Examen Final Juny 2005

PROBLEMA 1

Enunciat

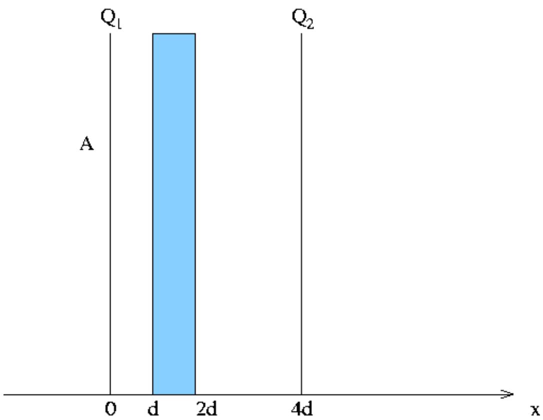
$k_e = 9 \cdot 10^9$ (S.I.) $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (S.I.)

1.- Dues làmines conductores de gruix negligible i àrea A=1,0 m^2 estan separades una distància 4d (d=1,0 mm), al mig s'hi troba una placa **conductora sesnse càrrega**, de gruix d, situada a una distància d de la primera. La làmina de l'esquerra té una càrrega Q_1= 20 μC i la de la dreta una Q_2= -10 μC.

a) Calculeu i representeu gràficament el camp elèctric en funció de x, per a qualsevol punt: x<0, 0<x<d, d<x<2d, 2d<x<4d, x>4d. (Considereu les làmines com a plans infinits).

b) Trobeu la distribució de càrrega a la placa del mig.

c) Calculeu i representeu el potencial elèctric, V(x). Agafeu com a origen de potencial la làmina de l'esquerra. (V(x=0)=0).

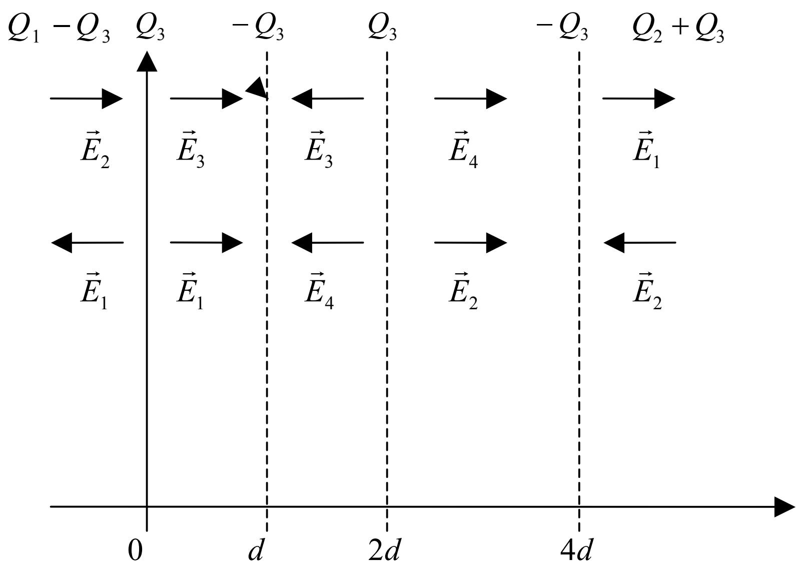


Si ara carreguem la placa conductora central amb una càrrega Q_3=10 μC:

d) Repetiu els apartats a), b).

e) Trobeu la densitat d'energia entre x=0, x=4d en aquest últim cas.

Solució



$Q_1 > 0$

$Q_2 < 0$

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{S} < 0$$

$$\sigma_3 = \frac{Q_3}{S}$$

a) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$

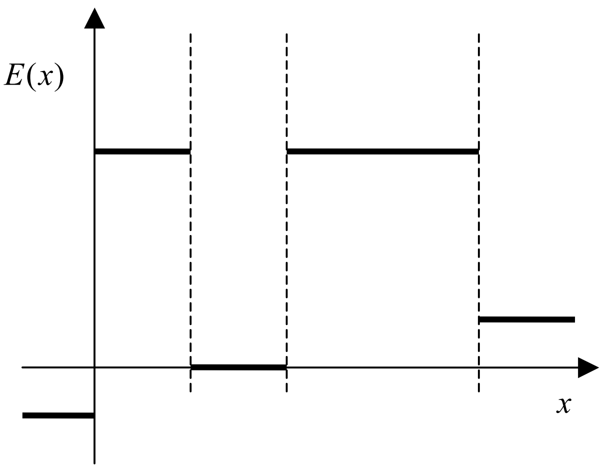
$x < 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{-\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\hat{i} = \dfrac{-5}{\varepsilon_0}\hat{i}}$

$0 < x < d \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\hat{i} = \dfrac{15}{\varepsilon_0}\hat{i}}$

$d < x < 2d \Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0}$

$2d < x < 4d \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\hat{i} = \dfrac{15}{\varepsilon_0}\hat{i}}$

$x > 4d \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{\sigma_1 - |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\hat{i} = \dfrac{5}{\varepsilon_0}\hat{i}}$



b) $\vec{E}_1 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{i}$ $\quad$ $\vec{E}_2 = \dfrac{-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{i}$ $\quad$ $\vec{E}_3 = \dfrac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}(-\hat{i})$ $\quad$ $|\vec{E}_3| = |\vec{E}_4|$

En el conductor $\vec{E} = 0$

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_3|}{2\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \quad \boxed{|\sigma_3| = \sigma_1 + |\sigma_2| = 30\mu C}$$

c) $V(x = 0) = 0$

$x < 0 \Rightarrow V(x) = -\int_0^x -\dfrac{5}{\varepsilon_0}dx = \dfrac{5}{\varepsilon_0}x$

$0 < x < d \Rightarrow \quad V(x) = -\int_0^x \dfrac{15}{\varepsilon_0}dx = -\dfrac{15}{\varepsilon_0}x \qquad V(d) = -\dfrac{15}{\varepsilon_0}d$

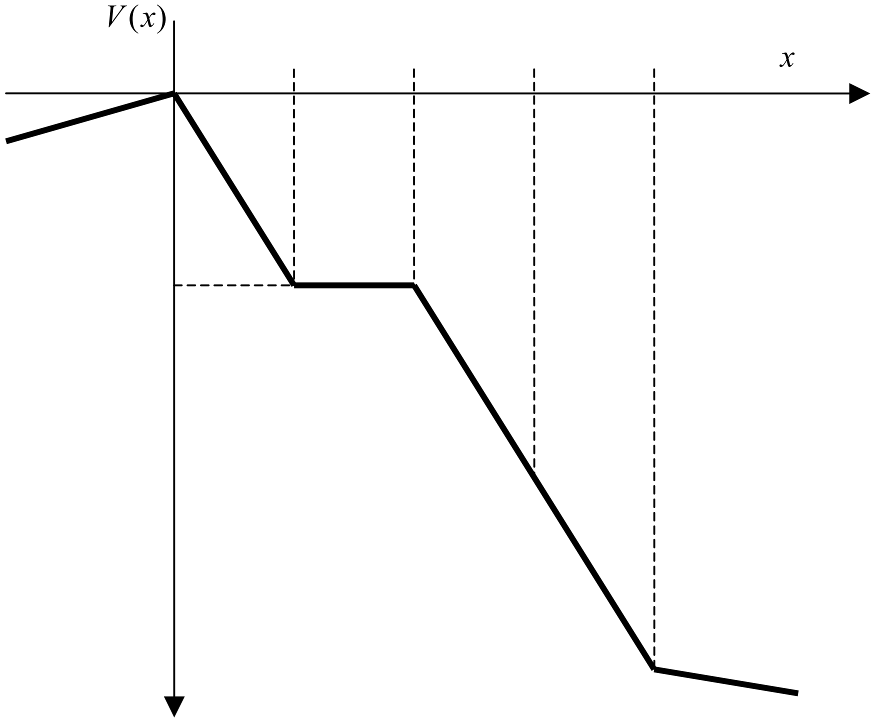
$d < x < 2d \Rightarrow \; V(x) = V(d) = -\dfrac{15}{\varepsilon_0}d \qquad V(2d) = -\dfrac{15}{\varepsilon_0}d$

$$2d < x < 4d \Rightarrow V(x) = -\int_{2d}^{x} \frac{15}{\varepsilon_0} dx + V(2d) = -\frac{15}{\varepsilon_0}(x-2d) - \frac{15}{\varepsilon_0} d = -\frac{15}{\varepsilon_0} x + \frac{15}{\varepsilon_0} d$$

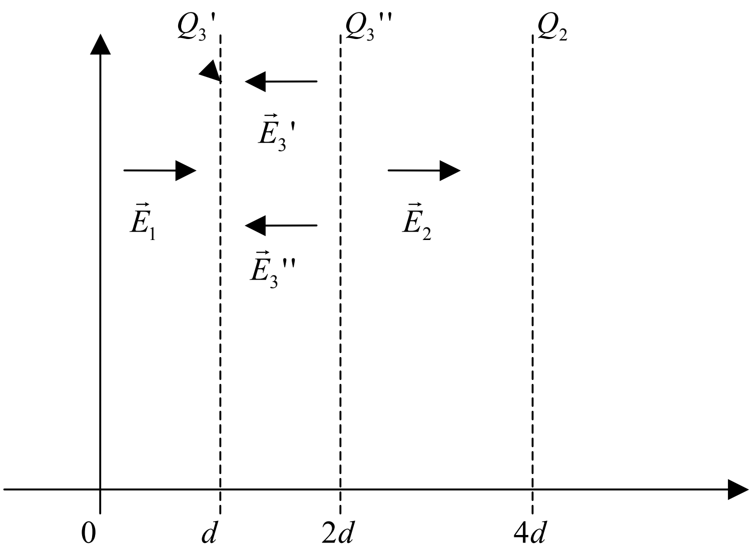
$$V(4d) = -\frac{15}{\varepsilon_0} 3d$$

$$V(x) - V(4d) = -\int_{4d}^{x} \frac{5}{\varepsilon_0} dx = -\frac{5}{\varepsilon_0}(x-4d)$$

$$V(x) = -\frac{5}{\varepsilon_0} x + \frac{5}{\varepsilon_0} 4d - \frac{15}{\varepsilon_0} 3d = -\frac{5}{\varepsilon_0} x - \frac{25}{\varepsilon_0} d$$



d) $Q_3'' = 10 \mu C$



$$Q_3'+Q_3''=Q_3^{n} \rightarrow \sigma_3'+\sigma_3''=\sigma_3^{n}=10\,\mu C/m^2$$

$$\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3'+\vec{E}_3''=0 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0}-\frac{|\sigma_3'|}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3''}{2\varepsilon_0}=0$$

$$\sigma_1+|\sigma_2|-|\sigma_3'|-\sigma_3^{n}+\sigma_3'=0 \rightarrow \sigma_3'=-|\sigma_3'|$$

$$\sigma_1+|\sigma_2|-2|\sigma_3'|-\sigma_3^{n}=0$$

$$|\sigma_3'|=\frac{\sigma_1+|\sigma_2|-\sigma_3^{n}}{2}=10\,\mu C/m^2$$

$$\sigma_3'=-10\,\mu C/m^2 \quad \text{i} \quad \sigma_3''=20\,\mu C/m^2$$

Repetir-ho

Nota: $||A|-|B|| \leq |A+B| \leq |A|+|B|$

PROBLEMA 2

Enunciat

Se construye un solenoide sobre un tubo, cuyo eje es el eje “x”, con una longitud L=25 cm y de radio R_1 = 4,0 cm, formando un arrollamiento de N_1 = 400 vueltas, (a efectos de cálculo puede suponer L >> R_1). Por el solenoide circula una corriente I_1 en el sentido que llamaremos positivo: cuando vemos el solenoide desde la izquierda (x<0) el sentido de giro es el antihorario.

a) Calcular, razonando cada paso y explicando las aproximaciones que realiza, el campo magnético **B** en el interior del solenoide.

En el interior del solenoide, en su parte central, se coloca una pequeña bobina formada por N_2 = 50 espiras circulares de radio R_2 = 1,0 cm y con su eje coincidente con el eje del solenoide. Puede considerarse que las espiras están todas ellas unas sobre otras, de forma que la bobina tiene una longitud despreciable. Esta bobina está conectada a un circuito exterior, con una resistencia total r = 5,0 Ω.

b) Calcular el flujo de campo magnético ϕ_B creado en esta segunda bobina debido al solenoide. Obtener el coeficiente de inducción mutua M_{12} del solenoide sobre la bobina.

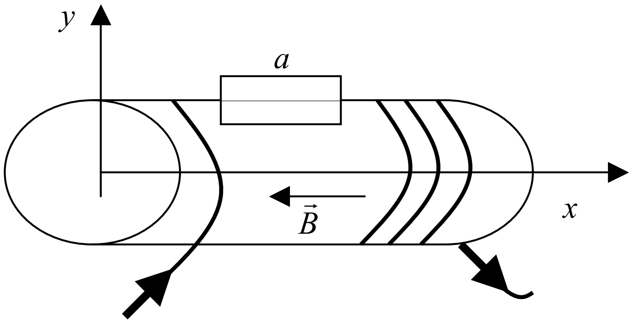
A partir de ahora, por el solenoide se hace circular una corriente alterna: $I_1 = I_0 \cos(\omega t)$, siendo I_0 = 100 mA y ω = 5000 rad/s.

c) Calcular la f.e.m. inducida $\varepsilon_{ind}(t)$ en la bobina.

d) Calcular la corriente inducida i_{ind} en la bobina indicando su sentido, tanto cuando la corriente I_1 crece como cuando decrece. Obtener los valores máximos de i_{ind}. Representar en función de t, tanto la corriente I_1 como la corriente inducida i_{ind} , a lo largo de un periodo.

e) La f.e.m. generada en la bobina está creada por un campo eléctrico no conservativo debido al campo magnético variable del solenoide. Calcular dicho campo eléctrico E_{ind}, razonar sobre su dirección y sentido, y obtener su dependencia con la distancia ρ al eje del solenoide.

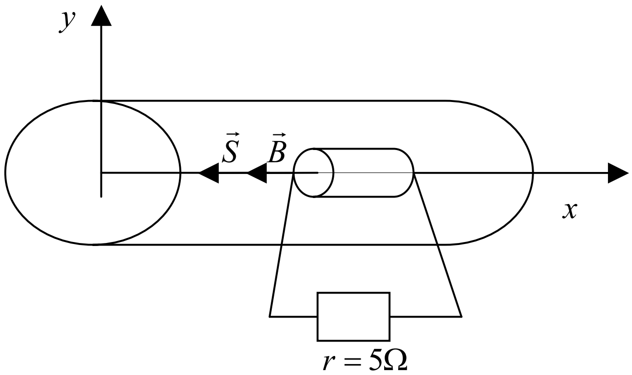
Solució



a) $B = ?$ $\quad L >> R_1$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = Ba = \mu_0 \frac{N_1}{L} a I_1 \rightarrow \boxed{B = \mu_0 \frac{N_1}{L} a I_1} \text{ (T)}$$

b)



$$\phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = B_1 N_2 S$$

$$\vec{B}_1 = B_1(-\hat{i}) \quad \text{i} \quad \vec{S} = S(-\hat{i})$$

$$\boxed{\phi_{21} = Ba = \mu_0 \frac{N_1}{L} N_2 \pi R_2{}^2 I_1} \text{ (Wb)}$$

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1} \rightarrow \boxed{M_{21} = Ba = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi R_2{}^2} \text{ (H)}$$

c) $I_1 = I_0 \cos wt$

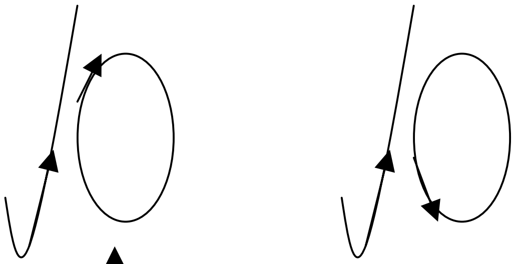
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad \phi_B(t) = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi R_2^2 w I_0 \cos wt$$

$$\varepsilon(t) = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi R_2^2 w I_0 \Delta m wt = \varepsilon_0 \Delta m wt$$

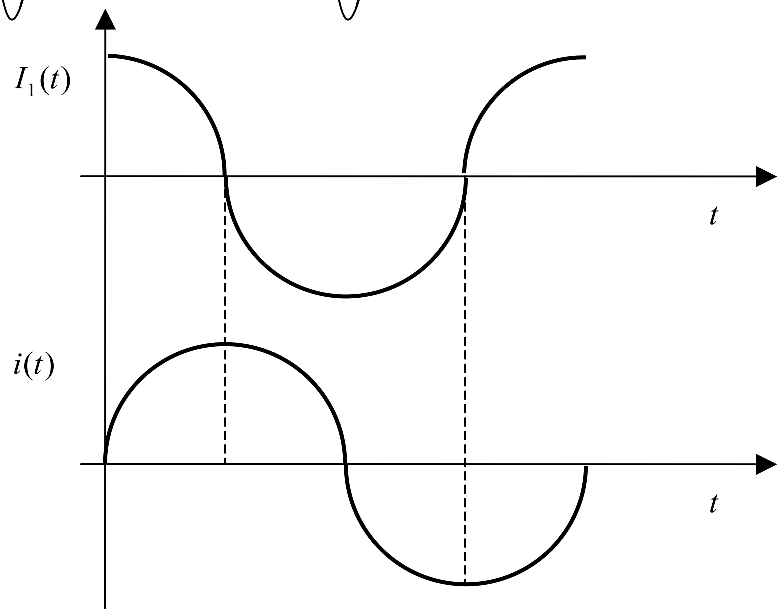
d) $i(t)=\dfrac{\varepsilon(t)}{r}\rightarrow i(t)=\dfrac{\varepsilon_0}{r}\Delta mwt$

$$\boxed{i_0=\frac{\mu_0\dfrac{N_1N_2}{L}\pi R_2^2 wI_0}{r}}$$

$i(t)\rightarrow$ Si $\dfrac{dI_1}{dt}<0$: Si $\dfrac{dI_1}{dt}>0$:



e)



$\int_c \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\dfrac{d\phi_B}{dt}$ $\varepsilon(t)=\int_c \vec{E}\cdot d\vec{l}$

- $\rho=R_2$

$E(t)\cdot 2\pi\rho=\dfrac{\varepsilon_0}{N_2}\Delta mwt$

$E(t)=\dfrac{\varepsilon_0/N_2}{2\pi\rho}\Delta mwt$ *Mateixa direcció i sentit que* $i(t)$

La $i(t)$ *mesurada és degut a aquest camp.*
En funció de ρ *:*

- $\rho<R_1$

$$\varepsilon(\rho,t) = \mu_0 \frac{N_1}{L} \pi\rho^2 wI_0 \Delta mwt$$

$$E(\rho,t) = \mu_0 \frac{N_1}{L} \pi\rho^2 wI_0 \Delta mwt \Big/ 2\pi\rho = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N_1}{L} \rho wI_0 \Delta mwt$$

- $\rho > R_1$

$$\varepsilon(\rho,t) = \mu_0 \frac{N_1}{L} \pi R_1{}^2 wI_0 \Delta mwt$$

$$E(\rho,t) = \mu_0 \frac{N_1}{L} \pi R_1{}^2 wI_0 \Delta mwt \Big/ 2\pi\rho = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N_1}{L} \pi R_1{}^2 wI_0 \frac{\Delta mwt}{\rho}$$