



- Test (3.5 puntos) – Modelo A
- Marcar únicamente una respuesta en cada pregunta.
- Los errores descuentan 1/3.

NOMBRE: **SOLUCIÓ**

1.- Se inyectan dos tonos de -65 dBm a la entrada de un cuadripolo. Se observa a la salida un producto de intermodulación de potencia -85 dBm, igual a la potencia de ruido. También se observan los dos tonos con una potencia de -40 dBm. ¿Cuánto vale el SFDR para el producto detectado?

a) 45 dB

b) 15 dB

c) 20 dB

d) Faltan datos para calcularlo

2.- El VCO de un sintetizador de frecuencias presenta una frecuencia en reposo de 900 MHz y una sensibilidad de 100 MHz/V. El sintetizador genera frecuencias en el rango de 890 a 915 MHz. ¿Cuál es el rango de valores de la tensión a la entrada del VCO cuando el sintetizador está enganchado?

a) [-0.15, 0.1] V

b) [-0.015, 0.023] V

c) [-0.1, 0.15] V

d) Ninguna de las anteriores.

3.- Un PLL de segundo orden con filtro activo ideal tiene una señal a la entrada de $2 V_{ef}$, la ganancia del detector de fase es $K_1=2/3$, y la sensibilidad del VCO es de 1 MHz/V. ¿Cuanto vale el margen de Hold-in?

a) 1.33 MHz

b) 8.37 MHz

c) ∞

d) 1.88 MHz

4.- En un sintetizador basado en PLL que se encuentra enganchado y generando un tono a f_o se observa a la entrada del VCO un tono de amplitud residual a frecuencia igual a la del oscilador de referencia (f_r). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta a la salida del sintetizador?

a) Existirán dos tonos espúreos a las frecuencias f_o+f_r y f_o-f_r con potencia igual a la del tono a f_o .

b) Existirán dos tonos espúreos a las frecuencias f_o+f_r y f_o-f_r , cuya potencia será tanto mayor como mayor sea la sensibilidad del VCO.

c) Existirán dos tonos espúreos a las frecuencias f_o+f_r y f_o-f_r , cuya potencia será tanto mayor como mayor sea el valor de f_r .

d) Existirán dos tonos espúreos a las frecuencias f_o+f_r y f_o-f_r , cuya potencia será tanto menor como mayor sea la ganancia del detector de fase.

5.- ¿Cuánto vale la densidad espectral de potencia de ruido disponible en un dipolo pasivo de impedancia $R(f)+jX(f)$ a la temperatura T ?

a) $KTR(f)/2$ (W/Hz)

b) $KTX(f)/2$ (W/Hz)

c) $KT/2$ (W/Hz)

d) $2KTR(f)$ (W/Hz)

6.- El emisor de un sistema de comunicaciones trabaja a 900 MHz con una estabilidad de 0.1ppm. A su vez, el receptor superheterodino presenta un oscilador local con frecuencia 910 MHz y estabilidad de 1 ppm. ¿Cuánto vale el rango de variación de la frecuencia a la salida del cabezal de RF del receptor?

a) $10 \text{ MHz} \pm 1 \text{ kHz}$

b) $10 \text{ MHz} \pm 0.91 \text{ kHz}$

c) $10 \text{ MHz} \pm 1.1 \text{ MHz}$

d) Ninguna de las anteriores

7.- Un receptor presenta una sensibilidad de -105 dBm para una (S/N) a la salida de 12 dB. Cuando a la entrada del mismo existen dos tonos en los canales adyacentes de potencia -45 dBm se observa a la salida un producto de intermodulación de tercer orden cuya (S/N) es de 12 dB. ¿Cuánto vale el punto de intercepción a la entrada del receptor para los productos de tercer orden?

a) 60 dBm

b) -37.5 dBm

c) -15 dBm

d) -45 dBm

8.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta en relación a un sintetizador realizado mediante un PLL de segundo orden cuando se incrementa el valor de la frecuencia natural?

a) La influencia del ruido de fase del VCO sobre la salida será más significativa

b) El tiempo de conmutación se incrementará

c) La potencia de los espúreos de salida se reducirá

d) Ninguna de las anteriores

9.- ¿Cuál es la sensibilidad de un receptor de factor de ruido 12 dB, ganancia 20 dB y ancho de banda 5 MHz si se desea una SNR a la salida del cabezal de 10 dB y la temperatura de antena es de 500K?

a) -114.8 dBm

b) -104.8 dBm

c) -134.8 dBm

d) -84.8 dBm

10.- Un receptor superheterodino de doble conversión capta señales en el rango de 400 a 480 MHz con una separación de canales de 5 MHz. La primera y la segunda frecuencias intermedias son $f_{FI}=50$ MHz y $f_{FI2}=10$ MHz. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- a) Una configuración válida del primer oscilador local es que genere frecuencias entre 390 y 470 MHz.
- b) El segundo oscilador local será un sintetizador con resolución de 5 MHz.
- c) Cuando el segundo oscilador local esté trabajando a 60 MHz la frecuencia imagen del segundo proceso de conversión será de 70 MHz.
- d) Ninguna de las anteriores.

11.- Considere un sistema de comunicaciones que presenta un ancho de banda total de 200 kHz. Además, se trabaja con una (S/N) que permite conseguir una eficiencia espectral de 2 bits/s/Hz (esto es, una velocidad de transmisión de 2 bits/s por cada Hz de ancho de banda utilizado). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- a) Si se emplea una técnica FDMA que subdivida la banda en 4 canales, la velocidad de transmisión que se podrá conseguir en cada uno es de 50 kb/s.
- b) Si se emplea una técnica TDMA cuyas tramas están compuestas por 8 slots, un usuario al que se le asigne uno de estos slots conseguirá una velocidad de transmisión de 50 kb/s.
- c) Una técnica TDMA con 4 slots por trama permitirá conseguir siempre una velocidad de transmisión por usuario mayor que una técnica FDMA que subdivida la banda en 4 canales.
- d) Ninguna de las anteriores.

12.- Considere un conversor A/D de 7 bits que muestrea una señal con frecuencia máxima 1kHz, y que está perfectamente ajustado al margen dinámico del conversor. ¿Cuál es aproximadamente la frecuencia de muestreo que se necesita para conseguir una SNR de cuantificación de 50 dB aplicando sobremuestreo?

- a) 2 kHz
- b) 4 kHz
- c) 8 kHz
- d) 16 kHz

13.- Suponga un sistema de codificación de canal más entrelazado que rellena la matriz por filas y la lee por columnas, con una matriz de 120 filas y 200 columnas, y un tiempo de bit de 31.25µs, es cierto que:

- a) El diseño es adecuado para canales con un tiempo de ráfaga menor que 3.75 ms y para aplicaciones que acepten retardos superiores a 1.5 s.
- b) El diseño es adecuado para canales con un tiempo de ráfaga mayor que 3.75 ms y para aplicaciones que acepten retardos superiores a 1.5 s.
- c) El diseño es adecuado para canales con un tiempo de ráfaga mayor que 3.75 ms y para aplicaciones que acepten retardos inferiores a 1.5 s.
- d) El diseño es adecuado para canales con un tiempo de ráfaga menor que 3.75 ms y para aplicaciones que acepten retardos inferiores a 1.5 s.

14.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta en relación a la codificación de canal?

- a) Después de codificar un flujo de bits de R_b (b/s) con un código de tasa 1/4, la velocidad resultante entregada al canal será de $R_b/4$ (b/s).
- b) Al usar codificación de canal se requerirá una S/N mayor a la entrada de un receptor para conseguir la misma tasa de error a la salida que si no se usa la codificación.
- c) Cuanto mayor sea la tasa de codificación de un código, más redundancia se envía.
- d) Ninguna de las anteriores.

15.- Un receptor superheterodino usa un mezclador con ganancia de -6 dB, aislamiento RF-FI de 80 dB, aislamiento OL-RF infinito y aislamiento OL-FI de 76 dB. Si la señal de RF tiene un nivel de -54 dBm y el oscilador local presenta una potencia de 36 dBm, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

- a) La potencia de señal a f_{OL} en la puerta de FI es de -40 dBm.
- b) La potencia de señal a f_{RF} en la puerta de FI es de -60 dBm.
- c) La potencia de señal a f_{OL} en la puerta de RF es nula.
- d) La potencia de señal a f_{RF} es inferior a la potencia de señal a f_{FI} en la puerta de FI.

16.- Considérese un modulador directo de FM con una bobina de valor $L=58$ nH y una capacidad dependiente de la tensión de la señal moduladora según $C(t)=(120+2x(t))$ pF. La frecuencia portadora de dicho modulador será aproximadamente:



- a) 60.3 kHz
- b) 379.05 MHz
- c) 60.3 MHz
- d) Depende de la desviación de frecuencia que se desee para la modulación.

17.- ¿Cuál de las siguientes condiciones debe cumplir un demodulador de FM basado en un PLL de segundo orden con factor de amortiguación $\xi=0.7$ y ancho de banda de la señal moduladora $BW_y=15$ kHz, para poder demodular correctamente una señal FM con desviación de frecuencia $f_d=75$ kHz?

- a) La frecuencia natural del PLL (f_n) debe ser de 10.71 kHz.
- b) La frecuencia natural del PLL (f_n) debe ser inferior a 15 kHz.
- c) La frecuencia natural del PLL (f_n) debe ser superior a 53.57 kHz.
- d) Ninguna de las anteriores.

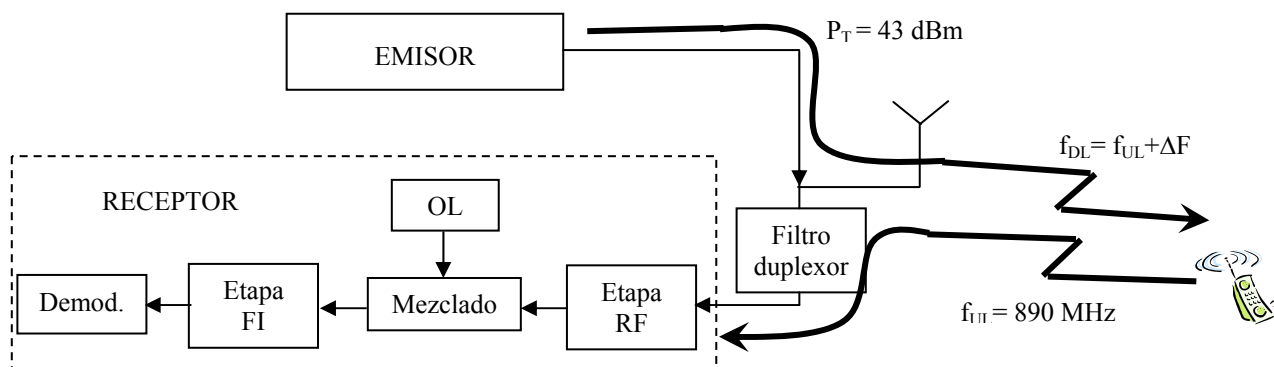
18.- Un sintetizador digital basado en memoria ROM, que genera frecuencias múltiplos de $f_R=10$ kHz con frecuencia de muestreo igual a 100 MHz presentará un tiempo de conmutación igual a:

- a) 100 ms
- b) 10 µs
- c) 10 ns
- d) 1 ms

  <div> Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA </div>	Emissors i Receptors
	25/06/2010
	Notas provisionales: 29/06/2010, 14h
	Alegaciones hasta 1/07/2010, 10h
Notas revisadas: 2/07/2010, 14h	
• Duración total: 3h (1h Test + 2h Problemas)	

Problema 1 (3.5 puntos)

Considérese la estación base de un sistema de comunicaciones móviles, en la que se ubican en un mismo emplazamiento, y compartiendo la misma antena, el emisor que transmite la señal a la frecuencia f_{DL} hacia los terminales móviles, y el receptor que capta la señal a la frecuencia f_{UL} enviada por los móviles, tal y como se muestra en la figura. Con objeto de aislar la señal transmitida de la recibida se emplea un filtro, denominado duplexor, que únicamente deja pasar hacia el receptor la señal a frecuencia f_{UL} .

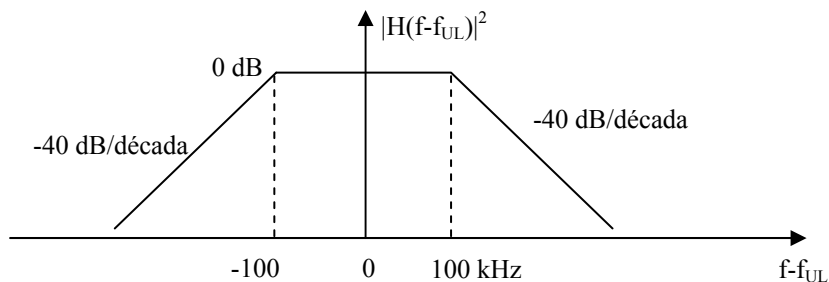


Los parámetros que caracterizan al receptor son los siguientes:

- Etapa de RF: $G_{RF} = 30$ dB, $NF_{RF} = 4$ dB, Modelo no lineal: $y(t) = a_1 x(t) - a_3 x^3(t)$, con $a_3 = 10^6$
- Mezclador: $G_m = -6$ dB, $NF_m = 20$ dB, $IP_{i,m} = 10$ dBm (prod. de 3r orden)
- Etapa de FI: $G_{FI} = 30$ dB, $NF_{FI} = 15$ dB, $IP_{i,FI} = 0$ dBm (prod. de 3r orden), $B_{FI} = 200$ kHz
- Resistencia de entrada/salida de los cuadripolos: 50Ω
- $K = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K. $T_0 = 290$ K

La tasa de error de bit a la salida del demodulador en función de la SNR a su entrada es: $P_e = \frac{3}{4SNR^2}$

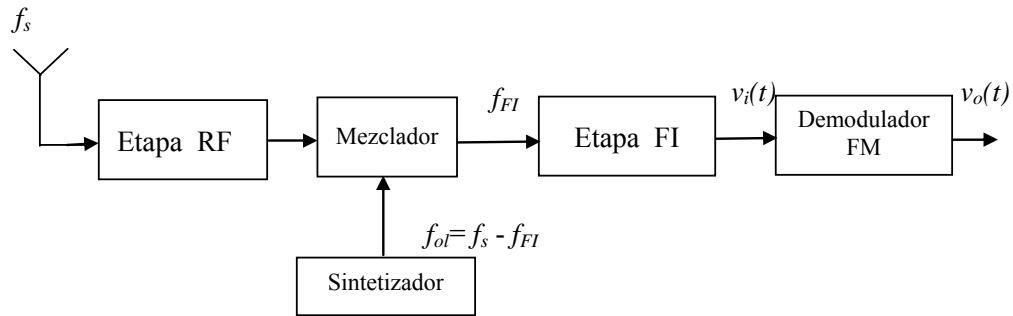
- Calcular la máxima potencia de ruido a la entrada del receptor si se desea una sensibilidad de -96 dBm para una probabilidad de error de bit de 10^{-3} .
- Determinar el SFDR del receptor para los productos de intermodulación de tercer orden.
- Supóngase ahora que, debido a la selectividad finita del filtro duplexor, parte de la señal enviada a la frecuencia f_{DL} interfiere a la entrada del receptor, lo que ocasionará una pérdida de sensibilidad del mismo. Si se quiere que la nueva sensibilidad sea de -90 dBm, ¿cuál debe ser como máximo la potencia de la señal interferente a la entrada del receptor?
- Sabiendo que la potencia de la señal enviada por el transmisor es $P_T = 43$ dBm, y que el filtro duplexor presenta la plantilla que se muestra en la figura, determinar la mínima separación ΔF entre las frecuencias de transmisión y de recepción para cumplir la condición del apartado anterior.



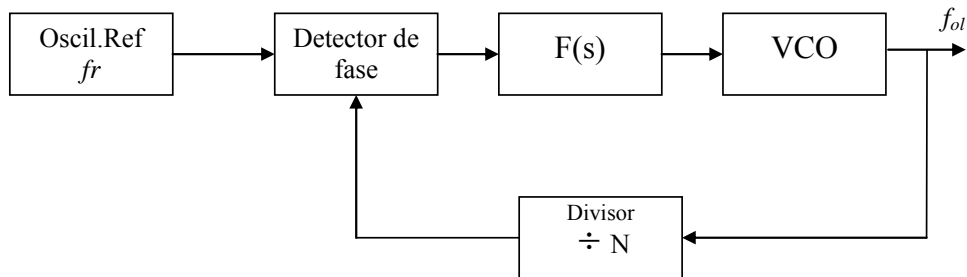
Nota: Para un cuadripolo con distorsión cúbica: $IP_i = \frac{2 a_1}{3 a_3 R} [W]$ para los productos de tercer orden.

Problema 2 (3 puntos)

Considere el siguiente receptor superheterodino que capta señales en el rango 87.5 MHz a 108 MHz, con canalización de 100 kHz:

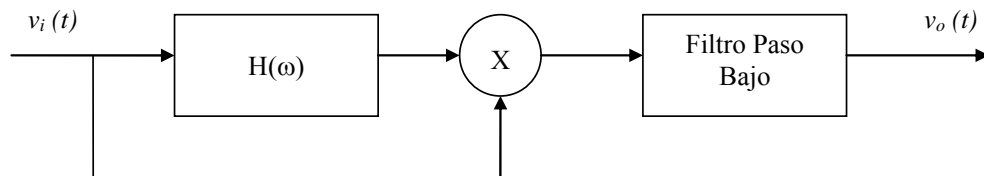


El diagrama de bloques del sintetizador se muestra en la siguiente figura:



- Calcular el valor de f_r , el valor mínimo y el valor máximo que debe tomar el divisor programable para generar las portadoras locales necesarias para el funcionamiento del receptor superheterodino.
- Considerando que el sintetizador se realiza con un PLL de segundo orden con $\xi=0.7$, calcular la mínima frecuencia natural del PLL para que el sintetizador trabaje siempre dentro del margen de Lock-in.

El diagrama de bloques del demodulador de FM corresponde a la figura siguiente:



- Demuéstrese que $H(\omega)$ se comporta como una línea de retardo.
- Encontrar el valor máximo de Q que garantiza que el circuito se comporta como un demodulador de FM.

Datos:

$$v_i(t) = A \sin\left(2\pi f_{FI}t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda\right)$$

$$H(\omega) \cong -\frac{jQ}{1 + j2\left(\frac{\omega - \omega_{FI}}{\omega_{FI}}\right)Q} \quad ; \quad \text{con } |\omega - \omega_{FI}| \ll \frac{\omega_{FI}}{2Q}$$

Frecuencia intermedia: $f_{FI} = 10 \text{ MHz}$

Desviación de frecuencia: $f_d = 25 \text{ kHz}$

Máxima frecuencia del espectro $x(t)$: $f_m = 15 \text{ kHz}$

$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

$$\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(a)$$

Solución problema 1

$$a) P_e = 10^{-3} \Rightarrow SNR = \sqrt{\frac{3}{4P_e}} = 27.38$$

$$\text{Empleando la fórmula de Friis: } F_R = F_{RF} + \frac{F_m - 1}{G_{RF}} + \frac{F_{FI} - 1}{G_{RF} G_m} = 10^{0.4} + \frac{100 - 1}{1000} + \frac{10^{1.5} - 1}{1000 \cdot 10^{-0.6}} = 2.73$$

$$\text{A la entrada del demodulador: } SNR = \frac{P_s}{K(T_A + T_o(F_R - 1))B_{FI}} = \frac{P_s}{P_{Na} + KT_o(F_R - 1)B_{FI}}$$

$$P_{Na} = \frac{P_s}{SNR} - KT_o(F_R - 1)B_{FI} = \frac{10^{-12.6}}{27.38} - 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \cdot (2.73 - 1) 200 \cdot 10^3 = 7.79 \cdot 10^{-15} W \Rightarrow P_{Na} = -111 \text{ dBm}$$

$$b) SFDR(dB) = \frac{m-1}{m} (IP_{i,tot}(dBm) - P_{Ni}(dBm)), \text{ con } m=3$$

Potencia de ruido equivalente a la entrada:

$$P_{Ni} = P_{Na} + KT_o(F_R - 1)B_{FI} = 9.17 \cdot 10^{-15} W = -110.37 \text{ dBm}$$

Para calcular el punto de intercepción total primero hay que calcular el de la etapa de RF a partir de su relación entrada/salida:

$$y(t) = a_1 x(t) - a_3 x^3(t), \text{ con } a_3 = 10^6, \quad G_{RF} = 20 \cdot \log a_1 = 30 \text{ dB} \Rightarrow a_1 = 31.62$$

$$\text{Tal como indica la nota: } IP_{i,RF} = \frac{2a_1}{3a_3 R} = \frac{2 \cdot 31.62}{3 \cdot 10^6 \cdot 50} = 4.21 \cdot 10^{-7} W = -33.75 \text{ dBm}$$

$$IP_{i,tot} = \frac{1}{\frac{1}{IP_{i,RF}} + \frac{G_{RF}}{IP_{i,m}} + \frac{G_{RF} G_m}{IP_{i,FI}}} = \frac{1}{\frac{1}{10^{-3.375}} + \frac{1000}{10^1} + \frac{1000 \cdot 10^{-0.6}}{10^0}} = 3.67 \cdot 10^{-4} mW = -34.35 \text{ dBm}$$

$$SFDR(dB) = \frac{3-1}{3} (-34.35 + 110.37) \Rightarrow SFDR = 50.68 \text{ dB}$$

$$c) \text{ A la entrada del receptor existirá una señal de la forma: } x(t) = A \cos \omega_{UL} t + I \cos \omega_{DL} t$$

de modo que debido a la no linealidad del receptor se producirá una pérdida de sensibilidad, ya que la señal útil a su salida será:

$$y(t) = a'_1 A \left(1 - \frac{3a'_3 I^2}{2a'_1} \right) \cos \omega_{UL} t + \dots \text{ (Nota: se puede despreciar la compresión de ganancia)}$$

Los coeficientes de la relación entrada salida a'_1 y a'_3 corresponden a la totalidad del receptor, y no sólo a la etapa de RF, de modo que vendrán dados por:

$$G_{RF} = 20 \cdot \log a'_1 = G_{TOT} = G_{RF} + G_m + G_{FI} = 30 - 6 + 30 = 54 \text{ dB} \Rightarrow a'_1 = 501.18$$

$$IP_{i,tot} = \frac{2a'_1}{3a'_3 R} \Rightarrow a'_3 = \frac{2a'_1}{3R IP_{i,tot}} = \frac{2 \cdot 501.18}{3 \cdot 50 \cdot 3.67 \cdot 10^{-7}} = 1.82 \cdot 10^7$$

Como queremos que la sensibilidad pase a ser -90 dBm, esto es 6 dB más que en el apartado a, la condición que se deberá cumplir es:

$$10 \log \left(1 - \frac{3a'_3 I^2}{2a'_1} \right)^2 = -6 \Rightarrow P_I = \frac{I^2}{2R} = \frac{a'_1}{3a'_3 R} (1 - 10^{-0.3}) = \frac{501.18 (1 - 10^{-0.3})}{3 \cdot 1.82 \cdot 10^7 \cdot 50} = 9.15 \cdot 10^{-8} W \Rightarrow$$

$$P_I = -40.38 \text{ dBm}$$

d) Para cumplir la condición del apartado anterior, el nivel de selectividad del filtro a la frecuencia $f_{DL} = f_{UL} + \Delta F$ ha de ser de:

$$P_T + |H(f_{DL} - f_{UL})|^2 \leq P_I \Rightarrow |H(f_{DL} - f_{UL})|^2 \leq -40.38 - 43 = -83.38 \text{ dB}$$

Como el filtro atenúa 40 dB por década (cada vez que la frecuencia se multiplica por 10), el número de décadas de separación respecto de la frecuencia de 100 kHz al extremo de la banda de paso ha de ser:

$$n = 83.38 / 40 = 2.084 \quad \Rightarrow \quad \Delta F = 100 \text{ kHz} \cdot 10^{2.084} \quad \boxed{\Delta F = 12.15 \text{ MHz}}$$

(Nota: el filtro se puede expresar como $|H(f - f_{UL})|^2 = |H(\Delta f)|^2 = \left(\frac{f_o}{\Delta f}\right)^4$, para $f \geq f_o = 100 \text{ KHz}$)

Solución problema 2

a) Las frecuencias que debe generar el sintetizador son:

$$f_{OL\min} = f_{s\min} - f_{FI} = 87.5 \text{ MHz} - 10 \text{ MHz} = 77.5 \text{ MHz}$$

$$f_{OL\max} = f_{s\max} - f_{FI} = 108 \text{ MHz} - 10 \text{ MHz} = 98 \text{ MHz}$$

Con una resolución de 100 kHz, por lo que $f_r = 100 \text{ kHz}$

Para que el sintetizador genere las frecuencias necesarias el divisor debe variar entre:

$$f_{OL\min} = N_{\min} \cdot f_r = 77.5 \text{ MHz} \Rightarrow N_{\min} = \frac{f_{OL\min}}{f_r} \Rightarrow N_{\min} = 775$$

$$f_{OL\max} = N_{\max} \cdot f_r = 98 \text{ MHz} \Rightarrow N_{\max} = \frac{f_{OL\max}}{f_r} \Rightarrow N_{\max} = 980$$

b) La condición de lock-in para un sintetizador es:

$$\Delta\omega_L \cong 2\xi\omega_n \geq 2\pi \frac{(f_{OL\max} - f_{OL\min})}{N_{\min}} \Rightarrow \omega_n \geq \frac{\pi}{\xi} \frac{(f_{OL\max} - f_{OL\min})}{N_{\min}} \Rightarrow \omega_n \geq \frac{\pi}{0.7} \frac{(98 - 77.5) \cdot 10^6}{775} \Rightarrow$$

$$\omega_{n,\min} = 118714.56 \text{ rad/s} \Rightarrow f_{n,\min} = 18.9 \text{ kHz}$$

c) Calculamos el modulo y la fase de $H(\omega)$:

$$|H(\omega)|^2 = \left| \frac{-jQ}{1 + j2\left(\frac{\omega - \omega_{FI}}{\omega_{FI}}\right)Q} \cdot \frac{jQ}{1 - j2\left(\frac{\omega - \omega_{FI}}{\omega_{FI}}\right)Q} \right| = \frac{Q^2}{1 + 4\left(\frac{\omega - \omega_{FI}}{\omega_{FI}}\right)^2 Q^2} \quad ; a \ \omega_{FI}, |H(\omega_{FI})| = Q$$

$$\arg H(\omega) = \arctg\left(\frac{-Q}{0}\right) - \arctg\left(\frac{2\left(\frac{\omega - \omega_{FI}}{\omega_{FI}}\right)Q}{1}\right) = \arctg(-\infty) - \arctg\left(2\left(\frac{\omega - \omega_{FI}}{\omega_{FI}}\right)Q\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctg\left(2\left(\frac{\omega - \omega_{FI}}{\omega_{FI}}\right)Q\right)$$

Y por lo tanto podemos expresar $H(\omega)$ como:

$$H(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{\omega - \omega_{FI}}{\omega_{FI}}\right)^2 Q^2}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \arctg\left(2\left(\frac{\omega - \omega_{FI}}{\omega_{FI}}\right)Q\right)\right)}$$

Dado que: $|\omega - \omega_{FI}| \ll \frac{\omega_{FI}}{2Q}$, podemos aproximar: $\arctg\left(\frac{2Q}{\omega_{FI}}(\omega - \omega_{FI})\right) \approx \frac{2Q}{\omega_{FI}}(\omega - \omega_{FI})$

Y así:

$$H(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{\omega - \omega_{FI}}{\omega_{FI}}\right)^2 Q^2}} \cdot e^{j\left(2Q - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot e^{-j\frac{2Q}{\omega_{FI}}\omega}$$

Que corresponde a una línea de retardo con:

Retardo: $t_o = \frac{2Q}{\omega_{FI}}$ (pues una variación lineal de la fase con la frecuencia se corresponde con un retardo en el tiempo)

Desfase: $\varphi = 2Q - \frac{\pi}{2}$

Como queríamos demostrar.

d) Buscamos $v_o(t)$:

La señal a la salida de la línea de retardo será:

$$\begin{aligned} v_r(t) &= A \cdot Q \cdot \text{sen} \left(2\pi f_{FI} (t - t_o) + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t-t_o} x(\lambda) d\lambda + 2Q - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= A \cdot Q \cdot \text{sen} \left(\omega_{FI} t - \omega_{FI} t_o + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t-t_o} x(\lambda) d\lambda + 2Q - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= A \cdot Q \cdot \text{sen} \left(\omega_{FI} t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t-t_o} x(\lambda) d\lambda - \frac{\pi}{2} \right) = -A \cdot Q \cdot \cos \left(\omega_{FI} t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t-t_o} x(\lambda) d\lambda \right) \end{aligned}$$

Al pasar por el multiplicador tendremos:

$$\begin{aligned} v_i(t) \cdot v_r(t) &= -A \cdot \text{sen} \left(\omega_{FI} t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right) \cdot A \cdot Q \cdot \cos \left(\omega_{FI} t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t-t_o} x(\lambda) d\lambda \right) = \\ &= -\frac{A^2 \cdot Q}{2} \cdot \text{sen} \left(2\omega_{FI} t + 2\pi f_d \left(\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{t-t_o} x(\lambda) d\lambda \right) \right) - \frac{A^2 \cdot Q}{2} \cdot \text{sen} \left(2\pi f_d \int_{t-t_o}^t x(\lambda) d\lambda \right) \end{aligned}$$

Y al pasar por el filtro paso bajo quedará:

$$v_o(t) = -\frac{A^2 \cdot Q}{2} \cdot \text{sen} \left(2\pi f_d \int_{t-t_o}^t x(\lambda) d\lambda \right)$$

Para que se comporte como un demodulador de FM debemos hacer las siguientes aproximaciones:

1). Si $t_o \leq \frac{1}{\pi \cdot f_m}$ podemos aproximar: $\int_{t-t_o}^t x(\lambda) d\lambda \approx t_o \cdot x\left(t - \frac{t_o}{2}\right)$ y así:

$$v_o(t) \approx -\frac{A^2 \cdot Q}{2} \cdot \text{sen} \left(2\pi f_d \cdot t_o \cdot x\left(t - \frac{t_o}{2}\right) \right)$$

2). Si $2\pi f_d \cdot t_o \leq 0.2 \Rightarrow t_o \leq \frac{1}{10 \cdot \pi \cdot f_d}$ podemos aproximar $\text{sen}(x) \approx x$ y así:

$$v_o(t) \approx -A^2 \cdot Q \cdot \pi \cdot f_d \cdot t_o \cdot x\left(t - \frac{t_o}{2}\right) \text{ recuperamos la información } x(t).$$

Así pues para que el circuito funcione como demodulador de FM se debe cumplir que:

$$1). t_o = \frac{2Q}{\omega_{FI}} \leq \frac{1}{\pi \cdot f_m} \Rightarrow Q \leq \frac{\omega_{FI}}{2 \cdot \pi \cdot f_m} = \frac{f_{FI}}{f_m} = \frac{10 \text{ MHz}}{15 \text{ kHz}} = 666.67$$

$$2). t_o = \frac{2Q}{\omega_{FI}} \leq \frac{1}{10 \cdot \pi \cdot f_d} \Rightarrow Q \leq \frac{\omega_{FI}}{20 \cdot \pi \cdot f_d} = \frac{f_{FI}}{10 \cdot f_d} = \frac{10 \text{ MHz}}{10 \cdot 25 \text{ kHz}} = 40$$

El valor máximo de Q para que se cumplan las dos condiciones debe ser: $Q_{\max} = 40$