PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial **5 de novembre de 2008**

1. Les portes d'un edifici s'obren amb uns dispositius que, normalment, tenen una probabilitat de fallar igual a 0,2 (és a dir, la probabilitat que al polsar-lo no s'obri la porta). A més, per un defecte en el control de qualitat, un 25% dels dispositius estan desajustats, de manera que tenen una probabilitat de fallar igual a 0,4.

   (a) Apliquem el següent test: polsem n vegades el dispositiu i si la porta s'obre les n vegades decidim que el dispositiu és correcte (si no, no prenem cap decisió). Quant ha de valer n per tal que la probabilitat d'encertar valgui almenys 0,98?

   (b) A l'edifici hi ha 100 portes, cadascuna amb el seu dispositiu independent. Si polsem una vegada tots els dispositius, quantes portes s'obriran en promig?

   (c) Una porta te un dispositiu avariat pel qual la probabilitat de fallar val 0,7. Sigui N el nombre de vegades que l'hem de polsar per a que s'obri la porta. Quin tipus de variable aleatòria és N? Què val la seva esperança, m? Quina és la probabilitat que N sigui major que m?

   (d) Una porta té connectats, de manera paral·lela i independent, tres dispositius desajustats. Si els polsem els tres alhora, quina és la probabilitat que s'obri la porta?

Resolució:

(a) Indiquem C dispositiu correcte i D dispositiu desajustat. Llavors, $P(C) = \frac{3}{4}$ i $P(D) = \frac{1}{4}$. A més, $P(\text{obrir}|C) = 0{,}8$ i $P(\text{obrir}|D) = 0{,}6$. Així, si O_n és l'esdeveniment "la porta s'obre les n vegades", per Bayes tenim:

$$P(C|O_n) = \frac{P(O_n|C)P(C)}{P(O_n|C)P(C) + P(O_n|D)P(D)} = \frac{0{,}8^n\frac{3}{4}}{0{,}8^n\frac{3}{4} + 0{,}6^n\frac{1}{4}} = \frac{3}{3 + (\frac{3}{4})^n}.$$

Volem $P(C|O_n) \geq 0{,}98$, és a dir $0{,}75^n \leq 0{,}06122$, d'on $n \geq \frac{\ln 0{,}06122}{\ln 0{,}75} = 9{,}7$. Per tant, ha de ser $n \geq 10$.

(b) Per una porta, $P(\text{obrir-se}) = P(\text{obrir-se}|C)P(C) + P(\text{obrir-se}|D)P(D) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 + 0{,}6 \cdot 0{,}25 = 0{,}75$. De 100 portes se n'obren, en promig, $100 \cdot 0{,}75 = 75$.

(c) N és una variable geomètrica amb $p = 0{,}3$. La seva esperança és $m = \frac{1}{p} = 3{,}33$. $P(N > m) = P(N \geq 4) = 1 - P(N \leq 3) = q^3 = 0{,}7^3 = 0{,}343$.

(d) $P(\text{s'obri}) = P(\text{algun dispositiu funciona}) = 1 - P(\text{els tres fallen}) = 1 - 0{,}4^3 = 0{,}936$.

2. La demanda mensual d'un producte és una variable aleatòria X que pren valors a $[0, \infty)$ i té funció de densitat $f_X(x) = xe^{-x}$ per $x \geq 0$.

   (a) Calculeu l'esperança m i la desviació σ de X.

   (b) Calculeu la funció de distribució de X, $F_X(x)$, i la probabilitat que $X > m$.

   (c) Quants mesos a l'any podem esperar que la demanda sigui inferior a 1?

   (d) El benefici brut Y que obtenim en funció de la demanda X és $Y = g(X)$ on:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   Calculeu la funció de distribució i el valor mitjà de la variable aleatòria Y.

Resolució:

(a) $m = \int_0^\infty x \cdot xe^{-x} dx = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2$.

$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot xe^{-x} dx = \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = 6$. $V[X] = E[X^2] - m^2 = 2$, d'on $\sigma = \sqrt{2}$.

(b) Per $x < 0$, $F_X(x) = 0$. Per $x > 0$,

$$F_X(x) = \int_0^x te^{-t} dt = -(t+1)e^{-t}|_0^x = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 3e^{-2} = 0{,}406$.

(c) $P(X < 1) = F_X(1) = 1 - 2e^{-1} = 0{,}264$. Com $12 \cdot P(X < 1) = 3{,}17$, podem esperar que passi uns tres mesos.

(d)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - (y+1)e^{-y} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

És una variable mixta, ja que tenim una discontinuïtat en $y = 1$.

Pel teorema de l'esperança:

$$E[Y] = \int_0^\infty g(x) \cdot xe^{-x} dx = \int_0^1 x \cdot xe^{-x} dx + \int_1^\infty 1 \cdot xe^{-x} dx$$

$$-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}|_0^1 - (x+1)e^{-x}|_1^\infty = 2 - 3e^{-1} = 0{,}89.$$