COMUNICACIONES II **EXAMEN FINAL** **11 de enero de 2005**

Profesores: M. Cabrera, J. Fernández, E. Monte, J. Rodríguez. Duración: <u>3 horas</u>

- **Tenga sobre la mesa un documento identificativo con foto (DNI o carnet UPC)**
- **No pueden utilizarse calculadoras de ningún tipo. Apague su teléfono móvil**
- **Entregue el examen en cuatro partes separadas, siguiendo las indicaciones del enunciado.**
- **La nota del examen será el promedio de las <u>tres partes con mayor nota</u>.**

NOTA: Inicie el problema en una hoja nueva.

Problema 1.

Se desea transmitir una secuencia de bits **equiprobables** y estadísticamente independientes entre si a una velocidad constante de $r_b = \frac{1}{T_b}$ bps y transmitiendo en media una energía por bit E_b.

Se propone analizar su transmisión mediante una modulación OPAM (Orthogonal Pulse Amplitude Modulation) y distinguir distintas estrategias de transmisión OPAM. Dicha modulación se forma utilizando L funciones $\varphi_l(t)$ ortonormales tales que las correlaciones cruzadas cumplen $R_{\varphi_l \varphi_j}(nT) = \delta[l-j]\delta[n]$ y asignando $b = cL$ bits por símbolo.

c, L son dos números naturales que consideraremos parámetros de la modulación OPAM.

Los b bits asignados a un símbolo se dividen en L grupos de c bits cada uno y cada grupo de c bits modula en amplitud una función $\varphi_l(t)$ mediante la correspondiente coordenada codificada siguiendo un formato polar de $P = 2^c$ niveles.

$$s_{OPAM}(t, L, c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L} \alpha_l[n] \varphi_l(t - nT) \qquad \alpha_l[n] = -\frac{(P-1)d}{2}, \dots, -\frac{d}{2}, +\frac{d}{2}, \dots, +\frac{(P-1)d}{2}$$

La señal se transmite por un canal ideal $h_c(t) = \delta(t)$ de ruido *w(t)* blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$.

NOTA DE AYUDA: $\sum_{m=1}^{M} \left(\frac{-M-1+2m}{2}\right)^2 = \frac{M(M^2-1)}{12}$

ESTRATEGÍA 1: OPAM, Caso general.

Suponemos inicialmente una señal genérica $s_1(t) = s_{OPAM}(t, L_1, c)$; $P = 2^c$

a. ¿Cuál es el número de símbolos del alfabeto M_1 en función del los parámetros c, L_1? Dibuje la constelación para el caso particular de $c = 4, L_1 = 2$.

b. Para el caso particular de $L_1 = 1$ calcule la energía media transmitida por bit E_{b1} en función de d, P. Demuestre que coincide con la energía media transmitida por bit para el caso general de $L_1 > 1$.

c. Dibuje el diagrama de bloques del receptor óptimo MAP, utilizando como elementos los filtros adaptados a las funciones $\varphi_l(t)$ y el resto de elementos que considere necesarios. Puede considerar retardo nulo para los filtros.
d. Eligiendo un símbolo con el mayor número de vecinos posibles, calcule aproximando $Q^a\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\simeq 0; a>1$, la probabilidad de error condicionada al símbolo elegido. Exprese el resultado en función del cociente $\frac{E_{b1}}{N_0}$ y de P, c, L_1.
e. Particularice el resultado anterior para $L_1 = 2$. Comente el resultado obtenido, y particularice para 16QAM. Identifique además para 16 QAM de frecuencia portadora f_c las dos funciones generadoras $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$.

NOTA: Inicie el siguiente apartado en una hoja nueva.

ESTRATEGÍA 2: DIVERSIDAD EN LAS COORDENADAS

Como alternativa a una modulación OPAM de dimensión L>1, se propone transmitir la secuencia de bits ***manteniendo la velocidad*** r_b ***constante****, mediante una nueva modulación que se apoya en las funciones* $\varphi_l(t)$ y en los parámetros c, L_1 de la modulación anterior.

$$s_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha[n]\sum_{l=1}^{L_1}\varphi_l\left(L_1(t-n\tfrac{T_1}{L_1})\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha[n]\psi(t-nT_2)$$
$$\alpha[n]=-\tfrac{(P-1)d}{2},\ldots,-\tfrac{d}{2},+\tfrac{d}{2},\ldots,+\tfrac{(P-1)d}{2}$$

Observe que equivale a una nueva modulación OPAM de parámetros $c_2 = c;\quad L_2 = 1$*, y de periodo de símbolo* $T_2 = \frac{1}{L_1}T_1$, siendo T_1 el periodo de símbolo de la estrategia 1.

f. Calcule el número de símbolos del alfabeto M_2 de esta nueva modulación y el número de bits transmitidos por símbolo b_2 , en función de los correspondientes M_1, b_1 de la estrategia 1.
g. Calcule las muestras de auto-correlación $R_\psi(nT_2)$ de la función $\psi(t)$ y la energía media transmitida por bit E_{b_2} en función de los parámetros que considere necesarios. Demuestre que dicho parámetro se mantiene constante, es decir que: $E_{b2} = E_{b1}$.
h. Razone cualitativamente cual de las dos estrategias presenta mayor ancho de banda.
i. Dibuje el diagrama de bloques del receptor óptimo MAP, utilizando como elementos los filtros adaptados a las funciones $\varphi_l(t)$ y el resto de elementos que considere necesarios. Puede considerar retardo nulo para los filtros.
j. Eligiendo un símbolo con el mayor número de vecinos posibles, calcule la probabilidad de error condicionada al símbolo elegido. Exprese el resultado en función del cociente $\frac{E_{b2}}{N_0}$ y de P, c. Compare con el resultado obtenido para la estrategia 1.
k. Si la señal $s_1(t)$ es 16 QAM-constelación cuadrada de frecuencia portadora f_c, comente como es la señal resultante $s_2(t)$, especifique la función $\psi(t)$ y la probabilidad de error obtenida en el apartado i, particularizada a esta situación.

NOTA: Inicie el problema en una hoja nueva.

Problema 2.
La expresión general de la señal recibida en un sistema multiusuario es:

$$r(t) = \sum_{j=1}^{N}\left(s_j(t) * h_j(t)\right) + w(t) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_j[n]\left(\varphi_j(t-nT) * h_j(t)\right) + w(t) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_j[n]\varphi_j'(t-nT) + w(t)$$

En donde las funciones $h_j(t)$ para $j \in \{1,\cdots N\}$ representan la respuesta impulsional del canal de cada usuario, las funciones $\varphi_j(t)$ forman una base ortonormal y los coeficientes $s_j[n] = \pm\sqrt{E_{bj}}$ son los símbolos binarios **equiprobables** transmitidos por el usuario *j* en el instante nT. Las duraciones de la funciones de la base ortonormal y la respuesta impulsional del canal de cada usuario se supondrán inferiores a *T* y *D* respectivamente:

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi_j(t) = 0 \ ; \ t < 0 \ ; \ t \geq T \\ h_j(t) = 0 \ ; \ t < 0 \ ; \ t \geq D \\ D < T \end{array}}$$

El efecto del canal se modela definiendo los siguientes **parámetros**:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho_{ij} \triangleq \int_0^T \varphi_i(\alpha)\varphi_j'(\alpha)d\alpha \quad ; \quad i,j \in \{1,\cdots,N\} \\ \xi_{ij} \triangleq \int_0^T \varphi_i(\alpha)\varphi_j'(\alpha+T)d\alpha \quad ; \quad i,j \in \{1,\cdots,N\} \end{array}}$$

En cuanto al modelo de ruido, se considerará recepción contaminada con ruido gaussiano blanco aditivo (AWGN) $w(t)$ de densidad espectral $S_w(f) = \dfrac{N_0}{2}$ y se utilizará la **notación**:

$$\beta_i[m] \triangleq \beta_i\left((m+1)T\right) = w(t) * \varphi_i(T-t)\big|_{t=(m+1)T} .$$

Primera Parte: Supondremos que el número de usuarios es *N*=1.

a) Proponga un esquema del receptor óptimo diseñado suponiendo $h_j(t) = \delta(t)$ (canal ideal).

b) A continuación se analiza el caso de canal no ideal **manteniendo el diseño del apartado anterior**. Teniendo en cuenta las restricciones referidas a las duraciones del canal y de las funciones de la base ortogonal indicadas en el enunciado, proporcione una expresión de la señal obtenida $y_1[m]$ a la salida del filtro adaptado del receptor del apartado a). Utilice la notación y los parámetros definidos en el enunciado.

c) Dibuje la constelación de la señal recibida y exprese $d'_{\min}$ (distancia mínima para canal no ideal) en función de $d_{\min}$ (distancia mínima para canal ideal). Proporcione una expresión de la probabilidad de error en la que se aprecie el impacto del canal no ideal e indique en dB el aumento de energía necesario para compensar esta degradación.

NOTA: Inicie el siguiente apartado en una hoja nueva

Segunda Parte: A partir de ahora supondremos un número arbitrario de usuarios *N*.

d) Utilizando el receptor diseñado en el apartado a) para el usuario 1 e interpretando convenientemente los coeficientes ρ_{1j} y ξ_{1j} proporcione una expresión de la señal obtenida a la salida del filtro adaptado $y_1[m]$ (no es necesario incluir la demostración).

e) Suponga, **exclusivamente en este apartado**, que los coeficientes ξ_{1j} son despreciables, $\xi_{1j} \approx 0$. Indique en este caso cómo se modifica la distancia mínima de la constelación del usuario 1 y proporcione una expresión de la probabilidad de error en la que se vea el impacto de la inteferencia multiusuario. Suponiendo que ésta es suficientemente pequeña, exprese en dB el aumento de energía necesario para compensar esta degradación.

f) Generalice el resultado del apartado d) y proporcione una expresión matricial de la señal obtenida a la salida de los filtros adaptados a las funciones base de cada uno de los usuarios, es decir indique:

$$\mathbf{y}[m] \triangleq \begin{bmatrix} y_1[m] \\ \vdots \\ y_N[m] \end{bmatrix}$$

en función de:

$$\mathbf{R} \triangleq \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{G} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{N1} & \cdots & \xi_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}[m] \triangleq \begin{bmatrix} s_1[m] \\ \vdots \\ s_N[m] \end{bmatrix} \quad ; \ \forall m \quad ; \ \mathbf{n}[m] \triangleq \begin{bmatrix} \beta_1[m] \\ \vdots \\ \beta_N[m] \end{bmatrix} \quad ; \ \forall m$$

g) Una aproximación razonable de los parámetros ξ_{ij} es $\xi_{ij} \approx \rho_{ij}\varepsilon$. Utilizando esta aproximación y álgebra lineal proporcione una expresión matricial del receptor multiusuario decorrelador, es decir, aquel que permite obtener una detección de cada usuario independiente de las señales de los otros usuarios.

h) Utilizando la definición:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \cdots & \lambda_{NN} \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{R}^{-1}$$

calcule la potencia del ruido en cada una de las salidas del decorrelador del apartado anterior, que denominamos $\frac{N_i'}{2}$, en función de los elementos λ_{ij}. Analizando la disminución de la distancia mínima obtenga una expresión de la probabilidad de error de cada usuario.