Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona — UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA — **Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions**	**ComII.** 2009-01-20 *ESTA SOLUCIÓN ES ABREVIADA. NO INCLUYE TODOS LOS DESARROLLOS COMPLETOS*
Profesores: M.Cabrera, J. Fernández Rubio, J. Riba - Duración de la prueba: 2h45’	

Ejercicio 1

Sea la señal cuaternaria de símbolos independientes y equiprobables $s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]p(t-nT)$, con $s[n]=-\frac{3A}{2},-\frac{A}{2},\frac{A}{2},\frac{3A}{2}$, y $P(f)=\cos\left(\frac{\pi f}{2r}\right)\Pi\left(\frac{f}{2r}\right)$.

a) Obtenga los vectores del espacio de señal expresándolos en función de la energía promedio por símbolo.

b) Calcule y dibuje la densidad espectral de la señal transmitida.

La respuesta impulsional del canal tiene la forma: $h(t)=\delta(t)+\alpha\delta(t-2T)$; $0<|\alpha|<1$ y el ruido receptor es blanco y gaussiano con densidad espectral $S(f)=\frac{N_0}{2}$. Teniendo en cuenta que la correlación del pulso $p(t)$ es de la forma $R_p(t)=r\frac{\sin c(2rt)}{1-(2rt)^2}$

c) Determine la expresión del vector señal observado identificando los términos señal útil, ISI y ruido.

d) Diseñe un forzador de ceros de 3 coeficientes, mediante la resolución de un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Calcule la ISI residual y la potencia de ruido a la salida del forzador, expresándola en función de α.

e) Plantee la resolución del sistema de ecuaciones de un ecualizador de error cuadrático medio (ECM o de Wiener) de 3 coeficientes. Obtenga los 3 coeficientes y calcule la ISI residual y la potencia de ruido en función de α para el caso de $N_0=0$.

f) Compare las prestaciones de ambos ecualizadores mediante la BER en función del cociente E_b/N_0. Para ello realice las aproximaciones habituales y utilice en el caso del ecualizador ECM, los coeficientes obtenidos en el apartado e) aún suponiendo un valor genérico para la constante N_0.

Apartado a

Dimensión del espacio de señal L=1. $\varphi(t)=\frac{1}{E_p}p(t)=\frac{1}{\sqrt{R_p(0)}}p(t)=\frac{1}{\sqrt{r}}p(t)=\sqrt{T}p(t)$

M=4 vectores:

$$\mathbf{s}_m=\left\{\sqrt{r}\frac{A}{2},-\sqrt{r}\frac{A}{2},\sqrt{r}\frac{3A}{2},-\sqrt{r}\frac{3A}{2}\right\}=\left\{\frac{d}{2},-\frac{d}{2},\frac{3d}{2},-\frac{3d}{2}\right\};\quad d=\sqrt{r}A=\frac{1}{\sqrt{T}}A$$

Energía promedio por símbolo: $E_s=\frac{5}{4}d^2=\frac{5}{4}rA^2\Rightarrow d=\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{E_s}$

$$\mathbf{s}_m=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{E_s},-\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{E_s},\frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{E_s},-\frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{E_s}\right\}$$

Apartado b

$$S_s(f)=\frac{1}{T}E_s\left|\Phi(f)\right|^2=\frac{1}{Tr}E_s\left|P(f)\right|^2=E_s\cos^2\left(\frac{\pi f}{2r}\right)\Pi\left(\frac{f}{2r}\right)$$

Dado que el pulso coincide con el raíz de coseno realzado, 100% rolloff, el dibujo de la densidad espectral tiene la misma forma que la transformada de Fourier del pulso coseno realzado 100% rolloff, ocupando un ancho de banda de 2r Hz, alrededor de frecuencia cero.

Apartado c

Dado que a la salida de un filtro adaptado a la función $\varphi(t)$, la señal se puede expresar como $y(t)=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}a\left[n\right]\left(\varphi(t-nT)+\alpha\varphi(t-nT-2T)\right)+w\left(t\right)\right)*\varphi(-t)$, tras el muestreo en los instantes $t=kT$, el vector de señal observado es de la forma:

$$\begin{aligned}&y\left[k\right]=a\left[k\right]+\alpha a\left[k-2\right]+n\left[k\right]\\&a\left[k\right]=\pm\tfrac{d}{2};\pm\tfrac{3d}{2};\\&n\left[k\right]:N\left(0,\sigma^2=\tfrac{N_0}{2}\right)\end{aligned}$$

Si en lugar de adaptar el filtro a la función normalizada, se adapta a $p(t)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}&y\left[k\right]=a\left[k\right]+\alpha a\left[k-2\right]+n\left[k\right]\\&a\left[k\right]=\pm\tfrac{A}{2}r;\pm\tfrac{3A}{2}r;\\&n\left[k\right]:N\left(0,\sigma^2=r\tfrac{N_0}{2}\right)\end{aligned}$$

En los desarrollos que siguen, se considera la situación resultante al utilizar un filtro adaptado a la función $\varphi(t)$.

Apartado d

FZ de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\alpha&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_0\\h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}h_0=1\\h_1=0\\h_2=-\alpha\end{matrix}$$

Llamando $p\left[n\right]=\delta\left[n\right]+\alpha\delta\left[n-2\right]$ al canal discreto equivalente a la entrada del ecualizador, el pulso discreto equivalente a la salida del ecualizador es igual a:

$$p_Q\left[n\right]=h_0p\left[n\right]+h_2p\left[n-2\right]=\delta\left[n\right]-\alpha^2\delta\left[n-4\right]$$

En el peor de los casos la muestra de ISI residual vale: $\pm\alpha^2\,\tfrac{3}{2}d$

La potencia del ruido resultante es igual a: $\sigma_Q^2=\sigma^2\left(h_0^2+h_2^2\right)=\tfrac{N_0}{2}\left(1+\alpha^2\right)$

Apartado e

La función de error a minimizar es:

$$\varepsilon_{ECM}=E\left[\left(a\left[n\right]-h_0y\left[n\right]-h_1y\left[n-1\right]-h_2y\left[n-2\right]\right)^2\right]$$

Tras realizar las derivadas respecto a los 3 coeficientes e igualar a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} R_y[0] & R_y[1] & R_y[2] \\ R_y[1] & R_y[0] & R_y[1] \\ R_y[2] & R_y[1] & R_y[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\left[\alpha[n]y[n]\right] \\ E\left[\alpha[n]y[n-1]\right] \\ E\left[\alpha[n]y[n-2]\right] \end{pmatrix}$$

Y dado que $y[n] = a[n] + \alpha a[n-2] + n[n]$, nos queda:

$$\begin{pmatrix} E_s\left(1+\alpha^2\right) + \frac{N_0}{2} & 0 & E_s\alpha \\ 0 & E_s\left(1+\alpha^2\right) + \frac{N_0}{2} & 0 \\ E_s\alpha & 0 & E_s\left(1+\alpha^2\right) + \frac{N_0}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al sustituir $N_0 = 0$ el nuevo sistema a resolver queda:

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1+\alpha^2 & 0 \\ \alpha & 0 & 1+\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} h_0 = \frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^4} \\ h_1 = 0 \\ h_2 = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2+\alpha^4} \end{array}$$

Pulso discreto equivalente a la salida del ecualizador en este caso es:

$$p_Q[n] = h_0 p[n] + h_2 p[n-2] = \frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^4}\delta[n] + \frac{\alpha^3}{1+\alpha^2+\alpha^4}\delta[n-2] - \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^4}\delta[n-4]$$

En el peor de los casos la muestra de ISI residual vale: $\pm\left(\frac{|\alpha|^2+|\alpha|^3}{1+\alpha^2+\alpha^4}\right)\frac{3}{2}d$

La potencia del ruido resultante es igual a: $\sigma_Q^2 = \sigma^2\left(h_0^2 + h_2^2\right) = \frac{N_0}{2}\frac{1+3\alpha^2+\alpha^4}{\left(1+\alpha^2+\alpha^4\right)^2}$

Apartado f

La BER en el caso del apartado d) aproximando por la peor situación es proporcional a:

$$Q\left(\frac{\frac{d}{2} - ISI}{\sigma_Q}\right) = Q\left(\frac{\frac{d}{2} - \alpha^2\frac{3}{2}d}{\sigma_Q}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\left(1-3\alpha^2\right)^2}{\left(1+\alpha^2\right)}\frac{d^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\left(1-3\alpha^2\right)^2}{\left(1+\alpha^2\right)}\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

La BER en el caso del apartado e) aproximando por la peor situación es proporcional a:

$$Q\left(\frac{\frac{d}{2}\left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^4}\right) - \left(\frac{|\alpha|^2+|\alpha|^3}{1+\alpha^2+\alpha^4}\right)\frac{3}{2}d}{\sigma_Q}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\left(1-2\alpha^2-3|\alpha|^3\right)^2}{1+3\alpha^2+\alpha^4}\frac{d^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\left(1-2\alpha^2-3|\alpha|^3\right)^2}{1+3\alpha^2+\alpha^4}\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Ejercicio 2

Nota: *en este problema, exprese todas las BER (Bit Error Rate) en función de la* E_b / N_0 *del usuario de interés.*

Considere las siguientes funciones de energía finita:

$\gamma_l(t) = K\mathrm{sinc}\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right)\cos\left(2\pi\left(f_o + l\Delta f\right)t\right)$ donde $f_o > 1/T$, y l un entero no negativo.

a) Halle la constante K y la separación frecuencial Δf para que las funciones $\gamma_l(t)$ cumplan el criterio de Nyquist extendido, es decir que su correlación cruzada verifique: $R_{\gamma_l\gamma_i}\left[mT\right] = \delta\left[l-i\right]\delta\left[m\right]$ donde $\delta\left[0\right]=1$ y $\delta\left[k\right]=0$ para $k \neq 0$.

Con las funciones $\gamma_l(t)$ con $l = 0,1,2,3$ se diseña un sistema multiportadora (4 portadoras) de acceso múltiple (3 usuarios), utilizando códigos Whals. En particular, la señal asociada al usuario u es:

$x_u(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_u[k]p_u(t-kT)$ con pulso $p_u(t) = \sum_{l=0}^{3} c_u[l]\gamma_l(t)$

donde $a_u[k] \in \{-1,1\}$ son los símbolos equiprobables del usuario u y $c_u[l]$ son los códigos Whals siguientes:

$$\underline{c}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \qquad \underline{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la estructura de la señal recibida es la combinación de los 3 usuarios,

$y(t) = \sum_{u=0}^{2} x_u(t) + w(t)$,

donde $w(t)$ es ruido AWGN, de densidad espectral de potencia $N_0/2$.

b) Bajo la hipótesis de que sólo transmite el usuario $u = 0$ (es decir, $y(t) = x_0(t) + w(t)$) especifique razonadamente la estructura del detector óptimo como un banco de filtros adaptados a $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ y $\gamma_3(t)$, seguido de un combinador de sus salidas y un decisor.

Seguidamente, justifique que en el presencia de todos los usuarios (es decir, $y(t) = \sum_{u=0}^{2} x_u(t) + w(t)$), el detector monousuario que ha diseñado antes está libre de MAl (*Multiple Acccess Interference*), y halle la BER resultante.

Suponga en adelante que el canal no es ideal, siendo la señal recibida:

$$y(t) = \left(\sum_{u=0}^{2} x_u(t)\right) * h(t) + w(t)$$

En particular, el canal $H(f)$ presenta una atenuación $0 < \alpha < 1$ en la banda baja:

$$H(f) = \begin{cases} \alpha \ \text{ para } \ f_o - \frac{1}{2T} < |f| < f_o + \frac{1}{2T} \\ 1 \ \text{ para el resto de frecuencias} \end{cases}$$

c) Analice la MAI que genera este canal y halle una cota de la BER resultante en función de α, utilizando el mismo detector monousuario anterior.

Habrá visto en el punto anterior que el canal degrada mucho las prestaciones debido en gran parte a la MAI que se genera. En particular habrá observado que para $\alpha = 0$ se produce una degradación en la BER equivalente a una pérdida del 93,75% de la energía de bit, cuando en realidad la pérdida energética del canal es sólo del 25% (ya que de hecho sólo una de las cuatro bandas del sistema se ha perdido para $\alpha = 0$).

A la vista de la influencia tan crítica del canal, surge la pregunta de cuál es el mejor modo de proceder en recepción: o bien ecualizamos el canal o bien ignoramos la señal recibida en esta banda defectuosa aprovechándonos de la diversidad frecuencial que nos proporciona este sistema de acceso. En los dos casos, la señal recibida $y(t)$ sigue siendo la misma.

d) Suponga que opta por amplificar por el factor $1/\alpha$ la salida del filtro adaptado a $\gamma_o(t)$ manteniendo a continuación el mismo combinador diseñado para el receptor monousuario. Justifique que esta operación cancela la MAI y halle la BER resultante.

e) Suponga que, por el contrario, opta por ignorar la banda degradada en el diseño del receptor, y utilizar sólo las tres bandas libres de atenuación. Considerando que la señal recibida sigue siendo la misma $y(t)$, diseñe el mejor combinador de las salidas de los filtros adaptados a $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ y $\gamma_3(t)$ para la detección del usuario $u = 0$ tal que anule la MAI.

Sugerencia: Como la banda baja se ignora en recepción (no se mira la salida del filtro adaptado a $\gamma_o(t)$), los códigos Whals truncados (vistos en el receptor) asociados a cada usuario son ahora estos:

$$\underline{\hat{c}}_o = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\hat{c}}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\hat{c}}_2 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Dado que estos tres códigos truncados no son ortogonales, puede diseñar fácilmente el combinador (o decorrelador para el usuario $u = 0$) como:

$$\underline{\gamma} = \underline{\hat{c}}_o + a\underline{\hat{c}}_1 + b\underline{\hat{c}}_2$$

de tal modo que los coeficientes a y b garanticen la ortogonalidad de $\underline{\gamma}$ con $\underline{\hat{c}}_1$ y $\underline{\hat{c}}_2$.

f) Habrá observado que el planteamiento anterior nos ha conducido a un receptor que ignora las salidas tanto del filtro $\gamma_0(t)$ como del $\gamma_1(t)$. A la vista de esto, halle la BER asociada a la estrategia de decorrelación anterior, y compruebe que para $\alpha < 0,44$ esta estrategia es mejor que la de ecualización.

Apartado a

$K = \sqrt{\frac{2}{T}}$

$\Delta f = 1/T$

Nysquist extendido se justifica, por ejemplo, a partir del los ceros de la sinc (sinc convolucionada con sinc) y de la ausencia de solape frecuencial de las funciones base.

Apartado b

ML (mínima distancia) lleva a máximo producto escalar cuando los símbolos son equienergeticos y equiprobables, con lo que el combinador es:

$\underline{\gamma} = \underline{c}_o$

No hay MAI puesto que el combinador, es ortogonal a los otros dos códigos de Whals.

La BER es la binaria ideal, $Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}}\right)$.

Apartado c

A la salida del combinador, los usuario 1 y 2 entran con coeficientes:

$$[-1,-1,+1,+1]\begin{bmatrix}-\alpha\\+1\\+1\\-1\end{bmatrix} = \alpha - 1 \qquad [-1,-1,+1,+1]\begin{bmatrix}-\alpha\\+1\\-1\\+1\end{bmatrix} = \alpha - 1$$

respectivamente (que son cero para $\alpha = 1$). Esto genera MAI.

Por otro lado, el usuario 0 sufre una atenuación:

$$[-1,-1,+1,+1]\begin{bmatrix}-\alpha\\-1\\+1\\+1\end{bmatrix} = \alpha + 3$$

(que es 4 para $\alpha = 1$).

La cota de la BER, basándonos en la ICI de pico, es pues:

$$Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}\left(\frac{\alpha+3-2|\alpha-1|}{4}\right)^2}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}\left(\frac{1+3\alpha}{4}\right)^2}\right)$$

Para $\alpha = 0$ nos queda un factor de 1/16 sobre la Eb/No (pérdida del 93,75%).

Apartado d

No hay MAI pues recuperamos las firmas ortogonales de los usuarios. Sólo tenemos el típico efecto de amplificación del ruido asociado a la ecualización. En particular, la potencia de ruido a la salida del combinador viene determinada por la suma de sus coeficientes al cuadrado:

$$\sigma'^2 = \frac{N_o}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+1+1+1\right)$$

que es $\frac{N_o}{2}4$ en el caso ideal. La amplificación de ruido es pues:

$$\frac{\frac{1}{\alpha^2}+3}{4}$$

con lo que la BER es:

$$Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}\frac{4}{\frac{1}{\alpha^2}+3}}\right)$$

Se observa que para α pequeña, la BER se degrada sin límite, siendo éste es el principal problema de esta estrategia.

Apartado e

Imponiendo la ortogonalidad entre el combinador y los códigos truncados de los usuarios no deseados, obtenemos el sistema:

$$-1+3a-b=0$$

$$-1-a+3b=0$$

cuya solución es $a=b=1/2$.

El combinador decorrelador es pues:

$$\underline{\gamma}=\underline{\hat{c}}_o+a\underline{\hat{c}}_1+b\underline{\hat{c}}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

El primer cero en el combinador nos dice que la solución hallada exige ignorar también la banda adyacente a la banda degradada.

Apartado f

Como este combinador utiliza sólo dos bandas, la BER es:

$$Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}\frac{1}{2}}\right)$$

Para compara las dos estrategias, basta igualar los argumentos de las Qs:

$$\frac{4}{\frac{1}{\alpha^2}+3}=\frac{1}{2}$$

de donde resulta:

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=0.4472$$

Por debajo de este valor, la estrategia de decorrelación ofrece mejores prestaciones que la de ecualización.