ANÀLISI VECTORIAL ETSETB 08-01-2008 (JUSTIFIQUEU ELS PASSOS)

Data notes provisionals: 21-01-08
Període d'al.legacions: 21-01-08 a 23-01-08
Data notes revisades: 25-01-08

1. (a) Determineu els punts crítics de la funció $f(x,y) = x^3 + y^3$ sobre el conjunt M definit per:

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

i analitzeu el seu caràcter. Discutiu l'existència de màxim i mínim absoluts de f sobre M i trobeu-los.

(b) Determineu una parametrització de la frontera de M i trobeu explícitament l'expressió del vector tangent de la parametrització a un punt qualsevol. Indiqueu si es tracta d'una corba regular.

2. Sigui la funció $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = y^3 + yx^2 - x + \alpha y$, on $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Per a quins valors del paràmetre α la l'equació $f(x,y) = 0$ determina una funció implícita diferenciable $x = g(y)$ en un entorn de $(0,0)$?

(b) I una funció implícita $y = h(x)$ en un entorn de $(0,0)$? Si existeix, calcula $h'(0)$.

(c) Considerem U un entorn de l'origen on està definida la funció $y = h(x)$. Si $\alpha = -2$, fes una estimació del valor $h(10^{-1})$.

(d) Sigui $\mathbf{F} : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Discuteix si la funció $\mathbf{F}(x,y) = (x, y - h(x))$ admet inversa diferenciable a l'entorn de $(0,0)$.

3. Dadas la función $f(x,y,z) = z$ y la región

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\,,\, x^2+y^2 \geq 1\}$$

(a) Mediante el teorema de Fubini expresar la integral $\int_D f$ en coordenadas cartesianas.

(b) Utilizar un cambio de coordenadas adecuado y calcular el valor de dicha integral.

(c) Determinar (sin hacer ninguna integración más) cuál de los siguientes campos vectoriales da un flujo saliente mayor a través de $\partial(D)$:

$$\mathbf{F}_1 = (y^2, x^2, z^2), \quad \mathbf{F}_2 = (z^2, y^2, x^2), \quad \mathbf{F}_3 = (x^2, z^2, y^2).$$

4. Sean P y Q funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, tales que $\mathrm{D}_2 P = \mathrm{D}_1 Q$ y el campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q)$.

(a) Si $g(t) = P(tx, ty)$ demostrar que $g'(t) = x\mathrm{D}_1 P(tx,ty) + y\mathrm{D}_2 P(tx,ty)$.

(b) Justificar que la integral de linea $\int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}$ no depende del camino y expresarla siguiendo la recta que une ambos puntos.

(c) Definimos $\varphi(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}$. Demostrar que φ es un potencial escalar de $\mathbf{F}$. (Recuerdese que $\mathrm{D}_2 P = \mathrm{D}_1 Q$ y utilizar los apartados a) y b))

(d) Obtener un potencial escalar de $(x + 2y, 2x + y^3)$.

1. Vamos a analizar el método a traves de un ejemplo. Consideremos la función $f(x,y) = x^3 + y^3$. $(0,0)$ es el único punto crítico. $(0,0)$ no es máximo ni mínimo. Para ver esto basta tomar $y = 0$, $\epsilon > 0$ y $-\epsilon$. Cerca de $(0,0)$ $f(\epsilon,0)$ vale $\epsilon^3 > 0$, y $f(-\epsilon,0)$ vale $-\epsilon^3 < 0$. Así $f(0,0) \geq f(x,y)$ cerca de $(0,0)$ es falso, y $f(0,0) \leq f(x,y)$ cerca de $(0,0)$ es falso. El punto es de silla.

Sin embargo en el conjunto $\{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$, al ser cerrado y acotado se alcanza el máximo y el mínimo. Como $\{(x,y)/x^2 + y^2 < 1\}$ es abierto se pueden calcular bien las parciales. El problema está en $\{(x,y)/x^2 + y^2 = 1\}$. La pregunta es, ¿cómo se calculan los extremos de $x^3 + y^3$ restringido al conjunto $x^2 + y^2 = 1$?

Problema:Extremos de $f(x,y) = x^3 + y^3$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Se construye la Lagrangiana.

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^3 + y^3 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Se buscan los puntos críticos, $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 3x^2 - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 3y^2 - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$ De la primera ecuación se tiene

$$3x^2 - 2\lambda x = x(3x - 2\lambda) = 0$$

Así tenemos que puede ser

$$x = 0 \text{ o bien } 3x - 2\lambda = 0$$

De la tercera ecuación

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

que mirando en la segunda ecuación

$$y = 1 \quad 3 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

$$y = -1 \quad 3 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$$

proporciona los puntos

$$(0, 1, \frac{3}{2}) \quad (0, -1, -\frac{3}{2})$$

La otra posibilidad en la primera ecuación es que

$$x \neq 0 \quad 3x - 2\lambda = 0 \quad 3x = 2\lambda$$

mirando en la segunda ecuación (al igual que hicimos en la primera) puede ser

$$y = 0 \text{ o bien } 3y - 2\lambda = 0$$

Y de nuevo de la tercera ecuación

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

de donde se obtiene

$$x = 1 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

$$y = -1 \quad \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$$

que nos proporciona los puntos

$$(1, 0, \frac{3}{2}) \quad (-1, 0, -\frac{3}{2})$$

también puede ser, mirando en la segunda ecuación

$$y \neq 0 \quad 3y - 2\lambda = 0 \quad 3y = 2\lambda$$

y por tanto, eliminando el caso $x = 0$ que ya hemos visto

$$3x = 2\lambda \quad 3y = 2\lambda \Rightarrow x = y$$

Que de acuerdo con la tercera ecuación nos da

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

que al ser $3x = 2\lambda$

$$\lambda = \frac{3}{2}x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

obteniendose los puntos

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4}) \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{4})$$

Hemos obtenido así 6 puntos críticos del tipo (x, y, λ) o si se quiere del tipo (x, y) con multiplicador de Lagrange asociado λ

$$\begin{array}{cccccccc} (x,y): & (1,0) & (0,1) & (-1,0) & (0,-1) & (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) & (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \lambda: & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

Ahora por simple comparación de valores

$$f(1, 0) = f(0, 1) = 1 \quad f(-1, 0) = f(0, -1) = -1$$

$$f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.7 \quad f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq -0.7$$

Así $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son máximos globales y $(-1, 0)$ y $(0, -1)$ mínimos globales.

(x,y) :	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$
λ :	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

Vamos a ir analizando cada uno de ellos

2.3.1 punto $(1,0)$ multiplicador $\frac{3}{2}$

$$H_{L_{\frac{3}{2}}}(1,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad q(x,y) = 3x^2 - 3y^2$$

En $\mathbb{R}^2$ la forma cuadrática es indefinida, pero ¿cómo es en $T_{(1,0)}$?

$$\nabla g(1,0) = (2x(1,0), 2y(1,0)) = (2,0)$$

$$(x,y) \in T_{(1,0)} \iff (2,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff x = 0$$

si $x = 0$ $q(x,y) = q(0,y) = -3y^2$, def$-$ $\Rightarrow$ <u>máximo local</u>

2.3.2 punto $(0,1)$ multiplicador $\frac{3}{2}$

$$H_{L_{\frac{3}{2}}}(0,1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad q(x,y) = -3x^2 + 3y^2$$

En $\mathbb{R}^2$ la forma cuadrática es indefinida. ¿Cómo es en $T_{(0,1)}$?

$$\nabla g(0,1) = (2x(0,1), 2y(0,1)) = (0,2)$$

$$(x,y) \in T_{(0,1)} \iff (0,2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff y = 0$$

si $y = 0$ $q(x,y) = q(x,0) = -3x^2$, def$-$ $\Rightarrow$ <u>máximo local</u>

2.3.3 punto $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ multiplicador $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$$\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad q(x,y) = \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}y^2$$

En $\mathbb{R}^2$ es definida $+$, en particular en el tangente $\Rightarrow$ <u>mínimo local</u>

2 Sigui la funció $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = y^3 + yx^2 - x + \alpha y$, on $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Per a quins valors del paràmetre α la l'equació $f(x,y) = 0$ determina una funció implícita diferenciable $x = g(y)$ en un entorn de $(0,0)$?
2. I una funció implícita $y = h(x)$ en un entorn de $(0,0)$? Si existeix, calcula $h'(0)$.
3. Considerem U un entorn de l'origen on està definida la funció $y = h(x)$. Si $\alpha = -2$, fes una estimació del valor $h(10^{-1})$.
4. Sigui $\mathbf{F} : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Discuteix si la funció $\mathbf{F}(x,y) = (x, y - h(x))$ admet inversa diferenciable a l'entorn de $(0,0)$.

RESPOSTA:

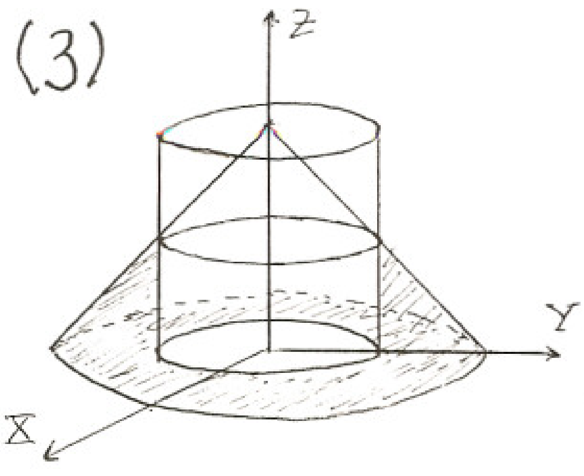
a) Es verifiquen les condicions del teorema de la funció implícita: (i) $f(0,0) = (0,0)$; (ii) $f_x = 2xy - 1$, $f_y = 3y^2 + x^2 + \alpha$, que són conínues en $(0,0)$, i en tot $\mathbb{R}^2$, on f hi és diferenciable; (iii) $f_x(0,0) = -1 \neq 0$. Per tant, existeix la funció implícita diferenciable $x = g(y)$ a l'entorn de $(0,0)$.

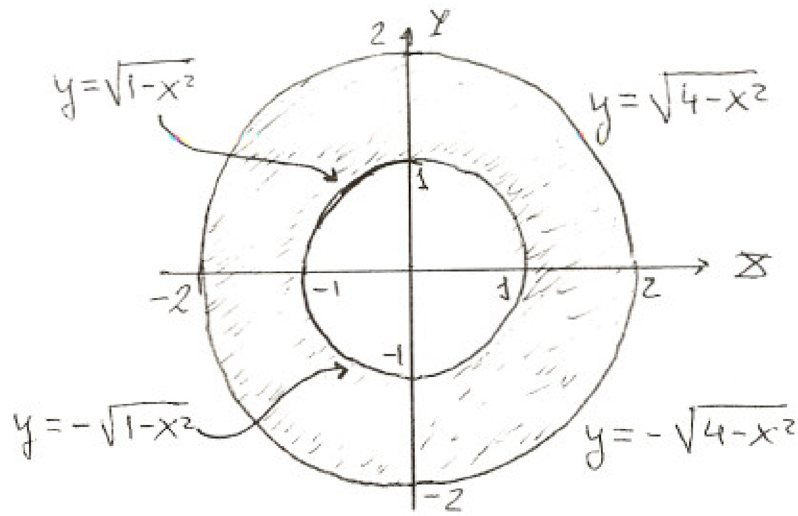
b) Semblantment, l'existència de $y = h(x)$ queda garantida si $f_y(0,0) = \alpha \neq 0$. Si $\alpha \neq 0$, a l'entorn de $(0,0)$ es compleix $h'(0) = -f_y(0,0)^{-1} f_x(0,0) = \alpha^{-1}$.

c) Si $\alpha = -2$, aproximant per la recta tangent $h(x) = h(0) + h'(0)x$, obtenim $h(10^{-1}) = -0.05$.

d) Mirem si es verifiquen les condicions del teorema de la funció inversa: Les derivades parcials $\mathbf{F}_x$ i $\mathbf{F}_y$ existeixen i són contínues en $\mathbb{R}^2$, per tant $\mathbf{F}$ hi és diferenciable. La matriu jacobiana en $(0,0)$ val $J\mathbf{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix}$. Com el determinant $\det(J\mathbf{F}(0,0))$ no és mai nul, $\mathbf{F}$ és invertible a l'entorn de $(0,0)$ (de classe infinit).

(3)





$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; 0\leq z\leq 2-\sqrt{x^2+y^2},\; x^2+y^2\geq 1\}$$
$$f(x,y,z)=z$$

(a) En la dirección del eje OZ la región está delimitada por el plano $z=0$ y el cono $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$. En el plano XY la delimitan las circunferencias intersección del cilindro $x^2+y^2=1$ y el cono $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, con el plano $z=0$; cuyas ecuaciones son:

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad x^2+y^2=4 \rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$$

En un cierto orden de integración, la integral se puede expresar

$$I\equiv\int_D f=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy\int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}}z\,dz-\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}}z\,dz$$

(b) En coordenadas cilíndricas (jacobiano $=r$):

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2 dr\int_0^{2-r}rz\,dz=2\pi\int_1^2 r\,dr\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{2-r}=\pi\int_1^2 r(2-r)^2dr=$$
$$=\pi\int_1^2(4r+r^3-4r^2)\,dr=\pi\left[2r^2+\frac{r^4}{4}-\frac{4}{3}r^3\right]_1^2=\frac{5}{12}\pi$$

(Observar que $D=\{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3/0\leq z\leq 2-r,\; 0\leq\varphi\leq 2\pi,\; 1\leq r\leq 2\}$).

(c) Aplicamos el teor. Gauss-Ostrogadskii (todas las hipótesis se cumplen):

$$\oint_{\partial D}F\cdot dl=\int_D \operatorname{div}F$$

Para $F_1=(y^2,x^2,z^2)$, $F_2=(z^2,y^2,x^2)$, $F_3=(x^2,z^2,y^2)$ se tiene

$$\operatorname{div}F_1=2z \quad ; \quad \operatorname{div}F_2=2y \quad ; \quad \operatorname{div}F_3=2x$$

por tanto resulta:

$$\int_D \operatorname{div}F_1=2I=\frac{5}{6}\pi\;;\quad \int_D \operatorname{div}F_2=0\quad;\quad\int_D \operatorname{div}F_3=0$$

ya que las funciones $\operatorname{div}F_2=2y$, $\operatorname{div}F_3=2x$ son antisimétricas en la región D, respecto los planos ZX y ZY respectivamente. Así pues, el flujo mayor lo da F_1.

a) Si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ fijo definimos

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$t \to (tx, ty)$ $\qquad$ $(u,v) \to P(u,v)$

$$g(t) = (P\circ h)(t) = P(h(t)) = P(tx,ty)$$

Como P y h son diferenciables según la regla de la cadena:

$$g'(t) = JP(h(t))\, Jh(t) = (D_1P(tx,ty) \quad D_2P(tx,ty))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\,D_1P(tx,ty) + y\,D_2P(tx,ty)$$

b) $D_2P = D_1Q$, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $\mathbb{R}^2$ simplemente conexo $\Rightarrow$ F conservativo $\Rightarrow$ $\int_0^x \vec{F}\cdot d\vec{l}$ no depende del camino, si seguimos el segmento $\overline{OX}$, cuya parametrización es: $\alpha(t) = (tx, ty)$ $t \in [0,1]$

$$\int_0^x F\cdot d\vec{l} = \int_0^1 F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt = \int_0^1 [x\,P(tx,ty) + y\,Q(tx,ty)]\,dt$$

c) Si $\varphi(x,y) = \int_0^1 [x\,P(tx,ty) + y\,Q(tx,ty)]\,dt$, veamos que $\nabla\varphi = \vec{F}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 [x\,P(tx,ty) + y\,Q(tx,ty)] \overset{\text{Leibnitz}}{=} \int_0^1 [P(tx,ty) + tx\,D_1P(tx,ty) + ty\,D_1Q(tx,ty)]\,dt$$

$$= \int_0^1 [g(t) + t\,g'(t)]\,dt = \int_0^1 D(t\,g(t))\,dt = t\,g(t)\Big|_0^1 = g(1) = P(x,y)$$

igualmente $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \nabla\varphi = \vec{F}$ $\quad$ φ = pot. escalar de F

d) Potencial escalar de $(x+2y, 2x+y^3)$ que cumple $D_2P = D_1Q$

$$\varphi(x,y) = \int_0^1 [x\cdot\underbrace{(tx+2ty)}_{P(tx,ty)} + y\,\underbrace{(2tx + t^3y^3)}_{Q(tx,ty)}]\,dt = \int_0^1 [tx^2 + 4txy + t^3y^3]\,dt =$$

$$= (x^2+4xy)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + y^4\frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(x^2+4xy) + \frac{y^4}{4}$$

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^4}{4} + C.$$

también mediante integrales indefinidas