COMUNICACIONES I

QT09
ETSETB-UPC

EJERCICIOS DE TEMA 2:

PROCESOS ALEATORIOS, RUIDO Y CANAL DE COMUNICACIONES

Septiembre, 2009

PROCESOS ALEATORIOS

Ejercicio 1.

Se define el proceso: $X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta)$, donde la amplitud es una variable aleatoria de distribución de probabilidad: $f_A(a) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(-\frac{\sqrt{2}|a|}{\sigma}\right)$ y la fase es una variable aleatoria distribuida uniformemente en $\left[0, 2\pi\right) rad$. Ambas variables son estadísticamente independientes entre sí.

- Calcule los momentos de primer y segundo orden del proceso y comente si éste es estacionario, cicloestacionario,...
- Calcule su densidad espectral

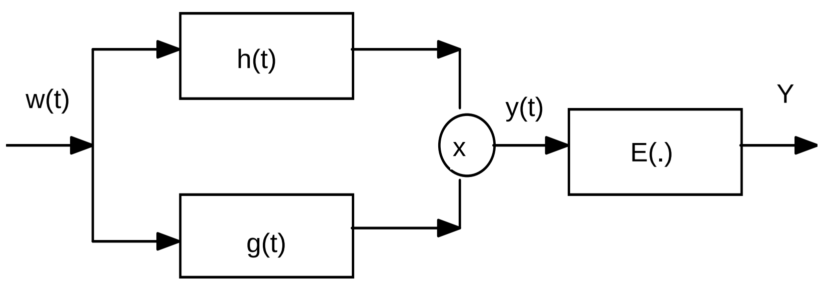
Ejercicio 2.

Se define el proceso: $X(t) = \cos(2\pi f_c t + \Theta)$, donde la fase es una variable aleatoria distribuida uniformemente en $\left[-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}\right) rad$.

- Calcule los momentos de primer y segundo orden del proceso y comente si éste es estacionario, cicloestacionario,...
- Calcule su densidad espectral

Ejercicio 3.

En el esquema de la figura; W(t) es un proceso aleatorio real y estacionario; de media cero y de correlación $R_W(\tau)$. h(t) y g(t) son las respuestas impulsionales de los correspondientes sistemas lineales e invariantes. El bloque final (E) procesa a la salida la esperanza estadística del proceso de entrada al mismo.



a.- Obtenga la expresión de la salida Y=E[Y(t)].

b.- Particularice la expresión anterior; obtenida en el apdo a; para el caso en que el sistema de respuesta impulsional g(t) es un retardador de T seg; (g(t)=δ(t-T)).

c.- Particularice la expresión anterior obtenida en el apdo b; para el caso en que W(t) es ruido blanco de densidad espectral $N_O/2$.

d.- A partir del apartado anterior proponga un procedimiento que permita identificar la respuesta impulsional h(t).

Ejercicio 4.

Sea x(t) = f(t) + n(t) donde f(t) es una señal determinista desconocida y n(t) es un proceso aleatorio estacionario blanco de media nula y densidad espectral S_0. Se desea estimar la señal f(t) reduciendo el ruido n(t), para ello se realiza un promedio temporal de x(t) tal que:

$$y(t) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(\tau)d\tau = x(t) * g(t)$$

a.- Obtenga la expresión de g(t).

b.- y(t) es un estimador sesgado de f(t). Calcule el sesgo definido como: b = E{y(t)} - f(t).

Considerando la aproximación: $\frac{sen(2\pi fT)}{2\pi fT} - 1 \cong \frac{-T^2}{6}(2\pi f)^2$

Demuestre que: b = $(T^2/6)$ f'(t)

c.- Calcule la varianza de la estimación: $\sigma_y^2 = E[(y(t) - E\{y(t)\})^2]$

Demuestre que: $\sigma_y^2 = S_0/2T$.

Observe que la elección de T viene condicionada por los dos requisitos contrapuestos siguientes: para que el sesgo sea pequeño el valor de T debe ser pequeño mientras que para que la varianza sea pequeña T debe ser grande. El criterio utilizado para elegir el valor de T óptimo se basará en la minimización del error cuadrático medio de la estimación.

d.- Obtenga el error cuadrático medio de la estimación: $e = E\{(y(t) - f(t))^2\}$ en función del sesgo b y de la varianza de la estimación σ_y^2.

e.- Deduzca el valor de T que minimiza el error cuadrático medio.

Ejercicio 5.

Sea y(t) = x(t) + n(t) un proceso observable, donde x(t) es el término de señal útil y n(t) el de ruido. Ambos son procesos aleatorios estacionarios de media cero y mutuamente independientes. Se desea separar la señal del ruido mediante el diseño de un sistema lineal e invariante con respuesta impulsional h(t) y función de transferencia H(f). El proceso de salida $\hat{x}(t)$ debe ser lo más parecido posible a la señal x(t).

a.- Obtenga la autocorrelación del proceso de salida $R_{\hat{x}}$ y las correlaciones cruzadas $R_{x\hat{x}}$ y $R_{\hat{x}x}$ en función de h(t) y de las autocorrelaciones de la señal útil y del ruido.

Se define el error cuadrático medio entre la señal útil y la señal estimada como:

$$ECM = E[|x(t) - \hat{x}(t)|^2]$$

b.- Exprese este error en función de H(f) y de las densidades espectrales de potencia de la señal útil $S_x(f)$ y del ruido $S_n(f)$.

La función de transferencia del sistema que minimiza el error cuadrático medio es igual a:

$$H(f) = \frac{S_X(f)}{S_X(f) + S_n(f)}$$

c.- Verifique la afirmación anterior realizando las siguientes operaciones:

c1.- Simplifique la expresión del ECM encontrada en el apartado b), considerando que la función de transferencia H(f) es real.

c2.- Derive el ECM respecto a H(f), sabiendo que:

$$\frac{d}{dH(f)} \int_{-\infty}^{\infty} f[H(f)]\, df = \frac{df[H(f)]}{dH(f)}$$

d.- Demuestre que cuando el ECM es mínimo, el error $e = x(t) - \hat{x}(t)$, y el proceso observable y(t) son incorrelados.

Ejercicio 6.

Sea un proceso estocástico $x(t)$ de la forma: $x(t) = f(t-\lambda)$ donde $f(t)$ es una señal periódica de periodo T, es decir:

$$f(t+kT) = f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \quad \forall k \in \mathbf{Z}$$

y donde λ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $(0,T)$.

a. Obtenga el valor esperado $E[x(t)]$ del proceso $x(t)$.

b. Obtenga la autocorrelación $R_{xx}(t+\tau,t) = E[x(t+\tau)x^*(t)]$ del proceso $x(t)$.

c. Indique si el proceso es estacionario o no y calcule su densidad espectral promediada $\overline{S}_{xx}(f)$:

$$\overline{S}_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{R}_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

donde

$$\overline{R}_{xx}(\tau) = \lim_{\Delta \longrightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} R_{xx}(t+\tau,t)dt$$

A partir de este punto, considere el proceso $y(t)$ dado por: $y(t) = g(t) f(t-\lambda)$ donde $g(t)$ es una señal periódica (determinista) de periodo T y $f(t-\lambda)$ cumple las mismas condiciones que para los apartados anteriores.

d. Analice analíticamente si la nueva señal es estacionaria o no.

e. Calcule la densidad espectral de potencia promedio $\overline{S}_{yy}(f)$ de la señal $y(t)$ en función de la densidad espectral de potencia $S_{gg}(f)$ de la señal $g(t)$.

Ejercicio 7.

Sea un canal de comunicaciones en banda base, lineal e invariante. Su respuesta impulsional es real y se modela como:

$$h_c(t) = \alpha\delta(t - t_d)$$

Donde α a su vez se modela como una variable aleatoria cuyos momentos estadísticos de primero y segundo orden son:

$$E[\alpha] = \alpha_0 \qquad E[\alpha^2] = A_0$$

y el retardo del canal t_d, como una variable aleatoria de función de densidad de probabilidad uniforme en $(0,T_d)$. Ambas variables (α y t_d) son estadísticamente independientes entre sí.

Si a la entrada de dicho canal se presenta un proceso aleatorio $x(t)$ real, estadísticamente independiente a las dos variables aleatorias que modelan $h_c(t)$ y de función de autocorrelación: $R_x(t+\tau,t) = E[x(t+\tau)x(t)]$:

a.1. Demuestre que: $R_y(t+\tau,t) = \frac{A_0}{T_d}\int_{t-T_d}^{t} R_x(u+\tau,u)du$, siendo $y(t)$ el proceso resultante a la salida de dicho canal.

a.2. Si el proceso de entrada $x(t)$ es cicloestacionario ¿Qué condición se debe cumplir para que el proceso de salida sea estacionario? Justifique la respuesta.

a.3. Si el proceso de entrada $x(t)$ es estacionario, demuestre que el proceso de salida es también estacionario y obtenga su función de autocorrelación en función de $R_x(\tau)$. Calcule también la potencia de dicho proceso en función de la potencia del proceso de entrada.

Ejercicio 8. Disponible resuelto

Sea *X(t)* un proceso aleatorio cicloestacionario, y T_c el periodo de su función de autocorrelación: $R_X(t+\tau,t) = R_X(t+T_c+\tau,t+T_c)$.

Su densidad espectral es $S_X(f) = TF\left(\hat{R}_X(\tau)\right)$ siendo $\hat{R}_X(\tau) = \dfrac{1}{T_c}\int\limits_{<T_c>} R_X(t+\tau,t)dt$ la correlación promediada temporalmente.

Sea *Y(t)* el proceso obtenido a la salida de un sistema lineal invariante de respuesta impulsional $h(t)$ cuando a la entrada se presenta *X(t).*

a) Demuestre que *Y(t)* es también cicloestacionario. Para ello calcule su correlación $R_Y(t+\tau,t)$ en función de $R_X(t+\tau,t)$ y de $h(t)$. (NOTA: No es necesario que realice el cálculo para la media, dada la analogía con el desarrollo para la correlación).
b) Calcule la correlación promediada temporalmente del proceso de salida $\hat{R}_Y(\tau)$ en función de $\hat{R}_X(\tau)$ y de $h(t)$.
c) Calcule su densidad espectral $S_Y(f) = TF\left(\hat{R}_Y(\tau)\right)$ en función de $S_X(f)$ y de $H(f)$. Observe que se obtiene la misma relación que para procesos estacionarios.
d) Si $X(t) = \cos(2\pi 1000t) + W(t)$, con $W(t)$ ruido blanco estacionario, de media nula y densidad espectral $\frac{N_0}{2}$, y $h(t)$ la respuesta de un filtro paso bajo ideal de ancho de banda 2KHz, calcule $\hat{R}_X(\tau)$, T_c y $S_Y(f)$.

Ejercicio 9.

Es defineix el procés aleatori $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} A_k\, p(t-kT)$ essent $\{A_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ una seqüència de variables aleatòries amb $E[A_k] = m$ i $E\lfloor A_k A_j \rfloor = R_A(k-j) = R_A(j-k)$. Es considera que $p(t)$ és qualsevol senyal determinista i d'energia finita, amb Transformada de Fourier $P(f)$ i T és una constant.

a) Calculeu la mitja del procés, $m_x(t)$
b) Calculeu l'autocorrelació del procés, $R_x(t+\tau,t)$ en funció de $R_A(n) = R_A(j-k)$
c) Demostrar que aquest procés és cicloestacionari. Quin és el seu periode de cicloestacionarietat?

d) Demostreu que l'autocorrelació promitjada en el temps
$\overline{R}_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T R_x(t+\tau,t)dt$
ve donada per $\overline{R}_x(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A(n)R_p(\tau - nT)$, a on $R_p(\tau)$ és la funció d'autocorrelació determinista de $p(t)$.

e) Calculeu la densitat espectral de potència $S_x(f)$

f) Calculeu $S_x(f)$ si $E\left[A_k A_j\right] = \begin{cases} 0 & per \quad k \neq j \\ {\sigma_A}^2 & per \quad k = j \end{cases}$

Ejercicio 10. Disponible resuelto

Sea un proceso aleatorio complejo $z(t) = x(t) + jy(t)$ tal que las partes real $x(t)$ e imaginaria $y(t)$ son a su vez procesos aleatorios caracterizados por las funciones de correlación $R_x(t+\tau,t), R_y(t+\tau,t), R_{xy}(t+\tau,t), R_{yx}(t+\tau,t)$.

1. Obtenga la función de autocorrelación $R_z(t+\tau,t) = E\left[z(t+\tau)z^*(t)\right]$ en función de $R_x(t+\tau,t), R_y(t+\tau,t), R_{xy}(t+\tau,t), R_{yx}(t+\tau,t)$.

Un proceso aleatorio complejo se denomina circularmente simétrico cuando se cumple

$$R_{zz^*}(t+\tau,t) = E\left[z(t+\tau)z(t)\right] = 0$$

2. Obtenga las condiciones que deben cumplir las funciones $R_x(t+\tau,t), R_y(t+\tau,t), R_{xy}(t+\tau,t), R_{yx}(t+\tau,t)$ para que el proceso $z(t) = x(t) + jy(t)$ sea circularmente simétrico.
3. Si $h(t)$ es la respuesta impulsional de un sistema lineal e invariante y $z(t) = x(t) + jy(t)$ es un proceso aleatorio circularmente simétrico, averigüe si $v(t) = z(t) * h(t)$ es o no es circularmente simétrico.
4. Si $z(t) = x(t) + jy(t)$ es un proceso aleatorio circularmente simétrico averigüe si $v(t) = z(t)e^{j2\pi f_c t}$ es o no es circularmente simétrico. Calcule también su función de autocorrelación $R_v(t+\tau,t)$ en función de $R_z(t+\tau,t)$
5. Sea el proceso $z(t) = e^{j(\varphi + 2\pi t)}$ en el que φ es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\Pi\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)$. Calcule $R_z(t+\tau,t)$, $R_{zz^*}(t+\tau,t)$, $S_z(f)$ y P_z . ¿Es $z(t)$ estacionario? ¿Es $z(t)$ circularmente simétrico? Obtenga $R_x(t+\tau,t), R_y(t+\tau,t), R_{xy}(t+\tau,t), R_{yx}(t+\tau,t)$ a partir de las correlaciones anteriores.

Ejercicio 11. Control Marzo '06 Disponible resuelto

Sea $x(t)$ un proceso aleatorio, estacionario, de media nula y autocorrelación:

$$R_X(\tau) = A^2 + B^2\delta(\tau)$$

con A y B dos constantes diferentes de cero.

(a) Halle la densidad espectral de potencia del proceso $x(t)$.

(b) Calcule la potencia media del proceso $x(t)$.

Considere ahora la variable aleatoria Z, la cual se genera a partir del proceso $x(t)$ según $Z = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$.

(c) Calcule la varianza de la variable aleatoria Z.

(d) Determine el valor mínimo que puede tomar la varianza de Z.

Suponga ahora que el proceso $x(t)$ puede descomponerse según:

$$x(t) = C + w(t)$$

en donde C es una variable aleatoria uniforme y $w(t)$ es un proceso aleatorio, estacionario, blanco, de media nula e independiente de C.

(e) A partir de la información que posee acerca de los procesos aleatorios $x(t)$ y $w(t)$, halle cuál es la media de la variable aleatoria C.

(f) Calcule la autocorrelación del proceso $x(t) = C + w(t)$ y relaciónela con la expresión de la autocorrelación $R_X(\tau)$ dada al principio de este problema. Determine el valor máximo que puede tomar la variable aleatoria C.

CANALES DE COMUNICACIONES, RUIDO Y RELACIÓN SEÑAL A RUIDO

Ejercicio 12.

Sea el canal de comunicaciones de función de transferencia $\left|H_c(f)\right| = \alpha \prod\left(\frac{f}{2B_c}\right) + (1-\alpha)\prod\left(\frac{f}{B_c}\right)$.

La señal a transmitir tiene una densidad espectral plana de ancho de banda B_c Hz, el ruido aditivo a la salida del canal es gaussiano, blanco e independiente de x(t) con densidad espectral $\frac{N_0}{2}$ watts/Hz.

a.- Si el transmisor es simplemente un amplificador, calcule la relación señal a ruido a la salida del sistema en función de $\frac{S_T}{B_c N_0}$. (S_T : Potencia transmitida), cuando el filtro receptor es:

$$H_r(f) = \begin{cases} \frac{1}{H_c(f)} & |f| \le B_c \\ 0 & |f| > B_c \end{cases}$$

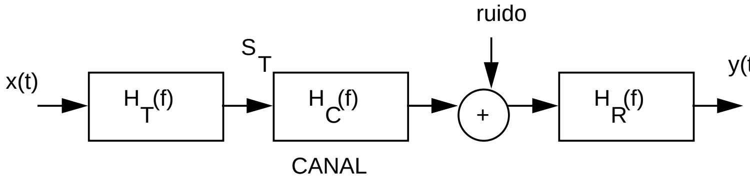
b.- Obtenga los filtros terminales óptimos.

c.- Utilizando los filtros terminales óptimos, obtenidos en el apartado anterior, calcule la nueva relación señal a ruido a la salida del sistema en función de $\frac{S_T}{B_c N_0}$, comentando la diferencia con la obtenida en el sistema del apartado anterior.

Ejercicio 13. FTO

Se pide diseñar un sistema de comunicación en banda base entre un emisor y un receptor, disponiéndose de una potencia para transmitir S_T. La señal que se transmite es x(t) de ancho de banda B_X Hz., densidad espectral $S_X(f)$ y potencia P_X a la entrada del filtro transmisor. El canal es ideal en el margen de frecuencias de interés, presentando una atenuación igual a L y el ruido a la entrada del filtro receptor se halla coloreado con densidad espectral $S_n(f)$.

$$S_x(f) = \frac{P_x}{2B_x}\prod\left(\frac{f}{2B_x}\right) \qquad S_n(f) = \frac{N_0}{2}\left(1+\frac{f^2}{B_x^2}\right)^2$$



a.- Plantee las ecuaciones de diseño de los filtros $H_R(f)$ y $H_T(f)$ terminales óptimos.

b.- Obtenga la expresión de los filtros terminales óptimos a partir de las ecuaciones anteriores.

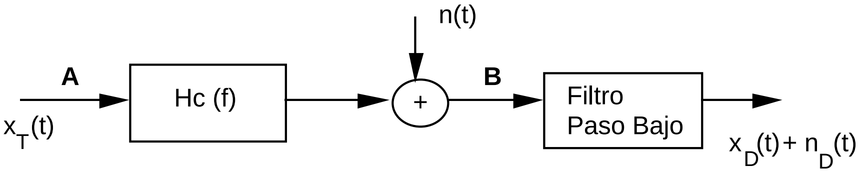
c.- Halle la relación señal a ruido obtenida en recepción.

d.- Suponga ahora, que por razones económicas, los filtros transmisor y receptor se diseñan como filtros paso bajo ideales y de ganancia unidad, con ancho de banda igual a B_X Hz. Obtenga para este caso la relación señal a ruido a la salida del filtro receptor.

e.- Compare las relaciones señal a ruido obtenidas en los apartados c y d entre sí.

Ejercicio 14. Ecualización

Sea el esquema de comunicaciones en banda base de la figura.



La señal $x_T(t)$ es real y es de banda limitada tal que $X_T(f) = 0$ para $|f| \geq f_o$, y es de potencia P_X. El filtro paso bajo es ideal de función de transferencia $\Pi(\frac{f}{2f_o})$. El ruido n(t) es estacionario, de media nula y su densidad espectral es $S_n(f) = \frac{\eta}{2}\,\Pi(\frac{f}{8f_o})$.

La respuesta del canal es: $H_c(f) = \dfrac{2}{\left(1+\left(\dfrac{f}{f_o}\right)^2\right)}$

a.- Dibuje la densidad espectral del ruido $n_D(t)$

b.- Calcule la relación señal a ruido a la salida del filtro paso bajo, en función de la potencia transmitida si se coloca un ecualizador de canal en A.

c.- Calcule la relación señal a ruido a la salida del filtro paso bajo, en función de la potencia transmitida si se coloca un ecualizador de canal en B y compare con el resultado obtenido en el apartado anterior.

Ejercicio 15. Sistemas Repetidores y SNR

Se tiene un sistema de comunicaciones en banda base. El canal es ideal y su atenuación es $L=e^{\alpha d}$ siendo d la distancia en km y α el coeficiente de atenuación α=0.2 km^{-1} . El ruido que introduce el canal, n(t), es aditivo, estacionario y de media nula; su densidad espectral de potencia es:

$Sn(f)=\frac{\eta}{2}\,\Lambda\,(\frac{f}{2.Bx})$

siendo Bx el ancho de banda de la señal.

a.- Tal y como indica la figura 1, en el receptor se coloca un filtro paso bajo ideal de ancho de banda Bx. Calcule la densidad espectral de ruido y la relación $(S/N)_D$ a la salida del mismo.

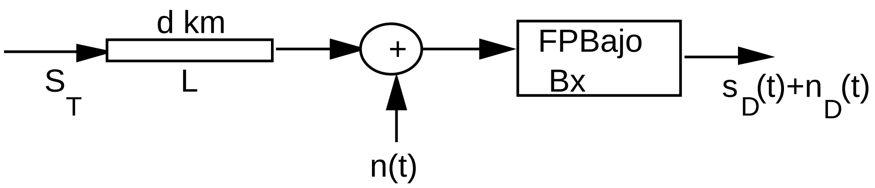


Figura 1.

b.- A fin de mejorar la relación anterior se coloca un amplificador en d/2 km según el esquema de la figura 2:

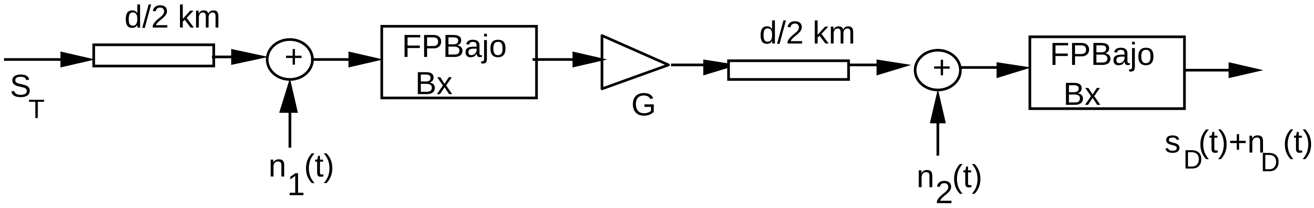


Figura 2

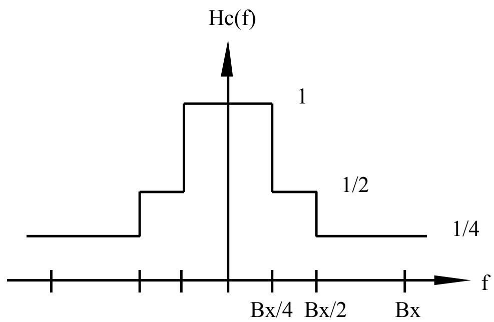
con $R_{n1n2}(\tau)=0$ para todo τ y $S_{n1}(f)=S_{n2}(f)=\frac{\eta}{2}\,\Lambda\left(\frac{f}{2.Bx}\right)$

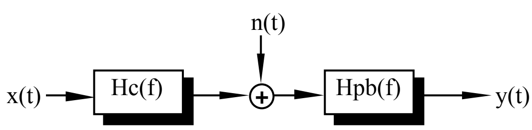
Calcule la densidad espectral del ruido a la salida del sistema y la relación señal ruido $(S/N)_D$.

Si la distancia d=10 km, ¿cuánto debe valer G en dB a fin de mejorar la $(S/N)_D$ respecto al apartado a?

Ejercicio 16.

Una señal x(t) paso bajo con ancho de banda B_x se transmite por un canal cuya función de transferencia Hc(f) puede modelarse por la forma de la figura. A la salida del canal, la señal se suma a un ruido estacionario blanco, n(t), (Sn (f) = $\eta/2$). En el receptor se introduce un filtro paso bajo ideal, de ancho de banda B_x, de tal manera que el sistema total es el que se muestra en la figura.





a.- ¿ Cuál es la utilidad del filtro de recepción?.

b.- Calcule la relación de potencias a la salida total del sistema, $(S/N)_D$. Considere $S_x(f) = \frac{Px}{2B_x}\,\Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$.

c.- Se utiliza como segunda alternativa, un par de filtros terminales óptimos. Diseñe y dibuje el módulo de la función de transferencia de dichos filtros. Halle la $(S/N)_D$ en este caso y compare con la obtenida en el apartado anterior, justificando el resultado.
d.- Si se supone que la $Sn(f) = N_0 f^2/2$. Calcule las nuevas $(S/N)_D$ para los casos de los apartados b) y c) y compare los resultados.

Ejercicio 17.

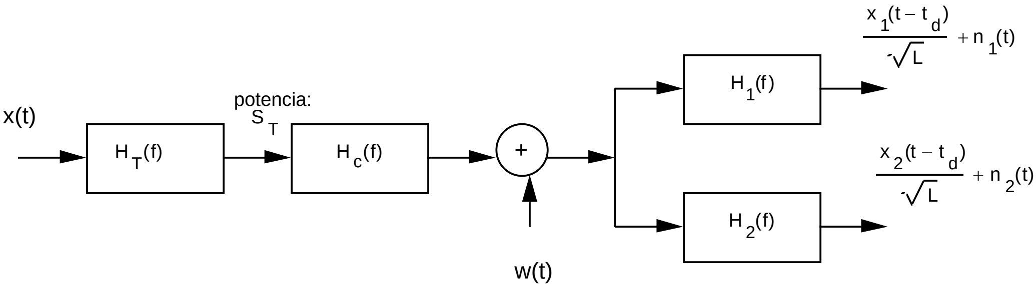
Un sistema de comunicaciones en banda base presenta un canal ideal y con atenuación de potencia igual a 10 log(L) dB. El ruido de canal w(t) es aditivo, estacionario, de media nula y de autocorrelación $R_w(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau)$.

Por el mismo se desea transmitir dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, cuya correlación cruzada entre sí es nula.

$x_1(t)$ es tal que $|X_1(f)| = 0$ para $|f| > B$ y $S_{x1}(f) = \frac{P}{2B}\,\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$

$x_2(t)$ es tal que $|X_2(f)| = 0$ para $|f| > 2B$ y para $|f| < B$; y $S_{x2}(f) = \frac{P}{2B}\left(\Pi\left(\frac{f-1.5B}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f+1.5B}{B}\right)\right)$

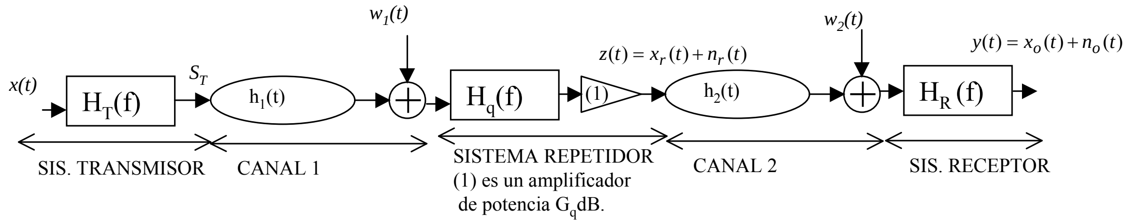
Para ello se transmite por el sistema de la figura la señal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$



a.- Calcule la densidad espectral de x(t) y su potencia P_x
Si se elimina el filtro transmisor $H_T(f)$:
b.- Diseñe $H_1(f)$ y $H_2(f)$ para que a sus salidas se tengan las señales indicadas en la figura.
c.- Calcule la relación de potencias señal a ruido para cada una de las dos salidas: $\frac{S_1}{N_1}$ y $\frac{S_2}{N_2}$ y demuestre que coincide con la relación $\frac{S_1+S_2}{N_1+N_2}$

Ejercicio 18. Sistemas Repetidores y SNR

Entre el transmisor y el receptor de un sistema de radiocomunicaciones no existe un camino directo, por lo que es obligado colocar una estación repetidora, que además de filtrar la señal recibida y amplificarla antes de ser transmitida, puede incorporar la función de ecualización del canal.
El modelo completo se presenta en la siguiente figura.



Considere en el diagrama anterior las siguientes expresiones para las señales y sistemas que aparecen:

- Densidad espectral de ruido: $S_{w1}(f) = S_{w2}(f) = \dfrac{N_0}{2}$

- Densidad espectral de la señal de interés *x(t)*: $S_x(f) = \dfrac{P_x}{2B_x}\prod\left(\dfrac{f}{2B_x}\right)$

- Funciones de transferencia de los canales: $H_1(f) = H_2(f) = \dfrac{\alpha}{1+\dfrac{|f|}{B_x}}$

A continuación se proponen dos alternativas diferentes para eliminar la distorsión que introduce el canal.

ALTERNATIVA A:

- En el transmisor considere que el filtro transmisor únicamente amplifica potencia, es decir, $h_T(t) = \sqrt{\dfrac{S_T}{P_x}}\delta(t)$

- En el sistema repetidor: $H_q(f) = \begin{cases} \dfrac{e^{-j2\pi fD}}{H_1(f)} & |f| \le B_x \\ 0 & |f| > B_x \end{cases}$ y $G_q = 0dB$

- En el receptor: $H_R(f) = \begin{cases} \dfrac{e^{-j2\pi fD}}{H_2(f)} & |f| \le B_x \\ 0 & |f| > B_x \end{cases}$

1. Calcule la expresión de la señal a la salida del sistema repetidor: $x_r(t)$. Calcule y dibuje la densidad espectral del ruido resultante a la salida del sistema repetidor: $n_r(t)$.

2. Calcule la expresión de la señal útil recibida a la salida de todo el sistema: $x_o(t)$. Calcule y dibuje la densidad espectral del ruido resultante a la salida de todo el sistema: $n_o(t)$.

3. Calcule la relación de potencias señal a ruido a la salida de todo el sistema en función de la potencia transmitida S_T y de los parámetros B_x, N_0 y α.

ALTERNATIVA B:

- $H_T(f)$ y $H_R(f)$ representan un par de filtros terminales óptimos que maximizan la relación de potencias señal a ruido a la salida del sistema receptor para una potencia transmitida S_T.
- En el sistema repetidor $H_q(f)$ es un filtro paso bajo ideal de ancho de banda B_x y $G_q = 10\log_{10}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) dB$

Se pide:

4. Exprese la ecuación de ecualización del sistema completo para obtener $y(t)=x(t-D)+ruido$. Es decir, obtenga la relación que deben cumplir las funciones de transferencia de los filtros del sistema. ¿Cuál es la función de transferencia del canal equivalente?

5. Calcule la densidad espectral del ruido a la entrada del filtro receptor $H_R(f)$.

6. Exprese la relación de potencias señal a ruido sobre la salida del sistema completo en función de la potencia transmitida S_T y de las funciones de transferencia de los filtros $H_T(f)$ y $H_R(f)$.

7. En las condiciones del enunciado dé las expresiones exactas para las funciones de transferencia $H_T(f)$ y $H_R(f)$ de los filtros terminales óptimos que maximizan la relación anterior. $|H_T(f)|^2 = cte_1 \frac{\sqrt{S_n(f)}}{\sqrt{S_x(f)}|H_c(f)|}$ $|H_R(f)|^2 = cte_2 \frac{\sqrt{S_x(f)}}{\sqrt{S_n(f)}|H_c(f)|}$

8. Calcule la relación de potencias señal a ruido resultante con los filtros terminales óptimos diseñados en el apartado anterior a la salida de todo el sistema en función de la potencia transmitida S_T y de los parámetros B_x, N_0 y α.

9. Compare la relación obtenida en el apartado anterior con la obtenida mediante la solución A y comente que solución sería la más adecuada para obtener una mayor relación de potencias señal a ruido a la salida del sistema total.

Ejercicio 19.

En un sistema en banda base se transmite una señal aleatoria $x(t)$, estacionaria, de media nula y de densidad espectral de potencia $S_{xx}(f) = \frac{P_x}{2B}\prod\left(\frac{f}{2B}\right)$ Watts/Hz. En lo sucesivo, se proponen distintos esquemas en los que se analiza la calidad del sistema.

Esquema a:
Considere el esquema de la Fig. 1. La señal $x(t)$ es filtrada por un filtro paso bajo ideal de ancho de banda B Hz y amplificada. El amplificador presenta una ganancia en tensión $G > 1$ y es ruidoso, siendo el ruido $w(t)$ aditivo, de media nula y estacionario, con una densidad espectral de potencia $S_{ww}(f)$ Watts/Hz. La salida del amplificador es filtrada con un filtro ideal, de las mismas características que el de la entrada. Obtenga la expresión de la relación señal a ruido a la salida del sistema (SNR_D).

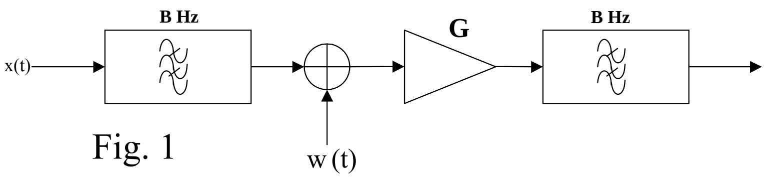


Fig. 1

Esquema b:
Considere ahora el sistema indicado en la Fig. 2 compuesto por dos etapas iguales a la descrita en el punto (a.) de este ejercicio, pero con ganancias y ruidos distintos para cada una de las dos etapas. Los ruidos introducidos en cada etapa de amplificación $w_1(t)$ y $w_2(t)$, son aditivos, de media nula, estacionarios y estadísticamente independientes entre sí, con densidades espectrales de potencia $S_{w_1w_1}(f)$ y $S_{w_2w_2}(f)$, respectivamente. Obtenga la expresión de la nueva relación señal a ruido a la salida del sistema (SNR_D).

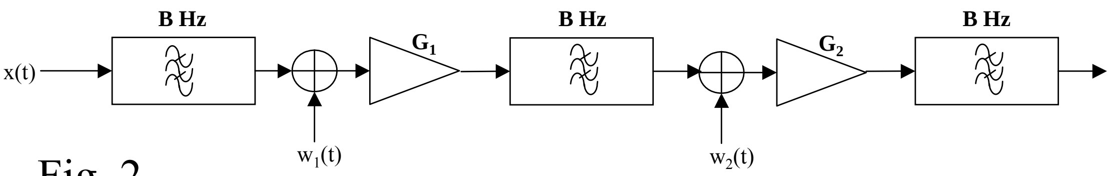


Fig. 2

Para el resultado del apartado (b.), considere ahora que $G_1 = G_2 = G$ y que $S_{w_1w_1}(f) \geq S_{w_2w_2}(f)\ \forall f; |f| \leq B$. Modifique la disposición del receptor de la Fig. 2 para que la relación señal a ruido a la salida de la Fig. 2 sea máxima, sin incorporar ningún elemento nuevo en la cadena. Razone la respuesta.

Esquema c:
Considere ahora la Fig. 3, en la se disponen dos filtros terminales óptimos $H_T(f)$ y $H_R(f)$. Los ruidos $w_1(t)$ y $w_2(t)$, son aditivos, de media nula, estacionarios y estadísticamente independientes entre sí, con densidades espectrales de potencia $S_{w_1w_1}(f)=\prod\left(\frac{f}{2B}\right)$ y $S_{w_2w_2}(f)=\prod\left(\frac{f}{B}\right)$, respectivamente.

c.1. Obtenga la expresión de los filtros terminales óptimos si sabemos que el transmisor inyecta al sistema una potencia total S_T.

c.2. Obtenga la expresión de la relación señal a ruido a la salida del sistema (SNR_D) cuando se utilizan dichos filtros terminales óptimos.

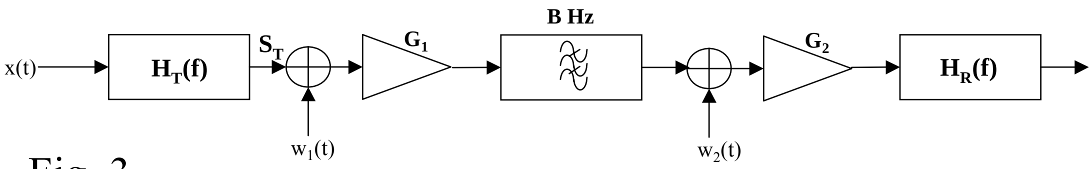


Fig. 3

d. Finalmente, considere la Fig. 4 en la que se estudia el efecto de una cierta no linealidad (SNL) en la amplificación. El término de ruido $w(t)$ es de origen térmico, con densidad espectral de potencia $N_o/2$ Watts/Hz.

d.1. Obtenga la expresión de la señal a la salida del sistema. Identifique el término de señal útil y la expresión de todos los términos interferentes (no deseados). Puede ignorar todos los términos constantes que aparezcan a la salida.

d.2. Obtenga la potencia de señal (SD) a la salida de la no linealidad.

d.3. Obtenga la potencia total de los términos interferentes. Tenga en cuenta que $E[a^4(t)]=3(E[a^2(t)])^2$ si $a(t)$ es una señal aleatoria real con distribución gaussiana. Asuma que la señal $x(t)$ es también gaussiana.

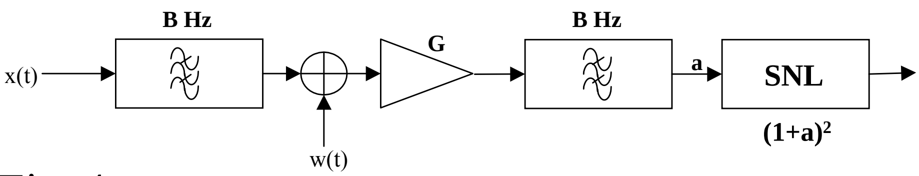


Fig. 4

Ejercicio 20. Examen de control P04 FTO

Se desea transmitir una señal x(t) de ancho de banda B_x, media nula y densidad espectral de potencia $S_{xx}(f)$ por un canal que presenta una función de transferencia $H_c(f)$ y ruido aditivo gaussiano incorrelado con x(t) de media nula y $S_{nn}(f)$. Para la transmisión se dispone de una potencia S_T. En el emisor se dispone un filtro transmisor $H_T(f)$ y en el receptor un filtro $H_R(f)$.

1. Si el transmisor es simplemente un amplificador de ganancia (de potencia) G_T, se pide

    Calcule G_T en función de $S_{xx}(f)$ y S_T

    Justifique las especificaciones de diseño de $H_R(f)$ y calcule $H_R(f)$

    Formule SNR_D en función de $S_{nn}(f)$, $S_{xx}(f)$, S_T y $H_C(f)$

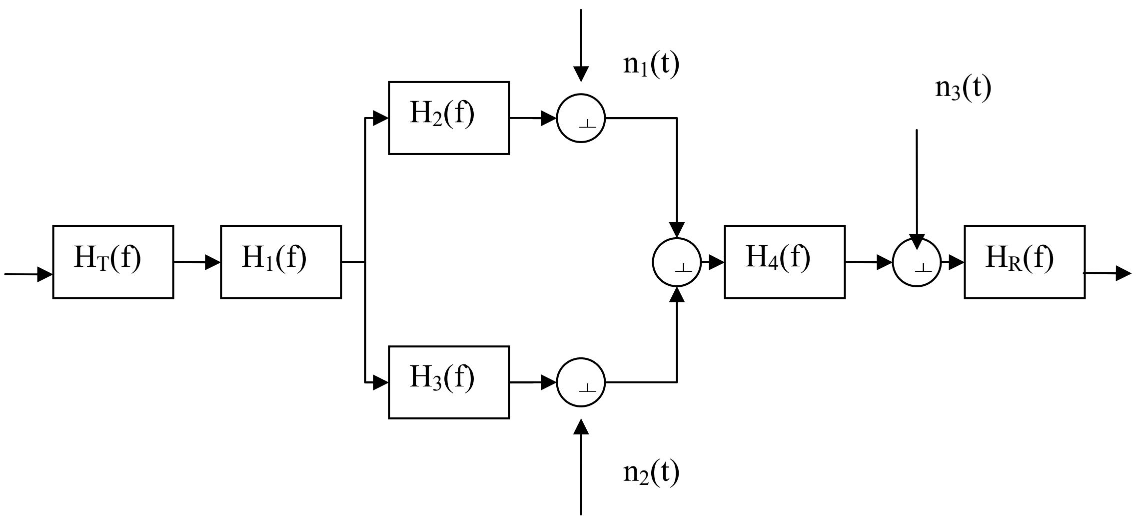
2. Como alternativa al apartado anterior, especifique y justifique las condiciones de diseño que deben cumplir los filtros terminales óptimos $H_T(f)$ y $H_R(f)$

3. Si los filtros terminales óptimos tienen la expresión

$$\left|H_T(f)\right|^2 = k_T \frac{\sqrt{S_{nn}(f)}}{\sqrt{S_{xx}(f)}\left|H_C(f)\right|} \qquad \left|H_R(f)\right|^2 = \frac{\sqrt{S_{xx}(f)}}{\sqrt{S_{nn}(f)}\left|H_C(f)\right|}$$

Obtenga expresiones para la potencia transmitida y la SNR_D

<u>Suponga a partir de este punto el siguiente sistema de comunicaciones:</u> En las cuestiones siguientes aproveche los resultados obtenidos en los apartados 2 y 3 de este ejercicio.



Las 3 señales de ruido $n_1(t)$, $n_2(t)$ y $n_3(t)$ son procesos aleatorios estacionarios de media nula estadísticamente independientes entre sí e independientes de la señal de entrada x(t) y todos ellos presentan la misma función de densidad espectral: $S_{nn}(f) = \frac{N_0}{2}$

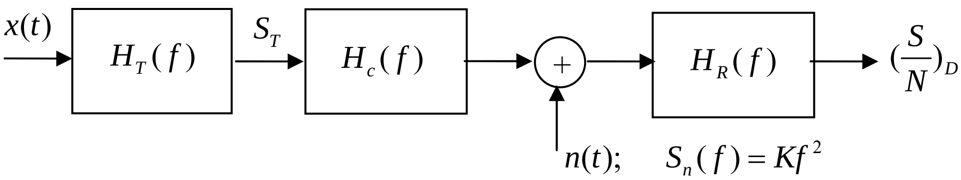
Por otro lado $H_1(f) = H_4(f) = \prod\left(\frac{f}{2B_x}\right)$, $H_2(f) = \alpha_2 e^{-j2\pi f t_2}, H_3(f) = \alpha_3 e^{-j2\pi f t_3}$

4) Calcule $H_T(f)$ y $H_R(f)$ óptimos

5) Suponiendo $S_{xx}(f)=\frac{P_x}{2B_x}\Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$ y $t_2=t_3$, obtenga la SNR óptima a la salida de todo el sistema.

Ejercicio 21. Disponible resuelto

Se desea trasmitir una señal banda base $x(t)$ a través del sistema de la figura:



La señal $x(t)$ es un proceso estacionario con potencia P_x y densidad espectral uniforme en el intervalo $|f|\le B_x$, y el canal es un filtro paso bajo de respuesta $H_c(f)=\frac{1}{1+j(\frac{f}{\alpha B_x})}$. α es una constante real.

El objetivo de este ejercicio es comparar dos diseños de los filtros transmisor y receptor:

a) Los filtros Transmisor y Receptor se diseñan como filtros terminales óptimos que maximizan $(\frac{S}{N})_D$ para una potencia transmitida dada S_T y que conjuntamente ecualizan el canal. Para esta solución se pide que calcule la $(\frac{S}{N})_D$, en función de S_T, K, B_x, α . Justifique el resultado aplicando la desigualdad de Swartz ($\int|u|^2\int|v|^2 \ge \left(\int|uv|\right)^2$). No es necesario que calcule las funciones de transferencia de los dos filtros.

b) El filtro transmisor tiene como respuesta $H_T(f)=1+j(\frac{f}{\alpha B_x})$ y el filtro receptor es filtro paso bajo ideal ajustado al ancho de banda B_x. Para esta solución se pide que calcule la $(\frac{S}{N})_D$, en función de S_T, K, B_x, α .

c) Compare la pérdida de dicha relación en el caso b) respecto de los filtros terminales óptimos del caso a). Inicialmente dé el resultado en función de α y posteriormente particularice para $\alpha=1$ y para $\alpha=0$.

Ejercicio 22.

Sea x(t) un proceso aleatorio definido como:

$$x(t) = Ae^{j2\pi C\alpha t}$$

donde A y C son constantes y α es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad $p_\alpha(\alpha)$ es uniforme entre -1 y 1.

a.- Calcule y dibuje el espectro de potencia $S_X(f)$ del proceso x(t). Discuta la estacionariedad y ergodicidad del proceso x(t).

b.- Calcule el ancho de banda B y la potencia media P del proceso x(t).

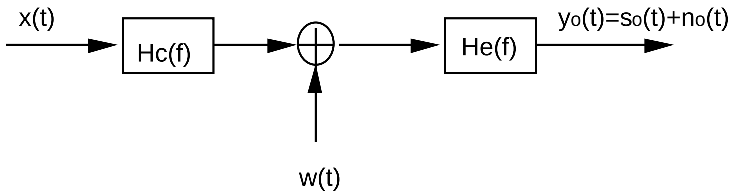
Se transmite el proceso x(t) a través de un canal pasobajo cuya respuesta en frecuencia es:

$$H_c(f) = 1 + \beta sign(f) \quad -1 < \beta < 1 \qquad -B < f < B$$

y a cuya salida se añade un ruido blanco filtrado w(t) de media nula e incorrelado con x(t) cuyo espectro es:

$$S_w(f) = \frac{P_w}{2B}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Para compensar la distorsión del canal se considera primero el uso de un ecualizador ideal tal como se muestra en la figura:

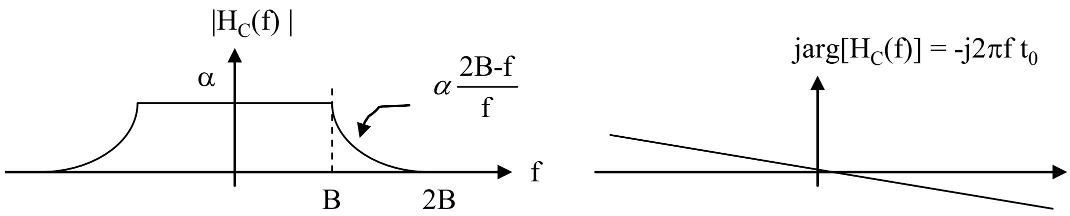


c.- Halle la respuesta $H_e(f)$ de un ecualizador ideal del canal tal que la componente de señal a la salida sea $s_O(t)$=Kx(t-T)

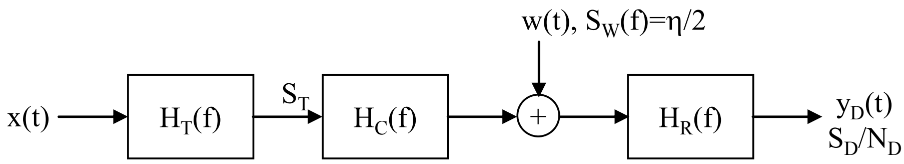
d.- Calcule la SNR=Ps_O/Pn_O obtenida a la salida del ecualizador. ¿Qué valores de β son los más perjudiciales? ¿Qué problemas presenta la realización del filtro $H_e(f)$?

Ejercicio 23. Examen final P05

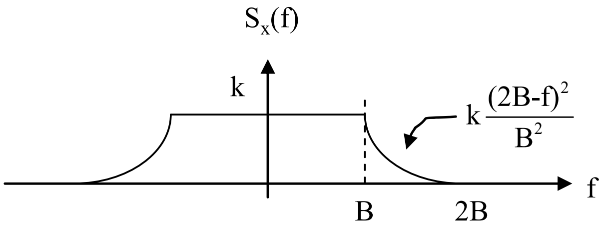
Se desea trasmitir una señal banda base $x(t)$ a través de un canal paso bajo cuya función de transferencia, $H_C(f)$, es



Para ello se propone utilizar el sistema de la siguiente figura,



con $H_T(f)$ y $H_R(f)$ los filtros transmisor y receptor, respectivamente. Los filtros transmisor y receptor se diseñan como filtros que ecualizan el canal en ausencia de ruido y también maximizan la S_D/N_D para una potencia transmitida dada S_T. La señal $x(t)$ es un proceso estacionario con potencia P_x y con una densidad espectral $S_x(f)$ como se indica en la figura:



a) Ajuste la constante k de la densidad espectral de la señal $x(t)$ para que ésta sea de potencia P_x.

b) Para los filtros transmisor y receptor propuestos, calcule la S_D/N_D en función de $S_T, N_0=\eta, B, \alpha$. (No es necesario que calcule las funciones de transferencia de los dos filtros).

Nota: Desigualdad de Schwarz: $\int |u|^2 \int |v|^2 \geq \left| \int uv^* \right|^2$

c) ¿Qué problema se encontraría si intentara realizar la ecualización total de este canal sólo en recepción ($H_T(f)=1$)?

Ejercicio 24. Control Marzo ’06 Disponible resuelto

Se desea transmitir una señal con densidad espectral plana de valor S_0, ancho de banda B_x y potencia P_x. El canal es ideal sin atenuación y el ruido aditivo presenta una densidad espectral de potencia:

$$S_n(f) = \begin{cases} \frac{N_o}{2}(1-\alpha)^2 & 0 \le |f| \le \frac{B_x}{2} \\ \frac{N_o}{2}(1+\alpha)^2 & \frac{B_x}{2} < |f| \end{cases} \quad \text{con } 0 \le \alpha < 1.$$

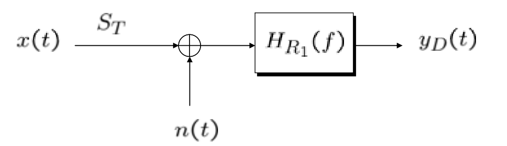


Figura 1

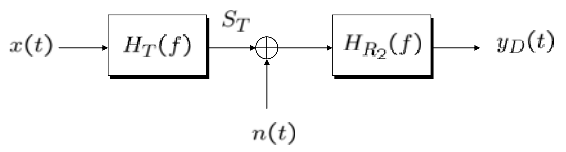


Figura 2

(a) Para el diagrama de bloques de la figura 1, determine cuál es el mejor filtro receptor $H_{R1}(f)$ tal que la SNR en destino sea máxima y la señal útil en destino no presente distorsión. Justifique su elección.

(b) Con el filtro receptor $H_{R1}(f)$ hallado en el apartado (a), calcule la SNR que se obtiene en destino. Deje el resultado en función de $S_T/(N_0 B_x)$ en donde la potencia transmitida $S_T = P_x$.

(c) Para el diagrama de bloques de la figura 2, indique cuál es el mejor filtro transmisor $H_T(f)$ y cuál es el mejor filtro receptor $H_{R2}(f)$ de manera que la SNR en destino sea máxima y la señal en destino no presente distorsión.

(d) Con los filtros $H_T(f)$ y $H_{R2}(f)$ indicados en el apartado (c), calcule la SNR que se obtiene en destino. Deje el resultado en función de $S_T/(N_0 B_x)$ con S_T la potencia indicada en la figura 2.

(e) Compare las SNR en destino de la figura 1 y de la figura 2. Discuta el resultado.