 <div data-bbox="470 197 869 257"> Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona <small>UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA</small> </div>	ComII. 11 de Enero de 2010 <i>Fecha Notas Provisionales: 22 Enero 2010</i> <i>Fecha Límite Alegaciones : 25 Enero 2010</i> <i>Fecha Notas Definitivas: 27 Enero 2010</i>
<p align="center">Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions</p> <p>Profesores: M. Cabrera, J. Fernández Rubio, J. Riba</p> <p><i>Informaciones adicionales:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Duración de la prueba: 3h - Entregar en tres partes separadas. - Los tres ejercicios tienen igual puntuación. - Se prohíbe el uso de teléfonos móviles. - Tener visible un documento de identidad con fotografía. - Presentación de alegaciones a través de la intranet de la ETSETB. - Indicar todos los razonamientos y las partes relevantes de los desarrollos. Tenga en cuenta que la calificación no se basa únicamente en la respuesta final sino en gran parte el modo de razonar y en el nivel de comprensión del problema que se derive a partir de lo escrito. 	

Ejercicio 1

Se desea transmitir una señal cuaternaria de símbolos independientes a través de un canal AWGN ideal. Las expresiones de las formas de onda son:

$$s_1(t) = A_c p(t) \cos(2\pi f_c t) = -s_3(t)$$

$$s_2(t) = -A_c p(t) \sin(2\pi f_c t) = -s_4(t)$$

La formas del pulso $p(t)$ y su transformada de Fourier vienen dadas por:

$$p(t) = \sqrt{r} \frac{\cos 2\pi r t}{1 - (4rt)^2} \quad P(f) = \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\pi f}{2r} \Pi\left(\frac{f}{2r}\right)$$

$$f_c / r = L \gg 1; L \text{ entero}$$

- Determine y dibuje los vectores del espacio de señal en función de la energía promedio por bit.
- Utilizando el criterio MAP, determine y dibuje las regiones de decisión en los casos siguientes:

- $\Pr\{\mathbf{s}_i\} = \frac{1}{4}; i = 1, 2, 3, 4$
- $\Pr\{\mathbf{s}_1\} = \Pr\{\mathbf{s}_3\} = 0.3; \Pr\{\mathbf{s}_2\} = \Pr\{\mathbf{s}_4\} = 0.2$
- $\Pr\{\mathbf{s}_1\} = \Pr\{\mathbf{s}_3\} = 0.3; \Pr\{\mathbf{s}_2\} = 0.3; \Pr\{\mathbf{s}_4\} = 0.1$

- Determine y dibuje la densidad espectral de la señal digital en los tres casos del apartado b)

Calcule, en cada caso, los porcentajes de la potencia o de la energía continua y de la potencia o de la energía de las rayas espectrales.

¿Cómo modificaría la constelación, en su caso, para que no haya rayas espectrales. Dibuje el nuevo espacio de señal

Utilice la expresión:

$$S_s(f) = r \Phi^H(f) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}_s[m] e^{-j2\pi m T f} \Phi(f) + r^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \|\Phi^H(mr) \mathbf{\mu}_s\|^2 \delta(f - mr)$$

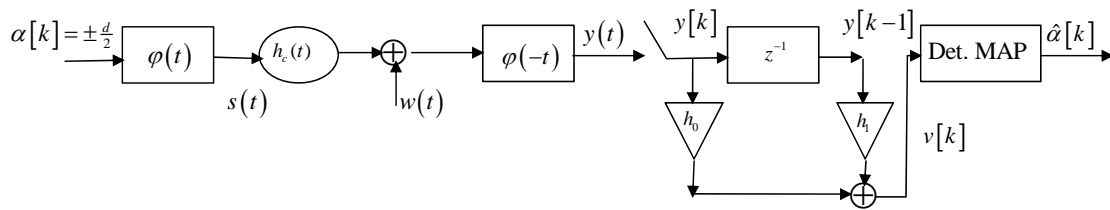
Siendo $\Phi(f)$ el vector de transformadas de Fourier del vector de funciones base. $\mathbf{C}_s[m] = \mathbf{R}_s[m] - \mathbf{\mu}_s \mathbf{\mu}_s^T$; $\mathbf{R}_s[m] = E\{\mathbf{s}[m+n] \mathbf{s}^T[n]\}$; $\mathbf{\mu}_s = E\{\mathbf{s}[n]\}$

Ejercicio 2

Sea la modulación binaria de símbolos estadísticamente independientes entre sí y equiprobables dada en la siguiente fórmula. La autocorrelación de la función generadora del espacio de señal cumple las propiedades dadas en la fórmula.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \varphi(t - nT); \quad \alpha[n] = \pm \frac{d}{2}; \quad R_{\varphi}(nT) = \delta[n]$$

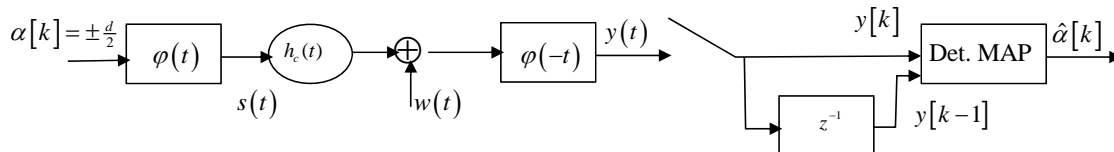
La señal se transmite por un canal AWGN de ruido $w(t)$ blanco gaussiano de media nula, densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ y respuesta impulsional igual a: $h_c(t) = \delta(t) - 0.5\delta(t - T)$. En la recepción se utiliza un pulso adaptado a la función $\varphi(t)$ y un ecualizador FIR forzador de ceros de dos coeficientes según se muestra en la figura.



Se pide:

- Halle los dos coeficientes h_0, h_1 .
- Si se realiza la detección de los símbolos $\alpha[k]$ a partir de la variable $v[k]$ y se aplica el criterio MAP, dibuje las dos zonas de decisión así como el espacio de señal recibida en ausencia de ruido. Sobre la figura anterior identifique y dé el valor de la distancia más cercana al umbral de un punto de señal recibida en ausencia de ruido.

Como alternativa a la ecualización se propone realizar la detección del símbolo $\alpha[k]$ a partir del vector formado por una secuencia de dos muestras: $\mathbf{y}[k] = \begin{pmatrix} y[k] \\ y[k-1] \end{pmatrix}$. Por tanto, a partir de este punto se considera un espacio de señal de dimensión 2 para realizar la detección. El nuevo esquema se muestra en la siguiente figura:



Se pide

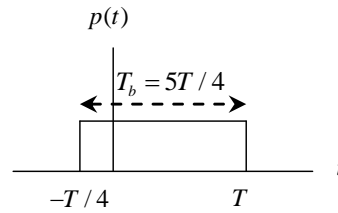
- Halle las dos funciones de densidad de probabilidad del vector $\mathbf{y}[k]$ condicionadas:
 $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \alpha[k] = +\frac{d}{2}); f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \alpha[k] = -\frac{d}{2});$
- Dibuje el espacio de señal recibida en ausencia de ruido en función de las dos coordenadas $(y[k], y[k-1])$. Sobre la figura anterior, dibuje la frontera entre las dos zonas de decisión aplicando un criterio de distancia euclídea mínima. Identifique y dé el valor de la distancia más cercana a la frontera de un punto de señal recibida en ausencia de ruido. ¿Puede afirmar a partir del conocimiento de la menor distancia a la frontera cual de los dos esquemas producirá una BER menor?

Ejercicio 3

Considere una modulación binaria cuyos símbolos equiprobables son:

$$s_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t) p(t) \quad s_2(t) = A \cos(2\pi f_2 t) p(t) \quad f_1 = N/T \quad f_2 = (N+1)/T$$

donde $N \gg 1$ es un entero múltiplo de 8 y $p(t)$ es un pulso rectangular de duración $T_b = 5T/4$:



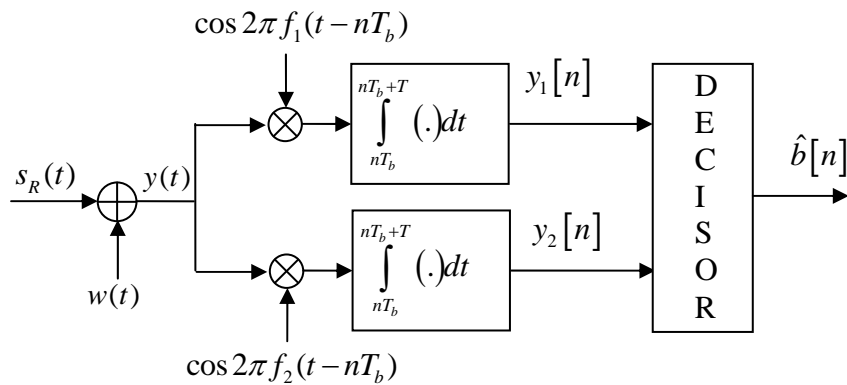
Como puede observar, el formato propuesto introduce un prefijo cíclico en $-(T/4) \leq t < 0$.

La modulación digital resultante es:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{m[k]}(t - kT_b)$$

donde $m=0$ ó $m=1$ según sea el bit transmitido en el instante k . La señal recibida es $y(t) = s(t) * h(t) + w(t) = s_R(t) + w(t)$ donde $h(t)$ es el canal de transmisión y $w(t)$ ruido gaussiano blanco de densidad espectral $N_0/2$ y media nula.

Considere el receptor de la figura:



Centrándonos en el intervalo para $n=0$, observe que los correladores anteriores consideran únicamente el intervalo $0 \leq t \leq T$ e ignoran el prefijo cíclico presente en $-(T/4) \leq t < 0$.

Suponga un canal de transmisión dispersivo tal que:

$$h(t) = \delta(t) + \alpha \delta(t - T/8)$$

a) Analice los símbolos recibidos, es decir, $\tilde{s}_1(t) = s_1(t) * h(t)$ y $\tilde{s}_2(t) = s_2(t) * h(t)$ dentro del intervalo de observación $0 \leq t \leq T$ y demuestre que siguen siendo cosenoides de amplitud y fase modificadas por el canal. Calcule las salidas $y_1 = y_1[0]$; $y_2 = y_2[0]$ (en el intervalo $n=0$) para los casos en que el símbolo transmitido en el intervalo $k=0$ sea bien $s_1(t)$ ó bien $s_2(t)$. Relacione las salidas con la respuesta del canal en ambas frecuencias: $H(f_1)$ y $H(f_2)$.

Explique la razón por la cual este canal no genera ISI, es decir, los símbolos $k = -1, 1$ no interfieren con el símbolo $k=0$. Ayúdese con el dibujo de $p(t - kT)$; $k = -1, 0, 1$ resaltando claramente los prefijos cíclicos.

b) Considerando canal ideal, $h(t) = \delta(t)$, dibuje la constelación de señal y determine las regiones de decisión para detección ML. Halle la probabilidad de error de bit (BER) resultante en función de la E_b / N_0 . Discuta el impacto que tiene el hecho de ignorar el prefijo cíclico en la integración.

c) Con canal no ideal, evalúe la BER manteniendo las mismas regiones anteriores.

d) Por último, modifique las regiones de decisión según el criterio ML a partir de la constelación obtenida en el caso de canal no ideal. Calcule la nueva BER asociada a las regiones de decisión óptimas. Observando la influencia de α , discuta la mejora que ofrece el hecho de conocer el canal.

Fórmulas trigonométricas

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\cos(A-B) + \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\sin(A-B) + \frac{1}{2}\sin(A+B)$$

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$$

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$

Siendo $\Phi(f)$ el vector de transformadas de Fourier del vector de funciones base. $\mathbf{C}_s[m] = R_s[m] - \mathbf{\mu}_s \mathbf{\mu}_s^T$; $R_s[m] = E\{\mathbf{s}[m+n] \mathbf{s}^T[n]\}$; $\mathbf{\mu}_s = E\{\mathbf{s}[n]\}$

Solución:

a) Ortogonalidad y energía de las formas de onda.

Puesto que serán necesarias las transformadas de Fourier, se pueden calcular al principio.

Transformadas de Fourier:

$$S_1(f) = A_c P(f) * \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] = \frac{A_c}{2} [P(f - f_c) + P(f + f_c)]$$

$$S_2(f) = A_c P(f) * \frac{1}{2j} [\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)] = \frac{A_c}{2j} [P(f - f_c) - P(f + f_c)]$$

Energías y energía cruzada:

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) S_1^*(f) df = \frac{A_c^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [P(f - f_c)^2 + P(f + f_c)^2] df = \frac{A_c^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = E_3$$

$$E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |S_2(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(f) S_2^*(f) df = \frac{A_c^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [P(f - f_c)^2 + P(f + f_c)^2] df = \frac{A_c^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = E_4$$

$$E_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) S_2^*(f) df = \frac{A_c^2}{4j} \int_{-\infty}^{\infty} [P(f - f_c)^2 - P(f + f_c)^2] df = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 \frac{\pi f}{2r} \Pi\left(\frac{f}{2r}\right) df = \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \left[1 + \cos \frac{\pi f}{r}\right] df = 1 \Rightarrow E_i = \frac{A_c^2}{2}; i = 1, 2, 3, 4; E_s = 2E_b = \frac{A_c^2}{2}$$

Funciones base:

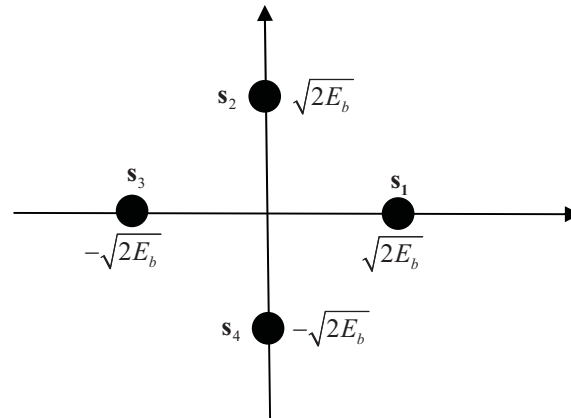
$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{A_c} s_1(t) = \sqrt{2} p(t) \cos 2\pi f_c t; \varphi_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{A_c} s_2(t) = -\sqrt{2} p(t) \sin 2\pi f_c t$$

$$\phi_1(f) = \frac{\sqrt{2}}{2} [P(f - f_c) + P(f + f_c)]; |\phi_1(f)|^2 = \frac{1}{2} [P(f - f_c)^2 + P(f + f_c)^2]$$

$$\phi_2(f) = -\frac{\sqrt{2}}{2j} [P(f - f_c) - P(f + f_c)]; |\phi_2(f)|^2 = \frac{1}{2} [P(f - f_c)^2 + P(f + f_c)^2] = |\phi_1(f)|^2$$

Espacio de señal:

$$s_1(t) = \frac{A_c}{\sqrt{2}} \varphi_1(t) = \sqrt{2E_b} \varphi_1(t) = -s_3(t); s_2(t) = \frac{A_c}{\sqrt{2}} \varphi_2(t) = \sqrt{2E_b} \varphi_2(t) = -s_4(t)$$



b) Contornos de decisión:

$$\mathbf{y}^T(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_l) = \frac{1}{2}(E_i - E_l) + \frac{N_0}{2} \ln \frac{P_l}{P_i}; P_l = \Pr\{\mathbf{s}_l\};$$

$$y_1(s_{i1} - s_{l1}) + y_2(s_{i2} - s_{l2}) = \frac{N_0}{2} \ln \frac{P_l}{P_i}$$

$$i=1, l=2 \Rightarrow y_1 - y_2 = \frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln \frac{P_2}{P_1}; i=1, l=3 \Rightarrow y_1 = \frac{N_0}{4\sqrt{2E_b}} \ln \frac{P_3}{P_1};$$

$$i=1, l=4 \Rightarrow y_1 + y_2 = \frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln \frac{P_4}{P_1}; i=2, l=3 \Rightarrow y_1 + y_2 = \frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln \frac{P_3}{P_2}$$

$$i=2, l=4 \Rightarrow y_2 = \frac{N_0}{4\sqrt{2E_b}} \ln \frac{P_4}{P_2}; i=3, l=4 \Rightarrow -y_1 + y_2 = \frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln \frac{P_4}{P_3}$$

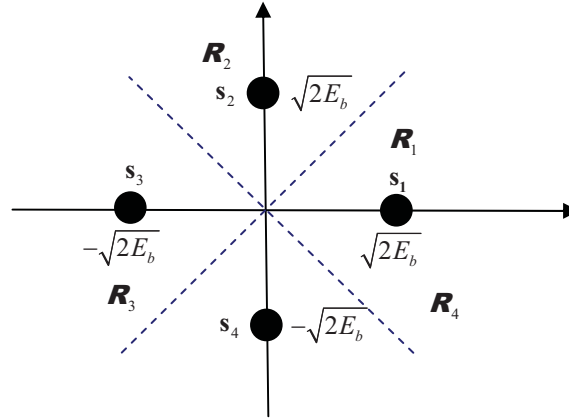
Son rectas perpendiculares al vector que une $\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_l$

$$1) \Pr\{\mathbf{s}_i\} = \frac{1}{4}; i=1, 2, 3, 4$$

$$i=1, l=2 \Rightarrow y_1 - y_2 = 0; i=1, l=3 \Rightarrow y_1 = 0;$$

$$i=1, l=4 \Rightarrow y_1 + y_2 = 0; i=2, l=3 \Rightarrow y_1 + y_2 = 0$$

$$i=2, l=4 \Rightarrow y_2 = 0; i=3, l=4 \Rightarrow -y_1 + y_2 = 0$$

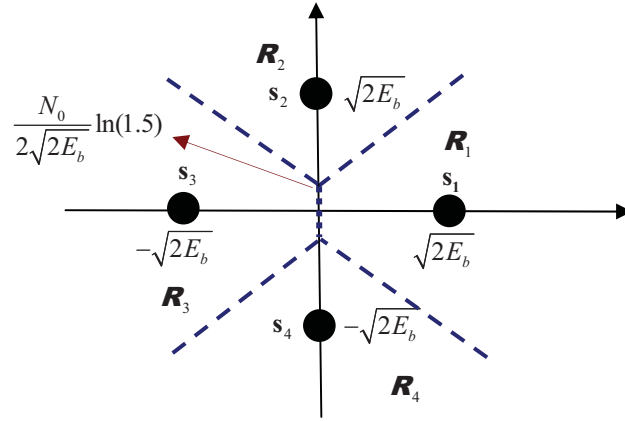


$$2) \Pr\{\mathbf{s}_1\} = \Pr\{\mathbf{s}_3\} = 0.3; \Pr\{\mathbf{s}_2\} = \Pr\{\mathbf{s}_4\} = 0.2$$

$$i=1, l=2 \Rightarrow y_1 - y_2 = -\frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln(1.5); i=1, l=3 \Rightarrow y_1 = 0;$$

$$i=1, l=4 \Rightarrow y_1 + y_2 = -\frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln(1.5); i=2, l=3 \Rightarrow y_1 + y_2 = \frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln(1.5)$$

$$i=2, l=4 \Rightarrow y_2 = 0; i=3, l=4 \Rightarrow -y_1 + y_2 = -\frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln(1.5)$$

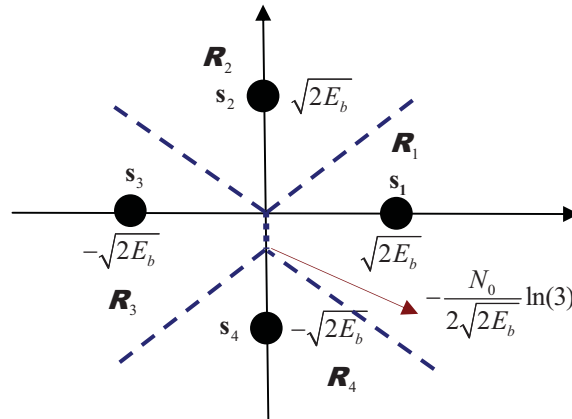


$$3) \Pr\{s_1\} = \Pr\{s_3\} = 0.3; \Pr\{s_2\} = 0.3; \Pr\{s_4\} = 0.1$$

$$i=1, l=2 \Rightarrow y_1 - y_2 = 0; i=1, l=3 \Rightarrow y_1 = 0;$$

$$i=1, l=4 \Rightarrow y_1 + y_2 = -\frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln 3; i=2, l=3 \Rightarrow y_1 + y_2 = 0$$

$$i=2, l=4 \Rightarrow y_2 = -\frac{N_0}{4\sqrt{2E_b}} \ln 3; i=3, l=4 \Rightarrow -y_1 + y_2 = -\frac{N_0}{2\sqrt{2E_b}} \ln 3$$



c) Matriz de correlación, matriz de covarianza y vector valor medio

$$\mathbf{R}_s[m] = E\{\mathbf{s}[m+n]\mathbf{s}^T[n]\} = \begin{cases} \mathbf{R}_s[0]; m=0 \\ E\{\mathbf{s}[m+n]\}E\{\mathbf{s}^T[n]\} = \boldsymbol{\mu}_s\boldsymbol{\mu}_s^T; m \neq 0 \end{cases}; \mathbf{R}_s[0] = E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^T[n]\} = \sum_{i=1}^4 P_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T$$

$$\mathbf{R}_s[0] = P_1 \begin{bmatrix} 2E_b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + P_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2E_b \end{bmatrix} + P_3 \begin{bmatrix} 2E_b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + P_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2E_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 + P_3 & 0 \\ 0 & P_2 + P_4 \end{bmatrix} 2E_b$$

$$\boldsymbol{\mu}_s = E\{\mathbf{s}[n]\} = \sum_{i=1}^4 P_i \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} P_1 - P_3 \\ P_2 - P_4 \end{bmatrix} \sqrt{2E_b}; \boldsymbol{\mu}_s \boldsymbol{\mu}_s^T = \begin{bmatrix} (P_1 - P_3)^2 & (P_1 - P_3)(P_2 - P_4) \\ (P_1 - P_3)(P_2 - P_4) & (P_2 - P_4)^2 \end{bmatrix} 2E_b$$

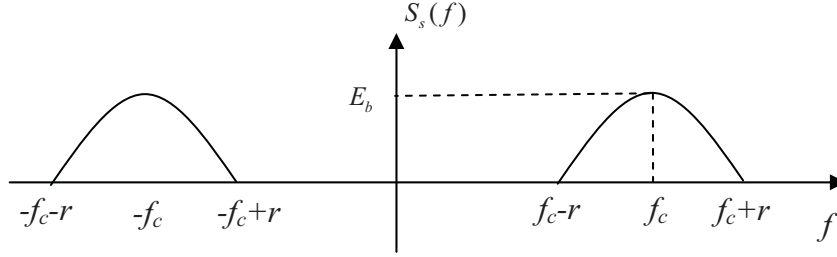
$$\mathbf{C}_s[m] = \mathbf{R}_s[m] - \boldsymbol{\mu}_s \boldsymbol{\mu}_s^T = \begin{cases} \mathbf{R}_s[0] - \boldsymbol{\mu}_s \boldsymbol{\mu}_s^T; m=0 \\ 0; m \neq 0 \end{cases} = \{\mathbf{R}_s[0] - \boldsymbol{\mu}_s \boldsymbol{\mu}_s^T\} \delta[m]$$

$$1) \Pr\{s_i\} = \frac{1}{4}; i=1,2,3,4$$

$$\mathbf{R}_s[0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} E_b; \boldsymbol{\mu}_s = \mathbf{0}; \mathbf{C}_s[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} E \delta[m]$$

$$S_s(f) = r\mathbf{\Phi}^H(f)\mathbf{C}_s[m]\mathbf{\Phi}(f) = rE_b\mathbf{\Phi}^H(f)\mathbf{\Phi}(f) = rE_b\left[|\phi_1(f)|^2 + |\phi_2(f)|^2\right]$$

$$S_s(f) = 2rE_b|\phi_1(f)|^2 = rE_b\left[|P(f-f_c)|^2 + |P(f+f_c)|^2\right]$$



Potencia continua y potencia de las rayas espectrales:

$$P_c = 2rE_b \Rightarrow 100\%; P_r = 0 \Rightarrow 0\%$$

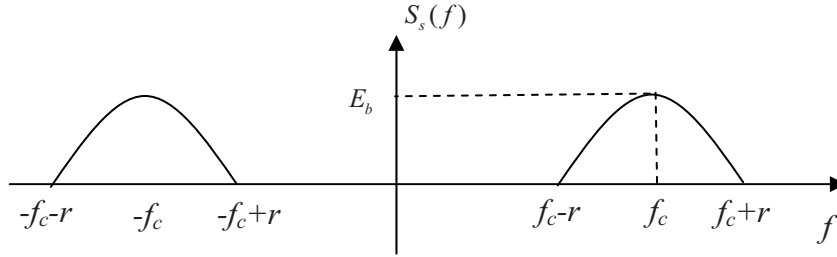
$$2) \Pr\{\mathbf{s}_1\} = \Pr\{\mathbf{s}_3\} = 0.3; \Pr\{\mathbf{s}_2\} = \Pr\{\mathbf{s}_4\} = 0.2$$

$$\mathbf{R}_s[0] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} 2E_b; \mathbf{\mu}_s = \mathbf{0}; \mathbf{C}_s[m] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} 2E_b \delta[m]$$

$$S_s(f) = 2rE_b\left[0.6|\phi_1(f)|^2 + 0.4|\phi_2(f)|^2\right] = 2rE_b|\phi_1(f)|^2 = rE_b\left[|P(f-f_c)|^2 + |P(f+f_c)|^2\right]$$

Potencia continua y potencia de las rayas espectrales:

$$P_c = 2rE_b \Rightarrow 100\%; P_r = 0 \Rightarrow 0\%$$



$$3) \Pr\{\mathbf{s}_1\} = \Pr\{\mathbf{s}_3\} = 0.3; \Pr\{\mathbf{s}_2\} = 0.3; \Pr\{\mathbf{s}_4\} = 0.1$$

$$\mathbf{R}_s[0] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} 2E_b; \mathbf{\mu}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} \sqrt{2E_b}; \mathbf{\mu}_s \mathbf{\mu}_s^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix} 2E_b; \mathbf{C}_s[m] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.36 \end{bmatrix} 2E_b \delta[m]$$

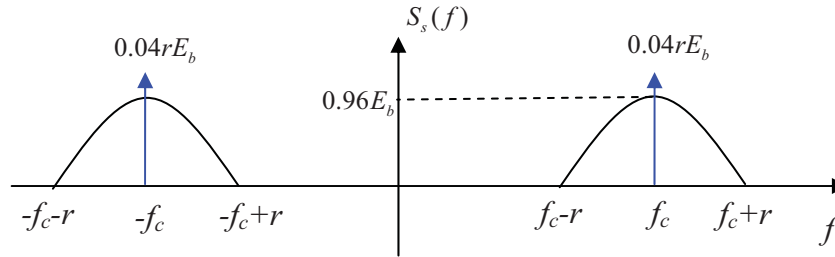
$$S_s(f) = 1.92rE_b|\phi_1(f)|^2 + 0.08E_b r^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\phi_2(mr)|^2 \delta(f-mr)$$

$$S_s(f) = 0.96rE_b\left[|P(f-f_c)|^2 + |P(f+f_c)|^2\right] + 0.04E_b r^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[|P(mr-f_c)|^2 + |P(mr+f_c)|^2\right] \delta(f-mr)$$

$$S_s(f) = 0.96rE_b\left[|P(f-f_c)|^2 + |P(f+f_c)|^2\right] + 0.04E_b r^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[|P[(m-N)r]|^2 + |P[(m+N)r]|^2\right] \delta(f-mr)$$

$$P[(m-N)r] = P[0]\delta(m-N) = \frac{1}{r}\delta(m-N); P[(m+N)r] = P[0]\delta(m+N) = \frac{1}{r}\delta(m+N)$$

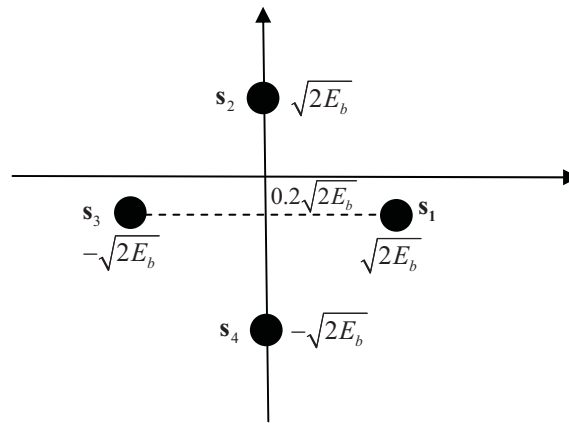
$$S_s(f) = 0.96rE_b\left[|P(f-f_c)|^2 + |P(f+f_c)|^2\right] + 0.04E_b r\left[\delta(f-Nr) + \delta(f+Nr)\right]$$



Potencia continua y potencia de las rayas espectrales:

$$P_c = 1.92rE_b \Rightarrow 96\%; P_r = 0.08E_b \Rightarrow 4\%$$

Sólo en este caso hay rayas espectrales. Para suprimirlas puede hacerse el valor medio nulo o lo que es lo mismo centrar la constelación en este valor medio



Ejercicio 2

a)

Se puede resolver mediante dos estrategias diferenciadas. Cualquiera de las dos estrategias se considerará válida en la corrección del ejercicio.

Estrategia 1: Least Squares (Método de la Pseudoinversa).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}^{\#} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1.25 & -0.5) \\ -0.5 & 1.25 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1.3125} \begin{pmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 1.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9524 \\ 0.3810 \end{pmatrix}$$

Estrategia 2: Se fuerza un cero trabajando únicamente con 2 de las 3 ecuaciones del sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

b)

Siguiendo de la Estrategia 1:

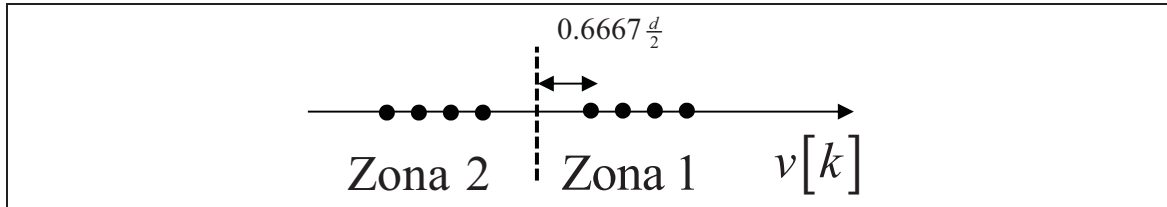
La variable de decisión obtenida es igual a:

$$\begin{aligned} v[k] &= h_0 y[k] + h_1 y[k-1] = \\ &= h_0 \alpha[k] + (-0.5h_0 + h_1) \alpha[k-1] - 0.5h_1 \alpha[k-2] + \beta_Q[k] = \\ &= 0.9524\alpha[k] - 0.0952\alpha[k-1] - 0.1905\alpha[k-2] + \beta_Q[k] \end{aligned}$$

donde $\beta_Q[k]$ es la variable de ruido resultante a la salida del ecualizador. Dado que cada símbolo de la secuencia $\alpha[k]$ es igual a $\pm \frac{d}{2}$ con equiprobabilidad, el criterio MAP coincide con el criterio de mínima distancia euclídea, por lo que, por simetría el umbral de decisión es igual a "0". En cada zona de decisión y en ausencia de ruido se obtienen cuatro puntos equiprobables según la siguiente tabla:

Zona 1: $\alpha[k] = +\frac{d}{2}$	$\alpha[k-1]$	$\alpha[k-2]$	$v[k]$
	$+\frac{d}{2}$	$+\frac{d}{2}$	$+0.6667 \frac{d}{2}$
	$+\frac{d}{2}$	$-\frac{d}{2}$	$+1.0477 \frac{d}{2}$
	$-\frac{d}{2}$	$+\frac{d}{2}$	$+0.8571 \frac{d}{2}$
	$-\frac{d}{2}$	$-\frac{d}{2}$	$+1.2381 \frac{d}{2}$

La zona 2, correspondiente a $\alpha[k] = -\frac{d}{2}$ es simétrica a la zona 1 respecto al umbral de decisión.

Siguiendo de la Estrategia 2:

La variable de decisión obtenida es igual a:

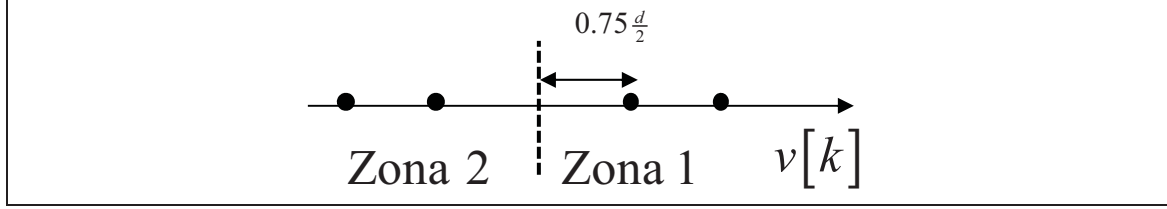
$$\begin{aligned} v[k] &= h_0 y[k] + h_1 y[k-1] = \\ &= h_0 \alpha[k] + (-0.5h_0 + h_1) \alpha[k-1] - 0.5h_1 \alpha[k-2] + \beta_Q[k] = \\ &= \alpha[k] - 0.25\alpha[k-2] + \beta_Q[k] \end{aligned}$$

donde $\beta_Q[k]$ es la variable de ruido resultante a la salida del ecualizador. Dado que cada símbolo de la secuencia $\alpha[k]$ es igual a $\pm \frac{d}{2}$ con equiprobabilidad, el criterio MAP coincide con el criterio de mínima distancia euclídea, por lo que, por simetría el umbral de decisión es igual a "0". En cada zona de decisión y en ausencia de ruido se obtienen cuatro puntos equiprobables según la siguiente tabla:

Zona 1: $\alpha[k] = +\frac{d}{2}$	$\alpha[k-2]$	$v[k]$
--	---------------	--------

$+\frac{d}{2}$	$+\frac{d}{2}$	$+0.75\frac{d}{2}$
$+\frac{d}{2}$	$-\frac{d}{2}$	$+1.25\frac{d}{2}$

La zona 2, correspondiente a $\alpha[k] = -\frac{d}{2}$ es simétrica a la zona 1 respecto al umbral de decisión.



c)

$$\mathbf{y}[k] = \begin{pmatrix} y[k] \\ y[k-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha[k] - 0.5\alpha[k-1] \\ \alpha[k-1] - 0.5\alpha[k-2] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta[k] \\ \beta[k-1] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}[k] : N\left(\begin{pmatrix} \alpha[k] - 0.5\alpha[k-1] \\ \alpha[k-1] - 0.5\alpha[k-2] \end{pmatrix}; \frac{N_0}{2\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathbf{y}[k] | \alpha[k] = +\frac{d}{2} : N\left(\begin{pmatrix} +\frac{d}{2} - 0.5\alpha[k-1] \\ \alpha[k-1] - 0.5\alpha[k-2] \end{pmatrix}; \frac{N_0}{2\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathbf{y}[k] | \alpha[k] = -\frac{d}{2} : N\left(\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} - 0.5\alpha[k-1] \\ \alpha[k-1] - 0.5\alpha[k-2] \end{pmatrix}; \frac{N_0}{2\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Cada una de las dos distribuciones anteriores corresponde al promedio de 4 funciones de densidad de probabilidad gaussianas y bidimensionales, de idéntica matriz de covarianza y de vectores de media según se representan en el siguiente apartado.

Las dos f.d.p condicionadas son:

$$f_Y[\mathbf{y}[k] | \alpha[k] = +\frac{d}{2}] = \frac{1}{4} \frac{1}{\pi N_0} \left(e^{-\frac{1}{N_0} \left[\left(y_1 - 0.5\frac{d}{2} \right)^2 + \left(y_2 - 0.5\frac{d}{2} \right)^2 \right]} + e^{-\frac{1}{N_0} \left[\left(y_1 - 0.5\frac{d}{2} \right)^2 + \left(y_2 - 1.5\frac{d}{2} \right)^2 \right]} + e^{-\frac{1}{N_0} \left[\left(y_1 - 1.5\frac{d}{2} \right)^2 + \left(y_2 + 1.5\frac{d}{2} \right)^2 \right]} + e^{-\frac{1}{N_0} \left[\left(y_1 - 1.5\frac{d}{2} \right)^2 + \left(y_2 + 0.5\frac{d}{2} \right)^2 \right]} \right) =$$

$$f_Y[\mathbf{y}[k] | \alpha[k] = -\frac{d}{2}] = \frac{1}{4} \frac{1}{\pi N_0} \left(e^{-\frac{1}{N_0} \left[\left(y_1 + 1.5\frac{d}{2} \right)^2 + \left(y_2 - 0.5\frac{d}{2} \right)^2 \right]} + e^{-\frac{1}{N_0} \left[\left(y_1 + 1.5\frac{d}{2} \right)^2 + \left(y_2 - 1.5\frac{d}{2} \right)^2 \right]} + e^{-\frac{1}{N_0} \left[\left(y_1 + 0.5\frac{d}{2} \right)^2 + \left(y_2 + 1.5\frac{d}{2} \right)^2 \right]} + e^{-\frac{1}{N_0} \left[\left(y_1 + 0.5\frac{d}{2} \right)^2 + \left(y_2 + 0.5\frac{d}{2} \right)^2 \right]} \right) =$$

d)

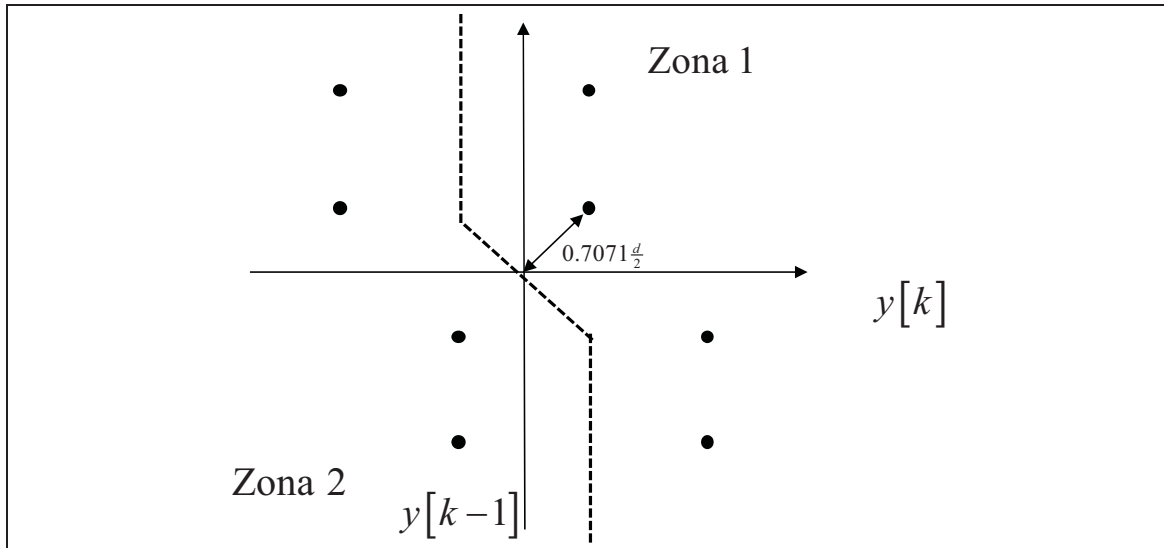
En cada zona de decisión y en ausencia de ruido se obtienen cuatro puntos equiprobables según la siguiente tabla:

Zona	1:	$\alpha[k-1]$	$\alpha[k-2]$	$y[k]$	$y[k-1]$
------	----	---------------	---------------	--------	----------

$\alpha[k] = +\frac{d}{2}$	$+\frac{d}{2}$	$+\frac{d}{2}$	$+0,5\frac{d}{2}$	$+0,5\frac{d}{2}$
	$+\frac{d}{2}$	$-\frac{d}{2}$	$+0,5\frac{d}{2}$	$+1,5\frac{d}{2}$
	$-\frac{d}{2}$	$+\frac{d}{2}$	$+1,5\frac{d}{2}$	$-1,5\frac{d}{2}$
	$-\frac{d}{2}$	$-\frac{d}{2}$	$+1,5\frac{d}{2}$	$-0,5\frac{d}{2}$

La zona 2, correspondiente a $\alpha[k] = -\frac{d}{2}$ es simétrica a la zona 1 respecto a la frontera de decisión.

Zona 1: $\alpha[k] = -\frac{d}{2}$	$\alpha[k-1]$	$\alpha[k-2]$	$y[k]$	$y[k-1]$
	$+\frac{d}{2}$	$+\frac{d}{2}$	$-1,5\frac{d}{2}$	$+0,5\frac{d}{2}$
	$+\frac{d}{2}$	$-\frac{d}{2}$	$-1,5\frac{d}{2}$	$+1,5\frac{d}{2}$
	$-\frac{d}{2}$	$+\frac{d}{2}$	$-0,5\frac{d}{2}$	$-1,5\frac{d}{2}$
	$-\frac{d}{2}$	$-\frac{d}{2}$	$-0,5\frac{d}{2}$	$-0,5\frac{d}{2}$



El conocimiento de la mínima distancia al umbral obtenida no es suficiente para evaluar la BER, ya que la menor BER vendrá dada por el máximo cociente $\frac{d_{MN}^2}{2\sigma^2}$ y por tanto se ha de considerar la potencia de la variable de ruido para la respuesta correcta.

FIN DE LA RESOLUCIÓN SEGÚN ENUNCIADO DE EXAMEN.

A continuación se evalúa el cociente para todos los casos del ejercicio, aunque la respuesta anterior es suficiente para responder a la pregunta del ejercicio.

Dado que $E_b = \frac{d^2}{4}$ se tiene

- Apartado b, estrategia 1: $\frac{d_{MN}^2}{4\sigma^2} = \frac{(0.6667)^2 E_b}{\frac{N_0}{2}(h_0^2 + h_1^2)} = \frac{(0.6667)^2}{0.9524^2 + 0.381^2} \frac{2E_b}{N_0} = 0.4224 \frac{2E_b}{N_0}$
- Apartado b, estrategia 2: $\frac{d_{MN}^2}{4\sigma^2} = \frac{(0.75)^2 E_b}{\frac{N_0}{2}(h_0^2 + h_1^2)} = \frac{(0.75)^2}{1+0.5^2} \frac{2E_b}{N_0} = 0.45 \frac{2E_b}{N_0}$

- Apartado d: $\frac{d_{MN}^2}{4\sigma^2} = \frac{(0.0701)^2 E_b}{\frac{N_0}{2}} = 0.5 \frac{2E_b}{N_0}$

Por tanto, atendiendo al cociente $\frac{d_{MN}^2}{2\sigma^2}$, queda demostrado que la solución mejor para este caso es la propuesta en los apartados c y d, aunque en realidad la influencia exacta sobre la BER depende del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. En este caso la robustez de los métodos de menor cociente solo será real para altos valores del cociente. Véanse los siguientes valores de probabilidad de error para comprobarlo únicamente para las dos estrategias de FZ.

Aún así si se evalúa la BER se obtiene para el caso del apartado b;

- Apartado b, estrategia 1, cálculo exacto mediante el promedio de 4 gaussianas:

$$\frac{E_b}{N_0} = 10; \quad \text{BER} = 4.8064\text{e-}004$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 20; \quad \text{BER} = 4.9499\text{e-}006$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 25; \quad \text{BER} = 5.3949\text{e-}007$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 20; \quad \text{BER} = 7.6621\text{e-}010$$

- Apartado b, estrategia 2, cálculo exacto mediante el promedio de 2 gaussianas:

$$\frac{E_b}{N_0} = 10; \quad \text{BER} = 6.7509\text{e-}004$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 20; \quad \text{BER} = 5.5226\text{e-}006$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 25; \quad \text{BER} = 5.2536\text{e-}007$$

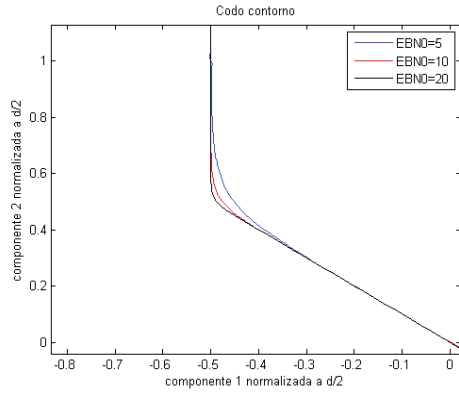
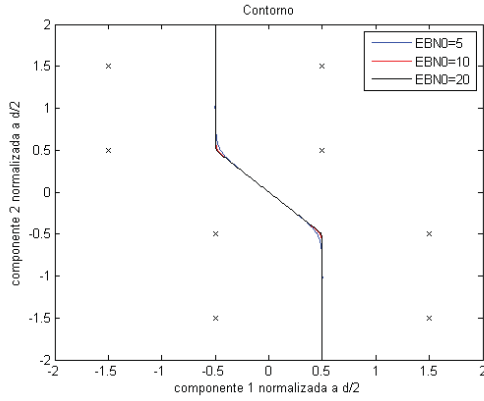
$$\frac{E_b}{N_0} = 20; \quad \text{BER} = 4.9329\text{e-}010$$

- Apartado d: El cálculo exacto requiere la resolución y promedio de 4 áreas de funciones gaussianas bidimensionales con la frontera de la figura.

ANEXO:

En la situación planteada en este ejercicio, las dos zonas de decisión obtenidas mediante el criterio de distancia mínima no coinciden exactamente con las obtenidas al aplicar el criterio MAP, aunque resultan una buena aproximación siempre que el cociente $\frac{E_b}{N_0}$ sea suficientemente elevado. A continuación se representa para el caso de $\frac{E_b}{N_0} = 5$ las 2 zonas obtenidas aplicando de forma exacta MAP.

$$\begin{aligned}
f_Y[Y[k]|\alpha[k] = +\frac{d}{2}] &= f_Y[Y[k]|\alpha[k] = -\frac{d}{2}] \Rightarrow \\
&e^{-\frac{1}{N_0}\left[\left(y_1 - 0.5\frac{d}{2}\right)^2 + \left(y_2 - 0.5\frac{d}{2}\right)^2\right]} + e^{-\frac{1}{N_0}\left[\left(y_1 - 0.5\frac{d}{2}\right)^2 + \left(y_2 - 1.5\frac{d}{2}\right)^2\right]} + e^{-\frac{1}{N_0}\left[\left(y_1 - 1.5\frac{d}{2}\right)^2 + \left(y_2 + 1.5\frac{d}{2}\right)^2\right]} + e^{-\frac{1}{N_0}\left[\left(y_1 - 1.5\frac{d}{2}\right)^2 + \left(y_2 + 0.5\frac{d}{2}\right)^2\right]} = \\
&e^{-\frac{1}{N_0}\left[\left(y_1 + 1.5\frac{d}{2}\right)^2 + \left(y_2 - 0.5\frac{d}{2}\right)^2\right]} + e^{-\frac{1}{N_0}\left[\left(y_1 + 1.5\frac{d}{2}\right)^2 + \left(y_2 - 1.5\frac{d}{2}\right)^2\right]} + e^{-\frac{1}{N_0}\left[\left(y_1 + 0.5\frac{d}{2}\right)^2 + \left(y_2 + 1.5\frac{d}{2}\right)^2\right]} + e^{-\frac{1}{N_0}\left[\left(y_1 + 0.5\frac{d}{2}\right)^2 + \left(y_2 + 0.5\frac{d}{2}\right)^2\right]} \\
&e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_2 - 0.5\frac{d}{2}\right)^2} \left\{ e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 - 0.5\frac{d}{2}\right)^2} - e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 + 1.5\frac{d}{2}\right)^2} \right\} + e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_2 - 1.5\frac{d}{2}\right)^2} \left\{ e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 - 0.5\frac{d}{2}\right)^2} - e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 + 0.5\frac{d}{2}\right)^2} \right\} = \\
&e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_2 + 1.5\frac{d}{2}\right)^2} \left\{ e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 + 0.5\frac{d}{2}\right)^2} - e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 - 1.5\frac{d}{2}\right)^2} \right\} + e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_2 + 0.5\frac{d}{2}\right)^2} \left\{ e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 + 0.5\frac{d}{2}\right)^2} - e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 - 1.5\frac{d}{2}\right)^2} \right\} \\
&\left\{ e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 - 0.5\frac{d}{2}\right)^2} - e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 + 1.5\frac{d}{2}\right)^2} \right\} \left\{ e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_2 - 0.5\frac{d}{2}\right)^2} + e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_2 - 1.5\frac{d}{2}\right)^2} \right\} = \\
&\left\{ e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 + 0.5\frac{d}{2}\right)^2} - e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_1 - 1.5\frac{d}{2}\right)^2} \right\} \left\{ e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_2 + 0.5\frac{d}{2}\right)^2} + e^{-\frac{1}{N_0}\left(y_2 + 1.5\frac{d}{2}\right)^2} \right\}
\end{aligned}$$



Zonas obtenidas mediante la aplicación del criterio MAP. Ampliación mediante zoom del codo.

Ejercicio 3

a)

Centrándonos en el intervalo $0 \leq t \leq T$, y usando que N es múltiplo de 8, tenemos:

$$\tilde{s}_1(t) = s_1(t) + \alpha s_1(t - T/8)$$

$$\tilde{s}_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + \alpha A \cos(2\pi f_1 t)$$

$$\tilde{s}_1(t) = A(1 + \alpha) \cos(2\pi f_1 t)$$

El caso del símbolo 2 es un poco diferente, puesto que aparece una fase de $\pi/4$ en el retardo:

$$\tilde{s}_2(t) = s_2(t) + \alpha s_2(t - T/8)$$

$$\tilde{s}_2(t) = A \cos(2\pi f_2 t) + \alpha A \cos(2\pi f_2 t - \pi/4)$$

De todos modos, y tal como se indica, la suma de dos cosenos sigue siendo un coseno con la amplitud y fase cambiadas. Alternativamente, descomponiendo el segundo coseno, puede ver que se trata de la siguiente combinación de coseno y seno:

$$\tilde{s}_2(t) = A(1 + \alpha/\sqrt{2}) \cos(2\pi f_2 t) + A\alpha/\sqrt{2} \sin(2\pi f_2 t)$$

En el intervalo $0 \leq t \leq T$ las frecuencias de cada símbolo son ortogonales, puesto que su separación es $1/T$. Por lo tanto, el símbolo 1 aparecerá en la rama de arriba, mientras que el símbolo 2 aparecerá en la de abajo. Al correlar cada símbolo con el coseno de su frecuencia, y al ser la energía del coseno durante $0 \leq t \leq T$ igual a $T/2$, tenemos que en presencia del símbolo 1, las salidas son:

$$y_1 = \frac{AT(1+\alpha)}{2} + \beta_1$$

$$y_2 = \beta_2$$

y en presencia del símbolo 2, las salidas son:

$$y_1 = \beta_1$$

$$y_2 = \frac{AT(1+\alpha/\sqrt{2})}{2} + \beta_2$$

Nótese que en la rama de abajo, sólo aparece la contribución debida al término

$$\tilde{s}_2(t) = A(1+\alpha/\sqrt{2})\cos(2\pi f_2 t) .$$

En cambio, el término $A\alpha/\sqrt{2}\sin(2\pi f_2 t)$ no contribuye sobre y_2 debido a la ortogonalidad entre el seno y el coseno de 0 a T cuando tenemos un número entero de periodos (N+1 en este caso).

En cuando a las variables aleatorias de ruido, β_1 y β_2 , es importante indicar en la solución que tienen ambas variancia igual a

$$\sigma^2 = \frac{N_0 T}{2}$$

debido a que la energía de cada correlador es precisamente $T/2$. Por otra parte, se trata de variables aleatorias incorreladas, debido a que ambos correladores presentan ortogonalidad en tiempo de 0 a T, como consecuencia (una vez más) de que la separación frecuencial es $1/T$.

La razón por la que no hay ISI es que el retardo del canal es inferior al prefijo cíclico, y a que el tiempo que dura el prefijo cíclico se ignora en el receptor. Puede usar la misma explicación gráfica que se utiliza en OFDM para justificar que no hay ISI en estas condiciones.

b)

Como que con canal ideal los símbolos recibidos son equienergéticos y ortogonales (de 0 a T), la constelación es la misma que una modulación ortogonal binaria, siendo la recta de 45 grados que pasa por el origen la que separa cada región de decisión. El análisis de esta modulación está hecho en clase y resulta ser:

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{E'_b}{N_0}}\right)$$

Sin embargo, esta respuesta es parcialmente correcta ya que es importante destacar que E'_b es la energía de bit observada por el receptor, no la enviada por el transmisor. Esto es así puesto que este receptor ignora la energía contenida en el prefijo cíclico. De hecho es lo mismo que ocurre en OFDM, donde el hecho de ignorar el prefijo cíclico en recepción da lugar a una ineficiencia energética (y también espectral) igual a T/T_b . Es por ello que calculando la energía de bit transmitida, la correcta expresión de la BER

viene afectada por el mismo término de ineficiencia energética que se da en OFDM. La respuesta correcta es por tanto:

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{4 E_b}{5 N_0}}\right)$$

Revise la teoría de OFDM para entender plenamente como llegar a este resultado. Por último, es importante que haya hecho una reflexión cualitativa indicando que el impacto de ignorar el prefijo cíclico es una ineficiencia energética, igual a T/T_b .

c)

Como ha visto en el apartado a, en presencia de canal tiene una constelación no equienergética, genéricamente:

$$y_1 = B + \beta_1$$

$$y_1 = \beta_1$$

$$y_2 = \beta_2$$

$$y_2 = C + \beta_2$$

donde B y C dependen del canal (coeficiente α) y son desiguales para $\alpha \neq 0$. Sin embargo, la frontera (que, como se le indica, no ha cambiado respecto al caso de canal ideal) sigue siendo la recta de 45 grados, con lo que cada símbolo presenta una distancia distinta a ésta en función de α , digamos d_1 y d_2 . Hacer esta observación es el punto clave de la respuesta. Finalmente, basta indicar que la BER se calcula a partir de las condicionadas a cada símbolo del siguiente modo:

$$BER = \frac{1}{2}Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right)$$

y luego debe expresarla, como es habitual en comunicaciones, en función de E_b/N_0 .

El receptor colapsa a partir de aquel valor de α que anula una de las dos distancias, concretamente para $\alpha < -1$.

d)

De nuevo, la constelación es

$$y_1 = B + \beta_1$$

$$y_1 = \beta_1$$

$$y_2 = \beta_2$$

$$y_2 = C + \beta_2$$

Si conoce el canal, conoce la ubicación de símbolos, es decir, conoce B y C. Por tanto, el receptor óptimo es el que realiza una partición del plano mediante la mediatriz del segmento que une ambos símbolos, que ahora es una recta que no pasa por el origen ni tiene pendiente unitaria. Para hallar la BER asociada a esta partición, basta entonces que calcule la distancia entre los dos símbolos de este modo:

$$D = \sqrt{B^2 + C^2}$$

A partir de esta distancia, puede expresar fácilmente la BER como:

$$BER = Q\left(\frac{D}{2\sigma}\right)$$

y luego debe expresarla, como es habitual en comunicaciones, en función de E_b/N_0 .