COMUNICACIONS II	
25 de Juny de 2007	
Data notes provisionals:	3 de Juliol
Període d'al.legacions:	4 de Juliol
Data notes revisades:	7 de Juliol

Professors: Montse Nájar, Ana I. Pérez, Gregori Vázquez.

Informacions addicionals:

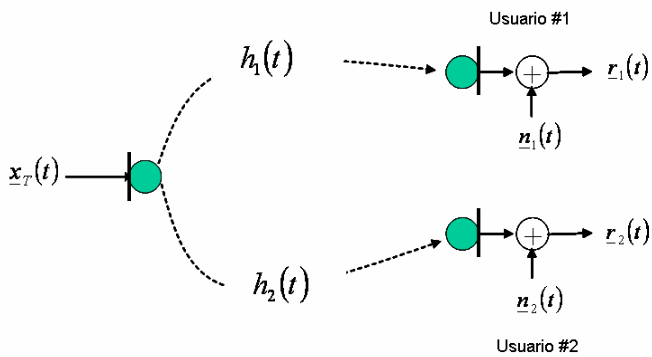
- Duració de l'examen: 3 hores.
- Les respostes dels diferents problemes s'entregaran separadament

Problema 1

Una estación base transmite simultáneamente a dos usuarios según la expresión:

$$\underline{x}_T(t) = a_n \underline{\varphi}_1(t) + b_n \underline{\varphi}_2(t) \quad con \quad \left\|\underline{\varphi}_1(t)\right\|^2 = \left\|\underline{\varphi}_2(t)\right\|^2 = 1 \quad y \quad \underline{\varphi}_1^T(t)\underline{\varphi}_2(t) = 0$$

Los símbolos son binarios-polares, equiprobables y con independencia estadística entre ellos, tales que $a_n = \pm A/2$ y $b_n = \pm A/2$. Los usuarios #1, asociado al término de información a_n y #2, al término b_n, tienen canales con distinta respuesta impulsional y que hacen que los términos pierdan la ortogonalidad, según la figura:



$$\underline{r}_1(t) = a_n \underline{\phi}_{1,1}(t) + b_n \underline{\phi}_{1,2}(t) + \underline{n}_1(t)$$

$$\underline{r}_2(t) = a_n \underline{\phi}_{2,1}(t) + b_n \underline{\phi}_{2,2}(t) + \underline{n}_2(t)$$

donde:

$$\underline{\phi}_{1,1}^T(t)\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\phi}_{2,2}^T(t)\underline{\varphi}_2(t) = 1$$

$$\underline{\phi}_{1,2}^T(t)\underline{\varphi}_1(t) = \rho_1 \quad 0 < |\rho_1| \le 1 \qquad \underline{\phi}_{1,2}^T(t)\underline{\varphi}_2(t) = \rho_3 \quad 0 < |\rho_3| \le 1$$

$$\underline{\phi}_{1,1}^T(t)\underline{\varphi}_2(t) = \rho_2 \quad 0 < |\rho_2| \le 1 \qquad \underline{\phi}_{2,1}^T(t)\underline{\varphi}_2(t) = \rho_4 \quad 0 < |\rho_4| \le 1$$

y los términos de ruido $\underline{n}_1(t)$ y $\underline{n}_2(t)$ son AWGN de densidad espectral de potencia $N_o/2$ Watts/Hz.

En los apartados (a.), (b.) y (c.) nos centramos en el usuario #1:

a. El receptor del usuario #1 está compuesto por dos filtros adaptados a las formas de onda transmitidas $\underline{\varphi}_1(t)$ y $\underline{\varphi}_2(t)$. Obtenga los términos de información relevante a la salida de los dos filtros adaptados.

Respuesta: A la salida de cada filtro adaptado tenemos los términos de información relevante siguientes:

$$\upsilon_1 = \underline{\varphi}_1^T \underline{r}_1 = \underline{\varphi}_1^T\left(a_n \underline{\phi}_{1,1} + b_n \underline{\phi}_{1,2} + \underline{n}_1\right) = a_n + \rho_1 b_n + \underline{\varphi}_1^T \underline{n}_1$$

$$\upsilon_2 = \underline{\varphi}_2^T \underline{r}_1 = \underline{\varphi}_2^T\left(a_n \underline{\phi}_{1,1} + b_n \underline{\phi}_{1,2} + \underline{n}_1\right) = \rho_2 a_n + \rho_3 b_n + \underline{\varphi}_2^T \underline{n}_1$$

Si bien puede realizarse el estudio en escalares, adoptaremos una notación matricial en todo el ejercicio:

$$\begin{bmatrix}\upsilon_1 \\ \upsilon_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n \\ b_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{bmatrix} \quad con \quad \beta_1 = \underline{\varphi}_1^T \underline{n}_1 \quad \beta_2 = \underline{\varphi}_2^T \underline{n}_1$$

b. Proponga y diseñe un esquema que permita obtener el término de información a_n totalmente libre de interferencia cruzada (forzador de ceros) con la información del usuario #2 a partir de los términos de información relevante obtenidos en el apartado anterior.

Respuesta: Si "combinamos linealmente" los dos términos de información relevante, tenemos la ecuación de diseño:

$$[\alpha \quad \beta]\begin{bmatrix}\upsilon_1\\ \upsilon_2\end{bmatrix} = [\alpha \quad \beta]\begin{bmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_2 & \rho_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix} = [a_n \quad b_n]\begin{bmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_2 & \rho_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = a_n$$

y, por tanto:

$$\begin{bmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_2 & \rho_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_2 & \rho_3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \quad \ldots$$

c. Para el mismo esquema que en (b.), obtenga la solución que permite recuperar la información a_n con un criterio de mínimo error cuadrático medio (filtro de Wiener).

Respuesta: En este caso queremos que el combinador lineal se ajuste a la secuencia a_n bajo un criterio de m.e.c.m. El error queda como:

$$e = a_n - [\alpha \quad \beta]\begin{bmatrix}\upsilon_1\\ \upsilon_2\end{bmatrix} = a_n - [\upsilon_1 \quad \upsilon_2]\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$$

Tomado derivadas parciales sobre el e.c.m. o a partir del principio de ortogonalidad:

$$E\left[e\begin{bmatrix}\upsilon_1\\ \upsilon_2\end{bmatrix}\right] = E\left[\begin{bmatrix}\upsilon_1\\ \upsilon_2\end{bmatrix}\left(a_n - [\upsilon_1 \quad \upsilon_2]\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\right)\right] = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}Ea_n\upsilon_1\\ Ea_n\upsilon_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E\upsilon_1^2 & E\upsilon_1\upsilon_2\\ E\upsilon_1\upsilon_2 & E\upsilon_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$$

Los términos son:

$$\begin{aligned}
&Ea_n\upsilon_1 = \sigma_a^2\\
&Ea_n\upsilon_2 = \rho_2\sigma_a^2\\
&E\upsilon_1^2 = \sigma_a^2 + \rho_1^2\sigma_b^2 + E\left[\beta_1^2\right]\\
&E\upsilon_2^2 = \rho_2^2\sigma_a^2 + \rho_3^2\sigma_b^2 + E\left[\beta_2^2\right]\\
&E\upsilon_1\upsilon_2 = \rho_2\sigma_a^2 + \rho_1\rho_3\sigma_b^2\\
&\quad con:\\
&\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = E\left[a_n^2\right] = A^2/4\\
&E\left[\beta_1^2\right] = E\left[\beta_2^2\right] = N_o/2
\end{aligned}$$

A partir de este punto, consideramos el siguiente modelo de señal transmitida:

$$\underline{x}_T(t) = \tilde{a}_n\underline{\varphi}_1(t) + \tilde{b}_n\underline{\varphi}_2(t) \quad con \quad \left\|\underline{\varphi}_1(t)\right\|^2 = \left\|\underline{\varphi}_2(t)\right\|^2 = 1 \quad y \quad \underline{\varphi}_1^T(t)\underline{\varphi}_2(t) = 0$$

donde:

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_n\\ \tilde{b}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}m_{1,1} & m_{1,2}\\ m_{2,1} & m_{2,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{m}_1^T\\ \underline{m}_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix} \quad con \quad \underline{m}_1 = \begin{bmatrix}m_{1,1}\\ m_{1,2}\end{bmatrix} y \ \underline{m}_2 = \begin{bmatrix}m_{2,1}\\ m_{2,2}\end{bmatrix}$$

d. El receptor del usuario #1 es el filtro adaptado a la forma transmitida $\underline{\varphi}_1(t)$ y para el usuario #2 a la forma $\underline{\varphi}_2(t)$. Obtenga las expresiones de los vectores $\underline{m}_1$ y $\underline{m}_2$ que permiten recuperar sin interferencia cruzada las informaciones a_n y b_n a la salida de cada uno de los filtros adaptados en recepción.

Respuesta: Procediendo como en el apartado (a.) para cada filtro asociado a cada usuario, podemos ahora escribir la nueva condición de diseño:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_n \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ldots$$

e. Indique las ventajas y los inconvenientes que aporta la solución obtenida en (d.), respecto a las dadas en (b.) y (c.).

Respuesta: Pueden existir múltiples respuestas a este apartado. Las más significativas pueden ser las siguientes, entre otras:

Ventajas del esquema en (d.) respecto a (b.) y (c.):

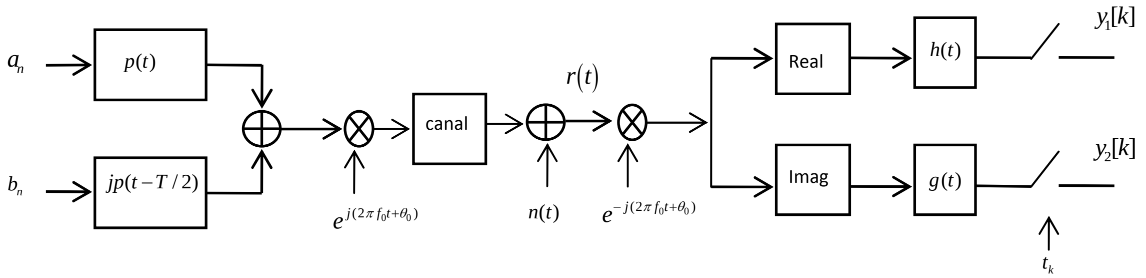
- *La complejidad está en la estación base exclusivamente y no hace falta introducir esquemas de decorrelación en los dos receptores.*
- *La solución es computacionalmente muy eficiente y simple.*
- *No se produce amplificación del ruido en los receptores al observar estos una respuesta perfectamente decorrelada. Este aspecto es especialmente importante cuando comparamos (d.) con (b.), dado que es un problema típico de los esquemas forzadores de ceros. La solución en (c.) establece un compromiso entre interferencia cruzada residual y ruido residual.*

Desventajas del esquema en (d.) respecto a (b.) y (c.):

- *El esquema (d.) requiere del conocimiento de las correlaciones $\{\rho_i\}_i$ en el transmisor. Implica, por tanto, que los dos receptores tienen que proporcionar esta información a través de un canal de realimentación al transmisor.*
- *En condiciones de canal variante, las correlaciones pueden cambiar en el intervalo en que los receptores realimentan dicha información al transmisor, haciendo este esquema inviable técnicamente.*
- *Existen soluciones al este problema mejores a la propuesta en (d.)*

Problema 2

Considere el siguiente esquema de transmisión:



Los símbolos complejos se definen como: $c_n = a_n + jb_n$ siendo $a_n = \{\pm d/2\}$ y $b_n = \{\pm d/2\}$ símbolos binarios equiprobables e independientes . El pulso $p(t)$ es un pulso de Nyquist. El canal es ideal y presenta ruido Gaussiano, blanco, de media nula y densidad espectral $N_0/2$

1. Defina los filtros $h(t)$ y $g(t)$ del receptor y obtenga las señales $y_1[k]$ y $y_2[k]$.

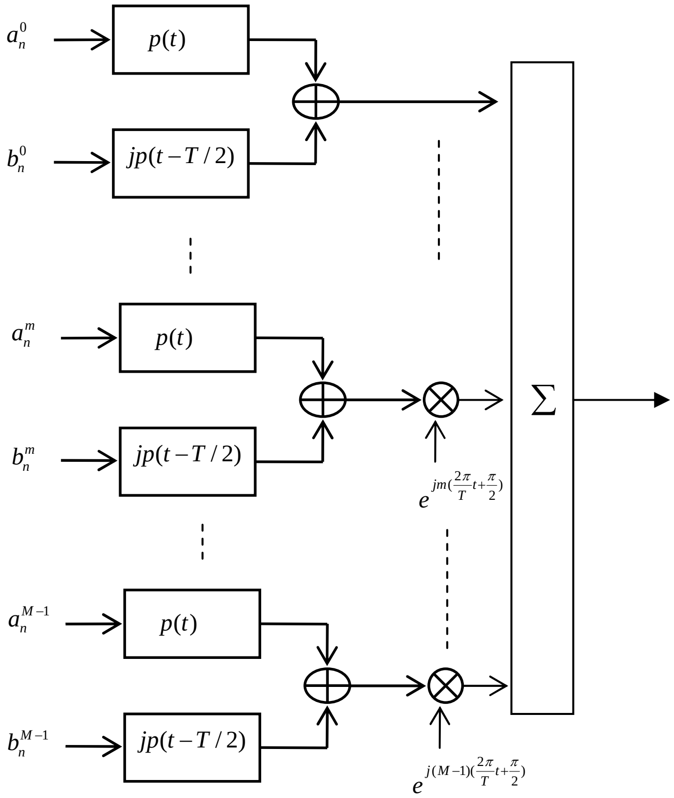
Respuesta: Filtros adaptados a p(t) y p(t-T/2)

$y_1[k] = a_k + \beta_1[k] \quad y_2[k] = b_k + \beta_2[k]$

2. Obtenga la BER del sistema en función de la relación E_b/N_0

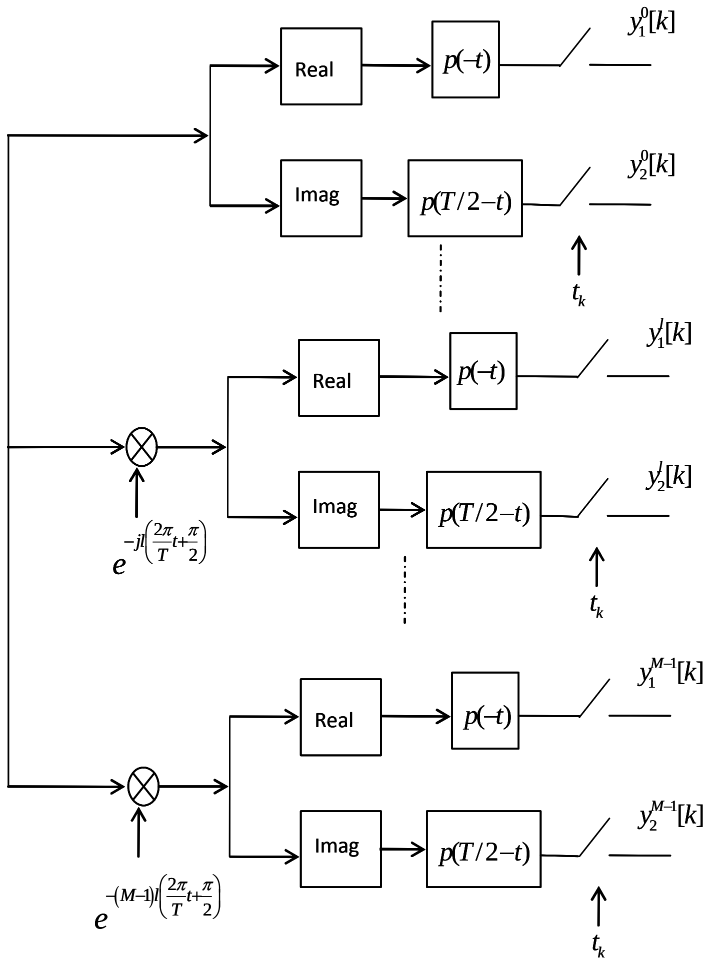
Respuesta: $BER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

Considere a continuación que el sistema de comunicaciones anterior se extiende a la transmisión sobre M portadoras diferentes según la figura de la siguiente página.



3. Defina el nuevo receptor.

Respuesta:



4. Defina las muestras $y_1^l[k]$ y $y_2^l[k]$ en recepción donde el índice *l* indica recepción a la frecuencia portadora $e^{-jl\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}\right)}$

Respuesta:

$$y_1^l[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{M-1}a_n^m\int_{-\infty}^{\infty}p(t-nT)\,p(t-kT)\cos\left((m-l)\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{\pi}{2}\right)\right)dt-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{M-1}b_n^m\int_{-\infty}^{\infty}p\left(t-nT-\frac{T}{2}\right)p(t-kT)\,sen\left((m-l)\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{\pi}{2}\right)\right)dt+\beta_1^l[k]$$

$$y_2^l[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{M-1}a_n^m\int_{-\infty}^{\infty}p(t-nT)\,p\left(t-kT-\frac{T}{2}\right)sen\left((m-l)\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{\pi}{2}\right)\right)dt+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{M-1}b_n^m\int_{-\infty}^{\infty}p\left(t-nT-\frac{T}{2}\right)p\left(t-kT-\frac{T}{2}\right)\cos\left((m-l)\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{\pi}{2}\right)\right)dt+\beta_2^l[k]$$

5. Demuestre que las condiciones de ortogonalidad necesarias para que el sistema no presente interferencia entre símbolos (ISI) ni interferencia entre portadoras (ICI) pueden definirse según las siguientes expresiones:

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(t-nT)\,p(t-kT)\cos\left((m-l)\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{\pi}{2}\right)\right)dt=\delta(n-k)\,\delta(m-l)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(t-nT-T/2)\,p(t-kT)\sin\left((m-l)\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{\pi}{2}\right)\right)dt=0$$

Respuesta: $y_1^l[k]=a_k^l+\beta_1^l[k]$
$y_2^l[k]=b_k^l+\beta_2^l[k]$

Problema 3

OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) se emplea en gran mayoría de los estándares radio y tiene como principal característica una alta eficiencia espectral e inmunidad a la propagación multicamino, siempre que se incluya un prefijo cíclico correctamente dimensionado. No obstante, OFDM no presenta robustez a la dispersión en frecuencia que genera un canal móvil variante en tiempo. Dicha dispersión en frecuencia produce pérdida de ortogonalidad entre las portadoras.

Considere la siguiente señal multiportadora

$$s(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1}a_{kl}\,p(t-lT)\exp\left(j2\pi kF(t-lT)\right)$$

en donde $p(t)=\prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$, T es la duración de símbolo OFDM, F es el espaciado entre portadoras, N es el número de portadoras y a_{kl} son símbolos complejos.

a.- La eficiencia espectral se define como $\eta=\frac{\log_2 M}{TF}$ [bps/Hz], considerando que en cada portadora se emplea una M-QAM. En el caso de que se trate de una señal OFDM con una duración de prefijo cíclico T_{cp} =T/4, halle cuánto vale la eficiencia espectral y cuáles son las pérdidas por emplear prefijo cíclico.

Respuesta: *Para que haya ortogonalidad entre portadoras* $F=\frac{1}{T-T_{cp}}$;

Entonce la eficiencia es $\eta=\log_2 M\,\frac{(T-T_{cp})}{T}=\frac{3}{4}\log_2 M$ *y las pérdidas resultan de ¾.*

b.- Halle la estructura del receptor óptimo en canales con ruido gaussiano blanco, $S_w(f)=N_o/2$ [Watt/Hz]. Comente una técnica de implementación de baja complejidad de dicho receptor.

Respuesta: El receptor es un banco de correladores con la base ortonormal $\varphi_k(t)=\frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}}\prod\left(\frac{t}{(T-T_{cp})}\right)\exp\left(j2\pi kFt\right)$. *Una implementación de baja complejidad consiste en:*

a) eliminar el prefijo cíclico; b) muestrear la señal en recepción a (T-Tcp)/N y c) empleando una DFT (o su versión rápida FFT) como banco de filtros.

c.- Considere que el canal tiene una duración temporal de Ds= 100 nseg, que la velocidad de bit es rb=20 Mbps, que el ancho de banda es B_T=20 MHz y que el prefijo cíclico es T_{cp} =4Ds (la duración del prefijo cíclico es T_{cp} =T/4). Diseñe el número de subportadoras N y el tamaño de la constelación por portadora M.

$$N = \frac{B_T}{F} = B_T\left(T - T_{cp}\right) = 3B_T T_{cp} = 24$$

Respuesta: $\# total\ de\ bits = 20Mbps.T = 20Mbps.3T_{cp} = 24 bits / simbolo\ OFDM$

$$M > 24/24 = 1 \quad bits/portadora \Rightarrow BPSK$$

d.- Como ya se ha comentado, si el canal es variante en tiempo, se produce ICI; ya que se pierde la ortogonalidad entre las funciones base. Considere que, en ausencia de ruido, la señal recibida durante el símbolo OFDM *l* es

$$s_l(t) = \exp\left(j2\pi\Delta f\, t + j\theta\right)\sum_{k=0}^{N-1} a_{kl} \exp\left(j2\pi kFt\right) \qquad lT < t < (l+1)T$$

en donde, para facilitar la notación, no se ha incluido el prefijo cíclico (T_{cp}=0), θ es un error de fase y Δf es un error de frecuencia que desconoce el receptor y que se debe a la movilidad del canal. Dicha señal es muestreada en el receptor

$$s_l(n) = \exp\left(j2\pi\Delta f\frac{nT}{N} + j\theta\right)\sum_{k=0}^{N-1} a_{kl}\exp\left(j2\pi k\frac{n}{N}\right) \qquad n = 0 ... N-1$$

y a continuación se aplica la DFT de N puntos. A partir de dicha señal $s_l(n)$ demuestre que la señal a la salida de la DFT en recepción, para la frecuencia *m*, es decir $r_{ml} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s_l(n)\exp(-j\frac{2\pi}{N}nm)$, se puede formular como

$$r_{ml} = \exp(j\theta)\sum_{k=0}^{N-1} a_{kl} c_{k-m}$$

y dé la expresión de los coeficientes c_{k-m}.

Respuesta:

$$r_{ml} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s_l(n)\exp(-j\frac{2\pi}{N}n.m) =$$

$$= \frac{1}{N}\exp(j\theta)\sum_{k=0}^{N-1} a_{kl}\sum_{n=0}^{N-1} \exp(-j\frac{2\pi}{N}n(k-m+\Delta fT)) =$$

$$= \frac{1}{N}\exp(j\theta)\sum_{k=0}^{N-1} a_{kl}\frac{\sin(\pi(k-m+\Delta fT))}{\sin\left(\frac{\pi(k-m+\Delta fT)}{N}\right)}\exp\left(j\left(\frac{N-1}{N}\right)\pi\left(k-m+\Delta fT\right)\right)$$

Luego

$$c_{k-m} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{j2\pi n(k-m+\Delta fT)}{N}\right) \underset{N\ grande}{\approx} \frac{\sin\left(\pi\left(k-m+\Delta fT\right)\right)}{\pi\left(k-m+\Delta fT\right)}\exp\left(j\pi\left(k-m+\Delta fT\right)\right)$$

Para simplificar la notación, considere θ=0 y que se elimina el subíndice temporal, *l*. Por tanto,

$$r_m = a_m c_o + \sum_{k\neq m, k=0}^{N-1} a_k c_{k-m} \qquad \textbf{(*)}$$

en donde el segundo término representa la ICI o interferencia causada por otras subportadoras. A continuación se propone una técnica de transmisión que reduce la ICI.

e.- Teniendo en cuenta que en la ecuación (*), en la mayoría de situaciones, se cumple que la diferencia $c_{k-m} - c_{k+1-m}$ es muy pequeña, una posible técnica es modular las subportadoras adyacentes tal que $a_1 = -a_o,\ a_3 = -a_2, ..., a_{N-1} = -a_{N-2}$

e.1.- Obtenga, en ausencia de ruido, la señal recibida en la portadora *m*, r_m, y demuestre que los nuevos coeficientes de ICI son

$$\hat{c}_{k-m} = c_{k-m} - c_{k+1-m}$$

y que, el número de términos de ICI se ha reducido a la mitad.
Respuesta:

$$\hat{r}_m = \sum_{l=0, l\ par}^{N-2} s_l \left\{ c_{l-m} - c_{l+1-m} \right\}$$

e.2.- Considerando que a_k son símbolos QPSK y que $c_i - c_j = \begin{cases} c_o - c_1 \approx c_o \\ 0 \quad resto \end{cases}$, obtenga la probabilidad de error de símbolo y compárela con la que se obtiene en un sistema OFDM-QPSK sin ICI.

Respuesta: $p_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o} \left| c_o - c_1 \right|^2} \right)$