MATEMÀTICA DISCRETA - FIB 4-12-2007

Segon examen parcial Grup 20

---

1. Justifica les respostes.

(a) $\langle 0,5 \text{ punts}\rangle$ Dóna un exemple d'un graf 2-connex que no sigui hamiltonià.

(b) $\langle 0,5 \text{ punts}\rangle$ Dóna un exemple d'un graf amb vèrtex-connectivitat 1 i aresta-connectivitat 3.

(c) $\langle 0,5 \text{ punts}\rangle$ Dóna un exemple d'un graf de diàmetre 4 i amb un vèrtex d'excentricitat 2.

(d) $\langle 0,5 \text{ punts}\rangle$ Sigui G un graf hamiltonià d'ordre n tal que $\Delta(G) \leq \frac{n}{2} - 1$. Demostra que el graf G^c és hamiltonià.

(e) $\langle 0,5 \text{ punts}\rangle$ Sigui T un arbre d'ordre 10, amb $n_5 = 1$, $n_4 = 1$ i $n_2 \geq 1$, sent n_k el nombre de vèrtexs de grau k. Determina la seqüència de graus de T.

(f) $\langle 0,5 \text{ punts}\rangle$ Dóna una matriu laplaciana del graf bipartit complet $K_{2,3}$.

(g) $\langle 0,5 \text{ punts}\rangle$ Dóna dos arbres diferents amb conjunt de vèrtexs [6] tals que a la seva seqüència de Prüfer hi sigui dos cops el vèrtex 3 i un cop el vèrtex 1, i reconstrueix un dels arbres a partir de la seva seqüència.

(h) $\langle 0,5 \text{ punts}\rangle$ Sigui G un graf connex que no és bipartit. Prova que, donats dos vèrtexs qualsevol x, y, es pot construir un x-y recorregut de longitud senar.

2. Sigui $G = (V, A)$ un graf. El *graf línia* de G, LG, és el graf que té per vèrtexs les arestes de G i dos vèrtexs de LG són adjacents si, com a arestes de G, són incidents.

(a) $\langle 1 \text{ punt}\rangle$ Dóna el graf línia de $G = ([5], \{12, 23, 34, 45, 51, 25, 35\})$ i el del graf $K_{1,3}$.

(b) $\langle 1 \text{ punt}\rangle$ Prova que si G és connex, aleshores LG és connex.

(c) $\langle 1 \text{ punt}\rangle$ Prova que si G és eulerià, aleshores LG és eulerià.

(d) $\langle 0,5 \text{ punts}\rangle$ Troba un graf G tal que LG sigui eulerià, però G no.

3. Sigui $G = (V, A)$ un graf ponderat d'ordre $n \geq 3$ amb funció de pesos $w : A \to \mathbb{R}^+$.

(a) $\langle 0,5 \text{ punts}\rangle$ Dóna un arbre generador minimal del graf $G = ([6], \{13, 14, 15, 24, 25, 26, 35, 36, 56\})$ on el pes de l'aresta és $w(xy) = |x - y|$. Quin és el pes d'aquest arbre?

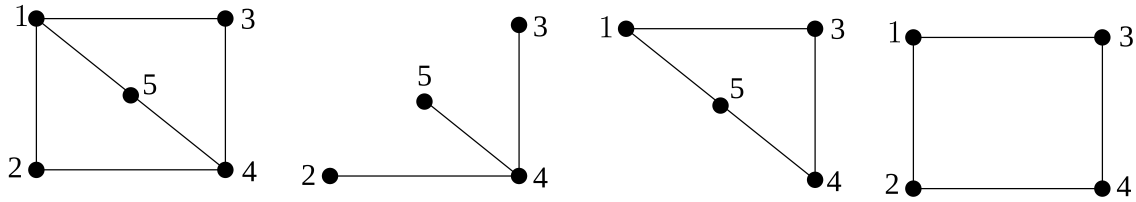
(b) $\langle 1 \text{ punt}\rangle$ Siguin T un arbre generador de G, $a \in A(T)$ i $e \notin A(T)$. Dóna les condicions per tal que el graf $T + e - a$ sigui un arbre. Demostra que, si no és un arbre, té dos components connexos, un és un arbre i l'altre té un cicle.

(c) $\langle 1 \text{ punt}\rangle$ Si T és l'únic arbre generador minimal de G, demostra que cada aresta e que no és de T té un pes major que totes les altres arestes del cicle format afegint e a T.

Solucions possibles

1.

(a) *Dóna un exemple d'un graf 2-connex que no sigui hamiltonià.*

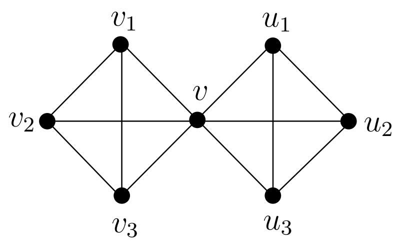


G_1 $\quad$ G_1-1$\cong$ G_1-4 $\quad$ G_1-2$\cong$ G_1-3 $\quad$ G_1-5

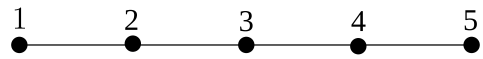
El graf G_1 és 2-connex perquè no té vèrtexs de tall, ja que $G_1 - x$ és connex, per a tot $x \in V(G_1)$. El graf no és hamiltonià, ja que qualsevol cicle hamiltonià hauria de passar per totes les arestes adjacents als vèrtexs de grau 2, en aquest cas serien totes les arestes del graf. El que obligaria a passar per les tres arestes incidents als vèrtexs 1 i 4, i un cicle passa només per dues arestes incidents a un vèrtex.

(b) *Dóna un exemple d'un graf amb vèrtex-connectivitat 1 i aresta-connectivitat 3.*

A G_2 el vèrtex v és de tall, per tant $\kappa(G_2) = 1$. Observem que els subgrafs $\langle\{v_1, v_2, v_3, v\}\rangle$ i $\langle\{u_1, u_2, u_3, v\}\rangle$ són isomorfs a un K_4, per tant, eliminant una o dues arestes d'un o de l'altre subgraf, el graf no es desconnecta, ja que $\lambda(K_4) = 3$. Ara bé, eliminant les arestes $\{v_1v, v_2v, v_3v\}$ el graf resultant és no connex. Per tant, $\lambda(G_2) = 3$.



G_2



G_3

(c) *Dóna un exemple d'un graf de diàmetre 4 i amb un vèrtex d'excentricitat 2.*

A G_3, $d(3, x) = 1$, si $x \in \{2, 4\}$, i $d(3, x) = 2$ si $x \in \{1, 5\}$. La excentricitat d'un vèrtex x és el màxim entre les distàncies de x a qualsevol altre vèrtex del graf. Per tant, $e(3) = 2$. Per a la resta de vèrtexs tenim: $e(2) = e(4) = 3$ i $e(1) = e(5) = 4$. Atès que el diàmetre és el màxim entre les excentricitats dels vèrtexs del graf, G_3 té diàmetre 4.

(d) *Sigui $G = (V, A)$ un graf hamiltonià d'ordre n tal que $\Delta(G) \leq \frac{n}{2} - 1$. Demostra que el graf G^c és hamiltonià.*

Per a tot $x \in V$, $g_{G^c}(x) = n - 1 - g_G(x) \geq n - 1 - (\frac{n}{2} - 1) = \frac{n}{2}$. El graf G^c és hamiltonià ja que tots els vèrtexs tenen grau com a mínim la meitat de l'ordre de G^c.

(e) *Sigui T un arbre d'ordre 10, amb $n_5 = 1$, $n_4 = 1$ i $n_2 \geq 1$, sent n_k és el nombre de vèrtexs de grau k. Determina la seqüència de graus de T.*

Atès que el nombre de fulles d'un arbre T és com a mínim $\Delta(T)$, llavors $n_1 \geq 5$. Escrivim $n_1 = 5 + k_1$ i $n_2 = 1 + k_2$. Pel lema de les encaixades $2(10-1) = \sum_{i=1}^{9} in_i$, així

$$\begin{aligned} 18 &= 5 + k_1 + 2(1 + k_2) + 3n_3 + 4 + 5 + 6n_6 + \cdots + 9n_9 \\ 2 &= k_1 + 2k_2 + 3n_3 + 6n_6 + \cdots + 9n_9 \end{aligned}$$

Com que $n_i \geq 0$, $n_3 = n_6 = \cdots = n_9 = 0$. Si $k_2 = 1$, llavors $k_1 = 0$, però comptant surten només 9 vèrtexs i l'arbre en té 10. Aleshores, $k_2 = 0$ i $k_1 = 2$. La seqüència de graus és $5, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$.

(f) *Dóna una matriu laplaciana del graf bipartit complet $K_{2,3}$.*

Sigui $K_{2,3} = ([5], \{13, 14, 15, 23, 24, 25\})$. La matriu laplaciana és:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on la fila i correspon a la informació del vèrtex i.

(g) *Dóna dos arbres diferents amb conjunt de vèrtexs* $[6]$ *tals que a la seva seqüència de Prüfer hi sigui dos cops el vèrtex 3 i un cop el vèrtex 1, i reconstrueix un dels arbres a partir de la seva seqüència de Prüfer.*

El vèrtex 3 ha de tenir grau 3 per aparèixer dos cops a la seqüència de Prüfer d'un arbre, i el vèrtex 1 ha de tenir grau 2 si hi apareix un cop. Així, dos arbres satisfent les condicions de l'enunciat són $T_1 = ([6], \{13, 14, 23, 26, 35\})$ i $T_2 = ([6], \{13, 15, 23, 34, 46\})$, amb seqüències de Prüfer 1332 i 3134, respectivament.

Reconstrucció de l'arbre T_1 amb seqüència de Prüfer 1332

k	1	2	3	4	5
$V_k = [6] - \{a_k, \ldots, a_5, b_1, \ldots, b_{k-1}\}$	$\{4, 5, 6\}$	$\{1, 5, 6\}$	$\{5, 6\}$	$\{3, 6\}$	$\{2, 6\}$
$b_k = \min V_k$	4	1	5	3	2
$a_k b_k$	14	31	35	23	62

On $T_1 = \langle 14, 31, 35, 23, 62 \rangle$.

(h) *Sigui G un graf connex que no és bipartit. Prova que, donats dos vèrtexs qualsevol x, y, es pot construir un x-y recorregut de longitud senar.*

Si $d(x, y)$ és senar, n'hi ha prou en considerar un x-y camí minimal, que també és un recorregut.

Suposem que $d(x, y) = r$ és parell. Atès que G és un graf no bipartit, G té un cicle de longitud senar n: $u_1 u_2 \ldots u_n u_1$. Sigui $x x_1 \ldots x_{r-1} y$ un x-y camí minimal, i sigui $y y_1 \ldots y_{s-1} u_1$ un y-u_1 camí, que existeix degut a que G és un graf connex. Aleshores,

$$x x_1 \ldots x_{r-1} y y_1 \ldots y_{s-1} u_1 u_2 \ldots u_n u_1 y_{s-1} \ldots y_1 y$$

és un x-y recorregut de longitud $r + s + n + s = \text{parell} + n = \text{senar}$.

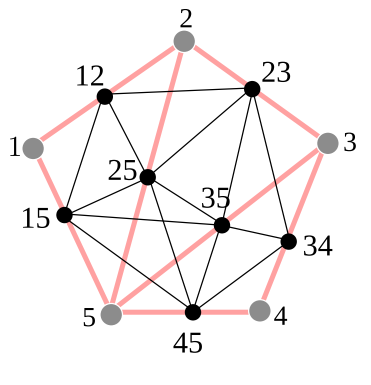
2. *Sigui $G = (V, A)$ un graf. El* graf línia *de G, LG, és el graf que té per vèrtexs les arestes de G i dos vèrtexs de LG són adjacents si, com a arestes de G, són incidents.*

(b) *Prova que si G és connex, aleshores LG és connex.*

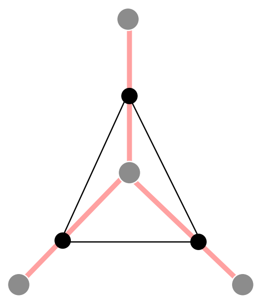
LG és connex si per cada parell de vèrtex a, e hi ha un a-e camí. Siguin $a = xy$ i $e = uv$ dos vèrtexs de LG, que a la vegada són arestes de G. Atès que G és connex, sigui $C = xu_1 \dots u_n u$ un x-u camí a G. Poden passar tres coses:
– si el camí C no passa per xy ni per uv, aleshores $yxu_1 \dots u_n uv$ és un y-v camí a G, i $yx, xu_1, u_1u_2, \dots, u_n u, uv$ és un a-e camí a LG;
– si el camí C passa per l'aresta a (o per e), tindrem que $u_1 = y$ ($u_n = v$), i $xy, yu_2, \dots, u_n u, uv$ ($yx, xu_1, u_1u_2, \dots, u_{n-1}v, vu$) és un a-e camí a LG;
– si el camí C passa per xy i per uv, aleshores $xy, yu_2, \dots, u_{n-1}v, vu$ és un a-e camí a LG.

Per tant, LG és connex.

(a) *Dóna el graf línia de $G = ([5], \{12, 23, 34, 45, 51, 25, 35\})$ i el del graf K_3.*



LG



$LK_{1,3}$

(c) *Prova que si G és eulerià, aleshores LG és eulerià.*

Un graf és eulerià si és connex i tots els vèrtexs tenen grau parell. Atès que G és eulerià, G és connex, i per l'apartat anterior, LG també és connex. Cal estudiar ara el grau dels vèrtexs de LG.

Sigui $e = xy$ un vèrtex de LG i sigui $g_{LG}(e)$ el seu grau. Aquest vèrtex és adjacent a tots els vèrtexs de LG que són arestes incidents a x en G, llevat de e, d'aquestes n'hi ha $g_G(x) - 1$. També és adjacent a tots els vèrtexs de LG que són arestes incidents a y en G, llevat de e, i d'aquestes n'hi ha $g_G(y) - 1$. Per tant, $g_{LG}(e) = g_G(x) - 1 + g_G(y) - 1 = g_G(x) + g_G(y) - 2$ és parell, ja que a G tots els vèrtexs tenen grau parell.

(d) *Troba un graf G tal que LG sigui eulerià, però G no.*

Per exemple $K_{1,3}$ no és eulerià però $LK_{1,3}$ sí, ja que és isomorf al graf K_3.

3. *Sigui $G = (V, A)$ un graf ponderat d'ordre $n \geq 3$ amb funció de pesos $w : A \to \mathbb{R}^+$.*

(a) *Dóna un arbre generador minimal del graf $G = ([6], \{13, 14, 15, 24, 25, 26, 35, 36, 56\})$ on el pes de l'aresta és $w(xy) = |x - y|$. Quin és el pes d'aquest arbre?*

Aplicant l'algorisme de Kruskal al graf G, cal escollir en 5 arestes (ordre$(G) - 1$) de forma ordenada, de tal manera que, en cada pas, l'aresta seleccionada tingui pes mínim respecte de les arestes que queden per escollir, i no formi cicle amb les arestes escollides prèviament. Una seqüència d'arestes possibles seguint aquest algorisme seria 56,13,24,35,25. El pes de l'arbre és $w(56) + w(13) + w(24) + w(35) + w(25) = 1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 10$.

(b) *Siguin T un arbre generador de G, $a \in A(T)$ i $e \notin A(T)$. Dóna les condicions per tal que el graf $T + e - a$ sigui un arbre. Demostra que, si no és un arbre, té dos components connexos, un és un arbre i l'altre té un cicle.*

Si l'aresta a és una aresta de l'únic cicle format a $T + e$, el graf no es desconnecta en eliminar a. A més $T+e-a$ és connex, té ordre n i la mida és: mida$(T+e-a)$ =mida$(T)+1-1 = n-1$, ja que T és un arbre. En aquest cas $T + e - a$ és un arbre.

Suposem que $a \in A(T)$ no és del cicle de $T + e$. Observem que el graf resultant d'afegir e i eliminar a a T és el mateix que si s'elimina primer a i s'afegeix després e: $T+e-a = T-a+e$, doncs tenen el mateix conjunt de vèrtexs i d'arestes. Així, $T - a$ és un bosc de dos arbres, ja que tota aresta d'un arbre és pont. En afegir e és crearà un únic cicle a un dels components connexos.

(c) *Si T és l'únic arbre generador minimal de G, demostra que cada aresta e que no és de T té un pes major que totes les altres arestes del cicle format afegint e a T.*

Sigui e una aresta del graf G que no és de T, i sigui a una aresta qualsevol de l'únic cicle de $T + e$. Aleshores, $T + e - a$ és un arbre generador de G, per l'apartat anterior. Atès que T és l'únic arbre generador minimal,

$$w(T) < w(T + e - a) = w(T) + w(e) - w(a).$$

Aleshores, $w(a) < w(e)$.