2.2: Transformada Discreta de Fourier

- Definición y ejemplo
- Inversión
- Enventanado en tiempo
- Muestreo en frecuencia
- Propiedades de la DFT

$$x[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

var. discreta var. continua

¿Existe una representación discreta X[k]?

Transformada Discreta de Fourier: definición

- Definición
  - sea $x_N[n]$ tal que $x_N[n]=0\ \forall n<0$ y $\forall n\geq N$

$$x_N[n] \xrightarrow{DFT_N} X_N[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x_N[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad 0\leq k\leq N-1$$

- Relación de la DFT con la Transformada de Fourier

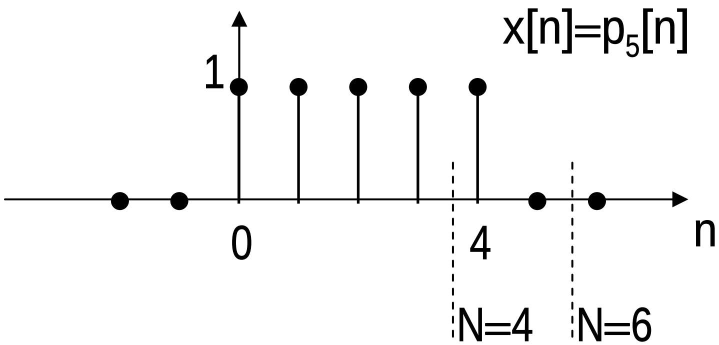
$$x_N[n] \xrightarrow{FT} X_N(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1} x_N[n]e^{-j\omega n}$$

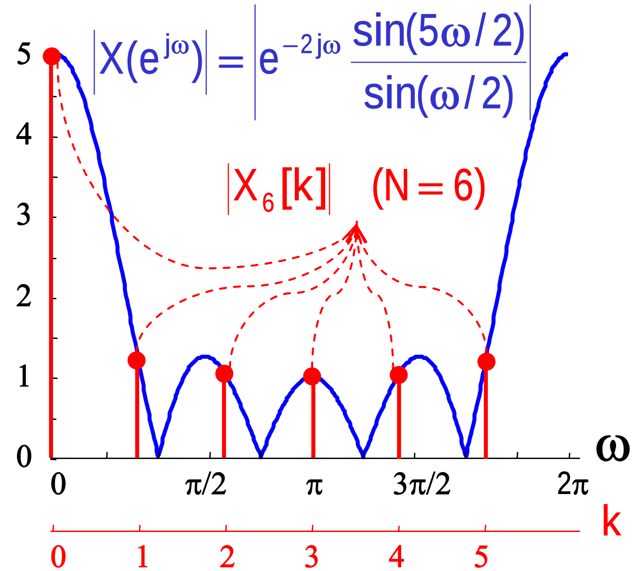
$$\Rightarrow X_N[k]=X_N(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

  - DFT es la versión muestreada a intervalos $\omega=2\pi/N$ de la FT en el periodo $[0, 2\pi[$ (cierto siempre que todas las muestras de $x_N[n]$ sean nulas fuera de $n=0\ldots N-1$)

Transformada Discreta de Fourier: ejemplo

- Pulso de L=5 muestras





$$N=6: \quad X_6[k] = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi}{6}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{6}2k}\,\frac{\sin(\frac{2\pi}{6}\frac{5}{2}k)}{\sin(\frac{2\pi}{6}\frac{1}{2}k)} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{6}k} \qquad 0 \le k \le 5$$

$$N=4: \quad X_4[k] = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = \begin{cases} 4 & k=0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \neq X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{4}k} \qquad 0 \le k \le 3$$

Inversión de la DFT

- DFT inversa

$$X_N[k] \xrightarrow{DFT_N^{-1}} x_N[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad 0 \le n \le N-1$$

demostración

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x_N[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=0}^{N-1} x_N[m] \overbrace{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}}^{(1)} \rightarrow (2)$$

y, puesto que (1) puede expresarse en función de un tren de deltas $t_N[n] \equiv \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN]$

$$(1) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \frac{1}{N}\cdot\frac{1-e^{j2\pi(n-m)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(n-m)}} = \begin{cases} 1 & n-m = rN \\ 0 & n-m \neq rN \end{cases} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-m-rN] = t_N[n-m]$$

entonces:

$$(2) \quad \rightarrow \quad \sum_{m=0}^{N-1} x_N[m]\, t_N[n-m] = x_N[n] * t_N[n] = \underbrace{\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_N[n-rN]}_{\tilde{x}_N[n]} = x_N[n] \quad \text{en } 0 \le n \le N-1$$

Enventanado en tiempo

- En el cálculo de la DFT sólo se emplean N muestras de la secuencia original: $0 \leq n \leq N-1$

$$x[n] \xrightarrow{DFT_N} X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$
$$0 \leq k \leq N-1$$

lo que supone un <u>enventanado</u> implícito de x[n] mediante un pulso rectangular

- Para una señal cualquiera, x[n]:
  - si todas las muestras no nulas de x[n] están en [0, N-1] (caso particular)

$$X[k] = \left. \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \left. X(e^{j\omega}) \right|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

  - si x[n] presenta muestras no nulas fuera del intervalo [0, N-1] (caso general)

$$X[k] = \left. \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N[n] e^{-j\omega n} \right|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \left. X_N(e^{j\omega}) \right|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

donde $x_N[n] = x[n] \cdot p_N[n]$
es la secuencia enventanada

$$x_N[n] \xleftrightarrow{FT} X_N(e^{j\omega})$$

Muestreo en frecuencia

- Si se muestrea la TF

$$X'[k] \equiv X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

entonces,

$$\tilde{x}[n] = DFT_N^{-1}\{X'[k]\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X'[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \quad \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}}_{\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-m-rN]=t_N[n-m]} \quad =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,t_N[n-m] = x[n] * t_N[n]$$

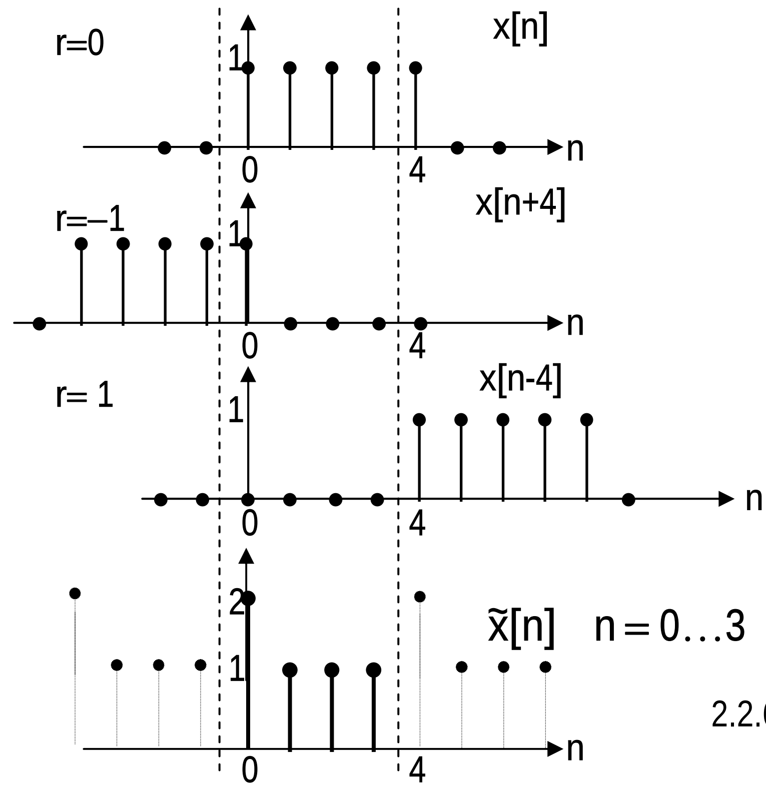
$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN] \quad 0 \le n \le N-1$$

(periodificación)

- Por ejemplo, sean $x[n] = p_5[n]$ y $N = 4$:

$$X'[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{4}k} \neq X[k]$$

$$DFT_N^{-1}\{X'[k]\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-4r] \quad 0 \le n \le 3$$



Resumen relación FT ←→ DFT

- Por tanto, solamente si $x[n]=0$ para $n<0$ y $n>N-1$, se cumple:

$$DFT_N\{x[n]\} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0\ldots N-1$$

$$DFT_N^{-1}\left\{X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\right\} = x[n] \quad n = 0\ldots N-1$$

- En caso contrario,

$$DFT_N\{x[n]\} = X_N(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X(e^{j\omega}) \circledast_{2\pi} V(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0\ldots N-1$$

$$DFT_N^{-1}\left\{X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\right\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN] \qquad n = 0\ldots N-1$$

siendo $x_N[n]$ la secuencia enventanada por un ventana (pulso) de N muestras,

$X_N(e^{j\omega})$ su transformada de Fourier y

$V(e^{j\omega})$ la transformada de la ventana rectangular de N muestras

- Siempre

$$DFT_N^{-1}\{DFT_N\{x[n]\}\} = x[n] \quad n = 0\ldots N-1$$

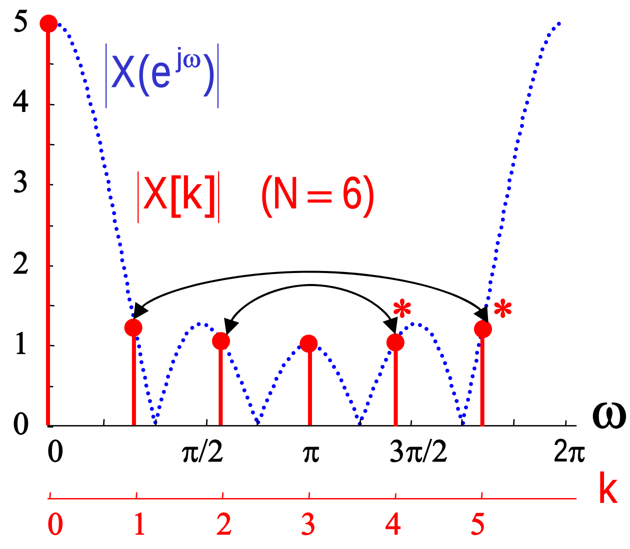
Propiedades de la DFT (I)

Suponemos $x[n]=0 \quad n<0,\ n>N-1$

(en caso contrario, las propiedades siguientes aplican a $x_N[n]=x[n]\cdot p_N[n]$)

- **Linealidad** $\quad ax_1[n]+bx_2[n] \xleftrightarrow{DFT_N} aX_1[k]+bX_2[k] \quad \forall a,b,x_1,x_2$

- **Simetría** $\quad x[n] \text{ real} \xleftrightarrow{DFT_N} \begin{cases} X[0] & \text{real} \\ X[k]=X^*[N-k] & k=1,\ldots N-1 \end{cases}$



Propiedades de la DFT (II)

◆ **Retardo circular**

$$\tilde{x}[n-m] \xleftrightarrow{DFT_N} X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

$$n = 0,....,N-1 \qquad k = 0,...,N-1$$

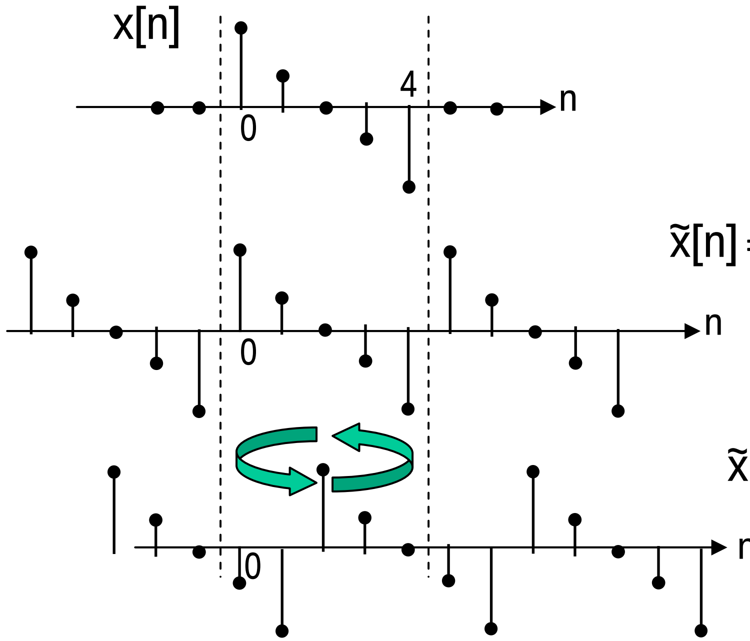
Ejemplo (N=5)

(periodificación)

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$$

(retardo)

$$\tilde{x}[n-2]$$



◆ **Modulación**

$$e^{j\frac{2\pi}{N}mn}x[n] \xleftrightarrow{DFT_N} \tilde{X}[k-m]$$

$$n = 0,...,N-1 \qquad k = 0,...,N-1$$

Propiedades de la DFT (III)

- <u>Convolución circular</u> $x_1[n] \circledN x_2[n] \xleftrightarrow{DFT_N} X_1[k] \cdot X_2[k]$
  - El símbolo Ⓝ denota "convolución circular" y se refiere al resultado de periodificar la convolución (lineal) de $x_1[n]$ y $x_2[n]$:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

$$x_1[n] Ⓝ x_2[n] \equiv \tilde{y}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[n - rN]$$

  - Si la longitud de la convolución lineal y[n] es L≤N, las repeticiones y[n–rN] no se solapan y la convolución circular coincide con la convolución lineal en 0 ≤n≤N–1
  - Si L>N, las L–N primeras muestras de la convolución circular no coinciden con y[n]
  - Cálculo alternativo: $x_1[n] Ⓝ x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \tilde{x}_2[n-m]$

- <u>Enventanado</u> $x_1[n] \cdot x_2[n] \xleftrightarrow{DFT_N} \frac{1}{N} X_1[k] Ⓝ X_2[k]$

Resumen

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
X_N(e^{j\omega}) \arrow[r, leftrightarrow, "FT"] \arrow[d, "\substack{\text{muestreo}\\ \omega=2\pi k/N}"'] & x_N[n]=x[n]\cdot p_N[n] \arrow[dl, shift left, "DFT_N"] & \\
\substack{X_N[k]\\ k=0\ldots N-1} \arrow[ur, shift left, "DFT_N^{-1}"] & \boxed{x[n]} \arrow[u, "\substack{\text{enventanado}\\ 0\ldots N-1}"'] \arrow[l, "DFT_N", "\substack{0<n\leq N-1\\ \text{(enventanado}\\ \text{implícito)}}"'] \arrow[r, leftrightarrow, "FT", "-\infty<n<\infty"'] & X(e^{j\omega}) \arrow[d, "\substack{\text{muestreo}\\ \omega=2\pi k/N}"] \\
& \substack{\tilde{x}[n]=\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN]\\ 0\leq n\leq N-1} & \substack{X'[k]\\ k=0\ldots N-1} \arrow[l, "DFT_N^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$