UPC · telecom BCN · Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona · UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS	**Senyals i Sistemes II** Data d'examen: 25-Juny-2009 Data notes provisionals: 30-Juny-2009 Període d'al·legacions: 2-Juliol-2009 (abans 10:00 matí) Data notes revisades: 3-Juliol-2009

Professors: J. Hernando, J.B. Mariño, E. Monte, J. Ruiz, J. Salavedra.

Temps: 1 h 30 min

- Responeu a cada problema en fulls separats.
- El vostre nom ha de figurar en tots els fulls que utilitzeu, en format: COGNOMS, NOM.
- Justifiqueu tots els resultats. Els resultats sense justificació no seran valorats en la correcció.
- No podeu utilitzar llibres, apunts, taules, formularis, calculadores o telèfon mòbil.

Problema 1: **3.5 punts**

Sea la secuencia periódica $x[n] = \{\ldots, \underline{5}, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, \ldots\}$ de periodo P=4.

a) Calcular los valores de la DFT de x[n] con N=4 muestras.
b) A partir del resultado anterior, expresar la secuencia periódica x[n] como suma de exponenciales complejas.
c) Calcular la TF de x[n] y dibujarla en el intervalo de $[0,2\pi)$.
d) Encontrar la expresión de $r_x[m]$.

Se pretende filtrar la señal x[n] anterior con un filtro con respuesta impulsional $\sum_{k=0}^{L-1}\delta[n-k]$:

e) Deducir el valor mínimo de L para que la salida y[n] del filtro sea constante.
f) En el caso anterior, encontrar la expresión de $r_y[m]$.

Si en lugar del filtro anterior, tenemos dos filtros conectados en cascada con respuestas impulsionales $h_1[n] = \{\underline{1}, a, 1\}$ y $h_2[n] = \{\underline{1}, b, 1\}$ para filtrar la señal x[n]:

g) Encontrar los valores de *a* y *b* para que la salida y[n] del filtro sea constante.
h) Encontrar la expresión de la respuesta impulsional h[n] y la autocorrelación $r_h[m]$ del filtro global compuesto por los dos filtros $h_1[n]$ y $h_2[n]$.

Problema 2: **3.5 punts**

Se desea diseñar un filtro h[n] real y causal, paso banda que proporcione una banda de paso al menos entre las frecuencias 0.2 y 0.3 y presente bandas atenuadas por debajo de 0.15 y por encima de 0.4. Para ello se hace uso de la técnica de ventanas. Se pide:

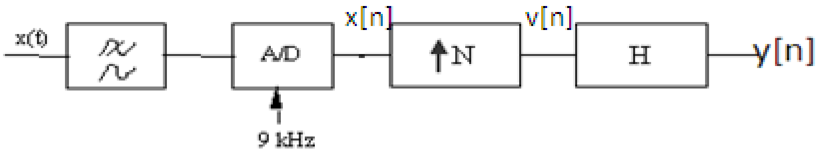
a) Pulsación central de la banda de paso del filtro ideal de partida.
b) Ancho de banda del filtro ideal para que h[n] cumpla las especificaciones con el mayor ancho de banda posible.
c) Respuesta impulsional de este filtro ideal.
d) Expresión de la respuesta impulsional h[n] en términos del filtro ideal y de la ventana, suponiendo que el filtro ideal tiene fase nula y la ventana es par y cumple que $v[n]=0$, $|n|>M$.
e) Longitud del filtro h[n] si se utiliza una ventana rectangular.
f) Longitud del filtro h[n] si se utiliza una ventana triangular.

Se excita el filtro h[n] con una sinuoide, se toma un segmento de la salida en régimen permanente con una ventana rectangular de 100 muestras y se realiza una DFT de 200 muestras sobre el mismo. Se observan en el módulo de la DFT dos máximos de valor 150 en k=44 y k=156. Se pide una estimación de:

g) La frecuencia de la sinusoide.
h) La potencia de la sinusoide.

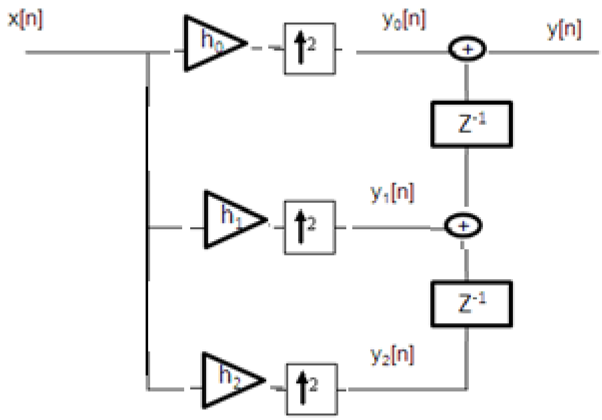
Problema 3: **3 punts**

El objetivo de este problema es estudiar la eficiencia de los procesos de interpolación y diezmado en un caso particular.



a) Calcular el número de multiplicaciones por segundo que se requieren para realizar el esquema anterior, si en el bloque H se realiza una convolución con un filtro FIR de longitud L.
b) Dado el filtro $h[n]=\{\underline{1/2},1,1/2\}$ calcular analíticamente su transformada de Fourier $H(e^{j\omega})$. Justificar que se trata de una aproximación al filtro interpolador con relación de interpolación N=2.
c) Calcular la expresión analítica de $Y(e^{j\omega})$ en función de $H(e^{j\omega})$ y de una $X(e^{j\omega})$ arbitraria.
d) Si $x[n]=\{\underline{1},1,1\}$, N=2 y el filtro es el del apartado b, calcular la secuencia y[n].

Dada la estructura siguiente:



e) Si Fm=9kHz ¿cuál es el número de multiplicaciones por segundo necesarias para realizar este esquema? ¿Cuál es el factor en que disminuye el número de multiplicaciones por segundo en este esquema respecto a la realización del apartado a) para N, L y Fm generales?
f) Si $x[n]=\{\underline{1},1,1\}$, y $h_0=1/2$, $h_1=1$, $h_2=1/2$, calcular las secuencias $y_0[n]$, $y_1[n]$, $y_2[n]$, y la secuencia resultante y[n].
g) Para una x[n] general y $h_0=1/2$, $h_1=1$, $h_2=1/2$, calcular las transformadas de Fourier de $y_0[n]$, $y_1[n]$, $y_2[n]$ y la expresión analítica de $Y(e^{j\omega})$, en función de la transformada de Fourier de x[n].

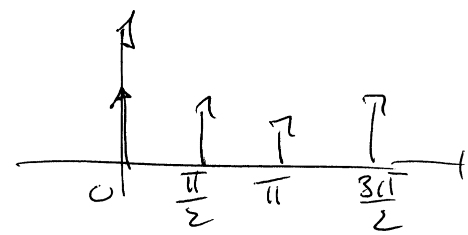
PROBLEMA 1

a) $DFT_4\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{3} x[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = 5 + e^{-j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi}{2}k} = \{\underline{8}, 4, 4, 4\}$

b) Por DFS, $x[n] = \sum_{k=0}^{3} \frac{X_0[k]}{4}\cdot e^{j\frac{2\pi}{4}kn} = 2 + e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\pi n} + e^{j\frac{3\pi}{2}n}$

c) $TF\{x[n]\} = 4\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi r) + 2\pi \sum_r \delta(\omega - \frac{\pi}{2} + 2\pi r) + 2\pi \sum_r \delta(\omega - \pi + 2\pi r) +$

$+ 2\pi \sum_r \delta(\omega - \frac{3\pi}{2} + 2\pi r)$

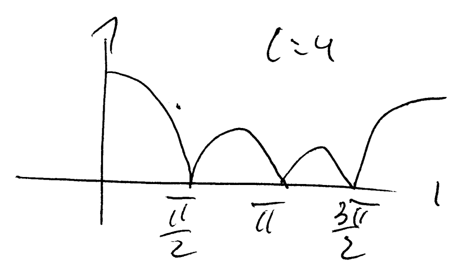


d) $r_x[m] = \sum_{k=0}^{3} \frac{|X_0[k]|^2}{4^2} e^{j\frac{\pi}{2}kn} = 4 + e^{j\pi/2\, n} + e^{j\pi n} + e^{j\frac{3\pi}{2}n}$

$e^{j\omega_0 n}, e^{j\omega_1 n}$ incorreladas

$\omega_0 \neq \omega_1$

e) $|H(e^{j\omega})| = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \xrightarrow{\text{ceros}}$ $\omega = \frac{2\pi}{L}k$



$y[n]$ cte

f) $y[n] = cte = 8 \underset{PTTF}{\Longrightarrow} r_y[m] = \frac{8^2}{2}$

g) $h_1[n] = \{\underline{1}, a, 1\}$ si $a = -2\cos(\omega_0)$ $H_1(e^{j\omega})$ cero a ω_0

$a = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

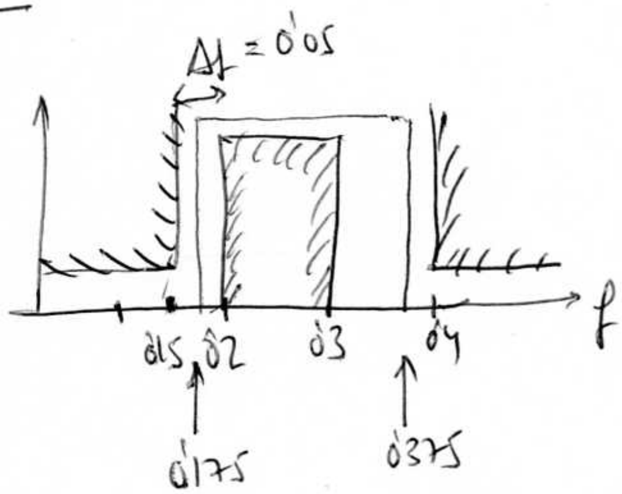
$h_2[n] = \{\underline{1}, b, 1\} \Rightarrow b = -2\cos(\omega_0) = -2\cos(\pi) = 2$

h) $h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \{\underline{1}, 2, 2, 2, 1\}$

$r_h[m] = h[m] * h^*[-m] = \{1, 4, 8, 12, \underline{14}, 12, 8, 4, 1\}$

Problema 2

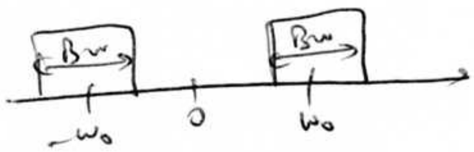
a, b)



$B_f = 0'375 - 0'175 = 0'2 \longrightarrow B_\omega = 0'4\pi$

$f_0 = \dfrac{0'375 + 0'175}{2} = 0'275 \longrightarrow \omega_0 = 0'55\pi$

c)



$h(n) = \dfrac{2}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\dfrac{B_\omega}{2} n\right) \cos \omega_0 n$

d) $h'(n) = \dfrac{2}{\pi(n-M)} \operatorname{sen}\left(\dfrac{B_\omega}{2}(n-M)\right) \cos \omega_0 (n-M)\; v(n-M)$

e) $\Delta\omega \simeq \dfrac{4\pi}{L}$ $\quad L \simeq \dfrac{4\pi}{\Delta\omega} = \dfrac{4\pi}{2\pi \cdot 0'05} = 40 \xrightarrow[L \text{ impar}]{} 41$

f) $\Delta\omega \simeq \dfrac{8\pi}{L} \longrightarrow 81$

g) $f = \dfrac{k}{N} = \dfrac{44}{200} = 0'22$

h) $P = \dfrac{1}{2}A^2$ $\quad \dfrac{1}{2}A \cdot 100 \simeq 150 \longrightarrow A \simeq 3 \longrightarrow P \simeq \dfrac{9}{2}$

a) $F_m \times L \times N$

b) $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + e^{-j\omega} + \frac{e^{-j\omega 2}}{2} = e^{-j\omega}(\cos\omega + 1)$

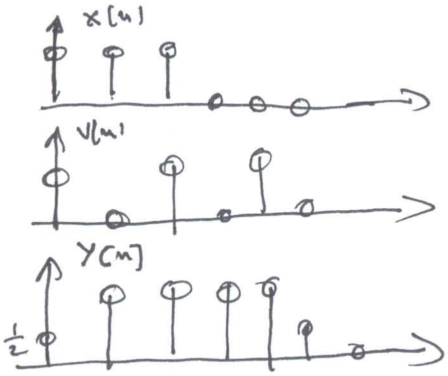
- Ganancia en $\omega = 0$ $\quad G = 2$
- Frec. de corte a 3dB

$\cos\omega + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$;

Diferente de $\pi/N = \pi/2$ por lo que es una aproximación

c) $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\,X(e^{j2\omega})$

d)

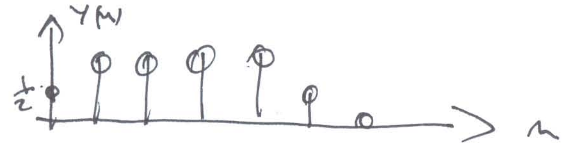


e) Multiplicaciones que realiza: $3 \times 9\,KHz = 27K \frac{\text{multiplicaciones}}{\text{segundo}}$

$= N \times F_m$

La disminución es por un factor de "L"

f)



g) $Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}X(e^{j\omega 2}) + e^{-j\omega}X(e^{j\omega 2}) + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}X(e^{j\omega 2})$

$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}(\cos\omega + 1)\,X(e^{j2\omega})$