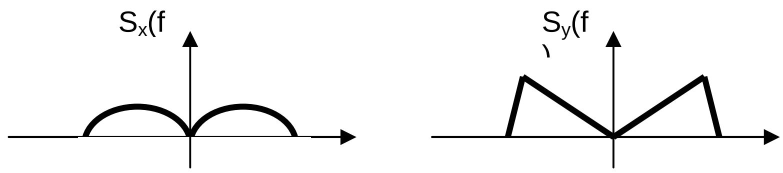
Normes per a la realització de l'examen
- Es prohibeix l´ús de telèfons mòbils i de calculadores durant la realització de l'examen. No es poden utilitzar ni com a rellotges.
- Inicieu tots els fulls que utilitzeu escrivent el nom a la capçalera, fins i tot les utilitzades com a borradors.

Exercici 1: Es tenen dos senyals x(t) i y(t) pas baix amb ample de banda B = 15 KHz, estacionàries, independents entre sí i de mitjana nul·la que es transmeten conjuntament.



Amb aquest objectiu es construeix el senyal z(t) com

$$z(t) = x(t) + u(t)$$
$$u(t) = -\hat{y}(t)\cos[2\pi 2Bt] + y(t)\sin[2\pi 2Bt]$$

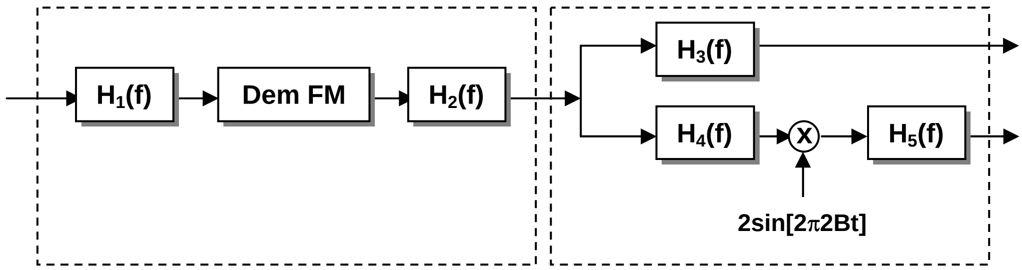
a on el senyal $\hat{y}(t)$ és la transformada de Hilbert del senyal y(t).

a) <u>Utilitzant el formulari entregat amb l'examen</u>, calculeu la mitjana i l'autocorrelació del senyal z(t). A partir de l'autocorrelació calculada, desenvolupeu la densitat espectral de potència i la potència mitjana del senyal z(t).

El senyal z(t) ($\left. z(t) \right|_{max} = 1$), es modula en FM amb una sensibilitat en freqüència de f_Δ = 75 KHz, generant el senyal s(t):

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int z(\lambda)d\lambda\right]$$

Aquest senyal s(t) es transmet a través d'un canal que presenta una atenuació en potència de 50 dBs i un soroll blanc, additiu, independent del senyal z(t) i de densitat espectral de potència $S_w(f) = N_0/2$ amb $N_0 = 3.10^{-8}$ W/Hz.



b) Calculeu l'amplitud A_c mínima necessària en transmissió del senyal modulat en FM per a garantir la seva correcta demodulació. <u>Utilitzeu únicament en aquest apartat els valors numèrics dels paràmetres. A la resta d'apartats, utilitzeu les variables genèriques.</u>

****

A PARTIR D'AQUEST PUNT, RESOLEU L'EXERCICI EN UN FULL DIFERENT

****

c) Prenent la sortida del demodulador de FM com $f_{\Delta} z(t) + \frac{1}{2\pi A}\frac{dq_n(t)}{dt}$, essent A l'amplitud del senyal FM rebut, dibuixeu la densitat espectral de potència de soroll a la sortida del receptor de FM (després del filtre H_2(f)) y calculeu la relació de potència de senyal a potència de soroll en aquest punt.

d) Dissenyeu els filtres del sistema proposat per a recuperar els senyales x(t) i y(t) separadament després del receptor de FM. Dibuixeu la densitat espectral de potència de soroll a cada sortida del sistema proposat.

e) Calculeu la relació de potència de senyal a potència de soroll per cada un dels dos senyals x(t) i y(t) i compareu-les.

Exercici 2. RESOLEU L'EXERCICI EN UN FULL DIFERENT

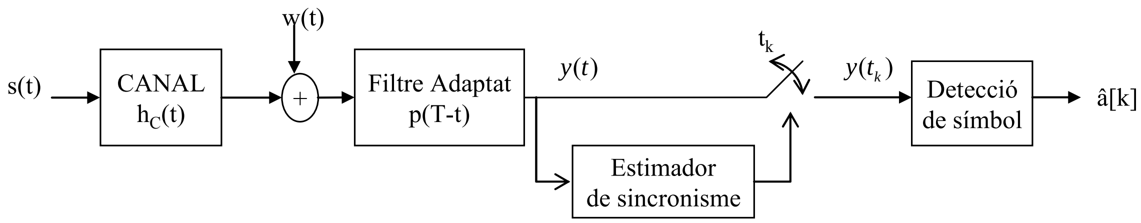
Considereu un sistema de comunicació digital que transmet el senyal PAM

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \cdot p(t - nT)$$

on $a[k] \in \{\pm A\}$ equiprobables, T és el període de símbol i el pols conformador utilitzat és

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \prod\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

El senyal PAM es transmet per un canal ideal amb atenuació en potència L i retard t_c, i amb un soroll *w(t)* additiu, estacionari, gaussià, de mitjana nul·la, densitat espectral de potència $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ i incorrelat amb el senyal transmès. L'esquema del receptor és el següent.



a) Indiqueu l'expressió del senyal detectat, $y(t)$, en funció de l'autocorrelació del pols.

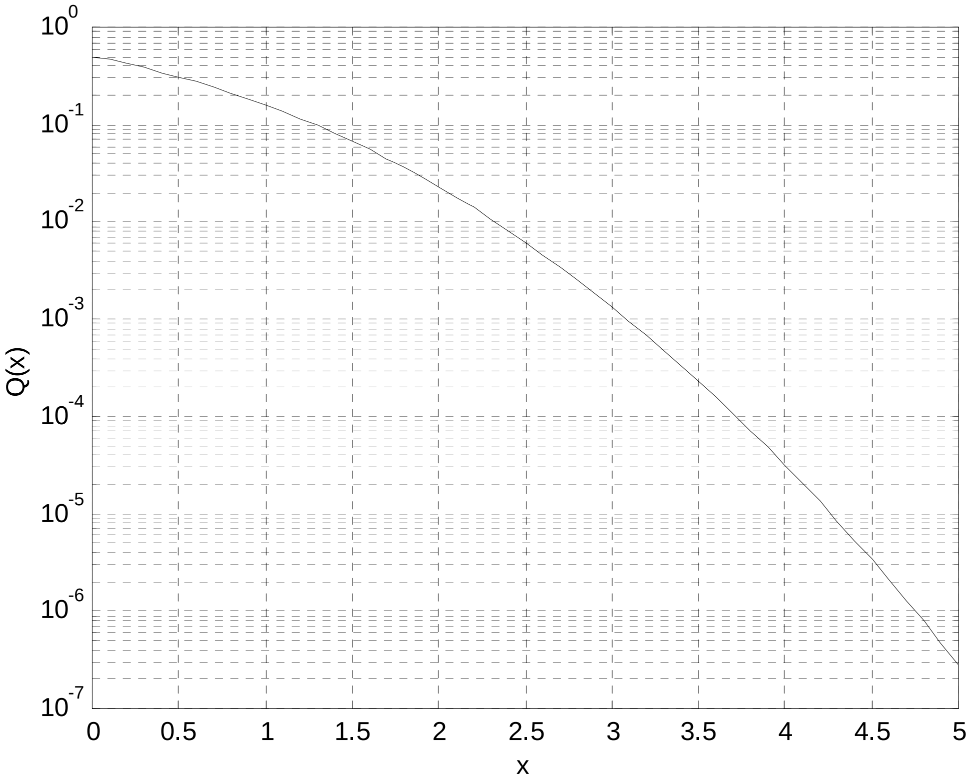
b) Suposant que el sistema de sincronisme no estima correctament l'instant de mostratge de manera que $t_k = t_c + (k+1)T + 0.2T$, obteniu l'expressió de $y(t_k)$ identificant el terme de senyal útil, de ISI i de soroll. Caracteritzeu el soroll resultant. **Nota:** un dibuix de l'autocorrelació del pols pot ser d'utilitat.

c) Suposant que el llindar del sistema detector de símbol està a l'origen, $\gamma = 0$, trobeu la probabilitat d'error en detecció i expresseu-la en funció de la E_b / N_0.

d) Per a resoldre aquest apartat, assumiu que L=1. Sabent que la probabilitat d'error quan no hi ha error de sincronisme és $Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$, compareu les dues probabilitats d'error per $\frac{E_b}{N_0} = 4{,}5$. Entregueu la gràfica de $Q(x)$ que se es proporciona si l'utilitzeu.

Nota:

$$Q(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$$



Formulari

Expressions trigonomètriques:

$$\sin a\ \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \qquad \sin a\ \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$$

$$\cos a\ \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

Relacions entre correlacions creuades d'un senyal i la seva transformada de Hilbert:

$$R_{\hat{x}x}(\tau) = \hat{R}_x(\tau) = -R_{x\hat{x}}(\tau)$$

Autocorrelació d'un procés pas banda amb components en fase i quadratura ($i_s(t)$ i $q_s(t)$) conjuntament estacionàries:

$$R_s(t+\tau,t) = \frac{1}{2}R_{is}(\tau)\left[\cos 2\pi f_c\tau + \cos 2\pi f_c(2t+\tau)\right] + \frac{1}{2}R_{qs}(\tau)\left[\cos 2\pi f_c\tau - \cos 2\pi f_c(2t+\tau)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}R_{isqs}(\tau)\left[\sin 2\pi f_c(\tau) - \sin 2\pi f_c(2t+\tau)\right] - \frac{1}{2}R_{qsis}(\tau)\left[\sin 2\pi f_c\tau + \sin 2\pi f_c(2t+\tau)\right]$$

Autocorrelació i correlació creuada de les components en fase i quadratura d'un procés pas banda n(t) estacionari:

$$R_{i_n}(\tau) = R_n(\tau)\cos 2\pi f_c\tau + \hat{R}_n(\tau) sen 2\pi f_c\tau = R_{q_n}(\tau)$$

$$R_{iq}(\tau) = R_n(\tau) sen 2\pi f_c\tau - \hat{R}_n(\tau)\cos 2\pi f_c\tau = -R_{iq}(\tau)$$

Densitat espectral de potència de les components en fase i quadratura d'un procés pas banda n(t) estacionari i densitats espectrals de potència creuades:

$$S_{in}(f) = S_n(f-f_c)U(-f+f_c) + S_n(f+f_c)U(f+f_c) = S_{qn}(f)$$

$$S_{iq}(f) = jS_n(f+f_c)U(f+f_c) - jS_n(f-f_c)U(-f+f_c) = S_{qi}(f)$$

Equacions dels Filtres Terminals Òptims:

$$\left|H_{R_{FTO}}(f)\right|^2 = \frac{1}{\left|H_c(f)\right|}\sqrt{\frac{S_x(f)}{S_n(f)}}, \qquad \left|H_{T_{FTO}}(f)\right|^2 = \frac{\alpha}{\left|H_c(f)\right|}\sqrt{\frac{S_n(f)}{S_x(f)}},$$

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{FTO} = \frac{S_T P_x}{\left|\int \frac{\sqrt{S_n(f)}\sqrt{S_x(f)}}{H_c(f)}\,df\right|^2}$$

EJERCICIO 1:

(A)

a) $\rightarrow E\{z(t)\} = E\{x(t) - \hat{y}(t)\cos[2\pi 2Bt] + y(t)\,\text{sen}\,[2\pi 2Bt]\} =$

$= E\{x(t)\} - E\{\hat{y}(t)\cos[2\pi 2Bt]\} + E\{y(t)\}\,\text{sen}\,[2\pi Bt]\} = [\text{sen}[\cdot] \text{ y } \cos[\cdot] \text{ DETER.}] =$

$= [x(t) \text{ e } y(t) \text{ DE MEDIA NULA}] = \cancel{E\{x(t)\}}^{\emptyset} - E\{\hat{y}(t)\}\cos[2\pi 2Bt] + \cancel{E\{y(t)\}}^{\emptyset}\,\text{sen}\,[2\pi 2Bt]$

$= [\hat{y}(t) = y(t) * h_a(t) \text{ con } h_a(t) \text{ DETERMINISTA}] = -E\{y(t) * h_a(t)\}\cos[2\pi 2Bt] =$

$= [\cancel{E\{y(t)\}}^{\emptyset} * h_a(t)] \cdot \cos[2\pi 2Bt] = \emptyset. \Rightarrow \boxed{E\{z(t)\} = \emptyset}$

$\rightarrow E\{z(t+\tau)\,z(t)\} = E\{[x(t+\tau) - \hat{y}(t+\tau)\cos[2\pi 2B(t+\tau)] + y(t+\tau)\,\text{sen}\,[2\pi 2B(t+\tau)]] \cdot$

$\cdot [x(t) - \hat{y}(t)\cos[2\pi 2Bt] + y(t)\,\text{sen}\,[2\pi 2Bt]]\} =$

$= E\{x(t+\tau)x(t)\} - E\{x(t+\tau)\hat{y}(t)\cos[2\pi 2Bt]\} + E\{x(t+\tau)y(t)\,\text{sen}\,[2\pi 2Bt]\} +$

$- E\{\hat{y}(t+\tau)\cos[2\pi 2B(t+\tau)]\,x(t)\} + E\{y(t+\tau)\,\text{sen}\,[2\pi 2B(t+\tau)]\,x(t)\} +$

$+ E\{[-\hat{y}(t+\tau)\cos[2\pi 2B(t+\tau)] + y(t+\tau)\,\text{sen}\,[2\pi 2B(t+\tau)]][-\hat{y}(t)\cos[2\pi 2Bt] + y(t)\,\text{sen}\,[2\pi 2Bt]]\}$

$=$ [Los términos con $E\{x(\cdot)\,y(t)\}$ se anulan por ser independientes y de media nula] $= R_x(t+\tau, t) + R_u(t+\tau, t)$

Donde $u(t) = -\hat{y}(t)\cos[2\pi 2Bt] + y(t)\,\text{sen}\,[2\pi 2Bt]$ ← SEÑAL PASO BANDA.

ESTA SEÑAL $u(t)$ TIENE ⇒ COMPONENTE EN FASE $i_u(t) = -\hat{y}(t)$

⇒ COMPONENTE EN CUADRATURA $q_u(t) = -y(t)$

UTILIZANDO AHORA LAS EXPRESIONES DEL FORMULARIO:

$$R_{iu}(\tau) = E\{[-\hat{y}(t+\tau)][-\hat{y}(t)]\} = R_y(\tau)$$

$$R_{qu}(\tau) = E\{[-y(t+\tau)][-y(t)]\} = R_y(\tau)$$

$$R_{iq}(\tau) = E\{[-\hat{y}(t+\tau)][-y(t)]\} = E\{\hat{y}(t+\tau)\,y(t)\} = R_{\hat{y}y}(\tau) = \hat{R}_y(\tau)$$

$$R_{qi}(\tau) = E\{[-y(t+\tau)][-\hat{y}(t)]\} = E\{y(t+\tau)\,\hat{y}(t)\} = R_{y\hat{y}}(\tau) = -\hat{R}_y(\tau)$$

Y SUBSTITUYENDO: $(f_c = 2B)$

$$R_U(t+\tau,t) = \frac{1}{2}R_y(\tau)\left[\cos[2\pi f_c\tau] + \cos[2\pi f_c(2t+\tau)]\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}R_y(\tau)\left[\cos[2\pi f_c\tau] - \cos[2\pi f_c(2t+\tau)]\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\hat{R}_y(\tau)\left[\operatorname{sen}[2\pi f_c\tau] - \operatorname{sen}[2\pi f_c(2t+\tau)]\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\hat{R}_y(\tau)\left[\operatorname{sen}[2\pi f_c\tau] + \operatorname{sen}[2\pi f_c(2t+\tau)]\right] =$$

$$= R_y(\tau)\cos[2\pi f_c\tau] + \hat{R}_y(\tau)\operatorname{sen}[2\pi f_c\tau] = R_U(\tau)$$

POR TANTO:

$$\boxed{R_Z(t+\tau,t) = R_x(\tau) + R_y(\tau)\cos[2\pi f_c\tau] + \hat{R}_y(\tau)\operatorname{sen}[2\pi f_c\tau]}$$

Y ES UN PROCESO ESTACIONARIO. $\boxed{R_Z(t+\tau,t) = R_Z(\tau)}$

→ PARA CALCULAR LA DENSIDAD ESPECTRAL SE DEBE HACER LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE $R_Z(\tau)$:

c

$$S_z(f) = TF[R_z(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau =$$

$$= S_x(f) + S_y(f) * \left[\frac{1}{2}\delta(f+f_c) + \frac{1}{2}\delta(f-f_c)\right] +$$

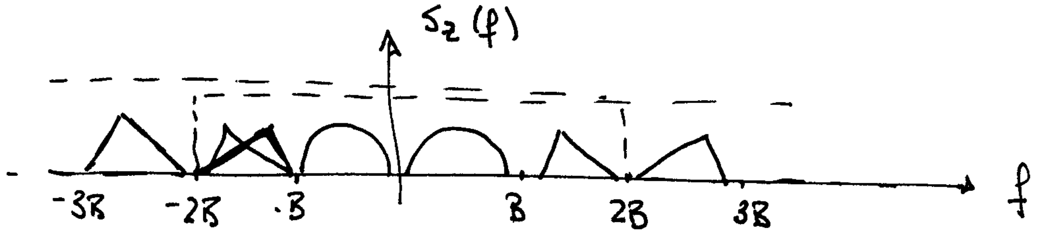
$$+ S_y(f)\cdot[-j\,\mathrm{sign}[f]] * \left[-\frac{1}{2j}\delta(f+f_c) + \frac{1}{2j}\delta(f-f_c)\right] =$$

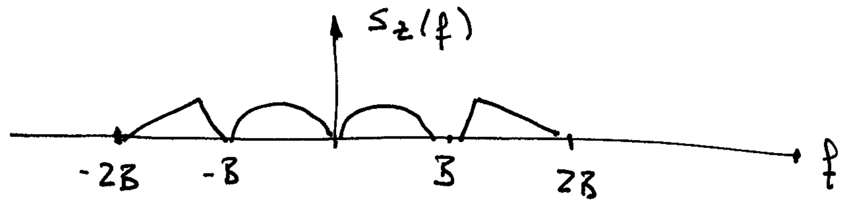
$$\mathrm{sign}[f-f_c]$$

$$= S_x(f) + \frac{1}{2}S_y(f+f_c) + \frac{1}{2}S_y(f-f_c) + \frac{1}{2}S_y(f+f_c)\,\mathrm{sign}[f+f_c] - \frac{1}{2}S_y(f-f_c)$$

$$= S_x(f) + \frac{1}{2}S_y(f+f_c)\left[1+\mathrm{sign}[f+f_c]\right] + \frac{1}{2}S_y(f-f_c)\left[1-\mathrm{sign}[f-f_c]\right] =$$

$$= \boxed{S_x(f) + S_y(f+f_c)\,u(f+f_c) + S_y(f-f_c)\,u(-f+f_c) = S_z(f)}$$





⇒ LA POTENCIA DE LA SEÑAL SE PUEDE CALCULAR COMO:

$$P_z = R_z(0) = R_x(0) + R_y(0)\cos[0] + \hat{R}_y[0]\,\mathrm{sen}[0]$$

$$\boxed{P_z = R_x(0) + R_y(0) = P_x + P_y}$$

D

b)

$$s(t)= A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int z(\lambda)\,d\lambda\right]$$

PARA TRANSMITIR ESTA SEÑAL, CON $f_\Delta = 75\,\text{KHz}$ Y SABIENDO QUE $z(t)\big|_{MAX} = 1$, SE DEBE UTILIZAR UN ANCHO DE BANDA:

$$D = \frac{75}{30} = 2,5 \qquad (B_z = 30\,\text{kHz}) \Rightarrow B_T = 2\,[D+2]\,B_z = 270\,\text{kHz}$$

ESTE SERÁ EL ANCHO DE BANDA DEL FILTRO EN RECEPCIÓN $H_1(f)$ Y, POR TANTO, LA POTENCIA DE RUIDO TRAS EL FILTRO:

$$N_R = \int S_w(f)\,|H_1(f)|^2\,df = \frac{N_0}{2}\cdot 2B_T = 3\cdot 10^{-8}\cdot 270\cdot 10^{3}$$

PARA PODER DEMODULAR CORRECTAMENTE SE DEBE TENER 10 dB DE S/N EN RECEPCIÓN. A SU VEZ, LA POTENCIA DE SEÑAL ES

$$S_R = \frac{A_c^2}{2}\cdot 10^{-5}$$ YA QUE SE TIENE UNA ATENUACIÓN DE

50dB Y LA POTENCIA DE UNA SEÑAL DE FM ES:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right] = A_c\left[\cos\phi(t)\cos[2\pi f_c t] - \sin\phi(t)\sin[2\pi f_c t]\right]$$

$$P_s = \frac{P_i + P_q}{2} = \frac{E\{A_c^2\cos^2\phi(t)\} + E\{A_c^2\sin^2\phi(t)\}}{2} = \frac{A_c^2}{2}\,E\{\cos^2\phi(t) + \sin^2\phi(t)\} = \frac{A_c^2}{2}$$

DE ESTA MANERA:

$$\frac{\frac{A_c^2}{2}\cdot 10^{-5}}{3\cdot 10^{-8}\cdot 270\cdot 10^{3}} = 10 \Rightarrow A_c^2 = 2\cdot 10^{5}\cdot 3\cdot 10^{-8}\cdot 270\cdot 10^{4}$$

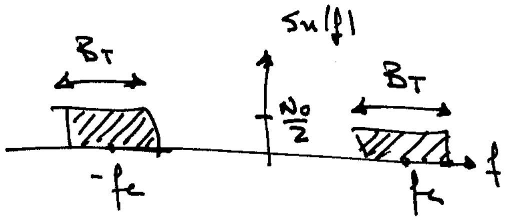
$$A_c^2 = 28.200 \Rightarrow \boxed{A_c = \sqrt{28.200} \simeq 168}$$

---

c) EL FILTRO $H_2(f)$ TRAS EL DEMODULADOR ELIMINA TODAS LAS COMPONENTES DE RUIDO FUERA DEL ANCHO DE BANDA DE LA SEÑAL $B_2 = 2B$

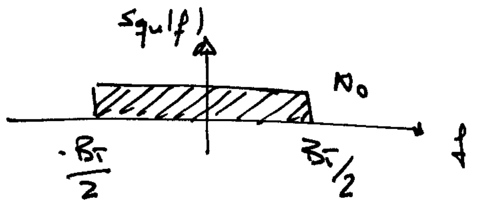
COMO LA COMPONENTE DEL RUIDO ES $\frac{1}{2\pi A_c}\frac{d q_n(t)}{dt}$ A LA SALIDA DEL DEMODULADOR, SE TIENE:

$$S_n(f) = S_w(f)\,|H_R(f)|^2 = S_w(f)\,|H_1(f)|^2$$



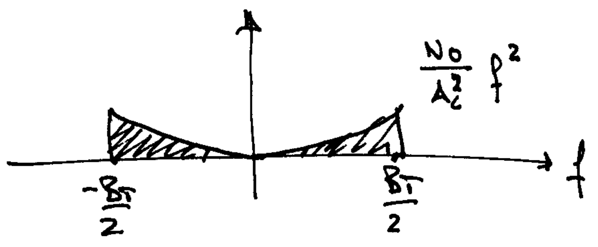
SEGÚN EL FORMULARIO: $S_{q_n}(f) = S_n(f-f_c)\,u(-f+f_c) + S_n(f+f_c)\,u(f+f_c)$

Y, POR TANTO:



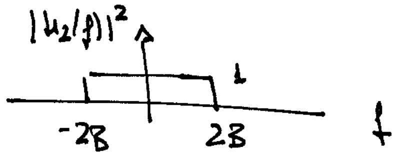
A LA SALIDA DEL DEMODULADOR LA SEÑAL $\frac{1}{2\pi A_c}\frac{d q_n(t)}{dt}$ TIENE DENSIDAD ESPECTRAL

$$\frac{1}{[2\pi A_c]^2}\, S_{q_n}(f)\,|+j2\pi f|^2$$

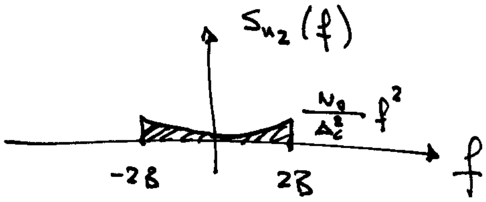


F

Y TRAS EL FILTRO $H_2(f)$



SE TIENE FINALMENTE



LA POTENCIA DE RUIDO ES POR TANTO:

$$N_{D_2} = \int S_{u_2}(f)\,df = \int_{-2B}^{2B} \frac{N_0}{A^2} f^2\,df = \frac{N_0}{A^2}\,\frac{1}{3}\,f^3 \Big|_{-B_z}^{B_z} = \frac{2}{3}\,\frac{N_0}{A^2}\,B_z^3$$

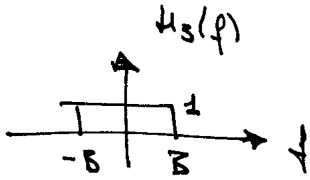
MIENTRAS QUE LA POTENCIA DE SEÑAL:

$$S_{D_2} = E\{x_D^2(t)\} = E\{f_\Delta^2 z^2(t)\} = f_\Delta^2 P_z$$

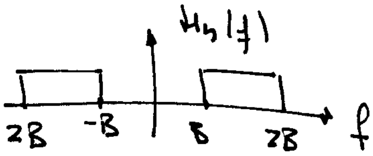
$$\frac{S}{N}\Big|_{D_2} = \frac{3}{2}\,\frac{A^2 f_\Delta^2}{N_0 B_z^3} P_z = 3\,\frac{A^2}{2}\,\frac{f_\Delta^2}{B_z^2}\,\frac{P_z}{N_0 B_z} = 3 S_R D^2 \frac{P_z}{N_0 B_z}$$

d) LOS FILTROS DE LA SEGUNDA ETAPA DEBEN:

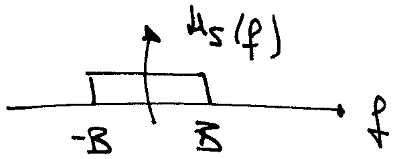
$H_3(f) \to$ OBTENER $x(t)$ SEPARADAMENTE



$H_4(f) \to$ ELIMINAR $x(t)$

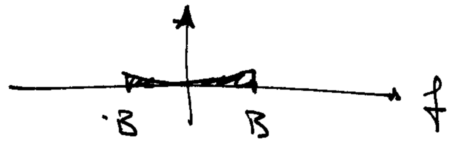


$H_5(f) \to$ ELIMINAR LA RÉPLICA DE $y(t)$ PRESENTE A $2f_c$



EL RUIDO QUE SE RECUPERA EN CADA CASO SERÁ

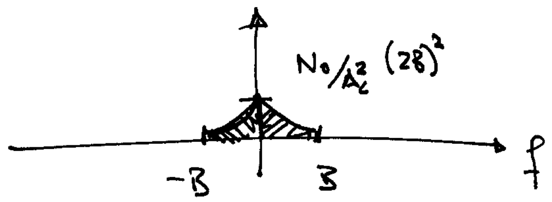
TRAS $H_3(f)$ $\Rightarrow$ $S_{u_2}(f)\cdot|H_3(f)|^2$



TRAS $H_5(f)$ $\Rightarrow$ COMO ES TRAS UN DEMODULADOR COHERENTE QUE RECUPERA LA COMPONENTE EN CUADRATURA DE LA SEÑAL, SE TENDRÁ LA COMPONENTE EN CUADRATURA DEL RUIDO A LA ENTRADA:

$$S_{qu_2}(f) = S_{u_2}(f-f_c)\,u(-f+f_c) + S_{u_2}(f+f_c)\,u(f+f_c)$$

CON $f_c = 2B$ Y, POR TANTO:



c) EN LA RAMA SUPERIOR: $\longrightarrow$ LA SEÑAL RECUPERADA ES

$$x_D(t) = f_\Delta\, x(t) \Rightarrow S_D = E\{x_D^2(t)\} = E\{f_\Delta^2\, x^2(t)\} = f_\Delta^2 P_x$$

$$N_D = \int S_{u_2}(f)\,|H_3(f)|^2\,df = \int_{-B}^{B} \frac{N_0}{A^2} f^2\,df = \frac{N_0}{A^2}\,\frac{2}{3}\,B^3$$

$$\left.\frac{S_D}{N_D}\right|_{sup} = \frac{f_\Delta^2 P_x}{N_0 B^3}\,\frac{3A^2}{2} = 3\,\frac{f_\Delta^2 P_x}{N_0 B^3}\,SR$$

EN LA RAMA INFERIOR: LA SEÑAL RECUPERADA $x_D(t) = f_\Delta\, y(t)$

$$S_D = E\{x_D^2(t)\} = E\{f_\Delta^2\, y^2(t)\} = f_\Delta^2 P_y$$

$$N_D = \int S_{q_{u2}}(f)\,df = 2\int_B^{2B} \frac{N_0}{A^2} f^2\,df = 2\,\frac{N_0}{A^2}\,\frac{f^3}{3}\Big|_B^{2B} =$$

$$= 2\,\frac{N_0}{A^2}\left[\frac{8B^3}{3} - \frac{B^3}{3}\right] = 2\,\frac{N_0}{A^2}\,\frac{7B^3}{3}$$

POR TANTO:
$$\frac{S}{N}\Big|_{D_{INF}} = \frac{f_\Delta^2 P_y}{N_0 B^3}\,\frac{3A^2}{7\cdot 2} = \frac{3}{7}\,\frac{f_\Delta^2 P_y}{N_0 B^3}\,S_R$$

SUPONIENDO QUE $P_x = P_y$ SE TIENE $\frac{S}{N}\Big|_{D_x} = 7\,\frac{S}{N}\Big|_{D_y}$

DEBIDO A LA FORMA PARABÓLICA DEL RUIDO YA QUE NI LA TRANSMISIÓN EN BANDA BASE NI EN BANDA LATERAL ÚNICA PENALIZAN LA $S/N|_D$.

Problema 3. Començar en un full nou

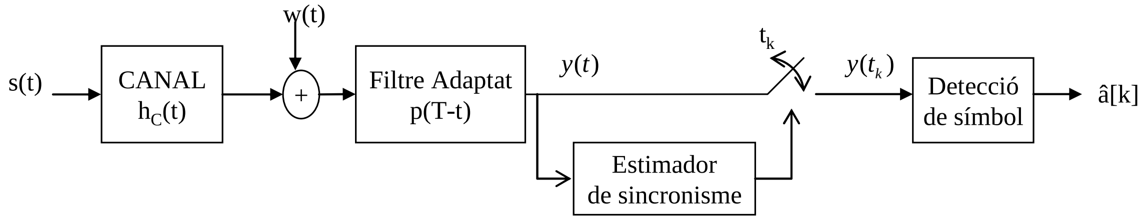
Consideri un sistema de comunicació digital que transmet el senyal PAM

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]\cdot p(t-nT)$$

on $a[k]\in\{\pm A\}$ equiprobables, T és el període de símbol i el pols conformador utilitzat és

$$p(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\prod\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

El senyal PAM es transmet per un canal ideal amb atenuació L i retard t_c, i amb un soroll $w(t)$ additiu, estacionari, gaussià, de mitjana nul·la, densitat espectral de potència $S_w(f)=\frac{N_0}{2}$ i incorrelat amb el senyal transmès. L'esquema del receptor és el següent.



a) Indiqueu l'expressió del senyal detectat, $y(t)$, en funció de l'autocorrelació del pols.

$$y(t)=\left[\tfrac{1}{\sqrt{L}}s(t-t_c)+w(t)\right]*p(T-t)=\tfrac{1}{\sqrt{L}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]\cdot p(t-nT)*p(T-t)+\underbrace{w(t)*p(T-t)}_{n(t)}=$$

$$=\tfrac{1}{\sqrt{L}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]\cdot R_p(t-t_c-T-nT)+n(t) \qquad (0)$$

b) Suposant que el sistema de sincronisme no estima correctament l'instant de mostratge de manera que $t_k=t_c+(k+1)T+0.2T$, obteniu l'expressió de $y(t_k)$ identificant el terme de senyal útil, de ISI i de soroll. Caracteritzeu el soroll resultant. **Nota:** un dibuix de l'autocorrelació del pols pot ser d'utilitat.

$$y(t_k)=y(t)\big|_{t_k=t_c+(k+1)T+0.2T}\overset{\substack{\text{Substituint a (0)}\\ \downarrow}}{=}\tfrac{1}{\sqrt{L}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]\cdot R_p((k-n)T+0.2T)+n(t_k)$$

$$=\left\{R_p(t)=\Lambda\left(\tfrac{t}{2T}\right)\right\}=\frac{a[k]}{\sqrt{L}}R_p(0.2T)+\frac{a[k+1]}{\sqrt{L}}R_p(-0.8T)+n(t_k)= \qquad (1)$$

$$=\underbrace{\frac{a[k]}{\sqrt{L}}0.8}_{\text{Senyal útil}}+\underbrace{\frac{a[k+1]}{\sqrt{L}}0.2}_{ISI}+\underbrace{n(t_k)}_{Soroll}$$

El procés aleatori (PA) n(t) és el resultat de filtrar w(t) amb un SLI. Llavors, per ser w(t) un PA estacionari, gaussià i de mitjana nul·la, n(t) també és gaussià, estacionari i de mitjana nul·la. A més la densitat espectral de potència del PA n(t) és

$$S_n(f)=S_w(f)\,|P(f)|^2=\tfrac{N_0}{2}|P(f)|^2 \qquad \text{on } P(f)=TF\left[p(t)\right]$$

La mostra de soroll en l'instant t_k és una variable aleatòria gaussiana $n(t_k)\sim N(0,\sigma_n^2)$

$$\sigma_n^2=E\left[\left|n(t_k)-E\left[n(t_k)\right]\right|^2\right]=E\left[\left|n(t_k)\right|^2\right]\overset{\substack{n(t)\text{ és estacionari}\\ \downarrow}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}S_n(f)\,df=\tfrac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|P(f)|^2\,df$$

$$\overset{\substack{Parseval\\ \downarrow}}{=}\tfrac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|p(t)|^2\,dt=\tfrac{N_0}{2}E_p=\left\{E_p=1\right\}=\tfrac{N_0}{2}$$

c) Suposant que el llindar del sistema detector de símbol està a l'origen, $\gamma = 0$, trobeu la probabilitat d'error en detecció i expressi-la en funció de la E_b / N_0.

Notació: $a[k] = a_k$ *, error= er, i* $y(t_k) = y_k$ *,* P_{er} *=Probabilitat d'error*

La probabilitat d'error global és igual a

$$P_{er} = P(er / a_k = A) \cdot P(a_k = A) + P(error / a_k = -A) \cdot P(a_k = -A) \overset{\text{símbols equiprobables}}{\downarrow \atop =} \qquad (2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[P(er / a_k = A) + P(error / a_k = -A)\right]$$

Les probabilitats d'error condicionades són

$$P(er / a_k = A) =$$
$$P(er / a_k = A, a_{k+1} = A) \cdot P(a_{k+1} = A) + P(er / a_k = A, a_{k+1} = -A) \cdot P(a_{k+1} = -A) = \qquad (3)$$
$$\tfrac{1}{2}\left[P(er / a_k = A, a_{k+1} = A) + P(er / a_k = A, a_{k+1} = -A)\right]$$

$$P(er / a_k = -A) = \{\text{Igual que a (3)}\} = \qquad (4)$$
$$\tfrac{1}{2}\left[P(er / a_k = -A, a_{k+1} = A) + P(er / a_k = -A, a_{k+1} = -A)\right]$$

Anem a trobar cada probabilitat d'error per separat

(c.1) $P(er / a_k = A, a_{k+1} = A)$. *Quan* $a_k = A, a_{k+1} = A$, *substituint a (1) tenim que* $y_k = \dfrac{A}{\sqrt{L}} + n(t_k) \sim N(\dfrac{A}{\sqrt{L}}, \sigma_n^2)$ *i la* P_{er} *suposant que el llindar està a l'origen és:*

$$P(er / a_k = A, a_{k+1} = A) =$$
$$= P(y_k < 0 / a_k = A, a_{k+1} = A) = \left\{ y_k = \frac{A}{\sqrt{L}} + n(t_k) \sim N(\frac{A}{\sqrt{L}}, \sigma_n^2) \right\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_k - A/\sqrt{L}}{\sigma_n}\right)^2} dy_k = \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{y_k - A/\sqrt{L}}{\sigma_n} \\ d\lambda = \frac{1}{\sigma_n} dy_k \end{array} \right\} = \qquad (5)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{A/\sqrt{L}}{\sigma_n}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} d\lambda \overset{\text{Per simetria}}{\downarrow \atop =} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{A/\sqrt{L}}{\sigma_n}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} d\lambda = Q\left(\frac{A}{\sigma_n \sqrt{L}}\right)$$

(c.2) $P(er / a_k = A, a_{k+1} = -A)$. *Quan* $a_k = A, a_{k+1} = -A$, *substituint a (1) tenim que* $y_k = 0.6\dfrac{A}{\sqrt{L}} + n(t_k) \sim N(\dfrac{A}{\sqrt{L}}, \sigma_n^2)$ *i la probabilitat d'error amb* $\gamma = 0$ *és:*

$$P(er / a_k = A, a_{k+1} = -A) =$$
$$= P(y_k < 0 / a_k = A, a_{k+1} = -A) = \left\{ y_k = \frac{0.6A}{\sqrt{L}} + n(t_k) \sim N(\frac{0.6A}{\sqrt{L}}, \sigma_n^2) \right\} = (6)$$
$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_k - 0.6A/\sqrt{L}}{\sigma_n}\right)^2} dy_k \overset{\text{Fent el canvi de variable igual que en (5)}}{\downarrow \atop =} Q\left(\frac{0.6A}{\sigma_n \sqrt{L}}\right)$$

(c.3) $P(er/a_k=-A,a_{k+1}=-A)$. *Quan* $a_k=-A,a_{k+1}=-A$, *substituint a (1) tenim que* $y_k=-\frac{A}{\sqrt{L}}+n(t_k)\sim N(-\frac{A}{\sqrt{L}},\sigma_n^2)$ *i la probabilitat d'error amb* $\gamma=0$ *és:*

$$P(er/a_k=-A,a_{k+1}=-A)=$$
$$=P(y_k>0/a_k=-A,a_{k+1}=-A)=\left\{y_k=-\frac{A}{\sqrt{L}}+n(t_k)\sim N(-\frac{A}{\sqrt{L}},\sigma_n^2)\right\}=$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_k+A/\sqrt{L}}{\sigma_n}\right)^2}dy_k=\left\{\begin{array}{c}\lambda=\dfrac{y_k+A/\sqrt{L}}{\sigma_n}\\ d\lambda=\frac{1}{\sigma_n}dy_k\end{array}\right\}= \tag{7}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{A/\sqrt{L}}{\sigma_n}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}d\lambda=Q\left(\frac{A}{\sigma_n\sqrt{L}}\right)$$

(c.4) $P(er/a_k=-A,a_{k+1}=+A)$. *Quan* $a_k=-A,a_{k+1}=+A$, *aleshores substituint a (1) tenim* $y_k=-\frac{0.6A}{\sqrt{L}}+n(t_k)\sim N(-\frac{0.6A}{\sqrt{L}},\sigma_n^2)$ *i la probabilitat d'error amb* $\gamma=0$ *és:*

$$P(er/a_k=-A,a_{k+1}=A)=$$
$$=P(y_k>0/a_k=-A,a_{k+1}=A)=\left\{y_k=-\frac{0.6A}{\sqrt{L}}+n(t_k)\sim N(-\frac{0.6A}{\sqrt{L}},\sigma_n^2)\right\}= \tag{8}$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_k+0.6A/\sqrt{L}}{\sigma_n}\right)^2}dy_k\overset{\substack{\text{Fent el canvi de variable}\\ \text{igual que abans en (7)}\\ \downarrow}}{=}Q\left(\frac{0.6A}{\sigma_n\sqrt{L}}\right)$$

Substituint (5) i (6) a l'equació (3) obtenim

$$P(er/a_k=A)=\tfrac{1}{2}\left[P(er/a_k=A,a_{k+1}=A)+P(er/a_k=A,a_{k+1}=-A)\right]=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[Q\left(\frac{A}{\sigma_n\sqrt{L}}\right)+Q\left(\frac{0.6A}{\sigma_n\sqrt{L}}\right)\right] \tag{9}$$

Substituint (7) i (8) a l'equació (4) obtenim

$$P(er/a_k=-A)=\tfrac{1}{2}\left[P(er/a_k=-A,a_{k+1}=A)+P(er/a_k=-A,a_{k+1}=-A)\right]=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[Q\left(\frac{A}{\sigma_n\sqrt{L}}\right)+Q\left(\frac{0.6A}{\sigma_n\sqrt{L}}\right)\right] \tag{10}$$

Substituint (9) i (10) a l'equació (2) tenim que la probabilitat d'error és

$$P_{er}=\tfrac{1}{2}\left[P(er/a_k=A)+P(error/a_k=-A)\right]=\tfrac{1}{2}\left[Q\left(\frac{A}{\sigma_n\sqrt{L}}\right)+Q\left(\frac{0.6A}{\sigma_n\sqrt{L}}\right)\right] \tag{11}$$

Ara cal expressar-ho en funció de la EbNo. Ho farem en funció de la EbNo en transmissió. Sabem que :

$$E_b=R_a(0)\cdot E_p=(\tfrac{1}{2}A^2+\tfrac{1}{2}A^2)\cdot E_p=\left\{E_p=1\right\}=A^2 \tag{12}$$
$$\sigma_n=\sqrt{N_0/2} \tag{13}$$

Finalment, substituint (12) i (13) a l'equació (11) obtenim,

$$\boxed{P_{er}=\tfrac{1}{2}\left[Q\left(\sqrt{\frac{2}{L}\frac{E_b}{N_0}}\right)+Q\left(0.6\sqrt{\frac{2}{L}\frac{E_b}{N_0}}\right)\right]}$$

d) Per a resoldre aquest apartat, assumiu que L=1. Sabent que la probabilitat d'error quan no hi ha error de sincronisme és $Q(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}})$, compareu les dues probabilitats d'error per $\frac{E_b}{N_0}=4,5$. Entregueu la gràfica de $Q(x)$ que se li proporciona si la utilitza.

Probabilitat d'error sense error de sincronisme:

$$P_{er}=Q\left(\sqrt{\frac{2}{L}\frac{E_b}{N_0}}\right)=\begin{Bmatrix}L=1\\ E_b/N_0=4.5\end{Bmatrix}\overset{\substack{\text{Figura Q(x)}\\ \downarrow}}{=}Q(3)\approx 1.5\cdot 10^{-3}$$

Probabilitat d'error amb error de sincronisme:

$$P_{er}=\tfrac{1}{2}\left[Q\left(\sqrt{\frac{2}{L}\frac{E_b}{N_0}}\right)+Q\left(0.6\sqrt{\frac{2}{L}\frac{E_b}{N_0}}\right)\right]=\begin{Bmatrix}L=1\\ E_b/N_0=4.5\end{Bmatrix}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[Q(3)+Q(1.8)\right]\overset{\substack{\text{Figura Q(x)}\\ \downarrow}}{\square}\tfrac{1}{2}\left[1.5\cdot 10^{-3}+3\cdot 10^{-2}\right]=1.5\cdot 10^{-2}$$

La probabilitat d'error resultant és 10 cops major com a conseqüència de la ISI que provoca l'error en el sincronisme.

Nota:

$$Q(x)=\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}d\lambda$$