

3 MODULACIONES DIGITALES SOBRE CANALES NO IDEALES

3.1 Ejercicio de examen de control abril 2004 (J. Rodríguez Fonollosa)

3.1.1 Enunciado

La expresión general de la señal transmitida en esquemas de modulaciones de pulsos es:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_m[n](t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[n] \varphi_l(t - nT)$$

En donde las funciones $\varphi_l(t)$ para $l \in \{1, \dots, L\}$ forman una base ortonormal y los coeficientes $\alpha_{ml}[n]$ son las coordenadas de los símbolos s_m transmitidos en el instante nT . Denominamos M al número de posibles símbolos transmitidos en cada periodo de símbolo T .

Se considerará transmisión de símbolos equiprobables en canal ideal y recepción contaminada con ruido gaussiano blanco aditivo (AWGN) de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$.

Caso $L = 2$ y $M = 2$ (20 puntos)

Inicialmente se considerará una dimensión del espacio de señal $L = 2$, para transmitir dos símbolos, $M = 2$, de forma que las coordenadas de los mismos son:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

- Represente gráficamente la constelación de esta modulación y exprese sus coordenadas en función de la energía por símbolo E_s y la energía por bit E_b .
- Exprese la función densidad de probabilidad de la señal recibida en el espacio de la señal condicionada a la transmisión de cada uno de los posibles símbolos. A partir de la aplicación de criterio de decisión MAP determine de forma analítica la ecuación del umbral de decisión sobre los símbolos transmitidos y las regiones correspondientes a cada uno de ellos.
- Calcule la probabilidad de error que resulta de la aplicación del criterio MAP y exprese la mediante la función $Q(x) \triangleq \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda$ en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

Caso $L = 2$ y $M = 4$ (20 puntos)

A continuación nos planteamos aumentar la tasa de transmisión aumentando el valor de M definiendo una modulación con 4 posibles símbolos transmitidos con coordenadas:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

- d) Represente gráficamente la constelación de esta modulación y exprese sus coordenadas en función de la energía por símbolo E_s y la energía por bit E_b .
- e) Exprese la función densidad de probabilidad de la señal recibida en el espacio de la señal condicionada a la transmisión de cada uno de los posibles símbolos. Determine gráficamente los límites de decisión sobre los símbolos transmitidos y las regiones correspondientes a cada uno de ellos.
- f) Proponga una expresión aproximada de la probabilidad de error de símbolo en función de $\frac{E_b}{N_0}$ y de M . Compare esta expresión con la que resulta de aplicar la cota de la unión.

Generalización en M del caso anterior manteniendo $L = 2$ y energía de símbolo constante (25 puntos)

Ahora nos planteamos generalizar el esquema anterior para un número de símbolos arbitrario M manteniendo la dimensión del espacio de la señal en $L=2$.

- g) Proponga y represente gráficamente una constelación de M símbolos en $L=2$ de forma que todos ellos tengan la misma energía y la distancia mínima entre símbolos sea máxima. Tome como referencia:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

- h) Exprese sus coordenadas en función de la energía por símbolo E_s y la energía por bit E_b .
- i) Proponga una expresión aproximada de la probabilidad de error de símbolo expresándola mediante la función $Q(x)$ en función de $\frac{E_b}{N_0}$ y de M .

Generalización en M del caso b): $M = 2L$ (20 puntos)

Finalmente, y como alternativa al apartado anterior, nos planteamos aumentar la dimensión del espacio de la señal L manteniendo dos símbolos por dimensión: $M = 2L$. Para ello considere en primer lugar el caso $L = 3$; $M = 6$, es decir:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{s}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{s}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

- j) Represente gráficamente la constelación de esta modulación y exprese la distancia mínima entre símbolos en función de la energía por símbolo E_s .
- k) Proponga una expresión aproximada de la probabilidad de error de símbolo expresándola mediante la función $Q(x)$ en función de $\frac{E_s}{N_0}$.
- l) Generalice el resultado anterior para un número arbitrario de dimensiones L manteniendo $M = 2L$. Considere en este caso que M es una potencia entera de 2 y exprese el resultado en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

Cálculo de momentos de coeficientes y densidad espectral (15 puntos)

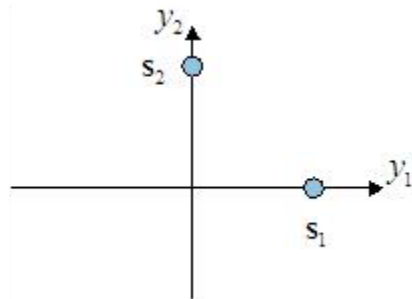
- m) Calcule el vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y la matriz de covarianza $\mathbf{C}[k]$ de los coeficientes de la constelación del apartado b). y expréselo en función de E_b (tenga en cuenta que el esquema de modulación no tiene memoria). Nota: $\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{s}_m]$; $\mathbf{C}[0] = E[\mathbf{s}_m \mathbf{s}_m^T] - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T$
- n) Exprese la densidad espectral de potencia de esta señal $S_s(f)$ en función de las transformadas de Fourier de las funciones base $\Phi_1(f)$ y $\Phi_2(f)$ y de la energía por bit E_b . Para ello utilice:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L C_{\alpha_l \alpha_j}[k] \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) \exp(-jk2\pi fT) + \frac{1}{T^2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_{\alpha_l} \mu_{\alpha_j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_l\left(\frac{k}{T}\right) \Phi_j^*\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

3.1.2 Resolución

- a) Represente gráficamente la constelación de esta modulación y exprese sus coordenadas en función de la energía por símbolo E_s y la energía por bit E_b .

Solución:



$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$

- b) Exprese la función densidad de probabilidad de la señal recibida en el espacio de la señal condicionada a la transmisión de cada uno de los posibles símbolos. A partir de la aplicación de criterio de decisión MAP determine de forma analítica la ecuación del umbral de decisión sobre los símbolos transmitidos y las regiones correspondientes a cada uno de ellos.

Solución:

$$\mathbf{y} | \mathbf{s}_1 \sim N \left(\begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = N(\mathbf{s}_1, \frac{N_0}{2} I_2) \Rightarrow f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_1) = \frac{1}{(\pi N_0)} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_1\|^2}{N_0} \right)$$

$$\mathbf{y} | \mathbf{s}_2 \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}, \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = N(\mathbf{s}_2, \frac{N_0}{2} I_2) \Rightarrow f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_2) = \frac{1}{(\pi N_0)} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_2\|^2}{N_0} \right)$$

Criterio MAP:

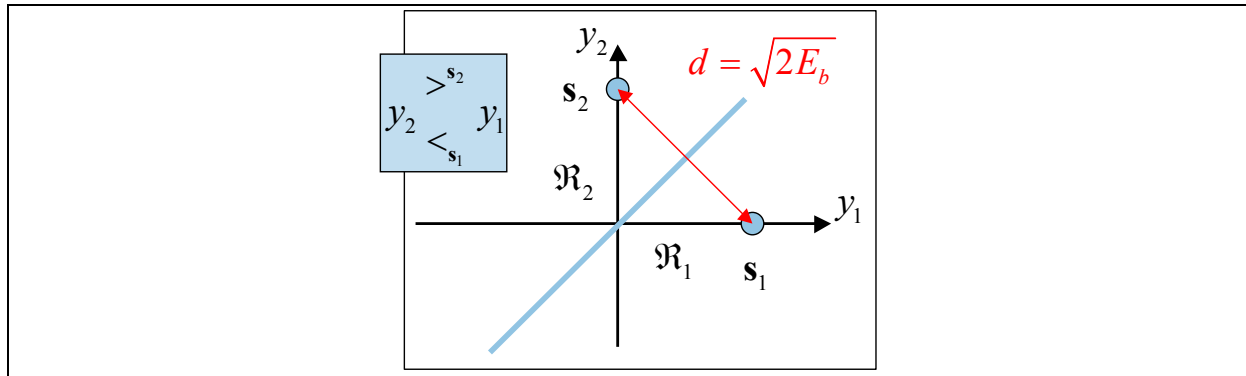
$$\hat{\mathbf{s}}_m = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{amax}} \Pr \{ \mathbf{s}_m | \mathbf{y} \} = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{amax}} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \Pr \{ \mathbf{s}_m \} = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{amax}} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m)$$

Determinación de las regiones:

$$f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_1) \underset{\mathbf{s}_2}{\overset{\mathbf{s}_1}{>}} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_2) \Rightarrow \frac{1}{(\pi N_0)} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_1\|^2}{N_0} \right) \underset{\mathbf{s}_2}{\overset{\mathbf{s}_1}{>}} \frac{1}{(\pi N_0)} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_2\|^2}{N_0} \right);$$

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_1\|^2 \underset{\mathbf{s}_2}{\overset{\mathbf{s}_1}{<}} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_2\|^2 \Rightarrow (y_1 - \sqrt{E_b})^2 + y_2^2 \underset{\mathbf{s}_2}{\overset{\mathbf{s}_1}{<}} y_1^2 + (y_2 - \sqrt{E_b})^2;$$

$$-2\sqrt{E_b} y_1 \underset{\mathbf{s}_2}{\overset{\mathbf{s}_1}{<}} -2\sqrt{E_b} y_2 \Rightarrow y_1 \underset{\mathbf{s}_2}{\overset{\mathbf{s}_1}{>}} y_2$$



- c) Calcule la probabilidad de error que resulta de la aplicación del criterio MAP y exprese la mediante la función $Q(x) \triangleq \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda$ en función de $\frac{E_b}{N_0}$

Solución:

$$\begin{aligned} \Pr(e) &= \frac{1}{2} \Pr(y_2 > y_1 | \mathbf{s}_1) + \frac{1}{2} \Pr(y_1 > y_2 | \mathbf{s}_2) = \\ &= \Pr(y_2 > y_1 | \mathbf{s}_1) \end{aligned}$$

Como y_1 y y_2 son v.a gaussianas e independientes, su resta también será gaussiana. Denominando $r = y_1 - y_2$ condicionado a la transmisión del símbolo \mathbf{s}_1 , sus estadísticas serán:

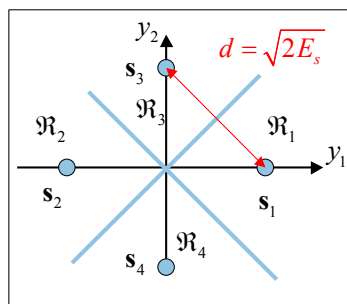
$$\begin{aligned} E(r) &= E(y_2 - y_1 | \mathbf{s}_1) = E(y_2 | \mathbf{s}_1) - E(y_1 | \mathbf{s}_1) = 0 - \sqrt{E_b} = -\sqrt{E_b} \\ VAR(r) &= VAR(y_2 - y_1 | \mathbf{s}_1) = VAR(y_2 | \mathbf{s}_1) + VAR(y_1 | \mathbf{s}_1) = N_0 \end{aligned}$$

$$\Pr(e) = \Pr(r > 0) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{r + \sqrt{E_b}}{N_0}\right)^2\right) dr = \int_{\frac{\sqrt{E_b}}{N_0}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) d\lambda = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Caso $L = 2$ y $M = 4$ (20 puntos)

- d) Represente gráficamente la constelación de esta modulación y exprese sus coordenadas en función de la energía por símbolo E_s y la energía por bit E_b .

Solución:



$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2E_b} \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2E_b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E_b} \end{pmatrix} ; \mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2E_b} \end{pmatrix}$$

- e) Exprese la función densidad de probabilidad de la señal recibida en el espacio de la señal condicionada a la transmisión de cada uno de los posibles símbolos. Determine gráficamente los límites de decisión sobre los símbolos transmitidos y las regiones correspondientes a cada uno de ellos.

Solución:

$$f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0}\right)$$

- f) Proponga una expresión aproximada de la probabilidad de error de símbolo en función de $\frac{E_b}{N_0}$ y de M. Compare esta expresión con la que resulta de aplicar la cota de la unión.

Solución:

En este caso, dada la simetría de la constelación y que los símbolos son equiprobables:

$$P(e) = \sum_{m=1}^M \Pr\{\mathbf{s}_m\} P(e | \mathbf{s}_m) = P(e | \mathbf{s}_1)$$

Una buena aproximación a la probabilidad de error de símbolo 1 resulta de considerar tan sólo los símbolos más cercanos, en este caso 2:

$$P(e) \approx 2Q\left(\frac{d_{MIN}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\frac{\sqrt{2E_s}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

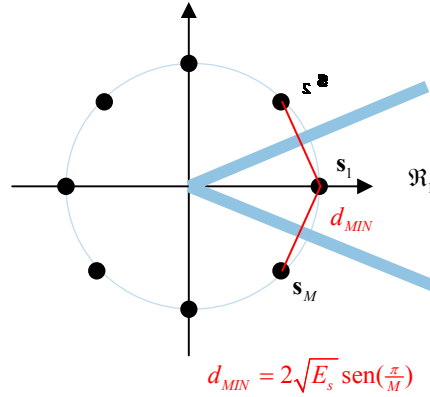
La cota de la unión indica:

$$P(e) \leq (M-1)Q\left(\frac{d_{MIN}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Generalización en M del caso anterior manteniendo $L=2$ y energía de símbolo constante (25 puntos)

- g) Proponga y represente gráficamente una constelación de M símbolos en $L=2$ de forma que todos ellos tengan la misma energía y la distancia mínima entre símbolos sea máxima. Tome como referencia:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

h) Exprese sus coordenadas en función de la energía por símbolo E_s y la energía por bit E_b .

Solución:

$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \cos\left(\frac{(m-1)2\pi}{M}\right) \\ \sqrt{E_s} \sin\left(\frac{(m-1)2\pi}{M}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b \log_2 M} \cos\left(\frac{(m-1)2\pi}{M}\right) \\ \sqrt{E_b \log_2 M} \sin\left(\frac{(m-1)2\pi}{M}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} \in \mathcal{R}_1 \Leftrightarrow \left| \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \right| < \frac{\pi}{M}$$

i) Proponga una expresión aproximada de la probabilidad de error de símbolo expresándola mediante la función $Q(x)$ en función de $\frac{E_b}{N_0}$ y de M .

Solución:

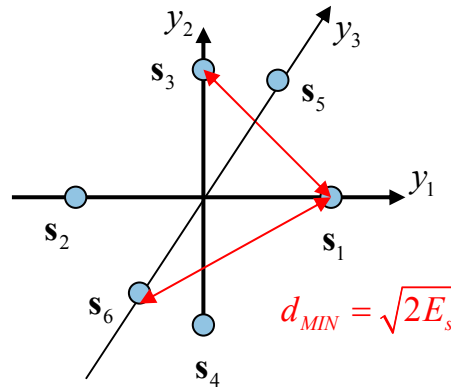
La aproximación a la probabilidad de error se basa en el mismo criterio que en el apartado anterior:

$$P(e) = P(e | s_1) \approx 2Q\left(\frac{d_{MIN}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\frac{2\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$

Generalización en M del caso b) con $M = 2L$ (20 puntos)

j) Represente gráficamente la constelación de esta modulación y exprese la distancia mínima entre símbolos en función de la energía por símbolo E_s .

Solución:



- k) Proponga una expresión aproximada de la probabilidad de error de símbolo expresándola mediante la función $Q(x)$ en función de $\frac{E_s}{N_0}$.

Solución:

Si consideramos, por ejemplo, el símbolo 1, podemos ver como todos los demás símbolos (excepto el 2) están a la misma distancia, que no ha variado con respecto al caso de $L=2$. Por tanto:

$$P(e) \approx 4Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- l) Generalice el resultado anterior para un número arbitrario de dimensiones L manteniendo $M = 2L$. Considere en este caso que M es una potencia entera de 2 y exprese el resultado en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

Solución:

Generalizándolo resulta:

$$P(e) \approx 2(L-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-2)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

Cálculo de momentos de coeficientes y densidad espectral (15 puntos)

- m) Calcule el vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y la matriz de covarianza $\mathbf{C}[k]$ de los coeficientes de la constelación del apartado b). y expresselo en función de E_b (tenga en cuenta que el esquema de modulación no tiene memoria). Nota: $\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{s}_m]$; $\mathbf{C}[0] = E[\mathbf{s}_m \mathbf{s}_m^T] - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T$

Solución:

$$\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{s}_m] = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{E_s} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{E_s} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[0] &= E[\mathbf{s}_m \mathbf{s}_m^T] - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T = E[\mathbf{s}_m \mathbf{s}_m^T] = \\ &= \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{E_s} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{E_s} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{E_s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{E_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{E_s} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} E_s \mathbf{I}_2 = E_b \mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

Como la modulación no tiene memoria:

$$\mathbf{C}[k] = \mathbf{C}[0] \delta[k]$$

- n) Exprese la densidad espectral de potencia de esta señal $S_s(f)$ en función de las transformadas de Fourier de las funciones base $\Phi_1(f)$ y $\Phi_2(f)$ y de la energía por bit E_b .

Solución:

$$\begin{aligned} S_s(f) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L C_{\alpha_l \alpha_j} [k] \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) \exp(-jk2\pi fT) + \frac{1}{T^2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_{\alpha_l} \mu_{\alpha_j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_l\left(\frac{k}{T}\right) \Phi_j^*\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \\ &= \frac{1}{T} E_b \left[|\Phi_1(f)|^2 + |\Phi_2(f)|^2 \right] \end{aligned}$$

3.2 Ejercicio de examen de control noviembre 2002 (M. Cabrera)

3.2.1 Enunciado

Sea una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes a $r_b = 3Mbps$. Se transmite mediante una señal binaria PAM UniPolar de M niveles: $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \varphi(t - nT)$ donde $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}(tr)$, $\alpha[n] = 0, d, \dots, (M-1)d$, codificada según código Gray. El ruido de canal $w(t)$ es ruido blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $\frac{N_0}{2}$.

- Si se transmite por un canal ideal y se recibe mediante un receptor MAP (es decir, considere que el filtro adaptado es $\varphi(-t)$ y que los umbrales de decisión se colocan en los puntos medios entre símbolos), evalúe la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, del número de niveles M y del número de bits transmitidos por símbolo b. Realice las aproximaciones que considere necesarias.
- Al transmitir mediante $M=8$ niveles, ¿en cuántos dB debe aumentar la $\frac{E_b}{N_0}$ si quiere mantener aproximadamente la BER respecto al caso de $M=2$ niveles? Evalúe el ancho de banda de transmisión para las dos situaciones ($M=2$ y $M=8$).

Suponga a partir de este punto que $M=2$ y que el canal presenta distorsión que se puede modelar según la siguiente respuesta impulsional:

$$h_c(t) = \delta(t) + \gamma \delta(t - 2T); \quad -1 < \gamma < +1$$

A la salida del filtro adaptado $\varphi(-t)$ se muestrea la señal $y(t)$ en los instantes $t_k = kT$.

- Obtenga la expresión $y(t_k)$ e identifique en ella los términos de señal útil, ISI y ruido.

Se filtra la señal muestreada mediante un filtro FIR ecualizador de respuesta impulsional

$$h_Q[k] = C_0 \delta[k] + C_1 \delta[k-1] + C_2 \delta[k-2]$$

- Aplique el criterio de *Forzador de Ceros* para obtener los 3 coeficientes.
- Evalúe y dibuje el pulso discreto resultante a la salida del ecualizador: $p_Q[k]$. Comente la variación de ISI a través del filtro FIR. Puede dejar los resultados en función de γ .
- Demuestre que la componente de ruido discreto a la salida del filtro ecualizador, $\beta_Q[k]$, no es temporalmente blanca. Para ello calcule y dibuje su autocorrelación: $R_{\beta_Q}[k]$. (Suponga $\gamma = 0.5$, únicamente al final de ese apartado.)

Nota:

$$\sum_{i=1}^{N-1} i^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}$$

$$\text{Pseudoinversa}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

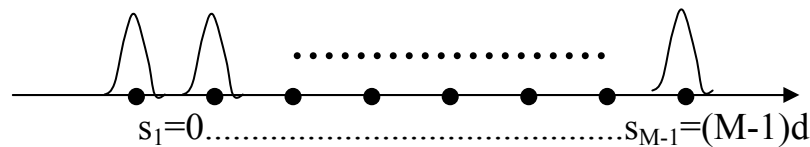
Sea la matriz $\begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A & 0 \\ B & 0 & A \end{pmatrix}$; su inversa tiene la siguiente forma: $\begin{pmatrix} X & 0 & Y \\ 0 & Z & 0 \\ Y & 0 & X \end{pmatrix}$

3.2.2 Resolución

- a) Si se transmite por un canal ideal y se recibe mediante un receptor MAP (es decir, considere que el filtro adaptado es $\varphi(-t)$ y que los umbrales de decisión se colocan en los puntos medios entre símbolos), evalúe la BER en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, del número de niveles M y del número de bits transmitidos por símbolo b . Realice las aproximaciones que considere necesarias.

Solución:

La siguiente figura muestra el espacio de señal, así como las funciones de densidad de probabilidad condicionada: $f_y(y/s_m)$:



Por tanto, considerando umbrales óptimos: $\gamma_i = \frac{d}{2}, \frac{3d}{2}, \dots, \frac{(2M-1)d}{2}$

$$P_e = \frac{2(M-2)+2}{M} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)$$

La energía media de bit, en este caso es:

$$E_b = \frac{\hat{E}_m}{b} = \frac{1}{bM} \sum_{m=0}^{M-1} (md)^2 = \frac{1}{bM} \frac{(M-1)M(2M-1)}{6} d^2 = \frac{(M-1)(2M-1)}{6b} d^2$$

Y además, suponiendo $\frac{E_b}{N_0} \gg 1$, solo se producirán errores entre símbolos consecutivos y debido a la codificación Gray, por cada error de símbolo sólo se produce error en uno de los b bits correspondientes:

$$BER \cong \frac{2(M-1)}{bM} Q\left(\sqrt{\frac{3b}{(M-1)(2M-1)} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- b) Al transmitir mediante $M=8$ niveles, ¿en cuántos dB debe aumentar la $\frac{E_b}{N_0}$ si quiere mantener aproximadamente la BER respecto al caso de $M=2$ niveles? Evalúe el ancho de banda de transmisión para las dos situaciones ($M=2$ y $M=8$).

Solución:

Para $M=2$, $BER \cong Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$, y para $M=8$, $BER \cong \frac{7}{12} Q\left(\sqrt{\frac{3}{35} \frac{E_b}{N_0}}\right)$; por tanto, con 8PAM se deben transmitir G dB más respecto a 2PAM para mantener la misma BER.

$$G = 10 \log_{10} \left(\frac{\frac{E_b}{N_0}}{\frac{3}{35} \frac{E_b}{N_0}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{35}{3} \right) = 10.6 \text{ dB}$$

$$\text{Para } M=2, B_T = \frac{r}{2} = \frac{r_b}{2} = 1500 \text{ KHz}$$

$$\text{Para } M=8, B_T = \frac{r}{2} = \frac{r_b}{6} = 500 \text{ KHz}$$

c) Obtenga la expresión $y(t_k)$ e identifique en ella los términos de señal útil, ISI y ruido.

Solución:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] p(t - nT) * \varphi(-t) * h_c(t) + w(t) * \varphi(-t) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha[n] R_\varphi(t - nT) + \gamma \alpha[n] R_\varphi(t - (n+2)T)) + \beta(t)$$

con $R_\varphi(t) = \text{sinc}(tr)$

Por tanto, al muestrear: $y(t_k) = \alpha[k] + \gamma \alpha[k-2] + \beta(t_k)$ donde el primer sumando corresponde al símbolo útil, el segundo a la ISI y el tercero a la componente de ruido.

d) Aplique el criterio de *Forzador de Ceros* para obtener los 3 coeficientes.

Solución:

Dado que el pulso discreto resultante es $p[k] = \delta[k] + \gamma \delta[k-2]$ el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución requiere resolver la matriz pseudoinversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^{\#} = \begin{pmatrix} 1+\gamma^2 & 0 & \gamma \\ 0 & 1+\gamma^2 & 0 \\ \gamma & 0 & 1+\gamma^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} & 0 & \frac{-\gamma}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} \\ 0 & \frac{1}{1+\gamma^2} & 0 \\ \frac{-\gamma}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} & 0 & \frac{1+\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} & 0 & \frac{\gamma^3}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} & 0 & \frac{-\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} \\ 0 & \frac{1}{1+\gamma^2} & 0 & \frac{\gamma}{1+\gamma^2} & 0 \\ \frac{-\gamma}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} & 0 & \frac{1}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} & 0 & \frac{\gamma^3 + \gamma}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

Con lo que:

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} \\ 0 \\ \frac{-\gamma}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} \end{pmatrix}$$

- e) Evalúe y dibuje el pulso discreto resultante a la salida del ecualizador : $p_Q[k]$. Comente la variación de ISI a través del filtro FIR. Puede dejar los resultados en función de γ .

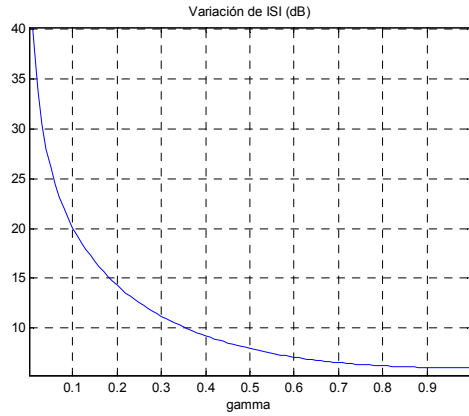
Solución:

$$\begin{aligned} p_Q[k] &= p[k] * h_Q[k] = (\delta[k] + \gamma\delta[k-2]) * (C_0\delta[k] + C_2\delta[k-2]) = \\ &= C_0\delta[k] + (\gamma C_0 + C_2)\delta[k-2] + \gamma C_2\delta[k-4] = \\ &= \frac{1+\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} \delta[k] + \frac{\gamma^3}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} \delta[k-2] + \frac{-\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2 - \gamma^2} \delta[k-4] \end{aligned}$$

El nivel de ISI en dB sobre el pulso $p[k]$ es: $20 \log_{10} \left(\frac{1}{|\gamma|} \right)$

El nivel de ISI en dB sobre el pulso $p_Q[k]$ es: $20 \log_{10} \left(\frac{C_0}{\gamma C_2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{1+\gamma^2}{\gamma^2} \right)$

Con lo cual la variación de ISI en dB es $20 \log_{10} \left(\frac{\frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}}{\frac{1}{|\gamma|}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{1+\gamma^2}{|\gamma|} \right)$



- f) Demuestre que la componente de ruido discreto a la salida del filtro ecualizador, $\beta_Q[k]$, no es temporalmente blanca. Para ello calcule y dibuje su autocorrelación: $R_{\beta_Q}[k]$. (Suponga $\gamma = 0.5$, únicamente al final de ese apartado.)

Solución:

Dado que el ruido a la salida del filtro FIR corresponde a la siguiente expresión:

$$\beta_Q[k] = C_0 \beta[k] + C_2 \beta[k-2]$$

su función de autocorrelación es:

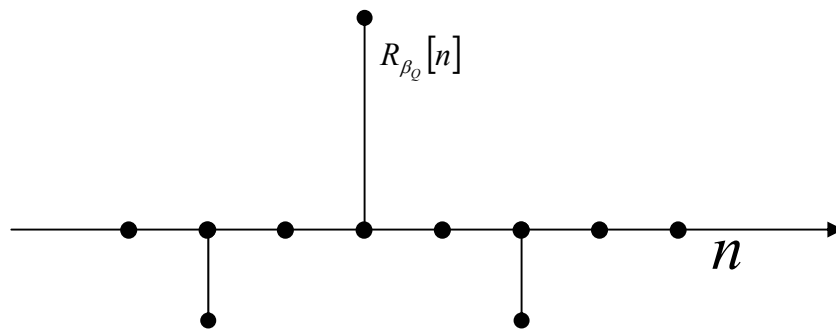
$$R_{\beta_Q}[n] = E[\beta_Q[k+n] \beta_Q[n]] = (C_0^2 + C_2^2) R_\beta[n] + C_0 C_2 (R_\beta[n+2] + R_\beta[n-2])$$

dado que $\beta[k]$ corresponde a las muestras de ruido filtrado a la salida del filtro adaptado a $\varphi(t)$, función de norma 1:

$$\begin{aligned} R_\beta[n] &= E[\beta[k+n] \beta[n]] = \\ &\int S_\beta(f) \exp(j2\pi f n T) df = \frac{N_0}{2} \int |\Phi(f)|^2 \exp(j2\pi f n T) df \\ &= \frac{N_0}{2} R_\varphi(nT) = \frac{N_0}{2} \delta[n] \end{aligned}$$

se obtiene:

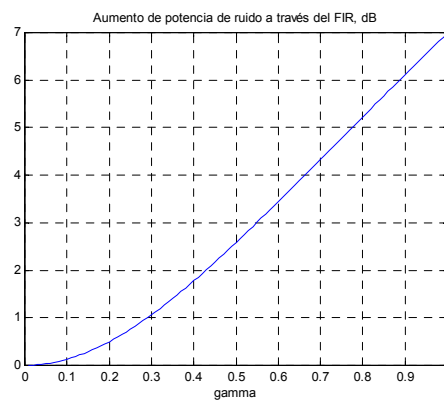
$$\begin{aligned} R_{\beta_Q}[n] &= (C_0^2 + C_2^2) \frac{N_0}{2} \delta[n] + C_0 C_2 \frac{N_0}{2} (\delta[n+2] + \delta[n-2]) = \\ &\frac{(1+\gamma^2)^2 + \gamma^2}{((1+\gamma^2)^2 - \gamma^2)^2} \frac{N_0}{2} \delta[0] + \frac{-\gamma - \gamma^3}{((1+\gamma^2)^2 - \gamma^2)^2} \frac{N_0}{2} (\delta[n+2] + \delta[n-2]) = \\ &1.0522 \frac{N_0}{2} \delta[0] - 0.3628 \frac{N_0}{2} \delta[n+2] - 0.3628 \frac{N_0}{2} \delta[n-2] \end{aligned}$$



Por tanto, la potencia del ruido filtrado es $\sigma_{\beta_Q}^2 = (C_0^2 + C_2^2) \frac{N_0}{2} = \frac{(1 + \gamma^2)^2 + \gamma^2}{((1 + \gamma^2)^2 - \gamma^2)^2} \sigma_{\beta}^2$

Con lo que la variación de potencia de ruido a través del filtro FIR y en dB es

$$10 * \log_{10} \left(\frac{\sigma_{\beta_Q}^2}{\sigma_{\beta}^2} \right) = 10 * \log_{10} \left(\frac{(1 + \gamma^2)^2 + \gamma^2}{((1 + \gamma^2)^2 - \gamma^2)^2} \right)$$



3.3 Ejercicio de examen de control noviembre 2004 (M. Cabrera)

3.3.1 Enunciado

Sea una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes. Se transmite mediante una señal binaria PAM Polar $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \varphi(t - nT)$, donde $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}(tr)$ y $\alpha[n] = \pm \frac{d}{2}$. El ruido de canal $w(t)$ es ruido blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$.

El canal presenta distorsión que se puede modelar según la siguiente respuesta impulsional:

$$h_c(t) = \delta(t) + \rho \delta(t - T); \quad -1 < \rho < +1$$

El parámetro ρ se considera a todos los efectos, un dato del ejercicio, por lo que todas las funciones y parámetros pedidos en los apartados pueden dejarse en función de dicho parámetro si se considera necesario.

A la salida del filtro adaptado $\varphi(-t)$ se muestrea la señal $y(t)$ en los instantes $t_k = kT$ y se realiza la detección MAP.

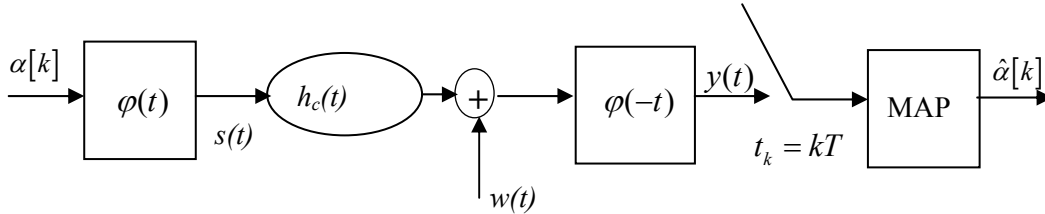


Figura 1

- Dé la expresión de la densidad espectral de la señal a la salida del transmisor $S_s(f)$ y dé también la densidad espectral de la señal a la salida del canal.
- Obtenga la expresión $y(t_k)$ e identifique en ella los términos de señal útil, ISI y ruido.
- Dé la expresión de la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. E_b es la energía media transmitida por bit. Realice este cálculo de forma aproximada utilizando únicamente la función $Q(\cdot)$ de menor argumento.

Para mejorar la probabilidad de error se añade un filtro FIR ecualizador de respuesta impulsional

$$h_Q[k] = C_0 \delta[k] + C_1 \delta[k - 1].$$

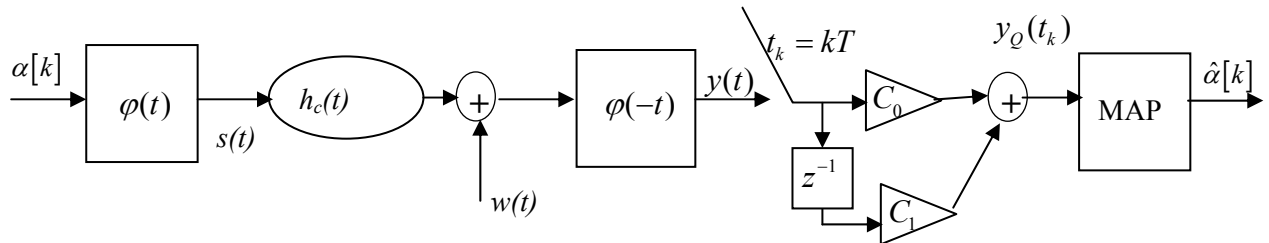


Figura 2

- Aplique el criterio de *Forzador de Ceros* (ZF) para obtener los 2 coeficientes C_0, C_1 .
- Obtenga la expresión $y_Q(t_k)$ e identifique en ella los términos de señal útil, ISI y ruido.

- f) Dé la expresión de la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. E_b es la energía media transmitida por bit. Realice este cálculo de forma aproximada utilizando únicamente la función $Q(\cdot)$ de menor argumento. Compare el resultado obtenido con la detección sin ecualización.

Como alternativa al ecualizador en recepción, se propone ecualizar en transmisión utilizando los coeficientes C_0, C_1 , obtenidos anteriormente mediante el criterio ZF.

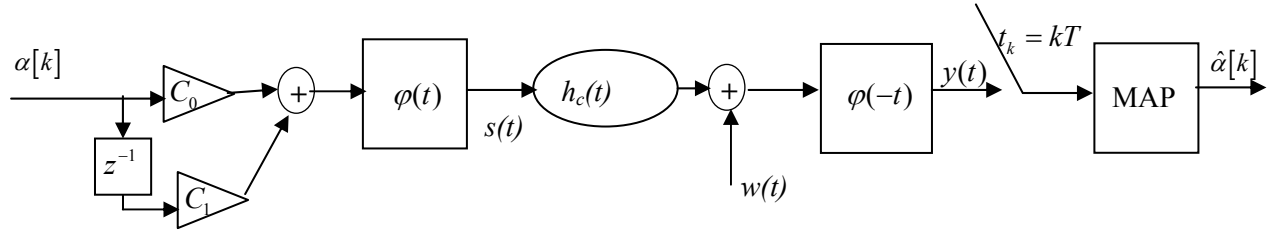


Figura 3

- g) Dé la expresión de la señal a la salida del transmisor: $s(t)$, y de su densidad espectral: $S_s(f)$.
- h) Calcule la expresión de la energía media por bit E_b a la salida del transmisor de la figura 3.
- i) Obtenga la expresión $y(t_k)$ e identifique en ella los términos de señal útil, ISI y ruido.
- j) Dé la expresión de la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Realice este cálculo de forma aproximada utilizando únicamente la función $Q(\cdot)$ de menor argumento. Compare el resultado obtenido con la detección sin ecualización y con la ecualización en recepción.

Nota:

- Para una modulación $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_l[n] \varphi_l(t - nT)$ la densidad espectral es :

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha_l \alpha_j}[k] \exp(-jk2\pi fT)$$

- Pseudoinversa(\mathbf{A}) = $\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$

3.3.2 Resolución

Parte 1: Sin ecualizador

- a) Dé la expresión de la densidad espectral de la señal a la salida del transmisor $S_s(f)$ y dé también la densidad espectral de la señal a la salida del canal.

Solución:

Al contemplar modulaciones de una dimensión ($L=1$), la expresión de la densidad espectral facilitada en las notas de ayuda se reduce a:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} |\Phi(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_\alpha[k] \exp(-jk2\pi fT)$$

Para la señal transmitida se tiene:

$$\text{Autocorrelación de la secuencia de símbolos: } R_\alpha[k] = \sigma_\alpha^2 \delta[k] = \frac{d^2}{4} \delta[k]$$

$$\text{Transformada de Fourier de la función base: } \Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{r}} \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

$$\text{Por tanto: } S_s(f) = \frac{1}{T} \left| \frac{1}{\sqrt{r}} \Pi\left(\frac{f}{r}\right) \right|^2 \sigma_\alpha^2 = \Pi\left(\frac{f}{r}\right) \frac{d^2}{4}$$

A la salida del canal, la señal se puede expresar como:

$$s(t) * h_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] (\varphi(t-nT) + \rho \varphi(t-(n+1)T)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] p_h(t-nT)$$

$$\text{donde: } p_h(t) = \varphi(t) * h_c(t) = \varphi(t) + \rho \varphi(t-T)$$

$$\text{con lo que: } S_{s*h_c}(f) = \frac{1}{T} |P_h(f)|^2 \sigma_\alpha^2 = \Pi\left(\frac{f}{r}\right) |1 + \rho e^{-j2\pi fT}|^2 \frac{d^2}{4}$$

- b) Obtenga la expresión $y(t_k)$ e identifique en ella los términos de señal útil, ISI y ruido.

Solución:

A la salida del filtro adaptado de la figura se obtiene:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] (R_\varphi(t-nT) + \rho R_\varphi(t-(n+1)T)) + \beta(t)$$

Tomando muestras en $t_k = kT$

$$y(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \left(R_\varphi((k-n)T) + \rho R_\varphi((k-n-1)T) \right) + \beta(t_k) \Rightarrow$$

$$y[k] = \alpha[k] + \rho \alpha[k-1] + \beta[k]$$

En la última expresión, los 3 sumandos se califican como señal útil, ISI y ruido respectivamente.

- c) Dé la expresión de la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. E_b es la energía media transmitida por bit. Realice este cálculo de forma aproximada utilizando únicamente la función $Q(\cdot)$ de menor argumento.

Solución:

La ley de detección MAP aplicando el criterio MAP es:

$$y[k] > 0 \Rightarrow \hat{\alpha}[k] = +\frac{d}{2}$$

$$y[k] < 0 \Rightarrow \hat{\alpha}[k] = -\frac{d}{2}$$

Si se considera únicamente el valor de ISI más pesimista, la distancia de los puntos de señal al umbral=0, es $\frac{d}{2}(1-|\rho|)$, por lo que

$$BER \cong \frac{1}{2} Q\left(\frac{d(1-|\rho|)}{2\sigma}\right)$$

y sustituyendo $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$, $E_b = \frac{d^2}{4}$

$$BER \cong \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{(1-|\rho|)^2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Parte 2: Ecualizador FIR en recepción:

- d) Aplique el criterio de *Forzador de Ceros* (ZF) para obtener los 2 coeficientes C_0, C_1 .

Solución:

El pulso discreto equivalente a la salida del filtro adaptado es:

$$p[k] = \delta[k] + \rho \delta[k-1]$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y aplicando la definición de matriz pseudoinversa facilitada en las notas de ayuda:

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix}_{ZF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}^{\#} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\rho^2}{(1+\rho^2)^2 - \rho^2} \\ \frac{-\rho}{(1+\rho^2)^2 - \rho^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\rho^2}{\rho^4 + \rho^2 + 1} \\ \frac{-\rho}{\rho^4 + \rho^2 + 1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Obtenga la expresión $y_Q(t_k)$ e identifique en ella los términos de señal útil, ISI y ruido.

Solución:

Muestras ecualizadas:

$$\begin{aligned} y_Q(t_k) = y_Q[k] &= C_0 y[k] + C_1 y[k-1] = \\ &= C_0 \alpha[k] + \alpha[k-1](\rho C_0 + C_1) + \alpha[k-2](\rho C_1) + C_0 \beta[k] + C_1 \beta[k-1] = \\ &= \frac{1+\rho^2}{\rho^4 + \rho^2 + 1} \alpha[k] + \frac{\rho^3}{\rho^4 + \rho^2 + 1} \alpha[k-1] + \frac{-\rho^2}{\rho^4 + \rho^2 + 1} \alpha[k-2] + \beta_Q[k] \end{aligned}$$

En la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Muestra de señal útil:} & \quad \frac{1+\rho^2}{\rho^4 + \rho^2 + 1} \alpha[k] \\ \text{ISI:} & \quad + \frac{\rho^3}{\rho^4 + \rho^2 + 1} \alpha[k-1] - \frac{\rho^2}{\rho^4 + \rho^2 + 1} \alpha[k-2] \\ \text{Ruido:} & \quad \beta_Q[k] = C_0 \beta[k] + C_1 \beta[k-1] \end{aligned}$$

f) Dé la expresión de la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. E_b es la energía media transmitida por bit. Realice este cálculo de forma aproximada utilizando únicamente la función Q(.) de menor argumento. Compare el resultado obtenido con la detección sin ecualización.

Solución:

Si se considera únicamente el valor de ISI más pesimista, la distancia de los puntos de señal al umbral=0, es $\frac{d}{2} \left(\frac{1+\rho^2}{\rho^4 + \rho^2 + 1} - \frac{|\rho|^3}{\rho^4 + \rho^2 + 1} - \frac{\rho^2}{\rho^4 + \rho^2 + 1} \right) = \frac{d}{2} \left(\frac{1-|\rho|^3}{\rho^4 + \rho^2 + 1} \right)$, por lo que

$$BER \cong \frac{1}{4} Q \left(\frac{d}{2\sigma} \frac{1-|\rho|^3}{\rho^4 + \rho^2 + 1} \right)$$

y sustituyendo $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \left((C_0)^2 + (C_1)^2 \right) = \frac{N_0}{2} \left(\frac{1+3\rho^2+\rho^4}{(\rho^4 + \rho^2 + 1)^2} \right)$, $E_b = \frac{d^2}{4}$

$$BER \cong \frac{1}{4} Q \left(\sqrt{\frac{(1-|\rho|^3)^2}{1+3\rho^2+\rho^4}} 2 \frac{E_b}{N_0} \right)$$

Y comparando con el resultado del apartado 3, se obtiene una ganancia de E_b en dB de

$$Ganancia_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{(1-|\rho|^3)^2}{(1-|\rho|)^2} \right)$$

Parte 3: Ecualizador FIR en transmisión:

g) Dé la expresión de la señal a la salida del transmisor, $s(t)$, y de su densidad espectral, $S_s(f)$.

Solución:

Expresión de la señal de salida:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (C_0 \alpha[n] + C_1 \alpha[n-1]) \varphi(t-nT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_0 \alpha[n] \varphi(t-nT) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_1 \alpha[n-1] \varphi(t-nT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_0 \alpha[n] \varphi(t-nT) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_1 \alpha[m] \varphi(t-mT-T) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] (C_0 \varphi(t-nT) + C_1 \varphi(t-(n+1)T)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] p_T(t) \end{aligned}$$

donde $p_T(t) = C_0 \varphi(t) + C_1 \varphi(t-T)$

Densidad espectral:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} |P_T(f)|^2 \sigma_\alpha^2 = \Pi\left(\frac{f}{r}\right) |C_0 + C_1 e^{-j2\pi fT}|^2 \frac{d^2}{4}$$

h) Calcule la expresión de la energía media por bit E_b a la salida del transmisor de la figura 3.

Solución:

$$\begin{aligned} E_b &= E_s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_\alpha[k] R_{p_T}(-kT) = R_\alpha[0] R_{p_T}(0) = \\ &= \sigma_\alpha^2 \left((C_0)^2 + (C_1)^2 \right) R_\varphi(0) + C_0 C_1 R_\varphi(T) + C_0 C_1 R_\varphi(-T) = \\ &= \frac{d^2}{4} \left((C_0)^2 + (C_1)^2 \right) E_\varphi = \frac{d^2}{4} \frac{1+3\rho^2+\rho^4}{(\rho^4+\rho^2+1)^2} \end{aligned}$$

- i) Obtenga la expresión $y(t_k)$ e identifique en ella los términos de señal útil, ISI y ruido.

Solución:

La expresión coincide en forma con la obtenida en el apartado 5, si bien en este caso los valores exactos de potencia de ruido y de energía media transmitida por bit son distintos:

$$y[k] = C_0 \alpha[k] + \alpha[k-1](\rho C_0 + C_1) + \alpha[k-2](\rho C_1) + \beta[k] =$$

$$\frac{1+\rho^2}{\rho^4+\rho^2+1} \alpha[k] + \frac{\rho^3}{\rho^4+\rho^2+1} \alpha[k-1] + \frac{-\rho^2}{\rho^4+\rho^2+1} \alpha[k-2] + \beta[k]$$

En la expresión anterior se obtiene

Muestra de señal útil: $\frac{1+\rho^2}{\rho^4+\rho^2+1} \alpha[k]$

ISI: $+\frac{\rho^3}{\rho^4+\rho^2+1} \alpha[k-1] - \frac{\rho^2}{\rho^4+\rho^2+1} \alpha[k-2]$

Ruido: $\beta[k]$

- j) Dé la expresión de la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$. Realice este cálculo de forma aproximada utilizando únicamente la función $Q(\cdot)$ de menor argumento. Compare el resultado obtenido con la detección sin ecualización y con la ecualización en recepción.

Solución:

Como en el apartado 6: $BER \cong \frac{1}{4} Q\left(\frac{d}{2\sigma} \frac{1-|\rho|^3}{\rho^4+\rho^2+1}\right)$

y sustituyendo $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$, $E_b = \frac{d^2}{4} \frac{1+3\rho^2+\rho^4}{(\rho^4+\rho^2+1)^2}$

$$BER \cong \frac{1}{4} Q\left(\sqrt{\frac{(1-|\rho|^3)^2}{1+3\rho^2+\rho^4}} 2 \frac{E_b}{N_0}\right)$$

Por lo que, finalmente, se obtiene el mismo resultado que en el apartado 5, concluyendo, que de cara a la BER y a igual cociente $\frac{E_b}{N_0}$, es indiferente ecualizar en el receptor o ecualizar en el transmisor.

3.4 Ejercicio de examen de control abril 2002 (J. Riba)

3.4.1 Enunciado

En este problema se le pide que plantee y analice las prestaciones del detector óptimo de secuencias en presencia de interferencia intersimbólica. La modulación empleada es binaria bipolar con bits b_k equiprobables e independientes (de niveles 1 y -1), y pulso rectangular $p(t)$:

$$s(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k p(t - kT)$$

- a) Calcule la energía media de bit.

El canal presenta un ruido aditivo gaussiano blanco de densidad espectral $N_0/2$, y una respuesta impulsional $h(t)$ de $P=2$ bits de duración:

$$h(t) = \delta(t) + \alpha \delta(t - T) \quad \alpha \geq 0$$

La señal recibida es:

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$$

- b) Utilizando un filtro adaptado al pulso original $p(t)$, diseñe los coeficientes de un ecualizador que cancele totalmente la interferencia intersimbólica. Calcule la probabilidad de error de bit en función de la E_b/N_0 utilizando en recepción un esquema clásico de detección bit a bit. ¿Es posible un buen funcionamiento del esquema propuesto para $\alpha = 1$ o cercano?

La solución que ha hallado antes, *no* constituye el criterio óptimo de detección. Para ilustrar este hecho, considere la transmisión de únicamente dos bits (b_0 y b_1). Con este análisis, toda la secuencia transmitida constituye conceptualmente un único símbolo transmitido. La señal recibida puede ahora escribirse del siguiente modo:

$$r(t) = A(b_0 g_0(t) + b_1 g_1(t)) + n(t)$$

Se le pide a continuación que resuelva el problema de detección óptima de dos modos distintos: I) y II).

I) Espacio de señal de dimensión 2. Para simplificar este análisis, céntrese en el caso concreto de $\alpha=1$.

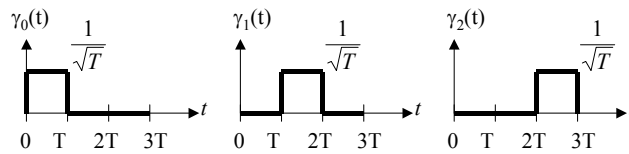
- c) Dibuje las formas de onda $g_0(t)$ y $g_1(t)$ y razone si se trata de funciones ortonormales. En caso contrario, proponga dos funciones base $\gamma_0(t)$ y $\gamma_1(t)$ ortonormales que generen el espacio de señal y dibújelas.

Método de ortogonalización de Gram-Smit. El vector $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle / (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|))$, es ortogonal al \mathbf{a} y el par (\mathbf{a}, \mathbf{c}) engendra el mismo subespacio que el par (\mathbf{a}, \mathbf{b}) .

- d) Dibuje la constelación de los símbolos en el espacio de la señal indicando las fronteras de decisión.
- e) Halle aproximadamente la probabilidad de error de bit y compárela con la obtenida utilizando el ecualizador.

II) Espacio de señal de dimensión 3. Realice este análisis en general para cualquier valor de α .

Considere para ello las siguientes tres funciones ortonormales:



- f) Dibuje las formas de onda $g_0(t)$ y $g_1(t)$ para una α genérica, y halle las componentes de las posibles formas de onda transmitidas o símbolos sobre el nuevo espacio de señal.
- g) Halle aproximadamente la probabilidad de error de cada bit a partir de las distancias euclídeas entre los símbolos del apartado anterior y compárela con la obtenida en I) para $\alpha = 1$ y con la del ecualizador. Razone si el hecho de usar un espacio de dimensión mayor debe dar lugar a mejores, peores o idénticas prestaciones. Razone si el detector óptimo se colapsa o no para el canal $\alpha = 1$.
- h) En general, ¿cuál sería la dimensión del espacio de señal para los métodos I) y II) formulados en el caso de transmitir una secuencia de L bits por un canal de duración P bits?

3.4.2 Resolución

- a) Calcule la energía media de bit.

Solución:

$$E_b = A^2 T$$

- b) Utilizando un filtro adaptado al pulso original $p(t)$, diseñe los coeficientes de un ecualizador que cancele totalmente la interferencia intersimbólica. Calcule la probabilidad de error de bit en función de la E_b/N_o utilizando en recepción un esquema clásico de detección bit a bit. ¿Es posible un buen funcionamiento del esquema propuesto para $\alpha = 1$ o cercano?

Solución:

$$c_n = (-\alpha)^n u(n)$$

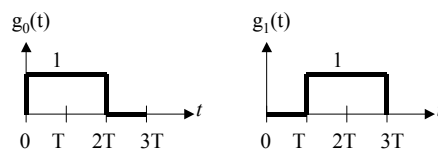
$$P_e = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_o} (1 - \alpha^2)}\right)$$

BER colapsa para $\alpha = 1$

I) Espacio de señal de dimensión 2. Para simplificar este análisis, céntrese en el caso concreto de $\alpha=1$.

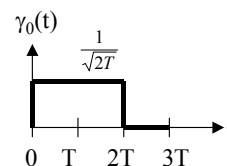
- c) Dibuje las formas de onda $g_0(t)$ y $g_1(t)$ y razone si se trata de funciones ortonormales. En caso contrario, proponga dos funciones base $\gamma_0(t)$ y $\gamma_1(t)$ ortonormales que generen el espacio de señal y dibújelas.

Solución:

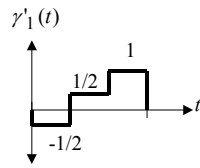


No son ortogonales: $\int g_0(t)g_1(t)dt = T$

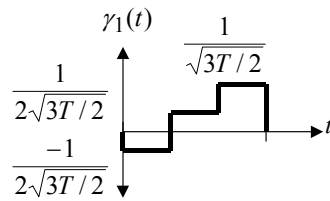
$$\gamma_0(t) = \frac{g_0(t)}{\sqrt{2T}}$$



$$\gamma'_1(t) = g_1(t) - \frac{\int g_0(t)g_1(t)dt}{\sqrt{\int g_0^2(t)dt}\sqrt{\int g_1^2(t)dt}} g_0(t) = g_1(t) - \frac{1}{2} g_0(t)$$



$$\gamma_1(t) = \frac{\gamma'_1(t)}{\sqrt{\int \gamma_1'^2(t)dt}} = \frac{\gamma'_1(t)}{\sqrt{3T/2}}$$

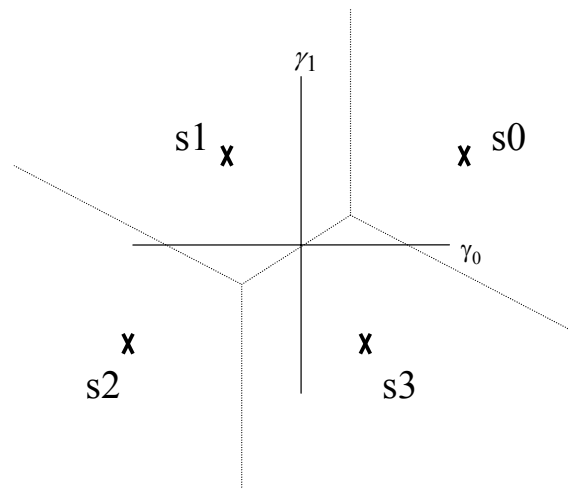


- d) Dibuje la constelación de los símbolos en el espacio de la señal indicando las fronteras de decisión.

Solución:

$$y_0 = \int r(t)\gamma_0(t)dt = A\sqrt{2T} \left(b_0 + \frac{1}{2}b_1 \right)$$

$$y_1 = \int r(t)\gamma_1(t)dt = A\sqrt{3T/2} \quad (b_1)$$



- e) Halle aproximadamente la probabilidad de error de bit y compárela con la obtenida utilizando el ecualizador.

Solución:

$d_{01} = d_{23} = 2A\sqrt{2T}$ distancias que afectan al bit b_0 .

$$d_{03} = d_{12} = 2\sqrt{\left(A\sqrt{2T}\frac{1}{2}\right)^2 + \left(A\sqrt{\frac{3T}{2}}\right)^2} = 2A\sqrt{2T} \quad \text{distancias que afectan al bit } b_0.$$

(la misma)

$$P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{8A^2T}{2N_o}}\right)$$

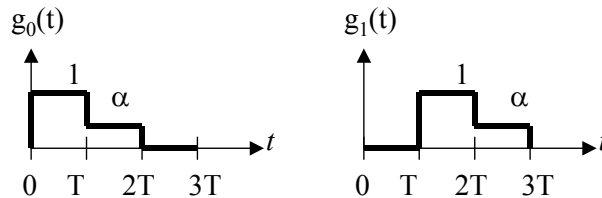
Como $E_b = A^2T$

$$A^2 = \frac{E_b}{T}$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

II) Espacio de señal de dimensión 3. Realice este análisis en general para cualquier valor de α .

- f) Dibuje las formas de onda $g_0(t)$ y $g_1(t)$ para una α genérica, y halle las componentes de las posibles formas de onda transmitidas o símbolos sobre el nuevo espacio de señal.

Solución:

$$y_0 = \int r(t)\gamma_0(t)dt = A\sqrt{T} \quad (b_0)$$

$$y_1 = \int r(t)\gamma_1(t)dt = A\sqrt{T} \quad (\alpha b_0 + b_1)$$

$$y_2 = \int r(t)\gamma_2(t)dt = A\sqrt{T} \quad (\alpha b_1)$$

Componentes:

$$\mathbf{s}_0 = A\sqrt{T} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha + 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_1 = A\sqrt{T} \begin{bmatrix} -1 \\ -\alpha + 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = A\sqrt{T} \begin{bmatrix} -1 \\ -\alpha - 1 \\ -\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = A\sqrt{T} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha - 1 \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

- g) Halle aproximadamente la probabilidad de error de cada bit a partir de las distancias euclídeas entre los símbolos del apartado anterior y compárela con la obtenida en I) para $\alpha = 1$ y con la del ecualizador. Razone si el hecho de usar un espacio de dimensión mayor

debe dar lugar a mejores, peores o idénticas prestaciones. Razone si el detector óptimo se colapsa o no para el canal $\alpha = 1$.

Solución:

Para el bit $b0$ hay que considerar las distancias:

$$\begin{aligned}d_{01} &= A\sqrt{T}|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1| = A\sqrt{T}\sqrt{2^2 + (2\alpha)^2} = 2A\sqrt{T}\sqrt{1 + \alpha^2} \\d_{02} &= A\sqrt{T}|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_2| = A\sqrt{T}\sqrt{2^2 + (2\alpha + 2)^2 + (2\alpha)^2} = 2A\sqrt{T}\sqrt{2}\sqrt{1 + \alpha + \alpha^2} \\d_{13} &= A\sqrt{T}|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3| = A\sqrt{T}\sqrt{2^2 + (-2\alpha + 2)^2 + (2\alpha)^2} = 2A\sqrt{T}\sqrt{2}\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}\end{aligned}$$

Para el bit $b1$ hay que considerar las mismas distancias:

$$\begin{aligned}d_{02} \\d_{03} &= d_{01} \\d_{13}\end{aligned}$$

Cogemos la menor de las distancias d_{01} , d_{02} y d_{13} . d_{02} se descarta por ser mayor a las otras dos. Para ver cuál es la menor entre d_{01} y d_{13} calculamos para que valor de α se produce la igualdad $d_{01}=d_{13}$. Ello ocurre para $\alpha=1$. Para el resto de valores de α , d_{01} es siempre la distancia mínima. Por tanto:

$$\begin{aligned}P_e &= Q\left(\frac{d_{01}}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{4A^2T(1+\alpha^2)}{2N_o}}\right) \\A^2 &= \frac{E_b}{T} \\P_e &= Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}(1+\alpha^2)}\right)\end{aligned}$$

Observaciones: No se colapsa para $\alpha=1$. α en este caso es favorable, en contra de lo que ocurre con el ecualizador. En este caso se obtiene el mismo valor hallado con el método a). Las formas de onda de la base escogidas no afectan a las prestaciones del detector.

- h) En general, ¿cuál sería la dimensión del espacio de señal para los métodos I) y II) formulados en el caso de transmitir una secuencia de L bits por un canal de duración P bits?

Solución:

$$\begin{aligned}\text{I) } \dim &= 2^L \\ \text{II) } \dim &= 2^L + P - 1\end{aligned}$$

3.5 Ejercicio de examen de control noviembre 2004 (J. Rodríguez Fonollosa)

3.5.1 Enunciado

La expresión general de la señal recibida en esquemas de modulaciones de pulsos es:

$$r(t) = s(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_m[n](t - nT) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[n] \varphi_l(t - nT) + w(t)$$

En donde las funciones $\varphi_l(t)$ para $l \in \{1, \dots, L\}$ forman una base ortonormal y los coeficientes $\alpha_{ml}[n] \in \{a, -a\}$ son las coordenadas de los símbolos s_m transmitidos en el instante nT . Denominamos M al número de posibles símbolos transmitidos en cada periodo de símbolo T . Se considerará transmisión de símbolos *equiprobables* en canal ideal y recepción contaminada con ruido gaussiano blanco aditivo (AWGN) $w(t)$ de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$. Se considerará una dimensión del espacio de señal $L = 3$, para transmitir ocho símbolos, $M = 2^L = 8$, de forma que las coordenadas de los mismos son todas las posibles combinaciones de:

$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} \pm a \\ \pm a \\ \pm a \end{pmatrix}$$

- Expresar las coordenadas en función de la energía por símbolo E_s y la energía por bit E_b .
- Proponga un esquema del receptor óptimo para detectar esta modulación indicando la expresión de la respuesta impulsional de los filtros y los instantes óptimos de muestreo.
- Expresar la función densidad de probabilidad de la señal recibida en el espacio de la señal condicionada a la transmisión de cada uno de los símbolos posibles. A partir de la aplicación del criterio de decisión *MAP* indique de forma analítica la decisión sobre los símbolos transmitidos.

Nota: Para simplificar al máximo la expresión anterior se aconseja utilizar la función $\text{sgn}(x) = \{1, x \geq 0; -1, x < 0\}$.

- Calcule la probabilidad de error de símbolo de forma exacta que resulta de la aplicación del criterio *MAP* y exprese la mediante la función $Q(x) \triangleq \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda$ en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

Nota: Es aconsejable realizar el cálculo de la probabilidad de no error y expresar la probabilidad de error en función de ésta.

- Proponga una buena aproximación de la probabilidad de error de símbolo para relaciones señal a ruido altas.
- Generalice los resultados anteriores (tanto la expresión exacta como la aproximada) para valores de L arbitrarios suponiendo que los símbolos se siguen definiendo como:

$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} \pm a \\ \pm a \\ \vdots \\ \pm a \end{pmatrix}$$

y por tanto con $M = 2^L$.

A partir de este punto la el valor la dimensión del espacio de señal vuelve a ser $L = 3$.

Debido a errores de implementación, la respuesta impulsional de los filtros adaptados del receptor no es ideal y sigue la siguiente expresión:

$$h_l(t) = \varphi_l(T-t) + \sum_{j=1, j \neq l}^3 \rho_{lj} \varphi_j(T-t) \quad ; \quad \rho_{jl} = \rho_{lj}$$

- g) Proponga una ecuación matricial del vector de muestras a la salida de los filtros adaptados (no ideales) en función *del vector de ruido que se tendría si los filtros fueran ideales* y del vector de símbolos transmitidos. Es decir que proporcione:

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \\ y_3[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1((n+1)T) \\ y_2((n+1)T) \\ y_3((n+1)T) \end{bmatrix}$$

en función de

$$\mathbf{n} \triangleq \begin{bmatrix} \beta_1[n] \\ \beta_2[n] \\ \beta_3[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1((n+1)T) \\ \beta_2((n+1)T) \\ \beta_3((n+1)T) \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta_l(t) = w(t) * \varphi_l(t)$$

y

$$\mathbf{s}_m = \begin{bmatrix} \alpha_{m1}[n] \\ \alpha_{m2}[n] \\ \alpha_{m3}[n] \end{bmatrix}$$

- h) En primer lugar, supondremos que los coeficientes ρ_{lj} se conocen de forma exacta. Proponga una transformación a aplicar al vector \mathbf{y} que nos permita obtener los símbolos transmitidos \mathbf{s}_m de forma aproximada. Aplique el criterio *MAP* a la señal transformada para obtener una estimación óptima de los símbolos transmitidos.
- i) Finalmente, nos proponemos la utilización alternativa de un filtro de *Wiener* (criterio *MSE*) para la obtención de cada una de las coordenadas de los símbolos transmitidos. Para ello, definimos la siguiente señal de error para la primera coordenada:

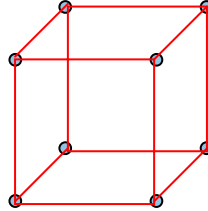
$$e_1[n] = y_1[n]g_{11} + y_2[n]g_{21} + y_3[n]g_{31} - \alpha_{m1}[n] = \begin{bmatrix} y_1[n] & y_2[n] & y_3[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \end{bmatrix} - \alpha_{m1}[n] = \mathbf{y}^T \mathbf{g}_1 - \alpha_{m1}$$

- j) Proporcione una expresión de los coeficientes g_{il} que minimizan la potencia de la señal de error definida anteriormente.

3.5.2 Resolución:

- a) Exprese las coordenadas en función de la energía por símbolo E_s y la energía por bit E_b .

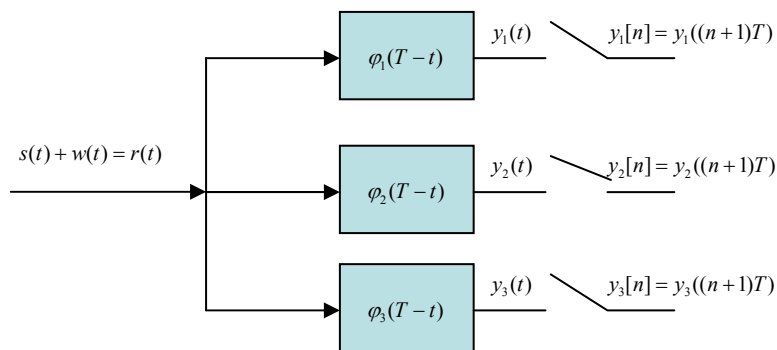
Solución:



$$E_s = 3E_b = 3a^2 \Rightarrow \mathbf{s}_m = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{E_s} \\ \pm\sqrt{E_s} \\ \pm\sqrt{E_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{E_b} \\ \pm\sqrt{E_b} \\ \pm\sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$

- b) Proponga un esquema del receptor óptimo para detectar esta modulación indicando la expresión de la respuesta impulsional de los filtros y los instantes óptimos de muestreo.

Solución:



- c) Exprese la función densidad de probabilidad de la señal recibida en el espacio de la señal condicionada a la transmisión de cada uno de los símbolos posibles. A partir de la aplicación del criterio de decisión *MAP* indique de forma analítica la decisión sobre los símbolos transmitidos.

Nota: Para simplificar al máximo la expresión anterior se aconseja utilizar la función $\text{sgn}(x) = \{1, x \geq 0 ; -1, x < 0\}$.

Solución:

$$\mathbf{y} | \mathbf{s}_m \sim N\left(\mathbf{s}_m, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_L\right) \quad ; \quad y_l \sim N\left(\alpha_{ml}, \frac{N_0}{2}\right)$$

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}_m}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) = f(y_1, \dots, y_L | \alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mL}) = \prod_{l=1}^L f(y_l | \alpha_{ml}) = \prod_{l=1}^L \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y_l - \alpha_{ml})^2}{N_0}\right) =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi N_0})^L} \exp\left(-\frac{\sum_{l=1}^L (y_l - \alpha_{ml})^2}{N_0}\right) = \frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0}\right)$$

El criterio *MAP* equivale al *ML* para símbolos equiprobables resultando en:

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} \Pr\{\mathbf{s}_m | \mathbf{y}\} = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}_m}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 =$$

$$= \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmin}} \left((y_1 \mp \sqrt{E_b})^2 + (y_2 \mp \sqrt{E_b})^2 + (y_3 \mp \sqrt{E_b})^2 \right) = \sqrt{E_b} \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(y_1) \\ \operatorname{sgn}(y_2) \\ \operatorname{sgn}(y_3) \end{bmatrix} = \sqrt{E_b} \operatorname{sgn}(\mathbf{y})$$

- d) Calcule la probabilidad de error de símbolo de forma exacta que resulta de la aplicación del criterio MAP y expésela mediante la función $Q(x) \triangleq \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda$ en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

Nota: Es aconsejable realizar el cálculo de la probabilidad de no error y expresar la probabilidad de error en función de ésta.

Solución:

La probabilidad de error de símbolo sigue la expresión:

$$\Pr(e) = \frac{1}{8} \sum_{m=1}^8 \Pr(e | \mathbf{s}_m)$$

Por simetría la probabilidad de error es la misma en todos los símbolos. Calculándola, por ejemplo, para el símbolo \mathbf{s}_1 :

$$\mathbf{s}_1 = \sqrt{E_b} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resulta en este caso más fácil el cálculo de la probabilidad de no tener error:

$$\Pr(e | \mathbf{s}_1) = \int_{\mathbf{y} \notin \mathcal{R}_1} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_1) d\mathbf{y} = 1 - \int_{\mathbf{y} \in \mathcal{R}_1} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_1) d\mathbf{y}$$

Resultando:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{y} \in \mathcal{R}_1} f(\mathbf{y} | s_1) d\mathbf{y} &= \int_{\mathbf{y} \in \mathcal{R}_1} \frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_1\|^2}{N_0}\right) d\mathbf{y} = \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(y_1 - \sqrt{E_b})^2}{N_0}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_2 - \sqrt{E_b})^2}{N_0}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_3 - \sqrt{E_b})^2}{N_0}\right) dy_1 dy_2 dy_3 = \\
&= \left[\int_{\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) d\lambda \right]^3 = \left[1 - \int_{\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) d\lambda \right]^3 = \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \right]^3
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\Pr(e) = 1 - \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \right]^3$$

- e) Proponga una buena aproximación de la probabilidad de error de símbolo para relaciones señal a ruido altas.

Solución:

Despreciando los términos de $Q(\cdot)^2$ y $Q(\cdot)^3$ resulta:

$$\Pr(e) \approx 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- f) Generalice los resultados anteriores (tanto la expresión exacta como la aproximada) para valores de L arbitrarios suponiendo que los símbolos se siguen definiendo como:

$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} \pm a \\ \pm a \\ \vdots \\ \pm a \end{pmatrix}$$

y por tanto con $M = 2^L$.

Solución:

$$\Pr(e) = 1 - \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \right]^L$$

$$\Pr(e) \approx LQ\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

A partir de este punto la el valor la dimensión del espacio de señal vuelve a ser $L = 3$.

- g) Proponga una ecuación matricial del vector de muestras a la salida de los filtros adaptados (no ideales) en función *del vector de ruido que se tendría si los filtros fueran ideales* y del vector de símbolos transmitidos. Es decir que proporcione:

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \\ y_3[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1((n+1)T) \\ y_2((n+1)T) \\ y_3((n+1)T) \end{bmatrix}$$

en función de

$$\mathbf{n} \triangleq \begin{bmatrix} \beta_1[n] \\ \beta_2[n] \\ \beta_3[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1((n+1)T) \\ \beta_2((n+1)T) \\ \beta_3((n+1)T) \end{bmatrix} ; \quad \beta_l(t) = w(t) * \varphi_l(t)$$

y

$$\mathbf{s}_m = \begin{bmatrix} \alpha_{m1}[n] \\ \alpha_{m2}[n] \\ \alpha_{m3}[n] \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= (s(t) + w(t)) * h_1(t) \Big|_{t=(n+1)T} = \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^3 \alpha_{ml}[n] \varphi_l(t - nT) + w(t) \right) * \left(\varphi_1(T - t) + \sum_{j=2}^3 \rho_{1j} \varphi_j(T - t) \right) \Big|_{t=(n+1)T} = \\ &= \alpha_{m1}[n] + \rho_{12} \alpha_{m2}[n] + \rho_{13} \alpha_{m3}[n] + \beta_1[n] + \rho_{12} \beta_2[n] + \rho_{13} \beta_3[n] \end{aligned}$$

El resto de coordenadas se calcula de forma similar. Mediante expresión vectorial y eliminando la dependencia del índice temporal $[n]$ se obtiene:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{s}_m + \mathbf{n}) \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

- h) En primer lugar supondremos que los coeficientes ρ_{ij} se conocen de forma exacta. Proponga una transformación a aplicar al vector \mathbf{y} que nos permita obtener los símbolos transmitidos \mathbf{s}_m de forma aproximada. Aplique el criterio *MAP* a la señal transformada para obtener una estimación óptima de los símbolos transmitidos.

Solución:

$$\mathbf{C}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$$

La aplicación de la matriz \mathbf{C}^{-1} permite obtener de forma precisa la señal que se obtendría utilizando el receptor óptimo (con filtros ideales) y por tanto puede aplicarse el resultado del apartado c):

$$\hat{\mathbf{s}}_m^{MAP} = \sqrt{E_b} \operatorname{sgn}(\mathbf{C}^{-1} \mathbf{y})$$

- i) Finalmente, nos proponemos la utilización alternativa de un filtro de *Wiener* (criterio *MSE*) para la obtención de cada una de las coordenadas de los símbolos transmitidos. Para ello definimos la siguiente señal de error para la primera coordenada:

Solución:

$$e_1[n] = y_1[n]g_{11} + y_2[n]g_{21} + y_3[n]g_{31} - \alpha_{m1}[n] = \begin{bmatrix} y_1[n] & y_2[n] & y_3[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \end{bmatrix} - \alpha_{m1}[n] = \mathbf{y}^T \mathbf{g}_1 - \alpha_{m1}$$

- j) Proporcione una expresión de los coeficientes g_{i1} que minimizan la potencia de la señal de error definida anteriormente.

Solución:

Por el principio de ortogonalidad aplicando filtrado de Wiener resulta:

$$E[\mathbf{y}e_1[n]] = \mathbf{0} \Rightarrow E[\mathbf{y}(\mathbf{y}^T \mathbf{g}_1 - \alpha_{m1})] = \mathbf{0}$$

Separando términos:

$$E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] \mathbf{g}_1 = E[\mathbf{y}\alpha_{m1}]$$

Resultando en (también puede calcularse de forma individual para cada componente):

$$\begin{aligned} E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] &= E[\mathbf{C}(\mathbf{s}_m + \mathbf{n})(\mathbf{s}_m + \mathbf{n})^T \mathbf{C}^T] = \mathbf{C}E[(\mathbf{s}_m + \mathbf{n})(\mathbf{s}_m + \mathbf{n})^T] \mathbf{C}^T = \mathbf{C}\left(E_s \mathbf{I} + \frac{N_0}{2} \mathbf{I}\right) \mathbf{C}^T \\ &= \left(E_s + \frac{N_0}{2}\right) \mathbf{C}\mathbf{C}^T \\ E[\mathbf{y}\alpha_{m1}] &= \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{21} \\ \rho_{31} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\mathbf{g}_1 = \frac{1}{E_s + \frac{N_0}{2}} (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{21} \\ \rho_{31} \end{bmatrix}$$

3.6 Ejercicio de Examen de control Noviembre 2000 (J. Fernández-Rubio)

3.6.1 Enunciado

Una secuencia cuaternaria de símbolos independientes y equiprobables $m_1 = '11'$, $m_2 = '10'$, $m_3 = '00'$ y $m_4 = '01'$ es transmitida mediante las formas de onda:



$s_3(t) = -s_1(t)$; $s_4(t) = -s_2(t)$, usando como base:



- Halle el valor de c para que la base sea ortonormal. Determine y dibuje la constelación de señal en el espacio de señal determinado por esa base. Expresé A en función de la energía promedio por símbolo.
- Dibuje el diagrama de bloques del sistema de transmisión incluyendo canal, ruido, filtros adaptados correspondientes a la base dada y detector óptimo. ¿Cuál debe ser el instante de muestreo para obtener el vector señal correspondiente al instante mT -ésimo?
- Calcule la probabilidad de error de símbolo P_e y de bit BER del sistema en función de la E_b / N_o para canal ideal y ruido blanco gaussiano. El ruido presenta una densidad espectral de potencia $S_n(f) = N_o / 2$.

Supóngase a partir de ahora que el canal es de la forma $h_c(t) = \delta(t) - \lambda\delta(t - T/2)$ con $0 < \lambda < 1$

Nota: Tenga en cuenta que la señal digital puede escribirse como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{i[n]}(t - nT) \quad \text{siendo} \quad \{s_{i[n]}(t)\} \equiv s_i(t); \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{y que puede descomponerse como :}$$

$$s_{i[n]}(t) = \alpha_{n,1}\phi_1(t) + \alpha_{n,2}\phi_2(t) = \alpha_1(n)\phi_1(t) + \alpha_2(n)\phi_2(t)$$

- Demuestre que el vector de señal a la salida de los filtros adaptados (información relevante) y tras el muestreo en los instantes dados en el apartado b) viene dado por :

$$r_1(m) = d\alpha_1(m) + e\alpha_2(m) + f\alpha_1(m-1) + g\alpha_2(m-1) + n_1(m)$$

$$r_2(m) = h\alpha_1(m) + i\alpha_2(m) + j\alpha_1(m-1) + k\alpha_2(m-1) + n_2(m)$$

Determine los valores de las constantes d, e, f, g, h, i, j, k .

- e) Dibuje la constelación de la señal detectada a la salida de los filtros adaptados a partir de las expresiones indicadas en el apartado d). Calcule la nueva probabilidad de error de símbolo P_e .
- f) Considere la rama que contiene la información relevante $r_1(m)$ indicada en el apartado d) y que está afectada por ISI tanto de las componentes cruzadas del símbolo actual como de los símbolos pasados. Diseñe las ecuaciones de un filtro ecualizador de cuatro coeficientes que permite recuperar la componente $\alpha_1(m)$ con mínimo error cuadrático medio (*Wiener*).
- g) Razone los motivos por los que el ecualizador indicado en el apartado anterior puede ser mejorado al no utilizar toda la información disponible para ecualizar la señal $r_1(m)$. Represente cualitativamente y describa brevemente el diagrama de ecualización que permitiría mejorar las prestaciones del ecualizador dado en el apartado e).

3.6.2 Resolución

- a) Halle el valor de c para que la base sea ortonormal. Determine y dibuje la constelación de señal en el espacio de señal determinado por esa base. Expresé A en función de la energía promedio por símbolo.

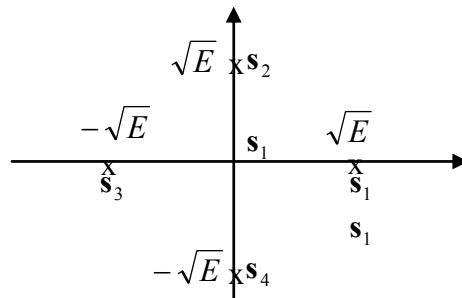
Solución:

Normalización $\int_0^T \phi_1^2(t)dt = \int_0^T \phi_2^2(t)dt = c^2 T = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{T}}$

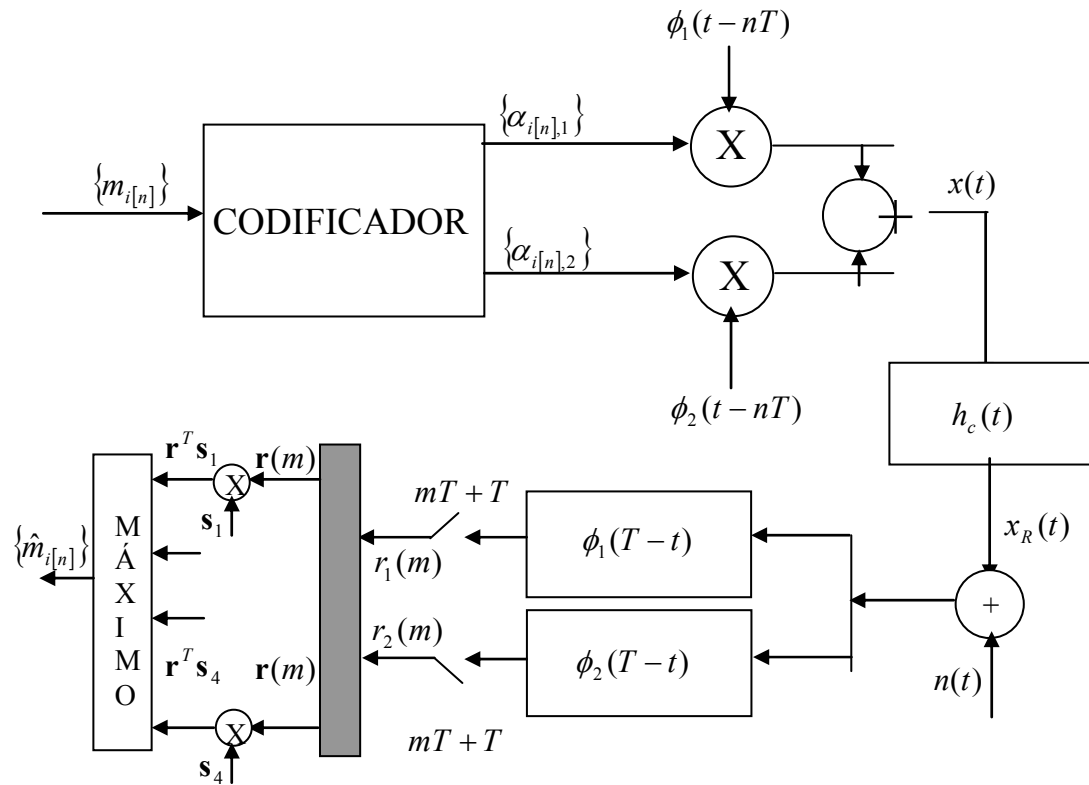
$$E_i = A^2 T; i = 1, 2, 3, 4; \quad P_i = \frac{1}{4}; i = 1, 2, 3, 4; \quad E = \sum_{i=1}^4 P_i E_i = A^2 T \Rightarrow A = \sqrt{\frac{E}{T}}$$

$$s_1(t) = \sqrt{E} \phi_1(t) = -s_3(t) \quad s_2(t) = \sqrt{E} \phi_2(t) = -s_4(t)$$

$$\mathbf{s}_1 = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{s}_2 = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{s}_3 = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{s}_4 = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



- b) Dibuje el diagrama de bloques del sistema de transmisión incluyendo canal, ruido, filtros adaptados correspondientes a la base dada y detector óptimo. ¿Cuál debe ser el instante de muestreo para obtener el vector señal correspondiente al instante mT -ésimo?.

Solución:

- c) Calcule la probabilidad de error de símbolo P_e y de bit BER del sistema en función de la E_b/N_o para canal ideal y ruido blanco gaussiano. El ruido presenta una densidad espectral de potencia $S_n(f) = N_o/2$.

Solución:

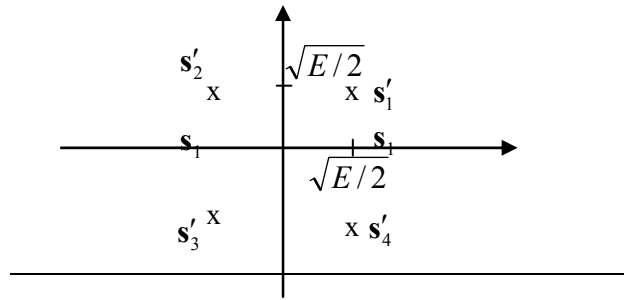
Si el canal es ideal no habrá ISI y la salida de los filtros adaptados vendrá dada por:

$$r_1(m) = \alpha_1(m) + n_1(m)$$

$$r_2(m) = \alpha_2(m) + n_2(m)$$

Siendo $\alpha_1(m)$ y $\alpha_2(m)$ las componentes del vector $\mathbf{s}_{i[m]}$, $n_1(m)$ y $n_2(m)$ son las componentes independientes del ruido con valor medio nulo y varianza $N_o/2$.

Para calcular la probabilidad de error se gira la constelación 45° en sentido antihorario (equivalente los ejes en sentido horario)



La función densidad de probabilidad es invariante ante el giro. Los cuatro vectores tienen la misma probabilidad de detección. Al ser equiprobables coincidirá con la probabilidad de detección total.

$$P_{d_i} = P_{d_1} = P_d = \int_0^\infty \int_0^\infty (\pi N_0)^{-1} e^{-\frac{1}{N_0}(r_1 - \sqrt{E/2})^2} e^{-\frac{1}{N_0}(r_2 - \sqrt{E/2})^2} dr_1 dr_2 = \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) \right]^2$$

La probabilidad de error de símbolo será:

$$P_e = 1 - P_d = 2Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) \cong 2Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

Dado que se transmite un código de Gray, el error en un símbolo se traduce prácticamente en el error en un bit, por tanto la BER es la mitad de la probabilidad de símbolo.

$$BER = P_{eb} \cong \frac{1}{2} P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- d) Demuestre que el vector de señal a la salida de los filtros adaptados (información relevante) y tras el muestreo en los instantes dados en el apartado b) viene dado por :

$$\begin{aligned} r_1(m) &= d\alpha_1(m) + e\alpha_2(m) + f\alpha_1(m-1) + g\alpha_2(m-1) + n_1(m) \\ r_2(m) &= h\alpha_1(m) + i\alpha_2(m) + j\alpha_1(m-1) + k\alpha_2(m-1) + n_2(m) \end{aligned}$$

Determine los valores de las constantes d, e, f, g, h, i, j, k .

Solución:

La componente i -ésima del vector observado viene dada por

$$r_i(m) = [x(t) * h_c(t) + n(t)] * \phi_i(T-t) \Big|_{t=mT+T} ; i=1,2 \quad \text{sustituyendo:}$$

$$r_j(m) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\alpha_1(n)\phi_1(t-nT) + \alpha_2(n)\phi_2(t-nT)] * h_c(t) + n(t) \right\} * \phi_j(T-t) \Big|_{t=mT+T}$$

$$r_j(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_1(n) \{ R_{\phi_1\phi_j}[(m-n)T] - \lambda R_{\phi_1\phi_j}[(m-n)T - T/2] \} + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_2(n) \{ R_{\phi_2\phi_j}[(m-n)T] - \lambda R_{\phi_2\phi_j}[(m-n)T - T/2] \} + n_j(m)$$

siendo $n_j(m) = n(t) * \phi_j(T-t) \Big|_{t=mT+T}$ $j=1,2$

Teniendo en cuenta que las funciones base están limitadas a la duración del intervalo de pulso:

$$r_j(m) = \alpha_1(m) [R_{\phi_1\phi_j}(0) - \lambda R_{\phi_1\phi_j}(-T/2)] + \alpha_2(m) [R_{\phi_2\phi_j}(0) - \lambda R_{\phi_2\phi_j}(-T/2)] \\ - \lambda \alpha_1(m-1) R_{\phi_1\phi_j}(T/2) - \lambda \alpha_2(m-1) R_{\phi_2\phi_j}(T/2) + n_j(m)$$

Las autocorrelaciones y correlaciones cruzadas de las funciones base son:

$$R_{\phi_1\phi_1}(0) = R_{\phi_2\phi_2}(0) = 1; \quad R_{\phi_1\phi_1}(-T/2) = R_{\phi_1\phi_1}(T/2) = 1/2; \\ R_{\phi_1\phi_2}(0) = R_{\phi_2\phi_1}(0) = 0; \quad R_{\phi_2\phi_2}(-T/2) = R_{\phi_2\phi_2}(T/2) = -1/2; \\ R_{\phi_1\phi_2}(-T/2) = R_{\phi_2\phi_1}(T/2) = -1/2; \quad R_{\phi_1\phi_2}(T/2) = R_{\phi_2\phi_1}(-T/2) = 1/2$$

Sustituyendo se obtiene finalmente:

$$r_1(m) = (1 - \lambda/2) \alpha_1(m) - \lambda/2 \alpha_2(m) - \lambda/2 \alpha_1(m-1) + \lambda/2 \alpha_2(m-1) + n_1(m) \\ r_2(m) = \lambda/2 \alpha_1(m) + (1 + \lambda/2) \alpha_2(m) - \lambda/2 \alpha_1(m-1) + \lambda/2 \alpha_2(m-1) + n_2(m)$$

Es interesante escribir el resultado en forma vectorial:

$$\mathbf{r}(m) = \mathbf{s}(m) + \mathbf{A}_0^T \mathbf{s}(m) + \mathbf{A}_1^T \mathbf{s}(m-1) + \mathbf{n}(m)$$

siendo:

$$\mathbf{r}(m) = \begin{bmatrix} r_1(m) \\ r_2(m) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}(m) = \begin{bmatrix} \alpha_1(m) \\ \alpha_2(m) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_0 = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_1 = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se ve claramente que el símbolo $\mathbf{s}(m)$ se ve afectado no sólo por la ISI del símbolo anterior, sino por la del propio símbolo.

- e) Dibuje la constelación de la señal detectada a la salida de los filtros adaptados a partir de las expresiones indicadas en el apartado d). Calcule la nueva probabilidad de error de símbolo P_e .

Solución:

En principio, hay 16 posibles salida en cada rama. La tabla de valores es la siguiente:

$\frac{\alpha_1(m)}{\sqrt{E}}$	$\frac{\alpha_2(m)}{\sqrt{E}}$	$\frac{\alpha_1(m-1)}{\sqrt{E}}$	$\frac{\alpha_2(m-1)}{\sqrt{E}}$	$\frac{[r_1(m)-n_1(m)]}{\sqrt{E}}$	$\frac{[r_2(m)-n_2(m)]}{\sqrt{E}}$
1	0	1	0	$1-\lambda$	0
1	0	0	1	1	λ
1	0	-1	0	1	λ
1	0	0	-1	$1-\lambda$	0
0	1	1	0	$-\lambda$	1
0	1	0	1	0	$1+\lambda$
0	1	-1	0	0	$1+\lambda$
0	1	0	-1	$-\lambda$	1
-1	0	1	0	-1	$-\lambda$
-1	0	0	1	$-1+\lambda$	0
-1	0	-1	0	$-1+\lambda$	0
-1	0	0	-1	-1	$-\lambda$
0	-1	1	0	0	$-1-\lambda$
0	-1	0	1	λ	-1
0	-1	-1	0	λ	-1
0	-1	0	-1	0	$-1-\lambda$

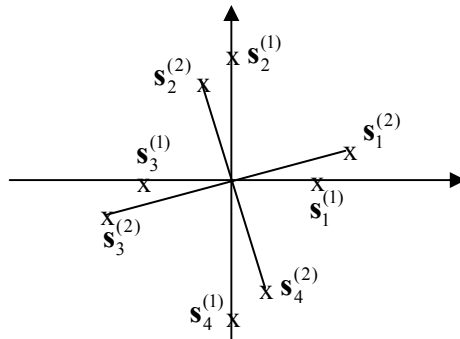
Puede observarse que en realidad hay 8 vectores posibles. Esto quiere decir que cuando se transmite el vector $\mathbf{s}_i(m)$ $i=1,2,3,4$ pueden recibirse dos vectores diferentes dependiendo del vector transmitido en el instante $(m-1)$ ésimo. De acuerdo con la tabla:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1^{(1)} &= \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_1^{(2)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_2^{(1)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -\lambda \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_2^{(2)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\lambda \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}_3^{(1)} &= \sqrt{E} \begin{bmatrix} -1+\lambda \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_3^{(2)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -1 \\ -\lambda \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_4^{(1)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \lambda \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_4^{(2)} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ -1-\lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

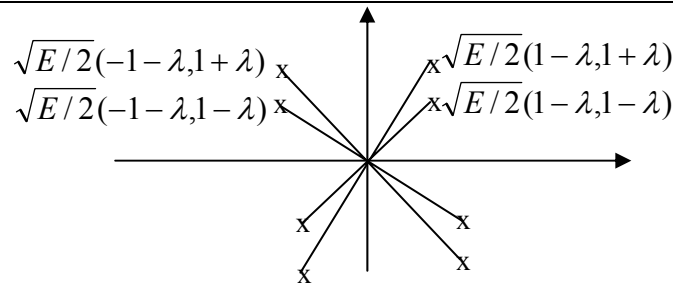
Obsérvese que

$$\mathbf{s}_3^{(k)} = -\mathbf{s}_1^{(k)} \quad \text{y} \quad \mathbf{s}_4^{(k)} = -\mathbf{s}_2^{(k)}$$

Gráficamente:



Girando de nuevo los ejes 45° en sentido horario



La probabilidad de detección para \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_3 son las mismas, así como las de \mathbf{s}_2 y \mathbf{s}_4 .

$$P_{d_1} = P_{d_3} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - Q \left[(1-\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ 1 - Q \left[(1-\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\} \left\{ 1 - Q \left[(1+\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\}$$

$$P_{d_2} = P_{d_4} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - Q \left[(1+\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ 1 - Q \left[(1-\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\} \left\{ 1 - Q \left[(1+\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \right\}$$

$$P_d = \frac{1}{2} P_{d_1} + \frac{1}{2} P_{d_2} \cong 1 - Q \left[(1-\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \text{ para } \lambda \text{ suficientemente grande}$$

$$P_e \cong Q \left[(1-\lambda) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right]$$

- f) Considere la rama que contiene la información relevante $r_1(m)$ indicada en el apartado d) y que está afectada por ISI tanto de las componentes cruzadas del símbolo actual como de los símbolos pasados. Diseñe las ecuaciones de un filtro ecualizador de cuatro coeficientes que permite recuperar la componente $\alpha_1(m)$ con mínimo error cuadrático medio (*Wiener*).

Solución:

El filtro de *Wiener* minimiza el error cuadrático medio entre la salida del filtro y $\alpha_1(m-L)$ siendo L un retardo, en principio arbitrario, comprendido entre 0 y 3.

(Puede comprobarse numéricamente que en este ejercicio $L=1$ es el que proporciona el error cuadrático medio más pequeño)

$$e(m) = \alpha_1(m-L) - \sum_{k=0}^3 h_k r_1(m-k)$$

$$\xi = E\{e^2(m)\}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_l} = E \left\{ 2e(m) \frac{\partial e(m)}{\partial h_l} \right\} = E \{ -2e(m)r_1(m-l) \} = -2 \left[R_{\alpha_1 r_1}(l-L) - \sum_{k=0}^3 h_k R_{r_1}(l-k) \right] = 0;$$

$$l=0,1,2,3$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_{r_1}(0) & R_{r_1}(-1) & R_{r_1}(-2) & R_{r_1}(-3) \\ R_{r_1}(1) & R_{r_1}(0) & R_{r_1}(-1) & R_{r_1}(-2) \\ R_{r_1}(2) & R_{r_1}(1) & R_{r_1}(0) & R_{r_1}(-1) \\ R_{r_1}(3) & R_{r_1}(2) & R_{r_1}(1) & R_{r_1}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\alpha_1 r_1}(-L) \\ R_{\alpha_1 r_1}(-L+1) \\ R_{\alpha_1 r_1}(-L+2) \\ R_{\alpha_1 r_1}(-L+3) \end{bmatrix}$$

Para símbolos independientes:

$$R_{r_1}(n) = E\{r_1(m+n)r_1(m)\} = \left[(1-\lambda + \lambda^2) \frac{E}{2} + \frac{N_0}{2} \right] \delta(n) - \frac{\lambda}{2} \frac{E}{2} \delta(n+1) - \frac{\lambda}{2} \frac{E}{2} \delta(n-1)$$

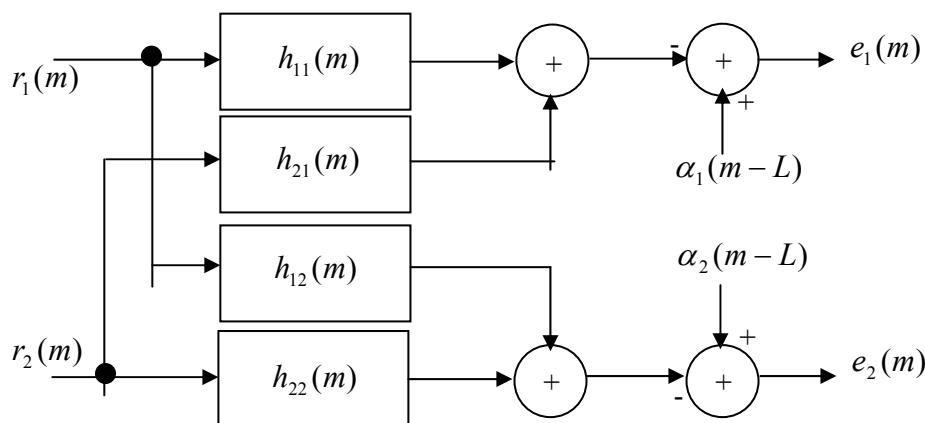
$$R_{\alpha_1 r_1}(n) = E\{\alpha_1(m+n)r_1(m)\} = (1 - \frac{\lambda}{2}) \frac{E}{2} \delta(n) - \frac{\lambda}{2} \frac{E}{2} \delta(n+1)$$

Donde se ha tenido en cuenta que $E\{\alpha_1^2(m)\} = E\{\alpha_2^2(m)\} = \frac{E}{2}$ y que $E\{\alpha_1(m)\alpha_2(m)\} = 0$, ya que siempre una de las dos componentes se anula.

- g) Razone los motivos por los que el ecualizador indicado en el apartado anterior puede ser mejorado al no utilizar toda la información disponible para ecualizar la señal $r_1(m)$. Represente cualitativamente y describa brevemente el diagrama de ecualización que permitiría mejorar las prestaciones del ecualizador dado en el apartado e).

Solución:

El ecualizador puede ser mejorado utilizando la información de la rama inferior. Para ello pueden utilizarse 4 filtros (de 4 coeficientes cada uno, por ejemplo) como los indicados en la figura.

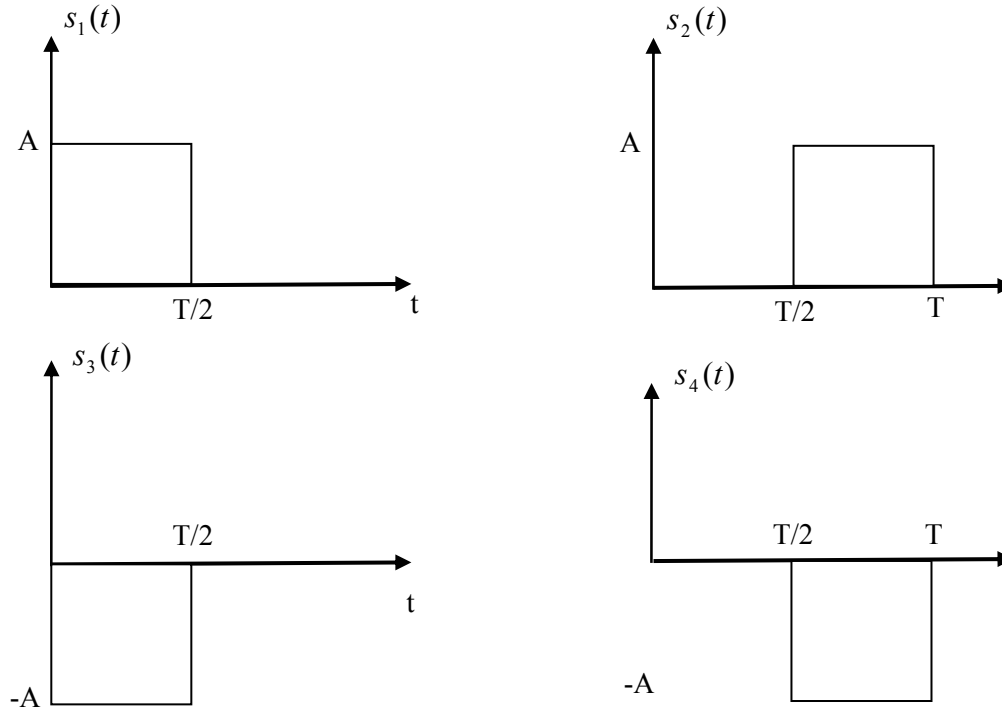


La magnitud a minimizar sería $\xi = E\{e_1^2(m) + e_2^2(m)\}$

3.7 Ejercicio de examen de control noviembre 2003 (J. Fernández-Rubio)

3.7.1 Enunciado

Una señal PPM biortogonal transmite 4 formas de onda como las expresadas en las siguientes figuras:



- Determine una base ortonormal de funciones $\Psi_j(t)$; $j=1,2,\dots,N$ para dichas formas de onda; obtenga los vectores señal \mathbf{s}_i $i=1,2,3,4$ en función de la energía promedio de símbolo, y dibuje el espacio de señal (Los símbolos son equiprobables e independientes).
- Obtenga la expresión de la señal digital $s(t)$, su densidad espectral y su potencia. Relacione esta última con la energía promedio por símbolo.

Nota: Para el cálculo de la densidad espectral puede partir de la expresión general de la correlación promediada:

$$R_s(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{s_{jk}}(m) R_{\Psi_j \Psi_k}(\tau - mT)$$

Siendo N la dimensión del espacio de señal, $R_{s_{jk}}(m) = E\{s_j(n+m)s_k(n)\}$ y

$$R_{\Psi_j \Psi_k}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(t+\tau)\Psi_k(t)dt.$$

$s_k(n)$ es la componente k -ésima del vector $\mathbf{s}(n)$

Recuerde que los símbolos son independientes. Para calcular la densidad espectral no es preciso calcular previamente la correlación.

- Halle el vector señal observado $\mathbf{r}(m) = [r_1(m), r_2(m), \dots, r_N(m)]^T$ y demuestre que se puede escribir como:

$$\mathbf{r}[m] = \mathbf{A}_0 \mathbf{s}[m] + \mathbf{A}_1 \mathbf{s}[m-1] + \mathbf{w}[m]$$

siendo $\mathbf{s}[m] \equiv \mathbf{s}_{i[m]}$ el símbolo transmitido en el periodo de símbolo m -ésimo

Determine las componentes de las matrices \mathbf{A}_0 y \mathbf{A}_1 , así como las componentes del vector ruido $\mathbf{w}(m)$.

- d) Calcule la matriz de covarianza del ruido, esto es, las varianzas del ruido en cada una de las ramas y la covarianzas de las componentes entre distintas ramas. Deduzca la relación que tiene que haber entre los distintos retardos en los filtros τ_k para que la matriz de covarianza sea diagonal, esto es, para que las covarianzas sean nulas o lo que es lo mismo, para que el ruido esté incorrelado entre las diferentes ramas.
- e) Si en el periodo m -ésimo se transmite el vector \mathbf{s}_1 , dibuje los vectores señal observados teniendo en cuenta todos los posibles vectores transmitidos en el intervalo anterior, $m-1$, y formule (no calcule) la probabilidad de detección de dicho símbolo.

El resto del ejercicio se puede hacer sin necesidad de conocer explícitamente los elementos de las matrices involucradas.

Aunque el canal es ideal, los errores en los filtros adaptados hacen que se pueda hablar de un canal digital matricial equivalente:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_c[m] &= \mathbf{A}_0 \delta[m] + \mathbf{A}_1 \delta[m-1] \quad \text{tal que:} \\ \mathbf{r}[m] &= \mathbf{H}_c[m] * \mathbf{s}[m] + \mathbf{w}[m] \end{aligned}$$

donde $\delta[m]$ es la delta de Kronecker.

Nota: Las convoluciones matriciales se realizan igual que las escalares, aunque respetando las reglas del producto matricial, en especial aquella que tiene en cuenta el orden del producto de las matrices, ya que no es conmutativo.

En estas condiciones se desea poner un forzador de ceros matricial de dos ‘coeficientes’ $\mathbf{H}[m] = \mathbf{H}_0 \delta[m] + \mathbf{H}_1 \delta[m-1]$ tal que:

$$\mathbf{H}[m] * \mathbf{H}_c[m] = \mathbf{I} \delta[m] \quad \text{para } m=0 \text{ y } m=1$$

siendo \mathbf{I} la matriz identidad.

- f) Determine las ‘coeficientes’ matriciales del forzador de ceros \mathbf{H}_0 y \mathbf{H}_1 . Déjelos expresados como productos de matrices.
- g) Calcule la salida del forzador de ceros y compruebe que puede escribirse como:

$$\mathbf{r}_0[m] = \mathbf{s}[m] + \mathbf{B} \mathbf{s}[m-2] + \mathbf{w}_0(m)$$

Expresa \mathbf{B} como un producto de matrices sin desarrollar.

- h) Halle la potencia del ruido $\sigma_{w_0}^2$ a la salida del forzador en el caso de que el ruido esté incorrelado a la entrada.

3.7.2 Resolución

- a) Determine una base ortonormal de funciones $\Psi_j(t)$; $j = 1, 2, \dots, N$ para dichas formas de onda, obtenga los vectores señal \mathbf{s}_i $i = 1, 2, 3, 4$ en función de la energía promedio de símbolo y dibuje el espacio de señal (Los símbolos son equiprobables e independientes).

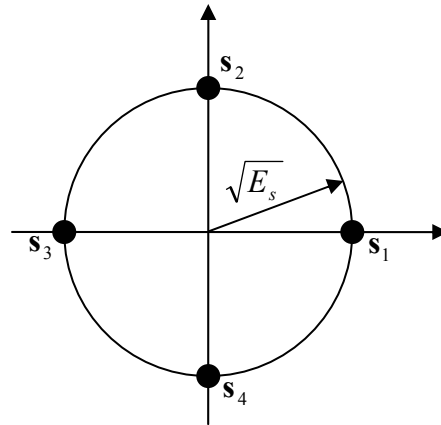
Solución:

$$\Psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right) \quad \Psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \Pi\left(\frac{t - 3T/4}{T/2}\right)$$

$$E_i = \int_{-\infty}^{\infty} s_i^2(t) dt = A^2 \frac{T}{2} \quad E_s = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 E_i = A^2 \frac{T}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_s}{T}}$$

$$s_1(t) = \sqrt{E_s} \Psi_1(t) = -s_3(t) \quad s_2(t) = \sqrt{E_s} \Psi_2(t) = -s_4(t)$$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{E_s} = -\mathbf{s}_3 \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{E_s} = -\mathbf{s}_4$$



- b) Obtenga la expresión de la señal digital $s(t)$, su densidad espectral y su potencia. Relacione esta última con la energía promedio por símbolo.

Solución:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{i[n]}[t - nT] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N s_{i[n]j} \Psi_j(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N s_j(n) \Psi_j(t - nT)$$

$$S_s(f) = \mathbf{F}[R_s(\tau)] = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N S_{\Psi_j \Psi_k}(f) \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{s_{jk}}(m) e^{-j2\pi m f T}$$

$$R_{s_{jk}}(m) = E\{s_j(n+m)s_k(n)\} = E\{s_j(n+m)\}E\{s_k(n)\} = 0; m \neq 0; E\{s_k(n)\} = 0; \forall k$$

$$R_{s_{jk}}(0) = E\{s_j(n)s_k(n)\} = \sum_{i=1}^M s_{ij}s_{ik} \Pr\{\mathbf{s}(n) = \mathbf{s}_i\} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 s_{ij}s_{ik}$$

$$R_{s_{11}}(0) = \frac{E_s}{2} = R_{s_{22}}(0) \quad R_{s_{12}}(0) = 0 = R_{s_{21}}(0)$$

$$S_{\Psi_j \Psi_k}(f) = \Phi_j(f) \Phi_k^*(f) \quad \Phi_j(f) = \mathbf{F}[\Psi_j(t)]$$

$$\Phi_1(f) = \sqrt{\frac{T}{2}} \sin c(\pi f T / 2) e^{-j2\pi f T / 4} \quad \Phi_2(f) = \sqrt{\frac{T}{2}} \sin c(\pi f T / 2) e^{-j2\pi f 3T / 4}$$

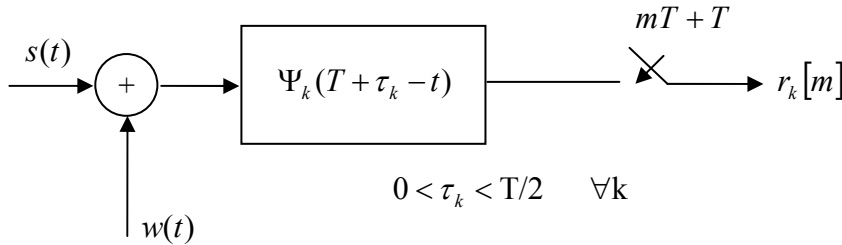
$$S_{\Psi_1 \Psi_1}(f) = \frac{T}{2} \sin^2 c(\pi f T / 2) = S_{\Psi_2 \Psi_2}(f); \quad S_{\Psi_1 \Psi_2}(f) = \frac{T}{2} \sin^2 c(\pi f T / 2) e^{-j\pi f T} = S_{\Psi_2 \Psi_1}^*(f)$$

El cálculo de los espectros cruzados no era necesario

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \left[\frac{E_s}{2} S_{\Psi_1 \Psi_1}(f) + \frac{E_s}{2} S_{\Psi_2 \Psi_2}(f) \right] = \frac{E_s S_{\Psi_1 \Psi_1}(f)}{T} = \frac{E_s}{2} \sin^2 c(\pi f T / 2)$$

$$P_s = \frac{E_s}{T} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\Psi_1 \Psi_1}(f) df = \frac{E_s}{T}$$

La señal se transmite a través de un canal ideal y es contaminada en el receptor con un ruido blanco gaussiano. No obstante los filtros adaptados del receptor tienen un error temporal, de forma que en la rama k-ésima el esquema es el de la figura.



- c) Halle el vector señal observado $\mathbf{r}(m) = [r_1(m), r_2(m), \dots, r_N(m)]^T$ y demuestre que se puede escribir como:

$$\mathbf{r}[m] = \mathbf{A}_0 \mathbf{s}[m] + \mathbf{A}_1 \mathbf{s}[m-1] + \mathbf{w}[m]$$

siendo $\mathbf{s}[m] \equiv \mathbf{s}_{i[m]}$ el símbolo transmitido en el periodo de símbolo m -ésimo

Determine las componentes de las matrices \mathbf{A}_0 y \mathbf{A}_1 , así como las componentes del vector ruido $\mathbf{w}(m)$.

Solución:

$$r_k(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N s_j(n) \Psi_j(t-nT) * \Psi_k(T + \tau_k - t) \Big|_{mT+T} + w(t) * \Psi_k(T + \tau_k - t) \Big|_{mT+T}$$

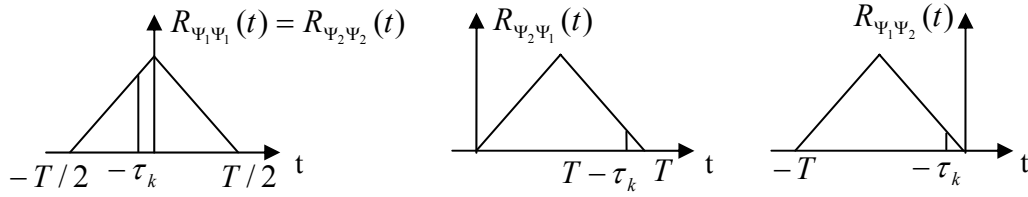
$$\Psi_j(t-nT) * \Psi_k(T + \tau_k - t) \Big|_{mT+T} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(mT + T - nT - \alpha) \Psi_k(T + \tau_k - \alpha) d\alpha =$$

$$= R_{\Psi_j \Psi_k}[(m-n)T - \tau_k]$$

$$w_k(m) = w(t) * \Psi_k(T + \tau_k - t) \Big|_{mT+T} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w(mT + T - \alpha) \Psi_k(T + \tau_k - \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} w(mT + u) \Psi_k(u + \tau_k) du$$

$$r_k(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N s_j(n) R_{\Psi_j \Psi_k}[(m-n)T - \tau_k] + w_k(m)$$



$$R_{\Psi_1 \Psi_1}[(m-n)T - \tau_k] = R_{\Psi_2 \Psi_2}[(m-n)T - \tau_k] = R_{\Psi_1 \Psi_1}(-\tau_k) \delta(n-m) = (1 - \frac{2\tau_k}{T}) \delta(n-m)$$

$$R_{\Psi_2 \Psi_1}[(m-n)T - \tau_k] = R_{\Psi_2 \Psi_1}(T - \tau_k) \delta(n-m+1) = \frac{2\tau_k}{T} \delta(n-m+1)$$

$$R_{\Psi_1 \Psi_2}[(m-n)T - \tau_k] = R_{\Psi_1 \Psi_2}(-\tau_k) \delta(n-m) = \frac{2\tau_k}{T} \delta(n-m)$$

$$r_1(m) - w_1(m) = R_{\Psi_1 \Psi_1}(-\tau_1) s_1(m) + R_{\Psi_2 \Psi_1}(T - \tau_1) s_2(m-1) = (1 - \frac{2\tau_1}{T}) s_1(m) + \frac{2\tau_1}{T} s_2(m-1)$$

$$r_2(m) - w_2(m) = R_{\Psi_1 \Psi_2}(-\tau_2) s_1(m) + R_{\Psi_2 \Psi_2}(-\tau_2) s_2(m) = \frac{2\tau_2}{T} s_1(m) + (1 - \frac{2\tau_2}{T}) s_2(m)$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\tau_1}{T} & 0 \\ \frac{2\tau_2}{T} & 1 - \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\tau_1}{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- d) Calcule la matriz de covarianza del ruido, esto es, las varianzas del ruido en cada una de las ramas y la covarianzas de las componentes entre distintas ramas. Deduzca la relación que tiene que haber entre los distintos retardos en los filtros τ_k para que la matriz de covarianza sea diagonal, esto es, para que las covarianzas sean nulas o lo que es lo mismo, para que el ruido esté incorrelado entre las diferentes ramas.

Solución:

$$c_{jk} = E\{w_j(m)w_k(m)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w(mT+u)\Psi_j(u+\tau_j)du \int_{-\infty}^{\infty} w(mT+v)\Psi_k(v+\tau_k)dv\right\}$$

$$c_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{w(mT+u)w(mT+v)\} \Psi_j(u+\tau_j) \Psi_k(v+\tau_k) dudv$$

$$c_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(u-v) \Psi_j(u+\tau_j) \Psi_k(v+\tau_k) dudv = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(v+\tau_j) \Psi_k(v+\tau_k) dv$$

$$c_{jk} = \frac{N_0}{2} R_{\Psi_j \Psi_k}(\tau_j - \tau_k); \quad c_{11} = c_{22} = \frac{N_0}{2}; \quad c_{12} = c_{21} = \frac{N_0}{2} R_{\Psi_1 \Psi_2}(\tau_1 - \tau_2)$$

La matriz será diagonal si $\tau_1 - \tau_2 \geq 0$.

- e) Si en el periodo m -ésimo se transmite el vector \mathbf{s}_1 , dibuje los vectores señal observados teniendo en cuenta todos los posibles vectores transmitidos en el intervalo anterior, $m-1$, y formule (no calcule) la probabilidad de detección de dicho símbolo.

Solución:

Hay 4 posibilidades, todas ellas con probabilidad $1/4$:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{r}(m) - \mathbf{w}(m) \big|_{\mathbf{s}(m) = \mathbf{s}_1} = \mathbf{A}_0 \mathbf{s}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\tau_1}{T} \\ \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s} + \begin{bmatrix} \frac{2\tau_1}{T} s_{i2} \\ 0 \end{bmatrix} \sqrt{E_s} =$$

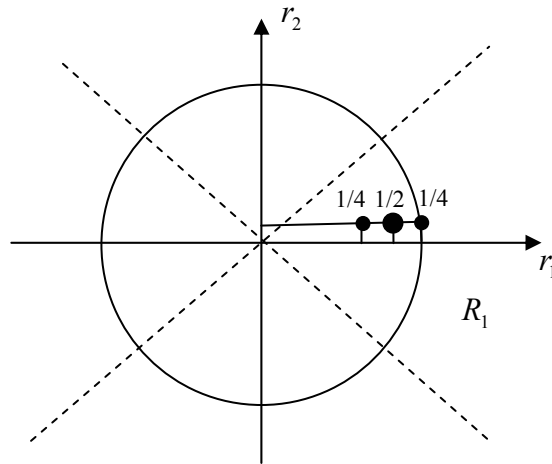
$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{2\tau_1}{T} + \frac{2\tau_1}{T} s_{i2} \\ \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s}$$

$i = 1, 2, 3, 4$

Los vectores son:

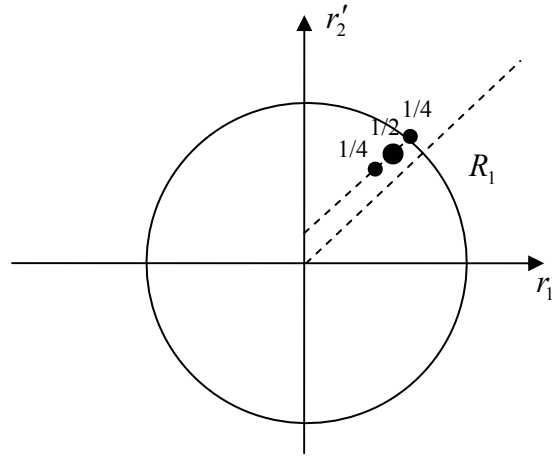
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\tau_1}{T} \\ \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s}; \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\tau_1}{T} \\ \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s}; \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{4\tau_1}{T} \\ \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s};$$

En realidad sólo hay 3 posibilidades ya que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_3$



$$P_{d1} = \int_{R_1} f_R(\mathbf{r}|\mathbf{s}_1) d\mathbf{r} = \sum_{l=1}^3 p_l \int_{R_1} (\pi N_0)^{-1} e^{-\frac{1}{N_0} \|\mathbf{r} - \mathbf{v}_l\|^2} \quad p_1 = p_3 = \frac{1}{4}; \quad p_2 = \frac{1}{2}$$

Si se quiere calcular la probabilidad, habrá que girar los ejes 45°



Las coordenadas de los nuevos vectores son:

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{G} \mathbf{v}_i \quad \text{La matriz de giro es: } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{v}'_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2(\tau_1 + \tau_2)}{T} \\ 1 - \frac{2(\tau_1 - \tau_2)}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s/2}; \quad \mathbf{v}'_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\tau_2}{T} \\ 1 + \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s/2}; \quad \mathbf{v}'_4 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2(2\tau_1 + \tau_2)}{T} \\ 1 - \frac{2(2\tau_1 - \tau_2)}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s/2}$$

$$P_{d1} = \sum_{l=1}^3 p_l \int_0^\infty (\pi N_0)^{-1/2} e^{-\frac{1}{N_0} (r'_1 - v'_{l1})^2} dr'_1 \int_0^\infty (\pi N_0)^{-1/2} e^{-\frac{1}{N_0} (r'_2 - v'_{l2})^2} dr'_2$$

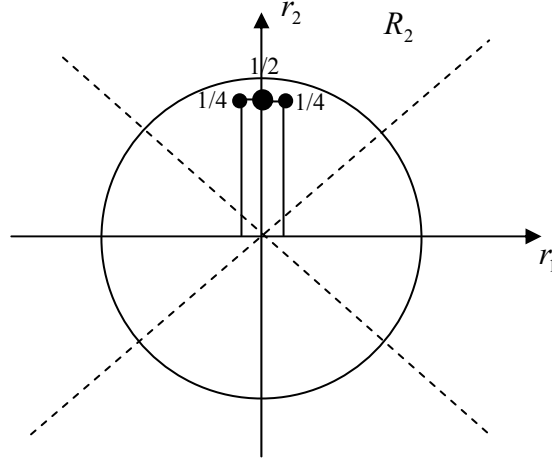
Resolviendo

$$\begin{aligned} P_{d1} = & \frac{1}{2} \left\{ 1 - Q \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \left| 1 - \frac{2(\tau_1 + \tau_2)}{T} \right| \right] \right\} \left\{ 1 - Q \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \left| 1 - \frac{2(\tau_1 - \tau_2)}{T} \right| \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{4} \left\{ 1 - Q \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \left| 1 - \frac{2\tau_2}{T} \right| \right] \right\} \left\{ 1 - Q \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \left| 1 + \frac{2\tau_2}{T} \right| \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{4} \left\{ 1 - Q \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \left| 1 - \frac{2(2\tau_1 + \tau_2)}{T} \right| \right] \right\} \left\{ 1 - Q \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \left| 1 - \frac{2(2\tau_1 - \tau_2)}{T} \right| \right] \right\} \end{aligned}$$

Si se transmitiese \mathbf{s}_2 se obtendría

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{A}_0 \mathbf{s}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \frac{2\tau_1}{T} s_{i2} \\ 1 - \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2\tau_1}{T} \\ 1 - \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s}; \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s}; \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -\frac{2\tau_1}{T} \\ 1 - \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s} = \mathbf{v}_2;$$



y los transformados

$$\mathbf{v}_1' = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2\tau_2}{T} \\ 1 - \frac{2\tau_2}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s/2}; \quad \mathbf{v}_2' = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2(\tau_1 + \tau_2)}{T} \\ 1 + \frac{2(\tau_1 - \tau_2)}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s/2}; \quad \mathbf{v}_4' = \begin{bmatrix} -1 - \frac{2(\tau_1 - \tau_2)}{T} \\ 1 - \frac{2(\tau_1 + \tau_2)}{T} \end{bmatrix} \sqrt{E_s/2}$$

De nuevo, la probabilidad de detección del primero y el tercero son iguales. En este caso también lo son la del segundo y el cuarto. La probabilidad del símbolo \mathbf{s}_2 será:

$$P_{d2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - Q \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \left| 1 - \frac{2\tau_2}{T} \right| \right] \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ 1 - Q \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \left| 1 - \frac{2(\tau_1 + \tau_2)}{T} \right| \right] \right\} \left\{ 1 - Q \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \left| 1 + \frac{2(\tau_1 - \tau_2)}{T} \right| \right] \right\}$$

La probabilidad de detección total y la probabilidad de error serán:

$$P_d = \frac{1}{2} (P_{d1} + P_{d2}); \quad P_e = 1 - P_d$$

- f) Determine las ‘coeficientes’ matriciales del forzador de ceros \mathbf{H}_0 y \mathbf{H}_1 . Déjelos expresados como productos de matrices.

Solución:

$$\mathbf{H}[m]^* \mathbf{H}_c[m] = \mathbf{H}_0 \mathbf{A}_0 \delta(m) + (\mathbf{H}_0 \mathbf{A}_1 + \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_0) \delta(m-1) + \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_1 \delta(m-2) = \mathbf{I} \delta[m]$$

$$\begin{aligned} m=0 \quad \mathbf{H}_0 \mathbf{A}_0 &= \mathbf{I} \\ m=1 \quad \mathbf{H}_0 \mathbf{A}_1 + \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_0 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{A}_0^{-1} \quad \mathbf{H}_1 = -\mathbf{H}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0^{-1} = -\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0^{-1}$$

g) Calcule la salida del forzador de ceros y compruebe que puede escribirse como:

$$\mathbf{r}_0[m] = \mathbf{s}[m] + \mathbf{B}\mathbf{s}(m-2) + \mathbf{w}_0(m)$$

Expresé \mathbf{B} como un producto de matrices sin desarrollar.

Solución:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(m) &= \mathbf{H}(m) * \mathbf{r}(m) = \mathbf{H}(m) * \mathbf{H}_c[m] * \mathbf{s}[m] + \mathbf{H}(m) * \mathbf{w}[m] \\ \mathbf{r}_0(m) &= \mathbf{H}_0 \mathbf{A}_0 \mathbf{s}(m) + (\mathbf{H}_0 \mathbf{A}_1 + \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_0) \mathbf{s}(m-1) + \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{s}(m-2) + \mathbf{w}_0(m) \\ \mathbf{r}_0(m) &= \mathbf{s}(m) + \mathbf{B}\mathbf{s}(m-2) + \mathbf{w}_0(m); \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1 = -(\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1)^2 \end{aligned}$$

h) Halle la potencia del ruido $\sigma_{w_0}^2$ a la salida del forzador en el caso de que el ruido esté incorrelado a la entrada.

Solución:

$$\mathbf{w}_0(m) = \mathbf{H}_0 \mathbf{w}(m) + \mathbf{H}_1 \mathbf{w}(m-1)$$

$$\sigma_{w_0}^2 = E\{\mathbf{w}_0^T(m) \mathbf{w}_0(m)\} = E\{\mathbf{w}^T(m) \mathbf{H}_0^T + \mathbf{w}^T(m-1) \mathbf{H}_1^T [\mathbf{H}_0 \mathbf{w}(m) + \mathbf{H}_1 \mathbf{w}(m-1)]\}$$

Por ser un ruido blanco los términos cruzados se anulan ya que están incorrelados.

$$\sigma_{w_0}^2 = E\{\mathbf{w}^T(m) \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0 \mathbf{w}(m) + \mathbf{w}^T(m-1) \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \mathbf{w}(m-1)\}$$

Sean $\mathbf{C}_0 = \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0$; y $\mathbf{C}_1 = \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1$

$$E\{\mathbf{w}^T(m) \mathbf{C} \mathbf{w}(m)\} = E\left\{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_{jk} w_j(m) w_k(m)\right\} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_{jk} E\{w_j(m) w_k(m)\}$$

Si el ruido está incorrelado en las diferentes ramas y $tr(\mathbf{C}) = \sum_{j=1}^N c_{jj}$

$$E\{w_j(m) w_k(m)\} = \frac{N_0}{2} \delta_{jk} \Rightarrow \sigma_{w_0}^2 = \frac{N_0}{2} \sum_{j=1}^N (c_{0jj} + c_{1jj}) = \frac{N_0}{2} tr(\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)$$

$$\sigma_{w_0}^2 = \frac{N_0}{2} tr[(\mathbf{A}_0^{-1})^T \mathbf{A}_0^{-1} + (\mathbf{A}_0^{-1})^T \mathbf{A}_1^T (\mathbf{A}_0^{-1})^T \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0^{-1}]$$