P1.- Se desea diseñar un derivador cuya respuesta frecuencial idealmente es

$$H_{DI}(e^{j\omega}) = j\omega\ e^{-j\alpha\omega}$$

Para ello, se obtiene su respuesta impulsional $h_D[n]$ a partir de la respuesta impulsional $h_{PB}[n]$ de un filtro paso bajo mediante la expresión:

$$h_D[n] = (-1)^n\ (\ h_{PB}[n]\ )^2$$

En este problema se le pide que justifique la corrección del método de diseño propuesto. A tal fin:

a) Obtenga la respuesta frecuencial $H_D(e^{j\omega})$ del derivador en función de la respuesta frecuencial del filtro paso bajo.

b) Obtenga la respuesta frecuencial $H_D(e^{j\omega})$ del derivador cuando la respuesta frecuencial del filtro paso bajo responde a la expresión

$$H_{PB}(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega})\ e^{-j\frac{L-1}{2}\omega}$$

donde $H_R(e^{j\omega})$ es una función real.

c) Justifique que, para obtener en la respuesta frecuencial del derivador el factor j (que implica un término de fase constante $\pi/2$), es necesario que L sea par.

d) Demuestre que, si $H_R(e^{j\omega})$ corresponde a un filtro paso bajo ideal con pulsación de corte $\pi/2$, el método de diseño propuesto proporciona un derivador ideal.

SOLUCION:

1

a) $$H_D(e^{j\omega}) = H_{PB}(e^{j\lambda}) \circledast_{2\pi} H_{PB}(e^{j\lambda})\Big|_{\lambda=\omega-\pi}$$

b) $$H_{PB}(e^{j\lambda}) = e^{-j\frac{L-1}{2}\lambda}\, H_R(e^{j\lambda})$$

$$H_D(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\frac{L-1}{2}\theta}\, H_R(e^{j\theta})\, e^{-j\frac{L-1}{2}(\lambda-\theta)}\, H_R(e^{j(\lambda-\theta)})\, d\theta\right)\Big|_{\lambda=\omega-\pi} =$$

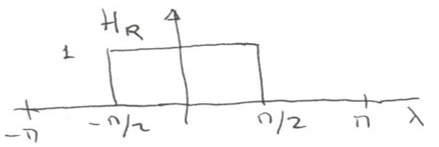
$$= \left(e^{-j\frac{L-1}{2}\lambda}\ H_R(e^{j\lambda}) \circledast_{2\pi} H_R(e^{j\lambda})\right)\Big|_{\lambda=\omega-\pi} =$$

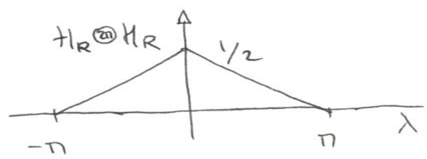
$$= e^{+j\frac{L}{2}\pi}\, e^{-j\frac{\pi}{2}}\, e^{-j\frac{L-1}{2}\omega}\left(H_R(e^{j\lambda}) \circledast_{2\pi} H_R(e^{j\lambda})\right)\Big|_{\lambda=\omega-\pi}$$

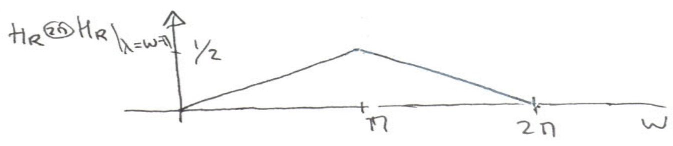
c) Si $L = 2K$

$$H_D(e^{j\omega}) = \underbrace{e^{jK\pi}}_{\text{real}}\ \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j}\ \underbrace{e^{-j\frac{L-1}{2}\omega}}_{\text{fase lineal}}\ \underbrace{\left(H_R(e^{j\lambda}) \circledast_{2\pi} H_R(e^{j\lambda})\right)\Big|_{\lambda=\omega-\pi}}_{\text{real}}$$

d)







P2.- Una secuencia x[n] que se ha obtenido por muestreo (con un periodo de muestreo de 10ms) ha de ser interpolada por 3. En la DFT de dicha señal se observa una componente frecuencial no deseada cuya frecuencia se estima correspondiente al indice k=160 de una DFT con N=512. Para eliminar dicha componente se piensa hacer uso de un filtro diseñado mediante la transformación bilineal de un filtro banda eliminada analógico de orden 2 con función de transferencia:

$$H_a(s) = H \frac{s^2 + \Omega_\infty^2}{s^2 + B\Omega s + \Omega_\infty^2}$$

donde BΩ es la anchura de la banda eliminada centrada en Ω_∞. Se pide

e) La frecuencia en Hz de la componente indeseada en la señal analógica.
f) La expresión de la función de transferencia H(z) del filtro banda eliminada discreto, en función de H, Ω_∞ y BΩ
g) Determinar Ω_∞ para que H(z) elimine la componente indeseada de x[n].
h) Elegir BΩ de forma que el módulo de los polos de H(z) sea r=0.9. Proporcionar el diagrama de ceros y polos de H(z).
i) Con H=1, determinar la respuesta impulsional del filtro.
j) Proponer razonadamente una realización para el filtro H(z) con 2 retardos, proporcionando las ecuaciones de programación.

SOLUCIÓN:

e) $f_i = \frac{k}{N} = \frac{160}{512} = \frac{5}{16}$ $\qquad F_i = f_i F_m = \frac{5}{16}\frac{1}{0.01} = 31.25\,\text{Hz}$

f) $$H(z) = H \frac{1+\Omega_\infty^2}{1+\Omega_\infty^2+B\Omega} \frac{1 - 2\frac{1-\Omega_\infty^2}{1+\Omega_\infty^2} z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\frac{1-\Omega_\infty^2}{1+\Omega_\infty^2+B\Omega} z^{-1} + \frac{1+\Omega_\infty^2-B\Omega}{1+\Omega_\infty^2+B\Omega} z^{-2}}$$

g) $\Omega_\infty = \text{tag}\, \frac{1}{2} 2\pi f_i = 1.496606$

h) si $p_{1,2} = re^{\pm j\theta}$, $D(z) = (1-re^{j\varphi}z^{-1})(1-re^{-j\varphi}z^{-1})$

$$= 1 - 2r\cos\varphi\, z^{-1} + r^2 z^{-2}$$

$$r^2 = \frac{1+\Omega_\infty^2 - B\Omega}{1+\Omega_\infty^2+B\Omega} \Rightarrow B\Omega = (1+\Omega_\infty^2)\frac{1-r^2}{1+r^2} = 0.340093$$

$$H(z) = 0.905 \frac{1 + 0.765367 z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.692657 z^{-1} + 0.81 z^{-2}} =$$

$$p_{1,2} = 0.9 e^{\pm j 1.965798} = -0.346328 \pm j\, 0.830696$$

$$z_{1,2} = e^{\pm j 1.963495} = -0.382683 \pm j\, 0.923880$$

i) $$H(z) = 1.117284 - \frac{0.212284 + 0.0812373 z^{-1}}{1 + 0.692657 z^{-1} + 0.81 z^{-2}} =$$

$$= A_0 + \frac{A_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{A_1^*}{1-p_2 z^{-1}}$$

$$A_0 = 1.117284$$

$$A_1 = 0.106244\, e^{j3.097747} = |A|\, e^{j\varphi}$$

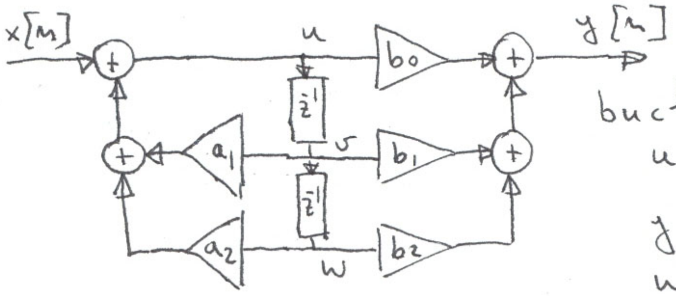
$$h[n] = A_0 \delta[n] + \left(|A| e^{j\varphi} r^n e^{j\theta n} + |A| e^{-j\varphi} r^n e^{-j\theta n}\right) u[n]$$

$$= A_0 \delta[n] + 2|A| r^n \cos(\theta n + \varphi)\, u[n] =$$

$$= 1.117284\, \delta[n] + 0.212488\, (0.9)^n \cdot$$

$$\cdot \cos(1.965798 n + 3.097747)\, u[n]$$

j) $$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$



bucle:

$$u = x + (a_1 v + a_2 w)$$

$$y = b_0 u + (b_1 v + b_2 w)$$

$$w = v$$

$$v = u$$

P3.- En el marco de un proyecto europeo de investigación, los miembros del grupo de "Procesado del habla" fueron encargados de adquirir señales de voz con una frecuencia de muestreo de 20 kHz. El filtro antialiasing utilizado eliminó los componentes frecuenciales superiores a 8,5 kHz. En la grabación se captó una señal indeseada producida por vibraciones mecánicas subsónicas cuyas componentes frecuenciales son inferiores a los 30 Hz. Para poder utilizar dichas señales en sus propios trabajos de investigación, debieron convertir las señales a una frecuencia de muestreo de 16 kHz, que es la frecuencia de muestreo a la que trabaja su sistema de reconocimiento del habla. El ancho de banda útil de la señal de voz para el sistema de reconocimiento se extiende de 200 Hz a 7 kHz. Se pide:

a) El diagrama de bloques del sistema que permite realizar la conversión de señal de voz muestreada a 20 kHz a voz muestreada a 16 kHz.
b) Los espectros de todas las secuencias que intervienen en el diagrama de bloques anterior.

c) Las frecuencias límites de las bandas atenuadas y la banda de paso del filtro discreto paso banda que, utilizado en el sistema anterior, permite realizar la conversión necesitada y eliminar la señal indeseada captada al realizar la grabación.
d) Se desea diseñar el filtro paso banda que se precisa en la conversión de frecuencia de muestreo descrita en el problema 3.11. Si la atenuación máxima permitida en la banda de paso es 1 dB y se exige una atenuación mínima de 45 dB en la banda atenuada, diseñe con **62** el filtro mediante la aproximación elíptica.
e) Como opción alternativa al uso de un filtro paso banda en el proceso de conversión, pueden eliminarse las componentes subsónicas mediante un filtro paso alto con posterioridad a la conversión de la frecuencia de muestreo, en la que ahora se precisa un filtro paso bajo. Analice esta opción y obtenga los filtros necesarios con el programa **62**.

SOLUCION: Este problema ya fue estudiado en el tema 3. Ahora interesa el diseño de los filtros. Las especificaciones de los filtro para el cambio de frecuencia son:

Filtro paso banda:

F_{a1} = 30 Hz	α_{a1} = 45 dB		
F_{p1} = 200 Hz	F_{p2} = 7 kHz	α_p = 1 dB	F_m = 80 kHz
F_{a2} = 8 kHz	α_{a1} = 45 dB		

Filtro paso bajo:

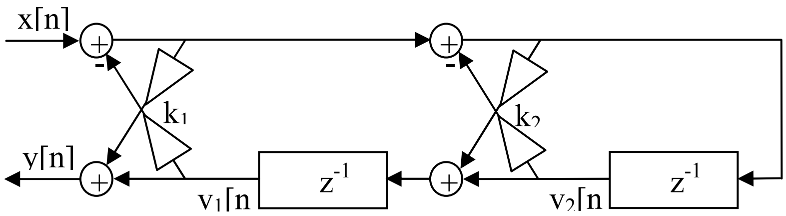
F_p = 7 kHz	α_p = 1 dB	F_m = 80 kHz
F_a = 8 kHz	α_a = 45 dB	

Las especificaciones para el filtro que elimina el ruido son:

Filtro paso alto:

F_a = 30 Hz	α_{a1} = 45 dB	
F_p = 200 Hz	α_p = 1 dB	F_m = 16 kHz

Las correspondientes especificaciones en frecuencia discreta y los diseños con el **62** se proporcionan con el materia adicional de clase.



P.4.- En la figura se muestra un sistema discreto de segundo orden. Para interpretar la figura debe tenerse en cuenta que : 1) los multiplicadores próximos entre sí tienen el mismo factor ; 2) las entradas a los sumadores señaladas con un signo menos se restan en el sumador. Se pide :

a) Las ecuaciones de análisis de la estructura del sistema, utilizando como variables internas las salidas de los retardos.
b) La función de transferencia del mismo en función de las constantes k_1 y k_2. Compruebe que responde a la expresión general $H(z) = (a+bz^{-1}+z^{-2})/(1+bz^{-1}+az^{-2})$.

c) Compruebe que el sistema es una célula pasa-todo (el módulo de su respuesta frecuencial es independiente de la frecuencia e igual a la unidad).

d) En el caso de que a= -0.4 y b=-0.3, dibuje el diagrama de ceros y polos de la función de transferencia y determine la respuesta impulsional del sistema.

e) Determine la respuesta del sistema a la señal x[n] = $(-1)^n$.

SOLUCIÓN:

(a)

$$y[n] = v_1[n] + K_1\left(x[n] - K_1 v_1[n]\right) = K_1\, x[n] + (1-K_1^2)\, v_1[n]$$

$$v_1[n+1] = v_2[n] + K_2\left(x[n] - K_1 v_1[n] - K_2 v_2[n]\right) =$$

$$= -K_1K_2\, v_1[n] + (1-K_2^2)\, v_2[n] + K_2\, x[n]$$

$$v_2[n+1] = x[n] - K_1 v_1[n] - K_2 v_2[n] =$$

$$= -K_1 v_1[n] - K_2 v_2[n] + x[n]$$

(b)

$$Y(z) = K_1 X(z) + (1-K_1^2) V_1(z)$$

$$\begin{bmatrix} 1+K_1K_2 z^{-1} & -(1-K_2^2)z^{-1} \\ K_1 z^{-1} & 1+K_2 z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 z^{-1} \\ z^{-1} \end{bmatrix} X(z)$$

$$\Delta = (1+K_1K_2 z^{-1})(1+K_2 z^{-1}) + K_1(1-K_2^2)z^{-2} = 1 + K_2(1+K_1)z^{-1} + K_1 z^{-2}$$

$$V_1(z) = \frac{1}{\Delta}\left(K_2(1+K_2 z^{-1}) + (1-K_2^2)z^{-1}\right) z^{-1} X(z) = \frac{K_2 + z^{-1}}{\Delta} z^{-1} X(z)$$

$$Y(z) = \left[K_1 + \frac{z^{-1}(K_2+z^{-1})}{\Delta}(1-K_1^2)\right] X(z)$$

$$H(z) = \frac{K_1 + K_2(1+K_1)z^{-1} + z^{-2}}{1 + K_2(1+K_1)z^{-1} + K_1 z^{-2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= K_1 \\ b &= K_2(1+K_1) \end{aligned}}$$

(c)

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z)\, H(1/z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

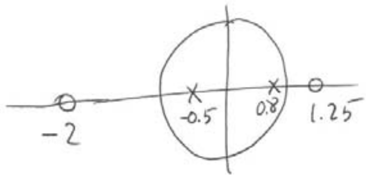
$$H(z) = \frac{a + b z^{-1} + z^{-2}}{1 + b z^{-1} + a z^{-2}} = \frac{z^{-2} D(1/z)}{D(z)}$$

$$H(z)\, H(1/z) = \frac{z^{-2} D(1/z)\; z^{2} D(z)}{D(z)\; D(1/z)} = 1$$

alternativa

$$\left(\frac{a + b z^{-1} + z^{-2}}{1 + b z^{-1} + a z^{-2}} \cdot \frac{a + b z + z^{2}}{1 + b z + a z^{2}} = \frac{a z^{-2} + (ab+b)z^{-1} + (1+a^2+b^2) + (ab+b)z + a z^2}{a z^{-2} + (ab+b)z^{-1} + (1+a^2+b^2) + (ab+b)z + a z^2} \right)$$

(d) $1 + (-0.3)z^{-1} + (-0.4)z^{-2} = (1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})$



$$H(z) = -2.5 + \frac{0.484615384}{1 - 0.8z^{-1}} + \frac{1.615384615}{1 + 0.5z^{-1}}$$

$$h[n] = -2.5\,\delta[n] + 0.4846\,(0.8)^n u[n] + 1.6154\,(-0.5)^n u[n]$$

(e) $y[n] = H(-1)\,(-1)^n = (-1)^n$

P5.- Sea $D(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$ el polinomio del denominador de una función de transferencia de orden 2. Se desea averiguar cuáles son las condiciones que han de satisfacer a_1 y a_2 para que el sistema sea causal y estable.

SOLUCIÓN: Sabemos que para que un sistema IIR sea causal y estable los polos p_1 y p_2 de su H(z), es decir, los ceros del denominador de H(z), han de estar confinados al interior de la circunferencia de radio unidad, En otras palabras, han de ser tales que

$$|p_1| < 1 \qquad |p_2| < 1 \tag{1}$$

Si tenemos en cuenta que

$$D(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) = 1 - (p_1 + p_2)z^{-1} + p_1 p_2 z^{-2}$$

es inmediato que puede escribirse $a_2 = p_1 p_2$ por lo que la condición (1) sobre los polos conduce a la siguiene condición sobre el coeficiente a_2:

$$|a_2| < 1 \tag{2a}$$

Pero esta condición, necesaria, no es suficiente para garantizar el cumplimiento de (1). Para obtener una condición suficiente, podemos acudir al plano s donde las condiciones para que un polinomio $P(s)= s^2 + d_1 s + d_o$ de orden 2 tenga las raíces en el semiplano de la izquierda son sencillas:

$$d_1 > 0 \qquad d_o > 0 \tag{3}$$

Mediante la transformación bilineal, podemos transformar el polinomio D(z) en el polinomio P(s).

$$P(s) = D(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{1-s}{1+s}} = \frac{1 - a_1 + a_2}{(1+s)^2}\left(s^2 + 2\frac{1 - a_2}{1 - a_1 + a_2}s + \frac{1 + a_1 + a_2}{1 - a_1 + a_2}\right)$$

Teniendo en cuenta que:

a) que los ceros de D(z) son los transformados de los ceros de P(s),

b) que el cumplimiento de (3) por P(s) garantizará que sus ceros se encuentre en el semplano de la izquierda,

y c) los puntos de s en el semiplano izquierdo se transforman en puntos de z que satisfacen (1), podemos decir que los ceros D(z) cumplirán (1) si los P(s) cumplen (3). En otras palabras ha de cumplirse que

$$\frac{1-a_2}{1-a_1+a_2} > 0 \qquad\qquad \frac{1+a_1+a_2}{1-a_1+a_2} > 0$$

Teniendo en cuenta (2a), estas condiciones son equivalentes a

$$1-a_1+a_2 > 0 \qquad\qquad 1+a_1+a_2 > 0$$

y en definitiva

$$|a_1| < 1+a_2 \tag{2b}$$

que complementa a la condición (2a). Las condiciones (2) son necesarias y suficientes para que un polinomio D(z) tenga sus raíces en el círculo unidad del plano z.

P6.- Se desea diseñar un transformador de Hilbert de fase lineal mediante la técnica de las ventanas. Determinar la respuesta impulsional a enventanar para obtener un transformador de Hilbert cuya respuesta impulsional tenga una longitud L.

SOLUCIÓN: La respuesta frecuencial ideal correspondiente a un transformador de Hilbert con fase lineal puede escribirse:

$$H_i(e^{j\omega}) = -j\,\mathrm{signo}(\omega)\, e^{-j\frac{L-1}{2}\omega}$$

donde se ha considerado el término de fase lineal correspondiente a un sistema FIR de longitud L. La respuesta impulsional es

$$h_i[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_i(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}(\frac{L-1}{2}-n)\omega\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left.\frac{\cos(\frac{L-1}{2}-n)\omega}{\frac{L-1}{2}-n}\right|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\frac{2\,\mathrm{sen}^2(\frac{L-1}{2}-n)\frac{\pi}{2}}{\frac{L-1}{2}-n}$$

La respuesta impulsional del filtro FIR será la resultante de aplicar la forma de la ventana a

$$h[n] = -\frac{1}{\pi}\frac{2\,\mathrm{sen}^2(\frac{L-1}{2}-n)\frac{\pi}{2}}{\frac{L-1}{2}-n}\, p_L[n] \qquad 0 \le n \le L-1$$

donde $p_L[n]$ es el pulso causal de L muestras.