ANÀLISI VECTORIAL ETSETB 18-06-2007 Temps: 4h.

Publicació de les notes provisionals (a `ATENEA`):	**25 de juny**
Període d'al.legacions:	**25 i 26 de juny**
Publicació de les notes definitives:	**28 de juny**

1. Donat $D = \{(x, y) \mid\ y > 0,\ x > y,\ xy < 1,\ x^2 - y^2 < 1\}$, calculeu

$$\int\!\!\int_D \frac{x^3y + xy^3}{xy + 1}\ (x^2 - y^2)^{xy-1} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Indicació: feu un canvi de variables.

Resolució:

Usarem el canvi de variables $(u, v) = g(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$. Veurem primer que, efectivament, es tracta d'un canvi de variables, és a dir que g és un difeomorfisme entre dos oberts del pla. Donat $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, hem de resoldre el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & u \\ xy & = & v \end{array} \right.$$

Si $v \neq 0$, llavors $x \neq 0$ i podem aïllar $y = v/x$. Substituint a la primera equació obtenim l'equació biquadrada $x^4 - ux^2 - v^2 = 0$, que ens porta a solucions reals $\left\{ x = \sqrt{\dfrac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}}\,,\ y = \dfrac{v}{\sqrt{\dfrac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}}} \right\}$ i $\left\{ x = -\sqrt{\dfrac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}}\,,\ y = -\dfrac{v}{\sqrt{\dfrac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}}} \right\}$.

Si $v = 0$, llavors $y = 0$ quan $u > 0$ i $x = 0$ quan $u < 0$ i per tant les solucions són $\{x = \pm\sqrt{u}\,,\ y = 0\}$ i $\{x = 0\,,\ y = \pm\sqrt{-u}\}$.

Així doncs, l'aplicació $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és exhaustiva i $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ existeix un punt (x, y) tal que $(u, v) = g(x, y) = g(-x, -y)$.

En conseqüència, l'aplicació $g :\ \{(x, y)\ :\ x + y > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y)\ :\ y \leq 0\}$ és bijectiva.

(*Nota: la demostració de la bijectivitat de g no s'exigia en la resolució del problema*).

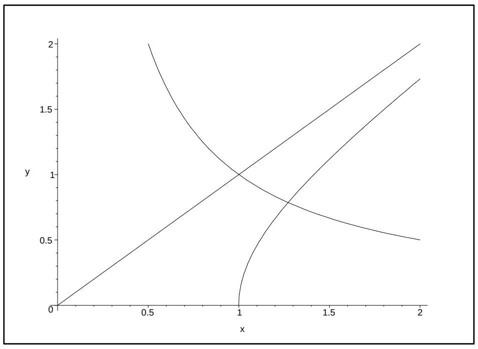
D'altra banda, com que g és de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ i $Jg(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$, tenim que $\det Jg(x, y) = 2x^2 + 2y^2 \neq 0$, per tot $(x, y) \neq (0, 0)$. En el nostre cas,

la recta $x = y$ es transforma en la recta $u = 0$,

la hipèrbola $xy = 1$ es transforma en la recta $v = 1$,

la recta $y = 0$ es transforma en la recta $v = 0$,

la hipèrbola $xy = 1$ es transforma en la recta $u = 1$.



Per tant, el recinte D es transforma per g en el quadrat $T = \{(u,v) \,:\, 0 < u < 1\,,\, 0 < v < 1\}$ i l'aplicació $g : D \longrightarrow T$ és un difeomorfisme o canvi de variables.
Finalment, apliquem el canvi de variables a la integral:

$$\iint_D \frac{x^3y + xy^3}{xy+1}\,(x^2-y^2)^{xy-1}\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y = \iint_T \frac{xy(x^2+y^2)}{xy+1}\,(x^2-y^2)^{xy-1}\frac{1}{2(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}v \int_0^1 \frac{v}{v+1}u^{v-1}\mathrm{d}u \;= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{v}{v+1}\left[\frac{u^v}{v}\right]_{u=0}^{u=1}\mathrm{d}v \;= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{v+1} = \frac{1}{2}\left[\ln(v+1)\right]_{v=0}^{v=1} = \frac{1}{2}\ln 2$$

2. Considerem la funció $f \,:\, D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = \dfrac{x^3}{y^3 + yx^2 - y^2 - x^2}$, on D és el domini de la funció f.

   (a) Calculeu D i $\mathrm{Fr}(D)$ i digueu si són conjunts oberts, tancats, fitats i arc-connexos.

   (b) Estudieu la continuïtat a $\mathbb{R}^2$ de la funció $g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in D \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \notin D \end{cases}$

   (c) Calculeu les derivades direccionals de g en $(0,0)$ i estudieu si g és diferenciable en $(0,0)$.

Resolució:

(a) $y^3 + yx^2 - y^2 - x^2 = y(y^2+x^2) - (y^2+x^2) = (y-1)(y^2+x^2)$. Per tant,

$$\mathrm{dom}\, f = D = \mathbb{R}^2 \setminus (\{(x,1) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,0)\})$$

$$\mathrm{Fr}(D) = \{(x,1) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,0)\}$$

D és un conjunt obert, no fitat ni arc-connex. $\mathrm{Fr}(D)$, que és el complementari de D, és un conjunt tancat, no fitat ni arc-connex.

(b) Hem d'estudiar la continuïtat de g en els punts de la recta $y = 1$ i al punt $(0,0)$.
Observem que, si $a \neq 0$, aleshores $\lim_{(x,y)\to(a,1)} g(x,y) = \infty$, i per tant g **no** és contínua en els punts de la forma $(a,1)$, amb $a \neq 0$.

Per saber si és contínua en el punt $(0,1)$, fem el límit quan ens apropem al punt seguint, per exemple, la corba d'equació $y = 1 + x^3$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3}{(y-1)(x^2+y^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3[x^2+(1+x^3)^2]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+(1+x^3)^2} = 1 \neq 0 = f(0,1)$$

Deduïm doncs que g **no** és contínua en $(0,1)$.

Ara estudiem la continuïtat a l'origen.

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{(y-1)(x^2+y^2)} \right| = \left| \frac{x}{y-1} \; \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{x}{y-1} \right| \longrightarrow 0, \quad \text{quan } (x,y) \to (0,0)$$

Per tant,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{(y-1)(x^2+y^2)} = 0 = g(0,0)$$

i concloem que g és contínua en $(0,0)$.

(c) Sigui $\mathbf{v} = (a,b) \neq (0,0)$. La derivada direccional de g en el punt $(0,0)$ segons la direcció del vector $\mathbf{v}$ és:

$$D_{\mathbf{v}} g(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(ta,tb) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^3a^3}{(tb-1)(t^2a^2+t^2b^2)}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^3a^3}{(tb-1)t^3(a^2+b^2)} = -\frac{a^3}{a^2+b^2}$$

Veiem que existeixen totes les derivades direccionals a l'origen i, en particular, $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -1$ i $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$. Si la funció g fós diferenciable en $(0,0)$, llavors $D_{\mathbf{v}} g(0,0) = \nabla g(0,0) \cdot (a,b) = -a$. En conseqüència, g **no** és diferenciable en $(0,0)$.

3. Considerem el sòlid $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} \; , \; \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1 \; , \; z \geq 0 \right\}$, la superfície $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x + z = 0 \; , \; \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ i la corba $C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x + z = 0 \; , \; \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \right\}$.

(a) Calculeu el volum del sòlid V.

(b) Obteniu un camp vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{l} =$Àrea$(S)$.

Indicació: useu el Teorema de Stokes.

(c) Trobeu l'àrea de S de dues maneres diferents: calculant la circulació de $\mathbf{F}$ al llarg de C i a partir de l'àrea de la projecció de S sobre el pla $z = 0$.

Resolució:

(a) Si $T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$, llavors el volumen de V és

$$I = \iiint_V \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \iint_T \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \int_0^{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}z = \iint_T \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Sigui $g \, : \, [0,1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow T$ el canvi a coordenades el·líptiques donat per $g(r,t) = (2\sqrt{2}r\cos t, 2r \sin t)$. Com que $Jg(x,y) = \begin{vmatrix} 2\sqrt{2}\cos t & -2\sqrt{2}r\sin t \\ 2\sin t & 2r\cos t \end{vmatrix} = 4\sqrt{2}r$, llavors

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \int_0^1 \left(\frac{8r^2\cos^2 t}{4} + \frac{4r^2\sin^2 t}{2} \right) 4\sqrt{2}r\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \int_0^1 8\sqrt{2}r^3 \mathrm{d}r = 4\sqrt{2}\pi$$

(b) Com que C és la vora de S, pel teorema de Stokes sabem que

$$\oint_C \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\, \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S \mathrm{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$$

D'altra banda, com que Àrea(S) $= \int_S 1\mathrm{d}S$, tindrem la igualtat de l'enunciat sempre que el camp $\mathbf{F}$ satisfaci $\mathrm{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 1$, on $\mathbf{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ és el vector normal unitari a S. Un camp $\mathbf{F}$ adient serà tal que, per exemple, $\mathrm{rot}\mathbf{F} = (\sqrt{2}, 0, 0)$.
Observem que $\mathrm{div}(\sqrt{2}, 0, 0) = 0$ i per tant existeix un potencial vectorial de $(\sqrt{2}, 0, 0)$.
Si $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, llavors

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Observem que el camp $\mathbf{F} = (0, 0, \sqrt{2}y)$ és un dels infinits camps que satisfan la condició.

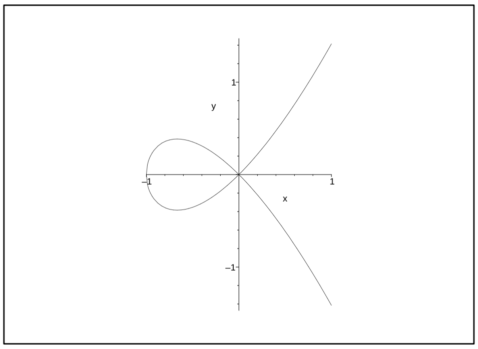
(c) i) Per calcular la circulació de $\mathbf{F}$ al llarg de C, comencem parametritzant C amb $\alpha \, : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $\alpha(t) = (2\sqrt{2}\cos t, 2\sin t, -2\sqrt{2}\cos t)$. Aleshores,

$$\oint_C \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (0, 0, 2\sqrt{2}\sin t) \cdot (-2\sqrt{2}\sin t, 2\cos t, 2\sqrt{2}\sin t) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} 8\sin^2 t \mathrm{d}t = 8\pi$$

ii) Observem que la projecció de S sobre el pla $z = 0$ és el conjunt T de l'apartat (a). D'altra banda, l'angle ϕ que formen el pla $x + z = 0$ i $z = 0$ és l'angle format pels seus vectors normals, $(1, 0, 1)$ i $(0, 0, 1)$ respectivament. Llavors, $\cos \phi = \frac{(1,0,1) \cdot (0,0,1)}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sabent que l'àrea d'una el·lipse de semieixos a i b és πab i T és la regió limitada per l'el·lipse de semieixos $2\sqrt{2}$ i 2, llavors deduïm que Àrea$(T) = (2\sqrt{2})2\pi =$Àrea$(S)\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Conclusió: Àrea(S)=8π.

4. Siguin Γ la corba d'equació $y^2 = x^3 + x^2$ i f la funció $f(x,y) = \dfrac{1}{(x + \frac{3}{4})^2 + y^2}$



(a) Donat $D = [-1, 0] \times [-1, 1]$, raoneu l'existència d'extrems absoluts de f sobre els conjunts D i $D \cap \Gamma$, i calculeu-los en cas que existeixin.

(b) Demostreu que $f(x, y) < \dfrac{16}{9}$ per a tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ amb $x > 0$.

(c) Determineu si f té màxim i mínim absoluts sobre Γ i determineu-los.

Resolució:

(a) i) *Extrems de f sobre D.*

Observem que la funció f no està definida en el punt $P = (-\frac{3}{4}, 0)$ i que $\lim_{(x,y)\to(-\frac{3}{4},0)} f(x, y) = +\infty$, per tant no existeix màxim absolut de f en D.

D'altra banda, com que $(x + \frac{3}{4})^2 + y^2$ és el quadrat de la distància d'un punt (x, y) al punt P, f assoleix el valor mínim absolut sobre D en els punts de D més allunyats de P. És immediat veure que es tracta dels punts $(0, -1)$ i $(0, 1)$ i el valor mínim és $f(0, \pm 1) = \frac{16}{25}$.

ii) *Extrems de f sobre $D \cap \Gamma$.*

f és contínua en $D \cap \Gamma$, que és un conjunt tancat i fitat, és a dir compacte. Així doncs, el Teorema de Weierstraβ ens garanteix l'existència de màxim i mínim absoluts de f sobre $D \cap \Gamma$. Per calcular-los usarem el mètode dels multiplicadors de Lagrange. Com que la corba no és regular en el punt $(0, 0)$, caldrà afegir aquest punt a la llista de candidats que obtindrem.

Sigui $g(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$. Hem de resoldre el següent sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{rcl} g(x,y) & = & 0 \\ \nabla f(x,y) & = & \lambda \cdot \nabla g(x,y) \end{array}\right\}$$

És a dir,

$$\left.\begin{array}{rcl} y^2 - x^3 - x^2 & = & 0 \\[2ex] \dfrac{-2(x+\frac{3}{4})}{[(x+\frac{3}{4})^2+y^2]^2} & = & \lambda(-3x^3 - 2x) \\[2ex] \dfrac{-2y}{[(x+\frac{3}{4})^2+y^2]^2} & = & 2\lambda y \end{array}\right\}$$

De la tercera equació obtenim $2y\left[\dfrac{1}{[(x+\frac{3}{4})^2+y^2]^2}+\lambda\right]=0$ i per tant, o bé $y=0$, o bé $\lambda=-\dfrac{1}{[(x+\frac{3}{4})^2+y^2]^2}$.
Si $y=0$, la primera equació queda $x^3+x^2=0$, d'on $x=0$ o $x=-1$.
Si $x=y=0$, la segona equació queda $\dfrac{-\frac{6}{4}}{(\frac{9}{16})^2}=0$, que no pot ser. En canvi, si $x=-1$ i $y=0$, la segona equació té solució en λ.
Si $\lambda=-\dfrac{1}{[(x+\frac{3}{4})^2+y^2]^2}$, la segona equació queda $-2(x+\frac{3}{4})=3x^3+2x$, és a dir $6x^2+8x+3=0$, que no té solucions reals.
En resum, l'únic candidat obtingut amb el mètode dels multiplicadors de Lagrange és el punt $(-1,0)$.
Finalment, avaluem la funció en els punts candidats: $f(0,0)=\frac{16}{9}$, $f(-1,0)=16$.

Conclusió: f assoleix el màxim absolut sobre $D\cap\Gamma$ en el punt $(-1,0)$ i $f(-1,0)=16$; així mateix sobre $D\cap\Gamma$ f assoleix el mínim absolut en el punt $(0,0)$ i $f(0,0)=\frac{16}{9}$.

(b) Si $x>0$, llavors $f(x,y)<\dfrac{1}{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}+y^2}<\dfrac{1}{\frac{9}{16}}=\dfrac{16}{9}$, ja que x^2, $\frac{3}{2}x$, $y^2>0$.

(c) La corba Γ no és un conjunt fitat i per tant no està garantida l'existència d'extrems absoluts de f sobre Γ.

Observem que, quan x tendeix a $+\infty$, llavors $f(x,y)$ tendeix a 0, però el valor 0 no s'assoleix mai, i per tant f no té mínim absolut sobre Γ, ja que f és sempre positiva.

D'altra banda, $f(x,y)<\frac{9}{16}$, si $x>0$ i el valor màxim de f sobre $D\cap\Gamma$ és 16, com hem vist a l'apartat (a). Per tant f sí té màxim absolut sobre Γ, que és 16 i s'assoleix en el punt $(-1,0)$.