Problemas resueltos

Análisis Vectorial, ETSETB

2006

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 27-04-2000

1. Calcular el volumen de la región acotada de $\mathbb{R}^3$, definida por las desigualdades

$$z - 2 + x^2 + y^2 \leq 0 \quad , \quad z^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad , \quad z \geq 0$$

2. Estudiar si la función $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ es diferenciable en $(0,0)$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Sabiendo que la ecuación

$$f(x^2 - y^2, y^2 - z^2) = 0$$

satisface las condiciones del teorema de la función implícita, y permite obtener z como función de x, y en el entorno de cualquier punto, calcular

$$yx\frac{\partial z}{\partial x} + zx\frac{\partial z}{\partial y}$$

4. Sea la función $g(u,v) = (u^v, v^u)$, definida en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

   a) Dar la relación entre u y v que determina los puntos tales que en un entorno de ellos g tiene inversa diferenciable.

   b) Calcular una antiimagen por g del punto $(8,9)$.

   c) Justificar que g es inversible en un entorno del punto $(2,3)$, y calcular $Dg^{-1}(g(2,3))$

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 20-11-2000

1. Se considera la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(u,v) = (x,y) = (u+v, v-u^2)$.

   a) ¿En qué puntos φ tiene inversa local diferenciable? Calcular $D\varphi^{-1}(2,2)$.

   b) Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ la región interior al triángulo de vértices $(0,0), (2,0)$ y $(0,2)$. Si llamamos $S = \varphi(T)$, calcular el área de S dibujando posteriormente la región de S.

2. Sean $f(x,y)$, una función de clase C^2, el cambio de variables $g(u,v) = (x,y) = \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{4}\right)$ y $\tilde{f} = f \circ g$.

   a) Expresar la ecuación diferencial $4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en las nuevas variables. (Sugerencia: sólo hace falta obtener $\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y}$).

   b) Utilizando el apartado anterior dar una expresión general de las soluciones de dicha ecuación y comprobar que $f(x,y) = p(x-2y) + q(x+2y)$, con p y q funciones reales derivables al menos dos veces, es solución.

3. Dado el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1$:

   a) Dar la ecuación del plano tangente en el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)$.

b) Determinar el volumen limitado por dicho plano y los planos coordenados.

4. Dada la función $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ y el punto $P = (0,0)$:

   a) Estudiar su continuidad en dicho punto.

   b) Calcular las parciales de f en P.

   c) Estudiar la diferenciabilidad de f en P.

ANÁLISIS VECTORIAL. G 10 ETSETB. 27-11-00

1. Estudiad la continuidad y diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

2. Considérese la función $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)$ y las regiones

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x^2+y^2) \leq z^2 \leq 1 + x^2 + y^2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x^2+y^2) \leq z^2 \leq 1 + x^2 + y^2\}$$

   a) Calculad $\displaystyle\int_A f$.

   b) Sin hacer ningún cálculo, obtened razonadamente el valor de $\displaystyle\int_B f$.

3. Sea $F(u,v,w)$ una función de clase C^1 tal que $F(1,0,2) = 0$ y $\nabla F(1,0,2) = (1,0,-1)$. Sea $g(x,y,z) = (e^{x+y-z}, x, x^2+y^2+z^2)$. Sea $G = F \circ g$.

   a) Determinad los puntos $p = g^{-1}(1,0,2)$.

   b) Calculad $\nabla G(p)$, siendo p los puntos del apartado anterior.

   c) Estudiad si, en un entorno de cada punto p, a partir de la ecuación $G(x,y,z) = 0$, se puede obtener $z = f(x,y)$.

   d) Obtened la ecuación del plano tangente a $graf\ f$ en el punto $(0,1,f(0,1))$.

ANÁLISIS VECTORIAL. G 40 y 60 ETSETB. 27-11-00

1. Utilizando una transformación lineal conveniente calcular $\int\int_S (x-y)^2 \sin^2(x+y)dxdy$, donde S es el paralelogramo de vértices $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ y $(0,\pi)$.

2. Sean $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(x,y) = \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$ y P el punto $(0,1)$

   a) Estudiar si $\mathbf{f}(x,y)$ es diferenciable con continuidad en un entorno de P.

   b) Justificar si $\mathbf{f}(x,y)$ tiene inversa local diferenciable en un entorno de P. Si la tiene, dar $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(0,1))$.

   c) Determinar las soluciones de la ecuación $\mathbf{f}(x,y) = (-1,0)$.

   d) Con el resultado del apartado anterior, ¿se puede asegurar que $\mathbf{f}(x,y)$ es inversible o no inversible en ciertos puntos?

3. Dada la función $F(x,y,z) = xyz + \sin(z-6) - 2(x+y+x^2y^2)$

a) Estudiar si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define, en un entorno del punto $(1, 1, 6)$, a z función de x e y, $z = f(x, y)$, y dar las derivadas parciales de f en su punto correspondiente.

b) Con lo obtenido en (*a*), definir la ecuación del plano tangente a la gráfica de f dando el punto de tangencia.

c) Decir si existe, en un entorno de $(1, 1, 6)$ alguna superficie de nivel del campo escalar $F(x, y, z)$ que defina a la superficie $z = f(x, y)$, calculando, utilizando la función $F(x, y, z)$, su plano tangente.

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 10-5-2001

1. Sea la función $f(x,y)=\left\{\begin{array}{cc} 1+(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{array}\right.$. Determinar si es diferenciable en $(0,0)$ y, en tal caso, obtener el punto de intersección del plano tangente a la gráfica de f en $(0,0,f(0,0))$ con el eje OZ.

2. Sean las funciones

$$f(x,y,z)=(xe^{yz}, y\sin x+z, yz-xy-zx) \quad , \quad g(x,y)=(\cos(x+y)+z, e^{yx}-z)$$

   a) Demostrar que existe la función f^{-1} en un entorno de $p=(\pi,0,1)$, que es diferenciable, y calcular $J_{f(p)}f^{-1}$. Especificar el punto $f(p)$.

   b) Considérese la función $F=g\circ f^{-1}$. Justificar la existencia de la diferencial de F en $f(p)$ y calcular $J_{f(p)}F$.

   c) Demostrar que la ecuación $F(t,u,v)=0$ (con F la función del apartado anterior) permite definir $u=h_1(t)$, $v=h_2(t)$ en un entorno de $f(p)$. Probar que la función $h(t)=(h_1(t),h_2(t))$ es diferenciable en $t_0=\pi$, y calcular $J_\pi h$.

3. Dadas la función $f(x,y,z)=\dfrac{ze^{-z^2}}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $(\alpha>0)$, y la región

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1\ ,\ 0\leq z\leq a\}.$$

   a) Estudiar para qué valores de α es convergente la integral $\displaystyle\int_A f$.

   b) Para los valores de α hallados en el apartado anterior, estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_B f$, donde

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1\ , z\geq 0\}.$$

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 11-05-2001

1. *a*) Determinar el volumen limitado por los planos coordenados y el plano tangente a la superficie $x^2+y^2+z^2=1$ en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

   b) Hallar el volumen de la región $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1-y\leq z\leq 1-x^2-y^2\}$.

2. Dada la función $F(x,y,z,t)=(x+xy+zt-2, t+tx+yz+2)$ y el punto $P=(1,1,0,-1)$

   a) Demostrar que la ecuación $F(x,y,z,t)=0$ define una función diferenciable , $h(y,z)=(x(y,z),t(y,z))$, en un entorno de P y dar su matriz jacobiana en $(1,0)$, $Jh(1,0)$.

   b) Probar que en un entorno del punto $(1,0)$, existe la función h^{-1}. Calcular $h(1,0)$ y dar la matriz jacobiana $Jh^{-1}(h(1,0))$ utilizando el Teorema de la Función inversa.

   c) Determinar $Jh^{-1}(h(1,0))$ a partir de la ecuación $F(x,y,z,t)=0$ como aplicación del Teorema de Función implícita.

3. *a*) Determinar el dominio de diferenciabilidad de la función $f(x,y)=\tan(x+y)$.

   b) Dada la función $g(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$ calcular, si existe, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2)$

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 29-04-2003

1. Obtener el interior, la adherencia, el conjunto de puntos de acumulación, el exterior y la frontera de los conjuntos siguientes:

   a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \geq x^2 + y^2\}$.

   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \geq 0 \ , \ x + y = n \text{ donde } n \in \mathbb{Z}\}$.

2. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   a) Estudiad la continuidad de f.

   b) Estudiad la diferenciabilidad de f.

3. Considerad las superficies $S_1 \ : \ x + y + z = 3$, $S_2 \ : \ x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$, $S_3 \ : \ x^2 - y^2 - 2z^2 = 30$.

   a) Las superficies S_1, S_2 se cortan según una curva C. Encontrad la ecuación de la recta tangente a C en el punto $(1, 1, 1)$.

   b) Encontrad el ángulo entre la recta tangente del apartado (a) y la superficie S_3 en el punto donde la recta tangente y la superficie se cortan.

4. Considerad el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcccl} xz^3 & + & y^2t^3 & = & 1 \\ 2xy^3 & + & zt^2 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{y el punto solución } p = (0, 1, 0, 1)$$

   a) Razonad que en un entorno de p define x, y como funciones implícitas diferenciables de z, t $(x = f(z, t), y = g(z, t))$.

   b) Sea $F : U \to \mathbb{R}^2$ donde U es un abierto de $\mathbb{R}^2$, tal que $F(z, t) = (f(z, t), g(z, t))$. Calculad la diferencial de F en $(0, 1)$.

   c) Sea $\phi : U \to \mathbb{R}$, donde U es abierto de $\mathbb{R}^2$ y $\phi(z, t) = tf(z, t) + zg(z, t)$. En qué dirección es máxima la derivada direccional de ϕ en el punto $(0, 1)$?

5. Sea $f(x, y)x^2 + y^2 - xy + x + y$, y el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$

   a) Calculad y clasificad los puntos críticos de f.

   b) Justificad que f tiene extremos absolutos en D y calculadlos.

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 25-11-2003

Considérese $p = (1, -1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ y la función

$$\mathbf{F}(x, y, z, t) = (F_1(x, y, z, t), F_2(x, y, z, t)) = (xy \ln x + e^{zt} - 1, y + te^{z-t} + 1)$$

1. Determinar el dominio de $\mathbf{F}$. Estudiar si $\mathbf{F}$ es continua, diferenciable y de clase C^1 en su dominio.
2. Ver si el conjunto $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, F_2(x, y, z, t) = 0\}$ es abierto, cerrado o ninguna de ambas.
3. Calcular la derivada direccional de F_1 en p según el vector $\nabla F_2(p)$.
4. Demostrar que, en un entorno U de p, existe $\mathbf{f}(y, z) = (f_1(y, z), f_2(y, z))$ tal que $x = f_1(y, z), t = f_2(y, z)$. ¿Se puede asegurar que existe $\mathbf{g}(x, t) = (g_1(x, t), g_2(x, t))$ tal que $y = g_1(x, t), z = g_2(x, t)$ en un entorno de p?
5. Justificar que $\mathbf{f}(y, z)$ es de clase C^1 y calcular su Jacobiano en $a = (-1, 1)$.
6. ¿Qué se puede decir sobre la existencia de $\mathbf{f}^{-1}$ en un entorno de $\mathbf{f}(a)$? Dar las coordenadas de $\mathbf{f}(a)$. ¿Es $\mathbf{f}$ un difeomorfismo en algún entorno de a?

7. Discutir si $\mathbf{f}$ es un campo conservativo y/o si es un campo solenoidal.

8. Discutir si $f_1(y,z)$ puede tener en a un extremo local libre o un extremo condicionado a la ligadura $f_2(y,z) = 0$

9. Demostrar que la superficie $S_2 = \text{graf } f_2 \subset \mathbb{R}^3$ es regular en $(a, f_2(a))$.

10. Obtener las ecuaciones de la recta normal y el plano tangente a S_2 en $(a, f_2(a))$.

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 30-04-2004

1. Sea $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ en la unión de las esferas $E_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Determinad el interior, exterior, frontera, adherencia y acumulación de D e indicad si es abierto, cerrado, acotado o compacto dicho conjunto.

2. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, a y b puntos de acumulación de A y B respectivamente. Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{y\to b} g(y) = c$,

   a) ¿Cuándo se puede asegurar que $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$?

   b) Aplicad lo anterior para determinar si existe el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2+1)}$.

   c) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2+1)}$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$. Definid $f(0,0)$ para que f sea continua y estudiad su diferenciabilidad en el punto $(0,0)$

3. Sea $\varphi(u,v) = (x,y) = (\sin u + \cos v, \cos u + \sin v)$

   a) Estudiad en qué puntos φ admite inversa local diferenciable.

   b) Sea la región $A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi/2 \le u+v \le 3\pi/2\}$, dad el conjunto $B = \varphi(A)$.

4. Dada la ecuación $xy + 2\ln x + 3\ln y - 1 = 0$

   a) Probad que define, en un entorno del punto $(1,1)$ a y como función de $x, y = f(x)$.

   b) Justificad que esta función $f(x)$ tiene polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 1$ y obtenedlo.

   c) Dad las ecuaciones que permiten obtener los puntos críticos de las funciones $y = f(x)$ definidas implícitamente por la ecuación del enunciado.

ANÀLISI VECTORIAL– grup 60. 03/05/2004

1. Considera la funció:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Estudia la continuïtat de f.

   b) Calcula'n, si existeix, la derivada direccional en el punt $(0,0)$ segons el vector (a,b).

   c) Digues, raonadament, si f és o no de classe C^1 i troba'n, si existeix, la diferencial en el punt $(0,0)$.

2. L'equació

$$z^3y + 3xe^{z-1} + 2x^2 + y^2 = 0$$

   defineix implícitament, sota certes condicions, z com a funció de x i y: $z = f(x,y)$.

   a) Raona que f així definida existeix sense ambigüitats en un entorn del punt $(x,y) = (0,-1)$ i hi és diferenciable. Què val $f(0,-1)$?

   b) Escriu l'aproximació lineal de f en el punt $(0,-1)$ i digues quin és el màxim valor de $D_{\vec{u}}f(0,-1)$ (la derivada direccional segons el vector $\vec{u}$) quan $\vec{u}$ és un vector unitari.

c) Sigui $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una funció vectorial definida així: $g(t) := (t^3, 6t)$. Comprova si la funció $h := g \circ f$ verifica les hipòtesis del teorema de la funció inversa en el punt $(0, -1)$ i, en aquest cas, troba la matriu jacobiana de la funció h^{-1} en el punt $h(0, -1)$.

3. Considera la corba $C \subset \mathbb{R}^3$, que és la intersecció de les superfícies S_1 i S_2, definides implícitament mitjançant les següents equacions:

$$S_1: \ z^2 + xy = 0 \qquad S_2: \ x^2 + y^2 = 2$$

Troba, si existeixen, el punt o punts de C on la recta que hi és tangent és paral.lela a la recta definida per les equacions $x - y = 0$ i $z = 0$.

4. Considera la funció $f(x, y) = x^3 - x^2 - y^2 + 3y - xy$.

a) Troba tots els seus punts crítics i digues si són màxims, mínims o punts de sella.

b) Troba el màxim i el mínim absolut de f en el conjunt:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 2, \ x \geq 0, \ y \geq 0\right\}$$

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 26-11-2004

1. Dada la función $\mathbf{f}(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 - 2}, \log(x^2 + y^2 + z^2 - 1)) \equiv (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$.

a) Determinar $A = \text{Dom}\mathbf{f}$ y dar In t A, Ext A, Fr A.

b) Dado el conjunto $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f_1(x, y, z) \in \mathbb{N}, \ f_2(x, y, z) \geq 0\}$. Discutir si B es abierto, cerrado, ni abierto ni cerrado, o no se puede determinar su carácter.

2. Sea $p = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ y una función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en un entorno de p, tal que su polinomio de Taylor de segundo grado en p es $P_2(f; p) = \frac{1}{2}z^2 + \sqrt{2}xz - \sqrt{2}z$.

Probar que p es un punto crítico de f y determinar su carácter.

3. Dado el sistema $\left.\begin{array}{rcl} xy(u-v) + uv(x+y) & = & 2 \\ x + y - u + v & = & 2 \end{array}\right\}$.

a) Demostrar que en un entorno del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ el sistema define u y v como funciones de x e y. Justificar que las superficies $z = u(x, y)$ y $z = v(x, y)$ son regulares en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

b) Demostar que las superficies anteriores se cortan en una curva regular en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Calcular la recta tangente y el plano normal a dicha curva en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

4. Sea la función $f(x, y) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x - y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 2x\cos(x^2) & \text{si} \quad x = y \end{array}\right.$.

a) Estudiar su continuidad. (*Recuérdese que* $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$).

b) Estudiar la diferenciabilidad en $(0, 0)$.

1. Calcular el volumen de la región acotada de $\mathbb{R}^3$, definida por las desigualdades

$$z - 2 + x^2 + y^2 \leq 0 \quad , \quad z^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad , \quad z \geq 0$$

Resolución

$z = 2 - x^2 - y^2$ es un paraboloide con vértice en $(0, 0, 2)$
$z^2 = x^2 + y^2$ es un cono

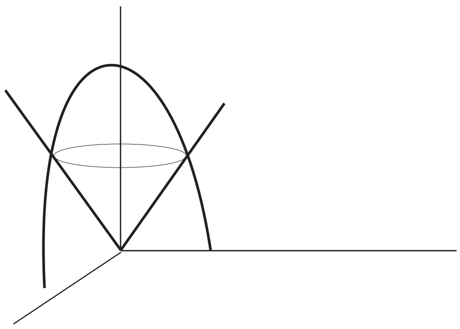


Figura 1:

$$\left.\begin{array}{r} z - 2 + x^2 + y^2 = 0 \\ z^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{array}\right\} z^2 + z - 2 = 0 \longrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \longrightarrow 1 \\ \longrightarrow -2 \end{array}$$

El paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ se cortan en $z \geq 0$ en una circunferencia situada en el plano $z = 1$, de centro $(0, 0, 1)$ y radio 1.

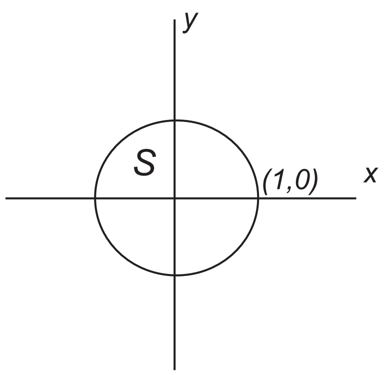


Figura 2:

$$Volumen = \int\int\int_V dxdydz = \int\int_S dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} dz = \int\int_S (2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2})dxdy =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2 - r^2 - r)rdr = 2\pi \int_0^1 (2r - r^2 - r^3) = 2\pi \left[r^2 - \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = 2\pi \frac{12 - 4 - 3}{12} = 2\pi \frac{5}{12} = \frac{5\pi}{6}$$

2. Estudiar si la función $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ es diferenciable en $(0,0)$

Resolución

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0$$

Condición de tangencia, en nuestro caso

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

Calculando límites direccionales :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2|m|}}{\sqrt{x^2(1+m^2)}}=\sqrt{\frac{|m|}{1+m^2}}$$

dependen de m, luego f no es diferenciable en $(0,0)$

3. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función de clase C^1. Sabiendo que la ecuación

$$f(x^2-y^2,y^2-z^2)=0$$

satisface las condiciones del teorema de la función implícita, y permite obtener z como función de x,y en el entorno de cualquier punto, calcular

$$yx\frac{\partial z}{\partial x}+zx\frac{\partial z}{\partial y}$$

Resolución

Derivando la ecuación anterior respecto a x, obtenemos

$$f_{x_1}(x^2-y^2,y^2-z^2)2x+f_{x_2}(x^2-y^2,y^2-z^2)(-2z)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

y derivando respecto de y, obtenemos

$$f_{x_1}(x^2-y^2,y^2-z^2)(-2y)+f_{x_2}(x^2-y^2,y^2-z^2)(2y-2z\frac{\partial z}{\partial y})=0$$

de donde

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xf_{x_1}(x^2-y^2,y^2-z^2)}{zf_{x_2}(x^2-y^2,y^2-z^2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-yf_{x_1}(x^2-y^2,y^2-z^2)+yf_{x_2}(x^2-y^2,y^2-z^2)}{zf_{x_2}(x^2-y^2,y^2-z^2)}$$

luego

$$yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=yx\frac{f_{x_1}(x^2-y^2,y^2-z^2)}{f_{x_2}(x^2-y^2,y^2-z^2)}-xy\frac{f_{x_1}(x^2-y^2,y^2-z^2)}{f_{x_2}(x^2-y^2,y^2-z^2)}+xy=xy$$

4. Sea la función $g(u,v)=(u^v,v^u)$, definida en $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$.

a) Dar la relación entre u y v que determina los puntos tales que en un entorno de ellos g tiene inversa diferenciable.

b) Calcular una antiimagen por g del punto $(8,9)$.

c) Justificar que g es inversible en un entorno del punto $(2,3)$, y calcular $Dg^{-1}(g(2,3))$

Resolución

a)

$$g(u,v) = (u^v, v^u) = (e^{v\ln u}, e^{u\ln v})$$

g es de clase C^1 en su dominio

$$det\, Dg(u,v) = \begin{vmatrix} vu^{v-1} & u^v \ln u \\ v^u \ln v & uv^{u-1} \end{vmatrix} = u^v v^u (1 - \ln u \ln v)$$

Para que se den las hipótesis del Teorema de la función inversa es preciso que $\ln u \ln v \neq 1$

b)

$$g(u,v) = (u^v, v^u) = (8,9)$$

luego

$$v \ln u = \ln 8 = 3 \ln 2$$

$$u \ln v = \ln 9 = 2 \ln 3$$

Es fácil ver que una antiimagen de $(8,9)$ es el punto $(2,3)$

c) Como $\ln 2 \ln 3 \neq 1$ se cumplen las hipótesis del Teorema de la función inversa y

$$D\, g^{-1}(8,9) = [Dg(2,3)]^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 8\ln 2 \\ 9\ln 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 20-11-2000

1. Se considera la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(u,v) = (x,y) = (u+v, v-u^2)$.

   a) ¿En qué puntos φ tiene inversa local diferenciable? Calcular $D\varphi^{-1}(2,2)$.

   b) Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ la región interior al triángulo de vértices $(0,0), (2,0)$ y $(0,2)$. Si llamamos $S = \varphi(T)$, calcular el área de S dibujando posteriormente la región de S.

Resolución

a) φ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$

$$det\, D\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2u \neq 0$$

Se cumplen las hipótesis del Teorema de la función implícita en los puntos (u,v) tales que $u \neq -\dfrac{1}{2}$.
Calculemos en primer lugar los puntos (u,v) tales que $\varphi(u,v) = (2,2)$. Sea

$$\left.\begin{array}{r} u+v=2 \\ -u^2+v=2 \end{array}\right\} u+u^2=0 \Rightarrow u(u+1)=0 \qquad \begin{array}{l} \to u=0 \Rightarrow v=2 \\ \to u=-1 \Rightarrow v=3 \end{array}$$

Vemos que $\varphi(0,2) = \varphi(-1,3) = (2,2)$
Como tanto en $(0,2)$ como en $(-1,3)$ se cumplen las hipótesis del Teorema de la función inversa, sabemos que
existen U_1 abierto de $\mathbb{R}^2$, $\quad (0,2) \in U_1$ y V_1 abierto de $\mathbb{R}^2$, $\quad (2,2) \in V_1$, tal que

$$\varphi : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to V_1 \subset \mathbb{R}^2$$

es biyectiva y

$$D\,\varphi^{-1}(2,2) = [D\varphi(0,2)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y también existen U_2 abierto de $\mathbb{R}^2$, $\quad (-1,3) \in U_2$ y V_2 abierto de $\mathbb{R}^2$, $\quad (2,2) \in V_2$, tal que

$$\varphi : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to V_2 \subset \mathbb{R}^2$$

es biyectiva y

$$D\,\varphi^{-1}(2,2) = [D\varphi(2,2)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

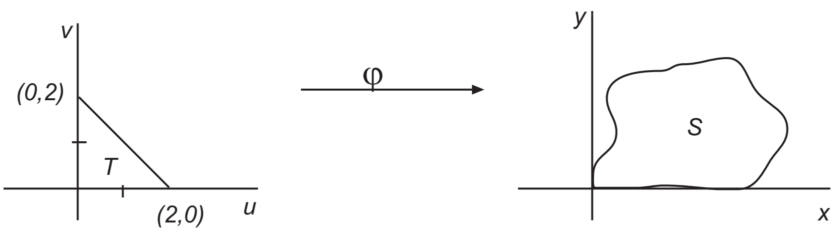


Figura 3: apartado b

b)

$$\text{Área de } S = \int\!\!\int_S dxdy = \int\!\!\int_T |1+2u| dudv = \int\!\!\int_T (1+2u) dudv = \int_0^2 du \int_0^{2-u} (1+2u) dv =$$

$$= \int_0^2 (1+2u)(2-u)du = \int_0^2 (2+3u-2u^2)du = 2u + \frac{3u^2}{2} - \frac{2u^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{14}{3}$$

Vamos ahora a dibujar la región S.
Los puntos del segmento que une $(0,0)$ con $(2,0)$ son de la forma $(u,0)$. Como

$$\varphi(u,0) = (u, -u^2)$$

su imagen son los puntos sobre la parábola $y = -x^2$ que unen $(0,0)$ con $(2,-4)$. Los puntos del segmento que une $(2,0)$ con $(0,2)$ son de la forma $(u, 2-u)$. Como

$$\varphi(u, 2-u) = (2, 2-u-u^2)$$

su imagen son los puntos de la recta $x = 2$ que unen el punto $(2,-4)$ con $(2,2)$.
Finalmente, los puntos del segmento que une $(0,2)$ con $(0,0)$ son de la forma $(0,v)$. Como

$$\varphi(0,v) = (v,v)$$

su imagen son los puntos de la recta $x = y$ que unen el punto $(2,2)$ con el punto $(0,0)$.
Así

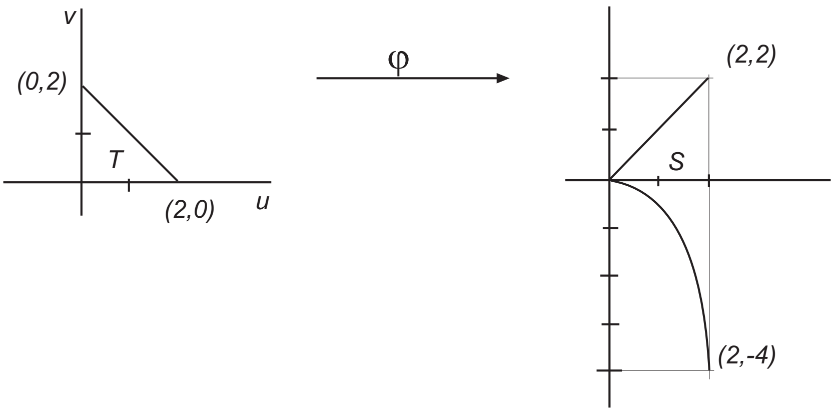


Figura 4: apartado b

Comprobemos que el área de S es la obtenida anteriormente

$$\text{área de } S = \int\int_S dxdy = \int_0^2 dx \int_{-x^2}^{x} dy = \int_0^2 (x+x^2)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{2} + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

2. Sean $f(x,y)$, una función de clase C^2, el cambio de variables $g(u,v) = (x,y) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{4}\right)$ y $\tilde{f} = f \circ g$.

   a) Expresar la ecuación diferencial $4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en las nuevas variables. (Sugerencia: sólo hace falta obtener $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y}$).

   b) Utilizando el apartado anterior dar una expresión general de las soluciones de dicha ecuación y comprobar que $f(x,y) = p(x-2y) + q(x+2y)$, con p y q funciones reales derivables al menos dos veces, es solución.

Resolución

a)

$$D\tilde{f}(u,v) = D(f \circ g)(u,v) = Df(g(u,v))Dg(u,v) =$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial u}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{1}{4}\right] \\ &= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{16}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{16}\left[4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] \end{aligned}$$

luego la ecuación $4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en las nuevas variables es

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v} = 0$$

b) Por el apartado (a) sabemos que la ecuación

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

respecto de las variables u y v toma la forma

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v} = 0$$

luego, deducimos que

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = A(v) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{f}(u,v) = \int A(v)dv + C(u)$$

Análogamente, como $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v} = 0$, deducimos que

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = B(u) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{f}(u,v) = \int B(u)du + D(v)$$

luego la solución general en coordenadas u, v, será

$$\tilde{f}(u,v) = \int A(v)dv + \int B(u)du + K$$

Como

$$\begin{aligned} u &= x + 2y \\ v &= x - 2y \end{aligned}$$

podemos afirmar que $f(x,y) = p(x-2y) + q(x+2y)$ es solución de la ecuación dada suponiendo que p y q son funciones reales dos veces derivables.

3. Dado el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1$:

   a) Dar la ecuación del plano tangente en el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)$.

   b) Determinar el volumen limitado por dicho plano y los planos coordenados.

Resolución

a)

$$4\frac{1}{16} + 4\frac{1}{16} + \frac{1}{2} = 1$$

el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)$ pertenece al elipsoide

Sea

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + \frac{z^2}{2} - 1$$

$$\nabla f(x, y, z) = (8x, 8y, z)$$

$$\nabla f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1) = (2, 2, 1)$$

El plano tangente tiene por ecuación

$$(x - \frac{1}{4})2 + (y - \frac{1}{4})2 + (z - 1) = 0$$

$$2x - \frac{1}{2} + 2y - \frac{1}{2} + z - 1 = 0$$

$$\boxed{\text{2x+2y+z=2}}$$

b) Los puntos de corte del plano $2x + 2y + z = 2$ con los ejes coordenados son $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$

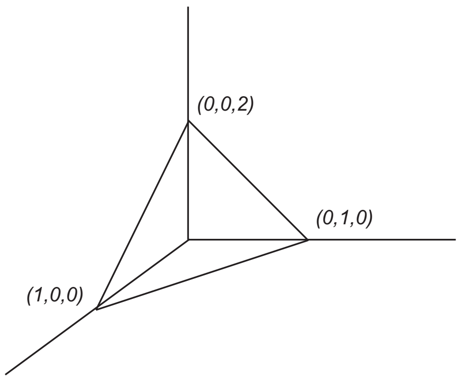


Figura 5: apartado b

$$\text{Volumen} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{2-2x-2y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2 - 2x - 2y)dy =$$
$$= \int_0^1 dx \left[2y - 2xy - y^2\right]_0^{1-x} = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \frac{1}{3}$$

4. Dada la función $f(x, y) = \dfrac{x^3y^2}{x^4 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$ y el punto $P = (0, 0)$:

   a) Estudiar su continuidad en dicho punto.

b) Calcular las parciales de f en P.

c) Estudiar la diferenciabilidad de f en P.

Resolución

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Sabemos que $|xy| \leq x^2 + y^2$, luego $x^2y^2 \leq x^4 + y^4$. Así

$$0 \leq \left| \frac{x^3y^2}{x^4+y^4} \right| \leq |x| \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \leq |x| \longrightarrow 0 \text{ cuando } (x,y) \to (0,0)$$

por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Así que f es continua en $(0,0)$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Calculamos los límites direccionales

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=mx}} \frac{x^3y^2}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{x^5m^2}{(x^4+x^4m^4)\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{x}{|x|} \frac{m^2}{(1+m^4)\sqrt{1+m^2}}$$

que no existe si $m \neq 0$

Por tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$

ANÁLISIS VECTORIAL. G 10 ETSETB. 27-11-00

1. Estudiad la continuidad y diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y\sin\frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Resolución

Continuidad:
Los puntos conflictivos que hemos de estudiar son los del eje OX.
Como el límite del producto de una función que tiende a cero por una función acotada es cero, se tiene,

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} y\sin\frac{x}{y} = 0$$

Luego f es continua en $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0) : x \neq 0\}$. Esto es, en todo $\mathbb{R}^2$ salvo el eje OX, excepto el $(0,0)$ donde también es continua.

Diferenciablilidad:
Basta estudiarla en los puntos de continuidad de la función. Evidentemente, es diferenciable con continuidad en todo punto (x,y) con $y \neq 0$. Veamos qué ocurre en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

Condición de tangencia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y\sin\frac{x}{y}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Calculemos los límites direccionales

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{mx\sin\frac{x}{mx}-x}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}\frac{m\sin\frac{1}{m}-1}{\sqrt{1+m^2}}$$

dependen de m.Luego f es diferenciable en $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

2. Considérese la función $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)$ y las regiones

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x^2+y^2) \leq z^2 \leq 1+x^2+y^2,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x^2+y^2) \leq z^2 \leq 1+x^2+y^2\}$$

a) Calculad $\displaystyle\int_A f$.

b) Sin hacer ningún cálculo, obtened razonadamente el valor de $\displaystyle\int_B f$.

Resolución

a) $z^2 = 1 + x^2 + y^2$ es el hiperboloide de dos hojas de vértices los puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$.
$2(x^2 + y^2) = z^2$ es un cono de vértice $(0, 0, 0)$.
Calculemos el corte de estas dos superficies

$$2(x^2 + y^2) = 1 + x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}$$

Luego estas dos superficies se cortan en dos circunferencias situadas en los planos $z = \sqrt{2}$ y $z = -\sqrt{2}$ respectivamente, de centros los puntos $(0, 0, \sqrt{2})$ y $(0, 0, -\sqrt{2})$ y radio 1. Por tanto

$$\int_A f = \int\int_T dxdy \int_{\sqrt{2(x^2+y^2)}}^{\sqrt{1+x^2+y^2}} z(x^2 + y^2)dz$$

Siendo T el primer cuadrante de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1

$$\int_A f = \int\int_T (x^2 + y^2)\frac{1}{2}[1 + x^2 + y^2 - 2(x^2 + y^2)] = \int\int_T \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)dxdy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2}r^2(1 - r^2)rdr = \frac{\pi}{8}\int_0^1 (r^3 - r^5)dr = \frac{\pi}{8}\left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right] = \frac{\pi}{8}\frac{1}{12} = \frac{\pi}{96}$$

b) B se compone de dos zonas simétricas respecto del plano $z = 0$. Los valores que toma f en los puntos correspondientes respecto de la simetría son opuestos, luego

$$\int_B f = 0$$

3. Sea $F(u, v, w)$ una función de clase C^1 tal que $F(1, 0, 2) = 0$ y $\nabla F(1, 0, 2) = (1, 0, -1)$. Sea $g(x, y, z) = (e^{x+y-z}, x, x^2 + y^2 + z^2)$. Sea $G = F \circ g$.

   a) Determinad los puntos $p = g^{-1}(1, 0, 2)$.
   b) Calculad $\nabla G(p)$, siendo p los puntos del apartado anterior.
   c) Estudiad si, en un entorno de cada punto p, a partir de la ecuación $G(x, y, z) = 0$, se puede obtener $z = f(x, y)$.
   d) Obtened la ecuación del plano tangente a $Graf\, f$ en el punto $(0, 1, f(0, 1))$.

Resolución

a) $p = g^{-1}(1, 0, 2)$

$$\left.\begin{array}{rcl} e^{x+y-z} &=& 1 \\ x &=& 0 \\ x^2+y^2+z^2 &=& 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} e^{y-z} &=& 1 \\ x &=& 0 \\ y^2+z^2 &=& 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} y-z &=& 0 \\ x &=& 0 \\ y^2+z^2 &=& 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{cc} y = z & x = 0 \\ 2z^2 = 2 & z = \pm 1 \end{array}$$

Así que los puntos $p = g^{-1}(1, 0, 2)$ son

$$\boxed{(0,1,1) \quad (0,-1,-1)}$$

b)

$$\nabla G(p) = \nabla(F \circ g)(p) = DF[g(p)]Dg(p)$$

$$\nabla G(0, 1, 1) = DF(1, 0, 2)Dg(0, 1, 1) = (1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} e^{x+y-z} & e^{x+y-z} & -e^{x+y-z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}_{(0,1,1)} =$$

$$= (1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (1,\ -1,\ -3)$$

$$\nabla G(0,-1,-1) = (1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = (1,\ 3,\ 1)$$

c) Como $\nabla G(0,1,1) = (1,-1,-3)$, por ser $-3 \neq 0$ podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita y obtener
un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, $\quad (0,1) \in U$
un abierto $V \subset \mathbb{R}$, $\quad 1 \in V$
y una aplicación $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset \mathbb{R}$ tal que

$$G(x,y,f(x,y)) = 0 \qquad \forall (x,y) \in U$$

Análogamente con $(0,-1,-1)$

d) Por el Teorema de la Función Implícita sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{1}{3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -\frac{1}{3}$$

La ecuación del plano tangente a $Graf\ f$ en $(0,1,f(0,1))$ es

$$z = 1 + \frac{1}{3}(x-0) - \frac{1}{3}(y-1)$$

$$3z = 3 + x - y$$

$$\boxed{\text{x-y-3z=-3}}$$

ANÁLISIS VECTORIAL. G 40 y 60 ETSETB. 27-11-00

1. Utilizando una transformación lineal conveniente calcular $\int\int_S (x-y)^2 \sin^2(x+y)dxdy$, donde S es el paralelogramo de vértices $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ y $(0,\pi)$.

Resolución

Sea
$$\left.\begin{array}{l} u = x-y \\ \\ v = x+y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ \\ y = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \end{array}\right\}$$

Realizamos el cambio de coordenadas $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$g(u,v) = \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right)$$

y

$$J_g(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Entonces, si

- $x=\pi \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad u=\pi, \quad v=\pi$
- $x=2\pi \quad y=\pi \quad \Rightarrow \quad u=\pi, \quad v=3\pi$
- $x=\pi \quad y=2\pi \quad \Rightarrow \quad u=-\pi, \quad v=3\pi$
- $x=0 \quad y=\pi \quad \Rightarrow \quad u=-\pi, \quad v=\pi$

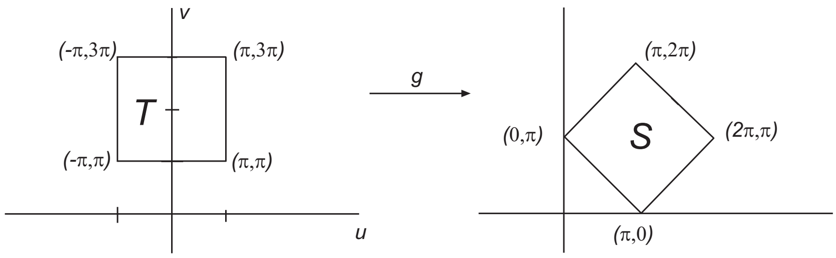


Figura 6: ejercicio 1

luego
$$\int\int_S (x-y)^2 \sin^2(x+y)dxdy = \int\int_T u^2 \sin^2 v \,\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} du \int_{\pi}^{3\pi} \sin v dv =$$
$$= \pi\left[-\cos v\right]_{\pi}^{3\pi} = \pi[-\cos 3\pi + \cos\pi] = 0$$

2. Sean $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(x,y) = \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$ y P el punto $(0,1)$

   a) Estudiar si $\mathbf{f}(x,y)$ es diferenciable con continuidad en un entorno de P.
   b) Justificar si $\mathbf{f}(x,y)$ tiene inversa local diferenciable en un entorno de P. Si la tiene, dar $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(0,1))$.
   c) Determinar las soluciones de la ecuación $\mathbf{f}(x,y) = (-1,0)$.
   d) Con el resultado del apartado anterior, ¿se puede asegurar que $\mathbf{f}(x,y)$ es inversible o no inversible en ciertos puntos?

Resolución

a) Las funciones componentes de $\mathbf{f}$,

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

están definidas en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, y son de clase C^1 en dicho conjunto, luego $\mathbf{f}$ es diferenciable con continuidad en un entorno del punto $P = (0,1)$

b)

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)2x - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)(-2y) - (x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)y - xy2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Df(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $det\, Df(0,1) = 0$ no se cumplen las hipótesis del Teorema de la función inversa. Por consiguiente no podemos asegurar que exista inversa local en un entorno de P.

c) $f(x,y) = (-1,0)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1 \\[2ex] \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x^2 - y^2 = -x^2 - y^2 \\ xy = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 2x^2 = 0 \\ xy = 0 \end{array}\right\}$$

Las soluciones son todos los puntos de la forma $(0,y)$ con $y \neq 0$

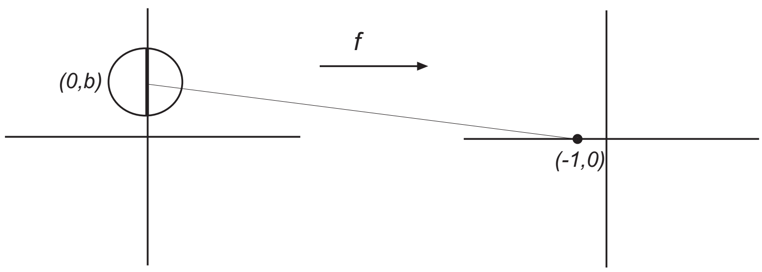


Figura 7: apartado c

d) Como $f(0,b) = (-1,0) \quad \forall b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
f no puede ser inversible en un entorno de $(0,b)$, ya que en cualquier entorno de $(0,b)$ existen puntos cuya imagen coincide con la de $(0,b)$.

3. Dada la función $F(x,y,z) = xyz + \sin(z-6) - 2(x + y + x^2y^2)$

a) Estudiar si la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define, en un entorno del punto $(1,1,6)$, a z función de x e y, $z = f(x,y)$, y dar las derivadas parciales de f en su punto correspondiente.

b) Con lo obtenido en (a), definir la ecuación del plano tangente a la gráfica de f dando el punto de tangencia.

c) Decir si existe, en un entorno de $(1, 1, 6)$ alguna superficie de nivel del campo escalar $F(x, y, z)$ que defina a la superficie $z = f(x, y)$, calculando, utilizando la función $F(x, y, z)$, su plano tangente.

Resolución

a) F es de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$

$$DF(x, y, z) = (yz - 2 - 4xy^2, xz - 2 - 4x^2y, xy + \cos(z - 6))$$
$$DF(1, 1, 6) = (0, 0, 2)$$

Como $2 \neq 0$, por el Teorema de la Función Implícita, sabemos que
existe U abierto de $\mathbb{R}^2$, $\quad (1, 1) \in U$, y
existe V abierto de $\mathbb{R}$, $\quad 6 \in V$
y una aplicación $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset \mathbb{R}$ tal que

$$F(x, y, f(x, y)) = 0 \qquad \forall (x, y) \in U$$

Además f es de clase C^1 en U.
También sabemos que

$$Df(1, 1) = -\frac{1}{2}(0, 0)$$

Es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 0$$

b) La ecuación del plano tangente a la gráfica de una función diferenciable $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

En nuestro caso será el plano de ecuación

$$\boxed{\text{z=6}}$$

c) La superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$ coincide en las proximidades de $(1, 1, 6)$ con la gráfica de la función $z = f(x, y)$ definida en el apartado (a). $\nabla F(1, 1, 6)$ es un vector perpendicular al plano tangente a esa superficie en el punto $(1, 1, 6)$.

$$\nabla F(1, 1, 6) = (0, 0, 2)$$

La ecuación del plano tangente es:

$$(x - 1) \cdot 0 + (y - 1) \cdot 0 + (z - 6) \cdot 2 = 0$$

$$\boxed{\text{z=6}}$$

1. Sea la función $f(x,y)=\begin{cases} 1+(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Determinar si es diferenciable en $(0,0)$ y, en tal caso, obtener el punto de intersección del plano tangente a la gráfica de f en $(0,0,f(0,0))$ con el eje OZ.

Resolución

Primero estudiaremos la continuidad,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} [1+(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)]$$

como

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 = f(0,0)$$

Así que f es continua en $\mathbb{R}^2$.

Ahora estudiaremos diferenciabilidad,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{\to 0}\frac{1+h^2\ln h^2-1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2\ln h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h\ln h^2 = \lim_{h\to 0}\frac{\ln h^2}{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h^2}2h}{-\frac{1}{h^2}} = 0$$

y por simetría

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0} r\ln r^2 = 0$$

Así que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

El plano tangente a la gráfica de f en $(0,0,f(0,0))$ es

$$z = f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y \qquad \Longrightarrow \qquad z=1$$

El punto de intersección del plano tangente con el eje OZ es $(0,0,1)$.

2. Sean las funciones

$$f(x,y,z) = (xe^{yz}, y\sin x+z, yz-xy-zx) \quad , \quad g(x,y,z) = (\cos(x+y)+z, e^{yx}-z)$$

a) Demostrar que existe la función f^{-1} en un entorno de $p=(\pi,0,1)$, que es diferenciable, y calcular $J_{f(p)}f^{-1}$. Especificar el punto $f(p)$.

b) Considérese la función $F = g \circ f^{-1}$. Justificar la existencia de la diferencial de F en $f(p)$ y calcular $J_{f(p)}F$.

c) Demostrar que la ecuación $F(t,u,v) = 0$ (con F la función del apartado anterior) permite definir $u = h_1(t)$, $v = h_2(t)$ en un entorno de $f(p)$. Probar que la función $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ es diferenciable en $t_0 = \pi$, y calcular $J_\pi h$.

Resolución

a)

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{yz} & xze^{yz} & xye^{yz} \\ y\cos x & \sin x & 1 \\ -y-z & -x+z & -x+y \end{pmatrix}$$

$$Df(\pi,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\pi+1 & -\pi \end{pmatrix}$$

$$\det Df(\pi,0,1) = -\pi + \pi - 1 = -1 \neq 0$$

f es de clase C^1 y $\det Df(\pi,0,1) \neq 0$ con $f(\pi,0,1) = (\pi,1,-\pi)$
Entonces por el Teorema de la Función inversa, existe
un abierto U de $\mathbb{R}^3$, $(\pi,0,1) \in U$,
un abierto V de $\mathbb{R}^3$, $(\pi,0,-\pi) \in V$
tal que $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ es un difeomorfismo.

Además,

$$Df^{-1}(\pi,1,-\pi) = [Df(\pi,0,1)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\pi+1 & -\pi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\pi & -\pi^2 & -\pi \\ 1 & \pi & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Sea $F = g \circ f^{-1}$
F es diferenciable en $f(p)$ puesto que g es una función diferenciable y la función f^{-1} definida en el apartado (a) también lo es en un entorno de $f(p)$.

$$DF(\pi,1,-\pi) = Dg(f^{-1}(\pi,1,-\pi))Df^{-1}(\pi,1,-\pi) = Dg(\pi,0,1)Df^{-1}(\pi,1,-\pi)$$

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sin(x+y) & -\sin(x+y) & 1 \\ ye^{yx} & xe^{yx} & -1 \end{pmatrix}$$

$$Dg(\pi,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & -1 \end{pmatrix}$$

$$DF(\pi,1,-\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\pi & -\pi^2 & -\pi \\ 1 & \pi & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi & \pi^2-1 & \pi \end{pmatrix}$$

c) Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida en el apartado (b).
El punto $f(p) = (\pi,1,-\pi)$ satisface la ecuación $F(t,u,v) = (0,0)$.
En efecto,

$$F(\pi,1,-\pi) = (g \circ f^{-1})(\pi,1,-\pi) = g[f^{-1}(\pi,1,-\pi)] = g(\pi,0,1) = (-1+1, 1-1) = (0,0)$$

Sabemos que F es de clase C^1 y $DF(\pi, 1, -\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi & \pi^2 - 1 & \pi \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \pi^2 - 1 & \pi \end{vmatrix} = \pi \neq 0$

por el Teorema de la Función implícita, existe
un abierto U de $\mathbb{R}$, $\quad \pi \in U$
un abierto V de $\mathbb{R}^2$, $\quad (1, -\pi) \in V$
y una aplicación $h : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$\forall t \in U \qquad F(t, h(t)) = F(t, h_1(t), h_2(t)) = (0, 0)$$

y además h es de clase C^1 en U y

$$Dh(\pi) = \begin{pmatrix} h_1'(\pi) \\ h_2'(\pi) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^2 - 1 & \pi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 1 - \pi^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} = -\frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Dadas la función $f(x, y, z) = \dfrac{ze^{-z^2}}{(x^2 + y^2)^\alpha}$, $(\alpha > 0)$, y la región

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ 0 \leq z \leq a\}.$$

a) Estudiar para qué valores de α es convergente la integral $\displaystyle\int_A f$.

b) Para los valores de α hallados en el apartado anterior, estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_B f$, donde

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \ , z \geq 0\}.$$

Resolución

a)

$$\int_A f = \int\int\int_A \frac{ze^{-z^2}}{(x^2 + y^2)^\alpha} dxdydz = \int_0^a ze^{-z^2} dz \int\int_T \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

donde $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\int_0^a ze^{-z^2} dz = -\frac{1}{2} \ e^{-z^2}\Big|_0^a = -\frac{1}{2}\left[e^{-a^2} - 1\right] = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-a^2}\right]$$

$$\int\int_T \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{r^\alpha} dr = 2\pi \int_0^1 r^{1-\alpha} dr = 2\pi \left.\frac{r^{2-\alpha}}{2 - \alpha}\right|_0^1 = \frac{2\pi}{2 - \alpha} \qquad \text{si} \qquad \alpha \neq 2$$

luego

$$\int_A f = \frac{\pi}{2 - \alpha}\left[1 - e^{-a^2}\right] \qquad \text{si} \qquad \alpha \neq 2$$

b)

$$\int_B f = \lim_{a \to +\infty} \frac{\pi}{2 - \alpha}\left[1 - e^{-a^2}\right] = \frac{\pi}{2 - \alpha}$$

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 11-05-2001

1. *a*) Determinar el volumen limitado por los planos coordenados y el plano tangente a la superficie $x^2+y^2+z^2=1$ en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

   b) Hallar el volumen de la región $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1-y\le z\le 1-x^2-y^2\}$.

Resolución

a) Calculamos en primer lugar la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2+y^2+z^2=1$ en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Como $x^2+y^2+z^2=1$ es la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1, el vector posición es perpendicular a la superficie en cada punto, luego $(1,1,1)$ es perpendicular al plano marcado.

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(z-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$$

es la ecuación del plano, éste es $x+y+z=\sqrt{3}$.

El tetraedro formado por este plano y los planos coordenados tiene por vulumen

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2\right)\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se deduce este valor por

$$V=\int_0^{\sqrt{3}}dx\int_0^{\sqrt{3}-x}dy\int_0^{\sqrt{3}-x-y}dz$$

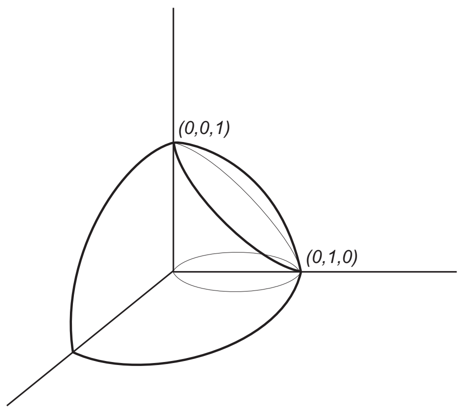


Figura 8: apartado b

b) La intersección del paraboloide $z=1-x^2-y^2$ con el plano $z=1-y$ es una curva cuya proyección sobre el plano XY la obtenemos eliminando z entre las anteriores ecuaciones

$$1-x^2-y^2=1-y \qquad\Rightarrow\qquad x^2+y^2-y=0 \qquad\Rightarrow\qquad x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Sea T la circunferencia del plano XY con centro $(0,\frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{2}$.

$$V=\int\int_T dxdy\int_{1-y}^{1-x^2-y^2}dz=\int\int_T(-x^2-y^2+y)dxdy=-\int\int_T\left[x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]dxdy$$

con $\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=\frac{1}{2}+r\sin\theta \end{array}$

$$V=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\left(r^2-\frac{1}{4}\right)rdr=-2\pi\left[\frac{r^4}{4}-\frac{1}{4}\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{32}$$

2. Dada la función $F(x,y,z,t) = (x + xy + zt - 2, t + tx + yz + 2)$ y el punto $P = (1,1,0,-1)$

   a) Demostrar que la ecuación $F(x,y,z,t) = 0$ define una función diferenciable , $h(y,z) = (x(y,z), t(y,z))$, en un entorno de P y dar su matriz jacobiana en $(1,0)$, $Jh(1,0)$.

   b) Probar que en un entorno del punto $(1,0)$, existe la función h^{-1}. Calcular $h(1,0)$ y dar la matriz jacobiana $Jh^{-1}(h(1,0))$ utilizando el Teorema de la Función Inversa.

   c) Determinar $Jh^{-1}(h(1,0))$ a partir de la ecuación $F(x,y,z,t) = 0$ como aplicación del Teorema de Función implícita.

Resolución

a) $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1

$F(1,1,0,-1) = (0,0)$

$$DF(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 1+y & x & t & z \\ t & z & y & 1+x \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad DF(1,1,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ por el Teorema de la Función Implícta existen:

Un abierto U de $\mathbb{R}^2$, $(1,0) \in U$,
Un abierto V de $\mathbb{R}^2$, $(1,-1) \in V$

y una función $h : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ tal que:

$$h(1,0) = (1,-1)$$

$$h(y,z) = (x(y,z), t(y,z)) \quad \text{y} \quad F(x(y,z), y, z, t(y,z)) = (0,0) \quad \forall (y,z) \in U$$

Además h es de clase C^1 y

$$Dh(1,0) = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) $$\det Dh(1,0) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Por el Teorema de la Función Inversa sabemos que
existe S abierto de $\mathbb{R}^2$, $(1,0) \in S$ y T abierto de $\mathbb{R}^2$, $(1,-1) \in T$
tal que la aplicación $h : S \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow T \subset \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo. Además,

$$Dh^{-1}(h(1,0)) = [Dh(1,0)]^{-1}$$

Como $h(1,0) = (1,-1)$, entonces

$$Dh^{-1}(1,-1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1} = 4\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $DF(1,1,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Por el Teorema de la función implícita, existe un abierto U de $\mathbb{R}^2$, $\quad (1,-1) \in U$ y un abierto V de $\mathbb{R}^2$, $\quad (1,0) \in V$

y una aplicación $g : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^2$

$$g(x,t) = (y(x,t), z(x,t))$$

tal que:

$$F(x, y(x,t), z(x,t), t) = (0,0) \qquad \forall (x,t) \in U$$

Además g es diferenciable y

$$Dg(1,-1) = \ -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \ -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \ -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Observemos que g coincide localmente con h^{-1} del apartado (b).

3. a) Determinar el dominio de diferenciabilidad de la función $f(x,y) = \tan(x+y)$.

   b) Dada la función $g(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ calcular, si existe, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2)$

Resolución

a) $f(x,y) = \tan(x+y)$

Dom $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

f es diferenciable en su dominio, ya que es de clase C^1.

b) $g(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = \lim_{h \to 0} \frac{g(1+h,2) - g(1,2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

No existe

1. Obtener el interior, la adherencia, el conjunto de puntos de acumulación, el exterior y la frontera de los conjuntos siguientes:

   a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \geq x^2 + y^2\}$.

   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \geq 0 \ , \ x + y = n$ donde $n \in \mathbb{Z}\}$.

   Resolución

   a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \geq x^2 + y^2\}$

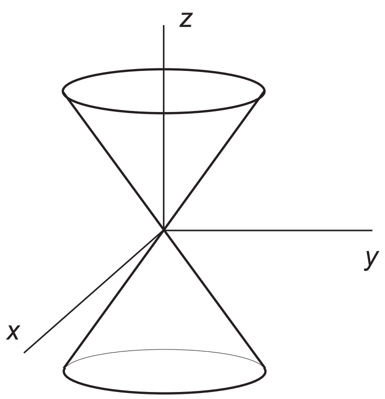


Figura 9: apartado a

Aplicando las correspondientes definiciones obtenemos:

- Int $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 > x^2 + y^2\}$
- $\overline{A} = A$
- $A' = A$
- Ext $A =$ Int $(\mathbb{R}^3 \backslash A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 < x^2 + y^2\}$
- Fr $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 = x^2 + y^2\}$

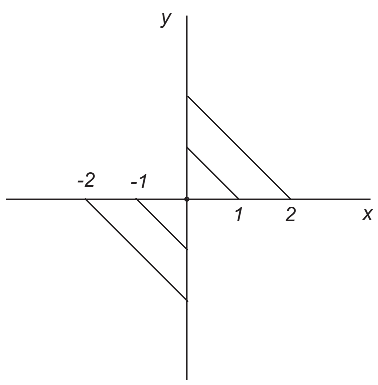


Figura 10: apartado b

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \geq 0 \ , \ x + y = n$ donde $n \in \mathbb{Z}\}$

- Int $B = \emptyset$
- $\overline{B} = B$

- $B' = B - \{(0,0)\}$
- Ext $B = \mathbb{R}^2 \backslash B$
- Fr $B = B$

2. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a) Estudiad la continuidad de f.

   b) Estudiad la diferenciabilidad de f.

   Resolución

   a) Basta con considerar el comportamiento de la función en $(0,0)$

   $$0 \leq \left| \frac{4x^3}{x^2+y^2} \right| = 4|x| \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \ 4|x| \qquad \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow 0}$$

   Por tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

   Así que f es continua en $\mathbb{R}^2$

   b) Se ha de ver si f es diferenciable en $(0,0)$

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4h^3}{h^2}}{h} = 4$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

   Condición de tangencia,

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} =$$

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{4x^3}{x^2+y^2} - 4x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3 - 4x^3 - 4xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-4xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{-4r^3\cos\theta(\sin\theta)^2}{r^3} = -4\cos\theta(\sin\theta)^2$$

   Luego no existe límite y, por lo tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

3. Considerad las superficies $S_1 \ : \ x+y+z = 3$, $S_2 \ : \ x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$, $S_3 \ : \ x^2 - y^2 - 2z^2 = 30$.

   a) Las superficies S_1, S_2 se cortan según una curva C. Encontrad la ecuación de la recta tangente a C en el punto $(1,1,1)$.

   b) Encontrad el ángulo entre la recta tangente del apartado (a) y la superficie S_3 en el punto donde la recta tangente y la superficie se cortan.

   Resolución

a) Vemos que:

$(1,1,1) \in S_1$
$(1,1,1) \in S_2$

Así que $(1,1,1) \in C = S_1 \cap S_1$

Sea $F_1(x,y,z) = x + y + z - 3$ y $F_2(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z - 2$
$\nabla F_1(x,y,z) = (1,1,1)$
$\nabla F_2(x,y,z) = (2x, -2y, 4z)$

$$\nabla F_1(1,1,1) \times \nabla F_2(1,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (6,-2,-4)$$

La recta tangente a la curva C en el punto $(1,1,1)$ es la recta que pasa por ese punto y tiene como vector dirección $(3,-1,-2)$.

$$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(3,-1,-2) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Calculamos primero el punto de intersección de la recta calculada en el apartado (a) con S_3.

$$x = 1 + 3\lambda, \qquad y = 1 - \lambda, \qquad z = 1 - 2\lambda$$

$$(1+3\lambda)^2 - (1-\lambda)^2 - 2(1-2\lambda)^2 = 30$$

$$1 + 6\lambda + 9\lambda^2 - (1 - 2\lambda + \lambda^2) - 2(1 - 4\lambda + 4\lambda^2) = 30$$

Así que :

$$16\lambda = 32 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 2$$

El punto buscado es $(7,-1,-3)$.

Sea $F_3(x,y,z) = x^2 - y^2 - 2z^2 - 30$

$$\nabla F_3 = (2x, -2y, -4z) \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla F_3(7,-1,-3) = (14, 2, 12)$$

El ángulo que forma la recta del apartado (a) con la superficie S_3 es el ángulo formado por los vectores $(3,-1,-2)$ y $(7,1,6)$
Así que:

$$(3,-1,-2) \cdot (7,1,6) = ||(3,-1,-2)|| \, ||(7,1,6)|| \cos\alpha$$

$$21 - 1 - 12 = \sqrt{9+1+4}\sqrt{49+1+36}\cos\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad 8 = \sqrt{14}\sqrt{86}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{14 \cdot 86}} = \frac{4}{\sqrt{7 \cdot 43}} = \frac{4}{\sqrt{301}} = \frac{4\sqrt{301}}{301}$$

4. Considerad el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} xz^3 & + & y^2t^3 & = & 1 \\ 2xy^3 & + & zt^2 & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \text{y el punto solución } p = (0,1,0,1)$$

a) Razonad que en un entorno de p define x, y como funciones implícitas diferenciables de z, t $(x = f(z,t), y = g(z,t))$.

b) Sea $F : U \to \mathbb{R}^2$ donde U es un abierto de $\mathbb{R}^2$, tal que $F(z,t) = (f(z,t), g(z,t))$. Calculad la diferencial de F en $(0,1)$.

c) Sea $\phi : U \to \mathbb{R}$, donde U es abierto de $\mathbb{R}^2$ y $\phi(z,t) = tf(z,t) + zg(z,t)$. En qué dirección es máxima la derivada direccional de ϕ en el punto $(0,1)$?

Resolución

a) Sea $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$G(x,y,z,t) = (xz^3 + y^2t^3 - 1, 2xy^3 + zt^2)$$

$$G(0,1,0,1) = (0,0)$$

$$DG(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} z^3 & 2yt^3 & 3xz^2 & 3y^2t^2 \\ 2y^3 & 6xy^2 & t^2 & 2tz \end{pmatrix}$$

$$DG(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

existe U abierto de $\mathbb{R}^2$, $\quad (0,1) \in U$,
existe V abierto de $\mathbb{R}^2$, $\quad (0,1) \in V$

y $F : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ tal que, $\quad F(z,t) = (f(z,t), g(z,t)) \quad$ y

$$G(F(z,t), z, t) = (0,0) \qquad \forall (z,t) \in U$$

b) La diferencial de F es:

$$DF(0,1) = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z}(0,1) & \frac{\partial f}{\partial t}(0,1) \\ \frac{\partial g}{\partial z}(0,1) & \frac{\partial g}{\partial t}(0,1) \end{pmatrix}$$

c) $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\phi(z,t) = tf(z,t) + zg(z,t)$

$$\nabla\phi(z,t)=\left(t\frac{\partial f}{\partial z}+g(z,t)+z\frac{\partial g}{\partial z}, f(z,t)+t\frac{\partial f}{\partial t}+z\frac{\partial g}{\partial t}\right)$$

$f(0,1)=0 \qquad g(0,1)=1$

$\frac{\partial f}{\partial z}(0,1)=-\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(0,1)=0$

$\frac{\partial g}{\partial z}(0,1)=0 \qquad \frac{\partial g}{\partial t}(0,1)=-\frac{3}{2}$

Por tanto, $\nabla\phi(0,1)=\left(-\frac{1}{2}+1,0\right)=\left(\frac{1}{2},0\right)$

La derivada direccional es máxima en la dirección del vector gradiente. Por lo tanto,

$$D_{\mathbf{u}}\phi(0,1) \text{ es máxima cuando } \mathbf{u}=(1,0)$$

5. Sea $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$, y el conjunto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 0, y\leq 0, x+y\geq -3\}$

a) Calculad y clasificad los puntos críticos de f.

b) Justificad que f tiene extremos absolutos en D y calculadlos.

Resolución

a) Sea $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$
$\nabla f(x,y)=(2x-y+1, 2y-x+1)$

$$\left.\begin{array}{r}2x-y+1=0\\ 2y-x+1=0\end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}y=2x+1\\ 4x+2-x+1=0\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}y=-1\\ x=-1\end{array}$$

$(-1,-1)$ es el único punto crítico de f

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Como $\Delta_1=2>0$ y $\Delta_2=3>0$
Aplicando el criterio de Sylvester deducimos que $(-1,1)$ es un mínimo local de f.

b) Sea $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 0\ ,\ y\leq 0\ ,\ x+y\geq -3\}$

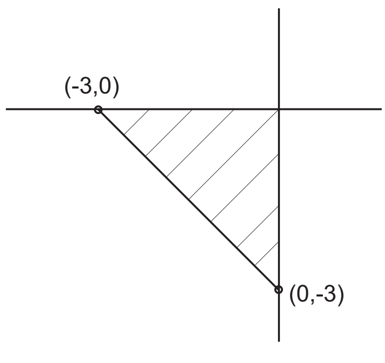


Figura 11: ejercicio 5

D es un conjunto compacto puesto que es cerrado y acotado. Además f es continua en D, luego alcanza en D extremos absolutos. Vamos a calcularlos.

El punto crítico $(-1,-1)$ está en D y $f(-1,-1)=-1$
Calculamos los extremos sobre la recta $y=0$

$$\begin{array}{rcl}\gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longrightarrow & (x,0)\end{array}$$

$$g(x) = f(\gamma(x)) = f(x,0) = x^2 + x$$

$$g'(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$(-\frac{1}{2}, 0) \in D \qquad \text{y} \qquad f(-\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

Busquemos ahora los extremos sobre la recta $x = 0$

$$\begin{array}{rcl}\gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ y & \longrightarrow & (0,y)\end{array}$$

$$g(y) = f(\gamma(y)) = f(0,y) = y^2 + y$$

$$g'(y) = 2y + 1 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$(0, -\frac{1}{2}) \in D \qquad \text{y} \qquad f(0, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

Para calcular los extremos sobre la recta $x + y = -3$

$$\begin{array}{rcl}\gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longrightarrow & (x, -3-x)\end{array}$$

$$\begin{aligned} g(x) = f(\gamma(x)) = f(x, -3-x) &= x^2 + (-3-x)^2 + x(3+x) + x - 3 - x = \\ &= x^2 + 9 + 6x + x^2 + 3x + x^2 - 3 = \\ &= 3x^2 + 9x + 6 \end{aligned}$$

$$g'(x) = 6x + 9 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{3}{2}, \qquad y = -3 - x = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) \in D \qquad \text{y} \qquad f(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$$

Finalmente calculamos el valor de f en los vértices del triángulo D: $(0,0), (-3,0), (0,-3)$

$$f(0,0) = 0 \qquad f(-3,0) = 9 - 3 = 6 \qquad f(0,-3) = 6$$

Por tanto, f alcanza en D <u>mínimo absoluto</u> en $(-1,-1)$ y vale -1 y alcanza en D <u>máximos abosultos</u> en $(-3,0)$ y $(0,-3)$ y vale 6.

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 25-11-2003

Considérese $p = (1, -1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ y la función

$$\mathbf{F}(x, y, z, t) = (F_1(x, y, z, t), F_2(x, y, z, t)) = (xy \ln x + e^{zt} - 1, y + te^{z-t} + 1)$$

1. Determinar el dominio de $\mathbf{F}$. Estudiar si $\mathbf{F}$ es continua, diferenciable y de clase C^1 en su dominio.
2. Ver si el conjunto $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid F_2(x, y, z, t) = 0\}$ es abierto, cerrado o ninguna de ambas.
3. Calcular la derivada direccional de F_1 en p según el vector $\nabla F_2(p)$.
4. Demostrar que, en un entorno U de p, existe $\mathbf{f}(y, z) = (f_1(y, z), f_2(y, z))$ tal que $x = f_1(y, z), t = f_2(y, z)$. ¿Se puede asegurar que existe $\mathbf{g}(x, t) = (g_1(x, t), g_2(x, t))$ tal que $y = g_1(x, t), z = g_2(x, t)$ en un entorno de p?
5. Justificar que $\mathbf{f}(y, z)$ es de clase C^1 y calcular su Jacobiano en $a = (-1, 1)$.
6. ¿Qué se puede decir sobre la existencia de $\mathbf{f}^{-1}$ en un entorno de $\mathbf{f}(a)$? Dar las coordenadas de $\mathbf{f}(a)$. ¿Es $\mathbf{f}$ un difeomorfismo en algún entorno de a?
7. Discutir si $\mathbf{f}$ es un campo conservativo y/o si es un campo solenoidal.
8. Discutir si $f_1(y, z)$ puede tener en a un extremo local libre o un extremo condicionado a la ligadura $f_2(y, z) = 0$
9. Demostrar que la superficie $S_2 = \text{graf } f_2 \subset \mathbb{R}^3$ es regular en $(a, f_2(a))$.
10. Obtener las ecuaciones de la recta normal y el plano tangente a S_2 en $(a, f_2(a))$.

Resolución

1. Dom $\mathbf{F} = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ ya que Dom $\ln x = (0, +\infty)$.

   $\mathbf{F}$ es continua, diferenciable y de clase C^1 en su dominio porque es composición de funciones que lo son.

2. $F_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, y Dom $F_2 = \mathbb{R}^4$

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid F_2(x, y, z, t) = 0\} = F_2^{-1}(\{0\})$$

   Como $\{0\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$, entonces A también será cerrado en $\mathbb{R}^4$.

3. $\nabla F_2(x, y, z, t) = (0, 1, te^{z-t}, e^{z-t} - te^{z-t})$

   $\nabla F_2(1, -1, 1, 0) = (0, 1, 0, e)$

   $\nabla F_1(x, y, z, t) = (y \ln x + y, x \ln x, te^{zt}, ze^{zt})$

   $\nabla F_1(1, -1, 1, 0) = (-1, 0, 0, 1)$

$$D_{\nabla F_2(p)} F_1(p) = DF_1(p) \nabla F_2(p) = (-1 \; 0 \; 0 \; 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} = e$$

4. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada en el enunciado

   $\mathbf{F}$ es de clase C^1 en un abierto A contenido en el dominio de $\mathbf{F}$ y tal que $p \in A$

$$DF(1, -1, 1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & e \end{pmatrix}$$

   Como

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & e \end{vmatrix} = -e \neq 0$$

por el Teorema de la Función Implícita sabemos que:

$\exists \quad U$ abierto de $\mathbb{R}^2, \quad (-1,1) \in U$

$\exists \quad V$ abierto de $\mathbb{R}^2, \quad (1,0) \in V$

y

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & V \subset \mathbb{R}^2 \\ (y,z) & \longrightarrow & (f_1(y,z), f_2(y,z)) \end{array}$$

tal que $\mathbf{F}(f_1(y,z), y, z, f_2(y,z)) = (0,0) \quad \forall (y,z) \in U$.

Esto es $x = f_1(y,z)$, $t = f_2(y,z) \quad \forall (y,z) \in U$.
Como

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

no podemos asegurar por el Teorema de la Función Implícita la existencia de $\mathbf{g}(x,y) = (g_1(x,t), g_2(x,t))$ tal que $y = g_1(x,t), z = g_2(x,t)$

y $\mathbf{F}(x, g_1(x,t), g_2(x,t), t) = (0,0)$ en un entorno de p.

5. Por el Teorema de la Función implícita sabemos que $\mathbf{f}$ es de clase C^1 en U, y además

$$D\mathbf{f}(-1,1) = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & e \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} e & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} & 0 \\ -\frac{1}{e} & 0 \end{pmatrix}$$

6. Sabemos que $\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es de clase C^1 en U, y $D\mathbf{f}(a) = Df(-1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} & 0 \\ -\frac{1}{e} & 0 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} -\frac{1}{e} & 0 \\ -\frac{1}{e} & 0 \end{vmatrix} = 0$, no podemos asegurar por el Teorema de la función inversa la existencia de inversa local.

Coordenadas de $\mathbf{f}(a)$:

$$\mathbf{f}(a) = f(-1,1) = (1,0)$$

$\mathbf{f}$ no es un difeomorfismo en un entorno de a ya que para que lo fuera según el Teorema de la función Inversa es condición necesaria que $\det D\mathbf{f}(a) \neq 0$

7.

$$\begin{array}{lcc} f: U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & V \subset \mathbb{R}^2 \\ (y,z) & \longrightarrow & (f_1(y,z), f_2(y,z)) \end{array}$$

Para que $\mathbf{f}$ sea campo conservativo ha de cumplirse que

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad \forall (y,z) \in U$$

$(-1,1) \in U$ y sabemos que $\dfrac{\partial f_1}{\partial z}(-1,1) = 0$ y $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(-1,1) = -\dfrac{1}{e}$
luego f no es conservativo.

La definición de campo solenoidal es para campos vectoriales de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

8. Como

$$\nabla f_1(a) = \nabla f_1(-1,1) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(-1,1), \frac{\partial f_1}{\partial z}(-1,1)\right) = \left(-\frac{1}{e}, 0\right) \neq (0,0)$$

el punto a no es extremo local libre de f_1.

Por otra parte, sabemos que $f_2(a) = f_2(-1,1) = 0$, si el punto a fuera un extremo de f_1 condicionado a la ligadura $f_2(x,y) = 0$ se tendría que cumplir también que existiría un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f_1(-1,1) = \lambda \nabla f_2(-1,1)$$

Como

$$\nabla f_1(-1,1) = \nabla f_2(-1,1) = \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$$

el punto a puede ser un extremo de f_1 condicionado a la ligadura $f_2(y,z) = 0$

9. Sea $f_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, f_2 de clase C^1 en U, tal que $t = f_2(y,z)$

Sea $(a, f_2(a)) = (-1,1,0) \in$ Graf f_2

Existe un abierto V de $\mathbb{R}^3$, $(a, f_2(a)) \in V$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \varphi(V) \subset \mathbb{R}^3 \\ (y,z,t) & \longrightarrow & (y,z,t - f_2(y,z)) \end{array}$$

es el difeomorfismo cuya existencia asegura que la superficie S_2 es regular en torno al punto $(a, f_2(a))$.

10. Sea $\sigma(y,z) = (y,z,f_2(y,z))$ una parametrización de S_2.

$$T_y = \left(1, 0, \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) \qquad T_y(-1,1) = \left(1, 0, -\frac{1}{e}\right)$$

$$T_z = \left(0, 1, \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \qquad T_z(-1,1) = (0,1,0)$$

$$(T_y \times T_z)(-1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\frac{1}{e} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{e}, 0, 1\right)$$

que es paralelo al vector $(1,0,e)$

Recta normal a S_2 en $(a, f_2(a))$ es

$$(x,y,z,t) = (-1,1,0) + \lambda(1,0,e) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Plano tangente a S_2 en $(a, f_2(a))$

$$(x+1)1 + (y-1)0 + (z-0)e = 0$$
$$x + ez = -1$$

1. Sea $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ la unión de las esferas $E_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Determinad el interior, exterior, frontera, adherencia y acumulación de D e indicad si es abierto, cerrado, acotado o compacto dicho conjunto.

Resolución

E_n es la superficie de la esfera de centro el origen $(0, 0, 0)$ y radio $\frac{1}{\sqrt{n}}$, por tanto,

- $\text{Int}D = \emptyset$.
  Porque ningún punto de D es punto interior ya que no existe ninguna bola de centro ese punto contenida en D.

- $\text{Ext}D = \text{Int}\,(\mathbb{R}^3 \backslash D) = \mathbb{R}^3 \backslash (D \cup \{(0, 0, 0)\})$.
- $\text{Fr}D = D \cup \{(0, 0, 0)\}$.
- $\overline{D} = D \cup \{(0, 0, 0)\}$.
- $D' = D \cup \{(0, 0, 0)\}$.
- D no es abierto porque $D \neq \text{Int}D$.
- D no es cerrado porque $D \neq \overline{D}$.
- D es acotado, $\quad D \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- D no es compacto porque no es cerrado.

2. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, a y b puntos de acumulación de A y B respectivamente. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$,

   a) ¿Cuándo se puede asegurar que $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$?

   b) Aplicad lo anterior para determinar si existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\ln(x^2 + y^2 + 1)}$.

   c) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\ln(x^2 + y^2 + 1)}$, $\forall(x, y) \neq (0, 0)$. Definid $f(0, 0)$ para que f sea continua y estudiad su diferenciabilidad en el punto $(0, 0)$

Resolución

a) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
a es punto de acumulación de A
b es punto de acumulación de B

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to b} g(y) = c$$

Podemos asegurar que $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$ cuando $f(A) \subset B$ y se cumple una de las dos condiciones siguientes:

- $b \notin B$
- g es continua en b

Veamos una explicación,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \qquad 0 < |x-a| < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - b| < \varepsilon_1$$

$$\lim_{y\to b} g(y) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \qquad 0 < |y-b| < \delta_2, \quad \text{entonces} \quad |g(y) - c| < \varepsilon_2$$

Queremos ver si $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$, esto es, si

$$\forall \varepsilon_3 > 0 \quad \exists \delta_3 > 0 \quad \text{tal que si} \quad 0 < |x-a| < \delta_3, \quad \text{entonces} \quad |(g\circ f)(x) - c| = |g[f(x)] - c| < \varepsilon_3$$

tomando $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 > 0$ $\exists \delta_2 > 0$ y por tanto $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces $|f(x) - b| < \delta_2$,

pero de aquí no podemos deducir que $|g[f(x)] - c| < \varepsilon_2$
pues pudiera ser que $f(x)$ fuese igual a b para todo x y g no fuera continua en b.
De aquí las condiciones impuestas anteriormente.
Veamos un ejemplo.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0 \quad \forall x$
y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(0) = 1$ y $g(y) = 0 \quad \forall y \neq 0$
entonces,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{y\to 0} g(y) = 0$$

pero $\lim_{x\to 0}(g \circ f)(x) = \lim_{x\to 0} g[f(x)] = \lim_{x\to 0} g(0) = 1$
Observemos que en este caso g no es continua en 0.

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\dfrac{1}{z+1}} = \lim_{z\to 0}(z+1) = 1$$

c) Definimos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2+1)} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Por el apartado anterior sabemos que es continua. Estudiaremos ahora su diferenciabilidad.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2}{\ln(h^2+1)} - 1}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - \ln(h^2+1)}{h\ln(h^2+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{2h - \dfrac{2h}{h^2+1}}{\ln(h^2+1) + h\dfrac{2h}{h^2+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2h^3 + 2h - 2h}{(h^2+1)\ln(h^2+1) + 2h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{6h^2}{(h^2+1)\dfrac{2h}{h^2+1} + 2h\ln(h^2+1) + 4h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6h^2}{6h + 2h\ln(h^2+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{12h}{6 + 2\ln(h^2+1) + 2h\dfrac{2h}{h^2+1}} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{12h(h^2+1)}{10h^2 + 6 + 2(h^2+1)\ln(h^2+1)} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0
\end{aligned}$$

Condición de tangencia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2+1)}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2-\ln(x^2+y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}\,\ln(x^2+y^2+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{z-\ln(z+1)}{\sqrt{z}\ln(z+1)} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-\dfrac{1}{z+1}}{\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\ln(z+1)+\sqrt{z}\dfrac{1}{z+1}} = \lim_{z\to 0} \frac{\dfrac{z}{z+1}}{\dfrac{(z+1)\ln(z+1)+2z}{2\sqrt{z}(z+1)}} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2z\sqrt{z}}{(z+1)\ln(z+1)+2z} = \lim_{z\to 0} \frac{3\sqrt{z}}{\ln(z+1)+1+2} = 0$$

luego f es diferenciable en $(0,0)$

3. Sea $\varphi(u,v) = (x,y) = (\sin u + \cos v, \cos u + \sin v)$

   a) Estudiad en qué puntos φ admite inversa local diferenciable.

   b) Sea la región $A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi/2 \le u+v \le 3\pi/2\}$, dad el conjunto $B = \varphi(A)$.

Resolución

a)

$$\text{Dom}\varphi = \mathbb{R}^2, \qquad \varphi \text{ de clase } C^1 \text{ en } \mathbb{R}^2$$

$$D\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin v \\ -\sin u & \cos v \end{pmatrix}$$

$$\det\, D\varphi(u,v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v = \cos(u+v)$$

$\cos(u+v) = 0$ cuando

$$u+v = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Así que existe inversa local diferenciable en

$$\mathbb{R}^2 \backslash \{(u,v)\ :\ u+v = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

b) Tenemos que $A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi/2 \le u+v \le 3\pi/2\}$ y $B = \varphi(A)$

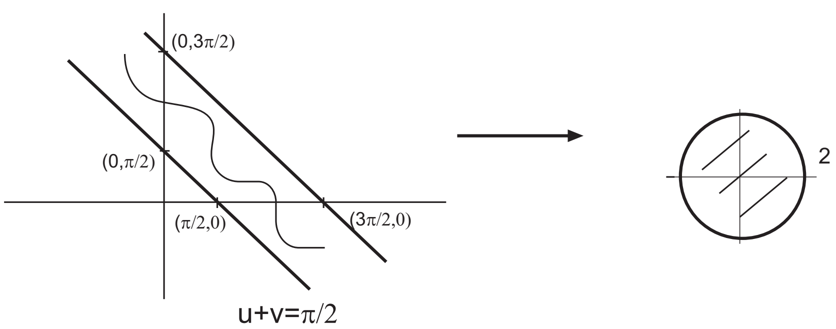


Figura 12: ejemplo

- $u+v=\frac{\pi}{2}$

  como
$$\sin(\frac{\pi}{2}-u)=\sin\frac{\pi}{2}\cos u-\cos\frac{\pi}{2}\sin u=\cos u$$

  $\varphi(u,v)=(\sin u+\cos v,\cos u+\sin v)=(\sin u+\cos(\frac{\pi}{2}-u),\cos u+\sin(\frac{\pi}{2}-u))=$ $(\sin u+\sin u,\cos u+\cos u)=2(\sin u,\cos u)$ pertenece a la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2. Al variar u recorre toda la circunferencia.

- $u+v=\frac{3\pi}{2}$

  como
$$\cos(\frac{3\pi}{2}-u)=\cos\frac{3\pi}{2}\cos u+\sin\frac{3\pi}{2}\sin u=-\sin u$$

  $\varphi(u,v)=(\sin u+\cos v,\cos u+\sin v)=(\sin u+\cos(\frac{3\pi}{2}-u),\cos u+\sin(\frac{3\pi}{2}-u))=$ $(\sin u-\sin u,\cos u-\cos u)=(0,0)$

  Entonces,
$$B=\varphi(A)=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 2\}$$

4. Dada la ecuación $xy+2\ln x+3\ln y-1=0$

   a) Probad que define, en un entorno del punto $(1,1)$ a y como función de $x, y=f(x)$.

   b) Justificad que esta función $f(x)$ tiene polinomio de Taylor de grado 2 en $x=1$ y obtenedlo.

   c) Dad las ecuaciones que permiten obtener los puntos críticos de las funciones $y=f(x)$ definidas implícitamente por la ecuación del enunciado.

Resolución

a) Sea $F(x,y)=xy+2\ln x+3\ln y-1$
$F(1,1)=1-1=0$
$DF(x,y)=(y+\frac{2}{x},x+\frac{3}{y})$
$DF(1,1)=(3,4)$

Como $4\neq 0$ sabemos que existe I intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $1\in I$ y existe J intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $1\in J$ y una aplicación $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow J\subset\mathbb{R}$ tal que
$$F(x,f(x))=0\qquad\forall x\in I$$

Además f es diferenciables y $f'(1)=-\frac{3}{4}$.

b) Derivando dos veces la ecuación dada respecto a x, obtenemos
$$y+xy'+\frac{2}{x}+\frac{3}{y}y'=0$$
$$y'+y'+xy''-\frac{2}{x^2}+\frac{3yy''-3(y')^2}{y^2}=0$$

como $y(1)=1$ y $y'(1)=-\frac{3}{4}$ obtenemos
$$-\frac{3}{2}+y''(1)-2+\frac{3y''-\frac{27}{16}}{1}=0$$
$$4y''(1)=\frac{83}{16}\qquad y''(1)=\frac{83}{64}$$

luego el polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 1$ es

$$P(x) = 1 - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{83}{128}(x-1)^2$$

c)

$$f'(x) = -\frac{y + \frac{2}{x}}{x + \frac{3}{y}} = -\frac{(xy+2)y}{(xy+3)x} = 0$$

$$\Longrightarrow xy + 2 = 0 \qquad \text{o} \qquad y = 0$$

ANÀLISI VECTORIAL. ETSETB. 03-05-2004

1. Considera la funció:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Estudia la continuïtat de f.

   b) Calcula'n, si existeix, la derivada direccional en el punt $(0,0)$ segons el vector (a,b).

   c) Digues, raonadament, si f és o no de classe C^1 i troba'n, si existeix, la diferencial en el punt $(0,0)$.

Solució

a) Fora de l'origen de coordenades la funció és contínua. D'altra banda, el límit de f en el punt $(0,0)$ és zero ja que:

$$\left|\frac{3x^3}{x^2+2y^2}\right| \leq \left|\frac{3x^3}{x^2}\right| = 3|x| \;\to\; 0 \quad \text{quan } (x,y) \to (0,0).$$

Per tant, f és contínua arreu.

b) Tenim:

$$D_{(a,b)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{3a^3t^3}{a^2t^2+2b^2t^2} - 0\right) = \frac{3a^3}{a^2+2b^2}.$$

En particular, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

c) Fora del punt $(0,0)$ les derivades parcials valen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^4+18x^2y^2}{\left(x^2+2y^2\right)^2} \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-12x^3y}{\left(x^2+2y^2\right)^2},$$

que són contínues. Al punt $(0,0)$ les derivades parcials existeixen (apartat anterior) però no són contínues ja que no existeixen els límits de les expressions anteriors) en aquell punt, cosa que s'evidencia, per exemple, fent els límits segons rectes $y = mx$ $(x \to 0)$ i constatant que els resultats depenen de m:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \to \frac{18m^2+3}{\left(1+2m^2\right)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \to \frac{-12m}{\left(1+2m^2\right)^2}$$

Per tant, f és de classe C^1 a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Si f fos diferenciable en el punt $(0,0)$ la diferencial hauria de ser, en la base canònica, $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$, que són els valors de les derivades parcials en $(0,0)$ i el següent límit hauria de ser zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{3x^3}{x^2+2y^2} - 3x - 0y\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-6xy^2}{\left(x^2+2y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Aproximant-nos a l'origen de coordenades segons una recta d'equació $y = mx$ $(x > 0)$ aquesta expressió tendeix a $-\frac{6m^2}{(1+2m^2)\sqrt{1+m^2}}$, que depèn de m i, per tant, el límit anterior no existeix. En conseqüència, f no és diferenciable a $(0,0)$.

2. L'equació $z^3y + 3xe^{z-1} + 2x^2 + y^2 = 0$ defineix implícitament, sota certes condicions, z com a funció de x i y: $z = f(x,y)$.

   a) Raona que f així definida existeix sense ambigüitats en un entorn del punt $(x,y) = (0,-1)$ i hi és diferenciable. Què val $f(0,-1)$?

   b) Escriu l'aproximació lineal de f en el punt $(0,-1)$ i digues quin és el màxim valor de $D_{\vec{u}}f(0,-1)$ quan $\vec{u}$ és un vector unitari.

c) Sigui $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una funció vectorial definida així: $g(t) := (t^3, 6t)$. Comprova si la funció $h := g \circ f$ verifica les hipòtesis del teorema de la funció inversa en el punt $(0, -1)$ i, en aquest cas, troba la matriu jacobiana de la funció h^{-1} en el punt $h(0, -1)$.

Solució:

a) Substituint $x = 0$ i $y = -1$ s'obté $-z^3 + 1 = 0$ que té l'única solució $z = 1$. Si existeix $f(x, y)$ cal, per tant, que $f(0, -1) = 1$. Si expressem l'equació com $F(x, y, z) = 0$, F és de classe C^1. A més, $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 y + 3xe^{z-1}$ que en el punt en qüestió ($x = 0$, $y = -1$ i $z = 1$) no s'anuł.la. Es verifiquen, per tant, les hipòtesis del teorema de la funció implícita i aleshores existeix f en un entorn del punt $(0, -1)$ i hi és diferenciable.

b) Derivant l'equació $F(x, y, f(x, y)) = 0$ respecte x i y s'obté:

$$3z^2 y \frac{\partial f}{\partial x} + 3e^{z-1} + 3xe^{z-1}\frac{\partial f}{\partial x} + 4x = 0,$$

$$z^3 + 3z^2 y \frac{\partial f}{\partial y} + 3xe^{z-1}\frac{\partial f}{\partial y} + 2y = 0.$$

Substituint $x = 0$ i $y = -1$ i aillant les derivades parcials es té:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = 1 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, -1) = -\frac{1}{3}.$$

L'aproximació lineal de f al voltant del punt $(0, -1)$ serà:

$$f(x, y) \simeq f(0, -1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) \cdot (x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, -1) \cdot (y + 1) = x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}.$$

La màxima derivada direccional és: $||\nabla f(0, -1)|| = ||(1, -\frac{1}{3})|| = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

c) La matriu jacobiana de la funció h, $\mathrm{J}h(0, -1)$, és:

$$\mathrm{J}g(f(0, -1)) \cdot \mathrm{J}f(0, -1) = \mathrm{J}g(1) \cdot \mathrm{J}f(0, -1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu no té inversa i, per tant, no es verifiquen les hipòtesis del teorema de la funció inversa.

3. Considera la corba $C \subset \mathbb{R}^3$, que és la intersecció de les superfícies S_1 i S_2, definides implícitament mitjançant les següents equacions:

$$S_1 : \; z^2 + xy = 0 \qquad\qquad S_2 : \; x^2 + y^2 = 2$$

Troba, si existeixen, el punt o punts de C on la recta que hi és tangent és paral.lela a la recta definida per les equacions $x - y = 0$ i $z = 0$.

Solució

Si anomenem $F(x, y, z) = 0$ i $G(x, y, z) = 0$ les relacions definitòries de les superfícies S_1 i S_2 (respectivament), aleshores el vector tangent en un punt de la corba es troba fent:

$$\vec{v}(x, y, z) := \nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{z} \\ y & x & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = (-4yz, 4xz, 2y^2 - 2x^2).$$

El vector director de la recta definida per les equacions $x - y = 0$ i $z = 0$ és $(1, 1, 0)$. Hem de trobar els punts $(x, y, z) \in C$ tals que $\vec{v}(x, y, z) = \alpha(1, 1, 0)$ per algun $\alpha \neq 0$. S'han de verificar, per tant, les següents equacions:

$$\begin{cases} -4yz = \alpha, \qquad 4xz = \alpha, \qquad 2y^2 - 2x^2 = 0, \\ z^2 + xy = 0, \qquad x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

De les últimes equacions de cada fila es desprèn que $|x| = |y| = 1$. La penúltima equació implica $z = \pm\sqrt{-xy}$ i, per tant, les solucions permeses són:

$$(1, -1, 1), \qquad (1, -1, -1), \qquad (-1, 1, 1) \qquad \text{i} \qquad (-1, 1, -1).$$

En tots quatre casos es verifiquen les altres dues equacions del sistema.

4. Considera la funció $f(x,y) = x^3 - x^2 - y^2 + 3y - xy$.

   a) Troba tots els seus punts crítics i digues si són màxims, mínims o punts de sella.

   b) Troba el màxim i el mínim absolut de f en el conjunt:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x+y \leqslant 2, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\right\}$$

Solució

a) Els punts crítics seran les solucions del sistema format per les equacions:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2x - y = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 3 - x = 0.$$

Aillant x de la segona equació i substituint a la primera equació s'obtenen dos punts crítics, de coordenades $P_1(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ i $P_2(1,1)$. Calculant les matrius hessianes corresponents a cadascun d'aquests punts i aplicant el criteri de Sylvester s'obté:

$$\mathrm{H}f(P_1) = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = -5 < 0 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 9 > 0$$

$$\mathrm{H}f(P_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = 4 > 0 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

En conseqüència, f té un màxim relatiu a P_1 i un punt de sella a P_2.

b) El conjunt A és un compacte i, per tant, f (que és contínua) assolirà un màxim i un mínim absolut en A. La frontera del conjunt A és un triangle de vèrtexs als punts $V_1(0,0)$, $V_2(0,2)$ i $V_3(2,0)$.

- Cap dels punts trobats a l'apartat anterior pertany a l'interior d'A i, per tant, els extrems absoluts estaran a la frontera d'A.
- Els extrems de f sobre el segment (V_1, V_2) es troben derivant la funció $f(0,y) = -y^2 + 3y$. L'única solució és el punt $Q_1(0, \dfrac{3}{2})$.
- Els extrems de f sobre el segment (V_1, V_3) es troben derivant la funció $f(x,0) = x^3 - x^2$. Apareix la solució $Q_2(\dfrac{2}{3}, 0)$. (La solució amb $x = 0$ no pertany al segment obert.)
- Els extrems de f sobre el segment (V_2, V_3) es poden trobar pel mètode dels multiplicadors de Lagrange aplicat a la funció $F(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda(x+y-2)$. Cal resoldre el sistema format per les equacions:

$$3x^2 - 2x - y = \lambda, \qquad -2y + 3 - x = \lambda \qquad \text{i} \qquad x + y = 2.$$

  Aillant la y de l'última equació, substituint a les altres dues i igualant-les s'obtenen les solucions $(1,1)$ i $(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{3})$. Només la primera solució pertany al segment (és el punt P_2 trobat a l'anterior apartat).
- Per tant, els candidats a extrems absoluts seran els punts Q_1, Q_2 i P_2 i els vèrtexs V_1, V_2 i V_3. Avaluant la funció en cadascun d'aquests punts s'obté:

$$f(Q_1) = \frac{9}{4} \quad f(Q_2) = -\frac{4}{27} \quad f(P_2) = 1 \quad f(V_1) = 0 \quad f(V_2) = 2 \quad f(V_3) = 4$$

En conclusió, els valors màxim i mínim de f en A són 4 i $-\dfrac{4}{27}$, que s'atenyen als punts $(2,0)$ i $(\dfrac{2}{3}, 0)$, respectivament.

ANÁLISIS VECTORIAL. ETSETB. 26-11-2004

1. Dada la función $\mathbf{f}(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2-2}, \log(x^2+y^2+z^2-1)) \equiv (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$.

   a) Determinar $A = \mathrm{Dom}\mathbf{f}$ y dar Int A, Ext A, Fr A.

   b) Dado el conjunto $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x,y,z) \in \mathbb{N},\ f_2(x,y,z) \geq 0\}$. Discutir si B es abierto, cerrado, ni abierto ni cerrado, o no se puede determinar su carácter.

Resolución

Tenemos :

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2-2}, \log(x^2+y^2+z^2-1)) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$$

a) $A = \mathrm{Dom}\,\mathbf{f}$ son los puntos de $\mathbb{R}^3$ que cumplen las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-2 \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2+y^2 \geq 2 \\ x^2+y^2+z^2 > 1 \end{array}$$

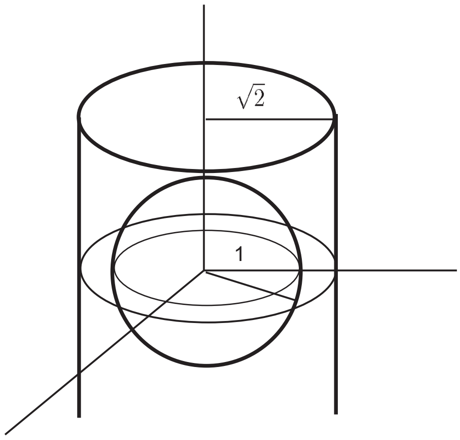


Figura 13: ejemplo

Así que:

- $A = \mathrm{Dom}\mathbf{f} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2 \geq 2\}$
- $\mathrm{Int}A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2 > 2\}$
- $\mathrm{Ext}A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2 < 2\}$
- $\mathrm{Fr}A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2 = 2\}$

b) Tenemos

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x,y,z) \in \mathbb{N},\ f_2(x,y,z) \geq 0\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2+y^2-2} \in \mathbb{N} \\ \log(x^2+y^2+z^2-1) \geq 0 \end{array}\right\}$$

Recordemos el Teorema que dice $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua $\Longleftrightarrow \forall$ cerrado W de $\mathbb{R}^m$, $f^{-1}(W) = A \cap V$ donde V es un cerrado de $\mathbb{R}^n$
En nuestro caso, $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2-2}, \log(x^2+y^2+z^2-1))$$

$\mathbf{f}$ es continua en $A = \mathrm{Dom}\mathbf{f}$. Consideramos $W = \mathbb{N} \times [0,+\infty)$ que es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$. Por tanto $B = \mathbf{f}^{-1}(W) = A \cap V$, donde V es cerrado en $\mathbb{R}^3$, entonces deducimos que B es cerrado en $\mathbb{R}^3$

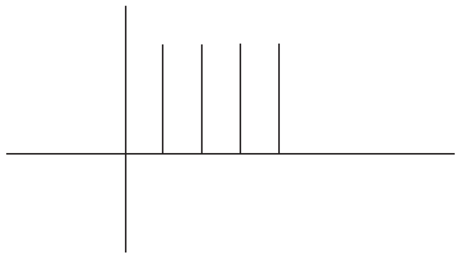


Figura 14: ejemplo

2. Sea $p = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ y una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en un entorno de p, tal que su polinomio de Taylor de segundo grado en p es $P_2(f;p) = \frac{1}{2}z^2 + \sqrt{2}xz - \sqrt{2}z$.

   Probar que p es un punto crítico de f y determinar su carácter.

   Resolución

   $p = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3 \qquad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f$ de clase C^2 en un entorno p

$$P_2(f;p) = \frac{1}{2}z^2 + \sqrt{2}xz - \sqrt{2}z = \sqrt{2}(x-1)z + \frac{1}{2}z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0,0) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0,0) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,0,0) = \sqrt{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,0,0) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0,0) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,0,0) = 1$$

   luego $\nabla f(1,0,0) = (0,0,0)$, así que $(1,0,0)$ es un punto crítico de f.
   Además

$$Hf(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0$. Así que por el criterio de Sylvester no podemos concluir nada.

   Calculamos los valores propios

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) + 2\lambda = \lambda[\lambda - \lambda^2 + 2] = 0$$

   $\lambda = 0$
   $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 2, -1$

   Por el criterio de los valores propios al ser $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, sabemos que $(1,0,0)$ es punto de silla.

3. Dado el sistema $\left.\begin{array}{rcl} xy(u-v) + uv(x+y) & = & 2 \\ x + y - u + v & = & 2 \end{array}\right\}.$

   a) Demostrar que en un entorno del punto $(x,y,u,v) = (1,1,1,1)$ el sistema define u y v como funciones de x e y. Justificar que las superficies $z = u(x,y)$ y $z = v(x,y)$ son regulares en $(x,y,z) = (1,1,1)$.

b) Demostar que las superficies anteriores se cortan en una curva regular en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Calcular la recta tangente y el plano normal a dicha curva en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Resolución

a) Sea $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, u, v) = (xy(u - v) + uv(x + y) - 2, x + y - u + v - 2)$$

F es de clase C^1 en $\mathbb{R}^4$

$$DF(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} y(u - v) + uv & x(u - v) + uv & xy + v(x + y) & -xy + u(x + y) \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$DF(1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0$$

por el Teorema de la función implícita sabemos que
existe U abierto de $\mathbb{R}^2$, $\quad (1, 1) \in U$,
existe V abierto de $\mathbb{R}^2$, $\quad (1, 1) \in V$
y una función $g : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^2$

$$g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

tal que

$$F(x, y, g(x, y)) = (0, 0) \qquad \forall (x, y) \in U$$

Además g es de clase C^1 en U y

$$Dg(1, 1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(1, 1) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(1, 1) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(1, 1) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(1, 1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Veamos que $z = u(x, y)$ es regular en $(1, 1, 1)$.
En efecto, como u es una función de clase C^1 definida en un abierto U de $\mathbb{R}^2$, entonces el gráfico de esta función es una superficie regular. Basta considerar la aplicación

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^3$$

dada por $\phi(x, y, z) = (x, y, z - u(x, y))$. Se trata de un difeomorfismo que satisface la definición de superficie regular.

Análogamente con la superficie gráfico de la función $z = v(x, y)$ en el punto $(1, 1, 1)$.

b) Sea $F(x, y, z) = (u(x, y) - z, v(x, y) - z)$

$$F(1, 1, 1) = (u(1, 1) - 1, v(1, 1) - 1) = (0, 0)$$

luego $(1, 1, 1)$ pertenece a la curva C definida por las ecuaciones

$$z = u(x, y)$$

$$z = v(x, y)$$

$$DF(x,y,z)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & -1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & -1 \end{pmatrix}$$

$$DF(1,1,1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que rang$DF(1,1,1)=2$, luego la curva es regular en $(1,1,1)$. En efecto, como

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

existen funciones $y=g(x)$, $z=h(x)$ tales que $F(x,g(x),h(x))=(0,0) \quad \forall x\in I$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ tal que $1\in I$. Además éstos funcionan con diferenciables.

Podremos entonces encontrar un abierto U de $\mathbb{R}^3$ tal que $(1,1,1)\in U$ de manera que la aplicación

$$\phi: U\subset\mathbb{R}^3 \longrightarrow \phi(U)\subset\mathbb{R}^3$$

definida por $\phi(x,y,z)=(x,y-g(x),z-h(x))$ es el difeomorfismo cuya existencia nos asegura que la curva es regular.

Por otra parte,

$$(g'(1),h'(1))=-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En un entorno de $(1,1,1)$ la curva viene parametrizada por

$$\begin{array}{rcl} \alpha: I\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longrightarrow & (x,g(x),h(x)) \end{array}$$

$$\alpha'(x)=(1,g'(x),h'(x))$$
$$\alpha'(1)=(1,-1,0)$$

luego la recta tangente a la curva en $(1,1,1)$ es

$$(x,y,z)=(1,1,1)+t(1,1,0) \qquad t\in\mathbb{R}$$

y el plano normal $(x-1)\cdot 1+(y-1)\cdot(-1)+(z-1)\cdot 0=0$
esto es

$$\boxed{\text{x-y=0}}$$

4. Sea la función $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin(x^2)-\sin(y^2)}{x-y} & \text{si} \quad x\neq y \\ 2x\cos(x^2) & \text{si} \quad x=y \end{cases}$.

a) Estudiar su continuidad. (*Recuérdese que* $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$).

b) Estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$.

Resolución

a) Evidentemente, la función es continua en los puntos (x, y) tales que $y \neq x$.Veamos qué ocurre con los puntos de la recta $y = x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x) &= \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x-y} = \\
&= \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{2\cos(\frac{x^2+y^2}{2})\sin(\frac{x^2-y^2}{2})}{x-y} = \\
&= \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{(x+y)\cos(\frac{x^2+y^2}{2})\sin(\frac{x^2-y^2}{2})}{\frac{x^2-y^2}{2}}
\end{aligned}$$

como $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{\sin(\frac{x^2-y^2}{2})}{\frac{x^2-y^2}{2}} = 1 \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{(x+y)\cos(\frac{x^2+y^2}{2})\sin(\frac{x^2-y^2}{2})}{\frac{x^2-y^2}{2}} = 2a\cos a^2 = f(a,a)$

Así que f es continua es $\mathbb{R}^2$.

b) Hay que calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h^2}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h^2}{h^2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{-\sin k^2}{-k}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\sin k^2}{k^2} = 1$$

Ahora, hay que estudiar $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{f(x,y)-f(0,0)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{\frac{\sin x^2-\sin x^2}{x-y} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{\frac{\sin x^2-\sin x^2}{x-y} - (x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \left[\frac{\sin x^2 - \sin y^2}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \left[\frac{2\cos\frac{x^2+y^2}{2}\sin\frac{x^2-y^2}{2}}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \left[\cos\frac{x^2+y^2}{2}\frac{\sin\frac{x^2-y^2}{2}}{\frac{x^2-y^2}{2}}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\cos\frac{x^2+y^2}{2}\frac{\sin\frac{x^2-y^2}{2}}{\frac{x^2-y^2}{2}} - 1\right]$$

y como

$$0 \leq \left|\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1+1=2$$

y

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \left[\cos\frac{x^2+y^2}{2}\frac{\sin\frac{x^2-y^2}{2}}{\frac{x^2-y^2}{2}} - 1\right] = 0$$

entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\cos\frac{x^2+y^2}{2}\frac{\sin\frac{x^2-y^2}{2}}{\frac{x^2-y^2}{2}} - 1\right] = 0$$

Por otra parte,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{f(x,y)-f(0,0)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2-2x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x(\cos x^2-1)}{\sqrt{2}|x|} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\sqrt{2}\frac{x}{|x|}(\cos x^2-1)$$

Como $\dfrac{x}{|x|}$ está acotado, entonces

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2}\frac{x}{|x|}(\cos x^2-1) = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Así que f es diferenciable en $(0,0)$

ANÀLISI VECTORIAL. ETSETB. 06/05/2005

1. Calcula el següent límit o, si no existeix, argumenta per què:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2+xy(xy-2)}$$

Solució

Si hom considera els límits cap a l'origen de coordenades segons les rectes $y = mx$ es té:

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{x^2+m^2x^2+mx^2(mx^2-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{(m-1)^2x^2+m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{(m-1)^2+m^2x^2}$$

que dóna 1 quan $m = 1$ i zero altrament. El límit demanat, per tant, no existeix ja que depèn de la direcció amb la qual hom s'apropi al punt $(0,0)$.

2. Es defineix la funció:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Digues si $f(x,y)$ és o no de classe C^1 i calcula, si existeix, la seva derivada direccional segons el vector $\vec{u} = (-2,1)$ en l'origen de coordenades.

Solució

La derivada direccional en l'origen de coordenades segons un vector qualsevol $\vec{v} = (a,b)$ serà:

$$D_{(a,b)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{a^3b^2t^5}{a^4t^4+b^4t^4} - 0\right) = \frac{a^3b^2}{a^4+b^4}.$$

En particular, la derivada direccional demanada existeix i és igual a $D_{(-2,1)}f(0,0) = -\frac{8}{17}$. La funció no és diferenciable en el punt $(0,0)$ ja que, si ho fos, $D_{(a,b)}f(0,0)$ hauria de ser lineal en a i b: $D_{(a,b)}f(0,0) = \alpha a + \beta b$ (essent α i β les derivades parcials de f en l'origen de coordenades) i no és el cas. Aleshores, la funció no és de classe C^1 en el punt $(0,0)$ perquè, si ho fos, hi seria diferenciable. Fora de l'origen de coordenades, en canvi, la funció sí que és de classe C^1.

3. Sigui l'equació $F(x,y,z) = x^2z^3 + y^4 + x^2z + y^2z + z + 3 = 0$.

   a) Raona per què aquesta equació defineix z implícitament com a funció f de x i y (de classe C^∞) a un entorn de qualsevol solució $F(x_0,y_0,z_0) = 0$. Argumenta també per què f així definida existeix i és única $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) Troba els punts crítics de f i decideix si són màxims relatius, mínims relatius o punts de sella.

Solució

a) F és de classe C^∞ i $\frac{\partial F}{\partial z} = 3x^2z^2 + x^2 + y^2 + 1$, que no s'anuł.la mai. Es compleixen, per tant, les hipòtesis del teorema de la funció implícita i $z = f(x,y)$ existeix almenys en un entorn de qualsevol solució de $F = 0$. D'altra banda, per qualsevol $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixat hom podria aillar explícitament z en funció de x i y ja que l'equació $F = 0$ es pot interpretar aleshores com $p(z) = 0$ amb p un polinomi de tercer grau si $x \neq 0$ o de primer grau si $x = 0$. Aquest polinomi de tercer grau només té una arrel real ja que és sempre creixent: $p'(z) = \frac{\partial F}{\partial z} > 0$.

b) Posant $z = f(x,y)$ i derivant l'equació $F = 0$ respecte x i y hom obté:

$$\begin{cases} 2xz^3 + 3x^2z^2\frac{\partial f}{\partial x} + 2xz + (x^2+y^2+1)\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ 3x^2z^2\frac{\partial f}{\partial y} + 2yz + (x^2+y^2+1)\frac{\partial f}{\partial y} + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

En els punts crítics de f:
$$\begin{cases} 2xz^3 + 2xz = 2xz(z^2+1) = 0 \\ 2yz + 4y^3 = 2y(z+2y^2) = 0 \end{cases}$$

L'única solució de la primera equació és $x = 0$ ja que no hi ha cap solució de $F = 0$ amb $z = 0$ i, a més, $z^2 \neq -1$. La segona equació admet dues solucions: $y = 0$ o bé $z = -2y^2$.

- Si $x = y = 0$ aleshores $F = 0$ implica $z = -3$.
- Substituint $x = 0$ i $z = -2y^2$ en $F = 0$ resulta l'equació $y^4 + 2y^2 - 3 = 0$, que només té dues solucions reals: $y = \pm 1$ ($\Rightarrow z = -2$).

Per tant, f té tres punts crítics: $(0,0)$, $(0,1)$ i $(0,-1)$. Per tal de trobar l'expressió de la hessiana de f cal derivar les equacions primeres respecte x i y:

$$\begin{cases} \left(12xz^2 + 4x\right)\frac{\partial f}{\partial x} + 6x^2z\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + (3x^2z^2 + x^2 + y^2 + 1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2z^3 + 2z = 0 \\ \left(6xz^2 + 2x\right)\frac{\partial f}{\partial y} + 2y\frac{\partial f}{\partial x} + 6x^2z\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + (3x^2z^2 + x^2 + y^2 + 1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0 \\ 4y\frac{\partial f}{\partial y} + 6x^2z\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + (3x^2z^2 + x^2 + y^2 + 1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2z + 12y^2 = 0 \end{cases}$$

Restringint aquestes equacions als punts crítics de f els termes amb derivades de primer ordre desapareixen i hom pot aillar les derivades segones de f, obtenint:

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}f(0,1) = \mathrm{H}f(0,-1) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Per tant, $(0,0)$ és un mínim relatiu de f i els altres dos punts crítics són punts de sella.

4. Considera la corba $C \subset \mathbb{R}^3$, que és la intersecció de les superfícies S_1 i S_2, definides implícitament mitjançant les següents equacions:

$$S_1:\ 4y^2 + z^2 = 1 \qquad\qquad S_2:\ x - y = 0$$

a) Demostra que C és una corba regular i escriu l'equació de la recta que és tangent a C en el punt $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

b) Sigui $f(x,y,z) = 8x + 4y + 5z^2$. Digues, raonant-ho, si f assoleix o no un màxim i un mínim absoluts en C i, en cas afirmatiu, troba els punts on els ateny.

Solució

a) La corba C es pot interpretar com $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{H}(x,y,z) = 0\}$, on $\mathbf{H}$ és una funció $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ definida per:

$$\mathbf{H}(x,y,z) = (F(x,y,z), G(x,y,z)) = \left(4y^2 + z^2 - 1, x - y\right).$$

La seva matriu jacobiana és:
$$J\mathbf{H}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 8y & 2z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

el rang de la qual és igual a dos (no hi ha cap punt de C amb $y = z = 0$). Per tant C és una corba regular perquè (almenys localment) es pot descriure explícitament d'acord amb el teorema de la funció implícita.

El vector tangent en un punt qualsevol de la corba és:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} F \times \vec{\nabla} G = (2z, 2z, -8y)$$

que, en el punt donat, és proporcional a $(3,3,8)$. La recta demanada serà, per tant:

$$(x,y,z) = \left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}, -\tfrac{3}{5}\right) + \lambda(3,3,8)$$

b) La corba C és la intersecció d'un cilindre de secció el·líptica orientat segons l'eix x amb un pla que l'és secant. Per tant, C és un compacte i f (que és contínua) hi assolirà un màxim i un mínim absoluts. El mètode dels multiplicadors de Lagrange permetrà obtenir-los. Cal trobar els punts crítics de la funció:

$$K(x, y, z; \lambda, \mu) = 8x + 4y + 5z^2 - \lambda(4y^2 + z^2 - 1) - \mu(x - y),$$

és a dir, cal resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 8 - \mu = 0 \\ 4 - 8\lambda y + \mu = 0 \\ 10z - 2z\lambda = 0 \\ 4y^2 + z^2 = 1 \\ x = y \end{cases}$$

De la tercera equació se segueix que $z = 0$ o bé $\lambda = 5$.

- La solució $z = 0$ implica $x = y = \pm\frac{1}{2}$. S'obtenen, per tant, dos punts crítics: $P_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ i $P_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$.
- Quan $\lambda = 5$ cal $x = y = \frac{3}{10}$, la qual cosa implica $z^2 = \frac{16}{25}$. Apareixen dos punts crítics més: $P_3\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}\right)$ i $P_4\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, -\frac{4}{5}\right)$

El mínim absolut de f s'assoleix a P_2: $f(P_2) = -6$, mentre que el màxim absolut de f s'ateny a P_3 i P_4: $f(P_3) = f(P_4) = \frac{34}{5} > f(P_1) = 6$.

1. Sigui $g(x,y) = \frac{x}{\sin\left(\frac{\pi}{y}\right)}$. Digues si el domini de g és un obert, tancat o compacte de $\mathbb{R}^2$, si està fitat i si és o no arc-connex.

Solució

Els punts (x,y) que no pertanyen al domini són els que tinguin $y=0$ o bé facin $\sin\left(\frac{\pi}{y}\right)=0$. Aquesta última igualtat es verificarà quan $\frac{\pi}{y} = \pi k \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{k}$, amb $k \in \mathbb{Z}^*$. Per tant, g no està definida en aquestes rectes horitzontals. Aquest conjunt de rectes és un tancat ja que conté tots seus els punts adherents. En particular, l'eix d'abscisses (els punts del qual són d'acumulació del conjunt) hi és inclòs. En conseqüència, el domini de g és un obert i no és, per tant, un compacte.

Tampoc està fitat (tota la recta $y=2$, per exemple, pertany al domini) i no és arc-connex perquè les rectes $y=\frac{1}{k}$ separen porcions disconnexes del domini.

2. Es defineix la funció:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y^2 + x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudia la continuïtat i la diferenciabilitat de f en els eixos de coordenades.

Solució

La funció és contínua a tot arreu excepte, potser, l'origen de coordenades. En aquest punt:

$$\left|\frac{|x|y^2 + x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \left|\frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| + \left|\frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \left|\frac{|x|y^2}{|x|}\right| + \left|\frac{x^2|y|}{|y|}\right| = y^2 + x^2,$$

que tendeix a zero quan $(x,y) \to (0,0)$. Per tant, f és contínua a tot $\mathbb{R}^2$.

A més, si $a \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a,t) - f(a,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|a|t^2 + a^2|t|}{t\sqrt{a^2+t^2}},$$

que no existeix. Similarment, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)$ tampoc existeix excepte quan $b=0$. Si no existeix alguna derivada parcial la funció no pot ser diferenciable i, per tant, no ho és en cap dels punts dels eixos excepte, potser, en l'origen de coordenades. En aquest punt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0,$$

i la condició de tangència, fent un argument similar a l'expressió (2), es verifica:

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(h_1,h_2) - 0 - 0\cdot h_1 - 0\cdot h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|h_1|h_2^2 + h_1^2|h_2|}{h_1^2+h_2^2} = 0.$$

Per tant, f és diferenciable en $(0,0)$.

3. Considera la superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, definida per: $3x^2 + 6xz - z^3 + 6\ln y - 3y + 5 = 0$.

   a) Discuteix la regularitat de S.

   b) Hi ha un punt on la recta d'equacions $x = y = -z$ és tangent a S. Troba'l.

Solució

a) $F(x,y,z) = 3x^2 + 6xz - z^3 + 6\ln y - 3y + 5$ és de classe C^∞ en els punts de S. El gradient de F s'anuł.la quan:

$$\begin{cases} 6x + 6z = 0 \\ \frac{6}{y} - 3 = 0 \\ 6x - 3z^2 = 0 \end{cases}$$

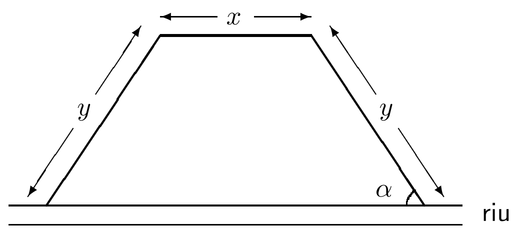
la qual cosa succeeix només en els punts $(0,2,0)$ i $(2,2,-2)$. Tanmateix, cap d'aquests punts pertany a S ja que, per ells, $F \neq 0$. La superfície és, per tant, regular en tots els seus punts.

b) En aquest punt s'ha de verificar que ∇F (vector perpendicular a S) i $(1,1,-1)$ (vector director de la recta) han de ser perpendiculars. Això implica que el seu producte escalar s'ha d'anuł.lar:

$$6x + 6z + \frac{6}{y} - 3 - 6x + 3z^2 = 0.$$

A més, el punt ha de pertànyer a la recta i a S. L'equació anterior té tres solucions quan es consideren les equacions de la recta ($x = y = -z$): $(1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$ i $(2,2,-2)$. Només el primer d'ells verifica l'equació definitòria de la superfície; aquest és, per tant, el punt que cerquem.

4. L'Oficina de Colonització del Llunyà Oest t'atorgarà la propietat del tros de terra que siguis capaç de tancar amb 6 milles de tanca de filferro espinós. Per algun motiu decideixes delimitar un tros de terra en forma de trapezi isòsceles, una de les bases del qual coincideix amb la riba d'un riu. D'aquesta manera no et caldrà emprar tanca per aquest costat i podràs utilitzar les 6 milles de filferro per tancar els altres tres costats:



Troba les dimensions de la teva parceł.la (x, y i α) perquè la superfície tancada sigui la màxima possible.

Solució

El trapezi es pot descomposar en un rectangle i dos triangles idèntics. L'àrea serà, per tant:

$$A(x,y,\alpha) = x \cdot y \sin\alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y \sin\alpha \cdot y \cos\alpha.$$

Cal trobar el màxim de la funció $A(x,y,\alpha)$ amb la restricció de què el perímetre sense la base inferior sigui igual a 6, és a dir: $g(x,y,\alpha) = x + 2y - 6 = 0$. El mètode de Lagrange (que es pot utilitzar, ja que $\nabla g \neq \mathbf{0}$) dóna:

$$\begin{cases} y \sin\alpha = \lambda \\ x \sin\alpha + 2y \sin\alpha \cos\alpha = 2\lambda \\ xy \cos\alpha + y^2 \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

De les dues primeres equacions s'obté:

$$\sin\alpha\,(x + 2y\cos\alpha - 2y) = 0.$$

El màxim que cerquem no es donarà quan $\alpha = 0$. Per tant:

$$x = 2y - 2y\cos\alpha,$$

equació que, combinada amb l'última de (4), dóna ($y \neq 0$ en el màxim):

$$4y - 2y\cos\alpha = 6 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{4y-6}{2y} = 2 - \frac{3}{y}.$$

Dividint la tercera equació del sistema (4) per y i substituint-hi l'equació (4), queda ($\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$):

$$(6-2y)\left(2-\frac{3}{y}\right)+y\left(2\left(2-\frac{3}{y}\right)^2-1\right)=0.$$

Desenvolupant i aïllant y s'obté la solució:

$$\boxed{y = 2 \text{ milles}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2 \text{ milles}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 60^{\text{o}},}$$

que ha de ser el màxim ja que geomètricament observem que ha d'haver-ne.

1. Sea C la curva del plano definida implícitamente por la ecuación $g(x,y) = y^2 - x(x-1)^2 = 0$.

   a) Determinad si C es una curva regular.

   b) Probad que la ecuación $g(x,y) = 0$ define una curva regular en un entorno del punto $(0,0)$. Encontrad la recta tangente a la curva C en este punto.

   c) Considerad la curva parametrizada $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\sigma(t) = (t^2, t(t^2-1))$. Comprobad que $\sigma(\mathbb{R}) = C$.

   d) Utilizando la parametrización dada, estudiad si es una curva regular en el punto $(1,0)$.

   e) Estudiad por el método de los multiplicadores de Lagrange la existencia o no de puntos críticos de la función $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ sobre la curva $g(x,y) = 0$. ¿Tiene f restringida a C mínimo?

Resolución

a)

$$\begin{aligned} \nabla g(x,y) &= \big(-(x-1)^2 - 2x(x-1), 2y\big) = \\ &= \big(-x^2 + 2x - 1 - 2x^2 + 2x), 2y\big) = \\ &= \big(-3x^2 + 4x - 1, 2y\big) \end{aligned}$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

luego $\nabla g(x,y) = (0,0)$ en los puntos $(1,0)$ y $(\frac{1}{3}, 0)$.

$g(1,0) = 0 \quad$ pero $\quad g(\frac{1}{3}, 0) \neq 0$

Por tanto, aplicando el Teorema de la función implícita podemos afirmar que la curva C es regular en todos sus puntos salvo quizá, en $(1,0)$.

b) $\nabla g(0,0) = (-1,0)$, como g es de clase C^1 aplicando el Teorema de la función implícita sabemos que existe un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, $0 \in I$ y un intervalo abierto J de $\mathbb{R}$, $-1 \in J$ y una aplicación

$$h : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow J \subset \mathbb{R}$$

tal que $h(0) = 1$ y $g(h(y), y) = 0 \qquad \forall y \in I$

Además h es diferenciable y $h'(0) = 0$.

Se puede encontrar un abierto U de $\mathbb{R}^2$ tal que $(0,0) \in U$ de manera que la aplicación

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^2$$

definida por $\phi(x,y) = (x - h(y), y)$ es el difeomorfismo cuya existencia nos asegura que la curva es regular en $(0,0)$.

Localmente podemos parametrizar la curva por

$$\begin{array}{rcc} \alpha : I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ y & \to & (h(y), y) \end{array}$$

$\alpha(0) = (0,0)$ y $\alpha'(0) = (h'(0), 1) = (0,1)$

luego la recta tangente a la curva C en el punto $(0,0)$ es

$$(x,y) = (0,0) + \lambda(0,1) = (0, \lambda)$$

es decir, es la recta $x = 0$, el eje de las y.

c) Veamos en primer lugar que $\sigma(\mathbb{R}) \subset C$

$$\sigma(t) = (t^2, t(t^2-1)) = (x, y)$$

luego

$$y^2 - x(x-1)^2 = t^2(t^2-1)^2 - t^2(t^2-1)^2 = 0$$

Veamos ahora que $C \subset \sigma(\mathbb{R})$
Sea $(x, y) \in C$, esto es $y^2 - x(x-1)^2 = 0$
Si $x \neq 1$ $\quad x = \dfrac{y^2}{(x-1)^2} \geq 0$, luego x siempre toma valores positivos. Podemos considerar que $x = t^2$ con $t \in \mathbb{R}$. Entonces $y^2 = t^2(t^2-1)^2$, luego $y = \pm t(t^2-1)$ con $t \in \mathbb{R}$ esto es $(x, y) \in \sigma(\mathbb{R})$.

d) Observemos que $\sigma(t) = (1, 0) \quad \Rightarrow \quad t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \text{o} \quad -1.$
Esto es $\sigma(1) = \sigma(-1) = (1, 0)$.
Por otra parte $\sigma'(t) = (2t, 3t^2 - 1) \quad$ y $\quad \sigma'(1) = (2, 2) \quad$ y $\quad \sigma'(-1) = (-2, 2)$.
Los vectores tangentes son distintos para $t = 1$ y $t = -1$, sin embargo corresponden al mismo punto $(1, 0)$. Luego la curva C no es regular en $(1, 0)$.

e)

$$\left.\begin{array}{rcl} y^2 - x(x-1)^2 & = & 0 \\ (2(x+1), 2y) & = & \lambda(-3x^2 + 4x - 1, 2y) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rcl} y^2 - x(x-1)^2 & = & 0 \\ 2(x+1) & = & \lambda(-3x^2 + 4x - 1) \\ y & = & \lambda y \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y = 0 \qquad \text{o} \qquad \lambda = 0$$

Si $y = 0$ de la primera ecuación obtenemos que $x = 0$ o $x = 1$
Si $x = 0$ de la segunda ecuación obtenemos $\lambda = -2$
Si $x = 1$ la segunda ecuación queda como $4 = 0$, que es imposible
Si $\lambda = 0$, de la segunda ecuación obtenemos $x = -1$, pero entonces la primera queda $y^2 = -4$, que es imposible.
Así pues, $(0, 0)$ es el único punto crítico de la función.

Veamos ahora si f restringida a C alcanza un mínimo.
Como sobre la curva C, x siempre es mayor o igual que 0, el valor mínimo de f para $x \geq 0$ se alcanza en $(0, 0)$, luego f restringida a C tiene mínimo en el punto $(0, 0)$. Este valor mínimo es $f(0, 0) = 1$.

2. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} xz^3 + y^2t^3 & = & 1 \\ 2xy^3 + t^2 z & = & 0 \end{array}$$

a) Demostrad que existen funciones diferenciables $f(y, z) = (x, t)$ y $g(x, t) = (y, z)$ definidas implícitamente por el sistema dado en un entorno del punto $(x, y, z, t) = (0, 1, 0, 1)$.

b) Calculad $\mathrm{D}f(1, 0)$.

c) Demostrad (utilizando el teorema de la función inversa) que la función f admite inversa diferenciable en un entorno del punto $(1, 0)$.

d) Calculad $\mathrm{D}f^{-1}(f(1, 0))$.

e) Estudiad la relación entre las matrices correspondientes a $\mathrm{D}f^{-1}(f(1, 0))$ y $\mathrm{D}g(0, 1)$.¿A qué se debe esa relación?

Resolución

a) Consideremos la función

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

definida por $F(x, y, z, t) = (xz^3 + y^2t^3 - 1, 2xy^3 + t^2z)$. Es de clase C^1 y

$$DF(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} z^3 & 2yt^3 & 3xz^2 & 3y^2t^2 \\ 2y^3 & 6xy^2 & t^2 & 2tz \end{pmatrix}$$

$$DF(0, 1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ aplicando el Teorema de la función implícita, sabemos que
Existe $U_1 \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $(1, 0) \in U_1$
Existe $V_1 \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $(0, 1) \in V_1$
y una función $f : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to V_1 \subset \mathbb{R}^2$

$$f(y, z) = (f_1(y, z), f_2(y, z))$$

tal que $f(1, 0) = (0, 1)$ y $F(f_1(y, z), y, z, f_2(y, z)) = (0, 0)$ $\forall (y, z) \in U_1$. Además sabemos que f es de clase C^1 en U_1.

Por otra parte, como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ aplicando de nuevo el Teorema de la función implćita, sabemos que
Existe $U_2 \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $(0, 1) \in U_2$
Existe $V_2 \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $(1, 0) \in V_2$
y una función $g : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to V_2 \subset \mathbb{R}^2$

$$g(x, t) = (g_1(x, t), g_2(x, t))$$

tal que $g(0, 1) = (1, 0)$ y $F(x, g_1(x, t), g_2(x, t), t) = (0, 0)$ $\forall (x, t) \in U_2$. Además sabemos que g es de clase C^1 en U_2.

b) Por el Teorema de la función Implícita

$$Df(1, 0) = -\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

c) Sabemos que $f : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to V_1 \subset \mathbb{R}^2, \quad (1, 0) \in U_1$ y que

$$Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \neq 0$, aplicando el Teorema de la función inversa, deducimos que
Existe $U_3 \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $(1, 0) \in U_3$
Existe $V_3 \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $(0, 1) \in V_3$
de manera que $f : U_3 \subset \mathbb{R}^2 \to V_3 \subset \mathbb{R}^2$ es biyectiva y f^{-1} es de clase C^1 en V_3.

d) El Teorema de la función inversa nos permite calcular

$$Df^{-1}(f(1, 0)) = [Df(1, 0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -3\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e) De nuevo, aplicando el Teorema de la función implícita, sabemos que

$$Dg(0,1) = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que $Df^{-1}(f(0,1)) = Dg(0,1)$
y esto se debe a que localmente, en un entorno de $(0,1)$, las funciones f^{-1} y g coinciden.