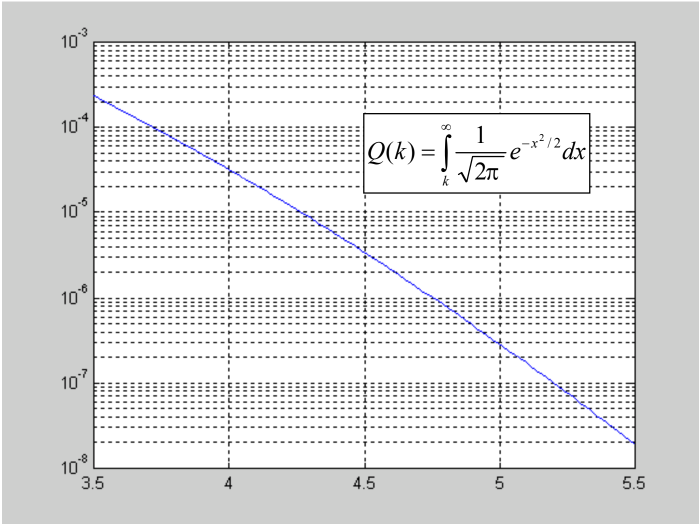
Control Comunicaciones II Prof: Jaume Riba 14 de Mayo 2002

***Nota 1*:** Resolución del examen disponible hoy mismo en http://www.edicionsupc.es/bustia/ y en el módulo D5.

***Nota 2*:** Es importante que explique con palabras la resolución del examen, y que justifique todos los cálculos y aproximaciones realizadas.

***Nota 3*:** Si se atasca en un apartado, pase al siguiente, ya que todos ellos pueden realizarse independientemente.

***Nota 4*:** Para calcular probabilidades de error en los siguientes ejercicios y utilize la función $Q(k)$ definida y representada en la siguiente figura:

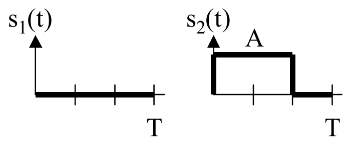


1) (2 puntos). Un sistema de transmisión digital debe operar a una velocidad de Rb=500Kbps (K bits por segundo), con una probabilidad de error inferior a $Pe=3*10^{-5}$.

a) Cuántos bits de un quantificador uniforme pueden utilizarse para transmitir digitalmente una señal analógica de Bx=20KHz de ancho de banda?

b) Cuál sería el tamaño del alfabeto de símbolos, M, y el factor de roll-off, α, requeridos si el ancho de banda de transmisión del canal es de Bc=100KHz?

2) (4,5 puntos). Una modulación digital utiliza sólo los simbolos equiprobables $s_1(t)$ y $s_2(t)$ de la figura, donde T es el tiempo de bit.



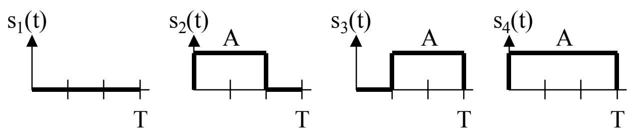
La potencia de la señal transmitida es de $P=10^{-6}$ W, el ruido Gausiano tiene una densidad espectral de potencia de $No=10^{-12}$ W/Hz, y la respuesta impulsional del canal es $h_c(t)$. La probabilidad de error de bit no debe ser superior a $3*10^{-5}$. Utilizando en recepción un filtro adaptado a $s_2(t)$ seguido de un forzador de zeros de dos coeficientes, obtenga la máxima velocidad de información (bits por segundo) que puede transmitirse en los siguientes casos:

a) $h_c(t)=\delta(t)-\delta(t-T/3)$

b) $h_c(t)=\delta(t)-\delta(t-2T/3)$

c) $h_c(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$ utilizando el codificador $b'_k=b_k\oplus b'_{k-1}$ en transmisión.

3) (3,5 puntos). Calcule cuánto vale la probabilidad de error de bit mínima que puede obtenerse mediante una modulación digital que utiliza los siguientes símbolos equiprobables de la figura y una Eb/No (relación entre la energia media de bit y la densidad espectral de potencia de ruido) igual a 84 (19,24dB)

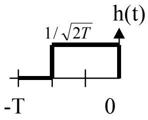


SOLUCION

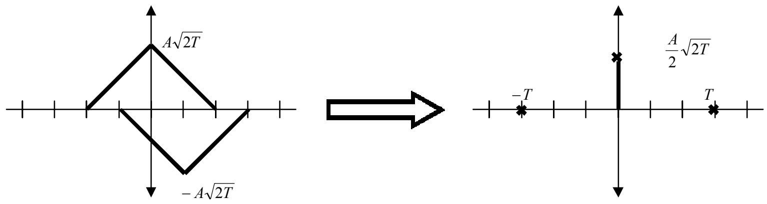
1a) Utilizando un conversor A/D con una frecuencia de muestreo de Fs y N bits de cuantificación, tendremos Rb= N * Fs bits por segundo. Teniendo en cuenta el criterio de Nyquist, Fs>2Bx, resulta, N<Rb/(2Fs), es decir, N<12.5, con lo que el número máximo de bits de cuantificación que pueden emplearse es **N=12**.

1b) Con un pulso de coseno alzado, el ancho de banda de la señal es $Bs=0.5*(1+\alpha)/Ts$, siendo Ts el tiempo de símbolo y α el factor de roll-off. El tiempo de símbolo es Ts=Tb*b, donde Tb=1/Rb es el tiempo de bit, y b el número de bits por símbolo. Con ello, $Bs= 0.5*Rb\ (1+\alpha) / b$. En el mejor de los casos, correspondiente a $\alpha=0$, debe cumplirse que Bs=<Bc, de donde se obtiene que b=> 0.5*Rb/Bc, de donde b=>2.5, es decir, b=3 bits/símbolo. El número de símbolos (o tamaño del alfabeto) es por tanto, **M**$=2^{b}$ =**8**, y el factor de roll-off máximo a emplear tal que Bs=Bc es $\alpha<=2b\ (Bc / Rb) - 1 =$ **0.2** (20%).

2) El filtro adaptado a $s_2(t)$ de energia unitaria es el de la figura (versión no causal):



2a) Respuesta global del sistema muestreada a kT:



Se observa que no se produce ISI, simplemente se reduce la amplitud de los símbolos. La probabilidad de error sera:

$$P_e = Q\left(\frac{\frac{A}{2}\sqrt{2T}}{2\sigma}\right) \qquad E_b = A^2T \qquad \sigma^2 = \frac{N_o}{2}$$

Por tanto:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{1}{4}\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

De la gráfica de la función Q obtenemos la Eb/No requerida ($Q(4) = 3*10^{-5}$):

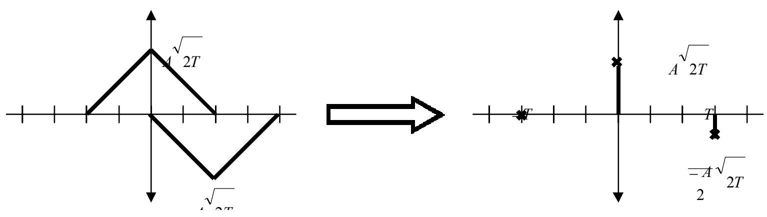
$$\sqrt{\frac{1}{4}\frac{E_b}{N_o}} = 4$$

$$\frac{E_b}{N_o} = 64 \quad (18dB)$$

Teniendo en cuenta que Eb=P / Rb, se obtiene:

$$R_b = \frac{P}{\left(\frac{E_b}{N_o}\right)N_o} = 15625bps$$

2b) Respuesta global del sistema muestreada a kT:



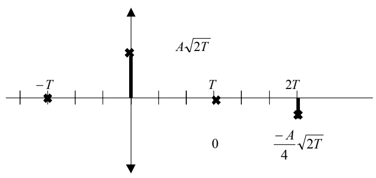
En este caso, se produce ISI del símbolo anterior. Los coeficientes del forzador de ceros son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_o \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

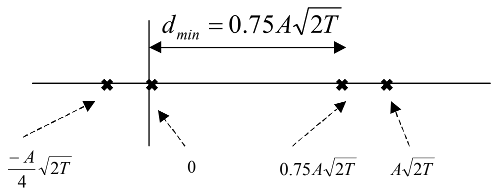
$$c_o = 1$$

$$c_1 = 0.5$$

y la respuesta ecualizada es:



Con ello, los posibles niveles a la entrada del decisor son:



y el nivel de ruido es de:

$$\sigma'^2 = \frac{N_o}{2}\left(c_o^2 + c_1^2\right) = 1{,}25\,\frac{N_o}{2}$$

Finalmente, obtenemos las siguiente cota para la BER:

$$P_e \le Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma'}\right)$$

$$P_e \le Q\left(\sqrt{\frac{0.75^2}{1{,}25}\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

$$P_e \le Q\left(\sqrt{0.45\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

De la gráfica de la función Q obtenemos la Eb/No requerida ($Q(4) = 3*10^{-5}$):

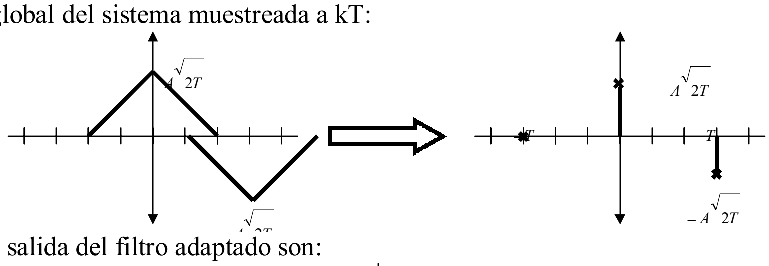
$$\sqrt{0.45\frac{E_b}{N_o}} = 4$$

$$\frac{E_b}{N_o} = 35{,}55 \quad (15{,}5dB)$$

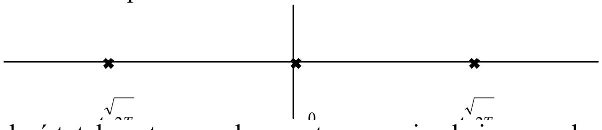
Teniendo en cuenta que Eb=P / Rb, se obtiene:

$$R_b = \frac{P}{\left(\frac{E_b}{N_o}\right)N_o} = 33088\,bps$$

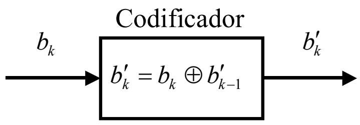
2c) Respuesta global del sistema muestreada a kT:



Los niveles a la salida del filtro adaptado son:



El diagrama del ojo quedará totalmente cerrado en este caso, siendo improcedente el uso de ecualización. El nivel cero es ambiguo, pues corresponde tanto a la transmisión de dos ceros consecutivos como dos unos consecutivos. La solución es codificar los bits en transmisión al igual que se hace en los sistemas AMI y duobinario:



donde $\oplus$ denota la función lógica XOR. De este modo, b=0 implica ausencia de cambio de símbolo transmitido y b=1 implica cambio de símbolo transmitido. El decisor debe decidir en base al valor absoluto de las muestras a la salida del filtro adaptado. La probabilidad de error final será de:

$$P_e \le Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$

$$d_{min} = A\sqrt{2T}$$

$$P_e \le Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

De la gráfica de la función Q obtenemos la Eb/No requerida ($Q(4) = 3*10^{-5}$):

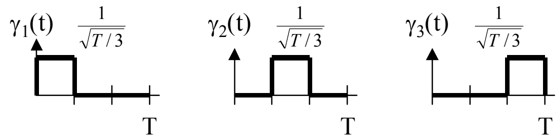
$$\sqrt{\frac{E_b}{N_o}} = 4$$

$$\frac{E_b}{N_o} = 16 \quad (12dB)$$

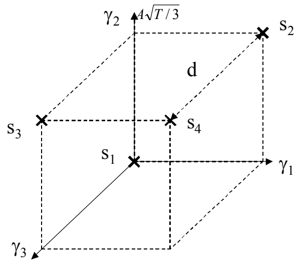
Teniendo en cuenta que Eb=P / Rb, se obtiene:

$$R_b = \frac{P}{\left(\frac{E_b}{N_o}\right)N_o} = 62500\, bps$$

3) Base ortonormal:



Constelación:



Aproximación de la probabilidad de error de símbolo:

$$P_s \approx \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} K_m Q\left(\frac{d_{m\,min}}{2\sigma}\right)$$

Las distancias mínimas y número de vecinos de cada símbolo son:

$$d_{1min} = \sqrt{2}d \qquad d_{2\,min} = d \qquad d_{3\,min} = d \qquad d_{4\,min} = d$$
$$K_1 = 2 \qquad K_2 = 1 \qquad K_3 = 1 \qquad K_4 = 2$$

donde:

$$d = A\sqrt{T/3}$$

Sustituyendo:

$$P_s \approx \frac{K_2 + K_3 + K_4}{4} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + \frac{K_1}{4} Q\left(\frac{\sqrt{2}d}{2\sigma}\right) \approx Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{\sqrt{2}d}{2\sigma}\right) \approx Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

donde se ha despreciado el segundo sumando en vista a la gran pendiente dela función Q en este punto de trabajo. Energia media de símbolo:

$$E_s = \frac{1}{4}\left(0 + 2TA^2 + 2TA^2 + 3TA^2\right) = \frac{7}{4}TA^2$$

Energia media de bit (b=2 bits / símbolo):

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{7}{8}TA^2$$

Codificación óptima de los símbolos (cambia sólo un bit en los símbolos cercanos (de s4 a s2 y de s4 a s3):

$$s_1 \rightarrow 00$$
$$s_2 \rightarrow 01$$
$$s_3 \rightarrow 10$$
$$s_4 \rightarrow 11$$

Con ello, podemos hacer la aproximación para ruido suficientemente pequeño de que:

$$P_b \approx \frac{P_s}{2}$$

Finalmente:

$$P_b \approx \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{4}{21}\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

Para Eb/No=84, obtenemos:

$$P_b \approx \frac{1}{2} Q(4) \approx 1{,}5 \quad 10^{-5}$$