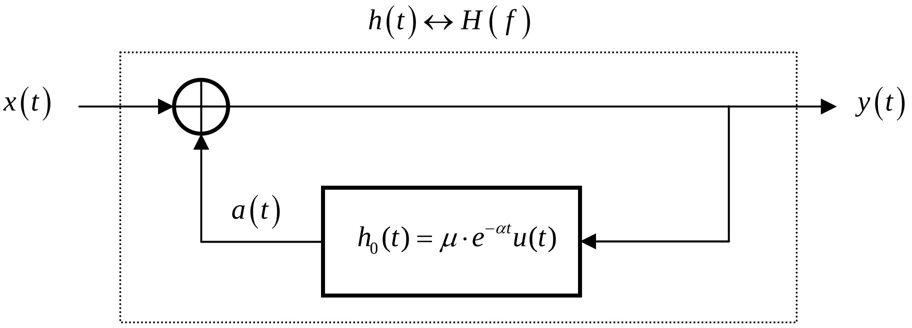
Senyals i Sistemes I **Exàmen Final P07: 28 de Juny de 2007** **Duració: 3h**

Publicació Notes Provisionals: 4-7-07 (matí) **Al.legacions: 5-7-07 (fins 12h)** **Publicació Notes Definitives: 5-7-07**

No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

Exercici 1

Un sistema lineal i invariant ve definit pel diagrama de blocs de la figura (α>0) :



Sistema global amb resposta impulsional h(t)

Es demana:

a) Determini la resposta freqüencial H(f) del sistema de la figura, on x(t) i y(t) constitueixen l'entrada i sortida del sistema, respectivament. Expressi-ho en funció dels paràmetres (μ, α).

b) Determini la resposta impulsional h(t) del sistema de la figura, especificant quins valors han de tenir i/o quines relacions han de complir els paràmetres (μ ,α) perquè h(t) verifiqui la propietat d'estabilitat.

c) Determini la resposta impulsional g(t) del sistema invers de la figura i dibuixi el seu diagrama de blocs en funció de $h_0(t)$. Es valorarà la simplicitat del procediment.

d) A partir dels resultats anteriors, verifiqui operant *exclusivament* en el domini temporal que g(t) és efectivament la resposta impulsional del sistema invers de la figura.

e) (e.1) Calculi l'energia de $h_0(t)$, expressant-ho en funció dels paràmetres (μ, α). (e.2) Respongui *Vertader* o *Fals* a la següent afirmació: "*qualsevol sistema LI estable té necessàriament una resposta impulsiona d'energia finita*" i tot seguit aporti un raonament concís però precís i complet d'aquest judici. Discuteixi aquesta afirmació general en el context del sistema global de la figura, destacant-ne els punts rellevants.

Exercici 2

a) Tres "experts" mundials en modulacions lineals discutien sobre les restriccions a imposar a la freqüència portadora f_c. L'un deia que si hem de modular un senyal x(t) de banda limitada de freqüència màxima B Hz. amb una portadora f_c, és a dir que volem generar $x_m(t)=x(t)\cos 2\pi f_c t$, per poder recuperar correctament x(t) el valor de la portadora ha de ser com a mínim B ($f_c \geq B$). L'altre deia que, tal com va demostrar Nyquist, la freqüència mínima havia de ser 2B ($f_c \geq 2B$). El tercer, a part de ser més mal educat i qüestionar la capacitat intel·lectual dels seus contertulians, deia que, si el filtre del desmodulador era ideal, no hi havia cap restricció sobre la elecció de la portadora. A qui dóna la raó? Doni arguments convincents als altres dos "experts".

b) Però la cosa no va acabar aquí. Aquestes tres persones, discutidores de mena, es van enganxar, també, quan un va afirmar que utilitzava un analitzador d'espectres (calculava el mòdul de la transformada de Fourier) per poder observar la presència o no d'una sinusoide de freqüència de 1 MHz , dins d'un senyal format per la suma de diferents tons. Però que tenia un problema. Quan es presentava el to més proper, que era de 1.1 MHz., i que a més a més tenia una potencia similar a la del to de 1MHz., no hi havia manera de saber si hi havia presència o no de la component desitjada. El "savi" mal educat li va dir que no aniria enlloc si no disposava d'uns quants períodes de la component que volia observar, que n'agafés 20, que potser amb pocs menys ja en tindria prou, però que amb 20 segur que ho resolia. L'altre personatge també hi va dir la seva. Li va suggerir que abans d'utilitzar l'analitzador multipliqués el senyal observat per un senyal triangular. Torni a intervenir en la discussió de manera convincent.

c) I ja posats a barallar-se, també es van discutir amb la següent sentència: "La transformada de Fourier és una transformació biunívoca. Per tant, per guardar un senyal x(t) també podria emmagatzemar-se X(f) en comptes de x(t). Això sí, necessitaríem guardar tot X(f), no només certs valors". L'un, amb un to molt despectiu, va negar rotundament aquesta afirmació dient que fallava per la hipòtesi inicial. L'altre deia que l'afirmació era correcta, que només faltaria! que amb una informació parcial de X(f) no hi ha cap manera de recuperar tot x(t). El tercer contradeia al segon tot afirmant que si el senyal era de duració finita no li calia guardar tot X(f), en tenia prou amb algunes mostres de X(f). Ajudi'ls. Demostri qui té raó, si és que hi ha algú que la té.

d) Després de tot això, els tres aspirants a membres de l'UIT (Unió Internacional de les Telecomunicacions) ja s'han conscienciat de les seves mancances (no havien estudiat Telecos). Ara ja no discuteixen. Ja li pregunten directament a vostè. Volien saber les diferents maneres de calcular la potència mitjana i la densitat espectral d'un senyal periòdic. Sigui $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_b(t-nT_0)$, doni l'expressió per al càlcul de la potència mitjana de *x(t)* a partir de:

d.1) *x(t)*

d.2) un període de *x(t)*

d.3) els coeficients del desenvolupament en sèrie de *x(t)*

d.4) la densitat espectral de *x(t)*

d.5) l'autocorrelació de *x(t)*

Doni l'expressió per al càlcul de la densitat espectral a partir de:

d.6) l'autocorrelació de *x(t)*

d.7) els coeficients del desenvolupament en sèrie de *x(t)*

d.8) la Transformada de Fourier de $x_b(t)$

Exercici 3

Sigui un filtre passa-baixes h(t) real, causal i estable que presenta 5 pols $p_i = a_i + jw_i$ on $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$. El filtre ha estat normalitzat de tal manera que presenta una màxima atenuació de 3dB fins a $w_p = 1 = \frac{w_a}{2}$. Sabent que ha estat dissenyat fent ús de l'aproximació Inversa de Chebychev, es demana:

a) Tenint en compte que h(t) és real i estable, determini les relacions de simetria que verifiquen els seus pols p_i i els seus zeros z_r. Dibuixi aproximadament el seu diagrama de pols i zeros (marqui-hi també w_p i w_a).

b) Considerant que una exponencial decreixent té una duració efectiva de 4 vegades la seva constant de temps:

b.1) Estimi justificadament la duració efectiva del transitori present a la seva sortida.

b.2) Com es veuria afectada aquesta duració efectiva al desnormalitzar el filtre fent f_p=3kHz? Justifiqui la seva resposta.

c) Trobi la seva funció característica $F(w^2)$ (ajusti a la banda de pas). Estimi un valor aproximat de $\alpha(w_a)$ (Fagi les aproximacions que consideri oportunes, fent ús de la Nota al final d'aquest exercici).

d) Dibuixi $\alpha(w)$ i $|H(w)|$, indicant-hi tots els valors d'interés. Indiqui-hi tots els valors d'amplitud corresponents als màxims i mínims locals i a l'extrem de la banda de pas (Fagi les aproximacions que consideri oportunes, fent ús de la Nota al final d'aquest exercici).

e) Indiqui la posició i multiplicitat de tots els seus zeros d'atenuació i de transmissió.

f) Donada l'expressió genèrica de la seva funció transferència $H(s) = k.\frac{\prod_{r=1}^{N}(s-z_r)}{\prod_{i=1}^{M}(s-p_i)}$, trobi el valor dels paràmetres N, M, z_r i k (expressi k en funció de $H_{màx}$, z_r i p_i).

Nota: Consideri $\log 2 \approx 0{,}3$, $\log 3 \approx 0{,}5$ i $C_5(x)=16x^5-20x^3+5x$

Solucions als exercicis de l'exàmen final

Exercici 1

a) Determinació de la desposta freqüencial del sistema

$H_0(f) = \dfrac{\mu}{\alpha + j2\pi f}$. A la figura es troba: Y(f) = X(f) + H_0(f)·Y(f) => $H(f) = \dfrac{Y(f)}{X(f)} = \dfrac{1}{1 - H_0(f)} = \dfrac{\alpha + j2\pi f}{\alpha - \mu + j2\pi f}$

b) Determinació de la desposta freqüencial del sistema

Mètode 1

$$H(f) = \frac{\alpha}{\alpha - \mu + j2\pi f} + \frac{j2\pi f}{\alpha - \mu + j2\pi f} \xrightarrow{F^{-1}} h(t) = \alpha \cdot e^{-(\alpha-\mu)t}u(t) + \frac{d}{dt}e^{-(\alpha-\mu)t}u(t) = \mu.e^{-(\alpha-\mu)t}.u(t) + \delta(t)$$

Mètode 2

$$H(f) = 1 + \frac{\mu}{\alpha - \mu + j2\pi f} \xrightarrow{F^{-1}} h(t) = \delta(t) + \mu.e^{-(\alpha-\mu)t}.u(t)$$ => L'estabilitat es verifica quan $(\alpha - \mu) > 0$

c) Determinació de la desposta impulsional del sistema invers

$$G(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{\alpha - \mu + j2\pi f}{\alpha + j2\pi f} = 1 - \frac{\mu}{\alpha + j2\pi f} \xrightarrow{F^{-1}} g(t) = \delta(t) - \mu \cdot e^{-\alpha t}u(t) = \delta(t) - h_0(t)$$

d) Verificació exclusivament en el domini temporal de la desposta impulsional del sistema invers:

Pel sistema invers g(t), convolucionant amb h(t) ha de donar la delta de Dirac:

Mètode 1 (convolució gràfica)

$$\begin{aligned}
g(t) * h(t) &= \left(\mu \cdot e^{-(\alpha-\mu)t}u(t) + \delta(t)\right) * \left(\delta(t) - \mu \cdot e^{-\alpha t}u(t)\right) = \\
&= \mu \cdot \left(e^{-(\alpha-\mu)t}u(t)\right) * \delta(t) - \mu^2 \cdot \left(e^{-(\alpha-\mu)t}u(t)\right) * \left(e^{-\alpha t}u(t)\right) + \delta(t) * \delta(t) - \delta(t) * \left(\mu \cdot e^{-\alpha t}u(t)\right) = \\
&= \mu \cdot e^{-(\alpha-\mu)t}u(t) - \mu^2 \cdot \left(e^{-(\alpha-\mu)t}u(t)\right) * \left(e^{-\alpha t}u(t)\right) + \delta(t) - \mu \cdot e^{-\alpha t}u(t) = \\
g(t) * h(t) &= \delta(t)
\end{aligned}$$

Atès que es verifica :

$$\begin{aligned}
\left(e^{-(\alpha-\mu)t}u(t)\right) * \left(e^{-\alpha t}u(t)\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha-\mu)\tau}u(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau = \\
&= e^{-\alpha t}u(t)\int_0^t e^{\mu\tau}\,d\tau = e^{-\alpha t}u(t)\frac{1}{\mu}\left(e^{\mu t} - 1\right)
\end{aligned}$$

Mètode 2

Per observació directa de la fig.: $x(t) + a(t) = x(t) + h_0(t) * y(t) = y(t)$ => $x(t) = y(t) - h_0(t) * y(t) = \underbrace{\left(\delta(t) - h_0(t)\right)}_{=g(t)} * y(t)$

***e.1*)** Energia de h_0(t),

$$E_{h_0} = \int_{-\infty}^{\infty} |h_0(t)|^2\,dt = \int_0^{\infty} \mu^2 \cdot e^{-2\alpha t}dt = \mu^2 \left.\frac{e^{-2\alpha \cdot t}}{-2\alpha}\right|_0^{\infty} = \mu^2\left(\frac{1 - e^{-2\cdot\alpha\cdot\infty}}{2\alpha}\right) = \{si \cdot \alpha > 0\} = \frac{\mu^2}{2\alpha}$$

e.2) Resposta i justificació a l'afirmació subratllada

l'afirmació és FALSA (per contra-exemple)

La condició necessària i suficient d'un sistema lineal i invariant és que la seva resposta impulsional sigui absolutament integrable. És a dir, que la integral del seu mòdul convergeixi a un valor finit: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = M < \infty$. El fet de que sigui d'energia finita no hi té res a veure.

Com a primer contra-exemple, $h(t) = \delta(t)$ es éstable (absolutament integrable) pèro d'energia infinita (no és quadrat integrable). Com a segon contra-exemple, el mateix sistema de la figura té energia infinita sota les condicions d'estabilitat com es pot veure perquè la seva resposta impulsional conté una delta o bé avaluant l'energia en el domini freqüencial segons l'identitat de Parseval.

Exercici 2

a.1) Efectivament, f_c=B és la mínima freqüència que permet recuperar X(f).

a.2) Al tractar-se d'una modulació, no aplica el Criteri de Nyquist de mostratge. En tot cas, f_c=2B no és la portadora mínima.

a.3) Si que hi ha restriccions, ja que si f_c<B llavors hi haurà solapament d'espectres i no es podrà recuperar x(t).

b.1) En condicions ideals la transformada de Fourier de 2 tons propers serien dues deltes i es podrien distingir amb claredat. Quan es considera un interval d'aquest senyal (enfinestrament rectangular de T segons), llavors la transformada de Fourier són dues sincs i, per tal de poder distingir-ne els seus lòbuls principals, cal que aquests no estiguin solapats. Sota aquesta premisa si que és possible observar els dos tons. Així el primer expert no té raó.

b.2) El savi mal educat té raó, ja que agafant 20 periodes llavors no hi ha solapament de lòbuls principals i es poden distingir els 2 tons.

b.3) El tercer expert no té raó, ja que al considerar enfinestrament triangular l'amplada dels lòbuls principals augmenta al doble i caldria agafar més periodes que abans.

c.1) El primer no té raó, ja que la transformada de Fourier sí que és biunívoca.

c.2) El segon tampoc té raó, ja que no sempre es necessita tota la informació de X(f).

c.3) Si el senyal és de duració finita T_x segons (i centrada a l'origen), llavors un mostratge de X(f) (agafant mostres $X(nf_0)$) equival a peridodificar x(t) amb un periode $1/f_0$. Així es podrà recuperar x(t), a partir d'aquestes mostres de X(f), sempre que $1/f_0>T_x$. Per tant el tercer expert té raó.

d.1) $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$

d.2) $P_x = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} |x(t)|^2 \, dt$

d.3) $P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$

d.4) $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S_x}(f).df$

d.5) $P_x = R_x(0)$

d.6) $S_x(f) = F[R_x(t)]$

d.7) $S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 .\delta(f - n/T_0)$

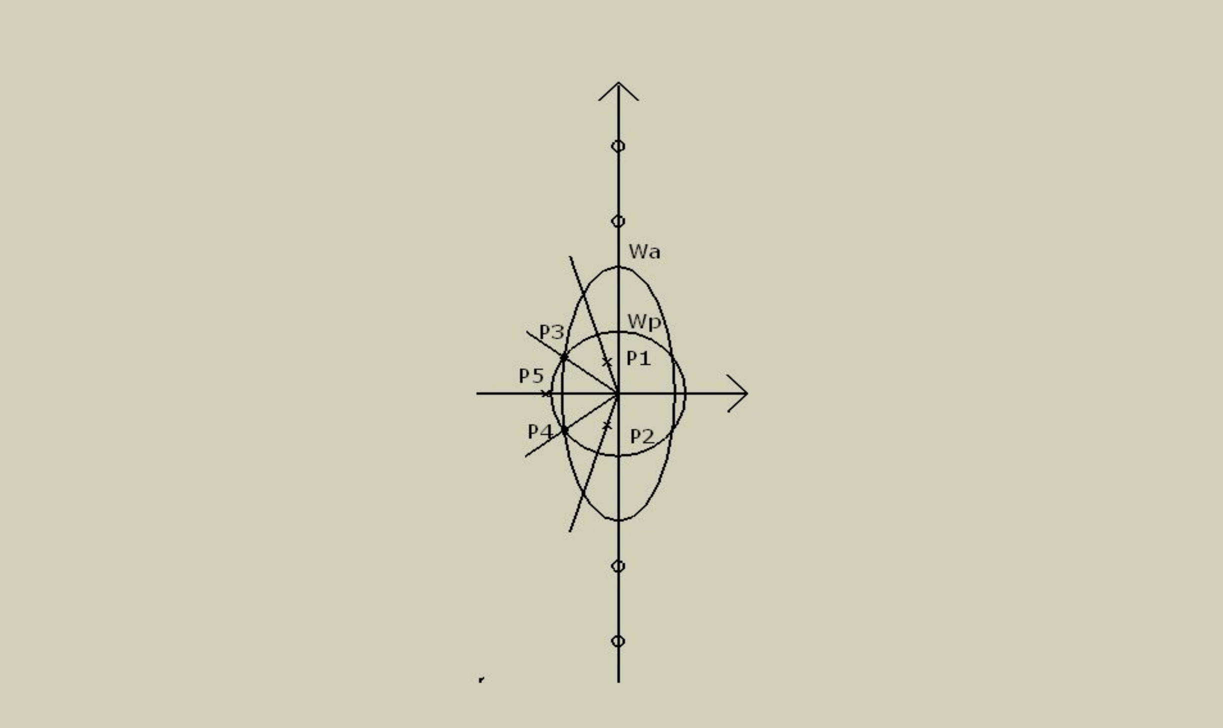
d.8) $S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|X_b(n/T_0)|^2}{T_0} .\delta(f - n/T_0)$

Exercici 3

a) h(t) real (H(s) de coef. reals) => p_i i z_r complex apareixen per parells complex conjugats => $p_2=p_1^*$ $p_4=p_3^*$ $p_5=a_5$

$z_1=z_3^* = jw_{oo1}$ $z_2=z_4^* = jw_{oo2}$

Diagrama de pols-zeros:



b.1) h(t) estable => $a_i<0$ així es verifica $a_1=a_2>a_3=a_4>a_5$

Cada parell de pols complex conjugats genera a h(t) un terme de la forma $2|K_1|.e^{a_1 t}.\cos(w_1 t+\phi_1).u(t)$

La duració de h(t) la marca el pol més proper a l'eix jw ($p_2=p_1^*$) => Duració efectiva $\mathbf{Dh_{ef}} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{|a_1|}}$

b.2) Al desnormalitzar => $p_1'=p_1.w_p$ => $Dh_{ef} = \dfrac{4}{2\pi f_p\,|a_1|}$

Al desnormalitzar s'expandeix H(w) => es contrau h(t)

c) Ajust banda pas $F(w_p^2)= 10^{0,3}-1= 1$ => Funció característica Inv. Chebychev $F(w^2)=\dfrac{C_5^2(2)}{C_5^2(w_a/w)}=\dfrac{\mathbf{362^2}}{\mathbf{C_5^2(w_a/w)}}$

$$\alpha(w_a)=10.\log(1+F(w_a^2))=10.\log\left(1+362^2\right)\cong 10.\log(360^2)=10.\log(2^4.3^4.10^2)=\mathbf{52\,dB}$$

e) 5 Zeros d'Atenuació a w=0.

5 Zeros de Transmissió simples a $\pm w_{\infty 1}$, $\pm w_{\infty 2}$ i ∞ on $w_{\infty 1}=\dfrac{2}{\cos(\pi/10)}$ i i $w_{\infty 2}=\dfrac{2}{\cos(3\pi/10)}$

f) M=5, N=4 (un ZT a ∞), $z_1=jw_{\infty 1}$ $z_3=-jw_{\infty 1}$ $z_2=jw_{\infty 2}$ $z_4=-jw_{\infty 2}$ $k=-H_{màs}\cdot\dfrac{|P_1|^2.|P_3|^2.P_5}{w_{\infty 1}^2.w_{\infty 2}^2}$

d)