PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial **20 d'abril de 2007**

1. Tenim dues urnes d'aspecte idèntic. En la urna A hi ha 5 boles blanques i 3 boles negres. En la urna B hi ha 4 boles blanques i 5 boles negres. A més, es tria una urna a l'atzar i s'hi afegeix una bola blanca.

   (a) Treiem una bola a l'atzar de la urna A. Quina és la probabilitat que sigui negra?

   (b) Si la bola extreta de la urna A és negra, quina és la probabilitat que la bola addicional anés a parar a la urna A?

   (c) Es tria una urna a l'atzar i s'hi extreu una bola. Quina és la probabilitat que sigui blanca?

   (d) S'extreu una bola de cada urna. Quina és la probabilitat que siguin del mateix color.

   (e) S'extreu una bola de la urna A (amb reemplaçament) repetidament fins que la bola surt negra. Quin és el nombre mig de vegades que hem fet l'experiment?

   (f) En l'apartat anterior, quina és la probabilitat que calguin més de 10 extraccions?

   Resolució:

   Denotem: b_A ='La bola blanca va a parar a la urna A'. b_B ='La bola blanca va a parar a la urna B'. $P_A(n)$: probabilitat d'extreure una bola negra de la urna A, etc.

   (a) $P_A(n) = P_A(n|b_A)P(b_A) + P_A(n|b_B)P(b_B) = \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{48} = 0.3541$.

   (b) $P_A(b_A|n) = \frac{P_A(n|b_A)P(b_A)}{P_A(n)} = \frac{8}{17} = 0.4705$.

   (c) $P(b) = P_A(b)P(A) + P_B(b)P(B)$. On $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P_A(b) = 1 - P_A(n) = \frac{31}{48}$ i $P_B(b) = P_B(b|b_A)P(b_A) + P_B(b|b_B)P(b_B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{36}$. Així: $P(b) = \frac{31}{48} \cdot \frac{1}{2} + \frac{17}{36} \cdot \frac{1}{2} = \frac{161}{288} = 0.5590$.

   (d) $P(\text{Mateix color}) = (P_A(n|b_A)P_B(n|b_A) + P_A(b|b_A)P_B(b|b_A))P(b_A) + (P_A(n|b_B)P_B(n|b_B) + P_A(b|b_B)P_B(b|b_B))P(b_B) = (\frac{3}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{9})\frac{1}{2} + (\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{10})\frac{1}{2} = \frac{53}{108} = 0.4907$.

   (e) El nombre de vegades N que fem l'experiment és una variable geomètrica, fixada la configuració de la urna A, amb $p = P_A(n|b_A)$ o $p = P_A(n|b_B)$ segons on vagi la bola blanca addicional.

   $E[N] = \frac{1}{2}(\frac{1}{P_A(n|b_A)} + \frac{1}{P_A(n|b_B)}) = \frac{1}{2}(\frac{9}{3} + \frac{8}{3}) = \frac{17}{6} = 2.83$.

   (f) Que calguin més de 10 extraccions equival a que a les 10 primeres ha sortit bola blanca. Així: $P(N > 10) = P(N > 10|b_A)P(b_A) + P(N > 10|b_B)P(b_B) = P_A(b|b_A)^{10}\frac{1}{2} + P_A(b|b_B)^{10}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}((\frac{6}{9})^{10} + (\frac{5}{8})^{10}) = 0.0132$.

2. El temps de vida d'un dispositiu és una variable aleatòria X exponencial de valor mitjà 50 hores.

   (a) Quina és la probabilitat que el dispositiu duri més de 75 hores?

   (b) Posem en marxa 10 dispositius independents. Passades 200 hores, quina és la probabilitat que quedi algun dispositiu funcionant?

   (c) Un cost en euros associat al dispositiu ve donat per la variable $Y = g(X)$ on:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 50 \\ 4 - \frac{x}{25} & \text{si } 50 < x < 100 \\ 0 & \text{si } x \geq 100 \end{cases}$$

   Calculeu la funció de distribució de la variable aleatòria Y.

   (d) Calculeu l'esperança de Y.

Resolució:

(a) Una variable exponencial té funció de densitat $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ i funció de distribució $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. A més, la seva esperança val $1/\lambda$, d'on $\lambda = 1/50$. Ara, ens demanen:

$$P(X > 75) = 1 - P(X \leq 75) = 1 - F_X(75) = e^{-\frac{75}{50}} = e^{-3/2} = 0.2231.$$

(b) La probabilitat que té cada dispositiu de funcionar passades 200 hores val $P(X > 200) = e^{-4}$. Llavors, la probabilitat que en funcioni algun és complementària de que no en funcioni cap, és a dir, que tots els dispositius no funcionin:

$$P(\text{Algun funciona}) = 1 - P(\text{Cap funciona}) = 1 - P(X < 200)^{10} = 1 - (1 - e^{-4})^{10} = 0.1687.$$

(c) La variable Y només pren valors en l'interval $\Omega_Y = [0, 2]$.

Per $y < 0$, $F_Y(y) = 0$.

En $y = 0$, $F_Y(0) = P(X > 100) = 1 - F_X(100) = e^{-2}$.

Per $0 < y < 2$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(4 - \frac{X}{25} \leq y) = P(X \geq 100 - 25y) = e^{-2+\frac{y}{2}}$.

Per $y \geq 2$, $F_Y(y) = 1$.

Y és una variable mixta amb salts en $y = 0$ ($P(Y = 0) = e^{-2}$) i en $y = 2$ ($P(Y = 2) = 1 - e^{-1}$).

(d) Pel teorema de l'esperança:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx == \int_0^{50} 2 \frac{1}{50} e^{-\frac{x}{50}} dx + \int_{50}^{100} (4 - \frac{x}{25}) \frac{1}{50} e^{-\frac{x}{50}} dx$$

Amb el canvi $x = 50t$:

$$E[Y] = \int_0^1 2e^{-t} dx + \int_1^2 (4 - 2x) e^{-t} dx = 2(1 - e^{-1} + e^{-2}) = 1.5349.$$