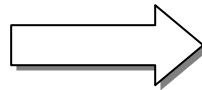


## 5.2: Diseño de filtros IIR

---

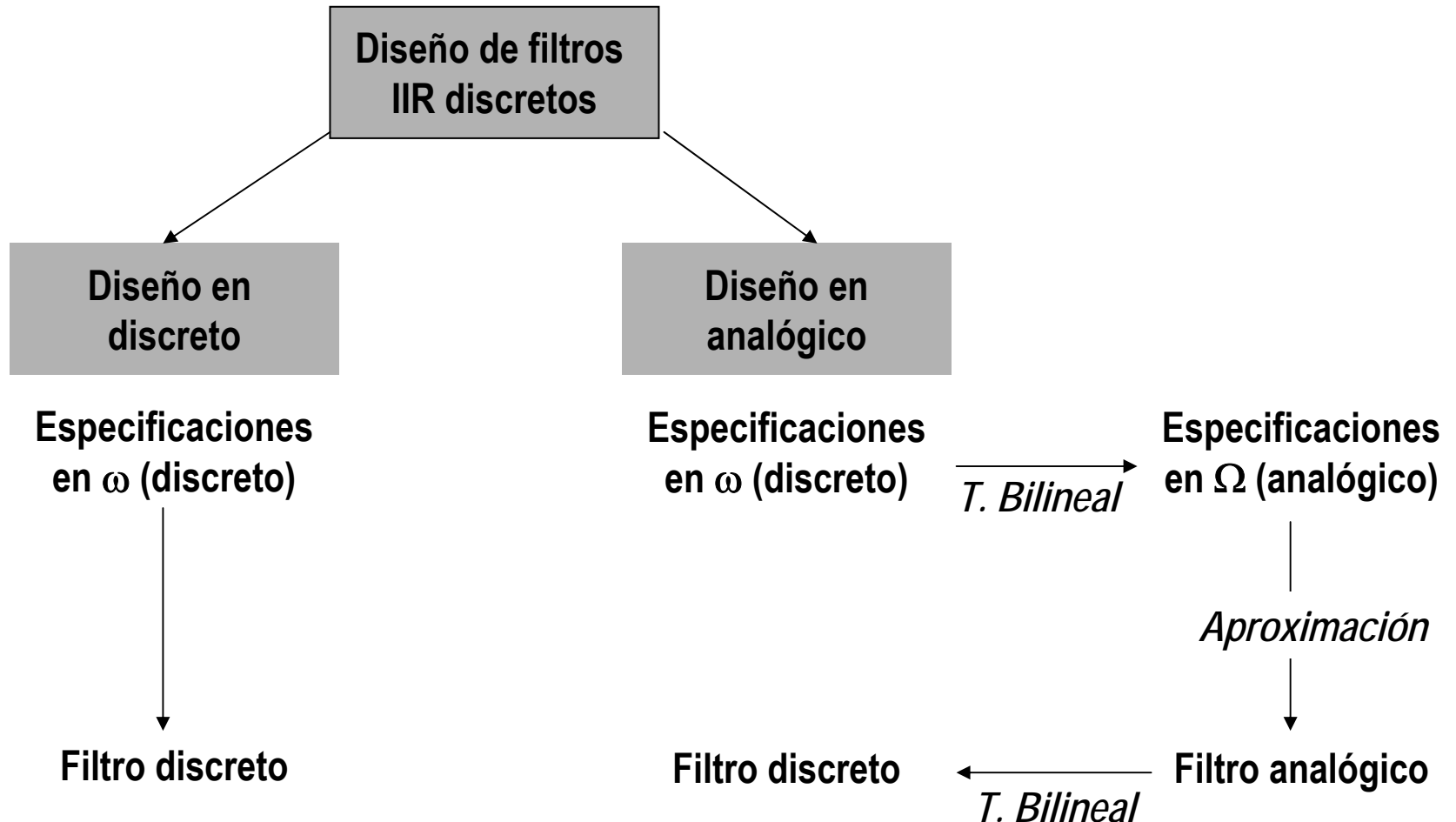
**Un diseño FIR puede  
resultar en un filtro de  
orden alto**



**Un diseño IIR:  
orden más bajo**

- ◆ **Transformación bilineal**
- ◆ **Aproximaciones analógicas**
- ◆ **Distorsión de fase y retardo de grupo**
- ◆ **Comparación diseño FIR / IIR**

# Transformación bilineal



# Requisitos de la transformación bilineal

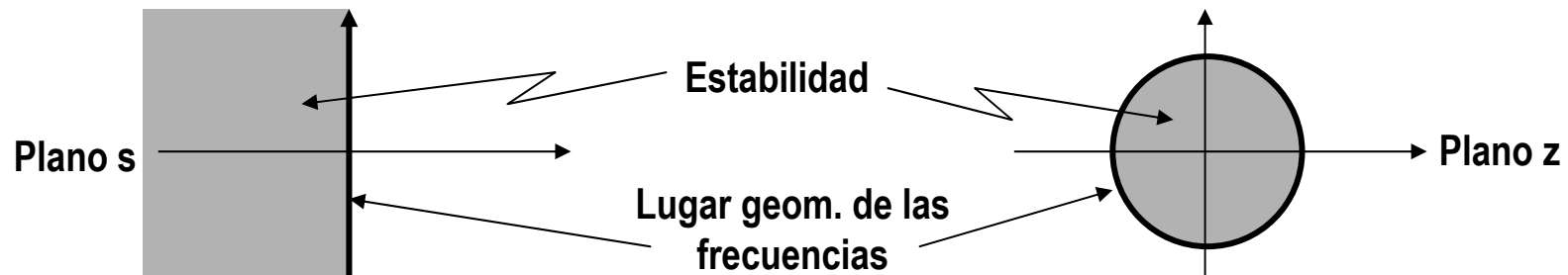
- ◆ Transformación racional de orden 1:  $H(z) = H_a(s)|_{s=f(z)}$
- ◆ Correspondencia entre bandas de paso / atenuada discretas y analógicas
- ◆ Relación entre la frecuencias analógicas ( $\Omega$ ) y discretas ( $\omega$ ) sin aliasing:

$$s = f(z) \Rightarrow j\Omega = f(e^{j\omega}) \quad \begin{cases} \Omega: & -\infty \rightarrow \infty \\ \omega: & -\pi \rightarrow \pi \end{cases}$$

Eje imaginario en  $s \Rightarrow$  circunferencia de radio 1 en  $z$

- ◆ Conservación de la estabilidad:

Semi-plano izquierdo en  $s \Rightarrow$  Interior de la circunferencia de radio 1 en  $z$



# Transformación bilineal

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z^{-1} = \frac{1 - s}{1 + s}$$

◆ Relación entre las frecuencias:  $z = re^{j\omega} \Rightarrow s = \frac{1 - \frac{1}{r}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{r}e^{-j\omega}} = \frac{r^2 - 1 + j 2r \sin(\omega)}{r^2 + 1 + 2r \cos(\omega)}$

➤  $r < 1 \Leftrightarrow \text{Real}(s) < 0$

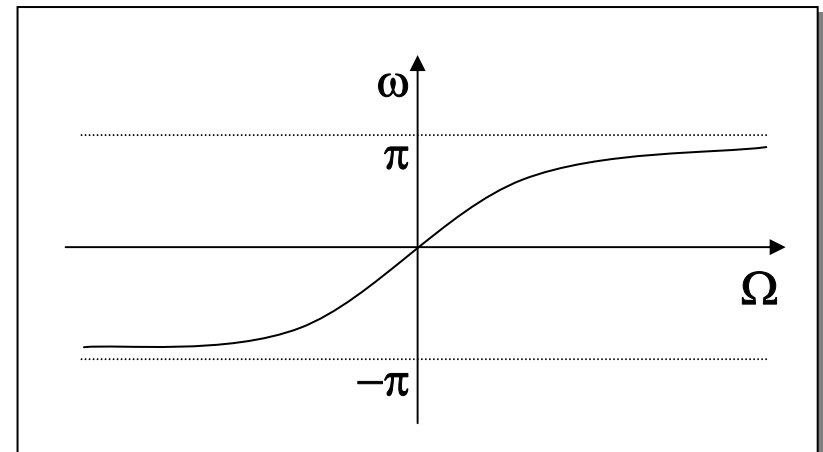
Conservación de la estabilidad

➤  $r = 1 (z=e^{j\omega})$

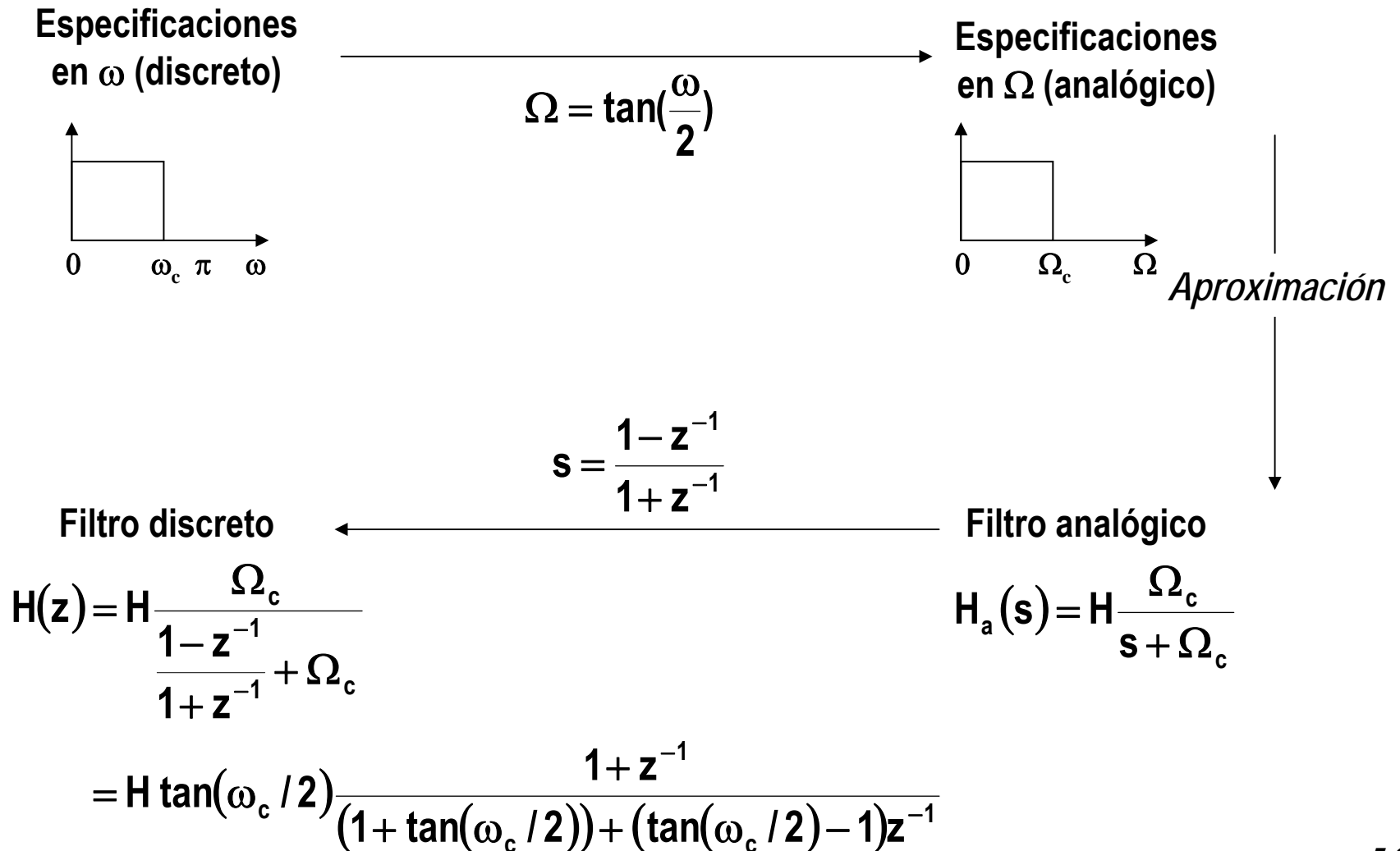
$$s = \frac{j 2 \sin(\omega)}{2 + 2 \cos(\omega)} = j\Omega$$

$$\Omega = \frac{\sin(\omega)}{1 + \cos(\omega)} = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

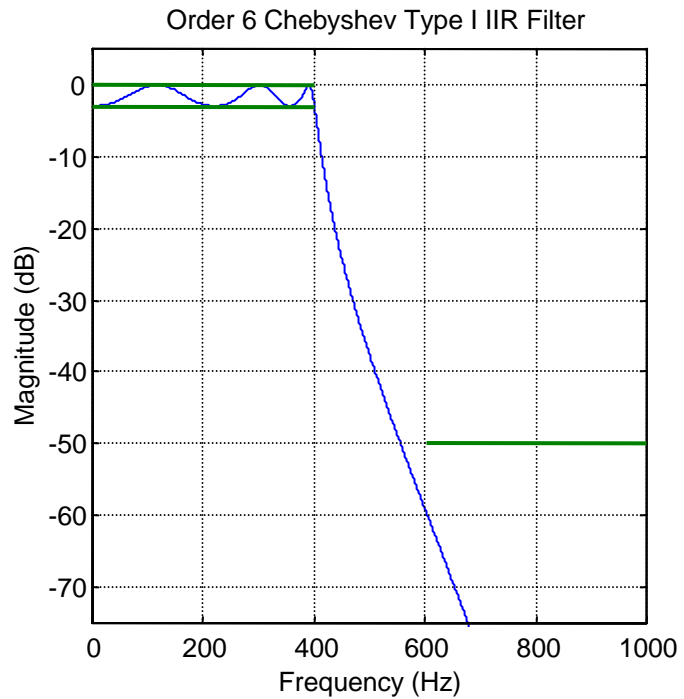
$$\Omega = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \omega = 2\arctan(\Omega)$$



# Diseño con transformación bilineal



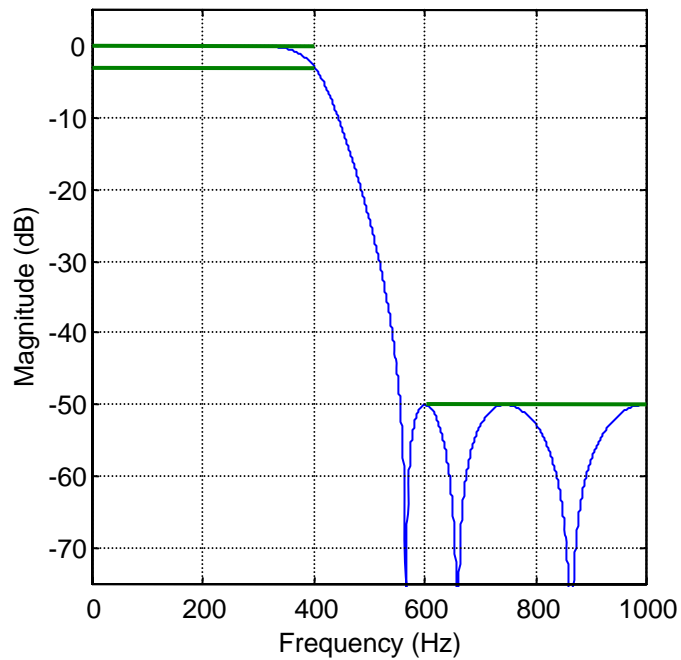
# Aproximaciones clásicas (I)



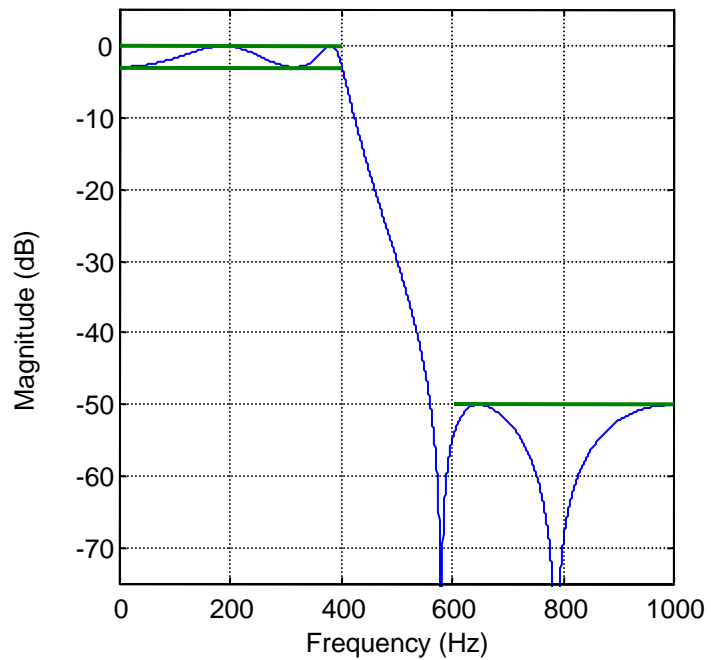
# Aproximaciones clásicas (II)

---

Order 6 Chebyshev Type II IIR Filter



Order 4 Elliptic IIR Filter



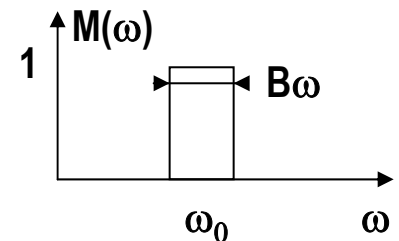
# Distorsión de fase: Retardo de grupo (I)

◆ Retardo de grupo:

$$\tau(\omega) = - \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

◆ Interpretación:

➤ Filtro paso banda: 
$$\varphi(\omega) \cong \varphi(\omega_0) + \left. \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)$$
$$= \Phi_0 - \tau(\omega_0) (\omega - \omega_0)$$



➤ Filtrado:  $x[n] = \text{Señal paso banda} = e[n]e^{j\omega_0 n}$   
Envolvente :  $E(e^{j\omega}) = 0, \quad |\omega| > B\omega/2$



# Distorsión de fase: Retardo de grupo (II)

◆ Salida del filtro:  $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) M(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = X(e^{j\omega}) e^{j\varphi(\omega)}$

$$= X(e^{j\omega}) e^{j[\Phi_0 - \tau(\omega_0)(\omega - \omega_0)]}$$
$$= E(e^{j(\omega - \omega_0)}) e^{-j\tau(\omega_0)(\omega - \omega_0)} e^{j\Phi_0}$$
$$\begin{cases} e[n] \leftrightarrow E(e^{j\omega}) \\ e[n - T] \leftrightarrow E(e^{j\omega}) e^{-jT\omega} \\ e[n - T] e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow E(e^{j(\omega - \omega_0)}) e^{-jT(\omega - \omega_0)} \end{cases}$$
$$y[n] = e[n - \tau(\omega_0)] e^{j\omega_0 n} e^{j\Phi_0}$$

Retardo de grupo: Retardo de la envolvente de la señal

Retardo de grupo ideal:  $\tau(\omega) = \text{constante} \Rightarrow$  fase lineal

# Aproximaciones y retardo de grupo

---

	Orden	Distorsión de fase
Comportamiento máx. plano	Alto	Baja
Rizado de amplitud constante	Bajo (óptimo)	Alto

# Comparación FIR / IIR

---

	FIR	IIR
<b>Fase lineal</b>	<b>Si (posible)</b>	<b>No realizable</b>
<b>Estabilidad</b>	<b>Siempre</b>	<b>No siempre (Problemas de precisión numérica)</b>
<b>Orden</b>	<b>Alto</b>	<b>Bajo</b>