Enginyeria Informàtica **FIB-UPC** **Curs 2007-2008/Q1**

Solució de l'examen parcial de Matemàtica Discreta. Grup 10 **25/10/2007**

1.

(a) *Si les notes d'un examen són valors enters entre 0 i 10, quants exàmens calen per assegurar que almenys 20 tindran la mateixa puntuació?*

En total hi ha 11 puntuacions possibles. Pel principi de les caselles generalitzat, per assegurar un mínim de 20 exàmens amb la mateixa puntuació calen almenys $19 \cdot 11 + 1 = 210$ exàmens.

(b) *A una escola de cuina, cada alumne de primer ha de cursar obligatòriament 4 assignatures. Si la capacitat màxima de cada assignatura és de 15 places i en total hi ha 120 alumnes a primer curs, quantes assignatures ha d'oferir com a mínim l'escola?*

Si l'escola oferís k assignatures i totes tinguessin 15 alumnes (el màxim permès), tindríem que $120 \cdot 4 = 15k$, d'on deduïm que l'escola ha d'oferir almenys $k = \frac{120 \cdot 4}{15} = 32$ assignatures.

(c) *Calculeu el nombre de solucions enteres no negatives de l'equació $x + y + z + t = 125$ tals que $x \leq 42$.*

El nombre de solucions enteres no negatives és $\binom{4+125-1}{125} = \binom{128}{125}$. El nombre de solucions enteres no negatives que satisfan $x \geq 43$ és $\binom{4+125-1-43}{125-43} = \binom{85}{82}$. Per tant, el nombre de solucions enteres no negatives tals que $x \leq 42$ és

$$\binom{128}{125} - \binom{85}{82} = \binom{128}{3} - \binom{85}{3} = 341376 - 98770 = 242606.$$

(d) *Calculeu el coeficient de $x^{70}y^{50}z^{10}$ al desenvolupar l'expressió $(x^2 + yz + 1/z)^{125}$.*

Pel teorema del multinomi,

$$(x^2 + yz + 1/z)^{125} = \sum_{i+j+k=125} \binom{125}{i, j, k} (x^2)^i (yz)^j (1/z)^k = \sum_{i+j+k=125} \binom{125}{i, j, k} x^{2i} y^j z^{j-k}.$$

Obtindrem el terme $x^{70}y^{50}z^{10}$ si $2i = 70$, $j = 50$ i $j - k = 10$. És a dir, si $i = 35$, $j = 50$ i $k = 40$. A més, en aquest cas es satisfà $i+j+k = 35+50+40 = 125$. Per tant, el coeficient de $x^{70}y^{50}z^{10}$ és el nombre multinomial $\binom{125}{35,50,40} = \frac{125!}{35!\,50!\,40!}$, que és aproximadament 7.34×10^{56}.

(e) *Disposem de 12 boles numerades de 1 a 12, i 12 capses numerades de 1 a 12. Calculeu de quantes maneres es poden distruibuir les boles en les capses si s'han de complir alhora les tres condicions següents: (i) no poden quedar capses buides; (ii) les capses numerades amb un nombre senar només poden contenir boles numerades amb un nombre senar; (iii) les capses numerades amb un nombre parell no poden contenir una bola etiquetada amb el mateix nombre.*

Si hem de repartir 12 boles en 12 capses, i no poden quedar capses buides, cada capsa contindrà exactament una bola. La segona condició implica que les boles senars les hem de posar en capses senars. Això ho podem fer de 6! maneres, ja que hi ha 6 nombres senars entre

1 i 12. La tercera condició implica que les capses parelles contenen una bola parella amb un nombre diferent del de la capsa. Això es pot fer de D_6 maneres, ja que hi ha 6 nombres parells entre 1 i 12. En total es poden repartir de $6!\, D_6 = 720 \cdot 6!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}) = 720 \cdot 265 = 190800$ maneres.

(f) *Trobeu la funció generadora ordinària de la successió*
$(1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 4, 8, 1, 5, 16, 1, 6, 32, 1, 7, 64, 1, 8, 128, 1, 9, 256, 1, 10, 512, \dots)$.

Amb manipulació de funcions generadores deduïm:

$$(1, 1, 1, 1 \dots) \longleftrightarrow \tfrac{1}{1-x}\ ;\ (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1 \dots) \longleftrightarrow \tfrac{1}{1-x^3} \tag{1}$$

$(1, 1, 1, 1 \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}$; $(1, 2, 3, 4, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}$; $(1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{(1-x^3)^2}$;

$$(0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, \dots) \longleftrightarrow \tfrac{x}{(1-x^3)^2} \tag{2}$$

$(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-2x}$; $(1, 0, 0, 2, 0, 0, 4, 0, 0, 8, 0, 0, 16, 0, 0, 32, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-2x^3}$;

$$(0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 4, 0, 0, 8, 0, 0, 16, 0, 0, 32, \dots) \longleftrightarrow \tfrac{x^2}{1-2x^3}. \tag{3}$$

Si sumem (1), (2) i (3) obtenim:
$(1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 4, 8, 1, 5, 16, 1, 6, 32, 1, 7, 64, 1, 8, 128, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x^3} + \frac{x}{(1-x^3)^2} + \frac{x^2}{1-2x^3}$.

És a dir, la funció generadora de la successió de l'enunciat és

$$A(x) = \frac{1}{1-x^3} + \frac{x}{(1-x^3)^2} + \frac{x^2}{1-2x^3}.$$

(g) *Doneu la funció generadora ordinària de la successió $(a_n)_{n\geq 0}$, on a_n és el nombre de particions de l'enter n en parts parelles que apareixen com a molt dues vegades cadascuna. Doneu els valors de a_5 i a_6.*

Per a cada parell positiu $2i$, $i \geq 1$, considerem el factor $1 + x^{2i} + x^{4i}$, on l'exponent de x indica el nombre de vegades que apareix la part $2i$: cap vegada si l'exponent és $0 (= 0 \cdot 2i)$, exactament una vegada si l'exponent és $2i (= 1 \cdot 2i)$, i exactament dues vegades si l'exponent és $4i (= 2 \cdot 2i)$. La funció generadora ordinària que ens demanen és doncs:

$$A(x) = \prod_{i\geq 1} (1 + x^{2i} + x^{4i}).$$

Per altra banda, no es pot escriure de cap manera el nombre 5 com a suma de nombres parells. Per tant, $a_5 = 0$.

Finalment, si escrivim 6 com a suma de nombres parells, les parts poden ser 2, 4, o 6. Si la part més gran és 2, la partició hauria de ser $6 = 2+2+2$, on la part 2 apareix 3 vegades, i no satisfà les condicions de l'enunciat. Si la part més gran és 4, la partició ha de ser $6 = 4 + 2$. Si la part més gran és 6, la partició ha de ser $6 = 6$. Per tant, $a_6 = 2$.

(h) *Si $A(x)$ és la funció generadora exponencial de la successió $(a_n)_{n\geq 0}$, de quina successió és funcio generadora exponencial $A'(x)$?*

Tal com hem vist (i demostrat) a classe, $A'(x)$ és la funció generadora exponencial de la successió $(a_{n+1})_{n\geq 0} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$.

2. *Considerem totes les paraules que es poden formar amb un alfabet que conté 19 símbols, dels quals 4 són vocals i la resta consonants.*

(i) (1 punt) *Calculeu quantes paraules de longitud 12 contenen exactament dues vegades cada vocal.*

Cada paraula contindrà 8 vocals (dues vegades cadascuna) i 4 consonants. Podem triar els 8 llocs que ocuparan les vocals de $\binom{12}{8}$ maneres. En aquests 8 llocs hi podem posar les vocals de $\binom{8}{2,2,2,2}$ maneres. Als quatre llocs restants hi podem posar qualsevol de les 15 consonants. En total n'hi ha $\binom{12}{8}\binom{8}{2,2,2,2}15^4 = \frac{12!}{8!\,4!}\ \frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!}\ 15^4 = 63149625000$.

(ii) (1 punt) *Quantes paraules de longitud 9 comencen amb tres vocals o acaben amb tres consonants?*

Si A és el conjunt de paraules que comencen amb tres vocals i B és el conjunt de paraules que acaben amb tres consonants, hem de calcular $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Disposem de 4 vocals i de 15 consonants, per tant: $|A| = 4^3 19^6$, $|B| = 19^6 15^3$, i $|A \cap B| = 4^3 19^3 15^3$. Per tant, $|A \cup B| = 4^3 19^6 + 19^6 15^3 - 4^3 19^3 15^3 = 160309240759$.

(iii) (1 punt) *Calculeu quantes paraules de longitud 10 contenen una única vocal 5 vegades, una única consonant 5 vegades, i a més, si considerem per a tot $k \in [10]$ la subparaula formada per les k primeres lletres, el nombre de vocals no supera mai el de consonants.*

El nombre de maneres de triar els 5 llocs que ocuparà la vocal i els 5 llocs que ocuparà la consonant és el nombre de Catalan C_5 (si identifiquem les vocals amb un -1 i les consonants amb 1, les sumes parcials sempre són no negatives i al final sumen 0). A més tenim 4 vocals i 15 consonants possibles. Per tant n'hi ha $4 \cdot 15 \cdot C_5 = 60 \cdot \frac{1}{6}\binom{10}{5} = 60 \cdot 42 = 2520$.

(iv) (3 punts) *Sigui a_n el nombre de paraules de longitud $n \geq 1$ que contenen un nombre parell de vocals. Plantegeu una equació recurrent que satisfaci la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ i calculeu el valor de a_n per a tot $n \geq 1$.*

Si a_n representa el nombre de paraules de longitud n que satisfan les condicions de l'enunciat, llavors $a_n = 15a_{n-1} + 4(19^{n-1} - a_{n-1})$, ja que si la paraula comença amb una de les 15 consonants, a continuació hi ha d'haver una paraula de longitud $n-1$ amb un nombre parell de vocals, i si comença amb una vocal, després hi ha d'haver una paraula de longitud $n-1$ amb un nombre senar de vocals. D'aquestes últimes n'hi ha $19^{n-1} - a_{n-1}$, ja que són totes les paraules de longitud $n-1$ menys les que tenen un nombre parell de vocals.

L'equació recurrent és, doncs, $a_n = 11\,a_{n-1} + 4 \cdot 19^{n-1}$, $\forall n \geq 2$. Es tracta d'una equació recurrent lineal a coeficients constants d'ordre 1 no homogènia. El primer terme és $a_1 = 15$, ja que les paraules de longitud 1 amb un nombre parell de vocals estan formades per una consonant.

La solució és de la forma $a_n = h_n + p_n$, on h_n és la solució general de l'equació recurrent homogènia i p_n una solució particular de l'equació recurrent no homogènia. L'equació característica de la homogènia és $q(x) = x - 11 = 0$ i per tant $h_n = A \cdot 11^n$.
Per ser la part no homogènia $b_n = 4 \cdot 19^{n-1} = \frac{4}{19}\,19^n$, i 19 no és arrel de l'equació característica de l'homogènia, $q(x) = x - 11 = 0$, la solució particular és de la forma $p_n = B \cdot 19^n$.
Imposem que $(p_n)_{n\geq 1}$ satisfaci l'equació recurrent no homogènia: $p_n = 11\,p_{n-1} + 4 \cdot 19^{n-1} \Leftrightarrow B \Leftrightarrow B\,19^n = 11 \cdot B \cdot 19^{n-1} + 4 \cdot 19^{n-1} \Leftrightarrow 19\,B = 11\,B + 4 \Leftrightarrow 8B = 4 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}$.
La solució és de la forma $a_n = A \cdot 11^n + \frac{1}{2} \cdot 19^n$. Però $a_1 = 15 = A \cdot 11 + \frac{19}{2}$, d'on deduïm $A = \frac{1}{2}$. Per tant, $a_n = \dfrac{1}{2}\,(11^n + 19^n)$, $\forall n \geq 1$.