

5 Guías de onda

Parece evidente que, en cualquier situación realista en la que se quieran estudiar los campos dependientes del tiempo, deben existir límites o paredes en la región bajo análisis. En estos casos las soluciones para los campos en el medio no podrán ser, en general, ondas planas uniformes de extensión infinita, ya que, además de satisfacer las ecuaciones de Maxwell, deben cumplir las condiciones de frontera en los límites de la región que se considera. En este capítulo, avanzando un paso más en el grado de confinamiento de los campos respecto a las situaciones que se vieron en el capítulo anterior (con la presencia de medios semiinfinitos), se van a estudiar las *guías de onda*. Una guía de onda puede ser definida como una estructura destinada a la propagación dirigida y acotada de radiación electromagnética. El medio dieléctrico en el que esta propagación se produce está limitado, ya sea por un material conductor (para microondas y radiofrecuencia), ya sea por otro dieléctrico (para frecuencias ópticas). Desde el punto de vista geométrico las formas más comunes, aunque no únicas, de guías de onda tienen secciones rectangulares o cilíndricas.

5.1 Guías de onda y líneas de transmisión

Existen en la práctica numerosos tipos de estructuras que, con toda propiedad, pueden ser catalogadas como guías de onda. Tal y como se ha mencionado, se emplean para transmitir ondas electromagnéticas punto a punto de una forma eficiente. Por lo general se trata de señales de información de elevada frecuencia y que no podrían ser transmitidas por otros métodos, debido a que la transmisión no sería eficiente, como es el caso de las señales ópticas (que se transmiten preferentemente por fibra a grandes distancias, y no a través de la atmósfera), o bien porque producirían interferencias en otros equipos, como las microondas, entre 0,3 y 10 GHz. En este capítulo trataremos de los tipos más sencillos de guías de onda, como son las guías de paredes conductoras de sección rectangular o circular, el cable coaxial y las fibras ópticas. No se trata tampoco de un estudio completo, aunque sí suficientemente amplio como introducción a este tema. Existen otras estructuras, como las guías y fibras de sección elíptica, y las líneas *micro-strip*, así como las guías dieléctricas tipo canal, que tienen gran importancia tecnológica, algunas de las cuales se ven con detalle en cursos posteriores.

Las guías de onda deben ser tratadas a partir de los modos de vibración y propagación electromagnéticos que son capaces de soportar y, en general, no es posible establecer de forma inmediata un modelo circuital equivalente. En este aspecto se suelen distinguir de otras estructuras guantes, como sería, por ejemplo, un par bifilar, donde sí existe un modelo sencillo de análisis mediante tensiones y corrientes. A este segundo tipo de guías se las denomina *líneas de transmisión*. En este capítulo nos centraremos, sin embargo, casi exclusivamente, en el primero de los tipos mencionados.

5.2 Guías conductoras de sección rectangular

Vamos a considerar el caso de una guía de onda limitada en sus dos dimensiones transversales por un material conductor (que aproximaremos como perfecto) y en cuyo interior existe un medio dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo (Fig. 5.1). La expresión de las ecuaciones de Maxwell en notación fasorial, excluyendo las fuentes (que son las que rigen para la propagación guiada), es:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon\vec{E} & \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1) - (5.4)$$

Si el dieléctrico interior es no magnético, lo que, por otra parte, es una situación habitual, puede sustituirse en todas las expresiones μ por μ_0 .

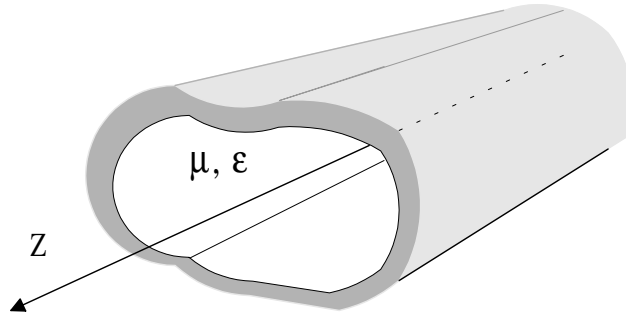


Fig. 5.1 Guía de paredes conductoras

De las anteriores se obtiene inmediatamente, como ya sabemos, la ecuación de onda, para uno u otro campo:

$$\nabla^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \quad \nabla^2 \vec{H} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{H} \quad (5.5) - (5.6)$$

Tomaremos el eje Z como dirección de propagación de las ondas en el interior de la guía, y las direcciones X e Y serán siempre las direcciones transversales a la propagación. El tipo de soluciones que buscamos para las ecuaciones de arriba se escribe, en forma fasorial:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{-j\beta z} \quad \vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y) e^{-j\beta z} \quad (5.7) - (5.8)$$

donde β es la llamada constante de propagación. A una solución del tipo (5.7)-(5.8) se le denomina *modo de propagación de la guía*, y se caracteriza porque su fase depende linealmente de z, la coordenada en la dirección de propagación, pero su amplitud es independiente de ella. Este tipo de soluciones no son, por sí mismas, completamente generales, pero constituyen *un conjunto completo*, esto es: cualquier posible onda que pueda propagarse en la guía puede escribirse mediante la adecuada combinación lineal de esas funciones.

Sustituyendo estas soluciones en las respectivas ecuaciones de onda resulta:

$$\nabla_t^2 \vec{E} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) \vec{E} = 0 \quad \nabla_t^2 \vec{H} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) \vec{H} = 0 \quad (5.9) - (5.10)$$

donde el símbolo $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ es la laplaciana transversal.

Mediante cierta manipulación matemática, y haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell (5.1)-(5.4), pueden obtenerse relaciones muy útiles entre las componentes transversales y longitudinales de los campos:

$$(\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) E_x = -j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - j\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (5.11)$$

$$(\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) E_y = +j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (5.12)$$

$$(\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) H_x = +j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (5.13)$$

$$(\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) H_y = -j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - j\beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (5.14)$$

por lo que es claro que, en cualquier tipo de guía, el conocimiento de las componentes longitudinales (las componentes en la dirección de propagación) nos permitirá hallar todas las demás. No es difícil de ver (compruébese) que sustituyendo esas cuatro relaciones en la ecuación de onda obtenemos, precisamente, dos ecuaciones desacopladas para las componentes longitudinales

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 \right) E_z = 0 \quad (5.15)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 \right) H_z = 0 \quad (5.16)$$

Sobre la superficie conductora, por aplicación de las condiciones de contorno, se cumplirá en todos los casos $E_z = 0$ (demostrarlo) y, para el campo magnético, $(\hat{n} \cdot \nabla) H_z = 0$ (demostrarlo).

A la hora de resolver (5.15) y (5.16) se comprueba que existen *dos tipos independientes de modos* que pueden satisfacerlas, junto a las condiciones de contorno:

En el primer caso se puede imponer $E_z(x, y) = 0$, en todos los puntos del interior de la guía, y tomar para $H_z(x, y)$ una función que cumpla la condición de contorno arriba indicada. Las soluciones obtenidas se denominan ondas de tipo *transversal eléctrico* (TE), puesto que el campo eléctrico de la onda sólo tiene componentes transversales a la dirección de propagación, E_x y E_y .

En el segundo caso, tomamos $H_z(x, y) = 0$ en todos los puntos, y $E_z(x, y)$ debe ser tal que satisfaga la condición de contorno correspondiente. Las ondas resultantes son ahora del tipo *transversal magnético* o TM.

Finalmente, se tendrían ondas de tipo *transversal eléctrico y magnético* (TEM) si eligiésemos simultáneamente $E_z = 0$ y $H_z = 0$. Esta última opción es posible en problemas similares; sin embargo, en guías huecas de paredes conductoras no resulta una solución adecuada. Para verlo se puede razonar del siguiente modo: si ambas componentes longitudinales fueran nulas, por las leyes de Gauss y de Faraday, resultaría que el campo eléctrico tendría divergencia y rotacional nulos (compruébese), es decir, se podría expresar el campo en función de un potencial escalar que cumpliría la ecuación de Laplace. Entonces, ya que $\vec{E} = -\nabla \phi$, y que la condiciones de contorno del campo sobre la superficie la fuerzan a ser equipotencial, resultaría que $\phi = \text{constante}$ en todos los puntos sería una solución posible (y única), y el campo se anularía forzosamente (no habría onda). Sería diferente si en el interior de la guía hubiese otro conductor, aislado del conductor externo, porque entonces los potenciales en ambos podrían ser distintos, y sí serían posibles soluciones no triviales en ese contexto.

Lo dicho hasta aquí es válido para cualquier geometría de guía hueca de paredes conductoras. En lo que resta de este apartado nos centraremos en el estudio de la propagación en guías de sección rectangular, como la que se muestra en la figura 5.2, de

dimensiones a y b , según, respectivamente, los ejes X e Y , y con la suposición de que la guía se extiende infinitamente según la dirección de propagación Z .

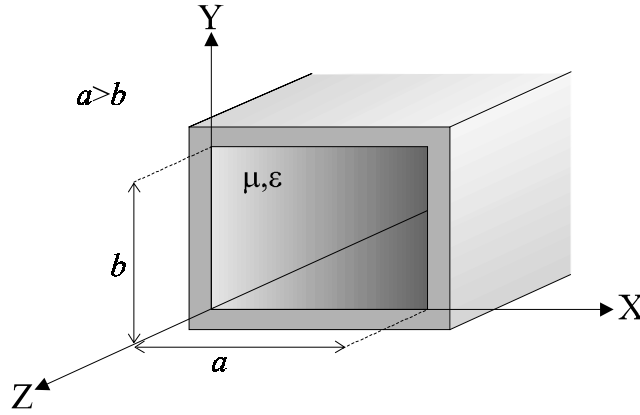


Fig. 5.2 Guía de onda conductora de sección rectangular

5.2.1 Modos de tipo transversal eléctrico (TE)

De acuerdo con la orientación de la guía (Fig. 5.2) podemos expresar la componente longitudinal de la onda (la del campo eléctrico es nula) en la forma:

$$H_z(x, y) = X(x)Y(y) \quad (5.17)$$

y, sustituyendo en la ecuación (5.16), resulta:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) XY = 0 \quad (5.18)$$

Dividiendo por XY se tiene:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \quad (5.19) - (5.20)$$

donde se debe cumplir, en todos los casos, la igualdad:

$$-k_x^2 - k_y^2 + \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 = 0 \quad (5.21)$$

Las soluciones generales de las anteriores ecuaciones son:

$$\begin{aligned} X(x) &= A \operatorname{sen} k_x x + B \cos k_x x \\ Y(y) &= C \operatorname{sen} k_y y + D \cos k_y y \end{aligned} \quad (5.22)$$

El siguiente paso consiste en aplicar las condiciones de contorno. Lo inmediato sería cancelar las componentes de campo eléctrico tangenciales a cada una de las paredes de la guía en los puntos inmediatamente próximos a cada conductor, sin embargo no disponemos todavía de la forma de ninguna de las dos componentes de campo eléctrico (salvo la longitudinal, pero ésta ya es nula en todo el interior de la guía). A la vista de las ecuaciones (5.13) y (5.14) surge otra posible estrategia: las componentes de campo magnético H_x y H_y son normales a las paredes conductoras (en cuyo grosor interior el campo magnético es nulo) y, por tanto, deben cancelarse en los puntos de la superficie. Se obtiene entonces:

$$H_x \Big|_{x=0, x=a} = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0, \quad k_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$H_y \Big|_{y=0, y=b} = 0 \quad \rightarrow \quad C = 0, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

donde, a priori, son posibles cualesquiera valores enteros $m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Finalmente tenemos la expresión de la componente longitudinal:

$$H_z(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (5.23)$$

donde hemos definido la amplitud $H_0 = B \cdot D$.

Esta solución corresponde a un modo genérico TE_{mn} , donde los subíndices se relacionan con el ritmo de variación transversal de los campos, en x e y , respectivamente.

La igualdad (5.21) puede expresarse ahora más explícitamente:

$$\beta_{m,n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (5.24)$$

donde se ha escrito $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$. Esta fórmula, que relaciona la constante de propagación de cada modo con la frecuencia, recibe el nombre de *relación de dispersión* en la guía. Volveremos sobre ella más adelante.

Si, a continuación, sustituimos (5.23) en (5.11) y (5.12), obtendremos, para los modos TE:

$$E_x(x, y) = -j\omega\mu \frac{\frac{n\pi}{b}}{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} H_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x) \sin(\frac{n\pi}{b}y) = \frac{\omega\mu}{\beta} H_y \quad (5.25)$$

$$E_y(x, y) = j\omega\mu \frac{\frac{m\pi}{a}}{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} H_0 \sin(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{n\pi}{b}y) = -\frac{\omega\mu}{\beta} H_x \quad (5.26)$$

y lo mismo podría hacerse con (5.13) y (5.14) para el cálculo de las componentes transversales del campo magnético.

La conclusión importante de todo el desarrollo anterior, y a falta de una posterior profundización, es la siguiente: existen soluciones en forma de modos de propagación, cuya amplitud permanece constante y con una variación lineal en la fase a lo largo de la guía. Esos modos forman un conjunto discreto de soluciones, y se obtienen individualmente dando valores enteros a m y a n . La constante de propagación es diferente, en principio, para cada uno de esos modos.

5.2.2 Modos de tipo transversal magnético (TM)

La obtención de los modos TM sigue los mismos pasos que en la sección anterior. Ahora la separación de variables la utilizamos en la forma:

$$E_z(x, y) = X(x)Y(y) \quad (5.27)$$

y, sustituyendo en la ecuación de onda, llegaremos de nuevo al tipo de solución mostrado en (5.21) y (5.22).

Las condiciones de contorno se aplican inmediatamente, puesto que E_z es una componente de campo eléctrico tangencial a las cuatro paredes de la guía, y debe cancelarse junto a todas ellas. Su expresión final, como puede comprobarse fácilmente, es:

$$E_z(x, y) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \quad (5.28)$$

y donde, de nuevo, se satisfacen las relaciones siguientes:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad \text{y} \quad \beta_{m,n} = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

Si sustituimos la expresión (5.28) en (5.13) y (5.14) obtendremos las demás componentes:

$$H_x(x, y) = -j\omega\epsilon \frac{\frac{n\pi}{b}}{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} E_0 \sin(\frac{m\pi}{a} x) \cos(\frac{n\pi}{b} y) = -\frac{\omega\epsilon}{\beta} E_y \quad (5.29)$$

$$H_y(x, y) = j\omega\epsilon \frac{\frac{m\pi}{a}}{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} E_0 \cos(\frac{m\pi}{a} x) \sin(\frac{n\pi}{b} y) = \frac{\omega\epsilon}{\beta} E_x \quad (5.30)$$

y de (5.11) y (5.12) pueden obtenerse las componentes transversales de campo eléctrico.

Ejemplo 5.1: Compruebe cualitativamente que la aparición de dos familias de modos, TE y TM, en guías de paredes planas tiene sentido físico. Para ello imagine que una onda plana con polarización lineal incide oblicuamente, desde el exterior, sobre una de las superficies interiores de la guía. Deduzca qué componentes de campo existirán en el modo así formado en función de la orientación de los campos incidentes.

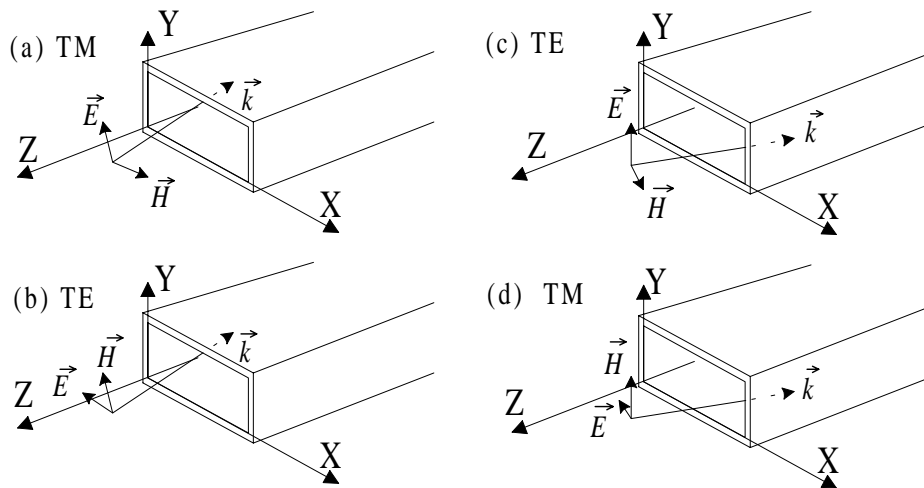


Fig. 5.3 Origen de las dos familias de modos en guías rectangulares

Aunque este ejercicio no reviste el carácter de una demostración, sí resulta suficientemente clarificador. En la figura 5.3 se muestran cuatro posibilidades de incidencia de una onda plana uniforme sobre las paredes interiores de la guía, con polarización paralela y perpendicular al plano de incidencia en cada caso. Un modo cualquiera TE puede excitarse incidiendo simultáneamente con dos ondas, en la

forma que se muestra en las figuras (b) y (c), y un modo TM con las ondas (a) y (d). En general cualquier otro tipo de incidencia podría reducirse a una combinación adecuada de las anteriores, luego cualquier onda que pueda excitarse en el interior de la guía responde a alguna combinación de los modos de la guía.

5.2.3 Modos guiados y modos en corte. Curvas de dispersión

Hemos visto que la constante de propagación de un modo TE_{mn} o TM_{mn} se puede escribir como:

$$\beta_{m,n} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (5.31)$$

De esta expresión se comprueba que la constante de propagación se mantendrá real siempre que:

$$\omega^2 \mu \epsilon \geq \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (5.32)$$

y, por lo tanto, sólo para un conjunto finito de valores de m y de n . Este hecho es de una importancia fundamental en la teoría de guías de onda. Si el par de valores escogidos para los enteros m y n son tales que la condición (5.32) no se satisface, tendremos un caso en el que la constante de propagación pasa a ser un valor imaginario puro, en la forma:

$$\beta_{mn} = \pm j\alpha_{mn}$$

y el término de propagación del modo, $e^{-j\beta z}$, se convierte en un término de atenuación, $e^{-\alpha z}$ (no tomamos otro signo por razones físicas). Como consecuencia, no tendremos una onda capaz de propagarse en la guía, sino una onda amortiguada en la dirección Z que tenderá rápidamente a extinguirse. Inversamente, para un modo cualquiera (es decir, fijados los valores de m y n) debe existir una frecuencia mínima, f_{Cmn} , por debajo de la cual la constante de propagación pasa a ser imaginaria, y el modo no podrá propagarse. A esa frecuencia se la denomina *frecuencia de corte* del modo. Asimismo, a un modo en esas condiciones se le denomina *modo en corte*. Los modos usuales, con β real, que son capaces de transmitir información a lo largo de la guía, se conocen como *modos guiados*.

En la figura 5.4 se ha representado lo que podría ser el tipo de variación en las direcciones transversales de una componente de campo eléctrico de un modo TE, para un modo guiado (a) y para un modo en corte (b). La diferencia está en que el modo en corte tiene siempre un ritmo de variación más alto, en, al menos, una de las direcciones transversales. Obsérvese que, en cualquier caso, la representación gráfica completa de un modo sería mucho más prolija que su descripción matemática (con todas sus componentes de campo eléctrico y magnético).

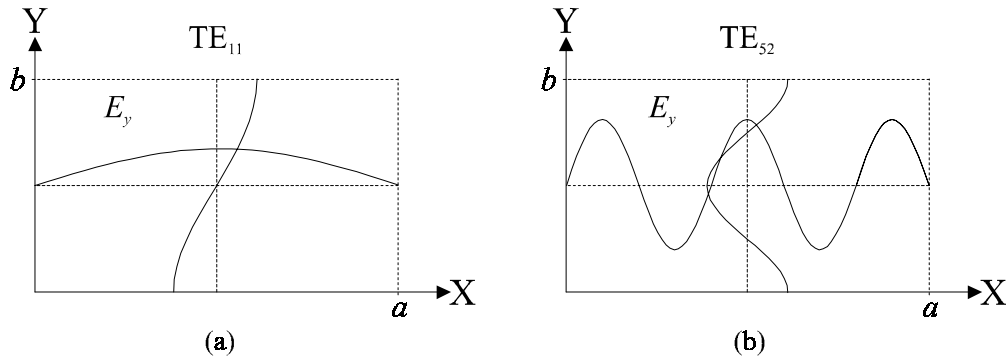


Fig. 5.4 Variación transversal de una componente de campo
(a) de un modo guiado y (b) de un modo en corte

Estamos interesados en conocer las características de esos modos guiados, que son los que tienen un interés básico, aunque los modos en corte, como soluciones posibles del problema electromagnético, son importantes cuando se tratan problemas de excitación frontal de guías, o de transiciones entre guías de onda. Por el momento, para nuestros propósitos de conocer el comportamiento de las ondas en la guía, el parámetro que tiene mayor importancia es el de frecuencia de corte, que nos indicará cuándo pueden aparecer nuevos modos guiados si vamos aumentando la frecuencia de excitación. La frecuencia de corte de un modo puede escribirse como:

$$f_{Cmn} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.33)$$

y es la frecuencia mínima a la que tal modo puede propagarse.

La constante de propagación puede expresarse en función de la frecuencia de corte:

$$\beta_{mn} = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon} \left[1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.34)$$

Otro parámetro de interés es el de *longitud de onda en la guía*, que se define como la distancia entre dos planos de fase consecutivos. Para comprender que tal definición tiene sentido debe observarse que un modo no es sino una onda plana (los frentes de onda son planos perpendiculares a Z, la dirección de propagación) aunque no uniforme. Todas las componentes no nulas de campo eléctrico o magnético repiten su fase cada distancia recorrida igual a:

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f}\right)^2}} \quad (5.35)$$

donde λ es la longitud de onda correspondiente a la frecuencia f en el medio que constituye el interior de la guía de onda (por tanto, la que correspondería a una onda plana uniforme propagándose en ese medio, supuesto ilimitado).

Suelen expresarse las características fundamentales de la guía gráficamente, mediante las llamadas *curvas de dispersión* (Ec. (5.31)). Estas curvas muestran la relación entre la pulsación angular ω y la constante de propagación β , para los diferentes modos posibles. Se han representado para un caso particular en la figura 5.5.

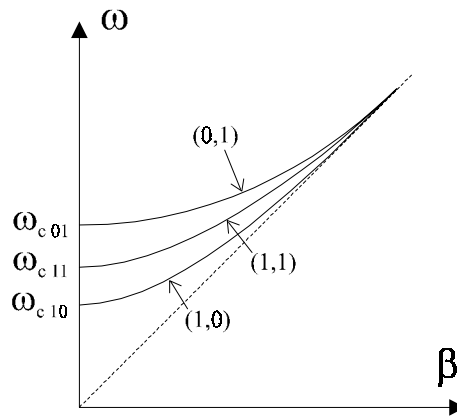


Fig. 5.5 Curvas de dispersión de una guía de onda

El diagrama de dispersión (ω - β) comienza, para cada modo, en la frecuencia de corte ω_c . Para una frecuencia fijada, la velocidad de fase de un modo viene dada por:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta_{mn}} \quad (5.36)$$

que coincide con la pendiente de la línea que une el origen con el punto del diagrama de radiación correspondiente al modo y a la frecuencia.

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{mn}}}{f}\right)^2}} \quad (5.35)$$

donde λ es la longitud de onda correspondiente a la frecuencia f en el medio que constituye el interior de la guía de onda (por tanto, la que correspondería a una onda plana uniforme propagándose en ese medio, supuesto ilimitado).

Suelen expresarse las características fundamentales de la guía gráficamente, mediante las llamadas *curvas de dispersión* (Ec. (5.31)). Estas curvas muestran la relación entre la pulsación angular ω y la constante de propagación β , para los diferentes modos posibles. Se han representado para un caso particular en la figura 5.5.

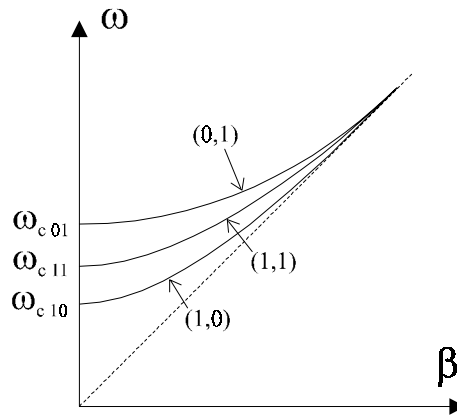


Fig. 5.5 Curvas de dispersión de una guía de onda

El diagrama de dispersión (ω - β) comienza, para cada modo, en la frecuencia de corte ω_c . Para una frecuencia fijada, la velocidad de fase de un modo viene dada por:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta_{mn}} \quad (5.36)$$

que coincide con la pendiente de la línea que une el origen con el punto del diagrama de dispersión correspondiente al modo y a la frecuencia.

5.2.4 Modo dominante TE₁₀

Se denomina modo dominante, o modo fundamental, de la guía de onda a aquel cuya frecuencia de corte es menor. Si partimos de una frecuencia elevada y con numerosos modos excitados en la guía, y vamos disminuyendo paulatinamente la frecuencia, sería el último modo en desaparecer (en entrar en corte).

A partir de la ecuación (5.33), y si asumimos que las dimensiones transversales de la guía cumplen la relación $a > b$ (Fig. 5.2), podemos ver que el modo de menor frecuencia de corte es el de orden 10 (uno-cero). Se comprueba, además, que los modos TM comienzan en el modo TM₁₁ (en general no son posibles los modos TM_{m0} ni los TM_{0n}), por lo que el modo fundamental es el modo TE₁₀.

El siguiente modo será el de orden 01, 20 o, incluso, 30, en función de cuál sea la relación concreta entre las dimensiones a y b de la guía.

Las frecuencia de corte de los posibles primeros modos son:

$$\begin{aligned} (f_c)_{10} &= \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}, & (f_c)_{01} &= \frac{1}{2b\sqrt{\mu\epsilon}}, & (f_c)_{20} &= \frac{1}{a\sqrt{\mu\epsilon}}, \\ (f_c)_{11} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \end{aligned} \quad (5.37)$$

En el caso particular en que $a = b$ ocurre que los modos TE₁₀ y TE₀₁ tienen la misma frecuencia de corte y, de hecho, la misma constante de propagación ($\beta_{10} = \beta_{01}$). Cuando esto sucede se dice que son *modos degenerados*.

La expresión particular del modo dominante TE₁₀ (si $a > b$) es:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & H_x &= -j\beta_{10}H_0 \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a}x e^{-j\beta_{10}z} \\ E_y &= j\omega\mu H_0 \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a}x e^{-j\beta_{10}z} & H_y &= 0 \\ E_z &= 0 & H_z &= H_0 \cos \frac{\pi}{a}x e^{-j\beta_{10}z} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ejemplo 5.2: Sea una guía rectangular, de dimensiones $a=2,0$ cm y $b=1,3$ cm, cuyo interior es aire. Calcule la frecuencia de corte de los tres primeros modos guiados.

Podemos hacer una tabla con los primeros valores de m y n para los posibles modos.

f_c (GHz)	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$m=0$	-	11,538	23,077
$m=1$	7,500	13,762	...
$m=2$	15,000

No es necesario calcular más valores. El modo fundamental es el TE_{10} , cuya frecuencia de corte es 7,5 GHz. Los dos siguientes son el TE_{01} y el TE_{11} (o el TM_{11}).

5.2.5 Potencia transmitida

A partir de la expresión de la densidad media de potencia podrá calcularse la potencia que transporta un modo a lo largo de la guía (eje Z). Es claro que en las direcciones transversales la situación es estacionaria y no puede haber ningún flujo neto de potencia.

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] \rightarrow \vec{P}_m = \frac{1}{2} \text{Re}[E_x H_y^* - H_x^* E_y] \hat{z} \quad (5.39)$$

Si recordamos que para modos TE y TM se cumplen las relaciones (vease Ecs. (5.25) y (5.26) para un caso, y (5.29) y (5.30) para el otro):

$$\frac{E_x}{H_y} = Z_{mn} \quad \frac{E_y}{H_x} = -Z_{mn}$$

(donde $Z_{mn} = Z_{TEmn}$ o $Z_{mn} = Z_{TMmn}$ son las impedancias de onda respectivas), podemos escribir la densidad de potencia como:

$$\vec{P}_{mn} = \frac{1}{2} \frac{|E_x|^2 + |E_y|^2}{Z_{mn}} \hat{z} \quad (W/m^2) \quad (5.40)$$

La potencia media transportada se obtiene, finalmente, como la integral del flujo del vector de Poynting a través de una sección cualquiera de la guía:

$$W_{mn} = \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} \vec{P}_{mn} \cdot \hat{z} dx dy \quad (W) \quad (5.41)$$

5.2.6 Atenuación

En la práctica, la propagación guiada de la energía electromagnética presenta pérdidas, que se ponen de manifiesto en una disminución de la potencia transmitida. Las pérdidas en una guía de paredes conductoras se deben a dos causas: al hecho de que el dieléctrico interior no es perfecto, (lo cual debe caracterizarse más cuidadosamente con una permitividad compleja), y a que el conductor tiene una conductividad finita.

Vimos (sección 3.4) que la permitividad de un dieléctrico real debe escribirse en la forma $\epsilon^* = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$, donde ϵ es la permitividad del material sin pérdidas y σ su conductividad efectiva. Por otro lado, se define la impedancia superficial de un conductor no perfecto como:

$$Z_s = R_s + jX_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1 + j) \quad (5.42)$$

La definición de esta impedancia está relacionada con el hecho de que *en un conductor no perfecto la componente tangencial de campo eléctrico no es estrictamente nula en su superficie* (aunque es tan pequeña que para el resto de cuestiones seguiremos considerándola despreciable) y, como consecuencia, la densidad de corriente que se induce en la pared del conductor tampoco es estrictamente superficial, sino que logra penetrar en alguna medida en el interior del conductor. Esa corriente (y el propio campo eléctrico) es la responsable de las pérdidas, que dan pie a la expresión (5.42).

Veamos por separado ambos efectos en la propagación de un modo en la guía.

Pérdidas dieléctricas

Para un modo TE_{mn} o TM_{mn} la constante de propagación será ahora:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) - \pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]} \quad (5.43)$$

o bien, después de algunas manipulaciones:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]} \left\{ 1 - j \sigma \omega \mu \left[\omega^2 \mu \epsilon - \pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right] \right]^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.44)$$

Podemos hacer ahora la suposición de que:

$$\frac{\sigma\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - \pi^2\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]} \ll 1 \quad (5.45)$$

que se cumple para buenos dieléctricos y, mediante un desarrollo en serie de Taylor de la segunda raíz cuadrada de (5.44), llegaremos a:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \pi^2\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]} - j\frac{\sigma\omega\mu}{2}\left[\omega^2\mu\epsilon - \pi^2\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.46)$$

Entonces el término imaginario de β provoca la aparición de un término de atenuación en la dirección z , del tipo $\exp(-j\alpha_{mn}z)$. Si recordamos la fórmula (5.34) para la frecuencia de corte del modo, podemos simplificar la expresión de α_{mn} :

$$\alpha_{mn} = \frac{\sigma}{2} \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\sqrt{1 - \frac{f_{Cmn}^2}{f^2}}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma\eta}{\sqrt{1 - \frac{f_{Cmn}^2}{f^2}}} \quad (5.47)$$

que se ha escrito en función de η , la impedancia intrínseca del medio (sin pérdidas). α_{mn} recibe el nombre de constante de atenuación del medio para pérdidas dieléctricas.

Pérdidas óhmicas o de conducción

Para calcular la potencia W_C absorbida y disipada en forma de calor por cada una de las cuatro superficies S_i de la guía puede utilizarse una expresión análoga a la de pérdidas óhmicas debida a una resistencia R utilizada en teoría de circuitos:

$$W_C = \frac{1}{2} RI^2$$

donde $R = R_s = \sqrt{\omega\mu/2\sigma}$ según la expresión (5.42). Si denominamos \vec{J}_s a la densidad de corriente superficial se tiene:

$$W_C = \frac{R_s}{2} \iint_{S_i} \vec{J}_{S_i} \cdot \vec{J}_{S_i}^* dS_i \quad (5.48)$$

con $\vec{J}_{S_i} = \hat{n} \times \vec{H}|_{S_i}$. La suma de todas las pérdidas producidas sobre las cuatro superficies puede ser relacionada posteriormente con un coeficiente de atenuación α_c , para conseguir una expresión más cómoda de manejar. Para ello procederemos de la siguiente manera: si W_0 corresponde a la potencia transportada por un modo en un punto cualquiera de la guía, que tomamos como $z=0$ por sencillez, entonces, la potencia $W(z)$ en un punto z se relaciona con la anterior mediante la expresión habitual:

$$W(z) = W_0 \exp(-2\alpha_c z) \quad (5.49)$$

donde el '2' de la exponencial obedece a que se trata de la atenuación de la potencia, que es cuadrática respecto a los campos.

La potencia disipada por el conductor durante una distancia de propagación $z=l$ puede aproximarse en general en la forma:

$$W_C|_{z=l} = W_C|_{z=0} + l \frac{dW_C}{dz} \Big|_{z=0} = 0 - l \frac{dW(z)}{dz} \Big|_{z=0} = l 2\alpha_c W_0$$

y de allí:

$$\alpha_c = \frac{|W_C|_{z=l}}{2W_0 l} \quad (5.50)$$

expresión en la que W_C puede calcularse a partir de (5.48) y W_0 mediante (5.41).

5.3 Guías conductoras de sección circular

Para estudiar la propagación de una onda electromagnética en guías de sección circular (Fig. 5.6) debe expresarse la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas (vease apéndice B)

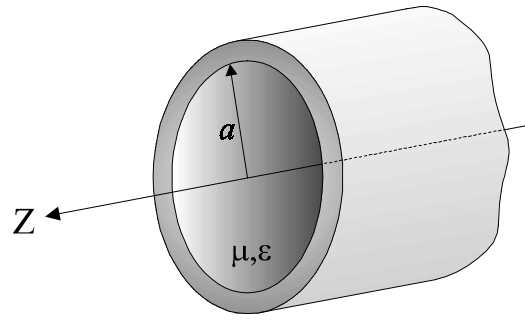


Fig. 5.6 Geometría de la guía circular

5.3.1 Modos TM

Si se aplica la ecuación de onda a la componente longitudinal (E_z) del campo eléctrico tenemos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} = -(\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) E_z \quad (5.51)$$

con:

$$E_z = E_z(\rho, \phi) e^{-j\beta z} = R(\rho) \Phi(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5.52)$$

por la simetría de la guía, y sustituyendo resulta:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (5.53)$$

y

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n^2 \Phi = 0 \quad (5.54)$$

donde $\alpha = (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$. Puede verse enseguida que las soluciones de la ecuación (5.54) son del tipo $\cos(n \phi)$ y $\sin(n \phi)$, por lo que n debe ser entero para que se dé una periodicidad de periodo 2π , que es necesario para tener soluciones físicamente consistentes. Respecto a la ecuación (5.53), si hacemos la sustitución $x = \alpha \rho$, obtenemos la ecuación diferencial de Bessel:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (5.55)$$

cuyas soluciones son las llamadas funciones de Bessel de orden n .

Se habla en general de soluciones de ‘primera especie’ y de ‘segunda especie’ para esa ecuación. Las primeras convergen para cualquier valor finito de x , y su expresión es:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \quad (5.56)$$

Se pueden aproximar para valores pequeños de x , en la forma: $J_n \approx (x/2)^n$.

El segundo tipo de funciones se conoce también como funciones de Neumann, y divergen para pequeños valores del argumento, por lo que no resultan aceptables como soluciones para el campo interior de una guía de onda (vease apéndice C).

La condición de contorno sobre las paredes conductoras de la guía para la componente E_z imponen su cancelación en esos puntos, es decir, debe cumplirse que:

$$R(x) = 0 \quad \text{en} \quad x = \alpha a$$

donde a es el radio interno del conductor cilíndrico.

La frecuencia de la onda y la constante de propagación del modo se relacionan según la expresión:

$$\omega^2 \mu \epsilon = \beta^2 + \frac{x^2}{a^2} \quad (5.57)$$

que es la *relación de dispersión* para guías de sección cilíndrica.

Puede verse que, para cada valor n , existirán unos valores de x (los que hacen $R(x) = 0$, condición de contorno sobre la superficie) que, a su vez, harán posibles ciertos valores de la constante de propagación para una frecuencia fijada según (5.57). Para ilustrar esto con más claridad escribamos explícitamente los primeros ceros de las funciones de Bessel en la siguiente tabla:

	1 ^{er} cero ($m = 1$)	2 ^o cero ($m = 2$)	3 ^{er} cero ($m = 3$)
J_0 ($n = 0$)	$x = 2,405$	$x = 5,520$	$x = 8,654$
J_1 ($n = 1$)	$x = 0$	$x = 3,832$	$x = 7,016$
J_2 ($n = 2$)	$x = 0$	$x = 5,136$	$x = 8,417$

Tabla 5.1: *Primeros ceros de algunas de las funciones de Bessel de primera especie*

Por tanto, fijados un valor de n y la frecuencia de la onda, podemos encontrar varios valores de x que satisfacen la condición de contorno para la componente tangencial de campo eléctrico en el conductor. Sustituyendo esos valores de x en la ecuación (5.57) encontraremos la constante de propagación β_{nm} del modo correspondiente. Los subíndices del modo TM_{nm} indican entonces, respectivamente, el orden de la función de Bessel, y el ordinal del cero elegido de esa función.

El modo con menor variación transversal (y por tanto con β mayor) es el que corresponde al primer cero de la función $J_0(x)$, es decir, el TM_{01} .

5.3.2 Modos TE

El procedimiento para obtener la expresión de los modos es similar al realizado en el caso anterior, pero ahora la ecuación de onda se aplica a H_z , que es la componente tangencial no nula:

$$H_z = H_z(\rho, \varphi) e^{-j\beta z} = R(\rho)\Phi(\varphi) e^{-j\beta z} \quad (5.58)$$

Formalmente la ecuación de onda y las soluciones que se obtienen son idénticas al caso anterior. La diferencia está en la condición de contorno que debe imponerse en $x = \alpha a$, que ahora es (compruébelo):

$$\frac{dR}{dn} = 0 \quad (5.59)$$

En la tabla siguiente se muestran los primeros ceros de la derivada primera de algunas de las funciones de Bessel:

	1 ^{er} cero ($m = 1$)	2 ^o cero ($m = 2$)	3 ^{er} cero ($m = 3$)
J'_0 ($n = 0$)	$x = 0$	$x = 3,832$	$x = 7,016$
J'_1 ($n = 1$)	$x = 1,841$	$x = 5,331$	$x = 8,536$
J'_2 ($n = 2$)	$x = 3,054$	$x = 6,706$	$x = 9,970$

Tabla 5.2 *Primeros ceros de las derivadas primeras de las funciones de Bessel*

Con esos valores se obtienen los modos TE_{nm} . De nuevo n indica el orden de la función de Bessel que describe la variación radial del modo (de H_z en este caso), y m es el cero tomado, que conlleva un escalado u otro de esa variación. Obsérvese que n se relaciona además directamente con la frecuencia de la variación azimutal del campo, de acuerdo con la función Φ . El primer modo TE es el TE_{11} , que además es el modo dominante, puesto que su frecuencia de corte es menor que la del TM_{01} .

5.3.3 El cable coaxial. Modos TEM

En una onda TEM, como se dijo anteriormente, las dos componentes longitudinales de los campos son nulas. Si imponemos esa condición en las ecuaciones de Maxwell para una región libre de fuentes se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

y combinando las ecuaciones (5.1)-(5.4) con (5.9)-(5.10) para modos de propagación genéricos, tenemos:

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{\beta}{\omega\mu} E_x = \frac{\omega\epsilon}{\beta} E_x \\ H_x &= -\frac{\beta}{\omega\mu} E_y = -\frac{\omega\epsilon}{\beta} E_y \end{aligned} \quad (5.61)$$

donde es claro que se cumple ahora $\beta^2 = \omega^2 \mu\epsilon$. Entonces, si hay alguna estructura de guía de onda que sea capaz de soportar ondas TEM, éstas se van a propagar con la misma velocidad de fase que tendría una onda plana uniforme de la misma frecuencia en un medio ilimitado, con los mismos parámetros μ, ϵ que el del interior de la guía. Las expresiones (5.61) también permiten escribir:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \vec{E} \quad (5.62)$$

donde η es la impedancia intrínseca del medio. Así pues, los modos TEM tendrían las mismas características de las ondas planas uniformes no confinadas.

A partir de las dos ecuaciones para las componentes del campo eléctrico (Ecs. (5.60)) puede deducirse además que es posible definir un potencial eléctrico al modo de electrostática:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad \text{donde} \quad \nabla^2\phi = 0 \quad (5.63)$$

en el plano transversal X-Y.

Una estructura física que permite la existencia de modos de este tipo es el cable coaxial, formado por un cilindro conductor delgado interno y una cubierta conductora externa, con algún tipo de dieléctrico entre ambos (Fig.5.7).

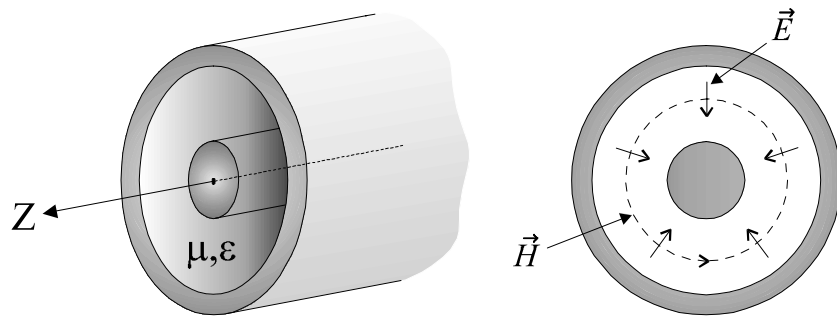


Fig. 5.7 El cable coaxial permite la propagación de ondas TEM

La ecuación de Laplace expresada en coordenadas polares en el plano X-Y, y para una función potencial con dependencia exclusivamente radial, es:

$$\nabla^2\phi(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (5.64)$$

cuya solución es: $\phi(\rho) = A + E_0 \ln \rho$.

A partir de este resultado, e incluyendo ya el término de propagación, se obtiene la expresión para el campo eléctrico:

$$\vec{E}(\rho, z) = -\hat{\rho} \frac{E_0}{\rho} \exp(-jkz) \quad (5.65)$$

y, aplicando la relación (5.62):

$$\vec{H}(\rho, z) = -\hat{\phi} \frac{E_0}{\eta \rho} \exp(-jkz) \quad (5.66)$$

Por fin, la densidad de potencia transportada por la onda obedece de la misma forma a la expresión genérica para el vector de Poynting de una onda plana uniforme:

$$\vec{P} = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}|^2 \hat{z} \quad (5.67)$$

5.4 Cavidades resonantes de paredes conductoras

Una cavidad resonante de este tipo consiste en un volumen dieléctrico (normalmente el aire) completamente rodeado de paredes conductoras. Evidentemente los campos que pueda haber en el interior de la cavidad no tienen el carácter de una onda viajera, con un término de propagación (exponencial compleja), en la forma en que acabamos de ver en el estudio de las guías de onda, puesto que ya no existe una dirección en la que puedan extenderse ilimitadamente. En esta nueva situación las paredes conductoras imponen condiciones adicionales. Se puede considerar que las ondas experimentan reflexiones continuas sobre las superficies del sistema y tienden a adoptar la forma de ondas estacionarias, en correspondencia con la geometría de la cavidad. El estudio de los modos de vibración propios y de sus frecuencias características se realiza mediante la superposición de los modos de propagación de las guías abiertas, que interfieren al viajar en sentidos opuestos.

Las estructuras aquí descritas se denominan cavidades resonantes o, también, resonadores de cavidad, y tienen interés como sintonizadores y medidores de frecuencia. Se utilizan en radiofrecuencia y a frecuencias ópticas (en este caso con paredes dieléctricas). Presentan gran variedad de formas y dimensiones, aunque los principios generales de funcionamiento son siempre los mismos.

Como ejemplo específico de cavidad resonante y, teniendo en cuenta la generalidad de los resultados, vamos a considerar un caso simple como es la cavidad en forma de paralelepípedo regular.

Sea, pues, el sistema representado en la figura 5.8, con seis paredes conductoras que encierran en su interior un volumen de cierto medio dieléctrico, de dimensiones a , b y c , según las direcciones X, Y y Z respectivamente.

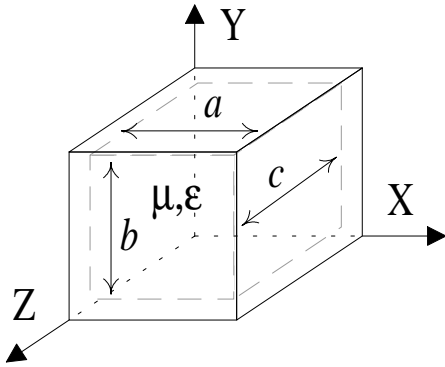


Fig. 5.8 Cavidad resonante rectangular

Los fasores de campo eléctrico y magnético deben satisfacer la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{H} = 0$$

por lo que, en coordenadas cartesianas, cada una de las componentes de ambos campos deben cumplir la ecuación escalar:

$$\nabla^2 f(\vec{r}) + \omega^2 \mu \epsilon f(\vec{r}) = 0 \quad (5.68)$$

Si, como en nuestro caso, el problema tiene simetría rectangular, podemos aplicar la técnica de separación de variables:

$$f(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (5.69)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de arriba se obtiene inmediatamente la solución como:

$$f(\vec{r}) = (A \sen k_1 x + B \cos k_1 x) \cdot (C \sen k_2 x + D \cos k_2 x) \cdot (E \sen k_3 x + F \cos k_3 x) \quad (5.70)$$

con la condición adicional:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \omega^2 \mu \epsilon = k^2 \quad (5.71)$$

y donde A, B, C, D, E y F son constantes.

5.4.1 Modos TE

Tomamos la dirección Z como la de “propagación confinada”, por lo que las condiciones de contorno para modos tipo TE deben escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}
E_x(0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; z = 0) &= E_x(0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; z = c) = 0 \\
E_y(0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; z = 0) &= E_y(0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; z = c) = 0 \\
E_z &= 0 \quad (\text{TE})
\end{aligned} \tag{5.72}$$

porque las demás condiciones ya fueron tenidas en cuenta al obtener esos modos.

Forzando la expresión general, dada en (5.70), a satisfacer esas condiciones obtendremos:

$$\begin{aligned}
E_x &= E_{0x} \cos k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z \\
E_y &= E_{0y} \sin k_1 x \cos k_2 y \sin k_3 z \\
E_z &= 0
\end{aligned} \tag{5.73}$$

donde las constantes que aparecen son:

$$k_1 = (k_x) = \frac{m\pi}{a}; \quad k_2 = (k_y) = \frac{n\pi}{b}; \quad k_3 = (k_z) = \frac{p\pi}{c} \tag{5.74}$$

y donde la relación entre las amplitudes viene dada por $k_1 E_{0x} + k_2 E_{0y} = 0$ (comprobarlo).

El campo magnético se obtiene fácilmente a partir del campo eléctrico.

La expresión (5.71) se transforma ahora en:

$$\omega^2 \mu \epsilon = \pi^2 \left(\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{p}{c} \right)^2 \right) \tag{5.75}$$

en la que $m, n = 0, 1, 2, \dots$ y $p = 1, 2, 3, \dots$ (razónelo).

En una cavidad resonante no existe ecuación de dispersión en el mismo sentido que se vio en guías de onda. Ahora todas las constantes que rigen la variación espacial de los campos están delimitadas a ciertos valores posibles, debido a las condiciones de contorno. Por tanto, lo que determina la condición (5.75) es la propia frecuencia a la que la solución hallada tiene validez. Dicho de otra forma: cada modo de vibración de la cavidad tiene su propia frecuencia característica. Suele escribirse:

$$(f)_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{p}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.76}$$

Si las dimensiones de la guía son tales que se satisface $c > a > b$, entonces el modo con menor frecuencia de resonancia es el TE_{101} , en el que:

$$(f)_{101} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.77)$$

5.4.2 Modos TM

El proceso es similar al seguido en el caso anterior. Ahora la componente E_z debe cancelarse en aquellas paredes a la que es tangente, esto es, para $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Puede comprobarse que el campo eléctrico toma la forma:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z \\ E_y &= E_{0y} \sin k_1 x \cos k_2 y \sin k_3 z \\ E_z &= E_{0z} \sin k_1 x \sin k_2 y \cos k_3 z \end{aligned} \quad (5.78)$$

con la relación entre las amplitudes: $k_1 E_{0x} + k_2 E_{0y} + k_3 E_{0z} = 0$, y con los mismos valores de las constantes k_1 , k_2 y k_3 obtenidas en el caso anterior (Ec. (5.74)).

A partir del campo eléctrico puede obtener el campo magnético, cuya componente en la dirección Z es nula.

Las frecuencias de resonancia siguen la misma expresión que para los modos TE_{mnp} , pero ahora con $m, n = 1, 2, 3, \dots$ y $p = 0, 1, 2, \dots$

5.4.3 Factor Q de la cavidad y energía almacenada

Se acaba de ver que un parámetro fundamental de una cavidad es su frecuencia de resonancia (o las frecuencias, para los diferentes modos posibles). Existe otro parámetro de gran trascendencia para caracterizar la cavidad: es el llamado factor Q o de calidad. Su definición es la siguiente:

$$Q = \omega \frac{\text{energía almacenada}}{\text{energía disipada por segundo}} \quad (5.79)$$

La energía electromagnética total almacenada en el interior de la cavidad debe responder a la expresión general:

$$W_T = \frac{1}{2} \int_V \left(\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2 \right) dv \quad (5.80)$$

y la pérdida total de energía por unidad de tiempo, atendiendo a los efectos óhmicos en el conductor, que son usualmente los más importantes:

$$P_T = \frac{1}{2} R_S \sum_{i=1}^6 \int_{S_i} \vec{J}_{S_i} \cdot \vec{J}_{S_i}^* dS_i \quad (5.81)$$

donde, como se explicó en la sección 5.2.3, \vec{J}_{S_i} es la corriente superficial inducida en cada una de las paredes internas del conductor.

El sentido del factor Q es sencillo de comprender: en el caso ideal la cavidad debería ser capaz de conservar indefinidamente la energía electromagnética presente en su interior. Dicha energía se mantendría estacionaria en valor, aun cuando los valores de campo instantáneo serían variables en el tiempo (RSP), dando lugar a un intercambio periódico de energía entre el campo eléctrico y el campo magnético. Por el hecho de tener buenos conductores pero no conductores perfectos, la energía, en la práctica, decaerá exponencialmente en el tiempo. La relación entre la energía total y la energía perdida por ciclo de oscilación (y por el factor 2π) da idea, entonces, de lo cerca que estamos de aquel caso ideal.

Las cavidades resonantes son, en radiofrecuencia, equivalentes a los circuitos LC de bajas frecuencias. En éstos las resistencias parásitas impiden las oscilaciones sostenidas, que se producen también a una frecuencia característica y mediante el intercambio de energía entre la bobina (en forma de campo magnético) y el condensador (energía en forma de campo eléctrico). El factor de calidad tiene el mismo sentido en ambos sistemas.

Ejemplo 5.3: Calcular la expresión del factor Q de una cavidad de lados a , b y c para su modo fundamental TE_{101} .

El modo tiene las componentes: $E_x = 0$; $E_y = E_0 \sin k_1 x \sin k_3 z$; $E_z = 0$, donde $k_1 = \frac{\pi}{a}$ y $k_3 = \frac{\pi}{c}$ (vease Ecs. (5.73) y (5.74)) y el campo magnético puede obtenerse inmediatamente a partir de allí:

$$H_x = -j \frac{1}{\omega \mu} k_3 E_0 \sin k_1 x \cos k_3 z; \quad H_y = 0$$

$$H_z = j \frac{1}{\omega \mu} k_1 E_0 \cos k_1 x \sin k_3 z$$

La expresión de la energía se mostró en la ecuación (5.80). El resultado para este caso es:

$$W_T = \frac{1}{8} abc \varepsilon |E_0|^2$$

Las pérdidas en las paredes de la guía precisan del conocimiento de las corrientes, que se obtienen a partir del campo magnético. Después de calcularlas e integrarlas sobre las paredes se obtiene:

$$W_T = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\omega \mu} \right)^2 E_0^2 R_s \pi^2 \left(2b \left(\frac{a}{c^2} + \frac{c}{a^2} \right) + ac \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right)$$

Y el factor de calidad, sustituyendo el valor de la frecuencia por la propia de resonancia del modo (Ec. 5.77) y operando es:

$$Q = \frac{1}{2} \pi \frac{\eta}{R_s} abc \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{2b \left(\frac{c}{a^2} + \frac{a}{c^2} \right) + ac \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right)}$$

5.5 Guías de onda dieléctricas

Desde la década de los sesenta, con el desarrollo del láser, las fibras ópticas han tenido un papel de importancia creciente en el campo de las comunicaciones, ya que permiten la transmisión de información a larga distancia, con alta velocidad y a un coste muy competitivo.

El mismo fundamento físico (la reflexión total en las paredes internas de la fibra) permite desarrollar otro tipo de elementos capaces de confinar las ondas luminosas, como son las guías dieléctricas rectangulares o de tipo canal (*channel guides*), para la realización de dispositivos ópticos u optoelectrónicos integrados.

El análisis matemático general de la propagación en fibras y en guías ópticas es complicado, y queda fuera de la visión fundamental de los fenómenos electromagnéticos que nos hemos propuesto dar en esta obra. En la sección 5.6 se tratará muy brevemente de la propagación en fibras ópticas, mientras que en este apartado estudiaremos un modelo sencillo de guía dieléctrica: la guía dieléctrica plana.

5.5.1 Guías dieléctricas planas

Trataremos de la guía dieléctrica con un modelo simplificado, de dos dimensiones. Esto es necesario para tener soluciones analíticas que nos permitan comprender el fundamento y las características de la propagación en este tipo de estructuras. En numerosos casos se obtiene, de esta forma, una buena aproximación al dispositivo real.

Como ya se ha visto al estudiar las guías de paredes conductoras, el problema que debemos resolver se reduce a obtener soluciones de la ecuación de onda que satisfagan las condiciones de contorno del problema. Se verá que las guías planas son capaces de soportar los dos tipos de modos estudiados anteriormente: TE y TM.

La forma de una guía dieléctrica plana es la que se muestra en la figura 5.9. Sobre un sustrato de vidrio, o de algún material transparente, se deposita una fina capa de otro dieléctrico, con un grosor del orden de la longitud de onda de la radiación luminosa. A esta capa se la denomina capa guiante y será, principalmente, la encargada de confinar las ondas en su interior. Sobre la capa guiante habrá aire o, quizá, una segunda capa de recubrimiento dieléctrico.

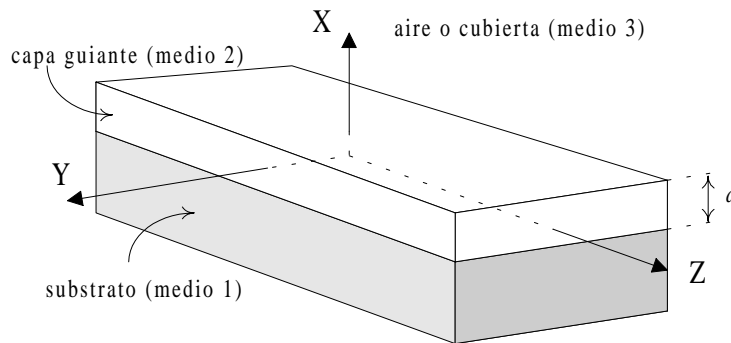


Fig. 5.9 Geometría de una guía de onda dieléctrica plana

Existen diversos métodos para fabricar guías dieléctricas. Puede crecerse la capa guiante sobre el sustrato, depositando sobre él, a alta temperatura, los microcristales del material cristalino elegido. Esto se hace en, por ejemplo, la técnica de *sputtering*, que es una de las más habituales. En otras ocasiones se procede a bombardear con iones el sustrato, provocando la aparición en la superficie, y hasta cierta profundidad, de una capa con propiedades diferentes a las del sustrato original (por ejemplo, con iones de titanio sobre niobato de litio, LiNbO_3 , se crea una capa de Ti:LiNbO_3). También se pueden producir guías difundiendo térmicamente átomos de metal en el interior del sustrato. Otro método es el de fotolitografía, utilizando máscaras y ataques químicos o fotoquímicos, de igual forma que en la fabricación de circuitos electrónicos integrados. Este procedimiento es habitual en guías fabricadas sobre semiconductores. En cualquier caso la capa guiante debe tener mayor índice de refracción que la cubierta o el sustrato, para que sea capaz de confinar la luz. La

diferencia entre el índice de refracción de la capa guiante y el del sustrato no es, sin embargo, muy elevada: aunque podría llegar a ser del 10% en su valor numérico en alguna ocasión, en otras no pasa del 1%, que es suficiente para que se produzca la reflexión total.

En nuestro análisis vamos a suponer que todos los dieléctricos implicados son lineales, homogéneos e isotrópicos, aunque hoy en día se fabrican frecuentemente guías inhomogéneas, en su perfil transversal, y también con dieléctricos cristalinos anisótropos, como el LiNbO_3 , que tiene otras interesantes propiedades.

5.5.2 Modos TE y modos TM. Curvas de dispersión

Consideremos que la propagación se realiza en la dirección Z y que el grosor de la guía (en X) es muy pequeño en comparación con la otra dimensión transversal (Y), de modo que vamos a asumir que esta última no interviene en el problema, y que ni los campos ni la guía experimentan variación en esa dirección, sino que se extienden infinitamente. Ésta es la aproximación de guía plana (Fig. 5.10).

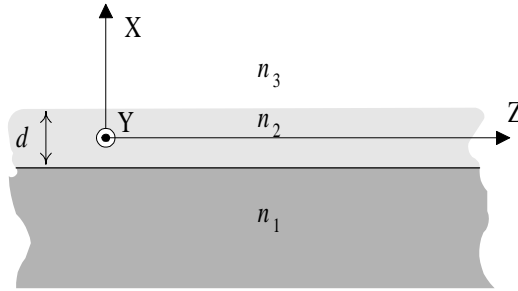


Fig. 5.10 Aproximación de guía dieléctrica plana: el problema se reduce al plano XZ

Se comprueba que, para modos TE, el campo eléctrico tiene una única componente, en la dirección Y. En la capa guiante (medio 2) toma la forma general (Fig. 5.10):

$$\vec{E}_2(x, z) = \hat{y} E_2(x) e^{-j\beta z} \quad |x| \leq \frac{d}{2} \quad (5.82)$$

donde $E_2(x)$ es una función por determinar. Se ha supuesto que el origen de la coordenada x está situado en el centro de la capa guiante. En los medios exteriores el campo debe tener, sin embargo, forma evanescente:

$$\vec{E}_1(x, z) = \hat{y} E_{01} \exp(\alpha_1 x) e^{-j\beta z} \quad x < -\frac{d}{2} \quad (5.83a)$$

$$\vec{E}_3(x, z) = \hat{y}E_{03} \exp(-\alpha_3 x) e^{-j\beta z} \quad x > \frac{d}{2} \quad (5.83b)$$

Todos ellos han de satisfacer la ecuación de onda en su medio respectivo. Aplicándola en los tres casos se obtiene la forma particular del campo en la capa intermedia:

$$\vec{E}_2(x, z) = \hat{y}E_{02} \cos(k_{2x}x + \psi) e^{-j\beta z} \quad |x| \leq \frac{d}{2} \quad (5.84)$$

y las relaciones:

$$\begin{aligned} k_{2x} &= \sqrt{\omega^2 \mu_2 \epsilon_2 - \beta^2} = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} \\ \alpha_1 &= \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \mu_1 \epsilon_1} = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_1^2} \\ \alpha_3 &= \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \mu_3 \epsilon_3} = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_3^2} \end{aligned} \quad (5.85)$$

donde n_1 , n_2 y n_3 son los índices de refracción del substrato, la capa guiante y la cubierta, respectivamente. k_0 es el número de onda en el vacío. La obtención detallada de las ecuaciones (5.85) se propone como ejercicio.

En la ecuación (5.84) se ha optado por escribir la función coseno con un término de fase adicional, lo que da un grado de libertad necesario para aplicar las condiciones de contorno en las superficies de separación de los dieléctricos. Piénsese que si la guía es asimétrica (la cubierta y el substrato son medios diferentes) el campo en la capa guiante no puede responder a la forma simétrica de una función par o antisimétrica de una función impar. Otra posibilidad hubiera sido escribir la dependencia funcional en x como $A \cos k_{2x}x + B \sin k_{2x}x$.

En las expresiones anteriores hay constantes indeterminadas: $\beta, \psi, E_{01}, E_{02}, E_{03}$. De todas ellas sólo puede quedar una, que dará la amplitud del modo. Las demás deben particularizarse atendiendo a las condiciones de contorno en ambas superficies de separación: la igualdad de las componentes tangenciales de campo eléctrico y de campo magnético.

Por aplicación de la ley de Faraday obtendremos el campo magnético, que tendrá las componentes no nulas H_x y H_z . Su componente longitudinal es la que nos interesa ahora:

$$\begin{aligned} H_{1z}(x, z) &= \frac{j\alpha_1}{\omega\mu_1} E_{01} \exp(\alpha_1 x) e^{-j\beta z} \quad x < -\frac{d}{2} \\ H_{2z}(x, z) &= \frac{-jk_{2x}}{\omega\mu_2} E_{02} \sin(k_{2x}x + \psi) e^{-j\beta z} \quad |x| \leq \frac{d}{2} \\ H_{3z}(x, z) &= \frac{-j\alpha_3}{\omega\mu_3} E_{03} \exp(-\alpha_3 x) e^{-j\beta z} \quad x > \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (5.86)$$

Y las condiciones de contorno nos llevan, en $x = \frac{d}{2}$, a:

$$\begin{aligned} (E_{2y} = E_{3y}) \Big|_{x=\frac{d}{2}} &\rightarrow E_{03} \exp(-\alpha_3 \frac{d}{2}) = E_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} + \psi) \\ (H_{2z} = H_{3z}) \Big|_{x=\frac{d}{2}} &\rightarrow E_{03} \exp(-\alpha_3 \frac{d}{2}) = \frac{\mu_3 k_{2x}}{\mu_2 \alpha_3} E_{02} \sin(k_{2x} \frac{d}{2} + \psi) \end{aligned}$$

y, en $x = -\frac{d}{2}$, a:

$$\begin{aligned} (E_{1y} = E_{2y}) \Big|_{x=-\frac{d}{2}} &\rightarrow E_{01} \exp(-\alpha_1 \frac{d}{2}) = E_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} - \psi) \\ (H_{1z} = H_{2z}) \Big|_{x=-\frac{d}{2}} &\rightarrow E_{01} \exp(-\alpha_1 \frac{d}{2}) = \frac{\mu_1 k_{2x}}{\mu_2 \alpha_1} E_{02} \sin(k_{2x} \frac{d}{2} - \psi) \end{aligned}$$

En cada uno de los dos pares de ecuaciones precedentes dividimos una entre otra para obtener:

$$\operatorname{tg}(k_{2x} \frac{d}{2} + \psi) = \frac{\mu_2 \alpha_3}{\mu_3 k_{2x}} \quad (5.87)$$

y

$$\operatorname{tg}(k_{2x} \frac{d}{2} - \psi) = \frac{\mu_2 \alpha_1}{\mu_1 k_{2x}} \quad (5.88)$$

que constituyen la condición de propagación guiada en la estructura.

Al contrario de lo que ocurre en guías de paredes conductoras, ahora no tenemos una ecuación resoluble analíticamente, sino que los valores adecuados para las constantes k_{2x} , α_1 y α_3 (o β , con quien se relacionan directamente mediante las ecuaciones dadas en (5.85)) y para el desfase espacial ψ deben hallarse por métodos numéricos o gráficos. No obstante podemos poner (5.87) y (5.88) de una forma más compacta. Para ello utilizamos la igualdad:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x \pm p\pi) \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

y definimos los desfases:

$$\Phi_3^{TE} = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_2 \alpha_3}{\mu_3 k_{2x}}\right) \quad \Phi_1^{TE} = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_2 \alpha_1}{\mu_1 k_{2x}}\right) \quad (5.89)$$

Y ahora podemos escribir:

$$k_{2x} \frac{d}{2} + \psi = \frac{1}{2} \Phi_3^{TE} \pm p_1 \pi \quad \text{y} \quad k_{2x} \frac{d}{2} - \psi = \frac{1}{2} \Phi_1^{TE} \pm p_2 \pi \quad (5.90)$$

o, sumando las anteriores en una sola ecuación:

$$2k_{2x}d - \Phi_3^{TE} - \Phi_1^{TE} = 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.91)$$

que es la *ecuación de dispersión de la guía dieléctrica plana para modos TE*, junto con las definiciones dadas en (5.89).

Como se ha explicado previamente las constantes que intervienen (k_{2x} , α_1 y α_3) están relacionadas directamente con la constante de propagación β (Ecs. 5.85). Si las substituyésemos en (5.89) y (5.91) tendríamos una expresión para la constante de propagación, que tomaría diversos valores para los posibles modos guiados (diferentes valores de m), en función del grosor de la guía, de la frecuencia de oscilación y de las constantes particulares de los dieléctricos.

Ejemplo 5.4: Representación de las curvas de dispersión para una guía dieléctrica plana.

En la figura 5.11 se muestran las curvas de dispersión, para modos TE, en una forma de representación habitual: el grosor de la guía, d , en abscisas, y la constante de propagación, β , dividida por k_0 , en ordenadas. Aparecen tres curvas, que corresponden a los modos TE_0 , TE_1 y TE_2 . Las curvas se han obtenido para unos parámetros dados de los tres dieléctricos (cubierta, capa guiente y substrato) y para una determinada longitud de onda. Entonces se fija un grosor y se toman sucesivos valores enteros de m , buscando soluciones numéricamente a la ecuación (5.91).

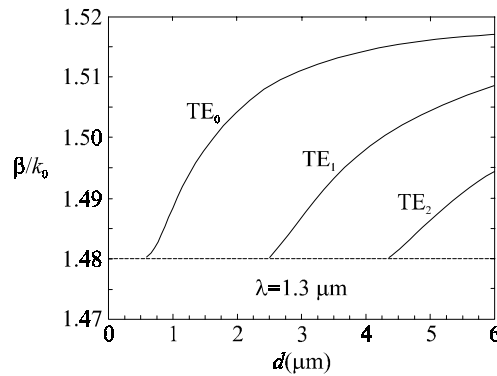


Fig. 5.11 Curvas de dispersión para una guía dieléctrica plana (modos TE)

En el caso particular de la figura los dieléctricos se han tomado con los índices de refracción siguientes: 1,48 para el sustrato; 1,52 para la capa guiante y 1,40 para la cubierta. La longitud de onda elegida ha sido de $1,3 \mu\text{m}$. La forma de interpretar las gráficas es como sigue: para grosores muy pequeños, hasta $0,58 \mu\text{m}$, no hay solución para ningún valor de m , luego no puede existir propagación a esa frecuencia ($\lambda = 1,3 \mu\text{m} \rightarrow f = 230,77 \text{ THz}$, con $1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$). A partir de allí ($d = 0,58 \mu\text{m}$) aparece el primer modo guiado, TE_0 , que es el modo fundamental de la guía. Ésta se mantiene monomodo a la frecuencia elegida hasta el valor de $d = 2,49 \mu\text{m}$, en que aparece el modo siguiente, TE_1 (es decir, existen soluciones para la ecuación (5.91) con $m=0$ y $m=1$). Por fin, cuando d llega a $4,36 \mu\text{m}$ aparece una nueva solución, para $m=2$, el modo TE_2 , e irían apareciendo nuevas soluciones si se siguiera aumentando el valor de d .

Si una guía particular con esos índices de refracción tuviera, por ejemplo, un grosor de $3 \mu\text{m}$, el número de modos TE que puede soportar, para $\lambda=1,3 \mu\text{m}$, es de dos. Para longitudes de onda menores (frecuencias mayores) el número de modos aumentaría, al igual que sucede en cualquier otro tipo de guía de ondas.

En la figura 5.12 se representan de nuevo las curvas de dispersión de la misma guía, esta vez para $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$ ($f = 352,9 \text{ THz}$): el número de modos para un determinado grosor es, en cualquier caso, igual o mayor que antes. Una opción comúnmente elegida es representar las curvas con el parámetro adimensional d/λ en abscisas, lo que permite obtener curvas universales de la guía para cualquier frecuencia de excitación.

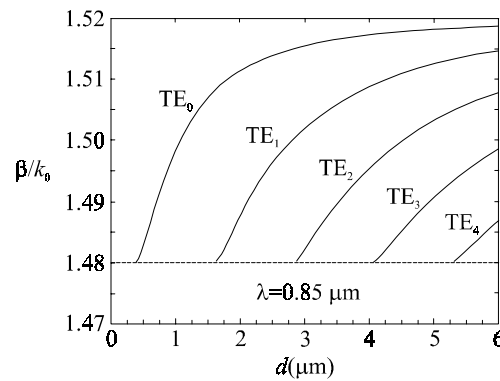


Fig. 5.12 *Curvas de dispersión, de la misma guía de la figura anterior, con $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$*

Para terminar con la deducción teórica podemos escribir la forma final del campo eléctrico, después de obtener las relaciones entre las amplitudes E_{01} , E_{02} y E_{03} de la aplicación de las condiciones de contorno:

$$E_y(x, z) = \begin{cases} E_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} - \psi) \exp(\alpha_1(x + \frac{d}{2})) \exp(-j\beta z) & x < -\frac{d}{2} \\ E_{02} \cos(k_{2x} x + \psi) \exp(-j\beta z) & |x| \leq \frac{d}{2} \\ E_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} + \psi) \exp(-\alpha_3(x - \frac{d}{2})) \exp(-j\beta z) & x > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (5.92)$$

donde ψ se obtiene de (5.90).

En la figura 5.13 se ha representado la dependencia transversal del campo eléctrico en la guía del ejemplo anterior, para los modos TE_0 y TE_1 .

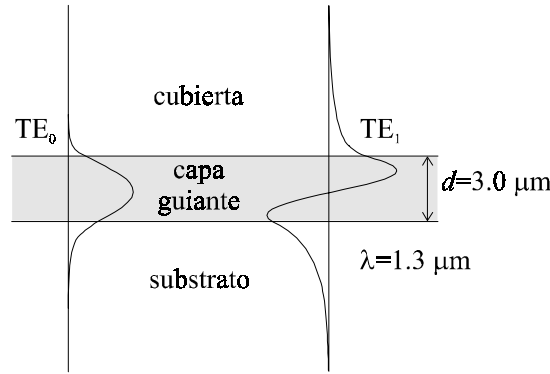


Fig. 5.13 Forma del campo eléctrico en los modos TE_0 y TE_1

Modos TM

La otra familia de modos capaces de propagarse en la guía son los modos TM. Formalmente son similares a los anteriores, pero las componentes no nulas son ahora: E_x , E_z y H_y . Partimos del campo magnético, que tendrá la forma:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1(x, z) &= \hat{y} H_{01} \exp(\alpha_1 x) \exp(-j\beta z) & x < -\frac{d}{2} \\ \vec{H}_2(x, z) &= \hat{y} H_2(x) \exp(-j\beta z) & |x| \leq \frac{d}{2} \\ \vec{H}_3(x, z) &= \hat{y} H_{03} \exp(-\alpha_3 x) \exp(-j\beta z) & x > \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (5.93)$$

Aplicando la ecuación de onda, se obtienen las mismas relaciones para las constantes k_{2x} , α_1 y α_3 con β (Ecs.(5.85)), y además resulta:

$$\bar{H}_2(x, z) = \hat{y} H_{02} \cos(k_{2x}x + \psi') \exp(-j\beta z) \quad |x| \leq \frac{d}{2} \quad (5.94)$$

por ser, en general, la guía asimétrica, y no haber de considerar funciones pares o impares.

Prosiguiendo de la misma forma que en el caso anterior resulta finalmente la condición de propagación guiada:

$$2k_{2x}d - \Phi_3^{TM} - \Phi_1^{TM} = 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.95)$$

donde

$$\Phi_3^{TM} = 2 \arctg\left(\frac{\epsilon_2 \alpha_3}{\epsilon_3 k_{2x}}\right) \quad ; \quad \Phi_1^{TM} = 2 \arctg\left(\frac{\epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 k_{2x}}\right) \quad (5.96)$$

Finalmente las expresiones del campo magnético en las tres regiones son:

$$H_y(x, z) = \begin{cases} H_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} - \psi') \exp(\alpha_1(x + \frac{d}{2})) \exp(-j\beta z) & x < -\frac{d}{2} \\ H_{02} \cos(k_{2x}x + \psi') \exp(-j\beta z) & |x| \leq \frac{d}{2} \\ H_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} + \psi') \exp(-\alpha_3(x - \frac{d}{2})) \exp(-j\beta z) & x > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (5.97)$$

Debe hacerse notar que, a diferencia de lo que ocurre en las guías huecas de paredes conductoras, las curvas de dispersión en guías dieléctricas no son las mismas para los modos TE y los modos TM. Por tanto, las constantes de propagación para dos modos del mismo orden (TE₀ y TM₀, por ejemplo) no tienen los mismos valores (observe que, efectivamente, las expresiones (5.91) y (5.95) tendrán en general soluciones diferentes).

Potencia propagada en una guía dieléctrica

Para calcular la potencia media que transporta un modo guiado que se propaga en la dirección Z asumiremos que la dimensión de la guía en la dirección transversal Y tiene un valor b , con $b \gg d$. Se tiene entonces:

$$W_m = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{z} \right\} \quad (5.98)$$

donde $\int_{-\infty}^{+\infty} dx = \int_{-\infty}^{-\frac{d}{2}} dx + \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dx + \int_{+\frac{d}{2}}^{+\infty} dx.$

Para un modo TE, por ejemplo, resulta:

$$W_m = -\frac{b}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} E_y H_x^* dx \quad (5.99)$$

donde, por las ecuaciones de Maxwell:

$$H_x = -j \frac{1}{\omega \mu} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\beta}{\omega \mu} E_y \quad (5.100)$$

La potencia media transportada por el modo es:

$$W_m = \frac{b\beta}{2\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_y|^2 dx \quad (5.101)$$

5.5.3 Modos guiados y modos radiados

Los modos que se han descrito en la sección precedente (modos guiados) no son las únicas soluciones posibles al problema electromagnético que constituye la guía de onda dieléctrica, aunque sí es cierto que son los que realmente tienen utilidad práctica.

La potencia confinada en el interior de una guía puede salir al exterior cuando se pierde el carácter ideal de la estructura. Esto acontece en diversas circunstancias: por ejemplo, cuando la guía tiene irregularidades en su superficie, o en su volumen, por un proceso de fabricación no totalmente depurado; o porque se provoca un acoplamiento entre dos guías diferentes; o porque la guía está sometida a presión y se deforma levemente, etc.

Para dar cuenta de todos esos fenómenos los modos guiados no son suficientes, y es necesario reexaminar el problema más atentamente. Se observa entonces que son posibles otras soluciones: ondas no confinadas en la capa guiante o, dicho de otra manera, ondas que no alcanzan el ángulo crítico para reflexión interna total cuando inciden en las paredes de la guía. Se habla entonces de *modos radiados*.

No es posible estudiar aquí detalladamente los modos radiados, porque su tratamiento matemático completo abarcaría una extensión considerable. Sin embargo es posible hacer una descripción somera. Un modo radiado de tipo TE *en una guía plana dieléctrica simétrica* (donde la cubierta y el sustrato tienen el mismo índice de refracción) responde a la expresión general:

$$E_y(x, z) = \begin{cases} E_{01} \cos(k_{1x}x + \psi_1) \exp(-j\beta z) & x < -\frac{d}{2} \\ E_{02} \cos(k_{2x}x) \exp(-j\beta z) & |x| \leq \frac{d}{2} \\ E_{01} \cos(k_{1x}x + \psi_1) \exp(-j\beta z) & x > \frac{d}{2} \end{cases}$$

si es un modo par, y a la expresión:

$$E_y(x, z) = \begin{cases} E'_{01} \sin(k_{1x}x + \psi'_1) \exp(-j\beta z) & x < -\frac{d}{2} \\ E'_{02} \sin(k_{2x}x) \exp(-j\beta z) & |x| \leq \frac{d}{2} \\ E'_{01} \sin(k_{1x}x + \psi'_1) \exp(-j\beta z) & x > \frac{d}{2} \end{cases}$$

si es un modo impar.

Obsérvese que en cada uno de los modos así escrito tenemos varios parámetros indeterminados. Por ejemplo, en la primera expresión: dos amplitudes (E_{01} y E_{02}), un desfase espacial (ψ_1) y las constantes para las variaciones transversal y longitudinal (k_{1x} , k_{2x} y β). En realidad no hay suficientes condiciones que podamos imponer como para que todos ellos estén obligados a tomar un valor concreto (dos ecuaciones de onda y dos condiciones de contorno, si la guía es simétrica). *Consecuentemente la constante de propagación β puede tomar cualquier valor*, con la única limitación de que k_{1x} y k_{2x} permanezcan reales.

Así pues, a diferencia de los modos guiados, que es, como se ha visto, un conjunto discreto de soluciones, los modos radiados forman un conjunto continuo. Profundizando un poco más deberíamos añadir que, de hecho, un único modo radiado no tiene sentido físico, pues al fin y al cabo es un campo infinitamente extendido en el espacio (como ocurre con una onda plana uniforme), y debe trabajarse con ellos en forma de espectro continuo. Entonces, lo que tiene realidad física es su integral (en β o en k_x), que da lugar a una onda que radia potencia fuera de la guía.

5.6 Fibras ópticas

El desarrollo tecnológico de las tres últimas décadas y hasta nuestros días ha sido fundamental para la introducción de las fibras ópticas en el campo de las comunicaciones. Así, mientras en 1966 se tenían pérdidas en la propagación del orden de 1.000 dB/Km, las fibras actuales presentan pérdidas menores de 0,2 dB/Km para la longitud de onda de 1,55 μm . La combinación de bajas pérdidas y gran anchura de banda ha convertido la fibra óptica

en un medio de transmisión altamente atractivo en los sistemas de comunicación. Las ventajas de la fibra frente a las líneas de transmisión conductoras clásicas son considerables. Por un lado, éstas presentan pérdidas de conducción que aumentan exponencialmente con la frecuencia (y con el ancho de banda utilizado), mientras que las fibras no presentan ese problema. Para modulaciones del orden de los MHz, las pérdidas en las fibras son muy inferiores, y no se requiere intercalar amplificadores más que a grandes intervalos, con el consiguiente ahorro. Por otra parte, las fibras ópticas tampoco presentan problemas de interferencia electromagnética, típico de los cables metálicos a altas frecuencias. El material usual con el que se fabrican las fibras es el óxido de silicio (SiO_2), abundante y barato en su proceso de extracción y depuración.

En este apartado veremos la teoría elemental de propagación de modos propios en la fibra óptica y, tan sólo, para un tipo de ellos: los modos TM. El lector puede tratar de reproducir los cálculos para modos de tipo transversal eléctrico.

Considérese la estructura habitual de la fibra, tal como se representa en la figura 5.12. Está formada por un núcleo central de radio a y permitividad ϵ_1 , rodeado por una cubierta cilíndrica de permitividad ϵ_2 , de valor ligeramente inferior al primero. Habitualmente el conjunto suele estar, a su vez, envuelto por una delgada capa absorbente, cuyo papel es eliminar toda la luz que haya podido atravesar el recubrimiento. En nuestro análisis supondremos, simplemente, que la cubierta se extiende infinitamente, lo que equivale a considerar que la capa absorbente realiza su papel con toda perfección. Cabe mencionar que, en la práctica, se añade un revestimiento adicional para proporcionar resistencia mecánica a la fibra. Es claro que, en cualquier caso, no juega ningún papel de cara a los campos que viajan en el interior.

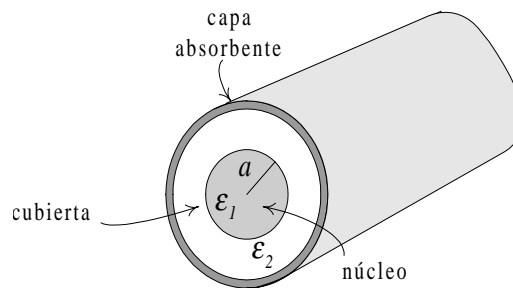


Fig. 5.14 Estructura de una fibra óptica

Según se vio en la sección 5.4.1, cuando se estudiaron los modos TM en guías de sección circular de paredes conductoras, el campo en el interior del núcleo de la fibra puede escribirse como:

$$E_{1z}(\rho, \varphi) = E_{01} J_n(\alpha \rho) \cos(n\varphi) \quad (5.102)$$

donde $J_n(\alpha\rho)$ es la función de Bessel de orden n , con $\alpha = (\omega^2\mu_1\varepsilon_1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$. Puede demostrarse que, si la onda luminosa ha de estar confinada en el interior de la fibra, entonces la componente longitudinal del campo en la cubierta debe decrecer con el radio. En definitiva ello es la manifestación de que está teniendo lugar la reflexión total, si bien en una superficie de separación entre dieléctricos curvada. La expresión del campo en la cubierta es:

$$E_{2z}(\rho, \varphi) = E_{02} K_n(\gamma\rho) \cos(n\varphi) \quad (5.103)$$

donde $\gamma = (\beta^2 - \omega^2\mu_2\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}$. La función que aparece se define en la forma:

$$K_n(\gamma\rho) = \frac{\pi}{2} j^{n+1} \{J_n(j\gamma\rho) + jN_n(j\gamma\rho)\} \quad (5.104)$$

y $N_n(x)$ es la función de Neumann (vease apéndice C).

Las condiciones de contorno sobre $\rho = a$, corresponderán a la continuidad de E_z y a la de la componente transversal de campo magnético, H_φ (al ser un modo TM no existirá H_z). Esta última condición se demuestra que es equivalente, en coordenadas cilíndricas, a la continuidad de la derivada radial de E_z sobre la superficie (comprobarlo). Se tiene entonces:

$$E_1 J_n(\alpha a) = E_{02} K_n(\gamma a) \quad (5.105)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha^2} E_{01} \frac{d}{d\rho} J_n(\alpha a) = -\frac{\varepsilon_2}{\gamma^2} E_{02} \frac{d}{d\rho} K_n(\gamma a) \quad (5.106)$$

Si ahora utilizamos las siguientes relaciones de recurrencia entre las funciones de Bessel de 1^{ra} especie y de 2^{da} especie:

$$\begin{aligned} J_{n+1}(x) &= \frac{n}{x} J_n(x) - \frac{d}{dx} J_n(x) & J_{n-1}(x) &= \frac{n}{x} J_n(x) + \frac{d}{dx} J_n(x) \\ K_{n+1}(x) &= \frac{n}{x} K_n(x) - \frac{d}{dx} K_n(x) & K_{n-1}(x) &= -\frac{n}{x} K_n(x) - \frac{d}{dx} K_n(x) \end{aligned}$$

resulta, al sustituir en la ecuación (5.106):

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha^2} E_{01} \{J_{n-1}(\alpha a) - J_{n+1}(\alpha a)\} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma^2} E_{02} \{K_{n-1}(\gamma a) + K_{n+1}(\gamma a)\} \quad (5.107)$$

y, tras dividir por la ecuación (5.105):

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha^2} \frac{J_{n-1}(\alpha a) - J_{n+1}(\alpha a)}{J_n(\alpha a)} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma^2} \frac{K_{n-1}(\gamma a) + K_{n+1}(\gamma a)}{K_n(\gamma a)} \quad (5.108)$$

que es la condición que debe cumplirse en la fibra óptica para que existan modos guiados.

Para el caso en que el grosor del núcleo de la fibra sea pequeño (unas pocas micras de diámetro) tan sólo será posible una solución para la ecuación precedente (con $n=0$), y ésta se reduce a:

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha^2} \frac{J_1(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} = -\frac{\varepsilon_2}{\gamma^2} \frac{K_1(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} \quad (5.109)$$

donde deberá cumplirse, además, la relación $\alpha^2 + \gamma^2 = \omega^2(\mu_1\varepsilon_1 - \mu_2\varepsilon_2)$. En estas condiciones se tiene una fibra monomodo (sólo propaga un modo a la longitud de onda de trabajo).

Cuando el diámetro del núcleo es mayor aparecen otros posibles modos de órdenes sucesivos. Se dice entonces que la fibra es multimodo. A fin de conseguir una mayor eficacia en la transmisión de información son preferibles las fibras monomodo, si bien presentan mayores problemas prácticos a la hora de prepararlas (colocar los bornes terminales, empalmarlas, ...) o para inyectar la luz en su extremo, precisamente debido a su pequeño tamaño.

PROBLEMAS - CAPÍTULO 5

1. A partir de las expresiones generales de los modos TE y TM de la guía rectangular compruebe que el primer modo TM es el TM_{11} , porque los modos TM_{10} y TM_{01} no son posibles, y que, en general, ningún modo del tipo TM_{m0} o TM_{0n} puede existir. Observe que, sin embargo, esto no ocurre para los modos TE.
2. Se desea diseñar una guía rectangular, de paredes conductoras perfectas, para que admita algún modo a la frecuencia de 3 GHz. Calcule el valor mínimo para la dimensión a de la guía (sabiendo que $a > b$ y que el interior de la guía es aire).
3. Como continuación del problema anterior a) establezca las condiciones para a y para b de manera que ningún otro modo, salvo el fundamental TE_{10} , pueda propagarse en la guía hasta la frecuencia de

4 GHz; b) determine a qué frecuencia máxima se puede alejar la frecuencia de corte del segundo modo (TE_{01} ó TE_{20}) respetando la condición obtenida en el problema anterior.

4. En una guía rectangular se propaga una onda cuyo fasor campo eléctrico es de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \hat{y} (A \cos k_x x + \text{sen } k_x x) e^{-j\beta z}$$

- Obtenga los valores posibles para A, k_x y β ;
- escriba la expresión del fasor campo magnético;
- si $a = \frac{2}{3} \lambda$ ¿cuántos modos posibles de ese tipo hay en la guía?;
- calcule la densidad media de potencia y la potencia total transportada por el modo;
- en una cierta posición $z=z_0$ la guía se interrumpe interponiendo un plano conductor, en la forma en que muestra la figura 1. Compruebe que la situación resultante puede describirse mediante la suma de dos modos de igual amplitud y viajando en direcciones contrarias.

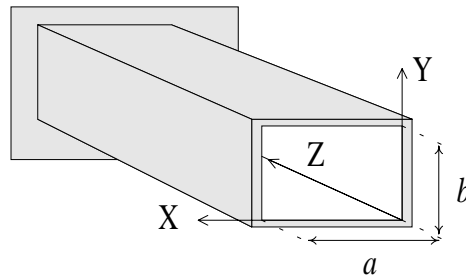


Fig. 1

5. Calcule las densidades de corriente que aparecen en las paredes de la guía cuando se propaga por ella un modo TE_{10} . Dibuje un esquema de las densidades de corriente presentes, en un instante de tiempo dado, en las paredes de la guía.

6. La relación de dispersión para los dos primeros modos que pueden propagarse en la guía de la figura 2 es:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$$

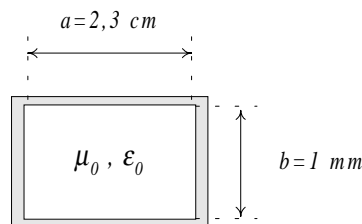


Fig. 2

Se desea trabajar en una región de frecuencias para las que la guía sea monomodo, y se toman unos límites dados por las siguientes condiciones: la frecuencia de trabajo estará i) al menos un 30% por encima de la frecuencia de corte del modo fundamental, y ii) un 30% por debajo de la frecuencia del siguiente modo. ¿Cuál es el margen de frecuencias elegido?

7. Una guía rectangular de paredes conductoras perfectas tiene dimensiones $a = 2,3$ cm y $b = 1,0$ cm. Desde la posición $z=0$ hacia atrás ($z < 0$) la guía tiene aire en su interior, y desde ese punto hacia adelante ($z > 0$) está rellena de un cierto dieléctrico con permitividad relativa ϵ_r (Fig. 3).

Incide una onda desde la región de las z 's negativas que corresponde al modo TE_{10} , cuyo campo eléctrico es

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \hat{y} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta_1 z}$$

y como consecuencia se generan dos ondas, una reflejada hacia atrás y otra transmitida hacia la otra zona de la guía. Las expresiones de los campos eléctricos asociados a esas ondas son:

$$\vec{E}(\vec{r}) = A \hat{y} \sin \frac{\pi x}{a} e^{+j\beta_1 z} \quad \text{y} \quad \vec{E}(\vec{r}) = B \hat{y} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta_2 z}$$

a) Escriba las expresiones de las relaciones de dispersión para ambas zonas de la guía:

$$\beta_1 = \beta_1(f, a) \quad \text{y} \quad \beta_2 = \beta_2(f, a)$$

b) Calcule los campos magnéticos asociados a cada onda o modo.

c) Obtenga los valores de las amplitudes A y B en función de E_0 y de las constantes de propagación, mediante la aplicación de las condiciones de contorno en $z = 0$.

d) Si $f = 8,0$ GHz y $\epsilon_r = 2,2$ ¿qué fracción de potencia se refleja?, ¿qué parte se transmite? Compruebe que la suma coincide con el 100% de la potencia incidente.

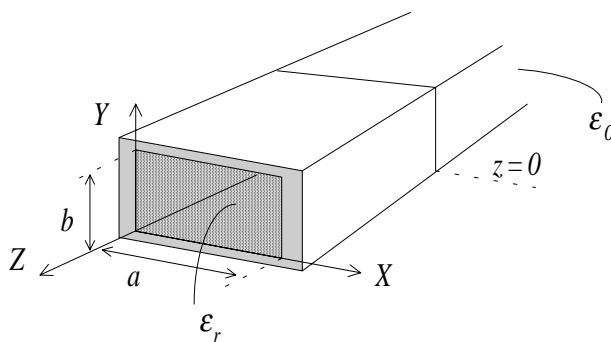
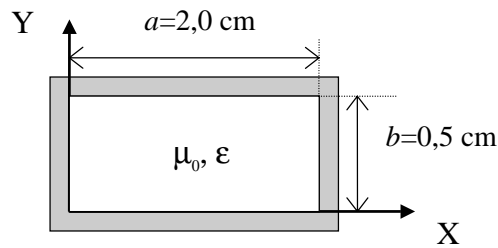


Fig. 3

8. Considérese una guía rectangular de paredes conductoras como la mostrada en la figura 4. Calcule el número de modos que pueden propagarse en la guía en los dos casos siguientes:

- a) si $\epsilon = \epsilon_0$;
b) si $\epsilon = 9\epsilon_0$.

Fig. 4



Cuando el interior de la guía está parcialmente rellena de un medio dieléctrico distinto del aire el cálculo de los posibles modos es algo más complicado, debido a las condiciones de contorno adicionales que deben satisfacerse. Es el caso de la guía de la figura 5. El campo eléctrico asociado a un modo del tipo TE_{m0} tiene ahora la forma general dada por:

$$E_x, E_z = 0$$

$$E_y = \begin{cases} (A \sin \alpha_1 x + B \cos \alpha_1 x) e^{-j\beta z} & (0 \leq x \leq d) \\ (C \sin \alpha_2 x + D \cos \alpha_2 x) e^{-j\beta z} & (d \leq x \leq a) \end{cases}$$

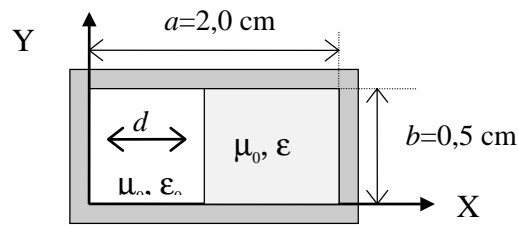


Fig. 5

Respecto al número posible de modos en esta guía debemos estar en una situación intermedia respecto a los dos casos anteriores.

- Determine el valor máximo que pueden tomar las constantes α_1 y α_2 para que se satisfaga la ecuación de onda en ambas regiones (para modos guiados).
- Obtenga las cuatro relaciones en las que intervienen las constantes A, B, C, D, α_1 y α_2 , que se derivan de las condiciones de contorno aplicables a esta situación.
- A partir de las expresiones anteriores se puede obtener una ecuación de dispersión (no resoluble analíticamente), en la que intervienen las constantes a, d, α_1 y α_2 . Escribala.
- Se comprueba que, si $a=0,02$ m y tomando los valores extremos de α_1 y α_2 obtenidos en el apartado c) son posibles los valores $d=0,75$ cm y $d=1,5$ cm para satisfacer la ecuación de dispersión de la guía. ¿Qué información puede obtenerse de esos datos? o, dicho de otra forma, ¿qué tienen de particular esos valores de d ?

9. Un cable coaxial de longitud L y radios interior y exterior a y b , respectivamente, tiene una base de material conductor en cada extremo. En el interior del cable existe una onda estacionaria cuyo campo eléctrico es:

$$E(r) = \frac{A}{\rho} \sin kz \hat{\rho}$$

La longitud del cable es la mínima que permite la existencia de esta onda a una frecuencia de 100 MHz. Calcule:

- a) El valor de L ;
- b) El fasor de campo magnético de la onda;
- c) La energía electromagnética almacenada en el cable, a partir de los campos instantáneos;
- d) Las corrientes inducidas en el conductor exterior. A partir de la observación de este último resultado razone en que forma podría practicarse una ranura en el exterior del cable para acceder a su interior afectando lo menos posible a la onda considerada.