



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria  
de Telecomunicació de Barcelona

**Processament del Senyal**  
7 Gener 2009

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

DEPARTAMENT DE  
TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS

Notes provisionals: 23 de Gener  
Al·legacions: 26-27 Gener  
Notes revisades: 29 de Gener

Professors: Miguel A. Lagunas, Montserrat Nájjar, Jaume Riba.

Informacions addicionals:

- Durada: 3 hores
- No es permet la utilització de calculadores ni telèfons mòbils
- Els dos problemes s'han de presentar en fulls separats

### Ejercicio 1

Dado un proceso gaussiano y estacionario  $\{x(n)\}$ , cuyos tres primeros valores de su autocorrelación son  $r_0$ ,  $r_1$  y  $r_2$ , se desea realizar un predictor de orden uno, es decir,  $\hat{x}(n) = a \cdot x(n-1)$

- a) Encuentre la expresión del coeficiente y el error de predicción correspondiente.

#### Solución

Haciendo que el error sea ortogonal a los datos  $E((x(n) - a \cdot x(n-1)) \cdot x(n-1)) = 0$  se obtiene que  $a = \frac{r_1}{r_0}$  y de la expresión del error mínimo, cuando ya el dato es ortogonal al error,

$$E1 = E(x(n) \cdot (x(n) - a \cdot x(n-1))) = r_0 - a \cdot r_1 = r_0 - \frac{r_1^2}{r_0}$$

- b) Considerando que  $|r_2| < |r_1|$  muestre que el predictor  $\hat{x}(n) = c \cdot x(n-2)$  sería de peor calidad.

#### Solución

En este caso el error sería  $r_0 - \frac{r_2^2}{r_0}$  con lo que obviamente si  $|r_2|$  es mayor que  $|r_1|$  sería mejor y viceversa.

- c) Calcule la expresión, en general de un predictor a partir del diseño de un FIR de  $Q + 1$  coeficientes que minimiza la potencia de salida cuando a la entrada se aplica  $x(n)$ , con la restricción de que su primer coeficiente es la unidad.

#### Solución

Un predictor es básicamente un FIR a cuya entrada se aplica el proceso  $x(n)$  y a su salida se obtiene el error de predicción, es decir, la ecuación:

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) + \sum_{q=1}^Q a(q) \cdot x(n-q) = \begin{bmatrix} 1 & a(1) & \dots & a(Q) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-Q) \end{bmatrix} = \underline{A}^T \cdot \underline{X}_n$$

nótese que el predictor sería  $\hat{x}(n) = -\sum_{q=1}^Q a(q) \cdot x(n-q)$ . Así pues el diseño de error mínimo exigiría que  $\underline{A}^T \cdot \underline{R} \cdot \underline{A}$  fuese mínimo y la restricción de que se trata de un predictor implicaría

que  $\underline{A}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{A}^T \cdot \underline{1} = 1$ . La solución a esta minimización con restricciones es derivar el

Lagrangiano  $\Lambda = \underline{A}^T \cdot \underline{R} \cdot \underline{A} - \lambda (\underline{A}^T \cdot \underline{1})$  con respecto al vector traspuesto e igualar el gradiente a cero. Obteniéndose  $\underline{A} = \lambda \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{1}$ . El multiplicador se obtiene de la restricción dando lugar al diseño deseado.

$\underline{A} = \frac{\underline{R}^{-1} \cdot \underline{1}}{\underline{1}^T \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{1}}$  Al sustituir este en la expresión de la potencia de salida, se obtiene la expresión

del error de predicción  $E = \frac{1}{\underline{1}^T \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{1}}$

d) Repita el apartado (a), es decir calcule los coeficientes y la potencia del error de predicción, para el caso de un predictor de orden dos (Q=2), es decir:

$$\hat{x}(n) = a \cdot x(n-1) + b \cdot x(n-2)$$

Use la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & r_0 & r_1 \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix}^{-1} = \left( \frac{1}{\Delta} \right) \begin{bmatrix} r_0^2 - r_1^2 & -(r_1 \cdot r_0 - r_1 \cdot r_2) & r_1^2 - r_0 \cdot r_2 \\ -(r_1 \cdot r_0 - r_1 \cdot r_2) & r_0^2 - r_2^2 & -(r_1 \cdot r_0 - r_1 \cdot r_2) \\ r_1^2 - r_0 \cdot r_2 & -(r_1 \cdot r_0 - r_1 \cdot r_2) & r_0^2 - r_1^2 \end{bmatrix}$$

donde  $\Delta$  es el determinante de la matriz de autocorrelación.

(NOTA: Deje el error en función del determinante sin sustituirlo por su valor en función de los valores  $r_0, r_1$  y  $r_2$ ).

#### Solución

Del apartado anterior, claramente el error de predicción es la inversa del elemento (1,1) de la

inversa de la matriz de autocorrelación, por tanto:  $E = \frac{\Delta}{r_0^2 - r_1^2}$ .

Del mismo modo del apartado anterior, el filtro  $\underline{A}$  sería la primera columna de la inversa de la matriz de autocorrelación (numerador) multiplicada por el error de predicción (inversa del denominador). Con lo que el vector es:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ -(r_1 \cdot r_0 - r_1 \cdot r_2) / (r_0^2 - r_1^2) \\ (r_1^2 - r_0 \cdot r_2) / (r_0^2 - r_1^2) \end{bmatrix}$$
 Las dos segundas componentes son las que corresponde

al predictor cambiadas de signo.

e) Calcule ahora los coeficientes de un interpolador,  $\hat{x}(n) = a \cdot x(n-1) + b \cdot x(n+1)$  y muestre que, con menos operaciones que el predictor del apartado (d), consigue un error de interpolación menor que el del apartado mencionado, siempre y cuando  $|r_2|$  sea mayor que  $|r_1|$ .

#### Solución

La situación con respecto al anterior, usando de nuevo la formulación de filtro, es el diseñar un FIR que minimiza la potencia a la salida en la que el coeficiente de en medio ha de ser la unidad. Es decir:

$$\underline{A}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{A}^T \cdot \underline{l}_i = 1 \quad \text{El error de interpolación sería } \underline{A}^T \cdot \begin{bmatrix} x(n+1) \\ x(n) \\ x(n-1) \end{bmatrix} = ei(n)$$

Así pues, el error de interpolación sería  $EI = \frac{1}{\underline{l}_i^T \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{l}_i}$  es decir el elemento 2,2 de la inversa

de la matriz de autocorrelación.  $EI = \frac{\Delta}{r0^2 - r2^2}$ , con lo que efectivamente si  $|r2|$  es mayor que  $|r1|$  (ambos siempre menores que  $r0$ ) el interpolador produce menos error que el predictor de orden dos.

Con respecto a los coeficientes del interpolador, se obtienen, de la misma manera, de multiplicar la columna 2 de la inversa por la inversa del error EI. El resultado es:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{-(r1.r0 - r1.r2)}{r0^2 - r2^2} \\ 1 \\ \frac{-(r1.r0 - r1.r2)}{r0^2 - r2^2} \end{bmatrix} \quad \text{como ambos coeficientes son iguales, el interpolador sólo conlleva}$$

una multiplicación quedando como  $\hat{x}(n) = \frac{(r1.r0 - r1.r2)}{r0^2 - r2^2} \cdot (x(n+1) + x(n-1))$

Volviendo al caso del predictor de orden dos del apartado d, responda a los siguientes apartados:

- f) Usando el algoritmo de Levinson, calcule los dos coeficientes de reflexión (parcours)  $k_1$  y  $k_2$  y dibuje la implementación de la red en celosía correspondiente.

### Solución

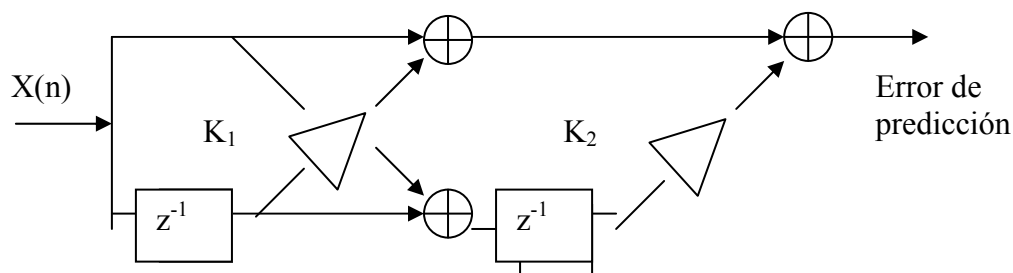
El primer coeficiente de reflexión coincide con el de un predictor de orden uno ya realizado en el primer apartado. Así pues  $k_1 = \frac{-r1}{r0}$ . Para el segundo, es necesario calcular en primer lugar

factor  $\Delta(1) = r2 + a^1(1).r1 = r2 - \frac{r1^2}{r0}$ . Ahora el segundo coeficiente de reflexión se calcula con la

expresión  $k_2 = -\frac{\Delta(1)}{\sigma_1^2}$  como el error de predicción de orden uno ya esta disponible, también

del primer apartado, se obtiene:

$$k_2 = -\frac{\left(r2 - \frac{r1^2}{r0}\right)}{\left(r0 - \frac{r1^2}{r0}\right)} \quad \text{que obviamente también es menor que la unidad.}$$

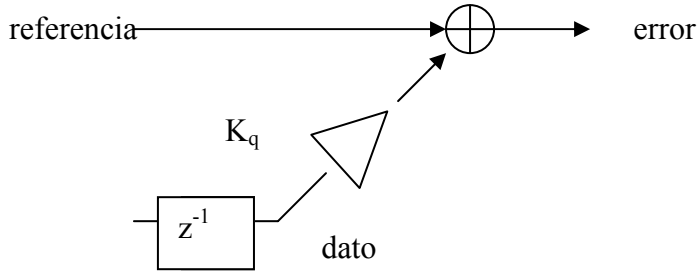


Para una estructura en celosía de dos coeficientes, se desea adaptar con un algoritmo de gradiente instantáneo los coeficientes de reflexión directamente.

- g) Demuestre que el algoritmo de actualización de cualquiera de los dos coeficientes sería:  
 $k_q(n+1) = k_q(n) + \mu e_f^{q+1}(n) e_b^q(n-1); q = 1, 2$ , donde  $e_f^q(n)$  y  $e_b^q(n)$  son los errores “forward” y “backward”, de orden  $q$  en el instante  $n$ .

**Solución**

Tomando, uno de los dos errores, por ejemplo el forward, el filtro de Wiener de un solo coeficiente se reduce al dibujo siguiente:



El coeficiente óptimo es el que minimiza el siguiente error  $E(e_f^{q+1}(n)^2)$ , y su gradiente instantáneo con respecto al coeficiente de reflexión es:  $e_f^{q+1}(n) e_b^q(n-1)$ . Usando lo anterior en la regla de adaptación del coeficiente se obtiene la expresión propuesta en el enunciado.

- h) Calcule el valor de  $\mu_q$  para convergencia con un desajuste del 10%, y el número de muestras para convergencia.

**Solución**

El parámetro de adaptación  $\mu$  es igual a dos veces el desajuste dividido por la traza de la matriz de autocorrelación de los datos. Como se trata de un solo dato, es directamente la potencia del error backward que entra al coeficiente, es decir:

$$\mu_q = \frac{2\alpha}{B(q)} \text{ siendo } \alpha \text{ el desajuste. Con respecto a las iteraciones o muestras para}$$

convergencia, este número viene dado por  $n_c^q \cong -\frac{2.3}{\ln(1 - \mu_q \lambda_{\min}^q)}$  como es un solo dato el

autovalor mínimo es también  $B(q)$  la potencia del dato. Una expresión aproximada para desajustes inferiores al 10% es tomar el primer término del  $\ln(\cdot)$ , con lo que resulta que:

$$n_c^q \cong \frac{2.3}{2\alpha} \text{ obviamente independiente de algo que en este caso no existe que es la dispersión de autovalores por tratarse de un filtro de orden 1.}$$

- i) Comente ventajas y/o desventajas de emplear un algoritmo de gradiente sobre los coeficientes de reflexión en lugar de hacerlo directamente sobre los coeficientes del predictor, en términos de muestras para convergencia y desajuste.

**Solución**

Si bien cada coeficiente de reflexión se adapta independientemente y con una dinámica controlada, lo hace con una velocidad limitada por la potencia del error de predicción de su sección que siempre es más pequeña, más pequeña cuanto mayor es el coeficiente, que en la estructura global donde el denominador de la única  $\mu$  va dividido por  $Q$  veces la potencia. Aquí cada coeficiente va dividido por la potencia del error de predicción de la etapa anterior con lo que la convergencia es muy rápida. A cambio, como el desajuste es acumulativo, se puede

asumir que el desajuste global es igual a Q veces el de una sección, es decir, para igual desajuste global los  $\mu$  en cada caso serían:

$$\mu_{normal} = \frac{2.\alpha}{Q.P_x} \quad \mu_q^{lattice} = \frac{2.\left(\frac{\alpha}{Q}\right)}{P_x \cdot \prod_{j=1}^q (1 - k_j^2)}$$

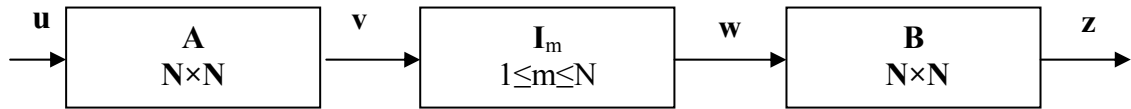
Donde puede verse el beneficio de  $\mu$  grandes para igual desajuste de la estructura lattice respecto a la estructura tradicional o tap-delay.

## Ejercicio 2

Sea  $\mathbf{u}$  un vector aleatorio de dimensión  $N \times 1$  con media nula y matriz de covarianza  $\mathbf{R}$ . El vector  $\mathbf{u}$  se transforma con una transformación lineal unitaria definida por la matriz compleja  $\mathbf{A}$  de dimensión  $N \times N$ . Esta transformación da lugar al vector complejo  $\mathbf{v} = \mathbf{A}^H \mathbf{u}$ . A continuación se define el vector  $\mathbf{w}$  tal que:

$$w(k) = \begin{cases} v(k) & 0 \leq k \leq m-1 \\ 0 & k \geq m \end{cases}$$

El vector  $\mathbf{w}$  se transforma linealmente con la matriz  $\mathbf{B}$  dando lugar al vector  $\mathbf{z} = \mathbf{B}^H \mathbf{w}$ .



El objetivo es encontrar las matrices de transformación  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  que minimizan la distorsión para cualquier valor de  $m$ , definida como el error cuadrático medio entre los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{z}$ .

$$J_m = \frac{1}{N} E \left\{ \text{Tr} \left[ (\mathbf{u} - \mathbf{z})(\mathbf{u} - \mathbf{z})^H \right] \right\}$$

- a) Defina el error cuadrático medio  $J_m$  en función de la matriz de correlación  $\mathbf{R}$  y de las matrices de transformación  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{I}_m$  y  $\mathbf{B}$ .

**Solución:**

$$J_m = \frac{1}{N} \text{Tr} \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{B}^H \mathbf{I}_m \mathbf{A}^H) \mathbf{R} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^H \mathbf{I}_m \mathbf{A}^H)^H \right]$$

- b) Para una matriz de transformación  $\mathbf{A}$  dada, demuestre que el error cuadrático medio  $J_m$  mínimo puede expresarse como:

$$J_m = \frac{1}{N} \text{Tr} [\mathbf{R} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{I}_m \mathbf{B})]$$

y encuentre la relación entre las matrices de transformación  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  que garantizan que  $J_m = 0$ .

Nota:  $\text{Tr}[\mathbf{XY}] = \text{Tr}[\mathbf{YX}] \quad \frac{\partial [\text{Tr}[\mathbf{XY}]]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Y}^T$

**Solución:**

$$\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \mathbf{B}^H} \left[ \text{Tr} \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{B}^H \mathbf{I}_m \mathbf{A}^H) \mathbf{R} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^H \mathbf{I}_m \mathbf{A}^H)^H \right] \right] = \frac{1}{N} \left[ \mathbf{I}_m \mathbf{A}^H \mathbf{R} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^H \mathbf{I}_m \mathbf{A}^H)^H \right]^T = \mathbf{0}$$

$$J_m = \frac{1}{N} \text{Tr} [\mathbf{R} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^H \mathbf{I}_m \mathbf{A}^H)^H] = \frac{1}{N} \text{Tr} [\mathbf{R} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{I}_m \mathbf{B})]$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{B}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

- c) Demuestre que la minimización de  $J_m$  es equivalente a la máxima concentración de la energía en  $m$  coeficientes transformados  $v(k)$  que puede definirse como:

$$\tilde{J}_m = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{a}_k^H \mathbf{R} \mathbf{a}_k$$

donde  $\mathbf{a}_k$  se define como la columna k de la matriz  $\mathbf{A}$ .

**Solución:**

Como la transformación  $\mathbf{A}$  es unitaria:  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^H$

$$J_m = \frac{1}{N} \text{Tr} \left[ \mathbf{R} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{I}_m \mathbf{A}^H) \right] = \frac{1}{N} \left( \text{Tr}[\mathbf{R}] - \text{Tr}[\mathbf{A}^H \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{I}_m] \right)$$

$$\tilde{J}_m = \text{Tr}[\mathbf{A}^H \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{I}_m] = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{a}_k^H \mathbf{R} \mathbf{a}_k$$

d) Obtenga los vectores  $\mathbf{a}_k$  que minimizan  $J_m$  y defina el valor mínimo de  $J_m$

**Solución:**

$$\tilde{J}_m = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{a}_k^H \mathbf{R} \mathbf{a}_k - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k (\mathbf{a}_k^H \mathbf{a}_k - 1)$$

$$\mathbf{R} \mathbf{a}_k = \lambda_k \mathbf{a}_k$$

$$J_m = \sum_{k=m}^N \lambda_k$$

Siendo  $\lambda_k$  los autovalores de la matriz de correlación  $\mathbf{R}$ , ordenados de mayor a menor.

Considere la cuantificación de los coeficientes  $w(k)$  con un número total de bits igual a  $M$  y con una distorsión de cuantificación para cada coeficiente definida como:

$$\varepsilon_k^2 = cte \frac{\sigma_k^2}{2^{2M_k}}$$

donde  $\sigma_k^2$  es la varianza del coeficiente transformado  $w(k)$  y  $M_k$  es el número de bits asignado a su cuantificación.

e) Obtenga el valor de  $M_k$  en función de  $M$ ,  $\sigma_k^2$  y  $m$ .

**Solución:**

$$L = cte \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sigma_k^2}{4^{M_k}} + \lambda \left( \sum_{k=0}^{m-1} M_k - M \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial M_k} = -cte' \frac{\sigma_k^2}{4^{M_k}} + \lambda = 0$$

$$M_k = \frac{1}{2} \log_2 \sigma_k^2 - \frac{1}{2} \log_2 \lambda'$$

$$M = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \log_2 \sigma_k^2 - \frac{m}{2} \log_2 \lambda' \Rightarrow \lambda' = \left( \frac{\prod_{k=0}^{m-1} \sigma_k^2}{4^M} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$M_k = \frac{M}{m} + \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{\sigma_k^2}{\left( \prod_{k=0}^{m-1} \sigma_k^2 \right)^{1/m}} \right)$$

- f) Asumiendo que  $M_k > 0$  para todo  $k$  menor o igual que  $m-1$ , obtenga el error total de cuantificación ( $\varepsilon_T^2$ ) del vector  $\mathbf{w}$ , en función de la potencia de los coeficientes transformados.

**Solución:**

$$\varepsilon_T^2 = cte \sum_{k=0}^m \left( \frac{\sigma_k}{2^{M_k}} \right)^2 = cte m \lambda' = cte m \left( \frac{\prod_{k=0}^{m-1} \sigma_k^2}{4^{M_T}} \right)^{\frac{1}{m}} = cte \left( \prod_{k=0}^{m-1} \sigma_k^2 \right)^{\frac{1}{m}}$$

- g) Demuestre el error  $\varepsilon_T^2$  es mínimo cuando la transformación  $\mathbf{A}$  utilizada es la obtenida en el apartado d)

Nota:  $\det(\mathbf{X}) \leq \prod_{k=1}^N x(k, k)$ , donde  $x(k, k)$  es el elemento de la fila  $k$  y columna  $k$  de la matriz  $\mathbf{X}$ .

**Solución:**

Transformada KL:

$$\mathbf{I}_m \mathbf{A}^H \mathbf{R} \mathbf{A} = \mathbf{I}_m \mathbf{\Lambda} \quad diagonal \Rightarrow \prod_{k=0}^{m-1} \sigma_k^2 = \det(\mathbf{R}_w)$$

$$M - M_{KL} = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{\prod_{k=0}^{N-1} \sigma_k^2}{\det(\mathbf{R}_w)} \right) \geq 0$$