MATEMÀTICA DISCRETA - FIB 4-4-2008
Primer examen parcial Grup 10

Una solució de l'examen

1.

(a) $\langle 0,5$ punts$\rangle$ Considereu la seqüència $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{55} \leq 100$. Proveu que existeixen dos elements tals que $a_i - a_j = 9$.

Solució: Considerem la seqüència

$$a_1, a_2, \ldots, a_{55}, a_1+9, a_2+9, \ldots, a_{55}+9.$$

Tot terme de la seqüència és positiu i menor que $a_{55}+9 \leq 109$. Atès que hi ha 110 termes, nombres enters entre 1 i 109, pel principi de les caselles han d'haver dos termes iguals. Com que $a_1 < a_2 < \cdots < a_{55}$, només poden ser iguals un a_i i un a_j+9, per a certs $i, j \in [55]$. Per tant, $a_i - a_j = 9$.

(b) $\langle 0,5$ punts$\rangle$ Digueu de quantes maneres es poden distribuir n boles diferents en k caixes idèntiques de forma que cada caixa tingui com a mínim una bola.

Solució: Si $k > n$, no hi ha cap manera possible. Suposem que $k \leq n$. Distribuir les n boles diferents en les k caixes idèntiques equival a fer una k-partició dels conjunt de les boles, per tant hi ha $\left\{ {n \atop k} \right\}$ maneres de fer-ho.

(c) $\langle 0,5$ punts$\rangle$ Demostreu la igualtat $\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$, per a tot $n \geq k \geq 2$.

Solució: Atès que $n \geq k \geq 2$ es pot aplicar a $\binom{n}{k}$, $\binom{n-1}{k}$ i $\binom{n-1}{k-1}$ la fórmula de Pascal:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\ &= \left[\binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1}\right] + \left[\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}\right] \\ &= \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}.\end{aligned}$$

(d) $\langle 0,5$ punts$\rangle$ Hi ha 10 homes, 9 dones i 5 nens a la cua d'un cine. Digueu de quantes maneres es poden col.locar 12 persones a la sala amb 12 seients numerats si hi entren 5 homes, 5 dones i 2 nens.

Solució: Es trien 5 llocs per posar-hi els homes, 5 per seure-hi les dones i 2 per als nens. Ara cal triar 5 homes d'entre 10 de forma ordenada, ja que els seients són numerats. El mateix per als nens i per a les dones. El resultat és doncs:

$$\binom{12}{5,5,2} \cdot 10^{\underline{5}} \cdot 9^{\underline{5}} \cdot 5^{\underline{2}} = \frac{12!}{5! \cdot 5! \cdot 2!} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \;\cdot\; 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \;\cdot\; 5 \cdot 4 = 152092588032000$$

(e) $\langle 0,5$ punts$\rangle$ Digueu quantes particions de $n \geq 4$ en 4 parts hi ha si sabem que hi ha exactament N particions de n tals que la part més gran és 4.

Solució: Si una partició de n en 4 parts la conjuguem obtenim una partició de n tal que la part més gran és 4, i viceversa. Per tant, hi ha tantes particions de n amb exactament 4 parts, com particions de n amb la part més gran igual a 4.

(f) $\langle 0,5$ punts$\rangle$ Doneu un conjunt tal que el seu cardinal sigui C_n, l'n-è nombre de Catalan, $n \geq 1$.

Solució: Per exemple,

$$\{(x_1, \dots, x_{2n} \in \{1,-1\}^{2n} : \sum_{i=1}^{2n} x_i = 0, \sum_{i=1}^{k} x_i \geq 0 \text{ per a tot } k \in [2n]\}.$$

(g) $\langle 0,5$ punts$\rangle$ Doneu la funció generadora ordinària de la successió recurrent $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_n + n2^n$, per a tot $n \geq 0$.

Solució: Sigui $A(x)$ la f.g.o de $(a_n)_{n\geq 0}$. Aleshores:

$$\begin{aligned} (a_{n+2})_{n\geq 0} &\longleftrightarrow (A(x) - a_0 - a_1 x)/x^2 = (A(x) - x)/x^2 \\ (n)_{n\geq 0} &\longleftrightarrow x/(1-x)^2 \\ (n2^n)_{n\geq 0} &\longleftrightarrow (2x)/(1-(2x))^2 \end{aligned}$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} (A(x) - x)/x^2 = 2A(x) + 2x/(2-2x)^2 &\longrightarrow (1-2x^2)A(x) = x + \tfrac{2x^3}{(1-2x)^2} \\ &\longrightarrow A(x) = (2x^3 + 4x^2 - 4x + 1)/(1-2x)^2(1-2x^2). \end{aligned}$$

(h) $\langle 0,5$ punts$\rangle$ Doneu la funció generadora ordinària de la successió

$$(0,0,0,1,0,7,0,49,0,343,0,\dots).$$

Solució: Observem que $49 = 7^2$ i $343 = 7^3$. Utilitzant les propietats de manipulació de funcions generadores ordinàries (substituir x per x^k i desplaçar cap a la dreta) es té:

$$\begin{aligned} (1,7,7^2,7^3,\dots) &\longleftrightarrow 1/(1-7x), \\ (1,0,7,0,7^2,0,7^3,\dots) &\longleftrightarrow 1/(1-7x^2), \\ (0,0,0,1,0,7,0,49,0,343,0,\dots) &\longleftrightarrow x^3/(1-7x^2). \end{aligned}$$

2. $\langle 2$ punts$\rangle$ Es tenen 2 tipus de segells d'un euro i 3 tipus de segells de dos euros. Determineu de quantes maneres es poden col.locar n euros en segells en un paquet postal, tenint en compte que l'ordre dels segells importa.

Solució: Sigui a_n el nombre de maneres de col.locar n euros en segells important l'ordre. Si $n = 1$ hi ha 2 maneres, tantes com segells diferents d'un euro. Si $n = 2$ hi ha 3 maneres usant els segells de dos euros i 2^2 amb els segells d'un euro. En general, per $n \geq 3$, la tira de segells pot començar per un segell d'un euro o per un de dos euros. Si comença per un dels 2 segells d'un euro, queden $n-1$ euros per col.locar a continuació, per tant, hi ha a_{n-1} maneres de fer-ho. Si es comença per un dels 3 segells de dos euros, queden $n-2$ euros per col.locar a continuació, per tant, hi ha a_{n-2} maneres de posar $n-2$ euros en segells. Així, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, per a $n \geq 3$.

Resolem la recurrència. Una manera de fer-ho es seguint els passos següents:

1-. La recurrència és lineal homogènia amb coeficients constants.

2.- $D(x) = 1 - 2x - 3x^2 = (1-3x)(1+x)$.

3.- La funció generadora associada és:

$$A(x) = \frac{P_1(x)}{D(x)} = \frac{P_1(x)}{(1-3x)(1+x)},\ P_1 \text{ polinomi de grau } \leq 1.$$

4.- Solució general: $a_n = \lambda 3^n + \beta(-1)^n$, per a tot $n \geq 1$.

5.- Solució concreta: Amb les condicions inicials $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, s'obté:

$$\left.\begin{aligned} 3\lambda - \beta &= a_1 \\ 3^2\lambda + \beta &= a_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \alpha = 3/4,\ \beta = 1/4.$$

Per tant, $a_n = (3^{n+1} + (-1)^n)/4$, per a tot $n \geq 1$.

3. $\langle$2 punts$\rangle$ Doneu la successió de la que és funció generadora ordinària la funció racional

$$\frac{3-2x+2x^2}{(1+2x)(1-x)^2}.$$

Solució: Cal primer escriure la fracció com a suma de fraccions simples:

$$\frac{3-2x+2x^2}{(1+2x)(1-x)^2} = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{(1-x)^2}.$$

Reduint a comú denominador s'obté la igualtat polinòmica:

$$\begin{array}{rcl} 3-2x+2x^2 & = & A(1-x)^2 + B(1+2x)(1-x) + C(1+2x) \\ & = & (A+B+C) + (-2A+B+2C)x + (A-2B)x^2. \end{array}$$

Igualant els coeficients dels polinomis s'obté el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3 = A+B+C \\ 2 = 2A-B-2C \\ 2 = A-2B \end{array}\right\} A=2,\ B=0,\ C=1.$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} \frac{3-2x+2x^2}{(1+2x)(1-x)^2} &= \frac{2}{1+2x} + \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= 2\sum_{n\geq 0}(-2)^n x^n + \sum_{n\geq 0}\binom{n+2-1}{n}x^n = \sum_{n\geq 0}\left(2(-2)^n + n + 1\right)x^n. \end{aligned}$$

Per tant, la successió cercada és $a_n = 1 + n - (-2)^{n+1}$, per a tot $n \geq 0$.

4. $\langle$2 punts$\rangle$ Al parlament d'un cert país hi ha 151 escons i tres partits polítics. Quantes distribucions dels escons poden haver-hi de forma que tots els partits tinguin representació i cap majoria absoluta?

Solució: Sigui x_i el nombre d'escons del partit i, $i \in [3]$. El càlcul de les distribucions de l'enunciat és equivalent a cercar el nombre de solucions enteres no negatives de $x_1+x_2+x_3 = 151$ tals que $1 \leq x_i \leq 75$, per a $i \in [3]$. (De fet n'hi ha prou en posar la condició $x_i \leq 75$, ja que si alguna x_i fos 0, alguna de les altres incògnites de l'equació hauria de valdre més de 75, i per tant el partit corresponent tindria majoria absoluta.) El nombre d'aquestes solucions és igual al cardinal del conjunt:

$$S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}^3 : x_1+x_2+x_3 = 148,\ 0 \leq x_i \leq 74, \forall i \in [3]\}.$$

Considerem el conjunts següents:

$$\begin{array}{rcl} Z & = & \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}^3 : x_1+x_2+x_3 = 148,\ x_i \geq 0, \forall i \in [3]\}, \\ A_k & = & \{(x_1,x_2,x_3) \in Z :\ x_k \geq 75\},\ k \in [3]. \end{array}$$

Així:

$$\begin{aligned} |S| &= |A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| = |Z - A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |Z| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ &= |Z| - (|A_1|+|A_2|+|A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= \binom{148+3-1}{3-1} - 3\binom{148-75+3-1}{3-1} + 3\binom{148-2\cdot 75+2}{2} - \binom{148-2\cdot 75+2}{2} \\ &= \binom{150}{2} - \binom{75}{2} + 0 - 0 = 2850. \end{aligned}$$