Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions

SiS1
23-01-07

Data notes provisionals:	29-01-07 (tarde)
Període d'al·legacions:	30-01-07 (fins 15h)
Data notes revisades:	30-01-07

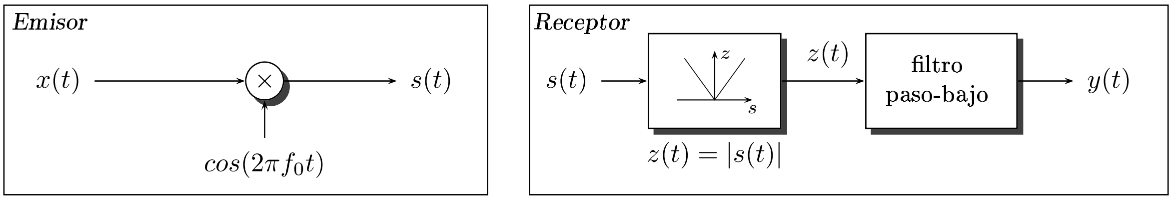
Professors: J. Adell, A. Bonafonte, A. Nogueiras, J. Salavedra

Informacions addicionals:

Duració de l'examen: 3 hores.
No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts.
Les respostes dels diferents problemas s'entregaran en fulls separats.
Les notes i la solució del examen es posaràn a *atenea* (metacurs)

Problema 1. La figura muestra un sistema de comunicaciones que suele usarse como sistema de modulación AM comercial.

La modulación se realiza multiplicando la señal de entrada $x(t)$, que debe ser ***no negativa***, por una sinusoide de frecuencia f_0, llamada portadora. Por su parte, el receptor consiste en un rectificador de onda completa seguido de un filtro paso bajo.



Sea la señal de entrada $x(t) = 2\,\Lambda(t) + \Pi(t/2)$ y $s(t) = x(t) \cdot cos(2\pi f_0 t)$, con $f_0 \gg 1$:

(a) Dibuje $x(t)$ y $s(t)$. Calcule y esboce sus transformadas de Fourier, $X(f)$ y $S(f)$.

La señal recibida, $s(t)$, se demodula mediante rectificación de onda completa seguida de filtrado paso bajo.

(b) Dibuje la señal rectificada en onda completa, $z(t) = |s(t)|$. Calcule y esboce su transformada de Fourier, $Z(f)$.

(c) Para esta señal $x(t)$, y considerando el filtro paso-bajo como ideal, ¿se comete algún error en la recuperación de la señal? ¿De qué depende éste? Indique la ganancia y ancho de banda del filtro paso-bajo ideal que permite recuperar una señal $y(t)$ lo má parecida posible a la entrada $x(t)$.

Considere ahora el caso en que $x(t)$ es una señal genérica no negativa, paso-bajo y de ancho de banda $B_x \ll f_0$.

(d) Dibuje la transformada de Fourier de la señal modulada, $S(f)$. Dibuje la plantilla de especificaciones que debería cumplir el filtro (supuesto no ideal) paso bajo para que $y(t)$ sea una aproximación razonable de $x(t)$.

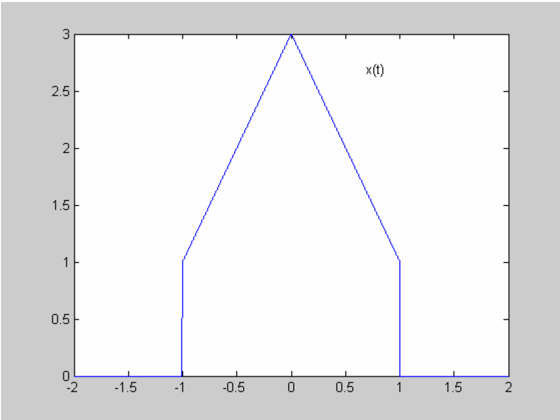
(e) Para esta señal, y usando un filtro paso-bajo real, ¿se comete algún error en la recuperación de la señal? ¿De qué depende éste?

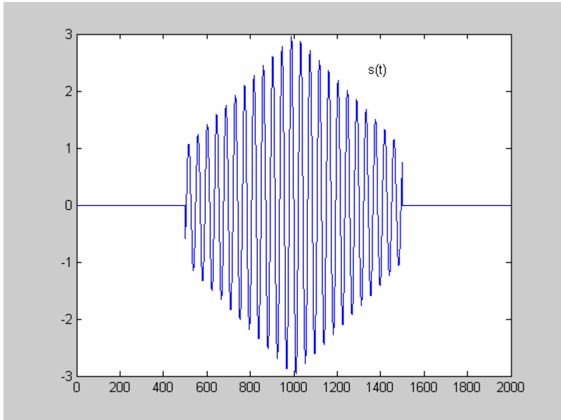
Considérese ahora el supuesto de señales de entrada, $x(t)$, paso bajo y de *media nula* (pudiendo tomar valores de amplitud negativos), como sería el caso de las señales de voz/audio transmitidas mediante modulación AM.

(f) Discuta si sería posible obtener a la salida del receptor una buena aproximación de la entrada. Proponga las modificaciones que crea convenientes para mejorar este esquema de comunicaciones. Razone su respuesta.

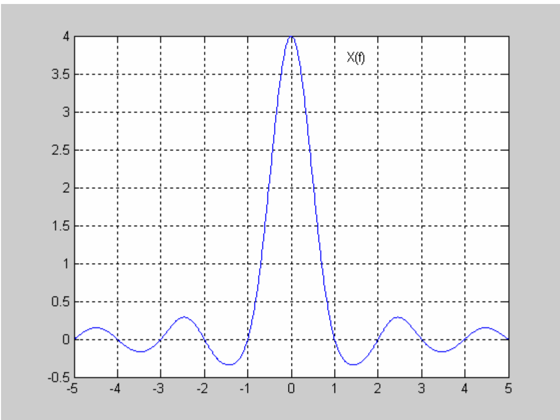
Problema 1:

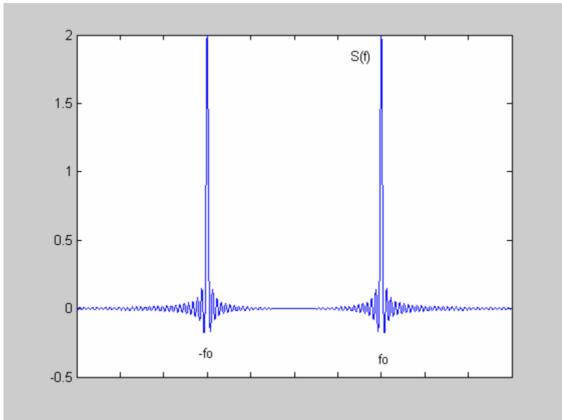
a)



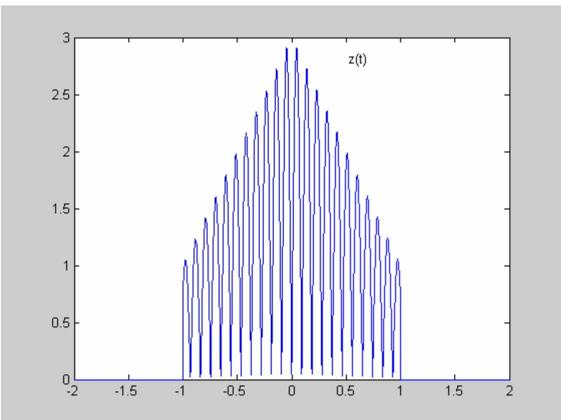


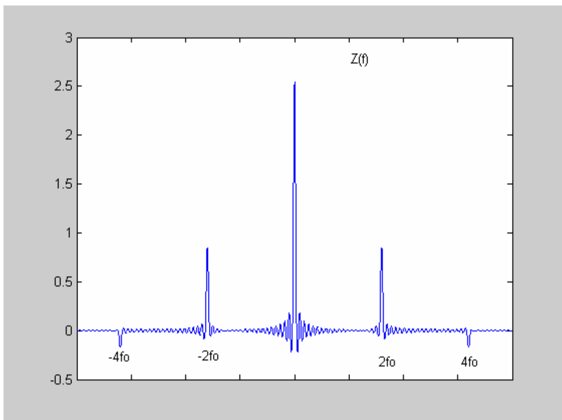
$X(f) = 2\,\mathrm{sinc}^2(f) + 2\,\mathrm{sinc}(2f)$
$S(f) = \mathrm{sinc}^2(f - f_0) + \mathrm{sinc}(2f - 2f_0) + \mathrm{sinc}^2(f + f_0) + \mathrm{sinc}(2f + 2f_0)$





b)





$$Z(f) = X(f) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \frac{2}{4k^2-1} \delta(f-2kf_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \frac{2}{4k^2-1} X(f-2kf_0) =$$

$$Z(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \frac{4}{4k^2-1} \left(\sin c(f-2kf_0) + \sin c(2f-2kf_0)\right)$$

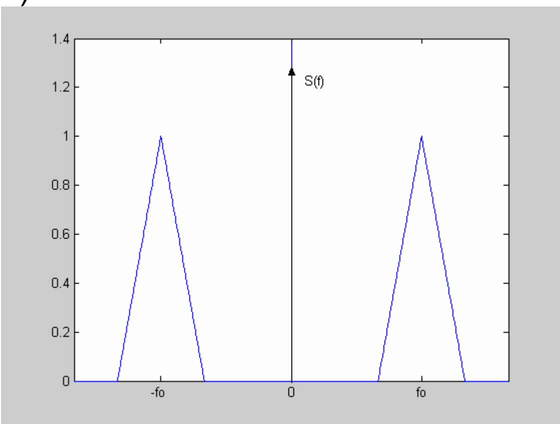
c)

Aunque se utilice el filtro paso bajo ideal, se sigue cometiendo error porque la señal x(t) tiene un espectro de anchura infinita, lo cual provoca la aparición de solapamiento entre bandas (*aliasing*).

Como X(f) es decreciente con la frecuencia, se puede reducir el efecto del aliasing aumentando la frecuencia de la portadora (f_0).

Ganancia: $G = \pi / 2$
Ancho de banda: $BW = f_0$

d)



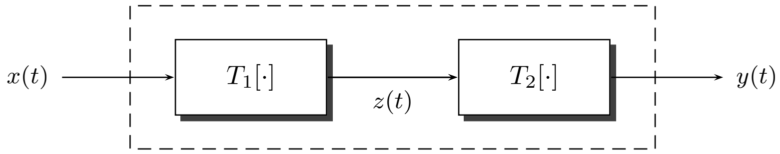
Plantilla: $f_P=B_X$
$f_A=2f_0-B_x$
atenuaciones α_A y α_P no especificadas.

e) Se comete error debido a las tolerancias finitas del filtro. Cuanto mayor sea α_A y menor sea α_P, menor será el error cometido.

f) Se pueden hacer dos modificaciones:

a) decodificar la señal multiplicando de nuevo por un coseno de frecuencia f_0;
b) sumar a x(t) una constante suficientemente grande como para que la suma sea no negativa.

Problema 2. Sigui el sistema $y(t) = T_g[x(t)]$ format pels subsistemes ***correlador*** $z(t) = T_1[x(t)] = R_x(t)$ i ***periodificador*** $y(t) = T_2[z(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(t - nT_0)$. El subsistema correlador calcula l'autocorrelació del senyal present a la seva entrada, segons sigui aquest d'energia finita o de potència mitjana finita. Es demana:



(a) Estudiï justificadament la linealitat i invariància del subsistema correlador $T_1[\cdot]$.

Sigui $x(t)$ un senyal real d'energia finita E_x i funció autocorrelació $R_x(t) = x(t) * x(-t)$

(b) Trobi la relació entrada-sortida del sistema global $y(t) = T_g[x(t)] = T_2[T_1[x(t)]]$. Trobi la funció $g(t)$ que permet expressar la sortida com $y(t) = x(t) * g(t)$. Vol dir això que el sistema global és lineal i invariant? Raoni la seva resposta.

(c) Alguns senyals de entrada $x(t)$ singulars poden fer degenerar la sortida $y(t)$ cap a un senyal no periòdic. Dedueixi raonadament quina condició ha de verificar $X(f)$ per tal que la sortida sigui constant, $y(t) = A > 0$. Doni dos possibles senyals $x(t)$ que originin aquesta sortida $y(t) = A$.

(d) Consideri l'entrada $x_1(t) = x(at)$ amb $\underline{a}$ real no nul. Trobi $y_1(t) = T_g[x_1(t)]$ en funció de l'entrada inicial $x(t)$. Obtingui el seu DSF (Desenvolupament en Sèrie de Fourier) en forma de sinusoides (expressat en funció de $x(t)$ i/o $X(f)$). Per un valor de $\underline{a}$ representant un escalat de la variable independent ($a > 0$), pot expressar-se $y_1(t)$ en funció de $y(t)$ obtenida en el apartado (b)? I quan $\underline{a}$ representa un gir?

(e) Si s'intercanvia l'ordre dels dos subsistemes, tal que $s(t) = T_{g2}[x(t)] = T_1[T_2[x(t)]]$, obtingui el DSF de $s(t)$ en forma de sinusoides. Trobi la relació existent entre $s(t)$ i la sortida anterior $y(t)$. Trobi la relació entre les seves potències mitjanes P_s i P_y.

(f) Sigui el senyal $x(t) = e^{-t} \cdot u(t)$. Calculi $y(t)$ i $Y(f)$

PROBLEMA 2

a) Si $x(t)$ ENERGIA FINITA $\Rightarrow z(t) = x(t) * x(-t) = R_x(t)$

NO LINEAL

$T_1[a x_1(t) + b x_2(t)] = [a^2 R_{x_1}(t) + b^2 R_{x_2}(t) + ab R_{x_1 x_2}(t) + ba R_{x_2 x_1}(t)] \neq a z_1(t) + b z_2(t)$

$T_1[x(t-t_0)] = R_x(t) \neq z(t-t_0) = R_x(t-t_0) \Rightarrow$ VARIANT

b) $y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_x(t - mT_0)$ on $R_x(t) = x(t) * x(-t) \Rightarrow g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(-t + mT_0)$

$T_g[\cdot]$ NO ÉS LI JA QUE $T_g[x(t-t_0)] = y(t) \neq y(t-t_0)$

c) $y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_x(t - mT_0) = \}DSF\{ = C_0 + 2\sum_{1}^{+\infty} C_m \cos\left(2\pi \frac{m}{T_0} t\right) = A \Rightarrow \left\} \begin{array}{l} C_0 = A \\ C_m = \frac{|X(\frac{m}{T_0})|^2}{T_0} = 0 \end{array} \right\{$

$x(t)$ REAL $\Rightarrow R_x(t)$ PARELL

$\Downarrow$

$X\left(\frac{m}{T_0}\right) = 0$

SENYALS QUE HO VERIFIQUEN:

$X_1(f) = K T_0 \operatorname{sinc}(T_0 f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x_1(t) = K\, \Pi\left(\frac{t}{T_0}\right)$ ON $K = \sqrt{\frac{A}{T_0}}$ JA QUE $C_0 = \frac{|X(0)|^2}{T_0} = K^2 T_0 = A$

$X_2(f) = K T_0 \operatorname{sinc}^2(T_0 f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x_2(t) = K\, \Lambda\left(\frac{t}{T_0}\right)$ ON $K = \sqrt{\frac{A}{T_0}}$ JA QUE $C_0 = \frac{|X(0)|^2}{T_0} = K^2 T_0 = A$

d) $x_1(at) \rightarrow y_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} R_x(a(t - mT_0)) = \}DSF\{ = E_0 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} E_m \cos\left(2\pi \frac{m}{T_0} t\right)$

ON $R_x(t) = x(t) * x(-t) \leftarrow$ PARELL ON $E_m = \frac{|X(\frac{m}{aT_0})|^2}{|a|^2 T_0}$

SI $a > 0$ (ESCALAT) $\Rightarrow y_1(t)$ NO POT EXPRESSAR-SE EN FUNCIÓ DE $y(t)$

SI $a = -1$ $(\in \mathbb{R}) \Rightarrow y_1(t) = y(t)$

e) $s(t) = |D_0|^2 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} |D_m|^2 \cos\left(2\pi \frac{m}{T_0} t\right)$ ON $D_m = \frac{X(\frac{m}{T_0})}{T_0} \Rightarrow |D_m|^2 = \frac{C_m}{T_0} \Rightarrow s(t) = \frac{y(t)}{T_0}$

$\Downarrow$

$P_s = \frac{P_y}{T_0^2}$

f) $x(t) = e^{-t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} \Rightarrow S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi f)^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} R_x(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|} = z(t)$

$$\boxed{y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|t - mT_0|}}$$

$Y(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_m\, \delta\left(f - \frac{m}{T_0}\right)$ ON $C_m = \frac{|X(\frac{m}{T_0})|^2}{T_0} = \frac{1}{T_0\left[1 + \left(\frac{2\pi m}{T_0}\right)^2\right]} = C_m$

Problema 3. Sea $x(t)$ una señal *paso banda*, comprendida entre $f_{p_1} = 10$ kHz y $f_{p_2} = 12$ kHz, *contaminada* por un tono interferente en la frecuencia $f_i = 6\sqrt{2}$ kHz ($f_i < f_{p_1}$). Se desea diseñar un filtro paso banda, con las siguiente especificaciones:

- comportamiento maximalmente plano en la banda de paso, con una atenuación máxima $\alpha_p = 3$dB y ajuste en los dos extremos de la banda de paso,
- cancelación total de la interferencia y
- mínimo orden posible, dadas las especificaciones anteriores.

En este problema se estudiarán dos opciones, según se utilice o no, la metodología de transformación de frecuencias.

`Nota:` $\log(2) \approx 0{,}3$; $\log(5) \approx 0{,}7$

(a) Para el filtro diseñado sin utilizar la transformación de frecuencias:

a.1 Exprese la función característica del filtro de orden 2, que cumpla las especificaciones. Precise como determinaría *todos* los parámetros de $F(\omega^2)$.

a.2 Dibuje la función de atenuación, especificando los ceros de atenuación y transmisión, así como los valores en el origen e infinito.

Solució: La expresión es:

$$F(\omega^2) = k\frac{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}{\left(\omega^2 - \omega_i^2\right)^2}$$

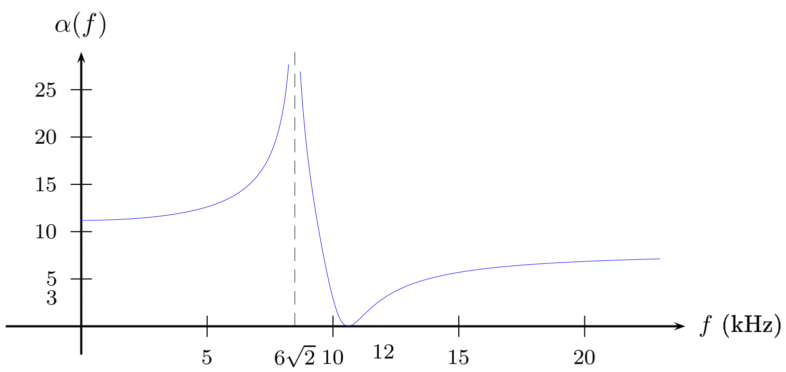
El cero de transmisión, $\omega_i = 2\pi f_i$, cancela la interferencia; debe ser simple, para tener orden mínimo (orden 2). En cuanto a los ceros de atenuación, están en la frecuencia ω_0, y ha de ser simple para tener orden mínimo. Y eligiendo el cero de atenuación en $\omega_{p_1} < \omega_0 < \omega_{p_2}$, podremos tener la banda de paso centrada en estas frecuencias, con la misma atenuación en ambos extremos.
Para determinar ω_0 y k imponemos que la atenuación en los límites de la banda de paso es 3dB: $F(\omega_{p_1}^2) = F(\omega_{p_2}^2) = 1$. Por tanto:

$$k\frac{\left(\omega_{p_1}^2 - \omega_0^2\right)^2}{\left(\omega_{p_1}^2 - \omega_i^2\right)^2} = k\frac{\left(\omega_{p_2}^2 - \omega_0^2\right)^2}{\left(\omega_{p_2}^2 - \omega_i^2\right)^2}$$

Simplificando k, podemos despejar ω_0 y a continuación, imponiendo la atenuación de 3dB podemos encontrar el valor de k:

$$k = \frac{\left(\omega_{p_1}^2 - \omega_i^2\right)^2}{\left(\omega_{p_1}^2 - \omega_0^2\right)^2}$$

En cuanto a la representación de la atenuación, la función característica, tiene un cero en ω_0, y una asíntota en ω_i. En el origen vale $F(0) = k\frac{\omega_0^4}{\omega_i^4}$, y en infinito, $F(\infty) = k$. Nótese que el valor en el origen será mayor que en infinito al ser $\omega_0 > \omega_i$
La representación de la atenuación se muestra en la figura:



A continuación se analizará el diseño del filtro utilizando transformación de frecuencias

(b) Especifique la transformación de frecuencias. Dibuje las especificaciones sobre la atenuación del prototipo paso bajo, normalizándolo para que $\bar{\Omega}_p = 1$

Solució: La transformación de *paso-bajo* a *paso-banda* es:

$$\Omega = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega}$$

siendo ω_o la frecuencia central de la transformación.
Para que los dos extremos de la banda de paso tengan la misma atenuación, deberán asignarse al mismo punto en el prototipo. Por tanto, $\omega_o^2 = \omega_{p_1} \cdot \omega_{p_2}$
Una vez fijado ese valor, ω_o se transformará en el origen, y las frecuencias ω_{p_1} y ω_{p_2} en $\Omega_p = \omega_{p_2} - \omega_{p_1} = 4\pi 10^3$.
En cuanto a la interferencia, podemos aplicar la fórmula de la transformación:

$$\Omega_i = \frac{\omega_i^2 - \omega_o^2}{\omega_i} = 2\pi \frac{f_i^2 - f_o^2}{f_i} = 2\pi 10^3 \frac{36 \cdot 2 - 10 \cdot 12}{6\sqrt{2}} = 2\pi\, 10^3\, \frac{12 - 20}{\sqrt{2}} = -8\pi 10^3 \sqrt{2}$$

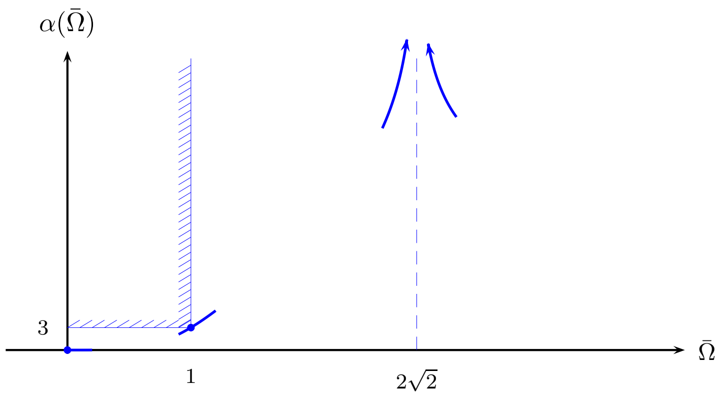
Podemos prescindir del signo debido a la simetría de las atenuación, módulo, $F(\omega^2)$, etc.
Para normalizar el filtro respecto la frecuencia de paso, definimos

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_p} = \frac{\Omega}{4\pi 10^3}$$

Y la interferencia está en:

$$\bar{\Omega}_i = \frac{\Omega_i}{\Omega_p} = 2\sqrt{2}$$

Las especificaciones del problema, trasladadas al prototipo paso-bajo normalizado, se muestran en la siguiente figura:



(c) Suponga que se escoge la aproximación Inverso de Chebychev para el diseño del prototipo normalizado:

c.1 Indique la función característica, determinando todos los parámetros.

c.2 Dibuje la función de atenuación, especificando el orden del filtro, ceros de atenuación y transmisión y valor de la atenuación en origen e infinito.

c.3 Determine α_a, definida como la mínima atenuación para frecuencias mayores que la interferencia ($\bar{\Omega} > \bar{\Omega}_i$). ¿Cuál es la banda atenuada, definida como aquellas $\bar{\Omega}$ donde la atenuación $\alpha(\bar{\Omega}) \geq \alpha_a$?

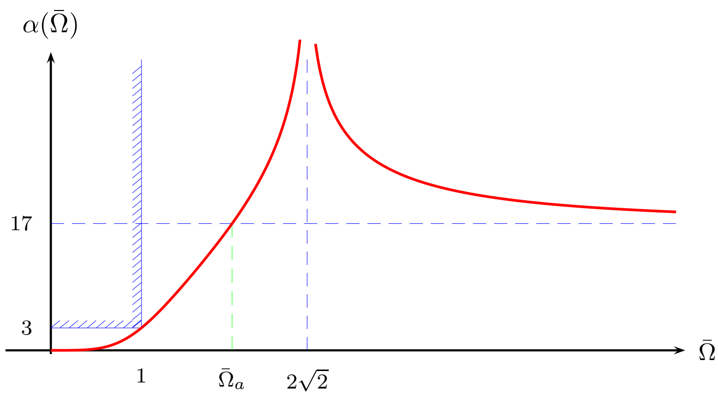
Solució: Para escribir la función característica podríamos acudir a los polinomios de Chebychev. Pero de hecho, como el orden será tan bajo y sabemos la posición del cero de transmisión y de atenuación (en el origen), directamente podemos escribir:

$$F(\bar{\Omega}^2) = k \frac{\bar{\Omega}^4}{(\bar{\Omega}^2 - \bar{\Omega}_i^2)^2} = k \frac{\bar{\Omega}^4}{(\bar{\Omega}^2 - 8)^2}$$

La constante k debe ser tal que en $F(\bar{\Omega}_p) = 1$ (atenuación 3dB):

$$1 = k \frac{1}{(1-8)^2} \quad \longrightarrow k = 49$$

La atenuación en el origen es nula. En el infinito, $F(\infty) = k$, por lo que la atenuación es, $\alpha(\infty) = 10\log(1 + 49) = 10 + 10\log(5) \approx 17$. El filtro es de orden 2.



Tal y como se ve en la figura, $\alpha_a \approx 17$. Para calcular el inicio de la banda atenuada, $\bar{\Omega}_a$, imponemos que a esa frecuencia la función característica vale 49, el valor en infinito:

$$F(\infty) = F(\bar{\Omega}_a^2) \longrightarrow 49 = 49\,\frac{\bar{\Omega}_a^4}{(\bar{\Omega}_a^2 - 8)^2}$$

$$\bar{\Omega}_a^4 = \bar{\Omega}_a^4 - 16\bar{\Omega}_a^2 + 64 \longrightarrow \bar{\Omega}_a^2 = \frac{64}{16} = 4 \longrightarrow \bar{\Omega}_a = 2$$

(d) Para el filtro paso-banda:

d.1 Indique la función característica $F(\omega^2)$.

d.2 Dibuje detalladamente la función de atenuación $\alpha(f)$. Indique los límites de las bandas atenuadas, f_{a_1} y f_{a_2}.

d.3 Esboce el diagrama de polos y ceros (p/z).

Solució:

$$F(\bar{\Omega}^2) = 49\,\frac{\bar{\Omega}^4}{(\bar{\Omega}^2 - 8)^2}$$

$$F(\Omega^2) = 49\,\frac{\left(\frac{\Omega}{4\pi 10^3}\right)^4}{\left(\left(\frac{\Omega}{4\pi 10^3}\right)^2 - 8\right)^2} = 49\,\frac{\Omega^4}{\left(\Omega^2 - 128\pi^2 10^6\right)^2}$$

$$F(\omega^2) = 49\,\frac{\left(\frac{\omega^2-\omega_o^2}{\omega}\right)^4}{\left(\left(\frac{\omega^2-\omega_o^2}{\omega}\right)^2 - 128\pi^2 10^6\right)^2} = 49\,\frac{\left(\omega^2 - 480\,\pi^2\,10^6\right)^4}{\left(\left(\omega^2 - 480\,\pi^2\,10^6\right)^2 - 128\pi^2 10^6\omega^2\right)^2}$$

De hecho, podríamos escribir la función directamente, teniendo en cuenta que:

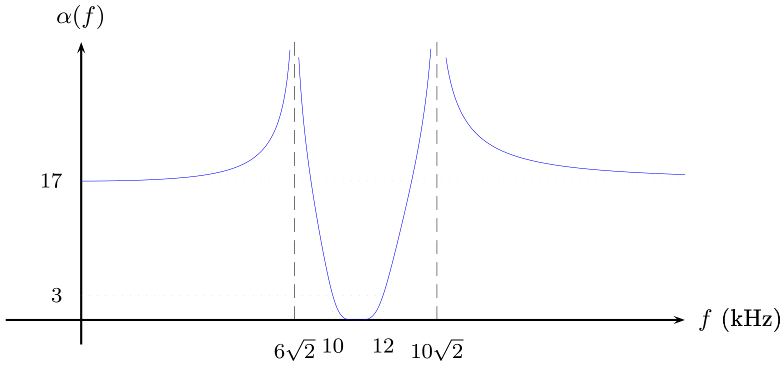
- El cero de transmisión del prototipo se desdobla en ω_i y en su simétrica,

$$\omega_{is} = \omega_o^2/\omega_i = 2\pi 10^3\,\frac{10\cdot 12}{6\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}\pi 10^3$$

- Los ceros de atenuación están en ω_o.
- La función característica tanto en el origen como en el infinito vale 49

$$F(\omega) = 49\frac{(\omega^2 - \omega_o^2)^4}{(\omega^2 - \omega_i^2)^2\cdot(\omega^2 - \omega_{is}^2)^2} = 49\frac{(\omega^2 - 480\,\pi^2\,10^6)^4}{(\omega^2 - 288\,\pi^2 10^6)^2\cdot(\omega^2 - 800\,\pi^2\,10^6)^2}$$

Puede comprobarse que ambas expresiones son idénticas.
La atenuación se muestra en la figura:



Los límites de la banda atenuada (tal y como se definió para el paso bajo), se encuentran resolviendo la ecuación:

$$8\,10^3\,\pi = 2\,10^3\,\pi \cdot \frac{f_a^2 - f_o^2}{f}$$

donde el valor de la izquierda corresponde a desnormalizar la frecuencia $\bar{\Omega}_a = 2$, las frecuencias de la derecha se expresan en kHz y $f_o^2 = 120$. Resolviendo la ecuación, y tomando los valores positivos de las frecuencias,

$$f_{a_i} = 2\sqrt{31 \pm 1}\,\texttt{kHz} \qquad f_{a_1} = 9,135\,\texttt{kHz} \quad f_{a_2} = 11,135\,\texttt{kHz}$$

Finalmente, el diagrama de p/z, los ceros de transmisión aparecen como ceros en el eje imaginario. Y además tendremos dos pares de polos conjugados, cercanos a la banda de paso.