P1.- (PROBLEMA 4.5) Sea H(z) la función de transferencia de un sistema causal y estable del que se conoce que, si se excita con la secuencia de entrada

$$x[n] = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)u[n], \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2} \quad \omega_2 = \pi$$

la salida es:

$$y[n] = \cos(\omega_2 n)u[n] + A(-0,5)^n u[n] + B\delta[n]$$

Se pide:
a) Dibuje el diagrama de ceros y polos de H(z), indicando los valores numéricos.
b) Obtenga la expresión de H(z), incluida la constante multiplicativa.
c) Calcule el valor de les constantes A y B de y[n].
d) Determine la respuesta completa al escalón u[n] con la condición inicial y[-1]=1/2.

SOLUCIÓN:
a) $H(e^{j\omega})$ tendrá ceros en $\omega = \pm\pi/2$, ya que el sistema no responde al componente de la entrada con dicha frecuencia (ω_1). Por tanto, H(z) tendrá **ceros** para $z = e^{\pm j\,\pi/2} = \pm j$.
Por otro lado, de acuerdo con el transitorio, H(z) tiene un **polo** en z =-½.
La presencia del término $B\delta[n]$ en y[n] se debe a que son iguales el grado en z^{-1} del polinomio de numerador y del denominador de Y(z). Además, como y[n] es en realidad la respuesta del sistema a la entrada $x_1[n] = \cos(\omega_2 n)u[n] = (-1)^n\, u[n]$, podemos escribir que $Y(z) = X_1(z)\,H(z)$. En consecuencia, como el numerador de $X_1(z)$ es de grado cero y el denominador de grado 1 (ver (1)), H(z) ha de tener un grado más en el numerador que en el numerador, lo que implica un **polo** en el origen. Como conclusión, H(z) tiene dos **ceros** (z = ±j) y dos **polos** (z = ½ y z = 0).

b) La función de transferencia H(z) puede escribirse

$$H(z) = H\frac{(1-jz^{-1})(1+jz^{-1})}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = H\frac{1+z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Interpretando la respuesta y[n] del sistema a la entrada $x_1[n]$ para n suficiente grande, puede decirse que la respuesta del sistema a $(-1)^n$ es $(-1)^n$, lo que implica que H(-1) = 1.
Con esta condición puede determinarse la constante H, resultando H = ¼.

c) Dado que

$$X_1(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} \qquad (1)$$

con lo que

$$Y(z) = \frac{1}{4}\frac{1+z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{H(-1)}{1+z^{-1}} + \frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + B$$

donde

$$A = Y(z)(1+\frac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\frac{1+z^{-2}}{1+z^{-1}}\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{5}{4}$$

$$B = \lim_{z\to 0} Y(z) = \frac{1}{2}$$

d) La respuesta y[n] del sistsema puede formularse como la suma de la respuesta a la excitación en condiciones iniciales nulas $y_{c.i.0}[n]$ y la respuesta con excitación nula $y[n]_{x=0}$. En cuanto a la primera:

$$Y_{c.i.0}(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}\frac{1}{4}\frac{1+z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{C}{1-z^{-1}} + \frac{D}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + E$$

donde

$$C = H(1) = 1/3.$$

$$D = Y_{c.i.0}(z)(1+\frac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{5}{12}$$

$$E = \lim_{z\to 0} Y_{c.i.0}(z) = -\frac{1}{2}$$

Así

$$y_{c.i.0}[n] = \frac{1}{3}u[n] + \frac{5}{12}(-\frac{1}{2})^n u[n] - \frac{1}{2}\delta[n]$$

En cuanto a $y[n]_{x=0}$ sabemos que responde a la solución a la ecuación entrada-salida homogénea. Por tanto

$$y_{x=0}[n] = F(-\frac{1}{2})^n$$

Ahora bien, como $y[-1] = y[-1]_{x=0} = ½ = F\,(-½\,)^{-1}$, se obtiene F =- ¼. En definitiva, para $n \geq 0$, la respuesta del sistema es

$$y[n] = y[n]_{c.i.0} + y_{x=0}[n] = \frac{1}{3}u[n] + \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^n u[n] - \frac{1}{2}\delta[n]$$

P2.- (PROBLEMA 4.6)

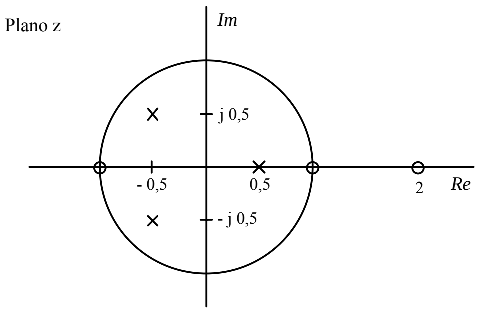


Fig. P4.6

En algunas aplicaciones se necesita obtener la respuesta impulsional de un sistema real a partir de su autocorrelación r[m] definida por la relación

$$r[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[m+k] = h[m] * h[-m]$$

Para estudiar este problema y su solución se pide, supuesto que el sistema es causal y estable:

a) Exprese la transformada z de r[m], R(z), en función de H(z), la transformada z de h[n].

b) Dibuje el diagrama de ceros y polos de R(z), si H(z) tiene el diagrama de ceros y polos mostrado en la figura P4.6 (todos los ceros y los polos son simples). Determine el ROC de R(z).

c) Obtenga todas las H(z) cuya transformada inversa h[n] presente una autocorrelación r[m] con transformada $R(z) = 0.1z + 0.29 + 0.1z^{-1}$.

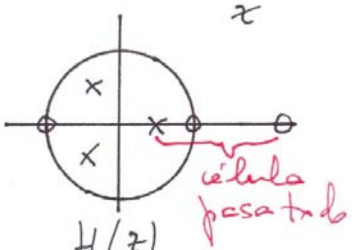
d) Calcule la función de transferencia H(z) y la respuesta impulsional h(n) de un sistema tal que

$$r[n] = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{3}2^n u[-n-1]$$

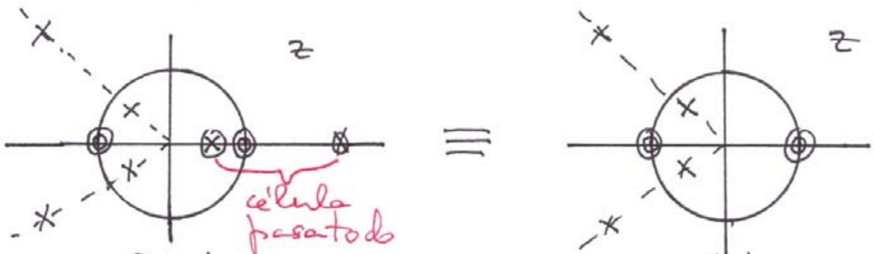
SOLUCIÓN:

a) $R(z) = H(z)\,H(1/z)$

b)

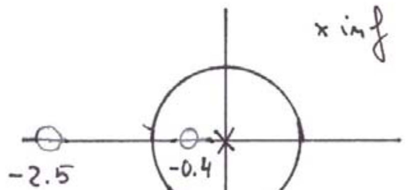


$H(z)$

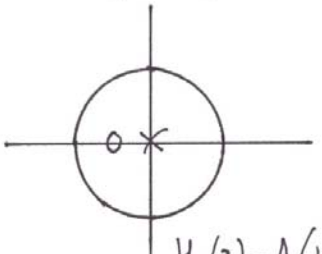


$R(z)$ $\qquad\qquad$ $R(z)$

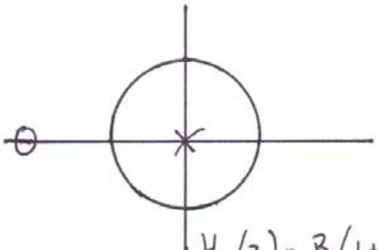
c) $R(z) = 0.1z + 0.29 + 0.1z^{-1} = H(z)\,H(1/z)$



$R(z)$



$H_1(z) = A(1 + 0.4z^{-1})$



$H_2(z) = B(1 + 2.5z^{-1})$

$$R(z) = H(z)H(1/z) \left\langle \begin{array}{l} A = \pm 0.5 \\ B = \pm 0.2 \end{array} \right.$$

$$H_2(z) = H_1(z)\,\frac{z^{-1} + 0.4}{1 + 0.4z^{-1}} = H_1(z)\;0.4\;\frac{1 + 2.5z^{-1}}{1 + 0.4z^{-1}}$$

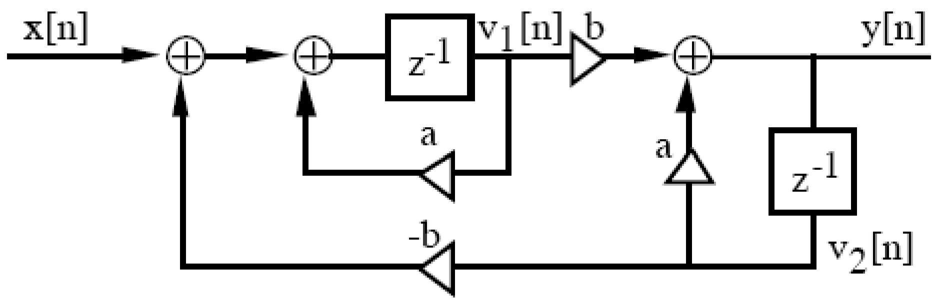
(d) $$R(z) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}}\right) =$$

$$= \frac{-2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\ \frac{-2z^{-1}}{(1-2z^{-1})} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{H(z)}\ \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}}_{H(1/z)}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \longrightarrow h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

P3.- Encontrar la función de transferencia del sistema de la figura:



SOLUCIÓN:

Las ecuaciones de análisis del sistema son:

ecuación de salida: $Y(z) = b\,V_1(z) + a\,V_2(z)$

variables de estado: $V_1(z) = z^{-1}\,(\,X(z) - b\,V_2(z) + a\,V_1(z)\,)$

$V_2(z) = z^{-1}\,(b\,V_1(z) + a\,V_2(z)\,)$

De este modo, el sistema de ecuaciones que permite determinar $V_1(z)$ y $V_2(z)$ es:

$$\begin{bmatrix} 1-a\,z^{-1} & b\,z^{-1} \\ -b\,z^{-1} & 1-a\,z^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1}X(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando la regla de Cramer, se obtiene

$$V_1(z) = \frac{z^{-1}(1-a\,z^{-1})}{1-2a\,z^{-1}+(a^2+b^2)\,z^{-2}}X(z)$$

$$V_2(z) = \frac{b\,z^{-2}}{1-2a\,z^{-1}+(a^2+b^2)\,z^{-2}}X(z)$$

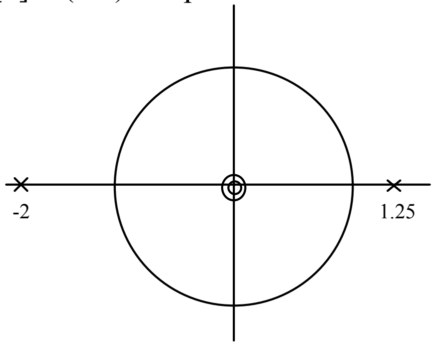
que proporciona

$$Y(z) = \frac{b\,z^{-1}}{1-2a\,z^{-1}+(a^2+b^2)\,z^{-2}}X(z)$$

y, en definitiva:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b\,z^{-1}}{1 - 2a\,z^{-1} + (a^2 + b^2)\,z^{-2}}$$

P4.- En la figura se proporciona el diagrama de ceros y polos de un sistema **inestable** y **no causal**, tal que a la secuencia x[n] = $(3/2)^n$ responde con la secuencia y[n] = $(3/2)^n$.



Se pide:

a) La función de transferencia H(z) del sistema, proporcionando los coeficientes del numerador y del denominador y la constante multiplicativa.

b) La región de convergencia de H(z).

c) La respuesta impulsional del sistema.

d) La respuesta frecuencial del sistema.

SOLUCIÖN:

a) $$H(z) = K \frac{1}{[1-(-2)z^{-1}](1-1.25\,z^{-1})}$$

$$H(3/2) = 1 \longrightarrow K = 7/18$$

b) ROC : $1.25 < |z| < 2$

(– debe excluir $|z| = 1$: inestable
– no puede ser $|z| > 2$: no causal)

c) $$H(z) = \frac{56}{234}\frac{1}{1+2z^{-1}} + \frac{35}{234}\frac{1}{1-1.25\,z^{-1}}$$

$$= -\frac{56}{234}(-2)^n u[-n-1] + \frac{35}{234}\left(\frac{5}{4}\right)^n u[n]$$

d) no tiene

P5.- (PROBLEMA 4.15) Se desea ecualizar acústicamente un punto de una sala mediante tratamiento digital de la señal. Para ello, la señal de la fuente es filtrada por un ecualizador digital H(z) realizable (es decir, causal y estable) antes de alimentar el altavoz, tal como se ilustra en la figura P4.15-1.

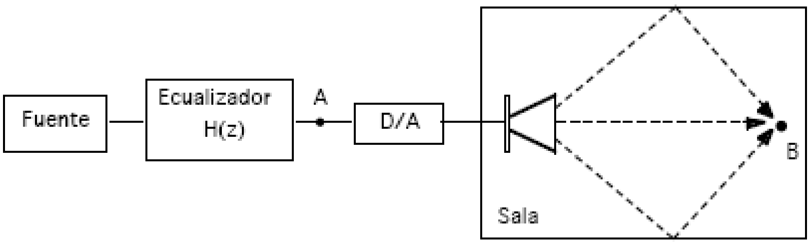


Fig. P4.15-1

El efecto de la sala se modela mediante G(z), función de transferencia equivalente entre el punto A y B; se considera la sala acústicamente ecualizada en módulo y fase en el punto B, si la función de transferencia entre la fuente y dicho punto es la unidad. Se pide:

a) Calcule la expresión y la ROC de la función de transferencia H(z) del ecualizador que permite ecualizar completamente (tanto en fase como en amplitud) la respuesta en el punto B, si la función $G(z) = 1+z^{-1} + 0.5z^{-2}$. Razone si dicho ecualizador es realizable.

b) Repita el apartado anterior cuando $G(z) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}$.

c) Si sólo se desea ecualizar en amplitud la respuesta en B, proponga una H(z) que sea realizable para el caso considerado en el apartado anterior (haga uso del resultado del problema 4.14). Obtenga mediante el programa **62** el retardo de grupo de la función de transferencia entre la fuente y el punto B.

En los casos en que la sala presenta respuestas acústicas G(z) de fase no mínima, es posible obtener una ecualización completa, tanto en fase como en amplitud, haciendo uso de dos ecualizadores FIR y dos altavoces, tal y como se indica en la figura P4.15-2. Para ilustrar esta posibilidad considere el siguiente ejemplo:

- Función de transferencia entre A_1 y B: $G_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}$
- Función de transferencia entre A_2 y B: $G_2(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2}$

d) Obtenga la expresión de los ecualizadores FIR $H_1(z)$ y $H_2(z)$, cuyas respuestas impulsionales son de longitud 2, que permiten ecualizar completamente la respuesta entre la fuente y el punto B.

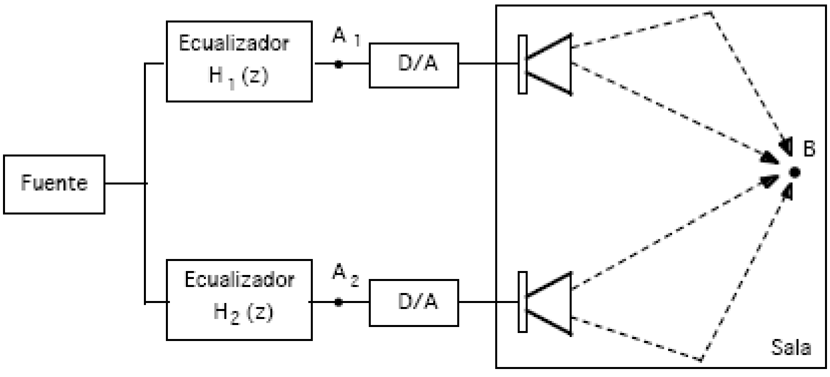
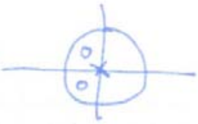


Fig. P4.15-2

SOLUCIÓN

(a) $G(z) = 1 + z^{-1} + 0.5 z^{-2} = G_{min}$



$$H(z) = 1/G_{min} = \frac{1}{1+z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

ROC : $|z| > \sqrt{1/2}$

(b) (c) $G(z) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}$

$= G_{min}\, G_{pt} =$

$= (2 + 2z^{-1} + z^{-2}) \dfrac{1+2z^{-1}+2z^{-2}}{2+2z^{-1}+z^{-2}}$

$$H(z) = 1/G_{min} = \frac{1}{2+2z^{-1}+z^{-2}}$$

ROC : $|z| > \sqrt{1/2}$

(d) $H_1(z)\, G_1(z) + H_2(z)\, G_2(z) = 1$

$(b_1 + a_1 z^{-1})(1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}) + (b_2 + a_2 z^{-1})(1 + z^{-1} + 2z^{-2}) = 1$

b_1	$2b_1$	$2b_1$	
	a_1	$2a_1$	$2a_1$
b_2	b_2	$2b_2$	
	a_2	a_2	$2a_2$

$2(a_1+a_2) = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1$

$b_1 + b_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1 - b_1$

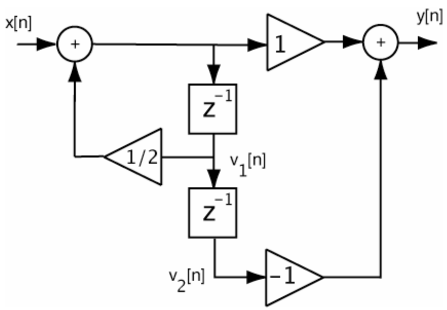
$2b_1 + b_2 + a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = -1 \Rightarrow b_2 = 2}$

$2(b_1+b_2) + 2a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow$

$\Downarrow$

$2 + a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = -2 \quad a_2 = 2}$

P6.- Considérese el sistema de la figura siguente:



Se pide:

a) Su función de transferencia H(z), indicando su ROC.
b) Su respuesta impulsional h[n].
c) Su respuesta y[n] a $x[n] = (-1)^n$ en condiciones iniciales nulas.
d) Su respuesta y[n] a $x[n] = (1/4)^n$ en condiciones iniciales nulas.
e) Su respuesta y[n] a $x[n] = (1/4)^n u[n]$ en condiciones iniciales nulas.
f) Su respuesta y[n] a $x[n] = (1/4)^n u[n]$ bajo las condiciones iniciales $v_1[n] = 0$ y $v_2[n] = 1$.

SOLUCIÓN:

1

$$Y(z) = \left[X(z) + \tfrac{1}{2} V_1(z)\right] - V_2(z)$$

$$\left.\begin{aligned} V_1(z) &= z^{-1}\left[X(z) + \tfrac{1}{2} V_1(z)\right] \\ V_2(z) &= z^{-1} V_1(z) \end{aligned}\right\} \quad V_1(z) = \frac{z^{-1}X(z)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad V_2(z) = \frac{z^{-2}X(z)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{1-z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} X(z)$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad \text{ROC } |z| > \tfrac{1}{2}$$

(causal)

2

$$\begin{array}{rrr|l} -z^{-2} & 0z^{-1} & 1 & -\frac{1}{2}z^{-1} \quad 1 \\ \cline{4-4} z^{-2} & -2z^{-1} & & 2z^{-1}+4 \\ \cline{1-3} & -2z^{-1} & 1 & \\ & 2z^{-1} & -4 & \\ \cline{2-3} & & -3 & \end{array}$$

$$H(z) = 2z^{-1} + 4 - 3\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$h[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-1] - 3(1/2)^n u[n]$$

3

$-1 \in \text{ROC}$

$$y[n] = (-1)^n H(z)\big|_{z=-1} = 0$$

4

$1/4 \notin \text{ROC}$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, x[n-k] =$$

$$= (1/4)^n \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,(1/4)^{-k}}_{\text{no acotada}} \rightarrow \infty$$

5

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1-z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

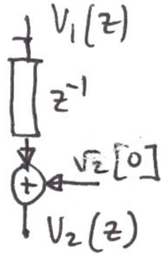
$$= \underbrace{8}_{\lim_{z\to 0} Y(z)} + \frac{-6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \underbrace{\frac{15}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}_{H(z)|_{z=1/4}}$$

$$\text{ROC}: \ |z| > \tfrac{1}{2} \cap |z| > \tfrac{1}{4} = |z| > 1/2$$

$$y[n] = 8\,\delta[n] - 6\,(1/2)^n u[n] + 15\,(1/4)^n u[n]$$

(6) $$y[n] = y_{c.i.0}[n] + y_{x=0}[n]$$

$$y_{c.i.0}[n] = 8\,\delta[n] - 6\,(1/2)^n u[n] + 15\,(1/4)^n u[n]$$



$$Y_{x=0}(z) = \tfrac{1}{2} V_1(z) - V_2(z)$$

$$\left.\begin{aligned} V_1(z) &= z^{-1}\, 1/2\, V_1(z) \\ V_2(z) &= z^{-1} V_1(z) + v_2[0] \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} V_1(z) &= 0 \\ V_2(z) &= v_2[0] \end{aligned}$$

$$Y_{x=0}(z) = -v_2[0] = -1$$

$$y_{x=0}[n] = -\delta[n]$$

$$y[n] = 7\,\delta[n] - 6\,(1/2)^n u[n] + 15\,(1/4)^n u[n]$$

1. Sea la expresión algebraica

$$X(z)=\frac{1}{\left(1+0.5z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}$$

Señale las expresiones que no sean sumables en valor absoluto y puedan ser transformada Z inversa de X(z), asignando una ROC ≠ {∅} (no vacía) adecuada y ajustando las constantes A y B.

A. $A(-0.5)^n u[n] + B(-2)^n u[n]$

B. $A(-0.5)^n u[-n-1] + B(-2)^n u[-n-1]$

C. $A(-0.5)^n u[n] + B(-2)^n u[-n-1]$

D. $A(-0.5)^n u[-n-1] + B(-2)^n u[n]$

2. Señale entre las siguientes afirmaciones relativas a la transformada Z las que sean ciertas:

A: La ROC de Z{u[n+1]} es |z| > 1.
B: $Z\{a^n u[-n]\} = -az^{-1}/(1-az^{-1})$, ROC: |z| < |a|.
C: $a^n u[n] * a^{-n} u[-n] = a^n/(1-a^2)$.
D: No existe $Z\{a^n u[n] * a^n u[-n-1]\}$.

3. Seleccione las afirmaciones correctas entre las afirmaciones siguientes:

A. La secuencia $x[n] = a^n$ no tiene transformada z para a ≠ 0.
B. La secuencia $x[n] = a^{|n|}$ no tiene transformada z para a ≠ 0.
C. La región de convergencia de la transformada z de la secuencia $x[n] = a^n (u[n] - u[n-N])$ es |z| > 0.
D. Para cualquier señal de entrada, la transformada z de la salida de un sistema lineal, invariante, causal y estable tiene como región de convergencia |z| > r (para un valor adecuado de r).