Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación de Barcelona
CONTROL DE COMUNICACIONES I
Grupos 30 y 40 21 de marzo de 2006
Profesores: José A. López-Salcedo, Jaume Riba **Duración: 1h 30min**

Resolución del control

[4 puntos] **PROBLEMA 1.-** Sea $x(t)$ un proceso aleatorio, estacionario, de media nula y autocorrelación:

$$R_x(\tau) = A^2 + B^2\delta(\tau)$$

con A y B dos constantes diferentes de cero.

(a) Halle la densidad espectral de potencia del proceso $x(t)$.

Tal y como indica el Teorema de Wiener-Khinchin, la densidad espectral $S_x(f)$ está relacionada con la autocorrelación de un proceso aleatorio a través de la transformada de Fourier. Para el caso de procesos aleatorios estacionarios, esta relación es simplemente

$$S_x(f) = TF\left[R_x(\tau)\right].$$

Por lo tanto, la densidad espectral que pide el apartado (a) es sencillamente la transformada de Fourier de la autocorrelación $R_x(\tau)$ que aparece en el enunciado de este problema. Aplicando las propiedades de la transformada de Fourier tenemos,

$$\boxed{S_x(f) = A^2\delta(f) + B^2}.$$

(b) Calcule la potencia media del proceso $x(t)$.

La potencia del proceso puede obtenerse fácilmente bien a partir de la autocorrelación $R_x(\tau)$ o bien a partir de la densidad espectral $S_x(f)$. En caso de utilizar la autocorrelación para el cálculo de la potencia tenemos que,

$$\boxed{P_x = R_x(0) = A^2 + B^2\delta(0) \to \infty}.$$

Nótese que la potencia es infinita debido a que $\delta(0) \to \infty$, tal y como ocurre para el caso del modelo matemático del ruido blanco. El mismo resultado puede obtenerse también si se utiliza la densidad espectral. En este caso,

$$\boxed{P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\delta(f)df + \int_{-\infty}^{\infty} B^2 df \to \infty}.$$

Nótese que ahora la potencia infinita es debido a que $\int_{-\infty}^{\infty} B^2 df \to \infty$, mientras que $\int_{-\infty}^{\infty} A^2\delta(f)df = A^2$.

Considere ahora la variable aleatoria Z, la cual se genera a partir del proceso $x(t)$ según $Z = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$.

(c) Calcule la varianza de la variable aleatoria Z.

La varianza de Z viene dada por,

$$\text{var}\left[Z\right] = E\left[\left(Z-\mu_z\right)^2\right] = E\left[Z^2\right] - \mu_z^2$$

con μ_z el valor medio de Z. Por lo tanto, para calcular la varianza de Z necesitamos calcular su momento de orden 1 y de orden 2. Para el caso del momento de orden 1 tenemos,

$$\mu_z = E\left[Z\right] = E\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt\right] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E\left[x(t)\right]dt = 0.$$

El resultado anterior es consecuencia de que, tal y como dice el enunciado del problema, el proceso $x(t)$ es de media nula y por tanto, $E\left[x(t)\right] = 0$. Por lo que respecta al momento de orden 2,

$$E\left[Z^2\right]=E\left[\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}x(\lambda)d\lambda\int_{-T/2}^{T/2}x(\beta)d\beta\right]=\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}E\left[x(\lambda)x(\beta)\right]d\lambda d\beta=\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}R_x(\lambda-\beta)d\lambda d\beta$$

En la expresión anterior hemos hecho aparecer la autocorrelación del proceso $x(t)$. Ahora simplemente hay que sustituir $R_x(\lambda-\beta)$ con la información que nos da el enunciado acerca de la autocorrelación $R_x(\tau)$. Es decir, sustituir $R_x(\lambda-\beta)=A^2+B^2\delta(\lambda-\beta)$. De esta forma tenemos,

$$E\left[Z^2\right]=\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}\left[A^2+B^2\delta(\lambda-\beta)\right]d\lambda d\beta=\frac{A^2}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}d\lambda d\beta+\frac{B^2}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(\lambda-\beta)d\lambda d\beta$$
$$=\frac{A^2}{T^2}T^2+\frac{B^2}{T^2}T=A^2+\frac{B^2}{T}.$$

Finalmente, y como el momento de orden 1 de Z ha resultado ser nulo, la varianza de Z es

$$\operatorname{var}\left[Z\right]=A^2+\frac{B^2}{T}.$$

(d) Determine el valor mínimo que puede tomar la varianza de Z.

A partir del resultado del apartado (c), y teniendo en cuenta que A y B son dos constantes dadas, la única forma de hacer que la varianza disminuya es incrementando el tiempo de integración T. De hecho, la varianza es mínima haciendo que el tiempo de integración tienda a infinito. Entonces, el valor mínimo es

$$\operatorname*{var}_{T\to\infty}\left[Z\right]=A^2.$$

Suponga ahora que el proceso $x(t)$ puede descomponerse según:

$$x(t)=C+w(t)$$

en donde C es una variable aleatoria uniforme y $w(t)$ es un proceso aleatorio, estacionario, blanco, de media nula e independiente de C.

(e) A partir de la información que posee acerca de los procesos aleatorios $x(t)$ y $w(t)$, halle cuál es la media de la variable aleatoria C.

La información de que disponemos es que tanto $x(t)$ como $w(t)$ son ambos procesos aleatorios estacionarios de media nula. Si calculamos el valor medio de $x(t)$ a partir de $x(t)=C+w(t)$ tenemos,

$$E\left[x(t)\right]=E\left[C+w(t)\right]=E\left[C\right]+E\left[w(t)\right]=E\left[C\right]+0=0.$$

Por tanto, no queda más remedio que C sea también de media nula para cumplir la igualdad anterior. Es decir,

$$E\left[C\right]=0.$$

(f) Calcule la autocorrelación del proceso $x(t)=C+w(t)$ y relaciónela con la expresión de la autocorrelación $R_x(\tau)$ dada al principio de este problema. Determine el valor máximo que puede tomar la variable aleatoria C.

Aplicando la definición de autocorrelación para procesos estacionarios, y sabiendo que C es independiente del proceso $w(t)$, y ambos son de media nula, entonces

$$R_x(\tau)=E\left[x(t+\tau)x^*(t)\right]=\left\{\begin{matrix}\textit{procesos}\\ \textit{reales}\end{matrix}\right\}=E\left[\left(C+w(t+\tau)\right)\left(C+w(t)\right)\right]=E\left[C^2\right]+R_w(\tau).$$

Para relacionar la expresión que se acaba de obtener con la del enunciado del problema es importante tener en cuenta que el proceso $w(t)$ *es blanco, y por lo tanto, su densidad espectral es plana para todas las frecuencias. Como consecuencia de su densidad espectral plana, la autocorrelación de* $w(t)$ *es del tipo*

$$R_w(\tau) = K\delta(\tau)$$

con K *una constante positiva cualquiera. Nótese que el caso de* $K = N_0 / 2$ *sólo aplica para un caso particular de proceso blanco, el correspondiente al ruido térmico. Sin embargo, y como el enunciado en ningún momento hace referencia a que* $w(t)$ *sea ruido térmico, mantendremos la constante* K *de manera genérica.*

A partir de la expresión de $R_x(\tau)$ *en el enunciado de este problema, directamente podemos identificar:*

$K = B^2$ y $E\left[C^2\right] = A^2$.

El valor máximo que puede tomar C *lo obtendremos sabiendo que el momento de orden 2 de* C *acabamos de ver que vale* $E\left[C^2\right] = A^2$. *Puesto que* C *es una variable aleatoria uniforme de media nula, su función densidad de probabilidad será del tipo*

$$f_C(C) = \begin{cases} \dfrac{1}{2C_{\max}} & , \ |C| \le C_{\max} \\ 0 & , \ |C| > C_{\max} \end{cases}$$

Por lo tanto, el cálculo del momento de orden 2 de la variable C *resulta,*

$$E\left[C^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} C^2 f_C(C) dC = \int_{-C_{maz}}^{C_{\max}} C^2 \frac{1}{2C_{\max}} dC = \frac{1}{2C_{\max}} \int_{-C_{maz}}^{C_{\max}} C^2 dC = \frac{1}{2C_{\max}} \left[\frac{C^3}{3} \right]_{-C_{\max}}^{C_{\max}} = \frac{C_{\max}^2}{3}.$$

Finalmente, sabiendo que $E\left[C^2\right] = A^2$ *tenemos,*

$C_{\max} = \sqrt{3}A$.

[6 puntos] **PROBLEMA 2.-** Se desea transmitir una señal con densidad espectral plana de valor S_0, ancho de banda B_x y potencia P_x. El canal es ideal sin atenuación y el ruido aditivo presenta una densidad espectral de potencia:

$$S_n(f) = \begin{cases} \dfrac{N_o}{2}(1-\alpha)^2 & 0 \le |f| \le \dfrac{B_x}{2} \\ \dfrac{N_o}{2}(1+\alpha)^2 & \dfrac{B_x}{2} < |f| \end{cases} \quad \text{con } 0 \le \alpha < 1 .$$

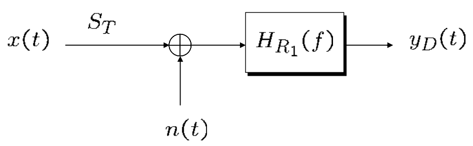

Figura 1

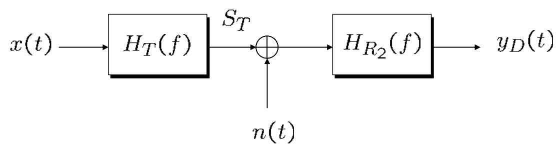

Figura 2

(a) Para el diagrama de bloques de la figura 1, determine cuál es el mejor filtro receptor $H_{R1}(f)$ tal que la SNR en destino sea máxima y la señal útil en destino no presente distorsión. Justifique su elección.

- *Si el filtro receptor no ha de distorsionar la señal en destino, la única solución es que el filtro receptor tenga una respuesta en frecuencia plana en todo el ancho de banda de la señal.*
- *Por otro lado, si la respuesta en frecuencia del filtro receptor no tiene más remedio que ser plana pero además queremos que maximice la SNR en destino, lo que habrá de hacer el filtro receptor es filtrar todo el ruido que pueda. Para ello, el único parámetro que le queda libre es el ancho de banda, pues la respuesta en frecuencia se ha de mantener plana para no distorsionar la señal.*

Bajo estos dos razonamientos, se concluye que el filtro receptor ha de ser un filtro ideal paso bajo de ancho de banda el de la señal.

Es decir, $H_{R1}(f) = \Pi\left(\dfrac{f}{2B_x}\right)$.

(b) Con el filtro receptor $H_{R1}(f)$ hallado en el apartado (a), calcule la SNR que se obtiene en destino. Deje el resultado en función de $S_T/(N_0 B_x)$ en donde la potencia transmitida $S_T = P_x$.

Para hallar la SNR en destino calcularemos por separado potencia de señal útil en destino y potencia de ruido en destino. Por lo que respecta a la potencia de señal útil en destino,

$$S_D = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)|H_{R1}(f)|^2\,df = \int_{-B_x}^{B_x} S_x(f)df = P_x = \{\text{ver figura 1}\} = S_T .$$

Mientras que por lo que respecta a la potencia de ruido en destino,

$$N_D = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H_{R1}(f)|^2\,df = \int_{-B_x}^{B_x} S_n(f)df = 2\left[\frac{N_0}{2}(1-\alpha)^2\frac{B_x}{2} + \frac{N_0}{2}(1+\alpha)^2\frac{B_x}{2}\right] = N_0 B_x\left(1+\alpha^2\right).$$

Finalmente, la SNR en destino resulta ser,

$$SNR_D = \frac{S_D}{N_D} = \frac{S_T}{N_0 B_x}\frac{1}{\left(1+\alpha^2\right)}.$$

(c) Para el diagrama de bloques de la figura 2, indique cuál es el mejor filtro transmisor $H_T(f)$ y cuál es el mejor filtro receptor $H_{R2}(f)$ de manera que la SNR en destino sea máxima y la señal en destino no presente distorsión.

El diseño óptimo conjunto de filtro de transmisión y filtro de recepción viene dado por la solución de filtros terminales óptimos, los cuales no sólo cumplen con la condición de ecualización del canal (cuando sea necesaria) sino que además tienen en cuenta el ruido y minimizan la SNR en destino.

El enunciado nos pide que se <u>*indique*</u> *cuáles son los mejores filtros transmisor y receptor, no que se demuestre la teoría de filtrado Terminal óptimo. Por lo tanto, podemos indicar directamente las expresiones generales que se obtienen,*

$$\left|H_T(f)\right|^2 = \frac{S_n^{1/2}(f)}{\left|H_c(f)\right| S_x^{1/2}(f)}, \qquad \left|H_{R2}(f)\right|^2 = \frac{S_x^{1/2}(f)}{\left|H_c(f)\right| S_n^{1/2}(f)}.$$

<u>*Lo que sí que es importante es particularizar las expresiones para el escenario que plantea el enunciado*</u>*. En el caso que nos plantea este problema tenemos que el canal es ideal, por lo que mientras no nos digan lo contrario supondremos* $\left|H_c(f)\right| = 1$. *Nótese que para este caso particular, resulta que* $\left|H_T(f)\right| = \left|H_{R2}(f)\right|^{-1}$, *lo cual simplifica bastante los cálculos. Teniendo en cuenta las densidades espectrales de señal y ruido que proporciona el enunciado del problema tenemos,*

$$0 \le |f| \le \frac{B_x}{2}, \qquad \left|H_T(f)\right|^2 = \left(\frac{N_0}{2}\right)^{1/2}(1-\alpha) \qquad y \qquad \left|H_{R2}(f)\right|^2 = \left[\left(\frac{N_0}{2}\right)^{1/2}(1-\alpha)\right]^{-1}$$

$$\frac{B_x}{2} < |f|, \qquad \left|H_T(f)\right|^2 = \left(\frac{N_0}{2}\right)^{1/2}(1+\alpha) \qquad y \qquad \left|H_{R2}(f)\right|^2 = \left[\left(\frac{N_0}{2}\right)^{1/2}(1+\alpha)\right]^{-1}.$$

(d) Con los filtros $H_T(f)$ y $H_{R2}(f)$ indicados en el apartado (c), calcule la SNR que se obtiene en destino. Deje el resultado en función de $S_T/(N_0 B_x)$ con S_T la potencia indicada en la figura 2.

Aquí hay dos opciones. Utilizar los filtros anteriores para calcular potencia de señal útil en destino y potencia de ruido en destino, o bien asumir que puesto que son filtros terminales óptimos, la SNR en destino será máxima y de valor,

$$\left[SNR_D\right]_{\max} = \frac{S_T P_x}{\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x^{1/2}(f) S_n^{1/2}(f)}{\left|H_c(f)\right|} df\right|^2}.$$

Este último camino es quizás más corto, aunque ambos llevan al mismo resultado. Utilizando la expresión anterior, la SNR se puede calcular fácilmente sustituyendo cada término por los valores que toman en este problema. Primero calcularemos el valor de P_x *para hacer que el resultado dependa únicamente de* S_T *tal y como pide el enunciado.*

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df = \int_{-B_x}^{B_x} S_0 df = 2B_x S_0 .$$

En segundo lugar calcularemos cuánto vale el denominador de la SNR máxima para filtros terminales óptimos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x^{1/2}(f)S_n^{1/2}(f)}{|H_c(f)|} df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^{1/2}(f)S_n^{1/2}(f)df = \int_{-B_x}^{B_x} S_0^{1/2}\cdot S_n^{1/2}(f)df = S_0^{1/2}\int_{-B_x}^{B_x} S_n^{1/2}(f)df$$

$$= S_0^{1/2}2\left[\left(\frac{N_0}{2}\right)^{1/2}(1-\alpha)\frac{B_x}{2}+\left(\frac{N_0}{2}\right)^{1/2}(1+\alpha)\frac{B_x}{2}\right] = 2S_0^{1/2}\left(\frac{N_0}{2}\right)^{1/2}B_x.$$

Finalmente, se sustituyen los valores de P_x *y de la integral anterior en la expresión general de la SNR máxima en destino con filtros terminales óptimos. De este modo,*

$$[SNR_D]_{\max} = \frac{S_T 2B_x S_0}{\left|2S_0^{1/2}\left(\frac{N_0}{2}\right)^{1/2}B_x\right|^2} = \frac{S_T 2B_x S_0}{4S_0\left(\frac{N_0}{2}\right)B_x^2} = \frac{S_T}{N_0 B_x}.$$

Por lo tanto, el resultado que buscamos es $[SNR_D]_{\max} = \frac{S_T}{N_0 B_x}$.

(e) Compare las SNR en destino de la figura 1 y de la figura 2. Discuta el resultado.

A partir de los resultado anteriores tenemos,

$$[SNR_D]_{figura1} = \frac{S_T}{N_0 B_x}\frac{1}{(1+\alpha^2)},$$

$$[SNR_D]_{figura2} = \frac{S_T}{N_0 B_x}.$$

Comparando ambas expresiones y teniendo en cuenta que $0 \le \alpha < 1$,

$$[SNR_D]_{figura1} \quad < \quad [SNR_D]_{figura2}.$$

Es decir, la mejor SNR se consigue utilizando filtros terminales óptimos con un filtro en transmisión y un filtro en recepción. Compruébese que para el caso de $\alpha = 0$ *ambas SNR son iguales por lo que implementar los filtros terminales óptimos en este caso no proporciona ninguna ganancia.*