Barguilla

Prova tardor	**ETSETB**	**Grup 70**
29 de novembre del 2001	**Càlcul**	**Temps: 1 h 20m.**

---

1. Resoleu els següents apartats:

   (a) Definiu els següents conceptes: Conjunt fitat. Extrem superior d'un conjunt. Màxim i mínim d'un conjunt. Punt d'acumulació d'un conjunt.

   (b) Donat el conjunt $A = \{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n},$ on $n \in \mathbb{N}, (n \geq 1) \}$, Trobeu en el cas que existeixin: fites, extrem superior, extrem inferior, màxim, mínim, i punts d'acumulació.

   (c) Fes el mateix que en l'apartat anterior per el conjunt $B = \{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x+2} > \frac{x+3}{3x+1} \}$

2. Resoleu els següents apartats:

   (a) Donada la successió (a_n), definida per, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$.

   (a1) Proveu que és convergent (proveu que és monòtona creixent i fitada). Calculeu-ne el límit.

   (a2) Proveu que $a_n = 3^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}$

   (b) Sigui el polinomi $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$. Calculeu el següent límit:

$$\lim \frac{P(1) + P(2) + \cdots + P(n)}{n^{k+1}}$$

3. (a) Enunciеu el teorema del valor mitjà. Doneu-ne la interpretació geomètrica.

   (b) Establiu per a tot k enter, $(k \geq 1)$ la desigualtat:

$$\frac{1}{k+1} < \ln \frac{k+1}{k} < \frac{1}{k}$$

   (c) Donat un natural N, indiquem $S_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$. Proveu:

$$\ln N < S_N < 1 + \ln N$$

4. (a) Per a quins valors reals a, b la funció $f(x) = \frac{x}{1+ax} + x\sqrt{1+bx} - 2x - 8x^3$, és en zero un infinitèsim d'ordre màxim possible?

   (b) Aplicant desenvolupaments de Taylor, calculeu el següent límit:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cosh x - \cos x^2 + 1 - x}{\sinh x - \sin x}$$
