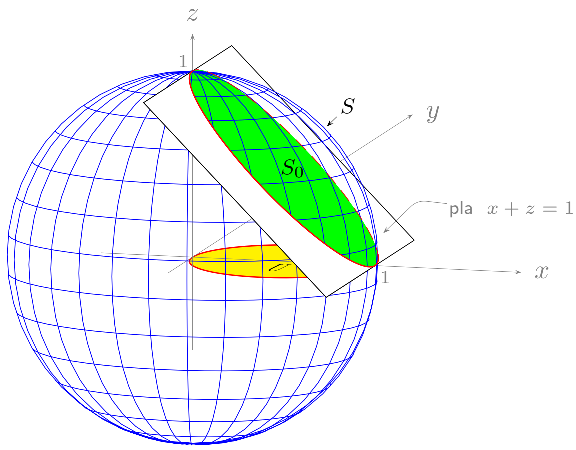
Per tant: $I_3 < I_1 < I_4 < I_2$.

4. *Calculeu el flux del camp vectorial* $\mathbf{f}(x,y,z) = (1,1,y)$ *a través de la superfície:* **2,5 punts**

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, \quad z \geqslant 1 - x\right\}.$$

Solució: La porció de l'el·lipsoide d'equació $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ tal que $z \geqslant 1 - x$ determina amb el pla d'equació $x + z = 1$ un recinte V. La seva vora és $S \cup S_0$, on S ve donada per l'enunciat i S_0 (en color verd a la figura) n'és la part plana:

$$S_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + z = 1, \quad x^2 + 2y^2 + z^2 \leqslant 1\right\}.$$



A més, $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ i, pel teorema de Gauss:

$$0 = \int_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, \mathrm{d}V = \int_S \mathbf{f} \, \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_0} \mathbf{f} \, \mathrm{d}\mathbf{S},$$

on els fluxos estan calculats cap a fora de V. Per tant, el flux demanat, amb S orientada cap amunt, és igual al flux que travessa S_0, quan aquesta última superfície s'orienta també cap amunt. La funció:

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\sigma}\colon & U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longrightarrow & (x, y, 1-x) \end{array}$$

parametritza S_0, essent U un recinte la frontera del qual ve determinada per l'equació:

$$x^2 + 2y^2 + (1-x)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 - x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Aleshores, caldrà integrar sobre el cercle $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}\right\}$, en color groc a la figura. El vector normal de la parametrització és $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = (1,0,1)$, que ja està orientat correctament (cap amunt) i el flux demanat serà, per tant:

$$\int_{S_0} \mathbf{f} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_U (1,1,y) \cdot (1,0,1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_U (1+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Fent el canvi de coordenades:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

el jacobià del qual és r, la integral queda:

$$\int_{S_0} \mathbf{f} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} (r + r^2 \sin\varphi) \, \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\sin\varphi\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}.$$