

COMUNICACIONES I**Tema 3 SEÑALES Y SISTEMAS PASO BANDA**

| | | |
|-------|---|----|
| 3 | SEÑALES Y SISTEMAS PASO BANDA..... | 2 |
| 3.1 | Señal Analítica y transformada de Hilbert. | 3 |
| 3.1.1 | Definición..... | 3 |
| 3.1.2 | Propiedades de la Señal Analítica y TH:..... | 4 |
| 3.1.3 | Envolvente, Fase y Frecuencia Instantáneas | 7 |
| 3.2 | Señales Paso Banda y Equivalente Paso Bajo..... | 8 |
| 3.2.1 | Extracción del Equivalente Paso Bajo a partir de una Señal Paso-Banda y de la frecuencia de referencia8 | |
| 3.2.2 | Obtención de la señal paso banda a partir de 2 señales paso-bajo y de una frecuencia de referencia9 | |
| 3.2.3 | Diagrama fasorial del equivalente paso bajo..... | 11 |
| 3.2.4 | Ejemplos y Aplicaciones..... | 11 |
| 3.3 | Canales Paso Banda | 12 |
| 3.3.1 | Filtrado Equivalente Paso Bajo | 12 |
| 3.3.2 | Aplicación: retardo de fase y retardo de grupo..... | 13 |
| 3.4 | Procesos Paso Banda..... | 15 |
| 3.4.1 | Modulación: señal útil..... | 15 |
| 3.4.2 | Ruido filtrado paso-banda | 21 |
| 3.5 | Relación señal a Ruido SNR de modulaciones analógicas lineales paso-banda. | 25 |
| 3.5.1 | Receptor | 25 |
| 3.5.2 | Ejemplo: SNR obtenida para DBL..... | 25 |
| 3.5.3 | Ejemplo: SNR obtenida para BLU..... | 26 |
| 3.5.4 | Ejemplo: SNR obtenida para AM. | 26 |
| 3.6 | Modulaciones Angulares..... | 27 |
| 3.6.1 | Definición de modulación FM. | 27 |
| 3.6.2 | Ancho de Banda de las modulaciones FM | 28 |
| 3.6.3 | Relación Señal a Ruido de las modulaciones FM | 31 |

3 SEÑALES Y SISTEMAS PASO BANDA

Se denomina señales paso banda a señales de espectro centrado alrededor de una frecuencia mucho mayor que su ancho de banda, y en general, provienen de modular señales paso bajo (de contenido frecuencial bajo), y trasladarlas a alta frecuencia. Esta operación permite realizar el multiplexado frecuencial.

En este tema se va a estudiar un modo de realizar el tratamiento de señales paso banda, operando directamente con sus “equivalentes paso bajo”, lo que constituye una alternativa de menor complejidad matemática respecto al tratamiento directo de las señales paso banda.

En los 3 primeros apartados se desarrolla la teoría asociada a este tema sobre señales deterministas. En el apartado 4 se aplica a procesos aleatorios: Señales Moduladas y Ruido filtrado paso banda y finalmente en el apartado 5 se revisa la obtención del parámetro de SNR para señales paso banda. El apartado 6 se dedica a las modulaciones angulares, particularmente a la modulación FM.

3.1 Señal Analítica y transformada de Hilbert.

3.1.1 Definición

Sea $x(t)$ una señal real. La transformada de Fourier de esta señal es de simetría hermítica:

$$\begin{aligned} X(f) &= TF(x(t)) = |X(f)| \exp(+j\varphi_x(f)) \\ X(f) &= X^*(-f) \\ |X(f)| &= |X(-f)| \\ \varphi_x(f) &= -\varphi_x(-f) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Conociendo por tanto, el valor de la Transformada de Fourier de una señal real para valores de $f \geq 0$, se puede determinar la TF de la señal $x(t)$ para todo el rango de frecuencias.

Señal Analítica: La señal analítica de $x(t)$, señal real se obtiene como anulando el contenido frecuencial de $x(t)$ a frecuencias negativas y multiplicando el resto por dos.

$$A_x(f) = 2u(f)X(f) = \begin{cases} 2X(f) & f \geq 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Para obtener la señal analítica en el dominio del tiempo, se necesita la transformada de Fourier inversa de la siguiente función:

$$2u(f) = 1 + \text{sign}(f)$$

Considerando las propiedades de la TF

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow TF \rightarrow X(f) \\ X(t) &\rightarrow TF \rightarrow x(-f) \\ x(-t) &\rightarrow TF \rightarrow X(-f) \\ X(-t) &\rightarrow TF \rightarrow x(f) \end{aligned}$$

y las siguientes TF necesarias en este desarrollo:

$$\begin{aligned} \delta(t) &\rightarrow TF \rightarrow 1 \\ \text{sgn}(t) &\rightarrow TF \rightarrow \frac{1}{j\pi f} \\ \frac{1}{j\pi t} &\rightarrow TF \rightarrow \text{sgn}(-f) = -\text{sgn}(f) \\ \frac{j}{\pi t} &\rightarrow TF \rightarrow \text{sgn}(f) \\ \delta(t) + \frac{j}{\pi t} &\rightarrow TF \rightarrow 1 + \text{sgn}(f) = 2u(f) \end{aligned}$$

En el dominio temporal se tendrá la siguiente expresión para la señal analítica de $x(t)$

$$a_x(t) = (\delta(t) + j \frac{1}{\pi t}) * x(t) = x(t) + jh_x(t) \quad (3.3)$$

La parte real de la señal analítica de $x(t)$, coincide con la propia señal. La parte imaginaria es la denominada “Transformada de Hilbert”: $h_x(t)$. Coloquialmente podemos decir, que la redundancia que hemos eliminado en el dominio de la frecuencia, ha aparecido en el dominio del tiempo como parte imaginaria de la Señal Analítica.

Transformada de Hilbert:

Según el desarrollo previo se muestran a continuación las expresiones obtenidas para la Transformada de Hilbert en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia:

$$\text{Dominio Temporal} \quad h_x(t) = \text{Im}(a_x(t)) = \frac{1}{\pi t} * x(t)$$

$$\text{Dominio Frecuencial} \quad H_x(f) = -j \text{sign}(f) X(f)$$

El transformador de Hilbert es por tanto un sistema lineal invariante no causal de respuesta impulsional $\frac{1}{\pi t}$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos 2\pi f_c t \\ X(f) &= \frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c) \\ A_x(f) &= \delta(f - f_c) \\ a_x(t) &= \exp(j2\pi f_c t) = \cos 2\pi f_c t + j \sin 2\pi f_c t = x(t) + j h_x(t) \\ h_x(t) &= \sin 2\pi f_c t \end{aligned}$$

3.1.2 Propiedades de la Señal Analítica y TH:

1. Linealidad

Tanto la TH como la Señal Analítica cumplen las propiedades de linealidad

$$TH(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha h_x(t) + \beta h_y(t)$$

$$a_{\alpha x + \beta y}(t) = \alpha a_x(t) + \beta a_y(t)$$

2. Transformada Inversa

Solo tiene sentido para la TH: $h_{h_x}(t) = -x(t)$

$$H_{h_x}(f) = (-j \text{sign}(f))(-j \text{sign}(f)) X(f) = -X(f)$$

$$\frac{1}{\pi t} * \frac{1}{\pi t} = -\delta(t)$$

3. Sistema Lineales (LI)

$$\text{Sea} \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

$$\text{TH Dominio Frecuencial: } H_x(f) = -j \text{sgn}(f) Y(f) = -j \text{sgn}(f) X(f) H(f) = H_x(f) H(f)$$

$$\text{TH Dominio Temporal: } h_y(t) = x(t) * h(t) * \frac{1}{\pi t} = h_x(t) * h(t) = x(t) * h_h(t)$$

SA Dominio Frecuencial: $A_y(f) = 2u(f)Y(f) = 2u(f)X(f)H(f) = A_x(f)H(f)$

SA Dominio Temporal: $a_y(t) = a_x(t) * h(t) = x(t) * a_h(t) = \frac{1}{2} a_x(t) * a_h(t)$

4. Correlación

Propiedades de correlación de señales deterministas a través de SL

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$$

$$TH: h(\tau) = \frac{1}{\pi\tau}$$

$$SA: h(\tau) = \delta(\tau) + j\frac{1}{\pi\tau}$$

Para la TH:

$$R_{h_x}(\tau) = R_x(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} * \frac{-1}{\pi\tau} = R_x(\tau)$$

$$S_{h_x}(f) = S_x(f) |-j\text{sign}(f)|^2 = S_x(f)$$

Para la SA:

$$R_{a_x}(\tau) = R_x(\tau) * \left(\delta(\tau) + j\frac{1}{\pi\tau}\right) * \left(\delta(\tau) + j\frac{1}{\pi\tau}\right) =$$

$$R_x(\tau) * \left(\delta(\tau) + j\frac{1}{\pi\tau} + j\frac{1}{\pi\tau} + \delta(\tau)\right) = 2R_x(\tau) * \left(\delta(\tau) + j\frac{1}{\pi\tau}\right) = 2a_{R_x}(\tau)$$

$$S_{a_x}(f) = S_x(f) |2u(f)|^2 = 4u(f)S_x(f) = 2A_{R_x}(f)$$

Además, es fácil demostrar:

$$R_{h_x x}(\tau) = R_x(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = h_{R_x}(\tau)$$

$$R_{h_x x}(0) = 0$$

$$R_{a_x x}(\tau) = R_x(\tau) * \left(\delta(\tau) + j\frac{1}{\pi\tau}\right) = a_{R_x}(\tau)$$

5. Convolución (Similar a SL)

$$TH[x(t) * y(t)] = h_x(t) * y(t) = x(t) * h_y(t)$$

$$h_x(t) * h_y(t) = -x(t) * y(t)$$

$$a_{x(t) * y(t)} = a_x(t) * y(t) = x(t) * a_y(t)$$

6. Transformada de Hilbert de PASO ALTO $c(t)$ X PASO BAJO $b(t)$:

Se asume que la máxima frecuencia de ocupación de la señal paso bajo es menor o igual que la mínima frecuencia de la señal paso alto.

$$X(f) = B(f) * C(f) = B(f) * (C^+(f) + C^-(f))$$

$$A_x(f) = 2u(f)X(f) = 2B(f) * C^+(f) = B(f) * A_c(f)$$

$$a_x(t) = b(t)a_c(t) = b(t)(c(t) + jh_c(t)) = x(t) + jh_x(t)$$

$$h_x(t) = b(t)h_c(t)$$

Ejemplo:

$$x(t) = b(t) \cdot \cos 2\pi f_c t$$

$$B_x \leq f_c$$

$$h_x(t) = b(t) \cdot \sin 2\pi f_c t$$

3.1.3 Envolvente, Fase y Frecuencia Instantáneas

La señal analítica compleja se puede expresar en coordenadas rectangulares o en coordenadas polares.

$$a_x(t) = x(t) + jh_x(t) = e_x(t) \exp(j\phi_x(t))$$

Envolvente Instantánea: $e_x(t) = |a_x(t)| = \sqrt{x^2(t) + h_x^2(t)}$

Fase Instantánea: $\phi_x(t) = \tan^{-1} \left(\frac{h_x(t)}{x(t)} \right) = \text{Im} \left[\ln(a_x(t)) \right]$

Por tanto: $x(t) = \text{Re}[a_x(t)] = e_x(t) \cos(\phi_x(t))$

$$h_x(t) = \text{Im}[a_x(t)] = e_x(t) \sin(\phi_x(t))$$

Frecuencia Instantánea: velocidad de giro del fasor en ciclos/seg.

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_x(t)}{dt} = \frac{h_x(t)'x(t) - h_x(t)x'(t)}{e_x^2(t)}$$

La señal analítica compleja se puede representar gráficamente mediante un fasor, es decir, un vector que gira alrededor del origen.

- La envolvente instantánea $e_x(t)$, representa el módulo del vector en el tiempo t .
- La fase instantánea $\phi_x(t)$, representa el ángulo del vector en el tiempo t .
- La frecuencia instantánea $f_x(t)$ se halla relacionada con la velocidad de giro del fasor alrededor del origen.

Ejemplo:

$$x(t) = \cos 2\pi f_c t$$

$$e_x(t) = 1$$

$$\phi_x(t) = 2\pi f_c t$$

$$f_x(t) = f_c$$

Para este ejemplo, la frecuencia instantánea coincide con el número de vueltas por segundo que el fasor correspondiente realiza alrededor del origen.

Ejemplo propuesto:

Obtenga la señal analítica, transformada de Hilbert, envolvente instantánea, fase instantánea y frecuencia instantánea de $x(t) = \text{sinc}(2B_x t)$

3.2 Señales Paso Banda y Equivalente Paso Bajo

Definición de una señal real paso banda: $s(t)$

En una señal real paso banda el ancho de banda es estrecho comparado con las frecuencias para las que el contenido frecuencial es no nulo.

A continuación se describe un doble análisis para este tipo de señales.

- Primero y tomando como punto de partida una señal real y paso banda y una frecuencia de referencia, normalmente elegida con contenido frecuencial no nulo, se obtiene su señal equivalente paso bajo.
- Segundo tomando como partida dos señales reales de contenido frecuencial bajo y una frecuencia de referencia mucho mayor que el ancho de banda de dichas señales paso bajo se obtiene una señal real y paso banda.

Ambos análisis describen el mismo tipo de relación entre una señal paso banda y sus señal equivalente paso bajo y viceversa.

3.2.1 Extracción del Equivalente Paso Bajo a partir de una Señal Paso-Banda y de la frecuencia de referencia

La señal analítica de una señal paso-banda $s(t)$ se interpreta como un señal compleja $b_s(t)$ y de contenido frecuencial menor que el de la señal $s(t)$ denominada señal equivalente paso-bajo y desplazada a una frecuencia positiva, en general mucho mayor que el ancho de banda de $b_s(t)$.

Las ecuaciones que describen este comportamiento son:

Señal analítica y señal equivalente paso bajo en el dominio de la frecuencia:

$$A_s(f) = B_s(f - f_0) \quad (3.4)$$

$$B_s(f) = A_s(f + f_0) \quad (3.5)$$

Señal analítica y señal equivalente paso bajo en el dominio del tiempo:

$$a_s(t) = b_s(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad (3.6)$$

$$b_s(t) = a_s(t)e^{-j2\pi f_0 t} \quad (3.7)$$

Se dice que $b_s(t)$ es el equivalente paso bajo de la señal $s(t)$ respecto a la frecuencia de referencia f_0

Componente en Fase y Componente en Cuadratura (IQ)

La componente en fase es la parte real del equivalente paso bajo y la componente en cuadratura es la parte imaginaria del equivalente paso bajo.

$$b_s(t) = i_s(t) + jq_s(t)$$

$$\begin{aligned} i_s(t) &= \text{Re}[b_s(t)] \\ q_s(t) &= \text{Im}[b_s(t)] \end{aligned}$$

Es de interés la relación existente entre las componentes IQ y la propia señal $s(t)$:

$$a_s(t) = b_s(t)e^{j2\pi f_o t} \Rightarrow s(t) + jh_s(t) = (i_s(t) + jq_s(t))(\cos(2\pi f_o t) + j\text{sen}(2\pi f_o t)) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} s(t) &= i_s(t)\cos(2\pi f_o t) - q_s(t)\text{sen}(2\pi f_o t) \\ h_s(t) &= q_s(t)\cos(2\pi f_o t) + i_s(t)\text{sen}(2\pi f_o t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por otro lado:

$$b_s(t) = a_s(t)e^{-j2\pi f_o t} \Rightarrow i_s(t) + jq_s(t) = (s(t) + jh_s(t))(\cos(2\pi f_o t) - j\text{sen}(2\pi f_o t)) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} i_s(t) &= s(t)\cos(2\pi f_o t) + h_s(t)\text{sen}(2\pi f_o t) \\ q_s(t) &= h_s(t)\cos(2\pi f_o t) - s(t)\text{sen}(2\pi f_o t) \end{aligned}$$

3.2.2 Obtención de la señal paso banda a partir de 2 señales paso-bajo y de una frecuencia de referencia

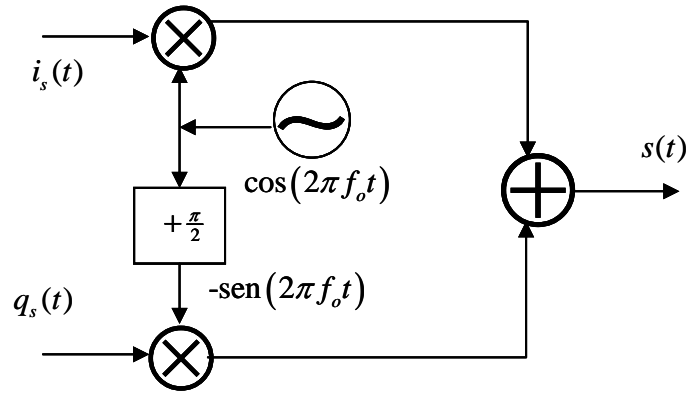
Tal como se comenta en la introducción de esta sección, en este apartado podría decirse que se recorre el camino inverso al anterior.

Partiendo de dos señales reales a las que denominaremos $i_s(t), q_s(t)$, de anchos de banda B_i, B_q respectivamente y de una frecuencia de referencia $f_o \gg B_i, B_q$ se obtiene la siguiente señal real y paso banda.

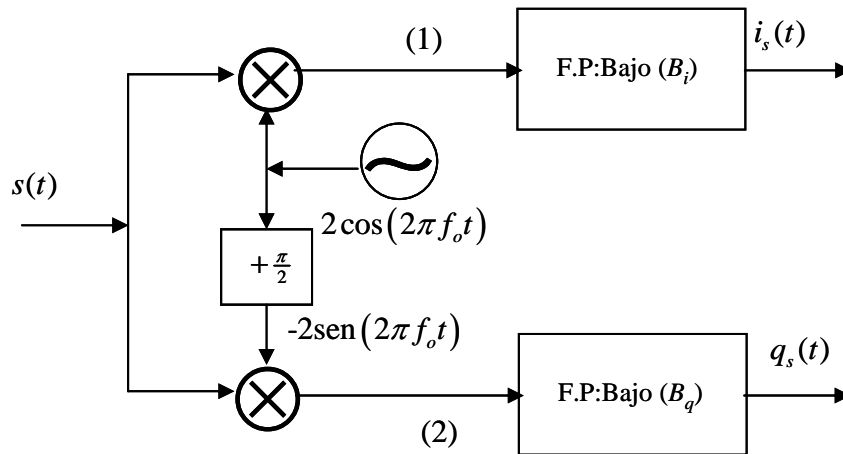
$$s(t) = i_s(t)\cos(2\pi f_o t) - q_s(t)\text{sen}(2\pi f_o t) \quad (3.9)$$

En general la señal $s(t)$ se denomina modulación I&Q.

A continuación se muestra un diagrama de bloques del Modulador IQ



A partir de la señal modulada obtenida $s(t)$, se pueden recuperar las dos señales paso-bajo mediante un Demodulador IQ cuyo diagrama de bloques se muestra a continuación:



Para demostrar que el diagrama de bloques del demodulador I&Q funciona correctamente, se analiza a continuación las señales a través de los diferentes puntos del sistema.

En (1) la señal es:

$$s(t)2 \cos(2\pi f_o t) = (i_s(t) \cos(2\pi f_o t) - q_s(t) \sin(2\pi f_o t)) 2 \cos(2\pi f_o t) =$$

$$i_s(t) (1 + \cos(2\pi 2f_o t)) - q_s(t) \sin(2\pi 2f_o t)$$

de los 3 términos resultantes solo el primero se obtendrá a la salida del correspondiente filtro paso bajo.

En (2) la señal es:

$$-s(t)2 \sin(2\pi f_o t) = -(i_s(t) \cos(2\pi f_o t) - q_s(t) \sin(2\pi f_o t)) 2 \sin(2\pi f_o t) =$$

$$-i_s(t) \sin(2\pi 2f_o t) + q_s(t) (1 - \cos(2\pi 2f_o t))$$

de los 3 términos resultantes solo el segundo se obtendrá a la salida del correspondiente filtro paso bajo.

3.2.3 Diagrama fasorial del equivalente paso bajo

La señal equivalente paso bajo compleja se puede representar mediante un fasor, es decir, un vector que gira alrededor del origen.

- La envolvente instantánea $b_s(t)$, representa el módulo del vector en el tiempo t .

$$b_s(t) = |b_s(t)| = \sqrt{i_s^2(t) + q_s^2(t)} = |a_s(t)| = \sqrt{s^2(t) + h_s^2(t)}$$

- La fase instantánea $\phi_{b_s}(t)$, representa el ángulo del vector en el tiempo t .

$$\phi_{b_s}(t) = tg^{-1}\left(\frac{q_s(t)}{i_s(t)}\right) = \phi_s(t) - 2\pi f_c t$$

- La frecuencia instantánea $f_{b_s}(t)$ se halla relacionada con la velocidad de giro del fasor alrededor del origen.

$$f_{b_s}(t) = f_{a_s}(t) - f_c$$

3.2.4 Ejemplos y Aplicaciones

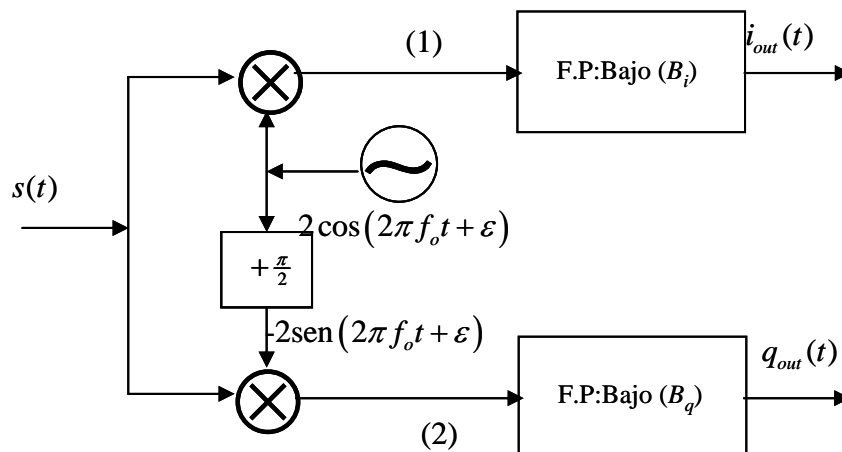
Obtención de equivalente paso bajo.

Sea la señal $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$

1. Obtenga tomando como frecuencia de referencia $f_o = f_1$, $b_x(t)$, $i_x(t)$, $q_x(t)$, $a_x(t)$, $\phi_x(t)$, $f_x(t)$.
2. Obtenga tomando como frecuencia de referencia $f_o = \frac{f_1+f_2}{2}$, $b_x(t)$, $i_x(t)$, $q_x(t)$, $a_x(t)$, $\phi_x(t)$, $f_x(t)$.
3. Observe con este ejemplo que a partir de una señal $x(t)$, $b_x(t)$, $i_x(t)$, $q_x(t)$ dependen de la frecuencia de referencia y que $a_x(t)$, $\phi_x(t)$, $f_x(t)$ solo dependen de $x(t)$.

Demodulador IQ con error de sincronismo de portadora.

Analice las dos señales de salida $i_{out}(t)$, $q_{out}(t)$, del diagrama de la siguiente figura, en el que la fase del oscilador local presenta un error de ε rad. y demuestre que $i_{out}(t) + jq_{out}(t) = (i_s(t) + jq_s(t))e^{-j\varepsilon}$.



3.3 Canales Paso Banda

3.3.1 Filtrado Equivalente Paso Bajo

Sea la señal paso banda $s(t)$ y el sistema paso banda $h(t)$

Sea la señal de salida del sistema: $y(t) = s(t) * h(t)$

Por las propiedades vistas en el apartado 3.1.2 se cumple $a_y(t) = \frac{1}{2} a_s(t) * a_h(t)$

El objetivo de este apartado consiste en analizar esta propiedad para las señales equivalente paso bajo.

Dado que:

$$\begin{aligned} a_s(t) &= b_s(t) e^{+j2\pi f_o t} \\ a_h(t) &= b_h(t) e^{+j2\pi f_o t} \\ a_y(t) &= b_y(t) e^{+j2\pi f_o t} \end{aligned}$$

Se cumple:

$$\begin{aligned} b_y(t) e^{+j2\pi f_o t} &= \frac{1}{2} \int a_s(t-\tau) a_h(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int b_s(t-\tau) e^{+j2\pi f_o(t-\tau)} b_h(\tau) e^{+j2\pi f_o \tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} e^{+j2\pi f_o t} \int b_s(t-\tau) b_h(\tau) d\tau \\ &\Rightarrow \\ b_y(t) &= \frac{1}{2} \int b_s(t-\tau) b_h(\tau) d\tau = \frac{1}{2} b_s(t) * b_h(t) \end{aligned}$$

La última expresión expresa el equivalente paso bajo de la señal de salida como la convolución de los equivalentes paso-bajo dividido por dos.

A continuación se desarrolla en parte real y parte imaginaria, es decir en componentes I&Q.

$$\begin{aligned} i_y(t) + jq_y(t) &= \frac{1}{2} (i_s(t) + jq_s(t)) * (i_h(t) + jq_h(t)) \Rightarrow \\ i_y(t) &= \frac{1}{2} i_s(t) * i_h(t) - \frac{1}{2} q_s(t) * q_h(t) \\ q_y(t) &= \frac{1}{2} i_s(t) * q_h(t) + \frac{1}{2} q_s(t) * i_h(t) \end{aligned}$$

3.3.2 Aplicación: retardo de fase y retardo de grupo.

Sea
$$s(t) = i(t) \cos(2\pi f_o t) = b(t) \cos(2\pi f_o t)$$

$s(t)$ es una señal paso banda. Se considera el equivalente paso bajo real para simplificar los desarrollos, aunque el resultado es generalizable a señales de equivalente paso bajo con parte imaginaria no nula.

El ancho de banda de la señal es B_s ya que:

$$\begin{aligned} S(f) &\neq 0; \text{ en } f_o - \frac{B_s}{2} \leq |f| \leq f_o + \frac{B_s}{2} \\ S(f) &= 0; \text{ en } |f| \leq f_o - \frac{B_s}{2}; f_o + \frac{B_s}{2} \leq |f| \end{aligned}$$

Dicha señal se filtra a través de un sistema o filtro paso banda de función de transferencia $H(f)$

Caso I

El sistema o filtro paso banda es de fase lineal:

$$H(f) = H_o e^{-j2\pi f \tau}; \text{ en } f_o - \frac{B_s}{2} \leq |f| \leq f_o + \frac{B_s}{2}$$

A efectos de la señal paso-banda $s(t)$, el filtrado mediante $H(f)$ es equivalente a convolucionar con $h(t) = \delta(t - \tau)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t) * h(t) = s(t) * \delta(t - \tau) = s(t - \tau) = \\ &= b(t - \tau) \cos(2\pi f_o (t - \tau)) = b(t - \tau_{gr}) \cos(2\pi f_o (t - \tau_{ph})) \end{aligned}$$

En la expresión anterior τ_{gr} es el denominado retardo de grupo y τ_{ph} el denominado retardo de fase.

Caso I

El sistema o filtro paso banda NO es de fase lineal:

$$H(f) = H_o e^{-j\Phi_H(f)}; \text{ en } f_o - \frac{B_s}{2} \leq |f| \leq f_o + \frac{B_s}{2}$$

Para analizar la influencia de $\Phi_H(f)$ sobre la señal de salida se define:

Retardo de grupo:
$$\tau_{gr} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi_H(f)}{\partial f} \Big|_{f=f_o} = -\frac{\Phi'_H(f)}{2\pi} (seg.)$$

Retardo de fase:
$$\tau_{ph} = -\frac{\Phi_H(f_o)}{2\pi f_o} (seg.)$$

Y se aproxima la fase $\Phi_H(f)$ mediante un desarrollo en serie de Taylor de grado = 1.

$$\Phi_H(f) \cong \Phi_H(f_o) + (f - f_o) \Phi'_H(f) = -2\pi f_o \tau_{ph} - 2\pi (f - f_o) \tau_{gr}$$

En estas condiciones la señal de salida se calcula de forma aproximada:

$$\begin{aligned} a_y(t) &= a_s(t) * h(t) \\ A_y(f) &= A_s(f) H(f) \end{aligned}$$

$$A_y(f) \cong B_s(f - f_o) H_o \exp(-j2\pi f_o \tau_{ph} - j2\pi(f - f_o) \tau_{gr})$$

Dado que:

$$b_s(t) \Rightarrow TF \Rightarrow B_s(f)$$

$$b_s(t - \tau_{gr}) \Rightarrow TF \Rightarrow B_s(f) e^{-j2\pi f \tau_{gr}}$$

$$b_s(t - \tau_{gr}) e^{+j2\pi f_o t} \Rightarrow TF \Rightarrow B_s(f - f_o) e^{-j2\pi(f - f_o) \tau_{gr}}$$

se obtiene la señal analítica de salida como:

$$a_y(t) = H_o e^{-j2\pi f_o \tau_{ph}} b_s(t - \tau_{gr}) e^{+j2\pi f_o t} = H_o b_s(t - \tau_{gr}) e^{+j2\pi f_o (t - \tau_{ph})}$$

y la señal paso banda de salida resulta

$$y(t) = \text{Re}[a_y(t)] = H_o b_s(t - \tau_{gr}) \cos(2\pi f_o (t - \tau_{ph}))$$

En las especificaciones de integrados con filtros paso banda, en general se presentan gráficas sobre la función de Retardo de Grupo en función de la frecuencia, ya que se considera crítico que sea lo más plana posible, en el ancho de banda de interés.

3.4 Procesos Paso Banda

En este apartado se analiza la correlación y la densidad espectral de los procesos aleatorios paso-banda propios de los sistemas de comunicaciones.

Las señales moduladas a partir de uno o dos procesos I&Q aleatorios paso bajo.

El ruido paso banda, presente en un receptor de comunicaciones paso-banda.

3.4.1 Modulación: señal útil

Se define la señal modulada como:

$$s(t) = A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) = \operatorname{Re} \left[b_s(t) A_c e^{j(2\pi f_c t + \varphi_c)} \right]$$

Señal Portadora: $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$

El equivalente paso bajo se determina a partir del mensaje: $b_s(t) = i_s(t) + jq_s(t)$

En las modulaciones paso-banda, en general, el equivalente paso bajo se halla directamente relacionado con el mensaje.

Para el análisis estadístico de la señal paso-banda se toma como punto de partida los procesos aleatorios reales paso-bajo y estacionarios: $i_s(t), q_s(t)$ que además son conjuntamente estacionarios, de media μ_{i_s}, μ_{q_s} respectivamente

Sus funciones de correlación son

$$\begin{aligned} R_{i_s}(\tau) &= E[i_s(t+\tau)i_s(t)] \\ R_{q_s}(\tau) &= E[q_s(t+\tau)q_s(t)] \\ R_{i_s q_s}(\tau) &= E[i_s(t+\tau)q_s(t)] \\ R_{q_s i_s}(\tau) &= E[q_s(t+\tau)i_s(t)] \end{aligned}$$

Y sus densidades espectrales:

$$\begin{aligned} S_{i_s}(f) &= TF[R_{i_s}(\tau)] \quad \text{t.q.} \quad = 0 \quad |f| > B \\ S_{q_s}(f) &= TF[R_{q_s}(\tau)] \quad \text{t.q.} \quad = 0 \quad |f| > B \\ S_{i_s q_s}(f) &= TF[R_{i_s q_s}(\tau)] \quad \text{t.q.} \quad = 0 \quad |f| > B \\ S_{q_s i_s}(f) &= TF[R_{q_s i_s}(\tau)] \quad \text{t.q.} \quad = 0 \quad |f| > B \end{aligned}$$

Se forma el proceso aleatorio paso banda como:

$$s(t) = A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (3.10)$$

El objetivo consiste en caracterizar estadísticamente este proceso. Para ello se calculan las funciones de Autocorrelación y de Densidad espectral de $s(t)$ en función de las autocorrelaciones y densidades espectrales de sus componentes I&Q.

Cálculo de la Media y la función de Autocorrelación:

La media del proceso $s(t)$ resulta:

$$\mu_s(t) = E[s(t)] = A_c \mu_{i_s} \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c \mu_{q_s} \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

Cálculo de la función de autocorrelación:

$$\begin{aligned} R_s(t + \tau, t) &= E[s(t + \tau)s(t)] = \\ &E[(A_c i_s(t + \tau) \cos(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c) - A_c q_s(t + \tau) \sin(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c)) \\ &(A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c))] = \\ &+ A_c^2 E[i_s(t + \tau)i_s(t)] \cos(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \\ &+ A_c^2 E[q_s(t + \tau)q_s(t)] \sin(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \\ &- A_c^2 E[i_s(t + \tau)q_s(t)] \cos(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \\ &- A_c^2 E[q_s(t + \tau)i_s(t)] \sin(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) = \\ &+ R_{i_s}(\tau) \frac{A_c^2}{2} (\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) + \cos(2\pi f_c \tau)) \\ &+ R_{q_s}(\tau) \frac{A_c^2}{2} (-\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) + \cos(2\pi f_c \tau)) \\ &- R_{i_s q_s}(\tau) \frac{A_c^2}{2} (\sin(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) - \sin(2\pi f_c \tau)) \\ &- R_{q_s i_s}(\tau) \frac{A_c^2}{2} (\sin(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) + \sin(2\pi f_c \tau)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como puede comprobarse, $s(t)$ es un proceso cicloestacionario. En lo que sigue se denomina $T_c = \frac{1}{2f_c}$ al cicloperiodo de la función de autocorrelación obtenida.

Para facilitar el cálculo de la potencia media y de la densidad espectral se obtiene, como función intermedia la correlación promediada en tiempo (Teorema de Wiener-Kinchine):

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T_c} \int_{\langle T_c \rangle} R_s(t + \tau, t) dt$$

Aplicado al caso de modulaciones lineales paso-banda:

$$\hat{R}_s(\tau) = + \frac{A_c^2}{2} (R_{i_s}(\tau) + R_{q_s}(\tau)) \cos(2\pi f_c \tau) - \frac{A_c^2}{2} (R_{q_s i_s}(\tau) - R_{i_s q_s}(\tau)) \sin(2\pi f_c \tau)$$

La potencia media es:

$$P_s = \frac{1}{T_c} \int_{\langle T \rangle} R_s(t, t) dt = \hat{R}_s(0) = \frac{A_c^2}{2} (R_{i_s}(0) + R_{q_s}(0)) = \frac{A_c^2}{2} (P_{i_s} + P_{q_s}) \quad (3.12)$$

Y la densidad espectral es:

$$\begin{aligned} S_s(f) = TF[\hat{R}_s(\tau)] = \\ + \frac{A_c^2}{4} S_{i_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4} S_{q_s}(f - f_c) - \frac{A_c^2}{4j} S_{q_s i_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4j} S_{i_s q_s}(f - f_c) \\ + \frac{A_c^2}{4} S_{i_s}(f + f_c) + \frac{A_c^2}{4} S_{q_s}(f + f_c) + \frac{A_c^2}{4j} S_{q_s i_s}(f + f_c) - \frac{A_c^2}{4j} S_{i_s q_s}(f + f_c) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Caso Particular, muy frecuente en modulaciones digitales. Respecto a las modulaciones analógicas las siguientes condiciones se cumplen en BLU.

$$\begin{aligned} R_{i_s}(\tau) &= R_{q_s}(\tau) \\ R_{i_s q_s}(\tau) &= -R_{q_s i_s}(\tau) \end{aligned}$$

En esta situación se obtiene que el proceso $s(t)$ resulta estacionario en correlación:

$$R_s(\tau) = +A_c^2 R_{i_s}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) - A_c^2 R_{q_s i_s}(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)$$

y densidad espectral:

$$\begin{aligned} S_s(f) = TF[R_s(\tau)] = \\ \frac{A_c^2}{2} S_{i_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{2} S_{i_s}(f + f_c) \frac{1}{2} - \frac{A_c^2}{2j} S_{q_s i_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{2j} S_{q_s i_s}(f + f_c) \end{aligned}$$

CONCLUSIONES:

1. Al considerar dos procesos aleatorios paso-bajo y estacionarios, se obtiene en general un proceso aleatorio paso banda cicloestacionario.
2. Si se cumplen las dos condiciones ($R_{q_s}(\tau) = R_{i_s}(\tau)$; $R_{q_s i_s}(\tau) = -R_{i_s q_s}(\tau)$) el proceso paso banda resulta a su vez estacionario. Nótese que esta condición equivale a que la correlación cruzada sea impar.

Ejemplo: DBL: Doble Banda Lateral

Se forma una modulación paso banda $s(t)$ a partir del mensaje $x(t)$, de ancho de banda B_x , potencia P_x y función de densidad espectral $S_x(f)$ y de la señal portadora de amplitud A_c , frecuencia f_c y fase φ_c .

En este tipo de modulación la componente en cuadratura es nula

$$i_s(t) = x(t)$$

$$q_s(t) = 0$$

$$s(t) = A_c x(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

Obtención de Autocorrelación y de la densidad espectral de la componente I:

$$R_{i_s}(t + \tau, t) = R_{i_s}(\tau) = R_x(\tau)$$

$$S_{i_s}(f) = S_x(f)$$

Obtención de Autocorrelación, Densidad Espectral y Potencia de la señal Paso Banda:

$$R_s(t + \tau, t) = +R_x(\tau) \frac{A_c^2}{2} (\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) + \cos(2\pi f_c \tau))$$

$$\hat{R}_s(\tau) = +\frac{A_c^2}{2} R_x(\tau) \cos(2\pi f_c \tau)$$

$$S_s(f) = TF[\hat{R}_s(\tau)] = +\frac{A_c^2}{4} S_x(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4} S_x(f + f_c)$$

$$P_s = \hat{R}_s(0) = \frac{A_c^2}{2} P_x$$

Ejemplo: AM: Amplitude Modulation

Se forma una modulación paso banda $s(t)$ a partir del mensaje $x(t)$, de ancho de banda B_x , potencia P_x y función de densidad espectral $S_x(f)$ y de la señal portadora de amplitud A_c , frecuencia f_c y fase φ_c .

En este tipo de modulación se transmite portadora en la componente en fase y la componente en cuadratura es nula

$$i_s(t) = 1 + mx(t)$$

$$E[x(t)] = 0$$

$$q_s(t) = 0$$

$$s(t) = A_c (1 + mx(t)) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

En este tipo de modulación, la envolvente instantánea coincide con la señal mensaje $x(t)$, salvo continua.

Obtención de Autocorrelación y de la densidad espectral de la componente I:

$$\begin{aligned} R_{i_s}(t + \tau, t) &= E[i_s(t + \tau)i_s(t)] = E[(1 + mx(t + \tau))(1 + mx(t))] = \\ &= 1 + m^2 R_x(\tau) + mE[x(t + \tau)] + mE[x(t)] = 1 + m^2 R_x(\tau) = R_{i_s}(\tau) \end{aligned}$$

$$S_{i_s}(f) = \delta(f) + m^2 S_x(f)$$

Obtención de Autocorrelación, Densidad Espectral y Potencia de la señal Paso Banda:

$$R_s(t + \tau, t) = +R_{i_s}(\tau) \frac{A_c^2}{2} (\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) + \cos(2\pi f_c \tau))$$

$$\hat{R}_s(\tau) = +\frac{A_c^2}{2} R_{i_s}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau)$$

$$S_s(f) = TF[\hat{R}_s(\tau)] = +\frac{A_c^2}{4} S_{i_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4} S_{i_s}(f + f_c) = \\ +\frac{A_c^2}{4} \delta(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4} m^2 S_x(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4} \delta(f + f_c) + \frac{A_c^2}{4} m^2 S_x(f + f_c)$$

$$P_s = \hat{R}_s(0) = \frac{A_c^2}{2} (1 + m^2 P_x)$$

Ejemplo: BLU-S (Banda Lateral Única Superior):

Se forma una modulación paso banda $s(t)$ a partir del mensaje $x(t)$, de ancho de banda B_x , potencia P_x y función de densidad espectral $S_x(f)$ y de la señal portadora de amplitud A_c , frecuencia f_c y fase φ_c .

En este tipo de modulación solo se transmite la banda superior del mensaje $x(t)$.

$$i_s(t) = x(t)$$

$$q_s(t) = h_x(t)$$

$$s(t) = A_c x(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c h_x(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

Obtención de Autocorrelación y de la densidad espectral de las componentes IQ:

$$R_{i_s}(\tau) = R_{q_s}(\tau) = R_x(\tau)$$

$$R_{q_s i_s}(\tau) = -R_{i_s q_s}(\tau) = h_{R_x}(\tau)$$

$$S_{i_s}(f) = S_{q_s}(f) = S_x(f)$$

$$S_{q_s i_s}(f) = -S_{i_s q_s}(f) = -j \text{sign}(f) S_x(f)$$

Obtención de Autocorrelación, Densidad Espectral y Potencia de la señal Paso Banda:

$$R_s(\tau) = +A_c^2 R_x(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) - A_c^2 h_{R_x}(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)$$

$$S_s(f) = TF[R_s(\tau)] =$$

$$\frac{A_c^2}{2} S_x(f - f_c) + \frac{A_c^2}{2} S_x(f + f_c) + \frac{A_c^2}{2j} j \text{sign}(f - f_c) S_x(f - f_c) - \frac{A_c^2}{2j} j \text{sign}(f + f_c) S_x(f + f_c) = \\ A_c^2 S_x^+(f - f_c) + A_c^2 S_x^-(f + f_c)$$

$$P_s = \hat{R}_s(0) = A_c^2 P_x$$

Ejemplo: BLU-I (Banda Lateral Única Inferior):

Se forma una modulación paso banda $s(t)$ a partir del mensaje $x(t)$, de ancho de banda B_x , potencia P_x y función de densidad espectral $S_x(f)$ y de la señal portadora de amplitud A_c , frecuencia f_c y fase φ_c .

En este tipo de modulación solo se transmite la banda inferior del mensaje $x(t)$.

$$\begin{aligned}i_s(t) &= x(t) \\ q_s(t) &= -h_x(t)\end{aligned}$$

$$s(t) = A_c x(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) + A_c h_x(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

Obtención de Autocorrelación y de la densidad espectral de las componentes IQ:

$$\begin{aligned}R_{i_s}(\tau) &= R_{q_s}(\tau) = R_x(\tau) \\ R_{q_s i_s}(\tau) &= -R_{i_s q_s}(\tau) = -h_{R_x}(\tau) \\ S_{i_s}(f) &= S_{q_s}(f) = S_x(f) \\ S_{q_s i_s}(f) &= -S_{i_s q_s}(f) = +j \text{sign}(f) S_x(f)\end{aligned}$$

Obtención de Autocorrelación, Densidad Espectral y Potencia de la señal Paso Banda:

$$R_s(\tau) = A_c^2 R_x(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) + A_c^2 h_{R_x}(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)$$

$$\begin{aligned}S_s(f) &= TF[R_s(\tau)] = \\ \frac{A_c^2}{2} S_x(f - f_c) + \frac{A_c^2}{2} S_x(f + f_c) - \frac{A_c^2}{2j} j \text{sign}(f - f_c) S_x(f - f_c) + \frac{A_c^2}{2j} j \text{sign}(f + f_c) S_x(f + f_c) = \\ A_c^2 S_x^-(f - f_c) + A_c^2 S_x^+(f + f_c)\end{aligned}$$

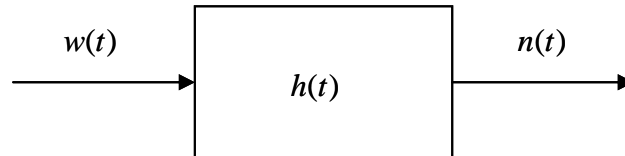
$$P_s = \hat{R}_s(0) = A_c^2 P_x$$

3.4.2 Ruido filtrado paso-banda

Sea el proceso aleatorio paso-banda y estacionario: $n(t)$

$$n(t) = i_n(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

en el que se ha considerado que la portadora se halla sincronizada respecto a un posible demodulador sincronizado en frecuencia y fase con la portadora de una hipotética señal transmitida.



Su función de autocorrelación es $R_n(\tau) = TF^{-1}[S_n(f)]$

Su función de densidad espectral corresponde a ruido estacionario filtrado paso banda

$$S_n(f) = S_w(f) |H_R(f)|^2 \quad \text{t.q.} \quad = 0 \quad \text{en} \quad |f| \geq f_c + B; |f| \leq f_c - B$$

Caracterización de los procesos aleatorios paso banda:

$$h_n(t)$$

$$a_n(t) = n(t) + jh_n(t)$$

El proceso aleatorio real $h_n(t) = \frac{1}{\pi t} * n(t)$ es estacionario y presenta función de autocorrelación:

$$R_{h_n}(\tau) = E[h_n(t+\tau)h_n(t)] = R_n(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} * \frac{-1}{\pi\tau} = R_n(\tau)$$

Además:

$$R_{h_n n}(\tau) = E[h_n(t+\tau)n(t)] = R_n(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = h_{R_n}(\tau)$$

$$R_{n h_n}(\tau) = E[n(t+\tau)h_n(t)] = R_n(\tau) * \frac{-1}{\pi\tau} = -h_{R_n}(\tau)$$

El proceso aleatorio complejo $a_n(t)$ es estacionario y presenta función de autocorrelación:

$$\begin{aligned} R_{a_n}(\tau) &= E[a_n(t+\tau)a_n^*(t)] = \\ &= E[(n(t+\tau) + jh_n(t+\tau))(n(t) - jh_n(t))] = \\ &= R_n(\tau) + R_{h_n}(\tau) + jR_{h_n n}(\tau) - jR_{n h_n}(\tau) = 2R_n(\tau) + 2jh_{R_n}(\tau) = 2a_{R_n}(\tau) \end{aligned}$$

Tomando transformada de Fourier

$$S_{a_n}(f) = 4S_n(f)u(f)$$

Caracterización de los procesos aleatorios paso bajo:

$$\begin{aligned} i_n(t), q_n(t) \\ b_n(t) = i_n(t) + jq_n(t) \end{aligned}$$

Considerando que:

$$\begin{aligned} b_n(t) &= a_n(t)e^{-j(2\pi f_c t + \varphi_c)} \Rightarrow \\ i_n(t) + jq_n(t) &= (n(t) + jh_n(t))(\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - j\sin(2\pi f_c t + \varphi_c)) \Rightarrow \\ i_n(t) &= n(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) + h_n(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \\ q_n(t) &= h_n(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - n(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \end{aligned}$$

Se obtiene la Correlación de la Componente en Fase:

$$\begin{aligned} R_{i_n}(t + \tau, t) &= E[i_n(t + \tau)i_n(t)] = \\ E[(n(t + \tau)\cos(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c) + h_n(t + \tau)\sin(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c)) \\ (n(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) + h_n(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c))] &= \\ +E[n(t + \tau)n(t)]\cos(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \\ +E[h_n(t + \tau)h_n(t)]\sin(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \\ +E[n(t + \tau)h_n(t)]\cos(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \\ +E[h_n(t + \tau)n(t)]\sin(2\pi f_c(t + \tau) + \varphi_c)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) &= \\ +R_n(\tau)\frac{1}{2}(\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) + \cos(2\pi f_c \tau)) \\ +R_{h_n}(\tau)\frac{1}{2}(-\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) + \cos(2\pi f_c \tau)) \\ +R_{nh_n}(\tau)\frac{1}{2}(\sin(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) - \sin(2\pi f_c \tau)) \\ +R_{h_n n}(\tau)\frac{1}{2}(\sin(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) + \sin(2\pi f_c \tau)) &= \\ +R_n(\tau)\frac{1}{2}(\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) + \cos(2\pi f_c \tau)) \\ +R_n(\tau)\frac{1}{2}(-\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) + \cos(2\pi f_c \tau)) \\ -R_{h_n n}(\tau)\frac{1}{2}(\sin(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) - \sin(2\pi f_c \tau)) \\ +R_{h_n n}(\tau)\frac{1}{2}(\sin(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\varphi_c) + \sin(2\pi f_c \tau)) \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

| |
|--|
| $\begin{aligned} R_{i_n}(t + \tau, t) &= R_{i_n}(\tau) = \\ R_n(\tau)\cos(2\pi f_c \tau) + R_{h_n n}(\tau)\sin(2\pi f_c \tau) &= \\ R_n(\tau)\cos(2\pi f_c \tau) + R_{h_n n}(\tau)\sin(2\pi f_c \tau) \end{aligned}$ |
|--|

Puede observarse que es un proceso estacionario.

Análogamente:

$$\begin{aligned} R_{q_n}(\tau) &= R_{i_n}(\tau) = R_n(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) + h_{R_n}(\tau) \sin(2\pi f_c \tau) \\ R_{q_n i_n}(\tau) &= -R_{i_n q_n}(\tau) = h_{R_n}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) - R_n(\tau) \sin(2\pi f_c \tau) \end{aligned}$$

Por tanto, el proceso aleatorio complejo paso bajo también resulta estacionario:

$$\begin{aligned} R_{b_n}(\tau) &= E[b_n(t+\tau)b_n^*(t)] = \\ &= E[(i_n(t+\tau) + jq_n(t+\tau))(i_n(t) - jq_n(t))] = \\ &= R_{i_n}(\tau) + R_{q_n}(\tau) + jR_{q_n i_n}(\tau) - jR_{i_n q_n}(\tau) = \\ &= 2R_{i_n}(\tau) + j2R_{q_n i_n}(\tau) \end{aligned}$$

Relación entre correlaciones de proceso equivalente paso bajo y proceso señal analítica:

$$\begin{aligned} R_{b_n}(\tau) &= 2R_{i_n}(\tau) + j2R_{q_n i_n}(\tau) = \\ &= 2(R_n(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) + h_{R_n}(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)) \\ &+ j2(h_{R_n}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) - R_n(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)) = \\ &= 2(R_n(\tau) + jh_{R_n}(\tau))e^{-j2\pi f_c \tau} = R_{a_n}(\tau)e^{-j2\pi f_c \tau} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} R_{b_n}(\tau) &= R_{a_n}(\tau)e^{-j2\pi f_c \tau} \\ R_{a_n}(\tau) &= R_{b_n}(\tau)e^{+j2\pi f_c \tau} \end{aligned}$$

Tomando transformada de Fourier

$$S_{b_n}(f) = S_{a_n}(f + f_c) = 4S_n(f + f_c)u(f + f_c)$$

CONCLUSIONES:

1. Al considerar un proceso aleatorio paso banda estacionario, se obtienen los procesos componentes en fase y en cuadratura aleatorios paso bajo. Ambos procesos resultan estacionarios y conjuntamente estacionarios. Sus funciones de correlación cumplen las dos condiciones ($R_{q_n}(\tau) = R_{i_n}(\tau)$; $R_{q_n i_n}(\tau) = -R_{i_n q_n}(\tau)$) que se requieren para que al formar un proceso paso banda a partir de dos procesos aleatorios paso bajo estacionarios y conjuntamente estacionarios, el proceso paso banda aleatorio resulte a su vez estacionario.
2. La ecuación que relaciona la función de correlación del proceso complejo señal analítica y la función de correlación del proceso complejo equivalente paso bajo, es idéntica a la relación directa entre las funciones señal analítica compleja y equivalente paso bajo complejo.

Potencia de las componentes I&Q

Dado que:

$$R_{i_n}(\tau) = R_{q_n}(\tau) = R_n(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) + h_{R_n}(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)$$

$$\Rightarrow$$

$$P_{i_n} = P_{q_n} = P_n$$

Análogamente:

$$R_{q_n i_n}(\tau) = -R_{i_n q_n}(\tau) = h_{R_n}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) - R_n(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)$$

$$\Rightarrow$$

$$P_{q_n i_n} = -P_{i_n q_n} = \hat{R}_n(0) = 0$$

Densidad Espectral de las componentes I&Q

Dado que:

$$R_{i_n}(\tau) = R_{q_n}(\tau) = R_n(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) + h_{R_n}(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)$$

$$\Rightarrow$$

$$S_{i_n}(f) = S_{q_n}(f) =$$

$$\frac{1}{2} S_n(f - f_c) + \frac{1}{2} S_n(f + f_c) + \frac{1}{2j} (-j \text{sign}(f - f_c)) S_n(f - f_c) - \frac{1}{2j} (-j \text{sign}(f + f_c)) S_n(f + f_c) =$$

$$S_n(f - f_c) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{sign}(f - f_c) \right) + S_n(f + f_c) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(f + f_c) \right) =$$

$$S_n^-(f - f_c) + S_n^+(f + f_c)$$

Análogamente:

$$R_{q_n i_n}(\tau) = -R_{i_n q_n}(\tau) = h_{R_n}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) - R_n(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)$$

$$\Rightarrow$$

$$S_{q_n i_n}(f) = -S_{i_n q_n}(f) =$$

$$\frac{1}{2} (-j \text{sign}(f - f_c)) S_n(f - f_c) + \frac{1}{2} (-j \text{sign}(f + f_c)) S_n(f + f_c) - \frac{1}{2j} S_n(f - f_c) + \frac{1}{2j} S_n(f + f_c) =$$

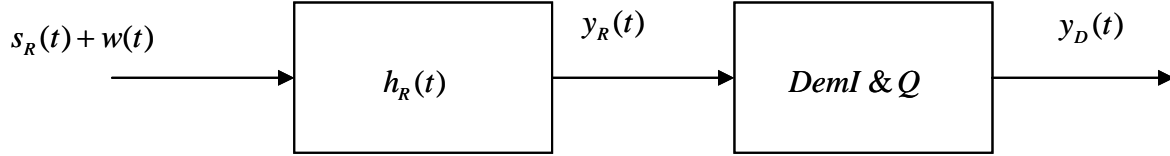
$$S_n(f - f_c) j \left(-\frac{1}{2} \text{sign}(f - f_c) + \frac{1}{2} \right) + S_n(f + f_c) j \left(-\frac{1}{2} \text{sign}(f + f_c) - \frac{1}{2} \right) =$$

$$j S_n^-(f - f_c) - j S_n^+(f + f_c)$$

3.5 Relación señal a Ruido SNR de modulaciones analógicas lineales paso-banda.

3.5.1 Receptor

La figura muestra un esquema genérico para recibir y demodular modulaciones analógicas paso-banda como las presentadas en 3.4.1.



Con el objeto de analizar la SNR (Signal to Noise Rate) de los ejemplos presentados en 3.4 se van a realizar las siguientes consideraciones:

- La señal útil transmitida es de potencia S_T y coincide con la señal modulada: $s_T(t) = s(t)$
- El canal es ideal y por lo tanto la señal útil recibida es $s_R(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} s_T(t - t_d)$ y su potencia $S_R = \frac{S_T}{L}$
- El ruido aditivo es estacionario de media nula y estadísticamente independiente a la señal útil. Espectralmente es blanco: $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$
- El filtro receptor es ideal y paso-banda ajustado al ancho de banda de la señal útil. Por tanto $y_R(t) = s_R(t) + n_R(t)$ y la potencia de ruido en este punto es $N_R = \frac{N_0}{2} \int |H_R(f)|^2 df = N_0 B_s$
- El demodulador I&Q se halla sincronizado a la señal recibida. Es decir, su oscilador local genera $2 \cos(2\pi f_c(t - t_d) + \varphi_c)$.

La relación de potencias SNR_D obtenida en recepción y para cada una de las modulaciones analógicas paso-banda vistas (AM, DBL y BLU), se compara con la SNR_D que se obtendría transmitiendo el mismo mensaje $x(t)$

en banda base y con la misma potencia transmitida. Este último cociente es $SNR_{D-BB} = \gamma = \frac{S_T}{LN_0 B_x}$.

3.5.2 Ejemplo: SNR obtenida para DBL.

Transmitiendo en DBL se obtiene

Señal a la salida del demodulador: $y_D(t) = x_D(t) + n_D(t) = \frac{A_c}{\sqrt{L}} x(t - t_d) + i_{n_R}(t)$

Potencia de señal útil: $S_D = \frac{A_c^2}{L} P_x = \frac{2S_T}{L}$

Potencia de ruido: $N_D = P_{i_{n_R}} = P_{n_R} = N_0 B_s = 2N_0 B_x$

Relación Señal a Ruido: $SNR_{D-DBL} = \frac{S_T}{LN_0 B_x} = \gamma$

3.5.3 Ejemplo: SNR obtenida para BLU.

Transmitiendo en BLU se obtiene

Señal a la salida del demodulador: $y_D(t) = x_D(t) + n_D(t) = \frac{A_c}{\sqrt{L}} x(t - t_d) + i_{n_R}(t)$

Potencia de señal útil: $S_D = \frac{A_c^2}{L} P_x = \frac{S_T}{L}$

Potencia de ruido: $N_D = P_{i_{n_R}} = P_{n_R} = N_0 B_s = N_0 B_x$

Relación Señal a Ruido: $SNR_{D-BLU} = \frac{S_T}{LN_0 B_x} = \gamma$

3.5.4 Ejemplo: SNR obtenida para AM.

Transmitiendo en AM y eliminando la componente continua a la salida del demodulador I se obtiene

Señal a la salida del demodulador: $y_D(t) = x_D(t) + n_D(t) = \frac{A_c}{\sqrt{L}} mx(t - t_d) + i_{n_R}(t)$

Potencia de señal útil: $S_D = \frac{A_c^2}{L} m^2 P_x = \frac{2m^2 P_x S_T}{L(1+m^2 P_x)}$

Potencia de ruido: $N_D = P_{i_{n_R}} = P_{n_R} = N_0 B_s = 2N_0 B_x$

Relación Señal a Ruido: $SNR_{D-AM} = \frac{m^2 P_x}{1+m^2 P_x} \frac{S_T}{LN_0 B_x} = \frac{m^2 P_x}{1+m^2 P_x} \gamma$

3.6 Modulaciones Angulares

En las modulaciones analógicas angulares, a diferencia de las lineales estudiadas en los apartados 3.4.1 y 3.5 el equivalente paso bajo de la señal modulada, no depende linealmente de la señal mensaje, además y como se muestra en los siguientes apartados para las modulaciones angulares, se cumple que:

- El ancho de banda de la modulación es mayor o igual que el doble del ancho de banda del mensaje ($B_s \geq 2B_x$).
- La relación de potencias, señal a ruido en detección es siempre mayor o igual que la que se obtendría transmitiendo la misma señal en banda base y en igualdad de condiciones en cuanto a atenuación de canal, potencia transmitida y densidad espectral de ruido ($SNR_{D-FM} \geq \gamma$).

3.6.1 Definición de modulación FM.

Se forma una modulación paso banda $s(t)$ a partir del mensaje $x(t)$, de ancho de banda B_x , potencia P_x y función de densidad espectral $S_x(f)$ y de la señal portadora de amplitud A_c , frecuencia f_c y fase φ_c .

Para la modulación FM, la fase instantánea de la señal modulada formada a partir del mensaje es:

$$\phi_s(t) = 2\pi f_d \int_0^t x(\lambda) d\lambda$$

La señal modulada en frecuencia (FM) es igual a:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t))$$

La señal analítica o envolvente compleja resulta:

$$a_s(t) = A_c \exp j(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t))$$

Por lo que la frecuencia instantánea de la señal modulada $s(t)$, es proporcional a la señal mensaje:

$$f_s(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)) = f_c + f_d x(t)$$

La constante f_d se denomina sensibilidad de frecuencias y sus unidades son Hz/Volt.

A partir de la señal analítica se obtiene la señal equivalente paso bajo de $s(t)$ y sus componentes en fase y en cuadratura.

$$b_s(t) = \exp j\phi_s(t)$$

$$i_s(t) = \cos(\phi_s(t))$$

$$q_s(t) = \sin(\phi_s(t))$$

La potencia de la señal $s(t)$, atendiendo a lo analizado en (3.12) y particularizando a la modulación FM coincide con la potencia de la señal portadora:

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{A_c^2}{2} (P_{i_s} + P_{q_s}) = \frac{A_c^2}{2} (E[\cos^2(\phi_s(t))] + E[\sin^2(\phi_s(t))]) = \\ &= \frac{A_c^2}{2} (E[\cos^2(\phi_s(t)) + \sin^2(\phi_s(t))]) = \frac{A_c^2}{2} (E[1]) = \frac{A_c^2}{2} \end{aligned}$$

La modulación FM es robusta frente a posibles no linealidades.

Para mostrar esta propiedad, se analiza la señal de salida de un sistema no lineal cuya característica entrada salida es:

$$y(t) = As(t) + Bs^3(t)$$

La respuesta cuando a la entrada se tiene una modulación FM es:

$$\begin{aligned} y(t) &= AA_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)) + BA_c^3 \cos^3(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)) = \\ &AA_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)) + \frac{3}{4} BA_c^3 \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)) + \frac{1}{4} BA_c^3 \cos(2\pi 3f_c t + 3\varphi_c + 3\phi_s(t)) = \\ &\left(AA_c + \frac{3}{4} BA_c^3\right) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)) + \frac{1}{4} BA_c^3 \cos(2\pi 3f_c t + 3\varphi_c + 3\phi_s(t)) \end{aligned}$$

Si se filtra la señal anterior mediante un filtro paso banda $h(t)$, centrado a la frecuencia portadora f_c y eligiendo bien el ancho de banda, se consigue eliminar el efecto de la no linealidad quedando como única señal la modulación FM:

$$z(t) = h(t) * y(t) = \left(AA_c + \frac{3}{4} BA_c^3\right) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t))$$

Se sugiere realice el mismo tipo de análisis para la modulación DBL, definida en los apartados anteriores. El resultado será que los efectos del mismo sistema no lineal sobre la modulación DBL no se pueden eliminar mediante un filtro paso banda.

3.6.2 Ancho de Banda de las modulaciones FM

El ancho de banda de una modulación FM es en general difícil de analizar y en teoría, aunque el ancho de banda de la señal mensaje se halle limitado a B_x Hz, la ocupación espectral de $s(t)$ es infinita.

Sirva como justificación a la afirmación anterior el siguiente desarrollo en serie de Taylor, útil para modelar el equivalente paso bajo de la modulación.

$$e^{j\phi_s(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\phi_s(t))^n}{n!}$$

Los sumandos pares, coinciden con la parte real de la función exponencial.

$$i_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi_s(t)^{2n}}{(2n)!}$$

Y los sumandos impares, coinciden con la parte imaginaria de la función exponencial.

$$q_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n j\phi_s(t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Al elevar un término a $2n$, el ancho de banda queda también ampliado por este factor, por lo que en teoría la ocupación frecuencial es infinita para una modulación FM, en la que la función exponencial representa su equivalente paso bajo.

Por suerte, aunque ilimitado, el espectro de una modulación FM se atenúa a medida que las frecuencias se hallan distanciadas de la frecuencia portadora, por lo que en la práctica, el ancho de banda de la señal modulada en FM se aproxima por un ancho de banda limitado. Debido a la complejidad de un análisis detallado de ancho de banda para el caso general, a continuación se analiza el ancho de banda de una modulación FM cuando la moduladora es un tono puro y el resultado se extrapola para obtener el ancho de banda aproximado del resto de modulaciones FM, obtenidas con cualquier tipo de señal moduladora.

Ancho de Banda de una modulación FM cuando la moduladora es un tono puro.

Sea la señal moduladora:

$$x(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$$

La señal modulada en FM es igual a:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_s(t))$$

Con

$$\begin{aligned} \phi_s(t) &= 2\pi f_d \int_0^t x(\lambda) d\lambda = 2\pi f_d \int_0^t A_m \cos(2\pi f_m \lambda) d\lambda = \\ &= \frac{f_d A_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t) = \beta \sin(2\pi f_m t) \end{aligned}$$

Donde al cociente $\beta = \frac{f_d A_m}{f_m}$ se le denomina índice de modulación.

El equivalente paso bajo resultante es una función periódica y como tal admite un desarrollo en serie de Fourier:

$$b_s(t) = e^{j\phi_s(t)} = e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_m t}$$

Los coeficientes de Fourier coinciden con las funciones de Bessel de clase 1, orden n y argumento β :

$$C_n = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} e^{-j2\pi n f_m t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j(\beta \sin(\lambda) - n\lambda)} d\lambda = J_n(\beta)$$

Las funciones de Bessel, son en general no integrables, y se hallan resueltas mediante aproximaciones y tabuladas para diferentes órdenes y argumentos.

El equivalente paso bajo de una modulación FM de un tono se expresa a continuación en función de las funciones de Bessel.

$$\begin{aligned} b_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi n f_m t} \Rightarrow \\ B_s(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \delta(f - n f_m) \end{aligned}$$

Las funciones de Bessel, son decrecientes con el orden n y además cumplen la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} J_{2n}(\beta) &= J_{-2n}(\beta) \\ J_{2n+1}(\beta) &= -J_{-(2n+1)}(\beta) \end{aligned}$$

Para cada valor del argumento β se suele considerar la siguiente aproximación:

$$B_s(f) \cong \sum_{n=-n_{MAX}}^{+n_{MAX}} J_n(\beta) \delta(f - nf_m) \Rightarrow B_s = 2n_{MAX} f_m$$

En estas condiciones la señal modulada se expresa como:

$$s(t) \cong \sum_{n=-n_{MAX}}^{+n_{MAX}} J_n(\beta) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + nf_m)$$

y su transformada de Fourier:

$$S^+(f) \cong \frac{1}{2} A_c e^{j\varphi_c} \sum_{n=-n_{MAX}}^{+n_{MAX}} J_n(\beta) \delta(f - f_c - nf_m)$$

El criterio para decidir la máxima línea espectral a considerar en general consiste en tomar todas las líneas espectrales, cuyo valor absoluto supera un cierto umbral: ε .

La siguiente tabla, reproducida de [Carlson] presenta para diferentes valores del índice de modulación β y órdenes n , los valores de las funciones de Bessel correspondientes que superan el umbral $\varepsilon = 0.01$.

| n | $J_n(0.1)$ | $J_n(0.2)$ | $J_n(0.5)$ | $J_n(1)$ | $J_n(2)$ | $J_n(5)$ | $J_n(10)$ |
|----|------------|------------|------------|----------|----------|----------|-----------|
| 0 | 1.00 | 0.99 | 0.94 | 0.77 | 0.22 | -0.18 | -0.25 |
| 1 | 0.05 | 0.10 | 0.24 | 0.44 | 0.58 | -0.33 | 0.04 |
| 2 | | | 0.03 | 0.11 | 0.35 | 0.05 | 0.25 |
| 3 | | | | 0.02 | 0.13 | 0.36 | 0.06 |
| 4 | | | | | 0.03 | 0.39 | -0.22 |
| 5 | | | | | | 0.26 | -0.23 |
| 6 | | | | | | 0.13 | -0.01 |
| 7 | | | | | | 0.05 | 0.22 |
| 8 | | | | | | 0.02 | 0.32 |
| 9 | | | | | | | 0.29 |
| 10 | | | | | | | 0.21 |
| 11 | | | | | | | 0.12 |
| 12 | | | | | | | 0.06 |
| 13 | | | | | | | 0.03 |
| 14 | | | | | | | 0.01 |

Valores de $J_n(\beta) > \varepsilon = 0.01$

Ejemplo:

En una modulación FM se tiene que la señal moduladora es $x(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$ con $A_m = 20 \text{ volts}$ y $f_m = 100 \text{ KHz}$ y la desviación de frecuencias $f_d = 25 \text{ KHz/volt}$. Se calcula a continuación el ancho de banda resultante, considerando los términos sinusoidales cuyo correspondiente coeficiente $J_n(\beta) > \varepsilon = 0.01$

El índice de modulación resulta: $\beta = \frac{f_d A_m}{f_m} = \frac{25 \text{ K} \cdot 20}{100 \text{ K}} = 5$, por lo que el ancho de banda aproximado es:

$$B_s = 2n_{MAX} f_m = 2 \cdot 8 \cdot 100 \text{ KHz} = 1,6 \text{ MHz}.$$

Final de ejemplo.

El criterio aplicado en el ejemplo anterior resulta muy conservador. Un criterio más aproximado consiste en considerar los términos sinusoidales cuyo correspondiente coeficiente $J_n(\beta) > \varepsilon = 0.1$. Y un criterio intermedio, conocido como la regla de Carlson y especialmente útil cuando no se dispone de tablas de las funciones de Bessel, consiste en calcular el máximo orden a tomar como:

$$n_{MAX} = \beta + 2$$

es una solución que resulta intermedia entre los dos criterios de $J_n(\beta) > \varepsilon = 0.1$ y $J_n(\beta) > \varepsilon = 0.01$.

Ancho de Banda de una modulación FM cuando la moduladora es una señal $x(t)$ de ancho de banda B_x .

Para una señal genérica $x(t)$, se suele aplicar la regla de Carlson,. El índice de modulación β se calcula a considerando $f_m = B_x$ y $A_m = |x(t)|_{MAX}$, con lo que:

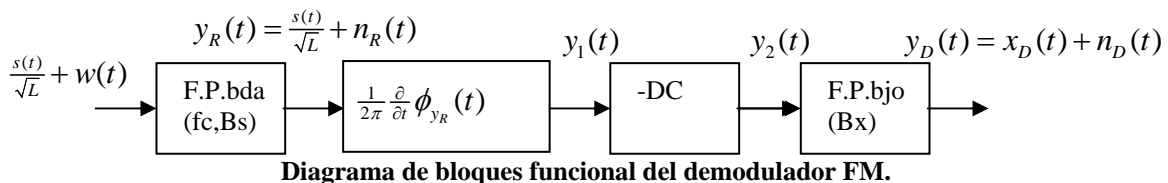
$$B_s = 2(\beta + 2)B_x = 2(f_d |x(t)|_{MAX} + 2B_x)$$

Para FM comercial, los valores típicos son: $f_d = 75 \text{ KHz/volt}$, $|x(t)|_{MAX} = 1 \text{ volt}$ y $B_x = 15 \text{ KHz}$ que según la fórmula anterior da lugar a un ancho de banda de la modulación de $B_s = 210 \text{ KHz}$. Sin embargo, los valores regulados en el territorio español para este tipo de emisoras son de 150 KHz, pero dejando además 150 KHz de guarda entre cada dos emisoras.

3.6.3 Relación Señal a Ruido de las modulaciones FM

Este apartado se dedica al cálculo de la relación señal a ruido en sistemas de comunicaciones basados en modulación de frecuencia.

Se asume un diagrama de bloques para el receptor como el de la figura:



Verificación del sistema sin ruido.

A continuación y con la finalidad de comprobar el correcto funcionamiento del esquema, se realiza un análisis de la señal, suponiendo que no se tiene señal de ruido ($w(t) = 0$).

En esta situación a la salida del filtro paso banda receptor se tiene:

$$y_R(t) = \frac{s(t)}{\sqrt{L}} = \frac{A_c}{\sqrt{L}} \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t))$$

En el siguiente bloque se realiza una normalización de amplitud además de la detección de la derivada del ángulo de la señal. Es fácil comprobar que esta segunda operación se puede obtener mediante una derivación de la señal seguida de un detector de envolvente. Todo ello se obtiene sin necesidad de sincronismo de portadora. Es decir, en recepción no se requiere el conocimiento de la fase de la señal portadora para poder demodular correctamente la señal.

$$y_1(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{y_R}(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \phi_s(t) = f_c + f_d x(t)$$

Tras la eliminación de la componente continua y el filtrado paso bajo de la señal se obtiene:

$$y_D(t) = y_2(t) = f_d x(t)$$

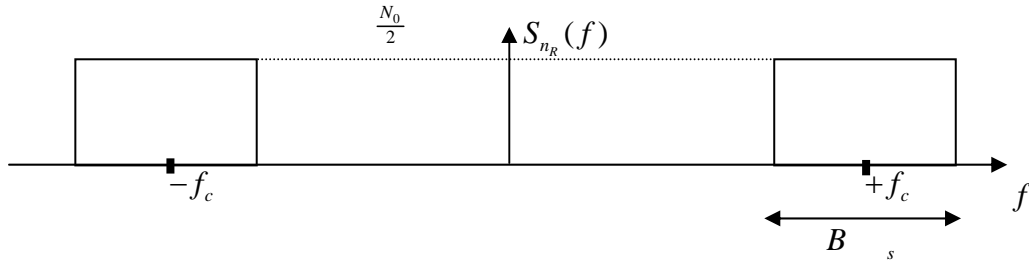
Al considerar la presencia de la señal de ruido, en desarrollos posteriores queda justificada la presencia del filtro paso bajo.

Ruido Paso Banda.

El ruido paso banda a la salida del filtro receptor, considerado ideal presenta la densidad espectral:

$$S_{n_R}(f) = S_w(f) |H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f-f_c}{B_s}\right) + \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f+f_c}{B_s}\right)$$

$$B_s = 2(\beta + 2)B_x$$



Densidad espectral de la señal de ruido a la salida del filtro paso banda.

Por tanto, a la salida del filtro receptor se mide la SNR y es igual a:

$$SNR_R = \frac{P_s}{LN_R} = \frac{S_T}{LN_0 B_s}$$

Aproximación de la señal de ruido en FM.

En el análisis de la SNR en un sistema de comunicaciones de FM, se requiere determinar como influye el ruido en el ángulo de la señal $y_R(t)$, presenta a la salida del filtro paso banda. Para hallar la influencia del ruido sobre toda la señal, sin pérdida de generalidad, se expresa la señal de ruido paso banda, en fase con la señal modulada:

$$y_R(t) = \frac{s(t)}{\sqrt{L}} + n_R(t) =$$

$$\frac{A_c}{\sqrt{L}} \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)) + i_n(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)) =$$

$$\left(\frac{A_c}{\sqrt{L}} + i_n(t) \right) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)) =$$

$$c(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t) + \phi_n(t)) \quad (3.14)$$

Con:

$$c(t) = \sqrt{\left(\frac{A_c}{\sqrt{L}} + i_n(t) \right)^2 + (q_n(t))^2}$$

$$\phi_n(t) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{q_n(t)}{\frac{A_c}{\sqrt{L}} + i_n(t)} \right)$$

El ángulo $\phi_n(t)$ es el provocado por la señal de ruido y es el término que influye directamente en la detección de la señal.

Advertencia:

Tal como se han definido las componentes I&Q en (3.14), el equivalente paso bajo de la señal de ruido se define como:

$$b_n(t) = i_n(t) + jq_n(t) = a_{y_n}(t) \exp(-j(2\pi f_c t + \varphi_c + \phi_s(t)))$$

El estudio estadístico de la señal paso bajo así definida, es en principio muy complejo, sin embargo, es ampliamente asumido para su análisis que el comportamiento estadístico es en condiciones de gaussianidad, el modelo asumido para las componentes en fase y en cuadratura de la señal de ruido, es el modelado en el apartado 3.4.2.

Cuando la SNR en recepción supera un determinado umbral, normalmente de 10 dB, se realiza la siguiente aproximación:

$$SNR_R = SNR_U \geq 10 \Rightarrow \phi_n(t) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{q_n(t)}{\frac{A_c}{\sqrt{L}} + i_n(t)} \right) \cong \text{tg}^{-1} \left(\frac{q_n(t)}{\frac{A_c}{\sqrt{L}}} \right) \cong \frac{q_n(t)}{\frac{A_c}{\sqrt{L}}} \quad (3.15)$$

Cálculo de la SNR en detección.

Considerando la presencia tanto de la señal útil como de la señal de ruido, la señal $y_1(t)$ del diagrama de bloques del demodulador es igual a:

$$y_1(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{y_R}(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \phi_s(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \phi_n(t) = f_c + f_d x(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{L}}{A_c} \frac{\partial}{\partial t} q_n(t)$$

Que tras la eliminación de la componente continua produce:

$$y_2(t) = y_1(t) - DC = f_d x(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{L}}{A_c} \frac{\partial}{\partial t} q_n(t)$$

Y en detección, a la salida del filtro paso bajo de respuesta impulsional $h_b(t)$:

$$y_D(t) = f_d x(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{L}}{A_c} \frac{\partial}{\partial t} q_n(t) * h_b(t) = x_D(t) + n_D(t)$$

De donde la potencia de la señal útil es igual a:

$$S_D = f_d^2 P_x$$

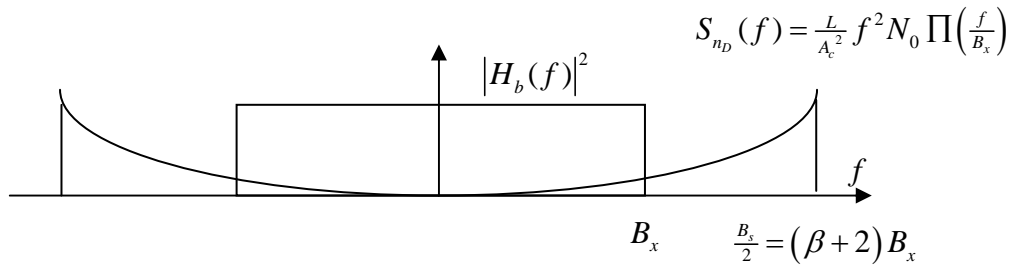
Para analizar la potencia de la señal de ruido, se tiene la siguiente expresión para la densidad espectral de la componente en cuadratura:

$$S_{q_n}(f) = S_n^-(f - f_c) + S_n^+(f + f_c) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{B_T}\right) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_x(\beta+2)}\right)$$

que tras el derivador y constante de normalización da lugar a:

$$S_{n_1}(f) = \frac{L}{(A_c)^2} \frac{1}{(2\pi)^2} |j2\pi f|^2 S_{q_n}(f) = \frac{L}{(A_c)^2} f^2 N_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_x(\beta+2)}\right)$$

En el filtrado paso bajo se elimina parte de la señal de ruido, en particular las componentes frecuenciales más altas, que son precisamente las de mayor potencia, debido al efecto del derivador.



Densidad espectral de la señal de ruido en detección. Efecto de eliminación de las componentes frecuenciales más altas de la señal de ruido debido al filtro paso bajo.

La potencia de la señal de ruido en detección es igual a:

$$N_D = E \left[\left(\frac{\sqrt{L}}{A_c} \frac{\partial q_n(t)}{\partial t} * h_b(t) \right)^2 \right] =$$

$$\frac{L}{A_c^2} \int |H_b(f)|^2 S_{q_n}(f) f^2 df = \frac{LN_0}{A_c^2} \int_{-B_x}^{+B_x} f^2 df = \frac{2LN_0 B_x^3}{3A_c^2}$$

Dado que la potencia transmitida $S_T = \frac{A_c^2}{2}$ y asumiendo $f_d = \beta B_x$:

$$SNR_D = \frac{f_d^2 P_x}{\frac{2LN_0 B_x^3}{3A_c^2}} = \frac{3\beta^2 P_x S_T}{LN_0 B_x}$$

Efecto Umbral en FM:

Al evaluar la expresión obtenida, se debe considerar que es válida mientras se cumpla la condición considerada en (3.15).

$$\frac{A_c}{\sqrt{L}} \gg |i_n(t)|, |q_n(t)| \Leftrightarrow S_R \gg N_0 B_x$$

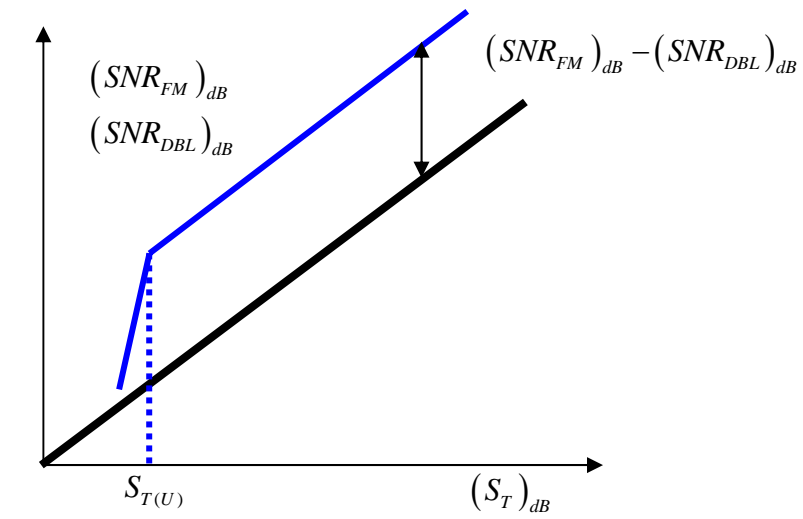
La mínima potencia transmitida para que se pueda considerar válida la aproximación es igual a $S_{T(U)}$:

$$SNR_U = 10 = \frac{S_{T(U)}}{LN_0 B_s} \Rightarrow$$

$$S_{T(U)} = 10LN_0 B_s = 10LN_0 B_x (\beta + 2)$$

Al comparar la ganancia obtenida con la modulación FM respecto a la obtenida con la modulación DBL, conviene considerar iguales los mensajes transmitidos tanto en potencia como en ancho de banda, así como el nivel de ruido de canal, y el factor de atenuación de la respuesta impulsional del canal.

$$\left(\frac{SNR_{FM}}{SNR_{DBL}} \right)_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\frac{3\beta^2 P_x S_T}{N_0 B_x L}}{\frac{S_T}{N_0 B_x L}} \right) = 10 \log_{10} (3\beta^2 P_x) > 0$$



SNR en detección en dB para modulaciones FM (efecto umbral) y DBL.