

APUNTES DE ANÁLISIS VECTORIAL

4 de septiembre de 2007

Índice general

1. Topología de R^n. Sucesiones	1
1.1. Introducción	1
1.2. Norma, distancia y bolas	1
1.2.1. Definiciones	1
1.2.2. Norma	2
1.2.3. Distancia	3
1.2.4. Bolas	3
1.3. Conjuntos cerrados y abiertos	3
1.4. Sucesiones de puntos de \mathbb{R}^n	5
1.4.1. Sucesiones de Cauchy. Completitud	7
1.4.2. Conjuntos cerrados	8
1.5. Conjuntos compactos.	8
2. Límites y continuidad de funciones en R^n	9
2.1. Introducción	9
2.2. Funciones de varias variables. Funciones escalares y vectoriales	9
2.3. Límite de una función en un punto.	11
2.4. Límites direccionales, reiterados, infinitos,	12
2.4.1. Límites direccionales	12
2.4.2. Límites reiterados	13
2.4.3. Límites infinitos y en el infinito.	13
2.5. Continuidad	13
2.5.1. Propiedades de las funciones continuas	14
2.6. Otras propiedades de las funciones continuas.	15
2.6.1. Teorema de Weierstrass. Consecuencias	15
2.6.2. Conjuntos arco-conexos	16
2.6.3. Continuidad uniforme	17

3. Cálculo Diferencial en R^n	18
3.1. Introducción	18
3.2. Derivadas parciales y direccionales	19
3.2.1. Derivadas parciales. Matriz Jacobiana	19
3.2.2. Derivadas direccionales	20
3.3. Derivada o Diferencial de una función	21
3.3.1. Concepto de Diferencial. Propiedades	21
3.3.2. Aproximación lineal, hiper-plano tangente	24
3.3.3. Condiciones suficientes de diferenciabilidad	24
3.4. Propiedades de las funciones diferenciables	25
3.4.1. Regla de la cadena. Aplicaciones	26
3.5. Derivadas parciales de orden superior	27
3.5.1. Teorema de Schwarz	29
3.6. Teorema de la función inversa	30
3.7. Teorema de la función implícita	32
4. Aplicaciones geométricas de la derivación.	35
4.1. Gradiente de un campo escalar.	35
4.1.1. Definición y propiedades.	35
4.1.2. Interpretación geométrica del gradiente	36
4.2. Curvas parametrizadas en \mathbb{R}^n	37
4.2.1. Vector tangente a una curva. Orientación	38
4.3. Curvas regulares	39
4.3.1. Curvas en \mathbb{R}^2	40
4.3.2. Curvas en \mathbb{R}^3	41
4.4. Superficies parametrizadas	42
4.4.1. Vector ortogonal a una superficie. Orientación	43
4.5. Superficies regulares en \mathbb{R}^3	45
5. Estudio local de funciones en R^n	47
5.1. Fórmula de Taylor. Expresión del resto.	47
5.2. Extremos locales	51
5.2.1. Formas cuadráticas	51
5.2.2. Extremos locales de funciones. Puntos críticos.	53
5.2.3. Condición suficiente de extremo	54
5.3. Extremos condicionados locales. Multiplicadores de Lagrange	55

5.3.1. Método de los multiplicadores de Lagrange	56
5.4. Extremos absolutos	58
6. Integración de campos escalares en R^n	59
6.1. Introducción	59
6.2. Integral doble	59
6.2.1. Partición de rectángulos. Funciones escalonadas	59
6.2.2. Integral doble de una función escalonada	60
6.2.3. Integral doble de funciones acotadas	62
6.2.4. Interpretación geométrica de la integral doble.	64
6.2.5. Conjuntos de medida cero. Integración de funciones discontinuas	65
6.2.6. Integrales dobles en regiones más generales	65
6.2.7. Propiedad aditiva de la integración	66
6.2.8. Teorema de Fubini (para regiones tipo <i>I</i> y tipo <i>II</i>)	67
6.2.9. Aplicación al cálculo de áreas y volúmenes.	68
6.2.10. Cambio de variable en integral doble	68
6.3. Integrales triples. Integrales múltiple.	71
6.3.1. Cambio de variable en integrales n-múltiples	73
6.3.2. Propiedades de la integral múltiple	74
6.4. Funciones definidas por integrales. Teorema de Leibnitz (derivación bajo el signo integral) . .	75
6.5. Integrales impropias	77
6.5.1. Integrales impropias de primera especie	77
6.5.2. Integrales impropias de segunda especie	78
7. Integrales de línea y de superficie	79
7.1. Longitud de una curva	79
7.2. Integral de línea de una función escalar	80
7.3. Integral de línea de un campo vectorial	81
7.4. Campo conservativo. Potencial escalar	82
7.5. Área de una superficie.	85
7.6. Integral de superficie de una función escalar	88
7.7. Integral de superficie de un campo vectorial en \mathbb{R}^3	89
8. Teoremas integrales del Análisis Vectorial	91
8.1. Operadores diferenciales.	91
8.1.1. Gradiente.	91

8.1.2. Divergencia	91
8.1.3. Rotacional	92
8.1.4. Laplaciana	94
8.1.5. Propiedades de los operadores diferenciales	94
8.2. Teoremas integrales	95
8.2.1. Teorema de Green	95
8.2.2. Teorema de Stokes	102
8.2.3. Teorema de la divergencia (o de Gauss).	108

Capítulo 1

Topología de \mathbb{R}^n . Sucesiones

1.1. Introducción

En la asignatura de Cálculo se estudian las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. El objeto de este curso es estudiar las funciones $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Conceptos como continuidad, diferenciabilidad e integración conocidos para funciones de una variable se extenderán a funciones de varias variables. Para ello es preciso introducir una métrica en \mathbb{R}^n , es decir, saber cuál es la distancia entre dos puntos de \mathbb{R}^n . Y a partir de ello daremos la noción de conjuntos abiertos, cerrados y compactos en \mathbb{R}^n . También estudiaremos sucesiones de puntos y su convergencia.

1.2. Norma, distancia y bolas

1.2.1. Definiciones

Definición 1.1 Sea $n > 0$ un entero. Un conjunto ordenado de n números reales (x_1, \dots, x_n) se llama punto n -dimensional o vector con n componentes.

Los puntos o vectores se designarán por $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$. El número x_k se llama k -ésima coordenada del punto x o k -ésima componente del vector x .

Designaremos por $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. Definimos ahora las operaciones algebraicas con puntos de \mathbb{R}^n .

Definición 1.2 Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n entonces

1. Igualdad $x = y \iff x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.
2. Suma $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.
3. Multiplicación por un escalar si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.
4. Diferencia $x - y = x + (-1)y$.
5. Vector nulo u origen $0 = (0, \dots, 0)$.
6. Producto escalar $\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

1.2.2. Norma

Definición 1.3 Norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Comentario Obsérvese que cuando $n = 1$ ésta es precisamente la definición de *valor absoluto*.

Algunas propiedades de la norma son las siguientes:

Proposición 1.1 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ y como consecuencia $\|x - y\| = \|y - x\|$.
3. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (desigualdad de Schwarz).
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).
5. $\|x - y\| \geq | \|x\| - \|y\| |$.
6. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$, entonces $|x_i| \leq \|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.

(Dem.)

Se basan en las propiedades del producto escalar y demostraremos únicamente 3 y 4.

3. Basta con demostrar que:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

En efecto, observemos que

$$\sum_{i=1}^n (x_i z + y_i)^2 \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}.$$

Si hacemos $A = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $B = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ y $C = \sum_{i=1}^n y_i^2$ se tiene $Az^2 + 2Bz + C \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{R}$ y por tanto, la ecuación de 2º grado $Az^2 + 2Bz + C = 0$, o tiene una solución real doble, o no tiene ninguna lo que implica $B^2 - AC \leq 0$ que es la desigualdad buscada.

Se ha supuesto que $A \neq 0$ si $A = 0$ la demostración es trivial pues todos los x_i son nulos.

$$\begin{aligned} 4. \|x + y\|^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i) = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

en la última desigualdad se tiene en cuenta 3. ■

Se dice que $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ es un *espacio normado*.

1.2.3. Distancia

Definición 1.4 Se denomina distancia entre x e y a $d(x, y) = \|x - y\|$.

Las propiedades de la distancia se obtienen a partir de las de la norma y algunas de ellas son las siguientes:

Proposición 1.2 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

1. $d(x, y) = d(y, x)$.
2. $d(x, y) = 0 \iff y = x$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular).

(Dem.) Inmediatas. ■

Se dice que (\mathbb{R}^n, d) es un espacio métrico.

Con estas definiciones, siguiendo la terminología del Álgebra lineal, \mathbb{R}^n es un espacio vectorial euclídeo.

1.2.4. Bolas

Los siguientes conceptos generalizan en \mathbb{R}^n las nociones de intervalos (abiertos y cerrados) en \mathbb{R} .

Definición 1.5 Sea un punto $a \in \mathbb{R}^n$ y un escalar $r \in \mathbb{R}^+$. Se denomina n -bola abierta con centro en a y radio r al conjunto

$$B(a, r) = B_r(a) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$

También se utiliza la bola perforada $B_r^*(a) = B_r(a) - \{a\}$.

Ejemplo 1.1

- En \mathbb{R} , $B_r(a)$ es el intervalo abierto $(a - r, a + r)$.
- En \mathbb{R}^2 , $B_r(a)$ es el círculo de centro a y radio r .
- En \mathbb{R}^3 , $B_r(a)$ es la esfera de centro a y radio r .

Definición 1.6 Un conjunto es acotado si existe alguna bola que lo contiene.

Definición 1.7 Se denomina entorno de un punto a , de \mathbb{R}^n , a todo conjunto que contenga alguna bola de centro a .

1.3. Conjuntos cerrados y abiertos

Definición 1.8 Respecto de A , subconjunto de \mathbb{R}^n , se dice que un punto a es:

- Punto interior: si existe alguna n -bola abierta, con centro a , tal que $B_r(a) \subset A$.
- Punto adherente: si toda bola, con centro a , contiene puntos de A . Puede ser

aislado: hay alguna bola $B_r(a)$ tal que $B_r(a) \cap A = \{a\}$,

de acumulación: toda bola $B_r(a)$ contiene puntos de A diferentes de a .

- Punto frontera: si toda bola $B_r(a)$ contiene puntos de A y de su complementario $\mathbb{R}^n - A$.
- Punto exterior: si existe alguna bola $B_r(a)$ que no contiene ningún punto de A .

Definición 1.9 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto se definen:

- Interior de A , $\mathring{A} = \text{Int}(A) = \{\text{puntos interiores de } A\}$.
- Adherencia de A , $\bar{A} = \{\text{puntos adherentes de } A\}$.
- Conjunto derivado de A , $A' = \{\text{puntos de acumulación de } A\}$.
- Frontera de A , $\text{Fr}(A) = \{\text{puntos frontera de } A\}$.
- Exterior de A , $\text{Ext}(A) = \{\text{puntos exteriores de } A\}$.

Ejemplo 1.2 Si $A = \{1/n, n \in \mathbb{R}\}$, entonces 0 es punto de acumulación de A .

Teorema 1.1 Si x es un punto de acumulación de A , toda n -bola $B_r(x)$ contiene infinitos puntos de A .

(Dem.)

Supongamos que exista alguna bola $B_r(x)$ que contiene solamente n puntos de A , a_1, a_2, \dots, a_n distintos de x . Sea $r = \min\{\|x - a_1\|, \dots, \|x - a_n\|\}$, entonces $B_{r/2}(x)$ no contiene ningún punto de A distinto de x y por tanto x no es punto de acumulación de A . ■

Corolario 1.1 Los conjuntos finitos no tienen puntos de acumulación.

El recíproco no necesariamente es cierto. Un conjunto infinito puede no tener puntos de acumulación, como por ejemplo el conjunto $B = \{1, \dots, n, \dots\}$. Una condición suficiente para que el recíproco sea cierto la da el siguiente teorema.

Teorema 1.2 (de Bolzano-Weierstrass).

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado con infinitos puntos, entonces existe al menos un punto de \mathbb{R}^n que es punto de acumulación de A .

Definición 1.10 A subconjunto de \mathbb{R}^n es:

- Abierto si todos sus puntos son interiores. Esto es, A es abierto $\iff A = \text{Int } A$.
- Cerrado si su complementario, $\mathbb{R}^n - A$, es abierto.

Ejemplo 1.3

- En \mathbb{R}^n , $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ es un abierto, se denomina intervalo abierto n -dimensional o también rectángulo abierto.
- En \mathbb{R}^n , $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ es un cerrado, se denomina intervalo cerrado n -dimensional o también rectángulo cerrado.
- Los conjuntos finitos son cerrados.

Proposición 1.3

1. Propiedades de los conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n :

- \emptyset, \mathbb{R}^n y las bolas abiertas, son abiertos.
- La unión de abiertos es un abierto.

(Dem.) Sea F una colección arbitraria de abiertos y sea $S = \bigcup_{A \in F} A$.

$\forall x \in S$ existe $A \in F$ tal que $x \in A$ y como es abierto existe $B_r(x) \subset A \subset S$ por tanto $x \in \text{Int}(S)$ luego S es un abierto. ■

- La intersección de dos abiertos es un abierto. Como consecuencia, la intersección de un conjunto finito de abiertos es un abierto.

(Dem.) Sea $S = A_1 \cap A_2$ para todo $x \in S$ existen $B_{r_1}(x) \subset A_1$ y $B_{r_2}(x) \subset A_2$ y sea $r = \min(r_1, r_2)$, entonces $B_r(x) \subset S$ y por tanto todo punto de S es interior luego S es abierto. ■

No necesariamente la intersección de infinitos abiertos es un abierto por ejemplo

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) = [-1, 1] \text{ (veáanse también los problemas adicionales).}$$

2. Propiedades de los conjuntos cerrados de \mathbb{R}^n :

- \emptyset, \mathbb{R}^n y las bolas cerradas, son cerrados.
- La intersección de cerrados es un cerrado.

(Dem.) La intersección de cerrados es el complementario de la unión de los complementarios, que son abiertos, y por lo anterior es un abierto y su complementario cerrado. ■

- La unión de dos cerrados es un cerrado. Como consecuencia, la unión de un conjunto finito de cerrados es un cerrado.

(Dem.) Igual que la anterior. ■

La unión de infinitos cerrados no necesariamente es un cerrado por ejemplo

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] = (-1, 1) \text{ (veáanse también los problemas adicionales).}$$

Dentro de \mathbb{R}^n los únicos conjuntos que son cerrados y abiertos son \emptyset y \mathbb{R}^n .

Proposición 1.4 Otras caracterizaciones de conjunto cerrado son:

- A es cerrado $\iff A = \bar{A}$.
- A es cerrado \iff contiene todos sus puntos de acumulación.
- A es cerrado \iff contiene todos sus puntos frontera.

1.4. Sucesiones de puntos de \mathbb{R}^n .

El concepto de sucesión de números reales se generaliza en \mathbb{R}^n de la siguiente manera:

Definición 1.11 Se denomina sucesión (de puntos o vectores) en \mathbb{R}^n a toda aplicación $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, y la notaremos por $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Comentarios

- Se usa la misma terminología y notación que para sucesiones numéricas. Así, las imágenes de la aplicación se denominan *términos* o *elementos* de la sucesión. El *término general* de una sucesión de vectores se designa por x_k .
- Obsérvese que como $x_k \equiv (x_k^1, \dots, x_k^n)$, entonces una sucesión de vectores en \mathbb{R}^n induce n sucesiones numéricas $\{x_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $i = 1 \dots n$.

Definición 1.12 Sea $\{x_k\}$ una sucesión de puntos de \mathbb{R}^n . Se dice que $a \in \mathbb{R}^n$ es el límite de la sucesión si, $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$, entonces $\|x_k - a\| < \varepsilon$. Se usará la notación $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, o también $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$.

Si una sucesión tiene límite se dice que es convergente, si no lo tiene es no convergente o divergente.

Comentarios

- Esta es la misma definición que para sucesiones numéricas cambiando el valor absoluto por la norma.
- Nótese que la definición de límite significa que, a partir del término k_0 -ésimo todos los términos están contenidos en una bola abierta de centro en a y radio ε .

Las propiedades de las sucesiones de vectores son análogas a las de las sucesiones numéricas:

Proposición 1.5 Sean $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ sucesiones en \mathbb{R}^n y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ si y sólo si, $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - a) = 0$ (vector nulo).
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ si y sólo si, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = a^i$ ($i = 1, \dots, n$), (las sucesiones de las coordenadas convergen a las correspondientes coordenadas de a).
3. Si $\{x_k\}$ es convergente entonces está acotada.
4. Si $\{x_k\}$ tiene límite entonces éste es único.
5. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = b$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k \pm y_k) = a \pm b$.
6. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda x_k = \lambda a$.
7. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ y $\{y_k\}$ es otra sucesión tal que $\{\|y_k\|\}$ acotada entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_k, y_k \rangle = 0$
8. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = b$ entonces para la sucesión de los productos escalares se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_k, y_k \rangle = \langle a, b \rangle$ y como consecuencia $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \|a\|$.

(Dem.)

1. Como en \mathbb{R} .
2. Inmediata observando que, de acuerdo con el apartado 6 de la proposición 1.1,

$$|x_k^i - a^i| \leq \|x_k - a\| \leq \sum_{i=1}^n |x_k^i - a^i|$$

3. Como en \mathbb{R} .
4. Es una consecuencia de 2 y de la unicidad del límite de las sucesiones numéricas.

5. Inmediata observando que, de acuerdo con la *desigualdad triangular*,

$$\|x_k + y_k - a - b\| \leq \|x_k - a\| + \|y_k - b\|$$

6. Inmediata.

7. Usando la *desigualdad de Schwarz* se tiene que

$$0 \leq |\langle x_k, y_k \rangle| \leq \|x_k\| \|y_k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

8. Obsérvese que

$$\langle x_k, y_k \rangle - \langle a, b \rangle = \langle x_k - a, y_k \rangle + \langle a, y_k \rangle - \langle a, b \rangle = \langle x_k - a, y_k \rangle + \langle a, y_k - b \rangle$$

y ambas sucesiones tienen límite igual a 0 como consecuencia de 7. ■

Comentario Teniendo en cuenta la segunda propiedad, el cálculo de límites de sucesiones de vectores se reduce al cálculo de límites de sucesiones numéricas (las sucesiones de las coordenadas).

1.4.1. Sucesiones de Cauchy. Completitud

Igual que se hizo con las sucesiones numéricas, se define el siguiente concepto:

Definición 1.13 Sea $\{x_k\}$ una sucesión. $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy si $\forall \varepsilon \geq 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k, l \geq k_0$, entonces $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$.

Comentario :

- Nótese que esta definición significa que, a partir del término k_0 -ésimo todos los términos de la sucesión están contenidos en una bola abierta de diámetro ε .

Proposición 1.6 $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy si, y sólo si, lo son las n sucesiones numéricas componentes $\{x_k^i\}$.

(Dem.) Inmediata observando que, de acuerdo de nuevo con el apartado 6 de la proposición 1.1,

$$|x_k^i - x_l^i| \leq \|x_k - x_l\| \leq \sum_{i=1}^n |x_k^i - x_l^i|$$

■

Proposición 1.7 Toda sucesión en \mathbb{R}^n convergente es de Cauchy.

(Dem.) Como en \mathbb{R} . ■

Se dice que un espacio vectorial es *completo* si toda sucesión convergente es de Cauchy.

Teorema 1.3 (de completitud de \mathbb{R}^n): En \mathbb{R}^n toda sucesión de Cauchy es convergente, por tanto las sucesiones convergentes son las sucesiones de Cauchy.

(Dem.) Basta usar las sucesiones de las coordenadas y el teorema de completitud de \mathbb{R} . ■

1.4.2. Conjuntos cerrados

Damos ahora una nueva caracterización de conjunto cerrado a partir de sucesiones

Proposición 1.8 $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_k\}$ de puntos de A convergente, su límite es un punto $x \in A$.

(Dem.)

(\Rightarrow)

Si A es cerrado y $x_k \rightarrow x$, con $\{x_k\} \subset A$, entonces en todo entorno de x hay puntos de $\{x_k\}$, esto es puntos de A , luego $x \in \bar{A}$ y, por tanto, $x \in A$.

(\Leftarrow)

$\forall x \in \text{Fr } A$, existe una sucesión $\{x_k\} \subset A$ con $x_k \rightarrow x$. En efecto, basta tomar $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \cap A$. Pero, por hipótesis, toda sucesión de puntos de A convergente lo es a un punto de A , luego $x \in A$. Por consiguiente $\text{Fr } A \subset A$, luego A es cerrado. ■

1.5. Conjuntos compactos.

Una vez estudiados los conjuntos abiertos y cerrados en \mathbb{R}^n vamos a definir ahora los conjunto compactos.

Definición 1.14 Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. K es un conjunto compacto si es cerrado y está acotado.

La propiedad que relaciona los conjuntos compactos con las sucesiones es la siguiente:

Proposición 1.9 $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si, y sólo si, de toda sucesión de puntos de $\{x_k\} \subset K$ se puede obtener una subsucesión convergente a un punto $x \in K$.

(Dem.)

(\Rightarrow)

Sea K compacto y $\{x_k\} \subset K$. Suponemos que la sucesión $\{x_k\}$ tiene infinitos términos distintos, en caso contrario es fácil extraer subsucesiones convergentes, entonces por el teorema 2 de Bolzano-Weierstrass tiene un punto de acumulación b , lo que implica que toda bola centrada en b contiene infinitos puntos de la sucesión.

Para la bola $B_1(b)$ elegimos un punto $x_{h_1} \in \{x_k\}$.

Para la bola $B_{1/2}(b)$ elegimos un punto $x_{h_2} \in \{x_k\}$, con $h_2 > h_1$.

Para la bola $B_{1/3}(b)$ elegimos un punto $x_{h_3} \in \{x_k\}$, con $h_3 > h_2$, y así sucesivamente.

Obtenemos de esta forma una subsucesión $\{x_{h_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, en K , que tiene como límite b y como K es cerrado entonces $b \in K$.

(\Leftarrow)(Reducción al absurdo):

1. Si K no es cerrado $\Rightarrow \exists x \in \text{Fr } K$ con $x \notin K$. Sea $\{x_k\} \subset K$ tal que $x_k \rightarrow x$, entonces cualquier subsucesión de ésta converge a $x \notin K$, contra la hipótesis.
2. Si K no está acotado entonces, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists x_k \in K$ con $\|x_k\| > k$. Obtenemos así una sucesión $\{x_k\}$ divergente que no tiene subsucesiones convergentes contra la hipótesis. ■

Capítulo 2

Límites y continuidad de funciones en \mathbb{R}^n

2.1. Introducción

En el curso de *Cálculo Infinitesimal* se analizaron únicamente las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reales de variable real.

Sin embargo, en la naturaleza hay fenómenos para cuya descripción matemática se requieren funciones que dependen de más de una variable y que, en Física, suelen denominarse *campos*. Por ejemplo,

- La *temperatura* de una región del espacio (a lo largo del tiempo):

$$\begin{aligned} T &: A \subseteq \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) &\mapsto T(x, y, z, t) \end{aligned}$$

- La *velocidad* de las partículas de un fluido en movimiento

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \mathbf{v}(x, y, z) \end{aligned}$$

- El campo eléctrico creado por una carga puntual.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \mathbf{E}(x, y, z) \end{aligned}$$

En este capítulo comenzaremos el estudio de este tipo de funciones. En concreto estudiaremos los conceptos de *límite* y *continuidad*. En los siguientes capítulos, se abordarán las cuestiones relativas a la *diferenciabilidad* e *integrabilidad* de estas funciones.

2.2. Funciones de varias variables. Funciones escalares y vectoriales

Definición 2.1 Se denomina campo o función de varias variables a toda aplicación

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (n > 1, m \geq 1)$$

El conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ donde está definida la aplicación recibe el nombre de dominio de la función y se denota por $\text{Dom } f$.

Igualmente llamaremos imagen de f al conjunto de puntos que son imagen de algún punto del dominio, $\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = y, x \in \text{Dom } f\}$.

1. Si $m = 1$ entonces se dice que f es una función escalar.
2. Si $m > 1$ entonces se dice que f es una función vectorial. La función vectorial f

$$f : \begin{array}{ccc} A \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x \equiv (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_m(x)) \end{array}$$

da origen a m funciones escalares $f_j: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$.

Estas funciones escalares se denominan funciones componentes de f

Una función se dice acotada si su imagen es un conjunto acotado.

Comentario

- Como en general el estudio de funciones vectoriales se reduce al de sus funciones componentes haremos especial énfasis en el estudio de campos escalares.

Ejemplo 2.1

- Funciones escalares: temperatura, presión, densidad,...
- Funciones vectoriales: campos gravitatorio, electrostático, electromagnético...

Introduzcamos, a continuación, algunas herramientas útiles para el estudio de funciones.

Definición 2.2 1. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Se denomina gráfica de la función f al conjunto de puntos de \mathbb{R}^{n+m}

$$\text{graf } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in A\}$$

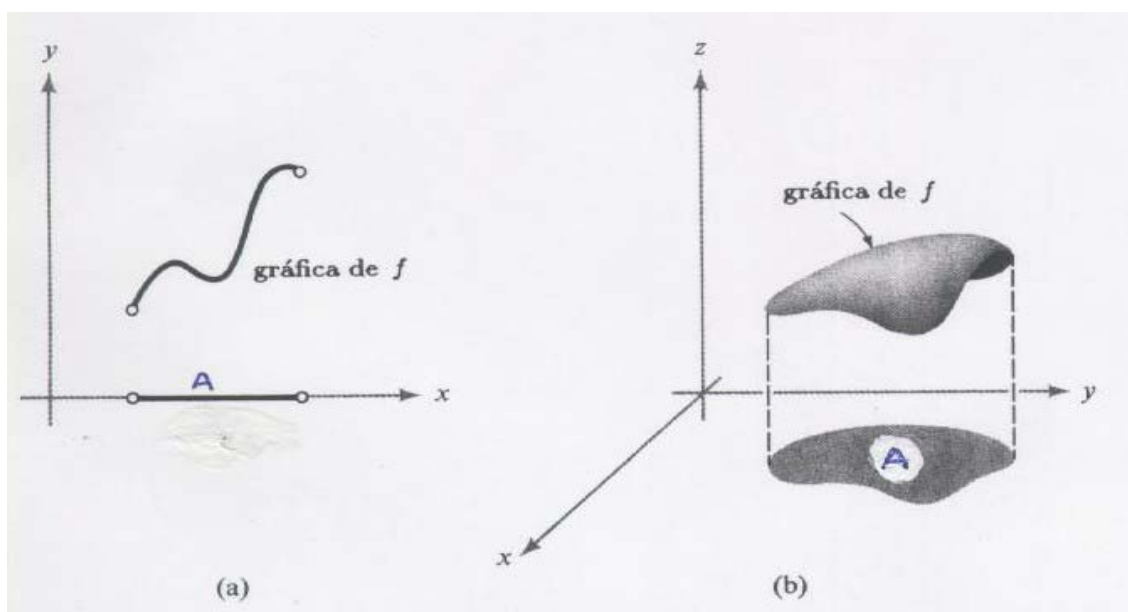


Figura 2.1: a) Gráfica de un campo escalar en \mathbb{R} y b) de un campo escalar en \mathbb{R}^2

2. Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se denomina conjunto de nivel de F al conjunto de puntos del dominio donde la función tiene el valor constante k , es decir

$$\Phi_k = \{x \in A \mid F(x) = k\}$$

3. Si $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se denominan secciones de la gráfica de f a la intersección de $\text{graf } f$ con planos de \mathbb{R}^3 . (Es habitual considerar los planos coordenados o planos paralelos a éstos)

Comentario

- Un campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene como grafica, en general, una curva en \mathbb{R}^2 cuya ecuación es $y = f(x)$ lo que denominaremos *ecuación explícita* de la curva. Igualmente si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ la grafica de f está en \mathbb{R}^3 y es, generalmente, una superficie cuya *ecuación explícita* es $z = f(x, y)$ (vease figura 2.1).
- Si se trata de una función de dos variables el conjunto de nivel es, en general, una curva cuya ecuación es $F(x, y) = cte$, diremos que es una curva en *forma implícita*. En el caso de tres variables tenemos la superficie en *forma implícita* $F(x, y, z) = cte$.
- Obsérvese que, en particular, para funciones de dos variables $f(x, y)$, las secciones obtenidas al intersectar la grafica de f con los planos paralelos al plano coordenado XY proyectadas ortogonalmente sobre dicho plano, coinciden con las curvas de nivel de la función .
- El estudio de las secciones y superficies de nivel es útil con vistas a tener una idea aproximada de cómo es la grafica de la función.

Sean $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, se definen $f + g$, λf y fg como suma o producto componente a componente, es decir $(f + g)(x) = ((f_1 + g_1)(x), \dots, (f_m + g_m)(x))$ y análogamente las otras.

Por otra parte, si $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ se define la función compuesta $g \circ f: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, observemos que $C = \text{Dom}(g \circ f) = A \cap f^{-1}(B)$

2.3. Límite de una función en un punto.

Continuaremos el análisis de las funciones de varias variables estudiando el comportamiento de una función en el entorno de un punto. La primera noción sobre este particular es la de límite:

Definición 2.3 Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función, $a \in \mathbb{R}^n$ un punto de acumulación de A y $b \in \mathbb{R}^m$.

Se dice que b es el límite de f cuando x tiende a a si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, si $x \in A - \{a\}$ y $\|x - a\| < \delta$, entonces $\|f(x) - b\| < \varepsilon$. Se escribirá $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, o bien $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ ¹.

La siguiente proposición nos da una definición alternativa de límite.

Proposición 2.1 Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función, $a \in \mathbb{R}^n$ un punto de acumulación de A y $b \in \mathbb{R}^m$.

Entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff$ para toda sucesión $\{x_k\} \subset A - \{a\}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, se tiene para la sucesión de las imágenes, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = b$.

(Dem.) Como en el caso de una variable. ■

Las propiedades de los límites de funciones de varias variables son análogas a las del caso de una variable y son las siguientes:

Proposición 2.2 Sean $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones, $a \in \mathbb{R}^n$ un punto de acumulación de A y $b, c \in \mathbb{R}^m$.

1. Si una función tiene límite, éste es único.

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = b_j \quad (j = 1, \dots, m)$

Así, el cálculo de límites de funciones vectoriales se reduce al cálculo de límites de funciones escalares.

3. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$.

¹Esta es la misma definición que para funciones de una variable cambiando el valor absoluto por la norma.

4. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda b$.
5. Si $m = 1$, por tanto función escalar, $f(x) \neq 0 \forall x \in A$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0$, entonces $\frac{1}{f(x)}$ está bien definida en A y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$.
6. Si $m = 1$, f tiene límite en a y éste es positivo, existe alguna bola perforada con centro en a sobre la que f toma valores positivos.
7. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = (b_1 c_1, \dots, b_m c_m)$.
8. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$ lo que implica $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|b\|$.
9. Si f tiene límite en a , entonces esta acotada sobre alguna bola de centro a .
10. Si $m = 1$ y $f \leq h \leq g$ en un entorno perforado (sin el punto a) de a , y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$.
11. Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g: B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, con $f(A) \subset B$. Si a es punto de acumulación de A y $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ es un punto de acumulación de B , y $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$ en cualquiera de los dos casos siguientes
 - $b \notin B$
 - g es continua en b , (se define posteriormente).

(Dem.) Se deducen fácilmente de la definición de límite y las propiedades de la norma. ■

2.4. Límites direccionales, reiterados, infinitos, ...

En el cálculo de límites de funciones de varias variables no se dispone de técnicas análogas a las del caso de una variable, no existe nada semejante a la *regla de L'Hôpital*. Ello obliga a desarrollar otros métodos de cálculo basados en los conceptos que se van a exponer en este apartado. Dado que el límite de una función vectorial se obtiene calculando el de sus funciones componentes, sólo vamos a considerar, en adelante, el caso de funciones escalares.

2.4.1. Límites direccionales

Definición 2.4 Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$ un punto de acumulación de A .

1. Sea $\mathbf{c}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow A - \{a\}$ una aplicación continua tal que $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{c}(t) = a$ con $t_0 \in I$, diremos que $\mathbf{c}(I)$ es una curva en A . Se denomina *límite de f para x tendiendo a a según la curva $\mathbf{c}(t)$ al valor $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\mathbf{c}(t))$* . Obsérvese que se trata de un límite de una función de una variable.
2. Con las mismas hipótesis que en el apartado anterior, se denomina *límite direccional de f para $x \rightarrow a$ al límite según la recta $\mathbf{c}(t) = a + t\mathbf{v}$, esto es, $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + t\mathbf{v})$* .

Como caso particular, en el caso de funciones de dos variables, y con curvas (rectas) dadas en forma explícita se tiene que, si $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $a = (a_1, a_2)$ es un punto de acumulación de A ,

1. El límite de f para $x \rightarrow a$ según la curva $y = g(x)$, que pasa por a , es $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, g(x))$
2. El límite direccional de f para $x \rightarrow a$ según la recta $y = mx + b$, que pasa por a , es $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, mx + b)$.

Proposición 2.3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ si, y sólo si, los límites según todas las posibles curvas que pasen por a , contenidas en su dominio, existen y son iguales a b .

Y un corolario de este resultado, referido a los límites direccionales es:

Corolario 2.1 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ entonces los límites direccionales según cualquier recta que pase por a existen y valen b .

Comentarios

- Como consecuencia de la anterior proposición, si el límite a lo largo de alguna curva no existe o no coincide con el límite a lo largo de otra curva, en un mismo punto, deducimos que la función no tiene límite en dicho punto. Constituye una herramienta útil para deducir que una función no tiene límite.
- En general los apartados 10 y 11 de la proposición 2.2 constituyen una herramienta útil para el cálculo de límites.

2.4.2. Límites reiterados

Definición 2.5 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, se define como límites reiterados a

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

Comentarios

- Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = p$ y existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ y $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ entonces existen los límites reiterados de f y valen p .
- Puede ocurrir que exista $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ y no exista alguno de los reiterados.
- Si existen el límite de la función y los reiterados en un mismo punto, han de coincidir.

2.4.3. Límites infinitos y en el infinito.

Definición 2.6 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

1. Diremos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ si $\forall L > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in A - \{a\}$ que cumpla $\|x - a\| < \delta$ se tiene $\|f(x)\| > L$. Límite infinito.
2. Si A es no acotado, diremos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ si $\forall \epsilon > 0 \exists M > 0$ tal que $\forall x \in A$ que cumpla $\|x\| > M$ se tiene $\|f(x) - b\| < \epsilon$. Límite en el infinito.
3. Si A es no acotado, diremos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ si $\forall L > 0 \exists M > 0$ tal que $\forall x \in A$ que cumpla $\|x\| > M$ se tiene $\|f(x)\| > L$. Límite infinito en el infinito.

2.5. Continuidad

Definición 2.7 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $a \in A$. Se dice que f es continua en a si, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in A$ que cumpla $\|x - a\| < \delta$ entonces $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$.

Comentarios

- Si a es un punto aislado de A entonces \mathbf{f} es continua en a .
- Si a es un punto de acumulación de A entonces \mathbf{f} es continua en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(a).$$

- \mathbf{f} es continua en a si para toda sucesión $\{x_k\}$ de elementos de A tal que $x_k \rightarrow a$, se tiene $\mathbf{f}(x_k) \rightarrow \mathbf{f}(a)$.
- \mathbf{f} es continua si lo es en todo punto de su dominio.

2.5.1. Propiedades de las funciones continuas

Las propiedades de las funciones continuas se basan en las propiedades del límite:

Proposición 2.4 Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones y $a \in A$.

1. \mathbf{f} es continua en a si y sólo si, cada una de sus funciones componentes f_i es continua en a .
2. Si \mathbf{f} y \mathbf{g} son continuas en a , también lo son: $\mathbf{f} \pm \mathbf{g}$, \mathbf{fg} y $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$.
3. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si \mathbf{f} es continua en a , también lo es $\lambda \mathbf{f}$.
4. Si $m = 1$ y $f(x) \neq 0, \forall x \in A$, entonces $\frac{1}{f(x)}$ está bien definida en A y si f es continua en a , también lo es $\frac{1}{f(x)}$.
5. Si $m = 1, f(x) \neq 0$ y f es continua en a , f no cambia de signo en algún entorno de a .
6. Si \mathbf{f} es continua en a , \mathbf{f} está acotada en algún entorno de a .
7. Si $\mathbf{g}: B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l, b = \mathbf{f}(a) \in B$ y \mathbf{f} y \mathbf{g} son continuas en a y b respectivamente, entonces $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es continua en a .

Ejemplo 2.2 Las siguientes funciones son continuas:

- Las proyecciones coordenadas $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f_i(x) = x_i$.
- Las lineales.
- Las polinómicas.
- Las racionales, cociente de funciones polinómicas, en todo punto que no anule el denominador.
- Las trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, \dots

Teorema 2.1 Sea $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes

1. \mathbf{f} es continua
2. Para todo abierto $V \subset \mathbb{R}^m, \mathbf{f}^{-1}(V) = A \cap U$ donde U es un abierto de \mathbb{R}^n
3. Para todo cerrado $T \subset \mathbb{R}^m, \mathbf{f}^{-1}(T) = A \cap S$ donde S es un cerrado de \mathbb{R}^n

Este teorema sirve para caracterizar conjuntos abierto y cerrados, veanse los ejercicios propuestos.

(Dem.)

Veamos que 1. \Rightarrow 2.

Sea V un abierto de \mathbb{R}^m y a un punto de $\mathbf{f}^{-1}(V)$. Sea $\mathbf{f}(a) = b$, como V es abierto existe $B_\varepsilon(b) \subset V$.

Por ser \mathbf{f} continua en A existe $B_{\delta_a}(a)$ tal que $\mathbf{f}(B_{\delta_a}(a) \cap A) \subset B_\varepsilon(b)$. De donde se deduce que

$$B_{\delta_a}(a) \cap A \subset \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(B_{\delta_a}(a) \cap A)) \subset \mathbf{f}^{-1}(B_\varepsilon(b)) \subset \mathbf{f}^{-1}(V)$$

y esto implica

$$\mathbf{f}^{-1}(V) = \bigcup_{a \in \mathbf{f}^{-1}(V)} [B_{\delta_a}(a) \cap A] = \left[\bigcup_{a \in \mathbf{f}^{-1}(V)} B_{\delta_a}(a) \right] \cap A = U \cap A, \text{ con } U \text{ abierto de } \mathbb{R}^n$$

donde se ha tenido en cuenta que la unión de abiertos es un abierto.

Veamos que 2. \Rightarrow 1.

Sea $a \in A$ y $\mathbf{f}(a) = b$. Veamos que \mathbf{f} es continua en a .

Sean $\varepsilon > 0$ y $B_\varepsilon(b)$ la bola abierta en \mathbb{R}^m . Por hipótesis $\mathbf{f}^{-1}(B_\varepsilon(b)) = U \cap A$, con U abierto en \mathbb{R}^n . Como $a \in U \cap A$ y U es abierto, existe un $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(a) \cap A \subset U \cap A = \mathbf{f}^{-1}(B_\varepsilon(b))$$

luego

$$\mathbf{f}(B_\delta(a) \cap A) \subset B_\varepsilon(b)$$

lo que implica que \mathbf{f} es continua en a .

Veamos que 2. \Rightarrow 3.

T cerrado implica que $\mathbb{R}^m - T$ es un abierto. Luego por 2, $\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{R}^m - T) = U \cap A$ donde U es un abierto de \mathbb{R}^n . Por tanto $\mathbf{f}^{-1}(T) = (\mathbb{R}^n - U) \cap A$ y $\mathbb{R}^n - U$ es un cerrado de \mathbb{R}^n .

Veamos que 3. \Rightarrow 2.

Análogo al caso anterior.

■

Ejemplo 2.3 Sea $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, y $T = [1, \infty)$ (que es cerrado en \mathbb{R}). Se tiene que $f^{-1}(T) = (0, 1] = (0, \infty) \cap S$, donde $S = [0, 1]$ es cerrado en \mathbb{R} .

2.6. Otras propiedades de las funciones continuas.

2.6.1. Teorema de Weierstrass. Consecuencias

A continuación vamos a dar algunas propiedades de las funciones continuas, que son generalizaciones de otras bien conocidas en el cálculo de una variable.

Teorema 2.2 (de Weierstrass): Sea $\mathbf{f}: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua y K un compacto. Entonces $\mathbf{f}(K)$ es compacto.

(Dem.) Se ha de demostrar que $\mathbf{f}(K)$ es cerrado y está acotado.

1. **$f(K)$ es cerrado:** Hemos de probar que $\text{Fr}(f(K)) \subset f(K)$. Sea $y \in \text{Fr}(f(K))$, sabemos que existe una sucesión $\{y_h\} \subset f(K)$ tal que $\lim_{h \rightarrow \infty} y_h = y$.
 Sea $\{x_h\}$ la sucesión en K tal que $f(x_h) = y_h$. Por ser K compacto, existe una subsucesión $\{x_{h_i}\}$ convergente en K , esto es, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{h_i} = a \in K$. Por ser f continua la sucesión $\{f(x_{h_i})\}$ converge a $f(a)$ en \mathbb{R}^m . Ahora bien, $f(x_{h_i}) = y_{h_i}$ y la sucesión $\{y_{h_i}\}$ es subsucesión de $\{y_h\}$, que tiene límite, y por tanto ambas tienen que tener el mismo límite. Luego $y = f(a) \in f(K)$ lo que implica $\text{Fr}(f(K)) \subset f(K)$, así pues $f(K)$ es un conjunto cerrado.
2. **$f(K)$ está acotado:** Si no lo estuviera, $\forall h \in \mathbb{N}, \exists x_h \in K$ tal que $\|f(x_h)\| > h$ y tendríamos la sucesión $\{x_h\}$ en K , que como es un compacto ha de tener alguna subsucesión convergente. Sea esta $\{x_{h_i}\}$ y $a \in K$ su límite. Por tanto, puesto que f es continua, $\{f(x_{h_i})\} \rightarrow f(a)$, lo cual es absurdo dado que la sucesión no está acotada. Luego $f(K)$ tiene que estar acotado.

■

Son consecuencias de este teorema:

Proposición 2.5 *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f toma en K valores extremos*

(Dem.)

Por el teorema anterior $f(K)$ es un compacto o sea cerrado y acotado. Sea $h = \inf f(K)$, entonces h es un punto adherente de $f(K)$, que es un cerrado, lo que implica $h \in \overline{f(K)} \subset f(K)$. Por tanto existe un $x \in K$ tal que $f(x) = h$ y por tanto f alcanza el ínfimo. Igualmente se demostraría la existencia del supremo. ■

Corolario 2.2 *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua:*

- *Cada componente de f toma en K valores extremos.*
- *$\|f\|$ toma en K valores extremos.*

(Dem.)

Basta considerar la proposición anterior. ■

2.6.2. Conjuntos arco-conexos

Definición 2.8

- *Un camino en A es un aplicación continua $\gamma: I \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo. Si $I = [t_1, t_2]$ y $\gamma(t_1) = a_1$, $\gamma(t_2) = a_2$ se dice que γ une a_1 con a_2 .*
- *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice arco-conexo si para todo par de puntos $a_1, a_2 \in A$ existe un camino en A que los une.*

En \mathbb{R} los conjuntos arco-conexos son los intervalos

Teorema 2.3 *Sean $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua y A un conjunto arco-conexo. Entonces $f(A)$ es arco-conexo.*

(Dem.)

Sean y_1 y y_2 puntos de $f(A)$, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$.

Por ser A arco-conexo, existe un camino $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow A$, tal que $\gamma(t_1) = x_1$ y $\gamma(t_2) = x_2$. Entonces $f \circ \gamma: [t_1, t_2] \rightarrow f(A)$ es un camino tal que $f \circ \gamma(t_1) = y_1$ y $f \circ \gamma(t_2) = y_2$. Luego $f(A)$ es arco-conexo. ■

2.6.3. Continuidad uniforme

Definición 2.9 Sea $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. \mathbf{f} es uniformemente continua en A si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que, si $x, y \in A$ con $\|x - y\| < \delta$, entonces $\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)\| < \varepsilon$ ².

Las propiedades de las funciones uniformemente continuas son las mismas que en el caso de una variable.

Proposición 2.6 Sea $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función uniformemente continua en A . Entonces:

1. \mathbf{f} es continua en A .
2. Si $\{x_m\}$ es una sucesión de Cauchy, también lo es $\{\mathbf{f}(x_m)\}$.

(Dem.) Inmediatas ambas. ■

Finalmente, enunciamos (sin demostrar) que:

Teorema 2.4 (de Cauchy): Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto y $\mathbf{f}: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua en K , entonces \mathbf{f} es uniformemente continua en K .

²Es la misma definición que para funciones de una variable, sustituyendo valor absoluto por norma y tiene, por tanto, la misma interpretación geométrica.

Capítulo 3

Cálculo Diferencial en R^n

3.1. Introducción

En este capítulo se trata esencialmente de extender el concepto de *derivada* a funciones de varias variables y sus propiedades. Como ya es costumbre, se busca generalizar el concepto ya existente en el caso de una variable. Por ello conviene recordar que, en ese caso, hay dos maneras de entender esta cuestión, que corresponden a otras tantas maneras de interpretar el concepto de derivada:

- la definición de la *derivada* como *límite del cociente incremental*

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- la *interpretación geométrica* de la derivada como *aproximación lineal*, es decir:

Dada una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con A abierto, y un punto $a \in A$, se podía interpretar la *derivada* de f en a como una aplicación lineal que mejor aproxima la función

$$\begin{aligned} T_a &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto T_a(h) = \alpha h \end{aligned} \tag{3.1}$$

podemos decir que α es la matriz asociada a dicha aplicación lineal y $T(h) = \alpha h$.

Así tenemos la aproximación $f(a+h) = f(a) + \alpha h$, que podemos interpretar como la recta de pendiente α que pasa por el punto $(a, f(a))$ y de todas ellas la que mejor aproxima la función para h pequeño es la que cumple

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \alpha h}{h} = 0 \quad \implies \quad \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \tag{3.2}$$

que da lugar a la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$

$$y = f(a) + \alpha(x - a)$$

Si para generalizar este concepto al caso de varias variables se sigue el primer método se llega a la noción de *derivada parcial* o, más genéricamente, al de *derivada direccional*. Sin embargo, el resultado obtenido es insatisfactorio por cuanto sus propiedades distan mucho de ser las esperadas (no se satisface por ejemplo que si una función es derivable en a entonces es continua en a), lo que no ocurre, como veremos, siguiendo el segundo método. Éste será, por tanto, el camino que seguiremos en la exposición.

(A partir de ahora, siempre que no se diga explícitamente lo contrario, se toman los dominios de las funciones abiertos a fin de evitar los puntos frontera).

3.2. Derivadas parciales y direccionales

3.2.1. Derivadas parciales. Matriz Jacobiana

Definición 3.1 Si $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con A abierto. Se denomina derivada parcial de \mathbf{f} en a respecto a la variable x_i o también derivada parcial i -ésima de \mathbf{f} en a al límite (si existe)

$$D_i \mathbf{f}(a) = \mathbf{f}_{x_i}(a) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - \mathbf{f}(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

Si las derivadas parciales existen $\forall x \in A$, se denomina función derivada parcial de \mathbf{f} respecto a la variable x_i o también función derivada parcial i -ésima de \mathbf{f} a la función

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}: A \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ a &\longmapsto \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(a) \end{aligned}$$

Comentarios :

- Se cumple que

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \right). \quad (3.3)$$

- La derivada parcial de una función de varias variables no es otra cosa que la variación de la función respecto a una de las variables, manteniendo las otras constantes. Así pues, en muchos casos, se pueden calcular como derivadas ordinarias de una función de una variable. En algunas ocasiones ésto no es así.

Ejemplo 3.1

Las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$ en $(0, 0)$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

pero no se pueden obtener derivando las funciones $x^{1/3}$ e $y^{1/3}$, dado que ninguna de ellas es derivable en el origen.

- Una función puede tener derivadas parciales en un punto y no ser continua en dicho punto, luego no es una buena generalización del concepto de derivada.

Ejemplo 3.2

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0 \\ 1 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

la función tiene derivadas parciales en $(0, 0)$, sin embargo $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 1$ y por tanto la función no es continua en $(0, 0)$.

- Una función escalar de n variables puede tener hasta n derivadas parciales en cada punto.
- En el caso de una función de dos variables el valor de la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente en $(a, b, f(a, b))$ a la curva obtenida al intersectar graf f con el plano $y = b$, cuya ecuación, en dicho plano, es $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a)$. Igualmente interpretaríamos $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

A partir de las derivadas parciales se define la matriz jacobiana en un punto:

Definición 3.2 Sea $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si existen todas las derivadas parciales de \mathbf{f} en a , se denomina matriz jacobiana de \mathbf{f} en a a la matriz $m \times n$ que tiene por componentes los valores de estas derivadas parciales:

$$\mathbf{Jf}(a) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial x_i}(a) \right)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{Jf}(a)$ es una matriz cuadrada, se denomina jacobiano a su determinante.

3.2.2. Derivadas direccionales

En la definición 3.1 de derivada parcial se incrementa la función siguiendo direcciones paralelas a los ejes, si en lugar de estas direcciones lo hacemos según un vector cualquiera \mathbf{u} , obtenemos el concepto de derivada direccional.

Definición 3.3 Sean $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a un punto del abierto A y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector. Se denomina derivada direccional de \mathbf{f} en a según el vector \mathbf{v} al límite (si existe)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(a + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(a)}{t} \quad (3.4)$$

La denotaremos por $f'(a, \mathbf{v})$ o $D_{\mathbf{v}}f(a)$.

Proposición 3.1 se cumple que

- $\mathbf{f}'(a, \mathbf{v}) = (f'_1(a, \mathbf{v}), \dots, f'_m(a, \mathbf{v}))$.
- $f'(a, \lambda \mathbf{v}) = \lambda f'(a, \mathbf{v})$.
- $f'(a, \mathbf{0}) = 0$.

Comentarios :

- Observemos que las derivadas parciales definidas anteriormente no son más que las derivadas direccionales según los vectores de la base canónica $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'(a, \mathbf{e}_i)$.
- Una función puede tener todas sus derivadas direccionales bien definidas en un punto y sin embargo no ser continua en este punto y por tanto tampoco son una buena generalización del concepto de *derivada*.

Ejemplo 3.3

$$\text{Sea } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ como

$$f'(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1} & \text{si } v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_1 = 0 \end{cases}$$

la función tiene derivadas direccionales en $(0, 0)$, sin embargo el límite de la función siguiendo la curva $x = y^2$ vale

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0) = 0$$

y por tanto la función no es continua en $(0, 0)$.

- En el caso de una función de dos variables el valor de la derivada direccional $D_{(v_1, v_2)}f(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente en $(a, b, f(a, b))$ a la curva obtenida al intersectar $\text{graf } f$ con el plano $\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2}$.

3.3. Derivada o Diferencial de una función

Dado que la generalización de derivada, mediante límite del cociente incremental, no es una buena definición para funciones de varias variables, veamos si la interpretación geométrica de la derivada como la aplicación lineal, expresada en 3.1, que mejor aproxima la función, es decir que cumpla

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_a(h)}{h} = 0$$

admite una mejor generalización para funciones de varias variables.

3.3.1. Concepto de Diferencial. Propiedades

Vamos a generalizar la idea de derivada de una función como la aplicación lineal que mejor aproxima la función.

Definición 3.4 Sea $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde A es un abierto, y $a \in A$. Se dice que \mathbf{f} es diferenciable o derivable en a si existe una aplicación lineal $T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que cumpla la condición de tangencia que puede expresarse de cualquiera de las formas siguientes:

1. $\mathbf{f}(a+h) = \mathbf{f}(a) + T_a(h) + R_a(h)$ donde $R_a(h) = o(\|h\|)$ cuando $h \rightarrow 0$.
2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(a+h) - \mathbf{f}(a) - T_a(h)}{\|h\|} = 0$.
3. $\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(a) + T_a(x-a) + o(\|x-a\|)$ cuando $x \rightarrow a$, donde se ha hecho $x = a+h$.

En tal caso se denomina diferencial o derivada de \mathbf{f} en a a la aplicación lineal T_a que representaremos por $\mathbf{f}'(a)$ o $D\mathbf{f}(a)$.

Trataremos ahora de obtener esta aplicación lineal o diferencial y determinar su matriz asociada.

Proposición 3.2 Sea $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde A es un abierto. Si \mathbf{f} es diferenciable en $a \in A$ entonces:

1. Existen todas las derivadas parciales de \mathbf{f} en a . Además la matriz asociada a la diferencial en las bases canónicas respectivas es la matriz jacobiana $\mathbf{Jf}(a)$.
2. Existen todas las derivadas direccionales de \mathbf{f} en a y $\mathbf{f}'(a, \mathbf{v}) = D\mathbf{f}(a)(\mathbf{v}) = \mathbf{Jf}(a)\mathbf{v}$.

(Dem.)

1.

Por ser \mathbf{f} diferenciable en a , teniendo en cuenta la definición (3.4), existe $D\mathbf{f}(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que tendrá como matriz asociada

$$T(a) = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & \dots & t_{mn} \end{pmatrix}$$

al ser diferenciable se ha de cumplir la condición de tangencia es decir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(a+h) - \mathbf{f}(a) - D\mathbf{f}(a)(h)}{\|h\|} = \mathbf{0} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(a+h) - \mathbf{f}(a) - T(a)(h)}{\|h\|} = \mathbf{0}$$

lo que implica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left\| \begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & \dots & t_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right\|}{\|h\|} = 0$$

que ha de ser para todo h , en particular si hacemos $h = k\mathbf{e}_i$ donde \mathbf{e}_i es el vector correspondiente de la base canónica de \mathbb{R}^n se tiene

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\left\| \begin{pmatrix} f_1(a+ke_i) \\ \vdots \\ f_m(a+ke_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} kt_{1i} \\ \vdots \\ kt_{mi} \end{pmatrix} \right\|}{\|k\mathbf{e}_i\|} = 0$$

y para cada j , con $1 \leq j \leq m$ se tiene

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left| \frac{f_j(a+ke_i) - f_j(a) - kt_{ji}}{k} \right| = 0$$

es decir

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left| \frac{f_j(a+ke_i) - f_j(a)}{k} - t_{ji} \right| = 0 \Rightarrow t_{ji} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_j(a+ke_i) - f_j(a)}{k} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \Rightarrow T(a) = \mathbf{Jf}(a)$$

Queda demostrado que si una función es diferenciable su matriz asociada es la matriz *Jacobiana*.

Comentarios :

- Es obvio que tomando otras derivadas direccionales en a que no fueran según los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n se obtendría otra matriz asociada a la aplicación lineal $\mathbf{Df}(a)$. La matriz jacobiana $\mathbf{Jf}(a)$ es pues la matriz asociada a la diferencial referida a la base canónica.
- Obsérvese que los coeficientes de la matriz jacobiana son números cuyo valor, en general, cambia al cambiar de punto. Esto pone de manifiesto que la aplicación diferencial depende del punto en cuestión.
- Nótese que esta proposición asegura la unicidad de la diferencial, ya que queda determinada por las derivadas parciales.

2.

Igualmente aplicando la condición de tangencia con $h = k\mathbf{v}$ y si tenemos en cuenta que $\mathbf{Df}(a)$ es lineal se tiene

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(a+k\mathbf{v}) - \mathbf{f}(a) - \mathbf{Df}(a)(k\mathbf{v})}{\|k\mathbf{v}\|} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(a+k\mathbf{v}) - \mathbf{f}(a) - k\mathbf{Df}(a)(\mathbf{v})}{\|k\mathbf{v}\|} = 0$$

lo que implica

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}(a+k\mathbf{v}) - \mathbf{f}(a) - k\mathbf{Df}(a)(\mathbf{v})\|}{\|k\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \lim_{k \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{f}(a+k\mathbf{v}) - \mathbf{f}(a) - k\mathbf{Df}(a)(\mathbf{v})}{k} \right\| = 0$$

y por tanto

$$\mathbf{Df}(a)(\mathbf{v}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(a+k\mathbf{v}) - \mathbf{f}(a)}{k}$$

Queda demostrado que si una función es diferenciable existen sus derivadas direccionales y se pueden calcular aplicando la $\mathbf{Df}(a)$ a la dirección \mathbf{v} . ■

En ambos casos los recíprocos no tienen por qué ser ciertos.

Ejemplo 3.4

1. Veamos una función que tiene sus derivadas parciales definidas en un punto y sin embargo no es diferenciable en dicho punto. Sean $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$ y $a = (0, 0)$. Las derivadas parciales de f en a son (vease el ejemplo del apartado 3.1):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0$$

pero no es diferenciable por no cumplirse la condición de tangencia, ya que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0, 0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{\|h\|} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{h_1^{1/3} h_2^{1/3}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

que no vale 0 dado que los límites direccionales valen

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} f(h_1, mh_1) = \frac{h_1^{1/3}(mh_1)^{1/3}}{\sqrt{h_1^2 + (mh_1)^2}} = \pm \infty$$

2. Una función que tiene sus derivadas direccionales definidas en un punto que no es diferenciable en dicho punto.

Sean la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Las derivadas direccionales de f en el punto $(0, 0)$ según \mathbf{v} son

$$f'(0, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{v}) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 v_1^3}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} - 0}{t} = \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2}$$

y por tanto $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = f'(0, e_1) = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = f'(0, e_2) = 0$.

Veamos ahora si, f es diferenciable en el punto $(0, 0)$. Aplicando la condición de tangencia se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0, 0) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{\|h\|} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} - h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

y como si hacemos $(h_1, h_2) = (h, mh)$ se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h, mh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-hm^2}{|h|(1+m^2)\sqrt{1+m^2}} = \pm \frac{m^2}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}$$

vemos que no existe el límite y por tanto la función no es diferenciable.

Definición 3.5 \mathbf{f} se dice diferenciable si lo es en todo punto de su dominio.

Proposición 3.3

1. Si $\mathbf{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $a \in A$, entonces \mathbf{f} es continua en a .
2. $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $a \in A$ si y sólo si lo son cada una de sus componentes f_j con $1 \leq j \leq m$.

(Dem.)

1.

Por ser \mathbf{f} diferenciable en a existe la aplicación lineal $D\mathbf{f}(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que cumple

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(a+h) - \mathbf{f}(a) - D\mathbf{f}(a)(h)}{\|h\|} = 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} (\mathbf{f}(a+h) - \mathbf{f}(a) - D\mathbf{f}(a)(h)) = 0$$

y como la diferencial es una aplicación lineal $\lim_{h \rightarrow 0} D\mathbf{f}(a)(h) = 0$, así pues $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{f}(a+h) = \mathbf{f}(a)$, y por tanto \mathbf{f} es continua en a .

2.

Es consecuencia inmediata de la condición de tangencia y las propiedades de límite. ■

3.3.2. Aproximación lineal, hiper-plano tangente

Teniendo en cuenta el apartado 1. de la definición 3.4, de función diferenciable, se tiene

$$\mathbf{f}(a+h) = \mathbf{f}(a) + D\mathbf{f}(a)(h) + o(\|h\|),$$

Si en esta ecuación hacemos $x = a+h$ se tiene

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(a) + D\mathbf{f}(a)(x-a) + o(\|x-a\|) \Rightarrow \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(a) - D\mathbf{f}(a)(x-a) = o(\|x-a\|). \quad (3.5)$$

Esto sugiere que $\mathbf{f}(a) + D\mathbf{f}(a)(x-a)$ es una buena aproximación de $\mathbf{f}(x)$ tenemos así el concepto de *aproximación lineal*.

Proposición 3.4 Sea \mathbf{f} diferenciable en a . Se denomina *aproximación lineal de \mathbf{f} en a* , a la aplicación afín

$$x \mapsto \mathbf{f}(a) + D\mathbf{f}(a)(x-a)$$

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $a = (a_1, a_2)$. La ecuación 3.5 sugiere que el plano:

$$z = f(a) + Df(a)(x-a) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2) \quad (3.6)$$

es tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(a, f(a))$. Una generalización de esto es

Corolario 3.1 Sea f un campo escalar diferenciable en a la ecuación del hiper-plano tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(a, f(a))$ es

$$x_{n+1} = f(a) + Df(a)(x-a) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \quad (3.7)$$

o, en forma vectorial,

$$\mathbf{x} = (a, f(a)) + \lambda_1(1, 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)) + \dots + \lambda_n(0, \dots, 1, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$

3.3.3. Condiciones suficientes de diferenciabilidad

Ya se ha visto, que la existencia de las derivadas parciales de una función, en un punto, no implica la diferenciabilidad de la función en dicho punto, ni incluso que sea continua. No obstante imponiendo determinadas condiciones podremos asegurar la diferenciabilidad.

Teorema 3.1 Sean $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y a un punto de A , si existen todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$, en un entorno de a , y son continuas en a , entonces \mathbf{f} es diferenciable en a

(Dem.)

Gracias a la proposición 3.3.2 basta con demostrarlo para funciones escalares.

Sean la bola de centro a y radio ε , $B_\varepsilon(a)$, en la que como sabemos existen las derivadas parciales de \mathbf{f} , y $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $a + h \in B_\varepsilon(a)$, se tiene

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= [f(a+h_1e_1) - f(a)] + \\ &+ [f(a+h_1e_1+h_2e_2) - f(a+h_1e_1)] + \\ &+ [f(a+h_1e_1+h_2e_2+h_3e_3) - f(a+h_1e_1+h_2e_2)] + \\ &+ \dots + \\ &+ [f(a+h_1e_1+\dots+h_ne_n) - f(a+h_1e_1+\dots+h_{n-1}e_{n-1})] = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(c_n)h_n \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= a + \lambda_1 e_1 & \text{con } 0 < \lambda_1 < h_1 \\ c_2 &= a + h_1 e_1 + \lambda_2 e_2 & \text{con } 0 < \lambda_2 < h_2 \\ &\dots & \\ c_n &= a + h_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n & \text{con } 0 < \lambda_n < h_n \end{aligned}$$

y así

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) h_i$$

y como las derivadas parciales son continuas en a , se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i \right|}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left| \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) h_i \right|}{\|h\|} \leq \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| h_i = 0 \end{aligned}$$

luego \mathbf{f} es diferenciable en a . ■

Definición 3.6 Sea $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $U \subset A$. Se dice que \mathbf{f} es una función de clase C^1 o también diferenciable con continuidad en U si \mathbf{f} tiene todas sus derivadas parciales definidas y son funciones continuas en U

Comentarios

1. Como consecuencia del teorema anterior la función es diferenciable en U .
2. Una función diferenciable puede no ser de clase C^1 .

3.4. Propiedades de las funciones diferenciables

Las propiedades elementales de la diferenciabilidad son las siguientes:

Proposición 3.5 Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones diferenciables en $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene

1. $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ es diferenciable en a y $D(\mathbf{f} + \mathbf{g})(a) = D\mathbf{f}(a) + D\mathbf{g}(a)$.
2. $\lambda \mathbf{f}$ es diferenciable en a y $D(\lambda \mathbf{f})(a) = \lambda D\mathbf{f}(a)$.
3. En el caso $m = 1$ (funciones escalares) fg es diferenciable en a y $D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$.
4. En el caso $m = 1$ y si $f(a) \neq 0$, entonces $1/f$ es diferenciable en a y $D(\frac{1}{f})(a) = \frac{-1}{f(a)^2}Df(a)$.
5. $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ es diferenciable en a y $D\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle(a) = \sum_{j=1}^m (g_j(a)Df_j(a) + f_j(a)Dg_j(a))$.
6. Existe algún entorno de a (excluido el punto a) donde $\frac{f(x) - f(a)}{\|x - a\|}$ esta acotado.

(Dem.) Ejercicio. ■

3.4.1. Regla de la cadena. Aplicaciones

Una de las propiedades de las funciones diferenciables es la generalización de la *regla de la cadena* al caso de varias variables; esto es, la diferenciación de funciones compuestas.

Teorema 3.2 Sean $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{g}: B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ de forma que $\mathbf{f}(A) \subseteq B$, con A y B abiertos. Supongamos que \mathbf{f} es diferenciable en $a \in A$ y \mathbf{g} es diferenciable en $b = \mathbf{f}(a) \in B$. Entonces $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es diferenciable en a y se tiene

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(a) = D\mathbf{g}(b) \circ D\mathbf{f}(a) \quad (3.8)$$

(Dem.) Que \mathbf{f} sea diferenciable en a significa que

$$\mathbf{f}(a + h) = \mathbf{f}(a) + D\mathbf{f}(a)(h) + R_1(h) \quad \text{con} \quad R_1(h) = o(\|h\|).$$

Que \mathbf{g} lo sea en $b = \mathbf{f}(a)$ significa que

$$\mathbf{g}(b + k) = \mathbf{g}(b) + D\mathbf{g}(b)k + T_1(k) \quad \text{con} \quad T_1(k) = o(\|k\|).$$

Tomando $k = \mathbf{f}(a + h) - \mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(a + h) - b$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{f}(a + h)) &= \mathbf{g}(\mathbf{f}(a)) + D\mathbf{g}(b)(\mathbf{f}(a + h) - \mathbf{f}(a)) + T_1(k) \\ &= (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(a) + D\mathbf{g}(\mathbf{f}(a)) \circ D\mathbf{f}(a)(h) + D\mathbf{g}(\mathbf{f}(a))(R_1(h)) + T_1(k) \\ &\equiv (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(a) + D\mathbf{g}(\mathbf{f}(a)) \circ D\mathbf{f}(a)(h) + \mathcal{R}_1(h) \end{aligned}$$

pero $D\mathbf{g}(\mathbf{f}(a))(R_1(h)) = o(\|h\|)$ y, como $h \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow 0$, se tiene que $T_1(k) = o(\|h\|)$, luego $\mathcal{R}_1(h) = o(\|h\|)$, lo cual completa la demostración. ■

Comentarios

- Si \mathbf{f} y \mathbf{g} son C^k entonces $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ también lo es.
- Dado que el segundo miembro de la expresión 3.8 es una composición de funciones lineales, en términos de sus matrices se tiene

$$J(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(a) = J\mathbf{g}(\mathbf{f}(a))J\mathbf{f}(a)$$

Así, si hacemos $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ y desarrollamos esta expresión se tiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

esto es,

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\mathbf{f}(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \quad (\forall i = 1, \dots, n) \quad (\forall k = 1, \dots, p) \quad (3.9)$$

- Una aplicación particular de la regla de la cadena es *cambio de variables* en ecuaciones diferenciales (veanse ejercicios).
- La composición de dos funciones no diferenciables puede ser diferenciable. En tal caso su diferencial ha de calcularse a partir de la expresión de la función compuesta, ya que no es aplicable la regla de la cadena.

Ejemplo 3.5

Sean las funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ninguna de ellas es diferenciable en el origen, pero su composición $(g \circ f)(x) = x^2$ sí lo es.

- La mera existencia de las derivadas parciales no garantiza la validez la ecuación 3.9, puesto que el hecho de que dos funciones tengan derivadas parciales en un punto no asegura que su composición también las tenga (a menos que la función sea diferenciable).

Ejemplo 3.6

Sean las funciones $g(x, y) \equiv x^{1/3}y^{1/3}$ y $\mathbf{f}(x) \equiv (x, x)$ y su composición $(g \circ \mathbf{f})(x) \equiv x^{2/3}$. Ambas, f y g tienen derivadas parciales en el origen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) &= 0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(0) &= 1 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(0) = 1 \end{aligned}$$

pero su composición no es derivable en el 0.

3.5. Derivadas parciales de orden superior

Sea $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con A abierto. Supongamos que existen las derivadas parciales $\forall x \in A$. Podemos definir las funciones derivada parcial

$$\begin{aligned} D_i: A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ a &\longmapsto \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(a) \end{aligned}$$

que asocian a cada punto a el valor de la respectiva derivada parcial en ese punto $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(a)$. Si recordamos la ecuación 3.3 se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \right).$$

Si existen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ y son continuas en A , decimos que \mathbf{f} es de clase C^1 en A .

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con A abierto, podemos ahora estudiar la existencia de las derivadas parciales y la diferenciabilidad de las funciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Esto sugiere la siguiente definición

Definición 3.7 Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con A abierto, y $a \in A$. Se denomina derivada parcial de segundo orden de f en a respecto a las variables x_i y x_j a la derivada parcial respecto a x_j de la derivada respecto a x_i de f en a es decir

$$D_j(D_i f)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_j + t, \dots, a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{t}$$

Si la anterior derivada parcial de segundo orden de f existe $\forall x \in A$, se denomina función derivada parcial de segundo orden de f respecto a las variables x_i y x_j a la función

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}: A \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \end{aligned}$$

Definición 3.8 Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$, tal que existen todas la derivadas parciales de segundo orden de f en a . Se denomina matriz hessiana de f en a a la matriz $n \times n$ que tiene por componentes los valores de estas derivadas parciales:

$$Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

$Hf(a)$ es una matriz cuadrada y su determinante se denomina hessiano.

La definición de derivada parcial se puede iterar sucesivamente, obteniéndose así todas las denominadas derivadas parciales de orden k de f . Esto es

$$D_{i_1} \dots D_{i_k} f(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)$$

Entonces, atendiendo a la continuidad de estas funciones se define:

Definición 3.9 Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y A abierto. f es una función de clase C^k , $k \in \mathbb{N}$ en A si existen todas las derivadas parciales de orden $\leq k$ de f y son funciones continuas en A

Se dice que f es una función de clase C^∞ en A si f es una función de clase C^k en A , $\forall k \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.6 Si una función es de clase C^k en A las derivadas parciales de orden $k-1$ son funciones diferenciables en A .

(Dem.) Basta considerar el teorema 3.1 ■

En particular, se denominan derivadas cruzadas a las derivadas parciales de orden superior obtenidas derivando respecto a las mismas variables pero en orden diferente.

Comentario :

- El orden en que se deriva para obtener las derivadas parciales de orden superior es relevante, ya que no siempre se cumple que las derivadas cruzadas sean iguales.

Ejemplo 3.7

$$\text{La función } f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tiene derivadas parciales primeras en todo su dominio y valen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

las derivadas parciales cruzadas de segundo orden son

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \begin{cases} \frac{x^6 - y^6 + 9x^4 y^2 - 7x^2 y^4}{(x^2 + y^2)^3} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{t} = 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \begin{cases} \frac{x^6 - y^6 + 9x^4 y^2 - 7x^2 y^4}{(x^2 + y^2)^3} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{t} = -1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$

3.5.1. Teorema de Schwarz

Vamos a estudiar a continuación bajo qué condiciones se puede garantizar la igualdad de las derivadas cruzadas o, lo que es lo mismo, cuándo la matriz hessiana es simétrica. La respuesta a esta cuestión la da el siguiente teorema:

Teorema 3.3 (de Schwarz): Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con A abierto, y $a \in A$. Supongamos que f es C^1 , y que las derivadas parciales $D_i f, D_j f: A \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables en a entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \text{o} \quad D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a) \quad (\forall i, j)$$

(Dem.) Por simplicidad haremos la demostración para una función $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y consideraremos el origen de coordenadas, $a = (0, 0)$.

Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(h) = f(h, h) - f(h, 0) - f(0, h) + f(0, 0)$ hemos de ver que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)}{h^2}$ es tanto $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ como $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ y por tanto las derivadas cruzadas coinciden en $(0, 0)$.

Sea $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(x) = f(x, h) - f(x, 0)$, entonces $F(h) = G(h) - G(0)$ y como f es de clase C^1 , G es derivable, con derivada continua, y por el *teorema del valor medio*, existe un c tal que $0 < |c| < |h|$ que satisface

$$\begin{aligned} F(h) &= hG'(c) = h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(c, 0) \right) \Rightarrow \frac{F(h)}{h^2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(c, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(c, 0)}{h} = \\ &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(c, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) - h \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)}{h} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(c, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{h} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \end{aligned}$$

Por ser $\frac{\partial f}{\partial x}$ diferenciable en $(0, 0)$ puede deducirse que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$

Siguiendo un razonamiento análogo a partir de una función $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(x) = f(h, y) - f(0, y)$ llegamos a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. ■

Un corolario inmediato de este teorema es:

Corolario 3.2 Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con A abierto y $a \in A$. Si f es una función de clase C^k en A , entonces las derivadas cruzadas de orden $l \leq k$ se pueden calcular derivando en cualquier orden. Esto es

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}}(a) = \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_{\pi(1)}} \dots \partial x_{i_{\pi(l)}}}(a)$$

para cualquier permutación π de $\{1, \dots, l\}$.

(Dem.) Inmediata si se tiene en cuenta la proposición 3.6. ■

3.6. Teorema de la función inversa

Este resultado es la generalización del teorema del mismo nombre en el caso de una variable.

Teorema 3.4 Sean $\mathbf{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, A abierto y $a \in A$, tal que:

1. \mathbf{f} es de clase C^1 en A .
2. $\det \mathbf{Jf}(a) \neq 0$, es decir con jacobiano no nulo en a .

Entonces existen unos abiertos V y W , que contienen a a y a $\mathbf{f}(a)$ respectivamente, tales que

- $\mathbf{f}: V \rightarrow W$ es biyectiva.
- La inversa $\mathbf{f}^{-1}: W \rightarrow V$ es de clase C^1 , o de clase C^k si \mathbf{f} lo es. Además para todo $y \in W$ se tiene

$$\mathbf{Df}^{-1}(y) = [\mathbf{Df}(\mathbf{f}^{-1}(y))]^{-1}$$

(Dem.) Véase Cálculo en variedades de M. SPIVAK. ■

Comentarios :

- Obsérvese que éste es un teorema de existencia local pues, en general, no puede asegurarse que la función inversa exista globalmente (p. ej., la función $y = \sin x$ sólo tiene inversas locales).
- El teorema da condiciones para que exista (localmente) la inversa de una función, asegura su diferenciabilidad y permite calcular su diferencial sin necesidad de conocer explícitamente la expresión de la función inversa.
- La condición de $\det J\mathbf{f}(a) \neq 0$ no es necesaria para la existencia de función inversa, pero sí lo es para que \mathbf{f}^{-1} sea diferenciable.

Definición 3.10 Un difeomorfismo o cambio de variables es una aplicación biyectiva $\varphi: U \rightarrow V$ entre dos abiertos de \mathbb{R}^n , tal que φ y φ^{-1} son de clase C^1 .

El teorema de la función inversa afirma que si \mathbf{f} es de clase C^k , $k \geq 0$, con jacobiano no nulo entonces \mathbf{f} es localmente un difeomorfismo.

Ejemplo 3.8

1. Coordenadas polares. La aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi: (0, +\infty) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(x, 0), x \geq 0\} \\ (r, \phi) &\longmapsto (r \cos \phi, r \sin \phi) = (x, y) \end{aligned}$$

donde

$$D\varphi(r, \phi) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \text{ con jacobiano } J(r, \phi) = r$$

2. Coordenadas cilíndricas. La aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi: (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z), x \geq 0\} \\ (r, \phi, z) &\longmapsto (r \cos \phi, r \sin \phi, z) = (x, y, z) \end{aligned}$$

donde

$$D\varphi(r, \phi, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, z)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con jacobiano } J(r, \phi, z) = r$$

3. Coordenadas esféricas. La aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi: (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z), x \geq 0\} \\ (r, \theta, \phi) &\longmapsto (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) = (x, y, z) \end{aligned}$$

donde

$$D\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \text{ con jacobiano } J(r, \theta, \phi) = r^2 \sin \theta$$

Se ha utilizado la notación

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

3.7. Teorema de la función implícita

Es frecuente dar la ecuación de una curva en \mathbb{R}^2 mediante una expresión del tipo $F(x, y) = 0$, o la de una superficie en \mathbb{R}^3 mediante $F(x, y, z) = 0$ y si generalizamos en \mathbb{R}^n una hipersuperficie por medio de una expresión del tipo $F(x_1, \dots, x_n) = 0$, denominada *expresión implícita* de la hipersuperficie. Un problema que se plantea es si es posible describir la *hiper-superficie* por medio de una *expresión explícita* del tipo $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$. Esto no siempre es posible como se pone de manifiesto con algunos ejemplos sencillos:

Ejemplo 3.9

- Sea la función $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ y considerese los puntos de \mathbb{R}^2 que satisfacen $F(x, y) = 0$, es decir la curva de nivel 0 de F . Se trata como es sabido de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Si en dicha ecuación despejamos la variable y como función de x se obtienen las dos funciones que definen las semicircunferencias en forma explícita

$$y = f_1(x) \text{ e } y = f_2(x), \text{ con } f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ donde } f_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ y } f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

Se dice que estas dos funciones están definidas implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$, además a cada punto de la circunferencia le corresponde una de las dos funciones y ambas funciones son diferenciables, en algún abierto que contenga el punto, excepto en los puntos $(\pm 1, 0)$ como se puede comprobar gráficamente.

- Otro ejemplo distinto al planteado anteriormente lo constituye un sistema lineal de m ecuaciones con $n + m$ variables

$$0 = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + C \quad (3.10)$$

donde $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \equiv (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, A y B son matrices reales de órdenes $m \times n$ y $m \times m$ respectivamente y C es una matriz columna de m componentes. El problema es si se puede expresar el vector \mathbf{y} como función de \mathbf{x} . Para ello la c.n.s. es que $\det B \neq 0$, en cuyo caso

$$\mathbf{y} = -B^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x} + C).$$

que se puede expresar como $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Se dice que \mathbf{f} es la función implícita definida por la ecuación 3.10.

Obsérvese que si hacemos $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + C$ entonces $B = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)$.

Un planteamiento general del problema es:

Si tenemos la función $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\mathbf{F}(x, y) = 0$, con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ es decir el sistema de m ecuaciones

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

bajo qué condiciones se puede asegurar que podemos expresar las variables \mathbf{y} en función de las \mathbf{x} o lo que es lo mismo cuándo el sistema anterior define la función implícita $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

El siguiente teorema da condiciones suficientes para poder asegurar la existencia (local) de este tipo de funciones, analizando, además, su diferenciableidad.

Teorema 3.5 Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\longrightarrow (F_1(x, y), \dots, F_m(x, y)) \end{aligned}$$

donde W es un abierto, \mathbf{F} una función de clase C^1 y $(a, b) \in W$ tal que $\mathbf{F}(a, b) = 0$. Supongamos que la diferencial de $\mathbf{F}(x, y)$ respecto de las variables $y \in \mathbb{R}^m$, $D_2\mathbf{F}(x, y)$, es inversible en el punto (a, b) , es decir $\det(D_2\mathbf{F}(x, y)) \neq 0$.

Entonces existen abiertos $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$, y $B \subset \mathbb{R}^m$, $b \in B$ con $A \times B \subset W$ y una única función $\mathbf{f}: A \rightarrow B$ de clase C^1 tales que si $(x, y) \in A \times B$, $\mathbf{F}(x, y) = 0$ si y solo si $y = \mathbf{f}(x)$. Además para todo $x \in A$ se tiene

$$\mathbf{Df}(x) = -[\mathbf{D}_2\mathbf{F}(x, \mathbf{f}(x))]^{-1} \mathbf{D}_1\mathbf{F}(x, \mathbf{f}(x)) \quad (3.11)$$

donde

$$\mathbf{DF} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_1\mathbf{F} \quad \mathbf{D}_2\mathbf{F})$$

con

$$\mathbf{D}_1\mathbf{F}(x) = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_i}(x) \right)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}} \quad y \quad \mathbf{D}_2\mathbf{F}(x) = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial y_i}(x) \right)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq m}}$$

La función \mathbf{f} se denomina función implícitamente definida por \mathbf{F} .

(Dem.) Para la demostración total véase M. SPIVAK, *Cálculo en variedades*. Vamos a demostrar solamente la ecuación 3.11

Supongamos que la función $\mathbf{F}: W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisface las hipótesis del teorema y que $\mathbf{F}(a, b) = 0$ y existen $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $B \subset \mathbb{R}^m$, $b \in B$ y una función implícita $\mathbf{f}: A \rightarrow B$ tal que $\forall x \in A$ se tiene $\mathbf{F}(x, \mathbf{f}(x)) = 0$. Vamos a calcular $\mathbf{Df}(x)$.

Consideremos la siguiente composición de funciones

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\mathbf{G}} & A \times B & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & (x, \mathbf{f}(x)) & \mapsto & \mathbf{F}(x, \mathbf{f}(x)) \end{array}$$

Observemos que la función compuesta $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ es la función nula en A , $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = 0$. Luego $\mathbf{D}(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})$ será la matriz nula de orden $m \times n$, y por la regla de la cadena tendremos

$$0_{m \times n} = \mathbf{D}(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(x) = \mathbf{DF}(\mathbf{G}(x)) \circ \mathbf{DG}(x)$$

Escribiendo las matrices jacobianas correspondientes se tiene

$$0_{m \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{G}(x)) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{G}(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\mathbf{G}(x)) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\mathbf{G}(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\mathbf{G}(x)) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\mathbf{G}(x)) & \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\mathbf{G}(x)) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\mathbf{G}(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

que se puede expresar

$$0_{m \times n} = (\mathbf{D}_1\mathbf{F} \quad \mathbf{D}_2\mathbf{F}) \begin{pmatrix} I \\ \mathbf{Df} \end{pmatrix}$$

donde I es la matriz unidad de orden $n \times n$, ecuación que desarrollada queda

$$0 = \mathbf{D}_1\mathbf{F} \quad I + \mathbf{D}_2\mathbf{F} \quad \mathbf{Df} \quad (3.12)$$

y si multiplicamos por $[\mathbf{D}_2\mathbf{F}]^{-1}$ y despejamos \mathbf{Df} se tiene

$$\mathbf{Df} = -[\mathbf{D}_2\mathbf{F}]^{-1} \mathbf{D}_1\mathbf{F}$$

■

Comentarios

- La existencia de la función implícita es únicamente local, el teorema da condiciones suficientes para asegurar su diferenciabilidad y permite calcular su diferencial sin necesidad de conocer explícitamente dicha función

Corolario 3.3 *Las derivadas de la función implícita se calculan aplicando la regla de la cadena a la ecuación $\mathbf{F}(x, \mathbf{f}(x)) = 0$ y son las soluciones del sistema lineal de $m \times n$ ecuaciones:*

$$0 = \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \Big|_{(x, \mathbf{f}(x))} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \Big|_{(x, \mathbf{f}(x))} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_x \quad (k = 1, \dots, m ; i = 1, \dots, n)$$

que es otra forma de expresar la ecuación 3.12

Capítulo 4

Aplicaciones geométricas de la derivación.

4.1. Gradiente de un campo escalar.

Salvo mención en contra consideraremos los dominios de las funciones abiertos.

4.1.1. Definición y propiedades.

Definición 4.1 Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in A$. Se denomina gradiente de f en a al vector de \mathbb{R}^n cuyas componentes son los valores de las derivadas parciales de f en a

$$\text{grad } f(a) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Se denomina gradiente de f a la función vectorial que asigna a cada punto el gradiente de la función en dicho punto:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ a &\longmapsto \mathbf{grad} f(a) \end{aligned}$$

Comentarios

- Se denota con el operador nabla ∇ el gradiente, es decir $\mathbf{grad} f = \nabla f$ donde

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

- Para definir el gradiente bastaría en principio con la existencia de las derivadas parciales pero en la mayoría de las aplicaciones es necesario que la función sea diferenciable.

Proposición 4.1 Sean f y $g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones escalares diferenciables en A . Se cumple:

- $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.
- $\nabla(\lambda f) = \lambda \nabla f$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$.

(Dem.) Se obtienen de la definición

■

4.1.2. Interpretación geométrica del gradiente

Si recordamos que una función diferenciable en el punto a tiene sus derivadas direccionales definidas, según cualquier vector \mathbf{v} , en dicho punto y valen

$$f'(a, \mathbf{v}) = J(a)\mathbf{v}$$

es fácil comprobar que se cumple

$$D_{\mathbf{v}}f(a) = f'(a, \mathbf{v}) = J(a)\mathbf{v} = \langle \nabla f(a), \mathbf{v} \rangle = \|\nabla f(a)\| \|\mathbf{v}\| \cos(\nabla f(a), \mathbf{v}) \quad (4.1)$$

lo que permite establecer la siguiente proposición

Proposición 4.2 Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$ y f una función diferenciable en a tal que $\nabla f(a) \neq 0$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario. Entonces:

1. $\mathbf{grad} f(a)$ indica la dirección de máximo crecimiento de la función y éste vale $\|\mathbf{grad} f(a)\|$, consecuentemente $-\nabla f(a)$ es la dirección de mínimo crecimiento y vale $-\|\mathbf{grad} f(a)\|$
2. La derivada direccional de f en a es nula si, y sólo si, dicha dirección es perpendicular a $\mathbf{grad} f(a)$

(Dem.) 1. Si observamos la ecuación 4.1 vemos que $f'(a, \mathbf{v})$ presenta un máximo si $\cos(\nabla f(a), \mathbf{v}) = 1$ lo que ocurre si $\nabla f(a)$ y \mathbf{v} tienen la misma dirección y sentido.

2. El mismo razonamiento. ■

Una consecuencia del segundo apartado de la proposición anterior es el siguiente corolario.

Corolario 4.1 Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $a \in A$ y tal que $\mathbf{grad} f(a) \neq 0$. Entonces $\mathbf{grad} f(a)$ es perpendicular al conjunto de nivel (curva, superficie, ...) de la función, que pasa por a .

(Dem.) Es un resultado que se obtiene a partir del segundo apartado de la proposición anterior. En efecto, basta considerar que la función es constante sobre el conjunto de nivel y, por tanto, si a es un punto de la superficie de nivel, $D_{\mathbf{v}}f(a) = 0$ para cualquier vector \mathbf{v} tangente al conjunto de nivel en el punto a . ■

Como consecuencia si f es un campo escalar en \mathbb{R}^n dado que $\nabla f(a)$ es un vector ortogonal al conjunto de nivel que pasa por a , la ecuación de la tangente (recta, plano, ...) a dicho conjunto de nivel es

$$\langle x - a, \nabla f(a) \rangle = 0, \text{ con } x = (x_1, \dots, x_n) \quad (4.2)$$

Ejemplo 4.1

- Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. El gradiente de f en el punto $(1, \sqrt{3})$ es el vector $(4, 2\sqrt{3})$, por tanto el vector $(2, \sqrt{3})$ es ortogonal a la curva $2x^2 + y^2 = k$ que pase por $(1, \sqrt{3})$, es decir a la elipse $2x^2 + y^2 = 5$ y la ecuación de la recta tangente a dicha elipse en $(1, \sqrt{3})$ es

$$\langle (x - 1, y - \sqrt{3}), (2, \sqrt{3}) \rangle = 0 \Rightarrow 2x + \sqrt{3}y - 5 = 0$$

y la recta normal es:

$$(x, y) = (1, \sqrt{3}) + \lambda(2, \sqrt{3}) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

- Para determinar el plano tangente al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ en el punto $P = (2, 1, 1)$ consideramos la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4$ cuya superficie de nivel, que pasa por P , es dicho hiperboloide y por tanto el vector $\nabla f(2, 1, 1) = (4, 2, -2)$ es ortogonal a esta superficie y así su plano tangente es

$$\langle (x - 2, y - 1, z - 1), (2, 1, -1) \rangle = 0 \Rightarrow 2x + y - z - 4 = 0$$

y su recta normal es

$$(x, y, z) = (2, 1, 1) + \lambda(2, 1, -1) \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

4.2. Curvas parametrizadas en \mathbb{R}^n

Aunque en general estudiaremos únicamente curvas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 el concepto de curva paramétrica es fácilmente generalizable en \mathbb{R}^n .

Definición 4.2 Se denomina curva parametrizada en \mathbb{R}^n a una función

$$\begin{aligned} \mathbf{c}: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

donde I es un intervalo de \mathbb{R} .

Comentarios:

- A veces se denomina *curva* a la imagen de esta aplicación, esto es, a su representación gráfica, y *parametrización* a la propia función \mathbf{c} .
- Para una curva dada no existe una única parametrización.
- En algunos casos no es posible dar una parametrización de toda la curva a la vez y hay que hacerlo por trozos.

Ejemplo 4.2

- $\mathbf{c}(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$ es una parametrización de la gráfica de la función $f(x)$ con x comprendido entre a y b .
- Una parametrización de una circunferencia de radio a es $\mathbf{c}(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$.
- $\mathbf{c}(t) = (2, 1, 3) + t(1, 3, 1) = (2 + t, 1 + 3t, 3 + t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ es una parametrización de la recta que pasa por el punto $(2, 1, 3)$ y tiene la dirección del vector $(1, 3, 1)$.
- $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t + \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$ parametriza la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $z = x + y$.

Atendiendo a las características geométricas de las curvas se puede establecer la siguiente terminología:

Definición 4.3

1. Una curva es plana si su representación gráfica está en \mathbb{R}^2 . En caso de no ser así, la curva se denomina alabeada.
2. Una curva es simple si su representación gráfica no tiene autointersecciones. Respecto de la parametrización, esto equivale a que \mathbf{c} sea inyectiva.
3. Una curva es conexa si su representación gráfica tiene una sola rama. Su parametrización, es una función continua.
4. Una curva es cerrada si es conexa, $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado y $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$.
5. Una curva es de Jordan si es cerrada y simple en $I = (a, b)$.
6. Una curva parametrizada es diferenciable si lo es la función \mathbf{c} que la define. La curva es diferenciable a trozos si I se puede descomponer en un número finito de subintervalos en el interior de cada uno de los cuales la curva es diferenciable.
7. Una curva es paramétricamente regular si \mathbf{c} es de clase C^1 en $\text{Int}I = (a, b)$ y $\mathbf{c}'(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$. Análogamente se puede definir paramétricamente regular a trozos.

Comentarios

- Una curva puede ser *paramétricamente regular* (resp. *diferenciable*) en una parametrización y no serlo en otra.

4.2.1. Vector tangente a una curva. Orientación

Definición 4.4 Sea $\mathbf{c}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada regular en $t_0 \in I$ con I abierto.

1. Se denomina vector tangente a la curva en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ al vector

$$\mathbf{c}'(t_0) = (c'_1(t_0), \dots, c'_n(t_0))$$

2. Se denomina recta tangente a la curva en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ a la recta que pasa por dicho punto y tiene como vector director el vector tangente $\mathbf{c}'(t_0)$. Su ecuación vectorial es

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}(t_0) + \lambda \mathbf{c}'(t_0) \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (c_1(t_0), \dots, c_n(t_0)) + \lambda (c'_1(t_0), \dots, c'_n(t_0)) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (4.3)$$

si todas las componentes del vector tangente son no nulas, otra forma de la recta tangente es

$$\frac{x_1 - c_1(t_0)}{c'_1(t_0)} = \dots = \frac{x_n - c_n(t_0)}{c'_n(t_0)}$$

3. Si $I \subset \mathbb{R}^2$ se denomina recta normal a la curva en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ a la recta que pasa por dicho punto y es perpendicular al vector tangente $\mathbf{c}'(t_0)$. Su ecuación vectorial es, por consiguiente,

$$\langle x - c(t_0), \mathbf{c}'(t_0) \rangle = 0 \leftrightarrow (x - c_1(t_0))c'_1(t_0) + (y - c_2(t_0))c'_2(t_0) = 0 \quad (4.4)$$

4. Si $I \subset \mathbb{R}^3$ se denomina plano normal a la curva en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ al plano que pasa por dicho punto y es perpendicular al vector tangente $\mathbf{c}'(t_0)$. Su ecuación vectorial es, por consiguiente,

$$\langle x - c(t_0), \mathbf{c}'(t_0) \rangle = 0 \leftrightarrow (x - c_1(t_0))c'_1(t_0) + (y - c_2(t_0))c'_2(t_0) + (z - c_3(t_0))c'_3(t_0) = 0 \quad (4.5)$$

5. Si $\mathbf{c}_1(t)$ es otra curva regular en I y tal que $\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{c}_1(t_1)$, es decir se cortan en un punto. Se llama ángulo de dos curvas al formado por sus vectores tangentes en el punto de corte

$$\alpha = \arccos \frac{\langle \mathbf{c}'(t_0), \mathbf{c}'_1(t_1) \rangle}{\|\mathbf{c}'(t_0)\| \|\mathbf{c}'_1(t_1)\|}$$

Comentarios

- Obsérvese que el vector $\mathbf{c}'(t_0)$ es efectivamente tangente a la curva en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ ya que, por ser la curva diferenciable en él, se verifica la condición de tangencia que es justamente

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}(t_0 + \lambda) - \mathbf{c}(t_0) - \mathbf{c}'(t_0)\lambda}{\lambda} = \mathbf{0}$$

- Sea $\mathbf{c}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de una curva. El intervalo I puede ser interpretado como un intervalo de tiempo y el vector $\mathbf{c}(t)$ como la posición de una partícula en el instante t . De esta forma puede hablarse de *orientación* o *sentido de recorrido* de la curva como su recorrido a lo largo del tiempo. Otra parametrización de la curva puede dar lugar a la orientación contraria.

Dos aplicaciones de la regla de la cadena relacionadas con este tema son las siguientes

Proposición 4.3 Sean $\mathbf{c}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada en \mathbb{R}^n diferenciable en t_0 y $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\mathbf{c}(t_0)$, es decir se tiene el esquema

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{f} \circ \mathbf{c} & : & I \subseteq \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathbf{c}} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbb{R}^m \\ & & t & \mapsto & (c_1(t), \dots, c_n(t)) & \mapsto & (\mathbf{f} \circ \mathbf{c})(t) \end{array}$$

Entonces

1. Se denomina transformada de la curva \mathbf{c} por la función \mathbf{f} a la curva $\alpha = \mathbf{f} \circ \mathbf{c}$, y su vector tangente en el punto t_0 es:

$$\alpha'(t_0) = J(\mathbf{f} \circ \mathbf{c})(t_0) = J\mathbf{f}(\mathbf{c}(t_0))J\mathbf{c}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{c}(t_0)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{c}(t_0)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{c}(t_0)) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{c}(t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(t_0) \\ \vdots \\ c'_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'_1(t_0) \\ \vdots \\ \alpha'_m(t_0) \end{pmatrix}$$

es decir, el vector tangente a la curva α es el transformado del vector tangente a \mathbf{c} por la aplicación $D\mathbf{f}(\mathbf{c}(t_0))$.

2. Si $m = 1$ la variación del campo escalar f a lo largo de la curva \mathbf{c} en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ es

$$(f \circ \mathbf{c})'(t_0) = Df(\mathbf{c}(t_0)) \circ D\mathbf{c}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{c}(t_0)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{c}(t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(t_0) \\ \vdots \\ c'_n(t_0) \end{pmatrix} = \langle \nabla f(\mathbf{c}(t_0)), \mathbf{c}'(t_0) \rangle$$

que no es otra cosa que la derivada direccional de la función f en la dirección del vector tangente a la curva en el punto $\mathbf{c}(t_0)$.

Definición 4.5 Sean $\alpha: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos curvas parametrizadas de \mathbb{R}^n . Se dice que ambas curvas son regularmente equivalentes, es decir tienen la misma gráfica, si existe un difeomorfismo $f: I_1 \rightarrow I_2$ tal que $\alpha = \beta \circ f$. Además si $f'(t) > 0$, en I_1 , entonces ambas parametrizaciones recorren la curva en el mismo sentido, es decir dan la misma orientación.

$$\begin{array}{ccc} I_1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow f & \uparrow \beta \\ & & I_2 \end{array}$$

4.3. Curvas regulares

En esta sección daremos otras maneras de describir curvas en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 . Definiremos también el concepto de curva regular y lo estudiaremos para las distintas formas de describir una curva.

Definición 4.6 Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ o 3 se dice que es una curva regular si para cada punto $a \in C$ existe un abierto U de \mathbb{R}^n , $n = 2$ o 3 , con $a \in U$, y un difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$ tal que

$$\varphi(U \cap C) = V \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \quad \text{si } C \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{o} \quad \varphi(U \cap C) = V \cap (\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}) \quad \text{si } C \subset \mathbb{R}^3$$

La curva es por tanto regular si localmente, en cada punto, existe un cambio de variables que la transforme en un trozo de recta.

4.3.1. Curvas en \mathbb{R}^2

Definición 4.7 Una curva en \mathbb{R}^2 viene dada por

- La gráfica de una función escalar $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; esto es

$$C = \text{graf } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\}$$

Se dice, en este caso, que la curva está dada en forma explícita.

- Un conjunto de nivel de una función escalar $F: B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; esto es

$$C = \{(x, y) \in B \mid F(x, y) = k\}, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Se dice, en este caso, que la curva está dada en forma implícita.

Para el caso en que una curva venga expresada en forma explícita es decir $y = f(x)$, la regularidad viene dada por la siguiente proposición

Proposición 4.4 La gráfica de una función $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un abierto, es una curva regular si f es de clase C^1 .

(Dem.) Basta considerar el cambio de variable

$$\begin{aligned} \varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V \\ (x, y) &\mapsto (x, y - f(x)) \end{aligned}$$

donde U y V son el abierto $I \times \mathbb{R}$, y $\varphi(U \cap C) = I \times \{0\}$ es decir C se transforma en segmentos de recta. ■

La expresión de las rectas tangente y normal, a la curva $y = f(x)$, se puede obtener de cualquiera de las siguientes dos formas:

- Una parametrización de dicha curva es $\alpha(t) = (t, f(t))$ y un vector tangente a la curva, en el punto $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$, es $\alpha'(t_0) = (1, f'(t_0))$ y las rectas tangente y normal se determinan como en las ecuaciones 4.3 y 4.4 respectivamente.
- Teniendo en cuenta la ecuación 3.7

Si tenemos una curva definida por la ecuación $F(x, y) = 0$, una condición suficiente para que sea regular nos la proporciona el teorema de la función implícita.

Proposición 4.5 Sea F de clase C^1 y tal que $\nabla F(x, y) \neq (0, 0)$, $\forall (x, y)$ tal que $F(x, y) = 0$. Entonces la curva definida en forma implícita por la ecuación $F(x, y) = 0$ es una curva regular.

(Dem.) Por el teorema de la función implícita si $\nabla F(x, y) \neq (0, 0)$ entonces se tiene $y = g(x)$ o $x = h(y)$, según sea $F_y \neq 0$ o $F_x \neq 0$ con g y h funciones de clase C^1 , y por tanto la curva es regular por la proposición anterior. ■

Para determinar la ecuación de las rectas tangente y normal podemos considerar

- El vector tangente es $(1, g'(t))$ o bien $(h'(t), 1)$.
- En cada punto, $\nabla F(p)$ es perpendicular a la curva, de acuerdo con el corolario 4.1, y obtenemos la expresión de la recta tangente mediante la ecuación 4.2.

4.3.2. Curvas en \mathbb{R}^3

Procederemos de manera análoga a lo expuesto para curvas en \mathbb{R}^2 .

Definición 4.8 Una curva en \mathbb{R}^3 viene dada por

- La gráfica de un campo vectorial $\mathbf{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; esto es

$$C = \text{graf } \mathbf{f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in I, y = f_1(x), z = f_2(x)\}$$

- La intersección de dos superficies de nivel de funciones continuas $F, G: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$C = \{(x, y, z) \in A \mid F(x, y, z) = 0, y G(x, y, z) = 0\}$$

Proposición 4.6 La gráfica de un campo vectorial $\mathbf{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular en los puntos donde \mathbf{f} sea de clase C^1

(Dem.) Basta considerar el cambio de variable

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow I \times \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y - f_1(x), z - f_2(x)) \end{aligned}$$

que transforma la curva en segmentos de recta. ■

Si tenemos en cuenta que una parametrización de la gráfica de \mathbf{f} es $\alpha(t) = (t, f_1(t), f_2(t))$, el vector $(1, f'_1(t), f'_2(t))$ es tangente a la curva y la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto $(t_0, f_1(t_0), f_2(t_0))$ es

$$(x, y, z) = (t_0, f_1(t_0), f_2(t_0)) + \lambda(1, f'_1(t_0), f'_2(t_0))$$

y el plano normal tiene de ecuación

$$\langle x - \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = 0 \quad \text{o} \quad x - t_0 + f'_1(t_0)(y - f_1(t_0)) + f'_2(t_0)(z - f_2(t_0)) = 0$$

Si tenemos una curva definida por la intersección de dos superficies, $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$, el teorema de la función implícita nos proporciona una condición suficiente para que sea regular.

Proposición 4.7 La curva $C = \{(x, y, z) \in A \mid F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0\}$ es regular si, la función vectorial $\mathbf{H}: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{H} = (F, G)$ es de clase C^1 y su matriz jacobiana tiene rango máximo para cada $(x, y, z) \in A$.

(Dem.) Si el rango de \mathbf{JH} es máximo, o sea 2, quiere decir que dos de las variables se pueden expresar como función de la tercera y por tanto los puntos de C se pueden expresar mediante $(x, h_1(x), h_2(x))$ o bien $(h_3(y), y, h_4(y))$ o $(h_5(z), h_6(z), z)$ y por tanto en cualquiera de los tres casos tendríamos una curva regular por la proposición anterior. ■

Un vector tangente se puede obtener de cualquiera de las dos formas

- Como aplicación del teorema de la función implícita. Supongamos que se tiene

$$\begin{vmatrix} F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \\ G_y(x_0, y_0, z_0) & G_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces

$$\begin{pmatrix} h'_1(x_0) & h'_2(x_0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \\ G_y(x_0, y_0, z_0) & G_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) \\ G_x(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

y el vector $(1, h'_1(x_0), h'_2(x_0))$ es tangente a la curva,

- Haciendo el producto vectorial $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla G(x_0, y_0, z_0)$ se tiene un vector tangente. (razónese porqué)

A partir del vector tangente definimos la recta tangente y el plano normal.

4.4. Superficies parametrizadas

Definición 4.9 Una superficie parametrizada en \mathbb{R}^3 es una función vectorial

$$\begin{aligned} \sigma: D \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \sigma(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \end{aligned}$$

Comentarios

- Es habitual denominar superficie a la imagen de esta aplicación, esto es, a su representación gráfica, $S = \text{Im } \sigma$, y parametrización a la propia función σ .
- En algunos casos no es posible dar una parametrización de toda la superficie a la vez y hay que hacerlo por trozos.
- Para una superficie existen infinitas parametrizaciones.

Ejemplo 4.3

- Plano: $\sigma(u, v) = (u, v, -u - v)$ con $D = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$. Representa la porción de plano $x + y + z = 0$ interior al cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$.
- Esfera: $\sigma(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$ con $D = (u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Representa una esfera de centrada en el origen y radio R .
- Cono: $\sigma(u, v) = (u \sin \alpha \cos v, u \sin \alpha \sin v, u \cos \alpha)$ donde $D = (u, v) \in [0, a] \times [0, 2\pi)$. Representa un cono con vértice en el origen, abertura α y generatriz de longitud a .
- Toro: $\sigma(u, v) = \left(\left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos u \right] \cos v, \left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos u \right] \sin v, \frac{a-b}{2} \sin u \right)$ donde $D = (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

De manera análoga a como se hizo con las curvas, se puede establecer la siguiente terminología:

Definición 4.10 Una superficie parametrizada es

1. Simple si S no tiene autointersecciones esto es equivalente a que σ sea inyectiva.
2. Diferenciable si lo es σ .
3. De clase C^k si lo es σ .

Puede demostrarse que:

Proposición 4.8 Si $\sigma: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada simple entonces toda curva cerrada simple en D tiene como imagen por σ una curva cerrada simple en $S = \sigma(D)$.

Vamos a establecer las siguientes definiciones para superficies parametrizadas:

Definición 4.11 Dada una superficie parametrizada diferenciable $\sigma: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con D abierto, se definen las funciones vectoriales

$$\mathbf{T}_u(u, v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \mathbf{T}_v(u, v) = \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

Sea $(u_0, v_0) \in D$:

1. Se denomina producto vectorial fundamental en (u_0, v_0) respecto a la parametrización dada σ a

$$\mathbf{T}_u(u_0, v_0) \wedge \mathbf{T}_v(u_0, v_0) = \left(\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \right|, \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \right|, \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \right| \right) \quad (4.6)$$

$$\text{donde } \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}$$

2. $\sigma(u_0, v_0)$ es un punto regular de la parametrización considerada si
 - a) Las funciones $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$ son continuas en (u_0, v_0) , es decir, σ es de clase C^1 en (u_0, v_0) y
 - b) $\mathbf{T}_u(u_0, v_0) \wedge \mathbf{T}_v(u_0, v_0) \neq 0$, lo que implica $\mathbf{T}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{T}_v(u_0, v_0)$ linealmente independientes o también $\text{rang } D\sigma = 2$.

En caso contrario, se dice que es un punto singular.

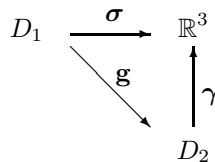
3. La superficie paramétrica es regular si todos sus puntos son regulares
4. La superficie paramétrica es regular a trozos si su representación gráfica es la unión de un número finito de imágenes de superficies parametrizadas regulares.

Comentarios

Tal como ha sido definido punto regular un punto puede ser regular para una parametrización y singular para otra.

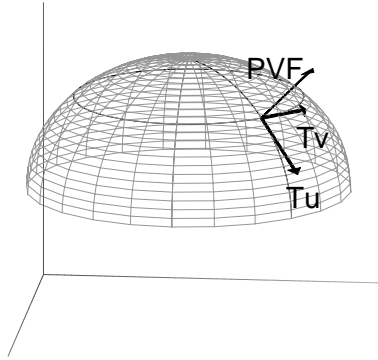
Definición 4.12 Sean $\sigma: D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\gamma: D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones. Se dice que σ y γ son regularmente equivalentes si existe un difeomorfismo $\mathbf{g}: D_1 \rightarrow D_2$ tal que $\sigma(D_1) = (\gamma \circ \mathbf{g})(D_1)$.

Esto implica que ambas parametrizaciones representan la misma superficie, es decir $S = \sigma(D_1) = \gamma(D_2)$.



4.4.1. Vector ortogonal a una superficie. Orientación

La interpretación geométrica de los vectores $\mathbf{T}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{T}_v(u_0, v_0)$ y del producto vectorial fundamental es la siguiente: si en $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se consideran las rectas $u = u_0$ y $v = v_0$, sus imágenes por σ , $\sigma(u_0, v)$ y $\sigma(u, v_0)$, son curvas en \mathbb{R}^3 que están contenidas en $S = \text{Im } \sigma$. Entonces, $\mathbf{T}_v(u_0, v_0)$ y $\mathbf{T}_u(u_0, v_0)$ son respectivamente los vectores tangentes a dichas curvas en el punto $\sigma(u_0, v_0)$ (vease figura) como sugiere su propia definición y veremos a continuación.



Proposición 4.9 Sean $\sigma: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie paramétrica simple, regular y $S = \sigma(D)$. Cualquier curva regular contenida en S se puede considerar localmente como una curva parametrizada en \mathbb{R}^3 de la forma

$$\sigma \circ \gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

donde γ es una curva parametrizada en \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \gamma: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

tal que $\gamma(I) \subset D$. Un vector tangente a la curva $\sigma \circ \gamma$ en el punto t_0 es

$$(\sigma \circ \gamma)'(t_0) = D\sigma(\gamma(t_0)) \circ D\gamma(t_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_u & \mathbf{T}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = x'(t_0)\mathbf{T}_u + y'(t_0)\mathbf{T}_v$$

Como vemos el vector tangente se encuentra en el plano definido por los vectores \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v esto nos proporciona las siguientes definiciones

Definición 4.13 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie paramétrica regular.

1. Se denomina plano tangente a la superficie en un punto al plano que pasa por dicho punto y tiene como vector característico el producto vectorial fundamental en el punto.
2. Se denomina recta normal a la recta ortogonal al plano tangente.

La ecuación del plano tangente a S en el punto $\sigma(a)$ es:

$$0 = \langle (x, y, z) - \sigma(a), \mathbf{T}_u(a) \wedge \mathbf{T}_v(a) \rangle = (x - \sigma_1) \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(a) \right| + (y - \sigma_2) \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}(a) \right| + (z - \sigma_3) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(a) \right| \quad (4.7)$$

o, equivalentemente

$$(x, y, z) = \sigma(a) + \lambda \mathbf{T}_u(a) + \mu \mathbf{T}_v(a)$$

Una ecuación vectorial de la recta normal es, por tanto,

$$(x, y, z) = \sigma(a) + \lambda \mathbf{T}_u(a) \wedge \mathbf{T}_v(a)$$

Definición 4.14 Sea una superficie paramétrica regular $S \subset \mathbb{R}^3$. Una orientación de la superficie es una función continua que asigna a cada punto de S un vector normal unitario \mathbf{n} .

Una superficie dotada con una orientación se dice que está orientada.

Comentarios

- Dada una superficie parametrizada regular, se llama *orientación positiva* a la que se obtiene tomando como vector unitario normal en cada punto $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\|}$ y *orientación negativa* a la contraria. Está claro, por tanto, que la orientación dependerá de la parametrización.
- Obsérvese que al dar un vector normal en cada punto de una superficie se están distinguiendo dos sentidos: el del vector y su opuesto, cada uno de los cuales corresponde a una de las orientaciones de la superficie. Por tanto, una superficie tiene, en un entorno de cada punto, sólo dos orientaciones, esto es, dos lados.
- La orientación es, en general, una propiedad local. Hay superficies localmente orientables pero no en su totalidad. Por ejemplo, puede ocurrir que partiendo de un punto donde el vector normal es \mathbf{n} , y siguiendo un camino cerrado sobre la superficie cuando se vuelve al punto de partida dicho vector ha cambiado su sentido y es ahora $-\mathbf{n}$. Esto ocurre en la *banda de Möbius*.

Las superficies que, consideradas en su totalidad, tienen dos lados reciben el nombre de *superficies orientables*, en contraposición a las que sólo tienen un lado que son las *superficies no orientables*.

4.5. Superficies regulares en \mathbb{R}^3

Análogamente a como hicimos para las curvas regulares, en esta sección daremos otras maneras de describir superficies en \mathbb{R}^3 . Definiremos también el concepto de superficie regular y lo estudiaremos para las distintas formas de describir una superficie.

Definición 4.15 Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ se dice que es una superficie regular si para cada punto $a \in S$ existe un abierto U de \mathbb{R}^3 , con $a \in U$, y un difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$ tal que

$$\varphi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$$

Una superficie es por tanto regular si localmente, en cada punto, existe un cambio de variable que la transforme en un trozo de plano.

Definición 4.16 Una superficie en \mathbb{R}^3 viene dada por

- La gráfica de toda función escalar continua $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; esto es

$$S := \text{graf } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$$

Se dice, en este caso, que la superficie está dada en forma explícita y se expresa mediante la ecuación $z = f(x, y)$.

- Un conjunto nivel de una función escalar continua $F: B \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; esto es

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = k, k \in \mathbb{R}\}$$

Se dice, en este caso, que la superficie está dada en forma implícita y se expresa mediante la ecuación $F(x, y, z) = k$.

Veamos ahora condiciones suficientes para que una superficie explícita o implícita sea regular.

Proposición 4.10 (Condiciones suficientes de regularidad)

1. Sea $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con A un abierto de \mathbb{R}^2 y f de clase C^1 entonces la superficie $z = f(x, y)$ es regular en A .
2. Sea $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con A un abierto de \mathbb{R}^3 y F de clase C^1 y tal que $\text{rang } JF = 2$, entonces la superficie $F(x, y, z) = 0$ es regular.

(Dem.)

1. Basta considerar el cambio de variable

$$\begin{aligned} \varphi : A \times \mathbb{R} &\longrightarrow A \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, z - f(x, y)) \end{aligned}$$

por tanto, $\varphi((A \times \mathbb{R}) \cap S) = A \times \{0\}$ y φ transforma S en una porción de plano.

2. Por el teorema de la función implícita, si F es de clase C^1 y $\text{rang } JF = 2$ en los puntos de la superficie $F(x, y, z) = 0$, entonces se tiene alguna de las siguientes opciones $z = h_1(x, y)$, $y = h_2(x, z)$ o $x = h_3(y, z)$ con h_1, h_2 o h_3 de clase C^1 , por lo que se deduce que, según lo anterior, se trata de una superficie regular. ■

Vamos ahora a calcular las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a una superficie regular en un punto. Distinguiremos dos casos según la superficie esté dada en forma explícita o implícita.

Forma explícita : $S = \text{graf } f$ con $z = f(x, y)$, $a \in \text{Dom } f$.

Según vimos en la ecuación 3.7 del corolario 3.1 la ecuación del plano tangente a la superficie $S = \text{graf } f$ en el punto de coordenadas $(a, f(a))$ es

$$z - f(a) = (x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - a_2) \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

También se puede obtener parametrizando S mediante $\sigma: \text{Dom } f \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ que tiene como producto vectorial fundamental

$$\mathbf{T}_x(x, y) \wedge \mathbf{T}_y(x, y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

y si recordamos la ecuación 4.7 se obtiene como ecuación del plano tangente

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2) + (z - f(a)) = 0$$

y la ecuación vectorial de la recta normal es

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, f(a)) + \lambda(\nabla f(a), -1)$$

Forma implícita : $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$, con $a \in S$.

De acuerdo con la ecuación 4.2 de el corolario 4.1, la ecuación del plano tangente a S en a es:

$$0 = \langle (x, y, z) - (a_1, a_2, a_3), \nabla F(a) \rangle = (x - a_1) \frac{\partial F}{\partial x}(a) + (y - a_2) \frac{\partial F}{\partial y}(a) + (z - a_3) \frac{\partial F}{\partial z}(a)$$

También puede obtenerse como consecuencia del teorema de la función implícita y siguiendo los pasos indicados en el apartado anterior.

Una ecuación vectorial de la recta normal es, por tanto,

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda \nabla F(a)$$

Capítulo 5

Estudio local de funciones en \mathbb{R}^n

En este capítulo se va a estudiar primero el problema de la aproximación local de funciones por medio del *polinomio de Taylor*. Después trataremos de identificar y clasificar los extremos, locales y absolutos, de funciones de varias variables, tanto de forma libre como con condiciones.

5.1. Fórmula de Taylor. Expresión del resto.

Vamos a generalizar el *desarrollo de Taylor* para funciones de varias variables. Dada una función $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$, se trata de encontrar el polinomio de n variables que mejor aproxime la función f en un entorno de a .

Recordemos en primer lugar cómo es un polinomio $P_m(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y por tanto $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$$\begin{aligned} P_m(x) &= a_0 + \underbrace{a_1x_1 + \dots + a_nx_n}_{n \text{ términos}} + \underbrace{a_{11}x_1x_1 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \dots + a_{nn}x_nx_n}_{n^2 \text{ términos}} + \dots = \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} + \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n a_{i_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \end{aligned}$$

es decir es un polinomio de las variables x_1, \dots, x_n . Llamaremos *grado* o *orden* de un término a la suma de los exponentes de sus variables y el mayor de los grados será el grado del polinomio.

Proposición 5.1 *Todo polinomio expresado en potencias de x_1, \dots, x_n también se puede expresar en potencias de $(x_1 - a_1), \dots, (x_n - a_n)$. Es decir $P_m(x) = Q_m(x - a)$ para algún polinomio Q_m y cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}^n$*

Se propone como ejercicio comprobarlo para el polinomio $P_2(x, y) = 6 + x + 2x^2 - 3y^2 + 5xy$ expresándolo en potencias de $x - 1$ y de $y - 1$.

Definimos ahora qué se entiende por orden de contacto entre dos funciones en un punto.

Definición 5.1 *Sean $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y a un punto del abierto A . Se dice que estas dos funciones tienen en a un contacto de orden superior a m si*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{\|x - a\|^m} = 0, \text{ lo que también se expresa en la forma } f(x) - g(x) = o(\|x - a\|^m) \text{ cuando } x \rightarrow a.$$

Ejemplo 5.1

Si f es diferenciable en a el polinomio

$$P_1(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

tiene en a un contacto con f de orden superior a 1 ya que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_1(x)}{\|x - a\|} = 0, \quad (\text{condición de tangencia})$$

Vamos a tratar de establecer condiciones para que, dada una función f , exista un polinomio de grado m que tenga con f un contacto de orden superior a m en a . Primeramente veamos que si existe este polinomio es único.

Teorema 5.1 (de unicidad): Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto y $a \in A$. Si existe un polinomio $P_m(x)$ de grado menor o igual a m tal que $f(x) - P_m(x) = o(\|x - a\|^m)$ cuando $x \rightarrow a$ este polinomio es único.

(Dem.)

Supongamos que $P_m(x)$ y $Q_m(x)$ son dos polinomios de grado m que satisfacen las condiciones del enunciado, si denotamos con $R_m(x)$ el polinomio diferencia, se tiene

$$R_m(x) = P_m(x) - Q_m(x) = o(\|x - a\|^m) \quad \text{cuando } x \rightarrow a,$$

es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_m(x)}{\|x - a\|^m} = 0 \quad (5.1)$$

Por la proposición 5.1 se tiene

$$R_m(x) = B_m(x - a) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i (x_i - a_i) + \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n b_{i_1 \dots i_m} (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_m} - a_{i_m})$$

polinomio que en $x = a + t\mathbf{h}$, con $t \in \mathbb{R}$ y \mathbf{h} un vector unitario cualquiera, vale

$$R_m(a + t\mathbf{h}) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i h_i t + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n b_{i_1 i_2} h_{i_1} h_{i_2} t^2 + \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n b_{i_1 \dots i_m} h_{i_1} \dots h_{i_m} t^m$$

con lo que la ecuación 5.1 queda

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{b_0 + \sum_{i=1}^n b_i h_i t + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n b_{i_1 i_2} h_{i_1} h_{i_2} t^2 + \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n b_{i_1 \dots i_m} h_{i_1} \dots h_{i_m} t^m}{|t|^m} = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{b_0 + \sum_{i=1}^n b_i h_i t + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n b_{i_1 i_2} h_{i_1} h_{i_2} t^2 + \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n b_{i_1 \dots i_m} h_{i_1} \dots h_{i_m} t^m}{t^m} \right| = 0$$

y por tanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{b_0 + \sum_{i=1}^n b_i h_i t + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n b_{i_1 i_2} h_{i_1} h_{i_2} t^2 + \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n b_{i_1 \dots i_m} h_{i_1} \dots h_{i_m} t^m}{t^m} = 0$$

lo que implica $b_0 = 0$. Entonces queda

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n b_i h_i + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n b_{i_1 i_2} h_{i_1} h_{i_2} t + \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n b_{i_1 \dots i_m} h_{i_1} \dots h_{i_m} t^{m-1}}{t^{m-1}} = 0$$

y tambien es nulo el coeficiente de t , es decir $\sum_{i=1}^n b_i h_i = 0$.

Así sucesivamente, deducimos que son nulos todos los coeficientes, obteniendose el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} b_0 = 0 \\ \sum_{i=1}^n b_i h_i = 0 \\ \dots \\ \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n b_{i_1 \dots i_m} h_{i_1} \dots h_{i_m} = 0 \end{array} \right\}$$

como esto ocurre cualquiera que sea el vector $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, se deduce que $b_0 = b_1 = \dots = b_m$, luego $R_m(x)$ es el polinomio nulo. ■

Proposición 5.2 Sean $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k , con U abierto $a \in U$ y $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Si $l \leq k$ se define como derivada direccional de orden l de f en a según el vector \mathbf{h}

$$f^{(l)}(a, \mathbf{h}) = \left. \frac{d^l}{dt^l} f(a + t\mathbf{h}) \right|_{t=0} \quad (5.2)$$

y por tanto

$$\left. \begin{array}{l} f'(a, \mathbf{h}) = Df(a) \cdot \mathbf{h} = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_{i_1}} h_{i_1} \\ f''(a, \mathbf{h}) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} h_{i_1} h_{i_2} \\ \dots \\ f^{(k)}(a, \mathbf{h}) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \dots h_{i_k} \end{array} \right\}$$

(Dem.)

Consideremos la siguiente composición de funciones

$$\begin{array}{ccccc} I \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathbf{c}} & U \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & a + t\mathbf{h} & \mapsto & f(a + t\mathbf{h}) \end{array} \quad (5.3)$$

donde suponemos que $a + t\mathbf{h} \in U$, $\forall t \in I$.

Si aplicamos la regla de la cadena en $t = 0$ se tiene

$$(f \circ \mathbf{c})'(0) = Df(\mathbf{c}(0)) \circ D\mathbf{c}(0) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_{i_1}} h_{i_1} = f'(a, \mathbf{h})$$

Como f es de clase C^k reiterando lo anterior para cada una de las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}$ se obtiene

$$(f \circ \mathbf{c})''(0) = \sum_{i_1=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right)'(a, \mathbf{h}) h_{i_1} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} h_{i_1} h_{i_2} = f''(a, \mathbf{h})$$

si operamos recursivamente y hasta orden k se tiene

$$(f \circ \mathbf{c})^{(k)}(0) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k} = f^{(k)}(a, \mathbf{h})$$

■

Con las mismas hipótesis que en la proposición 5.2, llamamos *polinomio de Taylor* de f en a de grado $\leq k$ respecto de las componentes de $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ a

$$P_k(f, a, \mathbf{h}) = f(a) + f'(a, \mathbf{h}) + \dots + \frac{f^{(k)}(a, \mathbf{h})}{k!}$$

Teorema 5.2 (de Taylor): Sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, tal que el segmento $[a, a + t\mathbf{h}] \subset U$, para $0 \leq t \leq 1$. Si f es una función de clase C^{k+1} en U entonces

$$f(a + \mathbf{h}) = P_k(f, a, \mathbf{h}) + R_k(f, a, \mathbf{h}), \quad \text{fórmula de Taylor}$$

donde el término complementario o resto de Lagrange $R_k(f, a, \mathbf{h})$ verifica que

$$R_k(f, a, \mathbf{h}) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\tilde{a}, \mathbf{h}).$$

para un cierto punto \tilde{a} perteneciente al segmento $[a, a + \mathbf{h}]$, por consiguiente:

$$R_k(f, a, \mathbf{h}) = O(\|\mathbf{h}\|^{k+1}) \quad \text{cuando} \quad \mathbf{h} \rightarrow 0.$$

(Dem.)

Si consideramos la composición 5.3 la función $f \circ \mathbf{c}$ es una función real de clase C^{k+1} y cuyas derivadas conocemos por la proposición 5.2 y a la que podemos aplicar el desarrollo de Taylor para funciones reales de variable real en $t = 0$

$$(f \circ \mathbf{c})(t) = (f \circ \mathbf{c})(0) + (f \circ \mathbf{c})'(0)t + \frac{1}{2!}(f \circ \mathbf{c})''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{k!}(f \circ \mathbf{c})^{(k)}(0)t^k + \frac{1}{(k+1)!}(f \circ \mathbf{c})^{(k+1)}(\lambda)t^{k+1}.$$

para algún λ que cumpla $0 < \lambda < 1$. En particular si calculamos el valor de esta expresión en $t = 1$, y utilizamos la expresión 5.2, se tiene

$$(f \circ \mathbf{c})(1) = f(a + \mathbf{h}) = f(a) + f'(a, \mathbf{h}) + \dots + \frac{f^{(k)}(a, \mathbf{h})}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(\tilde{a}, \mathbf{h})}{(k+1)!} \quad (5.4)$$

donde \tilde{a} es algún punto del segmento $[a, a + \mathbf{h}]$. ■

Comentarios

Observese que la formula de Taylor queda por tanto

$$f(a + \mathbf{h}) = f(a) + \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_{i_1}} h_{i_1} + \frac{1}{2!} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} h_{i_1} h_{i_2} + \dots + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^n \frac{\partial^{k+1} f(\tilde{a})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}} h_{i_1} \cdots h_{i_{k+1}}$$

o también si hacemos $a + \mathbf{h} = x$

$$f(x) = f(a) + \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_{i_1}} (x_{i_1} - a_{i_1}) + \frac{1}{2!} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} (x_{i_1} - a_{i_1}) (x_{i_2} - a_{i_2}) + \dots +$$

$$\frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{k+1}=1}^n \frac{\partial^{k+1} f(\tilde{a})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}} (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_{k+1}} - a_{i_{k+1}})$$

Los coeficientes de los términos de primer grado del polinomio de Taylor son los elementos de la matriz jacobiana de f en a . Asimismo los coeficientes de los términos de orden dos, salvo el factor $1/2$, son los elementos de la matriz Hessiana de f en a . El desarrollo Taylor se puede expresar mediante

$$f(a+h) = f(a) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \dots$$

Corolario 5.1 Con las mismas hipótesis que el teorema de Taylor si f es de clase C^k se verifica

$$f(a + \mathbf{h}) = P_k(f, a, \mathbf{h}) + R_k(f, a, \mathbf{h}), \quad \text{donde } R_k(f, a, \mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|^k), \quad \text{cuando } h \rightarrow 0$$

(Dem.) Si aplicamos el teorema de Taylor se tiene

$$f(a + \mathbf{h}) = P_{k-1}(f, a, \mathbf{h}) + R_{k-1}(f, a, \mathbf{h}), \quad \text{donde } R_{k-1}(f, a, \mathbf{h}) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\tilde{a}, \mathbf{h}). \quad (5.5)$$

por otro lado

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(\tilde{a}, \mathbf{h}) - f^{(k)}(a, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^k} = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \left(\frac{\partial^k f(\tilde{a})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} - \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right) \frac{h_{i_1}}{\|\mathbf{h}\|} \dots \frac{h_{i_k}}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

se ha tenido en cuenta que como f es de clase C^k sus derivadas de orden k son continuas en a y que $\frac{h_i}{\|\mathbf{h}\|}$ están acotadas.

Por tanto

$$f^{(k)}(\tilde{a}, \mathbf{h}) - f^{(k)}(a, \mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|^k) \implies f^{(k)}(\tilde{a}, \mathbf{h}) = f^{(k)}(a, \mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|^k) \quad \text{cuando } h \rightarrow 0$$

que llevado a la expresión 5.5 completa la demostración. ■

Teorema 5.3 (del valor medio): Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 , con U abierto, tal que el segmento que une a con x esté contenido en U , esto es $a + \lambda x \in U$, para $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces existe un punto ζ , en dicho segmento tal que

$$f(x) - f(a) = \nabla f(\zeta) \cdot (x - a)$$

(Dem.) Basta considerar el polinomio de Taylor de grado 0 y su correspondiente resto.

5.2. Extremos locales

5.2.1. Formas cuadráticas

Antes de comenzar el estudio de los extremos de funciones de varias variables vamos a recordar algunas propiedades de las *formas cuadráticas*.

Definición 5.2 Sean E un espacio vectorial real con producto escalar (por ejemplo \mathbb{R}^n), $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E y $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ una matriz real de orden n simétrica. Se denomina forma cuadrática asociada a la matriz A respecto de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, a la aplicación

$$\mathcal{A} : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i & \mapsto & \mathcal{A}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \end{array}$$

es decir,

$$\mathcal{A}(x) = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definición 5.3 Sea $\mathcal{A}: E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática, se dice que es

1. \mathcal{A} es definida positiva si $\mathcal{A}(x) > 0$, $\forall x \in E$, tal que $x \neq 0$.
2. \mathcal{A} es definida negativa si $\mathcal{A}(x) < 0$, $\forall x \in E$, tal que $x \neq 0$.
3. \mathcal{A} es indefinida si $\mathcal{A}(x) > 0$, para algún $x \in E$ y $\mathcal{A}(y) < 0$, para algún $y \in E$.

Puede ser también *semidefinida positiva* si $\forall x, \mathcal{A}(x) \geq 0$. Igualmente se define *semidefinida negativa*.

Veamos ahora diferentes criterios para determinar si se trata de una forma cuadrática definida positiva o negativa.

Proposición 5.3 Sea \mathcal{A} una forma cuadrática.

1. \mathcal{A} es definida positiva $\iff \exists \lambda > 0$ tal que $\mathcal{A}(x) > \lambda \|x\|^2 \quad \forall x \neq 0$.
2. \mathcal{A} es definida negativa $\iff \exists \lambda < 0$ tal que $\mathcal{A}(x) < \lambda \|x\|^2 \quad \forall x \neq 0$.

(Dem.)

1. $\mathcal{A}: E \rightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio de grado 2 en n variables y por tanto es una función continua en E . El conjunto $\{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ es un compacto, luego \mathcal{A} tiene sobre este conjunto un mínimo, sea λ es mínimo. Entonces, si suponemos que \mathcal{A} es definida positiva este valor $\lambda = \mathcal{A}(x_0)$, donde $\|x_0\| = 1$ ha de ser positivo y

$$\forall x \in E \quad x \neq 0 \quad \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\frac{x}{\|x\|} \|x\|\right) = \|x\|^2 \mathcal{A}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \lambda \|x\|^2$$

el recíproco es inmediato.

2. Se demuestra análogamente. ■

Proposición 5.4 (Criterio de Sylvester:) Sea \mathcal{A} una forma cuadrática simétrica asociada a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y sean Δ_i sus menores diagonales principales

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad \Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Entonces

1. \mathcal{A} es definida positiva $\iff \Delta_i > 0 \quad \forall i, i = 1, 2, \dots, n$
2. \mathcal{A} es definida negativa $\iff (-1)^i \Delta_i > 0 \quad \forall i, i = 1, 2, \dots, n$

Un criterio equivalente y algo más preciso es el siguiente:

Proposición 5.5 (Criterio de los valores propios:) Sea $\mathcal{A}: E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática simétrica asociada a la matriz A . Por ser A simétrica sus valores propios son todos reales. Entonces

1. \mathcal{A} es definida positiva \iff los valores propios de A son estrictamente positivos.
2. \mathcal{A} es definida negativa \iff los valores propios de A son estrictamente negativos.
3. \mathcal{A} es indefinida $\iff A$ tiene valores propios positivos y negativos.
4. \mathcal{A} es semidefinida positiva \iff los valores propios de A son ≥ 0 .
5. \mathcal{A} es semidefinida negativa \iff los valores propios de A son ≤ 0 .

5.2.2. Extremos locales de funciones. Puntos críticos.

Como en el caso de funciones de una variable, se define:

Definición 5.4 Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con A abierto y $a \in A$. Se dice que f tiene en a un

1. mínimo local si existe $B_r(a) \subset A$ tal que $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in B_r(a)$.
2. máximo local si existe $B_r(a) \subset A$ tal que $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in B_r(a)$.

En ambos casos se dice que f tiene en a un extremo local. Si las desigualdades son estrictas, se denomina extremo local estricto.

Una primera caracterización de los extremos locales viene dada por la siguiente proposición:

Proposición 5.6 Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto y $a \in A$, tal que f es diferenciable en a . Si f presenta un extremo local en a entonces $Df(a) = 0$

(Dem.) El segmento $\mathbf{c}(t) = a + t\mathbf{v}$, $t \in (-\delta, \delta)$ está contenido en el abierto A para algún valor de δ y cualquiera que sea \mathbf{v} , como f presenta un extremo local en a entonces la función $f \circ \mathbf{c}$ tiene en $t = 0$ un extremo, luego

$$0 = (f \circ \mathbf{c})'(0) = Df(\mathbf{c}(0)) \cdot \mathbf{c}'(0) = Df(\mathbf{c}(0)) \cdot \mathbf{v} \quad (\forall \mathbf{v})$$

es decir, todas las derivadas direccionales en a son nulas, luego también lo son las derivadas parciales y, por tanto, $Df(a) = 0$. ■

Definición 5.5 Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto y $a \in A$, tal que f es diferenciable en a . Se dice que a es un punto crítico si $Df(a) = 0$

Por consiguiente, vemos que si f es diferenciable todos los extremos locales son puntos críticos, pero no al revés. Entonces:

Definición 5.6 Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto y $a \in A$, tal que f es diferenciable en a . Si a es un punto crítico de f pero no es un extremo se dice que es un punto de silla.

Así pues, si a es un punto de silla de f , en cualquier entorno de a hay puntos donde la función toma valores mayores que $f(a)$ y puntos donde la función toma valores menores que $f(a)$.

5.2.3. Condición suficiente de extremo

Vamos a estudiar diferentes criterios para determinar si un punto crítico de una función es un máximo o mínimo locales o un punto de silla.

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ A abierto, $a \in A$ y f de clase C^2 . Denotaremos por $\mathcal{H}f(a)$ la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana $Hf(a)$ que con las restricciones impuestas a f es simétrica

$$\mathcal{H}f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Estudiaremos ahora cuándo esta forma es definida, positiva o negativa, semidefinida o indefinida y la relación que puede tener con el comportamiento de la función en a . Enunciamos la siguiente proposición

Proposición 5.7 *Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , A abierto y $a \in A$ un punto crítico de f , entonces:*

1. *Si $\mathcal{H}f(a)$ es una forma cuadrática definida positiva entonces f presenta un mínimo local estricto en a .*
2. *Si $\mathcal{H}f(a)$ es una forma cuadrática definida negativa entonces f presenta un máximo local estricto en a .*
3. *Si $\mathcal{H}f(a)$ es una forma cuadrática indefinida entonces f presenta un punto de silla en a .*
4. *En los demás casos, esto es si $\mathcal{H}f(a)$ es una forma cuadrática semidefinida entonces no podemos decidir sobre el carácter de f en el punto crítico. Será preciso recurrir a otros procedimientos.*

(dem.)

1. Como f es de clase C^2 , por el corolario 5.1 sabemos que

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2} \mathcal{H}f(a)(x - a) + o(\|x - a\|^2), \text{ cuando } x \rightarrow a$$

donde $\mathcal{H}f(a)$ es la forma cuadrática asociada con la matriz hessiana de f en a , y como a es punto crítico la igualdad anterior podemos ponerla en la forma

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} \mathcal{H}f(a)(x - a) + o(\|x - a\|^2), \text{ cuando } x \rightarrow a$$

expresión en la que si consideramos que $\mathcal{H}f(a)$ es una forma cuadrática definida positiva, y por tanto de acuerdo con la proposición 5.3, existe $\lambda > 0$ tal que $\mathcal{H}f(a)(x - a) > \lambda\|x - a\|^2$, se tiene:

$$f(x) - f(a) > \frac{1}{2} \lambda \|x - a\|^2 + o(\|x - a\|^2) \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\|x - a\|^2} > \frac{1}{2} \lambda + \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(\|x - a\|^2)}{\|x - a\|^2}$$

como $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(\|x - a\|^2)}{\|x - a\|^2} = 0$, existe un entorno de a en el que $f(x) - f(a) > 0$, esto es f tiene en a un mínimo local estricto.

Análogamente los demás casos.

■

Si tenemos en cuenta la proposición anterior y el criterio de Sylvester se tiene el siguiente resultado

Proposición 5.8 *Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , A abierto y $a \in A$ un punto crítico de f . Sean Δ_i los menores diagonales principales de la matriz hessiana de f en a , entonces:*

1. Si $\Delta_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$, entonces f presenta en a un mínimo local estricto.
2. Si $(-1)^i \Delta_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$, entonces f presenta en a un máximo local estricto.
3. Si no se cumplen ninguno de los casos anteriores, pero $\Delta_n \neq 0$, entonces f presenta en a un punto de silla.
4. En los demás casos no se puede decidir mediante este criterio sobre el caracter del punto crítico a .

(dem.)

1. Si $\Delta_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$, la forma cuadrática $\mathcal{H}f(a)$ es definida positiva.
2. En este caso se tiene una forma cuadrática definida negativa.
3. Si no se cumplen ninguno de los casos anteriores, la forma cuadrática es indefinida, ya que al ser $\Delta_n \neq 0$ no tiene el valor propio 0, y por tanto se tiene un punto de silla. ■

Si en vez de utilizar el criterio de Sylvester nos basamos en el criterio de los valores propios se tiene el siguiente resultado

Proposición 5.9 Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , A abierto y $a \in A$ un punto crítico, entonces:

1. Si todos los valores propios de la matriz hessiana de f en a son estrictamente positivos entonces f presenta un mínimo local estricto en a .
2. Si todos los valores propios de la matriz hessiana de f en a son estrictamente negativos entonces f presenta un máximo local estricto en a .
3. Si la matriz hessiana de f en a tiene valores propios positivos y negativos, f tiene en a un punto de silla.
4. En los demás casos no se puede decidir mediante este criterio sobre el caracter del punto crítico a .

5.3. Extremos condicionados locales. Multiplicadores de Lagrange

Hemos estudiado el problema de determinar los extremos locales de una función en todo su dominio, ahora se trata de hallar los extremos de la función sobre un conjunto de puntos del dominio, que estarán generalmente especificados por medio de una o varias expresiones.

Definición 5.7 Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$, $\mathbf{G}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\mathbf{G}(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$, con

$m < n$, y S el conjunto de puntos de \mathbb{R}^n que satisface el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ \dots \\ g_m(x) = 0 \end{cases}.$$

Supongamos que $\mathbf{G}(a) = 0$. Entonces

1. Se dice que f presenta en a un mínimo condicionado a $\mathbf{G}(x) = 0$, si $\exists B_r(a) \subset A$ tal que, $\forall x \in B_r(a) \cap S$, se tiene que $f(x) \geq f(a)$.
2. Se dice que f presenta en a un máximo condicionado a $\mathbf{G}(x) = 0$, si $\exists B_r(a) \subset A$ tal que, $\forall x \in B_r(a) \cap S$, se tiene que $f(x) \leq f(a)$.

En cualquier caso se dice que $f|_S$ presenta un extremo condicionado en a .

Las relaciones $g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0$ se denominan condiciones o ligaduras.

Comentarios :

- Obsérvese que las ligaduras seleccionan puntos en el dominio A de f , los pertenecientes a los *conjuntos de nivel cero* de las funciones g_1, \dots, g_m que, en los casos que nos interesarán, serán, generalmente curvas o superficies.
- Los extremos libres de una función no son necesariamente extremos condicionados, ni recíprocamente.

Para determinar los extremos locales de una función restringida a un subconjunto es útil el siguiente teorema.

Teorema 5.4 Sean $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto y $S \subset A$, la función $g: T \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, con T abierto, continua y tal que $g(T) = S$. Entonces, si $x_0 \in S$ es un extremo local de $f|_S$ y $g(t_0) = x_0$, t_0 es un extremo local libre de $f \circ g$.

(Dem.) Lo haremos para el caso de un mínimo si fuera un máximo el proceso es análogo. Si $x_0 \in S$ es un mínimo local de $f|_S$ existe la bola $B_\epsilon(x_0)$ en \mathbb{R}^n tal que $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in B_\epsilon(x_0) \cap S$.

Al ser g continua en T y $g(T) \subset S$, existe $B_\delta(t_0)$ en \mathbb{R}^m tal que $g(B_\delta(t_0)) \subset B_\epsilon(x_0) \cap S$, luego $\forall t \in B_\delta(t_0)$ se tiene $(f \circ g)(t) \geq (f \circ g)(t_0)$, lo que prueba que t_0 es mínimo local de $f \circ g$. ■

Veamos, como consecuencia, una manera de determinar los extremos de una función restringida a los puntos de una curva en \mathbb{R}^2 o una superficie en \mathbb{R}^3 .

Corolario 5.2

1. Sean $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización de un camino Γ en A . Si $f|_\Gamma$ tiene en $\alpha(t_0) \in \Gamma$ un extremo local, entonces $f \circ \alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo local en t_0 .
En particular para f y α funciones diferenciables se tiene $(f \circ \alpha)'(t_0) = 0$.
2. Sean $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\sigma: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S en A . Si $f|_S$ tiene en $\sigma(u_0) \in S$ un extremo local, entonces $f \circ \sigma: D \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo local en u_0 .
En particular para f y σ funciones diferenciables se tiene $\nabla(f \circ \sigma)(u_0) = 0$.

5.3.1. Método de los multiplicadores de Lagrange

Otra forma alternativa para la determinación de extremos condicionados nos la proporciona el *método de los multiplicadores de Lagrange* que se basa en el siguiente teorema

Teorema 5.5 (de Lagrange) Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto, $a \in A$, y $\mathbf{G}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\mathbf{G}(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$, con $m < n$, tales que f y \mathbf{G} sean de clase C^1 y el rango de \mathbf{JG} es máximo.

Entonces, si f tiene en a un extremo local restringido al conjunto $S = \{x \in A \mid \mathbf{G}(x) = 0\}$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(a)$$

Los coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ se denominan multiplicadores de Lagrange.

(Dem.) Haremos la demostración para el caso de una sola ligadura $g: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea a un extremo local de f restringido al conjunto $S = \{x \in A \mid g(x) = 0\}$, entonces $g(a) = 0$ y además, como sabemos $\nabla g(a)$ es un vector ortogonal a la superficie S en el punto a .

Sean Γ una curva cualquiera en S que pase por a y $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización. Como a es un extremo local de f restringido a S entonces, si $\alpha(t_0) = a$, como consecuencia del apartado 1. del corolario 5.2 se tiene

$$0 = (f \circ \alpha)'(t_0) = Df(a)(\alpha'(t_0)) = \nabla f(a) \cdot \alpha'(t_0)$$

Luego el vector $\nabla f(a)$ es ortogonal al vector tangente a la curva Γ en a , para cualquier curva. Por tanto si $\nabla f(a)$ es perpendicular a todas las curvas de S que pasan por a , es ortogonal a S en a , así pues

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

■

El método de los multiplicadores de Lagrange consiste en hallar los puntos $x = (x_1, \dots, x_n)$ que sean solución del sistema de $n + m$ ecuaciones e incógnitas: las n coordenadas x_i y los m multiplicadores λ_j

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x) = 0 \\ \dots \\ g_m(x) = 0 \end{array} \right\} m \text{ ecuaciones.}$$

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(x) \quad n \text{ ecuaciones.}$$

Si las funciones verifican las hipótesis del teorema y f tiene extremos locales restringidos al conjunto $S = \{x \in A \mid \mathbf{G}(x) = 0\}$, serán algunas de las soluciones del sistema anterior.

Observaciones:

1. En el caso que haya extremos locales $f|_S$ en puntos donde \mathbf{JG} no tenga rango máximo puede ser que estos puntos no aparezcan por este método.
2. El sistema puede ser incompatible si:
 - No son compatibles las ligaduras. En cuyo caso $S = \emptyset$ (el problema está mal planteado).

Ejemplo 5.2 : $g_1(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - z = 0$; $g_2(x, y, z) \equiv 1 + z = 0$.

- No tiene la función extremos condicionados a las ligaduras dadas.

Ejemplo 5.3 : $f(x, y) = x^2 y$; $g(x, y) \equiv 1 - xy = 0$.

Observemos que si parametrizamos la ligadura por:

$$\begin{array}{ccc} \alpha: (-\infty, 0) & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(t, \frac{1}{t}\right) \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} \beta: (0, +\infty) & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(t, \frac{1}{t}\right) \end{array}$$

dado que $f \circ \alpha = t$ es creciente y $f \circ \beta = t$ también es creciente, f no tiene extremo local en $g(x, y) = 0$.

3. El sistema puede ser indeterminado. Por ejemplo en el caso en que la ligadura es una superficie de nivel de la función a extremar. En este caso $\nabla f(x) = \nabla g(x)$ en todo punto de la condición y por tanto todos los puntos de la ligadura son solución.

Ejemplo 5.4 : $f(x, y) = x^2 - y^2$; $g(x, y) \equiv x + y = 0$.

Se tiene que $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ y $\nabla g(x, y) = (1, 1)$. Para cualquier punto de la condición $g(x, y) = 0$ existe λ tal que $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$.

4. En el caso de que se obtenga $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, entonces $\nabla f(a) = 0$, lo cual significa que la función tiene un punto crítico en a independientemente de las condiciones.

Ejemplo 5.5 : $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$; $g(x, y) \equiv y = 0$.

El sistema da como solución $\lambda = 0$ y $(x, y) = (0, 0)$, que es un mínimo local de f sin la restricción, como se puede comprobar.

5.4. Extremos absolutos

Definición 5.8 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A un subconjunto cualquiera. Se dice que f tiene en x_0 un máximo absoluto si $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in A$.

Análogamente se define mínimo absoluto.

Sabemos que si $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y A es un compacto (cerrado y acotado), f tiene extremos absolutos en A . Es decir, existen puntos en A en los que la función alcanza un máximo y puntos en los que alcanza un mínimo. Nos proponemos dar un procedimiento para encontrar dichos puntos, limitandonos a los casos en $A \subset \mathbb{R}^2$ o $A \subset \mathbb{R}^3$, en ambos supondremos que f es diferenciable en A .

- Si $A \subset \mathbb{R}^2$ y si suponemos que la frontera de A la constituyen un número finito de curvas regulares Γ_i , procederemos de la siguiente forma
 1. Determinamos los *puntos críticos* de f en $\text{Int } A$.
 2. Determinar los *extremos condicionados* de $f|_{\Gamma_i}$ bien parametrizando la curva o bien mediante los multiplicadores de Lagrange.
 3. Determinar los valores que toma f en cada uno de los puntos obtenidos y en los puntos de corte de las curvas Γ_i .

Los puntos en que f tiene el mínimo valor son los puntos de mínimo absoluto, análogamente para los puntos de máximo.

- Si $A \subset \mathbb{R}^3$ y si suponemos que la frontera de A la constituyen un número finito de superficies regulares S_i , el procedimiento es
 1. Determinamos los *puntos críticos* de f en $\text{Int } A$.
 2. Determinar los *extremos condicionados* de $f|_{S_i}$ bien parametrizando la superficie o bien mediante los multiplicadores de Lagrange.
 3. Determinar los *extremos condicionados* a las curvas intersección de las superficies que pertenezcan a la frontera de A , es decir extremos de $f|_{S_i \cap S_j}$.
 4. Determinar los valores que toma f en cada uno de los puntos obtenidos y en los puntos de corte de las curvas intersección de las superficies.

Los puntos en que f tiene el mínimo valor son los puntos de mínimo absoluto, análogamente para los puntos de máximo.

Capítulo 6

Integración de campos escalares en \mathbb{R}^n

6.1. Introducción

En la asignatura de Cálculo se estudió el concepto de la integral $\int_a^b f(x) dx$ para funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En este capítulo comenzaremos estudiando el concepto de integral, para funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sobre un conjunto $Q \subset \mathbb{R}^2$ llamado *región de integración*. Posteriormente extenderemos la idea de integración para funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sobre regiones $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Primeramente consideraremos regiones Q rectangulares y luego trataremos sobre la integración extendida a regiones más generales. En el caso de funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la integral que resulta se denomina *integral doble* y se representa por

$$\iint_Q f \quad \text{o} \quad \iint_Q f(x, y) dx dy$$

6.2. Integral doble

6.2.1. Partición de rectángulos. Funciones escalonadas

Sea Q el rectángulo

$$Q = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ e } y \in [c, d]\}$$

Consideremos dos particiones $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ de $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente (vease figura 6.1).

El producto cartesiano $P_1 \times P_2$ es una *partición* de Q . La partición $P_1 \times P_2$ descompone Q en $n \times m$ subrectángulos. Una partición P' de Q se dice que es *más fina* que P si $P \subseteq P'$, esto es si todo punto de P está en P' .

Definición 6.1 Una función $f: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde Q es un rectángulo, se llama *escalonada* si existe una partición P de Q tal que, en cada uno de los subrectángulos abiertos de P f tiene un valor constante.

Los valores que pueda tomar la función en la frontera de cada uno de los subrectángulos, no tienen importancia en la teoría de integración, como veremos posteriormente.

Proposición 6.1 Si f y g son dos funciones escalonadas sobre el rectángulo Q entonces $\alpha f + \beta g$ también es una función escalonada en Q para todo α y β reales.

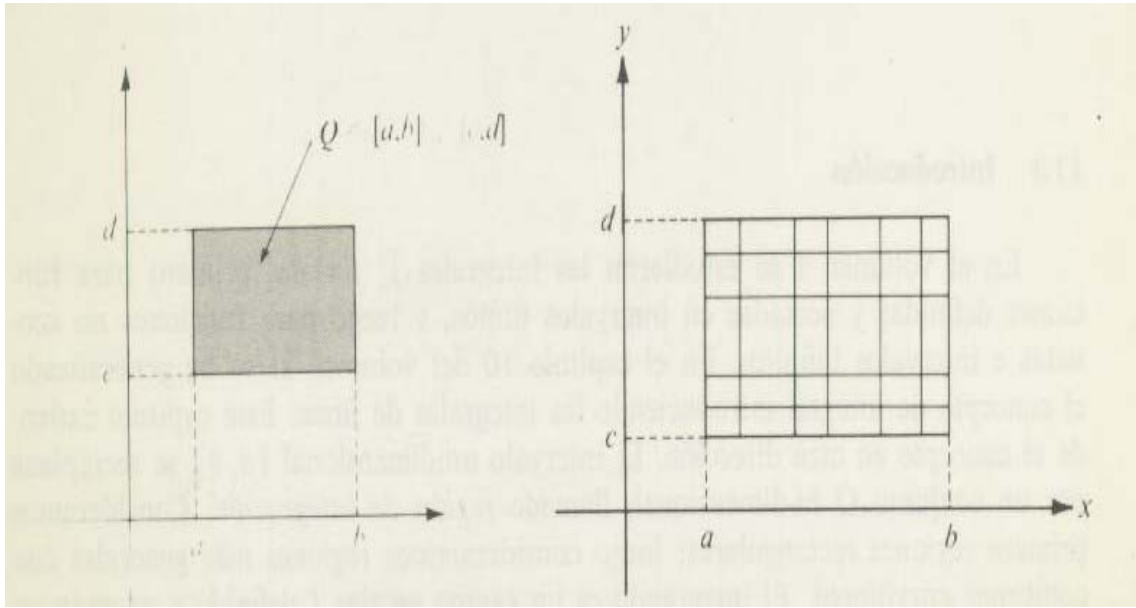


Figura 6.1: Partición de Q en subrectángulos.

(Dem.) Sean P y P' dos particiones de Q tales que f y g son constantes en cada uno de los subrectángulos abiertos de P y P' respectivamente. Entonces $\alpha f + \beta g$ es constante en los subrectángulos abiertos de una partición que contenga a P y P' , en particular $P \cup P'$. ■

Corolario 6.1 El conjunto de las funciones escalonadas en Q es un espacio vectorial.

6.2.2. Integral doble de una función escalonada

Definición 6.2 Sea $f: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalonada en Q que toma el valor constante c_{ij} en cada subrectángulo abierto $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$ de una partición P de Q (vease figura 6.2). Definimos como integral de f en Q a

$$\iint_Q f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1})$$

Observemos que el valor de la integral no cambia si se sustituye la partición P por otra más fina P' .

Proposición 6.2 Sea $f: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalonada en el rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$, entonces

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx$$

(Dem.) En efecto, sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \times \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ una partición de Q tal que $f(x, y) = c_{ij}$ para todo $(x, y) \in (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$. Consideremos la función $A(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$, que viene definida por

$$A(y) = \begin{cases} c_{11}(x_1 - a) + c_{21}(x_2 - x_1) + \dots + c_{n1}(b - x_{n-1}) & \text{si } c < y < y_1 \\ c_{12}(x_1 - a) + c_{22}(x_2 - x_1) + \dots + c_{n2}(b - x_{n-1}) & \text{si } y_1 < y < y_2 \\ \dots & \dots \\ c_{1m}(x_1 - a) + c_{2m}(x_2 - x_1) + \dots + c_{nm}(b - x_{n-1}) & \text{si } y_{m-1} < y < d \end{cases}$$

entonces

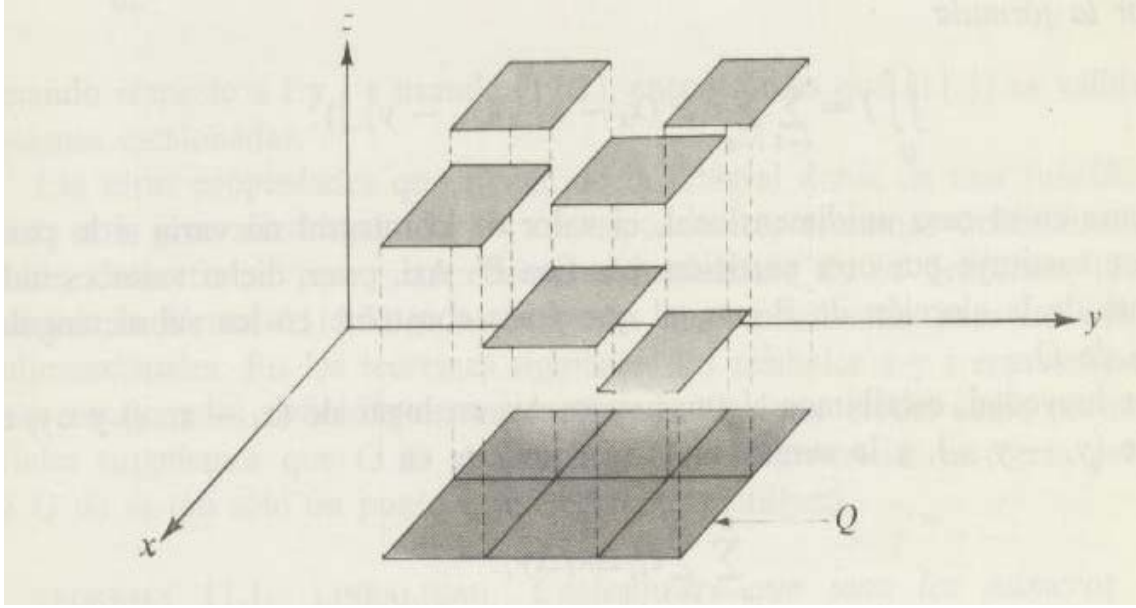


Figura 6.2: Grafo de una función escalonada en Q .

$$\begin{aligned}
 \int_a^b A(y) \, dy &= [c_{11}(x_1 - a) + c_{21}(x_2 - x_1) + \dots + c_{n1}(b - x_{n-1})] (y_1 - c) + \\
 &\quad [c_{12}(x_1 - a) + c_{22}(x_2 - x_1) + \dots + c_{n2}(b - x_{n-1})] (y_2 - y_1) + \\
 &\quad \dots \\
 &\quad [c_{1m}(x_1 - a) + c_{2m}(x_2 - x_1) + \dots + c_{nm}(b - x_{n-1})] (d - y_{m-1}) = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1})
 \end{aligned}$$

■

Las siguientes propiedades de la integral doble se siguen de la proposición anterior y de las correspondientes propiedades en integrales unidimensionales.

Proposición 6.3 Sean $f, g: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones escalonadas en el rectángulo Q se cumple:

1. Linealidad

$$\int \int_Q (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dx dy = \alpha \int \int_Q f(x, y) \, dx dy + \beta \int \int_Q g(x, y) \, dx dy$$

2. Aditividad Si Q está subdividido en dos rectángulos Q_1 y Q_2 se tiene

$$\int \int_Q f(x, y) \, dx dy = \int \int_{Q_1} f(x, y) \, dx dy + \int \int_{Q_2} f(x, y) \, dx dy$$

3. Si $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in Q$, entonces

$$\int \int_Q f(x, y) \, dx dy \leq \int \int_Q g(x, y) \, dx dy$$

y en particular, si $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in Q$ se tiene

$$\int \int_Q f(x, y) \, dx dy \geq 0$$

6.2.3. Integral doble de funciones acotadas

Sea $f: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en el rectángulo Q . Si $s, t: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones escalonadas en el rectángulo Q tales que $s(x, y) \leq f(x, y) \leq t(x, y)$, $\forall (x, y) \in Q$, decimos que s está por debajo de f en Q y que t está por encima de f en Q , y se denota por $s \leq f \leq t$.

$$\text{Sean } S = \left\{ \int \int_Q s, \text{ tal que } s \text{ es escalonada en } Q \text{ con } s \leq f \right\} \quad \text{y}$$

$$T = \left\{ \int \int_Q t, \text{ tal que } t \text{ es escalonada en } Q \text{ con } f \leq t \right\}$$

Observemos que S y T no son vacíos. En efecto, existen siempre funciones escalonadas en Q por encima y por debajo de f . Por ser f acotada en Q , existe $M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M$, $\forall (x, y) \in Q$, y por tanto se tiene $-M \leq f \leq M$.

Por otra parte para cualesquiera funciones escalonadas s y t tales que $s \leq f \leq t$ se tiene

$$\int \int_Q s \leq \int \int_Q t$$

Por tanto, S es un subconjunto de \mathbb{R} acotado superiormente por cualquier elemento de T . Y análogamente T es un subconjunto de \mathbb{R} acotado inferiormente por cualquier elemento de S . Así pues, S tiene extremo superior y T tiene extremo inferior y se cumple

$$\int \int_Q s \leq \sup S \leq \inf T \leq \int \int_Q t$$

para toda s y t , funciones escalonadas, que cumplan $s \leq f \leq t$.

Definición 6.3

1. Se denomina integral inferior de f en Q al $\sup S$, lo denotaremos por $\underline{\int \int_Q f}$
2. Se denomina integral superior de f en Q al $\inf T$, lo denotaremos por $\overline{\int \int_Q f}$
3. Se dice que f es integrable en Q si $\sup S = \inf T$ y entonces $\int \int_Q f = \underline{\int \int_Q f} = \overline{\int \int_Q f}$

Se puede observar que si f es una función acotada en Q , existen siempre las integrales inferior y superior de f en Q . Las propiedades de la proposición anterior se cumplen también para integrales dobles de funciones acotadas sobre un rectángulo Q .

Es interesante saber cuándo una integral doble puede calcularse mediante integraciones unidimensionales reiteradas. De esta forma las técnicas de integración en una variable estudiadas en Cálculo se pueden aplicar en el cálculo de integrales dobles.

Teorema 6.1 (de Fubini para funciones acotadas en Q).

Sea $Q = [a, b] \times [c, d]$ y $f: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida y acotada en Q . Supongamos que exista la integral de f en Q . Entonces

1. Si $\forall y \in [c, d]$ existe la integral $\int_a^b f(x, y) \, dx$, se cumple que

$$\int \int_Q f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy$$

2. Si $\forall x \in [a, b]$ existe la integral $\int_c^d f(x, y) \, dy$, se cumple que

$$\int \int_Q f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx$$

Comentarios: El teorema afirma que si f es integrable en Q y si existe la función $A(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$, $\forall y \in [c, d]$, entonces esta función es integrable en el intervalo $[c, d]$ y se cumple

$$\int_c^d A(y) \, dy = \int \int_Q f(x, y) \, dx dy$$

Lo mismo para el otro caso.

Nos interesa conocer ahora qué funciones son integrables en un rectángulo.

Teorema 6.2 Sea $Q = [a, b] \times [c, d]$ y $f: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es integrable sobre Q y se cumple

$$\int \int_Q f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx$$

(Dem.) Por ser f continua en el compacto Q , está acotada y por tanto existen $\underline{\int \int_Q f}$ y $\overline{\int \int_Q f}$.

Tenemos que ver que son iguales.

Como Q es un compacto y f es continua en Q entonces es uniformemente continua, luego para cada $\epsilon > 0$ existe una partición en un numero finito de subrectángulos I_1, \dots, I_n tales que la variación de f en cada uno de ellos es menor que ϵ . Sean $M_i(f)$ y $m_i(f)$ el máximo y mínimo absolutos de f en cada rectángulo I_i , $1 \leq i \leq n$ de la partición, que existen por ser una función continua en un compacto (Vease figura 6.3).

Se tiene $M_i(f) - m_i(f) < \epsilon$, para $i = 1, \dots, n$.

Sean s y t dos funciones escalonadas tales que $s \leq f \leq t$, $\forall (x, y) \in Q$ definidas por $s(x, y) = m_i(f)$ y $t(x, y) = M_i(f)$, $\forall (x, y) \in \text{Int } I_i$. Entonces

$$\int \int_Q s = \sum_{i=1}^n m_i(f) a(I_i) \quad \text{y} \quad \int \int_Q t = \sum_{i=1}^n M_i(f) a(I_i)$$

donde $a(I_i)$ es el área del rectángulo I_i .

$$\int \int_Q s - \int \int_Q t = \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f)) a(I_i) < \epsilon \sum_{i=1}^n a(I_i) = \epsilon a(Q), \quad a(Q) = \text{área de } Q$$

Como

$$\int \int_Q s \leq \underline{\int \int_Q f} \leq \overline{\int \int_Q f} \leq \int \int_Q t$$

se tiene

$$0 \leq \overline{\int \int_Q f} - \underline{\int \int_Q f} \leq \epsilon a(Q) \quad \forall \epsilon > 0$$

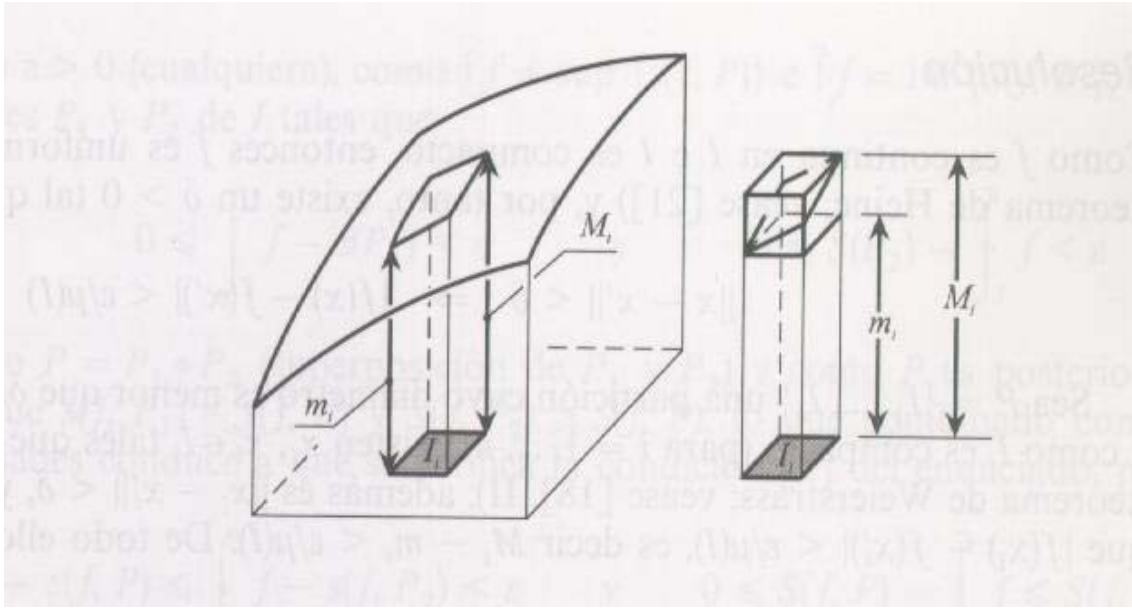


Figura 6.3: Ínfimo y supremo de f en I_i .

luego $\overline{\iint_Q f} = \iint_Q f$ y por tanto existe $\iint_Q f$.

La segunda afirmación del teorema se deduce del *teorema de Fubini*, pues si f es continua en Q , la función $\Phi_y(x) = f(x, y)$ es continua en $[a, b]$ para cada $y \in [c, d]$. Luego $\forall y \in [c, d]$ existe $\int_a^b f(x, y) dx$. ■

6.2.4. Interpretación geométrica de la integral doble.

Sea $Q = [a, b] \times [c, d]$ y $f: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua no negativa. Entonces $\iint_Q f(x, y) dx dy$ es el volumen de la región $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in Q \text{ y } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ (Vease figura 6.4).

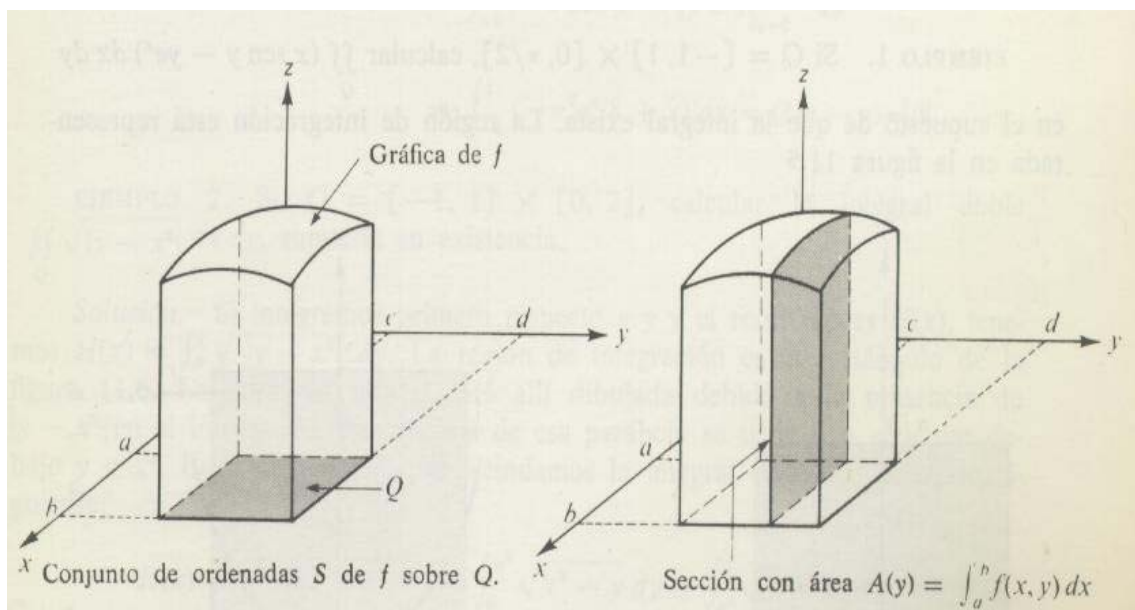


Figura 6.4: Volumen de V .

En efecto, sabemos que $\int \int_Q f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy$.

Para cada $y \in [c, d]$, $A(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$ es el área de la sección de V producida por un plano paralelo al plano XZ . Por tanto, $\text{vol}(V) = \int_c^d A(y) \, dy$

6.2.5. Conjuntos de medida cero. Integración de funciones discontinuas

Sea $Q = [a, b] \times [c, d]$ y $f: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se ha visto que existe $\int \int_Q f(x, y) \, dx dy$ si f es continua en Q . Vamos ahora a demostrar que también existe la integral doble de f en Q , siempre que el conjunto de discontinuidades de f tengan una medida suficientemente pequeña. Para medir el tamaño de los conjuntos introduciremos el siguiente concepto.

Definición 6.4 Sea $T \subset \mathbb{R}^2$, se dice que tiene medida cero, si para cada $\varepsilon > 0$ es posible recubrir T por una colección numerable de rectángulos la suma de cuyas áreas sea menor que ε . Es decir existe una colección $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$ de rectángulos tales que $T \subset \bigcup_{k=1}^n Q_k$ y $\sum_{k=1}^n \mu(Q_k) < \varepsilon$ siendo $\mu(Q_k)$ el área del rectángulo Q_k .

Ejemplo 6.1 : Teniendo en cuenta lo anterior, se comprueba fácilmente que:

- Todo conjunto con un número finito de puntos tiene medida cero.
- La reunión de una colección numerable de conjunto de medida cero es de medida cero. Como casos particulares, en \mathbb{R} , el conjunto de los números racionales \mathbb{Q} tiene medida cero y, por consiguiente, también el de los enteros \mathbb{Z} y los naturales \mathbb{N} .
- Todo subconjunto de un conjunto de medida cero tiene medida cero.
- Todo segmento de recta tiene medida cero.
- Más general: Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, la gráfica de f tiene medida cero.
(Dem.) En efecto, por ser f continua en un compacto, es uniformemente continua, luego existe una partición P de $[a, b]$ de manera que la oscilación de f en cada subintervalo es menor que $\frac{\varepsilon}{b-a}$, luego en cada subintervalo la gráfica de f está contenida en un rectángulo de altura $\frac{\varepsilon}{b-a}$, la suma de cuyas áreas es ε , por tanto, $\text{graf } f$ es un conjunto de medida cero (vease figura 6.5).

■

Teorema 6.3 Sea $Q = [a, b] \times [c, d]$ y $f: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida y acotada en Q . Entonces f es integrable en Q si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en Q tiene medida cero.

6.2.6. Integrales dobles en regiones más generales

Hasta ahora la integral doble sólo la hemos definido para regiones de integración rectangulares. Podemos extender el concepto de integración a conjuntos más generales.

Definición 6.5 Sea S un subconjunto acotado de \mathbb{R}^2 . Decimos que S es un conjunto medible Jordan si y sólo si $\text{Fr } S$ es un conjunto de medida cero.

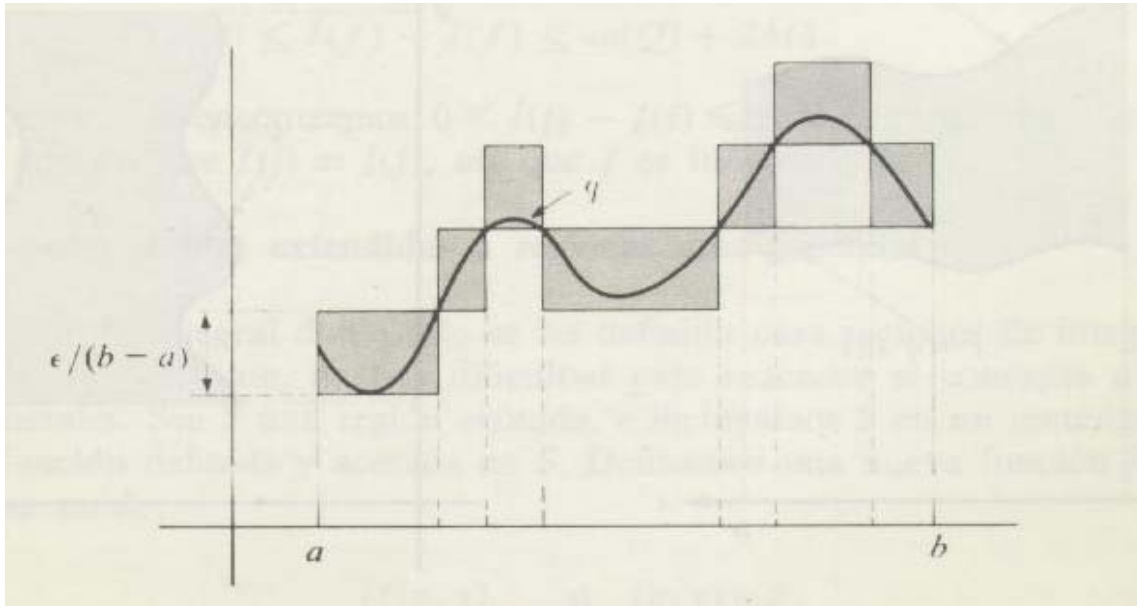


Figura 6.5: Gráfica de contenido nulo.

Sea S un conjunto medible Jordan de \mathbb{R}^2 y sea $f: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida y acotada en S .

Sea $Q = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo tal que $S \subset Q$. Definimos la función $\tilde{f}: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in S \\ 0 & \text{si } (x, y) \in Q - S \end{cases}$$

Si \tilde{f} es integrable en Q decimos que f es integrable en S y, por definición

$$\iint_S f(x, y) \, dx dy = \iint_Q \tilde{f}(x, y) \, dx dy$$

Teorema 6.4 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible Jordan y sea $f: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida y acotada en S . entonces f es integrable en S si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en S tiene medida cero.

(Dem.) Sea Q un rectángulo tal que $S \subset Q$ y sea $\tilde{f}: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como se ha indicado anteriormente, las discontinuidades de \tilde{f} son las de f en S y además puede ser discontinua en puntos de la frontera de S . Como S es medible Jordan su frontera tiene medida cero, luego el teorema se obtiene como consecuencia del teorema 6.3. ■

6.2.7. Propiedad aditiva de la integración

Teorema 6.5 Supongamos que f es integrable sobre un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$, medible Jordan, supongamos también que $S = A \cup B$ donde A y B son conjuntos medibles Jordan sin puntos interiores en común. Entonces f es integrable en A y en B y se cumple

$$\iint_S f(x, y) \, dx dy = \iint_A f(x, y) \, dx dy + \iint_B f(x, y) \, dx dy$$

Vamos ahora a considerar un tipo de conjuntos de \mathbb{R}^2 , medibles Jordan, para los cuales el cálculo de la integral doble puede hacerse mediante integración reiterada. Son los que llamaremos conjuntos de *Tipo I* y de *Tipo II*. La mayor parte de las regiones de integración que trataremos serán de algunos de estos tipos o si no, se pueden descomponer en un número finito de subregiones, cada una de las cuales es de alguno de esos tipos.

Definición 6.6

- Sea $\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Llamaremos región de tipo I a las de la forma

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

- Sea $\psi_1, \psi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$, $\forall y \in [c, d]$. Llamaremos región de tipo II a las de la forma

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

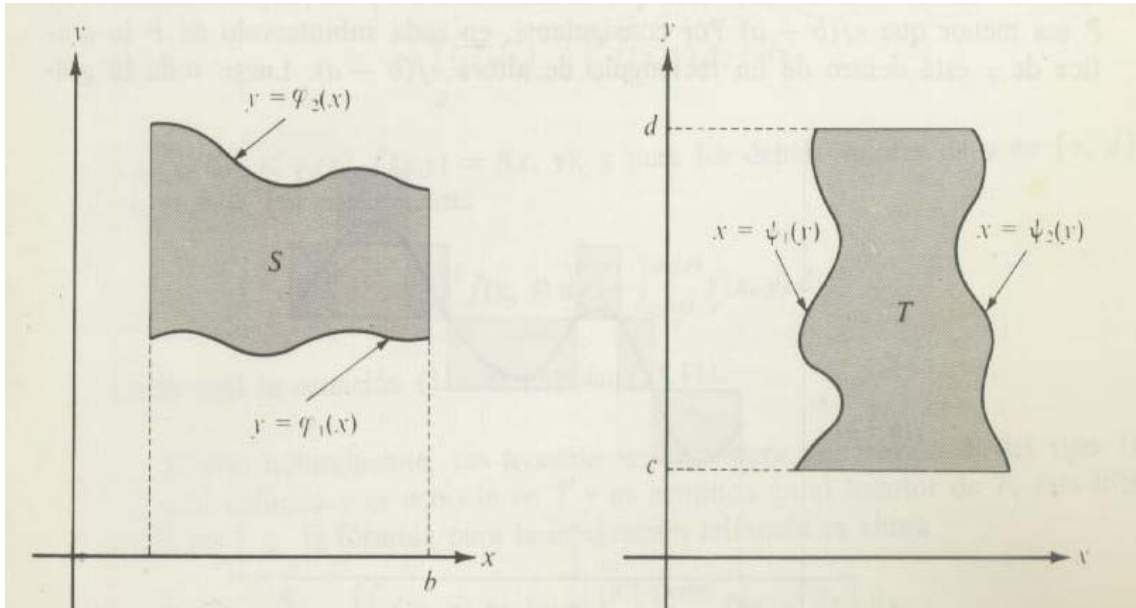


Figura 6.6: Regiones de tipo I y tipo II.

6.2.8. Teorema de Fubini (para regiones tipo I y tipo II)

Teorema 6.6 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada e integrable en A

- Si A es un conjunto tipo I y existe $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ para cada $x \in [a, b]$, entonces f es integrable en A y se tiene

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

- En caso de que A sea un conjunto tipo II y exista $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$ para cada $y \in [c, d]$, entonces f es integrable en A y se tiene

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Corolario 6.2 Sea S una región tipo I y $f: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida y acotada en S y continua en $\text{Int } S$. Entonces f es integrable en S y

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Análogamente para región tipo II.

(Dem.) Sean $Q = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo tal que $S \subset Q$ y $\tilde{f}: Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in S \\ 0 & \text{si } (x, y) \in Q - S \end{cases}$$

\tilde{f} es continua en Q salvo, como máximo, en un conjunto de medida cero, luego existe $\int \int_Q \tilde{f}(x, y) \, dx dy = \int \int_S f(x, y) \, dx dy$.

Por otra parte, como f es continua en $\text{Int } S$, para cada $x \in [a, b]$ existe $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy$ y por el teorema de Fubini deducimos el resto. ■

6.2.9. Aplicación al cálculo de áreas y volúmenes.

Sea S una región del tipo I

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ y } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

Si aplicamos el teorema anterior a la función $f(x, y) = 1$, $\forall (x, y) \in S$ se obtiene

$$\int \int_S dx dy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \, dx$$

El segundo miembro es el área de la región S (vease figura 6.6), luego una aplicación de integrales dobles puede ser el cálculo de áreas.

Supongamos ahora una función $f: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, y tal que $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in S$. Sabemos que

$$\int \int_S f(x, y) \, dy dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right] \, dx$$

Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in S, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$, $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dx$ es el área de la sección producida en V por un plano paralelo al plano YZ .

Luego $\int \int_S f(x, y) \, dy dx$ es el volumen de la región V de \mathbb{R}^3 (ver figura 6.7).

En general, si $f, g: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $f(x, y) \leq g(x, y) \, \forall (x, y) \in S$, $\int \int_S (f(x, y) - g(x, y)) \, dx dy$ representa el volumen de la región de \mathbb{R}^3 comprendida entre las gráficas de f y de g y tal que su proyección ortogonal en el plano XY es S .

Análogamente para regiones de tipo II.

6.2.10. Cambio de variable en integral doble

En Cálculo se vió que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable con continuidad, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(g(t)) \, g'(t) \, dt$$

donde Si g es inyectiva la expresión anterior también se puede poner de la forma

$$\int_{g((a,b))} f(x) \, dx = \int_a^b f(g(t)) \, |g'(t)| \, dt$$

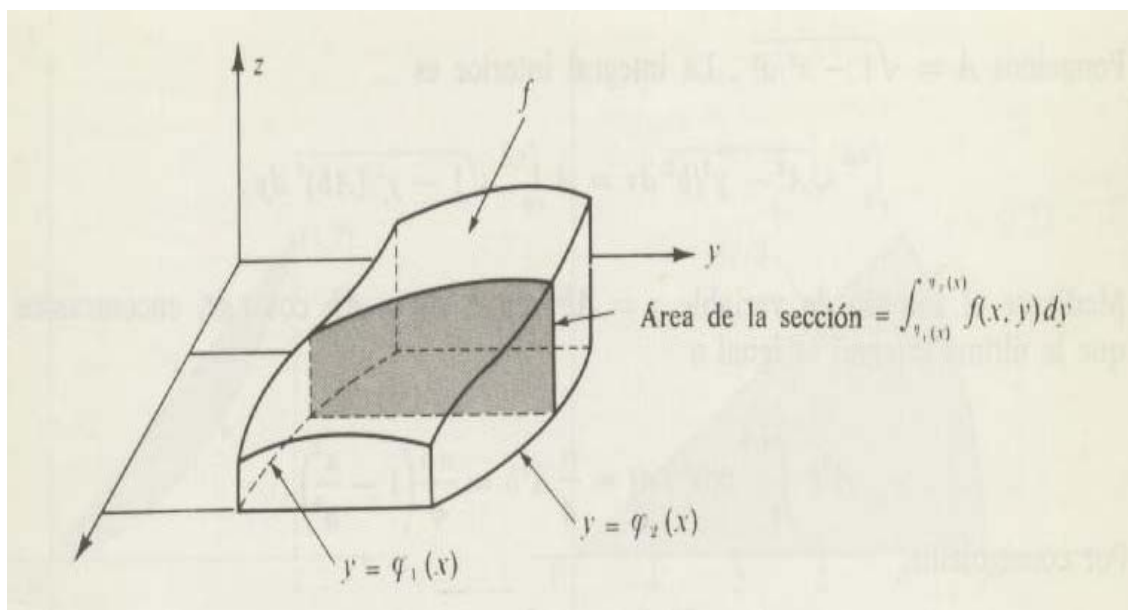


Figura 6.7: Volumen de la región V .

donde $g((a, b))$ es el intervalo imagen por g de (a, b) .

Estas fórmulas nos permiten simplificar el cálculo de integrales en \mathbb{R} .

Para funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos un teorema análogo que enunciamos a continuación

Teorema 6.7 Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $\mathbf{g}: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación inyectiva de clase C^1 y tal que $\det(\mathbf{J} \mathbf{g}(u, v)) \neq 0$, $\forall (u, v) \in T$, es decir, el determinante de la matriz de jacobiana de \mathbf{g} no nulo.

Si $S = \mathbf{g}(T)$ y la función $f: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en S , se tiene

$$\iint_S f(x, y) \, dx dy = \iint_T f(\mathbf{g}(u, v)) \, |\det(\mathbf{J} \mathbf{g}(u, v))| \, du dv$$

Teorema de difícil demostración y que omitiremos, únicamente vamos a ver un razonamiento geométrico que justifica su validez.

Sean $\mathbf{g}: T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v))$ y T una región del plano UV tal que $\mathbf{g}(T) = S$, como en la figura 6.8.

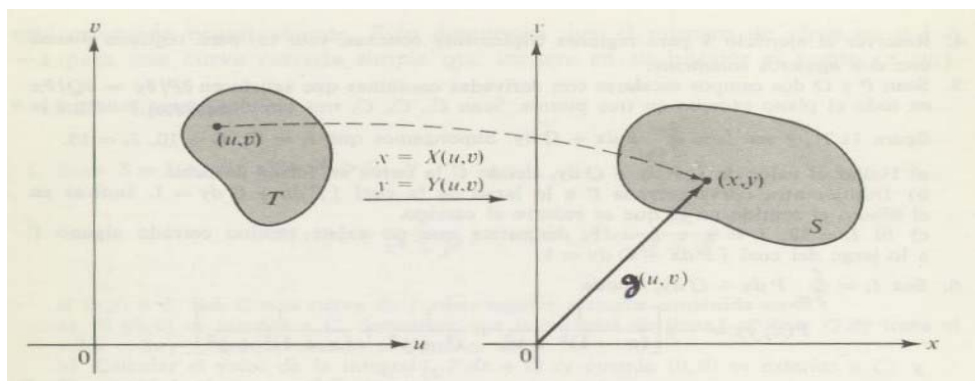


Figura 6.8: Cambio de variable $\mathbf{g}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v))$.

Consideremos las funciones vectoriales

$$\mathbf{V}_1(u, v) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} = \left(\frac{\partial X}{\partial u}(u, v), \frac{\partial Y}{\partial u}(u, v) \right) \quad \mathbf{V}_2(u, v) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} = \left(\frac{\partial X}{\partial v}(u, v), \frac{\partial Y}{\partial v}(u, v) \right)$$

Estos vectores $\mathbf{V}_1(u, v)$ y $\mathbf{V}_2(u, v)$ pueden interpretarse geoméricamente de la siguiente forma:

Consideremos un segmento rectilíneo horizontal en el plano UV , por ejemplo $v = cte$, como en la figura 6.9, la imagen de este segmento por g es una curva en el plano XY cuyo vector tangente es precisamente $\mathbf{V}_1(u, v)$ y si consideramos un segmento $u = cte$ su imagen por g es una curva con vector tangente $\mathbf{V}_2(u, v)$.

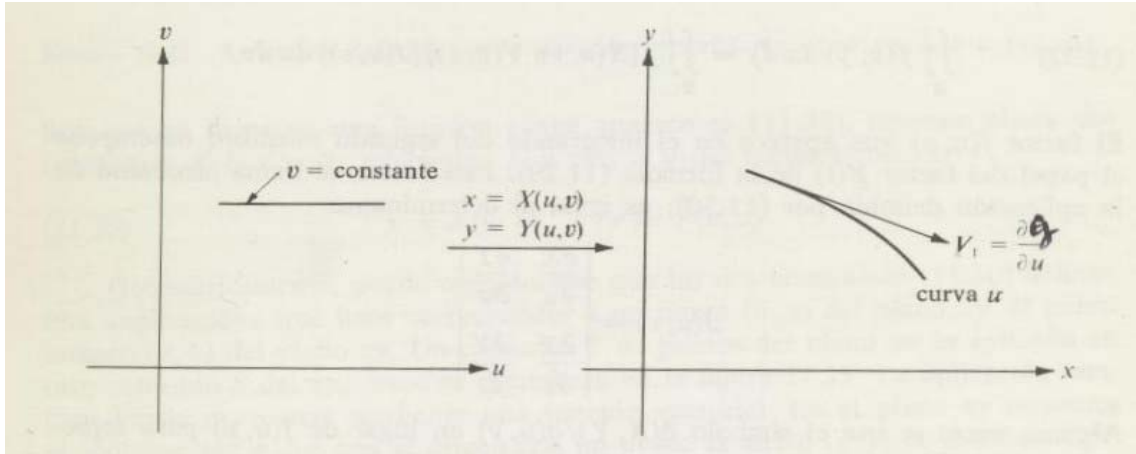


Figura 6.9: Curva u y su vector tangente.

Un rectángulo de lados Δu y Δv en el plano UV tiene como imagen por g en el plano XY un paralelogramo curvo, como se expresa en la figura 6.10 cuya longitud de lados es aproximadamente $\Delta u \mathbf{V}_1$ y $\Delta v \mathbf{V}_2$ y para Δu y Δv pequeños su área es aproximadamente la del paralelogramo determinado por los vectores $\Delta u \mathbf{V}_1$ y $\Delta v \mathbf{V}_2$, esto es la norma del producto vectorial

$$\|\Delta u \mathbf{V}_1 \times \Delta v \mathbf{V}_2\| = \|\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2\| \Delta u \Delta v$$

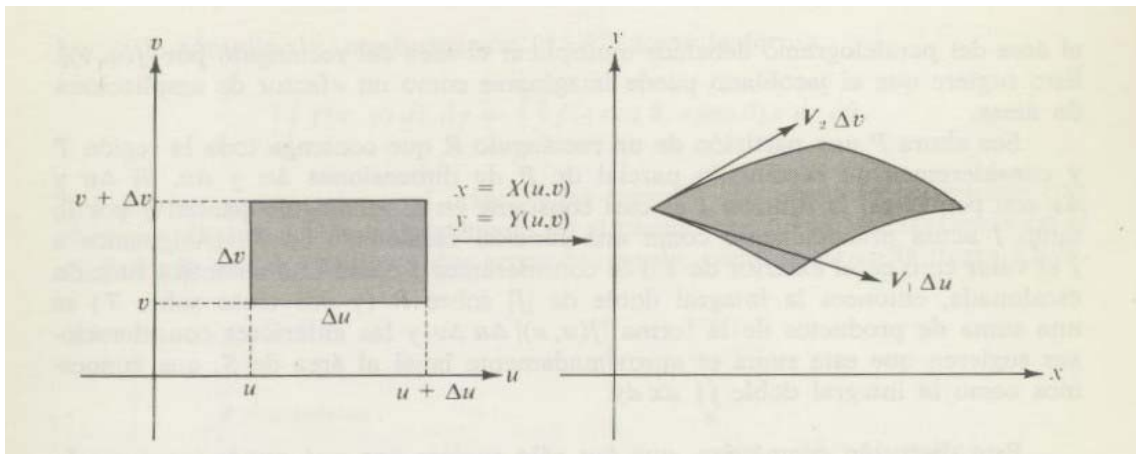


Figura 6.10: Rectángulo de lados Δu y Δv y su imagen por g .

calculamos ahora $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ de la siguiente forma

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} k = \det(\mathbf{J}\mathbf{g}(u, v)) k$$

luego el área vale $|\det(\mathbf{J}\mathbf{g}(u, v))| \Delta u \Delta v$. Por tanto puede interpretarse el jacobiano como un factor de proporcionalidad de áreas.

Consideremos una partición P de un rectángulo Q que contenga a T , tal que los subrectángulos de P de dimensión Δu y Δv sean suficientemente pequeños. Podemos considerar que $\det(\mathbf{J}\mathbf{g}(u, v))$ es prácticamente constante en cada subrectángulo parcial de P , es decir que es una función escalonada sobre Q . Consideramos que vale cero fuera de T . Entonces

$$\int \int_Q |\det(\mathbf{J}\mathbf{g}(u, v))| \, du dv = \int \int_T |\det(\mathbf{J}\mathbf{g}(u, v))| \, du dv = \sum |\det(\mathbf{J}\mathbf{g}(u, v))| \Delta u \Delta v$$

y por las consideraciones anteriores esta suma es aproximadamente igual al área de S que sabemos que vale $\int \int_S dx dy$ y por tanto

$$\int \int_S dx dy = \int \int_Q |\det(\mathbf{J}\mathbf{g}(u, v))| \, du dv$$

Ejemplo 6.2

- *Coordenadas polares: El cambio de variables $\mathbf{g}: T = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(x, 0), x \geq 0\}$ definido por $\mathbf{g}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ es un difeomorfismo entre cualquier subconjunto abierto de T y su imagen, con jacobiano*

$$\det(\mathbf{J}\mathbf{g}(r, \varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \neq 0$$

y por tanto

$$\int \int_S f(x, y) \, dx dy = \int \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, r dr d\varphi$$

- *Transformaciones lineales: Son de la forma $\mathbf{g}(u, v) = (Au + Bv, Cu + Dv)$ y su jacobiano vale*

$$\det(\mathbf{J}\mathbf{g}(u, v)) = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC$$

y si $AD - BC \neq 0$ entre cualesquiera abiertos de \mathbb{R}^2 , T y S hay difeomorfismo y se tiene

$$\int \int_S f(x, y) \, dx dy = |AD - BC| \int \int_T f(Au + Bv, Cu + Dv) \, du dv$$

6.3. Integrales triples. Integrales múltiple.

El concepto de integral bidimensional puede extenderse de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Como el desarrollo es análogo al caso $n = 2$ sólo expresaremos los principales resultados.

Sea $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida y acotada en su dominio. La integral de f en S se representa por

$$\int \dots \int_S f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \quad \text{o} \quad \int \dots \int_S f(x) \, dx$$

Definiremos primero la integral n-múltiple para una función definida en un intervalo n-dimensional, es decir $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ o también $I = [a, b]$ donde $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, \dots, b_n)$.

Definición 6.7 Llamaremos medida de I a $\mu(I) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$

Sea P_1, \dots, P_n particiones de $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ respectivamente. El producto cartesiano $P = P_1 \times \dots \times P_n$ es una partición de $[a, b]$.

Una función $f: [a, b] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *escalonada* si en cada uno de los subintervalos abiertos determinados por una cierta partición P , f es constante. La integral de esa función escalonada sobre el recinto $[a, b]$ es

$$\int \dots \int_{[a,b]} f(x) \, dx = \sum_i c_i \mu(I_i)$$

donde c_i es el valor de f en i-esimo subintervalo abierto I_i de la partición P . La suma está extendida a todos los subintervalos de P .

A partir de la integral n-múltiple para funciones escalonadas, definimos la integral de funciones *acotadas* sobre intervalos.

Sean f una función acotada en $[a, b]$, s y t funciones escalonadas en $[a, b]$ tales que $s \leq f \leq t$. Si existe un número I y sólo uno tal que

$$\int \dots \int_{[a,b]} s \leq I \leq \int \dots \int_{[a,b]} t$$

para cualesquiera funciones escalonadas que cumplan $s \leq f \leq t$ entonces se dice que f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int \dots \int_{[a,b]} f(x) \, dx = I$$

Si f es continua en $[a, b]$ entonces f es integrable sobre $[a, b]$. También se cumple el teorema 6.3, es decir si f es acotada en $[a, b]$ es integrable sobre $[a, b]$ si el conjunto de discontinuidades tiene medida cero. Un conjunto acotado S tiene medida cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una colección numerable de intervalos n-dimensionales cuya unión cubre S y tal que la suma de sus volúmenes es menor que ε .

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Jordan. Para definir la integral de una función acotada f sobre S , consideremos una función $\tilde{f}: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre el intervalo Q que contiene a S y que coincide con f en S y es nula fuera de S . Entonces

$$\int \dots \int_S f = \int \dots \int_Q \tilde{f}$$

caso de que exista esta última integral.

Algunas integrales múltiples pueden calcularse mediante integrales reiteradas de dimensión inferior. Por ejemplo, sea $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in Q, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$$

donde $Q \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto acotado y φ_1 y φ_2 son funciones continuas en Q y tales que $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$, $\forall (x, y) \in Q$ tal como indica la figura 6.11.

Entonces si f es continua en $\text{Int } S$ se cumple que f es integrable sobre S y vale

$$\iiint_S f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_Q \left[\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dx dy$$

Esta región S corresponde a lo que podemos denominar región de tipo I en \mathbb{R}^3 . Igualmente podríamos integrar primero en y , en ciertas regiones, o en x .

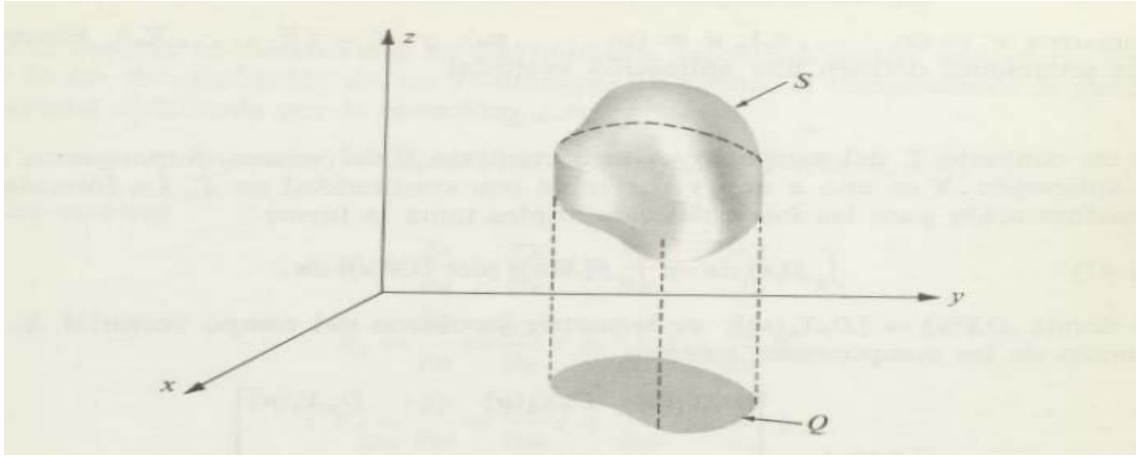


Figura 6.11: Integración en \mathbb{R}^3 sobre una región tipo I .

6.3.1. Cambio de variable en integrales n-múltiples

El teorema 6.7 que enunciamos para el caso de dos variables se satisface también en \mathbb{R}^n . En el caso de $n = 3$ se tiene

$$\iiint_S f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_T f(\mathbf{g}(u, v, w)) |\mathbf{J} \mathbf{g}(u, v, w)| \, du dv dw$$

donde $\mathbf{g}(u, v, w) = (X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w))$ y además

$$\mathbf{J} \mathbf{g}(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial w} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Observese que $\mathbf{J} \mathbf{g}(u, v, w)$ puede interpretarse como un factor de proporcionalidad de volúmenes, es decir un paralelepípedo de volumen $\nabla u \nabla v \nabla w$ se transforma en un paralelepípedo curvo de volumen $|\mathbf{J} \mathbf{g}(u, v, w)| \nabla u \nabla v \nabla w$. En efecto si consideramos las funciones vectoriales

$$\mathbf{V}_1(u, v, w) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} = \left(\frac{\partial X}{\partial u}(u, v, w), \frac{\partial Y}{\partial u}(u, v, w), \frac{\partial Z}{\partial u}(u, v, w) \right)$$

$$\mathbf{V}_2(u, v, w) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} = \left(\frac{\partial X}{\partial v}(u, v, w), \frac{\partial Y}{\partial v}(u, v, w), \frac{\partial Z}{\partial v}(u, v, w) \right)$$

$$\mathbf{V}_3(u, v, w) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial w} = \left(\frac{\partial X}{\partial w}(u, v, w), \frac{\partial Y}{\partial w}(u, v, w), \frac{\partial Z}{\partial w}(u, v, w) \right)$$

Un razonamiento similar al que vimos en el caso bidimensional conduce a que el sólido imagen del paralelepípedo de lados ∇u , ∇v y ∇w está limitado por superficies en xyz que se obtienen al hacer respectivamente $u = cte$, $v = cte$ o $w = cte$ y forman aproximadamente un paralelepípedo determinado por los vectores $\nabla u \mathbf{V}_1$, $\nabla v \mathbf{V}_2$ y $\nabla w \mathbf{V}_3$. Si tenemos en cuenta que el volumen de un paralelepípedo es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan, en nuestro caso se tiene

$$|(\nabla u \mathbf{V}_1) \cdot (\nabla v \mathbf{V}_2 \times \nabla w \mathbf{V}_3)| = |\mathbf{V}_1 \cdot (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3)| \nabla u \nabla v \nabla w = |\mathbf{J} \mathbf{g}(u, v, w)| \nabla u \nabla v \nabla w$$

Ejemplo 6.3

■ **Coordenadas cilíndricas**

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R}\} \\ (r, \theta, z) &\mapsto (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{aligned}$$

ya sabemos que \mathbf{g} es un cambio de variables, luego si $T \subset (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ es un abierto y acotado y $\mathbf{g}(T) = S$, como

$$\mathbf{J} \mathbf{g}(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

se tiene

$$\int \int \int_S f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int \int_T f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, dr d\theta dz$$

■ **Coordenadas esféricas**

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R}\} \\ (r, \theta, \phi) &\mapsto (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \end{aligned}$$

\mathbf{g} es un cambio de variables y si $T \subset (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ es un abierto y acotado y $\mathbf{g}(T) = S$

$$\mathbf{J} \mathbf{g}(r, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

y como $\sin \theta \geq 0$ se tiene

$$\int \int \int_S f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int \int_T f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \, r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi$$

Análogamente a como vimos que el área de una región $S \subset \mathbb{R}^2$ viene dada por $\int \int_S dx dy$, el volumen de un sólido $V \subset \mathbb{R}^3$ viene dado por $\int \int \int_V dx dy dz$ y en general el volumen de un sólido V de \mathbb{R}^n se calcula por $\int \cdots \int_V dx_1 \cdots dx_n$

Ejemplo 6.4 El volumen de una esfera de radio 1, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, vale

$$\text{Vol}(V) = \int \int \int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} dx dy dz = \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \right] dx dy = \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} 2\sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy$$

y si hacemos el cambio a coordenadas polares se tiene

$$\text{Vol}(V) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2} \, dr = 2\pi \left[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi$$

6.3.2. Propiedades de la integral múltiple

Igual que en el caso de dos variables, la integración de funciones de varias variables tiene las siguientes propiedades

Proposición 6.4

1. (Linealidad). Si f y g son funciones integrables en A y $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\mu f \pm \lambda g$ es integrable en A

$$\int_A \mu f \pm \lambda g = \mu \int_A f \pm \lambda \int_A g$$

2. (Monotonía). Si f y g son funciones integrables en A y $f \leq g$ en A entonces

$$\int_A f \leq \int_A g$$

3. (Aditividad). Si f es integrable en A_1 y A_2 , entonces f es integrable en $A_1 \cup A_2$ y

$$\int_{A_1 \cup A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f - \int_{A_1 \cap A_2} f$$

4. (del valor medio). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en A . Entonces $\exists x_0 \in A$ tal que

$$\int_A f = f(x_0)v(A)$$

6.4. Funciones definidas por integrales. Teorema de Leibnitz (derivación bajo el signo integral)

Sea $f: [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ supongamos que para cada $y \in [c, d]$ exista la integral $\int_a^b f(x, y) \, dx$ podemos entonces definir la función $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$. Vamos a estudiar propiedades de la función F , como continuidad y derivabilidad según sea la función f .

Teorema 6.8 (Para el límite bajo el signo integral)

Sea $f: [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$.

Entonces F es continua, esto es, si $c \leq y_0 \leq d$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) \, dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \, dx = \int_a^b f(x, y_0) \, dx$$

(Dem.) Como f es continua en el compacto $[a, b] \times [c, d]$ es uniformemente continua, esto es

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que si} \quad \|(x, y) - (x_1, y_1)\| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x, y) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon$$

En particular si $|y - y_0| < \delta$ entonces $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a, b]$. Por tanto

$$|F(y) - F(y_0)| = \left| \int_a^b f(x, y) \, dx - \int_a^b f(x, y_0) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| \, dx < \varepsilon(b - a)$$

Esto es, F es continua en y_0 . ■

Teorema 6.9 Sea $f: [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $y \in [c, d]$ existe la integral $\int_a^b f(x, y) \, dx$ y sea $F(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$.

Supongamos que existe y es continua $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Entonces F es derivable y

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \, dx$$

(Dem.) Sea $c \leq y_0 \leq d$, entonces

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) dx$$

donde z es un punto intermedio entre y e y_0 distinto para cada x . Como $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$ es uniformemente continua, luego igual que en la demostración del teorema anterior obtenemos

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que si} \quad |y - y_0| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

y también se cumplirá que $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| < \varepsilon$ pues $|z - y_0| < \delta$. Así

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| &= \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| \leq \\ &\int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| dx < \varepsilon (b - a) \end{aligned}$$

luego existe $F'(y_0)$ y $F'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx$ ■

Puede ocurrir que los límites de integración dependan también de y , entonces tenemos el siguiente teorema

Teorema 6.10 (de Leibnitz)

Sea $f: [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sean $\alpha, \beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables tales que $a \leq \alpha(y) \leq \beta(y) \leq b$ para cada $y \in [c, d]$. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en el conjunto $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), c \leq y \leq d\}$.

Entonces la función $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ existe y es derivable $\forall y \in [c, d]$ y se cumple

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\beta(y), y)\beta'(y) + f(\alpha(y), y)\alpha'(y)$$

(Dem.) Sea $y_0 \in [c, d]$. Escribimos la función $F(y)$ por

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0} \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} dx + \frac{1}{y - y_0} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

como f es una función continua, podemos poner

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y) dx = \frac{\alpha(y_0) - \alpha(y)}{y - y_0} f(\bar{x}, y)$$

donde \bar{x} es un valor intermedio entre $\alpha(y)$ y $\alpha(y_0)$, luego

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y) \, dx = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\alpha(y_0) - \alpha(y)}{y - y_0} f(\bar{x}, y) = -\alpha'(y_0) f(\alpha(y_0), y_0)$$

Análogamente

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_{\beta(y)}^{\beta(y_0)} f(x, y) \, dx = \beta'(y_0) f(\beta(y_0), y_0)$$

y sabemos por el teorema anterior que

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} \, dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \, dx$$

de donde se sigue el teorema. ■

Este teorema puede generalizarse a funciones de más variables. Así, si consideramos las funciones

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \alpha, \beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad 0 < m \leq n + 1$$

podemos definir la función $F(x_1, \dots, x_n) = \int_{\alpha(x_1, \dots, x_n)}^{\beta(x_1, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_m) \, dx_m$, siempre que exista esta integral. Entonces se tiene

Teorema 6.11 *Si se cumplen las condiciones*

1. f es de clase C^1
2. $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ y $\beta(x_1, \dots, x_n)$ son funciones continuas cuyas derivadas parciales $\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial \beta}{\partial x_i}$ existen para todo i , $1 \leq i \leq n$

Entonces también existen las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ $1 \leq i \leq n$ y se cumple

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_{\alpha(x_1, \dots, x_n)}^{\beta(x_1, \dots, x_n)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) \, dx_m + f(x_1, \dots, \beta(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - f(x_1, \dots, \alpha(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$$

6.5. Integrales impropias

Son integrales $\int_A f$ donde el dominio de integración A no es un conjunto medible Jordan o la función f no es integrable. Por ejemplo cuando A no es un conjunto acotado o la función f no es acotada en algún conjunto de medida cero. Aun así podemos calcular $\int_A f$ aproximando por integrales bien definidas.

6.5.1. Integrales impropias de primera especie

Definición 6.8 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no acotado y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que satisface*

1. f tiene signo constante en A
2. f es integrable en $B_r(p) \cap A$, para algún punto $p \in A$ y $\forall r > 0$.

Entonces decimos que

$$\int_A f = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{A \cap B_r(p)} f$$

Si existe este límite decimos que su valor es la integral impropia de primera especie de f en A .

6.5.2. Integrales impropias de segunda especie

Definición 6.9 Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, $A^* = A - \{p\}$ con $p \in A$ y $f: A^* \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface

1. f es de signo constante en A^*
2. f es acotada en $A - B_r(p)$, $\forall r > 0$
3. f es integrable en $A - B_r(p)$, $\forall r > 0$

entonces

$$\int_A f = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{A - B_r(p)} f$$

Si existe este límite decimos que su valor es la integral impropia de segunda especie de f en A .

Capítulo 7

Integrales de línea y de superficie

7.1. Longitud de una curva

Teorema 7.1 Sea C el camino $\alpha: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ con derivada α' continua en $[a, b]$, entonces la longitud L de la curva $\alpha([a, b])$ viene dada por:

$$L = \int_C dl = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

(Dem.) Supongamos que dividimos el intervalo $[a, b]$ en m intervalos de la misma longitud $h = \frac{b-a}{m}$, sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ los puntos de esa partición, esto es $t_0 = a$, $t_m = b$ y $t_{i+1} - t_i = h$ para $0 \leq i \leq m-1$.

Consideremos la poligonal en \mathbb{R}^n que une los puntos $\alpha(t_0), \dots, \alpha(t_m)$. La longitud de dicha poligonal es

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| &= \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{[x_1(t_{i+1}) - x_1(t_i)]^2 + \dots + [x_n(t_{i+1}) - x_n(t_i)]^2} = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{[x_1(t_i + h) - x_1(t_i)]^2 + \dots + [x_n(t_i + h) - x_n(t_i)]^2} \end{aligned}$$

observese que $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} \|\alpha(t_i + h) - \alpha(t_i)\| = L$

Por el teorema del valor medio para cada componente x_j , $1 \leq j \leq n$, existen $\zeta_i \in (t_i, t_i + h)$ $0 \leq i \leq m-1$ tales que $x_j(t_i + h) - x_j(t_i) = x'_j(\zeta_i)h$, $0 \leq i \leq m-1$ y cuando $h \rightarrow 0$, $\zeta_i \rightarrow t_i$.

Por la continuidad de α' se deduce que

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} \|\alpha(t_i + h) - \alpha(t_i)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{x_1'^2(t_i) + \dots + x_n'^2(t_i)} = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \quad \blacksquare$$

Comentarios:

- Puede demostrarse que este resultado es independiente de la parametrización elegida, como se verá en la proposición 7.1.
- En particular, supongamos que queremos calcular la longitud de la gráfica de una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Dicha gráfica puede considerarse como el camino definido por

$$\begin{array}{ccc} \alpha: & [a, b] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto (t, f(t)) \end{array}$$

y $\alpha'(t) = (1, f'(t))$. Por el teorema anterior

$$L = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt$$

En general, dado un camino $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con derivada α' continua, podemos definir la función *longitud del camino* por

$$L: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{donde} \quad L(t) = \int_a^t \|\alpha'(s)\| ds$$

y, por tanto, $L'(t) = \|\alpha'(t)\|$.

7.2. Integral de línea de una función escalar

Definición 7.1 Sean $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino con derivada continua en (a, b) , $\alpha([a, b]) = \mathcal{C}$ y $\varphi: \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar definido y acotado en \mathcal{C} , entonces se denomina integral de línea del campo escalar φ a lo largo de la curva \mathcal{C} , caso de que exista, a la siguiente integral

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi dl = \int_a^b (\varphi \circ \alpha)(t) L'(t) dt = \int_a^b (\varphi \circ \alpha)(t) \|\alpha'(t)\| dt \quad (7.1)$$

Si φ es continua en \mathcal{C} dicha integral existe.

Proposición 7.1 La integral de línea de un campo escalar φ a lo largo de una curva \mathcal{C} no depende de la parametrización.

(Dem.) Si $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos parametrizaciones regularmente equivalentes de la curva \mathcal{C} recordando la definición 4.5 se tiene el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow f & \uparrow \beta \\ & & [c, d] \end{array}$$

donde $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ es un difeomorfismo y $\alpha(t) = \beta(f(t))$ y por tanto $\alpha'(t) = \beta'(f(t))f'(t)$.

Supongamos que la integral de línea del campo escalar φ a lo largo de \mathcal{C} exista respecto de la parametrización β , entonces se tiene

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi dl = \int_c^d (\varphi \circ \beta)(s) \|\beta'(s)\| ds$$

en la integral anterior hacemos el cambio de variable $s = f(t)$, y por tanto $ds = f'(t)dt$. En el caso que ambas parametrizaciones tiene la misma orientación, es decir $f'(t) > 0$ y por tanto $f(a) = c$ y $f(b) = d$, se tiene

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi dl = \int_a^b (\varphi \circ \beta)(f(t)) \|\beta'(f(t))\| f'(t) dt = \int_a^b (\varphi \circ \beta)(f(t)) \|\beta'(f(t))f'(t)\| dt = \int_a^b (\varphi \circ \alpha)(t) \|\alpha'(t)\| dt$$

Si $f'(t) < 0$ se tiene $f(a) = d$ y $f(b) = c$ y por tanto

$$\int_C \varphi \, dl = - \int_a^b (\varphi \circ \beta)(f(t)) \, \|\beta'(f(t))\| \, f'(t) \, dt = \int_a^b (\varphi \circ \beta)(f(t)) \, \|\beta'(f(t))\| \, |f'(t)| \, dt = \int_a^b (\varphi \circ \alpha)(t) \, \|\alpha'(t)\| \, dt$$

■

Comentarios:

- Como se ha visto el resultado de una integral de línea no depende de la parametrización de la curva ni de su sentido de recorrido se dice que son integrales que no tienen orientación.
- Como el cálculo de una integral de línea de un campo escalar se reduce al cálculo de una integral de una función de una variable sobre un intervalo, ésta tiene las propiedades de las integrales de funciones de una variable (*linealidad, monotonía, aditividad del intervalo,...*).
- Como caso particular, tomando la función $\varphi = 1$ en la integral, se obtiene la expresión para calcular la longitud del arco de curva C .

7.3. Integral de línea de un campo vectorial

Definición 7.2 Sean $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino con derivada continua en (a, b) , $\alpha([a, b]) = C$ y $\mathbf{f}: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial definido y acotado en C , entonces se denomina integral de línea o circulación del campo vectorial \mathbf{f} a lo largo de la curva C , caso de que exista, a la siguiente integral

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{f} \circ \alpha)(t) \cdot \alpha'(t) \, dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b [f_i(\alpha)(t) \, \alpha'_i(t)] \, dt \quad (7.2)$$

Si \mathbf{f} es continua en C dicha integral existe.

La integral de línea de una función vectorial se puede representar de las siguientes formas

1.

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_C f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$$

en \mathbb{R}^2 se expresa por $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_C f_1 dx + f_2 dy$ y en \mathbb{R}^3 $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_C f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$

2. Si $\alpha(a) = \mathbf{A}$ y $\alpha(b) = \mathbf{B}$ puede ponerse

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$$

3. Para caminos cerrados, es decir $\alpha(a) = \alpha(b)$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$$

Proposición 7.2 El valor absoluto de la integral de línea de un campo vectorial \mathbf{f} a lo largo de una curva C no depende de la parametrización. El signo depende de la orientación de la misma.

(Dem.) La demostración es semejante a la de la proposición 7.1.

Si $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos parametrizaciones regularmente equivalentes de la curva C recordando la definición 4.5 se tiene el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc}
 [a, b] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^n \\
 & \searrow h & \uparrow \beta \\
 & & [c, d]
 \end{array}$$

Donde $h: t \in [a, b] \rightarrow [c, d]$ es un difeomorfismo y $\alpha(t) = \beta(h(t))$ y por tanto $\alpha'(t) = \beta'(h(t))h'(t)$.

Calculamos la integral de línea del campo vectorial \mathbf{f} a lo largo de C mediante la parametrización β según la ecuación 7.2

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_c^d (\mathbf{f} \circ \beta)(s) \cdot \beta'(s) ds$$

en la integral anterior hacemos el cambio de variable $s = h(t)$, y por tanto $ds = h'(t)dt$, en el caso que ambas parametrizaciones tengan la misma orientación, es decir $h'(t) > 0$ se tiene $h(a) = c$ y $h(b) = d$ por el contrario si $h'(t) < 0$ se tienen orientaciones opuestas y entonces $h(a) = d$ y $h(b) = c$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \pm \int_a^b (\mathbf{f} \circ \beta)(h(t)) \cdot \beta'(h(t)) h'(t) dt = \pm \int_a^b (\mathbf{f} \circ \alpha)(t) \cdot \alpha'(t) dt$$

más para el caso en que las parametrizaciones α y β orienten la curva C en el mismo sentido y menos si la orientan en sentido contrario. ■

Comentarios:

- Como en el caso de campos escalares el cálculo de una integral de línea de un campo vectorial se reduce al cálculo de una integral de una función de una variable sobre un intervalo. Como consecuencia tiene las propiedades de *linealidad, monotonía, aditividad del intervalo,...*
- Sea $\alpha(t)$ una parametrización de la curva C entonces

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{f} \circ \alpha)(t) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b (\mathbf{f} \circ \alpha)(t) \cdot \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \|\alpha'(t)\| dt = \int_C (\mathbf{f} \circ \alpha)(t) \cdot \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} d\mathbf{l} = \int_C f_T d\mathbf{l}$$

donde f_T es la componente tangencial del vector \mathbf{f} sobre la curva C , expresión que relaciona la integral de un campo vectorial con la de un campo escalar. Es decir la circulación de un vector \mathbf{f} a lo largo de una curva C es la integral de su componente tangencial respecto de la longitud de arco.

- La integral de línea de una función vectorial tiene orientación es decir su valor depende del sentido de recorrido de la curva como pone de manifiesto la proposición 7.2

7.4. Campo conservativo. Potencial escalar

Recordemos que el segundo teorema fundamental de Cálculo nos dice que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 entonces

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

Veamos ahora un teorema análogo para funciones escalares φ de varias variables.

Teorema 7.2 Sean $\varphi: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en el abierto arco-conexo S (vease la definición 2.8), \mathbf{A} y \mathbf{B} dos puntos de S y α un camino en S regular o regular a trozos que une esos puntos. Entonces

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \varphi(\mathbf{B}) - \varphi(\mathbf{A})$$

(Dem.) Supongamos que el camino α es regular, entonces

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_{t_0}^{t_1} \nabla \varphi(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \quad \text{con} \quad \alpha(t_0) = \mathbf{A} \text{ y } \alpha(t_1) = \mathbf{B} \quad (7.3)$$

Se tiene la siguiente composición de funciones

$$\begin{array}{ccccc} [t_0, t_1] & \xrightarrow{\alpha} & S \subseteq \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \alpha(t) & \mapsto & \varphi(\alpha(t)) = g(t) \end{array}$$

como $g = \varphi \circ \alpha$ es de clase C^1 , por la regla de la cadena su derivada es $g'(t) = \nabla \varphi(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$ y así la ecuación 7.3 queda

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_{t_0}^{t_1} \nabla \varphi(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} g'(t) dt = g(t_1) - g(t_0) = \varphi(\mathbf{B}) - \varphi(\mathbf{A})$$

igualmente si la curva fuese regular a trozos. ■

Vemos pues que la integral de línea de un gradiente continuo no depende del camino sino únicamente de los puntos extremos.

Corolario 7.1 Con las mismas hipótesis que el teorema 7.2 si el camino es cerrado simple y regular se tiene

$$\oint_C \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (7.4)$$

El próximo teorema nos mostrará que los gradientes continuos son los únicos campos vectoriales con esta propiedad.

Recordemos el primer teorema fundamental del Cálculo:

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, x]$ para cada $x \in [a, b]$. Se define la función $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

Entonces existe $\varphi'(x)$ para cada $x \in (a, b)$ donde f es continua y se cumple

$$\varphi'(x) = f(x)$$

Vamos a dar un teorema análogo para funciones $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Teorema 7.3 Sea $\mathbf{f}: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en el abierto y arco-conexo S . Supongamos que la integral de línea de \mathbf{f} es independiente del camino en S . Por tanto podemos definir un campo escalar φ por

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} \in S \quad (7.5)$$

entonces se cumple que

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in S$$

(Dem.) Basta con demostrar que $\forall x \in S$ y $\forall k, 1 \leq k \leq n$ se cumple $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = f_k(x)$ donde f_k es la componente k -ésima de \mathbf{f} .

En efecto sean $B_r(x)$ una n -bola de centro x y radio r tal que $B_r(x) \subset S$, que existe por ser S abierto, y \mathbf{v} un vector unitario en \mathbb{R}^n . Como $x + h\mathbf{v} \in S$ siempre que $0 < |h| < r$ se tiene

$$\varphi(x + h\mathbf{v}) - \varphi(x) = \int_x^{x+h\mathbf{v}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$$

a lo largo de cualquier camino regular o regular a trozos que une x con $x+h\mathbf{v}$. En particular para el segmento de recta

$$\begin{array}{ll} \alpha: [0, 1] & \mapsto S \\ t & \mapsto x + th\mathbf{v} \end{array}$$

observemos que $\alpha'(t) = h\mathbf{v}$, de donde

$$\frac{\varphi(x+h\mathbf{v}) - \varphi(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h\mathbf{v}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}}{h} = \frac{\int_0^1 h\mathbf{f}(x+th\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, dt}{h} = \int_0^1 \mathbf{f}(x+th\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, dt$$

si consideramos $\mathbf{v} = e_k$ el k -ésimo vector coordenado, se tiene

$$\frac{\varphi(x+he_k) - \varphi(x)}{h} = \int_0^1 \mathbf{f}(x+the_k) \cdot e_k \, dt = \int_0^1 f_k(x+the_k) \, dt = \frac{\int_0^h f_k(x+ue_k) \, du}{h}$$

donde hemos hecho el cambio de variable $th = u$.

Por ser \mathbf{f} un campo vectorial continuo podemos definir la función $g: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(t) = \int_0^t f_k(x+ue_k) \, du$$

y por el primer teorema fundamental del Cálculo se cumple

$$g'(t) = f_k(x+te_k) \quad \text{y en particular} \quad g'(0) = f_k(x)$$

Así pues

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+he_k) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) = f_k(x) \quad \blacksquare$$

Teorema 7.4 Sea $\mathbf{f}: S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en el abierto arco-conexo S . Entonces, son equivalentes:

1. \mathbf{f} es el gradiente de algún campo escalar φ en S , es decir $\mathbf{f}(x) = \nabla \varphi(x)$
2. La integral de línea de \mathbf{f} entre dos puntos cualesquiera de S es independiente del camino.
3. La integral de línea de \mathbf{f} a lo largo de cualquier curva cerrada regular o regular a trozos contenida en S es nula.

(Dem.)

Probaremos que (1) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (2) y por último que (2) \Rightarrow (1).

(1) \Rightarrow (3) es consecuencia directa del corolario 7.1.

(3) \Rightarrow (2)

Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} dos puntos de S y sean C_1 y C_2 dos caminos cualesquiera en S que unen \mathbf{A} con \mathbf{B} .

Supongamos que sus respectivas parametrizaciones vienen dadas por

$$C_1 \text{ por } \alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad C_2 \text{ por } \beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Como tienen los mismos extremos suponemos que $\mathbf{A} = \alpha(a) = \beta(c)$ y $\mathbf{B} = \alpha(b) = \beta(d)$.

Sea $\gamma: [a, b+d-c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ el camino cerrado en S definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \beta(b+d-t) & \text{si } t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Entonces

$$0 = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} - \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \quad \implies \quad \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$$

(2) \Rightarrow (1) es consecuencia del teorema 7.3. ■

Definición 7.3 Sea $\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en el abierto U de \mathbb{R}^n . Se dice que \mathbf{f} es conservativo si existe un campo escalar $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 , tal que $\nabla\varphi(x) = \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in U$. Se dice que φ es el potencial escalar de \mathbf{f} .

Vemos pues que los campos conservativos son aquellos para los que la integral de línea que une dos puntos no depende del camino.

Vamos a dar ahora una condición necesaria para determinar si un campo vectorial es conservativo.

Proposición 7.3 Sea $\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 en el abierto U de \mathbb{R}^n . Si \mathbf{f} es un gradiente en U , entonces se cumple

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \quad y \quad \forall x \in U$$

(Dem.) Supongamos que $\mathbf{f} = \nabla\varphi$ en U donde $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 . Luego por el teorema de Schwartz se cumple

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} \quad \implies \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

El recíproco de la proposición anterior no es cierto. Veamos un contraejemplo.

Sea la función $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$, definida por

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Se puede comprobar que $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in U$, es decir cumple la condición necesaria de campo conservativo, sin embargo \mathbf{f} no es un gradiente en U , pues podemos encontrar un camino cerrado dentro de U tal que la circulación de \mathbf{f} no es nula.

$$\begin{array}{ccc} \text{En efecto, sea} & \alpha: [0, 2\pi] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto (R \cos t, R \sin t) \end{array}$$

$C = \alpha([0, 2\pi])$ es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio R

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi \neq 0$$

En el capítulo siguiente veremos que la condición de la proposición 7.4 es también suficiente para algún tipo de conjuntos $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

7.5. Área de una superficie.

Proposición 7.4

$$\begin{array}{ccc} \text{Sea} & \sigma: T \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{array}$$

una superficie parametrizada simple y regular, entonces el área de $S = \sigma(T)$ viene dada por

$$\text{área de } S = \int_S dS = \int \int_T \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du dv$$

(Dem.) Veamos una justificación intuitiva.

Sea el rectángulo $N \subset T$ con vértices en los puntos (u, v) , $(u + \Delta u, v)$, $(u, v + \Delta v)$ y $(u + \Delta u, v + \Delta v)$, cuya área es $\Delta u \Delta v$. Se trata de calcular el área del *elemento de superficie* $\sigma(N)$, que denotaremos ΔS (ver figura 7.1).

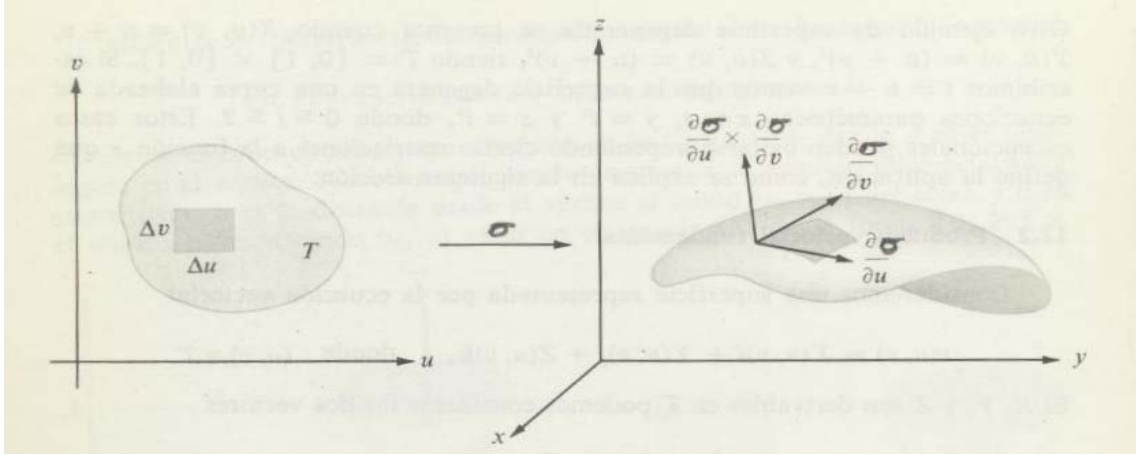


Figura 7.1: Interpretación geométrica de los vectores $\mathbf{T}_u = \frac{\partial \sigma}{\partial u}$, $\mathbf{T}_v = \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ y $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$.

Una aproximación al valor de dicha área se obtiene de la siguiente forma:

Consideremos el segmento de extremos (u, v) y $(u + \Delta u, v)$. Su imagen por σ es una curva sobre la superficie S cuya longitud, para valores Δu pequeños, es aproximadamente

$$\|\sigma(u + \Delta u, v) - \sigma(u, v)\| = \|\Delta u \frac{\sigma(u + \Delta u, v) - \sigma(u, v)}{\Delta u}\| \approx \|\Delta u \mathbf{T}_u(u, v)\|$$

Igualmente el segmento de extremos (u, v) y $(u, v + \Delta v)$ su imagen por σ es una curva sobre la superficie S cuya longitud, para valores Δv pequeños, viene dada por

$$\|\sigma(u, v + \Delta v) - \sigma(u, v)\| = \|\Delta v \frac{\sigma(u, v + \Delta v) - \sigma(u, v)}{\Delta v}\| \approx \|\Delta v \mathbf{T}_v(u, v)\|$$

Así pues la imagen por σ del rectángulo N es un paralelogramo curvo sobre S cuya área será aproximadamente el área del paralelogramo determinado por los vectores $\Delta u \mathbf{T}_u(u, v)$ y $\Delta v \mathbf{T}_v(u, v)$ cuyo valor es

$$\|\Delta u \mathbf{T}_u(u, v) \times \Delta v \mathbf{T}_v(u, v)\| = \|\mathbf{T}_u(u, v) \times \mathbf{T}_v(u, v)\| \Delta u \Delta v$$

De esta manera podemos considerar la norma del producto vectorial fundamental $\|\mathbf{T}_u(u, v) \times \mathbf{T}_v(u, v)\|$ como un factor de proporcionalidad de áreas, y como área de $T = \int \int_T du dv$, tiene sentido la expresión
 área de $S = \int_S dS = \int \int_T \|\mathbf{T}_u(u, v) \times \mathbf{T}_v(u, v)\| \, du dv$. ■

Comentarios:

- Aunque el cálculo del área de una superficie se realiza a partir de una parametrización de ésta, como veremos en la proposición 7.5, dicho cálculo es independiente de la parametrización.

- Sean $f: T \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $S = \text{graf } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, z = f(x, y)\}$, es decir una superficie en forma explícita. Para calcular el área de S , podemos parametrizar la superficie, tal como se expresa en la figura 7.2, en la forma

$$\begin{aligned} \sigma: A \subset \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

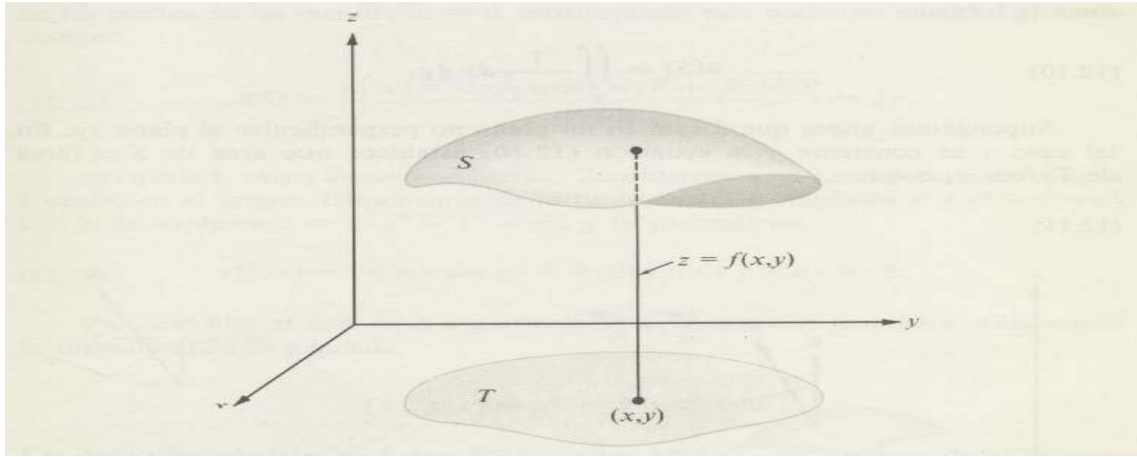


Figura 7.2: Superficie en forma explícita, $z = f(x, y)$.

Entonces, $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ y

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

y por tanto

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

de esta forma obtenemos

$$\text{área de } S = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

- Supongamos ahora que $S = \text{graf } f$ está sobre un plano cualquiera. Consideremos la parametrización de S dada en el punto anterior. Sabemos que el producto vectorial fundamental es un vector perpendicular al plano. Consideremos el vector unitario en el eje Z es decir $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Entonces,

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}\right) \cdot \mathbf{k} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \cdot (0, 0, 1) = 1$$

luego

$$1 = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\| \|\mathbf{k}\| \cos \gamma \quad \implies \quad \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\| = \frac{1}{\cos \gamma} \quad \forall (x, y) \in T$$

Por tanto,

$$\text{área de } S = \iint_T \frac{1}{\cos \gamma} dx dy = \frac{\text{área de } T}{\cos \gamma} \quad \text{o bien} \quad \cos \gamma = \frac{\text{área de } T}{\text{área de } S}$$

donde T es la proyección de S sobre el plano XY en dirección Z y γ es el ángulo formado por el vector ortogonal al plano y \mathbf{k} o también el formado por el plano y el plano XY , fórmula análoga a la que en trigonometría se conoce como regla del coseno (vease figura 7.3).

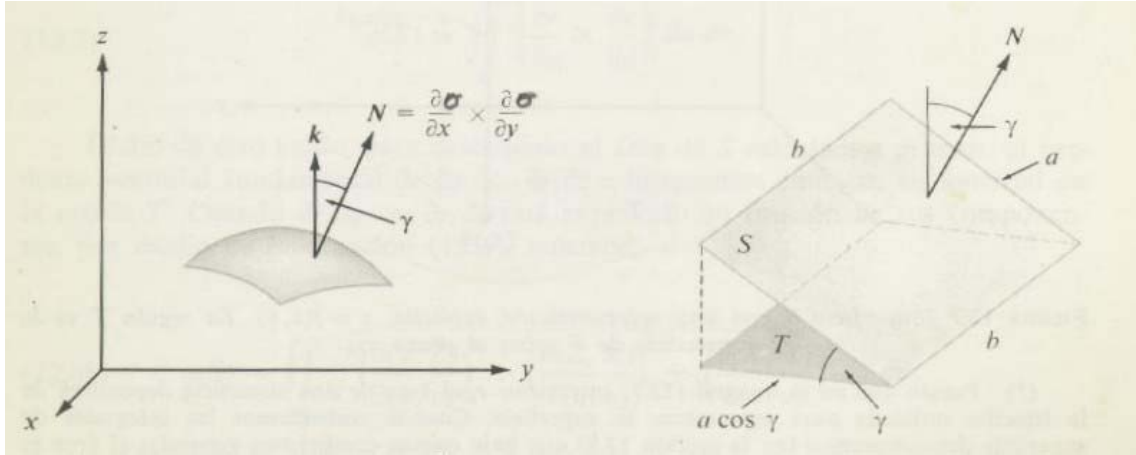


Figura 7.3: Regla del coseno para un rectángulo.

- Observemos que si f es constante, es decir, S está en un plano paralelo al plano coordenado XY , entonces $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ y además $\gamma = 0$ y según lo anterior se tiene

$$\text{área de } S = \iint_A dx dy$$

que es la fórmula ya conocida para el cálculo de áreas en \mathbb{R}^2 .

7.6. Integral de superficie de una función escalar

Definición 7.4 Sean $\sigma: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con D abierto, una superficie parametrizada simple y regular, $\sigma(D) = S$ y $f: S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar definido y acotado en S .

Se denomina integral de superficie de f y se denota por $\int_S f dS$ a la integral, caso de que exista

$$\int_S f dS = \int \int_D f(\sigma(u, v)) \|\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v\| du dv$$

Proposición 7.5 La integral de superficie de un campo escalar f sobre una superficie regular S no depende de la parametrización de S .

(Dem.) Sean $\sigma: D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\gamma: D_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones regularmente equivalentes de S , si recordamos la definición 4.12 se tiene el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{R}^3 \\ & \searrow g & \uparrow \gamma \\ & & D_2 \end{array}$$

donde $g: D_1 \rightarrow D_2$ es un difeomorfismo y además $\sigma(D_1) = \gamma(D_2)$ y por tanto se tiene

$$\begin{aligned}
D\boldsymbol{\sigma}(u, v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = D\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{g}(u, v)) Dg(u, v) = D\boldsymbol{\gamma}(s, t) Dg(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} \right)
\end{aligned}$$

De donde

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial v} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} \right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial s}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{Jg}(u, v)$$

Si calculamos la integral de f en S utilizando la parametrización $\boldsymbol{\gamma}$ y posteriormente hacemos el cambio de variable $(s, t) = \mathbf{g}(u, v)$ se tiene

$$\iint_{D_2} f(\boldsymbol{\gamma}(s, t)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} \right\| ds dt = \iint_{D_1} f(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{g}(u, v))) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial v} \right\| |\mathbf{Jg}(u, v)| du dv = \iint_{D_1} f(\boldsymbol{\sigma}(u, v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial v} \right\| du dv$$

que corresponde con el cálculo de la integral de f en S utilizando la parametrización $\boldsymbol{\sigma}$ ■

Comentarios:

- Obsérvese que como consecuencia de la anterior proposición la definición 7.4 de integral de superficie a partir de una parametrización es correcta.
- Como caso particular, tomando la función $f = 1$ en la integral, se obtiene la expresión para calcular el área de la superficie.
- El resultado de una integral de superficie no depende de la orientación de la superficie.

7.7. Integral de superficie de un campo vectorial en \mathbb{R}^3

También se denominan *integral de flujo* o flujo de \mathbf{f} a través de S

Definición 7.5 Sean $\boldsymbol{\sigma}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con D abierto, una superficie parametrizada simple regular, $\boldsymbol{\sigma}(D) = S$ y $\mathbf{f}: S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial definido y acotado en S .

Se denomina integral de superficie de \mathbf{f} y se denota por $\int_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ a la integral, caso de que exista, siguiente

$$\int_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_D \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(u, v)) \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)(u, v) du dv$$

Si consideramos el vector normal unitario $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|}$ que sabemos que es normal a la superficie S en cada punto, obtenemos

$$\int_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_D \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(u, v)) \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) du dv = \int \int_D \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(u, v)) \cdot \mathbf{n} \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{f}_N dS$$

Así el flujo de \mathbf{f} a través de S es también la integral de la componente normal de \mathbf{f} , es decir \mathbf{f}_N , en S .

Veamos ahora que el valor absoluto de la integral de un campo vectorial sobre S tampoco depende de cómo se parametrice la superficie.

Proposición 7.6 *El valor absoluto de la integral de superficie de un campo vectorial \mathbf{f} sobre una superficie regular S no depende de la parametrización de S . El signo depende de la orientación de ésta. Es decir si $\sigma: D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\gamma: D_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son dos parametrizaciones regularmente equivalentes de S se tiene*

$$\iint_{D_1} \mathbf{f}(\sigma(u, v)) \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) \, dudv = \pm \iint_{D_2} \mathbf{f}(\gamma(s, t)) \cdot (\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t) \, dsdt$$

(Dem.)

Si calculamos la integral de \mathbf{f} en S utilizando la parametrización γ y posteriormente hacemos el cambio de variable $(s, t) = \mathbf{g}(u, v)$ se tiene

$$\iint_{D_2} \mathbf{f}(\gamma(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \times \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \, dsdt = \iint_{D_1} \mathbf{f}(\sigma(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v} \right) |\mathbf{Jg}(u, v)| \, dsdt = \pm \iint_{D_1} \mathbf{f}(\sigma(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) \, dudv$$

que corresponde con el cálculo de la integral de \mathbf{f} en S utilizando la parametrización σ .

Observemos que el signo es $+$ o $-$ según sea el signo del jacobiano de \mathbf{g} o lo que es lo mismo si las dos parametrizaciones orientan S de la misma forma. Recordemos que en un difeomorfismo $\mathbf{Jg}(u, v) \neq 0$ y por tanto el jacobiano es siempre $\forall(u, v)$ o positivo o negativo. ■

Capítulo 8

Teoremas integrales del Análisis Vectorial

En el capítulo anterior se ha tratado sobre la integración de funciones escalares y vectoriales a lo largo de curvas y superficies. En el presente capítulo vamos a estudiar primeramente los operadores diferenciales y posteriormente los teoremas del Análisis vectorial, que relacionan las integrales vistas anteriormente.

8.1. Operadores diferenciales.

8.1.1. Gradiente.

En el Tema IV ya estudiamos el gradiente de una función escalar y sus propiedades geométricas. Recordemos brevemente su definición y algunas propiedades.

Definición 8.1 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con A abierto, un campo escalar de clase C^1 . Definimos como gradiente de f en A el campo vectorial

$$\text{grad } f = \nabla f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{dado por} \quad \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

El operador gradiente u operador nabla suele representarse simbólicamente por $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

Proposición 8.1 Sean $f, g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con A abierto, campos escalares de clase C^1 . Se cumple

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.
2. $\nabla(\lambda f) = \lambda \nabla f \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$.

(Dem.) Basta comprobar las igualdades. ■

8.1.2. Divergencia

Definición 8.2 Sea $\mathbf{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con A abierto, un campo vectorial de clase C^1 . Definimos como divergencia de \mathbf{f} en A el campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dado por} \quad \operatorname{div} \mathbf{f}(x) = \nabla \cdot \mathbf{f}(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)$$

Se utiliza la notación simbólica

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (f_1, \dots, f_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

En el caso particular de que el campo vectorial \mathbf{f} sea el campo de velocidad de un fluido

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{con} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

entonces una interpretación de la divergencia es la tasa de variación (expansión o compresión, según el signo) de masa de fluido por unidad de volumen.

Proposición 8.2 Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con A abierto, campos vectoriales de clase C^1 y sea $h : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 . Entonces

1. $\operatorname{div}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \operatorname{div} \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{g}$.
2. $\operatorname{div}(\lambda \mathbf{f}) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{f} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\operatorname{div}(h\mathbf{f}) = h \operatorname{div} \mathbf{f} + \nabla h \cdot \mathbf{f}$.

(Dem.) Basta comprobar las igualdades. ■

8.1.3. Rotacional

Se define para campos vectoriales en \mathbb{R}^3

Definición 8.3 Sea $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con A abierto, un campo vectorial de clase C^1 . Definimos como rotacional de \mathbf{f} en A el campo vectorial

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dado por

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = (\nabla \times \mathbf{f}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

Vamos a considerar el significado físico de $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ para un determinado campo vectorial.

Sea un sólido rígido que gira alrededor del eje Z con velocidad angular constante ω . Consideremos el campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada punto del sólido su velocidad. Si $\omega = (0, 0, \omega)$ veamos que

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

En efecto, el vector velocidad \mathbf{v} es perpendicular al plano determinado por los vectores ω y \mathbf{r} . Por otra parte si α es el ángulo girado en un tiempo t y S es el espacio recorrido en ese mismo tiempo, se tiene

$$S = \alpha d$$

donde d es la distancia del punto al eje de giro.

Ahora bien, $d = \|\mathbf{r}\| \sin \theta$ siendo θ el ángulo que forman el vector posición \mathbf{r} con el vector $\boldsymbol{\omega}$. Por tanto

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{S}{t} = \frac{\alpha d}{t} = \|\boldsymbol{\omega}\| \|\mathbf{r}\| \sin \theta \quad \implies \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Por tanto,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\omega y, \omega x, 0)$$

y

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2\omega) = 2\boldsymbol{\omega}$$

Vemos pues que en la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje, el rotacional del campo de velocidades es un campo vectorial constante. Además dicho rotacional es un vector que tiene dirección paralela al eje de rotación y su norma es el doble de la velocidad angular.

Definición 8.4 Sea $\mathbf{f}: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con A abierto, un campo vectorial de clase C^1 . Se dice que \mathbf{f} es irrotacional en A si $\text{rot } \mathbf{f} = 0$.

Proposición 8.3 Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g}: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con A abierto, campos vectoriales de clase C^1 y sea $h: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 . Entonces

1. $\text{rot}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \text{rot } \mathbf{f} + \text{rot } \mathbf{g}$.
2. $\text{rot}(\lambda \mathbf{f}) = \lambda \text{rot } \mathbf{f} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\text{rot}(h\mathbf{f}) = h \text{rot } \mathbf{f} + \nabla h \times \mathbf{f}$.

(Dem.) Basta comprobar las igualdades. ■

Proposición 8.4

1. Sea $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con A abierto, un campo escalar de clase C^2 , entonces

$$\text{rot}(\text{grad } f) = 0$$

así pues $\text{grad } f$ es irrotacional.

2. Sea $\mathbf{f}: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con A abierto, un campo vectorial de clase C^2 , entonces

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{f}) = 0$$

esto es, $\text{rot } \mathbf{f}$ es un campo vectorial con divergencia nula.

(Dem.)

- 1.

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

ya que f es de clase C^2 sus derivadas cruzadas son iguales.

2. Se demuestra análogamente al anterior.

■

8.1.4. Laplaciana

Definición 8.5

1. Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con A abierto, un campo escalar de clase C^2 . Definimos el operador laplaciana de f en A como el campo escalar

$$\Delta f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dado por} \quad \Delta f(x) = \nabla^2 f(x) = (\nabla \cdot \nabla)f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)$$

2. Sea $\mathbf{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con A abierto, un campo vectorial de clase C^2 . Definimos el operador laplaciana de \mathbf{f} en A como el campo vectorial

$$\Delta \mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{dado por} \quad \Delta \mathbf{f}(x) = \nabla^2 \mathbf{f}(x) = (\Delta f_1(x), \dots, \Delta f_n(x))$$

esto es, el campo vectorial cuyas componentes son las laplacianas de las componentes de \mathbf{f} .

Definición 8.6 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con A abierto, un campo escalar de clase C^2 . Se dice que f es una función armónica si $\Delta f = 0$.

Análogamente se dice si \mathbf{f} es un campo vectorial.

8.1.5. Propiedades de los operadores diferenciales

Recordemos algunas de las propiedades de los operadores diferenciales

Proposición 8.5 (Con las adecuadas hipótesis sobre la diferenciabilidad con continuidad de las funciones que intervienen):

1. (Linealidad del gradiente):

$$\nabla(\alpha\varphi \pm \beta\psi) = \alpha\nabla\varphi \pm \beta\nabla\psi$$

2. (Gradiente del producto):

$$\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$$

3. (Rotacional de un gradiente):

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$$

4. (Divergencia de un gradiente, la laplaciana):

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

5. (Linealidad del rotacional):

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{f} \pm \beta \mathbf{g}) = \alpha \nabla \times \mathbf{f} \pm \beta \nabla \times \mathbf{g}$$

6. (Rotacional del producto):

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{f}) = \varphi \nabla \times \mathbf{f} + \nabla \varphi \times \mathbf{f}$$

7. (Rotacional del rotacional):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \Delta \mathbf{f}$$

8. (Divergencia del rotacional):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$$

9. (Linealidad de la divergencia):

$$\nabla \cdot (\alpha \mathbf{f} \pm \beta \mathbf{g}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{f} \pm \beta \nabla \cdot \mathbf{g}$$

10. (Divergencia del producto):

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{f}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{f} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{f}$$

11. (Divergencia del producto vectorial):

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$$

12. (Linealidad de la laplaciana):

$$\Delta (\alpha f \pm \beta g) = \alpha \Delta f \pm \beta \Delta g$$

8.2. Teoremas integrales

8.2.1. Teorema de Green

El segundo teorema fundamental del cálculo para las integrales de línea de un gradiente $\nabla \varphi$ a lo largo de un camino que une dos puntos A y B vale $\varphi(B) - \varphi(A)$, es decir es una función de los extremos del camino. Existe un teorema análogo en \mathbb{R}^2 que expresa una integral doble extendida a una región R como una integral de línea a lo largo de la curva cerrada que constituye la frontera geométrica o borde de R . Este teorema se denomina *teorema de Green* que enunciamos de la siguiente manera

Teorema 8.1 (de Green) Sea $\mathbf{f}: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con S abierto, un campo vectorial de clase C^1 , $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Sea C una curva de Jordan regular a trozos y representemos por R la unión de C y su interior. Supongamos que R está contenida en S , entonces se cumple

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy \quad (8.1)$$

donde la integral de línea se toma recorriendo C en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Comentarios

- El teorema de Green es válido para curvas C de Jordan *rectificables*, esto es, curvas cerradas simples con longitud finita. La demostración en este caso es compleja. Como hemos definido la integral de línea a lo largo curvas regulares a trozos enunciamos el teorema para este tipo de curvas.
- Sabemos que una curva de Jordan es una curva cerrada y simple. Toda curva de Jordan divide el plano en dos conjuntos abiertos, arco-conexos y disjuntos que tienen la curva C como frontera común. Una de esas regiones es acotada y se llama *interior* a C . La otra es no acotada y se llama *exterior* a C .
Para ciertas curvas de Jordan como circunferencias, elipses o polígonos elementales es evidente la existencia de una región interior, que es acotada, y otra exterior no acotada, pero demostrar que esto es cierto cualquiera que sea la curva de Jordan no es fácil.
- Otra dificultad asociada a la formulación del teorema de Green es que la curva C debe ser recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj. Intuitivamente esto significa que la curva C se recorra de forma que la región R quede a la izquierda. También para las curvas de Jordan anteriormente citadas el concepto de “contrario al de las agujas del reloj” es evidente, sin embargo para otras curvas se debería definir de forma más rigurosa, posteriormente comentaremos una posible definición.

■ Recordemos la notación

$$\oint (P, Q) d\alpha = \int_{t_0}^{t_1} (P \circ \alpha(t), Q \circ \alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} P \circ \alpha(t) x'(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} Q \circ \alpha(t) y'(t) dt = \oint_C P dx + \oint_C Q dy$$

Vamos ahora a comprobar el teorema de Green para unas ciertas regiones especiales. Observemos en primer lugar que un enunciado equivalente del teorema se obtiene sustituyendo la ecuación 8.1 por las ecuaciones

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy \quad \text{y} \quad - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P dx \quad (8.2)$$

(Dem.) En efecto, si las igualdades 8.2 son válidas, sumando se deduce la ecuación 8.1.

Recíprocamente, si el campo vectorial $(P(x, y), Q(x, y))$ cumple las condiciones del teorema de Green y, por tanto, se satisface la igualdad 8.1, entonces los campos vectoriales $(P, 0)$ y $(0, Q)$ también cumplen aquellas condiciones y, por tanto, se satisfacen las igualdades 8.2. ■

Sea ahora R una región del tipo I (vease figura 8.1), esto es,

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

en donde f y g son continuas en $[a, b]$ y $f \leq g$, $\forall x \in [a, b]$.

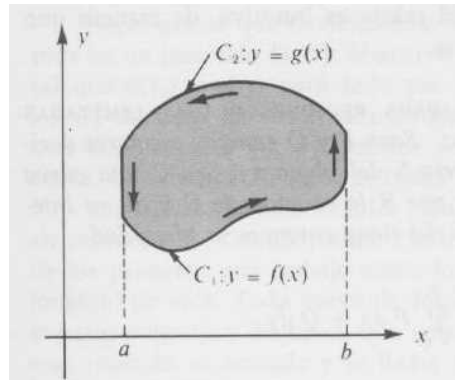


Figura 8.1: Región tipo I.

La frontera C de R consta de cuatro de cuatro curvas: C_1 que es la gráfica de f , C_2 la gráfica de g , C_3 el segmento $x = a$, y C_4 el segmento $x = b$, cuyas parametrizaciones y sentidos correspondientes, si tenemos en cuenta que C se ha de recorrer en sentido contrario al de las agujas del reloj, son:

$$\begin{array}{llll} C_1 : & \alpha_1(t) = (t, f(t)) & a \leq t \leq b & \text{en el sentido de } t \text{ crecientes} & \text{y} & \alpha'_1(t) = (1, f'(t)) \\ C_2 : & \alpha_2(t) = (t, g(t)) & a \leq t \leq b & \text{en el sentido de } t \text{ decrecientes} & \text{y} & \alpha'_2(t) = (1, g'(t)) \\ C_3 : & \alpha_3(t) = (a, t) & f(a) \leq t \leq g(a) & \text{en el sentido de } t \text{ decrecientes} & \text{y} & \alpha'_3(t) = (0, 1) \\ C_4 : & \alpha_4(t) = (b, t) & f(b) \leq t \leq g(b) & \text{en el sentido de } t \text{ crecientes} & \text{y} & \alpha'_4(t) = (0, 1) \end{array}$$

Vamos a comprobar que la segunda de las igualdades de la ecuación 8.2 se cumple en una región del tipo I . En efecto,

$$- \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b P(x, f(x)) dx - \int_a^b P(x, g(x)) dx$$

Por otra parte,

$$\oint_C P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx + \int_{C_3} P dx + \int_{C_4} P dx$$

Veamos primeramente que las integrales a lo largo de los segmentos verticales son nulas.

$$\int_{C_3} P(x, y) dx = - \int_{f(a)}^{g(a)} P \circ \alpha_3(t) x'(t) dt = 0$$

ya que $x'(t) = 0$ en C_3 y lo mismo ocurre sobre la curva C_4 . Por tanto,

$$\oint_C P \, dx = \int_{C_1} P \, dx + \int_{C_2} P \, dx = \int_a^b P \circ \alpha_1(t) x'(t) \, dt - \int_a^b P \circ \alpha_2(t) x'(t) \, dt = \int_a^b P(t, f(t)) \, dt - \int_a^b P(t, g(t)) \, dt$$

así se tiene

$$- \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy = \oint_C P \, dx$$

Un razonamiento parecido puede emplearse para demostrar que en regiones R del tipo II se cumple

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy = \oint_C Q \, dy$$

Se obtiene de este modo una demostración del teorema de Green para regiones que son a un tiempo de tipo I y de tipo II .

Puede ahora demostrarse el teorema para regiones R que puedan descomponerse en un número finito de regiones que son de ambos tipos (vease figura 8.2).

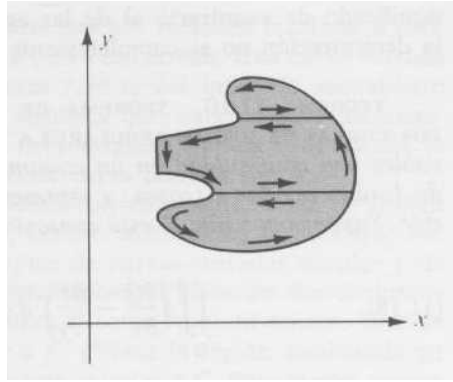


Figura 8.2: Región cualquiera.

Se introducen las secciones o cortes necesarias para conseguir subregiones de ambos tipos, se aplica el teorema a cada subregión y se suman los resultados. Las integrales a lo largo de los cortes se anulan, y la suma de las integrales a lo largo de las fronteras de las subregiones es igual a la integral de línea a lo largo de la frontera de R .

Comentario Cálculo de áreas mediante integrales de línea:

Sea R la región encerrada por una curva de Jordan C regular a trozos. Supongamos que $\mathbf{f} = (P, Q)$ con P y Q funciones $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y tales que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ en R . Entonces, se tiene

$$\text{área de } R = \iint_R dx \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \oint_C P \, dx + Q \, dy$$

Por ejemplo, P y Q pueden ser $P(x, y) = -\frac{1}{2} y$ y $Q(x, y) = \frac{1}{2} x$.

Campos conservativos en el plano.

Sea $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vectorial de clase C^1 en el abierto S del plano. Una condición necesaria para que \mathbf{f} sea el gradiente de un campo escalar φ (su potencial escalar) es que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{en } S$$

sin embargo esta condición no es suficiente. Por ejemplo el campo vectorial

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

satisface la condición necesaria en el abierto $S = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ pero no es un gradiente en S , por ejemplo las circulaciones a lo largo de circunferencias C centradas en el origen no son nulas. En efecto, una parametrización de C es

$$C : \alpha(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad t \in (0, 2\pi)$$

por lo que la circulación de \mathbf{f} a lo largo de C vale

$$\oint_C \mathbf{f}(x, y) \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} (\mathbf{f} \circ \alpha)(t) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R \sin t}{R^2}, \frac{R \cos t}{R^2} \right) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Sin embargo la condición necesaria es también suficiente si se impone que S sea un *simplemente conexo*

Definición 8.7 Sea S un conjunto abierto arco-conexo del plano se dice que S es simplemente conexo si para toda curva de Jordan C en S , la región interior a C es también un subconjunto de S .

Dicho de forma intuitiva, un conjunto abierto simplemente conexo es un abierto conexo sin “agujeros”.

Teorema 8.2 Sea $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto simplemente conexo S del plano. Entonces, \mathbf{f} es un gradiente en S si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{en } S$$

(Dem.) Sabemos que es condición necesaria y para demostrar que es también condición suficiente nos basamos en teorema de Green. ■

El teorema de Green puede generalizarse y ser aplicado a ciertas regiones múltiplemente conexas.

Teorema 8.3 (de Green en regiones múltiplemente conexas).

Sean C_1, \dots, C_n , n curvas de Jordan regulares a trozos que tengan las propiedades siguientes:

1. Dos cualesquiera de esas curvas no se cortan.
2. Todas las curvas C_2, \dots, C_n están situadas en el interior de C_1 .
3. La curva C_i está en el exterior de la curva C_j para cada $i \neq j$, $i > 1$, $j > 1$.

Designemos por R la región que consiste en la unión de C_1 y su interior pero no interior a C_2, \dots, C_n . Sea P y Q campos escalares derivables con continuidad en un abierto S que contenga a R . Entonces se tiene

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_1} P dx + Q dy - \sum_{k=2}^n \oint_{C_k} P dx + Q dy \quad (8.3)$$

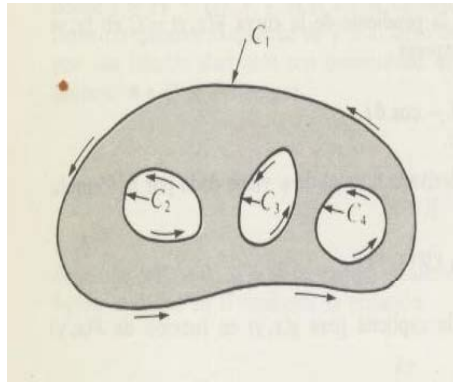


Figura 8.3: Región múltiplemente conexa.

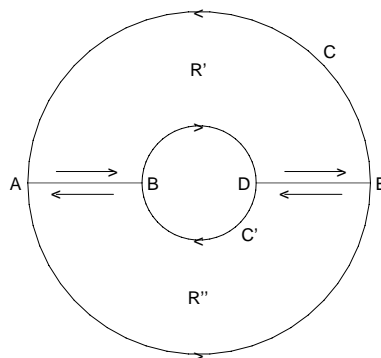


Figura 8.4: Región doblemente conexa.

El teorema puede demostrarse introduciendo cortes que transforme R en una reunión de un número finito de regiones simplemente conexas bordeadas por curvas de Jordan. El teorema de Green se aplica separadamente a cada una de las partes y se suman los resultados.

Comentaremos el caso para $n = 2$. Por inducción se demuestra para un número cualquiera n de curvas.

La idea de la demostración cuando $n = 2$ se ilustra en la siguiente figura

donde C es la circunferencia exterior y C' es la circunferencia interior. Sea R' la región cuya frontera orientada Γ_1 es el camino que une los puntos $A \rightarrow B$ siguiendo una recta, $B \rightarrow D$ siguiendo el semicírculo superior C' , de $D \rightarrow E$ recta y $E \rightarrow A$ por el semicírculo superior C . Considérese igualmente la frontera orientada Γ_2 de la región R'' . Si ahora aplicamos el teorema de Green a cada una de estas dos regiones se tiene

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{R'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{R''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$\oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \oint_{\Gamma_2} P dx + Q dy = \oint_C P dx + Q dy - \oint_{C'} P dx + Q dy$$

El signo menos aparece debido a la dirección en que se recorre C' . Esta es la ecuación 8.3 en el caso $n = 2$.

Ya hemos visto que para una región simplemente conexa S la condición $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ implica que la integral de línea $\oint P dx + Q dy$ es independiente del camino en S . Si S no es simplemente conexo no se deduce que la integral de línea sea independiente del camino, pero como consecuencia del teorema anterior podemos deducir otra condición de independencia.

Teorema 8.4 (De deformación de caminos)

Sea $\mathbf{f} = (P, Q): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en un abierto arco-conexo S . Supongamos que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ en S , sean C_1 y C_2 dos curvas de Jordan regulares a trozos situadas en S y que satisfacen las siguientes condiciones

- C_2 está en el interior de C_1
- Los puntos interiores a C_1 que son exteriores a C_2 pertenecen a S

Entonces se cumple

$$\oint_{C_1} P \, dx + Q \, dy = \oint_{C_2} P \, dx + Q \, dy$$

recorriéndose ambas curvas en el mismo sentido (vease figura 8.5).

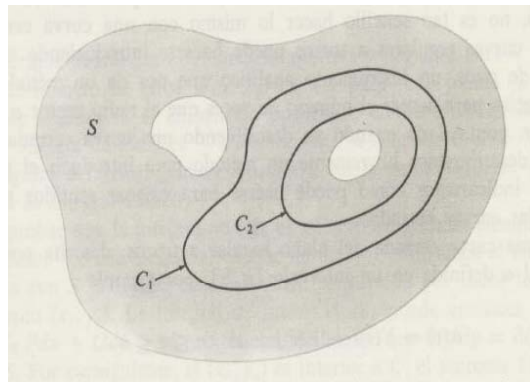


Figura 8.5: Deformación de caminos.

(Dem.) Es consecuencia directa del teorema de Green en regiones doblemente conexas vease figura 8.4. ■

El teorema también puede expresarse diciendo que bajo las condiciones del teorema $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ el valor de la integral de línea a lo largo de una curva cerrada simple en S no varía si el camino se cambia por deformación en otra curva cerrada simple cualquiera de S , de modo que todas las curvas intermedias que se van obteniendo en la deformación están dentro de S . Se supone que S es un abierto y conexo, no es preciso que sea simplemente conexo.

Comentario: El número de giros

Ya se sabe que el valor de una integral de línea depende en general de la curva a lo largo de la cual se integra y del sentido en que dicha curva se recorre. Por ejemplo, la igualdad del teorema de Green, es decir la ecuación 8.1, exige que la integral se tome en el sentido contrario al de las agujas del reloj. En un sentido riguroso del teorema de Green sería necesario describir analíticamente lo que significa recorrer una curva cerrada en el sentido contrario al de las agujas de un reloj, y esto no siempre es sencillo.

Para curvas regulares a trozos puede hacerse introduciendo el concepto de *número de giros*, una forma precisa para contar el número de veces que vector posición α de una curva gira alrededor de un punto dado cuando va describiendo una curva cerrada dada. Damos una breve sugerencia de en qué consiste este método.

Recordemos que si $\mathbf{f}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$ y C es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 parametrizada mediante $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\alpha = 1, \quad \text{si } C \text{ se recorre } n \text{ veces entonces} \quad \frac{1}{2\pi} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\alpha = n.$$

Análogamente puede demostrarse que si C es una curva cerrada del plano, regular a trozos y $P = (x_0, y_0)$ un punto no situado en la curva C , se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{-(y - y_0) dx + (x - x_0) dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

es siempre un *entero* positivo, negativo o nulo. Y en particular, si C es una curva de Jordan ese entero es 0 si P es exterior a C y vale 1 o -1 si P es interior a C .

Esto nos permite definir las orientacion positiva o negativa para C del siguiente modo. Si la integral anterior vale 1 para todo punto P interior a C decimos que α describe C en *sentido positivo* o *contrario al de las agujas del reloj*. Si la integral vale -1 decimos que α describe C en *sentido negativo* o *de las agujas del reloj*.

Para probar que la integral da siempre 1 o -1 para una curva C de Jordan alrededor de un punto (x_0, y_0) basta considerar el abierto y conexo $S = \mathbb{R}^2 - \{(x_0, y_0)\}$.

Es fácil ver que en la integral $\int_C P dx + Q dy$ se cumple $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Luego por el teorema 8.4 si (x_0, y_0) es un punto interior a C podemos reemplazar la curva C por una circunferencia de centro (x_0, y_0) y el valor de la integral es el mismo.

Si parametrizamos la circunferencia por $\alpha(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + a \sin t)$ obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\alpha = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} 1 dt = \pm 1$$

$+1$ si la circunferencia se recorre positivamente y -1 si se recorre negativamente.

Ecuaciones diferenciales exactas

Definición 8.8 Dada una ecuación diferencial en la forma $P(x, y) + Q(x, y) y' = 0$ o en su forma más común

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (8.4)$$

se dice que es una ecuación diferencial exacta si existe un campo escalar

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{que cumple} \quad \varphi_x(x, y) = P(x, y) \quad y \quad \varphi_y(x, y) = Q(x, y)$$

y tal que la ecuación $\varphi(x, y) = C$ define y como función implícita de x , es decir $y = y(x)$.

Obsevemos que en tal caso se tiene $\varphi(x, y(x)) = C$ ecuación que derivada respecto de x queda

$$\varphi_x(x, y) + \varphi_y(x, y) y'(x) = 0 \quad \implies \quad P(x, y) + Q(x, y) y' = 0 \quad \implies \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

Como consecuencia $\varphi(x, y) = C$, con $C \in \mathbb{R}$, representa la solución en forma implícita de la ecuación 8.4.

Nos interesa saber cuándo una ecuación diferencial es exacta.

Teorema 8.5 Sean $P, Q: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones escalares de clase C^1 en el abierto simplemente conexo S . La ecuación $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ es diferencial exacta si y sólo si $P_y(x, y) = Q_x(x, y) \forall (x, y) \in S$.

(Dem.) Se deduce del teorema de Green ya que en las hipótesis del teorema la condición $P_y = Q_x$ es necesaria y suficiente para que el campo vectorial $\mathbf{f} = (P, Q)$ sea conservativo, esto es $\mathbf{f}(x, y) = \nabla \varphi(x, y)$. ■

Factor integrante

Sucede a veces que la ecuación $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ no es diferencial exacta, pero puede haber una función $\mu(x, y)$ de manera que la ecuación

$$\mu(x, y) P(x, y) dx + \mu(x, y) Q(x, y) dy = 0$$

sí que sea diferencial exacta. La función $\mu(x, y)$ se denomina *factor integrante*.

De acuerdo con el teorema anterior para que esta última ecuación sea diferencial exacta se ha de cumplir

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x \quad \text{esto es,} \quad P \mu_y - Q \mu_x + (P_y - Q_x) \mu = 0$$

Determinar una función $\mu(x, y)$ que satisfaga la ecuación anterior no es en general fácil, se suelen buscar factores integrantes que sean función sólomente de x , de y , de xy , ...

La solución de $\mu(x, y) P(x, y) dx + \mu(x, y) Q(x, y) dy = 0$ es también solución de la ecuación dada $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$.

8.2.2. Teorema de Stokes

El teorema de Green expresa una relación entre una integral doble extendida a una región plana y una integral de línea extendida a su frontera orientada. El teorema de Stokes que vamos a enunciar a continuación se puede considerar como una generalización del teorema de Green y establece una relación entre el flujo de un cierto campo vectorial a través de una superficie S y la circulación de cierto campo vectorial a lo largo del borde de S .

Teorema 8.6 (de Stokes).

Sea S una superficie parametrizada simple regular definida por

$$\sigma : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que} \quad S = \sigma(T)$$

con T una región del plano limitada por una curva de Jordan Γ regular a trozos. Supongamos que σ es de clase C^2 en un abierto que contenga $T \cup \Gamma$.

Designemos por $C = \sigma(\Gamma) = \partial(S)$, esto es, C es el borde de S . Sea $\mathbf{f} = (P, Q, R) : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, un campo vectorial de clase C^1 . Entonces se cumple

$$\int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{C=\partial(S)} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\gamma}$$

La curva Γ se recorre en sentido positivo (contrario al de las agujas de un reloj) y la curva C en el sentido resultante de aplicar a Γ la función σ (ver figura 8.6).

El producto vectorial $T_u \times T_v$ define una orientación sobre S y C se recorre en el sentido inducido por esa orientación.

(Dem.)

$$\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Sea $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ una parametrización de la superficie S . Entonces su producto vectorial fundamental es

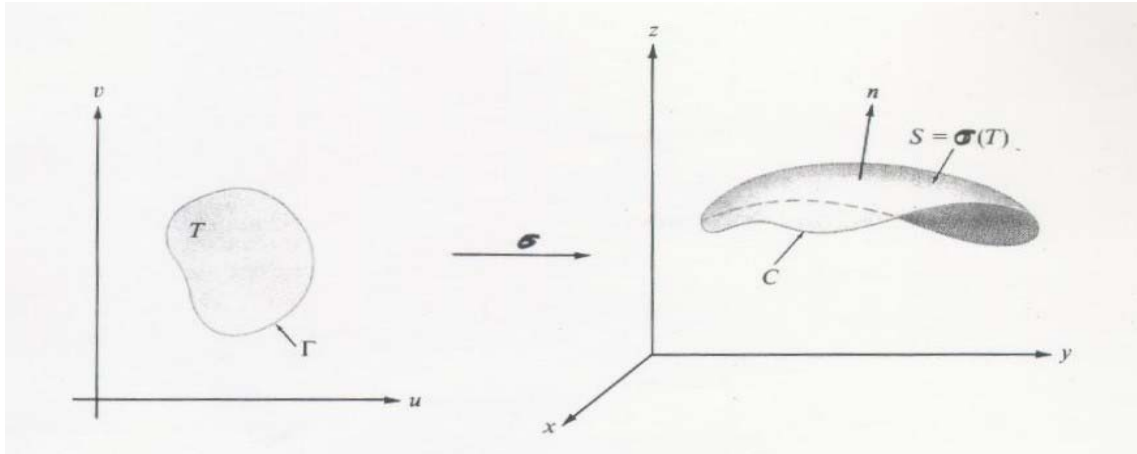


Figura 8.6: Teorema de Stokes.

$$\begin{aligned}
 T_u \times T_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u) \\
 \int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \int \int_T \text{rot } \mathbf{f}(\sigma(u, v)) \cdot (T_u \times T_v)(u, v) \, dudv = \\
 &= \int \int_T \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) (y_u z_v - y_v z_u) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) (x_v z_u - x_u z_v) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x_u y_v - x_v y_u) \right\} \, dudv = \\
 &= \int \int_T \left\{ -\frac{\partial P}{\partial y} (x_u y_v - x_v y_u) + \frac{\partial P}{\partial z} (x_v z_u - x_u z_v) \right\} \, dudv + \\
 &\quad + \int \int_T \left\{ -\frac{\partial Q}{\partial z} (y_u z_v - y_v z_u) + \frac{\partial Q}{\partial x} (x_u y_v - x_v y_u) \right\} \, dudv + \\
 &\quad + \int \int_T \left\{ -\frac{\partial R}{\partial x} (x_v z_u - x_u z_v) + \frac{\partial R}{\partial y} (y_u z_v - y_v z_u) \right\} \, dudv
 \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial u} (P x_v) - \frac{\partial}{\partial v} (P x_u) &= (P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u) x_v + P x_{uv} - (P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v) x_u - P x_{vu} = \\
 &= -P_y (x_u y_v - x_v y_u) + P_z (x_v z_u - x_u z_v)
 \end{aligned}$$

Análogamente para los otros integrandos. De manera que queda

$$\int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (P x_v) - \frac{\partial}{\partial v} (P x_u) + \frac{\partial}{\partial u} (Q y_v) - \frac{\partial}{\partial v} (Q y_u) + \frac{\partial}{\partial u} (R z_v) - \frac{\partial}{\partial v} (R z_u) \right\} \, dudv$$

y si aplicamos el teorema de Green, se obtiene

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_\Gamma Px_u du + Px_v dv + \int_\Gamma Qy_u du + Qy_v dv + \int_\Gamma Rz_u du + Rz_v dv$$

Por otra parte

$$\int_C \mathbf{f} d\boldsymbol{\alpha} = \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t) dt$$

Si suponemos que Γ está parametrizada por $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \longmapsto (u(t), v(t))$

C está parametrizada por $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\alpha}$ definidas por

$$\begin{array}{ccccc} [a, b] & \xrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (u(t), v(t)) & \mapsto & (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \end{array}$$

y por tanto

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = D\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{|\boldsymbol{\alpha}(t)} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u u'(t) + x_v v'(t) \\ y_u u'(t) + y_v v'(t) \\ z_u u'(t) + z_v v'(t) \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{f} d\boldsymbol{\gamma} &= \int_a^b P(\boldsymbol{\gamma}(t))(x_u u'(t) + x_v v'(t)) dt + \int_a^b Q(\boldsymbol{\gamma}(t))(y_u u'(t) + y_v v'(t)) dt + \int_a^b R(\boldsymbol{\gamma}(t))(z_u u'(t) + z_v v'(t)) dt = \\ &= \int_\Gamma Px_u du + Px_v dv + \int_\Gamma Qy_u du + Qy_v dv + \int_\Gamma Rz_u du + Rz_v dv \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{C=\partial(S)} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\gamma} \quad \blacksquare$$

Observación Sabemos que si $\mathbf{f}: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial conservativo de clase C^1 en el abierto A , entonces existe un campo escalar $\varphi: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi(x) = \mathbf{f}(x)$, $\forall x \in A$ y por el teorema de Schwarz se cumple que $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$.

En general que un campo vectorial tenga rotacional nulo, es decir sea irrotacional, es condición necesaria pero no suficiente para que sea conservativo, sin embargo en algunos casos sí que lo es. Para definir cuándo la condición de rotacional nulo es además suficiente, recordemos la definición 2.8 de conjunto arco-conexo y veamos la siguiente definición.

Definición 8.9 Sean $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto arco-conexo y $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1 : [0, 1] \rightarrow A$ dos caminos en A con el mismo origen y extremo. Esto es, $\boldsymbol{\alpha}_0(0) = \boldsymbol{\alpha}_1(0) = a$ y $\boldsymbol{\alpha}_0(1) = \boldsymbol{\alpha}_1(1) = b$. Se dice que ambos caminos son homotópicamente equivalentes si existe una aplicación continua $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$ tal que para cada $s \in [0, 1]$, $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$ es un camino en A con origen $\Gamma_s(0) = \Gamma(s, 0) = a$ y con extremo $\Gamma_s(1) = \Gamma(s, 1) = b$. Además, $\Gamma_0(t) = \Gamma(0, t) = \boldsymbol{\alpha}_0(t)$ y $\Gamma_1(t) = \Gamma(1, t) = \boldsymbol{\alpha}_1(t) \forall t \in [0, 1]$.

Así pues, dos caminos $\boldsymbol{\alpha}_0$ y $\boldsymbol{\alpha}_1$ son homotópicamente equivalentes si existe una deformación continua en A que transforma uno en el otro.

Definición 8.10 Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto arco-conexo. Se dice que A es simplemente conexo si todo camino cerrado en A es homotópicamente equivalente a un camino constante. Esto es, si todo camino cerrado en A puede deformarse de forma continua en A y quedar reducido a un punto.

Ejemplo 8.1

- Son conjuntos simplemente conexos en \mathbb{R}^3 : \mathbb{R}^3 , una esfera, la región comprendida entre dos esferas, $\mathbb{R}^3 - \{p_1, \dots, p_n\}$, $\mathbb{R}^3 - \{\text{una semirrecta}\}$, ...
- No son simplemente conexos en \mathbb{R}^3 : $\mathbb{R}^3 - \{\text{una recta}\}$, $\mathbb{R}^3 - \{\text{una curva cerrada}\}$, ...

Teorema 8.7 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ un abierto simplemente conexo. Si $\mathbf{f}: S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1 con $\text{rot } \mathbf{f} = 0$, entonces tiene potencial escalar en S , esto es, \mathbf{f} es conservativo en S .

(Dem.) Por ser S simplemente conexo, dada una curva cerrada en S siempre la podemos considerar como el borde de una superficie parametrizada simple y regular en S . Aplicando el teorema de Stokes, deducimos:

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = 0, \quad \text{para toda curva cerrada } C \text{ en } S.$$

y sabemos que esto es condición suficiente para que el campo vectorial \mathbf{f} sea conservativo. ■

Extensiones del teorema de Stokes.

1. El teorema de Stokes puede extenderse a superficies regulares simples más generales. Por ejemplo: Sea S una superficie parametrizada simple regular definida por

$$\boldsymbol{\sigma}: T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\sigma}(T) = S$$

donde T es una región de \mathbb{R}^2 múltiplemente conexa (vease fig 8.7).

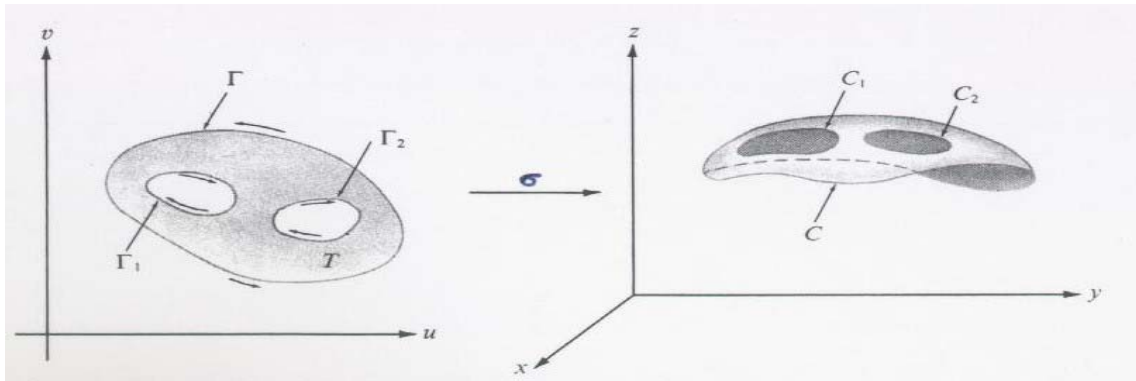


Figura 8.7: Superficie parametrizada con “agujeros”.

Como $\boldsymbol{\sigma}$ es inyectiva, $S = \boldsymbol{\sigma}(T)$ contendrá los mismos “agujeros” que T . Para extender el teorema de Stokes a tales superficies se sigue el mismo razonamiento que en la demostración del teorema de Stokes, sólo que se usa el teorema de Green para regiones múltiplemente conexas.

De esta forma si T tiene dos agujeros y las curvas frontera $\boldsymbol{\Gamma}$, $\boldsymbol{\Gamma}_1$ y $\boldsymbol{\Gamma}_2$ son recorridas de forma que la región quede a la izquierda, el teorema de Stokes se expresa mediante

$$\int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\gamma} + \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\gamma}_1 + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\gamma}_2$$

donde C , C_1 y C_2 son las imágenes por σ de Γ , Γ_1 y Γ_2 respectivamente y $\gamma(t) = \sigma(\alpha(t))$, $\gamma_1(t) = \sigma(\alpha_1(t))$ y $\gamma_2(t) = \sigma(\alpha_2(t))$. Las funciones α , α_1 y α_2 describen las curvas Γ , Γ_1 y Γ_2 en las direcciones indicadas.

Las curvas C , C_1 y C_2 serán recorridas en las direcciones inducidas por la aplicación σ a partir de Γ , Γ_1 y Γ_2 .

El teorema de Stokes también puede extenderse a alguna superficies regulares no simples (pero no a todas). Veamos algunos ejemplos

2. Sea el cilindro parametrizado por (vease figura 8.8)

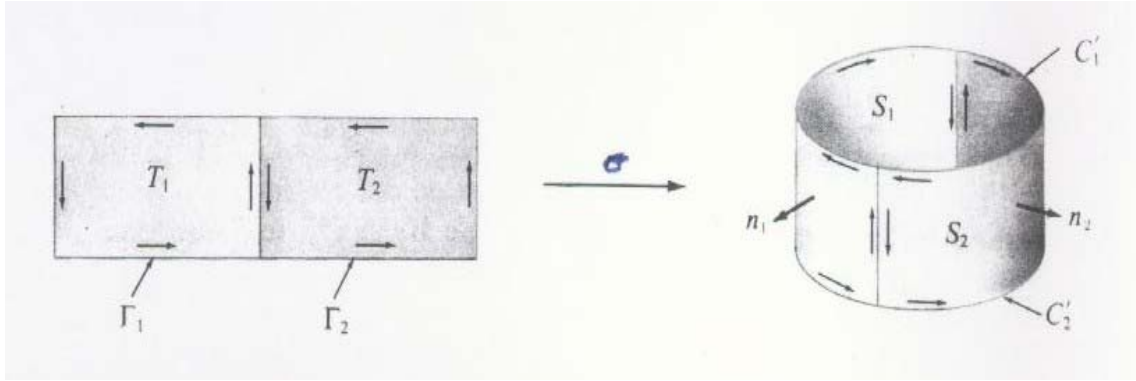


Figura 8.8: Superficie parametrizada no simple.

Se trata en realidad de la reunión de dos superficies paramétricas regulares simples S_1 y S_2 , imágenes de dos rectángulos adyacentes T_1 y T_2 a través de las aplicaciones σ_1 y σ_2 restricción de σ a T_1 y T_2 respectivamente.

Sea α_1 y α_2 las funciones que describen las fronteras Γ_1 y Γ_2 orientadas positivamente. Entonces las funciones

$$\gamma_1(t) = \sigma(\alpha_1(t)) \quad \text{y} \quad \gamma_2(t) = \sigma(\alpha_2(t))$$

describen las imágenes C_1 y C_2 de Γ_1 y Γ_2 .

Aplicando el teorema de Stokes, obtenemos

$$\int_{S_1} (\text{rot } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}_1 \, dS + \int_{S_2} (\text{rot } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}_2 \, dS = \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\gamma_1 + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\gamma_2 \quad (8.5)$$

donde \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 son las normales unitarias determinadas por los productos vectoriales fundamentales de σ_1 y σ_2 .

Como \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 coinciden en $S_1 \cap S_2$, el primer miembro de la ecuación 8.5 puede escribirse por

$$\int_{S_1 \cup S_2} (\text{rot } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario determinado por el producto vectorial fundamental de σ .

Es fácil ver que σ se ha elegido de manera que γ_1 y γ_2 determinen direcciones opuestas en cada arco de la intersección $C_1 \cap C_2$. Por tanto, la ecuación 8.5 queda

$$\int_{S_1 \cup S_2} (\text{rot } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{C_1'} \mathbf{f} \cdot d\alpha_1 + \int_{C_2'} \mathbf{f} \cdot d\alpha_2 \quad (8.6)$$

donde C_1' y C_2' son las dos circunferencias que forman el borde superior e inferior de $S_1 \cup S_2$. Las integrales de línea a través de estas circunferencias se calculan en las direcciones inducidas, mediante la parametrización σ , por las de Γ_1 y Γ_2 . Dado que C_1' y C_2' forman el borde de la superficie $S_1 \cup S_2$, deducimos que la ecuación 8.6 expresa que el flujo de $\text{rot } \mathbf{f}$ a través de la superficie $S_1 \cup S_2$ se puede calcular como una integral de línea de \mathbf{f} a lo largo de la frontera geométrica orientada de $S_1 \cup S_2$. Sea trata pues de la extensión del teorema Stokes al cilindro.

3. Sea ahora la superficie de la figura 8.9

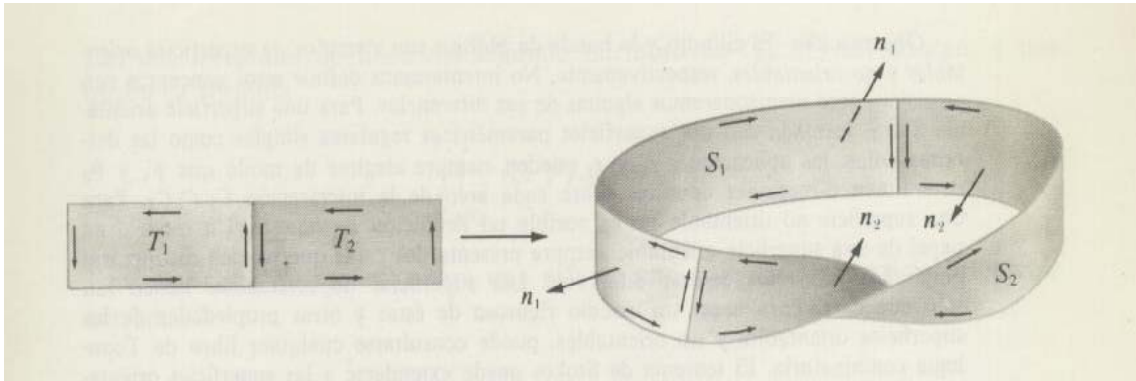


Figura 8.9: Banda de Möbius.

Se trata como antes de la reunión de dos superficies paramétricas regulares simples S_1 y S_2 imágenes de dos rectángulos adyacentes T_1 y T_2 . Se llama *banda de Möbius*.

(Observemos que la circulación sobre las rectas verticales en la figura 8.8 se anulan y que no ocurre esto en la figura 8.9).

Definimos α_1 , α_2 , C_1 y C_2 para la banda de Möbius como antes se hizo para el cilindro.

En este caso el borde de $S_1 \cup S_2$ es una curva cerrada simple C' y no dos.

Si aplicamos el teorema de Stokes a cada una de las partes S_1 y S_2 como se hizo en el cilindro obtenemos la ecuación 8.5. Cuando intentamos sumar las dos integrales de superficie del primer miembro surge una dificultad. Las dos normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 no coinciden en sentido en toda la intersección $S_1 \cap S_2$, no obstante podemos definir \mathbf{n} por

$$\mathbf{n} = \begin{cases} \mathbf{n}_1 & \text{en } S_1 \text{ y en } S_1 \cap S_2 \\ \mathbf{n}_2 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Esto nos da una normal discontinua. Pero el conjunto de las discontinuidades constituye un conjunto de medida nula en el plano y no afecta a la existencia ni al valor de la integral de superficie

$$\int_{S_1 \cup S_2} (\text{rot } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

La dificultad es mayor con las integrales de línea del segundo miembro de la ecuación 8.5. No es posible que γ_1 y γ_2 determinen direcciones opuestas en cada uno de los arcos de la intersección $S_1 \cap S_2$. Siempre uno de los arcos es recorrido dos veces en la misma dirección, y por consiguiente las integrales de línea sobre él no necesariamente se anularán. Luego la suma de las integrales de línea no es necesariamente igual a la integral de línea sobre el borde de $S_1 \cup S_2$. En consecuencia el teorema de Stokes no puede extenderse a la banda de Möbius.

El cilindro es un ejemplo de superficie orientable y la banda de Möbius lo es de superficie no orientable. Un modelo en papel de una superficie orientable siempre presenta dos caras que pueden distinguirse pintándolas con colores diferentes. Las superficies no orientables tienen sólo una cara. El teorema de Stokes puede extenderse a las superficies orientables mediante un procedimiento parecido al seguido para el cilindro.

4. La esfera es otra superficie orientable (vease figura 8.10)

Se trata de la unión de dos superficies paramétricas simples S_1 y S_2 (hemisferios), que pueden considerarse como la imagen de aplicaciones σ_1 y σ_2 definidas sobre un disco circular en el plano.

Damos σ , γ_1 , γ_2 , C_1 y C_2 el mismo significado que en los ejemplos anteriores C_1 y C_2 corresponden al ecuador. La superficie $S_1 \cup S_2$ se dice *cerrada*, σ_1 y σ_2 pueden elegirse de modo que las direcciones determinadas por γ_1 y γ_2 sean opuestas.

Si aplicamos el teorema de Stokes a cada hemisferio y sumamos los resultados, obtenemos la ecuación 8.5 como antes.

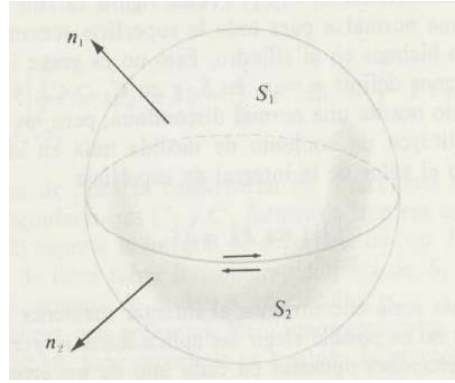


Figura 8.10: Esfera como superficie orientable.

Las normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 coinciden sobre la intersección $S_1 \cap S_2$, luego podemos expresar las integrales sobre S_1 y S_2 como una integral sobre toda la esfera y las integrales de línea de dicha ecuación 8.5 se anulan. Luego queda

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

Esto es válido igualmente para toda superficie orientable cerrada.

8.2.3. Teorema de la divergencia (o de Gauss).

El teorema de Stokes expresa una relación entre una integral de flujo a través de una superficie y una integral de línea tomada sobre la curva o curvas que constituyen la frontera de tal superficie.

El teorema de la divergencia expresa una relación entre una integral triple extendida a un sólido y una integral de superficie sobre la frontera de ese sólido.

Teorema 8.8 de Gauss (o de la divergencia).

Sean $\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en el abierto U y V un sólido de \mathbb{R}^3 limitado por una superficie cerrada y orientable S contenida en U , con normal exterior y unitaria \mathbf{n} . Entonces, se cumple

$$\int_V \text{div } \mathbf{f} \, dV = \int_{S=\partial(V)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

(Dem.) Sean \mathbf{f} y \mathbf{n} de componentes $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ y $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Hemos de demostrar la ecuación

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{S=\partial(V)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS$$

Basta pues demostrar las siguientes igualdades

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \int_S P \cos \alpha \, dS \quad (8.7)$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \int_S Q \cos \beta \, dS \quad (8.8)$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_S R \cos \gamma dS \quad (8.9)$$

Vamos a demostrar únicamente la igualdad 8.9 para un sólido V de la forma $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$, donde T es una región conexa del plano xy y f y g son funciones continuas en T tales que $g(x, y) \leq f(x, y)$, $\forall (x, y) \in T$ (vease figura 8.11).

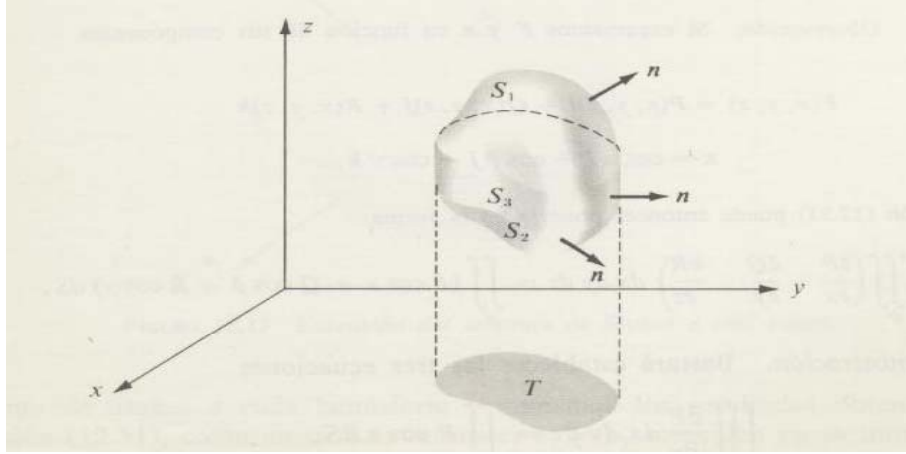


Figura 8.11: Sólido V .

La frontera de V consta en este caso de la superficie S_1 , que es la gráfica de $z = f(x, y)$, la superficie S_2 que es la gráfica de $z = g(x, y)$ y eventualmente de una superficie S_3 que es una superficie cilíndrica engendrada por una recta paralela al eje Z que se mueve a lo largo de la frontera de T .

La normal exterior a S tiene componente z no negativa en S_1 , no positiva en S_2 y nula en S_3 .

Los sólidos de este tipo se llaman proyectables- xy . Son ejemplos de estos sólidos, una esfera, un elipsoide, un cubo, el toro con eje paralelo al eje Z , etc.

Para este tipo de sólidos se cumple

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_T \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy = \iint_T [R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y))] dx dy$$

Por otra parte, se tiene

$$\int_S R \cos \gamma dS = \int_{S_1} R \cos \gamma dS + \int_{S_2} R \cos \gamma dS + \int_{S_3} R \cos \gamma dS \quad (8.10)$$

Sobre S_3 la normal \mathbf{n} tiene tercera componente nula, y por tanto $\cos \gamma = 0$, luego la tercera integral es nula.

Si parametrizamos S_1 y S_2 respectivamente por

$$\begin{array}{llll} \sigma_1: T \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \sigma_2: T \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & & & \text{y} \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, f(x, y)) & (x, y) \longmapsto (x, y, g(x, y)) \end{array}$$

los productos vectoriales fundamentales son respectivamente

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

y

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right)$$

Por tanto,

$$\cos \gamma = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} \right\|} \quad \text{sobre } S_1 \quad \text{y} \quad \cos \gamma = \frac{-1}{\left\| \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} \right\|} \quad \text{sobre } S_2$$

valores que llevados a la ecuación 8.10 nos queda

$$\begin{aligned} \int_S R \cos \gamma \, dS &= \int \int_T R(x, y, f(x, y)) \frac{1}{\left\| \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} \right\|} \left\| \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} \right\| \, dx dy + \\ &+ \int \int_T R(x, y, f(x, y)) \frac{-1}{\left\| \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} \right\|} \left\| \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} \right\| \, dx dy = \\ &= \int \int_T [R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y))] \, dx dy \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\int \int \int_V \frac{\partial R}{\partial z} \, dx dy dz = \int_S R \cos \gamma \, dS \quad \blacksquare$$

Si el sólido V fuera proyectable sobre el plano yz un razonamiento análogo demostraría la ecuación 8.7 y la ecuación 8.8 igualmente es válida para un sólido proyectable sobre el plano xz .

De esta forma se demuestra que el teorema de la divergencia se cumple en sólidos proyectables sobre los tres planos coordenados. Son ejemplos de este tipo de sólidos los *conjuntos convexos* en \mathbb{R}^3 , esto es, aquellos que dados dos puntos cualesquiera del conjunto el segmento que los une también es del conjunto.

El teorema de Gauss también se cumple en algunos sólidos que no son proyectables sobre los tres planos coordenados. Por ejemplo en un toro con eje paralelo al eje z . Este toro es proyectable xy pero no lo es xz ni yz . Para comprobar el teorema en este sólido cortamos el toro en cuatro partes iguales por medio de los planos coordenados xz y yz . Aplicamos el teorema de Gauss a cada una de las partes que sí son proyectables sobre los tres planos coordenados.

La suma de las cuatro integrales triples es la integral triple sobre el toro y al sumar las integrales de superficie sobre las fronteras de las cuatro regiones vemos que las aportaciones de las caras comunes a las

partes adyacentes se anulan unas con otras, puesto que las normales exteriores tienen sentidos opuestos. Luego la suma de las integrales de superficie sobre las cuatro partes es igual a la integral de superficie sobre el toro completo. Este ejemplo permite ver cómo el teorema de la divergencia puede extenderse a ciertos sólidos no convexos.

Campo solenoidal, potencial vector.

Definición 8.11 Sea $\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en el abierto U . Se dice que \mathbf{f} es un campo vectorial solenoidal en U , si existe un campo vectorial $\mathbf{g}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{f}$. En este caso se dice que \mathbf{g} es un potencial vector de \mathbf{f} .

Proposición 8.6 Sea $\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en el abierto U . Consideremos las siguientes afirmaciones:

1. \mathbf{f} tiene potencial vector en U .
2. Dada una curva orientable $C \subset U$ y una superficie orientada $S \subset U$ tal que el borde de S sea C , $C = \partial(S)$, la integral $\int_S \mathbf{f} \, d\mathbf{S}$ es independiente de S , depende únicamente de C .
3. Para toda superficie cerrada orientable $S \subset U$, el flujo de \mathbf{f} a través de S es nulo, $\int_S \mathbf{f} \, d\mathbf{S} = 0$.
4. $\text{div } \mathbf{f} = 0$.

Se cumplen las siguientes implicaciones

$$\begin{array}{lll} 1. \implies 2. , & 1. \implies 3. , & 1. \implies 4. , \\ 2. \iff 3. , & 2. \implies 4. , & y \quad 3. \implies 4. \end{array}$$

(Dem.)

1. \implies 2. y 1. \implies 3. se deducen del teorema de Stokes.

1. \implies 4. ya que la divergencia de un rotacional es nula, vease la propiedad 8. de la proposición 8.5.

2. \implies 4. es consecuencia del teorema de Gauss. ■

Sin embargo si $\text{div } \mathbf{f} = 0$ esto no implica, en general, que \mathbf{f} tenga potencial vector, depende de la topología del conjunto U donde \mathbf{f} es de clase C^1 . En algunos casos sí puede asegurarse, por ejemplo si U es un conjunto estrellado.

Definición 8.12 Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ se dice estrellado si existe un punto $p \in U$ tal que para todo $x \in U$ el segmento que une p con x está contenido en U .

Se conoce el siguiente resultado.

Teorema 8.9 (Lema de Poincaré).

Sea $\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en el conjunto estrellado U y tal que $\text{div } \mathbf{f} = 0$. Entonces, \mathbf{f} tiene potencial vector en U .

Observaciones

1. Si \mathbf{g} es un potencial vector de \mathbf{f} , entonces $\mathbf{g} + \text{grad } \varphi$ también es potencial vector de \mathbf{f} , es consecuencia de la propiedad 3. de la proposición 8.5.
2. Para calcular un potencial vector del campo vectorial \mathbf{f} se resuelve la ecuación $\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{f}$.
Por ejemplo, sea $\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en el conjunto estrellado U con $\text{div } \mathbf{f} = 0$. Para calcular un potencial vectorial $\mathbf{g} = (L, M, N)$ puede considerarse nula una cualquiera de las componentes, por ejemplo $N = 0$, por lo dicho en apartado anterior, y esto facilita la resolución de $\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{f}$.

Aplicaciones del teorema de la divergencia

Dado un campo vectorial $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ hemos definido

$$\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{y} \quad \text{rot } \mathbf{f} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Para calcular $\text{div } \mathbf{f}$ y $\text{rot } \mathbf{f}$ a partir de estas fórmulas se necesita conocer las componentes de \mathbf{f} en coordenadas cartesianas, por tanto, un cambio en la posición de los ejes coordenados podría significar un cambio en las funciones $\text{div } \mathbf{f}$ y $\text{rot } \mathbf{f}$. Sin embargo, como consecuencia de los teoremas de Stokes y Gauss, puede demostrarse que $\text{div } \mathbf{f}$ y $\text{rot } \mathbf{f}$ representan propiedades intrínsecas del campo vectorial \mathbf{f} y no dependen de la elección de los ejes coordenados que se haga.

Veamoslo en primer lugar para la divergencia.

Teorema 8.10 Sean $V(t)$ una esfera de radio $t > 0$ y centro en $a \in \mathbb{R}^3$, $S(t)$ su frontera y $\mathbf{f}: V(t) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en $V(t)$. Representamos por $|V(t)|$ el volumen de la esfera $V(t)$ y por \mathbf{n} el vector normal unitario y exterior a $S(t)$, entonces se cumple

$$\text{div } \mathbf{f}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

De esta forma se ve que $\text{div } \mathbf{f}$ no depende de las coordenadas de \mathbf{f} .

(Dem.) Sea $\varphi = \text{div } \mathbf{f}$. Dado $\varepsilon > 0$ hemos de encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \varphi(a) - \frac{1}{|V(t)|} \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < t < \delta \quad (8.11)$$

Como φ es continua en a , $\forall \varepsilon > 0 \exists B_h(a)$ tal que $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in B_h(a)$.

Luego, si escribimos $\varphi(a) = \varphi(x) + (\varphi(a) - \varphi(x))$ e integramos ambos miembros de la ecuación sobre la esfera $V(t)$ de radio $t < h$, obtenemos

$$\varphi(a) |V(t)| = \int_{V(t)} \varphi(x) \, dV + \int_{V(t)} (\varphi(a) - \varphi(x)) \, dV$$

Si aplicamos el teorema de la divergencia a la primera integral triple de la ecuación anterior y pasamos este término al otro lado de la ecuación, nos queda

$$\left| \varphi(a) |V(t)| - \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS \right| \leq \int_{V(t)} |\varphi(a) - \varphi(x)| \, dV \leq \frac{\varepsilon}{2} |V(t)| < \varepsilon |V(t)|$$

Si dividimos la desigualdad resultante por $|V(t)|$, obtenemos que la desigualdad 8.11 se cumple para $\delta = h$. Esto demuestra el teorema. ■

En la demostración anterior no hemos hecho uso especial de que $V(t)$ sea una esfera. El mismo razonamiento es válido para sólidos $V(t)$ en los que el teorema de Gauss sea válido con tal que esos sólidos contengan el punto a y $\lim_{t \rightarrow 0} V(t) = a$. Por ejemplo, $V(t)$ podría ser el cubo inscrito en la esfera de centro a y radio t .

El teorema 8.10 nos permite también una interpretación física de $\text{div } \mathbf{f}$. Supongamos que \mathbf{f} representa el vector densidad de flujo de una corriente estacionaria. La integral de superficie $\int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$ mide la masa total de fluido que pasa a través de S en la unidad de tiempo en la dirección de \mathbf{n} .

El cociente $\frac{1}{|V(t)|} \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$ representa la masa por unidad de volumen que fluye a través de S y en la dirección de \mathbf{n} . Cuando $t \rightarrow 0$ el límite de este cociente es la divergencia \mathbf{f} en a , que por tanto, puede interpretarse como el coeficiente de variación de masa por unidad de volumen y en la unidad de tiempo en a .

Para ver igualmente que el $\text{rot } \mathbf{f}$ no depende del sistema de coordenadas, veamos la siguiente igualdad

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{f}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|S(t)|} \oint_{c(t)} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} \quad (8.12)$$

En esta fórmula $S(t)$ es un disco de radio t y centro a , $|S(t)|$ representa su área y $c(t)$ su borde, \mathbf{n} es el vector normal a $S(t)$ y unitario, $\boldsymbol{\alpha}$ es una parametrización de $c(t)$ tal que orienta la curva de manera que vista desde el extremo de \mathbf{n} sea en sentido contrario al de las agujas del reloj y \mathbf{f} es un campo vectorial de clase C^1 en $S(t)$.

La demostración de la fórmula 8.12 es semejante a la del teorema 8.10. Una interpretación física cuando \mathbf{f} es un campo de velocidades es la siguiente:

La integral de línea sobre $c(t)$ es la circulación de \mathbf{f} a lo largo de la curva. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|S(t)|} \oint_{c(t)} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$$

representa la circulación por unidad de área en el punto a .

De este modo, $\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{f}(a)$ puede considerarse como una *densidad de circulación* de \mathbf{f} en a con respecto a un plano perpendicular a \mathbf{n} en a .

Bibliografía

Libros de teoría

1. J. DE BURGOS, *Cálculo Infinitesimal de Varias Variables*, McGraw-Hill, Madrid 1995.
2. J.E. MARSDEN, A.J. TROMBA, *Cálculo Vectorial*, Fondo Educativo Interamericano, Barcelona 1991.

Libros de problemas

1. F. BOMBAL, L. RODRÍGUEZ, L. VERA, *Problemas de Análisis Matemático. Tomo 1: Cálculo Diferencial*, A.C., Madrid 1975.
2. E. GARRIGA, N. ROMÁN, A. SÁNCHEZ, O. SERRA, *Càlcul infinitesimal: Problemes resolts. Sèries i càlcul diferencial en diverses variables*, C.P.E.T., Barcelona 1990.
3. F. GRANERO, *Ejercicios y problemas de cálculo* (tomos I y II), Tebar-Flores, Madrid 1991.
4. K. PAO, F. SOON, *Cálculo vectorial: problemas resueltos*, Addison-Wesley, Barcelona 1993.
5. PUIG ADAM, *Cálculo integral*, Biblioteca Matemática, 1985.
6. M.R. SPIEGEL, *Cálculo Superior*, Schaum, Madrid, 1986.

Formularios y Tablas

1. M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover, N.Y. 1964.
2. I. BRONSHTEIN, K. SEMENDIAEV, *Manual de fórmulas para ingenieros*, Mir, Moscú 1982.
3. M.R. SPIEGEL, *Manual de fórmulas y tablas*, Col. Schaum, McGraw-Hill, N.Y. 1986.

Otras referencias recomendadas

1. A.D. ALEXSANDROV *et al.*, *La Matemática: su contenido, método y significado* (tomos I, II y III), Alianza Ed. Madrid 1976.
2. T.M. APOSTOL, *Calculus* (tomos I y II), Reverté, Barcelona 1985.
3. R. COURANT, F. JOHN, *Introducción al cálculo y al análisis matemático* (tomos I y II), Limusa, Madrid 1982.
4. L.D. KUDRIATSEV, *Curso de Análisis Matemático* (vols. I,II), Mir, Moscú, 1983.
5. S. LANG, *Cálculo*, Fondo Educativo Interamericano, Barcelona 1973.
6. M. SPIVAK, *Cálculo en variedades*, Reverté, Barcelona 1983.