ETSETB
Probabilidad y Procesos Estocásticos
7 de noviembre de 2008
Duración: 1h45'
Justificar todas las respuestas y detallar los cálculos

1. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & 0 < x < 1 \\ Ke^{-x} & x > 1 \end{cases}$$

donde K es cierto número real.

(a) Calcular K y la probabilidad de que $X > 2$.

Solución:
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} Ke^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{K}{e} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{e}{2},$$

por lo que $f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < x < 1 \\ \frac{e^{-x+1}}{2} & x > 1 \end{cases}$.

$$\mathsf{Prob}\,[X > 2] = \int_2^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^{\infty} e^{-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2e}.$$

(b) Calcular la esperanza de e^{-sX}, donde $s \in \mathbb{R}^+$.

Solución:
$$\mathsf{E}\left[e^{-sX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-sx}\,\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} e^{-sx}\frac{e^{-x+1}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1-e^{-s}}{2s} + \frac{e^{-s}}{2(s+1)}.$$

(c) Calcular $f_{X|X>1}(x)$ y $\mathsf{E}\,[X \mid X > 1]$.

Solución:
$$f_{X|X>1}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{X|X>1}(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathsf{Prob}\,[X \le x \cap X > 1]}{\mathsf{Prob}\,[X > 1]} = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{\mathsf{Prob}[X>1]} = e^{-x+1} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

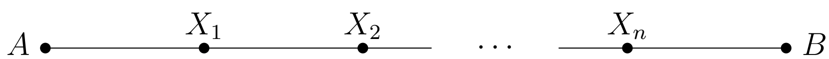
$$\mathsf{E}\,[X \mid X > 1] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|X>1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} xe^{-x+1}\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-x+1}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{-x+1}\,\mathrm{d}x = 2.$$

(d) Calcular la función de densidad de probabilidad de la variable $Y = X^2$.

Solución: Por definición $Y \geq 0$, y cada valor de Y corresponde a un único valor $X = \sqrt{Y}$. Entonces,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y < 1 \\ \frac{e^{-\sqrt{y}+1}}{4\sqrt{y}} & \text{si } y > 1 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}.$$

2. Dos nodos A y B están conectados a través de una cadena de n nodos intermedios $X_1, \ldots, X_n$. Cada nodo intermedio puede fallar con probabilidad ε, independientemente de los demás.

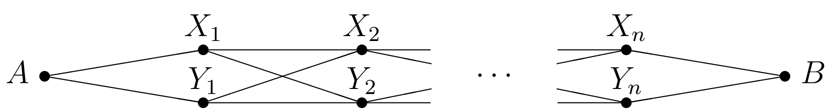


(a) Calcular la probabilidad de que A y B no queden desconectados.

Solución: Denotamos por X_i el suceso "El nodo X_i funciona", por $\overline{X}_i$ el suceso complementario, y por $A - B$ el suceso "A y B están conectados".

$\mathsf{Prob}\,[A - B] = \mathsf{Prob}\,[X_1 \cap \cdots \cap X_n] = \mathsf{Prob}\,[X_1] \cdots \mathsf{Prob}\,[X_n] = (1-\varepsilon)^n.$

(b) Si se duplican los nodos, como se indica en el diagrama inferior, calcular la nueva probabilidad de desconexión.



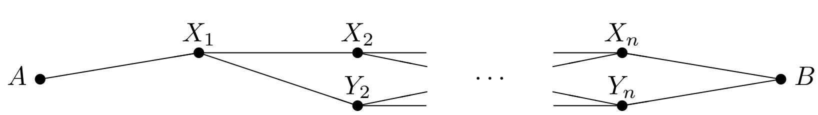
Solución: Ahora, para que A y B permanezcan conectados, tiene que funcionar al menos uno de los nodos X_i e Y_i en cada capa $i = 1, \ldots, n$. Por tanto,

$\mathsf{Prob}\left[\overline{A - B}\right] = 1 - \mathsf{Prob}\,[(X_1 \cup Y_1) \cap \cdots \cap (X_n \cup Y_n)] = 1 - (\mathsf{Prob}\,[X_1 \cup Y_1] \cdots \mathsf{Prob}\,[X_n \cup Y_n]) =$

$= 1 - \big((1 - \mathsf{Prob}\left[\overline{X}_1 \cap \overline{Y}_1\right]) \cdots (1 - \mathsf{Prob}\left[\overline{X}_n \cap \overline{Y}_n\right])\big) = 1 - (1-\varepsilon^2)^n.$

(c) Calcular la probabilidad de que A y B no se desconecten, sabiendo que Y_1 ha fallado.

Solución: Si el nodo Y_1 ha fallado, entonces la red queda como se muestra en el siguiente diagrama.



Por tanto,

$\mathsf{Prob}\left[A - B \mid \overline{Y}_1\right] = \mathsf{Prob}\,[X_1 \cap (X_2 \cup Y_2) \cap \cdots \cap (X_n \cup Y_n)] = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{n-1}.$

(d) Finalmente, se observa que A y B siguen conectados. Calcular la probabilidad de que Y_1 haya fallado.
(**Indicación:** Usar lo que le pasa a los nodos X_1 e Y_1 para establecer una partición del espacio muestral.)

Solución: Directamente, prescindiendo de la indicación y usando el resultado del apartado (b),

$$\mathsf{Prob}\left[\overline{Y}_1 \mid A - B\right] = \frac{\mathsf{Prob}\left[A - B \mid \overline{Y}_1\right] \mathsf{Prob}\left[\overline{Y}_1\right]}{\mathsf{Prob}\left[A - B\right]} = \frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{n-1}\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^n} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

lo que equivale a usar la partición del espacio muestral Y_1, $\overline{Y}_1$ en la fórmula de Bayes.