ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

Senyals i Sistemes I **Examen Final T04: 17 de gener de 2005** **Duració: 3 hores**

No es permet l'ús de calculadores, llibres o apunts. Les respostes de diferents exercicis s'han d'entregar en fulls separats.

La data de publicació de les notes es notificarà mitjançant el campus digital, i si és possible també les notes.

Problema 1.- Se desea cambiar la periodicidad de una señal $y_1(t)$, asumiendo que ha sido generada por el esquema de la figura 1, pero sin conocer $h(t)$ y sin poder acceder a la entrada del sistema.

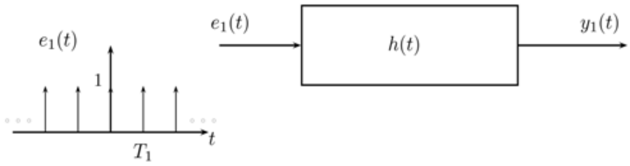

Figura 1: Modelo de generación de la señal $y_1(t)$

a) Demostrar que $y_1(t)$ es periódica. Calcule $Y_1(f)$ en función de $H(f)$.

b) $Y_1(f)$ consiste en *muestras* de $H(f)$. ¿Qué propiedad ha de cumplir $h(t)$ para que las muestras obtenidas permitan recuperar exactamente $H(f)$?

c) Sea $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha > 0$.

- Calcule $H(f)$ y represente $|H(f)|$ y $|Y_1(f)|$.
- Demuestre que, para $0 \le t < T_1$, $y_1(t) = Ae^{-\alpha t}$, indicando el valor de A.

Para generar otra señal, $y(t)$, equivalente a la que se hubiera producido con un tren de deltas, $e(t)$, de periodo *T*, se propone el esquema de la figura 2 :

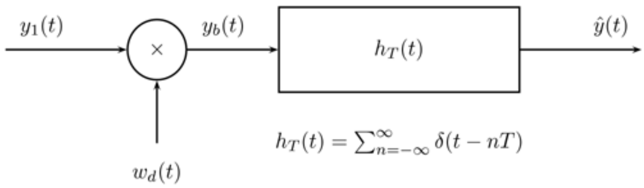

Figura 2: Modificación de periodicidad

Primero se genera una señal básica, $y_b(t)$ mediante enventanado de $y_1(t)$ con una ventana $w_d(t)$ de duración *d*; a continuación, se genera la señal $\hat{y}(t)$ convolucionando con un tren de deltas, $h_T(t)$, de periodo *T*. Supondremos que $Y_1(f)$ no permite determinar $H(f)$, por lo que se obtendrá $\hat{y}(t)$, que será una aproximación de $y(t)$.

Para diseñar la ventana, imponemos la siguiente condición: `si` $T = T_1$, `entonces` $\hat{y}(t) = y_1(t)$.

d) Demuestre que para que se cumpla la condición se ha de verificar que $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} w_d(t - nT_1) = 1$ ¿Qué condición ha de cumplir $W_d(f)$?

e) Demuestre, en el dominio frecuencial, que las siguientes ventanas cumplen la condición anterior, determinando el parámetro de la ventana e indicando su duración.

- Ventana rectangular: $\Pi(t/T_r)$
- Ventana de Bartlett: $\Delta(t/T_b)$
- Ventana de Hanning: $0,5(1+\cos(2\pi t/T_h))\Pi(t/T_h)$

Problema 2.- Es rep un canal de informació en un entorn on estan presents interferències a diferents freqüències. L'objectiu d'aquest problema serà dissenyar un filtre per tal d'eliminar o bé atenuar al màxim els senyals no desitjats i poder obtenir correctament el senyal d'interès. S'han de tenir en compte les següents dades:

- El senyal desitjat està comprés entre les freqüències 1250 Hz i 2500 Hz.
- Els primer to interferent està a la freqüència fi_1=500 Hz i el segon a fi_2=5 KHz. Aquests dos tons es **volen eliminar completament**.
- Hi han altres interferències a freqüències superiors a 5 KHz. Es vol que l'atenuació mínima d'aquests senyals sigui de 40 dB.
- Haurà d'escollir d'entre els filtres de Butterworth, Chebychew o Invers de Chebychew.
- El disseny es farà per transformació de freqüències.

Nota: polinomis de Chebychew: $C_0(x)=1, C_1(x)=x, C_n(x)=2xC_{n-1}(x)-C_{n-2}(x)$

Donades les dades anteriors es vol obtenir el filtre d'ordre mínim que permeti suprimir completament les dues primeres freqüències interferents. Es demana :

a1) Seleccioni l'aproximació que consideri oportuna i dibuixi de forma aproximada la corba d'atenuació del filtre adequat a les especificacions.
a2) Indiqui l'ordre del filtre.
a3) Doni la situació i multiplicitat dels zeros de transmissió
a4) Doni la situació aproximada i multiplicitat dels zeros d'atenuació.

b) Per tal de dissenyar el prototipus passa-baixes es demana:
b1) Expressió de la funció de transformació de freqüències.
b2) Indiqui l'ordre i la situació i multiplicitat dels zeros d'atenuació i de transmissió del prototipus.
b3) Dibuixi de forma acurada la corba d'atenuació del prototipus.
b4) Doni l'expressió de la funció característica ajustant la corba a les especificacions de banda atenuada. Per això caldrà trobar la constant i Ωa. Faci les aproximacions numèriques que consideri oportunes.
b5) Calculi el mòdul al quadrat de la resposta freqüencial del prototipus.

c) Expliqui el procediment per obtenir la funció de transferència del prototipus i la del filtre. On són els zeros de la funció de transferència del prototipus?

d) Planteji la problemàtica del disseny realitzat. Per això calculi Ω3dB del prototipus i compari aquesta freqüència amb les transformades de les freqüències que delimiten la banda de pas Ωp1 i Ωp2. Quin és l'ample de banda a 3dB del filtre pas banda? Quina és l'atenuació màxima que s'obté sobre el senyal desitjat? Faci les aproximacions numèriques que consideri oportunes. Indiqui possibles solucions per millorar el disseny.

Problema 3.- En els darrers anys s'han popularitzat aplicacions com el GPS o sistemes de comunicacions sense fils, basades en la correlació de senyals formats per trens de polsos. L'anàlisi d'aquestes aplicacions s'escapa del contingut d'aquesta assignatura ja que requereix eines de senyals aleatoris. Tot i així el plantejament determinístic que es presenta en aquest exercici permet arribar a algunes conclusions que també són d'interès en les esmentades aplicacions.

Sigui el senyal $x(t) = A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\prod\left(\frac{t-n2T_0}{T_0}\right)$.

a) Obtingui la potència mitjana, l'autocorrelació i la densitat espectral del senyal x(t) (obtingui aquestes tres respostes en l'ordre que vosté vulgui). Faci un dibuix aproximat de les funcions obtingudes.

b) El senyal base generador de x(t) és $x_b(t) = A\prod(\frac{t}{T_0})$. Obtingui l'autocorrelació i l'energia de $x_b(t)$. Relacioni l'autocorrelació de x(t) amb la de $x_b(t)$. Relacioni la potència de x(t) amb l'energia de $x_b(t)$ i el període. Són generalitzables aquestes relacions? Justifiqui la resposta.

c) Doni dos senyals formats també per trens de polsos i que l'un sigui ortogonal (no incorrelat) amb x(t) i l'altre sigui incorrelat amb x(t).

d) Suposi que es disposa d'un senyal y(t) que conté una versió retardada de x(t) amb un to interferent: $y(t)=x(t-t_r)+k\cos(\omega_1 t)$. Amb x(t) i mitjançant un correlador expliqui el procediment per obtenir t_r. Observa algunes limitacions en el procediment descrit?

e) Obtingui un filtre tal que quan a l'entrada es tingui x(t) a la sortida es tingui un senyal amb una funció d'autocorrelació igual a $A^2[1+8(\cos(\pi t/T_0))/\pi^2]$. És necessari que sigui de fase lineal?