

# **Senyals i sistemes analògics**

## **Una introducció pràctica**

E Sayrol, ed. - A Gasull  
A Moreno - J Salavedra - F Vallverdú

# **Senyals i sistemes analògics**

## **Una introducció pràctica**

Aquesta obra fou guardonada en el setè concurs  
"Ajut a l'elaboració de material docent" convocat per la UPC.

Primera edició: juny de 2001

Aquest llibre s'ha publicat amb la col·laboració  
del Comissionat per a Universitats i Recerca  
i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya.

En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC

Disseny de la coberta: Manuel Andreu

© Els autors, 2001

© Edicions UPC, 2001  
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL  
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885  
Edicions Virtuals: [www.edicionsupc.es](http://www.edicionsupc.es)  
Ave: [edicions-upc@upc.es](mailto:edicions-upc@upc.es)

Producció: CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)  
La Cup. Gran Capità s/n, 08034 Barcelona

Dipòsit legal: B-41.902-2001  
ISBN: 84-8301-510-2

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions estableties a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reproductió i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.

## Presentació

Aquest material didàctic de caire experimental està dirigit a aquells alumnes que s'introduixin per primer cop a l'estudi dels senyals i sistemes analògics. Els seus continguts han estat desenvolupats per professors de l'assignatura *Senyals i Sistemes I* que s'imparteix en els estudis que ofereix l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona de la Universitat Politècnica de Catalunya.

L'assignatura *Senyals i Sistemes I* tracta els senyals i els sistemes analògics en el domini del temps i de la freqüència. El tema 1, *Introducció als Senyals i Sistemes*, defineix els senyals elementals com a funcions d'una variable temporal, tracta la caracterització i propietats dels sistemes que els processen, fent especial èmfasi en els sistemes lineals i invariants. El tema 2, *Transformada de Fourier*, estudia la caracterització dels senyals i els sistemes en el domini de la freqüència, estudiant la transformada de Fourier i les seves propietats fonamentals. S'introduceix el concepte de filtre i es tracta també el mostratge dels senyals analògics. El tema 3, *Filtres*, presenta les quatre tècniques clàssiques de disseny de filtres analògics, començant pel cas de filtres passa-baixes i generalitzant després als filtres passa-altes, passa-banda i banda eliminada. El disseny d'un filtre es fa a nivell de funció de transferència, sense entrar en la implementació tecnològica del filtre. El tema 4, *Correlació i Espectre*, introduceix el concepte de correlació entre senyals i autocorrelació, tant per senyals d'energia finita com per senyals de potència mitjana finita. També s'estudia la densitat espectral per tots dos tipus de senyals, així com la influència dels sistemes en els senyals que els creuen, tant pel que fa a la densitat espectral d'energia o de potència.

Després de varis anys dedicats a la realització d'exercicis i al disseny de pràctiques de l'assignatura hem anat acumulant gran quantitat de material. Fins i tot després d'una acurada selecció en termes de qualitat i varietat, vam constatar que l'oferta d'exercicis i pràctiques de la que disposavem superava amplament la de qualsevol material docent dedicat als senyals i sistemes analògics. Aquest fet ens ha portat a la publicació d'aquest material didàctic, que consta d'un llibre de continguts experimentals i d'un programari de simulació.

L'estructuració del llibre de continguts experimentals és la següent. Al principi de cada capítol i també de forma intercalada hi ha resums de la matèria teòrica on es ressalten els conceptes més importants. Després d'aquests resums s'inclouen enunciats d'exercicis, problemes i pràctiques, agrupats segons la temàtica i ordenats segons la dificultat. També s'han afegit alguns problemes amb la seva resolució detallada, ja que poden ser un bon ajut per entendre millor els aspectes teòrics que hi ha al darrera. Actualment no hi ha cap eina de treball que tingui aquesta visió teòric-experimental dels senyals i sistemes analògics. Un bon nombre dels problemes són aproximacions a aplicacions reals que apareixen amb freqüència en l'àmbit de

les telecomunicacions. D'aquesta manera l'alumne pot relacionar el que estudia amb la pràctica professional.

El programari de simulació ha estat conseqüència de diferents temptatives en l'elaboració d'unes pràctiques de laboratori que fossin útils i atractives a l'estudiant. També com a conseqüència de constatar la inexistència d'un material docent similar. Després de quatre anys provant diferents aproximacions varem arribar a la conclusió que es necessitava generar un material informàtic molt gràfic, amb un enfocament més aviat de caire demostratiu, que presentés a l'estudiant la possibilitat de visualitzar i practicar els conceptes bàsics de la matèria, complementant-los amb un conjunt d'aplicacions de la teoria. Els enunciats del diferents exercicis s'indiquen amb una P en el llibre de continguts. Els programes de simulació s'han desenvolupat en un entorn MATLAB. Aquest material es pot adquirir a l'adreça <http://www.edicionsupc.es/virtuals/capIn/TL025XXX.htm>. La versió actual està realitzada per MATLAB 4.2 i requereix un entorn Windows 3.1 o superior. Els autors estan actualment treballant en una nova versió en MATLAB 5. Per fer les pràctiques no és necessari saber MATLAB, ja que s'ha desenvolupat un entorn gràfic amigable, gestionat per un sistema de menús i finestres, que permet, a partir d'una anàlisi teòrica, resoldre-les completament. Les pràctiques inclouen un gran nombre d'exercicis i aplicacions dedicats exclusivament a l'estudi del senyals i sistemes analògics. Estan dividides en 5 blocs: els dos primers dedicats a l'anàlisi de senyals i sistemes en el domini temporal; els dos següents a l'anàlisi en el domini freqüencial; i l'últim bloc dedicat al disseny de filtres analògics. Així mateix cada bloc consta d'un conjunt d'apartats. Aquests apartats van des de la resolució gràfica d'exercicis propers a la teoria, fins a exercicis que demostren les seves aplicacions pràctiques.

En cap cas s'ha de considerar que aquest material didàctic pretén ser un llibre de teoria amb problemes, si no tot al contrari, es tracta d'un llibre de problemes i pràctiques amb teoria, per tant s'ha de recórrer en primer lloc a les fonts, bibliografia, apunts de classe, etc. Sempre hem considerat que els temes que s'estudien en aquesta publicació estan ben exposats en molts llibres de text (s'adjunta la bibliografia al final del llibre). En qualsevol cas aquest material es pot utilitzar de diverses maneres. Per exemple si ens basem exclusivament en el llibre, representa un complement d'exercicis als ensenyaments teòrics. Si l'estudi es centra en els programes de simulació, es pot utilitzar per realitzar pràctiques de laboratori o com a material d'autoaprenentatge seguint els enunciats descrits en el llibre. En definitiva és una eina de treball molt útil per l'estudi dels senyals i els sistemes analògics.

Finalment volem agrair la col·laboració de tots els que han fet possible la publicació d'aquest material.

Els autors  
Barcelona, setembre de 2001

# Índex

<b>1      Introducció als senyals i sistemes .....</b>	11
Transformació de la variable independent.....	11
La funció Delta de Dirac o impuls unitari.....	15
Problemes i practiques proposats .....	16
Definició de sistema .....	18
Problemes i practiques proposats .....	20
Definició de resposta impulsional per a sistemes lineals i invariants .....	27
Problemes i practiques proposats .....	29
Problema resolt .....	49
Solucions als problemes del tema 1 .....	55
<b>2      Transformada de Fourier .....</b>	61
Autovalors i autofuncions d'un sistema lineal i invariant.....	61
Problemes i pràctiques proposats .....	66
Limitació temporal: finestres.....	79
Problemes i pràctiques proposats .....	82
TF de senyals periòdics .....	91
Problemes i pràctiques proposats .....	92
Mostratge .....	112
Problemes i pràctiques proposats.....	113
Problema resolt .....	121
Annex 1. Limitació en banda. Fenomen de Gibbs .....	127
Annex 2. Comportament asimptòtic de la transformada de Fourier .....	133
Annex 3. Encriptador.....	136
Solucions als problemes del tema 2 .....	140

<b>3 Filtres .....</b>	151
Teoria de la aproximació. Funció característica.....	151
Problemes i pràctiques proposats .....	153
Aproximacions passa-baix.....	154
Problemes i pràctiques proposats .....	160
Transformació de freqüències.....	175
Problemes i pràctiques proposats .....	179
Problema resolt .....	195
Solucions als problemes del tema 3 .....	206
<b>4. Correlació i espectre .....</b>	215
Energia i potència .....	215
Problemes i pràctiques proposats .....	217
Correlació i densitat espectral d'energia .....	218
Problemes i pràctiques proposats .....	219
Correlació i densitat espectral de potència de senyals de PMF .....	226
Problemes i pràctiques proposats .....	227
Problema resolt .....	235
Solucions als problemes del tema 4 .....	238
<b>Bibliografia de senyals i sistemes .....</b>	245

## **Bibliografia de Senyals i Sistemes**

BAHER, H. *Analog & Digital Signal Processing*. Wiley & Sons Ltd., 1990

BUCK J.R., DANIEL M.M., SINGER A.C., *Computer explorations in Signals and Systems using MATLAB*, Prentice Hall, 1997.

BURRUS C. S.; McCLELLAN J.H; OPPENHEIM A.V.; PARKS, T.W.; SHAFER R.W.; SCCHUESLER *Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB*. Prentice-Hall, 1994.

CARLSON, A.B. *Signal Theory and Processing*, Artech House Inc., 1986

CARLSON, A.B. *Communication Systems*, McGraw-Hill, 1986

CHEN, C.T. *System and Signal Analysis*. Sanders College Publishing, 1989

DENBING, P.H. *System Analysis and Signal Processing With Emphasis on the use of MATLAB*. Addison-Wesley, 1998.

FERNÁNDEZ RUBIO, J. *Comunicaciones analógicas*. Edicions UPC, 1999.

FRANKS, L.E. *Teoría de la señal*. Editorial Reverté, SA, 1975.

GABEL R. A.: ROBERTS, R. A. *Signal and Linear Systems*. 3rd edition. John Wiley & Sons, Inc, 1987.

JACKSON, L.B. *Signals, Systems and Transforms*. Addison-Wesley, 1991

KRANIAUSKAS, P. *Transforms in Signals and Systems*. Addison-Wesley, 1992

KUO B.J. *Automatic Control Systems*, Prentice Hall, 1987.

KATHI B.P. *Linear Systems and Signals*. Berkeley Cambridge Press, 1992

MARIÑO J.B.; MASGRAU E.; NADEU C.; SERRA M.; CAROL A. *Filtros en el dominio de la frecuencia*, Tomo I, CPET SCCL, 1985

- MEADE M.L; DILLON C.R. *Señales y Sistemas*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1993
- OPPENHEIM A.V.; WILLSKY A.S.; YOUNG I.T. *Señales y Sistemas*, Prentice-Hall, 1994
- O'REILLY, J. J. *Principios de Telecomunicaciones*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994
- PAPOULIS A. *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill, 1962
- PAPOULIS A. *Sistemas Digitales y Analógicos, Transformadas de Fourier*, Marcombo-Boixareu Editories, 1989
- PAPOULIS A.; BERTRÁN M. *Sistemas y Circuitos Digitales y Analógicos*. Marcombo-Boixareu Editories, 1989
- PICIMBONO B. *Principles of Signals and Systems: deterministic Signals*, Artech House, 1988
- POULARIKAS A.D.; SEELY S. *Signals and Systems*. PWS-Kent, 1991
- PROAKIS K.G.; SALEHI M. *Communication Systems Engineering*. Prentice-Hall, 1994
- SCHARF, L.I, BEHRENS, R.T. *A first course in electrical and computer engineering with MATLAB TM Programs and Experiments*. Addison-Wesley, 1991
- SIEBERT W.M. *Circuits, Signals and Systems*. McGraw-Hill, 1986
- STREMLER F.G. *Introducción a los sistemas de comunicación*. Addison-Wesley, 1992
- THOMAS R.E.; ROSA A.J.; *Circuitos y Señales: Introducción a los circuitos lineales y de acoplamiento*. Editorial Reverté, S.A., 1991
- ZIEMER, R.E.; TRANER, W.H. *Signals and Systems: Continuous and Discrete*. 3rd edition MacMillan Publishing Company, 1993.

## 1 Introducció als senyals i sistemes

Amb aquest tema s'inicia l'estudi pràctic dels senyals continus i deterministes i els sistemes analògics. Per començar, es repassen conceptes bàsics relacionats amb els senyals i les seves propietats. En general, es consideraran senyals d'una sola variable independent, representada pel temps. La transformació de la variable independent constitueix una operació clau per a la manipulació matemàtica de senyals i sistemes. Els primers exercicis i pràctiques d'aquest capítol es dediquen a aquesta operació. A continuació s'introdueixen els sistemes com les transformacions de senyals i s'estudien a través de les seves propietats. Com a cas particular es tenen en compte els sistemes lineals i invariants amb el temps, els quals modelen molts processos físics i es poden tractar fàcilment. Es caracteritzen completament per la resposta impulsional, que permet obtenir la sortida d'un sistema a través de la integral de convolució. Els diferents exercicis mostren com es pot dur a terme aquesta operació, amb mètodes purament matemàtics o amb mètodes semigràfics. Finalment, s'inclouen aplicacions de filtres diferents en el domini temporal.

### Transformació de la variable independent

Les transformacions de la variable independent relacionen senyals que tenen la mateixa forma d'ona però que es diferencien per un desplaçament, una expansió, compressió o fins i tot un gir del senyal. Aquesta operació és essencial per a la interpretació i manipulació de senyals, especialment amb les relacionades amb els sistemes lineals i invariants. Les transformacions són les que es descriuen a continuació :

#### Desplaçament

$$y(t) = x(t-t_0)$$

si  $t_0 > 0$  el senyal es retarda en el temps  
 si  $t_0 < 0$  el senyal s'avança

#### Escalat

$$y(t) = x(at)$$

si  $|a| < 1$  el senyal s'expandeix  
 si  $|a| > 1$  el senyal es comprimeix  
 si  $a < 0$  el senyal a més d'expandir-se o comprimir-se es gira respecte a l'eix  $t = 0$

**Reflexió**

$$y(t) = x(-t)$$

és un cas particular de l'escalat quan  $a = -1$

**Combinació de les anteriors**

$$y(t) = x(at - at_0)$$

per  $\forall a \neq 0 \text{ i } \forall t_0$

**Definicions per a senyals**

Un senyal és parell si compleix la condició:

$$x(-t) = x(t)$$

Un senyal és imparell o senar si compleix la condició:

$$x(-t) = -x(t)$$

La part parell d'un senyal  $x(t)$  qualsevol es defineix com:

$$\text{Parell } \{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

La part imparell d'un senyal  $x(t)$  qualsevol es defineix com:

$$\text{Imparell } \{x(t)\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Com a conseqüència, un senyal  $x(t)$  qualsevol es pot expressar com:

$$x(t) = \text{Parell}\{x(t)\} + \text{Imparell}\{x(t)\}$$

Els senyals periòdics compleixen:

$$x(t) = x(t+nT)$$

on  $T$  s'anomena període fonamental i representa el menor valor positiu que compleix l'equació anterior.  
Si  $x(t)$  és constant,  $T$  és indefinit.

Energia per a un senyal  $x(t)$ :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

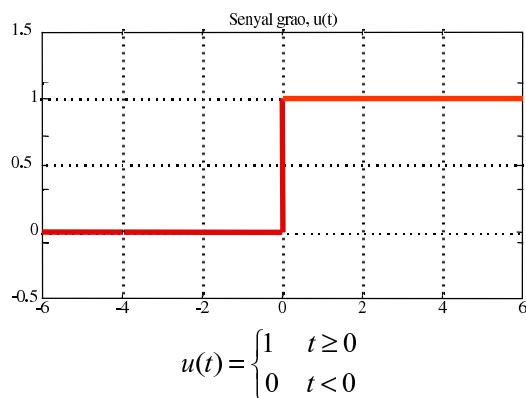
Potència mitjana per un senyal  $x(t)$ :

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

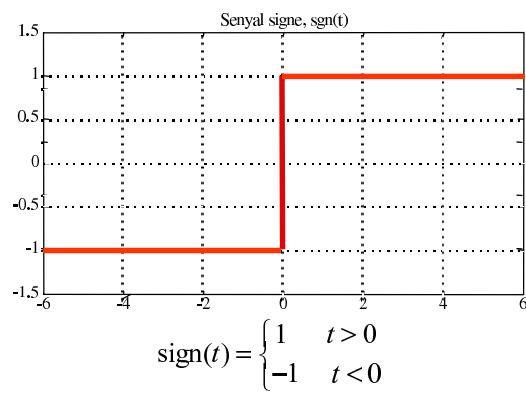
### Senyals bàsics

El senyals que es defineixen a continuació es consideren bàsics per a l'anàlisi de senyals i sistemes. Tenen una formulació matemàtica senzilla, serveixen per modelar alguns processos físics i són la base per construir d'altres senyals.

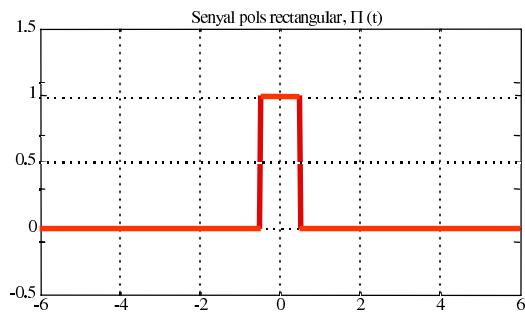
### Graó unitari



### Funció sign

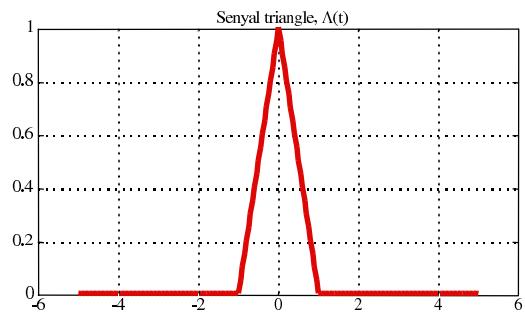


### Pols rectangular



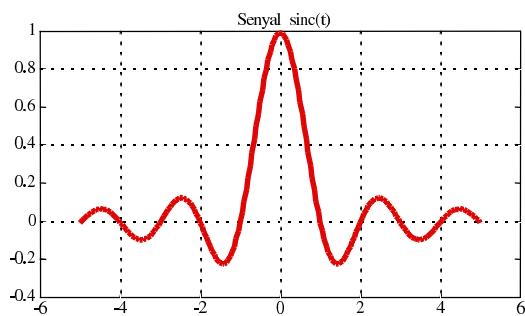
$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

### Pols triangular



$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| < 1 \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

### Funció sinc

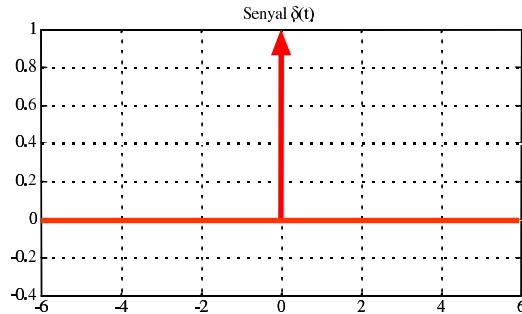


$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

### Exponencial complex

$$e^{st} = e^{(\sigma + j2\pi f)t}$$

### La funció delta de Dirac o impuls unitari



Representa una de les funcions més importants en l'estudi de senyals i sistemes analògics. Admet dues possibles definicions:

Definició 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

Definició 2:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{per} \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

**Taula 1 Propietats de la funció delta**

Escalat	$\delta(at) = \frac{1}{ a } \delta(t)$
Simetria parell	$\delta(-t) = \delta(t)$
Producte per un senyal	$x(t)\delta(t-t_o) = x(t_o)\delta(t-t_o)$
Representació d'un senyal	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-t)d\tau$
Relació amb la funció graó	$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau$ $\delta(t) = \frac{\partial}{\partial t}[u(t)]$
Derivada $n$ -èsima	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{\partial^n}{\partial t^n} [\delta(\tau)] d\tau = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} [x(0)]$

## PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS

- I.1) Qualsevol senyal real  $x(t)$  es pot descompondre com a suma d'un senyal parell  $x_p(t)$  i un imparell  $x_i(t)$ ,  $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$ . Obtingueu raonadament cadascuna de les components en funció de  $x(t)$ .

Demostreu que  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_p^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2(t) dt$

- I.2) Dibuixeu els senyals següents:

a)  $\prod \left( \frac{t-4}{6} \right)$

b)  $\Delta\left(\frac{-t+4}{6}\right)$

c)  $u(t-4) - u(t-6)$

d)  $\text{sinc}\left(\frac{1}{2}t\right)$

e)  $\text{sinc}\left(\frac{t}{2}-1\right)$

f)  $\text{sinc}\left(\frac{1}{2}(t-1)\right)$

g)  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod \left( \frac{t-nT}{T_I} \right)$

g.1)  $T=2T_I$ ,  
g.2)  $T=3T_I/2$ ,  
g.3)  $T=T_I$

h)  $\prod\left(\frac{t}{4}\right) - \Delta\left(\frac{t-1}{2}\right)$

- I.3) Sigui  $x(t)$  el senyal de la figura I.3). Dibuixeu els senyals següents:

a)  $x(t-2)$

b)  $x(1-t)$

c)  $x(2t+2)$

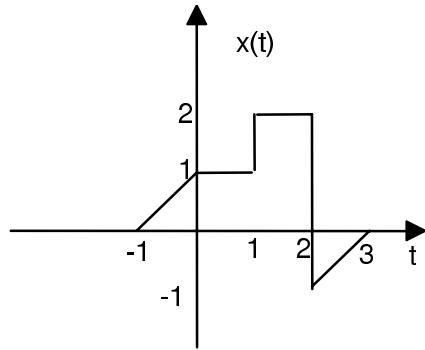
d)  $x(2-t/3)$

e)  $[x(t) + x(2-t)] u(1-t)$

f)  $x(t) [\delta(t+3/2) - \delta(t-3/2)]$

g) Parell  $\{x(t)\}$

h) Imparell  $\{x(t)\}$



### P1.1 Transformació de la variable

El programa permet analitzar, amb alguns exemples, com afecta a un senyal la transformació de la variable temporal sobre el qual està definit. Consta de dos apartats.

En el primer apartat es mostren dos senyals que estan relacionats mitjançant una transformació de la variable. Es tracta de trobar la transformació de la variable que permet passar de l'un a l'altre. Quan l'usuari escriu una transformació, el senyal corresponent automàticament es representa sobre la mateixa figura del resultat final. La transformació serà correcta si s'aconsegueix reproduir el resultat final, és a dir, si només es veu un senyal en aquesta figura. En algun exemple la transformació de la variable és no lineal.

En el segon apartat el procés és a l'inrevés. Es dóna la transformació de la variable i l'usuari ha de representar el senyal corresponent a aquesta transformació. En aquest cas només es poden fer transformacions lineals de la variable. Així, partint del senyal original, l'usuari pot executar interactivament qualsevol de les transformacions  $t \rightarrow t-b$  (opción desplaçar),  $t \rightarrow at$  (opción escalar),  $t \rightarrow -t$  (opción girar).

En qualsevol dels dos apartats com a ajuda addicional disposa de la possibilitat de visualitzar la funció de transformació realitzada. L'exemple següent pot aclarir aquest punt.

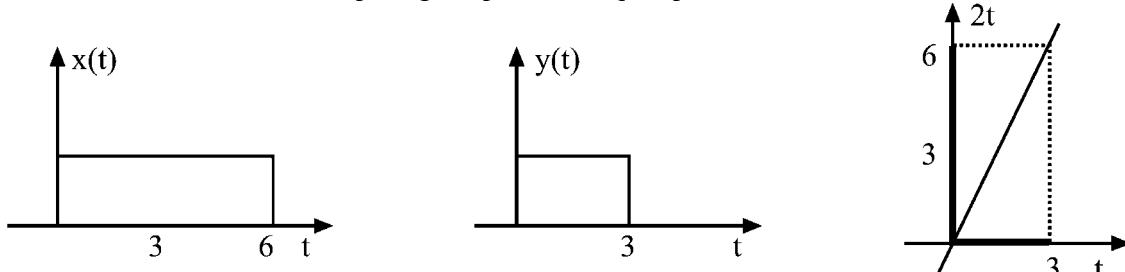


Fig. P1.1)

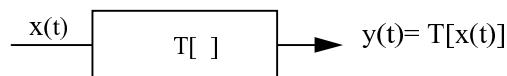
Exemple: Els senyals  $x(t)$  i  $y(t)$  de la figura estan relacionats mitjançant una transformació de variable. Així,  $y(t) = x(2t)$ . Per tant, la transformació de variable (escalat) és la funció  $2t$  ( $t \rightarrow 2t$ ). La funció de transformació és, per tant, una recta de pendent 2 que passa per l'origen (no hi ha desplaçament). Per tant, un punt  $t_1$  del senyal  $y(t)$  ens el trobarem a  $2t_1$  en el senyal  $x(t)$ , o l'interval  $[0,3]$  en què  $y(t) \neq 0$  es transformarà en el  $[0,6]$  sobre  $x(t)$ . Això és el que es representa a la figura adjunta i és el que es veurà en visualitzar la funció de transformació.

1. Per a l'exemple 5 de l'apartat 1 obtingueu la transformació correcta de la variable. Per això, visualitzeu la gràfica de la funció de transformació i obtingueu l'equació de la recta que s'ha de dibuixar en aquesta gràfica.
2. Obtingueu la transformació correcta de la variable corresponent a l'exemple 1 de l'apartat 1.
3. Obtingueu i compareu les transformacions de variable dels exemples 2 i 3 de l'apartat 1. Extraieu-ne conclusions.
4. Visualitzeu la gràfica de la transformació de l'exemple 4 de l'apartat 1. Serà una transformació lineal? Intenteu obtenir la transformació correcta.
5. Feu els exemples 1 a 4 de l'apartat 2. Compareu les operacions realitzades i extraieu-ne conclusions.
6. Feu els exemples 3 i 4 de l'apartat 2 utilitzant un ordre de les operacions diferent del que heu fet servir a l'apartat anterior. Quina conclusió en podeu treure?
7. Feu els exemples 5 i 6 de l'apartat 2. Compareu les operacions realitzades i extraieu-ne conclusions.
8. Feu els exemples 5 i 6 de l'apartat 2 utilitzant un ordre de les operacions diferent del que heu fet servir a l'apartat anterior. Quina conclusió en podeu treure?

- I.4) Demostreu la igualtat dels funcionals  $\delta(t)$  i  $\frac{d}{dt}[u(t)]$ .
- I.5) Siguin  $x(t)$  i  $y(t)$  dos senyals periòdics amb períodes  $T_x$  i  $T_y$  respectivament. Determineu si el senyal  $z(t) = x(t) + y(t)$  és periòdic en els casos següents i, en cas afirmatiu, digueu quin és el període.
- a)  $T_x = 2 \text{ s}, T_y = 3 \text{ s}$       b)  $T_x = 0,7 \text{ s}, T_y = 0,94 \text{ s}$       c)  $T_x = \sqrt{2} \text{ s}, T_y = 2 \text{ s}$
- 

### Definició de sistema

Un sistema és un procés que transforma un senyal  $x(t)$  en un altre  $y(t)$ .



La transformació que realitzem sobre l'entrada es denota com a  $T[\cdot]$ .

### Propietats dels sistemes

#### Linealitat

Un sistema és lineal si la sortida a una combinació lineal d'entrades equival a la combinació lineal de les sortides a cadascun dels senyals.

$$T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \dots + a_nx_n(t)] = a_1T[x_1(t)] + a_2T[x_2(t)] + \dots + a_nT[x_n(t)]$$

#### Invariància

Un sistema és invariant si en aplicar dos senyals que difereixen en un retard, les sortides difereixen únicament en el mateix retard. Un sistema invariant respon amb la mateixa forma d'ona independentment de l'instant en què s'aplica l'entrada.

La invariància es comprova de la manera següent:

$$\begin{aligned} &\text{si } T[x(t)] = y(t) \\ &\text{lavors } T[x(t-t_0)] = y(t-t_0) \end{aligned}$$

### Causalitat

Un sistema és causal si la sortida en qualsevol instant no depèn de valors futurs de l'entrada. Un sistema realitzable no pot produir la sortida abans que se li apliqui l'entrada. Tot sistema realitzable ha de ser causal si la variable independent  $t$  es refereix al temps.

Pels sistemes lineals es pot comprovar la causalitat amb la regla següent:

$$\begin{aligned} &\text{si } x(t) = 0 \quad \forall t < t_0 \\ &\text{llavors } T[x(t)] = 0 \quad \forall t < t_0 \end{aligned}$$

### Estabilitat

Un sistema és estable si a qualsevol entrada fitada li correspon una sortida fitada. Es compleix el següent:

$$\begin{aligned} &\text{si } |x(t)| \leq B_1 \\ &\text{llavors } |y(t)| \leq B_2 \end{aligned}$$

### Memòria

Per calcular  $y(t_0)$  amb  $t_0$  arbitrari, calen valors de l'entrada passats o futurs.

### Invertibilitat

Un sistema és invertible si entrades diferents donen lloc a sortides diferents. En aquest cas, observant la sortida es pot determinar l'entrada sense ambigüïtat.

## PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS

I.6) Completeu la taula següent de propietats per als sistemes proposats.

Propietat	Sistema				
	$y(t) = k x(t)$	$y(t) = x^2(t)$	$y(t) = k \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau) d\tau$	$y(t) = \sin(x(t))$	$y(t) = t^2 x(t)$
Linealitat		no			sí
Invariància				sí	no
Causalitat	sí		no		
Estabilitat	sí		no		
Amb memòria	no		sí		
Invertible	sí	no			

I.7) Siguin dos sistemes  $T_1$  i  $T_2$  que fan les transformacions següents:

$$\begin{aligned} T_1[x(t)] &= x(t-t_0) \\ T_2[x(t)] &= x(at) \end{aligned}$$

a) Obtingueu l'expressió dels senyal de sortida dels sistemes:

$$\begin{aligned} T_3[x(t)] &= T_2[T_1[x(t)]] \\ T_4[x(t)] &= T_1[T_2[x(t)]] \end{aligned}$$

- b) Si els dos sistemes es connecten en cascada, trobeu els valors de  $t_0$  i  $a$  per obtenir a la sortida  $\text{sinc}((t/2)-1)$  o  $\text{sinc}((t-1)/2)$  quan a l'entrada s'aplica  $\text{sinc}(t)$ . Supposeu que l'entrada s'aplica primer a  $T_1$  i la sortida obtinguda s'aplica a  $T_2$ .
- c) Repetiu l'apartat anterior suposant que l'entrada s'aplica primer a  $T_2$  i la sortida obtinguda s'aplica a  $T_1$ .
- d) Compareu els resultats obtinguts als apartats b) i c) amb la solució de l'apartat a).

I.8) Estudieu les propietats de linealitat i invariància dels sistemes següents:

- a)  $T_1[x(t)] = x(2t)$
- b)  $T_2[x(t)] = x(t-T)$
- c) Comproveu i justifiqueu que si els dos sistemes es connecten en cascada, s'obté una sortida diferent depenent de l'ordre en què es fa la connexió:  $T_1\{T_2[x(t)]\} \neq T_2\{T_1[x(t)]\}$
- d) Justifiqueu que dos sistemes lineals i invariants sempre són intercanviables.

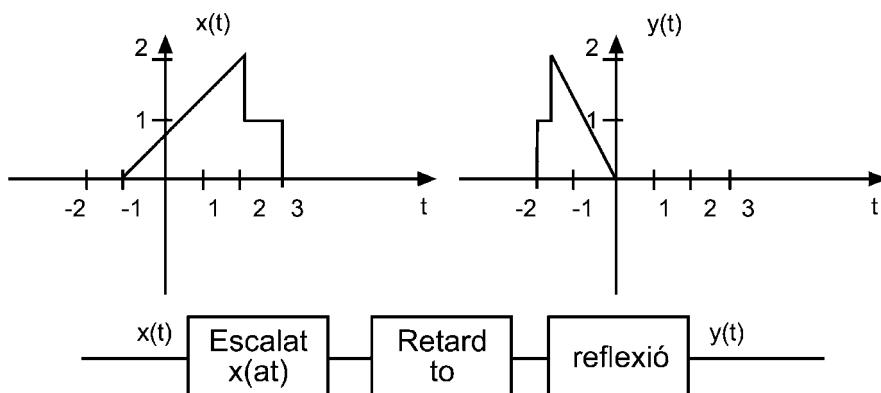


Fig. I.9)

Quins són els valors correctes dels paràmetres  $a$ ,  $t_0$  i reflexió

### P1.2 Transformacions de la variable com a sistemes

El fet que dos senyals temporals estiguin relacionats a través d'una transformació de la variable  $t$  permet interpretar la transformació com un sistema. Així, en l'exemple descrit a P1.1 es pot entendre  $x(t)$  com entrada d'un sistema que fa l'escalat per un factor 2 i s'obté la sortida del sistema  $y(t)$ . Llavors, per realitzar una transformació lineal de la variable ( $t \rightarrow at+b$ ) necessitem un sistema que ens faci el desplaçament o retard i un altre que ens faci l'escalat (i un tercer si es considera separatadament el gir o reflexió). En aquest exercici s'analitzarà la transformació de variable com una seqüència de sistemes.

1. Seleccioneu com a *Senyal* la segona opció (senyal 2). Com a *Configuració* seleccioneu l'esquema 3. Obtingueu els paràmetres de cada sistema.
2. Seleccioneu el senyal 3. Com a *Configuració* seleccioneu l'esquema 3. Obtingueu els paràmetres de cada sistema.
3. Repetiu l'apartat anterior per la *Configuració* de l'esquema 1.
4. Dels dos apartats anteriors, quin us ha estat més fàcil de resoldre?
5. Dels apartats 2 i 3 analitzeu si l'escalat i el retard són intercanviables.
6. Seleccioneu com a *Senyal* el senyal 4. Amb una figura anàloga a la tercera figura donada en l'exemple de P1.1, marqueu els intervals en què ambdós senyals són no nuls. Obtingueu i dibuixeu en el mateix gràfic l'equació de la recta que mapa un interval en l'altre (funció de transformació de la variable que relaciona  $x_A(t)$  amb  $x_I(t)$ ).
7. A partir dels paràmetres de la transformació de variable de l'apartat anterior, quina configuració us resulta més fàcil de definir? Compareu la resposta amb la de l'apartat 4.

8. De l'anàlisi feta a l'apartat anterior, creieu que l'escalat i el gir són intercanviables?
9. Dels exemples de senyal 3 i de senyal 4 inferiu la condició sobre  $a$  perquè una transformació  $x(t)$  a  $x(at)$  representi una expansió del senyal transformat. Feu el mateix per a una compressió.
10. Seleccioneu el senyal 1. Sense utilitzar cap configuració obtingueu la transformació de la variable independent que relaciona  $x_A(t)$  amb  $x_I(t)$ .
11. Verifiqueu el resultat de l'apartat anterior amb les configuracions esquema 1 i esquema 3.
12. Analitzeu amb el senyal 1 la possibilitat de considerar el gir com un cas particular de l'escalat.
13. Obtingueu l'expressió analítica de  $x_I(t)$  i de  $x_A(t)$  per al cas del senyal 1. A partir d'aquestes expressions, verifiqueu que la transformació obtinguda a l'apartat 10 o 11 és correcta.
14. Amb el senyal 2 verifiqueu si, essent  $x(t)$  parell, la transformació  $t \rightarrow at+b$  és equivalent a la  $t \rightarrow -(at+b)$ .

I.10) Si tenim un sistema definit per la transformació:

$$T[x(t)] = \int_{t-T}^{t+T} x(\tau) d\tau$$

Determineu si el sistema és lineal, invariant, causal i estable. Trobeu la sortida si a l'entrada s'aplica el senyal:  $x(t) = \delta(t-to)$ .

I.11) Determineu per a cadascun dels sistemes següents les propietats de linealitat, invariància, causalitat i estabilitat.

- a)  $y(t) = e^x(t)$
- b)  $y(t) = x(t-1) - x(1-t)$
- c)  $y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau) d\tau$
- d)  $y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x(t) + x(t-100) & t \geq 0 \end{cases}$
- e)  $y(t) = x(t/2)$
- f)  $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t-nT)$

- I.12) Un sistema és invertible si diverses entrades donen lloc a diverses sortides. Si un sistema és invertible, es pot trobar un sistema invers tal que, interconexióat en cascada amb l'original, dóna lloc a una relació entrada-sortida igual a la del sistema identitat. Determineu si cadascun dels sistemes següents és invertible. Si ho són, construïu el sistema invers. Si no ho són, trobeu dos senyals d'entrada al sistema que generin la mateixa sortida.

a)  $y(t) = x(t-4)$

c)  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

b)  $y(t) = \cos [x(t)]$

d)  $y(t) = x(2t)$

- I.13) Tenim el sistema de la figura I.13a)

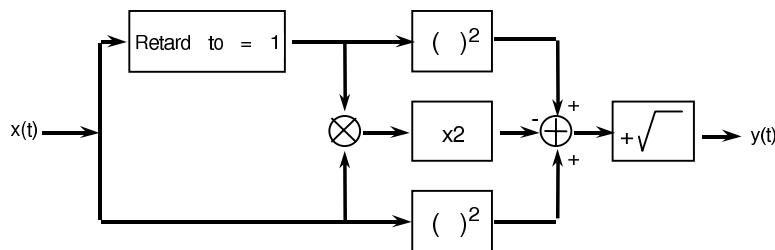


Fig. I.13.a)

Es demana el següent:

- Calculeu l'expressió de  $y(t)$ .
- És un sistema lineal?
- És un sistema invariant?
- Busqueu el senyal de sortida per al senyal d'entrada  $x(t)$  de la figura I.13b)

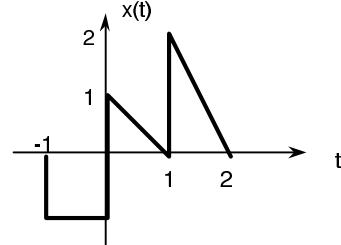


Fig. I.13.b)

### P1.3 Propietats de sistemes

És possible analitzar les propietats d'un sistema sense necessitat de tenir-lo descrit. En aquest apartat es disposa d'un conjunt de senyals aplicables a l'entrada d'un sistema, i analitzant la sortida es poden deduir les propietats que verifica el sistema. Les propietats previstes per analitzar són la linealitat, la invariància, la causalitat i l'estabilitat.

- Seleccioneu la propietat de linealitat. Què cal comparar per verificar aquesta propietat?
- Seleccioneu el sistema 1. Analitzeu la linealitat d'aquest sistema aplicant diverses combinacions de senyals (no us oblideu d'escriure els coeficients).
- Analitzeu la linealitat per al sistema 2. Seleccioneu com a senyals el pols i l'exponencial unilateral. Repetiu-ho canviant el pols per la sinusoida. Què en deduïu?

4. Estudieu la propietat de linealitat per a la resta de sistemes.
5. Hi ha algun sistema que no verifiqui la linealitat perquè  $T[ax(t)] \neq aT[x(t)]$ ? (per eliminar el senyal 2, seleccioneu-ne un qualsevol i poseu-hi el coeficient a zero).
6. Seleccioneu la propietat d'invariància. Quin procediment s'ha de seguir per analitzar-la? Seleccioneu el sistema 1 i un senyal qualsevol. Varieu  $T_0$  amb el ratolí. Relacioneu el que veieu amb el procediment que heu proposat.
7. Analitzeu la propietat d'invariància per als diferents sistemes.
8. Observeu la sortida de cada sistema per la sinusoida. Hi ha alguna relació entre el que s'obté i la verificació o no de les propietats de linealitat i invariància de cada sistema?
9. És possible analitzar la causalitat seleccionant el senyal aleatori? Quins senyals us semblen més adients per verificar aquesta propietat?
10. Quins sistemes són causals?
11. El compliment o no de les altres propietats té alguna incidència amb el procediment de verificació de la causalitat?
12. Estudieu l'estabilitat dels sistemes.
13. De totes les respostes sobre la verificació o no de les propietats, quines creieu que es poden afirmar amb absoluta seguretat? Justifiqueu la resposta.
14. Seleccioneu la combinació de senyals *Aleatori+20·Pols* (seleccioneu la propietat de linealitat). Compareu les respostes obtingudes pels sistemes 1 i 2 per treure soroll al pols.
15. Veient els senyals de sortida de cada sistema, intenteu inferir què fa cada sistema.

I.14) En aquest problema s'il·lustra una de les conseqüències més importants de les propietats de linealitat i invariància dels sistemes. Així, quan la resposta d'un sistema lineal o d'un sistema lineal i invariant a un senyal d'entrada determinat és coneiguda, es poden obtenir fàcilment altres respostes corresponents a molts altres senyals d'entrada.

- a) A la figura I.14a) es mostren  $x_1(t)$  i  $y_1(t)$ , que corresponen respectivament als senyals d'entrada i sortida d'un sistema LI.

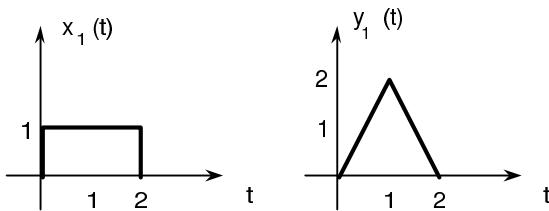


Fig. I 14.a)

Determineu els senyals de sortida d'aquest sistema per a les entrades  $x_2(t)$  i  $x_3(t)$  que es mostren a la figura I.14b).

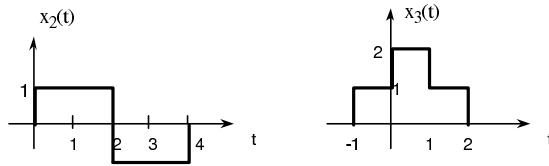


Fig. I.14.b)

- b) Supposeu un segon sistema LI que presenta una resposta  $y(t)$  a l'esglao donat per

$$y(t) = e^{-t} u(t) + u(-1-t)$$

Determineu la resposta d'aquest sistema al senyal d'entrada  $x(t) = \Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)$ .

- I.15) a) Si sabem que la resposta a l'esglao  $u(t)$  d'un sistema LI és el senyal triangular  $\Delta\left(\frac{t-2}{2}\right)$ , trobeu la resposta d'aquest sistema si a l'entrada s'aplica  $x(t) = \Pi\left(\frac{t-2.5}{3}\right) - \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$ .

- b) Si sabem que la resposta al pols triangular  $\Delta(t)$  d'un sistema LI és

$$T[\Delta(t)] = 2[\Pi(t+0.5) - \Pi(t-1.5)]$$

trobeu la resposta si a l'entrada s'aplica  $x(t) = \Delta\left(\frac{t-2}{2}\right)$ .

- I.16) Es vol trobar la sortida  $y(t)$  d'un sistema lineal i invariant al senyal d'entrada  $x(t)$ , que es mostra a la figura. Del sistema únicament se'n sap el següent:

$$T\left[\Delta\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \Pi\left(\frac{t+T/2}{T}\right) - \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

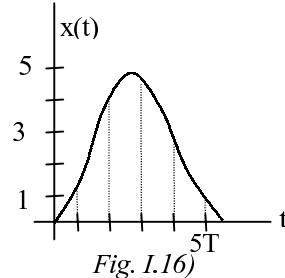


Fig. I.16)

Com que amb les dades de què disposem no és possible calcular correctament  $y(t)$ , es demana una aproximació al senyal de sortida. Per fer-ho:

- Aproximeu  $x(t)$  com a combinació de funcions pols triangular convenientment desplaçades. Dibuixeu el senyal obtingut.
- Dibuixeu l'aproximació obtinguda al senyal de sortida. Justifiqueu el procediment que heu seguit.

#### P1.4 Aplicació de linealitat i invariància d'un sistema

El fet que un sistema sigui lineal i invariant simplifica molt l'obtenció de la resposta del sistema. Així, si es pot descompondre un senyal d'entrada  $x(t)$  com a combinació lineal de versions desplaçades d'un senyal base  $f(t)$ , és a dir:

$$x(t) = \sum_i a_i f(t - t_i) \quad (\text{P1.4.1})$$

només caldrà conèixer  $g(t)$ , la resposta del sistema a  $f(t)$ , ja que gràcies a les dues propietats esmentades es pot afirmar que la  $y(t)$ , resposta del sistema a  $x(t)$ , vindrà donada per

$$y(t) = T\{x(t)\} = \sum_i a_i g(t - t_i) , \text{ on } g(t) = T[f(t)].$$

- Seleccioneu l'exemple 1. Veient la  $f(t)$  i  $g(t)$  d'aquest exemple, podem afirmar que el sistema és causal i estable? Quants paràmetres (coeficients i retards) necessitareu per descompondre el senyal  $x(t)$  donat, segons l'expressió (P1.4.1)? Escriviu aquests paràmetres. Per evitar complicacions de visualització és recomanable que primer escriviu el retard i després el coeficient.
  - En el segon exemple,  $x(t)$  canvia respecte al primer exemple. Escriviu els nous paràmetres per a aquest cas.  
Seleccioneu l'exemple 3.
  - Escriviu l'expressió analítica de  $x(t)$  i la de  $f(t)$ . Escriviu  $x(t)$  en funció de  $f(t)$ .
  - Amb la relació existent entre  $x(t)$  i  $f(t)$  de l'apartat anterior, es pot calcular la sortida del sistema sense fer la descomposició de (P1.4.1)?
  - Per a aquest exemple també és vàlida la descomposició de (P1.4.1). Obtingueu-ne els paràmetres.
  - La descomposició anterior és única?
-

## Definició de resposta impulsional per a sistemes lineals i invariants

La sortida d'un sistema lineal i invariant (LI) a la funció delta de Dirac es coneix com a resposta impulsional.



La resposta impulsional es pot utilitzar per obtenir la sortida a qualsevol senyal d'entrada a través del que es coneix com a integral de convolució:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Aquesta integral es sol abreujar de la manera següent:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

## Propietats de la convolució

### Commutativa

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

### Associativa

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

### Distributiva

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

### Element neutre $\delta(t)$

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

## Mètode semigràfic per resoldre la integral de convolució

Per a alguns senyals es més senzill obtenir la convolució a partir de la seva representació gràfica.

Els passos que cal seguir són els següents:

- S'expressen  $x(t)$  i  $h(t)$  en funció de  $\tau$ .
- Per cada  $t$ :
  - El senyal  $h(\tau)$  es reflecteix i es desplaça  $t$  unitats per obtenir  $h(t-\tau)$
  - Els senyals  $x(\tau)$  i  $h(t-\tau)$  es multipliquen per tot  $\tau$  ( $t$  és fix)
  - S'integra el producte anterior per  $-\infty < \tau < \infty$

Aquesta forma d'obtenir la convolució és especialment útil quan els senyals  $x(t)$  i/o  $h(t)$  estan definits per intervals temporals. Llavors les operacions anteriors també es realitzen per intervals.

### **Propietats dels sistemes lineals i invariants**

Les propietats dels sistemes lineals i invariants es poden deduir a partir de la seva resposta impulsional  $h(t)$ .

#### **Causalitat**

$$h(t)=0 \quad \text{per a} \quad t<0$$

#### **Estabilitat**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

#### **Sistemes amb memòria**

$$h(t) \neq k\delta(t)$$

#### **Invertibilitat de sistemes**

$$\exists h_i(t) \quad \text{si} \quad h(t)*h_i(t)=\delta(t)$$

---

**PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS**


---

I.17) Si tenim l'esquema de la figura I.17)

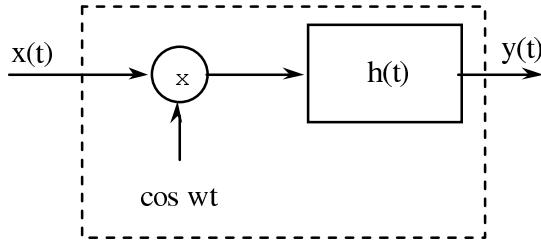


Fig. I. 17)

- Estudieu les propietats de linealitat i invariància del sistema global representat amb un traçat discontinu.
- En el cas que sigui lineal, avalueu la resposta a l'impuls que caracteritza el sistema global:  $h_T(t,\tau) = T[\delta(t-\tau)]$ .
- Si  $x(t) = e^{-at} u(t)$  i  $h(t) = e^{-bt} u(t)$ , trobeu  $y(t)$ .
- Raoneu si dos sistemes diferents, però amb la mateixa estructura que la del problema, connectats en cascada, són intercanviables. Utilitzeu, per exemple, el primer sistema amb  $w = w_1$  i  $h(t) = \delta(t-t_1)$ , i el segon sistema amb  $w = w_2$  i  $h(t) = \delta(t-t_2)$ , per simplificar.

I. 18) Considereu el sistema lineal definit per l'equació

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

- Calculeu la sortida  $y_i(t)$  per a les següents  $x_i(t)$ :

$$x_1(t) = \frac{1}{t_o} \prod \left( \frac{t - t_o/2}{t_o} \right) ; \quad x_2(t) = \frac{1}{t_o} \exp(-t/t_o) u(t) \quad \text{amb } T > t_o$$

- Comproveu que  $y_1(t) = y_2(t)$  quan  $t_o$  tendeix a zero
- Calculeu la resposta impulsional del sistema.

### P1.5 Aproximació a la funció delta i resposta impulsional de sistemes

Una definició matemàtica, però a la vegada molt física, de la funció delta ve donada com a límit de famílies de funcions. En aquesta pràctica s'utilitzen quatre famílies de funcions que reduint-les en duració es comporten com la delta. Aquestes funcions són:

$$\Pi(t) \quad , \quad \Lambda(t) \quad , \quad e^{-|t|} \quad , \quad \text{sinc}(t)$$

Suposem el cas del pols rectangular. Si seleccionem un sistema veurem inicialment la resposta del sistema a  $\Pi(t/a)$  per a  $a=1$ . Amb el ratolí es pot variar la duració del senyal d'entrada, és a dir, el paràmetre  $a$ . Si el sistema seleccionat és lineal i invariant, veurem que quan  $a$  es fa molt petit succeeixen dues coses. D'una banda, el senyal de sortida se'n va cap a zero, la qual cosa és lògica tenint en compte que l'àrea del senyal d'entrada també va cap a zero. D'altra banda, es pot observar que la forma d'ona del senyal de sortida varia cada cop menys.

Això ho podem repetir amb els altres senyals i es podrà observar que per valors de duració suficientment petits les respostes que observem cada cop s'assemblen més. Per poder-ho observar millor, un cop ha disminuït la duració del senyal d'entrada seleccionat podrem establir la comparació de resultats amb els altres senyals si fem clic a *Comparar*.

Per evitar la tendència cap a zero de la sortida en disminuir la duració de l'entrada, es normalitza cada senyal per mantenir l'àrea constant (feu clic a *Àrea constant*). Ara, obviament, en disminuir la duració de l'entrada augmentarà l'amplitud, però d'aquesta manera la sortida cada cop tendeix més cap a un senyal determinat independentment de l'entrada escollida. És la resposta impulsional.

Amb aquest experiment es pot deduir que a la pràctica podem obtenir una molt bona aproximació de resposta impulsional d'un sistema lineal invariant sense preocupar-nos massa del tipus d'excitació, sempre que la seva duració sigui petita i l'àrea es mantingui a 1. Obviament, aquesta independència de la sortida amb l'entrada només passa si el sistema és lineal i invariant.

1. Es pot afirmar per qualsevol dels sistemes que la sortida depèn clarament de l'entrada?
2. Varieu la duració dels senyals i respongueu novament a la pregunta anterior.
3. Seleccioneu el sistema 1. Verifiqueu l'affirmació següent: si es varia una mica l'escalat del senyal d'entrada s'obté el mateix senyal de sortida però reescalat amb el mateix factor que l'entrada.
4. Pel sistema 1 augmenteu el factor d'escala, és a dir, reduïu la duració del senyal d'entrada, i analitzeu què succeeix tant des del punt de vista de l'amplitud com des del punt de vista de l'affirmació de l'apartat anterior.
5. Què succeeix quan seleccioneu *Àrea constant*? Per què?
6. Què passa si seleccioneu el sistema 3? Per què?
7. Pot donar l'expressió de la resposta impulsional de cadascun dels sistemes?
8. Seleccioneu el sistema 1 i analitzeu la realització pràctica de la funció  $\delta(t)$ . Creieu que és important que  $\delta(t)=0$  per a  $t=0^+$ ?

I.19) Donat el sistema de la figura I.19) es demana:

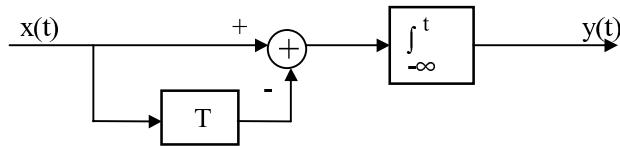


Fig. I.19)

- a) Trobeu la relació entrada-sortida  $y(t)=T[x(t)]$ .
  - b) Quines són les propietats que verifica aquest sistema? Justifiqueu breument la resposta.
  - c) Obtingueu la resposta impulsional.
  - d) Obtingueu la relació entrada-sortida mitjançant el resultat de l'apartat anterior i la integral de convolució. Comproveu que s'obté el mateix resultat de l'apartat a).
  - e) A partir de la resposta impulsional, obtingueu la sortida del sistema a una entrada  $x(t)=\Pi(t/T)$ .
- I.20) Sigui el sistema lineal i invariant caracteritzat per l'equació

$$y(t) = \int_t^{t+3} x(\tau) d\tau$$

I.21) Determineu si els sistemes LI següents són estables o causals.

- a)  $h(t) = e^{-3t} u(t-1)$
- b)  $h(t) = e^{-3t} u(1-t)$
- c)  $h(t) = e^{-t} u(t+100)$
- d)  $h(t) = e^t u(-1-t)$
- e)  $h(t) = e^{-4|t|}$

- I.22) a) Busqueu la relació entre la resposta a l'impuls i la resposta a un graó d'un sistema LI i causal

$$h(t) = T[\delta(t)] \quad ; \quad a(t) = T[u(t)]$$

- b) Què val  $a(\infty)$ ?  
 c) Si coneixem  $a(t)$ , expresseu la resposta del sistema a qualsevol senyal en funció de  $a(t)$ . Per fer-ho, abans podeu demostrar que

$$x(t) = x(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

- I.23) Sigui  $h(t)$  la resposta impulsional d'un sistema lineal i invariant. Pel raonament següent, que és incorrecte, es dedueix que la resposta impulsional és una funció parell. Quina errada presenta aquest raonament?

$$\delta(t-\tau) = \delta(\tau-t) \Rightarrow T[\delta(t-\tau)] = T[\delta(\tau-t)] \Rightarrow h(t-\tau) = h(\tau-t)$$

- I.24) Si considerem que la sortida d'un sistema  $y(t)$  és la convolució entre el senyal d'entrada  $x(t)$  i la seva resposta impulsional  $h(t)$ , obtingueu, en funció de  $y(t)$ , els senyals següents:

- a)  $x(t-t_O)*h(t)$   
 b)  $x(t)*h(t-t_O)$   
 c)  $x(t-t_O)*h(t-t_O)$   
 d) Feu els càlculs a partir de la definició de la funció  $\delta(t)$ ,  $\delta(t-T_1)*\delta(t-T_2)$ .

- I.25) Indiqueu si les afirmacions següents són vertaderes o falses

- a)  $x(t-1) = x(t) * \delta(t-1)$   
 b)  $x(1-t) = x(t) * \delta(1-t)$   
 c)  $x(t-1) = x(t) * \delta(1-t)$   
 d)  $x(1-t) = x(-t) * \delta(t-1)$   
 e)  $x(1-t) = x(-t) * \delta(1-t)$

- I.26) Si coneixem que la sortida d'un sistema LI de resposta impulsional  $h(t)$  a un senyal d'entrada  $x(t)$  és el senyal  $y(t)$ , calculeu la sortida si es fa un canvi d'escala  $at$  (amb  $a>0$ ) a la variable. És a dir, quin és el senyal de sortida que s'obtindria si el sistema LI tingués una resposta impulsional  $h(at)$  i el senyal d'entrada fos  $x(at)$ ? Podríeu deduir  $x(t)*h(-t)$ ?

- I.27) Demostreu per derivació de la integral de convolució que si  $y(t) = x(t) * h(t)$  llavors  $y'(t) = x'(t) * h(t)$ .

- I.28) Essent  $x(t)$  un senyal de duració finita en els marges  $(t_1, t_2)$ , que és el senyal d'entrada d'un sistema LI caracteritzat per una resposta impulsional  $h(t)$ , també de duració finita en els marges  $(t_3, t_4)$ , determineu els marges de duració de la sortida.
- I.29) Trobeu i **demostreu** les propietats següents de la convolució  $y(t)=x(t)*h(t)$
- Si  $x(t)$  és imparell i  $h(t)$  és parell,  $y(t)$  és parell, imparell o cap de les dues és correcta?
  - Si  $y(t) = x(t)*h(t)$  llavors quant val  $x(at)*h(at)$  en funció de  $y(t)$  i  $a$ ?
  - Si  $x(t)=0$  per  $t>t_1$  i  $h(t)=0$  per  $t>t_2$ , llavors  $y(t)=0$ , per quin interval?

### P2.1 Exemples de convolució 1D. Resposta de sistemes lineals i invariants

Aquest programa té com a objectiu visualitzar l'operació de convolució entre els dos senyals unidimensionals (1D)  $x(t)$  i  $h(t)$  que se seleccionin (*senyal entrada i resposta impulsional*) i que estan definits sobre un mateix interval temporal.

Com és sabut, per un instant determinat  $t$ , l'obtenció del senyal  $y$  en aquell instant,  $y(t)$ , ve donat per la integral del producte dels senyals  $x(\tau)$  i  $h(t-\tau)$ . El programa ens permet veure el valor  $y(t)$  en el mateix gràfic en què es representen els dos senyals que han intervenit en el càlcul  $x(\tau)$  i  $h(t-\tau)$  com a funcions de la variable  $\tau$ .

Si ara fem una representació seqüencial del càlcul anterior per cada instant de temps veurem en forma d'animació com es va desplaçant  $h(t-\tau)$  i com va apareixer  $y(t)$ . Això és el que es mostra a la pantalla en fer clic a *Convolució*.

- Feu les diferents convolucions permeses pel programa. Seleccioneu els senyals que s'han de convolucionar i abans d'executar la convolució intenteu deduir-ne el resultat que ha de sortir.
- Seleccioneu com a senyal d'entrada el pols triangular i com a resposta impulsional l'exponencial unilateral. Determineu les integrals que haurieu de calcular si volguéssiu resoldre analíticament aquesta convolució. Feu clic a *Convolucionar* i identifiqueu en la gràfica les integrals anteriors així com els intervals temporals en què heu necessitat cada integral. Aquesta identificació la podeu fer portant el punter sobre la sortida en el moment que us interessi i fent clic en aquest punt. Així veureu la situació de  $x(\tau)$  i de  $h(t-\tau)$  que us han permès calcular  $y(t)$ . Per continuar poleu qualsevol tecla.
- Seleccioneu senyals d'entrada que tinguin una duració finita. Quina relació hi ha entre les duracions de l'entrada i de  $h(t)$  amb la duració de la sortida? Es pot dir el mateix quan  $h(t)$  és l'exponencial?
- En els casos en què el sistema sigui no causal, quina part de la resposta impulsional fa que la sortida s'avanci a l'entrada? Confirmeu també la situació contrària.
- Seleccioneu com a entrada el pols rectangular i compareu les sortides que us proporcionen les dues primeres respuestes impulsives. Quines diferències observeu? Per què l'amplitud de la primera sortida segueix el nivell de l'entrada i la segona no?

6. Seleccioneu el senyal d'entrada triangular i de resposta impulsional el primer pols rectangular. Un cop feta la convolució, analitzeu el resultat que obteneu per a instants diferents. Porteu el punter sobre el valor  $y(t)$  corresponent a l'instant  $t$  que voleu analitzar i fent-hi clic amb el ratolí visualitzareu com s'ha calculat  $y(t)$  (per continuar pulseu qualsevol tecla). Quins valors de l'entrada intervenen per calcular la sortida en aquest instant  $t$ ? Quina operació es realitza? Quin efecte té això quan ens trobem en el màxim? I quan comença el triangle? I en el tram recte? Es pot dir que la sortida es correspon a una mitjana local de l'entrada?
7. Analitzeu amb altres senyals d'entrada el plantejament de la convolució deduït a l'apartat anterior.
8. Feu una anàlisi similar a la de l'apartat 6 en el cas de la resposta impulsional triangular.
9. Compareu els resultats obtinguts amb els dos filtres que tenen com a resposta impulsional un pols rectangular. Deduïu i justifiqueu la diferència o diferències observades.
10. Seleccioneu com a senyal d'entrada el pols rectangular i com a resposta impulsional l'exponencial. Compareu el rang d'amplituds de l'entrada i la sortida. Què en podeu dir del filtre a partir d'aquesta comparació?
11. Seleccioneu com a senyal d'entrada el tren de polsos i com a resposta impulsional l'exponencial. Aquesta resposta impulsional és la d'un filtre RC. Si la resistència és de  $100 \text{ M}\Omega$ , quin és el valor aproximat del condensador? Justifiqueu elèctricament la forma d'ona del senyal de sortida.
12. Quin filtre suavitza més el senyal aleatori? Podeu justificar la resposta?
13. Seleccioneu com a resposta impulsional el pols de Haar i com a senyal d'entrada el pols rectangular. Convoluteu i determineu què passa amb aquest filtre quan ens trobem en una zona gairebé constant i en una discontinuïtat entre dues zones gairebé constants. Per avançar després de cada pausa premeu qualsevol tecla.
14. Seleccioneu com a resposta impulsional el pols de Haar i com a senyal d'entrada el pols triangular. Es pot interpretar aquest filtre com un derivador? Feu l'anàlisi amb altres senyals.
15. Quina particularitat observeu quan l'entrada a qualsevol dels filtres és la sinusoida?
16. Analitzant algunes sortides podeu observar el transitori d'un filtre?

## P2.2 Convolució. Deconvolució

Aquest exercici es pot veure com un problema de deconvolució, ja que es tracta de trobar un senyal que convolucionat amb un altre de conegut doni un senyal resultant també conegut. No es resol, però, el problema general i complex de deconvolució, sinó que es proposen 8 possibles senyals i se n'ha d'escol·lir un que, convenientment escalat o desplaçat, amplificat o atenuat, ens doni la solució correcta.

1. Seleccioneu l'exemple 1. Seleccioneu amb el ratolí la forma d'ona que creieu que podrà donar la convolució desitjada. Ajusteu els paràmetres per obtenir el resultat correcte. Quina és l'expressió analítica del senyal cercat?
2. Repetiu l'apartat anterior per a l'exemple 2.
3. Feu el mateix per al 3.

4. Seleccioneu un dels tres exemples i analitzeu com varia el resultat de la convolució quan es desplaça un senyal.
5. Repetiu l'apartat anterior pel canvi d'amplitud i pel canvi d'escala.
6. Podeu generalitzar la resposta dels apartats 4 i 5?

I.30) El circuit RL que es mostra a la figura es pot caracteritzar per la resposta impulsional:

$$h(t) = \delta(t) - (R/L) e^{-(R/L)t} u(t)$$

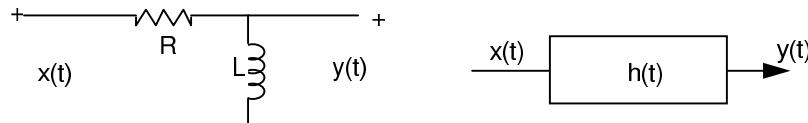


Fig. I.30)

- a) És lineal? És invariant? És causal? És estable? Justifiqueu les respostes.
- b) Trobeu la resposta a l'esglao:  $x(t) = u(t)$ .
- c) Trobeu la resposta a la rampa:  $x(t) = r(t)$ .

$$\text{Definició: } r(t) = t u(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

I.31) El circuit RC que es mostra a la figura es pot caracteritzar per la resposta impulsional:

$$h(t) = (R_1 C)^{-1} e^{-t/\alpha} u(t), \quad \alpha = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

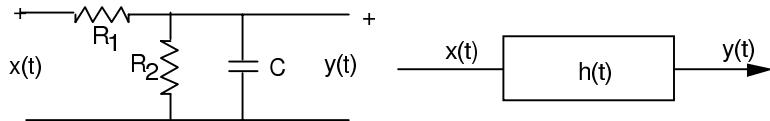


Fig. I.31)

- a) És lineal? És invariant? És causal? És estable? Justifiqueu les respostes.
- b) Trobeu la resposta a l'esglao:  $x(t) = u(t)$ .
- c) Trobeu la resposta a la rampa:  $x(t) = r(t)$

$$\text{Definició: } r(t) = t u(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

- I.32) Sigui  $h(t)$  el pols triangular que es mostra a la figura P I.32a), i el senyal  $x(t)$  el tren d'impulsos, que també es mostra a la figura.

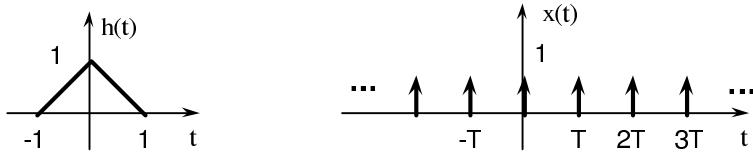
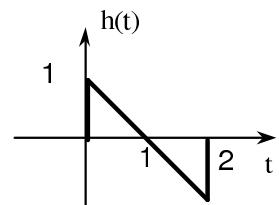


Fig. I.32.a)

- Dibuixeu  $y(t) = x(t) * h(t)$  per als casos:  $T=4$ ,  $T=3$ ,  $T=3/2$ ,  $T=1$ .
- Considereu un sistema LI de resposta impulsional  $h(t) = e^{-t} u(t)$ . Trobeu la sortida per al senyal anterior d'entrada.
- Sigui  $x(t)$  el tren d'impulsos següent:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \delta(t-k)$$

Trobeu la sortida al sistema de resposta impulsional que es mostra a la figura P I.32.b)



P I.32.b)

- I.33) Per mitjà de la integral de convolució, trobeu la sortida  $y(t)$  d'un sistema LI caracteritzat per  $h(t)$  quan a l'entrada s'hi aplica  $x(t)$ .
- $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$   
 $h(t) = e^{2t} u(1-t)$
  - $x(t) = e^{-3t} u(t)$   
 $h(t) = u(t-1)$
- I.34) a) Obtingueu la resposta impulsional,  $h(t)$ , del sistema LI de la figura I.34. Obtingueu la sortida del sistema quan el senyal d'entrada és  $x(t)=u(t)$ .
- b) El sistema es connecta en sèrie amb un altre sistema de resposta impulsional  $h_2(t)$ . Trobeu aquesta resposta si el sistema total és  $h_{tot}(t)=h(t)*h_2(t)=h(t-T)*u(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$ . (Simplifiqueu l'expressió de  $h_2(t)$  al màxim.)

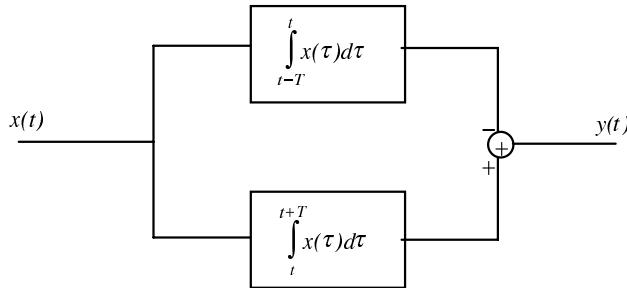


Fig. I.34)

- I.35) a) Obtingueu la resposta impulsional,  $h(t)$ , del sistema LI de la figura I.35. Obtingueu la sortida del sistema quan el senyal d'entrada és  $x(t)=u(t)$ .
- b) El sistema es connecta en sèrie amb un altre sistema de resposta impulsional  $h_2(t)$ . Trobeu aquesta resposta si el sistema total és  $h_{tot}(t)=h(t)*h_2(t)=h(t+T)*u(t)*[\delta(t+T)-\delta(t)]$ . (Simplifiquem l'expressió de  $h_2(t)$  al màxim.)

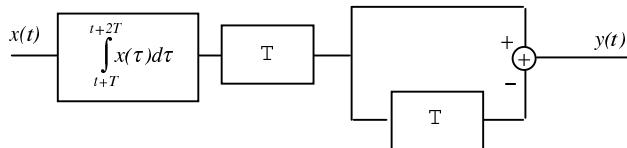


Fig. I.35)

- I.36) Considereu un sistema LI, la relació d'entrada-sortida del qual ve donada per:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau-2) d\tau$$

- a) Trobeu la resposta impulsional  $h(t)$  del sistema.
- b) Determineu la resposta d'aquest sistema per a una entrada  $x(t) = \Pi\left(\frac{t-1/2}{3}\right)$ .
- c) Tingueu en compte la interconnexió de sistemes que es mostra a la figura I.36)

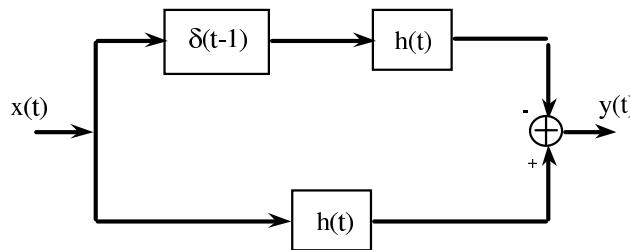


Fig. I.36)

On  $h(t)$  és la resposta de l'apartat a). Trobeu la resposta  $y(t)$  per al senyal de l'apartat b).

I.37) Si tenim el sistema que relaciona  $x(t)$  amb  $y(t)$ , com es mostra a la figura I. 37):

- Determineu si compleix les propietats de linealitat, invariància, causalitat i estabilitat.
- Trobeu el senyal de sortida si l'entrada és  $x(t) = \prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ .

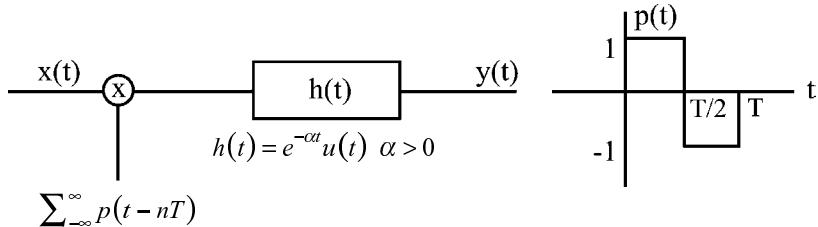


Fig. I.37)

I.38) a) Calculeu la convolució del pols cosinus  $p(t)$  amb un pols rectangular de duració  $T$  centrat a l'origen, en què:

$$p(t) = \cos\omega_0 t \prod\left(\frac{t}{T_o/2}\right); \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_o}; \quad T > T_o/2$$

- Quant val la convolució del pols rectangular anterior amb un pols cosinus de duració  $T_o/2$  causal (en aquest cas, el pols cosinus causal és  $p(t-T_o/4)$ ).

I.39) Si a l'entrada d'un sistema LI de resposta impulsional  $h(t) = \frac{1}{T} \prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$  s'aplica el senyal d'entrada  $x(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-|t|/\alpha}$

- Trobeu el senyal de sortida  $y(t)$
- Expresseu en funció de  $y(t)$  el resultat de  $x(at)*h(at)$
- Expresseu en funció de  $y(t)$  el resultat de  $x(t-t_o)*h(t-t_I)$

### P2.3 Imatge. Convolutió 2D.

Exemples de convolució bidimensional (2D). Es presenten dues aplicacions de la convolució 2D en tractament d'imatges. La primera és la reducció de soroll i la segona, la detecció de contorns.

En la primera aplicació es disposa de dues imatges de 128 x 128 punts (píxels) contaminades en tres graus diferents de soroll (sis imatges en total). Es poden seleccionar amb el botó *Imatge*. El filtre de reducció de soroll és una gaussiana (9x9 píxels) de la qual pot variar la desviació típica mitjançant el botó  $h(x,y) -\alpha+$  (inicialment és pla). El resultat serà la convolució de la imatge original amb el filtre gaussià.

1. Analitzeu els efectes del filtre gaussià. Que succeeix per  $\alpha$  gran? I per  $\alpha$  petit? Justifiqueu les respostes.
2. Quin valor de  $\alpha$  escolliríeu per als diferents exemples?

La segona aplicació té com a objectiu detectar els contorns dels objectes que apareixen en una imatge. Els contorns van associats a discontinuitats. Per tant, el que es tractaria d'obtenir és una imatge amb valors grans a les discontinuitats i valors zero (o petits) a les zones planes. Si pensem la integral de convolució en el punt  $(x,y)$  com una mesura de similitud entre  $i(x',y')$  i  $h(x-x',y-y')$ , una manera d'emfasitzar un contorn vertical (una discontinuitat en sentit horitzontal) seria la de convolucionar la imatge amb un filtre de resposta impulsional que tingui aquesta forma. El mateix es pot dir en les altres direccions.

Per això es construeix el sistema que es mostra en aquesta pràctica i que consta de dos subsistemes: un banc de filtres i un sistema d'obtenció del màxim. Cada filtre del banc emfasitza una direcció. Els 8 filtres (8 direccions) són màscares de 3x3 pixels (treballem amb senyals i sistemes discrets), i de valors -1,0 o 1, amb tants valors a 1 com a -1. Així, si un punt determinat és d'una zona plana i els seus vuit veïns tenen el mateix valor que el píxel, el resultat de la convolució en aquell punt serà zero. Després, per cada punt s'agafa el màxim, de manera que si el punt era de contorn tindrà algun valor gran en alguna de les direccions considerades i sinó, no.

3. Intenteu justificar el resultat de sortida de cada filtre. Així, per què el resultat del filtre N (Nord) és gran (blanc) en unes posicions determinades i és petit (negre) a la resta?
4. Relacioneu-ho amb la resposta impulsional, pols de Haar, de l'exercici P2.1
5. Seleccioneu un filtre. Observeu els valors que pren. Resulta lògic el resultat que dóna o sembla més aviat que hauria de donar el resultat proporcionat pel filtre de la direcció oposada?

I.40) La figura I.40) mostra un sistema reverberador. Obtingueu-ne la resposta impulsional. Analitzeu la causalitat i l'estabilitat del sistema.

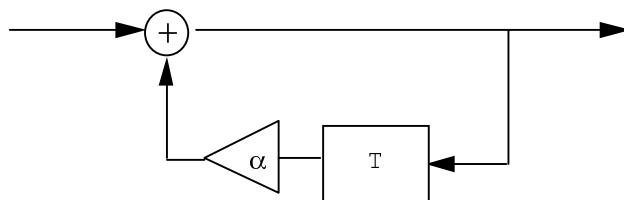


Fig. I.40)

I.41) Per al sistema de la figura I.41) es demana el següent:

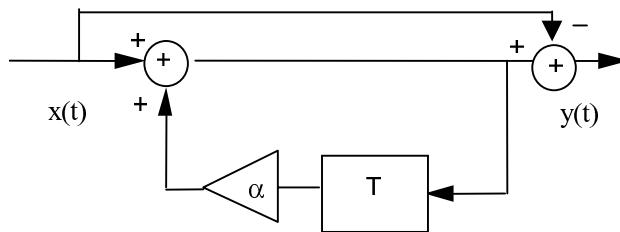


Fig. I.41)

- a) Analitzeu les propietats de linealitat, invariància, causalitat i estabilitat.
  - b) Trobeu la resposta impulsional  $h(t)$ .
  - c) Trobeu la resposta a l'esglao  $u(t)$ . A quin valor asymptòtic tendeix aquesta resposta?
- I.42) a) Definint el paràmetre de contínua  $A_f$  d'un senyal  $f(t)$  com:  $A_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$   
Demostreu que si  $z(t) = f(t) * g(t)$ ,  $A_z$  és  $A_z = A_f A_g$
- b) Definint el paràmetre centre de gravetat  $D_f$  d'un senyal  $f(t)$  com:  $D_f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt}$   
Demostreu que si  $z(t) = f(t) * g(t)$ ,  $D_z$  és  $D_z = D_f + D_g$
- I.43) Un paràmetre d'interès que es pot extreure d'un senyal  $x(t)$  és el definit per

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) dt$$

- a) Calculeu aquest paràmetre per als senyals següents: a.1)  $\Pi(\frac{t}{T_0})$ , a.2)  $u(t)$ , a.3)  $\cos w_0 t$
- b) Quina informació va associada a l'esmentat paràmetre  $m_x$ ? Calculeu aquest paràmetre per a un senyal fitat i de duració finita.

Un càlcul similar es pot realitzar de manera local si considerem l'obtenció d'aquell paràmetre en un tram del senyal de duració  $2T$  i centrat en un punt  $t_0$ . Ara, l'expressió del paràmetre serà

$$m_{x,t_0} = \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} x(t) dt$$

Amb aquesta idea, a partir de  $x(t)$  es pot construir un altre senyal  $m_x(t)$  definit com

$$m_x(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(\tau) d\tau$$

Aquest procés es coneix com allisament.

- c) Mostreu que l'expressió anterior es pot veure com la relació entrada-sortida d'un sistema lineal i invariant. Quina és la resposta impulsional d'aquest sistema?
- d) Analitzeu les propietats de causalitat i estabilitat del sistema.
- e) Calculeu  $m_x(t)$  per al cas del senyal  $x(t)=A \cos \omega_0 t$ . Quin efecte té l'elecció de  $T$ ?

#### P2.4 Exemple d'allisament

En aquesta pràctica s'analitza una aplicació de l'allisament. El filtre allisador és un filtre que té de resposta impulsional un pols rectangular. L'objectiu és la reducció de soroll. Es simula un problema de la transmissió de dades per xarxes elèctriques.

Les companyies elèctriques utilitzen les seves línies de transport d'energia elèctrica com a suport de comunicacions, típicament comunicacions digitals entre centres de control. La simulació es fa suposant tres components típics d'aquesta aplicació. Així, el senyal simulat en recepció és la superposició de la sinusoide de 50 Hz, polsos que corresponen a la informació binària i soroll.

Se cercarà la presència o absència del pols en cada període, la qual cosa es podria fer amb un simple llindar de comparació si la informació no estigués emmascaraada pels altres dos components. La supressió de la sinusoide no comporta massa dificultat, fins i tot admeten una certa variació de la seva freqüència (s'analitzarà a P5.5). En tot cas, això es farà al final per aprofitar aquest component com a informació de sincronisme.

El problema central radica en l'eliminació del soroll. En aquesta aplicació ens podem trobar amb diferents components de soroll d'origen diferent però amb característiques similars. Tot i que ens podem trobar un cert soroll en qualsevol instant de temps, en la simulació que s'ha fet s'ha considerat la seva presència només en certs intervals. Amb això s'aconsegueix una visualització més neta dels components del senyal. A més de no perdre generalitat, ja que el tractament serà equivalent en el cas de tenir soroll en tot  $t$ , s'està simulant un tipus de soroll que es pot produir en aquesta aplicació per interferències electromagnètiques de curta durada i de potència més elevada que altres tipus de soroll, que també poden estar presents.

1. Observeu el senyal rebut (*senyal complet*). Quants polsos podeu distingir-hi? Quin és el període i quina la freqüència de la sinusoide?

La característica del soroll, que s'aprofita per intentar eliminar-lo, és que la seva mitjana és zero. És per això que l'allisador, que realitza una estimació local de la mitjana, ens reduirà el soroll.

Per fer l'estudi s'analitzarà un període (*senyal parcial*) en què apareixen els tres components. Augmenteu la duració del filtre allisador. Filtreu en cada pas i observeu l'efecte del filtre sobre cada component: pols, soroll i sinusoide.

2. Com afecta la duració del filtre a la sinusoida?
3. Repetiu l'apartat anterior per al cas del pols.
4. Ara repetiu-ho per al soroll.
5. Què es pot fer per trobar el millor filtre?

Filtreu aquest senyal amb el filtre de duració 0,4 ms.

6. Per què l'amplitud d'aquest filtre és de 2.500? Per què en variar la duració també varia l'amplitud del filtre?
7. En quin percentatge s'ha reduït la potència del soroll?
8. Observeu l'evolució del màxim del pols filtrat i relacioneu-lo amb l'evolució de la mesura de qualitat del pols en funció de la duració del filtre.
9. Quina duració del filtre penseu que és la més convenient?
10. Pel valor òptim de duració obtingut a l'apartat anterior, observeu el resultat de filtrar el senyal complet. Quants polsos hi distingeix?
11. Quines diferències hi observeu en utilitzar el filtre causal o el no causal?

- I.44) Una definició del retard  $t_d$  que introduceix un sistema és la següent:  $t_d$  és el temps que triga la sortida a arribar al 50% del seu valor final quan el senyal d'entrada és  $u(t)$ . Així mateix, es pot definir el temps de pujada  $t_p$  com l'interval de temps transcorregut des que la sortida va del 10% al 90% del valor final. En tots els casos se suposa  $h(t) \geq 0$ .
- a) Obtingueu el valor de  $t_d$  per als sistemes L1,  $h_1(t)$  i  $h_2(t)$ , de la figura I. 44).
  - b) Generalitzeu el càlcul de  $t_d$  per a una  $h(t)$  qualsevol. Il·lustreu-ho gràficament.
  - c) Obtingueu, en funció dels valors de l'apartat a), el valor de  $t_d$  per a la connexió en sèrie dels sistemes 1 i 2. Feu el mateix per a la connexió dels dos sistemes en paral·lel.
  - d) Obtingueu el valor de  $t_p$  per a  $h_1(t)$  i per a  $h_2(t)$ .
  - e) Calculeu el valor de  $t_p$  per a la connexió en sèrie dels dos sistemes (considereu  $t_2$  una mica més gran que  $t_1$  i aprofiteu les simetries).
  - f) Doneu l'expressió analítica de  $h_3(t)$  en funció de  $h_1(t)$ . Analitzeu els paràmetres  $t_d$  i  $t_p$  per a aquest tercer cas. A la vista d'aquests resultats i els obtinguts a a) i d), a què penseu que estan associats  $t_d$  i  $t_p$ , a la posició o a la durada de  $h(t)$ ?

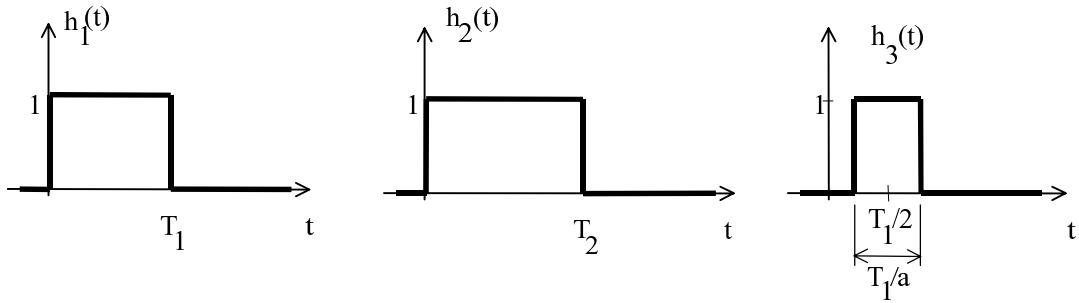


Fig. I.44)

- I.45) La utilització de sistemes inversos pot ser molt important per eliminar efectes no desitjats introduïts en alguns senyals. Un exemple el constitueix la cancel·lació d'ecos de senyals acústics. Si un auditori presenta un eco perceptible, significa que un senyal acústic anirà seguit d'una versió atenuada i retardada d'aquest senyal. Aquest efecte es pot moderar per mitjà d'un canal lineal i invariant de resposta impulsional.

$$h(t) = h_0 \delta(t) + h_1 \delta(t-T)$$

on  $T$  representa el temps de retard de l'eco, i  $h_0$  i  $h_1$  els factors de guany del senyal acústic i de l'eco, respectivament.

Sigui  $x(t)$  el senyal acústic original i  $y(t)$ , el senyal distorsionat per l'eco. Per determinar la distorsió introduïda per l'eco,  $y(t)$  es recull per mitjà d'un micròfon i s'equalitza mitjançant un sistema LI de resposta impulsional  $g(t)$ , que consisteix en un tren d'impulsos:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT)$$

L'esquema que en resulta s'indica a la figura I. 45) a

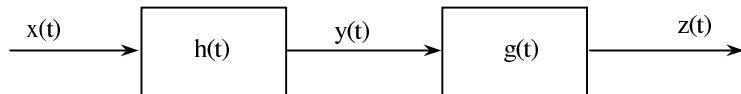


Fig. I.45.a)

Es demana el següent:

- Obtingueu l'expressió de  $y(t)$  en funció de  $x(t)$ .
- La correcta equalització de la sala significa  $z(t)=x(t)$ . Indiqueu quines són les equacions algebraiques que han de satisfer els coeficients  $g_k$  en funció de  $h_0$  i  $h_1$  i obtingueu-ne el valor numèric quan  $h_0=1$  i  $h_1=0,5$ .
- Dibuixeu un esquema de l'equalitzador  $g(t)$  que s'ha obtingut, i feu servir elements sumatori, amplificadors i retardadors del senyal amb retard igual a  $T$ s.

- d) Amb la finalitat de simplificar l'esquema obtingut, demostreu que el sistema de la figura I.45b) té resposta impulsional igual a  $g(t)$ , i indiqueu quin ha de ser el valor de  $\alpha$ .

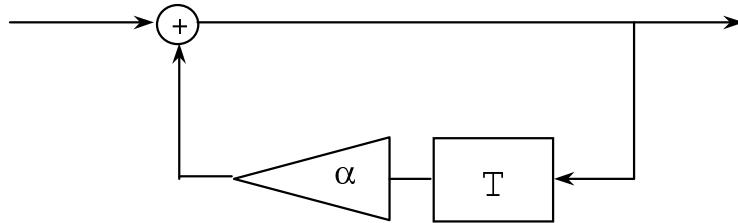


Fig. I. 45.b)

- I.46) Si tenim un senyal  $x(t)$  real i fitat, es pot trobar un sistema lineal i invariant que verifiqui les condicions següents:

- $h(t)$  real
- $E_h \leq 1$ , on  $E_h$  és l'energia de  $h(t)$
- $y(t) = x(t) * h(t)$  té el valor màxim possible per  $t=t_0$

- a) Trobeu la resposta impulsional  $h(t)$  d'aquest sistema. Per què aquest sistema es coneix amb el nom de filtre adaptat?

Nota: Utilitzeu la desigualtat de Schwartz:  $|\int_a^b u(t) v^*(t) dt|^2 \leq \int_a^b |u(t)|^2 dt \int_a^b |v(t)|^2 dt$   
que es verifica amb el signe d'igualtat si  $u(t) = k v(t)$ .

- b) Quant valdrà  $y(t_0)$ , valor màxim de la sortida?
- c) En el supòsit que s'afegeix com a quarta condició la causalitat del sistema, s'hauria d'imposar alguna restricció al senyal  $x(t)$ ? Analitzeu-ho per al cas  $x(t) = e^{-t/\alpha} u(t)$ . Com afectaria la suposició que l'exponencial decreixent és menyspreable a partir de quatre vegades la constant de temps?
- d) Apliqueu el resultat obtingut per als senyals de la figura I.46, essent el màxim de la sortida a  $t_0=4s$ .

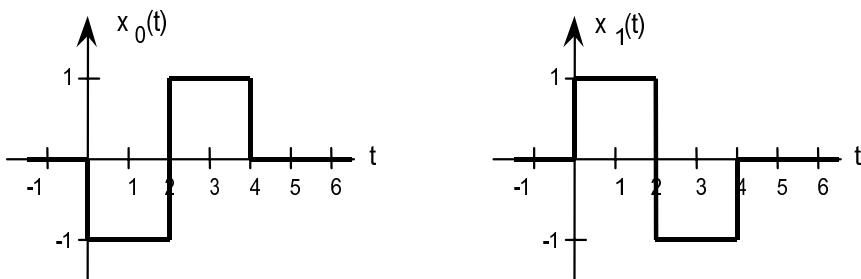


Fig. I.46)

Dibuixeu les sortides  $y_{km}(t)$  per a tots els casos possibles, és a dir, la sortida del sistema caracteritzat per  $h_m(t)$ , quan s'aplica l'entrada  $x_k(t)$  amb  $k,m=0,1$

- e) Quina és l'energia dels senyals d'entrada? Quin és el valor màxim de la sortida?

## P2.5 Simulació de transmissió digital

Una aplicació clàssica del filtre adaptat es troba en els receptors dels sistemes de transmissió digital. Aquest filtre permet disminuir els errors dels símbols detectats en una transmissió sorollosa.

Amb aquest programa se simula el sistema de transmissió digital conegut com a banda base (sense translació de freqüència). Es poden seleccionar diferents fonts, diferents formes d'ona, variar la quantitat de soroll que introduceix el sistema, analitzar l'ús de filtres receptors i estudiar el comportament global del sistema.

L'objectiu és la transmissió sense errors d'una seqüència de bits. Aquests bits poden ser d'una font de naturalesa binària (per exemple, la comunicació entre ordinadors), i també poden provenir d'una font que genera una seqüència de símbols d'un alfabet finit (per exemple, un conjunt de caràcters), que mitjançant un procés de codificació es binaritzaran (el cas del codi ASCII per a l'exemple dels caràcters). Així mateix poden tenir el seu origen en una font analògica (per exemple, el senyal de veu). Llavors el procés per generar la seqüència binària passa per un mostratge del senyal temporal (discretització de la variable), una quantificació de l'amplitud (discretització de la funció a un conjunt finit de valors) i la codificació d'aquests valors en binari.

Encara que es parli de transmissió digital, el que es transmet pel canal és un senyal analògic (senyal temporal). Per construir-lo, el símbol 0 s'associa a una forma d'ona  $x_0(t)$ , i l'1, a una altra  $x_1(t)$ . Per tant, la seqüència de bits es transforma en la concatenació, cada  $T$  segons, de  $x_i(t)$ , on  $i=0$  o 1, segons sigui la seqüència binària. En la pràctica podrà escollir entre tres tipus de senyals:

Unipolar NRZ (sense retorn a zero):  $x_0(t)=0, x_1(t)=k \Pi(t/T)$

Bipolar NRZ (sense retorn a zero):  $x_0(t)=-A \Pi(t/T), x_1(t)=A \Pi(t/T)$

Manchester:  $x_0(t)$  i  $x_1(t)$ , definits a la figura I.46

1. Seleccioneu el *senyal* Unipolar NRZ amb les tres primeres opcions de font. Identifiqueu el valor de  $k$  i en el tercer cas, el de  $T$ . Identifiqueu també les amplituds per al cas Bipolar NRZ i per al cas Manchester. Identifiqueu la duració de cada símbol per a la tercera opció de la font.
2. La potència del transmissor és fix. Relacioneu aquesta condició amb els paràmetres obtinguts a l'apartat anterior.

A partir del senyal rebut el receptor ha de recuperar la informació binària. Per això, cada  $T$  segons s'ha de decidir si el senyal present és  $x_0(t)$  o  $x_1(t)$ . Com que els tipus de senyal proposats són bàsicament polsos que es diferencien en la seva amplitud, si prenem un valor a l'interval  $T$ , es decidirà un 0 o un 1 segons si aquest valor està per sota o per sobre del llindar de decisió.

3. Identifiqueu el llindar de decisió i l'instant en què es pren per als tres tipus de senyal.

El senyal en el receptor serà una versió degradada del que s'ha transmès.

4. Seleccioneu com a font el missatge de 25 bits i el senyal unipolar. Augmenteu el soroll fins a tenir errors en la detecció. Amb la mateixa situació canvieu el senyal. Justifiqueu el fet que el nombre d'errors disminueixi.

Per reduir el soroll es pot introduir algun tipus de filtre. Com s'ha vist en el problema I.43 i a P2.4, el filtre allisador és un bon candidat per reduir soroll. Primer s'analitzarà, però, l'efecte del filtre sobre els senyals  $x_0(t)$  i  $x_1(t)$ .

5. Seleccioneu la seqüència de 5 bits i canal ideal (degradació al nivell més baix possible). Introduïu el filtre allisador curt. Per als senyals unipolar i bipolar, justifiqueu la forma d'ona del senyal filtrat. Quina és la duració del filtre allisador curt?

6. Compareu els instants de mostratge amb filtre i sense.

7. Repetiu els dos apartats anteriors per a la segona opció del filtre (allisador).

Ara s'ha d'analitzar el comportament dels filtres enfront del soroll.

8. Seleccioneu la seqüència de 25 bits amb senyal unipolar i sense filtre. Introduïu soroll en el sistema fins a tenir errors. Analitzeu ara la millora obtinguda amb els filtres allisadors.

Si recordem la interpretació del filtre adaptat que hem vist en el problema anterior, es maximitza la sortida en un instant determinat. Per tant, si el senyal rebut es filtra amb un filtre adaptat a  $x_0(t)$  i en paral·lel es filtra amb un altre adaptat a  $x_1(t)$ , el primer donarà el màxim possible quan es rebi  $x_0(t)$ , mentre que el segon donarà el màxim possible quan es presenti  $x_1(t)$ . Llavors, simplement cada  $T$  segons s'ha de fer una comparació entre els valors de la sortida de cada filtre i decidir el màxim. Aquest sistema és l'òptim des del punt de vista de la reducció de soroll. A més, també és vàlid per al cas en què  $x_0(t)$  i  $x_1(t)$  fossin dos senyals molt diferents i no només per a la polaritat o per a l'amplitud.

9. Seleccioneu la seqüència de 5 bits, el senyal Manchester i el canal ideal (degradació al nivell més baix possible). Introduïu el filtre adaptat. Justifiqueu la forma d'ona del senyal filtrat. Quins són els instants de mostratge?

En el cas en què  $x_0(t)$  i  $x_1(t)$  difereixen només en la polaritat, la resposta dels dos filtres adaptats serà d'igual magnitud i de signe contrari. Per tant, n'hi ha prou amb la implementació d'un sol filtre i decidir segons sigui el resultat positiu o negatiu.

10. Constateu, per a qualsevol dels tres tipus de senyal, l'affirmació anterior seleccionant les opcions *filtre adaptat* i *filtre adaptat 1 filtre*.

11. Seleccioneu el missatge de 80 bits, el senyal Manchester i la màxima degradació. Compareu els resultats que proporcionen cadascuna de les opcions de filtre i justifiqueu-los.

12. Seleccioneu la font de 5 bits, el canal ideal i el senyal bipolar. Compareu el senyal de sortida del filtre allisador i del filtre adaptat (1 filtre). Justifiqueu el resultat.

Finalment, si la font no era binària a través d'un procés de descodificació invers al realitzat en l'etapa emissora, es recuperarà la informació desitjada.

En el programa es poden visualitzar els diferents passos del sistema sempre que el nombre de bits sigui de 80 com a màxim. Si no, els gràfics són massa densos per poder-ne extreure informació.

13. Simuleu la transmissió d'un text (selecció de la font *text*). Escriviu-hi un text i proveu el comportament del sistema per a diferents escenaris (tipus de senyal, canal i filtre). Analitzeu la diferència entre la probabilitat d'error dels bits i dels símbols (caràcters del text). Recordeu que podreu visualitzar els senyals si el nombre de bits és com a màxim de 80, la qual cosa significa un màxim de 10 caràcters.
14. Seleccioneu la font *veu*. El missatge binari és molt llarg (l'execució és més lenta). En aquest cas, veureu el senyal original, el senyal que s'obté i el senyal que s'obtindria amb una transmissió directa del senyal de *veu* sobre el canal seleccionat, mantenint la mateixa relació potència del senyal/potència del soroll que en el cas digital. Compareu els resultats obtinguts en utilitzar o no transmissió digital en el cas d'una font analògica com és el senyal de *veu*. Segons com, en observar el resultat de la transmissió digital amb aquest tipus de font es pot observar soroll de tipus impulsiu (pics estrets). A què és degut?
- I.47) Per obtenir la posició dels blancs (*targets*), el sistema radar emet un senyal i calcula el temps que triguen a arribar els diferents ecos resultants quan el senyal rebota amb els blancs.

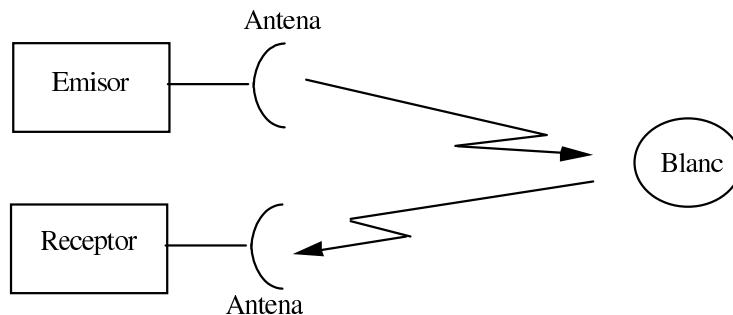


Fig. I.47.a)

Suposem que el senyal  $y(t)$  que s'ha enviat pel radar es pot modelar per l'esquema que hi ha representat a la figura I.47b):

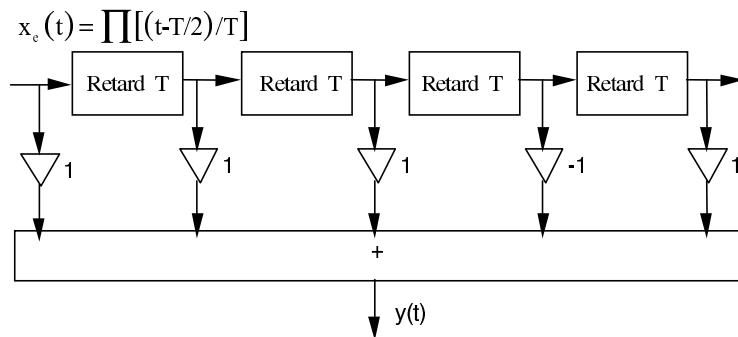


Fig. I.47.b)

- a) Determineu la resposta impulsional  $h_e(t)$  de l'emissor i dibuixeu el senyal enviat  $y(t)$ .
- b) El receptor està format per un amplificador, que iguala l'energia del senyal d'entrada a la del senyal enviat, i un filtre  $h_r(t)$ . Obtingueu un disseny per al filtre de manera que tingui les propietats següents:
- 1)  $h_r(t)$  és real.
  - 2) La durada de la resposta impulsional  $h_r(t)$  és igual a  $5T$ .
  - 3)  $|h_r(t)| = 1$  per a  $0 \leq t \leq 5T$ .
  - 4)  $x_r(t) = y(t) * h_r(t)$  tingui un màxim a  $t=5T$ . Ajudeu-vos de la desigualtat de Schwartz:

$$|x_r(t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h_r(t-t') y(t') dt' \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h_r(t-t')|^2 dt' \int_{-\infty}^{\infty} |y(t')|^2 dt'$$

que es compleix amb igualtat si  $h_r(t-t')$  és proporcional a  $y(t')$

Dibuixeu la  $x_r(t)$  resultant.

- c) Quan el sistema estigui funcionant, el senyal a l'entrada de  $h_r(t)$  serà  $y(t-t_O)$ , en què  $t_O$  indica el temps que triga el pols d'anar a blanc i tornar al receptor. Comproveu que el màxim del senyal de sortida del receptor estarà a  $5T+t_O$ , i per això només cal localitzar el màxim absolut del senyal de sortida del receptor per poder trobar  $t_O$ . A quin valor arriba aquest màxim absolut?
- d) Suposem que el receptor del radar rep una interferència  $i(t)$ , que es mostra a I.47)c). Compareu els valors màxims que s'obtenen a la sortida del receptor en els casos en què el senyal d'entrada al receptor és  $y(t)$  o  $i(t)$ . Quin haurà de ser el nivell llindar perquè el receptor detecti únicament l'eco procedent d'un blanc i no el senyal d'interferència?

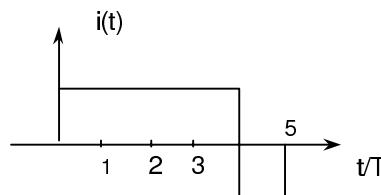


Fig. I.47.c)

**PROBLEMA RESOLT**

Si tenim l'esquema de la figura 1

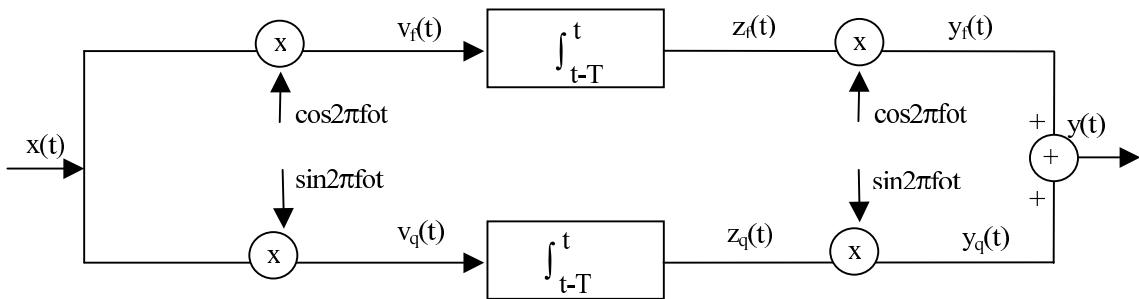


Fig. 1)

Es demana el següent:

- Analitzeu per simulació les propietats que verifica cada branca del sistema de la figura 1, és a dir, la branca superior amb entrada  $x(t)$  i sortida  $y_f(t)$ , i de manera anàloga per a la inferior.
- Feu la mateixa analisi per al sistema global (entrada  $x(t)$ , sortida  $y(t)$ ).
- Quina relació analítica hi ha entre la sortida i l'entrada?
- Obtingueu analíticament i per simulació la sortida del sistema a l'entrada  $x(t)=u(t)$ .
- Obtingueu la resposta impulsional de cada branca i la del sistema global.
- Repetiu l'apartat anterior mitjançant la simulació. Analitzeu l'aproximació que s'obté a la funció delta. Analitzeu la possible equivalència del sistema de la figura 1 amb el de la figura 2.

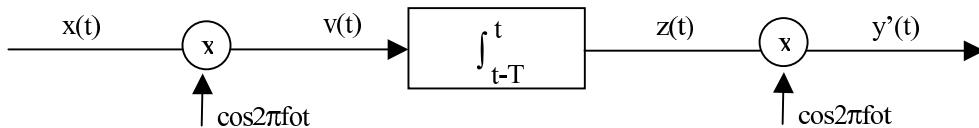


Fig. 2)

- Obtingueu, per mitjà de la convolució, la relació entrada-sortida del sistema de la figura 1. Comproveu que coincideix amb el resultat de l'apartat c.

L'esquema de la figura 1 és la realització amb senyals reals de l'esquema que hi ha a la figura 3. En aquest cas, s'ha considerat un plantejament més general i s'ha substituït l'integrador per un sistema lineal, invariant i estable, de resposta impulsional  $h(t)$  real.

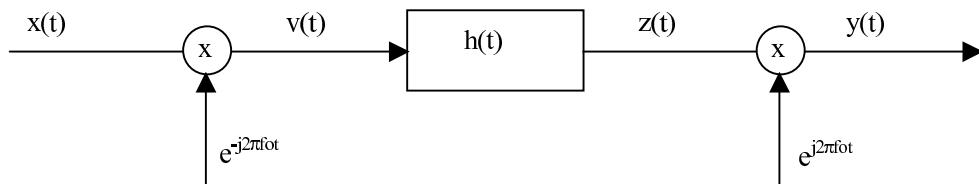


Fig. 3)

- h) Per a aquest cas, respongueu les preguntes següents i justifiqueu la resposta:
- a) És lineal el sistema global?
  - b) És invariant el sistema global?
  - c) En quines condicions el sistema global és causal?
  - d) És estable el sistema global?
- i) Canviarieu alguna resposta de l'apartat anterior si en comptes de multiplicar  $z(t)$  per l'exponencial complexa de freqüència  $f_0$  es multipliqués per una freqüència  $f_1$ ?
- j) Doneu la resposta impulsional del sistema global de la figura 3.

### Resolució de l'exercici

- a) Executem el programa *combinació de sistemes a exercicis complementaris*. Seleccionem diferents senyals d'entrada i en visualitzem la sortida.

Per verificar la linealitat seleccionem com a senyal d'entrada  $x(t)$  la suma del pols rectangular, una sinusoida i l'esglao. Visualitzem la sortida  $y_f(t)=T[\text{pols}+\cos+u]$ . El programari ens permet visualitzar també el resultat de sumar els tres senyals de sortida que s'obtenen per a cadascuna de les tres entrades per separat,  $\sum(y_f's)=T[\text{pols}]+T[\cos]+T[u]$ . Observem que aquest senyal se superposa exactament a  $y_f(t)$ . Per tant, el sistema corresponent a la branca superior verifica, com a mínim amb aquests senyals, la primera hipòtesi de linealitat.

A continuació, seleccionem la mateixa entrada,  $\text{pols}+\cos+u$ , i visualitzem  $y_f(t)$ . Si fem clic amb el ratolí a l'entrada, la podem amplificar o atenuar pel factor que vulguem. Veiem que la sortida continua exactament amb la mateixa amplificació o atenuació de l'entrada, és a dir,  $T[a\text{y}(t)]=aT[\text{x}(t)]$ . Amb això podem dir que la branca superior sembla que verifiqui la propietat de linealitat. Amb aquest procediment no ho podem afirmar amb una certesa total, ja que no podem assegurar que passi el mateix amb qualsevol tipus de senyal.

L'anàlisi que s'ha fet per a la branca superior també es pot aplicar a la branca inferior, i arribaríem a la mateixa conclusió.

Tant amb l'esglao com amb el pols, observem que la sortida, per a cada branca, no s'avança a l'entrada, i això permet suposar la causalitat del sistema.

Així mateix, l'esglao és un senyal d'entrada excel·lent per comprovar l'estabilitat. S'observa que encara que es mantingui un nivell en el senyal d'entrada, la resposta, en qualsevol dels senyals, va cap a zero. De tota manera, després veurem que això no és del tot cert. Però sí que és veritat que la sortida sempre està acotada.

Finalment, falta comprovar la invariància del sistema. Per fer-ho, seleccionem qualsevol dels tres primers senyals d'entrada i amb el ratolí fem clic sobre la gràfica del senyal d'entrada i la desplaçem. Podem observar que tant  $y_f(t)$  com  $y_q(t)$ , a més de seguir el desplaçament de l'entrada varien de forma. Per tant, la sortida de la branca superior i la sortida de la branca inferior depenen no solament de la forma d'ona de l'entrada sinó també del moment en què s'aplica. Per això, podem afirmar amb tota seguretat que els dos sub-sistemes són variants en el temps. Per observar aquest efecte amb l'entrada sinusoidal s'ha de seleccionar una  $f_0$  que no sigui un nombre enter; si no la sortida és sempre nul·la, a causa de l'elecció de la freqüència de la sinusode d'entrada i del paràmetre  $T$ .

- b) En aquest cas, per als senyals seleccionats, i repetint el procés de l'apartat anterior, s'observa que es verifiquen totes les propietats, fins i tot la invariància del sistema.

Una conclusió important a què podem arribar és que la interconnexió de sistemes variants no necessàriament ens porta a un sistema variant.

$$c) \quad y(t) = \cos 2\pi f_0 t \int_{t-T}^t x(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau d\tau + \sin 2\pi f_0 t \int_{t-T}^t x(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau d\tau$$

$$d) \quad y(t) = \cos 2\pi f_0 t \int_{t-T}^t u(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau d\tau + \sin 2\pi f_0 t \int_{t-T}^t u(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau d\tau$$

per a  $t < 0$   $y(t) = 0$  ja que  $u(\tau)$  és zero en l'interval d'integració  $t-T, t$

$$\begin{aligned} \text{per a } 0 < t < T \quad y(t) &= \cos 2\pi f_0 t \int_0^t \cos 2\pi f_0 \tau d\tau + \sin 2\pi f_0 t \int_0^t \sin 2\pi f_0 \tau d\tau = \\ &= \cos 2\pi f_0 t \frac{\sin 2\pi f_0 \tau}{2\pi f_0} \Big|_0^t - \sin 2\pi f_0 t \frac{\cos 2\pi f_0 \tau}{2\pi f_0} \Big|_0^t = \\ &= \cos 2\pi f_0 t \frac{\sin 2\pi f_0 t}{2\pi f_0} - \sin 2\pi f_0 t \left( \frac{\cos 2\pi f_0 t - 1}{2\pi f_0} \right) = \frac{1}{2\pi f_0} \sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{per a } t > T \quad y(t) &= \cos 2\pi f_0 t \int_{t-T}^t \cos 2\pi f_0 \tau d\tau + \sin 2\pi f_0 t \int_{t-T}^t \sin 2\pi f_0 \tau d\tau = \\ &= \cos 2\pi f_0 t \frac{\sin 2\pi f_0 \tau}{2\pi f_0} \Big|_{t-T}^t - \sin 2\pi f_0 t \frac{\cos 2\pi f_0 \tau}{2\pi f_0} \Big|_{t-T}^t = \\ &= \frac{\cos 2\pi f_0 t}{2\pi f_0} [\sin 2\pi f_0 t - \sin 2\pi f_0 (t-T)] - \frac{\sin 2\pi f_0 t}{2\pi f_0} [\cos 2\pi f_0 t - \cos 2\pi f_0 (t-T)] = \\ &= \frac{1}{2\pi f_0} [\sin 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0 (t-T) - \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 (t-T)] = \\ &= \frac{1}{2\pi f_0} \sin [2\pi f_0 t - 2\pi f_0 (t-T)] = \frac{\sin 2\pi f_0 T}{2\pi f_0} \end{aligned}$$

$$\text{en forma tancada: } y(t) = \frac{1}{2\pi f_0} \sin 2\pi f_0 t \prod \left( \frac{t-T/2}{T} \right) + \frac{\sin 2\pi f_0 T}{2\pi f_0} u(t-T)$$

Per simulació: Seleccionem l'entrada esglao i en visualitzar  $y(t)$  apareix la funció  $0,0318\sin(2\pi 5t)$  entre 0 i 1 i zero per a la resta de valors de  $t$ . Efectivament, coincideix amb l'expressió analítica que hem trobat, ja que en aquesta simulació  $T=1$ . Si variem el valor de  $f_0$ , per exemple duplicant-lo, veiem que augmenta en la mateixa proporció la freqüència de la sinusoide entre 0 i  $T$ , i disminueix igualment l'amplitud. El fet que per a  $t>T$  el senyal de sortida valgui zero és enganyós. De fet, dóna constant, el que passa és que aquesta constant depèn de la relació entre  $f_0$  i  $T$ . És just l'últim valor que té la sinusoide en l'interval anterior ( $t=T$ ). Òbviament, si ens cau un nombre exacte de semiperíodes en l'interval  $T$  el senyal  $t=T$  valdrà zero i, per tant, també serà 0 per a  $t>T$ .

- e) Si fem  $x(t)=\delta(t)$  la resposta sinusoïdal de la branca superior serà:

$$v_f(t)=\delta(t)\cos 2\pi f_0 t=\delta(t) \Rightarrow z_f(t)=\int_{t-T}^t \delta(\tau) d\tau=\prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \Rightarrow y_f(t)=\prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \cos 2\pi f_0 t$$

mentre que per a la branca inferior serà:  $v_q(t)=\delta(t)\sin 2\pi f_0 t=0 \Rightarrow y_q(t)=0$

La resposta impulsional global serà la suma de les dues anteriors. Per tant:

$$y(t)=T\{\delta(t)\}=y_f(t)+0=\prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \cos 2\pi f_0 t$$

- f) Seleccionem com a senyal d'entrada la retolada com a “aprox.delta”. És el pols rectangular. Primer és interessant comparar la sortida per a aquesta entrada amb la que s'obté seleccionant el senyal pols. La diferència entre les dues radica en la durada del pols, és a dir, en un escalat temporal. Però si comparem la sortida per a cada pols observem que la relació que hi ha entre les dues entrades no es manté entre les dues sortides. Això confirma que un escalat temporal a l'entrada d'un sistema, encara que sigui lineal i invariant, no implica el mateix escalat a la sortida

Per obtenir la resposta impulsional fem clic amb el ratolí sobre el senyal d'entrada. Disminuïm la durada del pols i, alhora, augmentem l'amplitud amb l'objectiu de mantenir l'àrea a 1. A mesura que la durada es fa més petita, cada sortida s'assembla més a les expressions analítiques calculades a l'apartat anterior.

- g) Si calculem la resposta impulsional del sistema de la figura 2 obtenim:

$$v(t)=\delta(t)\cos 2\pi f_0 t=\delta(t) \Rightarrow z(t)=\int_{t-T}^t \delta(\tau) d\tau=\prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \Rightarrow y'(t)=\prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \cos 2\pi f_0 t$$

Aquest resultat coincideix amb la resposta impulsional del sistema global de la figura 1. Per tant, podríem pensar que els dos sistemes són equivalents. Però observem que el sistema de la figura 2 coincideix amb la branca superior del sistema de la figura 1. És a dir:

$$y'(t)=y_f(t) \neq y(t)$$

Les respostes impulsinals coincideixen, però en general la resposta no coincideix a qualsevol senyal.

L'explicació la dóna una altra vegada el fet que el sistema de la figura 2 és variant i, per tant, la seva resposta impulsional no el caracteritza.

- h) Com que globalment el sistema de la figura 1 és lineal i invariant, es pot trobar la sortida per convolució de l'entrada amb la resposta impulsional:

$$y(t) = x(t) * \prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \cos 2\pi f_o t = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \Pi\left(\frac{t-\tau-T/2}{T}\right) \cos 2\pi f_o (t-\tau) d\tau =$$

com  $\Pi\left(\frac{t-\tau-T/2}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{-1}{2} < \frac{t-\tau-T/2}{T} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altres casos} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } t-T < \tau < t \\ \text{altres casos} \end{cases}$

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) \cos 2\pi f_o (t-\tau) d\tau = \int_{t-T}^t x(\tau) [\cos 2\pi f_o t \cos 2\pi f_o \tau + \sin 2\pi f_o t \sin 2\pi f_o \tau] d\tau =$$

$$y(t) = \cos 2\pi f_o t \int_{t-T}^t x(\tau) \cos 2\pi f_o \tau d\tau + \sin 2\pi f_o t \int_{t-T}^t x(\tau) \sin 2\pi f_o \tau d\tau$$

que coincideix amb l'expressió obtinguda a l'apartat c).

- i) Linealitat:

$$y(t) = T\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = e^{j2\pi f_o t} \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 x_1(\tau) + a_2 x_2(\tau)] e^{-j2\pi f_o \tau} h(t-\tau) d\tau =$$

$$= a_1 e^{j2\pi f_o t} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j2\pi f_o \tau} h(t-\tau) d\tau + a_2 e^{j2\pi f_o t} \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) e^{-j2\pi f_o \tau} h(t-\tau) d\tau$$

$$= a_1 T\{x_1(t)\} + a_2 T\{x_2(t)\}$$

Per tant, el sistema és lineal.

Invariància:

$$T\{x(t-t_0)\} = e^{j2\pi f_o t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-t_0) e^{-j2\pi f_o \tau} h(t-\tau) d\tau = \left\{ \begin{array}{l} \text{canvi} \\ \tau = \alpha + t_0 \end{array} \right\} =$$

$$= e^{j2\pi f_o t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f_o (\alpha+t_0)} h(t-\alpha-t_0) d\alpha$$

$$= e^{j2\pi f_o (t-t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f_o \alpha} h(t-t_0-\alpha) d\alpha$$

aquesta última integral és  $z(t-t_0) = v(t) * h(t-t_0)$ .

Per tant, és invariant, ja que:

$$T\{x(t-t_0)\} = e^{j2\pi f_o (t-t_0)} z(t-t_0) = y(t-t_0) \quad \text{on} \quad y(t) = T\{x(t)\}$$

Causalitat:

El senyal  $v$  a l'instant  $t$  depèn exclusivament de  $x$  en el mateix instant. Podríem dir el mateix de  $y(t)$  respecte a  $z(t)$ . Per tant, l'únic element en què poden intervenir valors futurs és en el sistema lineal  $h(t)$ . I podem concloure que si aquest sistema és causal els sistema global serà causal.

Estabilitat:

Sigui  $x(t)$  acotada  $\rightarrow |x(t)| < k$

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} h(t-\tau) d\tau \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} h(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} h(t-\tau)| d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} k |h(t-\tau)| d\tau < k_1 \end{aligned}$$

ja que el sistema  $h(t)$  és estable. Per tant, el sistema global és estable.

Ni la linealitat, ni la causalitat ni l'estabilitat depenen del valor de  $f_0$ . Per tant, no es veuran afectades pel canvi de  $f_0$  a  $f_1$ . Però això, pot afectar la invariància:

$$y(t) = T\{x(t)\} = e^{j2\pi f_1 t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} h(t-\tau) d\tau \Rightarrow y(t-t_0) = e^{j2\pi f_1 (t-t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} h(t-t_0-\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} T\{x(t-t_0)\} &= e^{j2\pi f_1 t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-t_0) e^{-j2\pi f_0 \tau} h(t-\tau) d\tau = \left\{ \begin{array}{l} \text{canvi} \\ \tau = \alpha + t_0 \end{array} \right\} = \\ &= e^{j2\pi f_1 t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f_0 (\alpha+t_0)} h(t-\alpha-t_0) d\alpha = e^{j2\pi (f_1 t - f_0 t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f_0 \alpha} h(t-t_0-\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

$$\text{com } f_1(t-t_0) \neq f_1 t - f_0 t_0 = f_1(t - \frac{f_0}{f_1} t_0) \quad \Rightarrow \quad y(t-t_0) \neq T\{x(t-t_0)\}$$

Per tant, amb el canvi de  $f_0$  per  $f_1$  el sistema seria variant.

- j) Si  $x(t) = \delta(t) \Rightarrow v(t) = \delta(t) e^{-j2\pi f_0 t} = \delta(t) \Rightarrow z(t) = h(t) * \delta(t) = h(t) \Rightarrow y(t) = h(t) e^{j2\pi f_0 t}$

Si comparem aquesta resposta impulsional amb la que hem obtingut a l'apartat e, s'observa que l'esquema de la figura 1 només és la realització real de l'esquema de la figura 3, ja que els dos són sistemes LI, i la resposta impulsional de l'esquema 1 és la part real de la resposta impulsional de l'esquema 3.

**SOLUCIONS ALS PROBLEMES DEL TEMA I**

- I.5) a)  $T_Z = 6$ ,  
 b)  $T_Z = 32,9$ ,  
 c) No periòdica

I.6)

Propietat	Sistema				
	$y(t) = kx(t)$	$y(t) = x^2(t)$	$y(t) = \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau) d\tau$	$y(t) = \sin(x(t))$	$y(t) = t^2x(t)$
Linealitat	Sí	No	Sí	No	Sí
Invariància	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Causalitat	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Estabilitat	Sí	Sí	No	Sí	No
Amb memòria	No	No	Sí	No	No
Invertible	Sí	No	Sí	No	No

- I.7) a)  $T_3[x(t)] = x(at-t_0)$ ,  $T_4[x(t)] = x(a(t-t_0))$

- I.8) a) Lineal, variant.  
 b) Lineal, invariant.

- I.9)  $a=2$ ,  $t_0=0.5$ , reflexió sí

- I.10) Lineal, invariant, no causal, estable.  $T[\delta(t-t_0)] = \prod \left( \frac{t-t_0}{2T} \right)$

- I.11) a) No lineal, invariant, causal, estable  
 b) Lineal, no invariant, no causal, estable  
 c) Lineal, no invariant, no causal, no estable  
 d) Lineal, no invariant, causal, estable  
 e) Lineal, no invariant, no causal, estable  
 f) Lineal, no invariant, causal, no estable

- I.12) a) Invertible  $z(t) = y(t+4)$   
 b) No invertible, per ex.  $y(t) = \cos(x(t)+2k\pi)$   
 c) Invertible  $z(t) = d(y(t))/dt$   
 d) Invertible  $z(t) = y(t/2)$

- I.13) a)  $|x(t)-x(t-1)|$   
 b) No lineal  
 c) Invariant.

I.14) a)  $y_2(t)=y_1(t)-y_1(t-2)$        $y_3(t)=y_1(t+1)+y_1(t)$   
 b)  $y(t) = e^{-(t-2)} u(t-2) - e^{-(t-4)} u(t-4) + u(1-t) - u(3-t)$

I.15) a)  $-\Delta\left(\frac{t-1}{2}\right) + 2\Delta\left(\frac{t-3}{2}\right) - \Delta\left(\frac{t-6}{2}\right)$   
 b)  $\Pi(t-0.5)\Pi(t-4.5) + 2(\Pi(t-1.5)\Pi(t-3.5))$

I.16) a)  $x(t) \approx 1.1\Delta\left(\frac{t-T}{T}\right) + 4\Delta\left(\frac{t-2T}{T}\right) + 4.5\Delta\left(\frac{t-3T}{T}\right) + 2.5\Delta\left(\frac{t-4T}{T}\right) + 0.7\Delta\left(\frac{t-5T}{T}\right)$   
 b)  $y(t) \approx 1.1\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) + 2.9\Pi\left(\frac{t-3T/2}{T}\right) + 0.5\Pi\left(\frac{t-5T/2}{T}\right)$   
 $-2\Pi\left(\frac{t-7T/2}{T}\right) - 1.8\Pi\left(\frac{t-9T/2}{T}\right) - 0.7\Pi\left(\frac{t-11T/2}{T}\right)$

I.17) a) Lineal, variant  
 b)  $h_T(t, \tau) = \cos \omega_0 \tau h(t-\tau)$ .  
 c)  $y(t) = \frac{(a-b)e^{-bt} - (a-b)\cos \omega_o t e^{-at} + \omega_o \sin \omega_o t e^{-at}}{(a-b)^2 + \omega_o^2} u(t)$

I.18) a)  $y_1(t) = \frac{1}{t_o} \left( t \prod \left( \frac{t-t_o/2}{t_o} \right) + t_o \prod \left( \frac{t-(T+t_o)/2}{T-t_o} \right) + (t_o + T - t) \prod \left( \frac{t-(T+t_o/2)}{t_o} \right) \right)$   
 $y_2(t) = (1 - e^{-t/t_o}) \prod \left( \frac{t-T/2}{T} \right) + e^{-t/t_o} (e^{T/t_o} - 1) u(t-T)$   
 c)  $h(t) = \prod \left( \frac{t-T/2}{T} \right)$

I.19) a)  $y(t) = \int_{-\infty}^t (x(t) - x(t-T)) dt$   
 b) Lineal, invariant, causal, estable  
 c)  $h(t) = \prod \left( \frac{t-T/2}{T} \right)$   
 e)  $y(t) = T \Delta \left( \frac{t-T/2}{T} \right)$

I.20) a)  $h(t) = \Pi\left(\frac{t+1.5}{3}\right)$

b) No causal, estable

c)  $y(t) = 0.1(e^{30}-1)e^{10t} u(-t-3) + 0.1(1-e^{10t})\Pi\left(\frac{t+1.5}{3}\right)$

I.21) a) Causal, estable

b) No causal, no estable

c) No causal, estable

d) No causal, estable

e) No causal, estable

I.22) a)  $a(t) = u(t) * h(t)$

b)  $a(\infty) = \int_0^{\infty} h(t)dt$

c)  $y(t) = x(-\infty) a(\infty) + x'(t) * a(t)$

I.23)  $T[\delta(\tau-t)] \neq h(\tau-t)$ .

I.24) a)  $y(t-t_O)$

b)  $y(t-t_O)$

c)  $y(t-2t_O)$

I.25) a) Verdadera

b) Falsa

c) Verdadera

d) Verdadera

e) Verdadera

I.26) S'obté  $\frac{1}{|a|} y(at)$ . No es pot deduir.

I.28)  $t_I+t_3, t_2+t_4$

I.29) a) Imparell

b)  $\frac{1}{|a|} y(at)$

c)  $t > t_I + t_2$

I.30) a) Lineal, Invariant, Causal, Estable

I.31) a) Lineal, Invariant, Causal, Estable

I.32) b)  $y(t) = \frac{e^T}{e^T - 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-nT)} \prod \left( \frac{t-nT-T/2}{T} \right)$

c)  $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h(t-k)$

I.33) a)  $y(t) = \frac{1}{2} e^2 u(t-1) + \frac{1}{2} e^2(t) u(1-t) - e^2 u(t-2-1) + \frac{1}{2} e^2 u(t-5-1) + \frac{1}{2} e^2(t-5) u(5+1-t)$

b)  $y(t) = \frac{1}{3} [1 - e^{-3(t-1)}] u(t-1)$

I.34) a)  $h(t) = \Pi \left( \frac{t+T/2}{T} \right) - \Pi \left( \frac{t-T/2}{T} \right)$

b)  $h_2(t) = \Pi \left( \frac{t-3T/2}{T} \right)$

I.35) a)  $y(t) = T \Lambda \left( \frac{t}{T} \right)$

b)  $h_2(t) = \Pi \left( \frac{t-T/2}{T} \right)$

I.36) a)  $h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)$

b)  $y_I(t) = \Pi \left( \frac{t-2,5}{3} \right) - e^{-(t-1)} u(t-1) + e^{-(t-4)} u(t-4)$

c)  $y(t) = y_I(t) - y_I(t-1)$

I.37) a) Lineal, No Invariant, Causal, Estable

b)  $y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \Pi \left( \frac{t-T/4}{T/2} \right) + \frac{1}{\alpha} (2e^{-\alpha(t-T/2)} - 1 - e^{-\alpha t}) \Pi \left( \frac{t-3T/4}{T/2} \right) + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} (2e^{-\alpha T/2} - 1 - e^{\alpha t}) u(t-T)$

$$\begin{aligned}
 \text{I.38) a) } y(t) &= \begin{cases} \frac{2}{\omega_o} & |t| < \frac{T}{2} - \frac{T_o}{4} \\ \frac{2}{\omega_o} \cos^2 \frac{\omega_o}{2} \left( |t| - \frac{T}{2} + \frac{T_o}{4} \right) & \frac{T}{2} - \frac{T_o}{4} \leq t \leq \frac{T}{2} + \frac{T_o}{4} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} + \frac{T_o}{4} \end{cases} \\
 \text{b) } y(t - \frac{T_o}{4})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{I.39) a) } y(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2T} (e^{t/\alpha} - e^{(t-T)/\alpha}) & t < 0 \\ \frac{1}{2T} (2 - e^{-t/\alpha} - e^{(t-T)/\alpha}) & 0 < t < T \\ \frac{1}{2T} (e^{-(t-T)/\alpha} - e^{-t/\alpha}) & t > T \end{cases} \\
 \text{b) } \frac{1}{|a|} y(at) \\
 \text{c) } y(t-t_0-t_f)
 \end{aligned}$$

$$\text{I.40) } h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \delta(t - nT) \quad \text{Causal i Estable si } |\alpha| < 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{I.41) a) Lineal, Invariant, Causal i Estable si } |\alpha| < 1 \\
 \text{b) } h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \delta(t - nT) \\
 \text{c) } h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n u(t - nT) \quad \text{Si } |\alpha| < 1, \text{ el valor asimptòtic és } \alpha/(1-\alpha)
 \end{aligned}$$

- I.43) a.1) 0      a.2) 0.5      a.3) 0  
 b) Per a un senyal acotat de durada finita val zero  
 c)  $h(t) = \left( \frac{1}{2T} \right) \Pi \left( \frac{t}{2T} \right)$   
 d) No causal, estable  
 e) Si l'entrada és un cosinus, la sortida és un cosinus d'igual freqüència i amplitud i fase diferents. L'amplitud pot ser zero si  $T$  es múltiple del període

- I.44) a)  $T_1/2, T_2/2$   
 b)  $t_d$  és l'instant en què les àrees a  $(-\infty, t_d)$  i  $(t_d, \infty)$  són iguals  
 c) Sèrie:  $(1/2)(T_1+T_2)$  Paral·lel:  $(1/2)(T_2-T_1)$   
 d) En el dos casos  $t_{p,1,2}=0,8T_{1,2}$   
 e)  $t_p=T_1+T_2-(0.8T_1T_2)^{1/2}$   
 f) 
$$h_3(t) = h_1 \left[ a \left( t - \left( \frac{T_1}{2} - \frac{T_1}{2a} \right) \right) \right]$$
  $t_d$  a la posició,  $t_d$  a la durada

I.45) b)  $g_k = \frac{(-h_i)^k}{h_{0^{k+1}}}$   
 d)  $a = -1/2$

- I.46) a) 
$$h(t) = \frac{x(t_0-t)}{\sqrt{E_x}}$$
  $h(t)$  depèn de l'entrada  $x(t)$   
 b)  $\sqrt{E_x E_h}$   
 c)  $x(t)$  ha de tenir una duració finita  
 e)  $E_x=4$   $y(t_0)=2$

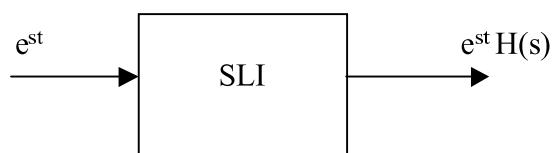
- I.47) a) 
$$y(t) = \prod \left( \frac{t-2,5T}{5T} \right) - 2 \prod \left( \frac{t-3,5T}{T} \right)$$
  
 b)  $h_r(t) = y(5T-t)$   
 d)  $4T < \text{Llindar} < 5T$

## 2 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier constitueix una eina fonamental en l'estudi dels senyals analògics i dels sistemes lineals i invariants amb el temps. La representació en el domini freqüencial aporta una interpretació més àmplia i pràctica, que complementa la representació en el domini temporal. A més, facilita l'obtenció dels senyals de sortida dels sistemes lineals i invariants, gràcies a l'ús del teorema de convolució. Les propietats de la transformada de Fourier ajuden a analitzar i a obtenir transformades, i són la base d'aplicacions tan importants com les modulacions i el mostratge. Aquest tema inclou, en primer lloc, exercicis dedicats a usar i comprendre la transformada de Fourier i les seves propietats. S'estudien les conseqüències de les limitacions de freqüència i temps i s'introduceix el concepte de filtre real. Es defineix la transformada de Fourier per a senyals periòdics i la seva relació amb les sèries de Fourier. S'inclouen aplicacions a les modulacions bàsiques d'amplitud i a la multiplexació de senyals en el domini freqüencial. Finalment, s'inclouen exercicis la base dels quals és el teorema Nyquist, que estableix els principis per al mostratge i recuperació de senyals analògics.

### Autovalors i autofuncions d'un sistema lineal i invariant

S'anomenen *autofuncions* d'un sistema al conjunt de senyals que donen com a sortida una versió escalada de l'entrada. Els valors dels escalars que multipliquen aquests senyals s'anomenen *autovalors* del sistema. En el cas dels sistemes lineals i invariants, les exponencials complexes són les autofuncions del sistema i les  $H(s)$ , els autovalors.



Per a  $s$  continu i complex ( $s = \sigma + j2\pi f$ ), la funció  $H(s)$  s'anomena funció de transferència del sistema i és la transformada de Laplace de la resposta impulsional:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Per a  $s$  continu i imaginari, s'obté la resposta freqüencial del sistema i és la transformada de Fourier de la resposta impulsional.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

### Definició de transformada de Fourier

La transformada de Fourier es pot definir per un senyal qualsevol:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

La transformada de Fourier inversa permet recuperar el senyal original:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

### Condicions suficients per a l'existència de la transformada de Fourier

Qualsevol de les dues condicions següents són suficients per a l'existència de la transformada de Fourier.

Condició 1 (Dirichlet):

$x(t)$  és absolutament integrable  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

$x(t)$  té un nombre de màxims i mínims finit en un interval finit.

$x(t)$  té un nombre de discontinuitats finit en un interval finit, on cada discontinuitat és finita.

Condició 2:

$x(t)$  és quadrat integrable  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

Alguns senyals d'interès no compleixen aquestes condicions, malgrat tot, se'n pot obtenir la seva transformada de Fourier.

## Propietats de la transformada de Fourier (TF)

### Linealitat

La transformada de Fourier és lineal, és a dir:

$$\text{Si } x_1(t) \leftrightarrow X_1(f) \text{ i } x_2(t) \leftrightarrow X_2(f) \quad \text{llavors} \quad a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(f) + a_2X_2(f)$$

### Simetries

$$\begin{aligned} x(t) \text{ parell} &\leftrightarrow X(f) \text{ és parell} \\ x(t) \text{ imparell} &\leftrightarrow X(f) \text{ és imparell} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) \text{ és real} &\leftrightarrow X(f) \text{ és hermítica} \\ x(t) \text{ és imaginària} &\leftrightarrow X(f) \text{ és antihermítica} \end{aligned}$$

Els senyals hermítics compleixen la propietat següent:

$$X(f) = X^*(-f)$$

Això implica que el mòdul és parell i la fase imparell o bé que la part real és parell i la part imaginària és imparell.

Els senyals antihermítics compleixen la propietat següent:

$$X(f) = -X^*(-f)$$

En aquest cas, la part real és imparell i la part imaginària és parell.

$$\begin{aligned} x(t) \text{ és real i parell} &\leftrightarrow X(f) \text{ és real i parell} \\ x(t) \text{ és real i imparell} &\leftrightarrow X(f) \text{ és imaginària i imparell} \end{aligned}$$

### Desplaçament temporal

$$\text{Si } x(t) \leftrightarrow X(f) \quad \text{llavors } x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

Un retard només afecta la fase de la transformada de Fourier en un factor de fase lineal.

### Escalat

$$\text{Si } x(t) \leftrightarrow X(f) \quad \text{llavors} \quad x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

### Teorema de la convolució

A partir de la integral de convolució, i com a conseqüència que les exponencials complexes són autofuncions dels sistemes LI, es dedueix el teorema següent.

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow X(f)H(f)$$

## Dualitat

$$\text{Si } x(t) \leftrightarrow X(f) \quad \text{llavors} \quad X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

## Integració

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$$

## Derivació

Derivació en temps:  $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f X(f)$

Derivació en freqüència:  $-j2\pi t x(t) \leftrightarrow \frac{dX(f)}{df}$

## Transformada del producte

$$x(t)h(t) \leftrightarrow X(f) * H(f)$$

## Modulació

Quan un senyal  $x(t)$  es multiplica per un fasor a la freqüència  $f_0$ , la seva transformada de Fourier es desplaça per  $f_0$

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0)$$

## Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f) df$$

Si  $y(t) = x(t)$  llavors  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

### Taula 1 Transformades de Fourier bàsiques

$x(t)$	$X(f)$
$\delta(t)$	1
$A$	$A\delta(f)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$e^{-j2\pi f_0 t}$	$\delta(f + f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2} [e^{j\phi}\delta(f - f_0) + e^{-j\phi}\delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2j} [e^{j\phi}\delta(f - f_0) - e^{-j\phi}\delta(f + f_0)]$
$e^{-at}u(t) \quad (a>0)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at}u(-t) \quad (a>0)$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$e^{-a t } \quad (a>0)$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$
$\Pi(t)$	$\text{sinc}(f)$
$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\text{sinc}(Tf)$
$\Lambda(t)$	$\text{sinc}^2(f)$
$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\text{sinc}^2(Tf)$
$B\text{sinc}(Bt)$	$\Pi\left(\frac{f}{B}\right)$
$\text{sign}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$u(t)$	$\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$
$\frac{1}{\pi t}$	$-j\text{sign}(f)$

---

**PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS**


---

II.1) a) Calculeu la transformada de Fourier de:

a.1)  $A \Delta(t/T)$

a.2)  $A e^{-\alpha t^2} \alpha > 0$  Nota:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$

a.3)  $A e^{-\alpha|t|} \alpha > 0$

a.4) Pols cosinus:  $\prod \left(\frac{2t}{T}\right) \cos \omega_0 t$  on  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

a.5)  $\text{sign}(t)$

b) Què és incorrecte en el raonament següent?

$$\int_{-\infty}^{\infty} x'(t) dt = F[x'(t)]|_{f=0} = j2\pi f X(f)|_{f=0} = 0$$

c) Proveu que  $\frac{1}{\pi t} * \frac{-1}{\pi t} = \delta(t)$

II.2) Calculeu la transformada de Fourier dels senyals següents:

a)  $e^{-3|t|} \sin 2t$

b)  $e^{2+t} u(-t+1)$

c)  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t-kT), \quad |\alpha| < 1$

d)  $\sin t + \cos(2\pi t + \pi/4)$

### P3.1 Transformades

Aquest programa calcula automàticament la transformada de Fourier d'un conjunt de senyals. El menú *Senyal* permet triar un senyal. El menú *Transformada* permet triar l'escala lineal o logarítmica per a representar la transformada de Fourier del senyal triat

1. Represeueu les transformades de les diversos senyals. Comproveu:

- L'amplitud a l'origen i la posició del primer zero de la transformada del pols rectangular i triangular. Relacioneu-lo amb la durada del senyal.
- A partir de la transformada de Fourier del senyal format por dos tons, determineu la freqüència i l'amplitud de cadascun. Tingueu en compte que la TF es fa sobre el segment temporal que es visualitza al gràfic superior.
- Compareu la forma d'ona del soroll i del soroll filtrat passa-baixes. Quines freqüències s'han eliminat (o s'han atenuat considerablement)?

2. Els senyals reals mostrats en el menú s'han filtrat prèviament a 4 kHz. Comproveu les diferències entre el fonema /e/ i el fonema /s/ pel que fa a contingut freqüencial, periodicitat de la vocal i l'aparició consegüent d'harmònics a la transformada. Quina representació és la més adequada per a la TF, l'escala logarítmica o la lineal?
3. Quin senyal s'ha de sentir més agut, el del dofí o el de l'ocell?

II.3) Si sabem que  $y(t)=x(t)*h(t)$ , obtingueu  $x(at)*h(at)$ .

- Feu la demostració en el domini temporal.
- Feu la demostració utilitzant les propietats de la transformada de Fourier.
- Es podria calcular de la mateixa forma l'expressió de  $x(at)*h(bt)$ ? Justifiqueu la resposta.

II.4) Sigui un senyal real  $x(t)$  tal que  $x(t) \leftrightarrow X(f)$

- Calculeu  $y(t)=F^{-1}[\operatorname{Re}(X(f))]$  en funció de  $x(t)$ .
- Calculeu  $y(t)=F^{-1}[\operatorname{Im}(X(f))]$  en funció de  $x(t)$ .

II.5) El sistema que il·lustra la figura està format per dos sistemes lineals inversament idèntics de resposta impulsional  $h_I(t)$ , quatre moduladors (multiplicadors) i un sumador. Aquest sistema és important en aplicacions de comunicacions i procés del senyal. Fixeu-vos que el sistema complet es pot descompondre en dos sistemes en paral·lel i amb sortides  $v(t)$  i  $w(t)$  respectivament, que sumades proporcionen la sortida  $y(t)$ .

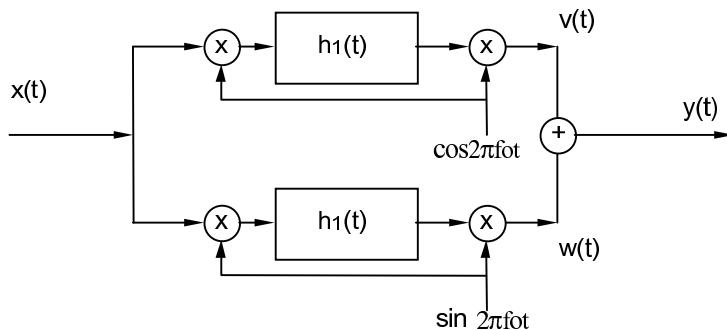


Fig. II.5)

- Mostreu que cadascun dels sistemes en paral·lel que configuren el sistema complet és lineal i invariant.
- Mostreu que el sistema complet és lineal i invariant.
- Trobeu la resposta impulsional  $h(t)$  del sistema complet.
- Trobeu la resposta freqüencial  $H(f)$  del sistema en funció de  $H_I(f)$ .

e) Representeu gràficament, de forma proxima, el mòdul de  $H(f)$ ,  $|H(f)|$ , si  $h_I(t)$  és

e.1)  $h_I(t) = 2f_b \operatorname{sinc}(2f_b t)$ ,

e.2)  $h_I(t) = 2\pi f_b e^{-2\pi f_b t} u(t)$  amb  $f_0 \gg f_b$

II.6) Considereu la interconnexió de quatre sistemes lineals invariants representada a la figura, en què

$$h_I(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\sin 2\pi f c t}{2\pi t} \right] \quad H_2(f) = e^{-j2\pi f/f_c} \quad h_3(t) = \frac{\sin 32\pi f c t}{\pi t} \quad h_4(t) = u(t)$$

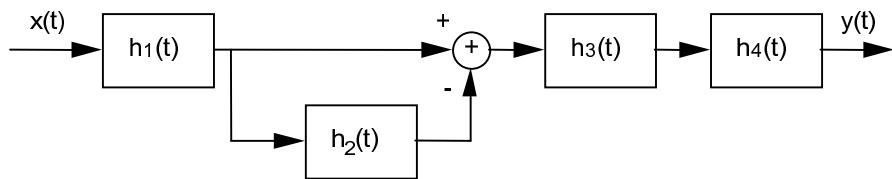


Fig. II.6)

- a) Calculeu i feu un esbós del mòdul  $|H_I(f)|$  i la fase  $\Phi_{H_I}(f)$  de  $H_I(f)$
- b) doneu la resposta impulsional  $h(t)$  del sistema complet.
- c) Obtingueu i dibuixeu el mòdul  $|H(f)|$  i la fase  $\Phi_H(f)$  de  $H(f)$
- d) Obtingueu la sortida  $y(t)$  quan l'entrada és

$$x(t) = 1 + 5\sin 2\pi f_c t + 3\cos \frac{1}{2} 2\pi f_c t$$

II.7) Tenim un senyal  $x(t)$  real i es demana:

- a) Podem assegurar que la transformada de Fourier  $X(f)$  és real?
- b) Justifiqueu que el senyal  $y(t) = \int_0^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$  és complex.
- c) Trobeu les relacions entre  $x(t)$  i la part real i imaginària de  $y(t)$

II.8) Una propietat important de la resposta freqüencial  $H(f)$  d'un sistema lineal i invariant és la coneguda com la suficiència de la part real. Aquesta propietat diu que si la resposta impulsional  $h(t)$  és real i **causal**,  $H(f)$  queda completament determinat per la seva part real. Aquest problema analitza la propietat esmentada i algunes de les seves implicacions.

- a) Demostreu la propietat anterior mitjançant el senyal  $h_p(t)$ , que és la part parell de  $h(t)$ . Quina és la transformada de Fourier de  $h_p(t)$ ? Indiqueu com es pot recuperar  $h(t)$  a partir de  $h_p(t)$ .

- b) Si la part real de  $H(f)$  d'un sistema LI i causal és  $\operatorname{Re}\{H(f)\} = \cos 2\pi f t$ , quina és la resposta impulsional  $h(t)$ ?
- c) Demostreu que  $h(t)$  es pot recuperar igualment a partir de  $h_s(t)$ , la part senar de  $h(t)$ , per qualsevol valor de  $t$  excepte per  $t=0$ . Això vol dir que si  $h(t)$  no té cap singularitat a l'origen,  $H(f)$  queda completament especificat per la seva part imaginària?
- d) Suposant que  $h(t)$  no té cap singularitat a l'origen, demostreu que es pot escriure

$$H(f) = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(f')}{f - f'} df'$$

A partir de l'expressió anterior deduïu la relació existent entre les parts real i imaginaria de  $H(f)$ .

- II.9) Les identitats trigonomètriques acostumen a ser difícils de recordar. Potser la resolució d'aquest exercici us ajudarà. L'objectiu és deduir les identitats dels productes: cosa cosb, cosa sinb, o sina sinb.

Per això, suposeu que feu un desplaçament en freqüència de  $f_0$  Hz (modulació) a la transformada de Fourier d'una sinusoida de freqüència  $f_i$ , és a dir, que forma el senyal  $\cos 2\pi f_i t \cos 2\pi f_0 t$ .

- a) Calculeu i representeu la transformada d'aquest senyal. Descomponiu aquesta transformada com a suma de dues transformades de senyals temporals reals. Obtingueu aquests senyals temporals.
  - b) A partir del resultat obtingut, quina és l'expressió de la identitat trigonomètrica cosa cosb?
  - c) Repetiu la deducció anterior per al cas cosa sinb.
- II.10) Sigui  $X(f)$  la transformada de Fourier del senyal  $x(t)$ , que es mostra a la figura P II.10). Sense avaluar de forma explícita  $X(f)$ :
- a) Calculeu  $X(0)$
  - b) Calculeu  $\int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$
  - c)  $X(f)$  és de fase lineal?

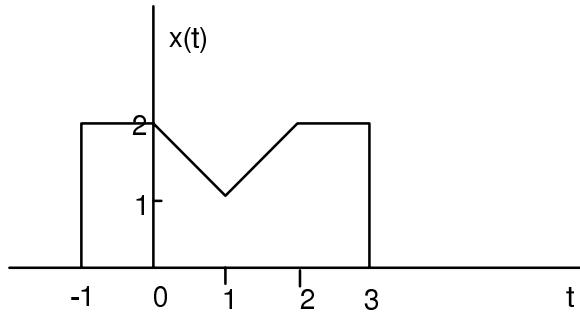


Fig. II.10)

- d) Avalueu  $\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \frac{2\sin 2\pi f}{2\pi f} e^{j4pf} df$
- e) Avalueu  $\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$
- f) Dibuixeu la transformada inversa de Fourier de  $\operatorname{Re}\{X(f)\}$  (Problema II.4)
- II.11) Sigui  $X(f)$  la transformada de Fourier del senyal  $x(t) = e^{-t} u(t)$ . Sense trobar de forma explícita  $X(f)$ ,
- Trobeu els valors numèrics de:
  - $X(0); \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df; \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df; \int_{-\infty}^{\infty} X(f) 2\operatorname{sinc}(2f) e^{j4\pi f} df$
  - Comproveu que  $y(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$  és periòdica.
  - Comproveu que en un període  $0 < t < T$ ,  $y(t) = k e^{-t}$ . Especifiqueu el valor de  $k$  si  $T=1s$ .
- II.12) Donat el senyal  $x(t) = \frac{\sin|3\pi t|}{3t}$
- Calculeu-ne la seva transformada de Fourier  $X(f)$ .
  - Quant val  $X(0)$ ? Com es pot justificar aquest resultat a partir de la simetria de  $x(t)$ ?
  - Justifiqueu si  $X(f)$  presenta alguna simetria.
- II.13) a) Un senyal real  $x(t)$  es pot descompondre com a suma d'un senyal parell  $x_p(t)$  i un senyal imparell  $x_i(t)$ ,  $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$ . Obtingueu l'expressió de  $x_p(t)$  i de  $x_i(t)$  en funció de  $x(t)$ , fent la deducció a través del domini freqüencial.

- b) Donada la relació  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_p^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2(t) dt$ . Es pot escriure una relació idèntica però amb  $X(f)$ ,  $X_p(f)$  i  $X_i(f)$ ?  
 (on  $X_p(f) = \text{Parell}[X(f)]$  i  $X_i(f) = \text{Imparell}[X(f)]$ )

II.14) Calculeu la resposta freqüencial del sistema de la figura II.14 en funció de  $H_1(f)$  i  $H_2(f)$ .

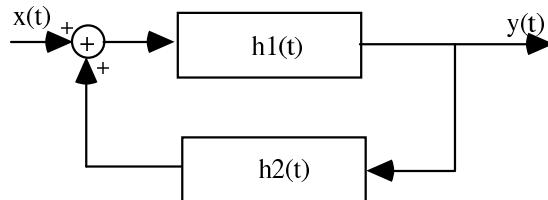


Fig. II.14)

II.15) Resoleu el problema I.45 en el domini freqüencial.

II.16) Sigui  $x(t)$  un senyal real de fase lineal ( $\varphi(f) = -2\pi f_0 f$ ). Demostreu:

- a) que  $x(t)$  és simètrica respecte a  $t_0$ .
- b) que  $x(t)$  té el màxim a  $t_0$ .

II.17) Demostreu que la resposta del filtre  $h(t)$  real a un senyal  $x(t)$  donat per

$$x(t) = A_x \cos(2\pi f_x t + \phi_x)$$

és:

- a)  $y(t) = A_y \cos(2\pi f_y t + \phi_y)$
- b)  $y(t) = B x(t-\tau)$

II.18) Sigui el sistema de la figura II.18a).

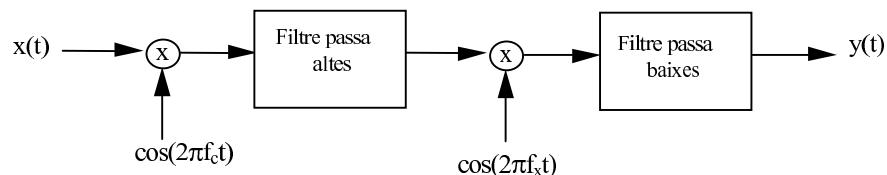


Fig. II.18.a)

Filtre passa-altes:  $H_1(f) = u(f-f_c) + u(-f-f_c)$

Filtre passa-baixes:  $H_2(f) = \prod \left( \frac{f}{2f_c} \right)$

La figura II.18.b) mostra la TF d'un senyal ( $f_b < f_c/2$ ) que s'aplica a l'entrada del sistema anterior. Determineu  $f_x$  si la TF del senyal a la sortida del sistema és el de la figura II.18.c). Per fer-ho, dibuixeu la TF del senyal a la sortida del filtre passa-altes i la TF a l'entrada del filtre passa-baixes i indiqueu les freqüències que defineixen els senyals.

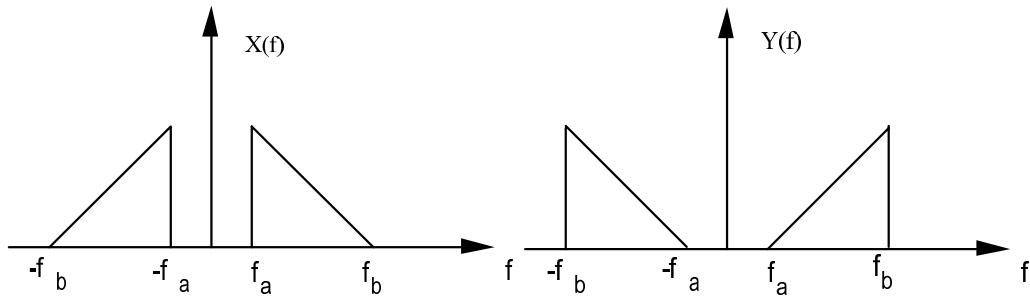


Fig. II.18.b)

Fig. II.18.c)

II.19) La transformada de Fourier del senyal  $x(t)$  té la forma:

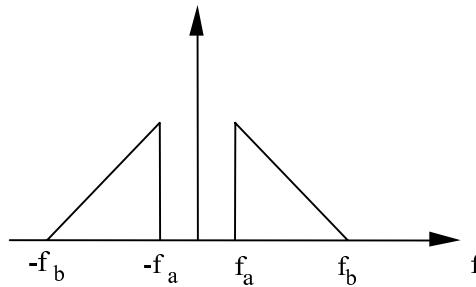


Fig. II.19.a)

Aquest senyal s'aplica al sistema següent:

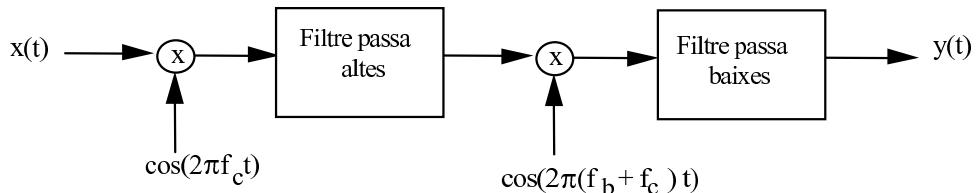
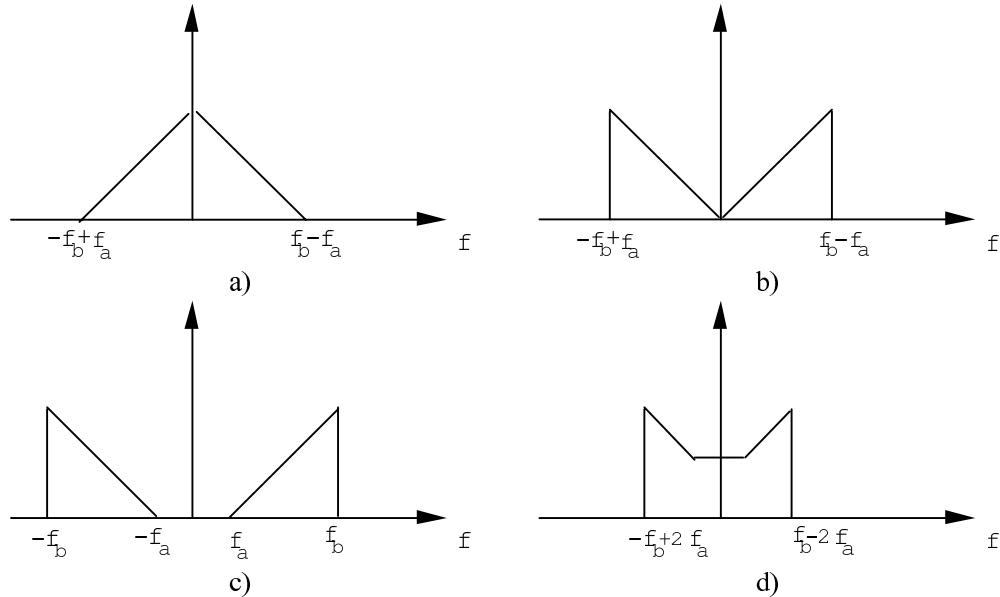


Fig. II.19.b)

Filtre passa altes:  $H_I(f) = u(f-f_c) + u(-f-f_c)$

Filtre passa baixes:  $H_2(f) = \prod\left(\frac{f}{2f_c}\right)$  amb  $f_c > f_b$

Quin dels espectres següents correspon al senyal de sortida?



II.20) Si tenim una família de filtres caracteritzats per l'expressió següent:

$$h_n(t) = \frac{\alpha^{n+1}}{n!} t^n e^{-\alpha} u(t)$$

a) Comproveu que la seva transformada de Fourier és:

$$H_n(f) = \frac{1}{(1 + jf/f_\alpha)^{n+1}} \quad f_\alpha = \alpha/2\pi$$

- b) Dibuixeu aproximadament  $H_n(f)$ . Comproveu que tots els senyals s'han normalitzat perquè  $H_n(0) = 1$  i que són monòtons decreixents. Observeu que l'escala lineal no permet distingir clarament el comportament dels filtres en marges de freqüència alta comparats amb  $f_\alpha$
- c) Representació en decibels. Per representar aquesta família de filtres d'una manera més adequada els representarem en decibels (dB). Es defineix:

$$|H(f)|_{dB} = 10 \log_{10}|H(f)|^2$$

Si apliquem aquesta formulació a la família de filtres, obtenim:

$$|H_n(f)|_{dB} = -10(n+1) \log_{10}(1+(f/f_\alpha)^2)$$

Comproveu les dades següents:

$$\begin{aligned}|H_n(0)|_{dB} &= 0 \\|H_n(f_\alpha)|_{dB} &\approx -3(n+1) \\|H_n(f)|_{dB} &\approx -20(n+1) \log_{10}(f/f_\alpha) \text{ en } f > f_\alpha \\\text{Comportament asimptòtic: } &-6(n+1) \text{ dB/octava}\end{aligned}$$

- d) Normalització dels filtres. Comproveu que perquè tots els filtres tinguin una atenuació de 3 dB a una freqüència  $f_c$  s'ha de complir

$$f_\alpha = f_c (2^{1/(n+1)} - 1)^{-1/2}$$

### P3.2 Filtres

Aquest programa permet estudiar la família de filtres  $h_n(t)$  caracteritzats pel parell de transformades:

$$h_n(t) = \frac{\alpha^{n+1}}{n!} t^n e^{-\alpha t} u(t) \quad H_n(f) = \frac{1}{(1 + jf/f_\alpha)^{n+1}} \quad f_\alpha = \alpha / 2\pi$$

A la gràfica superior hi ha la resposta impulsional que hagueu seleccionat en el menú superior i a la gràfica inferior, la seva resposta freqüencial. L'eix de temps se selecciona automàticament per mostrar les respostes impulsinals. El programa calcula el valor  $\alpha$  adequat perquè la freqüència de tall a 3 dB dels filtres sigui la  $f_c$  especificada amb l'epígraf de *disseny del filtre*. Compareu els diversos filtres en els termes següents:

1. Comproveu que els filtres estan normalitzats perquè valguin 0 dB a l'origen, i que la seva freqüència de tall a 3 dB sigui  $f_c$ .
  2. Comproveu que l'atenuació asymptòtica és més gran a mesura que creix  $n$ .
  3. Per què penseu que l'amplitud màxima de  $h_0(t)$  és més gran que la de  $h_4(t)$ ? Justifiqueu-ho.
  4. Calculeu aproximadament el temps de retard de cada filtre per cada valor del paràmetre  $n$ . Quin filtre retarda més?
  5. Compareu la informació obtinguda a escala lineal amb la d'escala logarítmica. Què significa  $|H(f)|_{dB} = -20$  dB?
  6. Calculeu l'atenuació del filtre  $h_4(t)$  a la freqüència de 1.800 Hz amb  $f_c = 100, 200, 400$  i 800 Hz, respectivament.
- II.21) Un sistema de modulació trasllada el contingut freqüencial d'un senyal a una banda de freqüències determinada per, posteriorment, poder-la recuperar sense pèrdua d'informació. El sistema de modulació en amplitud s'utilitza molt en comunicacions, i una de les seves variants es descriu a continuació. Tenim un missatge  $x(t)$  d'amplada de banda  $B_X$  ( $X(f) = 0$ ,  $|f| > B_X$ ), que es vol modular a la freqüència  $f_I > B_X$ . El senyal modulat té l'expressió:

$$x_M(t) = x(t) \cos(2\pi f_I t)$$

Per recuperar el missatge  $x(t)$ , es proposa el “demodulador” representat a l’esquema següent, on  $h(t)$  és un filtre passa baix ideal.

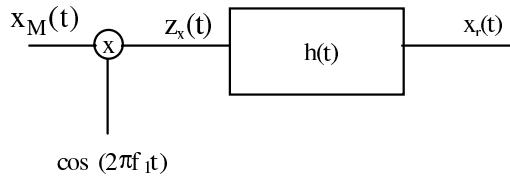


Fig. II.21)

- Trobeu i dibuixe la transformada de Fourier de  $x_M(t)$ .
- Trobeu l’expressió analítica de  $z_x(t)$  i dibuixe-ne la transformada de Fourier.
- Especifiqueu l’amplada de banda i el guany del filtre per poder recuperar  $x(t)$  a la sortida.
- Què passaria si el filtre no fos ideal?

### P3.3 Modulador

Un sistema de modulació trasllada el contingut freqüencial d’un senyal a una banda de freqüències determinada per, posteriorment, recuperar-la sense pèrdua d’informació. El sistema de modulació en amplitud s’utilitza molt en comunicacions, i una de les seves variants es descriu a continuació. Tenim un missatge  $x(t)$  d’amplada de banda  $B_X$  ( $X(f) = 0$ ,  $|f| > B_X$ ), que es vol modular a la freqüència  $f_l \gg B_X$ . El senyal modulat té l’expressió:

$$x_M(t) = x(t) \cos(2\pi f_l t)$$

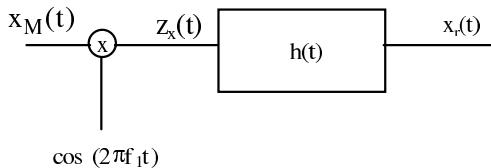


Fig. P.3.3)

El sistema de la figura P.3.3) permet recuperar el missatge  $x(t)$ , en què  $h(t)$  és un filtre passa-baix ideal. Aquest programa permet treballar amb l’esquema demodulador. Els paràmetres són  $B_X = 200$  Hz,  $f_l = 1$  kHz. L’objectiu és dissenyar el filtre  $h(t)$  per obtenir la sortida, suposant que únicament es pot elegir un filtre dels que s’han estudiat a l’apartat anterior. S’ha de trobar la freqüència de tall a 3 dB adequada i l’ordre  $n$ .

- Compareu la transformada de Fourier de  $x(t)$  i  $x_M(t)$ . Per què la TF de  $x_M(t)$  té 5 ratlles espectrals? Justifiqueu-ho.
- Justifiqueu el valor màxim de la transformada de Fourier de  $z_x(t)$ . Quin és l’objectiu del filtre? Quina és la part del senyal no desitjada?

3. Amb  $f_c=200$  Hz, i  $h_0(t)$ , apareix un arrissat al senyal  $x_f(t)$ . A què és degut? Quants dB atenua el filtre a la zona no desitjada?
4. Amb  $f_c=200$  Hz, i  $h_2(t)$ , apareix un arrissat al senyal  $x_f(t)$ . A què és degut? Quants dB atenua el filtre a la zona no desitjada?
5. Amb  $f_c=200$  Hz, i  $h_4(t)$ , el retard és més gran que amb els filtres anteriors. A què és degut? És important per a la qualitat auditiva del senyal?
6. Estimeu el filtre  $h_0(t)$  que us sembli més adequat. Quines conclusions obteniu?
7. Quina atenuació màxima produeix sobre el senyal d'entrada?
8. Quina atenuació produeix sobre el senyal no desitjat?
9. Estimeu el filtre  $h_4(t)$  que us sembli més adequat. Quines conclusions obteniu?
10. Quina atenuació màxima produeix sobre el senyal d'entrada?
11. Quina atenuació produeix sobre el senyal no desitjat?

- II.22) Un avantatge fonamental sobre els sistemes de modulació és que permeten transmetre diversos missatges pel mateix mitjà, sempre que es modulin a les freqüències adequades (multiplexat). Suposem que es vol transmetre, pel mateix canal, els senyals  $x(t)$  i  $y(t)$  d'amplada de banda  $B_x$  i  $B_y$ , respectivament. Per fer-ho, es modulen les freqüències  $f_1$  i  $f_2$ , respectivament, i se sumen. El senyal modulat té l'expressió següent:

$$s(t) = x_M(t) + y_M(t) = x(t) \cos(2\pi f_1 t) + y(t) \cos(2\pi f_2 t)$$

A la figura II.22) es mostra l'esquema d'un demodulador per recuperar els missatges a partir del senyal  $s(t)$ . Suposem que  $f_2 > f_1$ ;

- a) Dibuixeu les transformades de Fourier de tots els senyals que apareguin a l'esquema de la figura II.22). Suposem, per exemple,  $X(f)$  rectangular i  $Y(f)$  triangular per fer el dibuix.
- b) Quines condicions imposarieu sobre  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  i l'amplada de banda  $B_h$  del filtre passabaxes ideal  $h(t)$  per tal què l'esquema de la figura II.22) permeti recuperar  $x(t)$  i  $y(t)$  per separat?

Ara suposem les dades següents:  $B_x = B_y = 200$  Hz,  $f_1 = 1$  kHz,  $f_2 = 3$  kHz. En un problema real el filtre no és ideal. Suposem que s'ha d'utilitzar  $h_0(t)$  o  $h_4(t)$  del problema II.20), i que una distorsió en els senyals  $x(t)$  o  $y(t)$  més petita o igual a 3 dB no és apreciable.

- c) En relació a totes les freqüències no desitjades que passen a través del filtre, quina és la mínima atenuació que imposa cada filtre i a quina freqüència correspon?

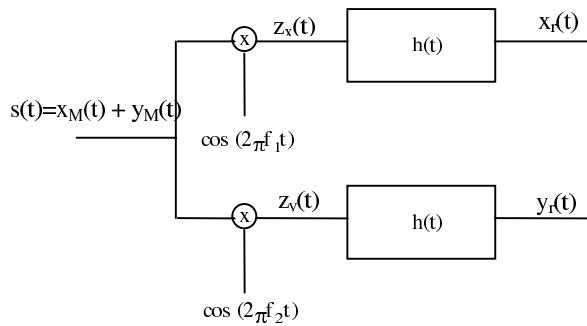


Fig. II.22)

### P3.4 Multiplexor

Un avantatge fonamental dels sistemes de modulació és que permeten transmetre diversos missatges pel mateix mitjà, amb tal de modular-los a les freqüències adequades (multiplexat). Suposem que es vol transmetre, pel mateix canal, els senyals  $x(t)$  i  $y(t)$ , d'amplada de banda  $B_x$  i  $B_y$ , respectivament. Per fer-ho, es modulen a les freqüències  $f_1$  i  $f_2$  respectivament i se sumen. L'entrada al demodulador té l'expressió

$$s_M(t) = x_M(t) + y_M(t) = x(t) \cos(2\pi f_1 t) + y(t) \cos(2\pi f_2 t)$$

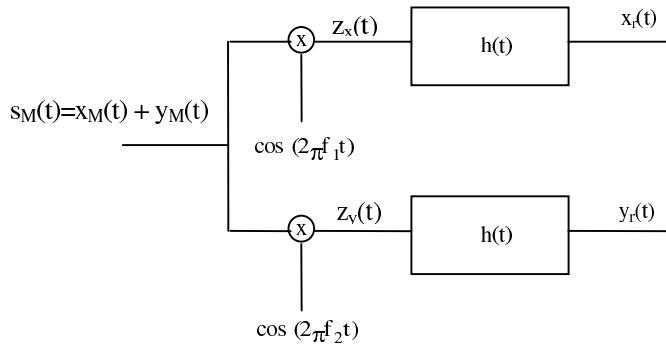


Fig. P.3.4.)

Aquesta pràctica permet treballar amb el sistema demultiplexor. S'ha generat  $s(t)$ , que és un senyal compost pels missatges  $x(t)$  i  $y(t)$ , modulats i multiplexats en freqüència. Si sabem que l'amplada de banda dels missatges és menor o igual que 200 Hz, i les freqüències portadores són  $f_1=1.000$  Hz i  $f_2=3.000$  Hz, l'objectiu és dissenyar el filtre  $h(t)$  per obtenir les sortides. Únicament podeu elegir un filtre entre els que s'han estudiat a l'apartat *Filtres*. Heu de trobar la freqüència de tall a 3 dB adequada i l'ordre  $n$  (el guany és 2). Per fer-ho:

1. Representeu la transformada de Fourier de  $s_M(t)$  i relacioneu-la amb les de  $x(t)$  i  $y(t)$ .
2. Representeu i justifiqueu la forma de la TF de  $z_x(t)$ . Quina part voleu mantenir a la sortida del filtre i què hi voleu eliminar?

3. Representeu i justifiqueu la forma de la TF de  $z_y(t)$ . Per què apareixen components al voltant de 6 kHz i no apareixen a la TF de  $z_x(t)$ ? Quina part voleu mantenir a la sortida del filtre i què voleu eliminar?

4. Estimeu el filtre que us sembli més adequat. Quines conclusions obtenim?

Quina atenuació màxima es produeix sobre cada senyal d'entrada?

Quina atenuació es produeix sobre els senyals no desitjats?

És important el retard?

- II.23) Sigui  $x(t)$  un senyal real pas-banda que es pot formular com  $x(t) = g(t)\cos(2\pi f_0 t)$ , on  $g(t)$  té un espectre nul per  $\forall |f| > B$ . Considerieu que aquest senyal  $x(t)$  és l'entrada a cadascun dels tres sistemes lineals definits per  $H_i(f) = \exp(j\phi_i(f))$  amb  $i=1,2$  ó  $3$ , essent  $\phi_i(f)$  cadascuna de les tres funcions que es mostren a la figura. Es demana:

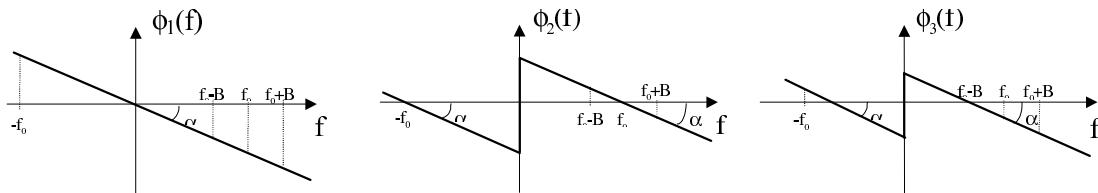


Fig. II.23)

- a) A partir de les propietats de la transformada de Fourier, justifiqueu si algun d'aquests tres sistemes introduceix distorsió al senyal  $x(t)$ , és a dir, que el senyal de sortida no sigui proporcional a  $x(t-T)$  per algun valor de  $T$ .
- b) A partir de les propietats de la transformada de Fourier, justifiqueu si algun d'aquests sistemes pot donar lloc a un senyal de sortida complex.
- c) L'expressió exacta del senyal temporal  $y(t)$  sortida del sistema  $i=1$ .
- d) Repeteixi l'apartat anterior per al sistema  $i=2$ , i comproveu que el sistema provoca un retard  $t_1$  sobre  $g(t)$ . Especifiqueu el valor de  $t_1$ .
- e) Trobi la sortida pel sistema  $i=3$ , comprovant que es provoca un retard diferent sobre  $g(t)$  que sobre el cosinus.

### Limitació temporal: finestres

A la pràctica, quan es calcula la transformada de Fourier d'un senyal s'ha de realitzar en un interval temporal limitat. Per tant, els senyals s'han de truncar o enfinestrar, i aquesta operació té efectes sobre els senyals de duració infinita. Enfinestrar un senyal equival a multiplicar un senyal de duració infinita amb una finestra de duració limitada. Per tant,

$$x_T(t) = x(t)\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

i en freqüència:

$$X_T(f) = X(f) * (T \text{sinc}(Tf))$$

Si el senyal que s'està limitant és un cosinus a la freqüència  $f_o$ , llavors

$$X_T(f) = \frac{T}{2} \text{sinc}(T(f - f_o)) + \frac{T}{2} \text{sinc}(T(f + f_o))$$

Si el senyal que estem limitant és la suma de dos sinusos, un de freqüència  $f_o$  i l'altre de freqüència  $f_l$ , el resultat de limitar temporalment amb una finestra rectangular és:

$$X_T(f) = \frac{T}{2} \text{sinc}(T(f - f_o)) + \frac{T}{2} \text{sinc}(T(f + f_o)) + \frac{T}{2} \text{sinc}(T(f - f_l)) + \frac{T}{2} \text{sinc}(T(f + f_l))$$

Les figures següents mostren les dues transformades així com les transformades de Fourier d'aquests mateixos senyals enfinestrats amb un pols triangular.

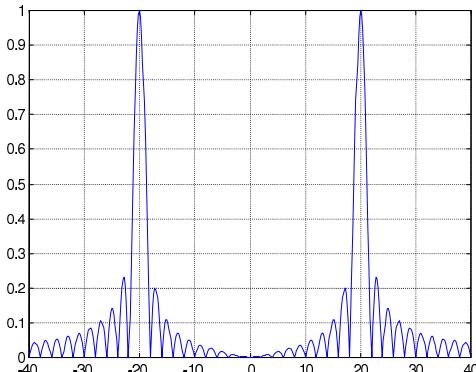


Fig. 1) Mòdul de la TF de  $\cos(2\pi 20t)$  enfinestrat amb  $\Pi(t/T)$ , on  $T=0,5$  s (amplitud de la TF normalitzada a 1)

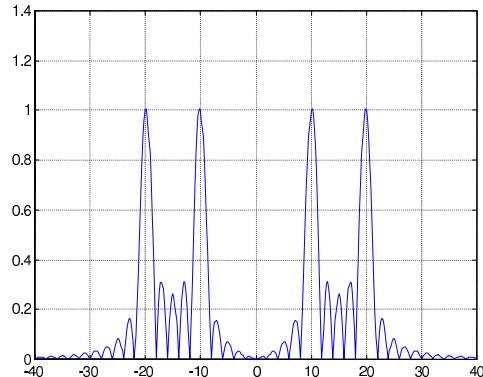


Fig. 2) Mòdul de la TF de  $2\cos(2\pi 10t) + \cos(2\pi 20t)$  enfinestrat amb  $\Pi(t/T)$ , on  $T=0,5$  s (amplitud de la TF normalitzada a 1)

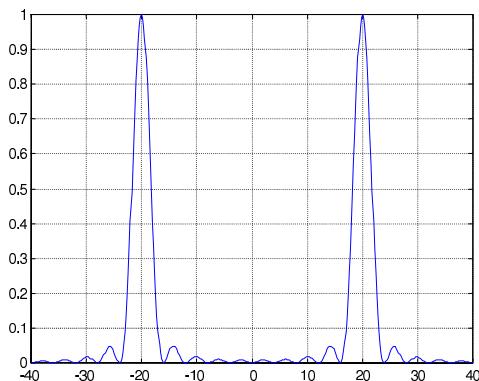


Fig. 3) Mòdul de la TF de  $\cos(2\pi 20t)$  en finestrat amb  $\Lambda\left(\frac{t}{T/2}\right)$ , on  $T=0,5$  s (amplitud de la TF normalitzada a 1)

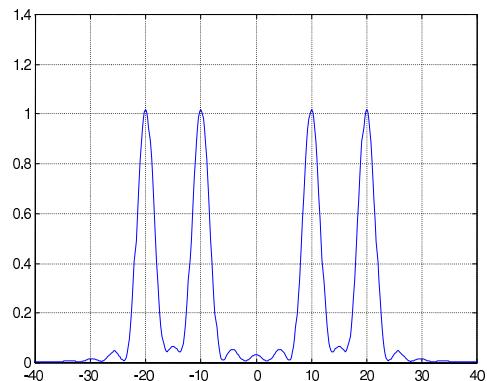


Fig. 4) Mòdul de la TF de  $\cos(2\pi 10t) + \cos(2\pi 20t)$  en finestrat amb  $\Lambda\left(\frac{t}{T/2}\right)$ , on  $T=0,5$  s (amplitud de la TF normalitzada a 1)

A l'hora de triar una finestra temporal s'ha de tenir en compte el compromís oposat que hi ha entre escollir una finestra amb bona resolució freqüencial, que es mesura segons l'amplada de banda del lòbul principal o l'amplada de banda a 3 dB, amb els lòbuls secundaris de poca amplitud, que es mesura amb la relació entre el lòbul principal i el secundari de la finestra.

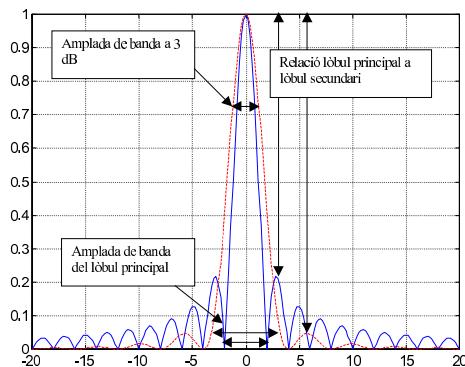


Fig. 5) Superposició dels mòduls de la TF de la finestra rectangular i triangular de duració  $T=0,5$  s (amplitud de la TF normalitzada a 1)

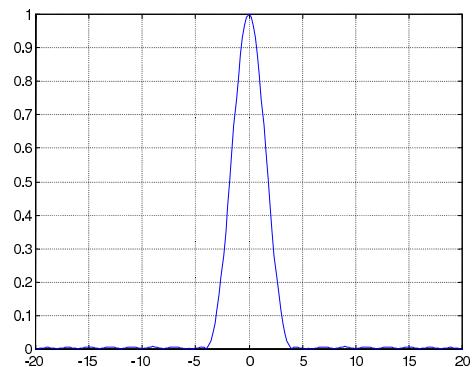


Fig. 6) Mòdul de la TF de la finestra de Hamming de duració  $T=0,5$  s (amplitud de la TF normalitzada a 1)

## Taula 2 Paràmetres de les finestres principals

	<i>Rectangular</i>	<i>Triangular</i>	<i>Hamming</i>
<i>Ampla del lòbul principal</i>	$2/T$	$4/T$	$4/T$
<i>Ampla de banda a 3 dB</i>	$0,85/T$	$1,25/T$	$1,3/T$
<i>Relació lòbul principal a secundari</i>	13 dB	26 dB	43 dB

## Fenomen de Gibbs

El fenomen de Gibbs és l'efecte que es produeix als voltants d'una discontinuïtat quan un senyal es limita en freqüència. Vegeu l'annex 1.

## Comportament asimptòtic de la transformada de Fourier

S'estudia el ritme de caiguda de la transformada de Fourier per valors grans de la freqüència. Es dedueix el següent:

Si  $x(t)$  i les seves primeres  $(n-1)$  derivades són continues, tal que

$$\frac{d^n}{dt^n} [x(t)]$$

és la primera derivada discontinua de  $x(t)$ , llavors

$$\lim_{f \rightarrow \infty} X(f) = \frac{k}{f^{n+1}}$$

Vegeu-ne la demostració a l'annex 2.

---

**PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS**


---

- II.24) Per millorar les prestacions d'un senyal de radar en soroll, s'envien diversos polsos seqüencialment i el senyal que torna el blanc es filtra amb un sistema com el que es mostra a la figura II.24.a), en què  $T \gg \tau$ . En aquest problema es mostra la millora que es pot esperar en funció del nombre de polsos transmesos i tornats pel blanc.

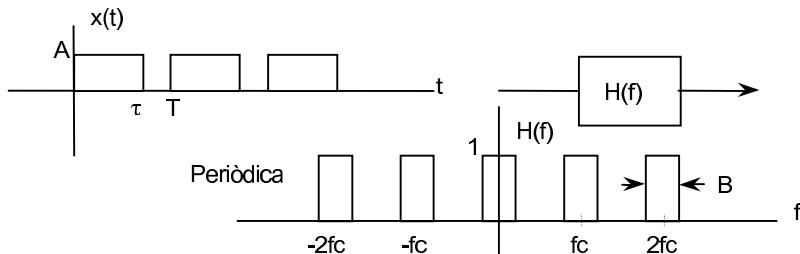


Fig. II.24.a)

- a) Suposem que, en primer lloc, es transmet un únic pols, i es filtra amb un filtrat passa-baixes ideal de zero a zero del lòbul principal de la transformada de Fourier del senyal. Quina fracció aproximada de l'energia del senyal passa pel filtrat? Podeu fer servir el gràfic següent

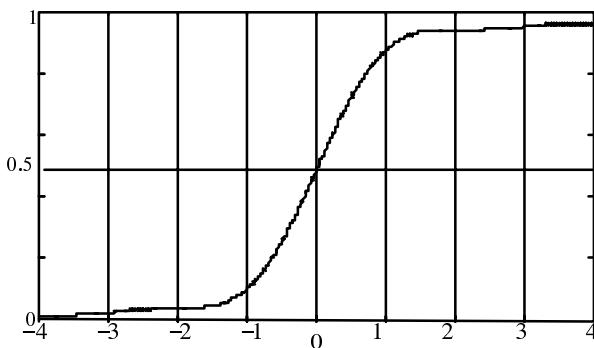


Fig. II.24.b). Gràfic del senyal  $y(t) = \int_{-\infty}^t \text{sinc}^2(\alpha) d\alpha$

- b) Si es transmet una freqüència de dos polsos separats  $T$  segons, dibuixeu  $|X(f)|^2$  i discutiu com es podria dissenyar el filtrat  $H(f)$  de la figura II.24) a) perquè passin només els pics de  $|X(f)|^2$  i, per tant, la major part de l'energia del senyal transmès, i s'elimini parcialment el soroll de fons que se suposa d'energia uniforme a totes les freqüències.
- c) Supposeu un tren de  $N$  polsos d'amplada  $\tau$ , cada un separat  $T$  segons. Calculeu  $X(f)$ . Dibuixeu  $|X(f)|^2$  per a  $N=4$  i discutiu com a idea de filtrat presentada a l'apartat b) sembla que doni més bones prestacions a mesura que  $N$  creix.

II.25) En algunes aplicacions de comunicacions digitals és convenient, per facilitar-ne la seva detecció, acumular l'energia del senyal rebut en un instant determinat. Per maximizar el valor d'un senyal en un instant determinat, es dissenyen filtres que anulen, o fan lineal (equalització), la fase del senyal de sortida. En aquest exercici es pretén comprovar com l'equalització de la fase produeix la maximització esmentada.

- Sigui  $y(t)$  un senyal real de transformada de Fourier  $Y(f)$  que és de fase cero:  $Y(f)=|Y(f)| \exp(j\phi_y(f))$  amb  $\phi_y(f)=0$ . Demostreu que  $y(t)$  té un màxim absolut a l'origen.
- Sigui  $x(t)$  un senyal real d'energia  $E_x$ , que s'aplica a un sistema LI de resposta impulsional  $h(t)$ . Quina condició ha de verificar la fase de la transformada de Fourier de  $h(t)$  per tal que la seva sortida sigui màxima a l'origen?
- Calculeu el filtre  $H(f)$  tal que la seva energia  $E_h=E_x$ , i que fa que  $y(0)=E_x$ . Ajudeu-vos de la desigualtat de Schwartz.

$$\left| \int X(f)H(f)df \right|^2 \leq \int |X(f)|^2 df \int |H(f)|^2 df$$

que es verifica amb igualtat si  $H(f)=k X^*(f)$ . Verifica aquest filtre la condició de l'apartat anterior?

- Relacioneu  $h(t)$  amb  $x(t)$ . Si  $x(t)=t \prod \left( \frac{t-T/2}{T} \right)$ , calculeu i dibuixeu  $h(t)$ . És causal?
  - Suposeu que s'imposa la condició de causalitat al filtre; quina seria la resposta freqüencial del filtre? En quin instant es tindria el màxim de  $y(t)$ ?
- II.26) a) Demostreu que un senyal  $x(t)$  limitat en banda, és a dir,  $X(f)=0$  en  $|f|>B_O$ , verifica que:

$$|x(t)|^2 \leq 2B_O E_x \quad \forall t$$

- b) Demostreu que un senyal  $y(t)$  de durada temporal finita  $T$ ,  $y(t)=0$  per a  $t \leq 0$  i  $t \geq T$ , compleix:  $|Y(f)|^2 \leq TE_x$

II.27) Un senyal  $x(t)$  es limita en banda amb un filtre triangular  $\Delta(\frac{f}{B})$ . Indiqueu i justifiqueu breument si són certes les afirmacions següents:

- Amb aquest filtre, el fenomen de Gibbs s'observa sempre independentment de l'espectre de  $x(t)$ .
- Sempre és millor limitar amb un filtre rectangular.
- Si el senyal és de duració finita (a  $T$  segons,  $T=1/2B$ ), el fenomen de Gibbs no s'observa.
- Cap de les anteriors.

II.28) Calculeu la transformada de Fourier de

$$w(t) = \frac{1}{\pi} \left| \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \Delta\left(\frac{t}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right| \quad |t| < T$$

i compareu-la amb la d'un pols rectangular de durada  $2T$  en termes d'amplada del lòbul principal i comportament asymptòtic.

Comenteu l'efecte de  $w(t)$  en calcular la transformada de Fourier de  $w(t)x(t)$  o la de  $\Pi(t/2T)x(t)$ .

II.29) Un senyal esglao  $u(t)$  s'ha de limitar en banda.

- a) Estudieu l'efecte de limitar amb un filtre  $\Delta\left(\frac{f}{\sigma}\right)$  i compareu-lo amb el resultat de limitar amb  $\Pi\left(\frac{f}{2\sigma}\right)$ .
- b) Si un senyal es limita en banda i dóna com a resultat  $x_\sigma(t)$ , quin filtre escolliríeu si el vostre criteri d'error fos minimitzar l'error quadràtic:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_\sigma(t)|^2 dt$$

II.30) A la figura veiem una discontinuïtat ( $u(t)$ ) i els efectes de limitar aquest senyal en banda utilitzant dos filters diferents. Indiqueu, per a cada corba, quin tipus de filtre s'ha utilitzat. Indiqueu les característiques de cada senyal.

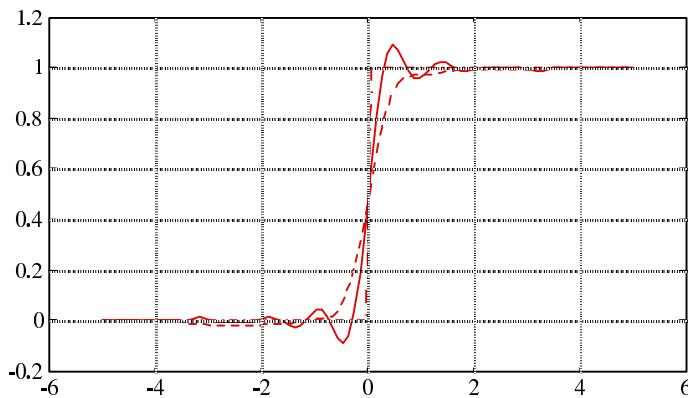


Fig. II.30)

II.31) En mesures portades a terme sobre un senyal  $x(t)$  és habitual, per limitacions evidents, usar trossos de menys durada que la total del senyal sota mesura, per exemple,  $T$  segons. Aquest efecte és equivalent a suposar el senyal que s'ha d'anàlitzar com a  $x_T(t) = x(t)w(t)$ , en què  $w(t)$  és una funció de durada  $T$  segons, que habitualment s'anomena *finesa*. Relacionat amb aquest tema, es demana que contesteu les preguntes següents:

- Indiqueu quina transformada, la de  $x(t)\Pi(\frac{t}{T})$  o la de  $x(t)\Delta(\frac{2t}{T})$ , és millor per mesurar la transformada de Fourier de  $x(t)$ .
- Si la funció usada és  $w(t)$ , quines condicions imposaríeu a  $w(t)$ , o a  $W(f)$ ? Raoneu-les.
- Si sabeu que  $X(f)$  té zones de variació lenta i zones de variació ràpida, quina finestra faríeu servir per observar cada una d'aquestes zones si sabem que les seves transformades de Fourier són les que hi ha a la figura II.31)

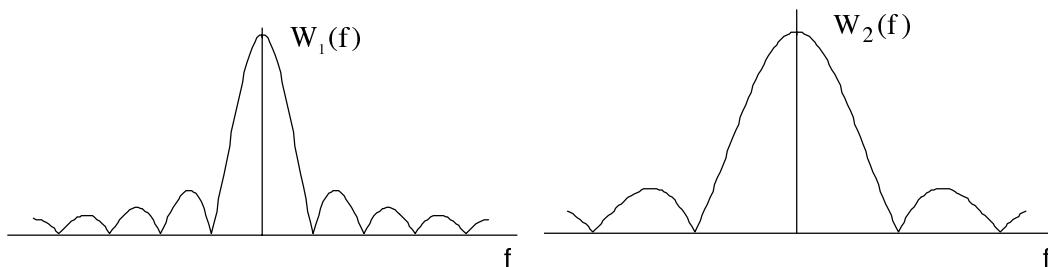


Fig. II.31)

II.32) Un problema interessant consisteix a definir una durada *eficaç*, especialment per a senyals de durada no finita, com ara l'exponencial. En aquest exercici es proposen diverses mesures de durada eficaç.

- Justifiqueu l'elecció següent com a mesura de la durada d'un senyal  $x(t)$ , i estudieu per a quins senyals és apropiada aquesta elecció.

$$d^2[x(t)] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt}$$

- Proveu que

$$d^2[x(t)] = - \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \frac{X(f)|_{f=0}}{X'(f)|_{f=0}}$$

Les dues propietats bàsiques que hauria de complir la definició de durada eficaç és que la durada eficaç de la convolució de dos senyals ha de ser la suma de les durades eficaces de cada senyal, i

que si es trasllada un senyal, la seva durada eficaç no ha de canviar. Tenint en compte el resultat de l'apartat anterior, calculeu la durada efectiva de la convolució de  $x(t)$  amb  $g(t)$ . Indiqueu quan és exacte suposar que

$$d^2[x(t)*g(t)] = d^2[x(t)] + d^2[g(t)]$$

- c) Comproveu quan

$$d^2[x(t-\tau)] = d^2[x(t)] + \tau^2$$

Com modificaríeu la definició de la durada perquè  $d^2[x(t-\tau)] = d^2[x(t)]$ ?

- d) Reviseu la resposta a l'apartat a) si la nova mesura de distància és:

$$d^2[x(t)] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

- II.33) a) Demostreu que la convolució de dues gaussianes,  $e^{-\alpha_1 t^2}$ ,  $e^{-\alpha_2 t^2}$  ( $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ), també és una gaussiana.

- b) Obtingueu la convolució de  $n$  gaussianes caracteritzades pel mateix paràmetre  $\alpha$ .
- c) Calculeu l'energia d'un senyal gaussià de paràmetre  $\alpha$ .

- d) Donat el parell transformat  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , obtingueu la transformada inversa de  $\frac{d^2 X(f)}{d f^2}$ .

Apliqueu aquesta propietat per trobar la duració efectiva  $\Delta t^2$  de la funció gaussiana, on la

$$\text{duració efectiva es defineix com } \Delta t^2 = \frac{\int t^2 |w(t)|^2 dt}{\int |w(t)|^2 dt}$$

- II.34) El sistema de marcació telefònica multifreqüencial funciona de la manera següent: en premer durant  $T$  segons la tecla corresponent a un dígit es genera un senyal format per la suma de dos tons. La freqüència de cada to es correspon amb la intersecció entre els eixos horitzontal i vertical de la tecla premuda, tal com es representa a la figura II.34a). Així, en marcar el 8 es genera la suma d'un to de 800 Hz i un to de 1.200 Hz. El sistema identificador del número marcat ha de detectar els dos components freqüencials.

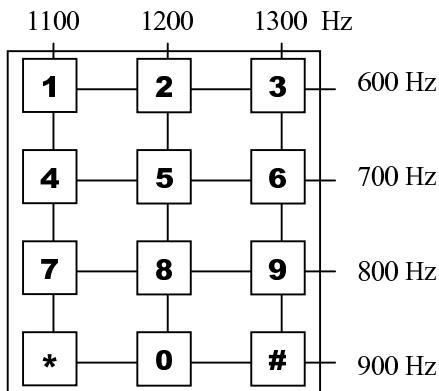


Fig. II.34.a)

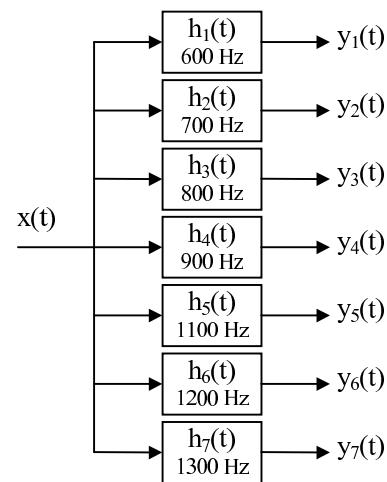


Fig. II.34.b)

Una manera de detectar els tons consisteix a determinar la posició dels màxims del mòdul de la transformada de Fourier del senyal.

- Donat  $x_i(t) = \cos(2\pi f_i t)w(t)$ , amb  $w(t) = 2\Delta(2t/T)$  (finestra triangular) i essent  $T \gg T_i = 1/f_i$ :
  - Trobeu  $W(f)$  i feu una representació gràfica, i indiqueu-ne el valor màxim així com la posició dels zeros.
  - Trobeu  $X_i(f)$  i feu una representació gràfica, i indiqueu-ne el seu valor màxim així com la posició dels zeros.

Considereu ara  $x(t) = (\cos(2\pi f_i t) + \cos(2\pi f_j t))w(t)$ , amb  $f_i$  i  $f_j$  el parell de freqüències corresponents a una tecla ( $f_i \in \{600, 700, 800, 900\}$ ,  $f_j \in \{1100, 1200, 1300\}$ ).

- Trobeu  $X(f)$  essent  $w(t)$  la mateixa finestra de l'apartat anterior.
- Considereu que es pot detectar cada una de les freqüències  $f_i$  i  $f_j$  sempre que no hi hagi solapament entre els lòbuls principals de la transformada. Quin és el temps mínim que ha d'estar premuda una tecla per poder fer la detecció?

Un mètode alternatiu per detectar la presència dels tons consisteix a aplicar el senyal a un banc de 7 filtres, com es mostra a la figura II.34b. Cada filtre està adaptat a un to enfinestrat; és a dir, que la resposta impulsional del filtre  $n$ -èsim és

$$h_n(t) = \cos(2\pi f_n(T-t))\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \text{ amb } T=0.05 \text{ seg.}$$

- d) Calculi la sortida del filtre n-èssim a l'instant  $T$  si a l'entrada s'aplica  $x_i(t) = \cos(2\pi f_i t) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ , per als casos  $i = n = 1$ , i per  $i = 5, n = 1$ . Quins valors hi haurà a la sortida de cada filtre en premer la tecla 3?
- II.35) Si es defineix la durada temporal d'un senyal com:

$$d_x^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |t x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

- a) Calculeu l'expressió de  $d_x^2$  en funció de  $X(f)$ . Utilitzeu el teorema de Parseval.  
 b) Si  $x(t) = g(t) * \delta(t-t_0)$ , comproveu que si  $g(t)$  és real i parell,  $d_x^2 = d_g^2 + t_0^2$
- II.36) En aquest problema es vol il·lustrar el compromís que hi ha entre la durada temporal i freqüencial d'un senyal. De manera similar al que passa en el principi d'incertesa, es veurà que el producte de durada temporal i durada freqüencial no es pot fer arbitràriament petit. Si es defineix la durada temporal i freqüencial de la manera següent:

$$t_e^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 t^2 dt \quad \text{y} \quad f_e^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 f^2 df$$

$$\text{I es verifica: } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \sqrt{|t|} x(t) = 0$$

Proveu que  $t_e f_e \geq E_x / 4\pi$ , en què  $E_x$  és l'energia del senyal.

Per fer-ho, abans podeu demostrar que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} t x(t) \frac{dx(t)}{dt} dt \right|^2 = \frac{1}{4} E_x^2$$

- II.37) Sigui la resposta real i positiva  $h(t)$  de la figura II.37 a). Es defineix la resposta efectiva  $h_{eff}(t)$ , com s'indica a la mateixa figura, com un pols rectangular de la mateixa àrea i valor màxim.
- a) Calculeu una expressió de  $t_d$  en funció de  $|H(f)|$  suposant que la fase és aproximadament lineal. *Nota:* els filtres de fase lineal són simètrics respecte a  $t_0$  i prenen en  $t_0$  el seu valor màxim (II.16)), cosa que justifica la forma de  $h(t)$  a la figura II.37.a).

- b) Es defineix  $B$  per mitjà de l'expressió

$$B \equiv \frac{1}{|H(0)|} \int_0^\infty |H(f)| df$$

Quin és el significat de  $B$ ? Comproveu que  $t_d = 1/2B$ .

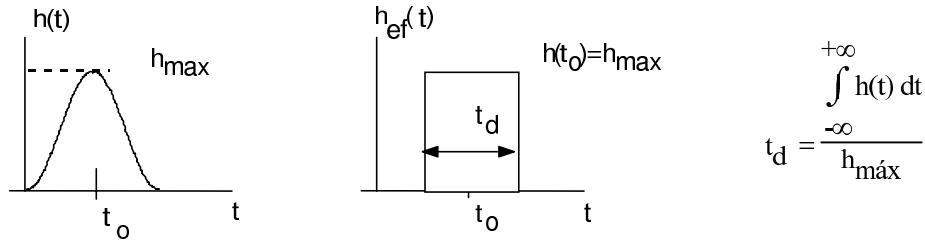


Fig. II.37.a)

En aquest moment i segons el concepte de resposta efectiva, estem en condicions de veure com  $B$  afecta al temps de pujada d'un senyal. Dibuixeu la sortida de l'esquema de la figura.

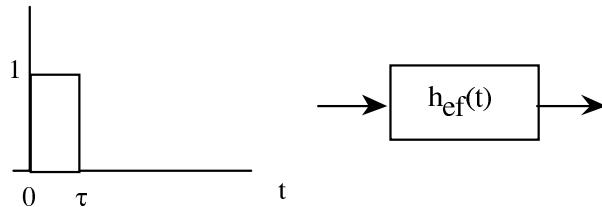


Fig. II.37.b)

- c) Comproveu que si  $\tau \gg 1/2B$ , el temps de pujada és proper a  $1/2B$ , i que si  $\tau \ll 1/2B$ , la forma del senyal de sortida és pràcticament independent de la durada de l'entrada.
- II.38) Una de les aplicacions més importants de sistemes variants és la realització de transformades o desenvolupaments funcionals. Considereu el sistema lineal i variant que relaciona  $x(t)$  amb  $y(t)$  de la figura II.38)

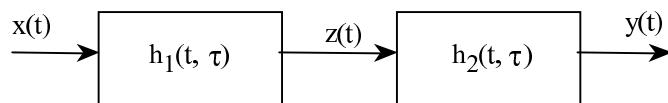


Fig. II.38)

- a) Trobeu la resposta  $h(t, \tau)$  que relaciona  $x(t)$  amb  $y(t)$  en funció de  $h_1(t, \tau)$  i  $h_2(t, \tau)$ .
- b) Quan la sortida és idèntica a l'entrada, es diu que el sistema 2 és recíproc de l'1. Quina condició han de verificar  $h_1(t, \tau)$  i  $h_2(t, \tau)$  perquè es compleixi la reciprocitat?

- c) Calculeu la relació entre les transformades de Fourier de  $h_1$  i  $h_2$  per al cas en què es verifica la reciprocitat.

Nota:  $H_1(f, \phi) = \iint h_1(t, \tau) \exp(-j2\pi f t) \exp(-j2\pi \phi \tau) dt d\tau$

- d) Supposeu que  $h_1(t, \tau) = \exp(-j2\pi \tau t)$ . Comproveu que si  $h_2(t, \tau) = h_1^*(t, \tau)$  llavors  $y(t) = x(t)$ . Trobeu  $z(t)$ .
- e) Supposeu que  $h_1(t, \tau) = 1/\pi(t-\tau)$ . Calculeu-ne el recíproc.

- II.39) Si tenim un sistema variant de resposta a l'impuls  $h(t, \tau)$  definida com  $T[\delta(t-\tau)] = h(t, \tau)$ :

- a) Demostreu que la transformada de Fourier de  $y(t)$  ve donada per

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) H(f, -\Omega) d\Omega$$

Si  $H(f, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) e^{-j2\pi f t} e^{-j2\pi \Omega \tau} dt d\tau$  és la transformada doble de Fourier de  $h(t, \tau)$  i  $X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi \Omega t} dt$  la transformada de Fourier de l'entrada:

- b) Calculeu la resposta a l'impuls  $h_B(t, \tau)$  i la funció de transferència  $H_B(f, \Omega)$  del sistema de la figura II.39)

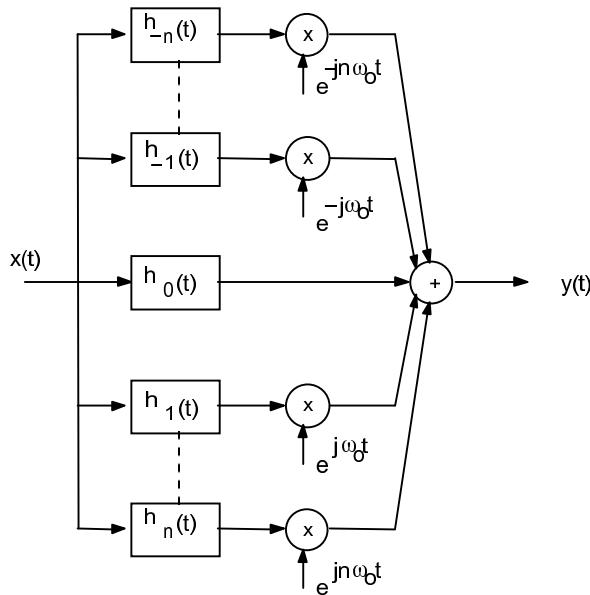


Fig. II.39)

## TF de senyals periòdics

### Transformada de Fourier d'un tren de deltes

La TF d'un tren de deltes facilita l'obtenció de la TF per senyals periòdics.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f-\frac{m}{T})$$

### Transformada de Fourier d'un senyal periòdic $x(t)$

Un senyal periòdic es pot representar com la suma d'una forma bàsica desplaçada.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(t-nT) \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_b(\frac{m}{T}) \delta(f-\frac{m}{T})$$

### Relació amb les sèries de Fourier

Efectuant la TF inversa de l' expressió anterior s'obté:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j2\pi \frac{m}{T} t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X_b(\frac{m}{T}) e^{j2\pi \frac{m}{T} t}$$

### Teorema de Parseval per a senyals periòdics

Els senyals periòdics són senyals de potència mitjana finita, que es pot deduir en un període o a partir dels coeficients de les sèries de Fourier.

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c(m)|^2$$

### Senyals periòdics $x(t)$ a través de sistemes lineals i invariants

El senyal a la sortida d'un sistema lineal i invariant segueix sent periòdic, amb el mateix període que l'entrada i amb la forma d'ona depenen de l'entrada i la resposta impulsional.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_b(t-nT) \leftrightarrow Y(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{m}{T}\right) X_b\left(\frac{m}{T}\right) \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

### Fórmula de Poisson

S'utilitza per simplificar la suma de series.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \Phi\left(\frac{m}{T}\right)$$

---

**PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS**


---

II.40) Dues funcions  $x(t)$  i  $y(t)$  són ortogonals si compleixen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = 0$$

Demostreu que el conjunt de funcions  $g_n(t)$  és ortogonal i calculeu els coeficients  $a_n$  del desenvolupament en sèrie del senyal  $x(t)$  de banda limitada a  $B$  Hz

$$g_n(t) = \frac{\sin \pi B(\tau - \eta T)}{\pi(\tau - \eta T)} \quad \text{amb } TB=1 \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n(t)$$

II.41) Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier dels senyals següents:

- a)  $e^{j200t}$
- b)  $\cos[\pi(t-1)/4]$
- c)  $\cos 4t + \sin 8t$
- d)  $[1+\cos 2\pi t][\cos(10\pi t + \pi/4)]$

II.42) Donat el senyal  $y(t) = x(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$ , on  $x(t)$  és un tren de polsos rectangulars de període  $T$

- a) Dibuixeu  $y(t)$  i el seu espectre de línies per a  $T >> T_0$
- b) Dibuixeu  $y(t)$  i el seu espectre per a  $T << T_0$

II.43) Considereu el sistema LI caracteritzat per:

$$h(t) = e^{4t} u(t)$$

Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier de la sortida per a cada una de les entrades següents:

- a)  $x(t) = \cos 2\pi t$
- b)  $x(t) = \sin 4\pi t + \cos(6\pi t + \pi/4)$
- c)  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$

- II.44) a) Trobeu la transformada de Fourier del senyal  $x(t) = |\text{sinc}(3t)|$

Per resoldre aquest exercici, descomponeu el senyal en d'altres senyals més simples tenint en compte la descomposició següent:

$$|\text{sinc}(t)| = \text{sinc}(t) \text{sgn}(t) \sum_{n=0}^{\infty} p(t-nT) \text{ en què } T=2 \text{ seg i } p(t) = \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) - \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right)$$

- b) Calculeu el valor de la integral següent:  $\int_{-\infty}^{\infty} |\text{sinc}(3t)|^2 dt$

- II.45) Donat el senyal  $x(t) = \frac{|\sin 2\pi t|}{t}$

- a) Calculeu-ne la transformada de Fourier  $X(f)$ .  
b) Quant val  $X(5)$ ? Justifiqueu aquest valor a partir de la possible simetria de  $x(t)$ .

- II.46) Un senyal usat normalment en sistemes de comunicacions és el pols cosinus alçat. La figura P.II.46 mostra el senyal periòdic  $x(t)$  format a partir d'aquest pols  $x_b(t)$ , definit per:

$$x_b(t) = [1 + \cos 2\pi t] \Pi(t)$$

Obtingueu el desenvolupament en sèrie de Fourier de  $x(t)$  i comproveu que els tres primers termes són els següents:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi} \cos \pi t + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \dots$$

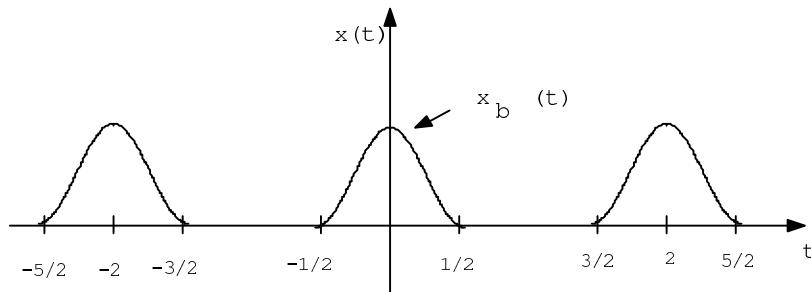


Fig. II.46)

#### P4.1 Aproximació de senyals periòdics per sèries de Fourier.

S'analitza la influència dels coeficients en el desenvolupament en sèrie de Fourier d'un senyal periòdic. Els senyals utilitzats són trens de polsos rectangulars de diferent relació període-duració del pols, el tren de polsos cosinus aixecat, el tren de polsos triangular i la dent de serra. El programa permet seleccionar el període del senyal i el nombre de coeficients utilitzats. Es visualitzen diferents gràfiques, que permeten veure la millora de l'aproximació a mesura que s'afegeixen coeficients del desenvolupament.

1. Per a cadascun del senyals disponibles fixeu un valor del període  $T$  i observeu com es va aproximant cada senyal a mesura que es té en compte un harmònic més. Compareu de forma relativa, i visualitzant l'aproximació obtinguda, el nombre d'harmònics que cal tenir en compte per a cada senyal perquè aquesta aproximació sigui bona.
2. Suposeu que es creu que l'aproximació per sèries de Fourier és bona quan l'error quadràtic mitjà (eqm) en un període és inferior a un cert valor. Fixeu  $T=25$  i calculeu quants harmònics necessiten cadascun dels senyals disponibles per tenir un eqm inferior a 0,004.
3. En relació amb la pregunta 2, justifiqueu perquè el tren de polsos de  $T/6$  necessita més harmònics que el tren de polsos a  $T/2$ .
4. En relació amb la pregunta 2, justifiqueu perquè el senyal triangular necessita menys harmònics que la dent de serra.
5. En relació amb la pregunta 2, justifiqueu perquè el senyal triangular necessita menys harmònics que el senyal cosinus aixecat.
6. Doneu una expressió de l'aproximació que s'obté per al senyal cosinus aixecat quan es vol que l'eqm de l'aproximació sigui inferior a 0,004
7. Suposeu que l'aproximació per sèries de Fourier és bona quan l'amplitud dels harmònics que no s'utilitzen és inferior a un cert llindar. Fixeu  $T=25$  i calculeu quants harmònics necessiten cadascun dels senyals disponibles quan els harmònics no utilitzats tenen una amplitud inferior a 0,015.
8. En relació amb la pregunta 7, justifiqueu perquè el tren de polsos de  $T/6$  necessita tants harmònics com el tren de polsos a  $T/2$ .
9. En relació amb la pregunta 7, justifiqueu perquè el senyal triangular necessita tants harmònics que el senyal cosinus aixecat.
10. Comenteu les diferències que hagueu obtingut utilitzant com a criteris de mesura d'aproximació el visual, utilitzant l'eqm i utilitzant el llindar d'amplitud.
11. Indiqueu en quins senyals es visualitza el fenomen de Gibbs. Per a aquests senyals, com varia la forma d'ona de l'arrissat a les discontinuitats quan  $T$  augmenta i es manté el nombre d'harmònics fix? I a l'inrevés, quan  $T$  és fix i augmenta el nombre d'harmònics? Com varia l'amplitud de l'arrissat en ambdós casos? Com afectaria un increment de  $T$  si no es fixés el nombre d'harmònics i el criteri d'error fos fixar un llindar d'amplitud?
12. Interpreteu el canvi de període, per exemple, de  $T_1$  a  $T_2$  (amb  $N$  fix) com una transformació de variable independent, amb una expressió d'aquesta transformació.
13. Es defineix l'eqm com:  $eqm = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t) - x_N(t)|^2 dt$ , on  $x(t)$  és l'aproximació amb coeficients infinitos,  $x_N(t)$  és l'aproximació fins al coeficient  $N$  i  $T$  és el període del senyal. Trobeu quan varia l'eqm quan es canvia de període de  $T_1$  a  $T_2$ , amb  $N$  fix. Comproveu-ho per a la dent de serra i passant de  $T=20$  a  $T=30$ .
14. Comenteu les diferències entre els espectres de línies per al tren de polsos rectangular i el tren de polsos rectangular invertit.
15. Comenteu les diferències entre els espectres de línies per al tren de polsos de duració  $T/2$  i el tren de polsos de duració  $T/6$ . Com varia l'amplitud dels coeficients respectius amb el període?

II.47) Trobeu els coeficients del desenvolupament en sèries de Fourier del senyal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x_o(t - nT)$$

II.48) Obtingueu la transformada de Fourier del tren periòdic de polsos de RF de la figura següent, quan  $f_c T_o \gg 1$ .

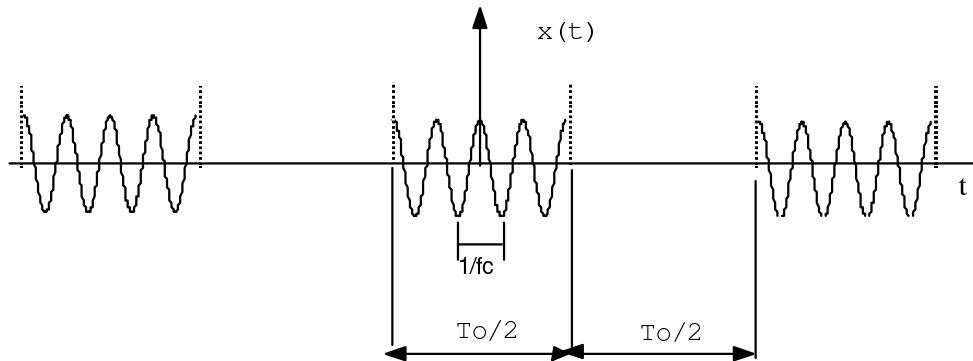


Fig. II.48)

II.49) a) Sigui el senyal  $x_1(t) = \cos 2\pi f_c t \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{t-mT_o}{T_o/2}\right)$ . Determineu-ne la transformada de Fourier.

En quines condicions  $x_1(t)$  és periòdica, i de quin període?

b) Sigui el senyal  $x_2(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(t-mT_o)$ . Amb  $p(t) = \Delta\left(\frac{t}{T_o/2}\right) \cos 2\pi f_c t$ . Determineu-ne la transformada de Fourier. En quines condicions  $x_2(t)$  és periòdica, i de quin període?

c) Suposem un filtre  $H(f) = \begin{cases} 1 & f_c - \frac{1}{2T_o} < |f| < f_c + \frac{1}{2T_o} \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$

Trobeu els senyals de sortida  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$  si a l'entrada s'aplica  $x_1(t)$  o  $x_2(t)$  respectivament. Considereu  $f_c \gg 1/T_o$

II.50) Sigui el senyal periòdic  $x(t) = A \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$ . Es demana:

- Calculeu-ne el desenvolupament en sèrie de Fourier i la transformada de Fourier.
- Dibuixeu la transformada de Fourier. Suposeu  $\tau = 25$  ms;  $T = 50$  ms i  $A = 1$ . Mostreu amb total claredat les dades que creieu significatives en el dibuix.
- Si el senyal anterior és filtrat amb un filtre passa-banda ideal:

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f f_O}{B_h}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_O}{B_h}\right)$$

Calculeu la sortida. Suposem  $B_h = 30$  Hz i  $f_O = 50$  Hz. Expresseu la sortida de la manera més simple possible, preferiblement com a suma de cosinus.

II.51) Si tenim la funció  $g(t)$  i la seva transformada de Fourier  $G(f)$ , calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier de

$$a) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT)$$

$$b) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - 2nT)$$

- Considereu que aquest últim senyal passa per un sistema lineal de funció de transferència  $H(f)$ . Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier del senyal de sortida.

II.52) A partir del parell de transformades:  $\cos(\pi t) \Pi(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left( \text{sinc}\left(f - \frac{1}{2}\right) + \text{sinc}\left(f + \frac{1}{2}\right) \right)$

- Si hi aplicuem propietats de la transformada de Fourier (TF), trobeu i dibuixe la TF de
- $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T_0} t \prod\left(\frac{t}{T_0/2}\right)$
- Calculeu i dibuixe la TF del senyal  $x_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(t - n2T_0)$
- Si  $T_0 = 50$  ms, trobeu l'expressió del senyal de sortida  $y(t)$  quan  $x_p(t)$  es filtra amb un filtre passa-banda ideal d'amplada de banda 4 Hz centrat a 20 Hz.

$$H(f) = \prod\left(\frac{f - 20}{4}\right) + \prod\left(\frac{f + 20}{4}\right)$$

- II.53) En alguns sistemes de comunicacions digitals s'envia un pols cada  $T$  segons (pol d'emissió), l'amplitud del qual està associada al símbol que es vol transmetre.

$$x_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n p(t - nT)$$

El senyal que es rep és el resultat de la convolució del senyal transmès amb la resposta impulsional del canal de comunicacions i està formada per polsos  $p_R(t) = p(t) * h(t)$

$$x_R(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n p_R(t - nT)$$

Per determinar les amplituds en recepció, s'agafa una mostra cada  $T$  segons i el valor d'aquesta mostra permet saber el símbol  $a_k$  que s'ha enviat.

$$x_R(kT) = a_k P_R(0) + \sum_{n \neq k} a_n p_R((k-n)T)$$

Una propietat desitjable dels senyals que es reben (polsos de recepció  $p_R(t)$ ) perquè no interfereixin en la detecció dels símbols següents (interferència intersimbòlica o ISI) és la següent:

$$\begin{aligned} p_R(0) &\neq 0 \\ p_R(nT) &= 0 \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

de manera que en els instants de mostratge  $x_R(kT) = a_k p_R(0)$ . En aquest exercici es vol obtenir la condició en el domini freqüencial que han de complir els polsos rebuts perquè no hi hagi interferència simbòlica. Per fer-ho, contesteu les preguntes següents:

- a) Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier de

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_R(f - m/T)$$

- b) A partir de l'expressió obtinguda a a), quina és la condició desitjada per a  $P_R(f)$ ?
- c) Si els polsos rebuts tenen com a TF la que es mostra a la figura II.53), és possible fer alguna transmissió sense ISI? Quin seria l'interval T de transmissió entre polsos?

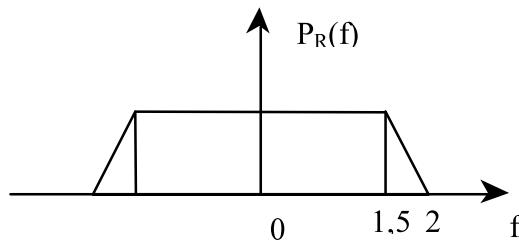


Fig. II.53)

II.54) Sigui la funció  $x(t)$  de banda limitada a  $B_O$  Hz,

- a) Mostreu que  $X(f)$  admet la representació següent:

$$X(f) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn2\pi f T} & |f| \leq 1/2T \\ 0 & \text{altres } f \end{cases}$$

i indiqueu el marge de  $T$ .

- b) Indiqueu l'expressió de  $x(t)$  en funció dels coeficients  $c_n$  de l'apartat anterior.

II.55) Considereu un sistema passa-baixes  $H(f)$  d'amplada de banda estrictament limitat a  $f_O$ . Sigui, alhora,  $\phi(f)$  la versió periòdica de  $H(f)$  definida de la manera següent:

$$\phi(f) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \widehat{H}(f - 2qf_p) \quad \text{on } f_p \leq f_O \quad \text{i} \quad \widehat{H}(f) = H(f) \prod \left( \frac{f}{2f_p} \right)$$

Respongueu a les qüestions següents:

- a) Proveu que en exercitar el sistema passa-baix  $H(f)$  amb una entrada  $x(t)$  d'amplada de banda  $f_p$  produeix una sortida  $y(t)$ , en què la transformada de Fourier és  $\phi(f) X(f)$ .
- b) Desenvolupeu en sèrie de Fourier  $\phi(f)$  i doneu l'expressió integral dels coeficients  $c_n$  en funció de  $H(f)$ .
- c) Calculeu l'expressió de  $y(t)$  en funció dels coeficients  $c_n$  i de  $x(t)$ .
- d) Repetiu els apartats b) i c) en el cas que  $f_O = f_p$ .
- e) Repetiu l'apartat c) per al cas en què  $H(f) = (a + b \cos \pi f / f_p) \prod \left( \frac{f}{2f_o} \right)$ , i proveu que el coeficient  $b$  provoca ecos a  $y(t)$ .
- f) Si la resposta anterior no fos causal, comenteu les raons que segons el vostre parer motiven el fenomen.

- II.56) a) Calculeu el desenvolupament en sèrie del senyal, periòdic  $x(t)$  i a partir d'aquest senyal dibuixeu aproximadament la transformada de Fourier del senyal periòdic  $x_o(t)$  de la figura II.56)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A \Lambda \left( \frac{t-nT}{\tau} \right)$$

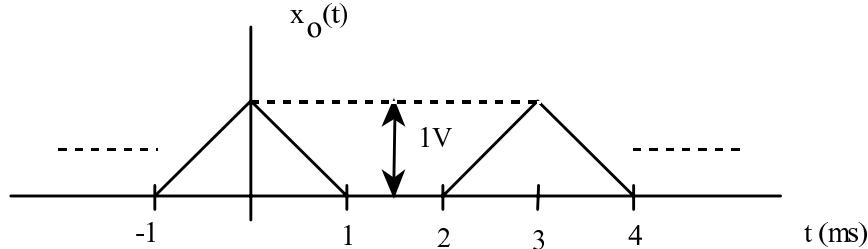


Fig. II.56)

- b) Doneu l'expressió del senyal de sortida obtinguda en filtrar el senyal de l'apartat a),  $x_o(t)$ , per un filtre passa-baix ideal de freqüència de tall 1 kHz.
- c) Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier de  $x(t)$  per a  $\tau > T/2$
- d) Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier de  $x_o(t-0,5 \cdot 10^{-3})$
- II.57) Supposeu un sistema LI la resposta freqüencial del qual es mostra a la figura II.57). Sigui  $y(t)$  el senyal de sortida que s'obté quan a l'entrada s'aplica el senyal periòdic  $x(t)$ :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_b(t-4nT) \quad T=0,5 \text{ ms}$$

$$x_b(t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi t}{T} \right) \Pi \left( \frac{t}{2T} \right)$$

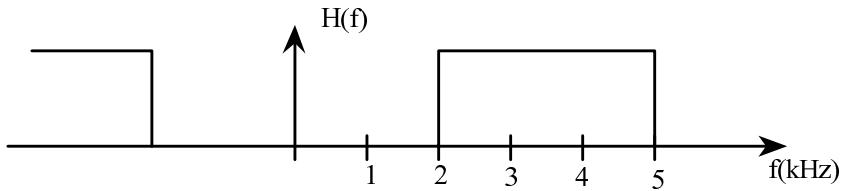


Fig. II.57)

Es demana:

- a) Desenvolupament en sèrie i transformada de Fourier del senyal  $x(t)$ .
- b) Expressió, en forma tancada, del senyal de sortida  $y(t)$ .
- II.58) Si es considera l'esquema de la figura següent:

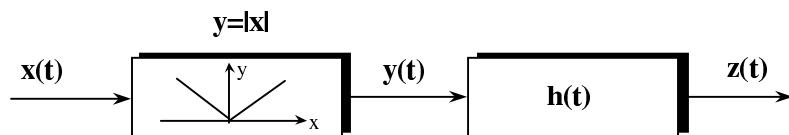


Fig. II.58)

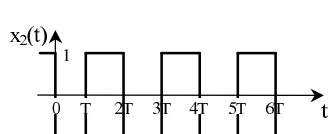
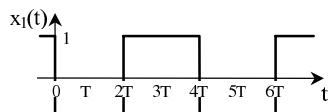
- a) Calculeu el DSF (desenvolupament en sèrie de Fourier) del senyal  $y(t)$  si es considera el senyal d'entrada  $x(t)=\cos\pi t$ .
- b) Trobeu l'expressió analítica de la sortida  $z(t)$  si es considera el filtre  $h(t)$  següent i l'entrada  $x(t)$  anterior:  $H(f)= \prod\left(\frac{f-3}{4}\right) + \prod\left(\frac{f+3}{4}\right)$
- II.59) Es disposa d'un circuit generador de dos senyals de rellotge  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  de freqüència fonamental  $f_1$  i  $f_2 = 2f_1$  respectivament, com es mostra a la figura II.59a. El sistema generador proporciona un únic senyal  $x(t)$  format per la superposició de  $x_1(t)$  amb una versió atenuada i desplaçada de  $x_2(t)$ ,  $x(t) = x_1(t) + Ax_2(t-t_0)$ .

Per recuperar els dos senyals  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  a partir de  $x(t)$  es proposa l'esquema de la figura II.59b, on:

$h_a(t)$  i  $h_b(t)$  són dos filtres passa-banda ideals, d'amplada de banda  $B \leq 2f_1$ , i amb freqüència central  $f_a$  i  $f_b$  respectivament.

El sistema mesurador proporciona la fase (en graus) de cadascuna de les sinusoides que hi arriben.

Els sistemes no lineals de l'esquema es poden comparar per zero; la sortida de cadascun d'ells és una constant (C o D) amb el signe del senyal d'entrada.



a)

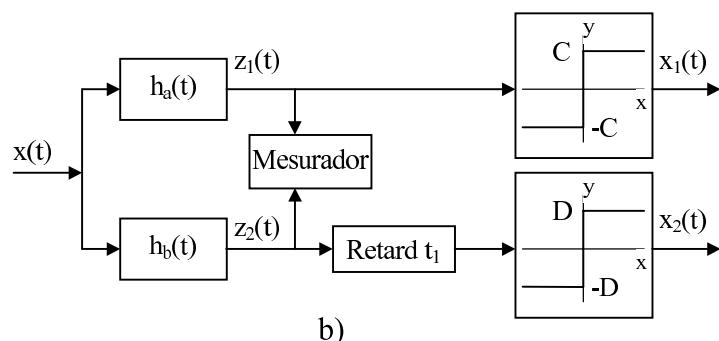


Fig. II.59b)

Fig. II.59a)

- a) Trobeu la transformada de Fourier de  $x_1(t)$ .

- b) Aplicant propietats de la transformada de Fourier, trobeu la transformada de Fourier de  $x_2(t)$  a partir de la de  $x_1(t)$ .
- c) Representeu el mòdul de la transformada de Fourier de  $x(t)$ .
- d) Quins han de ser els valors de les freqüències  $f_a$  i  $f_b$  que permeten recuperar a la sortida  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ ? Determineu  $z_1(t)$  i  $z_2(t)$ , senyals de sortida dels filtres  $h_a(t)$  i  $h_b(t)$ .
- e) Si la fase mesurada de  $z_1(t)$  és de  $-180^\circ$  i la de  $z_2(t)$  és de  $-225^\circ$ , quin és el valor de  $t_0$  en funció de  $T$ ?
- f) Donats els valors de l'apartat anterior, quins han de ser els valors de les constants C i D i del retardador  $t_1$  que permeten recuperar  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ ?
- II.60) Les no linealitats dels sistemes generen components freqüencials que no existien en el senyal d'entrada. Estudieu els sistemes no lineals que es defineixen a continuació. Per fer-ho, calculeu el senyal de sortida a les entrades que s'especifiquen en cada cas, i compareu les TF dels senyals d'entrada i de sortida. Observeu l'aparició de nous components freqüencials.
- a) Sistema no lineal d'ordre 2:  
per a les entrades:
- $$y(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2^2(t)$$
- $$x_1(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{i} \quad x_2(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_1 t)$$
- b) Sistema no lineal d'ordre infinit:  
per a l'entrada:
- $$y(t) = \text{sign}[x(t)]$$
- $$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

#### P 4.2 Efectes de sistemes no lineals. Generació ona quadrada

S'analitzen els efectes de les no linealitats d'un sistema d'amplificació. El sistema es caracteritza per una zona lineal amb amplificació S/L (guany) i una zona de saturació, com es mostra a la figura P4.2). S'examina l'aparició de nous components freqüencials segons el valor de la característica S/L quan el senyal d'entrada és un cosinus. Per un guany elevat el sistema es pot utilitzar per generar ones quadrades. El programa permet variar la freqüència del cosinus i el guany del sistema no lineal.

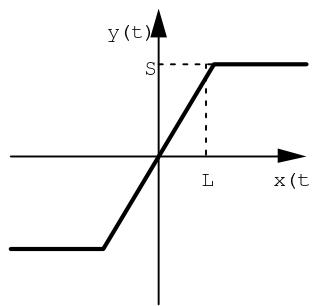


Fig. P4.2)

1. Com varia el guany en la zona lineal en funció de L i S ? Quin efecte experimenta el senyal de sortida en el domini temporal quan el guany augmenta ?
2. Quin és el màxim guany permés sense que es produueixi distorsió del senyal?, justifiqueu com heu deduït aquest valor.
3. Fixeu un guany elevat i un valor de  $f_o$ , comproveu a quines freqüències apareixen nous harmònics. Repetiu el procés per a diferents valors de  $f_o$ . En general, quina relació hi ha entre els harmònics i  $f_o$ ?
4. Trobeu una expressió analítica aproximada del senyal de sortida quan  $f_o = 685,5$  i es fixa un guany de  $G = 7$ , tingueu en compte els efectes d'enfrestament.
5. Quin senyal s'obtindria per guany infinit? Trobeu l'expressió analítica d'aquest senyal en funció de  $f_o$ , tingueu en compte els efectes d'enfrestament. Fixeu el valor de la freqüència màxima a  $f_o = 966,8$  i compareu l'amplitud del segon harmònic que s'obté pel guany màxim ( $G = 20$ ) i la que s'obté a partir de l'expressió analítica amb guany infinit. Comenteu el resultat obtingut.
6. Visualitzeu el senyal entre la freqüència 0 Hz i 3.000 Hz. Fixeu el guany a  $G=20$  i disminuïu la freqüència des de la màxima fins a la mínima freqüència. Observeu les variacions d'amplitud del primer i segon harmònic; a què són degudes?
7. Per tenir una mesura relativa de les no linealitats es mesura la relació entre l'amplitud de l'harmònic secundari i el principal. Fixeu el valor de la freqüència màxima a  $f_o = 966,8$  i trobeu aquesta relació per a un guany infinit, el guany màxim ( $G = 20$ ), el guany mínim i un valor intermedi ( $G = 7$ ). Proposeu una mesura alternativa que variï entre 0 i 1 i trobeu-ne el seu valor per als guanys esmentats.

#### P 4.3 Efectes negatius de sistemes no lineals. Exemple en FDM-diafonía

Un dels problemes que pot originar una no linealitat és la interferència d'un senyal sobre un altre en sistemes de comunicació per multiplexatge en freqüència (FDM). Es suposen dos senyals que han estat multiplexats i que en un moment donat passen a través d'un sistema no lineal (és l'amplificador vist a la pràctica P 4.2 per a  $S=1$ ). Si bé cadascun dels senyals per separat es trobaria a la zona lineal de l'amplificador, el senyal multiplexat supera en alguns intervals la zona lineal i provoca l'aparició de nous harmònics. La recuperació dels senyals originals es realitza en el procés de desmultiplexatge. S'observen i es comparen tant en el domini temporal com en el freqüencial els senyals que intervenen al llarg del sistema. En els senyals recuperats s'observa que part de la potència d'un senyal envaeix la banda freqüencial de l'altre. Aquest efecte negatiu se l'anomena *diafonía*, ja que per a senyals de veu l'efecte es pot escoltar.

1. Comproveu que quan es transmet cada senyal per separat es recupera sense distorsió el senyal original independentment de la freqüència de modulació escollida. Quin guany introduceix l'etapa de amplificació?
2. Compareu el senyal multiplexat (quan s'utilitzen dos senyals) a l'entrada i a la sortida del sistema no lineal en el domini temporal, i expliqueu quin efecte ha provocat el sistema no lineal. Trobeu el període del senyal multiplexat abans i després del sistema no lineal, coincideixen?

3. Compareu el senyal multiplexat a l'entrada i a la sortida del sistema no lineal en el domini freqüencial, i expliqueu quin efecte ha provocat el sistema no lineal.
  4. Les freqüències dels harmònics d'un senyal periòdic són múltiples d'una freqüència que s'anomena fonamental. Proposeu un mètode per obtenir la freqüència fonamental d'un senyal periòdic a partir d'una llista de freqüències corresponents als seus harmònics. Utilitzeu aquest mètode per obtenir la freqüència fonamental del senyal FDM a la sortida del sistema no lineal.
  5. Quina relació hi ha entre la freqüència fonamental de l'apartat 4 i el període deduït a l'apartat 2?
  6. Una de les característiques dels sistemes no lineals és l'aparició de freqüències que no estaven presents a l'entrada. Així, si a l'entrada hi ha un cosinus de freqüència  $f_{01}$ , a la sortida poden aparèixer múltiples d'aquesta freqüència, i si a la entrada hi ha la suma de dos cosinus a les freqüències  $f_{01}$  i  $f_{02}$ , a la sortida poden aparèixer noves freqüències a  $\pm kf_{01} \pm lf_{02}$ , i per la suma de quatre cosinus a  $f_{01}, f_{02}, f_{03}, f_{04}$  apareixen noves freqüències a  $\pm kf_{01} \pm lf_{02} \pm mf_{03} \pm nf_{04}$ . L'amplitud de cada harmònic depèn de les característiques del sistema no lineal. Trobeu  $k, l, m$  i  $n$  per als primers 5 harmònics del senyal FDM. Comproveu que la freqüència fonamental és la mínima freqüència que es pot obtenir com a combinació de les quatre freqüències originals (diferent de la solució nul·la).
  7. Compareu els senyals d'entrada amb els senyals de sortida de tot el sistema i observeu la diafonia. Interpreteu aquest efecte tant en el domini temporal com en el freqüencial.
- II.61) L'esquema de la figura representa un receptor d'AM (modulació d'amplitud), que permet recuperar el senyal d'informació,  $\phi(t)$ , per mitjà d'un rectificador d'ona completa i un filtre passa-baix.

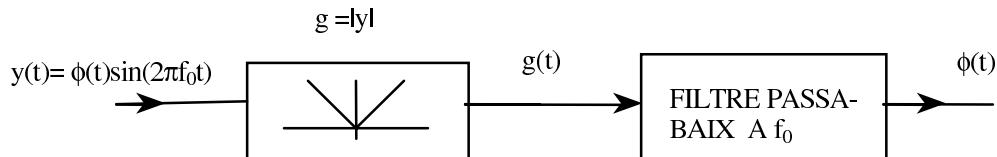


Fig. II.61)

Sigui  $\phi(t)$  un senyal positiu i limitat en banda:  $\Phi(f) = 0$ ,  $|f| > B$ . Comproveu la validesa d'aquest esquema indicant la relació necessària entre  $B$  i  $f_0$ .

Nota: l'exigència que  $\phi(t)$  sigui positiu se soluciona en AM afegint un valor continu suficientment gran al senyal d'informació. Com que el senyal d'àudio no presenta component continu, s'elimina en recepció, després del filtre passa-baix.

- II.62) L'esquema de la figura representa un receptor d'AM (modulació d'amplitud) que permet recuperar el senyal d'informació,  $\phi(t)$ , utilitzant un rectificador d'ona mitjana i un filtre  $h(t)$  passa-baix:

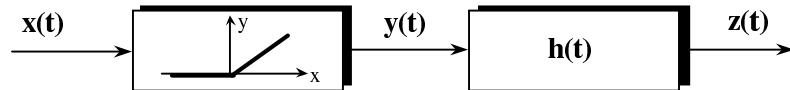


Fig. II.62)

Es considera el senyal modulat  $x(t) = \phi(t)\sin(2\pi f_o t)$ , en què  $\phi(t)$  és un senyal positiu i limitat en banda:  $\phi(f) = 0$ ,  $|f| > B$ .

- Comproveu la validesa d'aquest esquema i indiqueu-ne la relació necessària entre  $B$  i  $f_o$ . Especificueu com ha de ser el filtre  $h(t)$  (guany i freqüència de tall) per poder recuperar a la sortida  $z(t) = \phi(t)$ .
- Com s'hauria de modificar el filtre per obtenir a la sortida el senyal  $\phi(t)$  modulat a la freqüència  $f_1 = 4f_o$ ? Doneu l'expressió analítica de la sortida.

Nota: l'exigència que  $\phi(t)$  sigui positiva se soluciona en AM afegint un valor continu suficientment gran al senyal d'informació. Com que el senyal d'àudio no presenta component continu, s'elimina en recepció, després del filtre passa-baix.

- II.63) Es disposa del sistema de modulació AM representat a la figura II.63a)

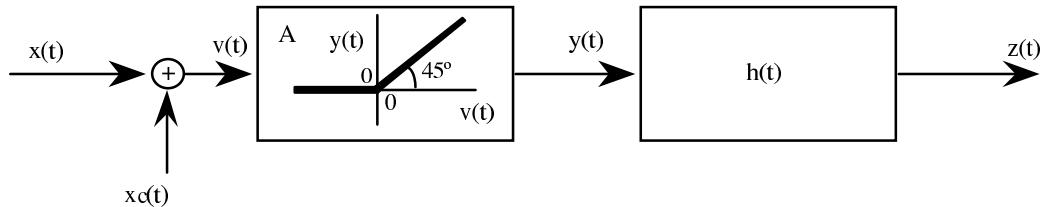


Fig. II.63a)

en què  $x(t)$  és un senyal arbitrari de banda limitada a 4 kHz i de valor absolut més petit que la unitat, i  $xc(t)$  és un tren de polsos rectangulars de període  $T_c = 0,1$  ms:

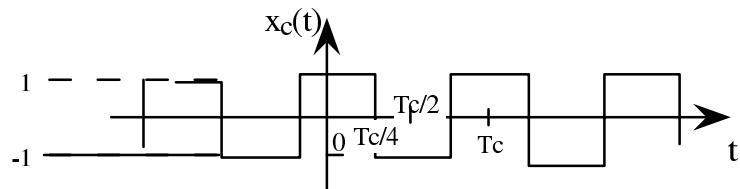


Fig. II.63b)

Amb la finalitat d'analitzar el funcionament del modulador, respongueu *raonadament* les qüestions següents:

- El sistema "A" és lineal o invariant?
  - Comproveu que  $y(t)$  es pot expressar com a  $y(t)=[1+x(t)]p(t)$ ; especifiqueu  $p(t)$ . Us suggerim que dibuixeu  $v(t)$  i  $y(t)$  per a un senyal  $x(t)$  determinat.
  - Determineu i representeu gràficament la transformada de Fourier de  $y(t)$ .
  - Obtingueu  $z(t)$  si el filtre  $h(t)$  és un passa-baix ideal donat per  $h(t)=f_c \text{sinc}(f_c t)$ , en què  $f_c=1/T_c$ .
- II.64) A la figura II.64a) es mostra l'esquema del sistema de modulació de FM estèreo que s'utilitza en la radiodifusió comercial.

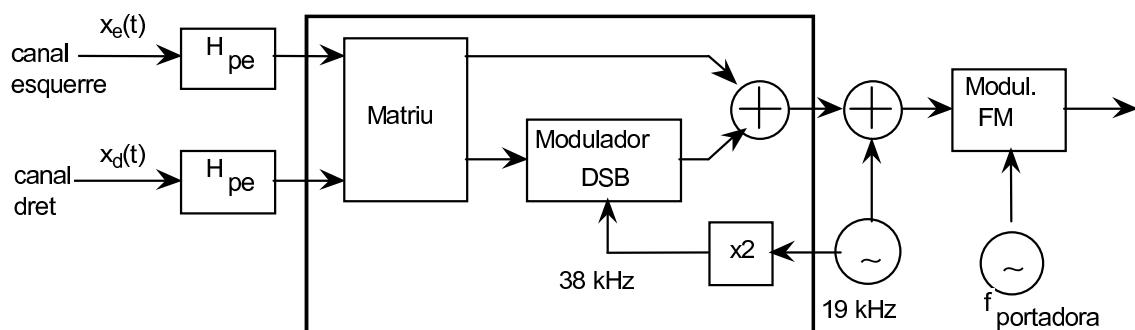


Fig. II.64a)

Els senyals  $x_e(t)$  i  $x_d(t)$  són senyals de banda limitada a 15 kHz corresponents, respectivament, als canals esquerre i dret, i en el sistema estèreo han de ser reproduïts independentment. Perquè el sistema sigui compatible amb un sistema mono, es generen els senyals suma  $x_e(t)+x_d(t)$  i diferència  $x_e(t)-x_d(t)$ , que han d'estar separats de manera que el sistema mono rebi i reproduexi el senyal suma únicament. El bloc marcat amb un traç discontinu de la figura anterior fa aquesta operació i és aquest bloc el que ens interessa. Els blocs retolats com a  $H_{pe}$  i *Modulador FM* de l'esquema anterior són propis del sistema de modulació en freqüència i no són objecte d'aquest estudi. Per simplificar l'anàlisi, suposarem que els filtres  $H_{pe}$  no hi són.

El bloc anomenat *Matriu* realitza la suma i la diferència dels dos senyals d'entrada, és a dir, que els senyals de sortida per les branques superior i inferior són respectivament  $(x_e(t)+x_d(t))/2$  i  $(x_e(t)-x_d(t))/2$ . La *modulació DSB* és equivalent a multiplicar el senyal pel cosinus de la freqüència indicada (38 kHz).

Tota la part corresponent al rectangle en traç continu es pot fer simplement amb un commutador i un filtre, tal com es mostra a la figura II.64b)

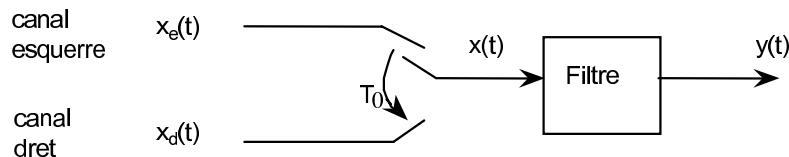


Fig. II.64b)

El commutador canvia de posició cada  $T_0=(2\cdot38)^{-1}$  mil·lisegons. Això significa que es pot entendre que el senyal  $x(t)$  a l'entrada del filtre és  $x(t) = x_e(t)p(t) + x_d(t)s(t)$ , amb  $p(t)$  i  $s(t)$  definits per:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \prod \left( \frac{t - 2nT_0}{T_0} \right) \quad \text{i } s(t) = 1 - p(t)$$

- a) Trobeu el desenvolupament en sèrie de Fourier de  $p(t)$  i a partir d'aquest el de  $s(t)$ .
  - b) Trobeu les transformades de Fourier de  $x_e(t)p(t)$ ,  $x_d(t)s(t)$  i de  $x(t)$ .
  - c) Demostreu que elegint convenientment el filtre, la sortida  $y(t)$  del sistema de la figura II.64b) és la suma de dos components, l'un proporcional a  $x_e(t) + x_d(t)$  i l'altre a  $(x_e(t) - x_d(t)) \cos(2\pi 38 \cdot 10^3 t)$ . És a dir, efectivament l'esquema de la figura 2 és equivalent al bloc marcat per traç continu de la figura Fig. II.64a)
- II.65) Es vol fer la inversió de banda (passar les baixes freqüències a altes i aquestes a baixes) d'un senyal  $x(t)$  de banda limitada a  $B$  Hz. Per fer-ho disposem del sistema de la figura. Calculeu els valors de  $T$  i d'amplada de banda  $B_h$  del filtre per poder fer la transposició.

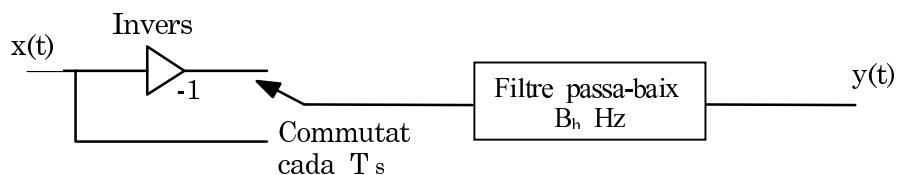


Fig. II.65)

#### P 4.4 Modulació per mostratge. Generació FM estèreo

Realitzi el problema II.64) i visualitzi en el domini temporal y freqüencial els senyals que intervenen en els dos sistemes de generació del senyal FM estèreo.

1. Visualitzi simultàniament i compari (en un marge temporal inferior a 0,5 mseg.) els senyals disponibles a l'entrada amb la sortida de l'esquema A en el domini temporal. Per què el senyal  $y_{mm}(t)$  està comprès entre  $x_e(t)$  i  $x_d(t)$ ?
2. Visualitzi simultàniament i compari (en un marge temporal inferior a 0,5 mseg.) els senyals disponibles a l'entrada amb la sortida del commutador de l'esquema B en el domini temporal. Per què el senyal  $y_c(t)$  està comprès entre  $x_e(t)$  i  $x_d(t)$ ?

3. Compari la sortida de l'esquema A amb la sortida del commutador de l'esquema B en el domini temporal. Perquè no són iguals ? Com es veuen aquestes diferències en el domini freqüencial ?
4. Per l'esquema B compari els senyals a l'entrada i a la sortida del filtre en el domini temporal, quina ha estat la utilitat del filtre ?
5. Per l'esquema B compari els senyals a l'entrada i a la sortida del filtre en el domini freqüencial, Com s'interpreta la utilitat del filtre en el domini freqüencial? Quina és la freqüència de tall aproximada del filtre ?
6. Compari la sortida de l'esquema A i la de l'esquema B en el domini freqüencial. Quines diferències d'amplitud s'observen ? Aquestes diferències afecten a totes les components (les centrades a l'origen i les centrades a més altes freqüències) ? Compari les expressions analítiques de les sortides dels esquemes A i B en el domini freqüencial per justificar aquestes possibles diferències. Com s'interpreta aquest fet en el domini temporal ?

#### P4.5 Recerca de periodicitats. Aplicació a l'obtenció del ritme cardíac

El senyal de l'electrocardiograma (ECG) és útil per determinar el ritme cardíac. A la figura P4.5a) es mostra un segment de 16 segons d'un senyal d'aquest tipus; bàsicament és un senyal periòdic (debat al moviment rítmic del cor). Aquest senyal conté un soroll superposat a causa dels moviments musculars, que recull el sensor; cada bategada genera un impuls, i el nombre de pulsacions per minut es pot determinar a partir de l'interval T entre dos impulsos consecutius d'aquest senyal:

$$P(\text{batecs/min}) = \frac{60(\text{seg/min})}{T(\text{seg/batec})}$$

La informació obtinguda a partir d'un ECG fetal és útil per monitorar el ritme cardíac del nen abans i durant el part. Per mesurar el ritme cardíac fetal es col·loca un sensor a l'abdomen de la mare i es calcula, a partir del senyal que s'obté, el nombre de pulsacions per minut que es detecten. Aquest procés presenta dificultats addicionals, ja que el sensor abdominal recull els batecs del fetus i els de la mare simultàniament, i per això és molt difícil separar-los i fer el càlcul de manera adequada. Per resoldre aquest problema es col·loca un segon sensor proper al cor de la mare que permet mesurar el seu ritme cardíac, i aquesta informació s'utilitza per eliminar el batec matern del senyal obtingut amb el sensor abdominal.

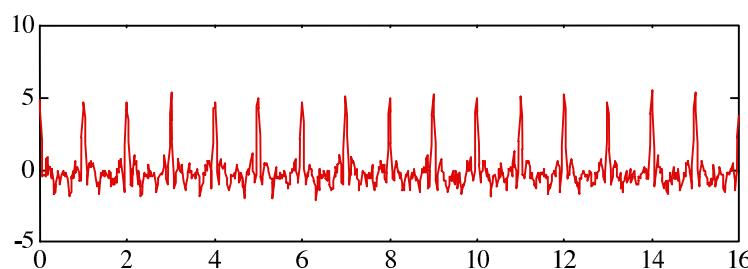


Fig. P4.5a)

A continuació es descriu breument un modelat matemàtic associat al supòsit que s'ha descrit abans. Suposem que el sensor col·locat a prop del cor matern recull el senyal  $x(t)$ , i el sensor abdominal recull el senyal  $z(t)$ . En el senyal  $z(t)$  apareix conjuntament la contribució de la mare i el fill. Podem suposar que el senyal abdominal és  $z(t) = x(t) * h(t) + y(t)$ . La raó d'aquest model és que el senyal de l'ECG recollit en el sensor abdominal no és idèntic al del sensor pròxim al cor ja que es recullen en punts diferents i s'han relacionat per mitjà d'un sistema lineal i invariant caracteritzat per  $h(t)$ , que simularia les condicions de propagació del senyal a través del cos.

Com que en el senyal resultant és difícil identificar els dos períodes per separat, és convenient determinar-los per mitjà de la transformada de Fourier. A la figura P4.5)b es mostra un exemple d'una possible transformada del senyal  $z(t)$ . Si a la figura P4.5)c es mostra la transformada de Fourier del senyal  $x(t)$ , obtingueu les pulsacions per minut de la mare  $P_m$  i del fill  $P_h$ .

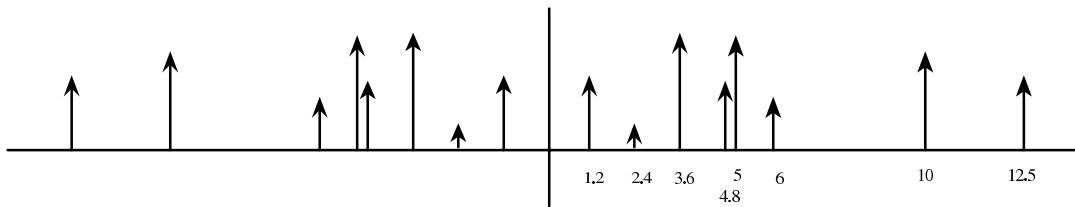


Fig. P4.5b). Mòdul de la transformada de Fourier de  $z(t)$

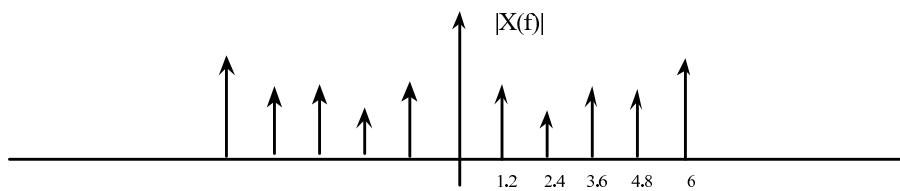


Fig. P4.5c). Mòdul de la transformada de Fourier de  $x(t)$

En la pràctica es disposa de diferents parells de senyals en què el pols de la mare i del fill són desconeguts. L'objectiu serà identificar-los.

1. Seleccioneu un exemple i proposeu un mètode per identificar els batecs/minut de la mare observant  $X(f)$ .
2. Identifiqueu  $X(f)H(f)$  en el senyal  $Z(f)$  i proposeu un mètode per identificar  $Y(f)$  i, conseqüentment, els batecs per minut del fetus.
3. Apliqueu els mètodes proposats a un altre exemple i comproveu que identifiqueu correctament les pulsacions per minut de la mare i del fill.
4. Si la resolució freqüencial és  $\Delta f$ , és a dir, si tenim valors de la TF només cada  $\Delta f$ , calculeu quin és el màxim error que es pot cometre en mesurar els batecs per minut.

II.66) a) Demostreu que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi a(t+nT)}{t+nT} = \omega_c \frac{\sin(2N+1)\omega_c t}{\sin(\omega_c t)}$$

en què  $\omega_c = \frac{\pi}{T}$ , i  $N$  tal que  $N < aT < N+1$

b) Calculeu  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \pi m / 4}{m^2}$

c) Descriuix com hauria de ser la funció  $x_b(t)$  perquè la transformada de Fourier verifiqui la igualtat  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{X_b(n/T_o)}{T_o} = 0$

II.67) Indiqueu quant val la suma  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin nBT}{nT}$

a) No depèn de  $B$

b) per a  $B = \pi$  i  $T=1$  val  $\pi/2$

c) Per a  $6\pi < BT < 8\pi$  val  $7\pi/T$

d) Cap de les anteriors

II.68) En aquest exercici s'estudia l'ús dels *filtres adaptats* per a comunicacions digitals. Imagineu que es vol enviar un missatge que per simplicitat suposem periòdic:  $m = \dots 110 110 110 \dots$

L'emissor transmet la informació per mitjà d'un senyal que agafa el valor  $+V$  durant el temps de símbol ( $T_s$ ) quan es transmet un 1, i el valor  $-V$  quan es transmet un 0. El senyal  $x(t)$  que s'envia per transmetre el missatge  $m$  es pot veure a la figura II.68a).

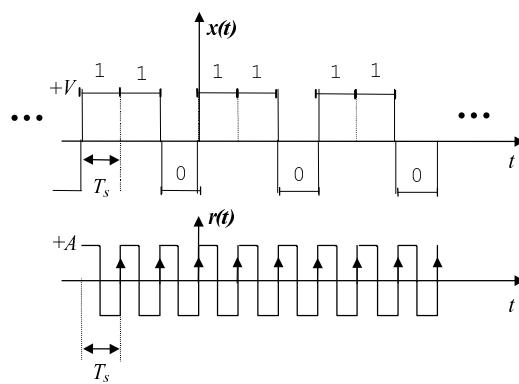
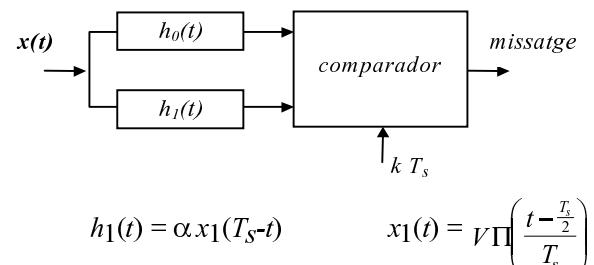


Fig. II.68a)



$$h_1(t) = \alpha x_1(T_s - t) \quad x_1(t) = V \prod \left( \frac{t - \frac{T_s}{2}}{T_s} \right)$$

$$h_0(t) = \alpha x_0(T_s - t) = -h_1(t) \quad \alpha = 1/(V^2 T_s)$$

Fig. II.68b)

Tal com vam estudiar a la pràctica P2.5, el receptor decideix el valor de cada símbol comparant, cada  $T_S$ , les sortides de dos filtres adaptats (fig. II.68b). Però perquè el sistema funcioni correctament cal que la comparació es faci perfectament *sincronitzada* amb l'emissor, és a dir, exactament al final de cada símbol. L'objectiu d'aquest problema és generar un *senyal de rellotge*,  $r(t)$ , com el que apareix a la figura II.68a), que indiqui l'instant de comparació per mitjà del flanc de pujada (marcat amb una fletxa a la mateixa figura). Per fer-ho es proposa l'estudi de l'esquema de la figura II.68c).

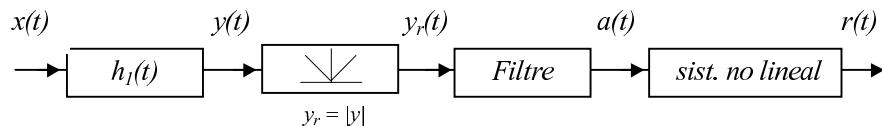


Fig. II. 68c)

- a) Dibuixeu el senyal a la sortida del filtre adaptat,  $y(t)$ , i la sortida del rectificador,  $y_r(t)$ . Per fer-ho, utilitzeu l'expressió del filtre  $h_I(t)$  inclosa a la figura II.68b).
  - b) Indiqueu l'expressió de la transformada de Fourier de  $y_r(t)$ . Especifiqueu aquesta transformada a la freqüència fonamental del senyal de rellotge  $r(t)$ .
  - c) Quines condicions haurieu d'imposar sobre el mòdul i la fase del filtre per obtenir a la sortida un sinus a la freqüència fonamental de rellotge? Obtingueu l'expressió del senyal  $a(t)$ .
  - d) Especificeu el sistema no lineal per obtenir el senyal de rellotge  $r(t)$  que es mostra a la figura II.68c). a partir de  $a(t)$ .
- II.69) Una forma de sintetitzar determinats tipus de sons en aplicacions d'àudio és la de generar un senyal  $x(t)$  com a sortida d'un filtre al qual s'aplica un tren de deltes. Aquest procediment és el que es mostra a la Fig. 69a).

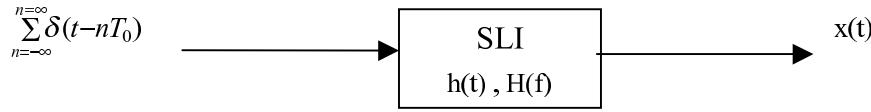
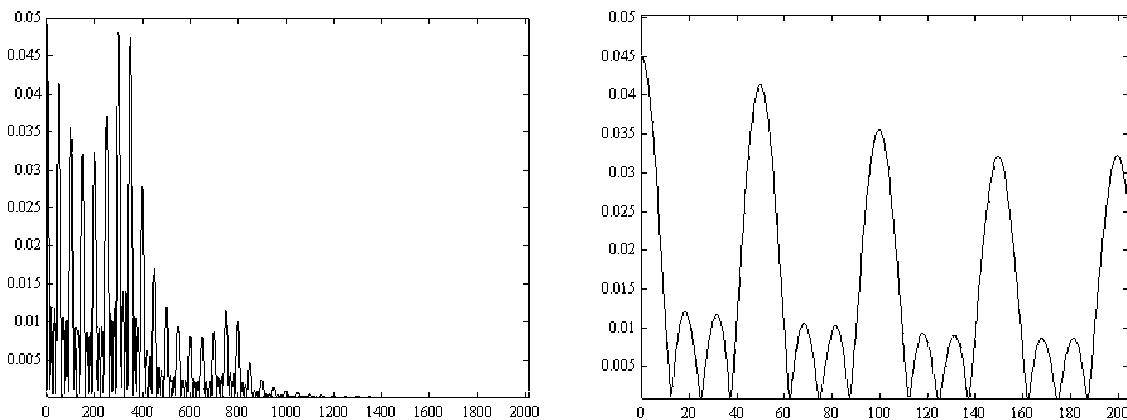


Fig. II.69a)

En aquest problema s'analitzen alguns aspectes d'aquest sintetitzador.

- a) Es pot afirmar en qualsevol cas que el senyal generat és periòdic? Justifiqueu la resposta.
- b) Amb aquest sistema es podria generar una sinusoida? En cas afirmatiu, de quina o quines freqüències es podria generar?
- c) El senyal generat  $x(t)$  s'aplica a un analitzador d'espectres s'obté la funció de la Fig. 69b). L'analitzador d'espectres ens dóna el mòdul de la transformada de Fourier del senyal observat en un interval de  $T$  segons. A partir d'aquesta funció, dibuixeu justificadament el mòdul de la resposta freqüencial del filtre, trobeu el valor de  $T_0$  i la duració  $T$  de la finestra d'observació. Què canviaria si s'augmenta el valor de  $T$ ?



*Fig. II.69b). Resultat de l'analitzador d'espectre.  
A la dreta, hi ha l'ampliació d'aquest resultat en el marge de 0 a 200 Hz.*

- d) Suposeu que substitueix, com a excitació del sintetitzador, el tren de deltes per un tren de polsos  $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Pi\left(\frac{t-nT_o}{\tau}\right)$ ; en què canviaria el resultat de l'analitzador d'espectres?
-

## Mostratge

### Mostratge ideal

Idealment les mostres temporals d'un senyal s'obtenen quan la funció de mostratge que multiplica el senyal consisteix en un tren de deltes separades pel període de mostratge  $T$ .

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \leftrightarrow Y(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{m}{T})$$

### Teorema de Nyquist

Un senyal de banda limitada a  $B$  es pot recuperar a partir de les seves mostres si es compleix que  $\frac{1}{T} \geq 2B$ .

### Mostratge natural

El mostratge ideal no és realitzable, per tant, en comptes de funcions delta s'hauran d'utilitzar polsos amb una certa duració apreciable  $\tau$ .

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)p(\frac{t-nT}{\tau}) \leftrightarrow Y(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P(\frac{m}{T})X(f - \frac{m}{T})$$

### Mostratge real

El mostratge real s'utilitza en la pràctica perquè facilita no solament la discretització temporal sinó també la posterior discretització d'amplituds. S'utilitzen per a aquest fi dispositius de mostratge i manteniment que matemàticament equivalen a l'expressió següent:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)p(\frac{t-nT}{\tau}) \leftrightarrow Y(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P(f)X(f - \frac{m}{T})$$

### Fórmula d'interpolació

Per recuperar senyals analògics a partir de les seves mostres es fa una interpolació d'aquestes mostres.

Interpolació ideal  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)sinc(\frac{t-nT}{T})$

Interpolació aproximada  $x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT)$

**PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS**

- II.70) Tenim un senyal  $y(t)$  amb transformada de Fourier  $Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_0(f - nf_0)$  periòdica i  $f_0 = 1/T$ .

Indiqueu quina afirmació és certa

a)  $Y(f) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(nT)e^{-j2\pi nTf}$

b)  $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t)e^{-j2\pi n f_0 t}$

c)  $y(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(-nT)\delta(t + nT)$

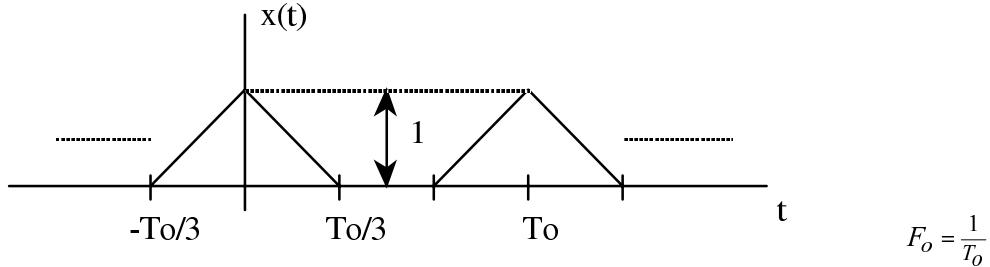
d)  $Y(f) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(nT)e^{j2\pi nTf}$

- II.71) Un senyal de banda limitada a 50 Hz es mostreja a la freqüència de Nyquist i les mostres obtingudes són les següents:

$$x(nT_s) = \begin{cases} -1 & -4 \leq n < 0 \\ 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{la resta} \end{cases}$$

Trobeu  $x(t)$  i doneu el valor de  $x(0,005)$

- II.72)



Si considerem que el senyal anterior admet la formulació,  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT_o)$

- a) Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier (DSF) del senyal  $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - 4nT_o)$ .

- b) Si el senyal anterior  $y(t)$  es fa passar per un sistema  $H(f) = \prod(2T_o(|f| - 3F_o))$ , trobeu el DSF del senyal de sortida  $z(t) = y(t) * h(t)$  (expressió analítica tancada).

- c) Si es mostreja el senyal anterior  $z(t)$  amb un període de mostratge  $T_m$ , avalueu el valor màxim de  $T_m$  (en funció de  $T_o$ ) perquè el mostratge verifiqui el criteri de Nyquist.

- II.73) El senyal  $x(t)$  està caracteritzat per l'espectre de la figura II.73a). Es vol obtenir  $x(t/4)$  i, per aquest motiu, s'utilitza l'esquema de la figura II.73b)

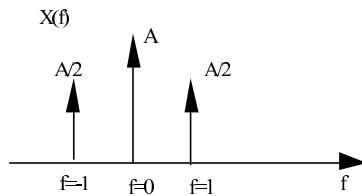


Fig. II.73a)

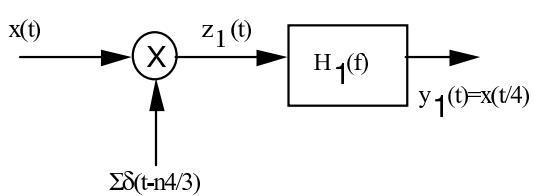
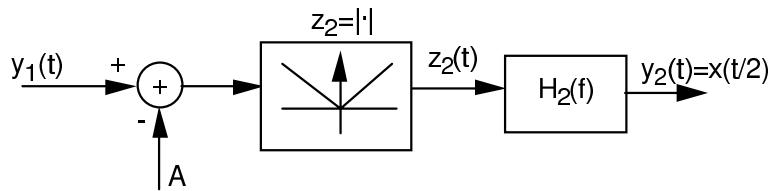


Fig. II.73b)

- a) Dibuixeu l'espectre de  $z_1(t)$  entre  $f=-3$  i  $f=3$ . Trobeu el filtre  $H_1(f)$  ideal que permeti obtenir a la sortida  $y_1(t) = x(t/4)$ .



- b) Suposeu que el senyal  $y_1(t)$  és l'entrada del sistema de la figura II.73c). Dibuixeu l'espectre de  $z_2(t)$  entre  $f=-3$  i  $f=3$  i trobi el filtre  $H_2(f)$  ideal que permeti obtenir  $y_2(t) = x(t/2)$ .

- II.74) Sigui el senyal  $x(t)$  de banda limitada a  $B$  Hz que es vol transmetre a través d'un sistema de comunicació, a partir de les seves mostres. Aquest procés es pot realitzar amb l'esquema de la figura II.74a). Suposeu que el sistema de comunicació no altera les mostres del senyal  $x(t)$ .

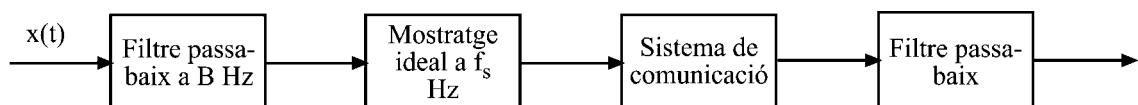


Fig. II.74a)

- a) Justifiqueu la presència del primer filtre de l'esquema anterior. Quina és la freqüència de mostratge  $f_s$ ? Quina és l'amplada de banda del darrer filtre? Justifiqueu les respostes.

Suposem que per raons tecnològiques no es disposa d'un sistema de mostratge que treballi a una velocitat tan gran com la necessària,  $f_s$ , però sí que es disposa de sistemes que fan el mostratge a  $f_M=B$ . En aquest cas es proposa com a alternativa l'esquema de la figura II.74b).

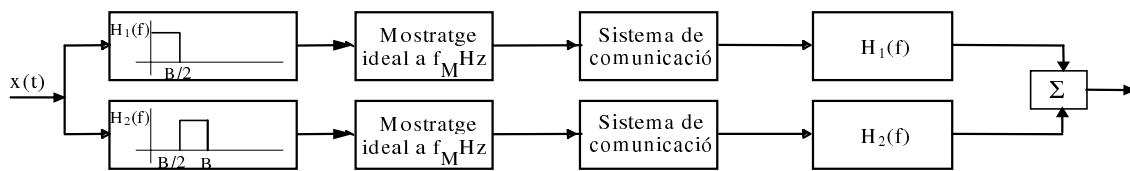


Fig. II.74b)

- b) Analitzeu el comportament global de l'esquema anterior (sense considerar el sistema de comunicació) i comproveu que la solució proposada fa la mateixa funció que l'esquema de la figura II.74a)
- II.75) Aquest exercici és un exemple entre els molts possibles de l'ús d'un banc de filtres. A continuació analitzem alguns aspectes relacionats amb un banc de filtres d'infinits elements segons l'esquema de la figura II.75).

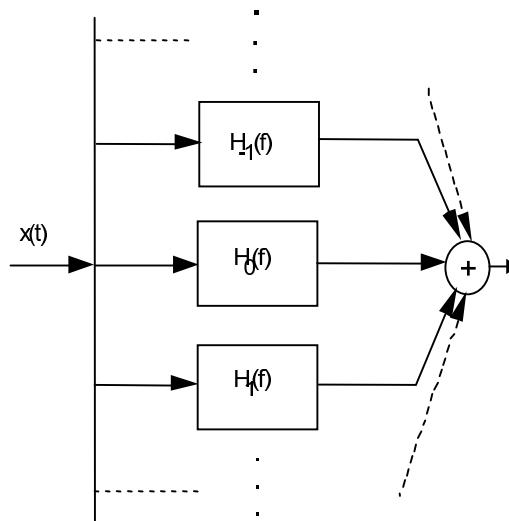


Fig. II.75)

- a) Si la resposta freqüencial dels infinitis filtres és  $H_n(f) = \exp(j2\pi nTf)$ , quin és el comportament del sistema per a un senyal d'entrada  $x(t)$ ?
- b) Suposeu ara el cas que cada filtre  $H_n(f)$  s'obté a partir d'un filtre  $H(f)$  fent  $H_n(f) = H(f-nf_0)$ . Com ha de ser  $H(f)$  perquè la resposta impulsional global del sistema sigui un retardador? Pot ser aquest retard un valor qualsevol?

- II.76) L'esquema de la figura 76a) permet transmetre un senyal  $x(t)$  per un sistema de comunicació utilitzant les seves mostres. En aquest problema s'analitza l'efecte dels filtres i el mostratge del sistema. Considereu, doncs que el sistema de comunicacions no altera el senyal  $y_m(t)$ .

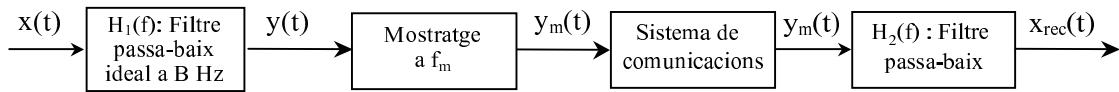


Fig. II.76a)

- Si el senyal  $x(t)$  és de banda limitada a  $B$  Hz, indiqueu quina és la mínima freqüència de mostratge,  $f_m$ , suposant que el mostratge és ideal. Quina és l'amplada de banda del filtre  $H_2(f)$  per obtenir  $x_{rec}(t) = x(t)$ ?
- Suposeu que s'utilitza un dispositiu de mostratge pràctic (coneugut també com a Sample&Hold), que es pot modelar amb el sistema de la figura 76b). Obtingueu i dibuixeu aproximadament la TF del senyal  $y_m(t)$ , utilitzant la mínima freqüència de mostratge ( $f_m = 1/T_m$ ). Considereu un senyal  $x(t)$  qualsevol, d'amplada de banda  $B$  Hz.
- Doneu l'expressió del filtre passa-baix  $H_2(f)$  perquè  $x_{rec}(t) = x(t)$  quan s'utilitza l'esquema de mostratge pràctic de l'apartat anterior.

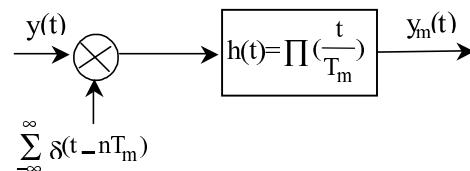


Fig. 76b)

A continuació s'analitza el cas d'un senyal no limitat en banda. Suposeu que  $x(t)$  ve donat per  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) e^{-\alpha t^2}$  i que es coneix el parell transformat  $e^{-\pi t^2} \xleftarrow{F} e^{-\pi f^2}$

- Obtingueu la transformada de Fourier del senyal  $x(t)$ , així com la seva àrea:  $\int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$ .
- Per fixar una freqüència de mostratge en el sistema de la figura 1, calculeu l'amplada de banda efectiva del senyal  $x(t)$  donat per l'expressió  $B_{ef} = f_0 + \frac{B_i}{2}$ , on  $B_i = \frac{1}{X(f_0)} \int_0^{\infty} X(f) df$ .
- Suposeu que el senyal  $x(t)$  és passa-banda i, per tant que  $X(f)$  als voltants de  $f = 0$  és negligible. Calculeu l'error quadràtic mitjà ( $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt$ ) per mesurar l'efecte de limitar en banda el senyal  $x(t)$  amb el filtre passa-baix ideal  $H_1(f)$  quan  $B = B_{ef}$ . Expresseu aquest error en funció de  $\alpha$  i la funció  $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_u^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ .

- II.77) Per representar en un oscil·oscopi senyals periòdics de període molt curt es poden fer servir tècniques de mostratge, que permeten visualitzar el senyal quan l'oscil·oscopi no permet fer-ho directament.

A la figura II.77a) es mostra el principi bàsic de funcionament que consisteix a mostrejar el senyal agafant una mostra per període. L'instant de mostratge d'un període en relació amb l'anterior està lleugerament desplaçat la quantitat  $\Delta T$ .

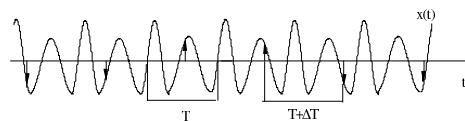


Fig. II.77a)

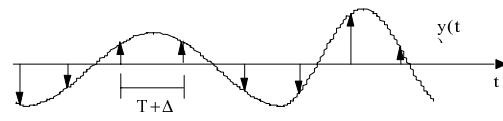
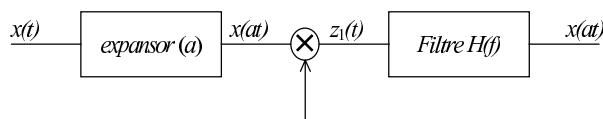


Fig. II.77b)

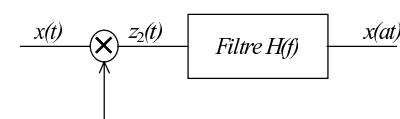
Si el senyal mostrejat passa a través d'un filtre passa-baix apropiat, el senyal que en resulta és proporcional a l'original però expandit en temps, com es mostra a la figura II. 77) b:  $y(t)$  és proporcional a  $x(at)$  amb  $a < 1$ . En aquest problema s'estudia com en mostrejar  $x(t)$  cada  $T+\Delta T$  i filtrar adequadament s'obté, efectivament,  $x(at)$ .

- Demostreu que l'esquema de la figura II.77) c permet recuperar el senyal  $x(at)$ . Indiqueu què ha de complir la freqüència de mostratge  $f_m = 1/(T+\Delta T)$  i com ha de ser el filtre  $H(f)$ , suposant que el senyal  $x(t)$  té una amplada de banda  $B_x$ .
- La implementació de l'*expansor* no és possible en general per a senyals temporals (excepte si s'emmagatzema el senyal), ja que el sistema no és causal. L'objectiu d'aquest problema és comprovar que, per a senyals periòdics, es pot obtenir el mateix resultat amb el mostratge de  $x(t)$  per sota de la freqüència de Nyquist. Demostreu que l'esquema de la figura II.77)d és equivalent a l'esquema de la figura II.77)c i especifiqueu la relació que hi ha d'haver entre  $a$ ,  $T$  i  $\Delta T$ . Per fer-ho, n'hi ha prou que vegeu que  $z_1(t)$  és idèntica a  $z_2(t)$ .
- Expresseu el rang de valors de  $\Delta T$  per als quals és possible obtenir  $x(at)$  en funció de  $B_x$ . Justifiqueu el resultat.



$$\sum \delta(t - n(T + \Delta T))$$

Fig. II.77c)



$$\sum \delta(t - n(T + \Delta T))$$

Fig. II.77d)

Si  $x(t)$  és el senyal la transformada de Fourier del qual apareix a la figura II.77e), es demana:

- d) Quin és el període i l'amplada de banda de  $x(t)$ ?

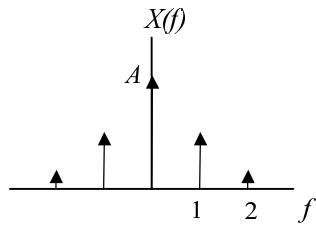
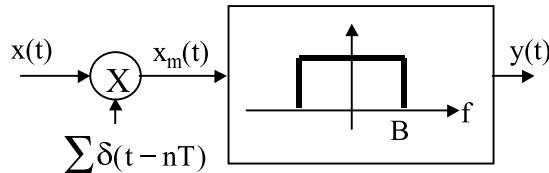


Fig. II.77e)

Suposeu que es vol obtenir  $x(t/6)$

- e) Comproveu que és possible fer-ho a partir de l'esquema II.77d) i especifiqueu la freqüència de mostratge i el filtre  $H(f)$ .
- f) Finalment, interpreteu aquest sistema en el domini freqüencial. Per fer-ho, utilitzeu el senyal de la figura II.77e) i dibuixeus tots els senyals que surten als esquemes II.77)c i d. Representeu els senyals  $z_1(t)$  i  $z_2(t)$  a partir de  $x(at)$  i  $x(t)$ , respectivament, i tingueu cura en les freqüències  $|f| < 1/3$ .
- II.78) Habitualment el mostratge d'un senyal ve condicionat per la seva amplada de banda, adaptant-se la freqüència de mostratge  $f_m$  i el filtre de recuperació a aquesta característica. Hi ha, però, situacions en què no és així, com per exemple quan el filtre recuperador és fix. Aquest és el cas de la televisió en què el sistema visual humà actua de filtre recuperador del senyal analògic. Això pot originar alguns problemes com, per exemple, el conegut com a *flicker* en què una lluminositat constant no es percep com a tal sinó que té fluctuacions. En aquest problema s'analitza una versió simplificada i unidimensional d'aquest efecte.
- a) Un senyal real  $x(t)$  qualsevol es mostreja de forma ideal (tren de deltes). Es pot afirmar que el senyal resultant  $x_m(t)$  i/o la seva transformada de Fourier  $X_m(f)$  és un senyal periòdic? En cas afirmatiu doneu l'expressió del seu desenvolupament en sèrie de Fourier, i especificeu clarament els coeficients de la sèrie.
- Suposeu a partir d'ara, i per la resta de l'exercici un senyal  $x(t) = A$  constant per a tot  $t$ .
- b) Repeteixi l'apartat a) per a aquest senyal  $x(t)$ . És a dir, es pot afirmar que  $x_m(t)$  (mostratge ideal de  $x(t)$ ) i/o la seva transformada de Fourier  $X_m(f)$  és un senyal periòdic? Igual que abans, especificeu desenvolupaments en sèrie.
- c) Sigui  $x(t) = A$  el senyal d'entrada de l'esquema de la figura i suposeu que  $f_m = 3B$ . Representeu tant en temps com en freqüència cadascun dels senyals que intervenen en l'esquema.



- d) Per un valor de  $B$  fix, quin és el valor mínim de  $f_m$  per mostrejar correctament el senyal  $x(t)$  (el mostratge serà correcte si  $y(t)$  és proporcional a  $x(t)$ ).
- e) Suposeu que  $f_m = 2B/3$ . Es demana l'expressió del senyal  $y(t)$  que recupera.
- f) Suposeu que es modifica l'esquema anterior de forma que de  $x_m(t)$  es transforma prèviament a  $z(t) = x_m(\alpha t)$  i aquest és el senyal que es filtra. Per al cas anterior,  $f_m = 2B/3$ , obtingueu el valor mínim de  $\alpha$  per poder recuperar  $x(t)$ .
- II.79) Tal com s'ha analitzat al problema II.77, mitjançant el mostratge es pot visualitzar amb un oscil·loscopi, sense distorsió i en certes condicions, senyals de freqüències superiors a l'amplada de banda de oscil·loscopi.
- Doneu l'esquema que permet realitzar aquesta visualització.
  - Es vol visualitzar un senyal periòdic de període  $10\mu\text{seg}$  i d'amplada de banda 300 kHz amb un oscil·loscopi d'amplada de banda de 60 kHz. Quina és la freqüència de mostratge necessària? Doneu l'expressió analítica del senyal que realment s'està visualitzant a l'oscil·loscopi.
  - És condició indispensable que el senyal que es vol visualitzar sigui periòdic? Justifiqueu la resposta.
- II.80) Tenim que  $x(t)$  i  $y(t)$  són dos senyals de banda limitada a  $B$  Hz. Es forma el senyal  $z(t) = x(t) \cos 2\pi 2Bt + y(t)$ , que es mostreja con un interval de  $T$  segons entre mostres. Doneu el valor de  $T$  i proposeu un sistema que permeti recuperar els senyals  $x(t)$  e  $y(t)$ .
- II.81) Suposeu que volem trobar la sortida  $y(t)$  que s'obté en aplicar el senyal  $x(t)$ , de banda limitada  $B_x$  Hz, a un filtre  $h(t)$ . Com que  $y(t)$  també ha de ser de banda limitada  $B_x$ , queda perfectament determinada per les seves mostres. En aquest problema es calcularan les mostres de  $y(t)$  a partir de les  $x(t)$  per mitjà del càlcul numèric.

$$\text{Tenim} \quad x_m(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \quad y_m(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} y(nT) \delta(t - nT) \quad (1/T > 2B_x)$$

- Determineu  $h_m(t)$  perquè  $y_m(t) = x_m(t) * h_m(t)$ . Us suggerim que relacioneu gràficament  $H_m(f)$  i  $H(f)$ .
- Expressant  $h_m(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_i(nT) \delta(t - nT)$ , comproveu que  $y(nT)$  es pot determinar amb l'expressió  $y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) h_1((n-k)T)$ .

- II.82) Un senyal  $x(t)$  de banda limitada a  $B$  Hz que s'ha desplaçat en freqüència (modulat) mitjançant  $\cos 2\pi f_0 t$ , es pot recuperar amb un sistema com el que es mostra a la figura II.82b), en què  $x_s(t) = x(t) \cos 2\pi f_0 t$ . En aquest exercici es veurà que també és possible recuperar  $x(t)$  si se substitueix el  $\cos 2\pi f_0 t$  per un tren de deltes separades  $T=1/f_0$ . És a dir, que si fem un mostratge ideal (deltas) del senyal modulat  $x_s(t)$ , a una freqüència de mostratge  $f_0$ , amb un filtre passa-baix també es pot recuperar  $x(t)$ . Aquesta alternativa es mostra a figura II.82a).

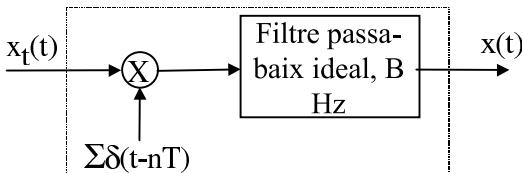


Fig. II.82a)

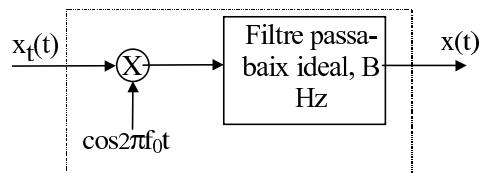


Fig. II.82b)

Per a un exemple qualsevol, dibuixeu  $x_s(t)$  i  $x_t(t)$  mostrejat i compareu-lo amb el mostratge directe de  $x(t)$ . Feu el mateix en el domini transformat. Demostreu que, efectivament, l'esquema II.82a) permet recuperar  $x(t)$ . És vàlid aquest procediment per a qualsevol senyal modulat o, per contra, hi ha alguna restricció sobre el valor del desplaçament freqüencial  $f_0$ ? Paral·lelament, hi ha alguna restricció sobre  $f_0$  si es fa servir el sistema de la figura II.82b)?

- II.83) Tenim el senyal  $x(t)$  que presenta la transformada de Fourier de la figura II.83a):

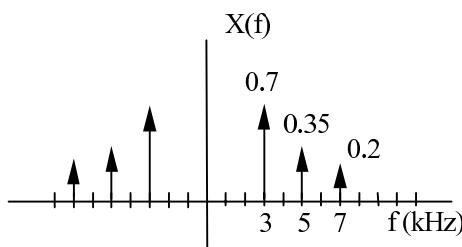


Fig. II.83a)

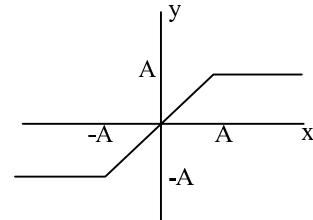


Fig. II.83b)

- Obtingui l'expressió de  $x(t)$ , és  $x(t)$  periòdica? Si ho és, calculeu-ne el període. Justifiqueu la resposta.
- Determini si un sistema mostrejat ideal ( $T[x(t)] = x(t) \sum \delta(t-nT)$ ) és lineal, invariant, causal o estable.
- Si es mostreja  $x(t)$  amb una freqüència de mostratge c.1)  $f_0 = 15$  kHz; c.2)  $f_0 = 14,5$  kHz; c.3)  $f_0 = 6$  kHz:

Determineu per a cada cas si el senyal mostrejat és periòdic i, si ho és, digui quin període té. Determineu per a cada cas si el senyal mostrejat permet recuperar  $x(t)$  i, si la resposta és afirmativa, proposi un mètode.

- d) Determini si un sistema amb una característica entrada sortida com la que es mostra a la figura 2 és lineal, invariant, causal o estable.
- e) Si el senyal  $x(t)$  passa per un dispositiu com el de la figura II.83b), quins efectes esperaríeu sobre el senyal temporal i la seva transformada de Fourier si a)  $A=4$  i b)  $A=1,5$ ?

### **PROBLEMA RESOLT**

---

En aquest exercici s'analitzaran dos aspectes pràctics del mostratge molt vinculats als processos de conversió de senyal analògic a senyal digital i a l'inrevés. S'il·lustraran els resultats amb un senyal de veu.

De vegades no és possible fer el mostratge d'un senyal verificant el teorema de mostratge, ja sigui perquè el senyal no és de banda limitada o bé per altres restriccions, típicament tecnològiques. Per analitzar aquest problema:

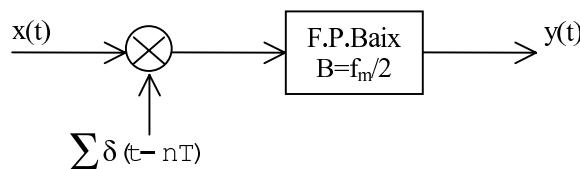
- 1) Supposeu un senyal  $x(t)$  que es vol mostrejar, format per dues sinusoides de freqüències 1 kHz i 2,5 kHz. El mostratge es fa amb un tren de deltes i la recuperació amb un filtre ideal (freqüència de tall  $B=f_{mostratge}/2$ ).
  - a) Cada quant s'agafaria una mostra del senyal per no perdre informació de  $x(t)$ ?
  - b) Supposeu que es fa el mostratge a la freqüència de 3 kHz. Obtingueu el senyal mostrejat, així com el senyal recuperat.
  - c) Una alternativa àmpliament utilitzada és la de filtrar prèviament el senyal  $x(t)$  amb un filtre idèntic al que s'ha utilitzat per a la recuperació. Justifiqueu aquesta alternativa.
  - d) Compareu  $x(t)$  amb els senyals obtinguts utilitzant i sense utilitzar el filtratge presentat a l'apartat anterior.
- 2) Analitzeu el mateix problema utilitzant el senyal de veu.

Un altre aspecte de gran importància en el procés de mostratge és el filtre utilitzat per recuperar el senyal. Aquí s'analitzarà un sistema molt simple que en certes condicions pot ser prou eficient. Es basat en el sistema d'interpolació per rèplica, conegut amb el nom ZOH (*zero-order hold*).

- 3) A partir del senyal  $x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT)\delta(t-nT)$ 
  - a) Utilitzant el programa *mostratge a exercicis complementaris* seleccioneu el senyal  $x_d(t)$  i compareu-lo amb el senyal original  $x(t)$ . Feu una ampliació (*zoom*) per observar millor la relació entre ambdós senyals. Obtingueu l'expressió analítica de  $x_d(t)$  en funció de  $x(nT)$ .
  - b) Identifiqueu el senyal  $x_d(t)$  com a resposta d'un sistema LI quan l'entrada és  $x_m(t)$ . Obtingueu la resposta impulsional i freqüencial d'aquest sistema LI.

- c) Suposeu que a la sortida del sistema ZOH (sistema LI de l'apartat anterior) es connecta en sèrie un segon sistema ZOH, però amb amplitud de la resposta impulsional igual  $1/T$ . Analitzeu el senyal de sortida  $x_1(t)$  quan l'entrada és igualment el senyal mostrejat  $x_m(t)$ . Quin tipus d'interpolació s'obté?
- d) Quin efecte tindrà sobre el senyal recuperat en anar incrementant el nombre de sistemes ZOH connectats en sèrie?
- 4) Analitzeu el comportament dels sistemes de recuperació ZOH amb el senyal de veu.

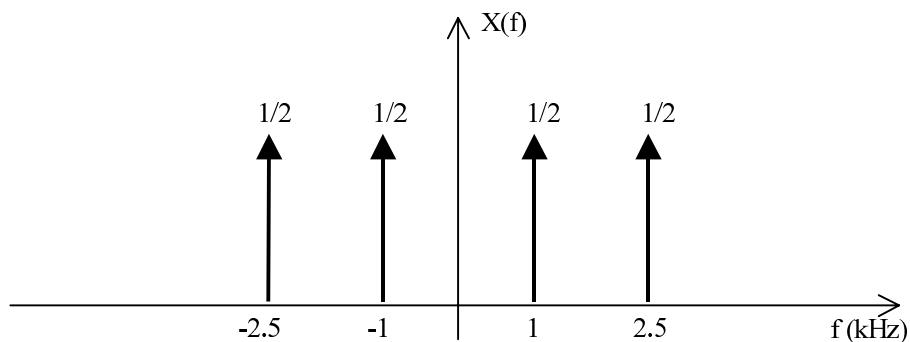
### Resolució de l'exercici

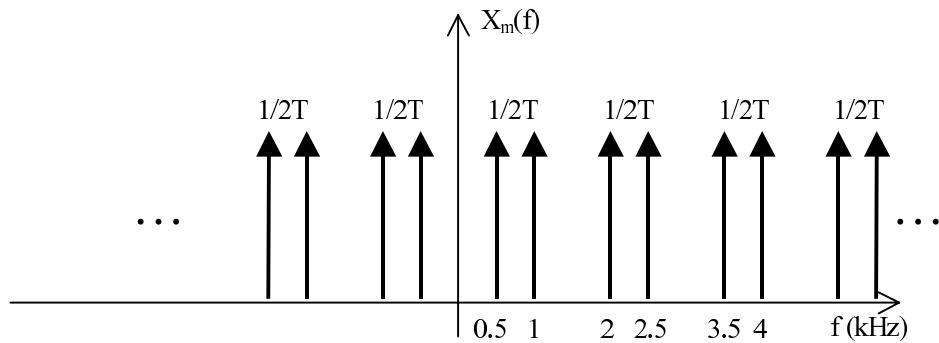


- 1.a) La freqüència màxima de  $x(t)$  és de 2,5 kHz, per tant, s'ha de mostrejar el senyal  $x(t)$  com a mínim a la velocitat de 5 kHz per poder recuperar exactament  $x(t)$  amb el sistema descrit. Per tant, la separació màxima entre les deltes ha de ser  $T=1/5000=200\mu\text{seg}$ .
- 1.b)  $f_m=3000 \text{ Hz}; T=1/3\text{ms}; x(t)=\cos(2\pi 1000t)+\cos(2\pi 2500t)$

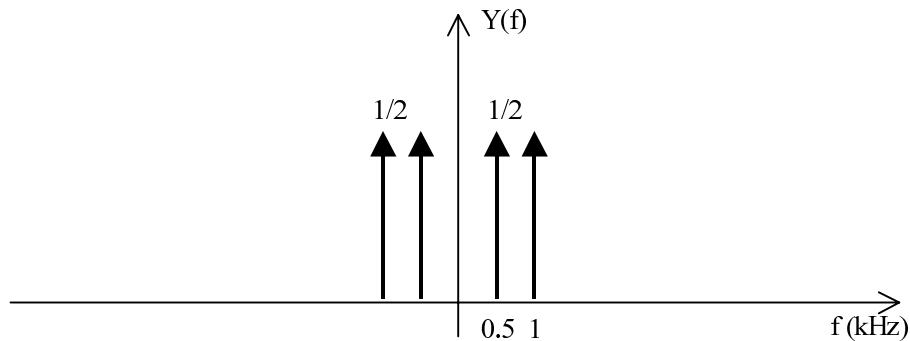
$$x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} [\cos(2\pi n / 3) + \cos(5\pi n / 3)]\delta(t-n/3000)$$

En freqüència:





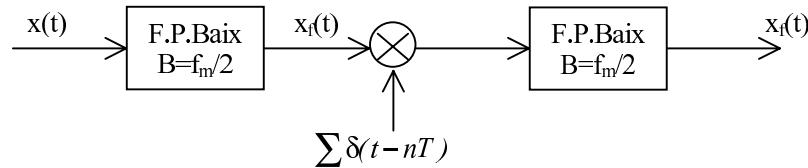
En filtrar amb un filtre passa-baix  $H(f)=T\Pi(f/3000)$  a la sortida s'obtindrà l'espectre següent:



per tant, el senyal temporal que s'obté és:  $y(t) = \cos(2\pi 500t) + \cos(2\pi 1000t)$

En no verificar-se el teorema de mostratge veiem que apareix un component a la sortida que no era present a l'entrada. Aquest component de 500 Hz és degut a l'efecte d'*aliasing*.

- 1.c) Com que el senyal de sortida serà forçosament un senyal de banda limitada a  $B$  Hz (1500 Hz en aquest cas) podem limitar a  $B$  Hz el senyal que es vol mostrejar.



Per a aquest senyal,  $x_f(t)$ , sí que es verificarà el teorema de mostratge i, per tant, el que recuperarem serà aquest senyal filtrat. En el procés de mostratge no es produeix *aliasing*. Per això aquest primer filtre es coneix com a filtre antialiasing. Tot i així, aquest senyal que recuperem és una versió distorsionada de  $x(t)$ .

- 1.d) Representem els tres senyals en el temps mitjançant l'eina de simulació. Potser visualment pot semblar una aproximació millor a  $x(t)$  el senyal  $y(t)$  que no pas  $x_0(t)$ . Algunes causes d'aquesta primera impressió poden ser perquè té un marge dinàmic més similar, perquè  $y(t)$  i  $x(t)$  tenen dos components mentre que  $x_0(t)$  només en té un, o perquè  $y(t)$  i  $x(t)$  tenen la mateixa freqüència fonamental (500 Hz).

En canvi, si utilitzem mesures quantitatives com, per exemple, error quadràtic mitjà entre  $x(t)$  i  $x_0(t)$  i entre  $x(t)$  i  $y(t)$ , dóna un valor més petit per al primer cas que per al segon, la qual cosa està d'acord amb el resultat demostrat en el problema II.29. Aquest resultat és lògic. El senyal  $x_0(t)$  es diferencia de  $x(t)$  en el component 2,5 kHz, mentre que  $y(t)$  es diferencia de  $x(t)$  en dos components, el de 2,5 kHz, que no apareix a  $y(t)$ , i el de 500 Hz, que no hi és en el senyal  $x(t)$ .

- 2) Mitjançant l'eina de simulació seleccionem el senyal de veu i podem escoltar i comparar els senyals  $x(t)$  (original),  $x_0(t)$  i  $y(t)$  per diferents freqüències de mostraatge. Per a aquest senyal, però, es fa difícil apreciar diferències significatives entre  $x_0(t)$  i  $y(t)$ . Per contra, sí que s'aprecia perfectament la degradació que pot introduir el mostraatge quan no es respecta el teorema de mostraatge.

- 3.a) Veiem que  $x_0(t)=x(0)$  per a  $0 \leq t < T$ ,  $x_0(t)=x(T)$  per a  $T \leq t < 2T$ ,  $x_0(t)=x(2T)$  per a  $2T \leq t < 3T$ .

$$\text{Per tant, podem escriure: } x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT) \Pi\left(\frac{t-T/2-nT}{T}\right)$$

- 3.b) L'expressió anterior es pot escriure com:

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT) \delta(t-nT) * \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) = x_m(t) * \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

Per tant, efectivament  $x_0(t)$  es pot entendre com la sortida d'un sistema LI quan l'entrada és  $x_m(t)$ . La resposta impulsional  $h_0(t)$  i la resposta freqüencial  $H_0(f)$  d'aquest sistema és:

$$h_0(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \Leftrightarrow H_0(f) = T \operatorname{sinc}(Tf) e^{-j\pi fT}$$

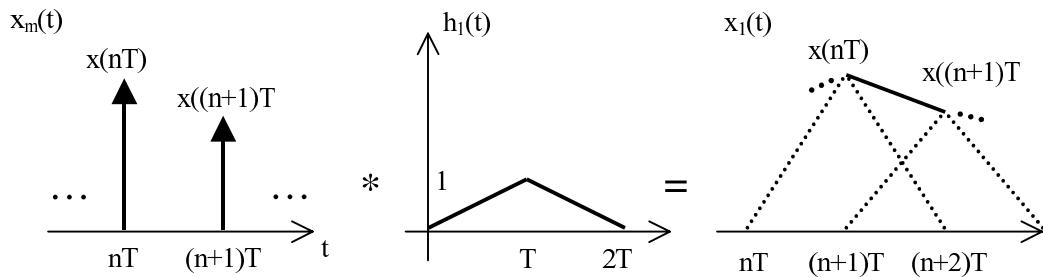
- 3.c) La resposta impulsional del conjunt dels dos sistemes serà:

$$h_1(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) * \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) = \Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right)$$

Per tant, el senyal recuperat serà:

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT) \delta(t-nT) * \Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT) \Lambda\left(\frac{t-T-nT}{T}\right)$$

A la figura següent es pot veure un exemple d'aquest resultat.

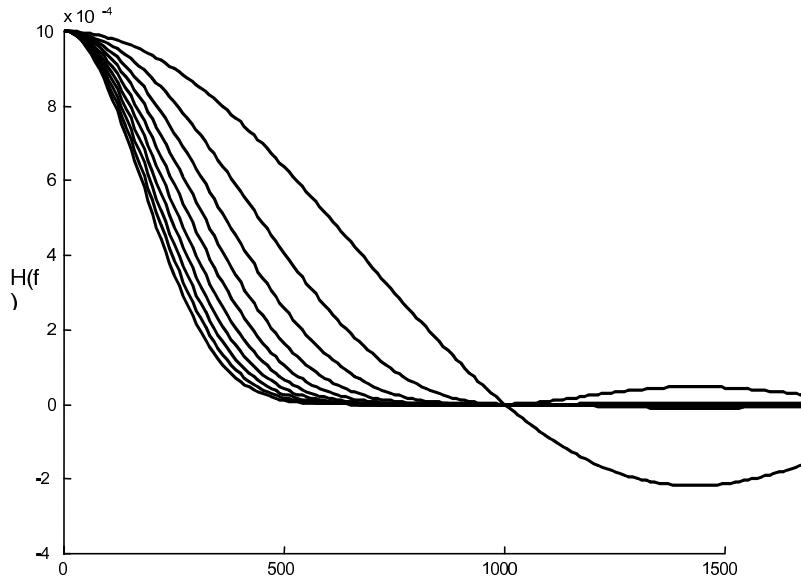


La interpolació resultant és una interpolació lineal, és a dir,  $x_l(t)$  està constituïda per una successió de segments de recta que van d'una mostra de  $x(t)$  a la següent, tret d'un retard de  $T$  segons que introduceix el filtre en ser causal.

- 3.d) A la figura següent es mostren les diferents respuestes freqüencials  $H(f)$  que s'obtenen en incrementar el nombre de sistemes ZOH connectats en sèrie. L'expressió analítica d'aquesta família de funcions és:

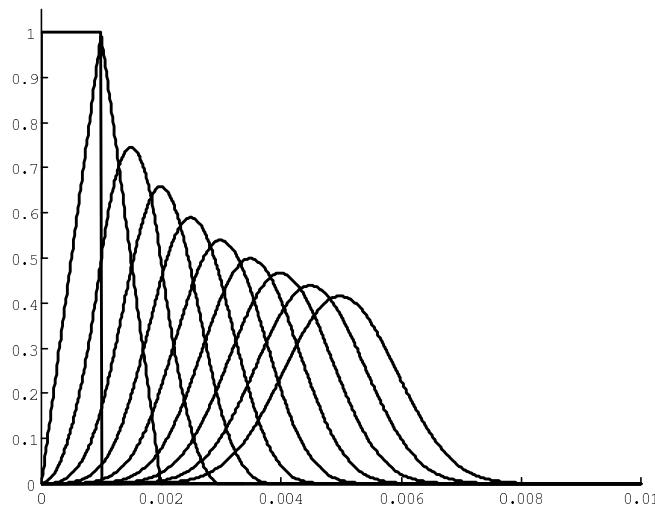
$$H_i(f) = T \operatorname{sinc}^i(Tf) \exp(-j\pi(i+1)Tf)$$

No es representa el component de l'exponential. Aquest component només afegirà un terme de fase lineal a les funcions representades. L'exemple està fet per al cas de  $f_m=1/T=1000$ . D'aquesta figura es pot deduir que els *àlies* de  $X(f)$  ( $X(f-nf_m)$ ) que conté l'espectre  $X_m(f)$  s'aniran filtrant cada cop millor a mesura que augmenta  $i$  (nombre de sistemes connectats).



Per contra, en augmentar  $i$  es redueix l'amplada de banda també a la banda d'interès. Recordeu que el filtre ideal seria un filtre passa-baixos d'ampla de banda  $f_m/2$  (500 Hz per a aquest exemple). Per tant, a la vegada que estem atenuant millor els components no desitjats també hi ha més distorsió del component desitjat  $X(f)$ . Cada cop tenim una versió de més baixa freqüència del senyal original.

També es pot fer una ànalisi des del punt de vista temporal. A la figura següent es pot veure la família de respostes impulsinals corresponents al conjunt de funcions de la figura anterior. Es pot apreciar el pols rectangular ( $i=0$ ), el triangular ( $i=1$ ) i, en general, com evoluciona la resposta impulsinal del sistema global en incrementar  $i$ .



En incrementar  $i$  també s'incrementa el nombre de mostres que intervenen en cada tram interpolat. Així, com ja hem vist, per a  $i=0$  només intervé una mostra per fer la interpolació en un tram de duració  $T$  (interpolació per rèplica), mentre que per a  $i=1$  n'hi intervenen dues (interpolació lineal). En general intervenen  $i+1$  mostres per interpolar cada tram de duració  $T$ . Això representa una tendència a la suavització del senyal interpolat, la qual cosa està d'acord amb la conclusió extreta en fer l'ànalisi freqüencial sobre el comportament de baixa freqüència del senyal resultant.

També es pot apreciar el desplaçament de  $T/2$  (=0,0005) de l'eix de simetria de la resposta impulsinal en passar de  $i$  a  $i+1$ , la qual cosa significa un retard equivalent en el senyal de sortida. Això també es feia patent en l'ànalisi freqüencial associat al terme exponencial de l'expressió de  $H(f)$ .

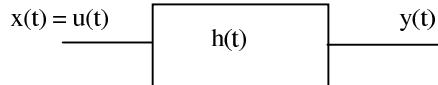
- 4) Amb l'eina de simulació podem representar el senyal temporal i freqüencial i confirmar amb les funcions que apareixen l'ànalisi realitzada a l'apartat anterior. Òbviament la qualitat de veu es degrada a mesura que disminueix la freqüència de mostratge.

També per a aquest cas es fa difícil apreciar en la qualitat de la veu l'efecte d'utilitzar més o menys ordre ( $i$ ) en el filtre de recuperació.

## Annex 1

### Limitació en banda. Fenomen de Gibbs

Ara estudiarem l'efecte que es produeix a les proximitats d'una discontinuïtat quan el senyal discontinu es limita en banda. Per fer-ho, estudiarem el cas d'un senyal discontinu, l'esglao  $u(t)$ , quan passa a través d'un filtre passa-baix ideal. Mostrem l'esquema a continuació:



En què  $h(t)$  és un filtre passa-baix ideal entre  $-B$  i  $B$  Hz. La seva transformada de Fourier és:

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \leftrightarrow h(t) = 2B \operatorname{sinc}(2Bt)$$

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2B \operatorname{sinc}(2Bt') u(t-t') dt' = \int_{-\infty}^t 2B \operatorname{sinc}(2Bt') dt' = \int_{-\infty}^{2Bt} \operatorname{sinc}(\alpha) d\alpha$$

A les gràfiques que hi ha a continuació es mostra, en primer lloc, la resposta impulsional i la seva relació amb l'amplada de banda, i a la figura d), el resultat de la convolució. Cal destacar el següent:

- 1) Hi ha un **arrissat** a les zones en què el senyal era constant. Això és degut a què l'àrea, en fer la convolució, canvia de signe a causa del canvi de signe dels lòbuls secundaris de la sinc. El valor mínim s'obté a  $t=-1/2B$ . En aquest instant de temps, la integral abasta (com es mostra a la figura b) la totalitat del primer lòbul secundari de la sinc, que és negatiu i de valor absolut més gran que tots els altres. Per a  $-1/2B < t < 0$ , l'interval d'integració comença a incloure el lòbul principal de la sinc i el resultat comença a créixer fins que la integral abasta tot el lòbul principal ( $t=1/2B$ ). En aquest instant s'arriba al valor màxim. A mesura que augmenta  $t$ , l'àrea d'integració inclou lòbuls secundaris que s'alternen en signe, i per aquesta raó apareix l'arrissat al voltant del valor 1, que és l'àrea total de la sinc.

Observem que el **flanc** de pujada és més lent. Com hem vist, és degut al lòbul principal de la sinc. Si definim *temps de pujada* com el temps que triga a passar del 10% al 90% del valor de la discontinuïtat, el temps de pujada és  $t_s \approx 1/2B$ .

- 2) Si calculem el valor de la sortida en l'origen:

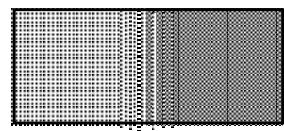
$$y(0) = \int_{-\infty}^0 \operatorname{sinc}(\alpha) d\alpha = 1/2.$$

Aquest valor és independent de  $B$ . Si fem  $B \rightarrow \infty$ ,  $y(0) = 1/2$ . La conclusió és que la transformada de Fourier sempre torna el punt mitjà en una discontinuïtat.

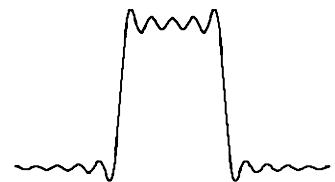
- 3) Si augmentem  $B$ , el valor dels màxims i mínims no varia malgrat que les seves posicions cada vegada són més properes a l'origen. El primer màxim de la sortida és a  $t=1/2B$

$$y\left(\frac{1}{2B}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2B}} \text{sinc}(\alpha) d\alpha$$

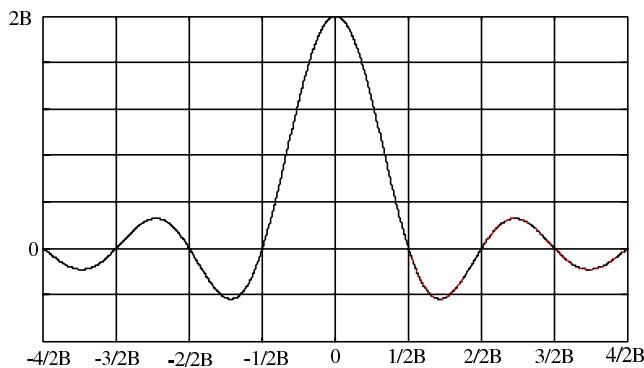
que és un valor que no depèn de l'amplada de banda. Com a conclusió d'aquest fet diem que sempre que hi ha una limitació en banda en un senyal discontinu, apareix arrissat en les seves proximitats. L'arrissat no disminueix si augmentem  $B$ , excepte si  $B \rightarrow \infty$ . Aquest fenomen s'anomena fenomen de Gibbs.



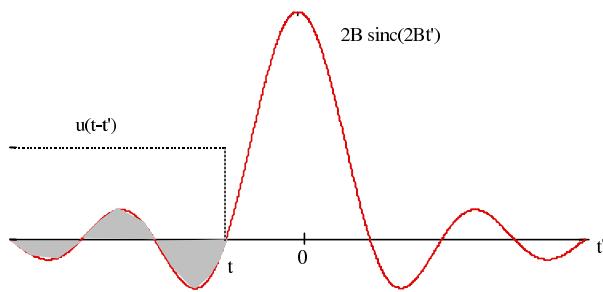
Efecte en una discontinuïtat en una imatge



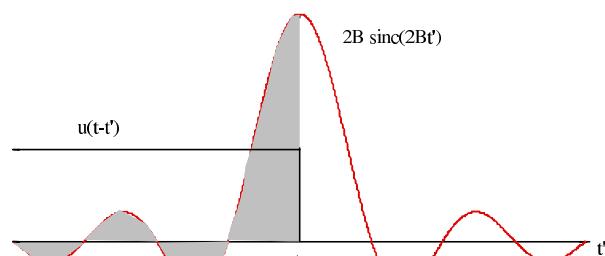
Efecte en una sonda d'oscil·loscopi



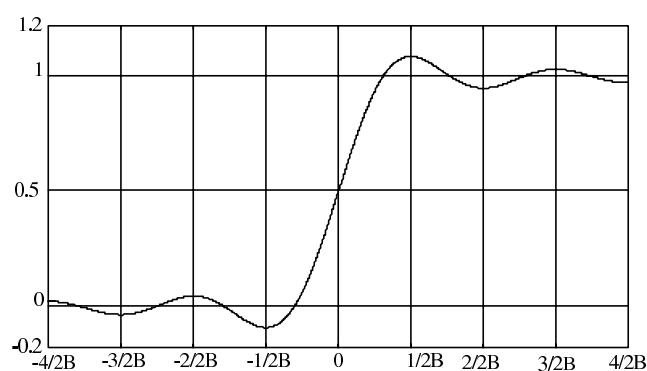
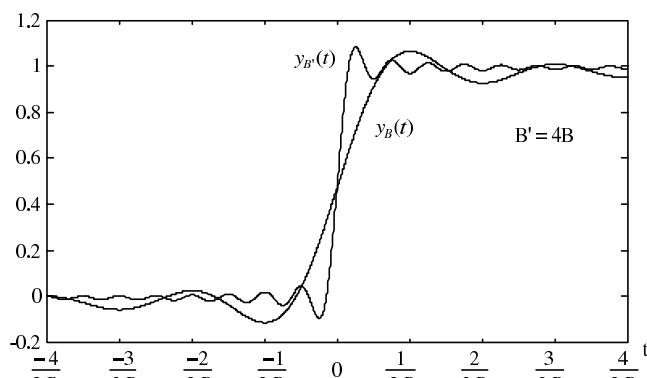
a) Senyal  $2B \text{ sinc}(2Bt)$



b)



c)

d) Senyal de sortida  $y(t)$ 

e)

Fig.2 Fenomen de Gibbs. L'amplitud de l'arissat no disminueix si augmenta l'amplada de banda

### Limitació en banda amb un filtre triangular

Suposem que limitem en banda l'esglao, però ara el filtre és passa-baix triangular.

La resposta impulsional del filtre serà:

$$H(f) = \Delta\left(\frac{f}{B}\right) \leftrightarrow h_t(t) = B \operatorname{sinc}^2(Bt)$$

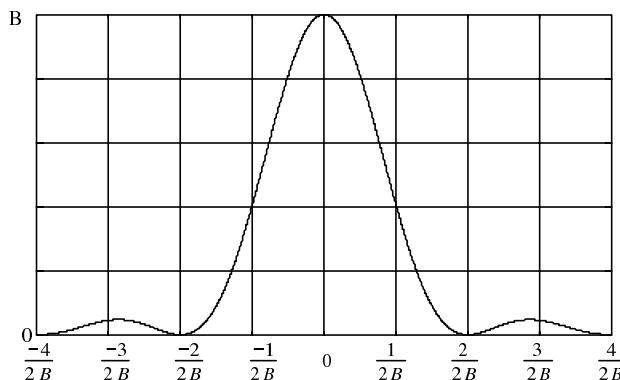
Que es mostra a la figura 3.

$$y(t) = u(t) * h_t(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B \operatorname{sinc}^2(Bt') u(t-t') dt' = \int_{-\infty}^t B \operatorname{sinc}^2(Bt') dt' = \int_{-\infty}^{tB} \operatorname{sinc}^2(\alpha) d\alpha$$

El senyal de sortida es mostra a la figura 4. Respecte a la sortida del cas anterior, s'observen les diferències següents:

No hi ha arrissat. Això és degut a què  $h_t(t)$  és positiva, i en fer la integral de convolució no es produueixen cancel·lacions d'àrea. El senyal de sortida és monòton creixent.

El flanc de pujada no és tan abrupte. El *temps de pujada* és  $t_S \approx 1/B$ . Això és degut a què el lòbul principal de la resposta impulsional dura el doble que en el cas anterior.



Resposta impulsional d'un filtre passa-baix triangular

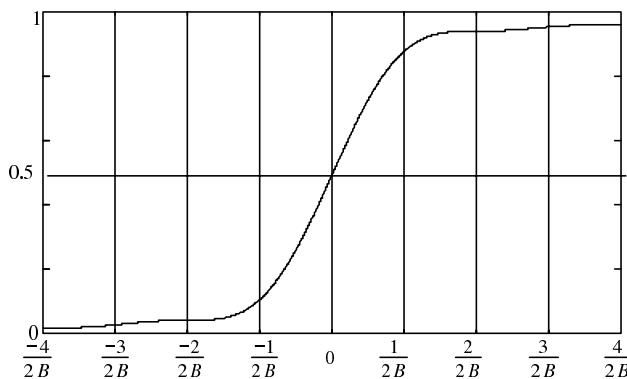


Fig. 4 Resposta a l'esglao

No hi ha una norma general per determinar quin dels dos sistemes és millor per limitar en banda un senyal. D'una banda, tenim una resposta més ràpida ja que el lòbul principal de la resposta impulsional del filtre rectangular és més estreta i, d'altra banda, la limitació amb filtre triangular no presenta arrissat, ni sobrepassa el nivell màxim del senyal.

Per a cada aplicació s'haurà de determinar quina de les dues característiques té més avantatges.

### Criteris d'error

A vegades es disposa d'un criteri d'error que es pot expressar de manera analítica. Suposem que volem aproximar un senyal  $x(t)$  per un altre senyal  $x_I(t)$ . L'error que es comet serà:

$$e(t) = x(t) - x_I(t)$$

Una mesura d'error global és

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) dt$$

Aquesta mesura d'error té l'inconvenient que es produeixen cancel·lacions per canvis de signes de  $e(t)$ , que poden donar una mesura d'error zero. Per tant, és més convenient:

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |e(t)| dt$$

A vegades és convenient tenir una mesura d'error que castigui més els errors més grans en valor absolut. La mesura d'error  $E_1$  tracta per igual un error petit que un error gran, ja que tots els errors contribueixen de la mateixa manera en la integral. L'error:

$$E_2 = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

castiga més els errors grans perquè estan elevats al quadrat. L'arrel quadrada és per normalitzar les unitats amb l'anterior expressió.

Si generalitzem, es pot parlar d'un error:

$$E_p = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^p dt \right]^{1/p}$$

que encara castiga més els errors més grans. El cas límit seria  $p=\infty$ . En aquest cas, l'error més gran seria el que contribueix a la integral, i podríem parlar de  $E_\infty \approx \max(e(t))$ .

Vist d'una altra manera, si el que busquem és trobar el senyal  $x_I(t)$  que s'aproximi *millor* a un senyal  $x(t)$  donat, i definim la *millor* aproximació com la que minimitza un dels criteris d'error que s'han explicat anteriorment, tenim que a mesura que augmenta  $p$ , la cota de l'error disminueix (el valor màxim).

### Aproximació d'una senyal per un altre de banda limitada

Suposem que tenim un senyal  $x(t)$  i que el volem aproximar per un altre senyal  $x_B(t)$  de banda limitada, de manera que minimitzi el criteri d'error següent:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_B(t)|^2 dt$$

Si apliquem el teorema de Parceval, en el domini freqüencial tenim:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f) - X_B(f)|^2 df = \int_{-B}^B |X(f) - X_B(f)|^2 df + \int_{-\infty}^{-B} |X(f) - X_B(f)|^2 df + \int_B^{\infty} |X(f) - X_B(f)|^2 df = \\ &= \int_{-B}^B |X(f) - X_B(f)|^2 df + \int_{|\phi|>B} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

on s'ha aplicat la condició que  $X_B(f) = 0 \quad |\phi|>B$ , ja que és de banda limitada.

Aquests dos termes sempre són positius o zero, perquè la integral és de termes sempre positius, per tant, el valor mínim és zero. El segon sumand no depèn de l'elecció de  $x_B(t)$ , per tant, la solució és:

$$X_B(f) = X(f), \quad |\phi|<B$$

Ja que minimitza l'error en forçar que el primer sumand agafi el valor zero. L'error que es cometia en fer aquesta aproximació és:

$$E = \int_{|\phi|>B} |X(f)|^2 df$$

La conclusió és que si el criteri d'error és la minimització de l'error quadràtic, la millor aproximació de banda limitada és filtrar amb un filtre rectangular. L'aproximació a l'esglao amb el filtre rectangular és millor que amb el filtre triangular, amb un *criteri de minimització d'error quadràtic*.

## Annex 2

### Comportament asimptòtic de la transformada de Fourier

Per comportament asimptòtic de la transformada de Fourier (TF) d'una funció s'entén el ritme de caiguda d'aquesta transformada per valors grans de la freqüència. És a dir, es vol trobar

$$X(f) = \vartheta\left(\frac{1}{f^n}\right) \quad f \rightarrow \infty$$

Com veurem a continuació, l'ordre de caiguda dependrà de la continuïtat de la funció i de les seves derivades.

Per estudiar el comportament asimptòtic suposarem, en primer lloc, que la funció que es vol analitzar és real, de duració limitada i amb una discontinuïtat a  $t=\xi$  (figura 1).

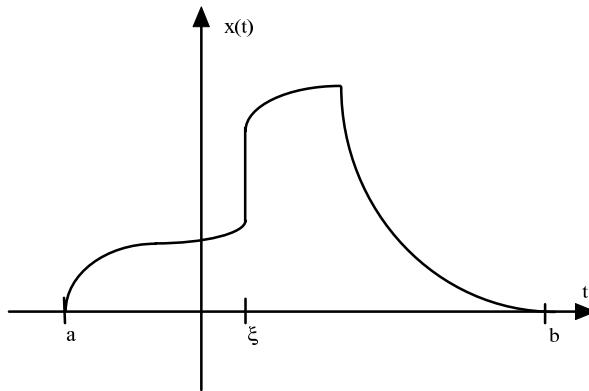


Fig. 1. Senyal de duració limitada amb discontinuïtat

La transformada de Fourier d'aquest senyal es pot obtenir com:

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_a^{\xi^-} x(t)e^{-j2\pi ft} dt + \int_{\xi^+}^b x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integració per parts: } \int u dv = uv - \int v du \\ dv = e^{-j2\pi ft} dt \\ v = \frac{-1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \\ u = x(t) \\ du = x'(t) dt \end{array} \right\} = \\
 &= x(t) \frac{-1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_a^{\xi^-} + x(t) \frac{-1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{\xi^+}^b + \frac{1}{j2\pi f} \int_a^{\xi^-} x'(t)e^{-j2\pi ft} dt + \frac{1}{j2\pi f} \int_{\xi^+}^b x'(t)e^{-j2\pi ft} dt = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} x(a) = 0, x(b) = 0 \\ e^{-j2\pi f \xi^-} = e^{-j2\pi f \xi^+} = e^{-j2\pi f \xi} \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{1}{j2\pi f} [x(\xi^+) - x(\xi^-)] e^{-j2\pi f \xi} + \frac{1}{j2\pi f} \left[ \int_a^{\xi^-} x'(t)e^{-j2\pi ft} dt + \int_{\xi^+}^b x'(t)e^{-j2\pi ft} dt \right]
 \end{aligned}$$

D'aquesta última equació observem el següent:

- Si la funció  $x(t)$  és discontinua, el primer terme no s'anul·la, per tant, la TF decau amb l'ordre  $\vartheta(\frac{1}{|f|})$ . L'altre terme decau amb un ordre igual o inferior.
- Si la funció  $x(t)$  és contínua, el primer terme s'anul·la i hem d'avaluar la TF de la derivada de  $x'(t)$ . Es repeteix el procés d'integració per parts per estudiar el comportament asimptòtic:

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{j2\pi f} \int_a^{\xi^-} x'(t) e^{-j2\pi ft} dt + \frac{1}{j2\pi f} \int_{\xi^+}^b x'(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \frac{1}{j2\pi f} x'(t) \Big|_a^{\xi^-} e^{-j2\pi ft} + \frac{1}{j2\pi f} x'(t) \Big|_{\xi^+}^b e^{-j2\pi ft} + \left( \frac{1}{j2\pi f} \right)^2 \int_a^{\xi^-} x''(t) e^{-j2\pi ft} dt + \left( \frac{1}{j2\pi f} \right)^2 \int_{\xi^+}^b x''(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \{x'(a) = 0, x'(b) = 0\} = \frac{1}{(j2\pi f)^2} [x'(\xi^-) - x'(\xi^+)] e^{-j2\pi f\xi} + \frac{1}{(j2\pi f)^2} \left[ \int_a^{\xi^-} x''(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{\xi^+}^b x''(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] \end{aligned}$$

D'aquesta última equació observem el següent:

- Si la funció  $x(t)$  és contínua però  $x'(t)$  és discontinua, el primer terme no s'anul·la, per tant, la transformada de Fourier decau amb l'ordre  $\vartheta(\frac{1}{|f|^2})$ . L'altre terme decau amb un ordre igual o inferior.
- Si  $x(t)$  i  $x'(t)$  fossin contínues hauríem de fer una anàlisi semblant per veure com decau la TF de la derivada segona de la funció.

En definitiva, s'arriba a la conclusió següent:

- |   |                        |                              |
|---|------------------------|------------------------------|
| • Si $x(t)$ és discontinua,                                 | $X(f)$ decau amb ordre | $\vartheta(\frac{1}{ f })$   |
| • Si $x(t)$ és contínua i $x'(t)$ és discontinua,           | $X(f)$ decau amb ordre | $\vartheta(\frac{1}{ f ^2})$ |
| • Si $x(t), x'(t)$ són contínues i $x''(t)$ és discontinua, | $X(f)$ decau amb ordre | $\vartheta(\frac{1}{ f ^3})$ |

En general:

- Si  $x(t), x'(t), x^{n-1}(t)$  són contínues i  $x^n(t)$  és discontinua,  $X(f)$  decau amb ordre  $\vartheta(\frac{1}{|f|^{n+1}})$

**Exemple 1.** Analitzeu el comportament asimptòtic de la TF del pols rectangular i el pols triangular

El pols rectangular és una funció discontinua, per tant, la seva TF ha de decaure a un ritme de  $\vartheta(\frac{1}{|f|})$ . Efectivament, la funció  $Tsinc(Tf)$  decau amb aquest ordre. El pols triangular és una funció contínua amb derivada primera discontinua, per tant, la seva TF ha de decaure a un ritme de  $\vartheta(\frac{1}{|f|^2})$ . Efectivament, la funció  $Tsinc^2(Tf)$  decau amb aquest ordre.

**Exemple 2.** Observeu les conseqüències de dissenyar un filtre abrupte en freqüència, és a dir, que decaigui com  $\vartheta(\frac{1}{|f|^n})$  amb  $n$  gran.

En el domini temporal hi haurà un gran nombre de derivades de  $x(t)$  contínues. En particular ens fixem en el punt més conflictiu que, en el cas d'un filtre causal, serà l'origen. Per a  $t > 0$  l'ordre del senyal haurà de ser com a mínim de  $\vartheta(t^{n-1})$ . Perquè això sigui possible el centre de gravetat de  $h(t)$  s'ha de desplaçar cap a temps més grans i, per tant, augmentarà el temps de retard del filtre (vegeu la figura 2). Com a conclusió es pot dir que com més abrupte en freqüència sigui el filtre causal dissenyat, més gran serà el retard del senyal de sortida del filtre.

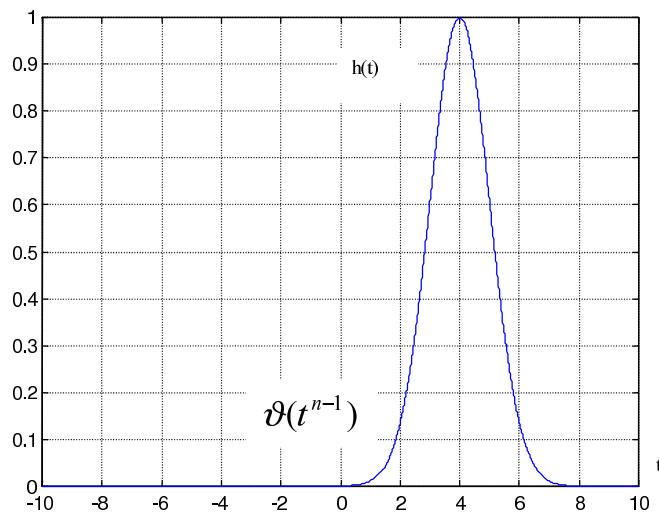


Fig. 2) Continuïtat de les derivades de  $h(t)$  a l'origen

### Annex 3

#### Encriptador

Un encriptador té com a objectiu amagar una informació de manera que únicament es pugui desxifrar si es coneix al clau o el codi amb què s'ha xifrat.

A continuació s'exposaran una sèrie d'exemples que mostren les bases de determinats criteris d'encriptació de senyals d'àudio.

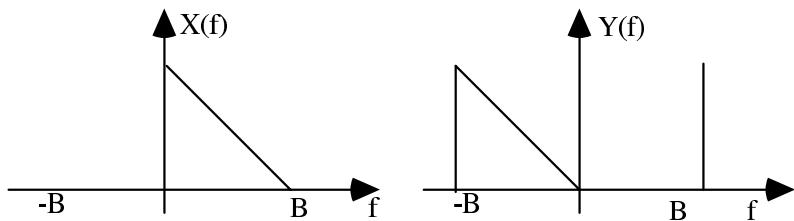


Fig. 1)

Fig. 2)

Suposem que tenim un senyal de banda limitada a  $B$  Hz com el de la figura 1. Una manera d'encriptar-lo seria convertir-lo en el senyal de la figura 2. El senyal  $Y(f)$  està relacionat amb  $X(f)$ , ja que és el mateix senyal amb les bandes intercanviades. La zona de baixa freqüència ara està en alta freqüència, i viceversa. Aquest senyal té la mateixa amplada de banda que l'original, però si  $x(t)$  és un senyal d'àudio,  $y(t)$  està en la mateixa banda però és inintel·ligible. A la figura 3 es mostra l'esquema que permet passar  $x(t)$  a  $y(t)$ , l'encriptador.

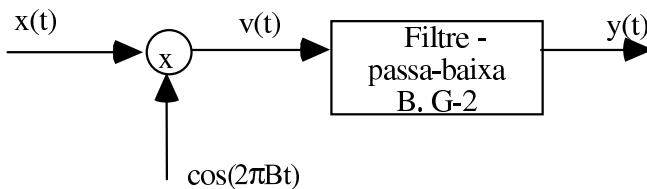


Fig. 3)

El senyal  $x(t)$  es multiplica per un cosinus de freqüència  $B$  Hz per formar  $v(t)$ . D'aquesta manera s'aconsegueix desplaçar les bandes, com es mostra a la figura 4.

$$v(t) = x(t) \cos(2\pi Bt) \Leftrightarrow V(f) = \frac{1}{2}(X(f - B) + X(f + B))$$

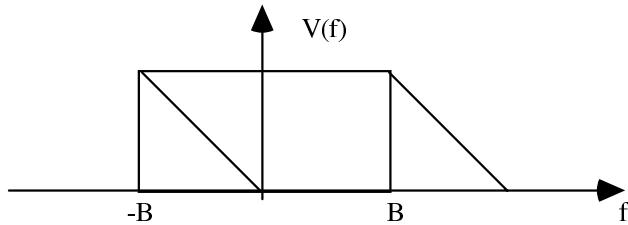


Fig. 4)

A la sortida del filtre passa-baix s'obté el senyal amb les bandes intercanviades. Un guany  $G=2$  en el filtre passa-baix deixa els nivells d'entrada i sortida sense que s'alterin. L'esquema per recuperar el senyal original és idèntic al de la figura 3. L'objectiu continua sent girar les bandes i, per tant, el circuit és el mateix. Analíticament es té a la sortida de l'encriptador amb el terme de guany ajustat:

$$Y(f) = X(f-B) \prod\left(\frac{f-B/2}{B}\right) + X(f+B) \prod\left(\frac{f+B/2}{B}\right)$$

En multiplicar pel cosinus:

$$\begin{aligned} & F[y(t) \cos(2\pi Bt)] = \\ & = \frac{1}{2}(X(f-2B) \prod\left(\frac{f-3B/2}{B}\right) + X(f) \prod\left(\frac{f+B/2}{B}\right) + X(f+2B) \prod\left(\frac{f+3B/2}{B}\right) + X(f) \prod\left(\frac{f-B/2}{B}\right)) \end{aligned}$$

i a la sortida del filtre passa-baix:

$$Z(f) = X(f) \prod\left(\frac{f+B/2}{B}\right) + X(f) \prod\left(\frac{f-B/2}{B}\right) = X(f)$$

En un cas pràctic, els filtres no són ideals i això pot provocar que la recuperació del senyal no sigui perfecta. La zona de transició del filtre deixarà passar una part no desitjada del senyal. En el cas d'àudio, el senyal es filtra prèviament per un filtre passa-banda amb una freqüència de tall inferior, que habitualment és de 300 Hz. Això deixa un marge freqüencial per poder realitzar un filtre, com mostra la figura 5.

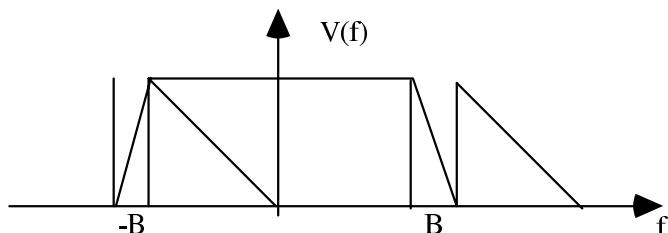


Fig. 5) TF del senyal a la sortida del multiplicador. Filtre amb una banda de transició no nul·la.

### Encriptador per subbandes

Una versió més completa de l'encriptador es mostra a la figura 6. El senyal d'entrada al sistema es divideix en subbandes per mitjà de filtres passa-banda, i cada una de les bandes és traslladada a una altra posició. Alguna d'aquestes subbandes pot patir, alhora, un gir o reflexió en freqüència. Aquest sistema d'encriptació porta associat un codi, que serveix per saber com estan commutades les bandes i si estan girades o no ho estan. A la figura 6 es mostra un esquema de l'encriptador complet.

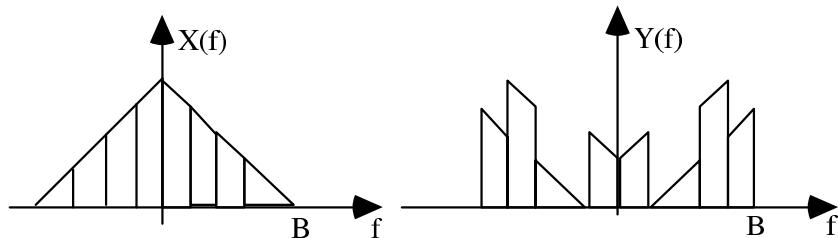


Fig. 6) Encriptador de quatre subbandes

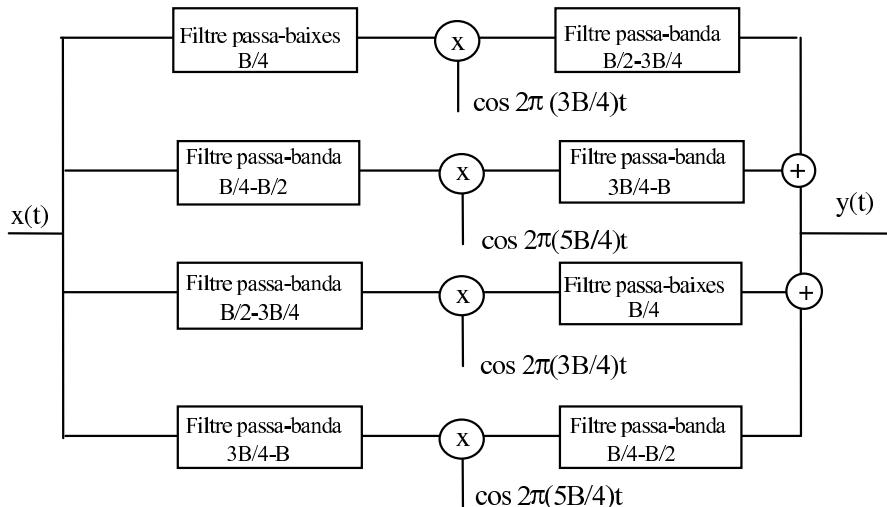


Fig. 7) Diagrama de blocs

### Realització per commutació

Una altra realització de l'encriptador que transforma el senyal  $x(t)$  de la figura 1 en  $y(t)$  és el que es mostra a la figura 8. S'ha canviat el generador de sinusoides i el multiplicador per un sistema que consta d'un commutador que canvia de posició cada  $T/2$  segons. Quan és a la part superior, el senyal passa sense patir alteracions, i quan és a la part inferior, el senyal canvia de signe.

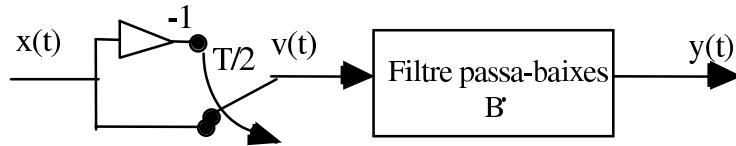


Fig. 8) Disseny alternatiu

Aquesta realització és equivalent a suposar que el senyal  $x(t)$  és multiplicat per un senyal periòdic de període  $T$ :

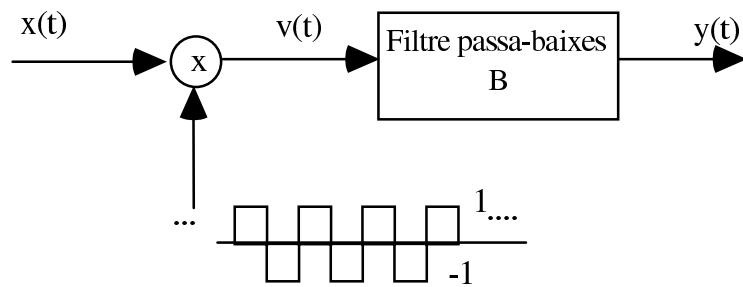


Fig. 9. Esquema equivalent al de la figura 8

$$v(t) = x(t) p(t) = x(t) \left( \sum_{-\infty}^{\infty} 2 \prod \left( \frac{t-nT}{T/2} \right) - 1 \right)$$

Si la transformada de Fourier de  $p(t)$  és

$$P(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{m}{2}\right) \delta\left(f-m \frac{1}{T}\right) - \delta(f)$$

És a dir, només consta d'harmònics imparells. A la sortida del commutador:

$$V(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{m}{2}\right) X\left(f-m \frac{1}{T}\right) - X(f)$$

Si escollim  $T=1/B$ , a la sortida del filtre passa-baix, com que  $p(t)$  té mitja nul·la i, per tant, com que  $P(0)=0$ , s'obté el senyal amb les bandes girades afectada d'un factor d'escala  $\operatorname{sinc}(1/2)$ . En aquest cas, el primer harmònic del senyal  $p(t)$  té el mateix paper que el cosinus de la realització original. Aquest mateix esquema es pot aplicar al diagrama de la figura 7. Seguint el raonament que acabem d'exposar, cada commutador ha de tornar a la seva posició superior, de manera que generi un senyal el primer harmònic del qual coincideixi amb la freqüència del cosinus respectiu.

**SOLUCIONS ALS PROBLEMES DEL TEMA II**

II.1) a.1)  $AT \operatorname{sinc}^2(fT)$       a.2)  $A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-(\pi f)^2/\alpha}$       a.3)  $\frac{2A\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$

a.4)  $\frac{f_o \cos(\pi f T / 2)}{\pi(f_o^2 - f^2)}$       a.5)  $\frac{1}{j\pi f}$

b) L'últim pas. Per exemple proveu  $X(f)=1/f$

II.2) a)  $\frac{-j24(2\pi f)}{169+10(2\pi f)^2+(2\pi f)^4}$   
 b)  $\frac{e^{3-j2\pi f}}{1-j2\pi f}$   
 c)  $\frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi f T}}$   
 d)  $\frac{1}{2j} \left[ \delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[ e^{j\pi/4} \delta(f-1) + e^{-j\pi/4} \delta(f+1) \right]$

II.3) a)  $x(at) * h(at) = \frac{1}{|a|} y(at)$   
 c) No

II.4) a) Parell  $[x(t)]$   
 b) -jsenar  $[x(t)]$

II.5) c)  $h(t) = h_I(t) \cos(\omega_0 t)$   
 d)  $H(f) = \frac{H_1(f-f_0) + H_1(f+f_0)}{2}$  on  $\omega_0 = 2\pi f_0$   
 e.1)  $|H(f)| = \frac{1}{2} \prod \left( \frac{|f| - f_0}{2f_b} \right)$       e.2)  $|H(f)| = 2f_b \sqrt{\frac{f_b^2 + f^2}{(f_c^2 + f_0^2 - f^2)^2 + (2f_b f)^2}}$   
 $|H(f_0)| \equiv 1$

II.6) a)  $H_1(f) = j\pi f \prod \left( \frac{f}{2f_c} \right)$   
 b)  $h(t) = f_c [\operatorname{sinc}(2f_c t) - \operatorname{sinc}(2f_c t - 2)]$   
 c)  $H(f) = \frac{1}{2} \prod \left( \frac{f}{2f_c} \right) \left[ 1 - e^{-j2\pi f/f_c} \right]$   
 d)  $y(t) = 3 \cos(\pi f_c t)$

- II.7) a) No  
 b)  $Y(f)=X(f)u(f)$  (No hermítica)  
 c)  $y(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)+j\left(x(t)*\frac{1}{\pi t}\right)\right]$

- II.8) a)  $H_e(f)=Re[H(f)] \quad h(t)=2u(t)h_e(t)$   
 b)  $h(t)=\delta(t-t_0)$   
 c) Si  $H_0(f)=jIm[H(f)]$

- II.9) a)  $x_1(t)=0.5\cos[2\pi(f_l-f_0)t] \quad x_2(t)=0.5\cos[2\pi(f_l+f_0)t]$   
 b)  $\cos(a)\cos(b)=0.5[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$   
 c)  $\cos(a)\sin(b)=0.5[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$

- II.10) a) 7  
 b) 2  
 c) Si  $\phi_x(f)=-2\pi f$  (amb possibles salts de  $\pi$ )  
 d) 3.5  
 e) 38/3  
 f) Parell[x(t)]

- II.11) a.1) 1                  a.2) 1                  a.3) 0.5                  a.4)  $e^{-1}-e^{-3}$   
 c)  $k=\frac{e^T}{e^T-1}$

- II.12) a)  $X(f)=\frac{j}{3}\ln\frac{|f-1,5|}{|f+1,5|}$   
 b)  $X(0)=0$  (ja que  $x(t)$  presenta simetria senar)  
 c)  $X(f)$  senar perquè ho sigui  $x(t)$

- II.13) Sí

II.14)  $H(f)=\frac{H_1(f)}{1-H_1(f)H_2(f)}$

- II.17) a)  $A_y = A_x |H(f_x)| \quad \phi_y = \phi_x + \phi_H(f_x)$   
 b)  $B = |H(f_x)| \quad \tau = -\frac{\phi_H(f_x)}{2\pi f_x}$

II.18)  $f_x=f_c+f_b+f_a$

II.19) senyal b)

II.21) a)  $X_M(f) = \frac{X(f-f_1) + X(f+f_1)}{2}$

b)  $z_x(t) = \frac{x(t)}{2} [1 + \cos(2\pi 2f_1 t)]$

c)  $G=2$        $B_h=B_x$   
d) Distorsió de  $x(t)$

II.22) b)  $f_1 \geq B_x$        $f_2 - f_1 \geq B_x + B_y$        $B_h = \max[B_x, B_y]$

c)  $\alpha_0=19.14$  dB       $\alpha_4=55.77$  dB

- II.23) a) Sense distorsió  
b) Sempre reals  
c)  $y_1(t)=g(t-t_h)\cos(2\pi f_0(t-t_h))$  on  $t_h=(t_g\alpha)/(2\pi)$   
d)  $y_2(t)=g(t-t_h)\cos(2\pi f_0 t)$

II.24) a)  $\approx 80\%$

b)  $G_x(f) = 4A^2\tau^2 \text{sinc}^2(\pi f) \cos^2(\pi f T)$

$H(f) = \sum \prod \left[ T_1 \left( f - \frac{n}{T} \right) \right] \quad \text{on} \quad T_1 > T > \tau$

c)  $X(f) = A\tau \text{sinc}(\pi f) \cdot \frac{\sin(N\pi f T)}{\sin(\pi f T)} e^{-j\pi f [\tau + (N-1)T]}$

- II. 25) b)  $\phi_H(f) = -\phi_x(f)$   
c)  $H(f) = X(-f)$ , si es verifica la condició de l'apartat anterior.  
d)  $h(t) = -t \prod \left( \frac{t + \frac{n}{T}}{T} \right)$ , no causal  
e)  $H(f) = X(-f) e^{-j2\pi f T}$ ,  $t_{\max} = T$

II.27) la d)

II.28)  $W(f) = \frac{8T}{\pi^2} \left[ \frac{\cos(\pi f T)}{1 - (2Tf)^2} \right]^2$  Presenta un comportament asimptòtic superior (24 dB/oct) i més amplada de lòbul principal ( $3/T$ ). Per tant, origina menys arrissament però també transicions més lentes.

II.29) b) El filtre rectangular

II.30) La finestra rectangular origina la corba amb arrissament i la corba suavitzada correspon a una finestra triangular.

II.31) a) La rectangular és millor en zones espectrals de variació ràpida i la triangular va millor en les zones de variació lenta.  
 b)  $w(t)$  parell, positiva, contínua, d'àrea unitària,  $w(0)=1$ .

II.32) a) Senyals parells centrats a l'origen i sense canvi de signe.

II.33) a)  $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2}} e^{-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} t^2}$

b)  $\sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{n\alpha^{n-1}}} e^{-\frac{\alpha}{n} t^2}$

c)  $E = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$

d)  $\Delta t^2 = \frac{1}{4\alpha}$

II.34) a.1)  $W(f) = T \operatorname{sinc}^2 \frac{T}{2} f$

a.2)  $X_i(f) = \frac{T}{2} \operatorname{sinc}^2 \frac{T}{2} (f - f_i) + \frac{T}{2} \operatorname{sinc}^2 \frac{T}{2} (f + f_i)$

b)  $X(f) = X_i(f) + X_j(f)$

c)  $T > 20 \text{ ms}$

d)  $y_{14}(t) = \frac{T}{2} = 0,025, y_{15}(t) = 0$

en premer la tecla 3:  $y_1(t) = \frac{T}{2}, y_2(t) = 0, y_3(t) = 0, y_4(t) = 0, y_5(t) = 0, y_6(t) = 0,$   
 $y_7(t) = \frac{T}{2}$

II.35) a)  $d_x^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{X}(f)|^2 df}{(2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}$

II.37) a)  $t_d = \frac{H(0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)| df}$

b) L'amplada de banda efectiva

II.38) a)  $h(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t',\tau) h_2(t,t') dt'$

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} h_1(t',\tau) h_2(t,t') dt' = \delta(t-\tau)$

c)  $\int_{-\infty}^{\infty} H_1(f'',\tau) H_2(f,f'') df'' = \delta(f-f')$

d)  $z(t)=X(t)$

e)  $h_2(t,\tau)=1/\pi(t-\tau)$

II.40)  $a_m = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) g_m(t) dt}{B}$

II.41) d)  $\cos(10\pi t + \pi/4) + 0.5[\cos(8\pi t + \pi/4) + \cos(12\pi t + \pi/4)]$

II.42)  $Y(f) = 0.5 \sum C_n [\delta(f-1/T_0-n/T) + \delta(f+1/T_0-n/T)]$

II.43) a)  $0.1343 \cos(2\pi t - 0.32\pi)$   
 b)  $0.076 \sin(4\pi t - 0.4\pi) + 0.052 \cos(6\pi t - 0.43\pi)$   
 c)  $\sum H(n) e^{j2\pi nt}$

II.44) a)  $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{3\pi^2(2m+1)} \ln \frac{|f-3m-3|}{|f-3m|}$   
 b)  $1/3$

II.45) a)  $X(f) = -j2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\prod_{k=1}^{\frac{f-2m-1}{2}}}{2m+1}$   
 b)  $X(5) = -j0.4$  imaginari pur perquè  $x(t)$  real i senar

II.47)  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{X_0 \left( \frac{2m-1}{2T} \right)}{T} e^{j\pi(2m-1)\frac{t}{T}}$

II.48)  $X(f) = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\text{sinc}(\frac{f_c T_0 - m}{2}) + \text{sinc}(\frac{f_c T_0 + m}{2})) \delta(f - mf_0)$

- II.49) a.1)  $X_I(f) = 0,5 \sum C_n [\delta(f-f_c-n/T_0) + \delta(f+f_c-n/T_0)]$  on  $C_n = 0,5 \operatorname{sinc}^2(n/2)$   
 a.2) Si  $f_c T_0 = n/m \Rightarrow T_{x1} = \min(m) T_0$   
 b.1)  $X_2(f) = \sum C_n \delta(f-n/T_0)$  on  $C_n = 0,25 [\operatorname{sinc}^2((n-T_0 f_c)/2) + \operatorname{sinc}^2((n+T_0 f_c)/2)]$   
 b.2) Per  $\forall f_c, T_0 \Rightarrow T_{x2} = T_0$   
 c.1)  $0,5 \cos(2\pi f_c t)$   
 c.2) Si  $f_c T_0 - 1 < N < f_c T_0 + 1 \Rightarrow y_2(t) = 2C_N \cos(2\pi t N/T_0)$  on  $C_N = 0,25 \operatorname{sinc}^2((N-T_0 f_c)/2)$

- II.50) a.1)  $x(t) = A\tau/T + 2A\tau/T \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(nt/T) \cos(2\pi nt/T)$  a.2)  $X(f) = A\tau/T \sum \operatorname{sinc}^2(n\tau/T) \delta(f-n/T)$   
 c)  $y(t) = \operatorname{sinc}^2(1,5) \cos(120\pi t)$

II.51) a)  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{G\left(\frac{n}{T}\right)}{T} e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$   
 b)  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{G\left(\frac{n}{2T}\right)}{2T} e^{j\pi n \frac{t}{T}}$   
 c)  $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{G\left(\frac{n}{2T}\right) H\left(\frac{n}{2T}\right)}{2T} e^{j\pi n \frac{t}{T}}$

- II.52) a)  $X(f) = 0,25 T_0 [\operatorname{sinc}((T_0 f_c - 1)/2) + \operatorname{sinc}((1 + T_0 f_c)/2)]$   
 b)  $X_p(f) = \sum C_n \delta(f-n/(2T_0))$  on  $C_n = 1/8 [\operatorname{sinc}((n-2)/4) + \operatorname{sinc}((n+2)/4)]$   
 c)  $y(t) = 0,25 \cos(40\pi t)$

- II.53) a)  $\sum_{-\infty}^{\infty} T p_R(mT) e^{jm2\pi f T}$   
 b)  $\sum_{-\infty}^{\infty} P_R(f-m/T) = \text{constant}$   
 c) Sí, per  $T = \frac{1}{3,5}$

- II.55) b)  $\phi(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{-j\pi n f/f_p}$  on  $C_n = (2f_p)^{-1} h'(n/(2f_p))$  amb  $h'(t) = 2f_p [h(t) * \operatorname{sinc}(2f_p t)]$   
 c)  $y(t) = \sum C_n \delta(t-n/(2f_p))$   
 d)  $C_n = (2f_p)^{-1} h(n/(2f_p))$   
 e)  $y(t) = ax(t) + b/2 [x(t-1/(2f_p)) + x(t+1/(2f_p))]$   
 f) Filtre no causal

II.56) a)  $x(t) = A\tau/T + 2A\tau/T \sum_{n=1}^{+\infty} \text{sinc}^2(nt/T) \cos(2pnt/T)$   
b)  $y(t) = 1/3 + 0,456\cos(2\pi 10^3 t/3) + 0,114\cos(4\pi 10^3 t/3)$   
c) Igual que b)  
d)  $x_0(t-0,5) = 1/3 + 2/3 \sum_{n=1}^{+\infty} \text{sinc}^2(n/3) \cos(2p10^3 n(t-0,5)/3)$

II.57) a)  $C_m = [\text{sinc}(m/2)]/(4-m^2)$   
b)  $y(t) = 2[C_5\cos(10\pi f_0 t) + C_7\cos(14\pi f_0 t) + C_9\cos(18\pi f_0 t)] \quad \text{on } f_0 = (4T)^{-1}$

II.58) a)  $s(t) = C_0 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} C_m \cos(2\pi m t) \quad \text{amb } C_n = \frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$   
b)  $z(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\cos(2\pi t)}{3} - \frac{\cos(4\pi t)}{15} + \frac{\cos(6\pi t)}{35} - \frac{\cos(8\pi t)}{63} + \frac{\cos(10\pi t)}{99} \right]$

II.59) a)  $X_1(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta(f - \frac{m}{4T}) \quad \text{on } C_m = \frac{j}{4} \text{sinc}\left(\frac{m}{2}\right) \sin\left(\frac{pm}{2}\right)$   
b)  $X_2(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta\left(f - \frac{m}{2T}\right)$   
d)  $f_a = \frac{1}{4T}, f_b = \frac{1}{2T}$   
 $z_1(t) = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) \sin(2\pi f_1 t - \pi)$   
 $z_2(t) = \frac{-A}{2} \text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) \sin(2\pi 2f_1(t-t_0))$   
e)  $t_0 = \frac{T}{4}$   
f)  $C = D = 1, t_1 = \frac{7T}{4}$

II.60) b)  $Y(f) = \sum C_m \delta(f - (2m-1)f_0) \quad \text{on } C_m = \text{sinc}((2m-1)/2)$

II.61)  $B \leq f_0$

II.62) a)  $2B \leq f_0 \quad \text{Filtre passa-baix amb } B_h = B \text{ i } G = \frac{2}{\text{sinc}(0,5)}$   
b)  $z(t) = \phi(t) \cos\left(\frac{8\pi t}{T_0}\right) \quad \text{Filtre passa-banda amb } f_c = 4f_0, \Delta B_h = 2B \text{ i } G = \frac{2}{\text{sinc}(1,5) + \text{sinc}(2,5)}$

II.63) a) A és invariant i no lineal

b)  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \prod \left( \frac{t-nT_c}{T_c/2} \right)$

c)  $Y(f) = \sum C_n [\delta(f-n/T_c) + X(f-n/T_c)]$

d)  $z(t) = 0,5 [1 + x(t)]$

II.64) a)  $p(t) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} C_{2m-1} \cos[\pi(2m-1)t/T_0]$        $s(t) = \frac{1}{2} - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} C_{2m-1} \cos[\pi(2m-1)t/T_0]$

on  $C_n = 0,5 \operatorname{sinc}(n/2)$

b)  $X_I(f) = F[x_e(t)p(t)] = X_e(f)/2 + \sum C_{2m-1} X_e(f-(m-1/2)/T_0)$

$X_2(f) = F[x_d(t)s(t)] = X_d(f)/2 - \sum C_{2m-1} X_d(f-(m-1/2)/T_0)$  amb  $X(f) = X_I(f) + X_2(f)$

II.65)  $T = (2B)^{-1}$        $B_h = B$

II.66) b)  $\pi^2/4$

II.67) l'afirmació c)

II.68) b)  $Y_r(f) = \delta(f) - \sum C_n \delta(f-n/(3T_s))$  on  $C_n = 1/3 \operatorname{sinc}^2(n/6) \cos(n\pi/3)$

c) Passa-banda (centre  $f_c = 1/T_s$ , amplada  $B_h < 2/(3T_s)$ , desfasament  $3\pi/2$ )

d) Limitador a  $\pm A$

II.69) a) Sí,  $x(t) = x(t+T_0)$

b) Sí,  $f_m = \frac{m}{T_0}$

c)  $Y(f) = \sum \frac{T}{T_0} H\left(\frac{m}{T_0}\right) \operatorname{sinc}\left(f - \frac{m}{T_0}\right)$ ,  $\frac{1}{T_0} = 50 \text{ Hz}$ ,  $\frac{1}{T} \approx 12$

d)  $Y(f) = \sum \frac{\tau T}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau m}{T_0}\right) H\left(\frac{m}{T_0}\right) \operatorname{sinc}\left(f - \frac{m}{T_0}\right)$

II.70) Són certes a) i c)

II.71)  $x(t) = \sum_{n=1}^4 \left[ \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{t+nT_s}{T_s}\right) \right]$        $x(0,005) = \operatorname{sinc}(0,5) - \operatorname{sinc}(4,5)$

II.72) a)  $s(t) = C_0 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} C_m \cos\left(\frac{2\pi m t}{T_0}\right)$  amb  $C_m = \frac{1}{12} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{m}{12}\right)$   
 b)  $x(t) = 2 \left[ C_{11} \cos\left(\frac{\pi m t}{T_0}\right) + C_{13} \cos\left(\frac{3\pi m t}{T_0}\right) \right]$   
 c)  $\max(T_m) = \frac{2T_0}{13}$

II.73) a)  $H_I(f) = 16/3 \Pi(2f)$   
 b)  $H_I(f) = 2/\operatorname{sinc}(0.5)\Pi(f)$

II.74) a)  $F_s = 2B$        $B_h = B$

II.75) a) Mostrejador ideal  
 b)  $h\left(\frac{n}{f_0}\right) = \begin{cases} f_0 & \text{si } n = T_1 f_0 \\ 0 & \text{si } n \neq T_1 f_0 \end{cases}$       si  $T_1 = \frac{k}{f_0}$

II.76) a)  $f_m$  mínima =  $2B$ ; amplada de banda de  $H_2(f) = B$   
 b)  $Y_m(f) = \operatorname{sinc}(T_m f) \sum X(f - nf_m)$   
 c)  $H_2(f) = \frac{1}{\operatorname{sinc}(T_m f)} \Pi(f/2B)$   
 d)  $X(f) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left[ e^{-\frac{\pi^2(f-f_0)^2}{\alpha}} + e^{-\frac{\pi^2(f+f_0)^2}{\alpha}} \right], \text{ àrea} = 1$   
 e)  $B_{ef} \approx f_0 + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha/\pi}$   
 f)  $\frac{\sqrt{2}}{8\pi} g\left(4\sqrt{\frac{\pi^3}{\alpha}}\right)$

II.77) a)  $f_m > 2aB_x$ . Filtre passa-baix amb amplada de banda  $B_h = aB_x$  i guany  $G = T_s$   
 b)  $a = \frac{\Delta T}{T + \Delta T}$   
 c)  $0 < \Delta T < (2B_x)^{-1}$   
 d)  $T = 1 \text{ seg.}$        $B_x = 2 \text{ Hz}$   
 e)  $F_m = 5/6 \text{ Hz}$        $H(f) = 1,2 \cdot \Pi(1,5f)$

- II.78) a)  $X_m(f) = \sum_n x(nT_m)e^{-j2\pi nT_m f}$ , periòdic
- b)  $x_m(t) = \frac{A}{T_m} + \frac{2A}{T_m} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_m}\right)$ , periòdic  $X_m(f) = A + 2A \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n T_m f)$ , periòdic
- c)  $y(t) = \frac{A}{T_m}$
- d)  $f_m > B$
- e)  $y(t) = \frac{A}{T_m} \left[ 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_m}\right) \right]$
- f)  $\alpha > \frac{3}{2}$
- II.80) Es mostreja amb  $T > 1/6B$ . El senyal mostrejat s'aplica a un filtre passa-baix amb una amplada de banda  $B$  per obtenir  $y(t)$ . Per obtenir  $x(t)$  es filtra passa-banda (entre  $B$  i  $3B$  Hz), es multiplica per un cosinus a la freqüència  $2B$  i es filtra passa-baix amb una amplada de banda  $B$  i un guany 2.

- II.81) a)  $H_m(f)$  és l'estensió periòdica de  $H_I(f) = H(f) \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$  amb període  $f_O = T^I$ . És la versió mostrejada del senyal  $h(t)$  filtrat amb un filtre passa-baix ideal d'amplada de banda el del senyal i multiplicat per  $T$ .

$$h_m(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_I(nT) \delta(t-nT)$$

- II.83) a)  $x(t) = 1,4\cos(6\pi t) + 0,7\cos(10\pi t) + 0,4\cos(14\pi t)$  ( $t$  en ms)  $T_x = 1$  ms  
 b) Lineal, variant, causal, estable

$F_m$ (kHz)	Període (ms)	$x(t)$ recuperable
15	1	sí
14,5	2	sí
6	1	no

- d) No lineal, invariant, causal, estable.  
 e.1)  $A=4 \Rightarrow$  cap efecte.  
 e.2)  $A=1,5 \Rightarrow$   $x(t)$  retallada en amplitud i  $Y(f)$  té més components que  $X(f)$ .

### 3 Filtres

Al capítol anterior hem estudiat el filtrat de senyals en el domini freqüencial i hem vist quina utilitat tenen per suprimir o modificar components freqüencials. Principalment s'ha fet servir el filtre ideal, que permet transmetre sense distorsió una banda de freqüències, la banda de pas, i suprimir totalment la resta, la banda eliminada. Però aquest filtre no es pot fer físicament. L'objectiu d'aquest capítol es abordar la realització pràctica de filters analògics. El disseny es centrarà en la realització de filters definits com a sistemes lineals amb equacions diferencials de coeficients constants. La teoria de l'aproximació constitueix el mecanisme per obtenir la funció de transferència d'un sistema segons unes especificacions. Es consideraran solament especificacions d'atenuació, per tant, el disseny es basarà en el mòdul i no en la fase de la resposta freqüencial. Els problemes proposats se centren en la mecànica i la comprensió del disseny de filters utilitzant principalment les aproximacions de Butterworth, Chebychev i invers de Chebychev. També es mostren les conseqüències de fer servir filters realitzables davant de filters ideals en algunes de les aplicacions més habituals. L'última part del tema tracta la transformació de freqüències per al disseny de filters passa-banda, passa-alt i banda eliminada.

#### Teoria de la aproximació. Funció característica

Un filter és realitzable si la seva resposta impulsional,  $h(t)$ , compleix les propietats següents:

$$\begin{aligned} h(t) &\in \Re \quad \text{real,} \\ h(t) &= 0 \text{ per a } t < 0 \quad \text{causal,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt &< \infty \quad \text{estable} \end{aligned}$$

La funció de transferència  $H(s)$ , definida com un quocient de polinomis, és realitzable si compleix el següent:

- Ordre del numerador més petit o igual a l'ordre del denominador
- Pols en parells complexos conjugats
- Pols en el semiplà esquerre

Altres funcions d'utilitat relacionades amb  $H(s)$  són les següents:

- Mòdul al quadrat de la resposta freqüencial:  $|H(\omega)|^2$
- Funció atenuació:  $\alpha(\omega) = 10 \log \frac{H_{\max}^2}{|H(\omega)|^2}$
- Funció característica:  $F(\omega^2) = \frac{H_{\max}^2}{|H(\omega)|^2} - 1$

Els passos que s'han de seguir per obtenir  $H(s)$  a partir de les especificacions d'atenuació es resumeixen a continuació:

- Dissenyar  $F(\omega^2)$
- Calcular  $|H(\omega)|^2 = \frac{H_{\max}^2}{F(\omega^2) + 1}$
- Descompondre  $|H(\omega)|^2 = H(s)H(-s)|_{s=j\omega}$  i extreure  $H(s)$  realitzable

---

**PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS**


---

III.1)

Indiqueu i raoneu dues expressions analítiques possibles de la funció característica corresponent a la corba d'atenuació que es mostra a la figura III.1). Considereu que els zeros de transmissió  $\omega_{\infty 1}$  i  $\omega_{\infty 2}$  són simples.

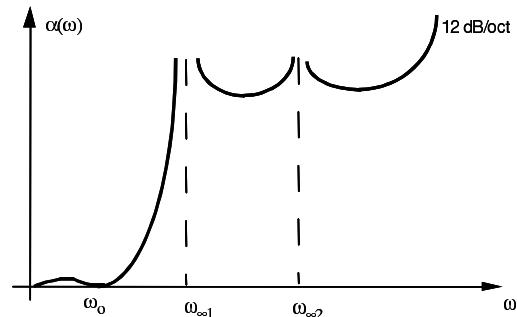


Fig. III.1)

- III.2) Discutiu i justifiqueu els valors que prenen les funcions  $H(s)$ ,  $|H(\omega)|$ ,  $F(\omega^2)$  i  $\alpha(\omega)$  als punts següents:
- Zeros d'atenuació
  - Zeros de transmissió
  - Pols o freqüències pròpies
- III.3) Construïu i dissenyeu la funció característica d'un filtre que presenti una atenuació inferior a 1dB fins a 3,4 kHz i superior a 20 dB a partir de 5 kHz. Per fer-ho, comproveu que amb ordre  $n=3$  es compleix la plantilla requerida i useu el fet que el filtre presenta un zero de transmissió a la freqüència 5.574 kHz, i se sap que  $\omega_a \omega_p = \omega_o \omega_\infty$ .
- III.4) Dissenyeu un filtre passa-banda en què les especificacions per a la resposta freqüencial són les següents:

Pulsacions de tall a 3 dB:  $\omega_{p1}=1,5$ ;  $\omega_{p2}=2$

Zero de transmissió simple a  $\omega_\infty=1$

Comportament asimptòtic en origen i infinit amb pendent 6 dB/oct.

Comportament maximalment pla a  $\omega_o$ . ( $\omega_{p1} < \omega_o < \omega_{p2}$ )

## Aproximacions passa-baix

### Especificacions de disseny

Freqüència límit de la banda de pas:  $\omega_p$ .

Freqüència límit de la banda atenuada:  $\omega_a$ .

Atenuació màxima a la banda de pas:  $\alpha_p$ .

Atenuació mínima a la banda atenuada:  $\alpha_a$ .

$$\text{selectivitat: } k_s = \frac{\omega_p}{\omega_a} \quad \text{discriminació: } k_d = \frac{\sqrt{10^{\alpha_p/10} - 1}}{\sqrt{10^{\alpha_a/10} - 1}}$$

### Classificació de filtres segons el seu comportament:

Aproximacions polinòmiques:  $F(\omega^2) = N(\omega^2)$

Maximalment pla a l'origen: Butterworth

Arrissat d'amplitud constant a la banda de pas: Chebychev

$$\text{Aproximacions racionals: } F(\omega^2) = \frac{N(\omega^2)}{D(\omega^2)}$$

Maximalment pla a l'origen i arrissat d'amplitud constant a la banda atenuada: invers de Chebychev.

Arrissat d'amplitud constant a la banda de pas i atenuada: Cauer o el·líptic.

### Filtre de Butterworth

Segons la classificació que s'ha establert abans, la funció característica del filtre de Butterworth és la següent:

$$F(\omega^2) = k^2 \omega^{2n}$$

Ateses unes especificacions es calculen l'ordre  $n$  i la constant del filtre  $k^2$ , tenint en compte:

$$F(\omega_p^2) \leq 10^{\alpha_p/10} - 1 \quad F(\omega_a^2) \geq 10^{\alpha_a/10} - 1$$

D 'on s'obté,

$$n \geq \frac{\log(K_d)}{\log(K_s)}$$

El valor de la constant es calcula (en general) ajustant la corba a l'especificació de la banda de pas, per tant,

$$k^2 = \frac{(10^{\alpha_p/10} - 1)}{\omega_p^{2n}}$$

Altres punts interessants se centren en els zeros d'atenuació, que coincideixen amb els zeros de la funció característica, i els zeros de transmissió, en què l'atenuació i la funció característica tendeixen a l'infinít,

o com el seu nom indica, anulen la resposta freqüencial. Per a un filtre de Butterworth d'ordre  $n$ , és fàcil deduir que els  $n$  zeros d'atenuació es troben tots a l'origen, mentre que els  $n$  zeros de transmissió se situen a l'infinít.

A partir de la funció característica es construeix la funció de transferència. Els pols del filtre de Butterworth es calculen de la manera següent:

$$s_i = \omega_c e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2i+1)}{2n})} \quad i=0, \dots, n-1$$

Els pols se situen en el pla s, equiespaiats i en un cercle de radi  $\omega_c$ .

### Polinomis de Chebychev

Els filtres de Chebychev i invers de Chebychev es basen en els polinomis de Chebychev, la descripció dels quals es fa a continuació.

Polinomis de Chebychev d'ordre  $n$ :

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos(x)) & \text{per a } |x| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh}(x)) & \text{per a } |x| > 1 \end{cases}$$

Fórmula recursiva alternativa:

$$\begin{aligned} C_0(x) &= 1 \\ C_1(x) &= x \\ C_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ \dots \\ C_n(x) &= 2x C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x) \end{aligned}$$

A les figures 1 i 2 es representen els polinomis per als ordres de 0 a 7.

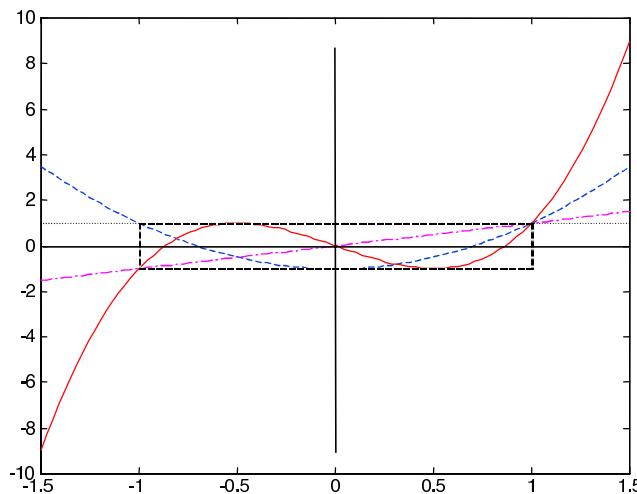


Fig.1) Polinomis de Chebychev d'ordre 0 a 3

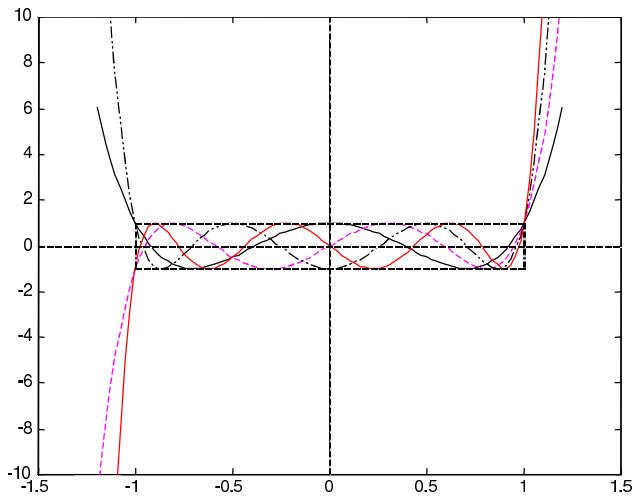


Fig. 2) Polinomis de Chebychev, ordre 4 a 7

Es dedueixen les propietats dels polinomis següents:

- Arrissat constant entre  $\pm 1$  per a  $|x| \leq 1$
- Funció parell/imparell per a  $n$  parell/imparell
- Funció acotada entre  $-1 \leq C_n(x) \leq 1$  per a  $-1 \leq x \leq 1$
- $C_n(1) = 1$ ,  $C_n(-1) = (-1)^n$
- $C_n(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ imparell} \\ (-1)^n & n \text{ parell} \end{cases}$

### Filtre de Chebychev

Segons la classificació establerta anteriorment, és desitjable obtenir una funció característica polinòmica amb arrissat constant a la banda de pas. Aquest criteri el compleixen els polinomis de Chebychev. La figura 3 mostra els polinomis de Chebychev al quadrat (atès que la funció característica és funció de  $\omega^2$ ), per als ordres compresos entre 0 i 4. La funció característica es defineix com:

$$F(\omega^2) = \varepsilon^2 C_n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)$$

En aquest cas s'ha de determinar la constant  $\varepsilon^2$  i l'ordre  $n$  del filtre, d'on s'obté,

$$n \geq \frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{K_d}\right)}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{K_s}\right)}$$

El valor de la constant es calcula ajustant la corba a l'especificació de la banda de pas, per tant,

$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{a_p}{10}} - 1$$

els zeros d'atenuació es dedueixen a partir dels zeros dels polinòmics com:

$$\omega_p \cos\left[\frac{\pi}{2n}(2i+1)\right] \quad \text{per a } i=0, \dots, n-1$$

Els  $n$  zeros de transmissió es troben a l'infinít.

A partir de la funció característica es construeix la funció de transferència. Els pols del filtre de Chebychev s'obtenen a partir de les expressions:

$$s_{CH}^i = \omega_p \left[ \frac{1}{2} (r - 1/r) \cos \theta_i + j \frac{1}{2} (r + 1/r) \sin \theta_i \right]$$

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} i \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$r = \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{1/n}$$

Els pols se situen en el pla  $s$  sobre una el·lipsi.

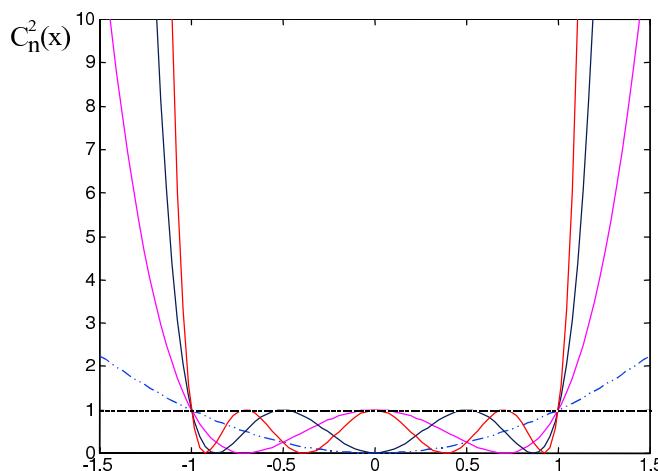


Fig. 3) Polinomis de Chebychev al quadrat, ordre 0 a 4

### Filtre Invers de Chebychev

Per obtenir una funció racional amb arissat d'amplitud constant a la banda atenuada també es poden utilitzar els polinomis de Chebychev, i el resultat és:

$$\frac{1}{\varepsilon^2 C_n^2(\frac{\omega_n}{\omega})}$$

L'ordre  $n$  del filtre coincideix amb l'obtingut per al filtre de Chebychev,

$$n \geq \frac{\operatorname{arccosh}(\frac{1}{K_d})}{\operatorname{arccosh}(\frac{1}{K_s})}$$

El valor de la constant  $\varepsilon^2$  es calcula ajustant la corba a l'especificació de la banda atenuada,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} = 10^{\alpha\%} - 1$$

Els  $n$  zeros d'atenuació són a l'origen.

Els zeros d'atenuació es dedueixen a partir dels zeros dels polinomis per tant,

$$\frac{\omega_a}{\cos[\frac{\pi}{2n}(2i+1)]} \text{ para } i=0,\dots,n-1$$

A partir de la funció característica es construeix la funció de transferència. Els pols del filtre invers de Chebychev es poden deduir a partir dels pols del filtre de Chebychev, segons la relació

$$s_{ich}^i = \omega_a \omega_p / s_{ch}^i$$

Els pols en el pla  $s$  se situen sobre una el·lipsi.

### Filtre de Cauer o el·líptic

Les propietats del filtre òptim (de Cauer o el·líptic) es resumeixen a continuació:

- Arrissat constant a la banda de pas i a la banda atenuada.
- Ordre mínim segons unes especificacions.
- Simetria geomètrica respecte a una freqüència central  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \omega_1 \omega_2 \\ F^2(\omega_0^2) &= F(\omega_1^2) F(\omega_2^2) \end{aligned}$$

**Taula 1** resum dels paràmetres de les aproximacions passa-baix

	<i>Funció característica</i>	<i>Ordre del filtre</i>	<i>Constant</i>
<b>Butterworth</b>	$k^2 \omega^{2n}$	$n \geq \frac{\log(K_d)}{\log(K_s)}$	$k^2 = \frac{(10^{a_p/10} - 1)}{\omega_p^{2n}}$
<b>Chebychev</b>	$\epsilon^2 C_n^2(\frac{\omega}{\omega_p})$	$n \geq \frac{\operatorname{arccosh}(\frac{1}{K_d})}{\operatorname{arccosh}(\frac{1}{K_s})}$	$\epsilon^2 = 10^{\frac{a_p}{10}} - 1$
<b>Invers de Chebychev</b>	$\frac{1}{\epsilon^2 C_n^2(\frac{\omega_a}{\omega})}$	$n \geq \frac{\operatorname{arccosh}(\frac{1}{K_d})}{\operatorname{arccosh}(\frac{1}{K_s})}$	$\frac{1}{\epsilon^2} = 10^{\frac{a_a}{10}} - 1$

**Taula 2** resum dels paràmetres de les aproximacions passa-baix

	<i>Zeros d'atenuació</i>	<i>Zeros de transmissió</i>	<i>Pols de H(s)</i>
<b>Butterworth</b>	$n$ en $\omega=0$	$n$ en $\omega=\infty$	$s_i = \omega_c e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2i+1)}{2n})} \quad i=0, \dots, n-1$
<b>Chebychev</b>	$\omega_p \cos[\frac{\pi}{2n}(2i+1)] \quad i=0, \dots, n-1$	$n$ en $\omega=\infty$	$s_{ch}^i = \omega_p \left[ \frac{1}{2} (r - 1/r) \cos \theta_i + j \frac{1}{2} (r + 1/r) \sin \theta_i \right]$ $\theta_i = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} i \quad i = 0, \dots, n-1$ $r = \left( \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \right)^{1/n}$
<b>Invers de Chebychev</b>	$n$ en $\omega=0$	$\frac{\omega_a}{\cos[\frac{\pi}{2n}(2i+1)]} \quad i=0, \dots, n-1$	$s_{ich}^i = \omega_a \omega_p / s_{ch}^i$

## PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS

III.5) Considereu les especificacions de l'atenuació

- Atenuació a la banda de pas ( $|\omega| \leq 1$ ) amb arrissat d'amplitud constant d'1 dB
- Zeros d'atenuació simples a l'origen i  $\omega_{o1} = 2\sqrt{2} / 3$
- Zeros de transmissió simple a l'infinít i  $\omega_{\infty 1} = 2 / \sqrt{3}$

Es demana:

- a) Representeu gràficament aquesta atenuació i obtingueu la funció característica corresponent.
- b) Si sabem que  $\omega_a \omega_p = \omega_{o1} \omega_{\infty 1}$ , trobeu el valor de  $\omega_a$  i determineu l'atenuació mínima a la banda atenuada.
- c) Per verificar les especificacions  $\alpha_p$ ,  $\omega_p$ ,  $\alpha_a$  i  $\omega_a$  d'aquest filtre, quin ordre es necessaria si es fessin servir les aproximacions de Butterworth o de Chebychev?

III.6) Construïu la funció  $H(s)$  d'un filtre de Butterworth que presenti una atenuació inferior a 3 dB fins a 3,4 kHz i superior a 10 dB a partir de 5 kHz.

III.7) Considereu les especificacions de l'atenuació de la figura III.7). Es demana:

- a) Entre les aproximacions de Butterworth, Chebychev i invers de Chebychev, trieu les que poden verificar aquestes especificacions.
- b) Esbrineu l'ordre necessari perquè les aproximacions seleccionades a l'apartat anterior verifiquin les especificacions.
- c) Proposeu i raoneu una aproximació entre les seleccionades a a) per fer el filtre.

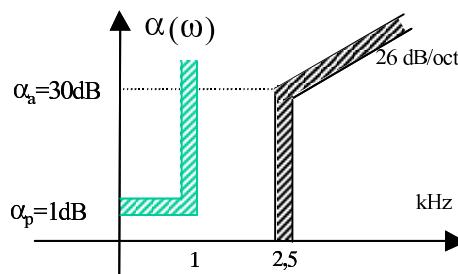


Fig. III.7)

III.8) Considereu les especificacions de l'atenuació

- Atenuació a la banda de pas ( $|\omega| \leq 1$ ) amb arrissat d'amplitud constant d'1dB.
- Zeros d'atenuació a l'origen i  $\omega_{01}$ .
- Zeros de transmissió a l'infinít.

Es demana:

- a) Representeu gràficament aquesta atenuació

Si el filtre es fa amb l'aproximació de Chebychev:

- b) Obtingueu l'ordre necessari.
- c) Obtingueu la funció d'atenuació corresponent.
- d) Determineu la freqüència de tall a 3dB.
- e) Determineu  $\omega_{01}$ .

III.9) A la figura III.9) es representa la funció d'atenuació d'un filtre de Chebychev que compleix la plantilla d'especificacions ( $\omega_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $\omega_a$ ,  $\alpha_a$ ).

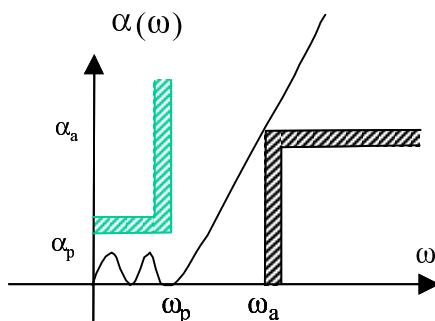


Fig.III.9)

Es demana:

- a) Deduïu l'ordre del filtre
- b) Trobeu l'atenuació asimptòtica en dB/oct
- c) Obtingueu l'expressió de  $\alpha(\omega)$
- d) Determineu l'expressió de  $\epsilon^2$

- III.10) Sigui el filtre  $|H(\omega)|^2 = \frac{H_{\max}^2}{1+\omega^6}$  la funció atenuació del qual es mostra a la figura III.10)

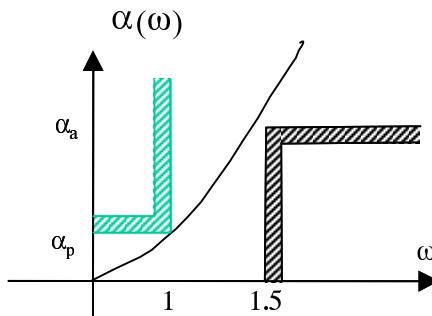


Fig.III.10)

Si es vol un filtre amb les especificacions següents:

$$f_p = 500 \text{ Hz}, \alpha_p, f_a = 750 \text{ Hz}, \alpha_a$$

- a) Trobeu l'ordre del nou filtre.
  - b) Trobeu el mòdul de la resposta freqüencial.
  - c) Trobeu la funció de transferència del filtre realitzable.
- III.11) En relació amb els filtres de Butterworth i Chebychev, contesteu les preguntes següents:
- a) Determineu els valors de  $\epsilon$  per dissenyar un filtre de Chebychev amb un arrissat a la banda de pas de: (1) 0,2 dB, (2) 0,5 dB, (3) 2 dB, (4) 3 dB i (5) 5 dB.
  - b) Determineu l'amplada de banda a 3 dB per a un filtre de Chebychev passa-baix de quart ordre normalitzat ( $\omega_p=1$ ), suposant que tenim un arrissat a la banda de pas de: (1) 0,05 dB, (2) 0,2 dB, (3) 1 dB, (4) 2 dB, (5) 3 dB i (6) 5 dB.
  - c) Trobeu la funció de transferència d'un filtre passa-baix de Butterworth d'ordre dos amb una amplada de banda a 3dB de 2.000 Hz. Dibuixeu el mòdul de la resposta freqüencial.
  - d) Considereu els filtres d'ordre tres de Butterworth i Chebychev amb freqüència de tall a 3 dB normalitzada a 1 en ambdós casos. Compareu i comenteu les característiques més importants d'ambdós filtres a les bandes de transició i atenuada.
- III.12) Supposeu un senyal  $x(t)$  amb un espectre  $X(f)=0 \forall |f|>1\text{kHz}$ , que és emmascarat per senyals interferents que es troben a partir de 2 kHz. Considerant una atenuació màxima a la banda de pas de 3 dB, i que s'ha de disminuir l'amplitud de les interferències 4 vegades com a mínim, es dissenya un filtre de Chebychev i s'obté la funció d'atenuació del filtre normalitzat que es mostra a la figura III.12).

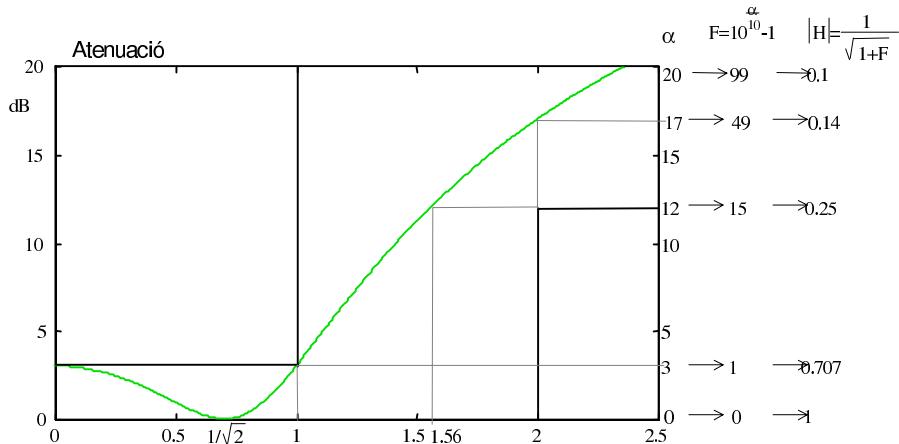


Fig. III.12)

Les escales d'ordenades addicionals que es mostren a la dreta de la figura anterior es corresponen a la transformació de  $\alpha$  a  $F=10^{\alpha/10}-1$  i la d'aquests valors a  $1/(1+F)^{1/2}$ .

Es demana que a partir de totes les dades anteriors es disseny el filtre invers de Chebychev d'ordre mínim que verifica les especificacions. Ajusteu el filtre a la banda de pas, és a dir, la corba d'atenuació ha de passar pel punt  $f=1000$ ,  $\alpha=3$ .

Per fer aquest disseny contesteu les preguntes següents i justifiqueu-ne les respostes. El disseny que es demana és del filtre desnormalitzat.

- Trobeu l'ordre del filtre.
- Doneu l'expressió exacta de la funció característica en funció dels polinomis de Chebychev. Recordeu que el disseny s'ha d'ajustar a la banda de pas.
- Trobeu la posició de tots els zeros d'atenuació.
- Trobeu la posició de tots els zeros de transmissió.
- Deduïu el comportament asymptòtic del filtre quan  $f \rightarrow \infty$ .
- Dibuixeu amb cura la corba d'atenuació del filtre.
- Dibuixeu amb cura el mòdul de la resposta freqüencial del filtre.
- Deduïu, a partir de l'expressió de l'apartat b), el valor de l'atenuació mínima dels senyals interferents.

Si tenim l'expressió genèrica de la funció de transferència del filtre com a

$$H(s) = k \prod_{i=1}^N (s - z_i) / \prod_{j=1}^M (s - p_j)$$

- Trobeu el valor dels paràmetres ( $N, M, z_i, p_j, k$ ).

### P5.1 Disseny de filtres passa-baix

Es pretén analitzar els diferents aspectes del comportament dels filtres passa-baix dissenyats amb les aproximacions Butterworth, Chebychev, invers de Chebychev i el·líptic.

1. Fixeu unes especificacions de disseny. Per exemple, una banda de pas fins a 100 Hz amb una atenuació màxima de 2 dB i una banda atenuada a partir de 150 Hz amb una atenuació mínima de 30 dB. Amb les quatre aproximacions compareu els filtres d'ordre mínim dissenyats amb les quatre aproximacions que verifiquen les especificacions. Quina aproximació proporciona el filtre d'ordre menor? Aquest resultat és general?
2. Pel mateix disseny de l'apartat anterior, quina aproximació té un millor comportament de fase? Quina o quines funcions us permeten fer aquesta anàlisi?
3. Creieu que el resultat de l'apartat anterior és generalitzable? Per un mateix ordre, per exemple ordre 5, quina aproximació té millor comportament de fase?
4. Per un mateix ordre, quin filtre és més selectiu? Considereu l'ordre 5. Quants dB de diferència a la freqüència  $f_a$  hi ha entre el filtre més selectiu i els altres?
5. Compareu, per especificacions diferents, les aproximacions de Chebychev i d'invers de Chebychev. Quines coincidències observeu? Quin us comportarà un transitori més llarg? Justifiqueu les respostes.
6. Si no coneixeu l'ordre del filtre dissenyat, seria possible obtenir-lo a partir de la informació gràfica de què disposeu? En quins casos i a partir de què?
7. En les gràfiques es representen les funcions fins a una freqüència de  $2f_a$  si especifica aquest valor o de  $3f_p$  si no l'especifica. Pel cas  $f_p=122$  Hz,  $\alpha_p=2$  dB,  $f_a=140$  Hz,  $\alpha_a=35$  dB, dibuixeu de forma aproximada per a cada tipus de filtre la seva funció d'atenuació per tot el marge freqüencial.
8. A l'hora de dissenyar un filtre la normalització es fa necessària per evitar problemes numèrics. Hi ha, però, una segona raó que la justifica. Un filtre normalitzat ens pot servir de prototipus per al disseny d'altres filtres. Analitzeu les diferents gràfiques obtingudes en dissenyar un filtre de Butterworth amb les especificacions  $\alpha_p=3$ ,  $\alpha_a=30$ ,  $f_p=1$  i  $f_a=2$ , i compareu-les amb les obtingudes en dissenyar un filtre de Butterworth en què varia  $f_p$  i  $f_a$  a 100 i 200 respectivament i amb un altre en què  $f_p=10000$  i  $f_a=20000$ . Quines diferències observeu? Quina conclusió en podeu extreure?
9. Fixat  $f_p=1$ , considereu  $\alpha_p=2$ ,  $\alpha_p=3$  i  $\alpha_p=1$ , i dissenyeu per als tres casos un filtre de Butterworth d'ordre 5. Quines diferències observeu? Justifiqueu la distribució dels pols de cadascun.
10. Tenint en compte que el disseny de tots els filtres es fa ajustant a la banda de pas, justifiqueu el fet que quan només s'especifica  $f_p$ ,  $\alpha_p$  i  $n$ , el programa no us permet dissenyar els filtres inversos de Chebychev i el·líptic. Els podríeu dissenyar si s'especifiqués a més  $f_a$ ? I si la informació addicional fos  $\alpha_a$ ?
11. Visualitzeu el retard de grup d'un Butterworth d'ordre 20 amb  $f_p=1$  i  $\alpha_p=3$ . Què en destacaríeu d'aquesta funció? Què succeeix en augmentar i en disminuir l'ordre? Justifiqueu el comportament d'aquesta funció a partir de la fase i a partir del diagrama de polsos zero.

12. Repetiu l'apartat anterior per l'aproximació de Chebychev.
13. Per un mateix ordre compareu el comportament del filtre de Butterworth i de l'invers de Chebychev sobre les diferents funcions. Justifiqueu les diferències i les coincidències que observeu.
14. Repetiu l'apartat anterior per les aproximacions de Chebychev i el·líptic.
15. Analitzeu per a un parell de dissenys la relació entre les gràfiques de fase i de retard de grup. Quina escala hi ha a l'eix d'ordenades de cadascuna de les funcions?
16. Quants dB/oct creix l'atenuació d'un filtre de Butterworth d'ordre 30 amb  $f_p=100$  i  $\alpha_p=1$ ? Com ho podeu mesurar? Repetiu-ho per ordre 3. Justifiqueu la discrepància en cas que els resultats no siguin els esperats.
17. Comproveu amb la gràfica si és correcte el raonament següent. Tant els filtres de Butterworth com els de Chebychev tenen un comportament asymptòtic de  $6n$  dB/oct. Per tant, si comparem els de Butterworth d'ordre 27, 28, 29 i 30, l'atenuació que podrem veure pel valor més gran de f diferirà de l'un a l'altre en 6 dB. Justifiqueu-ho. Seria correcte per als filtres normalitzats ( $f_p=1$  i  $\alpha_p=3$ )? Es verifica per alguna freqüència?
18. Mesureu l'atenuació del filtre de Butterworth d'ordre 30 amb  $f_p=1$  i  $\alpha_p=3$ , a la freqüència  $f=2$ , i discutiu cadascuna de les afirmacions següents:
  - a) Hauria de donar 180 dB. Si no dóna és per errors numèrics de càcul, ja que l'ordre és molt gran.
  - b) Hauria de donar 180 dB. Si no dóna és perquè la freqüència  $f=2$  no és prou gran per considerar el comportament asymptòtic.
  - c) No ha de donar exactament 180 dB ja que el logarisme de 2 no és 0,3 sinó 0,30103.
  - d) No ha de donar 180 dB. Aquest valor el donarà quan sigui  $w_p=1$ , és a dir,  $f_p=1/2\pi$ .
  - e) Ha de donar un valor molt proper a 180 dB i també passarà per altres valors de  $\alpha_p$ , ja que estem en el cas normalitzat  $f_p=1$  i, per tant,  $\alpha \approx 20n\log 2$ .
19. Analitzeu la linealitat de la fase per al filtre de Butterworth d'ordre 2, 9, 16, 23 i 30. Per a cada cas, fins a quina freqüència es pot considerar que la fase és lineal? Quina conclusió en podeu extreure?
20. Per als mateixos casos de l'apartat anterior justifiqueu la relació de la fase amb la resposta impulsional.
21. A partir de diferents exemples deduïu la relació entre la duració de  $h(t)$  i la posició dels pols de  $H(s)$ .
22. Dissenyeu un filtre de Chebychev d'ordre 5 amb  $\alpha_p=5$  per als valors de  $f_p$  de 50, 100 i 150. Compareu els mòduls i compareu les respostes impulsinals. Extraieu-ne conclusions.
23. Compareu les funcions d'atenuació de Chebychev i Butterworth per a les especificacions següents:  $f_p=1$  kHz,  $\alpha_p=1$  dB,  $f_a=2$  kHz,  $\alpha_a=40$  dB. Per a valors grans de f, quina funció creix més ràpidament? Per què?

24. Considereu un disseny de Butterworth amb  $f_p=1$ . Els pols estan distribuïts en un cercle de radi unitat independentment de la resta d'especificacions? Per què? Si la resposta és negativa, què heu de fer perquè ho estiguin?
25. Dissenyeu un filtre de Chebychev i invers de Chebychev d'ordre 21 amb  $f_p=1$ ,  $\alpha_p=1$ ,  $f_a=2$ ,  $\alpha_a=22$ . Observant l'atenuació i el diagrama de pols zero contesteu les qüestions següents:
  - a) Existeix alguna relació entre la posició dels zeros de l'invers de Chebychev i la posició dels màxims de la seva funció d'atenuació?
  - b) Existeix alguna relació entre la posició dels zeros de l'atenuació de Chebychev i els màxims de l'invers de Chebychev?
  - c) Existeix alguna relació directa entre la posició dels pols d'ambdós filters?
26. Dissenyeu un el·líptic d'ordre 11 amb  $f_p=1$ ,  $\alpha_p=5$ ,  $f_a=2$  i  $\alpha_a$  qualsevol. Comproveu les simetries de la funció d'atenuació.
27. Per a un disseny determinat, per exemple, Chebychev amb  $f_p=100$ ,  $\alpha_p=3$  dB,  $f_a=200$ ,  $\alpha_a=20$  dB, compareu l'efecte de seleccionar  $H_{ref}=1$  o  $H_{ref}=max$ . Justifiqueu per a cada funció (mòdul, atenuació, etc.) les diferències o coincidències que observeu.
28. Per a un disseny determinat estudieu la dependència de l'ordre amb la constant de selectivitat ( $f_p/f_a$ ). Repetiu-ho amb la relació  $\alpha_p/\alpha_a$ .

### P5.2 Influència dels pols i zeros d'un filtre

Aquest exercici permet analitzar la influència dels pols i dels zeros en la resposta impulsional i en la resposta freqüencial d'un filtre.

1. Observant la fase d'un filtre invers de Chebychev o un filtre el·líptic veureu la presència de discontinuitats. A quines freqüències es produeixen? Quantes discontinuitats hi ha? De quin valor és el salt? Justifiqueu-les a partir del diagrama de pols i zeros.
2. Analitzeu com s'han de desplaçar els pols d'un filtre de Chebychev per convertir-lo en una aproximació de Butterworth. Considerau ordres baixos. Observeu que la constant multiplicativa de  $H(s)$  es reajusta per mantenir constant el valor de mòdul a freqüència zero.
3. Dissenyeu un filtre invers de Chebychev. Comproveu que si un zero es desplaça sobre l'eix de freqüència, també es modifica la posició del zero de transmissió corresponent. Què passa amb el zero de transmissió del filtre si desplaceu el zero fora de l'eix de freqüència?
4. Quina és l'excursió de fase si un zero es situa a l'esquerra de l'eix de freqüència o a la seva posició simètrica, a la dreta de l'eix? Justifiqueu la resposta.
5. Com influeix la posició dels pols en la durada de  $h(t)$ ? Els zeros hi tenen alguna influència?
6. Què succeeix si algun pol se situa a la dreta de l'eix freqüencial?

7. Què succeeix si porteu algun pol cap a l'origen? Recordeu que la constant multiplicativa de  $H(s)$  es reajusta per mantenir constant el valor de mòdul a freqüència zero.
8. Justifiqueu l'evolució de la resposta impulsional quan s'acosta un pol a l'eix freqüencial i el va desplaçant cap a valors més grans. A quina freqüència es produeixen els passos per zero de  $h(t)$ ?
9. Partint d'un filtre invers de Chebychev d'ordre 4, i observant el mòdul, obtingueu un filtre passabanda modificant la posició de zeros i pols.
10. Dissenyeu un filtre el·líptic d'ordre 2. Intenteu fer un filtre passa-tot (mòdul constant a tot el marge de freqüència) modificant la posició dels zeros. Recordeu que la constant multiplicativa de  $H(s)$  es reajusta per mantenir constant el valor de mòdul a freqüència zero.
11. Què succeeix a les funcions que pot visualitzar quan allunya els pols de l'eix freqüencial?
12. Seleccioneu un filtre d'ordre 1. Aproveu i allunyeu el pol de l'origen. Comenteu i justifiqueu tots els efectes que hi aprecieu. Intenteu generalitzar-ho per a altres ordres.
13. Seleccioneu un Butterworth d'ordre 3, i ara, en lloc de mantenir la fase i variar el mòdul dels pols com en l'apartat anterior feu-ho a l'inrevés, intenteu acostar i allunyar els pols entre si tot mantenint-ne el mòdul constant. Comenteu i justifiqueu tots els efectes que hi aprecieu. Intenteu generalitzar-ho per a altres ordres.
14. Per diferents dissenys observeu els valors de la part imaginària dels pols. Guarden alguna relació amb les especificacions del filtre? Justifiqueu la resposta.
15. Justifiqueu el comportament asimptòtic de la fase de qualsevol filtre dissenyat.

III.13) Es tracta d'estudiar quines limitacions té un sistema de multiplexat en freqüència pel que fa a la separació mínima entre les freqüències portadores.

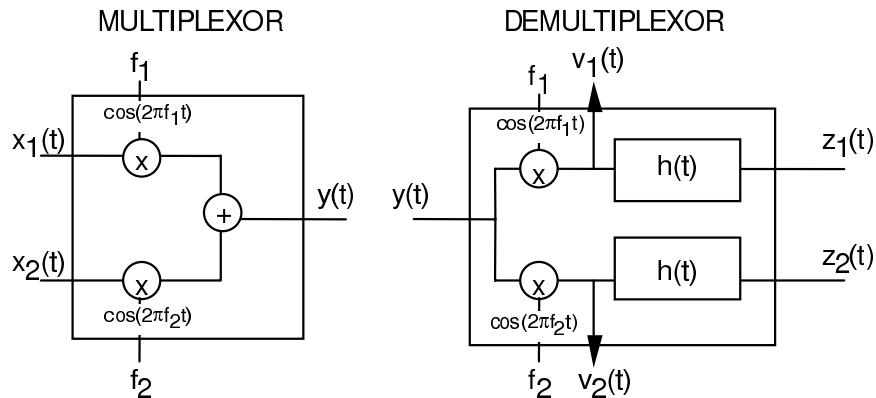


Fig. III.13)

Considerant que cada senyal en banda base té una amplada de  $B$  Hz i que es considera una banda de guarda entre canals de  $B_g$  Hz, trobeu:

- Mòdul de la transformada de Fourier de  $y(t)$ ,  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$
- Les especificacions de selectivitat del filtre  $h(t)$  de l'esquema demultiplexor.
- Mòdul de la transformada de Fourier de  $z_1(t)$  i  $z_2(t)$  considerant les especificacions de discriminació del filtre ideals.

Considereu que els senyals  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  són de banda limitada a  $B=200$  Hz, i que el senyal  $x_1(t)$  es modula amb una portadora de  $f_1=1$  kHz.

- Si el senyal  $x_2(t)$  es modula amb una portadora de  $f_2 = 3$  kHz, quines han de ser les especificacions del filtre? Quina amplada té la banda de guarda entre canals?
- Si la banda de guarda és de  $B_g=200$  Hz, quin és el valor mínim de la portadora  $f_2$ ? Quines han de ser les especificacions del filtre?
- Calculeu l'ordre dels filtres dels apartats anteriors si els dissenys es fan amb les aproximacions de Butterworth i de Chebychev, considerant  $\alpha_p=1$  dB i  $\alpha_a=50$  dB.

### P5.3 Filtrat de sinusoides

En aquest apartat es filtra el senyal  $x(t)$ , format per la suma de dues sinusoides  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ , amb el filtre  $h(t)$ , prèviament dissenyat, i s'obté el senyal de sortida  $y(t)$ .

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = x_1(t) + x_2(t)$$

El sistema permet especificar els valors d'amplitud, freqüència i fase (en graus) de cada sinusoide. Els valors per defecte són zero.

- Dissenyeu un filtre de Butterworth i filtro una sola sinusoide amb freqüència a la banda de pas.
  - Justifiqueu la representació del senyal en el domini freqüencial, especificeu l'amplitud i la freqüència i relacioneu-les amb l'entrada i el filtre. Justifiqueu les possibles discrepàncies amb els valors teòrics.
  - Justifiqueu la representació del senyal en el domini temporal.
  - Quina és la duració aproximada del transitori? Com ho podeu deduir a partir del filtre?
  - Quin és el retard entre  $x(t)$  i  $y(t)$ ? Comproveu que aquest retard el produeix el filtre.
  - Obtingueu la fase de  $y(t)$ . Relacioneu-la amb paràmetres del filtre i també amb el retard obtingut a d).
- Repetiu l'apartat anterior per a una sinusoide de freqüència a la banda atenuada.

3. Dissenyeu un filtre de Butterworth per a les especificacions:  $f_p=100$ ,  $\alpha_p=1$ ,  $f_a=150$ ,  $\alpha_a=30$ . Filtreu el senyal suma de les sinusoides  $\cos(2\pi 80t)$  i  $\cos(2\pi 40t + \pi/2)$ . Compareu entrada i sortida del filtre i justifiqueu el resultat (forma d'ona, retard, transitori...).
4. Repetiu l'apartat anterior per a  $\cos(2\pi 100t) + \cos(2\pi 40t + \pi/2)$ .
5. Torneu-lo a repetir per a  $\cos(2\pi 150t)$  i  $\cos(2\pi 40t + \pi/2)$ .
6. Repetiu els apartats 3, 4 i 5 però utilitzant un filtre de Chebychev amb  $f_p=100$ ,  $\alpha_p=3$ ,  $f_a=150$  i  $\alpha_a=40$ .

#### P5.4 Multiplexat freqüencial

En aquesta pràctica s'analitza una aplicació de disseny de filtres passa-baix com a part d'un sistema de desmultiplexió en freqüència. Coincideix amb l'aplicació analitzada a **P3.4**. En aquell exercici els filtres eren donats. Aquí es dissenyaran els filtres i es veurà com poden condicionar al sistema FDM.

És aconsellable resoldre prèviament el problema III.13). L'esquema representat a la pantalla i la seva nomenclatura és la corresponent a aquest problema. Així, es considera que els senyals  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  són de banda limitada a 200 Hz.

1. Considereu les portadores  $f_1=1$  kHz i  $f_2=3$  kHz. Dissenyeu el filtre més adequat perquè el sistema de desmultiplexió funcioni correctament. Comproveu-ne el funcionament. Quines especificacions heu considerat més convenientes?
  2. Amb el filtre dissenyat, quina podria ser la freqüència portadora  $f_2$  mínima, sense perdre prestacions de rebuig especificades?
  3. Comproveu el funcionament del sistema pels altres 3 tipus de filtres possibles. Comenteu les possibles diferències observades.
  4. Si es considera una banda de guarda entre canals de 100 Hz, quin és el mínim valor de la portadora  $f_2$ ? Comproveu el resultat. Justifiqueu l'aproximació utilitzada i les especificacions triades per al disseny del filtre.
  5. Idealment quants canals de senyal es podrien multiplexar considerant un marge freqüencial de  $y(t)$  de  $800 \leq f \leq 3200$  Hz? Quants en multiplexarieu si en lloc d'un sistema ideal utilitzeu un desmultiplexor amb un filtre de Butterworth d'ordre 4?
- III.14) Es tenen dos missatges  $x(t)$  i  $y(t)$  d'amplada de banda  $B$  Hz, que es volen enviar per un canal de comunicacions que fa servir transmissió per polsos. Per fer-ho, es transmeten fent servir un sistema de modulació i mostratge. La modulació assigna una banda de freqüències a cada senyal, concretament el senyal  $x(t)$  es manté a la banda de  $B$  Hz i el senyal  $y(t)$  es trasllada a la banda  $f_o - B < f < f_o + B$ . El senyal que en resulta es mostreja idealment i les mostres es transmeten a través del canal. L'esquema del transmissor es mostra a la figura III.14a).

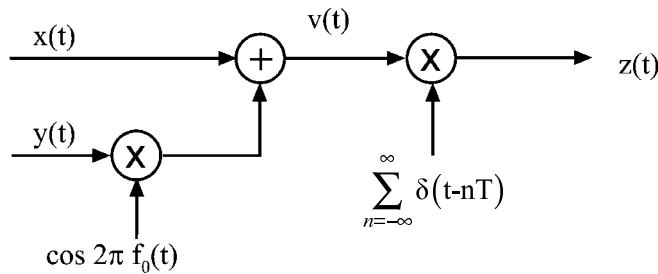


Fig. III.14a)

- a) Calculeu i justifiqueu la freqüència  $f_0$  mínima i el màxim  $T$  perquè els senyals  $x(t)$  i  $y(t)$  es puguin recuperar a partir del senyal transmès  $z(t)$ . Dibuixeu la transformada de Fourier del senyal resultant. En fer el dibuix, suposeu que  $X(f)$  és un pols triangular i  $Y(f)$ , un pols rectangular.

Per recuperar  $x(t)$  es proposa l'esquema següent, en què amb el primer filtre es pretén seleccionar el senyal  $v(t)$  i amb el segon, el senyal  $x(t)$ .

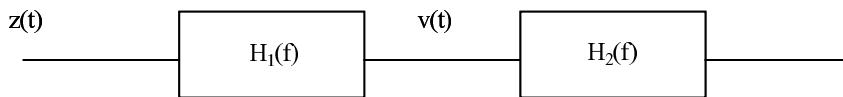


Fig. III.14 b)

Suposeu que trieu  $f_0=4B$  i que  $H_1(f)$  és un filtre de Butterworth d'ordre 2 amb una freqüència de tall a 3 dB de 5B Hz.

- b) Quina hauria de ser la freqüència de mostratge  $f_m=1/T$  perquè el filtre atenuï 20 dB els senyals no desitjats presents a l'entrada?
- c) Quina és la màxima atenuació sobre el senyal  $v(t)$  a la sortida del filtre  $H_1(f)$ ?
- d) Dibuixeu la plantilla d'especificacions del filtre  $H_2(f)$  i especifiqueu clarament les freqüències de la banda de pas, la banda de transició i la banda atenuada.
- e) Si la vostra plantilla compleix un filtre de Chebychev d'ordre 4, dibuixeu la corba d'atenuació sobre la plantilla i indiqueu clarament com s'ha ajustat, la posició dels zeros d'atenuació i el comportament asymptòtic.
- III.15) Els sistemes estèreo de radiodifusió fan compatible la utilització de receptors mono i estèreo. Els primers obtenen la suma del senyal corresponent al canal dret  $x_d(t)$  més el senyal del canal esquerre  $x_e(t)$ . Els segons obtenen, a més, els senyals del canal dret i esquerre separadament. L'esquema de la figura és un diagrama de blocs d'un sistema receptor.

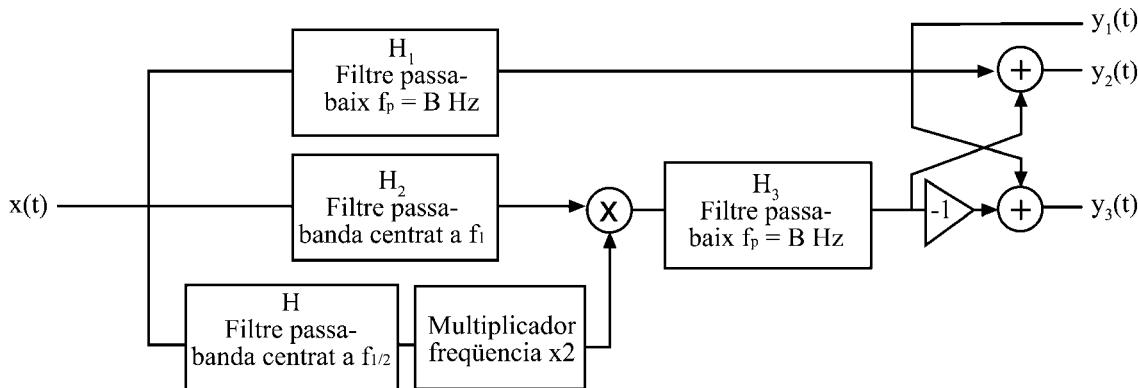


Fig. III.15)

Si els senyals  $x_d(t)$  i  $x_e(t)$  estan limitats en banda a  $B$  Hz,  $f_1 > 2B$  i el senyal  $x(t)$  és

$$x(t) = x_d(t) + x_e(t) + 2(x_d(t) - x_e(t))\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi \frac{f_1}{2} t)$$

- a) Obtingueu  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  en funció de  $x_d(t)$  i  $x_e(t)$ . Considereu que tots els filtres de l'esquema són ideals i de guany unitat.
  - b) Delimitiu les bandes de pas i atenuada per cada filtre perquè el disseny de cadascun d'ells resulti d'ordre mínim.
  - c) Obtingueu l'expressió de  $H(s)$  per a un filtre passa-banda d'ordre dos que permeti seleccionar el to pilot de freqüència  $f_1/2$  si  $B=15$  kHz i  $f_1=40$  kHz, amb atenuació mínima de 40 dB a la banda atenuada
- III.16) En un sistema de comunicacions estèreo es transmet simultàniament la informació del canal dret i l'esquerre. Per mantenir la compatibilitat amb un sistema mono, es transmet la informació en forma de senyal suma dels dos i senyal diferència entre els dos. El sistema mono únicament selecciona i reproduceix el senyal suma, mentre que el sistema estèreo obté els senyals dels dos canals a partir dels senyals transmesos. Tenim  $x_d(t)$  i  $x_e(t)$ , que són els senyals del canal dret i esquerre respectivament, els dos amb una amplada de banda  $B=15$  kHz.
- a) Estudieu el sistema de transmissió de la figura III.16.a). Per fer-ho, dibuixeu la transformada de Fourier dels senyals  $y(t)$  i  $z(t)$ . Supposeu  $X_d(f) = \prod (f/2B)$ ,  $X_e(f) = \Delta(f/B)$ ,  $f_0 = 38$  kHz, i  $f_1 > f_0 + B$
  - b) Supposeu que transmet  $z(t)$  i la rep sense distorsió. Dissenyeu un sistema receptor per obtenir  $y(t)$  a partir de  $z(t)$ .

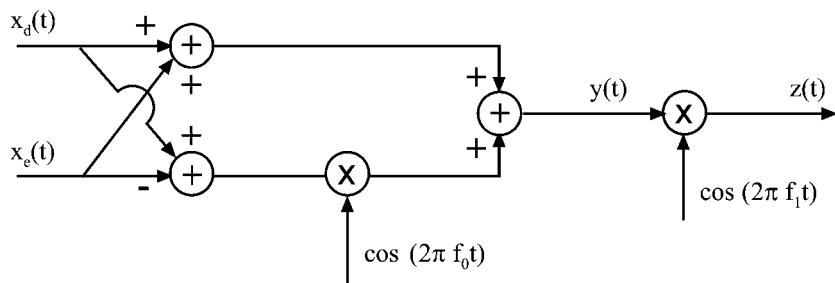


Fig. III.16a)

- c) Comproveu que el sistema de la figura III.16.b) permet obtenir  $x_d(t)$  i  $x_e(t)$ . Suposeu  $H_1(f)$  un filtre passa-baix ideal d'amplada de banda  $B$  i  $H_2(f)$  un filtre passa-banda ideal d'amplada de banda  $2B$  centrat a  $f_0$ . Determineu el guany dels filtres.
- d) Obtingueu la plantilla d'especificacions dels filtres de l'esquema de la figura III.16.b), suposant una atenuació màxima en banda de pas d'1 dB i una atenuació mínima en banda atenuada de 40 dB.
- e) Compareu els ordres requerits si el disseny es fa amb una aproximació de Butterworth i una de Chebychev.

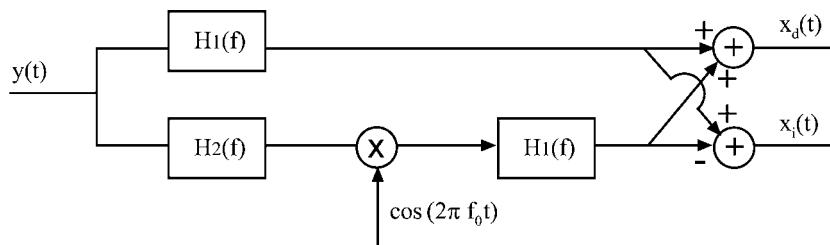


Fig. III.16b)

- III.17) Dos senyals  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  d'amplada de banda  $B=4$  kHz es reben multiplexats de la forma que mostra la figura III.17.a), en què  $z(t)=x_1(t) \cos(2\pi 20t) + x_2(t) \cos(2\pi 30t)$

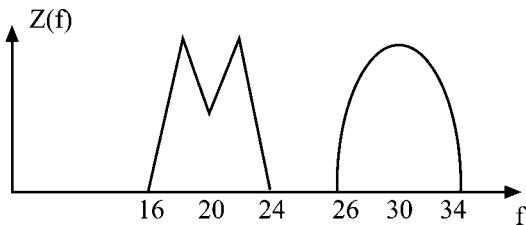


Fig. III.17.a)

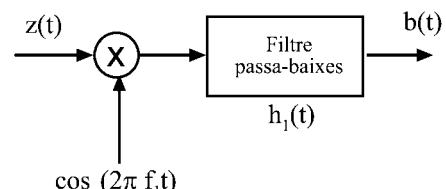


Fig. III.17.b)

- a) Si es desitja recuperar el senyal  $x_2(t)$  amb un sistema demultiplexor, justifiqueu si un esquema com el de la figura III.17.b) permet aconseguir-ho. En cas afirmatiu, indiqueu el valor adient de  $f_1$  així com la plantilla d'especificacions que ha de verificar el filtre passa-baix quan es vol rebutjar el senyal  $x_1(t)$  amb una atenuació mínima  $\alpha_a$  i es permet una màxima atenuació  $\alpha_p$  al senyal  $x_2(t)$ .

Considerant l'aproximació de Chebychev, respongueu les qüestions següents:

- b) Deduïu l'expressió que ha de verificar l'ordre del filtre en funció de  $\omega_p$ ,  $\omega_a$ ,  $\alpha_p$  i  $\alpha_a$ .
- c) Doneu l'expressió de la funció característica resultant d'aplicar l'ajust a la banda de pas, en funció dels paràmetres esmentats a l'apartat anterior.

Per satisfer la plantilla d'especificacions de l'apartat a) es necessita un filtre d'ordre  $n_B=6$  si es considera l'aproximació Butterworth i ordre  $n_{CH}=n_{ICH}=3$  per a les aproximacions de Chebychev i inversa de Chebychev.

- d) Si es desitja un comportament asimptòtic mínim de 20 dB/oct, aquests filters poden verificar les especificacions? En cas afirmatiu, amb quin ordre?
- III.18) Per recuperar un senyal  $x(t)$  passa-baix amb una amplada de banda de 4 kHz a partir de les seves mostres, es disposa d'un filtre Butterworth d'ordre 3 amb atenuació de 3 dB a la freqüència esmentada.

Es demana el següent:

- a) Trobeu el número i la posició de tots els zeros d'atenuació i de transmissió del filtre.
- b) Doneu l'expressió de la funció característica del filtre normalitzat.
- c) Doneu l'expressió de la funció de transferència del filtre normalitzat.
- d) Dibuixeu el diagrama de pols i zeros de la funció de transferència del filtre normalitzat.
- e) Dibuixeu de manera aproximada la corba d'atenuació i la del mòdul de la resposta freqüencial del filtre desnormalitzat. Quin és el comportament asimptòtic de l'atenuació?
- f) Quina és la duració aproximada de la resposta impulsional del filtre (normalitzat i desnormalitzat)? Justifiqueu la resposta.

$$\text{Donada l'expressió genèrica de } H(s) = k \prod_{i=1}^N (s - z_i) / \prod_{j=1}^M (s - p_j)$$

- g) Obtingueu el valor de la constant  $k$  en funció dels pols, per a un filtre Butterworth d'ordre n qualsevol. Justifiqueu-ho.
- h) Si la  $h(t)$  que s'obté per al cas normalitzat és la que es mostra a la figura que hi ha a continuació, quina és la resposta impulsional del filtre desnormalitzat? Justifiqueu la resposta.

- i) Doneu un esquema complet de sistema de mostratge i recuperació per al senyal  $x(t)$ .
- j) Escolliu la freqüència de mostratge que considereu mínima per recuperar el senyal.
- k) Tindria algun avantatge el mostratge a una velocitat molt alta? Justifiqueu la resposta.

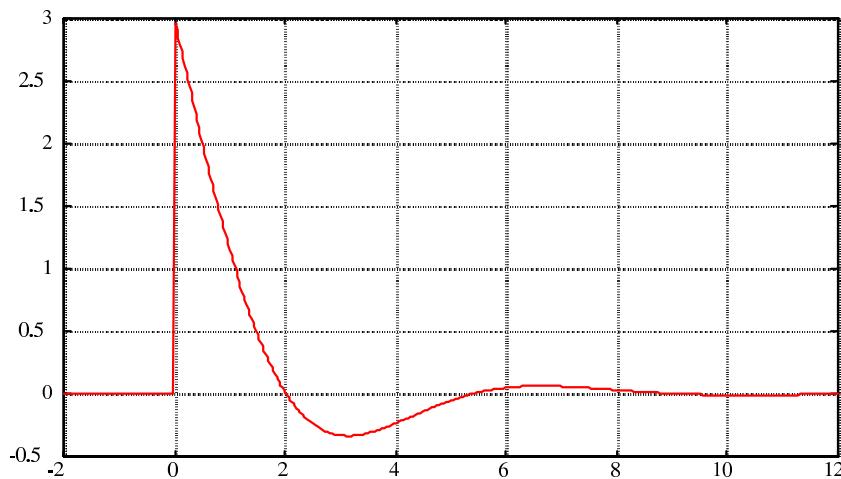


Fig.III.18)

III.19) Tenim el senyal  $x(t)$  d'amplada de banda  $B$  Hz, que s'aplica al sistema de la figura III.19, en què

$$x_c(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} p(t-nT_m) \text{ amb } p(t) = 2\Pi(2t/T_m) - \Pi(t/T_m).$$

Es vol obtenir a la sortida un senyal  $z(t)$  proporcional a  $x(t) \cos(2\pi f_m t)$ , en què  $f_m = 1/T_m$

- a) Calculeu i justifiqueu el valor màxim possible que pot tenir  $T_m$  si el filtre  $H(f)$  és un filtre passa-baix ideal. Quina hauria de ser l'amplada de banda del filtre?
- b) Ara suposeu  $f_m = 2B = 1$  Hz. Dissenyeu la plantilla d'especificacions perquè a la banda de pas obtingueu una atenuació màxima de  $\alpha_p = 3$  dB i una atenuació mínima a la banda atenuada de  $\alpha_a$  dB. Justifiqueu les freqüències que heu elegit.
- c) Dissenyeu el filtre de Butterworth  $|H(\omega)|^2$ , que compleix les especificacions amb  $\alpha(\omega_p) = \alpha_p$ .
- d) Supposeu que l'ordre adequat és 5. Calculeu l'atenuació a la freqüència de 3 Hz.

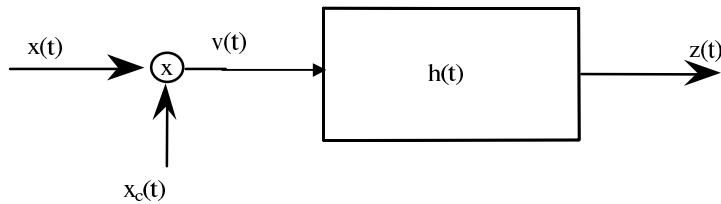


Fig. III.19)

### Transformació de freqüències

L'objectiu de la transformació de freqüències consisteix aaprofitar la teoria desenvolupada per al disseny d'aproximacions passa-baix per obtenir altres tipus de filtre. Es dissenya l'anomenat prototip passa-baix i per mitjà de la funció de transformació de freqüències s'obté el filtre desitjat.

La transformació és del tipus:

$$\lambda = f(s)$$

en què  $\lambda$  correspon al pla del prototip i  $s$  correspon al pla del filtre.

En particular, la relació d'eixos freqüencials ve donada per:

$$\Omega = f(\omega)$$

Els passos que cal seguir per obtenir el filtre són els següents:

- Passar de les especificacions del filtre que s'ha de dissenyar a especificacions passa-baix per mitjà de la transformació de freqüències en l'eix freqüencial
- Dissenyar el prototip passa-baix,  $H_p(\lambda)$ , per mitjà de mètodes conegeuts.
- Passar a la banda desitjada per mitjà de la transformació de freqüències  $H(s) = H_p(f(s))$ .

En els gràfics següents s'il·lustren les transformacions de freqüències passa-baix a passa-alt, a passa-banda i a banda eliminada, a través de la relació entre els eixos freqüencials. A més, es mostra com es transformen les plantilles d'especificacions del filtre que es vol dissenyar a la del prototip passa-baix.

### Transformació passa-baix a passa-alt

Funció de transformació:  $\lambda = \frac{1}{s}$

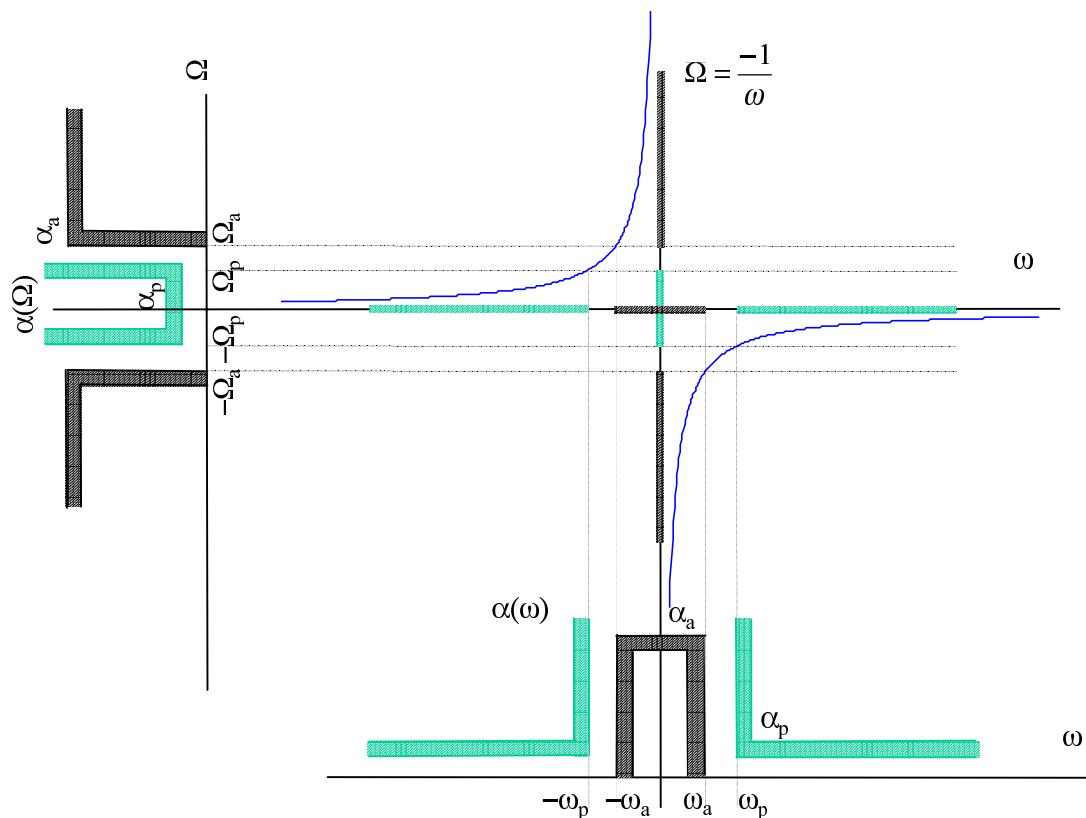


Figura 4

### Transformació passa-baix a passa-banda

Funció de transformació:  $\lambda = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s}$

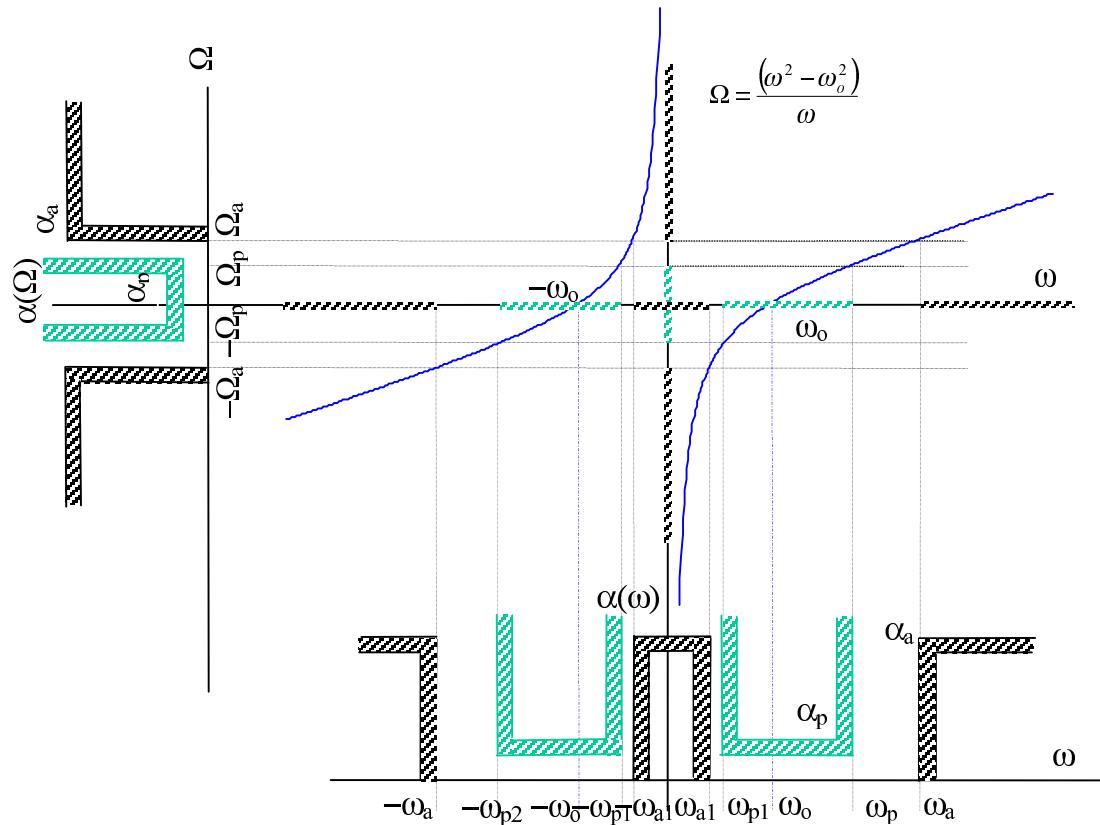


Figura 5

### Transformació passa-baix a banda eliminada

Funció de transformació:  $\lambda = \frac{s}{s^2 + \omega_\infty^2}$

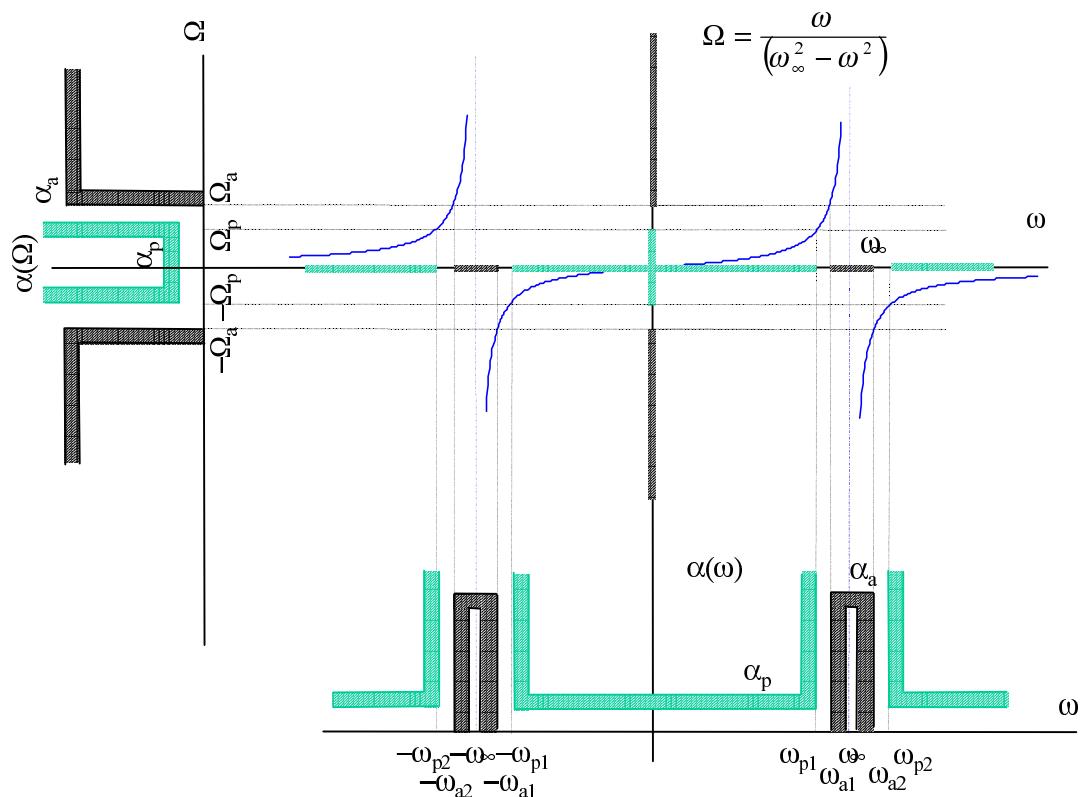


Figura 6

---

**PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS**


---

- III.20) Es vol dissenyar un filtre passa-banda de freqüència central  $\omega_0$ , amplada de banda  $B$  rad/s a 3 dB, zeros de transmissió únicament en origen i infinit i comportament asymptòtic a les bandes atenuades amb pendent de 6 dB/octava. Si fem servir la transformació de freqüències, es demana el següent:
- Trobeu la funció característica del prototip passa-baix.
  - Trobeu la funció de transferència del filtre passa-baix.
  - Obtingueu la funció de transferència de filtre passa-banda.

- III.21) Supposeu que heu dissenyat el filtre de passa-baix següent:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{H_{\max}^2}{1 + \left(\frac{\Omega}{1,5}\right)^8}$$

i heu calculat els valors següents:  $\alpha_p = \alpha(1) = 0,1$  dB,  $\alpha_a = \alpha(5) = 42$  dB, i que per mitjà d'una transformació de freqüències fareu un filtre passa-banda que s'ajusti a la plantilla d'especificacions de la figura III.21)

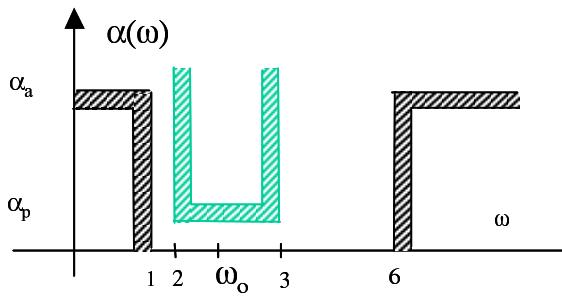


Fig III.21)

Es demana:

- Trobeu  $\omega_0^2$
  - Obtingueu l'atenuació asymptòtica del passa-banda a l'origen i a infinit
  - Dibuixeu l'atenuació resultant del filtre passa-banda sobre la plantilla de la figura III.21)
  - Calculeu (o aproximeu) els següents valors d'atenuació del filtre passa-banda:  $\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \alpha(6), \alpha(12), \alpha(24)$ .
- III.22) Coneixent que la plantilla de la figura III.22) correspon al prototip passa-baix, obtinguda per transformació de freqüències a partir de la plantilla d'un filtre de banda eliminada que es vol dissenyar, es demana el següent:
- Justifiqueu l'ordre necessari per verificar la plantilla segons una aproximació de Butterworth.
  - Obtingueu l'expressió de la funció característica  $F(\Omega^2)$  ajustant pel límit de la banda de pas. Quin és el valor de l'atenuació a l'inici de la banda atenuada  $\alpha(\Omega_a)$ ?

- c) Obtingueu l'expressió de la funció característica  $F(\Omega^2)$  dissenyada segons l'aproximació de Chebychev de manera que no quedi cap zero d'atenuació a l'origen i ajustant-la pel límit de la banda de pas. Justifiqueu el càlcul de l'ordre necessari i doneu el valor de  $F(\Omega_a^2)$ .
- d) Raoneu la possibilitat de dissenyar aquest filtre segons l'aproximació inversa de Chebychev.
- e) Aplicant transformació de freqüències dibuixeu aproximadament la plantilla corresponent a un filtre banda eliminada amb freqüència central  $f_c=5$  kHz. Indiqueu la transformació  $\lambda=f(s)$  que s'ha de considerar i dibuixeu aproximadament la forma de la corba d'atenuació dissenyada amb les condicions de l'apartat c). Comenteu la situació dels zeros de transmissió i atenuació del filtre banda eliminada.

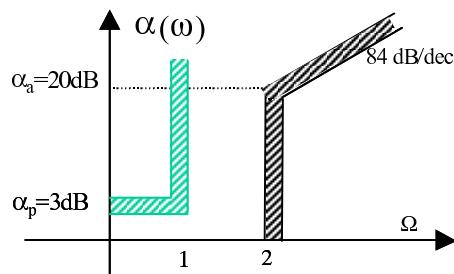


Fig.III.22)

- III.23) Es vol dissenyar un filtre passa-banda  $H(f)$  amb les característiques següents: l'atenuació tendeix a infinit només a l'origen i a l'infinít, l'atenuació s'ha d'anular exclusivament a la freqüència  $f_0$ , l'ordre del filtre ha de ser el mínim possible.
- Dibuixeu aproximadament les corbes d'atenuació i del mòdul de la resposta freqüencial d'un filtre que verifiqui les hipòtesis anteriors.
  - Obtingueu la funció característica  $F(\omega^2)$  i l'expressió de  $|H(j\omega)|^2$  del filtre que verifica les condicions anteriors. Ajusteu el filtre perquè a  $\sqrt{2} f_0$  tingui una atenuació de 3 dB. Quin és l'ordre del filtre? Quin és el comportament asymptòtic de l'atenuació a l'origen i a infinit? A quines freqüències l'atenuació és de 3 dB?
  - Mitjançant la transformació de freqüències  $\Omega=\omega^2-\omega_0^2/\omega$ , obtingueu el prototip passa-baix. Identifiqueu el tipus de filtre obtingut. Quina és la funció de transferència d'aquest prototip?
- III.24) Trobeu la funció de transferència  $H(s)$  d'un filtre de Butterworth passa-banda d'ordre 4, amb freqüència geomètrica central  $\omega_o$  i amplada de banda a 3 dB donada per  $\omega_p$ . (especifiqueu els polinomis del numerador i del denominador en funció únicament de  $\omega_o$  i  $\omega_p$ ).

- III.25) A la figura III.25) es mostra la corba d'atenuació d'un filtre passa-banda de funció de transferència desconeguda. El filtre té una amplada de banda a 3 dB de 5 kHz, i l'atenuació és nul·la per a una freqüència de 6 kHz.

- Si apliquem la transformació de freqüència  $\lambda = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s}$ , dibuixeu la corba d'atenuació del prototip passa-baix.
- Normalitzeu aquest prototip de manera que la freqüència de tall a 3 dB sigui la unitat, i trobeu la funció característica d'aquest prototip.
- Obtingueu la funció de transferència del prototip normalitzat.
- Desnormalitzeu el prototip i obtingueu l'expressió de la funció de transferència  $H(s)$  del filtre passa-banda.
- Quant val l'atenuació introduïda pel filtre passa-banda a la freqüència de 36 kHz?

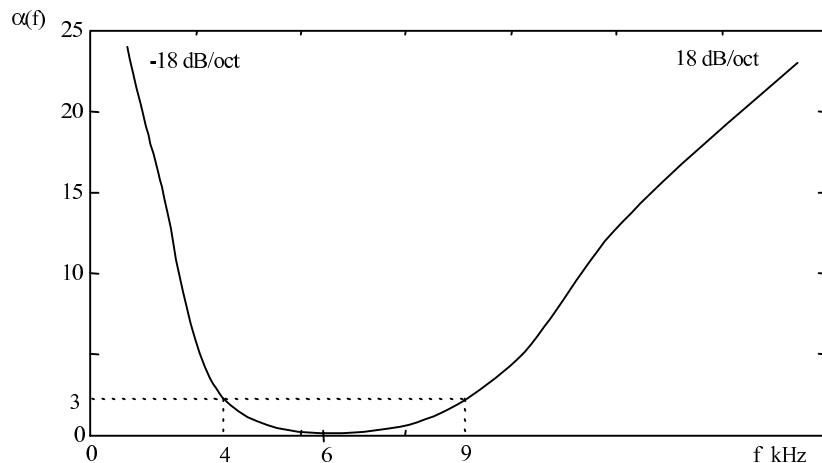
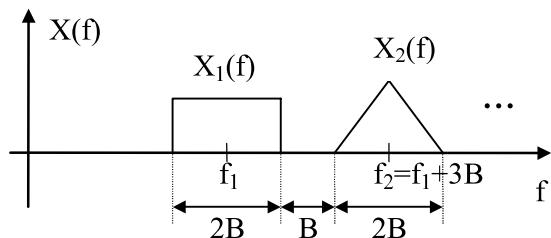


Fig. III.25)

- III.26) Es té un senyal  $x(t)$  passa-banda obtingut per multiplexació freqüencial de senyals passa-baix amb la mateixa amplada de banda  $B$  Hz. Les portadores  $f_1, f_2, \dots, f_N$  s'escullen de tal forma que valen  $f_i = f_{i-1} + 3B$  amb  $i=2, \dots, N$  (vegeu l'exemple de la figura III.26).



Mitjançant un filtre passa-banda es pot seleccionar un dels components. Primerament s'estudiarà la influència de l'elecció de les portadores en el disseny del filtre.

Fig. III.26)

Suposeu que dissenyeu el filtre a partir d'un prototip passa-baix per a la transformació de freqüències  $\Omega = (\omega^2 - \omega_0^2)/\omega$ . Es demana el següent:

- Trobeu el valor de  $f_0 (= \omega_0/2\pi)$  en funció de la  $f_i$  perquè l'amplada de banda del prototip passa-baix sigui sempre 2B Hz, independentment del component que voleu obtenir.
- Per la transformació anterior verifiqueu que la selectivitat del prototip dependrà de la freqüència  $f_i$ . Quina incidència té això sobre l'ordre del filtre? Quin component requerirà l'ordre més gran? Si s'augmenta molt les freqüències de les portadores, és a dir, si es fa  $f_i$  molt gran, cap a quin valor anirà la selectivitat del prototip passa-baix?

Suposeu que la transformació de freqüències porta a les següents especificacions del prototip passa-baix normalitzat: banda de pas a  $\Omega_p=1$  amb  $\alpha_p=3$  dB i banda atenuada a  $\Omega_a=2$  amb  $\alpha_a=15$  dB. Utilitzant un filtre de Butterworth es requereix un filtre d'ordre 3 per verificar-les. Per a aquest prototip es demana el següent:

- Doneu l'expressió de la funció característica (ajusteu al punt que us sigui més còmode).
  - Calculeu el valor aproximat de l'atenuació mínima a la banda atenuada. Comproveu que es verifiquen les especificacions.
  - Doneu la posició i número de zeros de transmissió i de zeros d'atenuació.
  - Doneu l'expressió de  $H(s)$ . Especifiqueu la posició dels pols i zeros.
  - Obtingueu l'expressió de la resposta impulsional del filtre.
  - Especifiqueu la transformació de freqüències que us permetrà realitzar el filtrat passa-banda del component  $i$  del senyal  $x(t)$  i assegurar una atenuació màxima de 3 dB d'aquest component. Suposant que les freqüències de les portadores són molt grans, quina atenuació mínima aconseguireu per als components  $i-1$  i  $i+1$ ? Quin és l'ordre d'aquest filtre? Dibuixeu acuradament la funció d'atenuació d'aquest filtre i indiqueu tots els valors que congueu. Obtingueu dos pols del filtre.
- III.27) Es considera el senyal multiplexat  $y(t)$  de la figura III.27) d'on es vol recuperar el senyal passa-banda situat a  $4 \leq \omega \leq 12$  mitjançant un filtre passa-banda  $h_2(t)$ , que es vol dissenyar a partir d'un prototip passa-baix aplicant la transformació de freqüències  $\Omega = \frac{\omega^2 - 64}{\omega}$ . Es demana el següent:
- Dibuixeu la plantilla d'especificacions corresponent al prototip passa-baix.
  - Si un filtre de Chebychev d'ordre  $n_{CH}=3$  verifica la plantilla anterior, dibuixeu aproximadament la corba d'atenuació d'aquest prototip passa-baix si s'aplica l'ajust a la banda de pas.
  - Dibuixeu la corba d'atenuació del filtre passa-banda i indiqueu-hi clarament tots els valors numèrics que limiten les bandes així com els pends asimptòtics.

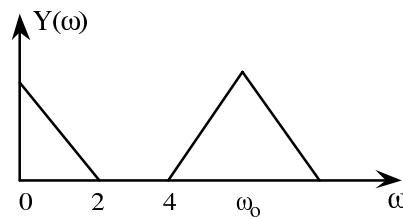


Fig. III.27)

III.28) Es vol dissenyar un filtre passa-banda amb les especificacions de la figura següent.

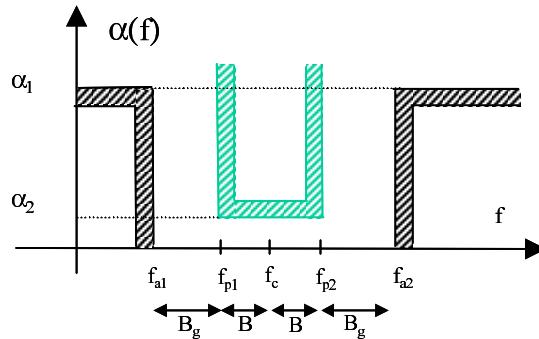


Fig. III.28)

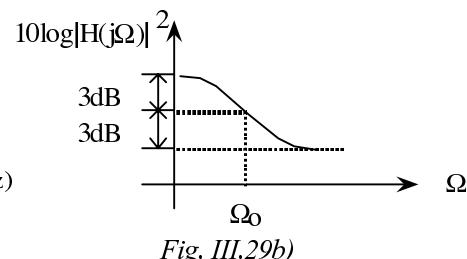
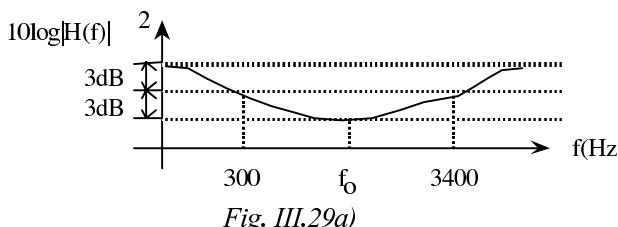
Primerament es considera el disseny per la transformació de freqüències  $\Omega = (\omega^2 - \omega_0^2)/\omega$ .

- Prengueu  $f_0 (= \omega_0/2\pi)$  com  $f_0^2 = f_p/f_{p2}$ . Obtingueu les freqüències límit de la banda de pas i de la banda atenuada del prototip passa-baix. Quina freqüència extrem de cada banda atenuada ( $f_{a1}$  o  $f_{a2}$ ) imposa una plantilla del prototip passa-baix més restrictiva? I per la banda de pas? Com afecta l'elecció de  $f_c$  en l'ordre del filtre? I la de  $B_g$ ?
- Repetiu l'apartat anterior per a  $f_0 = f_c$ .
- Es pot escollir sempre  $f_0^2 = f_{a1}f_{a2}$ ? Si és possible repetiu l'apartat a) per a aquest cas.
- Compareu els resultats de a), b) i c). Quina  $f_0$  escollirà per garantir el mínim ordre del filtre?

Considereu ara que el disseny del passa-banda es fa a partir d'un prototip passa-baix amb atenuacions  $\alpha_1$  a la banda de pas i  $\alpha_2$  a la banda atenuada, de manera que la resposta impulsional  $h(t)$  del passa-banda és  $h(t) = h_p(t) \cos \omega_c t$ , on  $h_p(t)$  és la resposta impulsional d'un passa-baix.

- Dibuixeu la plantilla d'especificacions del passa-baix que us sembli més adient.
- Compareu les fites de l'ordre del prototip passa-baix obtingut mitjançant la tècnica anterior i l'obtingut mitjançant transformació de freqüències.

- g) Es pot garantir que l'atenuació del filtre passa-banda obtingut per aquest procediment verifica la plantilla d'especificacions?
- h) Com es transformen els pols del prototip?
- III.29) Amb la finalitat d'igualar en amplitud la resposta d'un canal telefònic, es vol dissenyar una cèl·lula de segon ordre la funció de transferència  $H(s)$  la qual presenti un mòdul en funció de la freqüència, tal com s'indica a la figura III.29.a). El disseny s'ha de fer a partir de la funció prototip  $H(\lambda) = H \frac{\lambda+1}{\lambda+p}$  i per mitjà d'una funció  $\lambda = f(s)$  de transformació de freqüències adequada. El mòdul de la resposta en freqüència del prototip és el de la figura III.29b). Es demana el següent:



- a) Calculeu els valors numèrics de  $p$  i de  $\Omega_0$  de la funció prototip  $H(\lambda)$  a partir de la figura III.29b)
- b) Obtingueu l'expressió de la funció transformació de freqüències  $\lambda = f(s)$ , i indiqueu els valors numèrics dels seus paràmetres.
- c) Trobeu l'expressió de  $H(s)$  a partir de  $H(\lambda)$ , usant  $\lambda = f(s)$ .

- III.30) Es vol dissenyar un filtre banda eliminada amb les següents especificacions per a l'atenuació

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 1 \text{ dB per a } |\omega| \leq \omega_{p1} = 0.5 \quad \text{y} \quad |\omega| \geq \omega_{p2} = 3 \\ \alpha &\geq 25 \text{ dB per a } \omega_{a1} = 1/\sqrt{2} \leq |\omega| \leq \omega_{a2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Per fer-ho, s'ha pensat usar la transformació de freqüències. En general, el problema que s'ha de resoldre és l'elecció del paràmetre  $\omega_\infty^2$  de la transformació, de manera que l'ordre requerit per al prototip sigui el menor possible. Aquí se'n planteja una versió simplificada.

Es demana el següent:

- a) Utilitzeu  $\omega_\infty^2 = \omega_{p1}\omega_{p2}$  i determineu les especificacions del prototip passa-baix necessàries per complir les especificacions del filtre banda eliminada.
- b) Repetiu l'apartat anterior per a  $\omega_\infty^2 = \omega_{a1}\omega_{a2}$ .
- c) Escolliu el valor de  $\omega_\infty^2$  més adequat entre els que s'han esmentat anteriorment.

### P5.5 Disseny de filtres per transformació de freqüència

Es tracta d'analitzar el disseny de filtres passa-baix, passa-alt, passa-banda o banda eliminada, a partir d'un prototip passa-baix i la transformació de freqüència corresponent.

1. Es vol dissenyar un filtre passa-baix de Butterworth d'ordre 5 amb una freqüència de tall a 3 dB d'1 MHz. Per això es parteix d'un prototip normalitzat a  $f_p=1$  i mitjançant una transformació de freqüència s'obté el filtre desitjat. Quina és la transformació? Compareu la resposta freqüencial i la resposta impulsional del prototip amb les del filtre obtingut. Comenteu els resultats.

2. a) Comproveu els resultats del problema III.30)

Considereu l'aproximació de Chebychev per al cas d'ordre menor.

- b) Quants i on són els zeros d'atenuació i de transmissió del filtre. Relacioneu-los amb els del prototip passa-baix.
- c) Quina banda de pas imposa unes restriccions més fortes en el disseny del prototip?
- d) Quines freqüències marquen els extrems de les bandes de pas del filtre obtingut? Hi ha alguna relació entre elles?
3. Considereu els filtres que verifiquen les condicions del problema III.30.b). Comenteu i justifiqueu les fases dels filtres de banda eliminada obtingudes per cadascuna de les aproximacions.
4. Dissenyeu un filtre passa-banda per transformació de freqüència. Existeix alguna relació directa entre la resposta impulsional del prototipus passa-baix i la resposta impulsional del filtre passa-banda?
5. Es vol fer un filtre de Chebychev amb les especificacions següents: atenuació màxima d'1 dB per a  $|f| \leq 100$  Hz i  $|f| \geq 200$  Hz, i atenuació mínima de 25 dB per a  $130 \leq |f| \leq 170$  Hz, mitjançant transformació de freqüències.
  - a) Quin tipus de filtre és?
  - b) Seleccioneu com a parametre de la transformació  $150^2$ . Quin és l'ordre mínim del prototip passa-baix? Quin és l'ordre del filtre?
  - c) Per al cas anterior, senyaleu on són els zeros d'atenuació i els de transmissió tant del prototip com del filtre. Quina relació hi ha entre ells?
  - d) Seleccioneu com a parametre de la transformació  $130 \times 170$ . Quin és l'ordre del filtre? Quins marges de freqüències ens deixarà passar el filtre?
  - e) Seleccioneu com a parametre de la transformació  $100 \times 200$ . Quin avantatge i quin inconvenient té el filtre obtingut en front de l'obtingut a l'apartat anterior?
  - f) En quins punts de la plantilla d'especificacions s'ajusten els tres filtres anteriors? Justifiqueu-ho.

6. Seleccioneu com a senyal d'entrada la sinusoide. És un senyal periòdic? En cas afirmatiu, de quin període? Justifiqueu la resposta a partir de l'espectre del senyal. Quina és l'amplitud de les sinusoides que componen el senyal?
7. Pel mateix senyal de l'apartat 6 obtingueu mitjançant filtrat la sinusoide de freqüència més baixa.
  - a) Quines especificacions ha donat? Quin filtre s'obté?
  - b) Comenteu el resultat obtingut i comproveu que es tracta del senyal desitjat. Té l'amplitud esperada? Justifiqueu-ho.
  - c) Feu l'apartat anterior per Chebychev i invers de Chebychev.
  - d) Podeu deduir la fase que tenia aquest component en el senyal original?
8. Pel mateix senyal dels dos apartats anteriors, intenteu aïllar ara la sinusoide central.
  - a) Dissenyeu per transformació de freqüència el filtre de Butterworth d'ordre mínim i d'ampla de banda a 1 dB de 20 Hz, de manera que la sinusoide central no quedi atenuada i les altres dues estiguin com a mínim 50 dB per sota. Cal que les especificacions  $\alpha_{a1}$  i  $\alpha_{a2}$  siguin iguals? (tingueu en compte que les especificacions que apareixen a la figura del disseny del prototip passa-baix són recomanacions, ja que són la mínima freqüència de la banda atenuada amb la mínima atenuació requerida, i que es poden variar). Quin és l'ordre del filtre obtingut?
  - b) Quina especificació és més restrictiva, la de  $f_{a1}$  o la de  $f_{a2}$ ?
  - c) Justifiqueu l'espectre de sortida que s'observa a la gràfica.
  - d) Podríem dissenyar un filtre d'ordre menor que no atenués la sinusoide central i que aconseguís baixar les altres sinusoides un mínim de 50 dB? Quina conseqüència tindria?
9. El senyal anomenat com a *P2.4* es correspon al senyal descrit a la pràctica *P2.4*. El senyal que s'ha de processar ara és el resultat del filtrat amb l'allisador que es va descriure en aquell apartat, per tal de disminuir el soroll. Ara es tracta d'eliminar els 50 Hz de la xarxa elèctrica. Aquesta freqüència no és pura sinó que presenta unes certes derives de freqüència. Això significa que el filtre que l'elimini ha de tenir una certa amplada de banda. Dissenyeu aquest filtre i comenteu el resultat obtingut.
10. Com es comenta al problema III.33, una forma habitual de generar sinusoides harmònicament relacionades és mitjançant el filtrat, amb un banc de filtres, d'un senyal periòdic de període  $T=1/f_0$ . El filtre  $n$ -èsim estarà centrat a la freqüència  $nf_0$ .
  - a) A partir del senyal *tren de polsos*, mitjançant les especificacions  $f_{p1}=50n-10$ ,  $\alpha_{p1}=1$  dB,  $f_{p2}=50n+10$ ,  $\alpha_{p2}=1$  dB,  $f_{a1}=50n-40$ ,  $\alpha_{a1}=70$  dB,  $f_{a2}=50n+40$ ,  $\alpha_{a2}=70$  dB, i la transformació de freqüència  $(f_2-(50n-40)x(50n+40))/f$ , dissenyeu amb Butterworth el banc de filtres que us permeten extreure la sinusoide de freqüència  $50n$ . Quin és l'ordre de cada filtre? Justifiqueu-ho.
  - b) Aquest sistema us permet trobar el desenvolupament en sèrie de Fourier d'un senyal periòdic. Descriuviu el procediment. Considereu el senyal tren de polsos d'aquest exercici. Quina és la seva expressió analítica? Comproveu per aquest senyal que amb el procediment descrit s'obté el resultat teòric del desenvolupament en sèrie de Fourier.

- III.31) Es vol dissenyar un filtre banda eliminada que compleixi les especificacions de la plantilla de la figura III.31).

- a) Demostreu quina relació han de verificar  $\omega_{a1}$ ,  $\omega_{a2}$  i  $\omega_\infty$  perquè les dues freqüències límit de la banda eliminada originin la mateixa freqüència al prototipus passa-baix quan s'aplica la transformació de freqüències necessària.

La taula III.31 dóna les pulsacions resultants d'aplicar la transformació de freqüències banda eliminada ( $\omega$ ) a passa-baix ( $\Omega$ ):

$\omega$	$\omega_{a1}$	$\omega_{a2}$	$\omega_{p1}$	$\omega_{p2}$
$\Omega(\text{rad/s})$	50	50	20	10

- b) Considerant l'aproximació de Chebychev obtingueu l'ordre i l'expressió de la funció característica  $F(\Omega^2)$  resultant d'ajustar pel límit de la banda de pas. Dibuixeu la corba d'atenuació donant la posició dels zeros d'atenuació i els valors de  $\alpha(\Omega_a^2)$ ,  $\alpha(\Omega_{p1}^2)$  i  $\alpha(\Omega_{p2}^2)$ .
- c) Obtingueu la normalització de freqüències adequada que origina que la pulsació límit de la banda atenuada passi a ser la unitat. Obtingueu l'expressió de la funció característica normalitzada  $F(\Omega^2)$ . Comproveu que verifica les especificacions als punts d'interès.
- d) Desfent la transformació de freqüències, aplicada a l'apartat b), dibuixeu aproximadament la corba d'atenuació corresponent al filtre banda eliminada, i doneu els valors de  $\alpha(0)$ ,  $\alpha(\omega_{p1}^2)$ ,  $\alpha(\omega_{a1}^2)$ ,  $\alpha(\omega_\infty^2)$ ,  $\alpha(\omega_{a2}^2)$ ,  $\alpha(\omega_{p2}^2)$  i  $F(\infty)$ . Discutiu l'ordre i la situació i multiplicitat dels zeros de transmissió i zeros d'atenuació del filtre banda eliminada.

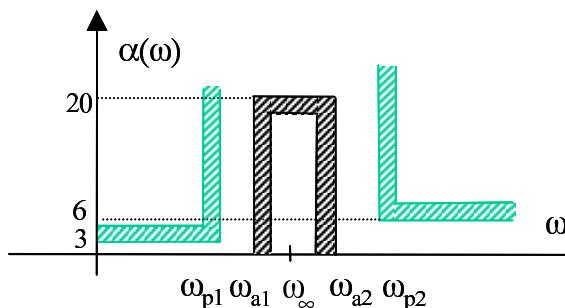


Fig. III.31)

- III.32) A la figura III.32) es mostra l'atenuació d'un filtre passa-baix, els paràmetres  $\alpha_{a1}$ ,  $\alpha_{a2}$ ,  $\alpha_{p1}$ ,  $\alpha_{p2}$  (cotes per a l'atenuació),  $\omega_{\infty 1}$ ,  $\omega_{\infty 2}$  (zeros de transmissió simples) i  $\omega_0 1$ ,  $\omega_0 2$ ,  $\omega_0 3$  i  $\omega_0 4$  (zeros d'atenuació simples) del qual s'indiquen a la mateixa figura.

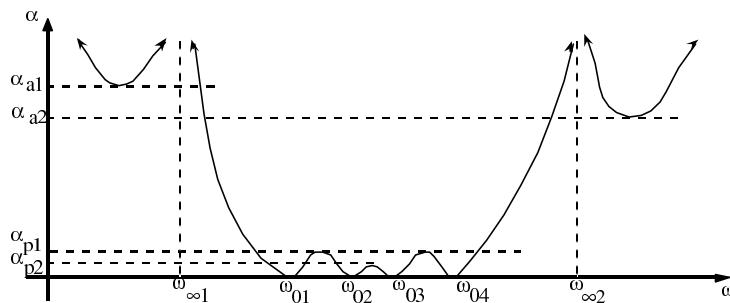


Fig. III.32)

- Proposeu i raoneu l'expressió analítica de la funció característica  $F(\omega^2)$  del filtre en funció dels zeros d'atenuació i els zeros de transmissió.
- En quines condicions dels paràmetres es podria haver obtingut l'atenuació de la figura per mitjà de la transformació de freqüències a partir d'un prototip passa-baix?
- En aquesta mateixa condició, esbrineu el pendent de l'atenuació a l'origen i a l'infinít.
- Dibuixeu i justifiquem l'atenuació del prototip passa-baix.
- Expresseu els zeros d'atenuació i els zeros de transmissió del prototip en funció dels zeros d'atenuació i zeros de transmissió del filtre passa-banda.
- Escriviu l'expressió analítica de la funció característica  $F_P(\Omega^2)$  del prototip.

Per als següents valors concrets dels zeros de transmissió i zeros d'atenuació

$$\begin{aligned}\omega_{\infty 1} &= 1,5, \quad \omega_{\infty 2} = 12, \\ \omega_{01} &= 2, \quad \omega_{02} = 3, \quad \omega_{03} = 4, \quad \omega_{04} = 6,\end{aligned}$$

- proposeu una modificació (si calgués) i raoneu-la, perquè el filtre, sense que disminueixi la seva selectivitat, pugui ser dissenyat per mitjà de la transformació de freqüències. Representeu gràficament l'atenuació del filtre modificat i comenteu l'efecte que la modificació feta pot tenir sobre la discriminació del filtre.
- III.33) A la figura III.33) es mostra la plantilla d'especificacions per al disseny d'un filtre i superposada, la corba d'atenuació que es vol aconseguir.

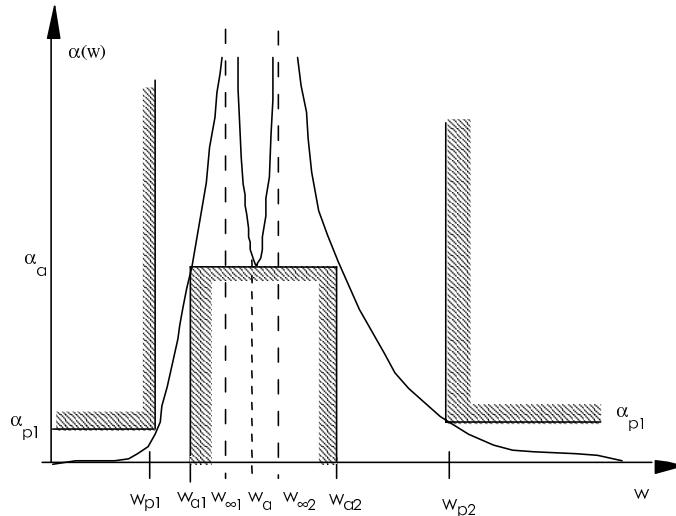


Fig. III.33)

S'especifiquen els paràmetres normalitzats:

$$\omega_{a1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \omega_{a2} = \sqrt{2} \quad \alpha_a = \alpha(\omega_{a1}) = \alpha(\omega_{a2}) = 30 \text{ dB}$$

Es demana el següent (justifiqueu totes les respostes):

- Indiqueu quines condicions han de complir els paràmetres del filtre perquè es pugui construir per transformació de freqüències.
- Doneu dues possibles expressions analítiques de la funció característica (en funció dels paràmetres de la figura).
- Indiqueu per a cada expressió quins són els zeros d'atenuació i transmissió i la seva multiplicitat, així com l'ordre del filtre.
- Indiqui per cada expressió el comportament asymptòtic a l'origen en dB/octava i dB/dècada.

Les aproximacions trobades anteriorment es poden generar a partir d'un prototipus passa-baix. En referència a aquest prototipus, es demana el següent:

- Escolliu la funció característica que permetrà fer un disseny a partir d'una aproximació òptima (Butterworth, Chebychev o invers de Chebychev).
- Doneu l'expressió de la transformació de freqüències que permetrà obtenir el prototip passa-baix.
- Doneu l'expressió de la funció característica del prototip passa-baix considerant l'aproximació òptima escollida a l'apartat e), i especifiqueu els valors numèrics dels zeros i la constant del filtre. Dibuixe la corba d'atenuació del prototip passa-baix.
- Finalment, obtingueu la funció característica del filtre banda eliminada.

- III.34) Es vol dissenyar un filtre banda eliminada que compleixi les especificacions d'atenuació donades per:

$$\begin{aligned}\omega_{p1} &= 50; \omega_{p2} = 75; \alpha(\omega_{p1}) = \alpha(\omega_{p2}) = 3\text{dB} \\ \omega_{a2} - \omega_{a1} &= 10; \alpha(\omega_{a1}) = \alpha(\omega_{a2}) = \alpha_a \text{dB}\end{aligned}$$

El disseny es fa a partir d'un prototip passa-baix, considerant la funció de transformació:

$$\lambda = \frac{s}{s^2 + \omega_\infty^2} \quad \omega_{p1} \cdot \omega_{p2} = \omega_{a1} \cdot \omega_{a2} = \omega_\infty^2$$

- a) Trobeu les especificacions que ha de complir el prototip passa-baix i dibuixe la plantilla d'atenuació.

Ara suposeu que disposeu del disseny d'un filtre passa-baix amb funció de transferència

$$H(\lambda_n) = \frac{a}{\lambda_n^2 + b\lambda_n + c}$$

i que es correspon amb una atenuació donada per la corba de la figura III.34) i els valors de la taula III.34)

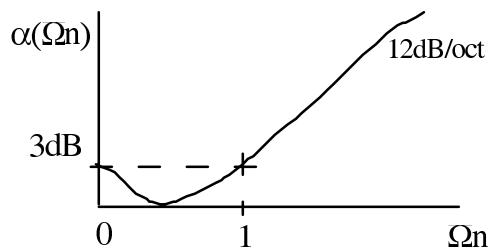


Fig. III.34)

$\Omega_n$	$\alpha(\Omega_n)$ (dB)
1	3
2	17
2.5	21
3	24.5
4	29.8

Taula III.34)

Respongueu raonadament, i deixeu els resultats numèrics en funció de  $\omega_\infty$ ,  $a$ ,  $b$  i  $c$ :

- b) Quin és l'ordre del filtre i amb quina aproximació s'ha dissenyat?
  - c) A partir de la informació anterior dibuixeu la corba d'atenuació del prototip especificat a l'apartat a).
  - d) Quin és el valor  $\alpha_a$  que s'aconsegueix?
  - e) Obtingueu la funció de transferència  $H(\lambda)$  del prototipus de l'apartat a).
  - f) Obtingueu la funció de transferència del filtre banda eliminada.
  - g) Dibuixeu la corba d'atenuació del filtre banda eliminada i especifiqueu clarament valors numèrics.
- III.35) A la figura III.35) es mostra la corba d'atenuació d'un filtre passa-alt:

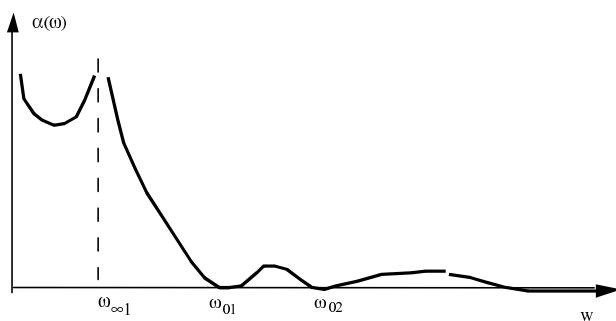


Fig. III.35)

- a) Doneu dues possibles expressions analítiques de la funció característica. Indiqueu en cada cas quins són els zeros d'atenuació i transmissió i la seva multiplicitat, així com l'ordre del filtre. Indiqueu també el comportament asymptòtic a l'origen en dB/octava i dB/dècada.
- b) Les aproximacions passa-alt trobades anteriorment es poden generar a partir d'un prototipus passa-baix. Amb referència a aquest prototipus, es demana el següent:
- c) Escolliu una de les dues funcions característiques del filtre passa-alt i obtingueu l'expressió de la funció característica del passa-baix mitjançant transformació de freqüències. Indiqueu quins són els nous zeros de transmissió i atenuació i la seva multiplicitat. Dibuixeu la corba d'atenuació del prototipus passa-baix. Justifiqueu totes les respostes.

- III.36) A la figura III.36) es mostra la corba d'atenuació d'un filtre passa-alt on els zeros de transmissió a  $\omega_{\infty 1}$  i  $\omega_{\infty 2}$  són simples. Es demana el següent:

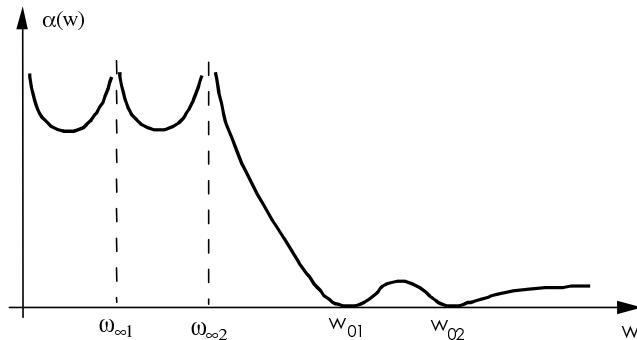


Fig.III.36)

- a) Doneu dues possibles expressions analítiques de la funció característica. Indiqueu en cada cas quins són els zeros d'atenuació i transmissió i la seva multiplicitat, així com l'ordre del filtre. Indiqueu també el comportament asymptòtic a l'origen en dB/octava i dB/dècada.
  - b) Les aproximacions passa-alt trobades anteriorment es poden generar a partir d'un prototipus passa-baix. Amb referència a aquest prototipus es demana el següent:  
Escolliu una de les dues funcions característiques del filtre passa-alt i obtingueu l'expressió de la funció característica del passa-baix mitjançant la transformació de freqüències. Indiqueu quins són els nous zeros de transmissió i atenuació i la seva multiplicitat. Dibuixeu la corba d'atenuació del prototipus passa-baix. Justifiqueu totes les respostes.
- III.37) Tenim el senyal  $x(t)$  d'amplada de banda  $B$  Hz, que s'aplica al sistema de la figura III.37), en què també s'especifica  $x_c(t)$ . A la sortida es vol obtenir un senyal proporcional a

$$x(t) \cos(2\pi 3f_m t) \text{ en què } f_m = 1/T_c$$

- a) Calculeu i justifiqueu el valor màxim possible que pot tenir  $T_c$  si el filtre  $H(f)$  és un filtre passa-banda ideal. Quina hauria de ser l'amplada de banda del filtre i on estaria centrada?
- b) Ara suposeu  $f_m = 2B = 1$  Hz. Dissenyeu la plantilla d'especificacions perquè a la banda de pas obtingueu una atenuació màxima de 3 dB i una atenuació mínima a les bandes atenuades de 40 dB.

El disseny del filtre de passa-banda es fa per transformació de freqüències d'un filtre passa-baix de Butterworth d'ordre 3. Tenim la plantilla d'especificacions anterior i es demana el següent:

- c) Obtingueu l'expressió analítica del prototipus passa-baix  $|H_p(\Omega)|^2$ . Dibuixeu  $\alpha_p(\Omega)$ .
- d) Trobeu la funció de transformació i especificeu  $\omega_o$ .
- e) Comproveu si el filtre compleix o no la plantilla d'especificacions de l'apartat b).
- f) Repetiu els apartats c) i e) per a un filtre de Chebychev d'ordre 3.

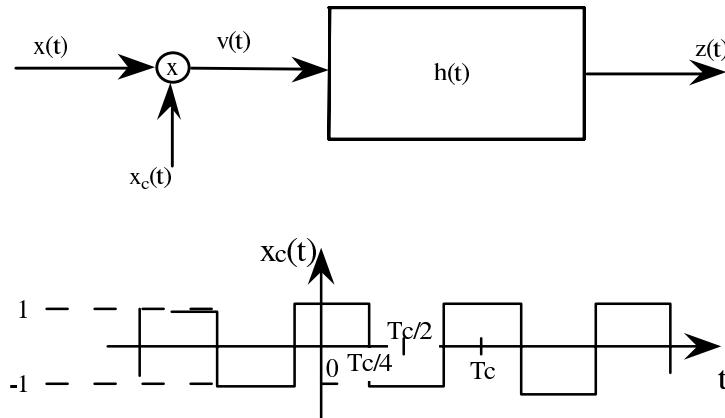


Fig. III.37)

- III.38) Una forma habitual d'obtenir sinusoides harmònicament relacionades és a partir d'una ona periòdica rectangular de període  $T_x=1/f_x$ , amb un desenvolupament en sèrie de Fourier que es pot expressar de la manera següent:

$$x(t) = \frac{1}{T_x} + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ impar}}^{\infty} \frac{1}{T_x} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \cos(2\pi n f_x t + n\phi)$$

Per recuperar la sinusoide a la freqüència  $f_x$  es demana que dissenyeu un filtre passa-banda que compleixi les característiques següents:

- Zeros de transmissió a l'origen i  $3f_x$ .
- Zero d'atenuació a la freqüència de l'harmònic seleccionat ( $f_x$ )
- Atenuació en els altres harmònics  $\alpha_s \geq 40$  dB

Es demana el següent:

- a) Justifiqueu que un filtre passa-banda que compleixi les especificacions es pugui fer per transformació de freqüències d'un filtre invers de Chebychev. Quins altres zeros de transmissió afegeix aquesta implementació? Especificeu i justifiqueu l'elecció de  $\omega_0$  en la transformació passa-baix passa-banda.
- b) Determineu l'ordre mínim necessari del prototip passa-baix i la constant  $\epsilon^2$
- c) Calculeu per transformació de freqüències la posició del primer zero de transmissió del prototip passa-baix, i a partir d'aquest valor determineu  $\Omega_a$ .

- III.39) A la figura III.39) es mostren dues possibles alternatives per multiplexar en freqüència dos canals telefònics, amb una amplada de banda bruta de 4 kHz, a l'entorn de la freqüència de 32 kHz.

Els blocs  $H_2$  i  $H_3$  són filtres passa-banda amb una amplada adequada per eliminar les bandes laterals no desitjades generades pels moduladors de doble banda lateral.

L'alternativa A incorpora dos filtres ( $H_1$ ,  $H_2$ ) però només un generador de portadora per a les modulacions (32 kHz), mentre que l'alternativa B incorpora un sol filtro ( $H_3$ ) però dos generadors de portadora (28 kHz i 36 kHz).

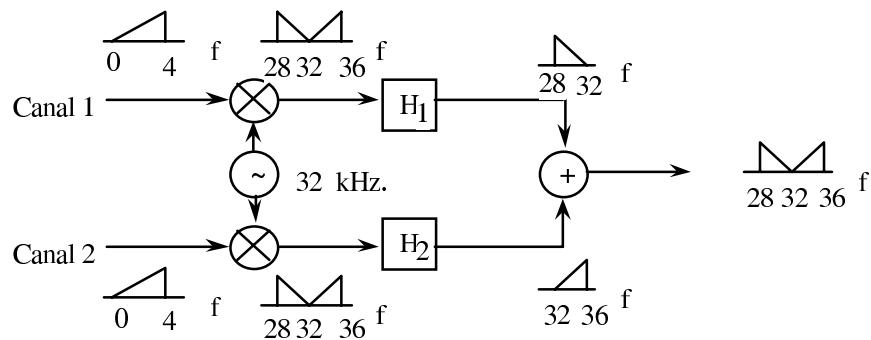
Tots els filtres s'han obtingut per transformació de freqüències a partir de prototipus passa-baix. Si sabem que:

- La banda neta dels canals telefònics és la que està compresa entre 300 i 3.700 Hz.
- Els filtres presenten una característica de Chebychev amb un arrissat a la banda de pas de 0,5 dB i una atenuació a la banda atenuada més gran que 25 dB.

Es demana el següent:

- Dibuixeu la plantilla de cada filtre passa-banda de manera que, complint la funció de filtrat necessari, presenti la simetria geomètrica adequada per poder aplicar directament la transformació de freqüències. Agafeu com a freqüència central la mitjana geomètrica de les freqüències de la banda de pas. Indiqueu clarament tots els valors numèrics.
- Dibuixeu les plantilles de cada un dels tres prototipus passa-baix corresponents de manera que la freqüència límit de la banda de pas sigui la unitat ( $\Omega_p = 1$ ), i indiqueu el valor numèric de la freqüència  $\Omega_a$  inici de la banda atenuada.
- Calculeu l'ordre mínim requerit per a cada prototipus passa-baix.
- Dibuixeu la corba d'atenuació d'acord amb l'ordre obtingut per a cada prototipus passa-baix, i indiqueu sense valors numèrics la situació de les freqüències corresponents als zeros d'atenuació, com també el pendent a la banda atenuada.

Alternativa A)



Alternativa B)

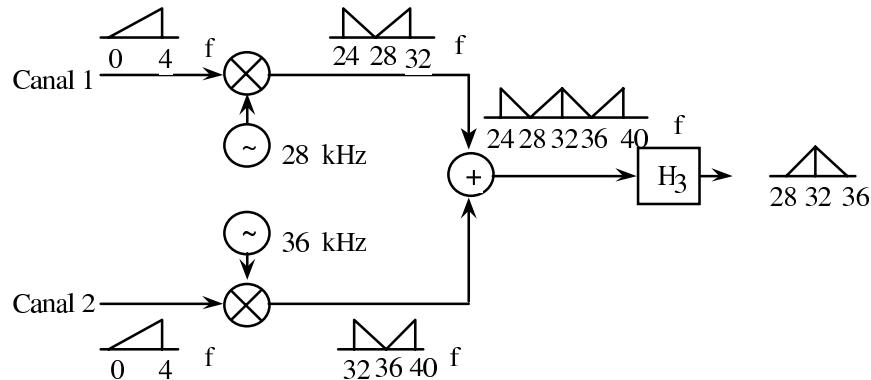


Fig. III.39)

### PROBLEMA RESOLT

El sistema que es mostra a la figura 1 constitueix la primera etapa d'un receptor que treballa amb senyals multiplexats en freqüència. Un senyal multiplexat en freqüència consisteix en la superposició de diversos senyals que s'han traslladat a diverses bandes freqüencials no coincidents. L'expressió general ve donada per:  $x(t)=\sum x_i(t)\cos(2\pi f_i t)$ .

L'objectiu del sistema és seleccionar una d'entre tots els senyals presents a l'entrada i situar-la en una freqüència fixa preestablerta anomenada freqüència intermèdia,  $f_N$ . Per tant, a la sortida del sistema volem obtenir  $z(t)=x_k(t) \cos(2\pi f_N t)$ , en què  $x_k(t)$  és el senyal desitjat. Per poder traslladar el senyal desitjat a la freqüència intermèdia l'oscil·lador local ha de treballar a una freqüència ajustable donada per  $f_o = f_k + f_N$ .

Els sistemes de radiodifusió d'ona mitjana utilitzen aquest sistema per sintonitzar emissores d'AM. La freqüència intermèdia utilitzada en aquest cas equival a  $f_N = 455$  kHz. L'assignació de freqüències es fa entre 540 kHz i 1.600 kHz. L'amplada de banda dels senyals arriba al valor de  $B= 5$  kHz.

Considereu que  $x(t)$  té l'espectre que mostra la figura 2, i suposeu que l'emissora que s'ha de sintonitzar està centrada a  $f_1 = 540$  kHz ( $k=1$ ) i que el receptor rep una altra emissora centrada a  $f_2$ .

- Dibuixeu l'espectre del senyal a l'entrada del filtre per als casos següents:  $f_2=828$  kHz,  $f_2=1442$  kHz i  $f_2=1539$  kHz.
- Quins marges de valors de  $f_2$  permeten obtenir  $z(t)=x_k(t) \cos(2\pi f_N t)$ ?

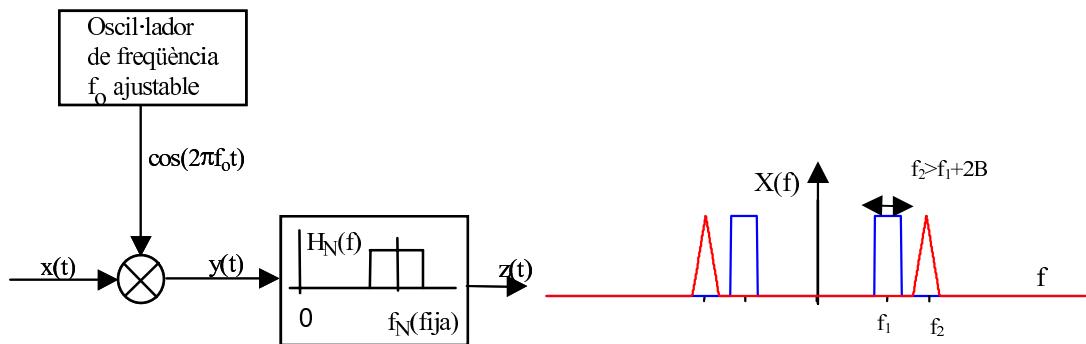


Fig. 1)

Fig. 2)

Per poder utilitzar qualsevol valor de  $f_2$  superior a 550 kHz es modifica l'esquema de la figura 1 amb un filtre passa-banda  $H_k(f)$ , com es mostra a la figura 3. Considereu, com en els apartats anterior, el cas  $k=1$ .

- c) Calculeu el valor de  $f_t$  (independent de  $f_2$ ) perquè el filtre  $H_1(f)$  tingui la menor selectivitat possible.
- d) Dibuixeu la plantilla d'especificacions passa-banda per a l'atenuació del filtre  $H_1(f)$  si es vol una atenuació màxima d'1 dB a la banda de pas i mínima de 40 dB a la banda atenuada. Obtingueu per transformació de freqüències la plantilla d'especificacions del prototip passa-baix, normalitzant prèviament a la freqüència  $w_{nor}=10$  kHz  $2\pi$ .

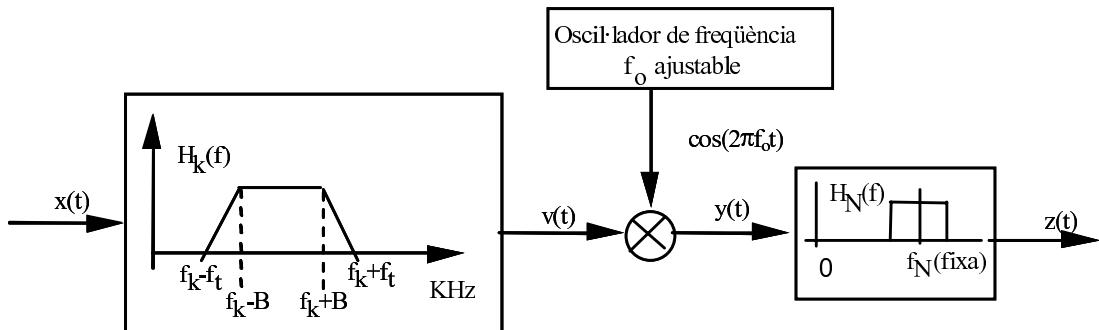


Fig. 3)

- e) Obtingueu la funció de transferència  $H_1(\lambda)$  del prototip utilitzant l'aproximació de Butterworth. Feu la transformació de freqüències i la desnormalització requerides per obtenir  $H_1(s)$ .
- f) Dibuixeu la plantilla d'especificacions del filtre  $H_N(f)$  tenint en compte que l'emissora més propera a  $f_1$  està situada a 576 kHz i la més allunyada després del filtrat per  $H_1(f)$  a 882 kHz. Considereu les mateixes especificacions d'atenuació que per al filtre  $H_1(f)$ . Obtingueu també la plantilla d'especificacions del prototip passa-baix. Compareu els prototipus passa-baix dels filters  $H_N(f)$  i  $H_1(f)$ .

En relació amb el filtre  $H_N(f)$  i utilitzant el programa, contesteu les preguntes següents:

- g) Obtingueu els ordres requerits del prototip passa-baix quan el disseny es fa amb les aproximacions de Butterworth, Chebychev, invers de Chebychev i òptim per als prototipus passa-baix del filtre passa-banda.
- h) Amb el resultat de l'apartat anterior, quin filtre escollirieu per al disseny.
- i) Compareu la duració de la resposta impulsional dels diferents filtres. Quina relació hi ha entre aquesta durada i la situació dels zeros i els pols.

### Resolució de l'exercici

- a) Dibuixeu l'espectre del senyal a l'entrada del filtre, per als casos següents:  $f_2=828$  kHz,  $f_2=1442$  kHz i  $f_2=1539$  kHz.

Les freqüències que cal tenir en compte per obtenir l'espectre a l'entrada del filtre són les següents:

$$\begin{array}{ll} \text{Freqüència que cal sintonitzar:} & f_1 = 540 \text{ kHz} \\ \text{Amplada de banda:} & B = 5 \text{ kHz} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Freqüència intermèdia:} & f_N = 455 \text{ kHz} \\ \text{Freqüència de l'oscil·lador:} & f_o = f_1 + f_N = 995 \text{ kHz} \end{array}$$

Per al primer cas, la freqüència de la segona emissora està centrada a  $f_2=828$  kHz. El senyal a l'entrada del sistema és el següent:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t)\cos(2\pi f_1 t) + x_2(t)\cos(2\pi f_2 t) \\ X(f) &= \frac{1}{2}X_1(f-f_1) + \frac{1}{2}X_1(f+f_1) + \frac{1}{2}X_2(f-f_2) + \frac{1}{2}X_2(f+f_2) \end{aligned}$$

Després del multiplicador s'obté:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\cos(2\pi f_o t) \\ Y(f) &= \frac{1}{2}X(f-f_o) + \frac{1}{2}X(f+f_o) \end{aligned}$$

La figura 4 mostra l'espectre  $X(f)$ , les versions desplaçades  $\frac{1}{2}X(f-f_o)$  i  $\frac{1}{2}X(f+f_o)$  i  $Y(f)$ , que és la suma de les dues anteriors.

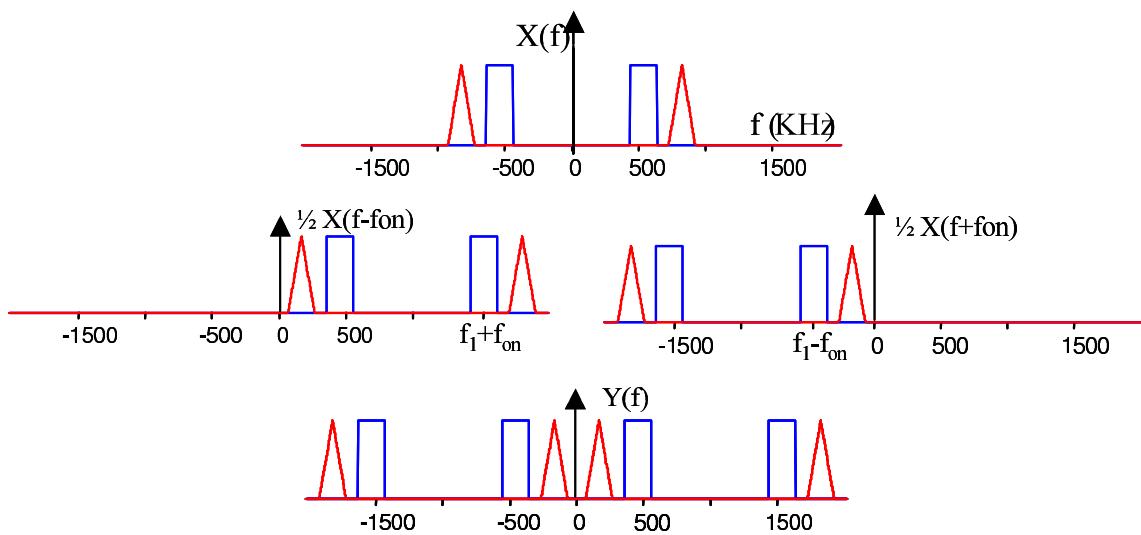


Fig. 4)

(per visualitzar millor els senyals es fa servir una amplada de banda  $B$  superior)

S'observa que l'espectre  $Y(f)$  conté  $X_1(f)$  centrada a la freqüència intermèdia i les rèpliques de  $X_2(f)$  no hi estan superposades, amb la qual cosa el filtre  $H_N(f)$  podrà recuperar  $z(t) = x_1(t) \cos(2\pi f_N t)$ .

Es repeteix el procés per a la segona emissora a  $f_2=1.442$  kHz. En aquest cas, els senyals obtinguts són els que mostra la figura 5.

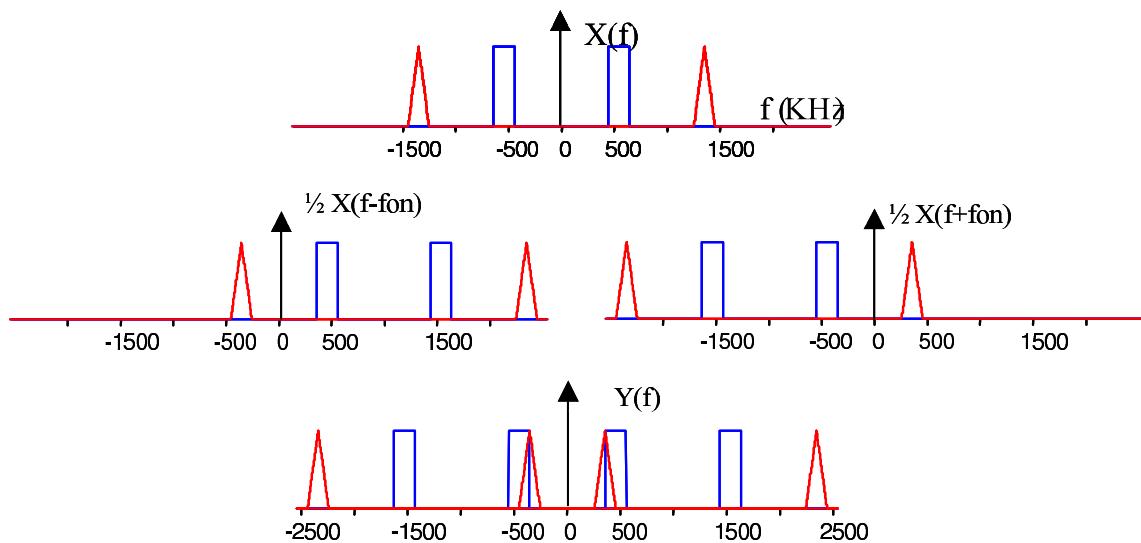


Fig. 5)

S'observa que l'espectre de  $Y(f)$  conté  $X_1(f)$  centrada a la freqüència intermèdia, però en aquest cas algunes rèpliques desplaçades de  $X_2(f)$  s'hi superposen, amb la qual cosa no és possible recuperar l'emissora desitjada.

Es repeteix el procés per a la tercera emissora a  $f_2=1.539$  kHz. La figura 6 il·lustra l'obtenció de  $Y(f)$ .

S'observa que l'espectre de  $Y(f)$  conté  $X_1(f)$  centrada a la freqüència intermèdia; en aquest cas, com en el primer, no hi ha superposició de les rèpliques desplaçades de  $X_2(f)$  i per això és possible recuperar  $X_1(f)$ .

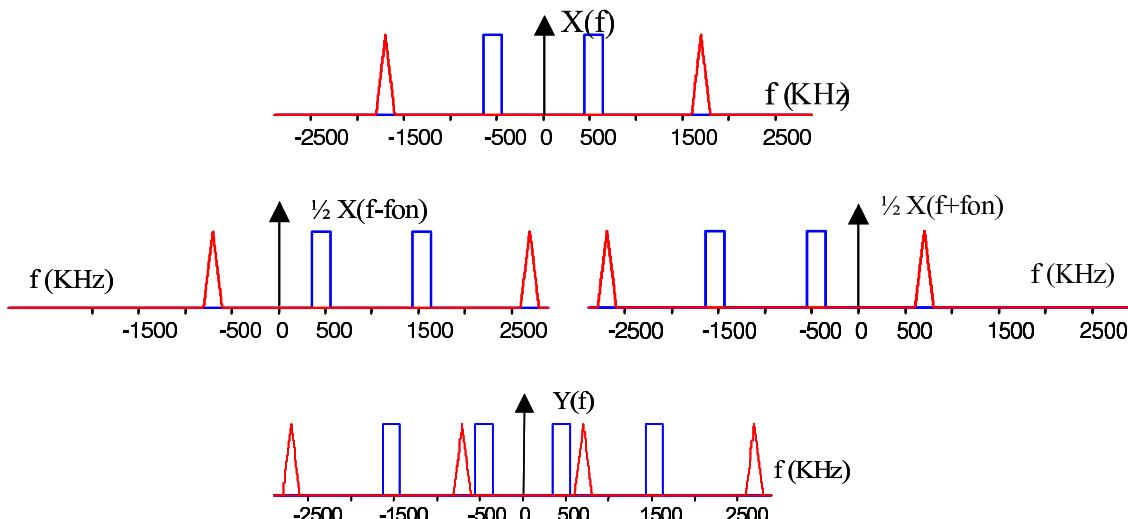


Fig. 6)

- b) Quins marges de valors de  $f_2$  permeten obtenir  $z(t)=x_1(t) \cos(2\pi f_N t)$ ?

Si es compara  $Y(f)$  per a les tres emissores a  $f_2$ , es dedueix quin desplaçament freqüencial produeix un component no desitjat prop de la freqüència intermèdia. En el primer cas, una rèplica de  $X_2(f)$  se situa a freqüències per sota de  $X_1(f-f_N)$ , en el segon cas hi ha superposició entre les dues i, en l'últim, la rèplica de  $X_2(f)$  se situa a freqüències superiors a la freqüència intermèdia.

Si s'examina més a fons els tres casos per deduir com es produeix la superposició, s'observa el següent.

En el primer cas, i si considerem l'espectre per a  $f>0$ , el component no desitjat es genera a partir del desplaçament freqüencial:

$$X(f-f_0) = \frac{1}{2} X_1(f-f_0-f_1) + \frac{1}{2} X_1(f-f_0+f_1) + \frac{1}{2} X_2(f-f_0-f_2) + \frac{1}{2} X_2(f-f_0+f_2)$$

En particular la rèplica més propera a  $X_1(f-f_N)$  correspon al terme de  $X_2(f)$  centrat a  $f=(f_0-f_2)=f_N+f_1-f_2 = 167$  kHz, que està per sota de la freqüència intermèdia.

Per al segon i tercer cas es considera el terme següent:

$$X(f+f_o) = \frac{1}{2} X_1(f+f_o-f_1) + \frac{1}{2} X_1(f+f_o+f_1) + \frac{1}{2} X_2(f+f_o-f_2) + \frac{1}{2} X_2(f+f_o+f_2)$$

Per al segon cas, el component no desitjat correspon a la freqüència  $f = (f_2-f_0) = 447$  kHz, molt propera a la freqüència intermèdia; per aquest motiu es produeix superposició.

Finalment, per al tercer cas,  $f = (f_2-f_0) = 534$  kHz, molt per sobre de la freqüència intermèdia.

Si s'observa el primer i el segon cas, la freqüència  $f_2$  ha de complir la desigualtat següent perquè no hi hagi superposició:

$$f_o - f_2 + B \leq f_o - f_1 - B \quad f_2 \geq f_1 + 2B$$

D'altra banda, si s'observen els casos dos i tres s'ha de complir el següent:

$$-f_o + f_2 + B \leq f_o - f_1 - B \quad f_2 \leq 2f_o - f_1 - 2B$$

$$-f_o + f_2 - B \geq f_o - f_1 - B \quad f_2 \geq 2f_o - f_1 + 2B$$

que per als valors donats correspon a les freqüències següents:

$$f_2 \geq 550 \text{ kHz}$$

$$f_2 \leq 1440 \text{ kHz} \text{ i } f_2 \geq 1460 \text{ kHz}$$

El diagrama de la figura 7 mostra els valors no permesos de  $f_2$  representats a l'eix freqüencial:

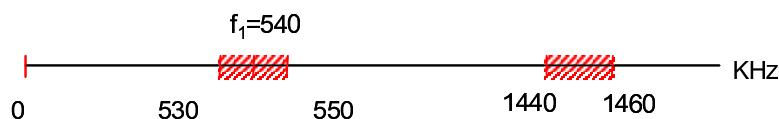


Fig. 7)

- c) Calculeu el valor de  $f_t$  (independent de  $f_2$ ) perquè el filtre  $H_1(f)$  tingui la menor selectivitat possible.

La menor selectivitat s'aconsegueix quan la separació entre la freqüència que delimita la banda de pas i la freqüència que delimita la banda atenuada és màxima. Per tant, s'observa en el diagrama de la figura 7 que els components no desitjables se situen a partir de:

$$\begin{aligned} f_1 + f_t &= 1440 \text{ kHz} \\ f_t &= 900 \text{ kHz} \end{aligned}$$

- d) Dibuixeu la plantilla d'especificacions passa-banda per a l'atenuació del filtre  $H_1(f)$  si es vol una atenuació màxima d'1 dB a la banda de pas i mínima de 40 dB a la banda atenuada. Obtingueu per transformació de freqüències la plantilla d'especificacions del prototipus passa-baix, normalitzant abans a la freqüència  $w_{nor}=10$  kHz  $2\pi$ .

Donada l'amplada de banda  $B$ ,  $f_t$  i l'esquema de la figura 3, la plantilla del filtre passa-banda es mostra a la figura següent.

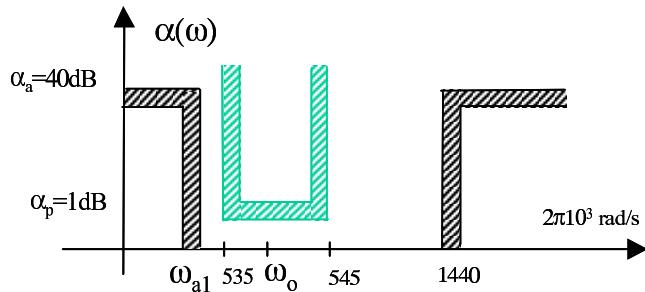


Fig. 8)

No hi ha cap especificació que limiti el valor de la freqüència  $\omega_{a1}$ .

Per obtenir el prototipus passa-baix s'ha de considerar la transformació passa-banda a passa-baix que ve donada per l'expressió següent:

$$\lambda = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s}$$

Es tria com a freqüencial central:

$$\omega_0 = \sqrt{535 \cdot 545} \cdot 2\pi 10^3 = 539,976 \cdot 2\pi 10^3 \text{ rad/s}$$

La freqüència que delimita la banda de pas del prototip ve donada per :

$$\Omega_p = (545 - 535) \cdot 2\pi 10^3 = 10 \cdot 2\pi 10^3 \text{ rad/s}$$

La freqüència que delimita la banda atenuada del prototip només depèn de l'especificada a la banda atenuada superior del filtre passa-banda, per tant:

$$\Omega_a = \frac{\omega_0^2 - (1440 \cdot 2\pi 10^3)^2}{1440 \cdot 2\pi 10^3} = 1237,517 \cdot 2\pi 10^3 \text{ rad/s}$$

Normalitzant a  $w_{nor}=10 \text{ kHz}$   $2\pi$ , les freqüències que delimiten la banda són les següents:

$$\tilde{\Omega}_p = 1 \quad \tilde{\Omega}_a = 123,752$$

La figura 9 mostra la plantilla d'especificacions del prototip

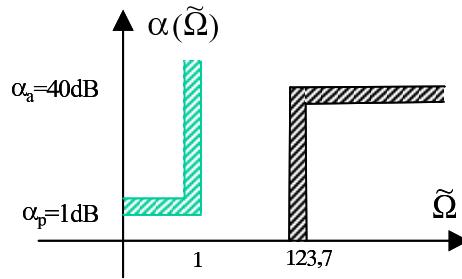


Fig. 9)

- e) Obtingueu la funció de transferència  $H_1(\lambda)$  del prototip utilitzant l'aproximació de Butterworth. Feu la transformació de freqüències i la desnormalització requerides per obtenir  $H_1(s)$ .

Per obtenir la funció característica del filtre de Butterworth, se n'ha de calcular l'ordre, i per fer-ho es calculen les constants de discriminació i selectivitat:

$$k_s = \frac{\tilde{\Omega}_p}{\tilde{\Omega}_a} = \frac{1}{123,752} \quad k_d = \frac{\sqrt{10^{1/10} - 1}}{\sqrt{10^{40/10} - 1}} = \frac{0,509}{99,995} = 5,088 \cdot 10^{-3}$$

Per tant, l'ordre és el següent:

$$n \geq \frac{\log(K_d)}{\log(K_s)} = \frac{-2,293}{-2,092} = 1,095 \quad n = 2$$

S'obté la funció característica:

$$F(\tilde{\Omega}^2) = k^2 \tilde{\Omega}^4$$

La constant s'elegeix ajustant la funció característica a la banda de pas, és a dir:

$$k^2 = \frac{F(\tilde{\Omega}_p^2)}{\tilde{\Omega}_p^4} = \frac{10^{0,1} - 1}{1^4} = 0,259$$

Per obtenir la funció de transferència del filtre es calcula, en primer lloc, el mòdul de la resposta freqüencial:

$$|H(\tilde{\Omega})|^2 = \frac{H_{\max}^2}{F(\tilde{\Omega}^2) + 1} = \frac{H_{\max}^2}{0,259 \tilde{\Omega}^4 + 1}$$

D'on es dedueix la descomposició:

$$H(\tilde{\lambda})H(-\tilde{\lambda}) = \frac{H_{\max}^2}{0,259\tilde{\lambda}^4 + 1}$$

Per obtenir la funció de transferència realitzable, s'extreuen les arrels del denominador i es conserven les corresponents al semiplà esquerre:

$$\tilde{\lambda}_0 = \left(\frac{1}{0,259}\right)^{1/4} e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \quad \tilde{\lambda}_1 = \left(\frac{1}{0,259}\right)^{1/4} e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4})}$$

i, per tant,

$$H(\tilde{\lambda}) = \frac{H_{\max} \left(\frac{1}{0,259}\right)^{1/4}}{(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_0)(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_1)} = \frac{(1,402)^2 H_{\max}}{\tilde{\lambda}^2 + 1,402 \cdot 2 \cos(\frac{\pi}{4})\tilde{\lambda} + (1,402)^2}$$

Desnormalitzant s'obté:

$$H(\lambda) = \frac{(1,402)^2 H_{\max}}{\left(\frac{\lambda}{10 \cdot 2\pi 10^3}\right)^2 + 1,402 \cdot 2 \cos(\frac{\pi}{4}) \frac{\lambda}{10 \cdot 2\pi 10^3} + (1,402)^2}$$

$$H(\lambda) = \frac{(28040\pi)^2 H_{\max}}{\lambda^2 + 28040 \cdot \pi \sqrt{2} \lambda + (28040\pi)^2}$$

Si es fa la transformació de freqüències inversa:

$$H(\lambda) = \frac{(28040\pi)^2 H_{\max}}{\left(\frac{s^2 + \omega_o^2}{s}\right)^2 + 28040 \cdot \pi \sqrt{2} \left(\frac{s^2 + \omega_o^2}{s}\right) + (28040\pi)^2}$$

$$H(\lambda) = \frac{(28040\pi)^2 H_{\max} s^2}{s^4 + 28040 \cdot \pi \sqrt{2} s^3 + (2\omega_o^2 + (28040\pi)^2) s^2 + 28040 \cdot \pi \sqrt{2} \cdot \omega_o^2 s + \omega_o^4}$$

Finalment, per a la freqüència central  $\omega_o^2 = 11663\pi^2 10^8$  es dedueix:

$$H(\lambda) = \frac{(28040\pi)^2 H_{\max} s^2}{s^4 + 28040\pi \sqrt{2} s^3 + 2,333\pi^2 10^{12} s^2 + 3,27\pi^3 \sqrt{2} \cdot 10^{16} s + 1,36\pi^4 10^{24}}$$

- f) Dibuixe la plantilla d'especificacions del filtre  $H_N(f)$  tenint en compte que l'emissora més propera a  $f_1$  està situada a 576 kHz i la més allunyada després del filtrat per  $H_1(f)$ , a 882 kHz. Considereu les mateixes especificacions d'atenuació que per al filtre  $H_1(f)$ . Obtingueu també la plantilla

d'especificacions del prototip passa-baix. Compareu els prototipus passa-baix dels filtres  $H_1(f)$  y  $H_N(f)$ .

Si l'emissora més propera és a  $f_2=576$  kHz, després de l'oscil·lador es produeix un terme  $X_2(f)$  centrat a la freqüència (cas 1 de l'apartat a)):

$$f = f_0 - f_2 = (995 - 576) \text{ kHz} = 419 \text{ kHz}$$

A freqüències superiors es generen termes cada vegada més propers a l'origen. Per tant, el pitjor dels casos es produeix per a l'emissora anterior, en què la freqüència no desitjada més propera és a  $f_0 - f_2 + B = 424$  kHz. D'aquesta forma, la plantilla d'especificacions es mostra a la figura 10)

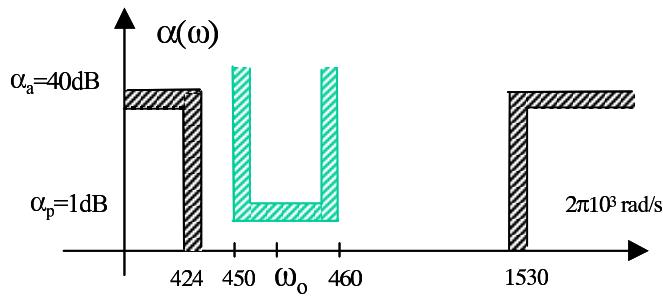


Fig. 10)

Com a freqüència central es tria

$$\omega_0 = \sqrt{450 \cdot 460 \cdot 2\pi 10^3} = 454,972 \cdot 2\pi 10^3 \text{ rad/s}$$

La freqüència que delimita la banda de pas del prototip ve donada per:

$$\Omega_p = (450 - 460) \cdot 2\pi 10^3 = 10 \cdot 2\pi 10^3 \text{ rad/s}$$

La freqüència que delimita la banda atenuada del prototip només depèn de l'especificada a la banda atenuada superior del filtre passa-baix, per tant:

$$\Omega_a = \frac{\omega_0^2 - (424 \cdot 2\pi 10^3)^2}{424 \cdot 2\pi 10^3} = 64,207 \cdot 2\pi 10^3 \text{ rad/s}$$

Si normalitzem a  $\omega_{nor}=10$  kHz  $2\pi$ , les freqüències que delimiten la banda són les següents:

$$\tilde{\Omega}_p = 1 \quad \tilde{\Omega}_a = 64,207$$

La figura III. 40.k) mostra la plantilla d'especificacions del prototip passa-baix

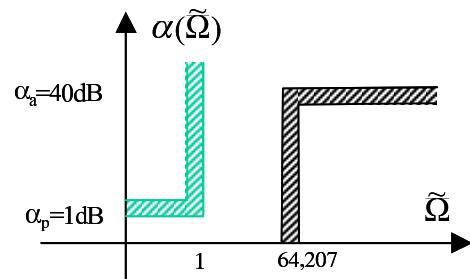


Fig. 11)

Si comparem les figures 9 i 11 s'observa que el prototip anterior és molt més selectiu, i amb la mateixa discriminació requerirà un ordre més gran que per a  $H_1(f)$ .

**SOLUCIONS ALS PROBLEMES DEL TEMA III**

III.1) a)  $F(\omega^2) = \frac{k_2 \omega^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^4}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 (\omega^2 - \omega_2^2)^2}$

b)  $F(\omega^2) = \frac{k_1 \omega^8 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 (\omega^2 - \omega_2^2)^2}$

III.2) a)  $|H(j\omega)|=H_{max}, H(s)=H_{max}, \alpha(\omega)=0, F(\omega^2)=0$

b)  $|H(j\omega)|=0, H(s)=0, \alpha(\omega) \rightarrow \infty, F(\omega^2) \rightarrow \infty$

c)  $H(s) \rightarrow \infty$

III.3)  $F(\omega^2) = \frac{k \omega^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}{(\omega^2 - \omega_\infty^2)^2}$  on  $\omega_0 = 2\pi 3050$  rad/s     $\omega_\infty = 2\pi 5574$  rad/s     $k = 0,0424$

III.4)  $F(\omega^2) = \frac{k (\omega^2 - \omega_0^2)^4}{\omega^2 (\omega^2 - 1)^2}$  on     $\omega_0 = 1,6963$  rad/s     $k = 22,57$

III.5) a)  $F(\omega^2) = k \frac{\omega^2 (\omega^2 - \frac{8}{9})^2}{(\omega^2 - \frac{4}{3})^2}$

b)  $\omega_a = 4 \sqrt{2} / 3 \sqrt{3}$      $\min(\alpha_a) = 10,81$  dB

c)  $n_B = 23$      $n_{CH} = 7$

III.6)  $H(s) = H_{max} \frac{\omega_c^3}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3}$  on     $\omega_c = 2\pi 3,4 \cdot 10^3$  rad/s

III.7) a) Butterworth i Chebychev

b)  $n_B = n_{CH} = 5$

c) Butterworth (millor linealitat de fase)

III.8) b)  $n = 3$

c)  $\alpha(\omega) = 10 \log[1 + 0,2589 C_3^2(\omega)]$

d)  $w_{3dB} = 1,09$  rad/s

e)  $\omega_0 = 0,866$  rad/s

- III.9) a)  $n_{CH}=5$   
 b) 30 dB/oct  
 c)  $\alpha(\omega)=10 \log[1+\epsilon^2 C_5^2(\omega/\omega_p)]$   
 d)  $\epsilon^2 = \frac{10^{\alpha_a/10}-1}{C_5^2 \left( \frac{\omega_a}{\omega_p} \right)}$

- III.10) a)  $n_B=3$   
 b)  $|H(\omega^2)| = \frac{H_{max}^2 \omega_n^6}{\omega_n^6 + \omega^6}$  on  $\omega_n = \pi 10^3$  rad/s

- III.11) a) 1)  $\epsilon=0,217$       2)  $0,349$       3)  $0,764$       4)  $0,997$       5)  $1,47$   
 b) 1)  $1,2784$       2)  $1,1563$       3)  $1,053$       4)  $1,0184$       5)  $1$       6)  $0,9789$   
 c)  $H(s) = (H_{max})^2 \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$  on  $\omega_c = 2\pi 2 10^3$  rad/s  
 d)  $|H_B(\omega)|^2 = (H_{max})^2 \frac{1}{1+\omega^6} |H_{CH}(\omega)|^2 = (H_{max})^2 \frac{1}{1+C_3^2(\omega)}$

- III.12) a)  $n_{ICH}=2$   
 b)  $\epsilon^2 = \frac{7^2}{C_2^2 \left( \frac{\omega_a}{\omega} \right)}$  on  $\omega_a = 4\pi 10^3$  rad/s  
 c) 2 ZA a  $\omega=0$   
 d)  $f_\infty = \pm 2\sqrt{2}$  kHz  
 e) 0 dB/oct  
 f)  $\alpha_{min}=17$  dB  
 g)  $N=M=2, z_{1,2}=\pm j\sqrt{2} \omega_a \quad k=\frac{H_{max}}{\sqrt{50}} \quad p_{1,2}=\frac{\omega_a}{\sqrt{25}} \sqrt{(-1 \pm j7)}$

- III.13) b)  $f_p=B$        $f_a=\min[f_2, f_1-B, 2f_1-B]$  ,  $K_s=f_p/f_a$   
 c)  $Z_1(f)=X_1(f)/2$        $Z_2(f)=X_2(f)/2$   
 d)  $f_p=200$  Hz       $f_a=1800$  Hz       $B_g=1600$  Hz  
 e)  $\min(f_2)=1600$  Hz       $f_p=200$  Hz       $f_a=400$  Hz  
 f) Si  $f_2=3$  kHz  $\Rightarrow n_B=n_{CH}=3$       i si  $f_2=1,6$  kHz  $\Rightarrow n_B=10$        $n_{CH}=6$

- III.14) a)  $\min(f_0)=2B$        $\max(T)=[2(f_0+B)]^{-1}$   
 b)  $f_m=20,77$  B Hz  
 c)  $\alpha(\omega_p)=3$  dB  
 d) 24 dB/oct

III.15) a)  $y_1(t) = x_d(t) + x_e(t)$   $y_2(t) = 2x_d(t)$   $y_3(t) = 2x_e(t)$

b)  $H_1: f_p = B$   $f_a = f_1/2$

$H_2: f_{a1} = f_1/2$   $f_{p1} = f_1 - B$   $f_{p2} = f_1 + B$

$H_3: f_p = B$   $f_a = 2f_1 - B$

$H: f_0 = f_1/2$   $f_{a1} = B$   $f_{a2} = f_1 - B$

c)  $H(s) = \frac{H_{\max} 180\pi s}{s^2 + 180\pi s + (4\pi 10^4)^2}$

III.16) b)  $y(t) = [z(t) \cos(2\pi f_1 t)] * h(t)$  on  $H(f) = 2 \prod \left( \frac{f}{2(f_0 + B)} \right)$

d)  $H_1(f): (\alpha_p = 1 \text{ dB} \quad f_p = 15 \text{ kHz} \quad \alpha_a = 40 \text{ dB} \quad f_a = 23 \text{ kHz}) H_{\max} = 0,5$

$H_2(f): (\alpha_p = 1 \text{ dB} \quad f_{p1} = 23 \text{ kHz} \quad f_{p2} = 53 \text{ kHz} \quad \alpha_a = 40 \text{ dB} \quad f_{a1} = 15 \text{ kHz} \quad f_{a2} > f_{p2}) H_{\max} = 2$

e)  $n_B = 13 \quad \omega_c = 2\pi 15,75 \text{ K rad/s} \quad n_{CH} = 7 \quad \varepsilon^2 = 0,2589$

III.17) a)  $f_1 = 30 \text{ Hz}$

b)  $n \geq \frac{ch^{-1}\left(\frac{1}{k_d}\right)}{ch^{-1}\left(\frac{1}{k_s}\right)}$  on  $k_s = \frac{\omega_p}{\omega_a} \quad k_d = \left[ \frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_a/10} - 1} \right]^{\frac{1}{2}}$

c)  $F(\omega^2) = \left[ 10^{\alpha_p/10} - 1 \right] C_n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)$

d)  $n_B = 6 \quad n_{CH} = 4 \quad \text{ICH no pot}$

III.18) a) ZA: 3 a  $\omega = 0$  ZT: 3 a  $\omega = \infty$

b)  $F(\Omega^2) = \Omega^6$

c)  $H_n(s) = \frac{H_{\max}}{(s+1)(s^2 + s + 1)}$

f)  $\text{tr}_n \cong 8 \quad \text{tr} \cong 3,183 \cdot 10^{-4}$

g)  $k = H_{\max} \Omega_{3dB}^n$

h)  $\omega_{on} \quad h(\omega_{on} t)$

j)  $f_m \geq 8 \text{ kHz}$

III.19) a)  $\max(T_m) = 1/B \quad h(t): \text{amplada de banda} \quad \Delta f = f_m + B$

b)  $\omega_p = 3\pi \quad \omega_a = 5\pi$

c)  $|H(\omega)|^2 = \frac{H_{\max}^2}{1 + \left( \frac{\omega}{3\pi} \right)^{2n}}$

d)  $\alpha(f=3) \cong 30 \text{ dB}$

III.20) a)  $F(\omega^2) = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{B^2 \omega^2}$

b)  $H(s) = \frac{H_{\max} \cdot B}{(s + B)}$

c)  $H(s) = \frac{B H_{\max} s}{s^2 + Bs + \omega_0^2}$

III.21) a)  $\omega_0^2 = 6 \text{ rad/s}$

b) 24 dB/oct

c) ZA: 4 a  $\omega = \omega_0$ , 4 a  $\omega = -\omega_0$

ZT: 4 a  $\omega = 0$ , 4 a  $\omega \rightarrow \infty$

d)  $\alpha(1) = \alpha(6) = 42 \text{ dB}$      $\alpha(2) = \alpha(3) = 0,1 \text{ dB}$      $\alpha(12) = 66 \text{ dB}$      $\alpha(24) = 90 \text{ dB}$

III.22) a)  $n=5$

b) 30,11 dB

c)  $n=6$   $\alpha(2)=62 \text{ dB}$

d) No, arrissat a la banda atenuada

e)  $\lambda = \frac{s}{s^2 + \omega_\infty^2}$

III.23) b)  $\min(n)=2$      $F(\omega^2) = \frac{2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{\omega^2 \omega_0^2}$      $|H(\omega)|^2 = \frac{H_{\max}^2 \omega^2 \omega_0^2}{\omega^2 \omega_0^2 + 2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$

6 dB/oct     $\omega_{\text{dB}} = \begin{cases} \sqrt{2}\omega_0 \\ \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \end{cases}$

c)  $H(\lambda) = \frac{H_{\max} \omega_0}{\omega_0 + \sqrt{2} \lambda}$

III.24)  $H(s) = \frac{H_{\max} \omega_b^2 s^2}{s^4 + \sqrt{2} \omega_b s^3 + (2\omega_c^2 + \omega_b^2) s^2 + \sqrt{2} \omega_b \omega_c^2 s + \omega_c^4}$

III.25) a)  $\Omega_p = 2\pi 5 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

b)  $F(\bar{\Omega}^2) = \bar{\Omega}^6$

c)  $H(\bar{\lambda}) = \frac{H_{\max}}{\bar{\lambda}^3 + 2\bar{\lambda}^2 + 2\bar{\lambda} + 1}$

d)  $H(s) = \frac{H_{\max} \Omega_p^3 s^3}{s^6 + 2\Omega_p s^5 + 3\omega_0^2 + 2\Omega_p^2) s^4 + (4\omega_0^2 \Omega_p + \Omega_p^3) s^3 + (3\omega_0^4 + 2\Omega_p^2 \omega_0^2) s^2 + 2\Omega_p \omega_0^4 s + \omega_0^6}$

- III.26) a)  $f_0^2 = (f_i - B)(f_i + B)$   
 b) El cas pitjor  $\Omega_{a2}$  del senyal a f1:  $k_s = (2f_i B + 4B^2) / (4f_i B + 5B^2)$   
 Si  $f_i \rightarrow \infty$ ,  $k_s \rightarrow 0,5$   
 c)  $F(\Omega^2) = \Omega^6$   
 d)  $\alpha(\Omega_a) \approx 18 \text{ dB}$   
 e) 3 z. atenuació a 0 i 3 z. trans. a  $\infty$   
 f)  $H(s) = H_{max} / (s+1)(s^2+s+1)$   
 g)  $h(t) = H_{max} [ e^{-t} u(t) + 2 e^{-t/2} \cos(3^{1/2} t/2) u(t) ]$   
 h)  $\Omega^2 = [\omega^2 - (2\pi)^2(f_i - B)(f_i + B)] / (2\pi^2 B \omega)$   
 Mínim de 18 dB a cada component.  
 Ordre 6.  
 Pols:  $s^2 + 2\pi^2 B s + (2\pi)^2(f_i - B)(f_i + B) = 0$

- III.27) a)  $\Omega_a = 30$   
 b)  $\Omega_p = 12$   
 c) 18 dB/oct (a l'origen i a l'infinít)  $\omega_{p1} = 4$   $\omega_{p2} = 16$   $\omega_0 = 8$

- III.28) a)  $\Omega_{p1} = \Omega_{p2} = 2\pi B$ ;  $\Omega_{a1} = 2\pi [(f_c^2 - B^2) - (f_c - b)^2] / (f_c - b)$ ; amb  $b = B + B_g$   
 $\Omega_{a2} = 2\pi [(f_c + b)^2 - (f_c^2 - B^2)] / (f_c + b)$   
 Més restrictiva  $f_{a2}$   
 Com més gran és  $B_g$ , més petita és  $k_s$ , i menys ordre  
 b)  $\Omega_{p1} = 2\pi B(2f_c - B) / (f_c - B)$ ;  $\Omega_{p2} = 2\pi B(2f_c + B) / (f_c + B)$ ; més restrictiva  $f_{p1}$   
 $\Omega_{a1} = 2\pi b(2f_c - b) / (f_c - b)$ ;  $\Omega_{p2} = 2\pi b(2f_c + b) / (f_c + b)$ ; més restrictiva  $f_{a2}$   
 c) Sí, però no té sentit si no és  $f_c \geq [1 + (1 + (B_g/B))^2]B/2$   
 $\Omega_{a1} = \Omega_{a2} = 2\pi 2b$ ;  $\Omega_{p1} = 2\pi [(f_c^2 - b^2) - (f_c - B)^2] / (f_c - B)$ ;  $\Omega_{p2} = 2\pi [(f_c + B)^2 - (f_c^2 - b^2)] / (f_c + B)$   
 Més restrictiva  $f_{p2}$   
 d) Menys ordre fent  $f_0^2 = f_{p1} f_{p2}$   
 e) Banda de pas fins a  $B$ , banda atenuada a partir de  $b$  ( $= B + B_g$ )  
 f)  $k_s$  apartat e)  $< k_s$  apartat a)  $\Rightarrow$  fita de l'ordre menor pel disseny i fent  $h(t) = h_{p1}(t) \cos(2\pi f_c t)$   
 g) No  
 h) Cada un es divideix en dos amb part imaginària  $\pm \omega_c$

- III.29) a)  $p = 0,5$   $\Omega_0 = 1/\sqrt{2}$   
 b)  $\omega_\infty = 2\pi 1010 \text{ rad/s}$ ;  $k = \frac{2\pi 3100}{\sqrt{2}}$   
 c)  $H(s) = \frac{H(s^2 + 13773s + 4 \cdot 10^7)}{0,5s^2 + 13773s + 2 \cdot 10^7}$

- III.30) a)  $\Omega_p = 0,4$   $\Omega_a = 1/\sqrt{2}$   
 b)  $\Omega_p = 2/3$   $\Omega_a = \sqrt{2}$   
 c) La de l'apartat b)

- III.31) a)  $\omega_{\infty}^2 = \omega_{a1}\omega_{a2}$   
b) ZA a  $\omega=0, \pm 25,98$   $\alpha(\Omega_a^2)=24,395$   $\alpha(\Omega_{p1}^2)=3$   $\alpha(\Omega_{p2}^2)=4$   
c)  $\Omega_{nor}=50$   $\tilde{\Omega}=\frac{\Omega}{50}$ ,  $F(\tilde{\Omega}^2)=\varepsilon^2 \left[ 4(\tilde{\Omega} \frac{5}{3})^2 - 3(\tilde{\Omega} \frac{5}{3}) \right]^2$

- III.32) a)  $F(\omega^2) = \frac{k (\omega^2 - \omega_{01}^2)^2 (\omega^2 - \omega_{02}^2)^2 (\omega^2 - \omega_{03}^2)^2 (\omega^2 - \omega_{04}^2)^2}{\omega^4 (\omega^2 - \omega_{\infty 1}^2)^2 (\omega^2 - \omega_{\infty 2}^2)^2}$   
b)  $\alpha_{a1}=\alpha_{a2}; \omega_{\infty 1}\omega_{\infty 2}=\omega_{01}\omega_{04}=\omega_{02}\omega_{03}$   
c) 12 dB/oct  
e)  $\Omega_{01}=\omega_{03}-\omega_{02}$   $\Omega_{02}=\omega_{04}-\omega_{01}$   $\Omega_{\infty}=\omega_{\infty 2}-\omega_{\infty 1}$   
f)  $F(\Omega^2) = \frac{k (\Omega^2 - \Omega_{01}^2)^2 (\Omega^2 - \Omega_{02}^2)^2}{(\Omega^2 - \Omega_{\infty}^2)^2}$   
g)  $\omega_{\infty 2}=8$

- III.33) a)  $\omega_{\infty 1}\omega_{\infty 2}=\omega_a^2$   
b)  $F_1(\omega^2) = \frac{k \omega^4}{(\omega^2 - \omega_{\infty 1}^2)^2 (\omega^2 - \omega_{\infty 2}^2)^2}$   $F_2(\omega^2) = \frac{k \omega^8}{(\omega^2 - \omega_{\infty 1}^2)^4 (\omega^2 - \omega_{\infty 2}^2)^4}$   
c)  $F_1: \begin{cases} 2 \text{ ZA a } \omega=0 \\ 2 \text{ ZA a } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$   $F_2: \begin{cases} 2 \text{ ZT a } \omega=\pm\omega_{\infty 1} \\ 2 \text{ ZT a } \omega=\pm\omega_{\infty 2} \end{cases}$   $n=4$   
 $F_2: \begin{cases} 4 \text{ ZA a } \omega=0 \\ 4 \text{ ZA a } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$   $F_2: \begin{cases} 4 \text{ ZT a } \omega=\pm\omega_{\infty 1} \\ 4 \text{ ZT a } \omega=\pm\omega_{\infty 2} \end{cases}$   $n=8$   
d)  $F_1: 12 \text{ dB/oct} = 40 \text{ dB/déc}$   $F_2: 24 \text{ dB/oct} = 80 \text{ dB/déc}$   
e)  $F_l(\omega^2)$   
f)  $\Omega = \left| \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_a^2} \right|$

- III.34) a)  $\Omega_{p1}=1/25; \Omega_{a1}=1/10$   
b)  $n=2$ , Chebychev  
d)  $\alpha a=21 \text{ dB}$   
e)  $H(\lambda) = \frac{a}{25^2 \lambda^2 + b25\lambda + c}$   
f)  $H(\lambda) = \frac{a}{25^2 s^2 + b25s(s^2 + \omega_{\infty}^2) + c(s^2 + \omega_{\infty}^2)^2}$

III.35) a) Cas 1:  $\begin{array}{ll} 1 \text{ ZA a } \omega \rightarrow \infty \\ 2 \text{ ZA a } \omega = \pm \omega_{01} \\ 2 \text{ ZA a } \omega = \pm \omega_{02} \end{array}$   $\begin{array}{ll} 3 \text{ ZT a } \omega = 0 \\ 2 \text{ ZT a } \omega = \pm \omega_{\infty 1} \\ 2 \text{ ZA a } \omega = \pm \omega_{02} \end{array}$   $F_1(\omega^2) = \frac{k(\omega^2 - \omega_{01}^2)^2 (\omega^2 - \omega_{02}^2)^2}{\omega^6 (\omega^2 - \omega_{\infty 1}^2)^2} n=5$

$$18 \frac{\text{dB}}{\text{oct}} = 60 \frac{\text{dB}}{\text{déc}}$$

Cas 2:  $\begin{array}{ll} 1 \text{ ZA a } \omega \rightarrow \infty \\ 2 \text{ ZA a } \omega = \pm \omega_{01} \\ 2 \text{ ZA a } \omega = \pm \omega_{02} \end{array}$   $\begin{array}{ll} 1 \text{ ZT a } \omega = 0 \\ 4 \text{ ZT a } \omega = \pm \omega_{\infty 1} \\ 2 \text{ ZA a } \omega = \pm \omega_{02} \end{array}$   $F_2(\omega^2) = \frac{k(\omega^2 - \omega_{01}^2)^2 (\omega^2 - \omega_{02}^2)^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{\infty 1}^2)^4} n=5$

$$6 \frac{\text{dB}}{\text{oct}} = 20 \frac{\text{dB}}{\text{déc}}$$

b)  $F_1(\Omega^2) = \frac{k_1 (\Omega^2 - \omega_{02}^{-2})^2 (\Omega^2 - \omega_{01}^{-2})^2 \Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_{\infty 1}^{-2})^2}$   $F_2(\Omega^2) = \frac{k_2 (\Omega^2 - \omega_{02}^{-2})^2 (\Omega^2 - \omega_{01}^{-2})^2 \Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_{\infty 1}^{-2})^4}$

III.36) a) Cas 1:  $\begin{array}{ll} 4 \text{ ZA a } \omega = \pm \omega_{01} \\ 2 \text{ ZA a } \omega = \pm \omega_{02} \end{array}$   $\begin{array}{ll} 2 \text{ ZT a } \omega = 0 \\ 2 \text{ ZT a } \omega = \pm \omega_{\infty 1} \\ 2 \text{ ZT a } \omega = \pm \omega_{\infty 2} \end{array}$

$$F_1(\omega^2) = \frac{k(\omega^2 - \omega_{01}^2)^4 (\omega^2 - \omega_{02}^2)^2}{\omega^4 (\omega^2 - \omega_{\infty 1}^2)^2 (\omega^2 - \omega_{\infty 2}^2)^2} 12 \frac{\text{dB}}{\text{oct}} = 40 \frac{\text{dB}}{\text{déc}}$$

Cas 2:  $\begin{array}{ll} 2 \text{ ZA a } \omega = \pm \omega_{01} \\ 4 \text{ ZA a } \omega = \pm \omega_{02} \end{array}$   $\begin{array}{ll} 2 \text{ ZT a } \omega = 0 \\ 2 \text{ ZT a } \omega = \pm \omega_{\infty 1} \\ 2 \text{ ZT a } \omega = \pm \omega_{\infty 2} \end{array}$

$$F_2(\omega^2) = \frac{k(\omega^2 - \omega_{01}^2)^2 (\omega^2 - \omega_{02}^2)^4}{\omega^4 (\omega^2 - \omega_{\infty 1}^2)^2 (\omega^2 - \omega_{\infty 2}^2)^2} 12 \frac{\text{dB}}{\text{oct}} = 40 \frac{\text{dB}}{\text{déc}}$$

b)  $F_1(\Omega^2) = \frac{k(\Omega^2 - \omega_{02}^{-2})^2 (\Omega^2 - \omega_{01}^{-2})^4}{(\Omega^2 - \omega_{\infty 2}^{-2})^2 (\Omega^2 - \omega_{\infty 1}^{-2})^2}$   $F_2(\Omega^2) = \frac{k(\Omega^2 - \omega_{02}^{-2})^4 (\Omega^2 - \omega_{01}^{-2})^2}{(\Omega^2 - \omega_{\infty 2}^{-2})^2 (\Omega^2 - \omega_{\infty 1}^{-2})^2}$

- III.37) a)  $\max(T_c) = 1/B$   $h(t)$ : centre a  $f_0 = 3f_m$  i amplada de banda  $\Delta f = 2B$   
 b)  $f_{a1} = 1,5$   $f_{a2} = 4,5$   $f_{p1} = 2,5$   $f_{p2} = 3,5$   
 c)  $|H_p(\Omega)|^2 = \frac{H_{\max}^2}{1 + \left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)^6}$   
 d)  $\omega_o = \pi \sqrt{35}$   $\Omega = \left| \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \right|$   
 e) No:  $\alpha(\omega_a) = 24,45 \text{ dB} < \alpha_a$   
 f) Sí que ho compleix.

III.38) a) Afegeix els ZT:  $\pm \frac{f_x}{3}, \infty$        $\omega_0^2 = \omega_{p1} \omega_{p2}$

b)  $n_{ICH} = 3$        $\varepsilon^2 \approx 10^{-4}$

c)  $\Omega_\infty = 2\pi \frac{8}{3} f_x$        $\Omega_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \Omega_\infty$

III.39) b) H<sub>1</sub>:  $\Omega_a = 1,3311$       H<sub>2</sub>:  $\Omega_a = 1,3752$       H<sub>3</sub>:  $\Omega_a = 1,1443$

c)  $n_1 = 6$        $n_2 = 6$        $n_3 = 9$

d) 42 dB/oct      42 dB/oct      54 dB/oct

## 4 Correlació i espectre

Una eina útil en anàlisi de senyals i sistemes és la correlació. Les eines basades en correlació de senyals i la seva transformada de Fourier són bàsiques en l'anàlisi de processos. En aquest capítol s'estudien aplicades a senyals deterministes. L'objectiu és facilitar-ne la comprensió, i per fer-ho es desenvolupa els significat de la correlació com a mesura de semblança entre senyals, s'estableixen les propietats de la correlació i es troba la correlació quan aquestes senyals estan relacionades per sistemes lineals i invariants. La correlació obté informació sobre els senyals basant-se en mitjanes temporals, i la seva transformada de Fourier permet obtenir funcions de densitat espectral d'energia o potència, segons les característiques dels senyals i dels sistemes que s'estudien. Aquesta propietat és particularment interessant, ja que la informació es pot obtenir fins i tot si el senyal no té transformada de Fourier. En la col·lecció de problemes es mostra una sèrie d'aplicacions en què la utilització de l'autocorrelació és bàsica: mesura de temps de retard amb aplicació a sistemes de radar, mesura de sistemes lineals i invariants a partir de senyals contaminats amb soroll o interferències i utilització del filtre adaptat en sistemes de comunicacions digitals.

### Energia i potència

Energia d'un senyal:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Potència mitjana:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{Energia en } T}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Potència mitjana per a senyals periòdics

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$

### Tipus de senyals

- Senyals d'energia finita (EF):  $0 < E_x < \infty$
- Senyals de potència mitjana finita (PMF):  $0 < P_x < \infty$
- Senyals que no satisfan cap de les propietats anteriors i no són ni de EF ni de PMF.

## Senyals d'energia finita

### Teorema de Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

### Densitat espectral d'energia

$$G_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

### Propietats de la densitat espectral d'energia

- Real
- No negativa
- Si  $x(t)$  és real,  $G_{xx}(f)$  és parell

## Senyals de potència mitjana finita

### Senyals periòdics. Teorema de Parseval

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c(m)|^2$$

### Senyals periòdics. Densitat espectral de potència

$$S_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c(m)|^2 \delta(f - mf_0)$$

### Senyals no periòdics. Càlcul de la potència en el domini transformat

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} df \text{ amb } X_T(f) = TF\{x_T(t)\} = TF\left\{x(t)\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\}$$

### Senyals no periòdics. Densitat espectral de potència

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

---

**PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS**


---

IV.1) Determineu si els senyals següents són d'energia finita o potència mitjana finita

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| a) $x(t) = \cos(2\pi f_o t)$ | b) $x(t) = \text{sinc}(2Bt)$ |
| c) $x(t) = e^{ t }$          | d) $x(t) = e^{-\pi t^2}$     |
| e) $x(t) = u(t)$             | f) $x(t) = \text{sign}(t)$   |

IV.2) Trobeu l'energia o la potència dels senyals del problema IV.1

IV.3) Tenim el senyal periòdic

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod \left( \frac{t-nT}{\tau} \right) \text{ amb } T > \tau$$

- a) Calculeu-ne la transformada de Fourier
  - b) Determineu-ne la potència fent el càlcul en el domini temporal
  - c) Determineu-ne la potència fent el càlcul a partir dels coeficients del seu DSF
  - d) Trobeu la densitat espectral de potència
- IV.4) El senyal periòdic  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta \left( \frac{t-nT}{\tau} \right)$ , amb  $T = 5 \text{ ms}$  i  $\tau = 2.5 \text{ ms}$ , s'aplica a un filtre passabanda fet per transformació de freqüències d'un filtre invers de Chebychev d'ordre 3. El filtre passa-banda està centrat a  $f_o = 200 \text{ Hz}$ , té un zero de transmissió a  $f_\infty = 400 \text{ Hz}$  i en el seu disseny s'ha considerat que l'atenuació a la banda atenuada ha de ser més gran de 40 dB. Calculeu la potència del senyal a l'entrada del filtre. Calculeu aproximadament la potència a la sortida del filtre. Justifiqueu-ne l'aproximació.
- IV.5) Es vol aproximar un senyal periòdic  $x(t)$  per un altre senyal periòdic  $\hat{x}(t)$  format per un conjunt finit de sinusoides. Per fer l'aproximació es tria com a criteri la minimització de l'error quadràtic mitjà. Determineu les amplituds, les freqüències i les fases de cada sinusoide.
-

## Correlació i densitat espectral d'energia

### Distància entre dos senyals d'energia finit

$$\begin{aligned} d^2(x(t+\tau), y(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t+\tau) - y(t)|^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t+\tau)y(t)dt \end{aligned}$$

### Funció de correlació mútua o creuada

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt \\ R_{xy}(\tau) &= x(\tau) * y^*(-\tau) \end{aligned}$$

### Propietats de la funció de correlació mútua

$$\begin{aligned} |R_{xy}(\tau)|^2 &\leq E_x E_y \\ R_{xy}(\tau) &= R_{yx}^*(-\tau) \quad \text{Si } x(t) \text{ i } y(t) \text{ són reals, } R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \\ F[R_{xy}(\tau)] &= X(f)Y^*(f) = G_{xy}(f) \end{aligned}$$

### Funció d'autocorrelació

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt \quad R_{xx}(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

### Propietats de la funció d'autocorrelació

$$\begin{aligned} R_{xx}(0) &= E_x \\ |R_{xx}(\tau)| &\leq R_{xx}(0) \\ R_{xx}(\tau) &= R_{xx}^*(-\tau) \text{ si } x(t) \text{ és real, } R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \\ F[R_{xx}(\tau)] &= G_{xx}(f) \end{aligned}$$

Suma de dos senyals

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

Autocorrelació:

$$R_{zz}(\tau) = R_{xx}(\tau) + R_{yy}(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)$$

Energia:

$$E_z = E_x + E_y + R_{xy}(0) + R_{yx}(0)$$

Senyals incoherents

$$R_{xy}(0) + R_{yx}(0) = 2 \operatorname{Re}[R_{xy}(0)] = 0$$

Senyals ortogonals:

$$R_{xy}(0) = R_{yx}(0) = 0$$

Senyals incorrelades

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0$$

### Correlació i densitat espectral d'energia a través de sistemes lineals

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau) & G_{xy}(f) &= G_{xx}(f) H^*(f) \\ R_{yx}(\tau) &= R_{xx}(\tau) * h(\tau) & G_{yx}(f) &= G_{xx}(f) H(f) \\ R_{yy}(\tau) &= R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) & G_{yy}(f) &= G_{xx}(f) |H(f)|^2 \end{aligned}$$

---

**PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS**


---

IV.6) Tenim el parell de polsos rectangulars de la figura IV.6a)

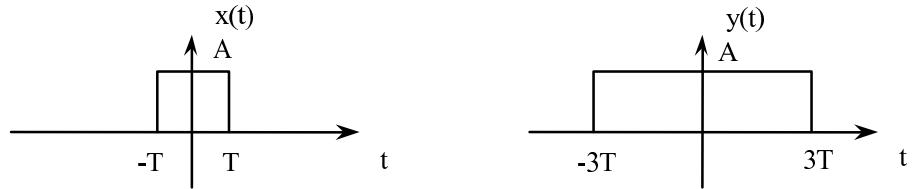


Fig. IV.6a)

- Determineu i dibuixeu la correlació creuada  $R_{yx}(\tau)$
- Trobeu  $R_{yy}(\tau)$
- Obtingueu la correlació creuada dels dos senyals representats a la figura IV.6b)
- Relacioneu  $R_{yz}(\tau)$  amb  $R_{yy}(\tau)$

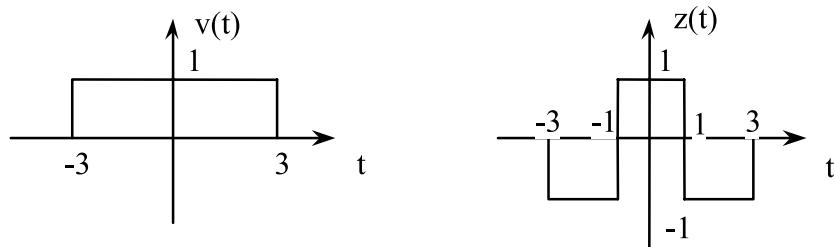


Fig. IV.6b)

IV.7) Determineu la funció d'autocorrelació dels senyals següents:

$$\begin{array}{ll} x_1(t) = \frac{1}{t_0} e^{-\pi t^2/t_0^2} & x_3(t) = \cos(\omega_c t) \prod \left( \frac{t-T/2}{T} \right), T f_c = k \gg 1 \text{ i enter} \\ x_2(t) = A \operatorname{inc}(2f_c t) & x_4(t) = k e^{-|t|} \end{array}$$

IV.8) Calculeu la funció de correlació creuada de  $x(t)$  i  $y(t)$  definides per:

$$x(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 t + \theta) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{resta} \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_2 t + \theta) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

IV.9) Analitzeu cada una de les funcions següents i respongueu raonadament si n'hi ha alguna que pot ser una funció d'autocorrelació.

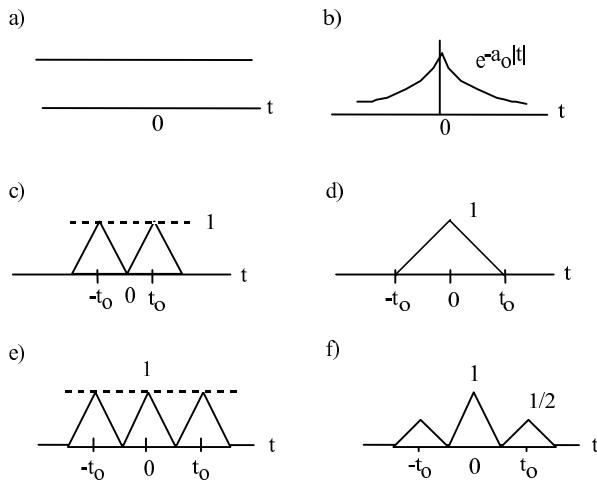


Fig. IV.9)

- IV.10) Sigui  $X(f)$  la transformada de Fourier del senyal d'energia finita  $x(t)$  i  $R_{xx}(\tau)$  la seva autocorrelació. Demostreu que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau} \right|^2 d\tau = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |X(f)|^4 df$$

- IV.11) Demostreu que

$$R_{xx}(0) - R_{xx}(\tau) \geq \frac{1}{4} (R_{xx}(0) - R_{xx}(2\tau))$$

i que

$$R_{xx}(0) - R_{xx}(\tau) \geq \frac{1}{4^n} (R_{xx}(0) - R_{xx}(2^n \tau)).$$

Interpreteu el resultat.

Nota: tingueu en compte que  $1 - \cos \omega \tau = 2 \sin^2(\omega \tau / 2) \geq 2 \sin^2(\omega \tau / 2) \cos^2(\omega \tau / 2)$

- IV.12) Per controlar com es propaga la pressió d'un líquid de frens des del pedal als dos eixos de rodes diferents, es recorre a comparar la pressió del líquid en aquests dos eixos. Suposeu que  $x(t)$  designa la pressió en un eix i  $y(t)$  la pressió a l'altre quan es prem el pedal durant un període curt de temps (0.2 s). La comparació de les pressions es calcula per mitjà d'un processador que calcula la funció  $d^2(x, y)$  tal com s'indica a continuació:

$$d^2(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) - y(t))^2 dt$$

Discutiu la validesa de la mesura que s'ha proposat. Per fer-ho, contesteu i raoneu les preguntes següents tenint en compte que, com passa a la pràctica,  $y(t) \equiv x(t+t_o)$ .

- Expresseu  $d^2(x, y)$  en funció de  $R_{xx}(\tau)$
- Què indica que  $d^2(x, y)$  sigui un valor petit (pràcticament zero) pel que fa a les pressions  $x$  i  $y$ ?
- Quin és el valor màxim de  $d^2(x, y)$  i quin n'és el mínim per a diferents valors de  $t_o$ ?
- Què indicaria una  $d^2(x, y)$  pròxima al seu valor màxim?

IV.13) L'entrada a un filtre passa-baix RC com el de la figura IV.13 és  $x(t) = \text{sinc}2f_o t$ .

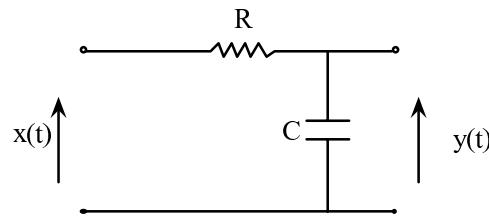


Fig. IV.13)

- Calculeu la densitat espectral d'energia del senyal de sortida  $y(t)$ .
  - Dibuixeu la relació d'energies  $E_y/E_x$  en funció de  $f_c/f_o$ , si  $f_c = 1/(2\pi RC)$  és la freqüència de tall del filtre.
- IV.14) A partir de l'esquema de la figura IV.14)

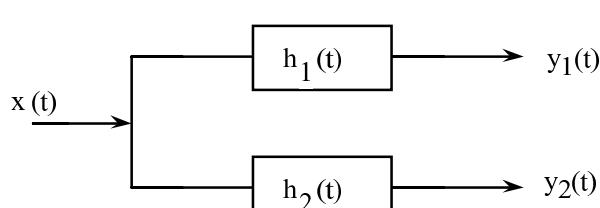


Fig. IV.14)

- Calculeu  $R_{y_1 y_1}(\tau)$  y  $R_{y_1 y_2}(\tau)$  en funció de  $R_{xx}(\tau)$ ,  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$ .
- Calculeu  $G_{y_1 y_1}(f)$  y  $G_{y_1 y_2}(f)$  en funció de  $G_{xx}(f)$ ,  $H_1(f)$  y  $H_2(f)$ .
- Indiqueu quina condició han de complir  $G_{xx}(f)$ ,  $H_1(f)$  i  $H_2(f)$  perquè  $R_{y_1 y_2}(\tau) = 0$

- d) Indiqueu quina condició han de complir  $G_{xx}(f)$ ,  $H_1(f)$  i  $H_2(f)$  perquè  $R_{y_1 y_2}(0) = 0$
- e) Com s'ha comprovat, utilitzant sistemes lineals i invariants és possible obtenir dues sortides incorrelades a partir d'un únic senyal. És possible obtenir senyals correlats utilitzant sistemes LI a partir de senyals incorrelats?

IV.15) Es defineix el senyal  $y_x(t,f)$  tal com es mostra a continuació:

$$y_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t-\tau/2) x(t+\tau/2) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Es demana que comproveu les propietats següents de la funció.

- a) Demostreu que el mòdul al quadrat de  $y_x(t,f)$  sempre és menor o igual que quatre vegades l'energia de  $x(t)$  al quadrat.
- b) Calculeu  $y_x(t,f)$  en funció de la transformada de Fourier de  $x(t)$ .
- c) Demostreu que la integral de  $y_x(t,f)$  a l'eix temporal proporciona la densitat espectral d'energia de  $x(t)$ .
- d) Demostreu que la integral de  $y_x(t,f)$  a l'eix freqüencial proporciona la potència instantània de  $x(t)$ .
- IV.16) En exploracions basades en l'ús de sonar actiu s'emet un senyal que provoca una resposta  $x(t)$ , la qual permet estudiar la superfície reflectant. Malauradament, hi ha altres objectes que produeixen ecos, que superposats a  $x(t)$  n'impedeixen l'estudi.

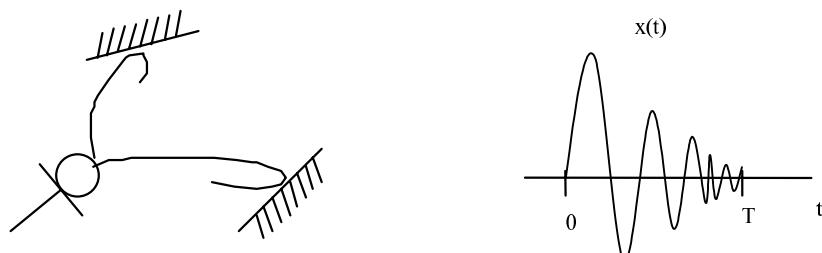


Fig. IV 16a)

Suposeu que el senyal rebut és  $x(t) + \alpha x(t-t_0) = x_r(t)$ , en què  $|\alpha| \ll 1; t_0 < T$ .

Es pregunta el següent:

- Calculeu l'autocorrelació de  $x_r(t)$ .
- Justifiqueu que l'autocorrelació de  $x_r(t)$  tingui la forma

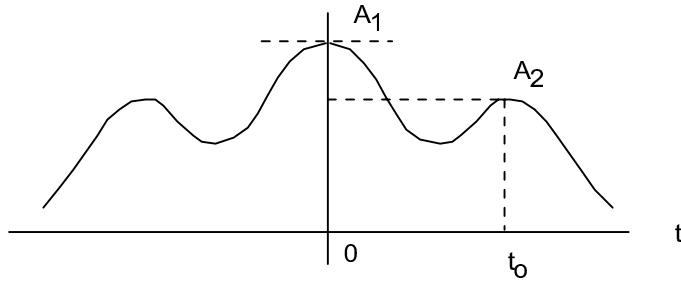


Fig. IV.16b)

- Si tenim  $A_1$  i  $A_2$  i suposant que  $R_x(0) \gg R_x(t_0) \gg R_x(2t_0)$ , determineu aproximadament el valor de  $\alpha$ .
  - Si coneixem  $\alpha$  i  $t_0$ , indiqueu com es pot recuperar  $x(t)$  a partir de  $x_r(t)$ .
- IV.17) Es vol mesurar la resposta freqüencial d'un circuit. Per fer-ho, es disposa dels senyals  $x(t)$  i  $y(t)$  segons l'esquema de la figura IV. 17) a). Una solució és calcular la transformada de Fourier de l'entrada i la sortida i fer el quocient:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

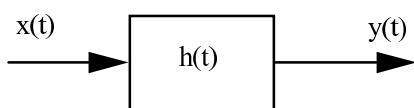


Fig. IV.17a)

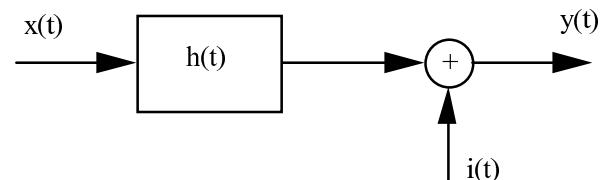


Fig. IV.17b)

(Considereu tots els senyals reals i d'energia finita en tot l'exercici).

- Demostreu que les alternatives següents també són vàlides

$$H_1(f) = \frac{G_{yx}(f)}{G_{xx}(f)} \quad H_2(f) = \frac{G_{yy}(f)}{G_{xy}(f)}$$

- b) Suposeu que la mesura de  $y(t)$  es fa de manera que s'introdueix una interferència  $i(t)$  com es mostra a la figura IV.17) b. Calculeu  $G_{yx}(f)$ ,  $G_{yy}(f)$  i  $G_{xy}(f)$  en funció de  $H(f)$ ,  $G_{xx}(f)$  i  $G_{xi}(f)$ .
- c) Si  $G_{xi}(f) = 0$ , quin mètode triaríeu per calcular  $H(f)$ ? Raoneu la resposta.

$$H_0(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}, \quad H_1(f) = \frac{G_{yx}(f)}{G_{xx}(f)}, \quad H_2(f) = \frac{G_{yy}(f)}{G_{xy}(f)}$$

- IV.18) Un dels filtres més utilitzats en aplicacions en què es requereix la detecció de polsos és el filtre adaptat. S'anomena així perquè està dissenyat o adaptat per maximitzar la sortida en un instant determinat, sempre que a l'entrada s'apliqui el pols a què està adaptat. Té l'avantatge addicional que també és robust davant del soroll i les interferències.

Sigui  $x(t)$  un senyal real i acotat amb energia  $E_x$  i  $h(t)$ , i un filtre real, acotat i amb energia  $E_h$ . Si  $y(t)$  és la sortida del filtre quan se li aplica  $x(t)$ ,

- a) Utilitzant la desigualtat de Schwartz, comproveu que la sortida sempre està acotada segons l'expressió  $|y(t)|^2 \leq E_x E_h$
- b) Quines condicions ha de complir el filtre  $h(t)$  perquè  $y(t)$  arribi a la cota a l'instant  $t = t_0$ ?
- c) Si tenim el senyal  $x(t)$  de la figura IV.18), dibuixeu un filtre  $h(t)$  causal i d'energia unitària que compleixi les condicions establertes a l'apartat anterior. Especifiqueu per a aquest filtre l'instant en què la sortida serà màxima.

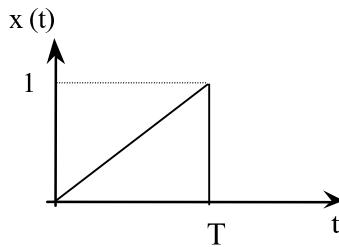


Fig. IV.18)

- d) Relacioneu la sortida del filtre  $y(t)$  amb  $R_{xx}(t)$
- e) Si a l'entrada del filtre s'aplica  $z(t) = x(t) + n(t)$ , amb  $n(t)$  incorrelat amb  $x(t)$ , què valdria el valor màxim de la sortida? Com hi influeix  $n(t)$ ?
- f) Si el senyal d'entrada és  $v(t) = x(t - 4)$ , calculeu l'instant en què la sortida és màxima.
- IV.19) Es vol dissenyar un sistema de comandament a distància que pugui transmetre 4 informacions diferents. Cadascuna d'aquestes informacions es codificarà amb un pols  $x_k(t)$  d'energia  $E_x$  i durada  $T$ , i es transmetrà. El receptor que es mostra a la figura és una sèrie de filtres (banc de filtres adaptats)  $h_k(t) = x_k(T-t)$ , un mostrejador que agafa mostres  $T$  segons després de rebre l'entrada, un comparador i un element de decisió que determina l'entrada al comparador el valor del qual és màxim.

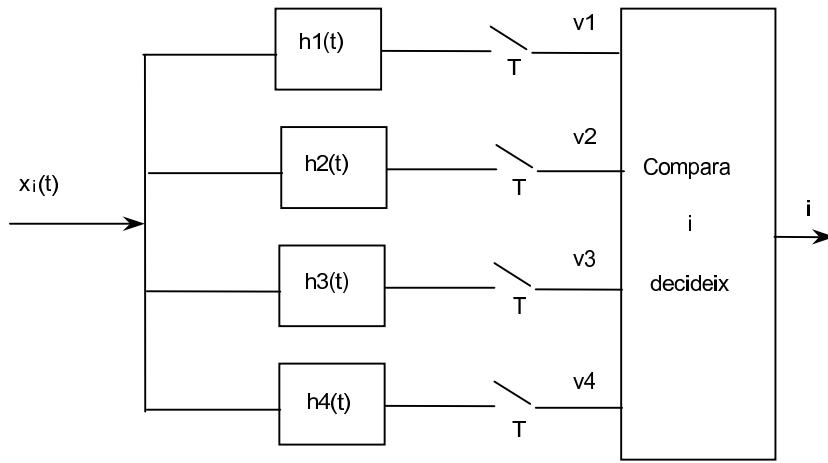


Fig. IV.19a)

- Calculeu el valor de la sortida k-èsima a l'instant  $T$  quan a l'entrada s'aplica  $x_i(t)$
- Calculeu els valors obtinguts a cada sortida si sabem que els polsos són ortogonals.
- Trieu un conjunt de quatre polsos ortogonals entre els que presenta la figura IV. 19)b.
- Calculeu els valors  $v_1 \dots v_4$  si el sistema es dissenya amb els polsos triats a l'apartat anterior i a l'entrada s'aplica el senyal que heu descartat en aquest apartat.
- Com modificaríeu l'esquema per eliminar falses deteccions per polsos interferents com l'anterior?

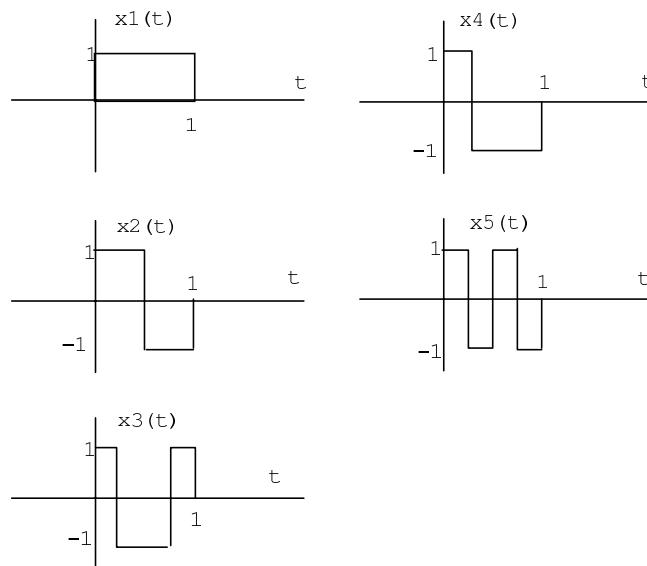


Fig. IV.19b)

## Correlació i densitat espectral de potència de senyals de PMF

### Correlació de senyals de potència mitjana finita

Correlació creuada:  $R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)y^*(t)dt$

Funció d'autocorrelació:  $R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x^*(t)dt$

### Propietats de la correlació creuada i autocorrelació per a senyals de PMF

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &\leq P_x P_y & R_{xy}(\tau) &= R_{yx}^*(-\tau) \\ |R_{xx}(\tau)| &\leq R_{xx}(0) \\ R_{xx}(\tau) &= R_{xx}^*(-\tau) & \text{Per a senyals reals: } R_{xx}(\tau) &= R_{xx}(-\tau) \\ R_{xx}(0) &= P_x \end{aligned}$$

### Densitat espectral de potència

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} G_{x_T x_T}(f) \quad F[R_{xx}(\tau)] = S_{xx}(f) \quad R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} R_{x_T x_T}(\tau)$$

### Relacions de correlació i densitat espectral de potència en sistemes lineals i invariants

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau) & S_{xy}(f) &= S_{xx}(f) H^*(f) \\ R_{yx}(\tau) &= R_{xx}(\tau) * h(\tau) & S_{yx}(f) &= S_{xx}(f) H(f) \\ R_{yy}(\tau) &= R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) & S_{yy}(f) &= S_{xx}(f) |H(f)|^2 \end{aligned}$$

### Senyals periòdics

Correlació de dos fasors  $R_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0 & f_1 \neq f_2 \\ a_1 a_2^* e^{j2\pi f_1 t} & f_1 = f_2 \end{cases}$

Autocorrelació d'una senyal periòdic  $R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t+\tau)x^*(t)dt$   
 $R_{xx}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c(m)|^2 e^{j2\pi m \tau / T_0}$

Correlació creuada de dos senyals periòdics de freqüència fonamental  $f_x$  i  $f_y$  respectivament

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_r(m) e^{j2\pi m f_r t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_x(mN) c_y^*(mM) e^{j2\pi m f_r t} \quad \text{amb } f_r = Nf_x = Mf_y, \text{ en què } N \text{ i } M \text{ són els menors enters que compleixen la igualtat.}$$

---

**PROBLEMES I PRÀCTIQUES PROPOSATS**


---

IV.20) Determineu la funció d'autocorrelació, l'energia o potència i la densitat espectral dels senyals següents:

- |                              |                                 |
|------------------------------|---------------------------------|
| a) $x_1(t) = u(t)$           | c) $x_3(t) = A \cos 2\pi f_0 t$ |
| b) $x_2(t) = \text{sign}(t)$ | d) $x_4(t) = A \sin 2\pi f_0 t$ |

IV.21) Considereu els senyals  $x_1(t) = A_1 e^{j\omega_1 t}$ ,  $x_2(t) = A_2 e^{j\omega_2 t}$

- Calculeu l'autocorrelació de  $x_1(t)$  i la correlació creuada dels dos senyals.
- A partir del resultat de l'apartat anterior, determineu la funció d'autocorrelació del senyal
- $x(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$
- Quin és el valor de  $R_{xx}(0)$ ?
- Quina informació es perd en obtenir la funció d'autocorrelació?

IV.22) Si tenim  $x(t)$  un senyal amb funció d'autocorrelació  $R_{xx}(\tau)$ , i el senyal

$$y(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

- Calculeu  $R_{yy}(\tau)$
  - Relacioneu l'energia (o potència) de  $y(t)$  amb la de  $x(t)$ .
  - $x(t)$  i  $y(t)$  són ortogonals?
  - Si  $x(t) = \cos \omega_o t$ , demostreu que  $y(t) = \sin \omega_o t$
  - Si  $x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \cos n\omega_o t$ , calculeu  $y(t)$
- IV.23) A vegades és útil estimar la densitat espectral de potència d'un senyal per mitjà del càlcul de la TF de la seva funció d'autocorrelació. En molts casos pràctics cal enfinestrar la correlació d'un senyal determinat abans d'avaluar-ne la transformada de Fourier per obtenir una aproximació a la densitat espectral de potència buscada

$$\hat{S}_{xx}(f) \cong \text{TF}\{R_{xx}(\tau) w(\tau)\}$$

Com que el senyal que cal enfinestrar és una funció d'autocorrelació i el resultat que es pretén obtenir és una funció de densitat espectral de potència, s'han de tenir en compte algunes propietats en elegir la finestra  $w(t)$ . Respongueu les preguntes següents:

- Considereu raonable el fet d'usar funcions parells i positives per a  $w(t)$ ? Raoneu la vostra resposta.
- Justifiqueu l'ús d'una funció  $y(t)$  per elaborar  $w(t)$  si  $w(t) = y(t) * y^*(-t)$ .

- c) Dibuixeu aproximadament  $W(f)$  per al cas en què

$$y(t) = \frac{1}{2T} \left( 1 + \cos \frac{2\pi t}{T} \right) \quad \text{per a } |t| \leq T/2$$

- d)  $R_{xx}(t)$  és un to la freqüència del qual s'ha de determinar amb  $S_{xx}(f)$ . Suposeu que per efectes de no linealitats en el sistema de mesura, es produeix sistemàticament un to espuri  $\Delta f$  Hz per sobre del to original. Indiqueu el valor de  $T$  més adequat per a la mesura del to original sense la pertorbació que suposa el fenomen anterior.
- IV.24) Es disposa d'un filtre passa-banda que té de funció característica  $F(\omega^2) = 2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 / (\omega_0^2 \omega^2)$ . Es demana:
- Suposant un senyal d'entrada  $x(t) = a_0 + b_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) + b_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$ , calculeu la potència mitjana dels senyals d'entrada i de sortida del filtre.
  - Suposant un senyal d'entrada  $x(t) = b_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) + b_1 \cos(2\pi \sqrt{2} f_0 t + \phi_1)$ , es pot dir que la relació (potència de sortida)/(potència d'entrada) expressada en dB val  $-3$ ? Justifiqueu la resposta.
  - Suposeu que del filtre coneix exclusivament la resposta freqüencial normalitzada respecte a  $f_0$ . Com calcularieu la potència mitjana de sortida al senyal de l'apartat a) sense desnormalitzar la resposta freqüencial?

- IV.25) Amb el senyal periòdic  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(t-nT_0)$  de període  $T_0$ , es demana:

- Justifiqueu que la seva funció d'autocorrelació es pot escriure com  $R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_b(\tau - nT_0)$
- Obtingueu la relació entre les transformades de Fourier de  $r_b(\tau)$  i  $x_b(\tau)$ .
- Comproveu que una possible solució és que  $r_b(t) = (1/T)R_{x_bx_b}(t)$
- Calculeu la funció d'autocorrelació del senyal periòdic generat per

$$x_b(t) = (t/T_0) \Pi\left(\frac{t-T_0/2}{T_0}\right).$$

Identifiqueu per a aquest exemple el senyal  $r_b(\tau)$  i comproveu el resultat de l'apartat b) o c).

- IV.26) Tenim els senyals periòdics de la figura IV. 26), amb  $y(t)=\left|\sin \frac{\pi}{21} t\right|$

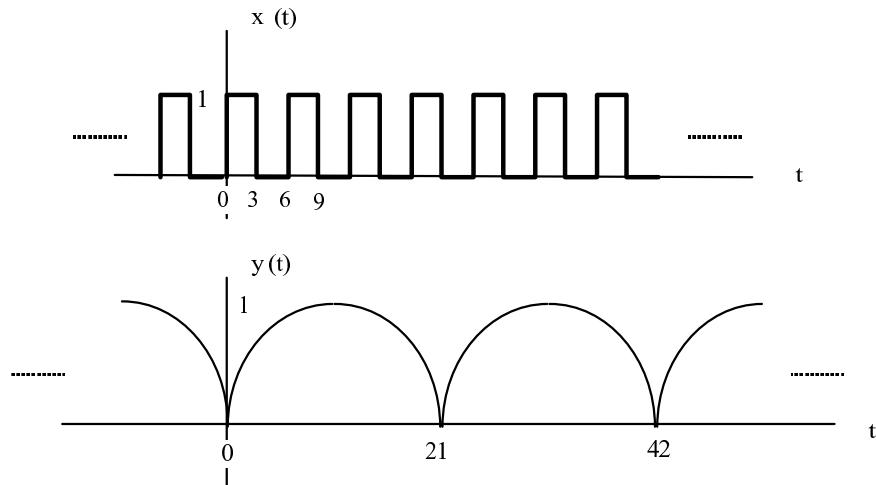


Fig. IV.26)

Obtingueu:

- La funció d'autocorrelació  $R_{xx}(\tau)$  i  $R_{yy}(\tau)$  a partir dels coeficients dels seus desenvolupaments en sèrie de Fourier. Quin és el període de cadascuna de les funcions resultants?
  - La potència mitjana de cadascun dels senyals  $x(t)$  i  $y(t)$ .
  - La funció de correlació creuada  $R_{xy}(\tau)$ . Quin és el període de la funció resultant?
  - Com quedaria modificat el resultat de l'apartat anterior si  $y(t)=\left|\sin \frac{3}{21} t\right|$ .
- IV.27) Sigui el senyal  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) e^{-\alpha t^2}$ . Suposant que és passa-banda i per tant que  $X(f)$  als voltants de  $f=0$  és negligible, comproveu si és d'energia o de potència mitjana finita.
- Calculeu consegüentment la densitat espectral d'energia o la densitat espectral de potència.
  - Calculeu l'autocorrelació.
  - Obtingueu la seva energia o potència mitjana. Què implica la suposició de senyal passa-banda en els càlculs anteriors?

- IV.28) Es vol mesurar la resposta freqüencial d'un filtre de resposta impulsional  $h(t)$  real a una freqüència particular  $f_o$ . Per fer-ho es proposa l'esquema de la figura IV 28.a) i s'aplica el senyal  $x(t)=\cos(2\pi f_o t)$ .

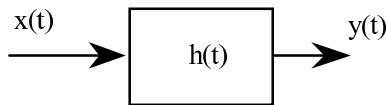


Fig. IV.28a)

- Calculeu la sortida  $y(t)$  en funció de la resposta freqüencial del filtre. Com calcularíeu el mòdul i la fase de  $H(f_o)$  a partir de la sortida  $y(t)$  obtinguda?
- Suposeu que el sistema es veu afectat per una interferència  $i(t)$ , tal com il·lustra l'esquema de la figura IV.28b) Continuaria sent vàlid el mètode proposat a l'apartat a)? Raoneu la resposta.

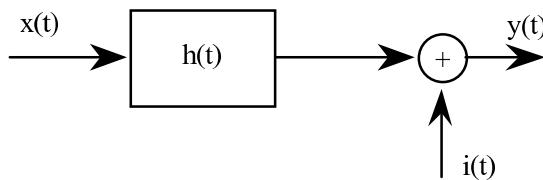


Fig. IV.28b)

- Una altra tècnica utilitzada per identificar sistemes es basa en el càlcul de la funció de correlació creuada. Demostreu que a partir de  $R_{yx}(\tau)$  podeu identificar  $H(f_o)$  a l'esquema de la figura IV.28a)
  - Demostreu que amb el mateix procediment que a l'apartat anterior podeu identificar  $H(f_o)$  a l'esquema de la figura IV 28b), sempre que  $x(t)$  i  $i(t)$  siguin incorrelats.
  - Tenint en compte l'esquema de la figura IV.28b) amb una interferència produïda per una alinealitat del sistema modelada per  $i(t)=\cos(4\pi f_o t)$ , apliqueu els mètodes proposats als apartats a) i c) per a la identificació de  $H(f_o)$ .
  - Si amb la interferència de l'apartat e) es mesura  $R_{yx}(0)=\frac{\sqrt{2}}{4}$  i  $R_{yx}(\frac{T_o}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ , calculeu  $H(f_o)$  en mòdul i fase.
- IV.29) Es defineix la coherència espectral entre dos senyals  $y(t)$  i  $x(t)$  segons el següent:

$$\gamma_{yx}(f) = \frac{S_{yx}(f)}{(S_{xx}(f)S_{yy}(f))^{0.5}}$$

Aquesta mesura permet saber si  $y(t)$  i  $x(t)$  estan o no relacionades per un sistema lineal amb interferències o sense.

- a) Calculeu el valor de  $|\gamma_{yx}(f)|^2$  si  $y(t)$  és la resposta a  $x(t)$  d'un sistema lineal i estable caracteritzat per  $h(t)$ . Considerieu  $x(t)$  un senyal de potència mitjana finita.

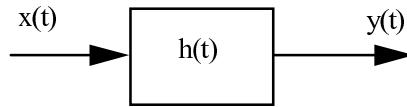


Fig. IV.29a)

- b) Calculeu el valor de  $|\gamma_{yx}(f)|^2$  si  $x(t)$  i  $y(t)$  són les sortides de dos filtres  $h_1(t)$  i  $h_2(t)$  connectats en paral·lel, tal com es mostra a la figura IV.29b). Considerieu  $z(t)$  un senyal d'energia finita.

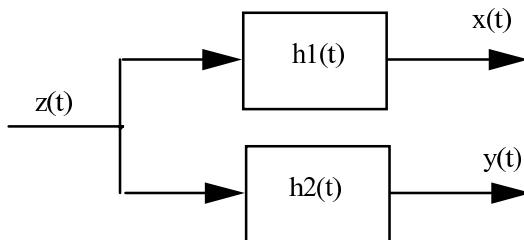


Fig. IV.29b)

- c) Calculeu  $|\gamma_{yx}(f)|^2$  si  $y(t)$  s'obté segons el diagrama de la figura IV.29c), amb  $z(t)$  un senyal interferent incorrelat amb  $x(t)$ . Considerieu  $x(t)$  un senyal de potència mitjana finita.

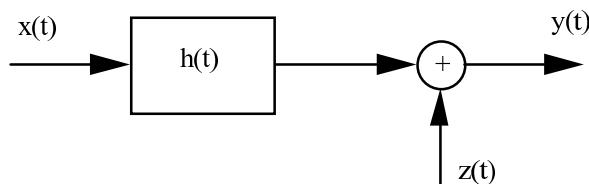


Fig. IV.29c)

- d) Relacioneu per a aquest últim cas  $|\gamma_{yx}(f)|^2$  amb el quocient  $\frac{S_z(f)}{S_x(f)}$  i indiqueu en quines condicions  $|\gamma_{yx}(f)|^2$  aconsegueix les seves cotes màxima i mínima (1 i 0 respectivament). Interpreteu  $|\gamma_{yx}(f)|^2$

IV.30) Sigui el senyal  $x(t)$  de període  $T_0$  seg que es mostra a la figura IV.30a) Es demana el següent:

- Desenvolupament en sèrie de Fourier (DSF) de  $x(t)$ . Verifiqueu que els termes parell del desenvolupament són nuls.
- A partir del resultat anterior, calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier del senyal  $y(t) = x(t-T_0/4)$ . Relacioneu els coeficients d'ambdós desenvolupaments.
- Desenvolupament en sèrie de Fourier de  $R_{xx}(\tau)$  i  $R_{yy}(\tau)$ .
- Densitat espectral de potència de  $x(t)$  i de  $y(t)$ .
- El senyal  $x(t)$  de període  $T_0 = 2\text{mseg}$  passa per un filtre passa-banda  $H(f)$  centrat en  $f_0 = 2\text{KHz}$ , com es mostra a la figura IV.30b). A la sortida s'obté  $g(t)$ . Calculeu el DSF de  $g(t)$ . Quina és la freqüència fonamental de  $g(t)$ ?
- Calculeu i dibuixeu la densitat espectral de potència de  $g(t)$ . Calculeu la potència de  $g(t)$ .

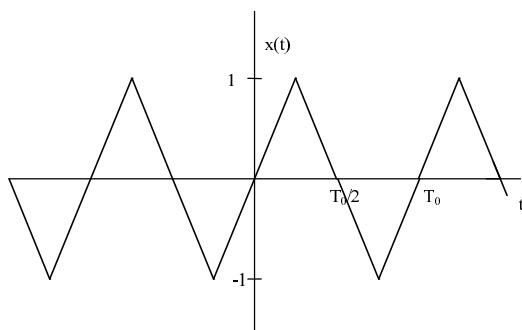


Fig. IV.30a)

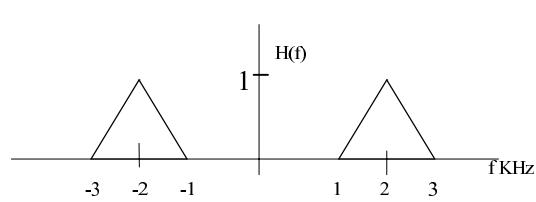


Fig. IV.30b)

IV.31) La multiplexació de senyals, d'una gran importància en el món de les comunicacions, es pot fer gràcies a què la superposició de diversos senyals no implica la pèrdua de cada senyal, és a dir, amb certes condicions es pot recuperar cada senyal. Un exemple prou conegut és la multiplexació freqüencial, en què a partir de la superposició de senyals temporals es pot extreure cada senyal si estan separats en el domini freqüencial. Equivalentment, existeix la multiplexació temporal, en què la separació entre senyals és temporal. Així mateix, existeixen altres alternatives. En aquest problema s'analitzen algunes de les possibilitats esmentades. Per això, considereu que es disposen de dos senyals  $x(t)$  i  $y(t)$  de banda limitada a  $B_x$  i  $B_y$  Hz respectivament, i que es forma el senyal  $z(t)=x(t)f(t) + y(t)g(t)$ , en què  $f(t)$  i  $g(t)$  són els senyals que permetran extreure  $x(t)$  i  $y(t)$ . Considerieu els quatre casos següents:

- $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t-nT)$ , en què  $p(t)$  és un pols rectangular de duració  $T/2$  i  $g(t)=1-f(t)$
- $f(t)=\cos w_1 t$ ,  $g(t)=\cos w_2 t$
- $f(t)=\cos w_0 t$ ,  $g(t)=\sin w_0 t$

- a) El cas 1 es correspon amb la multiplexació temporal. Mostreu que efectivament  $z(t)$  conté informació separada dels senyals  $x(t)$  i  $y(t)$  en el domini temporal però superposada en el domini freqüencial. Hi ha alguna restricció en l'elecció de  $T$ ? Justifiqueu la resposta i especifiqueu, si fa el cas, quina és la restricció.
- b) El cas 2 és el dual de l'1, és a dir, ara la multiplexació és freqüencial. Mostreu per aquest cas 2 que la informació està superposada en el domini temporal, però separada en el freqüencial. Com s'ha d'escollar  $w_1$  i  $w_2$ ?
- c) Demostreu que  $f(t)$  i  $g(t)$  són ortogonals en tots els casos.
- d) La separació de  $x(t)$  i  $y(t)$  esdevé una conseqüència més o menys directa d'aquesta ortogonalitat. Comproveu per als casos 1, 2 i 3 que l'esquema de la figura permet obtenir  $x(t)$  i  $y(t)$  a partir de  $z(t)$ . Especifiqueu per cada cas com han de ser els filtres.

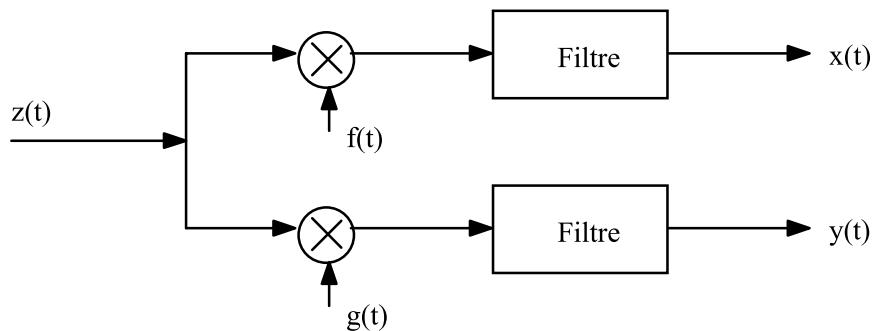


Fig. IV.31)

- IV.32) Potser l'aplicació més clàssica d'un sistema lineal és la de filtratge entès com la separació de senyals. Clarament, si dos senyals superposats tenen espectres disjunts l'obtenció de qualsevol d'ells es realitza mitjançant un filtre ideal. El problema que es planteja aquí és l'anàlisi del cas en què hi ha una certa superposició dels espectres dels dos senyals. Suposem que es té un senyal  $x(t)$  que consisteix en la suma de dos senyals  $s(t)$  i  $n(t)$ ,  $x(t)=s(t)+n(t)$ . Es vol dissenyar un filtre, com es pot veure a la figura IV.32) que permeti obtenir una bona aproximació de  $s(t)$ .

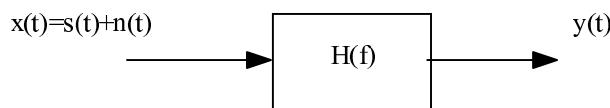


Fig. IV.32)

Per poder analitzar la bondat de l'aproximació definim una funció d'error a cada freqüència com  $E(f)=|S(f)-Y(f)|^2$  en què  $S(f)$  i  $Y(f)$  són les transformades de Fourier de  $s(t)$  i  $y(t)$  respectivament.

Es demana el següent:

- a) Expressant  $E(f)$  en termes de  $S(f)$ ,  $H(f)$  i  $N(f)$ , en què  $N(f)$  és la transformada de Fourier de  $n(t)$ , i imposant la condició que  $H(f)$  sigui real, obtingueu  $H(f)$ , que minimitza l'error  $E(f)$ . Comenteu el resultat.
  - b) Mostreu que quan no hi ha superposició dels espectres  $S(f)$  i  $N(f)$  el resultat de l'apartat anterior porta al filtre ideal.
  - c) Apliqueu el resultat del primer apartat per al cas de tenir  $s(t)=2\text{sinc}4t$ ,  $n(t)=\delta(t)-2\text{sinc}2t$ .
  - d) Obtingui  $y(t)$  pel cas anterior.
  - e) Calculi l'energia del senyal error  $E(f)$  que s'obté amb el filtre òptim de l'apartat c).
  - f) Altres solucions possibles serien la d'un filtre ideal que deixés passar íntegrament l'espectre de  $s(t)$  o la d'un filtre ideal que deixés passar només la part de l'espectre de  $s(t)$  que no està superposat amb el de  $n(t)$ . Calculeu l'energia del senyal error  $e(t)=s(t)-y(t)$  per a aquests dos filters, en el cas dels senyals definits en l'apartat anterior, i compareu-la amb el cas del filtre òptim.
  - g) Expresseu, d'una banda, l'error  $e(t)$  en termes de funcions de correlació de  $s(t)$  i  $y(t)$  i, de l'altra, de funcions de correlació de  $s(t)$  i de  $n(t)$  i la resposta impulsional del filtre.
  - h) Què significa en termes de correlació que els espectres de  $s(t)$  i de  $n(t)$  no estiguin superposats?
- IV.33) Una de les tècniques de transmissió que permeten reduir els efectes de soroll o interferències és la tècnica d'eixamplament de l'espectre. En aquest problema se n'analitza, en part, el funcionament bàsic.

Suposeu que es transmet un senyal  $x(t)$  d'amplada de banda de  $B$  Hz i de densitat espectral de potència

$$S_{xx}(f) = \frac{5}{B} \left[ \prod \left( \frac{f}{2B} \right) \right]$$

- a) Considereu primerament que aquest senyal  $x(t)$  es transmet per un canal que presenta una atenuació constant de 3 dB en el marge  $[-B, B]$  i infinit fora d'aquest marge. El sistema introduceix un senyal interferent  $i(t)$  de la mateixa amplada de banda  $B$  Hz i de densitat espectral de potència  $S_i(f) = [\prod(f/2B)]/B$ , de manera que a l'entrada del receptor es té el senyal transmès a través del canal, més el senyal interferent. Es demana la relació senyal/interferència en dB definida com la potència del senyal respecte a la potència de la interferència a l'entrada del receptor.

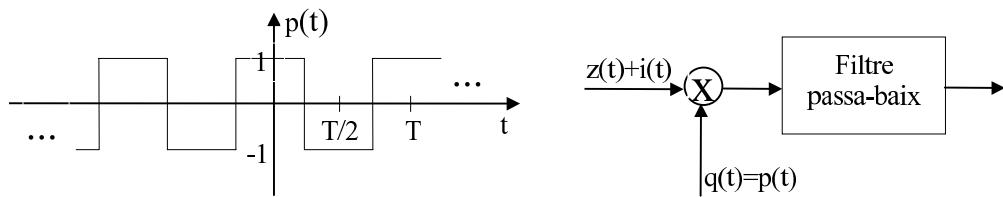


Fig. IV.33a)

Fig. IV.33b)

Per intentar eliminar la interferència es multiplica el senyal  $x(t)$  pel senyal periòdic  $p(t)$  de la figura IV.33a) (observeu que  $p(t)=\pm 1$ ), de manera que el senyal que es transmet ara és  $z(t)=x(t)p(t)$ .

- Calculeu la potència de  $z(t)$ .
- Justifiqueu el canvi de canal per transmetre el senyal  $z(t)$  sense distorsió apreciable.
- Comproveu que el senyal  $x(t)$  es pot recuperar a partir de  $z(t)$  multiplicant un altre cop per  $p(t)$ .
- Suposeu que a l'entrada del receptor es disposa de  $z(t)$  més el senyal interferent  $i(t)$ . Comproveu que amb una elecció adient de paràmetres l'esquema de la figura IV.33b) permet la recuperació de  $x(t)$  i eliminar la interferència. Com afecta el valor de  $T$ ?
- Canviaria alguna cosa si la sincronització del transmissor i el receptor no fos perfecta? Amb unes altres paraules, obtindriem igualment  $x(t)$  si fos  $q(t)=p(t-\tau)$ ?

### PROBLEMA RESOLT

Una aplicació de la funció de correlació és la mesura de temps de retard. La mesura del temps de retard entre senyals és fonamental perquè es pugui aplicar, entre d'altres, en esquemes de radar o sonar. En aquest exercici es mostra com la utilització de la funció de correlació es pot utilitzar en la mesura de la distància a un blanc. Per obtenir la posició dels blancs el sistema radar emet un senyal i mesura el temps que triguen a arribar els diferents ecos resultants quan el senyal rebota amb les blancs.

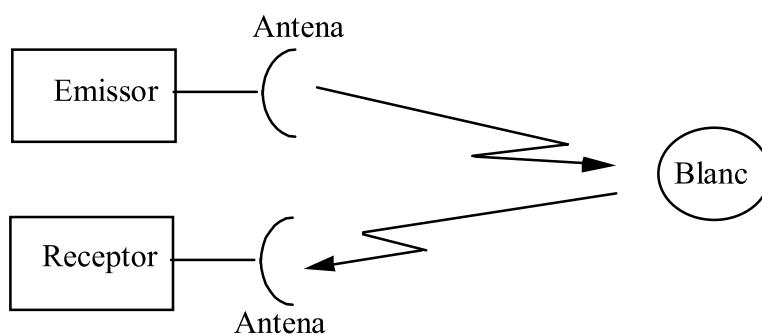


Fig. PIVa)

Suposem que el senyal  $x(t)$  enviat pel radar té una durada de  $T$  segons i una energia  $E_x$ . El receptor està format per un amplificador, que iguala l'energia del senyal d'entrada a la del senyal enviat, i un filtre  $h_r(t)$ .

- a) Obtingueu un disseny per al filtre de manera que tingui les propietats següents:

- 1)  $h_r(t)$  és real.
- 2) La durada de la resposta impulsional  $h_r(t)$  és igual a  $T$ .
- 3)  $|h_r(t)| = 1$  per a  $0 \leq t \leq T$ .
- 4)  $x_r(t) = x(t) * h_r(t)$  tingui un màxim  $t=T$ . Feu servir la desigualtat de Schwartz:

$$|x_r(t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h_r(t-t') x(t') dt' \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h_r(t-t')|^2 dt' \int_{-\infty}^{\infty} |x(t')|^2 dt'$$

Que es compleix amb igualtat si  $h_r(t-t')$  és proporcional a  $x(t')$

- b) Relacioneu el senyal  $x_r(t)$  resultant amb la funció d'autocorrelació del senyal enviat.
- c) Quan el sistema estigui funcionant, el senyal a l'entrada de  $h_r(t)$  serà  $x(t-t_o)$ , en què  $t_o$  indica el temps que triga el pols d'anar al blanc i tornar al receptor. Comproveu que el màxim del senyal de sortida estarà en  $T + t_o$ , i, per tant, n'hi ha prou a localitzar el màxim absolut dels senyal de sortida del receptor per poder trobar  $t_o$ . Quin valor aconsegueix aquest màxim absolut?
- d) Suposeu que el receptor del radar rep una interferència  $i(t)$  de la mateixa durada i energia que el senyal  $x(t)$  per a la qual s'ha dissenyat específicament el receptor. Compareu els valors que s'obtenen a la sortida del receptor en els casos en què el senyal d'entrada al receptor és  $x(t)$  o  $i(t)$ . Quin ha de ser el nivell llindar perquè el receptor detecti únicament l'eco procedent d'un blanc i no el senyal interferent?
- e) Què passaria si el senyal es rep contaminat amb soroll?

### Resolució de l'exercici

- a) El senyal de sortida ve determinat per l'equació de convolució

$$x_r(t) = x(t) * h_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_r(t-t') x(t') dt'$$

Com que es vol trobar el filtre que maximitza la sortida en un instant determinat, apliquem al desigualtat de Schwartz

$$|x_r(t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h_r(t-t') x(t') dt' \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h_r(t-t')|^2 dt' \int_{-\infty}^{\infty} |x(t')|^2 dt'$$

Volem que el filtre maximitzi la sortida en un instant determinat  $t=T$ , i aplicant la condició que la desigualtat de Schwartz es compleixi amb igualtat s'obté la relació

$$h_r(T-t') = k x(t')$$

com que  $h_r(t)$  ha d'esta acotat a 1, s'obté:

$$h_r(t) = x(T-t)$$

- b) El senyal de sortida

$$x_r(t) = x(t) * h_r(t) = x(t) * x(T-t) = x(t) * x(-t) * \delta(t-T)$$

i aplicant la definició de correlació s'obté

$$x_r(t) = R_{xx}(t-T)$$

Es posa de manifest clarament que la sortida  $x_r(t)$  tindrà un màxim en l'instant  $t=T$  quan a l'entrada s'apliqui  $x(t)$ ; el màxim té com a valor  $R_{xx}(0) = E_x$

- c) Si es rep el senyal  $x(t-t_0)$ , en què  $t_0$  és el temps que triga el senyal d'anar al blanc i arribar al receptor, el senyal de sortida serà

$$y(t) = x(t-t_0) * h_r(t) = x(t-t_0) * x(T-t) = R_{xx}(t-t_0-T)$$

Per això el màxim estarà situat a l'instant  $t = T+t_0$

- d) En rebre el senyal interferent el senyal de sortida serà

$$y(t) = i(t) * h_r(T-t) = i(t) * x(-t) * \delta(t-T) = R_{ix}(t-T)$$

I com que el senyal interferent té la mateixa energia que el senyal original, aplicant les propietats de la correlació creuada s'obté

$$|y(t)| = |R_{ix}(t-T)| \leq (E_x E_i)^{1/2} = E_x$$

És a dir, que en rebre una interferència de la mateixa energia i la mateixa durada que el pols original, el valor de la sortida sempre serà menor que el valor màxim que s'aconsegueix quan a l'entrada es rep el pols  $x(t)$  per al qual el filtre s'ha dissenyat.

Per estimar el temps de retard  $t_0$ , n'hi ha prou a trobar l'instant  $t_1$  en què el senyal de sortida aconsegueix el valor  $E_x$  i l'instant  $t_0 = t_1 - T$ . Si no s'aconsegueix aquest valor màxim, el pols a l'entrada no és el corresponent al dissenyat.

- e) Si el senyal es rep contaminat amb soroll  $n(t)$ , a la sortida del filtre s'obté

$$y(t) = (x(t) + n(t)) * h_r(t) = R_{xx}(t-T) + R_{nx}(t-T)$$

Si el soroll està incorrelat amb el senyal d'entrada, el valor de la sortida és independent del soroll que hi hagi a l'entrada.

**SOLUCIÓ ALS PROBLEMES DEL TEMA IV**

IV.1) a) PMF

b) EF

c) PMF

d) EF

e) PMF

f) PMF

IV.2) a) 1/2

b) 1/(2B), c) 1

d) 1/√2

e) 1/2

f) 1

IV.3) a)  $X(f) = \frac{\tau}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau/T) \delta(f - n/T)$

b)  $\tau/T$ ,

c)  $P_x = \left(\frac{\tau}{T}\right)^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(n\tau/T) = \left(\frac{\tau}{T}\right)^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{T}{\tau} \Delta(nT/\tau) = \tau/T$

d)  $S_{xx}(f) = \left(\frac{\tau}{T}\right)^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(n\tau/T) \delta(f - n/T)$

IV.4)  $P_x = 0,3$  Watt       $P_y = 82$  mWatt.

La contribució a la potència total a la banda atenuada se suposa menyspreable davant de la de la banda de pas.

IV.5) Si  $x(t) = \sum_i a_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i)$ , es trien les amplituds  $a_k$  de més valor absolut i els corresponents  $f_k, \phi_k$

IV.6) a)  $R_{yx}(t) = \begin{cases} 2A^2 T & |t| < 2T \\ A^2 (4T - |t|) & 2T < |t| < 4T \\ 0 & |t| > 4T \end{cases}$

b)  $R_{xy}(t) = R_{yx}(t)$  per ser real i parell

c)  $-2 \sum_{-1}^1 \Delta\left(\frac{t-4n}{2}\right)$

d)  $R_{yz}(\tau) = R_{xy}(\tau) - R_{xy}(\tau-2) - R_{xy}(\tau+2)$  amb  $T=1$

$$\text{IV.7) } R_{x1x1}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2} t_0} \exp(-\pi^2/2 t_0^2) \quad R_{x2x2}(\tau) = \frac{A^2}{2f_c} \operatorname{sinc}(2f_c \tau)$$

$$R_{x3x3}(\tau) = \frac{T - |\tau|}{2} \cos \omega_c \tau - \frac{1}{2\omega_c} \sin \omega_c |\tau| \quad R_{x4x4}(\tau) = k^2 e^{-|\tau| (1+|\tau|)}$$

$$\text{IV.8) } R_{xy}(\tau) = |\tau| > T = 0$$

$$-T < \tau < 0 \quad \frac{A^2}{2} \frac{1}{w_1 - w_2} (\sin((w_1 - w_2)T + w_1 t) - \sin(w_2 t))$$

$$+ \frac{A^2}{2} \frac{1}{w_1 + w_2} (\sin((w_1 + w_2)T + w_1 t + 2\theta) + \sin(w_2 t + 2\theta))$$

$$0 < \tau < T \quad \frac{A^2}{2} \frac{1}{w_1 - w_2} (\sin((w_1 - w_2)T + w_2 t) - \sin(w_1 t)) +$$

$$+ \frac{A^2}{2} \frac{1}{w_1 + w_2} (\sin((w_1 + w_2)T - w_2 t + 2\theta) - \sin(w_1 t + 2\theta))$$

IV.9) No poden ser c) perquè no té el màxim a l'origen ni tampoc e) perquè la seva TF agafa valors negatius

- IV.12 a)  $d^2(x, y) = 2(R_{xx}(0) - R_{xx}(t_o))$   
b)  $t_o \approx 0$  igual pressió en els eixos  
c)  $d^2(x, y) \max = 4 R_{xx}(0); d^2(x, y) \min = 0$   
d) quan la pressió de  $x$  és màxima,  $y$  és mínima

$$\text{IV.13 a) } S_{yy}(f) = \left( \frac{1}{2f_o} \right)^2 \prod \left( \frac{1}{2f_o} \right) \frac{1}{1 + (f/f_c)^2}$$

$$\text{b) } \frac{E_y}{E_x} = \frac{\operatorname{arctg}(\omega_c/\omega_o)}{\omega_c/\omega_o}$$

- IV.14 a)  $R_{y_1y_1}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h_1(\tau) * h_1^*(-\tau) \quad R_{y_1y_2}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h_1(\tau) * h_2^*(-\tau)$   
b)  $G_{y_1y_1}(f) = S_{xx}(f) |H(f)|^2 \quad G_{y_1y_2}(f) = G_{xx}(f) H_1(f) H_2^*(f)$   
c)  $G_{xx}(f) H_1(f) H_2^*(f) = 0$   
d)  $\int G_{xx}(f) H_1(f) H_2^*(f) df = 0$   
e) No és possible, ja que si  $v(t)$  i  $w(t)$  s'apliquen respectivament a  $h_1(t)$  i  $h_2(t)$ , les sortides  $v_0(t)$  i  $w_0(t)$  tenen una correlació creuada:  $R_{v_0w_0}(\tau) = R_{vw}(\tau) * h_1(\tau) * h_2^*(-\tau)$ , que és zero si les entrades estan incorrelades.

IV.15 b)  $\int X(f - \frac{\alpha}{2}) X^*(f + \frac{\alpha}{2}) \exp(-j2\pi\alpha t) d\alpha$

- IV.16 a)  $R_{xx}(\tau) = (1+\alpha^2) R_{xx}(\tau) + \alpha R_{xx}(\tau-t_0) + \alpha R_{xx}(\tau+t_0)$   
 b) Parell i com a màxim a l'origen perquè és parell. A  $\pm t_0$  té els dos màxims deguts a les contribucions de  $R_{xx}(\tau-t_0)$  i  $R_{xx}(\tau+t_0)$ .  
 c) Amb les suposicions  $R_x(0) \gg R_x(t_0) \gg R_x(2t_0)$  es pot aproximar:

$$A_1 = (1+\alpha^2) R_{xx}(0) , \quad A_2 = \alpha R_{xx}(0)$$

I aïllant s'obté:

$$\alpha = \frac{A_1}{2A_2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 4}$$

- d) Amb un circuit realimentat amb un retardador de  $t_0$  s i un amplificador de valor  $-\alpha$
- IV.17 a)  $H_1(f) = \frac{G_{xx}(f)H(f)}{G_{xx}(f)} = H(f) \quad H_2(f) = \frac{G_{xx}(f)|H(f)|^2}{G_{xx}(f)H^*(f)} = H(f)$   
 b)  $G_{yx}(f) = G_{xx}(f)H(f) + G_{ix}(f)$   
 $G_{xy}(f) = G_{xx}(f)H^*(f) + G_{xi}(f)$   
 $G_{yy}(f) = G_{xx}(f)|H(f)|^2 + G_{ii}(f) + G_{xi}(f)H(f) + G_{ix}(f)H^*(f)$   
 c) Elegiria  $H_1(f) = H(f) + \frac{G_{ix}(f)}{G_{xx}(f)}$  perquè si  $x(t)$  i  $i(t)$  estan incorrelades, el resultat és  $H(f)$  exactament

- IV.18 a)  $h(t) = kx(t_0-t)$   
 b)  $h(t) = \sqrt{T/3}x(t_0-t)$  i el màxim de la sortida estarà a  $t_0$ . Perquè sigui causal és necessari que  $T < t_0$   
 c)  $y(t) = R_{xx}(t-t_0)$   
 d) Màxim:  $E_x n(t)$  no influeix perquè està incorrelat  
 e) Màxim a  $t=t_0+4$ .

- IV.19 a)  $y_k(T) = R_{x_i x_k}(0)$   
 b)  $y_k(T) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ E_x & i = k \end{cases}$   
 c)  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_5(t)$   
 d)  $-0.5, 0.5, 0.5, 0.5$   
 e) Els valors sempre són menors que el que resulta d'aplicar el senyal al que el filtre està adaptat,  $E_x=4$ . Necessitem un detector per llindar.

- IV.20    a)  $R_{x1x1}(\tau) = \frac{1}{2}$                        $P_{x1} = 1/2$                        $S_{x1x1}(f) = (1/2)\delta(f)$   
           b)  $R_{x2x2}(\tau) = 1$                        $P_{x2} = 1$                        $S_{x2x2}(f) = \delta(f)$   
           c)  $R_{x3x3}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau$                $P_{x3} = \frac{A^2}{2}$                        $S_{x3x3}(f) = (A^2/4)[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$   
           d)  $R_{x4x4}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau$                $P_{x4} = \frac{A^2}{2}$                        $S_{x4x4}(f) = (A^2/4)[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$

- IV.21    a)  $R_{x1x1}(\tau) = |A_1|^2 \exp(j\omega_1 \tau)$                $R_{x1x2}(\tau) = \begin{cases} A_1 A_2^* \exp(j\omega_1 \tau) & \omega_1 = \omega_2 \\ 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases}$   
           b)  $R_{xx}(\tau) = |A_0|^2 + \frac{|A_1|^2}{2} \cos(\omega_1 \tau) + \frac{|A_2|^2}{2} \cos(\omega_2 \tau)$   
           c)  $R_{xx}(0) = |A_0|^2 + \frac{|A_1|^2}{2} + \frac{|A_2|^2}{2}$   
           d) La informació de fase

- IV.22    a)  $R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau)$   
           b)  $E_y = E_x$   
           c)  $R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \frac{1}{\tau} d\tau = 0$  Ja que la integral en un interval parell d'una funció imparell és zero  
           d)  $y(t) = \sum C_n \sin(n\omega_0 t)$

- IV.23    a)  $w(t)$  parell, perquè la correlació és parell i el resultat d'enfinestrar manté aquesta propietat.  
            $w(t)$  positiva, perquè  $W(0)$  sigui màxim i no hi hagi biaix en la transformada.  
           b)  $w(t)$  té les característiques d'una correlació i  $\hat{S}_{xx}(f)$  d'una densitat espectral  
           c)  $W(f) = |Y(f)|^2 = \frac{1}{4} \frac{\text{sinc}^2(\pi f T)}{(1-(fT)^2)^2},$   
              Primer zero:  $fT=2$   
              Amplada del lòbul principal mesurat entre zeros:  $4/T$   
              Zeros de lòbuls secundaris:  $fT=k \geq 2$   
           d) El més petit és  $T=2/\Delta f$

- IV.24    a)  $P_y = \frac{b_0^2}{2} H_{\max}^2 + \frac{b_1^2}{2} \frac{H_{\max}^2 (f_1 f_0)^2}{2(f_1^2 - f_0^2)^2 + (f_1 f_0)^2}$   
           b) No,  $\left| \frac{P_y}{P_x} \right|_{dB} = 10 \log \left[ \frac{\frac{b_0^2}{2} + \frac{b_1^2}{2}}{\frac{b_0^2}{2} + \frac{b_1^2}{4}} \right]$ , amb  $H_{\max} = 1$   
           c)  $P_y = \frac{b_0^2}{2} |\tilde{H}(1)|^2 + \frac{b_1^2}{2} |\tilde{H}(\frac{f_1}{f_0})|^2$

IV.25 a) Perquè és l'autocorrelació d'un senyal periòdic també periòdic.

b)  $R_b(m/T) = |X_b(m/T)|^2(1/T)$

c) Una possible solució és  $r_b(t) = (1/T)R_{xhvb}(t)$

d) 
$$r_b(\tau) = \left[ \frac{1}{6} \frac{|\tau|^3}{T_0^2} - \frac{|\tau|}{2} + \frac{T_0}{2} \right] \prod \left( \frac{\tau}{2T} \right)$$

$$R_x(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} r_b(\tau - nT_0)$$

IV.26 a)  $R_{xx}(\tau)$  té període 6.  $R_{yy}(\tau)$  té període 21

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2(m/2) e^{j2\pi m\tau/6}$$

$$R_{yy} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} |\operatorname{sinc}(m - \frac{1}{2}) - \operatorname{sinc}(m + \frac{1}{2})|^2 e^{j2\pi m\tau/21}$$

b)  $P_x = P_y = 0.5$

c) Els harmònics comuns estan a  $1/3$ , i per això aparentment el període és 3 s, però com que s'anulen els de  $x(t)$ , el resultat és que la correlació creuada és una constant.

d) La correlació creuada és una constant.

IV.27 a)  $E_x = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$

b)  $S_x(f) \approx \frac{\pi}{4\alpha} \left[ e^{-\frac{\pi^2 2(f-f_0)^2}{\alpha}} + e^{-\frac{\pi^2 2(f+f_0)^2}{\alpha}} \right]$

c)  $R_x(\tau) \approx \sqrt{\frac{\pi}{8\alpha}} e^{-\frac{\alpha\tau^2}{2}} \cos(\omega_0\tau)$

IV.28) a) En primer lloc es calcula el mòdul com el valor de l'amplada de l'onda A.

La fase es calcula com  $\phi = \operatorname{arc cos}(y(0)/A)$  i s'elimina l'ambigüïtat amb un altre valor de  $y(t)$

b) No. Apareix  $i(t)$  en la sortida

c)  $R_{yx}(\tau) = 0.5 |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \phi_H(f_0))$

d)  $R_{yx}(\tau) = 0.5 |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \phi_H(f_0)) + R_{ix}(\tau)$

e) Amb el mètode c) és exacte perquè  $R_{ix}(\tau)$  és zero

f)  $|H(f_0)| = 1, \phi_H(f_0) = 45^\circ$

IV.29 a) 1

b) 1

c) i

d) 
$$|\gamma_{xy}(f)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{S_{zz}(f)}{S_{xx}(f)|H(f)|^2}}$$

- IV.30 a)  $x(t) = 2j \sum_{m=1}^{\infty} (-j)^m \text{sinc}^2\left(\frac{m}{2}\right) \sin(2\pi m \frac{t}{T_0})$ , (per a  $m$  imparell)
- b)  $y(t) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \text{sinc}^2\left(\frac{m}{2}\right) \cos(2\pi m \frac{t}{T_0})$  (per a  $m$  imparell)
- c)  $R_x(\tau) = \sum_m |C_m^x|^2 e^{j2\pi m \frac{\tau}{T_0}}$ ,  $C_m^x = (-j)^m (\text{sinc}^2\left(\frac{m}{2}\right) - \text{sinc}(m))$   
 $R_y(\tau) = R_x(\tau)$
- d)  $S_x(f) = \sum_m |C_m^x|^2 \delta(f - \frac{m}{T_0})$ ,  $S_y(f) = S_x(f)$
- e)  $g(t) = -\text{sinc}^2\left(\frac{3}{2}\right) \sin(\pi 3 \cdot 10^3 t) + \text{sinc}^2\left(\frac{5}{2}\right) \sin(\pi 5 \cdot 10^3 t)$ ,  $f_0 = 500$  Hz
- f)  $S_g(f) = \frac{1}{4} \text{sinc}^4\left(\frac{3}{2}\right) \delta(f - 1.500) + \frac{1}{4} \text{sinc}^4\left(\frac{5}{2}\right) \delta(f + 1.500) + \frac{1}{4} \text{sinc}^4\left(\frac{5}{2}\right) \delta(f - 2.500) + \frac{1}{4} \text{sinc}^4\left(\frac{5}{2}\right) \delta(f + 2.500)$   
 $P_g = \frac{1}{2} \text{sinc}^4\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{sinc}^4\left(\frac{5}{2}\right)$

- IV.31 a)  $T > 1/2(\max(Bx, By))$ .
- b) Amb  $f_1 < f_2$   
 $\omega_1 = 0, f_2 > Bx + By$   
 $\omega_1 \neq 0, f_1 > Bx, f_2 > f_1 + Bx + By$   
 Si es tria  $f_1 > f_2$ ,  
 $\omega_2 = 0, f_1 > Bx + By$   
 $\omega_1 \neq 0, f_2 > By, f_2 > f_1 + Bx + By$
- c) Passa-baix d'amplada de banda igual que el senyal que es vol a la sortida

- IV.32 a)  $H(f) = \frac{S(f)}{S(f) + N(f)}$
- b) Si no hi ha soroll, el filtre és 1 a la banda de pas del senyal. Si hi ha soroll, el filtre atenuarà més les zones freqüencials més afectades. On no hi ha soroll, el filtre deixa passar el senyal sense pertorbar-lo.

- IV.33 a)  $\text{RSI} = 10 \log(2.5)$ ,
- b)  $P_z = P_x = 10$
- c) El senyal es transmet en més amplada de banda pels infinitis harmònics de  $p(t)$
- d)  $p^2(t) = 1$
- e)  $T > 1/2B$ , filtre d'amplada de banda  $B$
- f) No