COMUNICACIONES I

QT09
ETSETB-UPC

EJERCICIOS DE TEMA 4:

INTRODUCCIÓN A LAS MODULACIONES DIGITALES

Septiembre, 2009

Ejercicio 1.

Sea la modulación PAM binaria bipolar codificada a partir de bits equiprobables.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\, p(t - nT)$$

Con $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$, $a[n] = \begin{cases} 0 & b[n]=0 \\ \pm A & b[n]=1 \end{cases}$. Los símbolos $\pm A$ se codifican de forma alternada en tiempo.

a) Calcule la autocorrelación de la secuencia de símbolos $R_a[k]$

b) Calcule la autocorrelación y la densidad espectral de la señal $s(t)$

Si la señal se transmite a través de un canal ideal de ruido aditivo gaussiano y blanco de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ y el filtro receptor es el filtro adaptado a $p(t)$:

c) Obtenga las funciones de densidad de probabilidad condicionadas: $f_y\left(y \middle| a[k]=0\right)$; $f_y\left(y \middle| a[k]=\pm A\right)$

d) Calcule el umbral γ que minimiza la BER al ser aplicado según la siguiente ley de detección:

$$\begin{aligned} y(t_k) < -\gamma &\Rightarrow \hat{a}[k]=1 \\ -\gamma < y(t_k) < +\gamma &\Rightarrow \hat{a}[k]=0 \\ +\gamma < y(t_k) &\Rightarrow \hat{a}[k]=1 \end{aligned}$$

e) Calcule la BER mínima utilizando la expresión obtenida para el umbral γ.

Ejercicio 2.

La modulación "split-phase Manchester" es una modulación binaria polar ($a_m = \pm\frac{A}{2}; m=1,2$) y de pulso base $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) - \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right)\right)$.

a) Calcule la densidad espectral de esta modulación en función de las probabilidades de bit P_0, P_1 y de los parámetros que considere convenientes.

b) Calcule la energía media de bit E_b.

Ejercicio 3.

En un sistema de comunicación digital puede aparecer ruido impulsional cuya función de densidad de probabilidad se puede aproximar por

$$P(n) = \frac{1}{2\sigma} e^{\frac{-|n|}{\sigma}}$$

a) Demuestre que en un sistema binario polar con niveles A y -A, el umbral γ_{opt} que produce mínima probabilidad de error total, es el que cumple :

$$|\gamma - A| - |\gamma + A| = \sigma \ln(P_1 / P_0)$$

Para ello obtenga P_e (probabilidad de error total) y justifique todos los pasos que siga para llegar a la anterior expresión.

b) ¿Cuál es γ_{opt} si $P_1 = P_o$? ¿Cómo se desplaza este umbral si $P_1 > P_o$ y viceversa?
c) ¿Cuál es la condición que debe cumplir cualquier P(n) para que $\gamma_{opt} = 0$ si $P_1 = P_o$?
d) Demuestre que si 2A = -σ ln P_1 /P_o las funciones P_o p(y/'0') y P_1 p(y/'1') son iguales para valores de 'y' superiores a A.

NOTA : p(y/'0') es la función de densidad de probabilidad de la señal recibida condicionada a un '0' transmitido y p(y/'1') lo mismo para un '1' transmitido.

e) Dibuje aproximadamente P_o p(y/'0') y P_1 p(y/'1') para el caso anterior y demuestre gráficamente que γ_{opt} puede ser cualquier valor superior a A. Demuestre también que la probabilidad de error mínima es P_1.

Ejercicio 4.

Una fuente digital emite símbolos ternarios equiprobables (a_n=-A, 0, +A), cada Ts segundos. Admitiendo que el sistema de comunicación no presenta distorsión y que se introduce un ruido gausiano de media nula y varianza σ^2 se pide :

a. Hallar la probabilidad de error total.
b. Diseñar los niveles de detección para que la probabilidad de error por símbolo sea igual.
c. Comprobar que la probabilidad de error total obtenida con el criterio del anterior apartado no es mínima.
d. ¿Cuáles son los umbrales de detección óptimos que minimizan la probabilidad de error?

Ejercicio 5.

Se desea transmitir una secuencia de símbolos equiprobables e independientes binarios $a[k] = \pm\frac{A}{2}$ volts. por un canal cuyo ancho de banda sin distorsión es menor que $B_c < \frac{r_b}{2}$, siendo r_b la velocidad de transmisión en bits/seg. A fin de posibilitar la transmisión se propone elegir dos pulsos básicos f(t) y g(t), cuyas funciones de autocorrelación y correlación cruzada cumplen las siguientes propiedades ($T_b = \frac{1}{r_b}$):

$$R_f(2kT_b) = \delta[k] \qquad R_g(2kT_b) = \delta[k] \qquad R_{fg}(\tau) = -\alpha \operatorname{sinc}\left(\tfrac{r_b \tau}{2}\right); \quad 0 < \alpha < 1$$

El ancho de banda de f(t) es $B_f = B$ y el ancho de banda de g(t) es $B_g = B$. Se cumple además que $\frac{r_b}{4} < B < B_c < \frac{r_b}{2}$

La señal PAM transmitidas es: s(t) = $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a[2k]\, f(t-2kT_b) + a[2k+1]\, g(t-2kT_b))$

En recepción se diseñan los filtros adaptados a f(t) y a g(t) respectivamente según se indica en la figura 1. a fin de recuperar los símbolos $a[2k]$ en la rama superior y los símbolos $a[2k+1]$en la rama inferior.

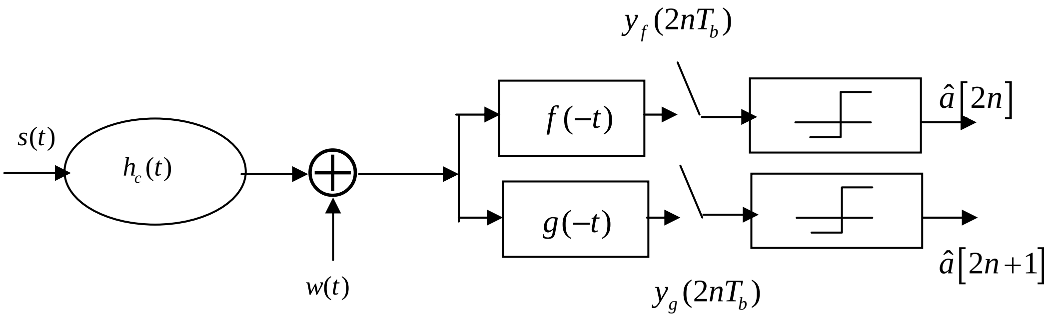


Figura 1 $S_w(f)=\frac{N_0}{2}$

a. Calcule la densidad espectral de la señal transmitida s(t) y compruebe que no va a sufrir distorsión a su paso por el canal.

b. Obtenga las expresiones de las muestras $y_f(2nT_b)$ e $y_g(2nT_b)$, separando en ellas señal deseada, ISI y término de ruido.

c. Calcule las funciones de densidad de probabilidad de la muestra $y_f(2nT_b)$ condicionada a que el símbolo $a[2n]=+\frac{A}{2}$, $f_{y_f}\left(y\middle|+\frac{A}{2}\right)$, y a que el símbolo $a[2n]=-\frac{A}{2}$, $f_{y_f}\left(y\middle|-\frac{A}{2}\right)$. Calcule las funciones de densidad de probabilidad de la muestra $y_g(2nT_b)$ condicionada a que el símbolo $a[2n+1]=+\frac{A}{2}$, $f_{y_g}\left(y\middle|+\frac{A}{2}\right)$, y a que el símbolo $a[2n+1]=-\frac{A}{2}$, $f_{y_g}\left(y\middle|-\frac{A}{2}\right)$. Considere para ello que el ruido w(t) es gaussiano y de media nula.

d. Obtenga la probabilidad de error o BER total del sistema en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, cuando el umbral de decisión es el óptimo.

Ejercicio 6.

En este ejercicio se van a comparar las modulaciones 2ASK y 2PSK entre sí. Considere en ambos casos símbolos equiprobables, canal ideal ($h_c(t)=\alpha\delta(t)$) y ruido aditivo gaussiano y blanco de densidad espectral $S_w(f)=\frac{N_0}{2}$.

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(a_i[n]\,p(t-nT)A_c\cos\left(2\pi f_c t+\varphi_c\right)\right)$$

Con $p(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$, $a_i[n]=\pm\frac{A}{2}$ para la modulación 2PSK, $a_i[n]=0,+A$ para la modulación 2ASK, $f_c=Nr=\frac{N}{T}$ $N>>1$.

a) Calcule la densidad espectral para cada uno de los dos tipos de modulación y dibújelas.
b) Proponga un esquema de receptor óptimo para mantener mínima probabilidad de error.
c) Calcule la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ siendo E_b la energía media transmitida por bit. Dibuje de forma aproximada ambas gráficas. Si $\frac{E_b}{N_0}$=10 dB y $\alpha=0.5$, calcule la probabilidad de error BER para cada una de las dos modulaciones.

Ejercicio 7.

Considere una modulación BPSK con una portadora piloto sumada para propósitos de sincronización:

$$s(t) = A_c \tfrac{\alpha}{\sqrt{T}} \operatorname{sen}\left(2\pi f_c t + \theta_c\right) + A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a\left[n\right] p(t - nT) \cos\left(2\pi f_c t + \theta_c\right)$$

Los símbolos son binarios y equiprobables: $a_m = \pm 1; m = 1, 2$ y el pulso cumple $R_p(kT) = \delta\left[k\right]$

Se transmite por un canal ideal ($h_c(t) = \delta(t)$) y ruido aditivo gaussiano y blanco de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$.

a) Calcule la densidad espectral y la energía media transmitida por bit de la señal s(t).
b) Diseñe el receptor óptimo (No es necesario que implemente el sincronismo de portadora)
c) Demuestre que la $BER = Q\left(\sqrt{\frac{2}{1+\alpha^2} \frac{E_b}{N_0}}\right)$

Ejercicio 8. Examen final P05

En este ejercicio se estudia la modulación digital paso-banda QPSK (o 4QAM) en presencia de canal ideal con ruido aditivo blanco Gaussiano. Dicha modulación $x(t)$, de frecuencia portadora f_o, se define a partir de su equivalente paso-bajo del siguiente modo:

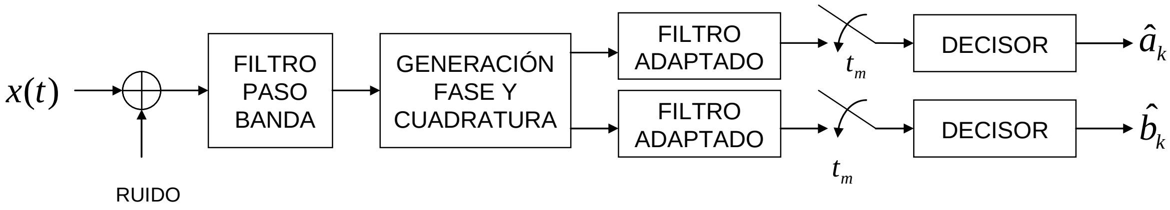
$$b_x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k p(t - kT)$$

donde $c_k = a_k + jb_k$ y $a_k \in \{+1, -1\}$, $b_k \in \{+1, -1\}$. El pulso $p(t)$ es un pulso real de ancho de banda limitado a B_p con energía unidad $E_p = 1$. Los símbolos a_k y b_k corresponden a las secuencias de bits pares e impares, respectivamente, de una secuencia binaria emitida por una fuente. Los bits son equiprobables e independientes.

a) Escriba la expresión de $x(t)$ en función de a_k y b_k .

b) Si dispone de un ancho de banda de 100kHz, ¿cuál es el valor de T y el máximo flujo de información (bits/segundo) que se puede transmitir sin ISI? ¿Qué pulso $p(t)$ utilizaría para transmitir el máximo flujo de información sin ISI?

c) El esquema del receptor óptimo tiene el siguiente diagrama de bloques:



Describa cada uno de los bloques del diagrama anterior.

d) Determine el valor de *A* en función de la energía media por bit E_b. Halle la BER (o probabilidad de error de bit) en cada rama en función de la Eb/No.

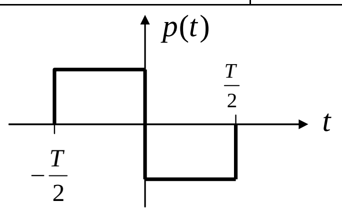
e) Suponga que la señal $x(t)$ presenta un error de fase de portadora de $\theta_e = \pi/8$, lo que provoca una degradación de la BER en el receptor. Escriba la señal a la entrada del decisor asociado a la componente en fase, y calcule la BER exacta. Evalúe aproximadamente la pérdida equivalente de Eb/No causada por el error de fase.

Ejercicio 9. Examen final P06

Mediante el futuro sistema Galileo será posible determinar la posición de señales emitidas por balizas en situaciones de emergencia. Estas señales son recibidas por varios satélites al alcance, los cuales las reenvían hacia la Tierra para ser procesadas, tras lo cual se activan los procedimientos oportunos de rescate. En este problema se analiza la detección y demodulación de una versión aproximada de la estructura de esta señal. La señal emitida por la baliza se denomina *Search & Rescue* y consiste básicamente en un tono puro seguido de una señal digital binaria $x_d(t)$ que aparece al cabo de t_o segundos:

$$s(t) = A\left[\left(1-\alpha u(t-t_o)\right)\cos(2\pi f_0 t) - \frac{\sqrt{3}}{2}u(t-t_o)x_d(t-t_o)\sin(2\pi f_0 t)\right].$$

La utilidad del tono es detectar la presencia de la señal, así como estimar el error de fase y de frecuencia. En la expresión anterior, $u(t)$ es la función escalón unitaria. Nótese que al principio (es decir, para $0 \le t \le t_0$) la amplitud del tono es A, mientras que para $t > t_0$, dicha amplitud se reduce a $A(1-\alpha)$ (con $0 < \alpha < 1$), con el objetivo de mantener constante la potencia de transmisión. Por otro lado, $x_d(t)$ es una señal PAM binaria:

$x_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)p(t-nT)$	donde $a(n) = \{-1,+1\}$ y $p(t)$ es un pulso de Manchester:	
	$p(t) = \begin{cases} 1 & -T/2 \le t \le 0 \\ -1 & 0 \le t \le T/2 \\ 0 & \lvert t\rvert > T/2 \end{cases}$	$P(f) = 2j\frac{\sin^2(\pi fT/2)}{\pi fT/2}.$

Finalmente, la señal recibida por el satélite es:

$$y_R(t) = s(t) + w(t)$$

donde $w(t)$ es ruido aditivo, Gaussiano y blanco (AWGN) de densidad espectral $S_w(f) = N_0/2$.

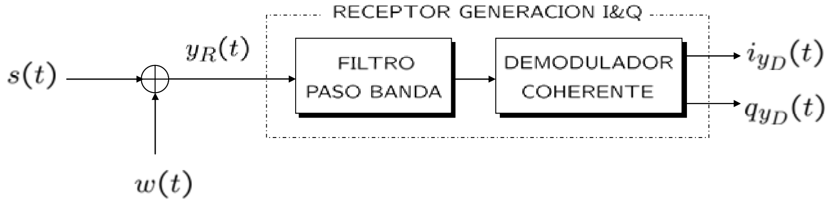


Figura 1.1 Diagrama de bloques del receptor de generación de componentes I&Q.

(a) <u>Estudio del proceso de generación de las componentes I&Q</u>.

(a1) Indique el equivalente paso bajo de la señal $s(t)$, es decir, $b_s(t)$.

(a2) Halle la envolvente de $s(t)$, es decir, $e_s(t)$, para el caso de $0 \le t \le t_0$ y para el caso de $t > t_0$. Halle el valor de α con $0 < \alpha < 1$ que hace que la envolvente de la señal sea la misma para todo $t \ge 0$.

(a3) Indique las componentes I y Q, es decir, $i_{y_D}(t)$ y $q_{y_D}(t)$, que se obtienen a la salida del demodulador coherente en el caso de que el oscilador local presente un error de fase θ.

(b) <u>Estudio del proceso de detección</u> de la señal $s(t)$ para $\mathbf{0 \le t \le t_0}$ y en ausencia de error de fase ($\theta = 0$).

(b1) Indique la expresión temporal de las componentes I y Q, es decir, $i_{y_D}(t)$ y $q_{y_D}(t)$. A continuación, considere las siguientes variables aleatorias:

$$V_i = \int_0^{t_0} i_{y_D}(t)dt \qquad V_q = \int_0^{t_0} q_{y_D}(t)dt .$$

Halle su media y varianza para los siguientes casos:

- **H_0** : la señal $x(t)$ no está presente y por lo tanto $y_R(t) = w(t)$.
- **H_1** : la señal $x(t)$ sí está presente, y por lo tanto $y_R(t) = x(t) + w(t)$.

Para el caso H_1, halle la SNR de V_i, es decir, la relación entre su media al cuadrado y su varianza.

(b2) Suponga que el criterio para decidir si $x(t)$ está presente o no, es el siguiente: $V_i > \gamma$.
Halle la probabilidad de superar el umbral γ en caso de que $x(t)$ esté ausente, es decir, halle $P(V_i > \gamma \mid x(t) = 0)$.

(c) <u>Estudio de la probabilidad de error de bit</u> para $\mathbf{t > t_0}$. Para ello, haga uso del diagrama de bloques de la figura 1.2. Suponga que las muestras a la salida del filtro adaptado se toman en los instantes óptimos de muestreo y que el detector de símbolo utiliza los umbrales óptimos.

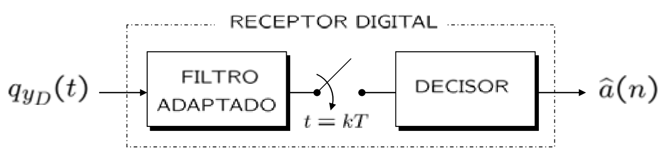


Figura 1.2 Diagrama de bloques del receptor de digital.

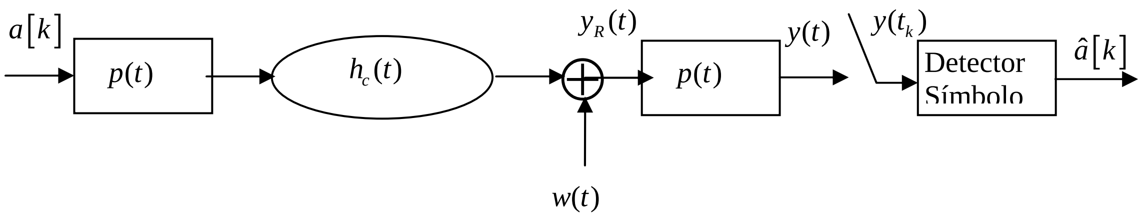
(c1) Suponga que no hay error de fase (es decir, $\theta = 0$). Halle la probabilidad de error de bit en función de la E_b / N_0.

(c2) Suponga que sí hay error de fase (es decir, $\theta \neq 0$). Analice el efecto que tiene este error en la señal a la salida del filtro adaptado. Halle la probabilidad de error de bit exacta en función de la E_b / N_0. ¿Hubiera habido alguna diferencia si se hubiera usado un pulso rectangular en lugar de un pulso de Manchester en lo que se refiere a la probabilidad de error? Razone la respuesta.

(c3) A partir de los resultados del apartado anterior, si el error de fase es de 60 grados, ¿en qué factor debería aumentarse la potencia de transmisión para mantener la probabilidad de error?

Ejercicio 10. Examen final T06

Se considera el siguiente esquema de comunicaciones digitales banda base:



- $a[k]$ corresponde a una codificación binaria polar de símbolos equiprobables y estadísticamente independientes, con a_m ={-A, +A}
- $h_c(t) = \alpha_1 \delta(t - t_1) + \alpha_2 \delta(t - t_2)$
- $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{sinc}\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right)$
- w(t) es un ruido blanco, gausiano, estacionario, de media 0, y con $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$

(a) Sabiendo que la autocorrelación de una modulación PAM

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\, p(t - nT)$$

se puede expresar como

$$R_s(t+\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t + \tau - (n+k)T)\, p(t - nT),$$

calculad la densidad espectral de potencia de la señal a la salida del conformador de pulso p(t) en transmisión.

(b) Dad la expresión de la señal a la salida del canal y la de su densidad espectral de potencia.

(c) Dad la expresión de la señal a la salida del filtro receptor p(t) y la de su densidad espectral de potencia.

(d) Considerando α_1 □ α_2 dad los instantes óptimos de muestreo t_k.. Dad la expresión de la señal $y(t_k)$ e indicad los términos de señal útil, de interferencia inter-símbolos y de ruido.

(e) Particularizad el resultado anterior para t_2-t_1=2T. Dad en este caso la función de densidad de probabilidad de $y(t_k)$ condicionada al símbolo enviado.

(f) Utilizando el umbral $\gamma = 0$ para el detector de símbolo, calculad la BER de este sistema.

Ejercicio 11. Examen final P07

En este problema se analiza la BER de una modulación BPSK diferencial.

En esta codificación, el codificador de símbolo proporciona $a[k] \in \{0,1\}$ en función de los bits de entrada, $b[k] \in \{0,1\}$, según la siguiente regla de codificación:

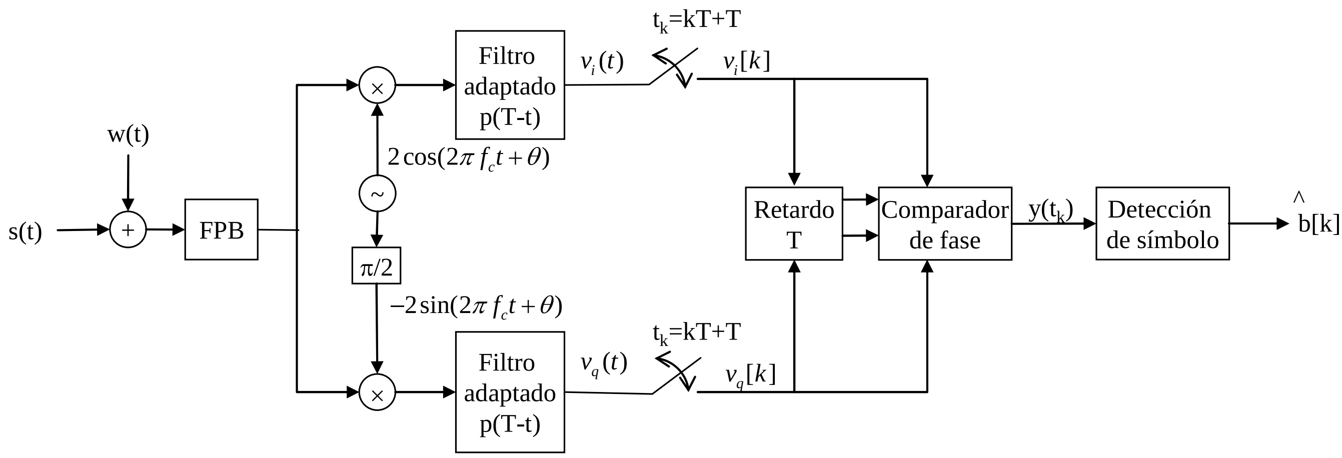
$$a[k] = \begin{cases} a[k-1] & si\ b[k]=0 \\ \neq a[k-1] & si\ b[k]=1 \end{cases} \quad ; a[k] \in \{0,1\} \quad y \ \ con \quad a[0]=1 .$$

La información sobre el bit b[k] reside en la diferencia de los símbolos $a[k]$ y $a[k-1]$ de forma que si $a[k]=a[k-1]$ entonces b[k]=0 y si, por el contrario, si $a[k] \neq a[k-1]$ entonces b[k]=1. La señal BPSK diferencial resultante puede expresarse de la siguiente forma:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_c \cdot p(t-nT) \cdot \cos(2\pi f_c t + a[n] \cdot \pi)$$

donde el pulso conformador es $p(t) = \dfrac{1}{\sqrt{T}} \prod\left(\dfrac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$, siendo T el periodo de símbolo y fc>>1/T.

Esta señal se transmite por un canal ideal con un ruido aditivo, estacionario y gaussiano, de media nula e incorrelado con la señal transmitida y con una densidad espectral de potencia igual a $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$. En la siguiente figura se representa el receptor donde FPB es un filtro paso banda ideal, con un ancho de banda $BW \approx 1/T$ de forma que deja pasar prácticamente intacta la señal útil recibida, $s(t)$, seguido de un demodulador no coherente con un desfase θ desconocido con respecto a la portadora de la señal recibida.



a) Encontrar la expresión de $v_i(t)+jv_q(t)$, donde $v_i(t)$ y $v_q(t)$ son las señales a la salida de los dos filtros adaptados[1]. Identifique la contribución de señal útil y la de ruido. A partir de ahora la componente de ruido a la salida del filtro adaptado de la rama superior se denota por $i_r(t)$ y la de la rama inferior por $q_r(t)$.

b) Comente qué tipo de procesos son las señales de ruido $i_r(t)$ y $q_r(t)$. Halle y represente la densidad espectral de potencia de dichas señales de ruido.

c) Obtenga $v_i[k]+jv_q[k]$, donde $v_i[k]$ y $v_q[k]$ son las señales a la salida de los muestreadores en el instante $t_k = kT+T$.

La demodulación de BPSK diferencial se realiza comparando la fase del símbolo actual con la del símbolo anterior de forma que a la salida del comparador de fase en el instante t_k se obtiene aproximadamente

$$y = A_c^2 \cdot \cos\big((a[k]-a[k-1])\pi\big) + A_c \cdot i_r(t_k) + A_c \cdot i_r(t_{k-1}).$$

Suponiendo que el detector de símbolo trabaja con el umbral $\gamma = 0$, conteste a las siguientes preguntas para hallar la probabilidad de error de dicha modulación.

d) Definiendo la variable aleatoria $n_D = A_c \cdot i_r(t_k) + A_c \cdot i_r(t_{k-1})$, halle la media y varianza de n_D.

e) Dibuje la función densidad de probabilidad de "y" condicionada a que $a[k] = a[k-1]$ y la función densidad de probabilidad de "y" condicionada a que $a[k] \neq a[k-1]$.

f) Halle la probabilidad de error y exprésela en función de Eb/No.

---

[1] $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$ $\quad\quad$ $\cos a \cdot sen b = \frac{1}{2} sen(a+b) - \frac{1}{2} sen(a-b)$

ÁREA DE LA GAUSSIANA

Sea $0 \le x < +\infty$

Se define:

$$Q(x) = \int_{x}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$$

Observe que: $Q(0) = \frac{1}{2}$

A partir de la definición es fácilmente comprobable que para todo $x > 0$:

$$\int_{-x}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = 1 - Q(x)$$
$$\int_{-\infty}^{-x} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = Q(x)$$
$$\int_{-\infty}^{x} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = 1 - Q(x)$$

Relaciones con las funciones erf y erfc.

Sea $0 \le x < +\infty$

Se define la función de error:

$$\mathrm{erf}\,(x) = \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

y la función de error complementario:

$$\mathrm{erfc}(x) = \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = 1 - \mathrm{erf}\,(x)$$

Mediante adecuados cambios de variable se puede comprobar que:

$$\mathrm{erfc}(x) = 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}x\right)$$
$$\mathrm{Q}(x) = \tfrac{1}{2}\mathrm{erfc}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,x)$$

La siguiente figura muestra los valores de Q(x) para $0 \le x \le +5$