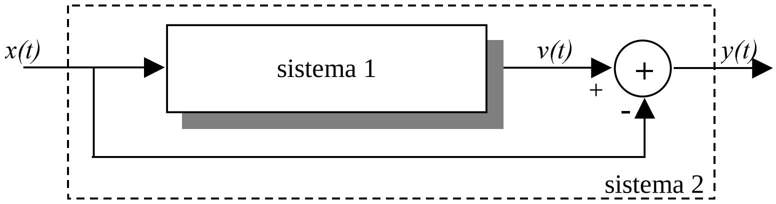
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

Senyals i Sistemes I **Exàmen Final - 18 de Gener de 2001** **Duració: 3 hores**

No es permet l'ús de calculadores, llibres i/o apunts. **Les respostes als diferents exercicis s'han d'entregar en fulls separats**

Problema 1

Para el siguiente esquema:



a) Analice qué propiedades ha de verificar el sistema 1 para que el sistema 2 sea:

a.1) Lineal.

a.2) Invariante.

a.3) Causal.

a.4) Estable.

b) Suponga que el sistema 1 queda perfectamente definido por su respuesta al impulso, $h_1(t) = 1/T * \Pi(t/T)$ y que a la entrada se aplica una señal $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$.

b.1) Calcule $v(t)$ e $y(t)$.

b.2) Calcule $R_{xx}(t)$.

b.3) Calcule $R_{vx}(t)$ y $R_{yx}(t)$.

b.4) Suponga que $f_0 = 1$ KHz y que se puede variar la duración T de la respuesta impulsional del sistema 1. Dibuje la amplitud máxima de $v(t)$ en función de T.

c) Suponga ahora que el sistema 1 queda caracterizado por la siguiente respuesta impulsional: $h_1(t) = \alpha^2\, t \exp(-\alpha t) \cos(2\pi f_m t)\, u(t)$

c.1) Cálcule la respuesta frecuencial de los sistemas 1 y 2 en función de f_m y $f_a = \alpha/2\pi$.

c.2) Suponga que $f_m >> f_a$ y trace un esbozo del módulo de dichas respuestas frecuenciales especificando los valores aproximados en el origen, en f_m, en $f_m + f_a$ y en el infinito.

Problema 2

En aquest exercici es pretén estudiar la Transformada de Hartley (TH) i analitzar algunes de les seves propietats. A diferència de la Transformada de Fourier (TF), una de les seves característiques més valorades és que la Transformada de Hartley d'un senyal real x(t) sempre origina una funció real $X^h(f)$, propietat que ha originat la seva utilització en algunes aplicacions del Processament del Senyal. La definició de la Transformada de Hartley vé donada per l'expressió següent:

$$TH[x(t)] = X^h(f) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)[\cos(2\pi ft) + sin(2\pi ft)]dt = X_p^h(f) + X_s^h(f)$$

Es pot apreciar que, com a tot senyal real, admet la descomposició en una part parell $X_p^h(f)$ i una senar $X_s^h(f)$.

a) Expressi les parts parell i senar de la Transformada de Hartley, $X_p^h(f)$ i $X_s^h(f)$, d'un senyal real x(t) en funció de la seva Transformada de Fourier X(f). Obtingui la Transformada de Hartley de $e^{-2t}.u(t)$. Identifiqui $X_p^h(f)$ i $X_s^h(f)$.

b) A partir de les propietats de la Transformada de Fourier dedueixi la condició de simetria que ha de verificar x(t) per tal que les seves Transformades de Fourier i de Hartley coincideixin $X^h(f) = X(f)$.

c) Determini com es pot obtenir el valor de l'àrea d'un senyal real x(t) a partir de $X_p^h(f)$.

d) Expressi en funció de $X^h(f)$ la Transformada de Hartley dels senyals y(t)=Parell[x(t)] i z(t)=x(at).

e) Obtingui la Densitat Espectral d'un senyal x(t) d'energia finita a partir de $X_p^h(f)$ i $X_s^h(f)$.

f) Es considera el senyal $y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)$, obtingui el seu Desenvolupament en Sèrie de Fourier en funció de les parts parell $X_p^h(f)$ i senar $X_s^h(f)$ de la Transformada de Hartley.

Problema 3

La manera típica de dissenyar un filtre pas banda és fer-ho a partir d'un prototipus pas baix. Hi ha però diferents maneres de transformar el prototipus en pas banda, com s'analitzarà en part en aquest problema.

a) Suposi que disposa d'un prototipus pas baix de funció de transferència $H_{bn}(s)=[(s+1)(s^2+s+1)]^{-1}$. Es demana:

a.1) Diagrama de pols i zeros.

a.2) Posició i nombre de zeros de transmissió i de zeros d'atenuació.

a.3) A quina/es freqüència/es (o pulsació) té una atenuació de 3 dB?

a.4) Justifiqui que la resposta impulsional d'aquest prototipus es pugui escriure com $h_{bn}(t) = k_1 e^{-\sigma_1 t} u(t) + k_2 e^{-\sigma_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) u(t)$, i obtingui els paràmetres σ_1, σ_2 i ω_2.

b) A partir del prototipus de l'apartat anterior i mitjançant el mètode de transformació de freqüències es vol dissenyar un filtre pas banda centrat a 650 Hz. i d'ampla de banda a 3 dB de 500 Hz. Dibuixi acuradament la funció d'atenuació del filtre pas banda. Marqui i justifiqui els valors més descats d'aquesta corba. Especifiqui clarament quina és la transformació o transformacions de freqüències que li permet passar del prototipus normalitzat donat en l'apartat a) al pas banda dessitjat.

c) Justifiqui que si $h_b(t)$ és la resposta impulsional d'un filtre pas baix, $h(t)=2h_b(t)\cos\omega_0 t$ és la resposta impulsional d'un pas banda. Hi ha alguna restricció en aquesta afirmació?

d) A partir del prototipus de l'apartat a) i mitjançant el mètode descrit en l'apartat anterior, es vol dissenyar el filtre pas banda especificat en l'apartat b). Es demana:

d.1) Dibuixi de forma aproximada la funció d'atenuació i la resposta freqüencial (mòdul) d'aquest filtre pas banda.

d.2) Es pot afirmar que l'atenuació del pas banda a 400Hz, $\alpha(400)$, coincideix amb el valor de l'atenuació del prototipus pas baix a 1, $\alpha_{bn}(1)$? Justifiqui la seva resposta.

d.3) Expressió exacta de la resposta impulsional del pas banda.

d.4) Dibuixi justificadament el diagrama de pols i zeros del nou filtre.

e) Suposi que vol dissenyar un filtre pas banda que tingui una atenuació màxima α_p dB per $|f| \in [f_c-B , f_c+B]$ i una atenuació mínima de α_a dB per $|f| \leq f_c-2B$ i per $|f| \geq f_c+2B$. Comprovi que l'ordre mínim del filtre requerit per verificar aquestes especificacions pot ser més petit utilitzant el mètode proposat en l'apartat c) que no pas utilitzant la transformació de freqüències $\Omega = \dfrac{\omega^2 - 4\pi^2 (f_c - B)(f_c + B)}{\omega}$. Si vol, ajudi's de l'exemple $f_c=1000$, B=100. Què pot dir quan $f_c \gg B$?