Cognoms: ....
Nom: .... DNI: .... Grup: .... Cognom professor: ....

Indicacions per a la realització de l'examen

- **Aquest examen consta** vàries fulles separades que es lliuraran per separat.
- **Abans de fer l'examen**:
  - apaga el mòbil
  - posa el teu DNI al costat en un lloc visible al professor
- **En començar l'examen**:
  - rebràs un conjunt de **fulls d'examen** (cadascun amb els enunciats d'una o més preguntes i espai per respondre cadascuna d'elles) i un nombre fixat de **fulls d'esborrany**
  - posa les teves dades personals a **tots** els fulls (altrament se't pot retirar l'examen i posar-te un zero de nota)
  - es recomana llegir bé l'enunciat de cada pregunta i fixar-se en la seva puntuació
- **Tot fent l'examen**:
  - no es poden consultar llibres, apunts ni cap altra mena de material
  - cal tenir posat el nom, cognoms i DNI a **tots** els fulls d'examen i **tots** els fulls d'esborrany
  - contesta fent servir l'espai donat.
  - dóna sempre una justificació de les teves respostes
- **Després de fer l'examen**:
  - lliura cada full d'examen a la **pila corresponent**
  - lliura els fulls d'esborrany al professor

(2 punts)

1. Explica què és el que defineix la semàntica de la lògica de primer ordre.

   La semàntica de la lògica de primer ordre defineix formalment el significat de les fòrmules de primer ordre. Concretament defineix la noció d'**interpretació de primer ordre** i la noció de quan una interpretació és un **model** d'una o més fòrmules de lògica de primer ordre.

2. Defineix formalment *equivalència lògica* de dues fórmules.

   Solució: Dues fòrmules són equivalents si tenen els mateixos models. Formalment, dues fórmules φ_1 i φ_2 són **equivalents**, si per qualsevol interpretació $\mathcal{I}$ tenim que

   $$\mathcal{I} \models \phi_1 \text{ si i només si } \mathcal{I} \models \phi_2$$

   O també

   $$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \Leftrightarrow [\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{I}} = [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{I}}$$

3. Demostra formalment que **no** és cert en general que una fórmula de lògica de primer ordre és equivalent a la seva forma skolemitzada.

   Solució: Per a demostrar-ho formalment considerem la fòrmula $\exists x P x$, la seva forma skolemitzada Pa i la interpretació $\mathcal{I}_0$ següent:

   $$\begin{array}{l} D = \{\alpha, \beta\} \\ a \mapsto \alpha \\ P \mapsto \{\langle\beta\rangle\} \end{array}$$

   Tenim que[1]

   $$\begin{array}{l} [\![\exists x P x]\!]_{\mathcal{I}_0} = [\![Px\{\alpha/x\} \vee Px\{\beta/x\}]\!]_{\mathcal{I}_0} = (\angle\alpha\rangle \in [\![P]\!]_{\mathcal{I}_0}) \vee (\langle\beta\rangle \in [\![P]\!]_{\mathcal{I}_0}) = 0 \vee 1 = 1 \\ [\![Pa]\!]_{\mathcal{I}_0} = [\![a]\!]_{\mathcal{I}_0} \in [\![P]\!])_{\mathcal{I}_0} = \alpha \in \{\langle\beta\rangle\} = 0 \end{array}$$

   Donat que el resultat és diferent queda demostrat que no són equivalents.

4. Explica com es pot decidir l'equivalència lògica de dues fórmules aplicant el mètode dels taulers.

   Solució: El mètode dels taulers s'aplica per decidir si un fòrmula o conjunt de fòrmules és satisfactible o insatisfactible. Formalment:
   Per tot conjunt finit de fòrmules Δ, Δ és insatisfactible si i només si hi ha un tauler tancat per a Δ. Per tal de poder aplicar taulers a l'equivalencia logica de dues formules donades podem aplicar:

   $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ si i només si $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \equiv \blacksquare$ si i només si $\neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \equiv \square$ si i només si $\neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ és insatisfactible.

[1] Prenem la licència sintàctica d'aplicar connectives lògiques a expressions que no són termes sino que són semàntiques.

(2 punts) Considera les fórmules:

1. $\forall y(\exists x Pxy \to \exists z Qxz)$
2. $\exists x \forall y Pxy$
3. $\forall x Pxx$
4. $\forall x \exists y Pxy$
5. $\exists y \forall x Pxy$
6. $\exists x Qxx$

Demostra que $1, 2, 3, 4, 5 \models 6$ aplicant el mètode de **resolució**. Mostra tots els passos inclosos el càlcul de cada "unificador més general".

Solució. Per tal de demostrar la validesa d'aquesta conseqüència logica procedim amb els següents passos:

1. Plantejament de la refutació:

$$1, 2, 3, 4, 5 \models 6 \text{ si i només si } \not\models 1, 2, 3, 4, 5, \neg 6$$

2. Clausuritzem les fòrmules:

   (a) $\forall y(\exists x Pxy \to \exists z Qxz)$

$$\begin{array}{lll} \equiv_{\text{sat}} & \exists x(\forall y(\exists x Pxy \to \exists z Qxz)) & \text{Tanquem } \exists \text{ l'ocurrència lliure d'}x. \\ \equiv & \exists x(\forall y(\neg \exists x Pxy \vee \exists z Qxz)) & \text{Eliminem les } \to . \\ \equiv & \exists x(\forall y(\forall x \neg Pxy \vee \exists z Qxz)) & \text{Reduim l'abast de les } \neg. \\ \equiv & \exists x(\forall y(\forall t \neg Pty \vee \exists z Qxz)) & \text{Rebategem.} \\ \equiv_{\text{sat}} & \forall y(\forall t \neg Pty \vee Qaf(y)) & \text{Skolemitzem.} \\ \equiv & \forall y \forall t(\neg Pty \vee Qaf(y)) & \text{Ampliem l'abast dels } \forall. \\ \equiv & \{\neg Pty, Qaf(y)\} & \text{Escrit en forma clausular.} \end{array}$$

   (b) $\exists x \forall y Pxy \equiv_{\text{sat}} \forall y Pby \equiv \{Pby\}$

   (c) $\forall x Pxx \equiv \{Puu\}$

   (d) $\forall x \exists y Pxy \equiv_{\text{sat}} \{Pvf(v)\}$

   (e) $\exists y \forall x Pxy \equiv_{\text{sat}} \{Pwc\}$

   (f) $\neg \exists x Qxx \equiv \forall x \neg Qxx \equiv \{\neg Qrr\}$

3. Mirem de construir una refutació via resolució lineal (partim de la claúsula provinent del negat de la conclusió):

$\{\neg Qrr\}$ $\qquad\qquad$ $\{\neg Pty, Qaf(y)\}$

No existeix u.m.g.

$--$

El càlcul del u.m.g. aplicant l'algorisme de transformacions de Martelli-Montanari donaria el següinet resultst:

EQUACIONS	UNIFICADOR
$r = a, r = f(y)$	ϵ
	Eliminació a/r
$a = f(y)$	$\{a/r\}$
	Fracàs per Discrepància entre a i f.

4. Comprovem que les premisses siguin consistents (si no ho fossin el raonament seria "trivialment vàlid"). Les claúsules que tenim són totes excepte les que provenen del negat de la conclusió:

$$\{\{\neg Pty, Qaf(y)\}, \{yPby\}, \{Puu\}, \{Pvf(v)\}, \{Pwc\}\}$$

Fácilment s'observa que $Qaf(y)$ és literal pur i per tant es pot eliminar la claúsula en la que apareix. Un cop eliminada, els literals de P esdevenn tambú purs i es poden eliminar les eves respectives claúsules i ens quedem amb un conjunt buit de claúsules amb la qual cosa demostrem que el conjunt de premisses és satisfactible (també es podria demostrar donant un model).

Així doncs, queda demostrat que el raonament donat **no és vàlid**:

$$1, 2, 3, 4, 5 \not\models 6$$

Fi solució.
(0,5 punts) Enuncia la **regla de factorització** i dóna un exemple del seu ús.
Regla de *factorització (CP1)*

$$\frac{C}{C\theta}\text{F } \theta, \text{ si } \theta \text{ és un UMG de } \{L_1, \ldots, L_n\} \subseteq C$$

Diu que, donada un clàusula C, si θ és un UMG de dos literals de C llavors es pot derivar $C\theta$ per factorització. Per exemple, a partir de la claúsula

$$\{Pax, Pyb\}$$

via factorització sobre P amd el u.m.g $\theta = \{a/y, b/x\}$ obtenim

$$\{Pab\}$$

.

(2 punts) Amb la definció següent de constants, funcions i predicats,

- t és la constant "taula"
- $c(x)$ és la funció que retorna el color de x
- Bx: "x és un bloc"
- Lx: "x està lliure"
- Dxy: "x està damunt y"
- Sxy: "x està per sobre de y"
- Pxy: "acció de posar x damunt y"
- Mxy: "x és més petit que y"
- Ixy: "x és igual que y"

formalitza les frases següents:

1. Un bloc pot estar damunt la taula o damunt d'un altre bloc però no als dos llocs a la vegada.

$$\forall x(Bx \longrightarrow (Dxt \vee \exists y(By \wedge Dxy)) \wedge \neg(Dxt \wedge \exists y(By \wedge Dxy)))$$

2. Els blocs no estan mai damunt de sí mateixos.

$$\forall x(Bx \longrightarrow \neg Dxx)$$

3. La taula no està damunt cap bloc.

$$\neg \exists x(Bx \wedge Dtx)$$

4. Un bloc està lliure si i només si no conté cap bloc damunt seu.

$$\forall x(Bx \longrightarrow (Lx \textbf{ iff } \neg \exists y(By \wedge Dyx)))$$

5. Per posar un bloc al damunt d'un altre bloc cal que els dos blocs estiguin lliures, que el primer sigui més petit que el segon i que no siguin del mateix color.

$$\forall x \forall y(Bx \wedge By \longrightarrow (Pxy \longrightarrow Lx \wedge Ly \wedge Mxy \wedge \neg Ic(x)c(y)))$$

6. Un bloc està per sobre d'un segon bloc si i només si està al damunt d'ell o bé està al damunt d'un tercer bloc que està per sobre del segon.

$$\forall x \forall y(Bx \wedge By \longrightarrow (Sxy \longleftrightarrow Dxy \vee \exists z(Bz \wedge Dxz \wedge Szy)))$$

(1,5 punts) Considereu el programa lògic següent:

$$
\begin{array}{l}
Pab \leftarrow \\
Pbc \leftarrow \\
Pcd \leftarrow \\
Qxy \leftarrow Pxy \\
Qxy \leftarrow Pxz, Qzy
\end{array}
$$

Doneu l'arbre complet de la resolució-SLD amb l'objectiu: $\leftarrow Qay$ fent servir la precedència de Prolog (és a dir, la selecció de sub-objectius és d'esquerra a dreta i la de regles de dalt cap a baix). Indiqueu les respostes calculades per a cada branca que acaba en èxit.

Solució.

- **Nota 1**: Escric l'estructura jeràrquica de l'arbre en forma de taula. A cada casella hi poso primer la regla aplicada (suposant la numeració de les regles del programa de 1 fins a 5), després l'unificador més general i tercer el/els sub-objectius que resulten després de l'aplicació de la regla. A cada nova aplicació de regla faig un reanomenament de les variables que calguin per a no tenir conflictes: faig servir subíndexos consecutius: x_1, x_2, x_3, etc. El recorregut de l'arbre segons Prolog és el recorregut en *preordre* de l'arbre representat.

<table>
<tr><td colspan="5">$\leftarrow Qay$</td></tr>
<tr><td>(4)
$\{a/x_1, y_1/y\}$
$\leftarrow Pay_1$</td><td colspan="4">(5)
$\{a/x_1, y_1/y\}$
$\leftarrow Paz_1, Qz_1y_1$</td></tr>
<tr><td>(1)
$\{b/y_1\}$
$\square$</td><td colspan="4">(1)
$\{b/z_1\}$
$\leftarrow Qby_1$</td></tr>
<tr><td>resposta
$\{b/y\}$</td><td>(4)
$\{b/x_2, y_2/y_1\}$
$\leftarrow Pby_2$</td><td colspan="3">(5)
$\{b/x_2, y_2/y_1\}$
$\leftarrow Pbz_2, Qz_2y_2$</td></tr>
<tr><td></td><td>(2)
$\{c/y_2\}$
$\square$</td><td colspan="3">(2)
$\{c/z_2\}$
$\leftarrow Qcy_2$</td></tr>
<tr><td></td><td>resposta
$\{c/y\}$</td><td>(4)
$\{c/x_3, y_3/y_2\}$
$\leftarrow Pcy_3$</td><td colspan="2">(5)
$\{c/x_3, y_3/y_2\}$
$\leftarrow Pcz_3, Qz_3y_3$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>(3)
$\{d/y_3\}$
$\square$</td><td colspan="2">(3)
$\{d/z_3\}$
$\leftarrow Qdy_3$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>resposta
$\{d/y\}$</td><td>(3)
$\{d/x_4, y_4/y_3\}$
$\leftarrow Pdy_4$</td><td>(3)
$\{d/x_4, y_4/y_3\}$
$\leftarrow Pdz_4, Qz_4y_4$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>fracàs
no unifica</td><td>fracàs
no unifica</td></tr>
</table>

- **Nota 2**: el càlcul de les respostes es faria de la següent manera. Considerem per exemple la tercera branca que acaba amb èxit (la més llarga). L'UMG de la resposta calculada s'obté fent: $(\{a/x_1, y_1/y\} \cdot \{b/z_1\} \cdot \{b/x_2, y_2/y_1\} \cdot \{c/z_2\} \cdot \{c/x_3, y_3/y_2\} \cdot \{d/y_3\})_{|\{y\}} = \{a/x_1, d/y, b/z_1, b/x_2, d/y_1, c/z_2, c/x_3, d/y_2, d/y_3\}_{|\{y\}} = \{d/y\}$.

Fi solució.

(1,5 punts)

1. Defineix formalment els conceptes de fórmula insatisfactible, vàlida i continguent i dóna un exemple de cadascuna.

   Solució. Una fórmula insatisfactible és una que no en té cap model. Una fórmula vàlida és aquella para la tota interpretació n'és un model. Una fórmula continguent és una fórmula que no és insatisfactible i no és válida.

   Exemples (on A és una fórmula atómica):

   Fórmula insatisfactible: $A \wedge \neg A$.

   Fórmula vàlida: $A \vee \neg A$.

   Fórmula continguent: A. **Fi solució.**

2. Demostra mitjançant un contraexemple que

$$\forall x Pax \to \forall x Qax \models \forall x (Pax \to Qax)$$

   no és vàlid.

   Solució. Malgrat que l'exercici és pot resoldre de forma molt directe, ho farem mitjançant una mica d'anàlisi, reduïnt el problema a un altre més simple. Com P i Q son arbitraris, considerem el cas $P = \neg Q$; aleshores el problema és redueix a

$$\exists x Qax \vee \forall x Qax \models \forall x Qax.$$

   N'hi ha prou amb trobar una interpretació on $\exists x Qax$ sigui veritat i $\forall x Qax$ sigui fals. Si prenem

   D (domini)$= \{0, 1\}$,

   $a = 0$,

   $Q0x := x$ *és diferent de* 0,

   es satisfá la condició anterior. **Fi solució.**

(2 punts)

1. Donat el conjunt de fòrmules

$$\{A \vee B \to C, A \vee \neg B, C, C \to B\}$$

demostra emprant el mètode dels taulers si és o no satisfactible. En cas afirmatiu presenta un model i en cas negatiu raona la resposta.

Solució. El conjunt donat és satisfactible, una branca oberta d'un tauler estricte maximal és:

1. $(\neg A \wedge \neg B) \vee C$
2. $A \vee \neg B$
3. C

4 $\neg C \vee B$

5. B [4]
6. A [2]
7. C [1]

Aquesta branca ens dona el model $I(A) = I(B) = I(C) = 1$. **Fi solució.**

2. Demostra pel mètode dels taulers que:

$$\exists x Px \wedge \forall y Qy \models \exists x Px \wedge \exists y Qy$$

Solució. Un tauler tancat estricte maximal és:

1. $\exists x Px \wedge \forall y Qy$
2. $\forall x \neg Px \vee \forall y \neg Qy$
3. $\exists x Px$ [1]
4. $\forall y Qy$ [1]
5. Pa [3]
6. Qa [4]

7.$\forall x \neg Px$ [2] || 8. $\forall y \neg Qy$ [2]

9. $\neg Pa$ [7] || 10. $\neg Qa$ [8]

$\times$ $\times$

Fi solució.

(2 punts) Demostra si les fórmules següents són equivalents o no:

$$\exists x \forall y (Px \land Qy) \text{ i } \forall y \exists x (Px \land Qy)$$

Solució.

$$\exists x \forall y (Px \land Qy) \equiv \exists x (Px \land \forall y Qy) \equiv \exists x Px \land \forall y Qy \equiv \forall y (\exists x Px \land Qy) \equiv \forall y \exists x (Px \land Qy)$$

Pertant equivalents. **Fi solució.**

$$\exists x \forall y (Rxy \land Sxy) \text{ i } \forall y \exists x (Rxy \land Sxy)$$

Solució. Sigui la interpretació amb domini $\{\alpha, \beta\}$ i valuació $[R \mapsto \{\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \beta, \beta \rangle\}, S \mapsto \{\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \beta, \beta \rangle\}, a \mapsto \alpha, b \mapsto \beta]$.
Les expansions són

$$((Raa \land Saa) \land (Rab \land Sab)) \lor ((Rba \land Sba) \land (Rbb \land Sbb))$$

i

$$((Raa \land Saa) \lor (Rab \land Sab)) \land ((Rba \land Sba) \lor (Rbb \land Sbb))$$

que avaluen a 0 i 1 respectivament.
Pertant aquesta és una interpretació diferenciadora i les fórmules són no equivalents. **Fi solució.**

(1,5 punts) Demostra per deducció natural la validesa de

$$R, (R \to P) \vee (Q \to \neg R) \models P \vee \neg Q$$

Nota: En cas de fer servir regles deductives no *primitives* (o sigui que no formen part propiament del sistema deductiu de la deducció natural) o equivalents deductius és precís donar també la seva demostració.

Solució. Demostra per deducció natural *fent servir només regles primitives* la validesa del seqüent següent:

$$R, (R \to P) \vee (Q \to \neg R) \vdash P \vee \neg Q$$

1.	R	H
2.	$(R \to P) \vee (Q \to \neg R)$	H
3.	$\quad \vert\ R \to P$	H
4.	$\quad \vert\ P$	E$\to$ 1, 3
5.	$\quad \vert\ P \vee \neg Q$	I$\vee$ 4
6.	$\quad \vert\ Q \to \neg R$	H
7.	$\quad \vert\ \quad \vert\ Q$	H
8.	$\quad \vert\ \quad \vert\ R$	IT 1
9.	$\quad \vert\ \quad \vert\ \neg R$	E$\to$ 6, 7
10.	$\quad \vert\ \neg Q$	I$\neg$ 7, 8, 9
11.	$\quad \vert\ P \vee \neg Q$	I$\vee$ 10
12.	$P \vee \neg Q$	E$\vee$ 2, 5, 11

Fi solució.