Departament de Teoria
del Senyal i Comunicacions
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

TEMA 5- MODULADORES Y DEMODULADORES

EMISSORS I RECEPTORS

Jordi Pérez Romero
Anna Umbert Juliana

Índice

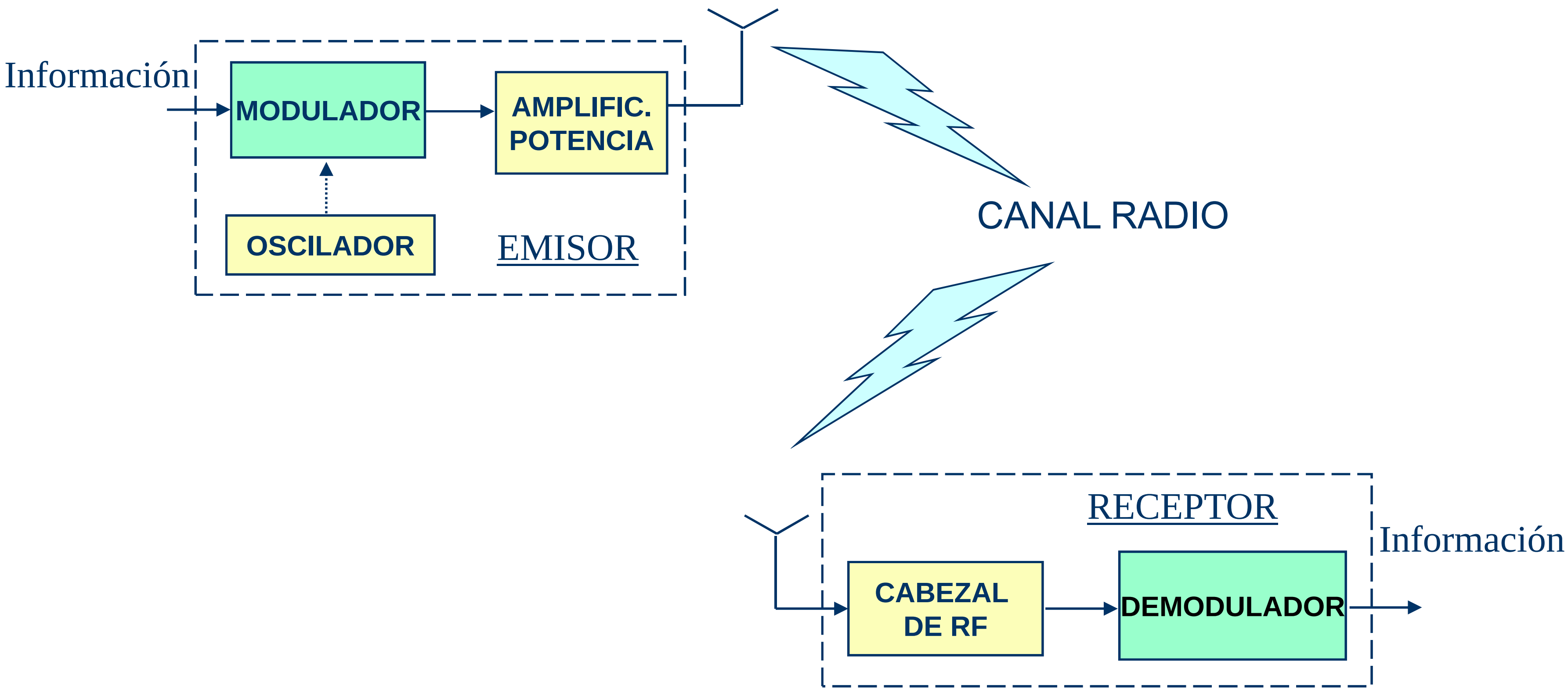
- Introducción

- Esquemas de modulación y demodulación analógicos
  - Modulador de FM
  - Demodulador de FM:
    - Demodulador no-balanceado y balanceado
    - Demodulador basado en retardo temporal
    - Demodulador basado con PLL

- Esquemas de modulación y demodulación basados en tecnología digital
  - Conceptos previos
  - Moduladores basados en tecnología digital:
    - Modulador en cuadratura
    - Modulador de FM con tecnología digital
  - Demoduladores basados en tecnología digital:
    - Extracción de componentes I-Q
    - Demodulador de envolvente con tecnología digital
    - Demodulador de frecuencia con tecnología digital

Introducción (I)

- Los emisores y receptores requieren de moduladores y demoduladores para insertar y recuperar la información de la portadora con la que viaja por el canal de comunicación.



Introducción (II)

- Las modulaciones se clasifican en dos grandes grupos:
  - MODULACIONES de AMPLITUD ⇨ la amplitud de la señal portadora varía en función de la señal moduladora. Por ejemplo:
    - AM (Amplitude Modulation)
    - ...
  - MODULACIONES ANGULARES ⇨ la fase de la señal portadora varía en función de la señal moduladora. Existen dos tipos:
    - MODULACIÓN DE FASE (PM: Phase Modulation)
    - MODULACIÓN DE FRECUENCIA (FM: Frequency Modulation)

Introducción (III)

- MODULACIÓN DE FASE (PM)
  - La información se introduce linealmente en la fase de la señal portadora:

$$v_{PM}(t) = A\cos\left(2\pi f_o t + \Phi_\Delta x\left(t\right)\right)$$

  - Siendo Φ_Δ *[rad]* la desviación de fase, que supone *x(t)* normalizada

$$\left|x(t)\right| \leq 1$$

- MODULACIÓN DE FRECUENCIA (FM)
  - La información se introduce linealmente en la frecuencia instantánea de la señal portadora:

$$v_{FM}(t) = A\cos\left(2\pi f_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x\left(\lambda\right) d\lambda\right)$$

  - Siendo f_d *[Hz]* la desviación de frecuencia, que supone *x(t)* normalizada

$$\left|x(t)\right| \leq 1$$

  - La frecuencia instantánea es:

$$\boxed{f_i(t) = f_o + f_d x(t)} \qquad f_d << f_o$$

Esquemas de modulación y demodulación analógicos

Modulador de FM (I)

- Una señal FM puede expresarse:

$$v(t) = A\cos\left(2\pi\int_{-\infty}^{t} f_i(\lambda)\,d\lambda\right) \quad \text{con} \quad f_i(t) = f_o + f_d x(t) \;\; ; \quad |x(t)| \le 1$$

- Es decir, se trata de una señal senoidal cuya frecuencia varía de forma proporcional a la señal moduladora *x(t)*
- Por consiguiente, resulta razonable considerar que, siempre que se cumplan una serie de condiciones, un posible modulador de FM puede ser un oscilador LC con capacidad que varíe linealmente con la tensión x(t).
- En efecto, supongamos un oscilador LC con una capacidad variable según:

$$C(t) = C_o + C\left[A_o + A_1 x(t)\right]$$

- La frecuencia instantánea es:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\cdot C(t)}} \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left[C_o + C\left(A_o + A_1 x(t)\right)\right]}} \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left[C_o + CA_0\right]}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{CA_1 x(t)}{C_0 + CA_0}}}$$

Modulador de FM (II)

- Denominando: $$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left[C_o + CA_o\right]}}$$ $$\frac{f_d}{f_o} = \frac{1}{2}\frac{CA_1}{C_o + CA_o}$$

- La frecuencia instantánea se expresa como:

$$f_i(t) = f_o \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{f_d}{f_o}x(t)}} \approx f_o\left[1-\frac{f_d}{f_o}x(t)+\frac{3}{2}\left(\frac{f_d}{f_o}\right)^2 x^2(t)+\ldots\right]$$

NOTA1: Se ha tomado:

$$\frac{1}{\sqrt{1+X}} \approx 1-\frac{X}{2}+\frac{3X^2}{8}+\ldots$$

- Así se puede considerar: $$f_i(t) \cong f_o + f_d x(t)$$

NOTA2: El signo de x(t) es a efectos prácticos irrelevante, y si no lo fuera, se puede solucionar mediante un inversor.

siempre y cuando se puedan ignorar los términos de orden superior del desarrollo de Taylor.

- Por ejemplo, para un error inferior al 1% deberá imponerse la condición:

$$\frac{3}{2}\left(\frac{f_d}{f_o}\right)^2 x^2(t) \leq 0.01\frac{f_d}{f_o}x(t) \Rightarrow \boxed{f_o \geq 150 f_d}$$

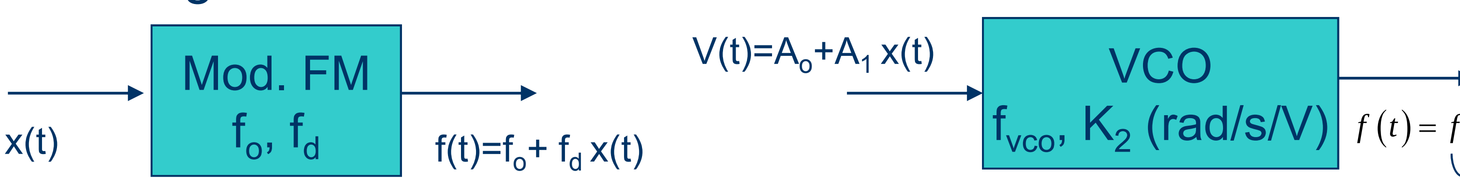
(por convenio $|x(t)| \leq 1$)

Modulador de FM (III)

- Hay diversos procedimientos para obtener una capacidad variable controlada por la señal moduladora.
- Uno de ellos es mediante componentes específicos, como son los diodos VARICAP, que presenta una capacidad variable dependiendo de la tensión aplicada al diodo V(t)

$$C(t) = C_o + C \cdot V(t)$$

- Tomando la tensión $V(t)=A_o+A_1x(t)$, con $|x(t)|\leq 1$, se puede ajustar el valor de A_o de acuerdo con el valor de frecuencia portadora f_o y el de A_1 de acuerdo con la desviación de frecuencia f_d.
- Obsérvese que esta implementación de un modulador de FM es análoga a la de un VCO:



$$f(t) = \underbrace{f_{vco} + \frac{K_2 A_o}{2\pi}}_{f_o} + \underbrace{\frac{K_2 A_1}{2\pi}}_{f_d} x(t)$$

Demodulador de FM

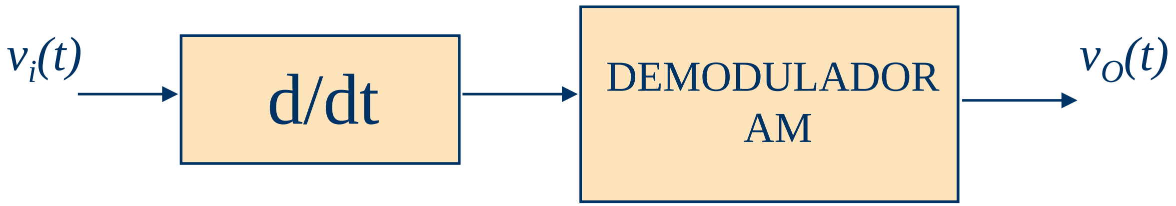
- Para un demodulador de FM la señal de entrada será:

$$v_i(t) = A\cos\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda\right)$$

- Si se deriva se obtiene:

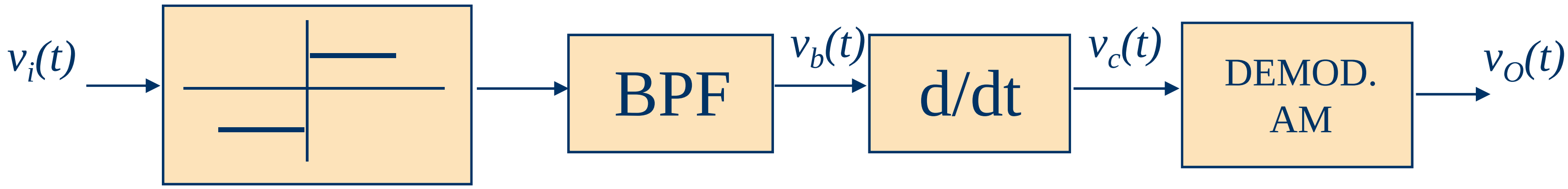
$$\frac{dv_i(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -A\left[\omega_o + 2\pi f_d x(t)\right]\mathrm{sen}\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda\right)$$

- Que es una señal modulada en AM, por lo que teóricamente se puede extraer la información de una señal modulada en FM con un esquema formado por un derivador y un demodulador de AM:



Demodulador no-balanceado (I)

- Para que el esquema anterior funcione correctamente es necesario que la amplitud de la señal de entrada *A* sea constante, en caso contrario sus variaciones se confundirían con la información que se quiere recuperar.
- Habitualmente la amplitud de la señal de entrada variará debido a la características propias del canal radio, por lo que se debe añadir un circuito LIMITADOR antes del demodulador.
- Dado que los limitadores son dispositivos no lineales es preciso un filtro pasa banda sintonizado a la frecuencia portadora a la salida del limitador.
- Esta estructura da lugar al DEMODULADOR DE FM NO-BALANCEADO:



Demodulador no-balanceado (II)

- Considerando la señal a la entrada como:

$$v_i(t) = B'\left[1+\varepsilon(t)\right]\operatorname{sen}\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda\right)$$

- En realidad no se puede conseguir una característica no lineal ideal, y por tanto a la salida de la etapa limitadora aparecerán unas variaciones de amplitud residuales ($\varepsilon_1(t) << 1$) mucho menores que las originales.

- Así pues la salida del filtro paso banda será:

$$v_b(t) = B\left[1+\varepsilon_1(t)\right]\operatorname{sen}\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda\right)$$

- Y al derivar se tendrá:

$$v_c(t) = 2\pi B\left[f_o + f_d x(t)\right]\left[1+\varepsilon_1(t)\right]\cos\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda\right) + B\frac{d\varepsilon_1(t)}{dt}\operatorname{sen}\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda\right)$$

Demodulador no-balanceado (III)

- Dado que $\frac{d\varepsilon_1(t)}{dt} \approx 0$ podemos despreciar el segundo término, por lo que a la salida del demodulador la señal será:

$$v_o(t) \approx 2\pi B\left[f_o + f_d x(t)\right]\left[1+\varepsilon_1(t)\right] = 2\pi B f_o\left[1+\varepsilon_1(t)+\frac{f_d}{f_o}x(t)+\cancel{\frac{f_d}{f_o}x(t)\varepsilon_1(t)}\right]$$

despreciable

- Y la salida del demodulador de FM no-balanceado será:

$$\boxed{v_o(t) \approx 2\pi B f_o\left[1+\varepsilon_1(t)+\frac{f_d}{f_o}x(t)\right]}$$

- Por lo que aunque $\varepsilon_1(t) << 1$, si $\frac{f_d}{f_o} << 1$ como es habitual, la información $x(t)$ estará enmascarada por la envolvente residual $\varepsilon_1(t)$ y no se podrá detectar la información !!!!

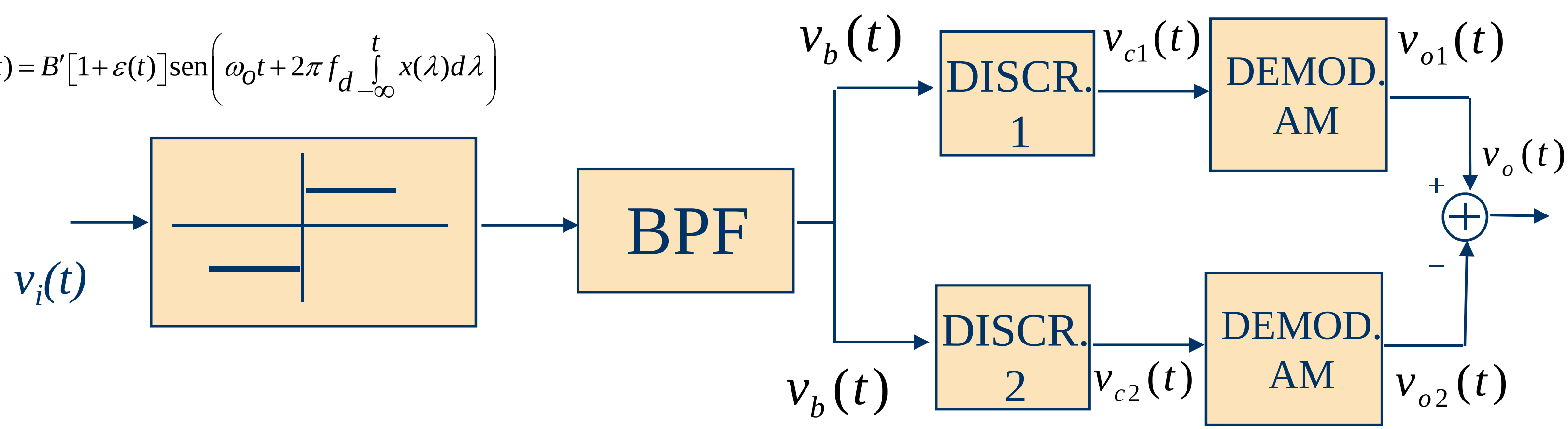
Demodulador balanceado (I)

- Para solucionar el problema de la envolvente residual la mayoría de demoduladores de FM son balanceados.
- La característica principal de un demodulador balanceado es:

$x(t)=0 \Rightarrow v_o(t)=0$ Si no hay señal moduladora, la salida es nula.

- Estructura de un DEMODULADOR DE FM BALANCEADO:

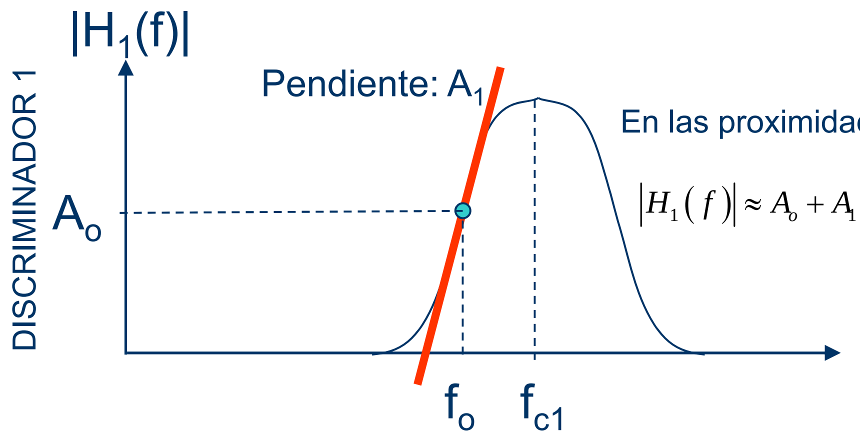
$$v_i(t)=B'[1+\varepsilon(t)]\operatorname{sen}\left(\omega_o t+2\pi f_d\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right)$$



$$v_b(t)=B[1+\varepsilon_1(t)]\operatorname{sen}\left(\omega_o t+2\pi f_d\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right)$$

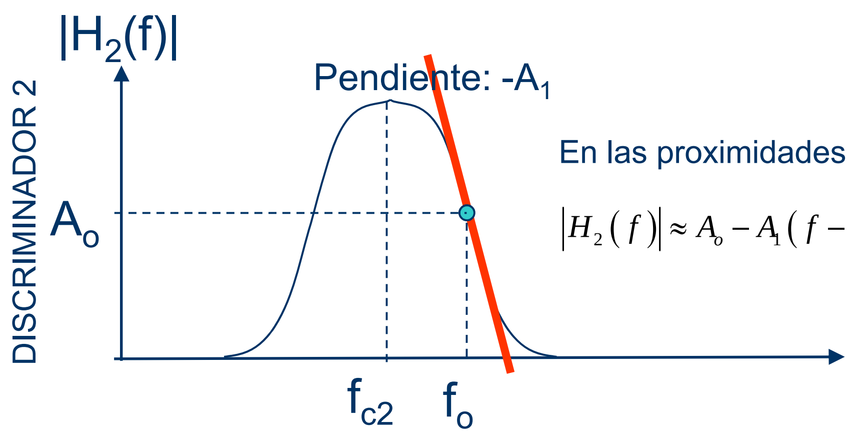
Demodulador balanceado (II)

- Implementación de los discriminadores: circuitos resonantes RLC, tales que la variación de la frecuencia instantánea alrededor de f_o esté dentro de las bandas de transición de los filtros:



En las proximidades de f_o

$$|H_1(f)| \approx A_o + A_1(f - f_o)$$



En las proximidades de f_o

$$|H_2(f)| \approx A_o - A_1(f - f_o)$$

Salida rama superior:

$$v_{c1}(t) \approx B(1+\varepsilon_1(t))|H_1(f_i(t))|\sin\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda + \theta_1\right)$$

$$f_i(t) = f_o + f_d x(t)$$

$$v_{o1}(t) \approx B(1+\varepsilon_1(t))|H_1(f_i(t))| \approx B(1+\varepsilon_1(t))(A_o + A_1(f_o + f_d x(t) - f_o))$$

$$\boxed{v_{o1}(t) \approx B(1+\varepsilon_1(t))(A_o + A_1 f_d x(t))}$$

Salida rama inferior:

$$v_{c2}(t) \approx B(1+\varepsilon_1(t))|H_2(f_i(t))|\sin\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda + \theta_2\right)$$

$$v_{o2}(t) \approx B(1+\varepsilon_1(t))|H_2(f_i(t))| \approx B(1+\varepsilon_1(t))(A_o - A_1(f_o + f_d x(t) - f_o))$$

$$\boxed{v_{o2}(t) \approx B(1+\varepsilon_1(t))(A_o - A_1 f_d x(t))}$$

Demodulador balanceado (III)

- De modo que la salida del demodulador será:

$$v_o(t) = v_{o1}(t) - v_{o2}(t) \approx B\left(1+\varepsilon_1(t)\right)\left(A_o + A_1 f_d x(t)\right) - B\left(1+\varepsilon_1(t)\right)\left(A_o - A_1 f_d x(t)\right)$$

$$\boxed{v_o(t) \approx 2\,B(1+\varepsilon_1(t))\,A_1\,f_d\,x(t)}$$

- Por lo que el error residual se traduce únicamente en una pequeña variación de amplitud sobre x(t), pero no enmascara a esta señal, a diferencia del caso no balanceado.
- Importante: los dos discriminadores deben estar bien ajustados.

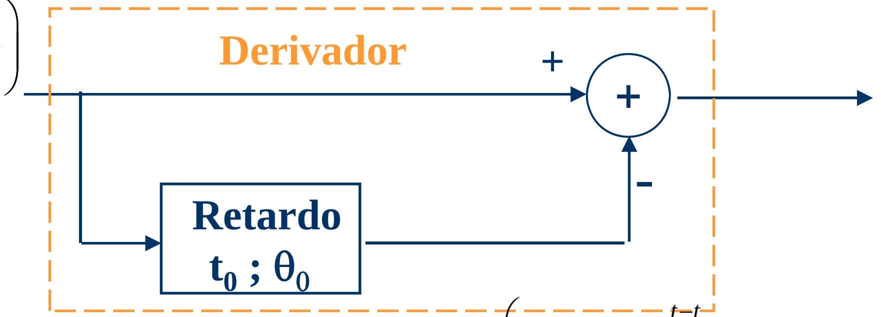
Demodulador basado en retardo temporal (I)

- Los demoduladores de FM están basados en un derivador.
- Para diseñar un derivador puede recurrirse a la definición de derivada:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lim_{t_o \to 0} \frac{v(t) - v(t - t_o)}{t_o}$$

- Por lo tanto, si tomamos un retardo t_o lo suficientemente pequeño, se puede implementar el derivador con una línea de retardo.

$$v_i(t) = A\cos\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda \right)$$

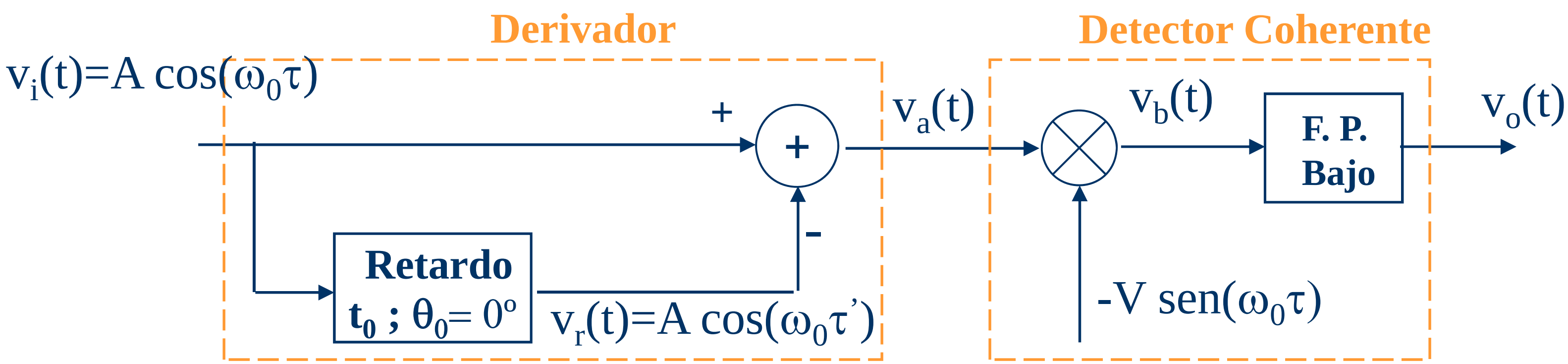


$$v_r(t) = A\cos\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t-t_o} x(\lambda) d\lambda \underbrace{- \omega_o t_o + \varphi}_{-\theta_o} \right)$$

La línea de retardo, en general, además de retardar introducirá un desfase φ.

Demodulador basado en retardo temporal (II)

- Vamos a analizar un demodulador de FM basado en retardo temporal y con detección coherente de la envolvente:



$$v_i(t) = A\cos\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda\right) \equiv A\cos(\omega_o \tau) \quad \Rightarrow \quad \tau = t + \frac{f_d}{f_o}\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda$$

$$v_r(t) = A\cos\left(\omega_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t-t_o} x(\lambda)d\lambda - \theta_o\right) \equiv A\cos(\omega_o \tau') \quad \Rightarrow \quad \tau' = t + \frac{f_d}{f_o}\int_{-\infty}^{t-t_o} x(\lambda)\,d\lambda$$

$\theta_0 = 0^o$

- Deberá determinarse el máximo valor de t_o que permita que el circuito funcione razonablemente bien como derivador.

Demodulador basado en retardo temporal (III)

- Así: $$v_a(t)=A\left[\cos\left(\omega_o\tau\right)-\cos\left(\omega_o\tau'\right)\right]$$

- Al pasar por el multiplicador del detector coherente:

$$v_b(t)=-AV\left[\cos\left(\omega_o\tau\right)-\cos\left(\omega_o\tau'\right)\right]sen\left(\omega_o\tau\right)=$$
$$=-\frac{AV}{2}sen\left(2\omega_o\tau\right)+\frac{AV}{2}sen\left(\omega_o(\tau+\tau')\right)+\frac{AV}{2}sen\left(\omega_o(\tau-\tau')\right)$$

- Sustituyendo τ y τ':

$$v_b(t)=\overbrace{-\frac{AV}{2}sen\left(2\omega_o t+4\pi f_d\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right)+\frac{AV}{2}sen\left(2\omega_o t+2\pi f_d\left[\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda+\int_{-\infty}^{t-t_o}x(\lambda)d\lambda\right]\right)}^{\text{Términos a }2f_o}+$$
$$\underbrace{+\frac{AV}{2}sen\left(2\pi f_d\left[\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda-\int_{-\infty}^{t-t_o}x(\lambda)d\lambda\right]\right)}_{\text{Término a baja frecuencia}}$$

Demodulador basado en retardo temporal (IV)

- A la salida del filtro paso bajo:

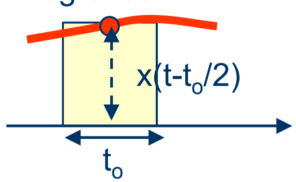
$$v_o(t)=\frac{AV}{2}sen\left(2\pi f_d\int_{t-t_o}^{t}x(\lambda)d\lambda\right)$$

- <u>CONDICIONES:</u>

1. Si la frecuencia máxima f_m de la señal moduladora x(t) cumple:

$$f_m \le \frac{1}{\pi t_o} \Rightarrow \boxed{t_o \le \frac{1}{\pi f_m}}$$

Equivalentemente, quiere decir que x(t) varía muy lentamente en un intervalo t_o, de modo que la integral se aproxima por un rectángulo:



Entonces:

$$\boxed{\int_{t-t_o}^{t}x(\lambda)d\lambda \approx t_o x\left(t-\left(\frac{t_0}{2}\right)\right)} \Rightarrow v_o(t)\approx\frac{AV}{2}sen\left(2\pi f_d t_o x\left(t-t_o/2\right)\right)$$

2. Si se cumple la condición:

$$\boxed{\sin(\alpha)\approx\alpha \quad si\ \alpha\le 0.2} \qquad 2\pi f_d t_o \le 0.2 \Rightarrow \boxed{t_o \le \frac{1}{10\pi f_d}}$$

Entonces: $$\boxed{v_o(t)\approx AV\pi f_d t_o x(t-\tfrac{t_o}{2})}$$

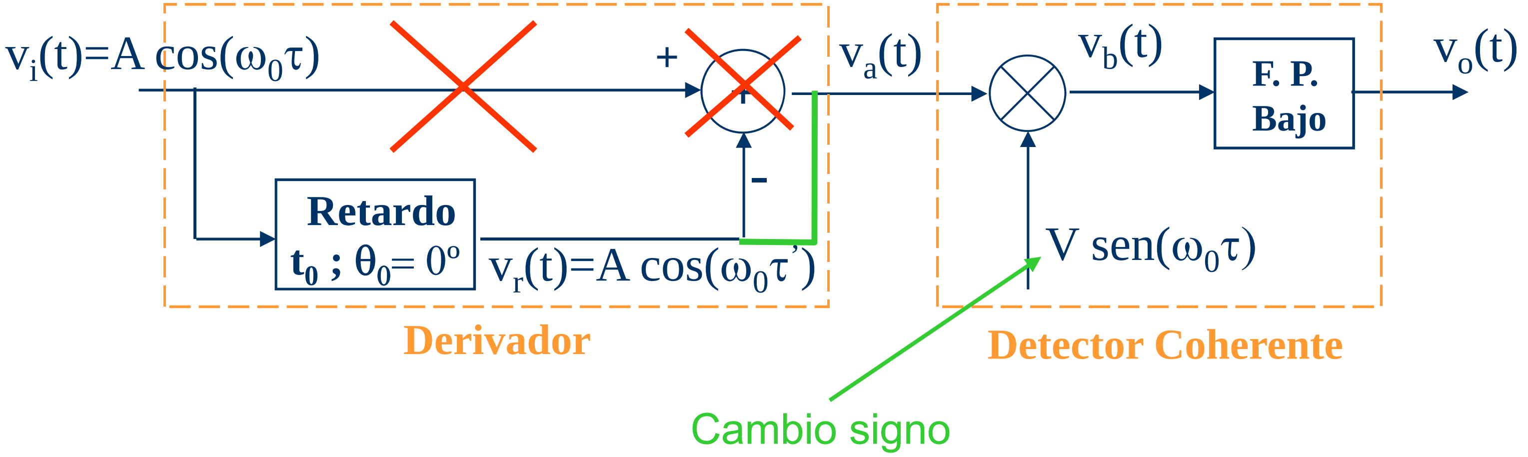
Recuperamos x(t) y es un demodulador balanceado!

Demodulador basado en retardo temporal (V)

- OBSERVACIÓN 1: la rama superior del circuito derivador no contribuye a la tensión de salida $v_O(t)$. En efecto, esta rama crea el término $\cos(\omega_o\tau).\mathrm{sen}(\omega_o\tau)$ cuyo espectro está centrado en $2f_o$ y por lo tanto será filtrado:

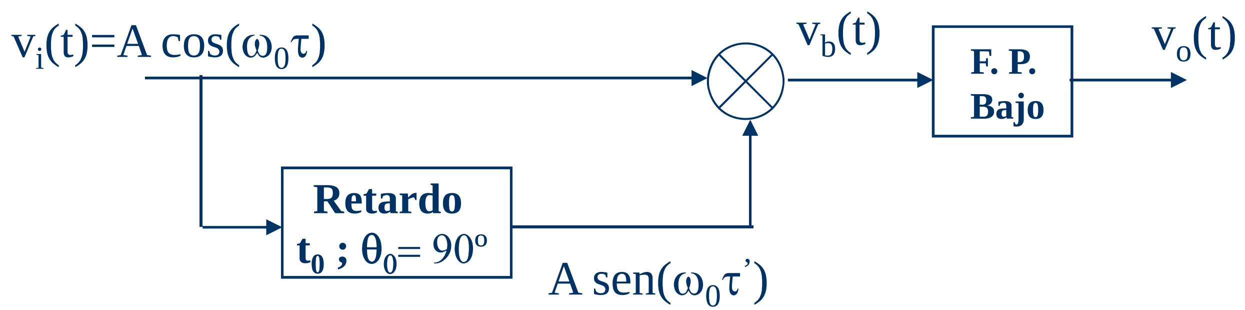
$$-AV\cos(\omega_o\tau)sen(\omega_o\tau) = -\frac{AV}{2}sen\left(2\omega_o t + 4\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda\right)$$

- Por consiguiente se puede eliminar esta rama:



Demodulador basado en retardo temporal (VI)

- OBSERVACIÓN 2: las señales implicadas en el proceso de multiplicación, previo a la obtención de la señal $v_b(t)$, están en cuadratura. Por consiguiente, si la red de retardo introduce además un desfase de 90º, se puede utilizar la propia señal a demodular para generar la portadora local necesaria en el proceso de detección coherente, tal como se indica en el diagrama de bloques siguiente:

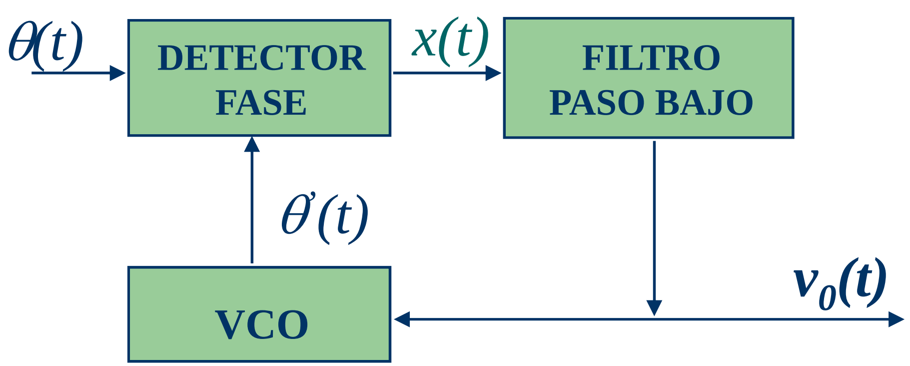


$$\boxed{v_o(t) = A^2\pi\, f_d t_o x(t - \tfrac{t_o}{2})}$$

Obsérvese la extrema sencillez del circuito, que permite reducir la complejidad del circuito derivador a una simple red de retardo, y además permite conseguir una demodulación coherente sin requerir de un circuito PLL.

Demodulador de FM con PLL (I)

- Un PLL puede usarse como demodulador de FM ya que la información a recuperar se encuentra en las variaciones de la frecuencia de la señal recibida.



$$\theta(t) = 2\pi f_o t + \theta_1(t) = 2\pi f_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} y(\lambda)d\lambda$$

$$\theta^{'}(t) = 2\pi f_o t + \theta_2(t)$$

$$\phi(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$$

$$x(t) = AK_1 \operatorname{sen}\{\phi(t)\} \xrightarrow{\text{Seguimiento}} x(t) \approx AK_1\phi(t)$$

$$v_o(t) = AK_1\{\phi(t) * f(t)\}$$

Demodulador de FM con PLL (II)

- Tomando la Transformada de Laplace

$$V_0(s) \equiv AK_1\phi(s)F(s) = \frac{AK_1F(s)}{s + AKF(s)} s\theta_1(s) = \frac{1}{K_2} H(s) \cdot \left\{ s\theta_1(s) \right\}$$

(ver tema 4)

$$\boldsymbol{\phi(s) = \frac{s\theta_1(s)}{s + AKF(s)}}$$

- Recordando que:

$$\theta_1(t) = 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} y(\lambda).d\lambda$$

$$s\theta_1(s) = \pounds\left[\frac{d\theta_1(t)}{dt}\right] = \pounds\left[2\pi f_d y(t)\right] \equiv 2\pi f_d Y(s)$$

- resulta:

$$V_o(s) = \frac{2\pi f_d}{K_2} H(s)Y(s)$$

Demodulador de FM con PLL (III)

- Modelo equivalente del demodulador mediante PLL

$$\mathbf{y(t)} \longrightarrow \boxed{\frac{2\pi f_d}{K_2} H(s)} \longrightarrow \mathbf{V_0(t)}$$

- Con un PLL de 2º orden, para evitar distorsión se debe cumplir:

$$\boxed{f_n > BW_{y(t)}}$$

donde BW_y(t) es el ancho de banda de la señal moduladora

- Para garantizar que el PLL llega a la fase de seguimiento:

$$\Delta\omega_L = 2\xi\omega_n \geq 2\pi f_d \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f_n \geq \frac{f_d}{2\xi}}$$

Si se cumplen ambas condiciones, entonces la señal a la salida del PLL es:

$$\boxed{v_o(t) = \frac{2\pi f_d}{K_2} y(t)}$$

Es decir, se trata de un demodulador balanceado.

Esquemas de modulación y demodulación basados en tecnología digital

Conceptos previos: componentes I-Q (I)

- Una señal modulada paso-banda puede representarse de forma genérica como:

$$s(t) = a(t).\cos\left(\omega_o t + \varphi(t)\right)$$

- Ejemplos:

	a(t)	φ(t)
AM	A[1+mx(t)]	Φ
FM	A	$2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda + \Phi$
ASK	$A \cdot \sum_k \alpha_k \, rect_T(t - kT);\ \alpha_k \in \{1,0\}$	Φ
QPSK rectang.	$\sqrt{2} A$	$\sum_k \frac{\pi}{4} \alpha_k \, rect_T(t - kT);$ $\alpha_k \in \{\pm 1, \pm 3\}$
QPSK Confor.	$\sqrt{2} A \cdot \sum_k p(t - kT)$	$\sum_k \frac{\pi}{4} \alpha_k \, rect_T(t - kT);$ $\alpha_k \in \{\pm 1, \pm 3\}$

Conceptos previos: componentes I-Q (II)

- La señal s(t) puede descomponerse como:

$$s(t)=a(t)\cos\varphi(t)\cos(\omega_o t)-a(t)\sin\varphi(t)\sin(\omega_o t)\equiv I(t)\cos(\omega_o t)-Q(t)\sin(\omega_o t)$$

donde I(t) y Q(t) son las componentes en fase y en cuadratura de la envolvente compleja de la señal modulada.

$$\boxed{I(t)=a(t)\cos\varphi(t)} \qquad \boxed{Q(t)=a(t)\sin\varphi(t)}$$

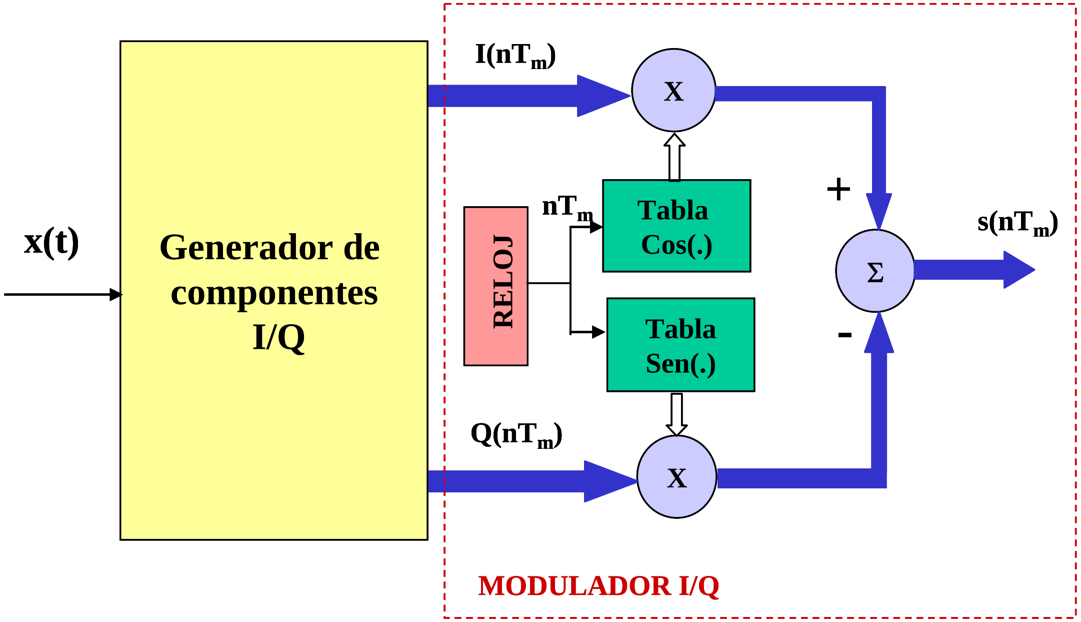
- EQUIVALENTE PASO BAJO (=ENVOLVENTE COMPLEJA) de s(t):

$$\boxed{\tilde{s}(t)=I(t)+jQ(t)=a(t)e^{j\varphi(t)}} \qquad \boxed{s(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{s}(t)e^{j\omega_o t}\right]}$$

- Si se conocen las componentes I/Q de una modulación es muy sencillo implementar un modulador genérico basado en multiplicarlas por un seno y un coseno obtenidos de una memoria ROM (MODULADOR EN CUADRATURA).

Modulador en cuadratura (I)

- Estructura de un modulador en cuadratura:



- Si se elige el valor de la frecuencia de muestreo f_m tal que: $f_o = \dfrac{f_m}{M} = \dfrac{1}{M \cdot T_m}$
- La expresión de la señal modulada resulta:

$$s_m(nT_m) = I(nT_m)\cdot\cos\left[2\pi f_o nT_m\right] - Q(nT_m)\cdot\mathrm{sen}\left[2\pi f_o nT_m\right] \equiv I(nT_m)\cdot\cos\left[2\pi\frac{n}{M}\right] - Q(nT_m)\cdot\mathrm{sen}\left[2\pi\frac{n}{M}\right]$$

Modulación en cuadratura (II)

- En el caso particular de que la frecuencia de muestreo sea cuatro veces la frecuencia portadora (M=4), entonces:

$$\cos\left[2\pi\frac{n}{M}\right]=\cos\left[\frac{\pi}{2}n\right]\equiv\begin{cases}(-1)^{n/2} & si \quad n\ par\\ 0 & si \quad n\ impar\end{cases}$$

Salida rama superior:

$I(2nT_m)$, 0, $-I((2n+2)T_m)$, 0, $I((2n+4)T_m)$, 0,...,

$$\text{sen}\left[2\pi\frac{n}{M}\right]=\text{sen}\left[\frac{\pi}{2}n\right]\equiv\begin{cases}(-1)^{(n-1)/2} & si \quad n\ impar\\ 0 & si \quad n\ par\end{cases}$$

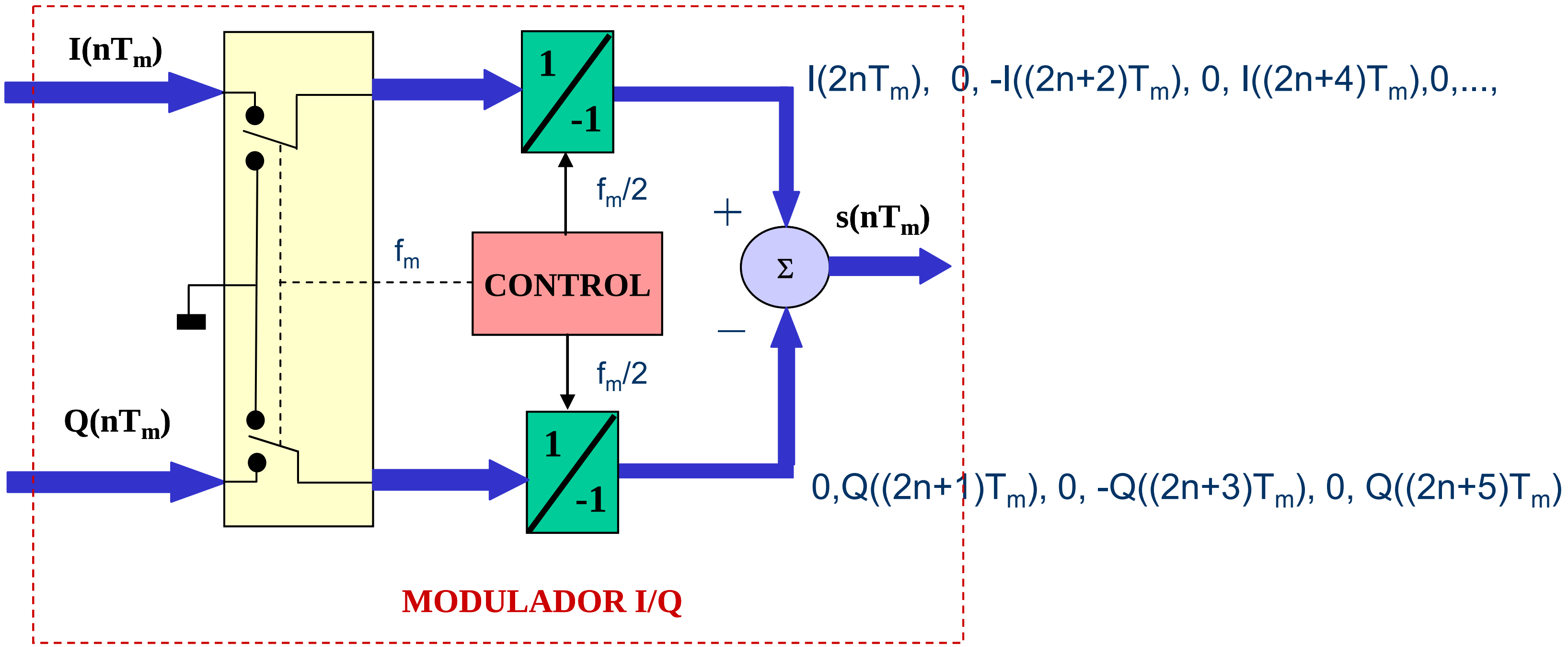
Salida rama inferior:

0, $Q((2n+1)T_m)$, 0, $-Q((2n+3)T_m)$, 0, $Q((2n+5)T_m)$, ...

- De modo que pueden eliminarse los multiplicadores digitales puesto que las señales I(t) y Q(t) quedan multiplicadas por +1, -1 ó 0.

Modulación en cuadratura (III)

- La estructura simplificada para M=4 es:



Modulador de FM con tecnología digital (I)

- Se trata de implementar digitalmente la señal:

$$s(t) = A\cos\left(2\pi\int_{-\infty}^{t} f_i(\lambda)d\lambda\right) \qquad f_i(t) = f_o + f_d x(t)$$

- Se puede implementar mediante un oscilador digital basado en una memoria ROM cuya frecuencia instantánea fuera:

$$f_i(nT_m) = f_o + f_d x(nT_m) = \left(K_o + K_d x(nT_m)\right) f_R$$

- Consiste en almacenar en una tabla de memoria N_A valores muestreados del período de un tono. Es decir:

$$v_O(nT_m) = \cos\left(2\pi\frac{n}{N_A}\right) \qquad 0 \le n \le N_A - 1 \qquad f_m = N_A f_R$$

- Para generar una señal a frecuencia f_i=Kf_R, con K entero, basta con leer la tabla en pasos (saltos) de K posiciones.
- Así, para generar una señal de FM basta con leer la tabla en pasos de :

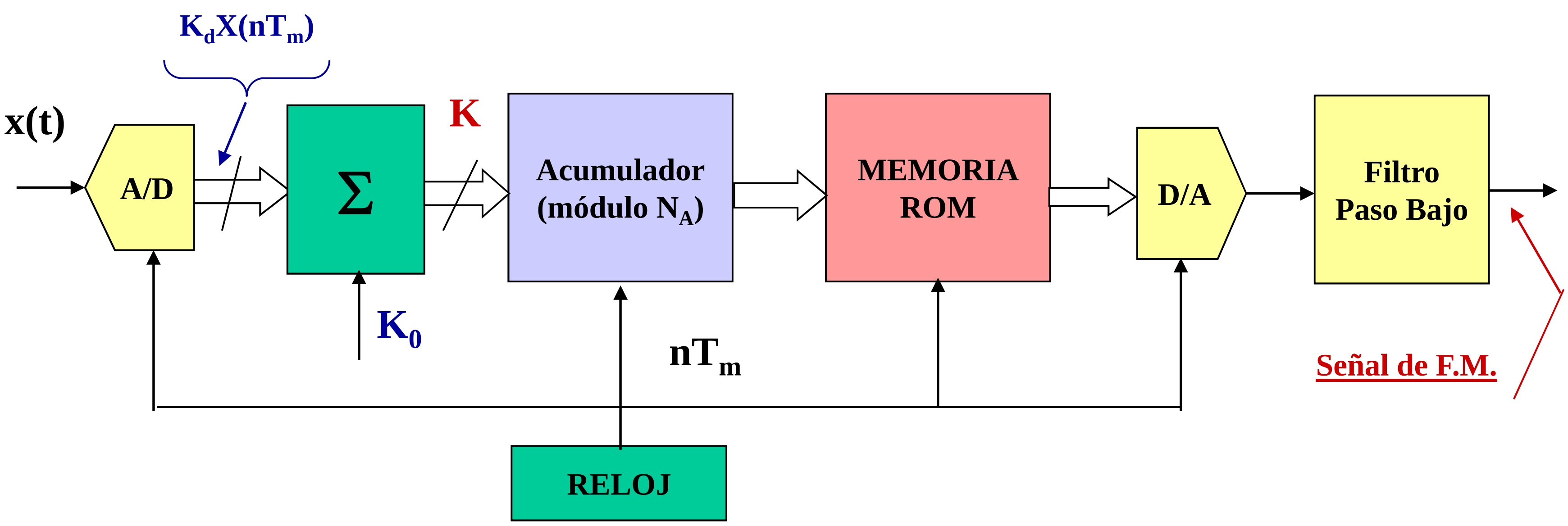
$$\boxed{K = K_o + K_d x(nT_m)}$$

donde:

- K_0 determina la frecuencia portadora
- K_d determina la desviación de frecuencia

Modulador de FM con tecnología digital (II)

- Estructura del modulador de FM:



Extracción de componentes I-Q (I)

- Para recuperar la información de una señal modulada se deben extraer las componentes I-Q en el receptor.
- Dicha extracción puede realizarse en la parte analógica (Conversión Directa) o bien tras la digitalización de la señal (Extracción digital).

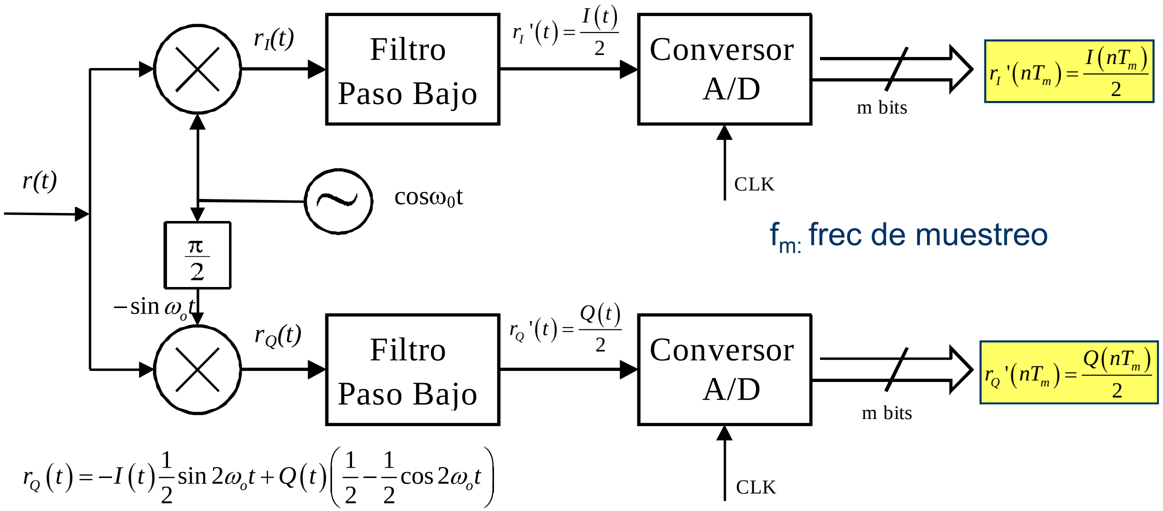
CONVERSIÓN DIRECTA:

- La señal paso-banda recibida se puede caracterizar por:

$$r(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{r}(t).e^{j\omega_o t}\right] = \mathrm{Re}\left[(I(t)+jQ(t))e^{j\omega_o t}\right] = I(t)\cos\omega_o t - Q(t)\sin\omega_o t$$

- El esquema del extractor de componentes I/Q vendrá dado por:

$$r_I(t) = I(t)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\omega_o t\right) - Q(t)\frac{1}{2}\sin 2\omega_o t$$



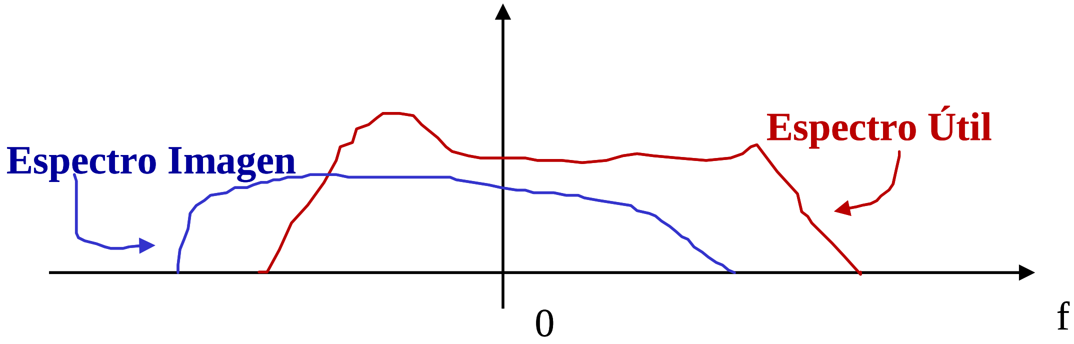
f_m: frec de muestreo

$$r_Q(t) = -I(t)\frac{1}{2}\sin 2\omega_o t + Q(t)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\omega_o t\right)$$

Extracción de componentes I-Q (II)

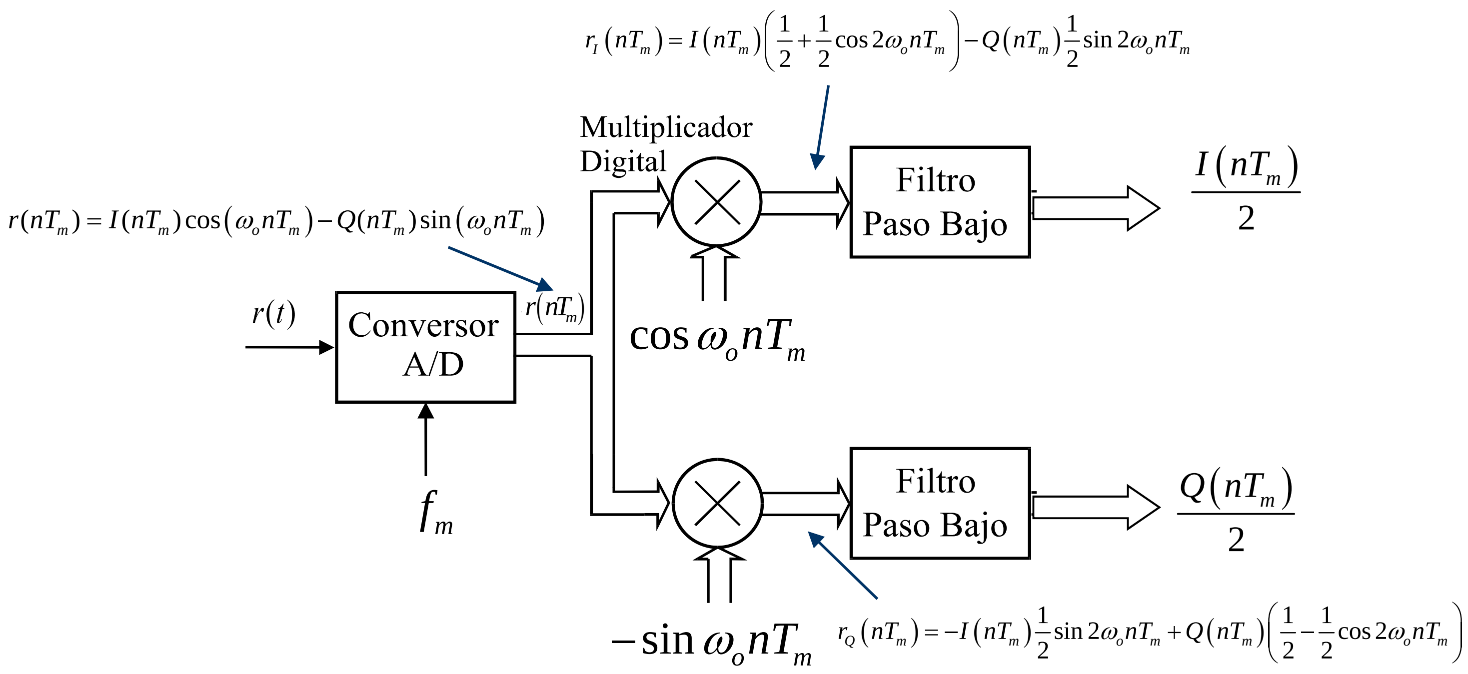
Inconvenientes:

- Portadora generada localmente diferente de la portadora recibida
- Elevadas exigencias por lo que respecta al hardware:
  - Dos canales completos con características similares de ganancia y fase en toda la banda de la señal
  - Componentes analógicos utilizados en cada canal (mezcladores, filtros, conversores A/D) diferentes ⇨ Respuesta frecuencial global de cada canal diferente
- La presencia de desequilibrios de amplitud y fase entre ambas ramas da lugar a la aparición de un espectro imagen superpuesto a la señal útil demodulada, tal como se muestra en la figura.



Extracción digital de componentes I-Q (I)

- Para cancelar los efectos de la señal imagen inherentes al sistema de conversión directa analógico puede considerarse su implementación en el dominio digital:



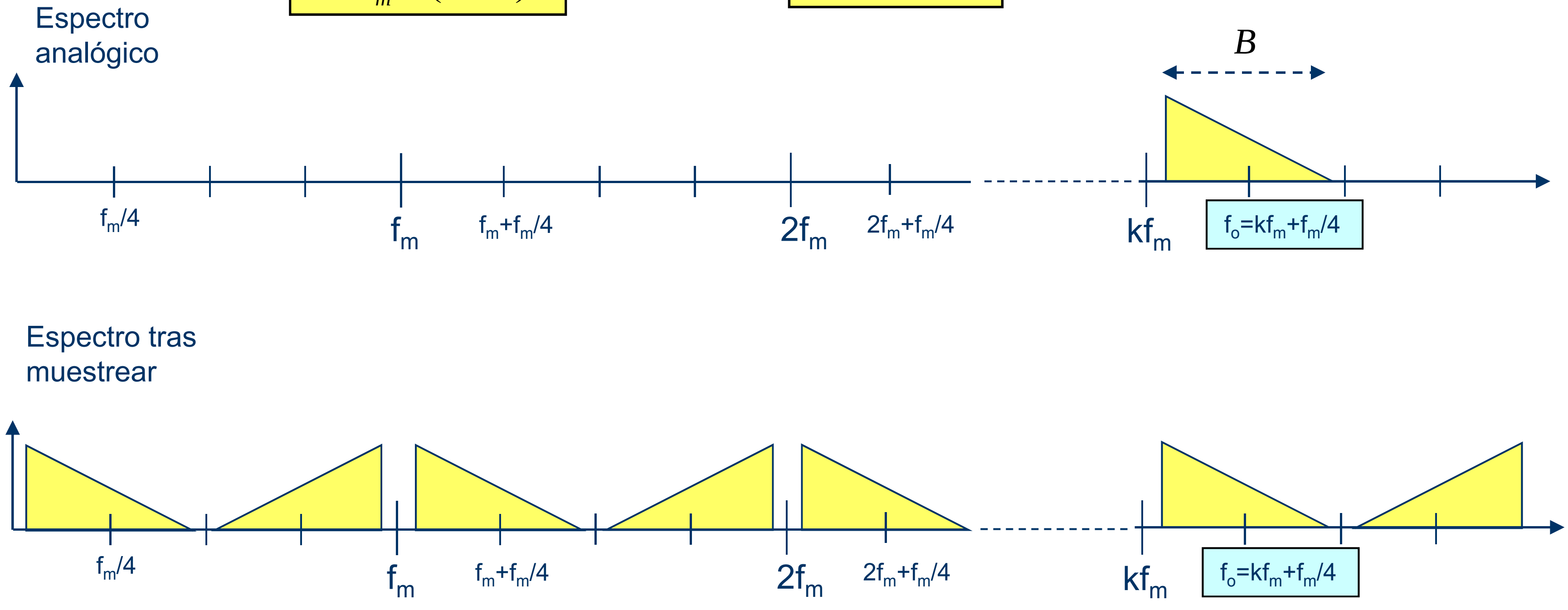
- Al efectuarse la multiplicación y el filtrado mediante operaciones numéricas, tanto la rama superior como la inferior pueden ser idénticas, eliminando en buena parte el efecto del espectro imagen.

Extracción digital de componentes I-Q (II)

- Otra ventaja de la implementación digital es que permite escoger un valor de la frecuencia de muestreo que simplifique el diseño:

$$\boxed{f_m = \frac{1}{T_m} = \left(\frac{4}{4k+1}\right) f_0} \Leftrightarrow \boxed{f_0 = kf_m + \frac{f_m}{4}}$$

k entero



Condición de Nyquist para evitar aliasing: $B \le \frac{f_m}{2}$

Extracción digital de componentes I-Q (III)

- Así, las muestras a la salida de las dos ramas serán:

$$r_I(nT_m) = I(nT_m)\cos^2\left(2\pi\frac{f_0}{f_m}n\right) - Q(nT_m)\sin\left(2\pi\frac{f_0}{f_m}n\right)\cos\left(2\pi\frac{f_0}{f_m}n\right) = I(nT_m)\cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \underbrace{Q(nT_m)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{\text{Término nulo}}$$

$$2\pi\frac{f_0}{f_m} = 2\pi\frac{4k+1}{4} = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{r_I(nT_m) = I(nT_m)\cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) = I(nT_m)\left[\frac{1+\cos(\pi n)}{2}\right] = \begin{cases} I(nT_m) & \text{para n par} \\ 0 & \text{para n impar} \end{cases}}$$

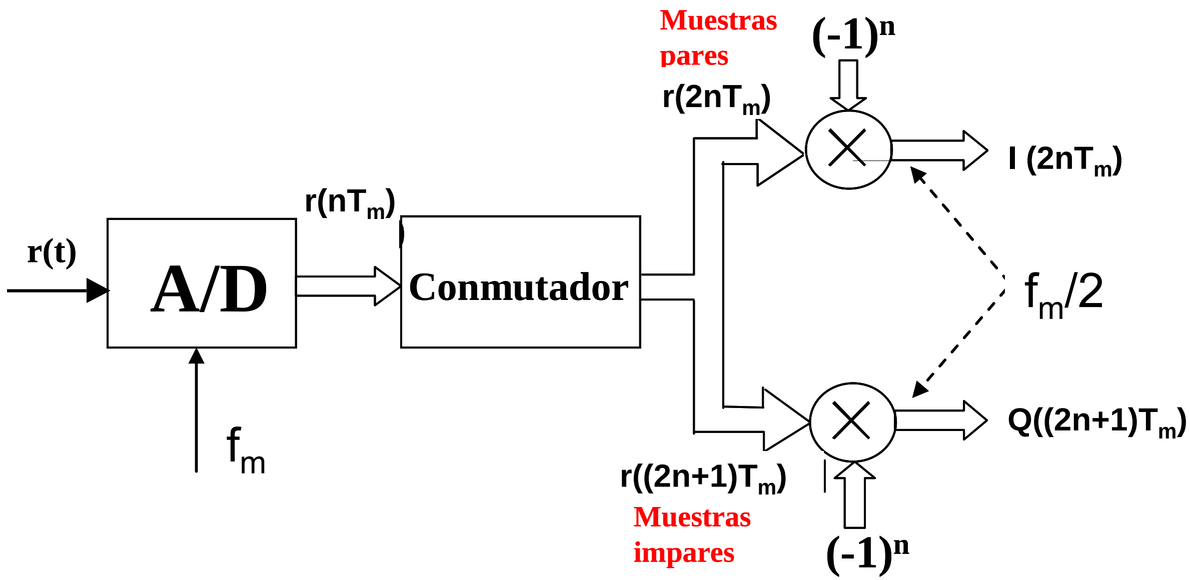
$$r_Q(nT_m) = -I(nT_m)\cos\left(2\pi\frac{f_0}{f_m}n\right)\sin\left(2\pi\frac{f_0}{f_m}n\right) + Q(nT_m)\sin^2\left(2\pi\frac{f_0}{f_m}n\right) = \underbrace{-I(nT_m)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{\text{Término nulo}} + Q(nT_m)\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$\boxed{r_Q(nT_m) = Q(nT_m)\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) = Q(nT_m)\left[\frac{1-\cos(\pi n)}{2}\right] = \begin{cases} 0 & \text{para n par} \\ Q(nT_m) & \text{para n impar} \end{cases}}$$

La rama superior sólo dará valores no nulos para las muestras de entrada pares, mientras que la rama inferior lo hará para las impares.

Extracción digital de componentes I-Q (IV)

- La implementación del extractor queda simplificada como:



- Obsérvese que la multiplicación por el coseno y el seno a frecuencia $f_m/2$ queda reducida a una multiplicación alterna por 1 y -1:

$$\cos\left(2\pi\frac{f_0}{f_m}2n\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n \qquad \sin\left(2\pi\frac{f_0}{f_m}(2n+1)\right)=\sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n$$

- Para evitar el desfase de una muestra entre las componentes I/Q en las dos ramas es posible utilizar filtros interpoladores a la salida.

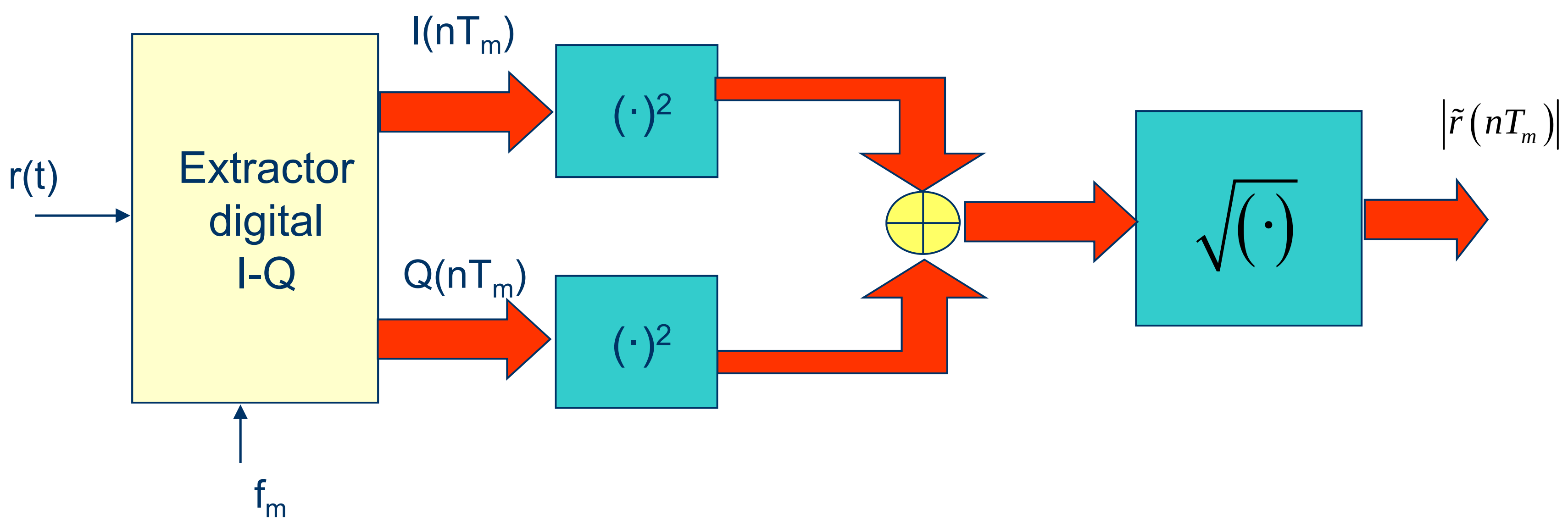
Demodulador de envolvente con tecnología digital

- Una vez se han extraído las componentes I-Q de la señal recibida, la extracción de la información dependerá del tipo de modulación.
- Por ejemplo, es posible de forma sencilla efectuar una demodulación de envolvente, recordando que la envolvente no es más que el módulo del equivalente paso bajo:

Señal recibida: $$r(t) = I(t)\cos\omega_o t - Q(t)\sin\omega_o t$$

Equivalente paso bajo: $$\tilde{r}(t) = I(t) + jQ(t)$$

Envolvente: $$\left|\tilde{r}(t)\right| = \sqrt{I^2(t) + Q^2(t)}$$



Demodulador de frecuencia con tecnología digital (I)

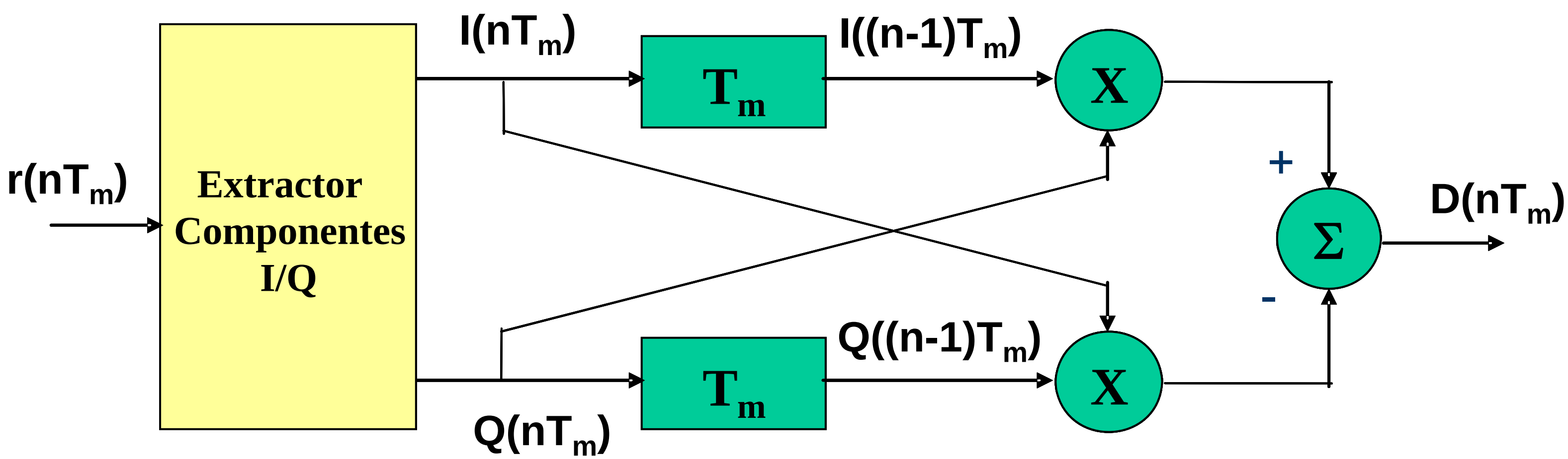
- La señal modulada en frecuencia (FM) es:

$$r(t)=A\cos\left(\omega_o t+2\pi f_d\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right)=\underbrace{A\cos\left(2\pi f_d\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right)}_{I(t)}\cos(\omega_o t)-\underbrace{A\sin\left(2\pi f_d\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right)}_{Q(t)}\sin(\omega_o t)$$

- Y su envolvente compleja:

$$\tilde{r}(t)=I(t)+jQ(t)=Ae^{j\left(2\pi f_d\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right)}$$

- El demodulador digital de FM adopta la siguiente configuración:



Que recibe el nombre de CUADRICORRELADOR.

Demodulador de frecuencia con tecnología digital (II)

- De modo que la señal a su salida adopta la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
D(nT_m) &= I\left((n-1)T_m\right)Q\left(nT_m\right) - I(nT_m)\cdot Q\left((n-1)T_m\right) = \\
&= \mathrm{Im}\left\{\left[I\left(nT_m\right) + jQ\left(nT_m\right)\right]\cdot\left[I\left((n-1)T_m\right) - jQ\left((n-1)T_m\right)\right]\right\} = \\
&= \mathrm{Im}\left[\tilde{r}\left(nT_m\right)\cdot\tilde{r}^*\left((n-1)T_m\right)\right] = \mathrm{Im}\left[A^2\exp\left(j2\pi f_d\int_{(n-1)T_m}^{nT_m} x(\lambda)\,d\lambda\right)\right] = \\
&= A^2\sin\left(2\pi f_d\int_{(n-1)T_m}^{nT_m} x(\lambda)\,d\lambda\right)
\end{aligned}
$$

- Ecuación análoga a la que se obtenía en un Demodulador Analógico de FM por retardo en el tiempo.
- Por lo que para recuperar la información x(t) se deberán aplicar restricciones similares.

Demodulador de frecuencia con tecnología digital (III)

- Si $T_m \leq 1/(\pi f_{max})$ → $f_m \geq \pi . f_{max}$

f_{max}: Máxima frecuencia de la señal x(t)

$$\int_{(n-1)T_m}^{nT_m} x(\lambda)\,d\lambda \approx T_m x\left(t-\frac{T_m}{2}\right)\Bigg|_{t=nT_m} = T_m x\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)T_m\right)$$

en cuyo caso $D(nT_m)$ puede aproximarse por:

$$D(nT_m) \approx A^2 \sin\left(2\pi f_d T_m x\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)T_m\right)\right)$$

- Si $2\pi f_d T_m \leq 0.2$ → $f_m \geq 10\pi . f_d$

$$\boxed{D(nT_m) \approx A^2 2\pi f_d T_m x\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)T_m\right)}$$

Recuperamos x(t) !!