ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

EXAMEN FINAL DE **CAMPS ELECTROMAGNÈTICS**

Professors: D. Artigas, F. Canal, F. Dios, J. Recolons

Data: 26.6.98 Durada: 3h.

Publicació notes: 6 de juliol

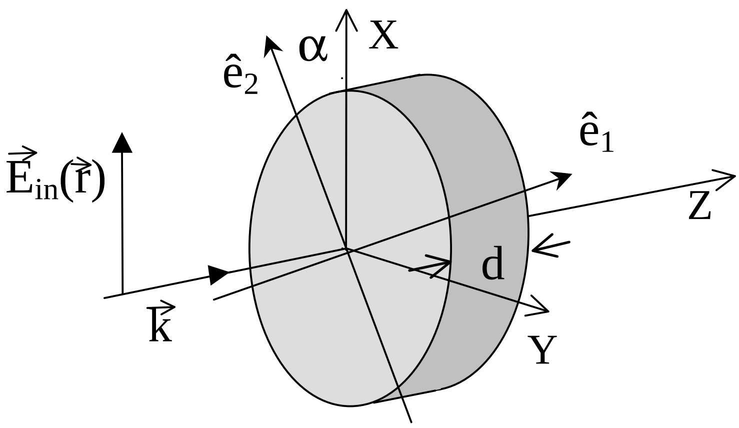
NOTA: Escolliu **tres** problemes dels quatre proposats.

Problema 1

Una onda plana linealmente polarizada se propaga por el vacío. La expresión de su campo eléctrico es:

$$\vec{E}_{in}(\vec{r}) = E_0\,\hat{x}\,e^{-jk_0 z}$$

Dicha onda atraviesa una lámina de cierto material *anisótropo* (similar a la utilizada en las prácticas) de grosor *d*. El medio que forma la lámina sólo permite el paso de ondas planas uniformes con polarización lineal y dirigidas según las direcciones $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$, perpendiculares entre sí (veáse figura). Además, para cada una de esas dos direcciones de polarización, presenta índices de refracción diferentes, que denominaremos, respectivamente, n_1 y n_2. La lámina está girada de forma que uno de sus ejes forma un ángulo α con el eje X.



a) Si el grosor de la lámina es d = 43 μm y sus índices son n_1 = 1,563 y n_2 = 1,554, ¿cuál será el desfase introducido por la lámina, a la salida, entre las dos ondas en que se separa la onda inicial?

b) ¿Qué tipo de polarización tiene la onda a la salida de la lámina? ¿Qué relación guarda con la polarización inicial?

Se considera ahora una situación análoga a la anterior, pero donde la lámina está formada por un material *girótropo*. Tales medios sólo permiten el paso a su través de ondas planas con polarización circular, y presentan índices de refracción diferentes en función del sentido de giro de las ondas: n_d para ondas circulares a derechas y n_e para ondas circulares a izquierdas.

c) Si n_d = 1,562 y n_e = 1,558, y con un grosor de la lámina *d* = 24,5 μm ¿qué tipo de polarización presenta la onda resultante a la salida?

NOTA: Tómese λ = 0,780 μm. No han de considerarse las reflexiones de las ondas en las caras de la lámina.

Problema 2

Una onda plana uniforme, de frecuencia f = 300 MHz, se propaga por un medio con un índice de refracción $n_1 = \sqrt{2}$, e incide con un cierto ángulo sobre la superficie de separación con otro medio dieléctrico, de índice $n_2 = \sqrt{3}$. La onda transmitida al segundo medio toma la dirección de propagación dada por el vector $\hat{y} + \hat{z}$, como se muestra en la figura. Dicha onda atraviesa posteriormente un polarizador, cuyo eje es paralelo al eje X, y la densidad de potencia final que transporta después de atravesar el polarizador es $\left|\vec{P}_m\right| = {}^{5}\!/_{\sqrt{3}p}\ {}^{W}\!/_{m^2}$. Por otra parte se observa que la onda reflejada tiene una polarización circular a derechas.

A partir de esos datos:

a) Escriba las expresiones de los tres vectores de onda: $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ y $\vec{k}_t$.

b) Calcule los valores numéricos de los coeficientes de reflexión y transmisión que intervienen en el problema.

c) Escriba la expresión completa del fasor campo eléctrico de la onda incidente.

Los dos dieléctricos se consideran perfectos y el polarizador es ideal, es decir, no atenúa los campos polarizados en la dirección de su propio eje).

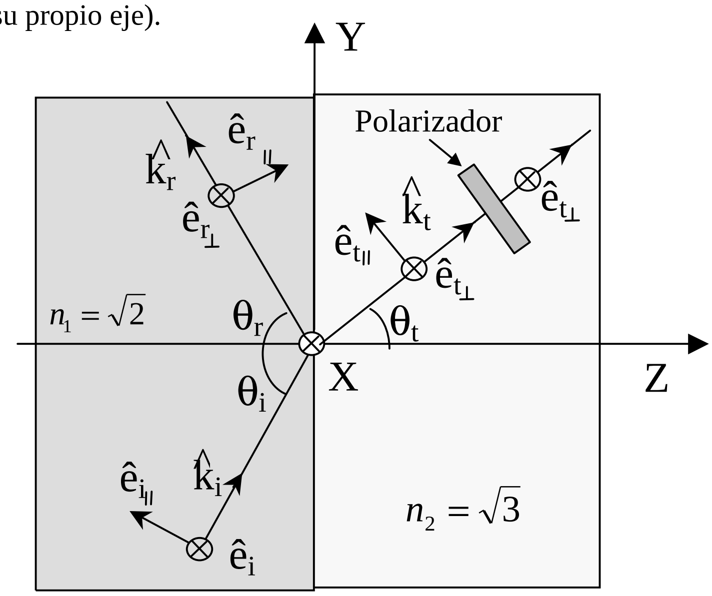
NOTA: Fórmulas de Fresnel:

$$r_\perp = \frac{n_1 \cos q_i - n_2 \cos q_t}{n_1 \cos q_i + n_2 \cos q_t}$$

$$r_{||} = \frac{n_1 \cos q_t - n_2 \cos q_i}{n_1 \cos q_t + n_2 \cos q_i}$$

$$t_\perp = \frac{2 n_1 \cos q_i}{n_1 \cos q_i + n_2 \cos q_t}$$

$$t_{||} = \frac{2 n_1 \cos q_i}{n_1 \cos q_t + n_2 \cos q_i}$$



⊥

Problema 3

Sea una guía de ondas de paredes conductoras y sección rectangular, cuyas dimensiones son a = 3 cm y b = 2 cm.

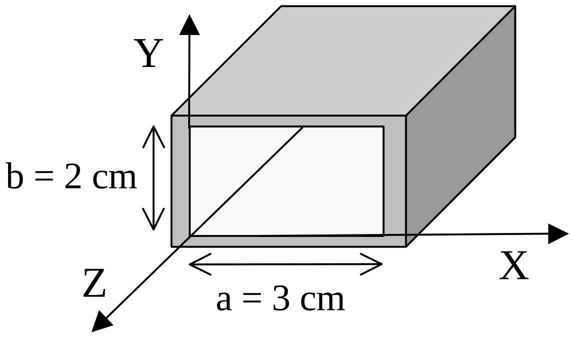
La expresión general del campo magnético de un modo TE se puede escribir en la forma:

$$H_x = \frac{jb}{h^2}\frac{mp}{a} H_0 \,\mathrm{sen}\left(\frac{mp}{a}x\right) f(n,y)\, e^{-jbz}$$

$$H_y = \frac{jb}{h^2}\frac{np}{b} H_0 \cos\left(\frac{mp}{a}x\right) f(n,y)\, e^{-jbz}$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{mp}{a}x\right) f(n,y)\, e^{-jbz}$$

donde se ha escrito $h^2 = \left(\frac{mp}{a}\right)^2 + \left(\frac{np}{b}\right)^2$ y f (n,y) puede corresponder a las funciones $\cos\left(\frac{np}{b}y\right)$ o $\mathrm{sen}\left(\frac{np}{b}y\right)$.



a) A partir de las condiciones aplicables a los campos completar las expresiones de las componentes del campo magnético, eligiendo la función f (n,y) adecuada en cada caso.

b) Hallar las expresiones de las componentes del campo eléctrico.

c) Suponiendo que el medio que ocupa el interior de la guía es el vacío, calcular la frecuencia de corte del modo fundamental. ¿Cuáles serían los *dos siguientes modos* que podrían propagarse?

d) ¿Qué relación existe entre λ, λ_g y v_f? (Longitud de onda en el vacío, longitud de onda en la guía y velocidad de fase de un modo). Calcule la velocidad de fase del modo fundamental para una frecuencia f = 6 GHz.

e) Determinar las densidades superficiales de carga y de corriente, $s(\vec{r})$ y $\vec{J}_S(\vec{r})$, en la cara interna de la guía situada en $y = b$.

f) ¿Cómo se debe particularizar la *ecuación de continuidad* para esa superficie? Comprobar que las densidades halladas antes la satisfacen.

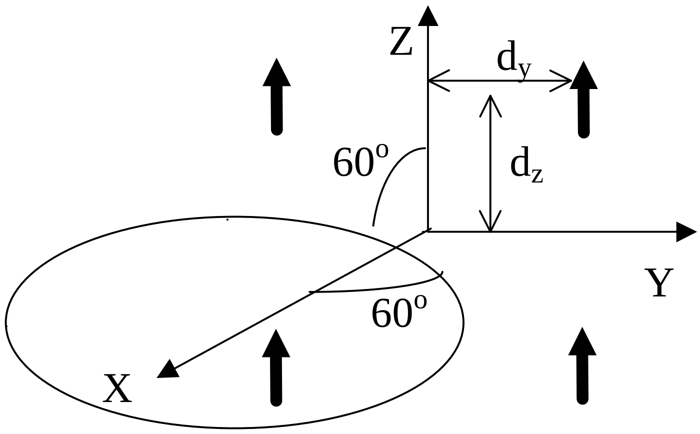
Problema 4

La expresión general del fasor potencial vector magnético producido por un dipolo eléctrico elemental, de longitud h, y alimentado por una corriente de fasor I es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I h}{4\pi r} e^{-jk_0 r} e^{-jk_0 \hat{r}\cdot\vec{r}_0}\ \hat{u}$$

admitiendo que $r >> h$ y $l >> h$, donde la segunda exponencial resume la aproximación que debe realizarse en la fase para el caso en que el dipolo no esté situado en el origen de coordenadas, con $\vec{r}_0$ el vector de posición del dipolo; y siendo $\hat{u}$ el vector unitario orientado en la dirección del dipolo.

Considere el sistema formado por cuatro dipolos de longitud idéntica *h*, orientados en la dirección *Z*, y dispuestos en los vértices de un rectángulo sobre el plano YZ, tal como se muestra en la figura.



a) Encontrar el potencial vector del sistema

b) Haciendo uso de la aproximación de campo lejano $\vec{E}_{rad} = -j\omega\left(A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}\right)$, hallar la expresión de los campos $\vec{E}_{rad}$ y $\vec{H}_{rad}$.

c) Calcular el vector de Poynting medio producido por el sistema y encontrar la expresión del diagrama de radiación normalizado a la unidad $t(\theta,\varphi)$ (ver nota).

d) Obtener los valores que deben tener las distancias d_y y d_z para que el máximo de radiación esté dirigido en la dirección X y para que en las direcciones comprendidas entre φ = -60º y φ = 60º en el plano ecuatorial (θ = 90º) y en las direcciones comprendidas entre θ = 60º y θ = 120º en el plano vertical (φ = 0º) la densidad de potencia sea superior al 50 % de la del máximo.

e) Representar el diagrama de radiación para los tres planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

NOTA: $t(\theta,\varphi) = \dfrac{\left|\vec{P}_m(\theta,\varphi)\right|}{\left|\vec{P}_m(\theta,\varphi)\right|_{\text{MAX}}}$

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\ \hat{x} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\ \hat{y} + \cos\theta\ \hat{z}\\
\hat{\theta} &= \cos\theta\cos\varphi\ \hat{x} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\ \hat{y} - \operatorname{sen}\theta\ \hat{z}\\
\hat{\varphi} &= -\operatorname{sen}\varphi\ \hat{x} + \cos\varphi\ \hat{y}
\end{aligned}$$