Matemàtiques de la Telecomunicació
100 Preguntes Test de Variable Complexa

Departament de Matemàtica Aplicada IV (UPC)
F. Aguiló, M.A. Fiol, A. Miralles

20 de juny del 2003

Resum

En aquest document s'inclouen 100 preguntes test de **Variable Complexa** aparegudes en diverses proves de l'assignatura **Matemàtiques de la Telecominicació**. També hi podreu trobar la resolució completa d'un 40% de preguntes, aproximadament. Encara que ja s'han tret algunes errades inicials, és possible que n'hi hagui algunes més. Si us plau, si en detecteu comuniqueu-ho a les adreces: `matfag@mat.upc.es`, `fiol@mat.upc.es` o `almirall@mat.upc.es`.

Índex

1 Preguntes proposades

1.1 Funciones

1. El conjugado del número complejo e^{-jz} es

(a) e^{jz}

(b) $e^{j\overline{z}}$

(c) $e^{-j\overline{z}}$

(d) $-e^{jz}$

2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el lugar geométrico de los números complejos tales que $|z| - \Im z = \alpha$, es una

(a) circunferencia

(b) elipse

(c) parábola

(d) hipérbola

3. El número de términos no nulos del desarrollo en serie de Fourier compleja de $f(x) = (\cos 3x + \sin 3x)^n$, $-\infty < x < +\infty$, es

(a) $n-1$

(b) n

(c) $n+1$

(d) ∞

4. El conjunto de puntos $\{z \in \mathbb{C} : e^{\overline{z}} = j\}$ es:

(a) $\{j(\frac{\pi}{2} + k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $\{j(\frac{\pi}{2} + k\pi) : k \in \mathbb{Z}, k \text{ par}\}$

(c) $\{j(\frac{\pi}{2} + k\pi) : k \in \mathbb{Z}, k \text{ impar}\}$

(d) ninguna de las otras

5. Un valor de $j^{\ln j}$ es

(a) $e^{-\frac{25\pi^2}{4}}$

(b) $e^{-5\pi^2}$

(c) $e^{-6\pi^2}$

(d) $e^{j\frac{\pi}{2}}$

6. Sean $x \in \mathbb{R}^+$ y $\xi_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$. Se sabe que, para un cierto $N \geq 1$, cada ξ_i es una raiz $(N+1)$-ésima de la unidad, y $x + \sum_{i=1}^n \xi_i = x^N + \sum_{i=1}^n \xi_i^N = 0$. Entonces, el cálculo de $\overline{\sum_{i=1}^n \xi_i}$ permite concluir que, necesariamente,

(a) $x = N = 1$

(b) $x = 1$

(c) $N = 1$

(d) $x = 1$ ó $N = 1$

7. Un valor de j^{-j} es

(a) $e^{-\frac{3\pi}{2}}$

(b) $e^{\frac{3\pi}{2}}$

(c) e^{π}

(d) $e^{-\pi}$

8. Una solución de la ecuación $\operatorname{th} z = j$ es:

(a) $j5\frac{\pi}{4}$

(b) $j3\frac{\pi}{2}$

(c) $j7\frac{\pi}{4}$

(d) $j\frac{\pi}{2}$

9. Una solución de la ecuación $\operatorname{sh} z = j$ es:

(a) j

(b) $j\pi$

(c) $j\frac{\pi}{2}$

(d) $-j\pi$

10. Una solución de la ecuación $\operatorname{ch} z = j$ es:

(a) $\ln(1+\sqrt{2}) + j\frac{\pi}{2}$

(b) $(1+\sqrt{2})j$

(c) $(1-\sqrt{2})j$

(d) $\ln(1+\sqrt{2}) + j\pi$

11. Sea $\ln 1 := 0$. Si $z = re^{j\theta}$, $r > 0$, satisface la ecuación $\overline{z}^{\overline{z}} = 1$, entonces se puede afirmar que:

(a) $z = 0$

(b) $\theta = \pi$

(c) $z = -\overline{z}$

(d) $r = 1$

12. Sea $\ln 1 := 0$. El número de soluciones distintas de la ecuación $z^{\overline{z}} = 1$ es:

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) ∞

13. Sea $z = re^{j\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$. Siendo $w_1 = \sqrt{r}e^{j\frac{\theta}{2}}$ y $w_2 = \sqrt{r}e^{j\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$, se tiene:

(a) w_1 es una raiz cuadrada de z, pero w_2 no

(b) w_1 es discontinua en el eje real negativo

(c) w_1 es discontinua en el eje imaginario negativo

(d) w_1 es discontinua en el eje real positivo

14. El número de soluciones de la ecuación $\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} z$ es:

(a) finito (> 1)

(b) infinito

(c) 0

(d) 1

15. El número de soluciones de la ecuación $\operatorname{sh} z = e^z$ es:

(a) finito (> 2)

(b) 0

(c) 2

(d) infinito

1.2 Derivación

16. Cuál de las siguientes funciones **no** es derivable en $z = 0$:

(a) $f(z) = (\Im z)^2$

(b) $f(z) = (\Re z)^3$

(c) $f(z) = x + j(x - y)$

(d) $f(z) = x^2 - y^2 + j2xy$

17. La función $f(z) = xz$ es, en el origen,

(a) analítica

(b) no analítica pero sí derivable

(c) ni analítica ni derivable

(d) analítica pero no derivable

18. Los únicos puntos $z \in \mathbb{C}$ en los que la función $f(z) = \sqrt{z} := \sqrt{r}e^{j\frac{\theta}{2}}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ no es analítica son:

(a) $z = 0$

(b) $z = jy$ ($y \leq 0$)

(c) $z = jy$ ($y < 0$)

(d) $z = x$ ($x \leq 0$)

19. La función $f(z) = \overline{z}$ es, en el origen,

(a) analítica

(b) no analítica pero sí derivable

(c) ni analítica ni derivable

(d) analítica pero no derivable

20. La función $f(z) = \cos \overline{z}$ es analítica

(a) en ningún punto

(b) sólo en los puntos $z = k\pi$ para k entero

(c) sólo en los puntos $z = jk\pi$ para k entero

(d) en todo el plano complejo salvo el semieje real negativo

21. La función $f(z) = z\overline{z}$ es, en el origen,

(a) analítica

(b) no analítica pero sí derivable

(c) ni analítica ni derivable

(d) analítica pero no derivable

22. La función $\ln z = \ln re^{j\theta} = \ln r + j\theta$, $-\frac{3}{2}\pi < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ es analítica en los dos puntos siguientes

(a) $0, 1$

(b) $0, j$

(c) $-j, j$

(d) $-1, 1$

23. Si $f(z) = u(r, \theta) + jv(r, \theta)$ es una función analítica, entonces

(a) $f'(z) = \frac{1}{e^{j\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$

(b) $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$; $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$

(c) $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$; $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$

(d) $f'(z) = \frac{1}{e^{j\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + j\frac{\partial v}{\partial r}\right)$

24. Considérese la función $f(z) = e^{x+y}(\cos y + j\sin y)$. Entonces, se puede afirmar:

(a) $f(z)$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, pero no tiene derivada

(b) $f(z)$ no satisface las condiciones de Cauchy-Riemann

(c) $f(z_1 + z_2) \neq f(z_1)f(z_2)$

(d) $f(z)$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann y su derivada es $f'(z) = f(z)$

25. Si la parte imaginaria de una función anaítica en $\mathbb{C}$ es $v(x, y) = (2x - 1)y$, su parte real $u(x, y)$ es (salvo constante aditiva):

(a) $y^2 + x^2 + x$

(b) $y^2 - x^2 + x$

(c) $-y^2 + x^2 - x$

(d) $-y^2 - x^2 + x$

26. Una función entera $f(z)$, cuya parte imaginaria es $v(x, y) = e^x(y\cos y + x\sin y)$, es

(a) e^{x+z}

(b) jze^z

(c) je^{x+z}

(d) ze^z

27. Una función entera $f(z)$, cuya parte real es $u(x, y) = \operatorname{ch} x \cos y$, es

(a) $\sin z$

(b) $\operatorname{sh} z$

(c) no existe

(d) $\operatorname{ch} z$

28. La función $u(x, y) = ae^y \cos x$, $a \in \mathbb{R}$, es la parte real de una función analítica en $\mathbb{C}$

(a) para todo $a \in \mathbb{R}$

(b) sólo para $a \geq 0$

(c) sólo para $a \leq 0$

(d) ninguna de las otras

29. La función $u(x, y) = e^y \cos x$ es la parte real de la función analítica en $\mathbb{C}$

(a) e^z

(b) e^{-jz}

(c) e^{jz}

(d) e^{-z}

30. La función $u(x, y) = e^{ax+y}$, $a \in \mathbb{R}$, es la parte real de una función analítica en $\mathbb{C}$

(a) sólo para $a = 0$

(b) para todo $a \in \mathbb{R}$

(c) para ningún $a \in \mathbb{R}$

(d) sólo para $a = \pm 1$

31. Una función analítica en $\mathbb{C}$ cuya parte real $u(x, y)$ sólo depende de x es necesariamente

(a) un polinomio de primer grado en z

(b) una función exponencial

(c) una constante

(d) no existen funciones en tales condiciones

32. Si una función $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ es entera (analítica $\forall z \in \mathbb{C}$), entonces se puede afirmar que también lo es la función

(a) $v(x, y) + ju(x, y)$

(b) $u_x(x, y) - jv_y(x, y)$

(c) $u_x(x, y) + ju_y(x, y)$

(d) $v(x, y) - ju(x, y)$

33. Si una función $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ es entera (analítica $\forall z \in \mathbb{C}$), entonces se puede afirmar que también lo es la función

(a) $v_x(x, y) + ju_y(x, y)$

(b) $v(x, y) + ju(x, y)$

(c) $u_x(x, y) - ju_y(x, y)$

(d) $u(x, y) - jv(x, y)$

34. La función $f(z) = (\overline{z} + 1)(\overline{z} - 1)$ es, en el origen,

(a) no derivable

(b) derivable con $f'(0) = 0$

(c) derivable con $f'(0) = 1$

(d) analítica

35. La función $f(z) = (\overline{z} + 1)^3$ es, en el origen,

(a) no derivable

(b) derivable con $f'(0) = 0$

(c) derivable con $f'(0) = 1$

(d) analítica

36. De la función $\Phi(x, y) = (2x - 3)y$ se puede afirmar que:

(a) puede ser la parte real, pero no imaginaria, de una función analítica en $\mathbb{C}$

(b) puede ser la parte imaginaria, pero no real, de una función analítica en $\mathbb{C}$

(c) puede ser la parte real o la parte imaginaria de una función analítica en $\mathbb{C}$

(d) ninguna de las otras

37. De la función $\Phi(x, y) = (2x - 3)y^2$ se puede afirmar que:

(a) puede ser la parte real, pero no imaginaria, de una función analítica en $\mathbb{C}$

(b) puede ser la parte imaginaria, pero no real, de una función analítica en $\mathbb{C}$

(c) puede ser la parte real o la parte imaginaria de una función analítica en $\mathbb{C}$

(d) ninguna de las otras

38. Sea $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ analítica en el eje real. Si $f(x) = (1 - ja)x$, $a \in \mathbb{R}$, se tiene, en la región de analiticidad:

(a) $v(x, y) = -ax - y$

(b) $u(x, y) = -ax - y$

(c) $u(x, y) = x + ay$

(d) ni $u(x, y)$ ni $v(x, y)$ están determinadas conociendo sólo $f(x)$

39. La función $f(z) = \operatorname{sh}(e^z)$ cumple:

(a) es analítica sólo en el origen

(b) no es analítica en ningún $z \in \mathbb{C}$

(c) es analítica sólo en el interior de la circunferencia de radio 1 centrada en el origen

(d) es analítica en todo $z \in \mathbb{C}$

40. La función $f(z) = e^{-x}(\cos y - j \sin y)$ cumple:

(a) $f(z) = f'(z)$

(b) $f(z) = f(\overline{z})$

(c) $f(z) = -f'(z)$

(d) $f(z) = -f(\overline{z})$

1.3 Integración

41. La integral $\int_\Gamma \cos \overline{z}\, dz$, donde Γ es la recta que va de $1 - j$ a $1 + j$, vale

(a) $\sin(1 - j) - \sin(1 + j)$

(b) $2j \operatorname{sh} 1 \cos 1$

(c) $2j \operatorname{ch} 1 \sin 1$

(d) $2j \operatorname{ch} 1 \cos 1$

42. Sea $I := \int_\Gamma z e^{z^2}\, dz$. Entonces, es **falso** que

(a) $I = \frac{1}{2}(e - 1)$ si Γ es un camino de 0 a 1

(b) $I = \frac{1}{2}(e - 1)$ si Γ es un camino de 0 a -1

(c) $I = 0$ si Γ es un camino de 1 a -1

(d) $I = 0$ si Γ es un camino de 0 a $-j$

43. El valor de la integral $\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2(z-1)}$, donde $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ (recorrido en sentido positivo) es:

(a) 0

(b) 1

(c) -1

(d) 2

44. La integral $\int_\Gamma |z|^2\, dz$, donde Γ es el segmento vertical que va del punto 1 al $1 + j$ vale:

(a) $\frac{4}{3}$

(b) $\frac{4}{3}j$

(c) 0

(d) $\frac{1}{3}$

45. La integral $\int_{1+j}^{1-j} \frac{dz}{z}$ siguiendo la parábola $2y^2 = x + 1$ vale

(a) $j\frac{3\pi}{2}$

(b) $-j\frac{\pi}{2}$

(c) 0

(d) $2\pi j$

46. La integral $\int_C \overline{z}\,dz$, donde C es la espiral (dada en polares) $r = e^{-\theta}$, $0 \leq \theta < \infty$, vale:

(a) $j+1$

(b) $\frac{1}{2}(j-1)$

(c) $\frac{1}{2}(j+1)$

(d) $j-1$

47. La integral $\oint_C \frac{e^z}{1+z^2}\,dz$, donde C es el cuadrado de lado 2 centrado en el punto $-j$, vale:

(a) $2je^{-j}$

(b) $-2\pi\cos 1$

(c) $-4\pi e^{-j}$

(d) $-\pi e^{-j}$

48. La integral $\oint_C \frac{z^3}{z^3-1}\,dz$, donde C es la circunferencia de radio 1 centrada en el punto $z_0 = 1$, vale:

(a) πj

(b) $-\pi j$

(c) $\frac{1}{3}\pi j$

(d) $\frac{2}{3}\pi j$

49. El valor de la integral $\oint_C \frac{1}{z\ln z}\,dz$, donde C es la circunferencia de radio 1 centrada en el origen, $z = re^{j\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, y $\ln 1 := j2\pi$, es:

(a) $\ln 3$

(b) $j\pi$

(c) 0

(d) $-j\pi$

50. El valor de la integral $\oint_C \frac{\sin(e^z)}{e^z}\,dz$, con $C = \{z : |z| = R\}$ es:

(a) 0

(b) sólo da 0 para algunos valores de R

(c) $\neq 0$

(d) > 0

51. La integral $\oint_C \frac{z}{z^2-4z+6}dz$, donde C es la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, vale

(a) $(\sqrt{2}+j)\pi$

(b) $(-\sqrt{2}+j)\pi$

(c) 0

(d) $2\pi j$

52. Los únicos valores de la integral $\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{\ln(1+z)}{z(z-1)^3}dz$, siendo C una curva cerrada (que no pasa por ninguno de los puntos 1, 0, ó $x \leq -1$), $z = re^{j\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, y $\ln 1 := 0$, son:

(a) 0, $\ln 2 - \frac{5}{8}$, $\frac{5}{8} - \ln 2$

(b) 0, $\frac{5}{8} - \ln 2$

(c) 0, $\ln 2 - \frac{5}{8}$

(d) ninguna de las otras

53. La integral $\int_\Gamma \frac{z^2}{z^4-1}\,dz$, donde Γ es una circunferencia de radio 2 centrada en el origen, vale

(a) π

(b) $\pi/2$

(c) 0

(d) $j\pi$

54. ¿Cúando se cumple que $\oint_C \frac{dz}{|z|} = 0$, donde C es una curva cerrada?

(a) cuando C es una circunferencia centrada en el origen

(b) sólo cuando C no contiene al origen

(c) siempre

(d) nunca

55. A partir de una función $f(z)$, analítica en $\mathbb{C}$, se define la función $\Psi(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_1)}$, con $z_0 \neq z_1$. Entonces se cumple la igualdad $\oint_{C_0} \Psi(z)\,dz = \oint_{C_1} \Psi(z)\,dz$, donde C_0 es un camino cerrado que no contiene ni z_0 ni z_1, y C_1 es un camino cerrado que contiene a z_0 y z_1, si:

(a) $f(z_0) + f(z_1) = 0$

(b) $f(z)$ es un polinomio de grado ≤ 1

(c) $\frac{f(z_0)-f(z_1)}{z_0-z_1} = f'(z_0)$

(d) $f(z_0) = f(z_1)$

56. La integral $\oint_C \overline{z}\,dz$, donde C es la elipse de semiejes a y b centrada en el origen (con parametrización $x = a\cos t$, $y = b\sin t$), vale:

(a) $j2\pi$

(b) $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

(c) $\frac{1}{2}(b^2 + a^2)$

(d) $jab2\pi$

57. El valor de la integral $\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)^2}$, donde $C = \{z : |z - j| = 1\}$ es:

(a) $\pi/2$

(b) $\pi/16$

(c) $j\pi/2$

(d) $j\pi/16$

58. La integral $\int_\Gamma \overline{z}\, dz$, donde Γ es la curva (dada en paramétricas) $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, vale:

(a) $\pi^2\left(\frac{1}{2} - j\frac{\pi}{2}\right)$

(b) $\pi^2\left(\frac{1}{2} + j\frac{\pi}{3}\right)$

(c) $\frac{1}{2}\pi^2$

(d) $j\frac{\pi^3}{3}$

59. El valor de la integral $\oint_C \frac{dz}{(z^2-1)^2}$, donde $C = \{z : |z - j| = 2\}$ es:

(a) $-j\pi/2$

(b) $-1/4$

(c) $j\pi/2$

(d) 0

60. La integral $\oint_C \frac{\operatorname{ch} z}{z^4} dz$, donde C es un cuadrado de lado 4 centrado en el origen, vale:

(a) 2π

(b) $j\frac{\pi}{4}$

(c) $-j\frac{\pi}{2}$

(d) 0

61. La integral $\oint_C \frac{\operatorname{sh} z}{z^5} dz$, donde C es un cuadrado de lado 1 centrado en el origen, vale:

(a) 0

(b) $j\pi$

(c) $-j\frac{\pi}{12}$

(d) $j\frac{\pi}{12}$

62. Las integrales de $\overline{z}$ a lo largo de las curvas Γ_1: semicircunferencia en el semiplano superior, con radio 1 y centro 0, recorrida desde -1 a 1; y Γ_2: semicircunferencia en el semiplano inferior, con radio 1 y centro 0, recorrida desde -1 a 1; satisfacen:

(a) $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}$

(b) $\int_{\Gamma_2} - \int_{\Gamma_1} = j\pi$

(c) $\int_{\Gamma_2} - \int_{\Gamma_1} = 2\pi j$

(d) $\int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2} = 2\pi j$

63. Si $z = re^{j\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, y se define $\ln z := \ln r + j(\theta + 2\pi)$, el valor de la integral $\oint_C \ln z\, dz$, donde C es una circunferencia de radio R centrada en el origen, es:

(a) 0

(b) $j2\pi R$

(c) $j2\pi$

(d) $j\pi R$

64. La integral $\int_\Gamma z\cos(z^2)\, dz$ a lo largo de la curva Γ: semicircunferencia en el semiplano derecho, con radio $\sqrt{\pi}/2$ y centro $j\sqrt{\pi}/2$, recorrida desde 0 a $j\sqrt{\pi}$; vale:

(a) $\frac{j}{2}\operatorname{sh}\pi$

(b) $\frac{j}{2}\operatorname{ch}\pi$

(c) $\frac{1}{2}\cos(j\pi)$

(d) 0

65. La integral $\int_\Gamma |z|^2\, dz$ a lo largo de la recta que va de 0 a $1 + j$ es:

(a) $\frac{2}{3}$

(b) $\frac{2}{3}j$

(c) $\frac{1}{3}(1 + j)$

(d) $\frac{2}{3}(1 + j)$

1.4 Series

66. El radio de convergencia de la serie de Taylor de la función $f(z) = \frac{e^z}{\cos(z+2)}$, en potencias de z, es

(a) ∞

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{4+\pi}{2}$

(d) $\frac{4-\pi}{2}$

67. El radio de convergencia de la serie de Taylor de la función $f(z) = \frac{1}{1-\sin z}$, en potencias de z, es

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) ∞

(c) π

(d) 1

68. La serie de Taylor de $f(z) = \frac{e^z+\sin(z^2)}{z^2-6z+18}$ en potencias de $(z+1)$ converge en:

(a) $|z+1| < 5$

(b) $|z+1| > 5$

(c) $2 \leq |z+1| \leq 6$

(d) $0 < |z+1| \leq 5$

69. El desarrollo en serie de la función $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$, válido en $|z| > 1$, es:

(a) $-1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$

(b) $1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$

(c) $-1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$

(d) $-1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$

70. El desarrollo en serie de la función $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$, en potencias de $z-1$, es:

(a) Taylor, con un número infinito de términos

(b) Laurent, con un número infinito de términos

(c) Taylor, con un número finito de términos

(d) Laurent, con un número finito de términos

71. El desarrollo de la función $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$ en serie de potencias de z es:

(a) $\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} z^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n$

(d) ninguna de las anteriores

72. El desarrollo de Laurent centrado en $z = 0$ de la función $\frac{1}{z(z^2-1)}$, válido en la corona $1 < |z| < \infty$, es

(a) $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \cdots$

(b) $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \cdots$

(c) $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \cdots$

(d) $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^7} + \cdots$

73. Consideremos el desarrollo de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ en torno a $z_0 = j$. El coeficiente c_2 (de $(z-j)^2$) es:

(a) $\frac{1}{16}$

(b) $\frac{1}{8}$

(c) $-\frac{1}{16}$

(d) $-\frac{1}{8}$

74. El desarrollo en serie en potencias de z de la función $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$, válido en $|z| > 1$, es:

(a) $-1 + 2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \cdots\right)$

(b) $-1 + 2(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots)$

(c) $-1 + 2\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots\right)$

(d) $1 + 2\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \cdots\right)$

75. En $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 5\}$ el desarrollo en serie de la función $f(z) = \frac{1}{(z+5)(z-j)}$ es:

(a) $-\frac{1}{5(5+j)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} z^n + \frac{1}{5+j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n}{z^{n+1}}$

(b) $-\frac{1}{5(5+j)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{5+j} \sum_{n=0}^{\infty} j^n z^{n+1}$

(c) $\frac{1}{5+j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} z^n - \frac{1}{5(5+j)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n}{z^{n+1}}$

(d) ninguna de las otras

76. En el desarrollo en serie de la función $f(z) = \frac{z^2-z+1}{z-1}$ en torno a $z = 1$, el número de términos no nulos y la región de validez del desarrollo son, respectivamente:

(a) 3, $0 < |z-1| < 1$

(b) 4, $0 < |z-1|$

(c) 3, $0 < |z-1|$

(d) ∞, $0 < |z-1| < 1$

77. En el desarrollo en serie de la función $f(z) = \frac{-1}{z^2+z}$ en torno a $z = -1$, el número de términos con potencias negativas de $z + 1$ y la región de validez del desarrollo son, respectivamente:

(a) $1,\ 0 < |z+1| < 1$

(b) $2,\ 0 < |z+1|$

(c) $2,\ 0 < |z+1| < 1$

(d) $\infty,\ 0 < |z+1|$

78. Dada la función $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ desarrollada en serie de Laurent alrededor de $z = 0$, en $|z| < 2$, el coeficiente c_{-1} vale:

(a) 1

(b) $1/2$

(c) $-1/2$

(d) -1

79. El desarrollo de Taylor de la función $f(z) = \frac{1}{z}$, en potencias de $(z + 2)$, es:

(a) $-\frac{1}{2}\left[1 - \frac{z+2}{2} + \left(\frac{z+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{z+2}{2}\right)^3 + \cdots\right]$ en $|z+2| < 2$

(b) $-\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z+2}{2} + \left(\frac{z+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{z+2}{2}\right)^3 + \cdots\right]$ en $|z+2| \leq 2$

(c) $-\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z+2}{2} + \left(\frac{z+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{z+2}{2}\right)^3 + \cdots\right]$ en $|z| < 2$

(d) $-\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z+2}{2} + \left(\frac{z+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{z+2}{2}\right)^3 + \cdots\right]$ en $|z+2| < 2$

1.5 Residuos

80. En la función $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$ el punto $z = 0$ es:

(a) un polo de orden 1

(b) una singularidad evitable

(c) una singularidad esencial

(d) ninguna de las otras

81. La función $f(z) = \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)$ tiene, en $z = 1$,

(a) una singularidad esencial y residuo -1

(b) un polo de orden 1 y residuo 1

(c) un polo de orden 1 y residuo -1

(d) una singularidad esencial y residuo 1

82. Sea $f(z)$ una función entera. Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, consideramos la función $F(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ con n entero positivo ($n \geq 1$). Entonces el residuo de $F(z)$ en z_0, $R(F, z_0)$, es:

(a) $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

(b) no existe

(c) $\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$

(d) $2\pi j\,\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$

83. El residuo de la función $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$ en el punto $z = 0$ vale:

(a) 1

(b) 0

(c) -1

(d) ninguna de las otras

84. El residuo de la función $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{(z-j)^5}$ en el punto $z = j$, es

(a) $\frac{j}{24}\sin 1$

(b) $\frac{j}{120}\operatorname{ch} 1$

(c) $\frac{j}{120}\operatorname{sh} 1$

(d) $\frac{j}{24}\cos 1$

85. El residuo de la función $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ en $z = 0$ es:

(a) 0

(b) 1

(c) $-\frac{1}{3!}$

(d) $\frac{1}{2\pi j}\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}\,dz$

86. Si $f(z)$ es una función analítica en $\mathbb{C}$, y $P(z)$ es un polinomio de grado $n > 2$, el número máximo N de valores distintos de $\oint_C \frac{f(z)}{P(z)}\,dz$, donde C es una curva cerrada (que no pasa por ninguno de los ceros de $P(z)$) es:

(a) $N = n$

(b) $N = n + 1$

(c) $N = n - 1$

(d) $N > n+1$

87. El residuo (el coeficiente a_{-1} de su desarrollo de Laurent) de la función $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ en el punto $z = 1$ es:

(a) 0

(b) -1

(c) 1

(d) 2

88. Para la función $f(z) = \frac{\sin z}{1-(1-z^2)^2}$, el origen es:

(a) polo simple

(b) polo doble

(c) polo triple

(d) punto singular, pero no polo

89. El residuo (el coeficiente a_{-1} de su desarrollo de Laurent) de la función $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) - \frac{1}{z-1}$ en el punto $z = 1$ es:

(a) 0

(b) -1

(c) 1

(d) 2

90. Para la función $f(z) = \frac{z-\sin z}{z^3}$, el origen es:

(a) polo simple

(b) polo triple

(c) singularidad esencial

(d) ninguna de las otras

1.6 Aplicaciones

91. La integral impropia $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$ vale:

(a) $-\frac{\pi}{e}$

(b) $\frac{\pi}{e}$

(c) $\frac{\pi}{2e}$

(d) $-\frac{\pi}{2e}$

92. El valor de la integral $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$ es:

(a) 0

(b) $\frac{4}{\sqrt{3}}\pi$

(c) $\frac{3\pi}{2}$

(d) $\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$

93. Con el cambio $z = e^{j\theta}$, la integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\cos\theta}$ da:

(a) $\frac{\pi}{8}$

(b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

(d) 4π

94. La integral $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}\,dx$ vale:

(a) 0

(b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(c) π

(d) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

95. El cálculo de la integral $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6}\,dx$ da:

(a) $\pi/2$

(b) $\pi/3$

(c) $\pi/4$

(d) $\pi/6$

96. El cálculo de la integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ da:

(a) π

(b) $\pi/2$

(c) $\pi/4$

(d) 2π

97. La integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$ vale:

(a) $\frac{\pi}{2e}$

(b) $\frac{e}{\pi}$

(c) $\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{\pi}{e}$

98. El cálculo de la integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ da:

(a) π

(b) $\pi/2$

(c) $\pi/4$

(d) 2π

99. El valor de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ es:

(a) $\frac{2\pi}{a+b}$

(b) $\frac{\pi}{2(a+b)}$

(c) $\frac{\pi}{a+b}$

(d) $\frac{\pi}{ab}$

100. Sea $p \in R$, $|p| < 1$. Con el cambio $z = e^{j\theta}$, la integral $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}$ da:

(a) $-\frac{\pi(1+p^2)}{p^2}$

(b) $\frac{2\pi p^2}{1-p^2}$

(c) $\frac{\pi(1+p^4)}{p^2(1-p^2)}$

(d) $\frac{\pi(1+p^2)}{p^2}$

1.7 Soluciones

1(b); **2**(c); **3**(c); **4**(b); **5**(a); **6**(d); **7**(a); **8**(a); **9**(c); **10**(a); **11**(d); **12**(b); **13**(b); **14**(c); **15**(d); **16**(c); **17**(b); **18**(b); **19**(c); **20**(a); **21**(b); **22**(d); **23**(d); **24**(b); **25**(c); **26**(d); **27**(d); **28**(a); **29**(b); **30**(c); **31**(a); **32**(d); **33**(c); **34**(b); **35**(a); **36**(c); **37**(d); **38**(c); **39**(d); **40**(c); **41**(b); **42**(d); **43**(a); **44**(b); **45**(a); **46**(b); **47**(d); **48**(d); **49**(a); **50**(a); **51**(d); **52**(c); **53**(c); **54**(a); **55**(d); **56**(d); **57**(a); **58**(b); **59**(d); **60**(d); **61**(a); **62**(c); **63**(b); **64**(d); **65**(d); **66**(d); **67**(a); **68**(a); **69**(c); **70**(d); **71**(c); **72**(d); **73**(c); **74**(a); **75**(a); **76**(c); **77**(a); **78**(c); **79**(d); **80**(b); **81**(a); **82**(c); **83**(b); **84**(a); **85**(a); **86**(d); **87**(b); **88**(a); **89**(a); **90**(d); **91**(c); **92**(d); **93**(b); **94**(d); **95**(b); **96**(b); **97**(d); **98**(a); **99**(c); **100**(b).

2 Preguntes resoltes

Al contrari del document semblant a aquest de 100 preguntes test d'Anàlisi de Fourier, aquesta secció segueix la mateixa numeració de la secció anterior.

2.1 Funcions

T 1. Si denotem per $w = e^{-iz}$, tenim

$$\overline{w} = \overline{e^{-iz}} = \overline{e^{-ix+y}} = e^y \overline{e^{-ix}} = e^y e^{ix} = e^{i(x-iy)} = e^{i\overline{z}}. \qquad \square$$

T 4. De $e^z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ i del fet que la funció exponencial és $i2\pi$-periòdica, tenim $e^z = e^{i(\frac{\pi}{2}+2m\pi)}$ amb $m \in \mathbb{Z}$. Per tant, $z = i(\frac{\pi}{2} + 2m\pi) = i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ amb k parell. $\square$

T 6. Pel fet que $\xi_1, ..., \xi_n$ són arrels $(N+1)$-èssimes de 1, es compleix $\xi_k^N \xi_k = \xi_k^{N+1} = 1$ per a tot $k = 1, ..., n$. Llavors, es compleix $\xi_k^N = \xi_k^{-1} = \overline{\xi_k}$ per a tot $k = 1, ..., n$ (recordeu que $\xi_k \overline{\xi_k} = |\xi_k|^2 = 1$ i, per tant, $\overline{\xi_k} = \xi_k^{-1}$). Si $x \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$x + \sum_{k=1}^{n} \xi_k = x^N + \sum_{k=1}^{n} \xi_k^N = 0,$$

llavors, del càlcul

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} \xi_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^N = -x^N,$$

i de $\overline{\sum_{k=1}^{n} \xi_k} = -x$, es compleix $x = x^N$. D'aquesta última igualtat es dedueix directament:

$$x^N - x = 0 \Leftrightarrow x(x^{N-1} - 1) = 0 \;\; (x \in \mathbb{R}^+) \Leftrightarrow x^{N-1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} N = 1 \\ x = 1 \end{cases} \qquad \square$$

T 7. Tenim

$$i^{-i} = e^{-i \ln i} = e^{-i(\ln|i| + i(\arg(i) + 2m\pi))} = e^{-ii(\frac{\pi}{2} + 2m\pi)} = e^{\frac{\pi}{2} + 2m\pi}$$

amb $m \in \mathbb{Z}$. Llavors, per a diferents valors de m, tenim els valors

$$..., e^{-\frac{3\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{5\pi}{2}}, ...$$

Un dels valors és, per tant, $e^{-\frac{3\pi}{2}}$. $\square$

T 11. Si prenem la determinació $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ i $\ln 1 = 0$, treballem amb la branca $\ln z = \ln|z| + i\arg(z) = \ln r + i\theta$. Si $\overline{z} \ln \overline{z} = 0$ i $\overline{z} \neq 0$, llavors $\ln \overline{z} = 0$ i això vol dir $\ln r - i\theta = 0$, és a dir, $r = 1$. $\square$

T 13. Si fem tendir z vers -1 pels semiplans superior i inferior, es veu la discontinuïtat degut al canvi brusc de l'argument. Si en comptes d'agafar -1, agafem un altre punt sobre l'eix negatiu, també ens passa el mateix.

Vejem-ho pel punt -1: Sigui $\epsilon > 0$, considerem $z = -1 + i\epsilon$ quan $\epsilon \to 0^+$; llavors tenim que $z \to -1$ amb $\theta \to +\pi$ i $r \to 1$, és a dir, $w_1 \to e^{i\pi/2} = i$. Considerem ara $z = -1 - i\epsilon$ i fem $\epsilon \to 0^+$, llavors $z \to -1$ però ara la tendència de l'angle és $\theta \to -\pi$ i tenim $w_1 \to e^{-i\pi/2} = -i$. Això prova que w_1 no és contínua en -1. $\square$

2.2 Derivabilitat

T 19. Si posem $f(z)$ en termes de les coordenades cartesianes, tenim

$$f(z) = \overline{z} = x - iy \Rightarrow u(x,y) = x, v(x,y) = -y.$$

Les derivades parcials de u i v són

$$u_x = 1, u_y = v_x = 0, v_y = -1.$$

Llavors, podem veure que $u_x \neq v_y$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. En altres paraules, no es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann en cap punt del pla. Això equival a que $f(z)$ no és derivable (i amb més raó tampoc és analítica) en cap punt de $\mathbb{C}$.

Recordem que les equaciones de Cauchy-Riemann són equivalents, formalment, a la condició:

$$\text{Es compleixen les eqs. de Cauchy-Riemann en } z_0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

Si ho apliquem en aquest cas, tenim

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 1 \; \forall z \in \mathbb{C},$$

per tant, no es compleixen les eqs. en cap punt, tal com hem vist abans en coordenades cartesianes. □

T 20. Si procedim com al problema T **19**, amb la funció $f(z) = \cos \overline{z}$ tenim

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = -\sin \overline{z} = 0 \Leftrightarrow \overline{z}_k = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

És a dir, la funció f només és derivable (noteu que les derivades parcials són contínues sempre) en els punts $z_k = k\pi$. Per tant, no existeix cap entorn de punts on f hi sigui drivable, només en un conjunt discret de punts. En altres paraules, la funció f no és analítica en cap punt. □

T 21. Mirem on es compleixen les eqs. de Cauchy-Riemann com ho hem fet abans:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = z,$$

només s'anul·la en $z = 0$. O sigui, les eqs. de C-R només es compleixen en $z = 0$. Per tant, no pot existir cap entorn de punts on f sigui derivable. Això vol dir que f no és analítica en cap punt.

Respecte la derivabilitat de f, les eqs. de C-R ens diuen que f només pot ser derivable en $z = 0$. Comprovem-ho:

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{z\overline{z}}{z} = \lim_{z \to 0} \overline{z} = 0.$$

És a dir, f és derivable en $z = 0$ i $f'(0) = 0$. □

T 22. Degut al canvi brusc del valor de l'argument en la semirrecta it amb $t > 0$ (noteu que $-\frac{3}{2}\pi < \theta \leq \frac{\pi}{2}$), tenim que $\ln z$ és analítica en $\mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{it |\ t \in \mathbb{R}^+\})$. Per tant, és analítica en -1 i 1. □

T 23. Les eqs. de Cauhy-Riemann en polars s'escriuen

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \end{cases}$$

i no són les relacions que dónen els apartats (b) i (c).

Per tant, només queda veure com s'escriu la derivada en polars. Sabem que si f és derivable en $z=x+iy$, la seva derivada es pot calcular mitjançant $f'(z)=u_x(z)+iv_x(z)=v_y(z)-iu_y(z)$. De les relacions $x=r\cos\theta$ i $y=r\sin\theta$ i de les seves inverses $r=\sqrt{x^2+y^2}$ i $\theta=\arctan\frac{y}{x}$, podem calcular

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{r}r\cos\theta=\cos\theta, \\ \theta_x &= \frac{-y/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{1}{r^2}r\sin\theta=-\frac{1}{r}\sin\theta. \end{aligned}$$

Ara tenim

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x+u_\theta\theta_x=\cos\theta u_r-\frac{1}{r}\sin\theta u_\theta=\cos\theta u_r-\frac{1}{r}\sin\theta(-rv_r)=\cos\theta u_r+\sin\theta v_r, \\ v_x &= v_r r_x+v_\theta\theta_x=\cos\theta v_r-\frac{1}{r}\sin\theta v_\theta=\cos\theta v_r-\frac{1}{r}\sin\theta(ru_r)=\cos\theta v_r-\sin\theta u_r. \end{aligned}$$

Per tant, finalment tenim

$$f'(z)=u_x+iv_x=\cos\theta u_r+\sin\theta v_r+i(\cos\theta v_r-\sin\theta u_r)=(\cos\theta-i\sin\theta)(u_r+iv_r)=e^{-i\theta}(u_r+iv_r). \quad \square$$

T 24. Podem comprovar les eqs. de Cauchy-Riemann directament. Donada la funció $f(z)=e^{x+y}(\cos y+i\sin y)$, les funcions coordenades són

$$u(x,y)=e^{x+y}\cos y, \quad v(x,y)=e^{x+y}\sin y.$$

La condició $u_x=v_y$ és

$$e^{x+y}\cos y=e^{x+y}(\cos y+\sin y)\Leftrightarrow e^{x+y}\sin y=0\Leftrightarrow \sin y=0\Leftrightarrow y_k=k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

La segona condició $u_y=-v_x$ és

$$e^{x+y}(\cos y-\sin y)=-e^{x+y}\sin y\Leftrightarrow e^{x+y}\cos y=0\Leftrightarrow \cos y=0.$$

La igualtat $\cos y_k=0$ no es dóna. Per tant, la funció f no satisfà les condicions en cap punt. $\square$

T 28. Sabem que una funció harmònica sempre pot ser la part real o imaginària d'una funció analítica (en el domini que correspongui), i al revés. Per tant, cal veure si $u(x,y)$ és harmònica:

$$\begin{aligned} u_x &= -ae^y\sin x, \\ u_{xx} &= -ae^y\cos x, \\ u_y &= ae^y\cos x, \\ u_{yy} &= ae^y\cos x. \end{aligned}$$

Finalment, notem que

$$u_{xx}+u_{yy}=-ae^y\cos x+ae^y\cos x=0,$$

per a qualsevol valor de $a\in\mathbb{R}$. $\square$

T 31. Denotem aquesta funció mitjançant $f(z)=u(x)+iv(x,y)$. Com es compleixen les eqs. de Cauchy-Riemann, tenim:

$$\begin{aligned} u_x &= u'(x)=v_y, \\ u_y=0 &= -v_x. \end{aligned}$$

Així, es compleix $v_x = 0$, la qual cosa ens diu que v és una funció només de y, $v = v(y)$.

Ara, de les expressions de la derivada de f, es compleix

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + iv_x = u_x + 0 = u_x = u'(x), \\ f'(z) &= v_y - iu_y = v_y - 0 = v_y = v'(y), \end{aligned}$$

per tant, s'ha de satisfer $u'(x) = v'(y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}$. Però del fet que u és una funció només de x i v només de y, forçosament tenim $u' = v' = K$ constant complexa. Per tant,

$$f'(z) = K \Rightarrow f(z) = Kz + C.$$

És a dir, f és un polinomi de grau 1. □

T 32. Noteu que l'expressió

$$v(x,y) - iu(x,y) = -i(u(x,y) + iv(x,y)) = -if(z)$$

és també entera (una funció entera, multiplicada per una constant). Per tant, l'apartat (d) és el correcte. □

T 35. Si mirem on es compleixen les eqs. de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial(\overline{z}+1)^3}{\partial \overline{z}} = 3(\overline{z}+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -1 \Leftrightarrow z = -1,$$

és a dir, només es compleixen en el punt -1. Per tant, no es compleixen en el origen. Per tant, aquesta funció no és derivable en el origen. □

T 36. Comproven si és una funció harmònica:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= 2y, \quad \Phi_{xx} = 0, \\ \Phi_y &= 2x - 3, \quad \Phi_{yy} = 0, \end{aligned}$$

per tant, tenim $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$ i Φ és harmònica en tot $\mathbb{C}$. Sabem que podem trobar la seva harmònica conjugada, independentment de si és part real o part imaginària. □

T 38. Pel Principi d'Identitat, en un entorn de l'eix real es compleix

$$f(z) = (1 - ia)z = (1 - ia)(x + iy) = x + ay + i(y - ax).$$

Per tant, la part real és $u(x,y) = x + ay$. □

T 40. Tenim

$$f(z) = e^{-x}e^{-iy} = e^{-(x+iy)} = e^{-z}.$$

Si derivem

$$f'(z) = -e^{-z} = -f(z).$$ □

2.3 Integració

T 42. La funció ze^{z^2} és entera, per tant tenim una regla de Barrow global per a la integral $I = \int_\Gamma ze^{z^2}dz$. Si agafem una corba Γ que va de 0 a $-i$ qualsevol, tenim

$$I = \int_\Gamma ze^{z^2}dz = \int_0^{-i} ze^{z^2}dz = \frac{1}{2}\left(e^{z^2}\right]_0^{-i} = \frac{1}{2}(e^{-1}-1) \neq 0. \qquad \square$$

T 44. La corba Γ es pot parametritzar per $z(t) = 1 + it$ per a $t \in [0,1]$. Llavors, usant aquesta parametrització, tenim

$$\int_\Gamma |z|^2 dz = \int_0^1 |1+it|^2 i dt = i\int_0^1 (1+t^2)dt = i\left(t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = i(1+\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}i. \qquad \square$$

T 45. Si usem la branca $\ln z = \ln|z| + i\arg(z)$ amb $\arg(z) \in [0, 2\pi)$, tenim que aquesta branca és una primitiva de la funció $\frac{1}{z}$ en la regió $U = \mathbb{C} \setminus \{t|\, t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$.

Noteu que la regió U conté la paràbola $2y^2 = x + 1$ i, en conseqüència, podem calcular la integral que ens demanen utilitzant la regla de Barrow amb la primitiva que abans hem mencionat:

$$\int_{1+i}^{1-i} \frac{dz}{z} = \ln(1-i) - \ln(1+i) = \ln|1-i| + i\frac{7}{4}\pi - \ln|1+i| - i\frac{1}{4}\pi = i\frac{3}{2}\pi. \qquad \square$$

T 48. Noteu que aquesta circumferència no conté cap de les dues arrels 3-èsimes de 1 diferents de 1, zeros del denominador $z^3 - 1$. Si denotem per $f(z) = \frac{z^3}{z^2+z+1}$, es compleix

$$\frac{z^3}{z^3-1} = \frac{z^3}{(z-1)(z^2+z+1)} = \frac{f(z)}{z-1}.$$

Noteu que f és analítica sobre i dins de la corba C. Per tant, podem aplicar el Teorema de Cauchy:

$$\oint_C \frac{z^3}{z^3-1}dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-1}dz = 2\pi i f(1) = \frac{2}{3}\pi i. \qquad \square$$

T 49. La branca que hem d'utilitzar és $\ln(z) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi)$ amb $\theta \in (-\pi, \pi]$. La parametrització de C ve donada per $z(\theta) = e^{i\theta}$, llavors la integral val

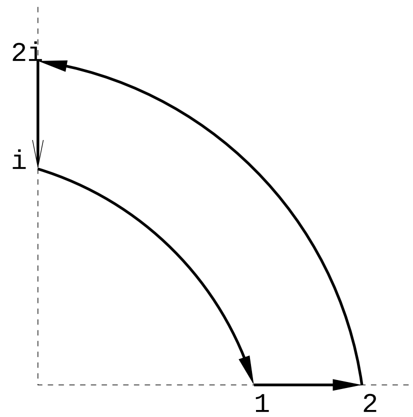
$$\oint_C \frac{dz}{z\ln z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}\ln e^{i\theta}} = i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{i(\theta+2\pi)} = (\ln(\theta+2\pi))]_{-\pi}^{\pi} = \ln(3\pi) - \ln\pi = \ln 3. \qquad \square$$

T 54. Si agafem C un cercle de radi R centrat a l'origen, de parametrització $z(\theta) = Re^{i\theta}$ per a $\theta \in [0, 2\pi)$, la integral val

$$\oint_C \frac{dz}{|z|} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\theta}}{R}d\theta = i\left(\frac{e^{i\theta}}{i}\right]_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0.$$

Per tant, els apartats (b) i (d) no són certs.

Per veure que l'apartat (c) tampoc és cert, posem un exemple d'una corba tancada tal que la integral no s'anul·la. Considereu la corba Γ de la figura. Si usem la notació $\Gamma_{a,b}$ per indicar el troç de la corba Γ que va del punt a al punt b, tenim que $\Gamma = \Gamma_{1,2} + \Gamma_{2,2i} + \Gamma_{2i,i} + \Gamma_{i,1}$. Amb aquesta notació, tenim



$$\oint_\Gamma \frac{dz}{|z|} = (\int_{\Gamma_{1,2}} + \int_{\Gamma_{2,2i}} + \int_{\Gamma_{2i,i}} + \int_{\Gamma_{i,1}})\frac{dz}{|z|}.$$

Anem a calcular cada una d'aquestes integrals, on les parametritzacions seran les usuals:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{1,2}} \frac{dz}{|z|} &= \int_1^2 \frac{dx}{|x|} = (\ln x]_1^2 = \ln 2, \\
\int_{\Gamma_{2,2i}} \frac{dz}{|z|} &= \int_0^{\pi/2} \frac{2ie^{i\theta}}{2} d\theta = i\left(\frac{e^{i\theta}}{i}\right]_0^{\pi/2} = i - 1, \\
\int_{\Gamma_{2i,i}} \frac{dz}{|z|} &= \int_2^1 \frac{idy}{|iy|} = i\int_2^1 \frac{dy}{y} = i\,(\ln y]_2^1 = -i\ln 2, \\
\int_{\Gamma_{i,1}} \frac{dz}{|z|} &= \int_{\pi/2}^0 \frac{ie^{i\theta}}{1} d\theta = i\left(\frac{e^{i\theta}}{i}\right]_{\pi/2}^0 = 1 - i.
\end{aligned}$$

Així, el valor de la integral és:

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{|z|} = \ln 2 + i - 1 - i\ln 2 + 1 - i = (1-i)\ln 2 \neq 0.$$

Una altra manera de veure que (c) no és correcta, és per contradicció. Suposem que sí que ho és, llavors tenim que la funció $f(z) = \frac{1}{|z|}$ és contínua en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pel Teorema de Morera tindriem que f és analítica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Però això és fals. Si fóra cert, les funcions part real i imaginària de f complirien les condicions de Cauchy-Riemann i és fàcil veure que això no és cert:

$$f(z) = \frac{1}{|z|} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, v(x,y) = 0.$$

Per exemple, la condició $u_x = v_y$ que és $-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$, no es compleix en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. □

T 55. Siguin $C_{1,0}$ una corba tancada, continguda dins C_1 i que només conté el punt z_0. De forma anàloga definim $C_{1,1}$ amb el punt z_1.

Pel fet que Ψ és analítica dins i sobre C_0, tenim

$$\oint_{C_0} \Psi(z)dz = 0.$$

Pel Teorema de Cauchy, tenim

$$\oint_{C_1} \Psi(z)dz = \oint_{C_{1,0}} \Psi(z)dz + \oint_{C_{1,1}} \Psi(z)dz.$$

Ara, del fets que $\frac{f(z)}{z-z_1}$ és analítica dins i sobre $C_{1,0}$ i que $\frac{f(z)}{z-z_0}$ és analítica dins i sobre $C_{1,1}$, tenim pel Teorema de Cauchy:

$$\begin{aligned}\oint_{C_{1,0}} \Psi(z)dz &= 2\pi i \frac{f(z_0)}{z_0 - z_1},\\ \oint_{C_{1,1}} \Psi(z)dz &= 2\pi i \frac{f(z_1)}{z_1 - z_0}.\end{aligned}$$

Així, es compleix

$$\oint_{C_1} \Psi(z)dz = \frac{2\pi i}{z_1 - z_0}(f(z_1) - f(z_0)).$$

Finalment, del fet que $\oint_{C_0} \Psi(z)dz = \oint_{C_1} \Psi(z)dz$, es compleix $\frac{2\pi i}{z_1-z_0}(f(z_1) - f(z_0)) = 0 \Rightarrow f(z_1) = f(z_0)$. □

T 56. Si utilitzem la parametrització que ens suggereixen a l'enunciat, el càlcul esdevé:

$$\begin{aligned}\oint_C \overline{z}dz &= \int_0^{2\pi} (a\cos t - ib\sin t)(-a\sin t + ib\cos t)dt =\\ &= \int_0^{2\pi} [(-a^2 \sin t\cos t + b^2 \sin t\cos t) + i(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)]dt =\\ &= \int_0^{2\pi} [(b^2 - a^2)\sin t\cos t + iab]dt = \frac{a^2 - b^2}{4}(\cos 2t]_0^{2\pi} + iab2\pi = i2\pi ab.\end{aligned}$$

□

T 61. La funció $\sinh(z)$ és analítica dins i sobre del quadrat, per tant es pot aplicar la Fórmula Integral de Cauchy:

$$\oint_C \frac{\sinh(z)}{z^5}dz = \frac{2\pi i}{4!}\sinh^{(4)}(0) = \frac{2\pi i}{4!}\sinh(0) = 0.$$

□

T 64. La funció que apareix en l'integrand és entera, per tant té primitiva $\frac{1}{2}\sin z^2$ global i es pot aplicar la Regla de Barrow global, independentment del camí escollit:

$$\int_\Gamma z\cos z^2 dz = \left(\frac{1}{2}\sin z^2\right]_0^{i\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}(\sin(-\pi) - 0) = 0.$$

□

2.4 Sèries

T 66. Els punts singulars de f venen donats pels zeros del denominador:

$$\cos(z+2) = 0 \Leftrightarrow z_k + 2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z_k = \frac{(2k+1)\pi - 4}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

De tots aquests punts, el més proper al zero és $z_0 = \frac{\pi-4}{2}$. Per tant, el radi de convergència és $R = |z_0| = \frac{4-\pi}{2}$. □

T 67. Pel mateix raonament de l'exercici anterior, tenim

$$\sin z = 1 \Leftrightarrow z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

El punt més proper a l'origen és $z_0 = \frac{\pi}{2} = R$. □

T 69. Si escrivim
$$f(z)=\frac{z+1}{1-z}=-(z+1)\frac{1}{z-1}=-\frac{1+z}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=(\star)$$
En la regió $|z|>1$ tenim que $|\frac{1}{z}|<1$ i podem desenvolupar l'expressió anterior com segueix:
$$(\star)=-(\frac{1}{z}+1)\sum_{k\geq 0}\frac{1}{z^k}=-\sum_{k\geq 0}\frac{1}{z^{k+1}}-\sum_{k\geq 0}\frac{1}{z^k}=-1-2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{z^k}. \qquad \square$$

T 70. Encara que és la mateixa funció que a l'exercici anterior, el desenvolupament no és al zero. Ara ens interessa tenir la sèrie centrada al punt $z_0=1$, o sigui en la regió $z\neq 1$ que és la mateixa que $|z-1|>0$. Però si observem la manipulació
$$\frac{1+z}{1-z}=-\frac{z+1}{z-1}=-\frac{(z-1)+2}{z-1}=-1-\frac{2}{z-1},$$
ens queda una expressió en potències de $z-1$. O sigui, en $|z-1|>0$, tenim un desenvolupament de Laurent de dos termes. $\square$

T 72. Podem manipular directament la sèrie
$$\frac{1}{z(z^2-1)}=\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=(\star)$$
a més, en la regió $1<|z|<\infty$, tenim $\frac{1}{|z|}<1$ i podem posar la segona fracció com a una suma geomètrica:
$$(\star)=\frac{1}{z^3}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{z^{2k}}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^7}+\cdots \qquad \square$$

T 73. Ens demanen el coeficient c_2, que és d'índex positiu. De les dues possibles regions $|z-i|<2$ i $|z-i|>2$, només n'hi ha una on apareixen índexs positius: la primera. Per tant, treballarem en la regió $|z-i|<2$:
$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z^2-i^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{(z-i)+2i}=\frac{1}{2i(z-i)}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}=(\star)$$
En la regió de treball es compleix $\left|\frac{z-i}{2i}\right|<1$. Així doncs, tenim una suma geomètrica:
$$(\star)=\frac{1}{2i(z-i)}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2i)^k}(z-i)^k=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2i)^{k+1}}(z-i)^{k-1}.$$
Per tant, el coeficient c_2 correspon a $k=3$, és a dir
$$c_2=\frac{(-1)^3}{(2i)^4}=-\frac{1}{16}. \qquad \square$$

T 76. Suposem $z\neq 1$, llavors si dividim z^2-z+1 entre $z-1$, tenim
$$\frac{z^2-z+1}{z-1}=z+\frac{1}{z-1}=(z-1)+1+\frac{1}{z-1}.$$
Per tant, si tenim centrada la sèrie en $z_0=1$, tenim que en la regió $|z-1|>0$ la sèrie de Laurent té tres termes. $\square$

T 79. Podem fer aparèixer potències de $z+2$ així:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+2)-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+2}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k}(z+2)^k,$$

vàlid en la regió $|z+2| < 2$. $\square$

2.5 Residus

T 86. Suposem que les arrels del polinomi són totes diferents, denotem-les per $z_1, ..., z_n$. Considerem les $n+2$ posicions diferents de la corba: (1) no tanca cap arrel; (2) només tanca z_1 i no passa per cap altra arrel;... $(n+1)$ només tanca z_n i no passa per cap altra arrel i, finalment, $(n+2)$ la corba tanca totes les arrels. Si totes aquestes posicions donen resultats diferents, tenim $n+2$ resultats diferents. Per tant, el nombre màxim de valors diferents és $N \geq n+2 > n+1$. $\square$

T 88. Si desenvolupem les expressions que ens apareixen, en el punt zero:

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{1}{6}z^3 + o(z^3), \\ 1-(1-z^2)^2 &= 1-(1+z^4-2z^2) = z^2(2-z^2), \end{aligned}$$

així doncs,

$$\frac{\sin z}{1-(1-z^2)^2} = \frac{z-\frac{1}{6}z^3+o(z^3)}{z^2(2-z^2)} = \frac{1-\frac{1}{6}z^2+o(z^2)}{z(2-z^2)}.$$

Per tant, si fem

$$\lim_{z\to 0} z\frac{\sin z}{1-(1-z^2)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{1-\frac{1}{6}z^2+o(z^2)}{2-z^2} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

comprovem que tenim un pol simple. $\square$

T 89. Tenim

$$\sin\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{(z-1)^3} + \cdots - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{6}\frac{1}{(z-1)^3} + \cdots$$

on tots els coeficients menors que -2, és a dir, $c_{-1} = 0$. $\square$

T 90. Dels desenvolupaments

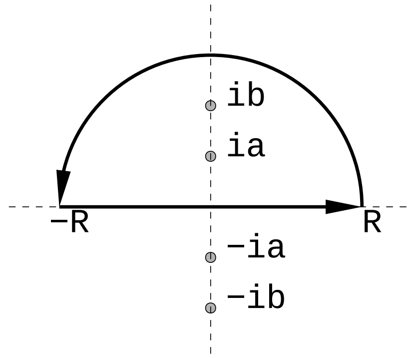
$$\frac{z-\sin z}{z^3} = \frac{\frac{1}{6}z^3+o(z^3)}{z^3},$$

tenim

$$\lim_{z\to 0}\frac{z-\sin z}{z^3} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{6} + o(1) = \frac{1}{6}.$$

Per tant, en $z_0 = 0$ hi ha una singularitat evitable. $\square$

T 99. Considereu la corba Γ_R de la figura



La funció f té els pols simples $\pm ia$ i $\pm ib$, dels quals només ia i ib quedan dins Γ_R (estem suposant que $a > 0, b > 0$). Els residus en aquests punts valen:

$$\begin{aligned} Res(ia) &= f(ia) = \frac{-a^2}{2ia(b^2-a^2)} = \frac{1}{2}\frac{a}{b^2-a^2}i, \\ Res(ib) &= f(ib) = \frac{1}{2}\frac{b}{a^2-b^2}i. \end{aligned}$$

Aplicant el Teorema dels Residus, es compleix

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)dz = \frac{2\pi i}{2}\left(\frac{a}{b^2-a^2} - \frac{b}{b^2-a^2}\right)i = \pi\frac{b-a}{b^2-a^2} = \frac{\pi}{b+a}.$$

Denotem per C_R el semicercle de Γ_R i per I_R el segment restant. Llavors, si parametritzem C_R per $z(\theta) = Re^{i\theta}$ amb $\theta \in [0, \pi]$, tenim

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{R^2e^{i\theta}Rie^{i\theta}}{(R^2e^{i2\theta}+a^2)(R^2e^{i2\theta}+b^2)}\right| d\theta \leq \int_0^\pi \frac{R^3}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}d\theta = \frac{R^3\pi}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} = K_R.$$

Noteu que el valor K_R tendeix a zero quan R tendeix a ∞.

Per altra part, sobre I_R tenim $z(x) = x$ amb $x \in [-R, R]$. Per tant

$$\int_{I_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx.$$

Finalment, de la igualtat $\oint_{\Gamma_R} f = \int_{C_R} f + \int_{I_R} f$, es compleix

$$\frac{\pi}{a+b} = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+a^2)}dx,$$

d'on, fent límit quan $R \to \infty$, resulta

$$\frac{\pi}{a+b} = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+a^2)}dx. \qquad \square$$

T 100. Amb el canvi proposat, resulta $ie^{i\theta}d\theta = dz$ per lo que $d\theta = -i\frac{dz}{z}$ i

$$\cos(2\theta) = \frac{e^{i2\theta}+e^{i\theta}}{2} = \frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{2}, \quad \cos\theta = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}.$$

Llavors, la integral es transforma en

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}(z^2+\frac{1}{z^2})}{1-2p\frac{z+\frac{1}{z}}{2}+p^2}\frac{-i}{z}dz = \frac{-i}{2}\oint_{|z|=1}\frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{z-p(z^2+1)+p^2z}dz = \\
&= \frac{i}{2}\oint_{|z|=1}\frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{pz^2-(1+p^2)z-p}dz = (\star)
\end{aligned}
$$

Per buscar les arrels del denominador de l'integrand, hem de distingir dos casos: $p=0$ i $p\neq 0$.

Si $p=0$, tenim

$$
(\star) = \frac{i}{2}\oint_{|z|=1}\frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{-z}dz = -\frac{i}{2}\oint_{|z|=1}(z+\frac{1}{z^3})dz = 0,
$$

noteu que només hi ha el punt singular $z=0$, amb residu zero (l'integrand és el desenvolupament de Laurent en $z=0$).

Si $p\neq 0$, l'equació $pz^2-(1+p^2)z-p=0$ té les solucions $z=p$ i $z=\frac{1}{p}$, per tant tenim la descomposició

$$
pz^2-(1+p^2)z+p = p(z-p)(z-\frac{1}{p}).
$$

Només l'arrel p queda dins el cercle $|z|<1$, l'altra arrel té mòdul major que 1. Per tant, la integral que volem calcular val

$$
(\star) = \frac{1}{2p}\oint_{|z|=1}\frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{(z-p)(z-\frac{1}{p})}dz = \frac{i}{2p}2\pi i\,(\mathrm{Res}(0)+\mathrm{Res}(p)) = (\star)
$$

Els punts singulars són pols, doble en $z=0$ i simple en $z=p$. Els seus valors són:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(0) &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{z^2-(p+\frac{1}{p})z+1}\right) = p+\frac{1}{p}, \\
\mathrm{Res}(p) &= \lim_{z\to p}(z-p)\frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{(z-p)(z-\frac{1}{p})} = \frac{p^2+\frac{1}{p^2}}{p-\frac{1}{p}} = p\frac{p^2+\frac{1}{p^2}}{p^2-1} = \frac{p^4+1}{p(p^2-1)}.
\end{aligned}
$$

Així doncs, el resultat final és

$$
(\star) = -\frac{\pi}{p}\left(p+\frac{1}{p}+\frac{p^4+1}{p(p^2-1)}\right) = -\frac{\pi}{p}\left(\frac{p^4-1}{p(p^2-1)}+\frac{p^4+1}{p(p^2-1)}\right) = -\frac{\pi}{p}\frac{2p^4}{p(p^2-1)} = \frac{2\pi p^2}{1-p^2}. \qquad \square
$$