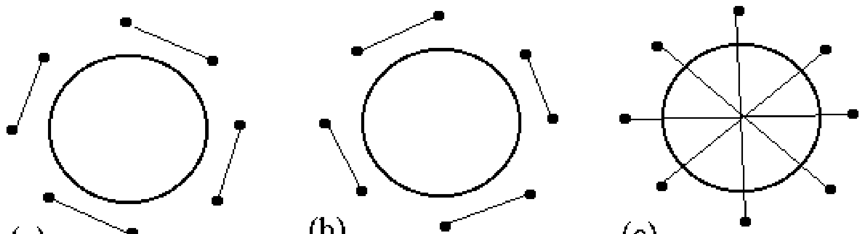
PIPE **17 de novembre de 1998** **Solució**

1. Les $2n$ persones dels n matrimonis es poden situar de $(2n)!$ maneres en la taula.



(a) (b) (c)

Considerem ara una situació favorable on els dos membres de cada matrimoni estan de costat. Això pot passar amb l'esquema (a) o amb l'esquema (b). Per l'esquema (a) podem assignar els n matrimonis als n grups de dos de $n!$ maneres. En cada grup de dos tenim dues maneres de posar els membres d'un matrimoni. El nombre de casos favorables per l'esquema (a) es, doncs, $2^n n!$ i el mateix per l'esquema (b). La probabilitat que quedin de costat és:

$$P(\text{costat}) = 2\frac{2^n n!}{(2n)!}.$$

Que cada matrimoni quedi enfrontat correspon a l'esquema (c). Amb un raonament com l'anterior tenim

$$P(\text{front}) = \frac{2^n n!}{(2n)!}.$$

Un càlcul alternatiu de $P(\text{front})$ és el següent: anem posant les $2n$ persones de una en una, els dos membres de cada parella consecutivament. La primera és igual on quedi. La probabilitat que la segona (la seva parella) quedi enfront val $1/(2n-1)$. La tercera és igual on quedi. La quarta queda enfront de la tercera amb probabilitat $1/(2n-3)$, etc. Així

$$P(\text{front}) = \frac{1}{(2n-1)}\frac{1}{(2n-3)}\cdots\frac{1}{(1)} = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

El resultat és el mateix que abans ja que és fàcil veure que $(2n)! = 2^n n!(2n-1)!!$.

La forma asimptòtica és

$$P(\text{costat}) \sim 2\frac{2^n\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}{\sqrt{2\pi 2n}(2n/e)^{2n}}. = \frac{\sqrt{2}}{(2n/e)^n}.$$

2. Definim els esdeveniments $A_k =$ *"Tolokito entra a robar en el pis k"* i $D =$ *"es detectat"*. Ens pregunten $P(A_{10}|D)$. Per Bayes

$$P(A_{10}|D) = \frac{P(D|A_{10})P(A_{10})}{\sum_{k=1}^{10} P(D|A_k)P(A_k)}$$

Ara tenim que $P(A_k) = 1/10$ i $P(D|A_k) = k/10$. Llavors

$$P(A_{10}|D) = \frac{1 \cdot \frac{1}{10}}{(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \cdots + \frac{10}{10})\frac{1}{10}} = \frac{10}{1 + 2 + \cdots + 10} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}.$$

La generalització a n pisos de n habitacions amb k detectors al pis $k, k = 1, \ldots, n$ es inmediata.

$$P(A_n|D) = \frac{P(D|A_n)P(A_n)}{\sum_{k=1}^{n} P(D|A_k)P(A_k)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n}}. = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{n}{n(n+1)/2} = \frac{2}{n+1}.$$

3. Si g denota la funció de la figura, pel teorema de l'esperança

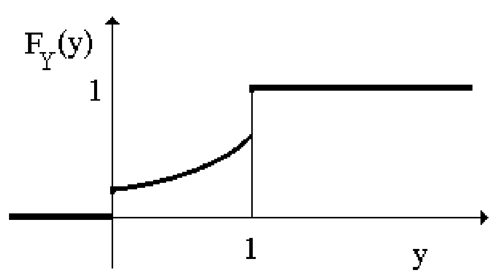
$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx = \int_0^1 1 \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx + \int_1^2 (2-x) \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= 1 - e^{-\lambda} + \frac{e^{-2\lambda}}{\lambda} + e^{-\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} = 1 + \frac{e^{-2\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

En la transformació veiem que $\Omega_Y = [0,1]$. També es veu que els valors $Y = 0, Y = 1$ corresponen a intervals de X. Així esperem que la funció de distribució de Y tingui salts en $Y = 0, Y = 1$ i Y sigui una variable mixta.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ P(X > 2) = e^{-2} & y = 0 \\ P(X > 2 - y) = e^{y-2} & 0 < y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

El salt en $y = 0$ és $P(Y = 0) = e^{-2}$. El salt en $y = 1$ és $P(Y = 1) = 1 - e^{-1}$.



$$P(X > 1 \mid Y > \frac{1}{2}) = P(X > 1 \mid X < \frac{3}{2}) = \frac{P(1 < X < \frac{3}{2})}{P(X < \frac{3}{2})} = \frac{e^{-1} - e^{-3/2}}{1 - e^{-3/2}} = 0.1863.$$