DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS	**Procesado de Señal** Fecha examen: 22 de Enero de 2010 Publicación notas provisionales: 27 de Enero Límite presentación alegaciones: 28 de Enero Publicación notas definitivas: 29 de Enero

Profesores: Miguel A. Lagunas, Montserrat Nájar, Ana I. Pérez-Neira

Información adicional:

- Duración: 2,5 h
- No pueden utilizarse libros, ni apuntes, ni calculadoras, ni otros dispositivos electrónicos
- Utilizad hojas separadas para resolver cada problema

Justificad todos los resultados

Ejercicio 1

Cada uno de los M sensores que se hallan distribuidos en una determinada zona transmiten simultáneamente T datos, durante un intervalo de tiempo de duración T. Dichos datos se reciben en una estación con capacidad de recibir simultáneamente y en la misma frecuencia M señales espaciales, que se recogen en la matriz **Y** (de dimensiones MxT):

$$\boldsymbol{Y} = \sqrt{P.T}\ \boldsymbol{G}.\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Z}$$

Donde P es la potencia con la que transmite cada sensor. Considerando M antenas en la estación receptora, el canal puede modelarse con la matriz, $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_{11} \cdots g_{1M} \\ \vdots \\ g_{M1} \cdots g_{MM} \end{bmatrix}$, donde gij es el canal de la antena receptora i al sensor j, $\boldsymbol{A}$ es una matriz de dimensiones MxT y ortonormal ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{I}$) cuyas filas contienen los T símbolos transmitidos por cada sensor, finalmente $\boldsymbol{Z}$ es la matriz de ruido, con dimensiones MxT y cuyos elementos son variables complejas Gaussianas e independientes de media cero: $\boldsymbol{Z} \sim N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$ e incorrelados con la señal.

a)Halle la estimación ML de la matriz de canal $\boldsymbol{G}$, $\hat{\boldsymbol{G}}$.

NOTA: $\dfrac{\partial\left[Tr\left[\mathbf{XY}\right]\right]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Y}^T$

Solución: $\hat{\boldsymbol{G}} = \dfrac{1}{\sqrt{P.T}}\boldsymbol{Y}.\boldsymbol{A}^H$

b)Halle la potencia del error de la estimación de $\hat{\boldsymbol{G}}$.

Solución: $\boldsymbol{\sigma}^2 = \dfrac{M}{PT}$

A continuación, la estación pasa a modo transmisión. En un instante de tiempo las M señales que reciben simultáneamente los M sensores se modelan en el vector $\boldsymbol{t}$:

$$\boldsymbol{t}= \boldsymbol{G}^H.\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$$

en donde $\boldsymbol{w}$ es un vector con M muestras complejas de ruido Gaussiano de media cero e independientes, $\boldsymbol{w} \sim N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$. Por su parte, $\boldsymbol{u}= \boldsymbol{V}.\ \boldsymbol{x}$, siendo $\boldsymbol{x}$ el vector formado por los datos que se quiere transmitir a cada sensor $\boldsymbol{x}=[x_1 \ldots x_M]^T$ y $\boldsymbol{V}$ es una matriz cuyas columnas son filtros espaciales, $\boldsymbol{V} = \left[\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_M\right]$. Si se formula la señal recibida en cada sensor t_k (es decir, cada componente del vector $\boldsymbol{t}$) como: $t_k = \alpha_{kk}.x_k + \sum_{j\neq k}\alpha_{kj}.x_j + w_k$

NOTA: Observe que $\boldsymbol{G^H}$ puede formularse como: $\boldsymbol{G}^H = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1^H \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_M^H \end{bmatrix}$

c) Halle α_{ij}, para todo i,j, en función de $\boldsymbol{g}_i$, i=1..M y de $\boldsymbol{v}_i$, i=1…M. Interprete el valor físico de estos coeficientes.

Solución: estos coeficientes son el canal equivalente que ve cada sensor, $\alpha_{ij} = \boldsymbol{g}_i^H.\mathbf{v}_j$

Para facilitar la recepción de los datos en cada sensor, el diseño de los filtros espaciales es: $V = \left(\hat{G}^H\right)^{-1}$, en donde se considera que la matriz del canal es invertible.

d) Si se modela el canal a cada sensor como su valor estimado más el error de estimación, $\mathbf{g}_k = \hat{\mathbf{g}}_k + \mathbf{g}_k^e$, justifique entonces que $\alpha_{kj} = \mathbf{g}_k^{eH}.\mathbf{v}_j \quad \forall k \neq j$ y halle α_{kk}

Solución: $\alpha_{kj} = \mathbf{g}_k^H.\mathbf{v}_j = (\mathbf{g}_k^{'} + \mathbf{g}_k^e)^H.\mathbf{v}_j \underset{\mathbf{V}=\left(\hat{\mathbf{G}}^H\right)^{-1}}{=} 1\delta_{kj} + \mathbf{g}_k^{eH}.\mathbf{v}_j$

e) Cada sensor tiene que estimar su canal equivalente. Encuentre el estimador MMSE de α_{kk} condicionado a la observación en cada sensor t_k

$$\textit{Solución: } \alpha_{kk}^{'} = \frac{E\left[\alpha_{kk}.t_k^*\right]}{E\left[t_k.t_k^*\right]} t_k$$

NOTA: $E\left[X/Y\right] = m_x + r_{yy}^{-1} r_{xy}\left(y - m_y\right)$

Ejercicio 2

Dadas dos señales x1(n) y x2(n), agrupadas en el vector $\underline{X}_n$ y de igual potencia unidad (Px1=1,Px2=1), se desea, codificar ambas con b1 y b2 bits respectivamente. El criterio de diseño será que la suma de la potencia de los errores de cuantificación sea mínimo sujeto a que el número de bits total sea igual a B:

$$\begin{aligned} &\xi = \frac{Px1}{2^{2.b1}} + \frac{Px2}{2^{2.b2}} = \frac{1}{2^{2.b1}} + \frac{1}{2^{2.b2}} \\ &b1 + b2 = B \end{aligned} \tag{1}$$

La matriz de correlación del vector formado por ambas señales viene dada por (2).

$$\underline{\underline{C}} = E\left(\underline{X}_n \underline{X}_n^H\right) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

a.- Calcule la asignación de b1 y b2 que minimiza el error y pruebe que el error mínimo viene dado por $\xi_{\min} = 2.2^{-B}$.

Solución:

Se trata de una minimización de la potencia global del error con restricciones

$$\begin{aligned} &\xi = \frac{Px1}{2^{2.b1}} + \frac{Px2}{2^{2.b2}} = \frac{1}{2^{2.b1}} + \left.\frac{1}{2^{2.b2}}\right|_{MIN} \\ &b1 + b2 = B \end{aligned}$$

El Lagrangiano es: $\Gamma = \xi - \lambda(b1 + b2 - B)$

Y las derivadas con respecto a b1 y b2:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial b1} = \frac{-2\ln 2}{2^{2b1}} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial b2} = \frac{-2\ln 2}{2^{2b2}} - \lambda = 0$$

Con lo que la solución global y la mínima distorsión serán:
$$b1 = b2 = B/2$$
$$\xi_{MIN} = 2^{-B+1}$$

Claramente al ser las dos potencias iguales la distribución de bits es uniforme entre las dos señales.

b.- Indique la razón o razones por las que considera que este sistema de codificación conjunta de x1 e x2 no es óptimo.

Solución:

La codificación anterior tan solo es óptima cuando las dos señales son independientes, claramente en el caso que α sea diferente de cero la codificación independiente de ambas no será optima.

El valor absoluto de α toma valores entre cero y la media geométrica de las potencias de ambas señales

$$|\alpha|^2 = |E(x1x2)|^2 \le E(x1^2)E(x2^2) = Px1Px2 = 1$$

Es decir para valores de alfa próximos a la unidad las pérdidas de la codificación directa respecto a un esquema de codificación óptima serán mayores.

Sabiendo que la DCT (Transformada Coseno Discreta) viene definida como sigue:

$$DCT_f(k) = A_k \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right) \qquad A_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2} & k=0 \\ \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} & k=1,N-1 \end{cases}$$

Definiendo Y1 y Y2 como las componentes del vector transformado con la DCT del vector $\underline{X}_n$

c.- Encuentre la matriz T que verifica $\underline{Y} = \begin{pmatrix} Y1 \\ Y2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$ y pruebe que la matriz de autocorrelación del nuevo vector viene dada por $\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$

Solución:

Dado que Y1 ha de ser la DCT para k=0 de (x1,x2), de la expresión del enunciado se obtiene dicha primera fila que es igual a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 \quad 1)$. La segunda fila ha de producir en Y2 la DCT para k=1, por tanto con N igual a 2, dicha fila será $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 \quad -1)$. En definitiva la matriz T pasa a ser:

$$\underline{\underline{T}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Puede comprobarse fácilmente que esta matriz no altera la potencia global pues se verifica que $\underline{\underline{T}}^H.\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{I}}$, es decir es ortonormal y por tanto $traza\left(\underline{\underline{T}}^H.\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{T}}\right) = traza\left(\underline{\underline{R}}\right) = traza\left(\underline{\underline{C}}\right)$.

Para calcular la matriz de correlación del vector Y:

$$E\left(\underline{Y}\underline{Y}^H\right) = E\left(\underline{\underline{T}}\,\underline{X}\,\underline{X}^H\,\underline{\underline{T}}^H\right) = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{T}}^H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Como puede verse la traza es la misma, es decir Px1+Px2 es igual a Py1+Py2, pero además el determinante es el mismo lo que es un síndrome del carácter optimo para N igual a dos de la DCT.

d.- Demuestre que la codificación del vector Y̲ produce un ξ menor que el que se obtiene de la cuantificación directa realizada en el apartado (a).

Solución:

En este caso la minimización seria: $$\xi_M = \left.\frac{1+\alpha}{2^{2.b1}} + \frac{1-\alpha}{2^{2.b2}}\right|_{MIN}$$
$$b1 + b2 = B$$

Las derivadas del Lagrangiano son

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial b1} = \frac{-2\ln 2(1+\alpha)}{2^{2b1}} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial\Gamma}{\partial b2} = \frac{-2\ln 2(1-\alpha)}{2^{2b2}} - \lambda = 0$$

y la solución pasa a ser

$$b1 = \mu + \frac{1}{2}\log_2(1+\alpha)$$
$$b2 = \mu + \frac{1}{2}\log_2(1-\alpha)$$

La constante se obtiene de la restricción y resulta ser $\mu = \frac{B}{2} - \frac{1}{2}\log_2\left(1-\alpha^2\right)^{0.5}$

$$b1 = \frac{B}{2} + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/2}$$
$$b2 = \frac{B}{2} - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/2}$$

y la distorsión mínima se obtiene al sustituir esta asignación de bits.

$\xi_{M,MIN} = \frac{1+\alpha}{2^{2b1}} + \frac{1-\alpha}{2^{2b2}} = 2^{-B+1}\left(1-\alpha^2\right)^{1/2}$. Este resultado revela que la distorsión nueva se ve reducida en el factor $\sqrt{1-\alpha^2}$. Note que para alfa igual a la unidad el error mínimo sería $\frac{2}{2^{2B}} = 2^{-2B+1}$.

e.- Demuestre que la transformación optima es la KLT (Autovectores de la matriz C). A continuación, note que, en este caso, coincide perfectamente con la DCT.

Solución:

La transformada óptima ha de ser ortonormal para no alterar la potencia. Además ha de hacer que el determinante de la matriz de correlación transformada sea el máximo, fijada su traza, lo que fuerza a que la matriz de correlación transformada sea diagonal. En definitiva, la matriz ha de ser ortonormal y ha de diagonalizar la matriz de correlación C. La solución es formar la matriz de transformación con los autovectores de la matriz C.

El calculo de los autovalores seria:

$\det\left[\underline{\underline{C}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right] = 0 = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \alpha \\ \alpha & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - \alpha^2$ La solución a esta ecuación son los dos autovalores

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \alpha$ Los autovectores se obtienen de sustituir dichos valores y calcular el vector de norma unidad que verifica

$\left[\underline{\underline{C}} - \lambda_{1,2}\underline{\underline{I}}\right]\underline{e}_{1,2} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 1-\lambda_{1,2} & \alpha \\ \alpha & 1-\lambda_{1,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e1_{1,2} \\ e2_{1,2} \end{pmatrix}$ La solución a esta ecuación son los dos autovectores. El resultado es idéntico a la transformación derivada de la DCT.

$\underline{\underline{E}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Esta coincidencia es solo exacta para el caso de N igual a 2 o cuando N tiende a infinito.

Es fácil de comprobar que la matriz T de la DCT, en este caso de un vector de dos componentes es idéntica a la que produciría la transformada de Fourier.

f.- Indique, para el caso de un número de componentes superior a dos, N>2, las ventajas de la DCT sobre la DFT.

Solución:

- La DCT es una transformada biunívoca únicamente para señales reales y, al mismo tiempo permite el uso números reales en lugar de complejos como es el caso de la FFT. En definitiva, implica solo operaciones reales, solo se requieren N funciones reales en la transformada directa y el mismo número en la inversa.

- La resolución de la DCT es el doble pues implementa filtros reales del mismo ancho de banda que los filtros complejos asociados a la FFT. Como los filtros reales dedican la mitad de su ancho de banda a frecuencias positivas, el resultado es que el ancho de banda es la mitad del usado en la FFT. En definitiva la resolución es el doble que una FFT del mismo tamaño N.

- La DCT sufre de un efecto de bordes (Fenómeno de Gibbs) menor que el que sufre la FFT. Este efecto aparece en el dominio contrario al dominio donde se practica cualquier tipo de procesado no-lineal como cuantificación y distorsión no-lineal. El fenómeno de Gibbs se presenta en las discontinuidades.