

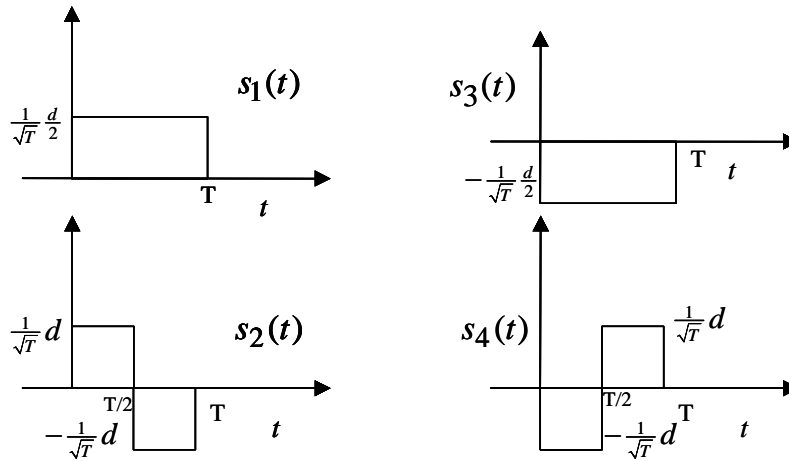
2 MODULACIONES DIGITALES SOBRE CANALES AWGN

2.1 Ejercicio de examen de control noviembre 2002 (M. Cabrera)

2.1.1 Enunciado

Sea el conjunto de 4 señales de la figura.

Bits	Señal
10	$s_1(t)$
11	$s_2(t)$
01	$s_3(t)$
00	$s_4(t)$



Se propone su descomposición mediante la base de funciones ortonormales:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right); \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) - \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right)$$

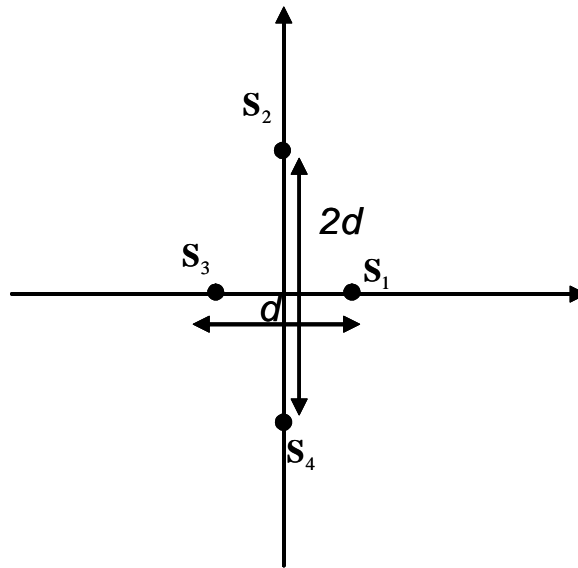
La base se utiliza para transmitir una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes entre sí: 2 bits por señal o símbolo según la tabla adjunta. Considere canal ideal y ruido $w(t)$ blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $\frac{N_0}{2}$; $N_0 = \frac{1}{18} d^2$.

- Calcule las coordenadas del conjunto de señales sobre la base y dibuje el mapa de señal.
- Calcule la energía media de bit: E_b en función del parámetro d . ¿Cuánto vale la $\frac{E_b}{N_0}$?
- Aplique el criterio MAP para obtener las cuatro regiones de decisión óptimas y dibújelas.
- Comente las dificultades para obtener la probabilidad de error de forma exacta.
- Calcule una cota superior para la probabilidad de error. Para ello consulte la gráfica siguiente.

2.1.2 Resolución

- a) Calcule las coordenadas del conjunto de señales sobre la base y dibuje el mapa de señal.

Solución:



$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{s}_1$$

$$\mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -d \end{pmatrix} = -\mathbf{s}_2$$

- b) Calcule la energía media de bit: E_b en función del parámetro d . ¿Cuánto vale la $\frac{E_b}{N_0}$?

Solución:

Energía media de símbolo: $\hat{E}_m = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\alpha_m)^2 = \frac{5}{8} d^2$

Energía media de bit: $E_b = \frac{\hat{E}_m}{b} = \frac{5}{16} d^2$

Cociente $\frac{E_b}{N_0} = \frac{\frac{5}{16} d^2}{\frac{d^2}{18}} = \frac{45}{8}; \quad 7,5 \text{ dB}$

c) Aplique el criterio MAP para obtener las cuatro regiones de decisión óptimas y dibújelas.

Solución:

$$\hat{s}_{m \text{ MAP}} = \max_{s_m} (\Pr(s_m / \mathbf{y})) = \max_{s_m} \left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0} + \ln(\Pr(s_m)) \right)$$

En este caso, debido a la equiprobabilidad de los símbolos:

$$\hat{s}_{\text{MAP}} = \max_{s_m} \left(-\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 \right) = \max_{s_m} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{s}_m - \frac{1}{2} E_m)$$

Así, al desarrollar los límites entre los diferentes símbolos se tiene:

Límite entre Zona 1 y Zona 2:

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{s}_1 - \frac{1}{2} E_1 = y_1 \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{4} \begin{matrix} >_{s_1} \\ <_{s_2} \end{matrix} y_2 d - \frac{1}{2} d^2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{s}_2 - \frac{1}{2} E_2 \quad \begin{matrix} >_{s_2} \\ <_{s_1} \end{matrix} \frac{y_1}{2} + \frac{3}{8} d$$

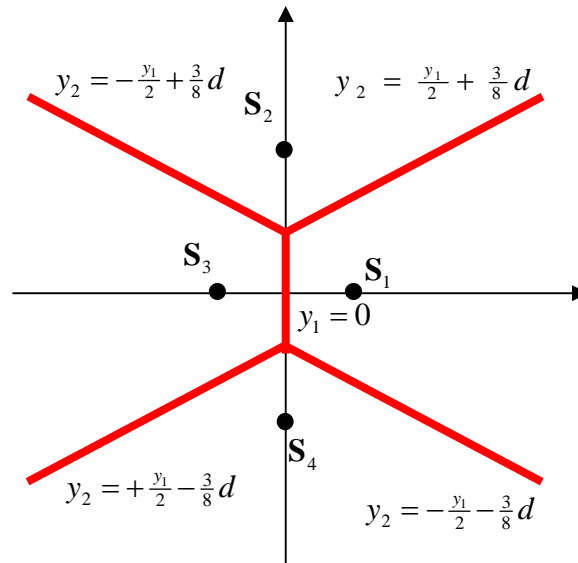
Operando de modo análogo y debido a las simetrías del espacio de señal:

$$\text{Límite entre Zona 2 y Zona 3: } y_2 \begin{matrix} >_{s_2} \\ <_{s_3} \end{matrix} -\frac{y_1}{2} + \frac{3}{8} d$$

$$\text{Límite entre Zona 3 y Zona 4: } y_2 \begin{matrix} >_{s_3} \\ <_{s_4} \end{matrix} \frac{y_1}{2} - \frac{3}{8} d$$

$$\text{Límite entre Zona 1 y Zona 4: } y_2 \begin{matrix} >_{s_1} \\ <_{s_4} \end{matrix} -\frac{y_1}{2} - \frac{3}{8} d$$

$$\text{Límite entre Zona 1 y Zona 34: } y_1 \begin{matrix} >_{s_1} \\ <_{s_3} \end{matrix} 0$$



d) Comente las dificultades para obtener la probabilidad de error de forma exacta.

Solución:

El problema en el cálculo de la probabilidad de error radica en que las líneas que separan las zonas de decisión, en general, no son paralelas y/o perpendiculares a los ejes de coordenadas. Aun con giro de ejes, no se consigue dicha característica.

Así por ejemplo, si se calcula la probabilidad de error parcial condicionada al símbolo S_1 , de forma exacta se plantearía como:

$$P_r(e/S_1) = 1 - P_r(S_1/S_1)$$

$$P_r(S_1/S_1) = \int_0^{\infty} \int_{-\frac{y_1}{2} - \frac{3}{8}d}^{+\frac{y_1}{2} + \frac{3}{8}d} f_{y_1}(y_1/S_1) f_{y_2}(y_2/S_1) dy_2 dy_1$$

$$f_{y_1}(y_1/S_1) = f_{\beta_1}(y_1 - \frac{d}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \left(y_1 - \frac{d}{2}\right)^2\right)$$

$$f_{y_2}(y_2/S_1) = f_{\beta_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{1}{N_0} (y_2)^2\right)$$

e) Calcule una cota superior para la probabilidad de error. Para ello consulte la gráfica siguiente.

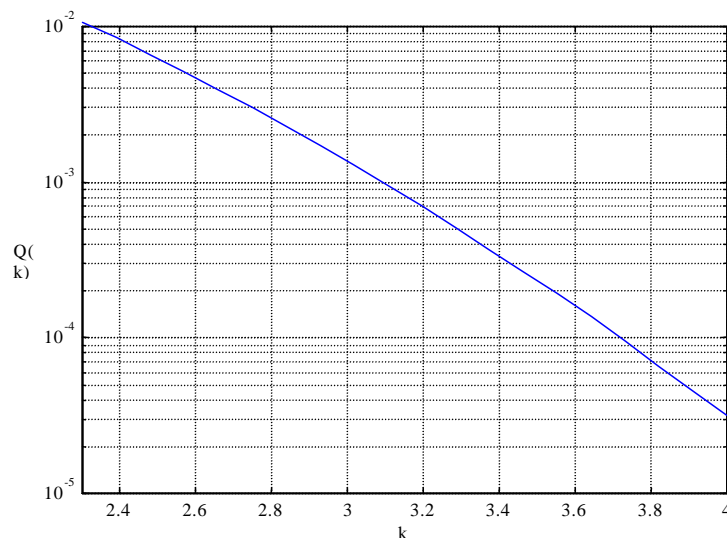
Solución:

Debido a la equiprobabilidad de los símbolos, se aplicará la siguiente cota: $BER \leq \frac{(M-1)}{b} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sigma}\right)$, donde d_{\min} corresponde a la distancia mínima entre dos símbolos y $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$.

En el presente ejemplo se tiene $d_{\min} = d$. Además es fácil de comprobar que $\frac{d}{2}$ es menor o igual que la mínima distancia entre un símbolo cualquiera y el límite de su región de decisión.

$$\text{Por tanto } \left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)^2 = \frac{d^2}{2N_0} = \frac{\frac{16}{5} E_b}{2N_0} = \frac{8E_b}{5N_0} = 9$$

$$BER \leq \frac{3}{2} Q(3) \cong 2.25 \cdot 10^{-3}$$



2.2 Ejercicio de examen de control noviembre 2003 (M. Cabrera)

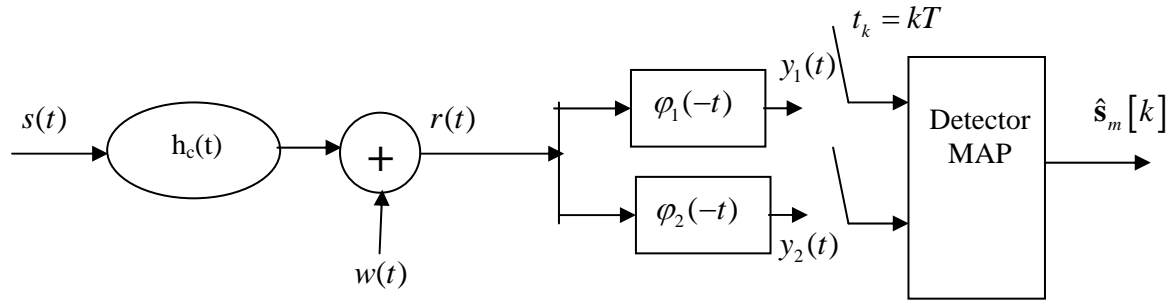
2.2.1 Enunciado

Considere el espacio de señal de $M = 4$ señales equiprobables y dimensión $L = 2$. Los 4 vectores referidos a la base ortonormal $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ son: $\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. De las funciones de la base se conocen sus funciones de autocorrelación:

$$R_{\varphi_1}(\tau) = R_{\varphi_2}(\tau) = p_{RC}(\tau)_{100\%} = \frac{\text{sinc}(2r\tau)}{1 - (2r\tau)^2} \quad R_{\varphi_1\varphi_2}(\tau) = R_{\varphi_2\varphi_1}(\tau) = \text{sen}^2(\pi r\tau) p_{RC}(\tau)_{100\%}$$

Donde $p_{RC}(\tau)_{100\%}$ es la función *raised cosinus* o *pulso de Nyquist 100% roll-off*.

La señal modulada $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^2 \alpha_l[n] \varphi_l(t - nT)$ se transmite por una canal ideal $h_c(t) = \delta(t)$ y se recibe según el receptor de la figura:



donde la señal de ruido es de media nula, estacionaria, gaussiana e incorrelada con la señal útil. Su función de autocorrelación es: $R_w(\tau) = \frac{N_0}{2} \left((1 - \rho) \delta(\tau) + \rho \delta(\tau - \frac{T}{2}) + \rho \delta(\tau + \frac{T}{2}) \right)$

Se pide:

- a) Ancho de banda de la señal transmitida, es decir, ancho de banda de las funciones de la base. Dibuje la densidad espectral de las funciones transmitidas: $S_{\varphi_1}(f) = S_{\varphi_2}(f)$. No es necesario que escriba su expresión analítica.

- b) Demuestre que el vector de señal detectado se halla libre de ISI.

- c) Calcule la matriz de covarianza $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} E[\beta_1^2(t_k)] & E[\beta_1(t_k)\beta_2(t_k)] \\ E[\beta_2(t_k)\beta_1(t_k)] & E[\beta_2^2(t_k)] \end{pmatrix}$ del vector de

ruido $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \beta_1(t_k) \\ \beta_2(t_k) \end{pmatrix}$ a la entrada del detector MAP en función de N_0, ρ .

En estas condiciones la f.d.p. del vector de ruido es $f_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{n}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{n}\right)$

- d) Justifique que el criterio MAP $\mathbf{s}_{MAP} = \max_{\mathbf{s}_m} \{\Pr\{\mathbf{s}_m / \mathbf{y}\}\}$ para símbolos equiprobables consiste en detectar:

$$\mathbf{s}_{MAP} = \min_m \left\{ (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m) \right\}$$

- e) Desarrolle el criterio MAP a partir de la expresión anterior para obtener las 4 regiones de decisión y dibújelas sobre el espacio de señal. Aplique todas las simetrías que considere útiles.
- f) Obtenga una cota superior para la probabilidad de error, en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$.

Nota:

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(-t); \varphi_2(t) = \varphi_2(-t), \quad p_{RC100\%}\left(\frac{T}{2}\right) = p_{RC100\%}\left(-\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2.2.2 Resolución

- a) Ancho de banda de la señal transmitida, es decir, ancho de banda de las funciones de la base. Dibuje la densidad espectral de las funciones transmitidas: $S_{\varphi_1}(f) = S_{\varphi_2}(f)$. No es necesario que escriba su expresión analítica.

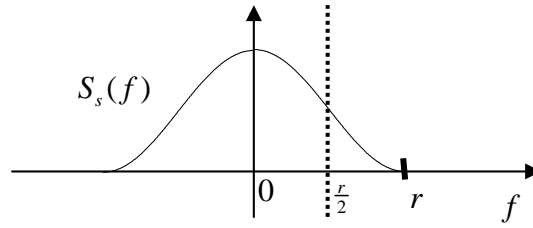
Solución:

Dado que es una modulación codificada sin memoria y además las dos secuencias de coordenadas son de media nula y estadísticamente independientes entre sí, la densidad espectral de $s(t)$ es directamente proporcional a $S_{\varphi_1}(f), S_{\varphi_2}(f)$:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \left(C_{\alpha_1}[0] |\Phi_1(f)|^2 + C_{\alpha_2}[0] |\Phi_2(f)|^2 \right) = \frac{d^2}{2T} \frac{1}{r} \cos^2\left(\frac{\pi}{2r} f\right) \Pi\left(\frac{f}{2r}\right) = E_b \cos^2\left(\frac{\pi}{2r} f\right) \Pi\left(\frac{f}{2r}\right)$$

El ancho de banda es $B_T = \frac{r}{2} + \beta = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

En el dibujo de la densidad espectral es de destacar la simetría vestigial respecto a $\frac{r}{2}$.



- b) Demuestre que el vector de señal detectado se halla libre de ISI.

Solución:

La primera coordenada del vector detectado es

$$y_1(t) = s(t) * \varphi_1(-t) + w(t) * \varphi_1(-t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^2 \alpha_l[n] R_{\varphi_l \varphi_1}(t - nT) + \beta_1(t) \Rightarrow$$

$$y_1(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^2 \alpha_l[n] R_{\varphi_l \varphi_1}((k-n)T) + \beta_1(t_k) = \alpha_1[k] + \beta_1(t_k)$$

Donde se ha utilizado la condición: $R_{\varphi_l \varphi_j}((k-n)T) = \delta[k-n] \delta[l-j]$

Análogamente se demuestra:

$$y_2(t_k) = \alpha_2[k] + \beta_2(t_k)$$

- c) Calcule la matriz de covarianza $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} E[\beta_1^2(t_k)] & E[\beta_1(t_k)\beta_2(t_k)] \\ E[\beta_2(t_k)\beta_1(t_k)] & E[\beta_2^2(t_k)] \end{pmatrix}$ del vector de ruido $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \beta_1(t_k) \\ \beta_2(t_k) \end{pmatrix}$ a la entrada del detector MAP en función de N_0, ρ .

Solución:

Inicialmente se calcula de forma genérica $E[\beta_i(t_k)\beta_j(t_k)]:$

$$\begin{aligned} E[\beta_i(t_k)\beta_j(t_k)] &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} w(\lambda)\varphi_i(\lambda-t_k)d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w(\gamma)\varphi_j(\gamma-t_k)d\gamma\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[w(\lambda)w(\gamma)]\varphi_i(\gamma-t_k)d\gamma\varphi_j(\lambda-t_k)d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \left((1-\rho)\delta(\lambda-\gamma) + \rho\delta(\lambda-\gamma-\frac{T}{2}) + \rho\delta(\lambda-\gamma+\frac{T}{2}) \right) \varphi_i(\gamma-t_k)d\gamma\varphi_j(\lambda-t_k)d\lambda = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left((1-\rho)\varphi_i(\lambda-t_k) + \rho\varphi_i(\lambda+\frac{T}{2}-t_k) + \rho\varphi_i(\lambda-\frac{T}{2}-t_k) \right) \varphi_j(\lambda-t_k)d\lambda = \\ &= \frac{N_0}{2} \left((1-\rho)R_{\varphi_i\varphi_j}(0) + \rho R_{\varphi_i\varphi_j}(\frac{T}{2}) + \rho R_{\varphi_i\varphi_j}(-\frac{T}{2}) \right) \end{aligned}$$

Obsérvese que este resultado es un caso particular de la aplicación de las propiedades de correlación de procesos aleatorios estacionarios a través de sistemas lineales:

$$R_{\beta_i\beta_j}(\tau) = R_w(\tau) * \varphi_i(-\tau) * \varphi_j(\tau) = R_w(\tau) * R_{\varphi_j\varphi_i}(\tau)$$

Particularizando la expresión obtenida para $E[\beta_i(t_k)\beta_j(t_k)]$ y utilizando las notas de ayuda:

$$i = j \Rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \frac{N_0}{2} \left((1-\rho) + \rho\frac{1}{2} + \rho\frac{1}{2} \right) = \frac{N_0}{2}$$

$$i \neq j \Rightarrow \sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 = \frac{N_0}{2} \left(0 + \rho\frac{1}{2} + \rho\frac{1}{2} \right) = \rho\frac{N_0}{2}$$

Por lo que: $\mathbf{C} = \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$

En estas condiciones la f.d.p. del vector de ruido es $f_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{n}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{n}\right)$

- d) Justifique que el criterio MAP $\mathbf{s}_{MAP} = \max_{\mathbf{s}_m} \{\Pr\{\mathbf{s}_m / \mathbf{y}\}\}$ para símbolos equiprobables consiste en detectar:

$$\mathbf{s}_{MAP} = \min_m \left\{ (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m) \right\}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{MAP} &= \max_{\mathbf{s}_m} \{ \Pr \{ \mathbf{s}_m / \mathbf{y} \} \} = \arg \max_{\mathbf{s}_m} \left\{ \frac{f_{\mathbf{y}/\mathbf{s}_m}(\mathbf{y} / \mathbf{s}_m) \Pr \{ \mathbf{s}_m \}}{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})} \right\} = \\
&\arg \max_{\mathbf{s}_m} \{ f_{\mathbf{y}/\mathbf{s}_m}(\mathbf{y} / \mathbf{s}_m) \} = \arg \max_{\mathbf{s}_m} \{ f_{\mathbf{n}}(\mathbf{y} - \mathbf{s}_m) \} = \\
&\arg \max_{\mathbf{s}_m} \left\{ \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m) \right) \right\} = \\
&\arg \max_{\mathbf{s}_m} \left\{ -\log \left(2\pi\sqrt{|\mathbf{C}|} \right) - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m) \right\} = \\
&\arg \min_{\mathbf{s}_m} \left\{ (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m) \right\}
\end{aligned}$$

- e) Desarrolle el criterio MAP a partir de la expresión anterior para obtener las 4 regiones de decisión y dibújelas sobre el espacio de señal. Aplique todas las simetrías que considere útiles.

Solución:

Como cálculo previo: $\mathbf{C}^{-1} = \frac{2}{(1-\rho^2)N_0} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$

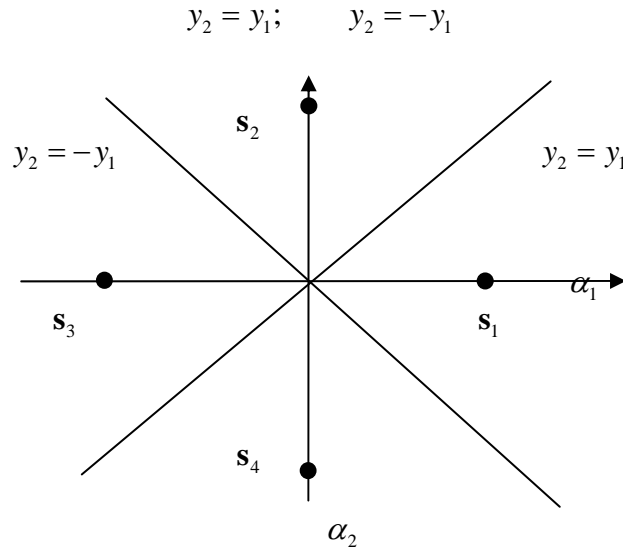
Al buscar la frontera entre los símbolos $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y} - \mathbf{s}_1)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s}_1) &\underset{>_{\mathbf{s}_2}}{<_{\mathbf{s}_1}} (\mathbf{y} - \mathbf{s}_2)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s}_2) \Rightarrow \\
\left(y_1 - \frac{d}{\sqrt{2}} \quad y_2 \right) \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - \frac{d}{\sqrt{2}} \\ y_2 \end{pmatrix} &\underset{>_{\mathbf{s}_2}}{<_{\mathbf{s}_1}} \left(y_1 \quad y_2 - \frac{d}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\left(y_1 - \frac{d}{\sqrt{2}} - \rho y_2 \quad -\rho y_1 + \rho \frac{d}{\sqrt{2}} + y_2 \right) &\underset{>_{\mathbf{s}_2}}{<_{\mathbf{s}_1}} \left(y_1 - \rho y_2 + \rho \frac{d}{\sqrt{2}} \quad -\rho y_1 + y_2 - \frac{d}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow & \\
\left(y_1^2 - \frac{d}{\sqrt{2}} y_1 - \rho y_2 y_1 - \frac{d}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{d^2}{2} + \frac{d}{\sqrt{2}} \rho y_2 - \rho y_1 y_2 + \rho \frac{d}{\sqrt{2}} y_2 + y_2^2 \right) &\underset{>_{\mathbf{s}_2}}{<_{\mathbf{s}_1}} \\
\left(y_1^2 - \rho y_2 y_1 + \rho \frac{d}{\sqrt{2}} y_1 - \rho y_1 y_2 + y_2^2 - \frac{d}{\sqrt{2}} y_2 + \rho y_1 \frac{d}{\sqrt{2}} - \frac{d}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{d^2}{2} \right) & \\
\Rightarrow & \\
(-y_1 + \rho y_2) &\underset{>_{\mathbf{s}_2}}{<_{\mathbf{s}_1}} (+\rho y_1 - y_2)
\end{aligned}$$

Operando los términos anteriores se obtiene:

$$\underset{>_{\mathbf{s}_2}}{<_{\mathbf{s}_1}} y_2$$

Por simetría, las dos rectas que dividen al plano en las cuatro regiones de decisión son:



Si se calcula la frontera entre los símbolos s_1, s_3 , se obtiene $y_2 <_{s_1} \frac{y_1}{\rho}$, dado que $0 \leq \rho \leq 1$; esta frontera no modifica las zonas de decisión de la figura.

- f) Obtenga una cota superior para la probabilidad de error, en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$.

Solución:

El cálculo de la probabilidad de error exacta presenta un doble grado de dificultad en este ejercicio, debido a que:

- Las fronteras de decisión no son paralelas a los ejes.
- Las dos componentes de ruido se hallan correladas.

Si realizamos una rotación de coordenadas girando $\theta = 45^\circ$, se obtiene:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{M}(\theta)\mathbf{y} = \mathbf{M}(\theta)\mathbf{s}_m + \mathbf{n}'$$

El nuevo vector de ruido $\mathbf{n}' = \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ presenta también una distribución gaussiana, de media $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y de matriz de covarianza:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}' &= E[\mathbf{n}'(\mathbf{n}')^T] = E[\mathbf{M}(\theta)\mathbf{n}(\mathbf{M}(\theta)\mathbf{n})^T] = E[\mathbf{M}(\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{M}(\theta)^T] = \\ &= \mathbf{M}(\theta)E[\mathbf{n}\mathbf{n}^T]\mathbf{M}(\theta)^T = \mathbf{M}(\theta)\mathbf{C}\mathbf{M}(\theta)^T \end{aligned}$$

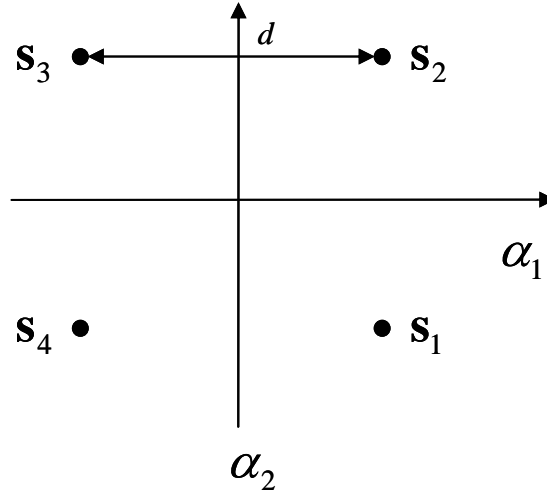
Considerando $\theta = 45^\circ$,

$$\mathbf{M}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{pmatrix}$$

Por ello la dificultad inicial queda eliminada al conseguir:

- Fronteras de decisión paralelas a los ejes
- Componentes de ruido incorreladas (esta segunda condición se ha obtenido de forma casual, ya que la rotación a priori aseguraba obtener frontera de decisión paralelas a los ejes).



En la nueva situación, el cálculo de la probabilidad se puede afrontar de forma exacta, ya que:

$$f_{\mathbf{y}'/\mathbf{s}_m'}(\mathbf{y}'/\mathbf{s}_m') = f_{\mathbf{n}'}(\mathbf{y}' - \mathbf{s}_m') = \prod_{i=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2} (y_i' - \alpha_{mi}')^2\right)$$

$$\beta_1' : N(0, \sigma_1^2), \quad \sigma_1^2 = \frac{N_0}{2}(1+\rho)$$

$$\text{ya que: } \beta_2' : N(0, \sigma_2^2), \quad \sigma_2^2 = \frac{N_0}{2}(1-\rho)$$

$$E[\beta_1' \beta_2'] = 0$$

$$\text{Por, lo que } P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{d}{2\sigma_2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0(1+\rho)}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0(1-\rho)}}\right)$$

La cota superior para la probabilidad de error se debería aplicar, como siempre, pero con la mayor varianza de ruido:

$$P_e \leq (M-1)Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_{\max}}\right) = 3Q\left(\frac{d}{2\sigma_{\max}}\right) = 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0(1+\rho)}}\right)$$

2.3 Ejercicio de examen de control noviembre 2001 (M. Cabrera)

2.3.1 Enunciado

En un sistema de comunicaciones binario polar de símbolos equiprobables y estadísticamente independientes entre sí, se tiene a la salida del filtro adaptado a la función generadora del espacio de señal, un ruido gaussiano y de media nula cuya varianza depende del símbolo transmitido (este efecto es típico de determinados sistemas de almacenamiento en disco):

Así se transmite $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \varphi(t - nT)$ con $\alpha[n] = \pm \frac{d}{2}$ y donde $\varphi(t)$ es una función ortonormal.

El modelo de señal a la salida del filtro adaptado a $\varphi(t)$, tras el muestreo de cada símbolo, es el siguiente:

$$y[k]_{/(\alpha[k]=d/2)} = +\frac{d}{2} + \beta[k]_{/(\alpha[k]=d/2)} \quad \text{o bien}$$

$$y[k]_{/(\alpha[k]=-d/2)} = -\frac{d}{2} + \beta[k]_{/(\alpha[k]=-d/2)}$$

modelo de señal que pone de manifiesto que la potencia de ruido en detección depende del símbolo transmitido.

Las variables de ruido son gaussianas en ambos casos, estadísticamente independientes entre sí, de media nula, pero de varianzas diferentes:

$$\beta[k]_{/(\alpha[k]=-d/2)} : N(0, \sigma_0^2), \quad \beta[k]_{/(\alpha[k]=+d/2)} : N(0, \sigma_1^2).$$

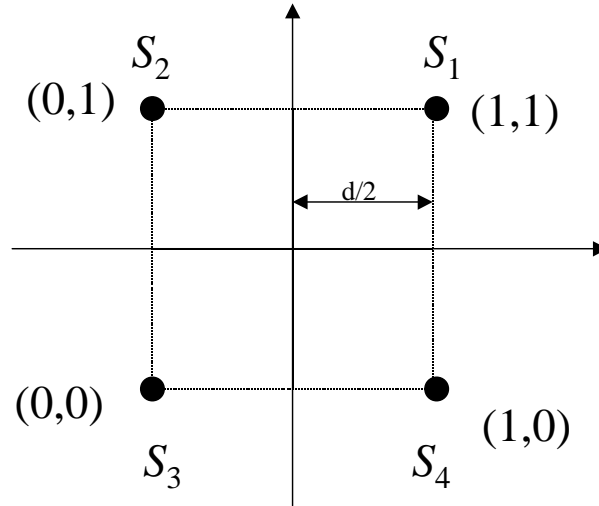
Considere $\sigma_0^2 = 2\sigma_1^2$ a lo largo de todo el ejercicio.

- Obtenga las ecuaciones asociadas a las dos regiones de decisión del receptor óptimo MAP: $(\max_{S_m} f_y(y/S_m)P(S_m))$
- Calcule el umbral o umbrales de decisión en función de la distancia entre símbolos d . Para ello considere $\sigma_1^2 = \frac{d^2}{2}$. Dibuje las regiones de decisión obtenidas.
- Calcule la BER consultando el área de la gaussiana de la tabla adjunta. Para ello obtenga la expresión general exacta y aproxime al consultar la tabla mediante las dos gaussianas de mayor área.
- Compare el resultado del apartado anterior con la BER que se obtendría si únicamente se colocara un umbral en $\gamma = 0$

Suponga ahora que la modulación es bidimensional, compuesta por dos señales PAM como la descrita en el problema anteriormente sobre dos pulsos ortonormales $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] \phi_1(t - nT) + \alpha_2[n] \phi_2(t - nT) ; \text{ con vectores } \mathbf{S}_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm d/2 \\ \pm d/2 \end{pmatrix}$$

Para el vector de ruido, cada una de las dos coordenadas tiene varianza σ_1^2 o σ_0^2 en función del correspondiente bit de señal transmitido. Es decir, se tiene varianza σ_1^2 si la coordenada es positiva y varianza σ_0^2 si la coordenada es negativa.

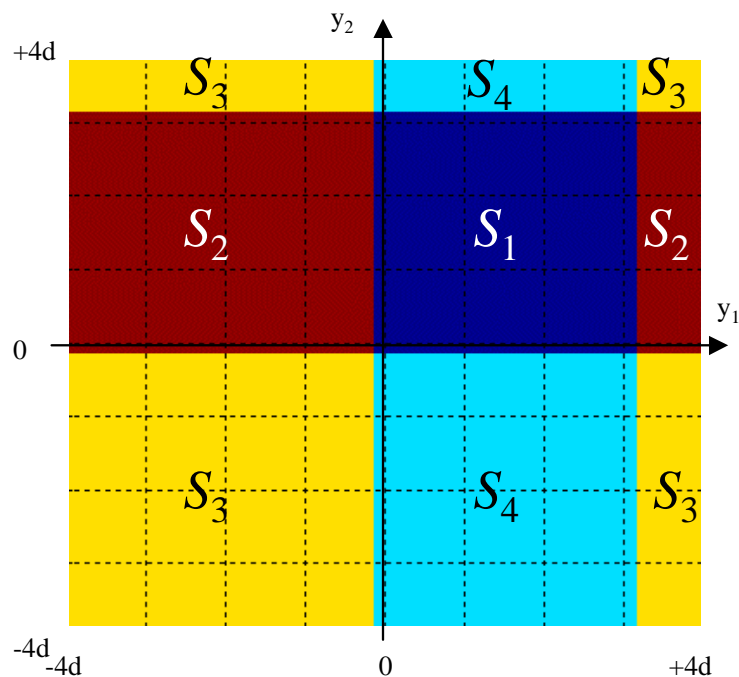


Así, por ejemplo, el vector de señal detectado, condicionado por el símbolo transmitido S_2 , presenta las siguientes expresión y distribución estadística:

$$Y[n]_{(S[n]=S_2)} = S_2 + N = \begin{pmatrix} -d/2 \\ +d/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \text{ con}$$

$$E[|\beta_1|^2] = \sigma_0^2 \quad E[|\beta_2|^2] = \sigma_1^2 \quad E[\beta_1\beta_2] = 0$$

- e) Ante la dificultad de cálculo de las 4 regiones de decisión para este caso, se ha realizado una simulación mediante ordenador. La siguiente figura, indica para cada punto $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, el símbolo para el cual $f_y(Y|S_m)P(S_m)$ es máximo. En función de la figura, decida cuáles deben ser las 4 regiones de decisión del detector MAP.



El cuadrado, cuyo máximo viene dado por S_1 , se halla delimitado por los puntos: $(-0.14d, -0.14d)$, $(-0.14d, +3.14d)$, $(+3.14d, -0.14d)$, $(+3.14d, +3.14d)$.

- f) Calcule la probabilidad de error exacta condicionada al símbolo S_2 , $P(\text{error} / S_2)$ en función de $\frac{E_b}{N_0}$. Considere $\sigma_0^2 = 2\sigma_1^2$, y $\sigma_1^2 = N_0 / 2$.
- g) Calcule de nuevo la probabilidad anterior suponiendo el detector subóptimo con umbrales: $y_1 = 0$; $y_2 = 0$.
- h) Comparando únicamente las gaussianas de mayor área de los dos apartados anteriores, ¿cuál ha sido la pérdida en dB de $\frac{E_b}{N_0}$ con el detector subóptimo respecto al detector MAP?

2.3.2 Resolución

- a) Obtenga las ecuaciones asociadas a las dos regiones de decisión del receptor óptimo MAP:
 $(\max_{S_m} f_y(y/S_m)P(S_m))$

Solución:

El modelo de señal a la salida del filtro adaptado a $\varphi(t)$, tras el muestreo de cada símbolo, es el siguiente:

$$y[k]_{/(\alpha[k]=d/2)} = +\frac{d}{2} + \beta[k]_{/(\alpha[k]=d/2)} \quad \text{ó bien}$$

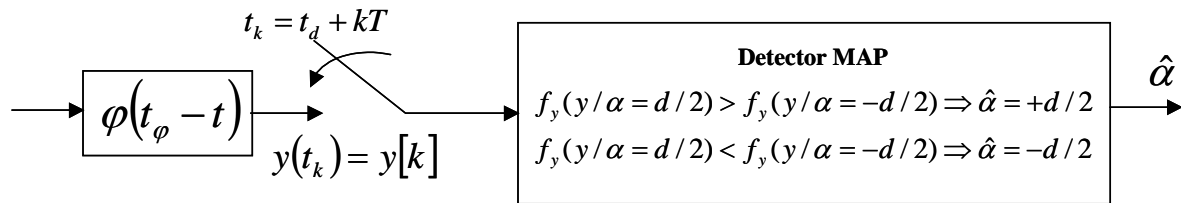
$$y[k]_{/(\alpha[k]=-d/2)} = -\frac{d}{2} + \beta[k]_{/(\alpha[k]=-d/2)}$$

Por tanto las respectivas funciones de densidad de probabilidad condicionadas, prescindiendo de la dependencia temporal para simplificar notación, son:

$$f_y(y/\alpha = d/2) = f_\beta((y - d/2)/\alpha = d/2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(y - d/2)^2}{2\sigma_1^2}\right): N(d/2; \sigma_1^2)$$

$$f_y(y/\alpha = -d/2) = f_\beta((y + d/2)/\alpha = -d/2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(y + d/2)^2}{2\sigma_0^2}\right): N(-d/2; \sigma_0^2)$$

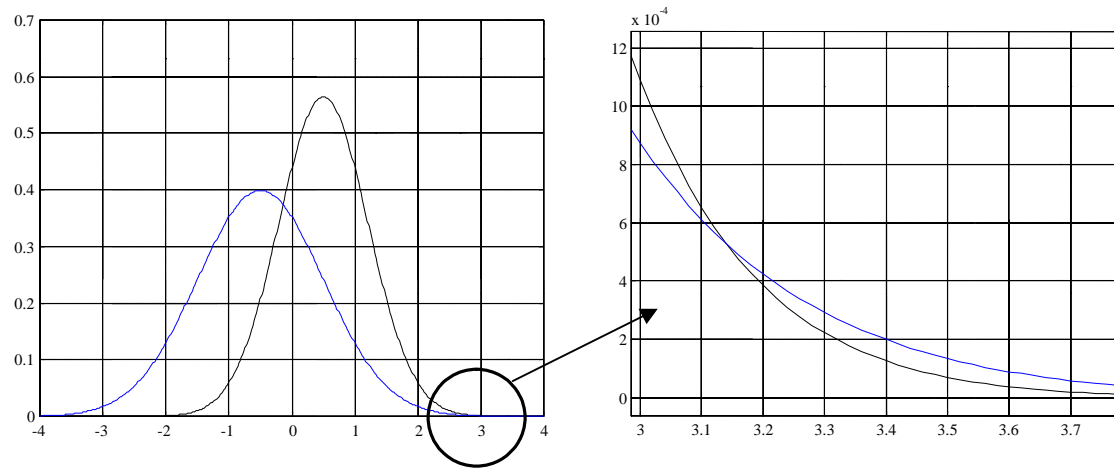
Dado que los dos posibles valores para la coordenada $\alpha[k]$ son equiprobables, el criterio de *Máxima probabilidad A Posteriori* (MAP) se reduce a determinar para cada posible punto de señal recibido $y[k]$, el símbolo $d/2$ o $-d/2$ para el que la correspondiente función de densidad de probabilidad es máxima. Véase la siguiente figura para entender mejor el procedimiento:



Por tanto, la ecuación a resolver para hallar el umbral o umbrales de decisión será:

$$f_y(y/\alpha = +d/2) \underset{< -d/2}{\overset{> +d/2}{}} f_y(y/\alpha = -d/2)$$

La siguiente figura representa las dos funciones de densidad de probabilidad, y por tanto a partir de ellas se puede predecir de forma intuitiva los dos umbrales que se han de obtener:



En estos gráficos se representa en negro $f_y(y/\alpha = +d/2)$ (“es la gaussiana más alta”) y en azul $f_y(y/\alpha = -d/2)$. El eje de abscisas se halla normalizado por la distancia entre símbolos d .

- b) Calcule el umbral o umbrales de decisión en función de la distancia entre símbolos d . Para ello considere $\sigma_1^2 = \frac{d^2}{2}$. Dibuje las regiones de decisión obtenidas.

Solución:

En este apartado se ha de resolver la siguiente ecuación, con el fin de hallar los valores de $y = \gamma$ que delimitan ambas regiones de decisión. Es decir, las inequaciones de detector MAP se cumplen con igualdad en los puntos que delimitan las dos regiones.

$$\begin{aligned}
 f_y(\gamma/\alpha = d/2) &= f_y(\gamma/\alpha = -d/2) \Rightarrow \\
 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{\left(\gamma + \frac{d}{2}\right)^2}{2\sigma_0^2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{\left(\gamma - \frac{d}{2}\right)^2}{2\sigma_1^2}\right) \Rightarrow \\
 -\frac{\ln(\sigma_0^2)}{2} - \frac{1}{2\sigma_0^2} \left(\gamma^2 + d\gamma + \frac{d^2}{4}\right) &= -\frac{\ln(\sigma_1^2)}{2} - \frac{1}{2\sigma_1^2} \left(\gamma^2 - d\gamma + \frac{d^2}{4}\right) \Rightarrow \\
 \gamma^2 \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\right) - d\gamma \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_0^2}\right) + \frac{d^2}{4} \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right) &= 0 \Rightarrow (*)
 \end{aligned}$$

$$\text{considerando } \sigma_0^2 = 2\sigma_1^2 \text{ y } \sigma_1^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2} = \frac{1}{2d^2} \quad \frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_0^2} = \frac{3}{2d^2}$$

sustituyendo así en la ecuación (*) se obtiene

$$\frac{\gamma^2}{2d^2} - \frac{3d\gamma}{2d^2} + \frac{d^2}{4} \frac{1}{2d^2} - \frac{1}{2} \ln 2 = 0$$

y por tanto la ecuación de segundo grado a resolver queda como:

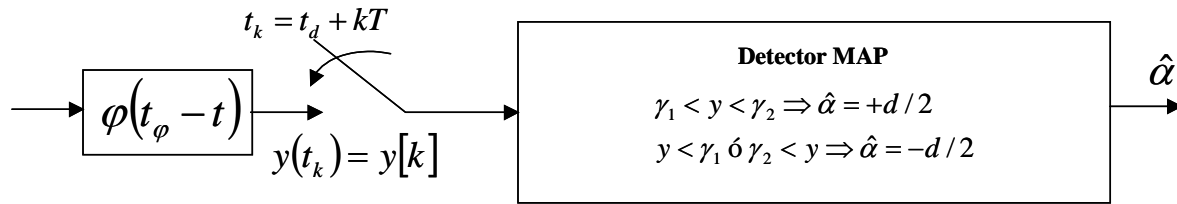
$$\gamma^2 - 3d\gamma + \frac{d^2}{4} - d^2 \ln 2 = 0$$

cuya solución viene dada por los valores: $\gamma_1 = -0.1411d$
 $\gamma_2 = +3.1411d$

Por tanto:

- La región correspondiente a $-d/2$ viene dada por: $y < \gamma_1; y > \gamma_2$
- La región correspondiente a $+d/2$ viene dada por: $\gamma_1 < y < \gamma_2$

Por tanto, el detector MAP se reduce ahora a:



- c) Calcule la BER consultando el área de la gaussiana de la tabla adjunta. Para ello obtenga la expresión general exacta y aproxime al consultar la tabla mediante las dos gaussianas de mayor área.

Solución:

Dado que el sistema es binario, la BER coincide con la probabilidad de error de símbolo:

$$\begin{aligned} BER &= \frac{1}{2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_y(y/\alpha = -d/2) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\gamma_1} f_y(y/\alpha = +d/2) dy + \frac{1}{2} \int_{\gamma_2}^{+\infty} f_y(y/\alpha = +d/2) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(y+d/2)^2}{2\sigma_0^2}\right) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\gamma_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(y-d/2)^2}{2\sigma_1^2}\right) dy + \frac{1}{2} \int_{\gamma_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(y-d/2)^2}{2\sigma_1^2}\right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{\gamma_1 + d/2}{\sigma_0}\right) - Q\left(\frac{\gamma_2 + d/2}{\sigma_0}\right) + Q\left(\frac{d/2 - \gamma_1}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{\gamma_2 - d/2}{\sigma_1}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{0.359d}{d}\right) - Q\left(\frac{3.641d}{d}\right) + Q\left(\frac{0.641\sqrt{2}d}{d}\right) + Q\left(\frac{2.6411\sqrt{2}d}{d}\right) \right) \end{aligned}$$

La expresión anterior, que es exacta, se va a aproximar a continuación por las dos áreas mayores:

$$BER \cong \frac{1}{2} (Q(0.359) + Q(0.905)) = \frac{1}{2} (0.3594 + 0.1841) = 0.2717$$

Nota: En la resolución anterior se ha considerado el área de la gaussiana como

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{-\infty} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda$$

- d) Compare el resultado del apartado anterior con la BER que se obtendría si únicamente se colocara un umbral en $\gamma = 0$.

Solución:

Si únicamente se coloca el umbral $\gamma = 0$. Por tanto:

- La región correspondiente a $-d/2$, viene dada por: $y < 0$
- La región correspondiente a $+d/2$, viene dada por: $0 < y$

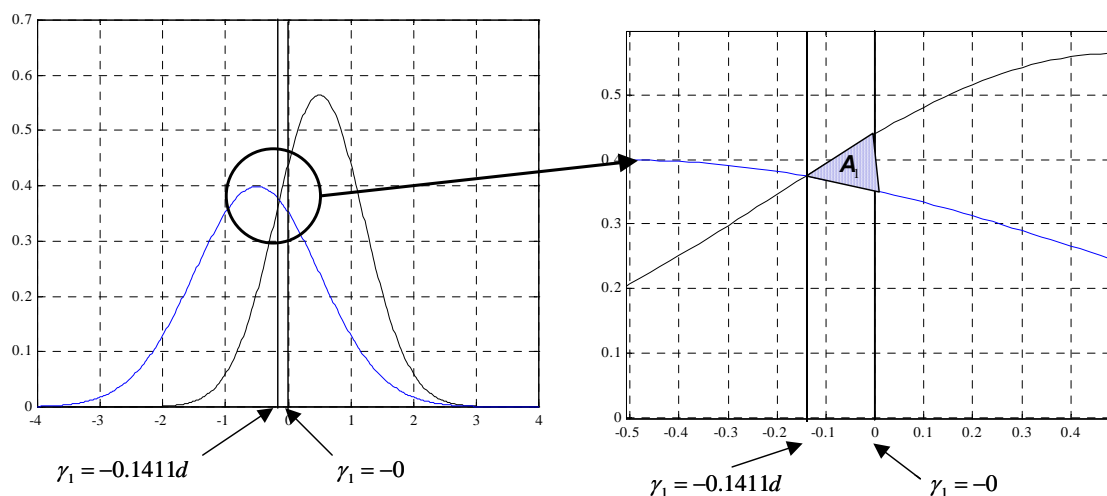
Y por tanto:

$$\begin{aligned} BER &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f_y(y/\alpha = -d/2) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f_y(y/\alpha = +d/2) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(y+d/2)^2}{2\sigma_0^2}\right) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(y-d/2)^2}{2\sigma_1^2}\right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{d}{2\sigma_0}\right) + Q\left(\frac{d}{2\sigma_1}\right) \right) = \frac{1}{2} (Q(0.5) + Q(0.7071)) = \frac{1}{2} (0.3085 + 0.2389) = 0.2737 \end{aligned}$$

Por tanto, ha habido un incremento de errores de un 0.2%.

Aunque el incremento de error es poco significativo en %, gráficamente se justifica del siguiente modo: El desplazamiento del umbral óptimo γ_1 hacia el origen provoca un aumento de la BER, que se puede interpretar como la suma de el área A_1 en la figura:

$$BER_{apdo4} = BER_{apdo3} + A_1$$



- e) Ante la dificultad de cálculo de las 4 regiones de decisión para este caso, se ha realizado una simulación mediante ordenador. La siguiente figura, indica para cada punto $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, el símbolo para el cual $f_y(Y|S_m)P(S_m)$ es máximo. En función de la figura, decida cuales deben ser las 4 regiones de decisión del detector MAP.

Solución:

Evidentemente, la figura nos da el resultado del criterio MAP, es decir, la zona de decisión del símbolo S_m corresponde con la parte del plano en que $f_y(Y|S_m)P(S_m)$ es máximo. Por tanto:

Región S_1 : $(-0.14d < y_1 < +3.14d; -0.14d < y_2 < +3.14d)$

Región S_2 : $(y_1 < -0.14d; -0.14d < y_2 < +3.14d) \cup (+3.14d < y_1; -0.14d < y_2 < +3.14d)$

Región S_3 : $(y_1 < -0.14d; y_2 < -0.14d) \cup (y_1 < -0.14d; +3.14d < y_2) \cup (+3.14d < y_1; y_2 < -0.14d) \cup (+3.14d < y_1; +3.14d < y_2)$

Región S_4 : $(-0.14d < y_1 < +3.14d; y_2 < -0.14d) \cup (-0.14d < y_1 < +3.14d; +3.14d < y_2)$

- f) Calcule la probabilidad de error exacta condicionada al símbolo S_2 , $P(\text{error} / S_2)$ en función de

$$\frac{E_b}{N_0}. \text{ Considere } \sigma_0^2 = 2\sigma_1^2, \text{ y } \sigma_1^2 = N_0 / 2.$$

Solución:

La región S_2 , se halla formada por dos áreas, de color rojo en la figura bidimensional. La probabilidad de error cuando se ha transmitido el símbolo S_2 , será la probabilidad de que el vector de ruido provoque la desviación del punto transmitido: $\begin{pmatrix} -d/2 \\ +d/2 \end{pmatrix}$ fuera de dicha región. Por tanto,

considerando $\gamma_1 = -0.1411d$
 $\gamma_2 = +3.1411d$:

$$P(\text{error} / S_2) = 1 - \iint_{Z_2} f_y(\mathbf{y} | S_2) d\mathbf{y} =$$

$$1 - \int_{-\infty}^{\gamma_1} \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} f_y(\mathbf{y} | S_2) dy_2 dy_1 - \int_{\gamma_2}^{+\infty} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_y(\mathbf{y} | S_2) dy_2 dy_1$$

que también puede calcularse como:

$$P(\text{error} / S_2) = \Pr(\beta_2 > 3.14d - d/2) + \Pr(\beta_2 < -d/2 - 0.14d) +$$

$$\Pr(d/2 - 0.14d < \beta_1 < 3.14d + d/2; -d/2 - 0.14d < \beta_2 < 3.14d - d/2)$$

$$= Q\left(\frac{2.64d}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{0.64d}{\sigma_1}\right) + \left(Q\left(\frac{0.36d}{\sigma_0}\right) - Q\left(\frac{3.64d}{\sigma_0}\right)\right) \left(1 - Q\left(\frac{2.64d}{\sigma_1}\right) - Q\left(\frac{0.64d}{\sigma_1}\right)\right)$$

Dado que $E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{d^2}{4}$ y $\sigma_1^2 = \frac{N_0}{2}$, $\sigma_0^2 = N_0$ y ‘despreciando las Q^2 ’

$$\begin{aligned}
 P(\text{error} / S_2) &\cong \\
 &Q\left(\sqrt{(2.64)^2 8 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{(0.64)^2 8 \frac{E_b}{N_0}}\right) + \left(Q\left(\sqrt{(0.36)^2 4 \frac{E_b}{N_0}}\right) - Q\left(\sqrt{(3.64)^2 4 \frac{E_b}{N_0}}\right)\right) \\
 &= Q\left(\sqrt{55.76 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{3.277 \frac{E_b}{N_0}}\right) + \left(Q\left(\sqrt{0.5184 \frac{E_b}{N_0}}\right) - Q\left(\sqrt{53 \frac{E_b}{N_0}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

- g) Calcule de nuevo la probabilidad anterior suponiendo el detector subóptimo con umbrales:
 $y_1 = 0$; $y_2 = 0$.

Solución:

Las nuevas regiones de decisión son:

- Región S_1 : $(0 < y_1; 0 < y_2)$
- Región S_2 : $(y_1 < 0; 0 < y_2)$
- Región S_3 : $(y_1 < 0; y_2 < 0)$
- Región S_4 : $(0 < y_1; y_2 < 0)$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 P(\text{error} / S_2) &= \Pr(\beta_2 < -d/2) + \Pr(\beta_1 > d/2) - \Pr(\beta_2 < -d/2; \beta_1 > d/2) \\
 &= Q\left(\frac{0.5d}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{0.5d}{\sigma_0}\right) - Q\left(\frac{0.5d}{\sigma_1}\right) \cdot Q\left(\frac{0.5d}{\sigma_0}\right)
 \end{aligned}$$

Dado que $E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{d^2}{4}$ y $\sigma_1^2 = \frac{N_0}{2}$, $\sigma_0^2 = N_0$ y “despreciando las Q^2 ,”

$$P(\text{error} / S_2) \cong Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- h) Comparando únicamente las gaussianas de mayor área de los dos apartados anteriores, ¿cuál ha sido la pérdida en dB de $\frac{E_b}{N_0}$ con el detector subóptimo respecto al detector MAP?

Solución:

Para hacer la comparación con las probabilidades aproximadas a las gaussianas de mayor área se comparará:

$$P(\text{error} / S_2)_{MAP} \cong Q\left(\sqrt{3.277 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{0.5184 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P(\text{error} / S_2)_{Suboptimo} \cong Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

La siguiente tabla muestra la variación en dB al comparar las gaussianas de menor área entre sí y de mayor área entre sí:

$\sqrt{\cdot}$ (Argumento Q)	MAP	Sub-óptimo	Pérdida de $\frac{E_b}{N_0}$
Mayor área	$0.5184 \frac{E_b}{N_0}$	$\frac{E_b}{N_0}$	$10\log_{10}(0.5185) = -2.8 \text{ dB}$
Menor área	$3.277 \frac{E_b}{N_0}$	$2 \frac{E_b}{N_0}$	$10\log_{10}\left(\frac{3.277}{2}\right) = +2.14 \text{ dB}$

Dado que en la aproximación final quedan dos ‘áreas de gaussiana’ para cada caso, no se puede generalizar para este caso la pérdida global de $\frac{E_b}{N_0}$, ya que depende precisamente de este cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Además, únicamente se ha calculado la probabilidad de error condicionada a uno de los 4 símbolos, y dado que los 4 no tienen regiones simétricas para el detector MAP, ni funciones de densidad de probabilidad de igual varianza, un estudio exhaustivo de la pérdida de $\frac{E_b}{N_0}$, requeriría el cálculo de la probabilidad de error completa.

2.4 Ejercicio de examen de control octubre 2004 (J. Rodríguez Fonollosa)

2.4.1 Enunciado

La expresión general de la señal transmitida en esquemas de modulaciones de pulsos es:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m[n]}(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[n] \varphi_l(t - nT)$$

En donde las funciones $\varphi_l(t)$ para $l \in \{1, \dots, L\}$ forman una base ortonormal y los coeficientes $\alpha_{ml}[n]$ son las coordenadas de los símbolos s_m transmitidos en el instante nT . Denominamos M al número de posibles símbolos transmitidos en cada periodo de símbolo T .

Se considerará transmisión de símbolos *equiprobables* en canal ideal y recepción en ruido *gaussiano blanco aditivo* (AWGN) de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$.

Caso de dimensión del espacio de la señal $L=2$.

Consideramos inicialmente el esquema anterior para un número de símbolos arbitrario M (donde M es una potencia entera de 2) manteniendo la dimensión del espacio de la señal en $L=2$.

- Proponga y represente gráficamente una constelación de M símbolos en $L=2$ de forma que todos ellos tengan la misma energía y la distancia mínima entre símbolos sea máxima. Tome como referencia:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Expresé sus coordenadas en función de la energía por símbolo E_s y de bit E_b .
- Proponga una expresión *aproximada* de la probabilidad de error de *símbolo* expresándola mediante la función $Q(x)$ en función de $\frac{E_b}{N_0}$ y de M

Caso $L=3$ y número de símbolos $M' = 4M$

Para multiplicar por 4 el número de símbolos de la constelación, nos planteamos añadir una dimensión al espacio de señal de forma que por cada uno de los símbolos anteriores ahora tengamos cuatro. Por ejemplo, un símbolo arbitrario \mathbf{s}_m definido anteriormente da lugar a los cuatro símbolos siguientes:

$$s_{m1} = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \\ -3b \end{pmatrix} ; \quad s_{m2} = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \\ -b \end{pmatrix} ; \quad s_{m3} = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \\ b \end{pmatrix} ; \quad s_{m4} = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \\ 3b \end{pmatrix}$$

- Expresé la energía media por símbolo E_s en función de a y b .

- e) Calcule el valor de b en función de a y M que minimiza la energía de símbolo media E_s y proporciona una distancia mínima igual a la del caso anterior (también en función de a y M). Exprese la energía de símbolo media E_s en este caso.
- f) Utilizando el valor de E_s del apartado anterior, proponga una expresión *aproximada* de la probabilidad de error de *símbolo* expresándola mediante la función $Q(x)$ en función de $\frac{E_s}{N_0}$.
- g) Suponiendo codificación Gray, proponga una expresión para la tasa de error por bit BER en función de $\frac{E_b}{N_0}$ y M . Aproxime la expresión anterior suponiendo M muy grande.

2.4.2 Resolución:

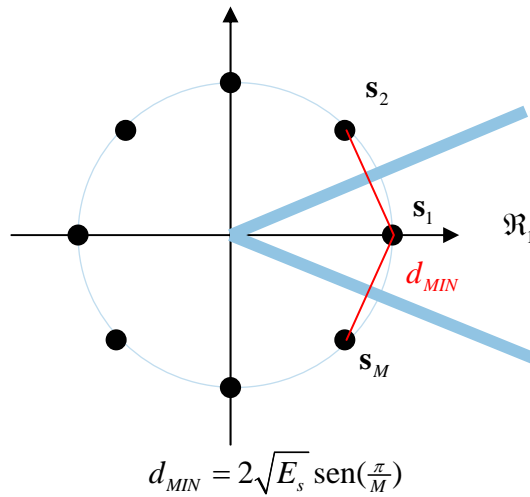
Caso de dimensión del espacio de la señal $L=2$.

- a) Proponga y represente gráficamente una constelación de M símbolos en $L=2$ de forma que todos ellos tengan la misma energía y la distancia mínima entre símbolos sea máxima. Tome como referencia:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

- b) Exprese sus coordenadas en función de la energía por símbolo E_s y de bit E_b .
- c) Proponga una expresión *aproximada* de la probabilidad de error de *símbolo* expresándola mediante la función $Q(x)$ en función de $\frac{E_b}{N_0}$ y de M .

Solución (apartados a, b, c):



$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \cos\left(\frac{(m-1)2\pi}{M}\right) \\ \sqrt{E_s} \sin\left(\frac{(m-1)2\pi}{M}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b \log_2 M} \cos\left(\frac{(m-1)2\pi}{M}\right) \\ \sqrt{E_b \log_2 M} \sin\left(\frac{(m-1)2\pi}{M}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} \in \mathcal{R}_1 \Leftrightarrow \left| \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \right| < \frac{\pi}{M}$$

Una buena aproximación a la probabilidad de error de símbolo s_1 resulta de considerar tan sólo los símbolos más cercanos, en este caso 2:

$$P(e) = P(e | s_1) \approx 2Q\left(\frac{d_{MIN}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\frac{2\sqrt{E_s} \sin(\frac{\pi}{M})}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$

Caso $L=3$ y número de símbolos $M' = 4M$.

d) Exprese la energía media por símbolo E_s en función de a y b .

Solución:

$$\begin{aligned} E_s &= \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \Pr\{s_{mi}\} E_{s_{mi}} = M \sum_{i=1}^4 \Pr\{s_{li}\} E_{s_{li}} = M \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4M} E_{s_{li}} = \\ &= \frac{1}{4} [(a^2 + 9b^2) + (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) + (a^2 + 9b^2)] = a^2 + 5b^2 \end{aligned}$$

e) Calcule el valor de b en función de a y M que minimiza la energía de símbolo media E_s , y proporciona una distancia mínima igual a la del caso anterior (también en función de a y M). Exprese la energía de símbolo media E_s en este caso.

Solución:

Para minimizar la energía media interesa minimizar b . En la nueva constelación la distancia mínima entre símbolos es el valor mínimo entre $2b$ y $2a \sin(\frac{\pi}{M})$. Para mantener la distancia mínima igual que en el caso anterior, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} d_{MIN} &= 2a \sin(\frac{\pi}{M}) = 2b \Rightarrow b = a \sin(\frac{\pi}{M}) \\ E_s &= a^2 (1 + 5 \sin^2(\frac{\pi}{M})) \end{aligned}$$

f) Utilizando el valor de E_s del apartado anterior, proponga una expresión *aproximada* de la probabilidad de error de *símbolo* expresándola mediante la función $Q(x)$ en función de $\frac{E_s}{N_0}$.

Solución:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{E_s}{1 + 5 \sin^2(\frac{\pi}{M})}} \\ P(e) &= \frac{1}{2} [P(e | s_{m1}) + P(e | s_{m2})] \approx \frac{1}{2} [3 + 4] Q\left(\frac{d_{MIN}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \\ &= \frac{7}{2} Q\left(\frac{2a \sin(\frac{\pi}{M})}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{7}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0 (1 + 5 \sin^2(\frac{\pi}{M}))}} \sin(\frac{\pi}{M})\right) \end{aligned}$$

g) Suponiendo codificación Gray, proponga una expresión para la tasa de error por bit BER en función de $\frac{E_b}{N_0}$ y M . Aproxime la expresión anterior suponiendo M muy grande.

Solución:

$$\begin{aligned}
 BER &\approx \frac{1}{\log_2 M'} P(e) = \frac{1}{2 + \log_2 M} P(e) = \frac{7/2}{2 + \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{2E_b(2 + \log_2 M)}{N_0(1 + 5 \sin^2(\frac{\pi}{M}))}} \sin(\frac{\pi}{M}) \right) \approx \\
 &\approx \frac{7/2}{2 + \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{2E_b(2 + \log_2 M)}{N_0}} \frac{\pi}{M} \right)
 \end{aligned}$$

2.5 Ejercicio de examen final enero 2005 (M. Cabrera)

2.5.1 Enunciado

Se desea transmitir una secuencia de bits *equiprobables* y estadísticamente independientes entre sí a una velocidad constante de $r_b = \frac{1}{T_b}$ bps y transmitiendo en media una energía por bit E_b .

Se propone analizar su transmisión mediante una modulación OPAM (Orthogonal Pulse Amplitude Modulation) y distinguir distintas estrategias de transmisión OPAM. Dicha modulación se forma utilizando L funciones $\varphi_l(t)$ ortonormales tales que las correlaciones cruzadas cumplen $R_{\varphi_l \varphi_j}(nT) = \delta[l-j]\delta[n]$ y asignando $b = cL$ bits por símbolo.

c, L son dos números naturales que consideraremos parámetros de la modulación OPAM.

Los b bits asignados a un símbolo se dividen en L grupos de c bits cada uno y cada grupo de c bits modula en amplitud una función $\varphi_l(t)$ mediante la correspondiente coordenada codificada siguiendo un formato polar de $P = 2^c$ niveles.

$$s_{OPAM}(t, L, c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_l[n] \varphi_l(t - nT) \quad \alpha_l[n] = -\frac{(P-1)d}{2}, \dots, -\frac{d}{2}, +\frac{d}{2}, \dots, +\frac{(P-1)d}{2}$$

La señal se transmite por un canal ideal $h_c(t) = \delta(t)$ de ruido $w(t)$ blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$.

Nota:
$$\sum_{m=1}^M \left(\frac{-M-1+2m}{2} \right)^2 = \frac{M(M^2-1)}{12}$$

ESTRATEGÍA 1: OPAM, Caso general

Suponemos inicialmente una señal genérica $s_1(t) = s_{OPAM}(t, L_1, c)$; $P = 2^c$

- ¿Cuál es el número de símbolos del alfabeto M_1 en función de los parámetros c, L_1 ? Dibuje la constelación para el caso particular de $c = 4, L_1 = 2$.
- Para el caso particular de $L_1 = 1$ calcule la energía media transmitida por bit E_{b1} en función de d, P . Demuestre que coincide con la energía media transmitida por bit para el caso general de $L_1 > 1$.
- Dibuje el diagrama de bloques del receptor óptimo MAP, utilizando como elementos los filtros adaptados a las funciones $\varphi_l(t)$ y el resto de elementos que considere necesarios. Puede considerar retardo nulo para los filtros.
- Elegiendo un símbolo con el mayor número de vecinos posibles, calcule aproximando $Q^a\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \approx 0$; $a > 1$, la probabilidad de error condicionada al símbolo elegido. Expresé el resultado en función del cociente $\frac{E_{b1}}{N_0}$ y de P, c, L_1 .
- Particularice el resultado anterior para $L_1 = 2$. Comente el resultado obtenido y particularice para 16QAM. Identifique además para 16 QAM de frecuencia portadora f_c las dos funciones generadoras $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$.

ESTRATEGÍA 2: Diversidad en las coordenadas

Como alternativa a una modulación OPAM de dimensión $L > 1$, se propone transmitir la secuencia de bits *manteniendo la velocidad r_b constante*, mediante una nueva modulación que se apoya en las funciones $\varphi_l(t)$ y en los parámetros c, L_1 de la modulación anterior.

$$s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \sum_{l=1}^{L_1} \varphi_l\left(L_1\left(t - n \frac{T_1}{L_1}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \psi(t - nT_2)$$

$$\alpha[n] = -\frac{(P-1)d}{2}, \dots, -\frac{d}{2}, +\frac{d}{2}, \dots, +\frac{(P-1)d}{2}$$

Observe que equivale a una nueva modulación OPAM de parámetros $c_2 = c$; $L_2 = 1$, y de periodo de símbolo $T_2 = \frac{1}{L_1} T_1$, siendo T_1 el periodo de símbolo de la modulación de la estrategia 1.

- f) Calcule el número de símbolos del alfabeto M_2 de esta nueva modulación y el número de bits transmitidos por símbolo b_2 , en función de los correspondientes M_1, b_1 de la estrategia 1.
- g) Calcule las muestras de auto-correlación $R_\psi(nT_2)$ de la función $\psi(t)$ y la energía media transmitida por bit E_{b_2} en función de los parámetros que considere necesarios. Demuestre que dicho parámetro se mantiene constante, es decir: $E_{b_2} = E_{b_1}$.
- h) Razone cualitativamente cuál de las dos estrategias presenta mayor ancho de banda.
- i) Dibuje el diagrama de bloques del receptor óptimo MAP, utilizando como elementos los filtros adaptados a las funciones $\varphi_l(t)$ y el resto de elementos que considere necesarios. Puede considerar retardo nulo para los filtros.
- j) Eligiendo un símbolo con el mayor número de vecinos posibles, calcule la probabilidad de error condicionada al símbolo elegido. Exprese el resultado en función del cociente $\frac{E_{b_2}}{N_0}$ y de P, c . Compare con el resultado obtenido para la estrategia 1.
- k) Si la señal $s_1(t)$ es 16 QAM-constelación cuadrada de frecuencia portadora f_c , comente cómo es la señal resultante $s_2(t)$, especifique la función $\psi(t)$ y la probabilidad de error obtenida en el apartado j) particularizada a esta situación.

2.5.2 Resolución

ESTRATEGÍA 1: OPAM, Caso general

Suponemos inicialmente una señal genérica $s_1(t) = s_{OPAM}(t, L_1, c)$; $P = 2^c$

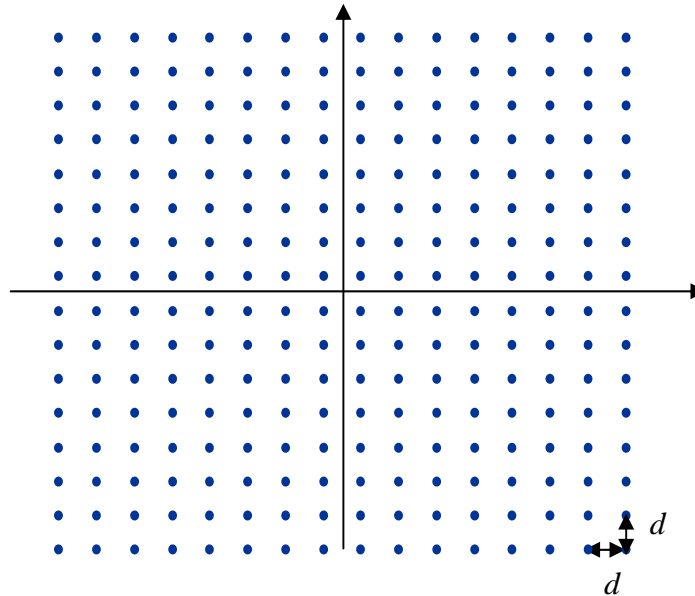
- a) ¿Cuál es el número de símbolos del alfabeto M_1 en función de los parámetros c, L_1 ? Dibuje la constelación para el caso particular de $c = 4, L_1 = 2$.

Solución:

Dado que el vector es: $\mathbf{s}[n] = \begin{pmatrix} \alpha_1[n] \\ \alpha_2[n] \\ \vdots \\ \alpha_{L_1}[n] \end{pmatrix}$

El tamaño del alfabeto de símbolos es: $M_1 = 2^{b_1} = 2^{cL_1} = P^{L_1}$

Para el caso particular de $c = 4, L_1 = 2$, la constelación resulta 256QAM-Cuadrada:



- b) Para el caso particular de $L_1 = 1$ calcule la energía media transmitida por bit E_{b1} en función de d, P . Demuestre que coincide con la energía media transmitida por bit para el caso general de $L_1 > 1$.

Solución:

$L_1 = 1$ da lugar a una constelación PAM MPolar:

$$\begin{aligned}
b_1 E_{b1} &= c E_{b1} = E_{s_1} = E[\mathbf{s}_m^T \mathbf{s}_m] = E[\alpha_1^2] \\
&= \sum_{m=1}^P \Pr\{\mathbf{s}_m\} \alpha_{m1}^2 = \frac{1}{P} \sum_{m=1}^P \left(\frac{-P-1+2m}{2} d \right)^2 = \frac{(P^2-1)}{12} d^2 \\
&\Rightarrow E_{b1} = \frac{1}{c} \frac{(P^2-1)}{12} d^2
\end{aligned}$$

Para $L_1 > 1$

$$\begin{aligned}
b_1 E_{b1} &= E_{s_1} = E[\mathbf{s}_m^T \mathbf{s}_m] = \sum_{l=1}^{L_1} E[\alpha_l^2] = \\
&L_1 \frac{1}{P} \sum_{m=1}^P \left(\frac{-P-1+2m}{2} d \right)^2 = L_1 \frac{(P^2-1)}{12} d^2 \\
b_1 E_{b1} &= L_1 \frac{(P^2-1)}{12} d^2 \Rightarrow E_{b1} = \frac{L_1}{b_1} \frac{(P^2-1)}{12} d^2 = \frac{1}{c} \frac{(P^2-1)}{12} d^2
\end{aligned}$$

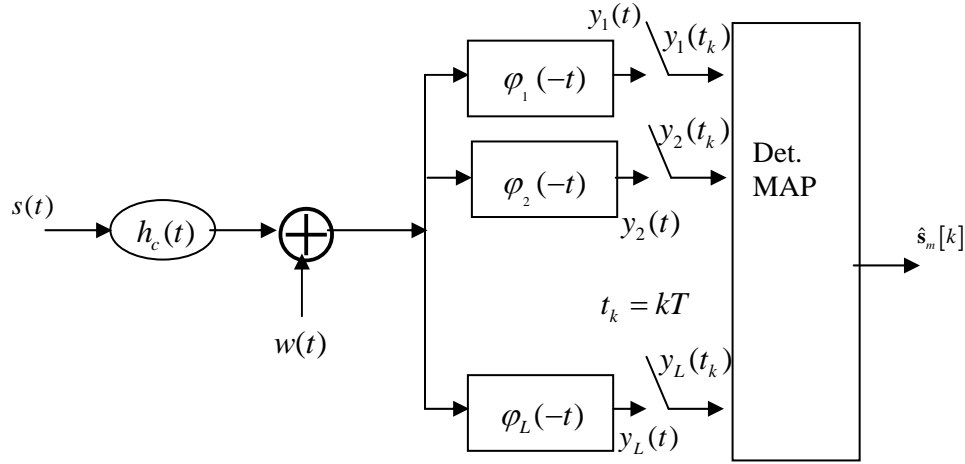
Se ha utilizado la nota de ayuda facilitada en el enunciado.

A continuación se demuestra de forma detallada la definición anterior, aunque no se exige para la resolución del apartado.

$$\begin{aligned}
b_1 E_{b1} &= E_s = E \left[\int_0^T s^2(t) dt \right] = \\
&E \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_1} \alpha_l[n] \alpha_j[k] \int_0^T \phi_l(t-nT) \phi_j(t-kT) dt \right] = \\
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_1} E[\alpha_l[n] \alpha_j[k]] \int_0^T \phi_l(t-nT) \phi_j(t-kT) dt = \\
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_1} R_{\alpha_l \alpha_j}[n-k] \int_0^T \phi_l(t-nT) \phi_j(t-kT) dt = \\
&\left\{ \begin{array}{l} n-k=m \\ k=n-m \end{array} \right\} \\
b_1 E_{b1} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_1} R_{\alpha_l \alpha_j}[m] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^T \phi_l(t-nT) \phi_j(t-nT+mT) dt = \\
&\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_1} R_{\alpha_l \alpha_j}[m] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-nT}^{T-nT} \phi_l(\lambda) \phi_j(\lambda+mT) d\lambda = \\
&\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_1} R_{\alpha_l \alpha_j}[m] \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_l(\lambda) \phi_j(\lambda+mT) d\lambda = \\
&\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_1} R_{\alpha_l \alpha_j}[m] R_{\phi_l \phi_j}(-mT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_1} R_{\alpha_l \alpha_j}[m] \delta[l-j] \delta[m] = \\
&\sum_{l=1}^{L_1} R_{\alpha_l \alpha_l}[0] = \sum_{l=1}^{L_1} E[\alpha_l^2]
\end{aligned}$$

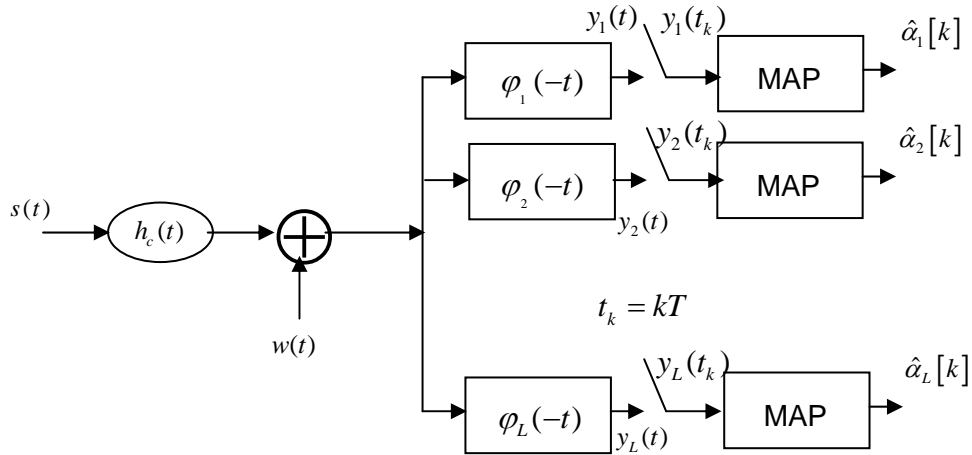
- c) Dibuje el diagrama de bloques del receptor óptimo MAP, utilizando como elementos los filtros adaptados a las funciones $\varphi_l(t)$ y el resto de elementos que considere necesarios. Puede considerar retardo nulo para los filtros.

Solución:



Umbral Detector MAP = $-\frac{P-2}{2}d, \dots, -d, 0, d, \dots, +\frac{P-2}{2}d$, resultantes de minimizar $\|\mathbf{y}(t_k) - \mathbf{s}_m\|^2$

También sería posible realizar la decodificación de las coordenadas por separado tal como se muestra en la siguiente figura:



- d) Eligiendo un símbolo con el mayor número de vecinos posibles calcule, aproximando $Q^a\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \approx 0; a > 1$, la probabilidad de error condicionada al símbolo elegido. Expresé el resultado en función del cociente $\frac{E_{b1}}{N_0}$ y de P, c, L_1 .

Solución:

A las salidas de los filtros adaptados se obtiene:

$$y_l[k] = y_l(kT) = y_l(t_k) = \alpha_l[k] + \beta_l[k]$$

Los símbolos en el interior del hipercubo tienen $2L_1$ vecinos a distancia mínima d .

$$P_e = 1 - \prod_{l=1}^{L_1} \int_{\gamma_{l-1}}^{\gamma_l} f_{y_l}(y_l | \mathbf{s}_m) = 1 - \left(1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^{L_1} =$$

$$1 - \sum_{i=0}^{L_1} \binom{L_1}{i} \left(1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^i \cong 1 - 1 + 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) =$$

$$2L_1 Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = 2L_1 Q\left(\sqrt{\frac{6b_1}{L_1(P^2-1)} \frac{E_{b1}}{N_0}}\right) = 2L_1 Q\left(\sqrt{\frac{6c}{(P^2-1)} \frac{E_{b1}}{N_0}}\right)$$

donde se ha utilizado: $\binom{L_1}{i} = \frac{L_1!}{i!(L_1-i)!}$ para desarrollar el binomio de Newton.

- e) Particularice el resultado anterior para $L_1 = 2$. Comente el resultado obtenido, y particularice para 16QAM. Identifique además para 16 QAM de frecuencia portadora f_c las dos funciones generadoras $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$.

Solución:

Para $L_1 = 2$ resultan constelaciones cuadradas $M_1 = 2^{2c} = P^2$; $b_1 = 2c$

$$P_e = 4Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = 4Q\left(\sqrt{\frac{6c}{(P^2-1)} \frac{E_{b1}}{N_0}}\right) = 4Q\left(\sqrt{\frac{3b_1}{(M_1-1)} \frac{E_{b1}}{N_0}}\right)$$

En 16QAM $c = 2$; $P = 4$; $M_1 = 16 \Rightarrow P_e = 4Q\left(\sqrt{\frac{4}{5} \frac{E_{b1}}{N_0}}\right)$ (Salvo constante coincide con la probabilidad de error promedio de símbolo)

En este caso:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_1}} \cos(2\pi f_c t) \Pi\left(\frac{t-T_1/2}{T_1}\right)$$

$$\varphi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T_1}} \sin(2\pi f_c t) \Pi\left(\frac{t-T_1/2}{T_1}\right)$$

ESTRATEGÍA 2: DIVERSIDAD EN LAS COORDENADAS

- f) Calcule el número de símbolos del alfabeto M_2 de esta nueva modulación y el número de bits transmitidos por símbolo b_2 , en función de los correspondientes M_1, b_1 de la estrategia 1.

Solución:

$$M_2 = 2^c = P = \sqrt[L_1]{M_1} \quad b_2 = c_2 L_2 = c = \frac{b_1}{L_1} \text{ y además } r_2 = \frac{1}{c} r_b = \frac{L_1}{b_1} r_b = L_1 r_1$$

- g) Calcule las muestras de auto-correlación $R_\psi(nT_2)$ de la función $\psi(t)$ y la energía media transmitida por bit E_{b_2} en función de los parámetros que considere necesarios. Demuestre que dicho parámetro se mantiene constante, es decir, $E_{b_2} = E_{b_1}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Dado que } \psi(t) &= \sum_{l=1}^{L_1} \varphi_l(t) \\ R_\psi(nT_2) &= \int \psi(t+nT_2)\psi(t)dt = \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_1} \int \varphi_l(L_1(t+nT_2))\varphi_j(L_1t)dt = \\ &\quad \{\lambda = nL_1T_2 = nT_1\} \\ &= \frac{1}{L_1} \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_1} \int \varphi_l(\lambda + nT_1)\varphi_j(\lambda)d\lambda = \frac{1}{L_1} \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_1} R_{\varphi_l\varphi_j}(nT_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{l=1}^{L_1} R_{\varphi_l}(nT_1) = \delta[n] \end{aligned}$$

Particularizando del apartado a:

$$\begin{aligned} cE_{b_2} = E_{s_2} &= \frac{(p^2-1)}{12} d^2 = \frac{b_1}{L_1} E_{b_1} = cE_{b_1} \Rightarrow \\ E_{b_2} &= E_{b_1} \end{aligned}$$

- h) Razone cualitativamente cuál de las dos estrategias presenta mayor ancho de banda.

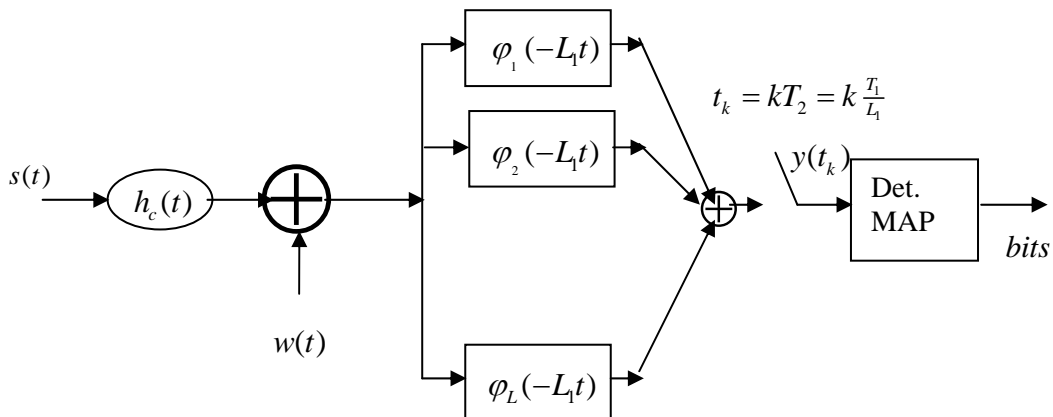
Solución:

La estrategia 2 presenta un ancho de banda mayor que la estrategia 1, por lo que es menos adecuada si hay restricciones de ancho de banda:

$$B_{T_2} = LB_{T_1}$$

- i) Dibuje el diagrama de bloques del receptor óptimo MAP, utilizando como elementos los filtros adaptados a las funciones $\varphi_l(t)$ y el resto de elementos que considere necesarios. Puede considerar retardo nulo para los filtros.

Solución:



- j) Eligiendo un símbolo con el mayor número de vecinos posibles, calcule la probabilidad de error condicionada al símbolo elegido. Expresé el resultado en función del cociente $\frac{E_{b2}}{N_0}$ y de P, c . Compare con el resultado obtenido para la estrategia 1.

Solución:

En una dimensión los símbolos en el interior tienen 2 vecinos a distancia mínima d , y además se cumple que:

$$b_2 E_{b2} = E_{s_2} = E[\alpha^2] = \frac{1}{P} \sum_{m=1}^P \left(\frac{-P-1+2m}{2} d \right)^2 = \frac{(P^2-1)}{12} d^2 = \frac{(M_2^2-1)}{12} d^2 \Rightarrow$$

$$P_e = 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{6c}{(P^2-1)} \frac{E_{b2}}{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{6b_2}{(M_2^2-1)} \frac{E_{b2}}{N_0}}\right)$$

Resulta para esta segunda situación la probabilidad de error de la modulación polar. Numéricamente, entre las dos estrategias, ambas probabilidades de error coinciden.

- k) Si la señal $s_1(t)$ es 16 QAM-constelación cuadrada, comente como es la señal resultante $s_2(t)$, especifique la función $\psi(t)$ y la probabilidad de error obtenida en el apartado j) particularizada a esta situación.

Solución:

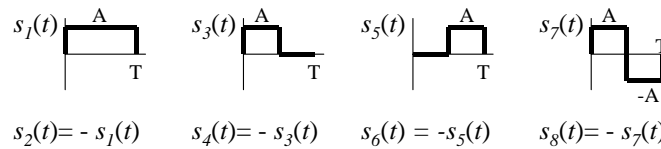
La señal $s_2(t)$ resultante es 4PAM Polar y, dado que $c = 2; P = 4; M_2 = 4 \Rightarrow P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}} \frac{E_{b2}}{N_0}\right)$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sum_{l=1}^2 \varphi_l(2t) = \sqrt{\frac{2}{T_1}} \cos(2\pi 2f_c t) \Pi\left(\frac{2t-T_1/2}{T_1}\right) - \sqrt{\frac{2}{T_1}} \sin(2\pi 2f_c t) \Pi\left(\frac{2t-T_1/2}{T_1}\right) = \\ &\sqrt{\frac{1}{T_2}} \cos(2\pi 2f_c t) \Pi\left(\frac{t-T_2/2}{T_2}\right) - \sqrt{\frac{1}{T_2}} \sin(2\pi 2f_c t) \Pi\left(\frac{t-T_2/2}{T_2}\right) \end{aligned}$$

2.6 Ejercicio de control abril 2001 (J. Riba)

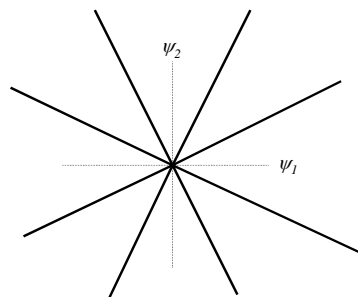
2.6.1 Enunciado

Considere una modulación digital M -aria que utiliza las siguientes formas de onda:



donde T es el tiempo de símbolo. Suponga símbolos equiprobables e independientes.

- Halle una posible base ortonormal y obtenga las componentes de los símbolos $s_i(t)$ sobre dicha base.
- Teniendo en cuenta las formas de onda de la base, y tomando como ancho de banda de la modulación hasta el final del primer lóbulo secundario del espectro, halle el ancho de banda necesario del canal para poder transmitir a una velocidad de $R_b=144\text{Kbits/sec}$.
- Para poder transmitir digitalmente una señal analógica de ancho de banda de $B_a=8\text{KHz}$, y considerando una $R_b=144\text{Kbits/sec}$, ¿cuál sería el número máximo de bits de cuantificación de los conversores A/D y D/A?
- Dibuje la constelación y proponga justificadamente la asignación más conveniente de las ternas de bits a cada símbolo.
- Describa el receptor óptimo, indicando los instantes óptimos de muestreo y dibujando las regiones de decisión sobre la constelación. ¿Es necesario que el receptor conozca el valor de A ?
- Halle la energía media de bit, E_b .
- Halle aproximadamente la probabilidad de error de bit en función de la E_b/N_o (considere canal ideal y ruido gaussiano blanco de densidad espectral de potencia $N_o/2$).
- Para simplificar el diseño del receptor se propone dividir el espacio de señal en ocho sectores iguales de valor $2\pi/8$, tal como se indica en la figura.



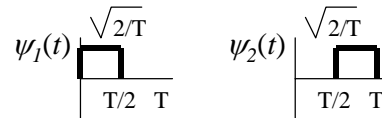
Utilizando estas nuevas regiones de decisión, y mediante razonamientos geométricos, determine aproximadamente la pérdida (en dB) de E_b/N_o con respecto al receptor óptimo. Discuta las posibles ventajas de dicho diseño.

2.6.2 Resolución

- a) Halle una posible base ortonormal y obtenga las componentes de los símbolos $s_i(t)$ sobre dicha base.

Solución:

Una posible base ortonormal es la mostrada en la figura:



Las componentes de los símbolos sobre la base, definidas como

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \int s_i(t) \Psi_1(t) dt \\ \int s_i(t) \Psi_2(t) dt \end{bmatrix}$$

son:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= A\sqrt{\frac{T}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \mathbf{s}_3 &= A\sqrt{\frac{T}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{s}_5 &= A\sqrt{\frac{T}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \mathbf{s}_7 &= A\sqrt{\frac{T}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}_2 &= A\sqrt{\frac{T}{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} & \mathbf{s}_4 &= A\sqrt{\frac{T}{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{s}_6 &= A\sqrt{\frac{T}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \mathbf{s}_8 &= A\sqrt{\frac{T}{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- b) Teniendo en cuenta las formas de onda de la base, y tomando como ancho de banda de la modulación hasta el final del primer lóbulo secundario del espectro, halle el ancho de banda necesario del canal para poder transmitir a una velocidad de $R_b=144\text{Kbits/sec}$.

Solución:

Con símbolos incorrelados, el espectro viene determinado por el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de las formas de onda de la base. Las dos formas de onda de la base tienen el cero de su lóbulo principal en $2/T$, y el segundo cero en $4/T$. Tomamos, pues, como ancho de banda $B=4/T$. Al tratarse de $M=8$ símbolos, tenemos tres bits por símbolo, con lo que el tiempo de símbolo es $T=3T_b$. Por tanto, el ancho de banda necesario es de:

$$B = \frac{4}{T} = \frac{4}{3T_b} = \frac{4R_b}{3} = 192\text{KHz}$$

- c) Para poder transmitir digitalmente una señal analógica de ancho de banda de $B_a=8\text{KHz}$, y considerando una $R_b=144\text{Kbits/sec}$, ¿cuál sería el número máximo de bits de cuantificación de los conversores A/D y D/A?

Solución:

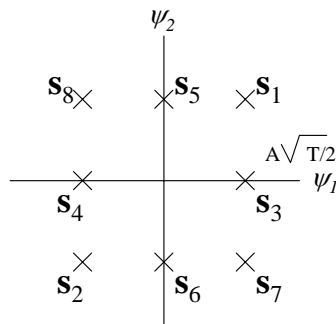
El teorema de Nyquist nos exige una frecuencia de muestreo de $F_s = 2B_a$. Si cada muestra se cuantifica con b bits, tenemos una velocidad de bit de $R_b = bF_s$. Considerando una $R_b = 144 \text{ Kbits/sec}$, resulta:

$$b = \frac{R_b}{2B_a} = 9 \text{ bits / muestra}$$

- d) Dibuje la constelación y proponga justificadamente la asignación más conveniente de las ternas de bits a cada símbolo.

Solución:

La constelación es:



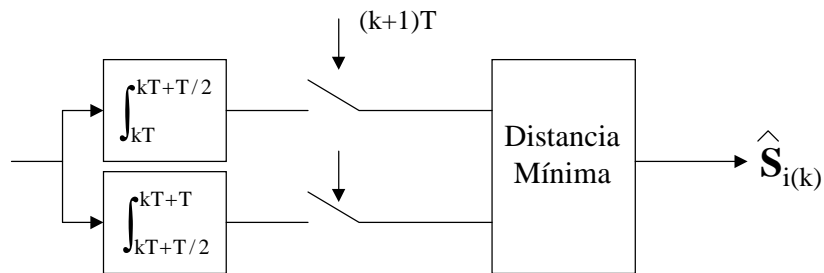
La mejor codificación es aquella en que los símbolos cercanos, sobre los que se darán la mayoría de los errores, sólo difieren en un bit. Para ello, puede utilizarse la siguiente codificación de Gray:

$s_3 \rightarrow 000$
 $s_1 \rightarrow 001$
 $s_5 \rightarrow 011$
 $s_8 \rightarrow 010$
 $s_4 \rightarrow 110$
 $s_2 \rightarrow 111$
 $s_6 \rightarrow 101$
 $s_7 \rightarrow 100$

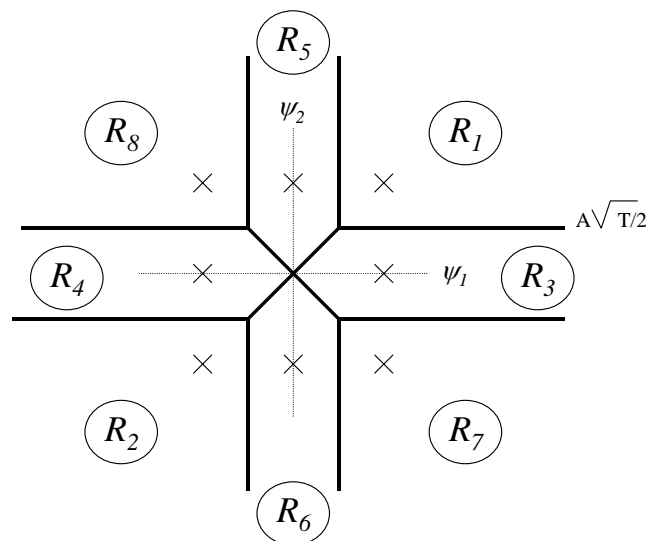
- e) Describa el receptor óptimo, indicando los instantes óptimos de muestreo y dibujando las regiones de decisión sobre la constelación. ¿Es necesario que el receptor conozca el valor de A ?

Solución:

El receptor óptimo puede implementarse, por ejemplo, por medio de dos integradores de duración $T/2$, seguidos del detector ML:



Las regiones de decisión en el espacio de la señal que se corresponden con el criterio ML o de mínima distancia son:



Tal como se observa en la figura anterior, las fronteras de decisión requieren del conocimiento de la amplitud A , y por lo tanto, el receptor debe conocer dicho valor o estimarlo mediante algún control automático de ganancia.

f) Halle la energía media de bit, E_b .

Solución:

Hallamos primero las energías individuales de cada símbolo:

$$E_1 = E_2 = E_7 = E_8 = A^2 T$$

$$E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = \frac{1}{2} A^2 T$$

Por lo tanto, la energía media de símbolo es:

$$E_s = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 E_i = \frac{1}{8} \left(4A^2T + 4 \frac{1}{2} A^2T \right) = \frac{3}{4} A^2T$$

Finalmente, teniendo en cuenta que se trata de una modulación de 3 bits por símbolo, podemos calcular la energía media de bit como:

$$E_b = \frac{E_s}{3} = \frac{1}{4} A^2T$$

- g) Halle aproximadamente la probabilidad de error de bit en función de la E_b/N_o (considere canal ideal y ruido gaussiano blanco de densidad espectral de potencia $N_o/2$).

Solución:

Para el cálculo de la probabilidad de error de símbolo utilizamos la siguiente aproximación:

$$P_s \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M K_i Q\left(\frac{d_{i \min}}{2\sigma}\right)$$

En nuestra constelación, tenemos los siguientes valores de distancia mínima ($d_{i \min}$) y número de vecinos próximos (K_i):

$$d_{i \min} = A\sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$K_i = 2$$

con independencia del símbolo considerado. Por tanto:

$$P_s \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{8\sigma^2}}\right)$$

A partir de la expresión de E_b del apartado f), expresamos A^2 en función de la energía de bit:

$$A^2 = \frac{4E_b}{T}$$

Teniendo en cuenta que el valor de la potencia de ruido es:

$$\sigma^2 = \frac{N_o}{2}$$

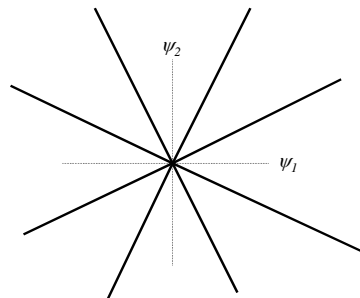
resulta:

$$P_s \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

Finalmente, dado que la codificación empleada es la de Gray, y haciendo la aproximación de que la mayoría de los errores se dan entre símbolos próximos, la probabilidad de error de bit puede expresarse como:

$$P_b \approx \frac{1}{3}P_s \approx \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

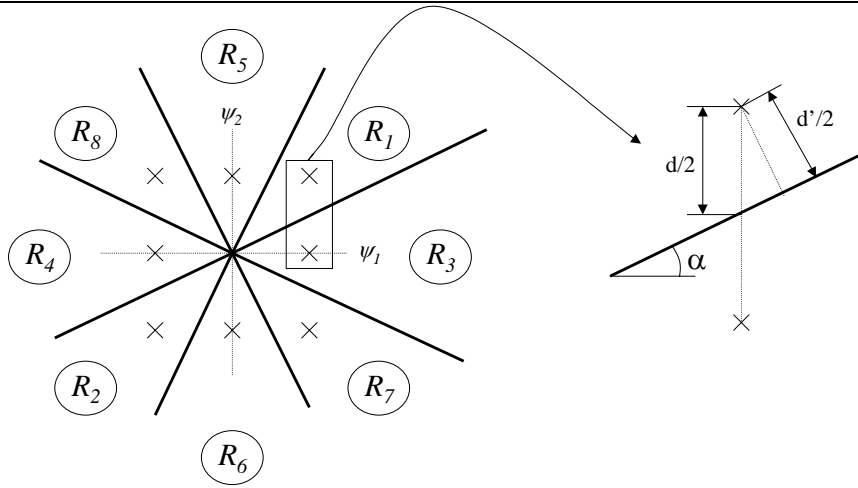
- h) Para simplificar el diseño del receptor, se propone dividir el espacio de señal en ocho sectores iguales de valor $2\pi/8$, tal como se indica en la figura.



Utilizando estas nuevas regiones de decisión, y mediante razonamientos geométricos, determine aproximadamente la pérdida (en dB) de E_b/N_o con respecto al receptor óptimo. Discuta las posibles ventajas de dicho diseño.

Solución:

Las nuevas regiones de decisión son las siguientes:



Se observa como la distancia a las fronteras de decisión queda reducida con respecto al caso del detector óptimo. El factor de reducción es el coseno del ángulo α :

$$\frac{d'}{2} = \frac{d}{2} \cos(\alpha) = \frac{d}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{16}\right) = \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Siguiendo los mismos pasos que el apartado anterior, obtenemos:

$$P_b = \frac{2}{3} Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}} \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

con lo que la pérdida de E_b/N_o es:

$$10 \log \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.6877 \text{ dB}$$

La ventaja de utilizar dichas fronteras es la sencillez del receptor y, en particular, que no se requiere del conocimiento de la amplitud A (obsérvese que las nuevas regiones no cambian ante un cambio de A).

2.7 Ejercicio de control abril 2004 (J. Riba)

2.7.1 Enunciado

En este problema se examinan diferentes constelaciones de cuatro símbolos de igual energía \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 , \mathbf{s}_3 y \mathbf{s}_4 transmitidos con igual probabilidad. El vector de señal recibido es $\mathbf{r} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$, siendo \mathbf{n} el vector de ruido Gaussiano de componentes independientes de media nula y varianza $\sigma^2 = N_o / 2$.

Constelación 1

- a) Ubique los símbolos en una circunferencia centrada de radio R de modo que se maximice la distancia mínima. Halle sus componentes respecto a una base ortonormal. Calcule una cota de la probabilidad de error de bit (P_b) y exprese la en función de la E_b / N_o , siendo E_b la energía media de bit.

Para las constelaciones 2 y 3 se definen genéricamente las componentes de los símbolos respecto a una base ortonormal del siguiente modo:

$$\mathbf{s}_1 = A \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = A \begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 1+\alpha \end{pmatrix}$$

Constelación 2 $\alpha \neq 0$

- b) Halle la distancia entre los símbolos.
 c) Halle una cota de la probabilidad de error de bit (P_b) en función de A .
 d) Halle la energía media de símbolo (E_s) y la energía media de bit (E_b).
 e) Elija aquel valor de α que minimiza la E_s . (En caso de que no pudiera resolver este apartado, elija $\alpha = -0,25$).
 f) Halle una cota para la probabilidad de error de bit (P_b) en función de la E_b / N_o , con el valor de α elegido en el apartado e).
 g) Halle el centroide de la constelación, $\underline{c} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 \underline{s}_m$, con el valor de α elegido en el apartado e). En vista del resultado, justifique que los cuatro símbolos están distribuidos de forma equidistante en una esfera centrada de radio R indicando el valor de este radio. Halle el ángulo formado entre dos símbolos cualesquiera sabiendo que $\sin(19.47 \text{ grados}) = 1/3$, y compruebe que es mayor que 90 grados.

Constelación 3 $\alpha = 0$

- h) Halle una cota de la probabilidad de error de bit en función de la E_b / N_o .

Comparación entre las diferentes constelaciones

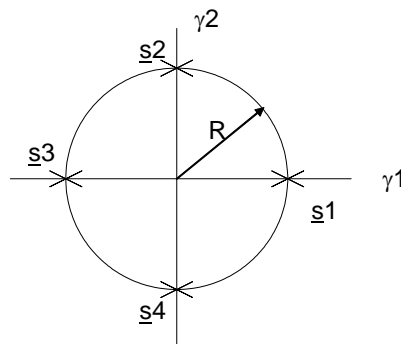
- i) Suponga que la velocidad máxima de información a la que puede transmitir con la constelación 1 es de $R_b = 1000 \text{ bits/sec}$ para obtener una determinada P_b con una determinada potencia media de transmisión P . Halle la velocidad de información máxima R_b utilizando las constelaciones 2 y 3 para obtener la misma probabilidad de error usando igual potencia.
- j) En vista de los resultados obtenidos, especifique la constelación óptima de M símbolos de igual energía e indique la dimensión óptima del espacio de señal.

2.7.2 Resolución

Constelación 1

- a) Ubique los símbolos en una circunferencia centrada de radio R de modo que se maximice la distancia mínima. Halle sus componentes respecto a una base ortonormal. Calcule una cota de la probabilidad de error de bit (P_b) y exprese la en función de la E_b/N_o , siendo E_b la energía media de bit.

Solución:



Ubicación de los símbolos:

Note que también sería correcto si hubiera elegido otra ubicación resultante de cualquier giro de la figura anterior. Las componentes según la figura de arriba serían:

$$s_1 = R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s_2 = R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad s_3 = R \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s_4 = R \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para la cota debe partir de la expresión: $P_b \leq P_s \leq \frac{M-1}{M} \sum_{m=1}^M Q\left(\frac{d_{m,\min}}{2\sigma}\right)$

donde $M=4$. La distancia mínima es igual para todos los símbolos. A partir de la constelación se deduce geoméricamente que:

$$d_{m,\min} = R\sqrt{2}$$

con lo que resulta:

$$P_b \leq 3Q\left(\frac{R}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Todos los símbolos tienen igual energía $E_{s_m} = R^2$, con lo que la energía media de símbolo es $E_s = R^2$. Como hay cuatro símbolos, tenemos 2 bits por símbolo, con lo que la energía media de bit es: $E_b = \frac{R^2}{2}$, es decir: $R^2 = 2E_b$

Entonces tenemos:

$$P_b \leq 3Q\left(\sqrt{\frac{R^2}{2\sigma^2}}\right)$$

Haciendo las sustituciones: $R^2 = 2E_b$, $\sigma^2 = \frac{N_o}{2}$

resulta:

$$P_b \leq 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$$

Constelación 2 $\alpha \neq 0$

b) Halle la distancia entre los símbolos.

Solución:

Calculemos la distancia entre $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$:

$$d_{1-2} = \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\| = A \left\| \begin{bmatrix} 1+\alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \right\| = A \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = A\sqrt{2}$$

Observe que para cualquier par de símbolos se obtiene la distancia $A\sqrt{2}$.

c) Halle una cota de la probabilidad de error de bit (P_b) en función de A .

Solución:

Aplicamos la expresión general para la cota de la unión:

$$P_b \leq \frac{M-1}{M} \sum_{m=1}^M Q\left(\frac{d_{m,\min}}{2\sigma}\right)$$

Del apartado anterior tenemos que las distancias mínimas son iguales para todos los símbolos:

$$d_{m,\min} = A\sqrt{2}$$

Entonces:

$$P_b \leq 3Q\left(\frac{A\sqrt{2}}{2\sigma}\right)$$

$$P_b \leq 3Q\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

d) Halle la energía media de símbolo (E_s) y la energía media de bit (E_b).

Solución:

La energía del símbolo \mathbf{s}_1 es:

$$E_{s_i} = \|s_i\|^2 = A^2 \left\| \begin{bmatrix} 1+\alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \right\|^2 = A^2 \left((1+\alpha)^2 + 3\alpha^2 \right)$$

Observe que se obtiene la misma energía para todos los símbolos, con lo que la energía media de símbolo es:

$$E_s = A^2 \left((1+\alpha)^2 + 3\alpha^2 \right)$$

Al haber 2 bits por símbolo, la energía media de bit es:

$$E_b = \frac{1}{2} A^2 \left((1+\alpha)^2 + 3\alpha^2 \right)$$

e) Elija aquel valor de α que minimiza la E_s .

Solución:

Para minimizar la E_s derivamos la expresión de E_s del apartado anterior con respecto a α e igualamos a 0:

$$\frac{\delta}{\delta\alpha} E_s = 2A^2((1+\alpha) + 3\alpha) = 0$$

de donde se deduce que el α óptimo es:

$$\alpha = -0,25$$

f) Halle una cota para la probabilidad de error de bit (P_b) en función de la E_b / N_o , con el valor de α elegido en el apartado e).

Solución:

Partimos de la expresión:

$$P_b \leq 3Q\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Es necesario expresar A en función de E_b . De la expresión $E_b = \frac{1}{2} A^2 ((1+\alpha)^2 + 3\alpha^2)$ para $\alpha = -0,25$ tenemos:

$$E_b = \frac{3}{4} A^2 \quad \text{con lo que:} \quad A^2 = \frac{4}{3} E_b$$

Entonces:

$$P_b \leq 3Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{2\sigma^2}}\right)$$

Haciendo las sustituciones:

$$A^2 = \frac{4}{3} E_b \quad \sigma^2 = \frac{N_o}{2}$$

resulta:

$$P_b \leq 3Q\left(\sqrt{\frac{8}{3} \frac{E_b}{N_o}}\right)$$

- g) Halle el centroide de la constelación, $\underline{c} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 \mathbf{s}_m$, con el valor de α elegido en el apartado e).

En vista del resultado, justifique que los cuatro símbolos están distribuidos de forma equidistante en una esfera centrada de radio R indicando el valor de este radio. Halle el ángulo formado entre dos símbolos cualesquiera sabiendo que $\sin(19.47 \text{ grados})=1/3$, y compruebe que es mayor que 90 grados.

Solución:

Los símbolos para $\alpha = -0,25$ son:

$$\mathbf{s}_1 = \frac{A}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \frac{A}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = \frac{A}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = \frac{A}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Se observa fácilmente que, sumando elemento a elemento, el centroide de la constelación es:

$$\underline{c} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 \mathbf{s}_m = \frac{A}{16} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Del resultado anterior se deduce que los cuatro símbolos son linealmente dependientes. Por ejemplo, \mathbf{s}_4 puede expresarse como una combinación lineal de los otros tres símbolos:

$$\mathbf{s}_4 = -\sum_{m=1}^3 \mathbf{s}_m = \frac{-A}{4} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{A}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la dimensión del espacio de señal es $L=3$. Como se ha visto, los cuatro símbolos tienen igual energía e igual distancia entre ellos. Con el valor de $\alpha = -0,25$, la dimensión del espacio ha degenerado a $L=3$, lo que significa que los símbolos se encuentran ubicados de forma equidistante sobre una esfera de radio R . Como la energía de símbolo es $E_s = R^2$, y además hemos visto que:

$$E_s = A^2 \left((1+\alpha)^2 + 3\alpha^2 \right) = \frac{3}{4} A^2$$

tenemos que el radio de la esfera es: $R = \sqrt{E_s} = \frac{\sqrt{3}}{2} A$

Para encontrar el ángulo entre dos símbolos, calculamos primero el producto escalar entre $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$:

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle = \frac{A^2}{16} [3, -1, -1, -1] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{A^2}{16} (-3 - 3 + 1 + 1) = \frac{-A^2}{4}$$

Teniendo en cuenta que el coseno del ángulo entre dos vectores es:

$$\cos(\theta_{1-2}) = \frac{\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle}{\|\mathbf{s}_1\| \|\mathbf{s}_2\|} = \frac{\frac{-A^2}{4}}{\frac{3A^2}{4}} = -1/3$$

con lo que:

$$\theta_{1-2} = \arccos(-1/3) = 90 + \arcsin(1/3) = 90 + 19,47 = 109,47 \text{ grados}$$

Observe que se obtiene el mismo ángulo, sea cual sea el par de vectores escogido.

Constelación 3 $\alpha = 0$

h) Halle una cota de la probabilidad de error de bit en función de la E_b / N_o .

Solución:

Para $\alpha = 0$ los símbolos son:

$$\mathbf{s}_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La expresión general de la energía de símbolo es: $E_s = A^2 ((1 + \alpha)^2 + 3\alpha^2)$

Para $\alpha = 0$ resulta: $E_s = A^2$

y la energía media de bit: $E_b = \frac{A^2}{2}$

con lo que: $A^2 = 2E_b$

Volviendo a la fórmula general: $P_b \leq 3Q \left(\sqrt{\frac{2A^2}{2\sigma^2}} \right)$

y haciendo las sustituciones: $A^2 = 2E_b \quad \sigma^2 = \frac{N_o}{2}$

resulta:

$$P_b \leq 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$$

Este resultado es lógico puesto que para $\alpha = 0$ se obtiene una constelación ortogonal, (el producto escalar de cualquier par de símbolos es nulo) y la fórmula anterior es un caso particular para $M=4$ de la fórmula general para las constelaciones ortogonales obtenida en clase:

$$P_b \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{\log_2(M)E_b}{N_o}}\right)$$

Efectivamente, para $M=4$ se obtiene: $P_b \leq 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$

Comparación entre las diferentes constelaciones

- i) Suponga que la velocidad máxima de información a la que puede transmitir con la constelación 1 es de $R_b = 1000 \text{ bits/sec}$ para obtener una determinada P_b con una determinada potencia media de transmisión P . Halle la velocidad de información máxima R_b utilizando las constelaciones 2 y 3 para obtener la misma probabilidad de error usando igual potencia.

Solución:

Hemos visto que la probabilidad de error de bit para las constelaciones 1 y 3 es: $P_b \leq 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$

y para la constelación 2:

$$P_b \leq 3Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{3N_o}}\right)$$

El coeficiente que multiplica a la $\frac{E_b}{N_o}$ es mayor para la constelación 2, y es por tanto la mejor, ya que permite reducir la $\frac{E_b}{N_o}$ en un factor: $\frac{2}{8/3} = \frac{3}{4}$

Aplicando que:

$$\frac{E_b}{N_o} = \frac{PT_b}{N_o} = \frac{P}{N_o R_b}$$

vemos que esta reducción de $\frac{E_b}{N_o}$ se puede conseguir manteniendo la potencia P , e incrementando la R_b en un factor $4/3$:

$$R_b' = R_b \frac{4}{3} = 1333,3 \text{ bits/sec}$$

- j) En vista de los resultados obtenidos, especifique la constelación óptima de M símbolos de igual energía e indique la dimensión óptima del espacio de señal.

Solución:

Hemos visto que para cuatro símbolos, al minimizar la energía de símbolo, la constelación resultante pasa a tener centroide nulo y dimensión 3. Por tanto, en general, los M símbolos de igual energía tienen la siguiente ubicación óptima:

$$\mathbf{s}_1 = \frac{A}{M} \begin{pmatrix} M-1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \frac{A}{M} \begin{pmatrix} -1 \\ M-1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{s}_M = \frac{A}{M} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ M-1 \end{pmatrix}$$

y la dimensión óptima del espacio de señal es de $L=M-1$.

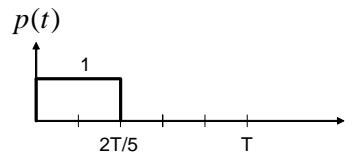
El factor de reducción de $\frac{E_b}{N_o}$ que se alcanza es de $(M-1)/M$.

2.8 Ejercicio 1 de control abril 2005 (J. Riba)

2.8.1 Enunciado

Considere el siguiente formato de una señal digital:
$$y(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} p\left(t - \left(\frac{a_k}{5} + k\right)T\right)$$

donde $a_k \in 0,1,2,3$, y $p(t)$ es un pulso rectangular de duración $2T/5$, como se indica en la figura:



Considere que los bits son equiprobables y el ruido es gaussiano blanco de densidad espectral $N_o/2$.

- Dibuje las formas de onda de los cuatro símbolos. Halle la dimensión del espacio de la señal, y una base ortonormal.
- Halle las componentes en el espacio de señal.
- Halle una cota de la BER.

Para aumentar la tasa de información binaria de dos a tres bits por símbolo, se propone el siguiente formato:

$$y(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k p\left(t - \left(\frac{a_k}{5} + k\right)T\right)$$

donde $b_k \in -1,1$, y $a_k \in 0,1,2,3$.

- Halle una cota de la BER para este nuevo formato.
- Si con el formato anterior sólo se requiere la transmisión de dos bits por símbolo, ¿cómo elegiría los valores de $b_k \in -1,1$ en función de los valores de $a_k \in 0,1,2,3$ para minimizar la BER? Dibuje las formas de onda de los cuatro símbolos y una cota de la BER resultante.

2.8.2 Resolución abreviada

a) $L=4$.

$$\text{b) } \mathbf{s}_1 = A\sqrt{\frac{T}{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_2 = A\sqrt{\frac{T}{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_3 = A\sqrt{\frac{T}{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_4 = A\sqrt{\frac{T}{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } BER \leq 3Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

$$\text{d) } BER \leq 7Q\left(\sqrt{\frac{3}{2} \frac{E_b}{N_o}}\right)$$

$$\text{e) } \mathbf{s}_1 = A\sqrt{\frac{T}{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_2 = A\sqrt{\frac{T}{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_3 = A\sqrt{\frac{T}{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_4 = A\sqrt{\frac{T}{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$BER \leq 3Q\left(\sqrt{3 \frac{E_b}{N_o}}\right)$$

2.9 Ejercicio 2 de control abril 2005 (J. Riba)

2.9.1 Enunciado

Este problema ilustra el concepto de transmisión digital jerárquica, usado en el *Standard DVB-T (Terrestrial Digital Video Broadcasting)*. En la transmisión jerárquica hay dos flujos de transporte: uno de baja velocidad (muy robusto a las condiciones de ruido) y otro de alta velocidad (más exigente en cuanto al nivel de ruido).

Considere que los flujos son los siguientes:

R_{bL} bits/sec para el usuario de baja velocidad (“L” indica *low-rate*).

$R_{bH} = 2R_{bL}$ bits/sec para el usuario de alta velocidad (“H” indica *high-rate*).

Los receptores instalados en coches (usuarios de baja velocidad) soportan condiciones de canal más duras, y tienen suficiente con la extracción del flujo R_{bL} para una calidad de imagen aceptable. En cambio, los receptores instalados en hogares (usuarios de alta velocidad) disponen de una antena más selectiva que, al presentar menos ruido, les permite extraer el flujo completo R_{bH} para obtener video de alta calidad. Los dos receptores son capaces de obtener los flujos deseados a partir de la misma señal recibida. Simplemente difieren en su nivel de complejidad.

La señal digital se compone de la suma ponderada de dos señales digitales ($y_a(t)$ y $y_b(t)$):

$$y(t) = A(y_a(t) + \alpha y_b(t))$$

donde $0 < \alpha < 1/2$.

Cada una de las señales $y_a(t)$ e $y_b(t)$ transporta dos bits por símbolo con el mismo formato, y se basa en una constelación de $M=4$ símbolos con dimensión $L=2$:

$$y_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_{k,1}\gamma_1(t-kT) + a_{k,2}\gamma_2(t-kT)]$$

$$y_b(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [b_{k,1}\gamma_1(t-kT) + b_{k,2}\gamma_2(t-kT)]$$

donde $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ son funciones ortonormales, y las componentes $a_{k,j}$ y $b_{k,j}$ ($j=1,2$) son binarias, ambas de valores 1 y -1. Los receptores de baja velocidad sólo están interesados en la extracción de $a_{k,1}$ y $a_{k,2}$ (dos bits por símbolo), mientras que los receptores de alta velocidad están interesados en la extracción de la información completa $a_{k,1}$, $a_{k,2}$, $b_{k,1}$ y $b_{k,2}$ (cuatro bits por símbolo).

El canal presenta ruido aditivo, Gausiano blanco. La densidad espectral de potencia del ruido es $N_{oL}/2$ para los usuarios de baja velocidad y $N_{oH}/2$ para los usuarios de alta velocidad. Los bits $a_{k,1}$, $a_{k,2}$, $b_{k,1}$ y $b_{k,2}$ son equiprobables e independientes.

a) Para el caso $\alpha = 0$, dibuje la constelación asociada a la señal $y(t)$. Dibuje las regiones de decisión y el receptor óptimo de baja velocidad usando detectores de signo para cada bit. Halle la BER_{L0} aproximada del receptor de baja velocidad, en función de E_b / N_{oL} .

En los siguientes apartados, considere el caso general de $0 < \alpha < 1/2$.

b) Dibuje la constelación completa asociada a la señal $y(t)$ para dos valores del parámetro α (uno pequeño y uno grande). Halle la energía media de símbolo (E_s) y de bit (E_b).

c) Halle la $\text{BER}_{L\alpha}$ aproximada del mismo receptor de baja velocidad diseñado en el apartado a), en función de E_b / N_{oL} .

d) Dibuje las regiones de decisión del receptor de alta velocidad. Halle la $\text{BER}_{H\alpha}$ aproximada del receptor de alta velocidad en función de E_b / N_{oH} .

e) En vista de los resultados de los dos apartados anteriores (o bien de modo cualitativo), explique cuál es el impacto de aumentar α sobre la BER del usuario de baja velocidad ($\text{BER}_{L\alpha}$) y del usuario de alta velocidad ($\text{BER}_{H\alpha}$).

f) Si la $E_b / N_{oL} = 10\text{dB}$ y $E_b / N_{oH} = 30\text{dB}$, diseñe el valor adecuado de α de tal modo que los dos tipos de usuarios trabajen en iguales condiciones de probabilidad de error: $\text{BER}_{L\alpha} = \text{BER}_{H\alpha}$.

g) Explique cómo diseñaría el receptor óptimo de alta velocidad a partir de las decisiones del receptor óptimo de baja velocidad.

2.9.2 Resolución abreviada

$$\text{a) } \mathbf{s}_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_2 = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_3 = A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_4 = A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$BER \approx Q \left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_{oL}}} \right)$$

$$\text{b) } E_b = A^2 (1 + \alpha^2)$$

$$\text{c) } BER \approx Q \left(\sqrt{\frac{(1 - |\alpha|)^2}{1 + \alpha^2}} 2 \frac{E_b}{N_{oL}} \right)$$

$$\text{d) } BER \approx Q \left(\sqrt{\frac{4\alpha^2}{1 + \alpha^2}} \frac{E_b}{N_{oH}} \right)$$

e) Si α crece, aumenta la BER del usuario de baja velocidad, y disminuye la BER del usuario de alta velocidad.

$$\text{f) } \alpha = 0.0227$$