Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions

ComI. 17-06-2008
Notas Provisionales: 27-06-2008 en ATENEA
Periodo de Alegaciones: hasta 30-06-2008
Notas Definitivas: 3-07-2008

Profesores: J. Fernández Rubio, A. Pagès Zamora, J. Riba
- Entregar en tres partes separadas.
- Se prohíbe el uso de teléfonos móviles.
- Tenga visible un documento de identidad con fotografía.

--***Iniciar en hoja nueva***--

Problema 1

Considere la siguiente señal:

$$x(t) = C\sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)p(t-kT)$$

donde $a(k)\in\{-1,1\}$ (símbolos independientes y equiprobables), $T = 1/R_b$, R_b es la velocidad de transmisión (bits/seg) y las expresiones del pulso $p(t)$ en tiempo y frecuencia son:

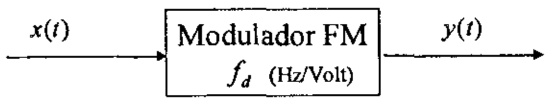
$$p(t) = \frac{4}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{1-\left(\frac{4t}{T}\right)^2} \qquad P(f) = \begin{cases} T\cos(\pi f T/2) & \text{para } |f| \le 1/T \\ 0 & \text{para } |f| > 1/T \end{cases}$$

La autocorrelación de este pulso cumple que $R_p(kT) = E_p \cdot \delta(k)$ siendo $\delta(k)$ la función delta de Kronecker que cumple que $\delta(0)=1$ y $\delta(k)=0$ para todo entero $k \neq 0$, y E_p la energía del pulso.

a) Halle el espectro de $x(t)$ y dibújelo. Halle el ancho de banda de $x(t)$ (B_x).

b) Halle el valor de la constante C tal que asegure una dinámica de $x(t)$ entre -1 y 1. Para simplificar, puede considerar sólo el valor de $x(0)$, y que $p(t)\approx 0$ para $|t| > 7T/2$ (sólo para este apartado). Indique para qué secuencias concretas de bits se obtienen los valores máximo y mínimo de $x(0)$.

La señal $x(t)$ se introduce en un modulador FM de desviación de frecuencia f_d (Hz/Volt) y frecuencia portadora $f_o > 100/T$ tal como se indica en la siguiente figura. La energía media de bit es $E_b = P_y T$, donde P_y es la potencia de la señal $y(t)$.



c) Justifique que el módulo y la fase del equivalente paso-bajo de $y(t)$ con respecto a f_o puede expresarse como:

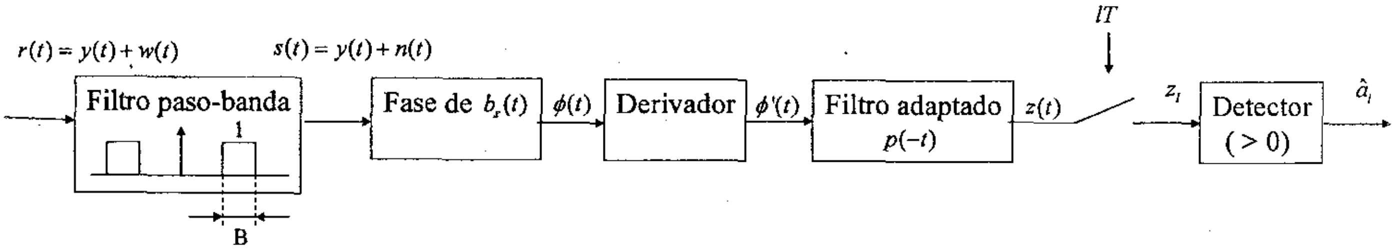
$$|b_y(t)| = A \qquad \theta(t) = 2\pi f_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)g(t-kT)$$

indicando el valor de A (en función de E_b) y la expresión del pulso $g(t)$ (en función de $p(t)$).

d) Indique aproximadamente cuál es el ancho de banda B de la señal $y(t)$.

Nota: Para el resto del problema, considere que $f_d = 6R_b$, lo que da lugar a $B = 16R_b$.

Un receptor recibe la señal $r(t) = y(t) + w(t)$ donde $w(t)$ es ruido blanco estacionario gausiano de densidad espectral de potencia $N_o/2$ y la procesa según se indica en la figura:



e) Razone cuál debe ser el valor de la frecuencia central del filtro paso-banda. Halle la potencia del ruido $n(t)$.

f) Halle la estadística completa de segundo orden del equivalente complejo paso-bajo del ruido $n(t)$, ($b_n(t) = i_n(t) + jq_n(t)$), es decir, halle $R_{b_n}(\tau) = E\left[b_n(t+\tau)b_n^*(t)\right]$ y $\tilde{R}_{b_n}(\tau) = E\left[b_n(t+\tau)b_n(t)\right]$.

---*Iniciar en hoja nueva*---

g) Si $\phi(t)$ es la fase del equivalente paso-bajo de $s(t)$, justifique matemática o gráficamente en el plano complejo bajo qué condiciones se cumple la siguiente aproximación en la que el ruido afecta de forma aditiva:

$$\phi(t) \approx \theta(t) + q_n(t)/A$$

En particular, ¿para qué margen de valores de P/N_o la aproximación anterior es válida? Halle la densidad espectral de potencia del ruido $v_n(t) = q_n(t)/A$ (es decir, $S_v(f)$) que afecta a la fase. A la vista de la relación P/N_o requerida, explique cuál es el problema de usar desviaciones f_d elevadas en el modulador.

h) Teniendo en cuenta el efecto del derivador sobre la señal y sobre el ruido, halle la expresión de la señal $z(t)$ a la salida del filtro adaptado. Halle la densidad espectral de potencia del ruido presente en este punto, así como su potencia.

Nota: $\int_0^{\pi/2} \lambda^2 \cos^2(\lambda) d\lambda \approx \frac{1}{4}$

i) A partir de las propiedades de pulso utilizado, razone si las muestras $z_l = z(lT)$ están libres de interferencia inter-simbólica, y indique si dos muestras de ruido consecutivas a la entrada del decisor son variables aleatorias independientes. A la vista del resultado, justifique si es óptimo realizar decisiones bit a bit.
Nota: $R_p''(T) = \gamma \neq 0$, donde $R_p''(\tau)$ es la segunda derivada de la autocorrelación del pulso.

j) Halle la BER (probabilidad de error de bit) a la salida del decisor y exprésela como

$$BER = Q\left(\sqrt{2\beta \frac{E_b}{N_o}}\right)$$

hallando el valor numérico de la constante β. Compare la BER resultante con la que hubiera obtenido mediante una transmisión directa en banda base de $x(t)$. Compruebe como mediante la modulación de FM se obtiene una ganancia de unos 20dB ($10\log(\beta)$).

Nota: Definición de la función Q: $Q(x) = \frac{1}{\ldots}\int_x e^{-\lambda^2/2} d\lambda$

--*Iniciar en hoja nueva*--

Problema 2

Sean M procesos aleatorios, $\{x_m(t)\,;\, m=1,..,M\}$, paso bajo con un ancho de banda B_x cada uno. Estos procesos son independientes entre sí y estacionarios en sentido amplio, de media nula y con una autocorrelación $R_m(\tau)$ conocida y potencia media, P_x, igual para todos. Cada una de estas señales se modula en Banda Lateral Única Superior a frecuencias $\{f_c+f_m\,;\, m=1,..M\}$ donde $f_m=(m-1)B_x$ y $f_c>B_x$, y después se suman de forma que la señal paso banda resultante es

$$s(t)=\sum_{m=1}^{M} A\,x_m(t)\cos\left(2\pi(f_c+f_m)t\right)-A\,\hat{x}_m(t)\sin\left(2\pi(f_c+f_m)t\right)$$

siendo $\hat{x}_m(t)$ la transformada de Hilbert de $x_m(t)$ para $m=1,..,M$.

a) Demuestre que el equivalente paso bajo de la señal modulada $s(t)$ para una frecuencia central f_c es igual a

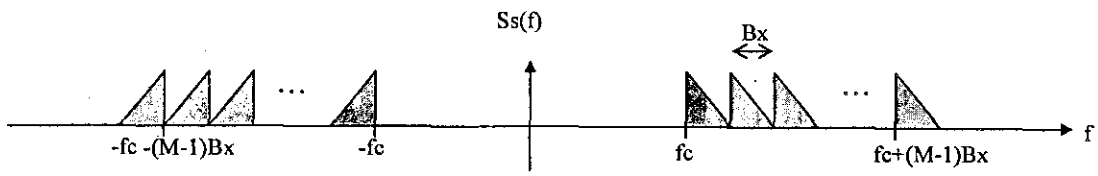
$$b_s(t)=\sum_{m=1}^{M} A\left(x_m(t)+j\hat{x}_m(t)\right)\cdot e^{j2\pi f_m t}$$

b) Demuestre que la autocorrelación de la señal equivalente paso bajo $b_s(t)$ es

$$R_{bs}(\tau)=2A^2\sum_{m=1}^{M}\left(R_m(\tau)+j\hat{R}_m(\tau)\right)\cdot e^{j2\pi f_m\tau}$$

c) Halle la densidad espectral de potencia de la señal equivalente paso bajo $b_s(t)$ en función de las densidades espectrales de potencia de los procesos $\{x_m(t)\,;\, m=1,..,M\}$. Haga una representación gráfica de $S_{bs}(f)$ suponiendo que $S_m(f)=F\{R_m(\tau)\}\quad \forall m=1,..,M$ tienen una forma triangular centrada en el origen.

d) Sabiendo que la autocorrelación de la señal paso banda $s(t)$ cumple que $R_s(\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[R_{bs}(\tau)\cdot e^{j2\pi f_c\tau}\right]$, halle la densidad espectral de dicha señal, $S_s(f)$, y muestre que tiene la siguiente representación gráfica.



$$\cos(A)\cos(B)=\frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$$

$$\sin(A)\cos(B)=\frac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$

$$\sin(A)\sin(B)=\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

a)

$$S_x(f)=\frac{C^2}{T}\left|P(f)\right|^2$$

$$B_x=\frac{1}{T}$$

b)

$$x(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a(k)p(-kT)\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|p(-kT)\right|=\frac{4C}{\pi}\left(1+2\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{63}+\frac{1}{143}\right)\right)=1.5C=1$$

$C=2/3$

$x(0)=1$ para $a(k)=[-1,-1,1,-1,-1]$ para $k=-2,-1,0,1,2$

$x(0)=-1$ para $a(k)=[1,1,-1,1,1]$ para $k=-2,-1,0,1,2$

c)

$$b_s(t)=Ae^{j2\pi f_d\sum_{k=-\infty}^{\infty}a(k)g(t-kT)}$$

donde

$$A=\sqrt{\frac{2E_b}{T}}\ \text{ y }\ g(t)=\int_{-\infty}^{t}p(\lambda)d\lambda$$

d)

$$B=2\left(D+2\right)B_x=2\left(\frac{f_d}{B_x}+2\right)B_x$$

e)

El espectro de la señal FM es simétrico alrededor de f_o, con lo que la frecuencia central del filtro paso-banda debe ser f_o.

$$P_n=N_oB$$

f)

$R_{b_n}(\tau)=2N_o\delta(\tau)$ o su versión (con sinc) filtrada.

$\tilde{R}_{b_n}(\tau)=0$

Nota: este apartado es idéntico a la teoría del ruido paso-banda vista en clase.

g)

$SNR_R>10$ (explicando los argumentos vistos en clase)

$$\frac{A^2/2}{N_oB}>10$$

$$\frac{A^2}{N_o}>20B$$

En estas condiciones, $v(t)$ puede aproximarse como $v(t)\simeq q_n(t)/A$ con lo que su espectro es:

$S_v(f)=N_o/A^2$ de ancho de banda $B/2$

Al aumentar f_d, B crece y ello exige mayor potencia de transmisión (efecto umbral de FM).

h)

$$z(t)=2\pi f_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)R_p(t-kT)+u(t)$$

$$P_u=2\frac{N_o}{A^2}\int_0^{B_x}4\pi^2 f^2\left|P(f)\right|^2 df=\frac{8N_o\pi^2T^2}{A^2}\int_0^{1/T} f^2\cos^2\left(\pi fT/2\right)df$$

Cambio de variable $\lambda=\pi fT/2$ $\left(f=\frac{2\lambda}{\pi T}\right)$

$$P_u=\frac{8N_o\pi^2T^2}{A^2}\int_0^{1/T} f^2\cos^2\left(\pi fT/2\right)df=\frac{64N_o}{\pi TA^2}\int_0^{\pi/2}\lambda^2\cos^2\left(\lambda\right)d\lambda=\frac{16N_o}{\pi TA^2}$$

i)

$p(t)$ es un pulso de Nyquist, con lo que no hay ISI:

$$z_l=2\pi f_d Ta(l)+u_l$$

Las muestras de ruido serían incorreladas (y por tanto independientes) si el ruido a la entrada fuera blanco. Como no es el caso, estas muestras de ruido no son independientes con lo que las decisiones bit a bit no son óptimas.

j)

$$BER=Q\left(\frac{2\pi f_d T}{\sqrt{\frac{16N_o}{\pi TA^2}}}\right)=Q\left(\sqrt{4\pi^3\frac{2E_b}{N_o}}\right)$$

$$10\log_{10}(4\pi^3)=20.93dB$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 2

(a)

$$a_s(t)=s(t)+j\hat{s}(t)=\sum_{m=1}^{M}Ax_m(t)\cos\left(2\pi(f_c+f_m)t\right)-A\hat{x}_m(t)\sin\left(2\pi(f_c+f_m)t\right)+$$

$$+j\sum_{m=1}^{M}Ax_m(t)\sin\left(2\pi(f_c+f_m)t\right)+A\hat{x}_m(t)\cos\left(2\pi(f_c+f_m)t\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{M}Ax_m(t)\left(\cos\left(2\pi(f_c+f_m)t\right)+j\sin\left(2\pi(f_c+f_m)t\right)\right)+jA\hat{x}_m(t)\left(\cos\left(2\pi(f_c+f_m)t\right)+j\sin\left(2\pi(f_c+f_m)t\right)\right)=$$

$$a_s(t)=A\sum_{m=1}^{M}(x_m(t)+j\hat{x}_m(t))\cdot e^{+j2\pi(f_c+f_m)t}$$

$$b_s(t)=a_s(t)\cdot e^{+j2\pi f_c t}=A\sum_{m=1}^{M}(x_m(t)+j\hat{x}_m(t))\cdot e^{+j2\pi f_m t}$$

Una alternativa sería desarrollar los cosenos y senos de la expresión de s(t) e identificar la componente en fase y la componente en cuadratura, para después aplicar que $b_s(t)=i_s(t)+jq_s(t)$.

Nota: Si se partía de la expresión que se da en el enunciado de $b_s(t)$ y se llega a s(t), entonces no se demuestra sino que se está comprobando.

(b)

$$R_{bs}(t+\tau,t)=E\left[b_s(t+\tau)b_s^*(t)\right]=$$

$$=A^2E\left[\sum_{m=1}^{M}(x_m(t+\tau)+j\hat{x}_m(t+\tau))\cdot e^{+j2\pi f_m(t+\tau)}\cdot\sum_{n=1}^{M}(x_n(t)-j\hat{x}_n(t))\cdot e^{-j2\pi f_n t}\right]=$$

$$=A^2\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}E\left[(x_m(t+\tau)+j\hat{x}_m(t+\tau))\cdot(x_n(t)-j\hat{x}_n(t))\right]\cdot e^{+j2\pi[(f_m-f_n)t+f_m\tau]}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}x_m(t)\text{ y }x_n(t)\text{ son independientes}\\ \text{y de media nula, los términos con m}\neq\text{n}\\ \text{se anulan.}\end{array}\right\}=$$

$$=A^2\sum_{m=1}^{M}\left\{E[x_m(t+\tau)x_m(t)]+E[\hat{x}_m(t+\tau)\hat{x}_m(t)]-jE[x_m(t+\tau)\hat{x}_m(t)]+jE[\hat{x}_m(t+\tau)x_m(t)]\right\}\cdot e^{+j2\pi f_m\tau}$$

Entonces, por ser $\left\{x_m(t)\right\}$ estacionarios, tenemos

$$E[x_m(t+\tau)x_m(t)]=R_m(\tau)$$

$$E[\hat{x}_m(t+\tau)\hat{x}_m(t)]=R_m(\tau)*\frac{1}{\pi\tau}*\frac{-1}{\pi\tau}=R_m(\tau)$$

$$E[x_m(t+\tau)\hat{x}_m(t)]=R_{x_m\hat{x}_m}(\tau)=R_m(\tau)*\frac{-1}{\pi\tau}=-\hat{R}_m(\tau)$$

$$E[\hat{x}_m(t+\tau)x_m(t)]=R_{\hat{x}_m x_m}(\tau)=R_m(\tau)*\frac{1}{\pi\tau}=\hat{R}_m(\tau)$$

Por lo que finalmente queda

$$R_{bs}(t+\tau,t)=E\left[b_s(t+\tau)b_s^*(t)\right]=$$

$$=2A^2\sum_{m=1}^{M}\left(R_m(\tau)+j\hat{R}_m(\tau)\right)\cdot e^{+j2\pi f_m\tau}=R_{bs}(\tau)$$

(c)

$$S_{bs}(f)=TF\left[R_{bs}(\tau)\right]=2A^2\sum_{m=1}^{M}\left(S_m(f)+j(-j\text{sign}(f))S_m(f)\right)*\delta(f-f_m)=$$

$$=2A^2\sum_{m=1}^{M}\left(S_m(f)+\text{sign}(f)S_m(f)\right)*\delta(f-f_m)=4A^2\sum_{m=1}^{M}S^+(f)*\delta(f-f_m)$$

$$S_{bs}(f)=4A^2\sum_{m=1}^{M}S^+(f-f_m)$$

(d)

Tenemos que

$$R_s(\tau) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[R_{bs}(\tau) e^{+j2\pi f_c \tau} \right] = \tfrac{1}{4}\left[R_{bs}(\tau) e^{+j2\pi f_c \tau} + R_{bs}^*(\tau) e^{-j2\pi f_c \tau} \right]$$

Entonces, aplicando propiedades de la transformada de Fourier

$$S_s(f) = TF[R_s(\tau)] = \tfrac{1}{4} TF\left[R_{bs}(\tau) e^{+j2\pi f_c \tau} \right] + \tfrac{1}{4} TF\left[R_{bs}^*(\tau) e^{-j2\pi f_c \tau} \right] =$$

$$= \tfrac{1}{4} S_{bs}(f - f_c) + \tfrac{1}{4} S_{bs}^*(-f - f_c) = \left\{ S_{bs}(f) \in \mathbb{R}e \right\} = \tfrac{1}{4} S_{bs}(f - f_c) + \tfrac{1}{4} S_{bs}(-f - f_c)$$ F

inalmente

$$S_s(f) = A^2 \left(\sum_{m=1}^{M} S^+(f - f_m - f_c) + \sum_{m=1}^{M} S^+(-f - f_m - f_c) \right)$$

Otra alternativa consiste en hallar la parte real del producto $R_{bs}(\tau) e^{+j2\pi f_c \tau}$ y después calcular la transformada de Fourier aprovechando propiedades de la misma.