Control de Comunicacions Òptiques

Grup 10 - 29 de Maig de 2009

Temps : 1h 30' Nom:

TEST (6 punts)

Marqueu la resposta correcta. Cada resposta correcta suma 0,4 punts mentre que cada resposta errònia resta 0,1 punts.

1. La relació entre el corrent que lliura el fotodetector i la potència òptica incident és:
   a) L'eficiència quàntica b) La resposta quàntica
   c) La responsivitat d) L'efectivitat
2. Comparant el fotodetector APD amb el PIN:
   a) La responsivitat és major però l'amplada de banda és inferior
   b) La responsivitat és inferior però l'amplada de banda és major
   c) Tant la responsivitat com l'amplada de banda són superiors
   d) Tant la responsivitat com l'amplada de banda són inferiors
3. L'efecte allau d'un fotodetector APD és un efecte:
   a) Electro-òptic b) Opto-elèctric c) Elèctrònic d) Òptic
4. L'amplada de banda d'un receptor basat en un fotodetector PIN amb una capacitància C_d i amb una resistència de càrrega R_L ve donada per l'expressió:
   a) $f_{3dB} = \dfrac{1}{2\pi \cdot R_L c_d}$ b) $f_{3dB} = \dfrac{c_d}{2\pi \cdot R_L}$ c) $f_{3dB} = \dfrac{R_L}{2\pi \cdot c_d}$ d) $f_{3dB} = \dfrac{R_L c_d}{2\pi}$
5. La màxima relació senyal a soroll a la que es pot arribar en un receptor de comunicacions òptiques (assumint llum coherent i potència òptica constant) es pot posar en funció del número de fotons per bit de la manera següent:
   a) $SNR_{max} = \langle n \rangle$ b) $SNR_{max} = 2\langle n \rangle$ c) $SNR_{max} = \langle n \rangle / 2$ d) Depèn del nivell de soroll tèrmic
6. En absència de soroll tèmic, la SNR d'un receptor APD amb factor de soroll F i eficiència quàntica unitat:
   a) És la del límit quàntic dividida per un factor F
   b) És la del límit quàntic multiplicada per un factor F
   c) És pitjor que la d'un fotodiode PIN amb la mateixa eficiència quàntica
   d) Les respostes a i c són correctes
7. Assumint una estadística Gaussiana, la relació entre el factor de qualitat Q i la SNR és:
   a) $Q^2 \approx$ SNR quan domina el soroll shot i $Q^2 \approx$ SNR/4 quan domina el soroll tèrmic
   b) $Q^2 \approx$ SNR quan domina el soroll tèrmic i $Q^2 \approx$ SNR/4 quan domina el soroll shot
   c) $Q^2 \approx$ SNR sempre
   d) $Q^2 \approx$ SNR/4 sempre
8. Assumint bits "ideals", quina relació hi ha entre la variància del número d'electrons per bit σ_e^2 i la variància de fotocorrent σ_i^2, després del procés de fotodetecció:
   a) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 (T_b/q)^2$ b) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 (q/T_b)^2$ c) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 (T_b/q)$ d) $\sigma_e^2 = \sigma_i^2 (q/T_b)$
9. Un fotodiode sense guany intern té una eficiència quàntica del 65 % quan sobre ell incideixen fotons d'energia $1.5 \cdot 10^{-19}$ J. A quina longitud d'ona opera el fotodiode ?:
   a) λ=1.33 μm b) λ=1.33 nm c) λ=2.66 μm d) λ=2.66 nm

10. La sensibilitat d'un receptor ideal (amb eficiència quàntica unitat i sense soroll tèrmic) operant a λ=0.87 μm és S=-36 dBm. Quina seria la sensibilitat a 1.55 μm si la velocitat de transmissió es manté constant ?:

a) -33.5 dBm b) -35.3 dBm c) -35.8 dBm d) -38.5 dBm

11. Per a detectar un senyal NRZ ideal es disposa d'un receptor amb fotodetector del tipus PIN amb eficiència quàntica unitat i corrent de foscor menyspreable. Treballant amb una probabilitat d'error de 10^{-9}, el receptor presenta una variància del soroll tèrmic 100 vegades superior a la de soroll shot. Aplicant les aproximacions que considereu justificades, determineu el nombre de fotons promig rebuts per bit.

a) 14.400 fotons/bit b) 7.200 fotons/bit c) 3.600 fotons/bit d) 1.800 fotons/bit

12. Un fotodiode PIN operant en condicions de límit quàntic (absència de soroll tèrmic, corrent de foscor nul i eficiència quàntica unitat), presenta una probabilitat d'error $P(E)=10^{-10}$ treballant a una longitud d'ona λ=0.87 μm. El senyal rebut està en format NRZ amb nivell de potència dels "1" P i nivell nul de potència dels "0". Quina seria la probabilitat d'error amb una eficiència quàntica del 50 % ?:

a) $P(E)=2\cdot 10^{-20}$ b) $P(E)=(1/2)^{1/2}\cdot 10^{-20}$ c) $P(E)=2\cdot 10^{-5}$ d) $P(E)= (1/2)^{1/2}\cdot 10^{-5}$

13. En un receptor òptic que incorpora un fotodetector APD (corrent de foscor menyspreable, eficiència quàntica η, factor multiplicatiu M i factor de soroll $F=M^x$) es rep una potència P_1 per al bit "1" i $P_0=0$ per al bit "0". Si el llindar de decisió òptim del receptor està situat a un factor α de la distància entre els valors mitjans del bit "1" i del bit "0", determineu número promig the fotons rebuts (sensibilitat) necessaris per a obtenir una certa qualitat Q:

a) $\dfrac{Q^2}{1-2\alpha}\cdot\dfrac{M^x}{2\eta}$ b) $\dfrac{Q^2}{1-2\alpha}\cdot\dfrac{M^x}{\eta}$ c) $\dfrac{Q^2}{1-\alpha}\cdot\dfrac{M^x}{2\eta}$ d) $\dfrac{Q^2}{1-\alpha}\cdot\dfrac{M^x}{\eta}$

14. En un enllaç per fibra òptica (α dB/km) el receptor basat en fotodiode PIN es pot considerar que interpreta estadístiques gaussianes tot i que el soroll tèrmic és nul. El transmissor làser emet polsos òptics ideals de $\langle n_1\rangle$ i $\langle n_0\rangle \neq 0$ fotons per bit "1" i "0" respectivament. Si s'exigeix paràmetre de qualitat Q. quina és la màxima longitud permesa de l'enllaç ?:

a) $L \le \dfrac{10}{\alpha}\log\left\{\dfrac{\eta}{Q^2}\left(\sqrt{\langle n_1\rangle}-\sqrt{\langle n_0\rangle}\right)^2\right\}$ b) $L \le \dfrac{10}{\alpha}\log\left\{\dfrac{\eta}{Q^2}\left(\langle n_1\rangle-\langle n_0\rangle\right)^2\right\}$

c) $L \le \dfrac{10}{\alpha}\log\left\{\dfrac{\eta}{Q^2}\left(\sqrt{\langle n_1\rangle}+\sqrt{\langle n_0\rangle}\right)^2\right\}$ d) $L \le \dfrac{10}{\alpha}\log\left\{\dfrac{\eta}{Q^2}\left(\langle n_1\rangle+\langle n_0\rangle\right)^2\right\}$

15. Sigui un sistema de transmissió digital PSK homodí la longitud del qual no està limitada per la dispersió de la fibra. Si l'atenuació de la fibra és de 0.3 dB/Km, quan la velocitat de transmissió es duplica, la longitud màxima de l'enllaç:

a) Augmenta en 10 Km b) Disminueix en 10 Km

c) Augmenta en 20 Km d) Disminueix en 20 Km

PROBLEMA (4 punts)

Marqueu la resposta correcta. Cada resposta correcta suma 0,4 punts mentre que cada resposta errònia resta 0,1 punts.

En un sistema de transmissió digital per fibra òptica amb modulació d'intensitat NRZ ideal, on el receptor està basat en un fotodiode PIN, existeix la possibilitat de substituïr el fotodiode per un APD. Assumint que el corrent de foscor és nul i que la variància del número de portadors per bit corresponents al soroll tèrmic total és σ_p^2, es demana:

1) Trobeu la SNR del sistema si el fotodetector és de tipus PIN amb eficiència quàntica η i està limitat pel soroll tèrmic. Assumiu que al receptor li arriben de mitjana $\langle n \rangle$ fotons per bit "1" i preneu aquest valor per al càlcul de la SNR:

   a) $SNR_{PIN} = \left(\frac{\eta \langle n \rangle}{\sigma_p} \right)^2$ b) $SNR_{PIN} = \left(\frac{\eta \langle n \rangle}{\sigma_p} \right)^{1/2}$ c) $SNR_{PIN} = \left(\frac{\sigma_p}{\eta \langle n \rangle} \right)^{1/2}$ d) $SNR_{PIN} = \left(\frac{\sigma_p}{\eta \langle n \rangle} \right)^2$

2) El fotodetector PIN és substituït per un APD amb paràmetre de guany M, factor de soroll F(M)=M i eficiència quàntica η. El guany ha estat optimitzat per a obtenir una SNR màxima, digueu quina és la seva expressió:

   a) $M_{opt}^2 = \frac{3\sigma_p^2}{\eta \langle n \rangle}$ b) $M_{opt}^2 = \frac{2\sigma_p^2}{\eta \langle n \rangle}$ c) $M_{opt}^3 = \frac{2\sigma_p^2}{\eta \langle n \rangle}$ d) $M_{opt}^3 = \frac{3\sigma_p^2}{\eta \langle n \rangle}$

3) Un cop optimitzat el guany, trobeu l'expressió de la SNR màxima:

   a) $SNR_{max} = \frac{1}{3} \left(\frac{2\left(\eta \langle n \rangle\right)^2}{\sigma_p} \right)^{\frac{3}{2}}$ c) $SNR_{max} = \frac{1}{3} \left(\frac{2\left(\eta \langle n \rangle\right)^2}{\sigma_p} \right)^{\frac{2}{3}}$

   b) $SNR_{max} = \frac{3}{2} \left(\frac{2\left(\eta \langle n \rangle\right)^2}{\sigma_p} \right)^{\frac{1}{3}}$ d) $SNR_{max} = \frac{2}{3} \left(\frac{2\left(\eta \langle n \rangle\right)^2}{\sigma_p} \right)^{\frac{1}{3}}$

4) Determineu la condició ha de complir el número de fotons promig per bit rebuts per tal de garantir una millora de la SNR respecte el cas d'haver emprat un fotodiode PIN:

   a) $\langle n_a \rangle \le 3\sqrt{3} \frac{\eta}{\sigma_p^2}$ b) $\langle n_a \rangle \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{\eta}{\sigma_p^2}$ c) $\langle n_a \rangle \le 3\sqrt{3} \frac{\sigma_p^2}{\eta}$ d) $\langle n_a \rangle \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{\sigma_p^2}{\eta}$

5) Si la SNR màxima estigués 10 dB per sota de la SNR en el límit quàntic i l'eficiència quàtica fos del 75%, determineu la relació entre la variància del soroll tèrmic i el número mitjà de fotons per bit "1" ?:

   a) $\sigma_p^2 \approx 74\langle n \rangle$ b) $\sigma_p^2 \approx 47\langle n \rangle$ c) $\sigma_p^2 \approx 740\langle n \rangle$ d) $\sigma_p^2 \approx 470\langle n \rangle$

6) El mateix fotodiode APD és optimitzat per tal de minimitzar la probabilitat d'error (BER). Doneu l'expressió del guany òptim en aquest cas:

a) $M_{opt}^3 = 8\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$ b) $M_{opt}^2 = 8\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$ c) $M_{opt}^3 = 9\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$ d) $M_{opt}^2 = 9\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$

7) Un cop optimitzat el guany, trobeu l'expressió del factor de qualitat (Q) màxim:

a) $Q_{max}^2 = \frac{(\eta\langle n\rangle)^2}{8\sigma_p}$ b) $Q_{max}^3 = \frac{(\eta\langle n\rangle)^2}{8\sigma_p}$ c) $Q_{max}^2 = \frac{(\eta\langle n\rangle)^2}{9\sigma_p}$ d) $Q_{max}^3 = \frac{(\eta\langle n\rangle)^2}{9\sigma_p}$

8) Determineu la condició ha de complir el número de fotons promig per bit rebuts per tal de garantir una millora de la BER respecte el cas d'haver emprat el fotodiode PIN:

a) $\langle n_a\rangle \le \frac{1}{16}\frac{\sigma_p^2}{\eta}$ b) $\langle n_a\rangle \le 16\frac{\sigma_p^2}{\eta}$ c) $\langle n_a\rangle \le \frac{1}{16}\frac{\eta}{\sigma_p^2}$ d) $\langle n_a\rangle \le 16\frac{\eta}{\sigma_p^2}$

9) Si la Q màxima fos un 25% de la Q en el límit quàntic i l'eficiència quàtica fos del 75%, determineu la relació entre la variància del soroll tèrmic i el número mitjà de fotons per bit "1" ?:

a) $\sigma_p^2 \approx 10\langle n\rangle$ b) $\sigma_p^2 \approx 20\langle n\rangle$ c) $\sigma_p^2 \approx 30\langle n\rangle$ d) $\sigma_p^2 \approx 40\langle n\rangle$

10) S'ajusta el guany de l'APD per tal d'optimitzar la sensibilitat del receptor. Donat un factor de qualitat Q preestablert, quina condició s'ha de donar per a que la sensibilitat millori respecte el PIN ?:

ANUL·LADA

a) $Q \ge 2\sigma_p$ b) $Q \ge \frac{\sigma_p}{2}$ c) $Q \le \frac{\sigma_p}{2}$ d) $Q \le 2\sigma_p$

Estava malament, així és com hauria d'estar.

Resolució:

1-5) La SNR en el cas de l'APD i del PIN són les següents:

$$\mathrm{SNR}_{APD}=\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{F\eta\langle n\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}}=\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{M^x\eta\langle n\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}} \qquad F=M^x$$

$$\mathrm{SNR}_{PIN}=\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\eta\langle n\rangle+\sigma_p^2}\approx\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\sigma_p^2} \qquad \sigma_p^2\gg\eta\langle n\rangle$$

El guany de l'APD es pot optimitzar per tal de maximitzar la SNR:

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\mathrm{SNR}_{APD}\right)=-\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2\left(x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle-2\frac{\sigma_p^2}{M^3}\right)}{\left(M^x\eta\langle n\rangle+\frac{\sigma_p^2}{M^2}\right)^2}=0\rightarrow x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle=2\frac{\sigma_p^2}{M^3}\rightarrow M^{x+2}=\frac{2}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$$

$$\rightarrow M_{opt}=\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}\xrightarrow{x=1}\left(\frac{2\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{3}}$$

L'expressió de la SNR maximitzada és la següent:

$$\mathrm{SNR}_{max}=\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{x}{x+2}}\eta\langle n\rangle+\sigma_p^2\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{-\frac{2}{x+2}}}=\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\frac{2\sigma_p^2}{x}\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{-\frac{2}{x+2}}+\sigma_p^2\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{-\frac{2}{x+2}}}$$

$$=\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\sigma_p^2\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{-\frac{2}{x+2}}\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\sigma_p^2}\frac{\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{2}{x+2}}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}\xrightarrow{x=1}\frac{1}{3}\left(\frac{2\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\sigma_p}\right)^{\frac{2}{3}}$$

La SNR màxima es pot posar en funció de la SNR del PIN per tal de veure què s'ha de complir per a que hi hagi una millora:

$$\mathrm{SNR}_{max}=\underbrace{\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\sigma_p^2}}_{\mathrm{SNR}_{PIN}}\underbrace{\frac{M_{opt}^2}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}}_{\geq 1}\rightarrow\frac{\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{2}{x+2}}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}\geq 1\rightarrow\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\geq\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x+2}{2}}\qquad\rightarrow\langle n\rangle\leq\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x+2}{2}}}$$

$$\rightarrow\langle n_a\rangle\leq\frac{\sigma_p^2}{x\,\eta\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x+2}{2}}}\xrightarrow{x=1}\frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{\sigma_p^2}{\eta}$$

La SNR màxima es pot posar en funció de la SNR del límit quàntic per tal de veure quina penalització hi haurà. Després es pot trobar quina condició s'ha de donar per tal de que aquesta sigui de 10 dB:

$$\mathrm{SNR}_{max} = \frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{x}{x+2}}\eta\langle n\rangle + \sigma_p^2\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{-\frac{2}{x+2}}} = \frac{\eta\langle n\rangle}{\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{x}{x+2}} + \frac{x}{2}\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{-\frac{2}{x+2}}} =$$

$$= \frac{\eta\langle n\rangle}{\left(\frac{2\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{x}{x+2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \underbrace{\langle n\rangle}_{\mathrm{SNR_{LQ}}}\underbrace{\frac{\eta}{M_{opt}^x\left(1+\frac{x}{2}\right)}}_{\text{penalització}} \xrightarrow{x=1} \underbrace{\langle n\rangle}_{\mathrm{SNR_{LQ}}}\frac{\eta}{\frac{3}{2}\left(\frac{2\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{3}}} = \underbrace{\langle n\rangle}_{\mathrm{SNR_{LQ}}}\underbrace{\frac{2\eta}{3}\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}}}_{1/10}$$

$$\rightarrow \frac{2\eta}{3}\left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{10} \rightarrow \left(\frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{20\,\eta} \rightarrow \frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p^2} = \left(\frac{3}{20\,\eta}\right)^3 \rightarrow \sigma_p^2 = \langle n\rangle\frac{\eta}{2}\left(\frac{20}{3}\eta\right)^3$$

$$\xrightarrow{\eta=3/4} \sigma_p^2 \approx 47\langle n\rangle$$

6-9) L'expressió del paràmetre de qualitat Q tant per l'APD com pel PIN:

$$Q_{APD} = \frac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{F\eta\langle n\rangle + \frac{\sigma_p^2}{M^2}} + \frac{\sigma_p}{M}} = \frac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle + \frac{\sigma_p^2}{M^2}} + \frac{\sigma_p}{M}} \qquad Q_{PIN} = \frac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{\eta\langle n\rangle + \sigma_p^2} + \sigma_p} \approx \frac{\eta\langle n\rangle}{2\sigma_p}$$

$$F = M^x \qquad\qquad \sigma_p^2 \gg \eta\langle n\rangle$$

El guany de l'APD es pot optimitzar per tal de maximitzar el paràmetre Q:

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(Q_{APD}\right) = -\frac{\eta\langle n\rangle\left\{\frac{x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle - 2\frac{\sigma_p^2}{M^3}}{2\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle + \frac{\sigma_p^2}{M^2}}} - \frac{\sigma_p}{M^2}\right\}}{\left(\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle + \frac{\sigma_p^2}{M^2}} + \frac{\sigma_p}{M}\right)^2} = 0 \rightarrow \frac{x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle - 2\frac{\sigma_p^2}{M^3}}{2\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle + \frac{\sigma_p^2}{M^2}}} = \frac{\sigma_p}{M^2}$$

$$x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle - 2\frac{\sigma_p^2}{M^3} = \frac{\sigma_p}{M^2}2\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle + \frac{\sigma_p^2}{M^2}}$$

$$\left(x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle\right)^2 + \cancel{4\frac{\sigma_p^4}{M^6}} - x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle 4\frac{\sigma_p^2}{M^3} = \frac{\sigma_p^2}{M^4}4\left(M^x\eta\langle n\rangle + \cancel{\frac{\sigma_p^2}{M^2}}\right)$$

$$\left(x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle\right)^{\cancel{2}} - \cancel{x}\,\cancel{M^{x-1}}\,\cancel{\eta\langle n\rangle}\,4\frac{\sigma_p^2}{M^3} = \frac{\sigma_p^2}{M^4}4M^x\eta\langle n\rangle = \frac{\cancel{x}}{x}\frac{\sigma_p^2}{M^3}4\,\cancel{M^{x-1}}\,\cancel{\eta\langle n\rangle}$$

$$x\,M^{x-1}\eta\langle n\rangle = 4\frac{\sigma_p^2}{M^3}\left(1+\frac{1}{x}\right) \rightarrow \qquad M_{opt}^{x+2} = \frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x=1} M_{opt}^3 = 8\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}$$

El paràmetre Q maximitzat té la següent expressió:

$$
\begin{aligned}
Q_{max} &= \frac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{\left(\frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{x}{x+2}}\eta\langle n\rangle+\sigma_p^2\left(\frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{-\frac{2}{x+2}}}+\sigma_p\left(\frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{-\frac{1}{x+2}}}= \\
&= \frac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{\sigma_p^2\left(\frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{-\frac{2}{x+2}}\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)+\sigma_p^2\left(\frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{-\frac{2}{x+2}}}+\sigma_p\left(\frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{-\frac{1}{x+2}}}= \\
&= \frac{\eta\langle n\rangle}{\sigma_p\left(\frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{-\frac{1}{x+2}}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)}=\frac{\eta\langle n\rangle}{\sigma_p}\frac{\left(\frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{x+2}}}{\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)}= \\
&= \left(\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^{x+1}}{\sigma_p^x}\right)^{\frac{1}{x+2}}\frac{\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{x+2}}}{\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)}\xrightarrow{x=1}\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\eta\langle n\rangle\right)^2}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

El paràmetre Q també es pot posar en funció de la del PIN per tal de determinar la condició de millora:

$$
Q_{max} = \underbrace{\frac{\eta\langle n\rangle}{\sigma_p}}_{Q_{PIN}}\underbrace{\frac{\left(\frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{x+2}}}{\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)}}_{\geq 1}=\underbrace{\frac{\eta\langle n\rangle}{\sigma_p}}_{Q_{PIN}}\underbrace{\frac{M_{opt}}{\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)}}_{\geq 1}
$$

$$
\frac{\left(\frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{x+2}}}{\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)}\geq 1\rightarrow\frac{4\sigma_p^2}{x\,\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\geq\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)^{x+2}\rightarrow\langle n\rangle\leq\frac{\sigma_p^2}{\eta}\frac{\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)^{x+2}}
$$

$$
\rightarrow\langle n_a\rangle\leq\frac{\sigma_p^2}{\eta}\frac{\frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)^{x+2}}\xrightarrow{x=1}\frac{1}{16}\frac{\sigma_p^2}{\eta}
$$

El paràmetre Q també es pot posar en funció de la del límit quàntic per tal de veure quina penalització hi haurà. Després es pot trobar quina condició s’ha de donar per tal de que aquesta sigui 1/4 (25%):

$$Q_{max} = \frac{\eta\langle n\rangle}{\sigma_p}\frac{\left(\frac{4}{x}\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{x+2}}}{\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)} = \underbrace{\sqrt{\langle n\rangle}}_{Q_{LQ}}\underbrace{\sqrt{\eta}\sqrt{\frac{\eta\langle n\rangle}{\sigma_p^2}}\frac{\left(\frac{\sigma_p^2}{\eta\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{x+2}}\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{x+2}}}{\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)}}_{\text{penalització}} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{\langle n\rangle}}_{Q_{LQ}}\sqrt{\eta}\left(\sqrt{\frac{\eta\langle n\rangle}{\sigma_p^2}}\right)^{\frac{x}{x+2}}\frac{\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{x+2}}}{\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\right)} \xrightarrow{x=1} \underbrace{\sqrt{\langle n\rangle}}_{Q_{LQ}}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\eta^2\frac{\sqrt{\langle n\rangle}}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{3}}}_{1/4}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left(\eta^2\frac{\sqrt{\langle n\rangle}}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \rightarrow \eta^2\frac{\sqrt{\langle n\rangle}}{\sigma_p} = \frac{1}{8} \rightarrow \sigma_p = 8\eta^2\sqrt{\langle n\rangle} \rightarrow \sigma_p^2 = 64\eta^4\langle n\rangle \approx 20\langle n\rangle$$

10) El guany de l’APD es pot ajustar per tal d’optimitzar la sensibilitat del receptor.

$$Q_{APD} = \frac{\eta\langle n\rangle}{\sqrt{M^x\eta\langle n\rangle + \frac{\sigma_p^2}{M^2} + \frac{\sigma_p}{M}}} \rightarrow \langle n\rangle_{APD} = \frac{Q}{\eta}\left(QM^x + 2\frac{\sigma_p}{M}\right) \rightarrow \langle n_a\rangle_{APD} = \frac{Q}{2\eta}\left(QM^x + 2\frac{\sigma_p}{M}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\langle n_a\rangle_{APD}\right) = \frac{xQ^2}{2\eta}M^{x-1} - \frac{Q}{\eta}\frac{\sigma_p}{M^2} \rightarrow \frac{xQ^{\cancel{2}}}{2\cancel{\eta}}M^{x-1} = \frac{\cancel{Q}}{\cancel{\eta}}\frac{\sigma_p}{M^2} \rightarrow M^{x+1} = \frac{2\sigma_p}{xQ}$$

$$M_{opt,Q} = \left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{1}{x+1}} \geq 1 \xrightarrow{x=1} \sqrt{\frac{2\sigma_p}{Q}} \geq 1$$

$$\langle n_a\rangle_{min} = \frac{Q}{2\eta}\left(Q\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}} + 2\sigma_p\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{-\frac{1}{x+1}}\right) = \frac{Q}{2\eta}\left(\frac{2\sigma_p}{x}\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{\frac{x}{x+1}-1} + 2\sigma_p\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{-\frac{1}{x+1}}\right) =$$

$$= \frac{Q}{\cancel{2}\eta}\cancel{2}\sigma_p\left(\frac{2\sigma_p}{xQ}\right)^{-\frac{1}{x+1}}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\frac{Q\sigma_p}{\eta}}_{\langle n_a\rangle_{PIN}}\underbrace{\left(\frac{xQ}{2\sigma_p}\right)^{\frac{1}{x+1}}\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\leq 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{xQ}{2\sigma_p}\right)^{\frac{1}{x+1}} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{x+1} \rightarrow \frac{xQ}{2\sigma_p} \leq \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1} \rightarrow Q \leq 2\sigma_p\frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1} \xrightarrow{x=1} Q \leq \frac{\sigma_p}{2}$$