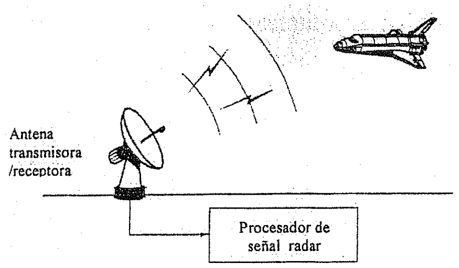
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

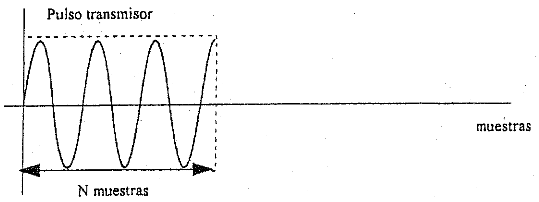
PROCESSAMENT DEL SENYAL- Examen final
Professors: M.Lamarca, J.B. Mariño, F. Marqués, A. Oliveres, J. Vidal

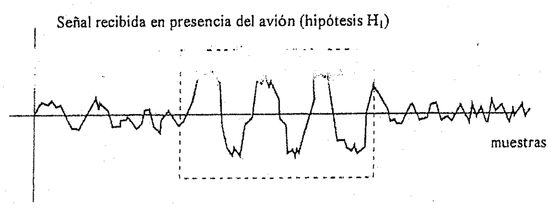
Data: 13 de Juny de 2005
Temps: **3 hores**

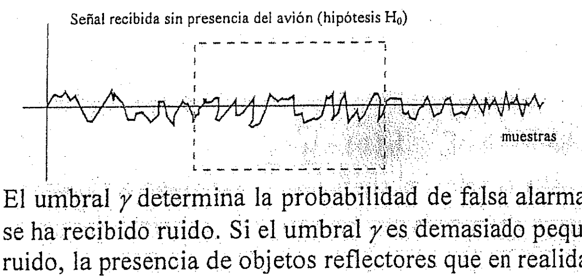
- No es poden fer servir llibres, apunts, calculadores, telèfons mòbils, etc.
- El D.N.I. ha d'estar sempre visible.
- Durant la realització de l'examen, tots els fulls han de dur el nom de l'estudiant.
- Els exercicis s'han de respondre en fulls separats.
- Tots els resultats s'han de justificar.
- Les notes provisionals es publicaran el 28 de juny a les 9h.
- Es poden presentar al·legacions a la Secretaria Acadèmica de l'Escola fins el dia 29 de juny a les 13h

Ejercicio 1









En un sistema de radar el transmisor emite una señal radioeléctrica cuya forma es conocida. Cuando esa señal encuentra un objeto reflector en su camino, se refleja y vuelve al transmisor atenuada y enmascarada por el ruido. En el caso de que no exista un objeto reflector, el receptor observa únicamente ruido (véase la figura). De esta forma, el detector trabaja con dos hipótesis que debe verificar sobre N muestras de la señal recibida: la presencia de señal reflejada $s(n)$ más ruido $w(n)$ (hipótesis H_1) o la sola presencia del ruido $w(n)$ (hipótesis H_0).
Matemáticamente:

$$H_0 : \underline{x} = \underline{w}$$
$$H_1 : \underline{x} = \underline{s} + \underline{w}$$

donde cada uno de los vectores contiene N muestras de señal, y el ruido es de media nula y covarianza $\underline{\underline{C}}_w$.

El detector óptimo se define de la siguiente forma: se decide la hipótesis H_1 cuando

$$L(\underline{x}) = \frac{f(\underline{x};H_1)}{f(\underline{x};H_0)} > \gamma \qquad (1)$$

donde $f(\underline{x};H_i)$ es la función de densidad de probabilidad de $\underline{x}$ cuando se cumple la hipótesis H_i.

El umbral γ determina la probabilidad de falsa alarma (P_{FA}), probabilidad de decidir H_1 cuando en realidad sólo se ha recibido ruido. Si el umbral γ es demasiado pequeño el detector decidirá con alta probabilidad, y a causa del ruido, la presencia de objetos reflectores que en realidad no están presentes.

En este problema se pretende estudiar cuál es el mejor diseño para la señal a transmitir, suponiendo que el ruido es gausiano[1] y se conoce su matriz de covarianza $\underline{\underline{C}}_w$. Se pide:

---

[1] La función de densidad de probabilidad gausiana para un vector $\underline{x}$ de variables aleatorias reales es:

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\underline{\underline{C}}_x)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m}_x)^T \underline{\underline{C}}_x^{-1}(\underline{x}-\underline{m}_x)\right)$$

a) Demuestre que el criterio de detección dado por la ecuación (1) puede transformarse en la siguiente operación sobre el vector de datos recibido:

$$z = \underline{x}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1} \underline{s} > \gamma' \qquad (2)$$

donde γ' es un nuevo umbral que depende de γ. Determine la expresión de γ'.

b) ¿Podemos decir que la función de densidad de probabilidad de z es gausiana en cada una de las hipótesis? ¿Por qué?

En el caso gausiano, la maximización del cociente $\dfrac{|E\{z;H_1\}|^2}{E\{z^2;H_0\}}$ minimiza la probabilidad de falsa alarma P_{FA}.

A partir de esta observación, se pretende determinar el vector de señal $\underline{s}$ óptimo a transmitir con la restricción de que la energía del vector de señal tenga un valor E preestablecido. Se pide:

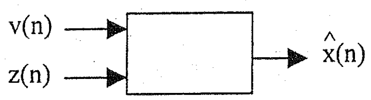
c) Calcule la media de la variable de decisión z para la hipótesis H_1 ($E\{z;H_1\}$) y la varianza para la hipótesis H_0 ($E\{z^2; H_o\}$).

d) Formule mediante multiplicadores de Lagrange la función cuya optimización proporciona el vector $\underline{s}$ que maximiza $\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1} \underline{s}$ y satisface la restricción de energía. ¿Cuál es el $\underline{s}$ óptimo?

Ejercicio 2

Se tienen dos versiones ruidosas de un proceso $x(n)$ de media nula: $v(n) = x(n) + w_1(n)$ y $z(n) = x(n) + w_2(n)$. Los ruidos $w_1(n)$ y $w_2(n)$ son independientes de $x(n)$, blancos, de media nula, incorrelados entre sí y de potencias σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente.

Se pretende obtener una estimación $\hat{x}(n)$ de la señal $x(n)$ mediante un filtro de Wiener, utilizando uno de los procesos como referencia y el otro como dato. En este ejercicio se va a analizar el diseño del sistema; es decir, qué proceso se debe tomar como dato y cuál como referencia en el esquema de Wiener.



Considere inicialmente la configuración donde v(n) se toma como dato y z(n) como referencia.

a) Identifique las distintas señales presentes en el diagrama con el esquema de Wiener.

b) Halle la ecuación del filtro óptimo $\underline{h}_1$ en función de las autocorrelaciones de las señales x(n), w_1(n) y $w_2(n)$. Determine si la presencia de los ruidos w_1(n) y w_2(n) afecta a la expresión de los coeficientes del filtro.

c) Halle la potencia mínima (ε_1) del error de la estimación de Wiener, diferencia entre la referencia y la salida del filtro de Wiener.
Determine cómo afecta la presencia de los ruidos w_1(n) y w_2(n) al valor de dicha potencia.

d) En este problema interesa que el error entre la salida de filtro de Wiener y el proceso que realmente se desea estimar ($x(n)$ en este caso) sea de potencia mínima.
Demuestre que el filtro que minimiza la potencia de este error es el mismo que el obtenido en el apartado ***b)***, y que el valor mínimo de (potencia) este error es $\varepsilon_1' = r_x(0) - \underline{h}_1^T \underline{r}_x(n)$. ó $\varepsilon' = r_x(0) - \underline{h}^H \cdot \underline{r}_x$

e) Para el caso de un filtro de un único coeficiente (h_1), halle el valor del coeficiente y expréselo en función de la relación señal a ruido $(S/N)_1$ de la señal $v(n)$. Calcule el valor de la potencia mínima (ε_1') del error entre la señal x(n) y la salida del filtro de Wiener para este caso.

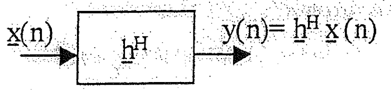
Considere ahora el diseño alternativo; es decir, la configuración que emplea $z(n)$ como dato y $v(n)$ como referencia:

f) ¿Cuál sería la ecuación de diseño del nuevo filtro óptimo $\underline{h}_2$?
¿Cuál es el valor mínimo de la potencia (ε_2') del error entre el proceso x(n) y la salida del filtro de Wiener?
Para el caso de un filtro de un único coeficiente (h_2), halle el valor del coeficiente y expréselo en función de la relación señal a ruido $(S/N)_2$ de la señal $z(n)$. Calcule el valor de la potencia mínima (ε_2') del error entre la señal x(n) y la salida del filtro de Wiener para este caso.

g) Razone cuál de las dos configuraciones analizadas le parece más adecuada para la estimación de x(n) basándose en los resultados obtenidos para el caso de un filtro de un único coeficiente.

Ejercicio 3

En este ejercicio se pretende desarrollar un estimador espectral iterativo basado en una versión de gradiente del método de Capon. Este método se basa en el filtrado de la señal a analizar *x(n)* con un filtro FIR de *N* coeficientes y la estimación de la densidad espectral de potencia de x(n) mediante la potencia de la señal a la salida de este filtro:



$$P(f) = E\{|y(n)|^2\} = \underline{h}^H \underline{\underline{R}}_x \underline{h}$$

El filtro se diseña para minimizar la potencia de la salida bajo la restricción de ganancia unitaria en la frecuencia de interés *f*. Es decir, se determina

$$\min_{\underline{h}} E\{|y(n)|^2\}$$

con la restricción lineal

$$\underline{h}^H \underline{e} = 1 \quad donde \quad \underline{e}^T = \left[1 \quad e^{j2\pi f} \quad e^{j2\pi 2f} \ldots e^{j2\pi (N-1)f}\right] \tag{3}$$

Analice el problema siguiendo las etapas indicadas:

Análisis de la solución cerrada

a) Formule la función de coste a optimizar en la estimación de Capon incorporando la restricción lineal (ecuación (3)) mediante un operador de Lagrange λ y exprese el gradiente de dicha función en términos de $\underline{\underline{R}}_x$, $\underline{h}$ y λ.

b) Halle la expresión del filtro óptimo $\underline{h}_{opt}$.

c) Particularice la expresión de $\underline{h}_{opt}$ para el caso en que la señal de entrada $\underline{x}$ sea ruido blanco de media nula y con potencia σ^2. Denomine $\underline{h}_{opt\ blanca}$ la solución hallada.
¿Cuál es la estimación *P(f)* en este caso?
Relacione la solución obtenida con otro estimador espectral que conozca.

Análisis geométrico de la función de coste

d) Represente gráficamente el problema anterior para el caso $f = 0$, N = 2, $\underline{h}$ real y una señal cuya matriz de autocorrelación es $\underline{\underline{R}}_x$. Para ello siga los pasos siguientes:

- Represente las curvas de isopotencia de $E\{|y|^2\}$ en función de los componentes de $\underline{h}$.
- Represente en la misma gráfica la recta correspondiente a la restricción lineal de la ecuación (3)
- Indique sobre la gráfica la solución $\underline{h}_{opt}$ que, satisfaciendo la restricción, minimiza la potencia $E\{|y|^2\}$.

Análisis de la solución iterativa.

Dado que $\underline{h}_{opt}$ depende de la autocorrelación de $\underline{x}$, y supuesto que no puede ser calculada a priori, se sugiere el empleo de un algoritmo de gradiente descendente para el cálculo de $\underline{h}_{opt}$. Se propone la inicialización del filtro como $\underline{h}(0) = \underline{h}_{opt\_blanca}$ y su actualización en la iteración *k* como

$$\underline{h}(k+1) = \underline{h}(k) - \mu \cdot \underline{\nabla}\left(\underline{\underline{R}}_x, \underline{h}(k), \lambda\right)$$

donde $\underline{\nabla}(\underline{\underline{R}}_x, \underline{h}(k), \lambda)$ es el vector gradiente obtenido en el apartado ***a)***.

Nótese que $\underline{h}(0) = \underline{h}_{opt\_blanca}$ satisface la restricción de (3) y se pretende que los valores $\underline{h}(k)$ satisfagan en todo momento esta restricción.

Se pide:

e) Halle la ecuación que ha de cumplir $\underline{\nabla}(\underline{\underline{R}}_x, \underline{h}(k), \lambda)$ para que, si $\underline{h}(k)$ satisface la restricción lineal, el nuevo valor $\underline{h}(k+1)$ también lo satisfaga. Determine el valor de λ.

f) Obtenga la ecuación de actualización del filtro y exprésela en función de la matriz $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}} - \dfrac{\underline{e}\underline{e}^H}{\underline{e}^H \underline{e}}$.

g) Razone cuál es la matriz cuyos autovalores determinan la convergencia del algoritmo de gradiente propuesto.

Ejercicio 4

En el estándar de codificación de imagen fija JPEG se hace uso de la transformada coseno. Se pregunta:

a) ¿Cuál es la función que realiza la transformada en la codificación? En otras palabras, ¿para qué se usa la transformada?

b) ¿Por qué la transformada coseno? ¿Podría dar dos razones?

c) Si la imagen estuviese constituida por píxeles incorrelados, ¿cuál sería el beneficio que aportaría el uso de la transformada?