**EQUACIONS DIFERENCIALS  ETSETB  14-01-2008  Temps: 3h.**

# Resolució de l'examen

### Enunciat del Problema 1

Volem trobar una solució $\psi(x)$ de l'equació lineal

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^4}y = \frac{1}{x^4\cos(1/x)} \tag{1}$$

que verifiqui les condicions:

$$\lim_{x\to+\infty}\psi(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\psi'(x) = 0. \tag{2}$$

Per fer-ho, seguirem els passos que s'indiquen a continuació.

(a) Apliqueu el canvi de variable $t = 1/x$ a l'equació

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^4}y = f(x)$$

i proveu que s'obté una equació de la forma $y'' + y = g(t)$. Determineu la relació entre $f(x)$ i $g(t)$.

(b) Proveu que $\varphi(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ és l'única solució del problema de valor inicial donat per l'equació $y'' + y = g(t)$ amb les condicions inicials $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(c) Proveu que, si $f(x) = \dfrac{1}{x^4\cos(1/x)}$, aleshores $g(t) = \dfrac{1}{\cos t}$.

(d) Trobeu la solució $\varphi(t)$ del problema de valor inicial de l'apartat (b) per a $g(t) = \dfrac{1}{\cos t}$.

(e) Proveu que la funció $\psi(x) = \varphi(1/x)$ és una solució de l'equació (1) que satisfà les condicions (2).

### Resolució del Problema 1

(a) Hem de provar que, amb el canvi de variable independent que ens proposen, l'equació

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x^4}y = f(x)$$

es transforma en una equació de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = g(t).$$

Per tant, hem d'expressar $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ en funció de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$. Apliquem la Regla de la Cadena:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -t^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Per a la derivada segona:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-t^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-t^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2}\left(-2t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right) = 2t^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + t^4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}.$$

Substituïm a l'equació i obtenim

$$2t^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + t^4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2t\left(-t^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + t^4y = f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Els termes amb la derivada primera es cancel·len, i dividim per $t^4$ per arribar a

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = \frac{1}{t^4}f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Finalment, veiem la relació entre $f(x)$ i $g(t)$:

$$g(t) = \frac{1}{t^4} f\left(\frac{1}{t}\right).$$

(b) Si la funció $g$ és contínua en algun interval $I \subset \mathbb{R}$ amb $0 \in I$, aleshores el problema de valor inicial

$$\left.\begin{array}{r} y'' + y = g(t) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{array}\right\}$$

té una única solució, definida en l'interval $I$. Per tant, hem de comprovar que $\varphi(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) g(\tau)\ \mathrm{d}\tau$ és solució del problema de valor inicial. Calculem les derivades primera i segona de $\varphi$.

$$\varphi'(t) = \sin(t-t)g(t) + \int_0^t \cos(t-\tau)g(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t \cos(t-\tau)g(\tau)\ \mathrm{d}\tau,$$

$$\varphi''(t) = \cos(t-t)g(t) - \int_0^t \sin(t-\tau)g(\tau)\ \mathrm{d}\tau = g(t) - \int_0^t \sin(t-\tau)g(\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

Clarament, $\varphi''(t) + \varphi(t) = g(t)$ i també $\varphi(0) = 0$ i $\varphi'(0) = 0$.

(c) Si $f(x) = \dfrac{1}{x^4 \cos(1/x)}$, aleshores $g(t) = \dfrac{1}{t^4} f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{1}{\cos t}$.

(d) Com que $g(t) = 1/\cos t$ és contínua en l'interval $(-\pi/2, \pi/2)$, el problema de valor inicial

$$\left.\begin{array}{r} y'' + y = 1/\cos t \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{array}\right\}$$

té una única solució, definida en l'interval $(-\pi/2, \pi/2)$. Per l'apartat (b), aquesta solució és la funció

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{\cos\tau}\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{\sin(t)\cos(\tau) - \cos(t)\sin(\tau)}{\cos\tau}\ \mathrm{d}\tau = t\sin t + \cos t \log\cos(t).$$

(e) Apliquem el canvi de variable

$$\begin{array}{ccc} (0, \pi/2) & \to & (2/\pi, +\infty) \\ t & \mapsto & x = 1/t \end{array}$$

Per l'apartat (a), la funció $\psi\colon (2/\pi, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida per

$$\psi(x) = \varphi(1/x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\log\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

és solució de l'equació (1). A més a més,

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \lim_{t\to 0_+} \psi(1/t) = \lim_{t\to 0_+} \varphi(t) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \psi'(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2}\varphi'\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0_+} -t^2\varphi'(t) = 0.$$

Per tant, la funció $\psi$ satisfà les condicions (2).

## Enunciat del Problema 2

Considerem el sistema d'equacions diferencials

$$\left.\begin{array}{rcl} x' & = & -x + y^2 \\ y' & = & -y + x^2 \end{array}\right\}$$

(a) Trobeu-ne els punts d'equilibri.

(b) Usant l'aproximació lineal, determineu l'estabilitat dels punts d'equilibri. Dibuixeu els retrats de fases dels sistemes lineals que s'obtenen amb l'aproximació lineal al voltant dels punts d'equilibri.

(c) Trobeu els valors de $m \in \mathbb{R}$ tals que existeix una solució $(x(t), y(t))$ del sistema que satisfà $y(t) = mx(t)$ per a tot $t$ en l'interval on està definida.

(d) Trobeu la solució del sistema que satisfà la condició inicial $(x(0), y(0)) = (1/2, 1/2)$. Dibuixeu-ne l'òrbita.

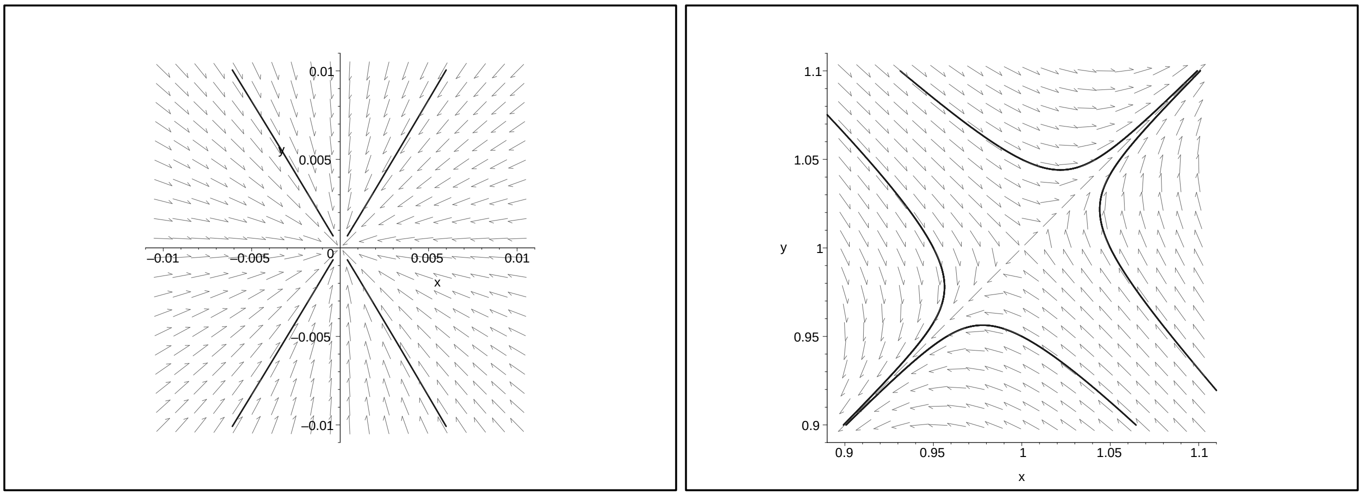


Figura 1: Retrat de fases al voltant dels punts $(0,0)$ —esquerra— i $(1,1)$ —dreta—.

**Resolució del Problema 2**

(a) Els punts d'equilibri del sistema són els punts $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfan

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+y^2 &=& 0 \\ -y+x^2 &=& 0 \end{array}\right\}$$

De la primera equació, $x = y^2$ i, substituint a la segona equació, $-y + y^4 = y(y^3 - 1) = 0$. Així doncs, $y = 0$ o bé $y = 1$. Si $y = 0$, tenim que $x = y^2 = 0$, mentre que $x = 1$ si $y = 1$. En conclusió, els punt d'equilibri del sistema són $(0,0)$ i $(1,1)$.

(b) Per estudiar l'estabilitat dels punts d'equilibri, hem de considerar l'aproximació lineal de la funció $\mathbf{f}(x,y) = (-x+y^2, -y+x^2)$ al voltant d'aquests punts. Calculem primer la matriu jacobiana de $\mathbf{f}$.

$$J\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \partial \mathbf{f}^1/\partial x & \partial \mathbf{f}^1/\partial y \\ \partial \mathbf{f}^2/\partial x & \partial \mathbf{f}^2/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix}.$$

Avaluem ara la jacobiana en el punt $(0,0)$.

$$J\mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Clarament, aquesta matriu té un valor propi doble, $-1$. Com que tots els valors propis tenen part real estrictament negativa, el punt d'equilibri $(0,0)$ és asimptòticament estable. A més a més, com que els valors propis són reals, tenim que és un node estable. Fem el mateix per al punt $(1,1)$.

$$J\mathbf{f}(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic d'aquesta matriu és

$$\det(XI - J\mathbf{f}(1,1)) = \begin{vmatrix} X+1 & -2 \\ -2 & X+1 \end{vmatrix} = (X+1)^2 - 4 = X^2 + 2X - 3 = (X-1)(X+3).$$

Els valors propis són $1, -3$. Com que un dels valors propis té part real estrictament positiva, el punt d'equilibri $(1,1)$ és inestable. Donat que els dos valors propis són reals no nuls amb signes oposats, el punt d'equilibri $(1,1)$ és un punt de sella. Vegeu la figura 1.

(c) Si posem $y(t) = mx(t)$, amb $m \in \mathbb{R}$ constant, i substituïm al sistema, obtenim:

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & -x(t) + m^2 x(t)^2 \\ mx'(t) & = & -mx(t) + x(t)^2 \end{array}\right\}$$

Si multipliquem la primera equació per $m$ obtenim la igualtat

$$-mx(t) + m^3 x(t)^2 = -mx(t) + x(t)^2$$

i, per tant,

$$(m^3 - 1)x(t)^2 = 0$$

per a tot $t$ en l'interval on la solució està definida. Així doncs, o bé $x(t) = 0$ per a tot $t$ o bé $m = 1$.

Analitzem el primer cas. A partir de la primera equació del sistema, veiem que la solució constant $(x(t), y(t)) = (0,0)$ és l'única amb $x(t) = 0$ per a tot $t$. Per tant, podem afirmar que, per a tot $m \in \mathbb{R}$, existeix una solució del sistema amb la propietat donada.

Estudiem ara el cas $m = 1$. Si posem $x(t) = y(t)$ i substituïm al sistema, obtenim (repetida) l'equació diferencial $x' = -x + x^2$. Pel Teorema d'Existència i Unicitat, per a tot $x_0 \in \mathbb{R}$, existeix una única solució $\varphi(t)$ del problema de valor inicial

$$\left.\begin{array}{r} x' = -x + x^2 \\ x(0) = x_0 \end{array}\right\}$$

que es prolonga de manera única en cert interval maximal $I \subset \mathbb{R}$. Clarament, per a cada $x_0 \in \mathbb{R}$, obtenim una solució $(x(t), y(t)) = (\varphi(t), \varphi(t))$ del sistema que satisfà la propietat requerida per a $m = 1$.

(d) Pel que hem vist a l'apartat anterior, si $\varphi(t)$ és l'única solució del problema de valor inicial

$$\left.\begin{array}{r} x' = -x + x^2 \\ x(0) = 1/2 \end{array}\right\}$$

aleshores $(x(t), y(t)) = (\varphi(t), \varphi(t))$ és l'única solució del problema de valor inicial plantejat a l'enunciat. Calculem doncs la solució general de l'equació diferencial $x' = -x + x^2$, que és de variables separables.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + x^2 \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)} = \int \mathrm{d}t + K.$$

Per tant, amb

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log\left|\frac{x-1}{x}\right|,$$

obtenim solució general

$$\log\left|\frac{x-1}{x}\right| = t + K \implies \frac{x-1}{x} = Ce^t \implies x(t) = \frac{1}{1 - Ce^t}$$

Si posem $x(0) = 1/2$, tindrem $C = -1$ i, per tant, $\varphi(t) = 1/(1 + e^t)$ és la solució del problema de valor inicial que hem plantejat abans. Finalment, la funció

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{1+e^t}, \frac{1}{1+e^t}\right)$$

és l'única solució del problema de valor inicial plantejat a l'enunciat. Observem que l'interval maximal on està definida és tot $\mathbb{R}$. L'òrbita que recorre aquesta solució està sobre la recta $x = y$. Observem que $(x(0), y(0)) = (1/2, 1/2)$, i que

$$\lim_{t \to -\infty} (x(t), y(t)) = (1,1), \quad \lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (0,0).$$

Així doncs, l'òrbita de la solució és el segment que uneix els punts $(1,1)$ i $(0,0)$, sense els extrems, i es recorre des de $(1,1)$ cap a $(0,0)$. Vegeu la figura 2.

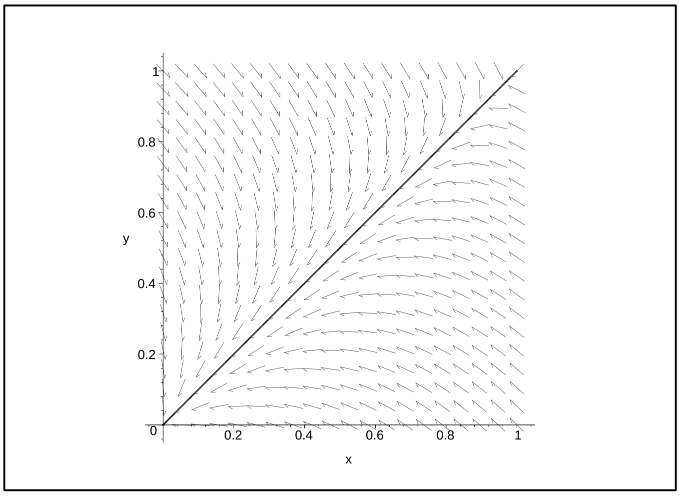


Figura 2: Òrbita de la solució amb les condicions inicials $x(0) = y(0) = \frac{1}{2}$.

### Enunciat del Problema 3

Considerem l'equació diferencial

$$ty'' - 2y' + ty = \cos t. \tag{3}$$

(a) Transformeu l'equació (3) en un sistema d'equacions diferencials lineals de primer ordre. Per a quins valors de $t_0, y_0, y_0' \in \mathbb{R}$ podem assegurar que existeix una única solució amb $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$? En quins intervals estaran definides les solucions maximals d'aquests problemes de valor inicial?

(b) Proveu que, per a qualsevol solució $y(t)$ de l'equació (3) amb $y(0) = 0$, la trasformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ satisfà l'equació diferencial

$$(s^2 + 1)Y' + 4sY = -\mathcal{L}\{\cos t\}$$

(c) Determineu $\mathcal{L}\{\sin t - t\cos t\}$.

(d) Determineu les solucions de l'equació (3) que compleixen $y(0) = 0$.

(e) Comproveu que no existeix cap solució de l'equació (3) amb $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Contradiu això els teoremes d'existència i unicitat que s'han utilitzat a l'apartat (a)?

### Resolució del Problema 3

(a) Si posem $x_1 = y$ i $x_2 = y'$, tenim que $x_1' = x_2$ i que

$$x_2' = y'' = \frac{2}{t}y' - y + \frac{\cos t}{t} = -x_1 + \frac{2}{t}x_2 + \frac{\cos t}{t}.$$

Així doncs, l'equació donada és equivalent al sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{b}(t), \qquad \text{on} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2/t \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t/t \end{pmatrix}.$$

Els coeficients de $A(t)$ i $\mathbf{b}(t)$ són funcions contínues en $\mathbb{R} - \{0\}$. Per tant, pel Teorema d'Existència i Unicitat de solucions dels sistemes lineals d'equacions diferencials, per a tot $t_0 \neq 0$, i per a qualssevol $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$, existeix una única solució del corresponent problema de valor inicial, que estarà definida en l'interval $(-\infty, 0)$ si $t_0 < 0$ o bé en l'interval $(0, +\infty)$ si $t_0 > 0$.

(b) Apliquem la transformació de Laplace a l'equació (3), tenint en compte que $y(0) = 0$. Si posem $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, tenim que

$$\mathcal{L}\{ty(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s) = -Y'(s)$$

i també
$$\mathcal{L}\{ty''(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\{y''(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) = -s^2Y'(s) - 2sY(s).$$
A més a més, $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s)$. Així doncs, si apliquem la transformació de Laplace a (3),
$$-s^2Y'(s) - 2sY(s) - 2sY(s) - Y'(s) = \mathcal{L}\{\cos t\}$$
i, per tant,
$$(s^2+1)Y' + 4sY = -\mathcal{L}\{\cos t\}$$

(c) Recordem que $\mathcal{L}\{\sin t\} = 1/(s^2+1)$ i que $\mathcal{L}\{\cos t\} = s/(s^2+1)$. Per tant,
$$\mathcal{L}\{t\cos t\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$
i, finalment,
$$\mathcal{L}\{\sin t - t\cos t\} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} = \frac{2}{(s^2+1)^2}.$$

(d) Sabem que la transformada de Laplace $Y(s)$ de qualsevol solució $y(t)$ de l'equació (3) amb $y(0) = 0$ satisfà l'equació diferencial
$$(s^2+1)Y' + 4sY = -\frac{s}{s^2+1}$$
Si dividim per $s^2+1$, obtenim l'equació lineal
$$Y' + \frac{4s}{s^2+1}Y = -\frac{s}{(s^2+1)^2}.$$
Hem de trobar la solució general d'aquesta equació i calcular la transformada inversa del resultat. Cerquem primer la solució general de l'equació homogènia
$$Y' + \frac{4s}{s^2+1}Y = 0 \implies \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} = -\frac{4s}{s^2+1}Y \implies \int\frac{\mathrm{d}Y}{Y} = -\int\frac{4s}{s^2+1}\mathrm{d}s + K \implies$$
$$\log|Y| = -2\log(s^2+1) + K \implies Y(s) = \frac{C}{(s^2+1)^2}.$$
Apliquem el mètode de variació de constants per trobar una solució particular de la completa de la forma $Y_p(s) = C(s)/(s^2+1)^2$. Substituïm a l'equació i obtenim
$$\frac{C'(s)}{(s^2+1)^2} = -\frac{s}{(s^2+1)^2} \implies C'(s) = -s \implies C(s) = -\frac{s^2}{2}.$$
Per tant, la solució general de l'equació és
$$Y(s) = \frac{C}{(s^2+1)^2} - \frac{s^2}{2(s^2+1)^2}$$
Per trobar-ne l'antitransformada usem el resultat de l'apartat anterior.
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{C}{2}(\sin t - t\cos t)$$
i també
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)} - \frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \sin t - \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$
En conclusió, les solucions de l'equació (3) que satisfan $y(0) = 0$ són de la forma
$$y(t) = C(\sin t - t\cos t) - \frac{1}{4}(\sin t + t\cos t), \quad C \in \mathbb{R}.$$

(e) Si derivem el resultat de l'apartat anterior
$$y'(t) = Ct\sin t - \frac{1}{4}(2\cos t - t\sin t).$$
Per tant, per a totes les solucions, $y'(0) = -1/2$. En conclusió, no existeix cap solució de l'equació (3) amb $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Això no contradiu el que hem vist a l'Apartat (a), ja que les condicions del Teorema d'Existència i Unicitat es compleixen per a condicions inicials $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ amb $t_0 \neq 0$.