

Justifiqueu totes les respostes

1. Un graf és una *flor* si és connex i conté un únic cicle.
 - (a) $\langle 0, 5 \text{ punts} \rangle$ Digueu quines flors són grafs bipartits.
 - (b) $\langle 1, 5 \text{ punts} \rangle$ Demostreu que un graf G és una flor si, i només si, G és connex i té l'ordre i la mida iguals.
 - (c) $\langle 1 \text{ punt} \rangle$ Sigui F una flor d'ordre n amb només vèrtexs de grau 1 i de grau 3. Quants en té de cada tipus?
Doneu un graf amb seqüència de graus $(3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$ que no sigui una flor.
 - (d) $\langle 1 \text{ punt} \rangle$ Demostreu que en una flor tot vèrtex de grau almenys 3 és d'articulació. Doneu una flor que tingui algun vèrtex de grau 2 que sigui d'articulació i algun vèrtex de grau 2 que no ho sigui.
 - (e) $\langle 1 \text{ punt} \rangle$ Un *jardí* és un graf tal que cada component connex és una flor o un arbre. Quants components connexos són arbres en un jardí d'ordre 17 i mida 14?
2. $\langle 5 \text{ punts} \rangle$ Tots els apartats valen igual.
Per $r \geq 1, k \geq 3$, sigui $R(r, k)$ el graf $K_r \square C_k$, és a dir, el graf amb conjunt de vèrtexs $V = \{(i, j) : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq k\}$ i on

$$(i, j) \sim (i', j') \text{ si } \begin{cases} i = i' \text{ i } j - j' \equiv 1 \pmod{k}, \text{ o} \\ i = i' \text{ i } j - j' \equiv -1 \pmod{k}, \text{ o} \\ j = j' \text{ i } i \neq i'. \end{cases}$$

- (a) Doneu la seqüència de graus, l'ordre i la mida de $R(r, k)$.
- (b) Demostreu que $R(r, k)$ és hamiltonià si k és parell.
- (c) Per quins valors de r i k és $R(r, k)$ eulerià?
- (d) Assignem pes 100 a totes les arestes de la forma $\{(i, j), (i', j)\}$ i pes 1 a la resta d'arestes. Trobeu un arbre generador de pes mínim en $R(r, k)$. Quin pes té?

Notes: es penjaran al Racó el dimecres 21 de gener.

Revisió: dijous 22 de gener de 12:00 a 13:00 a l'aula A6102.