Teoria de Circuits

Fitxes sobre
Filtres de primer i segon ordre

Autor: Margarita Sanz
Tardor de 2005

RESPUESTA FRECUENCIAL

La respuesta frecuencial es la evolución de las magnitudes

$$\text{Amplificación} = \left|H(j\omega)\right| \quad \text{y Desfase} = \measuredangle H(j\omega)$$

en función de la frecuencia y se acostumbra a representar de forma gráfica.

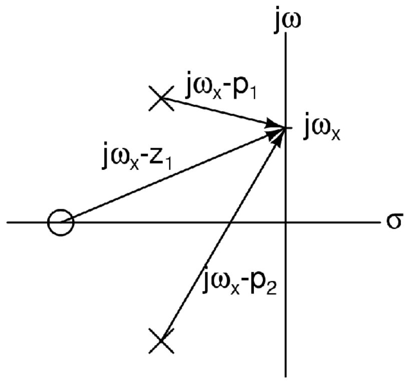
Para de terminarla, se puede evaluar amplificación y desfase a partir las expresiones analíticas o mediante la utilización de métodos gráficos basados en el diagrama polo-cero de su *H(s)*.

Método gráfico de obtención de la respuesta frecuencial

Factorizando numerador y denominador de *H(jω)* en función de sus ceros y sus polos:

$$H(j\omega)=K\cdot\frac{(j\omega-z_1)\cdot(j\omega-z_2)\cdots(j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)\cdot(j\omega-p_2)\cdots(j\omega-p_n)}$$

donde cada término entre paréntesis representa un vector en el plano "s" que parte de la ubicación del cero o polo correspondiente y llega hasta el punto del eje jω donde se pretende evaluar la función de red.



Así para evaluar la amplificación y el desfase a una frecuencia determinada bastará con determinar el módulo y la fase de estos vectores ya que:

$$\left|H(j\omega)\right|=\left|K\right|\cdot\frac{\left|(j\omega-z_1)\right|\cdot\left|(j\omega-z_2)\right|\cdots\left|(j\omega-z_m)\right|}{\left|(j\omega-p_1)\right|\cdot\left|(j\omega-p_2)\right|\cdots\left|(j\omega-p_n)\right|}$$

$$\measuredangle H(j\omega)=\measuredangle K+\measuredangle(j\omega-z_1)+\measuredangle(j\omega-z_2)\cdots+\measuredangle(j\omega-z_m)-$$
$$-\measuredangle(j\omega-p_1)-\measuredangle(j\omega-p_2)\cdots-\measuredangle(j\omega-p_n)$$

Banda de paso

La banda de paso viene delimitada por la denominada frecuencia de corte que es aquella a la que la amplificación máxima se ve reducida por un factor de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (frecuencia de potencia mitad).

$$\left|H(j\omega_c)\right|=\frac{\left|H(j\omega)\right|_{max}}{\sqrt{2}}$$

con ω_c la pulsación de corte.

Filtros de primer orden

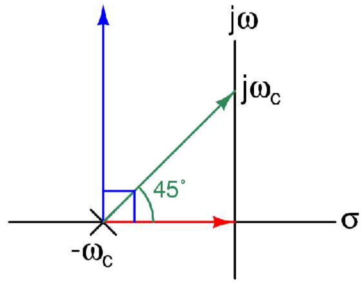
Filtro Paso Bajo

Función de red:

$$\boxed{H(s)=K\cdot\frac{\omega_c}{s+\omega_c}}$$

Comportamiento asintótico y banda de paso:

$\lvert H(0)\rvert=\lvert K\rvert\cdot\frac{\omega_c}{\omega_c}=\lvert K\rvert$	$\measuredangle H(0)=\measuredangle K+0^\circ=\measuredangle K$
$\lvert H(j\omega_c)\rvert=\lvert K\rvert\cdot\frac{\omega_c}{\sqrt{2}\cdot\omega_c}=\frac{\lvert K\rvert}{\sqrt{2}}$	$\measuredangle H(j\omega_c)=\measuredangle K-45^\circ$
$\lvert H(\infty)\rvert=\lvert K\rvert\cdot\frac{\omega_c}{\infty}=0$	$\measuredangle H(\infty)=\measuredangle K-90^\circ$

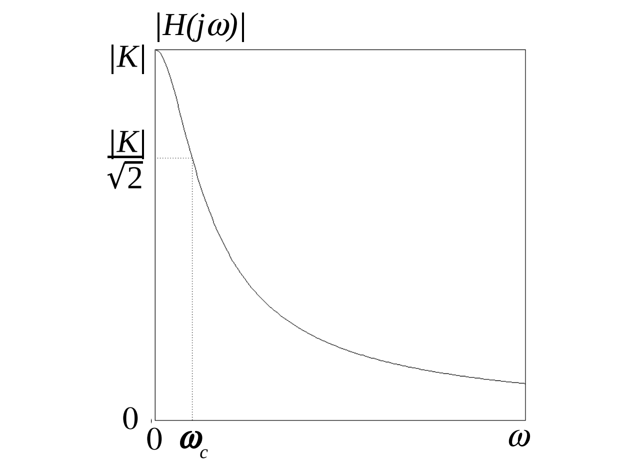


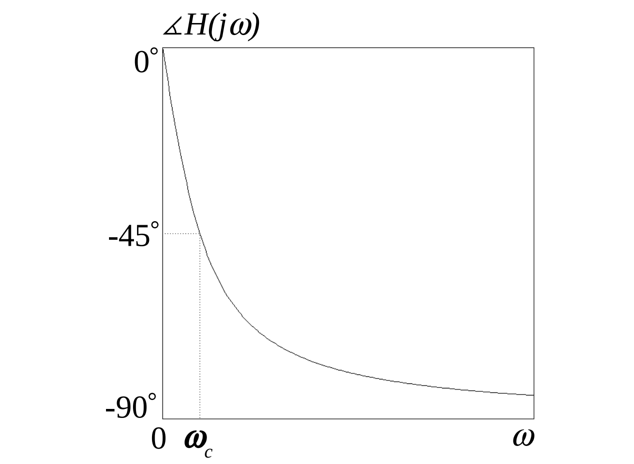
Expresiones generales de amplificación y desfase:

$$\lvert H(j\omega)\rvert=\frac{\lvert K\rvert\cdot\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2+\omega^2}}=\frac{\lvert K\rvert}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} \quad ; \quad \boxed{\lvert H(j2\pi f)\rvert=\frac{\lvert K\rvert}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}}$$

$$\measuredangle H(j\omega)=\measuredangle K-arctg\frac{\omega}{\omega_c} \quad ; \quad \boxed{\measuredangle H(j2\pi f)=\measuredangle K-arctg\frac{f}{f_c}}$$

Curvas de respuesta frecuencial:





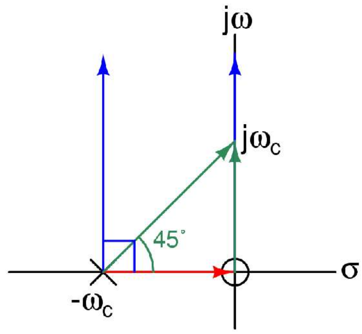
Filtro Paso Alto

Función de red:

$$\boxed{H(s)=K\cdot\frac{s}{s+\omega_c}}$$

Comportamiento asintótico y banda de paso:

$\lvert H(0)\rvert=\lvert K\rvert\cdot\frac{0}{\omega_c}=0$	$\measuredangle H(0^+)=\measuredangle K+90^\circ-0^\circ= \\ =\measuredangle K+90^\circ$
$\lvert H(j\omega_c)\rvert=\lvert K\rvert\cdot\frac{\omega_c}{\sqrt{2}\cdot\omega_c}=\frac{\lvert K\rvert}{\sqrt{2}}$	$\measuredangle H(j\omega_c)=\measuredangle K+90^\circ-45^\circ= \\ =\measuredangle K+45^\circ$
$\lvert H(\infty)\rvert=\lvert K\rvert\cdot\frac{\infty}{\infty}=\lvert K\rvert$	$\measuredangle H(\infty)=\measuredangle K+90^\circ-90^\circ= \\ =\measuredangle K$



Expresiones generales de amplificación y desfase:

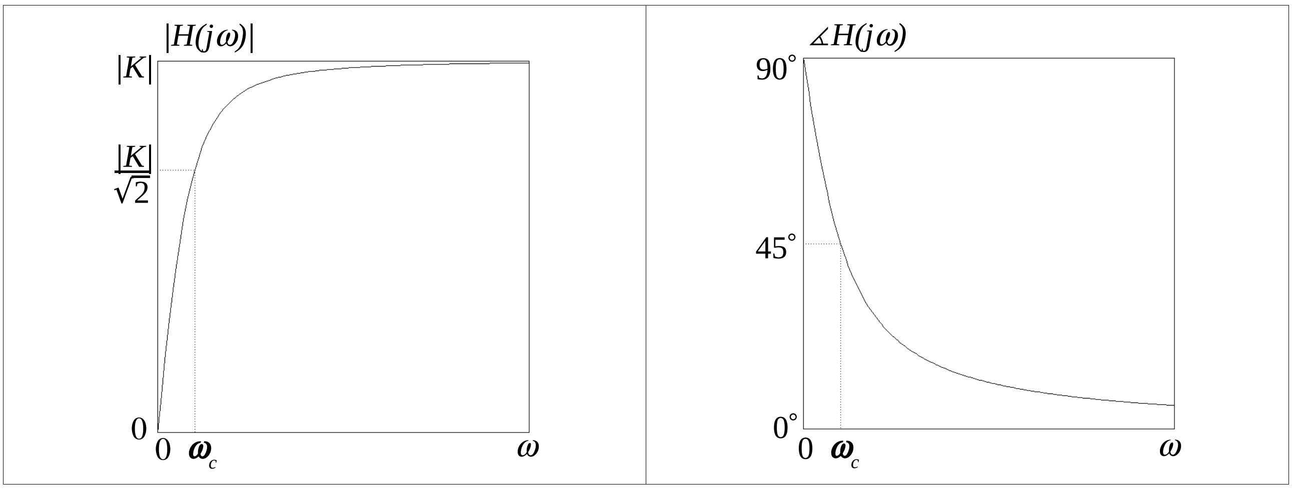
$$\lvert H(j\omega)\rvert=\frac{\lvert K\rvert\cdot\omega}{\sqrt{\omega^2+\omega_c^2}}=\lvert K\rvert\frac{\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$$

$$\boxed{\lvert H(j2\pi f)\rvert=\lvert K\rvert\frac{\frac{f^2}{f_c^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}=\frac{\lvert K\rvert}{\sqrt{1+\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}}$$

$$\measuredangle H(j\omega)=\measuredangle K+90^\circ-arctg\frac{\omega}{\omega_c}$$

$$\boxed{\measuredangle H(j2\pi f)=\measuredangle K+90^\circ-arctg\frac{f}{f_c}=\measuredangle K-arctg\frac{f_c}{f}}$$

Curvas de respuesta frecuencial:



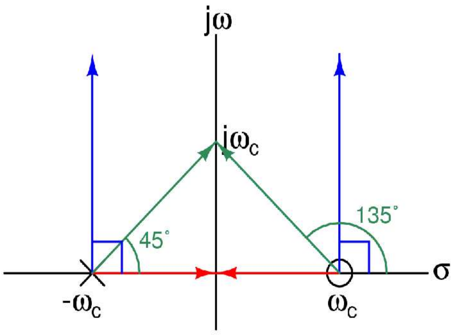
Filtro Pasa Todo (Desfasador)

Función de red:

$$H(s)=K\cdot\frac{s-\omega_c}{s+\omega_c}$$

Comportamiento asintótico y a frecuencia ω_c:

$\lvert H(0)\rvert=\lvert K\rvert\cdot\frac{\omega_c}{\omega_c}=\lvert K\rvert$	$\measuredangle H(0)=\measuredangle K+180^\circ-0^\circ= \\ =\measuredangle K+180^\circ$
$\lvert H(j\omega_c)\rvert=\lvert K\rvert\cdot\frac{\sqrt{2}\omega_c}{\sqrt{2}\omega_c}=\lvert K\rvert$	$\measuredangle H(j\omega_c)=\measuredangle K+135^\circ-45^\circ= \\ =\measuredangle K+90^\circ$
$\lvert H(\infty)\rvert=\lvert K\rvert\cdot\frac{\infty}{\infty}=\lvert K\rvert$	$\measuredangle H(\infty)=\measuredangle K+90^\circ-90^\circ= \\ =\measuredangle K$



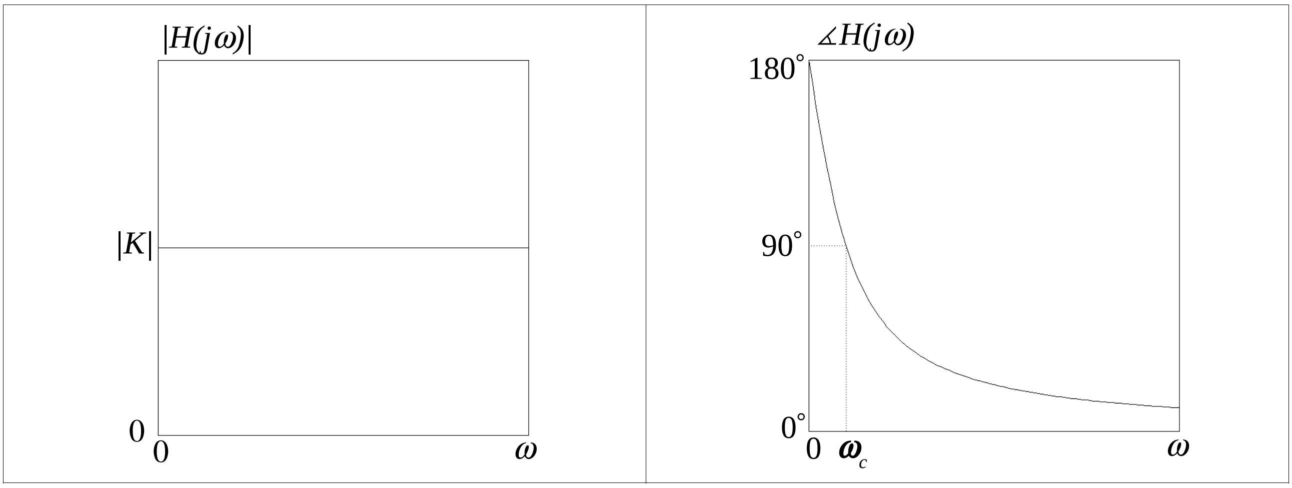
Expresiones generales de amplificación y desfase:

$$\lvert H(j\omega)\rvert=\lvert K\rvert$$

$$\measuredangle H(j\omega)=\measuredangle K+\left(-arctg\frac{\omega}{\omega_c}\right)-arctg\frac{\omega}{\omega_c}=\measuredangle K-2\cdot arctg\frac{\omega}{\omega_c}$$

$$\boxed{\measuredangle H(j2\pi f)=\measuredangle K-2\cdot arctg\frac{f}{f_c}}$$

Curvas de respuesta frecuencial:



Filtros de segundo orden

Filtro Paso Banda

Función de red:

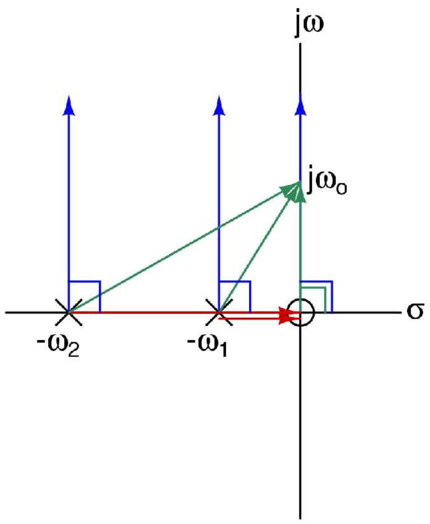
$$H(s)=K\cdot\frac{s}{s^2+2\xi\omega_o s+\omega_o^2}$$

Frecuencia de resonancia:

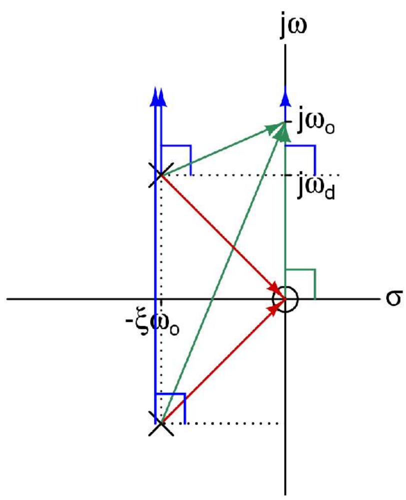
$$|H(j\omega)|=\frac{|K|\cdot\omega}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_o^2\omega^2}}=\frac{|K|}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2}(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_o^2\omega^2}}$$

$$\boxed{\omega_{max}=\omega_r=\omega_o}$$

Comportamiento asintótico y a la frecuencia de resonancia:



Polos reales



Polos complejos

En ambos casos:

$\lvert H(0)\rvert=0$	$\measuredangle H(0^+)=\measuredangle K+90^\circ$
$\boxed{\lvert H(j\omega_o)\rvert=\frac{\lvert K\rvert}{2\xi\omega_o}}$	$\boxed{\measuredangle H(j\omega_o)=\measuredangle K}$
$\lvert H(\infty)\rvert=0$	$\measuredangle H(\infty)=\measuredangle K-90^\circ$

Banda de paso:

$$|H(j\omega_c)|=\frac{|K|}{\sqrt{\frac{1}{\omega_c^2}(\omega_o^2-\omega_c^2)^2+4\xi^2\omega_o^2\omega_c^2}}=\frac{|K|}{2\sqrt{2}\xi\omega_o}$$

$$\omega_c=\omega_o(\sqrt{1+\xi^2}\pm\xi)$$

$\omega_{cs}=\omega_o(\sqrt{1+\xi^2}+\xi)$ $\omega_{ci}=\omega_o(\sqrt{1+\xi^2}-\xi)$ y cumplen $\omega_{cs}\cdot\omega_{ci}=\omega_o^2$

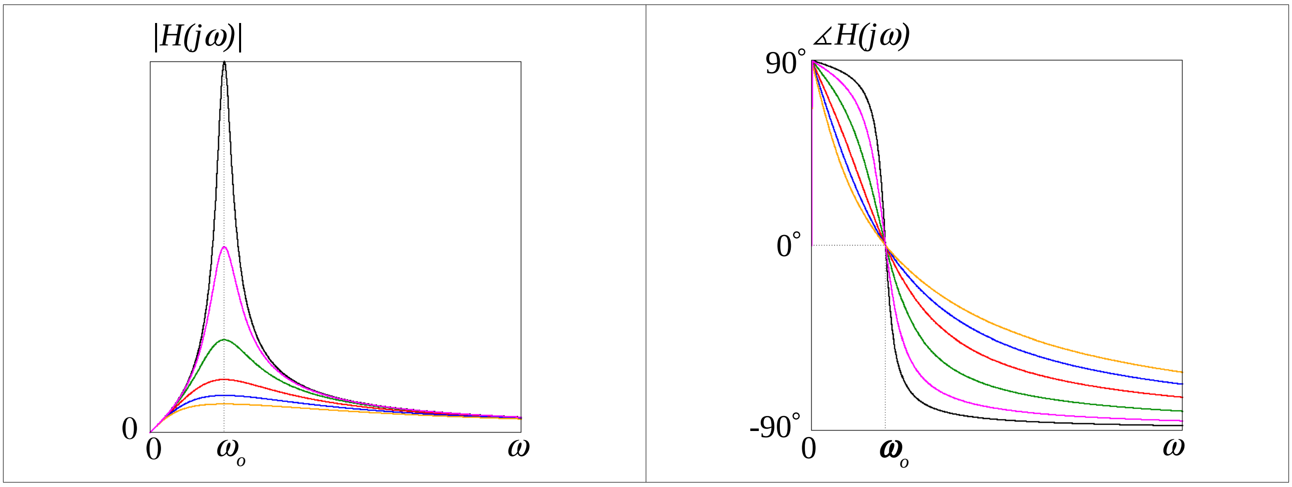
Ancho de banda:

$$\boxed{Bw=\omega_{cs}-\omega_{ci}=2\xi\omega_o}$$

Factor de calidad Q:

$$\boxed{Q=\frac{\omega_r}{Bw}=\frac{\omega_o}{2\xi\omega_o}=\frac{1}{2\xi}}$$

Curvas de respuesta frecuencial:



Expresiones generales de amplificación y desfase en función de los parámetros del filtro:

$$H(s)=\frac{H(j\omega_o)\cdot\frac{\omega_o}{Q}\cdot s}{s^2+\frac{\omega_o}{Q}s+\omega_o^2}$$

$$H(j\omega)=\frac{jH(j\omega_o)\cdot\frac{\omega_o}{Q}\cdot\omega}{j\frac{\omega_o}{Q}\omega+\omega_o^2-\omega^2}=\frac{H(j\omega_o)}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega}\right)}\quad;\quad \boxed{H(j2\pi f)=\frac{H(j2\pi f_o)}{1+jQ\left(\frac{f}{f_o}-\frac{f_o}{f}\right)}}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{|H(j\omega_o)|}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}}\quad;\quad \boxed{|H(j2\pi f)|=\frac{|H(j2\pi f_o)|}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_o}-\frac{f_o}{f}\right)^2}}}$$

$$\measuredangle H(j\omega)=\measuredangle H(j\omega_o)-artg\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega}\right)\right]\quad;\quad \boxed{\measuredangle H(j2\pi f)=\measuredangle H(j2\pi f_o)-artg\left[Q\left(\frac{f}{f_o}-\frac{f_o}{f}\right)\right]}$$

<u>Filtro Paso Bajo</u>

Función de red:

$$H(s)=K\cdot\frac{\omega_o^2}{s^2+2\xi\omega_o s+\omega_o^2}$$

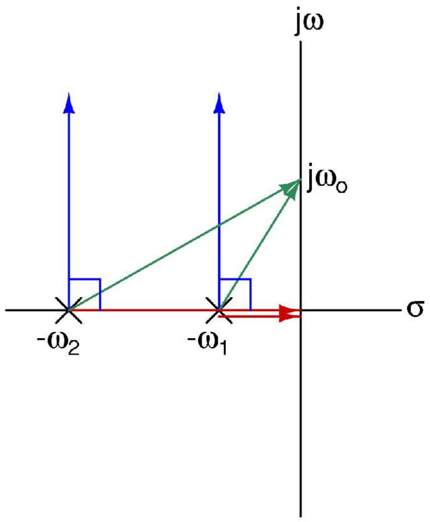
Frecuencia de resonancia:

$$|H(j\omega)|=\frac{|K|\cdot\omega_o^2}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_o^2\omega^2}}$$

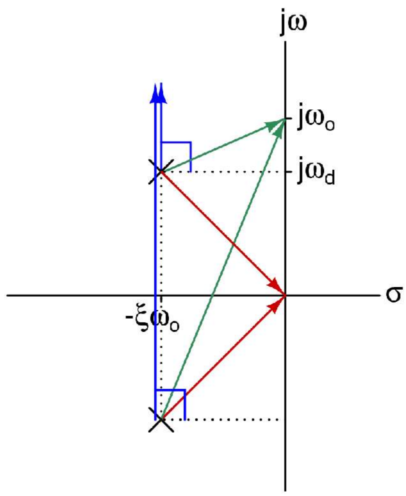
$$\boxed{\omega_{max}=\omega_r=\omega_o\sqrt{1-2\xi^2}}$$

$$|H(j\omega_r)|=\frac{|K|\cdot\omega_o^2}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega_o^2(1-2\xi^2))^2+4\xi^2\omega_o^4(1-2\xi^2)}}\qquad\boxed{|H(j\omega_r)|=\frac{|K|}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Comportamiento asintótico y a la frecuencia natural de resonancia, ω_o:



Polos reales

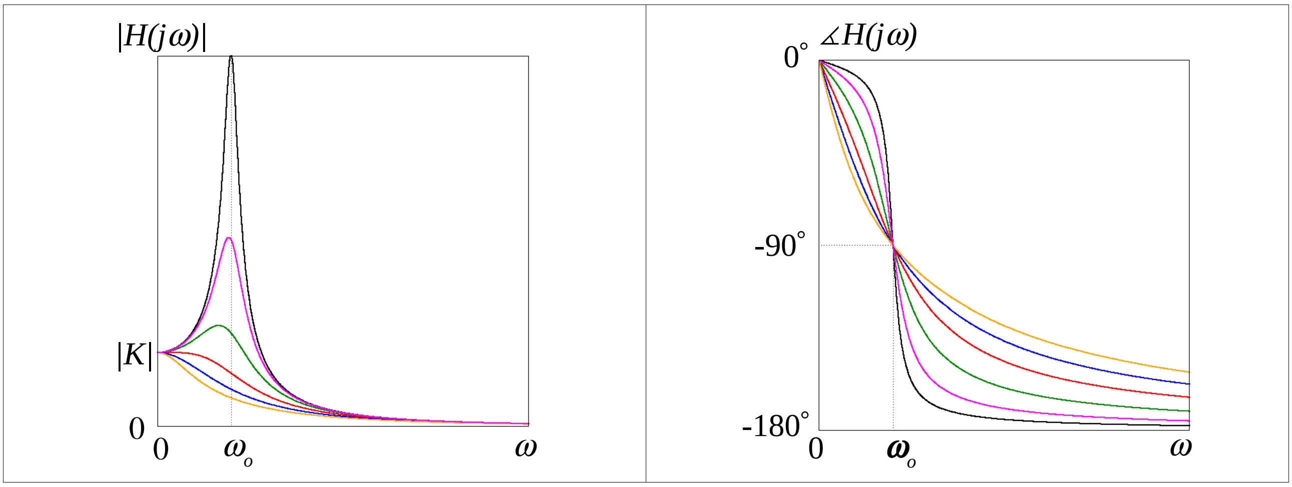


Polos complejos

En ambos casos:

$\|H(0)\|=\|K\|$	$\measuredangle H(0)=\measuredangle K$
$\boxed{\|H(j\omega_o)\|=\frac{\|K\|}{2\xi}}$	$\boxed{\measuredangle H(j\omega_o)=\measuredangle K-90^\circ}$
$\|H(\infty)\|=0$	$\measuredangle H(\infty)=\measuredangle K-180^\circ$

Curvas de respuesta frecuencial:



Banda de paso:

$$\left|H(j\omega_c)\right| = \frac{|K|\cdot\omega_o^2}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega_c^2)^2+4\xi^2\omega_o^2\omega_c^2}} = \frac{|K|}{2\xi\sqrt{2(1-\xi^2)}}$$

$$\omega_c = \omega_o\sqrt{1-2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\omega_{cs} = \omega_o\sqrt{1-2\xi^2+2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \omega_{ci} = \omega_o\sqrt{1-2\xi^2-2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

- $0<\xi<0{,}38$ dos frecuencias de corte y máximo fuera del origen.
- $0{,}38 \le \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7$ una sola frecuencia de corte pero máximo fuera del origen
- $\xi \ge 0{,}7$ una sola frecuencia de corte y máximo en el origen

Expresiones generales de amplificación y desfase:

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{|K|}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_o^2}}} \quad ; \quad \boxed{\left|H(j2\pi f)\right| = \frac{|K|}{\sqrt{\left(1-\frac{f^2}{f_o^2}\right)^2+4\xi^2\frac{f^2}{f_o^2}}}}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \measuredangle K - artg\frac{2\xi}{\frac{\omega_o}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_o}} \quad ; \quad \boxed{\measuredangle H(j2\pi f) = \measuredangle K - artg\frac{2\xi}{\frac{f_o}{f}-\frac{f}{f_o}}}$$

Caso particular: $\boxed{\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}7}$ Maximalmente plano (Butterworth)

El máximo se sitúa en el origen y la frecuencia de corte coincide con la frecuencia natural de resonancia.

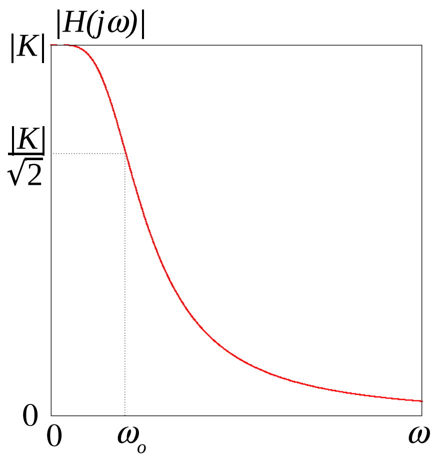
$$\boxed{\omega_c=\omega_o} \quad \boxed{f_c=f_o}$$

Así, la amplificación y el desfase se pueden espresar en función de los parámetros del filtro de la forma:

$$\boxed{|H(j2\pi f)|=\frac{|H(0)|}{\sqrt{1+\frac{f^4}{f_c^4}}}}$$

$$\boxed{\measuredangle H(j2\pi f)=\measuredangle K-artg\frac{\sqrt{2}}{\frac{f_c}{f}-\frac{f}{f_c}}}$$

Curva de amplificación:



Filtro Paso Alto

Función de red:

$$H(s)=K\cdot\frac{s^2}{s^2+2\xi\omega_o s+\omega_o^2}$$

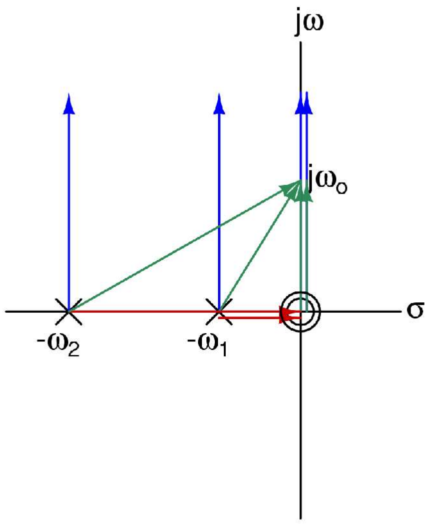
Frecuencia de resonancia:

$$|H(j\omega)|=\frac{|K|}{\sqrt{\left(\frac{\omega_o^2}{\omega^2}-1\right)^2+4\xi^2\frac{\omega_o^2}{\omega^2}}}$$

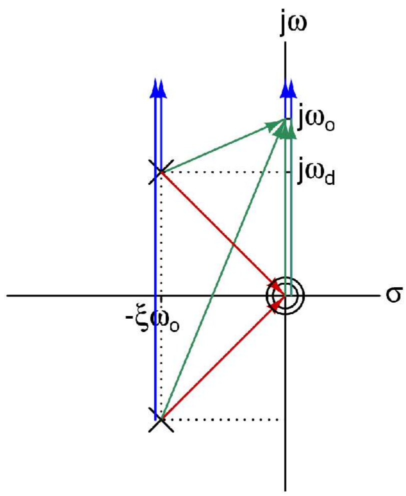
$$\boxed{\omega_{max}=\omega_r=\frac{\omega_o}{\sqrt{1-2\xi^2}}}$$

$$|H(j\omega_r)|=\frac{|K|}{\sqrt{\left(\omega_o^2\frac{(1-2\xi^2)}{\omega_o^2}-1\right)^2+4\xi^2\omega_o^2\frac{(1-2\xi^2)}{\omega_o^2}}}\quad;\quad\boxed{|H(j\omega_r)|=\frac{|K|}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Comportamiento asintótico y a la frecuencia natural de resonancia, ω_o:



Polos reales

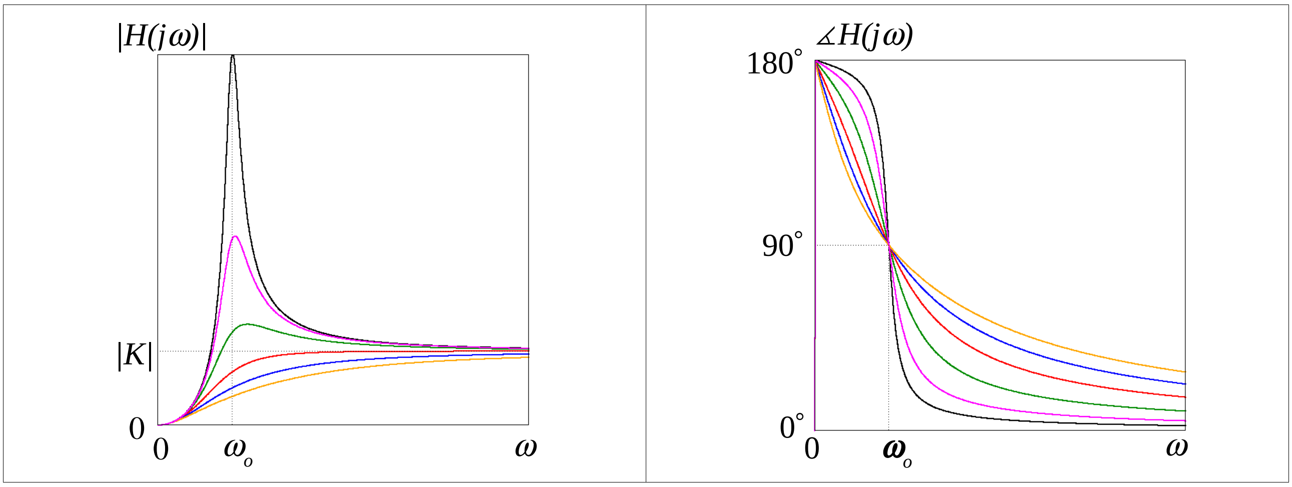


Polos complejos

En ambos casos:

$\lvert H(0)\rvert=0$	$\measuredangle H(0^+)=\measuredangle K+180°$
$\boxed{\lvert H(j\omega_o)\rvert=\frac{\lvert K\rvert}{2\xi}}$	$\boxed{\measuredangle H(j\omega_o)=\measuredangle K+90°}$
$\lvert H(\infty)\rvert=\lvert K\rvert$	$\measuredangle H(\infty)=\measuredangle K$

Curvas de respuesta frecuencial:



Banda de paso:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|K|\cdot\omega_c^2}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega_c^2)^2+4\xi^2\omega_o^2\omega_c^2}} = \frac{|K|}{2\xi\sqrt{2(1-\xi^2)}}$$

$$\omega_c = \frac{\omega_o}{\sqrt{1-2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\omega_{cs} = \frac{\omega_o}{\sqrt{1-2\xi^2-2\xi\sqrt{1-\xi^2}}} \qquad \omega_{ci} = \frac{\omega_o}{\sqrt{1-2\xi^2+2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- $0<\xi<0{,}38$ dos frecuencias de corte y máximo a frecuencia distinta de ∞
- $0{,}38 \le \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7$ una sola frecuencia de corte pero máximo distinto de ∞
- $\xi \ge 0{,}7$ una sola frecuencia de corte y máximo en el ∞

Expresiones generales de amplificación y desfase:

$$|H(j\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega_o^2}{\omega^2}}} \quad ; \quad \boxed{|H(j2\pi f)| = \frac{|K|}{\sqrt{\left(1-\frac{f_o^2}{f^2}\right)^2+4\xi^2\frac{f_o^2}{f^2}}}}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \measuredangle K + 180^\circ - artg\frac{2\xi}{\frac{\omega_o}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_o}} \quad ; \quad \boxed{\measuredangle H(j2\pi f) = \measuredangle K + 180^\circ - artg\frac{2\xi}{\frac{f_o}{f}-\frac{f}{f_o}}}$$

Caso particular: $\boxed{\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}7}$ Maximalmente plano (Butterworth)

El máximo se sitúa en el ∞ y la frecuencia de corte coincide con la frecuencia natural de resonancia.

$$\boxed{\omega_c=\omega_o} \quad \boxed{f_c=f_o}$$

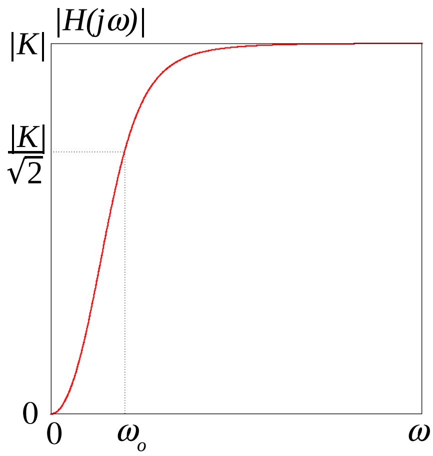
Así, la amplificación y el desfase se pueden espresar en función de los parámetros del filtro de la forma:

$$\boxed{|H(j2\pi f)|=\frac{|H(\infty)|}{\sqrt{1+\frac{f_c^4}{f^4}}}}$$

$$\boxed{\measuredangle H(j2\pi f)=\measuredangle K+180°-artg\frac{\sqrt{2}}{\frac{f_c}{f}-\frac{f}{f_c}}}$$

_c

Curva de amplificación:



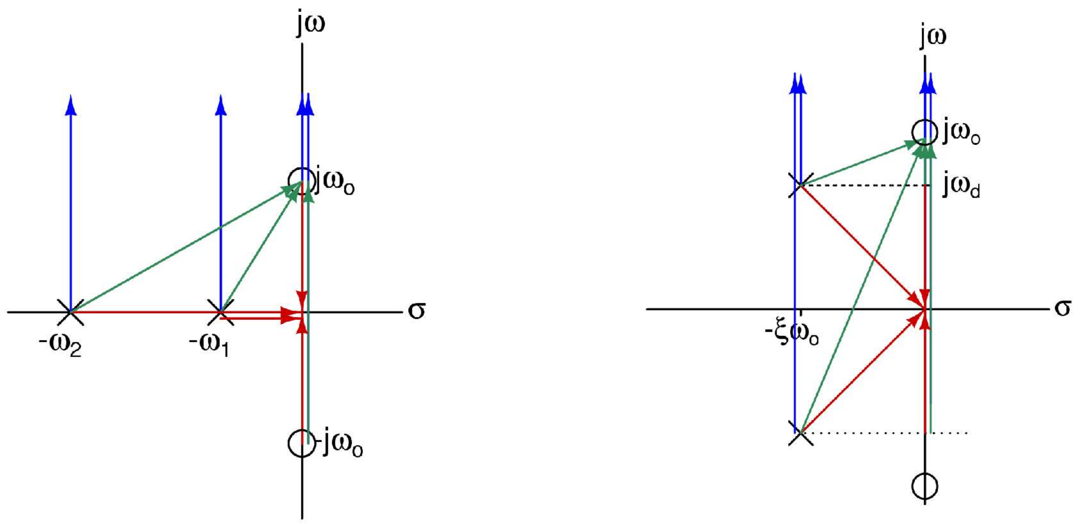
Filtro de Banda Eliminada

Función de red:

$$H(s)=K\cdot\frac{s^2+\omega_z^2}{s^2+2\xi\omega_o s+\omega_o^2}$$

Caso particular: $\boxed{\omega_z=\omega_o}$

Comportamiento asintótico y a la frecuencia del cero:



Polos reales Polos complejos

En ambos casos:

$\lvert H(0)\rvert=\lvert K\rvert$	$\measuredangle H(0)=\measuredangle K$
$\boxed{\lvert H(j\omega_o)\rvert=0}$	$\boxed{\measuredangle H(j\omega_o^-)=\measuredangle K-90°}$ $\boxed{\measuredangle H(j\omega_o^+)=\measuredangle K+90°}$
$\lvert H(\infty)\rvert=\lvert K\rvert$	$\measuredangle H(\infty)=\measuredangle K$

Banda de paso:

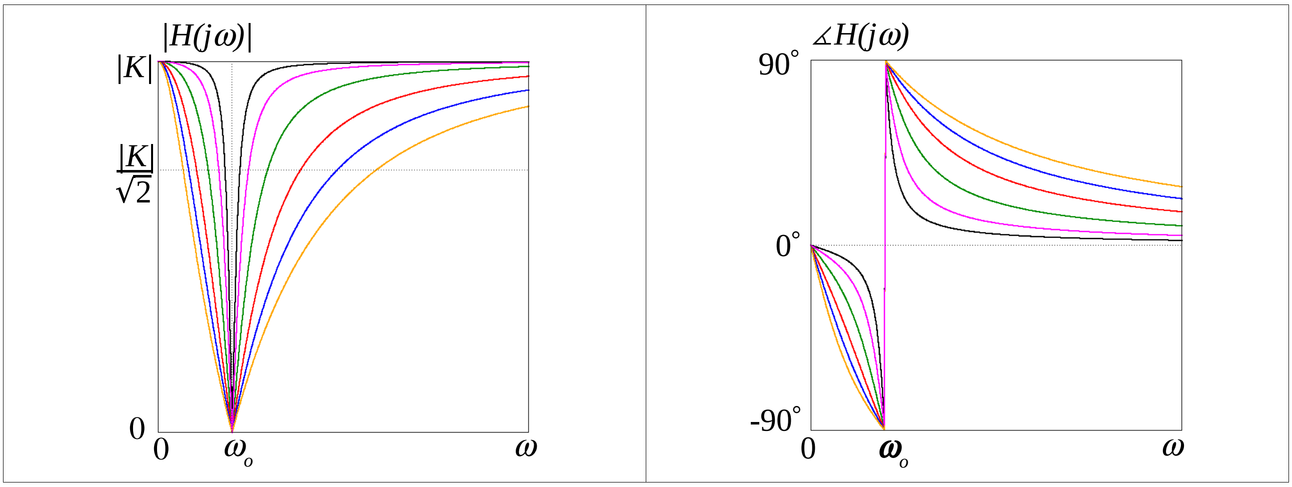
$$\lvert H(j\omega_c)\rvert=\frac{\lvert K\rvert}{\sqrt{1+4\xi^2\frac{\omega_o^2\omega_c^2}{(\omega_o^2-\omega_c^2)^2}}}=\frac{\lvert K\rvert}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_c=\omega_o(\sqrt{1+\xi^2}\pm\xi)$$

$$\omega_{cs}=\omega_o(\sqrt{1+\xi^2}+\xi)\qquad\omega_{ci}=\omega_o(\sqrt{1+\xi^2}-\xi)$$

que como se observa son las mismas que en el caso del filtro paso banda.

Curvas de respuesta frecuencial:

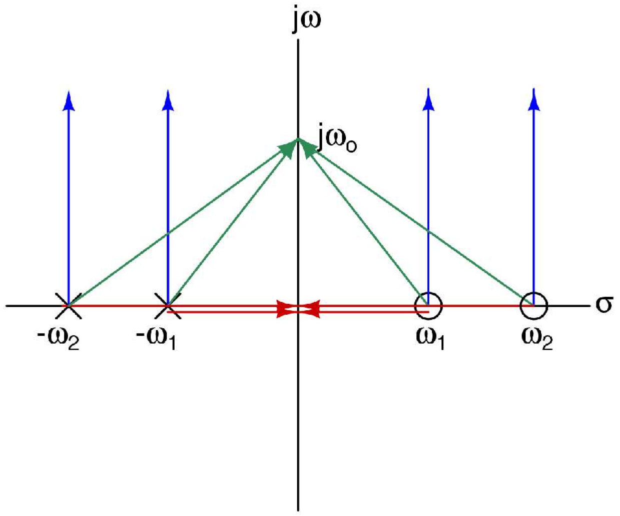


Filtro Pasa Todo (Desfasador)

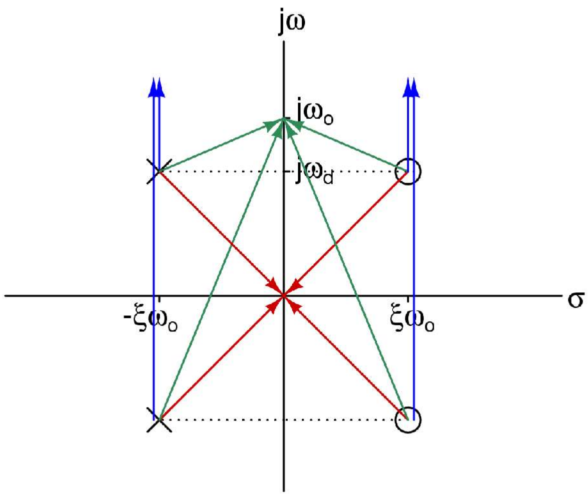
Función de red:

$$H(s)=K\cdot\frac{s^2-2\xi\omega_o s+\omega_o^2}{s^2+2\xi\omega_o s+\omega_o^2}$$

Comportamiento asintótico y a la frecuencia del cero:



Polos reales



Polos complejos

En ambos casos:

$\lvert H(0)\rvert=\lvert K\rvert$	$\measuredangle H(0)=\measuredangle K+360^\circ$
$\boxed{\lvert H(j\omega_o)\rvert=\lvert K\rvert}$	$\boxed{\measuredangle H(j\omega_o)=\measuredangle K+180^\circ}$
$\lvert H(\infty)\rvert=\lvert K\rvert$	$\measuredangle H(\infty)=\measuredangle K$

Curvas de respuesta frecuencial: