2.3: Correlación y Espectro

- Correlación de señales de energía finita
    - ➢definición y propiedades
    - ➢ejemplo de aplicación
- Densidad espectral de energía
- Correlación y densidad espectral de potencia

Distancia entre señales

Interpretación intuitiva de la transf. Fourier

correlación $\xleftrightarrow{FT}$ densidad espectral de energía

(*conceptos comunes para señales deterministas y aleatorias*)

Correlación de señales de energía finita (EF)

- Medida de distancia entre x[n] e y[n–m]:

$$D[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] - y[n-m] \right|^2 =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2}_{E_x} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| y[n-m] \right|^2}_{E_y} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, y^*[n-m]}_{x[m]*y^*[-m]} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]\, y[n-m]}_{x^*[m]*y[-m]}$$

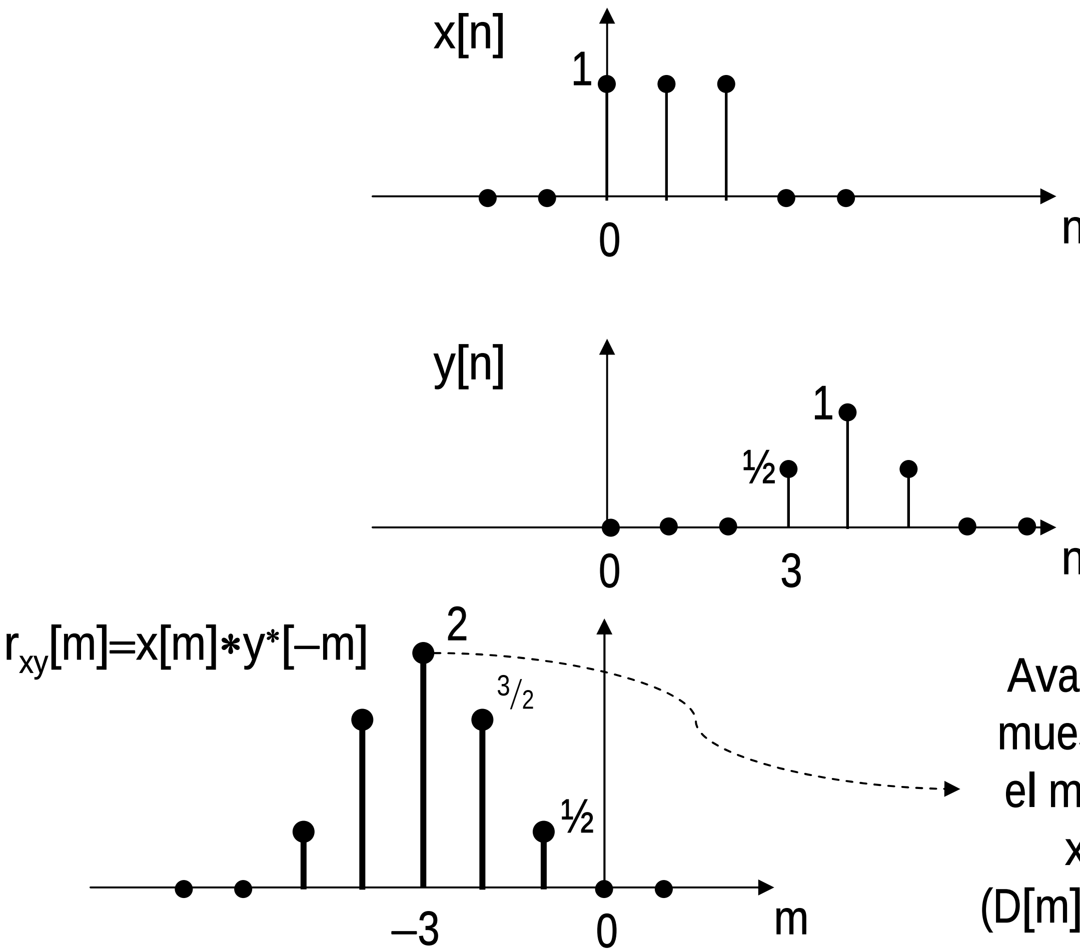
- Correlación cruzada de x[n] e y[n]

$$\boxed{r_{xy}[m] \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n-m] = x[m] * y^*[-m]}$$

entonces, $D[m] = E_x + E_y - (r_{xy}[m] + r_{xy}^*[m])$

por tanto, fijada la energía, Distancia mínima $\Leftrightarrow$ Máxima correlación

Ejemplo de correlación de señales de EF



Avanzando y[n] tres muestras obtenemos el máximo parecido:

$x[n] \leftrightarrow y[n+3]$

(D[m] mínima en m=–3)

Propiedades de la correlación

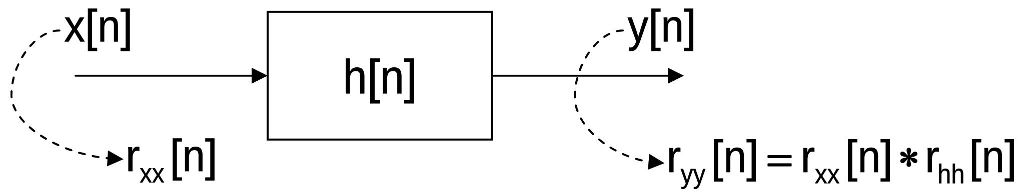
- <u>Simetría</u>: $$r_{xy}[m] = r_{yx}^{*}[-m]$$

- <u>Suma</u>: $$r_{(x+y)(x+y)}[m] = \left(x[m] + y[m]\right) * \left(x[-m] + y[-m]\right)^{*} =$$
$$= r_{xx}[m] + r_{yy}[m] + r_{xy}[m] + r_{yx}[m]$$

Si $r_{xy}[m] = r_{yx}[m] = 0$, $x[n]$ e $y[n]$ incorreladas

entonces, $r_{(x+y)(x+y)}[m] = r_{xx}[m] + r_{yy}[m]$

- <u>Filtrado</u>: $$r_{xy}[m] = x[m] * \left(x[-m] * h[-m]\right)^{*} = r_{xx}[m] * h^{*}[-m]$$
$$r_{yy}[m] = \left(x[m] * h[m]\right) * \left(x[-m] * h[-m]\right)^{*} = r_{xx}[m] * r_{hh}[m]$$



Autocorrelación

- Autocorrelación $r_{xx}[m] = x[m] * x^*[-m]$ $\big(\text{también } r_x[m] \text{ ó } r[m]\big)$

- Propiedades de la autocorrelación

  - <u>energía</u>: $E_x = r_x[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n-0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$

  - <u>máximo</u>: $|r_x[m]| \leq r_x[0] = E_x$ (cuando x[n] es real, $r_x[m]$ es máxima para m=0 $\rightarrow$ distancia mínima)

  - <u>simetría</u>: $r_x[m] = r_x^*[-m]$ ($r_x[m]$ par, si x[n] real)

  - <u>modulación</u>: si $y[n] = x[n]e^{j\omega_o n} \Rightarrow r_y[m] = r_x[m]e^{j\omega_o m}$

Ejemplo: predicción lineal

- Supongamos conocidos $r_x[m]$ y $\{\ldots, x[n-2], x[n-1]\}$ $\left.\right\} \xrightarrow[\text{aproximar}]{\text{se desea}} x[n]$

- <u>Modelo</u>: estimador lineal $\hat{x}[n] = a \cdot x[n-1]$ $\quad \ldots a?$

error de la estimación: $e[n] = x[n] - ax[n-1]$

energía del error: $E_e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] - ax[n-1] \right|^2 = E_x + a^2 E_x - 2ar_x[1]$

a? … mínimo error: $\dfrac{\partial E_e}{\partial a} = 2aE_x - 2r_x[1] = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{r_x[1]}{E_x} = \dfrac{r_x[1]}{r_x[0]}$

Predicción: $\boxed{\hat{x}[n] = \dfrac{r_x[1]}{r_x[0]} x[n-1]}$ $\quad \Rightarrow \quad E_e = (1 - a^2) E_x$ (mínima)

además, $E_e \downarrow$ si $r_x[1] \to r_x[0]$

$(a \to 1)$

Densidad espectral de energía

$$x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$$

$$r_x[m] = x[m] * x^*[-m] \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|^2$$

- Definición:

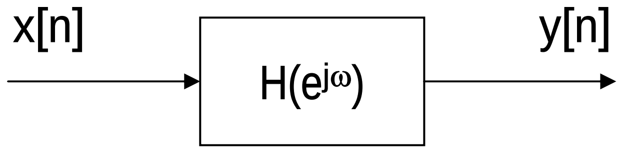
$$\boxed{S_x(e^{j\omega}) \equiv FT\{r_x[m]\} = \left|X(e^{j\omega})\right|^2}$$

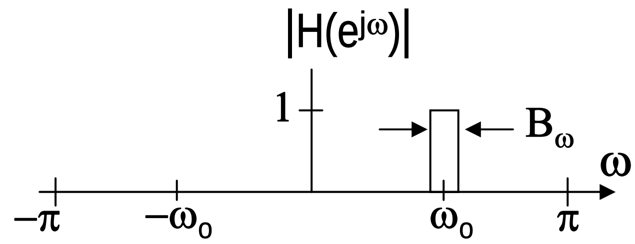
- $S_x(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \forall\omega$
- $S_x(e^{j\omega})$ es una "densidad espectral de energía":

$$E_x = r_x[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})d\omega$$

Esta relación constituye la igualdad de Parseval.

Interpretación física de la transformada de Fourier





- El sistema responde sólo a la componente frecuencial ω_o

$$E_y = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_y(e^{j\omega})d\omega = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \underset{B\omega\to 0}{\underbrace{=}} \tfrac{1}{2\pi}\left|X(e^{j\omega_o})\right|^2 B_\omega$$

y, por tanto,

$$S_x(e^{j\omega_o}) = \left|X(e^{j\omega_o})\right|^2 = \frac{E_y}{B_f}$$

lo que permite interpretar el módulo de la transformada de Fourier, $\left|X(e^{j\omega_o})\right|$, como la magnitud de la componente frecuencial de una señal a una cierta pulsación ω_o (mayor magnitud indica mayor energía a dicha frecuencia)

Cálculo de la energía mediante la DFT

- Si x[n] es de longitud N, y además

$$x[n] = 0 \quad \text{para} \quad n < 0 \text{ y } n \geq N$$

entonces,

$$r_x[m] = x[m] * x^*[-m] = 0 \quad \text{para} \quad |m| > N-1$$

- En el caso anterior, el uso de la DFT de x[n] con N muestras proporciona:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} r_x[m + rN] \xleftrightarrow{DFT_N} |X[k]|^2$$

y, particularizando para m=0:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} r_x[rN] \overset{\substack{\text{no hay} \\ \text{solapamiento} \\ \downarrow}}{=} r_x[0] = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \overset{\substack{DFT_N^{-1}\big|_{m=0} \\ \downarrow}}{=} \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

que es la versión de la igualdad de Parseval con la DFT

Correlación y densidad espectral de potencia

- Una secuencia de potencia media finita (PMF), x[n], tiene energía infinita, por lo que el cálculo de la correlación requiere un promediado:

ventana rectangular: $$v_N[n] = \begin{cases} 1 & -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{otro } n \end{cases}$$

secuencia enventanada: $$x_N[n] = x[n] \cdot v_N[n] \quad (\text{de EF})$$

correlación de $x_v[n]$: $$r_{x_N}[m] = x_N[m] * x_N^*[-m] \xleftrightarrow{FT} S_{x_N}(e^{j\omega})$$

… y, mediante un paso al límite, podemos definir la correlación de x[n]:

$$r_x[m] = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{2N+1} r_{x_N}[m] \qquad \left(r_x[0] = \overline{P_x}\right)$$

y su densidad espectral <u>de potencia</u>:

$$S_x(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{2N+1} S_{x_N}(e^{j\omega}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sólo si existe} \\ \text{el límite}}}{=} \mathcal{FT}\{\lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{2N+1} r_{x_N}[m]\} = \mathcal{FT}\{r_x[m]\}$$

Ejemplos (I)

Escalón unidad

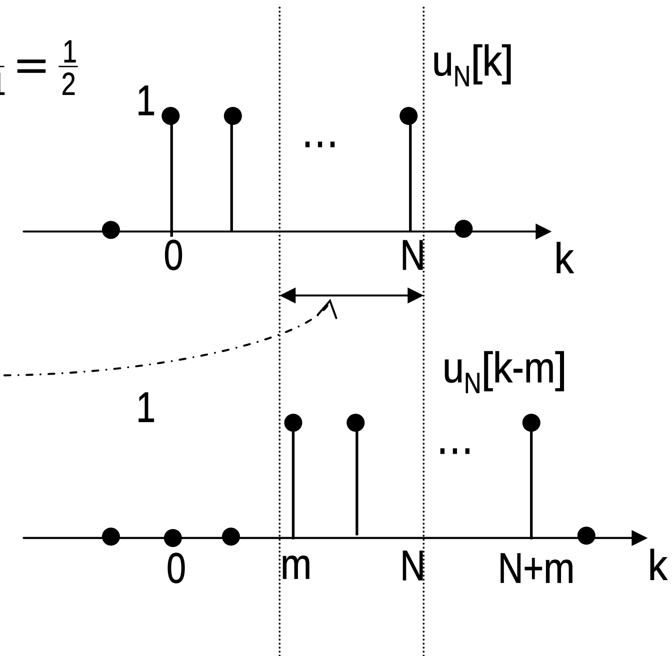
- Potencia media: $\overline{P_u} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=-N}^{N} \left|u[n]\right|^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$

- Correlación: $r_{u_N}[m] = u_N[m] * u_N^*[-m] =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_N[k]\,u_N^*[k-m] =$$

$$= N+1-|m| \quad \text{si } |m| \le N$$

$$r_u[m] = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{2N+1}\left(N+1-|m|\right) = \tfrac{1}{2}$$



- Densidad espectral de potencia:

$$S_u(e^{j\omega}) = \mathcal{FT}\{\tfrac{1}{2}\} = \pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi r)$$

Ejemplos (II)

- Componentes frecuenciales $\begin{cases} x[n] = ae^{j\omega_1 n} \\ y[n] = be^{j\omega_2 n} \end{cases}$

  - Correlación cruzada:

$$r_{x_N y_N}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N[n] y_N^{*}[n-m] =$$

$$= \sum a e^{j\omega_1 n} b^{*} e^{-j\omega_2 (n-m)} = \begin{cases} ab^{*}e^{j\omega_2 m} \displaystyle\sum_{n=-N+m}^{N} e^{j(\omega_1-\omega_2)n} & m \geq 0 \\ ab^{*}e^{j\omega_2 m} \displaystyle\sum_{n=-N}^{N+m} e^{j(\omega_1-\omega_2)n} & m < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_{xy}[m] = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{2N+1} r_{x_N y_N}[m] = \begin{cases} ab^{*}e^{j\omega m} & \omega_1 = \omega_2 = \omega \\ 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases}$$ (incorreladas)

- Coseno $x[n] = A\cos(\omega_o n + \theta) = \tfrac{1}{2}Ae^{j\theta}e^{j\omega_o n} + \tfrac{1}{2}Ae^{-j\theta}e^{-j\omega_o n}$

$$r_x[m] = r_{\omega_o}[m] + r_{-\omega_o}[m] = \tfrac{1}{4}A^2 e^{j\omega_o m} + \tfrac{1}{4}A^2 e^{-j\omega_o m} = \tfrac{1}{2}A^2 \cos\omega_o m$$

Resumen

- Distancia entre señales $$D[m] = E_x + E_y - (r_{xy}[m] + r_{xy}^*[m])$$
- Correlación $$r_{xy}[m] = x[m] * y^*[-m]$$
- Autocorrelación $$r_x[m] = x[m] * x^*[-m]$$
  - ✓ par, si x real
  - ✓ $r_x[0]=E_x$
- Densidad espectral $$r_x[n] \xleftrightarrow{FT} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 \equiv S_x(e^{j\omega})$$
- Secuencias PMF $$r_x[m] = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{2N+1} r_N[m]$$

$$\Big\updownarrow FT \quad \text{(si } \exists \text{ el límite)}$$

$$S_x(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{2N+1} S_{x_N}(e^{j\omega})$$