Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación de Barcelona
CONTROL DE COMUNICACIONES I
Grupo 30 13 de octubre de 2009
Profesor: Jaume Riba **Duración: 2h**

Se prohíbe el uso de teléfonos móviles durante la realización del examen. No se pueden utilizar ni en su funcionalidad de reloj. Durante la realización del examen debe tener visible un documento identificativo con fotografía. Todos los apartados tienen igual puntuación y deben responderse justificadamente.

Expresiones trigonométricas:

$$\cos(A)\cos(B)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A-B\right)+\cos\left(A+B\right)\right]$$

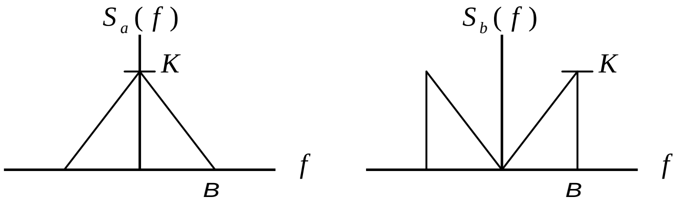
$$\sin(A)\cos(B)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(A-B\right)+\sin\left(A+B\right)\right]$$

$$\sin(A)\sin(B)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A-B\right)-\cos\left(A+B\right)\right]$$

1) Considere el siguiente proceso:

$$x(t)=a(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right)+b(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right) \qquad \text{con } f_0>B$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son procesos estacionarios independientes de ancho de banda B y de media nula cuya densidad espectral de potencia se muestra en la figura:



Estos procesos modelan la información de dos usuarios de un mismo sistema de comunicaciones.

a) Halle la autocorrelación estadística de $x(t)$ y su cicloperiodo de segundo orden. Halle la variancia de $x(t)$ y demuestre que ésta no depende del tiempo.

b) Halle la densidad espectral de potencia de $x(t)$ y dibújela en detalle.
Verifique que se cumple el teorema de Parseval calculando el área de la función hallada.

Considere ahora el siguiente proceso obtenido a partir de $x(t)$ del siguiente modo:

$$y(t)=2x(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right)=2a(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right)\cos\left(2\pi f_0 t\right)+2b(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right)\cos\left(2\pi f_0 t\right)$$

el cual modela la operación que realiza un receptor sincronizado.

c) Halle la densidad espectral de potencia de $y(t)$ y dibújela en detalle.
Halle la potencia media de $y(t)$.

Finalmente $y(t)$ atraviesa un filtro baso-bajo ideal de respuesta $H(f)=\begin{cases} e^{-j2\pi\varepsilon f} & |f|<B_R \\ 0 & |f|\geq B_R \end{cases}$ de ancho de banda B_R, y su salida es $z(t)$.

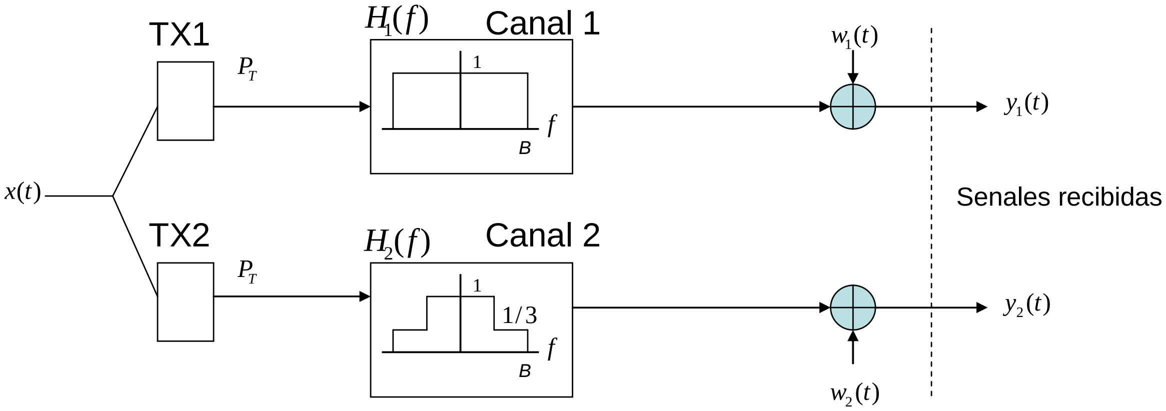
d) Determine los valores máximo y mínimo de B_R tales que $z(t)$ sea una versión escalada y retrasada del usuario $a(t)$. Halle y dibuje la densidad espectral de potencia de $z(t)$ en este caso.

e) Explique porqué no es posible recuperar $a(t)$ si $0<f_0<B$.

f) (Opcional. Evaluación adicional.) Estudie el caso de un receptor desincronizado, el cual se modela como $y(t)=2x(t)\cos\left(2\pi f_0 t+\theta\right)$, donde θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 2π. Halle y dibuje la densidad espectral de potencia de $z(t)$ y explique lo que sucede.

2) En este problema se estudia la idea de diversidad en comunicaciones mediante el uso de más de un canal de transmisión, comparando las estrategias de selección y combinación. Deberá calcular relaciones señal a ruido (SNR), las cuales deberán siempre expresarse en función de la potencia transmitida P_T en cada canal.

En particular, se transmite una señal en banda base de ancho de banda *B*, a través de dos canales, uno ideal y otro con distorsión según la figura:



TX1 y TX2 son simplemente amplificadores de potencia, que transmiten la señal a la potencia P_T hacia cada canal. El canal 1 presenta una respuesta plana en la banda, mientras que el canal 2 presenta una respuesta de 1/3 en la media banda alta (de *B*/2 a *B*). Los ruidos de cada canal son independientes, de media nula y blancos (AWGN), de igual densidad espectral de potencia (No/2).

a) Diseñe primero dos receptores independientes $H_{R1}(f)$ y $H_{R2}(f)$, de modo que obtenga las señales $z_1(t) = y_1(t) * h_{R1}(t)$ y $z_2(t) = y_2(t) * h_{R2}(t)$, cada una sin distorsión. Cada filtro, por tanto, debe ecualizar su propio canal así como eliminar el ruido fuera de banda.

b) Determine la SNR de $z_1(t)$ y de $z_2(t)$ ¿Cuál de ellas es la mejor?

A continuación, en lugar de quedarse con la señal recibida mejor (estrategia de *selección*), vamos a realizar una *combinación* lineal de las señales ecualizadas obtenidas antes, de la siguiente manera:

$$z(t) = \alpha z_1(t) + (1-\alpha) z_2(t)$$

donde α es un factor entre 0 y 1 que determina el peso que se da a cada receptor.

c) Halle la SNR de $z(t)$ así como el valor de α que la hace máxima. Compruebe que esta SNR obtenida es mejor que si se queda solo con el mejor canal. De hecho, ¿podría decir si lo que obtenemos es la suma de las SNRs de cada receptor calculadas en el apartado anterior?

Por último nos planteamos si es necesario ecualizar cada canal por separado en la estrategia de combinación.

Para verlo, combinamos primero las señales recibidas y después ecualizamos usando un solo ecualizador del canal suma, de este modo:

$$z(t) = \left(y_1(t) + y_2(t)\right) * h_R(t)$$

d) Determine la respuesta en frecuencia del filtro $H_R(f)$ de modo que $z(t)$ no presente distorsión ni ruido fuera de banda.

e) Halle la nueva SNR de $z(t)$ y discuta si este modo de proceder es adecuado a la vista del resultado.

f) (Opcional. Evaluación adicional). Proponga una estrategia aún más inteligente para obtener la máxima SNR, a la vista de su comprensión global del problema planteado en este examen.

SOLUCION ABREVIADA CONTROL 1

1)

a)

$$R_x(t+\tau,t)=\frac{1}{2}R_a(\tau)\left(\cos(2\pi f_0\tau)+\cos(2\pi(2f_0t+\tau))\right)+$$

$$\frac{1}{2}R_b(\tau)\left(\cos(2\pi f_0\tau)-\cos(2\pi(2f_0t+\tau))\right)$$

Cicloperiodo: $T_2=\dfrac{1}{2f_0}$ (proceso cicloestacionario de segundo orden). Se obtiene observando la dependencia de la autocorretlación con el tiempo.

$$\sigma_x^2(t)=R_x(t,t)-\mu_x^2(t)=R_x(t,t)=\frac{1}{2}R_a(0)\left(1+\cos(4\pi f_0t)\right)+\frac{1}{2}R_b(0)\left(1-\cos(4\pi f_0t)\right)$$

Dado que los dos procesos tienen igual potencia, $R_a(0)=R_b(0)=KB$, se anula la dependencia en t de la variancia.

$$\sigma_x^2(t)=KB$$

b)

$$\overline{R}_x(\tau)=\langle R_x(t+\tau,t)\rangle=\frac{1}{2}R_a(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)+\frac{1}{2}R_b(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

$$S_x(f)=\frac{1}{4}\left(S_a(f-f_0)+S_a(f+f_0)\right)+\frac{1}{4}\left(S_b(f-f_0)+S_b(f+f_0)\right)$$

Dibujo: dos rectangulos sobre fo y –fo con area total igual a KB (Parseval).

c)

$$y(t)=2a(t)\cos^2\left(2\pi f_0t\right)+2b(t)\sin\left(2\pi f_0t\right)\cos\left(2\pi f_0t\right)$$

$$y(t)=a(t)+a(t)\cos\left(4\pi f_0t\right)+b(t)\sin\left(4\pi f_0t\right)$$

$$\overline{R}_y(\tau)=R_a(\tau)+\frac{1}{2}R_a(\tau)\cos\left(4\pi f_0\tau\right)+\frac{1}{2}R_b(\tau)\cos\left(4\pi f_0\tau\right)$$

donde ya hemos promediado y anulado los términos dependientes del tiempo.

$$S_y(f)=S_a(f)+\frac{1}{4}\left(S_a(f-2f_0)+S_a(f+2f_0)\right)+\frac{1}{4}\left(S_b(f-2f_0)+S_b(f+2f_0)\right)$$

Dibujo: el espectro de Sa queda en banda base, mientras que los demas términos quedan sobre 2fo y -2fo.

Potencia media: $P_y=\overline{R}_y(0)=2KB$

d)

$$B_{R\min}=B$$

$$B_{R\max}=2f_0-B$$

e) Se trata de mostrar el solape de la parte de Sa en banda base con las replicas situadas sobre 2fo que se produce en este caso.

f) En este caso el espectro de y(t) contiene una parte en banda base que es la suma de espectros de cada usuario, es decir, estan mezclados. De ahí la necesidad de sincronismo. Se deja como trabajo personal de entrega voluntaria.

2)

a)

$H_{R1}(f)$ plano de ganancia unitaria en la banda y cero en el resto.

$H_{R2}(f) = \frac{1}{H_2(f)}$ dentro de la banda y cero en el resto.

b)

$$SNR_1 = \frac{P_T}{N_0 B}$$

$$SNR_2 = \frac{P_T}{5N_0 B} = \frac{1}{5} SNR_1$$

c)

$$SNR = SNR_1 \frac{1}{\alpha^2 + 5(1-\alpha)^2}$$

Maximizando respecto a alfa obtenemos:

$$\alpha = \frac{5}{6}$$

$SNR = SNR_1 \frac{6}{5} = SNR_1 + SNR_2$, que es una relación cierta en general, y propia de la estrategia de combinación óptima.

d)

$H_R(f) = \frac{1}{H_1(f) + H_2(f)}$ dentro de la banda, y cero en el resto.

e)

$SNR = SNR_1 \frac{16}{13}$, que es aun mejor que la obtenida en c.

f)

Se trata de combinar con peso distinto las señales recibidas, y luego equalizar el conjunto de la combinación, es decir:

$$z(t) = \left(\alpha y_1(t) + (1-\alpha) y_2(t)\right) * h_R(t)$$

donde ahora lo que ecualizamos es el canal total que es una suma ponderada de canales, es decir:

$$H_R(f) = \frac{1}{\alpha H_1(f) + (1-\alpha) H_2(f)}$$

La dificultad es puramente numérica en el calculo de alfa, puesto que hay que minimizar un polinomio de cuarto orden, pero existe un valor de alfa que da lugar a la mejor de las SNRs lo cual se deja como trabajo personal adicional de entrega voluntaria.