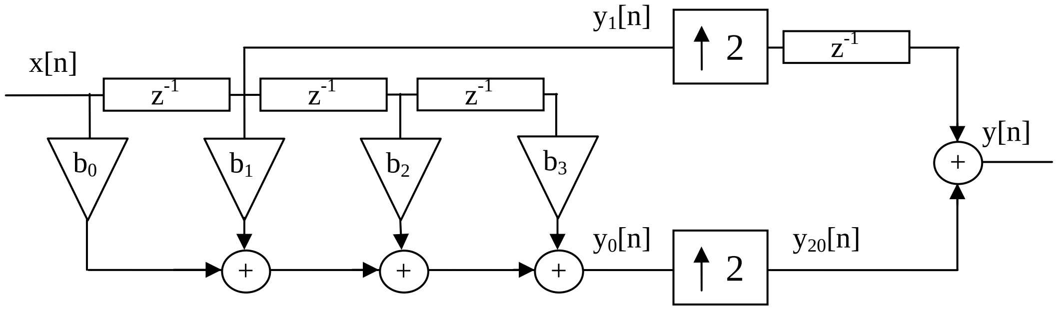
Senyals i Sistemes II
Data d'examen: 8 de Gener de 2009
Data notes provisionals: 19 de Gener de 2009
Període d'al.legacions: 22 de Gener de 2009
Data notes revisades: 27 de Gener de 2009

Professors: J. Hernando, J.B. Mariño, E. Monte, A. Oliveras, P. Salembier.

Temps: 1 h 30 min

- Responeu a cada problema en fulls separats.
- No podeu utilitzar ni llibres, ni apunts, ni taules, ni formularis, ni calculadora, ni telèfon mòbil.
- Poseu un document d'identificació en un lloc visible.
- El vostre nom ha de figurar en tots els fulls que utilitzeu, en format: COGNOMS, NOM.
- Justifiqueu tots els resultats. Els resultats sense justificació no seran valorats en la correcció.

Problema 1 **3 punts**



En la figura se muestra un sistema que permite la interpolación por una relación N=2 de una secuencia x[n] para obtener la secuencia y[n]. Se desea dar valores a los coeficientes b_i para que el sistema realice la interpolación de Lagrange. Se pide:

a) Sean y_0, y_1, y_2 e y_3 cuatro valores de una función correspondientes a valores equiespaciados x_0, x_1, x_2 y x_3 de la variable. La fórmula de interpolación cúbica de Lagrange proporciona el siguiente valor y para la función en el punto medio entre x_1 y x_2:

$$y = -\frac{1}{16}y_0 + \frac{9}{16}y_1 + \frac{9}{16}y_2 - \frac{1}{16}y_3$$

A partir de esta información, proponga razonadamene la respuesta impulsional para un filtro causal interpolador por 2 que conserve inalteradas en la secuencia interpolada y[n] las muestras de la secuencia a interpolar x[n].

b) En el esquema de la figura, encuentre las funciones de transferencia $H_0(z)$ y $H_1(z)$ de los sistemas que, a partir de x[n], proporcionan las secuencias $y_0[n]$ o $y_1[n]$, que, respectivamente, constituyen la secuencia con las muestras pares e impares de y[n].

c) Establezca la relación entre las transformadas Z de la secuencias a la entrada y la salida de un sistema que introduce una muestra nula entre cada dos muestras de la secuencia de entrada (por ejemplo, la relación entre las transformadas de las secuencias $y_0[n]$ e $y_{20}[n]$ de la figura).

d) En la misma estructura, obtenga la transformada Z de y[n] en función de la transformada Z de x[n] y las funciones de transferencia $H_0(z)$ y $H_1(z)$.

e) Sabiendo que la estructura de la figura es equivalente al esquema general de interpolación (la cascada de un sistema intercalador de muestras con N=2 y un filtro interpolador), determine la función de transferencia H(z) del filtro interpolador en función de $H_0(z)$ y $H_1(z)$.

f) Obtenga el valor de los coeficientes b_i de la estructura de la figura en función de los coeficientes de la fórmula de interpolación de Lagrange.

Problema 2 **3.5 punts**

Parte 1:
En esta primera parte, estudiamos un sistema discreto S para estimar la componente continua de una señal. El sistema se representa en la figura 1:

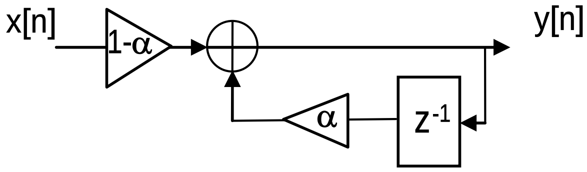


Figura 1

Suponemos que α es un valor real positivo cerca pero inferior a 1. Se pide:

1. Calcular la ecuación en diferencias finitas del sistema.
2. Calcular la función de transferencia. Dibujar el diagrama de polos y ceros. Definir su ROC.
3. Calcular la respuesta frecuencial y dibujar su modulo indicando los valores para $\omega=0$ y $\omega=\pi$.
4. Calcular la respuesta impulsional del sistema.
5. Calcular la respuesta a $x[n] = 1 + \cos(\pi n)$ para $\alpha=0{,}999$.

Parte 2:
En esta segunda parte, utilizamos el sistema anterior S para definir un sistema que elimina la componente continua de una señal. El sistema se representa en la figura 2:

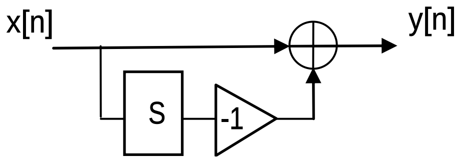


Figura 2

Se pide:

6. Calcular la función de transferencia. Dibujar el diagrama de polos y ceros. Definir su ROC.
7. Calcular la ecuación en diferencias finitas del sistema.
8. Calcular la respuesta frecuencial y dibujar su modulo indicando los valores para $\omega=0$ y $\omega=\pi$.
9. Calcular la respuesta impulsional del sistema.
10. Calcular la respuesta a $x[n] = 1 + \cos(\pi n)$ para $\alpha=0{,}999$.

Problema 3 **3.5 punts**

Sea la secuencia periódica de periodo 4 $x[n]=\{...3,0,1,0,\underline{3},0,1,0,3,0,1,0...\}$, se pide:

a) Transformada de Fourier $X_o\left(e^{j\omega}\right)$ de su periodo fundamental $x_o[n]$. Dibuje su módulo.
b) Valores de la DFT de 4 muestras de $x_o[n]$. Marque su módulo sobre el dibujo del apartado anterior.
c) Expresión de $x[n]$ como combinación lineal de exponenciales.
d) Transformada de Fourier $X\left(e^{j\omega}\right)$ de $x[n]$. Dibújela marcando los pesos de las deltas de Dirac.

Considere el sistema lineal e invariante definido por la respuesta impulsional $h[n]=\delta[n]+a\delta[n-1]+\delta[n-2]$, se pide:

e) Expresión de la respuesta frecuencial.
f) Valor de a para que anule la frecuencia fundamental de la secuencia $x[n]$.
g) Dibujo del módulo y la fase de la respuesta frecuencial para este valor de a.
h) Transformada de Fourier $Y\left(e^{j\omega}\right)$ de la secuencia $y[n]$ resultante del filtrado. Dibújela marcando los pesos de las deltas de Dirac.

Considere $y_v[n]$ resultante del enventanado de $y[n]$ con un pulso rectangular causal de 8 muestras con inicio en n=0 $p_8[n]$. Se pide:

i) Expresión de la transformada de Fourier $Y_v\left(e^{j\omega}\right)$ de la señal enventanada $y_v[n]$ en términos de la transformada de Fourier $P_8\left(e^{j\omega}\right)$ de $p_8[n]$.
j) Expresión de $P_8\left(e^{j\omega}\right)$ en la forma $P_8\left(e^{j\omega}\right)=R\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\alpha\omega}$, con $R\left(e^{j\omega}\right)$ real. Dibuje $R\left(e^{j\omega}\right)$.
k) Dibujo del módulo de $Y_v\left(e^{j\omega}\right)$ a partir de los resultados anteriores.

SOLUCION PROBLEMA 1:

a) $h[n] = -\frac{1}{16}\delta[n] + \frac{9}{16}\delta[n-2] + \delta[n-3] + \frac{9}{16}\delta[n-4] - \frac{1}{16}\delta[n-6]$

b) $H_0(z) = \sum_{i=0}^{3} b_i\, z^{-i}$ $\qquad H_1(z) = z^{-1}$

c) $Y_{20}(z) = Y_0(z^2)$

d) $Y(z) = Y_0(z^2) + z^{-1}Y_1(z^2) = H_0(z^2)X(z^2) + z^{-1}H_1(z^2)X(z^2)$

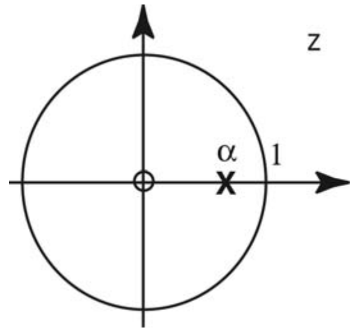
e) $Y(z) = H(z)X(z^2) = H_0(z^2)X(z^2) + z^{-1}H_1(z^2)X(z^2)$ => $H(z) = H_0(z^2) + z^{-1}H_1(z^2)$

f) $b_0 = b_3 = -1/16$ $\qquad b_1 = b_2 = 9/16$

SOLUCION PROBLEMA 2:

1.- $y[n] = (1-\alpha)\, x[n] + \alpha\, y[n-1]$

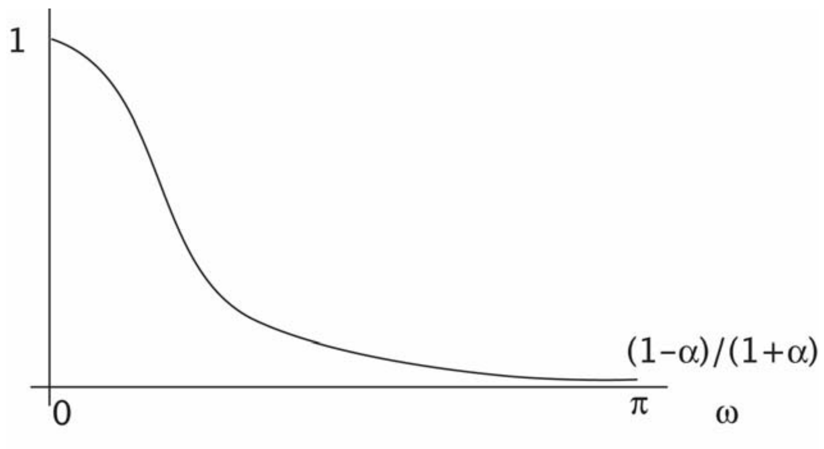
2.- $H(z) = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha z^{-1})}$, on la seva regió de convergència es: $|z| > \alpha$.



3.- Donat que la regió de convergència de $H(z)$ inclou el cercle de radi unitat, la reposta frequencial la podem obtenir com: $H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha e^{-j\omega})}$

La resposta frequencial per $\omega = 0$ i $\omega = \pi$:

$H(e^{j\omega})\big|_{\omega=0} = H(z)\big|_{z=1} = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha z^{-1})}\bigg|_{z=1} = 1;$ $\qquad H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi} = H(z)\big|_{z=-1} = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha z^{-1})}\bigg|_{z=-1} = \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}$



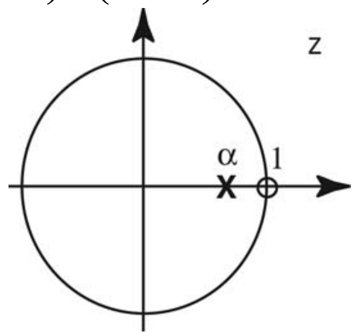
4.- $h[n] = TZ^{-1}\{H(z)\} = (1-\alpha)\,\alpha^n\, u[n]$

5.- Si $x[n] = 1 + \cos(\pi n)$ i aplicant el principi de superposició i la propietat de que l'entrada és una combinció lineal de dues autofuncions del sistema, llavors:

$$y[n] = H(z)\big|_{z=1} 1 + H(z)\big|_{z=-1}\cos(\pi n) = 1 + \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}\cos(\pi n) = 1 + \frac{1}{1999}\cos(\pi n)$$

6.- $Y(z) = X(z)(1 - H_S(z))$ on: $H_S(z) = \dfrac{(1-\alpha)}{(1-\alpha z^{-1})}$ llavors:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = (1 - H_S(z)) = 1 - \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha z^{-1})} = \frac{\alpha(1-z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})} \quad |z| > \alpha$$

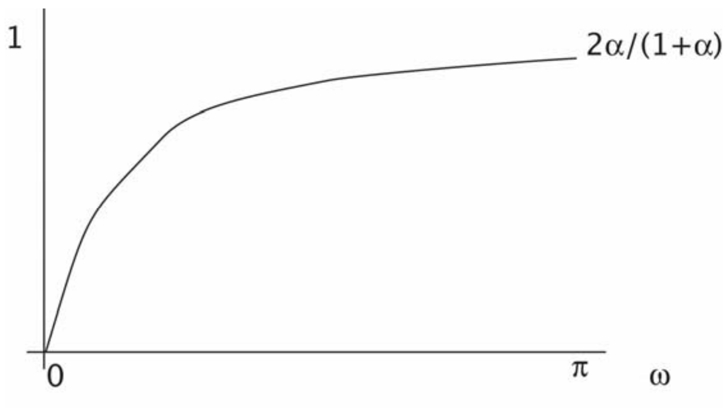


7.- Del resultat anterior: $y[n] = \alpha(x[n] - x[n-1]) + \alpha\, y[n-1]$

8.- Donat que la regió de convergència de $H(z)$ inclou el cercle de radi unitat, la reposta frequencial la podem obtenir com: $H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \left.\dfrac{\alpha(1-z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})}\right|_{z=e^{j\omega}} = \dfrac{\alpha(1-e^{-j\omega})}{(1-\alpha e^{-j\omega})}$

La resposta frequencial per $\omega = 0$ i $\omega = \pi$:

$$H(e^{j\omega})\big|_{\omega=0} = H(z)\big|_{z=1} = \left.\frac{\alpha(1-z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})}\right|_{z=1} = 0;\ H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi} = H(z)\big|_{z=-1} = \left.\frac{\alpha(1-z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})}\right|_{z=-1} = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)}$$



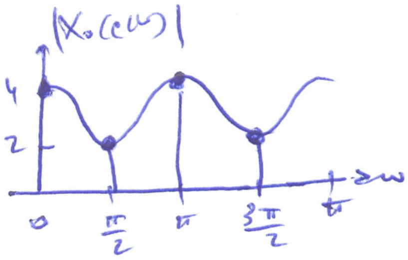
9.- $h[n] = TZ^{-1}\{H(z)\} = TZ^{-1}\left\{1 - \dfrac{(1-\alpha)}{(1-\alpha z^{-1})}\right\} = \delta[n] - (1-\alpha)\,\alpha^n u[n]$

10.- Anàlogament a l'apartat 5: $y[n] = H(z)\big|_{z=1} 1 + H(z)\big|_{z=-1} \cos(\pi n) = 0 + \dfrac{2\alpha}{(1+\alpha)} \cos(\pi n)$

Problema 3 08-01-09

$x[n] = \{ \dots 3, 0, 1, 0, \underline{3}, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0 \dots \}$

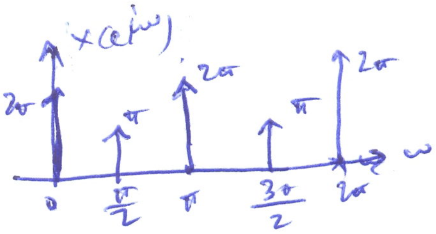
a) $X_0(e^{j\omega}) = 3 + e^{-j2\omega}$



b) $X_0[k] = X_0(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \frac{2\pi}{4}k} = \{ \underline{4}, 2, 4, 2 \}$

c) $x[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} X_0[k] e^{j\frac{2\pi}{4}kn} = \frac{1}{4}\left(4 + 2e^{j\frac{\pi}{2}n} + 4e^{j\pi n} + 2e^{j\frac{3\pi}{2}n}\right)$

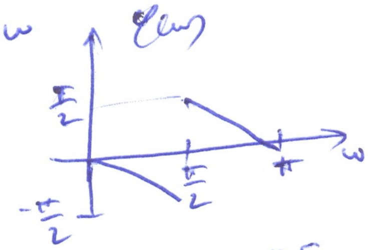
d) $X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{4} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[4\,\delta(\omega + 2\pi r) + 2\,\delta(\omega - \frac{\pi}{2} + 2\pi r) + 4\,\delta(\omega - \pi + 2\pi r) + 2\,\delta(\omega - \frac{3\pi}{2} + 2\pi r) \right]$

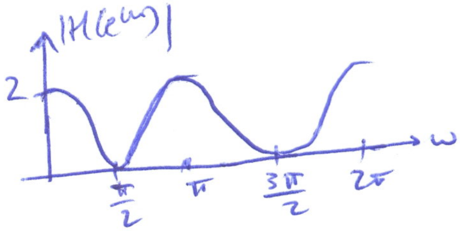


e) $H(e^{j\omega}) = 1 + a e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = e^{-j\omega}(a + 2\cos\omega)$

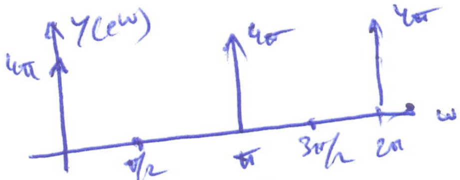
f) $P = 4 \quad f_0 = \frac{1}{4} \qquad a + 2\cos(2\pi \frac{1}{4}) = 0 \rightarrow a = 0$

g) $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} 2\cos\omega$



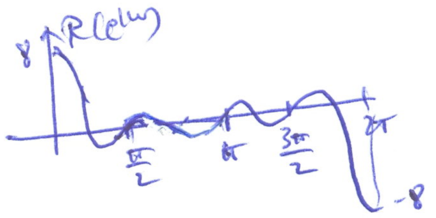


h) $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) = 2\,\frac{2\pi}{4} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[4\,\delta(\omega + 2\pi r) + 4\,\delta(\omega - \pi + 2\pi r) \right]$



i) $Y_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} Y(e^{j\lambda}) P_8(e^{j(\omega-\lambda)})\, d\lambda = 2\left(P_8(e^{j\omega}) + P_8(e^{j(\omega-\pi)}) \right)$

j) $P_8(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{7}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{8\omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} = e^{-j\omega\frac{7}{2}} R(e^{j\omega})$



k)