Examen Final IL. 1a part: Lògica Prop. Gener 2008

Cognoms, Nom:
DNI: **Temps: 80 min.**

Entrega exercicis diferents en fulls separats.

Publicació notes: 23 gen. Revisió: 29 gen. amb sol·licitud prèvia via mail raonat fins el 25 gen.

1: (5 punts) És cert que per tota fórmula F existeix una altra fórmula lògicament equivalent G les úniques connectives lògiques de la qual siguin el $\land$ i el $\neg$?

Demostra formalment la teva resposta. Utilitza (sense necessitat de demostració) el Lema de Substitució i algunes de les propietats bàsiques següents: associativitat, commutativitat, lleis de De Morgan, o doble negació.

Solució:

Cert. Per inducció sobre el nombre de connectives $n(F)$ de la fórmula F. Si $n(F) = 0$, aleshores F és un símbol proposicional, i prenent G com F es compleix trivialment l'enunciat. Si $n(F) > 0$, aleshores distingim dos casos:

a) Si F és de la forma $F_1 \land F_2$, aleshores tenim que $n(F_1) < n(F)$ i $n(F_2) < n(F)$. Per hipòtesi d'inducció, existeixen G_1 i G_2 amb només $\land$ i $\neg$ tals que $F_1 \equiv G_1$ i $F_2 \equiv G_2$. Aleshores pel Lema de Substitució, tenim que $F_1 \land F_2 \equiv G_1 \land G_2$. Podem prendre G com la fórmula $G_1 \land G_2$, ja que només hi apareixen $\land$ i $\neg$, i satisfà $F \equiv G$.

b) Si F és de la forma $F_1 \lor F_2$, aleshores tenim que $n(F_1) < n(F)$ i $n(F_2) < n(F)$. Per hipòtesi d'inducció, existeixen G_1 i G_2 amb només $\land$ i $\neg$ tals que $F_1 \equiv G_1$ i $F_2 \equiv G_2$. Aleshores pel Lema de Substitució i les lleis de doble negació i de De Morgan, es té $F_1 \lor F_2 \equiv G_1 \lor G_2 \equiv \neg\neg G_1 \lor \neg\neg G_2 \equiv \neg(\neg G_1 \land \neg G_2)$. Podem prendre G com la fórmula $\neg(\neg G_1 \land \neg G_2)$, ja que només hi apareixen $\land$ i $\neg$, i satisfà $F \equiv G$.

2: (5 punts) Tenim un país amb n aeroports i volem que en cada vol hi hagi un control antidroga a l'aeroport de sortida o al d'arribada o als dos. Si ens donen la llista dels m vols existents, on cada vol amb origen l'aeroport i i destinació l'aeroport j es representa com un parell (i, j) amb $1 \leq i, j \leq n$ i disposem *com a màxim* de E equips de policia, en quins aeroports hem de situar aquests equips?

Resol aquest problema mitjançant SAT, expressant-lo com una CNF utilitzant els símbols de predicat $p_{k,i}$ que signifiquen "el k-èsim equip de policia ha d'anar a l'aeroport i".

Solució:
Un conjunt de clàusules que codifica el problema en SAT és el següent:

- **Cada equip és enviat com a molt a un aeroport.** Per cada k amb $1 \leq k \leq E$ i per cada parell de vèrtexs i i j amb $1 \leq i < j \leq n$, tenim la clàusula $\neg p_{k,i} \lor \neg p_{k,j}$.
- **Cada vol té equip de policia a almenys un dels dos aeroports.** Per cadascun dels m vols (i, j), tenim la clàusula $p_{1,i} \lor p_{1,j} \;\; p_{2,i} \lor p_{2,j} \;\; \lor \ldots \lor \;\; p_{E,i} \lor p_{E,j}$.

Examen Final IL. 2a part: LPO i Prog. Lògica   Gener 2008

Cognoms, Nom:
DNI: **Temps: 80 min.**

Entrega exercicis diferents en fulls separats.

Publicació notes: 23 gen. Revisió: 29 gen. amb sol·licitud prèvia via mail raonat fins el 25 gen.

1: (3.5 punts) Sigui F la fórmula $\exists z\, p(z) \ \wedge \ \forall x \Big(p(x) \rightarrow \exists y \ (\ \neg p(y) \wedge q(x, f(y,y))\ )\Big)$.

a) Sigui I la interpretació amb domini $D_I = \mathbb{R}$ i on es té que $f_I(x,y) = x \cdot y$ i que

$$p_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \qquad q_I(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = y \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Es compleix que $I \models F$? Justifica la teva resposta informalment, sense utilitzar $eval_I$.

b) Sigui I' la mateixa interpretació que I, llevat que $p_{I'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

Es compleix que $I' \models F$? Justifica la teva resposta informalment, sense utilitzar $eval_{I'}$.

c) Si I'' és un model de F, quants elements té com a mínim $D_{I''}$? Demostra-ho.

Solució:

a) Efectivament $I \models F$, perquè hi ha nombres reals positius (per exemple, $z = 1$); i per tot nombre real positiu x existeix una arrel quadrada negativa y de x, és a dir, un nombre y tal que $y < 0$ i $y^2 = x$.

b) No, no es compleix: per exemple, si prenem $x = -1$, aleshores x és negatiu, però no existeix cap nombre no negatiu que sigui la seva arrel quadrada, perquè el quadrat de tot nombre real és no negatiu.

c) En primer lloc vegem que no hi ha models de cardinal 1. Si J és una interpretació amb domini $D_J = \{a\}$, tenim que $J \models \exists z\, p(z)$ implica que $p_J(a) = 1$. Però aleshores per a $x = a$, com que D_J té un sol element, no pot existir y tal que $\neg p(y)$ s'avalui a cert.

Considerem ara la següent interpretació: definim $D_{J'} = \{a, b\}$, $f_{J'}(x,y) = a$, $q_{J'}(x,y) = 1$ i

$$p_{J'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = a \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Aleshores $J' \models F$: per a $z = a$ tenim que es compleix $p(z)$; i per tot x, existeix un $y = b$ tal que $\neg p(y) \wedge q(x, f(y,y))$.

Com que hem trobat un model de cardinal 2, tot model de F té almenys 2 elements.

2: (3.5 punts) En un poble el barber afaita a tots els homes que no s'afaiten a sí mateixos, i només a aquests. Formalitzant el barber amb una constant, demostra usant resolució que de la frase es dedueix que el barber és una dona.

Nota: encara que la formalització estigui malament, es poden obtenir punts per la resta de l'exercici si no dóna lloc a contradiccions òbvies amb l'enunciat.

Solució:

En primer lloc definim el vocabulari. Considerem la constant b^0 que representa el barber, el símbol de predicat af^2 on $af(x,y)$ significa "x afaita a y", i el símbol de predicat h^1 on $h(x)$ significa "x és un home". Aleshores podem formalitzar la frase amb la fórmula F següent:

$$\forall x\ (af(b,x)\ \leftrightarrow\ (h(x) \land \neg af(x,x)))$$

Per veure que el barber és una dona, hem de demostrar que $F \models \neg h(b)$. Per fer-ho, veurem que $h(b) \land F$ és insatisfactible. Amb aquesta finalitat calculem en primer lloc una CNF equisatisfactible a $h(b) \land F$:

(1) Eliminació de $\leftrightarrow$ i $\rightarrow$:

$h(b) \land \forall x\ ((\neg af(b,x)\ \lor\ (h(x) \land \neg af(x,x))) \land (af(b,x)\ \lor\ \neg(h(x) \land \neg af(x,x))))$

(2) Moviment de les negacions cap endins:

$h(b) \land \forall x\ ((\neg af(b,x)\ \lor\ (h(x) \land \neg af(x,x))) \land (af(b,x)\ \lor\ \neg h(x)\ \lor\ af(x,x)))$

(3) Moviment de quantificadors cap enfora:

$\forall x\ (h(b) \land (\neg af(b,x)\ \lor\ (h(x) \land \neg af(x,x))) \land (af(b,x)\ \lor\ \neg h(x)\ \lor\ af(x,x)))$

(4) Propietat distributiva:

$\forall x\ (h(b) \land (\neg af(b,x)\ \lor\ h(x)) \land (\neg af(b,x)\ \lor\ \neg af(x,x)) \land (af(b,x)\ \lor\ \neg h(x)\ \lor\ af(x,x)))$

Finalment doncs queda el conjunt de clàusules (després de renombrar les variables convenientment):

(a) $h(b)$

(b) $\neg af(b,x)\ \lor\ h(x)$

(c) $\neg af(b,x')\ \lor\ \neg af(x',x')$

(d) $af(b,x'')\ \lor\ \neg h(x'')\ \lor\ af(x'',x'')$

Com que, com es mostra a continuació, es pot deduir la clàusula buida, $h(b) \land F$ és insatisfactible:

	Resolvent	Clàusules utilitzades	Unificador
(e)	$af(b,b)$	$d+a$	$\{x''=b\}$
(f)	$\neg af(b,b)$	$e+c$	$\{x'=b\}$
(g)	$\square$	$f+e$	$\{\}$

Per tant $F \models \neg h(b)$.

3: (3 punts) Un jutge ha de formar un jurat amb N persones, de manera que cap membre del jurat conegui a cap altre membre. Per això disposa de M persones candidates (identificades amb nombres de 1 a M) i d'una llista d'aquells parells de persones que **no** es coneixen, expressada com un programa Prolog format per clàusules `no_coneix(`P_i`,`P_j`).` , on $1 \leq P_i < P_j \leq M$. Es tracta que ajudis el jutge a formar el jurat, utilitzant aquest predicat `no_coneix`.

a) Fes un predicat `compatible(X, L)` que signifiqui "la persona `X` no coneix a cap de les persones de la llista `L`".

b) Utilitzant l'apartat anterior, fes un predicat `valid(L)` que signifiqui "cap membre de la llista `L` coneix cap altre membre de la llista".

c) Assumeix que $M = 10$. Fes un predicat `jurat(N)` que escrigui per pantalla un possible jurat amb `N` persones.

Nota: pots usar els predicats

```
subconjunt([], []).
subconjunt([_|C], S)    :-subconjunt(C, S).
subconjunt([X|C], [X|S]):-subconjunt(C, S).

long([], 0).
long([_|L], M):- long(L, N), M is N+1.
```

Solució:

a)

```
compatible(_, []).
compatible(X, [Y|L]) :- no_coneix(X, Y), compatible(X, L).
compatible(X, [Y|L]) :- no_coneix(Y, X), compatible(X, L).
```

b)

```
valid([]).
valid([X|L]) :-compatible(X, L), valid(L).
```

c)

```
jurat(N) :-
       subconjunt([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10], S),
       long(S, N),
       valid(S),
       write(S).
```