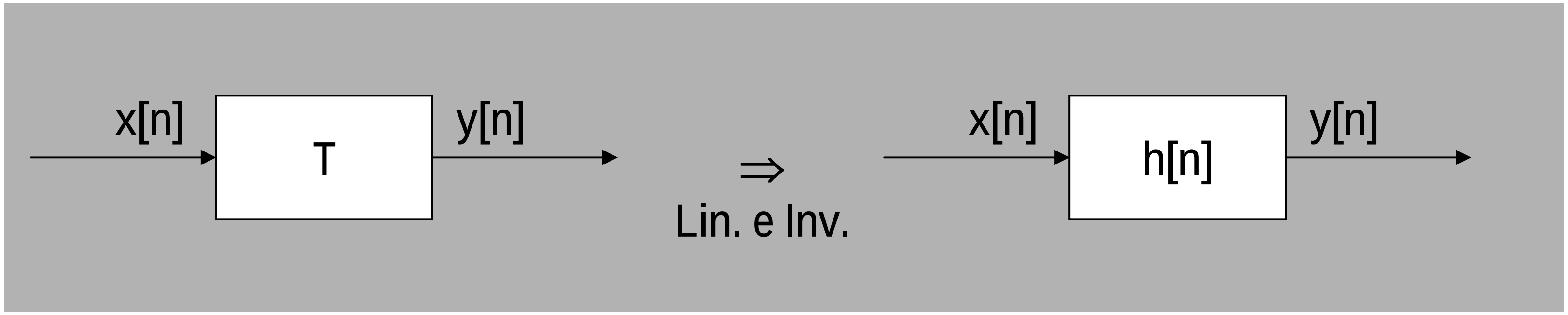
1.3: Sistemas lineales e invariantes



- Respuesta impulsional
- Convolución
  - Cálculo
  - Propiedades
- Función de transferencia

Respuesta impulsional (I)

- Descomposición de una señal en función de $\delta[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

- Sistema lineal e invariante con el tiempo:

$$\begin{aligned} y[n] = T\{\,x[n]\,\} &= T\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\,\} \\ &\xrightarrow{\text{Lineal}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,T\{\,\delta[n-k]\,\} \\ &\xrightarrow{\text{Invariante}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= T\{\,\delta[n]\,\} \\ h[n-k] &= T\{\,\delta[n-k]\,\} \end{aligned}$$

Respuesta impulsional (II)

- La salida depende de x[n] y h[n]
- El sistema se caracteriza por su respuesta impulsional h[n]
- Ecuación de convolución:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = x[n] * h[n]$$

- Cálculo :

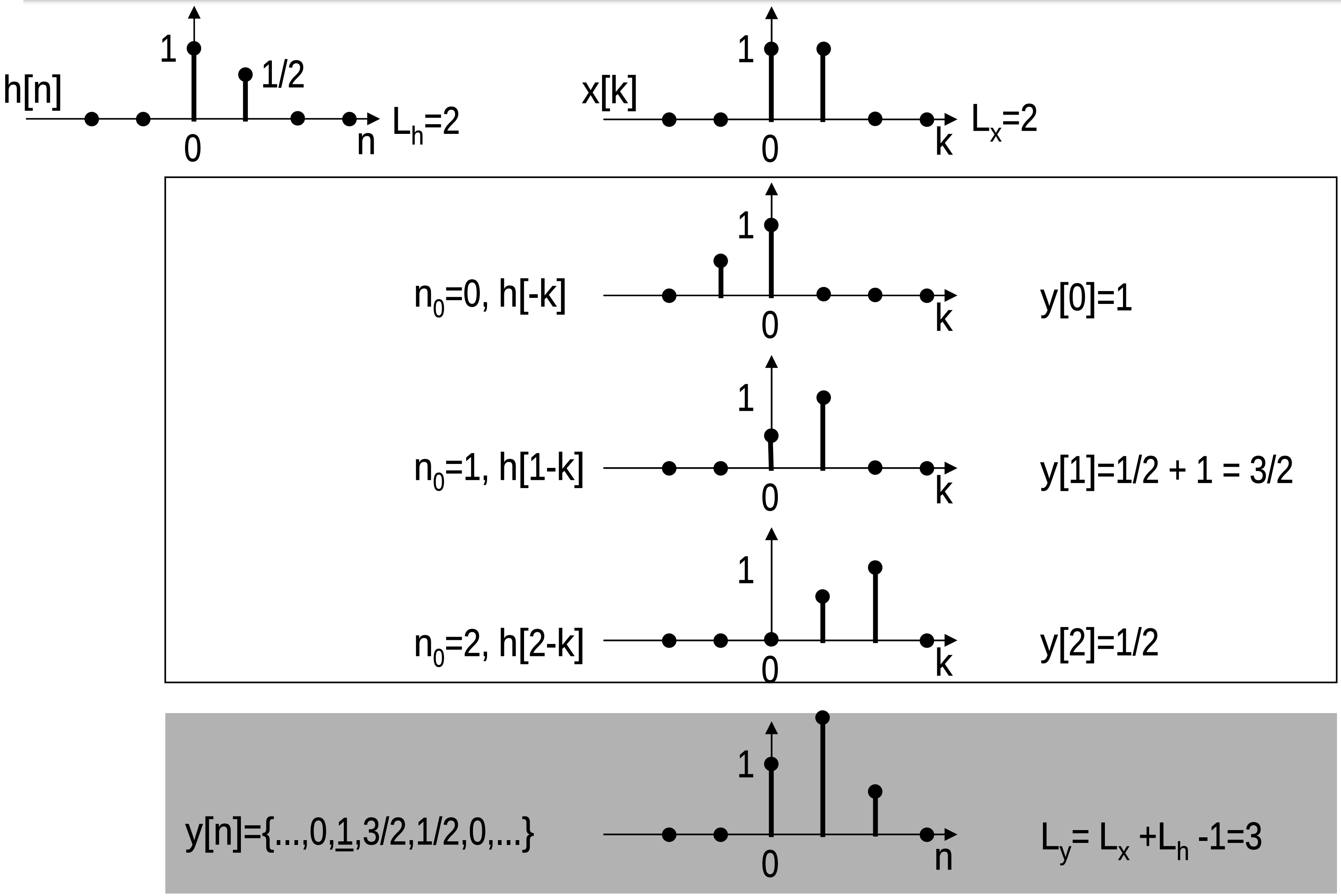
Para cada n_o fijo: $$y[n_o] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n_o - k]$$

  - Calcular $h[n_o-k]$ (k índice temporal)

$$h[k] \xrightarrow[\text{Reflexión}]{} h[-k] \xrightarrow[\text{Retardo } n_o]{} h[n_o-k]$$

  - Multiplicar muestra a muestra $x[k]\, h[n_o-k]$
  - Sumar

Ejemplo de convolución



Propiedades de la convolución

- Conmutativa: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

- Asociativa: $(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$

$$\rightarrow \boxed{h_1[n]} \rightarrow \boxed{h_2[n]} \rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \rightarrow \boxed{h_1[n] * h_2[n]} \rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \rightarrow \boxed{h_2[n]} \rightarrow \boxed{h_1[n]} \rightarrow$$

- Distributiva respecto a la suma: $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$

- Retardo: $x[n-M] * h[n] = y[n-M] = x[n] * h[n-M]$

- Reflexión temporal: $y[-n] = x[-n] * h[-n]$

Ejemplo de demostración

Conmutatividad

$$h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]\,x[n-k]$$

$$=\sum_{m=+\infty}^{-\infty}h[n-m]\,x[m]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\,h[n-m]$$

$$=x[n]*h[n]$$

Cambio de variable: m=n-k
k=n-m

Retardo

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\,h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]\,x[n-k]$$

$$y[n-M]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]\,x[n-M-k]$$

$$=x[n-M]*h[n]$$

Propiedad de un sistema lineal e invariante: Causalidad

- Sistema arbitrario causal: $y[n] = f\{x[n-k],\ k \geq 0\}$
- Sistema lineal e invariante: $y[n] = h[n] * x[n]$

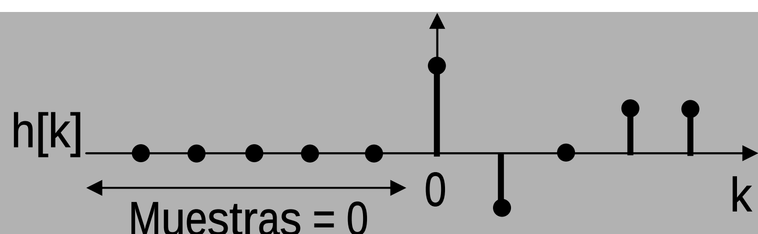
- <u>Estudio de la causalidad a partir de h[n]:</u>

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$$= \dots + h[2]x[n-2] + h[1]x[n-1] + h[0]x[n] + \boxed{h[-1]x[n+1] + h[-2]x[n+2] + \dots}$$

Muestras futuras

Causalidad $\Leftrightarrow$ $h[k] = 0,\ k<0$



Propiedad de un sistema lineal e invariante: Estabilidad

- Sistema arbitrario estable: $\forall x[n]$ tq $\forall n$ $|x[n]| < \infty$, $\Rightarrow |y[n]| < \infty$
- Sistema lineal e invariante: $y[n] = h[n] * x[n]$

- <u>Estudio de la estabilidad a partir de h[n]:</u> $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$ h:sumable en valor absoluto

<u>Suficiencia:</u> suponemos $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$

$$|x[n]| < B, \forall n,$$

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k] \right|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|\, |x[n-k]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

$$< \infty$$

<u>Necesidad:</u> suponemos $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty$

$$x_o[n] = \begin{cases} h^*[-n]/|h[-n]|, & \text{si } \ h[-n] \neq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_o[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_o[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{h^*[-k]}{|h[-k]|} h[n-k]$$

$$y_o[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{h^*[-k]}{|h[-k]|} h[0-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty$$

Función de transferencia

- Respuesta de un sistema lineal e invariante a una exponencial compleja:
  $x[n] = A\,z^n$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,Az^{n-k}$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,z^{-k}\right) \quad Az^n$$

Coeficiente multiplicativo (h,z) independiente de n: H(z)

Señal de entrada

$$y[n] = H(z) \quad Az^n$$

- Az^n = Auto-función del sistema
- $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,z^{-k}$
  Valor propio: Función de transferencia

Respuesta frecuencial

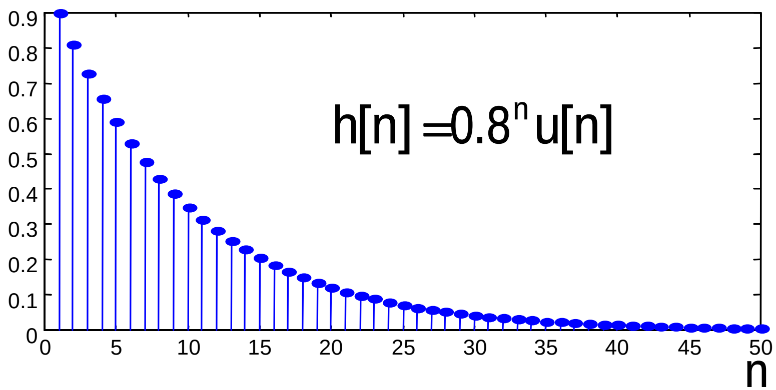
- Caso particular cuando: $x[n] = e^{j\omega n}$

$$y[n] = H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}$$

Respuesta frecuencial

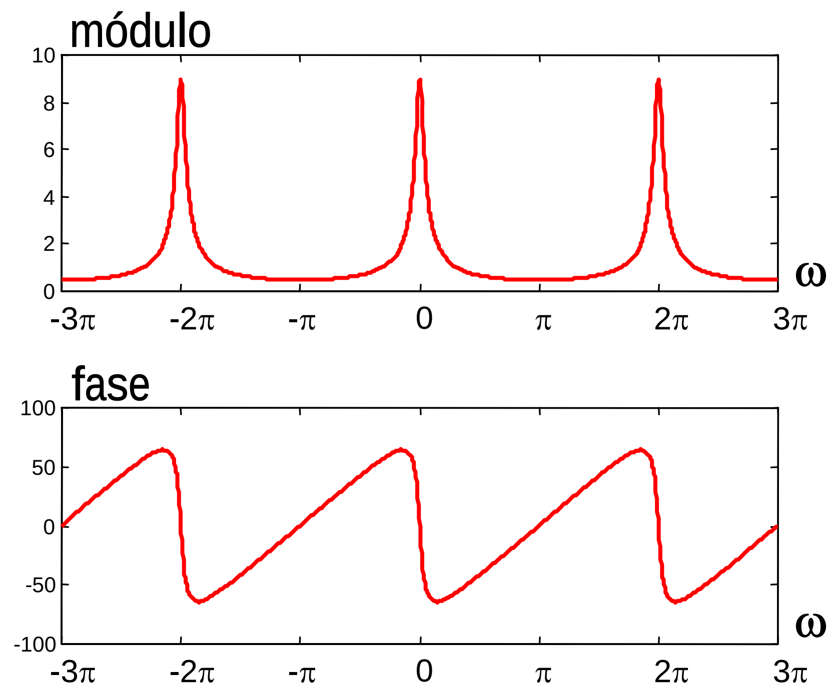
Nota: $e^{j\omega}$ es periódica, $H(e^{j\omega})$ también lo es

- <u>Ejemplo</u>



$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.8^n e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (0.8 e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - 0.8 e^{-j\omega}}$$



Resumen

- Respuesta impulsional:
  - $h[n]$ $= T\{\delta[n]\}$
  - Causal $\Leftrightarrow$ $h[n]=0,\ n<0$
  - Estable $\Leftrightarrow \Sigma\ |h[n]| < \infty$

- Salida: convolución: $y[n] = h[n] * x[n]$

- Respuesta a exponencial compleja:
  - $x[n] = A\ z^n$ $\Rightarrow$ $y[n] = H(z)\ A\ z^n$
  - $H(z) = \Sigma\ h[n]z^{-n}$ Función de transferencia
  - $H(e^{j\omega})$ Respuesta frecuencial