COMUNICACIONES II **EXAMEN FINAL** **17 de enero de 2006**

Profesores: M. Cabrera, E. Monte, J. Rodríguez, J. Riba. Duración: 3 horas

---

- **No pueden utilizarse calculadoras de ningún tipo. Apague su teléfono móvil**
- **Entregue el examen en tres partes separadas, siguiendo las indicaciones del enunciado.**

NOTA: Inicie el problema en una hoja nueva.

PROBLEMA 1.

Se desea transmitir una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes entre sí a una velocidad constante de $r_b = \frac{1}{T_b}$ bps y transmitiendo en media una energía por bit E_b. La señal se transmite por un canal de función de transferencia $H_c(f)$ y ruido *w(t)* aditivo, blanco y gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$. En este ejercicio se evalúan las prestaciones de la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ mediante diferentes técnicas que utilizan diversidad frecuencial.

La secuencia de bits se codifica mediante un código binario y polar y se obtiene la secuencia de símbolos: $\alpha[n] = \pm\frac{d}{2}$. A partir de la misma secuencia $\alpha[n]$, en el transmisor se generan dos señales distintas $s_1(t), s_2(t)$:

$$s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n]\varphi_1(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n]\sqrt{\tfrac{2}{T}}\mathrm{sinc}(\tfrac{t-nT}{T})\cos(2\pi f_1 t);$$

$$s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n]\varphi_2(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n]\sqrt{\tfrac{2}{T}}\mathrm{sinc}(\tfrac{t-nT}{T})\cos(2\pi f_2 t)$$

$$f_2 = 2f_1; \quad f_1 = \tfrac{N}{T}; \quad N >> 1; \quad T = T_b = \tfrac{1}{r_b} = \tfrac{1}{r}$$

La función de transferencia del canal es: $H_c(f) = \begin{cases} \gamma_1 & f_1 - r < |f| < f_1 + r \\ \gamma_2 & f_2 - r < |f| < f_2 + r \end{cases}$

Con $\gamma_1 \in \mathbb{R}; \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}; \quad \gamma_1 + \gamma_2 \geq 0$

Se pide:

a. Proporcione la expresión de la respuesta impulsional del filtro adaptado (no causal): $\varphi_1(-t)$, necesario para demodular la señal $s_1(t)$. Si a la salida de dicho filtro, la señal se muestrea a $t_k = kT$, obtenga la expresión de las correspondientes muestras $y_1[k] = y_1(t_k)$, y la función densidad de probabilidad de la componente de ruido en dicha muestra. Repita la respuesta con el filtro adaptado $\varphi_2(-t)$ necesario para la demodulación de $s_2(t)$ y su correspondiente salida $y_2[k] = y_2(t_k)$.

Estrategia 1: Se transmite la señal $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ y se detectan los símbolos a partir de la variable $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$

b. Calcule y dibuje la densidad espectral de la señal transmitida $s(t)$. Obtenga la energía media transmitida por bit en función de *d*. Utilice la expresión proporcionada en las Notas de ayuda al final del enunciado.

c. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Comente qué ocurriría si casualmente $\gamma_1 = -\gamma_2$.

Estrategia 2: Se transmite la señal $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ y se detectan los símbolos a partir de la variable $y[k] = ay_1[k] + by_2[k]$, siendo $a,\ b$ dos constantes a calcular.

d. Determine el valor de la constante *b* en función de *a* para que $y(t_k) = \alpha\left[k\right] + n(t_k)$, es decir $y\left[k\right] = \alpha\left[k\right] + n\left[k\right]$

e. Obtenga los valores de *a* y *b* que minimizan la BER minimizando la varianza σ^2 del ruido $n[k]$.

f. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Comente que ocurriría si $\gamma_1 = -\gamma_2$.

NOTA: Inicie el siguiente apartado en una hoja nueva.

Estrategia 3: Se transmite la señal

$$s(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha[2p]\varphi_1(t-2pT) + \alpha[2p+1]\varphi_2(t-2pT) - \alpha[2p+1]\varphi_1(t-2pT-T) + \alpha[2p]\varphi_2(t-2pT-T)\right)$$

y se detectan los símbolos a partir de la variable $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$, que puesta en forma de vector, resulta

$$\mathbf{v}\left[q\right] = \begin{pmatrix} y[2q] \\ y[2q+1] \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \alpha[2q] \\ \alpha[2q+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n[2q] \\ n[2q+1] \end{pmatrix}.$$

g. Obtenga la energía media transmitida por bit en función de *d*.

h. Identifique la matriz de canal $\mathbf{P}$ en la expresión del vector $\mathbf{v}[q]$.

i. Determine una matriz cuadrada $\mathbf{H}$, aplicando un criterio del tipo Forzador de Ceros, tal que:

$$\mathbf{Hv}\left[q\right] = \begin{pmatrix} \alpha[2q] \\ \alpha[2q+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n'[2q] \\ n'[2q+1] \end{pmatrix}$$

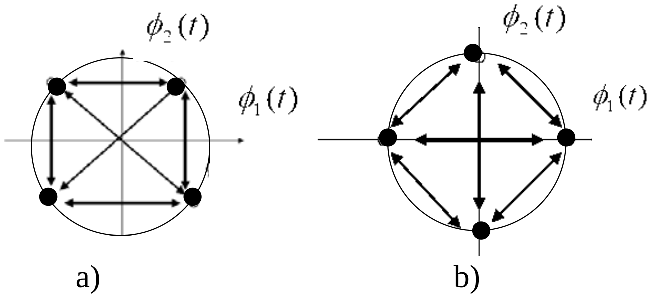
j. Obtenga la matriz de covarianza del nuevo vector de ruido $\begin{pmatrix} n'[2q] \\ n'[2q+1] \end{pmatrix}$.

k. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. ¿Puede considerarse que el receptor es óptimo si se detectan cada una de las coordenadas (símbolos pares e impares) por separado?

NOTA: Inicie el problema en una hoja nueva.

Problema 2.

El objetivo de este problema es estudiar la modulación $\pi/4$-ShiftedQPSK. Se trata de una modulación que usa de forma alternativa en el tiempo las dos constelaciones que se muestran en la figura.



Constelaciones y transiciones posibles entre símbolos para (a) símbolo en $t = nT$, (b) símbolo en $t = (n+1)T$

La expresión general de la señal transmitida es:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T(t-nT)\cos(2\pi f_o t + \frac{\pi a[n]}{2} + \frac{\pi}{8}\left(1+(-1)^n\right)) \ ; \ g_T(t) = \prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

Para realizar el análisis de la modulación suponga conocida la energía de Bit E_b, canal ideal y ruido aditivo gausiano de densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$. Los símbolos $a[n]$ son equiprobables e independientes entre si.

a) Justifique brevemente cuántos bits por símbolo se transmiten y enumere los valores posibles de la secuencia $a[n]$. Escriba la tabla de cambios de fase posibles $\Delta\theta_k$ entre el símbolo transmitido en $t = nT$ y el símbolo en $t = (n+1)T$.

b) Calcule la base $\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$ asociada con el espacio de señal y las coordenadas de los símbolos en el caso de n par y n impar.

c) Dibuje un diagrama de bloques del modulador y del demodulador.

d) A partir del criterio de decisión MAP determine de forma analítica la ecuación del umbral de decisión de los símbolos y dibuje las fronteras de decisión de la constelación usada en $t = nT$ y la usada en $t = (n+1)T$.

e) Dados los umbrales de decisión del apartado anterior calcule la probabilidad de error por bit, en función de E_b/N_0, justificando de forma geométrica cada paso. Suponga que cada símbolo está codificado mediante un código Gray y sólo se pueden producir errores entre símbolos vecinos en la constelación.

Notas de ayuda

Densidad Espectral de una modulación digital:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L} \alpha_l \left[n\right] \varphi_l (t - nT)$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{L} \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha_l \alpha_j} \left[k\right] \exp\left(-jk2\pi fT\right)$$

Expresiones trigonométricas

$$\begin{aligned}
\cos(A)\cos(B) &= \tfrac{1}{2}\cos(A-B) + \tfrac{1}{2}\cos(A+B) \\
\text{sen}(A)\text{sen}(B) &= \tfrac{1}{2}\cos(A-B) - \tfrac{1}{2}\cos(A+B) \\
\text{sen}(A)\cos(B) &= \tfrac{1}{2}\text{sen}(A-B) + \tfrac{1}{2}\text{sen}(A+B) \\
\text{sen}(A+B) &= \text{sen}(A)\cos(B) + \cos(A)\text{sen}(B) \\
\cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \text{sen}(A)\text{sen}(B)
\end{aligned}$$

Inversa de una matriz 2x2

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(ac - bd\right)} \begin{pmatrix} c & -d \\ -b & a \end{pmatrix}$$

COMUNICACIONES II

1er Ejercicio del examen final de COM2 (T05) resuelto por M. Cabrera

Se desea transmitir una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes entre sí a una velocidad constante de $r_b = \frac{1}{T_b}$ bps y transmitiendo en media una energía por bit E_b.
La señal se transmite por un canal de función de transferencia $H_c(f)$ y ruido *w(t)* blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$. En este ejercicio se evalúan las prestaciones de la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, mediante diferentes técnicas que utilizan diversidad frecuencial.

La secuencia de bits se codifica mediante un código binario y polar y se obtiene la secuencia de símbolos: $a[n] = \pm\frac{d}{2}$. A partir de la misma secuencia $a[n]$, en el transmisor se generan dos señales distintas $s_1(t), s_2(t)$:

$$s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] j_1(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\sqrt{\tfrac{2}{T}}\text{sinc}(\tfrac{t-nT}{T})\cos(2p\, f_1 t);$$

$$s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] j_2(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\sqrt{\tfrac{2}{T}}\text{sinc}(\tfrac{t-nT}{T})\cos(2p\, f_2 t)$$

$$f_2 = 2f_1; \quad f_1 = \tfrac{N}{T}; \quad N >> 1; \quad T = T_b = \tfrac{1}{r_b} = \tfrac{1}{r}$$

La función de transferencia del canal es: $H_c(f) = \begin{cases} g_1 & f_1 - r < |f| < f_1 + r \\ g_2 & f_2 - r < |f| < f_2 + r \end{cases}$

Con $g_1 \in \mathbb{R}; \quad g_2 \in \mathbb{R}; \quad g_1 + g_2 \geq 0$

Se pide:

a. Proporcione la expresión de la respuesta impulsional del filtro adaptado (no causal): $j_1(-t)$, necesario para demodular la señal $s_1(t)$. Si a la salida de dicho filtro, la señal se muestrea a $t_k = kT$, obtenga la expresión de las correspondientes muestras $y_1[k] = y_1(t_k)$, y la función densidad de probabilidad de la componente de ruido en dicha muestra. Repita la respuesta con el filtro adaptado $j_2(-t)$ necesario para la demodulación de $s_2(t)$ y su correspondiente salida $y_2[k] = y_2(t_k)$.

ESTRATEGIA 1: Se transmite la señal $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ y se detectan los símbolos a partir de la variable $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$

b. Calcule y dibuje la densidad espectral de la señal transmitida $s(t)$. Obtenga la energía media transmitida por bit en función de *d*. Utilice la expresión proporcionada en las Notas de ayuda.

c. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Comente qué ocurriría si casualmente $g_1 = -g_2$.

ESTRATEGIA 2: Se transmite la señal $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ y se detectan los símbolos a partir de la variable $y[k] = ay_1[k] + by_2[k]$, siendo a, b dos constantes a calcular.

d. Determine el valor de la constante b en función de a para que $y(t_k) = a[k] + n(t_k)$, es decir $y[k] = a[k] + n[k]$

e. Obtenga los valores de a y b que minimiza la BER minimizando la varianza s^2 del ruido $n[k]$.

f. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Comente qué ocurriría si $g_1 = -g_2$.

ESTRATEGIA 3: Se transmite la señal

$$s(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(a[2p]j_1(t-2pT) + a[2p+1]j_2(t-2pT) - a[2p+1]j_1(t-2pT-T) + a[2p]j_2(t-2pT-T) \right)$$

y se detectan los símbolos a partir de la variable $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$, que puesta en forma de vector, resulta

$$\mathbf{v}[q] = \begin{pmatrix} y[2q] \\ y[2q+1] \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} a[2q] \\ a[2q+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n[2q] \\ n[2q+1] \end{pmatrix}.$$

g. Obtenga la energía media transmitida por bit en función de *d*.

h. Identifique la matriz de canal $\mathbf{P}$ en la expresión del vector $\mathbf{v}[q]$.

i. Determine una matriz cuadrada $\mathbf{H}$, aplicando el criterio de Forzador de Ceros, tal que:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}[q] = \begin{pmatrix} a[2q] \\ a[2q+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n'[2q] \\ n'[2q+1] \end{pmatrix}$$

j. Obtenga la matriz de covarianza del nuevo vector de ruido $\begin{pmatrix} n'[2q] \\ n'[2q+1] \end{pmatrix}$.

k. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. ¿Puede considerarse que el receptor es óptimo si se detectan cada una de las coordenadas (símbolos pares e impares) por separado?

Notas de ayuda:
Densidad Espectral de una modulación digital:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L} a_l[n] j_l(t-nT)$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{L} \Phi_l(f)\Phi_j^*(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{a_l a_j}[k] \exp(-jk2p fT)$$

Inversa de una matriz 2x2

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ac-bd)} \begin{pmatrix} c & -d \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Resolución

a. Proporcione la expresión de la respuesta impulsional del filtro adaptado (no causal): $j_1(-t)$, necesario para demodular la señal $s_1(t)$. Si a la salida de dicho filtro, la señal se muestrea a $t_k = kT$, obtenga la expresión de las correspondientes muestras $y_1[k] = y_1(t_k)$, y la función densidad de probabilidad de la componente de ruido en dicha muestra. Repita la respuesta con el filtro adaptado $j_2(-t)$ necesario para la demodulación de $s_2(t)$ y su correspondiente salida $y_2[k] = y_2(t_k)$.

Solución:

Inicialmente sobre la señal $s_1(t)$ se identifica la función de energía unidad: $j_1(t) = \sqrt{\tfrac{2}{T}}\text{sinc}(\tfrac{t}{T})\cos\left(2p\, f_1 t\right)$.

Comprobación de que la función es de energía unidad:

$$\Phi_1(f) = +\sqrt{\tfrac{2}{T}}\left(\tfrac{T}{2}\Pi\left(\tfrac{f-f_1}{r}\right) + \tfrac{T}{2}\Pi\left(\tfrac{f+f_1}{r}\right)\right)$$

$$E_{j_1} = \int j_1^{\,2}(t)dt = \int \Phi_1^{\,2}(f)df = \int\left(\tfrac{T}{2}\Pi\left(\tfrac{f-f_1}{r}\right) + \tfrac{T}{2}\Pi\left(\tfrac{f+f_1}{r}\right)\right)df = 1$$

Por tanto la respuesta impulsional del filtro adaptado es:

$$j_1(-t) = j_1(t) = \sqrt{\tfrac{2}{T}}\text{sinc}(\tfrac{t}{T})\cos\left(2p\, f_1 t\right)$$

En estas condiciones, y dado que $R_{j_1}(t) = \text{sinc}(\tfrac{t}{T})\cos\left(2p\, f_1 t\right)$, cumple las condiciones de ISI nula, $R_{j_1}(nT) = d[n]$ y que $j_1(t) * h_c(t) = g_1 j_1(t)$, se obtiene.

$$y_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] g_1 R_{j_1}(t - nT) + n_1(t) \Rightarrow y_1(t_k) = y_1[k] = g_1 a[k] + n_1(t_k)$$

la muestra de ruido es de distribución gaussiana:

$$n_1(t_k) = n_1[k] : N\left(0, s^2\right); s^2 = \tfrac{N_0}{2}E_{j_1} = \tfrac{N_0}{2}$$

Análogamente, para la segunda señal se obtiene:

$$j_2(-t) = j_2(t) = \sqrt{\tfrac{2}{T}}\text{sinc}(\tfrac{t}{T})\cos\left(2p\, f_2 t\right)$$

$$E_{j_2} = 1$$

En estas condiciones, se obtiene.

$$y_2(t_k) = y_2[k] = g_2 a[k] + n_2(t_k)$$

La muestra de ruido es de distribución gaussiana:

$$n_2(t_k) = n_2[k] : N\left(0, s^2\right); s^2 = \tfrac{N_0}{2} E_{j_2} = \tfrac{N_0}{2}$$

ESTRATEGIA 1:

b. Calcule y dibuje la densidad espectral de la señal transmitida $s(t)$. Obtenga la energía media transmitida por bit en función de *d*. Utilice la expresión proporcionada en las notas de ayuda.

Solución:

Aplicando la expresión facilitada en las notas de ayuda sobre la señal transmitida:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\left(j_1(t-nT) + j_2(t-nT)\right)$$

y considerando la densidad espectral de las funciones generadoras del espacio de señal.

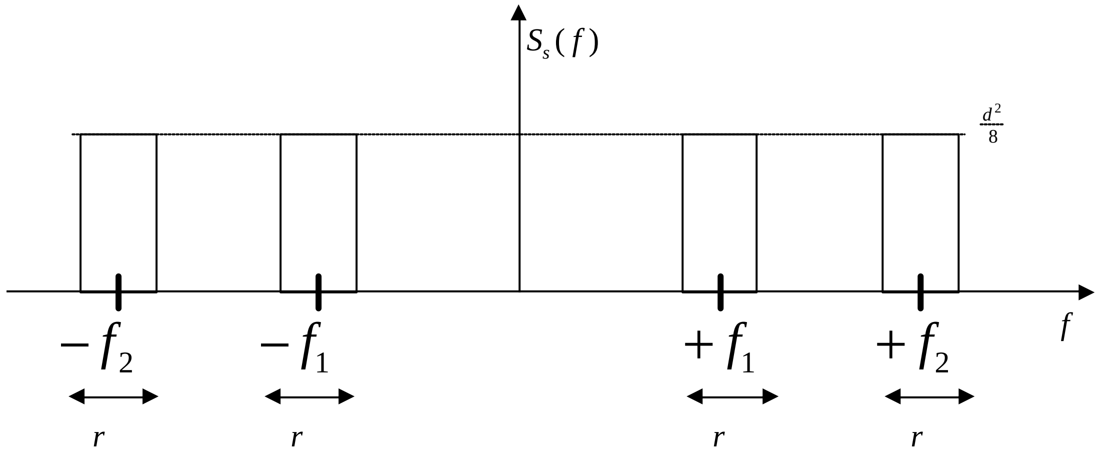
$$S_{j_1}(f) = \left|\Phi_1(f)\right|^2 = \tfrac{T}{2}\Pi\left(\tfrac{f-f_1}{r}\right) + \tfrac{T}{2}\Pi\left(\tfrac{f+f_1}{r}\right)$$
$$S_{j_2}(f) = \left|\Phi_2(f)\right|^2 = \tfrac{T}{2}\Pi\left(\tfrac{f-f_2}{r}\right) + \tfrac{T}{2}\Pi\left(\tfrac{f+f_2}{r}\right)$$
$$S_{j_1 j_2}(f) = \Phi_1(f)\Phi_2^*(f) = 0$$

y la función de autocorrelación de los símbolos:

$$R_a[n] = s_a^2 d[n] = \tfrac{d^2}{4} d[n]$$

se obtiene la densidad espectral:

$$S_s(f) = \tfrac{1}{T}\tfrac{d^2}{4}\left|\Phi_1(f) + \Phi_2(f)\right|^2 = \tfrac{d^2}{8}\left(\Pi\left(\tfrac{f-f_1}{r}\right) + \Pi\left(\tfrac{f-f_2}{r}\right) + \Pi\left(\tfrac{f+f_1}{r}\right) + \Pi\left(\tfrac{f+f_2}{r}\right)\right)$$



La energía media transmitida por bit es:

$$E_b = s_a^2 \left(E_{j_1} + E_{j_2}\right) = \tfrac{d^2}{2}$$

c. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Comente qué ocurriría si casualmente $g_1 = -g_2$.

Solución:

Debido a la ortogonalidad entre las dos funciones $j_1(t), j_2(t)$, se cumple:

$$R_{j_1 j_2}\left(nT\right) = R_{j_2 j_1}\left(nT\right) = 0$$

La variable de detección es:

$$y(t_k) = y_1(t_k) + y_2(t_k) = \left(g_1 + g_2\right) a\left[k\right] + n_1(t_k) + n_2(t_k)$$

es decir:

$$y\left[k\right] = y_1\left[k\right] + y_2\left[k\right] = \left(g_1 + g_2\right) a\left[k\right] + n_1\left[k\right] + n_2\left[k\right]$$

Dado que $E\left[n_1\left[k\right]\, n_2\left[k\right]\right] = 0$, debido a la ortogonalidad de las funciones $j_1(t_k), j_2(t_k)$, la muestra de ruido resultante se distribuye:

$$n\left[k\right] = n_1\left[k\right] + n_2\left[k\right] : N(0, s^2); \quad s^2 = N_0$$

Por tanto,

$$BER = Q\left(\left(g_1 + g_2\right)\tfrac{d}{2s}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\left(g_1+g_2\right)^2 d^2}{4s^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\left(g_1+g_2\right)^2 \tfrac{1}{2}\tfrac{E_b}{N_0}}\right)$$

En el peor de los casos, $g_1 = -g_2$, $\Rightarrow BER = Q(0) = \frac{1}{2}$, la suma de las dos señales es destructiva.

Por otro lado es recomendable observar que para el caso particular $g_1 = g_2 = 1$, se obtiene la solución esperada para un sistema binario y polar: $BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$.

Nota (no solicitado ni esperado en la resolución):

Una alternativa a esta estrategia sería detectar:

$$y[k] = \mathrm{sgn}(g_1)y_1[k] + \mathrm{sgn}(g_2)y_2[k] = (|g_1| + |g_2|)a[k] \pm n_1[k] \pm n_2[k]$$

Se obtendría de este modo $BER = Q\left(\sqrt{(|g_1| + |g_2|)^2 \frac{1}{2}\frac{E_b}{N_0}}\right)$, evitando el problema de la suma destructiva. (Técnica denominada de EGC ; Equal Gain Combining)

ESTRATEGIA 2:

d. Determine el valor de la constante b en función de a para que $y(t_k) = a[k] + n(t_k)$, es decir $y[k] = a[k] + n[k]$

Solución:

Para esta estrategia se obtiene:

$$
\begin{aligned}
& y(t_k) = ay_1(t_k) + by_2(t_k) = ag_1a[k] + bg_2a[k] + an_1(t_k) + bn_2(t_k) = \\
& a[k] + n(t_k) \Rightarrow \\
& ag_1 + bg_2 = 1; \quad n(t_k) = an_1(t_k) + bn_2(t_k)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow b = \frac{1 - ag_1}{g_2}$$

e. Obtenga los valores de a y b que minimiza la BER minimizando la varianza s^2 del ruido $n[k]$.

Solución:

La potencia del ruido $n(t_k) = an_1(t_k) + bn_2(t_k)$ a minimizar se puede expresar como:

$$s^{2} = \left(a^{2} + b^{2}\right)\tfrac{N_0}{2} = \left(a^{2} + \left(\frac{1 - a g_1}{g_2}\right)^{2}\right)\tfrac{N_0}{2}$$

Al derivar e igualar a cero:

$$\tfrac{\partial\left(s^{2}\right)}{\partial a} = 2\left(a - \tfrac{g_1}{g_2}\left(\tfrac{1-a g_1}{g_2}\right)\right)\tfrac{N_0}{2} = \left(a\left(1 + \left(\tfrac{g_1}{g_2}\right)^{2}\right) - \tfrac{g_1}{g_2^{2}}\right) N_0 = 0 \Rightarrow$$

$$a = \tfrac{g_1}{g_1^{2} + g_2^{2}}$$

$$b = \tfrac{g_2}{g_1^{2} + g_2^{2}}$$

Para demostrar, que la solución anterior coincide con un mínimo de la varianza, en lugar de un máximo, observe que:

$$\tfrac{\partial^{2} s^{2}}{\partial a^{2}} = \left(1 + \left(\tfrac{g_1}{g_2}\right)^{2}\right) N_0 > 0$$

Y por tanto:

$$s^{2} = \left(a^{2} + b^{2}\right)\tfrac{N_0}{2} = \left(\left(\tfrac{g_1}{g_1^{2}+g_2^{2}}\right)^{2} + \left(\tfrac{g_2}{g_1^{2}+g_2^{2}}\right)^{2}\right)\tfrac{N_0}{2} = \tfrac{N_0}{\left(g_1^{2}+g_2^{2}\right)2}$$

f. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Comente qué ocurriría si $g_1 = -g_2$.

Solución:

Según lo obtenido en el apartado anterior:

$$BER = Q\left(\tfrac{d}{2s}\right) = Q\left(\sqrt{\tfrac{d^{2}}{4s^{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{\left(g_1^{2} + g_2^{2}\right)\tfrac{E_b}{N_0}}\right)$$

En caso de que $g_1 = -g_2$, $\Rightarrow BER = Q\left(\sqrt{2 g_1^{2}\,\tfrac{E_b}{N_0}}\right)$, la suma de las dos señales es constructiva.

Por otro lado es recomendable observar que para el caso particular $g_1 = g_2 = 1$, se obtiene la solución esperada para un sistema binario y polar: $BER = Q\left(\sqrt{2\tfrac{E_b}{N_0}}\right)$.

Nota (no solicitado ni esperado en la resolución):

Una solución alternativa, no solicitada en el examen para detectar la señal sin ISI, en esta segunda estrategia consiste en una ecualización directa a partir de la variable de detección:

$$y(t_k) = \tfrac{1}{g_1} y_1(t_k) + \tfrac{1}{g_2} y_2(t_k) =$$
$$2a\left[k\right] + \tfrac{1}{g_1} n_1(t_k) + \tfrac{1}{g_2} n_2(t_k) = 2a\left[k\right] + n(t_k)$$

En cuyo caso la varianza de la variable de ruido es:

$$s^{\,2} = \left(\tfrac{1}{g_1^{\,2}} + \tfrac{1}{g_2^{\,2}}\right)\tfrac{N_0}{2} = \tfrac{g_1^{\,2}+g_2^{\,2}}{g_1^{\,2} g_2^{\,2}}\tfrac{N_0}{2}$$

Y la BER obtenida resulta:

$$BER = Q\left(\tfrac{d}{s}\right) = Q\left(\sqrt{\tfrac{d^2}{s^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\tfrac{g_1^{\,2} g_2^{\,2}}{g_1^{\,2}+g_2^{\,2}} 4\tfrac{E_b}{N_0}}\right)$$

En general, resulta subóptima comparada con la solución obtenida en este apartado f, pués la potencia de ruido no es mínima, pero coincide en caso de que $g_1 = -g_2$, $\Rightarrow BER = Q\left(\sqrt{2g_1^2 \tfrac{E_b}{N_0}}\right)$.

ESTRATEGIA 3:

g. Obtenga la energía media transmitida por bit en función de *d*.

Solución:

Dado que $E\left[a\left[n+1\right]a\left[n\right]\right] = 0$, Se deduce a partir de la nueva señal transmitida:

$$s(t) =$$
$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left(a[2p]j_1(t-2pT) + a[2p+1]j_2(t-2pT) - a[2p+1]j_1(t-2pT-T) + a[2p]j_2(t-2pT-T)\right)$$

En el tiempo de símbolo de duración $2T$, se transmiten dos bits. Observando que el par de funciones $j_1(t), j_1(t-T)$ es ortogonal, debido al desplazamiento temporal entre sí y que otro tanto ocurre con el par de funciones $j_2(t), j_2(t-T)$, la base ortonormal propuesta es $\{j_1(t), j_2(t), -j_1(t-T), j_2(t-T)\}$ y el vector de símbolos a considerar es:

$$\mathbf{s}[2p] = \begin{pmatrix} a[2p] \\ a[2p+1] \\ -a[2p+1] \\ a[2p] \end{pmatrix}$$

La energía media transmitida por símbolo es: $E_s = 4s_a^{\,2} = d^2$

Y la energía media transmitida por bit:

$$E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{d^2}{2}$$

Mediante desarrollos similares es fácil demostrar que la densidad espectral de la señal transmitida también coincide con la obtenida en el apartado b), si bien este dato no se pide en el enunciado.

h. Identifique la matriz de canal $\mathbf{P}$ en la expresión del vector $\mathbf{v}[q]$.

Solución:

Analizando el correspondiente vector de salida:

$$\mathbf{v}[q] = \begin{pmatrix} y[2q] \\ y[2q+1] \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} a[2q] \\ a[2q+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n[2q] \\ n[2q+1] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}[q] = \begin{pmatrix} y[2q] \\ y[2q+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 a[2q] + n_1[2q] + g_2 a[2q+1] + n_2[2q] \\ -g_1 a[2q+1] + n_1[2q+1] + g_2 a[2q] + n_2[2q+1] \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & -g_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a[2q] \\ a[2q+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n[2q] \\ n[2q+1] \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & -g_1 \end{pmatrix}$$

La distribución de las muestras de ruido, coincide en este caso con la obtenida en el apartado c):

$$n[2q] = n_1[2q] + n_2[2q] : N(0, s^2); \quad s^2 = N_0$$

$$n[2q+1] = n_1[2q+1] + n_2[2q+1] : N(0, s^2); \quad s^2 = N_0$$

i. Determine una matriz cuadrada $\mathbf{H}$, aplicando el criterio de Forzador de Ceros.

Solución:

La solución de este apartado no es única. Se contemplan a continuación dos posibles soluciones.

La primera expresión a considerar es la obtenida como solución de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}[q] = \begin{pmatrix} a[2q] \\ a[2q+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n'[2q] \\ n'[2q+1] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{HP} = \mathbf{I} \Rightarrow$$
$$\mathbf{H} = \frac{1}{-\left(g_1^2+g_2^2\right)}\begin{pmatrix} -g_1 & -g_2 \\ -g_2 & g_1 \end{pmatrix} = \mathbf{H} = \frac{1}{\left(g_1^2+g_2^2\right)}\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & -g_1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz de ecualización obtenida $\mathbf{H}$, coincide salvo factor de escala con la matriz de canal $\mathbf{P}$.
La segunda expresión a considerar es la obtenida como solución de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{Hv}[q] = \begin{pmatrix} a[2q] \\ a[2q+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n'[2q] \\ n'[2q+1] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{HP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$ag_1 + bg_2 = 0; \quad ag_2 - bg_1 = 1;$$
$$cg_1 + dg_2 = 1; \quad cg_2 - dg_1 = 0;$$
$$\mathbf{H} = \frac{1}{\left(g_1^2+g_2^2\right)}\begin{pmatrix} g_2 & -g_1 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}$$

j. Obtenga la matriz de covarianza del nuevo vector de ruido $\begin{pmatrix} n'[2q] \\ n'[2q+1] \end{pmatrix}$.

Solución:

Para la matriz de la primera situación $\mathbf{H} = \frac{1}{\left(g_1^2+g_2^2\right)}\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & -g_1 \end{pmatrix}$, el vector de ruido en detección, se distribuye:

$$\begin{pmatrix} n'[2q] \\ n'[2q+1] \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(g_1^2+g_2^2\right)}\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & -g_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n[2q] \\ n[2q+1] \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{\left(g_1^2+g_2^2\right)}\begin{pmatrix} g_1 n[2q] + g_2 n[2q+1] \\ g_2 n[2q] - g_1 n[2q+1] \end{pmatrix} : N\left(\mathbf{0}, \frac{N_0}{\left(g_1^2+g_2^2\right)}\mathbf{I}\right)$$

Ya que la nueva matriz de covarianza del ruido se calcula como:

$$\mathbf{C}_{n'} = E\left[\begin{pmatrix} n'[2q] \\ n'[2q+1] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n'[2q] & n'[2q+1] \end{pmatrix}\right] =$$

$$E\left[\mathbf{H}\begin{pmatrix} n[2q] \\ n[2q+1] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n[2q] & n[2q+1] \end{pmatrix}\mathbf{H}^T\right] =$$

$$\mathbf{H}E\left[\begin{pmatrix} n[2q] \\ n[2q+1] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n[2q] & n[2q+1] \end{pmatrix}\right]\mathbf{H}^T = \mathbf{H}N_0\mathbf{I}\mathbf{H}^T =$$

$$N_0\mathbf{H}\mathbf{H}^T = N_0 \frac{1}{\left(g_1^2+g_2^2\right)^2}\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & -g_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & -g_1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{N_0}{\left(g_1^2+g_2^2\right)^2}\begin{pmatrix} g_1^2+g_2^2 & 0 \\ 0 & g_1^2+g_2^2 \end{pmatrix} = \frac{N_0}{\left(g_1^2+g_2^2\right)}\mathbf{I}$$

Por tanto, las dos nuevas coordenadas de ruido resultan gaussianas, estadísticamente independientes entre sí, de media nula y varianza $s^2 = \frac{N_0}{\left(g_1^2+g_2^2\right)}$.

Y para la matriz de la segunda situación, se obtiene idéntica distribución, pues también resulta una matriz ortogonal dado que cumple: $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \frac{1}{\left(g_1^2+g_2^2\right)}\mathbf{I}$

l. Calcule la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. ¿Puede considerarse que el receptor es óptimo si se detectan cada una de las coordenadas (símbolos pares e impares) por separado?

Solución:

Utilizando cualquiera de las dos matrices de ecualización:

$$BER = Q\left(\frac{d}{2s}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{4s^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\left(g_1^2+g_2^2\right)\frac{1}{2}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

En caso de que $g_1 = -g_2$, $\Rightarrow BER = Q\left(\sqrt{g_1^2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$, la suma de las dos señales es constructiva y la solución pierde 3 dB respecto a la obtenida para la segunda estrategia.

Detectar por separado las dos coordenadas a posteriori de haber ecualizado es lo correcto según criterio MAP, dado que las dos coordenadas de ruido quedan incorreladas según se ha calculado en el apartado anterior. Sin embargo, la ecualización previa ha generado la pérdida de 3dB. La explicación es que se ha provocado una pérdida de grados de libertad a través de la variable $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$, de forma no coherente para la señal útil.

Nota (no solicitado ni esperado en la resolución):

Una solución de ecualización alternativa para evitar la pérdida de 3 dB y que se podría plantear en la situación de la estrategia 3 consiste en:

$$\mathbf{z}[q] = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} y_1[2q] + \frac{1}{g_2} y_2[2q+1] \\ \frac{1}{g_2} y_2[2q] - \frac{1}{g_1} y_1[2q+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a[2q] \\ 2a[2q+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1'[q] \\ n_2'[q] \end{pmatrix}$$

La distribución del vector de ruido resulta gaussiana de media nula y matriz de covarianza:

$$\mathbf{C}_{n'} = E\left[\begin{pmatrix} n_1'[q] \\ n_2'[q] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1'[q] & n_1'[q] \end{pmatrix} \right] = \frac{N_0\left(g_1^2 + g_2^2\right)}{2 g_1^2 g_2^2} \mathbf{I}$$

Al aplicar MAP, es correcto detectar cada coordenada por separado y la BER resulta:

$$BER = Q\left(\frac{d}{s}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{s^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2 + g_2^2} 4 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Con lo que de este modo, se evita la pérdida de los 3dB.

Comentario Adicional:

La diversidad frecuencial utilizada en este ejercicio, se manifiesta para cada una de las tres estrategias, dado que cada uno de los símbolos $a[n]$, se transmite tanto por la banda de centrada en f_1, como por la banda centrada en f_2.

Las tres estrategias de diversidad presentadas en este ejercicio, corresponden a una simplificación de las estrategias comúnmente utilizadas cuando se aplica diversidad espacial y/o temporal y que son denominadas en su correspondiente contexto, como:

Estrategia 1: Equivale a la técnica de Equal Gain Combining (EGC), en el caso de que ambas constantes de canal sean positivas, pues mediante EGC se ecualiza tan solo la fase del canal.
Estrategia 2: Maximal Ratio Combining.
Estrategia 3: Alamouti.

Pueden consultarse estas técnicas en la siguiente referencia:

Barry, Lee, Messerschmitt
Digital Communication
Third Edition
Kluwer Academic Publishers

Para la analogía, con el ejercicio aquí resuelto, se ha trasladado la diversidad espacial a diversidad frecuencial, y se han considerado señales cuyo equivalente paso bajo es real en lugar de considerar directamente el equivalente paso bajo complejo de las señales realmente transmitidas.

Otra diferencia, importante al utilizar este tipo de estrategias, es que en general se aplican en sistemas de comunicaciones móviles en los que la respuesta impulsional del canal es variante con el tiempo y se requiere para la misma una caracterización estadística. El análisis de la probabilidad de error en esta situación es en general más complicada que en el ejercicio aquí planteado, dado que depende de la caracterización estadística del canal.