Examen parcial de Matemàtica Discreta. Grup 20. 16/5/2008

1— (0.5 punts cada apartat) Raoneu totes les respostes.

a) Si G és un graf 2-connex i v és un vèrtex de G, quants components connexos té el graf $G - v$? Per què?

b) És possible que un graf 3-regular sigui 4-connex? Per què?

c) La seqüència de graus d'un graf G d'ordre 6 és $3, 3, 3, 2, 2, g$. És possible que $\Delta(G) = 4$? ($\Delta(G)$ és el grau màxim de G.)

d) Un graf G té dos components connexos que no són grafs complets i té exactament quatre vèrtexs de grau senar. Quantes arestes hem d'afegir, com a mínim, a G per a aconseguir un graf eulerià? Expliqueu com s'ha de fer.

e) Què és un graf hamiltonià? Doneu almenys una condició suficient per a que un graf sigui hamiltonià.

f) Sigui B un bosc amb k components connexos. Quantes arestes s'han d'afegir per a tenir un graf connex amb exactament un cicle?

g) Quants arbres generadors diferents té el graf complet amb conjunt de vèrtexs $V = [n]$?

h) Determineu l'arbre que té la seqüència de Prüfer $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

i) Un arbre T té la propietat que afegint-li una certa aresta es converteix en un graf hamiltonià. Quin arbre és?

j) És possible que una aresta d'un graf connex no sigui de cap arbre generador del graf?

2— (1.5 punts: $0.5 + 1$)

a) Calculeu quants arbres hi ha d'ordre $2n$ que tenen seqüència de Prüfer una paraula on només hi apareixen dos índexs i i j, cadascun d'ells $n-1$ vegades, on $i, j, \in [n]$, $i \neq j$.

b) Demostreu que tots els arbres de l'apartat anterior són isomorfs entre si.

3— (3.5 punts: $1.5 + 1 + 1$) Donat un graf G, definim el graf CG com segueix:

$$V(CG) = \{(u, i) \colon u \in V(G), i = 1, 2\}$$

i si $(u, i), (v, j) \in V(CG)$, llavors $(u, i) \sim (v, j)$ si es satisfà alguna de les condicions:

i) $u \sim v$ a G i $i = j = 1$;

ii) $u = v$ i $i = 1$, $j = 2$, o $i = 2$, $j = 1$;

iii) $u \not\sim v$ a G i $i = j = 2$.

a) Proveu que CG és connex i que té diàmetre 3.

b) Proveu que CG no és eulerià.

c) Trobeu un arbre generador de CG que contingui totes les arestes de la forma $\{(u,1),(u,2)\}$, on $u \in V(G)$.