Notas de Clase para IL

5. Deducción en Lógica de Primer Orden
Ejercicios resueltos

Rafel Farré, Robert Nieuwenhuis,
Pilar Nivela, Albert Oliveras, Enric Rodríguez, Josefina Sierra

12 de febrero de 2008

1. Ejercicios

1. (Dificultad 2) Transforma a forma clausal las siguientes fórmulas:

   a) $\forall x\ (\ \forall y\ (p(y) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow \exists y\ q(y,x)\ )$

   b) $\forall y\ (\ \neg p(y) \rightarrow \forall y \exists x\ q(y,x)\ )$

   c) $\exists x\ \forall y\ (\ \forall z\ (p(y,z) \vee x \neq y) \rightarrow (\forall z\ q(y,z) \wedge \neg r(x,y))\ )$

---

a) $\forall x\ (\ \forall y\ (p(y) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow \exists y\ q(y,x)\ )$
$\Rightarrow$ definición de $\rightarrow$
$\forall x\ (\ \neg\forall y\ (\neg p(y) \vee q(x,y)) \vee \exists y\ q(y,x)\ )$
$\Rightarrow$ movimiento de las negaciones hacia dentro
$\forall x\ (\ \exists y\ \neg(\neg p(y) \vee q(x,y)) \vee \exists y\ q(y,x)\ )$
$\Rightarrow$ lema de sustitución, De Morgan y doble negación
$\forall x\ (\ \exists y\ (p(y) \wedge \neg q(x,y)) \vee \exists y\ q(y,x)\ )$
$\Rightarrow$ eliminación de conflictos de nombre
$\forall x\ (\ \exists y\ (p(y) \wedge \neg q(x,y)) \vee \exists z\ q(z,x)\ )$
$\Rightarrow$ Skolemización
$\forall x\ (\ (p(f_y(x)) \wedge \neg q(x, f_y(x)))\ \vee q(f_z(x),x)\ )$ $\Rightarrow$ Distribución de $\wedge$ sobre $\vee$
y eliminación de cuantificadores universales
$\{\ p(f_y(x)) \vee q(f_z(x),x),\ \ \neg q(x, f_y(x)) \vee q(f_z(x),x)\ \}$

b) $\forall y\ (\ \neg p(y) \rightarrow \forall y \exists x\ q(y,x)\ )$
$\Rightarrow$ definición de $\rightarrow$
$\forall y\ (\ \neg\neg p(y) \vee \forall y \exists x\ q(y,x)\ )$
$\Rightarrow$ doble negación y eliminación de conflictos de nombre
$\forall y\ (\ p(y) \vee \forall z \exists x\ q(z,x)\ )$
$\Rightarrow$ movimiento de cuantificadores hacia dentro
$\forall y\ p(y) \vee \forall z \exists x\ q(z,x)$
$\Rightarrow$ Skolemización
$\forall y\ p(y) \vee \forall z\ q(z, f_x(z))$
$\Rightarrow$ movimiento de cuantificadores universales hacia fuera
$\forall y\ \forall z\ (p(y) \vee q(z, f_x(z)))$
$\Rightarrow$ eliminación de cuantificadores universales
$\{\ p(y) \vee q(z, f_x(z))\ \}$

c) $\exists x\ \forall y\ (\ \forall z\ (p(y,z) \vee x \neq y) \rightarrow (\forall z\ q(y,z) \wedge \neg r(x,y))\ )$
$\Rightarrow$ definición de $\rightarrow$
$\exists x\ \forall y\ (\ \neg\forall z\ (p(y,z) \vee x \neq y) \vee (\forall z\ q(y,z) \wedge \neg r(x,y))\ )$
$\Rightarrow$ movimiento de las negaciones hacia dentro
$\exists x\ \forall y\ (\ \exists z\ \neg(p(y,z) \vee x \neq y) \vee (\forall z\ q(y,z) \wedge \neg r(x,y))\ )$
$\Rightarrow$ De Morgan
$\exists x\ \forall y\ (\ \exists z\ (\neg p(z,w) \wedge x = y) \vee (\forall z\ q(y,z) \wedge \neg r(x,y))\ )$
$\Rightarrow$ eliminación de conflictos de nombre
$\exists x\ \forall y\ (\ \exists w\ (\neg p(y,w) \wedge x = y) \vee (\forall z\ q(y,z) \wedge \neg r(x,y))\ )$

$\Rightarrow$ Skolemización
$\forall y\ (\ (\neg p(y,\ f_w(y)) \wedge c_x = y)\ \vee\ (\forall z\ q(y,z) \wedge \neg r(c_x, y))\ \ )$
$\Rightarrow$ movimiento de cuantificadores universales hacia fuera, distribución de $\wedge$ sobre $\vee$ y eliminación de cuantificadores universales
$\{\ \neg p(y,\ f_w(y)) \vee q(y,z),\ \ c_x = y \vee q(y,z),\ \ \neg p(y,\ f_w(y)) \vee \neg r(c_x, y)),\ \ c_x = y \vee \neg r(c_x, y)\ \}$

$\blacksquare$

2. (Dificultad 2) Demuestra que la Skolemización no preserva la equivalencia lógica.
Ayuda: considera $\forall x \exists y\ p(x,y)$ y su transformación $\forall x\ p(x,\ f(x))$, y define una I de dos elementos sobre los símbolos f y p.

Definimos una interpretación I con dominio $D_I = \{a, b\}$, una función $p_I : D_I \times D_I \rightarrow \{0,1\}$ tal que $p_I(a,a) = 1,\ \ p_I(b,b) = 1,\ \ p_I(a,b) = 0,\ \ p_I(b,a) = 0$, y una función $f_I : D_I \rightarrow D_I$ tal que $f_I(a) = b$ y $f_I(b) = a$. Es fácil comprobar que $I \models \forall x \exists y\ p(x,y)$, pero que $I \not\models \forall x\ p(x,\ f(x))$. Luego ambas fórmulas no son lógicamente equivalentes. $\blacksquare$

3. (Dificultad 1) Unifica $p(\ f(x, g(x)),\ h(y),\ v\ )$ con $p(\ y,\ h(v),\ f(g(z), w)\ )$.
Calcula un unificador más general y otro que no sea el más general (si hay).

Aplicamos las reglas del algoritmo de unificación hasta obtener un problema rusuelto o fallo.

$\{p(\ f(x, g(x)),\ h(y),\ v\ ),\ \ p(\ y,\ h(v),\ f(g(z), w)\ )\}$
$\Rightarrow$ segunda regla
$\{f(x, g(x)) = y,\ h(y) = h(v),\ v = f(g(z), w)\}$
$\Rightarrow$ cuarta regla, la variable y no aparece en $f(x, g(x))$
$\{y = f(x, g(x)),\ h(f(x, g(x))) = h(v),\ v = f(g(z), w)\}$
$\Rightarrow$ segunda regla
$\{y = f(x, g(x)),\ f(x, g(x)) = v,\ v = f(g(z), w)\}$
$\Rightarrow$ cuarta regla, la variable v no aparece en $f(x, g(x))$
$\{y = f(x, g(x)),\ v = f(x, g(x)),\ f(x, g(x)) = f(g(z), w)\}$
$\Rightarrow$ segunda regla
$\{y = f(x, g(x)),\ v = f(x, g(x)),\ x = g(z),\ g(x) = w\}$
$\Rightarrow$ cuarta regla, la variable x no aparece en $g(z)$
$\{y = f(g(z), g(g(z))),\ v = f(g(z), g(g(z))),\ x = g(z),\ g(g(z)) = w\}$
$\Rightarrow$ cuarta regla, la variable w no aparece en $g(g(z))$
$\{y = f(g(z), g(g(z))),\ v = f(g(z), g(g(z))),\ x = g(z),\ w = g(g(z))\}$
Este es el unificador de máxima generalidad (mgu), ya que todas las variables están resueltas.

Un unificador menos general es $\{y = f(g(g(z)), g(g(g(z)))),\ v = f(g(g(z)), g(g(g(z)))),\ x = g(g(z)),\ w = g(g(g(z)))\}$

■

4. (Dificultad 1) Sean los términos:

   $t_1:\quad f(x, h(g(x)), x')$
   $t_2:\quad f(a, y, y)$
   $t_3:\quad f(z, h(z), h(b))$

   ¿Cuáles de los pares (t_i, t_j) son unificables? Da un *mgu* si hay.

---

a) Consideramos la unificación de t_1 y t_2.
$\{f(x, h(g(x)), x'),\ f(a, y, y)\}$
$\Rightarrow$ segunda regla
$\{x = a,\ h(g(x)) = y,\ x' = y\}$
$\Rightarrow$ cuarta regla, la variable x no aparece en a
$\{x = a,\ h(g(a)) = y,\ x' = y\}$
$\Rightarrow$ cuarta regla, la variable y no aparece en $h(g(a))$
$\{x = a,\ y = h(g(a)),\ x' = h(g(a))\}$
Esta sustitución es el mgu de t_1 y t_2, ya que todas las variables están resueltas.

b) Consideramos la unificación de t_2 y t_3.
$\{f(a, y, y),\ f(z, h(z), h(b))\}$
$\Rightarrow$ segunda regla
$\{a = z,\ y = h(z),\ y = h(b)\}$
$\Rightarrow$ cuarta regla, la variable z no aparece en a
$\{z = a,\ y = h(a),\ y = h(b)\}$
$\Rightarrow$ cuarta regla, la variable y no aparece en $h(a)$
$\{z = a,\ y = h(a),\ h(a) = h(b)\}$
$\Rightarrow$ segunda regla
$\{z = a,\ y = h(a),\ a = b\}$
$\Rightarrow$ tercera regla
fallo, ya que a y b son constantes distintas
Los términos t_1 y t_2 no son unificables.

c) Consideramos la unificación de t_1 y t_3.
$\{f(x, h(g(x)), x'),\ f(z, h(z), h(b))\}$
$\Rightarrow$ segunda regla
$\{x = z,\ h(g(x)) = h(z),\ x' = h(b)\}$
$\Rightarrow$ cuarta regla, la variable x no aparece en z
$\{x = z,\ h(g(z)) = h(z),\ x' = h(b)\}$
$\Rightarrow$ segunda regla
$\{x = z,\ g(z) = z,\ x' = h(b)\}$
$\Rightarrow$ quinta regla

fallo, ya que la variable z aparece en $g(z)$
Los términos t_1 y t_3 no son unificables.

■

5. (Dificultad 2) Demuestra por resolución la insatisfactibilidad del conjunto de cláusulas:
   $1: \quad p(a, z)$
   $2: \quad \neg p(f(f(a)), a)$
   $3: \quad \neg p(x, g(y)) \vee p(f(x), y)$

Si aplicamos resolución a las cláusulas 1 y 3 utilizando el mgu $\{x = a,\ z = g(y)\}$ obtenemos la resolvente $p(f(a), y)$. Renombramos las variables de esta resolvente de manera que sean distintas de las variables de la cláusula 3, $p(f(a), y_1)$.

Aplicamos de nuevo resolución a esta última cláusula y a la cláusula 3 utilizando el mgu $\{x = f(a),\ y_1 = g(y)\}$ y obtenemos la resolvente $p(f(f(a)), y)$.

Finalmente obtenemos la cláusula vacía aplicando resolución a la cláusula 2 y a la última resolvente obtenida utilizando el mgu $\{y = a\}$.

■

6. (Dificultad 3) Demuestra que es importante que no haya ninguna variable x que aparezca, con ese nombre, en los dos literales que se unifican cuando se hace resolución.
   Ayuda: Da un ejemplo de incompletitud refutacional de la regla de resolución "sin renombramiento previo de variables".

Sin renombramiento de variables no es posible aplicar la regla de resolución a las cláusulas $p(x, a)$ y $\neg p(b, x)$. Sin embargo es claro que el conjunto formado por ambas cláusulas es instisfactible, ya que $\forall x\, p(x, a) \models p(b, a)$ y $\forall x \neg p(b, x) \models \neg p(b, a)$.

Si renombramos la variable de la segunda cláusula $\neg p(b, y)$ podemos aplicar la regla de resolución a las dos cláusulas utilizando el mgu $\{x = b, y = a\}$ y deducir la cláusula vacía.

■

7. (Dificultad 3) (Schöning, Exercise 85) Formaliza los siguientes hechos:
   (a) *"Todo dragón está feliz si todos sus hijos pueden volar"*
   (b) *"Los dragones verdes pueden volar"*
   (c) *"Un dragón es verde si es hijo de al menos un dragón verde"*

   Demuestra por resolución que la conjunción de (a), (b) y (c) implica que:
   (d) *"Todos los dragones verdes son felices"*

Consideramos una modelización en la que el dominio es el conjunto de los dragones. Esto es, cuando escribimos $\forall x$ queremos decir "para todo dragón", y cuando escribimos $\exists x$ queremos decir "existe al menos un dragón".

En primer lugar formalizamos cada una de las afirmaciones del problema y calculamos la forma clausal de la fórmula correspondiente. Utilizamos los símbolos de predicado $h(x, y)$ para denotar que x es hijo de y, $vo(x)$ para denotar que x puede volar, $ve(x)$ para representar el hecho de que x es verde, y $f(x)$ para denotar que x es feliz.

a) *"Todo dragón está feliz si todos sus hijos pueden volar"*

$\forall x(\forall y h(y, x) \rightarrow vo(y)) \rightarrow f(x))$
$\Rightarrow$ definición de $\rightarrow$
$\forall x(\neg\forall y(\neg h(y, x) \vee vo(y)) \vee f(x))$
$\Rightarrow$ movimiento de las negaciones hacia dentro
$\forall x(\exists y\neg(\neg h(y, x) \vee vo(y)) \vee f(x))$
$\Rightarrow$ De Morgan y doble negación
$\forall x(\exists y(h(y, x) \wedge \neg vo(y)) \vee f(x))$
$\Rightarrow$ Skolemización
$\forall x((h(f_y(x), x) \wedge \neg vo(f_y(x))) \vee f(x))$
$\Rightarrow$ eliminación de cuantificadores universales, y distribución de $\wedge$ sobre $\vee$ y eliminación de cuantificadores universales
$C1: \ h(f_y(x), x) \vee f(x),$
$C2: \ \neg vo(f_y(x))) \vee f(x)$

b) *"Los dragones verdes pueden volar"*

$\forall x(ve(x) \rightarrow vo(x)$
$\Rightarrow$ definición de $\rightarrow$, eliminación de cuantrificadores universales
$C3: \ \neg ve(x) \vee vo(x)$

c) *"Un dragón es verde si es hijo de al menos un dragón verde"*

$\forall x(\exists y(h(x, y) \wedge ve(y)) \rightarrow ve(x)$
$\Rightarrow$ definición de $\rightarrow$
$\forall x(\neg\exists y(h(x, y) \wedge ve(y)) \vee ve(x)$
$\Rightarrow$ movimiento de las negaciones hacia dentro
$\forall x(\forall y\neg(h(x, y) \wedge ve(y)) \vee ve(x)$
$\Rightarrow$ De Morgan
$\forall x(\forall y(\neg h(x, y) \vee \neg ve(y)) \vee ve(x)$
$\Rightarrow$ eliminación de cuantificadores universales
$C4: \ \neg h(x, y) \vee \neg ve(y) \vee ve(x)$

d) *"Todos los dragones verdes son felices"*

$\forall x(ve(x) \rightarrow f(x))$

En este caso debemos calcular la forma clausal de la negación de la conclusión.

$\neg\forall x(ve(x) \rightarrow f(x))$
$\Rightarrow$ definición de $\rightarrow$
$\neg\forall x(\neg ve(x) \vee f(x))$
$\Rightarrow$ movimiento de las negaciones hacia dentro
$\exists x\neg(\neg ve(x) \vee f(x))$
$\Rightarrow$ De Morgan y doble negación
$\exists x(ve(x) \wedge \neg f(x))$
$\Rightarrow$ Skolemización
$C5: \; ve(c_x)$
$C6: \; \neg f(c_x)$

Renombramos las variables del conjunto de cláusulas $\{C1, C2, C3, C4, C5, C6\}$ y aplicamos resolución. El renombramiento no se muestra pero se hace de modo que todas las variables de la cláusua $C1$ tengan el subíndice 1, todas las variables de la cláusula 2 el subíndice 2 y así sucesivamente. Utilizaremos esta misma idea para las resolventes que vayamos calculando.

Resolvemos $C1$ y $C6$ utilizando el mgu $\{x_1 = c_x\}$. La resolvente obtenida es $C7: \; h(f_y(c_x), c_x)$

Resolvemos $C2$ y $C6$ utilizando el mgu $\{x_2 = c_x\}$. La resolvente obtenida es $C8: \; \neg vo(f_y(c_x))$

Resolvemos $C4$ y $C5$ utilizando el mgu $\{y_4 = c_x\}$. La resolvente obtenida es $C9: \; \neg h(x_9, c_x) \vee ve(x_9)$

Resolvemos $C7$ y $C9$ utilizando el mgu $\{x_9 = f_y(c_x)\}$. La resolvente obtenida es $C10: \; ve(f_y(c_x))$

Resolvemos $C3$ y $C10$ utilizando el mgu $\{x_3 = f_y(c_x)\}$. La resolvente obtenida es $C11: \; vo(f_y(c_x))$

Resolvemos $C8$ y $C11$ utilizando el mgu $\{\}$ y obtenemos la cláusula vacía.

■

8. (Dificultad 2) Demuestra por resolución que es válida la fórmula:

$$\forall x\exists y \; (\; p(f(f(x)), y) \; \wedge \; \forall z \; (\; p(f(x), z) \rightarrow p(x, g(x, z)) \;) \;) \;\; \rightarrow \;\; \forall x\exists y \; p(x, y)$$

Debemos comprobar que la negación de esta fórmula es insatisfactible. En primer lugar calculamos la forma clausal de la negación de la fórmula y después aplicamos resolución.

$\neg(\; \forall x\exists y \; (\; p(f(f(x)), y) \wedge \forall z \; (\; p(f(x), z) \rightarrow p(x, g(x, z)) \;) \;) \;\; \rightarrow \;\; \forall x\exists y \; p(x, y) \;)$
$\Rightarrow$ definición de $\rightarrow$
$\neg(\; \neg\forall x\exists y \; (\; p(f(f(x)), y) \; \wedge \; \forall z \; (\; \neg p(f(x), z) \vee p(x, g(x, z)) \;) \;) \; \vee \; \forall x\exists y \; p(x, y) \;)$
$\Rightarrow$ De Morgan y doble negación
$\forall x\exists y \; (\; p(f(f(x)), y) \; \wedge \; \forall z \; (\; \neg p(f(x), z) \vee p(x, g(x, z)) \;) \;) \; \wedge \; \neg\forall x\exists y \; p(x, y)$
$\Rightarrow$ movimiento de negaciones hacia dentro
$\forall x\exists y \; (\; p(f(f(x)), y) \; \wedge \; \forall z \; (\; \neg p(f(x), z) \vee p(x, g(x, z)) \;) \;) \; \wedge \; \exists x\forall y \; \neg p(x, y)$

$\Rightarrow$ movimiento de cuantificadores hacia dentro y eliminación de conflictos de nombre
$\forall x(\ \exists y p(f(f(x)), y)\ \wedge\ \forall z\ (\ \neg p(f(x), z) \vee p(x, g(x, z))\ )\ )\ \wedge\ \exists s \forall t\ \neg p(s, t)$
$\Rightarrow$ Skolemización
$\forall x(\ p(f(f(x)), f_y(x))\ \wedge\ \forall z\ (\ \neg p(f(x), z) \vee p(x, g(x, z))\ )\ )\ \wedge\ \forall t\ \neg p(c_s, t)$
$\Rightarrow$ movimiento de cuantificadores universales hacia fuera
$\forall x \forall z \forall t(\ (\ p(f(f(x)), f_y(x))\ \wedge\ (\ \neg p(f(x), z) \vee p(x, g(x, z))\ )\ )\ \wedge\ \neg p(c_s, t)\ )$
$\Rightarrow$ eliminación de cuantificadores universales
$C_1:\ p(f(f(x_1)), f_y(x_1))$
$C_2:\ \neg p(f(x_2), z_2) \vee p(x_2, g(x_2, z_2))$
$C_3:\ \neg p(c_s, t)$

Aplicamos resolución a C_1 y C_2 utilizando el mgu $\{x_2 = f(x_1), z_2 = f_y(x_1)\}$.
$C_4:\ p(f(x_4), g(f(x_4), f_y(x_4)))$

Aplicamos resolución a C_4 y C_2 utilizando el mgu $\{x_2 = x_4, z_2 = g(f(x_4), f_y(x_4))\}$.
$C_5:\ p(x_5, g(x_5, g(f(x_5), f_y(x_5))))$

Finalmente aplicamos resolución a C_3 y C_5 utilizando el mgu $\{x_5 = c_s, t = g(c_s, g(f(c_s), f_y(c_s)))\}$ y obtenemos la cláusula vacía.

■

9. (Dificultad 3) Demuestra que la resolución sin la factorización no es refutacionalmente completa.
Ayuda: da un contraejemplo de dos cláusulas con dos literales cada una.

El conjunto de cláusulas $S = \{p(x) \vee p(y),\ \neg p(w) \vee \neg p(z)\}$ es insatisfactible. Sin embargo aplicando únicamente la regla de resolución (sin factorización) la única resolvente distinta de las cláusulas de partida que podemos obtener es $p(x_3) \vee \neg p(z_3)$ (salvo renombramientos de variables). Esto es, la clausura por resolución sin factorización es $Res\_no\_fact(S) = \{p(x) \vee p(y),\ \neg p(w) \vee \neg p(z), p(x_3) \vee \neg p(z_3)\}$, que no contiene la cláusula vacía.

■

10. (Dificultad 3) Una cláusula es *de base* si no contiene variables. Demuestra que la satisfactibilidad de conjuntos de cláusulas de base sin igualdad es decidible.

11. (Dificultad 2) Considera la regla de *resolución unitaria:*

$$\frac{A \qquad \neg B \vee C}{C\sigma} \qquad \text{donde } \sigma = mgu(A, B)$$

Esta regla es refutacionalmente completa para cláusulas de Horn sin igualdad. Demuestra que no lo es sin la restricción a cláusulas de Horn.

Esto ya pasa en el caso proposicional: el conjunto de cláusulas $\{ p \vee q, \neg p, \neg q \}$ es insatisfactible. Sin embargo el conjunto de sus resolventes por resolución unitaria es vacío, ya que no contiene ninguna cláusula unitaria positiva. ■

12. (Dificultad 4) Sea S un conjunto de cláusulas de Horn sin igualdad donde todos los símbolos de función que aparecen son de aridad cero (son símbolos de constante). Observa que puede haber símbolos de predicado de todo tipo.

    a) Demuestra que la resolución unitaria termina para S (es decir, la clausura bajo resolución unitaria es finita).

    b) Utilizando este hecho, y la completitud refutacional mencionada en el ejercicio previo, demuestra que la satisfactibilidad de conjuntos de Horn S sin símbolos de función de aridad mayor que cero es decidible.

    Nota: las cláusulas de este tipo forman el lenguage del *Datalog*, y este resultado de decidibilidad hace que el *Datalog* sirva para bases de datos deductivas.

Sea S como dice el enunciado. Sea K el número de literales de una cláusula de S cuyo número de literales sea máximo. Entonces K también es el número de literales de la cláusula de $ResUnit(S)$ que más literales tiene, porque con esta regla deductiva el número de literales nunca aumenta.

Sea A la aridad del símbolo de predicado de aridad máxima que aparece en S. Entonces, en una cláusula de $ResUnit(S)$ no pueden aparecer más de $n = K \cdot A$ variables. Las variables de cada cláusula de $ResUnit(S)$ pueden escribirse (renombrándolas) como elementos del conjunto $\{x_1 \ldots x_n\}$, y, por lo tanto, los átomos de las cláusulas de $ResUnit(S)$ serán un símbolo de predicado aplicado a variables de $\{x_1 \ldots x_n\}$ y constantes de las que aparecen en S. Como sólo hay un número finito de átomos de este tipo, el número de cláusulas distintas que pueden aparecer en $ResUnit(S)$ también es finito, por lo que la clausura bajo resolución unitaria es finita.

Puesto que la resolución unitaria es correcta y refutacionalmente completa para cláusulas de Horn, la satisfactibilidad de conjuntos de Horn S sin símbolos de función de aridad mayor que cero es decidible: se obtiene $ResUnit(S)$ en tiempo finito, y tenemos $\square \in ResUnit(S)$ ssi S insatisfactible. ■

13. (Dificultad 3) Escribe un conjunto de cláusulas S sin símbolos de función para el que la resolución no termina.