ÍNDEX

Examen Final Gener 2007

PROBLEMA 1

Enunciat

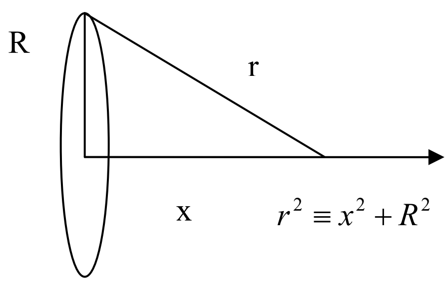
Un anell prim de radi R està uniformement carregat amb una càrrega total Q positiva.

a) Troba el potencial elèctric V(x) en un punt qualsevol de l'eix de simetria de l'anell, eix OX, considerant el centre de l'anell a l'origen de coordenades. Troba el seu valor aproximat per a x<<R, però no nul, i per a x>>R.
b) Troba el camp elèctric E(x) (mòdul, direcció i sentit) en un punt de l'eix de simetria. Troba el seu valor aproximat per a x<<R, però no nul, i per a x>>R.
c) Una carrega negativa –q de massa m es situa sobre l'eix de simetria de l'anell i molt a prop del centre, a una distancia x_1 <<R. Demostra que la càrrega farà un moviment harmònic simple, i troba'n la freqüència (recorda: per un sistema massa molla de constant K i massa m, f= $(1/2\pi)\ (K/m)^{1/2}$).
d) Quin és el treball fet pel camp elèctric que crea l'anell per portar la càrrega puntual –q d'un punt situat sobre l'eix en x>>R fins l'origen de coordenades? Indica el seu signe i justifica'l.

Solució

Dades Q,R

a)



$$V(x) = \int_{anell} dV(x) = \int_{anell} k\frac{dq}{r}$$

$$V(\infty) = 0 \Leftrightarrow k\frac{dq}{r} = dV(x)$$

$$dq = \lambda dl$$

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{Q}{2\pi R}$$

$$V(x) = \frac{k}{r}\int_{anell} dq = \frac{k}{r}Q = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$\begin{cases} \boxed{V(x)_{x<<R} \approx \frac{kQ}{R}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2\right] \approx \frac{kQ}{R}} \\ \boxed{V(x)_{x>>R} \approx \frac{kQ}{R}} \quad \textit{Com una Q puntual a x=0} \end{cases}$$

b) $\vec{E} = -gradV \Rightarrow E_x(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{kQ}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot 2x$

$$\vec{E}(x) = \frac{kQx}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{i}$$

$$\begin{cases} \boxed{\vec{E}(x)_{x<<R} \approx \frac{kQx}{R^3}\hat{i}} \\ \boxed{\vec{E}(x)_{x>>R} = \frac{kQx}{x^3}\vec{i} = \frac{kQ}{x^2}\hat{i}} \quad \textit{Com una Q puntual a x=0} \end{cases}$$

c) $x_1 << R$ $\qquad \vec{F}(x_1) = (-q)\cdot\vec{E}(x_1) = -q\frac{kQ}{R^3}x_1\hat{i} = -Kx_1\hat{i}$

k_eCom un sistema massa molla de constant $K = \frac{kQq}{R^3}$

$$\boxed{\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_eQq}{R^3m}}}$$

d) $W = \int_x^0 (-q)\vec{E}\cdot\vec{dl} = -q\left[V(x)-V(0)\right] = -q\left(+\frac{k_eQ}{x}-\frac{k_eQ}{R}\right) > 0$

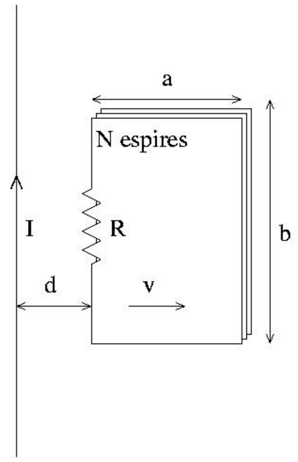
El treball fet pel camp és positiu. Com que –q és atreta per Q>0, hi va sola, no cal que nosaltres fem cap treball contra el camp per portar-li $\Leftrightarrow$ *<u>El treball fel pel camp és positiu</u>*

PROBLEMA 2

Enunciat

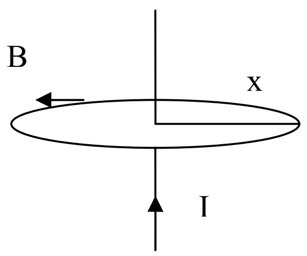
Per un fil rectilini indefinit hi circula un corrent d'intensitat I. Tenim una bobina de gruix negligible, formada per N espires rectangulars de costats a, b i resistència elèctrica R. La bobina inicialment està situada a una distància d del fil, tal i com es mostra a la figura.

a) Aplicant raonadament la llei d'Ampère, trobeu el camp que crea el fil de corrent en el "pla" de la bobina.
b) Calculeu el flux del camp magnètic en la bobina, en la posició del dibuix.
c) Si la bobina s'allunya del fil a velocitat v, calculeu la intensitat induïda que hi circula, indicant-ne el sentit.
d) En la situació anterior, calculeu la força sobre cada costat de la bobina, situada en la posició inicial, i la força total resultant. Serà atreta o repel·lida pel fil?
e) Calculeu el coeficient d'inducció mútua entre el fil i la bobina quan aquesta es troba en la posició inicial. Apliqueu el resultat per trobar la intensitat induïda en la bobina si la intensitat de corrent en el fil és I(t) = A t (on A>0) quan la bobina es manté fixa en la posició inicial.



Solució

a)

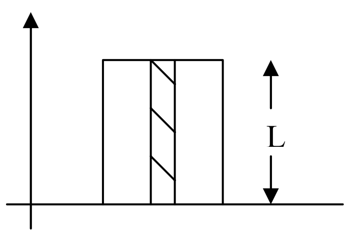


$$\oint_c \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$2\pi x B = \mu_0 I$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\left(-\hat{k}\right)}$$

b)



$$d\phi = \vec{B}d\vec{S} = Bbdx = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi x}dx$$

$$\phi = N\int d\phi = \frac{N\mu_0 Ib}{2\pi}\int_d^{d+a}\frac{dx}{x} = \frac{N\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \quad \boxed{\phi = \frac{N\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{d}\right)}$$

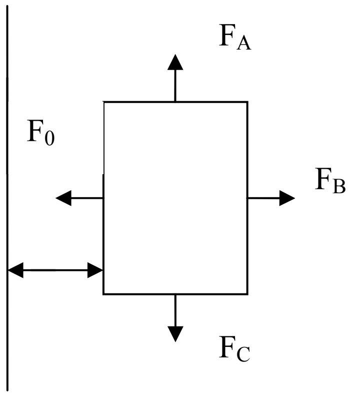
c) $\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt} \qquad I_{ind} = \dfrac{\varepsilon}{R}$

$$\phi = \frac{N\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{N\mu_0 Ib}{2\pi}\frac{\frac{-ax}{x^2}}{1+\frac{a}{x}} = -\frac{N\mu_0 Ib}{2\pi}\frac{\frac{ax}{x^2}}{\frac{x+a}{x}} = -\frac{N\mu_0 Ib}{2\pi}\frac{av}{x(x+a)}$$

$\boxed{I_{ind} = \dfrac{N\mu_0 Ibav}{2\pi Rx(x+a)}}$ *En sentit horari* $\left(\dfrac{d\phi}{dt} < 0 \Rightarrow \vec{m}_{ind} \,//\, \vec{B} \,//\, -\vec{k}\right)$

d)



$$d\vec{F} = I_{ind}d\vec{l}\times\vec{B}$$

$$I_{ind} = \frac{N\mu_0 Ibav}{2\pi Rd(d+a)} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}(-\hat{k})$$

$$dF_A = \frac{N\mu_0 Ibav}{2\pi Rd(d+a)}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}dx \Rightarrow F_A = N\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2\frac{bav}{Rd(d+a)}\int_d^{d+a}\frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\vec{F}_A = N\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2\frac{bav}{Rd(d+a)}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\hat{j}}$$

$$\boxed{\vec{F}_C = -\vec{F}_A}$$

$$\vec{F}_B = \frac{N\mu_0 Ibav}{2\pi Rd(d+a)}\cdot b\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}\hat{i}$$

$$\boxed{\vec{F}_B = N\left(\frac{\mu_0 I b}{2\pi}\right)^2 \frac{av}{Rd(d+a)^2}\hat{i}}$$

$$\vec{F}_D = -\frac{N\mu_0 I b^2 av}{2\pi R d(d+a)}\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{i}$$

$$\boxed{\vec{F}_D = -N\left(\frac{\mu_0 I b}{2\pi}\right)^2 \frac{av}{Rd^2(d+a)}\hat{i}}$$

$$\vec{F} = N\left(\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D\right) = N\left(\vec{F}_B + \vec{F}_D\right) = \left(\frac{N\mu_0 I b}{2\pi}\right)^2 \frac{av}{Rd(d+a)}\left(\frac{1}{d+a} - \frac{1}{d}\right)\hat{i}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\left(\frac{N\mu_0 I b a}{2\pi d(d+a)}\right)^2 \frac{v}{R}\hat{i}}$$

e)

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{N\mu_0 b}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

$$|\varepsilon| = M\frac{dI}{dt} = MA$$

$I = \dfrac{\varepsilon}{R} \Rightarrow$ $\boxed{I = \dfrac{N\mu_0 b A}{2\pi R}\ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right)}$ *En sentit antihorari* $(\vec{m}_{ind} // -\vec{B} // \hat{k})$

Examen Final Gener 2006

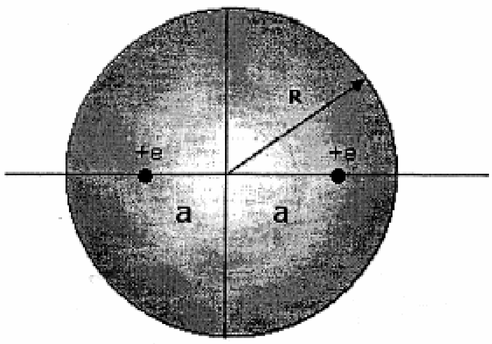
PROBLEMA 1

Enunciat

Una carga Q está uniformemente repartida en el volumen de una esfera de radio R.

a) Obtener a partir del teorema de Gauss el campo en un punto del interior y del exterior de esa esfera. (Expresarlo en función de la carga total Q de la esfera)
b) Calcular la energía de formación de esa distribución esférica. (Expresarlo en función de la carga total Q de la esfera)
c) Obtener la expresión del potencial respecto al infinito en un punto del interior. (Expresarlo en función de la carga total Q de la esfera)

Se considera un modelo de molécula de Hidrógeno al sistema formado por dos cargas puntuales de carga +e colocadas simétricamente en el interior de una esfera de radio R, que contiene una carga -2e uniformemente distribuida en todo el volumen de la misma. Los puntos donde están las cargas puntuales están situados, como se indica en la figura 1, a distancia *a* del centro.



Solució

a)

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \left(\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = cte \right)$$

Per simetria:

$$\phi = \oint_{S_{esfèrica}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_{S_{esfèrica}} E(r)\hat{r}\cdot ds\hat{r} = \oint_{S_{esfèrica}} E(r)\cdot ds = E(r)\oint_{S_{esfèrica}} ds = E(r)\cdot 4\pi r^2$$

- $r \geq R \Rightarrow Q_{\text{int}} = Q$

$$\phi = E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_e(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}}$$

- $r \leq R \Rightarrow Q_{\text{int}} = \rho V(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 R^3} r^3 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_i(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}\hat{r}}$$

b)

$$U_{esf} = \int_{r=0}^{R} \eta_E dv + \int_R^{\infty} \eta_E dv = \int_{r=0}^{R} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_i^2 dv + \int_R^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_e^2 dv =$$

$$\int_{r=0}^{R} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

$$\boxed{U_{esf} = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}}$$

c)

- r ≥ R:

$$V(r) = \int_r^{\infty} \overrightarrow{E_e}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_r^{\infty} \frac{kQ}{r^2} dr = -\frac{kQ}{r}\Big|_r^{\infty} = \frac{kQ}{r}$$

⇧

Tomando un camino radial $\overrightarrow{dl} = dr\cdot\hat{r}$

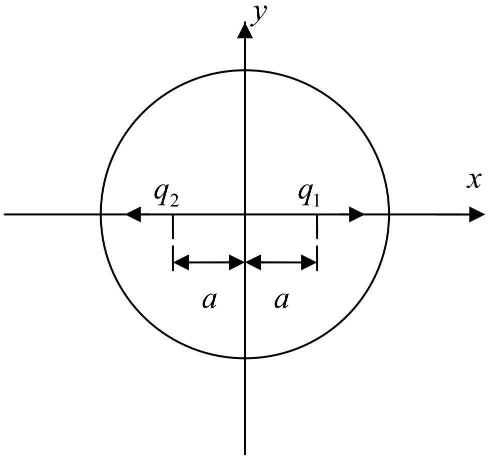
- r ≤ R:

$$V(r) = \int_r^{R} \overrightarrow{E_i}\cdot\overrightarrow{dl} + \int_R^{\infty} \overrightarrow{E_e}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_r^{R} \frac{kQ}{R^3} r dr + \int_R^{\infty} \frac{kQ}{r^2} dr = \frac{kQ}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)$$

⇧

Tomando un camino radial $\overrightarrow{dl} = dr\cdot\hat{r}$

d)



$Q=-2e$

$\vec{F}=\vec{F}_+ + \vec{F}_- \qquad \vec{F}=q_{q_1}\vec{E}_{q_1}$

$Camp\ sobre\ q_1 \rightarrow \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

$$\vec{E}_{q_1}=\vec{E}_{q2}+\vec{E}_-=\frac{k_e(+e)}{(2a)^2}\hat{i}+\frac{kQ}{R^3}r\hat{i}$$

$$Q=-2e\xrightarrow[r=a]{}\vec{E}_{q_1}=\frac{k_e e}{(2a)^2}\hat{i}-\frac{k2e}{R^3}a\hat{i}=0$$

$$\vec{E}_{q_1}=0\ \ i\ per\ simetria \Leftrightarrow \vec{E}_{q2}=0 \Rightarrow \vec{F}_{q1}=\vec{F}_{q2}=0$$

$$\frac{k_e e}{(2a)^2}=\frac{k2e}{R^3}a \Rightarrow \frac{1}{4a^3}=\frac{2}{R^3}\Rightarrow a^3=\frac{R^3}{8}\rightarrow a=\frac{R}{\sqrt[3]{8}} \qquad \boxed{a=\frac{R}{2}}$$

e) $U_{tot}=U_{esf}+q_1V_{esf}+q_2(V_{esf}+V_{q_1})$

$$\begin{cases} U_{esf}=\frac{3}{5}k_e\frac{Q^2}{R}=\frac{3}{5}k_e\frac{(-2e)^2}{R}=\frac{12}{5}\frac{k_e e^2}{R} \\ q_1V_{esf}=(+e)\frac{k_eQ}{2R^3}(3R^2-a^2)=-k_e\frac{2e^2}{2R^3}\left(3R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)=-k_e e^2\left(\frac{3}{R}-\frac{1}{4R}\right)=-\frac{11}{4}\frac{k_e e^2}{R} \\ q_2(V_{esf}+V_{q_1})=-\frac{11}{4}\frac{k_e e^2}{R}+q_2V_{q_1}=-\frac{11}{4}\frac{k_e e^2}{R}+e\frac{k_2 e}{2a}=-\frac{11}{4}\frac{k_e e^2}{R}+\frac{k_e e^2}{2\frac{R}{2}} \end{cases}$$

$$U_{tot}=\frac{12}{5}\frac{k_e e^2}{R}-2\cdot\frac{11}{4}\frac{k_e e^2}{R}+\frac{k_e e^2}{R}=\frac{k_e e^2}{R}\left(\frac{12}{5}-\frac{11}{2}+1\right)=-\frac{k_e e^2}{R}\frac{21}{10}$$

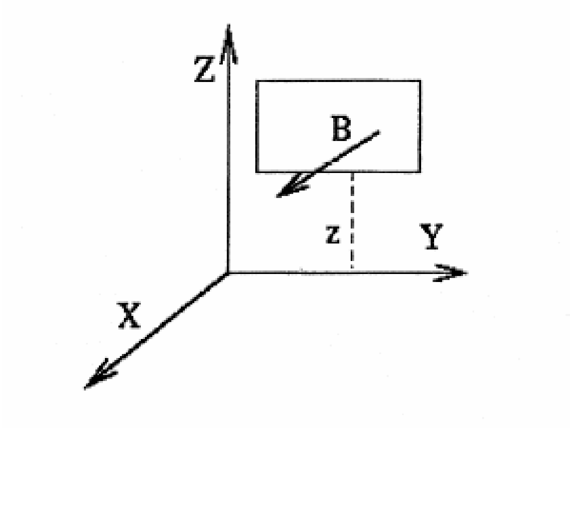
$$\boxed{U_{tot}=-\frac{21}{10}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R}}$$

PROBLEMA 2

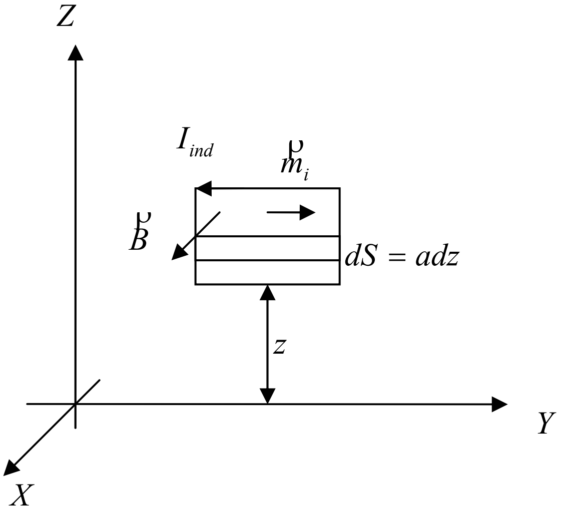
Enunciat

Una espira cuadrada, de lado *a* y resistencia *R* , se encuentra en el plano YZ, de tal manera que, en un instante dado, la posición de la espira queda definida por la coordenada z del lado inferior (que inicialmente supondremos positiva, ver figura). Sobre la espira actúa un campo magnético **B**=A z **i,** siendo A una constante positiva.

a) Expresa en función de z, el flujo del campo magnético a través de la espira. Representa gráficamente la dependencia.
b) Si la espira se está moviendo hacia abajo con una velocidad **v** =-v **k** , calcula la corriente inducida y el vector momento bipolar magnético **m** asociado a esta corriente.
c) Encuentra la expresión de la fuerza que ejercerá el campo magnético sobre cada lado de la espira, y la fuerza total.
d) ¿Cómo cambiarán los resultados de los apartados b) y c) cuando la espira se encuentre totalmente por debajo del eje Y?
e) Si la velocidad inicial de la espira es $\mathbf{v_0}$=- v_0 **k,** indica el tipo de movimiento que describirá, si la única fuerza es la debida al campo **B.**



Solució



$$z > 0$$
$$\vec{B} = B(z)\hat{i} = Az\hat{i}$$
$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = A(-v) < 0 \Rightarrow I_{ind} > 0$$

$$\vec{m}_i \,//\, \vec{B} \rightarrow \boxed{\vec{m}_i \,//\, \hat{i}}$$

a)

$$\phi = \int_{S_{espira}} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_z^{z+a} Az\hat{i}\cdot(adz)\cdot\hat{i} = Aa\int_z^{z+a} zdz = Aa\left[\frac{z^2}{2}\right]_z^{z+a} = \frac{Aa}{2}\left[(z+a)^2 - z^2\right] = \frac{Aa}{2}(a^2 + 2za) = \frac{Aa^3}{2} + Aa^2 z$$

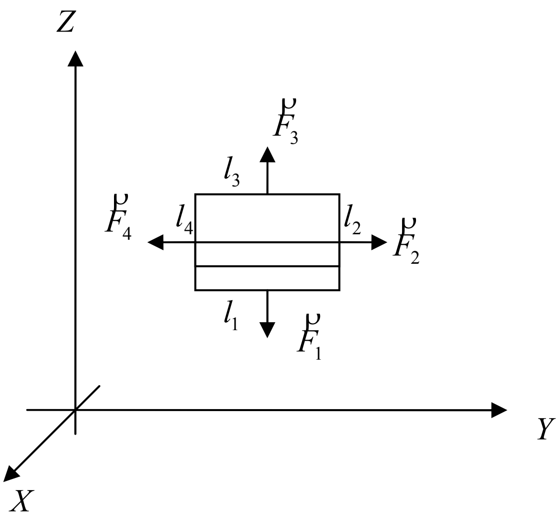
$$\boxed{\phi = \frac{1}{2}Aa^2(a+2z)}\ (Tm^2)$$

b) $\varepsilon_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{S} \Rightarrow |\varepsilon_i| = Aa^2 v$

$$\boxed{I_{ind} = \frac{\varepsilon_i}{R} = a^2\frac{Av}{R}} \Rightarrow |m_i| = I_{ind}a^2 = \frac{Av}{R}a^4$$

I_{ind} *en sentit antihorari* $\Rightarrow \vec{m}_i \,//\, \hat{i}$ $\qquad \boxed{\vec{m}_i = \frac{Av}{R}a^4\hat{i}}$

c)



$I = a^2\frac{Av}{R}$

$\vec{B} = Az\hat{i}$

$\vec{F}_i = I\vec{l}_i \times \vec{B}$

$$\vec{F}_1 = Il_1\hat{j}\times Az\hat{i} = IaAz(-\hat{k}) = \frac{A^2 v}{R}a^3 z(-\hat{k})$$

$$\vec{F}_3 = Il_3(-\hat{j})\times A(z+a)\hat{i} = IaA(z+a)\hat{k} = \frac{A^2 v}{R}a^3(z+a)\hat{k}$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_4 = \int_z^{z+a} I dl_2 \hat{k} \times Az\hat{i} = \int_z^{z+a} IAzdz\hat{j} = IA\left[\frac{z^2}{2}\right]_z^{z+a} \hat{j} = a^2 \frac{A^2 v}{2R}\left[(z+a)^2 - z^2\right]\hat{j} =$$

$$= a^2 \frac{A^2 v}{2R}(a^2 + 2az)\hat{j} = a^3 \frac{A^2 v}{2R}(a+2z)\hat{j}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \frac{A^2 v}{R} a^4 \hat{k}}$$

d) $\vec{B} = A(-z)\hat{i}$ $\qquad \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial(-z)} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial z} < 0$ $\qquad$ *Si l'espira baixa* $\Rightarrow z \downarrow$ *i* $|\vec{B}| \uparrow$

- *Suposant* ϕ *positiva quan* $\vec{B} // \hat{i}$ $(B_x > 0)$, *el flux continua disminuint* $\Rightarrow$ *el sentit del corrent serà el mateix*
- *Si* B_x *és ara negativa, el sentit de les forces canviarà però* $\vec{F}_4 + \vec{F}_2$ *encara és* $\vec{0}$ *i ara* $F_{1y} > F_{3y}$ $\Rightarrow$ *la força total és la mateixa*

e) *Observem que* $\vec{F} = \dfrac{Aa^3}{R} v\hat{k}$ $\Rightarrow$ *el moviment és el d'una partícula que es mou amb una força de fregament viscós* $\Rightarrow$ *v(t) decau exponencialment.*

Examen Final Juny 2005

PROBLEMA 1

Enunciat

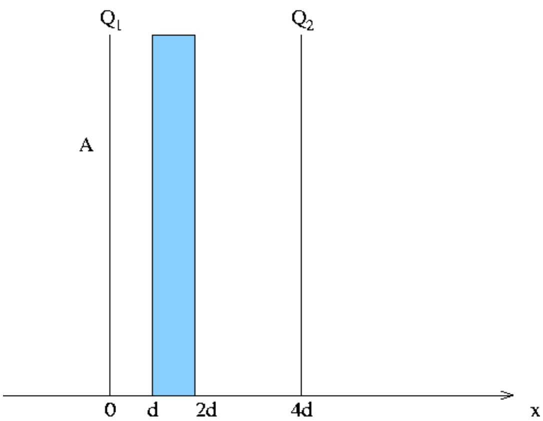
$k_e = 9 \cdot 10^9$ (S.I.) $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (S.I.)

1.- Dues làmines conductores de gruix negligible i àrea A=1,0 m^2 estan separades una distància 4d (d=1,0 mm), al mig s'hi troba una placa **conductora sesnse càrrega**, de gruix d, situada a una distància d de la primera. La làmina de l'esquerra té una càrrega Q_1= 20 μC i la de la dreta una Q_2= -10 μC.

a) Calculeu i representeu gràficament el camp elèctric en funció de x, per a qualsevol punt: x<0, 0<x<d, d<x<2d, 2d<x<4d, x>4d. (Considereu les làmines com a plans infinits).

b) Trobeu la distribució de càrrega a la placa del mig.

c) Calculeu i representeu el potencial elèctric, V(x). Agafeu com a origen de potencial la làmina de l'esquerra. (V(x=0)=0).

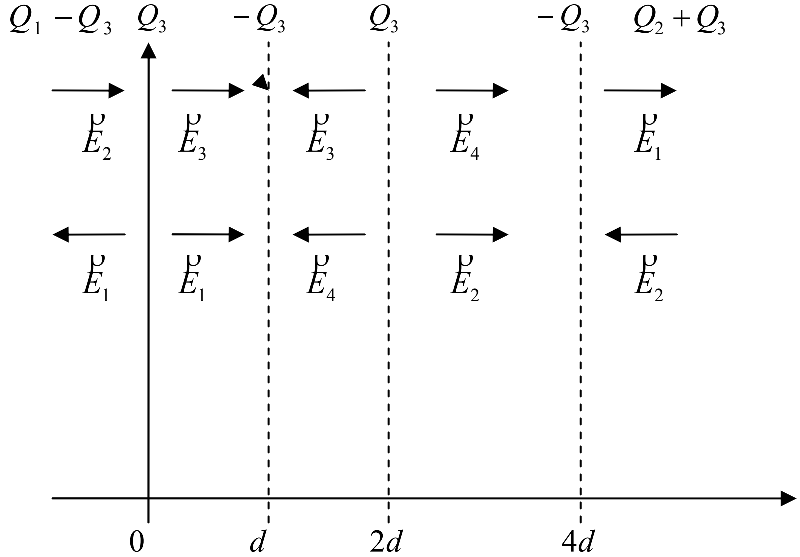


Si ara carreguem la placa conductora central amb una càrrega Q_3=10 μC:

d) Repetiu els apartats a), b).

e) Trobeu la densitat d'energia entre x=0, x=4d en aquest últim cas.

Solució



$Q_1 > 0$

$Q_2 < 0$

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{S} < 0$$

$$\sigma_3 = \frac{Q_3}{S}$$

a) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$

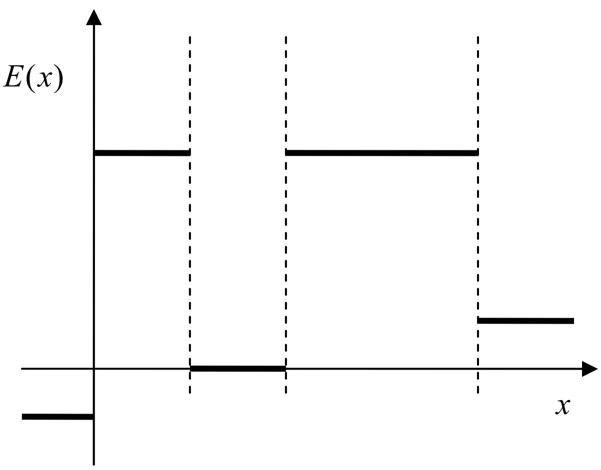
$x < 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{-\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\hat{i} = \frac{-5}{\varepsilon_0}\hat{i}}$

$0 < x < d \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\hat{i} = \frac{15}{\varepsilon_0}\hat{i}}$

$d < x < 2d \Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0}$

$2d < x < 4d \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\hat{i} = \frac{15}{\varepsilon_0}\hat{i}}$

$x > 4d \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma_1 - |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\hat{i} = \frac{5}{\varepsilon_0}\hat{i}}$



b) $\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{i}$ $\quad \vec{E}_2 = \frac{-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{i}$ $\quad \vec{E}_3 = \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}(-\hat{i})$ $\quad |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4|$

En el conductor $\vec{E} = 0$

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_3|}{2\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \quad \boxed{|\sigma_3| = \sigma_1 + |\sigma_2| = 30\mu C}$$

c) $V(x = 0) = 0$

$$x < 0 \Rightarrow V(x) = -\int_0^x -\frac{5}{\varepsilon_0}dx = \frac{5}{\varepsilon_0}x$$

$$0 < x < d \Rightarrow \quad V(x) = -\int_0^x \frac{15}{\varepsilon_0}dx = -\frac{15}{\varepsilon_0}x \qquad V(d) = -\frac{15}{\varepsilon_0}d$$

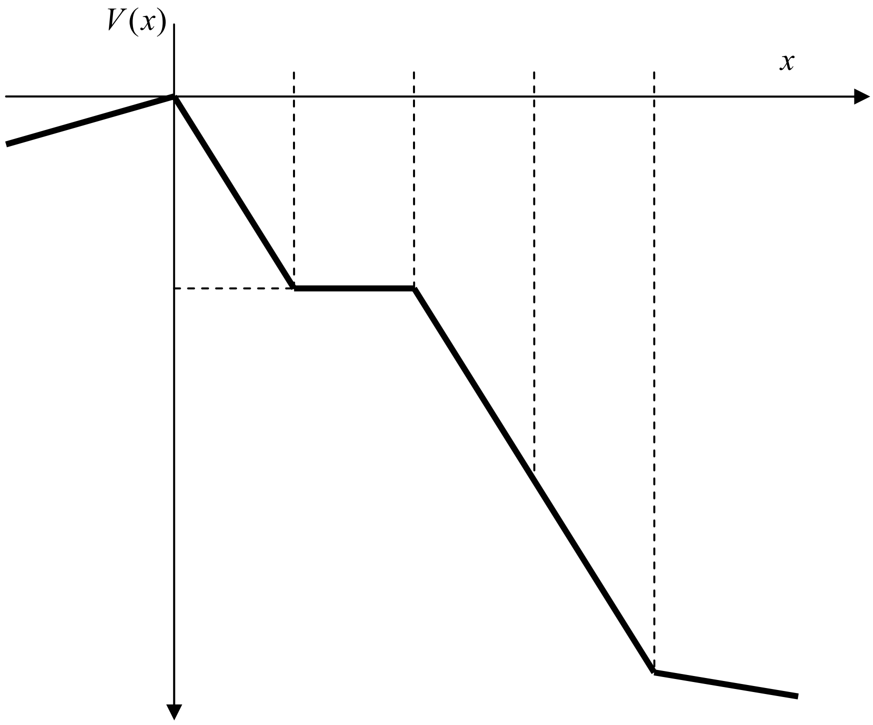
$$d < x < 2d \Rightarrow \; V(x) = V(d) = -\frac{15}{\varepsilon_0} d \qquad V(2d) = -\frac{15}{\varepsilon_0} d$$

$$2d < x < 4d \Rightarrow V(x) = -\int_{2d}^{x} \frac{15}{\varepsilon_0} dx + V(2d) = -\frac{15}{\varepsilon_0}(x-2d) - \frac{15}{\varepsilon_0} d = -\frac{15}{\varepsilon_0} x + \frac{15}{\varepsilon_0} d$$

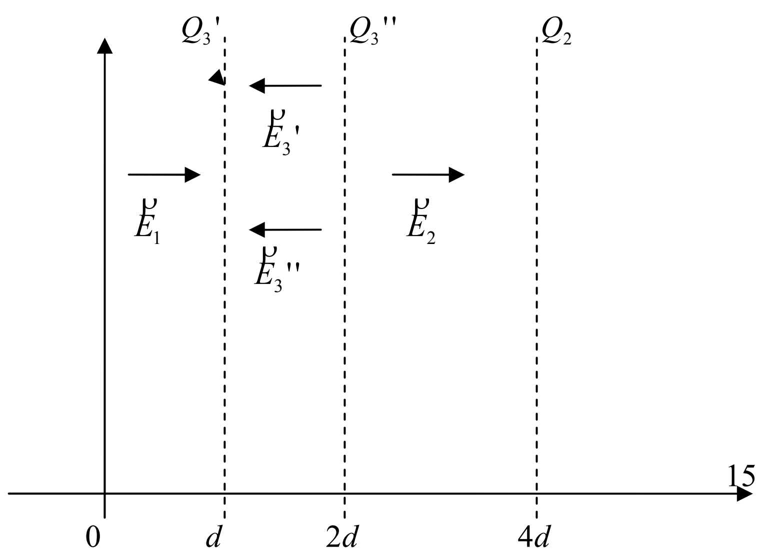
$$V(4d) = -\frac{15}{\varepsilon_0} 3d$$

$$V(x) - V(4d) = -\int_{4d}^{x} \frac{5}{\varepsilon_0} dx = -\frac{5}{\varepsilon_0}(x-4d)$$

$$V(x) = -\frac{5}{\varepsilon_0} x + \frac{5}{\varepsilon_0} 4d - \frac{15}{\varepsilon_0} 3d = -\frac{5}{\varepsilon_0} x - \frac{25}{\varepsilon_0} d$$



d) $Q_3'' = 10\mu C$



$$Q_3'+Q_3''=Q_3^n \rightarrow \sigma_3'+\sigma_3''=\sigma_3^n = 10\,\mu C/m^2$$

$$\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3'+\vec{E}_3''=0 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0}-\frac{|\sigma_3'|}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3''}{2\varepsilon_0}=0$$

$$\sigma_1+|\sigma_2|-|\sigma_3'|-\sigma_3^n+\sigma_3'=0 \rightarrow \sigma_3'=-|\sigma_3'|$$

$$\sigma_1+|\sigma_2|-2|\sigma_3'|-\sigma_3^n=0$$

$$|\sigma_3'|=\frac{\sigma_1+|\sigma_2|-\sigma_3^n}{2}=10\,\mu C/m^2$$

$$\sigma_3'=-10\,\mu C/m^2 \quad \text{i} \quad \sigma_3''=20\,\mu C/m^2$$

Repetir-ho

Nota: $||A|-|B|| \leq |A+B| \leq |A|+|B|$

PROBLEMA 2

Enunciat

Se construye un solenoide sobre un tubo, cuyo eje es el eje “x”, con una longitud L=25 cm y de radio R_1 = 4,0 cm, formando un arrollamiento de N_1 = 400 vueltas, (a efectos de cálculo puede suponer L >> R_1). Por el solenoide circula una corriente I_1 en el sentido que llamaremos positivo: cuando vemos el solenoide desde la izquierda (x<0) el sentido de giro es el antihorario.

a) Calcular, razonando cada paso y explicando las aproximaciones que realiza, el campo magnético **B** en el interior del solenoide.

En el interior del solenoide, en su parte central, se coloca una pequeña bobina formada por N_2 = 50 espiras circulares de radio R_2 = 1,0 cm y con su eje coincidente con el eje del solenoide. Puede considerarse que las espiras están todas ellas unas sobre otras, de forma que la bobina tiene una longitud despreciable. Esta bobina está conectada a un circuito exterior, con una resistencia total r = 5,0 Ω.

b) Calcular el flujo de campo magnético ϕ_B creado en esta segunda bobina debido al solenoide. Obtener el coeficiente de inducción mutua M_{12} del solenoide sobre la bobina.

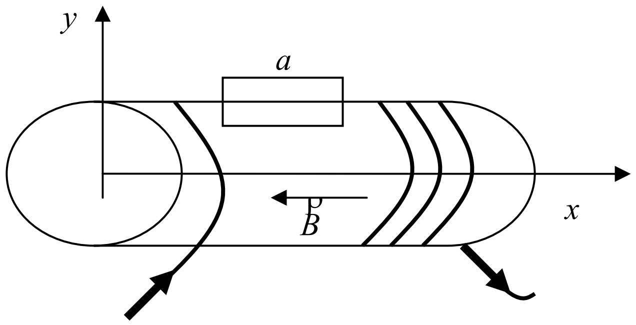
A partir de ahora, por el solenoide se hace circular una corriente alterna: $I_1 = I_0 \cos(\omega t)$, siendo I_0 = 100 mA y ω = 5000 rad/s.

c) Calcular la f.e.m. inducida $\varepsilon_{ind}(t)$ en la bobina.

d) Calcular la corriente inducida i_{ind} en la bobina indicando su sentido, tanto cuando la corriente I_1 crece como cuando decrece. Obtener los valores máximos de i_{ind}. Representar en función de t, tanto la corriente I_1 como la corriente inducida i_{ind} , a lo largo de un periodo.

e) La f.e.m. generada en la bobina está creada por un campo eléctrico no conservativo debido al campo magnético variable del solenoide. Calcular dicho campo eléctrico E_{ind}, razonar sobre su dirección y sentido, y obtener su dependencia con la distancia ρ al eje del solenoide.

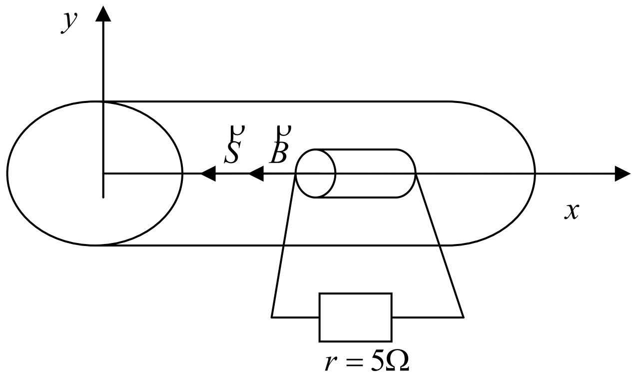
Solució



a) $B = ?$ $\quad L >> R_1$

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = Ba = \mu_0 \frac{N_1}{L} a I_1 \rightarrow \boxed{B = \mu_0 \frac{N_1}{L} a I_1} \text{ (T)}$$

b)



$$\phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = B_1 N_2 S$$

$$\vec{B}_1 = B_1(-\vec{i}) \quad \text{i} \quad \vec{S} = S(-\vec{i})$$

$$\boxed{\phi_{21} = Ba = \mu_0 \frac{N_1}{L} N_2 \pi R_2^{\ 2} I_1} \text{ (Wb)}$$

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1} \rightarrow \boxed{M_{21} = Ba = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi R_2^{\ 2}} \text{ (H)}$$

c) $I_1 = I_0 \cos wt$

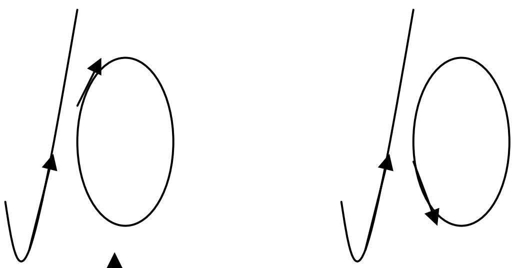
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad \phi_B(t) = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi R_2^2 w I_0 \cos wt$$

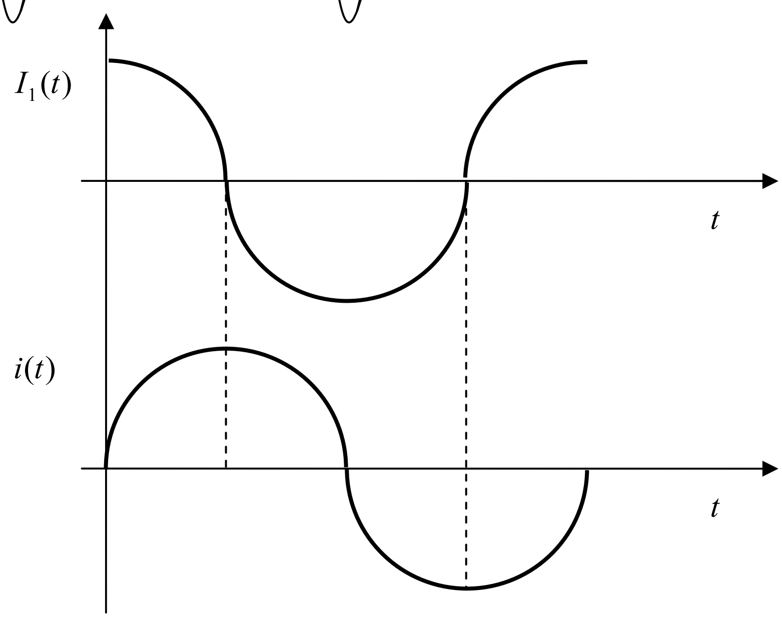
$$\varepsilon(t) = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi R_2^2 w I_0 \Delta m w t = \varepsilon_0 \Delta m w t$$

d) $i(t) = \dfrac{\varepsilon(t)}{r} \rightarrow i(t) = \dfrac{\varepsilon_0}{r} \Delta m w t$

$$\boxed{i_0 = \frac{\mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi R_2^2 w I_0}{r}}$$

$i(t) \rightarrow$ Si $\dfrac{dI_1}{dt} < 0$: Si $\dfrac{dI_1}{dt} > 0$:





e)

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad \varepsilon(t) = \int_c \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- $\rho = R_2$

$$E(t) \cdot 2\pi\rho = \frac{\varepsilon_0}{N_2} \Delta m w t$$

$E(t) = \dfrac{\varepsilon_0 / N_2}{2\pi\rho} \Delta m w t$ *Mateixa direcció i sentit que* $i(t)$

La $i(t)$ *mesurada és degut a aquest camp.*

En funció de ρ *:*

- $\rho < R_1$

$$\varepsilon(\rho,t) = \mu_0 \frac{N_1}{L} \pi\rho^2 wI_0 \Delta mwt$$

$$E(\rho,t) = \mu_0 \frac{N_1}{L} \pi\rho^2 wI_0 \Delta mwt \Big/ 2\pi\rho = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N_1}{L} \rho wI_0 \Delta mwt$$

- $\rho > R_1$

$$\varepsilon(\rho,t) = \mu_0 \frac{N_1}{L} \pi R_1^{\ 2} wI_0 \Delta mwt$$

$$E(\rho,t) = \mu_0 \frac{N_1}{L} \pi R_1^{\ 2} wI_0 \Delta mwt \Big/ 2\pi\rho = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N_1}{L} \pi R_1^{\ 2} wI_0 \frac{\Delta mwt}{\rho}$$

Examen Final Gener 2005

PROBLEMA 1

Enunciat

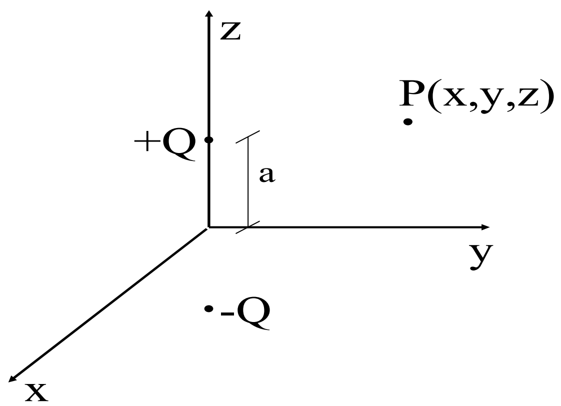
Una lámina conductora se coloca en el plano z=0 conectada a un potencial V= 0V, siendo éste el potencial del infinito. Frente a la lámina conductora en el punto (0,0,a), siendo a mucho menor que cualquiera de las dimensiones de la lámina (que se puede considerar infinita), se coloca una carga puntual Q. Se puede demostrar que el potencial electrostático que crea este sistema en cualquier punto con z>0 es el mismo que se tendría si sustituyésemos la lámina conductora por una carga de valor –Q. (carga imagen), situada en el punto (0,0,-a).

a) Exprese el potencial que crearía la carga Q y su imagen en un punto genérico de coordenadas (x,y,z).
b) Compruebe que el potencial y el campo eléctrico que crearía este sistema de dos cargas, cumplen las propiedades que deberían tener en la superficie de la lámina conductora en z=0.
Aplicando la equivalencia entre las dos distribuciones:
c) Exprese la energía de formación del sistema lámina-carga.
d) Deduzca la expresión del campo eléctrico que crearía el sistema lámina- carga puntual en z=0.
e) Exprese la densidad de carga superficial en función de las coordenadas (x,y) del plano z=0.
f) Demuestre que la carga total de la lámina es –Q.

Ayuda para obtener la carga total de la lámina: note que la densidad de carga sólo depende de la distancia ρ al eje Z (donde $\rho=(x^2 + y^2)^{1/2}$).

Solució

a)



Per superposició: el potencial electroestátic és la suma dels potencials creats per les càrregues Q i –Q:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-a\right)^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z+a\right)^2}} + C,$$

(on C és una constant)

b) *Si V=0 en el pla z=0 i a l'infinit, ha de ser C=0.*
Com que aquest pla és equipotencial, el camp elèctric ha de ser perpendicular al pla z=0, Com també ho ha de ser pel fet de ser a la superfície d'un conductor, per tant els dos sistemes (càrrega Q i pla conductor), (càrrega Q, càrrega –Q) són equivalents, pel que fa al camp i potencial creats en els punts z=0, z>0.

c) *Ja que són equivalents, ho trobarem en el sistema més senzill de dues càrregues puntuals,* $-Q, Q$. *El treball que cal fer per portar les càrregues de l'infinit a les seves posicions finals és:*

$$W_{-Q} = 0$$

$$W_Q = +QV_{-Q}\left(0,0,a\right) = Q\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 2a} = \frac{-Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

d) *Podem trobar el camp* $\mathbf{E}$ *de dues maneres diferents:*

1) $\mathbf{E} = -\nabla V$
2) $\mathbf{E} = \mathbf{E}_Q + \mathbf{E}_{-Q}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left(x^2+y^2+\left(z-a\right)^2\right)^{3/2}}\left(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\left(z-a\right)\mathbf{k}\right) +$$
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{\left(x^2+y^2+\left(z+a\right)^2\right)^{3/2}}\left(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\left(z+a\right)\mathbf{k}\right)$$

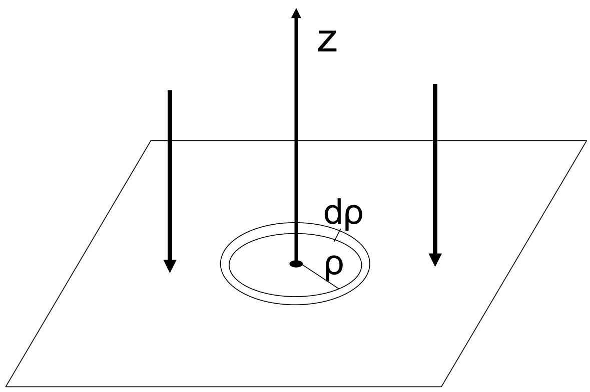
A z=0 $$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{-Qa\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}$$

que és perpendicular al pla z=0 com ja sabíem.

e*) A la superfície d'un conductor es verifica*

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{n}$$ *, on per* $z>0$ $\mathbf{n}=\mathbf{k}$

La densitat superficial de càrrega és



$$\sigma(x,y)=\frac{-Qa}{2\pi\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}$$

f) *La càrrega total del plà* $Q_P=\int_{plano}\sigma dS$

ja que σ *depèn de* x^2+y^2*, que és el quadrat de la distància a l'eix z,* $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ *,*
els elements de superfície convenients són anells prims de radi ρ, de gruix d ρ,
$dS=2\pi\rho d\rho$

$$Q_P=\int_{\rho=0}^{\rho=\infty}\frac{-Qa}{2\pi\left(\rho^2+a^2\right)^{3/2}}2\pi\rho d\rho=\left.\frac{+Qa}{\left(\rho^2+a^2\right)^{1/2}}\right]_{\rho=0}^{\rho=\infty}=0-\frac{Qa}{\left(0+a^2\right)^{1/2}}=-Q$$

PROBLEMA2

Enunciat

Per un conductor cilíndric massís molt llarg de radi R hi passa un corrent de intensitat total I que està distribuït uniformement en tota la secció transversal del conductor.
a)Calculeu el vector densitat de corrent j en els punts interiors (r<R) del conductor.

b) Calculeu el vector camp magnètic B en els punts situats a distància r<R de l'eix del conductor.
c) Calculeu el flux magnètic per unitat de longitud a través de la superfície indicada a la figura 1.
d)Calculeu la densitat d'energia magnètica dins el conductor i l'energia emmagatzemada per unitat de longitud dintre del conductor.
Suposem que per defecte de fabricació el conductor té un petit forat de radi r_0 al llarg del conductor, situat en el punt que indica la figura 2.
e) Apliqueu el principi de superposició (el forat es pot considerar un conductor recorregut per un corrent de sentit contrari al que circula pel conductor massís) per calcular i dibuixar el vector camp magnètic B que crea el conductor defectuós en els punts O i P de la figura 2. Suposeu que el corrent real surt del pla del paper.
f) Calculeu la força que actuarà sobre una partícula carregada q que arriba al punt P amb una velocitat v=-v_0 i m/s.

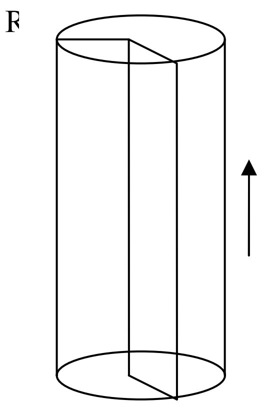


Figura 1

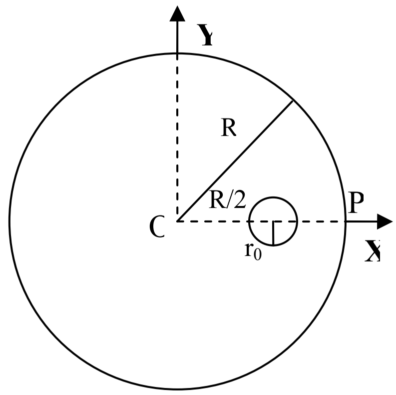
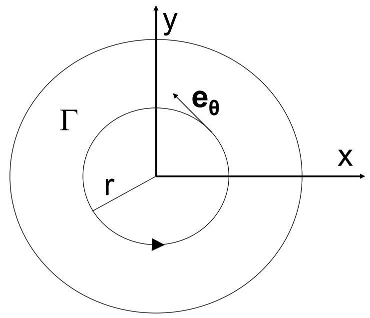


Figura 2

Solució

a) $\mathbf{j} = \dfrac{I}{\pi R^2}\mathbf{k}$



b)*Per simetria, les línies de camp són circumferències en plans perpendiculars al conductor.*

Si apliquem la Llei d'Ampère a un camí tancat tal com l'indicat a la figura, prenent el sentit de la circulació en el mateix sentit del camp:

$$\int_\Gamma \mathbf{B}\cdot\mathbf{dl} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{dS} \qquad \text{on } \mathbf{dS} = dS\mathbf{k}\ .$$

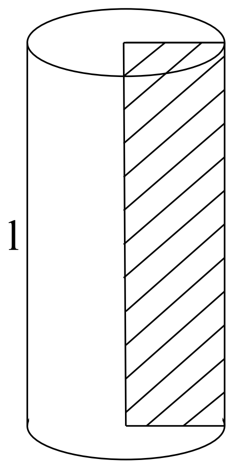
Com que el mòdul del camp és el mateix en tots els punts del camí, tenim

$$\int_\Gamma \mathbf{B}\cdot\mathbf{dl} = \int_\Gamma B d\mathrm{l} = B\int_\Gamma d\mathrm{l} = B2\pi r$$

$$\mu_0 \int_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{dS} = \mu_0 \int_S \frac{I}{\pi R^2} dS = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2}\pi r^2$$

Per tant a l'interior, $\mathbf{B} = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi R^2} r\mathbf{e}_\theta$, $r<R$

c)



$$\phi_M = \int \mathbf{B}\cdot\mathbf{dS} = \int BdS$$

ja que $\mathbf{dS} = dS\mathbf{e_\theta}$ *.Com que el camp només depèn de r, considerem elements de superfície de la forma* $dS = 1dr$ *, on* 1 *és la longitud del conductor*

$$\phi_M = \int_{r=0}^{r=R} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r 1\, dr = \mu_0 \frac{I}{4\pi} \;\Rightarrow\; \frac{\phi_M}{1} = \mu_0 \frac{I}{4\pi}$$

d) *La densitat d'energia magnètica* η

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{I^2}{4\pi^2 R^4} r^2$$

L'energia magnètica U *emmagatzemada a l'interior del conductor*

$$U = \int_{\substack{\text{interior}\\ \text{conductor}}} \eta \mathrm{dVol}$$

on η *només depèn de r: podem considerar elements de volum com anells cilíndrics de gruix dr:* $dVol = 2\pi r 1\, dr$ *,*

$$U = \int_{r=0}^{r=R} \frac{1}{2}\mu_0 \frac{I^2}{4\pi^2 R^4} r^2 2\pi r 1\, dr = \frac{1}{16}\mu_0 I^2 \frac{1}{\pi} \;\Rightarrow\; \frac{U}{1} = \frac{1}{16}\mu_0 \frac{I^2}{\pi}$$

e) *Per superposició:*

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_H + \mathbf{B}_A$

$\mathbf{B}_H =$ Camp creat pel fil massís

$\mathbf{B}_A =$ Camp que crearia un corrent que anés pel forat en sentit contrari al del fil massís,

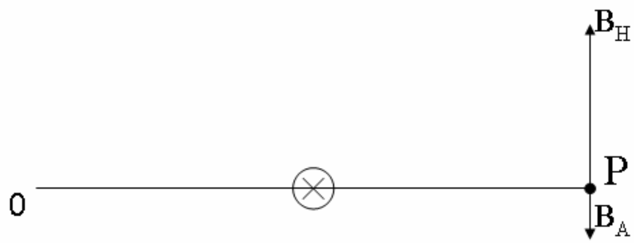
$I_A = \dfrac{I}{\pi R^2}\pi r_0^2 = \dfrac{I}{R^2} r_0^2$, cap a dins del pla del paper

<u>En 0</u> : $\mathbf{B}_H = 0$

$\mathbf{B}_A$ és el camp creat per I_A en un punt de l'exterior

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_A = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_A}{R/2}\mathbf{j} = \mu_0 \frac{I r_0^2}{\pi R^3}\mathbf{j}$$

<u>En P</u> :



$$\mathbf{B}_H = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{B}_A = \mu_0 \frac{I_A}{2\pi \frac{R}{2}}(-\mathbf{j}) = \mu_0 \frac{I r_0^2}{\pi R^3}(-\mathbf{j})$$

$$\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{1}{2r} - \frac{r_0^2}{R^3}\right)\mathbf{j}$$

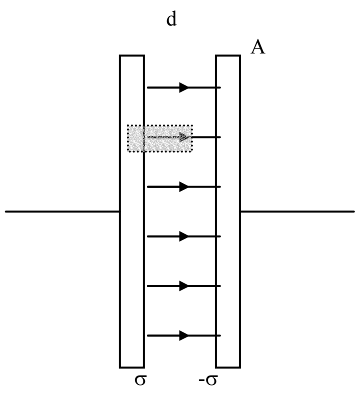
f) $\mathbf{F} = -q v_0 \mathbf{i} \wedge \mathbf{B}_P = -q\frac{v_0 \mu_0 I}{\pi}\left(\frac{1}{2R} - \frac{r_0^2}{R^3}\right)\mathbf{k}$

Examen Final Juny 2004

PROBLEMA 1

Enunciat

Dos condensadores planos están conectados en paralelo a una fuente de tensión V=50V. El condensador C_1 tiene una superficie A_1=2,0cm^2 y una separación entre placas d_1=0,50mm, mientras que el otro condensador tiene A_2=4,0cm^2 y d_2=1,00mm. Ambos condensadores no contienen ningún dieléctrico (vacío).
a) Obtenga razonadamente la relación entre carga eléctrica de cada placa y el valor de la diferencia de potencial entre placas para un condensador plano.
b) Calcule, para cada condensador, el valor del campo eléctrico E_1 y E_2, el valor de las capacidades C_1 y C_2, así como de las cargas Q_1 y Q_2.
c) Calcule la energía almacenada en cada condensador.
d) Se separa el conjunto de los 2 condensadores de la fuente de tensión, pero se sigue manteniendo las conexiones entre ambos condensadores, que siguen estando en paralelo. Se introduce en el condensador C_1 un dieléctrico de permitividad dieléctrica ε_{r1}=5.
e) Calcule, para cada condensador, los nuevos valores de los campos eléctricos E'_1 y E'_2, así como de las cargas Q'_1 y Q'_2.
f) Calcule las diferencias de potencial V'_1 y V'_2 sobre cada condensador.



Solució

a) *Si d és d'un valor molt petit comparat amb les dimensions de les plaques, podem considerar aquestes com a plans indefinits. En aquesta simetria, la carrega es repartirà de manera uniforme i podem considerar que el camp elèctric és uniforme a l'espai entre les plaques. Aplicant Gauss a la superfície d'un cilindre. El camp elèctric a la superfície d'un conductor qualsevol és* $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. *Es calcula la circulació del camp entre les dues plaques:*

$$\mathrm{V} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathrm{Edl} = \mathrm{E}\int \mathrm{dl} = \mathrm{Ed} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathrm{d} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{A}} \Rightarrow \mathrm{C} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{d}}$$

b)

$$\mathrm{V} = \mathrm{Ed} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{E}_1 = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{d}_1} & \mathrm{E}_1 = 100\mathrm{KV/m} \\ \mathrm{E}_2 = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{d}_2} & \mathrm{E}_2 = 50\mathrm{KV/m} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Q} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{V} \\ \mathrm{C} = \varepsilon_0 \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{d}} \\ \mathrm{A}_2 = 2\mathrm{A}_1 \\ \mathrm{d}_2 = 2\mathrm{d}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2 = 3{,}54\mathrm{pF} \\ \mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_2 = 177\mathrm{pC} \end{cases} \quad \text{ó} \quad \mathrm{Q} = \mathrm{A} \cdot \varepsilon_0 \mathrm{E} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Q}_1 = \mathrm{A}_1 \cdot \varepsilon_0 \mathrm{E}_1 & \mathrm{Q}_1 = 177\mathrm{pC} \\ \mathrm{Q}_2 = \mathrm{A}_2 \cdot \varepsilon_0 \mathrm{E}_2 & \mathrm{Q}_2 = 177\mathrm{pC} \end{cases}$$

c) $\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Q\,V} = 4{,}42\ \mathrm{nJ}$

d) *Com que els condensadors es mantenen en paral·lel, la diferència de potencial V' és la mateixa en els dos, però és diferent a l'anterior ja que la capacitat equivalent del sistema ha canviat* $(C'_1 \neq C_1, C'_2 = C_2)$. *La càrrega de cada condensador serà diferent a la d'abans* $Q'_1 \neq Q_1, Q'_2 \neq Q_2$ *però la suma de les dues es mantindrà,* $Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$.

$$C_1' = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{A_1}{d_1} = 5C_1 = 5C_2$$
$$V' = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{Q_1'}{C_1'} = \frac{Q_1'}{5C_2} \Rightarrow Q_1' = 5Q_2'$$

ó

$$\left.\begin{array}{l} E_1'd_1 = E_2'd_2 = V' \Rightarrow E_1' = 2E_2' \\ E_1' = \dfrac{Q_1'}{\varepsilon_0\varepsilon_r A_1} \\ E_2' = \dfrac{Q_2'}{\varepsilon_0 A_2} \end{array}\right\} \Rightarrow Q_1' = \varepsilon_r \frac{A_1}{A_2}\frac{d_2}{d_1} Q_2' = 5Q_2'$$

$$\left.\begin{array}{c} Q_1' = 5Q_2' \\ Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 = 2Q_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} Q_1' = \dfrac{5}{3}Q_1 & Q_1' = 295\text{pC} \\ Q_2' = \dfrac{1}{3}Q_1 & Q_2' = 59\text{pC} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E_1' = \dfrac{Q_1'}{\varepsilon_0\varepsilon_r A_1} = 33{,}3\text{KV/m} \\ E_2' = \dfrac{E_1'}{2} = \dfrac{Q_2'}{\varepsilon_0 A_2} = 16{,}7\text{KV/m} \end{array}\right.$$

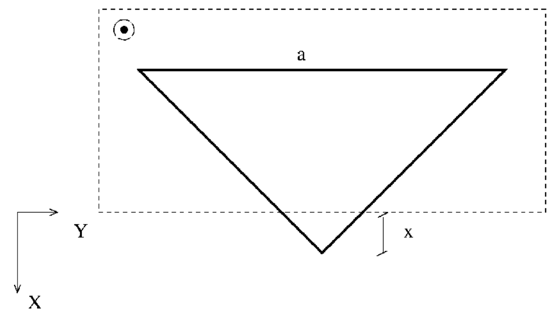
e) $E_1'd_1 = E_2'd_2 = V' \Rightarrow V' = 16{,}7\text{V}$

PROBLEMA 2

Enunciat

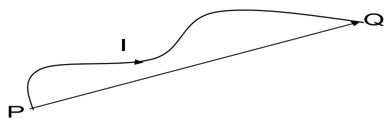
Una espira tiene forma de triángulo rectángulo isósceles y está introducida parcialmente en una zona rectangular donde existe un campo magnético uniforme $B = B_0\,k$. La posición de la espira triangular es la indicada en la figura, siendo a el valor de la hipotenusa y x la abcisa del vértice del ángulo recto.

a) Si por la espira circulase una intensidad I en contra de las agujas del reloj, exprese en función de a, x, I y B_0, la fuerza que actuaría sobre la espira (indicar módulo, dirección y sentido).
b) Considerar ahora que por la espira no circula ninguna corriente. Exprese en función de a, x, y B_0 el flujo magnético que atraviesa la espira debida al campo magnético B.
c) Si en esa posición la espira se desplazase hacia las "x" positivas con velocidad v, calcule la fuerza electromotriz inducida e indique con un dibujo cuál sería el sentido de la corriente inducida.
d) Si la resistencia de la espira fuese R, obtenga la expresión (en función de a, x, v y B_0) de la fuerza que deberíamos hacer para que la espira no variase su velocidad.



Solució

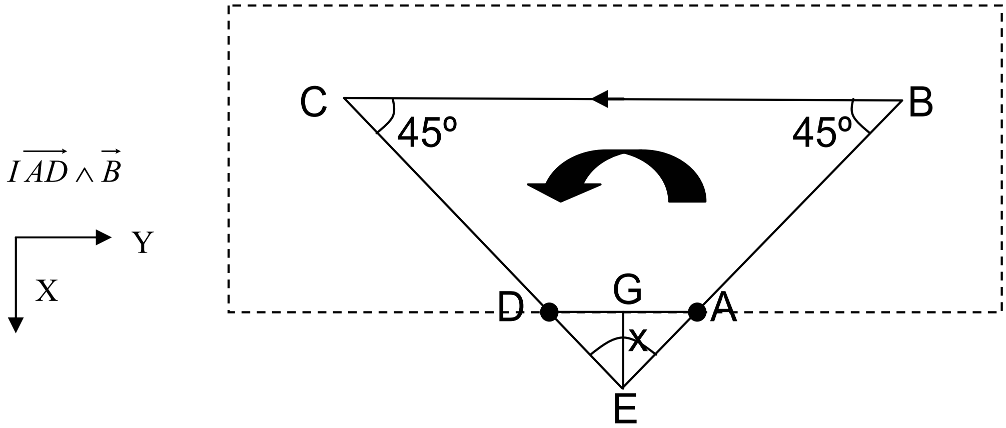
a) *La força que actua sobre un tram de corrent situat en un camp magnètic uniforme B val*



$$\overrightarrow{F_{PQ}} = I\,\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{B}$$

Sobre l'espira actuarà una força $\overrightarrow{Fe} = I\,\overrightarrow{AD} \wedge \vec{B}$

$\vec{F} = I\,\overrightarrow{AD} \wedge \vec{B}$



Per a buscar AD, observem que al triangle rectangle isòsceles CEB, els angles $\hat{C}$ *i* $\hat{B}$ *han de ser de 45º. Al triangle petit els angles* $\hat{D}$ *i* $\hat{A}$ *també seran de 45º.*

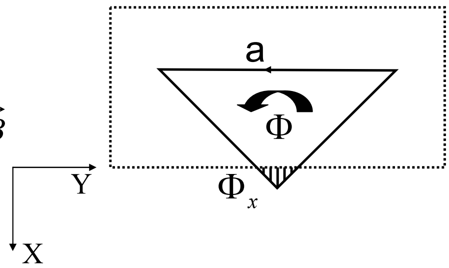
$$tg\hat{D} = tg45^{\circ} = 1 = \frac{GE}{DG} = \frac{x}{DG} \Rightarrow DG = x\,.$$

$$\overrightarrow{AD} = \ \ 2x\hat{j}$$

$$\overrightarrow{F_E} = I\left(\ \ 2x\hat{j}\right) \wedge B_0\hat{k} = \ \ 2xIB_0\hat{i}$$

.

b) *Escollim* $\overrightarrow{dS} = dS\hat{k}$ *. D'aquesta manera el vector* $\overrightarrow{dS}$ *i* $\vec{B}$ *són paral·lels.*
En aquestes condicions, ja que el camp és uniforme:
(l'alçada del triangle és a/2)



-

$$x < 0. \rightarrow \Phi = \Phi_T = \frac{a\frac{a}{2}}{2}B_0 = \frac{a^2}{4}B_0$$

- $$0 < x < \frac{a}{2}. \rightarrow \Phi = \Phi_T - \Phi_x$$

  $$on: \Phi_x = \frac{2x \cdot x}{2} B_0 \Rightarrow \Phi = B_0 \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right)$$

- $$x > \frac{a}{2}. \rightarrow \Phi = 0$$

c) Si $0 < x < \frac{a}{2}$

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt} = 2B_0 xv$$

Com que ε és positiu i el sentit que hem fixat pel $\overrightarrow{dS}$ era cap a fora del paper, el sentit de gir del corrent induït és antihorari.

d)

$$\vec{F} + \overrightarrow{F_a} = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2B_o xv}{R}$$

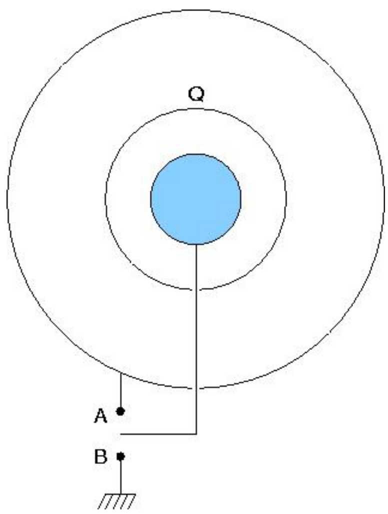
$$\overrightarrow{F_a} = \vec{F} = 2xIB_o\hat{i} = \frac{4B_o^2 x^2 v}{R}\hat{i}$$

Examen Final Gener 2004

PROBLEMA 1

Enunciat

Una esfera conductora de radio R, inicialmente descargada está rodeada concéntricamente de un caparazón conductor de espesor despreciable de radio 2R y cargado con carga Q. Este sistema está rodeado, también concéntricamente por otro caparazón de grosor despreciable, de radio 4R que inicialmente está sin carga. De la esfera interior sale un cable que puede dejarse desconectado, conectarse al caparazón exterior, o conectarse a tierra (V=0, respecto del infinito).

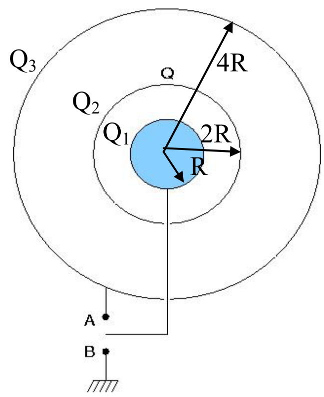


a) Determinar el potencial de los tres conductores en el instante inicial.
b) Calcula la energía del sistema.
c) Si el interruptor pasa a la posición A, conectándose el conductor interior y exterior, calcular la carga y potencial de los tres conductores

Solució

Les esferes estan carregades amb càrregues Q_1, Q_2 , Q_3 respectivament. Com que hi ha simetria esfèrica, podem aplicar la llei de Gauss, prenent una esfera gaussiana de radi r, a cada una de les zones diferents, i trobarem el camp:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1+Q_2+Q_3}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & r > 4R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1+Q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & 2R < r < 4R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & R < r < 2R \\ 0 & r < R \end{cases}$$



La funció potencial elèctric es pot obtenir de dues maneres: 1) a partir del camp, o 2) per superposició dels potencials creats per cada esfera carregada,

1) si q fos la càrrega de l'esfera, la funció potencial seria V(r):

$$V(r) = \left.\begin{matrix} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r} & r \geq R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R} & r \leq R \end{matrix}\right\} \text{per superposició} \rightarrow V(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1+Q_2+Q_3}{r} & r \geq 4R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{Q_1+Q_2}{r}+\dfrac{Q_3}{4R}\right\} & 2R \leq r \leq 4R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{Q_1}{r}+\dfrac{Q_2}{2R}+\dfrac{Q_3}{4R}\right\} & R \leq r \leq 2R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{Q_1}{R}+\dfrac{Q_2}{2R}+\dfrac{Q_3}{4R}\right\} & r \leq R \end{cases}$$

2) a partir del camp elèctric: $V = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$

$$V(r) = \begin{cases} -\int_{\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}}d\vec{\mathbf{r}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1+Q_2+Q_3}{r} & r \geq 4R \\ -\int_{\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\int_{4R}^{r} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{r}} + V(4R) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{Q_1+Q_2}{r}+\dfrac{Q_3}{4R}\right\} & 2R \leq r \leq 4R \\ -\int_{\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\int_{2R}^{r} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{r}} + V(2R) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{Q_1}{r}+\dfrac{Q_2}{2R}+\dfrac{Q_3}{4R}\right\} & R \leq r \leq 2R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{Q_1}{R}+\dfrac{Q_2}{2R}+\dfrac{Q_3}{4R}\right\} & r \leq R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} V(r=4R) = V_3 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1+Q_2+Q_3}{4R} \\ V(r=2R) = V_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{Q_1+Q_2}{2R}+\dfrac{Q_3}{4R}\right\} \\ V(r=R) = V_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{Q_1}{R}+\dfrac{Q_2}{2R}+\dfrac{Q_3}{4R}\right\} \end{matrix}$$

a)

$$\begin{matrix} DADES: \\ Q_1 = Q_3 = 0 \\ Q_2 = Q \end{matrix} \qquad \begin{matrix} V(r=4R) = V_3 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{4R} \\ V(r=2R) = V_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{2R} \\ V(r=R) = V_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{2R} \end{matrix}$$

b)

$$U=\frac{1}{2}\int Vdq=\frac{1}{2}\{Q_1V_1+Q_2V_2+Q_3V_3\}=\frac{1}{2}QV_2$$
$$U=\frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

c)

$$DADES:$$
$$Q_1^{'}+Q_3^{'}=0 \quad \text{Com } V'(R)=V'(4R)$$
$$Q_2^{'}=Q$$
$$V_3^{'}=V_1^{'}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1'+Q_2'+Q_3'}{4R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q_1'}{R}+\frac{Q_2'}{2R}+\frac{Q_3'}{4R}\right\}\Rightarrow Q_1'+Q_2'+Q_3'=4Q_1'+2Q_2'+Q_3'\Rightarrow 3Q_1'+Q_2'=0$$

$$\left.\begin{array}{r}3Q_1'+Q_2'=0\\ Q_1'+Q_3'=0\\ Q_2'=Q\end{array}\right\} \begin{array}{l}Q_1'=-\dfrac{Q}{3}\\ Q_3'=\dfrac{Q}{3}\end{array} \Rightarrow \begin{cases}V_3'=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{4R}\\ V_2'=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{5Q}{12R}\\ V_1'=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{4R}\end{cases}$$

PROBLEMA 2

Enunciat

Un conductor plano que podemos considerar infinito, de espesor d, se coloca en el plano xz tal y como se indica en las figuras. A través de él, circula una densidad de corriente j=j_0 k, donde j_0 es una constante. Asumiendo que la distribución de corriente genera un campo magnético de la forma B= B(y) i = -B(-y) i (Figura 1), obtenga, mediante la aplicación de la ley de Ampère, el campo magnético en:

a) puntos exteriores al conductor (módulo, dirección y sentido, |y|>d/2).

b) puntos interiores al conductor (módulo, dirección y sentido, |y|<d/2).

Colocamos una espira plana, de sección S muy pequeña, con su plano paralelo al plano del conductor y con su centro situado en el punto de coordenadas (0,y,0). Giramos la espira un cierto ángulo α según un eje paralelo al eje z. Asumiendo que por la espira circula una corriente genérica I en el sentido marcado como positivo:

c) Determine las componentes cartesianas del momento magnético de la espira.

d) Determine el par de fuerzas aplicado sobre la espira.

La corriente I se produce por inducción magnética al girar la espira desde su posición inicial paralela al plano del conductor a una velocidad angular constante ω.

e) Obtenga el flujo magnético que atraviesa la espira en función del ángulo α.

f) Determine la f.e.m en función del tiempo.

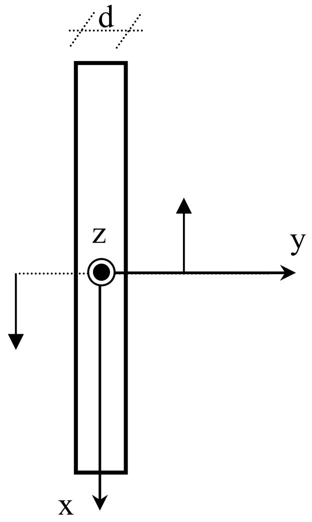


Figura 1

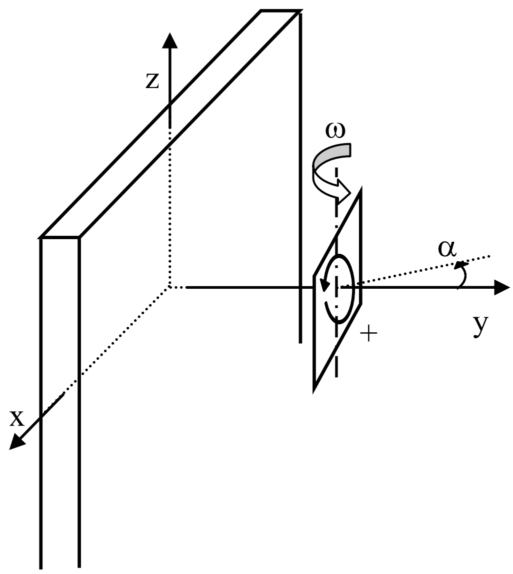


Figura 2

Solució

Per simetria respecte del pla, B= B(y) i = -B(y) i, (el mòdul del camp magnètic per punts a la mateixa distància ha de ser el mateix). El camp magnètic només té component i.

a)

$$\oint_{C_1} \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{\mathbf{j}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

$$\oint_{C_1} \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{l}} = \oint_{C_1} B dl = 2Bl$$

$$\int_{S_1} \vec{\mathbf{j}} d\vec{\mathbf{s}} = \int_{S_1} j_0 ds = j_0 l d$$

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 j_0 d$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\mu_0 j_0 d\,\hat{\mathbf{i}} & y > \dfrac{d}{2} \\ \dfrac{1}{2}\mu_0 j_0 d\,\hat{\mathbf{i}} & y < -\dfrac{d}{2} \end{cases}$$

b)

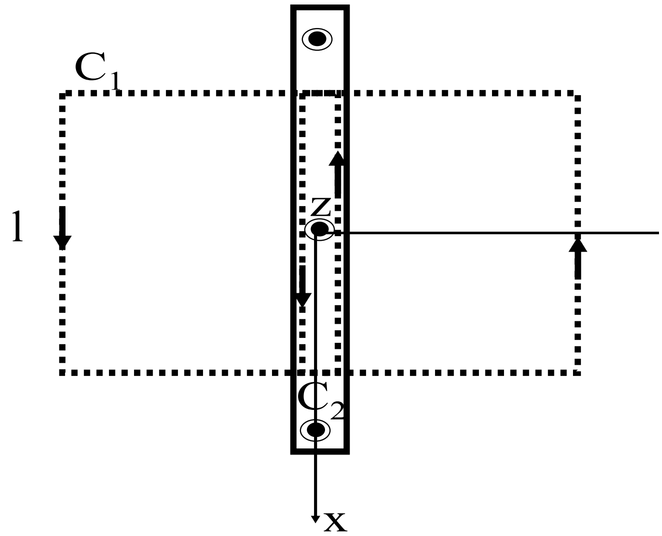
$$\oint_{C_2} \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 \int \vec{\mathbf{j}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

$$\oint_{C_2} \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{l}} = \oint_{C_2} B dl = 2Bl$$

$$\int_{S_2} \vec{\mathbf{j}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{S_2} j_0 ds = j_0 l 2|y|$$

$$B = \mu_0 j_0 |y|$$

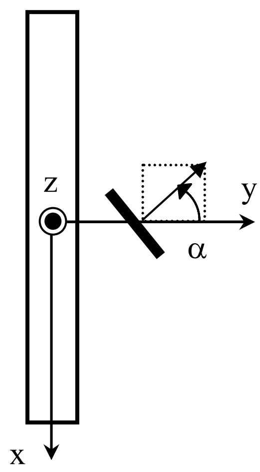
$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{cases} -\mu_0 j_0 y\,\hat{\mathbf{i}} & 0 < y < \dfrac{d}{2} \\ \mu_0 j_0 |y|\,\hat{\mathbf{i}} & -\dfrac{d}{2} < y < 0 \end{cases}$$



c)

$$\vec{\mathbf{S}} = S\left(-sen(\alpha)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\alpha)\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\vec{\mathbf{m}} = IS\left(-sen(\alpha)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\alpha)\hat{\mathbf{j}}\right)$$



d)

$$\vec{\boldsymbol{\Gamma}} = \vec{\mathbf{m}} \otimes \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -lSsen(\alpha) & lS\cos(\alpha) & 0 \\ -\frac{1}{2}j_0 d & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{\Gamma}} = \frac{1}{2} j_0 dlS\cos(\alpha)\hat{\mathbf{k}}$$

e)

$$\Phi = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{S}}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu_0 j_0 dS\, sen(\alpha)$$

f)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\mu_0 j_0 dS\,\omega\cos(\omega t)$$

Examen Final Juny 2003

PROBLEMA 1

Enunciat

Un cable coaxial está formado por un conductor central de radio R_1 = 1,0 mm y longitud L = 0,50 m, rodeado por otro conductor cilíndrico y concéntrico de radio interno R_2 = 3,0 mm y radio externo R_3 = 4,0 mm. Entre ambos conductores se coloca un aislante de constante dieléctrica $\varepsilon_r = 4$. Suponed que los conductores tienen cargas +q en el conductor de radio R_1 y –q en el conductor exterior.

a) Obtened razonadamente la expresión del campo E(r) en función de la carga q, para las 4 zonas siguientes, I: $r < R_1$; II: $R_1 < r < R_2$; III: $R_2 < r < R_3$; IV: $R_3 < r$

b) Calculad la diferencia de potencial V entre los dos conductores.

c) Si se aplica una diferencia de potencial V = 40 V entre ambos conductores (polaridad positiva en el conductor central, masa al conductor exterior), calculad la carga de cada conductor, las densidades de carga libre y ligada, y haced un esquema indicando donde quedarán distribuidas.

Se conectan dos cables coaxiales de la misma geometría que el anterior uniendo tanto los conductores centrales como los exteriores. El cable coaxial A contiene un dieléctrico de constante $\varepsilon_r = 4$ (como el anterior caso), mientras que el cable coaxial B contiene uno de constante dieléctrica $\varepsilon_r = 8$.

d) Obtened la relación entre las cargas q_A y q_B que deben tener los conductores de cada cable coaxial.

e) Si al conjunto se le aplica la misma diferencia de potencial anterior V = 40 V, calculad las cargas q_A y q_B de cada cable coaxial.

f) Obtened el valor numérico de la capacidad total C_T del sistema formado por los dos cables coaxiales.

Solució

a)

$I)\quad r < R_1$ Conductor en equilibri $\Rightarrow \vec{E} = 0$

$II)$ superfície gaussiana: cilindre coaxial als conductors, d'alçada H

$$R_1 < r < R_2 \quad \int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_0^{in} \quad \left.\begin{cases}\text{Simetria cilíndrica } L >> R_2 \\ \text{tan sols hi ha fluxe pel lateral}\end{cases}\right\} \Rightarrow 2\pi r H D = \frac{q}{L} H \Rightarrow \vec{D} = \frac{1}{2\pi}\frac{q}{Lr}\hat{r}$$

Com $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \;\Rightarrow\; \vec{E} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{q}{Lr}\hat{r}$

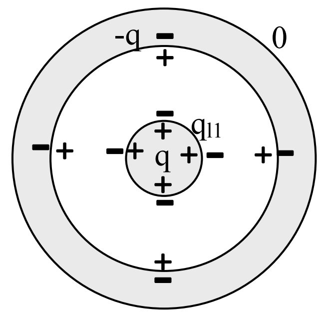
$III)\quad R_2 < r < R_3$ Conductor en equilibri $\Rightarrow \vec{E} = 0$

$IV)$ superfície gaussiana: cilindre coaxial als conductors, d'alçada H

$$R_3 < r \quad \int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_0^{in} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{D} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{E} = 0$$

b) $\Delta V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{Lr}dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

c)



$\Delta V = 40V \qquad V_1 > V_2$

Conductor interior $q = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L\Delta V}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = 4,0$ nC Conductor exterior $-q = -4,0$ nC

Densitats: $\sigma_1 = \dfrac{q}{2\pi R_1 L} = 1,3\,\mu C/m^2 \qquad \sigma_2 = \dfrac{-q}{2\pi R_2 L} = -0,42\,\mu C/m^2$

El vector polarització a $R_1 < r < R_2$ s'expressa com

$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\dfrac{q}{L}\dfrac{1}{r}\hat{r}$

En R_1, $\sigma_1' = \vec{P}(R_1)\cdot\vec{n} = \vec{P}(R_1)\cdot(-\hat{r}) = \dfrac{-3}{4}\dfrac{q}{2\pi LR_1} = -0,95\dfrac{\mu C}{m^2}$

$\Rightarrow q_{1_1} = \sigma_1' 2\pi R_1 L = \dfrac{-3q}{4} = -3,0nC$

En R_2, $\sigma_2' = \vec{P}(R_2)\cdot\vec{n} = \vec{P}(R_2)\cdot(\hat{r}) = \dfrac{3}{4}\dfrac{q}{2\pi LR_2} = +0,32\dfrac{\mu C}{m^2}$

$\Rightarrow q_{12} = \sigma_2' 2\pi R_2 L = \dfrac{+3q}{4} = +3,0nC$

d) Conductor A $\Rightarrow \vec{E}_A = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{rA}}\dfrac{q_A}{Lr}\hat{r}$ Conductor B $\Rightarrow \vec{E}_B = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{rB}}\dfrac{q_B}{Lr}\hat{r}$

$\vec{E}_A = \vec{E}_B \Rightarrow q_B = \dfrac{\varepsilon_{rB}}{\varepsilon_{rA}}q_A$

e) Com que ΔV és com abans, $q_A = 4,0nC \Rightarrow q_B = 8,0nC$

f) $C = \dfrac{q_A + q_B}{\Delta V} = 0,30$ nF

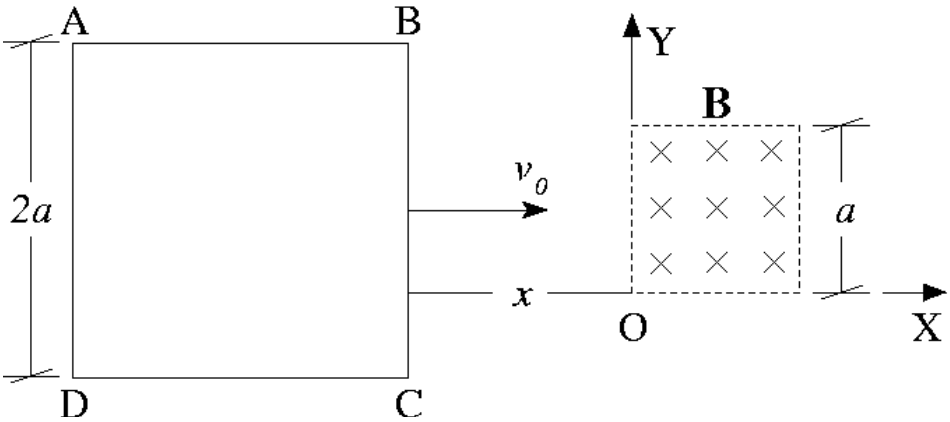
PROBLEMA 2

Enunciat

Una espira quadrada de $2a$=10 cm de costat, R=1,25 Ω de resistència, m=2,0 g de massa i coeficient d'autoinducció negligible, es llença recolzada a una superfície horitzontal llisa a una velocitat v_0=30 cm/s, paral·lela a un dels seus costats. En moure's, creua un camp magnètic d'intensitat B=1,0 T (veure dibuix). Sabent que l'espira manté sempre el sentit del moviment:

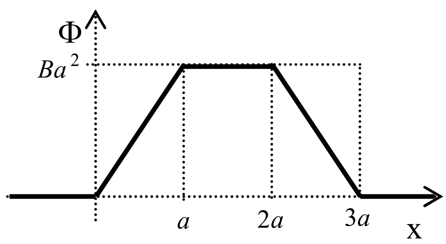
a) Calculeu i representeu en funció de la distància x (indicada al dibuix), el flux magnètic que travessa l'espira. Considereu que el flux entrant al pla del paper és positiu.
b) Calculeu la força electromotriu induïda a l'espira en funció de la velocitat, per a qualsevol posició de l'espira. Indiqueu el sentit de circulació de la intensitat.
c) Calculeu la força que actua sobre l'espira en qualsevol posició que l'afecti el camp magnètic.
d) Apliqueu el teorema de l'energia cinètica Fdx=mvdv per calcular la velocitat, v_1, de l'espira quan aquesta conté totalment la regió de l'espai on hi ha camp magnètic, i la velocitat, v_2, de l'espira després de travessar el camp magnètic.

Nota- En els tres primers apartats del problema no cal substituir valors numèrics.



Solució

a) Si $\mathbf{dS} = -dS\mathbf{k}$ (cap a dins del plà del paper)



$x < 0 \quad \Phi = 0$

$0 < x < a \quad \Phi = Bax$

$a < x < 2a \quad \Phi = Ba^2$

$2a < x < 3a \quad \Phi = B(3a - x)a$

$3a < x \quad \Phi = 0$

b) segons la llei de Faraday-Lenz: $\varepsilon = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$

$x < 0 \quad \varepsilon = 0$

$0 < x < a \quad \varepsilon = -Bav$

$a < x < 2a \quad \varepsilon = 0$

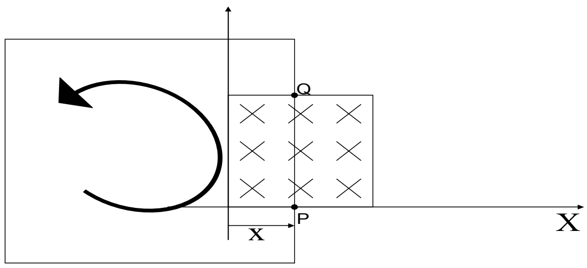
$2a < x < 3a \quad \varepsilon = Bav$

$3a < x \quad \varepsilon = 0$

c)

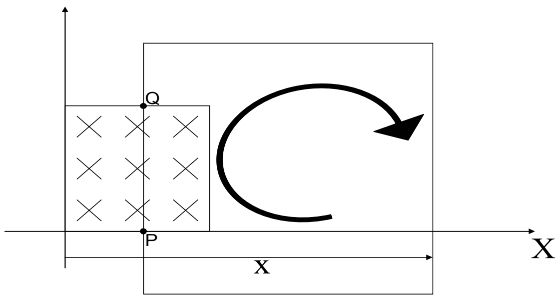
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{x} < 0 \\ a < \mathrm{x} < 2a \\ 3a < \mathrm{x} \end{array}\right\} \mathbf{F} = 0$$

$0 < \mathrm{x} < a$



$$\mathrm{F} = I\ \mathbf{PQ} \wedge \mathbf{B} = -\frac{\mathrm{B}^2 a^2}{\mathrm{R}} \mathrm{v}\mathbf{i}$$

$2a < \mathrm{x} < 3a$



$$\mathrm{F} = I\ \mathbf{PQ} \wedge \mathbf{B} = -\frac{\mathrm{B}^2 a^2}{\mathrm{R}} \mathrm{v}\mathbf{i}$$

d) En el tram $0 < x < a$

$$Fdx = mvdv \Rightarrow \frac{B^2 a^2}{R} vdx = mvdv \Rightarrow \int_{x=0}^{x=a} \frac{B^2 a^3}{mR} dx = \int_{v_0}^{v_1} dv \Rightarrow v_1 = v_0 - \frac{B^2 a^2}{mR} \quad v_1 = 0,25 \, {}^{m}\!/\!_{s}$$

en el tram $2a < x < 3a$, $\quad \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_1 - \dfrac{\mathrm{B}^2 a^3}{\mathrm{mR}} \quad \mathrm{v}_2 = 0{,}20 \, {}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}}$

Examen final Juny 2000

PROBLEMA 1

Enunciat

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\, F/m$ $\qquad$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, H/m$

Un conductor cilíndrico C_1 de radio $R_1 = 2.00mm$ está rodeado por un tubo conductor C_2 de radio interior $R_2 = 3.00mm$ y exterior $R_3 = 5.00mm$. El espacio entre conductores está lleno de agua destilada, un aislante con propiedades dieléctricas $(\varepsilon_r = 80.0)$. La longitud de ambos conductores es $L = 1.00m$.
El polo negativo de una fuente de tensión de 6.00V está conectado al conductor C_1 mientras que el polo positivo lo está al conductor C_2. La carga en la superficie exterior del conductor C_2 vale $Q = +55.6nC$.
a) Deducir la expresión del campo eléctrico en los puntos a distancia $r < R_3$ del eje del cilindro, en función de las cargas netas Q_1 y Q_2 de cada conductor.
b) Calcular las cargas netas Q_1 y Q_2 de cada conductor.
c) Calcular las densidades superficiales de carga ligada. Especificar su posición y signo.

Disolvemos un poco de sal en el agua convirtiéndola en conductora. En una primera aproximación, si la conductividad de los cilindros es suficientemente grande, podemos considerar que si mantenemos la conexión a la fuente de tensión el campo eléctrico no se ve alterado apreciablemente. Si la conductividad del agua salada es $\sigma = 0.040 S/m$
d) determinar la densidad de corriente $j(r)$ y la intensidad I que circula entre C_2 y C_1.

Solució

a) *Apliquem la llei de Gauss a un cilindre. Per simetría* $\vec{E}$ *ha de ser radial (*$\phi = 0$ *a totes les tapes).*

$$\Rightarrow \phi_{cil} = 2\pi r l \cdot E = q(r)/\varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$q(r) = \begin{cases} 0 & \text{per } r < R_1 & \Rightarrow & \boxed{E_I = 0} \\ Q_1 & \text{per } R_1 < r < R_2 & \Rightarrow & \boxed{E_{II} = \dfrac{Q_1}{2\pi l r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} \\ Q_1 - Q_1 & \text{per } R_2 < r < R_3 & \Rightarrow & \boxed{E_{III} = 0} \end{cases}$$

Per tant, superfície interior dels conductors: -Q_1

b) $\Delta v = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon l r}dr = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{R_2}{R_1}$

$\Delta v = 6V \Rightarrow \boxed{Q_1 = -65.8nC}$

$Q_2 = -Q_1 + Q = 65.8nC + 55.6nC \Rightarrow \boxed{Q_2 = 121.4nC}$

c) $|\sigma_{10}| = \frac{|Q_1|}{2\pi R_1 l} = \frac{65.8nC}{12.5\cdot 10^{-3}m^2} = 5.24\cdot 10^{-6}C/m^2$

$|\sigma_{20}| = \frac{|Q_1|}{2\pi R_2 l} = \frac{65.8nC}{18.8\cdot 10^{-3}m^2} = 3.48\cdot 10^{-6}C/m^2$

$\sigma_{ll} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma_0 \quad \textit{(diferent per } R_1 \text{ i } R_2\textit{)} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\sigma_{1ll} = 5.17\mu C/m^2 \\ \sigma_{2ll} = 3.46\mu C/m^2\end{array}}$

d) $\sigma = 0.040 S/m$

$j = \sigma E_{ll}$ *i hem vist que* $E_{ll} = \frac{1}{r}\frac{Q_1}{2\pi l\varepsilon_0\varepsilon_r}$

$\Delta v = \ln\frac{R_2}{R_1}\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon l} \Rightarrow E = \Delta v\frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\frac{1}{r}$ *i per tant* $\boxed{j = \frac{\sigma\Delta v}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\frac{1}{r} = \frac{0.59}{r}}$

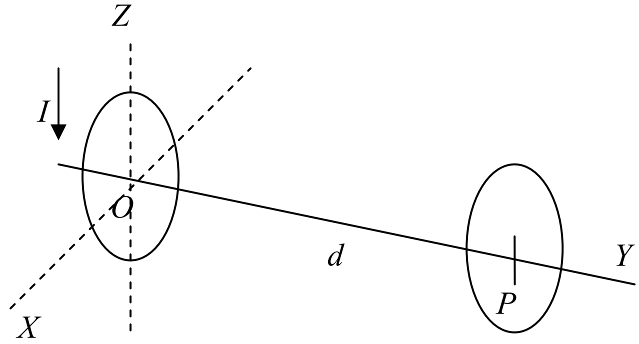
$I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = j(R_1)\cdot 2\pi R_1 l \rightarrow \boxed{I = 3.71A}$

PROBLEMA 2

Enunciat

Un corrent d'intensitat I circula per una bobina de N espires circulars de radi r_0 (tal com es veu a la figura, les espires són paral·leles al pla XZ)

a) Deduïu a partir de la llei de Biot i Savart l'expressió del camp magnètic en un punt P de l'eix situat a una distància *d* molt més gran que r_0 (aproximant)



Si la bobina té N=30 espires, r_0 =2.0 cm, I=5.0A

b) trobeu el moment magnètic **m** de la bobina i el camp magnètic en el punt P, si d=25cm.

Una segona bobina, idèntica a la primera, està situada amb centre al punt P i paral·lela a l'anterior. L'espira té una resistència R.

d) Trobeu el flux ϕ, a través de la segona bobina, del camp magnètic creat per la primera. Trobeu el coeficient d'inducció mútua M.

Si considerem conegut el valor de M, i per la primera bobina hi circula un corrent altern $I_0 \cos \omega t$,

e) trobeu l'expressió del corrent induït a la segona bobina (si R es prou gran, es pot negligir l'autoinducció d'aquesta).

Solució

a) $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$

$dB_y = dB \cdot \sin\varphi$

$$B_{espira} = \int_{espira} dB_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idl}{r^2} \frac{r_0}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} r_0 \frac{2\pi r_0}{r^3} \xrightarrow[r^3 \approx d^3]{} \boxed{B_{espira} = \frac{\mu_0 I \pi r_0^2}{2\pi d^3}} \; i \; \boxed{B_{bobina} = N \cdot B_{espira}}$$

b) $\vec{m} = m \cdot \vec{j}$

$$m = \pi r_0^2 IN = 0.1885 Am^2 \rightarrow \boxed{\vec{m} = 0.1885 \cdot \vec{j} Am^2} \quad i \quad \boxed{B(P = 25cm) = 2.41 \cdot 10^{-6} T}$$

c) $\phi_{12} = B \cdot N \cdot \pi r_0^2 = 9.08 \cdot 10^{-8} Wb$

$$M = \frac{\phi_{12}}{I} \rightarrow \boxed{M = 1.82 \cdot 10^{-8} H}$$

d) $I = I_0 \cos wt \Rightarrow B = B_0 \cos wt$

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_{12}}{dt} = -M \frac{dI}{dt} = MI_0 \omega \sin \omega t$$

$$\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R} = \frac{M}{R} I_0 \omega \sin \omega t}$$