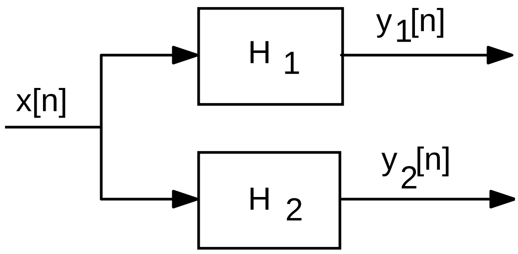


P1.- Sea x[n] un proceso estacionario real de media nula y autocorrelación $r_x[m]=\sigma^2\,\delta[m]$. Como se ilustra en la figura, a partir de x[n] se generan dos señales $y_1[n]$ e $y_2[n]$ mediante el filtrado por sendos filtros H_1 y H_2 con respuesta impulsional real $h_1[n]$ y $h_2[n]$, respectivamente, y que se suponen reales, causales y estables. Se pide:

a) si la entrada x[n] se aplica en n=0, la evolución de la potencia de las salidas de los sistemas.

En el caso de que la entrada se considere aplicada desde tiempo infinito, se pide

b) la expresión de la correlación cruzada $r_{ij}[m] = E\{y_i[n+m]y_j^*[n]\}$ y su transformada $S_{ij}(z)$;

c) la condición que han de cumplir las respuestas frecuenciales de los filtros para que las secuencias $y_1[n]$ e $y_2[n]$ sean dos procesos incorrelados;

d) para los sistemas

$$H_1(z) = \frac{1}{1+az^{-1}} \qquad\qquad H_2(z) = \frac{b+z^{-1}}{1+bz^{-1}}$$

determinar $r_{12}[m]$.

SOLUCIÓN

a) Teniendo en cuenta la causalidad de los sistemas y que la entrada se aplica en n=0, podemos escribir haciendo uso de la convolución:

$$r_{y_i}[n+m,n] = E\left\{y_i[n+m]y_i^*[n]\right\} = E\left\{\sum_{k=0}^{n+m} x[n+m-k]h_i[k]\sum_{i=0}^{n} x^*[n-i]h_i^*[i]\right\} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+m} h_i[k]\sum_{i=0}^{n} h_i^*[i]\,E\left\{x[n+m-k]x^*[n-i]\right\} = \sum_{k=0}^{n+m} h_i[k]\sum_{i=0}^{n} h_i^*[i]\,r_x[m-k+i] \quad (n+m>0, n>0)$$

Si $r_x[m]=\sigma_x^2\,\delta[m]$, tenemos

$$P_{y_i}[n] = r_{y_i}[n,n] = \sum_{k=0}^{n} h_i[k]\sum_{i=0}^{n} h_i^*[i]\,\sigma^2\delta[-k+i] = \sigma^2\left(\sum_{k=0}^{n}\left|h_i[k]\right|^2\right)u[n]$$

Podemos observar que, sólo en el caso de que el módulo al cuadrado de la respuesta impulsional sea sumable, se alcanza un régimen estacionario.

b) Reproduciendo el cálculo anterior, se obtiene

$$r_{ij}[m] = E\left\{y_i[n+m]y_j^*[n]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} h_i[k]\sum_{i=0}^{\infty} h_j^*[i]\,r_x[m-k+i] =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_i[k]\left(h_j^*[-i]*r_x[i]\right)_{i=m-k} = h_i[m]*h_j^*[-m]*r_x[m]$$

En términos transformados:

$$\begin{aligned} S_{ij}(z) &= H_i(z)H_j^*(1/z^*)S_x(z) \\ S_{ij}(e^{j\omega}) &= H_i(e^{j\omega})H_j^*(e^{j\omega})S_x(e^{j\omega}) \end{aligned} \qquad (1)$$

c) Para que las salidas se encuentren incorreladas, es necesario que la correlación cruzada sea nula (ya que se trata de procesos de media nula). Por consiguiente ha de cumplirse que

$$H_i(e^{j\omega})H_j^*(e^{j\omega}) = 0$$

d) Aplicando (1) y teniendo en cuenta que los sistemas son reales

$$S_{12}(z) = H_1(z)H_2(1/z)\sigma^2 = \sigma^2 \frac{1}{1+az^{-1}} \frac{b+z}{1+bz} \qquad \text{ROC}: |a| < |z| < |1/b|$$

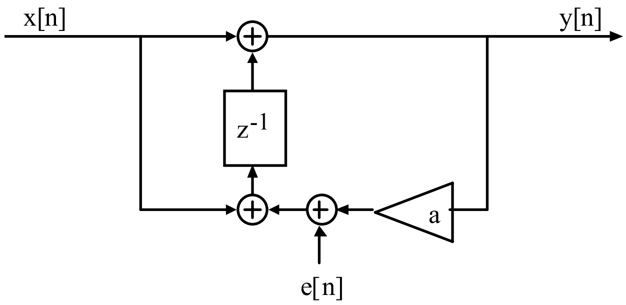
Se procede al desarrollo en fracciones simples

$$S_{12}(z) = \sigma^2 \frac{z^{-1}+b^{-1}}{(1+az^{-1})(1+b^{-1}z^{-1})} = \frac{\sigma^2}{1-ab}\left(\frac{b-a}{1+az^{-1}} - \frac{b-b^{-1}}{1+b^{-1}z^{-1}}\right)$$

lo que permite invertir la transformada y obtener la correlación cruzada:

$$r_{12}[m] = \sigma^2 \frac{b-a}{1-ab}(-a)^m u[m] + \sigma^2 \frac{b-b^{-1}}{1-ab}(-b^{-1})^m u[-m-1]$$

P2.-



La realización de un sistema se muestra en la figura, donde el ruido de redondeo (e[n]) producido en el multiplicador se ha modelado como un ruido blanco aditivo de media nula y potencia σ_e^2.

En primer lugar considere la situación ideal sin ruido de redondeo (e[n] = 0) y calcule:

a) La función de transferencia H(z) del sistema y su diagrama de ceros y polos.

b) La respuesta impulsional h[n] del sistema.

c) El valor de *a* que proporciona una respuesta frecuencial paso bajo con frecuencia de corte a 3 dB $f_c = 0{,}1$. Esboze el módulo de la respuesta frecuencial obtenida.

Ahora considere la presencia del ruido e[n] y analize su influencia a la salida del filtro:

d) Justifique que la salida y[n] se puede expresar en función de la entrada x[n] y el ruido e[n] mediante $y[n] = h[n]*x[n] + h_2[n]*e[n]$ y calcule $h_2[n]$, así como su transformada z.

e) Obtenga la autocorrelación del ruido $e_s[n] = h_2[n]*e[n]$ a la salida del filtro. Calcule la potencia P_r de este ruido en función de *a* y dibuje de forma aproximada su densidad espectral para *a* = 0,75.

SOLUCIÓN: Representando la salida del retardo mediante v[n], podemos escribir

$$y[n] = v[n] + x[n]$$

$$v[n+1] = x[n] + \{ e[n] + a(v[n] + x[n]) \}$$

a)

$$Y(z) = V(z) + X(z)$$

$$zV(z) = aV(z) + (1+a)X(z)$$

$$V(z) = \frac{(1+a)z^{-1}}{1-az^{-1}} X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} X(z)$$

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

(b) $h[n] \quad Z^{-1}\left\{-\frac{1}{a} + \frac{1+1/a}{1-a z^{-1}}\right\} = -\frac{1}{a}\delta[n] + (1+1/a)a^n u[n]$

(c) $H(z)$: paso bajo, $f_c = 0.1$, orden 1

cero en $z = -1$ $(\omega = \pi)$

$H_a(s)$: paso bajo, $\Omega_c = \operatorname{tg} \frac{1}{2} 2\pi f_c = 0.32492$

orden 1, cero en ∞

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s+\Omega_c} \Longrightarrow H(z) = \frac{\Omega}{1+\Omega_c} \frac{1+z^{-1}}{1-a z^{-1}}$$

$$a = \frac{1-\Omega_c}{1+\Omega_c} = 0.50953$$

(d)
$$\left.\begin{aligned} Y(z) &= V(z)+X(z) \\ zV(z) &= aV(z) + (1+a)X(z) + E(z) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Y(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} X(z) + \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}} E(z)$$

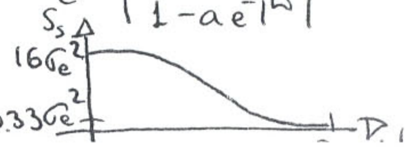
$$h_2[n] = Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}\right\} = a^{n-1} u[n-1]$$

(e)
$$r_s[n] = r_e[n] * r_{h_2}[n] = \sigma_e^2 \delta[n] * r_{h_2}[n] =$$
$$= \sigma_e^2 r_{h_2}[n]$$

$$r_{h_2}[n] = Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}} \frac{z}{1-az}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}}\right)\right\} =$$
$$= \frac{1}{1-a^2} a^n u[n] + \frac{1}{1-a^2} a^{-n} u[-n-1]$$

$$P_r = r_s[0] = \sigma_e^2 r_{h_2}[0] = \sigma_e^2 \frac{1}{1-a^2}$$

$$S_s(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 F\{r_{h_2}[n]\} = \sigma_e^2 \left|\frac{e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}\right|^2 =$$
$$= \frac{\sigma_e^2}{1-2a\cos\omega + a^2}$$



P3.- Un proceso estacionario x(t) analógico es muestreado haciendo uso de una pulsación de muestreo Ω_m . Se pide la relación entre las densidades espectrales del proceso discreto generado al muestrear y del proceso analógico original. ¿Qué condición ha de satisfacer Ω_m para que no se produzca aliasing?
SOLUCIÖN: El muestreo establece la siguiente relación entre el proceso analógico y el discreto:

$$x[n] = x(nT)$$

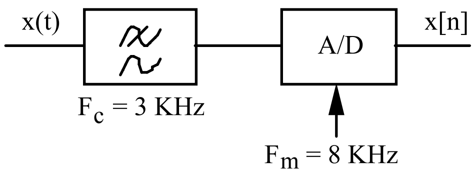
donde T es el periodo de muestreo. A partir de esta relación puedeestablecerse para la correlación:

$$r_x[m] = E\{x[m+n]\ x^*[n]\} = E\{x(mT+nT)x^*(nT)\} = r_x(mT) = r(\tau)_{|\tau=mT}$$

Es decir, la correlación del proceso discreto coincide con el muestreo de la correlación del proceso analógico. Mediante la transformada de Fourier se puede establecer la correspondiente relación entre las densidades espectrales de potencia:

$$S_x(e^{j\omega}) = S_x(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} S_x(j\Omega + r\Omega_m)$$

Es evidente que para evitar aliasing la pulsación de muestreo ha de cumplir la condición de Nyquist para señales deterministas. Por ejemplo, en el caso de señales paso bajo, $\Omega_m \geq 2\ B\Omega$, donde $B\Omega$ es el ancho de banda del proceso analógico.

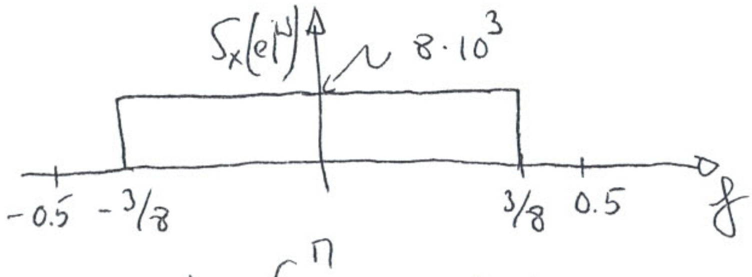


P4.- Un proceso estacionario **blanco** analógico con densidad espectral de potencia 1 es muestreado con una frecuencia $F_m = 8$ kHz tras haber sido filtrado por un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte $F_c = 3$ kHz. Se pide:

a) La densidad espectral del proceso x[n].
b) La potencia de x[n].
c) La autocorrelación de x[n].
d) Si x[n] es procesado por un sistema con respuesta impulsional $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, la potencia del proceso y[n] resultante.

SOLUCIÓN:

a)



b) $P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})\,d\omega = 6\cdot10^3$

c) $r_x[m] = F^{-1}\{S_x(e^{j\omega})\} = 6\cdot10^3\ \dfrac{\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}m}{\frac{3\pi}{4}m}$

d) $S_y(e^{j\omega}) = S_x(e^{j\omega})\,|H(e^{j\omega})|^2 =$

$$= S_x(e^{j\omega})\, 4 \,\text{sen}^2 \frac{\omega}{2}$$

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_y(e^{j\omega})\, d\omega = \frac{8 \cdot 10^3}{2\pi} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 4 \,\text{sen}^2 \frac{\omega}{2}\, d\omega =$$

$$= 8 \cdot 10^3 \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) = 8.4 \cdot 10^3$$