Matemàtica Discreta
Segon Parcial-Tardor 2007

1 (0.5 punts cadascun)

1. *Quants grafs diferents hi ha que tenen* [12] *per conjunt de vèrtexs i mida 65? A quantes classes d'isomorfia diferents corresponen? Justifica les respostes.*

   El K_{12} té $\binom{12}{2} = 66$ arestes. Per tant, hi ha tants grans de mida 65 com maneres hi ha de triar 65 d'entre 66 arestes, i.e., 66 grafs. Tots ells són a més isomorfs, ja que els complementaris corresponents tots tenen 12 vèrtexs i mida 1 i, per tant, són isomorfs.

2. *Existeixen grafs 2-regulars d'ordre 45 i mida 123? Justifica la resposta.*

   Pel lema de les encaixades, si és 2-regular es complirà que el doble de l'ordre ha de ser igual al doble de la mida. Per tant, ordre i mida han de coincidir i el graf descrit no pot existir.

3. *Defineix què és l'aresta-connectivitat d'un graf connex. Quina és l'aresta-connectivitat del bipartit complet $K_{m,n}$? Justifica la resposta.*

   És el nombre mínim d'arestes que cal suprimir per desconnectar-lo. En el cas del $K_{m,n}$ és el mínim d'entre m i n. Només cal usar les desigualtats de Whitney. En efecte, en suprimir un vèrtex qualsevol de $K_{m,n}$, és clar que em queda un altre bipartit complet $K_{p,q}$, amb $p = m - 1, q = n$ o bé $p = m, q = n - 1$, segons d'on el suprimeixi. En tot cas, el resultat és un graf connex mentre sigui $p, q > 0$. Això em diu que la vèrtex-connectivitat del $K_{m,n}$ és el mínim d'entre m i n. Com que el grau mínim també és el mínim d'entre m i n, deduim per Whitney que l'aresta-connectivitat val el mateix.

4. *És hamiltonià un graf regular d'ordre $n \geq 3$ i mida $n^2/4$? Justifica la resposta.*

   Si que ho és, ja que compleix la condició de Dirac, segons la qual tot graf d'ordre $n \geq 3$ tal que $g(v) \geq n/2$ per a tot vèrtex v és hamiltonià. En aquest cas, com que és regular, sabem que compleix $dn = 2m$, on d és el grau de tots els vèrtexs i $m = n^2/4$ és la mida; per tant, $d = n/2$.

5. *La successió de graus d'un graf connex és* $(4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. *Quants cicles té? Justifica la resposta.*

   Pel lema de les encaixades, la seva mida ha de ser

   $$|A| = \frac{1}{2}(4+4+3+3+2+2+1+1+1+1+1+1) = 12$$

   Es tracta, doncs, d'un graf connex de mida igual a l'ordre, la qual cosa vol dir que no pot ser un arbre. A més, si suprimim una aresta qualsevol d'un cicle, quedarà un graf encara connex i de mida 11; per tant, un arbre. Vol dir que el graf original s'ha obtingut afegint una aresta a un arbre i, per tant, conté només un cicle.

6. *Defineix centre d'un graf i determina el centre del graf*

   $$G = ([7], \{12, 23, 34, 36, 26, 25, 47\}).$$

   El centre d'un graf és el conjunt de vèrtexs centrals, i.e., d'aquells vèrtexs que tenen excentricitat igual al radi del graf. En el cas de l'arbre T, les excentricitats dels vèrtexs són

   $$e(1) = e(4) = e(6) = e(7) = 3, \quad e(2) = e(3) = e(5) = 2.$$

   Per tant, el radi és $R(T) = 2$ i el centre del graf és $\{2, 3, 5\}$

7. *Calcula la seqüència de Prufer de l'arbre*

   $$T = ([8], \{43, 14, 24, 45, 36, 38, 37\}).$$

   És la paraula 444333

8. *Calcula el nombre d'arbres generadors del graf*

   $$G = ([5], \{23, 13, 14, 24, 12, 25, 35\}).$$

   La matriu de graus és $\Delta = \mathsf{diagonal}(3, 4, 3, 2, 2)$, i la matriu d'adjacències és

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el nombre d'arbres generadors és l'adjunt de qualsevol element de la matriu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i.e., és 21.

2 (2 punts) *Sigui G graf no nul, no connex i d'ordre $n \geq 3$. Demostra que el diàmetre del graf complementari és dos.*

Donats dos vèrtexs $u, v \in V$ qualssevol de G (o equivalentment de G^c), poden ser del mateix component connex de G o de components diferents. Si són de components diferents, l'aresta uv no és de G i, per tant, és de G^c, de manera que en aquest cas $d_{G^C}(u, v) = 1$. Si són del mateix component (cosa possible perquè G és no nul), considerem un vèrtex w que no sigui del component connex al que pertanyen u i v (sempre existeix perquè en ser G no connex, té més d'un component connex). Les arestes uw i vw no són aleshores de G i, per tant, són de G^c, de manera que uwv és un camí de u a v dintre de G^c i $d_{G^c}(u, v) = 2$ (aquesta distància no pot ser 1 perquè l'aresta uv no és de G^c). Deduim aleshores que a G^c la distància entre dos vèrtexs qualsevol és 1 o 2, segons que siguin o no del mateix component connex a G. A més, G no nul i d'ordre $n \geq 3$ garanteix que n'hi ha que són a distància 2. Per tant, $D(G^c) = 2$.

3 (i) (2 punts) *Prova que, llevat isomorfisme, hi ha un únic arbre d'ordre $n \geq 4$ i grau màxim $n - 2$.*

Sigui u un vèrtex de grau màxim $n - 2$. Sabem que hi haurà almenys $n - 2$ fulles $v_1, \ldots, v_{n-2}$ en aquest arbre. Això fan $n - 1$ vèrtexs. Pel lema de les encaixades i pel fet que la mida d'un arbre és l'ordre menys 1, l'altre vèrtex que no és cap d'aquestes fulles ni el u ha de ser necessàriament de grau $d = 2$, ja que tenim

$$n - 2 + d + n - 2 = 2(n - 1) = 2n - 2$$

(observar que el raonament falla si $n = 3$, ja que ens dóna que tenim un vèrtex de grau 2, mentre que per hipòteis el grau màxim és 1). L'arbre és aleshores l'estrella $K_{1,n-2}$ a la qual li afegim un vèrtex adjacent a una de les fulles.

(ii) (2 punts) *Prova que en un arbre d'ordre $n \geq 3$ les fulles no poden ser mai vèrtexs centrals.*

Sigui f una fulla de l'arbre i u l'únic vèrtex que li és adjacent. Aleshores, per a tot $w \neq u, f$ tenim que

$$d(w,f) = d(w,u) + 1.$$

Ara, l'excentricitat de f és

$$e(f) := \max_{w} d(w,f) = \max_{w \neq f,u} d(w,f),$$

ja que els vèrtexs exclosos estan a distància 0 o 1 de f i $e(f) \geq 1$ (aquí cal la hipòtesi $n \geq 3$, ja que altrament ens queda fer el màxim sobre un conjunt buit i la igualtat no es compleix). De la igualtat anterior deduim que

$$e(f) = \max_{w \neq f,u} (d(w,u)+1) = \left(\max_{w \neq f,u} d(w,u) \right) + 1 = \left(\max_{w} d(w,u) \right) + 1 = e(u) + 1$$

(la tercera igualtat és pel mateix motiu d'abans). Per tant, l'excentricitat de f és més gran que la de u i f no pot ser central.