Solucions al primer Control Senyals i Sistemes 1

Nom: .... Grup: ....

Temps estimat per realitzar el control: **1h30** **25/10/2001**

Problema 1.-

(1.5 pts) Resoleu els següents productes i convolucions:

$x(t) * \delta(1-t) = x(t) * \delta(t-1) = x(t-1)$

$X(-f)\cdot\delta(1-f) = X(-f)\cdot\delta(f-1) = X(-1)\,\delta(f-1) =$

$x(t) * \delta(-3t-2) = x(t) * \delta(-3(t+2/3)) = x(t) * 1/3\,\delta(t+2/3) = 1/3\,x(t+2/3)$

$$\delta\left(f-\frac{1}{2t_0}\right)\cdot e^{j2\pi f t_0} = \delta\left(f-\frac{1}{2t_0}\right)\cdot e^{j2\pi\frac{1}{2t_0}t_0} = \delta\left(f-\frac{1}{2t_0}\right)\cdot e^{j\pi} = -\,\delta\left(f-\frac{1}{2t_0}\right)$$

$$x(t) * \sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(t-nT)$$

$$X(f)\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} X(nf_0)\cdot\delta(f-nf_0)$$

Problema 2.-

(2 pts) a) Trobeu la relació entre y(t) i x(t) i demostreu les propietats de linealitat, invariància, ca estabilitat del sistema de la figura 1.

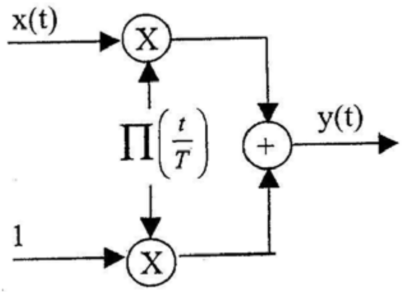


Figura 1

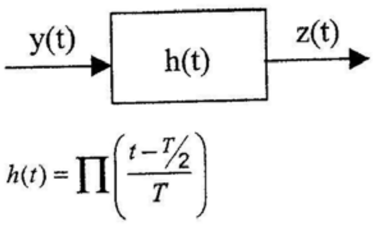


Figura 2

$$y(t) = x(t)\prod\left(\frac{t}{T}\right) + \prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

Linealitat :

$$T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = (a_1x_1(t) + a_2x_2(t))\prod\left(\frac{t}{T}\right) + \prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$a_1T[x_1(t)] + a_2T[x_2(t)] = a_1x_1(t)\prod\left(\frac{t}{T}\right) + a_1\prod\left(\frac{t}{T}\right) + a_2x_2(t)\prod\left(\frac{t}{T}\right) + a_2\prod\left(\frac{t}{T}\right) \neq T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)]$$

Per tant No lineal

Invariància :

$$T[x(t-t_0)] = x(t-t_0)\prod\left(\frac{t}{T}\right)+\prod\left(\frac{t}{T}\right) \neq y(t-t_0) = x(t-t_0)\prod\left(\frac{t-t_0}{T}\right)+\prod\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$$

Per tant No invariant

Causalitat

Com és un sistema No lineal ens fixem en la relació entrada-sortida. S'observa que la sortida a l'instant t0 depèn exclusivament de l'entrada a l'instant t_0

$$y(t_0) = x(t_0)\prod\left(\frac{t}{T}\right)+\prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

No depèn ni del passat ni del futur, és un sistema sense memòria.

En conclusió el sistema és causal

Estabilitat

Si $|x(t)|<B_1$

Llavors

$$|y(t)| = \left|x(t)\prod\left(\frac{t}{T}\right)+\prod\left(\frac{t}{T}\right)\right| < \left|x(t)\prod\left(\frac{t}{T}\right)\right| + \left|\prod\left(\frac{t}{T}\right)\right| < B_1 \cdot 1+1$$

És fitat per tant el sistema és estable

A continuació el sistema de la **figura 1** es connecta en sèrie amb el sistema de la **figura 2**

(2.5 pts) b) Trobeu z(t) quan $x(t) = e^{-\alpha|t|}$

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t<-T/2 \\ \int_{-T/2}^{t}(e^{\alpha\tau}+1)d\tau & -T/2<t<0 \\ \int_{-T/2}^{0}(e^{\alpha\tau}+1)d\tau + \int_{0}^{t}(e^{-\alpha\tau}+1)d\tau & 0<t<T/2 \\ \int_{t-T}^{0}(e^{\alpha\tau}+1)d\tau + \int_{0}^{T/2}(e^{-\alpha\tau}+1)d\tau & T/2<t<T \\ \int_{t-T}^{T/2}(e^{-\alpha\tau}+1)d\tau & T<t<3T/2 \\ 0 & t>3T/2 \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t<-T/2 \\ t+\frac{T}{2}+\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t}-e^{-\alpha T/2}) & -T/2<t<0 \\ \frac{2}{\alpha}+t+\frac{T}{2}-\frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha t}+e^{-\alpha T/2}) & 0<t<T/2 \\ \frac{2}{\alpha}-t+\frac{3T}{2}-\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha(t-T)}+e^{-\alpha T/2}) & T/2<t<T \\ -t+\frac{3T}{2}+\frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha(t-T)}-e^{-\alpha T/2}) & T<t<3T/2 \\ 0 & t>3T/2 \end{cases}$$

Pel cas en que $x(t) = 2\cos(\frac{2\pi t}{T})$:

(1 pt) c) Sense calcular explícitament la TF raoneu :

c1) quines propietats de simetria complirà la TF de y(t)

y(t) és real i parell per tant la seva TF serà real i parell

c2) com serà la fase de la TF de y(t)

per ser la TF real i parell, hi poden haver canvis de signe i per tant la fase pot ser 0 o π quan la TF és negativa

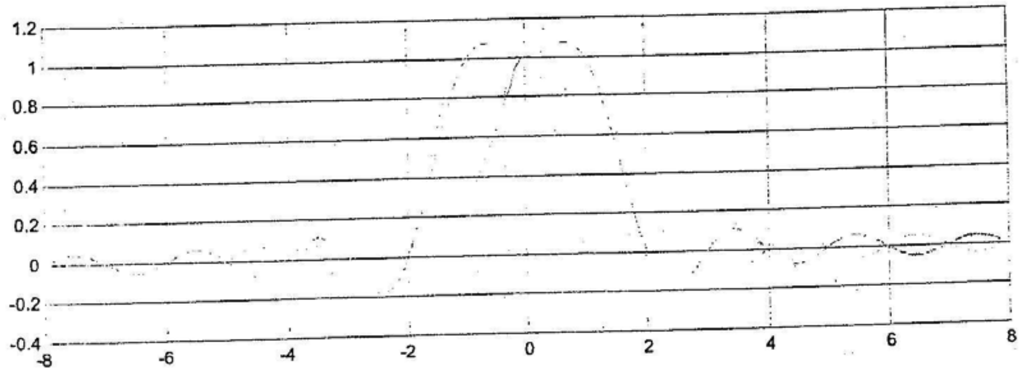
c3) quan valdrà la TF de y(t) a l'origen

$$Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\prod\left(\frac{t}{T}\right) + \prod\left(\frac{t}{T}\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\prod\left(\frac{t}{T}\right)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t}{T}\right)dt = 0 + T = T$$

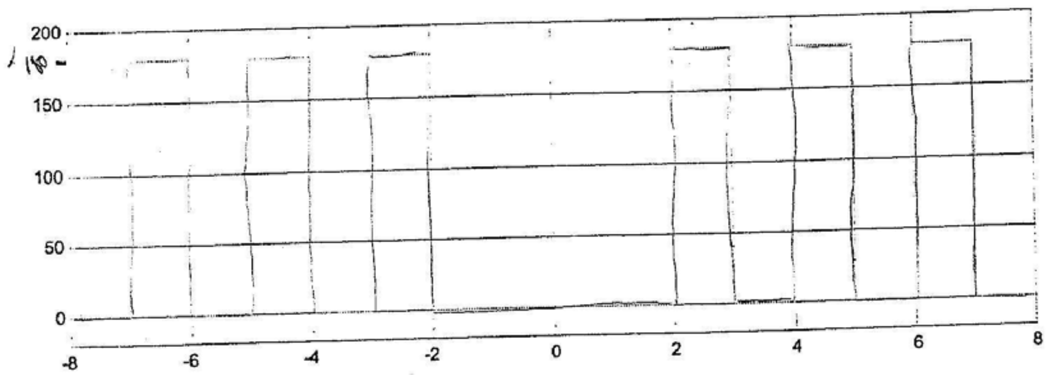
(2 pts) d) Trobeu la TF de y(t) i dibuixeu el mòdul i la fase de la forma més acurada possible.

$$Y(f) = T\mathrm{sinc}\,Tf * \left[\tfrac{2}{2}\,\delta(f-\tfrac{1}{T}) + \tfrac{2}{2}\,\delta(f+\tfrac{1}{T})\right] + T\mathrm{sinc}\,Tf$$

$$Y(f) = T\mathrm{sinc}\,T(f-\tfrac{1}{T}) + T\mathrm{sinc}\,T(f+\tfrac{1}{T}) + T\mathrm{sinc}\,Tf$$



Mòdul (eix horitzontal : fT)



Fase (eix horitzontal : fT, fase en graus)

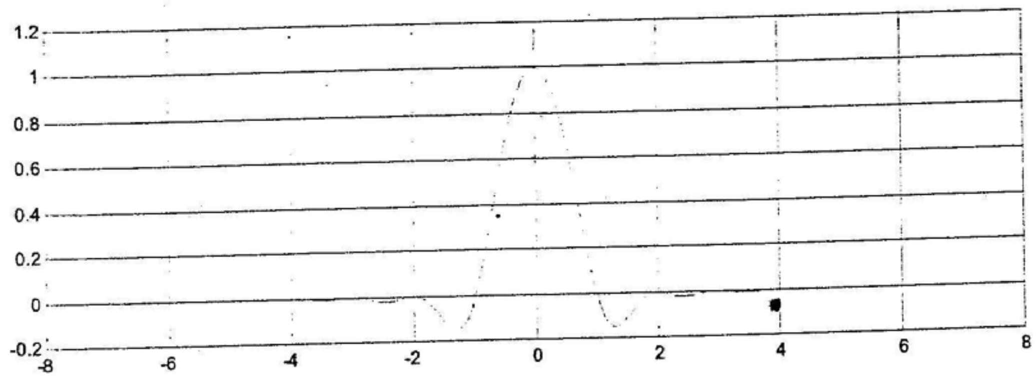
(1 pt) e) Dibuixeu la fase de Z(f).

$$Z(f) = \left\{T\mathrm{sinc}\,Tf(f-\tfrac{1}{T}) + T\mathrm{sinc}\,Tf(f+\tfrac{1}{T}) + T\mathrm{sinc}\,Tf\right\}T\mathrm{sinc}\,Tf \cdot e^{-j2\pi f T/2}$$

La funció quan no es considera el terme de fase lineal és :

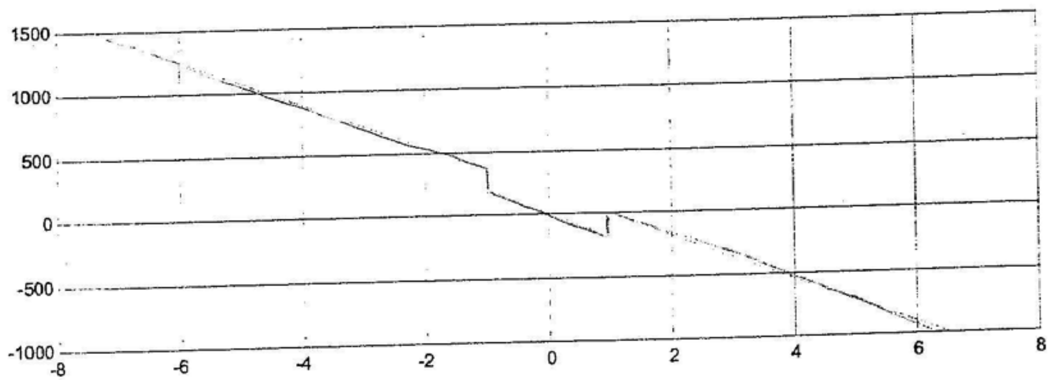
$$\left\{T\mathrm{sinc}\,Tf(f-\tfrac{1}{T}) + T\mathrm{sinc}\,Tf(f+\tfrac{1}{T}) + T\mathrm{sinc}\,Tf\right\}T\mathrm{sinc}\,Tf$$

Si es representa aquesta component s'obté:



Component $\left\{T\mathrm{sinc}Tf\left(f-\frac{1}{T}\right)+T\mathrm{sinc}Tf\left(f+\frac{1}{T}\right)+T\mathrm{sinc}Tf\right\}T\mathrm{sinc}Tf$

S'observa que per $|fT|>1$ la funció sempre és negativa i per tant la fase és π. Si finalment afegim el factor de fase lineal:



Fase de Z(f)