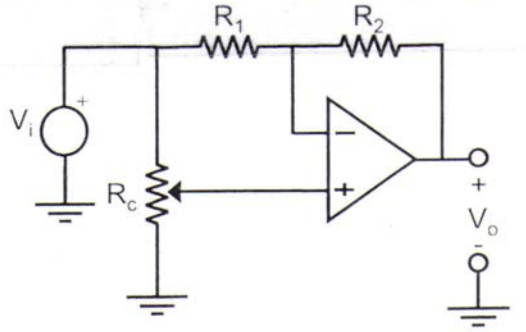
Resolución 1^{er} control CISE III 11/04/2005

Grup 20

PROBLEMA 1.- Donat el circuit de la figura inferior, es demana:

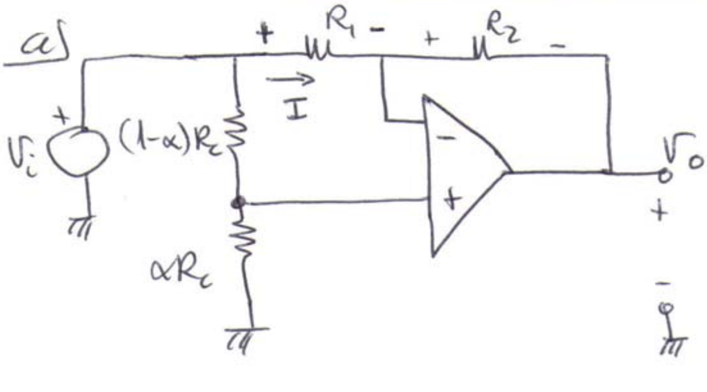


Dades:
$R_1 = R_2$
$R_c = 500\ \Omega$
$V_{sat} = \pm 14$ V
SR = 2 V/μs
$V_{OS} = 1$ mV
$I_B = 40$ nA
$I_{OS} = 2$ nA

V_i és un senyal sinusoïdal amb una tensió de pic que va des de 0 V fins a 5 V.

a) La relació entre l'entrada i la sortida, suposant l'AO ideal, en funció de la posició del cursor del potenciòmetre R_c. Quina és la utilitat d'aquest circuit?
b) La tensió a la sortida deguda al CMRR de l'AO. Quina és la tensió màxima d'error a la sortida deguda al CMRR? (Heu de tenir en compte la posició del cursor)
c) El valor del CMRR per que la tensió a la sortida del AO deguda a aquest efecte sigui inferior a 1 mV en qualsevol dels casos possibles.
d) L'efecte dels corrents de polarització, I_n i I_p, sobre la tensió de sortida. A partir d'aquesta expressió i les dades calcula el valor de la tensió de sortida degut a I_B, i el valor de la tensió de sortida degut a I_{OS}. (Doneu els resultats en funció de R_2)
e) Que es pot fer per a compensar l'efecte d'I_B?. Dibuixa un circuit que il lustri la solució proposada. Quines condicions s'hauran de complir per a que la compensació sigui efectiva encara que varií el potenciòmetre. Dona un valor de R_2 i calcula l'efecte de I_B i I_{OS}..
f) La freqüència màxima de la tensió d'entrada per a que la sortida no distorsioni: l'expressió ha de tenir en compte el valor V_i i la posició del potenciòmetre. Què passa quan el cursor del potenciòmetre està a prop del centre?
g) L'efecte de la tensió d'offset sobre la sortida.

a)



$$\Rightarrow V_+ = \frac{\alpha R_c}{R_c}\cdot V_i = \alpha V_i = V_- \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_i - V_-}{R_1} = \frac{V_i - \alpha V_i}{R_1}$$

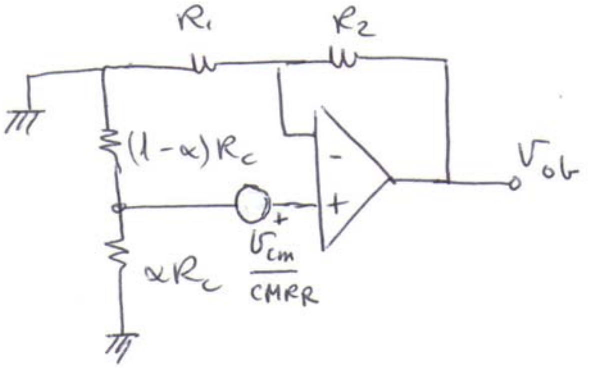
$$V_o + R_2 I = V_+$$

$$\Rightarrow V_o = V_+ - R_2 I = \alpha V_i - R_2 \cdot \frac{(1-\alpha)}{R_1} V_i \underset{R_2 = R_1}{=} [\alpha - (1-\alpha)] V_i = (2\alpha - 1) V_i$$

$$\boxed{V_o = (2\alpha - 1) V_i}$$

Si escollim dividir el potenciòmetre a l'inrevés el resultat és $V_o = (1-2\alpha) V_i$

b) El model és el següent:



- Càlcul de la tensió en mode comú:

Segons l'apartat a) la tensió en el node + és $V_+ = \alpha V_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{V_{cm} = \alpha V_i}$$

- Càlcul de $V_{ab} \Rightarrow$ és un amplificador no inversor:

$$\boxed{V_{ob} = \frac{V_{cm}}{CMRR}\cdot\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{2V_{cm}}{CMRR} = \frac{2\alpha V_i}{CMRR}}$$

- Càlcul de la tensió màxima d'error:

V_{ob} serà màxima quan α i V_i siguin màximes $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 1$ i $V_{i_{max}} = 5V$

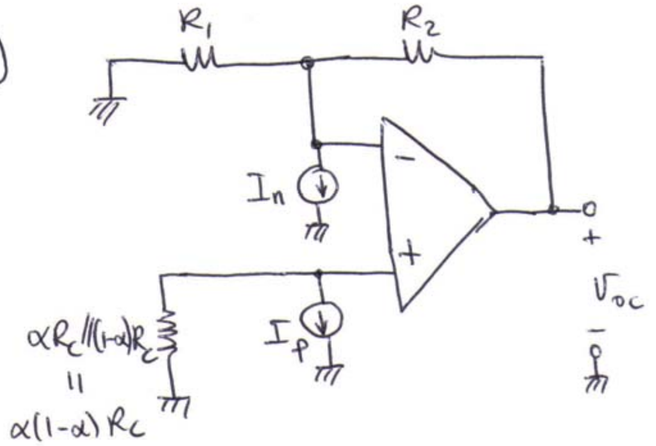
Per tant,

$$\boxed{V_{ob_{max}} = \frac{2\cdot 1\cdot 5V}{CMRR} = \frac{10V}{CMRR}}$$

c)

$$V_{ob_{max}} = 1mV \Rightarrow \quad 1mV = \frac{10V}{CMRR} \Rightarrow \quad \boxed{CMRR = 10^4 \Rightarrow 80dB}$$

d)



Fent superposició trobem:

$$V_{oc} = R_2 I_n - \alpha(1-\alpha)R_c\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)I_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_o = R_2 I_n - \alpha(1-\alpha)\,500\cdot 2\,I_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{oc} = R_2 I_n - 10^3\alpha(1-\alpha)I_p}$$

Relació amb I_B i I_{os}:

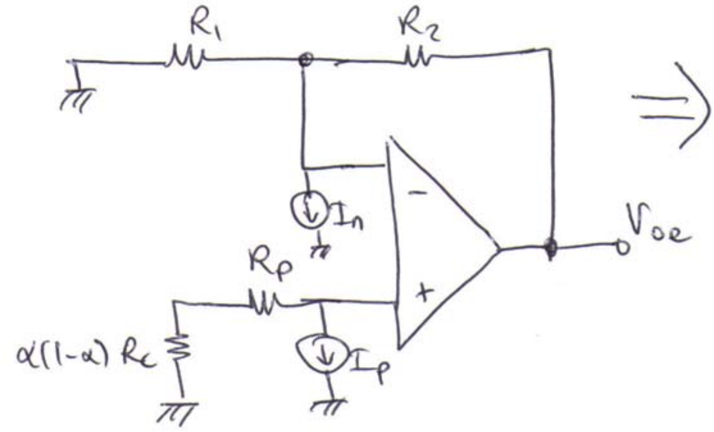
$$\left.\begin{array}{l} I_p = I_B \pm I_{os}/2 \\ I_n = I_B \mp I_{os}/2 \end{array}\right\} \Rightarrow V_{oc} = R_2\left(I_B + \frac{I_{os}}{2}\right) - 10^3\alpha(1-\alpha)\left(I_B + \frac{I_{os}}{2}\right) =$$

$$= \left[R_2 - 10^3\alpha(1-\alpha)\right]I_B - \left[R_2 + 10^3\alpha(1-\alpha)\right]\frac{I_{os}}{2}$$

La tensió V_{oc} deguda a I_B és: $V_{oc1} = [R_2 - 10^3\alpha(1-\alpha)] I_B$

La tensió V_{oc} deguda a I_{os} és: $V_{oc2} = [R_2 + 10^3\alpha(1-\alpha)] \frac{I_{os}}{2}$

e) Per compensar I_B podem introduir una resistència a l'entrada no inversora de l'AO.



$\Rightarrow V_{oe} = R_2 I_n - (R_p + \alpha(1-\alpha)R_c) I_p \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} I_n = I_B \mp I_{os}/2 \\ I_p = I_B \pm I_{os}/2 \end{array}\right\} \Rightarrow V_{oe} = \overbrace{\left[R_2 - (R_p + \alpha(1-\alpha)R_c)\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\right] I_B}^{V_{oe1}} \mp \underbrace{\mp\left[R_2 + (R_p + \alpha(1-\alpha)R_c)\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\right]\frac{I_{os}}{2}}_{V_{oe2}}$$

V_{oe2} no es pot compensar però V_{oe1} sí. Volem que $\underline{V_{oe1} = 0}$.

A més a més per que no influeixi la posició del cursor s'ha d'acomplir que:

$$\left.\begin{array}{l} R_p \gg \alpha(1-\alpha)R_c \quad \forall\alpha \\ \text{cas pitjor } \alpha = 1/2 \text{ (MÀXIM)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_p \gg R_c/4 \Rightarrow \boxed{R_p > 100\frac{R_c}{4} = 25R_c}$$

Si $R_p > 25R_c \Rightarrow V_{oe1} \approx \left[R_2 - R_p\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\right] I_B = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow R_2 = R_p\left(1 + R_2/R_1\right) \Rightarrow R_p = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

$R_2 = R_1 \qquad \Rightarrow \boxed{R_p = R_1 // R_2}$

$$R_p \stackrel{\downarrow}{=} \frac{R_1 \cdot \cancel{R_1}}{2\cancel{R_1}} = \frac{R_1}{2} = \frac{R_2}{2} \quad \boxed{R_p = R_2/2}$$

Per tant,

$$\left.\begin{array}{l} R_p \geq 25R_c \\ R_p = \frac{R_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R_2}{2} > 25R_c \Rightarrow R_2 > 50R_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R_2 > 50 \cdot 500\Omega = 25000\Omega}$$

Per exemple: $\boxed{\underbrace{R_2}_{= R_1} = 100\,k\Omega} \Rightarrow \boxed{R_p = 50\,k\Omega}$

En aquest cas:

$$V_{oe} \cong \mp \left[100k\Omega + (50k\Omega)(1+1)\right]\frac{I_{os}}{2} =$$

$$= \mp 200\,k\Omega \frac{I_{os}}{2} = \mp 100\,k\Omega \cdot 2nA = \mp 200\mu V$$

$$\boxed{V_{oe} \cong \mp 200\mu V}$$ → tot degut a I_{os}

f) La freqüència màxima està limitada pel SR ⇒

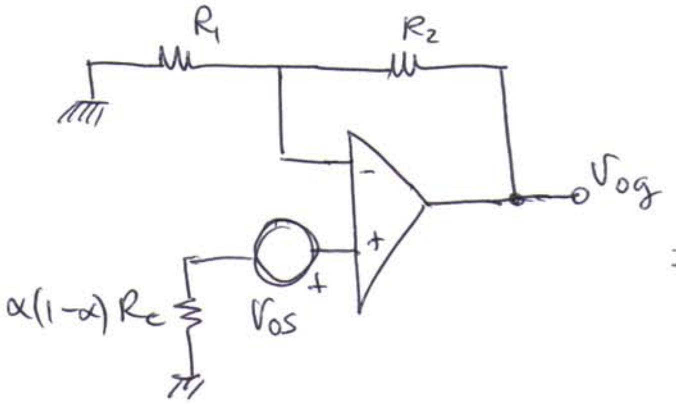
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_o\omega \leq SR \\ V_o = (2\alpha - 1)V_i \\ \text{Cas pitjor} \begin{cases} \alpha = 1 \\ V_i = V_{imax} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \cdot V_{imax} \cdot 2\pi f_{max} = SR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{max} = \frac{SR}{2\pi V_{imax}} = \frac{2V/\mu s}{2\pi \cdot 5}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{max} = 63{,}7\,kHz}$$

Quan $\alpha \to 1/2$ la sortida tendeix a 0V ⇒ no hi ha límit de freqüència degut al SR ⇒ ⇒ limitarà el BW.

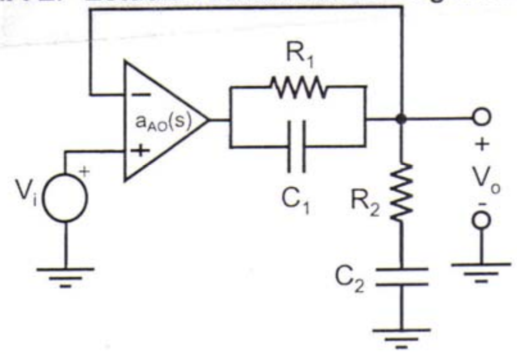
g)



$$V_{og} = V_{os}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 2 \cdot V_{os}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{og} = 2mV}$$

PROBLEMA 2.- Estudia l'estabilitat del següent circuit.



Dades:

$$a_{AO}(s) = \frac{a_o \omega_a \omega_b}{(s+\omega_a)(s+\omega_b)} \quad \text{on } a_o > 0$$

$\omega_a = 10^2$ rad/s

$\omega_b = 10^6$ rad/s

$R_1 = 100\ \Omega$

$C_1 = 1$ nF

$R_2 = 100\ \Omega$

$C_2 = 100$ nF

Es demana:

a) El diagrama de flux de circuit realimentat.

b) L'expressió del guany de llaç *T(s)* i el tipus de realimentació.

c) La funció de transferència $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$.

d) Dibuixa aproximadament el Lloc Geomètric de les Arrels (per calcular els punts de tall de les asímptotes i els punts de separació dels pols reals podeu fer les aproximacions que considereu oportunes sempre que les raoneu adequadament)

e) Analitza les trajectòries del LGA i raona si hi ha valors de a_o que fan el sistema inestable.

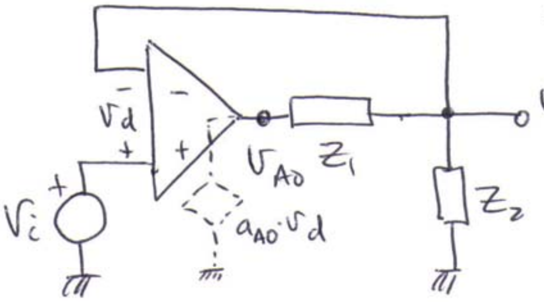
f) Dibuixa els diagrames de Bode d'amplitud i fase de *T(s)*.

g) Calcula el valor de a_o per que el marge de fase sigui 45°.

---

a) Variables: V_i, V_d, V_o

Equacions:

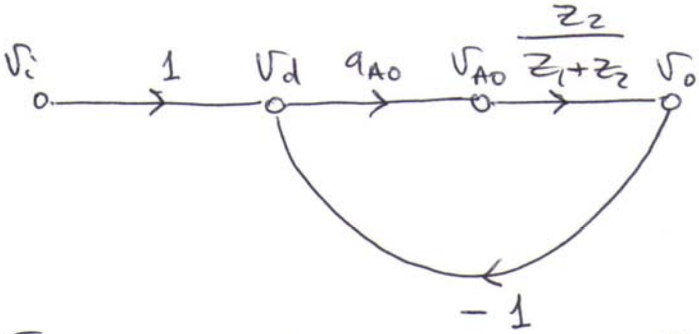


$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} V_+ = V_i \\ V_- = V_o \end{array}\right\} \Rightarrow V_d = V_i - V_o \quad (1)$

$V_{AO} = a_{AO} V_d \quad (2)$

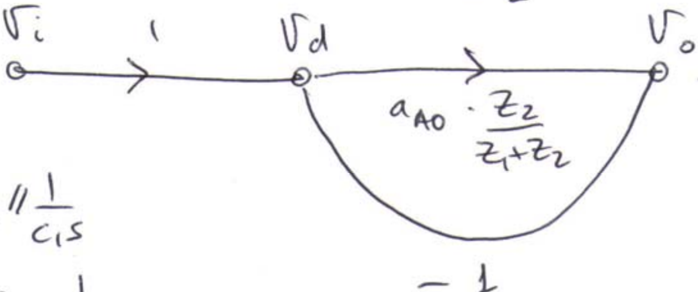
$V_o = V_{AO} \cdot \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (3)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $a(s) = a_{AO} \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$

$Z_1 = R_1 // \dfrac{1}{C_1 s}$

$Z_2 = R_2 + \dfrac{1}{C_2 s}$

$\beta(s) = 1$

b) $T(s) = a(s)\beta(s) = a_{AO}\dfrac{Z_2}{Z_1+Z_2} = a_{AO}\cdot\dfrac{\dfrac{R_2C_2s+1}{C_2s}}{\dfrac{R_1}{R_1C_1s+1}+\dfrac{R_2C_2s+1}{C_2s}} \Rightarrow$

$$Z_1 = \frac{R_1\cdot\frac{1}{C_1s}}{R_1+\frac{1}{C_1s}} = \frac{R_1}{R_1C_1s+1}$$

$$Z_2 = \frac{R_2C_2s+1}{C_2s}$$

$$\Rightarrow T(s) = a_{AO}\cdot\frac{(R_2C_2s+1)(R_1C_1s+1)}{R_1C_2s+(R_2C_2s+1)(R_1C_1s+1)} \Rightarrow$$

$$a_{AO} = \frac{a_0\omega_a\omega_b}{(s+\omega_a)(s+\omega_b)} = \frac{a_0}{(s/\omega_a+1)(s/\omega_b+1)}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1} = 10^7\ \text{rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2} = 10^5\ \text{rad/s}$$

$$T(s) = a_0\frac{1}{(s/\omega_a+1)(s/\omega_b+1)}\;\frac{(s/\omega_2+1)(s/\omega_1+1)}{\underbrace{\left(R_1C_2s+(s/\omega_2+1)(s/\omega_1+1)\right)}_{m(s)}}$$

Anal·lisi del polinomi $m(s)$:

$$m(s) = R_1C_2s + \frac{s^2}{\omega_1\omega_2} + \frac{s}{\omega_1} + \frac{s}{\omega_2} + 1 = \overbrace{\frac{R_1}{R_2}}^{=1}\frac{s}{\omega_2} + \frac{s^2}{\omega_1\omega_2} + s\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\right)+1$$

$$\Rightarrow m(s) = \frac{s^2}{\omega_1\omega_2} + s\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}+\frac{1}{\omega_2}\right)+1 = \frac{1}{\omega_1\omega_2}\left(s^2+s(\omega_2+2\omega_1)+\omega_1\omega_2\right)$$

Càlcul dels zeros de $m(s)$:

$$p_{12} = \frac{-(\omega_2+2\omega_1)\pm\sqrt{(\omega_2+2\omega_1)^2-4\omega_1\omega_2}}{2} = \frac{-(\omega_2+2\omega_1)\pm\sqrt{\omega_2^2+4\omega_1^2+\cancel{4\omega_2\omega_1}-\cancel{4\omega_1\omega_2}}}{2}$$

$$p_{12} = \frac{-(\omega_2+2\omega_1)\pm\sqrt{\omega_2^2+4\omega_1^2}}{2} \underset{\omega_1 \gg \omega_2 \Rightarrow \omega_1^2 \ggg \omega_2^2}{\simeq} \frac{-(\omega_2+2\omega_1)\pm\sqrt{4\omega_1^2}}{2} \begin{cases} \to -\omega_2/2 \\ \to \dfrac{-\omega_2-4\omega_1}{2} \end{cases}$$

Per tant $\quad p_1 \cong -\omega_2/2 = -5.10^4$ rad/s

$$p_2 \cong \frac{-\omega_2 - 4\omega_1}{2} \approx \frac{-4\omega_1}{2} = -2\omega_1 = -2.10^7 \text{ rad/s}$$

i :

$$T(s) = \frac{a_0 (s/\omega_2 + 1)(s/\omega_1 + 1)}{(s/\omega_a + 1)(s/\omega_b + 1)\frac{1}{\omega_1 \omega_2}(s - p_1)(s - p_2)} =$$

$$= \frac{a_0 (s/\omega_2 + 1)(s/\omega_1 + 1)}{(s/\omega_a + 1)(s/\omega_b + 1)\frac{1}{\omega_1 \omega_2}(s + \omega_2/2)(s + 2\omega_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{a_0 (s/\omega_2 + 1)(s/\omega_1 + 1)}{(s/\omega_a + 1)(s/\omega_b + 1)\frac{1}{\cancel{\omega_1 \omega_2}} \cancel{\omega_2}/\cancel{2} \cdot \cancel{2\omega_1} \left(\frac{2s}{\omega_2} + 1\right)\left(\frac{s}{2\omega_1} + 1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T(s) = \frac{a_0 (s/\omega_2 + 1)(s/\omega_1 + 1)}{(s/\omega_a + 1)(s/\omega_b + 1)(2s/\omega_2 + 1)(s/2\omega_1 + 1)}}$$

$k = a_0 > 0 \Rightarrow$ Realimentació negativa

d) L.G.R. ??

- zeros : $-\omega_2, -\omega_1, \infty, \infty$

  pols : $-\omega_a, -\omega_b, -\frac{\omega_2}{2}, -2\omega_1$

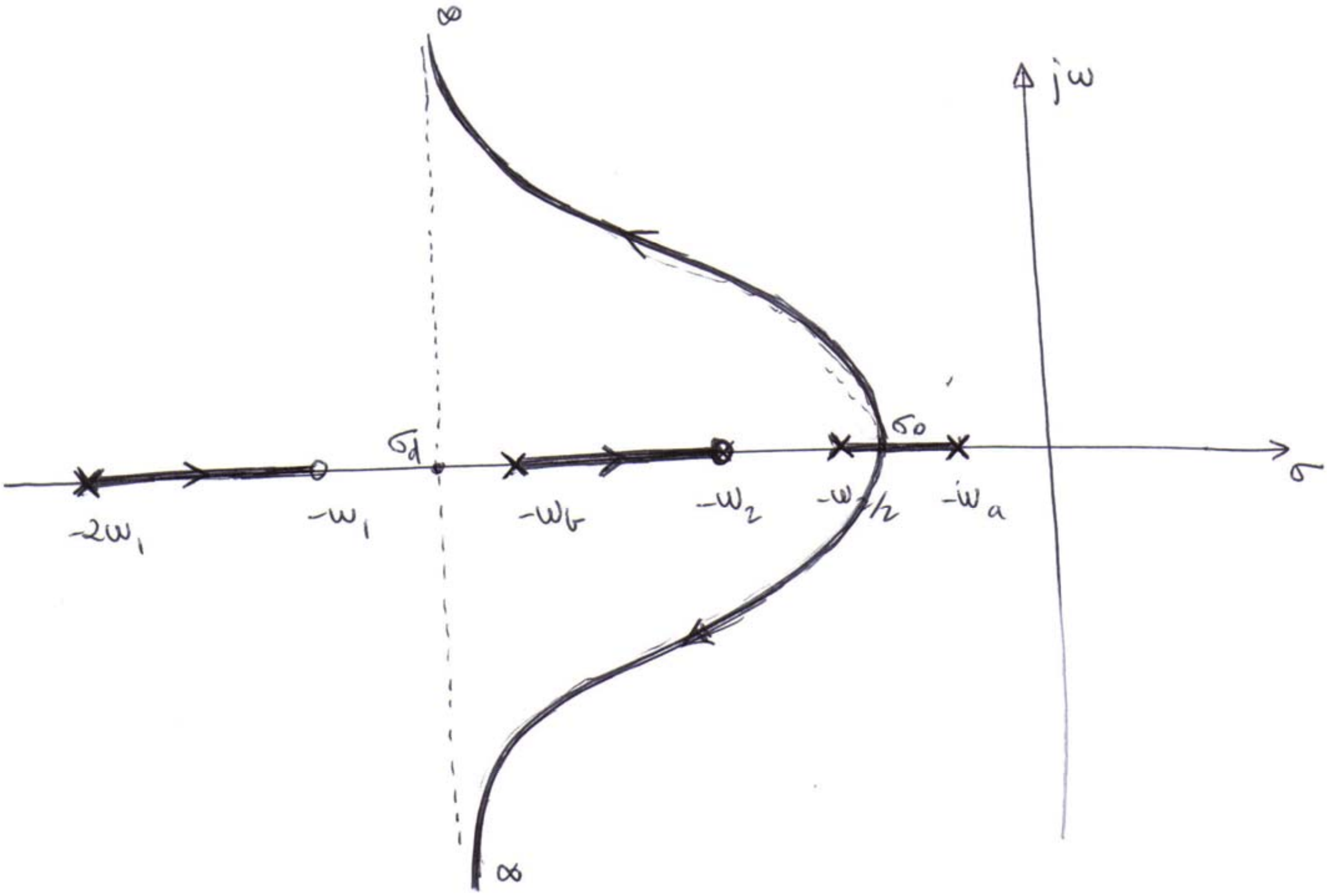
- asímptotes :

$$\frac{2l+1}{2}\pi \quad l = 0,1 \Rightarrow \pi/2 ; 3\pi/2$$

origen

$$\sigma_d = \frac{\sum p - \sum z}{2} = \frac{-\omega_a - \omega_b - \omega_2/2 - 2\omega_1 + \omega_2 + \omega_1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_d = \frac{-\omega_a - \omega_b + \omega_2/2 - \omega_1}{2} \underset{\substack{\omega_1 >> \omega_a \\ \omega_1 >> \omega_2}}{\cong} \frac{-\omega_b - \omega_1}{2} = \frac{-1{,}1.10^7}{2} = -0{,}55.10^7$$



Els pols reals $-\omega_2/_2$ i $-\omega_a$ s'aproximen a un punt i es separen en dos pols complexos:

$$\sigma_0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma_0+\omega_2} + \frac{1}{\sigma_0+\omega_1} - \frac{1}{\sigma_0+\omega_a} - \frac{1}{\sigma_0+\omega_b} - \frac{1}{\sigma_0+\frac{\omega_2}{2}} - \frac{1}{\sigma_0+2\omega_1} = 0$$

σ_0 estarà entre $-\omega_2/_2$ i $-\omega_a$ això significa que els termes $\frac{1}{\sigma_0+\omega_a}$ i $\frac{1}{\sigma_0+\omega_2/_2}$ són els més grans. Fent aquesta aproximació:

$$-\frac{1}{\sigma_0+\omega_a} - \frac{1}{\sigma_0+\omega_2/_2} = 0 \Rightarrow \sigma_0+\omega_a = -\sigma_0-\omega_2/_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_0 = \frac{-\omega_2/_2-\omega_a}{2} = \frac{-5\cdot10^4-10^2}{2} \simeq 25\cdot10^3} = \frac{\omega_2}{4}$$

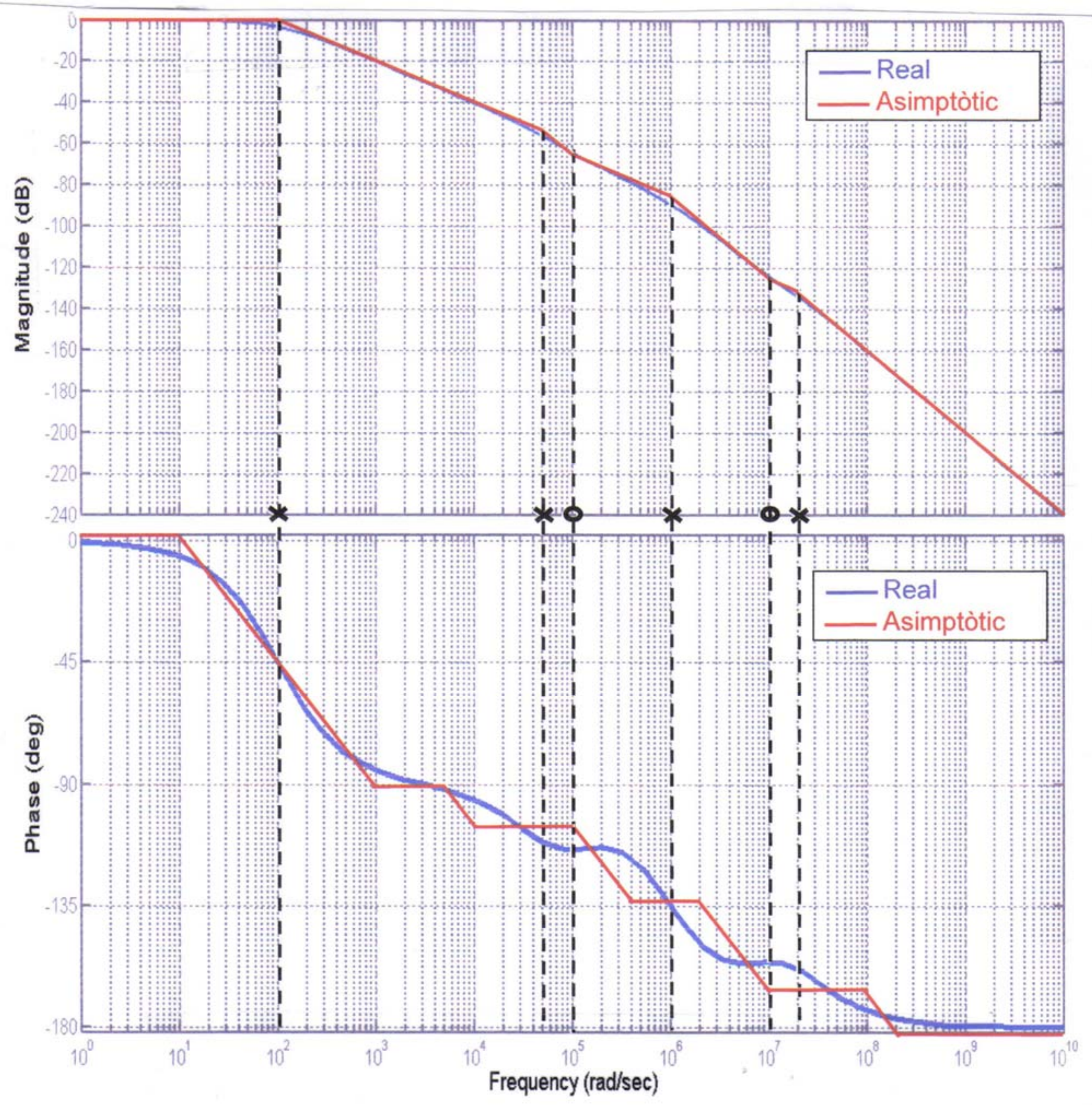
e) No hi ha cap valor d'a_0 que faci inestable el sistema

f) Diagrames de Bode:

$$T(j\omega) = a_0 \frac{\left(j\omega/\omega_2+1\right)\left(j\omega/\omega_3+1\right)}{\left(j\omega/\omega_a+1\right)\left(j\omega/\omega_b+1\right)\left(j\frac{2\omega}{\omega_2}+1\right)\left(j\omega/2\omega_1+1\right)} =$$

$$= a_0 \frac{\left(j\omega/10^5+1\right)\left(j\omega/10^7+1\right)}{\left(j\omega/10^2+1\right)\left(j\omega/10^6+1\right)\left(j\omega/5\cdot 10^4+1\right)\left(j\omega/2\cdot 10^7+1\right)}$$

A continuació trobareu el diagrama de Bode calculat amb MATLAB a sobre del qual hem dibuixat el diagrama asimptòtic.



Per reproduir els resultats amb el MATLAB heu de fer servir les següents línies:

```
num=[0 0 1e8 1e15 1e20]
den=[1 2.11e7 2.11e13 1e18 1e20]
bode(tf(num,den),(1,1e10));
```

que correspon a la funció de transferència $T_a = \frac{T}{a_0}$

$$T_a(s) = \frac{10^8 s^2 + 10^{15} s + 10^{20}}{s^4 + 2{,}11\cdot 10^7 s^3 + 2{,}11\cdot 10^{13} s^2 + 10^{18} s + 10^{20}}$$

Si ens fixem en el diagrama asimptòtic i el real, la fase arriba a $-135°$ en $\omega = 10^6$ rad/s on $|T_a(j\omega)|_{dB}$ s'ha de calcular a partir del valor en $\omega = 5\cdot 10^4$ i després propagant l'efecte:

1) tram entre $\omega = 10^2$ i $\omega = 5\cdot 10^4$

caiguda en dB $\Rightarrow$ $-20\ \text{dB/dec} = \dfrac{|T_a(j5\cdot 10^4)|_{dB} - 0}{\log(5\cdot 10^4) - \log(10^2)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{|T_a(j5\cdot 10^4)|_{dB} = -20\cdot 2{,}7 = -53\ \text{dB}}$$

2) tram entre $\omega = 5\cdot 10^4$ i $\omega = 10^5$

$$-40\ \text{dB/dec} = \frac{|T_a(j10^5)|_{dB} - |T_a(j5\cdot 10^4)|_{dB}}{\log 10^5 - \log 5\cdot 10^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|T_a(j10^5)|_{dB} = -40\cdot 0{,}3 + (-53) = -65\ \text{dB}}$$

3) tram entre $\omega = 10^5$ i 10^6 $\Rightarrow$ cauen 20 dB $\Rightarrow$

$\Rightarrow |T_a(j10^6)|_{dB} = -85$ dB

Per tant, per que el marge de fase sigui 45° l'amplitud de $T(j\omega)$ en $\omega = 10^6$ ha de ser 0 dB $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 20 \log a_0 = 85\ dB \Rightarrow \boxed{a_0 = 17783}$$