

Tratamiento digital de la señal: una introducción experimental

Manual de prácticas

José B. Mariño Acebal

Francesc Vallverdú i Bayés

José A. Rodríguez Fonollosa

Asunción Moreno Bilbao

1	Práctica I. Las secuencias	5
1.1	Objetivos	5
1.2	Estudio previo	5
1.2.1	Secuencias exponenciales complejas	5
1.2.2	Secuencias senoidales	7
1.2.3	Conversión A/D y D/A de señales senoidales	8
1.3	En el laboratorio	12
2	Práctica II: Los sistemas	13
2.1	Objetivos	13
2.2	Estudio previo	13
2.2.1	Sistemas discretos	13
2.2.2	Convolución lineal	14
2.2.3	Respuesta a una senoide	15
2.3	En el laboratorio	15
3	Práctica III: Transformada de Fourier, correlación y espectro	17
3.1	Objetivos	17
3.2	Estudio previo	17
3.2.1	Transformada discreta de Fourier	17
3.2.2	Secuencias periódicas	19
3.2.3	Identificación de un sistema recurrente	21
3.2.4	La señal de voz	22
3.3	En el laboratorio	25
4	Práctica IV :Enventanado de secuencias	27
4.1	Objetivos	27
4.2	Estudio previo	27
4.2.1	La transformada de Fourier y el análisis espectral	27
4.2.2	Diseño de filtros FIR de fase lineal	32
4.3	En el laboratorio	35
5	Práctica V: Diezmado e interpolación	37
5.1	Objetivos	37
5.2	Estudio previo	37
5.2.1	Interpolación y diezmado	37
5.2.2	Sistema multiplexor / demultiplexor de dos canales	37
5.3	En el laboratorio	40

6	Práctica VI: Diseño de filtros	43
6.1	Objetivos	43
6.2	Estudio previo	43
6.2.1	Diagrama de ceros y polos, respuesta impulsional y respuesta frecuencial	43
6.2.2	La transformación bilineal	45
6.2.3	Filtros para el sistema multiplexor y demultiplexor	46
6.3	En el laboratorio	47

1.1 Objetivos

Con esta práctica se pretende estudiar las particularidades de la representación discreta de la frecuencia que la diferencian de la representación analógica, comprender mejor la relación entre los conceptos de frecuencia en los dominios analógico y discreto, y realizar una primera aproximación a las conversiones A/D y D/A, analizando la misión de los filtros *antialiasing* y reconstructor utilizados.

1.2 Estudio previo

1.2.1 Secuencias exponenciales complejas

Las secuencias exponenciales complejas responden a la expresión

$$x[n] = C z^n \quad (I.1.a)$$

donde C y z son dos números complejos. Estas secuencias juegan un papel muy importante en el estudio de las señales y los sistemas discretos. Si el número complejo z se expresa en la forma polar

$$z = r e^{j\theta} \quad (I.1.b)$$

donde r es su módulo y θ su argumento, y lo mismo se hace con la constante C

$$C = |C| e^{j\phi} \quad (I.1.c)$$

la secuencia puede expresarse como

$$x[n] = |C| r^n e^{j(n\theta + \phi)} \quad (I.1.d)$$

El caso particular $r=1$ es especialmente importante, ya que la secuencia senoidal compleja

$$x[n] = e^{j\omega n} \quad (I.2)$$

constituye la base del análisis frecuencial en el dominio del tiempo discreto, representando la componente de pulsación ω . Esta secuencia es el equivalente a la señal analógica

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

donde C es el fasor y ω es la pulsación de la componente frecuencial. La pulsación del dominio discreto se relaciona con la frecuencia f mediante la expresión:

$$\omega = 2\pi f$$

El primer objetivo de este estudio es analizar las siguientes propiedades:

- a. Las componentes frecuenciales son periódicas si, y sólo si, su frecuencia f es un número racional.

1. En efecto, si la secuencia (I.2) tiene periodo P , es decir:

$$x[n] = x[n + P] \quad \forall n$$

demuestre que ha de verificarse:

$$x[n] = x[n + kP] \quad \forall n$$

donde el entero k indica el número de ciclos completos de la componente en las P muestras del periodo.

Así, la frecuencia de una componente periódica ha de responder a la expresión

$$f = \frac{k}{P}$$

número racional que indica que en el periodo de P muestras la componente recorre k ciclos completos. De ello se deduce, en principio, que cuanto mayor sea la frecuencia más rápidamente evoluciona la secuencia (para un número dado de muestras más ciclos recorre).

2. Indique periodo y ciclos recorridos por periodo para las frecuencias $f_1=3/32$, $f_2=4/32$, $f_3=0,109375$.

- b. Las sinusoides complejas cuyas pulsaciones difieren en un múltiplo entero de 2π representan la misma evolución temporal, puesto que para k entero

$$e^{j\omega n} = e^{j(\omega + 2\pi k)n} \quad (I.3)$$

Este hecho admite dos interpretaciones importantes. Por un lado, se puede enunciar que en el dominio discreto *una componente frecuencial de pulsación en realidad representa todas las componentes frecuenciales siguientes:*

$$e^{j\omega n} = e^{j(\omega + 2\pi k)n} = e^{j\omega n} e^{j2\pi k n}$$

o, expresado en términos de la frecuencia en lugar de la pulsación, se puede decir que la secuencia (I.3) con frecuencia f representa a todas las componentes frecuenciales cuya frecuencia sea:

$$f = f_0 + k \quad \text{donde } f_0 = \frac{\omega}{2\pi}$$

Una segunda interpretación de (I.3) permite enunciar que, en lo que se refiere a la *representación de formas de onda distintas*, disponemos en el mundo discreto de un intervalo limitado de pulsaciones (de amplitud 2π , frente a un intervalo infinito en el dominio analógico), intervalo que por razones prácticas tomaremos entre $-\pi$ y π . *Esto nos permite restringir el margen de representación de las pulsaciones en el dominio discreto entre $-\pi$ y π .* Se puede concluir, por tanto, que la pulsación de la componente que representa la evolución temporal más rápida es $\omega = \pi$ ($f=1/2$).

Cuando en (I.1) r es distinto de 1, la exponencial representa formas de onda crecientes con n ($r>1$) o decreciente ($r<1$). La velocidad de la evolución es función del valor de r . Valores próximos a 1 suponen una

evolución lenta; valores alejados de la unidad implican evoluciones progresivamente más rápidas, ya sean crecientes ($r > 1$) o decrecientes ($r < 1$). La constante de tiempo M de la evolución puede definirse, por ejemplo, mediante la relación:

$$|x[n+M] - x[n]| = \frac{1}{M} |x[n] - x[n+1]|$$

lo que proporciona para M el valor⁽¹⁾

$$M = \frac{1}{\ln(r)}$$

Un valor de M positivo indica una secuencia decreciente; un valor negativo, implica una secuencia creciente. Aunque desde un punto de vista teórico una secuencia exponencial tiene una duración infinita, a efectos prácticos se acepta que una exponencial decreciente que comienza en $n=0$

$$x[n] = e^{-n/M}$$

desaparece al cabo de 5 constantes de tiempo; es decir, que su longitud L viene dada por

$$L = 5M \quad (1.4)$$

1.2.2 Secuencias senoidales

En la mayor parte de las situaciones las señales no son complejas, sino reales; así, por ejemplo, una oscilación mantenida correspondiente a un fenómeno físico viene representada por una señal senoidal. La expresión general de las señales senoidales discretas es:

$$x[n] = A \cos(2\pi f n + \phi) \quad (1.5)$$

donde A es la *amplitud* de la senoide, $2\pi f$ es la *pulsación* en radianes por muestra, f es la frecuencia en ciclos por muestra y ϕ la fase en radianes.

Puesto que la secuencia senoidal (1.5) puede expresarse en función de las componentes frecuenciales (1.2) mediante la relación

$$x[n] = \frac{A}{2} e^{j(2\pi f n + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-j(2\pi f n + \phi)}$$

basándose en las propiedades de las mismas, se puede enunciar que:

- La señales senoidales son periódicas si, y sólo si, su frecuencia f es un número racional.
- Dado que una senoide está constituida por las componentes frecuenciales f y $-f$, en el dominio discreto una senoide de pulsación $2\pi f$ en realidad contiene todas las componentes frecuenciales siguientes:

$$f, f \pm 1, f \pm 2, \dots$$

¹ expresa el entero más próximo a x cuyo valor absoluto sea mayor o igual que el de x .

- c. Además, en cuanto a la representación de formas de onda distintas, *el conjunto de las pulsaciones de las señales senoidales del dominio discreto se puede limitar entre 0 y π* (en frecuencia, entre 0 y 1/2).
3. Realice el producto de la senoide (1.5) con la secuencia $x[n] = \cos(\pi n/4)$. Determine la pulsación en el intervalo $(0, \pi)$ de la secuencia senoidal resultante.
4. Aplique el resultado obtenido al caso de que $f_1=3/32$.

1.2.3 Conversión A/D y D/A de señales senoidales

La conversión A/D es la operación que permite la adquisición de una señal analógica para su representación y manipulación en el mundo discreto, ya sea con un microprocesador o un computador de propósito general. La operación básica que realiza es la toma de muestras de una señal analógica $x(t)$ a intervalos regulares de tiempo T (*periodo de muestreo*), generando una secuencia $x[n]$ tal que:

$$x[n] = x(nT)$$

Si en la conversión A/D se hace uso de una frecuencia de muestreo F_m , *la relación entre la frecuencia del dominio discreto f y la frecuencia analógica F es $f=F/F_m$* , puesto que al muestrear una senoide analógica

$$x(t) = \cos(2\pi F t)$$

obtenemos

$$x[n] = \cos(2\pi F nT) = \cos(2\pi f n)$$

donde T es el periodo de muestreo.

Debido a la limitación de la representación frecuencial en el dominio discreto, dos sinusoides analógicas de frecuencias distintas pueden dar origen, al ser muestreadas, a la misma secuencia. Un ejemplo de esta situación se muestra en la figura 1.1, donde se proporciona la secuencia resultante del muestreo de dos sinusoides cuyas frecuencias son $f_1 = 1/32$ y $f_2 = 1/16$. De acuerdo con lo estudiado anteriormente, las componentes frecuenciales de la primera senoide son

$$f_1 = 1/32, f_2 = 1/32, f_3 = 1/32, f_4 = 1/32$$

y las de la segunda

$$f_1 = 1/16, f_2 = 1/16, f_3 = 1/16, f_4 = 1/16$$

Es inmediato comprobar que $f_1 = f_2$. Obsérvese que si la señal analógica muestreada contuviese ambas sinusoides, esta circunstancia no sería detectable en la secuencia obtenida por muestreo, ya que ambas componentes analógicas son representadas por la misma forma de onda en el dominio discreto. Este fenómeno se denomina *aliasing*.

Es importante destacar que el *aliasing* se produce porque las frecuencias de las sinusoides analógicas se relacionan mediante

$$f = \frac{F_m}{4}$$

de modo que la frecuencia discreta f correspondiente a $F_m/4$ está en el intervalo $(0, 1/2)$ y la correspondiente a $3F_m/4$ se encuentra fuera del mismo, pero ambas son representadas por la misma secuencia.

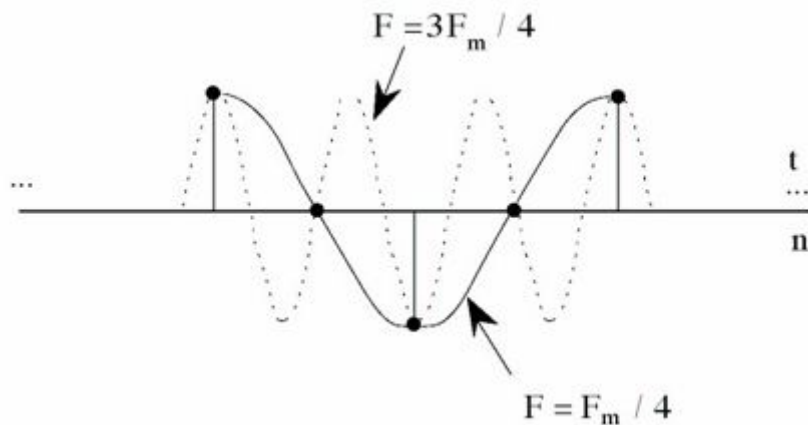


Fig. 1.1 Secuencia resultante del muestreo de dos sinusoides de frecuencias $F_m/4$ y $3F_m/4$

Si las componentes frecuenciales de la señal analógica a muestrear cubren el intervalo $(-B_f, B_f)$ y se desea que cada una de ellas tenga su propia representación en el dominio discreto $(-1/2, 1/2)$ sin que se produzca *aliasing*, ha de tomarse F_m de modo que

$$f = \frac{F_m}{4}$$

o lo que es lo mismo:

$$f = \frac{F_m}{4} \quad (1.6)$$

relación que constituye el criterio de Nyquist. En la práctica queda garantizado el cumplimiento de esta condición disponiendo, previo al convertidor A/D, un filtro paso bajo (filtro *antialiasing*) con una frecuencia de corte inferior a f .

5. Si se muestrea una señal senoidal analógica de frecuencia 750 Hz con una frecuencia de muestreo $F_m=8$ kHz, determine la frecuencia en el intervalo $(0, 1/2)$ de la secuencia obtenida.
6. Si la senoide analógica es de frecuencia 5 kHz y no se dispone de filtro *antialiasing*, indique, para la misma frecuencia de muestreo, la frecuencia en el intervalo $(0, 1/2)$ de la secuencia obtenida. Determine la frecuencia $F < F_m/2$ de la senoide analógica cuyo muestreo proporcionaría la misma secuencia

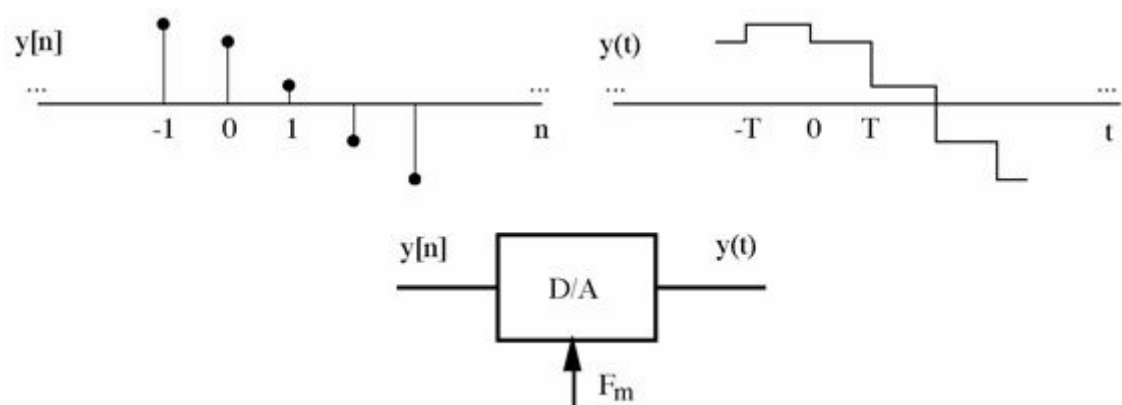


Fig. I.2 Ilustración de la conversión D/A de una secuencia

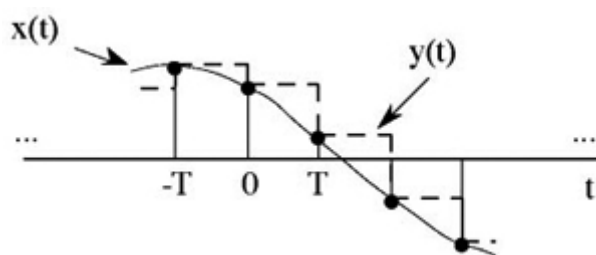


Fig I.3 Señal muestreada $x(t)$ y su reconstrucción $y(t)$

La conversión D/A de una secuencia $y[n]$ se ilustra en la figura I.2. A intervalos fijos de tiempo T (que se corresponde con el periodo de la frecuencia de reloj F_m que gobierna al convertidor D/A) se genera a la salida una tensión proporcional al valor de las sucesivas muestras de $y[n]$ y que se mantiene durante el tiempo T . Este proceso puede describirse matemáticamente mediante la expresión:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] p(t - nT)$$

donde la señal analógica $p(t)$ es un pulso rectangular de duración T segundos. En la figura I.3 se muestra una señal analógica $x(t)$, la secuencia resultante al muestrearla con un periodo de muestreo T y su reconstrucción $y(t)$ por un convertidor D/A. Se comprende que, para recuperar la señal analógica mediante la conversión D/A de la secuencia, deba tomarse la misma frecuencia de muestreo que la empleada en la conversión A/D. La señal $y(t)$ es una aproximación a $x(t)$ que puede ser mejorada mediante un filtro paso bajo que suavice la forma de onda o, dicho de otra forma, elimine las componentes de alta frecuencia presentes en la señal reconstruida. En realidad, como se demuestra en el capítulo 3, $y(t)$ contiene todas las componentes frecuenciales presentes en $y[n]$ (con la frecuencia multiplicada por F_m). Así, bajo el supuesto de que $x(t)$ fue adquirida sin *aliasing*, puede decirse que las componentes de las distintas señales son las siguientes:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k F_m t} \\ y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{j2\pi k F_m t} \\ y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{j2\pi k n} \end{aligned}$$

donde $k = 0, 1, 2, 3$, etc. En consecuencia, para recuperar $x(t)$ se ha de disponer tras el convertidor D/A un filtro paso bajo (*filtro reconstructor*) que elimine las componentes frecuenciales de $y(t)$ fuera del intervalo $(-F_m/2, F_m/2)$, correspondientes a las componentes frecuenciales de la secuencia ajenas a $(-1/2, 1/2)$.

7. Si se realiza la conversión D/A de la secuencia obtenida en 5 con un convertidor trabajando a una frecuencia de muestreo de 8 kHz y un filtro reconstructor con frecuencia de corte 3,6 kHz, indique las componentes frecuenciales de la señal analógica generada.

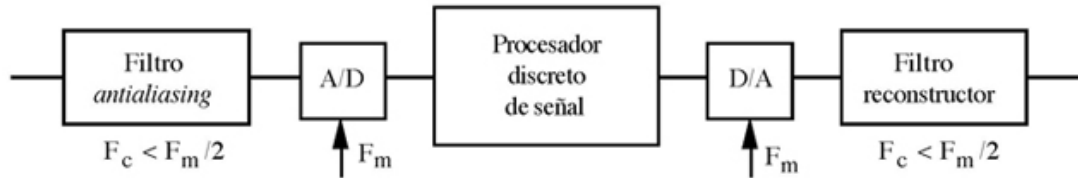


Fig. I.4 Conversión A/D y D/A en el entorno analógico de un procesador discreto de señal

8. Si se realiza la conversión D/A de la secuencia obtenida en 6 con un convertidor trabajando a una frecuencia de muestreo de 8 kHz y un filtro reconstructor con frecuencia de corte 3,6 kHz, indique las componentes frecuenciales de la señal analógica generada.
9. Si en el caso anterior la frecuencia de corte del filtro reconstructor es de 5,2 kHz, indique cuáles serían las componentes frecuenciales de la señal analógica generada.

En la figura I.4 se muestra el entorno analógico del tratamiento discreto de señal. Tal como se acaba de ver, para que la composición frecuencial de las señales no sufra alteración en los procesos de conversión A/D y D/A, es imprescindible la presencia de los filtros *antialiasing* y reconstructor, con frecuencia de corte inferior a $F_m/2$. La ausencia del filtro *antialiasing* (o un filtro *antialiasing* con una frecuencia de corte mayor que

$F_m/2$) provoca que componentes frecuenciales de la señal analógica a convertir superiores a $F_m/2$ queden representadas como frecuencias inferiores, con lo que se produce la contaminación (*aliasing*) de las componentes de baja frecuencia ($0 < f < F_m/2$) de la señal analógica por las componentes de alta frecuencia ($F_m/2 < f < F_m$). Cuando no se hace uso del filtro reconstructor (o éste presenta una frecuencia de corte mayor que $F_m/2$), la señal contendrá, además de las componentes frecuenciales en el intervalo $(-F_m/2, F_m/2)$, sus réplicas con $f \pm kF_m$.

10. Una señal analógica compuesta por dos tonos de frecuencia 750 Hz y 5 kHz es muestreada sin filtro *antialiasing* con una frecuencia de muestreo de 8 kHz. Si la secuencia resultante es convertida a señal analógica con la misma frecuencia de muestreo, haciendo uso de un filtro reconstructor con frecuencia de corte 3,6 kHz, indique las componentes frecuenciales de la señal analógica generada.
11. Repita 7 con $F_m=10$ kHz.

Como final de este estudio previo lea las experiencias a realizar en el laboratorio y organice su trabajo antes de acudir al mismo.

1.3 En el laboratorio

- A. Genere, mediante la opción "Sinusoide amortiguada" del submenú "Señales" de Generación, una señal senoidal con $\alpha=1$ y compruebe gráficamente su falta de periodicidad.
- B. Genere sendas sinusoides con longitud $L=256$ muestras y frecuencias $f_1=3/32$ y $f_2=4/32$. Compruebe gráficamente que el periodo y el número de ciclos por periodo coinciden con los calculados en el apartado 2 del estudio previo. Indique cómo cuenta los ciclos.
- C. Realice el producto de la sinusoide f_1 con la secuencia $\cos(\pi n/4)$. Compruebe gráficamente que el periodo y el número de ciclos por periodo de la secuencia resultante se corresponden con la frecuencia determinada en el apartado 4 del estudio previo.
- D. A fin de familiarizarse con las secuencias exponenciales, genere varias sinusoides amortiguadas con distintos valores para sus parámetros A , α , r y θ . Compruebe aproximadamente la constante de tiempo del amortiguamiento, asocie los parámetros a las principales características de la forma de onda y describa su influencia en ella.
- E. Mediante la opción "Conversión D/A" de "Tiempo Real", genere una señal senoidal analógica convirtiendo la sinusoide discreta f_1 con una frecuencia de muestreo $F_m=8$ kHz. Con el osciloscopio determine el periodo y la frecuencia de la señal generada.
- F. Genere otra secuencia senoidal con frecuencia f_1 , pero fase distinta a la utilizada en el apartado B (por ejemplo, con una diferencia de $\pi/4$). Aunque las muestras y la apariencia de ambas señales son distintas, ambas representan la misma forma de onda analógica, como se puede comprobar repitiendo la experiencia E con la nueva secuencia. ¿Cómo interpreta este resultado?
- G. Repita la experiencia E con $F_m=10$ kHz.
- H. La opción "Test de filtrado", ubicada en el menú "Tiempo Real" de Sistemas, realiza la conversión A/D de una señal analógica y la conversión D/A de la secuencia resultante, haciendo uso de la misma frecuencia de muestreo y de filtros *antialiasing* y reconstructor con la misma frecuencia de corte. Seleccione $F_m=8$ kHz, tome como entrada del convertidor A/D una señal senoidal y varíe su frecuencia; observe en el osciloscopio esta señal y la salida del convertidor D/A. Anote los resultados más sobresalientes de la experiencia; en particular, observe los límites de las bandas de paso y atenuada de los filtros *antialiasing* y reconstructor, y represente la frecuencia de la señal a la salida en función de la frecuencia de la entrada.
- I. Seleccione la opción "Demos" en el menú "Tiempo Real" e invoque la demostración "Aliasing". Mediante ella se realiza un proceso de conversiones A/D y D/A consecutivas, como en el caso anterior, con frecuencia de muestreo $F_m=8$ kHz pero provocando *aliasing* en una de las conversiones. El filtro *antialiasing* o reconstructor, según el caso, no satisface el criterio de Nyquist. Elija sucesivamente cada una de las opciones y anote las diferencias con la experiencia anterior. En particular observe la distorsión producida: ¿a partir de qué frecuencia de la sinusoide de entrada se produce? ¿por qué a partir de esa frecuencia?.

2.1 Objetivos

Esta práctica aborda el estudio de los sistemas discretos y sus propiedades más importantes; para ello se hace uso de varios sistemas de interés teórico y práctico en el tratamiento de señales discretas. Se dedica especial atención a los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. La práctica se completa con el estudio de la respuesta a señales senoidales de dos sistemas discretos: un diezmador y un filtro FIR.

2.2 Estudio previo

2.2.1 Sistemas discretos

Un sistema discreto es un operador $T\{\}$ que transforma una secuencia $x[n]$ (entrada) en otra secuencia $y[n]$ (salida), tal como se representa en la figura II.1.

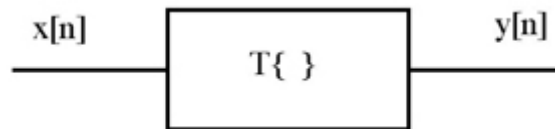


Fig. II.1 Representación simbólica de un sistema con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$

En el presente estudio de los sistemas discretos se van a considerar los tres sistemas definidos por las relaciones entrada-salida siguientes:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] & y[n] &= x[n] & y[n] &= x[n] \\
 y[n] &= x[n] & y[n] &= x[n] & y[n] &= x[n] \\
 y[n] &= x[n] & y[n] &= x[n] & y[n] &= x[n]
 \end{aligned}$$

donde N y P son números enteros y positivos.

1. Defina una secuencia sencilla con origen en $n=0$ y L muestras; por ejemplo:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < L \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Determine la respuesta a la misma de los tres sistemas, tomando $N \ll L$ y dos valores impares para P , uno menor y otro mayor que L (trabaje con valores concretos para N , L y P).

Las propiedades básicas que permiten caracterizar el comportamiento de los sistemas discretos son: linealidad, invarianza temporal, causalidad y estabilidad.

2. Analice el cumplimiento de estas propiedades por los tres sistemas definidos.
3. a. A partir de $x[n]$ obtenga las muestras correspondientes a un periodo de la secuencia

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{L}n\right) \quad (11.1)$$

con el valor $P < L$ tomado en el apartado 1.

- b. Además de los tres sistemas estudiados anteriormente, considere el sistema que produce el retardo de una muestra. Justifique el orden en que han de situarse en cascada dichos sistemas para que su combinación responda a $x[n]$ con la secuencia $y[n]$.

2.2.2 Convolución lineal

Cuando un sistema es lineal e invariante con el tiempo, su relación entrada-salida puede ser establecida en términos de su respuesta $h[n]$ al impulso unidad mediante la convolución lineal:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

4. Considere el sistema definido por la relación entrada-salida:

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

Este sistema realiza el promedio de M muestras de la secuencia de entrada. Determine su respuesta impulsional.

5. Haciendo uso de la convolución lineal, calcule gráficamente la respuesta del sistema 4 con $M=8$ al pulso rectangular de longitud L :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < L \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

en los supuestos $L \leq M$ y $M > L$.

6. Si el sistema promediador con $M=8$ es alimentado por una onda cuadrada de periodo $2L$:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < L \\ 0 & L \leq n < 2L \\ 1 & 2L \leq n < 3L \\ 0 & 3L \leq n < 4L \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

obtenga la respuesta en los supuestos $L \leq M$ y $M > L$ (trabaje con valores concretos para L).

2.2.3 Respuesta a una senoide

Como ya se ha dicho en la práctica I, las seales senoidales son particularmente importantes en el estudio de las seales y los sistemas.

7. Determine la respuesta del sistema 2 (diezmador) a una senoide de pulsación cualquiera. Exprese en el intervalo $(0, \pi)$ la pulsación de la respuesta.
8. Considere el sistema lineal e invariante FIR definido por la siguiente ecuación en diferencias finitas

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] + \frac{1}{4}x[n-2] + \frac{1}{4}x[n-3]$$

Determine su respuesta impulsional y exprese su respuesta frecuencial en la forma

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

Calcule α para que se anule la respuesta del sistema a una senoide de frecuencia f_0 .

Como final de este estudio previo lea las experiencias a realizar en el laboratorio y organice su trabajo antes de acudir al mismo.

2.3 En el laboratorio

- A. Mediante la opción "Editar secuencia" del menú "Generación" genere la secuencia que haya definido en el apartado 1 del estudio previo con $P < L$, aplíquela la combinación de sistemas determinada en el apartado 3 y compruebe que la secuencia resultante responde a la expresión (II.1). Si el resultado no le coincide, averigüe y corrija la causa.
- B. Mediante la opción "Editar secuencia" genere la respuesta impulsional del sistema 4 (Promediador) con $M=8$ y compruebe sus soluciones a las cuestiones 5 y 6 del estudio previo para $\alpha = \pi/4$.
- C. Se desea hacer uso del sistema promediador para filtrar una onda cuadrada analógica. Para ello, a partir de la respuesta impulsional editada en el apartado anterior, construya el correspondiente sistema mediante la opción "Filtro FIR: Respuesta impulsional" del menú "Datos" de Sistemas; y, por medio de la opción "Filtrado analógico" con $F_m=8$ kHz, filtre una seala cuadrada. Varíe la frecuencia de esta onda cuadrada y observe la respuesta del sistema en el osciloscopio. Con la experiencia de haber realizado el apartado 6 del estudio previo, justifique la forma de onda (y los tiempos) de la respuesta que se obtiene cuando la frecuencia de la onda cuadrada es 250 Hz o 500 Hz. Represente el módulo de la respuesta frecuencial del sistema y justifique la respuesta del mismo cuando la frecuencia de la onda cuadrada es 1 kHz.
- D. Elija el parámetro α del sistema 5 de forma que su respuesta frecuencial se anule a la frecuencia $f_0=5/32$. Genere mediante la opción "Editar secuencia" la respuesta impulsional de este sistema FIR. Obtenga el correspondiente sistema mediante la opción "Filtro FIR: Respuesta impulsional" del menú "Datos" de Sistemas. Haciendo uso de la opción "Filtrado analógico" con $F_m=8$ kHz filtre una seala senoidal y variando su frecuencia compruebe que presenta el cero de transmisión deseado.

- E. Se desea filtrar una onda cuadrada de frecuencia 700 Hz de forma que se eliminen todos sus armónicos, a excepción del tercero. Determine la respuesta impulsional de un filtro discreto que, trabajando a la frecuencia de muestreo $F_m=8$ kHz, presente un cero de transmisión a las frecuencias correspondientes al fundamental y armónicos impares de la onda cuadrada⁽²⁾, a excepción del tercero. Filtre con el sistema diseñado la onda cuadrada y obsérvela en el osciloscopio junto a la respuesta obtenida. Compruebe la forma y la frecuencia de ésta.
- F. (Experiencia opcional) Compruebe el resultado del apartado 7 de su estudio previo sobre la respuesta del sistema 2 (diezmador) a una senoide; para ello, obtenga con $N=3$ la respuesta a una senoide de frecuencia $f_1=3/32$. Repita la experiencia para $f_2=9/32$.

² Como es lógico, deben considerarse únicamente los armónicos dentro de la banda de paso del filtro *antialiasing*. Recuérdese que la onda cuadrada carece de los armónicos pares.

Práctica III: Transformada de Fourier, correlación y espectro



3.1 Objetivos

En esta práctica se ilustra el análisis de las propiedades de las señales mediante la transformada de Fourier y la secuencia de autocorrelación. Además, se ejercita la utilización de la DFT en el trabajo con la transformada de Fourier.

3.2 Estudio previo

3.2.1 Transformada discreta de Fourier

La transformada de Fourier de una secuencia $x[n]$ se define mediante la expresión

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (\text{III.1})$$

Esta función de es periódica con periodo y es de fundamental importancia en el estudio de las señales y los sistemas.

1. La convolución de un pulso rectangular de M muestras

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < M \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

consigo mismo proporciona un pulso triangular. Haciendo uso de esta propiedad, obtenga la transformada de Fourier de un pulso triangular de amplitud máxima la unidad, con origen en $n=0$ y longitud L un número impar de muestras (3):

$$x[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{L} & -L \leq n \leq L \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

2. Calcule la transformada de Fourier de la secuencia

$$x[n] = \cos(2\pi f_0 n)$$

en función de la transformada de Fourier de $x[n]$. Interprete gráficamente el resultado alcanzado. Si $x[n]$ es una senoide con frecuencia f_0 , ¿cuál es la frecuencia f_1 de $y[n]$? Represente f_1 en función de f_0 expresando ambas frecuencias en el intervalo $(0, 1/2)$.

3. ¿Cómo es un pulso triangular con longitud L par? ¿Cuál es su transformada de Fourier?

Para representar gráficamente la transformada de Fourier o manipularla numéricamente, es preciso discretizar el intervalo de 0 a 2π en el que se pretende trabajar. Por ejemplo, tomar la secuencia

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

donde N es el número de puntos con los que se discretiza el intervalo $(0, 2\pi)$, correspondiente al primer periodo de la transformada. De todos modos, si la secuencia $x[n]$ no tiene una longitud finita, el cálculo de la suma (III.1) resulta inviable. En la práctica se define la *transformada discreta de Fourier* (DFT) como la secuencia con N muestras distintas de cero:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad (III.2.a)$$

cuya transformada inversa es:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} \quad (III.2.b)$$

De la transformada discreta de Fourier puede decirse que:

- Coincide con la discretización de la transformada de Fourier, si la secuencia $x[n]$ es distinta de cero solamente en el intervalo $[0, N-1]$;
- En caso contrario, supone un *enventanado* de la secuencia $x[n]$ a transformar, de modo que la DFT en realidad proporciona la discretización de la transformada de Fourier de la secuencia

$$X[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

donde $vr[n]$ es la ventana rectangular:

$$vr[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

En este caso, la DFT inversa recupera las muestras de $x_N[n]$, es decir, las muestras de $x[n]$ correspondientes a los ordinales de $n=0$ a $N-1$.

- Cuando N es una potencia de 2, se puede calcular de forma muy eficiente mediante un algoritmo denominado *transformada rápida de Fourier* (FFT), cuyo principio básico se analiza en el problema 2.19.
- Cuando la DFT corresponde a una secuencia real, verifica:

$$X[k] = X^*[N-k] \quad (III.3.a)$$

$$x[n] = x^*[N-n] \quad (III.3.b)$$

ya que la transformada de Fourier satisface la siguiente propiedad de simetría:

$$X^*[k] = X[N-k]$$

Así, en el caso de secuencias reales, es suficiente representar el intervalo $(0, N/2)$ de la transformada de Fourier o las muestras entre 0 y $N/2$, ambas incluidas, de la DFT.

- e. Si la secuencia $X[k]$ se obtiene mediante el *muestreo en frecuencia* de la transformada de Fourier

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad (III.4.a)$$

tiene como transformada inversa la secuencia de N muestras:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} \quad (III.4.b)$$

que también puede expresarse:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}$$

La secuencia $x'[n]$ coincide con $x[n]$ solamente si las muestras de ésta fuera del intervalo $[0, N-1]$ son todas nulas.

Se le plantea la siguiente cuestión:

3. Si $P_M[k]$ ($k=0, \dots, N-1$) es la DFT de un pulso rectangular de M muestras y $P_M[k] = 1$ para $k=0, \dots, M-1$ y 0 para $k=M, \dots, N-1$, ¿cuál es la secuencia $x[n]$, DFT inversa de $X[k]$? Responda para los casos:
- $M = 6, N = 14$
 - $M = 6, N = 10$
 - $M = N = 6$
 - $M = 6, N = 5$

3.2.2 Secuencias periódicas

Considérese una secuencia $x[n]$ con periodo P . Esta secuencia puede expresarse en función de su periodo fundamental

$$x[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_0[n-lP]$$

mediante la relación

$$x[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_0[n-lP] \quad (III.5.a)$$

Por otro lado, si $X_0[k]$ es la DFT con P muestras de $x_0[n]$, cuando se elimina en la expresión (III.2.b) de la DFT inversa la limitación temporal al intervalo $[0, P-1]$, se obtiene una secuencia con periodo P

$$\sum_{k=0}^{P-1} X_0[k] e^{j2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{P-1} X_0[k] e^{j2\pi kn/P}$$

Ahora bien, al ser las muestras de $x_0[n]$ nulas fuera del intervalo $[0, P-1]$, se verifica (III.4.a):

$$\sum_{k=0}^{P-1} X_0[k] e^{j2\pi kn/P} = \sum_{k=0}^{P-1} X_0[k] e^{j2\pi kn/P}$$

En consecuencia, de acuerdo con (III.4b) y (III.5a), $\sum_{k=0}^{P-1} X_0[k] e^{j2\pi kn/P}$ coincide con $x[n]$. De este modo, $x[n]$ puede expresarse mediante la combinación lineal

$$\sum_{k=0}^{P-1} X_0[k] e^{j2\pi kn/P} \quad (II.5.b)$$

de las componentes frecuenciales $X_0[k]$ para $k = 0, \dots, P-1$, cuyos coeficientes son $X_0[k]$.

Este resultado es el equivalente al desarrollo en serie de Fourier de una señal analógica periódica. De hecho los factores $e^{j2\pi kn/P}$ se denominan coeficientes del desarrollo en *serie de Fourier discreta* (DFS). Sin embargo, no debe quedar sin alusión una notable diferencia entre ambos casos. En el dominio analógico el número de armónicos (componentes con frecuencias múltiplos del fundamental) que se combinan para formar la señal es infinito. Sin embargo, coherentemente con la limitación de la representación frecuencial en el dominio discreto, el número de armónicos del fundamental $e^{j2\pi n/P}$ que se suman en (III.5.b), es únicamente P ($k = 0, \dots, P-1$), ya que el armónico P -ésimo $e^{j2\pi n}$ es en realidad 1 , el armónico $(P+1)$ -ésimo es $e^{j2\pi n/P}$, la componente correspondiente a $k = -1$ es $e^{-j2\pi n/P}$, etc. En el problema 2.11 se profundiza en el estudio de las propiedades de la DFS.

- Haga uso del resultado anterior para obtener la transformada de Fourier de una secuencia $x[n]$ con periodo P . Obtenga también la transformada de un segmento de L muestras

$$\sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j2\pi kn/P}$$

De acuerdo con la expresión (III.5.a) una secuencia periódica $x[n]$ puede verse como la respuesta a su periodo fundamental $x_0[n]$ del sistema 3 de la práctica II:

$$\sum_{k=0}^{P-1} X_0[k] e^{j2\pi kn/P} = \sum_{k=0}^{P-1} X_0[k] e^{j2\pi kn/P}$$

5. Esta interpretación permite extraer consecuencias interesantes, cuya demostración se le pide:

- a. Una secuencia con periodo P puede modelarse como la respuesta al tren de pulsos

$$t[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kP]$$

de un sistema con respuesta impulsional $x_0[n]$, tal como se simboliza en la figura III.1.

- b. La respuesta $y[n]$ de un sistema lineal e invariante con respuesta impulsional $h[n]$ a una secuencia periódica $x[n]$ es una secuencia con el mismo periodo. Esta secuencia puede obtenerse como la respuesta del sistema a la convolución de $x_0[n]$ y $h[n]$ (respuesta a $x_0[n]$ del sistema con respuesta impulsional $h[n]$)

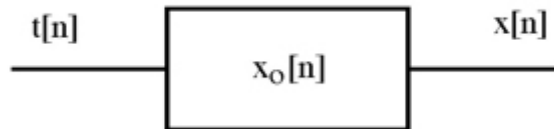


Fig. III.1 Representación de la secuencia periódica $x[n]$ como respuesta de un sistema lineal e invariante a un tren de deltas equiespaciadas $t[n]$.

3.2.3 Identificación de un sistema recurrente

La respuesta impulsional $h[n]$ caracteriza a un sistema lineal e invariante. Sin embargo, cuando su longitud L es grande, una realización no recurrente para el sistema no proporciona una realización económica, ya que la relación entrada-salida del sistema:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{L-1} h[k] x[n-k]$$

que es la propia convolución lineal, implica una gran carga computacional (L multiplicaciones y sumas por cada muestra de salida).

Para aliviar dicha carga, se determina (*identifica*) un sistema recurrente de orden P bajo, cuya respuesta impulsional aproxime la respuesta impulsional dada, y se sustituye el sistema recurrente por el sistema recurrente diseñado. Sea

$$h[n] \approx \sum_{k=0}^{P-1} h_p[k] x[n-k] \quad (III.6)$$

la relación entrada salida del sistema recurrente a diseñar. Como se comprueba sin dificultad, la respuesta impulsional $h_p[n]$ de este sistema satisface

$$h_p[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h_p[k] x[n-k]$$

En general, la respuesta impulsional a aproximar $h[n]$ no cumplirá esta relación. No obstante, se pueden determinar los coeficientes de modo que la energía del error

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |h[n] - \hat{h}[n]|^2 \quad (III.7)$$

sea mínima. Obsérvese que el problema planteado es formalmente idéntico a la predicción lineal introducida en el ejemplo 2.11: se desea determinar los coeficientes de la combinación lineal que expresa la muestra de la respuesta impulsional en un instante $h[n]$ en función de las muestras en instantes anteriores $h[n-k]$.

6. Demuestre que los coeficientes que minimizan el error cuadrático proporcionado por (III.7) han de satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{k=0}^{N-1} r[k] \hat{h}[n-k] = \hat{h}[n] \quad (III.8)$$

donde $r[j]$ es la autocorrelación de la respuesta impulsional $h[n]$.

3.2.4 La señal de voz

En la figura III.2 se proporciona una señal de voz muestreada a 8 kHz; el eje de abscisas está expresado en muestras de señal. Resalta la presencia de segmentos de alta energía y con aspecto repetitivo, y otros segmentos de baja energía. Los primeros reciben el nombre de sonoros y los segundos se denominan sordos. En la figura III.3 se presenta el detalle de un segmento sonoro y el logaritmo del módulo de su transformada de Fourier; se puede apreciar que la señal es prácticamente periódica con un periodo de 80 muestras (10 milisegundos).

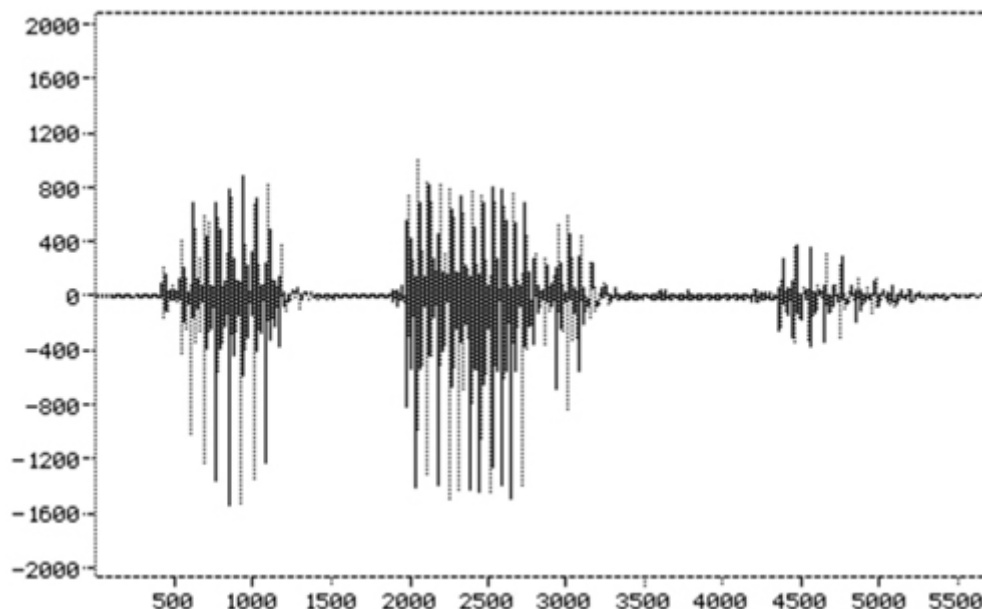


Fig. III.2 Ejemplo de señal de voz muestreada a 8 kHz (eje de abscisas en muestras)

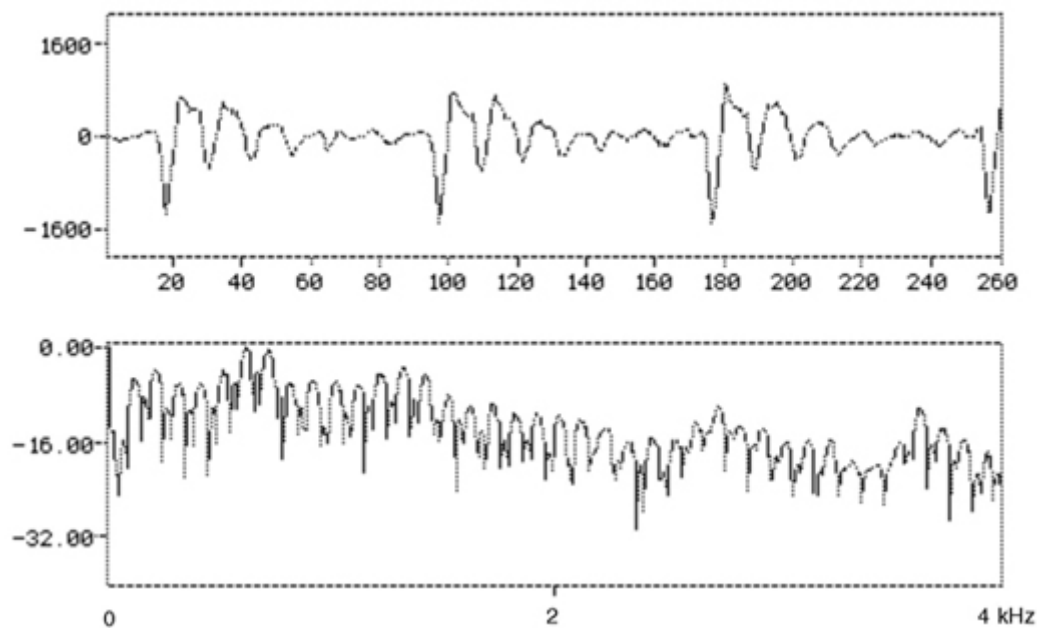


Fig. III.3 Ejemplo de segmento sonoro y el logaritmo del módulo de su transformada de Fourier

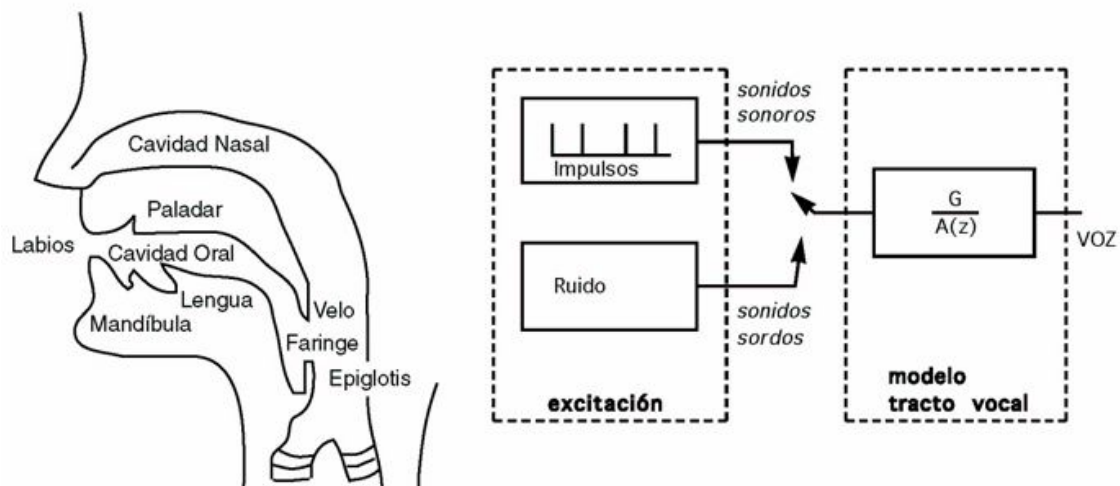


Fig. III.4 Tracto vocal y modelo de producción de la voz

La señal de voz se produce al expulsar el aire de los pulmones y pasar éste por el tracto vocal antes de ser emitido al exterior. Los *sonidos sonoros* (por ejemplo, las vocales) se producen con vibración de las cuerdas vocales; la onda periódica producida por las mismas se propaga por el tracto vocal, que produce resonancias a unas frecuencias (las enfatiza) y atenúa otras, en modo similar a como el cuerpo de una guitarra trata las vibraciones de cualquiera de sus cuerdas. Estas resonancias (que reciben el nombre de *formantes*) distinguen unos sonidos de otros y son gobernadas por el locutor al dar diversas formas al tracto vocal con los labios y la lengua fundamentalmente; en la voz normal, se sitúan entre 200 Hz y 3,5 kHz. El periodo de la señal se corresponde con el periodo de vibración de las cuerdas vocales y define el *tono*; éste puede ser cambiado a voluntad por el locutor. El tono constituye la base de la melodía del canto. El intervalo frecuencial que un locutor puede abarcar con el tono de su voz es una característica individual; el tono medio en los hombres es 130 Hz, mientras que las mujeres tienen un promedio de 220 Hz; en el habla normal se producen excursiones del tono dentro de una octava; en el canto la variación del tono puede llegar a dos octavas. Los *sonidos sordos* (por ejemplo, la efe o la ese) se producen sin vibración de las cuerdas vocales, y se deben

a una turbulencia generada en algún punto del tracto vocal en la que se produce una obstrucción voluntaria del mismo; esa turbulencia es modificada espectralmente por el resto del tracto vocal que ha de recorrer antes de ser emitida por los labios. En conjunto, la composición frecuencial de la voz se extiende desde los 50 Hz hasta los 7 kHz.

Esta descripción sugiere el modelo de producción de la voz que se muestra en la figura III.4: una excitación que modela la fuente sonora y un sistema que caracteriza al tracto vocal. Para los sonidos sonoros la excitación es un tren de deltas periódico, cuyo periodo es el periodo del sonido y gobierna el tono de la voz; para los sonidos sordos, la excitación es ruido blanco (es decir, un proceso blanco).

Obsérvese que, por lo que a los sonidos sonoros se refiere, el modelo sigue la interpretación que de las señales periódicas se hizo en la cuestión 5.a de este estudio previo. Por lo tanto, en este modelo de producción de la voz se puede identificar la respuesta impulsional del sistema que modela el tracto vocal con un periodo del sonido sonoro. En la práctica este sistema se realiza de forma recurrente como describe la ecuación (III.6), siendo su función de transferencia:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (III.9)$$

En la figura III.5 se presenta la respuesta frecuencial correspondiente al sistema que modela un sonido sonoro; se observan las resonancias (formantes) a determinadas frecuencias.

Este modelo de producción de la voz tiene múltiples aplicaciones. Deben mencionarse la síntesis de voz (de la que se hará una experiencia en el laboratorio) y la reducción de la información que es preciso transmitir en una comunicación telefónica. Para entender esto último, piénsese que unos cuantos periodos de señal pueden quedar representados por el periodo de la excitación y los coeficientes del sistema (típicamente entre 8 y 12); análogamente puede procederse con segmentos sordos. Así se pueden alcanzar reducciones que suponen la utilización de 0,3 bits por muestra, frente a los 8 bits por muestra de la codificación PCM (habitual hoy en día en telefonía).

7. Como ejercicio de integración de todo lo estudiado, se pide:

- Expresar un sonido sonoro $x[n]$ en función de la respuesta impulsional del sistema que modela el tracto vocal.
- Obtenga la transformada de Fourier de un segmento sonoro $x[n]$ de longitud L ($X(e^{j\omega})$) en función de la respuesta frecuencial del modelo del tracto vocal.
- A partir de la respuesta frecuencial del modelo de tracto vocal de la figura III.5, explique la transformada de Fourier del segmento sonoro que se presenta en la figura III.3. En particular, señale cómo se reflejan en dicha transformada el tono y los formantes de la voz.
- Justifique el procedimiento que se expone en la experiencia F de laboratorio para la síntesis de un sonido sonoro.

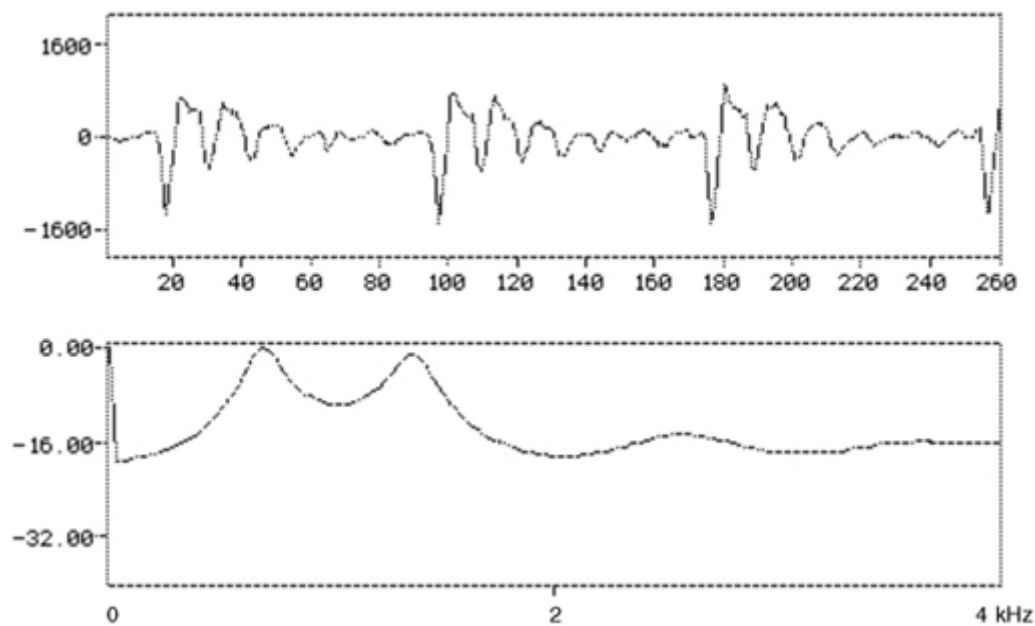


Fig. III.5 Sonido sonoro y logaritmo del módulo de la respuesta frecuencial del sistema que modela el tracto vocal

Como final de este estudio previo lea las experiencias a realizar en el laboratorio y organice su trabajo antes de acudir al mismo. Observe que para el primer experimento necesita un receptor de radio o *walkman* con auriculares (conector japonés) que deberá aportar para realizarlo.

3.3 En el laboratorio

- A. Para ilustrar el efecto de multiplicar una secuencia por $\delta[n]$ se le pide que haga dos experiencias.
En el menú "Tiempo Real" elija el submenú "Demos" y seleccione la opción "Inversión de Banda". Se ejecutará un programa que, trabajando con $F_m=8$ kHz, tomará muestras del convertidor A/D, las multiplicará por $\delta[n]$ y las llevará al convertidor D/A. Ahora:
 - a. Lleve a la entrada del convertidor A/D una señal senoidal y contemple la salida del D/A en la pantalla del osciloscopio. Modifique paulatinamente la frecuencia de la sinusoide y compruebe la relación entre frecuencia de entrada y salida obtenida en el estudio previo.
 - b. Introduzca la señal de un receptor de radio o *walkman* en la entrada del convertidor A/D y escuche la señal a la salida del convertidor D/A. Explique el efecto de distorsión observado. En realidad se trata de un proceso muy simple de encriptado, ya que la señal original puede ser recuperada fácilmente. ¿Cómo? Busque colaboración para ponerlo en práctica.
- B. Compruebe sus resultados a la cuestión 3 del estudio previo. Para ello genere el pulso cuadrado de longitud 20 muestras, posición en el origen y duración $M=6$ muestras; calcule su DFT, genere la nueva secuencia $X[k]$ e invierta la DFT con los valores de N especificados. Si observa alguna discrepancia con su respuesta al estudio previo, trate de explicarla.
- C. Proceda al análisis de un segmento de voz. Elija en el submenú de "Señales" de Generación la opción "Segmento de voz"; tome, por ejemplo, el segmento 3 desde la muestra 0 con una longitud de 512 muestras. Represente la señal; observará que una parte de la señal corresponde a un sonido sordo y

otra a un sonido sonoro. Trate de determinar el periodo del sonido sonoro; para ello seleccione en "Límites" el margen de ordinales que le resulte más cómodo.

- D. De nuevo en el submenú "Señales", genere una señal que contenga un solo periodo del sonido sonoro; por ejemplo, de la muestra 376 en adelante. Calcule su DFT y represente su módulo. ¿A qué frecuencias presenta el sonido los dos formantes más marcados? Elija el número de puntos N para la DFT que le proporcione la mayor precisión posible en la determinación de los formantes.
- E. Proceda ahora a obtener el modelo del tracto vocal correspondiente al segmento de voz que está analizando. Calcule la autocorrelación del periodo seleccionado en el apartado anterior. La opción "Predicción lineal" del menú "Tratamiento" le proporciona una secuencia con los coeficientes del denominador del sistema recurrente (III.9) que modela el tracto vocal. Elija orden 8, por ejemplo. Pase a Sistemas y en el menú "Datos" tome la opción "Filtro FIR: Respuesta impulsional": así genera un sistema $A(z)$ cuya respuesta impulsional está constituida por los coeficientes calculados anteriormente:

$$[0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000]$$

La acción anterior le deja en el menú "Función de transferencia"; seleccione la opción "Sistema inverso": así alcanza el modelo que buscaba. Represente el módulo de su respuesta frecuencial y compárela con la transformada de Fourier del periodo sonoro calculada en el apartado D. ¿Coinciden las posiciones de los formantes más significativos?

- F. Ahora sintetice voz:
- Obtenga la respuesta impulsional del modelo del tracto vocal; para ello use la opción "Filtrado" del menú de "Tratamiento" para filtrar una secuencia impulso unidad.
 - Genere un periodo correspondiente al sonido sonoro que está sintetizando; para ello, trate la respuesta impulsional obtenida con la opción "Generar periodicidad" del menú "Tratamiento" y los siguientes parámetros: periodo de 80 muestras, muestra inicial 0 y longitud igual al periodo.
 - Sintetice y escuche mediante los auriculares el sonido sonoro generado por dicho periodo. Para ello haga uso de la opción "Conversión D/A" del menú "Tiempo Real" con una frecuencia de muestreo de 8 kHz.

Si repite los pasos anteriores con distintos periodos, podrá sintetizar el mismo sonido (una i, en el caso de que esté trabajando con el segmento 3 de voz) pero con notas fundamentales (tonos) distintos. Hágalo, por ejemplo, para tonos de 60 Hz y 200 Hz aproximadamente.

- G. (Experiencia opcional) En el procesamiento de señal la forma más común de determinar el periodo de una señal es hacer uso de la autocorrelación de la misma. Seleccione un segmento periódico del segmento de voz anterior; por ejemplo, a partir de la muestra 250 con una longitud de 250 muestras. Calcule la autocorrelación de la secuencia como

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n) x(n+k)$$

y represéntela. ¿Cuál es el periodo de la señal? Justifique su respuesta.

4.1 Objetivos

En esta práctica se ilustra la influencia del enventanado en el tiempo de señales mediante dos aplicaciones de la transformada de Fourier en el procesamiento de señal: el análisis espectral y el diseño de filtros. Se utilizan como ejemplos la detección de sinusoides y el diseño de filtros FIR con fase lineal en su respuesta frecuencial.

4.2 Estudio previo

4.2.1 La transformada de Fourier y el análisis espectral

En general, en el tratamiento digital de señales de larga duración (como es el caso en la inmensa mayoría de las aplicaciones prácticas: voz, imagen, comunicaciones, etc.) es necesario descomponer la señal en porciones sucesivas, para procesar por separado cada uno de los segmentos obtenidos. Cada uno de estos segmentos recibe el nombre de *tramo*. La necesidad de segmentar la señal puede surgir por diversos motivos, de los que son los dos principales: que las características de la señal evolucionen con el tiempo e interese analizar esa evolución, o que el procesamiento deba hacerse en tiempo real evitando un retardo excesivo en el procesamiento (por ejemplo, carece de sentido esperar que la señal concluya, para establecer una comunicación) o adaptándose a la capacidad limitada de memoria y de cálculo de un procesador.

La operación básica que permite definir un segmento, o tramo de señal, es el producto de la señal $x[n]$ por una secuencia $v[n]$ de duración finita, que recibe el nombre de *ventana*. La operación se denomina *enventanado*. Si este enventanado forma parte del proceso previo a un análisis espectral de la señal (determinación de sus componentes espectrales o cálculo de su transformada de Fourier), a la hora de interpretar el resultado obtenido debe tenerse en cuenta que la transformada que realmente se evalúa corresponde a la señal enventanada. De este modo, en el análisis espectral de una secuencia $x[n]$, si $v[n]$ es la secuencia utilizada en el enventanado, la secuencia que en realidad es motivo del análisis es

$$x_v[n] = x[n]v[n]$$

cuya transformada de Fourier es la convolución en un periodo de las transformadas de $x[n]$ y $v[n]$:

$$X_v(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \otimes_{2\pi} V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\lambda}) V(e^{j(\omega-\lambda)}) d\lambda$$

Se comprende que, en principio, se postule como ventana ideal aquella que no altere la transformada, es decir, aquella secuencia $v[n]$ cuya transformada de Fourier sea

$$V(e^{j\omega}) = \delta(\omega)$$

ya que la convolución con la función delta de Dirac $\delta(\omega)$ no genera distorsión. Esta ventana es $v[n] = \delta[n]$, esto es, ausencia de enventanado. En consecuencia, la necesidad de utilizar una ventana obliga a aceptar distorsión en la transformada de la señal.

1. Considere una senoide de pulsación

$$x[n] = \cos(\omega_0 n)$$

que se enventana con $v[n]$ de longitud L , y de la que se calcula la DFT con N muestras. Demuestre que, si $\omega_0 = 2\pi k/N$, la DFT proporcionará la secuencia resultado de muestrear a intervalos $1/L$ la transformada

$$V[k] = \sum_{n=0}^{L-1} v[n] e^{-j2\pi kn/L}$$

donde $V[k]$ es la transformada de Fourier de la ventana $v[n]$.

La ventana más sencilla es la ventana rectangular

$$v[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

cuya transformada de Fourier es

$$V[k] = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j2\pi kn/L} = \frac{1 - e^{-j2\pi kL/L}}{1 - e^{-j2\pi k/L}}$$

2. En la figura IV.1 se muestra el módulo de la transformada de Fourier de una ventana rectangular de longitud $L=31$ muestras. Bosqueje el módulo de la transformada de Fourier de una senoide de frecuencia $f_0=1/4$ observada mediante una ventana rectangular de 31 muestras.

En el caso de una secuencia $x[n]$ que presente varias componentes frecuenciales (como ya es el caso de la señal senoidal), se razona, como consecuencia del resultado anterior, que la transformada de las diversas componentes se interferirán entre sí. Como se ilustra más adelante, son parámetros decisivos en la naturaleza de esta interferencia la *anchura del lóbulo principal* (el lóbulo centrado en $k=0$) y la *amplitud de los lóbulos secundarios* de la transformada de la ventana. En cuanto al lóbulo principal se puede escribir que su máximo es

$$|V[k]| = \left| \frac{1 - e^{-j2\pi kL/L}}{1 - e^{-j2\pi k/L}} \right|$$

y la anchura (medida entre ceros de la transformada) viene dada por

$$k = \pm L/2$$

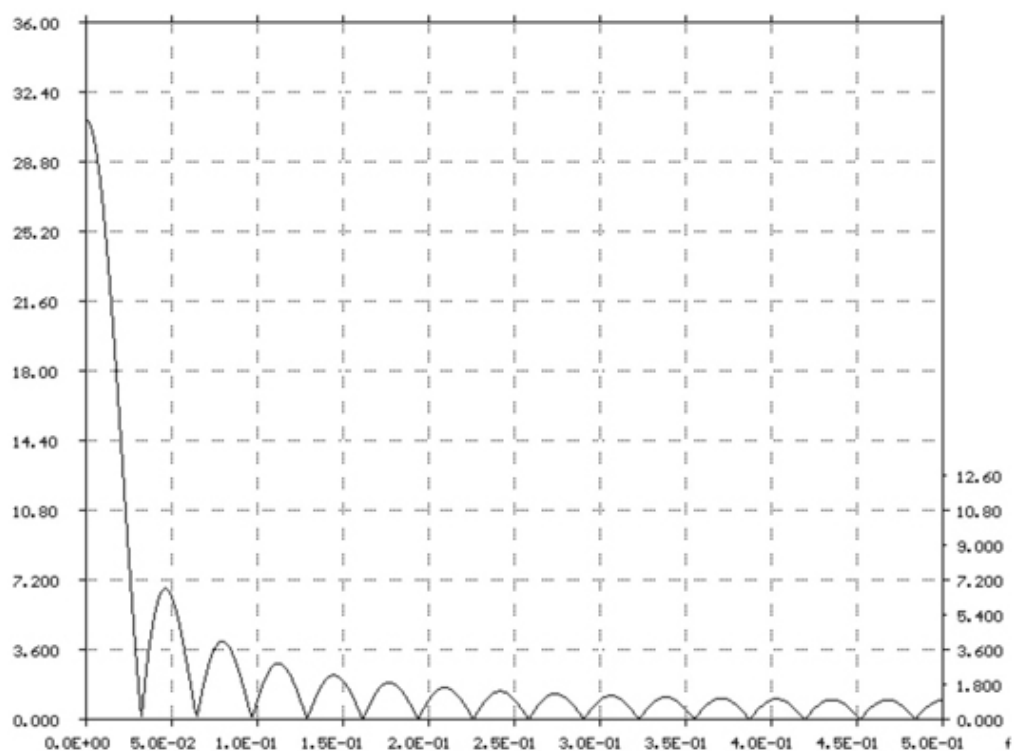


Fig. IV.1 Módulo de la transformada de Fourier de una ventana rectangular de 31 muestras

De este modo, cuando la longitud de la ventana aumenta, el lóbulo principal se hace más estrecho y crece su máximo; en otras palabras, tiende a parecerse al comportamiento ideal $\text{sinc}(\pi f L)$. El máximo del primer lóbulo secundario ocurre aproximadamente para

$$f \approx \frac{1}{L}$$

cuando, tras el cero que marca el límite del lóbulo principal, el valor absoluto del numerador de $\text{sinc}(\pi f L)$ se hace máximo, es decir

$$f \approx \frac{1}{L}$$

Así, para $L \gg 1$ como es usual,

$$\text{sinc}(\pi f L) \approx \frac{\text{sinc}(\pi f)}{\pi f L}$$

que revela un comportamiento inconveniente, ya que la amplitud del lóbulo secundario crece con la longitud de la ventana. Concretamente, la razón entre los máximos del lóbulo principal y el mayor lóbulo secundario permanece constante independiente de L ; este cociente, expresivo del nivel relativo de los lóbulos secundarios respecto al principal, suele expresarse en forma logarítmica mediante

$$10 \log_{10} \left(\frac{\text{Máximo principal}}{\text{Máximo secundario}} \right)$$

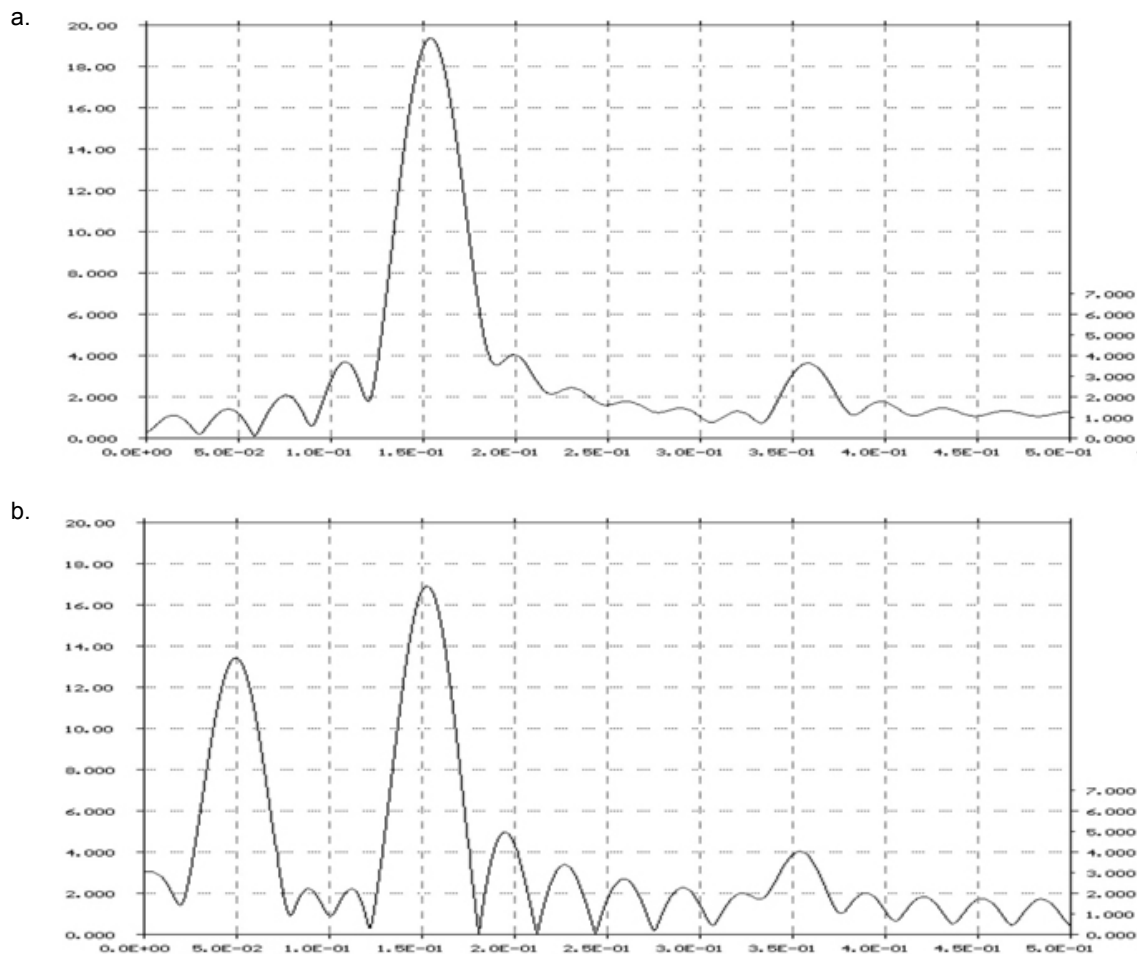


Figura IV.2 Módulo de la transformada de Fourier de dos señales compuestas por tres tonos enventanadas mediante una ventana rectangular con longitud $L=31$. Las frecuencias y amplitudes de los tres tonos son $f_1=0,15$, $A_1=1$, $f_2=0,35$, $A_2=0,2$ y: a) $f_3=0,16$, $A_3=0,8$; b) $f_3=0,05$, $A_3=0,8$

A título de ejemplo, en la figura IV.2 se proporciona el módulo de la transformada de Fourier de dos señales compuestas por tres tonos enventanadas con una ventana rectangular de 31 muestras. Ambas señales tienen en común dos tonos con frecuencias $f_1=0,15$ y $f_2=0,35$ y amplitudes $A_1=1$ y $A_2=0,2$ respectivamente; se diferencian en la frecuencia de la tercera componente (con amplitud $A=0,8$ en ambas): $f_3=0,16$ en una y $f_3=0,05$ en la otra. La señal de la parte a) de la figura presenta dos tonos con frecuencias muy próximas (su separación es mucho menor que la anchura del lóbulo principal de la transformada de la ventana) y no se aprecian distintamente en la transformada. Por otro lado, la presencia del tono con frecuencia $f_2=0,35$ no destaca claramente entre los lóbulos secundarios producidos por los tonos de mayor amplitud, ya que el módulo de la transformada en $f_2=0,35$ no sobrepasa su valor en $f=0,11$ o $f=0,2$. En la señal de la parte b) de la figura IV.2 los tonos mayores tienen frecuencias muy diferentes ($f_1=0,15$ y $f_3=0,05$) y la transformada de Fourier los distingue nítidamente, ya que su separación excede la anchura del lóbulo principal; el tono con frecuencia $f_2=0,35$ sigue enmascarado por los lóbulos secundarios.

Las observaciones del ejemplo anterior pueden generalizarse de modo sencillo. En primer lugar, la anchura del lóbulo principal de la transformada de la ventana determina la capacidad para *resolver* la presencia de componentes frecuenciales con amplitud similar y frecuencias próximas entre sí. Además, el nivel del lóbulo secundario condiciona la *sensibilidad* para detectar tonos en presencia de otros con mayor potencia.

La amplitud del lóbulo secundario de la ventana rectangular es excesivo en gran número de aplicaciones. Por ello se han propuesto otras ventanas que, aunque a costa de una mayor anchura del lóbulo principal, presentan lóbulos secundarios de mucha menor amplitud.

3. Considere la ventana triangular de longitud impar L

$$v[n] = \frac{1}{L} \left(1 + \frac{2n}{L-1} \right) \quad 0 \leq n \leq L-1$$

cuya transformada de Fourier (en función de L) ya calculó en el ejercicio 1 del estudio previo de la práctica anterior. Determine la anchura de su lóbulo principal y el nivel relativo de lóbulo secundario.

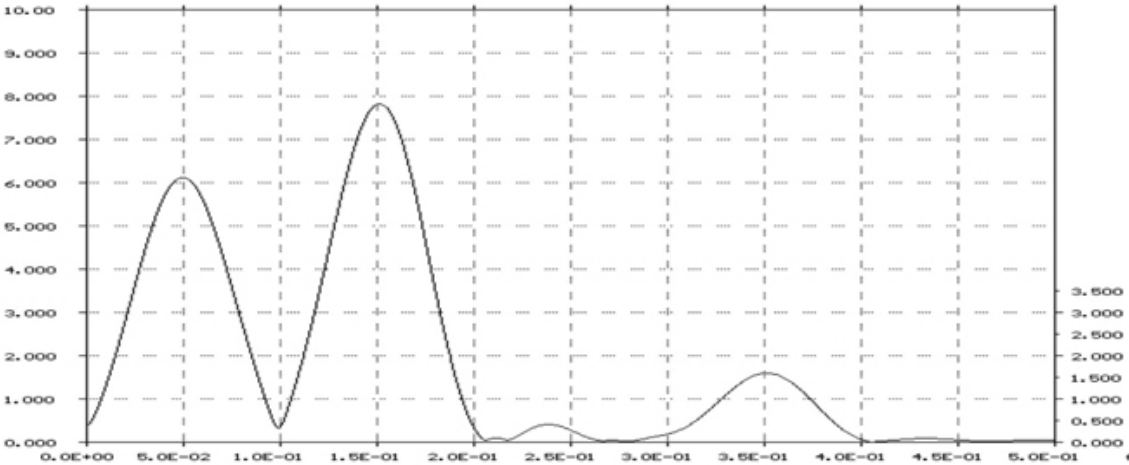


Figura IV.3 Módulo de la transformada de Fourier de una señal compuesta por tres tonos enventanada mediante una ventana triangular con longitud $L=31$.
Las frecuencias y amplitudes de los tres tonos son $f_1=0,15$, $A_1=1$, $f_2=0,35$, $A_2=0,2$ y $f_3=0,05$, $A_3=0,8$

En la figura IV.3 se representa el módulo de la transformada de Fourier de la secuencia de la figura IV.2.b enventanada por la ventana triangular con 31 muestras de longitud. La reducción de la amplitud de los lóbulos secundarios (que esta ventana proporciona con relación a la ventana rectangular) permite que la presencia del tono de menor amplitud se detecte claramente. El precio a pagar es el notable incremento de la anchura del lóbulo principal que, para una longitud de ventana fija, reduce la resolución de la nueva ventana.

Ventana	$v[n] \quad 0 \leq n \leq L-1$	$\Delta\omega$	α_{ps} dB
Rectangular	1	$4\pi/L$	13
Hamming	$0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/(L-1))$	$8\pi/L$	41
Blackman	$0,42 - 0,5 \cos(2\pi n/(L-1)) + 0,08 \cos(4\pi n/(L-1))$	$12\pi/L$	57

Tabla IV.1 Las ventanas más usuales y sus parámetros

En el programa **62** se dispone de las ventanas de Hamming, Blackman y Kaiser. Todas ellas son de longitud finita L , de forma que verifican:

$$w[n] = w[L-1-n] \quad |n| \leq (L-1)/2$$

En la tabla IV.1 se proporcionan forma, anchura del lóbulo principal y nivel relativo de lóbulo secundario para las ventanas rectangular, de Hamming y de Blackman.

4.2.2 Diseño de filtros FIR de fase lineal

Sea $|H_d(e^{j\omega})|$ la respuesta frecuencial de un filtro ideal. Su transformada de Fourier inversa nos proporciona la respuesta impulsional $h_d[n]$ del mismo, que se extiende desde $n = -(L-1)/2$ hasta $(L-1)/2$.

4. Calcule la respuesta impulsional de un filtro paso banda ideal cuya respuesta frecuencial es

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \omega_c - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_c + \Delta\omega \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde ω_c es la pulsación central de la banda de paso y $2\Delta\omega$ su ancho de banda.

Si la respuesta impulsional del filtro ideal se retarda M muestras y se enventana con una ventana real y simétrica

$$w[n] = w[L-1-n] \quad |n| \leq (L-1)/2 \quad (IV.1)$$

de longitud L , se obtiene la respuesta impulsional

$$h[n] = h_d[n-M]w[n]$$

de un filtro FIR causal con L coeficientes (obsérvese que $M = (L-1)/2$). La respuesta frecuencial de este filtro presenta fase lineal y aproxima el comportamiento paso banda ideal. En efecto:

5. Compruebe que la transformada de Fourier $V(e^{j\omega})$ de la ventana que verifica la condición de simetría (IV.1), puede expresarse

$$V(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{L-1}{2}\omega} V_r(e^{j\omega})$$

donde $V_r(e^{j\omega})$ es una función real y par de ω .

6. Demuestre que la respuesta frecuencial del filtro FIR diseñado por el procedimiento descrito responde a la forma

$$H(e^{j\omega}) = (e^{-j\frac{L-1}{2}\omega} H_f(e^{j\omega})) (2\pi) V(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{L-1}{2}\omega} H_f(e^{j\omega})$$

donde L es la longitud de su respuesta impulsional, $\otimes_{2\pi}$ denota la convolución en un periodo y $| \cdot |$ es una función real y par.

7. A partir de la relación anterior, razone los siguientes efectos de la transformada de Fourier de la ventana sobre la respuesta frecuencial (ilustrada en la figura IV.4) de un filtro FIR obtenido a partir de un paso bajo ideal:

a. la anchura del lóbulo principal determina la anchura de la banda de transición entre las bandas de paso y atenuada del filtro, ya que aproximadamente

$$\Delta f \approx \frac{1}{L} \quad \Delta \omega \approx \frac{2\pi}{L}$$

b. la amplitud de los lóbulos secundarios determina la magnitud del rizado de la respuesta frecuencial en las bandas de paso y atenuada (el rizado depende de la diferencia entre el área de los distintos lóbulos secundarios de la transformada de la ventana).

8. Extienda dichos efectos a la respuesta frecuencial de un filtro paso banda diseñado mediante el enventanado de la respuesta impulsional ideal.

El módulo de la respuesta frecuencial de los filtros suele expresarse en forma logarítmica por medio de la función de atenuación $A(f)$ definida mediante

$$A(f) = 20 \log_{10} \left(\frac{|H(f)|}{H_{ref}} \right)$$

donde H_{ref} es un valor de referencia, que habitualmente se toma como el valor nominal del módulo de la respuesta frecuencial en la banda de paso (en el caso de la figura IV.4 $H_{ref} = 1$). Así, con una amplitud máxima A_{max} para el rizado de la respuesta frecuencial en las bandas de paso y atenuadas, se tiene una variación máxima para la atenuación en las bandas de paso

$$A_{max} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{|H(f)|} \right)$$

y una atenuación mínima en las bandas atenuadas

$$A_{min} = 20 \log_{10} \left(|H(f)| \right)$$

Las diversas ventanas (rectangular, de Hamming, de Blackman) son distintos ejemplos del compromiso entre anchura del lóbulo principal y nivel de lóbulos secundarios; o, dicho en términos de la respuesta frecuencial de los filtros obtenidos por su mediación, representan diversas alternativas entre la anchura de las bandas de transición y la magnitud del rizado en bandas de paso y bandas atenuadas.

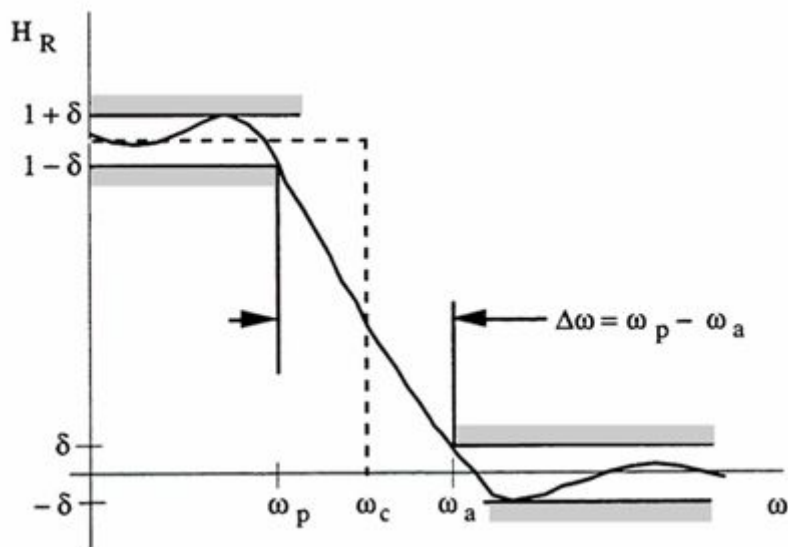


Fig. IV.4 Representación, sin el término de fase lineal, de la respuesta frecuencial de un filtro paso bajo obtenido enventanando la respuesta impulsional ideal (en trazo discontinuo se incluye la respuesta frecuencial ideal).

Sin embargo, dado que la amplitud del rizado proporcionado por cada una de dichas ventanas es fijo ($\delta = 21$ dB, 53dB y 74 dB, respectivamente), su utilización en el diseño de filtros adolece de rigidez. Con la intención de ganar flexibilidad, Kaiser propuso una familia de ventanas dependientes de un parámetro β :

$$w(n) = \frac{1}{L} \left[\frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{L}\right)}{2} \right]^\beta \quad (IV.2)$$

donde $\beta = (L-1)/2$ y L es la longitud de la ventana. El parámetro β permite elegir a voluntad el nivel de lóbulos secundarios de la ventana, de modo que una vez elegido éste la longitud L determina la anchura del lóbulo principal. Kaiser estableció empíricamente que, para obtener un rizado δ en banda de paso y banda atenuada de un filtro, debía tomarse en función de β el siguiente valor para L :

$$L = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\delta} \right] & \text{for } \beta \leq 1 \\ 1 + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\delta} \right] & \text{for } 1 < \beta \leq 2 \\ 1 + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\delta} \right] & \text{for } 2 < \beta \leq 3 \\ 1 + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\delta} \right] & \text{for } 3 < \beta \leq 4 \\ 1 + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\delta} \right] & \text{for } 4 < \beta \leq 5 \\ 1 + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\delta} \right] & \text{for } 5 < \beta \leq 6 \\ 1 + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\delta} \right] & \text{for } 6 < \beta \leq 7 \\ 1 + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\delta} \right] & \text{for } 7 < \beta \leq 8 \\ 1 + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\delta} \right] & \text{for } 8 < \beta \leq 9 \\ 1 + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\delta} \right] & \text{for } 9 < \beta \leq 10 \end{cases} \quad (IV.3)$$

($\beta = 0$ genera la ventana rectangular). La longitud L de la ventana se elige en función de la anchura deseada $\Delta\omega$ para la banda de transición:

$$L = \frac{1}{\Delta\omega} \quad (IV.4)$$

Dado el carácter empírico de las expresiones (IV.3 y 4), en general los valores de α y L deben ser establecidos tras algún ejercicio de prueba y error, comprobando que el diseño alcanzado satisface las especificaciones de partida y corrigiendo α y L si fuese preciso.

9. Determine

- a. las especificaciones del filtro ideal (f_c (pulsación central de la banda de paso) y B (ancho de banda de la banda de paso),
- b. y los parámetros α (parámetro de forma) y L (duración) de la ventana,

para obtener un filtro paso banda que, trabajando con una frecuencia de muestreo de 8 kHz, proporcione una banda de paso entre las frecuencias 1,5 kHz y 2,5kHz y presente una atenuación superior a 30 dB por debajo de 1 kHz y por encima de 3,25 kHz.

Para obtener la respuesta impulsional del filtro FIR de fase lineal deben seguirse los siguientes pasos en el programa **62**:

- a. En el submenú "Respuestas impulsionales" del menú "Generación" se ha de elegir la opción correspondiente a la configuración de las bandas que se desea, indicando las frecuencias centrales de las bandas, sus anchos de banda y la longitud de la respuesta impulsional deseada L . Se obtiene así la respuesta impulsional correspondiente al filtro ideal especificado enventanada con la ventana rectangular y desplazada para que el filtro sea causal.
- b. En el submenú "Ventanas" se genera la ventana de Kaiser con el parámetro α requerido y la longitud L .
- c. Por último, mediante la opción "Producto" del menú "Tratamiento" se enventana con la ventana de Kaiser obtenida la respuesta impulsional determinada previamente en el menú de "Generación". Esto proporciona la respuesta impulsional del filtro deseado.

Como final de este estudio previo lea las experiencias a realizar en el laboratorio y organice su trabajo antes de acudir al mismo.

4.3 En el laboratorio

- A. Genere sendas ventanas rectangular y de Hamming con $L=31$ muestras a partir del origen ($\text{longitud}=\text{duración}=31$, $\text{posición}=0$), calcule su DFT con $N=512$ puntos (mediante la FFT) y el módulo de ésta (utilice la opción "Módulo" del submenú "Muestra a muestra" de "Tratamiento"). Determine la anchura y la amplitud del lóbulo principal y la amplitud del mayor lóbulo secundario de la transformada de cada ventana⁽⁴⁾. Obtenga el logaritmo $10 \log_{10}$ de la relación de amplitudes de los lóbulos principal y secundario.

⁴ Para averiguar el valor del máximo, haga uso de la opción "Editar secuencia" del menú de "Generación" de Secuencias.

- B. Genere una senoide de 31 muestras con una frecuencia $f=1/18$, y obtenga y represente el módulo de su transformada de Fourier. Observe la apariencia de esta transformada y determine y justifique el valor y la posición de su máximo. Repita la experiencia con una senoide de frecuencia la mitad. Anote y justifique las diferencias observadas en la apariencia de la transformada y en el valor y posición de su máximo.
- C. Repita la experiencia anterior enventanando⁽⁵⁾ las sinusoides con una ventana de Hamming de 31 muestras de longitud. Compare con los resultados del caso anterior y justifique las diferencias anotadas.
- D. Mediante la opción "Abrir secuencia" de "Archivo" tome, por ejemplo, la secuencia MULTONO1, cuya descripción general se proporciona en el comentario que la acompaña (para leerlo, pulse la opción "Mostrar información" ubicada a la izquierda del panel de trabajo). Determine la frecuencia y la potencia de los tonos que contiene; para ello, analice el módulo de la transformada de Fourier de la secuencia enventanada adecuadamente. Anote las ventanas utilizadas y los resultados obtenidos con cada una de ellas. Comente la precisión que le otorga a las estimaciones realizadas.
- E. Obtenga la respuesta impulsional del diseño propuesto en la cuestión 9 del estudio previo, genere el sistema correspondiente con la opción "Filtro FIR: respuesta impulsional" y compruebe que su atenuación cumple las especificaciones. Haga uso de la opción "Filtrado analógico" con una frecuencia de muestreo de 8 kHz para filtrar una señal senoidal; cambie paulatinamente la frecuencia de la señal y verifique que la respuesta frecuencial del sistema se comporta según lo previsto.

⁵ El enventanado se produce con la opción "Producto" del menú "Tratamiento" de Secuencias, realizando el producto entre la ventana y la secuencia que se quiere enventanar.

5.1 Objetivos

En esta práctica se ilustra la aplicación del diezmado y la interpolación en comunicaciones mediante el diseño de un sistema multiplexor/demultiplexor de dos canales telefónicos: uno de voz y otro de datos. Se presta especial atención al diseño de los filtros interpoladores y diezmadores, estudiando la repercusión de las propiedades de sus respuestas frecuenciales en las prestaciones del sistema multiplexor/demultiplexor.

5.2 Estudio previo

5.2.1 Interpolación y diezmado

Antes de pasar al estudio de la aplicación práctica del diezmado y la interpolación que se le propone para esta sesión de trabajo en el laboratorio, resuelva los siguientes ejercicios que le servirán de repaso de los conceptos básicos de ambas operaciones.

1. Sean y_0, y_1, y_2 e y_3 cuatro valores de una función correspondientes a valores equiespaciados x_0, x_1, x_2 y x_3 de la variable. La fórmula de interpolación cúbica de Lagrange proporciona el siguiente valor y para la función en el punto medio entre x_1 y x_2 :

$$y = \frac{1}{8} \left(\frac{y_0}{2} + \frac{3y_1}{4} + \frac{3y_2}{4} + \frac{y_3}{2} \right)$$

A partir de esta información, proponga la respuesta impulsional para un filtro causal interpolador por 2 que conserve inalteradas en la secuencia interpolada $y[n]$ las muestras de la secuencia a interpolar $x[n]$.

2. Como se comprobará en el laboratorio, el interpolador anterior, aunque mejor que el interpolador lineal, sólo interpola correctamente señales de baja frecuencia. Se le pide ahora el diseño de un filtro FIR paso bajo para interpolar por 2 una señal telefónica, que supondremos con componentes entre 300 Hz y 3,4 kHz y muestreada a 8 kHz. Determine el parámetro β para conseguir una atenuación de 40 dB en la banda atenuada haciendo uso de la ventana de Kaiser, y los límites de la banda de transición para que en la banda de paso del interpolador quepa la señal telefónica y la banda atenuada elimine el alias indeseado. Finalmente, obtenga la longitud L de la respuesta impulsional del filtro.
3. Justifique que el filtro diseñado en el apartado anterior es un filtro adecuado para evitar el *aliasing* en la banda de frecuencias de la señal telefónica al diezmar por 2 una señal de voz, cuyo ancho de banda alcanza los 7 kHz aproximadamente, adquirida con una frecuencia de muestreo de 16 kHz.

5.2.2 Sistema multiplexor / demultiplexor de dos canales

Es práctica habitual en comunicaciones que varias señales compartan el mismo medio de transmisión; ejemplos típicos son la radiodifusión (múltiples estaciones emisoras se difunden a través de la atmósfera) y la telefonía (el mismo cable porta cientos de conversaciones simultáneamente). Esta práctica recibe el nombre de *multiplexión* y la operación de separar las señales se denomina *demultiplexión*. Para que las distintas señales no se interfieran entre sí (o puedan ser recuperadas sin contaminación de las demás) es

preciso prepararlas antes de juntarlas en el medio de transmisión común. Una alternativa es situar cada señal en una banda distinta del espectro; esta técnica recibe el nombre de *multiplexión por división en frecuencia* (FDM).

El diezmado y la interpolación son imprescindibles cuando la multiplexión o la demultiplexión en frecuencia se realiza mediante procesamiento de señal a tiempo discreto. En la figura V.1 se muestra el esquema de un multiplexor de dos señales paso bajo, que suponemos que han sido muestreadas sin *aliasing*. La primera señal es interpolada por un filtro H_1 paso bajo; la segunda es interpolada paso alto con el filtro H_2 ; finalmente, ambas señales son sumadas para generar la secuencia $s[n]$, compuesta por ambos canales.

4. Suponga que los interpoladores del multiplexor de la figura V.1 son ideales y que las señales de ambos canales son paso bajo y han sido obtenidas muestreando sin *aliasing*. Represente el espectro de las secuencias en los puntos A y B y de la secuencia $s[n]$. Compruebe que las señales multiplexadas no comparten componentes frecuenciales.

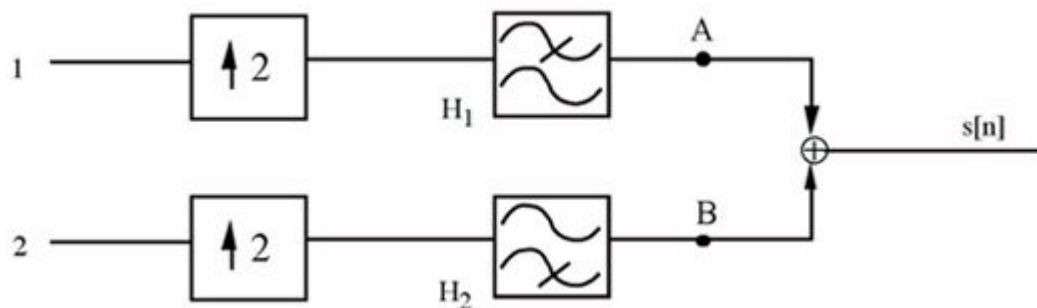


Fig. V.1 Multiplexor de dos canales

5. Si las señales a multiplexar se han muestreado a una frecuencia de 8 kHz, determine la frecuencia de muestreo para convertir D/A la secuencia $s[n]$ y obtener así la señal analógica con los canales multiplexados. Escale en términos de la frecuencia analógica los ejes de abscisas de la representación de espectros realizada en el apartado anterior.

Si en el extremo de recepción la señal multiplexada es convertida A/D, la demultiplexión puede realizarse mediante diezmado, tal como se representa en la figura V.2. La señal compuesta es filtrada y diezmada; la señal del canal 1 se recupera mediante un filtrado paso bajo, mientras que la señal del canal 2 se demultiplexa por un filtro paso alto.

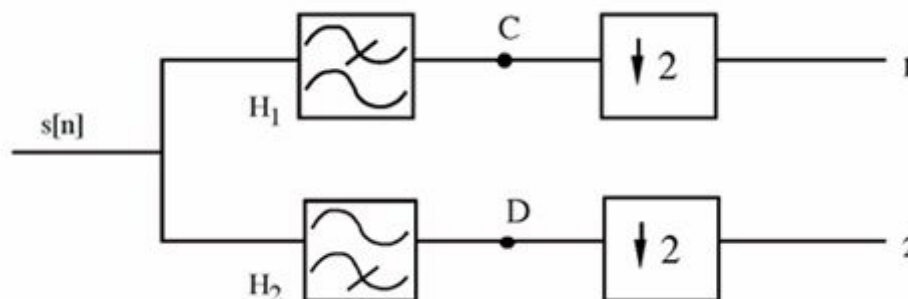


Fig. V.2 Demultiplexor de dos canales

6. Suponga que el espectro de la secuencia $s[n]$ es el obtenido en el apartado 4 y los filtros $H_1(z)$ y $H_2(z)$ los mismos de la figura V.1. Represente los espectros de las secuencias en los puntos C y D y compruebe que, tras el diezmado, recupera las señales correspondientes a cada canal.
7. Si se toma la respuesta impulsional $h[n]$ del filtro $H_1(z)$ como:

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ 1 & n=2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (V.1)$$

donde $h[n]$ es la respuesta impulsional del filtro paso bajo $H_1(z)$, demuestre que el filtro obtenido es paso alto. Si las señales que se quieren multiplexar corresponden a sendos canales telefónicos, el filtro interpolador diseñado en el apartado 2 puede utilizarse para el canal 1 en los esquemas multiplexor y demultiplexor; compruebe que el filtro obtenido haciendo uso de (V.1) es adecuado para el canal 2.

Para poder experimentar en el laboratorio con los sistemas multiplexor y demultiplexor estudiados, éstos han sido programados en la demostración "Multiplexado" del programa **62** (disponible en el submenú "Demos" del menú "Tiempo Real"). Cuando se invoca esta demo, se ejecuta un programa que ofrece diversas opciones de operación; el modo de trabajo se selecciona mediante un menú que se muestra en la pantalla del PC. Las opciones posibles y la acción que realizan son las siguientes:

- **Interpolador por 2:** adquiere la señal presente en el convertidor A/D con una frecuencia de muestreo de 8 kHz, la interpola mediante z^{-1} por 2 y la convierte D/A con una frecuencia de 16 kHz. Esta es la opción que se selecciona por defecto al llamar a la demostración; en dicho momento el filtro es $H_1(z)$.
- **Multiplexor:** adquiere la señal presente en el convertidor A/D con una frecuencia de muestreo de 8 kHz y la multiplexa (canal 1), de acuerdo con el esquema de la figura V.1, con una señal de datos (canal 2), constituida por un tono cuya frecuencia alterna aleatoriamente entre 1 y 3 kHz; finalmente, la señal compuesta es llevada al convertidor D/A, que trabaja con una frecuencia de 16 kHz.
- **Demultiplexor (canal 1):** adquiere la señal presente en el convertidor A/D con una frecuencia de muestreo de 16 kHz, recupera la señal del canal 1 y la pasa al convertidor D/A que trabaja con una frecuencia de 8 kHz. Esta opción realiza un filtrado paso bajo mediante $H_1(z)$ y un diezmado por 2.
- **Demultiplexor (canal 2):** adquiere la señal presente en el convertidor A/D con una frecuencia de muestreo de 16 kHz, recupera la señal del canal 2 y la pasa al convertidor D/A que trabaja con una frecuencia de 8 kHz. Esta opción realiza un filtrado paso alto mediante $H_2(z)$ y un diezmado por 2.
- **Multiplexor + Demultiplexor (canal 1):** combina los modos 3 y 4; sin embargo, en este caso la señal compuesta $s[n]$ es llevada al demultiplexor sin ser convertida a señal analógica. Los convertidores A/D y D/A trabajan a 8 kHz.
- **Multiplexor + Demultiplexor (canal 2):** combina los modos 3 y 5; sin embargo, en este caso la señal compuesta $s[n]$ es llevada al demultiplexor sin ser convertida a señal analógica. Los convertidores A/D y D/A trabajan a 8 kHz.

La opción seleccionada se muestra ligeramente sombreada. El sistema puede elegirse a conveniencia mediante la opción "Examinar" en "Sistema actual". El sistema por defecto tiene por respuesta impulsional $\delta(t)$ (no filtrado).

En la descripción anterior del funcionamiento del sistema se ha supuesto que es un filtro paso bajo, de acuerdo con los esquemas conceptuales de las figuras V.1 y V.2. En realidad este filtro puede elegirse libremente, de modo que las prestaciones del sistema dependerán de las características de este filtro; por ejemplo, si se diseña paso alto, el canal 1 se multiplexará en la parte alta del espectro y el canal 2 en la baja; o, si es paso banda, el diezmado realizado por la opción 4 incluirá un filtrado previo paso banda (no paso bajo).

Como final de este estudio previo lea las experiencias a realizar en el laboratorio y organice su trabajo antes de acudir al mismo. Observe que para varios experimentos necesita un receptor de radio o un *walkman* con auriculares (conector japonés) que deberá aportar para realizarlo.

5.3 En el laboratorio

- A. Mediante la opción "Editar secuencia" del menú "Generación" escriba la respuesta impulsional del interpolador (Lagrange) diseñado en el apartado 1 del estudio previo. Construya el sistema FIR correspondiente con la opción "Filtro FIR: respuesta impulsional"⁽⁶⁾. Examine su respuesta frecuencial; si se considera una buena interpolación aquélla en la que los alias de la señal a interpolar quedan por debajo de ésta al menos en 40 dB, estime la banda de frecuencias que el filtro de Lagrange interpola adecuadamente. Modifique la constante multiplicativa de su función de transferencia para obtener una ganancia unidad en la banda de paso (ello evitará más adelante saturaciones en la conversión D/A) y guarde el sistema en un fichero.
- B. Invoque la demo "Multiplexado", que comenzará actuando como interpolador, y seleccione el interpolador Lagrange como filtro. Introduzca en el convertidor A/D un tono y varíe su frecuencia, comprobando la banda de frecuencias en el que se obtiene una interpolación correcta. Describa la distorsión observada en la señal cuando la interpolación no es adecuada.
- C. Diseñe el interpolador (Kaiser) especificado en el apartado 2 del estudio previo, dándole una ganancia unidad en la banda de paso. Compruebe que satisface las especificaciones y guárdelo en un fichero. Repita la experiencia anterior con este nuevo interpolador.
- D. Reinicie la demo "Multiplexado" y seleccione la opción "Demultiplexador (canal 1)", que realiza un diezmado por 2. Alimente el convertidor A/D con una sinusoide, haciendo una excursión en frecuencia (por ejemplo, de 1 a 7 kHz), y observe la frecuencia de la salida obtenida en el convertidor D/A. Establezca la relación entre las frecuencias de las sinusoides a la entrada del convertidor A/D y a la salida del convertidor D/A, y explíquela ayudándose de un diagrama de bloques descriptivo de la experiencia.

⁶ Como procedimiento alternativo, puede generar directamente el sistema mediante la opción "Editar coeficientes" del submenú "Función de transferencia" del menú "Datos" de Sistemas.

- E. Póngase de acuerdo con sus compañeros de un puesto de trabajo vecino; en un puesto elijan la opción "Multiplexor" y en el otro el modo "Demultiplexor (canal 1)"⁽⁷⁾. Conecte la salida del primero con la entrada del segundo. Alimente el convertidor A/D con la señal de voz obtenida del *walkman*. Usando el filtro interpolador Kaiser, escuche y observe en el osciloscopio la señal recibida por el canal 1. Cambie al filtro Lagrange; anote y justifique el cambio de comportamiento advertido.
- F. Demultiplexe el canal 2; escuche y observe la señal de dicho canal, cambiando el nivel de la señal de entrada al canal 1. Vuelva a usar el filtro Kaiser; tome nota del cambio de comportamiento advertido y explíquelo. En concreto, analice la amplitud de los dos tonos que constituyen la señal del canal 2.
- G. (Experiencia opcional) En la misma situación del apartado D, alimente ahora el sistema diezmador con la señal de voz obtenida del *walkman*; escuche la señal disponible después del diezmado en el convertidor D/A: lo que escucha es una señal distorsionada por el *aliasing*. La situación es equivalente al muestreo con una frecuencia de 8 kHz cuando se utiliza un filtro *antialiasing* con un ancho de banda de 7,8 kHz. Seleccione el filtro Kaiser y vuelva a escuchar la señal disponible tras el diezmado; aunque ahora no se produce *aliasing*, no se aprecia fácilmente la diferencia con el caso anterior; ¿podría sugerir una explicación?
- H. (Experiencia opcional) En el caso de la voz el beneficio del filtro reconstructor es mucho más apreciable que el efecto del filtro *antialiasing* (que es pequeño, como puede observarse con la experiencia G). Para advertir el efecto del filtro reconstructor se le propone el siguiente experimento: invoque la demo "Multiplexado", que realizará una interpolación por 2 sin filtro. Alimente el sistema con el *walkman* y escuche la señal disponible en el convertidor D/A. La situación es equivalente a la conversión D/A con un filtro reconstructor cuyo ancho de banda es igual a la frecuencia de muestreo. Seleccione el filtro Kaiser y vuelva a escuchar la señal a la salida del convertidor D/A: la distorsión ha desaparecido. Justifique este resultado mediante el bosquejo del espectro de la señal analógica obtenida a la salida del convertidor D/A con y sin el filtro de Kaiser.

⁷ Como opción alternativa puede escoger la opción Multiplexor + Demultiplexor (canal 1) y trabajar con un solo puesto de laboratorio.

6.1 Objetivos

Esta práctica se dedica al estudio de los sistemas lineales e invariantes definidos por ecuaciones en diferencias finitas y el diseño de filtros. Se inicia con el estudio del diagrama de ceros y polos y su relación con las respuestas impulsional y frecuencial de estos sistemas, tanto si son FIR de fase lineal como IIR. Se prosigue con la utilización de la transformación bilineal para el diseño de un filtro IIR paso banda y se concluye con el rediseño del filtro paso bajo utilizado en el esquema de multiplexión de la práctica anterior.

6.2 Estudio previo

6.2.1 Diagrama de ceros y polos, respuesta impulsional y respuesta frecuencial

El diagrama de ceros y polos de la función de transferencia de un sistema constituye una representación eficiente de su comportamiento, ya que a partir del mismo pueden inferirse a grandes rasgos las propiedades de su respuesta temporal y frecuencial.

1. En la figura VI.1 se proporciona el diagrama de ceros y polos de un filtro FIR. Bosqueje las respuestas frecuencial e impulsional del mismo, si todos los ceros son simples.

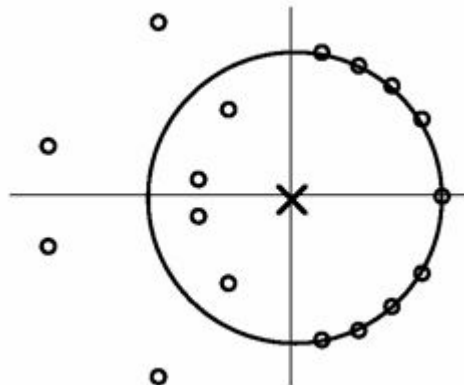


Fig. VI.1 Diagrama de ceros y polos de un filtro FIR

La relación entre la entrada $e[n]$ y la salida $s[n]$ de un sistema IIR de orden 2 responde a la expresión:

$$s[n] = \frac{1}{2} e[n] + \frac{1}{4} e[n-1] + \frac{1}{4} e[n-2] + \frac{1}{2} e[n-3] + \frac{1}{4} e[n-4] + \frac{1}{4} e[n-5] + \frac{1}{2} e[n-6] + \frac{1}{4} e[n-7] + \frac{1}{4} e[n-8] + \frac{1}{2} e[n-9] + \frac{1}{4} e[n-10]$$

siendo su función de transferencia:

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3} + \frac{1}{4}z^{-4} + \frac{1}{4}z^{-5} + \frac{1}{2}z^{-6} + \frac{1}{4}z^{-7} + \frac{1}{4}z^{-8} + \frac{1}{2}z^{-9} + \frac{1}{4}z^{-10}$$

La respuesta frecuencial puede escribirse:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4r^2 \sin^2(\omega/2)}} \quad (VI.1)$$

en función de los ceros de los polinomios numerador o denominador de la función de transferencia. Si el sistema es real y d_1 es complejo, se cumple que $d_2 = d_1^*$.

2. La respuesta impulsional del sistema anterior responde a la expresión

$$h[n] = A r^n \sin((n+1)\theta) \quad (VI.1)$$

Calcule la transformada z de esta secuencia y, mediante identificación de coeficientes, determine los parámetros A, r y θ de $h[n]$ en función de los coeficientes de la función de transferencia del sistema.

Establezca las condiciones que han de cumplir a_1 y a_2 para que $h[n]$ sea una senoide amortiguada.

En la figura VI.2 se muestra el vector

$$1 - re^{j\omega}$$

que representa la contribución a la respuesta frecuencial del sistema de un polo situado en $re^{j\omega}$ (con $r < 1$ por tratarse de un sistema causal y estable). Esta contribución presenta un mínimo de su módulo de valor $1-r$ en $\omega = 0$, que implica una resonancia (pico) en la respuesta frecuencial.

3. Si el polo está suficientemente próximo a la circunferencia de radio unidad ($r \approx 1$), la respuesta frecuencial en el entorno de $\omega = 0$ está dominada por la contribución del polo y presenta una resonancia (pico). Aceptando que en el entorno de $\omega = 0$ se puede aproximar la circunferencia por la tangente, establezca la siguiente aproximación para $|H(e^{j\omega})|$, el ancho de banda a 3 dB de la resonancia:

$$|H(e^{j\omega})| \approx \frac{1}{1-r} \quad (VI.2)$$

Es ilustrativo observar el efecto de la proximidad del polo a la circunferencia de radio unidad sobre las respuestas impulsional y frecuencial del sistema. En términos generales, puede afirmarse que, cuanto más cercano se halle el polo a dicha circunferencia (es decir, mayor sea r), menor es el amortiguamiento y mayor duración efectiva tiene la senoide amortiguada con la que contribuye a la respuesta impulsional; esta conclusión es avalada por la expresión (VI.1). Al mismo tiempo, más pronunciada es la resonancia en la respuesta frecuencial, ya que presenta mayor amplitud $\frac{1}{1-r}$ y, de acuerdo con (VI.2), menor ancho de banda. De este modo, queda asociada una larga duración de la respuesta impulsional con una marcada resonancia en la respuesta frecuencial.

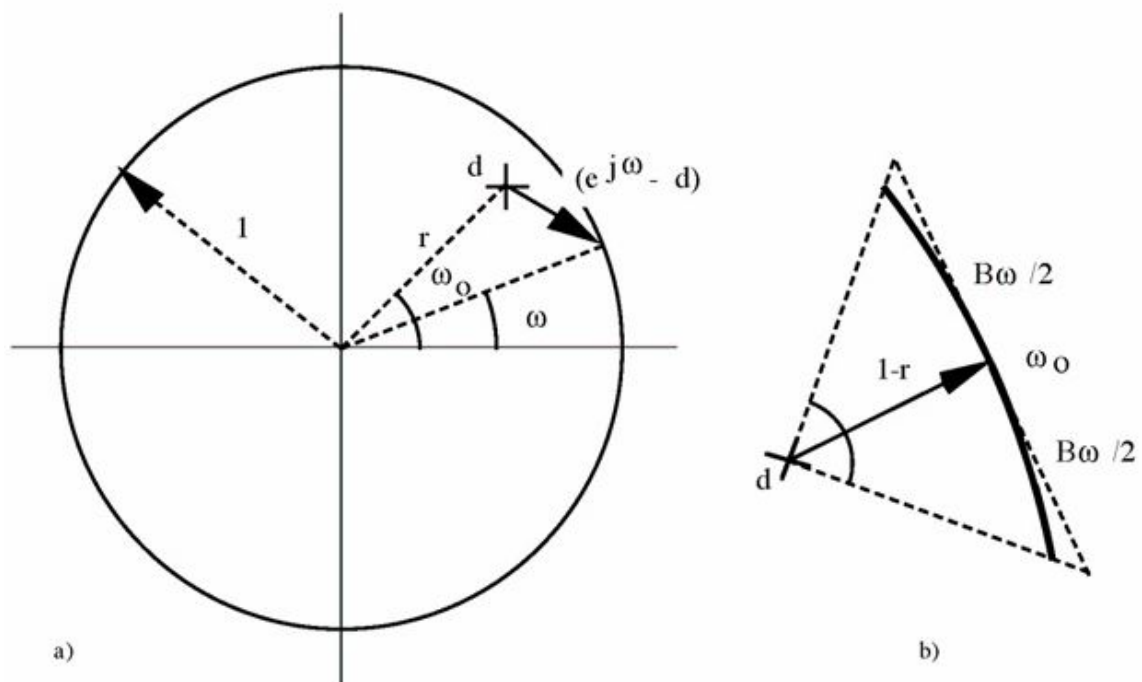


Fig. VI.2 Vector que representa la contribución de un polo a la respuesta frecuencial:
a) situación en el plano complejo z
b) ampliación en el entorno de ω_0

6.2.2 La transformación bilineal

A partir de la función de transferencia $H(s)$ de un sistema analógico, la transformación bilineal proporciona la función de transferencia $H(z)$ de un sistema discreto

$$z = \frac{s + j\omega_c}{s - j\omega_c} \quad (VI.3)$$

cuya respuesta frecuencial se relaciona con la respuesta frecuencial del sistema analógico $H(j\omega)$ mediante la expresión

$$H(z) = H(j\omega)$$

La relación entre las pulsaciones del dominio analógico ω y discreto ω_c que establece la transformación bilineal

$$\omega = \omega_c \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (VI.4)$$

expande el intervalo $(0, \pi)$ de ω al intervalo $(0, \pi)$ de Ω .

La transformación bilineal permite extender técnicas de análisis y diseño del dominio analógico al discreto. Por ejemplo, para obtener la función de transferencia $H(z)$ de un sistema cuya respuesta frecuencial satisfaga ciertas especificaciones, los pasos que se deben seguir son los siguientes:

- mediante (VI.4), transformar las especificaciones en a especificaciones en ;
 - determinar l que cumple las especificaciones en ;
 - obtener $H(z)$ mediante (VI.3).
4. La función de transferencia de un filtro paso banda analógico de orden 2 con ceros de transmisión en origen e infinito

$$| \dots | \dots$$

presenta el máximo de su respuesta frecuencial

$$| \dots |$$

para la pulsación ; además, las pulsaciones de corte a 3 dB y verifican:

$$\dots | \dots \dots$$

Mediante la aplicación de la transformación bilineal a l, determine la función de transferencia $H(z)$ de un filtro paso banda discreto con ceros de transmisión para : y : , y banda de paso a 3 dB entre l y l con valor máximo para el módulo de la respuesta frecuencial igual a la unidad (¿a qué frecuencia f_0 tiene lugar este máximo?). Bosqueje el módulo y la fase de la respuesta frecuencial del sistema diseñado a partir de la contribución de los ceros y los polos.

6.2.3 Filtros para el sistema multiplexor y demultiplexor

En la práctica anterior el filtro , que actuaba sobre el canal 1 del sistema multiplexor y demultiplexor, fue diseñado como filtro FIR con fase lineal usando la ventana de Kaiser. Ello permitía controlar la atenuación mínima en la banda atenuada del filtro, pero la atenuación máxima en la banda de paso venía impuesta por la ventana utilizada. Una vez conocidas técnicas de diseño de filtros más perfectas, también podemos especificar el límite de la atenuación en la banda de paso.

5. Si la máxima diferencia entre la respuesta del fitro a dos componentes frecuenciales en la banda de paso no ha de ser superior al 5% del valor nominal unidad, y se mantienen los demás requisitos para el mismo, indique las especificaciones de banda de paso y banda atenuada del filtro .

Estas especificaciones pueden ser satisfechas por filtros diseñados por distintas técnicas: filtro FIR de fase lineal óptimo, filtro elíptico, etc. Para comparar la distorsión que introduce cada diseño en la señal a conservar con el filtrado, podemos acudir a la correlación cruzada entre dicha señal $x[n]$ y la respuesta $y[n]$ del filtro a la misma. En efecto, para medir el parecido entre dos secuencias $x[n]$ e $y[n]$, prescindiendo de un eventual factor K de escala (ganancia del filtro) o de un desplazamiento temporal m (retardo producido por el filtro), puede definirse

- E. Repita el diseño anterior haciendo uso de un filtro IIR con la aproximación elíptica. Observe su diagrama de polos y polos y la atenuación y retardo de grupo de su respuesta frecuencial. Conserve el diseño en un fichero (Cauer).
- F. Se desea comparar la distorsión introducida por los diseños anteriores sobre una señal compuesta por dos pulsos sinusoidales de frecuencias $f_1=1/16$ y $f_2=3/16$; ambos pulsos duran 16 muestras y son contiguos en el tiempo:

$$x[n] = \cos(2\pi f_1 n) \cdot \text{rect}(n/16) + \cos(2\pi f_2 n) \cdot \text{rect}(n/16)$$

Esta secuencia simula una transición entre la senoide de 1 kHz y la senoide de 3 kHz del canal de datos del multiplexor de la práctica V. Genere la señal $x[n]$ con una longitud de 64 muestras, obtenga la respuesta a la misma de los diseños realizados en los apartados anteriores y determine los parámetros δ y \max para cada uno de ellos. Comente y justifique los resultados alcanzados.

- G. (Experiencia opcional) Sustituya en el apartado F el interpolador FIR por un nuevo diseño con orden impar y determine δ y \max . Compare el resultado con el obtenido anteriormente y trate de explicarlo.