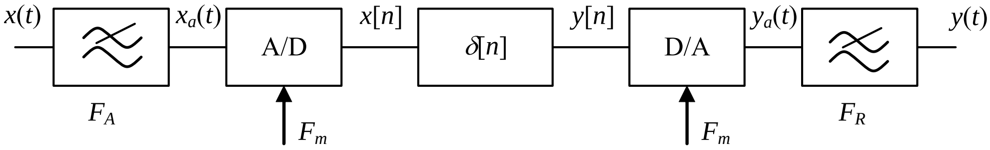
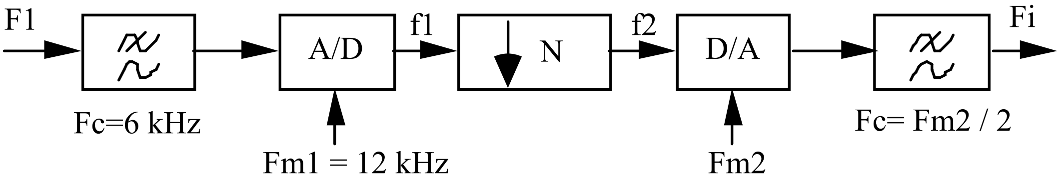


P1.- Considérese la situación de la figura, en la que la secuencia que es obtenida por conversión A/D es pasada directamente al conversor D/A. La frecuencia de muestreo es F_m = 8 kHz. Los filtros analógicos antialiasing y reconstructor son paso bajo ideales con frecuencia de corte F_A y F_R, respectivamente. Si x(t) es un tono de frecuencia F (2 kHz, 3.2 kHz, 4.8 kHz), se pide los componentes frecuenciales de y(t) cuando:
a) F_A = 6.5 kHz y F_R = 3.5 kHz.
b) F_A = 3.5 kHz y F_R = 6.5 kHz.
SOLUCIÓN: En la siguiente tabla se indican los componentes frecuenciales de x(t), $x_a(t)$, x[n], y[n], $y_a(t)$ e y(t) en ambas situaciones. Para obtener esta tabla se ha tenido en cuenta que:
1.- Un tono de frecuencia F tiene componentes frecuenciales ± F.
2.- La relación entre frecuencias analógicas F y frecuencias discretas f es $f = F/F_m$.
3.- Se cumple que: $\pm\frac{F}{F_m} \pm k \equiv \pm\frac{F_m - F}{F_m} \pm k'$ con k y k' enteros.

F_A y F_R	x(t)	$x_a(t)$	x[n]	y[n]	$y_a(t)$	y(t)
F_A = 6.5 kHz F_R = 3.5 kHz	± 2 kHz	± 2 kHz	± 0.25 ± k	± 0.25 ± k	± 2 ± 8k kHz	± 2 kHz
	± 3.2 kHz	± 3.2 kHz	± 0.40 ± k	± 0.40 ± k	± 3.2 ± 8k kHz	± 3.2 kHz
	± 4.8 kHz	± 4.8 kHz	± 0.40 ± k	± 0.40 ± k	± 3.2 ± 8k kHz	± 3.2 kHz
F_A = 3.5 kHz F_R = 6.5 kHz	± 2 kHz	± 2 kHz	± 0.25 ± k	± 0.25 ± k	± 2 ± 8k kHz	± 2 kHz ± 6 kHz
	± 3.2 kHz	± 3.2 kHz	± 0.40 ± k	± 0.40 ± k	± 3.2 ± 8k kHz	± 3.2 kHz ± 4.8 kHz
	± 4.8 kHz	-	-	-	-	-



P2.- Una sinusoide de frecuencia F1 = 2.5 kHz es procesada por el sistema que se muestra en la figura. Si N = 3, se pide:

a) Las frecuencias f1 y f2 de las sinusoides discretas que representan a la sinusoide analógica F1 antes y después del diezmador.
b) La frecuencia de conversión Fm2 para que el sistema trabaje en tiempo real.
c) La frecuencia Fi de cada una de las sinuoides analógicas presentes a la salida del sistema.

SOLUCION: El sistema discreto es un diezmador, cuya relación entrada/salida es la siguiente: y[n] = x[Nn]. La salida de este sistema contiene las muestras de la entrada en las posiciones múltiplos de N y descarta todas las demas (conserva 1 de cada N).
a) En el caso de que $x[n] = \sin 2\pi f_1 n$, la salida resulta $y[n] = \sin 2\pi f_1 Nn = \sin 2\pi f_2 n$, siendo $f_2 = N f_1$. En nuestro caso, $f_1 = F_1 / F_{m1} = 5/24$ y, en consecuencia, $f_2 = 3 \cdot 5/24 =$

5/8. Sin embargo, este valor de f es superior a 0.5, por lo que hay que buscar su equivalente $f = 1 - f_2 = 3/8$.
b) A la entrada del sistema diezmador tenemos F_{m1} muestras por segundo. Sin embargo, a su salida sólo tenemos 1 de cada N que entran. Es decir, el ritmo de muestras de y[n] es F_{m1}/N. De este modo, para que no se acumulen o falten muestras en la conversión D/A ha de cumplirse $F_{m2} = F_{m1}/N$. En nuestro caso $F_{m2} = 4$ kHz.
c) Sólo hay una sinusoide a la salida (no hay aliasing) y su frecuencia es $F = f\,F_{m2} = 1.5$ kHz.

P3.- Se ha obtenido de un banco el préstamo de un capital de **C** euros, a un interés mensual **r** y a devolver en plazos constantes **p** al cabo de **N** años.
a) Si y[n] representa el capital pendiente después de haber efectuado el n-ésimo pago mensual, escribir la ecuación que relaciona el capital pendiente y[n], el interés mensual r, la cuota mensual p y el capital pendiente tras el pago del mes anterior.
b) Determinar y[n] en función de **C**, **r**, **p** y **n**.
c) Si se ha recibido un préstamo de 150.000 euros a un interés mensual del 0.4%, calcular la cuota constante p para devolver el capital en 30 años.
d) Calcular el total abonado al banco en los 30 años de amortización del préstamo.
SOLUCIÓN:
a) Durante el mes n el capital debido es y[n-1] (capital pendiente después de haber efectuado el pago del plazo anterior) más los intereses que se vayan generando durante el mes. Al cabo del mismo el capital debido es (1+r) y[n-1]. De este modo, tras efectuar el pago n-ésimo el capital pendiente y[n] resulta ser:

$$y[n] = (1+r)\,y[n-1] - p \qquad (1)$$

b) Esta relación representa una ecuación en diferencias finitas lineal de coeficientes constantes, con la condición inicial que antes de efectura ningún reintegro se debe la totalidad del capital. Es decir:

$$y[0] = C \qquad (2)$$

Para resolver la ecuación, resolvemos la ecuación homogénea y encontramos una solución particular. En cuanto a la homogénea

$$y[n] - (1+r)\,y[n-1] = 0$$

su solución viene dada por

$$y_h[n] = A\,z^n$$

donde z es la raíz de la ecuación característica

$$1 - (1+r)\,z^{-1} = 0$$

En definitiva:

$$y_h[n] = A\,(1+r)^n$$

Por otro lado, podemos ensayar como solución particular una constante

$$y_p[n] = K$$

que, introducida en la ecuación, nos proporciona

$$y_p[n] = K = p / r$$

De este modo, podemos escribir

$$y[n] = A\,(1+r)^n + p / r$$

Si se determina A para satisfacer la condición inicial (2), se obtiene finalmente:

$$y[n] = (\,(rC-p)\,(1+r)^n + p\,) / r \qquad (3)$$

c) El plazo constante p que se devuelve al final de cada mes ha de ser tal que tras el último pago no quede capital pendiente. Es decir, al cabo de m = 12 N meses y[m] = 0. Con esta condición se obtiene en (3):

$$p = rC\,\frac{(1+r)^m}{(1+r)^m - 1}$$

De este modo, con C= 150.000, r = 0.004 y N = 30, se obtiene p = 789,98 €.

d) El total de capital devuelto al banco es

$$T = m\,p = 284.392,80\ €$$

P4.-Considérese un sistema que se encuentra en reposo y cuya relación entrada/salida viene dada por la ecuación $y[n] = a\,y[n-1] + b\,x[n]$. Se pide:

a) Su respuesta impulsional $h[n]$.

b) Su respuesta a la secuencia $x[n] = B\,e^{j\omega n}\,u[n]$. .

SOLUCION:

a) La respuesta impulsional $h[n]$ responde a la ecuación:

$$h[n] = a\,h[n-1] + b\,\delta[n]$$

Si el sistema está en reposo y es causal (la relación entrada/salida lo es), tenemos que

$$\begin{aligned} &h[n] = 0 && n < 0 \\ &h[0] = b && \\ &h[n] = a\,h[n-1] && n > 0 \end{aligned}$$

Es decir, $h[n]$ es nulo para ordinales negativos y responde a la homogénea para ordinales positivos. La ecuación característica del sistema es

$$1 - a\,z^{-1} = 0$$

cuya raíz es $z = a$. Por tanto, podemos escribir

$$h[n] = A\,a^n\,u[n]$$

donde A debe determinarse para cumplir $h[0] = b$. En definitiva

$$h[n] = b\,a^n\,u[n]$$

b) Si la excitación $x[n]$ fuese $x[n] = B\,e^{j\omega n}$, es decir, la excitación fuera una exponencial, la respuesta del sistema en condiciones nulas sería la misma exponencial con un fasor distinto C. De este modo:

$$y[n] = C\,e^{j\omega n}$$

$$C\,e^{j\omega n} = a\,C\,e^{j\omega(n-1)} + b\,B\,e^{j\omega n}$$

de donde $C = B\,b\,/(1 - a\,e^{-j\omega})$ y en definitiva:

$$y[n] = b\,/(1 - a\,e^{-j\omega})\,B\,e^{j\omega n} \qquad (1)$$

En nuestro caso, la excitación comienza en n=0. Sin embargo, la única memoria que tiene el sistema de esta circunstancia es el valor de $y[-1]$ que es cero (condición de reposo), frente al valor $y[-1]$ en (1). La respuesta $y[n]$ a partir de n=0 del sistema se puede descomponer en dos partes

$$y[n] = y_\omega[n] + y_{ci}[n]$$

donde $y_\omega[n]$ es la respuesta del sistema si siempre estuviese sometido a la excitación exponencial

$$y_\omega[n] = a\,y_\omega[n-1] + b\,B\,e^{j\omega n}$$

e $y_{ci}[n]$ es la respuesta debida al ajuste de la condición inicial:

$$y_{ci}[n] = a\,y_{ci}[n-1]$$

En realidad, $y_\omega[n]$ es la solución particular de la ecuación e $y_{ci}[n]$ es la solución a la homogénea. Por lo tanto, podemos escribir:

$$y[n] = (b\,/(1 - a\,e^{-j\omega})\,B\,e^{j\omega n} + D\,a^n\,)\,u[n] \qquad (2)$$

donde D a de tomarse de modo que se cumpla la condición inicial $y[-1] = 0$, es decir

$$y[0] = b\,B$$

Se obtiene $D = -\,a\,e^{-j\omega}\,/(1 - a\,e^{-j\omega})\,b\,B$.

Obsérvese que (2) puede expresarse:

$$y[n] = (H(e^{j\omega})\, B\, e^{j\omega n} + D\, a^n)\, u[n]$$

ya que la respuesta frecuencial del sistema es

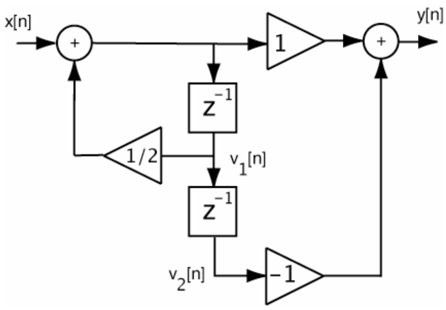
$$H(e^{j\omega}) = b /(1 – a\, e^{-j\omega})$$

De este modo, si el sistema es estable ($|a| <1$), la respuesta y[n] para n suficientemente largo llega a establecer el régimen permanente

$$y[n] = H(e^{j\omega})\, B\, e^{j\omega n}$$

Por otro lado, podemos observar que, si el sistema no es estable ($|a| \geq 1$), este régimen permanente no se establece nunca y no podremos hablar de respuesta frecuencial del sistema.

P5.- Considérese el sistema de la figura siguente:



Se pide:

c) Su función de transferencia H(z).
d) Su respuesta impulsional h[n].
e) Su respuesta y[n] a $x[n] = (-1)^n$ en condiciones iniciales nulas.
f) Su respuesta y[n] a $x[n] = (1/4)^n$ en condiciones iniciales nulas.

SOLUCION: Las ecuaciones de análisis del sistema son:

$$y[n] = (x[n] + ½\, v_1[n]) – v_2[n]$$
$$v_1[n+1] = x[n] + ½\, v_1[n]$$
$$v_2[n+1] = v_1[n]$$

a) Si el sistema se considera en reposo, el sistema será lineal e invariante. Así, si la entrada es una exponencial $x[n] = z^n$, la salida y[n] y todas las secuencias en el sistema (ya que cualquiera podría ser considerada como posible salida) serán exponenciales, por lo que podemos escribir:

$$y[n] = H(z)\, z^n \qquad (1)$$
$$v_1[n] = V_1(z)\, z^n$$
$$v_2[n] = V_2(z)\, z^n$$

Si introducimos estas secuencias en las ecuaciones del sistema, tenemos

$$H(z)\, z^n = (z^n + ½\, V_1(z)\, z^n) - V_2(z)\, z^n$$
$$V_1(z)\, z^{n+1} = (z^n + ½\, V_1(z)\, z^n)$$
$$V_2(z)\, z^{n+1} = V_1(z)\, z^n$$

que pueden simplificarse como

$$H(z) = (1 + ½\, V_1(z)) - V_2(z)$$
$$V_1(z) = z^{-1}\, (1 + ½\, V_1(z))$$
$$V_2(z) = z^{-1}\, V_1(z)$$

Las dos últimas ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas $V_1(z)$ y $V_2(z)$ cuya solución es

$V_1(z) = z^{-1}/(1 - ½\, z^{-1})$ $\qquad V_2(z) = z^{-2}/(1 - ½\, z^{-1})$

Sustituyendo estos valores en la primera ecuación obtenemos:

$$H(z) = (1 - z^{-2})/(1 - ½\, z^{-1})$$

b) A partir de la función de transferencia H(z) podemos decir que el sistema responde a la relación entrada/salida

$$y[n] = ½\; y[n-1] + x[n] – x[n-2]$$

Como es causal, su respuesta a $x[n] = \delta[n]$ en reposo satisface:

$$h[n] = 0 \text{ para } n < 0$$

$$h[n] = ½\; h[n-1] + \delta[n] – \delta[n-2] \text{ para } n \geq 0$$

En particular: h[0] = 1, h[1] = 0.5, h[2] = -0.75, h[n] = ½ h[n-1] para n > 2. Es decir, a partir de n = 2, h[n] responde a la ecuación homogénea. Esto permite escribir:

$$h[n] = A' (½)^n u[n-2] + B' \delta[n] + C' \delta[n-1] =$$

$$= A (½)^n u[n] + B \delta[n] + C \delta[n-1]$$

donde las constantes han de satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$h[0] = A + B = 1$$

$$h[1] = A (½) + C = 0.5$$

$$h[2] = A (½)^2 = -0.75$$

Es fácil obtener A = -3, B = 4, C = 2. En definitiva:

$$h[n] = -3 (½)^n u[n] + 4 \delta[n] + 2 \delta[n-1]$$

c) Basándonos en (1), la respuesta a $x[n] = (-1)^n$ es $y[n] = H(-1) (-1)^n = 0$. Para que esto sea cierto es preciso que para z = -1 converja que la suma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{-k} \qquad (2)$$

Se comprueba fácilmente que así es.

d) En este caso, la suma (2) no converje para z = ¼, por lo que la salida y[n] no está acotada.