PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial (A) **5 de novembre de 2003**

1. Per anar a treballar, una persona cada dia tira un dau. Si surt 1 o 6 fa el viatge en autobus, si surt 2,3,4 o 5 el fa en metro. La probabilitat que l'autobus pateixi una avaria que el faci arribar tard val 0.1. Pel metro aquesta probabilitat val 0.2.

   (a) Quan arriba tard quina és la probabilitat que hagi estat en autobus?

   (b) Considerant que va a treballar totes les setmanes de dilluns a divendres, quina és la probabilitat que el primer viatge en autobus el faci en divendres?

   (c) En una setmana, quina és la probabilitat que arribi tard dos o més dies?

   (d) En un any quina és la probabilitat que arribi tard més de 50 dies?

   Resolució:

   Denotem $p_B = 2/6 = 1/3$, $p_M = 4/6 = 2/3$, $P(T|B) = 0.1$ i $P(T|M) = 0.1$ on B vol dir "bus", M "metro" i T "arribar tard".

   (a) Per Bayes

$$P(B|T) = \frac{P(T|B)p_B}{P(T|B)p_B + P(T|M)p_M} = \frac{0.1\frac{1}{3}}{0.1\frac{1}{3} + 0.2\frac{2}{3}} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

   (b) Pot ser el primer divendres o el segon o ...

$$P = p_M^4 p_B + p_M^9 p_B + p_M^{14} p_B + \cdots = p_M^4 p_B (1 + p_M^5 + p_M^{10} + p_M^{15} + \cdots) = \frac{p_M^4 p_B}{1 - p_M^5} = \frac{16}{211} = 0.0758$$

   (c) El nombre de dies que arriba tard d'un total de n és una variable binomial N amb paràmetres n, $p = p_T = P(T|B)p_B + P(T|M)p_M = 1/6$.

$$P(N \geq 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - q^5 - npq^4 = 1 - (\frac{5}{6})^5 - 5(\frac{5}{6})^4\frac{1}{6} = \frac{763}{3888} = 0.196.$$

   (d) Ara $n = 52 \cdot 5 = 260$. Per obtenir el resultat cal aproximar la binomial per una gaussiana amb $m = 260 \cdot \frac{1}{6} = 43.33$ i $\sigma = \sqrt{260 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 6.01$

$$P(N > 50) = 1 - F_N(50) = 1 - \frac{1}{2}(1 + \text{erf}(\frac{50 - 43.33}{\sqrt{2} \cdot 6.01})) = 0.5 - 0.5\,\text{erf}(0.7844) = 0.1336.$$

2. X és una variable aleatòria uniforme en $[0, 2]$. Considereu la nova variable $Y = (X-1)^2$.

   (a) Calculeu la funció de densitat de Y.

   (b) Calculeu i dibuixeu la funció de distribució de Y.

   (c) Calculeu $P(\frac{1}{9} < Y < \frac{1}{4})$.

   (d) Calculeu els moments m_n de Y. Utilitzeu-los per trobar l'esperança i la variància de Y.

Resolució:

(a) La densitat de X és $f_X(x) = 1/2$ per $0 < x < 2$. Al resoldre l'equació $(x-1)^2 = y$ trobem dues solucions $x_1 = 1 - \sqrt{y}$ i $x_2 = 1 + \sqrt{y}$. Dibuixant la paràbola veiem que $\Omega_Y = [0, 1]$. Tenint en comte que $dy/dx = 2(x-1)$,

$$f_Y(y) = f_X(x_1)\frac{1}{2|x_1 - 1|} + f_X(x_2)\frac{1}{2|x_2 - 1|} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad 0 < y < 1$$

(b)

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y')dy' = \int_0^y \frac{dy'}{2\sqrt{y'}} = \sqrt{y} \qquad 0 \le y < 1$$

($F_Y(y) = 0$ per $y < 0$ i $F_Y(y) = 1$ per $y \ge 1$.)

(c) $P(\frac{1}{9} < Y < \frac{1}{4}) = F_Y(\frac{1}{4}) - F_Y(\frac{1}{9}) = \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{6}$.

(d)

$$m_n = E[Y^n] = \int_0^1 y^n \frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{n-1/2}dy = \frac{1}{2n+1}.$$

$E[Y] = m_1 = 1/3$. $V[Y] = m_2 - m_1^2 = 4/45$.