Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA **Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions**	**ComII.** 2008-01-15 *Notas Provisionales: 22 Enero 2008* *Periodo de Alegaciones: 24 Enero 2008* *Notas Definitivas: 29 Enero 2008*

Profesores: M.Cabrera, J. Fernández Rubio, J. Riba
Informaciones adicionales:
- Duración de la prueba: 2h45'
- Entregar en tres partes separadas.
- Se prohíbe el uso de teléfonos móviles durante la realización del examen. No se pueden utilizar ni en su funcionalidad de reloj.
- Durante la realización del examen debe tener visible un documento identificativo con fotografía.

Ejercicio 1 (40%) INICIAR EN HOJA NUEVA

En una modulación digital la señal modulada se puede expresar del siguiente modo:

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m[n]}(t-nT) \qquad \text{con} \qquad s_m(t)=a_m \frac{1}{\sqrt{T/2}}\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right)+b_m \frac{1}{\sqrt{T/2}}\Pi\left(\frac{t-\frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) \qquad (1)$$

Donde $a_m=\pm A$ es una variable aleatoria binaria de valores equiprobables y $b_m=\pm B$ es también una variable aleatoria binaria de valores equiprobables y es estadísticamente independiente a la variable a_m.

La señal $s(t)$ se transmite por un canal ideal ($h_c(t)=\delta(t)$) AWGN, cuyo ruido $w(t)$ presenta la densidad espectral de potencia $S_w(f)=\frac{N_0}{2}$.

<u>Se pide:</u>

a) Halle una base ortonormal generadora del espacio de señal y dibuje los vectores respecto a dicha base. Proponga la estructura del receptor óptimo y halle la probabilidad de error de bit (BER) del sistema en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ y del cociente $\rho=\frac{A}{B}$.

Suponga a partir de este punto $A=B$ para el resto del ejercicio.

En un momento dado, se decide añadir un nuevo bit a cada símbolo $s_m(t)$ de la expresión (1), con el objeto de transmitir información de protocolo. La interpretación es que al añadir un bit de protocolo igual a '1' el símbolo $s_m(t)$ correspondiente transmite información de audio y al añadir un bit de protocolo igual a '0' el símbolo $s_m(t)$ correspondiente transmite información necesaria para el sincronismo de la señal.

En definitiva, la nueva señal transmitida, a la que denominaremos $g(t)$, se puede expresar del siguiente modo: $g(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{m[n]}(t-nT)s_{m[n]}(t-nT)$

Cuando el bit de protocolo vale '1' la función correspondiente es:

$$g_m(t)=g_1(t)=\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{8}}{\frac{T}{4}}\right)-\Pi\left(\frac{t-\frac{3T}{8}}{\frac{T}{4}}\right)+\Pi\left(\frac{t-\frac{5T}{8}}{\frac{T}{4}}\right)-\Pi\left(\frac{t-\frac{7T}{8}}{\frac{T}{4}}\right)$$

Cuando el bit de protocolo vale '0' la función correspondiente es: $g_m(t)=g_0(t)=\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$

Ambos valores se producen con equiprobabilidad.

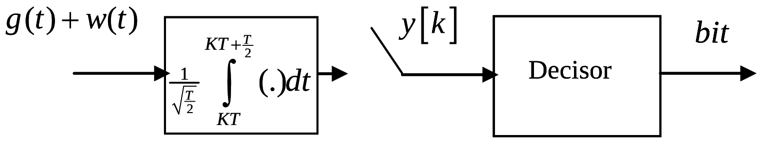
<u>Se pide:</u>

b) Halle y dibuje todas las formas de onda temporales del nuevo espacio de señal. Obtenga una base ortonormal generadora y los vectores de señal respecto a dicha base.

c) Calcule para la señal $g(t)$ la energía media transmitida por bit a la que denominaremos E_g y compárela con la energía media transmitida por bit de la señal $s(t)$, a la que denominaremos E_b.

d) Obtenga razonadamente una cota superior lo más ajustada posible para la probabilidad de error de símbolo (SER) del sistema en función del cociente $\frac{E_g}{N_0}$.

e) Suponga ahora que se diseña un receptor para realizar una decisión binaria únicamente del bit de protocolo según la figura adjunta. Obtenga la distribución estadística de las variables condicionadas a los dos posibles valores del bit de protocolo: $y[k]|0$ y $y[k]|1$. Proponga una regla de decisión para el bloque decidor, que aplique el criterio MAP a partir de la variable $y[k]$. Calcule la BER para el bit de protocolo en función del cociente $\frac{E_g}{N_0}$.



Ejercicio 2 (60%) INICIAR EN HOJA NUEVA

Dos usuarios deben compartir un canal de ancho de banda B que presenta la siguiente respuesta en frecuencia:

$$H(f)=\begin{cases}1+\alpha & \text{para } f_a \le |f| < f_a+B/2 \\ 1-\alpha & \text{para } f_a+B/2 \le |f| < f_a+B\end{cases} \quad \text{con } -1/2 \le \alpha \le 1/2$$

Observe que para $\alpha = 0$ el canal es ideal, y para $\alpha \neq 0$ (que puede ser tanto positiva como negativa) el canal presenta una banda desfavorecida. El valor de α no es conocido de antemano, con lo que no es posible saber cuál es la banda más desfavorecida.

Cada usuario transmite las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente, y la señal recibida es:

$$y(t)=\left(x_1(t)+x_2(t)\right)*h(t)+w(t)$$

donde $w(t)$ es ruido AWGN de densidad espectral de potencia $N_0/2$. Los dos usuarios presentan la misma E_b/N_0, y todas las probabilidades de error a calcular en este problema deben quedar expresadas en función de esta E_b/N_0.

Suponga primero que los dos usuarios acceden al canal por división en frecuencia (FDMA):

Usuario 1: $x_1(t)=A\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_1(k)\,p(t-kT)\cos\left(2\pi f_o t\right)$ $\qquad f_o = f_a + B/4$

Usuario 2: $x_2(t)=A\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_2(k)\,p(t-kT)\cos\left(2\pi f_1 t+\theta\right)$ $\qquad f_1 = f_a + 3B/4$

La frecuencia f_o es un múltiplo entero de la velocidad de símbolo. $f_o = \frac{N}{T}; N >> 1$

Los símbolos son binarios (± 1), independientes y equiprobables, $p(t)$ es un pulso de Nyquist ($p(t)=\sin\left(\pi t/T\right)/\left(\pi t/T\right)$ y $T=2/B$. La fase θ es constante y conocida en recepción.

<u>Se pide:</u>

a) Halle el espectro de cada usuario y el espectro de la señal recibida.

b) Diseñe el receptor óptimo para cada usuario y halle la probabilidad de error del usuario más desvaforecido en función de un valor genérico de α.

<u>INICIE EL SIGUIENTE APARTADO EN UNA HOJA NUEVA PARA ENTREGAR DE FORMA SEPARADA</u>

El sistema de acceso FDMA es injusto en el sentido de que da lugar a usuarios más desfavorecidos que otros. Como alternativa se propone el acceso multi portadora por división en código (MC-CDMA) con el que cada usuario transmite según el siguiente formato:

Usuario 1: $x_1(t)=\dfrac{A}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_1(k)\,p(t-kT)\left[\cos\left(2\pi f_o t\right)+\cos\left(2\pi f_1 t\right)\right]$

Usuario 2: $x_2(t)=\dfrac{A}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_2(k)\,p(t-kT)\left[\cos\left(2\pi f_0 t+\theta\right)-\cos\left(2\pi f_1 t+\theta\right)\right]$

Con frecuencias f_o y f_1 iguales que las empleadas en el sistema FDMA, y el mismo valor de θ.

<u>Se pide:</u>

c) Halle el espectro de cada usuario y el espectro de la señal recibida.

Suponga por el momento que es posible obtener un sincronismo perfecto de fase entre usuarios que garantice que $\theta=\pi/2$.

d) Diseñe el receptor óptimo para cada usuario y halle la probabilidad de error de cada usuario obtenida con el receptor anterior en función de un valor genérico de α. Comparando el resultado con el obtenido en b), discuta las ventajas de MC-CDMA con respecto a FDMA.

Suponga por último que no se consigue sincronismo de fase perfecto y que $\theta=\pi/2+\varepsilon$ ($\left\|\varepsilon\right\|<\pi/4$).

e) Evalúe el efecto de la interferencia de acceso múltiple (MAI) en el receptor diseñado en el apartado anterior y discuta en especial los casos particulares de $\varepsilon=0\,\&\,\alpha\neq 0$ y $\varepsilon\neq 0\,\&\,\alpha=0$. En el caso general, evalúe una cota de la probabilidad de error de cada usuario.

f) Diseñe un receptor multiusuario decorrelador que cancele la MAI y calcule la probabilidad de error obtenida. Demuestre que en el peor de los casos (de canal y sincronismo de fase) se obtiene una pérdida equivalente de 0.58 dB de señal en cada usuario.

$$\cos(A)\cos(B)=\tfrac{1}{2}\cos(A-B)+\tfrac{1}{2}\cos(A+B)$$
$$\mathrm{sen}(A)\mathrm{sen}(B)=\tfrac{1}{2}\cos(A-B)-\tfrac{1}{2}\cos(A+B)$$
$$\mathrm{sen}(A)\cos(B)=\tfrac{1}{2}\mathrm{sen}(A-B)+\tfrac{1}{2}\mathrm{sen}(A+B)$$
$$\mathrm{sen}(A+B)=\mathrm{sen}(A)\cos(B)+\cos(A)\mathrm{sen}(B)$$
$$\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\mathrm{sen}(A)\mathrm{sen}(B)$$

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona — UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA **Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions**	**ComII.** 2008-01-15
Profesores: M.Cabrera, J. Fernández Rubio, J. Riba	

Ejercicio 1

En una modulación digital la señal modulada se puede expresar del siguiente modo:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m[n]}(t - nT) \qquad \text{con} \qquad s_m(t) = a_m \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) + b_m \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t - \frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) \qquad (1)$$

Donde $a_m = \pm A$ es una variable aleatoria binaria de valores equiprobables y $b_m = \pm B$ es también una variable aleatoria binaria de valores equiprobables y es estadísticamente independiente a la variable a_m.

La señal $s(t)$ se transmite por un canal ideal ($h_c(t) = \delta(t)$) AWGN, cuyo ruido $w(t)$ presenta la densidad espectral de potencia $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$.

<u>Se pide:</u>

a) Halle una base ortonormal generadora del espacio de señal y dibuje los vectores respecto a dicha base. Proponga la estructura del receptor óptimo y halle la probabilidad de error de bit (BER) del sistema en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ y del cociente $\rho = \frac{A}{B}$.

<u>Solución Abreviada:</u>

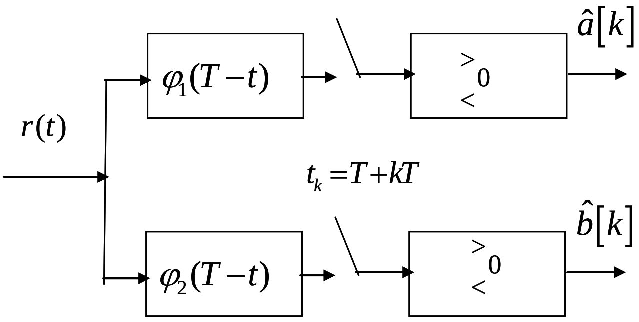
Tal como nos han dado la señal, una base ortonormal de dimensión L=2 que puede utilizarse directamente es:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) \qquad \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t - \frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}\right)$$

De esta forma los M=4 vectores son directamente: $\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$ o equivalentemente:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} +A \\ +B \end{pmatrix}; \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} -A \\ +B \end{pmatrix}; \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} -A \\ -B \end{pmatrix}; \mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} +A \\ -B \end{pmatrix} \quad (\textit{se dibuja como un rectángulo}).$$

Mediante un receptor formado por dos filtros adaptados y dos bloques de decisión independientes según se muestra en la figura:



La BER resultante es el promedio de las dos BERs obtenidas en cada una de las dos ramas, que dado que el canal es ideal y el ruido es gaussiano:

$$BER = \tfrac{1}{2}\left(Q\left(\tfrac{A}{\sigma}\right) + Q\left(\tfrac{B}{\sigma}\right)\right) \tag{1.1}$$

Finalmente y dado que la energía media transmitida por bit es igual a $E_b = \frac{1}{2}\left(A^2 + B^2\right)$ y la varianza de ruido es igual a: $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$, sustituyendo en (1.1) se obtiene la BER solicitada:

$$BER = \tfrac{1}{2}\left(Q\left(\sqrt{\tfrac{2A^2}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\tfrac{2B^2}{N_0}}\right)\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(Q\left(\sqrt{\tfrac{2A^2}{A^2+B^2}\tfrac{2E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\tfrac{2B^2}{A^2+B^2}\tfrac{2E_b}{N_0}}\right)\right) =$$
$$\tfrac{1}{2}\left(Q\left(\sqrt{\tfrac{2}{1+\rho^2}\tfrac{2E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\tfrac{2\rho^2}{1+\rho^2}\tfrac{2E_b}{N_0}}\right)\right)$$

Donde se puede observar que si $A = B \Rightarrow \rho = 1$, se obtiene la expresión esperada para una constelación de tipo QPSK.

Suponga a partir de este punto $A = B$ *para el resto del ejercicio.*

En un momento dado, se decide añadir un nuevo bit a cada símbolo $s_m(t)$ de la expresión (1), con el objeto de transmitir información de protocolo. La interpretación es que al añadir un bit de protocolo igual a '1' el símbolo $s_m(t)$ correspondiente transmite información de audio y al añadir un bit de protocolo igual a '0' el símbolo $s_m(t)$ correspondiente transmite información necesaria para el sincronismo de la señal.

En definitiva, la nueva señal transmitida, a la que denominaremos $g(t)$, se puede expresar del siguiente modo: $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{m[n]}(t-nT)s_{m[n]}(t-nT)$

Cuando el bit de protocolo vale '1' la función correspondiente es:

$$g_m(t) = g_1(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{8}}{\frac{T}{4}}\right) - \Pi\left(\frac{t-\frac{3T}{8}}{\frac{T}{4}}\right) + \Pi\left(\frac{t-\frac{5T}{8}}{\frac{T}{4}}\right) - \Pi\left(\frac{t-\frac{7T}{8}}{\frac{T}{4}}\right)$$

Cuando el bit de protocolo vale '0' la función correspondiente es: $g_m(t) = g_0(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$

Ambos valores se producen con equiprobabilidad.

<u>Se pide:</u>

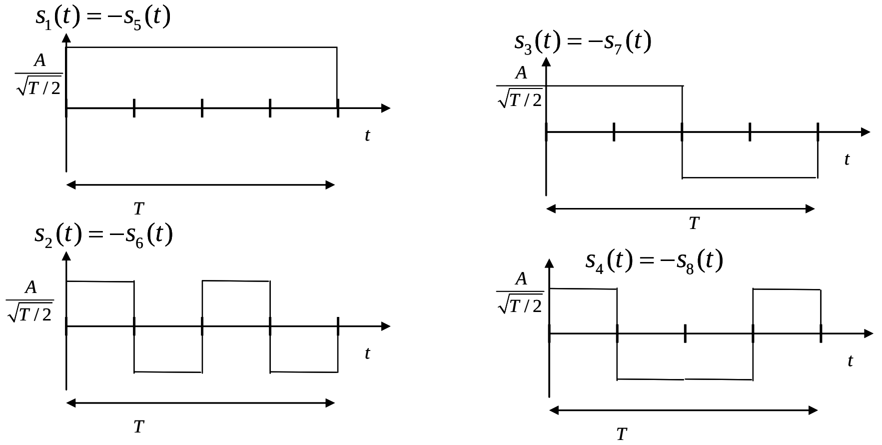
b) Halle y dibuje todas las formas de onda temporales del nuevo espacio de señal. Obtenga una base ortonormal generadora y los vectores de señal respecto a dicha base.

<u>Solución Abreviada:</u>

Cada nuevo símbolo de la señal, depende del par de valores (a_m, b_m) y del bit de protocolo. Por tanto las posibilidades para cada símbolo son M=8 y son equiprobables.

A continuación se presenta una tabla para enumerar las M=8 señales del nuevo espacio de señal y posteriormente se representan gráficamente.

m	1	2	3	4	5	6	7	8
(a_m, b_m)	+A,+A	+A,+A	+A,-A	+A,-A	-A,-A	-A,-A	-A,+A	-A,+A
Bit Prot.	0	1	0	1	0	1	0	1
$s_m(t)$	$s_1(t)$	$s_2(t)$	$s_3(t)$	$s_4(t)$	$s_5(t) = -s_1(t)$	$s_6(t) = -s_2(t)$	$s_7(t) = -s_3(t)$	$s_8(t) = -s_4(t)$



Para obtener una base ortonormal generadora existen múltiples posibilidades, pero a simple vista se puede observar que dado que las primeras cuatro señales son ortogonales entre sí, la dimensión será de L=4.

Eligiendo $\varphi_l(t) = \frac{1}{\sqrt{2}A} s_l(t); \quad l = 1,..4$, los vectores resultantes son:

$$\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_5 = \begin{pmatrix} +A\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ +A\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{s}_3 = -\mathbf{s}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +A\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{s}_4 = -\mathbf{s}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +A\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

c) Calcule para la señal $g(t)$ la energía media transmitida por bit a la que denominaremos E_g y compárela con la energía media transmitida por bit de la señal $s(t)$, a la que denominaremos E_b.

<u>Solución Abreviada:</u>

Considerando para el caso dado, que se transmiten 3 bits por símbolo, se obtiene:

$$E_g = \tfrac{1}{3} 2A^2$$

Respecto a la constelación del primer apartado, la energía media de símbolo se mantiene, por lo que con $A = B$, $E_b = A^2$ y se obtiene que:

$$E_g = \tfrac{2}{3} E_b$$

Es decir, al haber aumentado la velocidad de bit en este caso, se aprovecha mejor la energía media transmitida por símbolo.

d) Obtenga razonadamente una cota superior lo más ajustada posible para la probabilidad de error de símbolo (SER) del sistema en función del cociente $\frac{E_g}{N_0}$.

<u>Solución Abreviada:</u>

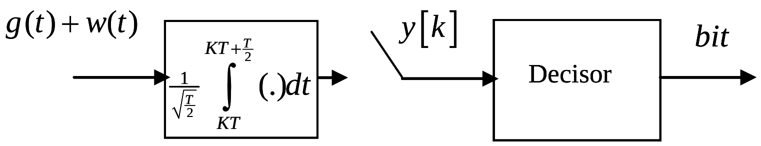
Al aplicar la cota de la unión, se puede observar que cada símbolo dista $d = 2A$ de 6 símbolos y $D = 2\sqrt{2}A$ de su símbolo opuesto, por lo que una cota inicial ajustada es:

$$SER \le 6Q\left(\tfrac{d}{2\sigma}\right) + Q\left(\tfrac{D}{2\sigma}\right)$$

Aunque, extrapolando de casos similares de (L=2,M=4) ó (L=3,M=6) se deduce que un mayor ajuste se da por:

$$SER \le 6Q\left(\tfrac{d}{2\sigma}\right) = 6Q\left(\sqrt{2\tfrac{A^2}{N_0}}\right) = 6Q\left(\sqrt{3\tfrac{E_g}{N_0}}\right)$$

e) Suponga ahora que se diseña un receptor para realizar una decisión binaria únicamente del bit de protocolo según la figura adjunta. Obtenga la distribución estadística de las variables condicionadas a los dos posibles valores del bit de protocolo: $y[k]|0$ y $y[k]|1$. Proponga una regla de decisión para el bloque decidor, que aplique el criterio MAP a partir de la variable $y[k]$. Calcule la BER para el bit de protocolo en función del cociente $\frac{E_g}{N_0}$.



<u>Solución Abreviada:</u>
Observando las M=8 señales del espacio de señal, considerando el bit de protocolo que transmite cada una y lo que se obtendría de integrar las señales en la primera mitad del periodo de símbolo se deduce que:

$$y[k]|0 = \pm A + n$$

Donde los valores $\pm A$ se producen con equiprobabilidad y n es una variable aleatoria gaussiana de media nula y varianza $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$, ya que de hecho el integrador equivale a un filtro adaptado a un pulso de energía igual a uno. Por tanto:

$$f_y(y|0) = \tfrac{1}{2}\left(f_n(y-A) + f_n(y+A)\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-A)^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y+A)^2}{\sigma^2}}\right)$$

Análogamente se deduce que:

$$y[k]|1 = n;\ f_y(y|1) = f_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y)^2}{\sigma^2}}$$

Por tanto, la decisión se tomará de forma análoga a una modulación bipolar. Se trata de buscar el valor de umbral γ para el decisor tal que:

$$-\gamma < y(t_k) < +\gamma \Rightarrow \hat{b}[k] = 1$$
$$\left(y(t_k) < -\gamma\right) \cup \left(+\gamma < y(t_k)\right) \Rightarrow \hat{b}[k] = 0$$

Aplicando el criterio MAP, en el valor del umbral se cumple que:

$$f_y(\gamma|0) = f_y(\gamma|1) \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\gamma-A)^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\gamma+A)^2}{\sigma^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\gamma)^2}{\sigma^2}} \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}\left(e^{+\frac{\gamma A}{\sigma^2}} + e^{-\frac{\gamma A}{\sigma^2}}\right) = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\sigma^2}{A} Ch^{-1}\left(e^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}}\right) = \frac{N_0}{\sqrt{6E_g}} Ch^{-1}\left(e^{\frac{-3E_g}{2N_0}}\right)$$

Donde Ch(.) representa la función de coseno hiperbólico.

El cálculo de la BER da lugar a la siguiente expresión:

$$BER = Q\left(\tfrac{\gamma}{\sigma}\right) + \tfrac{1}{2}Q\left(\tfrac{A-\gamma}{\sigma}\right) - \tfrac{1}{2}Q\left(\tfrac{A+\gamma}{\sigma}\right)$$

Si se han realizado las aproximaciones habituales en el cálculo de la BER anterior, se considerarán igualmente válidas.

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions

ComII. 2008-01-15

Profesores: M.Cabrera, J. Fernández Rubio, J. Riba

Ejercicio 2

Dos usuarios deben compartir un canal de ancho de banda B que presenta la siguiente respuesta en frecuencia:

$$H(f)=\begin{cases}1+\alpha & \text{para } f_a \le |f| < f_a+B/2 \\ 1-\alpha & \text{para } f_a+B/2 \le |f| < f_a+B\end{cases} \quad \text{con } -1/2 \le \alpha \le 1/2$$

Observe que para $\alpha = 0$ el canal es ideal, y para $\alpha \neq 0$ (que puede ser tanto positiva como negativa) el canal presenta una banda desfavorecida. El valor de α no es conocido de antemano, con lo que no es posible saber cuál es la banda más desfavorecida.

Cada usuario transmite las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente, y la señal recibida es:

$$y(t)=\left(x_1(t)+x_2(t)\right)*h(t)+w(t)$$

donde $w(t)$ es ruido AWGN de densidad espectral de potencia $N_0/2$. Los dos usuarios presentan la misma E_b/N_0, y todas las probabilidades de error a calcular en este problema deben quedar expresadas en función de esta E_b/N_0.

Suponga primero que los dos usuarios acceden al canal por división en frecuencia (FDMA):

Usuario 1: $x_1(t)=A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_1(k)\,p(t-kT)\cos\left(2\pi f_o t\right)$ $\qquad f_o = f_a + B/4$

Usuario 2: $x_2(t)=A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_2(k)\,p(t-kT)\cos\left(2\pi f_1 t+\theta\right)$ $\qquad f_1 = f_a + 3B/4$

La frecuencia f_o es un múltiplo entero de la velocidad de símbolo. $f_o = \frac{N}{T}; N >> 1$

Los símbolos son binarios (± 1), independientes y equiprobables, $p(t)$ es un pulso de Nyquist ($p(t)=\sin\left(\pi t/T\right)/\left(\pi t/T\right)$ y $T=2/B$. La fase θ es constante y conocida en recepción.

Se pide:

a) Halle el espectro de cada usuario y el espectro de la señal recibida.

Solución Abreviada:

Al ser $f_o = \frac{N}{T}$, entonces $f_o = \frac{N+1}{T}$, con lo que podemos expresar:

$$x_1(t)=A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_1(k)\,p_1(t-kT)$$

$$x_2(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_2(k)\, p_2(t-kT)$$

con

$$p_1(t) = p(t)\cos\left(2\pi f_o t\right)$$

$$p_2(t) = p(t)\cos\left(2\pi f_1 t + \theta\right)$$

El espectro de cada PAM con símbolos independientes y de media cero viene determinado por el módulo al cuadrado de la trasformada de Fourier del pulso conformador, es decir (*en los espectros se indica únicamente la parte positiva del espectro, dado que corresponden a señales reales se debe entender que presentan simetría respecto a frecuencia igual a cero*):

$$S_{x_1}(f) = \frac{A^2}{T}\left|P_1(f)\right|^2 = A^2 T \Pi\left(\frac{f-f_o}{B/2}\right)$$

$$S_{x_1}(f) = \frac{A^2}{T}\left|P_2(f)\right|^2 = A^2 T \Pi\left(\frac{f-f_1}{B/2}\right)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que el ruido es incorrelado con las señales y que cada usuario ocupa cada una de las bandas de respuesta plana del canal (de ganancia en potencia $(1+\alpha)^2$ y $(1-\alpha)^2$, respectivamente), el espectro de la señal recibida es:

$$S_y(f) = A^2 T\left((1+\alpha)^2 \Pi\left(\frac{f-f_o}{B/2}\right) + (1-\alpha)^2 \Pi\left(\frac{f-f_1}{B/2}\right)\right) + \frac{N_o}{2}$$

b) Diseñe el receptor óptimo para cada usuario y halle la probabilidad de error del usuario más desvaforecido en función de un valor genérico de α .

Solución Abreviada:

El receptor óptimo consiste en dos filtros adaptados a $p_1(t)$ y a $p_2(t)$, ambos muestreados al tiempo de símbolo. La MAI es nula puesto que los espectros no se solapan en frecuencia. Por lo tanto, cada usuario tiene asociada una constelación binaria de dimensión 1 y centroide nulo, con lo que la probabilidad de error en presencia de canal ideal sería:

$$BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

e igual para cada usuario.

El canal más desfavorecido presenta una atenuación en potencia de $\left(1-|\alpha|\right)^2$, con lo que la BER del usuario más desfavorecido es:

$$BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}\left(1-|\alpha|\right)^2}\right)$$

El sistema de acceso FDMA es injusto en el sentido de que da lugar a usuarios más desfavorecidos que otros. Como alternativa se propone el acceso multi portadora por división en código (MC-CDMA) con el que cada usuario transmite según el siguiente formato:

Usuario 1: $x_1(t)=\frac{A}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_1(k)\,p(t-kT)\left[\cos\left(2\pi f_o t\right)+\cos\left(2\pi f_1 t\right)\right]$

Usuario 2: $x_2(t)=\frac{A}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_2(k)\,p(t-kT)\left[\cos\left(2\pi f_0 t+\theta\right)-\cos\left(2\pi f_1 t+\theta\right)\right]$

Con frecuencias f_o y f_1 iguales que las empleadas en el sistema FDMA, y el mismo valor de θ.

Se pide:

c) Halle el espectro de cada usuario y el espectro de la señal recibida.

Suponga por el momento que es posible obtener un sincronismo perfecto de fase entre usuarios que garantice que $\theta=\pi/2$.

Solución Abreviada:

Las señales pueden expresarse como:

$$x_1(t)=\frac{A}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_1(k)\,p_1^{'}(t-kT)\,; \qquad x_2(t)=\frac{A}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_2(k)\,p_2^{'}(t-kT)$$

con:

$$p_1^{'}(t)=p(t)\cos\left(2\pi f_o t\right)+p(t)\cos\left(2\pi f_1 t\right)$$
$$p_2^{'}(t)=p(t)\cos\left(2\pi f_o t+\theta\right)-p(t)\cos\left(2\pi f_1 t+\theta\right)$$

Para hallar el espectro, sólo hay que hallar el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de estos dos pulsos. Como que los términos $p(t)\cos\left(2\pi f_o t\right)$ y $p(t)\cos\left(2\pi f_1 t+\theta\right)$ no solapan en frecuencia (como se ha visto en el caso FDMA), el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier es igual a la suma de los módulos al cuadrado de los pulsos usados en FDMA, con lo que:

$$S_{x_1}(f)=\frac{A^2}{T}\left|P_1^{'}(f)\right|^2=\frac{A^2T}{2}\left(\Pi^2\left(\frac{f-f_o}{B/2}\right)+\Pi^2\left(\frac{f-f_1}{B/2}\right)\right)=\frac{A^2T}{2}\Pi\left(\frac{f-\frac{f_o+f_1}{2}}{B}\right)$$

$$S_{x_2}(f)=\frac{A^2}{T}\left|P_2^{'}(f)\right|^2=\frac{A^2T}{2}\left(\Pi^2\left(\frac{f-f_o}{B/2}\right)+\left|-\Pi\left(\frac{f-f_1}{B/2}\right)\right|^2\right)=\frac{A^2T}{2}\Pi\left(\frac{f-\frac{f_o+f_1}{2}}{B}\right)=S_{x_1}(f)$$

Observe que el término de fase del usuario 2 no tiene ningún impacto sobre el espectro (afecta sólo a la transformada de Fourier del pulso, pero no a su módulo al cuadrado). Asimismo, el cambio de signo en el término $p(t)\cos\left(2\pi f_1 t+\theta\right)$ del segundo usuario, no afecta al espectro, por las mismas razones.

Los espectros de cada usuario son por tanto iguales, y ocupan todo el ancho de banda del canal. Al sumar los espectros de cada usuario, obetenemos un espectro plano en toda la banda del cana, tal como ocurre en FDMA. Por tanto, el espectro de la señal recibida es el mismo que en el caso de FDMA:

$$S_y(f)=A^2T\left((1+\alpha)^2\Pi\left(\frac{f-f_o}{B/2}\right)+(1-\alpha)^2\Pi\left(\frac{f-f_1}{B/2}\right)\right)+\frac{N_o}{2}$$

d) Diseñe el receptor óptimo para cada usuario y halle la probabilidad de error de cada usuario obtenida con el receptor anterior en función de un valor genérico de α. Comparando el resultado con el obtenido en b), discuta las ventajas de MC-CDMA con respecto a FDMA.

Suponga por último que no se consigue sincronismo de fase perfecto y que $\theta = \pi/2 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| < \pi/4$).

<u>Solución Abreviada:</u>
Si la fase es $\theta = \pi/2$, los dos usuarios son ortogonales. Esto se debe a que:
1) los pulsos $p(t)\cos(2\pi f_o t)$ y $p(t)\cos(2\pi f_o t + \pi/2)$ son ortogonales (base típica de las componentes I y Q a fo).
2) los pulsos $p(t)\cos(2\pi f_1 t)$ y $p(t)\cos(2\pi f_1 t + \pi/2)$ son ortogonales (base típica de las componentes I y Q a f1).
3) los pulsos $p(t)\cos(2\pi f_o t)$ y $p(t)\cos(2\pi f_1 t + \theta)$ son ortogonales para cualquier valor de θ puesto que no presentan solape en frecuencia.

En consecuencia, el receptor óptimo para el usuario 1 puede diseñarse prescindiendo de la presencia del usuario 2, y viceversa.

Como no es posible saber el valor de α, lo más conservador para el diseño de los receptores es suponer bandas equilibradas $\alpha = 0$. Entonces, el receptor óptimo consiste en filtros adaptados a los pulsos $p_1^{'}(t)$ y a $p_2^{'}(t)$, ambos muestreados al tiempo de símbolo. La MAI es nula por las razones explicadas antes. A la salida del filtro adaptado al usuario 1 aparece el producto escalar del pulso recibido $p_1^{'}(t) * h(t)$ y el filtro adaptado $p_1^{'}(t)$. Realizando este producto escalar en el dominio de la frecuencia resulta:

$$\int \left(p_1^{'}(t) * h(t) \right) p_1^{'}(t) dt = \int H(f) \left| P_1^{'}(f) \right|^2 df = (1+\alpha) \int \left| P_1(f) \right|^2 df + (1-\alpha) \int \left| P_2(f) \right|^2 df$$

$$= 2 \int p_1^2(t) dt = \int \left| p_1^{'}(t) \right|^2 dt$$

que no depende de α.

Por lo tanto, cada usuario tiene asociada una constelación binaria de dimensión 1 y centroide nulo, con lo que la probabilidad de error es:

$$BER = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_o}} \right)$$

e igual para cada usuario.
La ventaja de MC-CDMA con respecto a FDMA es que el canal afecta por igual a los dos usuarios (no hay usuarios más desfavorecidos que otros), y sus prestaciones son mejores que las del usuario más desfavorecido en FDMA.

e) Evalúe el efecto de la interferencia de acceso múltiple (MAI) en el receptor diseñado en el apartado anterior y discuta en especial los casos particulares de $\varepsilon = 0 \& \alpha \neq 0$ y $\varepsilon \neq 0 \& \alpha = 0$. En el caso general, evalúe una cota de la probabilidad de error de cada usuario.

Solución Abreviada:

Cuando la fase no es $\pi/2$ ocurre que:
1) los pulsos $p(t)\cos(2\pi f_o t)$ y $p(t)\cos(2\pi f_o t+\pi/2+\varepsilon)$ NO son ortogonales.
2) los pulsos $p(t)\cos(2\pi f_1 t)$ y $p(t)\cos(2\pi f_1 t+\pi/2+\varepsilon)$ NO son ortogonales.
Ambos pares de pulsos presentan el siguiente producto escalar:

$$\int p^2(t)\cos(2\pi f_o t)\, p(t)\cos(2\pi f_o t+\pi/2+\varepsilon)\,dt = \frac{1}{2}\sin(\varepsilon)\int p^2(t)dt = \sin(\varepsilon)\int\left|p_1^{'}(t)\right|^2 dt$$

Con ello, los pulsos recibidos $p_1^{'}(t)*h(t)=(1+\alpha)\,p_1^{'}(t)$ y $p_2^{'}(t)*h(t)=(1-\alpha)\,p_2^{'}(t)$ dejan de ser ortogonales, y su producto escalar vale:

$$\int p_1^{'}(t)p_2^{'}(t)dt=\int P_1^{'}(f)P_2^{'*}(f)dt=\alpha\sin(\varepsilon)\int\left|p_1^{'}(t)\right|^2 dt$$

Visto esto, el efecto de la MAI puede expresarse como un canal multiusuario caracterizado por la siguiente matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{U}}}=\begin{pmatrix} 1 & \alpha\sin(\varepsilon) \\ \alpha\sin(\varepsilon) & 1 \end{pmatrix}$$

Tanto para $\alpha=0$ como para $\varepsilon=0$ puede verse como la MAI es nula. En el caso general, basta analizar la MAI que afecta al usuario 1 (al usuario 2 la MAI le afecta de un modo similar), y puede obtenerse una cota de la BER simplemente evaluando el impacto de la MAI como una reducción de la distancia al umbral en un factor $1-\left|\alpha\sin(\varepsilon)\right|$, con lo cual:

$$BER \le Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}\left(1-\left|\alpha\sin(\varepsilon)\right|\right)^2}\right)$$

f) Diseñe un receptor multiusuario decorrelador que cancele la MAI y calcule la probabilidad de error obtenida. Demuestre que en el peor de los casos (de canal y sincronismo de fase) se obtiene una pérdida equivalente de 0.58 dB de señal en cada usuario.

Solución Abreviada:

El decorrelador simplemente multiplica el vector a la salida de los filtros adaptados por la inversa de la matriz $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ asociada al canal multiusuario. Analizando el ruido presente en cualquiera de las ramas (siguiendo los mismos pasos que la demostración hecha en clase, resulta):

$$BER \le Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}\left(1-\alpha^2\sin^2(\varepsilon)\right)}\right)$$

El caso peor se corresponde con $\alpha=1/2$ y $\varepsilon=\pi/4$. En este caso, la pérdida equivalente de potencia de señal es:

$$-10\log\left(1-\alpha^2\sin^2(\varepsilon)\right)=-10\log\left(1-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)=-10\log(7/8)=0.58dB$$