Equacions Diferencials

10 de gener de 2005 **Temps: 3h.**

- **Notes provisionals: 14 de gener**
- **Al·legacions: 14-17 de gener**
- **Notes definitives: 21 de gener**
- **Codi de la prova: 230–11473–00–0–*grup*.**

1. Considereu el p.v.i. $y' = 2xy^2,\ y(2) = -2/3$.
   (a) l'equació és homogènia
   (b) no podem garantir l'existència i la unicitat de la solució del p.v.i.
   (c) la solució maximal del p.v.i. passa per $(0, 2)$
   (d) la solució maximal del p.v.i. és sempre negativa

2. Les trajectòries ortogonals a la família de corbes $125(y+a)^3 = 1 - x$, $a \in \mathbb{R}$ són:
   (a) $y + 9(1-x)^{\frac{5}{3}} + a = 0$
   (b) $y + 2(1-x)^{\frac{5}{3}} + a = 0$
   (c) $y + 9(1-x)^{\frac{2}{3}} + a = 0$
   (d) $y + 5(1-x)^{\frac{2}{3}} + a = 0$

3. Sobre p.v.i. $y' = \sin(|x|)y^{2/3}$, $y(x_0) = y_0$, és **FALS** que
   (a) si $x_0 = 1$ i $y_0 = 1$, té una única solució
   (b) si $x_0 = 1$ i $y_0 = 0$, té, almenys, dues solucions diferents
   (c) si $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$, té, almenys, dues solucions diferents
   (d) si $x_0 = 0$ i $y_0 = 1$, té, almenys, dues solucions diferents

4. L'equació diferencial de la família de corbes $x^3+y^3 = C$ **NO** és:
   (a) lineal
   (b) de variables separades
   (c) cap de les altres
   (d) homogènia

5. Considereu l'equació $t^4y'' + 2(t^3 - t^2)y' + 2y = 0$. El canvi de variable $t = 1/s$ la transforma en:
   (a) cap de les altres
   (b) lineal homogènia amb coeficients constants
   (c) lineal no homogènia
   (d) lineal homogènia amb coeficients no constants

6. Considereu l'equació $y'' + 2ay' \cot ax + (b^2 - a^2)y = 0$. Amb el canvi de variable $u(x) = y(x) \sin ax$ es transforma en:
   (a) $u''(x) + b^2u(x) = 0$
   (b) $u''(x) - b^2u(x) = 0$
   (c) $u''(x) + a^2u(x) = 0$
   (d) $u''(x) - a^2u(x) = 0$

7. Sabent que $xe^x \cos x$ és una solució de
$$y^v - 5y^{iv} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0,$$
   llavors un sistema fonamental de solucions és
   (a) $\{e^{-5x}, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
   (b) $\{e^{5x}, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
   (c) $\{e^{x}, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
   (d) $\{e^{3x}, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$

8. Si el wronskià $W(x)$ de dues solucions linealment independents de l'equació $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, definida $\forall x \in \mathbb{R}$, amb p derivable i $p \not\equiv 0$, és solució de l'equació diferencial, llavors és **FALS** que:
   (a) $p'(x) = q(x)$
   (b) $W'' + p(x)W' + q(x)W = 0$
   (c) $W' + p(x)W = 0$
   (d) $W' + q(x)W = 0$

9. Sigui Φ una matriu fonamental d'un sistema lineal homogeni de primer ordre definit a $\mathbb{R}^n$, i sigui també $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Aleshores,
   (a) si $\det(M) \neq 0$, $M \cdot \Phi$ és una matriu fonamental
   (b) $\Phi \cdot M$ és una matriu fonamental
   (c) si $\det(M) \neq 0$, $\Phi \cdot M^{-1}$ és una matriu fonamental
   (d) si $\det(M) \neq 0$, $M^{-1} \cdot \Phi \cdot M$ és una matriu fonamental

10. Sigui el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, on $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Siguin $\vec{v}_1 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$, $\vec{v}_2 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^2 \backslash \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$. Aleshores és **FALS** que:
    (a) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}(A - \lambda I)\vec{v}_2$ és solució
    (b) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}_2$ és solució
    (c) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_2 + t(A - \lambda I)\vec{v}_2]$ és solució
    (d) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_1 + (A - \lambda I)\vec{v}_2]$ és solució

11. Suposeu que
$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ 2e^t \sin t \end{pmatrix}$$
    és una solució del sistema $\dot{x} = Ax$, on $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Llavors
    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
    (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
    (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
    (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12. Pel sistema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}$ és **FALS** que:
    (a) existeix una solució del tipus $(\vec{v}_1 t + \vec{v}_2)e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$
    (b) existeix una solució del tipus $\vec{v}_1 e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$
    (c) existeixen solucions del tipus $\vec{v}_1 e^{4t}$, $\vec{v}_2 e^{4t}$ linealment independents
    (d) existeix una solució del tipus $(\vec{v}_1 t^2 + \vec{v}_2 t + \vec{v}_3)e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

13. Considerem el sistema $\vec{x}' = f(\vec{x})$. Siguin $\vec{x}_0$, un punt d'equilibri, i $p(\lambda)$, el polinomi característic de $Df(\vec{x}_0)$. Aleshores és **FALS** que:
    (a) si $p(\lambda)$ té totes les arrels amb part real < 0, $\vec{x}_0$ és asimptòticament estable

(b) si $\vec{x}_0$ és inestable, $p(\lambda)$ no té totes les arrels amb part real < 0

(c) si $p(\lambda)$ té alguna arrel amb part real 0, $\vec{x}_0$ no pot ser asimptòticament estable

(d) si totes les arrels de $p(\lambda)$ tenen part real ≤ 0, $\vec{x}_0$ pot ser inestable

14. Sigui el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x,y), \quad F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + \alpha(y-1) \\ 1 + 2xy - y^2 \end{pmatrix},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. A partir de l'estudi dels valors propis del jacobià de F calculat en el punt d'equilibri (p.e.) corresponent podem afirmar que:

(a) si $\alpha = 0$, aleshores $(0,1)$ és un p.e. inestable

(b) si $\alpha > 0$, aleshores no podem decidir sobre l'estabilitat del p.e. $(0,1)$

(c) si $\alpha < 0$, aleshores $(0,1)$ és un p.e. asimptòticament estable

(d) si $\alpha > 0$, el p.e. $(0,1)$ es estable

15. Les solucions de $\vec{x}' = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \vec{x}$ tendeixen a zero quan $t \to +\infty$ si i només si:

(a) $a + d < 0$ i $ad - bc > 0$

(b) $a + d > 0$ i $ad - bc > 0$

(c) $a + d < 0$ i $ad - bc < 0$

(d) $a + d > 0$ i $ad - bc < 0$

16. Considereu el sistema $\dot{x} = A(t)x$, on $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{7t} \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Llavors es compleix que

(a) totes les seves solucions són inestables

(b) totes les seves solucions són estables però no asimptòticament estables

(c) totes les seves solucions són asimptòticament estables

(d) té solucions estables i inestables

17. Sigui $\begin{cases} x' = x - e^y + 1 \\ y' = \sinh y \end{cases}$

(a) No té cap punt d'equilibri

(b) Té un sol punt d'equilibri, que és estable

(c) Té més d'un punt d'equilibri

(d) Té un sol punt d'equilibri, que és inestable

18. Sigui el sistema

$$\begin{cases} x' = yx^2 \\ y' = -xy^2 \end{cases}$$

Es pot afirmar que:

(a) el sistema linealitzat al punt $(0,1)$ té òrbites paral.leles a l'eix OY

(b) el sistema linealitzat al punt $(0,0)$ és del tipus punt de sella

(c) quatre de les òrbites són semirectes

(d) té un punt d'equilibri aïllat a l'origen, es a dir, hi ha un entorn de l'origen en el que l'únic punt d'equilibri és l'origen

19. L'antitransformada de Laplace de $F(s) = \frac{7e^{-2s}}{(s-2)^2} + \frac{s+1}{s^2+2s+5}$ és:

(a) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{t+1}\sin(2(t+1))$

(b) $f(t) = 7te^{2t}u(t-2) + e^{-t}\cos(2t)$

(c) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{-t}\cos(2t)$

(d) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4} + e^{t}\cos(2t)$

20. La transformada de Laplace $X(s)$ de la solució del problema de valor inicial $x'' + tx = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$, satisfà:

(a) $s^2X(s) - sx_0 - x'_0 - X'(s) = 0$

(b) $s^2X(s) - sx_0 - x'_0 - \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$

(c) $s^2X(s) - sx_0 - x'_0 + \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$

(d) $s^2X(s) + sx_0 + x'_0 - \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$

21. Sigui $h(t)$ la resposta impulsional associada a l'equació $y'' + 2y' + 2y = f(t)$. Aleshores, la solució del problema de valor inicial $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ és:

(a) $e^{-t}\cos t$, en el cas $f(t) = \delta(t)$ i $y_0 = y'_0 = 0$

(b) $h(t)$, en el cas $f(t) = 1$ i $y_0 = y'_0 = 0$

(c) $2h(t)$, en el cas $f(t) = \delta(t)$ i $y_0 = 0, y'_0 = 1$

(d) $2h(t) * 1$, en el cas $f(t) = 1$ i $y_0 = 0, y'_0 = 1$

22. Del problema de contorn

$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

podem dir que

(a) 0 no és autovalor

(b) en cada interval $[k\pi, k\pi + \pi/2)$, $k = 0, 1, 2...$ hi ha un únic autovalor

(c) té autovalors negatius

(d) totes les autofuncions són periòdiques

Equacions Diferencials

10 de gener de 2005 **Temps: 3h.**

- **Notes provisionals: 14 de gener**
- **Al·legacions: 14-17 de gener**
- **Notes definitives: 21 de gener**
- **Codi de la prova: 230–11473–00–1–*grup*.**

1. Considereu l'equació $y'' + 2ay' \cot ax + (b^2 - a^2)y = 0$. Amb el canvi de variable $u(x) = y(x) \sin ax$ es transforma en:

   (a) $u''(x) - b^2 u(x) = 0$
   (b) $u''(x) + a^2 u(x) = 0$
   (c) $u''(x) - a^2 u(x) = 0$
   (d) $u''(x) + b^2 u(x) = 0$

2. Sabent que $xe^x \cos x$ és una solució de
$$y^{v} - 5y^{iv} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0,$$
llavors un sistema fonamental de solucions és

   (a) $\{e^{5x}, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
   (b) $\{e^{x}, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
   (c) $\{e^{3x}, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
   (d) $\{e^{-5x}, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$

3. Si el wronskià $W(x)$ de dues solucions linealment independents de l'equació $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, definida $\forall x \in \mathbb{R}$, amb p derivable i $p \not\equiv 0$, és solució de l'equació diferencial, llavors és **FALS** que:

   (a) $W'' + p(x)W' + q(x)W = 0$
   (b) $W' + p(x)W = 0$
   (c) $W' + q(x)W = 0$
   (d) $p'(x) = q(x)$

4. Sigui Φ una matriu fonamental d'un sistema lineal homogeni de primer ordre definit a $\mathbb{R}^n$, i sigui també $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Aleshores,

   (a) $\Phi \cdot M$ és una matriu fonamental
   (b) si $\det(M) \neq 0$, $\Phi \cdot M^{-1}$ és una matriu fonamental
   (c) si $\det(M) \neq 0$, $M^{-1} \cdot \Phi \cdot M$ és una matriu fonamental
   (d) si $\det(M) \neq 0$, $M \cdot \Phi$ és una matriu fonamental

5. Sigui el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, on $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Siguin $\vec{v}_1 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$, $\vec{v}_2 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^2 \backslash \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$. Aleshores és **FALS** que:

   (a) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}_2$ és solució
   (b) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_2 + t(A - \lambda I)\vec{v}_2]$ és solució
   (c) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_1 + (A - \lambda I)\vec{v}_2]$ és solució
   (d) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}(A - \lambda I)\vec{v}_2$ és solució

6. Suposeu que
$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ 2e^t \sin t \end{pmatrix}$$
és una solució del sistema $\dot{x} = Ax$, on $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Llavors

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. Pel sistema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}$ és **FALS** que:

   (a) existeix una solució del tipus $\vec{v}_1 e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$
   (b) existeixen solucions del tipus $\vec{v}_1 e^{4t}$, $\vec{v}_2 e^{4t}$ linealment independents
   (c) existeix una solució del tipus $(\vec{v}_1 t^2 + \vec{v}_2 t + \vec{v}_3)e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$
   (d) existeix una solució del tipus $(\vec{v}_1 t + \vec{v}_2)e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

8. Considerem el sistema $\vec{x}' = f(\vec{x})$. Siguin $\vec{x}_0$, un punt d'equilibri, i $p(\lambda)$, el polinomi característic de $Df(\vec{x}_0)$. Aleshores és **FALS** que:

   (a) si $\vec{x}_0$ és inestable, $p(\lambda)$ no té totes les arrels amb part real < 0
   (b) si $p(\lambda)$ té alguna arrel amb part real 0, $\vec{x}_0$ no pot ser asimptòticament estable
   (c) si totes les arrels de $p(\lambda)$ tenen part real ≤ 0, $\vec{x}_0$ pot ser inestable
   (d) si $p(\lambda)$ té totes les arrels amb part real < 0, $\vec{x}_0$ és asimptòticament estable

9. Sigui el sistema
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x, y), \quad F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + \alpha(y - 1) \\ 1 + 2xy - y^2 \end{pmatrix},$$
$\alpha \in \mathbb{R}$. A partir de l'estudi dels valors propis del jacobià de F calculat en el punt d'equilibri (p.e.) corresponent podem afirmar que:

   (a) si $\alpha > 0$, aleshores no podem decidir sobre l'estabilitat del p.e. $(0, 1)$
   (b) si $\alpha < 0$, aleshores $(0, 1)$ és un p.e. asimptòticament estable
   (c) si $\alpha > 0$, el p.e. $(0, 1)$ es estable
   (d) si $\alpha = 0$, aleshores $(0, 1)$ és un p.e. inestable

10. Les solucions de $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x}$ tendeixen a zero quan $t \to +\infty$ si i només si:

   (a) $a + d > 0$ i $ad - bc > 0$
   (b) $a + d < 0$ i $ad - bc < 0$
   (c) $a + d > 0$ i $ad - bc < 0$
   (d) $a + d < 0$ i $ad - bc > 0$

11. Considereu el sistema $\dot{x} = A(t)x$, on $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{7t} \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Llavors es compleix que

   (a) totes les seves solucions són estables però no asimptòticament estables
   (b) totes les seves solucions són asimptòticament estables
   (c) té solucions estables i inestables
   (d) totes les seves solucions són inestables

12. Sigui $\begin{cases} x' = x - e^y + 1 \\ y' = \sinh y \end{cases}$

   (a) Té un sol punt d'equilibri, que és estable
   (b) Té més d'un punt d'equilibri
   (c) Té un sol punt d'equilibri, que és inestable
   (d) No té cap punt d'equilibri

13. Sigui el sistema
$$\begin{cases} x' = yx^2 \\ y' = -xy^2 \end{cases}$$
Es pot afirmar que:

   (a) el sistema linealitzat al punt $(0,0)$ és del tipus punt de sella
   (b) quatre de les òrbites són semirectes
   (c) té un punt d'equilibri aïllat a l'origen, es a dir, hi ha un entorn de l'origen en el que l'únic punt d'equilibri és l'origen
   (d) el sistema linealitzat al punt $(0,1)$ té òrbites paral.leles a l'eix OY

14. L'antitransformada de Laplace de $F(s) = \frac{7e^{-2s}}{(s-2)^2} + \frac{s+1}{s^2+2s+5}$ és:

   (a) $f(t) = 7te^{2t}u(t-2) + e^{-t}\cos(2t)$
   (b) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{-t}\cos(2t)$
   (c) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4} + e^{t}\cos(2t)$
   (d) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{t+1}\sin(2(t+1))$

15. La transformada de Laplace $X(s)$ de la solució del problema de valor inicial $x'' + tx = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$, satisfà:

   (a) $s^2X(s) - sx_0 - x_0' - \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$
   (b) $s^2X(s) - sx_0 - x_0' + \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$
   (c) $s^2X(s) + sx_0 + x_0' - \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$
   (d) $s^2X(s) - sx_0 - x_0' - X'(s) = 0$

16. Sigui $h(t)$ la resposta impulsional associada a l'equació $y'' + 2y' + 2y = f(t)$. Aleshores, la solució del problema de valor inicial $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$ és:

   (a) $h(t)$, en el cas $f(t) = 1$ i $y_0 = y_0' = 0$
   (b) $2h(t)$, en el cas $f(t) = \delta(t)$ i $y_0 = 0, y_0' = 1$
   (c) $2h(t) * 1$, en el cas $f(t) = 1$ i $y_0 = 0, y_0' = 1$
   (d) $e^{-t}\cos t$, en el cas $f(t) = \delta(t)$ i $y_0 = y_0' = 0$

17. Del problema de contorn
$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$
podem dir que

   (a) en cada interval $[k\pi, k\pi + \pi/2)$, $k = 0, 1, 2...$ hi ha un únic autovalor
   (b) té autovalors negatius
   (c) totes les autofuncions són periòdiques
   (d) 0 no és autovalor

18. Considereu el p.v.i. $y' = 2xy^2,\ y(2) = -2/3$.

   (a) no podem garantir l'existència i la unicitat de la solució del p.v.i.
   (b) la solució maximal del p.v.i. passa per $(0,2)$
   (c) la solució maximal del p.v.i. és sempre negativa
   (d) l'equació és homogènia

19. Les trajectòries ortogonals a la família de corbes $125(y+a)^3 = 1 - x$, $a \in \mathbb{R}$ són:

   (a) $y + 2(1-x)^{\frac{5}{3}} + a = 0$
   (b) $y + 9(1-x)^{\frac{2}{3}} + a = 0$
   (c) $y + 5(1-x)^{\frac{2}{3}} + a = 0$
   (d) $y + 9(1-x)^{\frac{5}{3}} + a = 0$

20. Sobre p.v.i. $y' = \sin(|x|)y^{2/3}$, $y(x_0) = y_0$, és **FALS** que

   (a) si $x_0 = 1$ i $y_0 = 0$, té, almenys, dues solucions diferents
   (b) si $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$, té, almenys, dues solucions diferents
   (c) si $x_0 = 0$ i $y_0 = 1$, té, almenys, dues solucions diferents
   (d) si $x_0 = 1$ i $y_0 = 1$, té una única solució

21. L'equació diferencial de la família de corbes $x^3 + y^3 = C$ **NO** és:

   (a) de variables separades
   (b) cap de les altres
   (c) homogènia
   (d) lineal

22. Considereu l'equació $t^4y'' + 2(t^3 - t^2)y' + 2y = 0$. El canvi de variable $t = 1/s$ la transforma en:

   (a) lineal homogènia amb coeficients constants
   (b) lineal no homogènia
   (c) lineal homogènia amb coeficients no constants
   (d) cap de les altres

Equacions Diferencials

10 de gener de 2005 **Temps: 3h.**

- **Notes provisionals: 14 de gener**
- **Al·legacions: 14-17 de gener**
- **Notes definitives: 21 de gener**
- **Codi de la prova: 230–11473–00–2–*grup*.**

1. Pel sistema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}$ és **FALS** que:

   (a) existeixen solucions del tipus $\vec{v}_1 e^{4t}$, $\vec{v}_2 e^{4t}$ linealment independents

   (b) existeix una solució del tipus $(\vec{v}_1 t^2 + \vec{v}_2 t + \vec{v}_3)e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

   (c) existeix una solució del tipus $(\vec{v}_1 t + \vec{v}_2)e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

   (d) existeix una solució del tipus $\vec{v}_1 e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

2. Considerem el sistema $\vec{x}' = f(\vec{x})$. Siguin $\vec{x}_0$, un punt d'equilibri, i $p(\lambda)$, el polinomi característic de $Df(\vec{x}_0)$. Aleshores és **FALS** que:

   (a) si $p(\lambda)$ té alguna arrel amb part real 0, $\vec{x}_0$ no pot ser asimptòticament estable

   (b) si totes les arrels de $p(\lambda)$ tenen part real ≤ 0, $\vec{x}_0$ pot ser inestable

   (c) si $p(\lambda)$ té totes les arrels amb part real < 0, $\vec{x}_0$ és asimptòticament estable

   (d) si $\vec{x}_0$ és inestable, $p(\lambda)$ no té totes les arrels amb part real < 0

3. Sigui el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x,y), \quad F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + \alpha(y-1) \\ 1 + 2xy - y^2 \end{pmatrix},$$

   $\alpha \in \mathbb{R}$. A partir de l'estudi dels valors propis del jacobià de F calculat en el punt d'equilibri (p.e.) corresponent podem afirmar que:

   (a) si $\alpha < 0$, aleshores $(0,1)$ és un p.e. asimptòticament estable

   (b) si $\alpha > 0$, el p.e. $(0,1)$ es estable

   (c) si $\alpha = 0$, aleshores $(0,1)$ és un p.e. inestable

   (d) si $\alpha > 0$, aleshores no podem decidir sobre l'estabilitat del p.e. $(0,1)$

4. Les solucions de $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x}$ tendeixen a zero quan $t \to +\infty$ si i només si:

   (a) $a + d < 0$ i $ad - bc < 0$

   (b) $a + d > 0$ i $ad - bc < 0$

   (c) $a + d < 0$ i $ad - bc > 0$

   (d) $a + d > 0$ i $ad - bc > 0$

5. Considereu el sistema $\dot{x} = A(t)x$, on $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{7t} \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Llavors es compleix que

   (a) totes les seves solucions són asimptòticament estables

   (b) té solucions estables i inestables

   (c) totes les seves solucions són inestables

   (d) totes les seves solucions són estables però no asimptòticament estables

6. Sigui $\begin{cases} x' = x - e^y + 1 \\ y' = \sinh y \end{cases}$

   (a) Té més d'un punt d'equilibri

   (b) Té un sol punt d'equilibri, que és inestable

   (c) No té cap punt d'equilibri

   (d) Té un sol punt d'equilibri, que és estable

7. Sigui el sistema

$$\begin{cases} x' = yx^2 \\ y' = -xy^2 \end{cases}$$

   Es pot afirmar que:

   (a) quatre de les òrbites són semirectes

   (b) té un punt d'equilibri aïllat a l'origen, es a dir, hi ha un entorn de l'origen en el que l'únic punt d'equilibri és l'origen

   (c) el sistema linealitzat al punt $(0,1)$ té òrbites paral.leles a l'eix OY

   (d) el sistema linealitzat al punt $(0,0)$ és del tipus punt de sella

8. L'antitransformada de Laplace de $F(s) = \frac{7e^{-2s}}{(s-2)^2} + \frac{s+1}{s^2+2s+5}$ és:

   (a) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{-t}\cos(2t)$

   (b) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4} + e^{t}\cos(2t)$

   (c) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{t+1}\sin(2(t+1))$

   (d) $f(t) = 7te^{2t}u(t-2) + e^{-t}\cos(2t)$

9. La transformada de Laplace $X(s)$ de la solució del problema de valor inicial $x'' + tx = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$, satisfà:

   (a) $s^2X(s) - sx_0 - x_0' + \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$

   (b) $s^2X(s) + sx_0 + x_0' - \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$

   (c) $s^2X(s) - sx_0 - x_0' - X'(s) = 0$

   (d) $s^2X(s) - sx_0 - x_0' - \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$

10. Sigui $h(t)$ la resposta impulsional associada a l'equació $y'' + 2y' + 2y = f(t)$. Aleshores, la solució del problema de valor inicial $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$ és:

    (a) $2h(t)$, en el cas $f(t) = \delta(t)$ i $y_0 = 0, y_0' = 1$

    (b) $2h(t) * 1$, en el cas $f(t) = 1$ i $y_0 = 0, y_0' = 1$

    (c) $e^{-t}\cos t$, en el cas $f(t) = \delta(t)$ i $y_0 = y_0' = 0$

    (d) $h(t)$, en el cas $f(t) = 1$ i $y_0 = y_0' = 0$

11. Del problema de contorn

$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

    podem dir que

    (a) té autovalors negatius

    (b) totes les autofuncions són periòdiques

    (c) 0 no és autovalor

    (d) en cada interval $[k\pi, k\pi + \pi/2)$, $k = 0, 1, 2...$ hi ha un únic autovalor

12. Considereu el p.v.i. $y' = 2xy^2$, $y(2) = -2/3$.

(a) la solució maximal del p.v.i. passa per $(0,2)$
(b) la solució maximal del p.v.i. és sempre negativa
(c) l'equació és homogènia
(d) no podem garantir l'existència i la unicitat de la solució del p.v.i.

13. Les trajectòries ortogonals a la família de corbes $125(y+a)^3 = 1-x$, $a \in \mathbb{R}$ són:

(a) $y + 9(1-x)^{\frac{2}{3}} + a = 0$
(b) $y + 5(1-x)^{\frac{2}{3}} + a = 0$
(c) $y + 9(1-x)^{\frac{5}{3}} + a = 0$
(d) $y + 2(1-x)^{\frac{5}{3}} + a = 0$

14. Sobre p.v.i. $y' = \sin(|x|)y^{2/3}$, $y(x_0) = y_0$, és **FALS** que

(a) si $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$, té, almenys, dues solucions diferents
(b) si $x_0 = 0$ i $y_0 = 1$, té, almenys, dues solucions diferents
(c) si $x_0 = 1$ i $y_0 = 1$, té una única solució
(d) si $x_0 = 1$ i $y_0 = 0$, té, almenys, dues solucions diferents

15. L'equació diferencial de la família de corbes $x^3+y^3 = C$ **NO** és:

(a) cap de les altres
(b) homogènia
(c) lineal
(d) de variables separades

16. Considereu l'equació $t^4y'' + 2(t^3 - t^2)y' + 2y = 0$. El canvi de variable $t = 1/s$ la transforma en:

(a) lineal no homogènia
(b) lineal homogènia amb coeficients no constants
(c) cap de les altres
(d) lineal homogènia amb coeficients constants

17. Considereu l'equació $y'' + 2ay' \cot ax + (b^2 - a^2)y = 0$. Amb el canvi de variable $u(x) = y(x)\sin ax$ es transforma en:

(a) $u''(x) + a^2u(x) = 0$
(b) $u''(x) - a^2u(x) = 0$
(c) $u''(x) + b^2u(x) = 0$
(d) $u''(x) - b^2u(x) = 0$

18. Sabent que $xe^x \cos x$ és una solució de

$$y^v - 5y^{iv} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0,$$

llavors un sistema fonamental de solucions és

(a) $\{e^x, e^x\cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
(b) $\{e^{3x}, e^x\cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
(c) $\{e^{-5x}, e^x\cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
(d) $\{e^{5x}, e^x\cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$

19. Si el wronskià $W(x)$ de dues solucions linealment independents de l'equació $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, definida $\forall x \in \mathbb{R}$, amb p derivable i $p \not\equiv 0$, és solució de l'equació diferencial, llavors és **FALS** que:

(a) $W' + p(x)W = 0$
(b) $W' + q(x)W = 0$
(c) $p'(x) = q(x)$
(d) $W'' + p(x)W' + q(x)W = 0$

20. Sigui Φ una matriu fonamental d'un sistema lineal homogeni de primer ordre definit a $\mathbb{R}^n$, i sigui també $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Aleshores,

(a) si $\det(M) \neq 0$, $\Phi \cdot M^{-1}$ és una matriu fonamental
(b) si $\det(M) \neq 0$, $M^{-1} \cdot \Phi \cdot M$ és una matriu fonamental
(c) si $\det(M) \neq 0$, $M \cdot \Phi$ és una matriu fonamental
(d) $\Phi \cdot M$ és una matriu fonamental

21. Sigui el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, on $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Siguin $\vec{v}_1 \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$, $\vec{v}_2 \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2 \backslash \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$. Aleshores és **FALS** que:

(a) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_2 + t(A-\lambda I)\vec{v}_2]$ és solució
(b) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_1 + (A-\lambda I)\vec{v}_2]$ és solució
(c) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}(A-\lambda I)\vec{v}_2$ és solució
(d) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}_2$ és solució

22. Suposeu que

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ 2e^t \sin t \end{pmatrix}$$

és una solució del sistema $\dot{x} = Ax$, on $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Llavors

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Equacions Diferencials

10 de gener de 2005 **Temps: 3h.**

- **Notes provisionals: 14 de gener**
- **Al·legacions: 14-17 de gener**
- **Notes definitives: 21 de gener**
- **Codi de la prova: 230–11473–00–3–*grup*.**

1. Sigui el sistema
$$\begin{cases} x' = yx^2 \\ y' = -xy^2 \end{cases}$$
Es pot afirmar que:
   (a) té un punt d'equilibri aïllat a l'origen, es a dir, hi ha un entorn de l'origen en el que l'únic punt d'equilibri és l'origen
   (b) el sistema linealitzat al punt $(0,1)$ té òrbites paral.leles a l'eix OY
   (c) el sistema linealitzat al punt $(0,0)$ és del tipus punt de sella
   (d) quatre de les òrbites són semirectes

2. L'antitransformada de Laplace de $F(s) = \frac{7e^{-2s}}{(s-2)^2} + \frac{s+1}{s^2+2s+5}$ és:
   (a) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4} + e^t\cos(2t)$
   (b) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{t+1}\sin(2(t+1))$
   (c) $f(t) = 7te^{2t}u(t-2) + e^{-t}\cos(2t)$
   (d) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{-t}\cos(2t)$

3. La transformada de Laplace $X(s)$ de la solució del problema de valor inicial $x'' + tx = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$, satisfà:
   (a) $s^2X(s) + sx_0 + x_0' - \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$
   (b) $s^2X(s) - sx_0 - x_0' - X'(s) = 0$
   (c) $s^2X(s) - sx_0 - x_0' - \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$
   (d) $s^2X(s) - sx_0 - x_0' + \int_0^s X(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$

4. Sigui $h(t)$ la resposta impulsional associada a l'equació $y'' + 2y' + 2y = f(t)$. Aleshores, la solució del problema de valor inicial $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$ és:
   (a) $2h(t) * 1$, en el cas $f(t) = 1$ i $y_0 = 0, y_0' = 1$
   (b) $e^{-t}\cos t$, en el cas $f(t) = \delta(t)$ i $y_0 = y_0' = 0$
   (c) $h(t)$, en el cas $f(t) = 1$ i $y_0 = y_0' = 0$
   (d) $2h(t)$, en el cas $f(t) = \delta(t)$ i $y_0 = 0, y_0' = 1$

5. Del problema de contorn
$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$
podem dir que
   (a) totes les autofuncions són periòdiques
   (b) 0 no és autovalor
   (c) en cada interval $[k\pi, k\pi + \pi/2)$, $k = 0, 1, 2...$ hi ha un únic autovalor
   (d) té autovalors negatius

6. Considereu el p.v.i. $y' = 2xy^2$, $y(2) = -2/3$.
   (a) la solució maximal del p.v.i. és sempre negativa
   (b) l'equació és homogènia
   (c) no podem garantir l'existència i la unicitat de la solució del p.v.i.
   (d) la solució maximal del p.v.i. passa per $(0,2)$

7. Les trajectòries ortogonals a la família de corbes $125(y+a)^3 = 1 - x$, $a \in \mathbb{R}$ són:
   (a) $y + 5(1-x)^{\frac{2}{3}} + a = 0$
   (b) $y + 9(1-x)^{\frac{5}{3}} + a = 0$
   (c) $y + 2(1-x)^{\frac{5}{3}} + a = 0$
   (d) $y + 9(1-x)^{\frac{2}{3}} + a = 0$

8. Sobre p.v.i. $y' = \sin(|x|)y^{2/3}$, $y(x_0) = y_0$, és **FALS** que
   (a) si $x_0 = 0$ i $y_0 = 1$, té, almenys, dues solucions diferents
   (b) si $x_0 = 1$ i $y_0 = 1$, té una única solució
   (c) si $x_0 = 1$ i $y_0 = 0$, té, almenys, dues solucions diferents
   (d) si $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$, té, almenys, dues solucions diferents

9. L'equació diferencial de la família de corbes $x^3 + y^3 = C$ **NO** és:
   (a) homogènia
   (b) lineal
   (c) de variables separades
   (d) cap de les altres

10. Considereu l'equació $t^4y'' + 2(t^3 - t^2)y' + 2y = 0$. El canvi de variable $t = 1/s$ la transforma en:
   (a) lineal homogènia amb coeficients no constants
   (b) cap de les altres
   (c) lineal homogènia amb coeficients constants
   (d) lineal no homogènia

11. Considereu l'equació $y'' + 2ay'\cot ax + (b^2 - a^2)y = 0$. Amb el canvi de variable $u(x) = y(x)\sin ax$ es transforma en:
   (a) $u''(x) - a^2u(x) = 0$
   (b) $u''(x) + b^2u(x) = 0$
   (c) $u''(x) - b^2u(x) = 0$
   (d) $u''(x) + a^2u(x) = 0$

12. Sabent que $xe^x\cos x$ és una solució de
$$y^v - 5y^{iv} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0,$$
llavors un sistema fonamental de solucions és
   (a) $\{e^{3x}, e^x\cos x, e^x\sin x, xe^x\cos x, xe^x\sin x\}$
   (b) $\{e^{-5x}, e^x\cos x, e^x\sin x, xe^x\cos x, xe^x\sin x\}$
   (c) $\{e^{5x}, e^x\cos x, e^x\sin x, xe^x\cos x, xe^x\sin x\}$
   (d) $\{e^x, e^x\cos x, e^x\sin x, xe^x\cos x, xe^x\sin x\}$

13. Si el wronskià $W(x)$ de dues solucions linealment independents de l'equació $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, definida $\forall x \in \mathbb{R}$, amb p derivable i $p \not\equiv 0$, és solució de l'equació diferencial, llavors és **FALS** que:

(a) $W' + q(x)W = 0$

(b) $p'(x) = q(x)$

(c) $W'' + p(x)W' + q(x)W = 0$

(d) $W' + p(x)W = 0$

14. Sigui Φ una matriu fonamental d'un sistema lineal homogeni de primer ordre definit a $\mathbb{R}^n$, i sigui també $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Aleshores,

(a) si $\det(M) \neq 0$, $M^{-1} \cdot \Phi \cdot M$ és una matriu fonamental

(b) si $\det(M) \neq 0$, $M \cdot \Phi$ és una matriu fonamental

(c) $\Phi \cdot M$ és una matriu fonamental

(d) si $\det(M) \neq 0$, $\Phi \cdot M^{-1}$ és una matriu fonamental

15. Sigui el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, on $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Siguin $\vec{v}_1 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$, $\vec{v}_2 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^2 \backslash \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$. Aleshores és **FALS** que:

(a) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_1 + (A - \lambda I)\vec{v}_2]$ és solució

(b) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}(A - \lambda I)\vec{v}_2$ és solució

(c) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}_2$ és solució

(d) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_2 + t(A - \lambda I)\vec{v}_2]$ és solució

16. Suposeu que

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ 2e^t \sin t \end{pmatrix}$$

és una solució del sistema $\dot{x} = Ax$, on $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Llavors

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

17. Pel sistema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}$ és **FALS** que:

(a) existeix una solució del tipus $(\vec{v}_1 t^2 + \vec{v}_2 t + \vec{v}_3)e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

(b) existeix una solució del tipus $(\vec{v}_1 t + \vec{v}_2)e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

(c) existeix una solució del tipus $\vec{v}_1 e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

(d) existeixen solucions del tipus $\vec{v}_1 e^{4t}$, $\vec{v}_2 e^{4t}$ linealment independents

18. Considerem el sistema $\vec{x}' = f(\vec{x})$. Siguin $\vec{x}_0$, un punt d'equilibri, i $p(\lambda)$, el polinomi característic de $Df(\vec{x}_0)$. Aleshores és **FALS** que:

(a) si totes les arrels de $p(\lambda)$ tenen part real ≤ 0, $\vec{x}_0$ pot ser inestable

(b) si $p(\lambda)$ té totes les arrels amb part real < 0, $\vec{x}_0$ és asimptòticament estable

(c) si $\vec{x}_0$ és inestable, $p(\lambda)$ no té totes les arrels amb part real < 0

(d) si $p(\lambda)$ té alguna arrel amb part real 0, $\vec{x}_0$ no pot ser asimptòticament estable

19. Sigui el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x, y), \quad F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + \alpha(y - 1) \\ 1 + 2xy - y^2 \end{pmatrix},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. A partir de l'estudi dels valors propis del jacobià de F calculat en el punt d'equilibri (p.e.) corresponent podem afirmar que:

(a) si $\alpha > 0$, el p.e. $(0, 1)$ es estable

(b) si $\alpha = 0$, aleshores $(0, 1)$ és un p.e. inestable

(c) si $\alpha > 0$, aleshores no podem decidir sobre l'estabilitat del p.e. $(0, 1)$

(d) si $\alpha < 0$, aleshores $(0, 1)$ és un p.e. asimptòticament estable

20. Les solucions de $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x}$ tendeixen a zero quan $t \to +\infty$ si i només si:

(a) $a + d > 0$ i $ad - bc < 0$

(b) $a + d < 0$ i $ad - bc > 0$

(c) $a + d > 0$ i $ad - bc > 0$

(d) $a + d < 0$ i $ad - bc < 0$

21. Considereu el sistema $\dot{x} = A(t)x$, on $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{7t} \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Llavors es compleix que

(a) té solucions estables i inestables

(b) totes les seves solucions són inestables

(c) totes les seves solucions són estables però no asimptòticament estables

(d) totes les seves solucions són asimptòticament estables

22. Sigui $\begin{cases} x' = x - e^y + 1 \\ y' = \sinh y \end{cases}$

(a) Té un sol punt d'equilibri, que és inestable

(b) No té cap punt d'equilibri

(c) Té un sol punt d'equilibri, que és estable

(d) Té més d'un punt d'equilibri

Equacions Diferencials. Gener 2005.

	permutació			
preg.	**0**	**1**	**2**	**3**
1	D	D	B	B
2	A	B	A	D
3	D	C	A	B
4	A	B	C	D
5	B	A	C	C
6	A	D	B	A
7	C	C	C	B
8	D	B	A	A
9	C	B	C	B
10	B	D	A	C
11	A	D	D	B
12	D	C	B	D
13	C	D	C	A
14	C	B	B	D
15	A	D	C	C
16	A	B	D	B
17	D	A	C	A
18	A	C	A	D
19	C	D	B	D
20	A	C	A	B
21	C	D	D	B
22	B	A	C	A