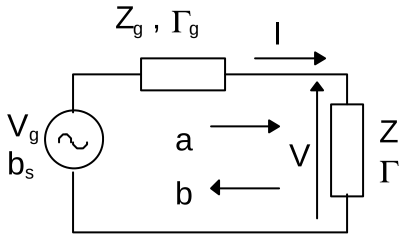
EXEMPLE DE CÀLCUL D'ONES DE POTÈNCIA

Pel circuit següent, calcular a, b, V, I, la potència disponible del generador P_{av} i potència dissipada a la càrrega P:



DADES:
V_g=10 V
Z_g= 30-j40 Ω
Z=70+j60 Ω
Z_0=50Ω

Els coeficients de reflexió associats a Z_g i Z són:

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} = 0{,}5\angle -90^{\circ} = -\frac{j}{2} \quad ; \quad \Gamma = \frac{Z - Z_o}{Z + Z_o} = 0{,}47\angle 45^{\circ} = \frac{(1+j)}{3}$$

1. Formalisme de tensions i corrents:

$$V = V_g \frac{Z}{Z + Z_g} = 9{,}045\angle 29{,}3^{\circ}\,V = 7{,}8 + j4{,}42\ V$$

$$I = V_g \frac{1}{Z + Z_g} = 98{,}1\angle -11{,}31^{\circ}\ mA = 96{,}2 - j19{,}2\ mA$$

$$P = \frac{1}{2}\Re[VI^*] = 0{,}3365\ W$$

$$P_{av} = \frac{1}{2}\Re\left[\frac{V_g\,Z_g^*}{Z_g + Z_g^*}\left(\frac{V_g}{Z_g + Z_g^*}\right)^*\right] = \frac{V_g^2}{8\Re\left[Z_g\right]} = 0{,}417\ W$$

2. Formalisme d'ones de potència:

$$b_s = \frac{V_g}{\sqrt{Z_0}}\frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} = \frac{1}{2}\frac{V_g}{\sqrt{Z_0}}\left(1 - \Gamma_g\right) = 0{,}79\angle 26{,}56^{\circ}\ W^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{2}\left|b_s\right|^2 = 0{,}312\ W$$

$$\left.\begin{aligned} a &= b_s \frac{1}{1 - \Gamma\Gamma_g} = 0{,}93\angle 15{,}25^{\circ} \quad W^{1/2} \\ b &= b_s \frac{\Gamma}{1 - \Gamma\Gamma_g} = 0{,}44\angle 60{,}25^{\circ} \quad W^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{b}{a} = \Gamma = 0{,}47\angle 45^{\circ}$$

$$P = \frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|b|^2 = 0{,}3365 \quad W$$

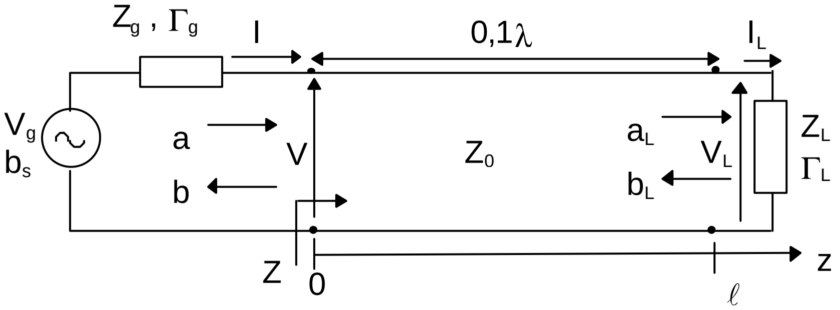
$$P_{av} = \frac{1}{2}\left|b_s\right|^2 \frac{1}{1 - \left|\Gamma_g\right|^2} = 0{,}4167 \quad W$$

A més, el valor de "a" es pot calcular com: $a=b_s+\Gamma_g b=0{,}93\angle 15{,}25^{\circ}$

La potència associada a l'ona positiva (1/2 $|a|^2$) és més gran que la potència disponible del generador. Això indica que l'ona positiva és, en certa manera, fictícia, en el sentit que la seva potència no s'estàdissipant enlloc. La potència que realment va a la càrrega és (1/2|a|^2-1/2|b|^2).

3. Relació amb les ones de les línies de transmissió

Considerem el circuit, de la figura següent:



DADES:
V_g=10 V
Z_g= 30-j40 Ω
Z_L=23,56+j25,45 Ω
Z_0=50Ω

El generador és el mateix, per tant P_{av} és igual a l'anterior (0,4167 W). La impedància d'entrada de la línia és:

$$Z = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\beta\ell}{Z_0 + jZ_L \tan\beta\ell} = 70 + j60\,\Omega$$

que és igual a la impedància Z del cas anterior. Per tant, els valors de V, I, a, b i P són els mateixos. Com que la impedància característica de la línia és igual a la de referència (50Ω), les ones de tensió a la línia en z=0 són:

$$V^+ = a\sqrt{Z_0} = 6{,}58\angle 15{,}25º\ \text{V} \quad ; \quad V^- = b\sqrt{Z_0} = 3{,}1\angle 60{,}25\ \text{V}$$

En el punt z=ℓ=0,1λ tindrem:

$$V_L = V(\ell) = V^+ e^{-j\beta\ell} + V^- e^{j\beta\ell} = 5{,}861\angle 7{,}37º\ \text{V}$$

$$I_L = I(\ell) = \frac{1}{Z_0}\left(V^+ e^{-j\beta\ell} - V^- e^{j\beta\ell}\right) = 0{,}169\angle -39{,}83º\ \text{A}$$

i per tant:

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = 23{,}56 + j25{,}45\,\Omega \quad ; \quad P_L = \frac{1}{2}\Re\left[V_L I_L^*\right] = 0{,}3365\ \text{W}$$

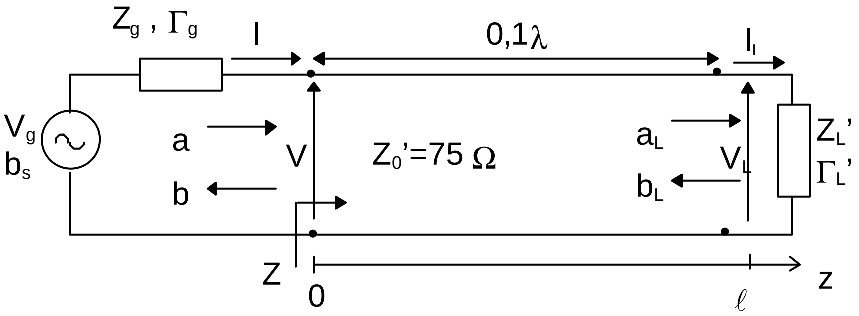
Com es veu, la potència que dissipa la càrrega és la mateixa que la que proporciona el generador. Això és perquè la línia no té pèrdues. Els valors de les ones a i b a la càrrega són:

$$a_L = \frac{1}{2}\left(\frac{V_L}{\sqrt{Z_0}} + I_L\sqrt{Z_0}\right) = 0{,}93\angle -20{,}74º = \underline{\mathbf{a}\ \mathbf{e}^{-j\beta\ell}}$$

$$b_L = \frac{1}{2}\left(\frac{V_L}{\sqrt{Z_0}} - I_L\sqrt{Z_0}\right) = 0{,}44\angle 96{,}25º = \underline{\mathbf{b}\ \mathbf{e}^{j\beta\ell}}$$

4. Cas de la línia d'impedància característica diferent

Ara considerem el mateix cas, però de manera que la línia tingui una impedància característica Z_0' diferent de la de referència:



DADES:
V_g=10 V
Z_g= 30-j40 Ω
Z_L'=36,13+j18,97 Ω
Z_0=50Ω

El generador és el mateix, per tant P_{av} és igual a l'anterior (0,4167 W). La impedància d'entrada de la línia és:

$$Z = Z'_0 \frac{Z'_L + jZ'_0 \tan\beta\ell}{Z'_0 + jZ'_L \tan\beta\ell} = 70 + j60\ \Omega$$

Com que és la mateixa que en els casos anteriors, els valors de V, I, a, b i P també ho seran. Aquí podem definir dos coeficients de reflexió per un mateix valor d'impedància:

$$\rho = \frac{Z - Z'_0}{Z + Z'_0} \quad i \quad \Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

El primer (ρ) és la relació entre les ones V^- i V^+ que viatgen per la línia. El segon (Γ) és la relació entre les "ones" b i a. Calculem les diferents ones:

$$\rho_g = \frac{Z_g - 75}{Z_g + 75} = 0{,}536\angle -117{,}51^o \ ; \ \rho = \frac{Z - 75}{Z + 75} = 0{,}384\angle 72{,}28^o$$

$$V_s = V_g \frac{Z'_0}{Z'_0 + Z_g} = 6{,}67\angle 20{,}85 V$$

$$V^+ = V_s \frac{1}{1 - \rho_g \rho} = 7{,}69\angle 11{,}17^o V \ ; \ V^- = V_s \frac{\rho}{1 - \rho_g \rho} = 2{,}95\angle 83{,}45^o V$$

Cal notar que les ones positiva i negativa normalitzades **<u>no</u>** són igual a a i b:

$$\frac{V^+}{\sqrt{75}} = 0{,}88\angle 11{,}17 \neq a \quad ; \quad \frac{V^+}{\sqrt{50}} = 1{,}088\angle 11{,}17 \neq a$$

La potència que propaga la línia és:

$$P = \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{75} - \frac{1}{2}\frac{|V^-|^2}{75} = 0{,}3365\ W$$

que és la mateixa que proporciona el generador. Ara calculem la tensió i corrent als extrems de la línia:

$$V = V(0) = V^{+} + V^{-} = 9{,}04\angle 29{,}29^{o}\ \mathrm{V}$$

$$I = I(0) = \frac{1}{Z'_0}\left(V^{+} - V^{-}\right) = 0{,}098\angle -11{,}31^{o}\ \mathrm{A}$$

$$V_L = V(\ell) = V^{+}e^{-j\beta\ell} + V^{-}e^{j\beta\ell} = 5{,}57\angle 6{,}81^{o}\ \mathrm{V}$$

$$I_L = I(\ell) = \frac{1}{Z'_0}\left(V^{+}e^{-j\beta\ell} - V^{-}e^{j\beta\ell}\right) = 0{,}136\angle -34{,}52^{o}\ \mathrm{A}$$

d'on es pot deduir la impedància de càrrega, així com la potència que dissipa:

$$Z'_L = \frac{V(\ell)}{I(\ell)} = 36{,}13 + j18{,}97\ \Omega \quad ; \quad P_L = \frac{1}{2}\Re[V(\ell)\, I(\ell)^{*}] = 0{,}3365\ \mathrm{W}$$

que són coherents amb els valors inicials. La potència continua sent la mateixa que la que lliura el generador. Finalment, podem encara calcular els valors de a i b en bornes de la impedància de càrrega:

$$a_L = \frac{1}{2}\left(\frac{V_L}{\sqrt{Z_0}} + I_L\sqrt{Z_0}\right) = 0{,}85\angle -22{,}10^{o} \neq \underline{\mathbf{a}\ \mathbf{e}^{-j\beta\ell}}$$

$$b_L = \frac{1}{2}\left(\frac{V_L}{\sqrt{Z_0}} - I_L\sqrt{Z_0}\right) = 0{,}227\angle 91{,}64^{o} \neq \underline{\mathbf{b}\ \mathbf{e}^{j\beta\ell}}$$

i, òbviament, es compleix :

$$\Gamma_L = \frac{b_L}{a_L} = 0{,}2665\angle 113{,}73^{o} \quad ; \quad P_L = \frac{1}{2}|a_L|^2 - \frac{1}{2}|b_L|^2 = 0{,}3365\ \mathrm{W}$$