ESCOLA TECNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ
Examen Final de **CAMPS ELECTROMAGNÈTICS** Professors: D. Artigas, F. Canal, F. Dios, M. Sicard 8.06.2009
Duració: 3h Publicació de notes provisionals: 22.06.2009

Escolliu TRES problemes dels QUATRE següents

Problema 1

Un medi dielèctric té una permitivitat relativa complexa donada per $\varepsilon_r = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r''$ responsable de l'absorció de l'ona electromagnètica. El fasor camp elèctric dins aquest medi és:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \sin[(\gamma - j\alpha)x]\hat{y}$$

Trobeu:

a) Els paràmetres γ i α en funció de ε_r', ε_r'' i de la freqüència de la ona.

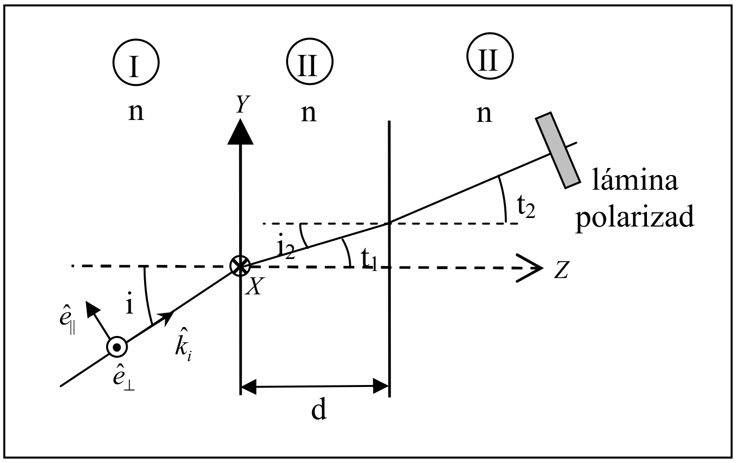
b) El vector de Poynting mig.

c) Quina és la quantitat de potència dissipada en un volum cúbic de costat a el centre del qual està situat a l'origen de coordenades?

Fórmula de utilitat: $\sin A - \sin B = 2\cos\left[\frac{A+B}{2}\right]\sin\left[\frac{A-B}{2}\right]$

Problema 2

Una onda plana de frecuencia f polarizada circularmente que se propaga en el plano YZ, incide desde un medio dieléctrico de índice de refracción n_1 consecutivamente sobre un dieléctrico de índice de refracción n_2 y espesor d y luego sobre otro dieléctrico de índice de refracción n_3. El ángulo de incidencia $i = i_B$ es el ángulo de Brewster de la superficie medio I – medio II. En este problema todos los medios dieléctricos son no magnéticos. No se considerarán las reflexiones multiples. Se tiene: $\vec{E}_i(\vec{r}) = E_0\left(\hat{e}_{\parallel} + e^{j\phi}\cdot\hat{e}_{\perp}\right)e^{-j\vec{k}_i\vec{r}}$



a) Razonar y escribir la condición que debe cumplirse entre n_1, n_2 y n_3 para que no haya reflexión de la componente paralela en ninguna de las dos caras.

b) Ahora conocemos los índices de refracción n_1 = 1 y n_2 = 1.33. Calcular n_3 para que se cumpla la condición expresada en el apartado a) y escribir t_2 en función de i. Calcular i, t_1 y t_2.

c) Después de pasar a través de una lámina polarizadora, cuyo eje está orientado en la dirección del eje X, la onda transmitida transporta una densidad de potencia de 1 mW/m^2. Calcular la amplitud E_0 de la onda incidente.

d) Escribir el fasor de campo eléctrico de la onda transmitida en el medio III después de la lámina polarizadora en función de f, n_2, c, i, t_1, E_0, ϕ, d, y, z y de los coeficientes en transmisión.

Fórmula de utilidad:

$$\rho_{\perp} = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} \qquad \tau_{\perp} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}$$

$$\rho_{\parallel} = \frac{n_1\cos\theta_t - n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i} \qquad \tau_{\parallel} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i}$$

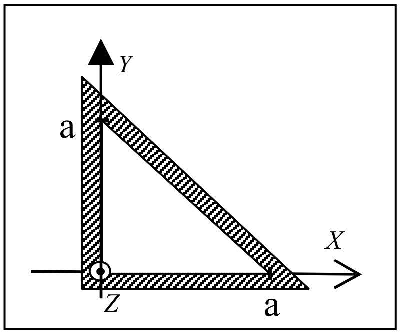
Problema 3

Supongamos una guía de onda de paredes perfectamente conductoras y cuya sección (en el plano XY) fuera un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados, de longitud *a*, coincidieran con los ejes de coordenadas X e Y, según indica la figura. Sabemos que en la guía cuadrada de doble superficie que la considerada, tendríamos la siguiente expresión para las componentes del campo eléctrico para un modo $TE_{m,n}$ (m,n = 0, 1, 2, 3, 4, …):

$$E_x(x,y) = E_{0x}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}y)\exp(-j\beta z)$$

$$E_y(x,y) = E_{0y}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{a}y)\exp(-j\beta z)$$

$$E_z(x,y) = 0$$



Se desea saber:

a) ¿Qué relación habría, en el caso de la guía cuadrada, entre los valores E_{0x} y E_{0y}? Justificarlo usando las ecuaciones de Maxwell.

b) La solución $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$ donde las componentes del campo son las de la guía cuadrada arriba descritas, ¿podría cumplir las condiciones de contorno correspondientes a la guía de sección triangular? (téngase en cuenta la relación que en este caso habría entre x e y sobre el conductor formando ángulo π/4 con ambos ejes de coordenadas). Justificar la respuesta.

c) ¿Qué tipos de modos TE serían posibles en la guía triangular?, es decir: ¿los valores *m* y *n* caracterizando los modos TE, podrían ser cualesquiera independientemente?

d) De lo anterior, expresar la fórmula general para los modos TE en una guía conductora con sección en forma de triángulo rectángulo isósceles. ¿Cómo sería la relación de dispersión?

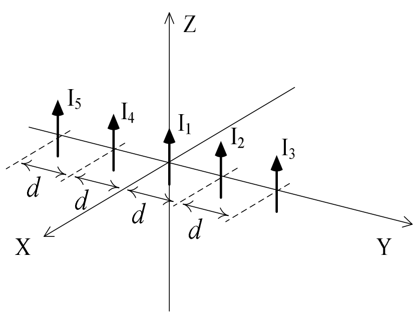
e) Si la guía triangular aquí descrita tuviera los lados perpendiculares con dimensión a = 2,83 cm, y estuviera rellena de un dieléctrico con permitividad eléctrica relativa ε_r= 2,2 ¿para qué región de frecuencias se comportará como una guía monomodo?

Fórmula de utilidad:

$$\sin(f+g) = \sin f\cos g + \cos f\sin g$$
$$\cos(f+g) = \cos f\cos g - \sin f\sin g$$

Problema 4

Considérese la agrupación de cinco dipolos de longitud *h* idénticos y equiespaciados que se muestra en la figura. Las corrientes que circulan por los dipolos son $I_1 = I_3 = I_5 \equiv I_0$ y $I_2 = I_4 \equiv pI_0$ donde *p* es una constante por determinar.



a) Calcule el potencial vector creado por los dipolos y el campo eléctrico radiado.

b) Obtenga el vector medio de Poynting en campo lejano.

c) Calcule el valor de la constante *p* para el cuál se obtiene radiación nula en la dirección del eje X.

d) ¿Para que valor mínimo de la separación *d* entre los dipolos se consigue la máxima radiación en el eje Y? Utilice el valor de *p* calculado en el apartado anterior.

e) Escriba la expresión del diagrama de radiación y represente la sección del mismo en el plano XY.

Problema 1

a) Introduint $\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \sin[(\gamma - j\alpha)x]\hat{y}$ a l'equació d'ona $\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0$ s'obté

$\gamma^2 - \alpha^2 - j2\gamma\alpha = k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon'_r - j\varepsilon''_r)$. Igualant part real i imaginaria, obtenim

$\begin{cases} \gamma^2 - \alpha^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'_r \\ 2\gamma\alpha = k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon''_r \end{cases}$. Al resoldre aquest sistema obtenim

$$\gamma = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'_r}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''_r}{\varepsilon'_r}\right)^2}\right] \quad \text{i} \quad \alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'_r}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''_r}{\varepsilon'_r}\right)^2}\right]$$

b) Es tracta d'una ona estacionaria amb pérdues, llavors el camp magnètic s'ah de trobar utilitzant

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu}\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu}E_0(\gamma - j\alpha)\cos[(\gamma - j\alpha)x]\hat{z}$$

I el vector de Poynting mig com:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\Re e\{\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})\} = \frac{E_0^2}{2\omega\mu}\Re e\{\sin[(\gamma - j\alpha)x]\cdot(-j)\cdot(\gamma + j\alpha)\cos[(\gamma + j\alpha)x]\}\hat{x}$$

$$= \frac{E_0^2}{4\omega\mu}\Re e\{\cdot(-j\gamma + \alpha)(\sin[2\gamma x] - \sin[2j\alpha x])\}\hat{x} = \frac{E_0^2}{4\omega\mu}\Re e\{\cdot(-j\gamma + \alpha)(\sin[2\gamma x] - j\sinh[2\alpha x])\}\hat{x} =$$

$$= \frac{E_0^2}{4\omega\mu}\{\cdot\alpha\sin[2\gamma x] - \gamma\sinh[2\alpha x]\}\hat{x}$$

c) Pel principi de conservació de l'energia, la potencia dissipada és:

$$P_{dis} = \oint_s \vec{P}d\vec{S} = \int_{x=-a/2}\vec{P}d\vec{S}_1 + \int_{x=a/2}\vec{P}d\vec{S}_2 =$$

$$= \frac{E_0^2}{4\omega\mu}\{\cdot\alpha\sin[-\gamma a] - \gamma\sinh[-\alpha a]\}\hat{x}\cdot\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} dydz(-\hat{x})$$

$$+ a^2\frac{E_0^2}{4\omega\mu}\{\cdot\alpha\sin[\gamma a] - \gamma\sinh[\alpha a]\}\hat{x}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} dydz\hat{x} =$$

$$= a^2\frac{E_0^2}{2\omega\mu}\{\cdot\alpha\sin[-\gamma a] - \gamma\sinh[\alpha a]\}$$

Problema 2

a) $n_1 = n_3$.

b) $n_3 = 1$.

   $t_2 = i$.

   $i = t_2 = 53.06^o$ y $t_1 = 36.94^o$

c) $E_0 = 0.94$ V/m.

d) $\overrightarrow{E_t} = \tau_{\perp 1}\cdot\tau_{\perp 2}\cdot E_0\cdot e^{-j\phi}\cdot e^{-j\frac{2\pi f n_2}{c}\frac{d}{\cos i_2}}\cdot e^{-j\frac{2\pi f}{c}(\cos i\cdot z + \sin i\cdot y)}\hat{x}$

Problema 3

a) En guía cuadrada: $E_{ox} = -(n/m)\, E_{oy}$

b) Para los planos x=o, y=o es evidente. Para el plano y= a-x, deberá cumplirse la relación:
(m-n) cos(nπ) sen(mπx/a)cos(nπx/a) + n cos(nπ)sen{m/a-n/a)x}= 0, para a ≥ x ≥ 0

c) Para que pueda cumplirse la condición de contorno sobre el plano conductor inclinado, la única posibilidad es: m = n. Los modos TE posibles en la guía son modos TE_{mm}

d) $\mathbf{E} = E_{ox}\, \{\mathbf{x}_u \cos(m\pi x/a)\mathrm{sen}(m\pi y/a) - \mathbf{y}_u\, \mathrm{sen}(m\pi x/a)\cos(m\pi y/a)\}\exp(-j\beta_m z)$

e) Relación de dispersión: $\beta = \sqrt{\{\omega^2 \mu\varepsilon - 2(m\pi/a)^2\}}$
La guía será monomodo para 10,18 GHz ≥ f ≥ 5,12 GHz

Problema 4

a) $\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{hI_0}{4\pi}\frac{\exp(-jkr)}{r}\hat{z}[1 + 2\cos(2kd\sin\theta\sin\varphi) + 2p\cos(kd\sin\theta\sin\varphi)]$

$$\vec{E}(\vec{r}) = j\omega\mu_0 \frac{hI_0}{4\pi}\frac{\exp(-jkr)}{r}\sin\theta\,[1 + 2\cos(2kd\sin\theta\sin\varphi) + 2p\cos(kd\sin\theta\sin\varphi)]\hat{\theta}$$

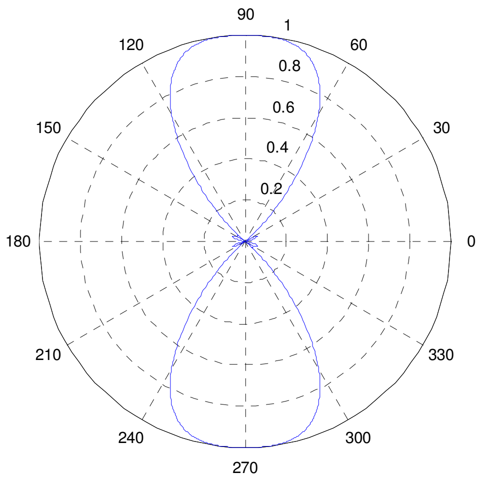
b) $\vec{P}_m(\vec{r}) = \frac{\omega^2\mu_0^2}{2\eta_0}\left(\frac{I_0 h}{4\pi}\right)^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2}[1 + 2\cos(2kd\sin\theta\sin\varphi) + 2p\cos(kd\sin\theta\sin\varphi)]^2$

c) $p = -3/2$

d) $kd = \pi$

e) $t(\theta,\varphi) = \frac{1}{36}\sin^2\theta\,[1 + 2\cos(2\pi\sin\theta\sin\varphi) - 3\cos(\pi\sin\theta\sin\varphi)]^2$

Sección del diagrama de radiación en el plano XY



Obsérvese que existen cuatro pequeños lóbulos secundarios.