ESCOLA TECNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ
Examen Final de **CAMPS ELECTROMAGNÈTICS** Professors: D. Artigas, F. Canal, F. Dios, M. Sicard 07.01.2010
Duració: 3h Publicació de notes provisionals: 21.01.2009

Escolliu TRES problemes dels QUATRE següents

Problema 1

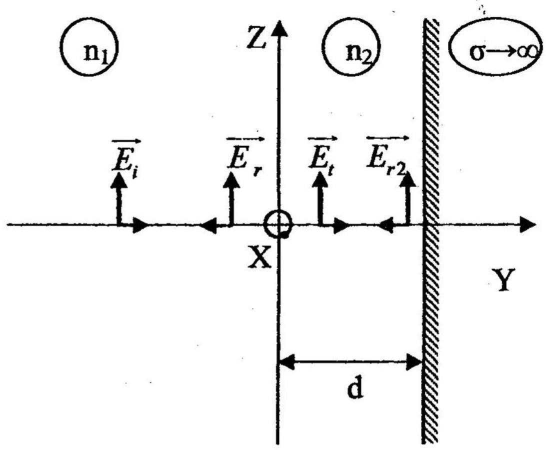
Una onda que se propaga en el vacío está infinitamente extendida en las direcciones transversales a la dirección de propagación, y tiene como campo eléctrico instantáneo

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)=\frac{2\hat{x}E_0}{\exp(\alpha(z-\chi t))+\exp(-\alpha(z-\chi t))}=\frac{\hat{x}E_0}{\cosh[\alpha(z-\chi t)]}$$

a) ¿Puede asegurarse que cumple la ecuación de onda? ¿Existe alguna condición en este sentido para las constantes α y χ? ¿Cuáles son las unidades de E_0, α y χ?
b) Represente gráficamente el perfil del campo eléctrico en función de z para $t_0 = 0$. Tómense los valores $E_0 = 1$ y $\alpha = 0.2$ (con la unidades correspondientes al S.I.)
c) Repita el apartado anterior para $t_1 = 1.0$ μs.
d) Obtenga el campo magnético $\vec{\mathscr{B}}$ asociado a esa onda.
e) ¿Cuál es la expresión del vector de Poynting?

Problema 2

Se desea construir un espejo a partir de un substrato (conductor perfecto) sobre el cual se aplica un recubrimiento reflexivo (dieléctrico). La onda eléctrica incidente que llega sobre el espejo tiene un modulo real E_{0i} y una dirección tal como muestra la figura.



a) Dar la expresión de todos los campos que existen, tantos eléctricos como magnéticos
b) Aplicar las condiciones de contorno y buscar en función de E_{0i} el modulo E_{0r} del campo reflejado en el medio 1 (n_1) y el modulo E_{0t} del campo transmitido en el medio 2 (n_2).
c) Buscar $d_{\min}$ para que el campo eléctrico total en el plano Y=0 sea nulo.
d) Con el valor de $d_{\min}$ encontrado en el apartado anterior, escribir el campo eléctrico total instantáneo en el medio 1. ¿De qué tipo de onda se trata?

Problema 3

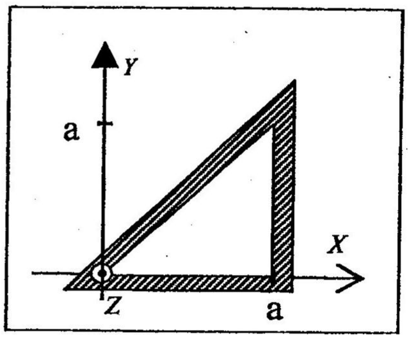
Supongamos una guía de onda de paredes perfectamente conductoras y cuya sección (en el plano x, y) fuera un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales son de longitud a, según indica la figura. Una posible forma de modos $TE_{m,n}$ de propagación en esta guía, expresada a partir de los modos TE correspondientes a la guía cuadrada de lado a, sería:

$$E_x(x,y)=E_{0x}\left\{\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}y)-\cos(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}y)\right\}\exp(-j\beta z)$$

$$E_y(x,y)=E_{0y}\left\{\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{a}y)-\sin(\frac{n\pi}{a}x)\cos(\frac{m\pi}{a}y)\right\}\exp(-j\beta z)$$

$$E_z(x,y)=0$$

Donde m, n =$\pm$0,1,2,3,4,...



a) Comprobar que esta solución cumple las condiciones de contorno sobre los dos lados iguales de la guía.

b) ¿Qué relación ha de satisfacerse para que se cumplan también las condiciones de contorno sobre la tercera pared de la guía?

c) Usando la condición que debe cumplir la divergencia del campo eléctrico, obtener las relaciones entre m, n, E_{0x} y E_{0y}.

d) A partir de lo anterior, ¿qué valores puede tomar m/n? Decir cual de los posibles valores m/n es compatible con la existencia del modo. Justificar que cumple las condiciones de contorno del apartado b.

e) ¿Cuál será entonces la expresión final de los modos TE de la guía triangular? ¿Cuál será la frecuencia de corte del modo fundamental?

NOTA:

$$\sin(f\pm g)=\sin f\cos g\pm\cos f\sin g$$

$$\cos(f\pm g)=\cos f\cos g\mp\sin f\sin g$$

Problema 4

El potencial vector d'una espira circular amb un area A continguda en el pla de les X-Y ve donat per l'expressió:

$$\vec{A}(\vec{r})\cong\mu_0\frac{I_0A}{4\pi}\left(jk+\frac{1}{r}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

Trobeu:

a) El camp magnètic H total.

b) Quina és l'expressió del camp magnètic proper o d'inducció?¿Quina es l'expressió del camp magnètic llunya o radiat?

c) Tenint en compte del resultat anterior, trobeu el vector de Poynting mig.

d) Com i a quina distància entre elles col·locaries dues espires de les mateixes dimensions i intensitats I_2 = -I_1 per tenir un màxim de radiació en la direcció del eix de les X? En aquest cas, quan val la radiació sobre els eixos de les Y i les Z? Hi ha alguna configuració en la que es pugui tenir un nul de radiació en tot el pla X-Y? I alguna altra en que hi hagi radiació simultàniament sobre l'eix de les X, les Y i les Z?

NOTA:

$$\nabla\times\vec{V}(\vec{r})=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta\cdot V_\varphi\end{vmatrix}$$

Problema 1 – Solución

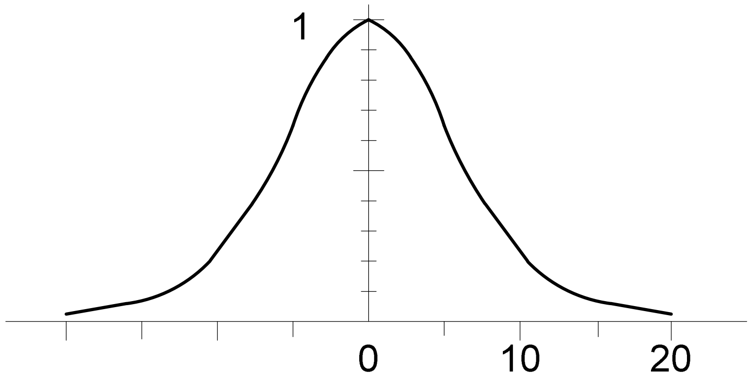
a) Sí, puede asegurarse que cumplirá la ecuación de onda, porque el argumento es de la forma

$$\arg(z,t) = z - \chi t$$

lo que además nos indica que la constante χ debe ser la velocidad de la onda, es decir $\chi = c$, ya que la onda está en el vacío.

Las unidades por las que se preguntaba son: $[E_0] = \frac{V}{m}$, $[\chi] = \frac{m}{s}$, $[\alpha] = m^{-1}$

b) El campo tiene la forma en $t_0 = 0$



c) En $t_1 = 1.0$ μs tendremos

d) El campo mágnetico $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)$ se obtiene a partir del rotacional del campo eléctrico, y resulta

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{E_0}{\chi} \frac{1}{\cosh[\alpha(z-\chi t)]} \hat{y}$$

e) El vector de Poynting (instantáneo, y no medio, porque no estamos en un régimen permanente) es

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \chi} \frac{\hat{z}}{\cosh^2[\alpha(z-ct)]}$$

Solución Problema 2

a) (3 puntos) La expresión de los campos eléctricos y magnéticos es:

$$\overrightarrow{E_i} = E_{0i} e^{-jk_1 y} \hat{z}\,; \quad \overrightarrow{H_i} = \frac{E_{0i}}{\eta_1} e^{-jk_1 y} \hat{z}$$

$$\overrightarrow{E_r} = E_{0r} e^{jk_1 y} \hat{z}\,; \quad \overrightarrow{H_r} = -\frac{E_{0r}}{\eta_1} e^{jk_1 y} \hat{z}$$

$$\overrightarrow{E_t} = E_{0t} e^{-jk_2 y} \hat{z}\,; \quad \overrightarrow{H_t} = \frac{E_{0t}}{\eta_2} e^{-jk_2 y} \hat{z}$$

$$\overrightarrow{E_{r2}} = E_{0r2} e^{jk_2 y} \hat{z}\,; \quad \overrightarrow{H_{r2}} = -\frac{E_{0r2}}{\eta_2} e^{jk_2 y} \hat{z}$$

b) (3 puntos) Si aplicamos las condiciones de contorno en y = 0, se obtiene:

Para los campos eléctricos (Y = 0): $E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} + E_{0r2}$ (i)

Para los campos magnéticos (Y = 0): $\dfrac{E_{0i} - E_{0r}}{\eta_1} = \dfrac{E_{0t} - E_{0r2}}{\eta_2}$ (ii)

Si aplicamos ahora las condiciones de contorno en Y = d se obtiene para los campos eléctricos: $E_{0t} e^{-jk_2 d} + E_{0r2} e^{jk_2 d} = 0$ (iii)

Tenemos entonces 3 ecuaciones para resolver 3 incognitas. Finalmente se obtiene:

$$E_{0r} = E_{0i} \frac{\left(1 - \dfrac{\eta_1}{\eta_2}\right) - \left(1 + \dfrac{\eta_1}{\eta_2}\right) e^{-2jk_2 d}}{\left(1 + \dfrac{\eta_1}{\eta_2}\right) + e^{-2jk_2 d} \left(\dfrac{\eta_1}{\eta_2} - 1\right)} \text{ y } E_{0t} = \frac{2E_{0i}}{\left(1 + \dfrac{\eta_1}{\eta_2}\right) + e^{-2jk_2 d} \left(\dfrac{\eta_1}{\eta_2} - 1\right)}$$

c) (2 puntos) En el plano Y = 0, el campo eléctrico total es la suma de los 4 campos. La condición es: $E_{0i} + E_{0r} + E_{0t} + E_{0r2} = 0$. Según la ecuación (i), $E_{0i} + E_{0r}$ se puede sustituir por $E_{0t} + E_{0r2}$, con lo cual tenemos $2(E_{0t} + E_{0r2}) = 0$ con $E_{0r2} = -E_{0t} e^{-2jk_2 d}$ según ecuación (ii).

Obtenemos $E_{0t} - E_{0t} e^{-2jk_2 d} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2jk_2 d} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2k_2 d = 2\pi m \quad con\ m = 1,2,3,...$

d_{min} se obtiene para m = 1: $d_{\min} = \dfrac{\pi}{k_2} = \dfrac{\lambda_0}{2n_2}$

d) (2 puntos) Si sustituimos d por d_{min} en la expresión de E_{0r}, se obtiene $E_{0r} = -E_{0i}$.

El campo éléctrico total instantaneo en el medio 1 es:

$$\vec{\xi_1}(\vec{r},t) = \Re e\left\{\left(\overrightarrow{E_i} + \overrightarrow{E_r}\right) e^{j\omega t}\right\} = \Re e\left\{\left(E_{0i} e^{-jk_1 y} - E_{0i} e^{jk_1 y}\right) e^{j\omega t} \hat{z}\right\} = \Re e\left\{\left(-2jE_{0i} \sin(k_1 y)\right) e^{j\omega t}\right\}$$

$$\vec{\xi_1}(\vec{r},t) = 2E_{0i} \sin(k_1 y) \sin(\omega t) \hat{z}\,.$$

Se trata de una onda estacionaria.

1) Sobre el plà $y = 0$, es cumpleix $E_x = 0$ (component tangencial del camp)
   Sobre el plà $x = a$, es cumpleix $E_y = 0$ (idem)

Això és evident, perque: $sen\{(m,n/a)\pi(x,y)\}$ s´anula per $x=a$ ó $y=0$, respectivament (per qualsevol m ó n)

2) Considerant que sobre el plà $x=y$ la component tangencial total del camp ha de ser nula, surt la condició:

   $E_{0x}\, sen\{[(n-m)\pi/a]x\} + E_{0y}\, sen\{[(m-n)\pi/a]x\} = 0$

3) Es cumpleix: Div **E** = 0. Aplicant l´operador divergencia al vector camp elèctric surt:

$[-(m\pi/a)\, E_{0x} - (n\pi/a)\, E_{0y}]\, sen\{(m/a)\pi x\} sen\{(n/a)\pi y\} + [(n\pi/a)\quad E_{0x} + (m\pi/a)\, E_{0y}]\, sen\{(n/a)\pi x\} sen\{(m/a)\pi y\} = 0$

La solució no trivial implica que:
$m\, E_{0x} + n\, E_{0y} = 0$
$n\, E_{0x} + mE_{0y} = 0$

4) Solucionant el sistema anterior, tenim: $E_{0x} = -(n/m)\, E_{0y}$, conjuntament amb: $m/n = \pm 1$
   a) Si $m = n$ ($E_{0x} = -E_{0y}$), el camp es fà nul: No és bona solució.
   b) Si $m= -n$ ($E_{0x} = E_{0y}= E_0$). Aquesta solució és la bona, perque permet l´existència del mode.
   Evidentment, es cumpleix la condició de contorn: $E_0\, [sen\{(2m\pi/a)x\}+ sen\{(-2m\pi/a)x\}] = 0$

5) Substituint n per –m:

$E_x = -2E_0\, [\cos\{(m/a)\pi x\} sen\{(m/a)\pi y\}]\, e^{-j\beta z}$
$E_y = 2E_0\, [sen\{(m/a)\pi x\} \cos\{(m/a)\pi y\}]\, e^{-j\beta z}$
$E_z = 0$

De la relació de dispersió, surt la freqüència de tall del mode fonamental: $f_{c11} = (1/a)[2\mu\varepsilon]^{-½}$

Problema 4

El potencial vector d'una espira circular amb un area A continguda en el pla de les X-Y ve donat per l'expressió:

$$\vec{A}(\vec{r}) \cong \mu_0 \frac{I_0 A}{4\pi}\left(jk + \frac{1}{r}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

Trobeu:

a) El camp magnètic H total.

b) Quina és l'expressió del camp magnètic proper o d'inducció?¿Quina es l'expressió del camp magnètic llunya o radiat?

c) Tenint en compte del resultat anterior, trobeu el vector de Poynting mig.

d) Com i a quina distància entre elles col·locaries dues espires de les mateixes dimensions i intensitats $I_2 = -I_1$ per tenir un màxim de radiació en la direcció del eix de les X? En aquest cas, quan val la radiació sobre els eixos de les Y i les Z? Hi ha alguna configuració en la que es pugui tenir un nul de radiació en tot el pla X-Y? I alguna altra en que hi hagi radiació simultàniament sobre l'eix de les X, les Y i les Z?

a) El camp magnètic total creat per un element de corrent és $\vec{H}_{total} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}(\vec{r})$,

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0 r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 & r\sin\theta\cdot A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\hat{r}}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{r\sin\theta}{\mu_0}\cdot A_\varphi\right) - \frac{r\hat{\theta}}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\sin\theta}{\mu_0}\cdot A_\varphi\right)\right]$$

$$\frac{r\sin\theta}{\mu_0}\cdot A_\varphi = \frac{I_0 A}{4\pi}\left(jk + \frac{1}{r}\right)e^{-jkr}\sin^2\theta \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{r\sin\theta}{\mu_0}\cdot A_\varphi = \frac{I_0 A}{2\pi}\left(jk + \frac{1}{r}\right)e^{-jkr}\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial r}\frac{r\sin\theta}{\mu_0}\cdot A_\varphi = \frac{I_0 A}{4\pi}\sin^2\theta\left[\left(k^2 - j\frac{k}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\right]e^{-jkr}$$

$$\boxed{\vec{H}_{total} = \frac{I_0 A}{2\pi}\left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)e^{-jkr}\cos\theta\,\hat{r} - \frac{I_0 A}{4\pi}\sin\theta\left[\left(\frac{k^2}{r} - j\frac{k}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right)\right]e^{-jkr}\hat{\theta}}$$

b) Camp proper son aquells termes del camp amb $kr \ll 1$. En conseqüència, del camp magnètic total hem de triar aquell que té el terme 1/r elevat a la màxima potència i $e^{-jkr}=1$:

$$\boxed{\vec{H}_{ind} = \frac{I_0 A}{2\pi}\frac{1}{r^3}\cos\theta\,\hat{r} - \frac{I_0 A}{4\pi}\sin\theta\frac{1}{r^3}\hat{\theta}}$$

Per contra el camp llunya o radiat és aquell en que $kr \gg 1$. Llavors, hem de triar el termes amb la potència de 1/r més baixa i e^{-jkr} es queda igual:

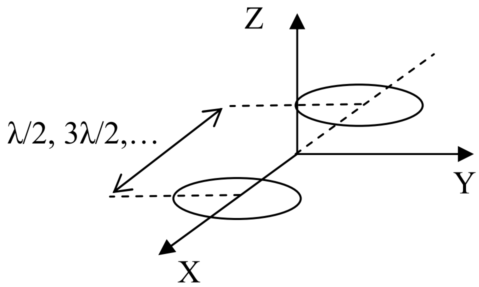
$$\boxed{\vec{H}_{rad} = -\frac{I_0 A}{4\pi}k^2\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta\hat{\theta}}$$

c) El vector de Poynting mig és $\vec{P} = \frac{1}{2}\Re\{\vec{E}_{tot} \times \vec{H}^*_{tot}\}$, però com es va explicar a teoria, quan es fa aquest operació, els termes d'inducció surten imaginaris i els únics que sobreviuen al treure la part real són els de radiació, quedant, en funció del camp magnètic:

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{2}\{\vec{E}_{rad} \times \vec{H}^*_{rad}\} = \frac{\eta_0}{2}\left|\vec{H}_{rad}\right|^2 \hat{r} = \eta_0 \frac{\left|I_0\right|^2 A^2}{32\pi^2} k^4 \frac{\sin^2\theta}{r^2}\hat{r}}$$

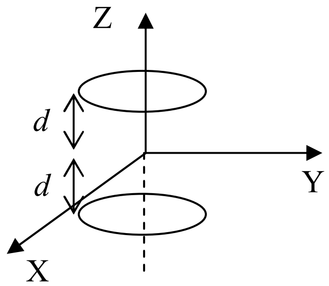
d) Per respondre aquest apartat s'ha de pensar en les interferències produïdes per dues espires. Dues espires amb intensitat en contrafase produiran interferència destructives en punts de l'espai on la diferència de camí és un múltiple de λ i produiran interferència constructiva quan la diferencia de camí sigui un múltiple imparell de λ/2.

d1) Com i a quina distància entre elles col·locaries dues espires de les mateixes dimensions i intensitats $I_2 = -I_1$ per tenir un màxim de radiació en la direcció del eix de les X?
➔ la distància entre espires in la direcció X ha de ser un múltiple imparell de λ/2.
(la solució amb les espires en el pla X-Z, també és correcte)



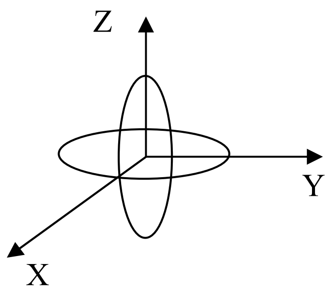
d2) En aquest cas, quan val la radiació sobre els eixos de les Y i les Z?
➔ La direcció Z és un nul de radiació de l'espira → sempre la raciació el nula
➔ Un punt sobre l'eix de les Y sempre està a la mateixa distància de les dues espires ➔ interferència destructiva ➔ nul de radiació.

d3) Hi ha alguna configuració en la que es pugui tenir un nul de radiació en tot el pla X-Y?
➔ s'ha de col·locar les dues espires de forma que qualsevol punt del pla X-Y estigui a la mateixa distància de les espires. La solució trivial és posar les dues espires en el mateix punt, però això nos serveix perquè s'anul·len i es equivalent a no tenir l'antena (no tenim radiació en cap direcció de l'espai). Ara bé si una està per sobre i l'altre per sota (en l'eix Z) i a la mateixa distància *d* del pla X-Y,s'aconsegueix el que busquem i a més a més hi ha radiació en les altres direccions de l'espai (excepte la Z).



d4) I alguna altra en que hi hagi radiació simultàniament sobre l'eix de les X, les Y i les Z?

Aquí el problema és el nul de radiació en la direcció Z. Una manera de posar dues espires i que el resultat doni radiació en totes les direccions de l'espai és posar una de les espires perpendicular a l'altre, tal com mostra el dibuix. Aquí les polaritzacions dels camps creats per cada espira son ortogonals, amb la qual cosa ens assegurem que no hi ha cap tipus d'interferència entre els camps produïts per les dues espires i com que els nuls de radiació de cada espira van en direccions diferent, la suma no donarà cap nul de radiació.



NOTA: cada apartat val 2.5 punts.