UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
FACULTAT D'INFORMÀTICA

Introducció a la Lògica Primavera 05-06 Examen **Final** (16/6/06) Temps = 3 hores

Cognoms: ....
Nom: .... DNI: .... Grup: .... Cognom professor: ....

Indicacions per a la realització de l'examen

- **Aquest examen consta** vàries fulles separades que es lliuraran per separat.
- **Abans de fer l'examen** apaga el mòbil i posa el teu DNI al costat en un lloc visible al professor.
- **En començar l'examen**:
  - rebràs un conjunt de **fulls d'examen** (cadascun amb els enunciats d'una o més preguntes i espai per respondre cadascuna d'elles) i un nombre fixat de **fulls d'esborrany**
  - posa les teves dades personals a **tots** els fulls (altrament se't pot retirar l'examen i posar-te un zero de nota)
  - es recomana llegir bé l'enunciat de cada pregunta i fixar-se en la seva puntuació
- **Tot fent l'examen**:
  - no es poden consultar llibres, apunts ni cap altra mena de material
  - cal tenir posat el nom, cognoms i DNI a **tots** els fulls d'examen i **tots** els fulls d'esborrany
  - contesta fent servir l'espai donat
  - dóna sempre una justificació de les teves respostes
  - tingues present que en alguns casos la **notació** emprada en els enunciats per predicats (sense parèntesis ni comes per separar els arguments) pot variar respecte a l'emprada en el teu grup al llarg del curs.
- **Després de fer l'examen**: lliura cada full d'examen a la **pila corresponent** i lliura els fulls d'esborrany al professor.

(1 punt) Pregunta de Conceptes

1. Defineix formalment el concepte de satisfactibilitat d'una fòrmula qualsevol.
   Solució:
   Una fòrmula φ és satisfactible (que notem $\Vdash \varphi$) si té com a mínim un model. Més formalment, $\Vdash \varphi$ si i només si existeix una interpretació $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi$. O també, si existeix una interpretació $\mathcal{I}$ tal que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = \texttt{cert}$.

2. Defineix formalment el concepte d'equivalència lògica de dues fòrmules qualsevol.
   Solució:
   Dues fòrmules són equivalents si i només si tenen els mateixos models. Més formalment, per qualsevol dues fórmules φ_1, φ_2, $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ si i només si

   $$\text{per qualsevol interpretació } \mathcal{I}, \qquad \mathcal{I} \models \varphi_1 \text{ si i només si } \mathcal{I} \models \varphi_2$$

   O també, si per qualsevol interpretació $\mathcal{I}$ tenim que $[\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{I}} = [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{I}}$

3. Com es pot plantejar un problema de decissió d'equivalència lògica en termes d'un problema de satisfactibilitat ? Justifica formalment la resposta.
   Solució:
   El plantejament demanat és: $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ si i només si $\nVdash \neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$.
   $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ si i només si (per definició de $\equiv$) per tota interpretació $\mathcal{I}$, $[\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{I}} = [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{I}}$
   si i només si (per la semàntica de la $\leftrightarrow$) per tota interpretació $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$
   si i només si (per la semàntica de la $\neg$) per tota interpretació $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \not\models \neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$
   si i només si (per definició de satisfactibilitat d'una fòrmula) $\nVdash \neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$.

(2 punts) Pregunta de Formalització
En el context del mundial de futbol d'Alemanya, donat el següent vocabulari

- Fx denota "x és futbolista",
- Sx denota "x és una selecció",
- Jxy denota "x és jugador d'y",
- Pxy denota "x juga un partit contra y",
- Gxy denota "x guanya a y",
- Cx denota "x és campiona".

afegeix el vocabulari que faci falta i formalitza les frases següents fent servir el llenguatge de la lògica de primer ordre amb la igualtat que denotem amb el símbol de predicat binary I (Ixy denota "x és igual a y"):

1. Cap element del domini és futbolista i selecció a la vegada.
2. En Ronaldinho és un futbolista que és jugador de la selecció de Brasil que és una selecció.
3. Tots els futbolistes són jugadors d'alguna selecció.
4. No totes les seleccions juguen un partit contra una selecció finalista.
5. Si una selecció guanya a totes les seleccions contra qui juga aleshores és campiona.
6. Per a que una selecció sigui campiona és necessari guanyar la selecció de Brasil.
7. Cap futbolista és jugador de més d'una selecció.

Solució:
Al vocabulari hi afegim les següents constants:

- r denota "Ronaldinho"
- b denota "selecció de Brasil"

i el següent predicat:

- Fx denota "x és finalista"

Les frases es poden formalitzar de la següent manera:

1. Cap element del domini és futbolista i selecció a la vegada.

$$\neg\exists x(Fx \wedge Sx)$$

2. En Ronaldinho és un futbolista que és jugador de la selecció de Brasil que és una selecció.

$$Fr \wedge Jrb \wedge Sb$$

3. Tots els futbolistes són jugadors d'alguna selecció.

$$\forall x(Fx \to \exists y(Sy \wedge Jxy))$$

4. No totes les seleccions juguen un partit contra una selecció finalista.

$$\neg\forall x(Sx \to \exists y(Sy \wedge Fy \wedge Pxy))$$

5. Si una selecció guanya a totes les seleccions contra qui juga aleshores és campiona.
   Una condició suficient C d'una situació S es formalitza amb l'implicació $C \to S$.

$$\forall x(Sx \wedge \forall y(Sy \wedge Pxy \to Gxy) \to Cx)$$

6. Per a que una selecció sigui campiona és necessari guanyar la selecció de Brasil.
   Una condició necessària C d'una situació S es formalitza amb l'implicació $S \to C$.

$$\forall x\ (Sx \to (Cx \to Gxb))$$

7. Cap futbolista és jugador de més d'una selecció.

$$\neg\exists x(Fx \wedge \exists y \exists z(Sy \wedge Sz \wedge \neg Iyz \wedge Jxy \wedge Jxz))$$

(2 punts) Pregunta de Semàntica

(1) És la fórmula

$$\forall x \forall y(Pxy \to \exists z\ (Pxz \wedge Pzy))$$

satisfactible? Es vàlida? Justifica formalment la teva resposta.

Solució

És satisfactible: Un model está donat per la estructura $M = (D, J)$, $D = \{a\}$ (domini), $J(P) := P^M = \{(a, a)\}$. Donat que F es tancada, no necessitem precisar l'acció de J sobre les variables. La fórmula F és verdadera amb aquesta estructura si la fórmula $P(x, y) \to \exists z(P(x, z) \wedge P(z, y))$ es compleix per totes les substitucions de x, y per elements de D. Aquí no més podem fer la substitució $[a/x, a/y]$. Llavors amb la substitució $[a/z]$ obtenim

$$I(F) = I(P^M(a, a) \to (P^M(a, a) \wedge P^M(a, a))) = 1,$$

ja que $I(P^M(a, a)) = 1$.
No és vàlida: Un contramodel està donat per l'estructura $M' = (D', J')$, $D' = \{a, b\}$, $P^{M'} = \{(a, b)\}$. La fórmula F és verdadera amb aquesta estructura si la fórmula $P(x, y) \to \exists z(P(x, z) \wedge P(z, y))$ es compleix per totes les substitucions de x, y per elements de D. En particular, amb la substitució $[a/x, b/y]$, obtenim que si $I'(F) = 1$, necessariament $I'(G) = 1$, amb

$$G = P^{M'}(a, b) \to ((P^{M'}(a, b) \wedge P^{M'}(b, b)) \vee (P^{M'}(a, a) \wedge P^{M'}(a, b))),$$

fent el desenvolupament del quantificador existencial en termes de disjuncions. Pero $I'(G) = 0$, ja que $I'(P^{M'}(a, a)) = I'(P^{M'}(b, b)) = 0$; necessariament, $I'(F) = 0$.
Observació: una resposta alternativa es pot donar fent servir dominis infinits; per exemple, si P es la relació de desigualtat $<$, amb D el conjunt dels nombres reals tenim un model i amb D el conjunt dels nombres naturals tenim un contramodel.

(2) Siguin F, G, i H fórmules:

1. És veritat que si $F \wedge G \not\models H$ llavors $F \wedge G \wedge H$ és insatisfactible? Demostra-ho.
2. És veritat que si $F \vee G \models H$ llavors $F \wedge \neg H$ és insatisfactible? Demostra-ho.

Solució
Resposta (1): NO.
Contraexemple: Si $F = G = A$ i $H = B$, B no és consequencia de $A \wedge A$ i, no obstant, $A \wedge A \wedge B$ és satisfactible.
Resposta (2): SI.
$F \vee G \models H$
si i només si (per definició de $\models$) tot model de $F \vee G$ és model de H.
Aleshores (donat que tot model de F és model de $F \vee G$) tot model de F és model de H,

cosa que si i només si (pel teorema de refutació) $F \wedge \neg H$ és insatisfactible.
Per tant queda demostrat que si $F \vee G \models H$ aleshores $F \wedge \neg H$ és insatisfactible.

(2 punts) Pregunta de Resolució i Programació Lògica

(a) Demostra per resolució que:

$$\forall x\, Pxxx \;\;\wedge\;\; \forall x \forall y \forall z \forall u\, (\neg Qxy \vee \neg Puyz \vee Pf(x,u)xz) \;\wedge\; Qab \;\wedge\; Qac \;\wedge\; Qbd \;\wedge\; Qcd \models \exists w\, Pwad$$

(b) Si es tractés d'un programa lògic, quina resposta calculada per a la w correspondría a la teva demostració?

(c) Sabent que es tracta d'un problema de grafs, on Qxy vol dir que hi ha una aresta de x a y, què representa aquesta resposta calculada per a la w?

(d) Quina altra resposta hi ha? (només cal donar la resposta).
Solució:
(a) Passem a forma clausal, i fem resolució:

1. $p(x, x, x)$
2. $\neg q(x, y) \vee \neg p(u, y, z) \vee p(f(x, u), x, z)$
3. $q(a, b)$
4. $q(a, c)$
5. $q(b, d)$
6. $q(c, d)$
7. $\neg p(w, a, d)$ (de la negació de $\exists w\, p(w, a, d)$)

8.	(de 2 i 7)	$\neg q(a, y) \vee \neg p(u, y, d)$
9.	(de 8 i 3)	$\neg p(u, b, d)$
$9'$.	(de 9)	$\neg p(u', b, d)$ (renombrem la u abans del següent pas)
10.	(de 2 i $9'$)	$\neg q(b, y) \vee \neg p(u, y, d)$
11.	(de 10 i 5)	$p(u, d, d)$
12.	(de 11 i 1)	$[]$

(b) $\mathbf{f(a, f(b, d))}$

(c) Un camí per anar de a a d

(d) $\mathbf{f(a, f(c, d))}$

```
Nota: el Prolog seria:  p(X,X,X).
                        p(f(X,U),X,Z):- q(X,Y), p(U,Y,Z).
                        q(a,b).   ...   q(c,d).

Que escriu les 2 respostes amb: ?-p(W,a,d), write(W), nl, fail.
```

(2 punts) Pregunta de Taulers

1. Quines de les propietats següents compleix qualsevol branca maximal Δ en un tauler proposicional?
   (a) Si $A \wedge B \in \Delta$, aleshores $A, B \in \Delta$.
   (b) Si $A \vee B \in \Delta$, aleshores $A, B \in \Delta$.
   (c) Si $\neg\neg A \in \Delta$, aleshores $A \in \Delta$.
   (d) Si $A \in \Delta$, aleshores $\neg\neg A \in \Delta$.
   (e) Si $\neg(A \wedge B) \in \Delta$, aleshores $\neg A \in \Delta$ o bé $\neg B \in \Delta$.

(f) Si $A \to B \in \Delta$, aleshores $A \in \Delta$ implica $B \in \Delta$.

Justifica la resposta.

2. Construeix un tauler maximal per a la fórmula $\neg(A \vee B \to A \wedge B)$ i digues si la fórmula és satisfactible o no. En el cas que ho sigui, dóna'n un model.

3. Demostra, utilitzant el mètode dels taulers, que $\forall x Px \vee \forall x Qx \models \forall x(Px \vee Qx)$.

Solució:

1. Són certes 1,3 i 5. Un tauler és maximal si totes les fórmules que no són literals han estat usades. Per tant, (a) és certa, per la regla α, (c) és certa, per la regla de la negació, i (e) és certa, per la regla β. En canvi, (b), (d) i (f) són falses; n'hi ha prou amb considerar taulers maximals per a les fórmules $P \vee Q$, P i $P \to Q$ respectivament, on P i Q indiquen variables proposicionals.

2. Un tauler maximal és aquest:

$$\neg(A \vee B \to A \wedge B)$$
$$A \vee B$$
$$\neg(A \wedge B)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & A & & \mid & & B & \\ \neg A & \mid & \neg B & & \neg A & \mid & \neg B \\ (1) & & (2) & & (3) & & (4) \end{array}$$

Les branques (1) i (4) són tancades, mentre que (2) i (3) són obertes. Per tant, la fórmula és satisfactible. La branca (2) dóna lloc al model $A \mapsto 1, B \mapsto 0$ i la branca (3) al model $A \mapsto 0, B \mapsto 1$.

3. Sabem que $\forall x Px \vee \forall x Qx \models \forall x(Px \vee Qx)$ sii la fórmula $\forall x Px \vee \forall x Qx \wedge \neg\forall x(Px \vee Qx)$ és insatisfactible. Per tant, n'hi ha prou amb construir un tauler tancat per a aquesta fórmula. Aquest n'és un:

$$(\forall x Px \vee \forall x Qx) \wedge \neg\forall x(Px \vee Qx)$$
$$\forall x Px \vee \forall x Qx$$
$$\neg\forall x(Px \vee Qx)$$
$$\neg(Pa \vee Qa)$$
$$\neg Pa$$
$$\neg Qa$$

$$\begin{array}{ccc} \forall x Px & \mid & \forall x Qx \\ Pa & \mid & Qa \end{array}$$

(1 punt) Pregunta de Deducció Natural
Demostra per **deducció natural** i fent ús només de les regles bàsiques els raonaments següents:

1. $P \longrightarrow Q,\ \ \urcorner Q \models \urcorner P$

2. $\urcorner Q \wedge \urcorner R \longrightarrow \urcorner P,\ \ \urcorner S \longrightarrow P,\ \ \urcorner R \models \urcorner Q \longrightarrow S$

- **Solució** (1) Noteu que es tracta de la regla derivada *Modus Tollens*

1.	$P \longrightarrow Q$		H
2.	$\neg Q$		H
3.		P	H
4.		$P \longrightarrow Q$	IT 1
5.		Q	MP 3, 4
6.		$\neg Q$	IT 2
7.	$\neg P$		RA 3, 5, 6

- **Solució** (2) Noteu que la subdemostració que va de les línees 9 a 13 és el mateix esquema de demostració que a l'apartat 1 (*Modus Tollens*) que permet deduir $\neg\neg S$ a partir de $\neg S \longrightarrow P$ (línea 2) i de $\neg P$ (línea 8).

1.	$\neg Q \wedge \neg R \longrightarrow \neg P$			H
2.	$\neg S \longrightarrow P$			H
3.	$\neg R$			H
4.		$\neg Q$		H
5.		$\neg R$		IT 3
6.		$\neg Q \wedge \neg R$		$I\wedge$ 4, 5
7.		$\neg Q \wedge \neg R \longrightarrow \neg P$		IT 1
8.		$\neg P$		MP 6, 7
9.			$\neg S$	H
10.			$\neg S \longrightarrow P$	IT 2
11.			P	MP 9, 10
12.			$\neg P$	IT 8
13.		$\neg\neg S$		RA 9, 11, 12
14.		S		DN 14
15.	$\neg Q \longrightarrow S$			DC 4, 14