ETSETB-UPC **Tardor 2001**
COMUNICACIONES II **EXAMEN FINAL** **8 de enero de 2002**
Profesores: M. Cabrera, J. Fernández, E. Monte, G. Vázquez **2 horas y 30 minutos**

Entregue el examen en cuatro partes separadas, siguiendo las indicaciones del enunciado.

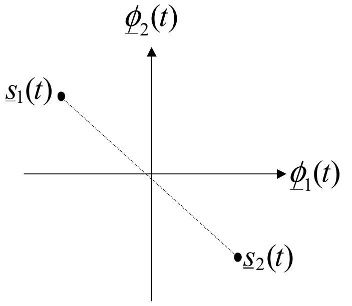
------------------------(inicie la resolución en una HOJA NUEVA)---------------------------

Ejercicio 1.

Sea una modulación binaria que presenta una constelación como la indicada en la figura, en la que los símbolos $\{\underline{s}_i(t)\}_{1\le i\le 2}$ son estadísticamente independientes y equiprobables:

$$\begin{aligned}\underline{s}_1(t) &= -\underline{\phi}_1(t) + \underline{\phi}_2(t)\\ \underline{s}_2(t) &= +\underline{\phi}_1(t) - \underline{\phi}_2(t)\end{aligned} \quad \text{es decir: } \underline{S}_1 = A\begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix} \text{ y } \underline{S}_2 = A\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix}$$

donde $\{\underline{\phi}_k(t)\}_{1\le k\le 2}$ es una base ortonormal.



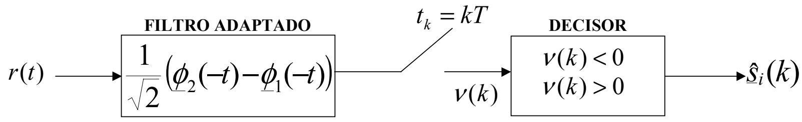
La señal recibida es de la forma:

$$\underline{r}(t) = \underline{s}_i(t) + \underline{w}(t)$$

donde $\underline{w}(t)$ es un ruido blanco, gaussiano, con densidad espectral de potencia $S_{ww}(f) = N_o/2\ Watts/Hz$.

a. Determine la dimensión del espacio de la señal de la modulación anterior, así como una base ortonormal generadora del mismo. Represente los símbolos $\{\underline{s}_i(t)\}_{1\le i\le 2}$ en la nueva base ortonormal.

b. Indique bajo que criterio el siguiente esquema de recepción es óptimo. Demuestre analíticamente que dicho esquema satisface el criterio indicado.



Asuma <u>en el resto de apartados</u> que el ruido $\underline{w}(t)$ ***no es blanco***, de modo que definimos las siguientes dos proyecciones del ruido $\underline{w}(t)$ sobre la base original $\{\underline{\phi}_k(t)\}_{1\le k\le 2}$:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \int \phi_1(t) w(t) dt\\ \beta_2 &= \int \phi_2(t) w(t) dt\end{aligned} \quad \text{con: } \begin{cases} E[\beta_1(k)\beta_1(k')] = \sigma^2\delta(k-k')\\ E[\beta_2(k)\beta_2(k')] = \sigma^2\delta(k-k')\\ E[\beta_1(k)\beta_2(k')] = \sigma_{12}\delta(k-k')\end{cases}$$

c. Obtenga el modelo de la señal muestreada $v(k)$ antes de la decisión en estas nuevas condiciones de ruido e indique la potencia de ruido total que soporta el decisor.

d. Asuma ahora que en la propagación el canal introduce *ISI* y que en detección la información relevante es de la forma:

$$v(k) = 0.1 s_{i[k]} - 0.8 s_{i[k-1]} + \beta(k)$$

donde $\beta(k)$ es el ruido total en detección. Diseñe las ecuaciones de un ecualizador de mínimo error cuadrático medio (Wiener) de tres coeficientes, bajo las condiciones de ruido indicadas en el apartado (c.):

$$\varepsilon = E\left[\left|v_Q[k] - s_{i[k-1]}\right|^2\right] \quad \text{con} \quad v_Q[k] = h_0 v[k] + h_1 v[k-1] + h_2 v[k-2]$$

Desarrolle con detalle todos los términos que aparecen en el sistema de ecuaciones sin llegar a resolver dicho sistema.

------------------------(siga la resolución en una HOJA NUEVA)----------------------------

Considere, de nuevo, ausencia de *ISI*, el ruido relevante $\underline{\beta} = [\beta_1, \beta_2]^T$ gaussiano, con una función densidad de probabilidad:

$$f_{\underline{\beta}}(\underline{\beta}) = f_{\underline{\beta}}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = G \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(\beta_1 \quad \beta_2)\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix})$$

con $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma^2}$, $|\rho| \leq 1$ y donde *G* es una constante irrelevante en el problema.

El transmisor genera una modulación cuaternaria cuyos símbolos $\{\underline{s}_i(t)\}_{1\leq i\leq 4}$ son equiprobables, tales que:

$$\underline{S}_1 = A\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix} \qquad \underline{S}_2 = A\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} \quad \underline{S}_3 = A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{S}_4 = A\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

todos ellos referidos a la base original $\{\underline{\phi}_k(t)\}_{1\leq k\leq 2}$.

e. Dé las expresiones de las funciones de densidad de probabilidad del vector recibido: $\underline{v}(k) = \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \phi_1(t) r(t) d \\ \int \phi_2(t) r(t) dt \end{bmatrix}$ condicionado a la transmisión de cada uno de los 4 símbolos:

$$f_{\underline{v}(k)}\left(\underline{v}(k) / \underline{S}_i\right) = f_{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} / \underline{S}_i\right); i = 1,2,3,4$$

f. Desarrolle las ecuaciones del receptor *MAP* de dicha modulación y demuestre que el receptor óptimo *MAP* debe satisfacer el siguiente criterio.

$$\text{máx}_{\underline{s}_i} \quad \underline{s}_i^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \underline{v}(k) - \frac{1}{2} \underline{s}_i^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \underline{s}_i$$

donde $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$.y $\left(\Sigma^{-1}\right)^T = \Sigma^{-1}$.

g. Indique en una figura el esquema de dicho receptor óptimo para el ruido coloreado anterior.
h. Obtenga la ecuación del contorno que delimita la decisión entre los símbolos $\underline{S}_1$ y $\underline{S}_2$. Represéntela en un gráfico.

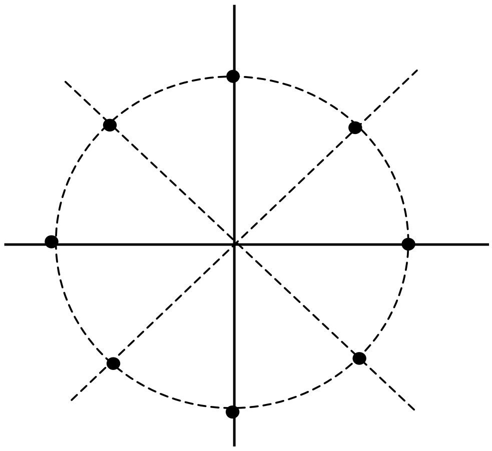
------------------------(siga la resolución en una HOJA NUEVA)---------------------------

Ejercicio 2.

Sea una modulación *8PSK*:

$$s(t) = A_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t + \phi_k) p(t - kT), \text{ con } \omega_c = 2\pi f_c$$

con un pulso conformador rectangular de la forma, $p(t) = \Pi\left\{\frac{t - T/2}{T}\right\}$, y 8 valores equiprobables para la fase $\phi_k = 0, \frac{2\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \frac{8\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{12\pi}{8}, \frac{14\pi}{8}$, codificados mediante un código de Gray, cuya constelación es la siguiente:



Supondremos la presencia de un canal ideal con una densidad espectral de potencia blanca $S_{nn}(f) = N_0/2 \quad \text{Watts/Hz}$.

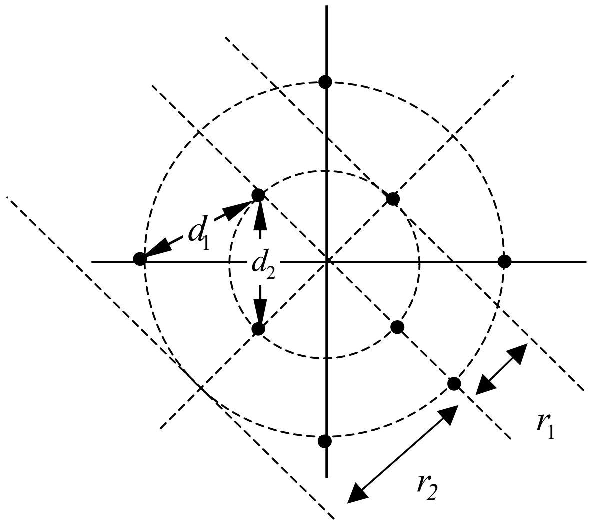
a. Calcule la energía por bit E_b asociada a la señal en función de A_c y T. Relaciónela con la distancia mínima entre símbolos, según la constelación de la figura anterior, donde las dos componentes de señal representadas, son respecto a la base ortonormal:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\omega_c t.p(t) \qquad \phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\omega_c t.p(t)$$

b. Dé la expresión de s(t) en función de las componentes en fase y cuadratura ($i_s(t)$ y $q_s(t)$), indicando cuales son dichas componentes en fase y en cuadratura.

c. Si los errores <u>sólo</u> se producen entre símbolos <u>colindantes</u>, calcule una cota superior de la *BER* para esta constelación. Exprese dicha costa en función del cociente E_b/N_0

Una manera de mejorar la *BER* es aumentar la distancia entre puntos de la constelación, para ello proponemos una modulación en la que los símbolos se reparten sobre dos circunferencias de radios r_1 y r_2. En la figura siguiente presentamos la constelación de la modulación 8*APK* que proponemos:



d. Calcular la relación entre r_1 y r_2 para que las distancias d_1 y d_2 sean iguales. En los apartados e y f llamaremos a dicha distancia 'd' ($d = d_1 = d_2$).
e. Indique los valores de r_1 y r_2 en función de la distancia mínima 'd' y exprese también el cociente Eb/No en función de dicha distancia 'd'.
f. Calcular la nueva cota superior de la BER para la modulación 8APK y obtenga la mejora (en dB) que supone en Eb/No respecto a la BER calculada en el apartado c) para la modulación 8PSK.

------------------------(siga la resolución en una HOJA NUEVA)---------------------------

En los apartados siguientes veremos como afecta a la BER el denominado 'jitter' de fase sobre la modulación **8PSK**.

El 'jitter' se produce por el ruido térmico presente en los osciladores del transmisor y del receptor, de modo que la fase de la señal detectada resulta perturbada por una fase ϑ aleatoria, que se procura que sea lo menor posible mediante mejoras tecnológicas en la fabricación de dichos osciladores.

Supondremos que la decisión de cada símbolo recibido se realiza con el criterio de distancia mínima sobre los 8 símbolos de la constelación 8PSK.

g. Obtenga la cota superior de la BER, en función de ϑ, para una ϑ dada (arbitrariamente pequeña). A la cota calculada la denominaremos $BER(\vartheta)$.
h. Si el jitter ϑ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[-\delta,+\delta]$, calcular el valor esperado de la cota superior de la BER, definida como: $\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{BER}(\vartheta) f_{\vartheta}(\vartheta)\, d\vartheta$ Para ello utilice las siguientes expresiones:

Para ello utilice las siguientes expresiones y consideraciones:

$\delta << \dfrac{\pi}{M}$ Donde M representa el número de niveles. En nuestro caso M=8, aunque se sugiere no sustituir dicho valor hasta obtener la última expresión del desarrollo.

$$\sin\left(\frac{\pi}{M} \pm \alpha\right) \cong \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \pm \alpha \cos\left(\frac{\pi}{M}\right) \qquad \text{si} \qquad \alpha << \frac{\pi}{M}.$$

$Q(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}$ si *x>>1* En definitiva, puede realizar esta aproximación si el cociente Eb/No>>1, lo cual puede suponerlo para el desarrollo de este apartado.

$\frac{1}{1-x} \cong 1 + x$ si x<<1 donde $x = \vartheta \frac{\cos\left(\frac{\pi}{M}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)}$ sí cumple la condición dado el margen de variación del jitter ($\delta << 1$)