

## TEMA 3. CIRCUITOS PASIVOS

### 3.1- CIRCUITOS DE 3 ACCESOS

En primer lugar vamos a demostrar que no es posible tener un circuito de tres accesos pasivo y sin pérdidas, recíproco y con los tres accesos adaptados. Siempre una de las características se deberá sacrificar.

Si es un circuito recíproco y con los tres accesos adaptados, los parámetros  $[S]$  deberán cumplir:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Si además ha de ser pasivo y sin pérdidas:

$$[S][S^+] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escribimos las ecuaciones correspondientes a la diagonal principal:

$$F1 \times C1 \quad |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1$$

$$F2 \times C2 \quad |S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 = 1$$

$$F3 \times C3 \quad |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1$$

Cualquiera del resto de las ecuaciones nos lleva a una contradicción. Por ejemplo, si cogemos la ecuación:

$$F1 \times C2 \quad S_{13}S_{23}^* = 0$$

Para que el producto de dos números complejos sea igual a cero, ha de ser alguno de los dos igual a cero. Por lo tanto, hay dos posibilidades:

a)  $S_{13}=0$ . Pero entonces, sustituyendo en las tres ecuaciones de las diagonales llegamos a :

$$\begin{array}{ll} \text{F1 X C1} & |S_{12}|^2 = 1 \\ \text{F2 X C2} & |S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\ \text{F3 X C3} & |S_{23}|^2 = 1 \end{array}$$

b)  $S_{23}=0$ . Nos pasa algo parecido:

$$\begin{array}{ll} \text{F1 X C1} & |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \\ \text{F2 X C2} & |S_{12}|^2 = 1 \\ \text{F3 X C3} & |S_{13}|^2 = 1 \end{array}$$

Por lo tanto, queda demostrado que no es posible disponer de un circuito de tres accesos pasivo, sin pérdidas, recíproco y con los tres accesos adaptados.

Vamos a ver dos tipos de circuitos con tres accesos:

- Divisores de potencia
- Circuladores

## 3.2 DIVISORES DE POTENCIA

Son circuitos de 3 accesos con un acceso de entrada (1) en el que se conecta el generador y dos accesos de salida (2 y 3) donde se conectan dos cargas. La potencia que entra por el acceso 1 se divide por los otros dos accesos. Estudiaremos divisores con simetría entre los accesos 2 y 3:

Objetivos:

- Que la potencia  $P_2^+$  sea igual a la potencia  $P_3^+$
- Adaptación a la entrada
- Desacoplo entre los accesos 2 y 3: que la potencia  $P_2^+$  no dependa de la carga en el acceso 3 y viceversa:

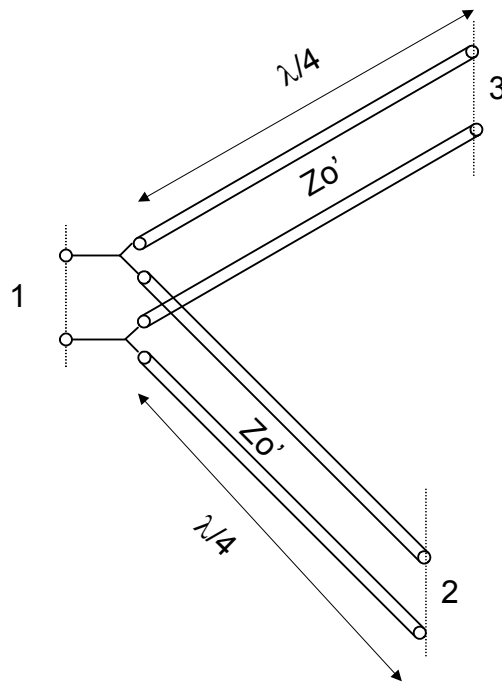
$$P_2^+ = \frac{1}{2} |b_2|^2$$

- donde:

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3$$

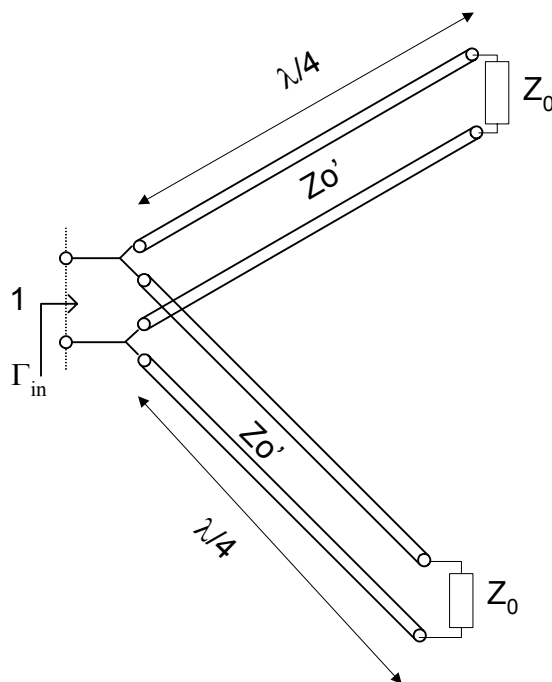
- Para que no dependa de la carga que hay en el acceso 3, ha de ser  $S_{23} = 0$

### 3.3 DISEÑO DE UN DIVISOR DE POTENCIA CON LÍNEAS

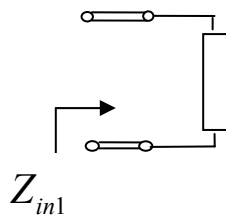


- Hacemos que  $S_{11}=0$  (nos determinará  $Z_0'$ ).  
Cálculo de  $S_{11}$ :

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=a_3=0} = \Gamma_{in} \Big|_{a_2=a_3=0}$$



Que es equivalente a tener:



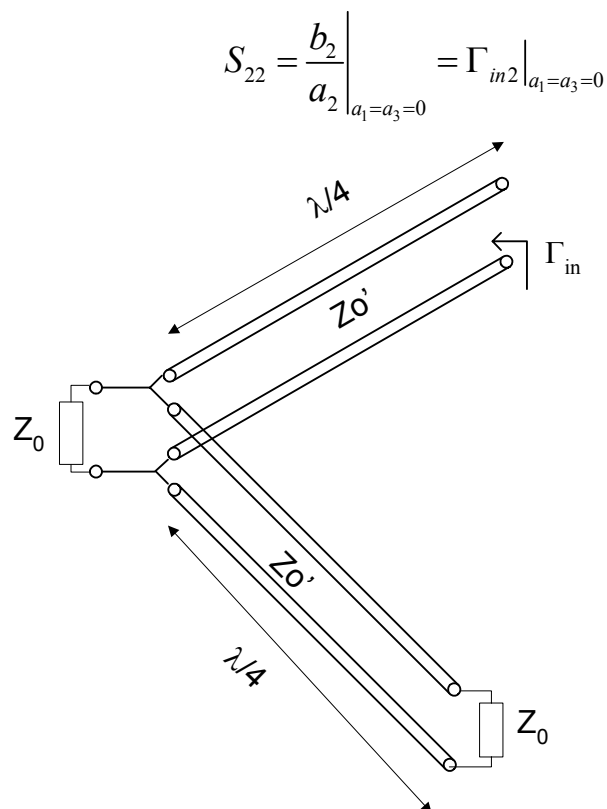
Si queremos  $\Gamma_{in1} = 0$  ha de ser  $Z_{in1} = Z_0$ :

$$Z_{in1} = Z_0 = \frac{Z_0'^2}{2Z_0}$$

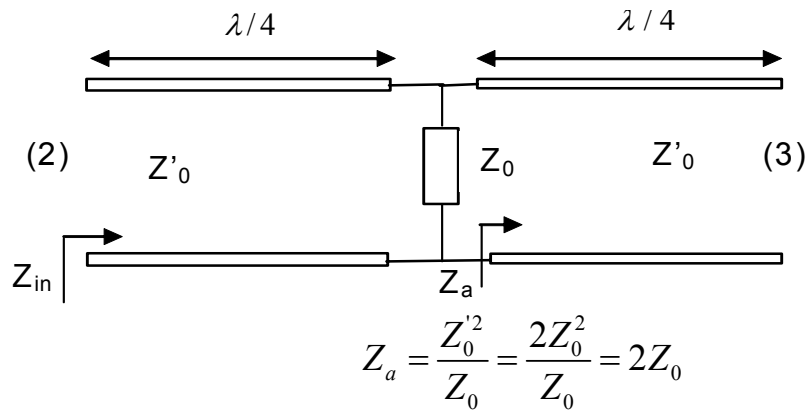
Y por lo tanto:

$$Z_0' = \sqrt{2}Z_0$$

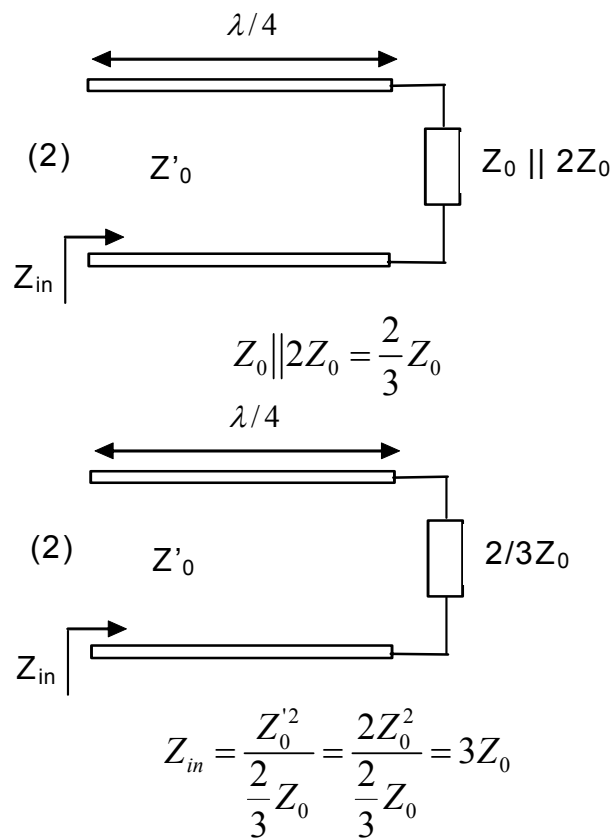
- Cálculo de  $S_{22}=S_{33}$ :



Este circuito se puede dibujar de una manera más cómoda:



Por lo tanto, simplificando el circuito:



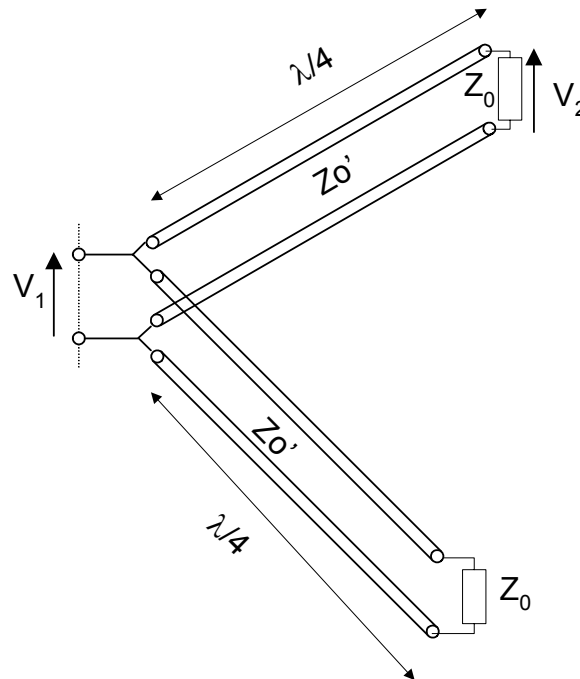
Finalmente, el parámetro  $S_{22}$  queda igual a:

$$S_{22} = \Gamma_{in2} \Big|_{a_1=a_3=0} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{3Z_0 - Z_0}{3Z_0 + Z_0} = \frac{1}{2}$$

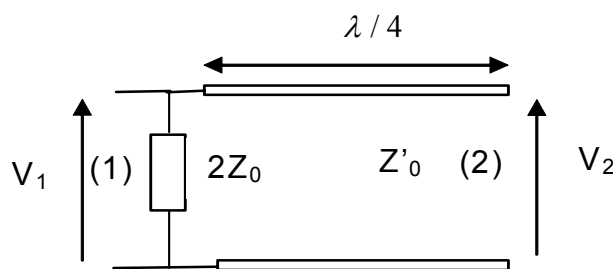
Ya tenemos calculados todos los parámetros de reflexión ( $S_{ii}$ ).  
Pasemos ahora a calcular los de transmisión ( $S_{ij}$ ):

- Cálculo de  $S_{21}=S_{12}=S_{31}=S_{13}$

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=a_3=0} = (1 + S_{11}) \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{a_2=a_3=0} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{a_2=a_3=0}$$



Sustituyendo la línea que lleva al acceso 3 por la impedancia que presenta a su entrada:



La tensión en la línea de  $Z_0'$ , se puede escribir como:

$$V = V^+ e^{-j\beta z} (1 + \rho(z))$$

Entonces, las dos tensiones en los extremos de la misma son:

$$V_1 = V \Big|_{z=-\frac{\lambda}{4}} = V^+ e^{j\beta\frac{\lambda}{4}} (1 + \rho(-\lambda/4))$$

$$V_2 = V \Big|_{z=0} = V^+ (1 + \rho(0))$$

Teniendo en cuenta que

$$\rho(-\lambda/4) = -\rho(0)$$

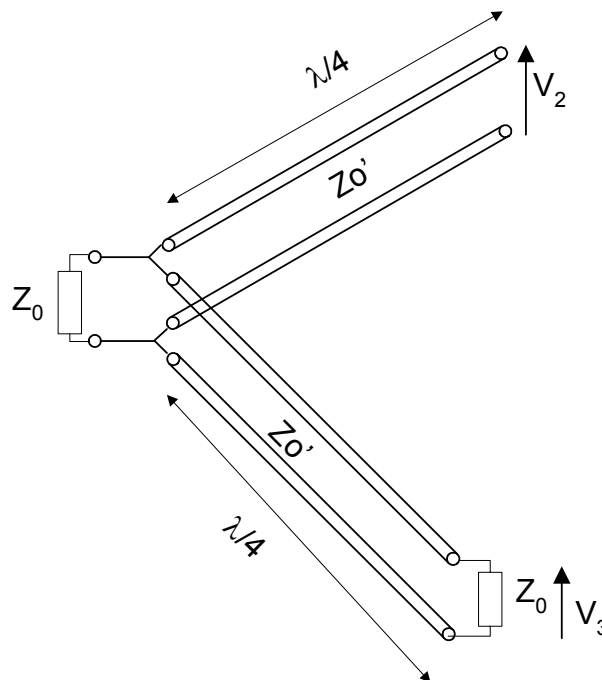
$$e^{j\beta\frac{\lambda}{4}} = e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

La expresión del parámetro  $S_{21}$  queda:

$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{a_2=a_3=0} = -j \frac{1 + \rho(0)}{1 - \rho(0)} = -j \frac{Z(0)}{Z_0'} = -j \frac{Z_0}{\sqrt{2}Z_0} = -j \frac{\sqrt{2}}{2}$$

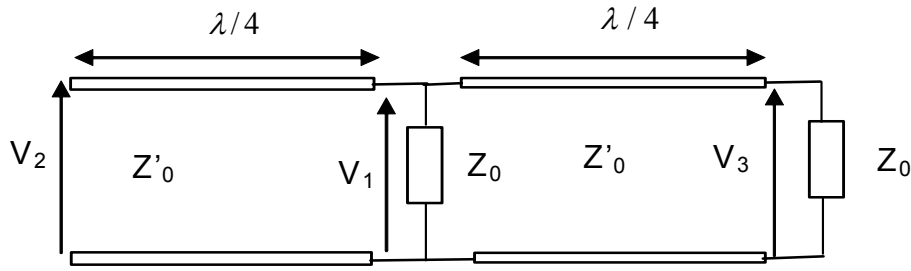
- Cálculo de  $S_{23}=S_{32}$ :

$$S_{32} = \frac{b_3}{a_2} \Big|_{a_1=a_3=0} = (1 + S_{22}) \frac{V_3}{V_2} \Big|_{a_1=a_3=0}$$



Redibujamos el circuito:





En la línea de la derecha la relación entre la tensión  $V_1$  y la tensión  $V_3$  es la misma que la de antes entre  $V_1$  y  $V_2$ :

$$\frac{V_3}{V_1} = -j \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Y en la línea de la izquierda se llega a una relación de tensiones también muy parecida:

$$\frac{V_1}{V_2} = -j \frac{1 + \rho(0)}{1 - \rho(0)} = -j \frac{Z(0)}{Z'_0} = -j \frac{2Z_0 | Z_0}{\sqrt{2}Z_0} = -j \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Multiplicando las dos relaciones, obtenemos la relación de tensiones que nos interesa:

$$\frac{V_3}{V_1} \frac{V_1}{V_2} = j \frac{\sqrt{2}}{2} j \frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{1}{3}$$

Ahora sustituimos en la expresión del parámetro  $S_{32}$ :

$$S_{32} = (1 + S_{22}) \frac{V_3}{V_2} = -\left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, los parámetros  $S$  del divisor hecho con líneas ideales quedan:

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -j\sqrt{2} & -j\sqrt{2} \\ -j\sqrt{2} & +1 & -1 \\ -j\sqrt{2} & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Vamos a ver una serie de casos particulares para poder después comparar los diferentes divisores.

- 1- Supongamos que los accesos 2 y 3 están acabados con  $Z_0$ .  
Vamos a hacer balance de potencias.

Potencia que entra por el acceso 1:

$$P_1 = \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |b_1|^2)$$

donde:

$$b_1 = -j \frac{\sqrt{2}}{2} (a_2 + a_3) = 0$$

ya que los accesos 2 y 3 están adaptados. Por lo tanto:

$$P_1 = \frac{1}{2} |a_1|^2$$

Potencia que sale por el acceso 2:

$$P_2 = \frac{1}{2} (|b_2|^2 - |a_2|^2) = \frac{1}{2} |b_2|^2$$

$$b_2 = -j \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 + \frac{1}{2} (a_2 + a_3) = -j \frac{\sqrt{2}}{2} a_1$$

Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación de  $P_2$ :

$$P_2 = \frac{1}{2} |b_2|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} |a_1|^2 = \frac{1}{4} |a_1|^2$$

Y lo mismo la potencia que sale por el acceso 3. Por lo tanto:

$$P_1 = P_2 + P_3$$

Toda la potencia que entra en el circuito sale por los accesos 2 y 3. El acceso de entrada está adaptado y si en el acceso 1 colocamos un generador canónico:

$$P_1 = P_{avs}$$

El generador entrega la máxima potencia al circuito y ésta se divide entre los accesos 2 y 3.

2- Supongamos que los accesos 2 y 3 están acabados con  $Z_L \neq Z_0$ .

Potencia que entra por el acceso 1:

$$P_1 = \frac{1}{2}(|a_1|^2 - |b_1|^2)$$

donde:

$$b_1 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}(a_2 + a_3) = -j\frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma_L(b_2 + b_3)$$

Cálculo de  $b_2$  y  $b_3$ :

$$b_2 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}a_1 + \frac{1}{2}(a_2 - a_3) = -j\frac{\sqrt{2}}{2}a_1 + \frac{1}{2}\Gamma_L(b_2 - b_3)$$

$$b_3 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}a_1 + \frac{1}{2}(-a_2 + a_3) = -j\frac{\sqrt{2}}{2}a_1 + \frac{1}{2}\Gamma_L(-b_2 + b_3)$$

Si restamos las dos ecuaciones:

$$b_2 - b_3 = \Gamma_L(b_2 - b_3)$$

que, sólo puede ser verdad si:

$$b_2 = b_3$$

Entonces nos queda:

$$b_2 = b_3 = -j \frac{\sqrt{2}}{2} a_1$$

La señal que sale por el acceso 1:

$$b_1 = -j \frac{\sqrt{2}}{2} (a_2 + a_3) = -j \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma_L 2b_2 = -\sqrt{2} \Gamma_L \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 = -\Gamma_L a_1$$

Entonces la potencia que entra por el acceso 1:

$$P_1 = \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |b_1|^2) = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)$$

El acceso de entrada no está adaptado. Si se coloca un generador canónico, la potencia que entra por el acceso 1 es igual a:

$$P_1 = P_{avs} (1 - |\Gamma_L|^2)$$

Las potencias que salen por los accesos 2 y 3 son iguales:

$$P_2 = P_3 = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\Gamma_L|^2) = \frac{1}{4} |a_1|^2 (1 - |\Gamma_L|^2) = \frac{1}{2} P_1$$

Pero esto sólo pasa cuando las cargas en los accesos 2 y 3 son iguales. El problema de este divisor es que los accesos 2 y 3 no están desacoplados. Por lo tanto, si cambio la carga del acceso 2, la señal que sale por el acceso 3 se ve afectada y viceversa. Veamos un caso extremo:

3- Supongamos que el acceso 2 está acabado con  $Z_0$  y el acceso 3 está acabado con un circuito abierto:

Potencia que entra por el acceso 1 y señal que sale por el acceso 1:

$$P_1 = \frac{1}{2}(|a_1|^2 - |b_1|^2)$$

$$b_1 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}(a_2 + a_3) = -j\frac{\sqrt{2}}{2}b_3$$

ya que el acceso 2 está adaptado y el 3 en circuito abierto.

Cálculo de  $b_3$ :

$$b_3 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_3 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_3$$

Que despejando:

$$b_3 = -j\sqrt{2}a_1$$

La señal que sale por el acceso 1:

$$b_1 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}a_3 = -a_1$$

Entonces la potencia que entra por el acceso 1:

$$P_1 = \frac{1}{2}(|a_1|^2 - |b_1|^2) = 0$$

Vemos que en este caso no llegará potencia al acceso 2 puesto que ya no entra nada por el acceso 1.

Cálculo de  $b_2$ :

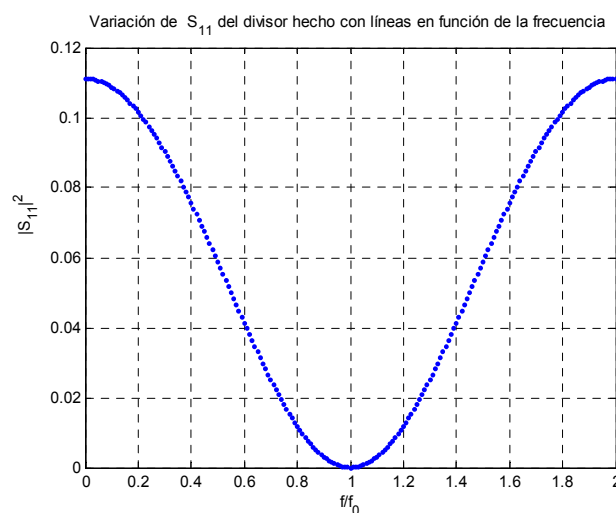
$$b_2 = -j \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_3 = -j \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 + j \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 = 0$$

Es decir, si dejamos uno de los dos accesos en circuito abierto, desde la entrada se ve como un cortocircuito (cada línea es de longitud  $\lambda/4$  equivale a un inversor de impedancias) y no deja que llegue señal al otro acceso. Si hacemos el otro caso extremo, dejar una línea en cortocircuito, se verá desde la entrada como un circuito abierto. En este caso sí llegará señal al acceso 2 aunque no habrá adaptación.

Por lo tanto, los accesos 2 y 3 no están desacoplados.

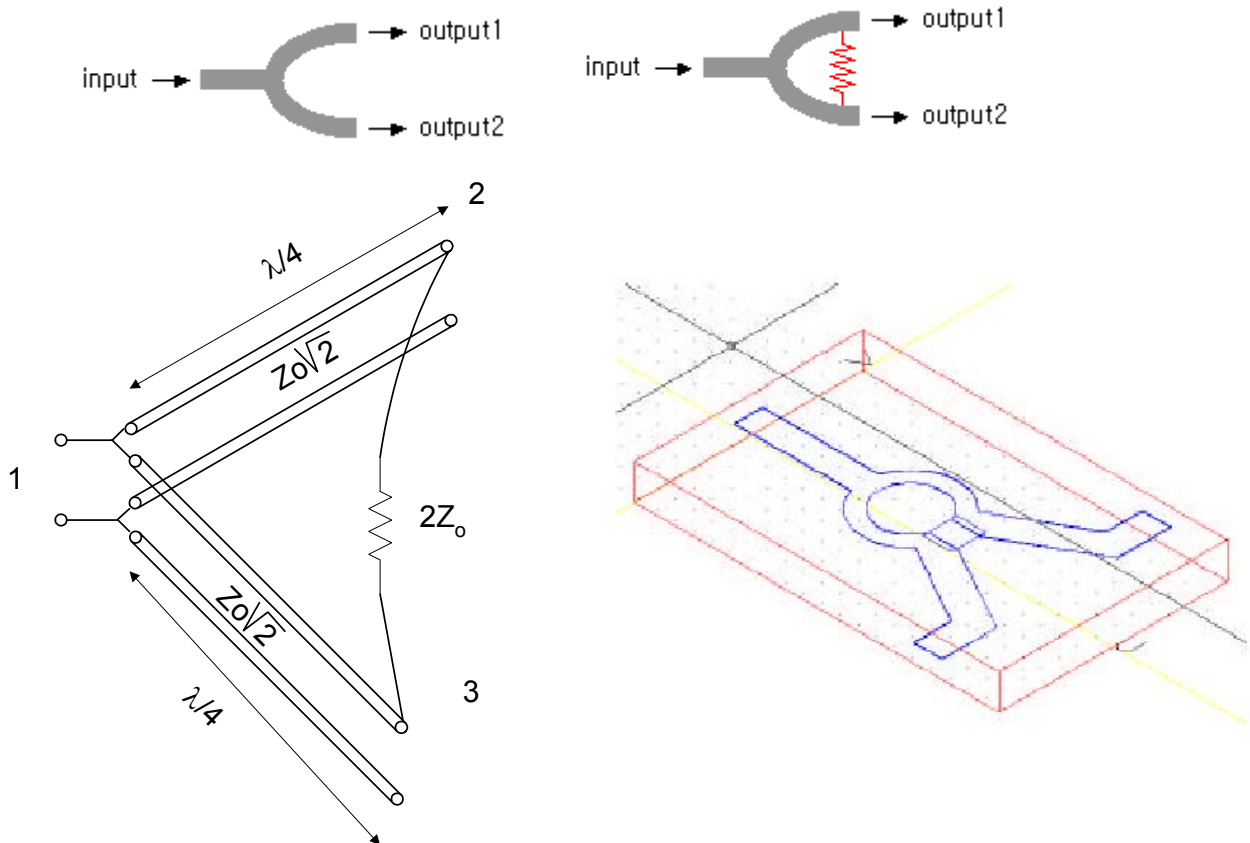
Otro inconveniente de este divisor es que depende de la frecuencia. Se ha hecho el diseño para que  $S_{11}$  sea igual a cero. Pero esto sólo se cumple a aquella frecuencia para la cual la línea mide  $\lambda/4$ .

La ventaja de este divisor es que es sencillo y no presenta pérdidas óhmicas.



### 3.4 DIVISOR DE WILKINSON

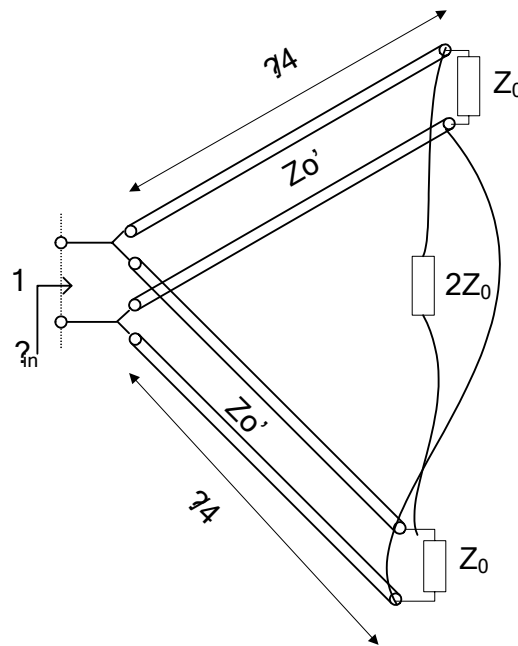
Para desacoplar los accesos 2 y 3 se pone una resistencia de impedancia  $2Z_0$  entre las dos líneas a la salida de los accesos 2 y 3:



Ya no es una red sin pérdidas. Vamos a calcular los parámetros  $S$  referidos a  $Z_0$ :

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \bigg|_{a_2=a_3=0} = \Gamma_{in} \big|_{a_2=a_3=0}$$

Por simetría  $V_2=V_3$  y por lo tanto no circula corriente por la resistencia nueva. Esto hace que desde el punto de vista de impedancia de entrada, la resistencia es como si no estuviera. Por lo tanto  $S_{11}$  sigue siendo 0.



Tampoco varían aquellos parámetros  $S$  que acaban los accesos 2 y 3 con la impedancia  $Z_0$  pues en este caso la simetría del circuito hace que las tensiones sean iguales y que la resistencia es como si no estuviera:

$$S_{21} = S_{12} = S_{31} = S_{13} = -j \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para calcular los parámetros que quedan:  $S_{23}$ ,  $S_{22}$  y  $S_{33}$ , veamos cómo son las expresiones:

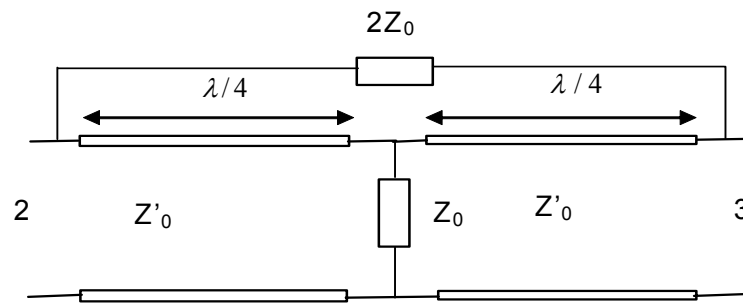
$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=a_3=0} \quad S_{23} = \left. \frac{b_2}{a_3} \right|_{a_1=a_2=0}$$

$$S_{32} = \left. \frac{b_3}{a_2} \right|_{a_1=a_3=0} \quad S_{33} = \left. \frac{b_3}{a_3} \right|_{a_1=a_2=0}$$

En todas ellas se cumple que  $a_1=0$  y no interviene para nada el acceso 1. Por lo tanto vemos que son los parámetros  $S$  de una red de dos accesos (la 2 y la 3) dejando el acceso 1 acabado con  $Z_0$ .

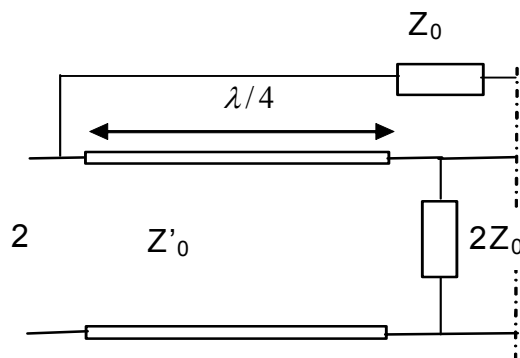
Podemos redibujar el circuito con estos dos accesos:





Los parámetros  $S$  de este bipuerto se pueden estudiar por simetría:

- Cálculo de  $\Gamma_e$ :

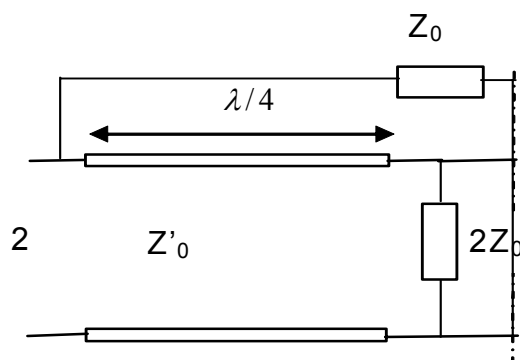


$$Z^e = \frac{Z_0'^2}{2Z_0} = \frac{2Z_0^2}{2Z_0} = Z_0$$

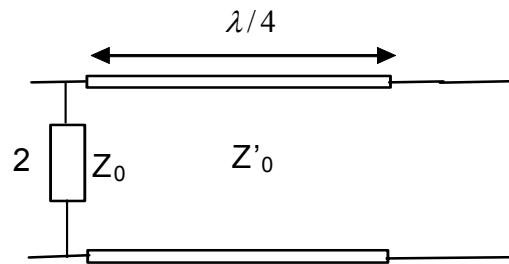
Por lo tanto:

$$\Gamma^e = 0$$

- Cálculo de  $\Gamma_o$ :



Este circuito es equivalente al siguiente:



El cortocircuito desde delante se ve como un circuito abierto (línea en  $\lambda/4$ ) y por lo tanto:

$$Z^o = Z_0$$

$$\Gamma^o = 0$$

Y los parámetros  $S$  del circuito de dos accesos son:

$$S_{22} = S_{33} = \frac{1}{2}(\Gamma^e + \Gamma^o) = 0$$

$$S_{23} = S_{32} = \frac{1}{2}(\Gamma^e - \Gamma^o) = 0$$

Así pues los parámetros  $S$  del divisor de Wilkinson son los mismos que el divisor hecho con líneas salvo estos cuatro últimos que quedan igual a cero:

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -j\sqrt{2} & -j\sqrt{2} \\ -j\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -j\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

He conseguido que los accesos 2 y 3 estén desacoplados, pero por el contrario he introducido pérdidas en el divisor (la resistencia). Veamos esto con un poco más de detalle.

1- Supongamos que los accesos 2 y 3 están adaptados con  $Z_0$ .  
Vamos a hacer balance de potencias.

Potencia que entra por el acceso 1 y señal que sale por dicho acceso:

$$P_1 = \frac{1}{2}(|a_1|^2 - |b_1|^2)$$

$$b_1 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}(a_2 + a_3) = 0$$

ya que los accesos 2 y 3 están adaptados. Por lo tanto:

$$P_1 = \frac{1}{2}|a_1|^2$$

Potencia que sale por el acceso 2 y señal que sale por el mismo:

$$P_2 = \frac{1}{2}(|b_2|^2 - |a_2|^2) = \frac{1}{2}|b_2|^2$$

$$b_2 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}a_1$$

Sustituyendo en la ecuación de  $P_2$ :

$$P_2 = \frac{1}{2}|b_2|^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}|a_1|^2 = \frac{1}{4}|a_1|^2$$

Y lo mismo para la potencia que sale por el acceso 3. Entonces:

$$P_1 = P_2 + P_3$$

Toda la potencia que entra en el circuito sale por los accesos 2 y 3. El acceso de entrada está adaptado y si en el acceso 1 colocamos un generador canónico:

$$P_1 = P_{avs}$$

El generador entrega la máxima potencia al circuito y ésta se divide entre los accesos 2 y 3. Por lo tanto, en este caso el circuito no disipa potencia. Equivale al divisor hecho con líneas. Ya habíamos dicho que si en los accesos 2 y 3 se pone la misma carga, no circula corriente por la resistencia nueva y por lo tanto el divisor equivale a un circuito sin pérdidas.

2- Supongamos que los accesos 2 y 3 están acabados con  $Z_L \neq Z_0$ .

Potencia que entra por el acceso 1 y señal que sale por el mismo:

$$P_1 = \frac{1}{2}(|a_1|^2 - |b_1|^2)$$

$$b_1 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}(a_2 + a_3) = -j\frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma_L(b_2 + b_3)$$

Cálculo de  $b_2$  y  $b_3$ :

$$b_2 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}a_1$$

$$b_3 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}a_1$$

¡Es independiente de cómo tengamos cargadas estos dos accesos!

La señal que sale por el acceso 1:

$$b_1 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma_L(b_2 + b_3) = -j\frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma_L 2b_2 = -\sqrt{2}\Gamma_L \frac{\sqrt{2}}{2}a_1 = -\Gamma_L a_1$$

Entonces la potencia que entra por el acceso 1:

$$P_1 = \frac{1}{2}(|a_1|^2 - |b_1|^2) = \frac{1}{2}|a_1|^2(1 - |\Gamma_L|^2)$$

El acceso de entrada no está adaptado. Si se coloca un generador canónico, la potencia que entra por 1 es igual a:

$$P_1 = P_{avs} (1 - |\Gamma_L|^2)$$

Las potencias que salen por los accesos 2 y 3 son iguales:

$$P_2 = P_3 = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\Gamma_L|^2) = \frac{1}{4} |a_1|^2 (1 - |\Gamma_L|^2) = \frac{1}{2} P_1$$

Pero esto sólo pasa cuando las cargas en los accesos 2 y 3 son iguales. El circuito se comporta como un circuito sin pérdidas pues por la resistencia no circula corriente. Ahora bien, si cambio la carga del acceso 2, la señal que sale por el acceso 3 no se ve afectada y viceversa. Veamos un caso extremo:

3- Supongamos que el acceso 2 está acabado con  $Z_0$  y el 3 está acabado con un circuito abierto:

Potencia que entra por el acceso 1 y señal que sale por dicho acceso:

$$P_1 = \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |b_1|^2)$$

$$b_1 = -j \frac{\sqrt{2}}{2} (a_2 + a_3) = -j \frac{\sqrt{2}}{2} b_3$$

ya que el acceso 2 está adaptado y el 3 en circuito abierto.

Cálculo de  $b_2$  y  $b_3$ :

$$b_2 = b_3 = -j \frac{\sqrt{2}}{2} a_1$$

La señal que sale por el acceso 1:

$$b_1 = -\frac{1}{2}a_1$$

Entonces la potencia que entra por el acceso 1:

$$P_1 = \frac{1}{2}(|a_1|^2 - |b_1|^2) = \frac{1}{2}\left(|a_1|^2 - \frac{1}{4}|a_1|^2\right) = \frac{3}{8}|a_1|^2$$

De esta potencia, en el acceso 3 no se disipa nada puesto que hay un circuito abierto y en el acceso 2:

$$P_2 = \frac{1}{2}(|b_2|^2 - |a_2|^2) = \frac{1}{2}|b_2|^2 = \frac{1}{4}|a_1|^2$$

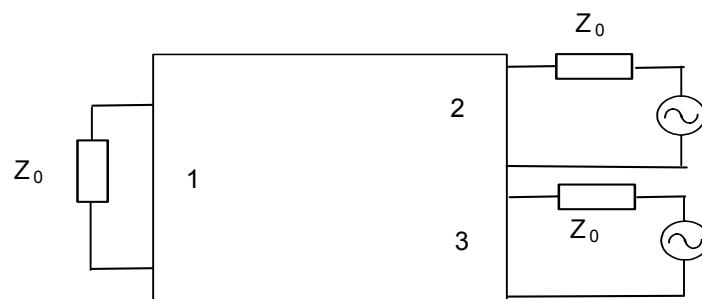
Es decir, la potencia que entra en el circuito es distinta de la que sale:

$$P_1 \neq P_2 + P_3$$

La potencia que falta se disipa en la resistencia interna del circuito.

El inconveniente de este divisor es que sigue siendo dependiente de la frecuencia.

El divisor de Wilkinson también se puede usar como combinador de potencia:



La señal que sale por el acceso 1:

$$b_1 = -j \frac{\sqrt{2}}{2} (a_2 + a_3)$$

Las señales que salen por los accesos 2 y 3:

$$b_2 = b_3 = 0$$

Hay adaptación en los accesos de entrada.

$$P_2 = \frac{1}{2} |a_2|^2$$

$$P_3 = \frac{1}{2} |a_3|^2$$

Si resulta que

$$a_2 = a_3 = a$$

Entonces,

$$P_2 = P_3 = P$$

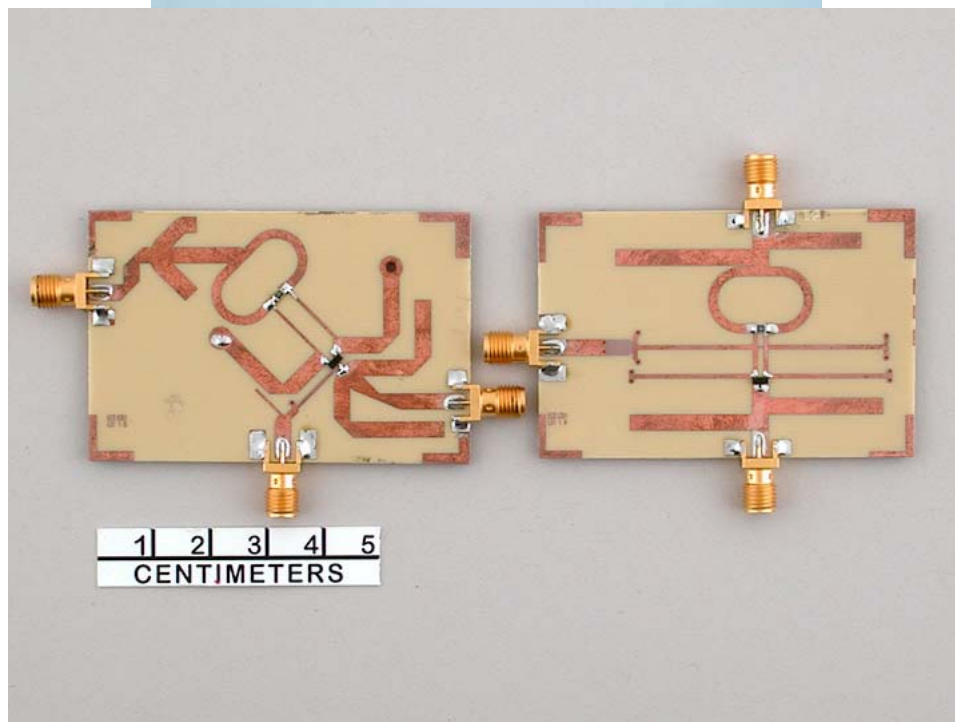
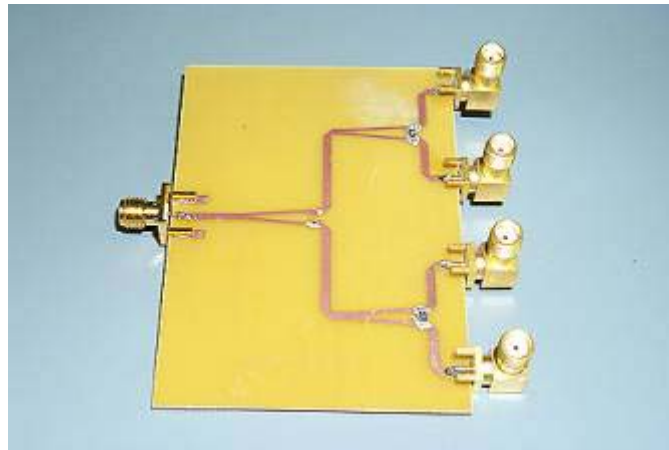
La señal que sale por el acceso 1:

$$b_1 = -j \frac{\sqrt{2}}{2} (a_2 + a_3) = -j \sqrt{2} a$$

Y la potencia que sale por el acceso 1:

$$P_L = \frac{1}{2} |b_1|^2 = |a|^2 = 2P$$

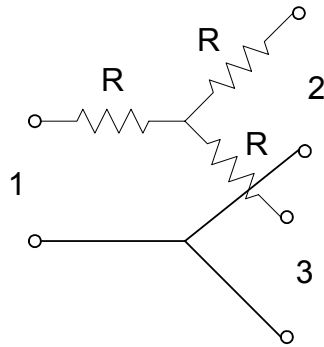
La combinación de potencia es de +3dB.





### 3.5 DIVISORES RESISTIVOS

Estos divisores tendrán la ventaja de no depender la adaptación de la frecuencia, pero presentarán muchas pérdidas.



- Cálculo de  $S_{11}$ :

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=a_3=0} = \Gamma_{in} \Big|_{a_2=a_3=0}$$

$$Z_{in1} = R + \frac{1}{2}(R + Z_0)$$

Para que  $S_{11}$  sea igual a cero, ha de ser:

$$Z_{in1} = Z_0 = R + \frac{1}{2}(R + Z_0)$$

De donde se obtiene que:

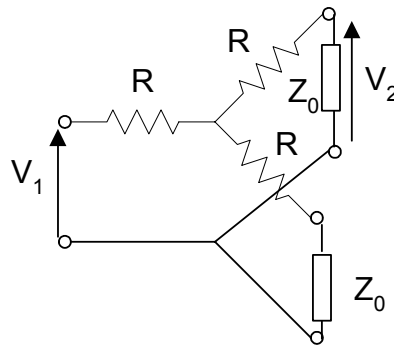
$$R = \frac{Z_0}{3}$$

Por simetría:

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$$

Y el resto de los parámetros de transmisión:

$$S_{12} = S_{21} = S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{a_2=a_3=0}$$



Y se obtiene:

$$S_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{a_2=a_3=0} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, los parámetros S son:

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es un divisor de 6 dB. Además los accesos 2 y 3 no están desacoplados.

Supongamos que los accesos 2 y 3 están acabados con  $Z_0$ . Vamos a hacer balance de potencias.

Potencia que entra por el acceso 1 y señal que sale por el mismo:

$$P_1 = \frac{1}{2}(|a_1|^2 - |b_1|^2)$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3) = 0$$

ya que los accesos 2 y 3 están adaptados. Por lo tanto:

$$P_1 = \frac{1}{2}|a_1|^2$$

Potencia que sale por los accesos 2 y 3 y señal que sale por los mismos:

$$P_2 = P_3 = \frac{1}{2}(|b_2|^2 - |a_2|^2) = \frac{1}{2}|b_2|^2$$

$$b_2 = b_3 = \frac{1}{2}a_1$$

Sustituyendo en la ecuación de  $P_2$ :

$$P_2 = P_3 = \frac{1}{2}|b_2|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4}|a_1|^2 = \frac{1}{8}|a_1|^2$$

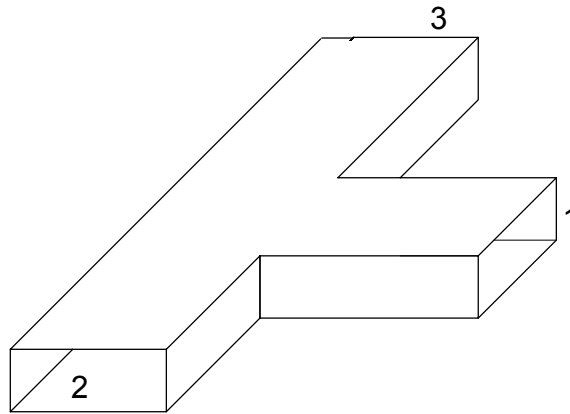
Y lo que vemos es que:

$$P_2 = P_3 = \frac{1}{4}P_1$$

La mitad de la potencia que entra en el circuito sale por los accesos 2 y 3 y la otra mitad se disipa en el divisor resistivo.

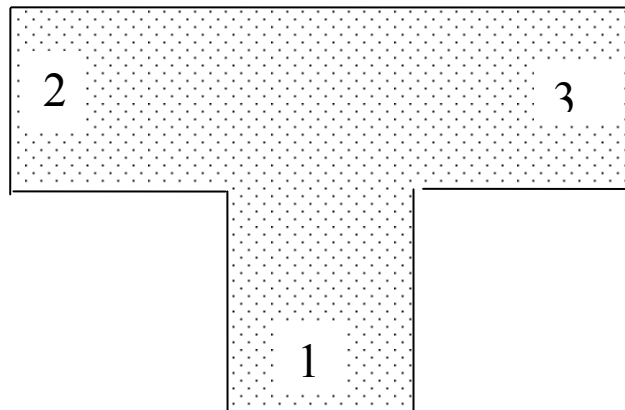
### 3.6 T'S EN GUIAS

#### T EN PLANO H



Una guía de ondas en la que se excita el modo dominante, E es vertical y H horizontal (E lleva la dirección de la dimensión pequeña de la guía y H la perpendicular).

Visto desde arriba:



El campo E es perpendicular al papel (tal como indican las líneas de campo): si la señal entra por el acceso 1 no hay cambio de fase entre las señales que llegan a los accesos 2 y 3:

$$S_{21} = S_{31}$$

Supondremos que el acceso de entrada está adaptado:

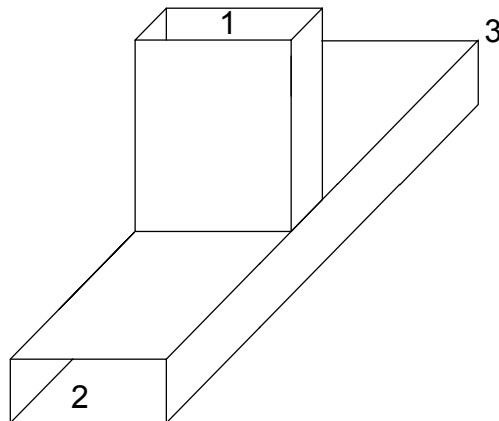
$$S_{11} = 0$$

Con lo que la matriz de parámetros  $S$  queda (aplicando además reciprocidad):

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{21} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

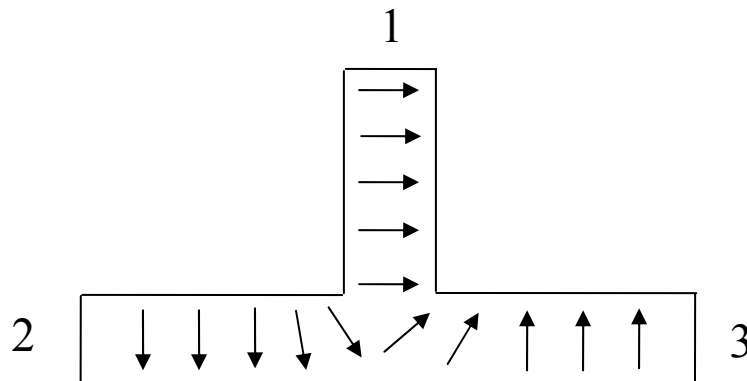
Falta aplicar que es un circuito sin pérdidas.

T EN PLANO E



Una guía de ondas en la que se excita el modo dominante, E es vertical y H horizontal (E lleva la dirección de la dimensión pequeña de la guía y H la perpendicular).

Visto desde el lateral:



El campo  $E$  es horizontal: si la señal entra por el acceso 1 hay un cambio de fase de  $180^\circ$  entre las señales que llegan a los accesos 2 y 3:

$$S_{21} = -S_{31}$$

Supondremos igualmente que el acceso de entrada está adaptado:

$$S_{11} = 0$$

Con lo que la matriz de parámetros  $S$  queda:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} & -S_{21} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ -S_{21} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

Falta aplicar que es un circuito sin pérdidas, es decir, unilateridad:

$$\begin{bmatrix} 0 & S_{21} & -S_{21} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ -S_{21} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & S_{21}^* & -S_{21}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* & S_{23}^* \\ -S_{21}^* & S_{23}^* & S_{33}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si nos fijamos en el siguiente producto:

$$F1 \times C1 \quad |S_{21}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$$

de donde podemos sacar que:

$$|S_{21}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$F2 \times C1 \quad S_{22}S_{21}^* - S_{23}S_{21}^* = 0 \rightarrow S_{22} = S_{23}$$

$$F3 \times C1 \quad S_{23}S_{21}^* - S_{33}S_{21}^* = 0 \rightarrow S_{33} = S_{23}$$

A partir de estos dos últimos resultados:

$$F2 \times C3 \quad -S_{21}S_{21}^* + S_{22}S_{23}^* + S_{23}S_{33}^* = 0$$

que, sustituyendo nos lleva a:

$$F2 \times C3 \quad 2|S_{22}|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|S_{22}| = \frac{1}{2}$$

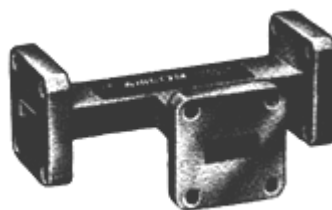
Tenemos determinados todos los módulos. Por lo tanto, podemos escoger las fases iguales a 0:

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicación: como divisor de potencia de 180°.

Los accesos 2 y 3 no están desacoplados.

La T en plano H es un divisor de potencia en fase.



### 3.7 CIRCULADOR

Se denomina circulador ideal a una red de tres accesos:

- Pasiva y sin pérdidas
- Con los tres accesos adaptados
- No recíproca (contiene ferritas)
- 

Los circuladores se construyen con ferritas, materiales cerámicos no conductores pero con propiedades magnéticas muy intensas, sometidas a la acción de un campo magnético estático. Su comportamiento es no recíproco

Conduce la señal de entrada por el acceso 1 hacia el 2 y de éste, si se produce reflexión, hacia el acceso 3. Y sólo en este sentido:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz anterior es evidentemente no simétrica y unitaria y la red tiene la propiedad de que en condiciones de accesos terminados, la señal que se inyecta en uno de ellos sale solamente por uno de los dos restantes mientras que por el otro no sale nada, manteniéndose por lo tanto aislado.

Si entra señal por el acceso 1( $a_1$ ). Entonces:

$$b_2 = a_1$$

$$a_2 = \Gamma_2 b_2$$

$$b_3 = a_2$$

$$a_3 = \Gamma_3 b_3$$

$$b_1 = a_3$$

También se puede tener un circulador en sentido contrario cuya matriz sería:



$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicaciones:

1) Separar generador y carga:

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1 \\ a_2 &= \Gamma_L b_2 \\ b_3 &= a_2 \\ a_3 &= \Gamma_3 b_3 = 0 \\ b_1 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que el generador siempre ve una carga adaptada. Y a la carga llega una señal idéntica a la proporcionada por el generador. A este dispositivo se le llama aislador. Protege al generador de reflexiones indeseadas y hace que la carga vea siempre una buena adaptación.

Su matriz S será

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Duplexor

Aísla transmisor y receptor operando sobre la misma antena:

a1: señal transmitida por la antena cuando actúa como transmisora

a2: señal recibida por la antena cuando actúa como receptora

Los circuladores se construyen con ferritas (materiales cerámicos no conductores pero con propiedades magnéticas muy intensas) sometidas a la acción de un campo magnético estático. Su comportamiento es no recíproco.



En realidad los circuladores no son ideales:

$$[S] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

donde  $\alpha \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$  y  $\gamma \cong 1$

Definimos:

- Pérdidas de retorno o medida de la desviación de adaptación:

$$R.L.(dB) = -10 * \log |S_{ii}|^2 = -10 * \log |\alpha|^2$$

- Pérdidas de inserción entre dos accesos que hay transferencia de señal:

$$I.L.(dB) = -10 * \log |\gamma|^2$$

- Aislamiento entre dos accesos idealmente aislados:

$$I(dB) = -10 * \log |\beta|^2$$

### 3.8- CIRCUITOS DE 4 ACCESOS

Son muy importantes, especialmente para instrumentación. En particular, los acopladores direccionales (A.D.), que permiten medir por separado ondas positivas y negativas de manera directa.

Consideraremos el caso de una red:

- Adaptada los cuatro accesos
- Pasiva y sin pérdidas

Y aplicaremos unitariedad:

$$\begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones que se obtienen son:

$$\begin{array}{ll} F1 \times C1 & |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \\ F2 \times C2 & |S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \\ F3 \times C3 & |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \\ F4 \times C4 & |S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \\ F1 \times C2 & S_{13}S_{23}^* + S_{14}S_{24}^* = 0 \\ F1 \times C3 & S_{12}S_{23}^* + S_{14}S_{34}^* = 0 \\ F1 \times C4 & S_{12}S_{24}^* + S_{13}S_{34}^* = 0 \end{array}$$

Si estas dos últimas ecuaciones las escribimos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} S_{23}^* & S_{14} \\ S_{24}^* & S_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{12} \\ S_{34}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

a) Si el determinante es distinto de cero, entonces:

$$S_{12} = S_{34} = 0$$

Y tenemos en total 8 valores de la matriz iguales a cero:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & 0 \\ S_{14} & S_{24} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Si el determinante es igual a cero:

$$S_{13}S_{23}^* - S_{14}S_{24}^* = 0$$

Que combinado con la ecuación de primera fila por segunda columna:

$$F1 \times C2 \quad S_{13}S_{23}^* + S_{14}S_{24}^* = 0$$

Nos lleva sumando y restando las dos ecuaciones a que:

$$\begin{aligned} S_{13}S_{23}^* &= 0 \\ S_{14}S_{24}^* &= 0 \end{aligned}$$

b.1) Si  $S_{13}=0$ , y  $S_{14}=0$  entonces:

$$\begin{aligned} F1 \times C1 & \quad |S_{12}|^2 = 1 \\ F2 \times C2 & \quad |S_{23}|^2 = |S_{24}|^2 = 0 \\ F3 \times C3 & \quad |S_{34}|^2 = 1 \end{aligned}$$

Este circuito no tiene ningún sentido porque toda la señal que entra por el acceso 1 se va al 2, y la que entra por el 3 se va al 4. Solución descartada.

b.2) Si  $S_{13}=0$ , y  $S_{24}=0$  entonces:

$$\begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & 0 \\ 0 & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & 0 & S_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

b.3) Si  $S_{23}=0$  y  $S_{14}=0$ , queda:

$$\begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{24} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto hemos llegado a tres posibles circuitos, todos ellos con 8 ceros:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & 0 \\ S_{14} & S_{24} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & 0 \\ 0 & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & 0 & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{24} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

Pero las soluciones segunda y tercera se pueden convertir en la primera con una adecuada numeración de los accesos. Por lo tanto sólo es necesario considerar una solución. Consideraremos la primera.

Si seguimos imponiendo unitariedad (faltaba imponer ecuaciones) se llega a dos conjuntos de ecuaciones. Por un lado:

F1 X C1

$$|S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1$$

F2 X C2

$$|S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 1$$

F1 X C2

$$S_{13}S_{23}^* + S_{14}S_{24}^* = 0$$

Y por otro:

F3 X C3

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1$$

F4 X C4

$$|S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 = 1$$

F3 X C4

$$S_{13}S_{14}^* + S_{23}S_{24}^* = 0$$

Si nos fijamos en las primeras ecuaciones vemos que son iguales a las que debía cumplir un bipuerto pasivo sin pérdidas. Y lo mismo para el segundo conjunto. Por lo tanto:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau e^{j\theta_1} & ke^{j\varphi_1} \\ 0 & 0 & ke^{j\varphi_2} & \tau e^{j\theta_2} \\ \tau e^{j\theta_1} & ke^{j\varphi_2} & 0 & 0 \\ ke^{j\varphi_1} & \tau e^{j\theta_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

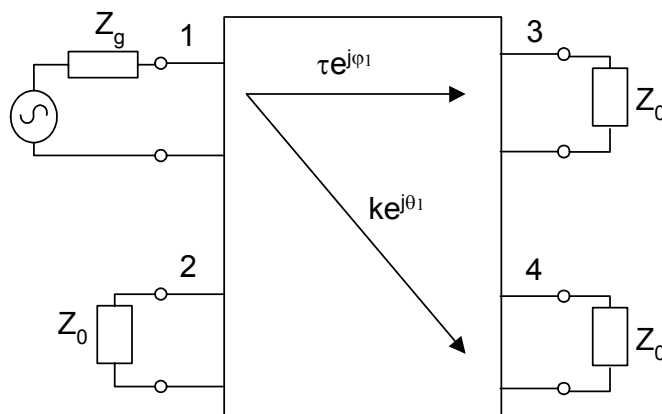
donde :

$$k^2 + \tau^2 = 1$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \varphi_1 + \varphi_2 \pm \pi$$

Funcionamiento básico:

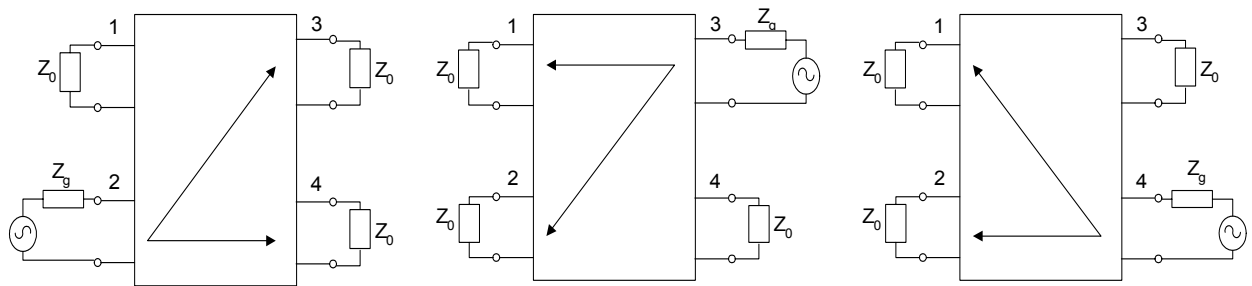
- Si entra señal por el acceso 1 y todos los demás están terminadas con  $Z_0$  ( $a_i = 0 \quad \forall \quad i \neq 1$ ), obtenemos:



Por el acceso 2 no sale señal. Se dice que está desacoplado del 1. La potencia que entra por el acceso 1 se reparte entre el 3 y el 4.

Análogamente:

- Si entra señal por los otros tres accesos:



Los accesos 3 y 4 están también desacoplados. Existen dos tipos de circuitos en función de la relación entre  $k$  y  $\tau$ :

- 1) Si  $k \ll \tau$ , es decir,  $k \ll 1$  y  $\tau \approx 1$ , el circuito es un acoplador direccional.
- 2) Si  $k = \tau$ , el circuito es un híbrido. Veamos ahora con más detalle cada uno de estos circuitos.

### 3.9 HIBRIDOS

La palabra híbrido se utiliza para describir un circuito o dispositivo de cuatro accesos pasivo, recíproco, sin pérdidas, totalmente adaptado que permite dividir la potencia que entra por un acceso en dos caminos equilibrados, controlando la fase relativa de uno respecto del otro. Esta fase es normalmente de  $90^\circ$  o de  $180^\circ$ .

En general:

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{j\theta_1} & e^{j\varphi_1} \\ 0 & 0 & e^{j\theta_2} & e^{j\varphi_2} \\ e^{j\theta_1} & e^{j\varphi_1} & 0 & 0 \\ e^{j\theta_2} & e^{j\varphi_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con:

$$\theta_1 + \theta_2 = \varphi_1 + \varphi_2 \pm \pi$$

Movemos los planos de referencia tales que  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Entonces,

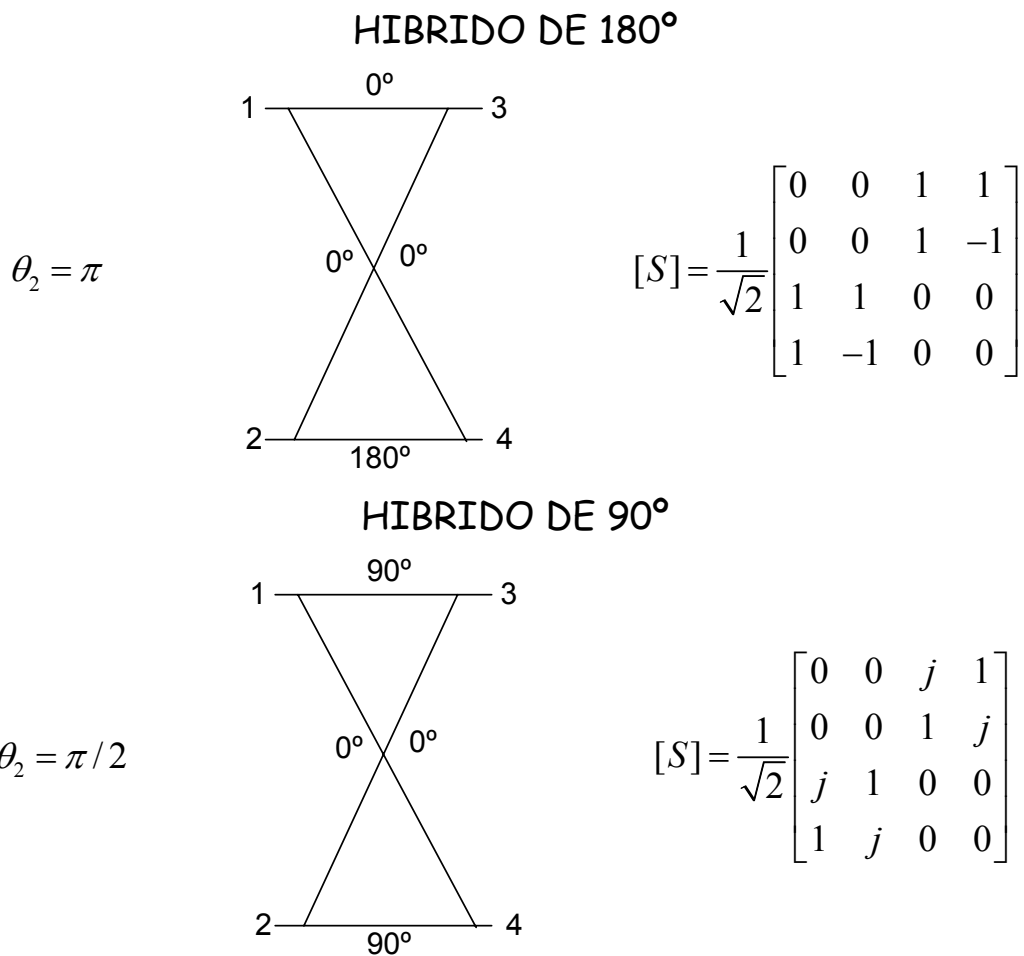
$$\theta_1 + \theta_2 = \pm \pi$$

Por lo tanto,

$$e^{j\theta_1} = -e^{-j\theta_2}$$

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -e^{-j\theta_2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & e^{j\theta_2} \\ -e^{-j\theta_2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & e^{j\theta_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



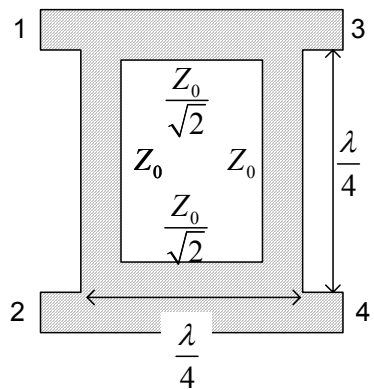


### Propiedades:

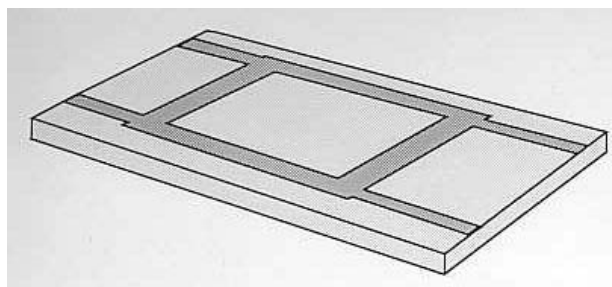
- Accesos 1 y 2 desacoplados entre sí, al igual que los accesos 3 y 4. Por lo tanto, hay aislamiento entre los accesos 1 y 2 y los accesos 3 y 4. Esto es parecido al divisor de Wilkinson.
- Está totalmente adaptado ( $S_{ii}=0$ ). De hecho, se puede demostrar que un circuito de 4 accesos totalmente adaptado, ha de tener necesariamente dos accesos aislados.
- Actúan como divisores/combinadores de potencia. El de 90° en cuadratura y el de 180° en contratase.

DIVISOR			
90°		180°	
Entrada	Salida	Entrada	Salida
$a_1$	$b_3 = j \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ $b_4 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$	$a_1$	$b_3 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ $b_4 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$
$a_2$	$b_3 = \frac{a_2}{\sqrt{2}}$ $b_4 = j \frac{a_2}{\sqrt{2}}$	$a_2$	$b_3 = \frac{a_2}{\sqrt{2}}$ $b_4 = -\frac{a_2}{\sqrt{2}}$
COMBINADOR			
90°		180°	
Entrada	Salida	Entrada	Salida
$a_1$ $a_2 = -ja_1$	$b_3 = 2j \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ $b_4 = 0$	$a_1$ $a_2 = a_1$	$b_3 = 2 \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ $b_4 = 0$
$a_1$ $a_2 = -ja_1$	$b_3 = 0$ $b_4 = 2 \frac{a_1}{\sqrt{2}}$	$a_1$ $a_2 = -a_1$	$b_3 = 0$ $b_4 = 2 \frac{a_1}{\sqrt{2}}$

### -Realización en microstrip del híbrido de 90°. Branch-line

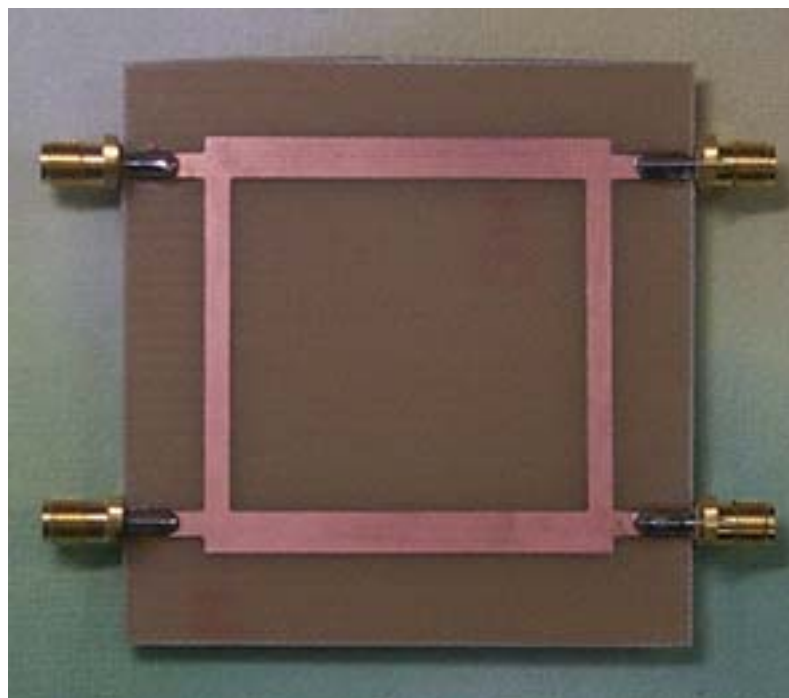


$$[S] = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & j & 1 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ j & 1 & 0 & 0 \\ 1 & j & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

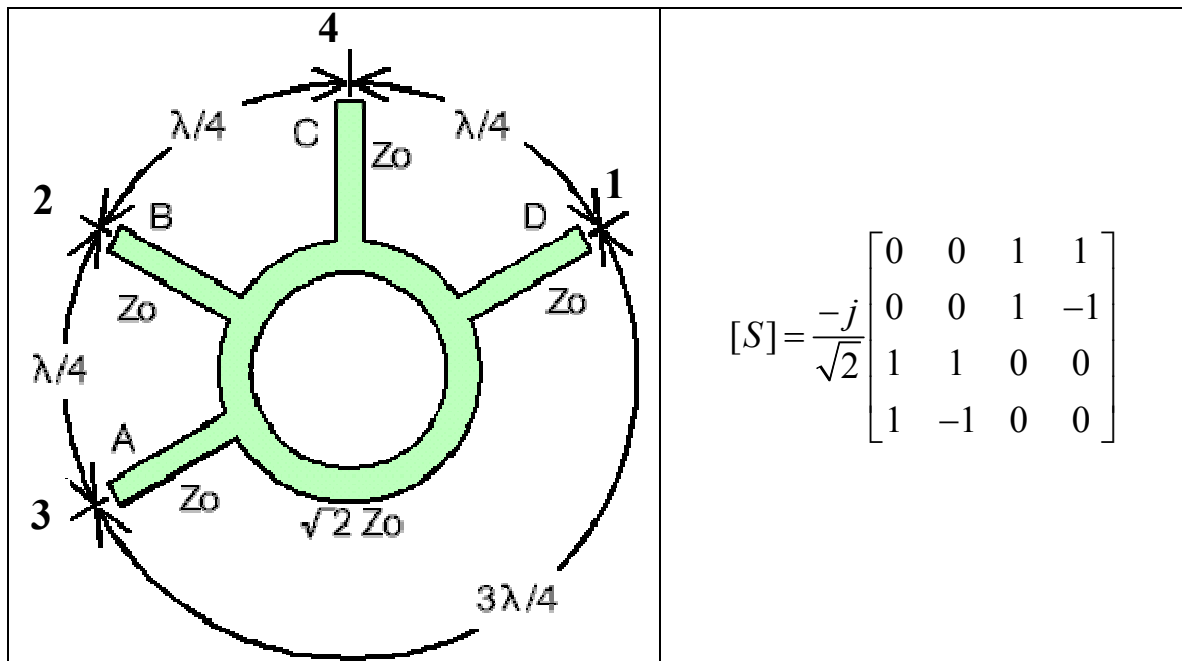


La matriz  $S$  se puede obtener del análisis par-impar por simetría de la estructura.

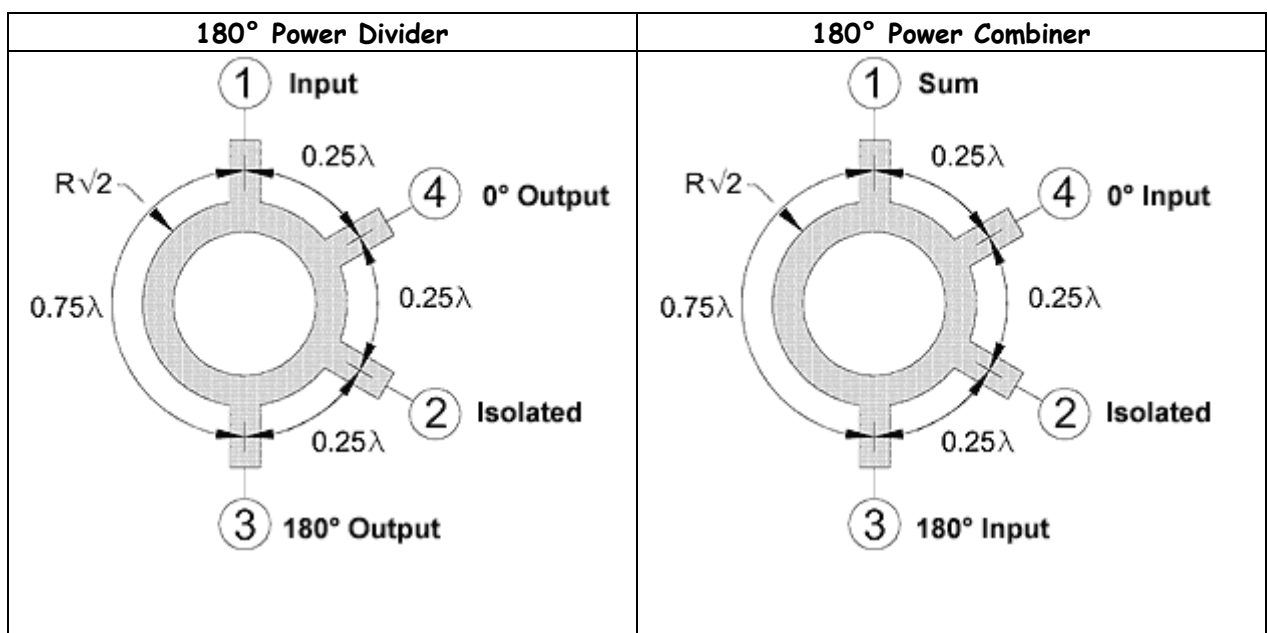
Fabricación del híbrido:

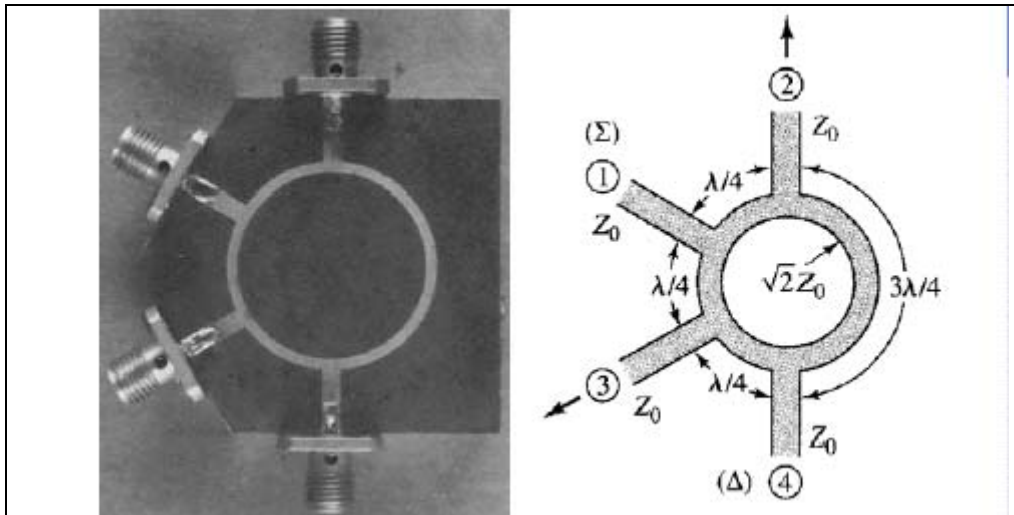


### - Realización en microstrip del híbrido de 180°. Rat-race



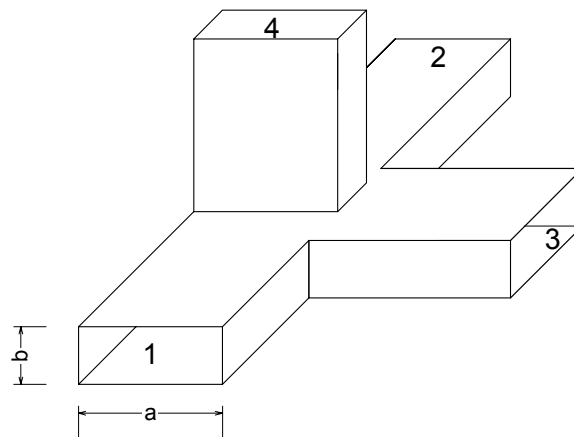
Las aplicaciones primarias de los híbridos de 90° y 180° son la división y combinación de potencia simétrica, tal y como se ha hecho antes. Otras aplicaciones en sistemas de microondas las veremos más adelante cuando hablemos de diodos PIN y schottky.





### 3.10 T MÁGICA

Es la combinación de la T en plano E y la T en plano H. Es la forma de hacer los híbridos en guía onda:



Entramos señal por el acceso 3 y ésta se divide en dos, una hacia el acceso 1 y la otra hacia el acceso 2. Pero no excita el modo dominante del acceso 4. Por este acceso no saldrá nada que provenga del acceso 3. Y esto es puramente de construcción mecánica: se cumple para todas las frecuencias:

$$S_{34} = S_{43} = 0$$

Pues el modo  $TE_{10}$  del acceso 3 se acopla al modo  $TE_{01}$  del acceso 4. Además:

$$S_{14} = -S_{24}$$

$$S_{13} = S_{23}$$

Y si adaptamos los accesos de entrada 3 y 4:

$$S_{33} = S_{44} = 0$$

Obtenemos:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{13} & -S_{14} \\ S_{13} & S_{13} & 0 & 0 \\ S_{14} & -S_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando unitariedad:

$$|S_{13}| = |S_{14}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1$$

Que sustituyendo la primera en la segunda nos lleva a:

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 0$$

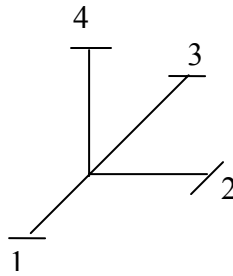
O lo que es lo mismo:

$$|S_{11}| = |S_{12}| = 0$$

Hay desacoplo entre los accesos 1 y 2. Por tanto, la matriz queda:

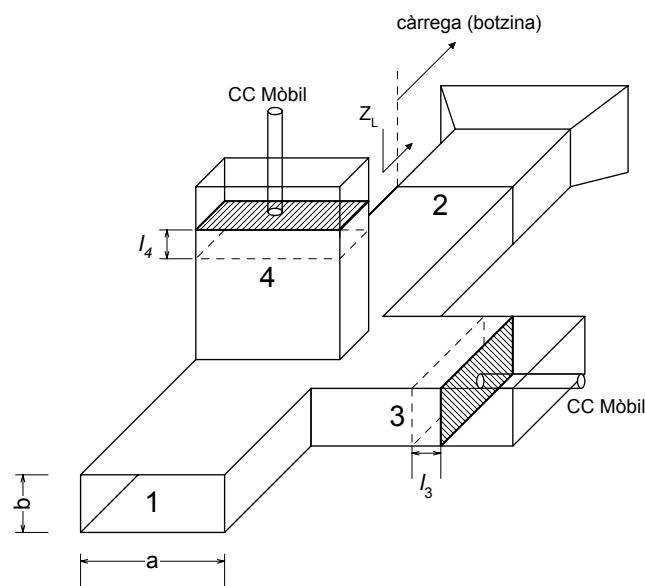
$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que es la matriz de un híbrido de  $180^\circ$  de 3 dB. Por eso se le llama T mágica. Esquemáticamente se representa así:



### Adaptación de impedancia con T mágica

Se conecta al acceso 2 la impedancia que se quiere adaptar de coeficiente de reflexión  $\Gamma$ , y en los accesos 3 y 4 se conectan cortocircuitos de longitud ajustable:



Por el acceso 1 entra la señal de generador y por los otros tres accesos las señales de entrada son:

-

$$a_2 = \Gamma b_2$$

$$a_3 = \Gamma_3 b_3$$

$$a_4 = \Gamma_4 b_4$$

Siendo  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  los coeficientes de reflexión que presentan los cortocircuitos móviles:

$$\Gamma_3 = e^{j\phi_3}$$

$$\Gamma_4 = e^{j\phi_4}$$

Las señales de salida por los 4 accesos serán:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \Gamma b_2 \\ \Gamma_3 b_3 \\ \Gamma_4 b_4 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la matriz quedan:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_3 b_3 + \Gamma_4 b_4)$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_3 b_3 - \Gamma_4 b_4)$$

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + \Gamma b_2)$$

$$b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - \Gamma b_2)$$

Sustituimos la tercera y la cuarta en la primera y segunda:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \Gamma_3 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + \Gamma b_2) \right) + \Gamma_4 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - \Gamma b_2) \right) \right]$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \Gamma_3 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + \Gamma b_2) \right) - \Gamma_4 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - \Gamma b_2) \right) \right]$$



Y arreglándolo un poco:

$$b_1 = \frac{1}{2} [a_1(\Gamma_3 + \Gamma_4) + \Gamma b_2(\Gamma_3 - \Gamma_4)]$$

$$b_2 = \frac{1}{2} [a_1(\Gamma_3 - \Gamma_4) + \Gamma b_2(\Gamma_3 + \Gamma_4)]$$

Despejamos  $b_2$  en la segunda:

$$b_2 = \frac{a_1(\Gamma_3 - \Gamma_4)}{2 - \Gamma(\Gamma_3 + \Gamma_4)}$$

Y sustituimos en la primera:

$$b_1 = \frac{1}{2} \left[ a_1(\Gamma_3 + \Gamma_4) + \Gamma \frac{a_1(\Gamma_3 - \Gamma_4)}{2 - \Gamma(\Gamma_3 + \Gamma_4)} (\Gamma_3 - \Gamma_4) \right]$$

Entonces, el coeficiente de reflexión en el acceso 1:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{2} \left[ (\Gamma_3 + \Gamma_4) + \Gamma \frac{(\Gamma_3 - \Gamma_4)^2}{2 - \Gamma(\Gamma_3 + \Gamma_4)} \right]$$

Y operando convenientemente se llega a:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{-\Gamma\Gamma_3\Gamma_4 + \frac{1}{2}(\Gamma_3 + \Gamma_4)}{1 - \frac{1}{2}\Gamma(\Gamma_3 + \Gamma_4)}$$

Para poder tener el acceso 1 adaptado ( $b_1=0$ ) es necesario que:

$$\Gamma\Gamma_3\Gamma_4 = \frac{1}{2}(\Gamma_3 + \Gamma_4)$$

O lo que es lo mismo:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{(\Gamma_3 + \Gamma_4)}{\Gamma_3 \Gamma_4} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\Gamma_3} + \frac{1}{\Gamma_4} \right)$$

Y si:

$$\begin{aligned}\Gamma_3 &= e^{j\phi_3} \\ \Gamma_4 &= e^{j\phi_4} \\ \Gamma &= \frac{1}{2} (e^{-j\phi_3} + e^{-j\phi_4})\end{aligned}$$

Esto siempre es posible excepto si:

$$|\Gamma| = 1$$

Porque entonces la solución lleva a:

$$\Gamma = e^{-j\phi_3} = e^{-j\phi_4}$$

Con lo cual el denominador de  $b_1$  es igual a cero. No se adapta.

### 3.11 LINEAS ACOPLADAS

Cuando dos líneas no apantalladas se acercan, se puede transferir energía de una línea a la otra debido a la interacción de los campos electromagnéticos de cada línea. Se dice que la energía se acopla y las líneas de transmisión se llaman "líneas acopladas".

Dos ejemplos son líneas de transmisión en microstrip y stripline:

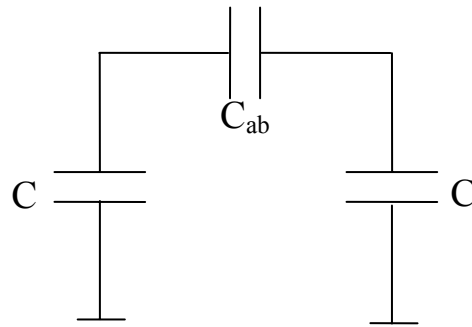


Este efecto de acoplamiento se puede utilizar para realizar "acopladores direccionales" (y también filtros como veremos más adelante).

#### - Propagación por líneas acopladas

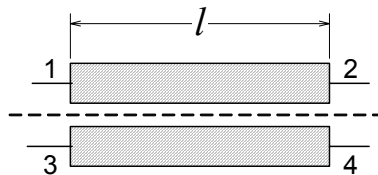
La energía se acopla entre las dos líneas debido a los campos electromagnéticos existentes. Si las líneas son homogéneas (ej. Stripline), la energía acoplada se puede representar por la capacidad entre líneas a partir de la cual es posible conocer todas las características de propagación (velocidad,  $Z_0$ , factor de acoplamiento,...). Si no son homogéneas (ej. Microstrip) se puede utilizar la aproximación cuasi-estática para evaluar las capacidades tal como lo haríamos en la línea aislada.

#### - Modelo de una célula elemental (faltarían las $L$ y $M$ )



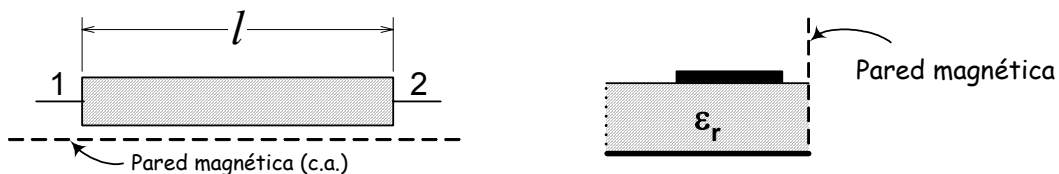
Las dos capacidades línea-masa son iguales porque las líneas son iguales. La capacidad  $C$  no es la que tendría la línea aislada ya que hay que tener en cuenta que la distribución de campos varía.

Se trata de una estructura simétrica:

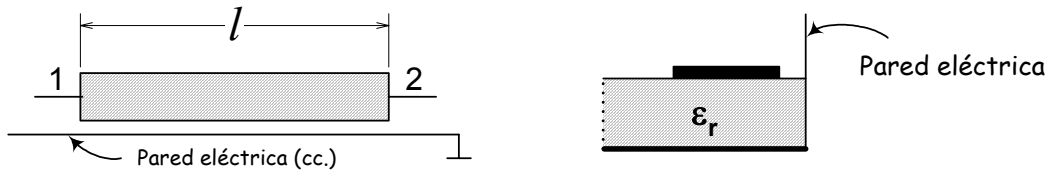


La matriz de parámetros  $S$  se puede obtener a partir de los dos circuitos de dos accesos siguientes:

1.- Circuito par [ $S^e$ ]:



2.- Circuito impar [ $S^o$ ]:



Si llamamos  $Z_{0e}$  a la impedancia característica que presenta la línea en presencia de la pared magnética y  $\beta_e$  a la constante de propagación correspondiente, tenemos:

$$S_{11}^e = S_{22}^e = \frac{jk_e \sin \beta_e \ell}{\sqrt{1 - k_e^2} \cos \beta_e \ell + j \sin \beta_e \ell}$$

Por otro lado:

$$S_{12}^e = S_{21}^e = \frac{\sqrt{1 - k_e^2}}{\sqrt{1 - k_e^2} \cos \beta_e \ell + j \sin \beta_e \ell}$$

Con  $k_e = \frac{Z_{0e}^2 - Z_0^2}{Z_{0e}^2 + Z_0^2}$ , siendo  $Z_0$  la impedancia de referencia.

Análogamente:

$$S_{11}^o = S_{22}^o = \frac{jk_o \sin \beta_o \ell}{\sqrt{1 - k_o^2} \cos \beta_o \ell + j \sin \beta_o \ell}$$

$$S_{12}^o = S_{21}^o = \frac{\sqrt{1 - k_o^2}}{\sqrt{1 - k_o^2} \cos \beta_o \ell + j \sin \beta_o \ell}$$

Con  $k_o = \frac{Z_{0o}^2 - Z_0^2}{Z_{0o}^2 + Z_0^2}$

Bajo la suposición  $\beta_e = \beta_o$  (lo cual sólo es estrictamente cierto para propagación TEM, es decir, en el caso de líneas planares, para la estructura stripline, se tiene:

$$[S_1] = \frac{1}{2}([S^e] + [S^o])$$

Que sustituyendo:

$$[S_1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{jk_e \sin \beta \ell}{\sqrt{1-k_e^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} + \frac{jk_o \sin \beta \ell}{\sqrt{1-k_o^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} & \frac{\sqrt{1-k_e^2}}{\sqrt{1-k_e^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} + \frac{\sqrt{1-k_o^2}}{\sqrt{1-k_o^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} \\ \frac{\sqrt{1-k_e^2}}{\sqrt{1-k_e^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} + \frac{\sqrt{1-k_o^2}}{\sqrt{1-k_o^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} & \frac{jk_e \sin \beta \ell}{\sqrt{1-k_e^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} + \frac{jk_o \sin \beta \ell}{\sqrt{1-k_o^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} \end{bmatrix}$$

Y de la misma forma:

$$[S_2] = \frac{1}{2} ([S^e] - [S^o])$$

$$[S_2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{jk_e \sin \beta \ell}{\sqrt{1-k_e^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} - \frac{jk_o \sin \beta \ell}{\sqrt{1-k_o^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} & \frac{\sqrt{1-k_e^2}}{\sqrt{1-k_e^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} - \frac{\sqrt{1-k_o^2}}{\sqrt{1-k_o^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} \\ \frac{\sqrt{1-k_e^2}}{\sqrt{1-k_e^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} - \frac{\sqrt{1-k_o^2}}{\sqrt{1-k_o^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} & \frac{jk_e \sin \beta \ell}{\sqrt{1-k_e^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} - \frac{jk_o \sin \beta \ell}{\sqrt{1-k_o^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} \end{bmatrix}$$

Y entonces:

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_1] \end{bmatrix}$$

Para que la estructura esté adaptada ( $S_{11}=0$ ) es necesario que:  
 $k_o = -k_e$  lo que se traduce en:

$$k_o = -k_e = \frac{Z_{0o}^2 - Z_0^2}{Z_{0o}^2 + Z_0^2} = -\frac{Z_{0e}^2 - Z_0^2}{Z_{0e}^2 + Z_0^2}$$

Si operamos en esta igualdad:

$$(Z_{0o}^2 - Z_0^2)(Z_{0e}^2 + Z_0^2) = -(Z_{0e}^2 - Z_0^2)(Z_{0o}^2 + Z_0^2)$$

Y desarrollamos:

$$Z_{0o}^2 Z_{0e}^2 + Z_{0o}^2 Z_0^2 - Z_0^2 Z_{0e}^2 - Z_0^4 = -Z_{0o}^2 Z_{0e}^2 - Z_0^2 Z_{0e}^2 + Z_{0o}^2 Z_0^2 + Z_0^4$$

Simplificamos los términos que están con el mismo signo:

$$Z_{0o}^2 Z_{0e}^2 = Z_0^4$$

O lo que es lo mismo:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{0o} Z_{0e}}$$

Entonces,

$$k_e = -k_o = \frac{Z_{0e}^2 - Z_0^2}{Z_{0e}^2 + Z_0^2} = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}} = \alpha$$

Así, llamando  $k_e = \alpha$ , queda:

$$\begin{aligned} [S_1] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} \\ \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} & 0 \end{bmatrix} \\ [S_2] &= \begin{bmatrix} \frac{j\alpha \sin \beta \ell}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} & 0 \\ 0 & \frac{j\alpha \sin \beta \ell}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Y entonces:

$$[S] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} \\ \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{j\alpha \sin \beta \ell}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} & 0 \\ 0 & \frac{j\alpha \sin \beta \ell}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{j\alpha \sin \beta \ell}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} & 0 \\ 0 & \frac{j\alpha \sin \beta \ell}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} \\ \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Notar que, como debe suceder, la matriz es unitaria. Para simplificar, escribiremos:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{13} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{12} \\ 0 & S_{13} & S_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$S_{12} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell}$$

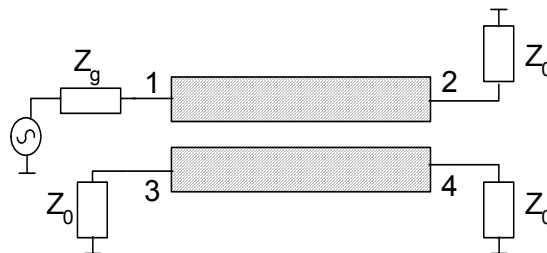
$$S_{13} = \frac{j \alpha \sin \beta \ell}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta \ell + j \sin \beta \ell}$$

Para un valor de  $\alpha$  dado (para un par  $Z_{0e}$  y  $Z_{0o}$ ), el valor del acoplamiento  $S_{13}$  depende de la longitud eléctrica ( $\Phi = \beta \ell$ ) de las líneas acopladas:

$$|S_{21}|^2 = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha^2) \cos^2 \beta \ell + \sin^2 \beta \ell} = \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 \cos^2 \beta \ell}$$

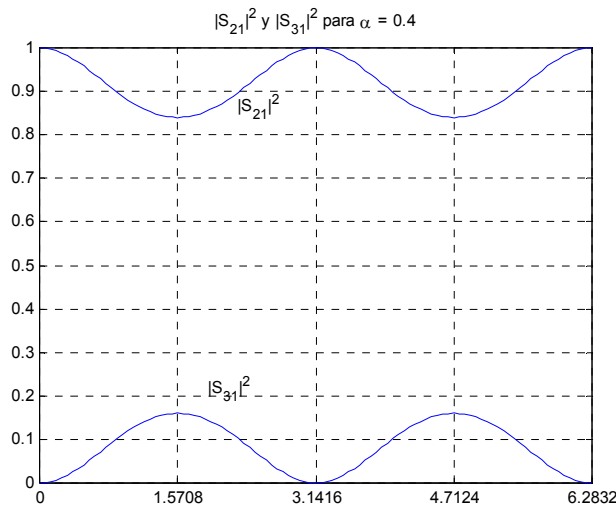
$$|S_{31}|^2 = \frac{\alpha^2 \sin^2 \beta \ell}{1-\alpha^2 \cos^2 \beta \ell}$$

$|S_{21}|^2$  es proporcional a la potencia que sale por el acceso 2 si sólo hay onda entrante por el acceso 1 al igual que  $|S_{31}|^2$  es proporcional a la potencia que sale por el acceso 3 si sólo entra señal por el acceso 1:





Si representamos estas dos cantidades en una gráfica en función de  $\Phi$  se obtiene lo siguiente:

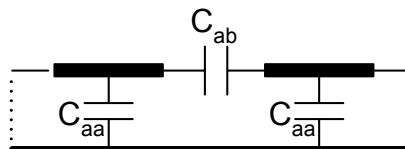


Acoplamiento máximo para  $\Phi = (2n+1)\pi/2$  lo que es equivalente a:

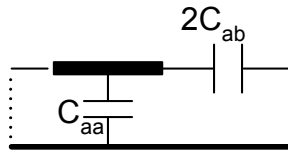
$$\ell = \frac{\lambda}{4}$$

- Comportamiento de  $Z_{0e}$  y  $Z_{0o}$

El comportamiento puede determinarse de manera semicuantitativa suponiendo propagación cuasi-TEM. En este caso, todas las características de una línea pueden determinarse a partir de su capacidad. Si tenemos un par de líneas, además de las  $C$  entre uno de los conductores de la línea y el otro (plano de masa), existe una capacidad entre los dos conductores de las dos líneas. Si son iguales:



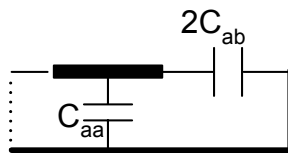
Cálculo de  $Z_{0e}$ : pared magnética. Dejamos el plano de simetría en c.a.:



$C^e = C_{aa} < C$   
 donde  $C$  es la capacidad de la  
 línea sola.

$$Z_{0e} = \frac{\sqrt{\epsilon_{ref}}}{c_0 C_{aa}} > Z'_0$$

Cálculo de  $Z_{0o}$ : pared eléctrica. Dejamos el plano de simetría en  
 cc.:



$$C^o = C_{aa} + 2C_{ab}$$

$$Z_{0o} = \frac{\sqrt{\epsilon_{ref}}}{c_0 (C_{aa} + 2C_{ab})}$$

Como que:

$$Z_{0e} Z_{0o} = Z_0^2$$

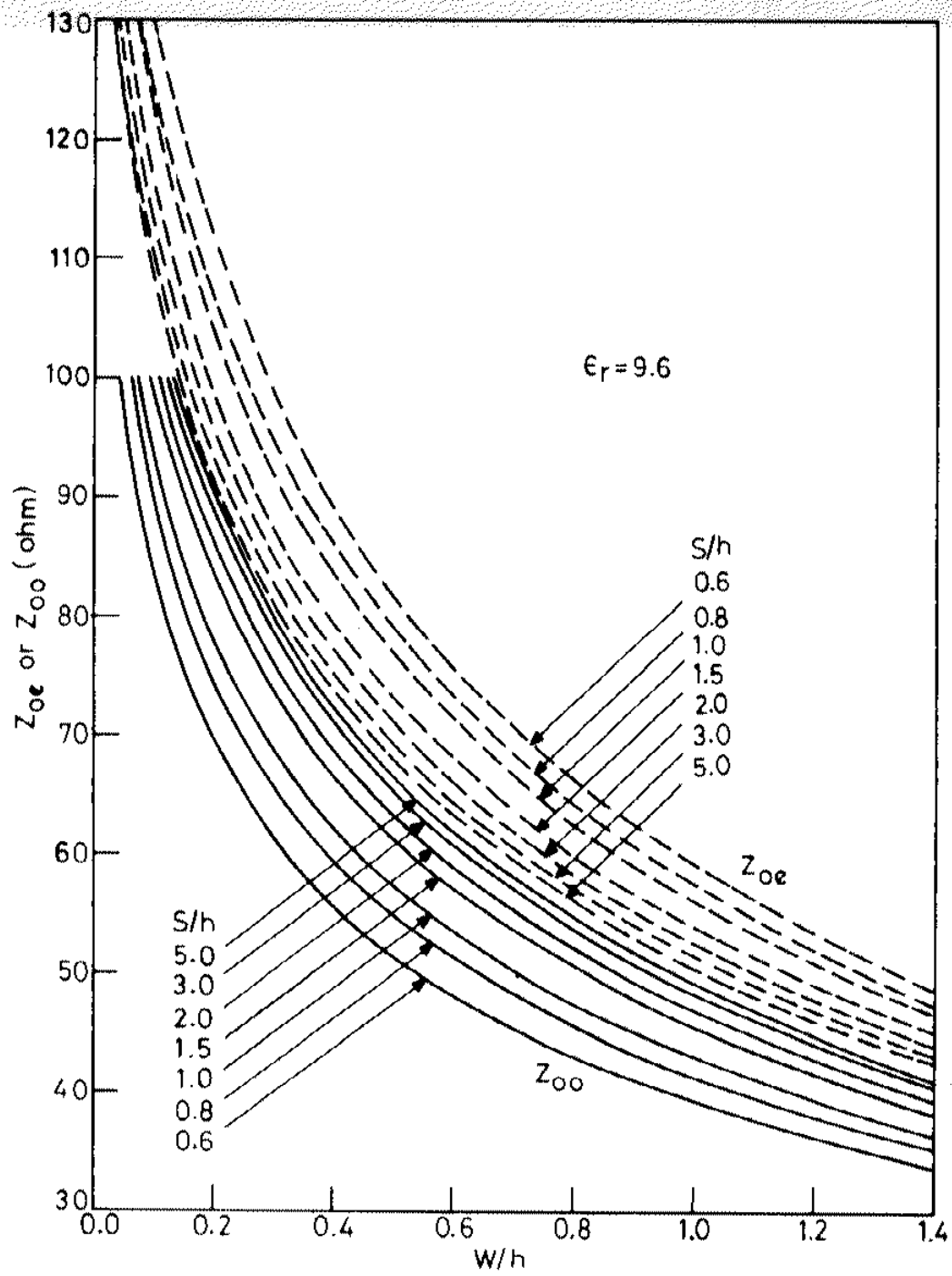
$$[C_{aa} (C_{aa} + 2C_{ab})] = C^2$$

ha de ser:

$$C_{aa} + 2C_{ab} > C$$

$$Z_{0o} = \frac{\sqrt{\epsilon_{ref}}}{c_0 (C_{aa} + 2C_{ab})} < Z'_0$$

Así, para una anchura dada de las líneas, se tiene:



Para un  $\alpha$  dado:

$$Z_{0e} = Z_0 \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$$

$$Z_{0o} = Z_0 \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

No idealidades en el acoplador:

En la práctica, un acoplador direccional nunca presenta la matriz [S] ideal que acabamos de ver, debido a:

$$Z_{0e}Z_{0o} \neq Z_0^2$$

$$\Phi_e \neq \Phi_o$$

Esta segunda condición ocurre con estructuras no TEM como microstrip.

En ambos casos aparecen no idealidades que se definen a partir de los parámetros:

- Pérdidas de retorno (return loss):

$$R.L. = -20 \log |S_{11}|$$

- Acoplamiento (coupling):

$$C = -20 \log |S_{31}|$$

- Aislamiento (isolation):

$$I = -20 \log |S_{41}|$$

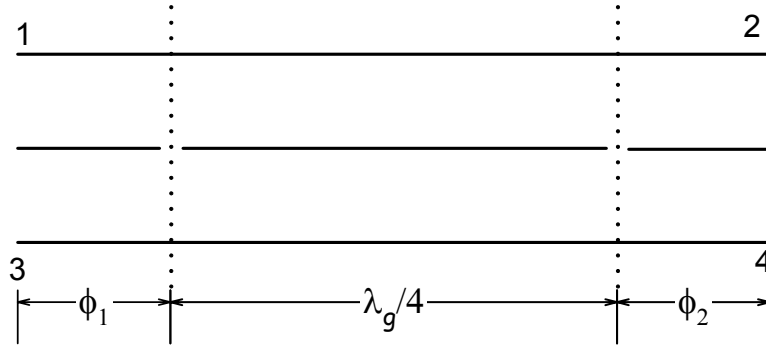
- Directividad:

$$D = I - C = -20 \log \left| \frac{S_{41}}{S_{31}} \right|$$



### 3,12 ACOPLADORES EN GUÍA

Una posible construcción de un acoplador en guía es la siguiente:



Supongamos que los accesos 2,3 y 4 están cargados con terminaciones adaptadas. Si los orificios son pequeños de manera que perturban poco a la onda que se propaga por el tramo de 1 a 2, tendremos:

$$b_3 = ke^{-j\phi_1} a_1 e^{-j\phi_1} + ke^{-j\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)} a_1 e^{-j\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)} = 0$$

Por lo tanto  $S_{31}=0$

$$b_4 = ke^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \phi_2\right)} a_1 e^{-j\phi_1} + ke^{-j\phi_2} a_1 e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \phi_1\right)}$$

por lo que:

$$S_{41} = -2jke^{-j(\phi_1 + \phi_2)}$$

Por simetría  $S_{32}=S_{41}$  y  $S_{42}=S_{31}=0$

El comportamiento de tal acoplador depende de la frecuencia ya que es necesario que la distancia entre orificios sea  $\lambda_g/4$ . Para

ampliar el ancho de banda se utilizan más de dos agujeros, jugando además con el diámetro:



$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & \delta \\ \beta & 0 & \delta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \beta \\ \delta & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta = -2jke^{-j(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$|\delta| \ll 1$$

$$|\beta| = \sqrt{1 - |\delta|^2} \approx 1$$

### 3.13 DIODOS PIN. APLICACIONES

El diodo PIN es un diodo que presenta una región P fuertemente dopada y otra región N también fuertemente dopada, separadas por una región de material que es casi intrínseco. Este tipo de diodos se utiliza en frecuencias de microondas, es decir, frecuencias que exceden de 1 GHz, puesto que incluso en estas frecuencias el diodo tiene una impedancia muy alta cuando está inversamente polarizado y muy baja cuando está polarizado en sentido directo. Además, las tensiones de ruptura están comprendidas en el margen de 100 a 1000 V.

En virtud de las características del diodo PIN se le puede utilizar como interruptor o como modulador de amplitud en frecuencias de microondas ya que para todos los propósitos se le puede presentar como un cortocircuito en sentido directo y como un circuito abierto en sentido inverso. También se le puede utilizar para conmutar corrientes muy intensas y/o tensiones muy grandes.

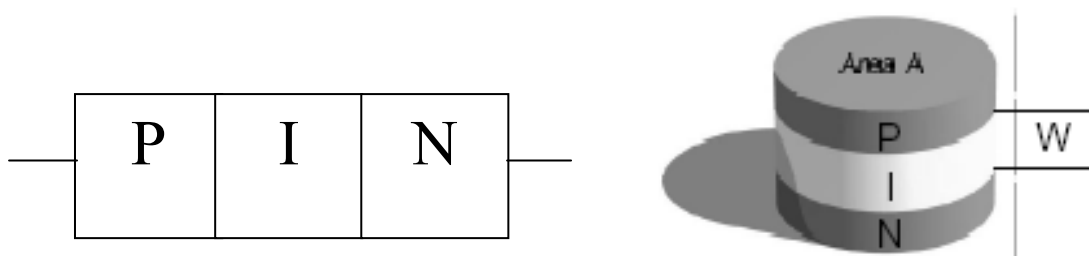
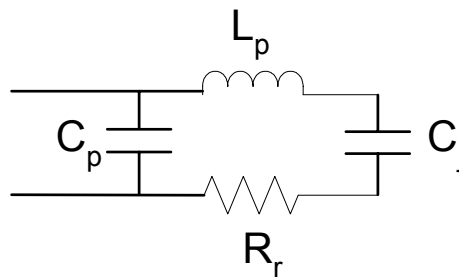


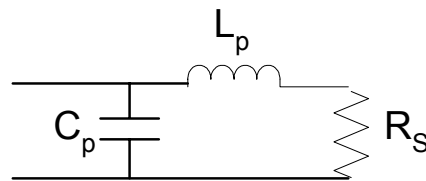
Figure 1 -PIN Diode Chip Outline

Cuando el diodo está polarizado en inversa, la zona de carga espacial abarca toda la zona intrínseca I, lo que da lugar a una capacidad de la unión muy pequeña, típicamente  $C_j < 1\text{pF}$ , lo que hace que el diodo tienda a comportarse como un circuito abierto (frente a señales de radiofrecuencia). De hecho, su circuito equivalente simplificado sería:



donde  $L_p$  y  $C_p$  son la inductancia y la capacidad parásita del encapsulado respectivamente y  $R_r$  es una pequeña resistencia que tiene en cuenta la resistencia de las zonas P y N y de los contactos.

Cuando el diodo está polarizado en directa, la unión conduce y tiende a comportarse como un cortocircuito frente a señales de radiofrecuencia. Un circuito equivalente simplificado es entonces:



con  $R_s < 1\Omega$

Aplicaciones:

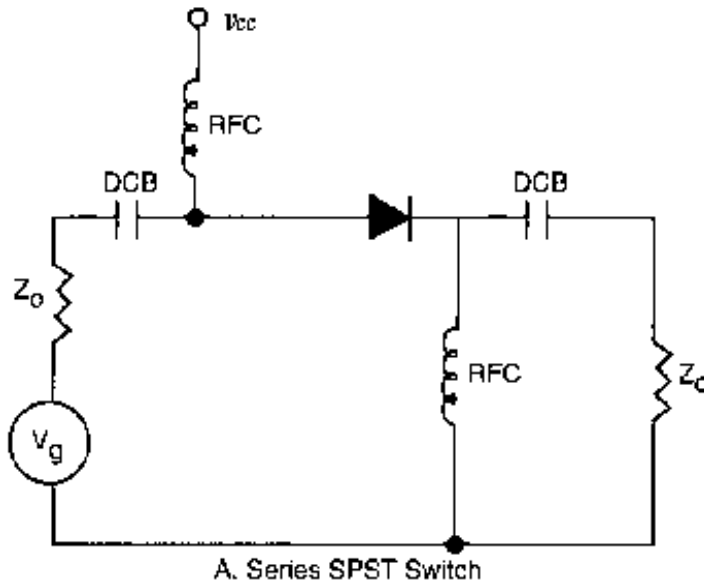
- Conmutadores
- Desfasadores controlables eléctricamente (moduladores de fase)
- Atenuadores controlables



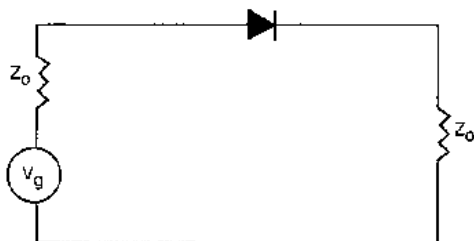
## CONMUTADORES

a) SPST : Single pole-single throw (una entrada - una salida)

a1) Configuración serie

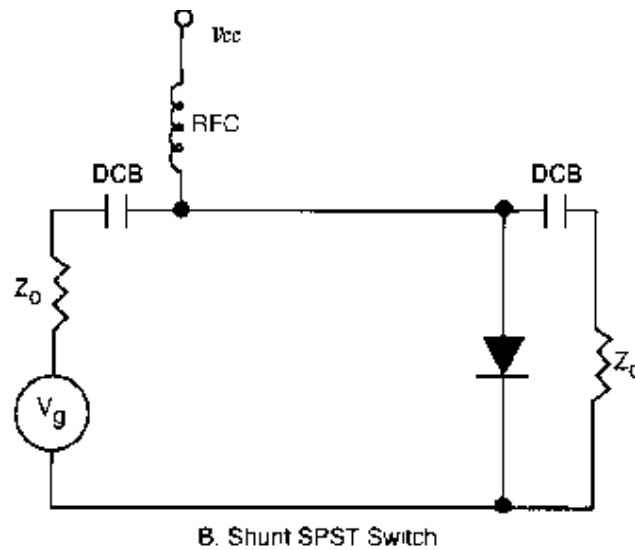


A efectos de RF las capacidades equivalen a un cortocircuito (están para filtrar la señal continua, se les llama condensadores de desacoplo de continua) y en cambio las bobinas son un bloqueo de RF (dejan pasar sólo la continua) y equivalen a un circuito abierto. Por lo tanto el circuito equivalente para RF es sencillamente:



El diodo actuará como un cortocircuito o circuito abierto según el estado de la polarización: si el diodo está en ON, la señal pasa a la carga, si el diodo está en OFF la señal queda bloqueada.

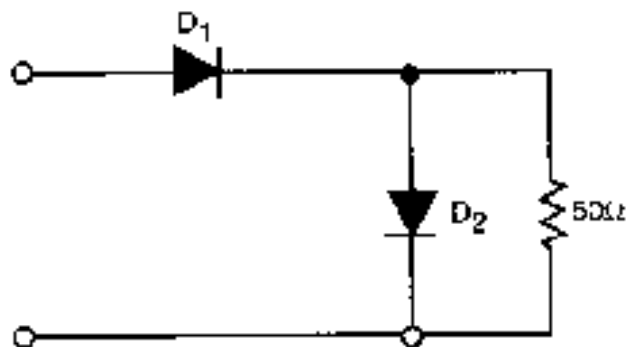
### a2) Configuración paralelo



En este caso cuando el diodo está en ON, la señal de RF queda bloqueada y cuando está en OFF, la señal llega a la carga.

### a3) Configuración serie-paralelo

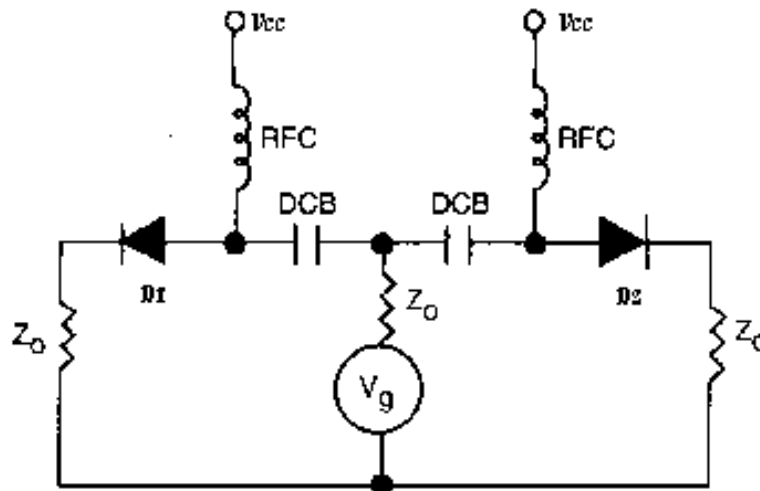
A continuación se presenta el circuito equivalente para RF:



Cuando D1 ON y D2 OFF, la señal pasa, pero cualquier otra combinación no deja pasar la señal. Por lo tanto presenta un bloqueo más importante que los dos anteriores.

b) SPDT: Single pole-double throw (Una entrada- dos salidas)

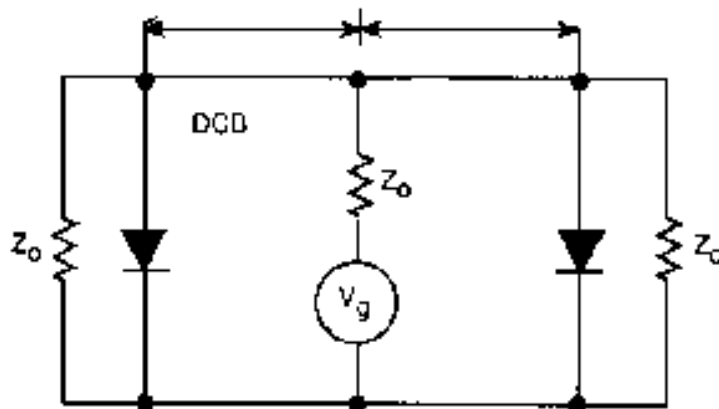
b1) Configuración serie:



B. Single Pole Double Throw Switch (SPDT)

Si D1 ON y D2 OFF la salida es por la izquierda, y si D1 OFF y D2 ON, la salida es por la derecha.

b2) Configuración paralelo



B. Single Pole Double Throw Switch (SPDT)

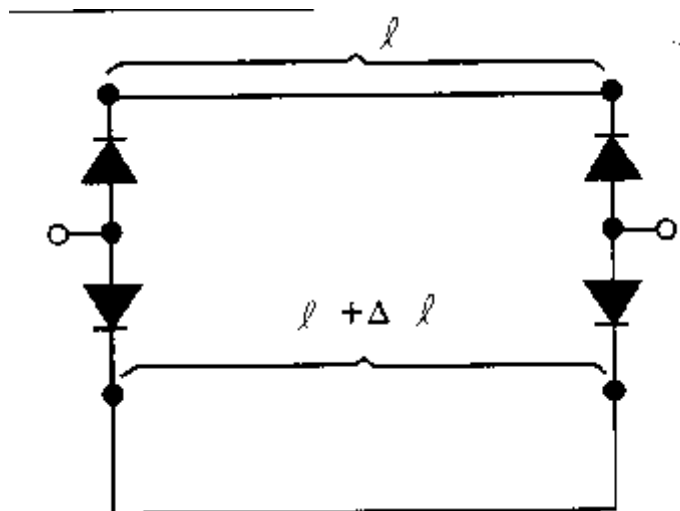
I.

Las líneas de longitud  $\lambda/4$  hacen que cuando el diodo esté en ON desde el generador de RF se vea como un circuito abierto. Por tanto, cuando el diodo de la izquierda está en OFF, equivale a un circuito abierto que en paralelo con  $Z_0$ , es como si el diodo no estuviera. Y entonces en el lado derecho si el diodo está en ON, equivale a un cortocircuito que en paralelo con  $Z_0$ , queda un cortocircuito y que se ve desde el generador como un circuito abierto. Por tanto, la señal de RF llegará a la carga situada a la izquierda. El mismo razonamiento se puede hacer para el otro estado de los diodos.

## DESFASADORES

### a) Switched line

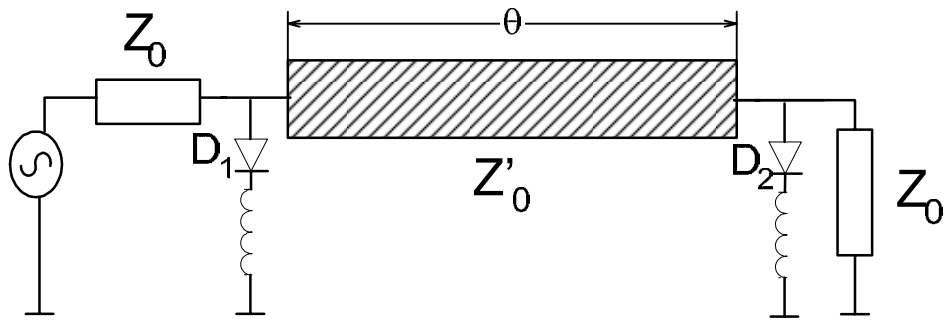
Está constituido por dos conmutadores SPST con sus salidas unidas por longitudes diferentes.



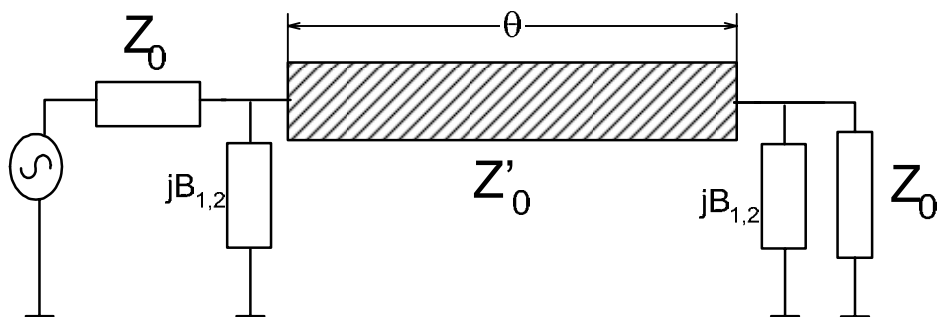
Los conmutadores se controlan simultáneamente y con la combinación de diodos PIN en OFF y en ON adecuada para que la señal que va del generador a la carga se propague por la línea de longitud  $l$  o por la de longitud  $l + \Delta l$ . La diferencia de fases según el camino que toma la señal es fija:

$$\Delta\Phi = \beta\Delta l$$

## b) Loaded line



Esto es equivalente a:



De tal manera que:

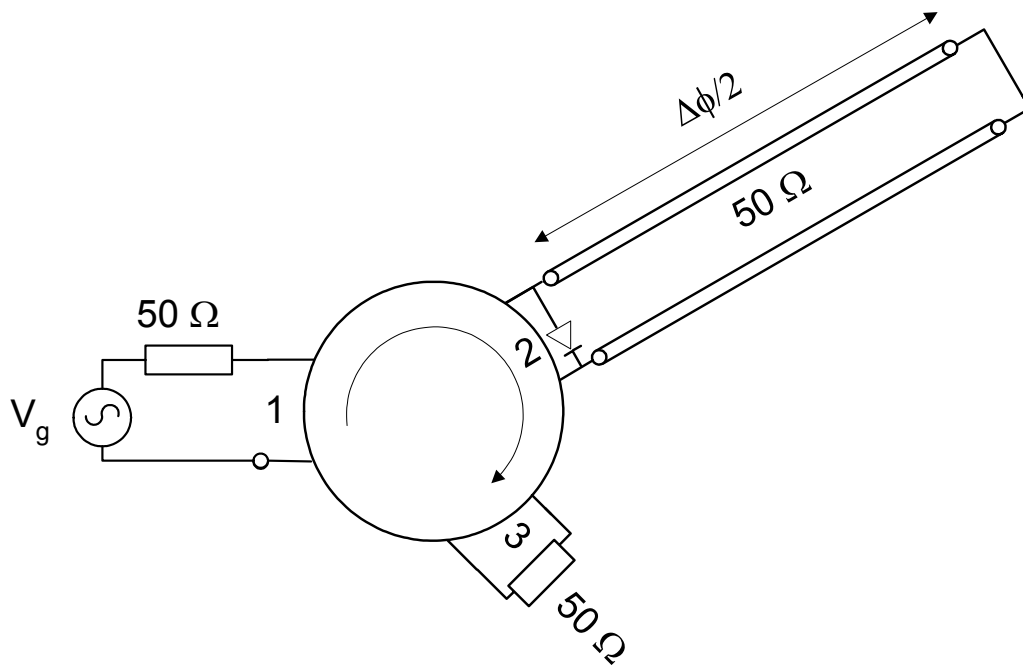


El análisis del circuito nos permite determinar las ecuaciones de diseño que solucionan  $Z'_0$ ,  $B_1$  y  $B_2$  con  $\theta$  y el desfase que se desea conseguir entre los dos estados.

$$Y'_0 = \frac{\sin \theta}{\cos \frac{\Delta \phi}{2}}$$

$$\bar{B} = \frac{\cos \theta}{\cos \frac{\Delta \phi}{2}} \pm \tan \frac{\Delta \phi}{2}$$

c) Desfasador en reflexión:



Cuando el diodo está en ON, en el acceso 2 tenemos un cortocircuito con lo cual:

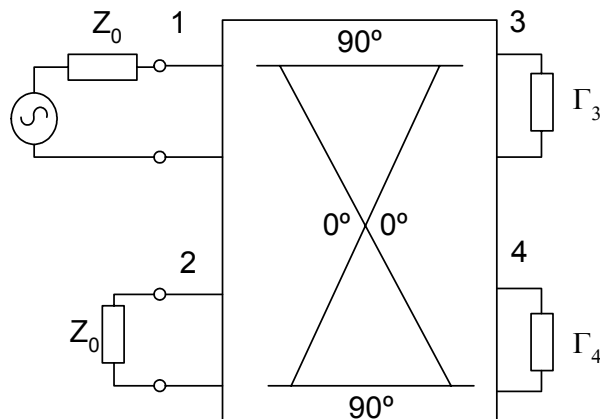
$$b_3 = -a_1$$

y cuando el diodo está en OFF, el cortocircuito está desplazado:

$$b_3 = -a_1 e^{-j\Delta\phi}$$

### d) Desfasador en transmisión

Utiliza la propiedad del híbrido de  $90^\circ$  de que si los dos accesos acoplados al de entrada se cargan con cargas iguales, no se produce reflexión hacia el acceso de entrada sino que la potencia reflejada sale por el otro acceso (el que está desacoplado



entrada):

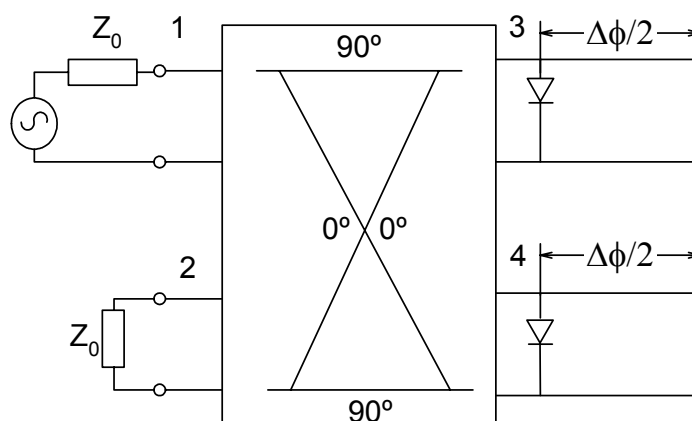
Si las cargas en los accesos tres y cuatro son iguales:

$$\Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = j\Gamma a_1$$

Si ahora en los accesos 3 y 4 colocamos diodos y cortocircuitos desplazados:



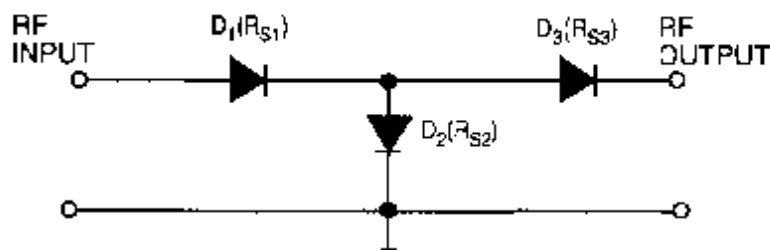
$$D1 \text{ y } D2 \text{ on} \Rightarrow b_2 = -ja_1$$

$$D1 \text{ y } D2 \text{ off} \Rightarrow b_2 = -ja_1 e^{-j\Delta\phi}$$

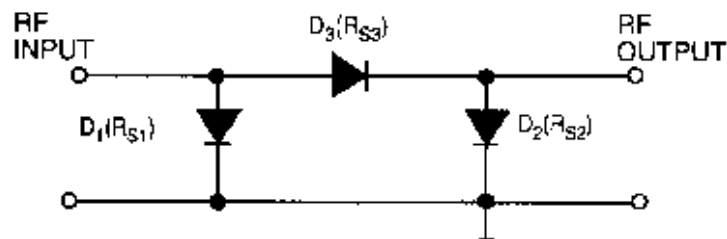
## ATENUADORES

Jugando con la corriente de polarización en directa, sin llevarla a valores muy elevados, el diodo PIN se comporta frente a señales de radiofrecuencia como una resistencia cuyo valor depende de la corriente: se puede utilizar como atenuadores controlables eléctricamente.

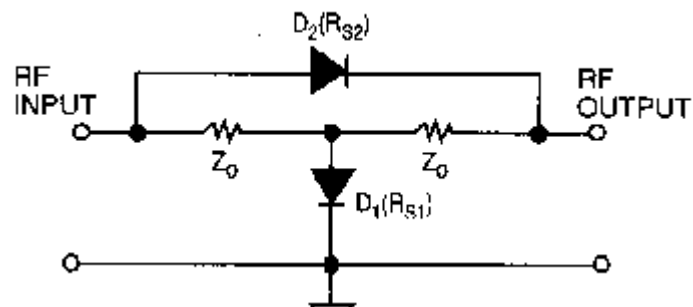
### a) Atenuador en T



### b) Atenuador en $\pi$

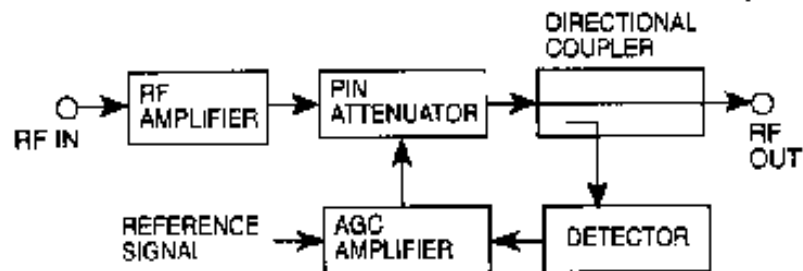


### c) Atenuador controlable con 2 diodos:



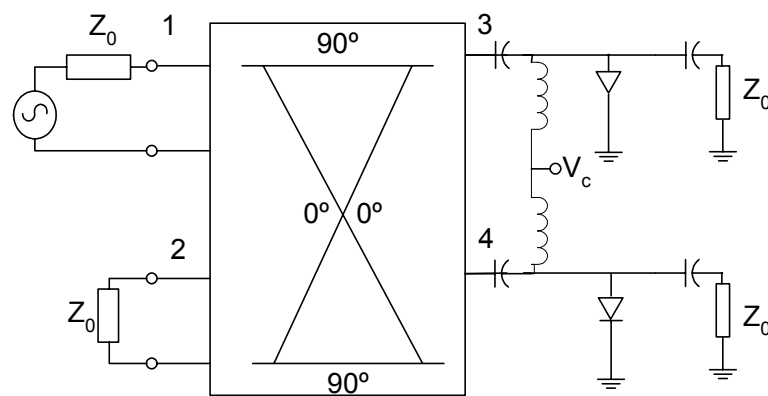


Ejemplo de utilización de atenuadores con diodos PIN controlables eléctricamente: control automático de ganancia



### MODULADOR ASK EQUILIBRADO

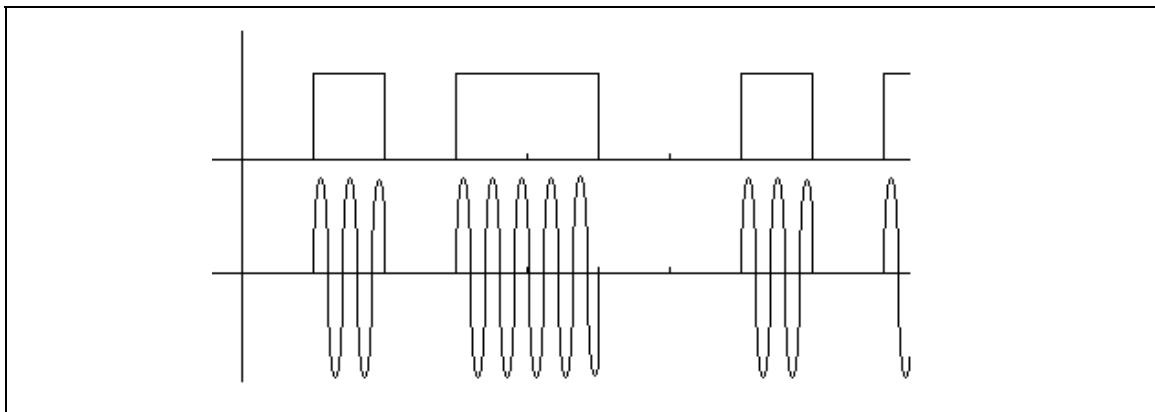
Utilizan la propiedad demostrada antes del híbrido de  $90^\circ$  con cargas idénticas en los accesos acoplados de entrada:



$$D1 \text{ y } D2 \text{ on} \Rightarrow b_2 = -ja_1$$

$$D1 \text{ y } D2 \text{ off} \Rightarrow b_2 = 0$$

Esto hace que, si la señal  $V_c$  es una señal de frecuencia mucho menor que la señal de RF, el resultado sea un modulador ASK:

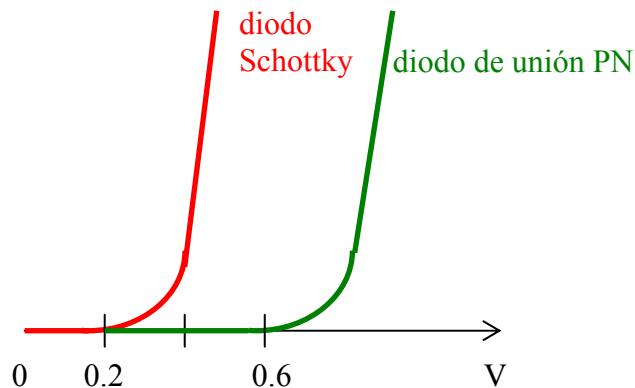


### 3.14 DIODOS SCHOTTKY. APLICACIONES

#### Estructura del diodo Schottky



Se trata esencialmente de una unión metal-semiconductor pero con una menor tensión de umbral, alrededor de 0.2 - 0.3 V:



Una unión de este tipo presenta características rectificadoras como las de la unión P-N, con el metal actuando como ánodo (como el semiconductor tipo P de la unión P-N). La unión metal semiconductor presenta, sin embargo, la ventaja que su comportamiento no está controlado por los portadores minoritarios inyectados en la zona opuesta de la unión que deben recombinarse antes de que la corriente pueda cambiar, por lo que su tiempo de respuesta es mucho más corto que el de las uniones P-N normales y puede, por consiguiente, utilizarse a frecuencias mayores. Por lo demás su característica tensión corriente es similar a la de un diodo semiconductor-semiconductor.

## ANÁLISIS DEL DIODO. PARTE RESISTIVA

La parte fundamental del diodo es la resistencia no lineal formada por la dependencia de la corriente instantánea con la tensión  $v_d$ :

$$I = I_s \left( e^{\frac{qv_d}{KT}} - 1 \right)$$

donde  $K$  es la constante de Boltzman,  $T$  es la temperatura absoluta,  $v_d$  es la tensión en bornes del diodo y  $q$  es la carga.

- Análisis en pequeña señal.

Supongamos:

$$v_d = V_0 + v_a(t)$$

$$V_0 \gg v_a(t)$$

Hacemos un desarrollo en serie de Taylor:

$$i = f(V_0) + v_a(t) \left. \frac{df}{dv_d} \right|_{V_0} = I_0 + i_a(t)$$

Corriente en continua:

$$I_{DC} = I_0 = I_s \left( e^{\frac{qV_0}{KT}} - 1 \right) \approx I_s e^{\frac{qV_0}{KT}}$$

Corriente AC:

$$i_a(t) = v_a(t) \left. \frac{df}{dv_d} \right|_{V_0} = v_a(t) G_j$$

donde  $G_j$  es la conductancia (inversa de resistencia):

$$G_j(V_0) = \left. \frac{df}{dv_d} \right|_{V_0} = \frac{q}{KT} I_s e^{\frac{qV_0}{KT}}$$

Si  $V_0$  es grande, entonces:

$$I_{DC} \approx I_s e^{\frac{qV_0}{KT}}$$

Y por tanto,

$$G_j(V_0) = \frac{q}{KT} I_{DC}$$

Y su inversa:

$$R_j(I_{DC}) = \frac{KT}{qI_{DC}}$$

La resistencia de un diodo depende inversamente de la corriente DC que le hacemos pasar:

- Si  $I_{DC}$  es pequeña,  $R_j$  es alta, el diodo equivale a un circuito abierto
- Si  $I_{DC}$  es grande,  $R_j$  es pequeña, el diodo equivale a un corto circuito.

La aplicación en pequeña señal es como conmutador.

Análisis en gran señal:

Si ahora suponemos también que:

$$v_d = V_0 + v_a(t)$$

Pero ahora la componente de alterna no es tan pequeña, hemos de coger más términos del desarrollo en serie de Taylor:

$$i = f(V_0) + v_a(t) \left. \frac{df}{dv_d} \right|_{V_0} + \frac{1}{2} v_a^2(t) \left. \frac{d^2 f}{dv_d^2} \right|_{V_0}$$

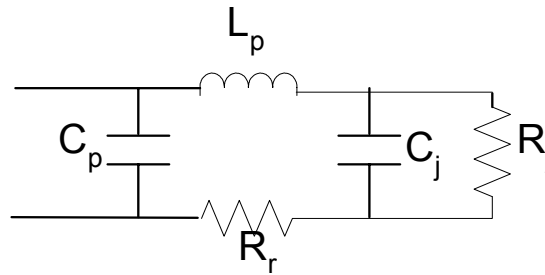
Si  $v_a$  es sinusoidal:

$$v_a(t) = V_a \cos \omega t$$

Entonces la corriente tiene los siguientes armónicos:

$$i(t) = i_{DC} + I_1 \cos \omega t + I_2 \cos 2\omega t + \dots$$

Si se toman estos tres términos, se supone que el circuito equivalente del diodo ha de incluir una resistencia no lineal. En la práctica además aparecen reactancias debido al encapsulado y a la propia estructura del diodo.



donde  $L_p$  y  $C_p$  son la inductancia y la capacidad parásita del encapsulado respectivamente y  $R_r$  es una pequeña resistencia que tiene en cuenta las resistencias de las zonas P y N y de los contactos,  $C_j$  y  $R_j$  son la capacidad y la resistencia de la unión y dependen de  $V$ .

Se encuentra lo siguiente:

- Componente DC:

$$i_{DC} = I_s \left( e^{\frac{qV_0}{KT}} - 1 \right) + I_s \left( \frac{q}{KT} \right)^2 \frac{1}{4} e^{\frac{qV_0}{KT}} V_a^2 + \dots$$

- Primer armónico:

$$I_1 = G_j(V_0) V_a \left( 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{q}{KT} \right)^2 V_a^2 \right) + \dots$$

En este caso, si  $V_0=0$  (sin polarización) obtenemos:

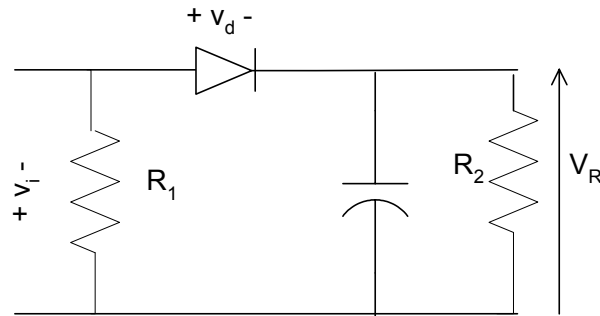
$$i_{DC} = I_s \left( \frac{q}{KT} \right)^2 \frac{1}{4} V_a^2$$

La corriente DC es proporcional a la amplitud de tensión de RF al cuadrado.

Aplicaciones del diodo Schottky:

- Detector cuadrático
- Mezclador

## DETECTOR CUADRÁTICO



$$v_d(t) = V_a \cos \omega t$$

$$i_{DC} = AV_a^2$$

$$i_a(t) = I_1 \cos \omega t = \frac{V_a}{R_j} \cos \omega t$$

Como el condensador cortocircuito la alterna:

$$v_a^2 = v_i^2$$

$$v_R = I_{DC} R_2 = AV_a^2 R_2 = Av_i^2 R_2$$

Potencia en alterna de entrada:

$$P_i = \frac{1}{2} v_i^2 \frac{1}{R_1 \parallel R_j(0)}$$

donde:

$$R_j(0) = \frac{KT}{qI_s}$$

es la resistencia equivalente del diodo en alterna.  $I_s$  es muy pequeña,  $R_j(0)$  es muy grande, equivale a un circuito abierto. Por lo tanto:

$$P_i = \frac{1}{2} v_i^2 \frac{1}{R_1}$$

$$v_i^2 = P_i 2R_1$$

Entonces la tensión en continua en bornes de la resistencia es:

$$v_R = Av_a^2 R_2 = A2R_1 R_2 P_i = A' P_i$$

### 3.15 MEZCLADOR

El mezclador usa la no linealidad del diodo para generar una salida consistente en la suma y diferencia de frecuencias de dos señales de entrada.

$$i = f(V_0) + v_a(t) \left. \frac{df}{dv_d} \right|_{V_0} + \frac{1}{2} v_a^2(t) \left. \frac{d^2 f}{dv_d^2} \right|_{V_0}$$

$$i = I_0 + v_a(t) \frac{1}{R_j} + \frac{1}{2} v_a^2(t) \frac{\alpha}{R_j}$$

Supongamos que la tensión en alterna es:

$$v_a(t) = V_{OL} \cos \omega_{OL} t + V_{RF} \cos \omega_{RF} t$$

La tensión al cuadrado:

$$v_a^2(t) = (V_{OL} \cos \omega_{OL} t + V_{RF} \cos \omega_{RF} t)^2 =$$

$$V_{OL}^2 \cos^2 \omega_{OL} t + V_{RF}^2 \cos^2 \omega_{RF} t + 2V_{OL} V_{RF} \cos \omega_{OL} t \cos \omega_{RF} t$$

Y si desarrollamos los cuadrados de los cosenos para ver los armónicos:

$$v_a^2(t) = V_{OL}^2 \left( \frac{1 + \cos 2\omega_{OL} t}{2} \right) + V_{RF}^2 \left( \frac{1 + \cos 2\omega_{RF} t}{2} \right) +$$

$$+ 2V_{OL} V_{RF} \left( \frac{\cos(\omega_{RF} + \omega_{OL})t + \cos(\omega_{RF} - \omega_{OL})t}{2} \right)$$

Hipótesis:

$$\omega_{RF} > \omega_{OL}$$

Entonces llamamos frecuencia intermedia a:

$$\omega_{FI} = \omega_{RF} - \omega_{OL}$$

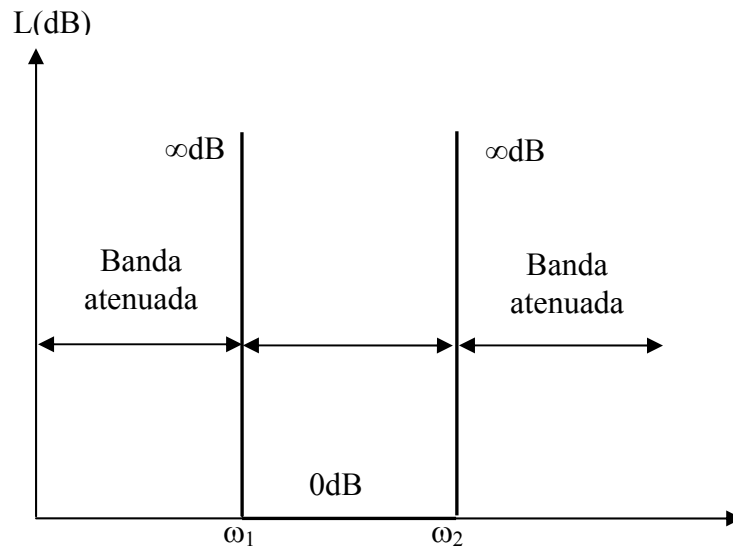
El término de frecuencia intermedia es:

$$\frac{\alpha}{2R_j} V_{OL} V_{RF} \cos(\omega_{RF} - \omega_{OL})t$$

### 3.16 FILTROS DE MICROONDAS

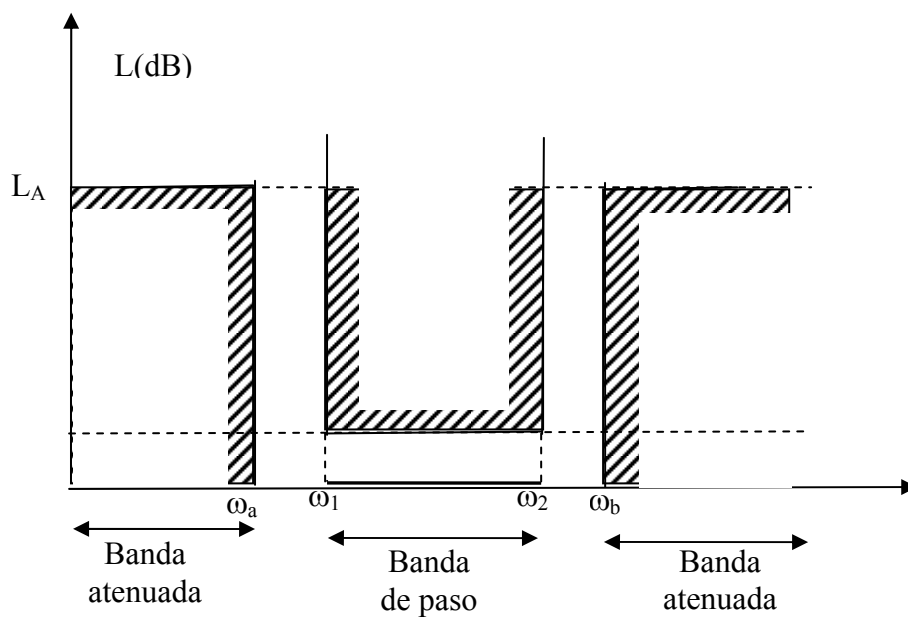
#### TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN

Nos centraremos en el diseño de filtros paso-banda cuya característica ideal es la siguiente:



Como esto es físicamente imposible (no es causal), es necesario especificar:

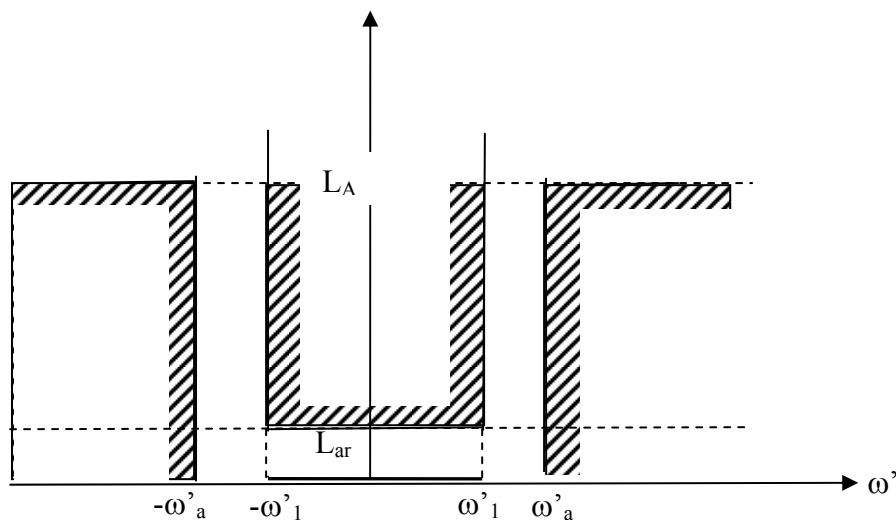
- Atenuación máxima en la banda de paso
- Atenuación mínima en la banda atenuada





De hecho, hemos realizado una aproximación a la característica ideal.

La aproximación, en realidad, se efectúa en términos de un filtro paso bajo que después se transforma en paso-banda con un cambio de variable (prototipo paso bajo). Esto facilita mucho los cálculos y los hace más universales.



Llamaremos:

- $\omega'$  a la frecuencia equivalente del filtro paso bajo,
- $\omega'_1$  a la frecuencia límite de la banda de paso (aquella para la cual la atenuación es  $L_{ar}$ ) que llamaremos frecuencia de corte,
- $\omega'_a$  a la frecuencia primera de la banda atenuada.

## TRANSFORMACIÓN PASO BAJO- PASO BANDA

Es un cambio de variable:

$$\frac{\omega'}{\omega'_1} = \frac{1}{W} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

donde:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$$

$\omega_0$  es la frecuencia central (media geométrica) de la banda de paso del filtro

$W$  es el ancho de banda relativo

Al aplicar dicha transformación cada una de las frecuencias del prototipo paso bajo equivalente se corresponde a una frecuencia del filtro paso banda:

Paso banda ( $\omega$ )	Paso bajo equivalente ( $\omega'$ )
$\omega_0$	0
$\omega_1$	-1
$\omega_2$	+1
$\omega_a$	$\omega'_a$
$\omega_b$	$\omega'_b$

Aunque el prototipo paso bajo equivalente es simétrico respecto al origen, el filtro real puede que no sea simétrico respecto a la frecuencia central de la banda de paso en lo que se refiere a la banda atenuada. Podría ser que sólo tuviéramos restricción en una banda, o que la atenuación impuesta para una y otra banda fuera diferente. Por eso debemos comprobar cual de las dos bandas atenuadas (superior e inferior a la banda de paso) es más restrictiva y ésta determinará el orden del filtro.

Hay dos aproximaciones típicas para la función paso bajo:

- Butterworth
- Chebyshev

a) **Butterworth: maximalmente plana en la banda de paso:**

La respuesta del filtro se puede caracterizar por la atenuación del mismo:

$$|S_{21}|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon \left( \frac{\omega'}{\omega_1} \right)^{2n}}$$

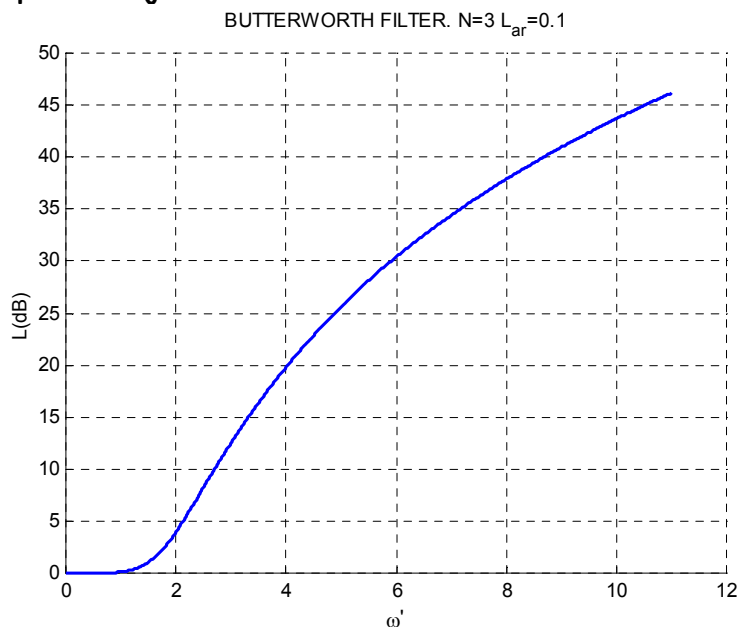
donde n es el orden del filtro o número de elementos reactivos del filtro paso bajo y epsilon:

$$\varepsilon = \log^{-1} \left( \frac{L_{ar}}{10} \right) - 1$$

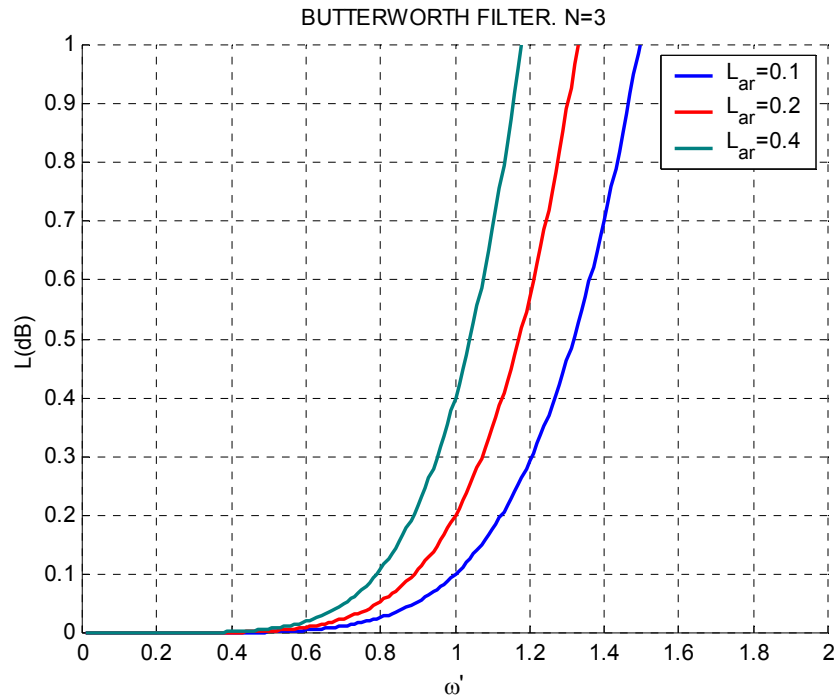
es decir, está relacionada con la máxima atenuación en la banda de paso (para  $\omega'=\omega_1$ ):

$$L_{ar} = 10 \log(1 + \varepsilon)$$

Por ejemplo, para  $n=3$ , y  $\varepsilon=0.1$ , la gráfica que se obtendría para el filtro paso bajo es:

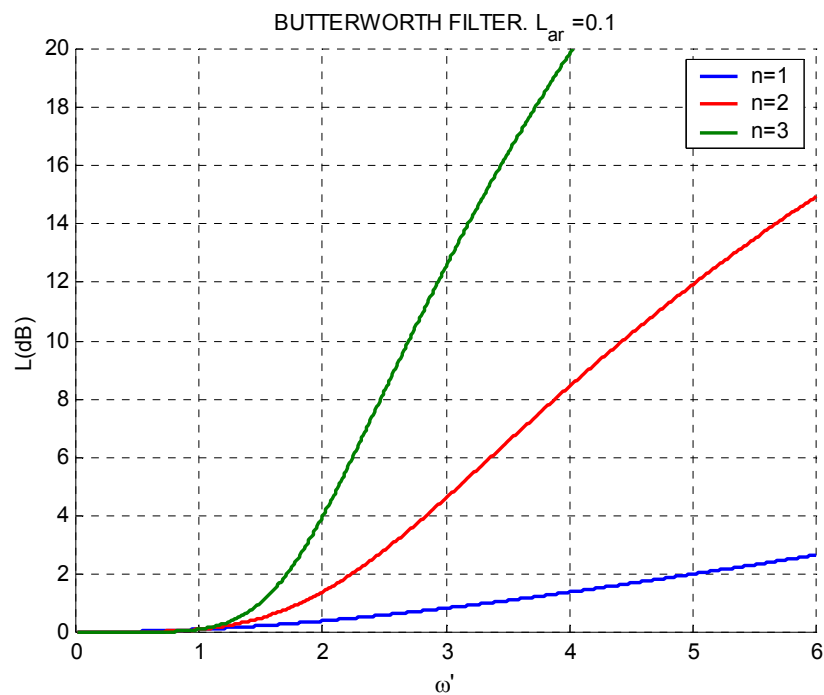


En la siguiente gráfica, se compara la respuesta del filtro para varios valores de la  $\varepsilon$  y se hace un zoom alrededor de la banda de paso:



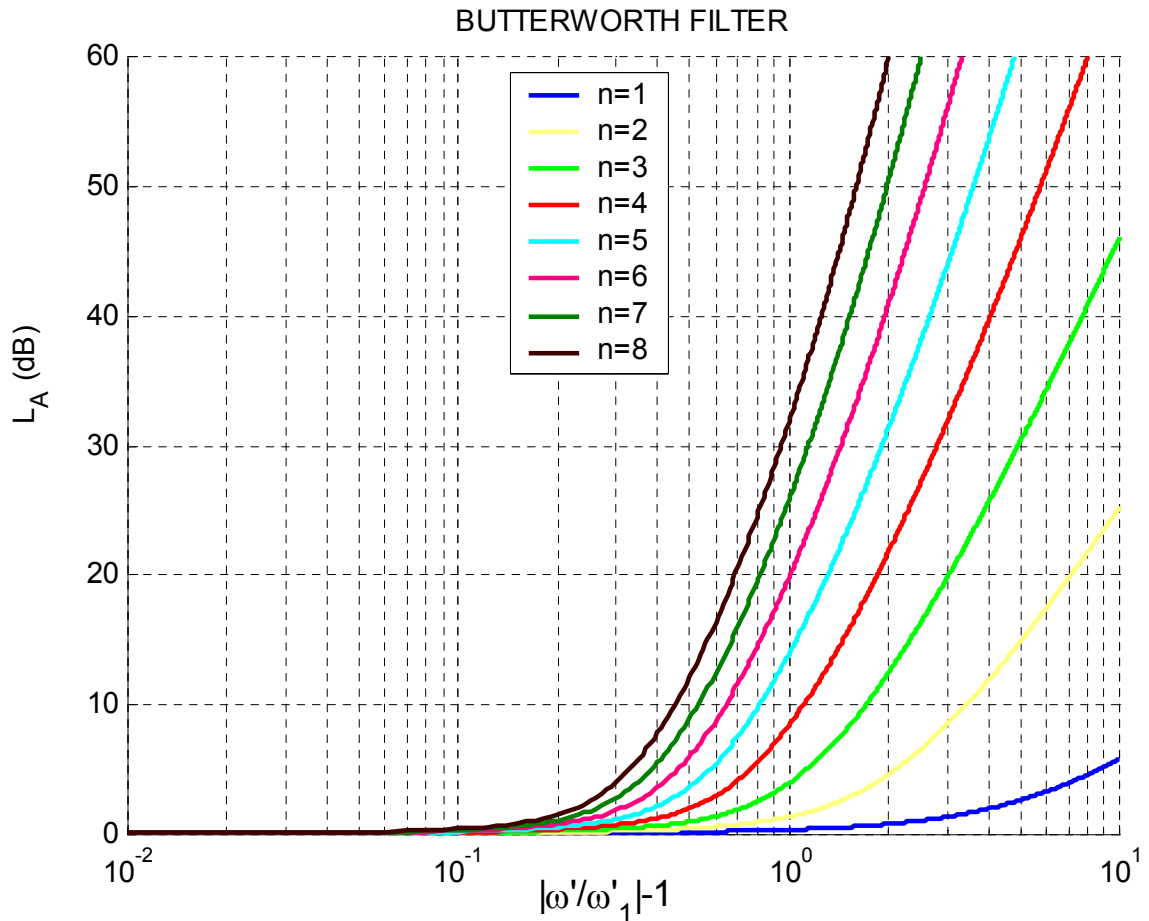
Por lo tanto vemos que cuanto más pequeño sea el valor de  $\varepsilon$ , más plana es la respuesta en la banda de paso.

También podemos ver la respuesta del filtro fijando el valor de  $L_{ar}=0.1$  y cambiando el orden del filtro:



Para escoger el orden del filtro que nos conviene, una vez se ha fijado la máxima atenuación en la banda de paso ( $L_{ar}$ ), nos

interesa fijarnos en la banda atenuada. Por esto, se suele representar en el eje de abscisas la variable:  $\left| \frac{\omega'}{\omega_1'} \right| - 1$



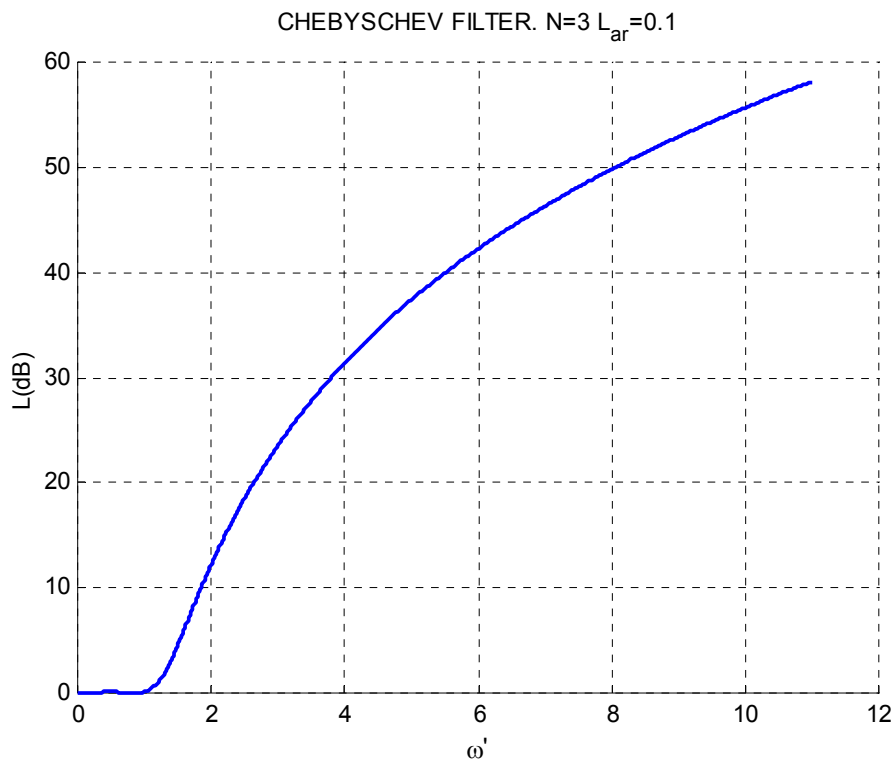
b) Chebyshev: rizado constante en la banda de paso.

La respuesta del filtro es la siguiente:

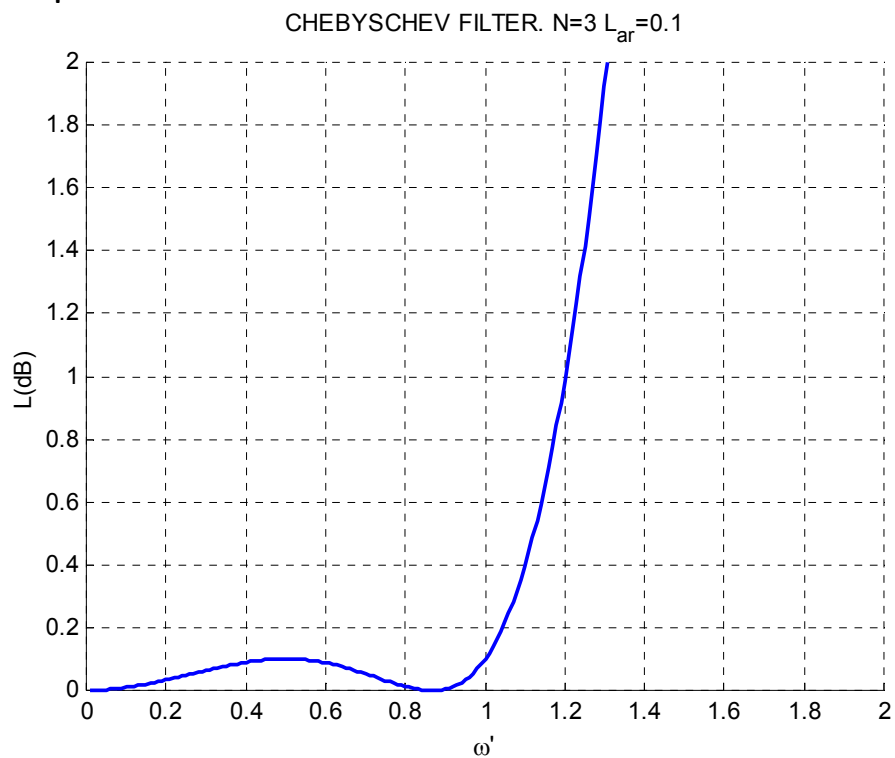
$$|S_{21}|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos^2 \left( n \cos^{-1} \left( \frac{\omega'}{\omega_1'} \right) \right)} \quad \text{si } \omega' \leq \omega_1'$$

$$|S_{21}|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon \cosh^2 \left( n \cosh^{-1} \left( \frac{\omega'}{\omega_1'} \right) \right)} \quad \text{si } \omega' \geq \omega_1'$$

Por ejemplo, para  $n=3$ , y  $\varepsilon=0.1$ , la gráfica que se obtendría para el filtro paso bajo es:

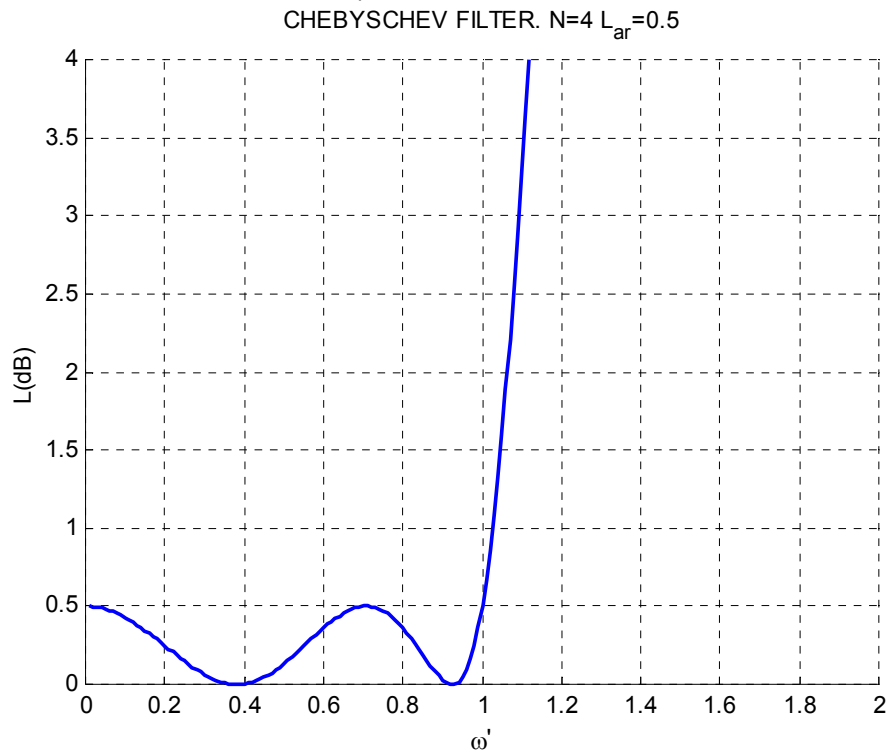


Si hacemos un zoom de la misma gráfica alrededor de la banda de paso:

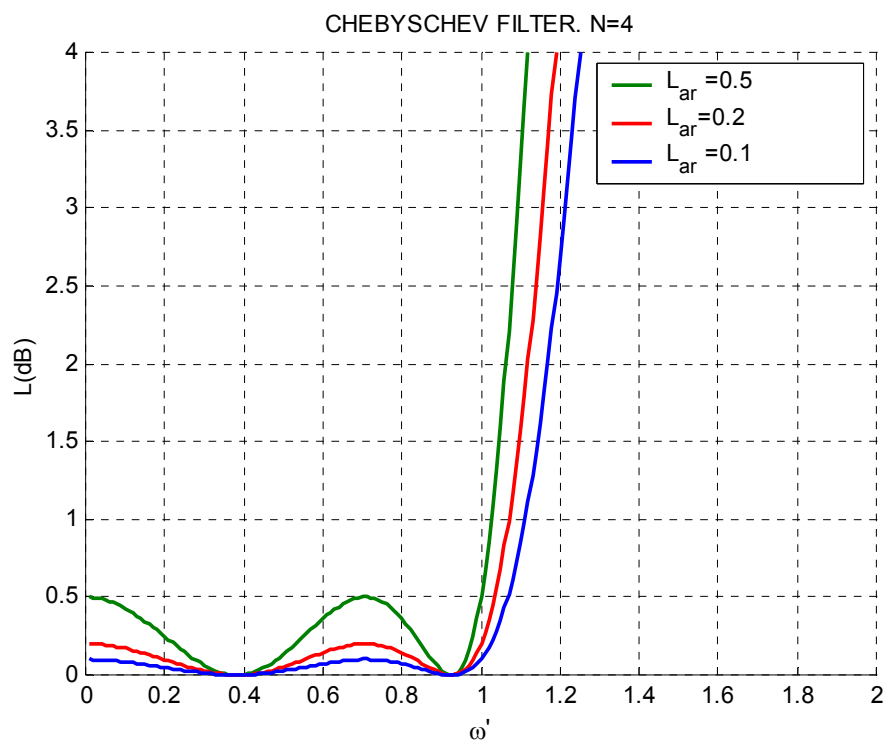


podemos apreciar el rizado constante en la banda de paso.

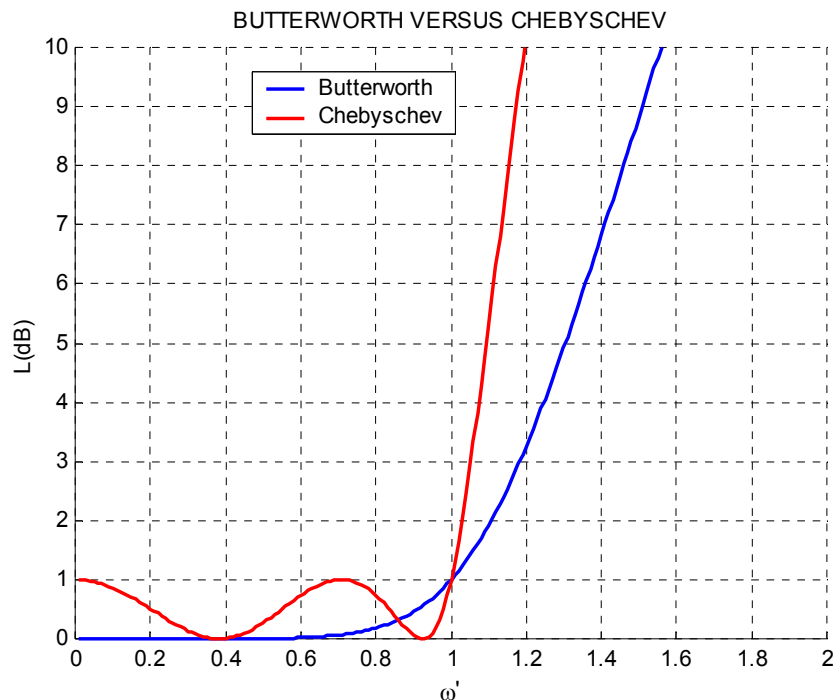
El rizado es  $L_{ar}=0.5$ , y  $n=4$



En la siguiente gráfica, se compara la respuesta del filtro para varios valores del rizado y se hace un zoom alrededor de la banda de paso:



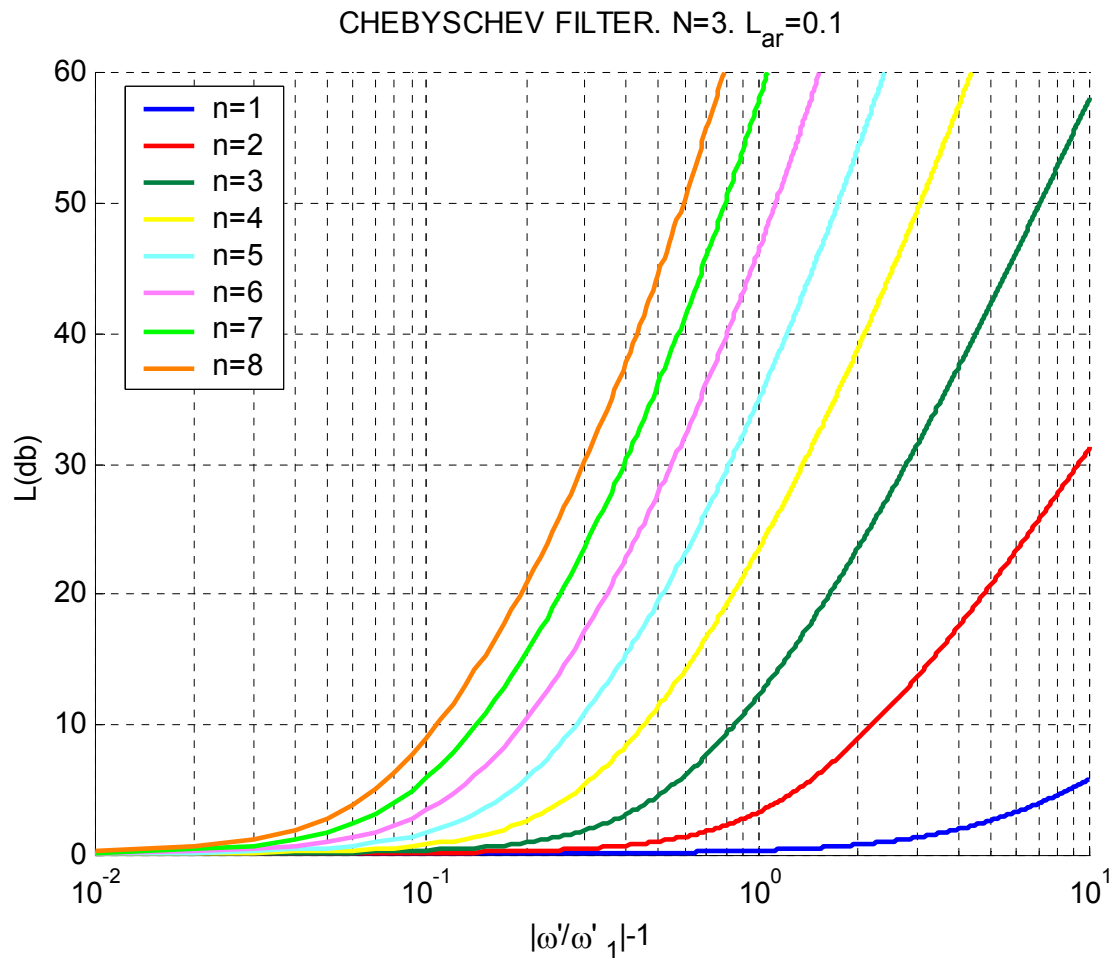
Finalmente, podemos comparar las respuestas de los filtros de Butterworth y Chebyshev. Para ello, escogemos una respuesta de orden 4 y un rizado en la banda de paso de 1dB.



A igual orden y atenuación máxima en la banda de paso, la característica Chebyshev es más abrupta fuera de la banda de paso que la Butterworth (atenúa más rápidamente).

Finalmente se muestra la característica de Chebyshev para diferentes ordenes y en el eje de abscisas la variable:  $\left| \frac{\omega'}{\omega_1'} \right| - 1$  con un rizado en la banda de paso de  $L_{ar}=0.1$





Una vez determinado el orden del filtro, se recurre a las tablas para encontrar el valor de los elementos del prototipo paso bajo.

Por ejemplo, para el caso de un filtro de Chebyshev con un rizado de 0.5 dB en la banda de paso se encuentra la siguiente tabla.

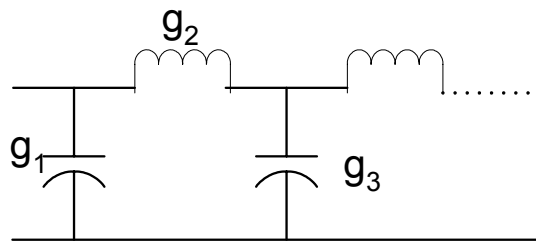
Filtro de Chebyshev. $L_{ar}=0.5$ dB. Valores de los elementos.									
orden	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$
1	0.6987	1.0000							
2	1.4029	0.7071	1.9841						
3	1.5963	1.0967	1.5963	1.0000					
4	1.6704	1.1925	2.3662	0.8419	1.9841				
5	1.7058	1.2296	2.5409	1.2296	1.7058	1.0000			
6	1.7254	1.2479	2.6064	1.3136	2.4759	0.8696	1.9841		
7	1.7373	1.2582	2.6383	1.3443	2.6383	1.2582	1.7373	1.0000	
8	1.7451	1.2647	2.6565	1.3590	2.6965	1.3389	2.5093	0.8795	1.9841

## DISEÑO FILTRO PASO BAJO

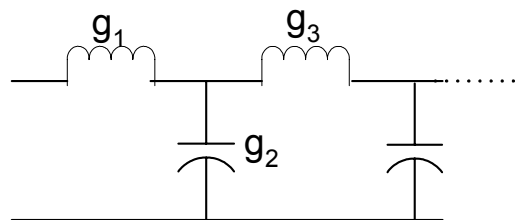
- 1- Se escoge la característica: Butterworth o Chebyshev
- 2- A partir de la atenuación requerida en la banda atenuada, se escoge el orden del filtro  $n$  que cumple dicha atenuación (a partir de las gráficas).
- 3- Se utilizan las tablas para obtener los elementos normalizados del filtro paso bajo:  $g_1, g_2, \dots, g_{n+1}$

Hay dos posibles realizaciones:

- a) Filtro que empieza con elemento en paralelo:

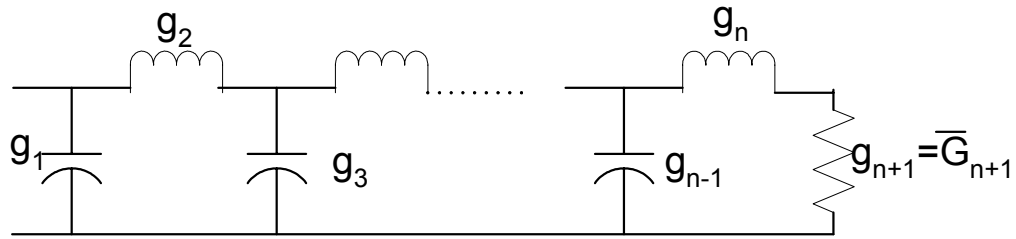


- b) Filtro que empieza con elemento en serie:

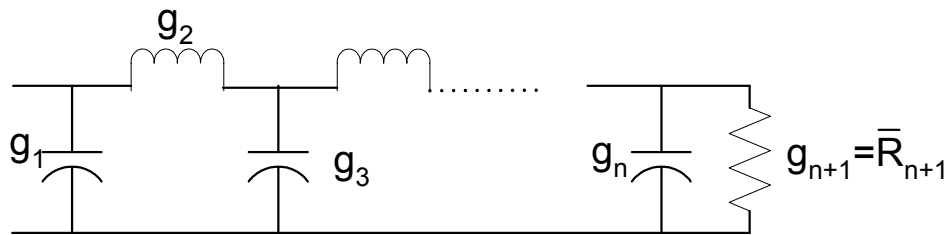


Pero además en función del orden del filtro y de la consideración anterior, hay 4 posibles soluciones

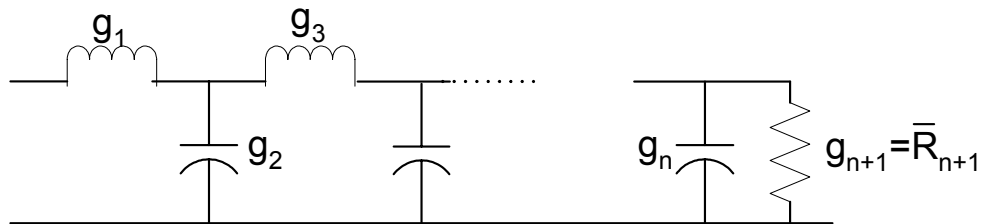
- a.1) Filtro que empieza con elemento paralelo y orden par



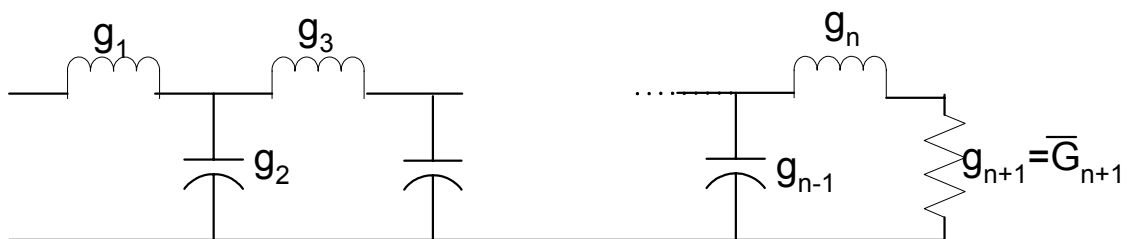
a.2) Filtro que empieza con elemento paralelo y orden impar



b.1) Filtro que empieza con elemento serie y orden par



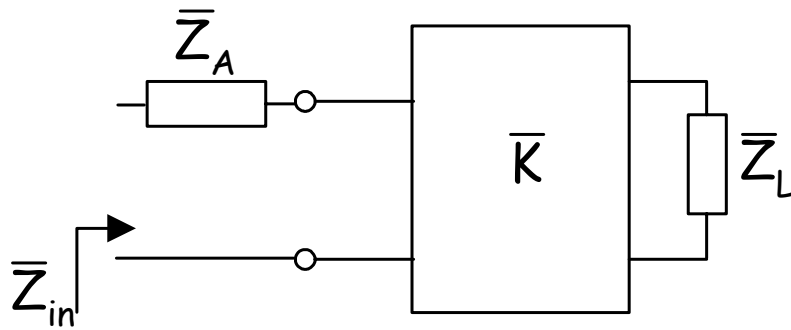
b.2) Filtro que empieza con elemento serie y orden impar



De cara a la transformación paso bajo-paso banda que aplicaremos después y que implica multiplicar por dos el número de componentes ( $2n$ ), interesa reducir el número de elementos del prototipo paso bajo, utilizando inversores de impedancia (a) o admitancia (b).

## DESPLAZAMIENTO DE INVERSORES

Supongamos que tenemos un inversor de impedancias de constante  $K$  delante del cual hay una impedancia  $Z_A$  y detrás del mismo una carga de impedancia  $Z_L$ :

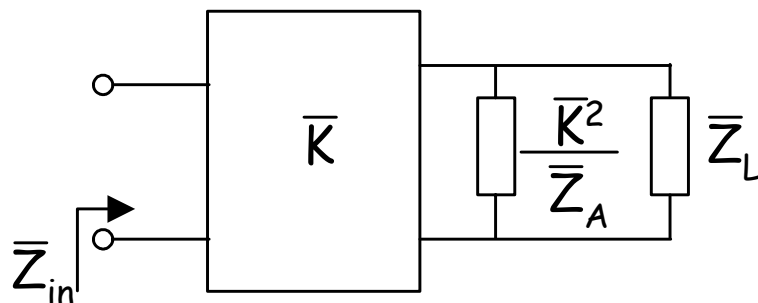


Entonces,

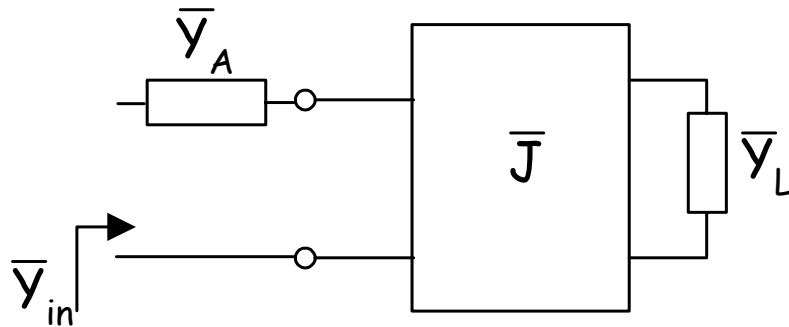
$$\bar{Z}_{in} = \bar{Z}_A + \frac{\bar{K}^2}{\bar{Z}_L}$$

que sacando factor común a la constante del inversor queda:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{in} &= \bar{K}^2 \left( \frac{\bar{Z}_A}{\bar{K}^2} + \frac{1}{\bar{Z}_L} \right) = \bar{K}^2 \left( \frac{1}{\bar{Z}_B} + \frac{1}{\bar{Z}_L} \right) = \frac{\bar{K}^2}{\bar{Z}_2} \\ \bar{Z}_2 &= \bar{Z}_L \parallel \bar{Z}_B \\ \bar{Z}_B &= \frac{\bar{K}^2}{\bar{Z}_A}\end{aligned}$$



Y si fuera de admitancias:



Entonces,

$$\bar{Z}_{in} = \frac{1}{\bar{Y}_A} + \frac{\bar{Y}_L}{\bar{J}^2}$$

Que sacando factor común a la constante del inversor queda:

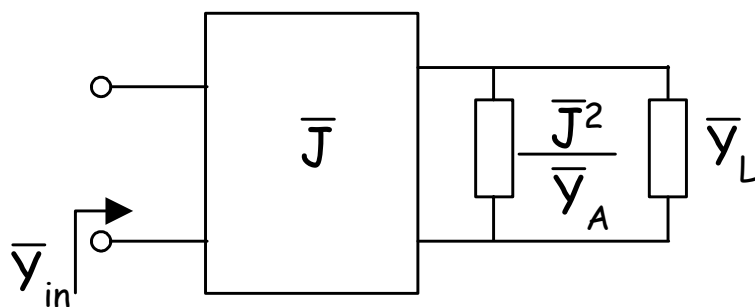
$$\frac{1}{\bar{Y}_{in}} = \bar{Z}_{in} = \frac{1}{\bar{J}^2} \left( \frac{\bar{J}^2}{\bar{Y}_A} + \bar{Y}_L \right)$$

Por tanto:

$$\bar{Y}_{in} = \frac{\bar{J}^2}{\left( \frac{\bar{J}^2}{\bar{Y}_A} + \bar{Y}_L \right)} = \frac{\bar{J}^2}{(\bar{Y}_B + \bar{Y}_L)} = \frac{\bar{J}^2}{\bar{Y}_2}$$

$$\bar{Y}_2 = \bar{Y}_L + \bar{Y}_B$$

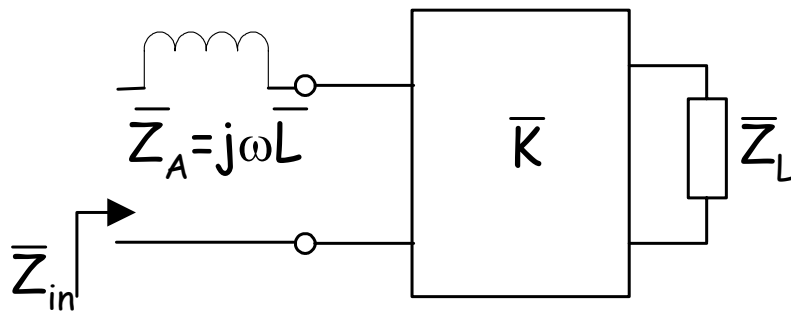
$$\bar{Y}_B = \frac{\bar{J}^2}{\bar{Y}_A}$$



Por lo tanto, un elemento en serie delante de un inversor de impedancias o admitancias es equivalente a un elemento en paralelo detrás del inversor afectado por la inversión correspondiente.

De esta manera, una bobina en serie delante de un inversor de impedancia presenta una impedancia  $Z_A$  igual a:

$$\bar{Z}_A = j\omega\bar{L}$$

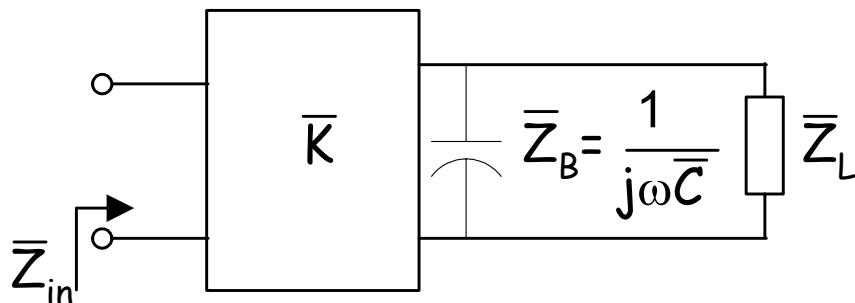


Que es equivalente a un elemento detrás del inversor de impedancia  $Z_B$  igual a:

$$\bar{Z}_B = \frac{\bar{K}^2}{\bar{Z}_A} = \frac{\bar{K}^2}{j\omega\bar{L}} = -j \frac{1}{\omega \frac{\bar{L}}{\bar{K}^2}}$$

Por lo tanto es equivalente a una capacidad de valor:

$$\bar{C} = \frac{\bar{L}}{\bar{K}^2}$$

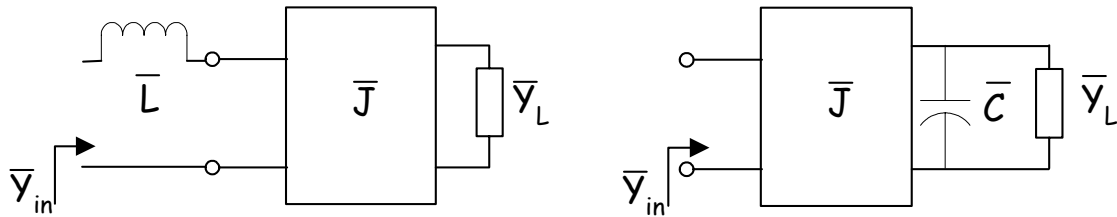


Para el inversor de admitancia, el resultado es idéntico teniendo en cuenta que:

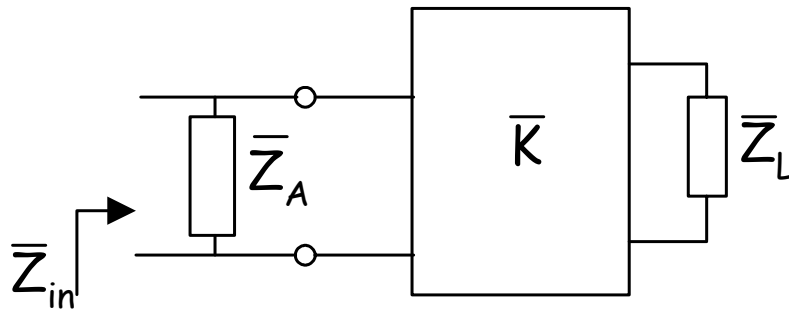
$$\bar{J} = \frac{1}{\bar{K}}$$

Y por lo tanto:

$$\bar{C} = \bar{L}\bar{J}^2$$



Análogamente, si delante del inversor de impedancias tenemos un elemento en paralelo:



$$\bar{Z}_{in} = \bar{Z}_A \parallel \frac{\bar{K}^2}{\bar{Z}_L}$$

Y por lo tanto:

$$\frac{1}{\bar{Z}_{in}} = \frac{1}{\bar{Z}_A} + \frac{\bar{Z}_L}{\bar{K}^2}$$

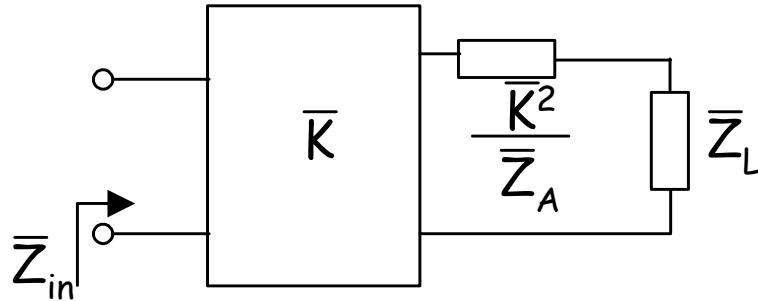
que sacando factor común a la constante del inversor queda:

$$\frac{1}{\bar{Z}_{in}} = \frac{1}{\bar{K}^2} \left( \frac{\bar{K}^2}{\bar{Z}_A} + \bar{Z}_L \right)$$

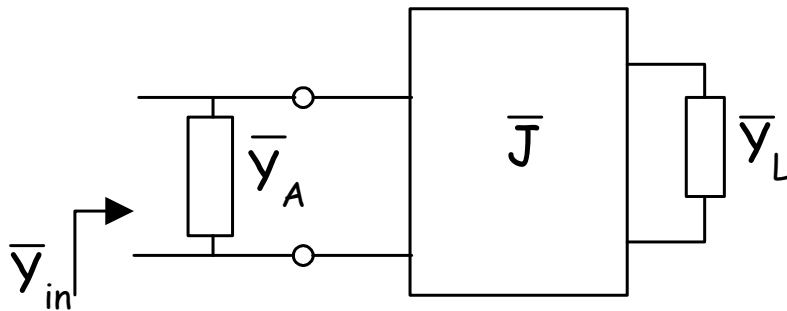
$$\bar{Z}_{in} = \frac{\bar{K}^2}{\left( \frac{\bar{K}^2}{\bar{Z}_A} + \bar{Z}_L \right)} = \frac{\bar{K}^2}{\bar{Z}_2}$$

$$\bar{Z}_2 = \bar{Z}_L + \bar{Z}_B$$

$$\bar{Z}_B = \frac{\bar{K}^2}{\bar{Z}_A}$$



Y de manera idéntica para el inversor de admitancias:

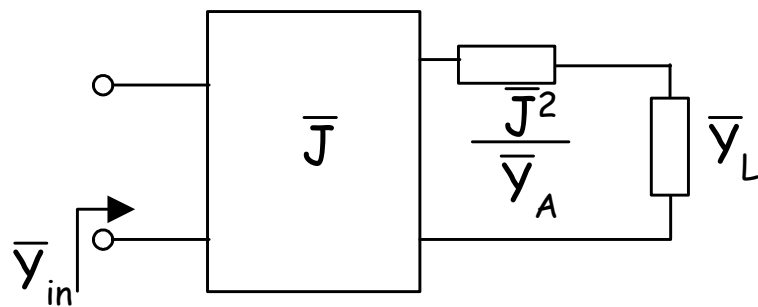


$$\bar{Y}_{in} = \bar{Y}_A + \frac{\bar{J}^2}{\bar{Y}_L}$$

$$\bar{Y}_{in} = \bar{J}^2 \left( \frac{\bar{Y}_A}{\bar{J}^2} + \frac{1}{\bar{Y}_L} \right) = \bar{J}^2 \left( \frac{1}{\frac{\bar{J}^2}{\bar{Y}_A}} + \frac{1}{\bar{Y}_L} \right) = \frac{\bar{J}^2}{\bar{Y}_2}$$

$$\frac{1}{\bar{Y}_2} = \frac{1}{\bar{Y}_L} + \frac{1}{\bar{Y}_B}$$

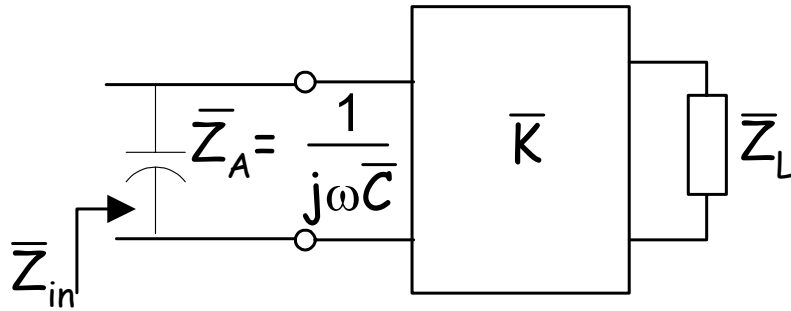
$$\bar{Y}_B = \frac{\bar{J}^2}{\bar{Y}_A}$$





Si esto lo aplicamos al caso de tener delante del inversor una capacidad en paralelo, ésta presenta una impedancia  $\bar{Z}_A$  igual a:

$$\bar{Z}_A = \frac{1}{j\omega \bar{C}}$$

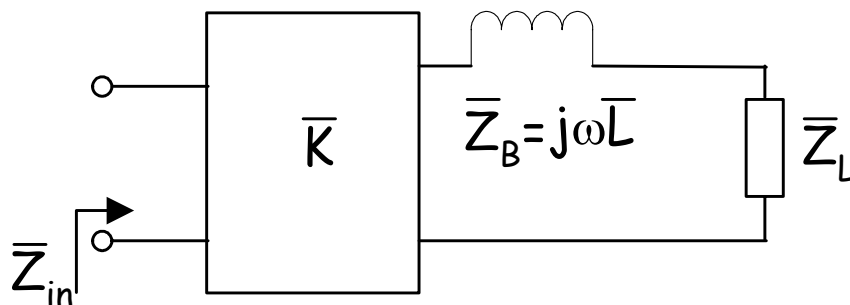


Que es equivalente a un elemento detrás del inversor de impedancia  $\bar{Z}_B$  igual a:

$$\bar{Z}_B = \frac{\bar{K}^2}{\bar{Z}_A} = j\omega \bar{K}^2 \bar{C}$$

Por lo tanto es equivalente a una bobina de valor:

$$\bar{L} = \bar{C} \bar{K}^2$$

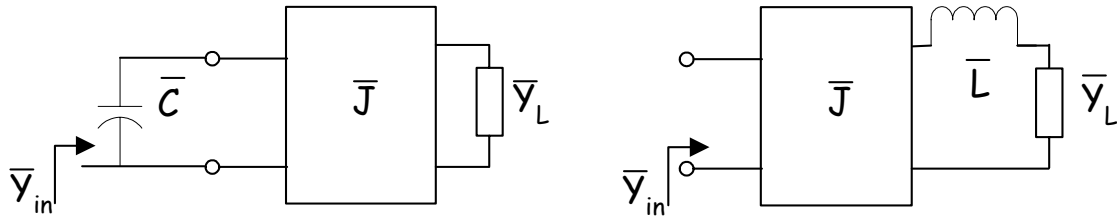


Para el inversor de admitancia, el resultado es idéntico teniendo en cuenta que:

$$\bar{J} = \frac{1}{\bar{K}}$$

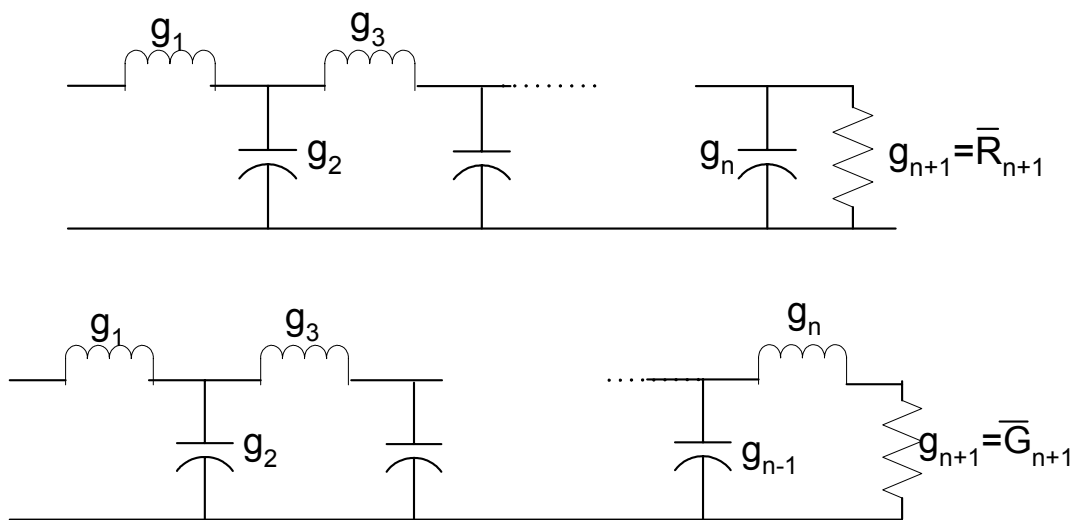
Y por lo tanto:

$$\bar{L} = \frac{\bar{C}}{\bar{J}^2}$$

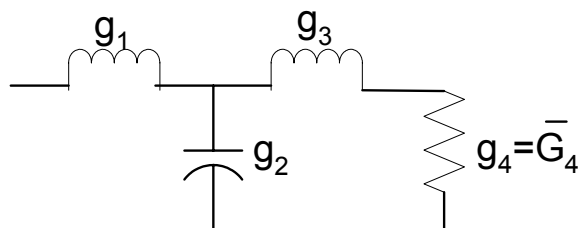


## REALIZACIÓN CON INVERSORES DE ADMITANCIA

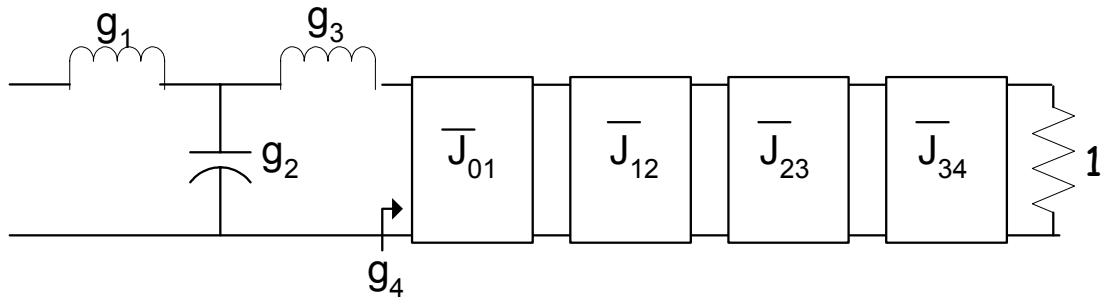
Se parte de la realización (b):



Vamos a particularizar al caso  $n=3$  y luego generalizaremos:



Colocamos entre  $g_3$  y  $g_4$  4 inversores de admitancias (uno más que orden del filtro) que, de momento, se puede ver como una red adaptadora de impedancias sin pérdidas:

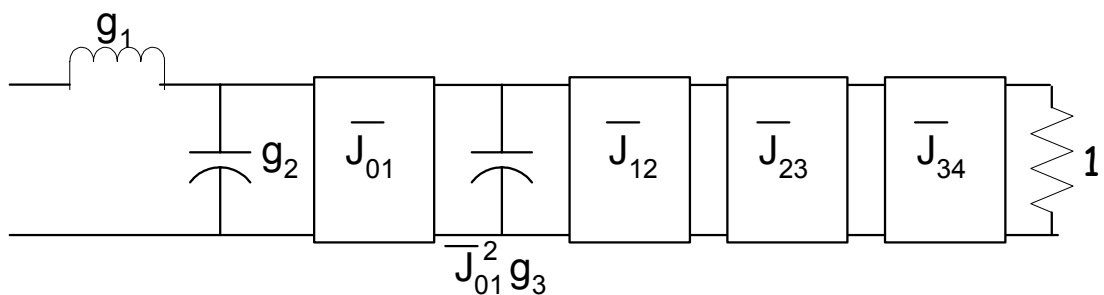


Se ha de cumplir que desde la entrada del primer inversor la admitancia que se vea sea igual a  $g_4$ :

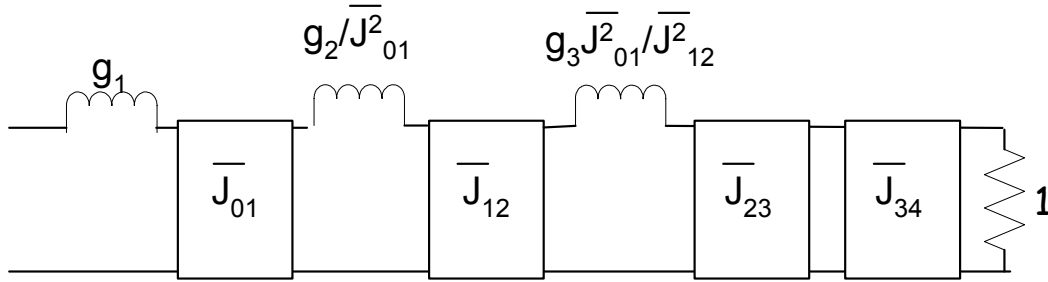
$$\bar{Y}_{in} = g_4 = \frac{\bar{J}_{01}^2}{\bar{Y}_L} = \frac{\bar{J}_{01}^2}{\bar{J}_{12}^2} \frac{\bar{J}_{23}^2}{\bar{J}_{34}^2} 1$$

Y esta es la primera ecuación que relaciona las constantes de los inversores con el elemento  $g_4$  del prototipo paso bajo. Tenemos tres grados de libertad (podemos escoger tres constantes).

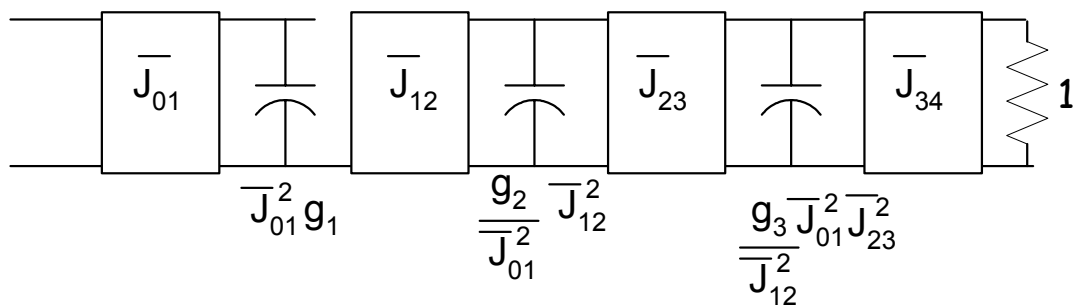
Si ahora en el circuito que nos ha quedado, vamos desplazando las bobinas, condensadores, se obtienen circuitos equivalentes y que por lo tanto, siguen presentando la misma característica del filtro inicial.



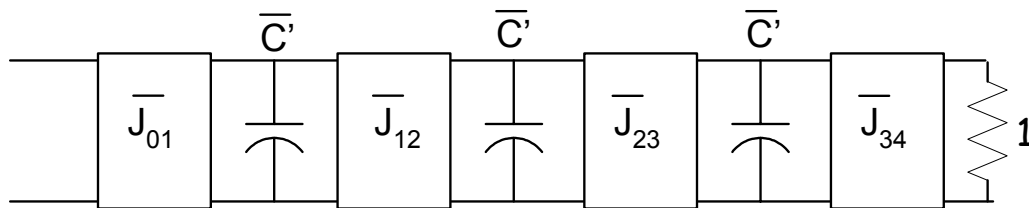
En el siguiente paso desplazamos los dos condensadores, quedando tres bobinas:



Y en el último paso desplazamos las tres bobinas, quedando tres condensadores:



Supongamos que las constantes que podíamos escoger (tres grados de libertad), las escogemos de tal manera que los tres condensadores son iguales a  $\bar{C}'$  (valor a determinar):



Entonces,

$$\bar{C}' = g_1 \bar{J}_{01}^2$$

Despejando el valor de la constante, ésta queda que ha de ser:

$$\bar{J}_{01} = \sqrt{\frac{\bar{C}'}{g_1}}$$

Hacemos lo mismo para el segundo condensador:

$$\bar{C}' = g_2 \frac{\bar{J}_{12}^2}{\bar{J}_{01}^2}$$

Despejando la constante del segundo inversor y sustituyendo la del primero nos lleva a:

$$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{C}'}{\sqrt{g_1 g_2}}$$

Repetimos lo mismo para el tercero:

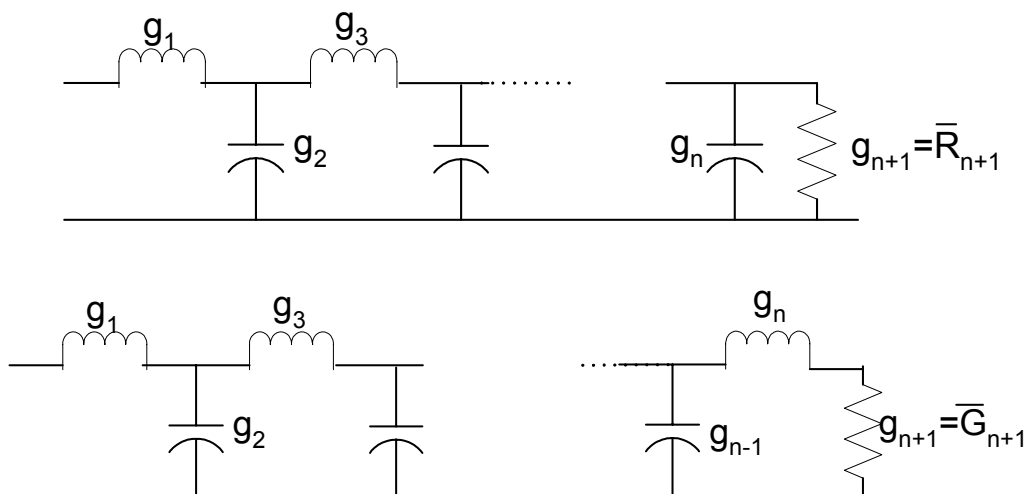
$$\bar{J}_{23} = \frac{\bar{C}'}{\sqrt{g_2 g_3}}$$

Y finalmente, de la ecuación que habíamos obtenido para  $g_4$ , despejamos la última constante:

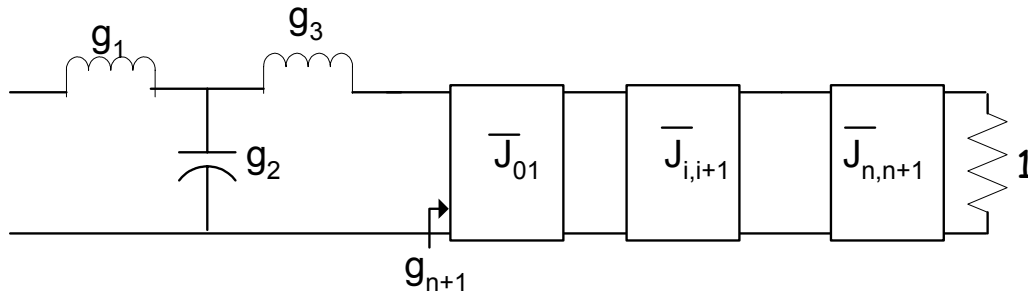
$$\bar{J}_{34} = \sqrt{\frac{\bar{C}'}{g_3 g_4}}$$

Ahora sólo tenemos un grado de libertad: escoger  $\bar{C}'$ .

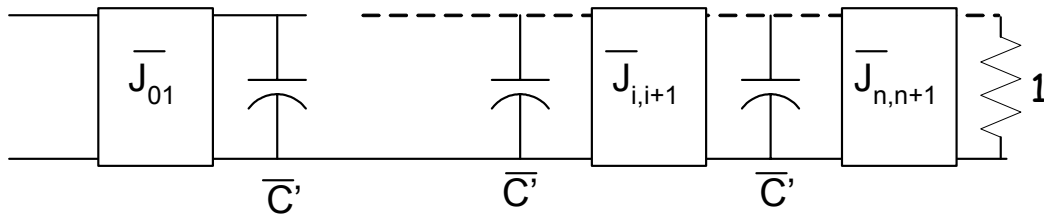
Y esto lo podemos generalizar para un filtro de orden  $n$ . Partimos del prototipo paso bajo b) generalizado:



Colocamos tantos inversores de admitancia como orden del filtro más uno delante de  $g_{n+1}$ :



Movemos los diferentes elementos del prototipo paso bajo de tal manera que al final todos sean capacidades dispuestas entre dos inversores de admitancia y se hacen todas del mismo valor:



Entonces los valores de las constantes de los inversores quedan:

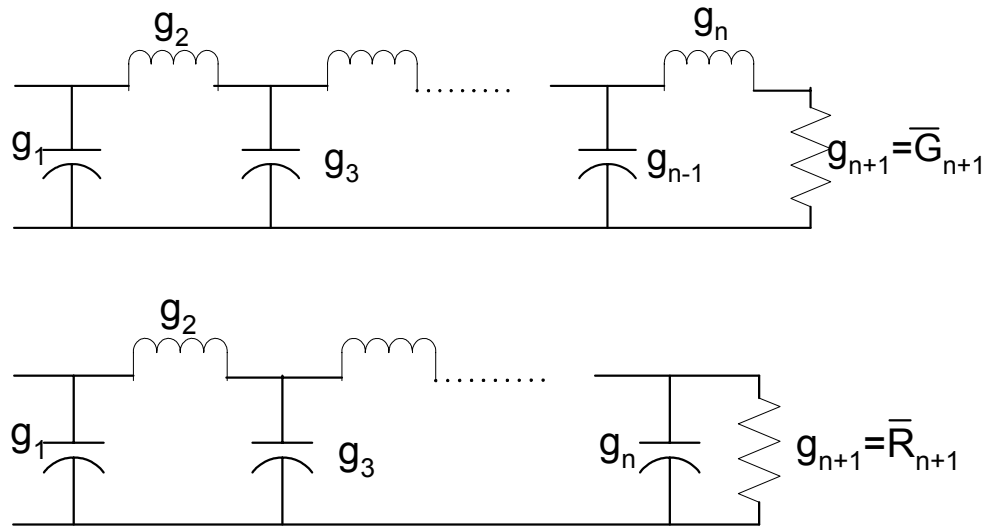
$$\bar{J}_{01} = \sqrt{\frac{\bar{C}'}{g_1}}$$

$$\bar{J}_{i,i+1} = \frac{\bar{C}'}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

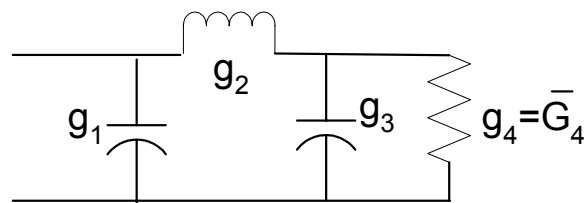
$$\bar{J}_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\bar{C}'}{g_n g_{n+1}}}$$

## FILTRO CON INVERSORES DE IMPEDANCIA

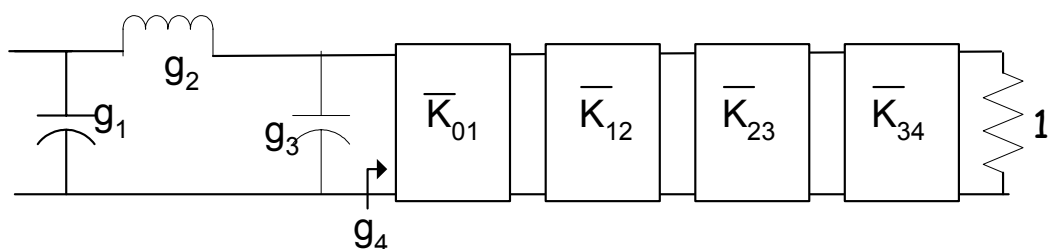
Veamos el caso dual. Partimos del prototipo paso bajo que empieza con capacidad paralelo:



Vamos a particularizar al caso  $n=3$  y luego generalizaremos:



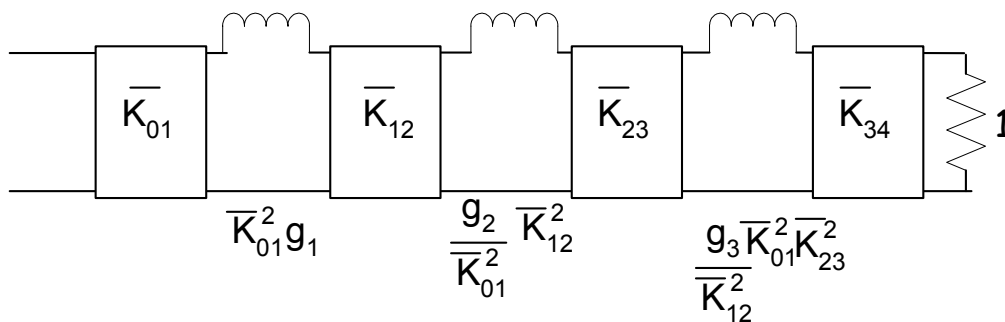
Colocamos entre  $g_3$  y  $g_4$  4 inversores de impedancia (uno más que orden del filtro) que, de momento, se puede ver como una red adaptadora de impedancias sin pérdidas:



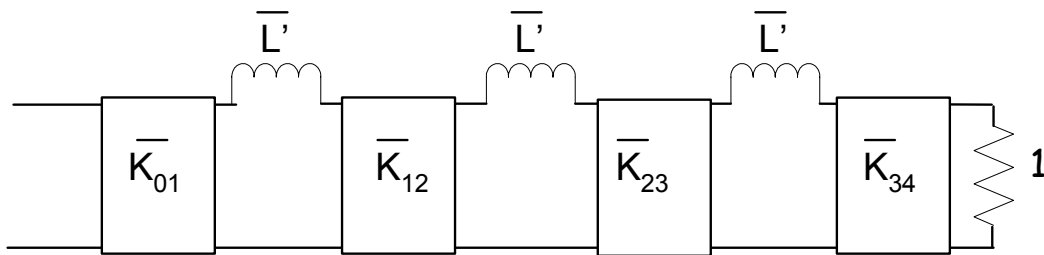
Se ha de cumplir que desde la entrada del primer inversor la impedancia que se vea sea igual a  $g_4$ :

$$\bar{Z}_{in} = g_4 = \frac{\bar{K}_{01}^2}{\bar{Z}_L} = \frac{\bar{K}_{01}^2}{\bar{K}_{12}^2} \frac{\bar{K}_{23}^2}{\bar{K}_{34}^2} 1$$

Vamos desplazando los elementos hasta que queden 3 bobinas serie entre inversores:



Escogemos las constantes de tal manera que las bobinas sean todas iguales a  $L'$  (valor a determinar):



Por tanto,

$$\bar{L}' = g_1 \bar{K}_{01}^2$$

Despejando el valor de la constante, ésta queda que ha de ser:

$$\bar{K}_{01} = \sqrt{\frac{\bar{L}'}{g_1}}$$



Y repitiendo para el resto de manera análoga al caso dual:

$$\bar{K}_{12} = \frac{\bar{L}'}{\sqrt{g_1 g_2}}$$

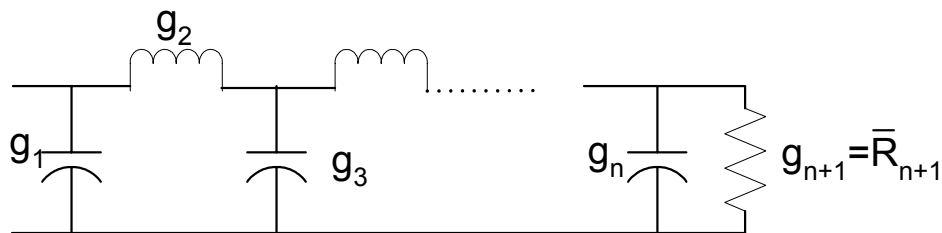
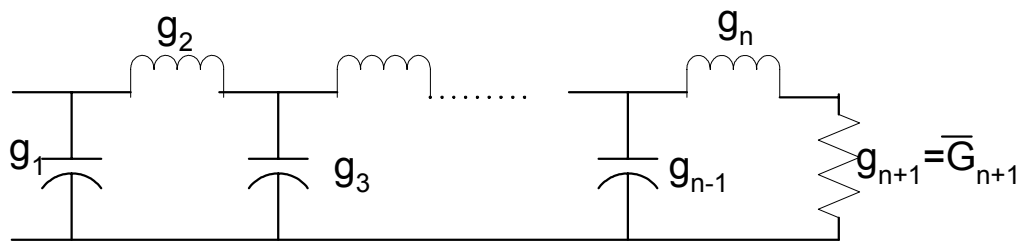
$$\bar{K}_{23} = \frac{\bar{L}'}{\sqrt{g_2 g_3}}$$

Y finalmente, de la ecuación que habíamos obtenido para  $g_4$ , despejamos la última constante:

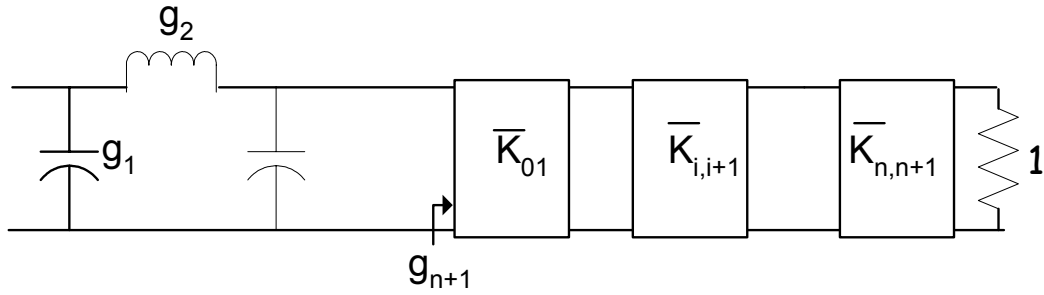
$$\bar{K}_{34} = \sqrt{\frac{\bar{L}'}{g_3 g_4}}$$

Ahora sólo tenemos un grado de libertad: escoger  $L'$ .

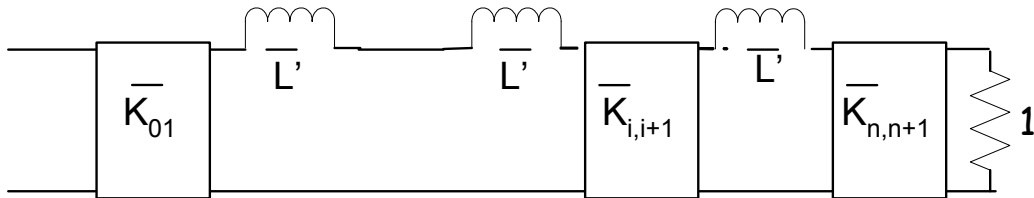
Y esto lo podemos generalizar para un filtro de orden  $n$ .



Colocamos tantos inversores de impedancia como orden del filtro más uno delante de  $g_{n+1}$ :



Movemos los diferentes elementos del prototipo paso bajo de tal manera que al final todos sean bobinas serie dispuestas entre dos inversores de impedancia y se hacen todas del mismo valor:



Entonces los valores de las constantes de los inversores quedan:

$$\bar{K}_{01} = \sqrt{\frac{\bar{L}'}{g_1}}$$

$$\bar{K}_{i,i+1} = \frac{\bar{L}'}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

$$\bar{K}_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\bar{L}'}{g_n g_{n+1}}}$$

En ambos casos nos ha quedado un único tipo de elemento reactivo que se puede escoger arbitrariamente.

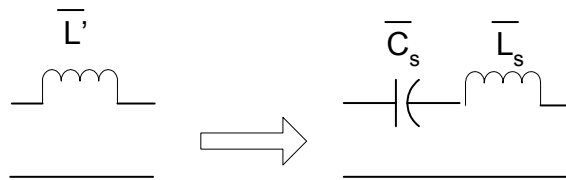
## TRANSFORMACIÓN PASO BAJO-PASO BANDA

Tal como ya vimos, es un cambio de variable:  $\omega'$  a  $\omega$ :

$$\frac{\omega'}{\omega_1} = \frac{1}{W} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Donde  $W$  es el ancho de banda relativo y  $\omega_0$  es la frecuencia central de la banda de paso.

Al aplicar esta transformación a los elementos del filtro, éstos se transforman:



Veámoslo:

$$\bar{Z}_L = j\omega' \bar{L}' = j \frac{\omega_1'}{W} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \bar{L}' = j \frac{\omega_1'}{W} \frac{\bar{L}'}{\omega_0} \omega + \frac{\omega_1'}{W} \frac{\omega_0 \bar{L}'}{j\omega} = j\omega \bar{L}_s + \frac{1}{j\omega \bar{C}_s}$$

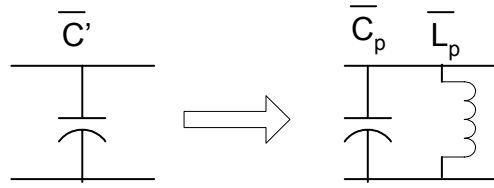
donde:

$$\bar{L}_s = \frac{\omega_1'}{W} \frac{\bar{L}'}{\omega_0}$$

$$\bar{C}_s = \frac{W}{\omega_1' \bar{L}'} \frac{1}{\omega_0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\bar{L}_s \bar{C}_s}$$

Y también:



Veámoslo:

$$\bar{Y}_C = j\omega' \bar{C}' = j \frac{\omega'_1}{W} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \bar{C}' = j \frac{\omega'_1}{W} \frac{\bar{C}'}{\omega_0} \omega + \frac{\omega'_1}{W} \frac{\omega_0 \bar{C}'}{j\omega} = j\omega \bar{C}_p + \frac{1}{j\omega \bar{L}_p}$$

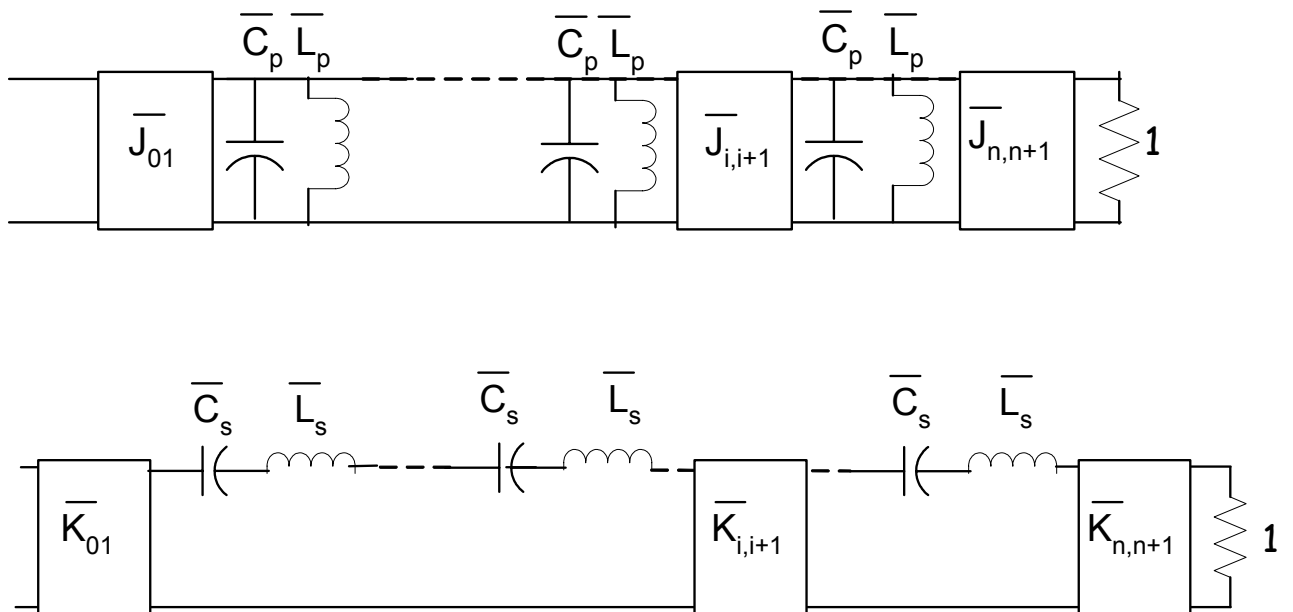
donde:

$$\bar{L}_p = \frac{W}{\omega'_1 \bar{C}'} \frac{1}{\omega_0}$$

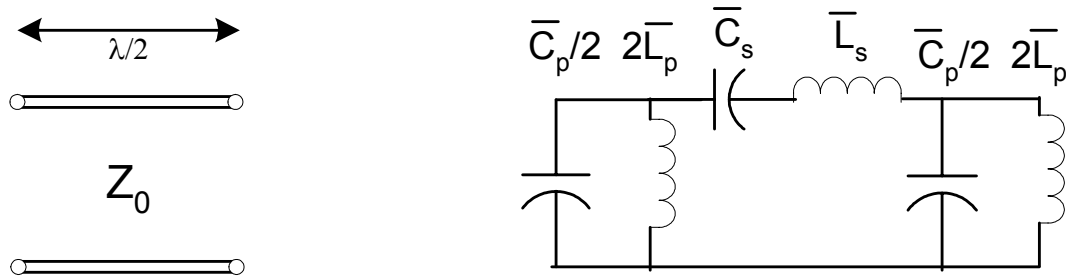
$$\bar{C}_p = \frac{\omega'_1}{W} \frac{\bar{C}'}{\omega_0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\bar{L}_p \bar{C}_p}$$

Los filtros con inversores una vez se ha hecho la transformación de frecuencia quedan:



Los resonadores se realizan con un tramo de línea de transmisión de longitud  $\lambda/2$ :

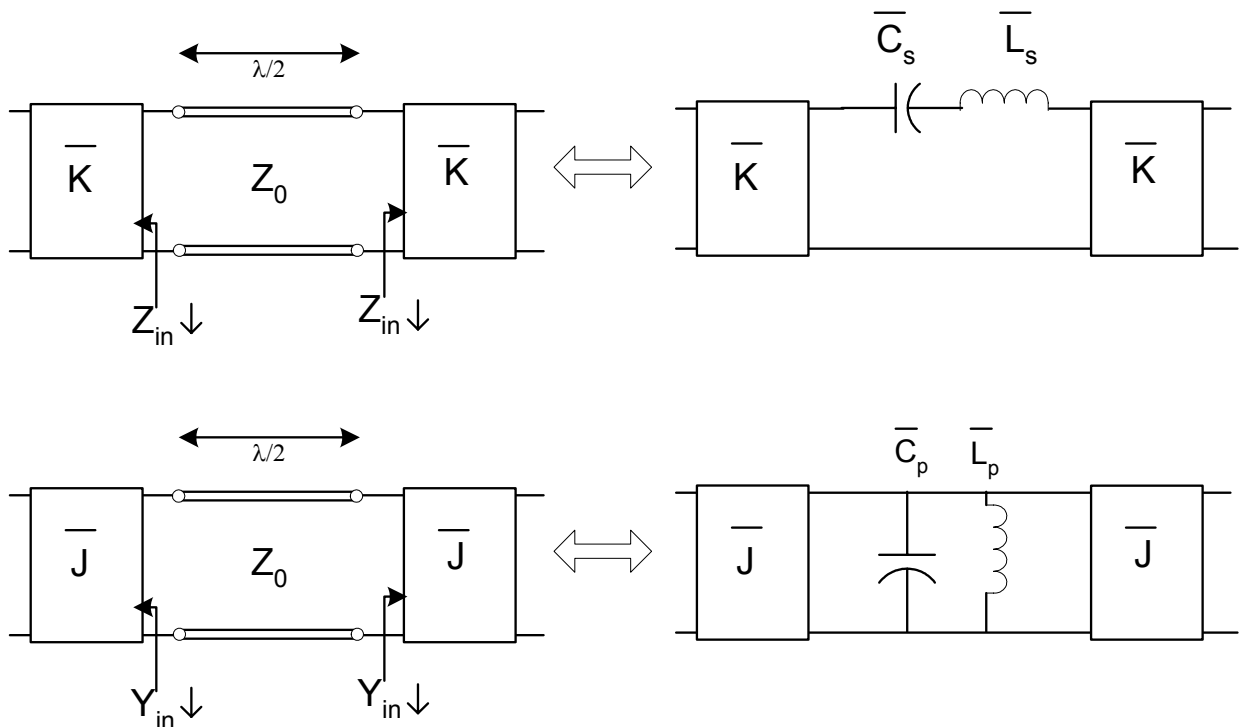


donde:

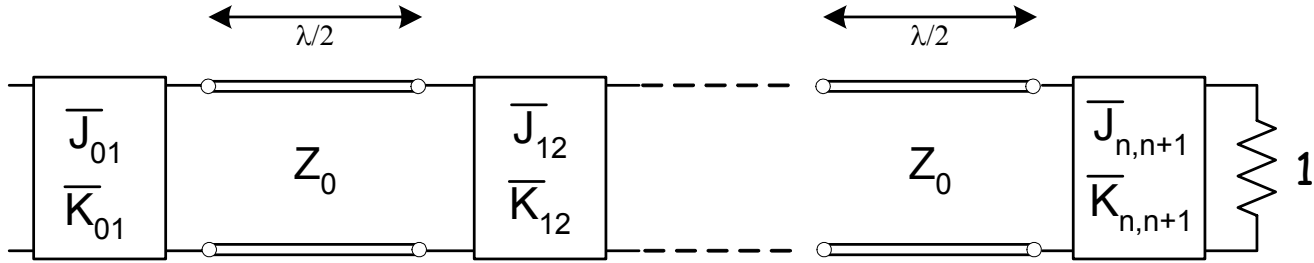
$$\frac{\bar{C}_p}{2} = \frac{\pi}{4\omega_0} \quad \bar{L}_s = \frac{\pi}{2\omega_0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\bar{L}_p \bar{C}_p} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{\bar{L}_s \bar{C}_s}$$

Siempre que las  $K$  y las  $J$  sean pequeñas, como enseguida justificaremos, la línea de longitud  $\lambda/2$  entre dos inversores de impedancia equivale a un circuito resonante serie y la línea de longitud  $\lambda/2$  entre dos inversores de admitancia equivale a un circuito resonante paralelo:



La estructura de los filtros es, por tanto,



Teniendo en cuenta que,

$$\bar{L}_s = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\bar{L}'\omega_1'}{W\omega_0}$$

Despejamos la  $L'$  (que es la que aparece en las ecuaciones de las constantes de los inversores):

$$\bar{L}' = \frac{\pi W}{2\omega_1'}$$

Y de la misma forma:

$$\bar{C}_p = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\bar{C}'\omega_1'}{W\omega_0}$$

Despejamos la capacidad:

$$\bar{C}' = \frac{\pi W}{2\omega_1'}$$

Normalmente  $\omega_1'=1$ , con lo que:

$$\bar{K}_{01} = \sqrt{\frac{\pi W}{2g_1}}$$

$$\bar{K}_{i,i+1} = \frac{\pi W}{2\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

$$\bar{K}_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\pi W}{2g_n g_{n+1}}}$$

Y las expresiones son idénticas para las J:

$$\bar{J}_{01} = \sqrt{\frac{\pi W}{2g_1}}$$

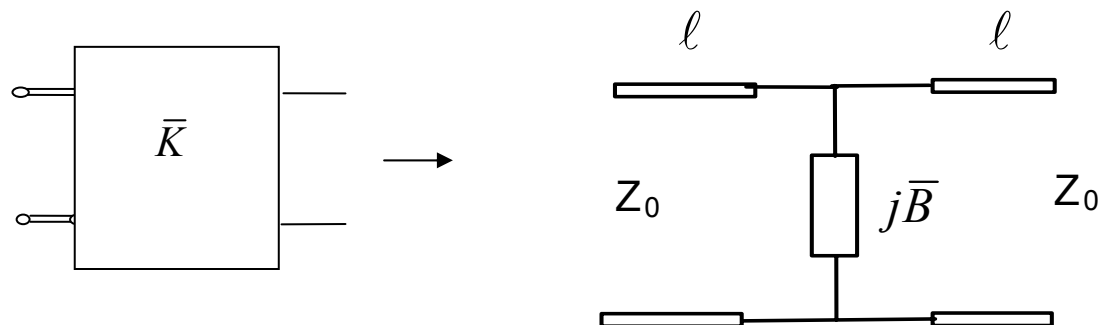
$$\bar{J}_{i,i+1} = \frac{\pi W}{2\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

$$\bar{J}_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\pi W}{2g_n g_{n+1}}}$$

Si  $W \ll 1$ ,  $g_i \cong 1$ , entonces las constantes tienen valores mucho menores que 1.

### SINTESIS DE INVERSORES DE IMPEDANCIA

Tal como vimos en el tema 2:



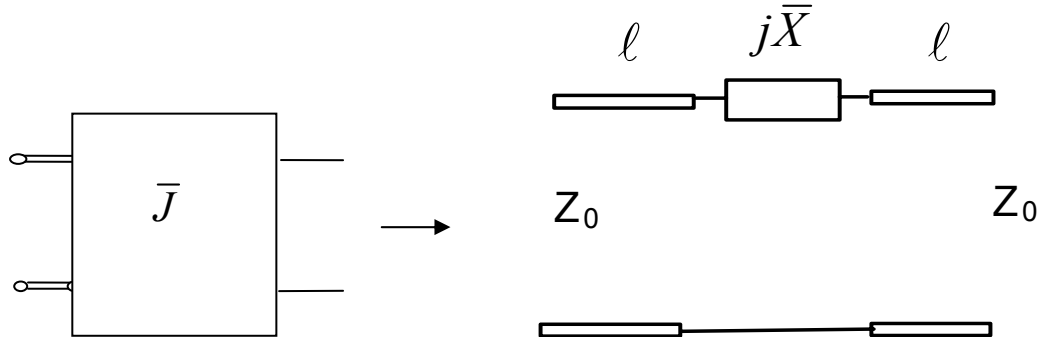
donde:

$$|\bar{B}| = \frac{1 - \bar{K}^2}{\bar{K}}$$

$$\ell = \frac{1}{2\beta} \arctg \frac{2}{\bar{B}}$$

## SINTESIS DE INVERSORES DE ADMITANCIA

Y también:



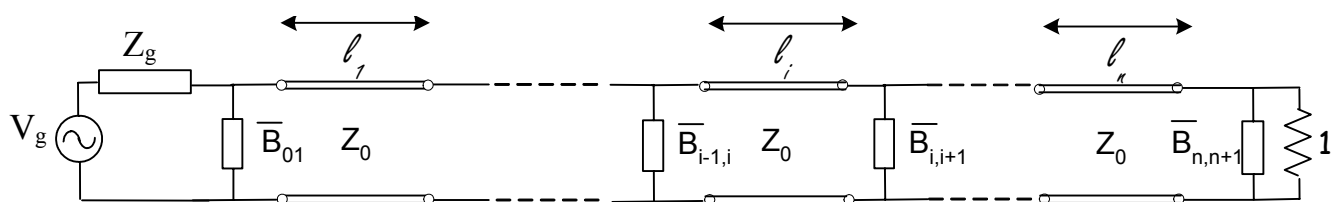
donde:

$$|\bar{X}| = \frac{1 - \bar{J}^2}{\bar{J}}$$

$$\ell = \frac{1}{2\beta} \operatorname{arctg} \frac{2}{\bar{X}}$$

## REALIZACIÓN DE LOS FILTROS PASO BANDA

### A) CON INVERSORES DE IMPEDANCIA



Con:

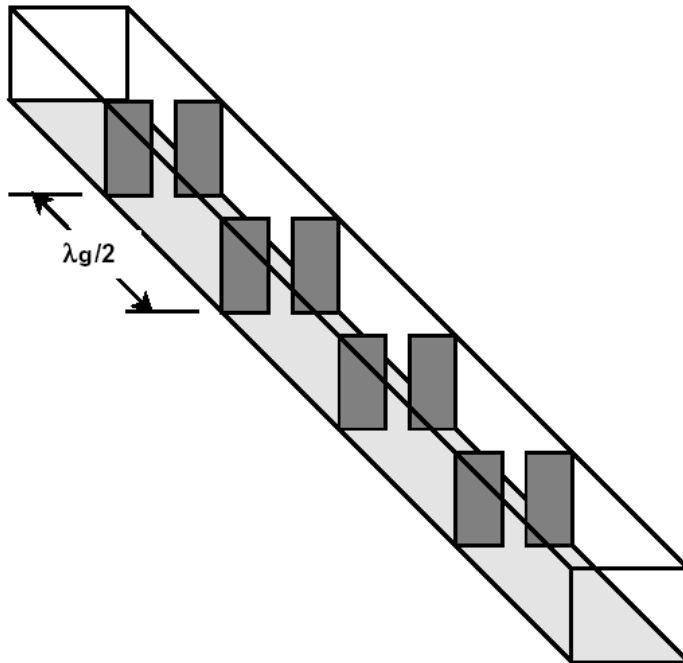
$$|\bar{B}_{i,i+1}| = \frac{1 - \bar{K}_{i,i+1}^2}{\bar{K}_{i,i+1}}$$

$$\ell_i = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{2}{\bar{B}_{i-1,i}} + \operatorname{arctg} \frac{2}{\bar{B}_{i,i+1}} \right)$$

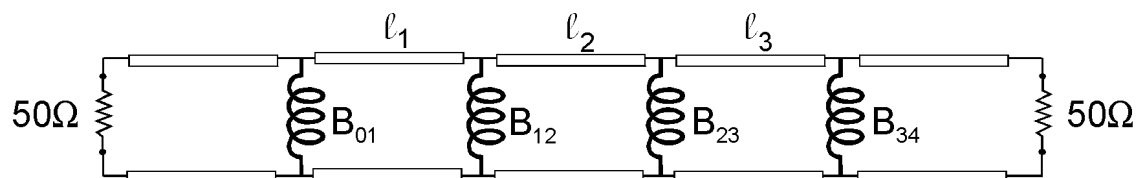


Este filtro se puede realizar con diafragmas en guía:

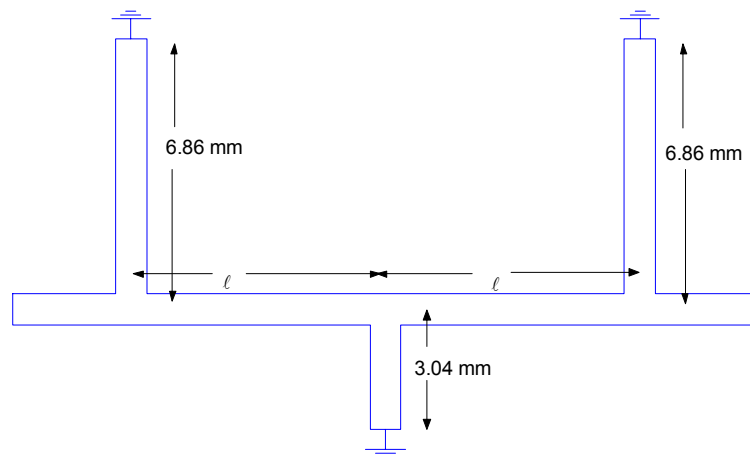
$B < 0$  con lo cual  $\ell_i < \frac{\lambda}{2}$



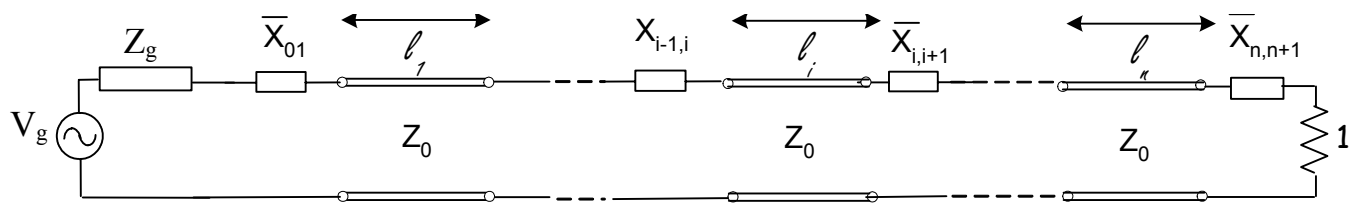
Cuyo equivalente en líneas de transmisión sería:



Realización microstrip: (para filtro de orden 2):



## B) CON INVERSORES DE ADMITANCIA



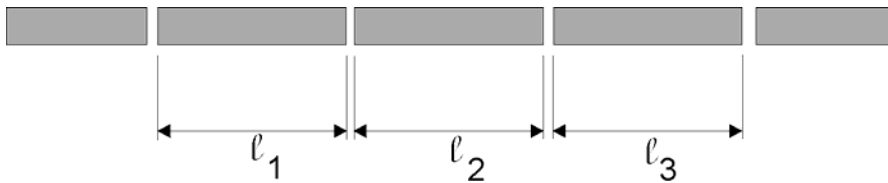
Con:

$$|\bar{X}_{i,i+1}| = \frac{1 - \bar{J}_{i,i+1}^2}{\bar{J}_{i,i+1}}$$

$$\ell_i = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4\pi} \left( \arctg \frac{2}{\bar{X}_{i-1,i}} + \arctg \frac{2}{\bar{X}_{i,i+1}} \right)$$

Realización con gaps microstrip:

$X < 0$  con lo cual  $\ell_i < \frac{\lambda}{2}$

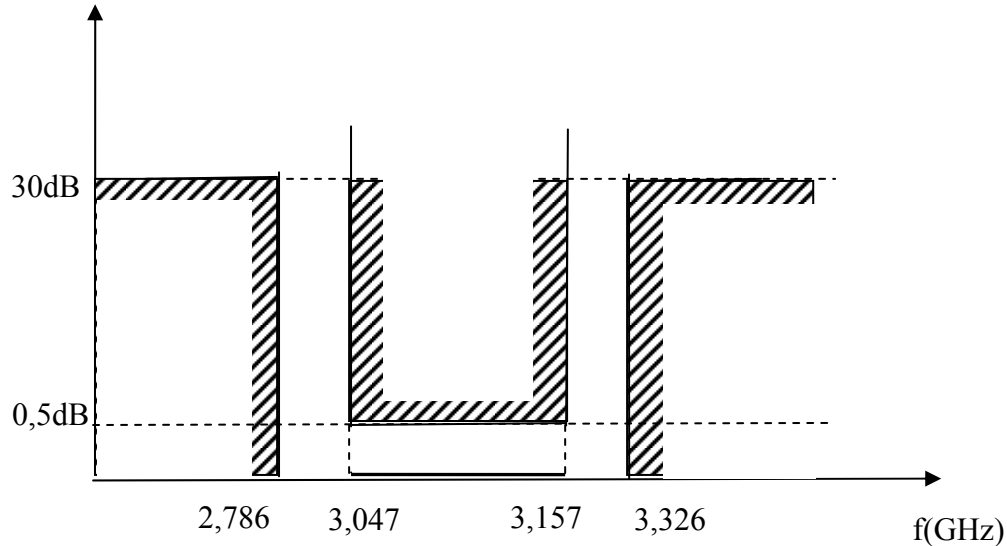


## EJEMPLO

Diseñar un filtro paso banda con  $L_{ar}=0,5$  dB de Chebyshev con:

$$f_1=3,047\text{GHz}, f_2=3,157\text{GHz}$$

$L_A > 30\text{dB}$  para  $f < f_a=2,786\text{GHz}$ ,  $f > f_b=3,326\text{GHz}$



## a) Cálculo de los parámetros paso-banda

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = 3,102\text{GHz}$$

$$W = \frac{f_2 - f_1}{f_0} = 0,0355$$

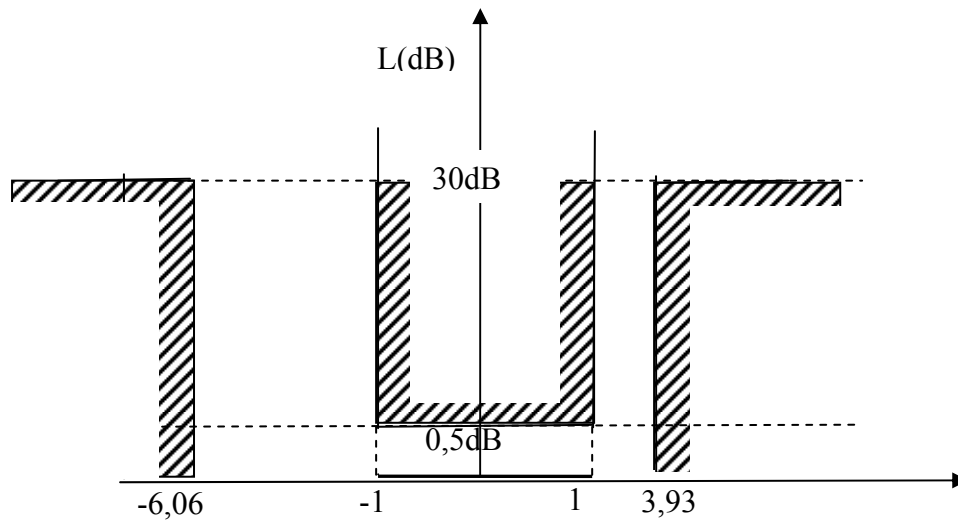
## b) Paso a prototipo paso-bajo

$$\omega'_1 = 1$$

$$\omega' = \frac{1}{W} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)$$

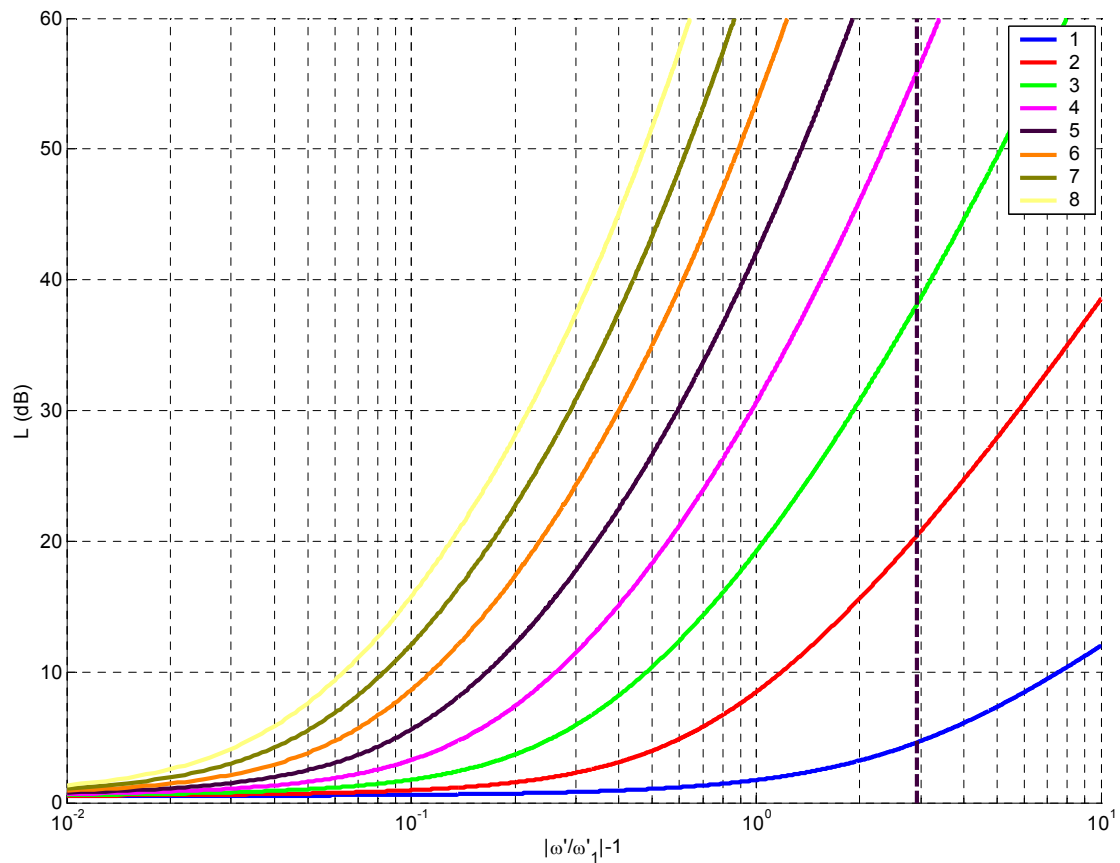
Hacemos una tabla:

Paso banda (f)	Paso bajo equivalente ( $\omega'$ )
$f_0$	0
$f_1$	-1
$f_2$	+1
$f_a$	-6,06
$f_b$	3,93



Mirando la gráfica de Chebyshev de  $L_{ar}=0,5\text{dB}$ , buscamos la variable  $\left| \frac{\omega'}{\omega_1'} \right| - 1 = 2,93$  en el eje de abscisas, qué orden del filtro es necesario para que esté por encima de 30 dB de atenuación:  $n=3$

CHEBYCHEV FILTER.  $L_{ar}=0,5 \text{ dB}$



Si escogemos  $n=3$ , la gráfica nos confirma que para:

$$L_A(f'_a)=49,5 \text{ dB} > 30 \text{ dB}$$

$$L_A(f'_b)=38,5 \text{ dB} > 30 \text{ dB}$$

c) Prototipo paso bajo:  $g_i$ ?

Mirando la tabla para  $L_{ar}=0,5 \text{ dB}$  y  $n=3$

Filtro de Chebyshev. $L_{ar}=0.5 \text{ dB}$ . Valores de los elementos.									
Orden	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$
1	0.6987	1.0000							
2	1.4029	0.7071	1.9841						
3	1.5963	1.0967	1.5963	1.0000					
4	1.6704	1.1925	2.3662	0.8419	1.9841				
5	1.7058	1.2296	2.5409	1.2296	1.7058	1.0000			
6	1.7254	1.2479	2.6064	1.3136	2.4759	0.8696	1.9841		
7	1.7373	1.2582	2.6383	1.3443	2.6383	1.2582	1.7373	1.0000	

d) Filtro con inversores de impedancia. Cálculo de las  $K$ :

$$\bar{K}_{01} = \bar{K}_{34} = \sqrt{\frac{\pi W}{2g_1}} = 0.187$$

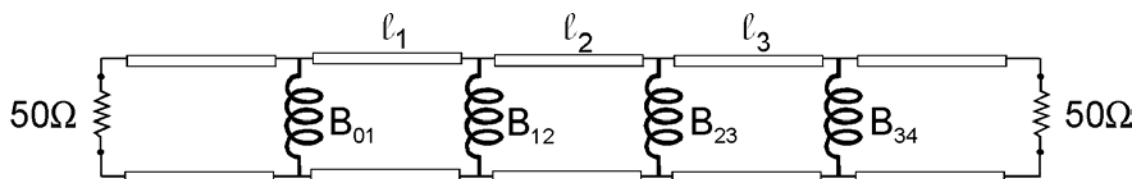
$$\bar{K}_{12} = \bar{K}_{23} = \frac{\pi W}{2\sqrt{g_1 g_2}} = 0.0421$$

Cálculo de las  $B$ :

$$|\bar{B}_{01}| = |\bar{B}_{34}| = \frac{1 - \bar{K}_{01}^2}{\bar{K}_{01}} = 5.1$$

$$|\bar{B}_{12}| = |\bar{B}_{23}| = \frac{1 - \bar{K}_{12}^2}{\bar{K}_{12}} = 23.71$$

Si las  $B$  son bobinas,  $B < 0$ :



$$\begin{aligned}\bar{B}_{01} &= \bar{B}_{34} = -5.1 \\ \bar{B}_{12} &= \bar{B}_{23} = -23.71\end{aligned}$$

Cálculo de las longitudes de las líneas

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4\pi} \left( \arctg \frac{2}{\bar{B}_{0,1}} + \arctg \frac{2}{\bar{B}_{1,2}} \right) = \ell_3 = 0.927 \frac{\lambda}{2} \\ \ell_2 &= \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4\pi} \left( \arctg \frac{2}{\bar{B}_{1,2}} + \arctg \frac{2}{\bar{B}_{2,3}} \right) = 0.973 \frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

Cálculo de los valores de las bobinas: ( $Z_0=50\Omega$ )

$$\begin{aligned}L_{01} &= L_{34} = 0.5nH \\ L_{12} &= L_{23} = 0.11nH\end{aligned}$$

e) Filtro con inversores de admitancia. Cálculo de las J:

$$\begin{aligned}\bar{J}_{01} &= \bar{J}_{34} = \sqrt{\frac{\pi W}{2g_1}} = 0.187 \\ \bar{J}_{12} &= \bar{J}_{23} = \frac{\pi W}{2\sqrt{g_1 g_2}} = 0.0421\end{aligned}$$

Cálculo de las X:

$$\begin{aligned}|\bar{X}_{01}| &= |\bar{X}_{34}| = \frac{1 - \bar{J}_{01}^2}{\bar{J}_{01}} = 5.1 \\ |\bar{X}_{12}| &= |\bar{X}_{23}| = \frac{1 - \bar{J}_{12}^2}{\bar{J}_{12}} = 23.71\end{aligned}$$

Si las X son condensadores,  $X < 0$ :

$$\begin{aligned}\bar{X}_{01} &= \bar{X}_{34} = -5.1 \\ \bar{X}_{12} &= \bar{X}_{23} = -23.71\end{aligned}$$

### Cálculo de las longitudes de las líneas

$$\ell_1 = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4\pi} \left( \arctg \frac{2}{\bar{X}_{0,1}} + \arctg \frac{2}{\bar{X}_{1,2}} \right) = \ell_3 = 0.927 \frac{\lambda}{2}$$

$$\ell_2 = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4\pi} \left( \arctg \frac{2}{\bar{X}_{1,2}} + \arctg \frac{2}{\bar{X}_{2,3}} \right) = 0.973 \frac{\lambda}{2}$$

### Cálculo de los valores de los condensadores: ( $Z_0=50\Omega$ )

$$C_{01} = C_{34} = 0.2 pF$$

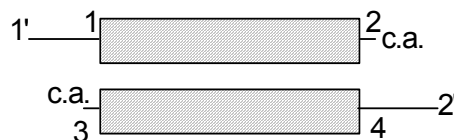
$$C_{12} = C_{23} = 0.045 pF$$

- Limitaciones en banda  $W_{\max}=0.15$ :

- a) Circuito equivalente de la línea de transmisión  $\lambda/2$  sólo válido para  $\omega$  próximo a  $\omega_0$
- b) Los inversores no son independientes de la frecuencia
- c) Despreciamos elementos en paralelo en frente del serie y viceversa (del circuito equivalente de una L.T.)

### REALIZACIÓN DE INVERSORES DE ADMITANCIA CON LINEAS ACOPLADAS

Partimos de un acoplador direccional:



Para que los accesos 1 y 4 estuvieran desacoplados al igual que el 2 y el 3 se debía cumplir:

$$Z_{0o} Z_{0e} = Z_0^2$$

Supongamos que los accesos 2 y 3 se dejan en circuito abierto de tal manera que

$$a_2 = b_2$$

$$a_3 = b_3$$

Nos queda un bipuerto cuya matriz [S] se calcula a partir de los parámetros S del circuito de 4 accesos:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{13} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{12} \\ 0 & S_{13} & S_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Si escribimos las ecuaciones correspondientes a las filas 2 y 3:

$$b_2 = S_{12}a_1 + S_{13}a_4$$

$$b_3 = S_{13}a_1 + S_{12}a_4$$

Y las sustituimos en las otras dos filas (1 y 4):

$$b_1 = S_{12}(S_{12}a_1 + S_{13}a_4) + S_{13}(S_{13}a_1 + S_{12}a_4)$$

$$b_4 = S_{13}(S_{12}a_1 + S_{13}a_4) + S_{12}(S_{13}a_1 + S_{12}a_4)$$

Reordenamos los términos:

$$b_1 = (S_{12}^2 + S_{13}^2)a_1 + (S_{13}S_{12} + S_{12}S_{13})a_4$$

$$b_4 = (S_{13}S_{12} + S_{12}S_{13})a_1 + (S_{12}^2 + S_{13}^2)a_4$$

Y si tenemos en cuenta que éstos son los dos accesos del bipuerto:



$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{12}^2 + S_{13}^2 & 2S_{13}S_{12} \\ 2S_{13}S_{12} & S_{12}^2 + S_{13}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$S_{12} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta\ell + j \sin \beta\ell}$$

$$S_{13} = \frac{j\alpha \sin \beta\ell}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta\ell + j \sin \beta\ell}$$

Sustituyendo éstos valores, nos queda:

$$S_{12}^2 = \frac{1-\alpha^2}{\left(\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta\ell + j \sin \beta\ell\right)^2}$$

$$S_{13}^2 = \frac{-\alpha^2 \sin^2 \beta\ell}{\left(\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta\ell + j \sin \beta\ell\right)^2}$$

$$S_{12}S_{13} = \frac{j\alpha\sqrt{1-\alpha^2} \sin \beta\ell}{\left(\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta\ell + j \sin \beta\ell\right)^2}$$

Por lo tanto los nuevos parámetros S del circuito de dos accesos serán:

$$S'_{11} = S_{12}^2 + S_{13}^2 = \frac{1-\alpha^2 - \alpha^2 \sin^2 \beta\ell}{\left(\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta\ell + j \sin \beta\ell\right)^2}$$

$$S'_{12} = 2S_{12}S_{13} = \frac{2j\alpha\sqrt{1-\alpha^2} \sin \beta\ell}{\left(\sqrt{1-\alpha^2} \cos \beta\ell + j \sin \beta\ell\right)^2}$$

Las líneas acopladas a la frecuencia central miden  $\lambda/4$ , por lo tanto, el denominador queda igual a -1, y los numeradores se simplifica  $\sin \beta\ell = 1$ :

$$S'_{11} = -(1 - 2\alpha^2)$$

$$S'_{12} = -2j\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}$$

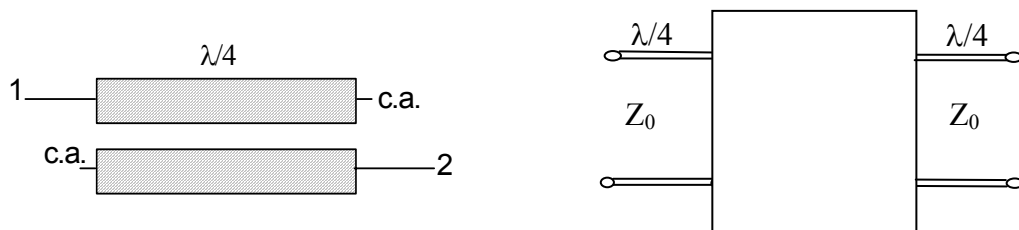
En forma matricial se puede escribir así:

$$S = - \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha^2 & 2j\alpha\sqrt{1 - \alpha^2} \\ 2j\alpha\sqrt{1 - \alpha^2} & 1 - 2\alpha^2 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que  $-1 = j*j$ , podemos escribir la ecuación anterior como:

$$[S] = e^{-\frac{j\pi}{2}} \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha^2 & 2j\alpha\sqrt{1 - \alpha^2} \\ 2j\alpha\sqrt{1 - \alpha^2} & 1 - 2\alpha^2 \end{bmatrix} e^{\frac{j\pi}{2}}$$

Y por lo tanto el circuito equivalente de las líneas acopladas con dos accesos en circuito abierto es:



Con:

$$[S'] = \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha^2 & 2j\alpha\sqrt{1 - \alpha^2} \\ 2j\alpha\sqrt{1 - \alpha^2} & 1 - 2\alpha^2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es la de un inversor de admitancias ( $S_{11} > 0$ ),

$$S'_{11} = \frac{1 - \bar{J}^2}{1 + \bar{J}^2} = 1 - 2\alpha^2$$

donde  $\alpha$  es el acoplo de las líneas:

$$\alpha = \frac{\bar{Z}_{0e}^2 - 1}{\bar{Z}_{0e}^2 + 1}$$

En la primera ecuación despejamos el acoplo en función de la constante del inversor de admitancias  $J$ :

$$\alpha = \frac{\bar{J}}{\sqrt{1 + \bar{J}^2}}$$

Y ahora sustituimos la segunda ecuación

$$\frac{\bar{J}}{\sqrt{1 + \bar{J}^2}} = \frac{\bar{Z}_{0e}^2 - 1}{\bar{Z}_{0e}^2 + 1}$$

y despejamos la impedancia en modo par:

$$\bar{Z}_{0e} = \bar{J} + \sqrt{1 + \bar{J}^2}$$

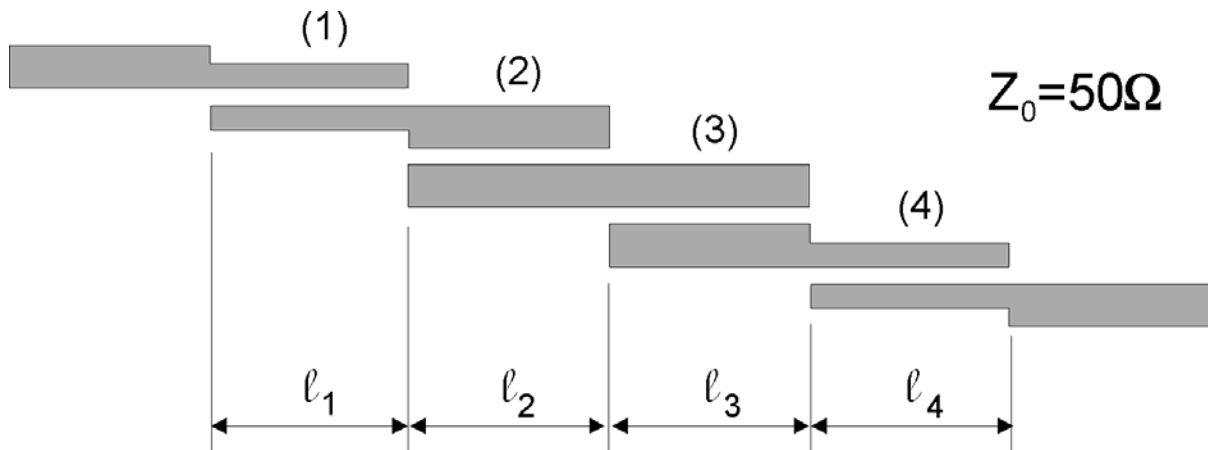
Pero también:

$$\frac{\bar{J}}{\sqrt{1 + \bar{J}^2}} = \frac{1 - \bar{Z}_{0o}^2}{1 + \bar{Z}_{0o}^2}$$

Y despejamos la impedancia en modo impar:

$$\bar{Z}_{0o} = \sqrt{1 + \bar{J}^2} - \bar{J}$$

### Síntesis de filtros paso banda con líneas acopladas:



$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = \frac{\lambda}{4}$$

$$\bar{Z}_{0e_i} = \sqrt{1 + \bar{J}_{i-1,i}^2} + \bar{J}_{i-1,i}$$

$$\bar{Z}_{0o_i} = \sqrt{1 + \bar{J}_{i-1,i}^2} - \bar{J}_{i-1,i}$$

Habr  tantas secciones de líneas acopladas como orden del filtro más una.

Del ejemplo:

$$Z_{0e1} = Z_0 \left( \sqrt{1 + \bar{J}_{01}^2} + \bar{J}_{01} \right) = Z_{0e4} = 60,2\Omega$$

$$Z_{0e2} = Z_0 \left( \sqrt{1 + \bar{J}_{12}^2} + \bar{J}_{12} \right) = Z_{0e3} = 52,15\Omega$$

$$Z_{0o1} = Z_0 \left( \sqrt{1 + \bar{J}_{01}^2} - \bar{J}_{01} \right) = Z_{0o4} = 41,5\Omega$$

$$Z_{0o2} = Z_0 \left( \sqrt{1 + \bar{J}_{12}^2} - \bar{J}_{12} \right) = Z_{0o3} = 47,9\Omega$$

Y ahora con las tablas de líneas acopladas se obtendrá la anchura y separación de las líneas.