DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS	**Procesado de Señal** Fecha examen: 7 de Enero de 2011 Publicación notas provisionales: 21 de Enero Límite presentación alegaciones: 24 de Enero Publicación notas definitivas: 31 de Enero
Profesores: Miguel A. Lagunas, Montserrat Nájar, Ana I. Pérez-Neira	
Información adicional: • Duración: 2,5 h • No pueden utilizarse libros, ni apuntes, ni calculadoras, ni otros dispositivos electrónicos • Utilizad hojas separadas para resolver cada problema Justificad todos los resultados	

EJERCICIO 1

Dada una señal bidimensional f(x1,x2) de soporte circular de radio R cm., es decir: $f(x1,x2)=0 \quad \forall\ x1^2+x2^2 \geq R^2$

a.- Indique las matrices de muestreo rectangular y hexagonal centrado o entrelazado con módulo para cada vector igual a D indicando que tipo de muestreo produce más muestras de la imagen original. Uno de los dos vectores ha de ser el vector $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

La transformada de Fourier de f(x1,x2), F(w1,w2) tiene un soporte rectangular de dimensiones W1 y W2 .cm^{-1} respectivamente con W1 mayor que W2.

b.- Indique el valor máximo de D, mencionada en el apartado (a), de forma que no se produzca solapamiento espectral.

c.- Indique la transformada de Fourier de la señal muestreada f($\underline{n}$), definida como DF(w1,w2), razonando la respuesta e indicando cuál es el tipo de muestreo que le parece más conveniente.

Ahora se pasará a muestrear DF(w1,w2).

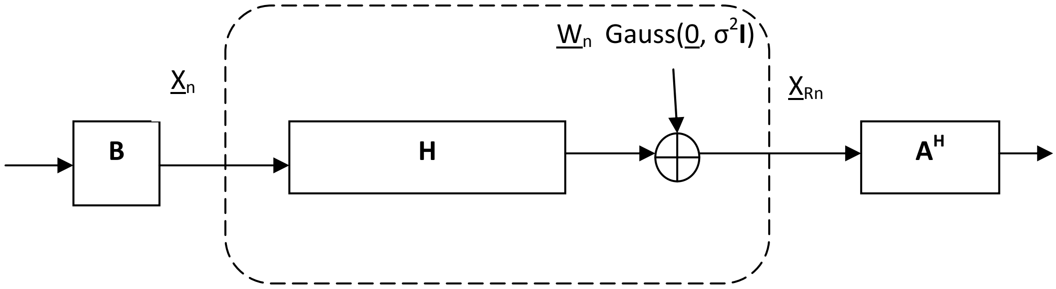
d.- Indique la matriz de muestreo que considera más adecuada razonando su elección y exprese la relación entre f($\underline{n}$) y la función DF muestreada o DFT en dos dimensiones. Considere que 2R/D es igual a M.

EJERCICIO 2

El vector $\underline{I}_n$ está formado por q componentes complejas e independientes y cada una de ellas de potencia unidad. Dicho vector se multiplica por una matriz **B** con el fin de prepararlo para su transmisión a destino, dando lugar al vector $\underline{X}_n$.

a.- Indique cuál es la matriz de correlación del vector $\underline{X}_n$ y cuál es la condición que debe cumplir la matriz **B**, para que la potencia total de $\underline{X}_n$ sea igual a P_T.

El vector $\underline{X}_n$ atraviesa una canal de respuesta **H**, a cuya salida se le suma ruido blanco gaussiano de potencia σ^2.



Conocida la matriz **B**, el canal **H** y la matriz de correlación del ruido, se pretende diseñar la matriz **A** que permita recuperar una réplica lo más próxima posible al vector original $\underline{I}_n$.

b.- Demuestre cuál el estimador de máxima verosimilitud de $\underline{I}_n$ observado el vector recibido $\underline{X}_{Rn}$.

c.- Demuestre que el estimador resultante es insesgado y de covarianza igual a $\sigma^2\left(\mathbf{B}^H\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{B}\right)^{-1}$

d.- Indique qué matriz **A** ha de utilizar para que a la salida se obtenga el estimador ML encontrado en el apartado (b). Si se define una matriz de SNR como $\mathbf{SNR}=\mathbf{E}^{-1}$ donde la matriz **E** es la correlación del error, formule la matriz **SNR**.

A continuación se obtendrá el estimador MAP o de error cuadrático medio mínimo (Filtro de Wiener). Para obtener la expresión de la mejor **A** se utilizará el principio de ortogonalidad entre el error $\underline{\varepsilon}_n=\underline{I}_n-\mathbf{A}^H\underline{X}_{Rn}$ y los datos $\underline{X}_{Rn}$, formulado como $E\left(\underline{X}_{Rn}\underline{\varepsilon}_n^H\right)=\mathbf{0}$.

e.- Calcule cuál es el filtro óptimo **A** y demuestre, usando el lema de la inversa

($(\mathbf{E}+\mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{H})^{-1}=\mathbf{E}^{-1}-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}+\mathbf{G}^{-1})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$),que la matriz de correlación del error mínimo, es igual a:

$$\xi=\left(\mathbf{I}+\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{B}^H\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{B}\right)^{-1}$$

La descomposición en función de la matriz de autovectores **U** y la matriz diagonal con sus autovalores **D** (**D** diagonal con $h^2(q)$) de $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ es: $\mathbf{H}^H\mathbf{H}=\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$

En base a lo anterior se elige como diseño de **B** el siguiente: $\mathbf{B}=\mathbf{U}\mathbf{Z}^{1/2}$, siendo $\mathbf{Z}^{1/2}$ una matriz diagonal con valores igual a la raíz cuadrada de z(q).

f.- Demuestre que, independiente de los valores de z(q), el error cuadrático medio de cada componente es siempre mayor en el estimador ML que usando Wiener y comente qué es erróneo en la siguiente frase: “El estimador ML es insesgado y, al alcanzar la cota de Cramer Rao, es el de mínima varianza. Como dicha varianza es la potencia del error (definido como la estimación ML menos el valor exacto) ha de concluirse que no es posible que otro estimador, diferente del ML, produzca una potencia de error más pequeña que la que proporciona ML”.

g.- Encuentre los valores z(q) que minimizan la traza de la matriz de correlación del error en el estimador ML, con la condición de que la potencia total de $\underline{X}_n$ ha de ser P_T.

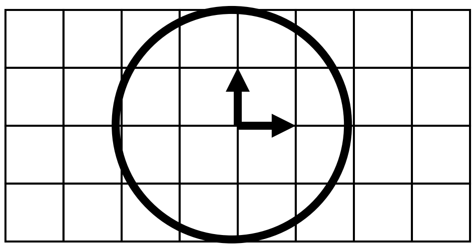
EJERCICIO 1

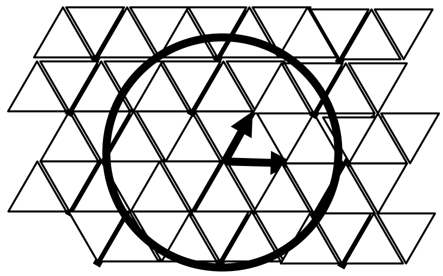
a.-

La imagen original es circular de radio R, $f(x1,x2)=0 \quad \forall\ x1^2+x2^2 \geq R^2$

En el caso de muestreo rectangular la matriz de muestreo será $\underline{\underline{U}} = D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde la distancia de cada vector se ha denominado como D. Cuanto mayor sea D sin aliasing mejor pues se requerirán menos muestras para retener la información de la imagen original.

Para el muestreo hexagonal, se tomarán los vectores que apuntan a dos vértices contiguos de un hexágono, es decir, separados (360/6) sesenta grados. Tomando uno de los vectores igual que el primer vector que se ha utilizado en el rectangular, el segundo estará a sesenta grados del eje horizontal. En definitiva la matriz de muestreo será ahora $\underline{\underline{U}} = D\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. A la izquierda y a la derecha pueden verse los vectores de muestreo y rejilla de muestreo rectangular y hexagonal respectivamente.



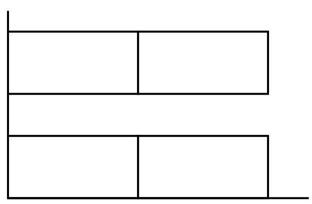


b.-

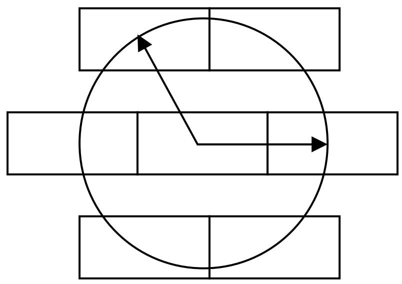
Con ambos tipos de muestreo se producirá repetición en frecuencia y se ha de evitar solapamiento o "aliasing" para garantizar que se puede recuperar la imagen original a partir de su versión muestreada. La matriz de repetición en frecuencia esta relacionada con la de muestreo via la relación siguiente: $\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{U}} = 2\pi$. Así pues, las matrices de repetición serán:

$\underline{\underline{V}} = \frac{2\pi}{D}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para el caso rectangular y $\underline{\underline{V}} = \frac{2\pi}{D}\begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Claramente la repetición es rectangular y hexagonal. Se analizará primero el caso rectangular. En este caso la F(w1,w2) se repite a una distancia 1/D por lo tanto la condición de no-solapamiento seria que $D \leq \frac{2\pi}{W1}$ Es claro que en la dimensión menor no habría problema



Pasando al caso hexagonal es fácil comprobar que el criterio para la elección de D sería el mismo. Por ello no existe diferencia entre ambos.



c.-

La transformada de la señal muestreada será la suma de las muestras de la imagen por un fasor que será el producto del vector de frecuencias por el correspondiente muestreo.

La fórmula es la misma para ambos muestreos, rectangular y hexagonal, y viene dada por:

$$F(\underline{w}) = \sum_{n1,n2} f(\underline{n}).\exp\left[-j\underline{w}^T \underline{\underline{U}}\,\underline{n}\right]$$

En el caso rectangular es:

$$F(w1,w2) = \sum_{n1,n2} f(n1,n2).\exp\left[-j\begin{pmatrix} w1 & w2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n1 \\ n2 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \sum_{n1,n2} f(n1,n2).\exp\left(-j.D.w1.n1\right).\exp(-j.D.w2.n2)$$

Para el caso hexagonal, la fórmula es:

$$F(w1,w2) = \sum_{n1,n2} f(n1,n2).\exp\left[-j\begin{pmatrix} w1 & w2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n1 \\ n2 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \sum_{n1,n2} f(n1,n2).\exp\left(-j.D.w1.n1\right).\exp(-j.D.(\frac{1}{2}w1.n2 + \frac{\sqrt{3}}{2}w2.n2)$$

Donde puede verse que no es separable como lo era en el caso rectangular.

d.-

Al muestrear en frecuencia la transformada del apartado anterior, con una matriz de muestreo $\underline{\underline{Z}}$ se produce una repetición de la imagen original según una matriz que denominaremos $\underline{\underline{N}}$. La relación que existe entre ambas es la siguiente:

$\underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{N}} = 2\pi \underline{\underline{I}}$ Asi pues, al cambiar el vector $\underline{w}$ por su versión muestreada $\underline{w} \Rightarrow \underline{\underline{Z}}\,\underline{m}$ se obtiene

$F(\underline{m}) = \sum_{n1,n2} f(\underline{n}).\exp\left[-j\underline{m}^T \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{U}}\underline{n}\right]$ que usando la relación anterior pasa a ser:

$$F(\underline{m}) = \sum_{n1,n2} f(\underline{n}).\exp\left[-j2\pi\underline{m}^T \underline{\underline{N}}^{-1}\underline{n}\right]$$

Para la elección de la matriz N, como el número de puntos en la dimensión x e y de la imagen es M, la repetición se ha de producir a un valor superior a este para evitar solapamiento, es decir la matriz rectangular seria:

$$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{N}}^{-1} = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el caso de una selección hexagonal, el módulo de los dos vectores ha de seguir siendo M por lo tanto una posibilidad sería:

$\underline{\underline{N}} = M\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{N}}^{-1} = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} \\ -1 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ obviamente ha de ser un entero (Ejemplo M=1000 entonces la matriz seria $\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} 500 & -500 \\ 866 & 866 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

a.-

Como el vector X es igual a $\underline{X}_n = \underline{\underline{B}}\underline{I}_n$ entonces

$$\underline{\underline{R}} = E\left(\underline{X}_n \underline{X}_n^H\right) = E\left(\underline{\underline{B}}\underline{I}_n \underline{I}_n^H \underline{\underline{B}}^H\right) = \underline{\underline{B}}E\left(\underline{I}_n \underline{I}_n^H\right)\underline{\underline{B}}^H = \underline{\underline{B}}\underline{\underline{B}}^H$$

Pues la autocorrelación del vector I es la identidad. Con respecto a la potencia total, esta sería la suma de la potencia de todas las componentes del vector X, por lo tanto:

$$P_T = E\left(\underline{X}_n^H \underline{X}_n\right) = E\left(tr\left(\underline{X}_n \underline{X}_n^H\right)\right) = tr\left(\underline{\underline{B}}E\left(\underline{I}_n \underline{I}_n^H\right)\underline{\underline{B}}^H\right) = tr\left(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{B}}^H\right)$$

b.-

Como $\underline{X}_{Rn} = \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{B}}\underline{I}_n + \underline{w}_n$ la distribución de este vector tendrá en el exponente:

$-\left(\underline{X}_{Rn} - \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{B}}\underline{I}_n\right)^H \left(\underline{X}_{Rn} - \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{B}}\underline{I}_n\right)/\sigma^2$ Así pues el máximo de la probabilidad a posteriori será el máximo de dicho exponente, o el mínimo si se suprime el signo menos. Derivando con respecto a $\underline{I}_n^H$ se obtiene:

$\underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{H}}^H\left(\underline{X}_{Rn} - \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{B}}\underline{I}_n\right) = \underline{0} \Rightarrow$ de donde se obtiene el estimador ML $\hat{\underline{I}}_n = \left(\underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{H}}^H \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{B}}\right)^{-1} \underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{H}}^H \underline{X}_{Rn}$ que es el estimador ML del vector original.

c.-

El valor esperado del estimador es: $E\left(\underline{\hat{I}}_n\right)=\left(\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{\underline{HB}}\right)^{-1}\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,E\left(\underline{X}_{Rn}\right)= \\ =\left(\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{\underline{HB}}\right)^{-1}\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{\underline{HB}}\,\underline{I}_n=\underline{I}_n$

así pues el estimador es insesgado.

Con respecto a la matriz de covarianza del estimador sería:

$\underline{\underline{C}}=E\left[\left(\underline{\hat{I}}_n-\underline{I}_n\right)\left(\underline{\hat{I}}_n-\underline{I}_n\right)^H\right]$ como $\left(\underline{\hat{I}}_n-\underline{I}_n\right)=\left(\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{\underline{HB}}\right)^{-1}\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\left(\underline{X}_{Rn}-\underline{\underline{HB}}\,\underline{I}_n\right)= \\ =\left(\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{\underline{HB}}\right)^{-1}\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{w}_n$

entonces $\underline{\underline{C}}=\left(\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{\underline{HB}}\right)^{-1}\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\sigma^2\,\underline{\underline{HB}}\left(\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{\underline{HB}}\right)^{-1}=\sigma^2\left(\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{\underline{HB}}\right)^{-1}$

Como se quería demostrar.

d.-

Como la expresión del estimador ML es $\underline{\hat{I}}_n=\left(\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{\underline{HB}}\right)^{-1}\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{X}_{Rn}$ claramente la matriz **A** ha de ser $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{HB}}\left(\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{\underline{HB}}\right)^{-1}$, de este modo:

$$\underline{\hat{I}}_n=\underline{\underline{A}}^H\,\underline{X}_{Rn}=\underline{I}_n+\underline{\underline{A}}^H\,\underline{w}_n$$

Así pues, la matriz del error es $E\left(\underline{\underline{A}}^H\,\underline{w}_n\,\underline{w}_n^H\,\underline{\underline{A}}\right)=\sigma^2\,\underline{\underline{A}}^H\,\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{C}}$ Lógicamente, al ser el estimador insesgado la matriz del error es directamente la covarianza del estimador. A su vez la matriz de SNR seria: $\underline{\underline{SNR}}=\underline{\underline{C}}^{-1}=\frac{1}{\sigma^2}\left(\underline{\underline{B}}^H\,\underline{\underline{H}}^H\,\underline{\underline{HB}}\right)$

e.-

Dado que el principio de ortogonalidad establece que $E\left(\underline{X}_{Rn}.\underline{\varepsilon}_n^H\right)=\underline{\underline{0}}$

Siendo $\underline{X}_{Rn}=\underline{\underline{HB}}\,\underline{I}_n+\underline{w}_n$ y $\underline{\varepsilon}_n=\underline{I}_n-\underline{\underline{A}}^H\,\underline{X}_{Rn}$ se obtiene la ecuación de diseño para el filtro óptimo y resulta ser:

$E\left(\underline{X}_{Rn}\,\underline{I}_n^H\right)-E\left(\underline{X}_{Rn}\,\underline{X}_{Rn}^H\right)\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{0}}$ es decir $\underline{\underline{HB}}-\left(\underline{\underline{HBB}}^H\,\underline{\underline{H}}^H+\sigma^2\underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{0}}$ de donde se obtiene la expresión del filtro óptimo

$\underline{\underline{A}}=\left(\underline{\underline{HBB}}^H\,\underline{\underline{H}}^H+\sigma^2\underline{\underline{I}}\right)^{-1}\underline{\underline{HB}}$ Nótese la diferencia en la matriz inversa comparándola con la expresión del filtro ML.

Con respecto a la correlación del MSE, se tendrá:

$\underline{\underline{Q}} = E\left(\underline{\varepsilon}_{n,\min}\underline{\varepsilon}_{n,\min}^H\right) = E\left(\underline{\varepsilon}_{n,\min}\underline{I}_n^H\right)$ ya que el error mínimo es ortogonal a los datos y a cualquier combinación lineal de estos.

Sustituyendo:

$$\underline{\underline{Q}} = E\left(\underline{\varepsilon}_{n,\min}\underline{I}_n^H\right) = E\left(\left(\underline{I}_n - \underline{\underline{A}}^H \underline{X}_{Rn}\right)\underline{I}_n^H\right) = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{H}}^H \left(\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{H}}^H + \sigma^2 \underline{\underline{I}}\right)^{-1} \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{B}}$$

Usando el lema de la inversa, se obtiene que:

$\underline{\underline{Q}} = \left(\frac{1}{\sigma^2}\underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{H}}^H \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{I}}\right)^{-1}$ Donde puede verse que el MSE es menor siempre que el obtenido del estimador ML

f.-

Al usar que:

$\underline{\underline{H}}^H \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{U}}^H$ y que $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{Z}}^{1/2}$ entonces $\left(\frac{1}{\sigma^2}\underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{H}}^H \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{I}}\right) = diag\left(1 + \frac{d(q)z(q)}{\sigma^2}\right)$

Con lo que la covarianza del estimador (o MSE ya que es insesgado) ML pasa a ser $\underline{\underline{C}} = diag\left(\frac{d(q)z(q)}{\sigma^2}\right)^{-1}$ mientras el MSE de Wiener es $\underline{\underline{Q}} = diag\left(1 + \frac{d(q)z(q)}{\sigma^2}\right)^{-1}$: Dado que los valores z(q) y d(q) son positivos, pues lo son de matrices definidas positivas, se concluye que el MSE de Wiener es menor que el del estimador ML.

Lo incorrecto de la frase es decir que el MSE de ML es el mínimo, cosa que no es cierta ya que Wiener minimiza directamente el MSE. Lo correcto es que el estimador ML, también denominado Zero-Forcing (ZF) es el estimador insesgado de mínimo MSE. Mientras tanto Wiener, como estimador MAP es equivalente al de mínimo MSE, a cambio, el estimador está sesgado. En otras palabras, ML es el de mínimo MSE de todos los estimadores sin sesgo, Wiener, es el estimador MAP que, a cambio de introducir sesgo minimiza el MSE. Se puede comprobar que ambos proporcionan la misma matriz de SNR.

g.-

La traza de la matriz de correlación del error en ML es: $\underline{\underline{C}} = diag\left(\frac{d(q)z(q)}{\sigma^2}\right)^{-1} \Rightarrow tr\left(\underline{\underline{C}}\right) = \sigma^2 \sum_1^Q \left(\frac{1}{d(q)z(q)}\right)$ que es lo que se ha de minimizar.

La potencia transmitida es $tr\left(\underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{B}}\right) = \sum_1^Q z(q) = P_T$. El lagrangiano será el siguiente, donde μ es el multiplicador de Lagrange.

$$\Lambda = \sigma^2 \sum_1^Q \left(\frac{1}{d(q).z(q)} \right) - \mu \left(P_T - \sum_1^Q z(q) \right)$$

Tomando derivada e igualando a cero, se obtiene:

$z(q) = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\mu d(q)}}$ (nótese que los z(q) provienen de un cuadrado luego han de ser positivos. El valor del multiplicador se obtiene de la restricción

$\sum_1^Q z(q) = \sigma^2 \mu^{-1/2} \sum_1^Q d(q)^{-1/2} = P_T$ de donde $z(q) = \dfrac{P_T}{\sum_1^Q d(p)^{1/2}} \sqrt{\dfrac{1}{d(q)}}$