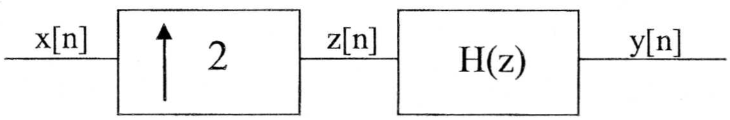
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA **DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS**	**Senyals i Sistemes II** Data d'examen: 15 de Maig de 2009 Data notes provisionals: Període d'al.legacions: Data notes revisades:

Professors: J. Hernando, J.B. Mariño, E. Monte, J. Ruiz, J. Salavedra.

Temps: 1 h 45 min

- Responeu a cada problema en fulls separats.
- El vostre nom ha de figurar en tots els fulls que utilitzeu, en format: COGNOMS, NOM.
- Justifiqueu tots els resultats. Els resultats sense justificació no seran valorats en la correcció.
- No podeu utilitzar llibres, apunts, taules, formularis, calculadores o telèfon mòbil.

Problema 1: **5 puntos**



Se desea interpolar una sinusoide x[n] con frecuencia f_x=0.125 y potencia P_x=2 mediante el sistema de la figura. Se pide:

a) Suponiendo que x[n] responde a la expresión $x[n] = A \cos \omega_x n$, determinar la amplitud A.

b) Suponiendo que H(z) es un filtro interpolador ideal, representar las transformadas de Fourier de x[n], z[n] e y[n], e indicar las frecuencias de sus componentes en el intervalo [0,1).

c) Sabiendo que z[n] puede expresarse

$$z[n] = B \cos \omega_a n + C \cos \omega_b n$$

obtener B, C , ω_a y ω_b en función de A y ω_x .

d) Si la función de transferencia H(z) del filtro interpolador es

$$H(z) = \mathbf{H}\,(1 + \mathbf{a}\,z^{-1} + z^{-2})$$

calcular **a** para que x[n] se interpole correctamente y **H** para conservar su amplitud.

e) Si x[n] se enventana con una ventana rectangular de longitud L = 128 y se calcula la DFT de la secuencia resultante con N=512, determinar:

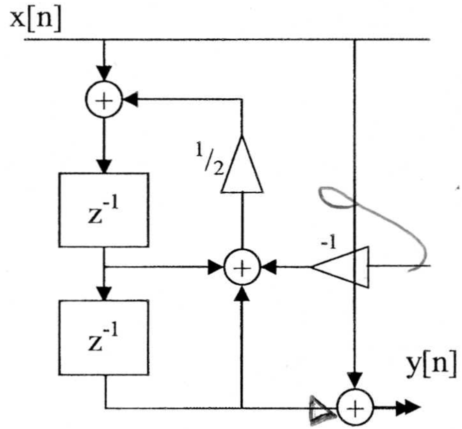
1. los ordinales k de la DFT que se corresponden con las frecuencias de los componentes de x[n];
2. la amplitud de la DFT para esos ordinales.

f) Si el filtro interpolador H(z) se diseña a partir de un interpolador ideal mediante la técnica de las ventanas, determinar la longitud mínima de la respuesta impulsional del filtro necesario para obtener el filtro interpolador de x[n] mediante la ventana rectangular.

NOTA.- $\cos \pi/8 = 0.924$

Problema 2: **5 puntos**

Considere el siguiente sistema causal:



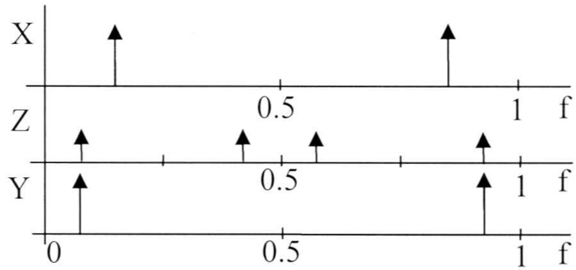
Se pide:

a) Escribir la EDF que corresponde al sistema.
b) Calcular la función de transferencia H(z) del sistema.
c) Encontrar la respuesta impulsional h[n] del sistema. Justificar si se trata de un sistema FIR o IIR.
d) Dibujar el diagrama de polos y ceros de H(z), indicando su ROC. Justificar si el sistema es estable.
e) Calcular la salida y[n] si la entrada es $x[n] = \cos(\pi n) + (1/2)^n$.
f) Calcular la salida y[n] si la entrada es $x[n] = \delta[n] - 1/2\,\delta[n-1] - 1/2\,\delta[n-2]$.

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

a) $P_x = 2 = \frac{1}{2} A^2 \rightarrow A = 2$

b)



x[n] contiene los componentes f_x y $1 - f_x$

z[n] contiene los componentes $\frac{1}{2} f_x$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}f_x$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_x$, $1 - \frac{1}{2}f_x$

x[n] contiene los componentes $\frac{1}{2} f_x$ y $1 - \frac{1}{2} f_x$

c) De acuerdo con el resultado anterior en la expresión de z[n]

$$z[n] = B \cos \omega_a n + C \cos \omega_b n$$

$f_a = \frac{1}{2} f_x$ y $f_b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f_x$. Por otro lado

$$z[0] = B + C = x[0] = A$$

$$z[1] = B \cos \tfrac{1}{2} \omega_x + C \cos (\pi - \tfrac{1}{2} \omega_x) = (B - C) \cos \tfrac{1}{2} \omega_x = 0$$

por lo que $B = C = A/2 = 1$.

d) Para interpolar x[n] correctamente es preciso eliminar la componente ω_b. Por otro lado, la respuesta frecuencial del filtro H(z) se anula para ω_b si se cumple

$$\mathbf{a} = -2 \cos \omega_b = -2 \cos (\pi - \tfrac{1}{2} \omega_x) = 2 \cos \tfrac{1}{2} \omega_x$$

Además, el módulo de la respuesta frecuencial del filtro ha de ser 2 para la pulsación que se interpola, por tanto

$$\left| H(e^{j\omega}) \right|_{\omega = \frac{1}{2}\omega_x} = H \left| a + 2\cos\frac{1}{2}\omega_x \right| = 4H \cos\frac{1}{2}\omega_x = 2$$

que da como resultado $\mathbf{H} = 1/(2 \cos \frac{1}{2} \omega_x) = 0.541$.

e) En la DFT se toman muestras de la transformada de Fourier en las frecuencias $f = k/N$. En nuestro caso $f = 0.125$ y $N = 512$, por lo que $k = 64$. Por otro lado, la amplitud de la transformada de x[n] enventanada a la frecuencia de la sinusoide es $X = \frac{1}{2} A L$, ya que se trata de la ventana rectangular de longitud L. Por lo tanto, $X = 128$.

f) La banda de transición del filtro interpolador en este caso se extiende desde $\frac{1}{2} \omega_x$ hasta $\pi - \frac{1}{2} \omega_x$, por lo que su anchura es $B\omega = \pi - \omega_x$, que coincide con la anchura del lóbulo principal de la transformada de la ventana:

$$B\omega = \pi - \omega_x = 4 \pi / L$$

En consecuencia, $L = 4 / (1 - 2 f_x) \rightarrow 6$.

a)

$$\begin{cases} y[n] = x[n] + v[n-1] \\ v[n] = x[n-1] + \frac{1}{2}v[n-1] + \frac{1}{2}v[n-2] - \frac{1}{2}x[n-1] \end{cases}$$

($v[n]$: señal a la salida del primer retardo).

TZ

$$\begin{cases} Y(z) = X(z) + z^{-1}V(z) \\ V(z) = \frac{1}{2}z^{-1}X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}V(z) + \frac{1}{2}z^{-2}V(z) \end{cases}$$

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{2}z^{-2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}\cdot X(z) = X(z)\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$Y(z)\cdot\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}\right) = X(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$$

TZ^{-1}

$$\boxed{y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]}$$

b)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

c)

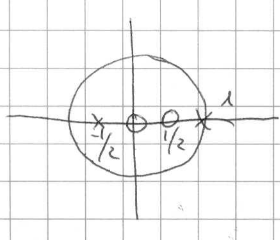
$$H(z) = \frac{1/3}{1-z^{-1}} + \frac{2/3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

TZ^{-1} Sistema Causal!

$$h[n] = \frac{1}{3}u[n] + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{\text{infinita}}{\Rightarrow} \text{IIR}$$

d) Polos: $z=1$, $z=-\frac{1}{2}$

Ceros: $z=\frac{1}{2}$, $z=0$



ROC: $|z|>1$ (por causalidad)

Como $|z|=1 \notin$ ROC $\Rightarrow$ NO es estable

e) $x[n] = (-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ como -1 y $\frac{1}{2} \notin$ ROC

entonces : $y[n] = \infty$ (ya que el stma no converge)

f) $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-2]$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} \qquad \text{ROC} : |z|>0$$

$$Y(z) = X(z)\cdot H(z) = \cancel{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\cancel{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}} = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \qquad \text{ROC} : |z|>1$$

$(TZ^{-1}$

$$y[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$