ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACION UPC

http://www.etsetb.upc.es/

Asignatura: COMUNICACIONES I

Ejercicios resueltos

Autores: (Profesores de la asignatura)

Margarita Cabrera Beán
José A. López-Salcedo
Carles Fernández Prades
Juan A. Fernández Rubio

http://gps-tsc.upc.es/comm/

Febrero 2006

1. INTRODUCCIÓN....3
2. PROCESOS ALEATORIOS....4
2.1 Ejercicio 1 de Examen de control Abril 2003 (M. Cabrera)....4
2.1.1 Enunciado....4
2.1.2 Resolución....5
2.2 Ejercicio de Examen de control Abril 2003 (M. Cabrera)....7
2.2.1 Enunciado....7
2.2.2 Resolución....8
2.3 Ejercicio de Examen de control Octubre 2004. (M. Cabrera)....11
2.3.1 Enunciado....11
2.3.2 Resolución....12
2.4 Ejercicio de Examen de control Noviembre 2004 (M. Cabrera)....14
2.4.1 Enunciado....14
2.4.2 Resolución....15
2.5 Ejercicio 1 de Examen Final Junio 2004 (J. Fernández Rubio)....16
2.5.1 Enunciado....16
2.5.2 Resolución....17
2.6 Ejercicio de Examen de control Noviembre 2005 (M. Cabrera)....20
2.6.1 Enunciado....20
2.6.2 Resolución....21
3. PROCESOS ALEATORIOS PASO - BANDA....23
3.1 Ejercicio de Examen de control Noviembre 2004 (M. Cabrera)....23
3.1.1 Enunciado....23
3.1.2 Resolución....24
3.2 Ejercicio 1 de Examen Final Enero 2003 (Resuelto por J. López-Salcedo)....28
3.2.1 Enunciado....28
3.2.2 Resolución....29
3.3 Ejercicio 3 de Examen Final de Junio 2003 (M. Cabrera)....39
3.3.1 Enunciado....39
3.3.2 Resolución....41
3.4 Ejercicio 1. Control 12 de Abril 2005 (J. López-Salcedo)....44
3.4.1 Enunciado....44
3.4.2 Resolución....45
3.5 Ejercicio 2 de Examen Final de Junio 2005 (J. López-Salcedo)....49
3.5.1 Enunciado....49
3.5.2 Resolución....50
3.6 Ejercicio de Examen de control Noviembre 2005 (C. Fernández Prades)....53
3.6.1 Enunciado....53
3.6.2 Resolución....55
4. MODULACIONES DIGITALES....60
4.1 Ejercicio 3 de Examen Final de T04 (M. Cabrera)....60
4.1.1 Enunciado....60
4.1.2 Resolución....61
4.2 Ejercicio 2 de Examen Final de T05 (M. Cabrera)....65
4.2.1 Enunciado....65
4.2.2 Resolución....67
5. Notas de Ayuda....72
5.1 Fórmulas Matemáticas....72
5.2 Área de la Gaussiana....73
5.3 Función de densidad de Probabilidad Rayleigh....75
5.4 Función de densidad de Probabilidad Rice....75

1. INTRODUCCIÓN

Este documento constituye una recopilación de problemas de examen de la asignatura 'Comunicacions 1' (COM1, Estudis d'Enginyeria de Telecomunicacions, ETSETB) resueltos por profesores de la asignatura.

Los problemas se han organizado por temas, presentando para cada uno de ellos el enunciado completo y posteriormente la resolución desglosada por apartados. Algunas de las resoluciones incluyen resultados de simulaciones y desarrollos con mayor grado de detalle del exigido en el correspondiente examen, tal como se indica en cada apartado. Por otro lado, de otros ejercicios solo se presenta el resultado final, sin todo el desarrollo necesario para llegar a él.

Al publicar esta colección para hacerla accesible a los alumnos matriculados en COM1, los profesores que hemos participado recomendamos que se consulte siempre como un material adicional de segunda instancia. Creemos que es muy importante el esfuerzo personal que cada alumno debe dedicar para intentar resolver de forma individual cada uno de los ejercicios como etapa previa a la consulta de las resoluciones. La resolución de los problemas debería hacerse de forma gradual tras la asistencia y seguimiento de las clases presenciales y posterior estudio de la teoría.

Es importante "pensar durante un buen rato" cuál debe ser la resolución y resolverla de forma completa. Aprenderéis mucho más al observar vuestros propios errores en la comparación con la resolución que si consultáis directamente la resolución de los ejercicios sin dedicar el tiempo necesario para resolverlos.

Con el deseo por tanto, de que os sea de utilidad, también os animo a que nos hagáis llegar vuestros comentarios, dudas, sugerencias, etc.. a los autores, bien de forma individualizada o centralizada:

Margarita Cabrera
UPC-Campus Nord D5
Marga.cabrera@upc.edu

2. PROCESOS ALEATORIOS

2.1 Ejercicio 1 de Examen de control Abril 2003 (M. Cabrera)

2.1.1 Enunciado

Sea *X(t)* un proceso aleatorio cicloestacionario, y T_c el periodo de su función de autocorrelación: $R_X(t+t,t) = R_X(t+T_c+t, t+T_c)$.

Su densidad espectral es $S_X(f) = TF\left(\hat{R}_X(t)\right)$ siendo $\hat{R}_X(t) = \frac{1}{T_c}\int_{<T_c>} R_X(t+t,t)dt$ la correlación promediada temporalmente.

Sea *Y(t)* el proceso obtenido a la salida de un sistema lineal invariante de respuesta impulsional $h(t)$ cuando a la entrada se presenta *X(t)*.

a) Demuestre que *Y(t)* es también cicloestacionario. Para ello calcule su correlación $R_Y(t+t,t)$ en función de $R_X(t+t,t)$ y de $h(t)$. (NOTA: No es necesario que realice el cálculo para la media, dada la analogía con el desarrollo para la correlación).

b) Calcule la correlación promediada temporalmente del proceso de salida $\hat{R}_Y(t)$ en función de $\hat{R}_X(t)$ y de $h(t)$.

c) Calcule su densidad espectral $S_Y(f) = TF\left(\hat{R}_Y(t)\right)$ en función de $S_X(f)$ y de $H(f)$. Observe que se obtiene la misma relación que para procesos estacionarios.

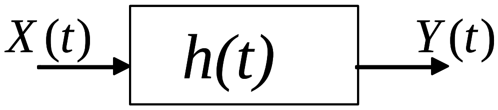
d) Si $X(t) = \cos(2p1000t) + W(t)$, con $W(t)$ ruido blanco estacionario, de media nula y densidad espectral $\frac{N_0}{2}$, y $h(t)$ la respuesta de un filtro paso bajo ideal de ancho de banda 2KHz, calcule $\hat{R}_X(t)$, T_c y $S_Y(f)$.

2.1.2 Resolución

a) Demuestre que *Y(t)* es también cicloestacionario. Para ello calcule su correlación $R_Y(t+\tau,t)$ en función de $R_X(t+\tau,t)$ y de $h(t)$. (NOTA: No es necesario que realice el cálculo para la media, dada la analogía con el desarrollo para la correlación).

Solución:

En todo el ejercicio se consideran los procesos como señales aleatorias reales.



$$R_y(t+\tau,t)=E\left[y(t+\tau)y(t)\right]=E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda\right]=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E\left[x(t+\tau-\alpha)x(t-\lambda)\right]h(\alpha)d\alpha\, h(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_x(t+\tau-\alpha,t-\lambda)h(\alpha)d\alpha\, h(\lambda)d\lambda$$

Dado que la dependencia de la autocorrelación del proceso de salida $R_y(t+\tau,t)$, respecto al origen de tiempos *t*, viene dada a través de la autocorrelación del proceso de entrada $R_x(t+\tau,t)$

$$R_X(t+\tau,t)=R_X(t+T_c+\tau,t+T_c)\quad\Rightarrow\quad R_Y(t+\tau,t)=R_Y(t+T_c+\tau,t+T_c)$$

Por tanto el proceso de salida es cicloestacioario y tiene el mismo cicloperiodo que el proceso de entrada: T_c

b) Calcule la correlación promediada temporalmente del proceso de salida $\hat{R}_Y(\tau)$ en función de $\hat{R}_X(\tau)$ y de $h(t)$.

Solución:

$$\hat{R}_Y(\tau)=\frac{1}{T_c}\int_{<T_c>}R_Y(t+\tau,t)dt=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_c}\int_0^{T_c}R_x(t+\tau-\alpha,t-\lambda)dt\,h(\alpha)d\alpha\, h(\lambda)d\lambda=\begin{Bmatrix}CambioVariable: \\ \gamma=t-\lambda\end{Bmatrix}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_c}\int_{-\lambda}^{T_c-\lambda}R_x(\gamma+\lambda+\tau-\alpha,\gamma)d\gamma\, h(\alpha)d\alpha\, h(\lambda)d\lambda=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{R}_x(\tau+\lambda-\alpha)h(\alpha)d\alpha\, h(\lambda)d\lambda=\hat{R}_x(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$$

La relación que se cumple para la correlación de procesos estacionarios a través de sistemas invariantes lineales, puede por tanto aplicarse a la correlación promediada de procesos cicloestacionarios a través de sistemas invariantes lineales.

c) Calcule su densidad espectral $S_Y(f) = TF\left(\hat{R}_Y(t)\right)$ en función de $S_X(f)$ y de $H(f)$. Observe que se obtiene la misma relación que para procesos estacionarios.

Solución:

La relación que se cumple para la densidad espectral de procesos estacionarios a través de sistemas invariantes lineales, puede por tanto aplicarse a la densidad espectral de procesos cicloestacionarios a través de sistemas invariantes lineales.

$$
\begin{aligned}
&S_Y(f) = TF\left(\hat{R}_Y(t)\right) = TF\left(\hat{R}_x(t) * h(t) * h(-t)\right) = \\
&TF\left(\hat{R}_x(t)\right)\left|H(f)\right|^2 = S_X(f)\left|H(f)\right|^2
\end{aligned}
$$

d) Si $X(t) = \cos(2p1000t) + W(t)$, con $W(t)$ ruido blanco estacionario, de media nula y densidad espectral $\frac{N_0}{2}$, y $h(t)$ la respuesta de un filtro paso bajo ideal de ancho de banda 2KHz, calcule $\hat{R}_X(t)$, T_c y $S_Y(f)$.

Solución:

Proceso de entrada: Cálculo de autocorrelación.

$$
\begin{aligned}
&R_X(t+t, t) = E\left[x(t+t)x(t)\right] = \\
&E\left[\cos(2p1000(t+t))\cos(2p1000t)\right] + E\left[W(t+t)W(t)\right] = \\
&\tfrac{1}{2}\cos(2p1000(2t+t)) + \tfrac{1}{2}\cos(2p1000t) + \tfrac{N_0}{2}d(t)
\end{aligned}
$$

$$T_c = \tfrac{1}{2000} = 0.5mseg$$

Dado que el proceso es cicloestacionario, calculamos su autocorrelación promediada:

$$\hat{R}_X(t) = \tfrac{1}{2}\cos(2p1000t) + \tfrac{N_0}{2}d(t)$$

Densidad espectral:
$$S_x(f) = \tfrac{1}{4}d(f-1000) + \tfrac{1}{4}d(f+1000) + \tfrac{N_0}{2}$$

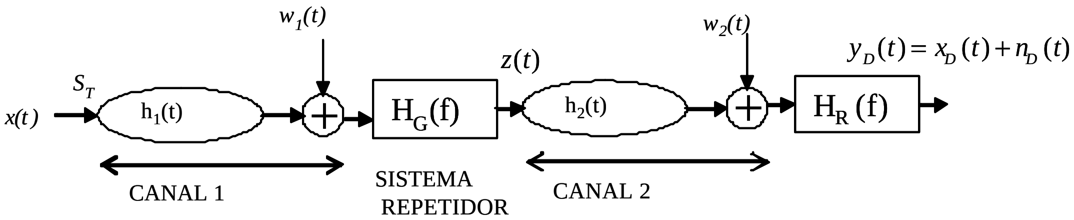
Densidad espectral del proceso de salida: Considerando que $H(f) = \Pi\left(\frac{f}{4000}\right)$

$$S_Y(f) = S_X(f)\left|H(f)\right|^2 = \tfrac{1}{4}d(f-1000) + \tfrac{1}{4}d(f+1000) + \tfrac{N_0}{2}\Pi\left(\frac{f}{4000}\right)$$

2.2 Ejercicio de Examen de control Abril 2003 (M. Cabrera)

2.2.1 Enunciado

En un enlace de radiocomunicaciones (canal AWGN) se coloca una estación repetidora, de modo que el esquema resultante total es el siguiente.



Considere todas las señales reales, aleatorias, estacionarias y estadísticamente independientes entre sí; $S_{w_1}(f) = S_{w_2}(f) = \frac{N_0}{2}$; $h_1(t) = h_2(t) = ad\left(t - t_d\right)$, $H_G(f) = \sqrt{G}\Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$, B_x ancho de banda de *X(t)*, $H_R(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$.

a) Calcule la relación de potencias señal a ruido SNR_1 sobre la señal de salida del repetidor *z(t)* en función de los parámetros S_T, a, N_0, B_x.

b) Calcule el valor necesario de G en función de SNR_1 y de a , para que la potencia transmitida por el sistema repetidor sea igual a la transmitida por el transmisor: $S_T = E\left[z^2(t)\right]$

c) Calcule la relación de potencias señal a ruido SNR_D y la pérdida en dB respecto a SNR_1 Evalúe dicha pérdida si $S_T = 1watt, a = 0.5, N_0 = 5.10^{-6} watts/Hz, B_x = 5KHz$

Suponga a partir de este punto que el segundo tramo de canal deja de ser ideal: $H_2(f) = \dfrac{a}{1 + be^{-j(p\, f/2B_x)}}$ y el resto de sistemas y señales no cambian respecto al planteamiento inicial.

d) Demuestre que si a continuación del filtro receptor $H_R(f)$, se coloca un ecualizador FIR de respuesta $h_Q(t) = d(t) + bd(t - T)$, se elimina totalmente la distorsión producida sobre la señal útil. Halle el valor adecuado del retardo *T*.

e) Identifique los términos de señal útil y de ruido a la salida del ecualizador y obtenga y dibuje la densidad espectral de ruido en este punto.

f) Calcule la relación señal a ruido a la salida del ecualizador en función de los parámetros que considere necesarios.

2.2.2 Resolución

a) Calcule la relación de potencias señal a ruido SNR_1 sobre la señal de salida del repetidor *z(t)* en función de los parámetros S_T, a, N_0, B_x.

Solución:

Salida sistema repetidor: $z(t)=\sqrt{G}a\,x(t-t_d)+n_1(t)$

Con $n_1(t)=w_1(t)*h_G(t)$

Potencia señal útil: $S_D=E\left[\left(\sqrt{G}a\,x(t-t_d)\right)^2\right]=Ga^2P_x=Ga^2S_T$

Potencia señal de ruido: $N_D=E\left[\left(n_1(t)\right)^2\right]=G\int_{-B_x}^{+B_x}\frac{N_0}{2}df=GB_xN_0$

Relación de potencias: $SNR_1=\dfrac{a^2S_T}{B_xN_0}$

b) Calcule el valor necesario de G en función de SNR_1 y de a, para que la potencia transmitida por el sistema repetidor sea igual a la transmitida por el transmisor: $S_T=E\left[z^2(t)\right]$

Solución:

Se desea que $S_T=E\left[z^2(t)\right]=Ga^2S_T+GB_xN_0$

Por tanto: $G=\dfrac{S_T}{a^2S_T+B_xN_0}=\dfrac{SNR_1}{a^2(1+SNR_1)}$

c) Calcule la relación de potencias señal a ruido SNR_D y la pérdida en dB respecto a SNR_1 Evalúe dicha pérdida si $S_T=1watt, a=0.5,\ N_0=5.10^{-6}watts/Hz, B_x=5KHz$

Solución:

A la salida del filtro $H_R(f)$ se tiene:

$$y_D(t)=\sqrt{G}a^2x(t-2t_d)+n_1(t)+n_2(t)$$

Con $n_1(t)=w_1(t)*h_G(t)*h_2(t)*h_R(t)$ $\qquad n_2(t)=w_2(t)*h_R(t)$

Potencia señal útil: $S_D=E\left[\left(\sqrt{G}a^2x(t-2t_d)\right)^2\right]=Ga^4P_x=Ga^4S_T$

Potencia señal de ruido: $N_D=E\left[\left(n_1(t)+n_2(t)\right)^2\right]=Ga^2B_xN_0+B_xN_0$

Relación de potencias: $SNR_D=\dfrac{Ga^4S_T}{(Ga^2+1)B_xN_0}=SNR_1\dfrac{Ga^2}{Ga^2+1}=SNR_1\dfrac{SNR_1}{2SNR_1+1}$

Pérdidas en dB: $10\log_{10}\left(\dfrac{SNR_1}{2SNR_1+1}\right)$

Sustituyendo los valores dados: $SNR_1 = \dfrac{a^2 S_T}{B_x N_0} = 10$ Pérdidas en dB=-3,22

d) Demuestre que si a continuación del filtro receptor $H_R(f)$, se coloca un ecualizador FIR de respuesta $h_Q(t) = d(t) + bd(t-T)$, se elimina totalmente la distorsión producida sobre la señal útil. Halle el valor adecuado del retardo *T*.

Solución:

Función de transferencia del ecualizador: $H_Q(f) = 1 + b\,e^{-j2p\,fT}$

Con lo que:

$$H_1(f)H_G(f)H_2(f)H_R(f)H_Q(f) = Ga^2\frac{1+b\,e^{-j2p\,fT}}{1+b\,e^{-jp\,f/2B_x}}e^{-j2p\,ft_d}\,\Pi\left(\tfrac{f}{2B_x}\right) = Ga^2\,\Pi\left(\tfrac{f}{2B_x}\right)e^{-j2p\,ft_d}$$

y por tanto a la salida del filtro $H_R(f)$ se tiene:

$$y_D(t) = \sqrt{G}a^2 x(t-t_d) + n_1(t) + n_2(t)$$

Con $n_1(t) = w_1(t) * h_G(t) * h_2(t) * h_R(t) * h_Q(t)$ $n_2(t) = w_2(t) * h_R(t) * h_Q(t)$

De modo que la señal útil no presenta distorsión, siempre que $T = \frac{1}{4B_x}$

e) Identifique los términos de señal útil y de ruido a la salida del ecualizador y obtenga y dibuje la densidad espectral de ruido en este punto.

Solución:

En $y_D(t) = x_D(t) + n_D(t) = \sqrt{G}a^2 x(t-t_d) + n_1(t) + n_2(t)$,
el primer sumando es la señal útil y el resto la señal de ruido:

Densidad espectral de ruido:

$$S_{n_D}(f) = S_{w_1}(f)\left|H_G(f)H_2(f)H_R(f)H_Q(f)\right|^2 + S_{w_2}(f)\left|H_R(f)H_Q(f)\right|^2$$

$$= \tfrac{N_0}{2}\left(Ga^2 + \left|1+be^{-j2p\,fT}\right|^2\right)\Pi\left(\tfrac{f}{2B_x}\right) = \tfrac{N_0}{2}\left(Ga^2 + 1 + b^2 + 2b\cos(2p\,fT)\right)\Pi\left(\tfrac{f}{2B_x}\right)$$

f) Calcule la relación señal a ruido a la salida del ecualizador en función de los parámetros que considere necesarios.

Solución:

Potencia señal útil $S_D = Ga^4 P_x = Ga^4 S_T$

Potencia señal de ruido: $N_D = E\left[\left(n_D(t)\right)^2\right] = \int_{-B_x}^{+B_x} S_{n_D}(f)df = N_0 B_x\left(Ga^2 + 1 + b^2 + \frac{4b}{p}\right)$

Relación señal a ruido: $SNR_D = \dfrac{Ga^4 S_T}{N_0 B_x\left(Ga^2 + 1 + b^2 + \frac{4b}{p}\right)} = SNR_1 \dfrac{a^2 S_T}{\left(Ga^2 + 1 + b^2 + \frac{4b}{p}\right)}$

2.3 Ejercicio de Examen de control Octubre 2004. (M. Cabrera)

2.3.1 Enunciado

Sea un proceso aleatorio complejo $z(t) = x(t) + jy(t)$ tal que las partes real $x(t)$ e imaginaria $y(t)$ son a su vez procesos aleatorios caracterizados por las funciones de correlación $R_x(t+t,t), R_y(t+t,t), R_{xy}(t+t,t), R_{yx}(t+t,t)$.

a) Obtenga la función de autocorrelación $R_z(t+t,t) = E[z(t+t)z^*(t)]$ en función de $R_x(t+t,t), R_y(t+t,t), R_{xy}(t+t,t), R_{yx}(t+t,t)$.

> Un proceso aleatorio complejo se denomina circularmente simétrico cuando se cumple
>
> $$R_{zz^*}(t+t,t) = E[z(t+t)z(t)] = 0$$

b) Obtenga las condiciones que deben cumplir las funciones $R_x(t+t,t), R_y(t+t,t), R_{xy}(t+t,t), R_{yx}(t+t,t)$ para que el proceso $z(t) = x(t) + jy(t)$ sea circularmente simétrico.

c) Si $h(t)$ es la respuesta impulsional de un sistema lineal e invariante y $z(t) = x(t) + jy(t)$ es un proceso aleatorio circularmente simétrico, averigüe si $v(t) = z(t) * h(t)$ es o no es circularmente simétrico.

d) Si $z(t) = x(t) + jy(t)$ es un proceso aleatorio circularmente simétrico averigüe si $v(t) = z(t)e^{j2p f_c t}$ es o no es circularmente simétrico. Calcule también su función de autocorrelación $R_v(t+t,t)$ en función de $R_z(t+t,t)$

e) Sea el proceso $z(t) = e^{j(j+2pt)}$ en el que j es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_j(j) = \frac{1}{2p}\Pi\left(\frac{j}{2p}\right)$. Calcule $R_z(t+t,t)$, $R_{zz^*}(t+t,t)$, $S_z(f)$ y P_z. ¿Es $z(t)$ estacionario? ¿Es $z(t)$ circularmente simétrico? Obtenga $R_x(t+t,t), R_y(t+t,t), R_{xy}(t+t,t), R_{yx}(t+t,t)$ a partir de las correlaciones anteriores.

2.3.2 Resolución

a) Obtenga la función de autocorrelación $R_z(t+t,t)=E[z(t+t)z^*(t)]$ en función de $R_x(t+t,t), R_y(t+t,t), R_{xy}(t+t,t), R_{yx}(t+t,t)$.

Solución:

$$R_z(t+t,t)=E[z(t+t)z^*(t)]=E\left[\left(x(t+t)+jy(t+t)\right)\left(x(t)-jy(t)\right)\right]=$$
$$E[x(t+t)x(t)]+E[y(t+t)y(t)]-jE[x(t+t)y(t)]+jE[y(t+t)x(t)]=$$
$$R_x(t+t,t)+R_y(t+t,t)-j\left(R_{xy}(t+t,t)-R_{yx}(t+t,t)\right)$$

b) Obtenga las condiciones que deben cumplir las funciones $R_x(t+t,t), R_y(t+t,t), R_{xy}(t+t,t), R_{yx}(t+t,t)$ para que el proceso $z(t)=x(t)+jy(t)$ sea circularmente simétrico.

Solución:

$$R_{zz^*}(t+t,t)=E[z(t+t)z(t)]=E\left[\left(x(t+t)+jy(t+t)\right)\left(x(t)+jy(t)\right)\right]=$$
$$E[x(t+t)x(t)]-E[y(t+t)y(t)]+jE[x(t+t)y(t)]+jE[y(t+t)x(t)]=$$
$$R_x(t+t,t)-R_y(t+t,t)+j\left(R_{xy}(t+t,t)+R_{yx}(t+t,t)\right)=0\Rightarrow$$
$$R_x(t+t,t)=R_y(t+t,t)$$
$$R_{xy}(t+t,t)=-R_{yx}(t+t,t)$$

c) Si $h(t)$ es la respuesta impulsional de un sistema lineal e invariante y $z(t)=x(t)+jy(t)$ es un proceso aleatorio circularmente simétrico, averigüe si $v(t)=z(t)*h(t)$ es o no es circularmente simétrico.

Solución:

$$R_{vv^*}(t+t,t)=E[v(t+t)v(t)]=E\left[\int z(t+t-l)h(l)dl\int z(t-g)h(g)dg\right]=$$
$$\iint E[z(t+t-l)z(t-g)]h(l)dl\,h(g)dg=\iint R_{zz^*}(t+t-l,t-g)h(l)dl\,h(g)dg=0$$

d) Si $z(t)=x(t)+jy(t)$ es un proceso aleatorio circularmente simétrico averigüe si $v(t)=z(t)e^{j2p f_c t}$ es o no es circularmente simétrico. Calcule también su función de autocorrelación $R_v(t+t,t)$ en función de $R_z(t+t,t)$

Solución:

$$R_{vv^*}(t+t,t)=E[v(t+t)v(t)]=$$
$$E\left[z(t+t)e^{j2p f_c(t+t)}z(t)e^{j2p f_c t}\right]=R_{zz^*}(t+t,t)e^{j2p f_c(2t+t)}=0$$

Por tanto $v(t) = z(t)e^{j2p f_c t}$ SI es circularmente simétrico

Cálculo de la función de autocorrelación:

$$R_{vv}\left(t+t,t\right) = E\left[v(t+t)v^*(t)\right] =$$
$$E\left[z(t+t)e^{j2p f_c(t+t)}z^*(t)e^{-j2p f_c t}\right] = R_z\left(t+t,t\right)e^{j2p f_c t}$$

e) Sea el proceso $z(t) = e^{j(j+2pt)}$ en el que j es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_j(j) = \frac{1}{2p}\Pi\left(\frac{j}{2p}\right)$. Calcule $R_z\left(t+t,t\right)$, $R_{zz^*}\left(t+t,t\right)$, $S_z(f)$ y P_z. ¿Es $z(t)$ estacionario? ¿Es $z(t)$ circularmente simétrico? Obtenga $R_x\left(t+t,t\right), R_y\left(t+t,t\right), R_{xy}\left(t+t,t\right), R_{yx}\left(t+t,t\right)$ a partir de las correlaciones anteriores.

Solución:

$$R_z\left(t+t,t\right) = E\left[z(t+t)z^*(t)\right] = E\left[e^{j(2p(t+t)+j)}e^{-j(2pt+j)}\right] = E\left[e^{j2pt}\right] = e^{j2pt}$$

$$R_{zz^*}\left(t+t,t\right) = E\left[z(t+t)z(t)\right] = E\left[e^{j(2p(t+t)+j)}e^{j(2pt+j)}\right] =$$
$$e^{j2p(2t+t)}E\left[e^{j2j}\right] = e^{j2p(2t+t)}\frac{1}{2p}\int_{-p}^{+p}e^{j2j}\,dj = e^{j2p(2t+t)}\frac{1}{2p}\left[\frac{e^{j2j}}{2j}\right]_{-p}^{+p} = \frac{\operatorname{sen}(2p)}{2p} = 0$$

Por tanto $z(t) = e^{j(j+2pt)}$ SI es circularmente simétrico

Además como es de media estadística nula $E\left[e^{j(2pt+j)}\right] = e^{j2pt}\frac{1}{2p}\int_{-p}^{+p}e^{jj}\,dj = 0$, SI es estacionario

$$S_z(f) = TF\left[R_z(t)\right] = d\left(f-1\right)$$
$$P_z = R_z(0) = \int S_z(f)df = 1$$

Por otro lado, aplicando las condiciones para procesos circularmente simétricos obtenidos en el apartado 2:

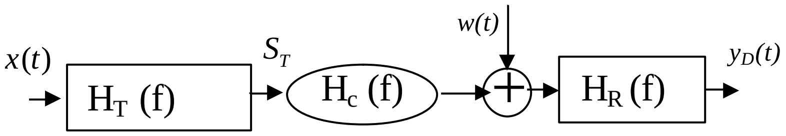
$$R_z\left(t+t,t\right) = R_z(t) = R_x\left(t+t,t\right) + R_y\left(t+t,t\right) - j\left(R_{xy}\left(t+t,t\right) - R_{yx}\left(t+t,t\right)\right) =$$
$$2R_x\left(t+t\right) + j2R_{yx}\left(t+t\right) = 2R_x(t) + j2R_{yx}(t) = e^{j2pt} \Rightarrow$$
$$R_x(t) = R_y(t) = \tfrac{1}{2}\cos\left(2pt\right)$$
$$R_{yx}(t) = -R_{xy}(t) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2pt\right)$$

2.4 Ejercicio de Examen de control Noviembre 2004 (M. Cabrera)

2.4.1 Enunciado

Un mensaje (proceso aleatorio y estacionario) $x(t)$ de densidad espectral $S_x(f)$, potencia P_x y ancho de banda B_x, se transmite por un sistema de comunicaciones analógico y en banda base. La función de transferencia del canal es $H_c(f)$ y la densidad espectral del ruido aditivo es $S_w(f)$.

Se contemplan dos opciones para el diseño del transmisor y del receptor:



Opción 1: $H_T(f), H_R(f)$ se *diseñan como Filtros Terminales Óptimos y en detección resulta*

$$\left(\tfrac{S}{N}\right)_{FTO} = \frac{S_T P_x}{\left|\int \frac{\sqrt{S_x(f)}\sqrt{S_w(f)}}{|H_c(f)|}\,df\right|^2}$$

Opción 2: $H_T(f) = \dfrac{K_T}{\sqrt{H_C(f)}}, H_R(f) = \dfrac{K_R}{\sqrt{H_C(f)}}$

a) Obtenga la $\left(\tfrac{S}{N}\right)_{D-2}$ en función de la potencia transmitida S_T, P_x, $S_x(f)$, $H_c(f)$, $S_w(f)$ para la opción 2.

b) $\left(\tfrac{S}{N}\right)_{D-2}$ es mayor o menor que $\left(\tfrac{S}{N}\right)_{FTO}$? ¿Qué condición para los datos del enunciado se ha de cumplir para que ambos cocientes resulten iguales?

2.4.2 Resolución

a) Obtenga la $\left(\frac{S}{N}\right)_{D-2}$ en función de la potencia transmitida S_T, P_x, $S_x(f)$, $H_c(f)$, $S_w(f)$ para la opción 2.

Solución:

Debido a que se cumple la condición de ecualización:

$$H_T(f)H_c(f)H_R(f) = \frac{K_T}{\sqrt{H_c(f)}} H_c(f) \frac{K_R}{\sqrt{H_c(f)}} = K_T K_R$$
$$\Rightarrow h_T(t) * h_c(t) * h_R(t) = K_T K_R d(t)$$

La señal a la salida del sistema (detección) puede expresarse como señal útil sin distorsión más señal de ruido.

$$y_D(t) = x_D(t) + n_D(t) = K_T K_R x(t) + w(t) * h_R(t)$$

Potencia de la señal útil en detección: $S_D = K_T{}^2 K_R{}^2 P_x$

Potencia de la señal transmitida: $S_T = \int S_x(f)\left|H_T(f)\right|^2 df = K_T{}^2 \int \frac{S_x(f)}{|H_c(f)|} df$

Potencia de la señal de ruido en detección:

$$N_D = \int S_w(f)\left|H_R(f)\right|^2 df = K_R{}^2 \int \frac{S_w(f)}{|H_c(f)|} df$$

Relación SNR en detección:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D-2} = \frac{S_D}{N_D} = \frac{K_T{}^2 K_R{}^2 P_x}{K_R{}^2 \int \frac{S_w(f)}{|H_c(f)|} df} = \frac{P_x S_T}{\int \frac{S_x(f)}{|H_c(f)|} df \int \frac{S_w(f)}{|H_c(f)|} df}$$

b) $\left(\frac{S}{N}\right)_{D-2}$ es mayor o menor que $\left(\frac{S}{N}\right)_{FTO}$? ¿Qué condición para los datos del enunciado se ha de cumplir para que ambos cocientes resulten iguales?

Solución:

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D-2} = \frac{P_x S_T}{\int \frac{S_x(f)}{|H_c(f)|} df \int \frac{S_w(f)}{|H_c(f)|} df} \leq \frac{P_x S_T}{\left|\int \frac{\sqrt{S_x(f)}\sqrt{S_w(f)}}{|H_c(f)|} df\right|^2} = \left(\frac{S}{N}\right)_{FTO}$$

Para que ambas relaciones sean iguales debe cumplirse:

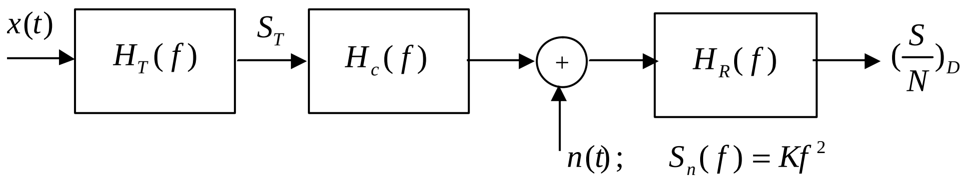
$$\sqrt{\frac{S_x(f)}{|H_c(f)|}} = l\sqrt{\frac{S_w(f)}{|H_c(f)|}} \Rightarrow S_x(f) = \sqrt{l}\, S_w(f)$$

siendo l una constante real y positiva cualquiera.

2.5 Ejercicio 1 de Examen Final Junio 2004 (J. Fernández Rubio)

2.5.1 Enunciado

Se desea trasmitir una señal banda base $x(t)$ a través del sistema de la figura:



La señal $x(t)$ es un proceso estacionario con potencia P_x y densidad espectral uniforme en el intervalo $|f| \leq B_x$, y el canal es un filtro paso bajo de respuesta $H_c(f) = \dfrac{1}{1 + j(\frac{f}{aB_x})}$. a es una constante real.

El objetivo de este ejercicio es comparar dos diseños de los filtros transmisor y receptor:

a) Los filtros Transmisor y Receptor se diseñan como filtros terminales óptimos que maximizan $(\frac{S}{N})_D$ para una potencia transmitida dada S_T y que conjuntamente ecualizan el canal. Para esta solución se pide que calcule la $(\frac{S}{N})_D$, en función de S_T, K, B_x, a . Justifique el resultado aplicando la desigualdad de Swartz ($\int |u|^2 d(.) \int |v|^2 d(.) \geq \left| \int uvd(.) \right|^2$). No es necesario que calcule las funciones de transferencia de los dos filtros.

b) El filtro transmisor tiene como respuesta $H_T(f) = 1 + j(\frac{f}{aB_x})$ y el filtro receptor es filtro paso bajo ideal ajustado al ancho de banda B_x. Para esta solución se pide que calcule la $(\frac{S}{N})_D$, en función de S_T, K, B_x, a .

c) El filtro receptor tiene como respuesta $H_R(f) = \left[1 + j(\frac{f}{aB_x})\right] \Pi\left(\dfrac{f}{2B_x}\right)$ y el filtro transmisor es el filtro paso bajo ideal ajustado al ancho de banda B_x. Para esta solución se pide que calcule la $(\frac{S}{N})_D$, en función de S_T, K, B_x, a .

d) Compare la $(\frac{S}{N})_D$ en los casos b) y c) respecto de los filtros terminales óptimos del caso a). Inicialmente dé el resultado del cociente en función de a y posteriormente particularice para $a \to \infty, a = 1$ y para $a = 0$.

2.5.2 Resolución

a) Los filtros Transmisor y Receptor se diseñan como filtros terminales óptimos que maximizan $(\frac{S}{N})_D$ para una potencia transmitida dada S_T y que conjuntamente ecualizan el canal. Para esta solución se pide que calcule la $(\frac{S}{N})_D$, en función de S_T, K, B_x, a. Justifique el resultado aplicando la desigualdad de Swartz ($\int |u|^2 d(.) \int |v|^2 d(.) \geq \left|\int uvd(.)\right|^2$). No es necesario que calcule las funciones de transferencia de los dos filtros.

Solución:

Filtros terminales óptimos

Condición de ecualización: $$H_T(f)H_c(f)H_R(f) = ce^{-j2p\,ft_d} = H(f) \qquad (1)$$

Potencia en destino: $$S_D = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\left|H(f)\right|^2 df = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df = c^2 P_x$$

Ruido en destino: $$N_D = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)\left|H_R(f)\right|^2 df$$

Potencia transmitida: $$S_T = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\left|H_T(f)\right|^2 df$$

Relación señal/ruido en destino $$(\frac{S}{N})_D = (\frac{S}{N})_D \frac{S_T}{S_T} = \frac{c^2 P_x}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)\left|H_R(f)\right|^2 df} \frac{S_T}{\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\left|H_T(f)\right|^2 df}$$

Identificando $u \triangleq S_n^{1/2}(f)\left|H_R(f)\right|; v \triangleq S_x^{1/2}(f)\left|H_T(f)\right|$ y aplicando Swartz

$$(\frac{S}{N})_D \leq \frac{c^2 P_x}{\left|\int_{-\infty}^{\infty} S_n^{1/2}(f)\left|H_R(f)\right| S_x^{1/2}(f)\left|H_T(f)\right|\right|^2} = \frac{c^2 P_x}{\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cS_n^{1/2}(f)S_x^{1/2}(f)}{\left|H_c(f)\right|}\right|^2}$$ donde se ha hecho uso de la relación (1)

Teniendo en cuenta que $S_x(f) = \frac{P_x}{2B_x}\Pi(\frac{f}{2B_x})$ y la expresión de la densidad espectral de ruido se obtiene:

$$(\frac{S}{N})_{Dopt} = \frac{P_x S_T}{K\frac{P_x}{2B_x}\left|\int_{-B_x}^{B_x} \frac{|f|}{\left|H_c(f)\right|} df\right|^2} = \frac{S_T B_x}{2K\left|\int_0^{B_x} \frac{f}{\left|H_c(f)\right|} df\right|^2}$$

Donde se ha tenido en cuenta que el integrando es una función par y por tanto la integral se dobla. Teniendo en cuenta que $\left|H_c(f)\right| = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{f}{aB_x}\right)^2\right]^{1/2}}$ y que $\int f\left[1+\left(\frac{f}{aB_x}\right)^2\right]^{1/2} df = \frac{1}{3}(aB_x)^2\left[1+\left(\frac{f}{aB_x}\right)^2\right]^{3/2}$ se obtiene finalmente:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Dopt}=\frac{9S_T}{2Ka^4B_x^3\left\{\left[1+\left(\frac{1}{a}\right)^2\right]^{3/2}-1\right\}^2}=\frac{9a^2S_T}{2KB_x^3\left[(a^2+1)^{3/2}-a^3\right]^2}$$

b) El filtro transmisor tiene como respuesta $H_T(f)=1+j(\frac{f}{aB_x})$ y el filtro receptor es filtro paso bajo ideal ajustado al ancho de banda B_x. Para esta solución se pide que calcule la $(\frac{S}{N})_D$, en función de S_T, K, B_x, a .

Solución:

Potencia transmitida $S_T=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)\left|H_T(f)\right|^2df=\frac{P_x}{2B_x}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+\left(\frac{f}{aB_x}\right)^2\right]df=P_x(1+\frac{1}{3a^2})$

Potencia en destino $S_D=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)\left|H_T(f)H_c(f)H_R(f)\right|^2df=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)df=P_x$

Potencia de ruido $N_D=\int_{-\infty}^{\infty}Kf^2\Pi(\frac{f}{2B_x})df=\int_{-B_x}^{B_x}Kf^2df=\frac{2}{3}KB_x^3$

Relación señal/ruido $(\frac{S}{N})_{Db}=\frac{P_x}{\frac{2}{3}KB_x^3}=\frac{S_T}{1+\frac{1}{3a^2}}\frac{3}{2KB_x^3}=\frac{9a^2S_T}{2KB_x^3(3a^2+1)}$

c) El filtro receptor tiene como respuesta $H_R(f)=\left[1+j(\frac{f}{aB_x})\right]\Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$ y el filtro transmisor es el filtro paso bajo ideal ajustado al ancho de banda B_x. Para esta solución se pide que calcule la $(\frac{S}{N})_D$, en función de S_T, K, B_x, a .

Solución:

Potencia transmitida $S_T=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)\left|H_T(f)\right|^2df=\frac{P_x}{2B_x}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(\frac{f}{2B_x})df=P_x$

Potencia en destino $S_D=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)\left|H_T(f)H_c(f)H_R(f)\right|^2df=\int_{-B_x}^{B_x}S_x(f)df=P_x$

Potencia de ruido $N_D=\int_{-\infty}^{\infty}S_n(f)\left|H_R(f)\right|^2df=\int_{-B_x}^{B_x}Kf^2\left[1+\left(\frac{f}{aB_x}\right)^2\right]df=2KB_x^3(\frac{1}{3}+\frac{1}{5a^2})$

Relación señal/ruido $(\frac{S}{N})_{Dc}=\frac{P_x}{2KB_x^3(\frac{1}{3}+\frac{1}{5a^2})}=\frac{15a^2S_T}{2KB_x^3(5a^2+3)}$

d) Compare la $(\frac{S}{N})_D$ en los casos b) y c) respecto de los filtros terminales óptimos del caso a). Inicialmente dé el resultado del cociente en función de a y posteriormente particularice para

$a \to \infty, a = 1$ y para $a = 0$.

Solución:

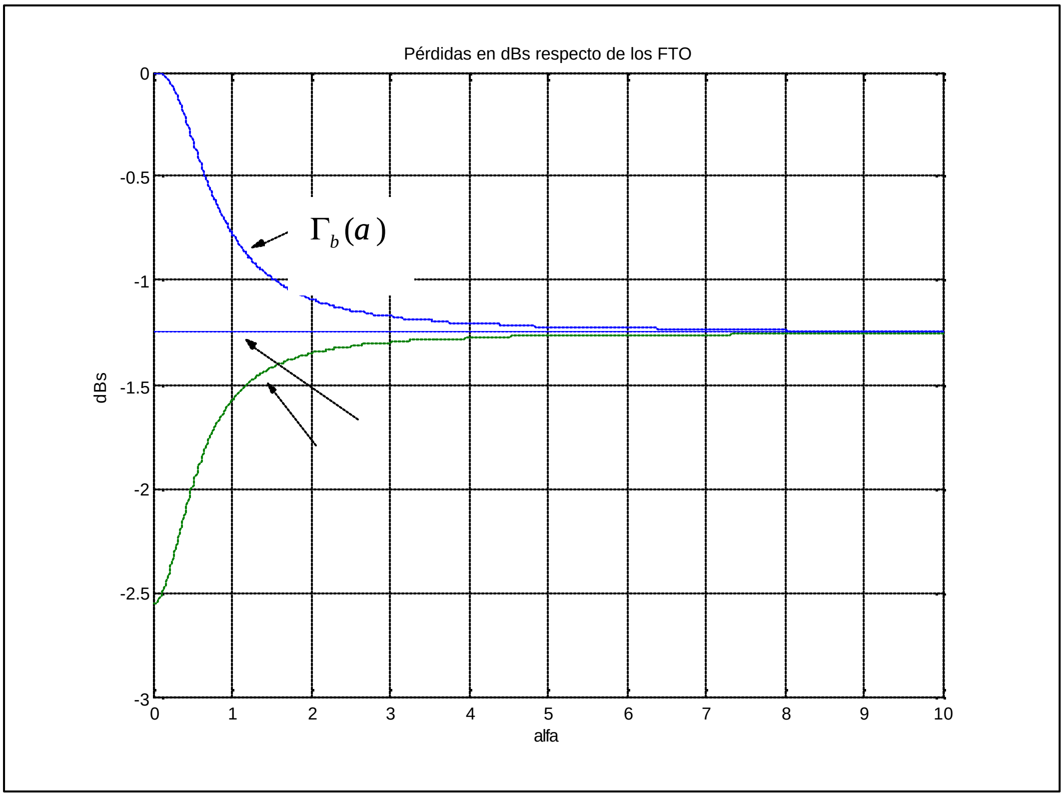
$$\Gamma_b(a) = \frac{(\frac{S}{N})_{Db}}{(\frac{S}{N})_{Dopt}} = \frac{9a^2 S_T}{2KB_x^3(3a^2+1)} \frac{2KB_x^3\left[(a^2+1)^{3/2} - a^3\right]^2}{9a^2 S_T} = \frac{\left[(a^2+1)^{3/2} - a^3\right]^2}{(3a^2+1)}$$

$$\Gamma_c(a) = \frac{(\frac{S}{N})_{Dc}}{(\frac{S}{N})_{Dopt}} = \frac{15a^2 S_T}{2KB_x^3(5a^2+3)} \frac{2KB_x^3\left[(a^2+1)^{3/2} - a^3\right]^2}{9a^2 S_T} = \frac{5\left[(a^2+1)^{3/2} - a^3\right]^2}{3(5a^2+3)}$$

$$\Gamma_b(0) = 1; \Gamma_c(0) = \frac{5}{9};$$

$$\lim_{a\to\infty} \Gamma_b(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{\left[(a^2+1)^{3/2} - a^3\right]^2 \left[(a^2+1)^{3/2} + a^3\right]^2}{(3a^2+1)\left[(a^2+1)^{3/2} + a^3\right]^2} = \lim_{a\to\infty} \frac{\left[(a^2+1)^3 - a^6\right]^2}{(3a^2+1)\left[(a^2+1)^{3/2} + a^3\right]^2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{a\to\infty} \Gamma_c(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{5\left[(a^2+1)^3 - a^6\right]^2}{3(5a^2+3)\left[(a^2+1)^{3/2} + a^3\right]^2} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$



$\Gamma_b(a)$ (azul), $\Gamma_b(0)$ (azul), $\Gamma_c(a)$ (verde),

2.6 Ejercicio de Examen de control Noviembre 2005 (M. Cabrera)

2.6.1 Enunciado

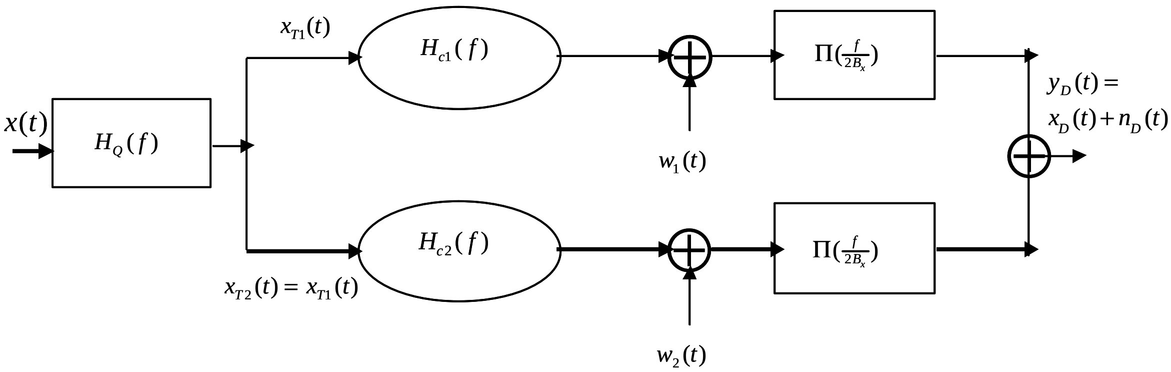
Sean $w_1(t), w_2(t)$ dos procesos reales aleatorios estacionarios. Ambos son de media nula y presentan las siguientes funciones de densidad espectral:

$$S_{w_1}(f) = \frac{N_0}{2}\frac{3f^2}{B^2} \qquad S_{w_2}(f) = \frac{N_0}{2}\frac{3f^2}{B^2}$$
$$S_{w_1 w_2}(f) = TF\left(R_{w_1 w_2}(t)\right) = b\,\frac{N_0}{2} = S_{w_2 w_1}(f)$$
$$0 < b < 1$$

Sea el proceso $w(t) = h_1(t) * w_1(t) + h_2(t) * w_2(t)$, donde $h_1(t), h_2(t)$ representan las respuestas de dos sistemas lineales e invariantes.

a) Calcule de forma justificada la función de densidad espectral del proceso resultante $S_w(f)$. Particularice el resultado para $H_1(f) = H_2(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$.

Una señal aleatoria $X(t)$ generada por una fuente de información, presenta densidad espectral $S_x(f)$, potencia P_x y ancho de banda B_x. Se transmite con diversidad a través del siguiente esquema, en el que las dos señales de ruido $w_1(t), w_2(t)$ se corresponden con los procesos del apartado anterior.



b) Si el filtro $H_Q(f)$ ecualiza idealmente los canales, calcule de modo justificado la relación $\left(\frac{S}{N}\right)_D$ en función de la potencia transmitida S_T y del resto de funciones y parámetros que considere necesarios.

c) Obtenga de modo justificado la función de densidad espectral $S_x(f)$ para la cual la relación anterior $\left(\frac{S}{N}\right)_D$ resulta máxima, manteniendo constantes P_x y B_x. Comente los resultados obtenidos.

2.6.2 Resolución

a) Calcule de forma justificada la función de densidad espectral del proceso resultante $S_w(f)$. Particularice el resultado para $H_1(f) = H_2(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$.

Solución:

Cálculo de la autocorrelación del proceso $w(t) = h_1(t) * w_1(t) + h_2(t) * w_2(t)$:

$$
\begin{aligned}
&R_w(t+t,t) = E\left[w(t+t)w(t)\right] = \\
&E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} w_1(t+t-l)h_1(l)dl + \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(t+t-l)h_2(l)dl\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} w_1(t-g)h_1(g)dg + \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(t-g)h_2(g)dg\right)\right] = \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(l)\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(g)R_{w_1}(t-l+g)dg\,dl + \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(l)\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(g)R_{w_2}(t-l+g)dg\,dl + \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(l)\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(g)R_{w_1w_2}(t-l+g)dg\,dl + \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(l)\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(g)R_{w_2w_1}(t-l+g)dg\,dl = \\
&R_{w_1}(t)*h_1(t)*h_1(-t) + R_{w_2}(t)*h_2(t)*h_2(-t) + \\
&R_{w_1w_2}(t)*h_1(t)*h_2(-t) + R_{w_2w_1}(t)*h_2(t)*h_1(-t) = R_w(t)
\end{aligned}
$$

Dado que el proceso resulta estacionario, la densidad espectral es directamente la transformada de Fourier de la correlación:

$$
\begin{aligned}
&S_w(f) = TF\left[R_w(t)\right] = \\
&S_{w_1}(f)\left|H_1(f)\right|^2 + S_{w_2}(f)\left|H_2(f)\right|^2 + S_{w_1w_2}(f)H_1(f)H_2^*(f) + S_{w_2w_1}(f)H_2(f)H_1^*(f) = \\
&\frac{N_0}{2}\frac{3f^2}{B^2}\left|H_1(f)\right|^2 + \frac{N_0}{2}\frac{3f^2}{B^2}\left|H_2(f)\right|^2 + b\frac{N_0}{2}H_1(f)H_2^*(f) + b\frac{N_0}{2}H_1^*(f)H_2(f)
\end{aligned}
$$

y particularizando para $H_1(f) = H_2(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$:

$$
S_w(f) = \left(\frac{N_0}{2}\frac{3f^2}{B^2} + \frac{N_0}{2}\frac{3f^2}{B^2} + 2b\frac{N_0}{2}\right)\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) = N_0\left(\frac{3f^2}{B^2} + b\right)\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)
$$

b) Si el filtro $H_Q(f)$ ecualiza idealmente los canales, calcule de modo justificado la relación $\left(\frac{S}{N}\right)_D$ en función de la potencia transmitida S_T y del resto de funciones y parámetros que considere necesarios.

Solución:

A la salida del sistema la expresión de la señal es:

$$
y_D(t) = x(t) * h_Q(t) * \left(h_{c1}(t) + h_{c2}(t)\right) + w(t)
$$

donde se ha considerado que los filtros paso bajo no afectan a la señal útil $x(t)$ y que la señal resultante de ruido es exactamente un proceso como el analizado en el apartado anterior y por tanto con funciones de autocorrelación y de densidad espectral según lo calculado en a).

Si el ecualizador es ideal: $H_Q(f) = \dfrac{1}{H_1(f) + H_2(f)} k e^{-j2p f t_d}$ se tiene:

$$
y_D(t) = k\,x(t - t_d) + w(t)
$$

en estas condiciones:

$$\left(\tfrac{S}{N}\right)_D = \frac{k^2 P_x}{P_w} = \frac{P_x S_T}{\int_{-B_x}^{+B_x} \frac{S_x(f)}{\left|H_1(f)+H_2(f)\right|^2} df \int_{-B_x}^{+B_x} S_w(f) df} = \frac{P_x S_T}{2 N_0 B_x (1+b) \int_{-B_x}^{+B_x} \frac{S_x(f)}{\left|H_1(f)+H_2(f)\right|^2} df}$$

c) Obtenga de modo justificado la función de densidad espectral $S_x(f)$ para la cual la relación anterior $\left(\tfrac{S}{N}\right)_D$ resulta máxima, manteniendo constantes P_x y B_x. Comente los resultados obtenidos.

Solución:

La expresión $\left(\tfrac{S}{N}\right)_D$ hallada en el apartado anterior, por la desigualdad de Scwartz es máxima cuando los dos integrandos en el denominador (o sus raíces cuadradas) son proporcionales:

$$\frac{S_x(f)}{\left|H_1(f)+H_2(f)\right|^2} = l\, S_w(f) \Rightarrow S_x(f) = l \left|H_1(f)+H_2(f)\right|^2 S_w(f)$$

donde la constante l se puede hallar de acuerdo con la potencia P_x:

$$l = \frac{P_x}{\int_{-B_x}^{+B_x} \left|H_1(f)+H_2(f)\right|^2 S_w(f) df}$$

La relación anterior $\left(\tfrac{S}{N}\right)_D$ máxima, por Scwartz es:

$$\left(\tfrac{S}{N}\right)_D = \frac{k^2 P_x}{P_w} = \frac{P_x S_T}{\int_{-B_x}^{+B_x} \frac{S_x(f)}{\left|H_1(f)+H_2(f)\right|^2} df \int_{-B_x}^{+B_x} S_w(f) df} = \frac{P_x S_T}{\left(\int_{-B_x}^{+B_x} \sqrt{\frac{S_x(f) S_w(f)}{\left|H_1(f)+H_2(f)\right|^2}} df\right)^2}$$

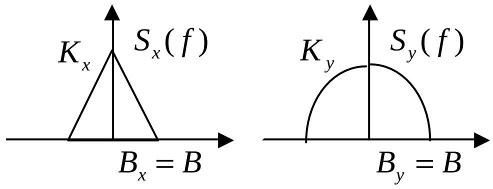
Es la solución que se hubiera obtenido diseñando filtros terminales óptimos (FTO). Lo que equivale a decir, que para un sistema convencional sin diversidad, función de transferencia de canal $H_c(f)$ y densidad espectral de ruido de canal $S_w(f)$, si se cumple $S_x(f) = l\left|H_c(f)\right|^2 S_w(f)$ la ecualización ideal en transmisión y filtrado paso bajo en recepción, es la solución FTO.

3. PROCESOS ALEATORIOS PASO - BANDA

3.1 Ejercicio de Examen de control Noviembre 2004 (M. Cabrera)

3.1.1 Enunciado

Sean dos procesos aleatorios estacionarios $x(t)$, $y(t)$ de media nula y estadísticamente independientes entre sí. Presentan las densidades espectrales de la figura.



Los dos mensajes se utilizan para formar una señal modulada paso banda $s(t)$ a partir de la portadora $c(t) = A_c \cos(2p f_c t)$ y tal que $b_s(t) = a_x(t) + j a_y^*(t)$.

a) Obtenga las componentes $i_s(t), q_s(t)$ en función de $x(t)$, $y(t)$.

b) ¿Qué condiciones debe cumplir el equivalente paso bajo de un proceso aleatorio paso banda a fin de que éste resulte estacionario en correlación?. Averigüe si estas condiciones se cumplen para el proceso $s(t)$ de este ejercicio.

c) Calcule $R_{b_s}(t+t, t) = E\left[b_s(t+t) b_s^*(t)\right]$: autocorrelación de $b_s(t)$ en función de $R_x(t)$ y de $R_y(t)$.

d) Calcule $S_{b_s}(f)$: densidad espectral de $b_s(t)$ en función de $S_x(f), S_y(f)$ y dibújela. Dado que $S_s^+(f) = \frac{1}{4} A_c^2 S_{b_s}(f - f_c)$. ¿Qué ancho de banda se necesita para transmitir la señal modulada $s(t)$?

e) Calcule P_{e_s}: potencia de la envolvente de $s(t)$ en función de las potencias P_x, P_y y de los parámetros que considere necesarios.

f) Si la señal $s(t)$ se transmite por un canal ideal de atenuación 0dB y ruido aditivo $w(t)$ estacionario, de media nula e incorrelado con $s(t)$, de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$, dibuje el diagrama de bloques de un receptor y demodulador que recupere de forma separada las señales $x(t)$, $y(t)$. Para ello incluya las siguientes etapas:

- Etapa 1: Filtro Receptor paso banda. Indique la banda de paso.
- Etapa 2: Demodulador coherente con dos salidas I&Q. Dibuje los elementos necesarios de este demodulador.
- Etapa 3: A diseñar, utilizando los sumadores, amplificadores y transformadores de Hilbert que considere necesarios para separar las señales $x(t)$, $y(t)$

Dé las expresiones de las señales a las salidas del sistema y verifique que el sistema funciona correctamente en ausencia de ruido.

g) Calcule la SNR en detección obtenida para cada una de las dos señales detectadas $x(t)$, $y(t)$, en función de P_{e_s} y de los parámetros que considere necesarios. Si $P_y = 2P_x$ ¿Qué señal se detectará con mayor SNR?

3.1.2 Resolución

a) Obtenga las componentes $i_s(t), q_s(t)$ en función de $x(t), y(t)$.

Solución:

$$b_s(t) = a_x(t) + ja_y^*(t) = x(t) + j\hat{x}(t) + j(y(t) - j\hat{y}(t)) =$$
$$x(t) + \hat{y}(t) + j(y(t) + \hat{x}(t)) \Rightarrow$$
$$i_s(t) = x(t) + \hat{y}(t)$$
$$q_s(t) = y(t) + \hat{x}(t)$$

b) ¿Qué condiciones debe cumplir el equivalente paso bajo de un proceso aleatorio paso banda a fin de que éste resulte estacionario en correlación? Averigüe si estas condiciones se cumplen para el proceso $s(t)$ de este ejercicio.

Solución:

Las condiciones que se deben cumplir son:

$$R_{i_s}(t) = R_{q_s}(t); \quad R_{q_s i_s}(t) = -R_{i_s q_s}(t);$$

En el proceso de este ejercicio $x(t), y(t)$ son procesos aleatorios de media nula y estadísticamente independientes entre sí, $\Rightarrow R_{xy}(t) = R_{x\hat{y}}(t) = R_{\hat{x}y}(t) = R_{\hat{x}\hat{y}}(t) = 0$. Por tanto:

$$R_{i_s}(t) = R_x(t) + R_{\hat{y}}(t) + R_{x\hat{y}}(t) + R_{\hat{y}x}(t) = R_x(t) + R_y(t)$$
$$R_{q_s}(t) = R_y(t) + R_{\hat{x}}(t) + R_{y\hat{x}}(t) + R_{\hat{x}y}(t) = R_x(t) + R_y(t)$$
$$R_{q_s i_s}(t) = R_{yx}(t) + R_{y\hat{y}}(t) + R_{\hat{x}x}(t) + R_{\hat{x}\hat{y}}(t) = \hat{R}_x(t) - \hat{R}_y(t)$$
$$R_{i_s q_s}(t) = R_{xy}(t) + R_{x\hat{x}}(t) + R_{\hat{y}y}(t) + R_{\hat{y}\hat{x}}(t) = -\hat{R}_x(t) + \hat{R}_y(t)$$

Con lo que sí se cumplen las dos condiciones requeridas para que el proceso *s(t)* sea estacionario.

c) Calcule $R_{b_s}(t+t, t) = E\left[b_s(t+t)b_s^*(t)\right]$: autocorrelación de $b_s(t)$ en función de $R_x(t)$ y de $R_y(t)$.

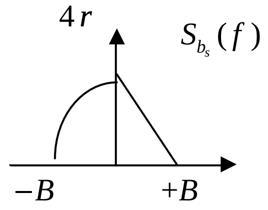
Solución:

$$R_{b_s}(t) = E\left[b_s(t+t)b_s^*(t)\right] = E\left[\left(i_s(t+t) + jq_s(t+t)\right)\left(i_s(t) - jq_s(t)\right)\right] =$$
$$R_{i_s}(t) + R_{q_s}(t) + j\left(R_{q_s i_s}(t) - R_{i_s q_s}(t)\right) = 2R_{i_s}(t) + j\left(2R_{q_s i_s}(t)\right) =$$
$$2R_x(t) + 2R_y(t) + j2\hat{R}_x(t) - j2\hat{R}_y(t) = 2a_{R_x}(t) + 2a_{R_y}^*(t)$$

d) Calcule $S_{b_s}(f)$: densidad espectral de $b_s(t)$ en función de $S_x(f), S_y(f)$ y dibújela. Dado que $S_s^+(f) = \frac{1}{4}A_c^2 S_{b_s}(f - f_c)$. ¿Qué ancho de banda se necesita para transmitir la señal modulada $s(t)$?

Solución:

$$S_{b_s}(f) = TF\left[R_{b_s}(t)\right] =$$
$$2\left(S_x(f) + S_y(f) + j\left(-j\text{sign}(f)\right)S_x(f) - j\left(-j\text{sign}(f)\right)S_x(f)\right) =$$
$$2S_x(f)\left(1+\text{sign}(f)\right) + 2S_y(f)\left(1-\text{sign}(f)\right) = 4S_x^+(f) + 4S_y^-(f)$$



El ancho de banda de transmisión necesario para transmitir la señal modulada es por tanto: $B_s = B_y + B_x = 2B$

e) Calcule P_{e_s} : potencia de la envolvente de $s(t)$ en función de las potencias P_x, P_y y de los parámetros que considere necesarios.

Solución:

Dado que $e_s^2(t) = A_c^2 i_s^2(t) + A_c^2 q_s^2(t)$, su potencia es :

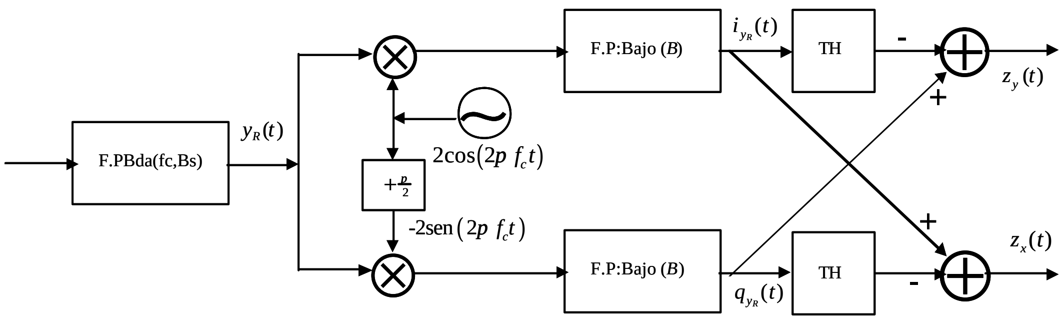
$$P_{e_s} = E\left[e_s^2(t)\right] = A_c^2\left(P_{i_s} + P_{q_s}\right) = A_c^2\, 2\left(P_x + P_y\right)$$

f) Si la señal $s(t)$ se transmite por un canal ideal de atenuación 0dB y ruido aditivo $w(t)$ estacionario, de media nula e incorrelado con $s(t)$, de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$, dibuje el diagrama de bloques de un receptor y demodulador que recupere de forma separada las señales $x(t), y(t)$. Para ello incluya las siguientes etapas:

- Etapa 1: Filtro Receptor paso banda. Indique la banda de paso.
- Etapa 2: Demodulador coherente con dos salidas I&Q. Dibuje los elementos necesarios de este demodulador.
- Etapa 3: A diseñar, utilizando los sumadores, amplificadores y transformadores de Hilbert que considere necesarios para separar las señales $x(t), y(t)$

Dé las expresiones de las señales a las salidas del sistema y verifique que el sistema funciona correctamente en ausencia de ruido.

Solución:



Análisis sin ruido:

$$i_{y_R}(t) = A_c\left(x(t)+\hat{y}(t)\right)$$
$$q_{y_R}(t) = A_c\left(y(t)+\hat{x}(t)\right)$$
$$z_x(t) = i_{y_R}(t) - \hat{q}_{y_R}(t) = 2A_c x(t)$$
$$z_y(t) = q_{y_R}(t) - \hat{i}_{y_R}(t) = 2A_c y(t)$$

Análisis con ruido:

$$i_{y_R}(t) = A_c\left(x(t)+\hat{y}(t)\right)+i_n(t)$$
$$q_{y_R}(t) = A_c\left(y(t)+\hat{x}(t)\right)+q_n(t)$$
$$z_x(t) = i_{y_R}(t) - \hat{q}_{y_R}(t) = 2A_c x(t) + i_n(t) - \hat{q}_n(t)$$
$$z_y(t) = q_{y_R}(t) - \hat{i}_{y_R}(t) = 2A_c y(t) + q_n(t) - \hat{i}_n(t)$$

g) Calcule la SNR en detección obtenida para cada una de las dos señales detectadas $x(t), y(t)$, en función de P_{e_s} y de los parámetros que considere necesarios. Si $P_y = 2P_x$ ¿Qué señal se detectará con mayor SNR?

Solución:

Para la salida $z_x(t) = 2A_c x(t) + i_n(t) - \hat{q}_n(t)$

Se tiene: $S_D = A_c^2 4P_x = 2\frac{P_x}{P_x+P_y}P_{e_s}$ $\qquad N_D = P_{i_n} + P_{q_n} = 2N_0 B$

Y por tanto: $\left(\frac{S}{N}\right)_{Dx} = \frac{P_x}{P_x+P_y}\frac{P_{e_s}}{N_0 B}$

Para la salida $z_y(t) = 2A_c y(t) + q_n(t) - \hat{i}_n(t)$

Se tiene: $S_D = A_c^2 4P_y = 2\frac{P_y}{P_x+P_y}P_{e_s}$ $\qquad N_D = P_{i_n} + P_{q_n} = 2N_0 B$

Y por tanto: $\left(\frac{S}{N}\right)_{Dy} = \frac{P_y}{P_x+P_y}\frac{P_{e_s}}{N_0 B}$

Si $P_y = 2P_x$, se obtiene $\left(\frac{S}{N}\right)_{Dx} = \frac{1}{3}\frac{P_{e_s}}{N_0 B}$, $\left(\frac{S}{N}\right)_{Dy} = \frac{2}{3}\frac{P_{e_s}}{N_0 B}$, por lo que la señal $y(t)$ se detecta con 3 dB más de calidad que la señal $x(t)$:

$$10\log_{10}\left(\left(\frac{S}{N}\right)_{Dy}\right) = 3 + 10\log_{10}\left(\left(\frac{S}{N}\right)_{Dx}\right)$$

3.2 Ejercicio 1 de Examen Final Enero 2003 (Resuelto por J. López-Salcedo)

3.2.1 Enunciado

Algunos receptores comerciales permiten la demodulación coherente de las señales, incluso su recepción en banda lateral única, suprimiendo igualmente la componente continua en la señal demodulada. Ello puede aportar en ocasiones un aumento de calidad en la señal demodulada en entornos ruidosos y/o en presencia de señales interferentes en alguna de las bandas laterales. En este problema se estudian los principios básicos de este tipo de demodulación.

Suponga una modulación $x(t)=A_C m(t)\cos(2\pi f_c t)$ con potencia recibida Pr, y señal moduladora *m(t)* de potencia unitaria. Debido a la presencia de interferencias, el ruido es diferente en cada banda, modelándose su espectro del siguiente modo:

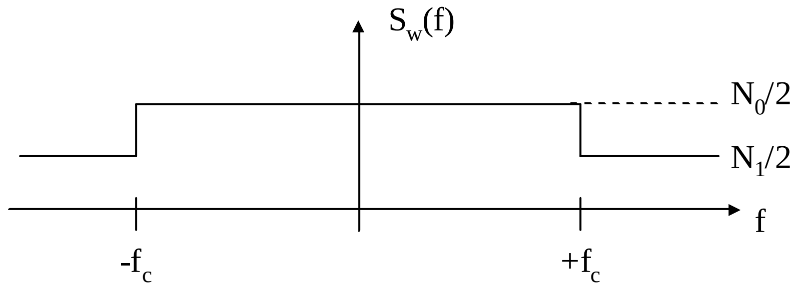


Fig. 1. Densidad Espectral del Ruido

<u>Nota: Todas las SNR que se piden en este problema deben quedar expresadas en función de la potencia recibida S_R, y de las densidades de ruido, N_0 y N_1.</u>

a) Para el caso de $H_R^+(f)=\prod\left(\frac{f-f_C}{2B_X}\right)$, halle la SNR de la señal demodulada.

b) Para el caso de filtrar una única banda mediante $H_R^+(f)=\prod\left(\frac{f-f_C-B_X/2}{B_X}\right)$, halle la SNR de la señal demodulada.

c) Halle la condición que debe cumplir *No* para que la calidad de la señal demodulada en el apartado b) sea mayor a la obtenida en a).

d) Hay alguna pérdida o ganancia de calidad en el caso del apartado c) cuando las dos bandas presentan el mismo ruido.

e) Halle el equivalente paso bajo de la señal de salida del filtro en función de α y β en ausencia de ruido. Demuestre que el filtro propuesto no introduce distorsión alguna.

f) Halle la SNR de la señal demodulada en función de la relación $g=\frac{a}{b}$

3.2.2 Resolución

a) Para el caso de $H_R^+(f) = \prod\left(\frac{f - f_C}{2B_X}\right)$, halle la SNR de la señal demodulada.

Solución:

Primero de todo, es siempre interesante dibujar el esquema del receptor y las señales que intervienen:

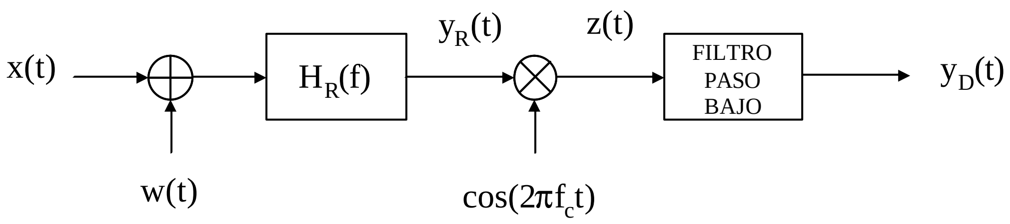


Fig. 2. Esquema del receptor coherente para la demodulación de la señal x(t).

Puesto que se pide la SNR de la señal demodulada, es necesario calcular la expresión de la señal $y_D(t)$ que aparece en la Fig. 2.

$$y_R(t) = x(t) * h_R(t) + w(t) * h_R(t) = y_X(t) + n(t) \tag{1}$$

$$y_R(t) = \mathrm{Re}\left[a_{y_R}(t)\right] = \mathrm{Re}\left[b_{y_R}(t)e^{j2\pi f_c t}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(b_{y_x}(t) + b_n(t)\right)e^{j2\pi f_c t}\right] \tag{2}$$

$$z(t) = y_R(t)\cos\left(2\pi f_c t\right) = \mathrm{Re}\left[\left(b_{y_S}(t) + b_n(t)\right)e^{j2\pi f_c t}\right]\mathrm{Re}\left[e^{j2\pi f_c t}\right] \tag{3}$$

Aprovechando la propiedad según la cual, $\mathrm{Re}[a]\mathrm{Re}[b] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[ab + ab^*\right]$, entonces

$$z(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(b_{y_x}(t) + b_n(t)\right)e^{j2\pi 2 f_c t} + b_{y_x}(t) + b_n(t)\right] \tag{4}$$

El filtrado paso bajo elimina los términos a frecuencia doble, por lo que la señal demodulada será,

$$y_D(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[b_{y_x}(t) + b_n(t)\right] = \frac{1}{2}\left[i_{y_x}(t) + i_n(t)\right] \tag{5}$$

El desarrollo de la señal demodulada que se acaba de presentar, es genérico para receptores coherentes. La cuestión es que para el caso que nos ocupa, hay que particularizar las expresiones de las componentes en fase en (5) a las características de la señal transmitida y del filtro receptor que se propone.

El cálculo de la SNR de la señal demodulada implica calcular la potencia del término de señal útil $\frac{1}{2}i_{y_x}(t)$ y del termino de ruido $\frac{1}{2}i_n(t)$ en la ecuación (5).

Por lo que respecta a la señal útil, y utilizando el filtro receptor que sugiere este apartado, la señal útil a la salida del filtro receptor es la misma que a la entrada. Ello es debido a que el filtro receptor tiene el mismo ancho de banda que la señal útil y una respuesta plana en toda su banda de paso. Por lo tanto,

$$i_{y_x}(t) = i_x(t) = A_c m(t) \quad \Rightarrow \quad S_D = Potencia\left\{\frac{1}{2}i_{y_x}(t)\right\} = \frac{A_c^2}{4}P_m \tag{6}$$

Por lo que respecta al ruido demodulado, una de las propiedades vistas en clase es que la potencia por separado de la componente en fase (o en cuadratura) del ruido paso banda tiene la misma potencia que el todo el ruido paso banda. Es decir, sabemos que

$$P_{i_n} = P_{q_n} = P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)\left|H_R(f)\right|^2 df \qquad (7)$$

A partir de la Fig. 3, la potencia del término de ruido en (5) resulta,

$$N_D = Potencia\left\{\frac{1}{2}i_n(t)\right\} = \frac{1}{4}P_n = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} S_w(f)\left|H_R(f)\right|^2 df = \frac{1}{4}\left(N_0 + N_1\right)B_X \qquad (8)$$

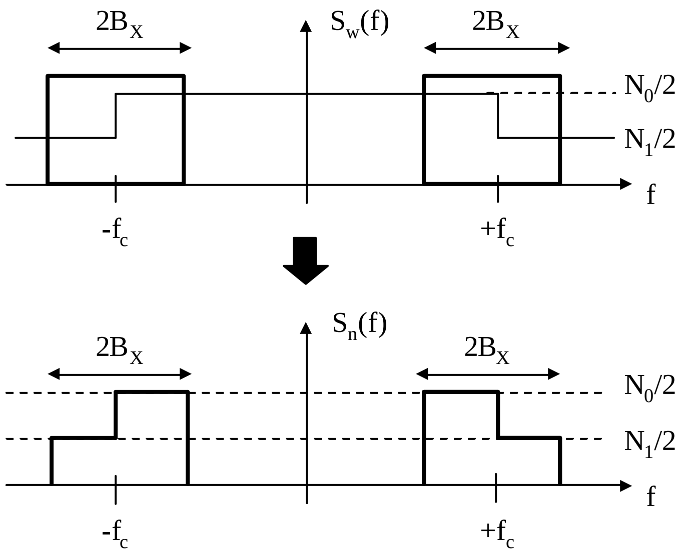


Fig. 3. Densidad espectral del ruido n(t) a la salida del filtro receptor.

Juntando los resultados de (6) y (8), la SNR demodulada resulta,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{A_c^2 P_m}{\left(N_0 + N_1\right)B_X} \qquad (9)$$

El problema pide además que la SNR de la señal demodulada se deje en función de la potencia de señal útil recibida S_R, la cual hay que tener en cuenta que se define siempre como la potencia a la salida del filtro receptor. Como a la salida de este filtro receptor hay la misma señal útil que a la entrada, entonces,

$$S_R = Potencia\left\{y_X(t)\right\} = Potencia\left\{A_c m(t)\cos\left(2\pi f_c t\right)\right\} = \frac{A_c^2}{2}P_m \qquad (10)$$

La relación entre (9) y (10) se establece por el hecho de que

$$2S_R = A_c^2 P_m \;\Rightarrow\; \left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{2S_R}{\left(N_0 + N_1\right)B_X} \qquad (11)$$

b) Para el caso de filtrar una única banda mediante $H_R^+(f) = \Pi\left(\frac{f - f_C - B_X/2}{B_X}\right)$, halle la SNR de la señal demodulada.

Solución:

En caso de filtrar una única banda lo que se consigue es una BLU en recepción, tal y como muestra la Fig. 4, en donde $Y_X(f) = X(f)H_R(f)$.

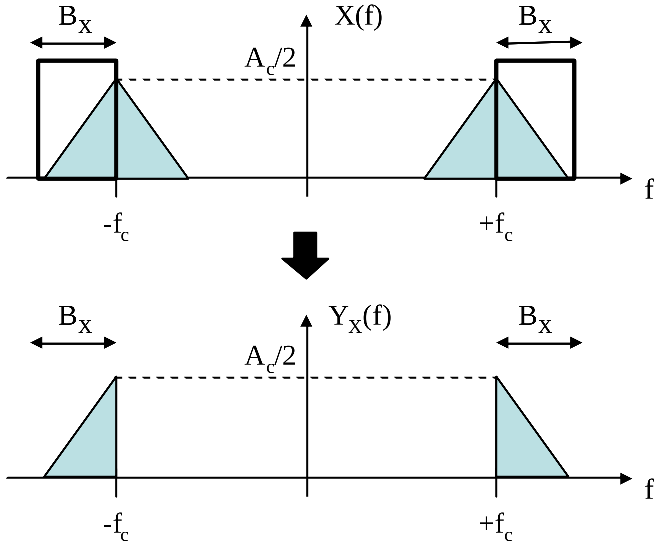


Fig. 4. Transformada de Fourier de la señal recibida (para el caso de señal determinista).

El procedimiento para calcular la SNR es el mismo que el del apartado a) puesto que el procedimiento de recepción es el mismo (receptor coherente).

$$y_D(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[b_{y_S}(t) + b_n(t)\right] = \frac{1}{2}\left[i_{y_S}(t) + i_n(t)\right] \tag{12}$$

Lo único que hay que hacer ahora es ver qué forma tienen las componentes en fase de señal útil y de ruido cuando se utiliza el filtro de una única banda que propone este apartado.

Para el caso de la señal útil, la componente en fase puede obtenerse a partir del equivalente paso bajo según,

$$i_{y_x}(t) = \mathrm{Re}\left[b_{y_x}(t)\right] = \frac{1}{2}\left[b_{y_x}(t) + b_{y_x}{}^*(t)\right] \tag{13}$$

A su vez, la obtención del equivalente paso bajo $b_{y_x}(t)$ puede obtenerse a partir de la Fig. 5 teniendo en cuenta que, en el dominio frecuencial,

$$B_{y_x}(f) = A_{y_X}(f + f_c) = 2Y_X(f + f_c)U(f + f_c) \tag{14}$$

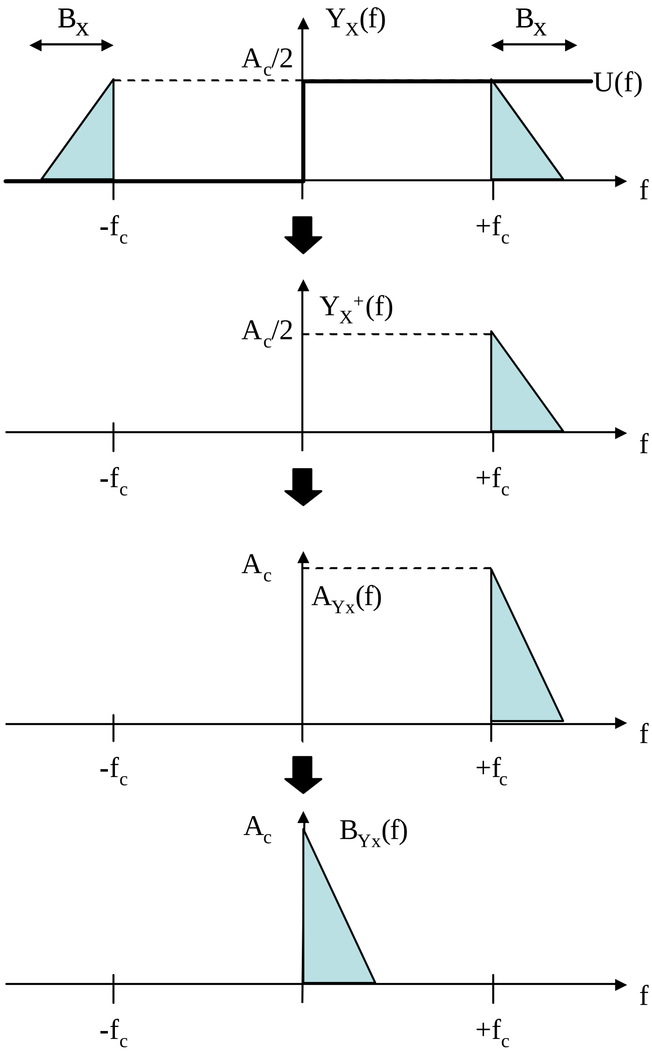


Fig. 5. Cálculo del equivalente paso bajo de la señal recibida.

Entonces, la expresión en (13) para la componente en fase se convierte en (15) para el dominio frecuencial,

$$I_{y_x}(f) = \frac{1}{2}\left[B_{y_x}(f) + B_{y_x}^{*}(-f)\right] \tag{15}$$

Por lo tanto, la potencia de señal útil demodulada será

$$\begin{aligned} S_D &= Potencia\left\{\frac{1}{2} i_{y_x}(t)\right\} = Potencia\left\{\frac{1}{4}\left[B_{y_x}(f) + B_{y_x}^{*}(-f)\right]\right\} \\ &= Potencia\left\{\frac{1}{4} A_c M(f)\right\} = \frac{1}{16} A_c^2 P_m \end{aligned} \tag{16}$$

Por lo que respecta al ruido, y como ya se ha comentado anteriormente, la potencia de la componente en fase de ruido demodulado es igual a la potencia del ruido paso banda a la salida del filtro receptor. Por tanto, para calcular la potencia de ruido demodulado es necesario ver qué forma tiene la densidad espectral de ruido a la salida del filtro receptor. Dicha densidad espectral se ilustra en la Fig. 6.

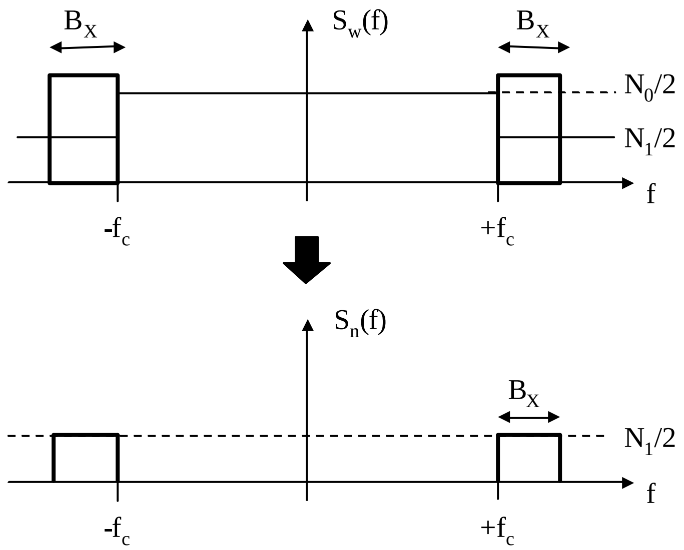


Fig. 6. Densidad espectral del ruido n(t) a la salida del filtro receptor.

A partir de la Fig. 6 se puede ver que,

$$N_D = Potencia\left\{\frac{1}{2}i_n(t)\right\} = \frac{1}{4}P_n = \frac{1}{4}N_1 B_X \tag{17}$$

Entonces,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{A_c^2 P_m}{4N_1 B_X} \tag{18}$$

Ahora queda calcular la expresión de la SNR demodulada en función de la potencia recibida. En este punto es importante tener en cuenta que, puesto que el filtro receptor es diferente al del apartado (A), la señal a su salida será diferente a la del apartado (A) y por tanto, también la potencia recibida.

Para el caso de una única banda de señal, tal y como resulta de utilizar el filtro $H_R(f)$ que propone este apartado,

$$S_R = Potencia\{y_X(t)\} = \frac{A_c^2}{4}P_m \tag{19}$$

Finalmente,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_R}{N_1 B_X} \tag{20}$$

Nótese que la SNR demodulada en (20) es coherente con el hecho de que la SNR demodulada de una modulación de banda lateral única (BLU) coincide con la SNR en transmisión de banda base con igual densidad espectral de ruido.

c) Halle la condición que debe cumplir *No* para que la calidad de la señal demodulada en el apartado b) sea mayor a la obtenida en a).

Solución:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,A} = \frac{2S_R}{(N_0+N_1)B_X} \tag{21}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,A} = \frac{2S_R}{(N_0+N_1)B_X} \tag{22}$$

Entonces se ha de cumplir,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,B} > \left(\frac{S}{N}\right)_{D,A} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_R}{N_1 B_X} > \frac{2S_R}{\left(N_0 + N_1\right) B_X} \quad \Rightarrow \quad N_0 > N_1 \tag{23}$$

La condición para que el sistema BLU del apartado b) sea de mayor calidad que el sistema de DBL del apartado (A) es que la densidad espectral de una de las dos bandas sea más pequeña que en la otra. En este caso, la mejor opción es siempre aplicar BLU sobre la banda con menor densidad espectral de ruido.

d) Hay alguna pérdida o ganancia de calidad en el caso del apartado c) cuando las dos bandas presentan el mismo ruido.

Solución:

Si ambas bandas presentan el mismo ruido, entonces $N_0=N_1$ y resulta que ambas SNR son iguales. Esto es coherente con el hecho de que para un escenario de densidad espectral constante en todas las bandas, la SNR demodulada de DBL es la misma que la SNR demodulada de BLU. Por lo tanto, en igualdad de ruido por banda no hay ganancia por el hecho de utilizar BLU.

e) Halle el equivalente paso bajo de la señal de salida del filtro en función de α y β en ausencia de ruido. Demuestre que el filtro propuesto no introduce distorsión alguna.

Solución:

A la salida del filtro receptor tenemos,

$$y_X(t) = x(t) * h_R(t) \tag{24}$$

Utilizando las propiedades del filtrado equivalente paso bajo, el equivalente paso bajo a la salida de un filtro se puede expresar en términos del equivalente paso bajo de la señal de entrada y del equivalente paso bajo del filtro según,

$$b_{y_x}(t) = \frac{1}{2} b_x(t) * b_{h_R}(t) \tag{25}$$

con $b_x(t)$ y $b_{h_R}(t)$ los equivalentes paso bajo de la señal paso banda y el filtro receptor, respectivamente, los cuales se muestran en la Fig. 7 y Fig. 8.

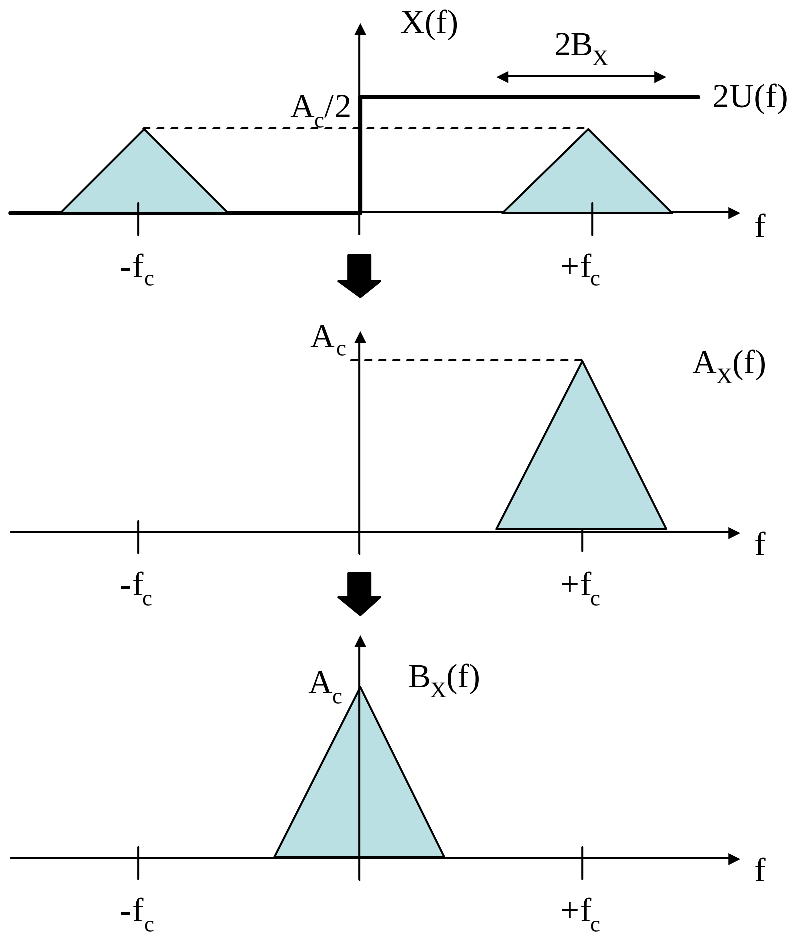


Fig. 7. ***Cálculo del equivalente paso bajo de la señal paso banda transmitida.***

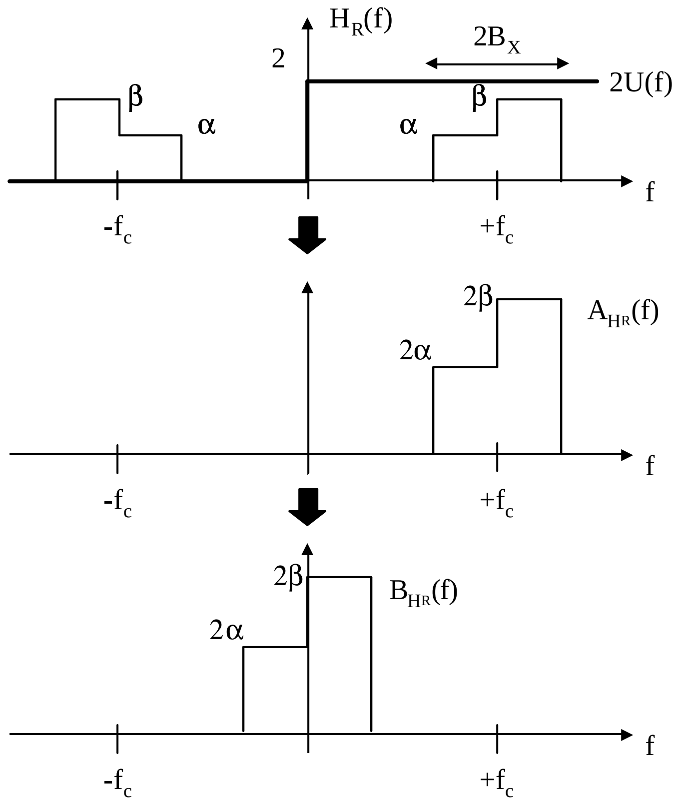


Fig. 8. ***Cálculo del equivalente paso bajo del filtro receptor.***

Realizando el filtrado equivalente paso bajo tal y como se indica en (25), el equivalente paso bajo de la señal recibida queda según se muestra en la Fig. 9

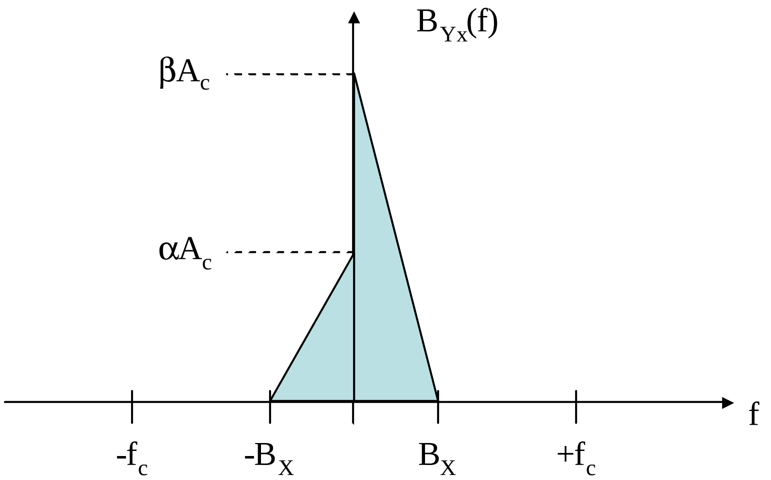


Fig. 9. Equivalente paso bajo de la señal a la salida del filtro receptor.

El filtro receptor no introduce distorsión ninguna. La manera de comprobarlo es de manera similar a como se vio en clase para el caso del filtrado en banda lateral vestigial (BLV). Es decir, en el dominio de la frecuencia, el equivalente paso bajo del filtro más el equivalente paso bajo del filtro girado resulta en una respuesta plana entre $\left[-B_X, +B_X\right]$.

f) Halle la SNR de la señal demodulada en función de la relación $g = \dfrac{a}{b}$

Solución:

Una vez más, el cálculo de la SNR de la señal demodulada se basa en el cálculo de potencia de los términos de señal útil y de ruido,

$$y_D(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[b_{y_S}(t) + b_n(t)\right] = \frac{1}{2}\left[i_{y_S}(t) + i_n(t)\right] \tag{26}$$

Como el filtro receptor es diferente al de los apartados anteriores, es necesario volver a calcular las señales $i_{y_x}(t)$ e $i_n(t)$. En el caso del ruido, sin embargo, ya hemos visto que no hace falta calcular explícitamente $i_n(t)$ ya que la potencia de $i_n(t)$ coincide con la potencia de $n(t)$, cuya densidad espectral se puede obtener muy fácilmente a partir de la densidad espectral del ruido de entrada $w(t)$ y la transformada de Fourier al cuadrado del filtro receptor.

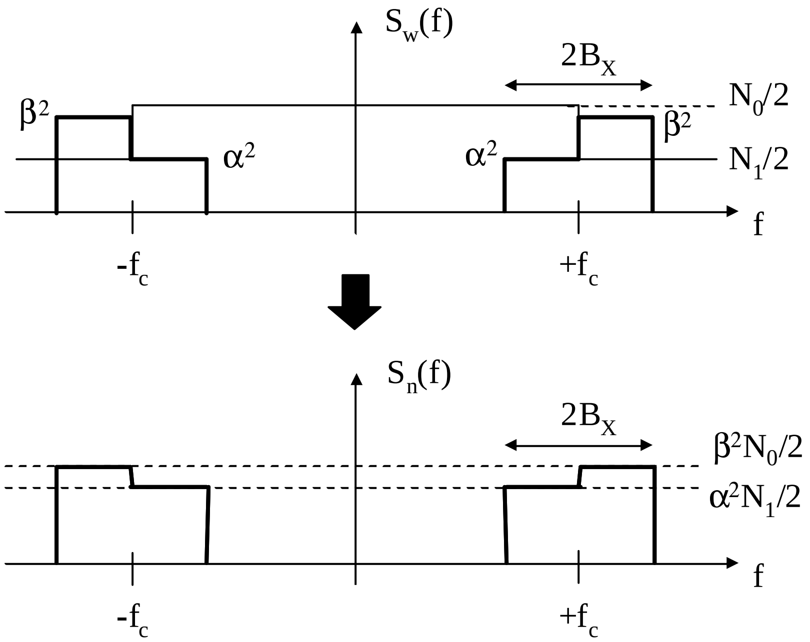


Fig. 10. Cálculo de la densidad espectral del ruido n(t) a la salida del filtro receptor.

A partir de la Fig. 10, la potencia de ruido demodulado que buscamos viene dada por:

$$N_D = Potencia\left\{\frac{1}{2}i_n(t)\right\} = \frac{1}{4}P_n = \frac{1}{4}\left(a^2 N_0 + b^2 N_1\right)B_X \tag{27}$$

Por lo que respecta a la potencia de señal útil, y al igual que en los apartados anteriores,

$$S_D = Potencia\left\{\frac{1}{2}i_{y_x}(t)\right\} \tag{28}$$

Por lo tanto, es necesario calcular la componente en fase de la señal recibida. Para ello, haremos uso del equivalente paso bajo calculado en el apartado e), teniendo en cuenta que

$$i_{y_x}(t) = \mathrm{Re}\left[b_{y_x}(t)\right] = \frac{1}{2}\left[b_{y_x}(t) + b_{y_x}^{\ *}(t)\right] \Rightarrow I_{y_x}(f) = \frac{1}{2}\left[B_{y_x}(f) + B_{y_x}^{*}(-f)\right] \tag{29}$$

De esta forma es fácil comprobar que la potencia de señal útil resulta,

$$\begin{aligned} S_D &= Potencia\left\{\frac{1}{2}i_{y_x}(t)\right\} = \\ &Potencia\left\{\frac{1}{4}\left[B_{y_x}(f) + B_{y_x}^{*}(-f)\right]\right\} = \frac{1}{16}\left(a + b\right)^2 A_c^2 P_m \end{aligned} \tag{30}$$

Entonces, la SNR vendrá dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{(a+b)^2 A_c^2 P_m}{4\left(a^2 N_0 + b^2 N_1\right)B_X} = \frac{\left(1+g\right)^2 A_c^2 P_m}{4\left(g^2 N_0 + N_1\right)B_X} \tag{31}$$

cuya expresión queda en función de g . De cara a expresar (31) en términos de la potencia de señal útil recibida, S_R, hay que tener en cuenta que

$$
\begin{aligned}
S_R &= Potencia\left\{ y_X(t)\right\} = Potencia\left\{\mathrm{Re}\left[b_{y_x}(t)e^{j2\pi f_c t}\right]\right\} \\
&= Potencia\left\{\frac{1}{2}\left[B_{y_x}(f-f_c)+B_{y_x}(f+f_c)\right]\right\} = \frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)A_c^2P_m
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Por tanto, la SNR en (31) resulta,

$$
\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{(\alpha+\beta)^2A_c^2P_m}{4\left(\alpha^2N_0+\beta^2N_1\right)B_X} = \frac{2S_R}{\left(\alpha^2N_0+\beta^2N_1\right)B_X}
\tag{33}
$$

Cuando la SNR de la señal demodulada se deja en función de S_R la expresión depende de α y β y no únicamente de la relación $\gamma = \alpha/\beta$ como ocurre en (31).

Finalmente, hay una manera de comprobar si las expresiones de SNR que se acaban de calcular son correctas o no. La manera de hacerlo, por ejemplo con (31), es fijar $\gamma = 1$ para obtener un receptor DBL y hacer que $N_0 = N_1$ para comparar con el caso de transmisión tradicional en banda base. Haciendo esto, la expresión en (31) debería ser la misma que en el caso de transmisión en banda base. En efecto,

$$
\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{(1+1)^2A_c^2P_m}{4\left(N_0+N_0\right)B_X} = \frac{A_c^2P_m}{2N_0B_X} = \frac{S_R}{N_0B_X}
\tag{34}
$$

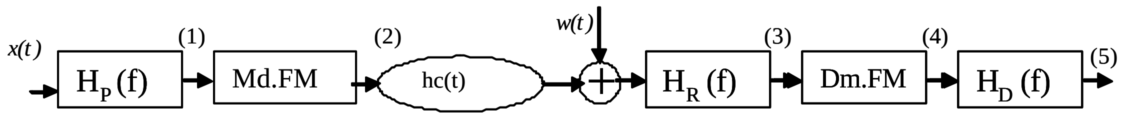
Lo mismo ocurre si se utiliza la expresión en (33),

$$
\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{2S_R}{\left(\alpha^2N_0+\beta^2N_1\right)B_X} = \frac{2S_R}{\left(N_0+N_0\right)B_X} = \frac{S_R}{N_0B_X}
\tag{35}
$$

3.3 Ejercicio 3 de Examen Final de Junio 2003 (M. Cabrera)

3.3.1 Enunciado

En un demodulador FM convencional el ruido en detección presenta una densidad espectral de forma parabólica, lo cual en general puede evitarse mediante el uso de filtros de pre-énfasis y de-énfasis. En este ejercicio se propone diseñar ambos filtros: $H_P(f), H_D(f)$, de forma que se maximice la SNR en detección, es decir, como filtros terminales óptimos. Para ello se propone el esquema siguiente:



Considere:

- El canal es ideal: $h_c(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} d(t)$
- El ruido es aditivo estacionario de media nula, estadísticamente independiente a la señal útil y presenta densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$.
- El mensaje $x(t)$, presenta una densidad espectral plana: $S_x(f) = \frac{P_x}{2B_x} \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$
- Los filtros terminales cumplen: $H_P(f)H_D(f) = 1$
- La señal en el punto (1), a la que denominaremos $x_1(t)$, debe presentar potencia P_1, para garantizar que la señal a la entrada del modulador de FM está normalizada a la unidad.
- Los parámetros del modulador de FM, amplitud de portadora, frecuencia portadora y sensibilidad de frecuencia son $A_c,\ f_c,\ f_D = K_f$, respectivamente.

Se pide:

a) Expresión de la potencia P_1 en función de P_x, $H_P(f)$ y de los parámetros que considere necesarios.

b) Expresión de la señal transmitida: Punto (2) del esquema, en función de $x(t)$ y de los parámetros y funciones que considere necesarios. Calcule la potencia transmitida.

c) Especifique el ancho de banda que debe tener el filtro paso banda $H_R(f)$ centrado a f_c.

d) Expresión de señal en el punto (3). Primero distinga entre señal útil y ruido. A continuación aproxime el ruido de fase, suponiendo que la SNR en este punto es alta (> 10 dB).

e) Expresión de señal en el punto (4). Distinga entre señal útil y ruido. Calcule y dibuje la densidad espectral de ruido en este punto. Puede suponer que el último elemento del demodulador de FM es un filtro paso bajo de ancho de banda B_x.

f) Escriba la expresión de señal en el punto (5). Distinga entre señal útil y ruido.

g) Obtenga la SNR en el punto (5) en función de $H_D(f)$ y de los parámetros que considere necesarios. En dicha expresión sustituya la potencia P_x en función de P_1, utilizando la expresión obtenida en el primer apartado.

h) Obtenga las expresiones de $H_P(f)$ y $H_D(f)$ que maximizan la SNR en el punto (5). Aplique por tanto la teoría de filtros terminales óptimos.

i) Calcule la máxima SNR en el punto (5).

Utilizando las expresiones de $H_P(f)$ y $H_D(f)$ obtenidas:

j) Calcule y dibuje la densidad espectral de la señal útil en el punto (1). Comente los resultados.

k) Calcule y dibuje la densidad espectral de la señal de ruido en el punto (5). Comente los resultados

3.3.2 Resolución

a) Expresión de la potencia P_1 en función de P_x, $H_P(f)$ y de los parámetros que considere necesarios.

Solución:

$$S_{x_1}(f) = S_x(f)\left|H_P(f)\right|^2 = \tfrac{P_x}{2B_x}\left|H_P(f)\right|^2 \Pi\left(\tfrac{f}{2B_x}\right)$$

$$P_1 = \int S_{x_1}(f)df = \tfrac{P_x}{2B_x}\int_{-B_x}^{+B_x}\left|H_P(f)\right|^2 df$$

b) Expresión de la señal transmitida: Punto (2) del esquema, en función de $x(t)$ y de los parámetros y funciones que considere necesarios. Calcule la potencia transmitida.

Solución:

$$s(t) = A_c\cos(2p\, f_c + 2p\, f_D\int_0^t x_1(l)\,dl) \text{ con } x_1(t) = x(t) * h_P(t)$$

Potencia transmitida: $S_T = \frac{A_c^2}{2}$

c) Especifique el ancho de banda que debe tener el filtro paso banda $H_R(f)$ centrado a f_c.

Solución:
Es el ancho de banda de transmisión de la señal FM, por tanto, dado que la señal $x_1(t)$ está normalizada a la unidad y aplicando la regla de Carlson:

$$B_T = 2(\tfrac{f_D}{B_x} + 2)B_x$$

d) Expresión de señal en el punto (3). Primero distinga entre señal útil y ruido. A continuación aproxime el ruido de fase, suponiendo que la SNR en este punto es alta (> 10 dB).

Solución:

Considerando $$f(t) = 2p\, f_D\int_0^t x_1(l)\,dl$$

$$y_3(t) = \tfrac{s(t)}{\sqrt{L}} + w(t) * h_R(t) =$$

$$\tfrac{A_c}{\sqrt{L}}\cos(2p\, f_c + f(t)) + i_n(t)\cos(2p\, f_c t) - q_n(t)\sin(2p\, f_c t)$$

$$\cong e_3(t)\cos(2p\, f_c + f(t) + \tfrac{\sqrt{L}}{A_c} q_n(t))$$

e) Expresión de señal en el punto (4). Distinga entre señal útil y ruido. Calcule y dibuje la densidad espectral de ruido en este punto. Puede suponer que el último elemento del demodulador de FM es un filtro paso bajo de ancho de banda B_x.

Solución:

$$y_4(t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(2p\ f_c+f(t)+\frac{\sqrt{L}}{A_c}q_n(t)\right)-DC\right)*h_{PBajo}(t)=\ f_D x_1(t)+\frac{\sqrt{L}}{2p\,A_c}\frac{\partial}{\partial t}q_n(t)*h_{PBajo}(t)$$

El primer sumando es el término de señal útil y el segundo el término de ruido. Dado que para la componente en cuadratura se tiene: $S_{q_n}(f)=N_0\Pi\left(\frac{f}{B_T}\right)$,la densidad espectral de ruido en el punto (4) es:

$$S_{n_4}(f)=\frac{L}{A_c^2}N_0 f^2\Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$$

f) Escriba la expresión de señal en el punto (5). Distinga entre señal útil y ruido.

Solución:

$$y_5(t)=y_4(t)*h_D(t)=f_D x(t)+\frac{\sqrt{L}}{2p\,A_c}\frac{\partial}{\partial t}q_n(t)*h_{PBajo}(t)*h_D(t)$$

El primer sumando es el término de señal útil y el segundo el término de ruido.

g) Obtenga la SNR en el punto (5) en función de $H_D(f)$ y de los parámetros que considere necesarios. En dicha expresión sustituya la potencia P_x en función de P_1, utilizando la expresión obtenida en el primer apartado.

Solución:

Potencia señal útil: $S_D=E\left[\left(f_D x(t)\right)^2\right]=f_D^2P_x$

Potencia señal de ruido: $N_D=E\left[\left(n_5(t)\right)^2\right]=\int S_{n_5}(f)df=\int_{-B_x}^{+B_x}\frac{L}{A_c^2}N_0 f^2\left|H_D(f)\right|^2df$

Relación señal a ruido:

$$SNR_5=\frac{f_D^2P_x}{\int_{-B_x}^{+B_x}\frac{L}{A_c^2}N_0 f^2\left|H_D(f)\right|^2df}=\frac{f_D^2A_c^2 2B_xP_1}{LN_0\int_{-B_x}^{+B_x}f^2\left|H_D(f)\right|^2df\int_{-B_x}^{+B_x}\left|H_P(f)\right|^2df}=$$

$$\frac{f_D^2A_c^2 2B_xP_1}{LN_0\int_{-B_x}^{+B_x}f^2\left|H_D(f)\right|^2df\int_{-B_x}^{+B_x}\frac{1}{\left|H_D(f)\right|^2}df}$$

h) Obtenga las expresiones de $H_P(f)$ y $H_D(f)$ que maximizan la SNR en el punto (5). Aplique por tanto la teoría de filtros terminales óptimos.

Solución:
Aplicando Schwartz, debe cumplirse que

$$|f|\left|H_D(f)\right|=K\frac{1}{\left|H_D(f)\right|}$$

con lo que:

$$\left|H_D(f)\right|^2=\frac{K}{|f|};\qquad \left|H_P(f)\right|^2\frac{1}{K}|f|$$

Siendo K una constante arbitraria que se elegirá de tal modo que la potencia de $x_1(t)$ sea P_1.

i) Calcule la máxima SNR en el punto (5)

Solución:

$$SNR_5 = \frac{f_D^2 A_c^2 2B_x P_1}{LN_0\left(\int_{-B_x}^{+B_x} |f|\, df\right)^2} = \frac{f_D^2 A_c^2 2B_x P_1}{LN_0\left(B_x^2\right)^2} = \frac{4b^2 S_T P_1}{LN_0 B_x}$$

Utilizando las expresiones de $H_P(f)$ y $H_D(f)$ obtenidas:

j) Calcule y dibuje la densidad espectral de la señal útil en el punto (1). Comente los resultados.

Solución:

$$S_{x_1}(f) = \tfrac{P_x}{2B_x K} |f| \Pi\left(\tfrac{f}{2B_x}\right)$$

donde la constante K se obtiene de $P_1 = \frac{P_x B_x}{2K}$

k) Calcule y dibuje la densidad espectral de la señal de ruido en el punto (5). Comente los resultados

Solución:

$$S_{n_5}(f) = \tfrac{L}{A_c^2} N_0 f^2 \left|H_D(f)\right|^2 \Pi\left(\tfrac{f}{2B_x}\right) = \tfrac{L}{A_c^2} N_0 K |f| \Pi\left(\tfrac{f}{2B_x}\right)$$

La forma ya no es parabólica, es lineal con la frecuencia.

3.4 Ejercicio 1. Control 12 de Abril 2005 (J. López-Salcedo)

3.4.1 Enunciado

Considere el siguiente proceso aleatorio:

$$w(t) = x(t)\cos\left(w_0 t + q\right) + y(t)\sin\left(w_0 t + q\right)$$

con w_0 una constante positiva real y en donde $x(t)$ e $y(t)$ son dos procesos aleatorios reales, dependientes, conjuntamente estacionarios en sentido amplio y espectralmente planos. El proceso $x(t)$ tiene un ancho de banda B_X y una potencia P_X. De manera similar, el proceso $y(t)$ tiene un ancho de banda B_Y y una potencia P_Y. Se pretende identificar cuáles han de ser las condiciones necesarias para que el proceso $w(t)$ sea estacionario. Para ello,

a) Asuma que q es una variable determinista genérica.
   - a1) Calcule el valor esperado del proceso $w(t)$.
   - a2) Calcule la función de autocorrelación del proceso $w(t)$.
   - a3) Para $q = 0$, identifique las condiciones necesarias que han de cumplir los procesos $x(t)$ e $y(t)$ para que el proceso $w(t)$ sea estacionario en sentido amplio. ¿Cuál ha de ser la relación entre B_X, B_Y y entre P_X, P_Y?
   - a4) En caso de que $x(t)$ sea la entrada a un sistema $h(t)$, y la salida de este sistema sea $y(t)$, ¿qué tipo de sistemas preservan la estacionariedad de $w(t)$?

b) Volviendo a las condiciones iniciales del enunciado del problema, asuma ahora que q es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre $\left[-p, p\right)$ e independiente de $x(t)$, $y(t)$.
   - b1) Calcule el valor esperado del proceso $w(t)$.
   - b2) Calcule la función de autocorrelación del proceso $w(t)$.
   - b3) Identifique las condiciones necesarias que han de cumplir los procesos $x(t)$ e $y(t)$ de manera que el proceso $w(t)$ sea estacionario en sentido amplio.

c) Asumiendo $w(t)$ estacionario, halle la densidad espectral de potencia del proceso $w(t)$ en función de las densidades espectrales de potencia de los procesos $x(t)$ e $y(t)$.

d) Particularice la expresión de la densidad espectral de potencia hallada en el apartado (c) para el caso en que los procesos $x(t)$ e $y(t)$ sean incorrelados.

3.4.2 Resolución

(a1) Calcule el valor esperado del proceso $w(t)$.

Solución:

Teniendo en cuenta que para el apartado (a), q es una variable determinista, entonces:

$$m_W(t) = E\left[w(t)\right] = m_X(t)\cos\left(w_0 t + q\right) + m_Y(t)\sin\left(w_0 t + q\right)$$

en donde los valores esperados de los procesos $x(t)$ e $y(t)$ se han definido según:

$m_X(t) = E\left[x(t)\right]$ y $m_Y(t) = E\left[y(t)\right]$.

(a2) Calcule la función de autocorrelación del proceso $w(t)$.

Solución:

De cara a obtener la función de autocorrelación del proceso $w(t)$ es interesante interpretar este proceso como un proceso paso banda puesto que ello simplifica el cálculo de la función de autocorrelación. De este modo, el proceso $w(t)$ puede ser expresado en función de su equivalente paso bajo $b_W(t)$ según:

$$w(t) = \mathrm{Re}\left[\left[x(t) - jy(t)\right]e^{jq}e^{jw_0 t}\right] = \mathrm{Re}\left[b_W(t)e^{jw_o t}\right]$$
$$b_W(t) = \left[x(t) - jy(t)\right]e^{jq}$$

Entonces, la función de autocorrelación resulta,

$$\begin{aligned}
R_W(t+t,t) &= E\left[w(t+t)w^*(t)\right] = E\left[\mathrm{Re}\left[b_W(t+t)e^{jw_0(t+t)}\right]\mathrm{Re}\left[b_W(t)e^{jw_0 t}\right]\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E\left[b_W(t+t)b_W(t)\right]e^{jw_0(2t+t)} + E\left[b_W(t+t)b_W^*(t)\right]e^{jw_0 t}\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[R_{b_W b_W^*}(t+t,t)e^{jw_0(2t+t)} + R_{b_W}(t+t,t)e^{jw_0 t}\right].
\end{aligned}$$

Para la función de autocorrelación del equivalente paso bajo tenemos,

$$\begin{aligned}
R_{b_W}(t+t,t) &= E\left[b_W(t+t)b_W^*(t)\right] = E\left[\left[x(t+t) - jy(t+t)\right]\left[x(t+t) + jy(t+t)\right]\right] \\
&= R_X(t) + R_Y(t) - jR_{YX}(t) + jR_{XY}(t) = R_{b_W}(t)
\end{aligned}$$

De manera similar, para la función de autocorrelación complementaria del equivalente paso bajo,

$$\begin{aligned}
R_{b_W b_W^*}(t+t,t) &= E\left[b_W(t+t)b_W(t)\right] = E\left[\left[x(t+t) - jy(t+t)\right]\left[x(t+t) - jy(t+t)\right]e^{j2q}\right] \\
&= \left[R_X(t) - R_Y(t) - jR_{YX}(t) - jR_{XY}(t)\right]e^{j2q} = R_{b_W b_W^*}(t).
\end{aligned}$$

Finalmente, la función de autocorrelación del proceso $w(t)$ resulta,

$$\begin{aligned}
R_W(t+t,t) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[R_{b_W b_W^*}(t)e^{jw_0(2t+t)} + R_{b_W}(t)e^{jw_0 t}\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\cos\left(w_0(2t+t) + 2q\right)\left[R_X(t) - R_Y(t)\right] + \sin\left(w_0(2t+t) + 2q\right)\left[R_{YX}(t) + R_{XY}(t)\right] \\
&\quad + \cos\left(w_0 t\right)\left[R_X(t) + R_Y(t)\right] + \sin\left(w_0 t\right)\left[R_{YX}(t) - R_{XY}(t)\right]\Big].
\end{aligned}$$

(a3) Para $q = 0$, identifique las condiciones necesarias que han de cumplir los procesos $x(t)$ e $y(t)$ para que el proceso $w(t)$ sea estacionario en sentido amplio. ¿Cuál ha de ser la relación entre B_X, B_Y y entre P_X, P_Y ?

Solución:

Para que el proceso $w(t)$ sea estacionario en sentido amplio, su valor esperado ha de ser constante y su función de autocorrelación ha de depender únicamente de t y no de la variable de tiempo t.

Por lo que respecta al valor esperado del proceso $w(t)$, para $q = 0$ se tiene

$$m_W(t) = m_X(t)\cos\left(w_0 t\right) + m_Y(t)\sin\left(w_0 t\right).$$

La única manera de hacer que el valor esperado sea constante es haciendo que $m_X(t) = m_Y(t) = 0$. Por tanto, la primera condición que se ha de cumplir para que el proceso $w(t)$ sea estacionario es que los procesos aleatorios $x(t)$ e $y(t)$ que lo forman sean ambos de media nula.

La segunda condición que se ha de cumplir está relacionada con la función de autocorrelación del proceso $w(t)$ hallada en el apartado (a2). A partir de la expresión resultante, la única manera de que la autocorrelación de $w(t)$ dependa sólo de la variable t es haciendo que

$$R_{b_W b_W^*}(t+t, t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} R_X(t) = R_Y(t) \\ R_{YX}(t) = -R_{XY}(t) \end{cases}.$$

(a4) En caso de que $x(t)$ sea la entrada a un sistema $h(t)$, y la salida de este sistema sea $y(t)$, ¿qué tipo de sistemas preservan la estacionariedad de $w(t)$?

Solución:

Para el caso de procesos aleatorios estacionarios a través de sistemas lineales se cumple que

$$R_Y(t) = R_X(t) * h(t) * h^*(-t).$$

Sin embargo, y a partir del apartado (a3), para mantener la estacionariedad del proceso $w(t)$ es necesario que $R_Y(t) = R_X(t)$. Para ello se ha de cumplir que $h(t) * h^*(-t) = d(t)$, o equivalentemente para el caso del dominio frecuencial, $\left|H(f)\right|^2 = 1$.

Un ejemplo de sistema lineal que cumple esta propiedad es un transformador de Hilbert, el cual presenta una respuesta frecuencial $H_{Hilbert}(f) = -j\,\mathrm{sign}(f)$.

(b1) Calcule el valor esperado del proceso $w(t)$.

Solución:

Teniendo en cuenta que para el apartado (b), q es una variable aleatoria uniforme en $\left[-p, p\right)$:

$$m_W(t) = m_X(t) E\left[\cos\left(w_0 t + q\right)\right] + m_Y(t) E\left[\sin\left(w_0 t + q\right)\right] = 0.$$

Una observación interesante es que, a diferencia del apartado (a) en que q era determinista, ahora la media del proceso $w(t)$ es siempre nula independientemente de la media de los procesos $x(t)$ e $y(t)$.

(b2) Calcule la función de autocorrelación del proceso $w(t)$.

Solución:

Tal y como se indicó en el apartado (a2),

La función de autocorrelación del equivalente paso bajo no ha cambiado pues no depende de q, pero sí la función de autocorrelación complementaria. En este caso,

$$R_{b_W b_W^*}(t+t,t) = E\left[b_W(t+t)b_W(t)\right] = E\left[\left[x(t+t)-jy(t+t)\right]\left[x(t+t)-jy(t+t)\right]e^{j2q}\right]$$

$$= \left[R_X(t)-R_Y(t)-jR_{YX}(t)-jR_{XY}(t)\right]E\left[e^{j2q}\right]=0.$$

Debido a que $E\left[e^{j2q}\right]=0$. Como consecuencia, la función de autocorrelación del proceso $w(t)$ viene dada por:

$$R_W(t+t,t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[R_{b_W}(t)e^{jw_0 t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(w_0 t)\left[R_X(t)+R_Y(t)\right]+\frac{1}{2}\sin(w_0 t)\left[R_{YX}(t)-R_{XY}(t)\right]$$

$$= R_W(t).$$

Nótese cómo a diferencia del apartado (a2), ahora la función de autocorrelación del proceso $w(t)$ es siempre independiente del tiempo.

(b3) Identifique las condiciones necesarias que han de cumplir los procesos $x(t)$ e $y(t)$ de manera que el proceso $w(t)$ sea estacionario en sentido amplio.

Solución:

Para el caso de q variable aleatoria uniforme entre $[-p, p)$ el proceso aleatorio $w(t)$ es siempre estacionario. La razón es que, a partir de los resultados de los apartados (b1) y (b2), el valor medio de $w(t)$ es siempre constante y su función de autocorrelación es siempre independiente del tiempo.

(c) Asumiendo $w(t)$ estacionario, halle la densidad espectral de potencia del proceso $w(t)$ en función de las densidades espectrales de potencia de los procesos $x(t)$ e $y(t)$.

Solución:

Tal y como se ha visto en apartados anteriores, para el caso en que $w(t)$ es estacionario,

$$R_W(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[R_{b_W}(t)e^{jw_0 t}\right] = \frac{1}{2}\cos(w_0 t)\left[R_X(t)+R_Y(t)\right]+\frac{1}{2}\sin(w_0 t)\left[R_{YX}(t)-R_{XY}(t)\right].$$

Para hallar la densidad espectral se hará uso del Teorema de Wiener-Khinchin según el cual, la densidad espectral del proceso $w(t)$ vendrá dada por:

$$S_W(t) = TF\left[R_W(t)\right].$$

Por lo tanto,

$$S_W(f) = \frac{1}{4}\left[d(f-f_0)+d(f+f_0)\right]*\left[S_X(f)+S_Y(f)\right]-\frac{j}{4}\left[d(f-f_0)-d(f+f_0)\right]*\left[S_{YX}(f)-S_{YX}^*(f)\right]$$

En donde se ha utilizado la propiedad de procesos conjuntamente estacionarios según la cual, $R_{XY}(t)=R_{YX}(-t)$ y por tanto, $S_{XY}(f)=S_{YX}^*(f)$.

(d) Particularice la expresión de la densidad espectral de potencia hallada en el apartado (c) para el caso en que los procesos $x(t)$ e $y(t)$ sean incorrelados.

Solución:

Si $x(t)$ e $y(t)$ son incorrelados, entonces $R_{XY}(t) = m_X m_Y = R_{YX}(t)$. Por lo tanto, la función de autocorrelación del proceso $w(t)$ es

$$R_W(t) = \frac{1}{2}\left[R_X(t) + R_Y(t)\right]\cos\left(w_0 t\right)$$

y su densidad espectral de potencia,

$$S_W(t) = \frac{1}{4}\left[S_X(f) + S_Y(f)\right] * \left[d(f - f_0) + d(f + f_0)\right].$$

3.5 Ejercicio 2 de Examen Final de Junio 2005 (J. López-Salcedo)

3.5.1 Enunciado.

En misiones espaciales, el control de los sistemas en órbita se realiza desde la Tierra a través de señales enviadas desde estaciones terrestres. Habitualmente, las señales de comunicaciones que se envían para tal efecto siguen un formato de modulación denominado de “Tracking, Telemetry and Command” (TTC) el cual se basa en la transmisión paso banda de un mensaje $m(t)$ sobre una subportadora a una cierta frecuencia f_S. Como caso particular y simplificado, se considerará la siguiente señal TTC:

$$s(t) = \left[m(t)\cos\left(2\pi f_S t\right)\right]\cos\left(2\pi f_C t\right) - \left[m(t)\sin\left(2\pi f_S t\right)\right]\sin\left(2\pi f_C t\right) .$$

El mensaje $m(t)$ es una señal real y estacionaria de media nula, potencia P_m, ancho de banda B_m, autocorrelación $R_m(\tau)$ y densidad espectral $S_m(f)$. Además, la frecuencia de subportadora f_S cumple que $f_S > B_m$ y además $f_S << f_C$.

a) Asumiendo como frecuencia central f_C, obtenga la componente en fase $i_S(t)$ y la componente en cuadratura $q_S(t)$ de la señal $s(t)$. Determine el equivalente paso bajo $b_S(t)$ expresándolo en función del fasor $e^{j2\pi f_S t}$.

b) Calcule la autocorrelación del equivalente paso bajo $R_{b_S}(t+\tau, t)$. Halle su densidad espectral de potencia en función de $S_m(f)$, dibújela para una $S_m(f)$ genérica, y determine el ancho de banda del equivalente paso bajo.

c) Para una señal paso banda genérica, su autocorrelación en función del equivalente paso bajo viene dada por $R_S(t+\tau, t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{R_{b_S b_S^*}(t+\tau, t)e^{j2\pi f_C(2t+\tau)} + R_{b_S}(t+\tau, t)e^{j2\pi f_C \tau}\right\}$. Calcule la autocorrelación complementaria $R_{b_S b_S^*}(t+\tau, t)$. Utilizando esta autocorrelación y los resultados del apartado (b), halle la autocorrelación de $s(t)$. Discuta la estacionariedad de $s(t)$, halle su densidad espectral y dibújela. ***Nota**: ver definición de la autocorrelación complementaria al final de este ejercicio.*

d) Proponga un esquema para demodular el mensaje $m(t)$ a partir de la señal $s(t)$.

e) En presencia de ruido aditivo blanco y Gaussiano con densidad espectral de potencia $S_w(f) = N_0/2$, calcule la SNR a la salida del demodulador propuesto.

Nota:

$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$, $\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\sin(A-B)+\sin(A+B)\right]$

$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$, $R_{b_s b_s^*}(t+\tau, t) = E\left\{b_s(t+\tau)b_s(t)\right\}$, $R_{b_s}(t+\tau, t) = E\left\{b_s(t+\tau)b_s^*(t)\right\}$

3.5.2 Resolución

a) Asumiendo como frecuencia central f_C, obtenga la componente en fase $i_S(t)$ y la componente en cuadratura $q_S(t)$. Determine el equivalente paso bajo $b_S(t)$ de la señal $s(t)$ expresándolo en función del fasor $e^{j2\pi f_S t}$.

Solución:

La señal $s(t)$ puede ser expresada de manera equivalente como

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\left[m(t)\cos\left(2\pi f_S t\right) + jm(t)\sin\left(2\pi f_S t\right)\right]e^{j2\pi f_C t}\right] = \mathrm{Re}\left[b_S(t)e^{j2\pi f_C t}\right]$$

Por lo tanto, respecto la frecuencia central f_C, el equivalente paso bajo viene dado por

$$b_S(t) = m(t)\cos\left(2\pi f_S t\right) + jm(t)\sin\left(2\pi f_S t\right) = m(t)e^{j2\pi f_S t}$$

y en consecuencia, las componentes en fase y en cuadratura son:

$$i_S(t) = m(t)\cos\left(2\pi f_S t\right),$$
$$q_S(t) = m(t)\sin\left(2\pi f_S t\right).$$

b) Calcule la autocorrelación del equivalente paso bajo $R_{b_S}(t+\tau, t)$. Halle su densidad espectral de potencia en función de $S_m(f)$, dibújela para una $S_m(f)$ genérica, y determine el ancho de banda del equivalente paso bajo.

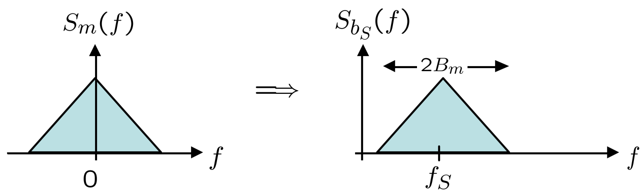
Solución:

Para el equivalente paso bajo hallado en el apartado (a), su función de autocorrelación es

$$R_{b_S}(t+\tau, t) = E\left[b_S(t+\tau)b_S^*(t)\right] = E\left[m(t+\tau)m(t)\right]e^{j2\pi f_S \tau} = R_m(\tau)e^{j2\pi f_S \tau}$$

Aplicando el Teorema de Wiener-Khinchin, su densidad espectral de potencia es

$$S_{b_S}(f) = TF\left[R_{b_S}(\tau)\right] = S_m(f - f_S).$$



c) Para una señal paso banda genérica, su autocorrelación en función del equivalente paso bajo viene dada por $R_S(t+\tau, t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{R_{b_S b_S^*}(t+\tau, t)e^{j2\pi f_C(2t+\tau)} + R_{b_S}(t+\tau, t)e^{j2\pi f_C \tau}\right\}$. Calcule la autocorrelación complementaria $R_{b_S b_S^*}(t+\tau, t)$. Utilizando esta autocorrelación y los resultados del apartado (b), halle la autocorrelación de $s(t)$. Discuta la estacionariedad de $s(t)$, halle su densidad espectral y dibújela. ***Nota**: ver definición de la autocorrelación complementaria al final de este ejercicio.*

Solución:

La función de autocorrelación complementaria del equivalente paso bajo es

$$R_{b_S b_S^*}(t+\tau,t) = E\left[b_S(t+\tau)b_s(t)\right] = E\left[m(t+\tau)m(t)\right]e^{j2\pi f_S(2t+\tau)} = R_m(\tau)e^{j2\pi f_S(2t+\tau)}$$

Utilizando la función de autocorrelación del equivalente paso bajo calculada en (b), la función de autocorrelación de la señal $s(t)$ es

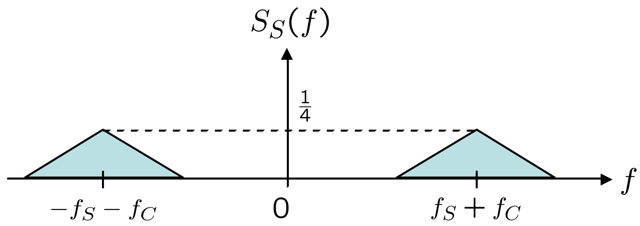
$$\begin{aligned} R_S(t+\tau,t) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[R_m(\tau)e^{j2\pi(f_C+f_S)(2t+\tau)} + R_m(\tau)e^{j2\pi(f_C+f_S)\tau}\right] = \\ &= \frac{1}{2}R_m(\tau)\left[\cos\left(2\pi(f_C+f_S)(2t+\tau)\right) + \cos\left(2\pi(f_C+f_S)\tau\right)\right] \end{aligned}$$

A la vista de la expresión anterior se puede afirmar que la señal $s(t)$ no es estacionaria puesto que su función de autocorrelación depende del tiempo. En particular, y puesto que el mensaje $m(t)$ es de media nula pero la función de autocorrelación es periódica, la señal $s(t)$ resulta ser <u>cicloestacionaria</u>.

Como la señal $s(t)$ es cicloestacionaria, es necesario calcular primero la autocorrelación promedio $\overline{R}_S(\tau)$ para poder obtener la densidad espectral de potencia.

$$\overline{R}_S(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_S(t+\tau,t)dt = \frac{1}{2}R_m(\tau)\cos\left(2\pi(f_C+f_S)\tau\right)$$

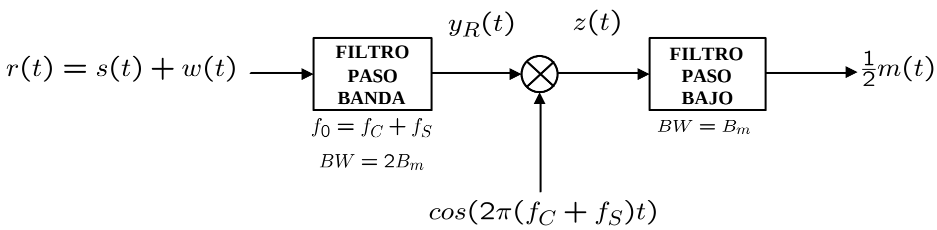
$$S_S(f) = TF\left[\overline{R}_S(\tau)\right] = \frac{1}{4}\left[S_m(f-f_C-f_S) + S_m(f+f_C+f_S)\right].$$



d) Proponga un esquema para demodular el mensaje $m(t)$ a partir de la señal $s(t)$.

Solución:

Nótese cómo la señal $s(t)$ es en realidad una señal modulada en doble banda lateral con frecuencia central igual a $f_C + f_S$. Por lo tanto, el demodulador recomendado es el siguiente:



e) En presencia de ruido aditivo blanco y Gaussiano con densidad espectral de potencia $S_w(f) = N_0/2$, calcule la SNR a la salida del demodulador propuesto.

Solución:

La SNR a la salida del demodulador propuesto es de hecho, la SNR a la salida del demodulador coherente para una modulación en doble banda lateral. Puesto que la modulación paso banda en doble banda lateral presenta las mismas prestaciones que la modulación en banda base, la SNR a la salida del demodulador propuesto se corresponde con la SNR en banda base,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{DBL} = \left(\frac{S}{N}\right)_{BB} = \frac{S_R}{N_0 B_m}.$$

3.6 Ejercicio de Examen de control Noviembre 2005 (C. Fernández Prades)

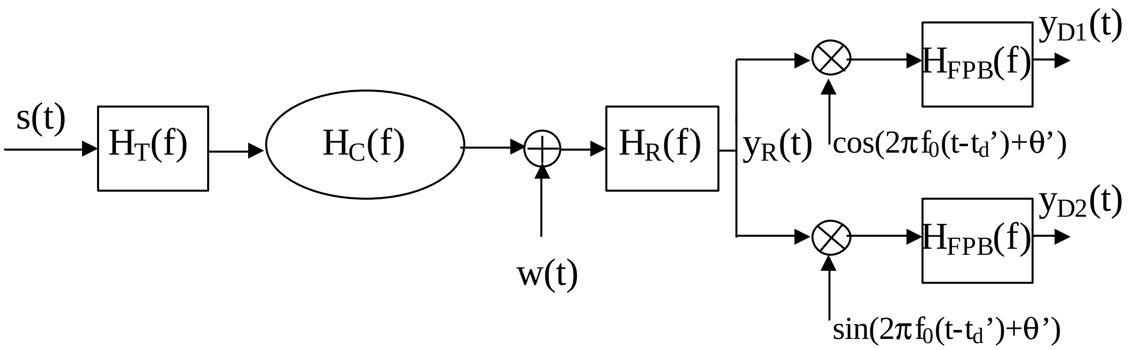
3.6.1 Enunciado

Consideramos el siguiente proceso estocástico:

$$s(t) = x(t)\cos(2pf_0 t + q) - y(t)\sin(2pf_0 t + q)$$

donde f_0 es una constante positiva real, $x(t)$ e $y(t)$ son dos procesos aleatorios reales, incorrelados, en banda base, estacionarios en sentido amplio, de ancho de banda B_x i B_y, i potencias P_x y P_y, respectivamente, y q es una variable aleatoria real, independente de $x(t)$ e $y(t)$, y con distribución uniforme entre 0 y 2π.

Se desea transmitir $s(t)$ a través de un sistema de comunicaciones representado en la siguiente figura, donde modelamos $w(t)$ como ruido aditivo, blanco, Gaussiano y con potencia $\frac{N_0}{2}$.



a) Calcular la media y la autocorrelación del proceso $s(t)$. ¿Qué podemos decir de la estacionariedad del proceso?

b) Calcular la densidad espectral de $s(t)$ en función de las densidades espectrales de $x(t)$ e $y(t)$.

c) Calcular la relación señal-ruido a la salida del filtro receptor, SNR_R, considerando un canal ideal con una atenuación de 20 dB de potencia y retardo t_d, que el filtro transmisor es un amplificador de 10 dB y que el receptor tiene una respuesta frecuencial del tipo

$$H_R(f) = A\left(\prod\left(\frac{f+f_0}{2B}\right) + \prod\left(\frac{f-f_0}{2B}\right)\right) \qquad \text{donde } B = B_x = B_y$$

d) Considerando una ecualización ideal (sólo con retardo y atenuación), ¿cuál es la nueva SNR obtenida? Expresarlo en función de la atenuación de la ecualización, las potencias P_x y P_y y el módulo de $H_R(f)$.

e) Diseñar $H_T(f)$ y $H_R(f)$ de manera que optimicen la SNR calculada en el apartado anterior.

Ayuda: se puede utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\int |u|^2 d(\cdot) \int |v|^2 d(\cdot) \geq \left|\int uv^* d(\cdot)\right|^2$, donde la igualdad se cumple cuando *u* es proporcional a *v*.

f) Obtener una expresión para $y_{D1}(t)$ e $y_{D2}(t)$ considerando ecualización ideal y que el sistema receptor realiza una estimación perfecta de los parámetros de sincronización, és decir, $t_d = t_d'$ y $q = q'$, y que el filtro paso bajo se puede expresar como $H_{FPB}(f) = \prod\left(\frac{f}{2B}\right)$

g) Consideramos que el receptor consigue hacer una estimación del retardo del canal correcta, es decir, $t_d = t_d'$, pero comete un error en la estimación de la fase: $e = q - q'$. Demostrar analíticamente que este hecho provoca interferencias en la detección de las señales en la salida del filtro paso bajo (Sólo hace falta demostrarlo para una de las dos ramas).

h) Calcular la SIR (relación señal – interferencias) a la salida de una de las dos ramas considerando un error de fase ε.

$$SIR = \frac{P_{útil}}{P_{\mathrm{int}erferencia}}$$

3.6.2 Resolución

a) Calcular la media y la autocorrelación del proceso $s(t)$. ¿Qué podemos decir de la estacionariedad del proceso?

Solución:

Cálculo de la media:

$$E\{s(t)\} = E\{x(t)\cos(2pf_0 t + q) - y(t)\sin(2pf_0 t + q)\} = E\{x(t)\}E\{\cos(2pf_0 t + q)\} +$$
$$- E\{y(t)\}E\{\sin(2pf_0 t + q)\} = m_x \int_0^{2p} \cos(2pf_0 t + q)dq - m_y \int_0^{2p} \sin(2pf_0 t + q)dq = 0$$

Cálculo de la autocorrelación:

$$R_s(t_1, t_2) = E\{s(t_1)s^*(t_2)\} =$$
$$= E\{(x(t_1)\cos(2pf_0 t_1 + q) - y(t_1)\sin(2pf_0 t_1 + q))(x(t_2)\cos(2pf_0 t_2 + q) - y(t_2)\sin(2pf_0 t_2 + q))^*\} =$$
$$= E\{x(t_1)x^*(t_2)\cos(2pf_0 t_1 + q)\cos(2pf_0 t_2 + q)\} - E\{x(t_1)y^*(t_2)\cos(2pf_0 t_1 + q)\sin(2pf_0 t_2 + q)\} +$$
$$- E\{y(t_1)x^*(t_2)\sin(2pf_0 t_1 + q)\cos(2pf_0 t_2 + q)\} + E\{y(t_1)y^*(t_2)\sin(2pf_0 t_1 + q)\sin(2pf_0 t_2 + q)\} =$$
$$= \frac{R_x(t_2 - t_1)}{2}\cos(2pf_0(t_2 - t_1)) + \frac{R_y(t_2 - t_1)}{2}\cos(2pf_0(t_2 - t_1))$$

La función de autocorrelación depende únicamente de la diferencia de tiempos $t = t_2 - t_1$, y por tanto se trata de un proceso estacionario.

b) Calcular la densidad espectral de $s(t)$ en función de las densidades espectrales de $x(t)$ e $y(t)$.

Solución:

La densidad espectral se puede calcular directamente haciedo la Transformada de Fourier de la autocorrelación encontrada en el apartado anterior:

$$S_s(f) = \frac{S_x(f)}{4} * (d(f + f_0) + d(f - f_0)) + \frac{S_y(f)}{4} * (d(f + f_0) + d(f - f_0)) =$$
$$= \frac{1}{4}(S_x(f + f_0) + S_x(f - f_0)) + \frac{1}{4}(S_y(f + f_0) + S_y(f - f_0))$$

c) Calcular la relación señal-ruido a la salida del filtro receptor, SNR_R, considerando un canal ideal con una atenuación de 20 dB de potencia y retardo t_d, que el filtro transmisor es un amplificador de 10 dB y que el receptor tiene una respuesta frecuencial del tipo

$$H_R(f) = A\left(\prod\left(\frac{f + f_0}{2B}\right) + \prod\left(\frac{f - f_0}{2B}\right)\right)$$

donde $B = B_x = B_y$

Solución:

Canal ideal con atenuación de 20 dB:

$$10\log_{10}(L)=20\Rightarrow L=10^{\frac{20}{10}}=100\Rightarrow H_c(f)=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-j2pft_d}=\frac{1}{10}e^{-j2pft_d}$$

El filtro transmisor es un amplificador de 10 dB:

$$10\log_{10}(G)=10\Rightarrow G=10^{\frac{10}{10}}=10\Rightarrow H_T(f)=\sqrt{G}=\sqrt{10}$$

La potencia útil a la salida del receptor es:

$$P_{s_R}=\int_{-\infty}^{+\infty}S_s(f)\left|H_T(f)\right|^2\left|H_C(f)\right|^2\left|H_R(f)\right|^2 df=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}S_s(f)\left|\sqrt{10}\right|^2\left|\frac{1}{10}e^{-j2pft_d}\right|^2\left|A\left(\prod\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)+\prod\left(\frac{f-f_0}{2B}\right)\right)\right|^2 df=$$

$$=\frac{A^2}{40}\left(\int_{-f_0-B}^{-f_0+B}\left(S_x(f+f_0)+S_y(f+f_0)\right)df+\int_{f_0-B}^{f_0+B}\left(S_x(f-f_0)+S_y(f+f_0)\right)df\right)=$$

$$=\frac{A^2}{40}\left(2P_x+2P_y\right)=\frac{A^2}{20}\left(P_x+P_y\right)$$

La potencia de ruido a la salida del filtro receptor es:

$$P_{n_R}=\int_{-\infty}^{+\infty}S_w(f)\left|H_R(f)\right|^2 df=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_0}{2}\left|A\left(\prod\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)+\prod\left(\frac{f-f_0}{2B}\right)\right)\right|^2 df=$$

$$=\frac{A^2N_0}{2}\left(\int_{-f_0-B}^{-f_0+B}df+\int_{f_0-B}^{f_0+B}df\right)=2BA^2N_0$$

y, por tanto, la relación señal-ruido en recepción es: $SNR_R=\frac{P_{s_R}}{P_{n_R}}=\frac{P_x+P_y}{40N_0B}$

d) Considerando una ecualización ideal (sólo con retardo y atenuación), ¿cuál es la nueva SNR obtenida? Expresarlo en función de la atenuación de la ecualización, las potencias P_x y P_y y el módulo de $H_R(f)$.

Solución:

Condición de ecualización ideal: $H_T(f)H_C(f)H_R(f)=ce^{-j2pft_d}=H(f)$

Potencia útil a la salida del filtro receptor:

$$P_{s_R}=\int_{-\infty}^{+\infty}S_s(f)\left|H(f)\right|^2 df=\frac{c^2}{2}(P_x+P_y)$$

Potencia de ruido a la salida del filtro receptor:

$$P_{n_R}=\int_{-\infty}^{+\infty}S_w(f)\left|H_R(f)\right|^2 df$$

Relación señal – ruido considerando ecualización ideal:

$$SNR_R = \frac{P_s}{P_{n_R}} = \frac{c^2\left(P_x + P_y\right)}{N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left|H_R(f)\right|^2 df}$$

e) Diseñar $H_T(f)$ y $H_R(f)$ de manera que optimicen la SNR calculada en el apartado anterior.

Solución:

La potencia a la salida del filtro transmisor se puede calcular como:

$$P_T = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f)\left|H_T(f)\right|^2 df$$

Multiplicando y dividiendo la expresión de la SNR encontrada en el apartado anterior para una ecualización ideal genérica por esta potencia, encontramos una expresión que podemos maximitzar utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$SNR_R = SNR_R \frac{P_T}{P_T} = \frac{\frac{c^2}{2}\left(P_x + P_y\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)\left|H_R(f)\right|^2 df} \frac{P_T}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f)\left|H_T(f)\right|^2 df}$$

Aplicando la desigualdad:

$$SNR_R \leq \frac{\frac{c^2}{2}\left(P_x + P_y\right)P_T}{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{S_w(f)}\left|H_R(f)\right|\sqrt{S_s(f)}\left|H_T(f)\right| df\right|^2}$$

donde se ha utilizado $u = \sqrt{S_w(f)}\left|H_R(f)\right|$ y $v = \sqrt{S_s(f)}\left|H_T(f)\right|$

La igualdad se cumple cuando $u = lv$:

$$\sqrt{S_s(f)}\left|H_T(f)\right| = l\sqrt{S_w(f)}\left|H_R(f)\right|$$

Manipulando esta expresión y utilizando la definición de ecualización ideal:

$$\left|H_T(f)\right| = l\,\frac{\sqrt{S_w(f)}}{\sqrt{S_s(f)}}\left|H_R(f)\right| = l\,\frac{\sqrt{S_w(f)}}{\sqrt{S_s(f)}} \frac{c}{\left|H_T(f)H_C(f)\right|}$$

y por tanto podemos expresar el módulo al cuadrado del filtro transmisor óptimo como:

$$\left|H_T(f)\right|^2 = c\,l\,\frac{\sqrt{S_w(f)}}{\sqrt{S_s(f)}} \frac{1}{\left|H_C(f)\right|}$$

Lo mismo para el filtro receptor:

$$|H_R(f)| = \frac{1}{l}\frac{\sqrt{S_s(f)}}{\sqrt{S_w(f)}}|H_T(f)| = \frac{1}{l}\frac{\sqrt{S_s(f)}}{\sqrt{S_w(f)}}\frac{c}{|H_R(f)H_C(f)|}$$

$$|H_R(f)|^2 = \frac{c}{l}\frac{\sqrt{S_s(f)}}{\sqrt{S_w(f)}}\frac{1}{|H_C(f)|}$$

f) Obtener una expresión para $y_{D1}(t)$ e $y_{D2}(t)$ considerando ecualización ideal y que el sistema receptor realiza una estimación perfecta de los parámetros de sincronización, és decir, $t_d = t_d'$ y $q = q'$, y que el filtro paso bajo se puede expresar como $H_{FPB}(f) = \prod\left(\frac{f}{2B}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned}
y_{D_1}(t) &= s(t) * h_T(t) * h_C(t) * h_R(t)\cdot\cos(2pf(t-t_d') + q') * h_{FPB}(t) + \\
&+ w(t) * h_R(t)\cdot\cos(2pf_0(t-t_d') + q') * h_{FPB}(t) = \\
&= cs(t-t_d)\cdot\cos(2pf_0(t-t_d') + q') * h_{FPB}(t) + n(t) = \\
&= c\big(x(t-t_d)\cos(2pf_0(t-t_d) + q) - y(t)\sin(2pf_0(t-t_d) + q)\big)\cdot\cos(2pf_0(t-t_d') + q') * h_{FPB}(t) + n(t) = \\
&= c\left(x(t-t_d)\frac{1}{2}\big(\cos(2p\,2f_0(t-t_d) + 2q) + 1\big) - y(t-t_d)\frac{1}{2}\big(\sin(2p\,2f_0(t-t_d) + 2q)\big)\right) * h_{FPB}(t) + n(t) = \\
&= \frac{c}{2}x(t-t_d) + n(t)
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que el filtro paso bajo elimina los componentes de frecuencia $2f_0$

El mismo procedimiento se puede aplicar para calcular la salida en la rama inferior:

$$\begin{aligned}
y_{D_2}(t) &= s(t) * h_T(t) * h_C(t) * h_R(t)\cdot\sin(2pf(t-t_d') + q') * h_{FPB}(t) + \\
&+ w(t) * h_R(t)\cdot\sin(2pf_0(t-t_d') + q') * h_{FPB}(t) = \\
&= cs(t-t_d)\cdot\sin(2pf_0(t-t_d') + q') * h_{FPB}(t) + n(t) = \\
&= c\big(x(t-t_d)\cos(2pf_0(t-t_d) + q) - y(t)\sin(2pf_0(t-t_d) + q)\big)\cdot\sin(2pf_0(t-t_d') + q') * h_{FPB}(t) + n(t) = \\
&= c\left(x(t-t_d)\frac{1}{2}\big(\sin(2p\,2f_0(t-t_d) + 2q)\big) - y(t-t_d)\frac{1}{2}\big(1 - \cos(2p\,2f_0(t-t_d) + 2q)\big)\right) * h_{FPB}(t) + n(t) = \\
&= \frac{c}{2}y(t-t_d) + n(t)
\end{aligned}$$

g) Consideramos que el receptor consigue hacer una estimación del retardo del canal correcta, es decir, $t_d = t_d'$, pero comete un error en la estimación de la fase: $e = q - q'$. Demuestra analíticamente que este hecho provoca interferencias en la detección de las señales en la salida del filtro paso bajo (Sólo hace falta demostrarlo para una de las dos ramas).

Solución:

$$y_{D_1}(t) = s(t) * h_T(t) * h_C(t) * h_R(t) \cdot \cos(2pf(t - t_d') + q') * h_{FPB}(t) +$$
$$+ w(t) * h_R(t) \cdot \cos(2pf(t - t_d') + q') * h_{FPB}(t) =$$
$$= cs(t - t_d) \cdot \cos(2pf(t - t_d') + q') * h_{FPB}(t) + n(t) =$$
$$= c\big(x(t - t_d)\cos(2pf(t - t_d) + q) - y(t)\sin(2pf(t - t_d) + q)\big) \cdot \cos(2pf(t - t_d') + q') * h_{FPB}(t) + n(t) =$$
$$= c\left(x(t - t_d)\frac{1}{2}\big(\cos(2p\,2f(t - t_d) + q + q') + \cos(e)\big) - y(t - t_d)\frac{1}{2}\big(\sin(e) + \sin(2p\,2f(t - t_d) + q + q')\big)\right) * h_{FPB}(t) + n(t) =$$
$$= \frac{c}{2}\big(x(t - t_d)\cos(e) - y(t - t_d)\sin(e)\big) + n(t)$$

h) Calcula la SIR (relación señal – interferencias) a la salida de una de las dos ramas considerando un error de fase ε.

$$SIR = \frac{P_{útil}}{P_{\text{int}erferencia}}$$

Solución:

Potencia útil a la salida de la rama superior:

$$R_{x_1}(t) = E\left\{\frac{c}{2}\cos(e)x(t - t_d + t)\frac{c}{2}\cos(e)x^*(t - t_d)\right\} = \frac{c^2}{4}\cos^2(e)R_x(t)$$

$$S_{x_1}(f) = \frac{c^2}{4}\cos^2(e)S_x(f)$$

$$P_{X_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_1}(f)df = \frac{c^2}{4}\cos^2(e)P_x$$

Potencia interferente a la salida de la rama superior:

$$R_{\text{int}_1}(t) = E\left\{\frac{c}{2}\sin(e)y(t - t_d + t)\frac{c}{2}\sin(e)y^*(t - t_d)\right\} = \frac{c^2}{4}\sin^2(e)R_y(t)$$

$$S_{\text{int}_1}(f) = \frac{c^2}{4}\sin^2(e)S_y(f)$$

$$P_{\text{int}_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{int}_1}(f)df = \frac{c^2}{4}\sin^2(e)P_y$$

Relación señal – interferencia:

$$SIR = \frac{P_{X_1}}{P_{\text{int}_1}} = \frac{\cos^2(e)}{\sin^2(e)}\frac{P_x}{P_y} = \tan^{-2}(e)\frac{P_x}{P_y}$$

4. MODULACIONES DIGITALES

4.1 Ejercicio 3 de Examen Final de T04 (M. Cabrera).

4.1.1 Enunciado

Sea el siguiente proceso aleatorio $s_1(t)=\frac{K}{\sqrt{2T}}\operatorname{sen}\left(\frac{2p}{T}\left(t-e\right)\right)$. Considere K,T como parámetros deterministas y e como una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[0,T)$

a) Calcule la media estadística y la función de autocorrelación del proceso: $m_{s_1}(t)$, $R_{s_1}\left(t+t,t\right)$ y clasifique el proceso según sea estacionario, cicloestacionario, etc…

b) Calcule la potencia y la densidad espectral de $s_1(t)$: $P_1, S_1(f)$

El proceso anterior se utiliza como señal de reloj y para la obtención del sincronismo de símbolo de un sistema de comunicaciones digitales. Considerando una modulación $s_2(t)$ digital binaria polar de símbolos equiprobables se transmite:

$$s(t)=s_1(t)+s_2(t)=\frac{K}{\sqrt{2T}}\operatorname{sen}\left(\frac{2p}{T}\left(t-e\right)\right)+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a\left[n\right]p\left(t-e-nT\right)$$

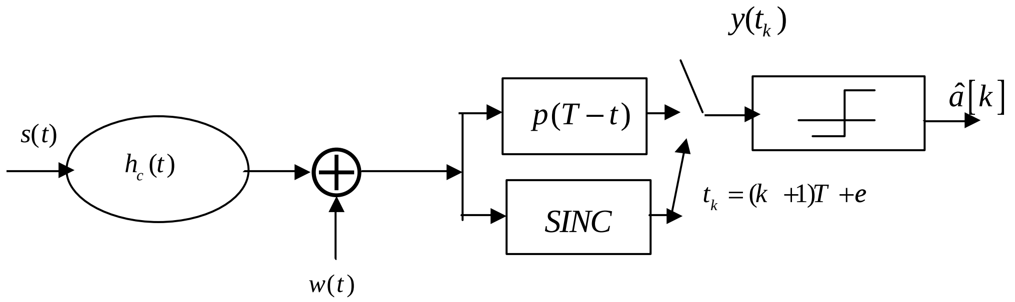
Con $a\left[n\right]=\pm\frac{A}{2}$ y $p(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

c) Calcule la media estadística y la función de autocorrelación del proceso $s_2(t)$: $m_{s_2}(t)$, $R_{s_2}\left(t+t,t\right)$ y clasifique el proceso según sea estacionario, cicloestacionario, etc…Puede dejar el resultado en función de la autocorrelación del pulso $p(t)$ y del resto de parámetros que considere necesarios.

d) Calcule la potencia y la densidad espectral de $s_2(t)$: $P_2, S_2(f)$

e) Justifique que la potencia del proceso $s(t)$ cumple $P_s=P_1+P_2$ y dé la expresión de dicha potencia P_s.

El proceso $s(t)$ se transmite por un canal ideal ($h_c(t)=d(t)$) de ruido aditivo gaussiano y blanco de densidad espectral $S_w(f)=\frac{N_0}{2}$ y se recibe según la siguiente figura. El bloque *SINC* simboliza el sistema de extracción de sincronismo de símbolo, es decir, proporciona los instantes óptimos de muestreo para muestrear la señal a la salida del filtro adaptado.



f) Calcule la energía media transmitida por bit E_b sobre la señal a transmitir $s(t)$, es decir, la energía de la señal $s(t)$ en el tiempo de bit T. Deje el resultado en función de los parámetros que considere necesarios. Si para su obtención utiliza algún parámetro o función calculados en los apartados anteriores, anote las expresiones utilizadas al principio de este apartado.

g) Calcule de forma detallada la expresión obtenida para las muestras de señal a la salida del filtro adaptado: $y(t_k)$

h) Obtenga la potencia de las muestras de ruido a la salida del filtro adaptado. Dé la densidad de probabilidad de dichas muestras.

i) Calcule las funciones de densidad de probabilidad condicionadas $f_y\left(y\middle|+\frac{A}{2}\right)$; $f_y\left(y\middle|-\frac{A}{2}\right)$, con $y=y(t_k)$

j) Suponiendo umbral = 0 en detección, calcule la BER en función de $\frac{E_b}{N_0}$ y del resto de parámetros que considere necesarios.

k) Calcule la probabilidad anterior para $\frac{E_b}{N_0}=10$ y las dos siguientes situaciones: $K=A$, $K=2A$. Comente los resultados.

4.1.2 Resolución

a) Calcule la media estadística y la función de autocorrelación del proceso: $m_{s_1}(t)$, $R_{s_1}\left(t+t,t\right)$ y clasifique el proceso según sea estacionario, cicloestacionario, etc…

Solución:

$$m_{s_1}(t) = E\left[s_1(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)\, f_e(e)\,de = \int_0^T \tfrac{K}{\sqrt{2T}} \operatorname{sen}\left(\tfrac{2p}{T}\left(t-e\right)\right)\tfrac{1}{T}\,de = \tfrac{K}{\sqrt{2T}}\tfrac{1}{T}\left[\cos\left(\tfrac{2p}{T}\left(t-e\right)\right)\tfrac{T}{2p}\right]_0^{2p} = 0$$

$$R_{s_1}(t+t,t) = E\left[s_1(t+t)s_1(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t+t)s_1(t)\, f_e(e)\,de =$$

$$\tfrac{K^2}{2T}\int_0^T \operatorname{sen}\left(\tfrac{2p}{T}\left(t+t-e\right)\right)\operatorname{sen}\left(\tfrac{2p}{T}\left(t-e\right)\right)\tfrac{1}{T}\,de = \tfrac{K^2}{4T^2}\int_0^T \cos\left(\tfrac{2p}{T}\left(2t+t-2e\right)\right)+\cos\left(\tfrac{2p}{T}t\right)de =$$

$$\tfrac{K^2}{4T^2}\cos\left(\tfrac{2p}{T}t\right) = R_{s_1}(t)$$

El proceso resulta estacionario.

b) Calcule la potencia y la densidad espectral de $s_1(t)$: $P_1, S_1(f)$

Solución:

Por ser estacionario:

$$P_1 = R_{s_1}(0) = \tfrac{K^2}{4T^2}$$

$$S_1(f) = TF\left[R_{s_1}(t)\right] = \tfrac{K^2}{8T^2}\left(d(f-\tfrac{1}{T}) + d(f+\tfrac{1}{T})\right)$$

c) Calcule la media estadística y la función de autocorrelación del proceso $s_2(t)$: $m_{s_2}(t)$, $R_{s_2}\left(t+t,t\right)$ y clasifique el proceso según sea estacionario, cicloestacionario, etc…Puede dejar el resultado en función de la autocorrelación del pulso $p(t)$ y del resto de parámetros que considere necesarios.

Solución:

$$m_{s_2}(t) = E\left[s_2(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)\, f_e(e)\,de = \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a\left[n\right]p(t-e-nT)\tfrac{1}{T}\,de =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left[a\left[n\right]\right]\int_0^T p(t-e-nT)\tfrac{1}{T}\,de = 0$$

donde se ha utilizado que $E\left[a\left[n\right]\right] = \tfrac{1}{2}\tfrac{A}{2} - \tfrac{1}{2}\tfrac{A}{2} = 0$

Previamente al cálculo de la autocorrelación del proceso $s_2(t)$, es conveniente considerar: $E\left[a\left[n\right]a\left[m\right]\right] = \tfrac{A^2}{4}d\left[n-m\right]$

Por tanto:

$$R_{s_2}(t+\tau,t)=E\left[s_2(t+\tau)s_2(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}s_2(t+\tau)s_2(t)f_{\varepsilon}(\varepsilon)d\varepsilon=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}E\left[a[n]a[m]\right]\int_0^T p(t+\tau-\varepsilon-nT)\,p(t-\varepsilon-mT)\tfrac{1}{T}d\varepsilon=$$

$$\tfrac{A^2}{4T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^T p(t+\tau-\varepsilon-nT)p(t-\varepsilon-nT)d\varepsilon=\tfrac{A^2}{4T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\varepsilon-mT}^{T-\varepsilon-mT}p(\tau+\lambda)\,p(\lambda)d\lambda=$$

$$\tfrac{A^2}{4T}\int_{-\infty}^{+\infty}p(\tau+\lambda)p(\lambda)d\lambda=\tfrac{A^2}{4T}R_p(\tau)=R_{s_2}(\tau)$$

El proceso resulta estacionario.

d) Calcule la potencia y la densidad espectral de $s_2(t)$: $P_2, S_2(f)$

Solución:

Por ser estacionario:

$$P_2=R_{s_2}(0)=\tfrac{A^2}{4T}E_p=\tfrac{A^2}{4T}$$

$$S_2(f)=TF\left[R_{s_2}(\tau)\right]=\tfrac{A^2}{4T}S_p(f)=\tfrac{A^2}{4T^2}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi fT)}{\pi^2f^2}=\tfrac{A^2}{4}\operatorname{sinc}^2\left(fT\right)$$

e) Justifique que la potencia del proceso $s(t)$ cumple $P_s=P_1+P_2$ y dé la expresión de dicha potencia P_s .

Solución:

$$P_s=E\left[s^2(t)\right]=E\left[s_1^{\,2}(t)\right]+E\left[s_2^{\,2}(t)\right]+2E\left[s_1(t)\,s_2(t)\right]=$$

$$P_1+P_2+2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E\left[a[n]\right]\tfrac{1}{T}\int_0^T p(t-\varepsilon-nT)s_1(t)d\varepsilon=P_1+P_2$$

dado que $E\left[a[n]\right]=0$ y además es fácilmente comprobable que $\int_0^T p(t-\varepsilon-nT)s_1(t)d\varepsilon=0$

f) Calcule la energía media transmitida por bit E_b sobre la señal a transmitir $s(t)$, es decir, la energía de la señal $s(t)$ en el tiempo de bit T. Deje el resultado en función de los parámetros que considere necesarios. Si para su obtención utiliza algún parámetro o función calculados en los apartados anteriores, anote las expresiones utilizadas al principio de este apartado.

Solución:

La energía resulta:

$$E_b=P_sT=\tfrac{A^2}{4}+\tfrac{K^2}{4}$$

Por ser la modulación binaria, no es necesario distinguir entre energía media por bit o por símbolo, ya que coinciden.

g) Calcule de forma detallada la expresión obtenida para las muestras de señal a la salida del filtro adaptado: $y(t_k)$

Solución:

$$y(t) = (s(t) * h_c(t) + w(t)) * p(T-t) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]p(t-e-nT) * p(T-t) + \frac{K}{\sqrt{2T}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2p}{T}(t-e)\right) * p(T-t) + n(t) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]R_p(t-e-(n+1)T) + \frac{K}{\sqrt{2T}}\int_0^T \mathrm{sen}\left(\frac{2p}{T}(t-l-e)\right)dt + n(t) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]R_p(t-e-(n+1)T) + n(t) \Rightarrow$$

$$y(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]R_p((k-n)T) + n(t_k) = a[k] + n(t_k)$$

h) Obtenga la potencia de las muestras de ruido a la salida del filtro adaptado. Dé la densidad de probabilidad de dichas muestras.

Solución:
El ruido resulta gaussiano:

$$f_n(n) : N(\tfrac{A}{2}, s^2);$$

$$s^2 = \frac{N_0}{2}\int |P(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}$$

$$f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2ps}}\exp\left(-\frac{1}{2s^2}n^2\right)$$

i) Calcule las funciones de densidad de probabilidad condicionadas $f_y\left(y|+\frac{A}{2}\right); f_y\left(y|-\frac{A}{2}\right)$, con $y = y(t_k)$

Solución:

Dado que $y(t_k) = a[k] + n(t_k) \Rightarrow f_y(y|a) = f_n(n-a)$

$$f_y\left(y|+\tfrac{A}{2}\right) : N(\tfrac{A}{2}, s^2); \qquad f_y\left(y|-\tfrac{A}{2}\right) : N(\tfrac{A}{2}, s^2);$$

$$f_y\left(y|+\tfrac{A}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2ps}}\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\left(y-\frac{A}{2}\right)^2\right) \qquad f_y\left(y|-\tfrac{A}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2ps}}\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\left(y+\frac{A}{2}\right)^2\right)$$

j) Suponiendo umbral = 0 en detección, calcule la BER en función de $\frac{E_b}{N_0}$ y del resto de parámetros que considere necesarios.

Solución:
BER=

$$P_e = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} f_y\left(y\middle|-\tfrac{A}{2}\right)dy + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f_y\left(y\middle|+\tfrac{A}{2}\right)dy =$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2p}\,s}\exp\left(-\tfrac{1}{2s^2}\left(y+\tfrac{A}{2}\right)^2\right)dy + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \tfrac{1}{\sqrt{2p}\,s}\exp\left(-\tfrac{1}{2s^2}\left(y-\tfrac{A}{2}\right)^2\right)dy =$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{A}{2s}}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2p}}\exp\left(-\tfrac{1}{2}l^2\right)dy + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{-\frac{A}{2s}} \tfrac{1}{\sqrt{2p}}\exp\left(-\tfrac{1}{2}l^2\right)dy = Q\left(\tfrac{A}{2s}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\left(\tfrac{A}{2s}\right)^2}\right) = Q\left(\sqrt{\tfrac{2}{N_0}\tfrac{A^2}{4}\tfrac{A^2+K^2}{A^2+K^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\tfrac{A^2}{A^2+K^2}2\tfrac{E_b}{N_0}}\right)$$

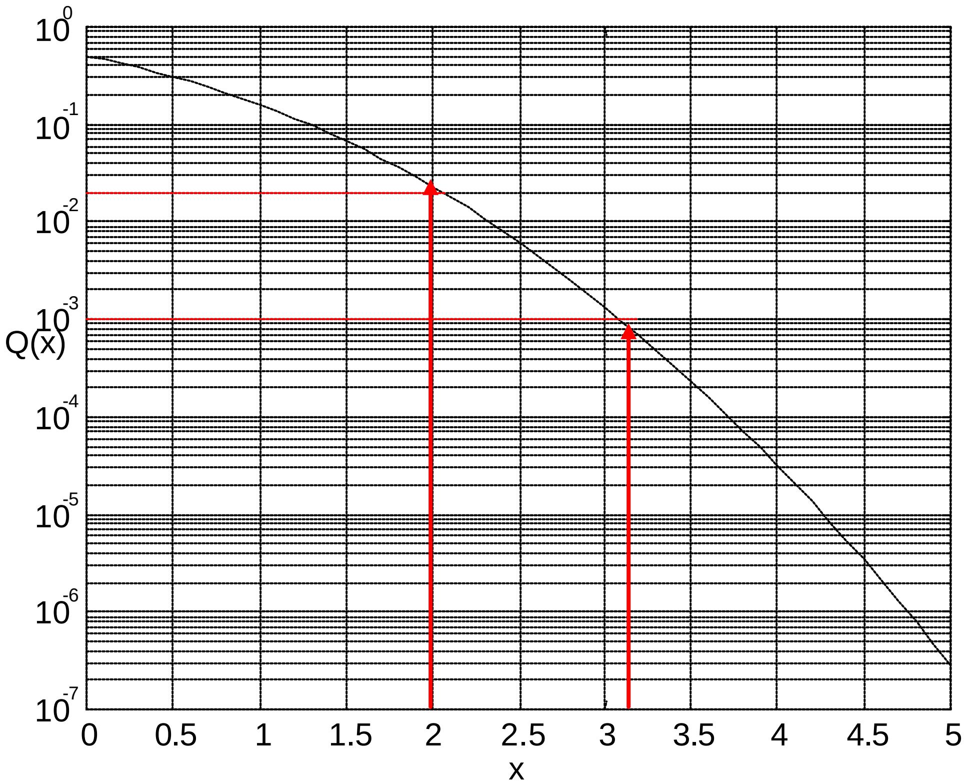
k) Calcule la probabilidad anterior para $\frac{E_b}{N_0} = 10$ y las dos siguientes situaciones: $K = A$, $K = 2A$. Comente los resultados. Entregue gráfica adjunta en página 3 en caso de que la utilice.

Solución:

$$\text{Para : } K{=}A \quad P_e = Q\left(\sqrt{\tfrac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{10}\right) = Q(3.16) = 10^{-3}$$

$$\text{Para : } K = \sqrt{2}A \qquad P_e = Q\left(\sqrt{\tfrac{2}{5}\tfrac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{4}\right) = Q(2) = 2.10^{-2}$$

Si se aumenta la proporción de potencia de portadora respecto a la señal modulada digitalmente y manteniendo la energía transmitida por bit, la probabilidad de error se degrada, pues se "derrocha" mayor cantidad de potencia o de energía en transmitir la portadora.



4.2 Ejercicio 2 de Examen Final de T05 (M. Cabrera).

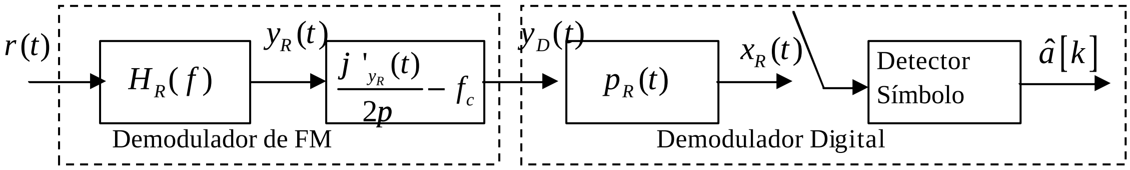
4.2.1 Enunciado

Sea la modulación de frecuencia $s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda\right)$; $f_d = 75KHz/volt$, $f_c \gg f_d$, en la que a su vez el mensaje $x(t)$, corresponde a una modulación digital binaria Unipolar, de bits equiprobales e independientes y que utiliza pulsos conformadores limitados en banda:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\operatorname{sinc}(\tfrac{t-nT}{T})$$

$T = T_b$ es el tiempo de bit y $r = r_b = \frac{1}{T_b} = 50Kbps$; $a[n] = 0, A$. (A=1volt.) La señal $s(t)$ se transmite por un canal ideal de respuesta impulsional $h_c(t) = \delta(t)$ y ruido *w(t)* blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$.

Diagrama de bloques del receptor ($r(t) = s(t) + w(t)$):



Con $\varphi_{y_R}(t) \simeq 2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda + \frac{q_n(t)}{A_c}$, donde $q_n(t)$ es la componente en cuadratura del ruido paso-banda a la salida del filtro receptor $H_R(f)$ y $\varphi'_{y_R}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_{y_R}(t)\right)$.

<u>Señal transmitida:</u>

a) Identifique la función de pulso conformador $p(t)$ sobre la modulación digital $x(t)$. Determine el ancho de banda de $x(t)$, sabiendo que coincide con el de su pulso conformador.

b) Obtenga el ancho de banda de la modulación angular $s(t)$, aplicando la regla de Carlson.

c) Obtenga la energía media transmitida por bit y definida como $E_b = T_b S_T$, donde S_T es la potencia de la señal transmitida $s(t)$.

<u>Demodulador de FM:</u>

d) Dar la función de transferencia $H_R(f)$ del filtro receptor necesario para la demodulación.

e) Obtenga la expresión de la señal $y_D(t)$ distinguiendo término útil y término de ruido. Calcule y dibuje la densidad espectral del término de ruido.

<u>Demodulador Digital:</u>

f) Dado que $p_R(t) = p(-t)$, obtenga la expresión de la señal $x_R(t)$, distinguiendo término útil y término de ruido. Calcule y dibuje la densidad espectral del término de ruido y calcule su potencia. En los siguientes apartados, a dicha potencia se le denominará de forma genérica σ^2.

g) Demuestre que las muestras $x_R(t_k)$ responden a la expresión de $x_R(t_k) = \frac{f_d}{r} a[k] + n(t_k)$, donde $t_k = kT$ y $n(t_k)$ es una variable aleatoria de varianza σ^2.

h) Dé la expresión de la función de densidad de probabilidad de las muestras de ruido $n(t_k)$ y dibújela.

i) Obtenga y dibuje las funciones de densidad de probabilidad de las muestras $x_R(t_k)$ condicionadas: $f(x|0), f(x|A)$.

j) Calcule en función de $f(x|0), f(x|A)$, el umbral de decisión óptimo a considerar en el Detector de símbolo de la figura, tal que minimiza la probabilidad de error. Particularice el resultado para las funciones obtenidas en el apartado anterior.

k) Calcule detalladamente la probabilidad de error y deje el resultado obtenido en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ y del índice de la modulación FM: b.

l) Obtenga la probabilidad de error para $\frac{E_b}{N_0} = \frac{2}{3}$;

4.2.2 Resolución

<u>Señal Transmitida:</u>

a) Identifique la función de pulso conformador $p(t)$ sobre la modulación digital $x(t)$. Determine el ancho de banda de $x(t)$, sabiendo que coincide con el de su pulso conformador.

Solución:

A partir de la expresión de $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\mathrm{sinc}(\frac{t-nT}{T})$ se observa que:

$$p(t)=\mathrm{sinc}(\tfrac{t}{T})=\mathrm{sinc}(rt)$$

Dado que:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\,p(t-nT)$$

Por tanto, el ancho de banda de la señal $x(t)$, es:

$$P(f)=\tfrac{1}{r}\Pi\left(\tfrac{f}{r}\right)\Rightarrow \qquad B_x=B_p=\tfrac{r}{2}=25KHz$$

b) Obtenga el ancho de banda de la modulación angular $s(t)$, aplicando la regla de Carlson.

Solución:

La regla de Carlson para el cálculo del ancho de banda de la modulación FM es:

$$B_s=2(b+2)B_x$$

Donde el índice de modulación es: $b=\frac{f_d|x(t)|_{\max}}{B_x}$ y $|x(t)|_{\max}=A=1$, ya que A=1volt, $a[n]=0,A$ y $p(0)=1$.

$$b=\tfrac{f_d A}{B_x}=\tfrac{f_d}{B_x}=\tfrac{75K}{25K}=3\Rightarrow B_s=10B_x=250KHz$$

c) Obtenga la energía media transmitida por bit y definida como $E_b=T_bS_T$, donde S_T es la potencia de la señal transmitida $s(t)$.

Solución:

Para una modulación FM de envolvente constante $s(t)=A_c\cos\left(2p\, f_c t+2p\, f_d\int_{-\infty}^{t} x(l)\,dl\right)$, y $f_c\gg r$, se tiene que su potencia es:

$$P_s\cong\tfrac{A_c^2}{2}\left(E\left[\cos^2\left(2p\, f_d\int_{-\infty}^{t} x(l)\,dl\right)\right]+E\left[\mathrm{sen}^2\left(2p\, f_d\int_{-\infty}^{t} x(l)\,dl\right)\right]\right)=\tfrac{A_c^2}{2}\left(E[1]\right)=\tfrac{A_c^2}{2}$$

$$\Rightarrow E_b=\tfrac{T_bA_c^2}{2}=\tfrac{A_c^2}{r2}$$

Demodulador de FM:

d) Dar la función de transferencia $H_R(f)$ del filtro receptor necesario para la demodulación.

Solución:

$$H_R(f) = \Pi\left(\frac{f-f_c}{B_s}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{B_s}\right)$$

e) Obtenga la expresión de la señal $y_D(t)$ distinguiendo término útil y término de ruido. Calcule y dibuje la densidad espectral del término de ruido.

Solución:

$$y_D(t) = \frac{1}{2p} j'_{y_R}(t) - f_c = f_d x(t) + \frac{q_n'(t)}{2p A_c}$$

La señal útil es $f_d x(t)$ y la señal de ruido es $n_D(t) = \frac{q_n'(t)}{2p A_c}$.

Densidad espectral de la señal de ruido:

$$S_{n_D}(f) = \frac{1}{(2p A_c)^2} \left| j2p f \right|^2 S_{q_n}(f) = \frac{f^2}{A_c^2} S_{q_n}(f)$$

Donde:

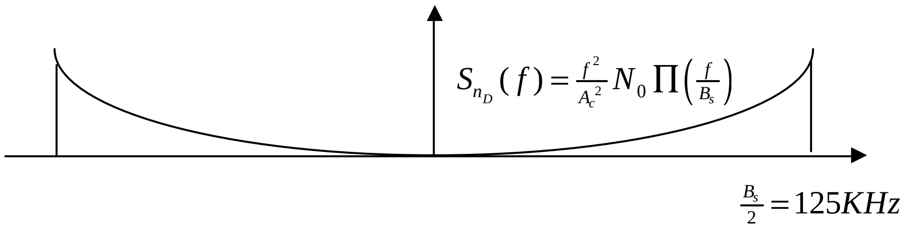
$$S_{q_n}(f) = S_n^-(f - f_c) + S_n^+(f + f_c)$$

Y

$$S_n(f) = S_w(f) \left| H_R(f) \right|^2 = \frac{N_0}{2} \left(\Pi\left(\frac{f-f_c}{B_s}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{B_s}\right) \right)$$

Por tanto:

$$S_{n_D}(f) = \frac{f^2}{A_c^2} N_0 \Pi\left(\frac{f}{B_s}\right)$$



Demodulador Digital:

f) Dado que $p_R(t) = p(-t)$, obtenga la expresión de la señal $x_R(t)$, distinguiendo término útil y término de ruido. Calcule y dibuje la densidad espectral del término de ruido y calcule su potencia. En los siguientes apartados, a dicha potencia se le denominará de forma genérica s^2.

Solución:

El filtro adaptado propuesto es tal que:

$$p_R(t) = p(-t) = \mathrm{sinc}(rt) \Rightarrow P_R(f) = \frac{1}{r} \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

La señal a la salida queda:

$$x_R(t) = y_D(t) * p_R(t) = f_d x(t) * p(-t) + n_D(t) * p(-t) =$$

$$f_d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p(t-nT) * p(-t) + n_x(t) = f_d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] R_p(t-nT) + n_x(t)$$

Con:

$$R_p(t) = p(t) * p(-t) = TF^{-1}\left[\tfrac{1}{r^2}\Pi\left(\tfrac{f}{r}\right)\right] = \tfrac{1}{r}\mathrm{sinc}(rt)$$

Y:

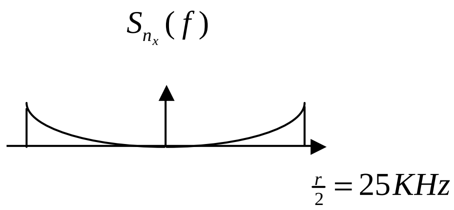
$$n_x(t) = n_D(t) * p(-t)$$

Resulta:

$$x_R(t) = \tfrac{f_d}{r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \mathrm{sinc}(\tfrac{t-nT}{T}) + n_x(t)$$

La función de densidad espectral del ruido resultante se caracteriza del siguiente modo:

$$S_{n_x}(f) = \left|P_R(f)\right|^2 S_{n_D}(f) = \tfrac{f^2}{r^2 A_c^2} N_0 \Pi\left(\tfrac{f}{r}\right)$$



Y su potencia es:

$$s^2 = \int S_{n_x}(f)df = \tfrac{1}{r^2 A_c^2} N_0 \int_{-r/2}^{+r/2} f^2 df = \tfrac{r}{12 A_c^2} N_0$$

g) Demuestre que las muestras $x_R(t_k)$ responden a la expresión de $x_R(t_k) = \frac{f_d}{r} a[k] + n(t_k)$, donde $t_k = kT$ y $n(t_k)$ es una variable aleatoria de varianza s^2.

Solución:

Del apartado anterior, al muestrear la señal obtenida:

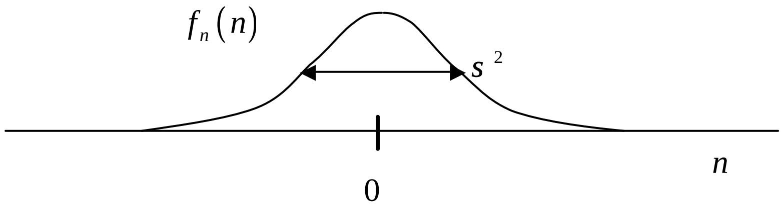
$$x_R(t_k) = x_R(kT) = \tfrac{f_d}{r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \mathrm{sinc}(k-n) + n_x(t_k) = \tfrac{f_d}{r} a[k] + n_x(t_k)$$

Las muestras de ruido proceden de un proceso de ruido gaussiano $q_n(t)$, de media nula y filtrado y derivado. Por tanto al muestrear se obtienen variables aleatorias gaussianas de media nula y varianza igual a la potencia calculada en el apartado anterior s^2.

h) Dé la expresión de la función de densidad de probabilidad de las muestras de ruido $n(t_k)$ y dibújela.

Solución:

$$n = n(t_k) : N(0, s^2) \Rightarrow f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2ps}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{n^2}{s^2}}$$



i) Obtenga y dibuje las funciones de densidad de probabilidad de las muestras $x_R(t_k)$ condicionadas: $f(x|0),\ f(x|A)$.

Solución:

Cuando el símbolo transmitido es

$$a[k] = 0 \Rightarrow x = x_R(t_k) = n_x(t_k) : N(0, s^2)$$

$$\Rightarrow f(x|0) = \frac{1}{\sqrt{2ps}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{s^2}}$$

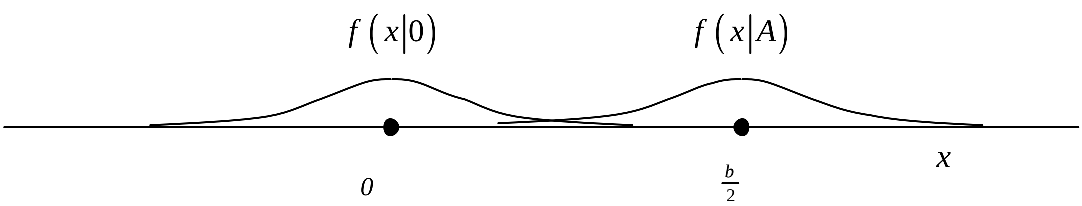
Cuando el símbolo transmitido es

$$a[k] = A \Rightarrow x = x_R(t_k) = \frac{f_d A}{r} + n_x(t_k) : N\left(\frac{f_d A}{r}, s^2\right)$$

$$\Rightarrow f(x|A) = \frac{1}{\sqrt{2ps}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{\left(x - \frac{f_d A}{r}\right)^2}{s^2}}$$

es decir:

$$f(x|A) = \frac{1}{\sqrt{2ps}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2}{s^2}}$$



j) Calcule en función de $f(x|0),\ f(x|A)$, el umbral de decisión óptimo a considerar en el Detector de símbolo de la figura, tal que minimiza la probabilidad de error. Particularice el resultado para las funciones obtenidas en el apartado anterior.

Solución:

La probabilidad de error en función de $f(x|0),\ f(x|A)$, se calcula como:

$$P_e = BER = P_0\int_{g}^{+\infty} f(x|0)dx + P_1\int_{-\infty}^{g} f(x|A)dx$$

Al trabajar con bits equiprobables: $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$

El umbral que minimiza el error se obtiene al derivar:

$$\frac{\partial P_e}{\partial g} = \frac{1}{2}\left(-f(g|0) + f(g|A)\right) = 0 \Rightarrow$$
$$f(g|0) = f(g|A)$$

Al sustituir las funciones obtenidas en el apartado anterior:

$$\frac{1}{\sqrt{2p}\,s}e^{-\frac{1}{2}\frac{g^2}{s^2}} = \frac{1}{\sqrt{2p}\,s}e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(g-\frac{b}{2}\right)^2}{s^2}} \Rightarrow 0 = -bg + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$g = \frac{b}{4}$$

k) Calcule detalladamente la probabilidad de error y deje el resultado obtenido en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ y del índice de la modulación FM: b .

Solución:

Utilizando el umbral obtenido $g = \frac{b}{4}$, la probabilidad de error es mínima y queda:

$$P_e = \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{b}{4}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2p}\,s}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{s^2}}dx + \int_{-\infty}^{\frac{b}{4}}\frac{1}{\sqrt{2p}\,s}e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}{s^2}}dx\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{b}{4s}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2p}}e^{-\frac{1}{2}l^2}dx + \int_{-\infty}^{-\frac{b}{4s}}\frac{1}{\sqrt{2p}}e^{-\frac{1}{2}l^2}dx\right) = Q\left(\frac{b}{4s}\right)$$

En la expresión anterior se puede sustituir la potencia de la muestra de ruido: $s^2 = \frac{r}{12A_c^2}N_0$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{b^2}{16s^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{b^2}{16}\frac{12A_c^2}{rN_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{3}{2}b^2\frac{S_T}{rN_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{3}{2}b^2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

l) Obtenga la probabilidad de error para $\frac{E_b}{N_0} = \frac{2}{3}$;

Solución:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{3}{2}b^2\frac{2}{3}}\right) = Q(b) = Q(3) = 1{,}5.10^{-3}$$

5. Notas de Ayuda.

5.1 Fórmulas Matemáticas

Expresiones trigonométricas

$$\cos(A)\cos(B) = \tfrac{1}{2}\cos(A-B) + \tfrac{1}{2}\cos(A+B)$$
$$\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) = \tfrac{1}{2}\cos(A-B) - \tfrac{1}{2}\cos(A+B)$$
$$\operatorname{sen}(A)\cos(B) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(A-B) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(A+B)$$
$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) + \cos(A)\operatorname{sen}(B)$$
$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)$$

Desigualdad de Schwarz: $$\left|\int uv\right|^2 \le \int |u|^2 \int |v|^2$$

Funciones de Bessel de primera clase orden n y argumento b :

$$J_n(b) = \tfrac{1}{2p}\int_{-p}^{+p} e^{j(b\operatorname{sen} l - n l)}\, d l$$

Derivadas de integrales:

$$\int_{G(t)}^{H(t)} V(l)\, d l = V(H(t))\,\tfrac{\partial H(t)}{\partial t} - V(G(t))\,\tfrac{\partial G(t)}{\partial t}$$

Función de densidad de Probabilidad:

$$y = y(x) \Rightarrow f_y(y) = \tfrac{1}{|y'(x)|} f_x(x)\Big|_{x = y^{-1}(y)}$$

Series:

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \qquad \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Suma de Progresión geométrica de razón r: $$\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{a_1 - r a_N}{1-r}$$

Binomio de Newton: $$(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{N-n} a^{N-n} b^n \quad \text{con} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

5.2 Área de la Gaussiana

Sea $0 \le x < +\infty$

Se define:

$$Q(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{l^2}{2}} dl$$

Observe que: $Q(0) = \frac{1}{2}$

A partir de la definición es fácilmente comprobable que:

- si x<0 $\Rightarrow \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{l^2}{2}} dl = 1 - Q(-x)$
- si x<0 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{l^2}{2}} dl = Q(-x)$
- si x>0 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{l^2}{2}} dl = 1 - Q(x)$

Relaciones con las funciones erf y erfc.

Sea $0 \le x < +\infty$

Se define la función de error:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_{0}^{x} e^{-l^2} dl$$

y la función de error complementario:

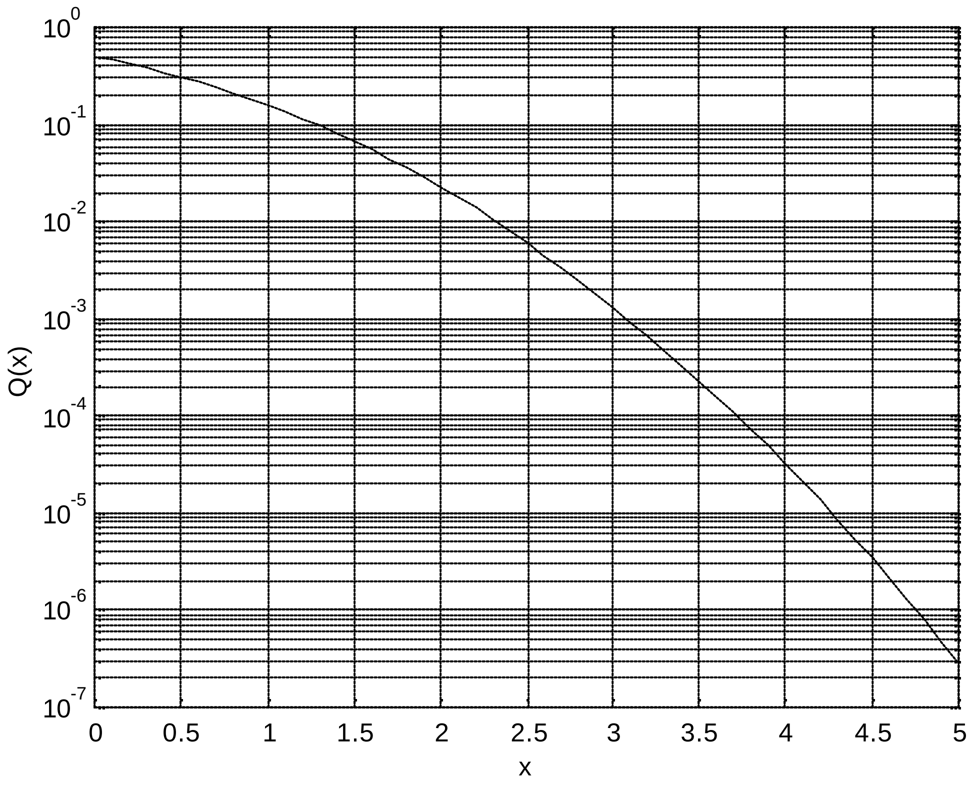
$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_{x}^{+\infty} e^{-l^2} dl = 1 - \mathrm{erf}(x)$$

Mediante adecuados cambios de variable se puede comprobar que:

$$\mathrm{erfc}(x) = 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}x\right)$$

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)$$

La siguiente figura muestra los valores de Q(x) para $0 \le x \le +5$

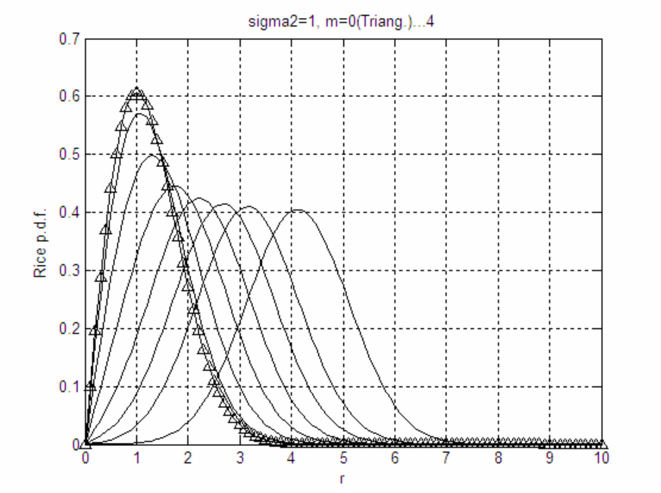


10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
Q(x)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
x

5.3 Función de densidad de Probabilidad Rayleigh

Distribución Rayleigh de parámetro s^{2}

$$f_{r-Rayleigh}\left(r,s^{2}\right)=\frac{r}{s^{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{r^{2}}{s^{2}}\right)$$



5.4 Función de densidad de Probabilidad Rice

Distribución Rice de parámetros s^{2}, m

$$f_{r-Rice}\left(r,s^{2},m\right)=\frac{r}{s^{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m^{2}+r^{2}}{s^{2}}\right)I_{0}\left(\frac{mr}{s^{2}}\right)$$

con $I_{0}\left(x\right)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{+p}\exp\left(x\cos q\right)dq$ igual a la función de Bessel modificada de primera clase y orden 0.