

TEMA I

ELECTRICITAT

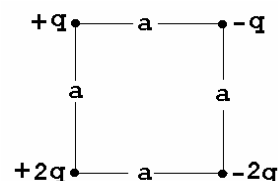
CAMP ELECTROSTÀTIC

1.1 (b) Quina és la força resultant,

a) sobre la càrrega col·locada en el vèrtex inferior esquerra de la figura.

b) sobre la inferior dreta (utilitzar la simetria del sistema)

Dades: $q = 1,0 \times 10^{-7} \text{ C}$; $a = 5,0 \text{ cm}$



a) (0,17; -0,046) N b) (-0,17; -0,046) N

1.2 (o) Dues càrregues positives iguals, de valor Q , estan situades a $(0, a)$ i a $(0, -a)$, respectivament.

a) Determineu el camp elèctric \mathbf{E} en un punt qualsevol de l'eix x .

b) Representeu gràficament la funció $E_x(x)$.

c) Es situa una càrrega de prova q a l'origen $(0, 0)$. Estudieu l'estabilitat de l'equilibri de q considerant petits desplaçaments segons els eixos.

d) Existeix algun valor de q , situada a l'origen, per al qual la força neta sobre cadascuna de les tres càrregues sigui zero?

d) $-Q/4$

1.3 (o) Una càrrega Q està uniformement distribuïda sobre una anella de radi R .

a) Trobeu el camp \mathbf{E} en els punts de l'eix x (eix de l'anella).

b) Aproximeu la funció $E_x(x)$ per als punts en que $x \ll R$ i en que $x \gg R$.

c) Demostreu que el mòdul del camp és màxim per a $x = \pm R/\sqrt{2}$

$$\text{a) } E_x = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad \text{b) } x \ll R: E_x = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad \text{c) } x \gg R: E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

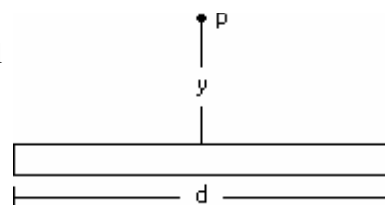
1.4 (o) Un tros de vareta prima no conductora de longitud infinita té una densitat de càrrega lineal λ uniforme i positiva.

a) Calculeu el camp elèctric creat a una distància y de la vareta.

b) Si la vareta tingués una longitud finita d , demostreu que el camp \mathbf{E} en el punt P de la mediatriu valdria:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{d^2 + 4y^2}}$$

(si q es la càrrega total)



$$\text{a) } \mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \mathbf{j}$$

1.5 (o) DIPOL ELÈCTRIC.

Una càrrega positiva +Q està situada en el punt (0, a), mentre que una altra, de valor -Q està en (0, -a), constituint un dipol.

a) Quin és el seu moment dipolar ?

b) Determineu el camp creat en els punts A(0, 0), B(x, 0), C(0, y).

c) Aproximeu l'expressió del camp als punts B i C per a $x \gg a$, $y \gg a$. Expressen-ho en funció del moment dipolar.

<p>a) $\mathbf{p} = 2aQ \mathbf{j}$</p> <p>b) $\mathbf{E}(0,0) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \mathbf{j}$</p> <p style="text-align: center;">$y > a : \mathbf{E}(0, y) = \frac{Qa y }{\pi\epsilon_0 (y+a)^2 (y-a)^2} \mathbf{j}$</p> <p>c) $x \gg a : \mathbf{E}(x,0) \approx \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 x ^3}$</p>	<p>$\mathbf{E}(x,0) = -\frac{Qa}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{j}$</p> <p style="text-align: center;">$y < a : \mathbf{E}(0, y) = -\frac{Q(y^2 + a^2)}{2\pi\epsilon_0 (y+a)^2 (y-a)^2} \mathbf{j}$</p> <p>$y \gg a : \mathbf{E}(0, y) \approx \frac{\mathbf{p}}{2\pi\epsilon_0 y ^3}$</p>
---	--

1.6 (o) Col·loquem un dipol de moment dipolar $p = 5,0 \text{ eÅ}$ a l'interior d'un camp elèctric uniforme $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$, de valor $E_0 = 5,0 \times 10^4 \text{ N/C}$. Calculeu el valor del moment de força que actua sobre el dipol quan:

a) El dipol és paral·lel al camp elèctric: $(p, 0, 0)$

b) El dipol és perpendicular al camp elèctric: $(0, p, 0)$

c) El dipol forma un angle de $\phi = 60^\circ$ amb el camp elèctric: $(p \cos \phi, 0, p \sin \phi)$.

- | |
|--|
| <p>a) 0</p> <p>b) $(0, 0, -4,0 \times 10^{-24}) \text{ N}\cdot\text{m}$</p> <p>c) $(0, 3,5 \times 10^{-24}, 0) \text{ N}\cdot\text{m}$</p> |
|--|

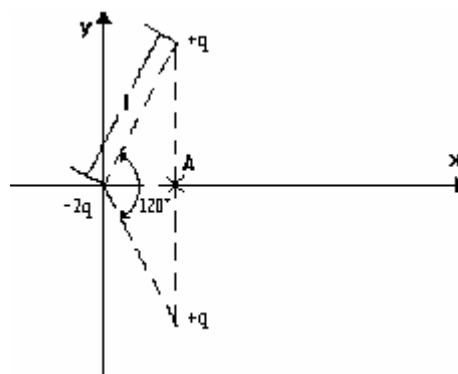
1.7 (o) En un model simplificat, podem descriure una molècula d'aigua com tres partícules carregades, com mostra la figura, on q és la càrrega de l'electró

($q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $l = 2,0 \text{ Å}$)

a) Determineu la direcció i el sentit del vector moment dipolar i estimeu-ne el valor.

b) Què passaria si la molècula es trobés en presència d'un camp elèctric exterior uniforme? Raoneu quina força actuaria sobre la molècula si aquest camp exterior fos no uniforme, donat per:

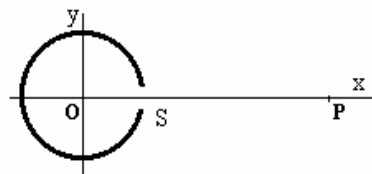
$$\mathbf{E} = \alpha x \mathbf{i}, \text{ on } \alpha = 10 \text{ kV/m}^2$$



- | |
|---|
| <p>a) $2,0 \mathbf{i} \text{ eÅ}$</p> <p>b) $\mathbf{F} = 3,2 \times 10^{-25} \mathbf{i} \text{ N}$</p> |
|---|

- 1.8** (o) Volem saber el camp elèctric (intensitat, direcció i sentit) creat per una superfície esfèrica de radi $R = 0,10 \text{ m}$ que té una densitat superficial de càrrega $\sigma = + 1,0 \text{ nC/m}^2$, excepte en una petita regió de superfície $S = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, tal com es veu en la figura. Trobeu el valor del camp elèctric en els punts següents:

- a) En el centre O
b) En el punt $P = 2,0 \text{ i m}$

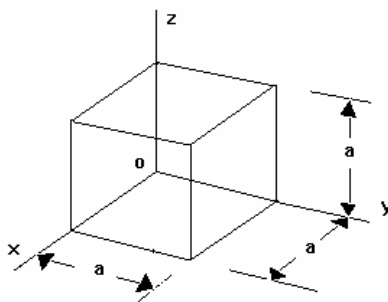


- a) $\mathbf{E} = 0,90 \text{ i V/m}$ b) $\mathbf{E} = 0,28 \text{ i V/m}$

- 1.9** (o) Considereu la superfície d'un cub de costat a com es mostra en la figura. Aquest cub està col·locat en una regió on hi ha un camp elèctric paral·lel a l'eix X: $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$.

Trobeu el flux elèctric a través de la superfície i la càrrega total tancada en el seu interior si el camp elèctric és:

- a) E uniforme
b) E variable: $E = Cx$



- a) $\Phi = 0$ $Q = 0$
b) $\Phi = Ca^3$ $Q = C\epsilon_0 a^3$

- 1.10** (o) Col·loquem un cub de costat a , orientat segons els eixos, amb el seu centre en una posició genèrica (x_0, y_0, z_0) .

Trobeu el flux de camp elèctric a través de les seves cares, la càrrega total tancada en el seu interior i la densitat de càrrega $\rho(x_0, y_0, z_0)$, si el camp elèctric en la regió en què situem aquest cub compleix les expressions:

- a) $\mathbf{E} = c x^2 \mathbf{i}$
b) $\mathbf{E} = c (y \mathbf{i} + x \mathbf{j})$

- a) $\Phi = 2Ca^3 x_0$ $Q = 2\epsilon_0 Ca^3 x_0$ $\rho = 2\epsilon_0 Cx_0$
b) $\Phi = 0$ $Q = 0$ $\rho = 0$

- 1.11** (o) Una càrrega Q està continguda en una esfera de radi R .
Trobeu l'expressió del camp elèctric \mathbf{E} , tant a dins com a fora de l'esfera, si:
- a) La càrrega està distribuïda uniformement a la superfície.
 - b) La càrrega es distribueix uniformement a l'interior.
 - c) La càrrega es distribueix segons l'expressió $\rho(r) = ar^2$, per a $r < R$.

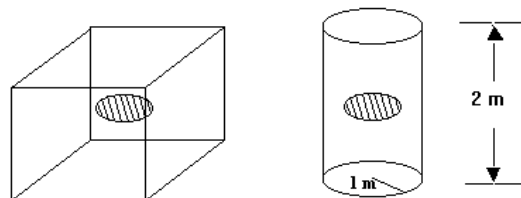
a) $E_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$E_{\text{int}} = 0$
b) $E_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$E_{\text{int}} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$
c) $E_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$E_{\text{int}} = \frac{Qr^3}{4\pi\epsilon_0 R^5}$

- 1.12** (o) Un cilindre té una longitud l molt més gran que el seu radi R .
Trobeu l'expressió aproximada del camp elèctric (lluny dels extrems del cilindre) creat per una distribució de càrrega amb càrrega total Q , si:
- a) La càrrega està distribuïda uniformement a la seva superfície lateral.
 - b) La càrrega es distribueix uniformement a tot l'interior.
 - c) Analitzeu la continuïtat del camp \mathbf{E} a la superfície lateral del cilindre en els dos casos anteriors.

a) $E_{\text{ext}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l r}$	$E_{\text{int}} = 0$
b) $E_{\text{ext}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l r}$	$E_{\text{int}} = \frac{Qr}{2\pi\epsilon_0 l R^2}$

- 1.13** (o) Un disc de radi $R = 50$ cm, està carregat amb càrrega Q distribuïda uniformement.

- a) Quin seria el flux del camp elèctric a través d'una superfície cilíndrica si la base té un radi de 1 m i l'alçada és de 2 m, quan el disc carregat està en el centre del cilindre?
- b) Quin seria el flux del camp elèctric a través d'una superfície cúbica de 1 m d'aresta, amb el disc carregat en el centre?



Q/ϵ_0 en els dos casos

- 1.14** (o) Un disc de radi $R = 20$ cm i d'un gruix negligible té una densitat de càrrega igual a $1,00 \times 10^{-6}$ C/m², distribuïda uniformement. Mitjançant aproximacions raonables:
- a) Quant val el camp elèctric creat pel disc en un punt situat en l'eix del disc, a 1 mm de distància?
 - b) I a l'eix del disc a una distància de 20 m?
 - c) Podríeu calcular el camp elèctric en un punt genèric de l'espai a partir de la llei de Gauss? Raoneu-ho.

a) $5,6 \times 10^4$ V/m b) 2,8 V/m c) No

1.15 (o) *POLARITZABILITAT D'UN ÀTOM.*

Considerem un model d'àtom en el que una càrrega negativa $-Ze$ està distribuïda uniformement en el volum d'una esfera formant un núvol esfèric de radi R (electrons), i en que una càrrega puntual $+Ze$ està a prop del centre (nucli).

- a) Determineu el camp elèctric creat pels electrons en un punt P situat a una distància $d < R$ del centre de la distribució de càrrega. Quina força actuaria sobre el nucli si estigués en el punt P , a causa del camp elèctric anterior?

Hi apliquem un camp elèctric exterior, \mathbf{E}_{ext} , i suposem que l'únic efecte que s'hi produeix és un desplaçament relatiu, d , del centre de la distribució de càrrega electrònica, que es manté esfèrica, respecte al nucli.

- b) Determineu la distància " d_{eq} " en què s'arriba a l'equilibri del nucli. Quan val el moment dipolar de l'àtom?
- c) Determineu la polaritzabilitat α d'aquest àtom (relació entre el moment dipolar p i el camp elèctric).
- d) Obteniu una expressió aproximada per a la freqüència d'oscil·lació d'aquest sistema (suposeu el nucli fix i la massa de tots els electrons Zm_e).

$$\begin{aligned}
 \text{a) } E &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R^3} d & F &= \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} d \\
 \text{b) } d_{\text{eq}} &= \frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{Ze} E_{\text{ext}} & p &= 4\pi\epsilon_0 R^3 E_{\text{ext}} \\
 \text{c) } \alpha &= 4\pi\epsilon_0 R^3 \\
 \text{d) } f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m_e}}
 \end{aligned}$$

1.16 (c) POLARITZABILITAT. ÒRBITA CIRCULAR.

Situem una càrrega puntual $+Q$ en el centre d'una anella de càrrega $-Q$ (model simplificat de l'àtom d'hidrogen de Bohr), i sotmetem el conjunt (l'anella i la càrrega puntual) a un camp elèctric exterior uniforme, perpendicular al pla de l'anella. Suposarem que l'efecte produït és, simplement, un desplaçament relatiu entre la càrrega puntual i l'anella segons el seu eix. D'aquesta forma, el camp elèctric exterior crea un dipol format per la càrrega puntual $(+e)$ i el centre de l'anella $(-e)$.

Dades: $Q = e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $R = 0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$

- a) Determineu aproximadament la posició d'equilibri aconseguida per la càrrega puntual en estar sotmesa al camp elèctric exterior i al de l'anella.
- b) Trobeu el moment dipolar en funció del camp E_{ext} i calculeu-ne el valor quan aquest camp és de 100 kV/m.
- c) Considerarem que la càrrega puntual està fixada i que l'anella es pot moure. Suposarem, a més a més, que la massa de l'anella es la del electró ($m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$). Calculeu la freqüència d'oscil·lació d'aquest sistema.

<p>a) $x = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 E_{\text{ext}}}{Q}$</p> <p>b) $p = 1,65 \times 10^{-36} \text{ Cm} = 1,03 \times 10^{-7} \text{ eÅ}$</p> <p>c) $f = 6,5 \times 10^{15} \text{ Hz}$</p>
