Enginyeria Informàtica **FIB-UPC** **Curs 2007-2008/Q1**

Solució de l'examen parcial de Matemàtica Discreta. Grup 10. 04/12/2007

---

1. (0.5 punts cada qüestió)

(a) *Calculeu quants grafs diferents hi ha amb conjunt de vèrtexs $V = [5]$ que tinguin mida 4 i a més els vèrtexs 2 i 5 siguin adjacents.*

Hi ha $\binom{5}{2} = 10$ arestes possibles amb conjunt de vèrtexs $V = [5]$. Si el graf té mida 4 i una de les arestes ha de ser 25, cal triar 3 arestes de les $10 - 1$ restants. Això es pot fer de $\binom{9}{3} = 84$ maneres possibles. Hi ha, doncs, 84 grafs diferents amb aquestes condicions.

(b) *Pot existir un camí de longitud $k > D$ a un graf de diàmetre D?*

Sí, per exemple el diàmetre d'un cicle d'ordre 4 és 2, i entre dos vèrtexs adjacents hi ha un camí de longitud 3.

(c) *Considerem un vèrtex u d'un graf G. Si $D(G)$ i $D(G-u)$ denoten el diàmetre de G i de $G-u$ respectivament, justifiqueu quines de les afirmacions següents són possibles: (i) $D(G-u) < D(G)$; (ii) $D(G-u) = D(G)$; (iii) $D(G-u) > D(G)$.*

Les tres són possibles. (i) Si u és una fulla del graf T_3, $D(T_3) = 2$ i $D(T_3 - u) = 1$. (ii) Si u és una fulla de $K_{1,3}$, $D(K_{1,3}) = 2$ i $D(K_{1,3} - u) = 2$. (iii) Si u és un vèrtex qualsevol de C_6, $D(C_6) = 3$ i $D(C_6 - u) = 4$.

(d) *Doneu, si és possible, un graf connex d'ordre 8 i mida 8 amb exactament un vèrtex de tall i exactament una aresta pont.*

Un extrem d'una aresta pont és vèrtex de tall si, i només si, té grau almenys dos. Si $a = uv$ és l'única aresta pont del graf, un dels extrems ha de tenir grau 1 i l'altre grau almenys 2. La resta d'arestes han de ser d'algun cicle, perquè no hi ha més arestes pont, i al suprimir-ne una s'obté un arbre, ja que graf resultant és connex d'ordre 8 i mida 7. Per tant, el graf buscat té un únic cicle. Si considerem el graf $G = ([8], \{12, 23, 34, 45, 56, 67, 17, 18\})$, té ordre 8, mida 8, exactament un vèrtex de tall, el vèrtex 1, i exactament una aresta pont, l'aresta 18.

(e) *Un graf d'ordre 314 és regular de grau 160. És hamiltonià? És eulerià?*

Per ser $160 \geq 314/2 = 157$, el graf és hamiltonià. Per altra banda, tots els vèrtexs tenen grau parell, i a més és connex per ser hamiltonià. Per tant, és eulerià.

(f) *Un arbre té tots els vèrtexs de grau senar. És possible obtenir exactament 2 components connexos suprimint un vèrtex?*

No. Sabem que al suprimir un vèrtex d'un arbre s'obtenen tants components connexos com el grau del vèrtex. En aquest cas, al suprimir un vèrtex sempre s'obtindrà un nombre senar de components connexos.

(g) *Doneu la seqüència de graus d'un arbre tal que la seva seqüència de Prüfer és (3,2,3,2,2,1,5,5).*

L'arbre té ordre 10, ja que la seqüència de Prüfer té longitud 8. Un vèrtex u apareix a la seqüència de Prüfer $g(u) - 1$ vegades. Per tant, $g(1) = 2$, $g(2) = 4$, $g(3) = 3$, $g(5) = 3$, i els 6 vèrtexs restants tenen grau 1. Per tant, la seqüència de graus de l'arbre és $(4, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

(h) *Calculeu el nombre d'arbres generadors diferents del graf* $G = ([6], A)$, *on* $A = \{12, 23, 34, 45, 56, 16, 24\}$.

El graf té $6 + 8 = 14$ arbres generadors diferents: comptem els arbres generadors que no contenen l'aresta 24 (cas i) i els que la contenen (cas ii). Cas i: n'hi ha 6, ja que equival a comptar arbres generadors d'un cicle d'ordre 6. Cas ii: hi ha $2 \times 4 = 8$ arbres generadors que contenen l'aresta 24, ja que el graf conté dos cicles, un d'ordre 3 i l'altre d'ordre 5, que comparteixen l'aresta 24. Cal suprimir dues arestes diferents de 24, una de del cicle de longitud 3 i l'altra del cicle de longitud 5. En total es pot fer de 2×4 maneres.

2. (3 punts) *Fixats* $r, s \geq 2$ *enters, considerem el graf* $G_{r,s} = (V, A)$, *on* $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 = \{1, 2, \ldots, r\}$ *i* $V_2 = \{r+1, r+2, \ldots, r+s\}$, *i dos vèrtexs són adjacents si tots dos són de* V_1, *o bé un dels dos és de* V_1 *i l'altre de* V_2.

(a) *Calculeu l'excentricitat de cada vèrtex, i el radi i el diàmetre del graf. És connex?*

Un vèrtex $u \in V_1$ és adjacent a tots els vèrtexs de V_1 i de V_2, és a dir, $d(u, x) = 1$ per a tot $x \in V$, $x \neq u$. Per tant, $ecc(u) = 1$, si $u \in V_1$. Si $v \in V_2$, llavors v és adjacent a tots els vèrtexs de V_1. Per tant, $d(u, x) = 1$, si $x \in V_1$, i $d(u, x) = 2$, si $x \in V_2$, ja que en aquest cas, u, x no són adjacents, però per a qualsevol vèrtex $u \in V_1$, vux és un camí de longitud 2. Per tant, $ecc(v) = 2$, si $v \in V_2$. El radi i el diàmetre són respectivament el mínim i el màxim de les excentricitats de tots els vèrtexs del graf. Per tant, el radi és 1 i el diàmetre és 2. El graf és connex per ser el diàmetre finit.

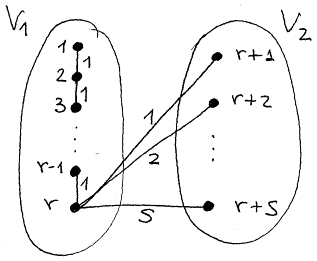
(b) *Determineu el grau de tots els vèrtexs, i calculeu la connectivitat per vèrtexs i per arestes.*

Si $u \in V_1$, llavors $g(u) = r - 1 + s$, ja que u és adjacent a tots els vèrtexs $\neq u$ del graf. Si $v \in V_2$, llavors $g(v) = r$, ja que és adjacent a tots els vèrtexs de V_1. El grau mínim del graf és $\delta(G_{r,s} = \min\{r, r - 1 + s\} = r$, ja que $r < r - 1 + s$.

Sabem que $\kappa(G_{r,s}) \leq \lambda(G_{r,s}) \leq r$. Però si suprimim $h < r$ vèrtexs del graf $G_{r,s}$, sempre quedarà almenys un vèrtex w del conjunt V_1 adjacent a tots els restants, és a dir, no el desconnectarem mai. Per altra banda, per ser $G_{r,s}$ un graf d'ordre $r + s$, al suprimir $h < r$ vèrtexs quedaran almenys $s + 1 \geq 3$ vèrtexs, és a dir, no quedarà reduït al graf trivial. Per tant $\kappa(G_{r,s}) = r$, i conseqüentment $\lambda(G_{r,s}) = r$.

(c) *Doneu un arbre generador minimal del graf* $G_{r,s}$ *si el pes de l'aresta* uv *és* $|u - v|$. *Quin és el pes d'aquest arbre?*

El pes de les arestes és un enter ≥ 1. Utilitzem l'algorisme de Kruskal. Comencem per afegir a l'arbre arestes de pes 1 que no formin cicles: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\ldots$, $\{r-1, r\}$, $\{r, r+1\}$. No hi ha més arestes de pes 1. Les arestes triades fins ara connecten tots els vèrtexs de $V_1 \cup \{r + 1\}$. Ara només podem afegir arestes que tenen un extrem al conjunt $\{r+2, \ldots, r+s\} \subseteq V_2$ (si no, es formarien cicles). Afegim l'aresta $\{r, r+2\}$, que té pes 2 (el més petit possible). Ara només podem afegir arestes amb un extrem a $\{r+3, \dots, r+s\}$ (si no, es formarien cicles). La de pes més petit és $\{r, r+3\}$, que té pes 3. I així successivament. L'arbre generador minimal T obtingut té conjunt d'arestes $A(T) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \dots, \{r-1, r\}, \{r, r+1\}, \{r, r+2\}, \{r, r+s-1\}, \{r, r+s\}\}$. El pes de l'arbre és $r - 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + s) = r - 1 + \frac{s(s+1)}{2}$. (Vegeu la figura següent). Observeu que l'arbre generador minimal és únic en aquest cas!



3. (3 punts)

(a) *Proveu que si un arbre T d'ordre $n \geq 3$ només té vèrtexs de grau 1 i k, llavors $n_1 = 2 + (k-2)n_k$, on n_1 és el nombre de vèrtexs de grau 1 i i n_k el nombre de vèrtexs de grau k.*

Pel lema de les encaixades, $\sum_{u \in V} g(u) = 2m$. En aquest cas només tenim vèrtexs de grau 1 i k, és a dir, $\sum_{u \in V} g(u) = n_1 + kn_k$, i per ser T un arbre, $m = n-1 = n_1 + n_k - 1$. És a dir $n_1 + kn_k = 2(n_1 + n_k - 1)$, d'on deduïm $n_1 = 2 + (k-2)n_k$.

(b) *Demostreu que si es suprimeixen tots els vèrtexs de grau 1 d'un arbre T d'ordre $n \geq 3$ s'obté un altre arbre.*

Considerem els vèrtexs de grau 1 en T, $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$.

Si T és acíclic, llavors $T - \{u_1, \dots, u_k\}$ és acíclic (ja que un cicle en aquest graf seria un cicle a T).

A més, si x, y són vèrtexs de $T - \{u_1, \dots, u_k\}$, són també vèrtexs de T. Per tant, existeix un únic $x - y$ camí en T que no passa per cap vèrtex de grau 1 (per elecció, x, y tenen grau almenys 2, i qualsevol vèrtex intern d'un camí també té grau almenys 2). Per tant, hi ha un $x - y$ camí a $T - \{u_1, \dots, u_k\}$. És a dir, $T - \{u_1, \dots, u_k\}$ és connex.

Per tant, $T - \{u_1, \dots, u_k\}$ és arbre.

(c) *Trobeu, llevat d'isomorfismes, tots els arbres d'ordre 18 que només tenen vèrtexs de grau 5 i 1. (*Indicació: *podeu utilitzar els apartats anteriors.)*

En aquest cas $n_1 = 2 + 3n_5$ i $n_1 + n_5 = 18$, d'on deduïm $n_5 = 4$ i $n_1 = 14$. Si suprimim de T tots els vèrtexs de grau 1 obtenim un arbre format pels 4 vèrtexs de grau 5. Els únics arbres d'orbre 4, llevat d'isomorfismes, són T_4 (si el grau màxim és 2) i $K_{1,3}$ (si el grau màxim és 3). Pengem als 4 vèrtexs de cadascun d'aquests dos arbres 14 fulles en total tenint en compte que al final aquests 4 vèrtexs han de tenir grau 5. Hi ha, doncs, dos arbres possibles, que es mostren a la figura següent.