Probabilitat i Processos Estocàstics

EXERCICIS

J. M. Aroca
http://www-ma4.upc.edu/~aroca
Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya

Setembre de 2008

EXERCICIS

1. Demostreu les fòrmules A.12 de l'apèndix A, fent ús de taules de veritat.

2. Una xifra és un valor del conjunt $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Considereu el conjunt de nombres de tres xifres (admetent zeros a l'esquerra).

   (a) Quants n'hi ha?

   (b) Quants d'aquests tenen les xifres diferents?

   (c) Quants les tres xifres iguals?

   (d) Quants tenen alguna xifra repetida?

3. Calculeu $\binom{7}{4}$ amb el triangle de Tartaglia.

4. Es llancen dos daus. Calculeu les següents probabilitats:

   (a) Que treguin el mateix resultat.

   (b) Que algun surti parell.

   (c) Que la suma dels dos valgui 5.

   (d) Que no surti ningun u.

   (e) Que surti exactament un tres.

   (f) Que surti algun tres.

   (g) Que surtin dos tresos.

5. Obteniu la fórmula del binomi de Newton per $(x + y)^n$ de manera similar a com es fa als apunts.

6. Calculeu els nombres combinatoris de la forma $\binom{6}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$.

   (a) Què val $\displaystyle\sum_k \binom{6}{k}$?

   (b) Què valen $\displaystyle\sum_{k \text{ parell}} \binom{6}{k}$ i $\displaystyle\sum_{k \text{ senar}} \binom{6}{k}$?

(c) Demostreu que, per a tot n, $\displaystyle\sum_{k \text{ parell}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ senar}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

Indicació: Considereu $(1-1)^n$.

7. Seleccionem 5 elemens ordenats, sense repetició, dins el conjunt $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
   (a) Quantes tries podem fer?
   (b) En quantes d'aquestes no hi és present el 3?
   (c) Quina és la probabilitat que al fer l'anterior selecció a l'atzar hi sigui present el 3?

8. Quin error, en tant per cent, es comet a l'aproximar 15! amb la fórmula d'Stirling?

9. Al nostre bar tenim 7 licors forts, 5 licors suaus i 4 refrescs. Quants cocktails podem preparar que continguin:
   (a) Dos licors forts i dos licors suaus?
   (b) Un refresc, 3 licors suaus i un de fort?
   (c) Un refresc i dos licors?

10. Volem formar una contrasenya amb 5 lletres de l'alfabet de 26 lletres. Quantes possibilitats tenim si:
    (a) Les lletres han de ser diferents?
    (b) Les lletres poden estar repetides?
    (c) Han de seguir el patró consonant-vocal-consonant-vocal-consonant, sense repeticions?
    (d) Com l'anterior apartat però amb possibles repeticions?

11. S'extreu una carta d'una baralla francesa (52 cartes). Donats els esdeveniments $A = \{\text{És un as}\}$ i $B = \{\text{És de cors}\}$ calculeu les probabilitats $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ i $P(\overline{B})$.

12. Demostreu que per a tot parell d'esdeveniments A, B es verifica:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1 + P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

13. S'extreuen dues cartes (sense reemplaçament) d'una baralla francesa (52 cartes). Donats els esdeveniments $A = \{\text{Surt algun as}\}$ i $B = \{\text{Surt alguna carta de cors}\}$ calculeu les probabilitats $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.

    Indicació: Utilitzeu la fórmula de l'exercici anterior per a calcular $P(A \cap B)$.

14. Són independents els esdeveniments A, B del problema 11? I els del problema 13?

15. Una casa té dos pisos amb tres portes cadascun. Tenim un clauer amb la clau de cada porta més dues claus mestres que obren totes les portes de cada pis respectivament, més una clau "supermestra" que obre totes les portes de la casa.
    (a) Triem una clau a l'atzar i la provem en una porta. Quina és la probabilitat que s'obri?
    (b) Si l'anterior porta s'obra, quina és la probabilitat que haguem triat la clau "supermestra"?
    (c) Triem una clau a l'atzar i la provem en dues portes del primer pis sense poder-les obrir. Quina és la probabilitat que aquesta clau permeti obrir la primera porta del segon pis?

16. Juguem a una loteria de 100 números.
    (a) Quina és la probabilitat que ens toqui alguna vegada si juguem 50 vegades?

(b) Quantes vegades hem de jugar perquè la probabilitat que ens toqui alguna vegada valgui $0,5$?

17. Es tiren dos daus. Calculeu la funció de probabilitat de la variable aleatòria X donada per la suma dels dos resultats.

18. Per les següents variables aleatòries, digueu de quin tipus són (binomial, etc) especificant els seus paràmetres i calculeu $P(X = 4)$.

    (a) Es llancen 10 monedes. X és el nombre de cares.

    (b) S'extreu una carta, amb remplaçament, d'una baralla de 52 cartes fins que surt un as. X és el nombre d'extraccions que fem.

    (c) Una centraleta rep trucades a un ritme mitjà d'una per minut. X és el nombre de trucades rebudes durant 5 minuts.

    (d) Juguem cada dia un número a una loteria de 1000 números. X és el nombre de vegades que ens toca el premi durant un any.

19. Una variable aleatòria X té funció de distribució $F(x) = 0$ per $x < -1$, $F(x) = \frac{1}{3}$ per $-1 \leq x < 0$, $F(x) = \frac{1}{2}$ per $0 \leq x < 2$ i $F(x) = 1$ per $x \geq 2$.

    (a) Dibuixeu-la. És una variable discreta, contínua o mixta?

    (b) Calculeu $P(X = -2), P(X = -1), P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2), P(0 \leq X \leq 2)$ i $P(0 < X < 2)$.

    (c) Doneu la seva funció de probabilitat.

20. Una variable aleatòria X té funció de distribució $F(x) = 0$ per $x < 1$ i $F(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$ per $x \geq 1$.

    (a) Dibuixeu-la. És una variable discreta, contínua o mixta?

    (b) Calculeu $P(X = 2)$ i $P(2 < X < 3)$.

    (c) Doneu la seva funció de densitat.

21. Per a les següents variables aleatòries contínues, calculeu $P(2 < X < 3)$.

    (a) Uniforme en $[0, 4]$.

    (b) Uniforme en $[0, 2]$.

    (c) Uniforme en $[-1, \frac{5}{2}]$.

    (d) Exponencial amb $\lambda = \frac{1}{2}$.

    (e) Gaussiana amb $m = 2$ i $\sigma = 2$.

22. Donada una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda = 1$:

    (a) Calculeu $P(|X - 1| \geq 3)$ i compareu el resultat amb la fita que dóna Txebyshev.

    (b) Trobeu $f_X(x \mid X \leq 1)$.

    (c) Calculeu $E[X \mid X \leq 1]$.

    (d) Trobeu la densitat de la variable $Y = e^X$.

    (e) Calculeu la variància de la variable $Z = X^2$.

SOLUCIONS

1. Si les proposicions $x \in A$ i $y \in B$ les anomenem p i q respectivament, $x \in \overline{A \cap B}$ correspon a $\neg(p \wedge q)$ i $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ correspon a $(\neg p) \vee (\neg q)$. Les taules de veritat es calculen fàcilment (per exemple $\neg(0 \wedge 0) = \neg 0 = 1$ i $(\neg 0) \vee (\neg 0) = 1 \vee 1 = 1$):

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	0	0

De la mateixa manera, $x \in \overline{A \cup B}$ correspon a $\neg(p \vee q)$ i $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ correspon a $(\neg p) \wedge (\neg q)$. Ara la taula és:

p	q	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
0	0	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0

2. (a) 1000. (b) 720. (c) 10. (d) 280.

3. 35, ja que:
$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ 1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1 \\ 1\ 7\ 21\ 35\ \mathbf{35}\ 21\ 7\ 1 \end{array}$$

4. (a) $\frac{1}{6} = 0,166$. (b) $\frac{3}{4} = 0,75$. (c) $\frac{1}{9} = 0,111$. (d) $\frac{25}{36} = 0,694$. (e) $\frac{5}{18} = 0,277$. (f) $\frac{11}{36} = 0,305$. (g) $\frac{1}{36} = 0,027$.

5. $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

6. (a) Sumant la setena fila del triangle de Tartaglia: $1+6+15+20+15+6+1 = 64$. (b) $1+15+15+1 = 32.$, $6+20+6 = 32$. (c) $2^n = (1+1)^n = \displaystyle\sum_k \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ parell}} \binom{n}{k} + \sum_{k \text{ senar}} \binom{n}{k}$.
$$0 = (1-1)^n = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k \text{ parell}} \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ senar}} \binom{n}{k}.$$

7. (a) 6720. (b) 2520. (c) $\frac{5}{8}$.

8. $0,55\%$.

9. (a) 210. (b) 280. (c) 264.

10. (a) 7.893.600. (b) 11.881.376. (c) 159.600. (d) 231.525.

11. $P(A) = \frac{1}{13}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{13}$ i $P(\overline{B}) = \frac{3}{4}$.

12. $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - (P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}))$
$= P(A) + P(B) - 1 + P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

13. $P(A) = \frac{33}{221}$, $P(B) = \frac{15}{34}$, $P(A \cap B) = \frac{29}{442}$ i $P(A \cup B) = \frac{116}{221}$.

14. Sí els del problema 11. No els del 13.

15. (a) 1/3. (b) 1/3. (c) 2/5.

16. (a) $0,395$. (b) 69.

17. $\Omega_X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. $P_X(2) = P_X(12) = \frac{1}{36}$, $P_X(3) = P_X(11) = \frac{1}{18}$,$P_X(4) = P_X(10) = \frac{1}{12}$, $P_X(5) = P_X(9) = \frac{1}{9}$, $P_X(6) = P_X(8) = \frac{5}{36}$, $P_X(7) = \frac{1}{6}$.

18. (a) Binomial amb $n = 10, p = \frac{1}{2}$, $P = 0,205$. (b)Geomètrica amb $p = \frac{1}{13}$, $P = 0,0605$. (c) Poisson amb $\alpha = 5$, $P = 0,1754$. (d) Binomial amb $n = 365, p = \frac{1}{1000}$, $P = 0,0005069$.

19. (a) Dicreta. (b) 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 0. (c) $\Omega_X = \{-1,0,2\}$. $P_X(-1) = \frac{1}{3}$, $P_X(0) = \frac{1}{6}$, $P_X(2) = \frac{1}{2}$.

20. (a) Contínua. (b) 0, $\frac{19}{216}$. (c) $f(x) = 0$ per $x < 1$ i $f(x) = \frac{3}{x^4}$ per $x > 1$.

21. (a) $\frac{1}{4}$. (b) 0. (c) $\frac{1}{7}$. (d) $0,1447$. (e) $0,1914$.

22. (a) $P = e^{-4} = 0{,}018$. La fita és $\frac{1}{9} = 0{,}11$ (b) $f_X(x \mid X \leq 1) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, 0 \leq x \leq 1$. (c) $\frac{e-2}{e-1}$. (d) $f(y) = \frac{1}{y^2}, y \geq 1$. (e) 20.