Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA **DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS**	**Senyals i Sistemes II** Data d'examen: 22 de Gener de 2008 Data notes provisionals: 24 de Gener de 2008 Període d'al.legacions: 25 de Gener de 2008 Data notes revisades: 29 de Gener de 2008

Professors: G. Haro, J. Hernando, J.B. Mariño, E. Monte, P. Salembier.

Temps: 1 h 30 min

- Responeu a cada problema en fulls separats.
- No podeu utilitzar ni llibres, ni apunts, ni taules, ni formularis, ni calculadora, ni telèfon mòbil.
- Poseu un document d'identificació en un lloc visible.
- El vostre nom ha de figurar en tots els fulls que utilitzeu, en format: COGNOMS, NOM.
- Justifiqueu tots els resultats. Els resultats sense justificació no seran valorats en la correcció.

Problema 1 **2 punts**

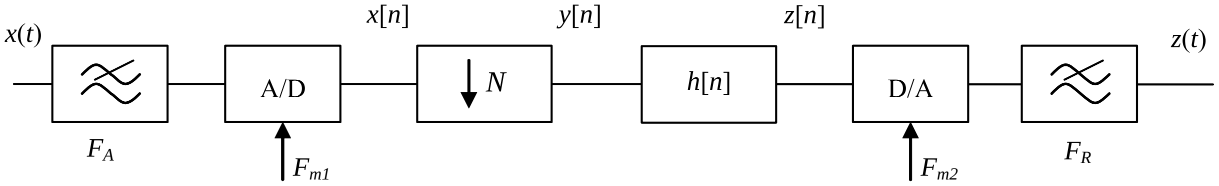


Figura 1

Una señal x(t) = cos(2π1600t)+cos(2π2500t) es procesada por el sistema que se muestra en la figura 1, donde F_{m1}=8kHz y los filtros antialiasing y reconstructor son ideales y sus frecuencias de corte satisfacen el criterio de Nyquist. Si N=2, se pide:

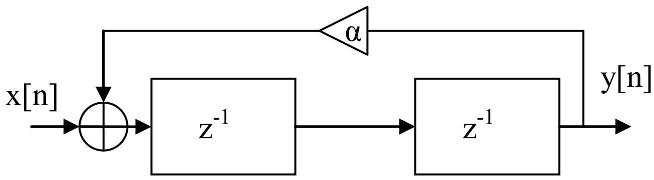
a) Las frecuencias de las sinusiodes discretas que constituyen las señales x[n] e y[n].

b) Si h[n] = δ[n] – δ[n-M], deducir el valor de M (>0) mínimo que permite eliminar la sinusoide de y[n] correspondiente a la componente de 2500 Hz en x(t).

c) La frecuencia de conversión F_{m2} para que el sistema funcione en tiempo real.

Problema 2 **4 punts**

Considere el sistema de la figura siguiente, que suponemos en reposo. Se pide:



a) Calcular la relación entrada salida del sistema.

b) Calcular la función de transferencia del sistema y su ROC.

A partir de ahora, suponiendo que α = ¼, se pide:

c) Calcular la respuesta impulsional del sistema.

d) Estudiar la estabilidad del sistema.

e) Calcular su respuesta frecuencial.

Con α = ¼, se quiere filtrar un tren de deltas de periodo 2: $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n+2k]$. Se pide:

f) Expresar x[n] como una combinación lineal de exponenciales complejas.

g) Calcular la respuesta del sistema.

Finalmente, suponiendo que α = 1, se pide:

h) Calcular la respuesta impulsional del sistema.

i) Estudiar la estabilidad del sistema.

j) Expresar la transformada de Fourier de la respuesta impulsional del sistema haciendo uso de la transformada de Fourier de u[n].

Problema 3 **4 punts**

Se desea diseñar un filtro discreto causal paso alto para su uso en un sistema de multiplexación de dos canales.

En primer lugar, se considera un filtro $h_{MF}[n]$ de longitud 2 obtenido muestreando la respuesta frecuencial $H_i(e^{j\omega})$ de un filtro ideal de ganancia unidad y pulsación de corte $\pi/2$, de forma que

$$h_{MF}[n] = DFT_2^{-1}\left\{ H_i\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\pi k} \quad k = 0,1 \right\} \qquad n = 0,1$$

Se pide:

a) Indicar la pulsación y el valor de las muestras del filtro ideal utilizadas.
b) Calcular la respuesta impulsional del filtro $h_{MF}[n]$.
c) Expresar $h_{MF}[n]$ en términos de la respuesta impulsionald del filtro ideal $h_i[n]$.

En segundo lugar, se considera un filtro $h_{TB}[n]$ obtenido por transformación bilineal del prototipo $H_P(s)=s/(s+1)$. Se pide

d) Justificar la elección del prototipo (nota: $\tan(\pi/4)=1$).
e) Calcular la función de transferencia del filtro $H_{TB}(z)$, incluida su ROC.
f) Dibujar su diagrama de ceros y polos, y relacionarlo con el del prototipo.
g) Obtener su respuesta impulsional $h_{TB}[n]$ y su respuesta frecuencial $H_{TB}(e^{j\omega})$.
h) Dibujar la fase de la respuesta frecuencial obtenida y el retardo de grupo.

SOLUCIONES

Problem 1

a) $x(n)$ $\quad f_1 = \frac{1600}{8000} = \boxed{\frac{1}{5}} \qquad f_2 = \frac{2500}{8000} = \boxed{\frac{5}{16}}$

$y(n)$ $\quad f'_1 = 2\cdot f_1 = \boxed{\frac{2}{5}} < \frac{1}{2} \qquad f'_2 = 2 f_2 = \frac{5}{8} > \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\frac{3}{8}}$

b) $H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega N} = 2j\, e^{-j\omega N/2} \operatorname{sen} \omega \frac{N}{2}$

$\omega \frac{N}{2} = k\pi \qquad N = \frac{2\pi}{\omega} k = \frac{k}{f} = \frac{k}{3/8} = \frac{8}{3} k, \quad k = 3 \rightarrow \underline{N = 8}$

c) $F_{m2} = \frac{F_{m1}}{2} = \underline{4 kHz}$

Problema 2

a) Relación entrada salida:

$$y[n] = x[n-2] + \alpha y[n-2].$$

b) Función de transferencia y ROC.
Si hacemos la transformada Z de la relación obtenida en el apartado a)

$$Y(z) = X(z)z^{-2} + \alpha Y(z)z^{-2},$$

y de aquí obtenemos:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2}}{1-\alpha z^{-2}}.$$

Usando la propiedad $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$, podemos escribir

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{(1-\sqrt{\alpha}z^{-1})(1+\sqrt{\alpha}z^{-1})}. \tag{1}$$

De donde deducimos que los polos son: $p_1 = -\sqrt{\alpha}$ y $p_2 = \sqrt{\alpha}$.
Como el sistema está en reposo, si $x[n] = \delta[n]$, la salida coincide con la respuesta impulsional, $y[n] = h[n]$, y de forma sencilla vemos que $h[n] = 0$ para $n < 0$. Se deduce entonces que el sistema es causal y por lo tanto la ROC de la función de transferencia es $\{z \mid |z| > \sqrt{\alpha}\}$.

c) Respuesta impulsional del sistema, $h[n]$.
Este apartado puede resolverse por distintas vas. Por ejemplo, partiendo de $H(z)$ expresada como

$$H(z) = z^{-2}\left(\frac{0.5}{1-\sqrt{\alpha}z^{-1}} + \frac{0.5}{1+\sqrt{\alpha}z^{-1}}\right),$$

y de aquí

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n-2] * \left(\sqrt{\alpha}^n u[n] + (-\sqrt{\alpha})^n u[n]\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}^{n-2}u[n-2] + \frac{1}{2}(-\sqrt{\alpha})^{n-2}u[n-2].$$

En el caso particular de $\alpha = 1/4$,

$$h[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-2] + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n-2].$$

Se puede observar que esta secuencia coincide con la definida por

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] * \left(\frac{-1}{2}\right)^{n} u[n-2] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n-2] * \left(\frac{-1}{2}\right)^{n} u[n-2],$$

que es la que se obtiene de la misma expresión $H(z)$ (1) usando la transformada inversa de un producto.
Por otro lado, también podemos expresar $H(z)$ como

$$H(z) = -4 + \frac{0.5}{1 - \sqrt{1/4}z^{-1}} + \frac{0.5}{1 + \sqrt{1/4}z^{-1}},$$

por lo que su transformada inversa es

$$h[n] = -4\delta[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n} u[n].$$

Otra alternativa es usando una función auxiliar H_1 de forma que $H(z) = H_1(z^2)$ y donde

$$H_1(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}, \text{ ROC: } \{z \mid |z| > \alpha\}.$$

Usando las propiedades de la transformada obtenemos

$$h[n] = \begin{cases} h_1[n/2] & n \text{ par}, \\ 0 & n \text{ impar}. \end{cases} = \begin{cases} 0 & n \leq 0, \\ \alpha^{(n-2)/2} & n \text{ par}, \\ 0 & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Por último, también se puede calcular directamente $h[n]$ como salida a la entrada $x[n] = \delta[n]$ y usando inducción.

d) El sistema es estable porque $\{z \mid |z| = 1\}$ está incluida en la ROC. También se puede deducir comprobando que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$.

e) Dado que la circunferencia unidad está incluida en la ROC podemos encontrar la respuesta frecuencial mediante el cambio de variable $z = e^{j\omega}$ en $H(z)$, obteniendo así

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-2j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-2j\omega}}.$$

f) Vemos que $x[n]$ es una seal periódica de periodo $P = 2$. Usando la DFS

$$x[n] = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} X_0(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{P}} e^{j\frac{2\pi k}{P}n},$$

donde $X_0(e^{j\omega}) = 1$ es la transformada de $x[n]$ en el periodo fundamental (para $n = 0, 1$): $x_0[n] = \delta[n]$. Sustituyendo:

$$x[n] = \frac{1}{2}(1 + e^{j\pi n}).$$

g) Como $x[n]$ es una suma de exponenciales usamos el hecho de que las exponenciales son autofunciones del sistema,

$$y[n] = \frac{1}{2}(H(e^{j0}) + H(e^{j\pi})e^{j\pi n}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}e^{j\pi n}\right) = \frac{2}{3}(1 + e^{j\pi n}).$$

h) Existen, de la misma forma que en el apartado c), varias vías de resolución. Sustituyendo $\alpha = 1$ en los resultados del apartado c) obtenemos

$$h[n] = \frac{1}{2}(u[n-2] + (-1)^n u[n-2]), \tag{2}$$

que también puede expresarse como

$$h[n] = -\delta[n] + \frac{1}{2}(u[n] + (-1)^n u[n]),$$

o como

$$h[n] == \begin{cases} 0 & n \leq 0, \\ 1 & n \text{ par}, \\ 0 & n \text{ impar}. \end{cases} .$$

i) El sistema no es estable porque $\{z \mid |z| = 1\}$ no está incluida en la ROC. Como antes, también se deduce viendo que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$ no converge.

j) Calculamos la transformada de (2) haciendo uso de las propiedades de retardo y modulación (escribimos $(-1)^n$ como $e^{j\pi n}$),

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}U(e^{j\omega})e^{-j2\omega} + \frac{1}{2}U(e^{j(\omega-\pi)})e^{-j2(\omega\pi)},$$

donde $U(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier del pulso

$$U(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}.$$

Problema 3

a) $\omega = 0 \qquad H(1) = 0$

$\omega = \pi \qquad H(-1) = 1$

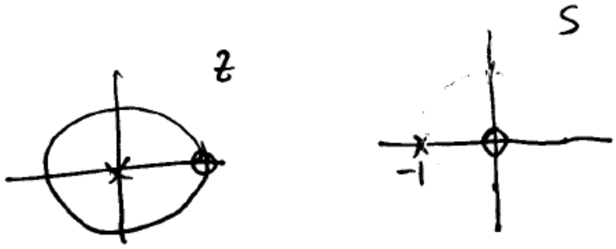
b) $h_{PF}(n) = \{ \underline{\tfrac{1}{2}}, -\tfrac{1}{2} \}$

c) $h_{PF}(n) = \sum_{\forall r} h_i[n+2r]$

d) $H(s)$ paso alto , $\Omega_c = \tan\frac{\omega_c}{2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

e) $H_{TB}(z) = \left.\frac{s}{s+1}\right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{2}(1-z^{-1}) \qquad |z|>0$

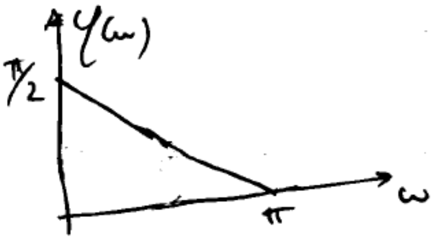
f)



g) $h_{TB}[n] = \frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$

$H_{TB}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1-e^{-j\omega}) = j e^{-j\omega/2} \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}$

h)



$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2}$