ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

PROCESADO DE SEÑAL — Fecha: 17 de enero de 2005

Profesores: M. A. Lagunas, M. Nájar, A. I. Pérez, J. Riba, J. Vidal — **Tiempo: 3 horas**

- No pueden usarse libros, apuntes, calculadoras programables o teléfonos móviles.
- Todas las hojas han de llevar el nombre del alumno.
- Empiece cada ejercicio en una nueva hoja.
- Las notas se publicarán el dia 27 de enero. Podrán presentarse alegaciones hasta el dia 31 de enero a las 12:30 h

Problema 1 (33%)

Observem un senyal y(n) que és suma d'un procés AR(1) i un procés blanc de mitja nula i de potència σ_w^2, ambdós independents:

$$y(n) = x(n) + w(n)$$

i pretenem estimar el paràmetre del procés x(n), a_1 a partir de les observacions de y(n).

1. Quina es l'expressió que ens relaciona el paràmetre a_1 amb la correlació de x(n)?

Com que no podem observar x(n) s'ens proposa estimar el paràmetre de x(n) fent servir l'equació:

$$a_1' = -\frac{r_y(1)}{r_y(0)}$$

2. Si definim una relació senyal soroll de la següent forma $\eta = r_x(0)/\sigma_w^2$ demostreu que $a_1' = a_1 \dfrac{\eta}{1+\eta}$.

3. Sabent que x(n) i w(n) són processos independents, trobeu la expressió per a la DEP de y(n). Quin és el model adequat per a $S_y(\omega)$?

4. A partir del model obtingut per a $y(n)$, feu servir les equacions de Yule-Walker per a trobar un estimador no biaixat de a_1. Com podem fer servir les equacions trobades a 2) i 4) per a determinar σ_w^2?

Si el senyal x(n) es una exponencial complexe de fase aleatòria i independent de w(n):

$$y(n) = Ae^{j(\omega_o n+\phi)} + w(n)$$

5. Quina és la funció de correlació de y(n)?

6. Podem dir que la densitat espectral de potència de $y(n)$ és ARMA?

Problema 2 (33%)

En un esquema de codificación mediante métodos transformados se pretende evaluar las pérdidas de prestaciones por el uso de una transformación distinta de la KL. La transformación propuesta viene dada por la siguiente matriz: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

A fin de considerar las pérdidas ha de tenerse en cuenta que:

- El sistema de codificación va a cuantificar únicamente un coeficiente transformado.
- El vector de señal que se codifica $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ presenta media nula y su matriz de covarianza es

  $\underline{\underline{C}}_x = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ con $0 < \rho < 1$.

Se pide:

1. Determine una transformación unitaria $\underline{\underline{B}}$ a partir de la matriz $\underline{\underline{A}}$.
2. ¿Cuál es la matriz de transformación para la KLT?

La comparación entre esquemas de codificación se realizará en términos de:

- Potencia de error para un número fijo de bits

3. Compare la potencia del error sobre la señal reconstruida si se utilizan K bits para codificar el coeficiente transformado usando la KLT, y usando la matriz $\underline{\underline{B}}$.
4. Calcule la potencia del error que obtendría si cuantificara cada muestra de $\underline{x}$ con K bits.

- Bits necesarios para una cierta potencia de error:

5. Fijado un cierto error sobre la señal decodificada *D*, determine cuantos bits son necesarios para cada transformación.
6. Compare el numero de bits con el necesario si cuantificara cada muestra de $\underline{x}$ para obtener una potencia de error *D*.

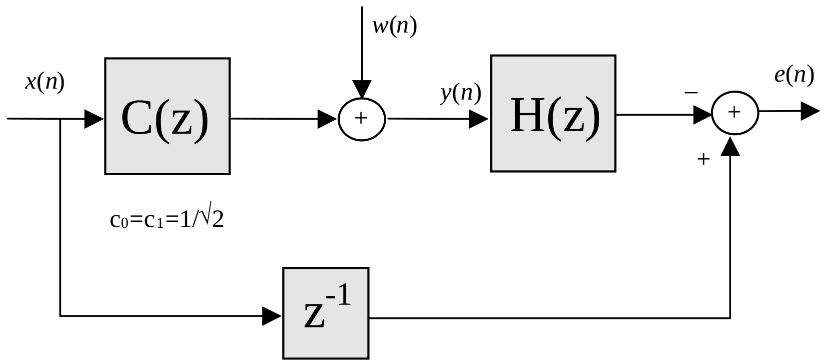
7. Comente los resultados en función de ρ.

NOTA: Suponga que la potencia de error cuando se cuantifica una variable aleatoria *y* viene dada por:

$$E\left\{|y-\hat{y}|^2\right\} = \frac{\sigma_y^2}{2^{2K}} \quad \text{donde} \quad \sigma_y^2 = E\left\{|y|^2\right\}$$

Problema 3 (33%)

Considere el problema de la ecualización de un canal discreto C(z) como el que se muestra en la figura, el cual se modela mediante un sistema FIR del que se conocen los coeficientes $c_0=c_1=1/\sqrt{2}$. La señal de entrada x(n) consiste en una secuencia aleatoria de símbolos binarios (±1) incorrelados, conocidos durante un periodo de tiempo. Ello permite construir un ecualizador H(z) basado en el filtro de Wiener. El ruido añadido w(n) a la salida del canal es blanco y de potencia N_o.



Se pide:

a) Escriba las ecuaciones que permiten determinar los coeficientes de un ecualizador FIR cuya respuesta impulsional sea de longitud M muestras.
b) ¿Cuál es la estimación de Wiener del ecualizador de dos coeficientes, en función de N_o?
c) Determine la potencia del error en función de N_o.

Suponga que la estimación de los coeficientes del ecualizador con dos coeficientes se realiza de forma adaptativa con el algoritmo LMS:
d) Escriba las ecuaciones de adaptación del LMS.
e) Determine el valor máximo del parámetro de adaptación μ para garantizar la convergencia del algoritmo.
f) ¿Cómo influye la potencia de ruido en la velocidad de convergencia del LMS?
g) Si se desea que el exceso de error ($J-J_{min}$) no exceda el 0,1% del error mínimo J_{min}, ¿qué valor de μ seleccionaría?
h) En ese caso, ¿cuál es el número de pasos de adaptación necesario para que todos los coeficientes del filtro hayan convergido? (tómese como criterio que la diferencia respecto al óptimo se haya reducido al 1% de su valor inicial).

NOTA: $\aleph = \dfrac{J - J_{\min}}{J_{\min}} \cong \dfrac{\mu}{2} M\, r_y(0)$

SOLUCION Problema 1

1. Dado que es un proceso AR(1):

$$x(n) = v(n) - a_1 x(n-1)$$

(Nótese que también es válido formularlo con el signo positivo en a_1)

El modelo de generación del proceso es:

$$v(n) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{1+a_1 z^{-1}}} \longrightarrow x(n)$$

Las ecuaciones se derivan de:

$$R_x(z) = \frac{\sigma_v^2}{A(z)A(1/z)}$$

Entonces:

$$R_x(z)A(z) = \sigma_v^2 A(1/z)$$

Imponiendo la causalidad de A(z), y teniendo en cuenta que el primer coeficiente del sistema es unitario (ya que $a_0 = A(\infty) = 1$), el sistema $A(1/z)$ es por tanto anticausal, con coeficiente temporal en el origen, unitario. Teniendo en cuenta estas restricciones, resultan las ecuaciones de Yule-Walker:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \\ r_x(2) & r_x(1) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

En definitiva:

$$a_1 = -\frac{r_x(m)}{r_x(m-1)} \qquad \forall m \geq 1$$

(1 punto / 10)

2. Como

$$y(n) = x(n) + w(n)$$

y {x} y {w} son independientes, entonces:

$$r_y(m) = r_x(m) + \sigma_w^2 \delta(m)$$

es decir, para m=0 y m=1 resulta:

$$r_y(0) = r_x(0) + \sigma_w^2$$
$$r_y(1) = r_x(1)$$

En consecuencia:

$$a_1^{'} = -\frac{r_y(1)}{r_y(0)} = -\frac{r_x(1)}{r_x(0) + \sigma_w^2}$$

Como que $r_x(1) = -a_1 r_x(0)$ tenemos:

$$a_1^{'} = \frac{a_1 r_x(0)}{r_x(0) + \sigma_w^2} = a_1 \frac{r_x(0)/\sigma_w^2}{r_x(0)/\sigma_w^2 + 1}$$
$$a_1^{'} = a_1 \frac{\eta}{1+\eta}$$

(2 puntos / 10)

3. Al ser independientes:

$$r_y(m) = r_x(m) + \sigma_w^2 \delta(m)$$

Haciendo la transformada de Fourier:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) + \sigma_w^2$$

En el dominio z tenemos:

$$R_y(z) = R_x(z) + \sigma_w^2 = \frac{\sigma_v^2}{A(z)A(1/z)} + \sigma_w^2 = \frac{\sigma_v^2 + \sigma_w^2 A(z)A(1/z)}{A(z)A(1/z)}$$

Como puede verse, la autocorrelacion tiene dos zeros y dos polos.

Obsérvese también que el espectro puede expresarse de este modo:

$$S_y(\omega) = \frac{\sigma_v^2 + \sigma_w^2 \left|A\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}{\left|A\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}$$

Se trata por tanto de un proceso ARMA(1,1) (un cero y un polo).

(1 punto / 10).

4. Como

$$x(n) = y(n) - w(n)$$

entonces:

$$y(n) - w(n) = \nu(n) - a_1\left(y(n-1) - w(n-1)\right)$$

o bien:

$$y(n) + a_1 y(n-1) = w(n) + a_1 w(n-1) + \nu(n)$$

Debido al carácter blanco del {w} y {ν}, el miembro de la derecha tiene autocorrelación nula para $m \geq 2$. Por tanto podemos escribir:

$$r_y(m) + 2a_1 r_y(m-1) + a_1^2 r_y(m) = 0 \qquad \forall m \geq 2$$

Vemos que la autocorrelación de {y}, $r_y(m)$, para $m \geq 2$, no dependerá más que de los valores anteriores. Solucionando la ecuación de segundo grado en a_1 (de discriminante nulo) resulta:

$$a_1 = -\frac{r_y(m)}{r_y(m-1)} \qquad \forall m \geq 2$$

Tomando por ejemplo m=2, resulta:

$$a_1 = -\frac{r_y(2)}{r_y(1)}$$

También se puede llegar al resultado anterior a partir del resultado obtenido de las ecuaciones de Yule-Walker del apartado 1. Allí obtuvimos que:

$$a_1 = -\frac{r_x(m)}{r_x(m-1)} \qquad \forall m \geq 1$$

Recordemos que la autocorrelación de {y} es:

$$r_y(m) = r_x(m) + \sigma_w^2 \delta(m)$$

Vemos que para $m \geq 1$, las autocorrelaciones de {x} e {y} coinciden:

$$r_y(m) = r_x(m) \qquad \forall m \geq 1$$

Por tanto, en la ecuación $a_1 = -\frac{r_x(m)}{r_x(m-1)}$, podemos sustituir $r_x(m)$ por $r_y(m)$ siempre que se cumpla que:

$$m \geq 1$$
$$m - 1 \geq 1$$

Es decir, siempre que se cumpla que $m \geq 2$. Haciendo la sustitución de autocorrelaciones llegamos al mismo resultado:

$$a_1 = -\frac{r_y(m)}{r_y(m-1)} \qquad \forall m \geq 2$$

y para m=2:

$$a_1 = -\frac{r_y(2)}{r_y(1)}$$

Para calcular la potencia del ruido aditivo partimos de:

$$r_y(m) = r_x(m) + \sigma_w^2 \delta(m)$$
$$r_y(0) = r_x(0) + \sigma_w^2$$

con lo que:

$$\sigma_w^2 = r_y(0) - r_x(0)$$

Usando que:

$$r_x(0) = -\frac{r_x(1)}{a_1} = -\frac{r_y(1)}{a_1}$$

resulta:

$$\sigma_w^2 = r_y(0) + \frac{r_y(1)}{a_1}$$

Sustituyendo a_1 por el valor hallado obtenemos:

$$\sigma_w^2 = r_y(0) + \frac{r_y^2(1)}{r_y(2)}$$

(2 puntos / 10)

5.

$$y(n) = Ae^{j(\omega_o n + \phi)} + w(n)$$

Dado que el ruido es de media cero, la autocorrelación de {y} es la suma de autocorrelaciones de cada sumando:

$$r_y(m) = Ae^{j(\omega_o(n+m)+\phi)} A^* e^{-j(\omega_o n + \phi)} + r_w(m) = |A|^2 e^{j\omega_o m} + \sigma_w^2 \delta(m)$$

(2 puntos / 10)

6. NO

En primer lugar si ϕ no está distribuida uniformemente, ni tan sólo sería estacionario (en media).

Tampoco si nos limitamos a una realización, donde podría escribirse

$$y(n) = s(n) + w(n)$$

$$s(n) = bs(n-1)$$

$$b = e^{j\omega}$$

el proceso sería blanco con una media variante (el fasor) a lo largo de una realización.

Tampoco $Ae^{j(\omega_o n+\phi)}$ (incluso con ϕ distribuida uniformemente) se puede describir como un modelo racional estable por el que pasa un ruido blanco.

SOLUCION Problema 2

1. Para que $\underline{\underline{A}}$ corresponda a una transformación ortogonal no hay mas que normalizar las columnas: $\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{A}}/2$.

2. La matriz de transformación de la KLT contiene en las filas los auto vectores de $\underline{\underline{C}}_x$. Para su cálculo es necesario determinar antes los autovalores como solución de la ecuación el λ : $\left|\underline{\underline{C}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right| = 0$. Las dos soluciones son: $\lambda_1=1+\rho$, $\lambda_2=1-\rho$.

Usando los autovalores en la ecuación $\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ se obtienen las condiciones siguientes para los auto vectores

$\lambda_1=1+\rho$	$\Rightarrow$	$x_1 = x_2$
$\lambda_2=1-\rho$	$\Rightarrow$	$x_1 = -x_2$

La condición de ortonormalidad de los auto vectores nos proporciona la siguiente matriz de transformación:

$$\underline{\underline{T}}_{KLT} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. La potencia de los coeficientes transformados en ambos casos son:

$$\underline{\underline{C}}_{y,KLT} = E\left\{\underline{y}\underline{y}^H\right\} = \underline{\underline{T}}_{KLT}\underline{\underline{C}}_x\underline{\underline{T}}_{KLT}^H = \begin{bmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}_{y,B} = E\left\{\underline{y}\underline{y}^H\right\} = \underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}}_x\underline{\underline{B}}^H = \begin{bmatrix} 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho & \frac{\rho}{2} \\ \frac{\rho}{2} & 2-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho \end{bmatrix}$$

Como las transformación son unitarias, la potencia del error de cuantificación cometido en el dominio transformado es igual a la cometida sobre la señal decodificada. Ésta será igual a la potencia del error de cuantificación sobre el coeficiente que se transmite más la potencia sobre el coeficiente descartado:

$$P_e = \frac{\sigma_{y_1}^2}{2^{2K}} + \sigma_{y_2}^2$$

es fácil comprobar que para ambas transformaciones, como K=0, el coeficiente descartado deber ser el de menor potencia. La potencia del error en ambos casos es:

$$\begin{aligned} P_{e,KLT} &= \frac{1+\rho}{2^{2K}} + 1 - \rho \\ P_{e,B} &= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho}{2^{2K}} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \end{aligned} \tag{0.1}$$

Comparando ambas expresiones se comprueba que $P_{e,B} > P_{e,KLT}$

4. Si cuantificáramos las muestras en lugar de los coeficientes transformados $P_{e,PCM} = \frac{2}{2^{2K}}$. Comparándo con la ecuación (0.1), resulta que la potencia del error es menor para el esquema PCM.

5. Se debe despejar el valor de *K* en la ecuación (0.1) para $P_{e,KLT} = P_{e,KLT} = D$.

6. El número de bits necesarios para la KLT resulta ser superior al necesario para el PCM, ya que la potencia del error D es siempre inferior a la potencia total del vector $\underline{x}$ (de lo contrario, no haria falta transmitir nada para tener ya una potencia del error = 2).

7. La ventaja aparente del PCM (para cualquier valor de ρ en el margen $0 < \rho < 1$) tanto en potencia del error como en numero de bits es debida a que no se debe descartar uno de los coeficientes transformado, sino asignarle un cierto número de bits.

SOLUCION Problema 3

a. La expresión general del filtro de Wiener es:

$$\underline{\mathbf{h}} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{y}}^{-1} \underline{\mathbf{p}}$$

donde:

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{y}} = E\ \underline{\mathbf{y}}(n)\underline{\mathbf{y}}^T(n)$$

$$\underline{\mathbf{y}}(n) = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n-1) \\ \vdots \\ y(n-M+1) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\mathbf{x}}(n) + \underline{\mathbf{w}}(n) \qquad \text{(M)filas}$$

$$\underline{\mathbf{x}}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-M) \end{bmatrix} \qquad \text{(M+1)filas (es decir, M+2-1, la longitud de la respuesta total)}$$

$$\underline{\mathbf{w}}(n) = \begin{bmatrix} w(n) \\ w(n-1) \\ \vdots \\ w(n-M) \end{bmatrix} \qquad \text{(M+1)filas}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_1 & c_0 & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \qquad \text{(M)filas x (M+1)columnas}$$

$$\underline{\mathbf{p}} = E\ d(n)\underline{\mathbf{y}}(n) \qquad \text{(M)filas}$$

$$d(n) = x(n-1) \qquad \text{(Señal deseada)}$$

A partir de aquí tenemos la matriz de autocorrelacion MxM:

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{y}} = E\ \underline{\mathbf{y}}(n)\underline{\mathbf{y}}^T(n) = E\ \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\mathbf{x}}(n) + \underline{\mathbf{w}}(n)\right)\left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\mathbf{x}}(n) + \underline{\mathbf{w}}(n)\right)^T = \underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{x}}\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T + N_o \underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

Como que los símbolos son incorrelados de media nula:

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \qquad \text{(M+1)filas x (M+1)columnas}$$

Entonces:

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{y}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T + N_o \underline{\underline{\mathbf{I}}} \qquad \text{(M)filas x (M)columnas}$$

El vector $\underline{\mathbf{p}}$ es de dimensión M y sus componentes son:

$$\underline{\mathbf{p}} = E\ x(n-1)\underline{\mathbf{y}}(n) = E\ x(n-1)\left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\mathbf{x}}(n) + \underline{\mathbf{w}}(n)\right) = E\ x(n-1)\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\mathbf{x}}(n) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}\ E\ x(n-1)\begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-M) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, el vector $\underline{\mathbf{p}}$ es la segunda columna de $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$:

$$\underline{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} c_o \\ c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\underline{\mathbf{h}} = \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T + N_o \underline{\underline{\mathbf{I}}}\right)^{-1} \begin{bmatrix} c_o \\ c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

b. Para M=2 tenemos:

$$\underline{\mathbf{h}} = \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T + N_o \underline{\underline{\mathbf{I}}}\right)^{-1} \begin{bmatrix} c_o \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_o \\ c_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} c_1 & c_0 & \\ & c_1 & c_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{y}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T + N_o \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} 1+N_o & 1/2 \\ 1/2 & 1+N_o \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T + N_o \underline{\underline{\mathbf{I}}}\right)^{-1} = \frac{1}{(1+N_o)^2 - 1/4} \begin{bmatrix} 1+N_o & -1/2 \\ -1/2 & 1+N_o \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{h}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(1+N_o)^2 - 1/4} \begin{bmatrix} 1+N_o & -1/2 \\ -1/2 & 1+N_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{N_o + 1.5} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$h_o = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{N_o + 1.5}$$

c. Para calcular el error mínimo puede utilizarse la siguiente ecuación:

$$\xi_{\min} = r_d(0) - \underline{\mathbf{h}}^T \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{y}} \underline{\mathbf{h}} = 1 - \underline{\mathbf{h}}^T \underline{\mathbf{p}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{N_o + 1.5} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 1 - \frac{1}{N_o + 1.5}$$

$$\xi_{\min} = \frac{N_o + 0.5}{N_o + 1.5}$$

d. La ecuación general de adaptación del LMS es:

$$\underline{\mathbf{h}}(n+1) = \underline{\mathbf{h}}(n) + \mu\, e(n) \underline{\mathbf{y}}(n)$$

donde la señal error es la definida en la figura.

e. El parámetro de adaptación está acotado por la inversa del autovalor máximo de la matriz de autocorrelacion $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{y}}$:

$$\mu_{\max} = \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

o

$$\mu_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\max}}$$

para una convergencia sin oscilación (en media) en ningún de los modos.

La convergencia queda también garantizada con esta otra condición más conservadora y práctica:

$$\mu'_{\max} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} < \mu_{\max}$$

$$\mu'_{\max} = \frac{2}{tr\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{y}}}$$

Como que:

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1+N_o & 1/2 \\ 1/2 & 1+N_o \end{bmatrix}$$

resulta:

$$\mu'_{\max} = \frac{1}{1+N_o}$$

f. Supongamos que se usa el paso siguiente:

$$\mu_{\max} = \frac{\alpha}{\lambda_{\max}}$$

donde $0 < \alpha \le 1$.

En estas condiciones, el tiempo de convergencia es proporcional a la dispersión de autovalores:

$$K = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

Para hallar los autovalores de $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{y}}$ resolvemos:

$$\det\left(\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\mathbf{y}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}}\right) = 0$$

$$(1+N_o-\lambda)^2 - 1/4 = 0$$

$$1+N_o-\lambda = \pm 1/2$$

$$\lambda_{\max} = \frac{3}{2} + N_o$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{2} + N_o$$

Por tanto:

$$K = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{N_o + 1,5}{N_o + 0.5}$$

En los casos extremos de ruido pequeño y grande tenemos:

$$K_{\text{ruido pequeño}} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = 3$$

$$K_{\text{ruido grande}} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = 1$$

donde deducimos que el aumento de potencia de ruido influye de manera favorable en la velocidad de convergencia en media.

g. Partimos de:

$$\aleph = \frac{J - J_{\min}}{J_{\min}} \cong \frac{\mu}{2} M \; r_y(0)$$

Imponemos que:

$$\frac{\mu}{2} M \; r_y(0) \leq 10^{-3}$$

Como M=2, tenemos:

$$\mu \leq \frac{10^{-3}}{r_y(0)}$$

es decir:

$$\mu \leq \frac{10^{-3}}{1 + N_o}$$

h. El tiempo de convergencia, N, viene dado por la evolución del error en la dirección del autovalor mínimo, debiendo imponerse que:

$$\left(1 - \alpha \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)^N = 10^{-2}$$

Aproximadamente:

$$\left(e^{-\alpha \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}\right)^N = 10^{-2}$$

$$N\alpha \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} = -\ln 10^{-2}$$

$$N \approx \frac{4.6}{\alpha}\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

El valor de α es:

$$\alpha = \frac{\mu}{\mu_{\max}} = \frac{\mu}{1/\lambda_{\max}} = \mu\lambda_{\max}$$

Tomamos como μ, la máxima permitida en el apartado anterior:

$$\mu = \frac{10^{-3}}{1+N_o}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\mu_{\max} = \frac{1}{N_o + 1{,}5}$$

tenemos:

$$N \approx \frac{4.6}{\alpha}\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{4.6}{\mu\lambda_{\min}} = 4600\frac{N_o + 0{,}5}{N_o + 1}$$

Por tanto, el algoritmo LMS va a requerir unas 4600 iteraciones en el peor de los casos.