1. Cada extracció pot donar 54 resultats i les extraccions són independents. Llavors podem extreure 9 cartes de 54^9 maneres. El nombre de maneres de treure 9 cartes diferents és V_{54}^9 ja que estem contant configuracions ordenades. Així

$$P(\text{diferents}) = \frac{V_{54}^9}{54^9} = \frac{54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{54^9} = 0.49427,$$
$$P(\text{alguna repetida}) = 1 - P(\text{diferents}) = 0.50573.$$

L'esdeveniment més probable és que hi hagi alguna carta repetida. Per tant té raó Cauchy.

($P(\text{diferents})$ també es pot calcular multiplicant seqüencialment les probabilitats de que cada carta sigui diferent de les anteriors, $1 \cdot \frac{53}{54} \cdot \frac{52}{54} \cdots \frac{46}{54}$)

2. Indiquem la posició inicial de l'electró com "i", la posició entre els dos aparells "m" i la posició final "f". Així $P(A_m|B_i)$ és la probabilitat de sortir del primer dispositiu en l'estat B si hi ha entrat en l'estat A, etc. Les probabilitats que necessitem són:

$$P(A|A) = 1 - P(B|A) = 1 - 0.1 = 0.9, \qquad P(B|B) = 1 - P(A|B) = 1 - 0.2 = 0.8,$$
$$P(A_f|A_i) = P(A_f|A_m)P(A_m|A_i) + P(A_f|B_m)P(B_m|A_i) = 0.9^2 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.83,$$
$$P(B_f|B_i) = P(B_f|A_m)P(A_m|B_i) + P(B_f|B_m)P(B_m|B_i) = 0.1 \cdot 0.2 + 0.8^2 = 0.66,$$
$$P(B_f|A_i) = 1 - P(A_f|A_i) = 1 - 0.83 = 0.17,$$
$$P(A_f|B_i) = 1 - P(B_f|B_i) = 1 - 0.66 = 0.34.$$

(a)
$$P(\text{estat final} = \text{estat inicial}) = P(A_i)P(A_f|A_i) + P(B_i)P(B_f|B_i)$$
$$= 0.5 \cdot 0.83 + 0.5 \cdot 0.66 = 0.745$$

(b) Per Bayes
$$P(A_i|B_f) = \frac{P(B_f|A_i)P(A_i)}{P(B_f|A_i)P(A_i) + P(B_f|B_i)P(B_i)} = \frac{0.17 \cdot 0.5}{0.17 \cdot 0.5 + 0.66 \cdot 0.5} = 0.2048.$$

3. (a) L'esdeveniment $Z < 0$ equival a $1 < X < 2$. $Y < Z$ és $X^2 - 2X + 1 < X^2 - 3X + 2$, equivalent a $X < 1$. Llavors $P(Z < 0) = \int_1^2 e^{-x}dx = e^{-1} - e^{-2} = 0.2325$ i $P(Y < Z) = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1} = 0.6321$.

(b) Tenim que $E[X] = 1, E[X^2] = 2$. Llavors $E[X^2 - 2X + 1] = E[X^2] - 2E[X] + 1 = 1, E[X^2 - 3X + 2] = E[X^2] - 3E[X] + 2 = 1$.

(c) En la gràfica de Y en funció de X veiem que $\Omega_Y = [0, \infty)$. Invertint la relació $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ (per $x > 0$) trobem dues solucions $x_1 = 1 - \sqrt{y}, x_2 = 1 + \sqrt{y}$ si $0 < y < 1$ i una solució $x = 1 + \sqrt{y}$ si $y > 1$.

En qualsevol d'aquestes solucions $|dy/dx| = 2\sqrt{y}$. Llavors

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{-(1-\sqrt{y})} + e^{-(1+\sqrt{y})}}{2\sqrt{y}} & 0 < y < 1 \\ \frac{e^{-(1+\sqrt{y})}}{2\sqrt{y}} & y > 1 \end{cases}$$