ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

Senyals i Sistemes I **Exàmen Final T05: 18 de Gener de 2006** **Duració: 3h**

Publicació Notes Provisionals: 26-1-06 **Al.legacions: 27-1-06** **Publicació Notes Definitives: 30-1-06**

No es permet l'ús de calculadores, llibres i/o apunts. Les respostes de diferents exercicis s'han d'entregar en fulls separats

Problema 1

Un problema de los filtros causales es que la respuesta siempre está retrasada respecto a la excitación. Además, con las tecnologías disponibles, el retardo es diferente para cada componente frecuencial, provocando una distorsión de la señal que pasa por el filtro. (Considérese siempre h(t) real)

a) Suponga una señal sinusoidal, $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$ que pasa por un sistema LI $h(t)$. Indique el retardo que sufre $x(t)$ en función de $H(f)$. Generalizando para una señal de entrada compuesta por varias frecuencias ¿qué propiedad tendría que cumplir $H(f)$ para que no retardase la señal de entrada?

b) ¿Y para que retarde la señal un valor fijo, t_0, para todas las frecuencias presentes a su entrada?

c) Exprese las anteriores propiedades en el dominio temporal, es decir, sobre $h(t)$.

d) A la vista de los resultados anteriores, discuta el problema enunciado previamente para el caso de los filtros causales y para los filtros racionales (cuya respuesta impulsional es combinación lineal de exponenciales oscilantes causales).

Una estrategia para corregir la distorsión de fase asociada con el retardo se presenta en el esquema de la Fig.1, donde $h(t)$ es un S.L.I. causal y real.

e) Caracterice de forma compacta la relación entrada/salida del sistema global en el dominio temporal y en el domino frecuencial. Discuta el retardo que introduce en función de la frecuencia.

f) Analice justificadamente las propiedades de invarianza y causalidad del sistema *reflexión* y del sistema global.

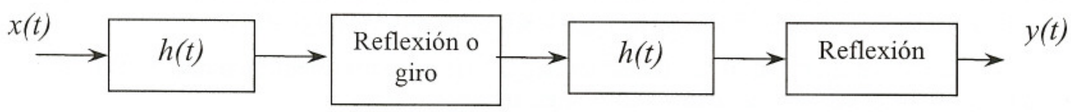


Fig.1

Como caso particular, sea $h(t) = \alpha\, e^{-\alpha t}\, u(t)$

g) Suponga una señal sinusoidal, $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$ que pasa por el sistema $h(t)$. Indique el retardo que sufre $x(t)$ en función de $H(f)$.

h) Para el sistema global, calcule su respuesta impulsional $h_T(t)$ y su respuesta frecuencial $H_T(f)$. Discuta el retardo que ocasiona.

Problema 2

a) Demuestre que es suficiente que la respuesta impulsional h(t) de un sistema LI cumpla $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$ para que el sistema sea estable

b) Enuncie y demuestre las propiedades del escalado y desplazamiento en tiempo de la Transformada de Fourier de una señal x(t). Es decir, si $F[x(t)]=X(f)$, enuncie y demuestre $F[x(t-t_0)]$ y $F[x(at)]$

c) Sea la señal $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-2nT_0)$. Se pide:

c.1) Compruebe que x(t) es periódica, ¿de qué periodo?

c.2) Enuncie y demuestre la expresión de la Transformada de Fourier de x(t) en función de T_0 y de la Transformada de Fourier de y(t), Y(f).

d) Enuncie y demuestre el Teorema de Parseval para el cálculo de la potencia de una señal periódica de periodo T_0.

e) Sea un filtro paso bajo Inverso de Chebychev de orden n con función característica $F(\omega^2) = \dfrac{1}{\varepsilon^2 C_n^2\left(\dfrac{\omega_a}{\omega}\right)}$.

Calcule la posición de los ceros de atenuación y ceros de transmisión. Exprese el número de los ceros de transmisión en función de n. Nota: $C_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1}(x)) & \text{per } |x| \leq 1 \\ ch(n.ch^{-1}(x)) & \text{per } |x| > 1 \end{cases}$

Problema 3

Es considera l'esquema de la Fig.2 on el commutador canvia de posició cada Tc segons. El senyal $z_1(t)$ es pot expressar com $z_1(t)=x(t).p(t)$ on $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\dfrac{t-2nTc}{Tc}\right)$

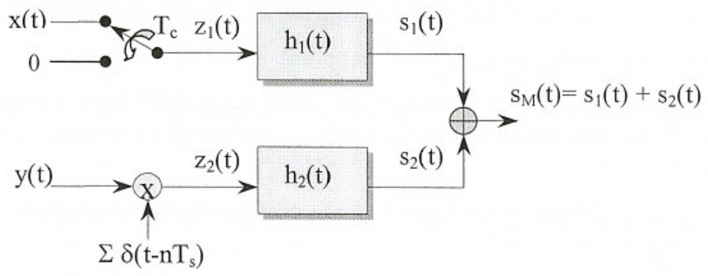


Fig.2

a) Aquest esquema es pot utilitzar com a multiplexor quan els senyals d'entrada, x(t) i y(t), són passa-baixes d'ample de banda B Hz. Es desitja obtenir a la sortida $s_M(t)=x(t).\cos(2\pi f_1 t) + y(t).\cos(2\pi f_2 t)$

a.1) Trobi les transformades $Z_1(f)$ i $Z_2(f)$ (en funció de X(f) i Y(f) respectivament). Dibuixi $Z_1(f)$ i $Z_2(f)$ amb tots els valors d'interés (suposi X(f) rectangular i Y(f) triangular).

En endavant consideri f_1=1,2 kHz, f_2=2 kHz, B=200 Hz, Ts=1ms i Tc=5Ts/4.

a.2) Defineixi (guany i ample de banda) els filtres ideals $H_1(f)$ i $H_2(f)$ adequats.

b) Els dos filtres anteriors es volen dissenyar per Transformació de Freqüències. Consideri que el guany de cada filtre s'implementarà apart amb un amplificador, previ a cada filtre. Es demana per cada filtre (deixi indicades les operacions numèriques que no sàpiga aproximar):

b.1) Dibuixi i defineixi (amb tots els valors freqüencials) les plantilles d'especificacions.

b.2) Defineixi completament les Transformacions de Freqüències que garanteixen un menor ordre dels prototips.

b.3) Dibuixi i defineixi justificadament (amb tots els valors freqüencials) les plantilles d'especificacions dels corresponents prototips. Justifiqui quin filtre és més selectiu?

En endavant consideri que una aproximació de Chebychev d'ordre 3 verifica la plantilla d'especificacions del prototip de $H_1(f)$. Per aquest filtre i el seu prototip, es demana:

b.4) Dibuixi, el més acuradament possible, les corves d'atenuació i la resposta freqüencial (consideri el prototip ajustat a les dues bandes alhora). Marqui-hi la situació de tots els zeros d'atenuació i els pendents asimptòtics (marqui clarament els punts on la corba d'atenuació toqui la plantilla d'especificacions) . Doni la multiplicitat de tots els Zeros d'Atenuació i de Transmissió. Quin ordre té el filtre?

b.5) Si α_p=3dB, trobi les seves Funcions Característiques.

Nota: $C_0(x)=1$, $C_1(x)=x$, $C_n(x)=2xC_{n-1}(x)-C_{n-2}(x)$

PROBLEMA 2.(resolución catalán/castellano)

a) Demuestre que es suficiente que la respuesta impulsional h(t) de un sistema LI cumpla

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty \; \textit{\textbf{para que el sistema sea estable}}$$

Respuesta :

Un sistema es estable si para cualquiera entrada acotada le corresponde una salida acotada.
Matemáticamente : Si $|x(t)|<B_1$ entonces $|y(t)|<B_2$

Para un sistema LI, caracterizado por h(t), la salida es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Buscamos una cota para y(t) para una entrada acotada

$$|y(t)| = |\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau$$

Si la entrada es acotada, resulta :

$$|y(t)| < \int_{-\infty}^{\infty} B_1 |h(t-\tau)|d\tau$$

Haciendo un cambio de variable $t'=t-\tau$:

$$|y(t)| < B_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(t')|\, dt'$$

Por tanto para que y(t) sea acotado hace falta que h(t) sea absolutamente integrable, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t')|\, dt' < \infty$$

b) Enuncie y demuestre las propiedades del escalado y desplazamiento en tiempo de la Transformada de Fourier de una señal x(t). Es decir so F[x(t)]=X(f), enuncie y demuestre F[x(t-t₀)] yF[x(at)]

b1) Si $x(t) \leftrightarrow X(f)$
llavors, $x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t0} X(f)$

Demostració

$$F[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt = \{t' = t-t_0; dt' = dt\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-j2\pi f(t'+t_0)}dt'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-j2\pi ft'}e^{-j2\pi ft_0}dt'$$

$$= e^{-j2\pi ft_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-j2\pi ft'}dt' = e^{-j2\pi ft_0}X(f)$$

b2) Si $x(t) \leftrightarrow X(f)$
llavors, $x(at) \leftrightarrow 1/|a|\, X(f/a)$

Demostració

$$F[x(at)]=\int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j2\pi ft}dt$$

Fem el canvi de variable $t^{'}=at$. No obstant el resultat és diferent si a és positiu o negatiu :

$$\{t^{'}=at,dt^{'}=adt\}=\begin{cases} a>0 & \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(t^{'})e^{-j2\pi\frac{f}{a}t^{'}}dt^{'} \\ a<0 & \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} x(t^{'})e^{-j2\pi\frac{f}{a}t^{'}}dt^{'}=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(t^{'})e^{-j2\pi\frac{f}{a}t^{'}}dt^{'} \end{cases}$$

i aplicant la igualdad a = -|a| si a < 0 , ambdues expressions equivalen a :

$$F[x(at)]=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(t^{'})e^{-j2\pi\frac{f}{a}t^{'}}dt^{'}=\frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$$

c) Sea la señal $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-2nT_0)$

c1) Compruebe que x(t) es periódica, ¿de qué periodo?
c2) Enuncie y demuestre la expresión de la transformada de Fourier de x(t) en función de T_0 y de la transformada de Fourier de y(t), Y(f). Si lo necesita puede utilizar el siguiente par de transformadas :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\xrightarrow{F}\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{m}{T})$$

c1) Para que una señal sea periódica debe cumplirse que :
$x(t)=x(t+T)$
el mínimo T que cumpla la igualdad será el periodo de la señal.

Para la señal del enunciado :

$$x(t+T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t+T-2nT_0)$$

Si tomamos $T=2T_0$ entonces :

$$x(t+T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t+2T_0-2nT_0)=$$

$$x(t+T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-2(n-1)T_0)=\{m=n-1\}$$

$$x(t+T)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} y(t-2mT_0)=x(t)$$

Como el nombre del índice (*m* o *n*) es irrelevante se demuestra la igualdad anterior. Además el periodo de la señal es $2T_0$

C2) Para hallar X(f) :

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-2nT_0)$$

$$x(t)=y(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2nT_0)$$

Hacemos TF y aplicamos el teorema de convolución y el par de transformado del enunciado

$$X(f) = Y(f) \cdot \frac{1}{2T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{m}{2T_0})$$

Pasamos Y(f) dentro del sumatorio y hacemos el producto. Finalmente obtenemos :

$$X(f) = \frac{1}{2T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y(\frac{m}{2T_0}) \delta(f - \frac{m}{2T_0})$$

d) Enuncie y demuestre el teorema de Parseval para el cálculo de la potencia de una señal periódica de periodo T_0

Sea una señal periódica de periodo T_0 de la forma

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) e^{j2\pi mt/T_0}$$

donde $c(m)$ son los coeficientes de su desarrollo en serie. El teorema de Parseval establece

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} |x(t)|^2 \, dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c(m)|^2$$

Demostración:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) e^{j2\pi mt/T_0} dt = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{j2\pi mt/T_0} dt = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) c^*(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c(m)|^2 \end{aligned}$$

La potencia de una señal periódica es igual a la suma de las amplitudes al cuadrado de las componentes armónicas de la señal

e) Sea un filtro paso bajo inverso de Chebychew de orden n con función característica :

$$F(w^2) = \frac{1}{\varepsilon^2 C_n^2(\frac{w_a}{w})}$$

Calcule la posición de los ceros de atenuación y los ceros de transmisión. Exprese el número de ceros de transmisión en función de n.

Los ceros de atenuación se sitúan en aquellas frecuencias en que $F(w^2)=0$. Para la función inverso de Chebychew debe cumplirse que $\varepsilon^2 C_n^2(\frac{w_a}{w_{0i}}) = \infty$. Esto ocurre solo cuando el argumento es ∞, es decir todos los ceros w_{0i} estan en el origen.

Los ceros de transmisión se sitúan en aquellas frecuencias en que $F(w^2)= \infty$. Para la función inverso de Chebychew debe cumplirse que $\varepsilon^2 C_n^2(\frac{w_a}{w_{\infty j}}) = 0$. Para hallar la situación de los ceros de transmisión debemos tener en cuenta que dichas frecuencias son superiores a wa. Entonces el argumento será menor que 1 y por tanto podemos utilizar la expresión :

$$\varepsilon^2 \cos^2 n \arccos(\frac{w_a}{w_{\infty j}}) = 0$$

Que se simplifica como :

$$\cos n \arccos(\frac{w_a}{w_{\infty j}}) = 0$$

$$n \arccos\left(\tfrac{w_a}{w_{\infty j}}\right) = \frac{\pi}{2}(2k+1)$$

$$\arccos\left(\tfrac{w_a}{w_{\infty j}}\right) = \frac{\pi}{2n}(2k+1)$$

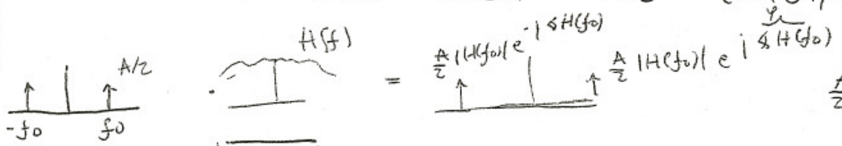
$$\tfrac{w_a}{w_{\infty j}} = \cos\left(\frac{\pi}{2n}(2k+1)\right)$$

Finalmente :

$w_{\infty j} = \frac{w_a}{\cos(\frac{\pi}{2n}(2k+1))}$ para k=0,…,n-1

Problema 1

(1)



$$\frac{A}{2}|H(f_0)|\left(e^{-j\varphi}\delta(f+f_0)+e^{j\varphi}\delta(f-f_0)\right)$$

$$\Updownarrow F^{-1}$$

$$\frac{A}{2}|H(f_0)|\left(e^{-j\varphi}e^{-j2\pi f_0 t}+e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t}\right)$$

a) $A\cos 2\pi f_0 t \;\text{—}\boxed{h(t)}\text{—}\; A|H(f_0)|\cos\left(2\pi f_0 t + \measuredangle H(f_0)\right)$

$$= A|H(f_0)|\cos\left(2\pi f_0\left(t+\frac{\measuredangle H(f_0)}{2\pi f_0}\right)\right)$$

$x(t)$ queda atenuada y retardada.

el retardo es $t_0 = -\dfrac{\measuredangle H(f_0)}{2\pi f_0}$

Para que no se retarden las componentes de $x(t)$,

$\measuredangle H(f_0) = 0$

b) Para que el retardo fuera constante, $\forall f$, el sistema ha de ser de "fase lineal". En efecto:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ctte } \forall f}}{t_0} = -\measuredangle H(f)/2\pi f \quad\Rightarrow\quad \measuredangle H(f) = \underbrace{-2\pi f t_0}_{\text{fase lineal,}}$$

$\measuredangle H(f) = \text{ctte}\cdot f$

c)

$\measuredangle H(f) = 0 \Rightarrow H(f)$ real y par (pues $H(f) = |H(f)|\underbrace{e^{j\measuredangle H(f)}}_{1}$ y $|H(f)|$ es real y par)

$\Rightarrow$ $h(t)$ par $\Rightarrow$ no retarda

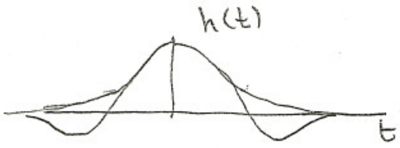
$h(t)$ real y par $\Leftrightarrow$ $H(f)$ real y par

en particular $\phi_H = 0$

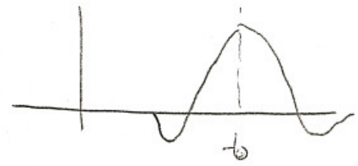
y si $H(f) = |H(f)|\underbrace{e^{-j2\pi f t_0}}_{\text{fase lineal}}$ es como $H_1(f)\cdot H_2(f)$

$H_1(f) \to |H(f)|$, $H_2(f) \to e^{-j2\pi f t_0}$

$\Rightarrow h(t) = \underbrace{h_1(t)}_{\text{real y par}} * \delta(t-t_0) = \underbrace{h_1(t-t_0)}_{\text{real y simétrico respecto } t_0} \Rightarrow$ retarda t_0



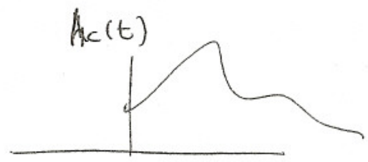
Par $\Rightarrow$ no retarda componentes frecuenciales



simétrico respecto to: retarda todas las componentes un valor fijo to

d)

Filtros causales $h_c(t) = 0 \quad t \nless 0$

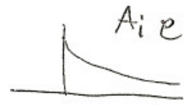


No puede ser par $\Rightarrow$ retarda

Si es simetrico respecto to retarda todas igual

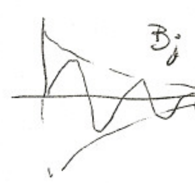
Y si no lo es, cada componente se retarda un valor distinto (distorsión de fase)

$A_i e^{-a_i t} u(t)$



Para filtros racionales, h(t) es soma de

$B_j e^{-\alpha_j t} \cos \beta_j t + \phi_j$



y no es simétrico respecto ningún to.

$\Rightarrow$ fase no lineal.

Problema 1

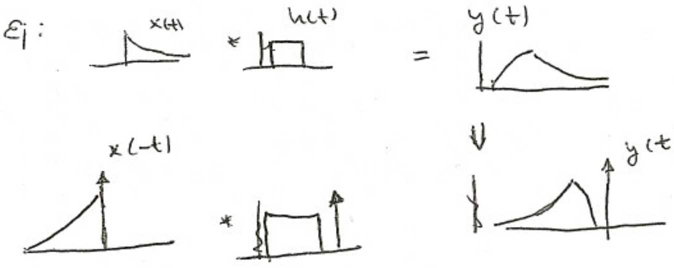
e) $x(t) - \boxed{h(t)} \xrightarrow{z_1} \boxed{\text{Giro}} \xrightarrow{z_2} \boxed{h(t)} \xrightarrow{z_3} \boxed{\text{Giro}} - y(t)$

$z_1(t) = x(t) * h(t)$

$z_2(t) = z_1(-t)$

Girar el resultado de conovolucionar es equiv. a girar antes de convol. $z_2(t) = x(-t) * h(-t)$

Ej:



Analíticamente (en t)

$$\underset{x(-\tau)}{\underset{\shortparallel}{\hat{x}(\tau)}} * \underset{h(-\tau)}{\underset{\shortparallel}{\hat{h}(\tau)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\tau)\, \hat{h}(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)\, h(-t+\tau)\, d\tau$$

$$\underset{\tau' = -\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau')\, h(-t-\tau')\, d\tau' \Rightarrow y(-t)$$

$$z_3(t) = \underbrace{x(-t) * h(-t)}_{z_2(t)} * h(t)$$

$$y(t) = z_3(-t) = z_2(-t) * h(-t) = x(t) * h(t) * h(-t)$$

Es un S.L.I con $h_T(t) = h(t) * h(-t)$

$x(t) - \boxed{h(t) * h(-t)} - y(t)$

Frecuencialmente

$$\boxed{H_T(f) = \mathcal{F}\{h(t) * h(-t)\} = H(f) \cdot H^*(f) = |H(f)|^2}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \Rightarrow \boxed{h(-t)} = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{j2\pi ft}\, dt =$$

$$\underset{\text{h real}}{h^*(-t)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{j2\pi ft}\, dt\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} H^*(f)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$H_T(f)$ tiene fase cero

$\Rightarrow$ no retarda ninguna componente frec.

$$\Rightarrow h(-t) \longleftrightarrow H^*(f)$$

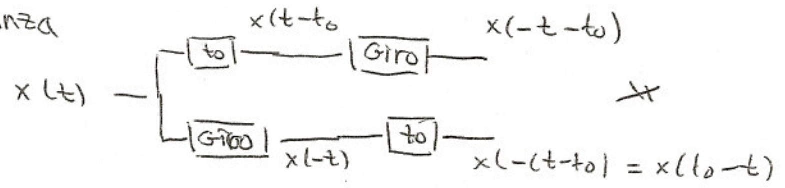
f)

Ya hemos visto que el sistema general es S.L.I (representable por $h_T(t)$). Y por apartado c) y d) será no causal.

(Es decir, $H_T(f) = |H(f)|^2$, real y par $\Rightarrow h(t)$ par
$\Rightarrow h(t) = k\delta(t)$ o
$h(t)$ no causal).

En cuanto al sistema reflexión

Invarianza



$\neq$ No es invariante.

Causalidad

$y(t_0) = x(-t_0)$ Si t_0 es negativo depende de valores futuros.

Ej $y(-3) = x(3)$

$\Rightarrow$ NO causal.

El giro no es un S.L.I, pero el sistema global sí lo es.
" " " " causal y el sistema global tampoco.

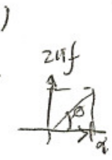
g) $h(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t)$

Retardo $t_0 = -\dfrac{\measuredangle H(f_0)}{2\pi f_0}$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} \alpha\, e^{-\alpha t}\, e^{-j2\pi f t} dt = \frac{\alpha\, e^{-(\alpha+j2\pi f)t}}{-(\alpha+j2\pi f)}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha + j2\pi f}$$

$\measuredangle H(f) = -\measuredangle(\alpha + j2\pi f)$

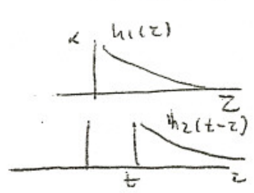


$= -\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right)$

$t_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi f_0}{\alpha}\right) / 2\pi f_0$ que es distinto de cero $\forall f_0 \neq 0$

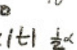
h)

$H_T(f) = |H(f)|^2 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$ $\qquad h_T(t) = \underbrace{h(t)}_{h_1} * \underbrace{h(-t)}_{h_2}$



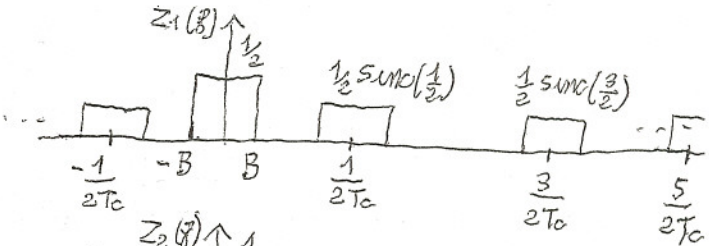
$t<0$ $\displaystyle\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha\tau} \cdot \alpha e^{-\alpha(\tau-t)} d\tau = \alpha^2 e^{\alpha t} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha\tau} d\tau = \alpha^2 e^{\alpha t} \cdot \frac{e^{-2\alpha\tau}}{-2\alpha}\Bigg|_0^{\infty}$
$= \frac{1}{2}\alpha\, e^{\alpha t}$

$t>0$ $\displaystyle\int_t^{\infty} \alpha e^{-\alpha\tau}\, \alpha e^{-\alpha(\tau-t)} = \alpha^2 e^{\alpha t}\, e^{-2\alpha t}/2\alpha = \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha t} \Rightarrow h_T(t) = \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha|t|}$

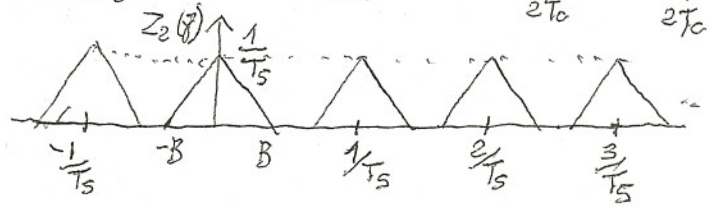


PROBLEMA 3

a a.1) $Z_1(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sinc}(\frac{m}{2})}{2} \delta(f - \frac{m}{2T_c})$



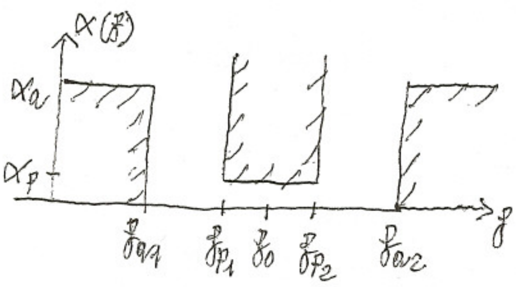
$Z_2(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y(f - \frac{m}{T_S})}{T_S}$



a.2) $H_1(f) = \frac{1}{\text{sinc}(\frac{3}{2})} \prod\left(\frac{|f| - f_1}{2B}\right)$ on $f_1 = \frac{3}{2T_c}$ $H_2(f) = \frac{T_S}{2} \prod\left(\frac{|f| - f_2}{2B}\right)$

$f_2 = \frac{2}{T_S}$

b b.1)

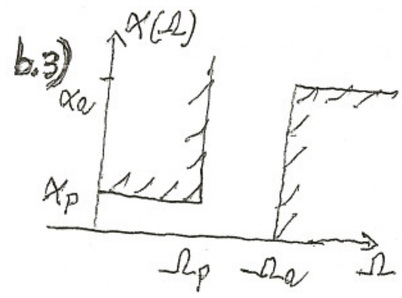


f	$H_1(f)$	$H_2(f)$
f_{P1}	1.000	1.800
f_{P2}	1.400	2.200
f_{a1}	600	1.200
f_{a2}	1.800	2.800

b.2) $\Omega = \left|\frac{w^2 - w_0^2}{w}\right|$ menor ordre del prototip $\Rightarrow$ $\underline{w_0^2 = w_{P1} w_{P2}}$ $\xrightarrow{H_1}$ $w_0 = 2\pi\sqrt{1'4}\,10^3 \frac{rad}{s}$

$\xrightarrow{H_2}$ $w_0 = 2\pi\sqrt{3'96}\,10^3 \frac{rad}{seg}$

b.3)



H_1 $\underline{\Omega_p = |w_{P2} - w_{P1}| = 2\pi.400}$

$\Omega_{a1} = 2\pi.10^3 \left|\frac{0'6^2 - 1'4}{0'6}\right| = 2\pi.\frac{1'04}{0'6}.10^3$

$\Omega_{a2} = 2\pi 10^3 \left|\frac{1'8^2 - 1'4}{1'8}\right| = 2\pi \frac{1'84}{1'8} 10^3$

$\Omega_a = \min(\Omega_{a1}, \Omega_{a2})$

$\underline{\Omega_a \simeq 2\pi.10^3}$

$K_S = \frac{\Omega_p}{\Omega_a} \simeq 0'4$

H_2

$\Omega_p = |w_{P2} - w_{P1}| = 2\pi.400$

$w_{a1} w_{a2} \neq w_0^2 \Rightarrow$

$\Omega_{a1} = 2\pi.10^3 \left|\frac{1'2^2 - 3'96}{1'2}\right| = 2\pi \frac{2'52}{1'2} 10^3$

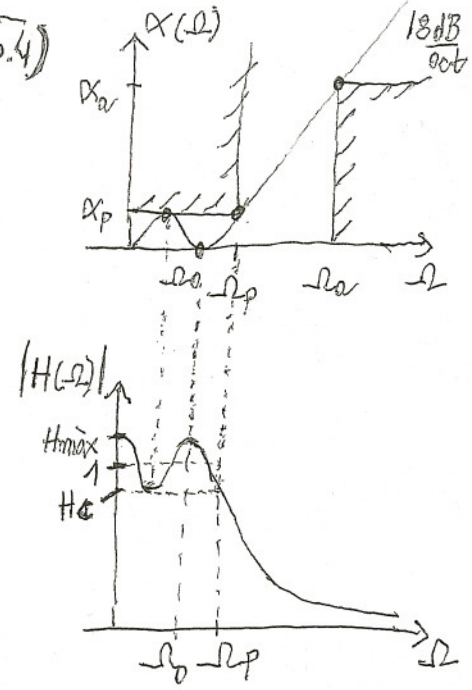
$\Omega_{a2} = 2\pi 10^3 \left|\frac{2'8^2 - 3'96}{2'8}\right| = 2\pi \frac{3'88}{2'8} 10^3$

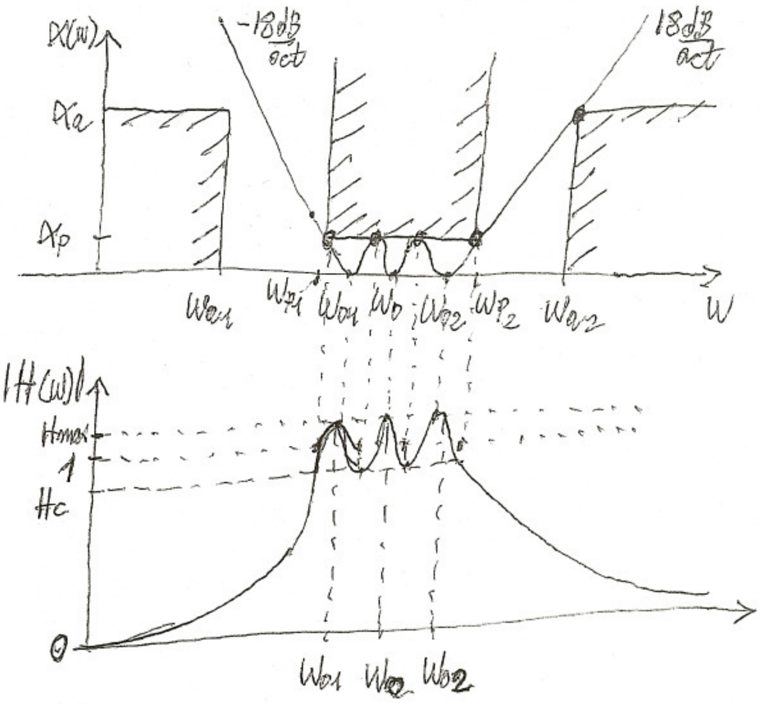
$\underline{\Omega_a \simeq 2\pi 1.400}$

$K_S = \frac{\Omega_p}{\Omega_a} \simeq 0'3$

Filtre més selectiu $\Rightarrow$ K_S MAJOR $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Filtre } H_1(f)}$

b.4)





Si $\alpha_p = 3dB \Rightarrow H_c = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

$n = 3$

$3\,ZT$ a $\Omega \to \infty$

$3\,ZA \begin{cases} 2 \text{ a } \Omega = \pm\Omega_0 \\ 1 \text{ a } \Omega = 0 \end{cases}$

$n = 6$

$6\,ZT \begin{cases} 3 \text{ a } w = 0 \\ 3 \text{ a } w \to \infty \end{cases}$

$6\,ZA \begin{cases} 2 \text{ a } w = \pm w_{01} \\ 2 \text{ a } w = \pm w_0 \\ 2 \text{ a } w = \pm w_{02} \end{cases}$

$\Omega_0 = \frac{w^2 - w_0^2}{w} \begin{matrix} \nearrow w_{01} \\ \searrow w_{02} \end{matrix}$

b.5) PROTOTIP

$F(\Omega^2) = \varepsilon^2 C_3^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)$

$\alpha_p = 3dB \Rightarrow F(\Omega_p^2) = 10^{0'3} - 1 \cong 1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon^2 = 1} \Rightarrow \boxed{F(\Omega^2) = C_3^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right) \quad \text{on } \Omega_p = 2\pi\, 400 \ \tfrac{rad}{seg}}$

FILTRE

$F(w^2) = F(\Omega^2)\Big|_{\Omega = \frac{w^2 - w_0^2}{w}} = \boxed{C_3^2\left(\frac{w^2 - w_0^2}{w\Omega_p}\right) = F(w^2)}$ on $\Omega_p = 2\pi\, 400 \ \frac{rad}{seg}$, $w_0 = 2\pi\, 10^3 \sqrt{1'4} \ \frac{rad}{seg}$