

# TEMA 4- SINTETIZADORES DE FRECUENCIA



EMISSORS I RECEPTORS

---

**Jordi Pérez Romero**  
**Anna Umbert Juliana**

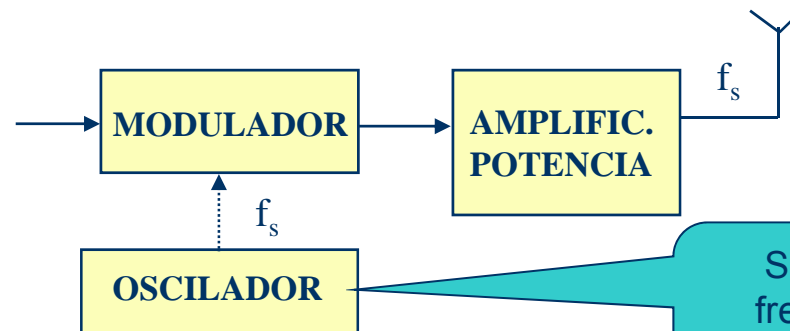
# Índice

- Introducción
  - Tipos de sintetizadores de frecuencia
- PLL (Phase Locked Loop):
  - Diagrama de bloques de un PLL
  - Ecuación característica del PLL
  - Modelo lineal del PLL
  - Comportamiento no lineal del PLL: Márgenes de adquisición
  - Ruido en PLLs
- Sintetizador de frecuencia basado en PLL
  - Diagrama de bloques y principio de funcionamiento
  - Modelo del sintetizador
  - Ruido de fase en sintetizadores
  - Señales espurias
- Implementación digital de un sintetizador de frecuencias

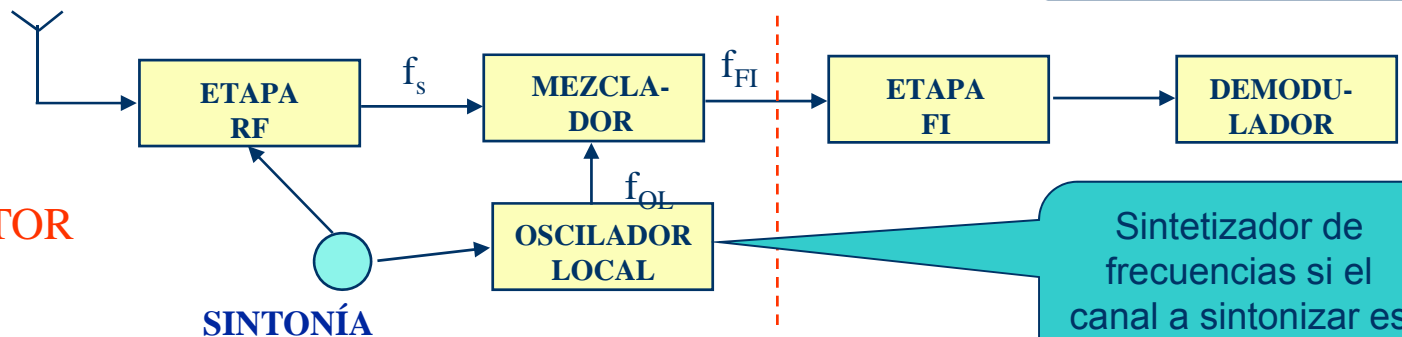
# Introducción

- Un sintetizador es un oscilador con capacidad de variar la frecuencia generada, manteniendo prestaciones de calidad similares en todas las frecuencias generadas (bajo ruido, elevada estabilidad).
- Aplicaciones:

## EMISOR



## RECEPTOR



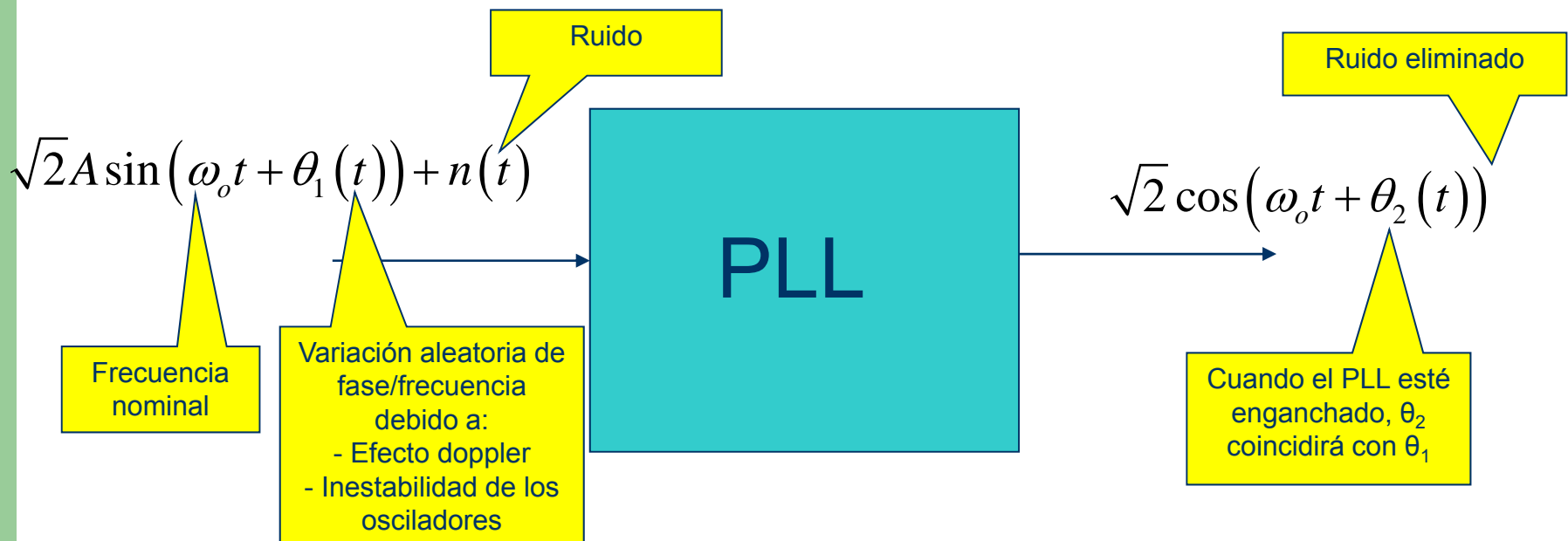
# Introducción: Tipos de sintetizadores

- Tecnología analógica:
  - **DIRECTOS:** usan diferentes osciladores de referencia y junto con mezcladores se consiguen las frecuencias deseadas.
    - Muchas frecuencias  $\Rightarrow$  Muchos osciladores  $\Rightarrow$  Muchos espureos
    - Buena resolución y tiempo de conmutación
  - **INDIRECTOS:** están formados por PLLs y divisores de frecuencia programables, a partir de un oscilador de referencia.
    - Pocos osciladores
    - Mayor tiempo de conmutación
- Tecnología digital:
  - **Basados en una MEMORIA ROM:** Implementación a partir de muestras almacenadas en una memoria que se van leyendo progresivamente y se convierten D/A.

# PLL (Phase Locked Loop)

# PLL: Phase Locked Loop

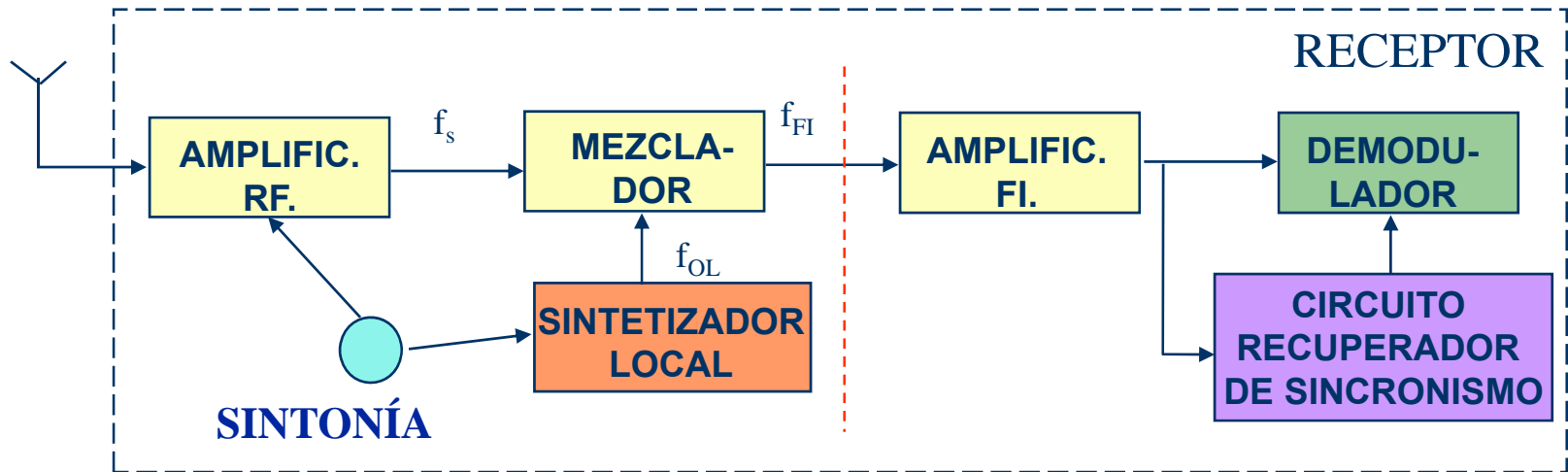
- Un **PLL** (Phase Locked Loop) es un circuito capaz de generar una señal sinusoidal de frecuencia y fase igual a las de la señal a su entrada.



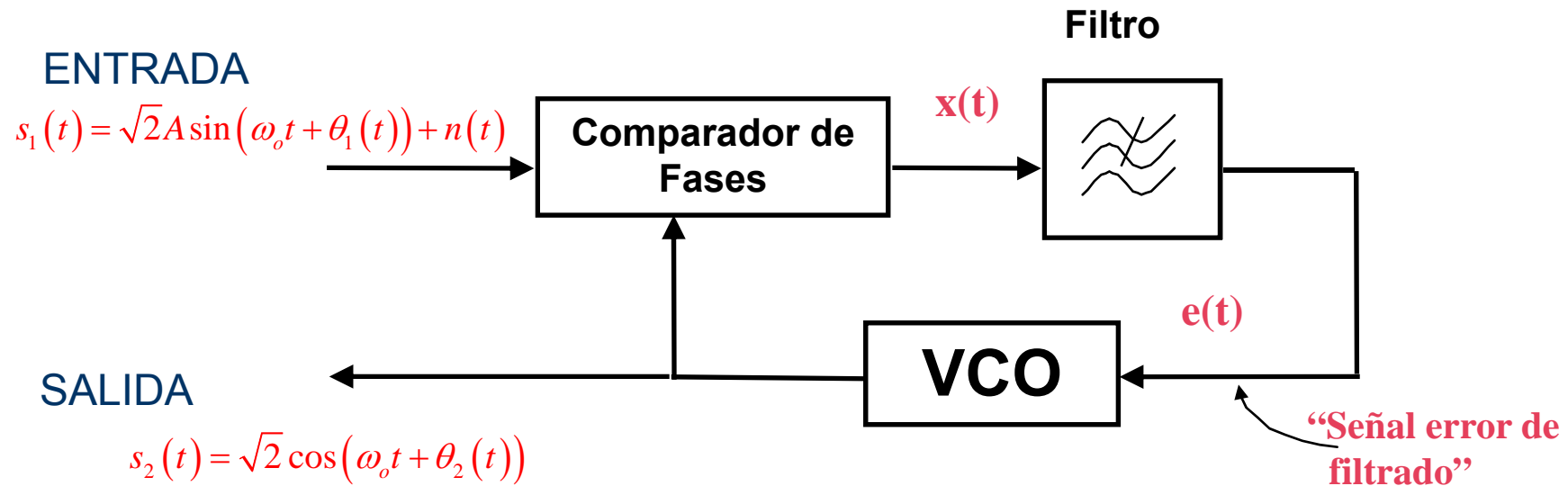
El **PLL** se puede entender como un dispositivo que, por un lado, es capaz de **seguir las variaciones de frecuencia/fase** de la señal de entrada, a la vez que **mejora la pureza espectral** de dicha señal (=reduce el ruido).

# Aplicaciones de un PLL

- Circuitos recuperadores de sincronismo (útiles para realizar detección coherente)
- Sintetizadores indirectos de frecuencia
- Moduladores y demoduladores
- Filtros de seguimiento
- ...



# Diagrama de bloques de un PLL (I)



Principio de funcionamiento:

- El funcionamiento se basa en obtener la salida proveniente de un circuito oscilador controlado por tensión (VCO), cuya frecuencia se regula en función de una señal de control  $e(t)$  dependiente de la diferencia de fases entre la entrada y la salida.
- De este modo, la realimentación garantizará que el VCO tienda a compensar la diferencia de fases, manteniendo igual frecuencia/fase a la salida que a la entrada.



# Diagrama de bloques de un PLL (II)

## Comparador de fases:

- Es un dispositivo que genera a su salida una señal proporcional a la diferencia de fases de las señales aplicadas a su entrada. Se puede **implementar mediante un mezclador (multiplicador) si las señales son sinusoidales** o como una puerta XOR si las señales son cuadradas.
- Si las señales de entrada  $s_1(t)$  y  $s_2(t)$  son sinusoidales entonces la señal a la salida del comparador de fase puede formularse como:

$$x(t) = AK_1 \sin \phi(t)$$

donde:

$A$  es el valor eficaz de la amplitud de la señal de entrada  $s_1(t)$

$K_1$  es la ganancia del comparador de fase (medida como la relación entre la amplitud de pico de salida y la amplitud eficaz de entrada).

$\phi(t)$  es la diferencia de fases entre  $s_1(t)$  y  $s_2(t)$ . Habitualmente se denomina error de fase.

$$s_1(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega_o t + \theta_1(t))$$

$$s_2(t) = \sqrt{2} \cos(\omega_o t + \theta_2(t))$$



$$\phi(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$$

# Diagrama de bloques de un PLL (III)

## VCO (Voltage Control Oscillator):

- Circuito oscilador cuya frecuencia de salida varía linealmente con la tensión de control  $e(t)$  presente a su entrada.
- La frecuencia instantánea de la señal generada por el VCO es:

$$f_{vco}(t) = f_o + \frac{K_2}{2\pi} e(t)$$

- Al parámetro  $K_2$  se le denomina sensibilidad del VCO. Sus dimensiones son rad/(s·V).
- Si a la entrada del VCO la tensión de control  $e(t)$  es nula, el dispositivo oscila a **la frecuencia de reposo**,  $f_o$ , también denominada **frecuencia de oscilación libre** del VCO

$$s_2(t) = \sqrt{2} \cos\left(2\pi \int_{-\infty}^t f_{vco}(\lambda) d\lambda\right) = \sqrt{2} \cos\left(\omega_o t + \underbrace{K_2 \int_{-\infty}^t e(\lambda) d\lambda}_{\theta_2(t)}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta_2(t)}{dt} = K_2 e(t)$$

- La amplitud de la señal generada es constante. (Para el modelado supondremos 1Vef)

# Diagrama de bloques de un PLL (IV)

## Filtro paso bajo

- Elimina las componentes de alta frecuencia a la salida del comparador de fases.

$$e(t) = f(t) * x(t) = \int_0^t x(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

- Los filtros más típicamente usados son:
  - PLL de primer orden: No emplea filtro  $f(t)=\delta(t)$
  - PLL de segundo orden: Emplea un filtro de lazo de primer orden, que puede ser pasivo ó activo.

# Ecuación característica del PLL (en ausencia de ruido)

- Ecuación que **modela el funcionamiento del PLL** relacionando la fase de salida  $\theta_2$  (equivalentemente el error de fase  $\phi$ ) con la fase de entrada  $\theta_1$ .

$$s_1(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega_o t + \theta_1(t))$$

$$s_2(t) = \sqrt{2} \cos(\omega_o t + \theta_2(t))$$

$$\phi(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$$

Combinando las relaciones entrada/salida de cada elemento:

- Entrada/salida del comparador de fases:

$$x(t) = AK_1 \sin \phi(t)$$

- Entrada/salida del filtro:

$$e(t) = \int_0^t x(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_0^t AK_1 \sin \phi(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

- Entrada/salida del VCO:

$$\frac{d\theta_2(t)}{dt} = K_2 e(t)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\theta_1(t)}{dt} - AK \int_0^t \sin \phi(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

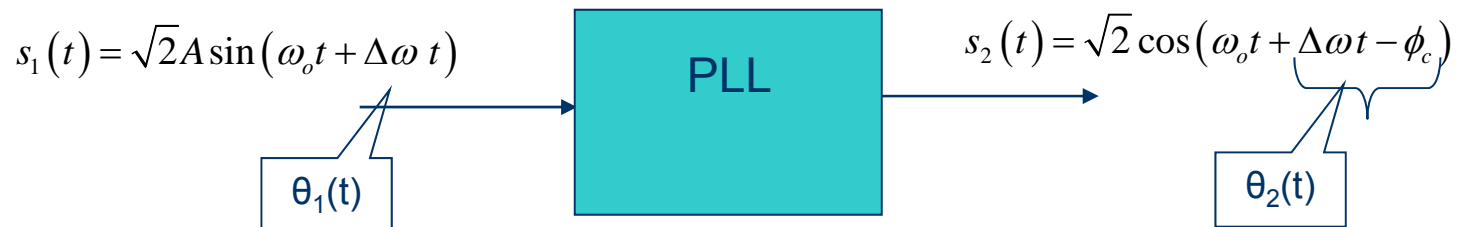
$$K = K_1 K_2$$

Constante de lazo

**ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DEL PLL**

# Enganche de un PLL

- Se dice que un PLL está enganchado cuando ha sido capaz de compensar una variación de la entrada llegando a un **régimen permanente estable**.
- Esta condición se corresponde con que el error de fase  $\phi(t)$  (y en consecuencia la tensión de entrada del VCO, que regula la frecuencia de salida) **toma un valor constante**.
- Cuando se da esta circunstancia, **la frecuencia de salida del PLL coincide con la frecuencia de la señal de entrada**. Sin embargo, dependiendo del tipo de PLL, es posible que el error de fase no sea nulo sino que tome un cierto valor constante.



- Matemáticamente la condición de enganche se puede formular como:

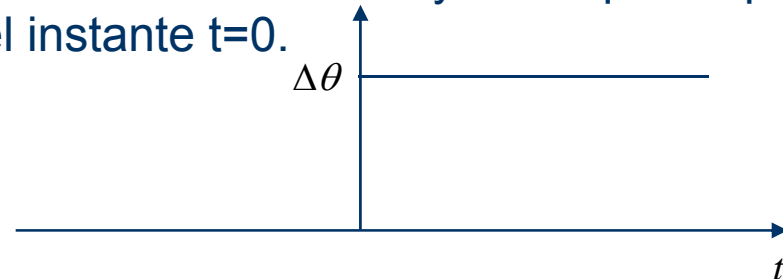
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \phi_c \quad \longleftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\phi(t)}{dt} = 0$$

Para saber si un PLL puede engancharse o no ante un cambio de  $\theta_1(t)$  a la entrada se deberá resolver la ecuación característica.

# Ejemplo: Comportamiento de un PLL ante un salto de fase

- Consideramos un PLL de primer orden (esto es, sin filtro de lazo,  $f(t) = \delta(t)$ ) que se encuentra enganchado con error de fase nulo y en el que se produce un **salto de fase a la entrada** en el instante  $t=0$ .

$$\theta_1(t) = \Delta\theta u(t)$$



- La evolución del error de fase  $\phi(t)$  a partir de  $t>0$  se puede obtener resolviendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\theta_1(t)}{dt} - AK \int_0^t \sin \phi(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

Para  $t>0$   $d\theta_1(t)/dt=0$

$f(t)=\delta(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi(t)}{dt} = -AK \sin \phi(t) \\ \phi(0) = \Delta\theta \quad (\text{cond. de contorno}) \end{array} \right.$$

- Este caso particular admite solución analítica:

$$\phi(t) = \arccos \left[ \frac{(1 + \cos \Delta\theta) - (1 - \cos \Delta\theta) e^{-2AKt}}{(1 + \cos \Delta\theta) + (1 - \cos \Delta\theta) e^{-2AKt}} \right]$$



En régimen permanente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_2(t) = \Delta\theta = \theta_1(t)$$

Un PLL de primer orden (y por extensión de orden superior) es siempre capaz de compensar un salto de fase a su entrada.

# Resolución de la ecuación característica del PLL

En el caso más general (PLL de cualquier tipo, saltos de frecuencia, etc.) la resolución de la ec. característica es compleja y se aborda en dos fases:

- **FASE DE ADQUISICIÓN:** El error de fase es grande ( cualquier valor entre 0 y  $2\pi$  ).
  - La resolución de la ecuación en forma genérica no es posible. Por ello se definen una serie de **márgenes de frecuencias**, obtenidos por simulación que modelan el funcionamiento del PLL
- **FASE DE SEGUIMIENTO:** Se supone que el error de fase  $\phi(t)$  es pequeño. El PLL sigue la señal de entrada.

$$\text{Si } \phi(t) \ll 1 \Rightarrow \sin \phi(t) \cong \phi(t)$$

- Resulta una ecuación diferencial lineal de resolución más simple que la ecuación genérica que se aplica en la fase de adquisición.

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\theta_1(t)}{dt} - AK \int_0^t \phi(\tau) f(t-\tau) d\tau$$



**MODELO LINEAL DEL  
PLL= El PLL puede  
contemplarse como un  
“filtro de fase”**

# Modelo Lineal del PLL (I)

Tomando la transformada de Laplace sobre la ec. característica resulta:

$$s\phi(s) = s\theta_1(s) - AK\phi(s)F(s) \quad \Rightarrow \quad \phi(s) = \frac{s\theta_1(s)}{s + AKF(s)}$$

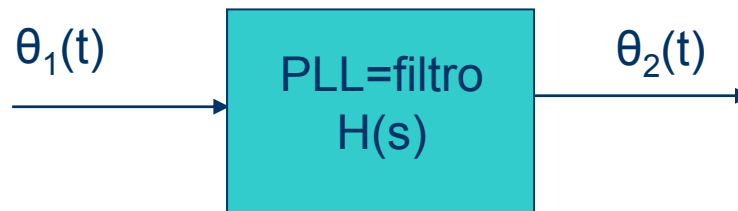
Se define:

- La **FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA** DE UN PLL EN LAZO CERRADO como:

$$H(s) = \frac{\theta_2(s)}{\theta_1(s)} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{AKF(s)}{s + AKF(s)}$$

- El **ORDEN** DEL PLL:

$$\text{Orden PLL} = \text{Orden del Filtro } F(s) + 1$$





# Modelo lineal del PLL (II)

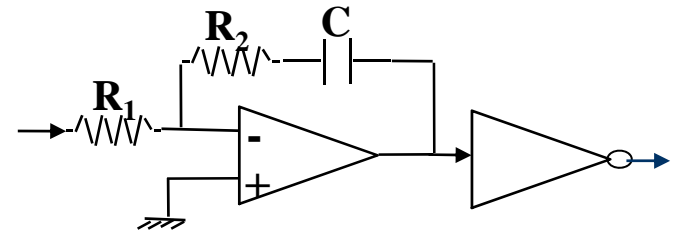
- **PLL 1er orden** → No tiene filtro ( $F(s)=1$ ):
  - Resulta en una  $H(s)$  cuyo **parámetro relevante es el factor  $AK$** , que coincide con la frecuencia de corte a 3 dB.

$$H(s) = \frac{AK}{s + AK}$$

- **PLL 2º orden** → Filtro de 1er orden. Los usados habitualmente son:

- **FILTRO ACTIVO:**

$$F(s) = \frac{\tau_2 s + 1}{\tau_1 s} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \tau_1 = R_1 C \\ \tau_2 = R_2 C \end{cases}$$



- Función de transferencia del PLL:

$$H(s) = \frac{2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{AK}{\tau_1}}$$

**FRECUENCIA NATURAL DEL PLL**  
(ancho de banda)

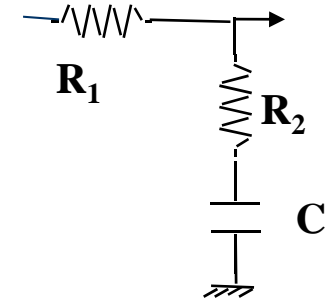
$$\xi = \frac{\tau_2}{2} \sqrt{\frac{AK}{\tau_1}} \equiv \frac{\omega_n \tau_2}{2}$$

**FACTOR DE AMORTIGUACIÓN**  
(cuanto menor sea, más dura el transitorio)

# Modelo Lineal del PLL (III)

## FILTRO PASIVO:

$$F(s) = \frac{\tau_2 s + 1}{(\tau_1 + \tau_2)s + 1} \quad \text{donde} \begin{cases} \tau_1 = R_1 C \\ \tau_2 = R_2 C \end{cases}$$



- Función de transferencia del PLL:

$$H(s) = \frac{\frac{AK\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{AK}{\tau_1 + \tau_2}} \approx \sqrt{\frac{AK}{\tau_1}}$$

FRECUENCIA NATURAL DEL PLL

$$\xi = \frac{\omega_n}{2} \left( \tau_2 + \frac{1}{AK} \right) \approx \frac{\omega_n \tau_2}{2}$$

FACTOR DE AMORTIGUACIÓN

Si el producto  $AK$  del PLL es suficientemente grande, un PLL con filtro pasivo presenta el mismo comportamiento que un PLL con filtro activo, y por lo tanto las expresiones anteriores son válidas

# Márgenes de adquisición (I)

- Los **márgenes de adquisición** definen el rango de variaciones de frecuencia de la señal de entrada para los que el PLL es capaz de engancharse.
- Dependen del tipo de PLL empleado.
- **PLL de primer orden:**
  - Ante un salto de frecuencia  $\Delta\omega$  de la señal de entrada, el PLL es capaz de engancharse siempre que:

$$\Delta\omega \leq \Delta\omega_{\max} = AK$$

- En este caso, el error de fase en régimen permanente es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \phi_c = \arcsin \frac{\Delta\omega}{AK}$$

# Márgenes de adquisición (II)

- PLL de segundo orden:
- La ecuación de un PLL de 2º orden en fase de adquisición es analíticamente irresoluble.
- El comportamiento del PLL de 2º orden se define a partir de unos márgenes obtenidos por simulación :
  - $\Delta\omega_H$  = Margen de “Hold-in”
  - $\Delta\omega_P$  = Margen de “Pull-in”
  - $\Delta\omega_L$  = Margen de “Lock-in”

# Márgenes de adquisición (III)

- $\Delta\omega_H$  = Margen de “Hold-in”:

Def: Máximo desplazamiento de la frecuencia de la señal recibida respecto a la frecuencia de reposo,  $f_0$ , del VCO para la cual el PLL, **inicialmente enganchado**, mantiene el enganche.



- Para que el PLL permanezca enganchado  $d\Phi(t)/dt=0$  para  $t \rightarrow \infty$ , es decir  $\Phi = \text{cte}$ :

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 0 = \Delta\omega - AK \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \sin\phi(t) d\tau = \Delta\omega - AK \sin\phi \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) d\tau = \Delta\omega - AKF(0) \sin\phi$$

- La función  $\sin(\Phi)$  toma valores máximos  $\pm 1$ , entonces:

$$\Delta\omega_H = \pm AKF(0) = \begin{cases} \text{Si el filtro es activo } F(0) = \infty & \Delta\omega_H = \infty \text{ (Teóricamente)} \\ \text{Si el filtro es pasivo } F(0) = 1 & \Rightarrow \Delta\omega_H = \pm AK \end{cases}$$

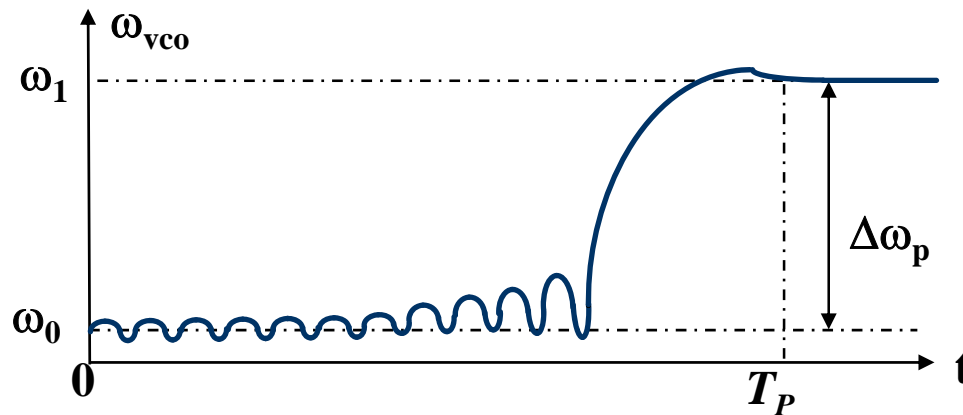
Error de fase en régimen permanente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \phi_c = \arcsin \frac{\Delta\omega}{AKF(0)}$$

# Márgenes de adquisición (IV)

- $\Delta\omega_p$  = Margen de “Pull-in”:

Def : Máxima diferencia de frecuencia entre la señal recibida y la inicial del VCO, para la cual el PLL, que se considera que inicialmente **no está enganchado**, es capaz de engancharse.



Margen de Pull-in:

$$\Delta\omega_p \cong \frac{8}{\pi} \sqrt{2\xi\omega_n AK - \omega_n^2}$$

Tiempo de Pull-in:

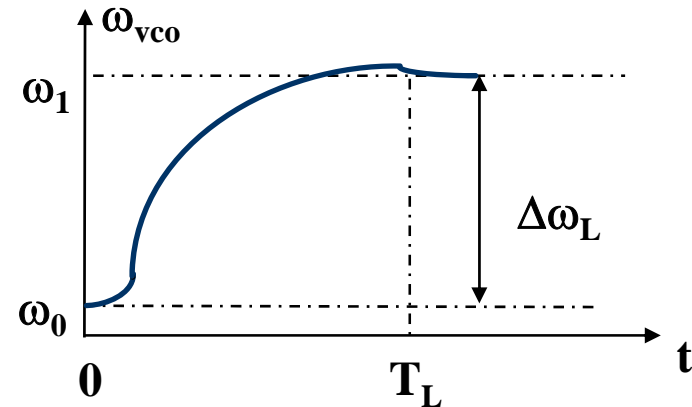
$$T_p \cong \frac{2\pi(\Delta f)^2}{2\xi\omega_n^3}$$

Tiempo necesario en compensar una diferencia de frecuencias  $\Delta f$

# Márgenes de adquisición (V)

- $\Delta\omega_L$  = Margen de “Lock-in”:

Def : Máxima diferencia de frecuencia entre la señal recibida y la inicial del VCO, para la cual el PLL que se considera que inicialmente **no está enganchado**, es capaz de engancharse de manera que  $\Phi(t)$  no recorra más de un ciclo ( $2\pi$  ).



Margen de Lock-in:  $\Delta\omega_L \cong 2\xi\omega_n$

Tiempo de Lock-in:  $T_L = \frac{1}{f_L} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_L} = \frac{1}{2\xi f_n} \cong \frac{1}{f_n}$

Para un PLL se cumple:

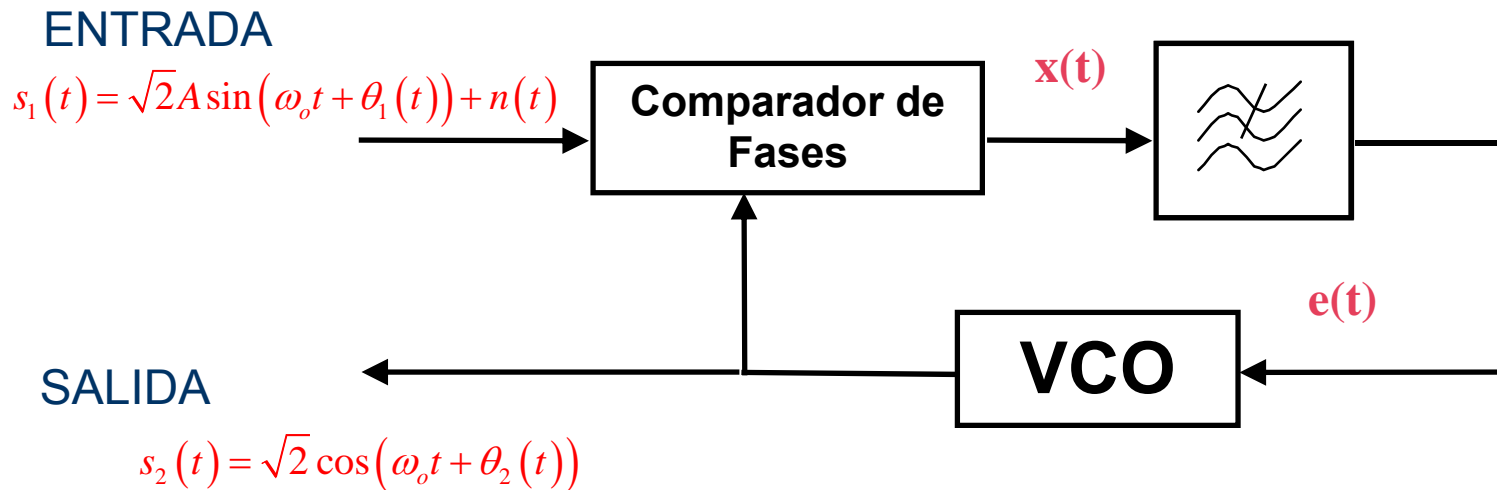
$$\Delta\omega_L \leq \Delta\omega_P \leq \Delta\omega_H$$

y

$$T_L \ll T_p$$

# Ruido en PLLs (I)

- Se pretende estudiar el impacto sobre la fase de salida del PLL,  $\theta_2$ , del ruido aditivo  $n(t)$  presente a la entrada.



- Consideraciones:
  - Relación (S/N) a la entrada elevada (típicamente mayor a 10), para que el ruido no influya sobre la fase de adquisición
  - Modelo lineal del PLL (fase de seguimiento)



# Ruido en PLLs (II)

- Salida del comparador de fases (mezclador):

$$x(t) = AK_1 \sin \phi(t) + K_1 n'(t) \approx AK_1 \phi(t) + K_1 n'(t) \quad \longleftrightarrow \quad X(s) = AK_1 \phi(s) + K_1 n'(s)$$

donde se define  $n'(t) = \sqrt{2}n(t)\cos(\omega_o t + \theta_2(t))$

- Salida del filtro:  $e(t) = x(t) * f(t) \quad \longleftrightarrow \quad e(s) = AK_1 \phi(s) F(s) + K_1 n'(s) F(s)$
- Salida del VCO:  $\frac{d\theta_2(t)}{dt} = K_2 e(t) \quad \longleftrightarrow \quad s\theta_2(s) = K_2 e(s) = AK\phi(s)F(s) + Kn'(s)F(s)$

Sustituyendo  $\phi(s) = \theta_1(s) - \theta_2(s)$  y aislando  $\theta_2(s)$ , se obtiene:

$$\theta_2(s) = \frac{AKF(s)}{s + AKF(s)} \theta_1(s) + \frac{KF(s)}{s + AKF(s)} n'(s) = H(s) \theta_1(s) + \frac{H(s)}{A} n'(s)$$

La fase de salida se descompone en la superposición de dos términos:

- la salida si no hubiera ruido  $H(s)\theta_1(s)$
- ruido de entrada filtrado por  $H(s)/A$

# Ruido en PLLs (III)

- De modo que la señal de salida de un PLL con ruido a la entrada se puede expresar como:

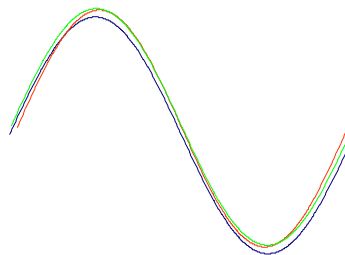
$$s_2(t) = \sqrt{2} \cos(\omega_o t + \theta_2(t)) = \sqrt{2} \cos\left(\underbrace{\omega_o t + h(t) * \theta_1(t)}_{\text{Término útil que sigue la variación de la entrada.}} + \underbrace{\frac{h(t) * n'(t)}{A}}_{\phi_n(t): \text{ Ruido de fase}}\right)$$

Término útil que sigue la variación de la entrada.

$\phi_n(t)$ : Ruido de fase

En consecuencia, el ruido a la entrada de un PLL se refleja a la salida en forma de un RUIDO DE FASE.

Interpretación física: pequeñas fluctuaciones en la frecuencia instantánea de la portadora generada (parpadeo de fase)



Si superponemos varios períodos de la señal generada, no coinciden exactamente debido a la aleatoriedad del ruido de fase.

# Jitter de fase

- El ruido de fase es un proceso estocástico que se suele cuantificar mediante su valor cuadrático medio, denominado **JITTER de FASE** :

$$\phi_n(t) = \frac{h(t) * n'(t)}{A} \quad \xleftrightarrow{\text{Laplace}} \quad \phi_n(s) = \frac{H(s)n'(s)}{A} \quad \longleftrightarrow \quad S_\phi(f) = \frac{|H(f)|^2}{A^2} G_{n'}(f)$$

Densidad espectral del  
ruido de fase (rad<sup>2</sup>/Hz)

Jitter de fase:

$$\overline{\phi_n^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S_\phi(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(f)|^2}{A^2} G_{n'}(f) df \quad (\text{rad}^2)$$

Jitter eficaz:

$$\sqrt{\overline{\phi_n^2(t)}} \quad (\text{rad}) \quad \quad \sqrt{\overline{\phi_n^2(t)}} \frac{180}{\pi} \quad (\text{grados})$$

Para obtener la dependencia con el ruido de entrada  $n(t)$  basta con aplicar la relación:

$$n'(t) = \sqrt{2}n(t)\cos(\omega_o t + \theta_2(t))$$

Autocorrelación

$$R_{n'}(\tau) \approx R_n(\tau)\cos(\omega_o \tau)$$

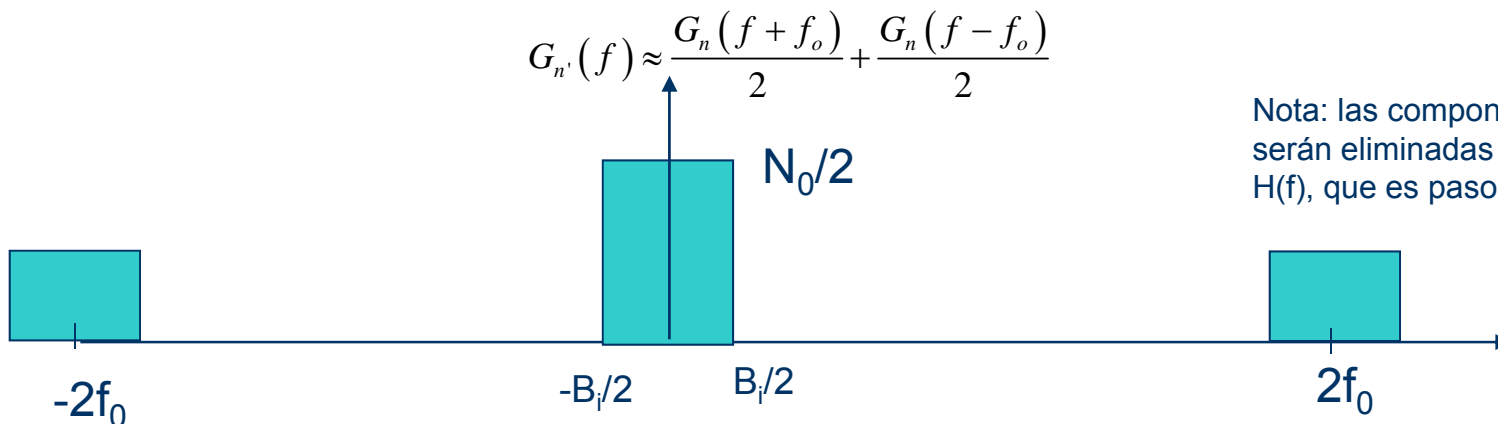
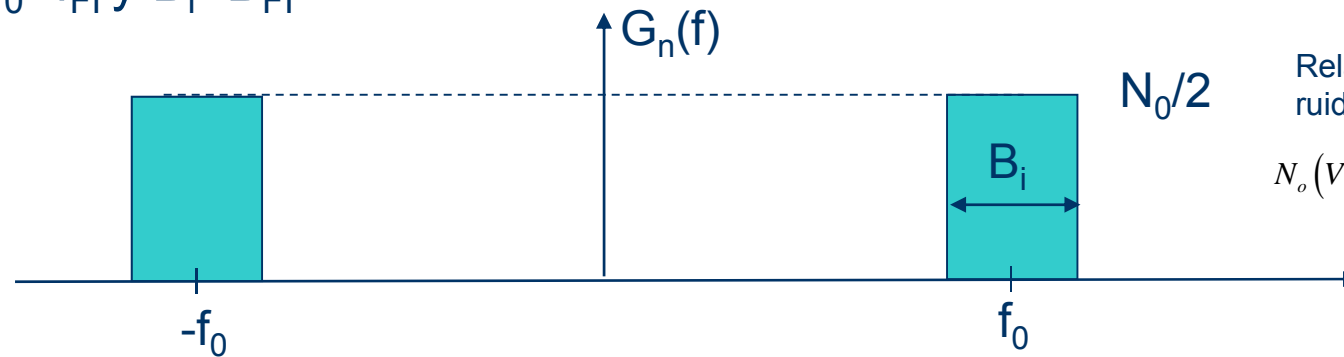
Densidad espectral

(V<sup>2</sup>/Hz)

$$G_{n'}(f) \approx \frac{G_n(f + f_o)}{2} + \frac{G_n(f - f_o)}{2}$$

# Ejemplo: Jitter en presencia de ruido de entrada gaussiano blanco (I)

- Ruido de entrada del PLL gaussiano blanco, de media nula y centrado en la frecuencia  $f_0$  sobre una banda  $B_i$
- Correspondería al caso en que el PLL actúa como recuperador de portadora a la salida del cabezal de RF de un receptor, de modo que  $f_0 = f_{FI}$  y  $B_i = B_{FI}$



## Ejemplo: Jitter en presencia de ruido de entrada gaussiano blanco (II)

- Ruido de entrada del PLL gaussiano, de media nula y centrado en la frecuencia  $f_0$  sobre una banda  $B_i$

$$\overline{\phi_n^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(f)|^2}{A^2} G_{n'}(f) df = \frac{N_o}{A^2} \int_0^{B_i/2} |H(f)|^2 df \approx \frac{N_o}{A^2} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Nota: Banda del filtro  $H(f)$   
muy inferior a  $B_i/2$

Se define el **ANCHO DE BANDA EQUIVALENTE DE RUIDO DEL PLL** como:

$$B_L \text{ (Hz)} = \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

De modo que el JITTER de FASE se obtiene como:

$$\overline{\phi_n^2(t)} = \frac{N_o B_L}{A^2} \quad (\text{rad}^2)$$

$$\overline{\phi_n^2(t)} = \frac{N_o B_i}{A^2} \frac{B_L}{B_i} = \frac{1}{(S/N)_i} \frac{B_L}{B_i} \quad (\text{rad}^2)$$

# Ancho de banda equivalente de ruido de un PLL

- Para un PLL de primer orden:

$$B_L = \frac{AK}{4} \text{ (Hz)}$$

- Para un PLL de 2º orden:

$$B_L = \frac{\omega_n}{2} \left( \xi + \frac{1}{4\xi} \right) \text{ (Hz)}$$

Mínimo  
(óptimo)



$$B_L|_{\xi=0.5} = \frac{\omega_n}{2} \text{ (Hz)}$$

Ante un salto de frecuencia el factor de amortiguación óptimo (minimiza la duración de los transitorios) es  $\xi=0.7$ , mientras que desde el punto de vista de ruido el mínimo es  $\xi=0.5$ .

Por consiguiente en la práctica se escoge un  $\xi$  entre el intervalo:

$$0.5 \leq \xi \leq 0.7$$

# Relación entre la SNR a la entrada y el jitter

- Si la relación señal a ruido es buena, el ruido a la entrada sobre un oscilador se puede ver como un ruido de fase:

$$\begin{aligned}
 S_i(t) &= \sqrt{2A} \cos \omega_0 t + n_x(t) \cos \omega_0 t - n_y(t) \sin \omega_0 t = [\sqrt{2A} + n_x(t)] \cos \omega_0 t - n_y(t) \sin \omega_0 t = \\
 &= \sqrt{[\sqrt{2A} + n_x(t)]^2 + n_y^2(t)} \cos \left\{ \omega_0 t + \arctg \left[ \frac{n_y(t)}{\sqrt{2A} + n_x(t)} \right] \right\} \cong \sqrt{2A} \cdot \cos \left\{ \omega_0 t + \arctg \left[ \frac{n_y(t)}{\sqrt{2A}} \right] \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow S_i(t) &\cong \sqrt{2A} \cdot \cos \left\{ \omega_0 t + \underbrace{\frac{n_y(t)}{\sqrt{2A}}}_{\text{Ruido de fase}} \right\}
 \end{aligned}$$

- Por consiguiente, el valor cuadrático medio del ruido de fase a la entrada (**JITTER a la ENTRADA**) es:  $\overline{\theta_{ni}^2(t)} = \frac{\overline{n_y^2(t)}}{2A^2} = \frac{N_o B_i}{2A^2} = \frac{1}{2(SNR)_i}$
- Y el Jitter a la salida:

$$\overline{\phi_n^2(t)} = \frac{N_o B_L}{A^2} = \frac{N_o B_i}{A^2} \frac{B_L}{B_i} = \frac{N_o B_i}{2A^2} \frac{2B_L}{B_i} \Rightarrow$$

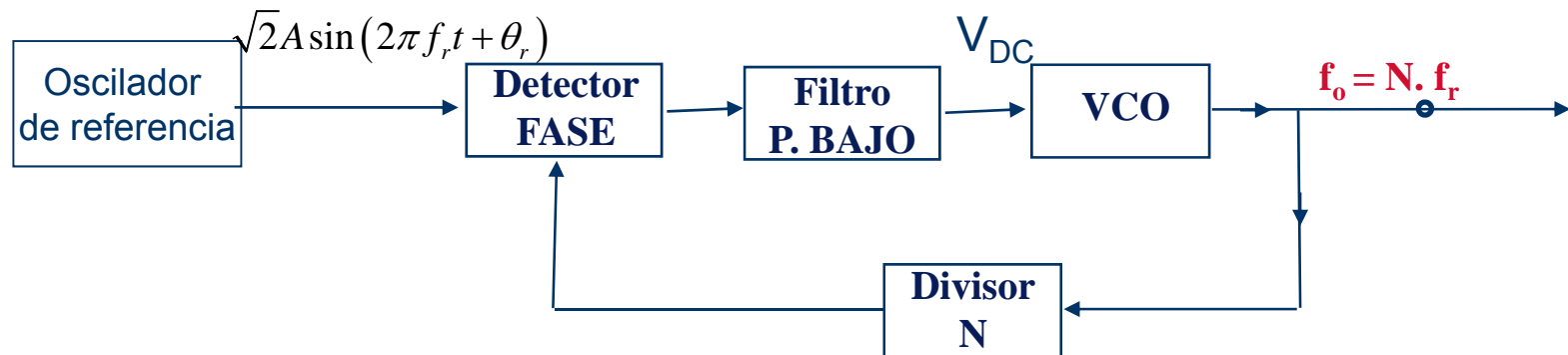
$$\overline{\phi_n^2(t)} = \overline{\theta_{ni}^2(t)} \frac{2B_L}{B_i} = \frac{1}{(SNR)_i} \frac{B_L}{B_i}$$

El PLL se comporta como un filtro de banda estrecha sintonizable ya que  $B_L \ll B_i$ , de modo que su efecto es disminuir el ruido de fase a la salida del PLL con respecto al presente a su entrada.

# Sintetizador de frecuencias basado en PLL



# Sintetizador Indirecto de frecuencias



- Un sintetizador indirecto de frecuencias se basa en un PLL al que se conecta a la entrada la señal de un oscilador de referencia a frecuencia fija  $f_r$  y elevada pureza espectral, y en el que se introduce un divisor programable de frecuencias entre el VCO y el comparador de fases.
- Al cambiar el valor del divisor programable se modificará la tensión a la entrada del VCO, ocasionando un cambio en la frecuencia generada.

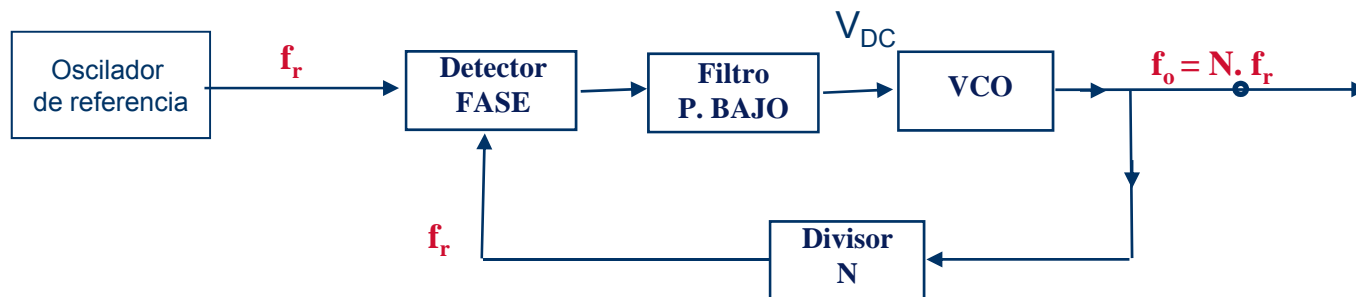
# Principio de funcionamiento (I)

- Supongamos inicialmente el PLL enganchado:
  - En ambas entradas del detector de fase existirá la misma frecuencia  $f_r$ , de modo que a la salida del VCO la frecuencia generada será:  $f_o = Nf_r$
  - En consecuencia, la tensión a la entrada del VCO será tal que:

$$f_o = f_{vco} + \frac{K_2 V_{DC}}{2\pi}$$

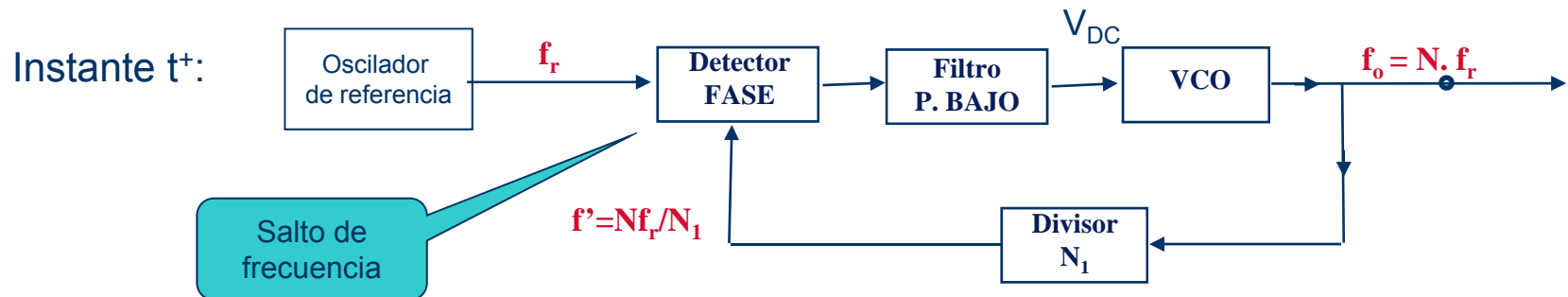
$f_{vco}$ : freq. de reposo del VCO

$K_2$ : sensibilidad del VCO (rad/sV)

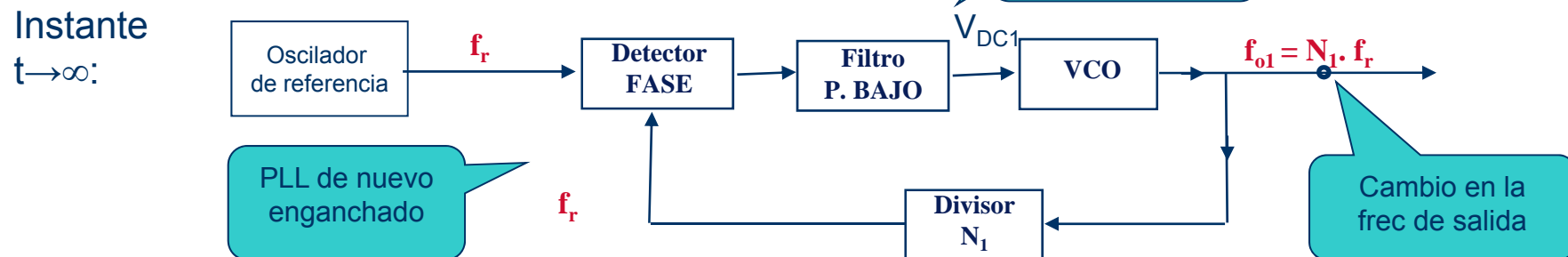


# Principio de funcionamiento (II)

- Supongamos que en un instante dado  $t$  cambiamos el divisor al valor  $N_1$ :
  - Momentáneamente se habrá introducido un salto de frecuencia en las entradas del detector de fase:

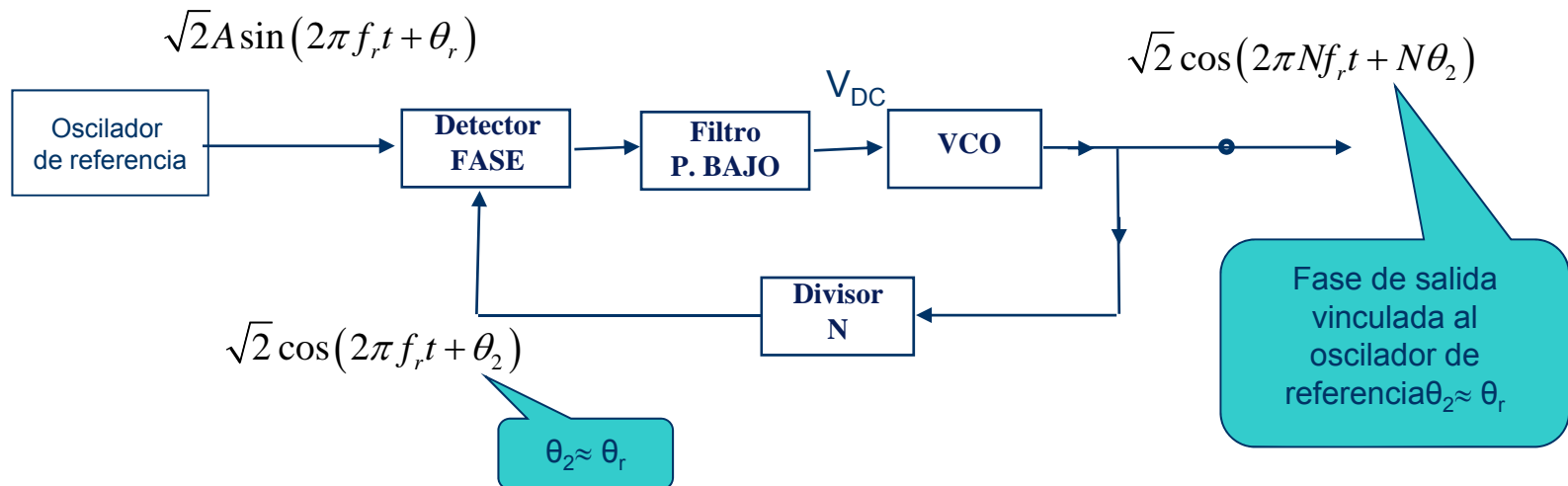


- Si el PLL es capaz de compensar el salto de frecuencia, se llegará en régimen permanente a:



## Principio de funcionamiento (III)

- Obsérvese que, cuando el PLL se encuentre enganchado, las fluctuaciones de frecuencia (=estabilidad) a la salida vendrán dadas por las fluctuaciones del oscilador de referencia, que al tratarse de un oscilador de elevada pureza espectral, serán reducidas.



# Parámetros del sintetizador

- **Rango de frecuencias generadas:** viene dado por el rango de valores del divisor programable:

$$f_{o,\max} = N_{\max} f_r$$

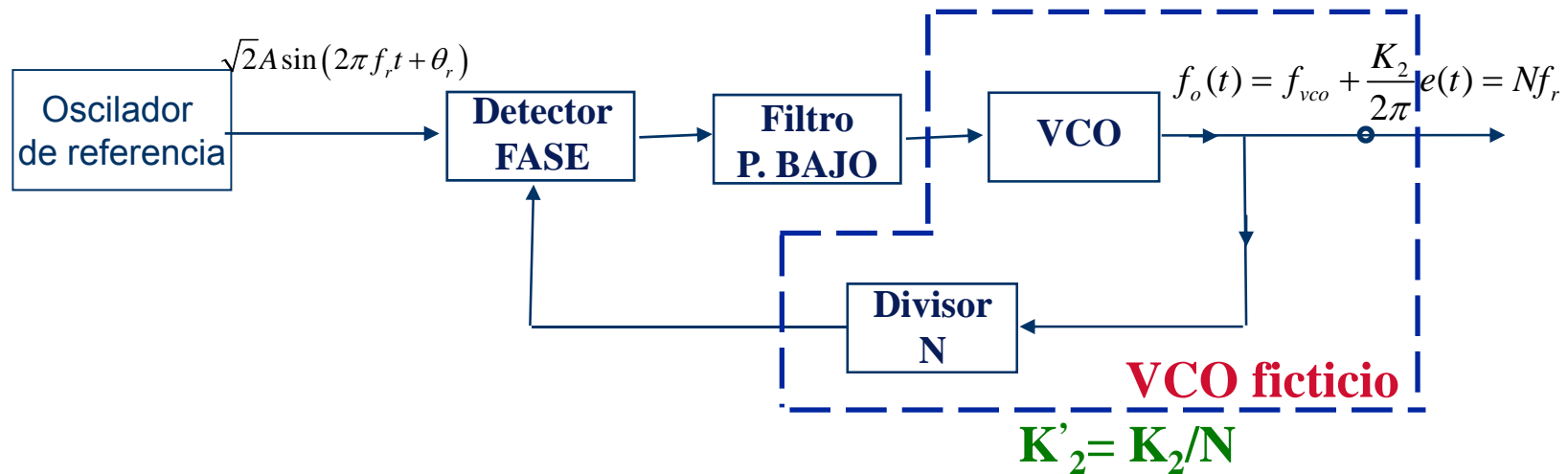
$$f_{o,\min} = N_{\min} f_r$$

- **Resolución:** viene dado por el mínimo salto entre frecuencias de salida.
  - Dado que el divisor programable sólo puede tomar valores  $N$  enteros, la resolución es directamente la frecuencia del oscilador de referencia  $f_r$ .
- **Tiempo de conmutación:** es el tiempo que tarda el PLL en engancharse tras un cambio en el divisor programable.
  - Suponiendo que trabaja dentro del margen de Lock-in, el tiempo de conmutación se puede aproximar por:

$$T_c \approx \frac{1}{f_n}$$

siendo  $f_n$  la frecuencia natural del PLL

# Modelo del sintetizador de frecuencias (I)



- El oscilador controlado por tensión (VCO) está caracterizado por:

$$f_o(t) = f_{vco} + \frac{K_2}{2\pi} e(t) \quad \text{con } f_{vco} \text{ la frecuencia de oscilación libre}$$

- A la salida del divisor de frecuencia por N se tiene:

$$f_o'(t) = \frac{f_{vco}}{N} + \frac{K_2}{2\pi N} e(t) \equiv f_{vco}' + \frac{K_2}{2\pi N} e(t)$$

- Es decir que el conjunto VCO+divisor de frecuencia se comporta como un **VCO ficticio** con sensibilidad  $K_2/N$  [rad/s.V] y frecuencia de oscilación libre  $f_{vco}' = f_{vco}/N$ .

# Modelo del sintetizador de frecuencias (II)

- Obsérvese que con esta agrupación (VCO + Divisor) la estructura de bloques del sintetizador indirecto corresponde a un circuito PLL.
- Por consiguiente, la ecuación diferencial que caracteriza el comportamiento del sintetizador es:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{AK}{N} \int_0^t \sin \phi(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

donde :  $\theta_1(t) = \theta_r$  y  $\phi(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$

- En FASE DE SEGUIMIENTO se tiene:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{AK}{N} \int_0^t \phi(\tau) f(t - \tau) d\tau$$



$$\phi(s) = \frac{s\theta_1(s)}{s + \frac{AK}{N}F(s)}$$

$$H(s) = \frac{\theta_2(s)}{\theta_1(s)} = \frac{\frac{AK}{N}F(s)}{s + \frac{AK}{N}F(s)}$$

# Modelo del sintetizador de frecuencias (III)

- Suponiendo un PLL de segundo orden, la frecuencia natural y el factor de amortiguación del sintetizador son:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{AK}{N} \frac{1}{\tau_1}}$$

$$\xi \cong \frac{\omega_n}{2} \tau_2$$

- Análogamente al PLL se definirían los márgenes de adquisición (hold-in, lock-in, pull-in).



# Condición de lock-in para un sintetizador

- Para garantizar que un sintetizador indirecto siempre puede compensar en un tiempo reducido el salto de frecuencia ocasionado al variar el divisor programable, es preciso que se cumpla la siguiente condición, relativa al margen de lock-in:

$$\Delta\omega_L \cong 2\xi\omega_n \geq 2\pi \frac{(f_{0\max} - f_{0\min})}{N_{\min}}$$

donde:

$$N_{\max} = \frac{f_{0\max}}{f_r} \qquad N_{\min} = \frac{f_{0\min}}{f_r}$$

(ver la demostración en el Anexo 1)

# Ruido de fase en sintetizadores (I)

- Considerando que tanto el oscilador de referencia como el VCO generan ruido de fase queremos analizar el ruido de fase a la salida del sintetizador y qué parte corresponde a cada uno. Siendo:

- $\theta_r(s)$ : ruido de fase del oscilador de referencia
- $\theta_{VCO}(s)$ : ruido de fase del VCO

- Se puede comprobar que:  $\theta_2(s) = [\theta_r(s) - \theta_2(s)] F(s) \frac{AK}{N} \frac{1}{s} + \frac{\theta_{VCO}(s)}{N}$

(ver la  
demostración en  
el Anexo 2)

- Recordando que: 
$$H(s) = \frac{\frac{AK}{N} F(s)}{s + \frac{AK}{N} F(s)}$$

- Resulta:  $\theta_2(s) = \theta_r(s) H(s) + \frac{\theta_{VCO}(s)}{N} (1 - H(s))$

- En tanto que  $\theta_o(s) = N \theta_2(s)$  entonces el ruido de fase a la salida es:

$$\theta_o(s) = N \theta_r(s) H(s) + \theta_{VCO}(s) (1 - H(s))$$

# Ruido de fase en sintetizadores (II)

- Y la densidad espectral del ruido de fase a la salida es:

$$G_{\theta_0}(f) = N^2 \cdot G_{\theta_r}(f) \cdot |H(f)|^2 + G_{\theta_{VCO}}(f) \cdot |1 - H(f)|^2 \quad \text{rad}^2/\text{Hz}$$

Densidad espectral de potencia del ruido de fase de los osciladores

- La Densidad Espectral de Potencia de Ruido aditivo de un oscilador genérico viene dada por:

$$G_N(f) = \frac{KT_0 F}{8Q^2} \left( \frac{f_0}{\Delta f} \right)^2 \quad (\text{W} / \text{Hz})$$

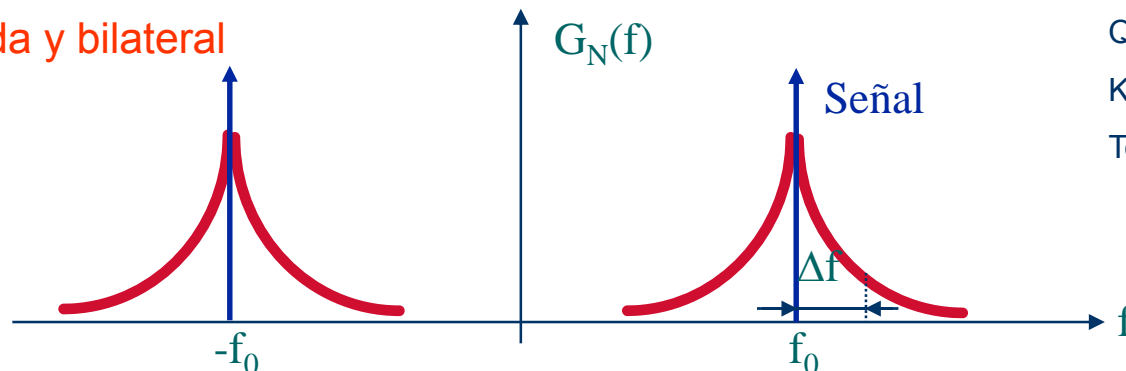
F: Factor de ruido

Q: Factor de calidad

K: Cte Boltzmann

To=290K

Paso banda y bilateral



# Ruido de fase en sintetizadores (III)

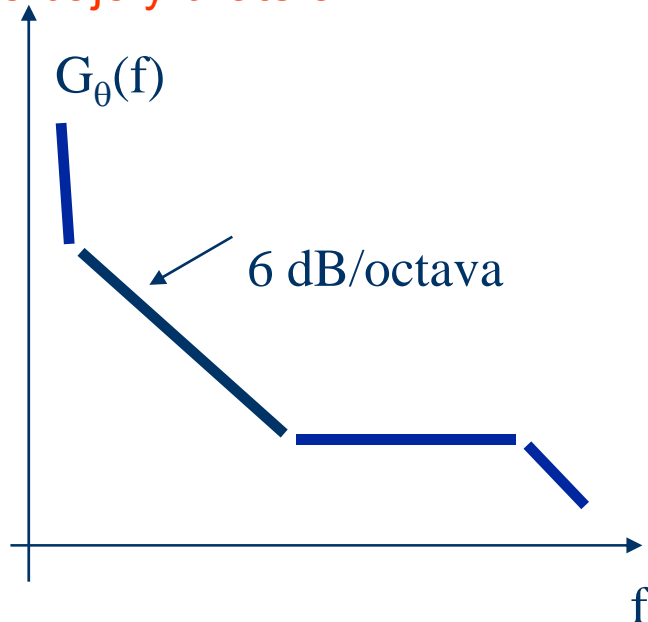
- La Densidad Espectral de Ruido de Fase de un oscilador genérico viene dada por:

$$G_{\theta}(f) = \frac{KT_o F}{P} \frac{1}{8Q^2} \left( \frac{f_o}{f} \right)^2 \quad (\text{rad}^2 / \text{Hz})$$

P: Potencia de salida del oscilador.

Nota: la expresión es sólo válida para  $|f| > f_u \approx 10\text{Hz}$ , por debajo se supone que el ruido de fase es nulo.

Paso bajo y bilateral



La pureza espectral depende de:

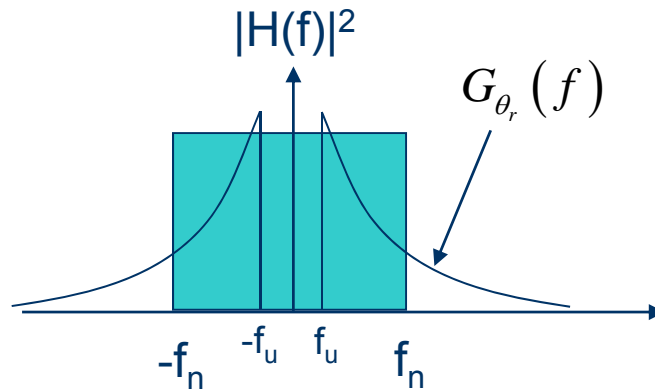
- Factor de calidad de oscilador. A mayor Q mayor pureza espectral.
- El ruido de fase aumenta al aumentar la frecuencia portadora.
- El ruido de fase disminuye a razón de 6 dB/octava

# Ruido de fase en sintetizadores (IV)

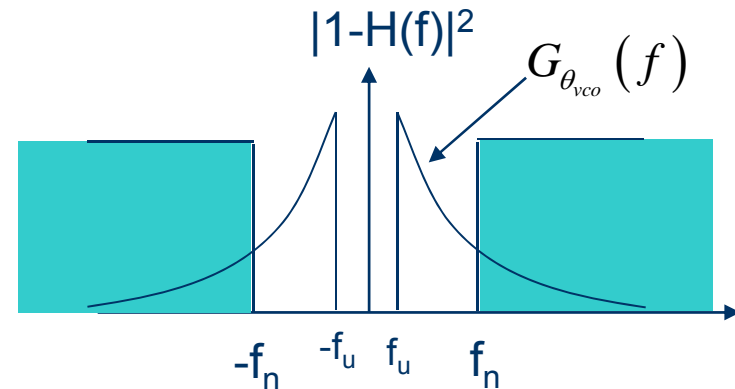
- El jitter de fase a la salida del sintetizador viene finalmente dado por:

$$\overline{\theta_o^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\theta_o}(f) df = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_{\theta_r}(f) |H(f)|^2 df + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\theta_{vco}}(f) |1-H(f)|^2 df$$

Suponiendo  $H(f)$  rectangular:



Ruido del oscilador de referencia filtrado paso bajo



Ruido del VCO filtrado paso alto

$$\overline{\theta_o^2(t)} = N^2 \frac{KT_o F_r f_r^2}{4Q_r^2 P_r} \int_{f_u}^{f_n} \frac{1}{f^2} df + \frac{KT_o F_{vco} f_{vco}^2}{4Q_{vco}^2 P_{vco}} \int_{f_n}^{\infty} \frac{1}{f^2} df$$

rad<sup>2</sup>

# Ruido de fase en sintetizadores (V)

- La pureza espectral de un sintetizador de frecuencias resulta un compromiso en la elección de  $f_n$ :
  - Para  $\Delta f < f_n$  domina el ruido de la señal de referencia
  - Para  $\Delta f > f_n$  domina el ruido de la señal del VCO

# Señales espúreas en sintetizadores (I)

- La señal a la salida de un sintetizador puede presentar un conjunto de **señales espúreas**, debidas a la presencia de señales interferentes en la señal error  $e(t)$  y cuyo origen es :
  - Rizado de la tensión de alimentación ( $f_e=50$  Hz)
  - Vestigios de la señal de referencia a la salida del detector de fase (típicamente  $f_e=f_r$ )

- Considerando:  $e(t) = V_{DC} + A_e \cos(2\pi f_e t)$

- La fase de la señal de salida es:

$$\theta_o(t) = \omega_{vco} t + K_2 \int_{-\infty}^t e(\lambda) d\lambda = \omega_{vco} t + K_2 V_{DC} t + \frac{A_e K_2}{2\pi f_e} \sin(2\pi f_e t) = \omega_1 t + \beta \sin(2\pi f_e t)$$

- Con:  $\omega_1 = \omega_{vco} + K_2 V_{DC} = N \omega_r$  FRECUENCIA GENERADA

$$\beta = \frac{A_e K_2}{2\pi f_e}$$

ÍNDICE DE MODULACIÓN FM

- Obsérvese que  $\beta$  crece al disminuir  $f_e$  y al aumentar  $K_2$ .

# Señales espúreas en sintetizadores (II)

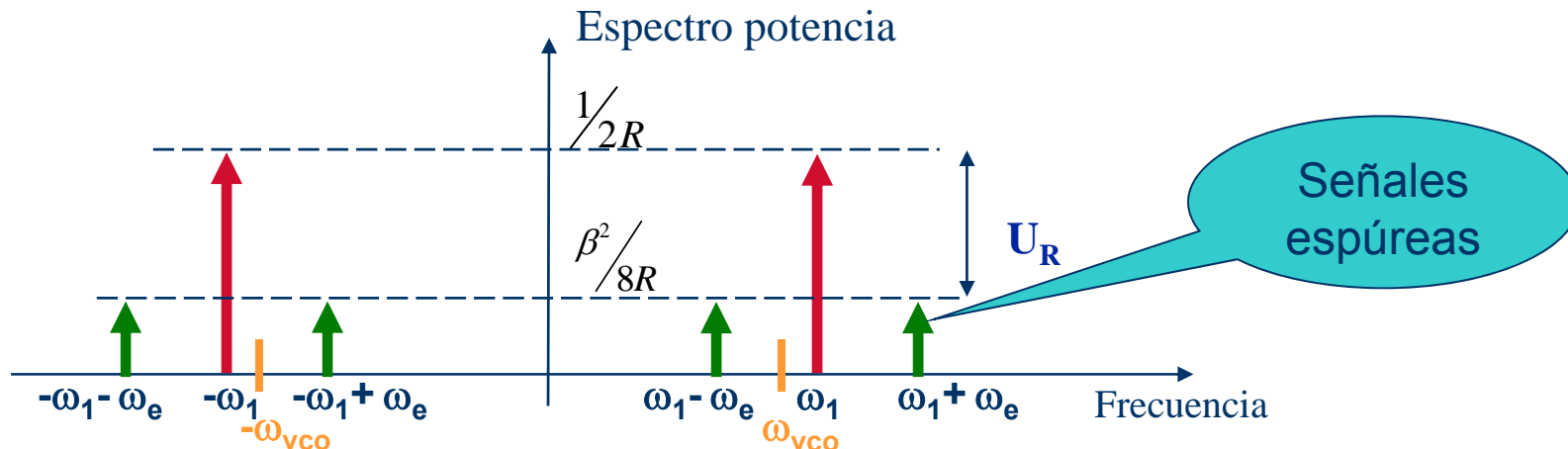
- La señal a la salida del VCO será:

$$s_0(t) = \sqrt{2} \cos\{\omega_1 t + \beta \sin(2\pi f_e t)\} = \\ = \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) \cos[\beta \sin(2\pi f_e t)] - \sqrt{2} \sin(\omega_1 t) \sin[\beta \sin(2\pi f_e t)]$$

- Si  $\beta \ll 1$  entonces:  $s_0(t) \cong \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) - \sqrt{2} [\beta \sin(2\pi f_e t)] \sin(\omega_1 t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow s_0(t) \cong \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) - \frac{\sqrt{2}\beta}{2} \cos((\omega_1 - \omega_e)t) + \frac{\sqrt{2}\beta}{2} \cos((\omega_1 + \omega_e)t)$$

- Representando el espectro de  $s_0(t)$  se tiene:





# Señales espúreas en sintetizadores (III)

- Se define el **RECHAZO DE LAS ESPÚREAS** a la salida como:

$$U_R = \frac{P_{\text{útil}}|_{\omega_1}}{P_{\text{espúreo}}|_{\omega_1 + \omega_e}} = \left( \frac{2}{\beta} \right)^2$$

$$U_R (dB) = 10 \log \left( \frac{2}{\beta} \right)^2 = 20 \log \left( \frac{2}{\beta} \right) = 20 \log \left( \frac{4\pi f_e}{A_\varepsilon K_2} \right) [dB]$$

- Obsérvese como en términos de pureza espectral del sintetizador las peores señales espúreas son aquellas de frecuencias más bajas, es decir las procedentes del rizado de la alimentación.
- Obsérvese también que si la sensibilidad del VCO es elevada la presencia de las espúreas es más importante, pues el rechazo es menor.

## Señales espúreas en sintetizadores (IV)

- **Ejemplo:** se dispone de una señal interferente de  $1\mu\text{V}$  a frecuencia 50 Hz. La constante característica del VCO es  $K_2=10\text{ MHz/V}$ . Determinar el rechazo de las espúreas a la salida.

$$\text{nota: } K_2[\text{rad/s}\cdot\text{V}] = 2\pi \cdot 10 \cdot 10^6$$

$$\beta = \frac{A_\varepsilon K_2}{2\pi f_\varepsilon} = \frac{10^{-6} \cdot 2\pi 10 \cdot 10^6}{2\pi 50} = 0.2$$

$$U_R(\text{dB}) = 20 \log\left(\frac{2}{0.2}\right) \Rightarrow U_R = 20\text{dB}$$

- Para alcanzar un nivel de rechazo típico de 60 dB se requeriría un nivel de señales interferentes tan pequeño como  $0,01\mu\text{V}$

## Resolución en frecuencia y tiempo de conmutación (I)

- Con objeto de evitar las espúreas ocasionadas por vestigios de la señal de referencia  $f_e = f_r$  se escoge siempre la frecuencia natural del PLL de tal manera que se cumpla  $f_n < f_r$  con lo que se garantiza que posibles vestigios caigan en la banda atenuada del filtro  $H(f)$ .
- Ello deriva en un compromiso entre rapidez en el cambio de frecuencias y pureza espectral. En efecto:

$$T_L \cong \frac{1}{f_n} > \frac{1}{f_r}$$

- Elevada resolución, es decir  $f_r$  pequeño implica tiempos de conmutación grandes y viceversa.
- La solución a este compromiso pasa por sofisticar los sintetizadores mediante el empleo de múltiples PLLs.

## Resolución en frecuencia y tiempo de conmutación (II)

### ● Ejemplo:

– Condición:

$$f_n \leq \frac{f_r}{10}$$



$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{AK}{N\tau_1}} \leq \frac{f_r}{10}$$

Caso peor:  $f_{n\max}$ , correspondiente a  $N=N_{\min}$

$$f_{n\max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{AK}{N_{\min}\tau_1}} = \frac{f_r}{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{AK}{\tau_1}} = \sqrt{N_{\min}} \frac{f_r}{10}$$

En este caso, la frecuencia natural puede formularse como:

$$f_n = \sqrt{\frac{N_{\min}}{N}} \frac{f_r}{10}$$

Y el tiempo de conmutación:

$$T_c = \frac{1}{f_{n\min}} = \sqrt{\frac{N_{\max}}{N_{\min}}} \frac{10}{f_r} \approx \frac{10}{f_r}$$

Para reducir el tiempo de conmutación, interesa que el rango  $N_{\max}/N_{\min}$ , que coincide con  $f_{o,\max}/f_{o,\min}$  sea lo más próximo a 1 posible.

De este modo,  $f_n \approx f_r/10$  y es prácticamente independiente de  $N$

# Resumen: criterios para elegir el valor de la frecuencia natural

- La elección de la frecuencia natural de un sintetizador finalmente resulta de considerar múltiples condiciones:

1.- Margen de lock-in:

$$\Delta\omega_L \approx 2\xi\omega_n \geq 2\pi\Delta f_{\max} = 2\pi \frac{f_{o,\max} - f_{o,\min}}{N_{\min}}$$

2.- Ruido de fase según ruido del oscilador de referencia y del VCO.

3.- Espúreas:

$$f_n \leq \frac{f_r}{10}$$

# Implementación digital de un sintetizador de frecuencias

# Implementación digital de un sintetizador (I)

- Es posible diseñar sintetizadores de frecuencia usando muestras de la señal de referencia almacenadas en una memoria ROM junto con conversores D/A.
- Si se desea sintetizar la señal  $A \cdot \sin[2\pi f_i t]$  donde  $f_i = K \cdot f_R$ , siendo  $f_R$  la resolución de la señal sintetizada.
- Sea  $f_m$  la frecuencia de muestreo y tomando como **CONDICIÓN DE DISEÑO** que sea un múltiplo entero de la resolución, entonces:

$$f_m = \frac{1}{T_m} \equiv N_A \cdot f_R \Rightarrow N_A = \frac{T_R}{T_m}$$

- Y la señal generada es:

$$v_o(mT_m) \equiv A \cdot \sin\left(2\pi K f_R mT_m\right) = A \cdot \sin\left(2\pi \frac{K \cdot m}{N_A}\right)$$

El producto  $K \cdot m$  varia entre 0 y  $(N_A - 1)$ .

Para valores mayores del producto se aplica la operación módulo  $N_A$ .

Solo hay que almacenar un número finito,  $N_A$ , de valores en una tabla (memoria ROM) y leerla secuencialmente.

# Implementación digital de un sintetizador (II)

- Memoria ROM:  $N_A$  muestras de un tono:

Pos 0	$\sin(2\pi 0/N_A)$
Pos 1	$\sin(2\pi 1/N_A)$
Pos 2	$\sin(2\pi 2/N_A)$
Pos 3	$\sin(2\pi 3/N_A)$
	...
	...
	...
Pos $N_A-1$	$\sin(2\pi (N_A-1)/N_A)$

Para generar a la salida el tono a  $f_R$  ( $K=1$ ) basta con leer secuencialmente la memoria, a cada período de muestreo:

$$\{ \sin(2\pi 0/N_A), \sin(2\pi 1/N_A), \sin(2\pi 2/N_A), \sin(2\pi 3/N_A), \dots \}$$

El caso  $K=2$  sería:  $\{ \sin(2\pi 0/N_A), \sin(2\pi 2/N_A), \sin(2\pi 4/N_A), \sin(2\pi 6/N_A), \dots \}$

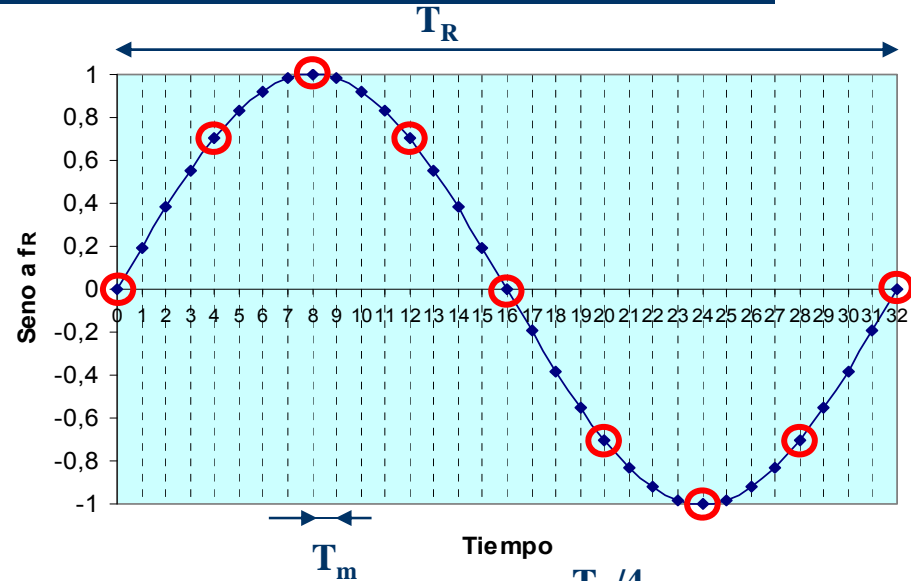
Corresponde a leer  
la ROM de 2 en 2

En general, la generación de  $Kf_R$  corresponde a leer las posiciones de la ROM de  $K$  en  $K$ .

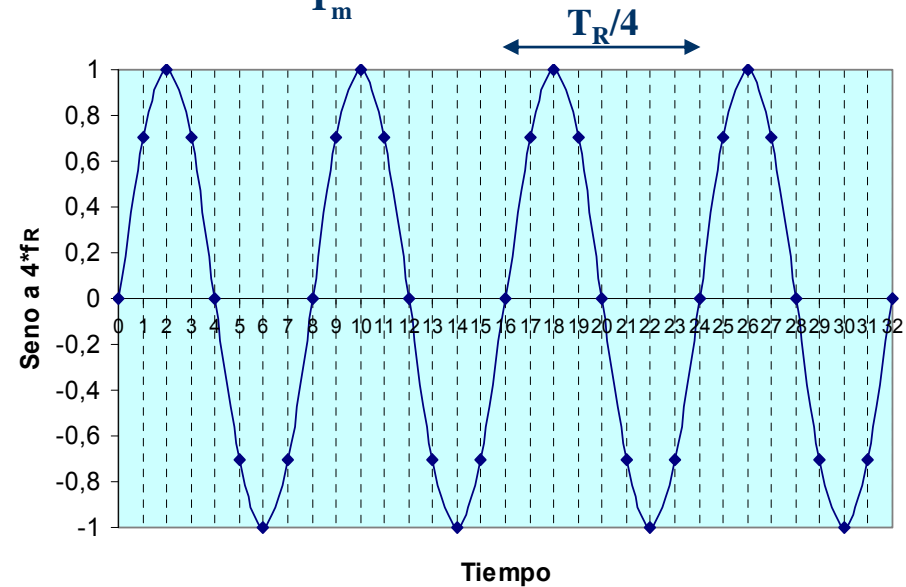


# Implementación digital de un sintetizador (III)

- Señal de referencia a  $f_R$

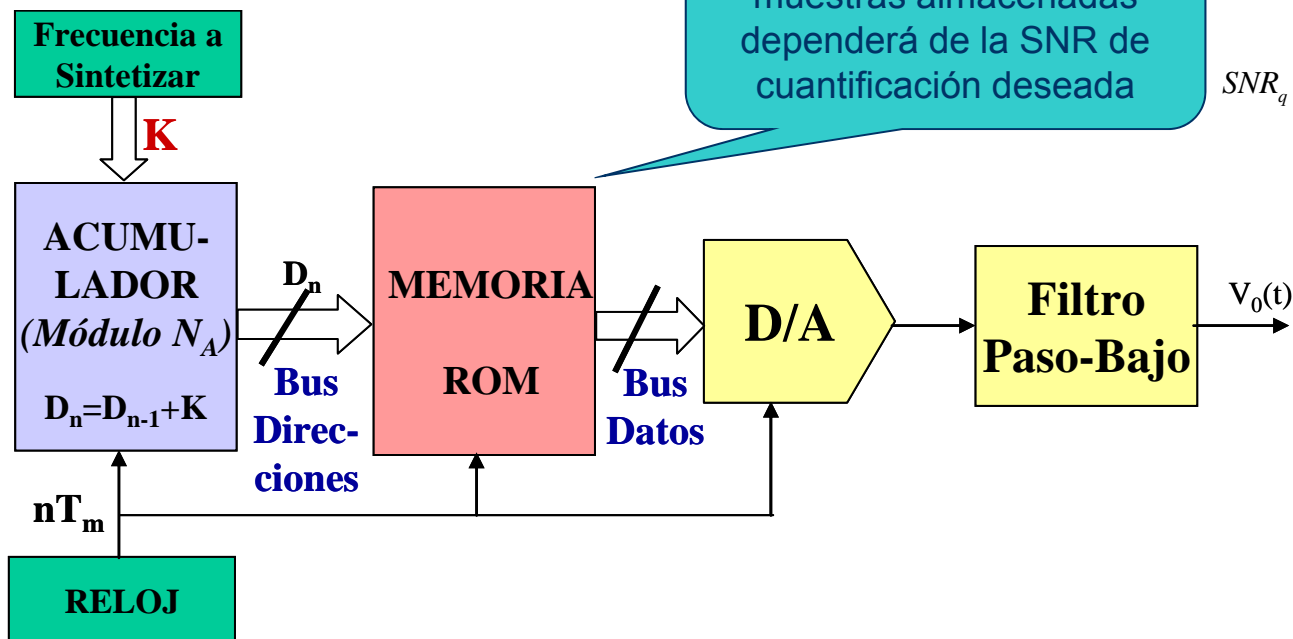


- Señal sintetizada a  $4*f_R$



# Implementación digital de un sintetizador (IV)

- Estructura del sintetizador digital:



- Ventajas:

- Permite una **alta resolución** del sintetizador con sólo disponer de un tamaño de memoria  $N_A$  suficientemente grande ( $f_R = f_m/N_A$ )
- El **tiempo de conmutación** ya **no depende de la resolución**, sino de la frecuencia de muestreo ( $T_c = 1/f_m$ ).

# Implementación digital de un sintetizador (V)

- La frecuencia máxima a sintetizar dependerá del teorema de muestreo:

$$f_i \leq \frac{f_m}{2} \Rightarrow k \cdot f_R \leq \frac{f_m}{2} \Rightarrow k \leq \frac{N_A}{2}$$

- Si se desea sintetizar:  $f_{i_{\max}} = \frac{f_m}{2} \Rightarrow k = \frac{N_A}{2}$

$$v_O(mT_m) = A \cdot \sin \left( 2\pi \frac{N_A/2}{N_A} \cdot m \right) = A \cdot \sin(\pi \cdot m) \Rightarrow \begin{cases} \sin 0 & \text{por } m=0 \\ \sin \pi & \text{por } m=1 \end{cases}$$

- La frecuencia máxima únicamente dispone de **2 muestras por período !!!**
- En la práctica se requiere un **mínimo de 4 muestras** por período, por lo que:

$$f_i \leq \frac{f_m}{4} \Rightarrow k \cdot f_R \leq \frac{f_m}{4} \Rightarrow k \leq \frac{N_A}{4}$$

$$1 \leq K \leq \left( \frac{N_A}{4} \right)$$

$$f_{i_{\max}} = \frac{N_A}{4} \cdot f_R = \frac{f_m}{4}$$

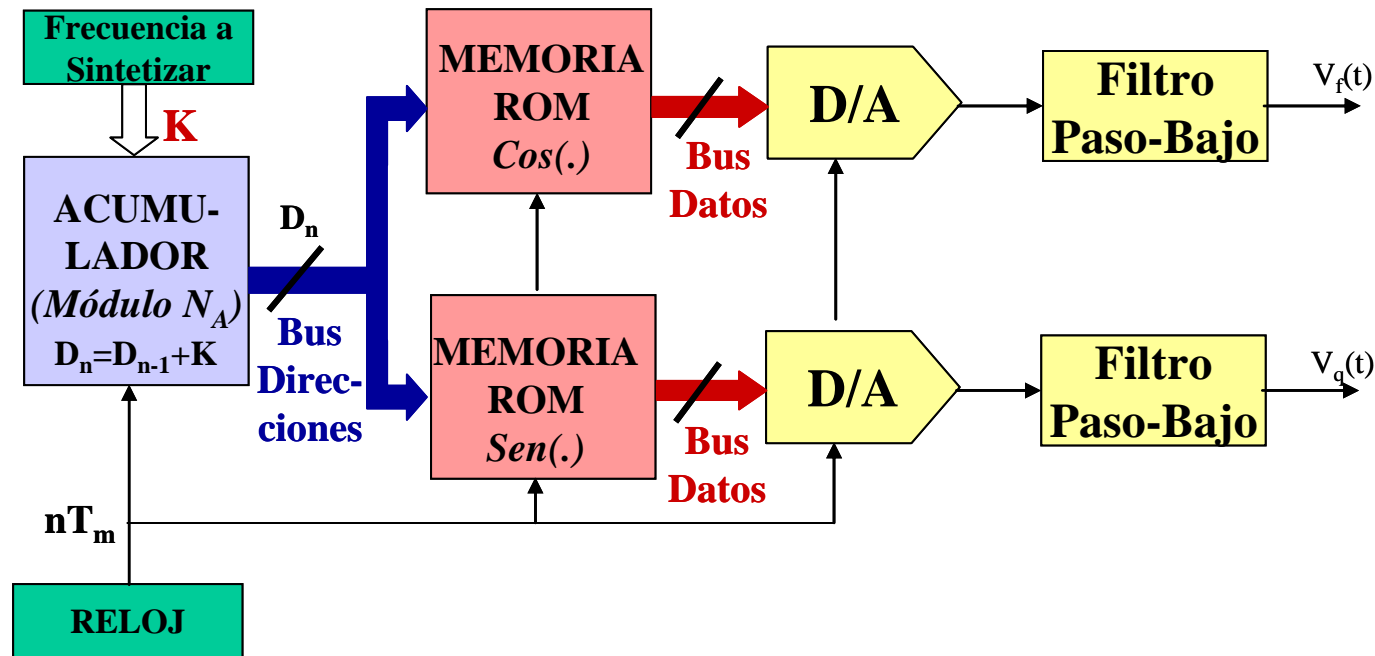
- Ejemplo:  $f_m = 1 \text{ MHz}$  y  $f_R = 10 \text{ KHz}$

$$N_A = \frac{f_m}{f_R} = 100 \text{ muestras} \Rightarrow 1 \leq k \leq \frac{100}{4} = 25$$

$$10 \text{ KHz} \leq f_i \leq 250 \text{ KHz} \Rightarrow f_{i_{\max}} = 250 \text{ KHz}$$

# Implementación digital de un sintetizador (VI)

- Un sintetizador digital puede generar **dos portadoras** en perfecta **cuadratura** con el siguiente esquema :



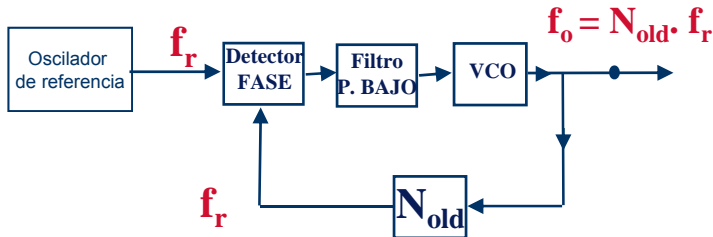
# ANEXOS

# Anexo 1: Condición de lock-in para un sintetizador indirecto

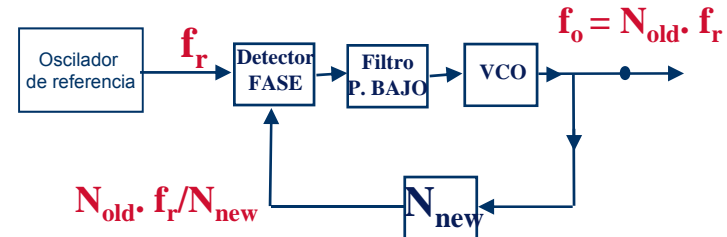
- Demostración: Considérese el salto de frecuencia al cambiar el valor del divisor programable:

- Frecuencia antigua:  $f_{old} = N_{old} f_r$
- Frecuencia nueva:  $f_{new} = N_{new} f_r$

Antes del cambio:



Justo tras el cambio:



Salto de frecuencia:

$$\Delta f = \left| f_r - \frac{N_{old}}{N_{new}} f_r \right| = \frac{|N_{new} - N_{old}|}{N_{new}} f_r$$

De la expresión del salto de frecuencia se desprende que el máximo salto se dará cuando se pasa de  $N_{old} = N_{max}$  a  $N_{new} = N_{min}$  (esto es, cuando se conmuta de la máxima a la mínima frecuencia)

$$\Delta f_{max} = \frac{N_{max} - N_{min}}{N_{min}} f_r = \frac{f_{o,max} - f_{o,min}}{N_{min}}$$



$$\Delta \omega_L \approx 2\xi \omega_n \geq 2\pi \Delta f_{max} = 2\pi \frac{f_{o,max} - f_{o,min}}{N_{min}}$$

# Anexo 2: Ruido de fase en sintetizadores

