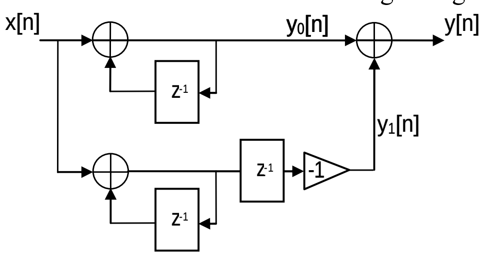
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA **DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS**	**Senyals i Sistemes II** Data d'examen: 28 de Novembre de 2008 Data notes provisionals: Període d'al.legacions: Data notes revisades:

Professors: J. Hernando, J.B. Mariño, E. Monte, A. Oliveras, P. Salembier.

Temps: 1 h 30 min
- Responeu a cada problema en fulls separats.
- El vostre nom ha de figurar en tots els fulls que utilitzeu, en format: COGNOMS, NOM.
- Justifiqueu tots els resultats. Els resultats sense justificació no seran valorats en la correcció.
- No podeu utilitzar llibres, apunts, taules, formularis, calculadores o telèfon mòbil.

Problema 1: **5 puntos**

Considere el sistema causal de la figura siguiente:



Se supone que el sistema está en reposo. Definimos dos sistemas S_0: $y_0[n]=S_0(x[n])$ y S_1: $y_1[n]=S_1(x[n])$. Responda las siguientes preguntas:

a) Calcular la EDF describiendo la relación entre $y_0[n]$ y $x[n]$
b) Calcular la EDF describiendo la relación entre $y_1[n]$ y $x[n]$
c) Calcular las funciones de transferencias de S_0 y S_1.; y dibujar los diagramas de polos y ceros.
d) Calcular las respuestas impulsionales de S_0 y S_1
e) Estudiar la estabilidad de S_0 y S_1

Consideramos ahora el sistema S: $y[n]=S(x[n])$

f) Calcular la función de transferencia del sistema S y su repuesta impulsional
g) Estudiar la estabilidad de S
h) Calcular, sin utilizar la Transformada z, $y_0[n]$, $y_1[n]$ e $y[n]$, si $x[n] = u[n]$
i) Calcular $y_0[n]$, $y_1[n]$ e $y[n]$, si $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

Problema 2: **5 puntos**

Un señal x[n] de energía finita paso bajo con ancho de banda $B_f = 0.45$ es interpolada por una relación N haciendo uso de un filtro interpolador causal y estable con respuesta impulsional h[n] para obtener una secuencia y[n]. Se pide:

a) La transformada de Fourier de la secuencia y[n] en función de la transformada de Fourier de x[n], la relación N y la respuesta frecuencial del filtro interpolador.
b) La densidad espectral de energía de la secuencia y[n] en función de la densidad espectral de energía de x[n], la relación N y la respuesta frecuencial del filtro interpolador.
c) Interpretar el resultado anterior como una operación de interpolación que permite obtener $r_y[m]$ a partir de $r_x[m]$. Identificar la relación de interpolación M y la respuesta impulsional $h_r[n]$ del filtro interpolador.
d) Si la secuencia x[n] se interpola por una relación N=3 y el filtro interpolador se diseña haciendo uso de la ventana de Kaiser, indicar la frecuencia de corte f_c del filtro paso bajo ideal a usar y la longitud L de la ventana. Para ello, haga uso del conocimiento de que la longitud L de la ventana viene dada por $L \approx 1.5 / \Delta f$, donde Δf es la anchura del lóbulo principal de la transformada de Fourier de la ventana.
e) Si la secuencia x[n] se interpola por una relación N=2 y se hace uso del filtro $h[n] = \{\underline{0.5}, 1, 0.5\}$ como interpolador, obtener la respuesta impulsional $h_r[n]$ del filtro interpolador de la correlación y su diagrama de ceros y polos.

Solución Problema 1:

a) $y_0[n] = y_0[n-1] + x[n]$

b) $y_1[n] = y_1[n-1] - x[n-1]$

c) $H_0(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$, Polo en z=1, Cero en z=0

$H_1(z) = \dfrac{-z^{-1}}{1-z^{-1}}$, Polo en z=1, Cero en infinito

d) $h_0[n] = u[n]$, $h_1[n] = -u[n-1]$

e) S_0 y S_1 son inestables

f) $H(z)=1$, $h[n]=\delta[n]$

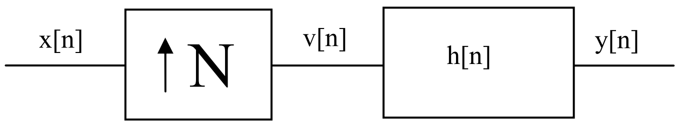
g) S es estable

h) $y_0[n] = \{\ldots, 0, \underline{1}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$
$y_1[n] = \{\ldots, \underline{0}, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, \ldots\}$
$y[n] = u[n]$

i) $y_0[n] = \delta[n]$
$y_1[n] = -\delta[n-1]$
$y[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

Solución Problema 2:

a) El esquema de interpolación se muestra en la figura siguiente



a partir del cual se puede escribir que

$$Y(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = X(e^{jN\omega})H(e^{j\omega}) \qquad (1)$$

b) Dado que x[n] e y[n] son secuencias de energía finita (el sistema es estable), a partir de (1) se puede escribir

$$S_y(e^{j\omega}) = \left|Y(e^{j\omega})\right|^2 = \left|X(e^{jN\omega})\right|^2 \left|H(e^{j\omega})\right|^2 = S_x(e^{jN\omega})\left|H(e^{j\omega})\right|^2 \qquad (2)$$

c) Por comparación de las expresiones (1) y (2) y considerando que la densidad espectral es la transformada de Fourier de la correlación, podemos concluir que la correlación $r_y[m]$ puede obtenerse a partir de la correlación $r_x[m]$ mediante una interpolación por una relación N mediante un filtro cuya respuesta impulsional $h_r[m]$ rea la correlación $r_h[m]$de la respuesta impulsional del filtro h[n].

d) El filtro interpolador ideal ha de tener una ganancia de N=3 y una frecuencia de corte $f_c = 1/(2N) = 1/6$. En cuanto a la longitud de la ventana, esta ha de ser tal que la anchura del lóbulo principal de su transformada de Fourier genera una banda de transición no mayor que la separación entre los alias de la transformada de Fourier de v[n]. En este caso, dado el ancho de banda Bf = 0.45 de x [n], la separación entre los alias en la transformada de x[n] es $\Delta_x f = (1 - 0.45) - 0.45 = 0.1$, lo que para v[n] se convierte en $\Delta_v f = 0.1/3$. En consecuencia $L \geq 1.5/\Delta_v f = 45$.

e) De acuerdo con la respuesta del apartado c), la respuesta impulsional del filtro interpolador de la correlación es $h_r[n] = r_h[n] = h[n]*h^*[-n]$. En este caso resulta $h_r[n] = \{\ldots, 0, 0.25, 1, \underline{1.5}, 1, 0.25, 0, \ldots\}$. En cuanto a su función de transferencia, puesto que h[n] es real, podemos escribir $H_r(z) = H(z)\,H(1/z)$, y en consecuencia, se puede decir que los ceros y polos de $H_r(z)$ son los ceros y polos de H(z) y sus inversos. Dado que $H(z) = 0.5\,(1+z^{-1})^2$ tiene dos ceros en $z = -1$ y dos polos en el origen, $H_r(z)$ presenta cuatro ceros en z=-1, dos polos en el origen y dos polos en el infinito.