

ETSETB - Probabilitat i Processos Estocàstics

Curs 2008-09

Collecció de problemes

Probabilitat bàsica.

1 Probabilitat bàsica

1. Demostreu que és més probable obtenir almenys un as amb quatre daus que almenys un doble as en 24 tirades de dos daus (La resposta es coneix com la paradoxa de Meré, segle XVII).
2. L'esquema de la Figura 1 representa els carrers d'una ciutat on suposem que totes les cruïlles estan situades en punts de coordenades enteres. Sortint de $(0,0)$, una persona efectua un recorregut de manera que, en cada cruïlla (x,y) , decideix anar a $(x+1,y)$ amb probabilitat p , o a $(x,y+1)$ amb probabilitat $q = 1 - p$. Calculeu:
 - (a) la probabilitat que el camí seguit passi per un punt (m,n) donat;
 - (b) els valors p, q que fan màxima la probabilitat anterior. Quin valor té, en aquest cas, el quocient p/q ?

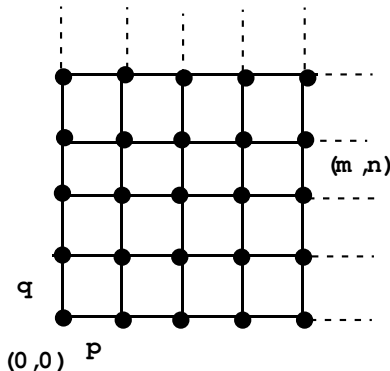


Figura 1: Esquema dels carrers.

3. Dos jugadors A i B juguen repetidament amb probabilitat de guanyar un punt p i $q = 1 - p$ respectivament, $0 < p < 1$. Calculeu la probabilitat que té cada jugador de guanyar el joc si:
 - (a) guanya el joc qui primer aconsegueix un avantatge de dos punts sobre l'adversari;
 - (b) guanya el joc qui primer aconsegueix guanyar dos punts consecutius.
4. Es tenen dues urnes U i V . L'urna U conté dues boles blanques i una bola negra. L'urna V conté una bola blanca i dues boles negres. S'extreuen a l'atzar dues boles de cada urna i s'introdueixen dins d'una bossa. Tot seguit i també a l'atzar s'extreuen dues boles d'aquesta bossa (sense reposició). Quina és la probabilitat que ambdues siguin negres?
5. Es tira un dau i a continuació tantes monedes com indiqui la puntuació del dau. Si al fer l'experiència s'obté una sola cara, quina és la probabilitat que la puntuació del dau hagi estat 1.
6. Un ordinador té instal·lat un programa per detectar un determinat virus. Sabem que la probabilitat que l'ordinador tingui aquest virus és 0.3. Si l'ordinador té el virus, la probabilitat de ser detectat pel programa és 0.9 i també sabem que si l'ordinador no té el virus, pot apareixer un missatge d'alarma amb probabilitat 0.01.

- (a) Si apareix un missatge d'alarma, quina és la probabilitat que l'ordinador no tingui el virus.
 - (b) Si no apareix cap missatge, quina és la probabilitat que l'ordinador tingui el virus.
 - (c) Quina és la probabilitat que l'ordinador tingui el virus i el programa no el detecti.
7. Tenim una bossa amb $2n$ monedes de les quals una té dues cares. En triem a l'atzar n . Calculeu la probabilitat d'haver triat la moneda de dues cares si al tirar-les
- (a) totes treuen cara.
 - (b) alguna treu cara.
8. D'una baralla espanyola amb 40 cartes se n'escullen 5.
- (a) Calculeu la probabilitat que entre les 5 cartes escollides hi hagi almenys 2 asos.
 - (b) Es mira una d'aquestes cartes i resulta ser un as. Trobeu la probabilitat que en les 4 cartes restants hi hagi almenys un altre as.
 - (c) Calculeu la probabilitat que 3 cartes mostrin un mateix número n_1 i les dues cartes restants mostrin números n_2 i n_3 , amb n_1 , n_2 i n_3 distints.
9. Una certa malaltia afecta al 5% de la població. El 93% dels pacients afectats de la malaltia presenten un cert símptoma S , mentre que només el 2% dels que no pateixen la malaltia presenta aquest símptoma. S'examina un pacient i se li observa el símptoma S . Quina és la probabilitat que pateixi la malaltia?
10. Es tenen m urnes, cadascuna amb b boles blanques i n boles negres. S'extreu una bola a l'atzar de la primera urna i es posa a la segona. Després s'extreu de la segona i es posa a la tercera i així successivament. Quina és la probabilitat que al treure una bola a la darrera urna sigui blanca?
11. Sigui $\{A_1, A_2, A_3\}$ una partició en esdeveniments equiprobables de l'espai mostral Ω d'un experiment aleatori. L'experiment es repeteix fins que cada A_i ha succeït almenys una vegada. Si N és el nombre de repeticions, calculeu $P(N > n)$ i $P(N = n)$.
12. Una moneda amb $P(\text{cara}) = p$ i $P(\text{creu}) = q$ es llança reiteradament. Trobeu la probabilitat que surtin r (≥ 1) cares seguides abans que surtin s (≥ 1) creus seguides.
13. Dos jugadors, A i B , llancen alternativament dos daus. A guanya si treu, entre els dos daus, 10 punts abans que B n'obtingui 8. En cas contrari guanya B . Suposant que comença a tirar A , calculeu la probabilitat $P(A)$ que guanyi A ,
- (a) directament sumant una certa sèrie;
 - (b) relacionant el valor de $P(A)$ amb ell mateix mitjançant el teorema de la probabilitat total.
14. Fent servir dos daus D_A i D_B , on D_A és perfecte i D_B és un dau carregat tal que $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{2}P(6)$, dos jugadors A i B juguen el joc següent: El jugador A llença el dau D_A i el jugador B el dau D_B . El dau es llencen repetidament (de manera simultània i independent) fins que un dels dos daus mostra un resultat més gran que l'altra. Guanya el jugador que té el dau que ha mostrat aquest resultat més gran. Calculeu la probabilitat que guanyi el joc el jugador A .
15. Es tenen dos jocs de n cartes. Un d'ells s'estén i l'altre, després de barrejar les cartes, s'estén damunt del primer. Calculeu la probabilitat p_n que no hi hagi cap coincidència.
16. Quatre ciutats estan situades en els vèrtexs d'un quadrat. Un transportista realitza viatges entre elles. Des de cada ciutat viatja a la següent (sentit horari) amb probabilitat p i a la anterior (sentit antihorari) amb probabilitat $q = 1 - p$. Trobeu la probabilitat que el primer retorn a la ciutat de sortida es faci per la ciutat oposada a la primera que es va visitar (després de la de sortida).