P1.-La secuencia $x_o[n] = \{\ldots, 0, \underline{1}, 1, -1, -1, 0, \ldots\}$ es el periodo principal de la secuencia periódica

$$x[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_o[n + 4r]$$

Se pide:

a) La transformada de Fourier de la secuencia $x_o[n]$, expresada mediante una fórmula cerrada.

b) Los valores de las muestras de la DFT con N=4 de $x_o[n]$.

c) La autocorrelación de $x_o[n]$.

d) La transformada de Fourier y la autocorrelación de $x[n]$.

SOLUCION:

a) $x_o[n] = p_2[n] - p_2[n-2]$

$$X_o(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega} \left(1 - e^{-2j\omega}\right) =$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega} e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \omega}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega}$$

b) $X_o[k] = X_o(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, \ldots, N-1$

$$X_o[k] = \{\ldots, 0, \underline{0}, 2\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}, 0, 2\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}, 0, \ldots\}$$

c) $r_{x_o}[m] = x_o[m] * x_o[-m] =$

$$= \{\ldots, 0, -1, -2, 1, \underline{4}, 1, -2, -1, 0, \ldots\}$$

d) $$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_o[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi}{2}n} + 2\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{3\pi}{2}n}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi}{2}n} + 2\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sqrt{2}\,\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-j\frac{\pi}{4}} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2} + 2\pi i\right) + e^{j\frac{\pi}{4}} \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2} + 2\pi i\right) \right\}$$

$$r_x[m] = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 \cos\frac{\pi}{2}m = \cos\frac{\pi}{2}m$$

P2.- Para la determinación de la correlación cruzada $r_{xy}[m]$ de dos secuencias x[n] e y[n] tales que $x[n] = y[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq L$ se propone el siguiente procedimiento:

1.- Calcular $X[k] = DFT_N\{x[n]\}$ e $Y[k] = DFT_N\{y[n]\}$.
2.- Calcular $z[m] = DFT_N^{-1}\{X[k]\,Y^*[k]\}$.
3.- Obtener $r_{xy}[m] = z[m]$ para $0 \leq m \leq L-1$. (1)

Para justificar teóricamente el procedimiento propuesto, se pide:

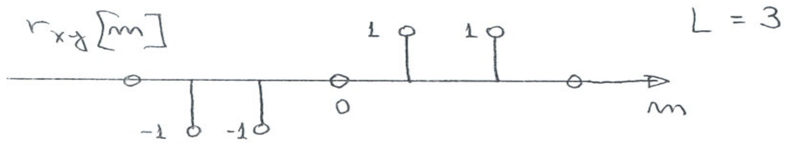
a) La transformada de Fourier de la correlación cruzada $r_{xy}[n]$ en función de las transformadas de Fourier de las secuencias x[n] e y[n].
b) La expresión de la secuencia z[m] en función de $r_{xy}[m]$, si el número N de muestras de la DFT es igual o mayor que L.
c) Calcule las secuencias $r_{xy}[m]$ y z[m] (con N=6) cuando $x[n] = \{\ldots, 0, \underline{1}, 1, 1, 0, \ldots\}$ e $y[n] = \{\ldots, 0, \underline{1}, 0, -1, 0, \ldots\}$ y compruebe que $r_{xy}[m]$ y z[m] coinciden para $0 \leq m \leq L-1$.
d) El valor mínimo de N para que se pueda obtener $r_{xy}[m]$ a partir de z[m] mediante (1).
e) $r_{xy}[m]$ para $m < 0$ en función de z[m].

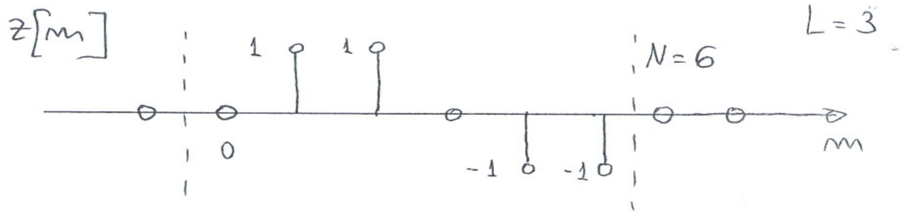
SOLUCION

a) $$F\{r_{xy}[m]\} = F\{x[m] * y^*[-m]\} = X(e^{j\omega})\,Y^*(e^{j\omega})$$

b) $$z[m] = DFT^{-1}\{X[k]\,Y^*[k]\} = DFT^{-1}\left\{F\{r_{xy}[m]\}\Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}\right\} = \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} r_{xy}[m+rN]\right) p_N[m]$$

c)





d) $r_{xy}[m]$ es el resultado de la correlación de dos secuencias de longitud L, por lo que su longitud es $L_r = 2L-1$. Por tanto, para que no haya solapamiento temporal $N \geq 2L-1$.

e) $z[N-m] = r_{xy}[-m] \qquad 1 \leq m \leq L-1$

P3.- Una secuencia x[n] con periodo P se puede expresar

$$x[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_o[n+rP]=x_o[n]*t_P[n]$$

donde $x_o[n]$ es el periodo fundamental de x[n]

$$x_o[n]=\begin{cases} x[n] & 0\le n\le P-1 \\ 0 & \text{otro n}\end{cases}=x[n]\,p_P[n]$$

y $t_P[n]$ es un tren de deltas con periodo P

$$t_P[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n+rP]$$

Se pide:

a) Expresar x[n] en función de la DFT de $x_o[n]$.

b) Demostrar que la autocorrelación de una secuencia x[n] con periodo P se puede calcular mediante

$$r_x[m]=\frac{1}{P}\sum_{r=-\infty}^{\infty} r_{x_o}[m+rP]=\frac{1}{P}x[m]*x_o^*[-m]$$

c) Demostrar que la respuesta de un sistema lineal e invariante con respuesta impulsional h[n] a una señal x[n] con periodo P es periódica con el mismo periodo P. Establecer que su periodo fundamental es la convolución circular de $x_o[n]$ y $h_o[n]$, siendo $h_o[n]$ el periodo fundamental de la versión periódica de h[n]:

$$h_o[n]=(\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[n+rP])\,p_P[n]=(h[n]*t_P[n])\,p_P[n]$$

SOLUCIÓN:

a) Si expresamos $x_o[n]$ en función de la inversa de su DFT podemos escribir:

$$x_o[n]=(\frac{1}{P}\sum_{k=0}^{P-1}X_o[k]\,e^{j\frac{2\pi}{P}kn})\,p_P[n]$$

La secuencia expresada por el sumario es una secuencia con periodo P, por lo que si eliminamos el enventanado con $p_P[n]$ podemos establecer:

$$\frac{1}{P}\sum_{k=0}^{P-1}X_o[k]\,e^{j\frac{2\pi}{P}kn}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_o[n+rP]=x[n] \qquad (1)$$

que constituye el resultado que se deseaba. Esta expresión de x[n] representa la señal periódica como combinación lineal de P componentes con frecuencia 1/P (frecuencia fundamental) y sus múltiplos (armónicos). Esta ecuación constituye la DFS, representación de una señal periódica mediante las serie de Fourier discreta.

b) El resultado anteriror, teniendo en cuenta la incorrelación entre componentes frecuencialses de frecuencia distinta, permite establecer para la correlación de x[n]

$$r_x[m]=\sum_{k=0}^{P-1}\left|\frac{X_o[k]}{P}\right|^2 e^{j\frac{2\pi}{P}km}=\frac{1}{P}(\frac{1}{P}\sum_{k=0}^{P-1}\left|X_o[k]\right|^2 e^{j\frac{2\pi}{P}km})=\frac{1}{P}\sum_{r=-\infty}^{\infty}r_{x_o}[m+rP]$$

La tercera igualdad se alcanza mediante el teorema de muestreo en frecuencia, ya que $\left|X_o[k]\right|^2$ es una secuencia que corresponde al muestreo de la transformada de Fourier de la correlación de $x_o[n]$. Teniendo en cuenta que

$$r_{x_o}[m]=x_o[m]*x_o^*[-m]$$

y haciendo uso de la secuencia

$$t_P[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n + rP]$$

podemos escribir

$$r_x[m] = \frac{1}{P} \sum_{r=-\infty}^{\infty} r_{x_o}[m + rP] = \frac{1}{P} t_P[m] * x_o[m] * x_o^*[-m] = \frac{1}{P} x[m] * x_o^*[-m]$$

que es el resultado que se desea demostrar.

c) Dado que el sistema es lineal e invariante, a un componente frecuencial responderá con el mismo componente frecuencial afectado por la respuesta frecuencial del sistema. Además, si la señal es una combinación de componentes, la respuesta del mismo será la misma combinación de respuestas individuales. De este modo, si $H(e^{j\omega})$ es la respuesta frecuencial del sistema, a partir de (1) podemos escribir:

$$y[n] = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} X_o[k]\, H(e^{j\frac{2\pi}{P}k})\, e^{j\frac{2\pi}{P}kn} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_o[n + rP]$$

que representa una secuencia con periodo P mediante la DFS, siendo la DFT del periodo fundamental $y_o[n]$

$$Y_o[k] = X_o[k]\, H(e^{j\frac{2\pi}{P}k}) \qquad (2)$$

Ahora bien, por un lado, de acuerdo con el muestreo en frecuencia, $H(e^{j\frac{2\pi}{P}k})$ es la DFT de la versión periódica de h[n], o lo que es lo mismo del periodo fundamental $h_o[n]$ de la misma; y por otro lado, de acuerdo con las propiedades de la DFT, de (2) se deduce que $y_o[n]$ es la convolución circular de $x_o[n]$ y $h_o[n]$:

$$DFT^{-1}\{Y_o[k]\} = x_o[n] \odot h_o[n] = (x_o[n] * h_o[n] * t_P[n])\, p_P[n]$$

como se quería demostrar.

Una manera alternativa de establecer el mismo resultado es hacer uso directamente de la convolución

$$y[n] = x[n] * h[n] = x_o[n] * t_P[n] * h[n] = x_o[n] * h[n] * t_P[n] = x_o[n] * h_o[n] * t_P[n]$$

donde se ha hecho uso de la propiedad conmutativa de la convolución y de que

$$h[n] * t_P[n] = h_o[n] * t_P[n]$$

Es consecuencia, y[n] es la versión periódica de la convolución de $x_o[n]$ y $h_o[n]$, lo que constituye también la versión periódica de la convolución circular de ambas secuencias:

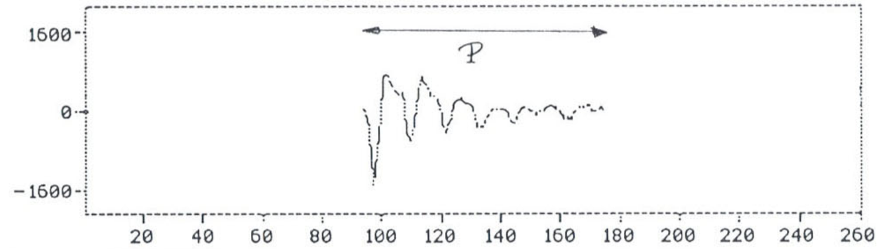
$$y[n] = x_o[n] * h_o[n] * t_P[n] = x_o[n] \odot h_o[n] * t_P[n]$$

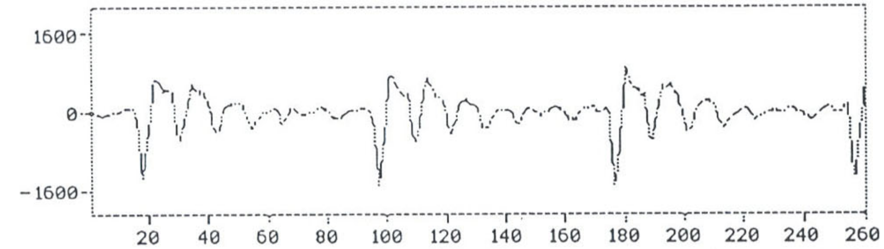
ESPECTRO DE UN SEGMENTO DE VOZ

DPS:

$x_o[n]$ p. fonamental

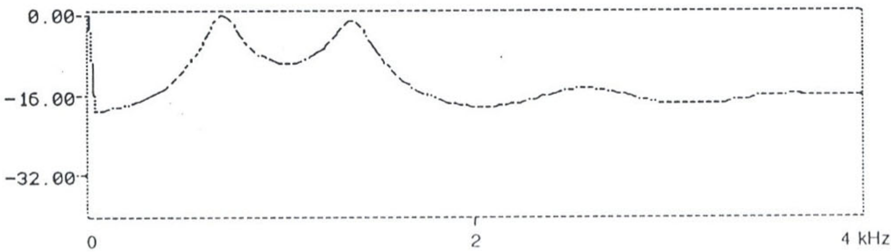
$x[n]$ s. periòdic: $\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_o[n+rP] = \sum_{k=0}^{P-1} \overbrace{\frac{X_o[k]}{P}}^{\text{coefs.}} e^{j\frac{2\pi}{P}kn}$

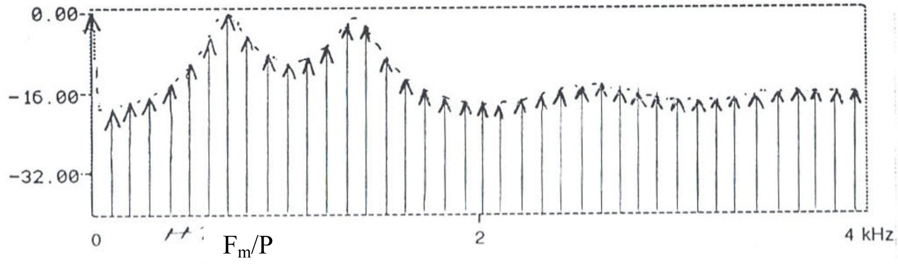




$X_o(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x_o[n]\}$

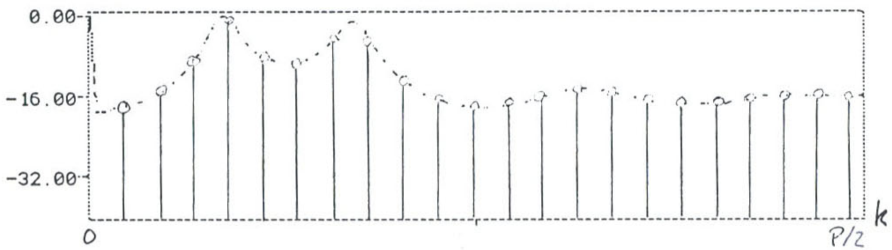
$X(e^{j\omega}) = \sum_r \sum_{k=0}^{P-1} \frac{2\pi X_o[k]}{P}\delta(\omega - \frac{2\pi k}{P} - 2\pi r)$

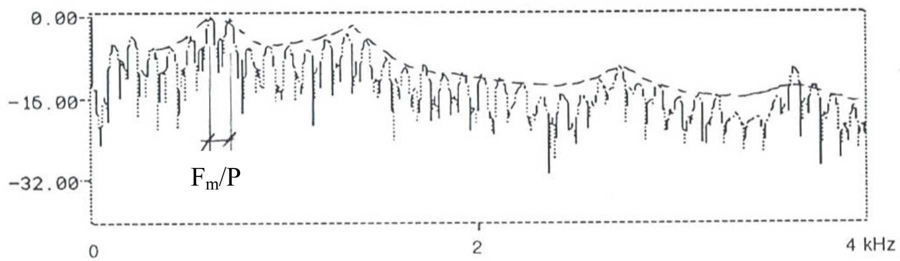




$X_o[k] = DFT_P\{x_o[n]\} = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{P}k}$

$X_N(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]v_N[n]\} = \sum_{k=0}^{P-1}\frac{X_o[k]}{P}\cdot V(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{P}k)})$





1. Sean $x[n]$ una secuencia de energía finita e $y[n]=x[n-i]$. Indique cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   A. $r_{yy}[m]=r_{xx}[m-i] \quad \forall i$
   B. $Y[k]=X[k]e^{-j(2\pi/N)ik} \quad \forall\, i,N$
   C. $r_{xy}[m]=r_{xx}[m+i] \quad \forall i$
   D. $S_{yy}(e^{j\omega})=S_{xx}(e^{j\omega}) \quad \forall i$

2. Sean $x[n]$ una secuencia real de energía finita e $y[n]=x[-n]$. Identifique las relaciones correctas:
   A. $r_{yy}[m]=r_{xx}[m]$
   B. $S_{yy}(e^{j\omega})=S_{xx}(e^{-j\omega})$
   C. $r_{xx}[m]=x[m]*y[m]$
   D. $r_{yx}[m]=r_{xy}[-m]$