

# Procesado Estadístico de Señal

## Estimación espectral



Departament de Teoria  
del Senyal i Comunicacions



# Índice

1. Señales y procesos estocásticos

2. Estimación espectral

2.1. Periodograma

2.2. Compromiso sesgo-varianza

2.3. Modificaciones del periodograma

2.4. Periodograma basado en la transformada chirp

2.5. Estimador de Capon

2.6. Modelos paramétricos: AR, ARMA, MA

2.7. Estimadores de frecuencia: Pisarenko, MUSIC

2.8. Estimación del número de tonos

3. Filtro de Wiener

4. Filtrado adaptativo

5. Métodos transformados en codificación



Si el ruido es blanco, el estimador óptimo de la frecuencia es el valor de  $f$  que maximiza el módulo de la transformada de Fourier (ver tema anterior):

$$\frac{1}{N} |\mathbf{s}^H \mathbf{x}|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi f n) \right|^2 \quad \text{Periodograma}$$

Si pretendemos determinar la potencia de esa senoide, podemos usar su estimación ML:

$$\hat{P} = |\hat{A}|^2 = \left| \frac{\mathbf{s}^H \mathbf{x}}{\mathbf{s}^H \mathbf{s}} \right|^2 = \frac{1}{N^2} |\mathbf{s}^H \mathbf{x}|^2$$

El periodograma también puede escribirse como la transformada de Fourier de la correlación estimada de  $x(n)$

$$\frac{1}{N} |\mathbf{s}^H \mathbf{x}|^2 = \frac{1}{N} |X(f)|^2 = \frac{1}{N} \mathcal{F} \{ x(n) * x^*(-n) \} = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n) x^*(k+n) \right\}$$

y por lo tanto puede considerarse un estimador de la densidad espectral de potencia de  $x(n)$ .

# Optimalidad del periodograma (I)

... sólo para determinar la potencia de una sinusoide en ruido blanco. Ni tan solo es óptimo para determinar la potencia de ruido (deberíamos derivar el estimador ML para  $\sigma^2$ ).

¿Es óptimo para la estimación de las frecuencias en el caso de múltiples sinusoides en ruido blanco?

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^P A_i \mathbf{s}_i + \mathbf{w} = [\mathbf{s}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{s}_P] \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_P \end{bmatrix} + \mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{a} + \mathbf{w}$$

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j2\pi f_i} \\ \vdots \\ e^{j2\pi f_i(N-1)} \end{bmatrix}$$

La función de verosimilitud es:

$$f_x(\mathbf{x} | \mathbf{a}, \mathbf{f}) = \frac{1}{\pi^N \sigma^{2N}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{x} - \mathbf{S}\mathbf{a})^H (\mathbf{x} - \mathbf{S}\mathbf{a})\right) \quad \text{si } x \in \mathbb{C}$$

$$\{\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{f}}\} = \arg \max_{\mathbf{a}, \mathbf{f}} \ln f_x(\mathbf{x} | \mathbf{a}, \mathbf{f})$$

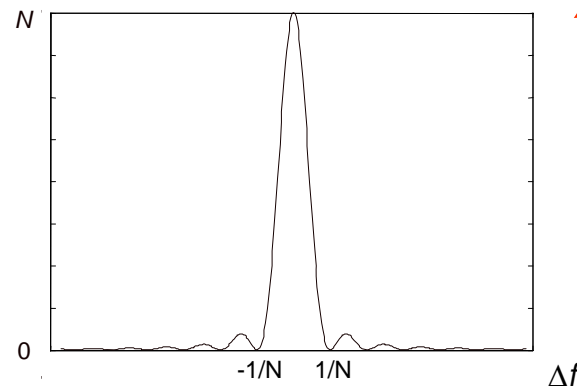
donde nos interesa derivar respecto a  $\mathbf{a}$  y respecto a  $\mathbf{f}$ :

$$\hat{\mathbf{a}}_{ML} = (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{x} \quad \hat{\mathbf{f}}_{ML} = \arg \max_{\mathbf{f}} \left( \mathbf{x}^H \mathbf{S} (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{x} \right)$$

## Optimalidad del periodograma (II)

Calculemos los elementos de la matriz  $\mathbf{S}^H \mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{S}^H \mathbf{S})_{k,l} &= \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-j2\pi f_k n) \exp(j2\pi f_l n) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j2\pi (f_k - f_l) n) = \\
 &= \frac{\exp(j2\pi (f_k - f_l) N) - 1}{\exp(j2\pi (f_k - f_l)) - 1} = \exp(j\pi (f_k - f_l) (N-1)) \frac{\sin(\pi (f_k - f_l) N)}{\sin(\pi (f_k - f_l))}
 \end{aligned}$$



si  $f_k - f_l \gg 1/N$ , entonces la matriz es aproximadamente diagonal

$$(\mathbf{S}^H \mathbf{S})_{k,l} \cong N \delta(f_k - f_l) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^H \mathbf{S} \cong N \mathbf{I}$$

## Optimalidad del periodograma (III)

y la función de verosimilitud para las frecuencias nos queda como sigue:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{f}}_{ML} &= \arg \max_{\mathbf{f}} \left( \frac{1}{N} \mathbf{x}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{x} \right) = \arg \max_{\mathbf{f}} \left( \mathbf{x}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{x} \right) = \\
 &= \arg \max_{\mathbf{f}} \left( \mathbf{x}^H \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \cdots & \mathbf{s}_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{s}_P^H \end{bmatrix} \mathbf{x} \right) = \arg \max_{\mathbf{f}} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}^H \mathbf{s}_1 & \cdots & \mathbf{x}^H \mathbf{s}_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^H \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_P^H \mathbf{x} \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \arg \max_{\mathbf{f}} \left( \left| \mathbf{s}_1^H \mathbf{x} \right|^2 + \dots + \left| \mathbf{s}_P^H \mathbf{x} \right|^2 \right)
 \end{aligned}$$

El máximo viene dado por las  $f$  que maximizan la suma, es decir, por los  $P$  mayores picos del periodograma

... podemos determinar en ML cada una de las frecuencias a partir la maximización del periodograma para distintas  $f$ , siempre y cuando  $f_k - f_l \gg 1/N$  (cuando disponemos de muchas muestras  $N$ ). Únicamente hay que conocer el número de sinusoides  $P$ .

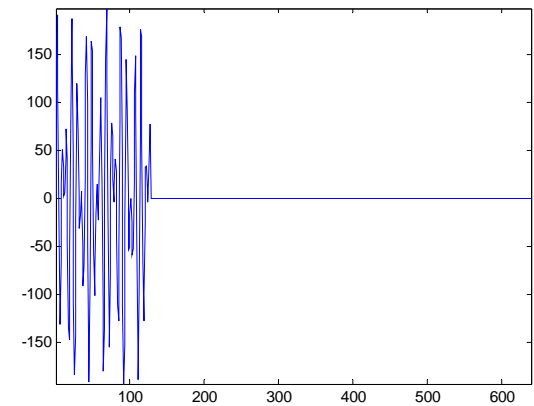
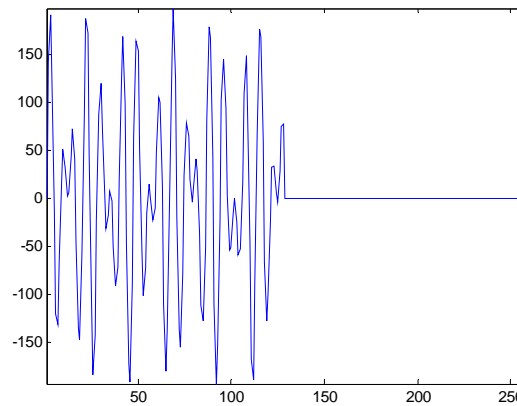
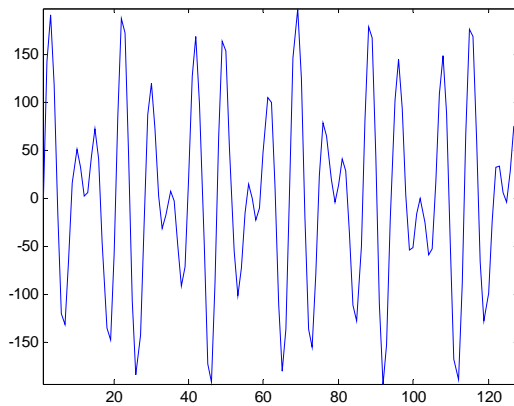
En la práctica se utiliza el periodograma para estimar el espectro, pero en general no podemos afirmar su optimalidad.

# Cálculo del periodograma

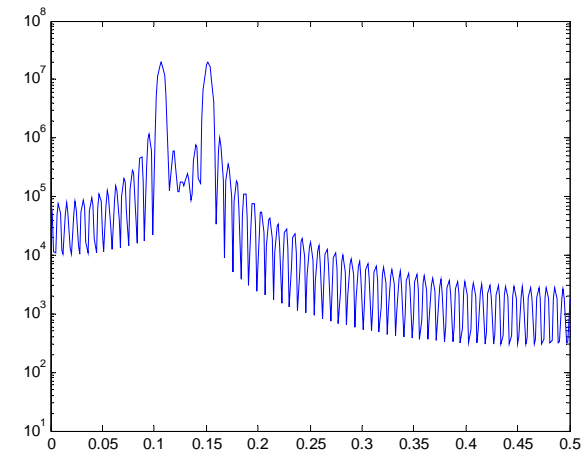
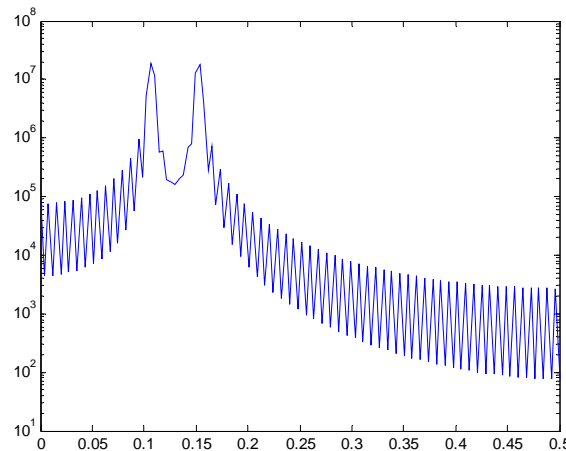
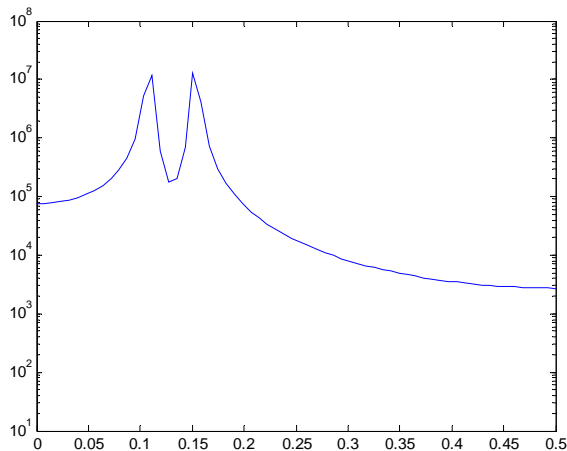
Mediante algoritmos rápidos de cálculo de la DFT (FFT). Para más precisión frecuencial es necesario hacer (procedimientos equivalentes):

- DFT + interpolación en frecuencia
- Zero padding en tiempo + DFT

*Dominio del tiempo*



*Dominio de la frecuencia*



# El periodograma como estimador de la DEP

$$\hat{S}_p(f) = \frac{1}{N} |\mathbf{s}^H \mathbf{x}|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi fn) \right|^2 = |DFT\{x(n)\}|^2$$

Periodograma

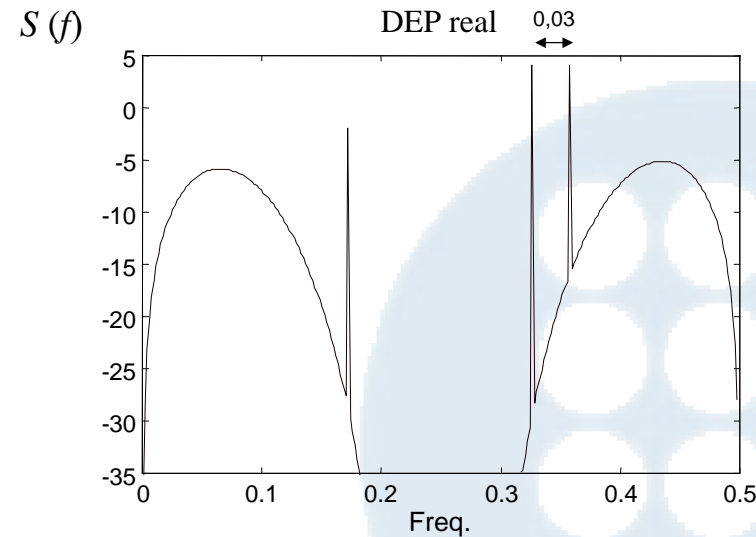
$$\hat{S}_c(f) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \tilde{r}_x(k) \exp(-j2\pi fk)$$

Correlograma

En el correlograma no podemos garantizar la positividad de la estimación.

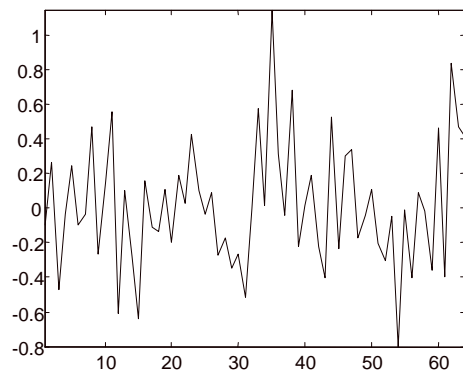
**Ejemplo 1:** Supongamos distintas realizaciones de un proceso cuya DEP se corresponde a la siguiente función

Para cada realización del proceso, obtendremos un periodograma distinto, que será una estimación de la DEP. Como estimador, podremos caracterizarlo en términos del sesgo y de la varianza.

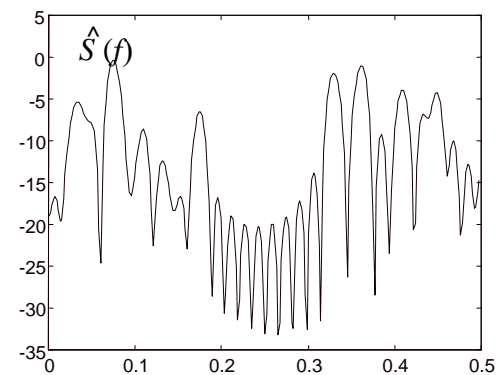




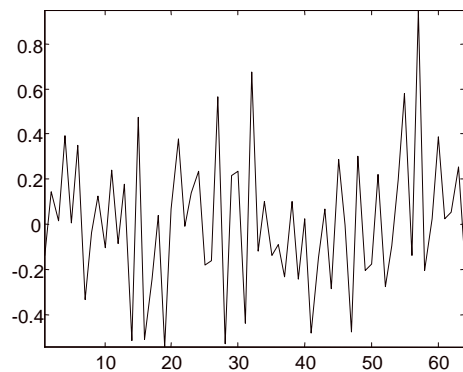
Realización #P



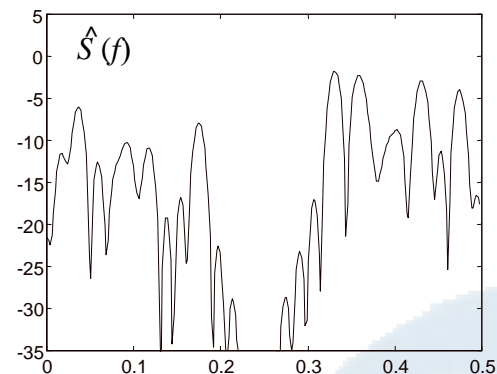
Periodograma



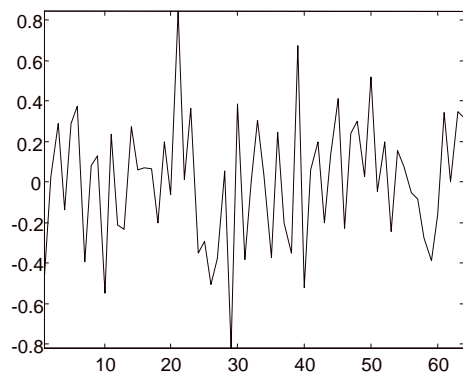
Realización #P+1



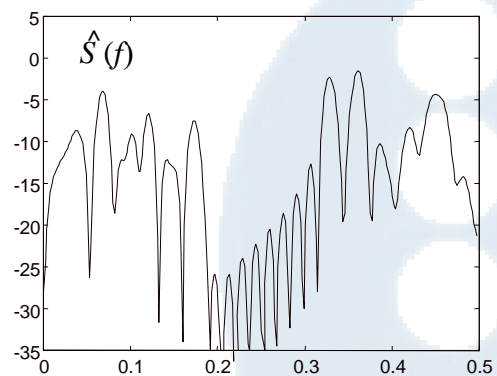
Periodograma



Realización #P+2



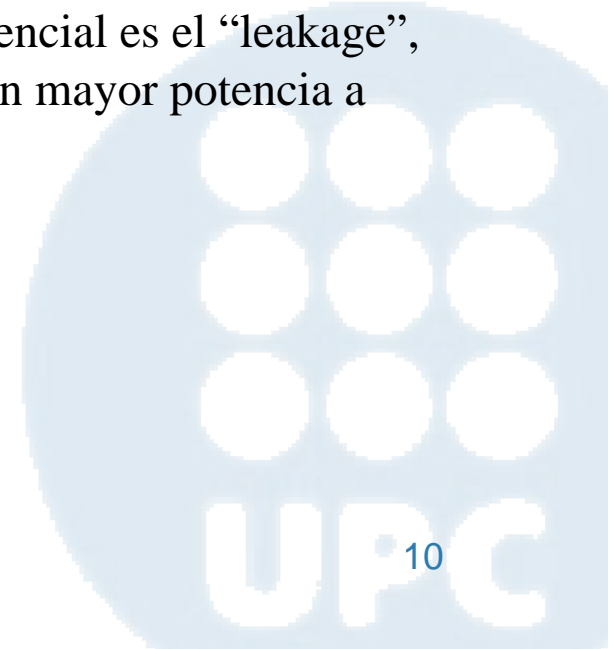
Periodograma



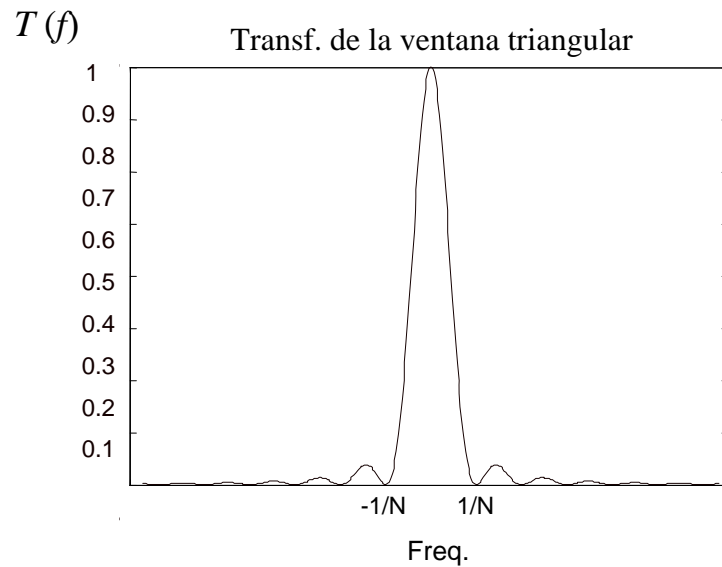
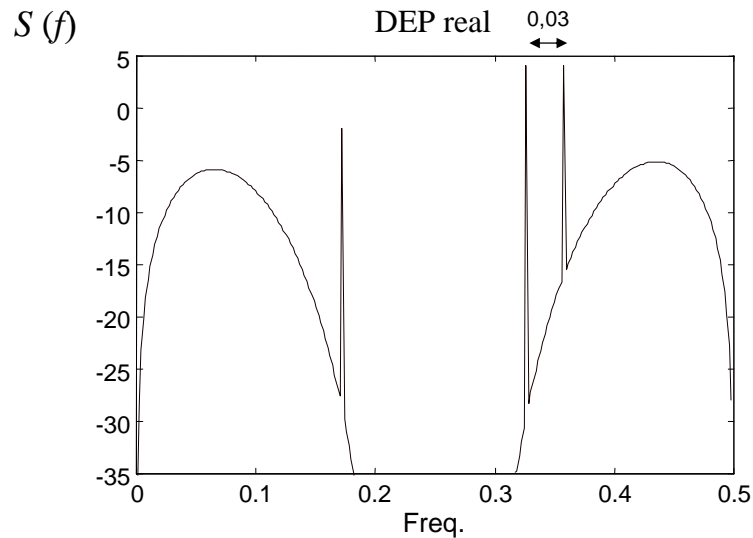
Estimación espectral

$$\begin{aligned} E\{\hat{S}_p(f)\} &= \sum_{q=-N+1}^{N-1} E\{\hat{r}(q)\} \exp(-j2\pi fq) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} w(q)r(q) \exp(-j2\pi fq) = \\ &= W(f) \circledast S_x(f) = \int_{-1/2}^{1/2} W(\varphi) S_x(f - \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

- El ancho del lóbulo principal de la ventana frecuencial determina la resolución del periodograma ( $1/N$ ): la separación mínima frecuencial que puede distinguirse.
- El efecto de los lóbulos secundarios de la ventana frecuencial es el “leakage”, transferencia de potencia de las bandas frecuenciales con mayor potencia a bandas de poca o nula potencia.

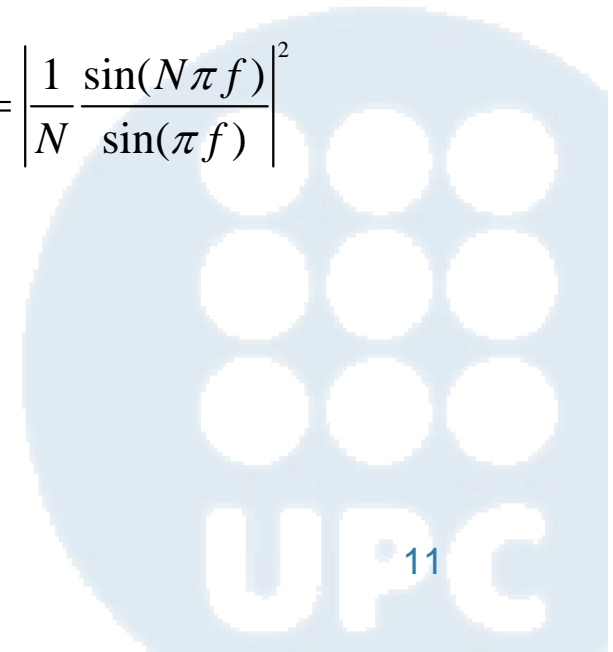


## Sesgo del periodograma (II)

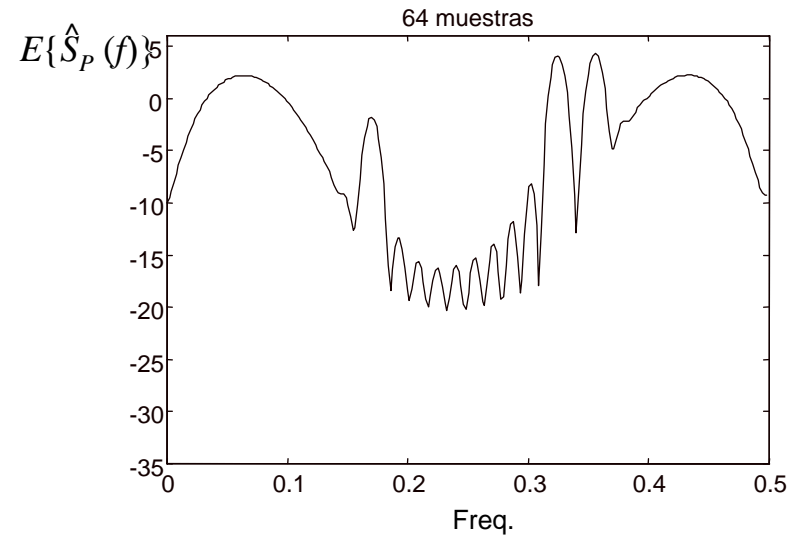
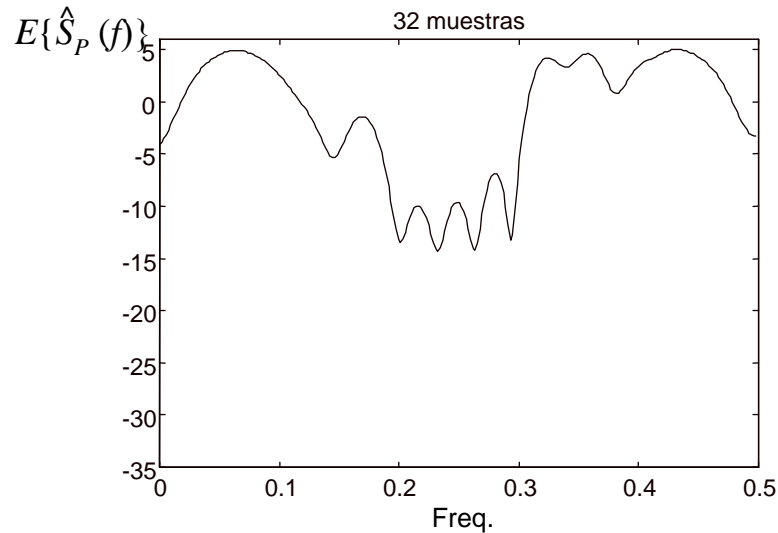


El valor esperado del periodograma es el resultado de la convolución circular de la densidad espectral de potencia real con la transformada discreta de Fourier de la ventana triangular

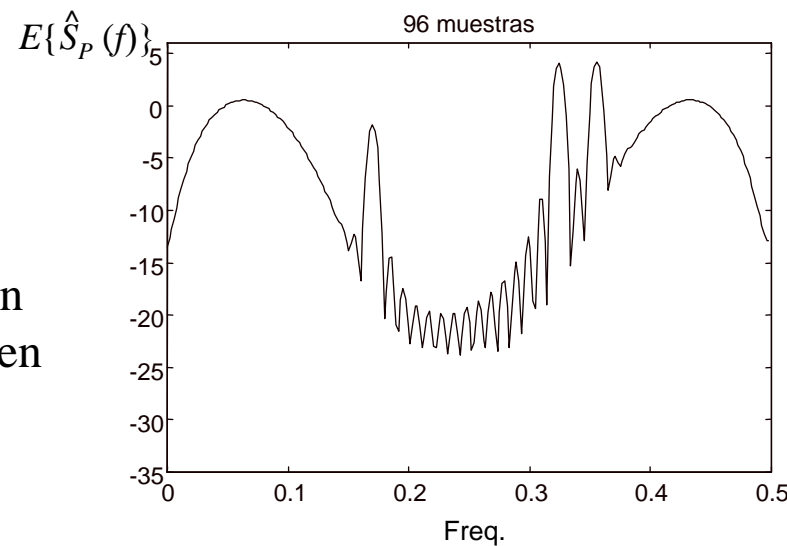
$$W(f) = \left| \frac{1}{N} \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)} \right|^2$$



## Sesgo del periodograma (III)



**Sesgo:** Se ensanchan los picos espectrales (pérdida de resolución frecuencial) y aparecen lobulos laterales (*leakage*)



Es un estimador asintóticamente insesgado, ya que

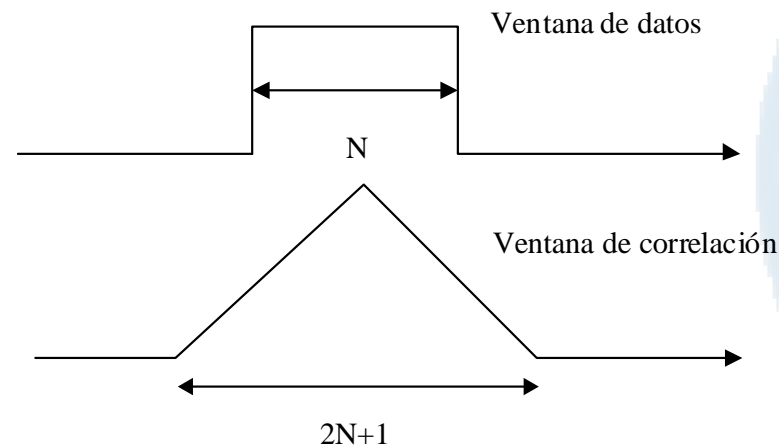
$$\lim_{N \rightarrow \infty} W(f) = \delta(f)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{S}_p(f)\} = S(f)$$

## Sesgo del periodograma (IV)

La ventana sobre la correlación es igual a la correlación de la ventana aplicada a los datos

$$\begin{aligned}
 E\{\hat{S}_p(f)\} &= E\left\{\left|\sum_{n=0}^{N-1} v(n)x(n)\exp(-j2\pi fn)\right|^2\right\} = \\
 &= E\left\{\sum_{n=0}^{N-1} v(n)x(n)\exp(-j2\pi fn)\sum_{q=0}^{N-1} v^*(q)x^*(q)\exp(j2\pi fq)\right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1} v(n)v^*(q)E\{x(n)x^*(q)\}\exp(-j2\pi f(n-q)) = \\
 &= \sum_{k=-N}^N \sum_{q=0}^N v(k+q)v^*(q)r(k)\exp(-j2\pi fk) \\
 E\{\hat{S}_p(f)\} &= \sum_{k=-N}^N w(k)r(k)\exp(-j2\pi fk)
 \end{aligned}$$



## Sesgo del periodograma (V)

En general podemos utilizar cualquier ventana  $v(n)$  sobre las observaciones. El sesgo vendrá dado por la expresión

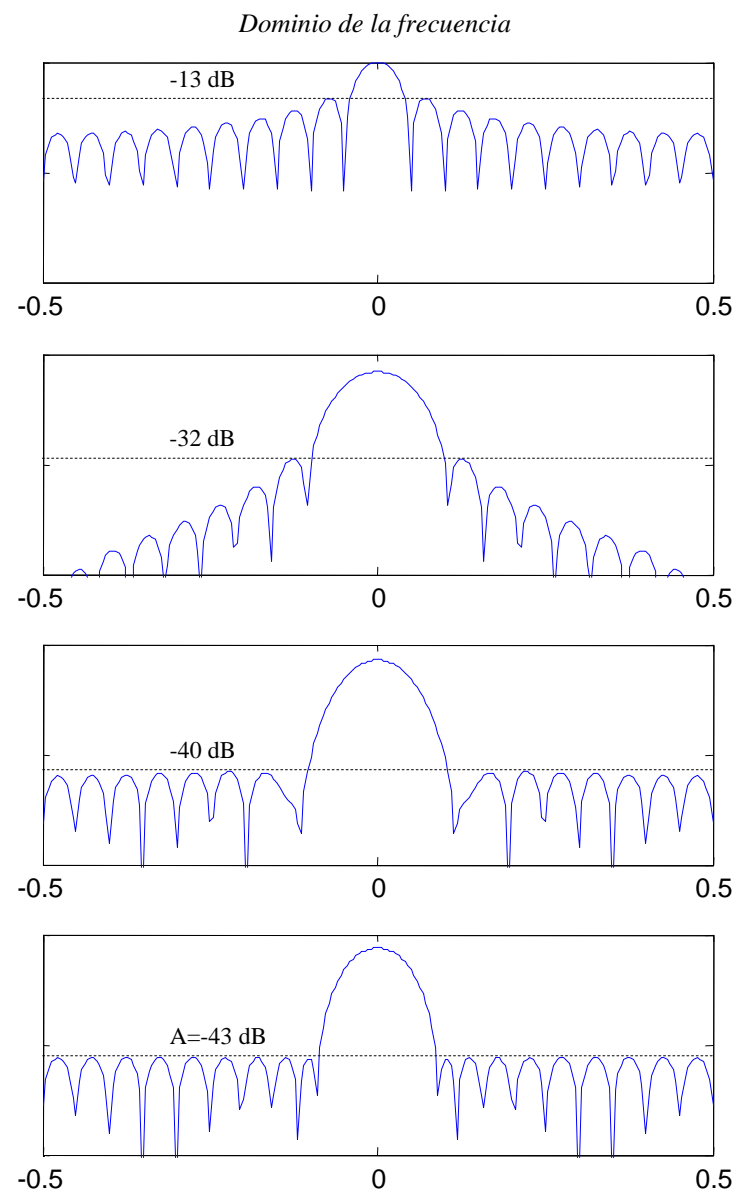
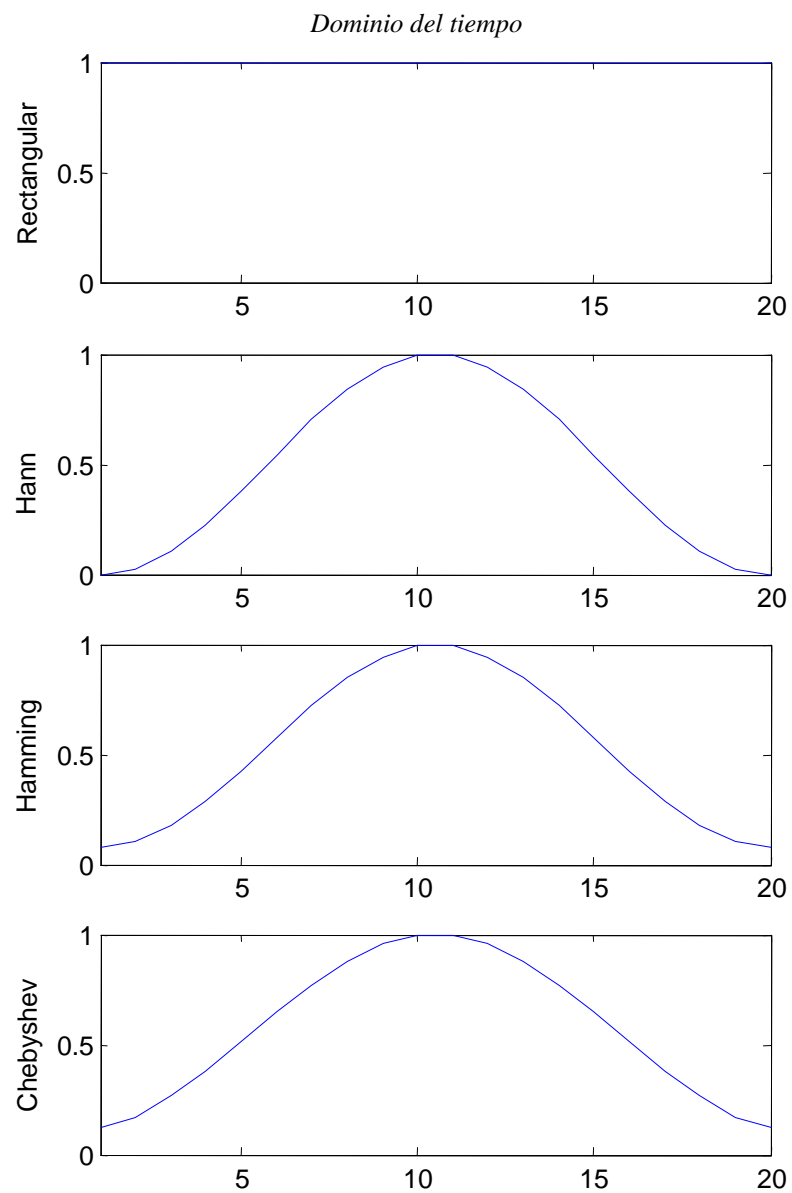
$$E\{\hat{S}_p(f)\} = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(\varphi) |V(f - \varphi)|^2 d\varphi$$

Para que la integral de  $\hat{S}_p(f)$  sea una estimación de la potencia debe cumplirse  $\sum_{k=0}^{N-1} v^2(k) = 1$

Ventana	Nivel lóbulo lateral (dB)	Ancho lóbulo principal (-3 dB)
Rectangular	-13	$\frac{0.905}{N-1}$
Hanning	-32	$\frac{2.5}{N-1}$
Hamming	-43	$\frac{3.135}{N-1}$
Chebyshev	-A	$\frac{1}{2\pi} \text{acos} \left[ \left( \cosh \left( \frac{\text{acosh}(10^{A/20})}{N-1} \right) \right)^{-1} \right]$

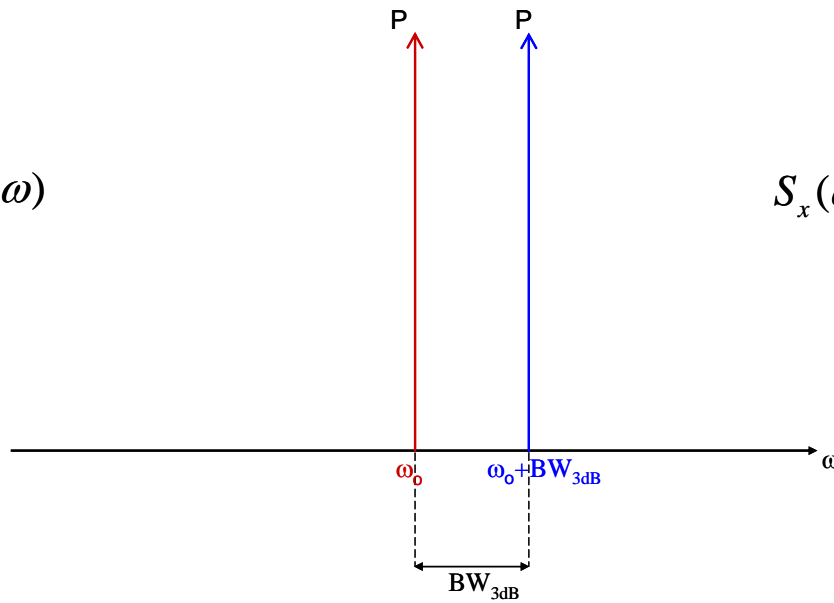
Para resolver picos espectrales separados  $\Delta f$ , el lóbulo principal de la ventana debe tener una anchura inferior a  $\Delta f$ .

$N=20$

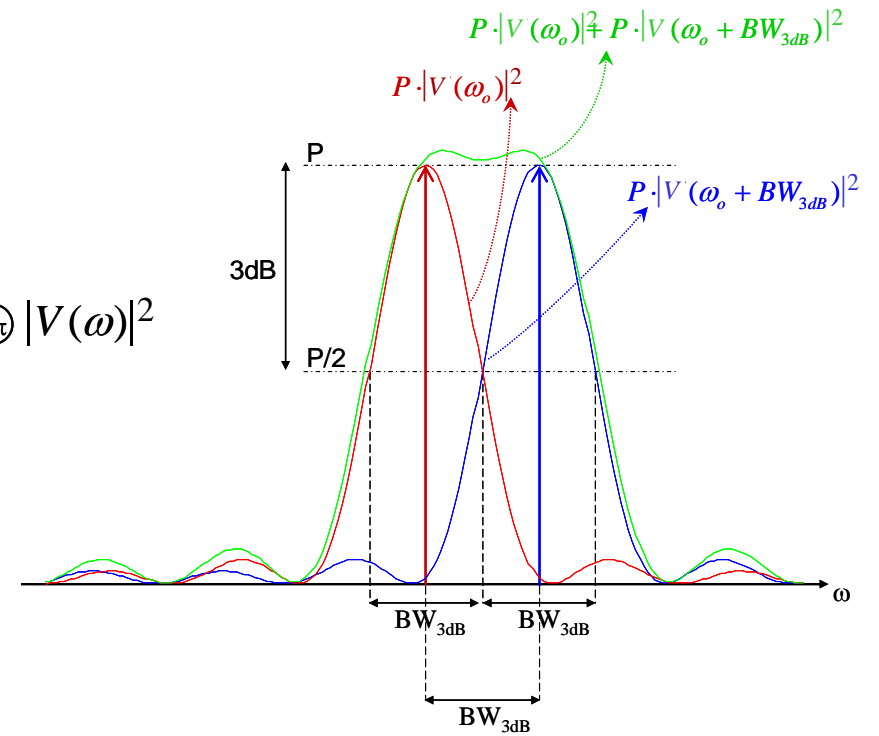


Estimación espectral

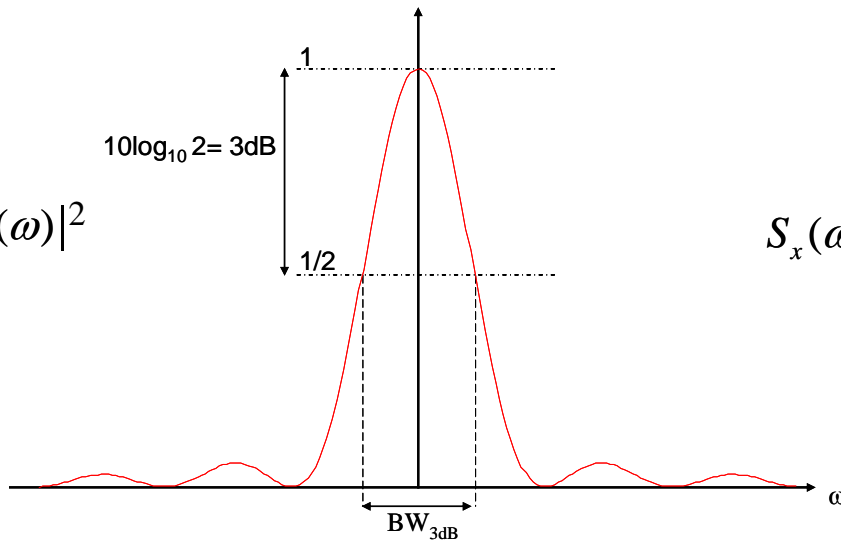
$$S_x(\omega)$$



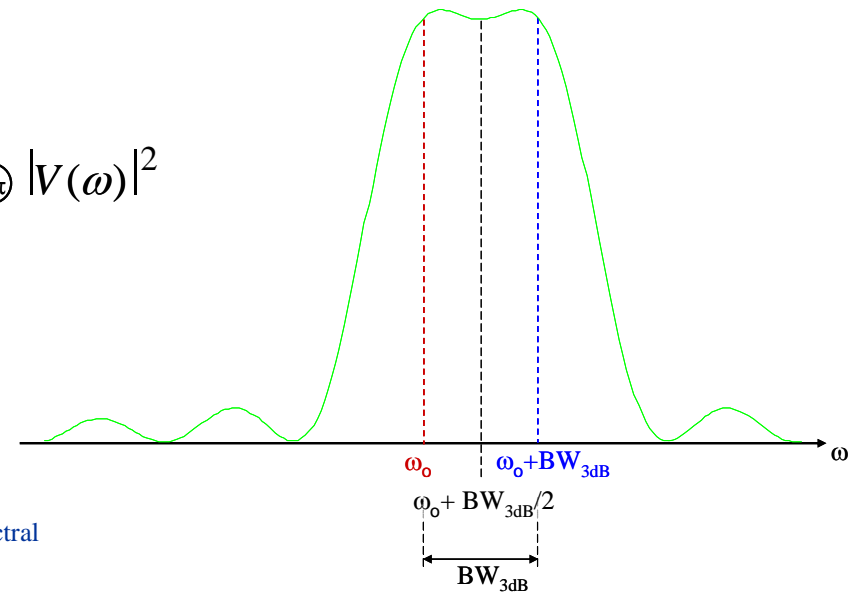
$$S_x(\omega) \oplus 2\pi |V(\omega)|^2$$



$$|V(\omega)|^2$$



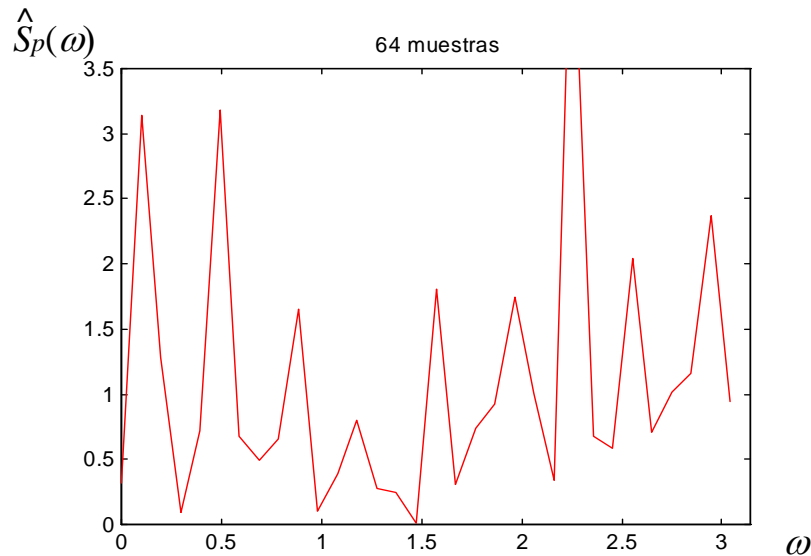
$$S_x(\omega) \oplus 2\pi |V(\omega)|^2$$



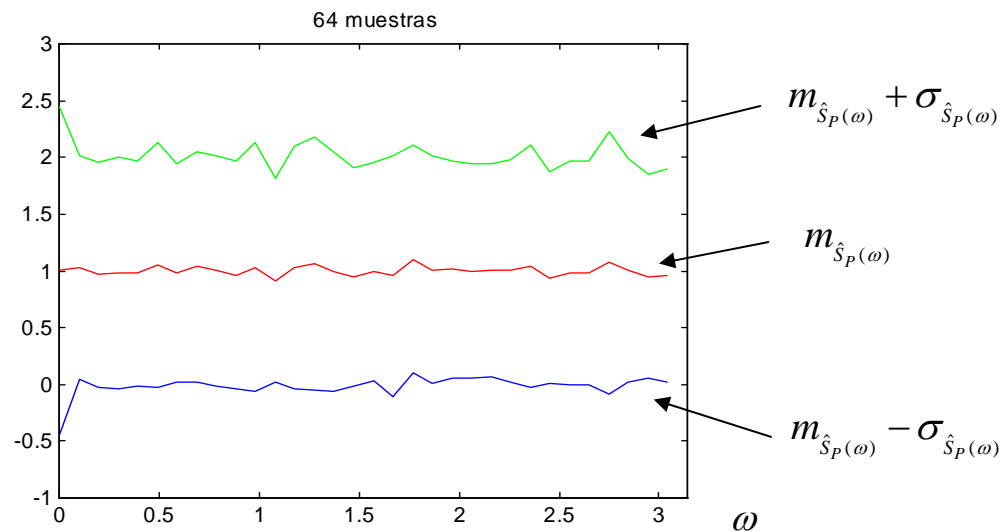
Estimación espectral



# Inconsistencia del periodograma: proceso blanco (I)

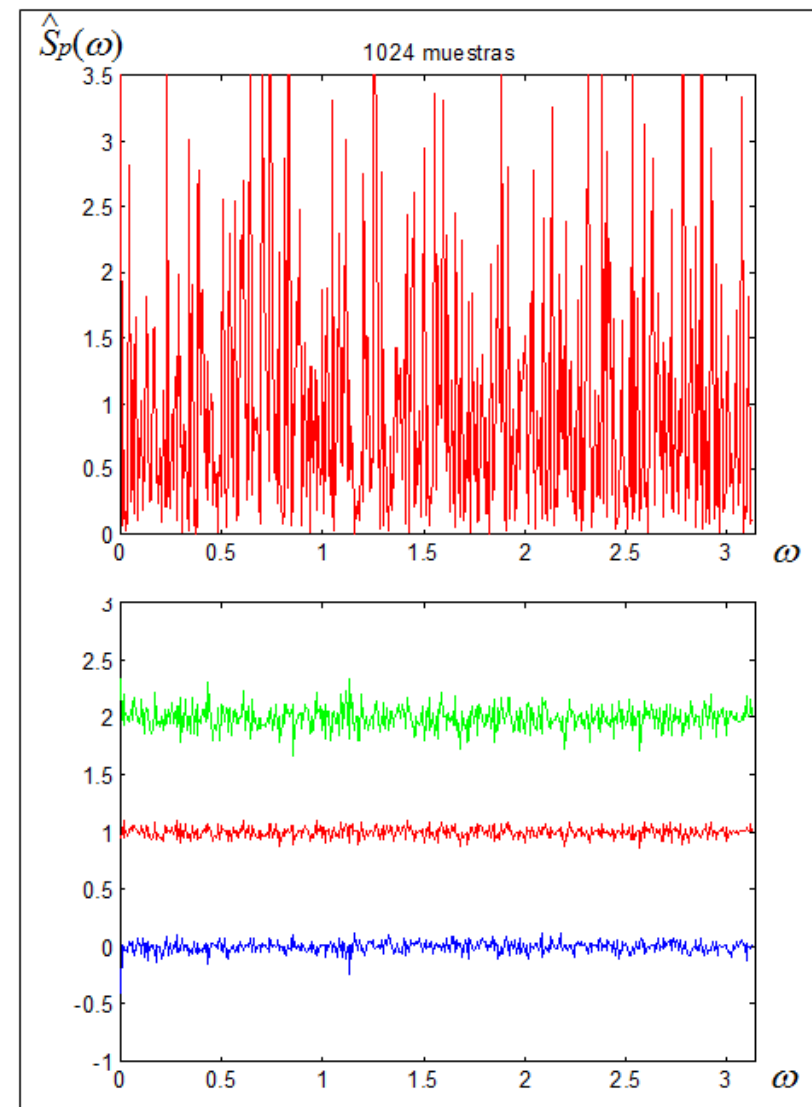
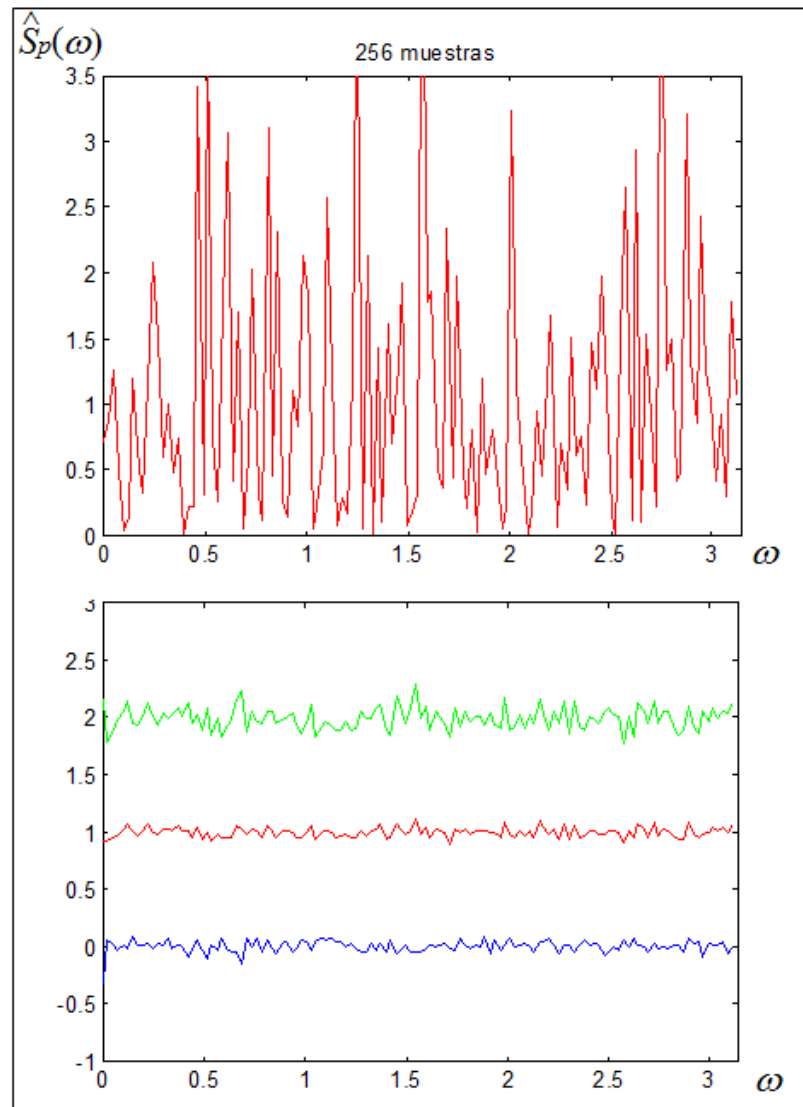


**Ejemplo 2:** Periodograma de una realización de 64 muestras de un proceso blanco gaussiano de potencia 1

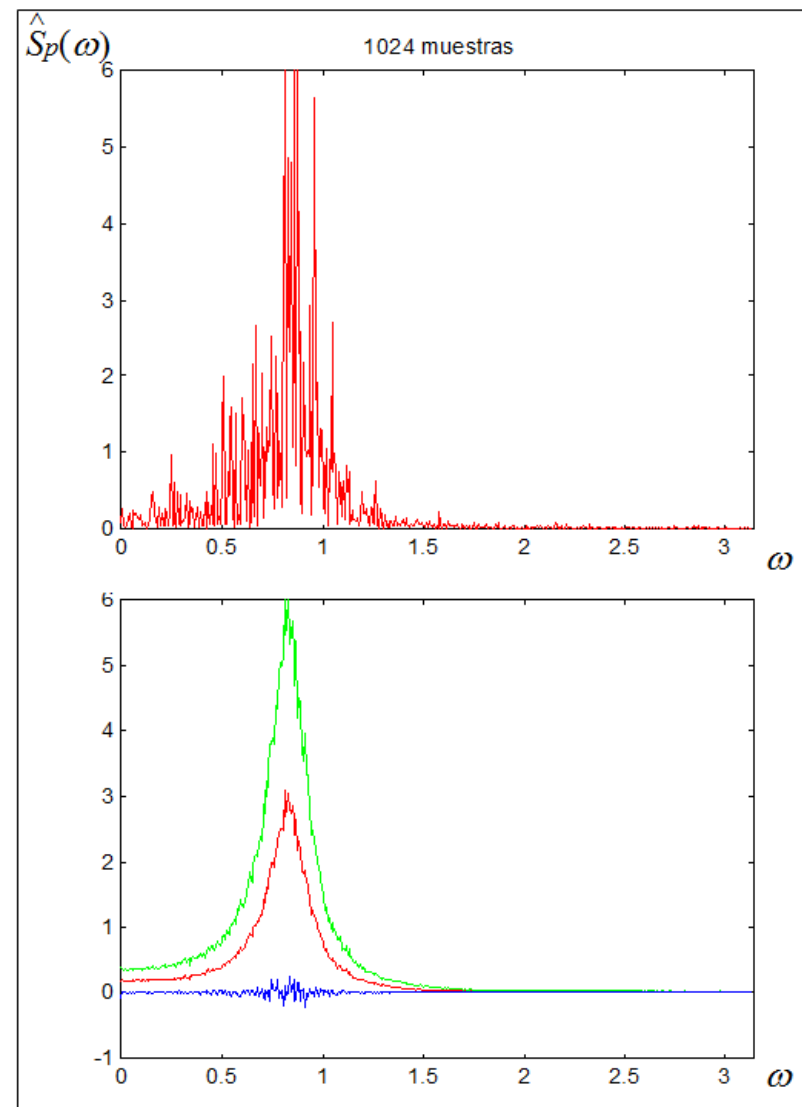
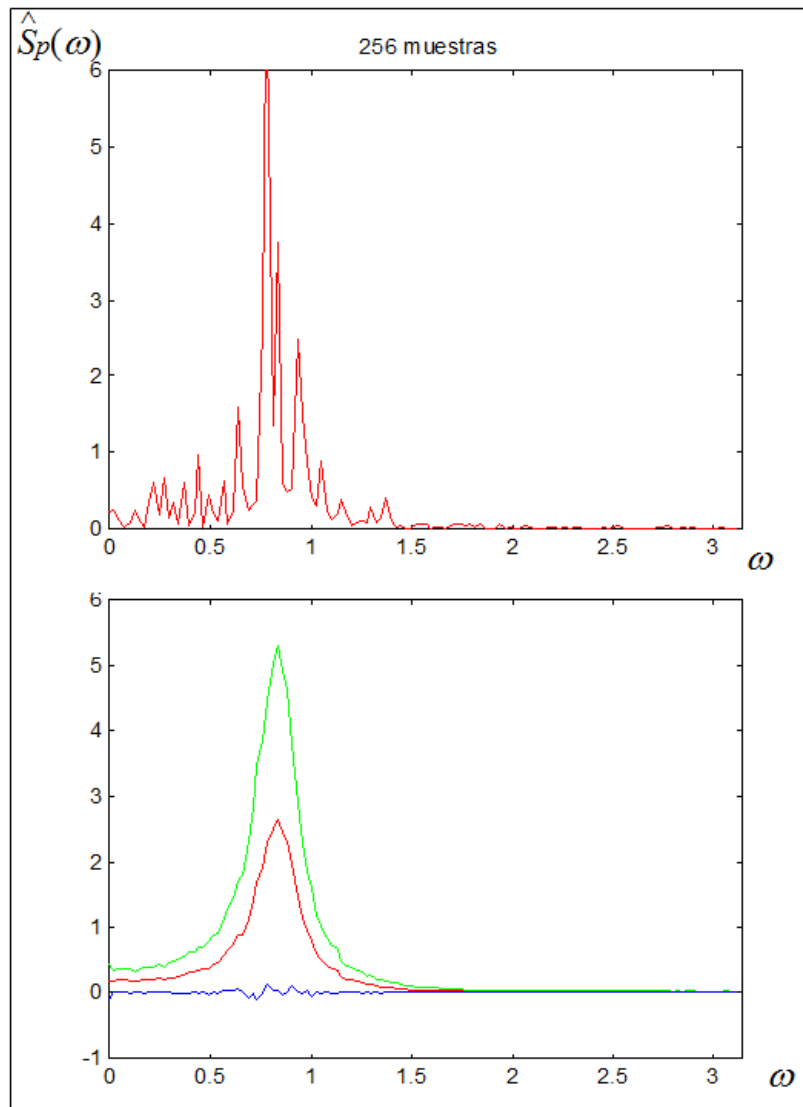


Media y desviación típica determinadas a partir de 500 periodogramas calculados sobre 500 realizaciones de 64 muestras del proceso gaussiano blanco

# Inconsistencia del periodograma: proceso blanco (II)



# Inconsistencia del periodograma: proceso coloreado



## Varianza del periodograma (I)

- El análisis para un caso general es muy difícil, pero se hace abordable considerando  $N$  muestras de un proceso Gaussiano y blanco
- El periodograma de un proceso blanco es insesgado

$$E\{\hat{S}_p(f)\} = \int_{-1/2}^{1/2} N_o |V(\phi)|^2 d\phi = N_o = S_x(f)$$

- Supongamos  $x(n)$  real y estacionario

$$\begin{aligned} E\{\hat{S}_p(f_1)\hat{S}_p(f_2)\} &= \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{r,s,p,q} E\{x(r)x(s)x(p)x(q)\} v(r)v(s)v(p)v(q) \exp(j2\pi(f_1(s-r) + f_2(q-p))) \end{aligned}$$

si además es Gaussiano blanco de media nula se cumple que

$$\begin{aligned} E\{x(r)x(s)x(p)x(q)\} &= r_x(r-s)r_x(p-q) + r_x(r-p)r_x(q-s) + r_x(r-q)r_x(p-s) = \\ &= N_o^2 [\delta(r-s)\delta(p-q) + \delta(r-p)\delta(q-s) + \delta(r-q)\delta(p-s)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E\left\{\hat{S}_p(f_1)\hat{S}_p(f_2)\right\} &= \\
 &= \frac{N_o^2}{N^2} \left\{ N^2 + \sum_{p,q=0}^{N-1} |v(p)|^2 |v(q)|^2 \exp(j2\pi(p-q)(f_1+f_2)) + \sum_{p,q=0}^{N-1} |v(p)|^2 |v(q)|^2 \exp(j2\pi(q-p)(f_1-f_2)) \right\} = \\
 &= N_o^2 \left\{ 1 + |V(f_1-f_2)|^2 + |V(f_1+f_2)|^2 \right\}
 \end{aligned}$$

Para una ventana rectangular...

$$\begin{aligned}
 \text{cov}\left\{\hat{S}_p(f_1), \hat{S}_p(f_2)\right\} &= E\left\{\hat{S}_p(f_1), \hat{S}_p(f_2)\right\} - E\left\{\hat{S}_p(f_1)\right\} E\left\{\hat{S}_p(f_2)\right\} = \\
 &= N_o^2 \left[ \frac{\sin^2(\pi(f_1-f_2)N)}{N^2 \sin^2(\pi(f_1-f_2))} + \frac{\sin^2(\pi(f_1+f_2)N)}{N^2 \sin^2(\pi(f_1+f_2))} \right]
 \end{aligned}$$

Rehacer el desarrollo para  $x(n)$  complejo haciendo las suposiciones necesarias.

## Varianza del periodograma (III)

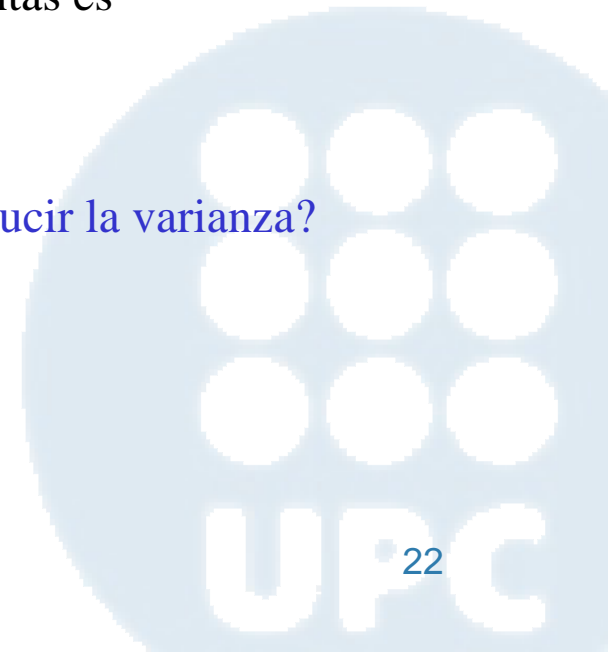
Si las frecuencias son iguales obtenemos la varianza del periodograma

$$\text{var} \left\{ \hat{S}_p(f) \right\} \cong N_o^2 \left[ 1 + \frac{\sin^2(2\pi fN)}{N^2 \sin^2(2\pi f)} \right]$$

de lo cual podemos deducir que:

1. La varianza es aproximadamente el **cuadrado de la DEP**
2. La **varianza no se reduce** al aumentar el número de muestras  $N$
3. La covarianza del periodograma a dos frecuencias distintas es aproximadamente cero siempre que  $(f_1 - f_2) \gg 1/N$

¿Cómo reducir la varianza?

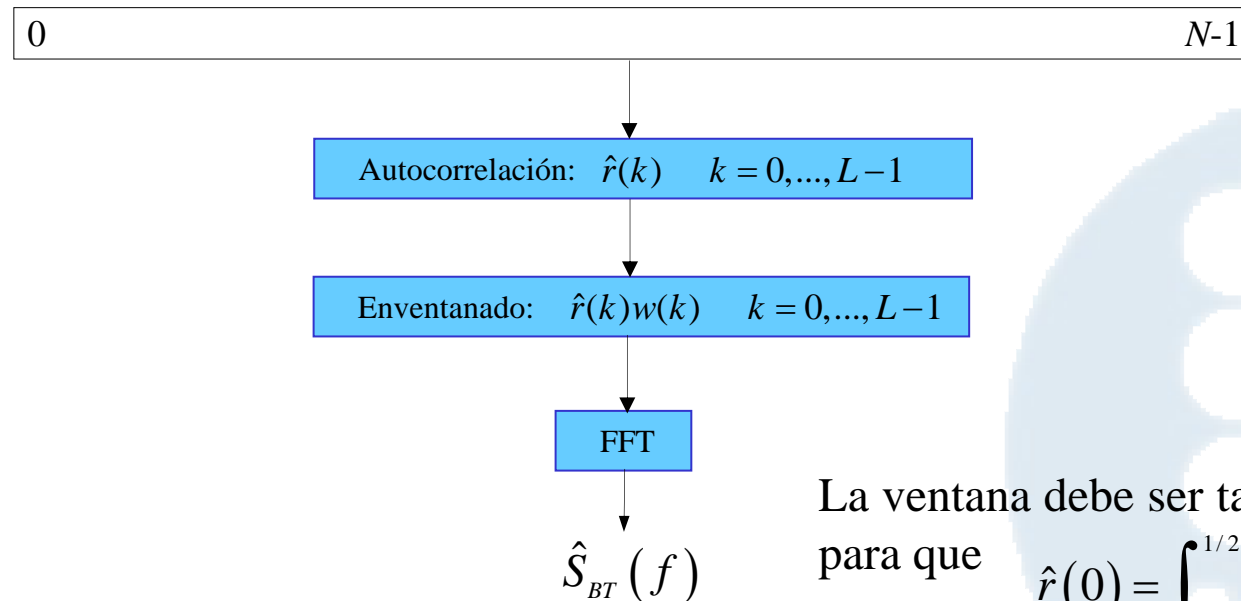


# Método de Blackman-Tuckey (I)

Una forma de reducir la varianza es promediando en el dominio de la frecuencia, habiendo observado que la covarianza del periodograma a frecuencias distintas es baja.

Un suavizado en el dominio de la frecuencia implica realizar una convolución en  $f$  con una función  $W(f)$  a diseñar:

$$\hat{S}_{BT}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{S}_P(\varphi) W(f - \varphi) d\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \hat{S}_{BT}(f) = \mathcal{F} \{ \hat{r}(k) w(k) \}$$



La ventana debe ser tal que  $w(0) = 1$  para que

$$\hat{r}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{S}_{BT}(\varphi) d\varphi$$

## Método de Blackman-Tuckey (II)

- También puede interpretarse como un estimador que trata de mejorar la variabilidad estadística del periodograma inducida por los lags extremos de la correlación estimada mediante un enventanado:

$$\hat{S}_{BT}(f) = \sum_{k=-M+1}^{M-1} w(k) \hat{r}(k) \exp(-j2\pi f k)$$

$$\hat{S}_{BT}(f) = \mathcal{F} \{ w(n) \hat{r}(n) \} = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{S}_p(\varphi) W(f - \varphi) d\varphi = W(f) \circledast \hat{S}_p(f)$$

$$w(-k) = w(k); \quad w(0) = 1; \quad w(k) = 0 \quad \text{for} \quad |k| \geq M \quad M \leq N$$

- Ventana semidefinida positiva

$$W(f) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{S}_{BT}(f) \geq 0$$

Recordatorio:  $v(n)$  es la ventana sobre las muestras,  $w(n)$  es la ventana sobre la correlación



## Método de Blackman-Tuckey (III)

**Sesgo:** Viene dado por

$$E\{\hat{S}_{BT}(f)\} = \int_{-1/2}^{1/2} E\{\hat{S}_p(f)\} W(f - \varphi) d\varphi = W(f) \otimes E\{\hat{S}_p(f)\} = W(f) \otimes |V(f)|^2 \otimes S_x(f)$$

**Varianza:** es proporcional a la energía de la ventana

$$\text{var}\{\hat{S}_{BT}(f)\} = \frac{E_w}{N} S_x^2(f) \quad E_w = \sum_{n=-M+1}^{M-1} |w(n)|^2$$

**Valores de energia (L=10)**

Ventana	Energía
Rectangular	21
Hanning	7.5
Hamming	7.954
Chebyshev (A = 40)	8.797

### Propiedades de la ventana sobre la correlación:

- Siempre positiva para que  $\hat{S}(f)$  sea positiva.

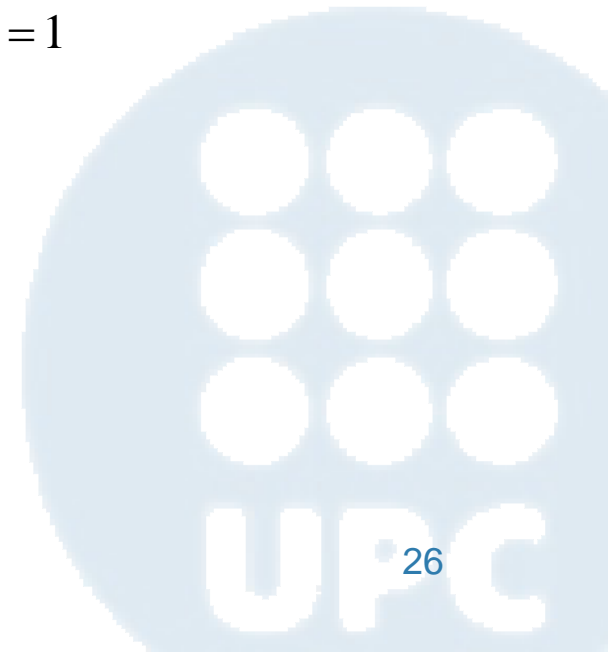
$$W(f) = |V(f)|^2 \quad \text{o bien} \quad w(n) = v(n) * v(-n)$$

El efecto “leakage” producido por los lóbulos secundarios debe ser igual por ambos lados: ventana par y máximo en el origen. Se cumple para cualquier ventana de datos.

- Debe permitir la estimación de la potencia como integral de la DEP.

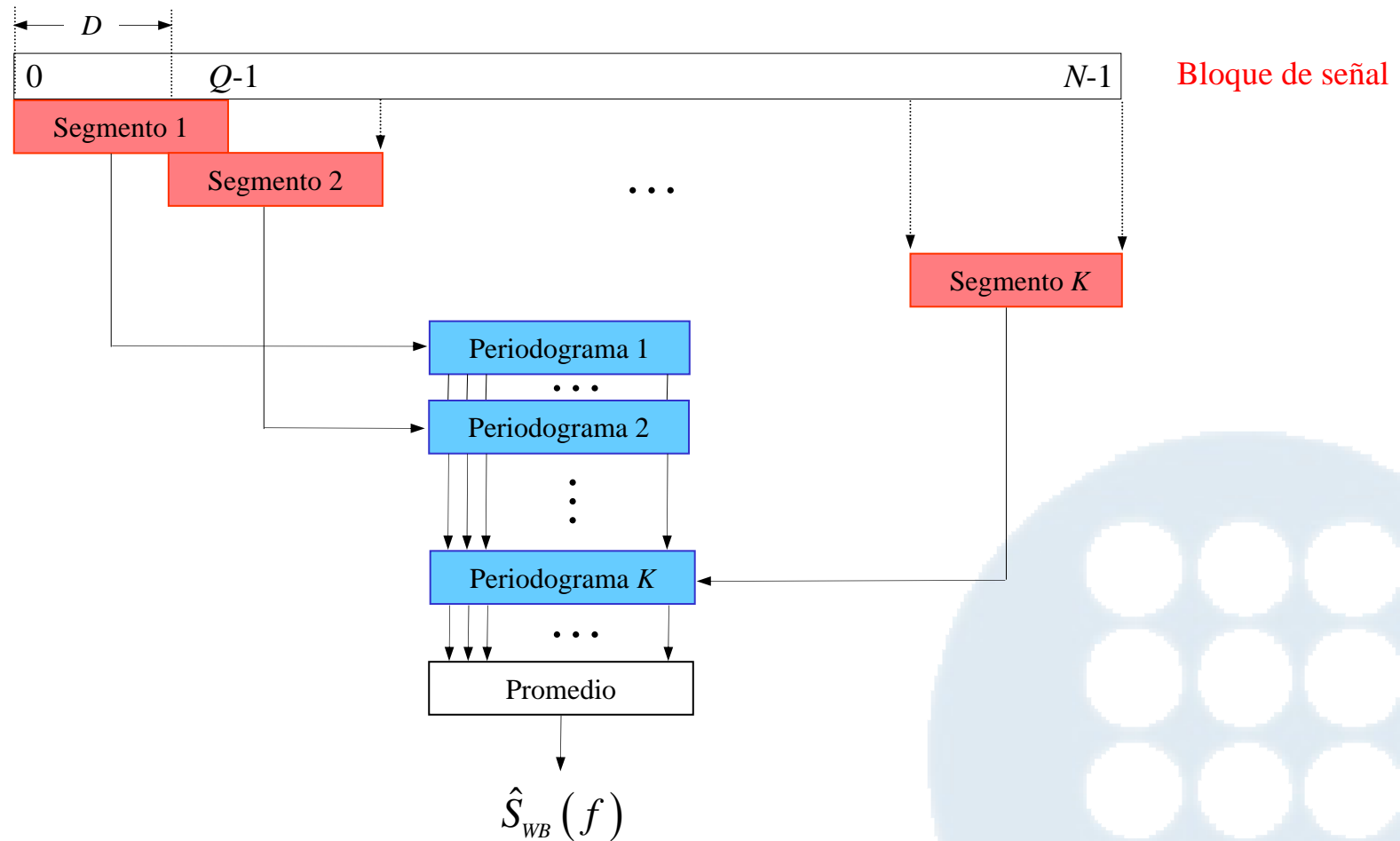
$$\int W(f) df = \int |V(f)|^2 df = \sum_{q=-M+1}^{M-1} |v(q)|^2 = 1$$

- A mayor nivel de lóbulos secundarios mayor “leakage”.
- A mayor anchura de lóbulo principal menor resolución.



# Método de Welch-Barlett (I)

Una forma alternativa de reducir la varianza es promediar periodogramas calculados en distintos instantes de tiempo, bajo la hipótesis de que son incorrelados:



a costa de empeorar el sesgo (cada segmento se compone de  $Q < N$  muestras).

## Método de Welch-Barlett (II)

Si no hay solapamiento entre segmentos consecutivos ( $D = Q$ ):

- El vector de  $N$  muestras se segmenta en  $K$  vectores de  $Q$  muestras cada uno,  $K = N/Q$ .
- Se calculan  $K$  periodogramas y se promedian

$$\hat{S}_{WB}(f) = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^K \hat{S}_m(f) = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^K \frac{1}{Q} |\mathbf{s}^H \mathbf{x}_m|^2$$

$$\mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} x((m-1)Q) & x((m-1)Q+1) & \cdots & x((m-1)Q+Q-1) \end{bmatrix}^T$$

o bien, usando la autocorrelación de cada segmento de  $Q$  muestras...

$$\hat{S}_m(f) = \sum_{q=-Q+1}^{Q-1} \hat{r}_m(q) \exp(-j2\pi q)$$

$$\hat{S}_{WB}(f) = \sum_{q=-Q+1}^{Q-1} \left[ \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{r}_m(q) \right] \exp(-j2\pi qf) = \sum_{q=-Q+1}^{Q-1} \hat{r}_B(q) \exp(-j2\pi qf)$$

## Método de Welch-Barlett (III)

**Sesgo:** La resolución queda viene dada por la característica espectral de la ventana utilizada, sustituyendo  $N$  por  $Q$ : empeora el sesgo.

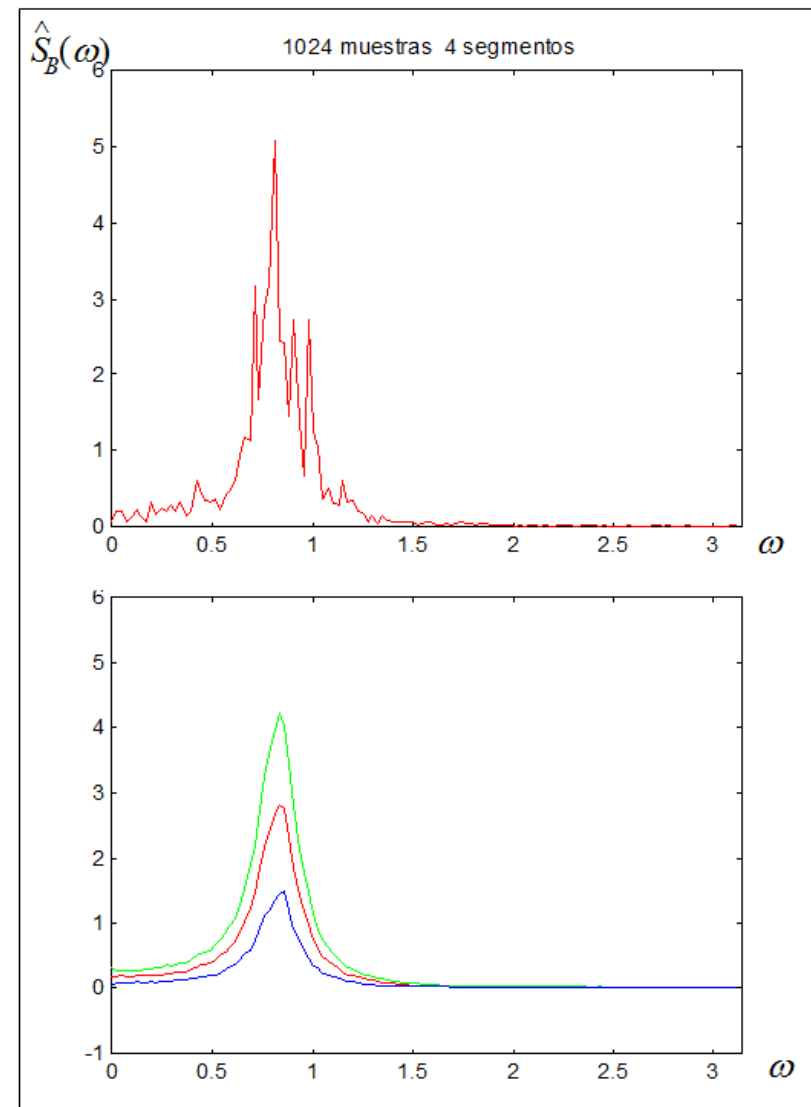
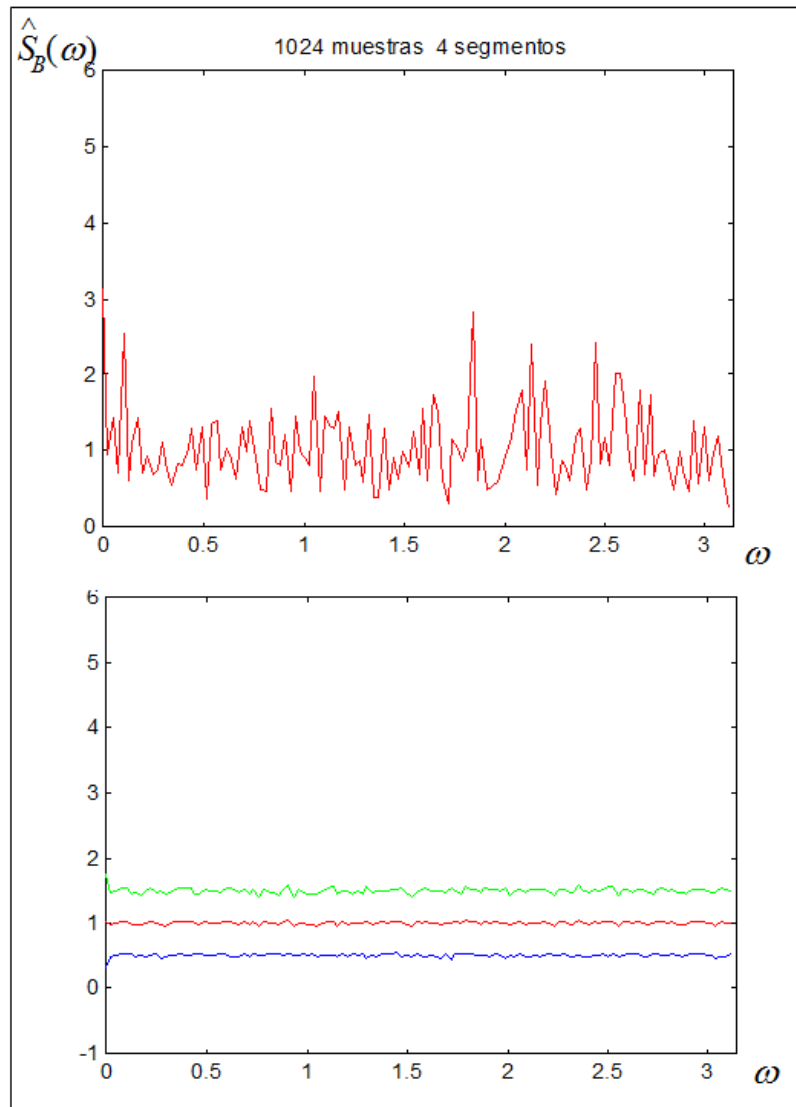
**Varianza:** Se reduce en un factor  $K$ , pero no ilimitadamente porque a medida que se reduce  $D$  (más solapamiento) los datos entre segmentos consecutivos están más correlados y el promedio no es capaz de reducir la varianza

$$\text{var}\{\hat{S}_{WB}(f)\} \cong \frac{1}{K} \text{var}\{\hat{S}_P(f)\} \cong \frac{S_x^2(f)}{K}$$

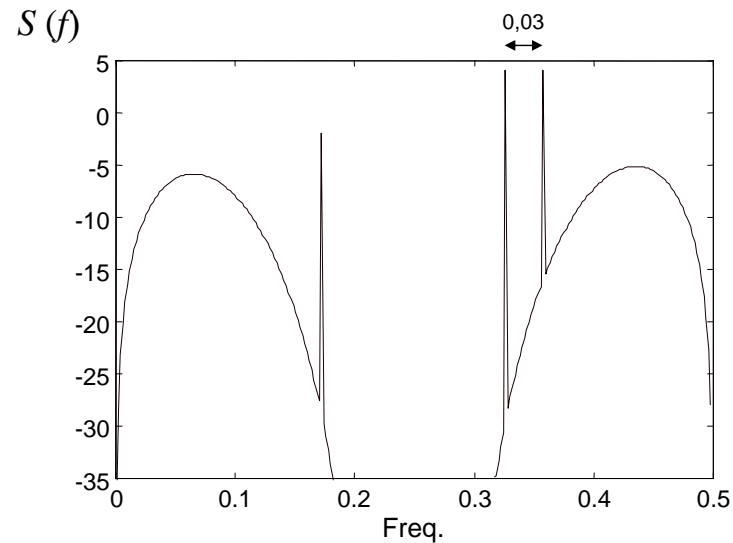
¿Bajo qué condiciones podemos decir que los  $\hat{S}_m(f)$  están incorrelados?



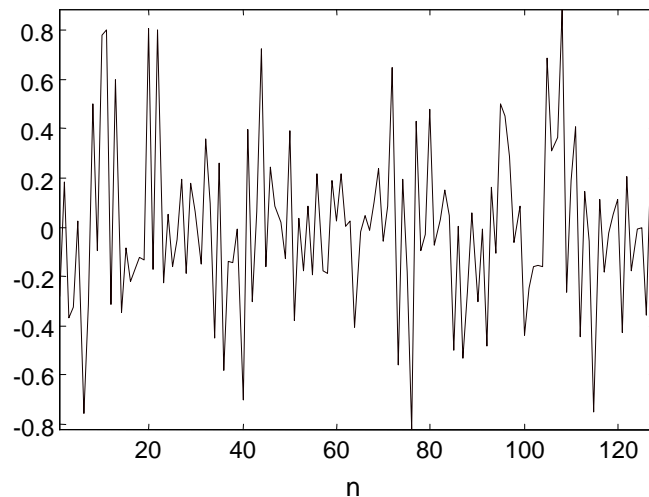
# Consistencia del periodograma de Welch-Barlett



Se divide toda la señal en cuatro segmentos no solapados de 256 muestras cada uno 30



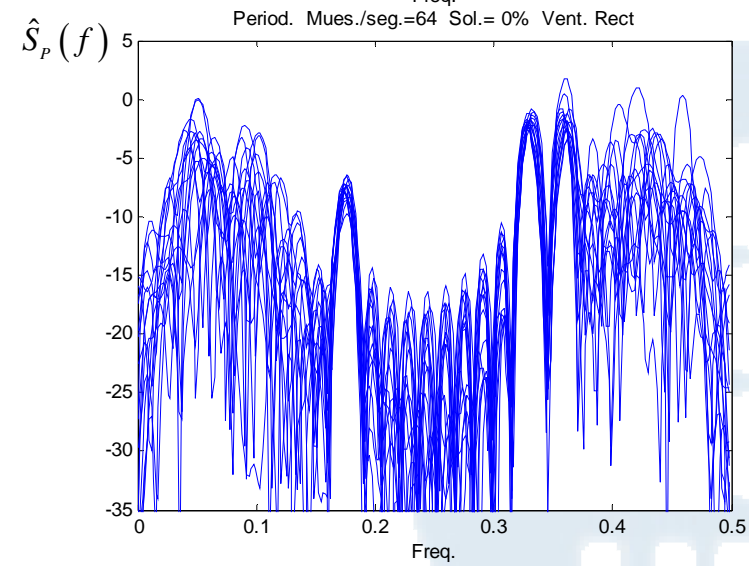
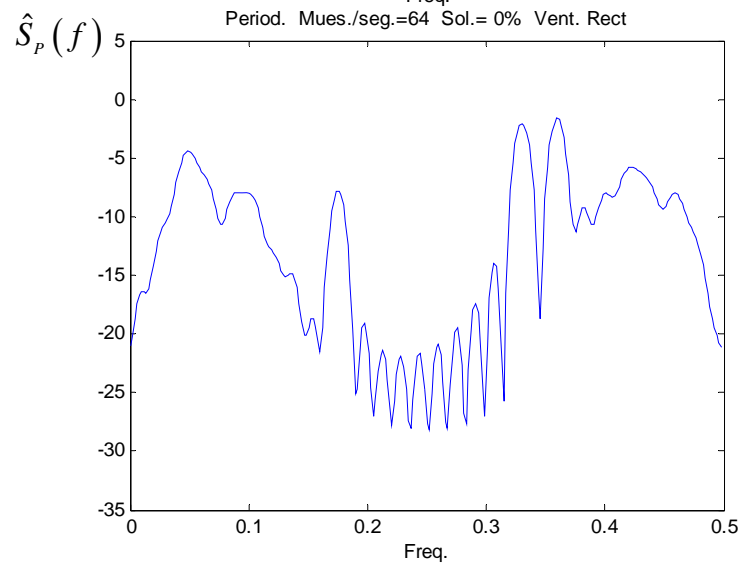
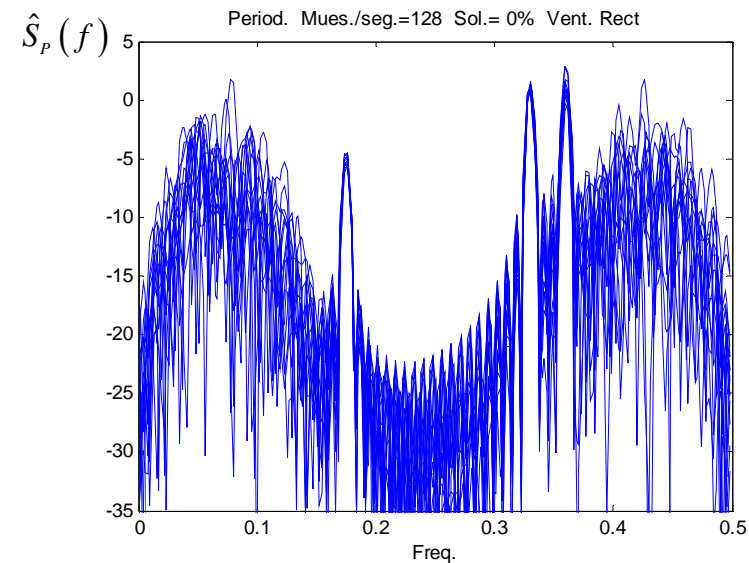
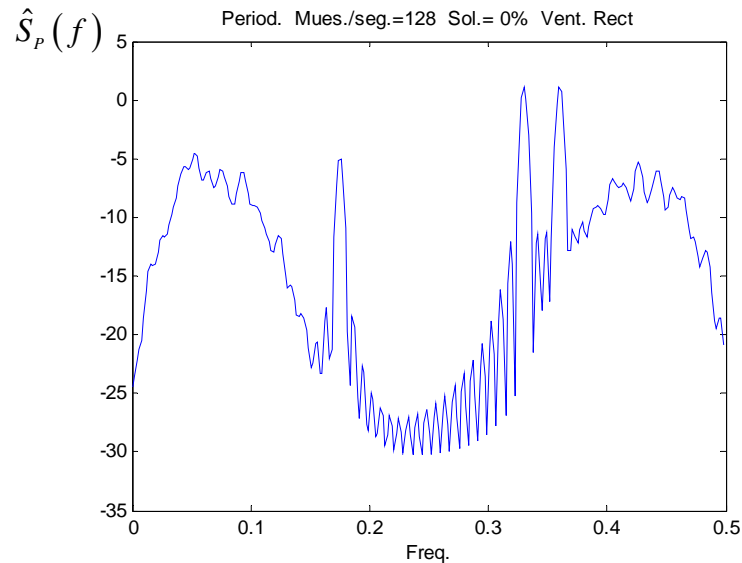
## Ejemplo 3: Densidad espectral de potencia real



Una realización de 128 muestras del proceso cuya DEP es la de la figura superior

**En las siguientes transparencias: promedio de 16 estimaciones (izquierda) y 16 estimaciones superpuestas (derecha) ...**

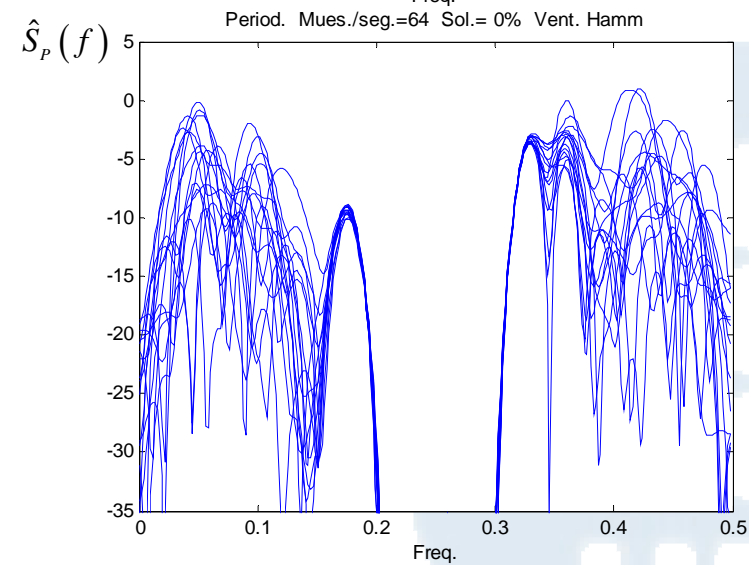
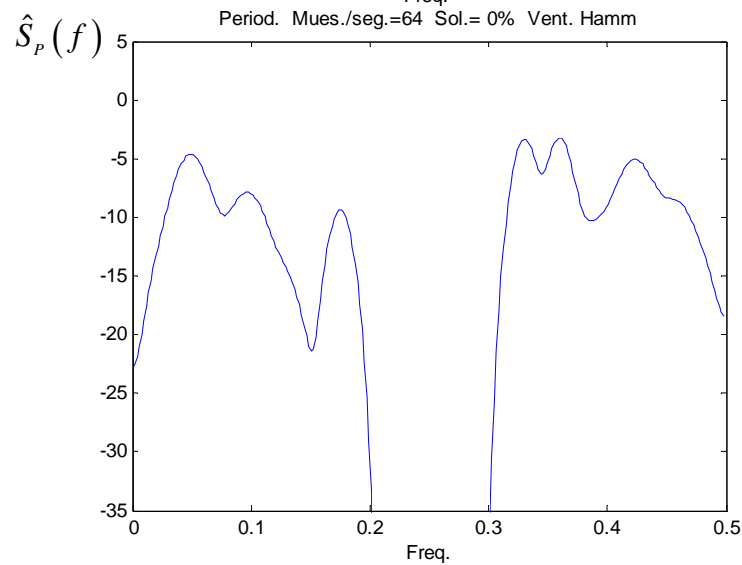
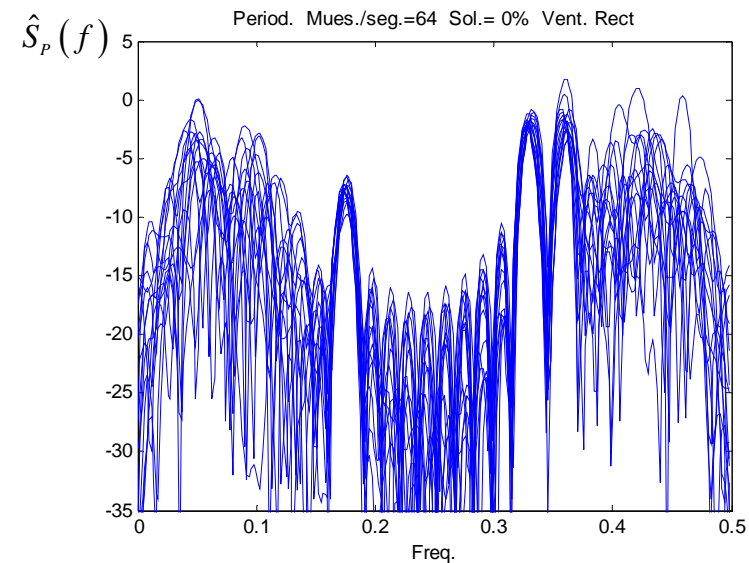
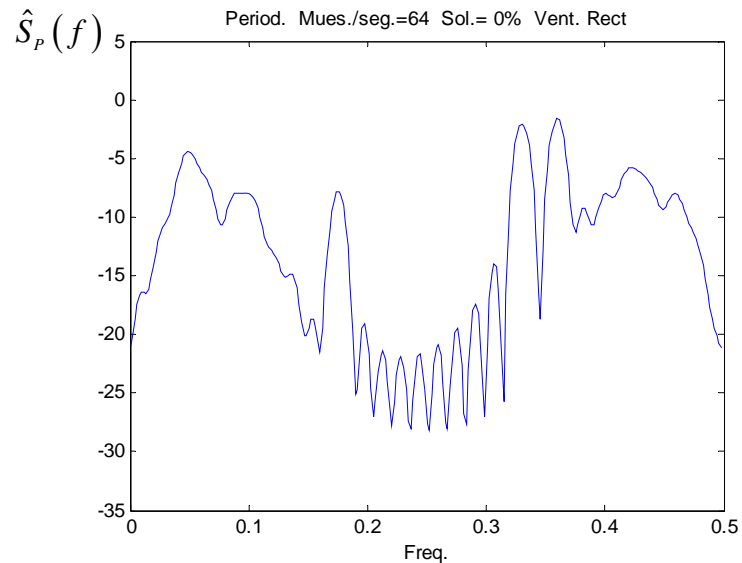
# Periodograma: distinto número de muestras



El lóbulo principal se ensancha al disminuir el numero de muestras por segmento

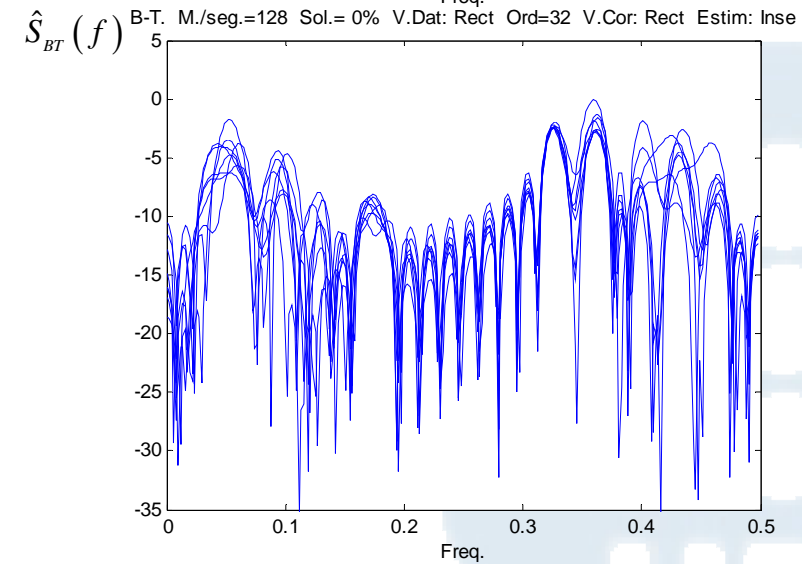
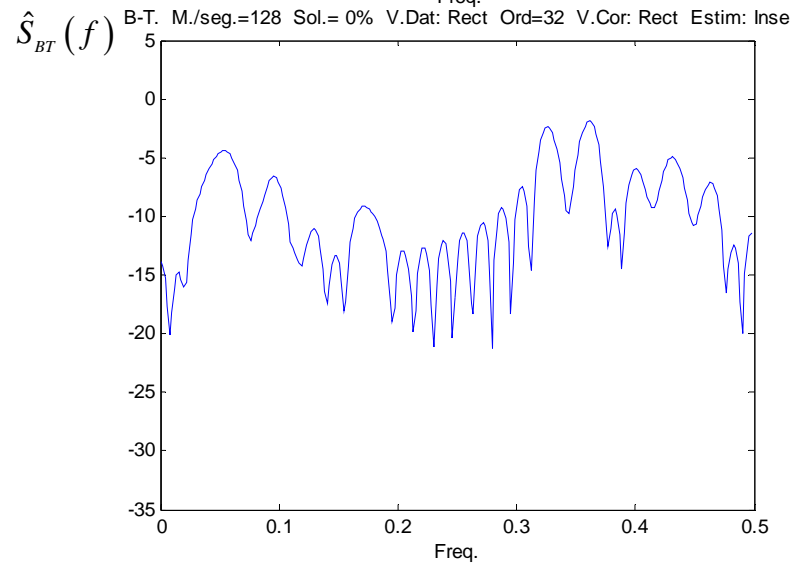
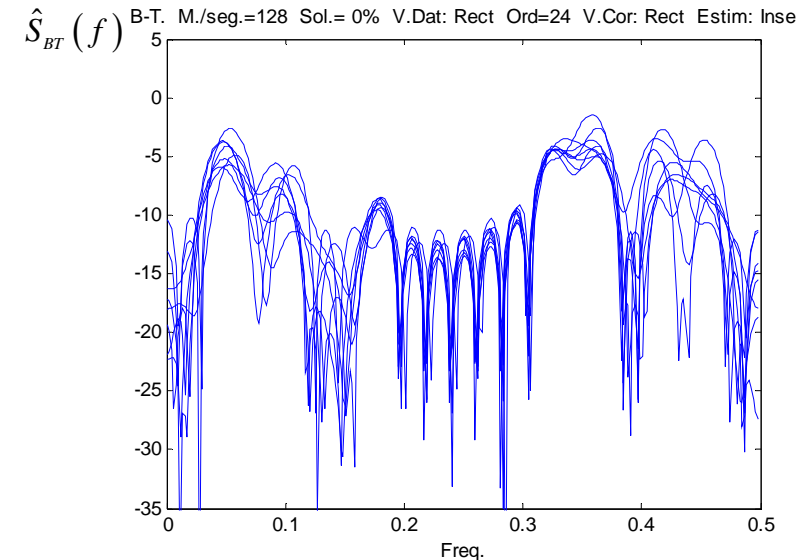
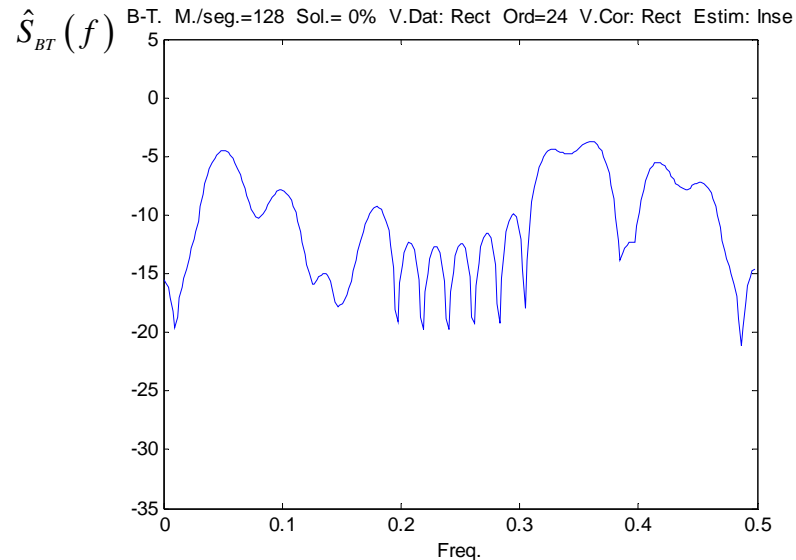


# Periodograma: distinta ventana sobre las muestras



La reduccion del leakage sólo es posible si se usa una ventana distinta de la rectangular

# Blackman-Tuckey: tamaño de la ventana sobre la correlación



Se estiman 24 (arriba) y 32 (abajo) muestras de la autocorrelación no sesgada

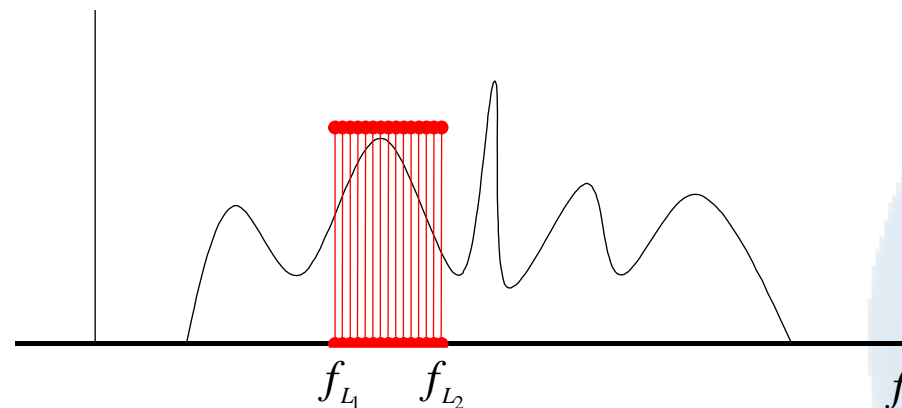
## Periodograma basado en la transformada chirp

Según lo visto en la [transparencia 7](#), si queremos determinar el periodograma en un conjunto denso de frecuencias hemos de rellenar con ceros la secuencia  $x(n)$  y hacer una FFT de muchas muestras. Hay un procedimiento mucho menos costoso basado en las propiedades de la transformada discreta de Fourier.

- Sea una secuencia  $x(n)$  de longitud  $N$  muestras.
- Se desea calcular el periodograma en el conjunto de frecuencias discretas

$$f_k = \frac{2\pi}{N'} k \quad k = L_1, \dots, L_2$$

donde  $N' \gg N$ .



La transformada discreta de Fourier a esas frecuencias puede expresarse como:

$$X(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) V^{-nk}$$

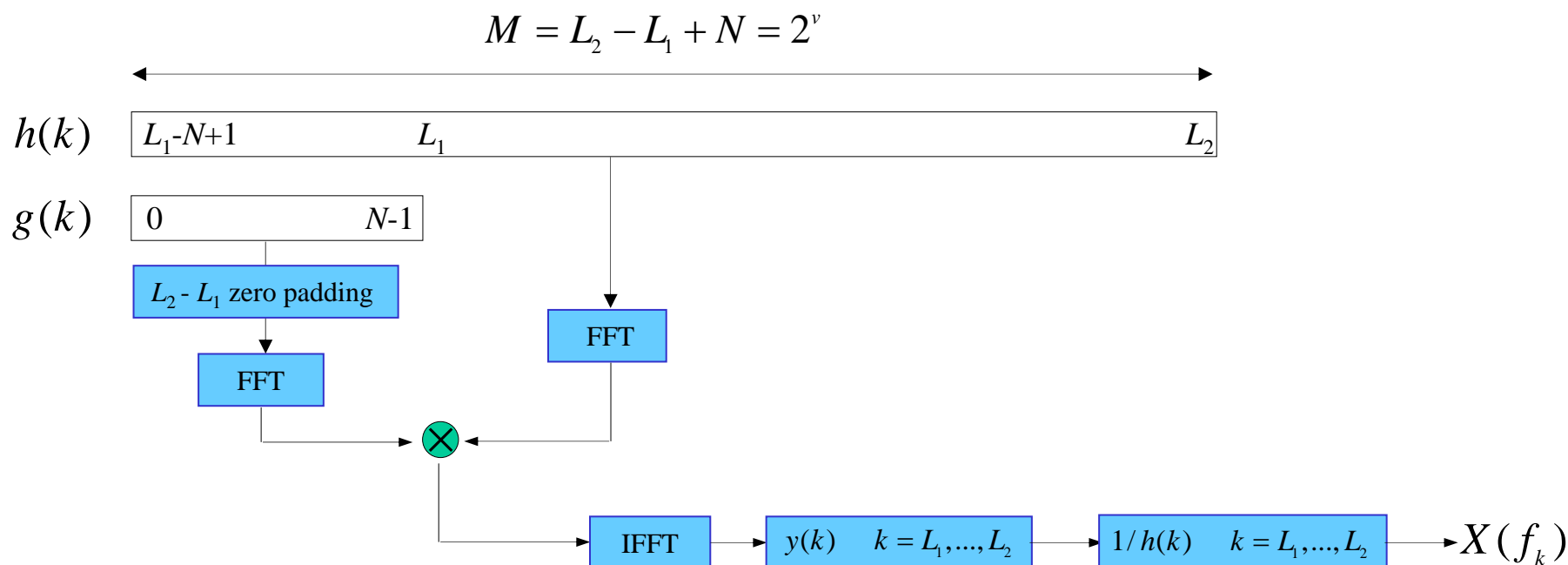
utilizando la identidad

$$nk = \frac{1}{2} (n^2 + k^2 - (k-n)^2)$$

$$X(f_k) = V^{-k^2/2} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{x(n) V^{-n^2/2}}_{g(n)} \underbrace{V^{(k-n)^2/2}}_{h(k-n)} \right] = \frac{1}{h(k)} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} g(n) h(k-n) \right] = \frac{y(k)}{h(k)}$$

donde  $h(k) = \exp(j \frac{\pi}{N} k^2)$  es una senoide de frecuencia creciente con el tiempo

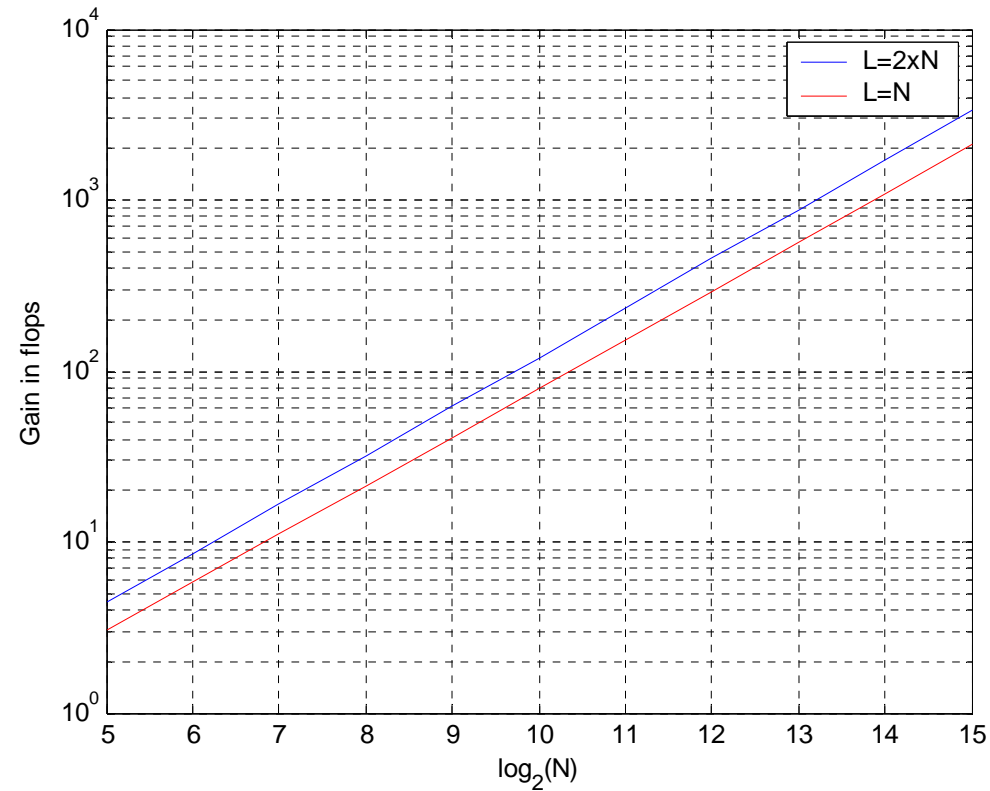
El cálculo de  $y(n)$  puede hacerse de forma eficiente observando que es una convolución entre  $g(n)$  y  $h(n)$ . Si el tamaño de  $h(n)$  es suficientemente grande, es más conveniente utilizar la FFT para calcular la convolución.



1. El coste depende solo  $L_2 - L_1$ , no de cuan juntas estén estas frecuencias.
2. La ganancia en número de flops (multiplicación+suma en coma flotante) con respecto a la convolución en el tiempo es de:

$$G = \frac{LN}{4L + N(4 + \frac{1}{2} \log_2 N)}$$

$$L = L_2 - L_1$$



# El periodograma como banco de filtros (I)

El periodograma puede interpretarse como un **banco de filtros**. La respuesta impulsional de cada uno de ellos es una senoide centrada a la frecuencia de interés.

Si evaluamos la DEP en el tiempo...

En general podemos introducir una ventana sobre los datos

$$\hat{S}_p(f) = \frac{1}{N} |\mathbf{s}^H \mathbf{x}|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} h^*(n) x(n) \exp(-j2\pi f n) \right|^2$$

$$\hat{S}_p(f_k; m) = \frac{1}{N} |\mathbf{s}^H \mathbf{x}(m)|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} h^*(n) x(mN - n) \exp(j2\pi f_k n) \right|^2 =$$

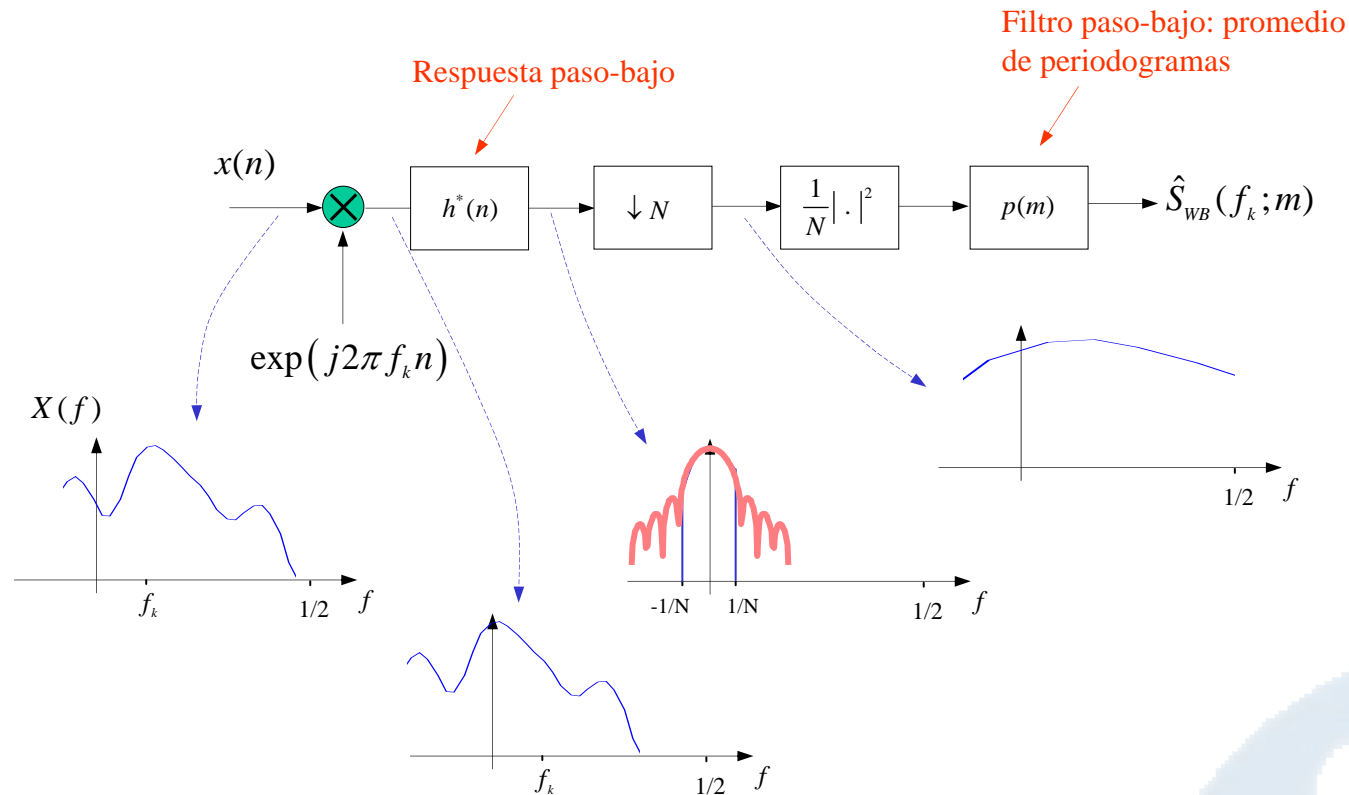
$$= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} (h(n) \exp(-j2\pi f_k n))^* x(mN - n) \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{N} \left| (h(n) \exp(-j2\pi f_k n))^* * x(n) \Big|_{n=mN} \right|^2 = \frac{1}{N} |\mathbf{h}_{f_k}^H \mathbf{x}(m)|^2$$

$$\mathbf{x}(m) = \begin{bmatrix} x(Nm) \\ x(Nm-1) \\ \vdots \\ x((N-1)m+1) \end{bmatrix}$$

Filtrado de la señal con un filtro centrado a la frecuencia  $-f_k$

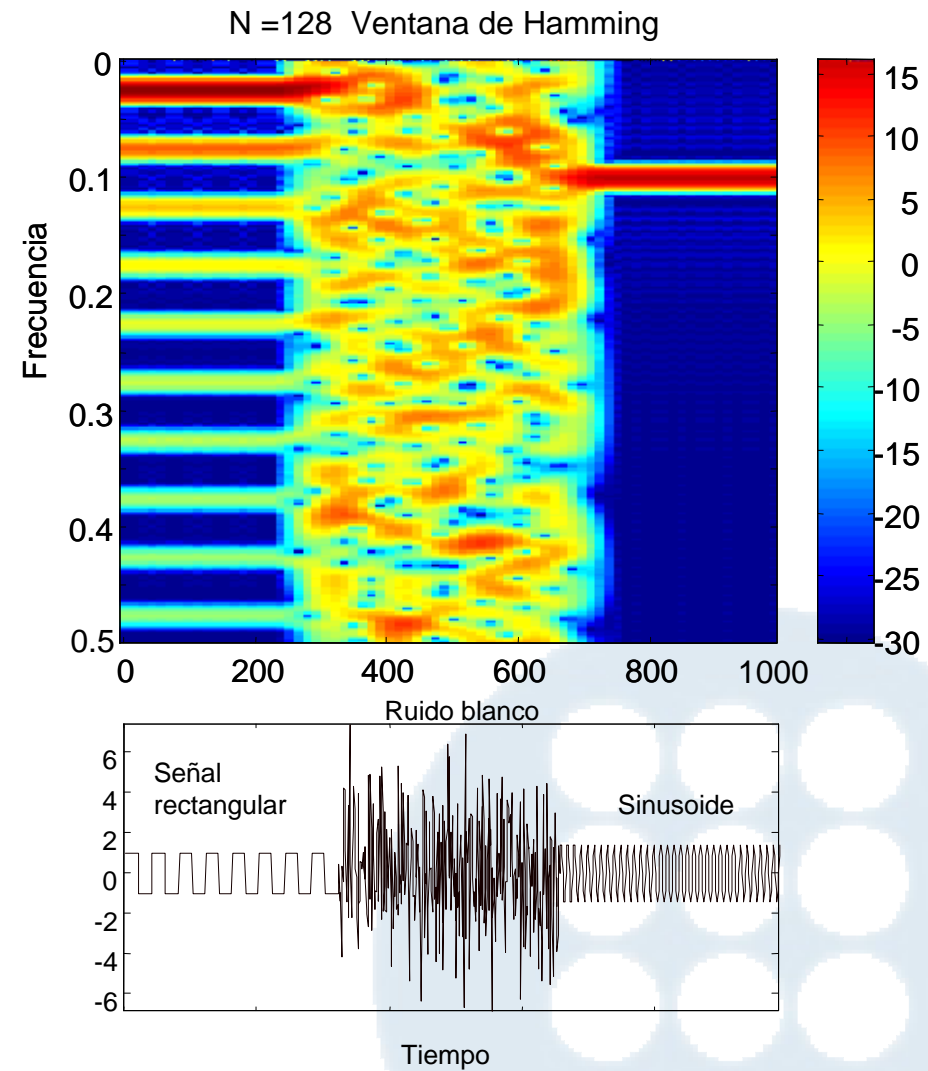
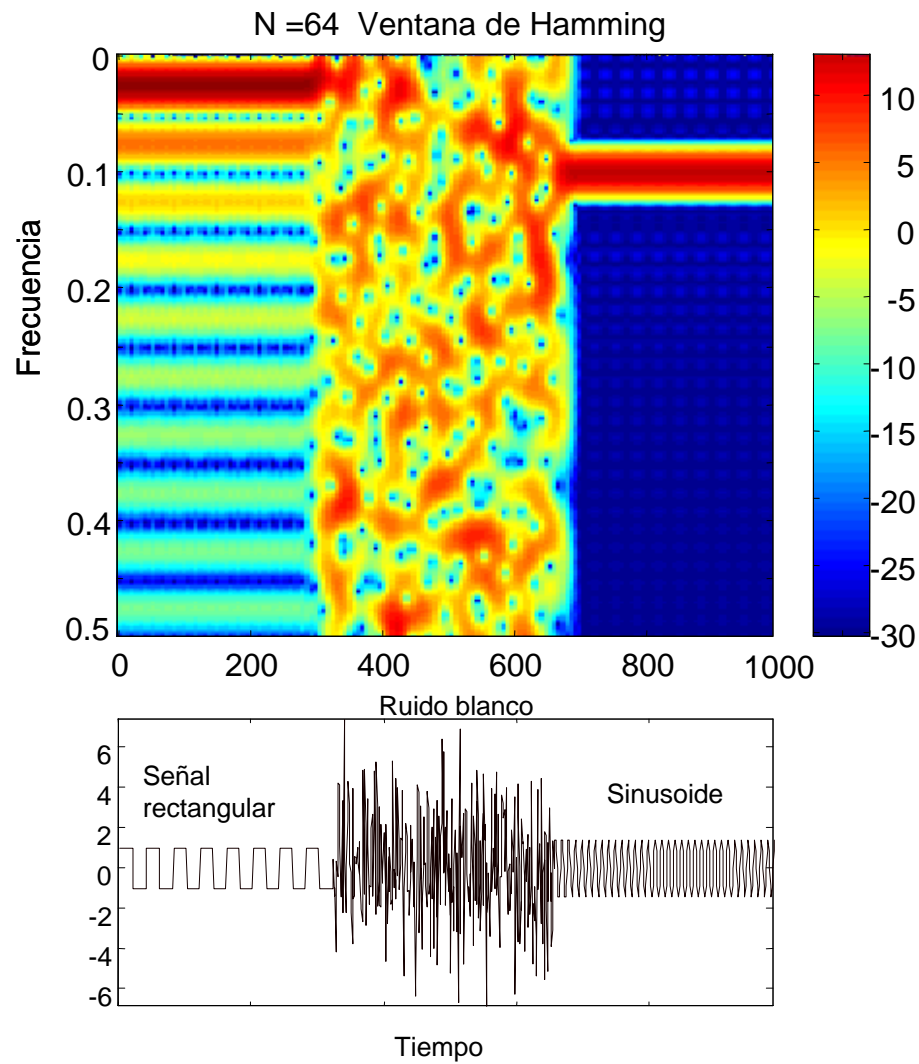
## El periodograma como banco de filtros (II)



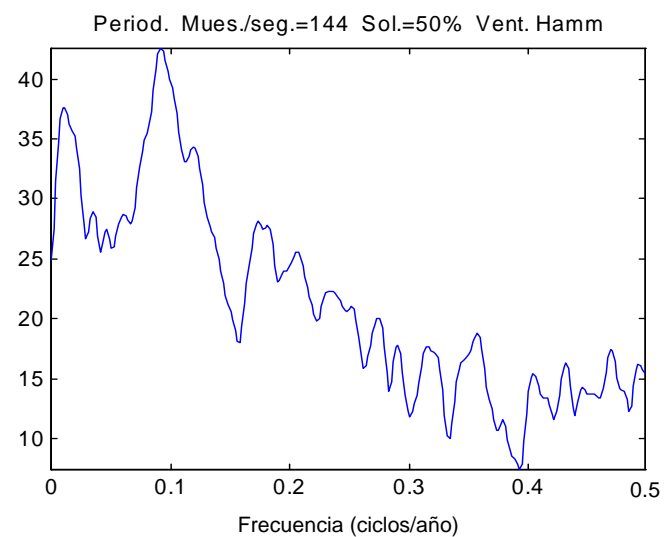
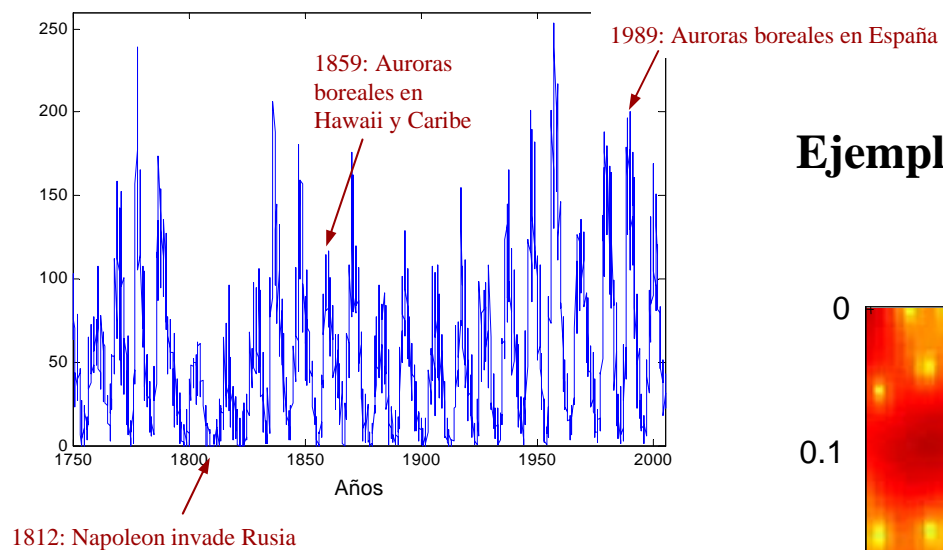
La resolución y el *leakage* vienen determinados por la respuesta en frecuencia de  $h(n)$ . Por ser un filtro no-ideal, la DEP estimada en una banda está afectada por la potencia de la señal en bandas adyacentes.

$$\hat{S}_p(f_k; m) = \frac{1}{N} |\mathbf{h}_f^H \mathbf{x}(m)|^2 = \frac{1}{N} \left| \int_{-1/2}^{1/2} X(f; m) H(f - f_k) df \right|^2$$



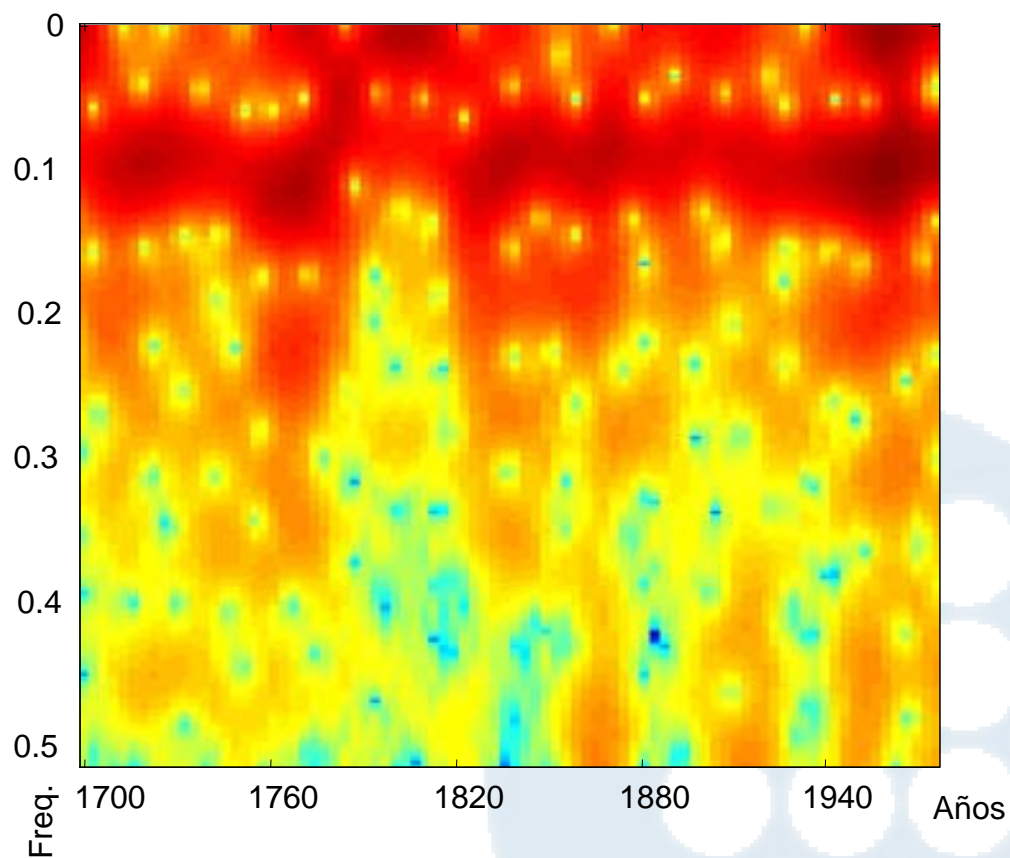


A mayor es el tamaño de la ventana, mayor resolución frecuencial, pero menor resolución temporal



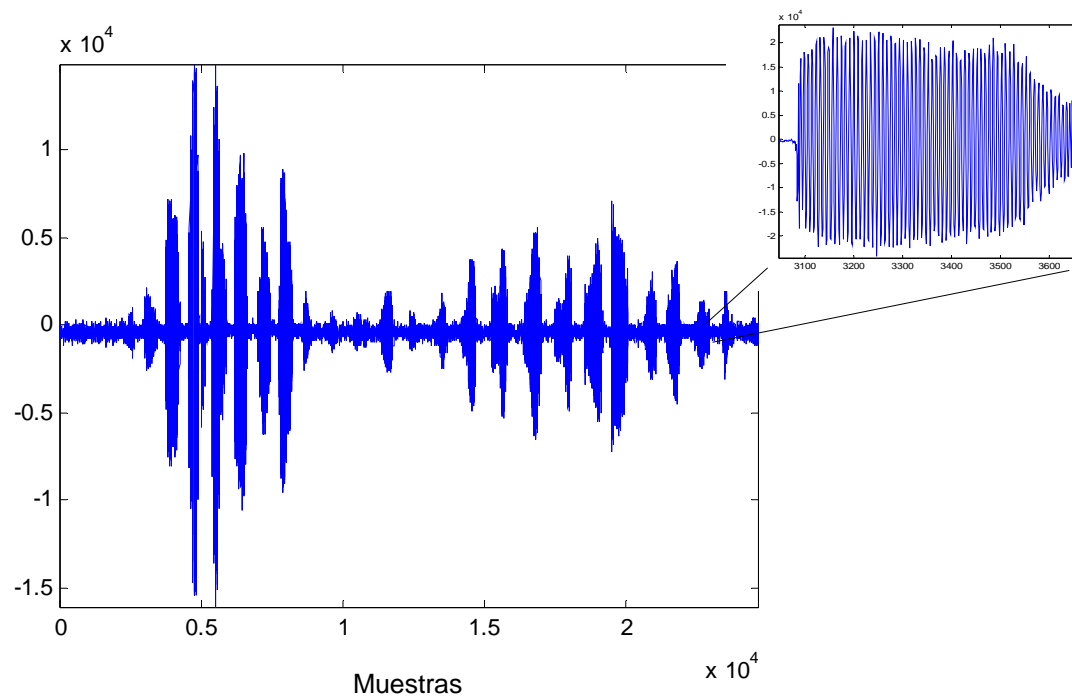
## Ejemplo 4: Espectrograma de las manchas solares

Periodograma Vent. Hamming N=32 muestras

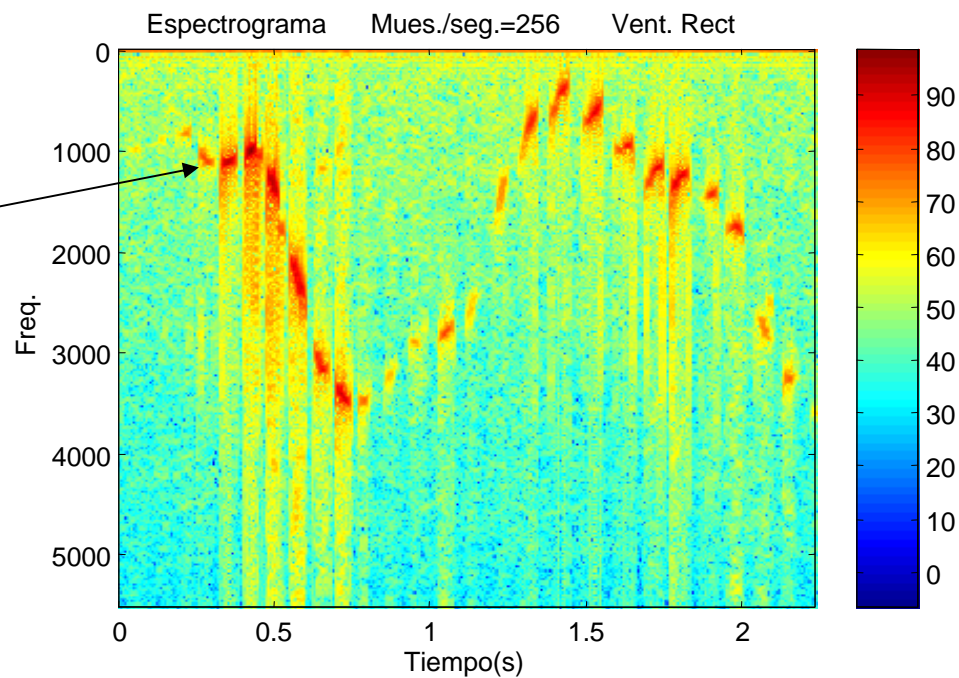


Fuente: <http://spaceweather.com/java/archive.html#sunspotnum>

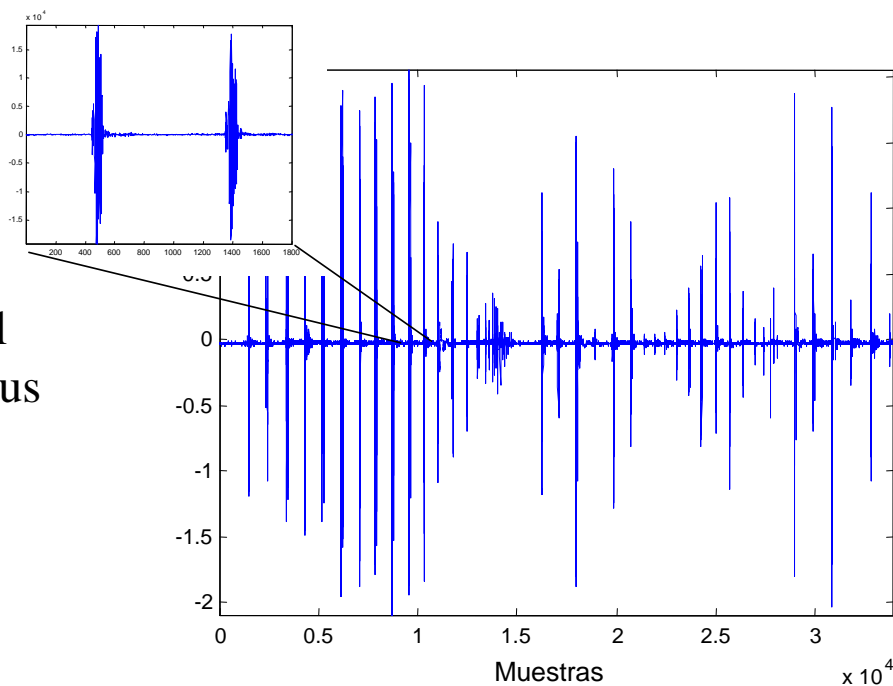
## Ejemplo 5: Sonar pulsado-Doppler, en el murcielago Eptesicus



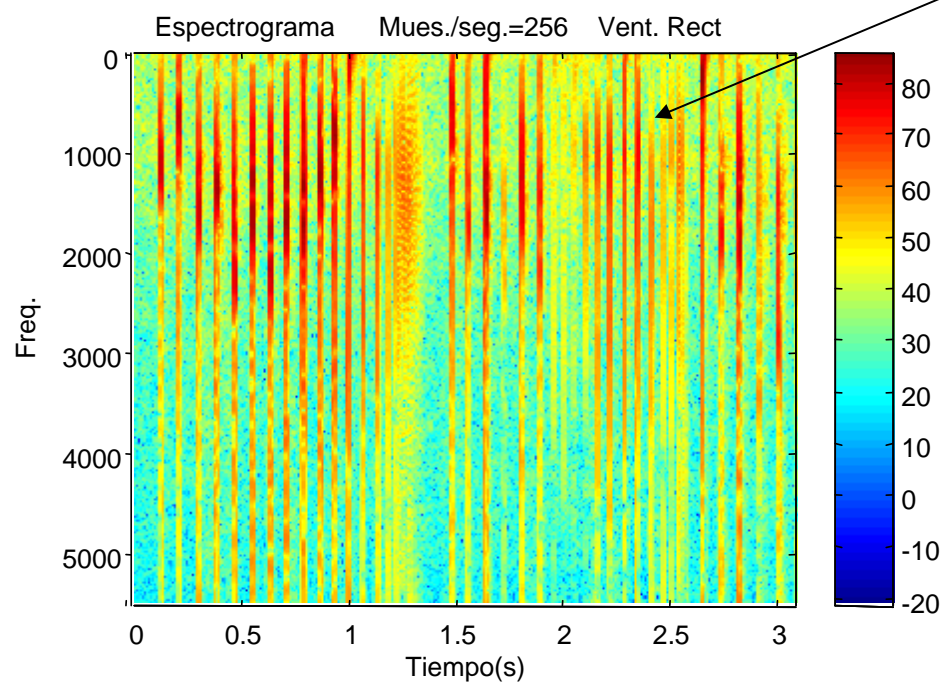
Una vez localizada la presa, varía la frecuencia emitida a fin de que los ecos Doppler sean siempre recibidos en la misma banda de frecuencia (a la que tiene mayor sensibilidad).

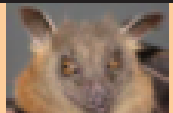
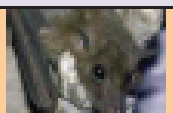

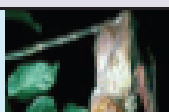
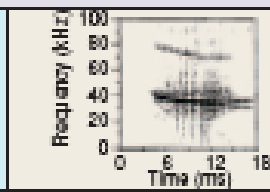

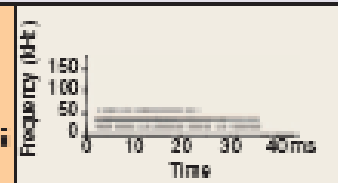
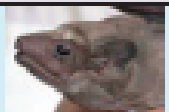
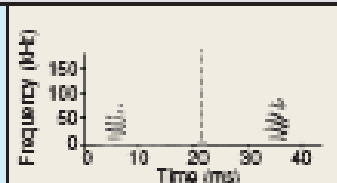


## Sonar pulsado, en el murciélago Roussetus




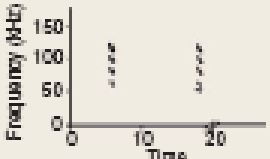


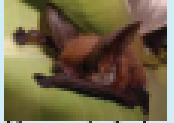
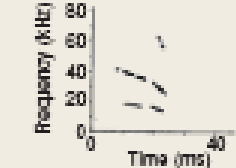

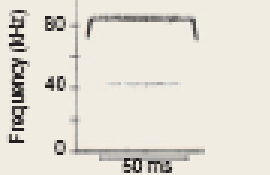
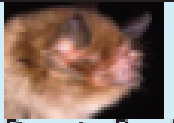
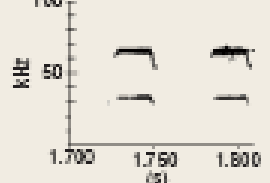


Una vez localizada la presa, aumenta la frecuencia de los chasquidos a fin de seguirla con mas precision.



Echolocation Call Type	Bat Species (Family)	Spectrogram	Bat Species (Family)	Spectrogram
	Yinpterochiroptera		Yangochiroptera	
No Echolocation	 Cynopterus Brachyotis (Pteropodidae)			
(a)				
Brief, Broadband Tongue Clicks	 Rousettus Aegyptiacus (Pteropodidae)			
(b)				
Narrowband, Dominated by Fundamental Harmonic			 Lasiurus Borealis (Vespertilionidae)	
(c)				
Narrowband, Multiharmonic	 Rhinopoma Hardwickii (Rhinopomatidae)		 Taphozous Melanopogon (Emballonuridae)	

Fuente: IEEE Signal Processing Magazine

Echolocation Call Type	Bat Species (Family)	Spectrogram	Bat Species (Family)	Spectrogram
	Yinpterochiroptera		Yangochiroptera	
Short, Broadband, Dominated by Fundamental Harmonic			 <b>Myotis Daubentonii</b> (Vespertilionidae)	 10 ms
(e)				
Short, Broadband, Multiharmonic	 <b>Megaderma Lyræ</b> (Megadermatidae)	 Frequency (kHz) 150 100 50 0 0 10 20 Time	 <b>Myotis Tuberculata</b> (Myotisidae)	 Frequency (kHz) 100 50 0 0 20 Time (ms)
(f)				
Long, Broadband, Multiharmonic			 <b>Myotis Aotis</b> (Myotisidae)	 Frequency (kHz) 80 60 40 20 0 0 40 Time (ms)
(g)				
Constant Frequency	 <b>Rhinolophus Ferrumequinum</b> (Rhinolophidae)	 Frequency (kHz) 80 40 0 0 50 Time	 <b>Pteronotus Parvulus</b> (Pteronotidae)	 kHz 100 50 0 1.700 1.750 1.800 (s)

Fuente: IEEE Signal Processing Magazine

La resolución del periodograma viene limitada por el número de muestras  $N$  en cada segmento. Cuando se pretende estimar rayas espectrales a una distancia del orden de  $1/N$  (no se cumple la condición  $f_k - f_l \gg 1/N$ ) es preciso acudir a métodos que se adapten a la estructura de la señal.

Partiendo del banco de filtros, podemos mejorar el comportamiento de la estimación si cada filtro  $\mathbf{h}_k$  se diseña minimizando la influencia de las bandas adyacentes (el filtro será distinto para cada banda).

**Criterio de diseño:** minimizar la potencia a la salida del filtro  $\mathbf{h}_k$

$$\min_{\mathbf{h}_k} P(f_k)$$

$$P(f_k) = \mathbf{h}_k^H \mathbf{R}_x \mathbf{h}_k$$

con la restricción de que la respuesta sea 1 a la frecuencia  $f_k$

$$\sum_{n=0}^{M-1} h_k(n) \exp(-j2\pi f_k n) = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathbf{s}_k^H \mathbf{h}_k = 1$$

Resolviendo mediante multiplicadores de Lagrange:

$$L(\mathbf{h}_k, \lambda) = \mathbf{h}_k^H \mathbf{R}_x \mathbf{h}_k - \lambda (\mathbf{h}_k^H \mathbf{s}_k - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{h}_k^*} = \mathbf{R}_x \mathbf{h}_k - \lambda \mathbf{s}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{h}_k = \lambda \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}_k$$

$$\lambda \mathbf{s}_k^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}_k = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mathbf{s}_k^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}_k} \Rightarrow \mathbf{h}_k = \frac{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}_k}$$

$$P(f_k) = \mathbf{h}_k^H \mathbf{R}_x \mathbf{h}_k = \frac{1}{\mathbf{s}_k^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}_k}$$

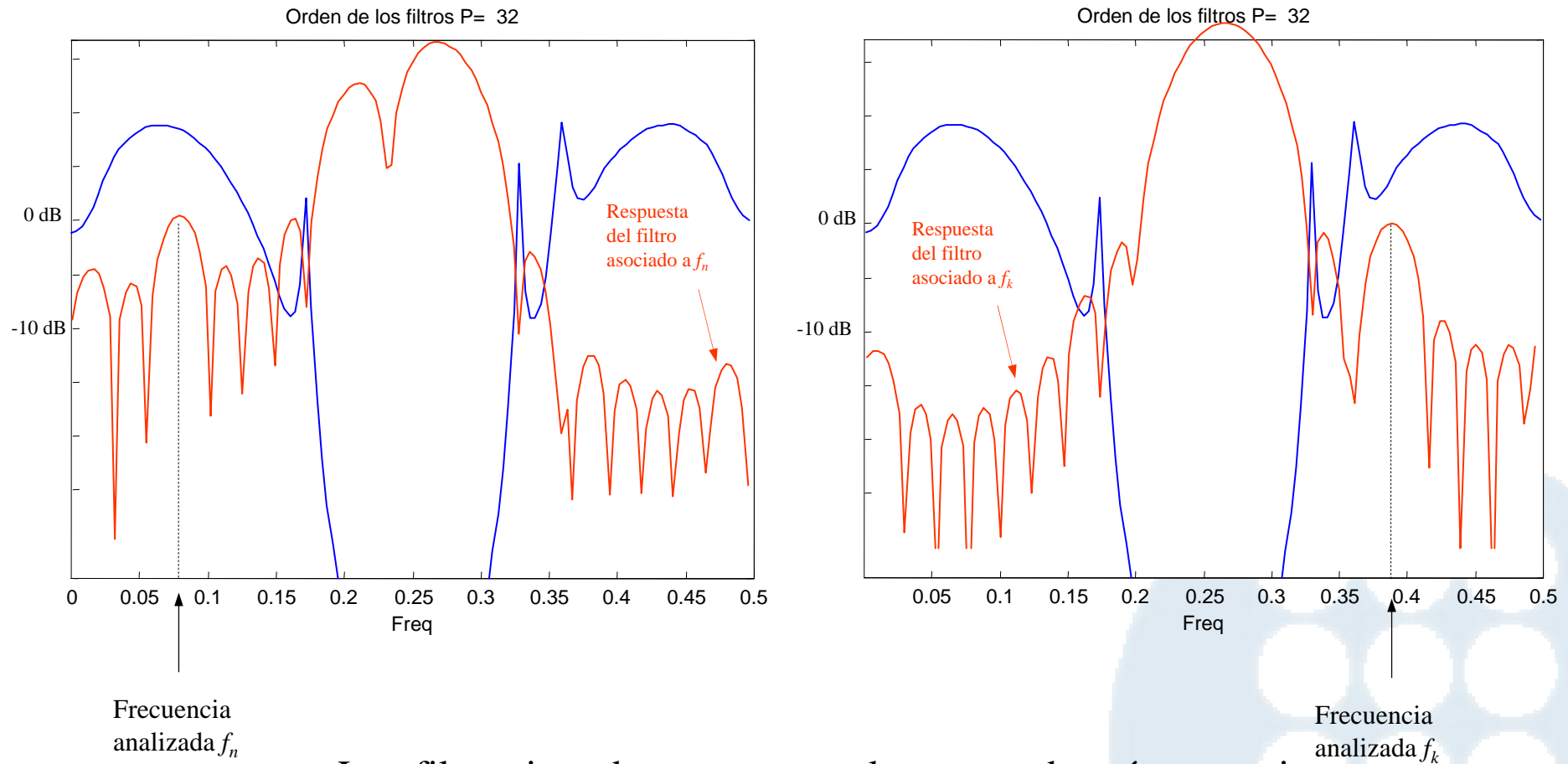
Para que sea un estimador de la DEP hay que dividir por un ancho de banda  $\Delta$ .  
Vamos a calcularlo para el caso de ruido blanco:

$$\sigma_x^2 = \hat{S}_C(f) = \frac{P(f)}{\Delta} = \frac{\sigma_x^2}{\Delta M}$$

$$\hat{S}_C(f) = \frac{M}{\mathbf{s}_k^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}_k}$$



## Ejemplo 6: Respuesta frecuencial de dos filtros de Capon sintonizados a dos frecuencias



Los filtros introducen ceros en las zonas de más potencia para eliminar el *leakage* en la estimación del espectro. A su vez tienen una respuesta unidad a la frecuencia analizada.

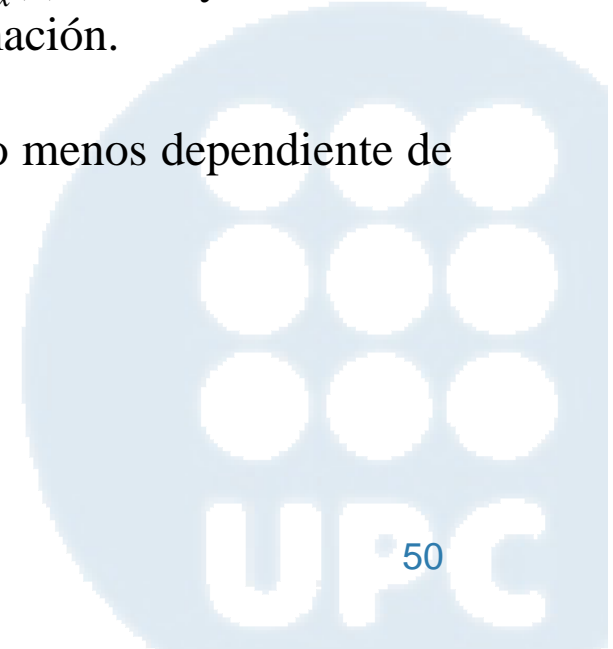
**Compromiso sesgo-varianza:** cuanto mayor es el número de coeficientes  $P$ , más resolutivos son los filtros, más capacidad de poner ceros en el espectro, menor *leakage* y mejor resolución, pero...

... mayor es el tamaño de  $\mathbf{R}_x$ , necesitamos determinar muestras de  $r_x(k)$  con valores de  $k$  altos. Como

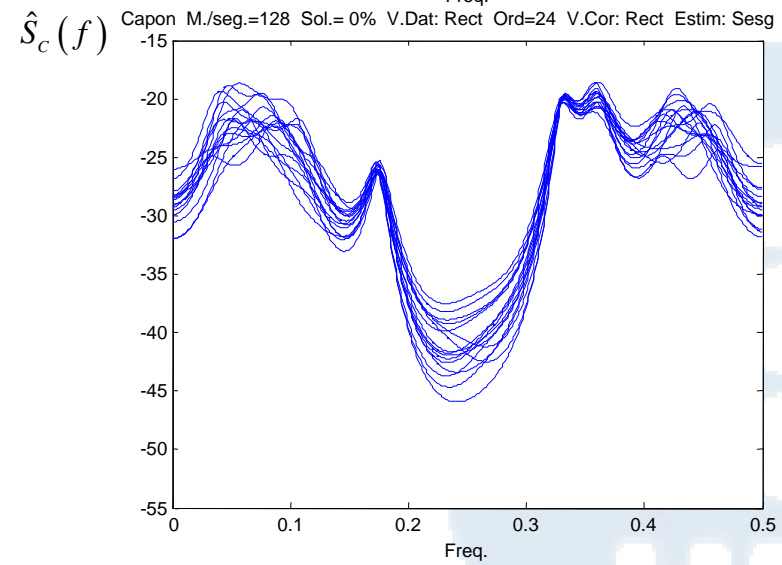
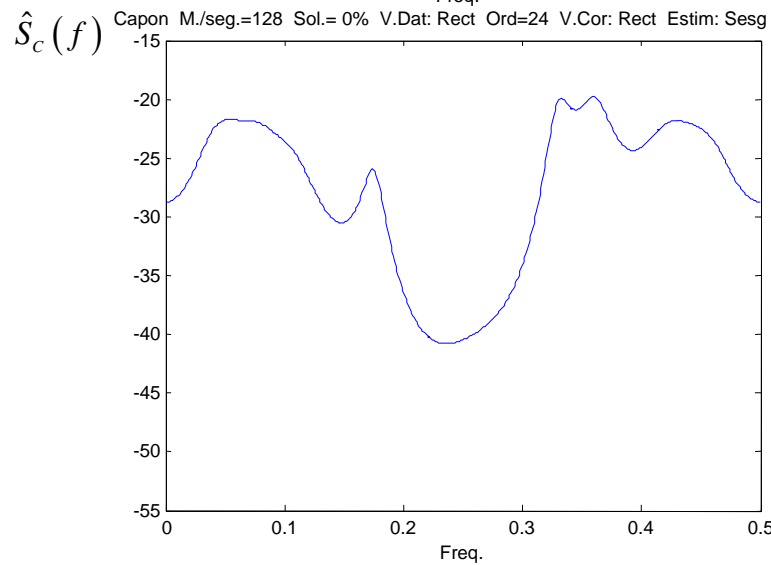
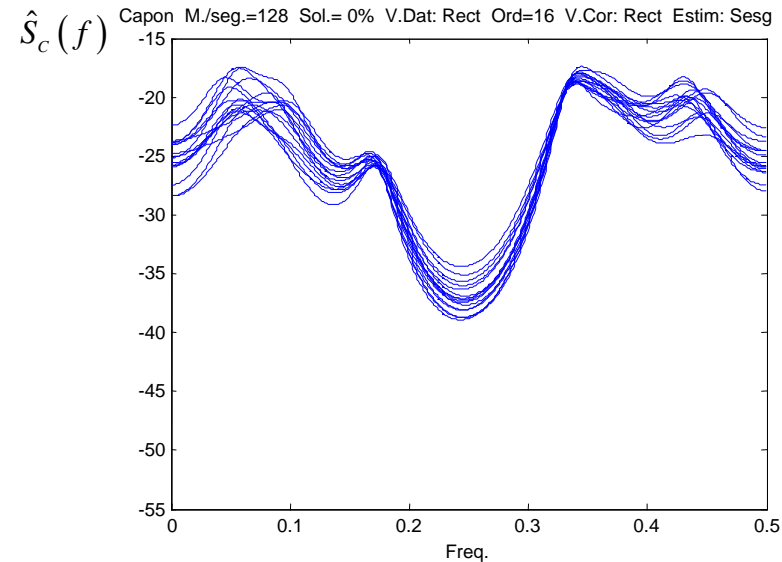
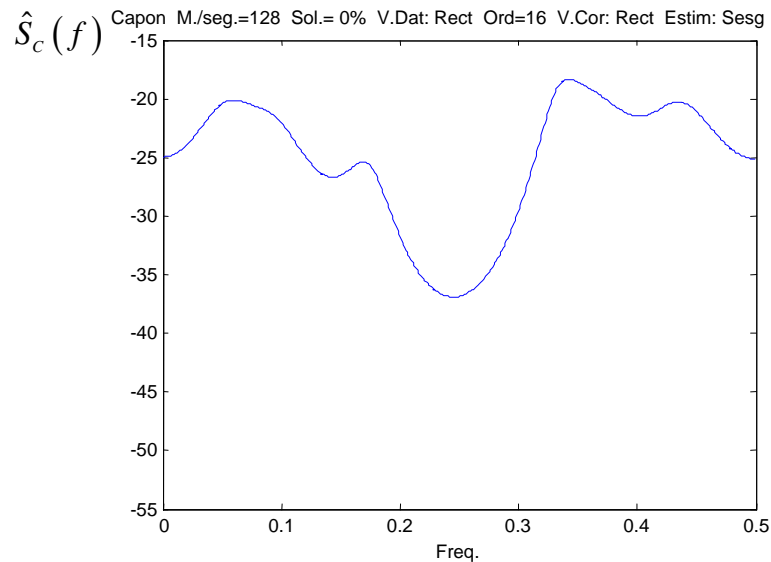
$$\tilde{r}_x(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x^*(n)x(n+k) \quad k \geq 0$$

disponemos de  $N - k - 1$  muestras de  $x(n)$  para estimar  $r_x(k)$ . A mayor  $k$ , menos muestras son utilizadas, y mayor es la varianza de la estimación.

Si utilizamos el estimador sesgado, la varianza es un poco menos dependiente de  $k$ , pero el sesgo es mayor.

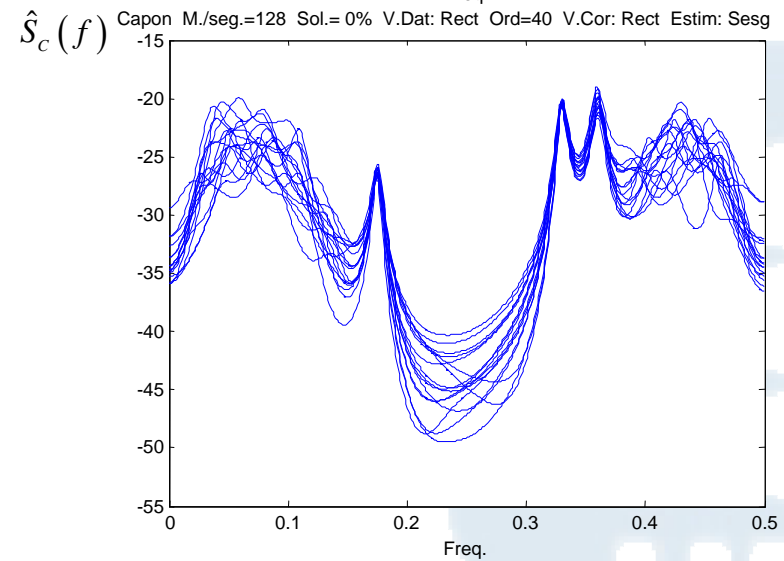
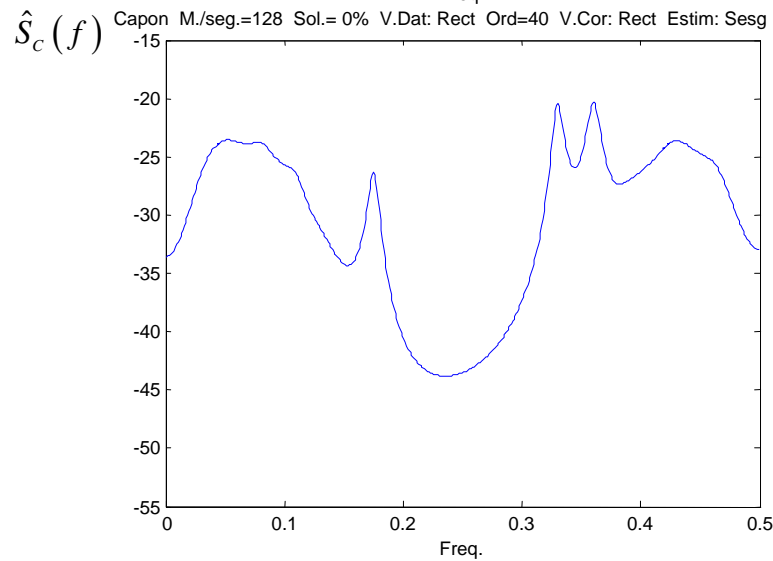
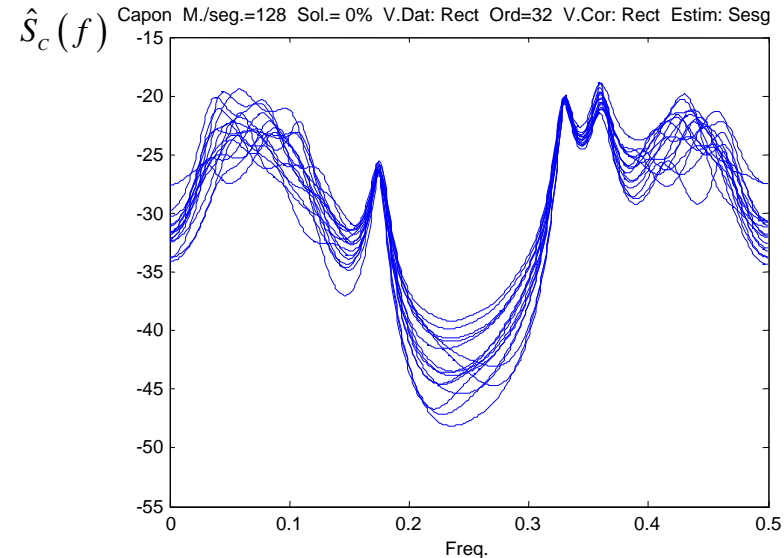
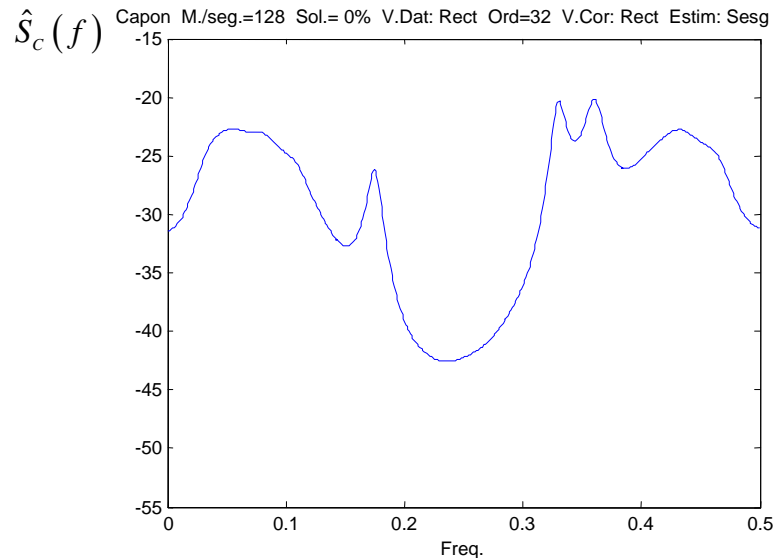


# Estimador de Capon: distintos órdenes (I)



Se estiman 16 (arriba) y 24 (abajo) muestras de la estimación de la autocorrelación

## Estimador de Capon: distintos órdenes (II)



Se estiman 32 (arriba) y 40 (abajo) muestras de la estimación de la autocorrelación

El estimador de Capon no es un estimador de DEP, sino de la potencia en la banda centrada en  $f_k$ , cuyo ancho viene dado por la estructura de cada filtro.

Para determinar un estimador de la DEP deberíamos dividir por el ancho de banda de cada filtro. Podemos utilizar el ancho de banda equivalente de ruido blanco:

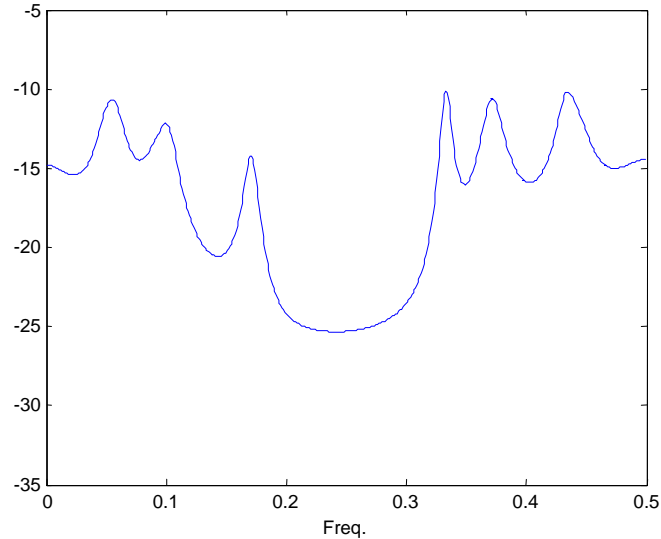
$$\int_{-1/2}^{1/2} \sigma_x^2 |H_k(f)|^2 df = \sigma_x^2 \int_{-1/2}^{1/2} |H_k(f)|^2 df = \sigma_x^2 \cdot \Delta B$$
$$\Delta B = \int_{-1/2}^{1/2} |H_k(f)|^2 df = \sum_{n=0}^{P-1} |h_k(n)|^2 = \mathbf{h}_k^H \mathbf{h}_k$$

La DEP puede entonces expresarse a partir de la expresión del estimador de Capon:

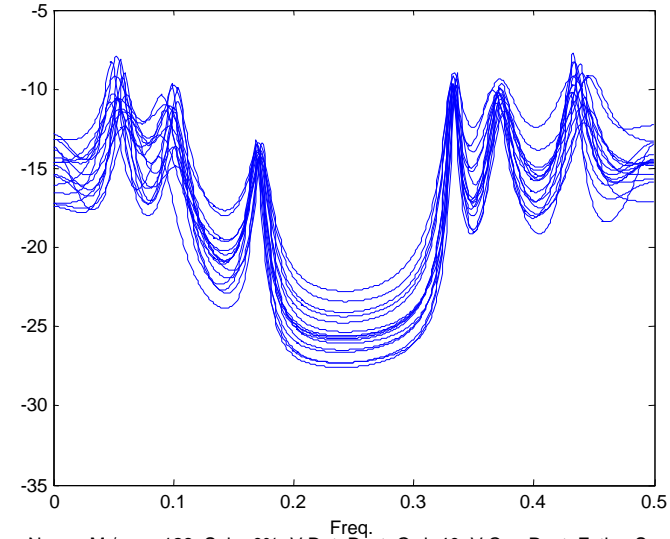
$$\hat{S}_{CN}(f_k) = \frac{\hat{S}_C(f_k)}{\mathbf{h}_k^H \mathbf{h}_k} = \frac{\mathbf{s}_k^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^H \mathbf{R}_x^{-2} \mathbf{s}_k}$$

# Estimador de Capon normalizado

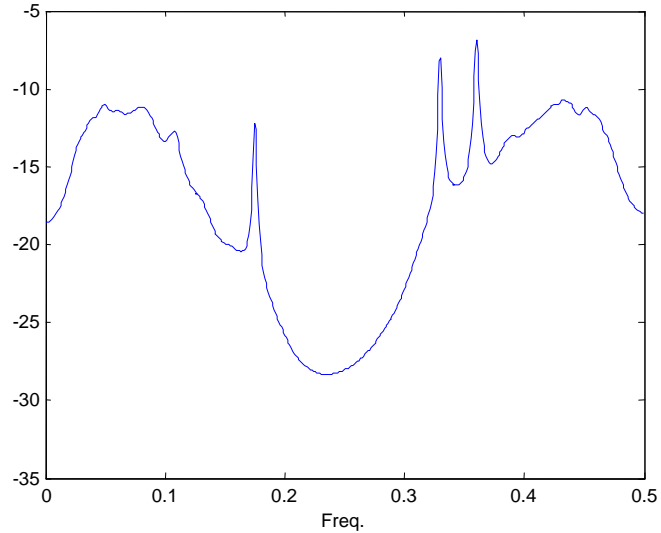
Capon Norm. M./seg.=128 Sol.= 0% V.Dat: Rect Ord=16 V.Cor: Rect Estim: Sseg



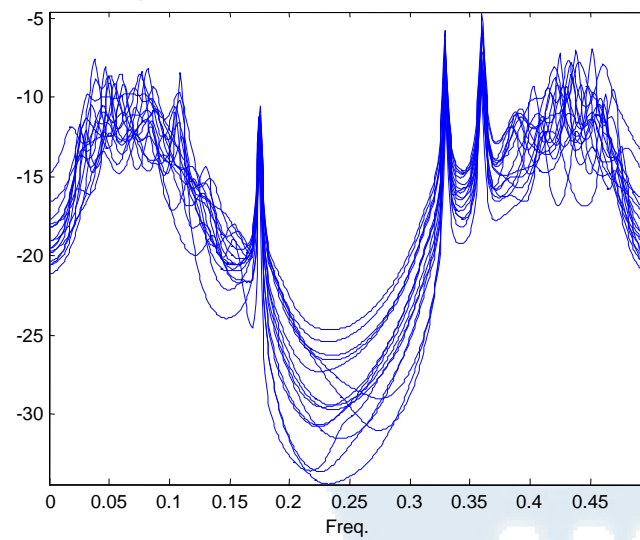
Capon Norm. M./seg.=128 Sol.= 0% V.Dat: Rect Ord=16 V.Cor: Rect Estim: Sseg



Capon Norm. M./seg.=128 Sol.= 0% V.Dat: Rect Ord=40 V.Cor: Rect Estim: Sseg



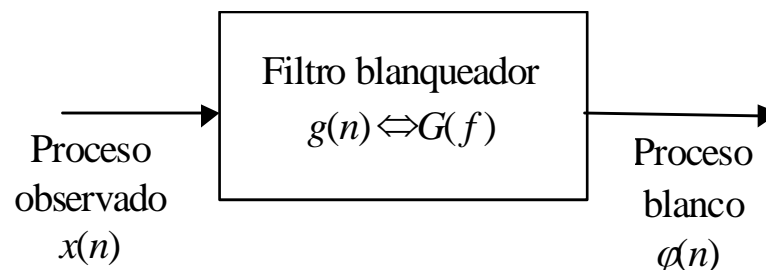
Capon Norm. M./seg.=128 Sol.= 0% V.Dat: Rect Ord=40 V.Cor: Rect Estim: Sseg



Se estiman 16 (arriba) y 40 (abajo) muestras de la autocorrelación

## Métodos paramétricos de estimación espectral (I)

- Se basa en un modelo lineal de generación de señal y en la estimación de los parámetros de ese modelo.
- Mejor resolución que los métodos de Capon



$$\varphi(n) = x(n) * g(n)$$

$$S_{\varphi}(f) = \begin{cases} \text{si } \varphi(n) \text{ es blanco} \\ \text{de potencia } \sigma^2 \end{cases} = \sigma^2 = |G(f)|^2 S_x(f)$$

$$\hat{S}_x(f) = \frac{\sigma^2}{|G(f)|^2}$$

- Puede evitarse el principio de incertidumbre: con un segmento de duración limitada se puede obtener una resolución infinita. Un cero de la función de transferencia en el círculo unidad produciría un pico espectral de altura infinita y ancho nulo.

## Métodos paramétricos de estimación espectral (II)

- Potencia a la salida del sistema lineal como el área de su espectro

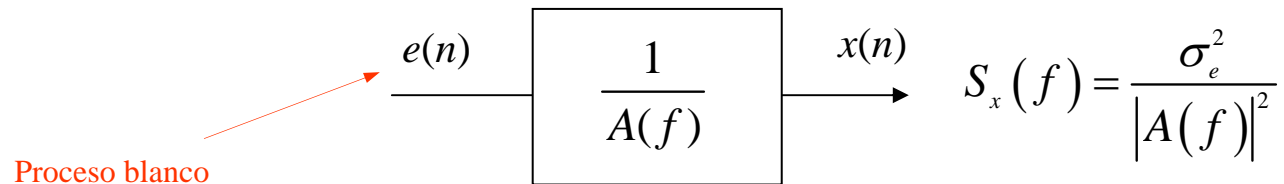
$$\sigma^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |G(f)|^2 S(f) df = \sigma_{\min}^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{S(f)}{\hat{S}(f)} df$$

de lo cual se deduce que son estimadores de baja calidad en los mínimos del espectro real: cuando el espectro verdadero  $S(f)$  es cero, el estimador es muy impreciso (tiene mucha varianza) ya que cualquier estimación no contribuye a la potencia de la salida

- A su vez, son estimadores de gran calidad en los máximos del espectro: cuando el espectro a la entrada es muy grande, el estimador ha de ajustarse bien.
- Dependiendo de  $H(f)$  podemos definir tres modelos para la DEP:  
AR (sólo polos), ARMA (polos y ceros), MA (sólo ceros).



Si el espectro consta de picos pronunciados, existe una correlación grande entre muestras que puede capturarse mediante un modelo autoregresivo de orden  $p$ , o  $AR(p)$ .



$$A(f) = 1 + \sum_{k=1}^p a(k) \exp(-j2\pi fk)$$

Teniendo en cuenta la relación entrada-salida:

$$x(n) + \sum_{j=1}^p a(j)x(n-j) = e(n)$$

Es posible relacionar los coeficientes del filtro con la función de correlación de  $x(n)$  mediante las **ecuaciones de Yule-Walker...**

- Multiplicando por  $x^*(n-k)$  y tomando el valor esperado:

$$r(k) + \sum_{j=1}^p a(j)r(k-j) = E\{e(n)x^*(n-k)\}$$

- Suponiendo que el filtro  $H(f)$  es estable y causal:  $x(n) = \sum_{s=0}^{\infty} h(s)e(n-s)$

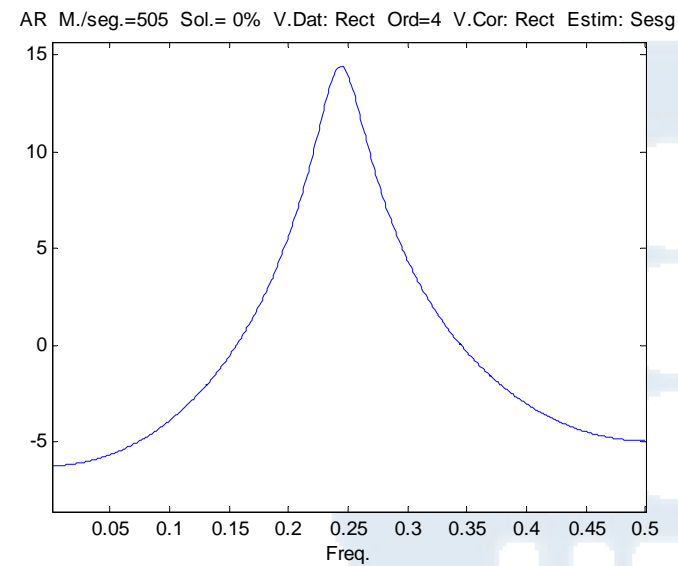
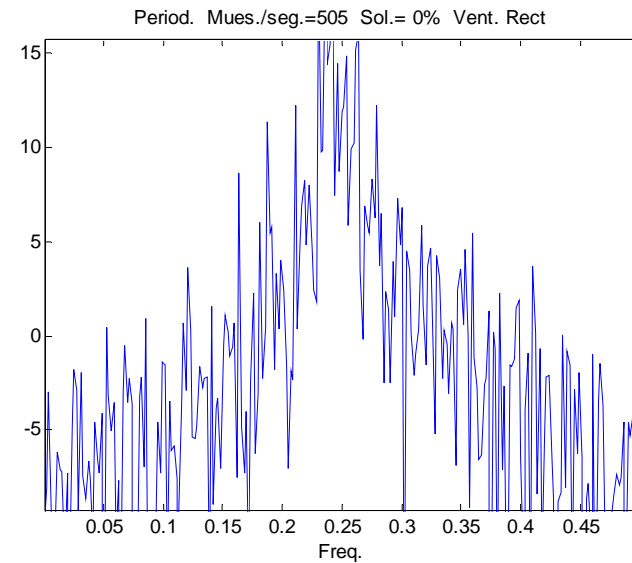
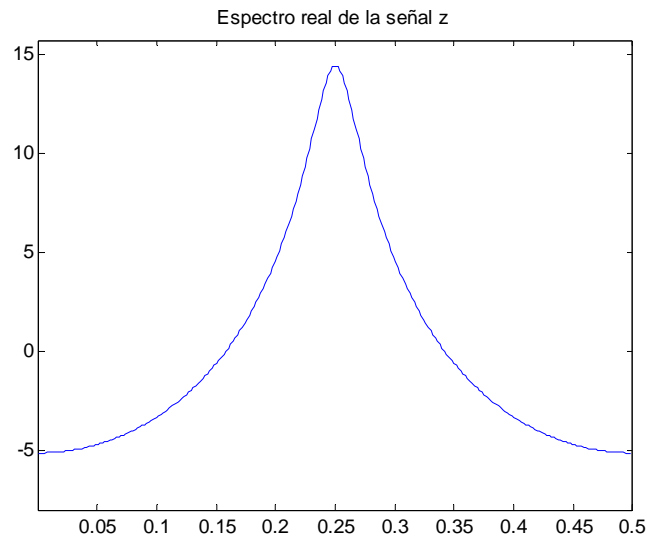
$$E\{e(n)x^*(n-k)\} = E\left\{e(n) \sum_{s=0}^{\infty} h^*(s)e^*(n-k-s)\right\} = \sigma_e^2 \sum_{s=0}^{\infty} h^*(s)\delta(k+s) = \sigma_e^2 h^*(-k)$$

$$r(k) + \sum_{j=1}^p a(j)r(k-j) = \sigma_e^2 h^*(-k) \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} r(k) + \sum_{j=1}^p a(j)r(k-j) &= \sigma_e^2 && \text{para } k=0 \\ r(k) + \sum_{j=1}^p a(j)r(k-j) &= 0 && \text{para } k>0 \end{aligned}$$

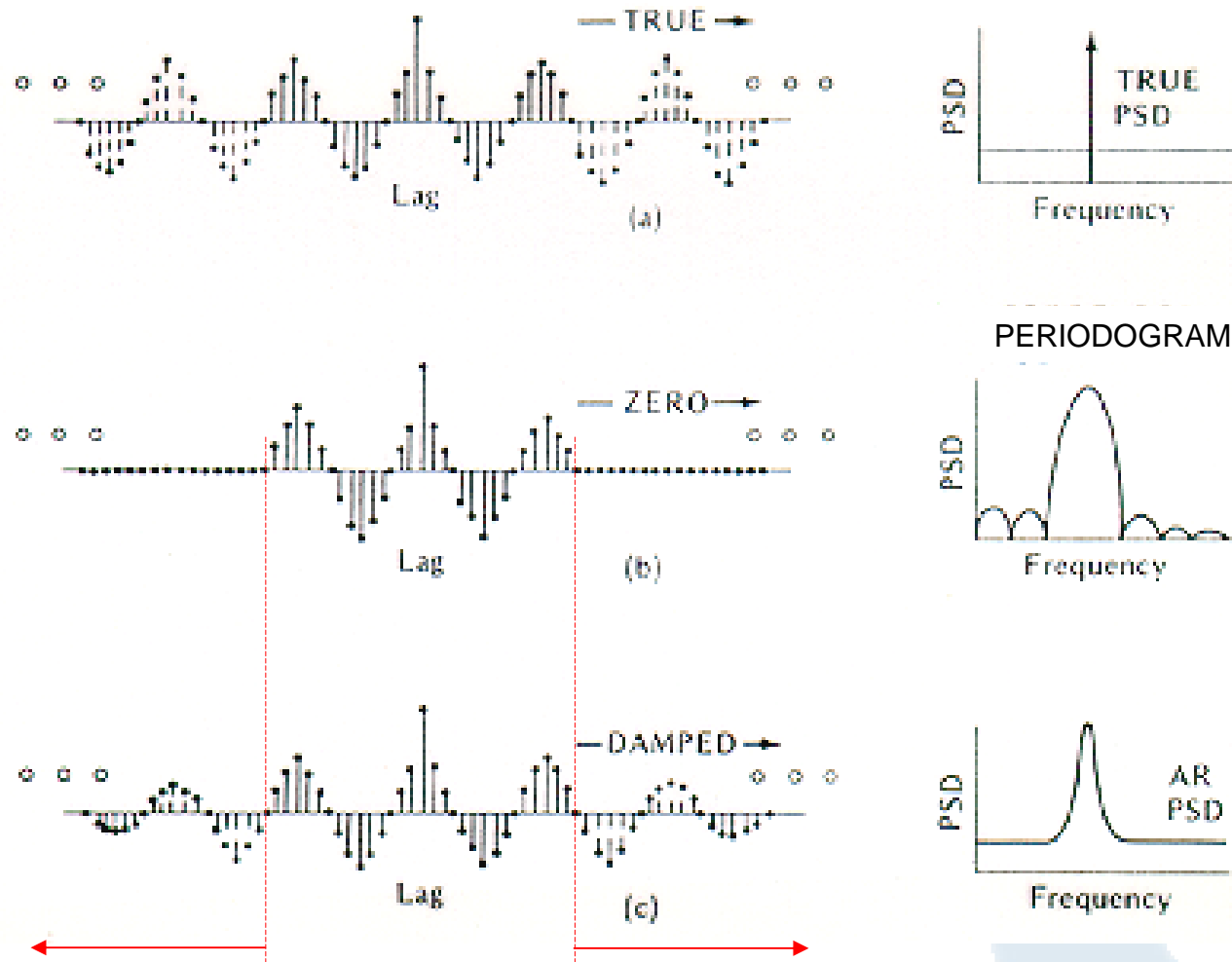
$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \cdots & r_x(-p+1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \\ \vdots \\ r_x(p) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_e^2 = r_x(0) + \sum_{i=1}^p a(i)r_x(-i)$$

**Ejemplo 7:** Espectro AR(2) (debajo), y estimaciones obtenidas con el periodograma (derecha-arriba) y con las ecuaciones de Yule-Walker de orden 4, para 512 muestras (derecha-abajo)



# Extrapolación AR de la función de correlación



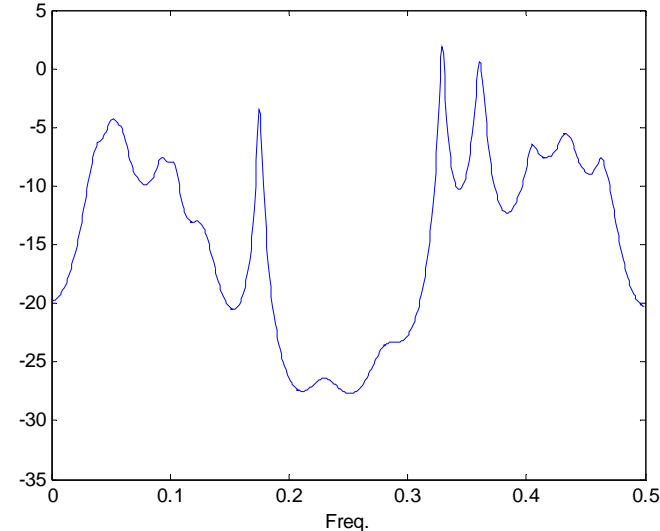
Extrapolación lineal de la correlación

Extrapolación lineal de la correlación

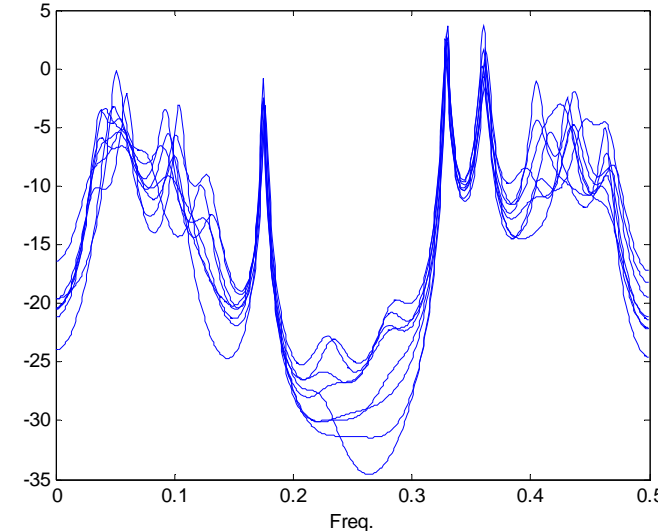
# Estimación AR: correlación sesgada, distinto orden

La mejora en la varianza se obtiene a costa de perder en resolución.

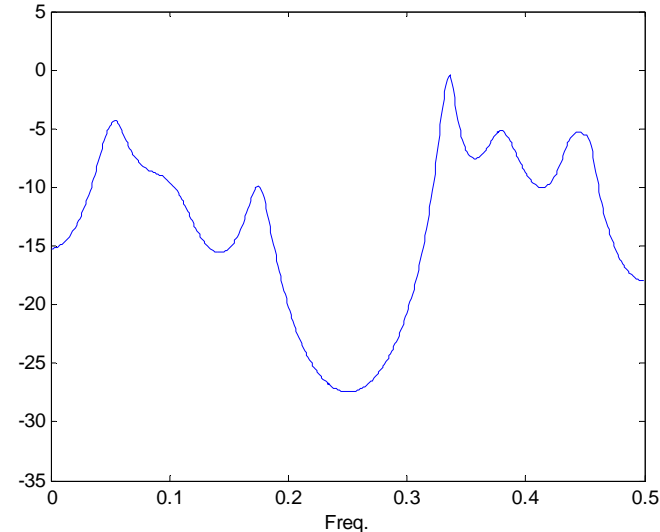
AR M./seg.=128 Sol.= 0% V.Dat: Rect Ord=24 V.Cor: Rect Estim: Sesg



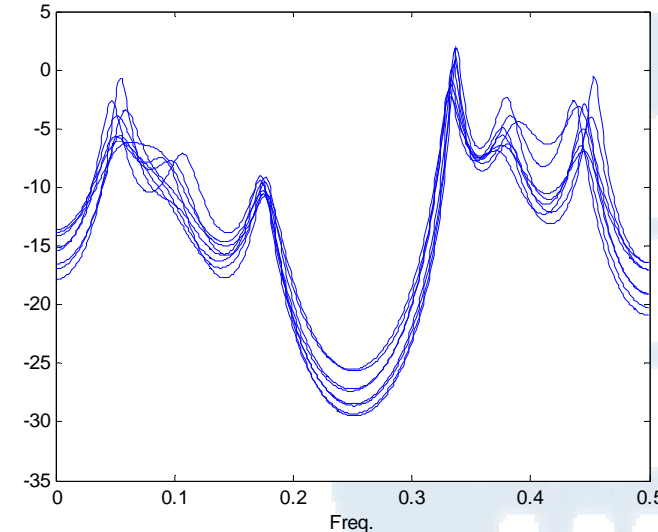
AR M./seg.=128 Sol.= 0% V.Dat: Rect Ord=24 V.Cor: Rect Estim: Sesg



AR M./seg.=128 Sol.= 0% V.Dat: Rect Ord=12 V.Cor: Rect Estim: Sesg



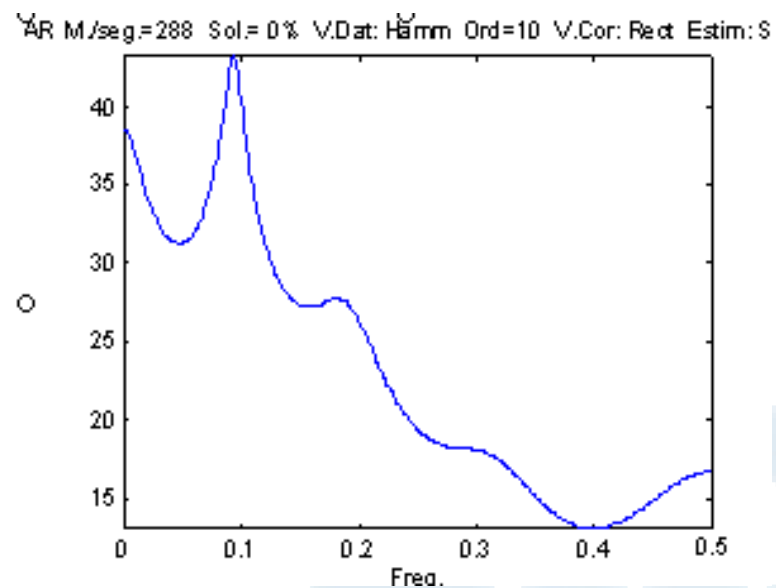
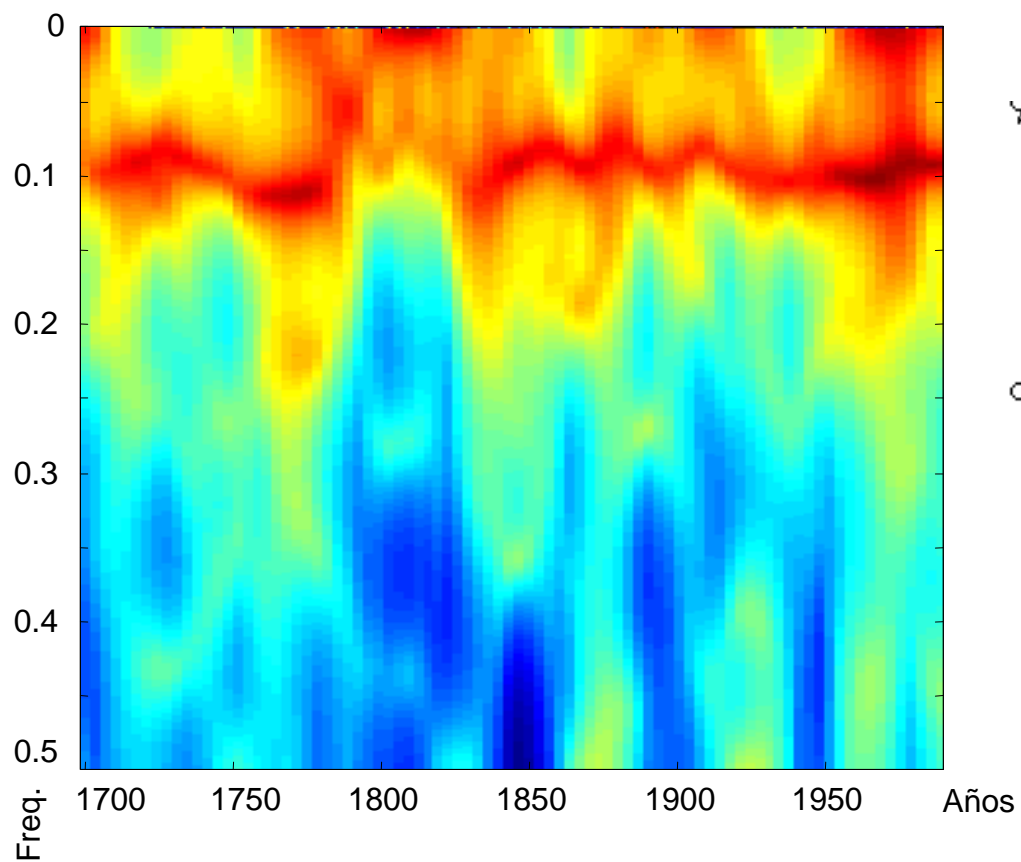
AR M./seg.=128 Sol.= 0% V.Dat: Rect Ord=12 V.Cor: Rect Estim: Sesg



La resolución obtenida con un modelo AR(24) es muy superior a la del estimador de BT. 61  
Si el orden del modelo no es suficiente, no es posible separar las dos rallas espectrales.

## Ejemplo 8: Espectrograma AR de las manchas solares

AR(10) Ventana Hamming de 32 muestras sobre la señal



- Densidad espectral racional

$$S(f) = \sigma^2 \left| \frac{B(f)}{A(f)} \right|^2$$

$$x(n) + \sum_{j=1}^p a(j)x(n-j) = \sum_{l=0}^q b(l)e(n-l)$$

$$A(f) = 1 + a(1)e^{-j2\pi f} + \dots + a(p)e^{-j2\pi fp}$$

$$B(f) = b(0) + b(1)e^{-j2\pi f} + \dots + b(q)e^{-j2\pi fq}$$

- Multiplicando por  $x^*(n-k)$  y tomando el valor esperado:

$$r(k) + \sum_{j=1}^p a(j)r(k-j) = \sum_{l=0}^q b(l)E\{e(n-l)x^*(n-k)\}$$

- Suponiendo que el filtro  $H(f)$  es estable y causal:

$$x(n) = \sum_{s=0}^{\infty} h(s)e(n-s)$$

$$E\{e(n-l)x^*(n-k)\} = E\left\{e(n-l) \sum_{s=0}^{\infty} h^*(s)e^*(n-k-s)\right\} = \sigma_e^2 \sum_{s=0}^{\infty} h^*(s)\delta(k+s-l) = \sigma_e^2 h^*(l-k)$$

$$r(k) + \sum_{j=1}^p a(j)r(k-j) = \sigma_e^2 \sum_{l=0}^q b(l)h^*(l-k)$$

$$r(k) + \sum_{j=1}^p a(j)r(k-j) = 0 \quad \text{para } k > q$$

## Modelo ARMA: Método de Y-W modificado (I)

- **Primera etapa:** estimación de los coeficientes AR

$$r(k) + \sum_{j=1}^p a(j)r(k-j) = 0 \quad \text{para } k > q$$

$$\begin{bmatrix} \hat{r}(q) & \hat{r}(q-1) & \cdots & \hat{r}(q+1-p) \\ \hat{r}(q+1) & \hat{r}(q) & & \hat{r}(q+2-p) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hat{r}(q+M-1) & \cdots & \cdots & \hat{r}(q+M-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ \vdots \\ a(p) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{r}(q+1) \\ \hat{r}(q+2) \\ \vdots \\ \hat{r}(q+M) \end{bmatrix}$$

### Ecuaciones de Yule-Walker modificadas

- Si  $M = p$ , se obtiene un sistema de  $p$  ecuaciones con  $p$  incógnitas.
- Si  $M > p$  el sistema es sobredeterminado, conveniente para señales de banda estrecha con correlación que decae lentamente.



## Modelo ARMA: Método de Y-W modificado (II)

- **Segunda etapa:** estimación de la parte MA del modelo

$$S_x(f) = \left| \frac{B(f)}{A(f)} \right|^2 S_e(f)$$

$$|A(f)|^2 S_x(f) = |B(f)|^2 S_e(f)$$

$$\sum_{s=-q}^q \gamma(s) \exp(-j2\pi fs) = \sigma_e^2 |B(f)|^2 \quad \text{donde} \quad \gamma(k) = \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p a(j)a(l)^* r_x(k+l-j)$$

Usando las estimaciones de la parte AR y de la autocorrelación:

$$\hat{\gamma}(k) = \begin{cases} \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p \hat{a}(j)\hat{a}(l)^* \hat{r}_x(k+l-j) & k = 0, \dots, q \\ \hat{\gamma}^*(-k) & k = -1, \dots, -q \end{cases}$$

$$\hat{S}(f) = \frac{\sum_{s=-q}^q \hat{\gamma}(s) \exp(-j2\pi fs)}{|\hat{A}(f)|^2}$$

## Modelo ARMA: Método de Durbin (I)

- Si se conociese la secuencia de ruido considerada a la entrada del modelo, los coeficientes ARMA podrían estimarse minimizando el error cuadrático entre la salida que produce el modelo y la señal observada

$$\hat{x}(n) = \mathbf{c}^H \mathbf{y}_n$$

$$\mathbf{c} = [a_1 \quad \cdots \quad a_p \quad b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_q]^H$$

$$\mathbf{y}_n = [-x(n-1) \quad \cdots \quad -x(n-Q) \quad e(n) \quad e(n-1) \quad \cdots \quad e(n-P)]^T$$

- Para  $L > \max(p, q)$ , puede escribirse matricialmente:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^H \mathbf{Y}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}(L) \quad \hat{x}(L+1) \quad \cdots \quad \hat{x}(N)]$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_L \quad \mathbf{y}_{L+1} \quad \cdots \quad \mathbf{y}_N]$$

- Minimización del error cuadrático:  $\xi = \|(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{c}^H \mathbf{Y})(\mathbf{x}^H - \mathbf{Y}^H \mathbf{c})$
- Derivando con respecto a  $\mathbf{c}^H$  se obtiene:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}^H - \mathbf{Y}^H \mathbf{c}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{c} = (\mathbf{Y} \mathbf{Y}^H)^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{x}^H$$

## Modelo ARMA: Método de Durbin (II)

- La secuencia de ruido no es conocida pero puede estimarse.
- Como el modelo ARMA se asume de fase mínima puede escribirse como un AR de orden infinito con coeficientes  $\alpha_k$  que tienden a cero al incrementarse  $k$ :

$$1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots \triangleq \frac{A(z)}{B(z)}$$

- **Primer paso:** estimar los coeficientes  $\alpha_k$  de un modelo AR( $K$ ) y obtener la estimación de la secuencia de ruido:

$$\hat{e}(n) = x(n) + \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}(k)x(n-k) \quad n = K+1, \dots, N$$

- **Segundo paso:** obtener los coeficientes del modelo ARMA en  $\mathbf{c}$ , con  $L=K+q$ .
- **Tercer paso:** estimar la potencia de ruido a la entrada del modelo:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-L} \sum_{n=L}^N |e(n)|^2$$

- Estimación no lineal de los coeficientes y de la potencia de ruido
  - Puede usarse el método de Durbin
  - Reparametrización de la densidad espectral de potencia en términos de la secuencia de covarianza, coincide con el estimador Blackman-Tukey con ventana rectangular de longitud  $2q+1$

$$r(k) = 0 \quad |k| > q$$

$$\hat{S}(f) = \sum_{k=-q}^q \hat{r}(k) \exp(-j2\pi fk)$$

- Precisa un orden muy elevado para poder modelar picos espectrales estrechos



## Estimadores de frecuencia (I)

Desarrollamos aquí métodos adaptados al caso en que la señal sea una suma de exponenciales complejas inmersas en ruido blanco, con una separación entre rallas espectrales comparable a  $1/N$ . Asumiremos por tanto que se dispone de pocas muestras.

Modelo de señal

$$x(n) = \sum_{k=1}^M A_k \exp(j2\pi f_k n) + w(n) \quad A_k \in \mathbb{C}$$

... en versión vectorial

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^M A_k \mathbf{s}_k + \mathbf{w} \quad \in \mathbb{C}^{P \times 1} \quad P > M$$

Una vez detectadas las frecuencias, podremos determinar la potencia de cada una de ellas mediante

$$\hat{P}_k = |\hat{A}_k|^2 = \left| \frac{\mathbf{s}_k^H \mathbf{x}}{\mathbf{s}_k^H \mathbf{s}_k} \right|^2 = \frac{1}{N^2} |\mathbf{s}_k^H \mathbf{x}|^2$$

o bien mediante la expresión proporcionada por el estimador de Capon (mejor?)

$$\hat{P}_k = \frac{1}{\mathbf{s}_k^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{s}_k}$$

## Estimadores de frecuencia (II)

La matriz de correlación de  $\mathbf{x}$  puede escribirse (si señal y ruido son independientes):

$$\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w = \sum_{k=1}^M E\{|A_k|^2\} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}$$

... si el ruido es blanco

La matriz de correlación tiene ...

**P1:** Autovalores positivos o nulos  $\mathbf{R}_x \mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i \quad i = 1, \dots, P$   
 $\lambda_i \geq 0$

**P2:** Autovectores ortogonales  $\mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_j = \delta_{i-j}$

Si agrupamos los distintos autovectores en una matriz:

$$\mathbf{R}_x [\mathbf{q}_1 \quad \dots \quad \mathbf{q}_P] = [\lambda_1 \mathbf{q}_1 \quad \dots \quad \lambda_P \mathbf{q}_P]$$

$$\mathbf{R}_x [\mathbf{q}_1 \quad \dots \quad \mathbf{q}_P] = [\mathbf{q}_1 \quad \dots \quad \mathbf{q}_P] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_P \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{R}_x \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \Lambda$$

# Descomposición espectral de una matriz

Por la propiedad P2:  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H$

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H$$

Descomposición espectral de la matriz de correlación

La matriz de correlación de señal  $\mathbf{R}_s$  solo tiene  $M$  columnas linealmente independientes, por lo que tendrá como mucho  $M$  autovalores distintos de cero:

$$\mathbf{R}_s \mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i \quad i = 1, \dots, P$$

$$\lambda_{M+1} = \dots = \lambda_P = 0$$

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_M & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \sigma_w^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_M + \sigma_w^2 & & \\ & & & \sigma_w^2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \sigma_w^2 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^H$$

En los primeros autovectores  $i = 1, \dots, M$  hay componente de señal y ruido, mientras que los autovectores  $i = M+1, \dots, P$  corresponden a las componentes de ruido

Los vectores de señal  $\mathbf{s}_k$  pertenecen al espacio vectorial generado por  $\mathbf{q}_i \quad i = 1, \dots, M$

Por la propiedad P2, cualquier autovector del subespacio de ruido es ortogonal a los vectores del espacio de señal, por lo que se cumple

$$\mathbf{s}^H \mathbf{q}_i = 0 \quad \forall i = M + 1, \dots, P$$

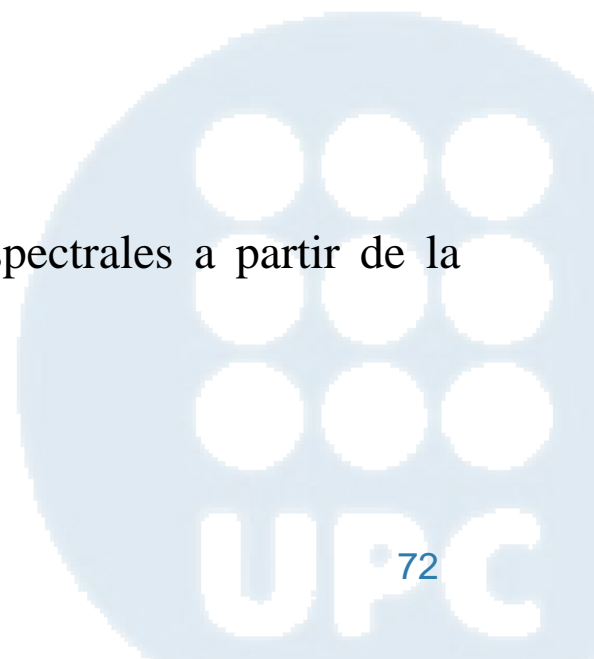
para aquellos vectores  $\mathbf{s}$  que coincidan con los vectores de señal  $\mathbf{s}_f$ .

Ello es verdad tanto para cualquier autovector asociado al ruido como para una combinación lineal de ellos

$$\sum_{k=M+1}^P \alpha_k \left| \mathbf{s}_f^H \mathbf{q}_k \right|^2 = 0$$

Podemos construir un detector de la posición de rayas espectrales a partir de la expresión:

$$S(f) = \frac{1}{\sum_{k=M+1}^P \alpha_k \left| \mathbf{s}_f^H \mathbf{q}_k \right|^2}$$





**Método de Pisarenko:** utiliza el autovector asociado al menor autovalor

$$S(f) = \frac{1}{|\mathbf{s}_f^H \mathbf{q}_P|^2}$$

En la práctica solo funciona aceptablemente si  $P=M+1$

**Método MUSIC:** combina todos los autovectores de ruido, ponderados por igual

$$S(f) = \frac{1}{\sum_{k=M+1}^P |\mathbf{s}_f^H \mathbf{q}_k|^2}$$

**Método de Johnson:** pondera los autovectores de ruido con el autovalor asociado

$$S(f) = \frac{1}{\sum_{k=M+1}^P \frac{1}{\lambda_k} |\mathbf{s}_f^H \mathbf{q}_k|^2}$$

Los tres métodos dan lugar a detectores distintos ya que la matriz de correlación es estimada y por tanto no podemos garantizar exactamente que

$$\mathbf{s}^H \mathbf{q}_i = 0 \quad \forall i = M + 1, \dots, P$$

Estos métodos no pueden considerarse estimadores de la DEP: nótese que no contienen información ni de la potencia del ruido ni de la amplitud de las componentes de señal.

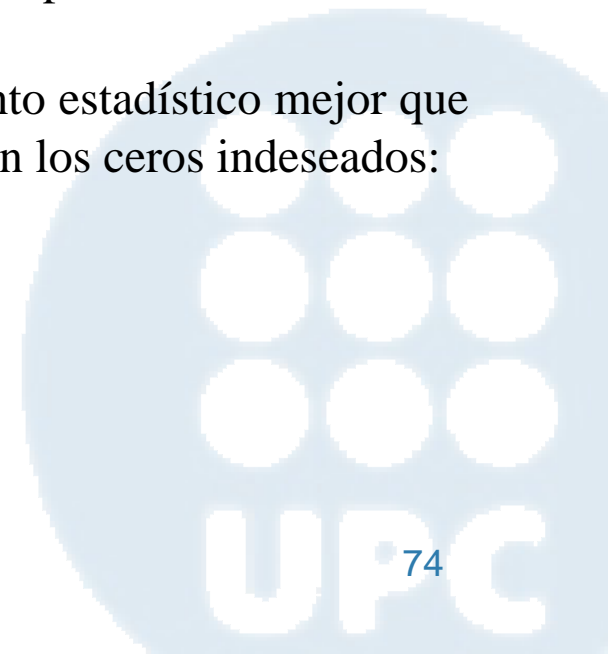
En cada caso podemos escribir

$$\mathbf{s}_f^H \mathbf{q}_k = \sum_{m=1}^P q_k(m) \exp(-j2\pi f(m-1)) = Q_k(e^{j2\pi f})$$

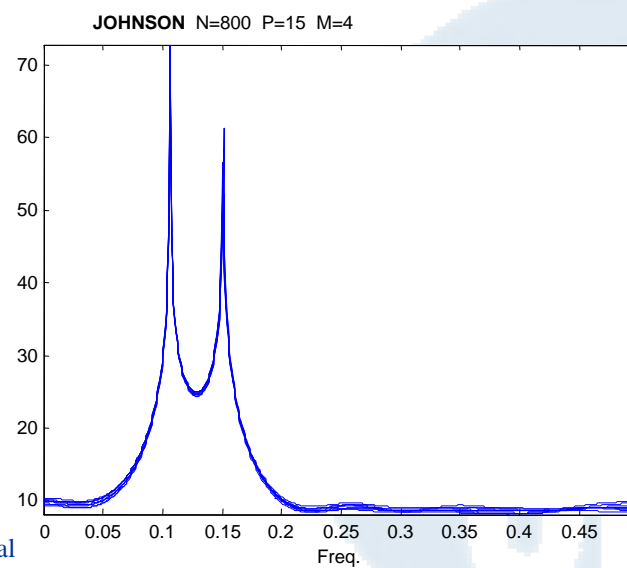
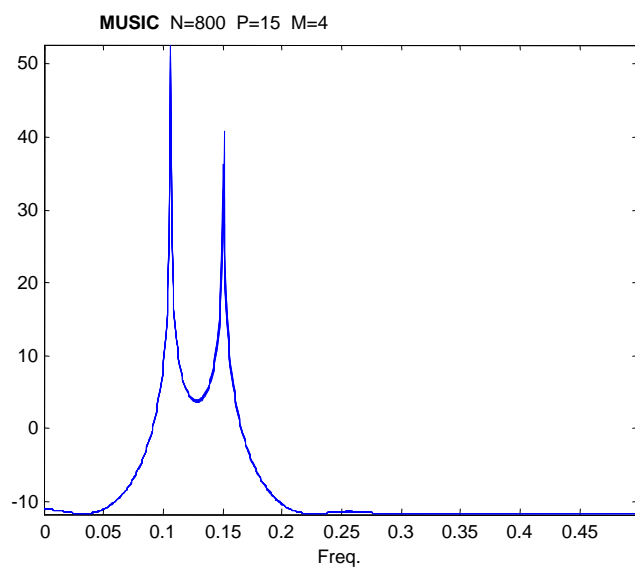
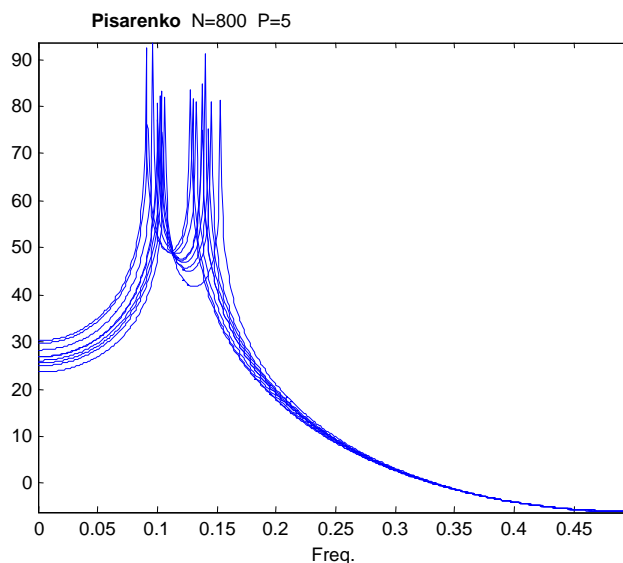
expresión que será nula para los  $P$  ceros del polinomio  $Q_k(\cdot)$ . Como  $P > M$  aparecerán  $P-M-1$  ceros espúreos que pueden generar rayas espectrales no deseadas.

Los métodos de MUSIC y Johnson tienen un comportamiento estadístico mejor que Pisarenko, ya que promedian polinomios y por tanto también los ceros indeseados:

$$S(f) = \frac{1}{\sum_{k=M+1}^P \frac{1}{\lambda_k} |Q_k(e^{j2\pi f})|^2}$$

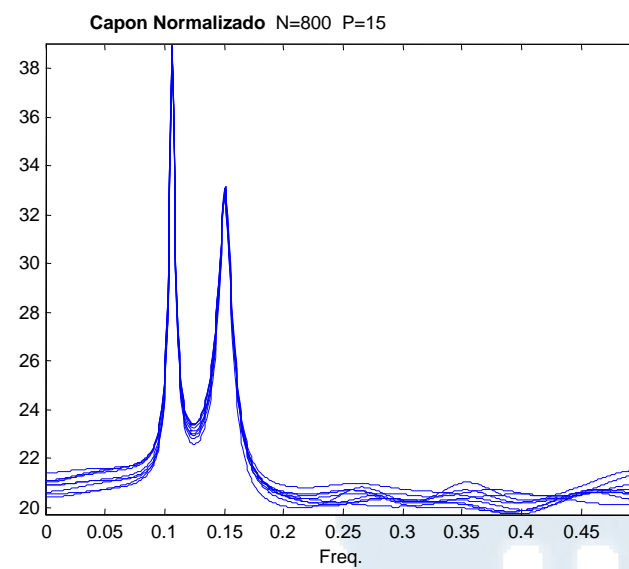
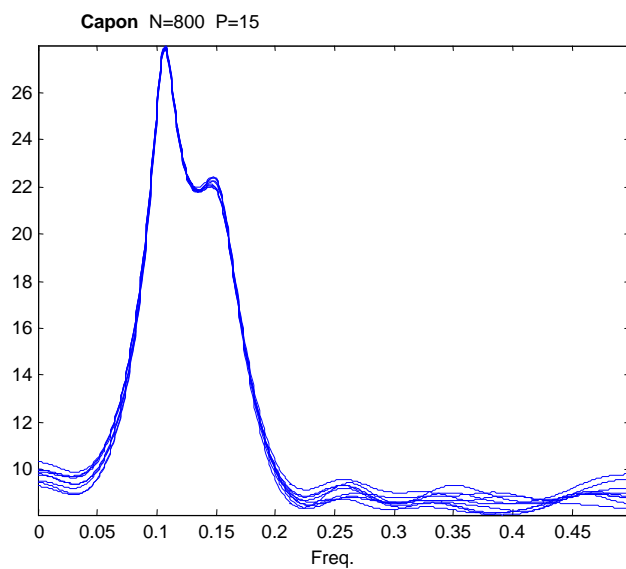
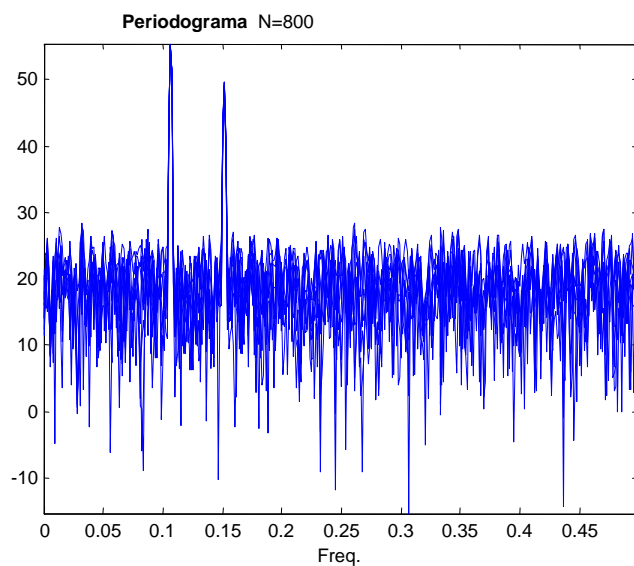


**Ejemplo 9:** Los tres métodos aplicados a la suma de dos sinusoides reales de amplitud 50 y 25 (cuatro exponenciales complejas), mas ruido de potencia 100,  $N=800$

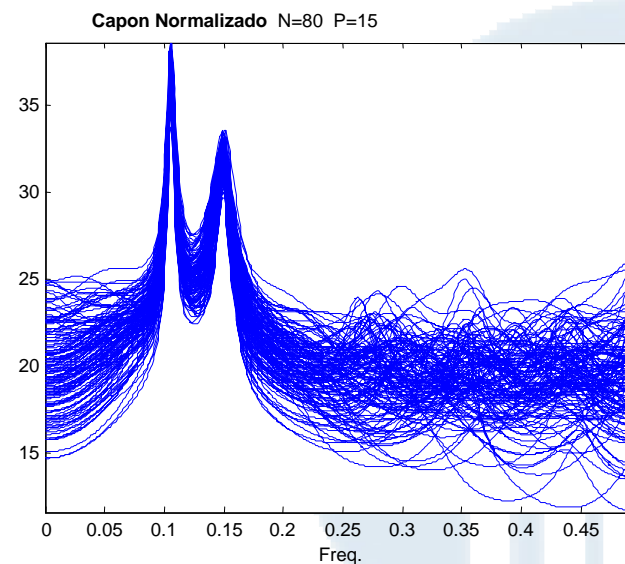
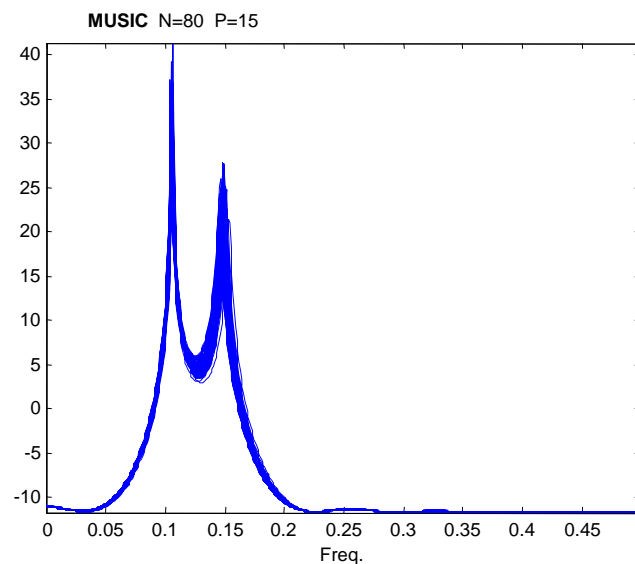
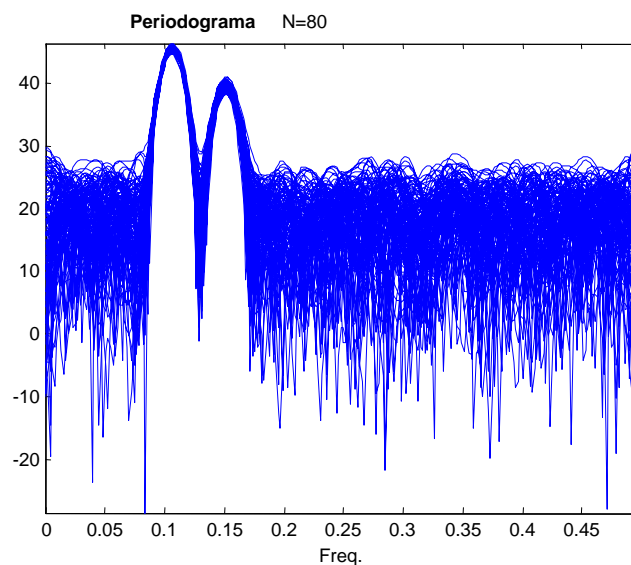


Estimación espectral

... comparados con Capon y el periodograma.



Sin embargo, cuando el número de observaciones es pequeño ( $N = 80$ ), resolución y varianza son significativamente mejores con MUSIC:



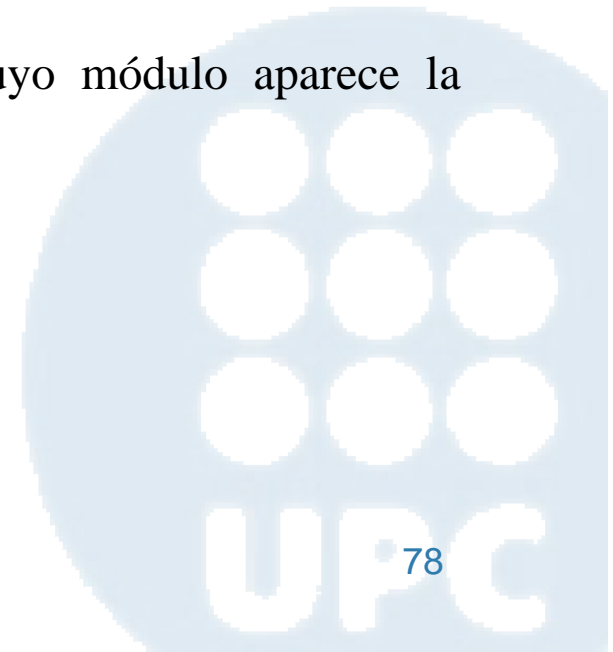
Estimación espectral

En cualquiera de estos métodos las frecuencias deseadas se corresponden con los picos del espectro, pero también con las fases de los  $M$  ceros más cercanos al círculo unidad. Es más eficiente calcular los ceros de un polinomio que calcular  $S(f)$  para un tramado denso del eje frecuencial.

Los métodos también aplican en el caso en que las observaciones sean exponenciales atenuadas.

$$x(n) = \sum_{k=1}^M A_k \exp(\alpha_k n + j2\pi f_k n) + w(n) \quad A_k \in \mathbb{C}$$

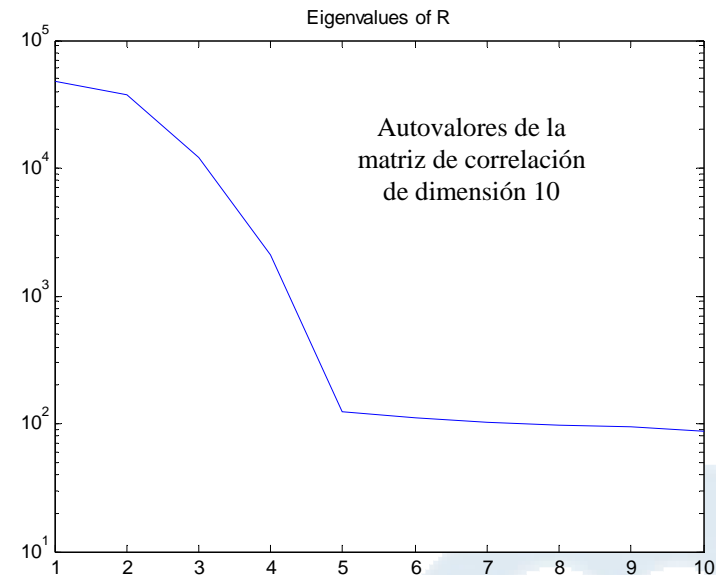
Los ceros del polinomio serán valores complejos en cuyo módulo aparece la información sobre  $\alpha_k$  y sobre  $f_k$ .



# Determinación del número de señales (I)

Normalmente el número de señales es desconocido, y es difícil decidirlo a partir de la observación del número de autovalores mayores que la potencia de ruido.

**Ejemplo 10:** Suma de cuatro exponenciales complejas de amplitud 50, mas ruido de potencia 100 (una realización de  $N=800$  muestras)



Supongamos que  $\mathcal{M}$  es la estimación que hacemos de  $M$ . A medida que  $\mathcal{M}$  se acerca a  $P$  el promedio de los  $P - \mathcal{M}$  autovalores

$$\mu(\mathcal{M}) = \frac{1}{P - \mathcal{M}} \sum_{k=\mathcal{M}+1}^P \lambda_k$$

tiende a reducirse, por lo que los criterios de determinación del orden han de incluir un término de penalización con  $\mathcal{M}$ .

## Determinación del número de señales (II)

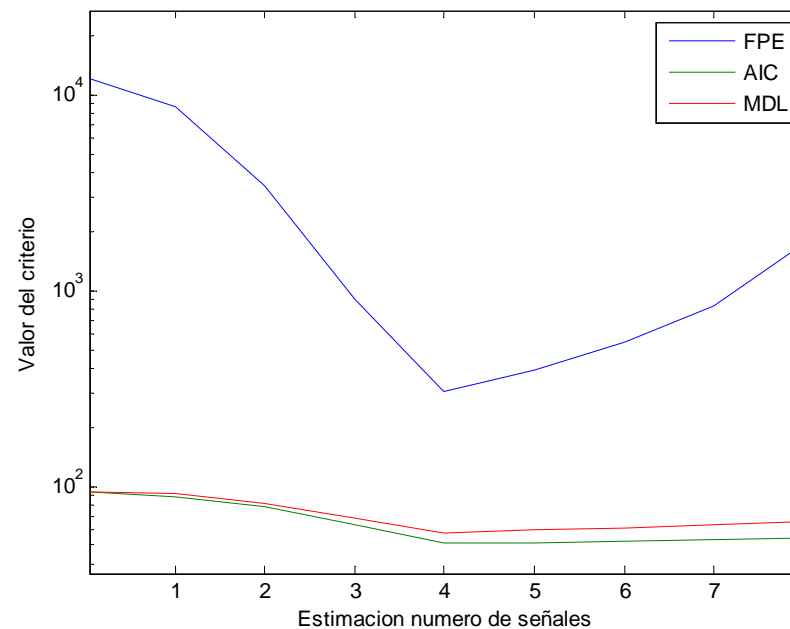
En cada criterio,  $\mathcal{M}$  es el valor que minimiza:

**Criterio FPE** 
$$FPE(\mathcal{M}) = \frac{P + \mathcal{M}}{P - \mathcal{M}} \mu(\mathcal{M})$$

**Criterio AIC** 
$$AIC(\mathcal{M}) = P \log \mu(\mathcal{M}) + \mathcal{M}$$

**Criterio MDL** 
$$MDL(\mathcal{M}) = P \log \mu(\mathcal{M}) + \mathcal{M} \log P$$

Se ha demostrado que es un estimador consistente





# ¿Cómo escoger una técnica de estimación espectral?

Unas recomendaciones simples...

Si el modelo se ajusta a una suma de exponenciales en ruido

- Si  $f_k - f_l \gg 1/N$ , utilizar el periodograma (+ una estrategia para reducir varianza)
- Si no, MUSIC o sus derivados se acercan a la estimación ML

Cuando no tenemos modelo, si la resolución deseada es

- $f_k - f_l \gg 1/N$ , utilizar el periodograma o sus variantes
- $f_k - f_l \sim 1/N$ , utilizar el método de Capon o modelos paramétricos