Comunicacions II

Examen Final Tardor 2006

Resolució publicada per la coordinadora el dia 23 de Gener de 2007.

UPC · telecom BCN · Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona · UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA **Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions**	**ComII.** 2007-01-08 *Notas Provisionales: 22 Enero 2007* *Periodo de Alegaciones: 24 Enero 2007* *Notas Definitivas: 30 Enero 2007*

Profesores: M.Cabrera, J. Fernández Rubio, J. Rodríguez-Fonollosa, J. Riba
Informaciones adicionales:
- Durada de la prueba: 3h
- Entregar en tres partes separadas.
- Se prohíbe el uso de teléfonos móviles durante la realización del examen. No se pueden utilizar ni en su funcionalidad de reloj.
- Durante la realización del examen debe tener visible un documento identificativo con fotografía.

Ejercicio 1 INICIAR EN HOJA NUEVA

En una modulación basada en frecuencias ortogonales el equivalente paso bajo de la señal transmitida se expresa como:

$$b_s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{N} \alpha_l[m]\phi_l(t-mT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{N} \alpha_l[m]\exp(j2\pi lrt)\tfrac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\tfrac{t-mT}{T}\right)$$
$$r = \tfrac{1}{T};\, N >> 1$$

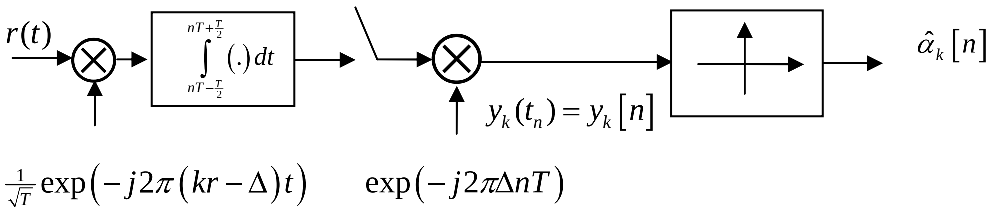
Los símbolos son equiprobables, estadísticamente independientes entre sí y complejos, y corresponden a una modulación QPSK ($\alpha_l[m] = \pm\frac{d}{2} + j\left(\pm\frac{d}{2}\right)$). La recepción de la señal en canal ideal ($h_c(t) = \delta(t)$) AWGN, y tras la demodulación a banda base, se modela como:

$$r(t) = b_s(t) + n(t)$$

$n(t)$ es el ruido paso bajo complejo y gaussiano: $n(t) = i_n(t) + jq_n(t)$

$$S_{i_n}(f) = S_{q_n}(f) = N_0; \qquad S_{i_n q_n}(f) = S_{q_n i_n}(f) = 0$$

Cuando en recepción la señal se demodula con un error en la frecuencia portadora de Δ Hz y $\Delta << r$ el receptor es equivalente a N sistemas como el mostrado en la figura:



Se pide:

a) Inicialmente se supone error de frecuencia nulo ($\Delta = 0$), halle la probabilidad de error de bit (BER) del sistema en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$.

A partir de este punto considere error de frecuencia no nulo $\Delta \neq 0$ ya que se propone analizar la degradación producida en el sistema por el error de frecuencia portadora en recepción y se analiza únicamente este efecto sobre la secuencia de símbolos centrales $\alpha_k[n]; k = \frac{N}{2}$ por ser el caso de mayor degradación.

b) Identifique el término de ICI: $c[n]$ en la correspondiente variable de decisión: $y_{\frac{N}{2}}[n] = A\alpha_{\frac{N}{2}}[n] + c[n] + \beta[n]$, así como el término que afecta al símbolo deseado: A.

Se asume gaussianidad para el término de ICI, por tanto, $c[n]$ se puede modelar como una variable aleatoria gaussiana compleja de media nula, independiente tanto de la señal *útil como del ruido y de varianza σ_c^2 tanto para la parte real como para la parte imaginaria.*

c) Demuestre que la varianza de $c[n]$ es $\sigma_c^2 = \frac{d^2}{4}\left(1-\rho^2\right)$ tanto para la parte real como para la parte imaginaria. Obtenga la expresión del parámetro ρ si $\sum_{n=\frac{-N}{2}+1}^{\frac{+N}{2}} \operatorname{sinc}^2\left(n+\frac{\Delta}{r}\right) \simeq 1$.

d) Calcule la probabilidad de error de bit (BER) en las condiciones dadas y para el símbolo central ($k=\frac{N}{2}$), inicialmente en función del parámetro ρ y del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, y posteriormente evalúe la degradación en dB que produce el error de frecuencia cuando $\frac{\Delta}{r}=0.05$ y $\frac{E_b}{N_0}=5$ respecto a la situación considerada en el primer apartado.

Ejercicio 2 INICIAR EN HOJA NUEVA

Considere una modulación digital que utiliza los siguientes 8 símbolos equiprobables:

$$s_0(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \qquad s_4(t) = \left(s_0(t)+s_1(t)\right)/\sqrt{2}$$
$$s_1(t) = A\sin(2\pi f_1 t) \qquad s_5(t) = \left(s_1(t)+s_2(t)\right)/\sqrt{2}$$
$$s_2(t) = -s_0(t) \qquad s_6(t) = \left(s_2(t)+s_3(t)\right)/\sqrt{2}$$
$$s_3(t) = -s_1(t) \qquad s_7(t) = \left(s_3(t)+s_0(t)\right)/\sqrt{2}$$

para $t \in [0,T]$

donde $f_0 T = N$ (con N entero), $f_1 = f_0 + \Delta f$ y Δf es la separación frecuencial. El canal es ideal y el ruido es Gausiano blanco de densidad espectral de potencia No/2.

Suponga primero que $\Delta f = 0$, es decir, $f_1 = f_0$.

a) Halle la constelación en una base ortonormal y dibuje las regiones óptimas de decisión. Halle una aproximación de la probabilidad de error de bit.

Suponga ahora que el canal de transmisión introduce un retardo de fase θ igual para las dos frecuencias, de tal modo que a la entrada de receptor los símbolos recibidos son $s_0^{'}(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$, $s_1^{'}(t) = A\sin(2\pi f_1 t + \theta)$, etc. Sin embargo, en el receptor se siguen usando las mismas funciones base que en el apartado anterior y las mismas zonas de decisión.

b) Halle la expresión de $f(\theta)$ en la siguiente aproximación de la probabilidad de error de bit:

$$P_b(e) = \alpha\, Q\left(\sqrt{f(\theta)\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

donde α es una constante. ¿Sería tolerable un error de fase de 30 grados? ¿En caso afirmativo, en cuánto debería aumentarse la Eb/No para compensar el efecto del error de fase sobre la probabilidad de error?

c) Repita los apartados anteriores para $\Delta f = 1/T$, y discuta las ventajas e inconvenientes de usar esta separación frecuencial.

Ejercicio 3 INICIAR EN HOJA NUEVA

La estación base de un sistema CDMA síncrono transmite la señal:

$$s(t)=\sum_{k=1}^{4} s_k(t) \quad \text{con}$$

$$s_k(t)=A_k\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_k[n]p_k(t-nT);$$

$$\{b_k[n]\}=\pm 1; k=1,2,4$$

Los pulsos son las funciones de Walsh:

$$p_k(t)=\sum_{l=0}^{3} c_k[l]\,g(t-lT_c);\quad \mathrm{g}(t)=\frac{1}{\sqrt{T_c}}\Pi\left(\frac{t-T_c/2}{T_c}\right)$$

Donde los coeficientes de cada función se pueden escribir de manera compacta como los vectores código:

$$\mathbf{c}_1=\frac{1}{2}[1,-1,1,-1]^T;\mathbf{c}_2=\frac{1}{2}[1,1,-1,-1]^T;\mathbf{c}_3=\frac{1}{2}[1,-1,-1,1]^T;\mathbf{c}_4=\frac{1}{2}[1,1,1,1]^T$$

Las señales 1, 2 y 4 corresponden a la información de tres usuarios mientras que la señal 3 es una señal piloto con bits perfectamente conocidos, útil para identificación de canal y/o ecualización.

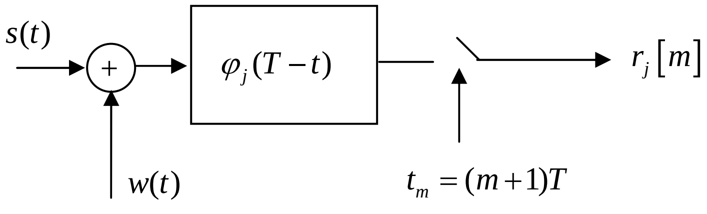
a) Dibuje los pulsos $p_k(t)$, halle una base ortonormal y exprese las diferentes señales en función de las funciones base y de las energías promedio por bit de cada señal.

b) Demuestre que la correlación cruzada entre dos pulsos, definida como $r_{p_ip_j}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} p_i(t+\tau)p_j(t)dt$, en los múltiplos enteros de T_c, puede escribirse en función de los códigos como:

$$r_{p_ip_j}[mT_c]=r_{c_ic_j}[m]=\sum_{l=0}^{3-m} c_i[m+l]c_j[l]; m>0; r_{c_ic_j}[-m]=r_{c_jc_i}[m]$$

Verifique que la ortogonalidad de los códigos implica la de los pulsos.
Teniendo en cuenta que la correlación entres dos múltiplos enteros contiguos es lineal, dibuje la correlación del pulso piloto $p_3(t)$, $r_{p_3}[\tau]$.

c) Suponiendo ruido blanco gaussiano con una densidad espectral $\frac{N_0}{2}$ y canal ideal, Obtenga la secuencia de salida de la rama j-ésima para j = 1,2,3,4 del receptor de la figura:



Donde $\varphi_j(t)$ es la función base j-ésima

Sea ahora un canal que presenta una reflexión tal que la señal recibida es de la forma:

$s_R(t) = \alpha_0 s(t) + \alpha_1 s(t - T_c)$

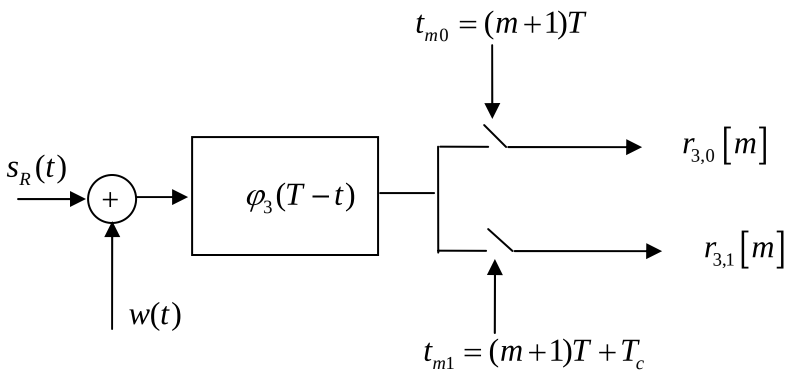
d) Obtenga de nuevo la secuencia de salida de la rama j-ésima para j = 1,2,3,4, separando la señal útil, la ISI, la MAI(interferencia de acceso múltiple) y el ruido. Expréselo en forma matricial de la forma:

$$\mathbf{r}[m] = \mathbf{H}[0]\mathbf{s}[m] + \mathbf{H}[1]\mathbf{s}[m-1] + \mathbf{w}[m];$$

$$\mathbf{s}[m] = \left[\sqrt{E_{b_1}} b_1[m], \sqrt{E_{b_2}} b_2[m], \sqrt{E_{b_3}} b_3[m], \sqrt{E_{b_4}} b_4[m]\right]^T$$

$$\mathbf{r}[m] = \left[r_1[m], r_2[m], r_3[m], r_4[m]\right]^T; \mathbf{w}[m] = \left[w_1[m], w_2[m], w_3[m], w_4[m]\right]^T$$

Con objeto de obtener una estima de los parámetros del canal, se utiliza el receptor de la figura para la rama 3 de la señal piloto



e) Obtenga las salidas suponiendo que durante la estima del canal sólo se transmite la señal piloto $s_3(t)$. Suponiendo que los bits de la señal piloto son: $\{b_3[n]\} = 1; \forall n$, obtenga una estima de los coeficientes del canal, α_0, α_1.

Si se dispone de $r_{30}[m]$ y $r_{31}[m]$ para m = 0,1,... K-1, proponga un procedimiento para mejorar la estima de de los coeficientes.

Expresiones trigonométricas

$$\cos(A)\cos(B) = \tfrac{1}{2}\cos(A-B) + \tfrac{1}{2}\cos(A+B)$$
$$\mathrm{sen}(A)\mathrm{sen}(B) = \tfrac{1}{2}\cos(A-B) - \tfrac{1}{2}\cos(A+B)$$
$$\mathrm{sen}(A)\cos(B) = \tfrac{1}{2}\mathrm{sen}(A-B) + \tfrac{1}{2}\mathrm{sen}(A+B)$$
$$\mathrm{sen}(A+B) = \mathrm{sen}(A)\cos(B) + \cos(A)\mathrm{sen}(B)$$
$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \mathrm{sen}(A)\mathrm{sen}(B)$$

COMUNICACIONES II **Enero 2007** **M. Cabrera**

En una modulación basada en frecuencias ortogonales el equivalente paso bajo de la señal transmitida se expresa como:

$$b_s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{N} \alpha_l\left[m\right]\phi_l(t-mT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{N} \alpha_l\left[m\right]\exp\left(j2\pi lrt\right)\tfrac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\tfrac{t-mT}{T}\right)$$

$$r = \tfrac{1}{T};\, N >> 1$$

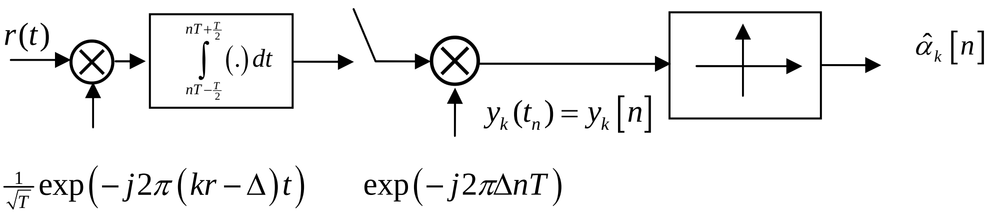
Los símbolos son equiprobables, estadísticamente independientes entre sí y complejos, y corresponden a una modulación QPSK ($\alpha_l\left[m\right] = \pm\frac{d}{2} + j\left(\pm\frac{d}{2}\right)$). La recepción de la señal en canal ideal ($h_c(t) = \delta(t)$) AWGN, y tras la demodulación a banda base, se modela como:

$$r(t) = b_s(t) + n(t)$$

$n(t)$ es el ruido paso bajo complejo de media nula y gaussiano: $n(t) = i_n(t) + jq_n(t)$

$$S_{i_n}(f) = S_{q_n}(f) = N_0; \qquad S_{i_n q_n}(f) = S_{q_n i_n}(f) = 0$$

Cuando en recepción la señal se demodula con un error en la frecuencia portadora de ΔHz y $\Delta << r$ el receptor es equivalente a N sistemas como el mostrado en la figura:



Se pide:

a) Inicialmente se supone error de frecuencia nulo ($\Delta = 0$), halle la probabilidad de error de bit (VER) del sistema en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$.

A partir de este punto considere error de frecuencia no nulo $\Delta \neq 0$ ya que se propone analizar la degradación producida en el sistema por el error de frecuencia portadora en recepción y se analiza únicamente este efecto sobre la secuencia de símbolos centrales $\alpha_k\left[n\right]; k = \frac{N}{2}$ por ser el caso de mayor degradación.

b) Identifique el término de ICI: $c\left[n\right]$ en la correspondiente variable de decisión: $y_{\frac{N}{2}}\left[n\right] = A\alpha_{\frac{N}{2}}\left[n\right] + c\left[n\right] + \beta\left[n\right]$, así como el término que afecta al símbolo deseado: *A*.

Se asume gaussianidad para el término de ICI, por tanto, $c\left[n\right]$ se puede modelar como una variable aleatoria gaussiana compleja de media nula, independiente tanto de la señal útil como del ruido y de varianza σ_c^2 tanto para la parte real como para la parte imaginaria.

c) Demuestre que la varianza de $c\left[n\right]$ es $\sigma_c^2 = \frac{d^2}{4}\left(1-\rho^2\right)$ tanto para la parte real como para la parte imaginaria. Obtenga la expresión del parámetro ρ si $\sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{+\frac{N}{2}} \operatorname{sinc}^2\left(n+\frac{\Delta}{r}\right) \simeq 1$.

d) Calcule la probabilidad de error de bit (BER) en las condiciones dadas y para el símbolo central ($k = \frac{N}{2}$), inicialmente en función del parámetro ρ y del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, y posteriormente evalúe la degradación en dB que produce el error de frecuencia cuando $\frac{\Delta}{r} = 0.05$ y $\frac{E_b}{N_0} = 5$ respecto a la situación considerada en el primer apartado.

Resolución

a) Inicialmente se supone error de frecuencia nulo ($\Delta = 0$), halle la probabilidad de error de bit (BER) del sistema en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$.

Solución:

Muestras a la salida del integrador:

$$y_k(t_n) = y_k[n] = \int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}} r(\lambda)\tfrac{1}{\sqrt{T}}\exp(-j2\pi kr\lambda)\,d\lambda =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=1}^{N}\alpha_l[m]\tfrac{1}{T}\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}}\exp(j2\pi lr\lambda)\Pi\left(\tfrac{t-mT}{T}\right)\exp(-j2\pi kr\lambda)\,d\lambda + \tfrac{1}{\sqrt{T}}\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}} n(\lambda)\exp(-j2\pi kr\lambda)\,d\lambda =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=1}^{N}\alpha_l[m]\delta[m-n]\delta[l-k]+\beta_k(t_n) = \alpha_k[n]+\beta_k[n]$$

Las muestras anteriores son complejas. Para analizar la detección se expresan como un vector de dimensión 2.

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\left[y_k[n]\right]\\ \mathrm{Im}\left[y_k[n]\right]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\left[\alpha_k[n]\right]\\ \mathrm{Im}\left[\alpha_k[n]\right]\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\left[\beta_k[n]\right]\\ \mathrm{Im}\left[\beta_k[n]\right]\end{pmatrix}$$

El siguiente desarrollo es para verificar que el vector de ruido presenta las dos componentes incorreladas y por tanto su f.d.p es gaussiana de media vector cero y de matriz de covarianzas la identidad salvo constante.

$$N[n] = \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\left[\beta_k[n]\right]\\ \mathrm{Im}\left[\beta_k[n]\right]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$$

Se simplifica la nomenclatura las componentes de ruido mediante β_1, β_2.

$$\beta_1 = \tfrac{1}{\sqrt{T}}\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}} i_n(\lambda)\cos(2\pi kr\lambda) - q_n(\lambda)\mathrm{sen}(2\pi kr\lambda)\,d\lambda$$

$$\beta_2 = \tfrac{1}{\sqrt{T}}\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}} q_n(\lambda)\cos(2\pi kr\lambda) + i_n(\lambda)\mathrm{sen}(2\pi kr\lambda)\,d\lambda$$

La media es nula $\quad E[\beta_1] = E[\beta_2] = 0$

Debido a que según las condiciones dadas en el enunciado $E\left[i_n(t_1)q_n(t_2)\right] = 0$ para todo par de valores t_1, t_2:

$$E\left[\beta_1^{\,2}\right]=\tfrac{1}{T}\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}}\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}}E\left[i_n(\lambda)i_n(\lambda')\right]\cos(2\pi kr\lambda)\,d\lambda\cos(2\pi kr\lambda')\,d\lambda'+$$

$$\tfrac{1}{T}\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}}\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}}E\left[q_n(\lambda)q_n(\lambda')\right]\mathrm{sen}(2\pi kr\lambda)\,d\lambda\,\mathrm{sen}(2\pi kr\lambda')\,d\lambda'=$$

$$\left\{E\left[i_n(\lambda)i_n(\lambda')\right]=E\left[q_n(\lambda)q_n(\lambda')\right]=N_0\delta(\lambda-\lambda')\right\}$$

$$\tfrac{1}{T}N_0\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}}\cos^2(2\pi kr\lambda)\,d\lambda+\tfrac{1}{T}N_0\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}}\mathrm{sen}^2(2\pi kr\lambda)\,d\lambda=$$

$$\tfrac{1}{T}N_0\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos(2\pi 2kr\lambda)\,d\lambda+\tfrac{1}{T}N_0\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}}\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(2\pi 2kr\lambda)\,d\lambda d\lambda=$$

$$N_0+\tfrac{1}{T}N_0\int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}}\tfrac{1}{2}\cos(2\pi 2kr\lambda)-\tfrac{1}{2}\cos(2\pi 2kr\lambda)\,d\lambda=N_0$$

Análogamente se demuestra que:

$$E\left[\beta_2^{\,2}\right]=N_0;\qquad E\left[\beta_1\beta_2\right]=0;$$

Es decir, la distribución del vector de ruido resulta una variable gaussiana bidimensional de parámetros

$$N[n]:\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\left[\beta_k[n]\right]\\ \mathrm{Im}\left[\beta_k[n]\right]\end{pmatrix}=N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},N_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

Con lo que puede afirmarse que la probabilidad de error es la expresión obtenida para la modulación QPSK:

$$P_b=Q\left(\tfrac{d}{2\sigma}\right)=Q\left(\sqrt{\tfrac{d^2}{4N_0}}\right)$$

Y tal como se han definido los símbolos complejos $\alpha_l[m]=\pm\frac{d}{2}+j\left(\pm\frac{d}{2}\right)$ la energía media de símbolo transportada por la portadora k-ésima, es la semisuma de las energías transportadas por cada una de las dos componentes:

$$E_b=\tfrac{1}{2}E_s=\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{d^2}{4}+\tfrac{d^2}{4}\right)=\tfrac{d^2}{8}$$

Y sustituyendo en la probabilidad de error:

$$P_b=Q\left(\sqrt{2\tfrac{E_b}{N_0}}\right)$$

Valor esperado para modulaciones QPSK en condiciones ideales.

b) Identifique el término de ICI: $c[n]$ en la correspondiente variable de decisión: $y_{\frac{N}{2}}[n] = A\alpha_{\frac{N}{2}}[n] + c[n] + \beta[n]$, así como el término que afecta al símbolo deseado: A.

Solución:

Con error de frecuencia no nulo se tiene:

$$
\begin{aligned}
& y_k(t_n) = y_k[n] = \int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}} r(\lambda) \tfrac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(-j2\pi(kr-\Delta)\lambda\right) d\lambda \exp\left(-j2\pi\Delta nT\right) = \\
& \sum_{l=1}^{N} \alpha_l[n] \tfrac{1}{T} \int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}} \exp\left(j2\pi(lr-kr+\Delta)\lambda\right) d\lambda \exp\left(-j2\pi\Delta nT\right) + \\
& \tfrac{1}{\sqrt{T}} \int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}} n(\lambda) \exp\left(-j2\pi(kr-\Delta)\lambda\right) d\lambda \exp\left(-j2\pi\Delta nT\right) = \\
& \sum_{l=1}^{N} \alpha_l[n] \tfrac{1}{T} \left[\frac{\exp\left(j2\pi(lr-kr+\Delta)\lambda\right)}{2\pi(lr-kr+\Delta)} \right]_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}} \exp\left(-j2\pi\Delta nT\right) + \beta_k[n] = \{Tr = 1\} \\
& \alpha_k[n] \operatorname{sinc}(\Delta) + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{N} \alpha_l[n] \operatorname{sinc}\left((l-k)+\Delta\right) + \beta_k[n]
\end{aligned}
$$

Y para $k = \frac{N}{2}$

$$
y_{\frac{N}{2}}[n] = \alpha_{\frac{N}{2}}[n] \operatorname{sinc}(\Delta T) + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq \frac{N}{2}}}^{N} \alpha_l[n] \operatorname{sinc}\left((l-\tfrac{N}{2}) + \Delta T\right) + \beta_{\frac{N}{2}}[n]
$$

De donde se concluye que la ganancia sufrida por el canal es:

$$
A = \operatorname{sinc}(\Delta T)
$$

Y la ICI es

$$
c[n] = \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq \frac{N}{2}}}^{N} \alpha_l[n] \operatorname{sinc}\left((l-\tfrac{N}{2}) + \Delta T\right) = \sum_{\substack{l=1-\frac{N}{2} \\ l\neq 0}}^{\frac{N}{2}} \alpha_l[n] \operatorname{sinc}(l + \Delta T)
$$

c) Demuestre que la varianza de $c[n]$ es $\sigma_c^2 = \frac{d^2}{4}\left(1-\rho^2\right)$ tanto para la parte real como para la parte imaginaria. Obtenga la expresión del parámetro ρ si $\sum_{n=\frac{-N}{2}+1}^{+\frac{N}{2}} \operatorname{sinc}^2\left(n+\frac{\Delta}{r}\right) \simeq 1$.

Solución:

Dado que en $\alpha_l[m] = \pm\frac{d}{2} + j\left(\pm\frac{d}{2}\right)$, $E\left[\mathrm{Re}\left(\alpha_l[m]\right)\mathrm{Im}\left(\alpha_{l'}[n]\right)\right] = 0$ para cualquier combinación de valores *m n l l'*, se obtiene directamente:

$$E\left[\mathrm{Re}\left(c[n]\right)\mathrm{Im}\left(c[n]\right)\right] = 0$$

Por simetría la parte real y la parte imaginaría de la ICI presentan la misma varianza y es igual a y dado que

$$E\left[\mathrm{Re}\left(\alpha_l[m]\right)\mathrm{Re}\left(\alpha_l[n]\right)\right] = \frac{d^2}{4}\delta[m-n] = E\left[\mathrm{Im}\left(\alpha_l[m]\right)\mathrm{Im}\left(\alpha_l[n]\right)\right]:$$

Se cumple:

$$E\left[\left(\mathrm{Re}\left(c[n]\right)\right)^2\right] = \sum_{\substack{l=1-\frac{N}{2}\\ l\neq 0}}^{\frac{N}{2}} E\left[\alpha_l^2[n]\right]\mathrm{sinc}^2\left(l+\Delta T\right) = \frac{d^2}{4}\sum_{\substack{l=1-\frac{N}{2}\\ l\neq 0}}^{\frac{N}{2}} \mathrm{sinc}^2\left(l+\Delta T\right) =$$

$$\simeq \frac{d^2}{4}\left(1-\mathrm{sinc}^2\left(\Delta T\right)\right)$$

Con $\rho = \mathrm{sinc}(\Delta T)$ queda demostrado el enunciado.

d) Calcule la probabilidad de error de bit (BER) en las condiciones dadas y para el símbolo central ($k = \frac{N}{2}$), inicialmente en función del parámetro ρ y del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, y posteriormente evalúe la degradación en dB que produce el error de frecuencia cuando $\frac{\Delta}{r} = 0.05$ y $\frac{E_b}{N_0} = 5$ respecto a la situación considerada en el primer apartado.

Solución:

El término de ruido complejo del apartado c) es igual a:

$$\beta_k[n] = \int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}} \frac{1}{\sqrt{T}} n(\lambda)\exp\left(-j2\pi\left(kr-\Delta\right)\lambda\right)d\lambda\,\exp\left(-j2\pi\Delta nT\right)$$

El término correspondiente a la integral presenta la misma distribución que el término de ruido del apartado a). Su demostración es análoga a la realizada en dicho apartado. El factor complejo $\exp(-j2\pi\Delta nT)$ equivale a realizar una rotación del vector de ruido que se obtendría a partir de la integral. Es decir, se denomina:

$$\beta_k[n] = g_k[n]\exp\left(-j2\pi\Delta nT\right)$$

Y dado que:

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\left[g_k[n]\right]\\ \mathrm{Im}\left[g_k[n]\right]\end{pmatrix} = N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, N_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left[\beta_k[n]\right] \\ \mathrm{Im}\left[\beta_k[n]\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\Delta nT) & \mathrm{sen}(2\pi\Delta nT) \\ -\mathrm{sen}(2\pi\Delta nT) & \cos(2\pi\Delta nT) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left[g_k[n]\right] \\ \mathrm{Im}\left[g_k[n]\right] \end{pmatrix}$$

Y es sabido que mediante una rotación se conserva la distribución del vector de ruido si este es de media nula y matriz de covarianzas igual a la identidad salvo constante.

Considerando además el término de ICI como una variable aleatoria gaussiana según las condiciones dadas en el enunciado, se tiene:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left[y_{\frac{N}{2}}[n]\right] \\ \mathrm{Im}\left[y_{\frac{N}{2}}[n]\right] \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left[\alpha_{\frac{N}{2}}[n]\right] \\ \mathrm{Im}\left[\alpha_{\frac{N}{2}}[n]\right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left[c[n] + n_{\frac{N}{2}}[n]\right] \\ \mathrm{Im}\left[c[n] + n_{\frac{N}{2}}[n]\right] \end{pmatrix} :$$

$$N\left(\rho \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left[\alpha_{\frac{N}{2}}[n]\right] \\ \mathrm{Im}\left[\alpha_{\frac{N}{2}}[n]\right] \end{pmatrix}, \left(\tfrac{d^2}{4}\left(1-\rho^2\right) + N_0\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Que es la constelación de la modulación QPSK atenuada por el factor $\rho = \mathrm{sinc}(\Delta T)$ y en entorno ruidoso de potencia igual a $\sigma^2 = \frac{d^2}{4}\left(1-\rho^2\right) + N_0$

De donde la probabilidad de error resulta igual a:

$$P_b = Q\left(\tfrac{\rho d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\rho^2 d^2}{4\left(\frac{d^2}{4}\left(1-\rho^2\right)+N_0\right)}} \right) = Q\left(\sqrt{\frac{\rho^2}{\left(2\frac{E_b}{N_0}\left(1-\rho^2\right)+1\right)} 2\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Cuando $\frac{\Delta}{r} = \Delta T = 0.05$ y $\frac{E_b}{N_0} = 5$ La degradación en dB es igual a:

$$10\log_{10}\left(\frac{\rho^2}{\left(2\frac{E_b}{N_0}\left(1-\rho^2\right)+1\right)} \right) = 10\log_{10}\left(\frac{\mathrm{sinc}^2(0.05)}{\left(10\left(1-\mathrm{sinc}^2(0.05)\right)+1\right)} \right) = -0.3779dB$$

Ejercicio 2 No se dispone de la resolución, sin embargo se facilita algún dato sobre la respuesta.

a) Halle la constelación en una base ortonormal y dibuje las regiones óptimas de decisión. Halle una aproximación de la probabilidad de error de bit.

Se puede elegir $s_0(t), s_1(t)$ *como base ortogonal previa normalización con las correspondientes energías*
Resulta una constelación circular como la 8PSK

b) Halle la expresión de $f(\theta)$ en la siguiente aproximación de la probabilidad de error de bit:

$$P_b(e) = \alpha\, Q\left(\sqrt{f(\theta)\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

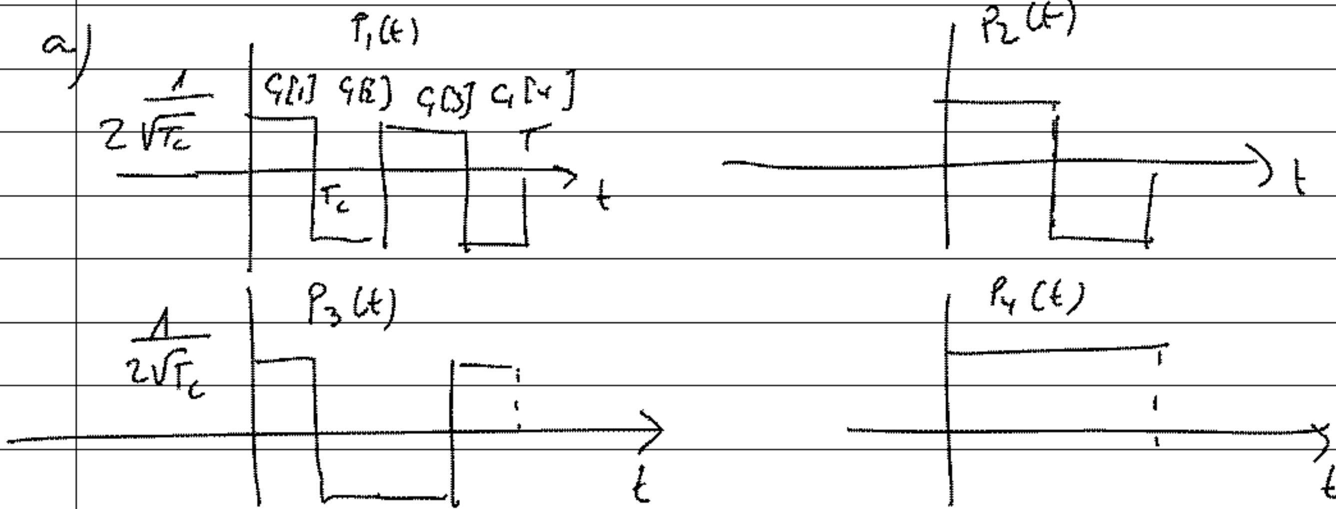
donde α es una constante. ¿Sería tolerable un error de fase de 30 grados? ¿En caso afirmativo, en cuánto debería aumentarse la Eb/No para compensar el efecto del error de fase sobre la probabilidad de error?

El error provoca un giro en la constelación. Con un error de 30 grados los símbolos recibidos saltan de zona de decisión y por tanto no es tolerable.

c) Repita los apartados anteriores para $\Delta f = 1/T$, y discuta las ventajas e inconvenientes de usar esta separación frecuencial.

Se puede elegir $s_0(t), s_1(t)$ *como base ortogonal previa normalización con las correspondientes energías*
Resulta una constelación circular como la 8PSK
En este caso el error de fase no degrada el sistema. Ventaja de esta separación frecuencial. El inconveniente es que aumenta el ancho de banda de las señales.

a)



Fácilmente se ve que son ortogonales

$$E_{p_1} = \frac{1}{4T_c} \cdot 4T_c = 1 \qquad \forall k$$

luego $\varphi_k(t) \equiv p_k(t)$

$$P_{s_k} = A_k^2 \frac{1}{T_b} \sigma_{b_k}^2 = A_k^2 \frac{1}{T_b} \qquad A_k = \sqrt{P_{s_k} T_b}$$

$$= \sqrt{E_{b_k}}$$

$$s_k(t) = \sqrt{E_{b_k}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_k[n]\, p_k[t-nT]$$

b) $r_{p_i p_j}[mT_c] = \int_{-\infty}^{\infty} p_i[mT_c+t]\, p_j[t]\, dt$

$$= \int_0^T \sum_{l=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} c_i[l] c_j[k] g(t + mT_c - lT_c)\, g(t - kT_c)\, dt$$

$$\sum_{l=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} c_i[l] c_j[k]\, R_g \underbrace{[(m - l + k)]}_{\delta(m-l+k)}$$

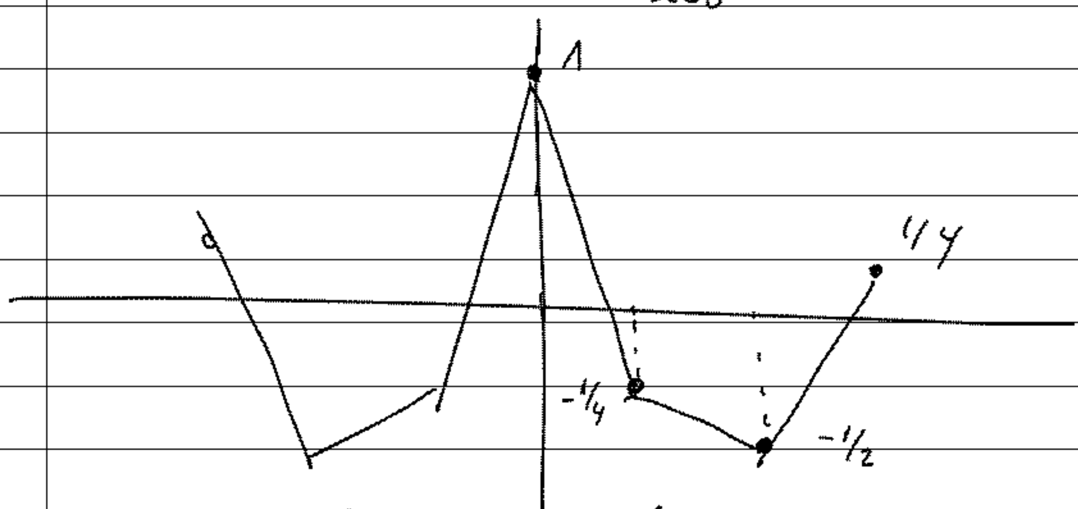
$l = m+k$

$k = 0 \cdots 3-m$

$$= \sum_{k=0}^{3-m} c_i[m+k]\, c_j[k]$$

$$r_{p_i p_j}[0] = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{3} c_i[k] c_j[k] = \underline{c}_i^T \underline{c}_k = 0$$

$$r_{p_3}[mT_c] = \sum_{l=0}^{3-m} c_3[m+l]\, c_3[l]$$



$m = 0 \quad r_{p_3}(0) = 1$

$$m = 1 \quad \sum_{l=0}^{2} c_3[1+l]\, c_3[l] = \underbrace{c_3[1]c_3[0]}_{-1/4} + \underbrace{c_3[2]c_3[1]}_{1/4} + \underbrace{c_3[3]c_3[2]}_{-1/4} = -1/4$$

$$m = 2 \quad \sum_{l=0}^{1} c_3[2+l]\, c_3[l] = \underbrace{c_3[2]c_3[0]}_{-1/4} + \underbrace{c_3[3]c_3[1]}_{-1/4} = -1/2$$

$m=3 \qquad c_3[3]\,c_3[0] = 1/4$

c, d) $\left. s_k(t-\ell T_c) * \varphi_j(T-t) \right|_{t=(m+1)T} \qquad \ell = 0,1$

$= \sqrt{E_{b_k}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_k[n]\, \varphi_k(t-nT-\ell T_c) * \varphi_j(T-t) \Big|_{t=(m+1)T}$

$= \sqrt{E_{b_k}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_k[n] \int_{-\infty} \varphi_k(t-\beta-nT-\ell T_c)\, \varphi_j(T-\beta)\, d\beta \Big|_{t_m}$

$= \sqrt{E_{b_k}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_k[n]\, R_{\varphi_k \varphi_j}\left[(m-n)T-\ell T_c\right]$

$\ell = 0 \qquad R_{\varphi_k \varphi_j}[(m-n)T] = \delta[m-n]\,\delta_{kj}$

$r_j[m] = \sqrt{E_{b_j}}\, b_j[m] + W_j[m]$

$W_j[m] = w(t) * \varphi_j(T-t) \Big|_{t=(m+1)T} =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} w[(m+1)T-\beta]\, \varphi_j(T-\beta)\, d\beta =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} w[u+mT]\, \varphi_j(u)\, du$

$$C_{w_j w_k} = E\{ w_j[m]\, w_k[m] \} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\{ \overbrace{w_j[u+mT]\, w_k[v+mT]}^{N_0/2\ \delta(u-v)} \} \varphi_j(u)\, \varphi_k(v)\, du\, dv$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(u)\, \varphi_k(v) = \frac{N_0}{2}\, \delta_{kj}$$

d) $$s_k(t-T_c) * \varphi_j(T-t) \Big|_{t=(m+1)T} \qquad l=1$$

$$= \sqrt{E_{b_k}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_k[n]\, R_{\varphi_k \varphi_j}\left[(m-n)T - T_c\right]$$

$$= \sqrt{E_{b_k}}\, b_k[m]\, R_{\varphi_k \varphi_j}[-T_c]$$

$$+ \sqrt{E_{b_k}}\, b_k[m-1]\, R_{\varphi_k \varphi_j}[T-T_c]$$

$$r_j[m] = \alpha_0 \sqrt{E_{b_j}}\, b_j[m] + \alpha_0 \sum_{k=1}^{4} \sqrt{E_{b_k}}\, b_k[m]\, R_{\varphi_k \varphi_j}[-T_c]$$

$$+ \alpha_1 \sum_{k=1}^{4} \sqrt{E_{b_k}}\, b_k[m-1]\, R_{\varphi_k \varphi_j}[T-T_c] \qquad j=1,2,3,4$$

$$+ w_j[m]$$

$$r_j[m] = \sqrt{E_{b_j}}\left[\alpha_0 + \alpha_1 R_{\varphi_j}(-T_c)\right] b_j[m]$$

$$+ \alpha_1 \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{4} \sqrt{E_{b_k}}\, b_k[m]\, R_{\varphi_k \varphi_j}(-T_c)$$

$$+ \alpha_1 \sum_{k=1}^{4} \sqrt{E_{b_k}}\, b_k[m-1]\, R_{\varphi_k \varphi_j}(T-T_c)$$

$$+ w_j[m]$$

$$\underline{\underline{H}}[0] = \left[\alpha_0 \underline{\underline{I}} + \alpha_1 \underline{\underline{R}}_\phi^T(-T_c)\right] \; ; \; \underline{\underline{H}}[1] = \alpha_1 \underline{\underline{R}}_\phi^T[T-T_c]$$

$$\underline{\underline{R}}_\phi(\tau) = \begin{bmatrix} R_{\varphi_1}(\tau) & R_{\varphi_1\varphi_2}(\tau) & R_{\varphi_1\varphi_3}(\tau) & R_{\varphi_1\varphi_4}(\tau) \\ R_{\varphi_2\varphi_1}(\tau) & R_{\varphi_2}(\tau) & R_{\varphi_2\varphi_3}(\tau) & R_{\varphi_2\varphi_4}(\tau) \\ R_{\varphi_3\varphi_1}(\tau) & R_{\varphi_3\varphi_2}(\tau) & R_{\varphi_3}(\tau) & R_{\varphi_3\varphi_4}(\tau) \\ R_{\varphi_4\varphi_1}(\tau) & R_{\varphi_4\varphi_2}(\tau) & R_{\varphi_4\varphi_3}(\tau) & R_{4}(\tau) \end{bmatrix}$$

e) $$s_R(t) = \sqrt{E_{b_3}} \sum_{n=-\infty} b_3[n]\, \varphi_3(t-nT) * h_c(t)$$

$$r_{3i}[m] = \sqrt{E_{b_3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_3[n]\, \varphi_3(t-nT) * h_c(t) * \varphi_3(T-t)\Big|_{t=(m+1)T+iT_c}$$

$$+ \; w(t) * \varphi_3(T-t)\Big|_{t=(m+1)T+iT_c}$$

$$= v_{3i}[m] + w_i[m]$$

$$v_{3i}[m] = \sqrt{E_{b_3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_3[n] \int_{-\infty}^{\infty} R_{\varphi_3}[(m-n)T + iT_c - \beta]\, h_c(\beta)\, d\beta$$

$$= \sqrt{E_{b_3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_3[n] \left\{ \alpha_0 R_{\varphi_3}[(m-n)T + iT_c] + \alpha_1 R_{\varphi_3}[(m-n)T + (i-1)T_c] \right\}$$

$i = 0$

$$v_{30}[m] = \sqrt{E_{b_3}} \left\{ \alpha_0 b_3[m] + \alpha_1 R_{\varphi_3}(-T_c)\, b_3[m] + \right.$$
$$\left. + \alpha_1 R_{\varphi_3}[T - T_c]\, b_3(m-1) \right\}$$

$i = 1$

$$v_{31}[m] = \sqrt{E_{b_3}} \left\{ \alpha_0 R_{\varphi_3}(T_c)\, b_3[m] + \alpha_0 R_{\varphi_3}[-T+T_c]\, b_3[m+1] \right.$$
$$\left. + \alpha_1 b_3[m] \right\}$$

Si $\qquad b_3[m] = 1$

$$v_{30}[m] = \sqrt{E_{b_3}} \left\{ \alpha_0 + \alpha_1 \left[R_{\varphi_3}(-T_c) + R_{\varphi_3}(T-T_c) \right] \right\}$$

$$w_{31}[m] = \sqrt{E_{b_3}} \left\{ \alpha_0 \left[R_{\varphi_3}(-T+T_c) + R_{\varphi_3}(T_c) \right] + \alpha_1 \right\}$$

Sustituyendo

$$r_{30}[m] = \sqrt{E_{b_3}}\,\alpha_0 + w_{30}[m]$$

$$r_{31}[m] = \sqrt{E_{b_3}}\,\alpha_1 + w_{31}[m]$$

$$\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1} r_{30}[m] = \sqrt{E_{b_3}}\,\alpha_0 + \frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1} w_{30}[m]$$

$$\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1} r_{31}[m] = \sqrt{E_{b_3}}\,\alpha_1 + \frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1} w_{31}[m]$$

Reducción de ruido