FIB

Matemàtica Discreta. Primer Parcial. **Q. Tardor 2007**

Nom: **Data: 25/10/07**

---

1. (4 punts)

(1) Una persona ha d'aparellar 8 parelles de mitjons diferents. Calcula de quantes maneres pot fer-ho si, fent-ho a l'atzar, resulta que només aparella correctament 3 parelles.

(2) Un conjunt X té el triple d'elements que un altre conjunt Y. Si Y té 435 subconjunts de dos elements, quants elements té X?

(3) Explica quina relació hi ha entre el conjunt de k-particions del conjunt $[n]$ i el conjunt de k-particions de l'enter n.

(4) Quin és el coeficient de $x^{-1}y^3z^4$ en desenvolupar $(x + x^{-1}y + 2z)^9$?

(5) Descriu dos exemples de conjunts que tinguin per cardinal el nombre de Catalan n-èsim. Quant val aquest nombre?

(6) Troba el terme general de la successió que té per funció generadora ordinària la funció $f(x) = x/(1 - 2x)^2$.

(7) Dóna la funció generadora ordinària del nombre de particions de n tals que cada part apareix com a molt dues vegades.

(8) Calcula la funció generadora ordinària de la successió definida per la recurrència $a_{n+1} = 2a_n + n$ amb la condició inicial $a_0 = 1$.

2. (3 punts) Calcula quantes permutacions del multiconjunt $\langle a^3, b^3, c^3 \rangle$ hi ha en les quals no apareix la mateixa lletra tres cops consecutius.

3. (3 punts) En el pla hi ha dos punts pintats de groc i n punts pintats de verd. Només es permet dibuixar segments entre punts de color diferent.

(i) Calcula el nombre a_n de maneres diferents com es poden dibuixar $n + 1$ segments de manera que tots els punts quedin connectats.

(ii) Calcula la funció generadora ordinària de $(a_n)_{n \geq 0}$ (suposa que $a_0 = 0$).

Solució Parcial 1 (curs 2007/08).

1. (4 punts)

(1) Una persona ha d'aparellar 8 parelles de mitjons diferents. Calcula de quantes maneres pot fer-ho si, fent-ho a l'atzar, resulta que només aparella correctament 3 parelles.

Es tracta de comptar de quantes maneres es poden triar els 3 parells de mitjons que s'aparellen bé, que és el binomial $\binom{8}{3}$*, i de comptar el nombre de desarranjaments de la resta de parelles, que és* d_5*. Per tant, el nombre total de maneres de fer-ho és* $\binom{8}{3}d_5$.

(2) Un conjunt X té el triple d'elements que un altre conjunt Y. Si Y té 435 subconjunts de dos elements, quants elements té X?

Sigui n *el cardinal de* Y*. Aleshores el nombre de subconjunts de dos elements de* Y *és*

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 435$$

Resolent aquesta equació de segon grau en n *s'obté com a única arrel positiva* $n = 30$*. Per tant,* $|X| = 90$.

(3) Explica quina relació hi ha entre el conjunt de k-particions del conjunt $[n]$ i el conjunt de k-particions de l'enter n.

Veure els apunts de teoria

(4) Quin és el coeficient de $x^{-1}y^3z^4$ en desenvolupar $(x + x^{-1}y + 2z)^9$?

Pel teorema multinomial és

$$\begin{aligned}(x + x^{-1}y + 2z)^9 &= \sum_{k_1+k_2+k_3=9} \binom{9}{k_1, k_2, k_3} x^{k_1}(x^{-1}y)^{k_2}(2z)^{k_3} \\ &= \sum_{k_1+k_2+k_3=9} \binom{9}{k_1, k_2, k_3} 2^{k_3} x^{k_1-k_2} y^{k_2} z^{k_3}\end{aligned}$$

Cal doncs que sigui $k_2 = 3$ *i* $k_3 = 4$ *i, per tant, ha de ser* $k_1 = 2$*. El monomi corresponent és efectivament el que cal i el seu coeficient és* $2^4\binom{9}{2,3,4}$.

(5) Descriu dos exemples de conjunts que tinguin per cardinal el nombre de Catalan n-èsim. Quant val aquest nombre?

Veure apunts de teoria

(6) Troba el terme general de la successió que té per funció generadora ordinària la funció $f(x) = x/(1-2x)^2$.

Usem l'expansió

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n\geq 0} \binom{m+n-1}{m-1} x^n$$

per deduir que

$$\frac{x}{(1-2x)^2} = x\sum_{n\geq 0}\binom{2+n-1}{2-1}(2x)^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)2^n x^{n+1} = \sum_{m\geq 1} m2^{m-1}x^m = \sum_{m\geq 0} m2^{m-1}x^m$$

Per tant, el terme general buscat és $a_n = n2^{n-1}$.

(7) Dóna la funció generadora ordinària del nombre de particions de n tals que cada part apareix com a molt dues vegades.

És la funció

$$f(x) = \prod_{i\geq i}(1+x^i+x^{2i})$$

amb el factor $1+x^i+x^{2i}$ *corresponent al nombre de vegades que apareix el sumand* i *(0,1 o 2 cops, segons que del factor agafem el terme* 1, x^i *o* x^{2i} *respectivament).*

(8) Calcula la funció generadora ordinària de la successió definida per la recurrència $a_{n+1} = 2a_n + n$ amb la condició inicial $a_0 = 1$.

Si $A(x)$ *és la funció generatriu de* $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$*, la de* $(a_1, a_2, \ldots)$ *és*

$$\frac{A(x)-1}{x}$$

mentre que la de la successió del terme independent és $x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ *(en efecte, la de la successió constant és* $1/(1-x)$ *i apliquem la regla de derivació). Per tant,* $A(x)$ *compleix*

$$\frac{A(x)-1}{x} = 2A(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$$

A partir d'aquí s'obté que $A(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}$.

2. (3 punts) Calcula quantes permutacions del multiconjunt $\langle a^3, b^3, c^3\rangle$ hi ha en les quals no apareix la mateixa lletra tres cops consecutius.

Apliquem principi d'inclusió-exclusió als conjunts

$$A_\alpha = \{\textit{permutacions de } \langle a^3,b^3,c^3\rangle \mid \textit{apareix el bloc } \alpha\alpha\alpha\}, \quad \alpha = a,b,c,$$

tot ells subconjunts del conjunt A *de totes les permutacions del multiconjunt donat. Es tracta de calcular*

$$|A_a^c \cap A_b^c \cap A_c^c| = \binom{9}{3,3,3} - |A_a \cup A_b \cup A_c|.$$

Pel PIE, és

$$|A_a\cup A_b\cup A_c| = |A_a| + |A_b| + |A_c| - |A_a\cap A_b| - |A_a\cap A_c| - |A_b\cap A_c| + |A_a\cap A_b\cap A_c|$$

Ara:

$$|A_a| = |A_b| = |A_c| = 7 \cdot \binom{6}{3,3}$$

(el 7 és el nombre de maneres de triar on poso el bloc de tres lletres consecutives iguals i el multinomial és el nombre de maneres de permutar el multiconjunt restant);

$$|A_\alpha \cap A_\beta| = \binom{5}{3,1,1}$$

(són les permutacions del multiconjunt format per les tres γ's i els dos blocs $\alpha\alpha\alpha$ i $\beta\beta\beta$); i

$$|A_a \cap A_b \cap A_c| = 3!$$

(és el nombre de maneres d'ordenar els tres blocs). Per tant,

$$|A_a^c \cap A_b^c \cap A_c^c| = \binom{9}{3,3,3} - \left[3 \cdot 7 \cdot \binom{6}{3,3} - \binom{3}{2} \cdot \binom{5}{3,1,1} + 3!\right] = 1314.$$

3. (3 punts) En el pla hi ha dos punts pintats de groc i n punts pintats de verd. Només es permet dibuixar segments entre punts de color diferent.

(i) Calcula el nombre a_n de maneres diferents com es poden dibuixar $n+1$ segments de manera que tots els punts quedin connectats.

Observar primer que cada punt verd cal connectar-lo necessàriament a un punt groc (altrament, quedaria aillat). Això exigeix usar almenys n segments (un per cada punt verd). A més, cal encara un altre segment addicional com a mínim, ja que verds entre ells no estan conectats ni grocs entre ells i, per tant, si no dibuixem algun segment addicional, no podríem anar d'un punt groc a l'altre. Algun dels punts verds haurà d'estar doncs connectat als dos punts grocs i farà de pont entre els dos grocs. Dit això, el que volem calcular correspon aleshores al nombre de maneres de triar quin punt verd agafo com a pont (tinc n maneres de triar-lo) juntament amb el nombre de maneres de triar a quin punt groc connecto cadascun dels $n-1$ punts verds restants (hi ha 2^{n-1} maneres, ja que són variacions amb repetició d'ordre $n-1$ del conjunt de punts grocs). Per tant, el nombre total de maneres de connectar tot els punts amb $n+1$ segments és el producte $n2^{n-1}$. Es pot també resoldre plantejant la recurrència $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$, que resulta de distingir en el cas de $n+1$ punts verds segons que el punt verd que fa de pont sigui uns dels n primers (hi ha aleshores $2a_n$ maneres de fer-ho amb el punt $n+1$ connectat) o que el punt verd que fa de pont sigui el $n+1$ (d'aquestes n'hi ha 2^n).

(ii) Calcula la funció generadora ordinària de $(a_n)_{n\geq 0}$ (suposa que $a_0 = 0$).

Es pot fer usant la recurrència anterior, que dóna l'equació

$$\frac{a(x)}{x} = 2a(x) + \frac{1}{1-2x}$$

en la funció generatriu. Operant s'obté $a(x) = x/(1-2x)^2$.