Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

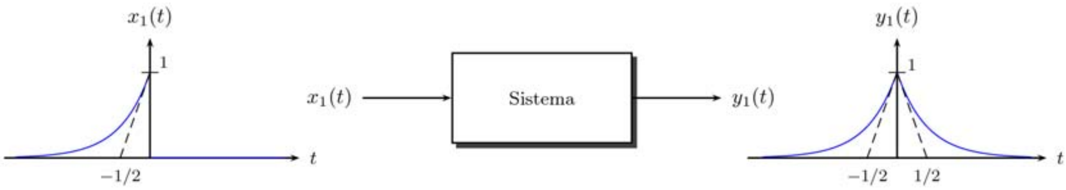
Senyals i Sistemes I **Examen Final T08: 12 de Gener de 2009** **Durada: 3h**

Publicació Notes Provisionals: 22-1-09 **Al.legacions fins: 23-1-09 (12h)** **Publicació Notes Definitives: 26-1-09**

No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

Exercici 1 (3,3 p)

La figura muestra la salida $y_1(t)$ de un sistema cuando es excitado por la señal $x_1(t)= e^{2t}\, u(-t)$



a) Discuta las propiedades de linealidad e invarianza del sistema

Suponga a partir de ahora que el sistema es lineal e invariante.

b) Calcule $H(f)$ y $h(t)$.

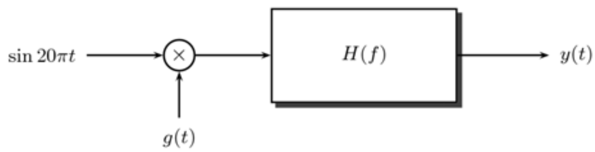
c) Indique qué condiciones tiene que cumplir la respuesta impulsional de un sistema lineal e invariante para que sea estable y para que sea causal. Analice si el sistema de la figura cumple estas propiedades, a partir de la respuesta impulsional calculada en el apartado anterior.

d) Encuentre la salida $y_2(t)$ para la entrada $x_2(t) = \sin(2t) + \cos(20t)$. Aproxime los valores numéricos.

e) Encuentre el sistema inverso de h(t). Dibuje el diagrama de bloques del sistema inverso, utilizando bloques elementales (sumadores, multiplicadores, retardos, derivadores, integradores, etc.). Compruebe, en el dominio temporal, que si la entrada fuera $y_1(t)$ la salida sería $x_1(t)$.

Exercici 2 (1,7 p)

Donat l'esquema representat a la figura, on $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k . \delta\left(t - \frac{k}{100}\right)$ i $H(f) = \prod\left(\frac{f-150}{100}\right) + \prod\left(\frac{f+150}{100}\right)$, trobi la sortida y(t) (expressi-la en la forma més compacta possible).



Exercici 3 (1,7 p)

Es considera el filtre passa-banda definit per $|H(f)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{f^2 - f_0^2}{f\ \phi_c}\right)^8}$ on f_0= 2kHz i ϕ_c= 3kHz.

Dibuixi la corba d'atenuación especificant-hi :

a) posició de tots els zeros d'atenuació i de transmissió

b) valor de l'ample de banda a 3dB

c) valor de les freqüències de tall a 3dB

d) valor d'atenuació asimptòtica a l'origen i a l'infinit.

Exercici 3 (3,3 p)

Se desea diseñar un sistema que permita, a personas con discapacidad, averiguar el estado de ciertos dispositivos (ej. semáforos) sin necesidad de utilizar señalización adicional molesta para otros usuarios. Supondremos en este ejercicio un dispositivo con dos estados (rojo y verde). El sistema transmite un tren de pulsos $x_r(t)$, mientras está en un estado (rojo), y otro tren de pulsos $x_v(t)$, mientras está en el otro estado (verde). Sea:

$$x_r(t) = \sum_{n=0}^{N-1} p_r(t - nT_o) \qquad\qquad x_v(t) = \sum_{n=0}^{M-1} p_v(t - nT_o)$$

Donde NT_o es el intervalo de tiempo en que el semáforo está en rojo y MT_0 es el intervalo de tiempo en que el semáforo está en verde y en la figura 1 se muestran los pulsos $p_r(t)$ y $p_v(t)$ de duración $T << T_0$

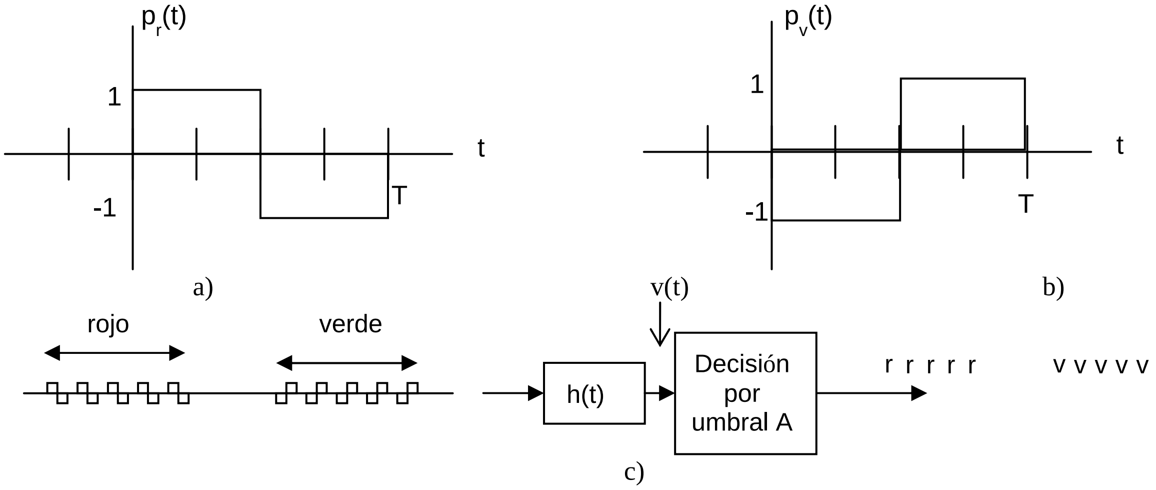


Figura 1. a) $p_r(t)$. b) $p_v(t)$, c) sistema receptor

El receptor identifica el pulso transmitido y genera una señal que depende del pulso identificado y que el usuario puede identificar fácilmente (acústica, táctil, movimiento, calor…). Para identificar el pulso transmitido la señal recibida se aplica a un filtro de respuesta impulsional $h(t) = p_r(T-t)$. Cuando la salida alcanza el nivel A, el sistema identifica 'rojo' mientras que cuando el sistema alcanza el valor –A, el sistema identifica 'verde'. Se pide:

a) Determine la función de autocorrelación de $p_r(t)$ entre las mostradas en la figura 2. Justifique razonadamente su elección y preferiblemente sin calcular matemáticamente la autocorrelación.

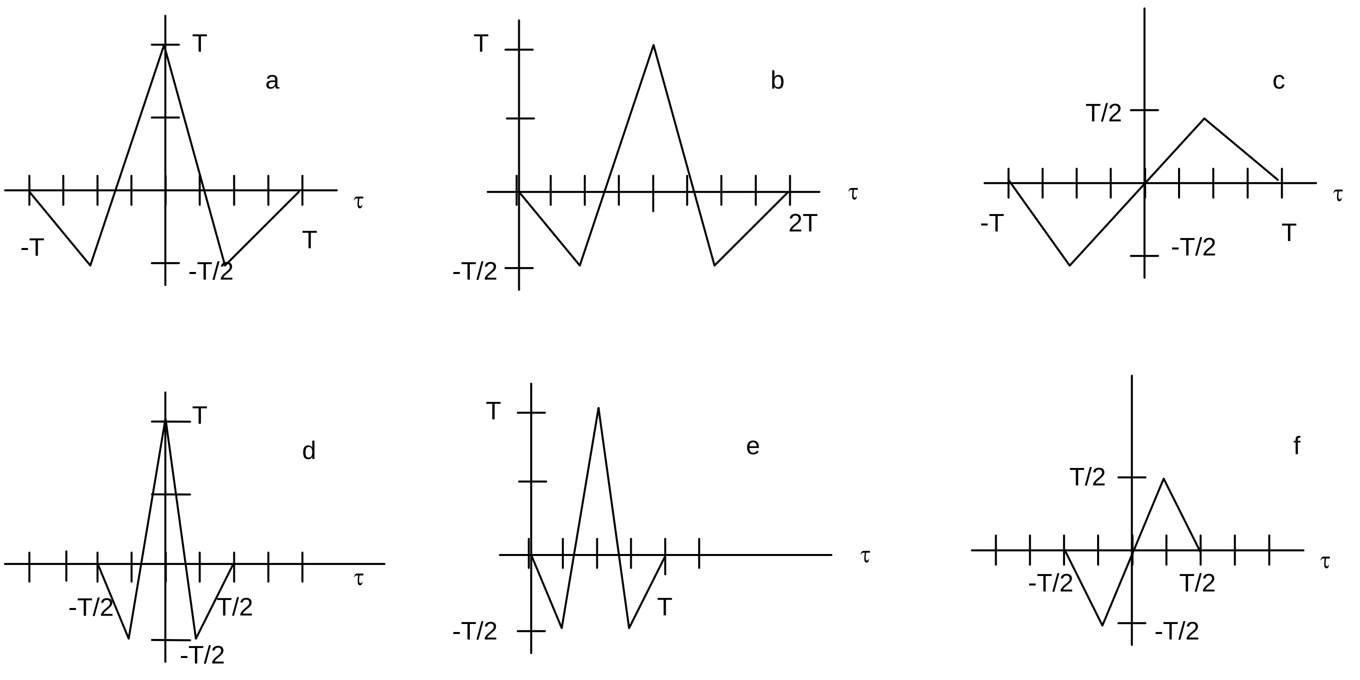


Figura 2.

b) Calcule la energía de $p_r(t)$ y de $p_v(t)$

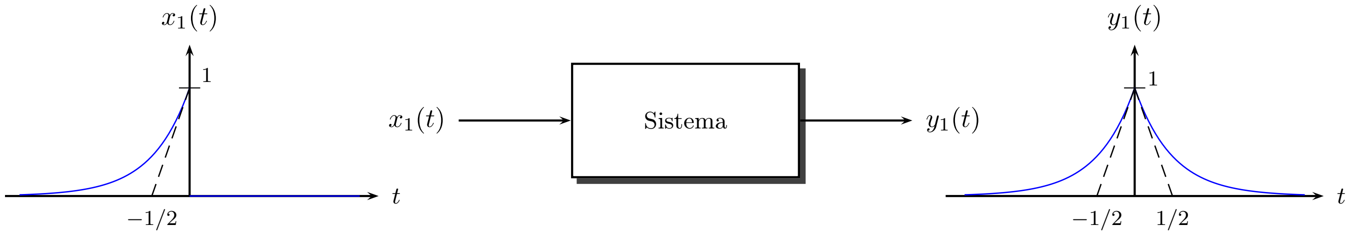
c) Determine si los pulsos $p_r(t)$ y $p_v(t)$ son ortogonales.

d) Relacione la salida v(t) del filtro con la autocorrelación de $p_r(t)$, si a la entrada del sistema receptor llega: **d1)** $p_r(t)$ o **d2)** $p_v(t)$

e) Calcule el valor A, con el que se compara v(t) en el bloque de decisión por umbral, el cual servirá para identificar si el semáforo está en rojo o en verde.

f) Justifique que el sistema no funciona si $T=T_0$

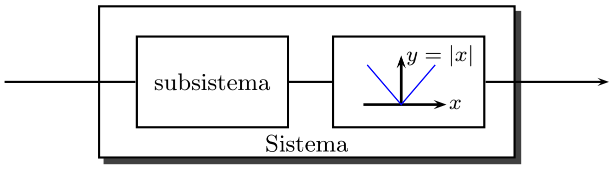
Problema 1. La figura muestra la salida $y_1(t)$ de un sistema cuando es excitado por la señal $x_1(t) = e^{2t}\,\mathrm{u}(-t)$.



(a) Discuta las propiedades de linealidad e invarianza del sistema.

Solución: Con la observación de la respuesta a una única señal es dificil obtener conclusiones respecto a la linealidad e invarianza del sistema. Podríamos plantear distintos sistemas que generan $y_1(t)$ a partir de $x_1(t)$. Por ejemplo,

- $T[x(t)] = x(t) + x(-t)$, que es lineal y variante.
- Un sistema cuya última etapa fuera un rectificador.



  Si la salida del subsistema, para la entrada $x_1(t)$ fuera $y_1(t)$, ésta sería también la salida del sistema. Y si cambiamos de signo la entrada, obviamente no cambia de signo la salida ($T[-x_1(t)] \neq -y_1(t)$), así que no es lineal.

- $y(t) = y_1(t)$, ó $y(t) = x(t) + x_1(-t)$, ambos no lineales, variantes
- $y(t) = R_{xx}(t)$, no lineal, variante

Por tanto, con la información que disponemos podemos plantear multitud de sistemas que son variantes y/o no lineales.

La pregunta ahora es: ¿existe algún sistema lineal e invariante? O formulado de otra forma, ¿podemos encontrar $h(t)$ / $y_1(t) = x_1(t) * h(t)$?

Es más conveniente trasladar la pregunta al dominio de la transformada de Fourier, ya que la convolución se transforma en un simple producto: ¿podemos encontrar $H(f)$ / $Y_1(f) = X_1(f) \cdot H(f)$?

Esta propiedad podría indicarnos, si en la salida aparecen frecuencias que no están en la entrada, que el sistema no puede ser L.I.

Las tranformadas de $x_1(t)$ y de $y_1(t)$ pueden derivarse fácilmente a partir de la expresión de la transformada de Fourier.

$$X_1(f) = \frac{1}{2 - j2\pi f}$$

Como no hay ninguna frecuencia en el que $X_1(f)$ sea nulo, no podremos afirmar que no es L.I. Al contrario, podremos encontrar el sistema L.I., $H(f)$, que verifica $y_1(t) = T[x_1(t)]$.

$$Y_1(f) = \frac{1}{2 - j2\pi f} + \frac{1}{2 + j2\pi f} = \frac{4}{(2 - j2\pi f)(2 + j2\pi f)}$$

Por tanto, (*Esta es la solución al apartado siguiente*)

$$H(f) = \frac{Y_1(f)}{X_1(f)} = \frac{4}{2 + j2\pi f} \qquad\qquad h(t) = 4e^{-2t}\,\mathrm{u}(t)$$

Como conclusión, la información disponible no permite determinar ni la linealidad ni la invarianza del sistema.

Suponga a partir de ahora que el sistema es lineal e invariante.

(b) Calcule $H(f)$ y $h(t)$.

(c) Indique qué condiciones ha de cumplir la respuesta impulsional de un sistema lineal e invariante para que sea estable y para que sea causal. Analice si el sistema de la figura cumple estas propiedades a partir de la respuesta impulsional calculada en el apartado anterior.

Solución:

- Un sistema lineal e invariante es causal si su respuesta impulsional $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$. Este es el caso para $h(t) = 4e^{-2t}\,\mathrm{u}(t)$, por lo que el sistema sería causal.
- Un sistema lineal e invariante es estable si su respuesta impulsional $h(t)$ es absolutamente integrable, como en este caso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|4e^{-2t}\,\mathrm{u}(t)\right| dt = 2 < \infty$$

Así pues, si el sistema es lineal e invariante también será causal y estable.

(d) Encuentre la salida $y_2(t)$ si la entrada es $x_2(t) = \sin(2\,t) + \cos(20\,t)$. Aproxime los valores numéricos.

Solución: El efecto de un sistema lineal e invariante sobre un señal senoidal, de frecuencia f_0 es un cambio de su amplitud en el factor $H(f_0)$ y un desfase $\angle H(f_0)$.
En este caso, para el primer componente senoidal, de frecuencia $2/2\pi$,

$$H\left(\frac{2}{2\pi}\right) = \frac{4}{2+2j} = \frac{2}{1+j} \qquad \left|H\left(\frac{2}{2\pi}\right)\right| = \sqrt{2} \qquad \angle H\left(\frac{2}{2\pi}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Y para el componente de frecuencia $20/2\pi$,

$$H\left(\frac{20}{2\pi}\right) = \frac{4}{2+20j} \approx \frac{2}{10j} \qquad \left|H\left(\frac{20}{2\pi}\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{101}} \approx 0{,}2 \qquad \angle H\left(\frac{20}{2\pi}\right) = -\arctan(10) \approx -\frac{\pi}{2}$$

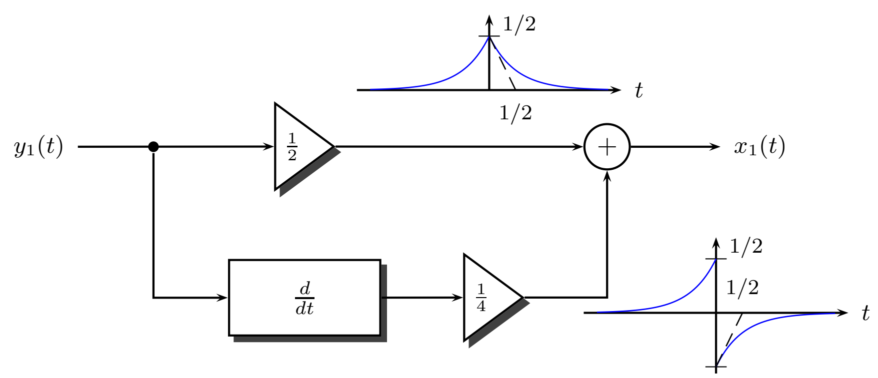
$$\begin{aligned} y_2(t) &\approx \sqrt{2}\,\sin\left(2\,t - \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}2\,\cos\left(20\,t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\,\sin\left(2\,t - \frac{\pi}{4}\right) - 0{,}2\,\sin\left(20\,t\right) \end{aligned}$$

(e) Encuentre el sistema inverso. Dibuje el diagrama de bloques del sistema inverso utilizando bloques elementales (sumadores, multiplicadores, retardos, derivadores, integradores, etc.). Compruebe en el dominio temporal que si la entrada fuera $y_1(t)$ la salida sería $x_1(t)$.

Solución: El sistema es invertible, y la respuesta frecuencial del sistema inverso es

$$H_I(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{2 + j2\pi f}{4} = \frac{1}{2} + \frac{j2\pi f}{4}$$

Este sistema está formado por la suma de dos componentes: un atenuador y un derivador. La figura muestra el esquema y las salidas en cada una de las ramas. Puede verse como la suma es $x_1(t)$.



EXERCICI 2

SABENT $p(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT_0) \xleftrightarrow{F} P(f)=F_0\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-mF_0) \Rightarrow g(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m\delta(t-mT_g)=$

$$g(t)=p(t)-p(t-T_g)=\left\{\begin{array}{l}T_g=\frac{1}{100}\\ T_0=\frac{1}{50}\end{array}\right\} \xleftrightarrow{F} G(f)=F_0\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-mF_0)\left[1-e^{-j2\pi mF_0\frac{T_0}{2}}\right]$$

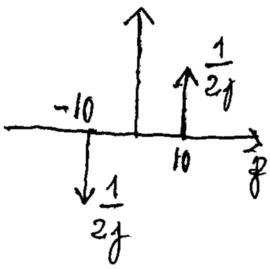
$$\boxed{G(f)=100\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-(2m-1)50)}$$

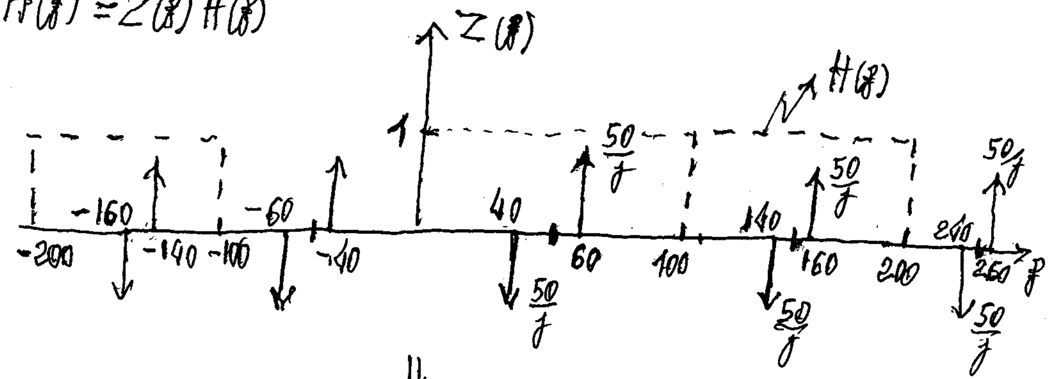
$$Y(f)=\left[X(f)*G(f)\right]H(f)=Z(f)H(f)$$

$x(t)=\sin(20\pi t)$

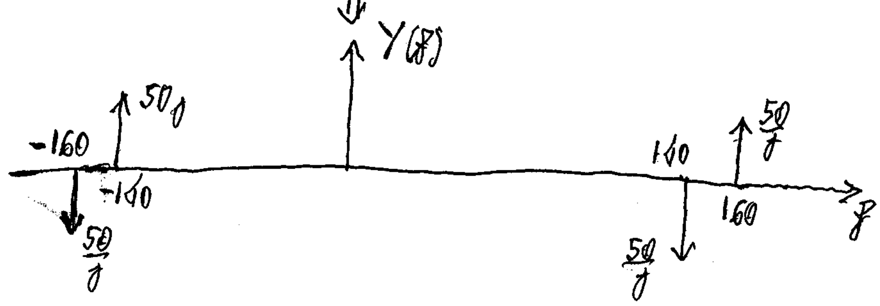
$\updownarrow F$

$$\boxed{X(f)=\frac{\delta(f-10)-\delta(f+10)}{2j}}$$





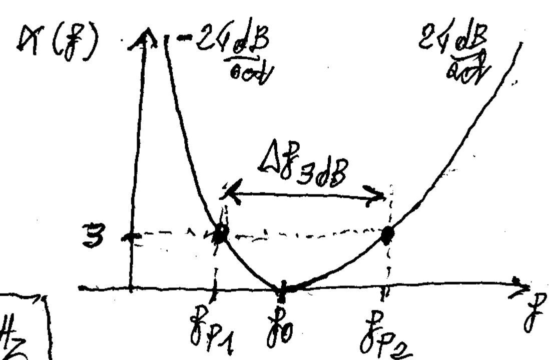
$\Downarrow$



$$\boxed{y(t)=100\left[\sin(320\pi t)-\sin(280\pi t)\right]=200\sin(20\pi t)\cos(300\pi t)}$$

EXERCICI 3

MIRANT $|H(f)|^2$, ES VEU QUE EL FILTRE HA ESTAT DISENYAT PER TRANSFORMACIÓ DE FREQÜÈNCIES $\emptyset=\frac{f^2-f_0^2}{f}$, A PARTIR D'UN PROTOTIP PAS-BAIX DE BUTTERWORTH D'ORDRE 4: $|H(\emptyset)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\emptyset}{\emptyset_c}\right)^8}$ ON $\emptyset_c$ ÉS LA FREQ. DE TALL A 3dB



a) Z. D'ATENUACIÓ A $\pm f_0$. I Z. TRANSMISSIÓ A $\emptyset$ I ∞

b) $\boxed{\Delta f_{3dB}}=f_{P_2}-f_{P_1}=\emptyset_c=3KHz$

c) $\emptyset_c \begin{array}{l}\nearrow f_{P_1}\\ \searrow f_{P_2}\end{array}$ ON $\left.\begin{array}{l}f_{P_2}-f_{P_1}=\emptyset_c=3\\ f_{P_1}f_{P_2}=f_0^2=2^2\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}f_{P_1}=1KHz\\ f_{P_2}=4KHz\end{array}}$

d) $6n\ \frac{dB}{oct}$ ON $n=4 \Rightarrow \boxed{24\,dB/oct}$

Ejercicio 4

a) Por ser los pulsos reales

$$R_{p_r p_r}(\tau) = p_r(\tau) * p_r^*(-\tau) = p_r(\tau) * p_r(-\tau)$$

La función de autocorrelación es par y el máximo está en el origen. En este caso, por ser la convolución de dos pulsos de duración T, su duración es 2T. La única función que lo cumple es la a)

b) $E_{p_r} = \int_0^T |p_r(t)|^2 \, dt = \int_0^T dt = T$

Por ser $p_r(t) = -p_v(t)$, sus módulos son idénticos y su energía también

$$E_{p_r} = E_{p_v} = T$$

c) Para que dos pulsos sean ortogonales se debe cumplir que su función de autocorrelación cruzada en el origen sea cero

$$R_{p_r p_v}(0) = \int_0^T p_r(t) p_v(t) dt = \int_0^T (-1) dt = -T$$

No son ortogonales

d1) Cuando a la entrada se aplica $p_r(t)$ a la salida se tiene

$$v(t) = p_r(t) * h(t) = p_r(t) * p_r(T-t) = p_r(t) * p_r(-t) * \delta(t-T) = R_{p_r p_r}(t-T)$$

d2) Como $p_v(t) = -p_r(t)$, cuando a la entrada se aplica $p_v(t)$ se obtiene

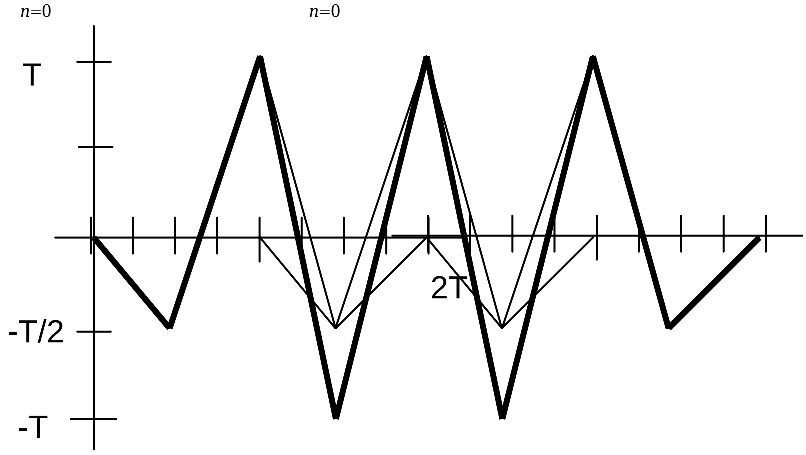
$$v(t) = p_v(t) * h(t) = -p_r(t) * p_r(T-t) = -p_r(t) * p_r(-t) * \delta(t-T) = -R_{p_r p_r}(t-T)$$

e) Cada vez que a la entrada se aplica un pulso $p_r(t)$ se alcanzará el valor máximo T mientras que cada vez que se aplique $p_v(t)$ se alcanzará el valor –T. Por tanto el sistema de decisión identificará "rojo" si la salida alcanza el umbral A=T e identificará "verde" si la salida alcanza el umbral -A=-T

f) si $T=T_0$, la salida mientras el semáforo está rojo será

$$v(t) = x_r(t) * h(t) = \sum_{n=0}^{N-1} p_r(t-nT_0) * p_r(t) * \delta(t-T) = \sum_{n=0}^{N-1} R_{p_r p_r}(t-T-nT_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_{p_r p_r}(t-T-nT) = \sum_{n=0}^{N-1} R_{p_r p_r}(t-(n+1)T)$$



La figura muestra la salida v(t) cuando se aplica $x_r(t)$. Debido a los solapes entre las respuestas a los pulsos individuales, el sistema alcanza valores –T haciendo que el detector por umbral active, alternativamente la detección 'rojo' y 'verde'