

COMUNICACIONES I

2.	Procesos estocásticos y canal de comunicaciones.....	2
2.1.	Procesos Aleatorios: Caracterización temporal	2
2.1.1.	Introducción.....	2
2.1.2.	Momentos estadísticos: media y correlación.	6
2.1.3.	Procesos aleatorios conjuntos: estadísticamente independientes / incorrelados	8
2.1.4.	Estacionariedad.....	8
2.1.5.	Cicloestacionariedad.....	8
2.1.6.	Ergodicidad.....	10
2.2.	Densidad espectral: Wiener-Khinchin.	12
2.2.1.	Definición de densidad espectral: Teorema de Wiener Khinchin.....	12
2.2.2.	Potencia media.....	13
2.2.3.	Casos particulares:.....	13
2.2.4.	Propiedades correlación y densidad espectral.....	15
2.3.	Procesos Aleatorios a través de Sistemas Lineales e invariantes en tiempo.....	16
2.3.1.	Procesos estacionarios	16
2.3.2.	Procesos ciclo-estacionarios	18
2.4.	Caracterización de ruido.....	21
2.4.1.	Ruido gaussiano.....	21
2.4.2.	Ruido gaussiano complejo:.....	22
2.4.3.	Ruido blanco.....	25
2.4.4.	Ancho de banda equivalente de ruido.....	26
2.5.	Sistema de Comunicaciones analógico en banda base	28
2.5.1.	Diagrama de bloques.	28
2.5.2.	Medida de SNR en un canal ideal AWGN	30
2.5.3.	Distorsión lineal y Ecualización	30
2.5.4.	Ecualización ideal en recepción.....	30
2.5.5.	Ecualización ideal en transmisión.....	31
2.5.6.	Filtros terminales óptimos.	32
2.5.7.	Ejemplo de Canal con distorsión	34
2.5.8.	Repetidores.....	38
2.6.	Ejercicios de Aplicación.....	40

Este documento es un borrador y se facilita como complemento a las explicaciones impartidas en clase por los profesores de la asignatura. En ningún caso puede considerarse como autocontenido del tema II de la asignatura COM1.

Como bibliografía complementaria se recomienda leer alguna de las referencias siguientes:

Proakis: Capítulo 3 (primera edición); Capítulo 4 (segunda edición 2002);
 Carlson: Capítulo 9 (4ª Edición)

Margarita Cabrera
 Profesora de COM1, grupo 10, Cuatrimestre T06
 Octubre 2006

2. Procesos estocásticos y canal de comunicaciones.

Este tema se halla dividido en dos partes diferenciadas. La primera de ellas se dedica a los procesos estocásticos (o aleatorios) haciendo énfasis en su caracterización frecuencial y en los tipos de procesos aleatorios más frecuentes en los sistemas de comunicaciones. En la segunda parte se analiza de forma genérica un sistema de comunicaciones en el que se transmite una modulación analógica en banda base, es decir, de contenido frecuencial paso bajo.

2.1. Procesos Aleatorios: Caracterización temporal

De forma intuitiva, se interpreta un proceso como el conjunto de todas las señales determinadas que pueden aparecer al realizar un experimento. Es un concepto más general que el de variable aleatoria. Mediante una variable aleatoria se obtiene un número (entero o real), mediante un proceso aleatorio se obtiene una señal temporal. Cada posible señal se modela mediante una función específica y definida para todo instante de tiempo.

Cuestión de nomenclatura: Formalmente los matemáticos hablan de variables aleatorias y de procesos estocásticos. En los libros de comunicaciones se suele nominar a los procesos, tanto como procesos aleatorios como procesos estocásticos. En este capítulo se utilizan por tanto, ambos conceptos.

2.1.1.Introducción

Justificación: Las Señales moduladas por un lado y las señales de ruido son procesos aleatorios ó procesos estocásticos.

Definición de variable aleatoria. Mediante una variable aleatoria se asigna un número real al resultado de un experimento. El conjunto de posibles resultados forma lo que se denomina el espacio de muestras. Cada resultado se produce con una determinada probabilidad. La probabilidad del espacio de muestras total es igual a 1.

Las variables aleatorias se clasifican en variables aleatorias discretas y en variables aleatorias continuas.

Las variables aleatorias discretas producen un conjunto finito de posibles valores, se caracterizan por la probabilidad de aparición cada uno de ellos y la suma de todas las probabilidades es igual a la unidad. El resultado obtenido al lanzar un dado se puede modelar mediante una variable aleatoria discreta. El conjunto de posibles resultados diferentes es finito y cada resultado es equiprobable:

$$\Pr(X = x_i) = P_i = \frac{1}{6}; \quad i = 1..6$$

Las variables aleatorias continuas producen un conjunto infinito de posibles valores, en general un subconjunto de los números reales o bien todo el margen de número reales. Se caracterizan mediante la función de densidad de probabilidad cuya área es siempre igual a la unidad.

La fase inicial obtenida al conectar un oscilador para generar una señal periódica en general puede presentar cualquier valor real en $[0, 2\pi)rad$, por lo que se puede modelar mediante una variable aleatoria continua. Su función de densidad de probabilidad se denomina uniforme:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)$$

A partir de las probabilidades se definen los momentos estadísticos.

Como ejemplo para una variable aleatoria continua, de función de densidad de probabilidad $f_X(x)$, se tienen los momentos de primer y segundo orden:

Media $M_X = E[X] = \int x f_X(x) dx$

Varianza $\sigma_X^2 = E\left[\left[X - E[X]\right]^2\right]$

Variables Aleatorias más habituales en comunicaciones:

Discretas: Bernoulli, Binomial, Poisson

Continuas: Uniforme, Gaussiana, Rayleigh, Rice

Definición de Proceso Estocástico o Aleatorio: Asignación de una función temporal al resultado de un experimento. Como resultado de esta definición se tiene una sucesión infinita de variables aleatorias.

Nomenclatura:

- Caracterización general del proceso: $X(t)$
- Función muestra del proceso: $x(t, \xi_n) = x_n(t)$ que se produce con una determinada probabilidad o f.d.p.
- Variable aleatoria: $X(t_0)$ Conjunto de posibles valores (espacio muestral) obtenidos al caracterizar una muestra temporal del proceso, en $t = t_0$.
- Número Real (o complejo): $x(t_0, \xi_n) = x_n(t_0)$ que se produce con una determinada probabilidad o f.d.p.

Ejemplo 1: A la salida de un oscilador se tiene un “coseno” de amplitud y frecuencia fijas, (por ejemplo $a=1\text{mv}$, $f=200\text{ KHz}$) y fase aleatoria definida por la función de densidad de probabilidad uniforme.

$$f_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)$$

$$X(t) = a \cos(2\pi f_p t + \Phi)$$

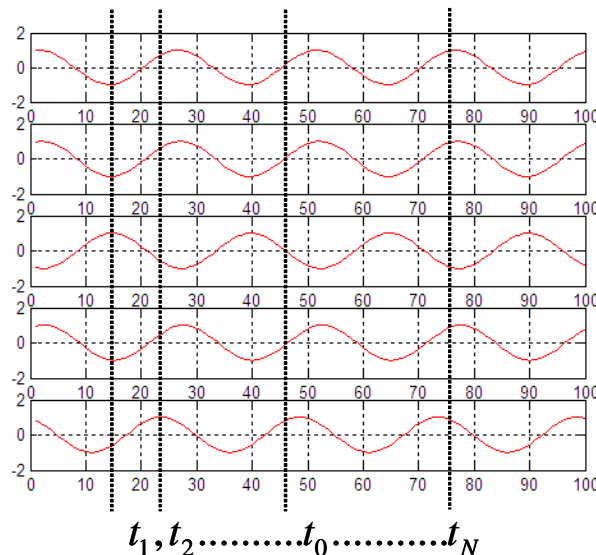


Figura 1. Ejemplos de Funciones muestra para el proceso del ejemplo 1. Unidades: Amplitud en mvolts y tiempo en microseg. (Periodo = 25 microseg.)

Cada una de las posibles funciones muestra que produce el oscilador se corresponde con una determinada función del proceso. La estadística de este tipo de proceso queda modelada de forma completa a partir de una única variable aleatoria. Ello repercute en la predecibilidad del proceso. Es decir, si al generar una función muestra, se observa el valor de la misma para un único instante de tiempo: $x(t_0) = a \cos(2\pi f_p t_0 + \varphi)$, se determina la función muestra para todo instante de tiempo. A priori, la única incógnita sobre la función muestra a obtener corresponde al valor de la fase, y esta se puede calcular a partir de una única muestra.

Ejemplo 2: Sea $A(t)$ un proceso de variación temporal lenta, comparada con la frecuencia f_p Hz; Es decir, para observar una variación en cualquiera de las funciones muestra del proceso $A(t)$, se requiere un tiempo de observación, en general bastante mayor que $T_p = \frac{1}{f_p}$ seg.

Con el proceso aleatorio $A(t)$, se forma a su vez el nuevo proceso aleatorio $X(t)$.

$$X(t) = A(t) \cos(2\pi f_p t)$$

Este nuevo proceso, es similar (versión simplificada) al utilizado para modelar la señal de voz. En la señal de voz, analizada por ejemplo al pronunciar una vocal, predominan dos frecuencias denominadas formantes, y la envolvente o amplitud queda modelada por el proceso estacionario $A(t)$. Véase la siguiente figura en la que se presenta un caso particular. Más adelante se define la característica de estacionariedad.

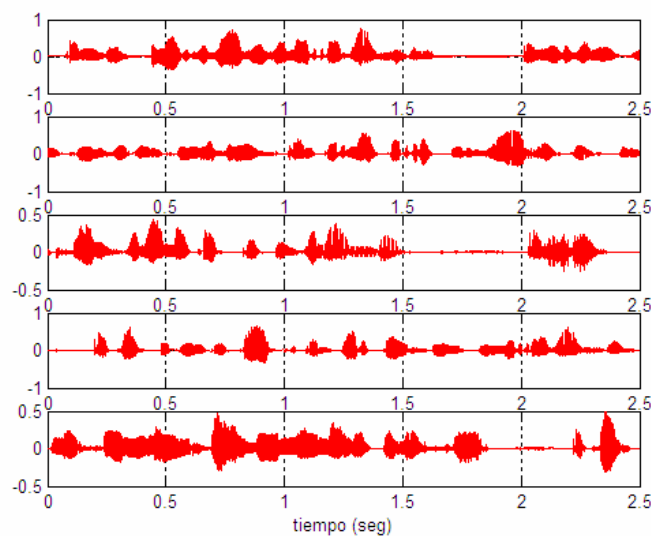


Figura 2. Ejemplos de Funciones muestra para el proceso del ejemplo 2. Señal de Voz. Corresponde a 5 cortes de 25 seg cada uno de la siguiente frase "Amb vista a l'arribada de les rebaixes, les organitzacions de consumidors han tornat a recordar els seus consells davant aquest tipus de venda. Així, aquestes entitats adverteixen que unes rebaixes no són ni un saldo ni una liquidació, i que els consumidors han d'exigir la mateixa qualitat en els productes que en temporada de vendes sense descomptes".

Este tipo de proceso, no es tan predecible como el del ejemplo 1, sin embargo, hay algunas características que se conservan a lo largo del tiempo. Así, observada una determinada función muestra, para un margen de tiempo dado, se puede predecir la frecuencia (f_p) o frecuencias de oscilación principales del proceso, aunque no la amplitud o envolvente $a(t)$

Ejemplo 3: Sea $X(t) = W(t)$ un proceso modelado como ruido blanco. Ello significa que para cualquier par de muestras tomadas del proceso $X(t_1), X(t_2)$, resultan dos variables aleatorias estadísticamente independientes. Es decir observando los resultados obtenidos para la variable aleatoria

$X(t_2)$, no se puede predecir o tener información respecto a la variable aleatoria obtenida para cualquier otro instante de tiempo. El ruido blanco es el proceso aleatorio más impredecible de los tres ejemplos presentados, por lo que de forma intuitiva se puede decir que el más aleatorio de los tres.

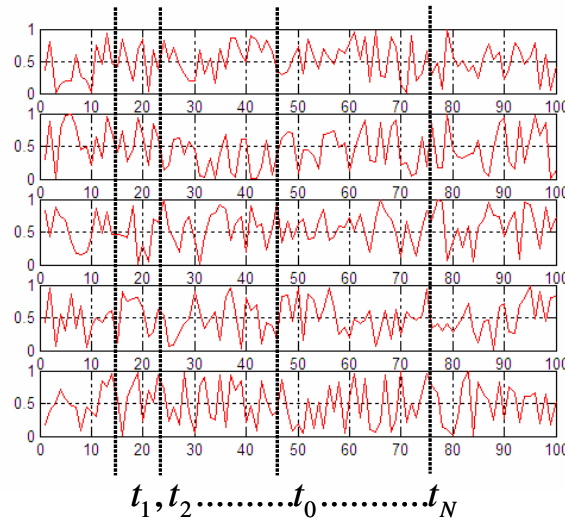


Figura 3. Ejemplos de Funciones muestra para el proceso del ejemplo 3.

Comparando los procesos aleatorios de los tres ejemplos en cuanto a su mayor o menor “aleatoriedad”, se resume que habiendo obtenido una función muestra del proceso para un tiempo dado $t \leq t_0$:

- Para el caso de coseno de fase aleatoria (ejemplo 1) la función muestra queda determinada para todo el tiempo en que se produce.
- Para el caso de la señal del coseno de amplitud aleatoria (ejemplo 2) la frecuencia principal de la función muestra queda determinada para todo el tiempo en que se produce.
- Para el caso de ruido blanco (ejemplo 1) no se puede predecir la función muestra para el resto de tiempo.

En general, una caracterización estadística completa de un proceso aleatorio requiere la caracterización estadística conjunta de todas las variables aleatorias implícitas en el mismo. Para procesos aleatorios continuos se tienen infinitas variables aleatorias, (tantas como cortes temporales posibles), así una caracterización de este tipo sería imposible de abordar.

Sin embargo, observando el proceso del ejemplo 1, puede verse que sí se halla completamente caracterizado a través de la variable aleatoria fase. Conociendo la estadística de esta variable se caracteriza de forma completa el proceso. Otro modo de interpretar esta propiedad, es que para cada una de las funciones muestra, si se conoce el valor en un único instante de tiempo t_0 , se tiene determinada la función muestra para todo instante de tiempo t . Este comportamiento es totalmente opuesto al del proceso del ejemplo 3. Coloquialmente hablando, se dice que el ruido blanco es el proceso aleatorio más impredecible que existe.

Retomando el proceso del ejemplo 1, es un proceso que admite una descripción analítica de su estadística a través de una única variable aleatoria. En el caso general esta propiedad de ser proceso analítico, se produce cuando la estadística del proceso se halla caracterizada por un número N finito de variables aleatoria: $V_n; n = 1..N$

$$X(t) = f(t, V_1, \dots, V_N)$$

En general, para caracterizar el resto de procesos no analíticos y centrándonos en el entorno de sistemas de comunicaciones se recurre a los momentos estadísticos de primer y de segundo orden. El conocimiento de estos dos momentos es suficiente para caracterizar o modelar a los procesos que intervienen en los sistemas de comunicaciones. En el caso de procesos analíticos, los momentos se pueden calcular de forma exacta. En el resto de procesos, la propia definición del proceso viene dada por los dos momentos.

2.1.2. Momentos estadísticos: media y correlación.

Se denomina media al momento estadístico de primer orden y correlación al momento estadístico de segundo orden. En ambas funciones se realiza un promediado estadístico, no temporal.

En las fórmulas que siguen para la definición de la media y de la correlación se facilitan dos expresiones para cada función. La primera, expresada mediante integrales corresponde a la definición exacta y la segunda, mediante límite y sumatorios, sugiere un modo de estimar en la práctica estos momentos a partir de las funciones muestra del proceso. En este segundo cálculo $x_n(t)$, corresponde a la función muestra obtenida al realizar el experimento correspondiente al proceso aleatorio por n -ésima vez. Por tanto, una estimación de estos momentos, consiste en el promedio directo de todas las funciones obtenidas al realizar el experimento.

Media Estadística:
$$M_X(t) = E[X(t)] = \int x f_{X(t)}(x) dx \cong \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(t)$$

Correlación:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \iint x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \cong \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(t_1) x_n(t_2)$$

La estimación de ambos momentos se puede abordar por tanto, como:

$$M_X(t) \cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(t) \quad R_X(t_1, t_2) \cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(t_1) x_n(t_2)$$

La covarianza, es también un momento de segundo orden ya que se define como la correlación del proceso sin media estadística.

$$C_X(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - M_X(t_1))(X(t_2) - M_X(t_2))] = R_X(t_1, t_2) - M_X(t_1)M_X(t_2)$$

Intuitivamente la función de correlación mide la dependencia estadística entre las dos variables aleatorias $X(t_1); X(t_2)$, correspondientes a dos muestras temporales del proceso en $t = t_1$ y $t = t_2$ respectivamente. La Covarianza es la correlación del proceso sin media. Al definir los momentos de segundo orden, puede realizarse el siguiente cambio de variables temporales, con el objeto de facilitar el posterior análisis espectral de los procesos.

$$\begin{aligned} t_1 &= t + \tau \\ t_2 &= t \end{aligned}$$

Así las funciones correlación y covarianza quedan:

Correlación:

$$R_X(t + \tau, t) = E[X(t + \tau)X(t)] = \iint x_1 x_2 f_{X(t+\tau)X(t)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \cong \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(t + \tau) x_n(t)$$

Covarianza:

$$C_X(t + \tau, t) = E[(X(t + \tau) - M_X(t + \tau))(X(t) - M_X(t))] = R_X(t + \tau, t) - M_X(t + \tau)M_X(t)$$

A continuación se particularizan los momentos estadísticos anteriores para los tres ejemplos dados. Se presentan por duplicado atendiendo a la doble nomenclatura en cuanto a las variables temporales y posteriormente se prosigue con la nomenclatura t, τ . Para los ejemplos 1 y 2, se ha omitido el desarrollo.

Ejemplo 1: $M_X(t) = 0$ $R_X(t_1, t_2) = \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_p(t_1 - t_2))$

$$R_X(t + \tau, t) = \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_p \tau)$$

Ejemplo 2:

$$M_X(t) = M_A(t) \cos(2\pi f_p t) \quad R_X(t_1, t_2) = R_A(t_1, t_2) \frac{1}{2} (\cos(2\pi f_p(t_1 + t_2)) + \cos(2\pi f_p(t_1 - t_2)))$$

$$R_X(t + \tau, t) = R_A(t + \tau, t) \frac{1}{2} (\cos(2\pi f_p(2t + \tau)) + \cos(2\pi f_p \tau))$$

Ejemplo 3: Ruido Blanco Estacionario: $M_X(t) = 0$ $R_X(t_1, t_2) = cte. \delta(t_1 - t_2)$

$$R_X(t + \tau, t) = cte. \delta(\tau)$$

Procesos Aleatorios Complejos.

Aunque en las páginas anteriores se trata con procesos aleatorios reales, es fácil generalizar al caso de procesos aleatorios complejos, formados a su vez por dos procesos aleatorios reales, que se corresponden con parte real y parte imaginaria del proceso complejo.

En tal caso si $X(t)$ es proceso aleatorio complejo, puede describirse como $X(t) = X_R(t) + jX_I(t)$, donde $X_R(t), X_I(t)$ son procesos aleatorios reales caracterizados por sus funciones de autocorrelación y de correlación cruzada.

$$R_{X_R}(t + \tau, t) = E[X_R(t + \tau)X_R(t)]$$

$$R_{X_I}(t + \tau, t) = E[X_I(t + \tau)X_I(t)]$$

$$R_{X_R X_I}(t + \tau, t) = E[X_R(t + \tau)X_I(t)]$$

$$R_{X_I X_R}(t + \tau, t) = E[X_I(t + \tau)X_R(t)]$$

Se define la función de autocorrelación del proceso complejo como:

$$R_X(t + \tau, t) = E[X(t + \tau)X^*(t)]$$

Donde $(.)^*$ significa complejo conjugado. Es sencillo expresar la correlación del proceso conjugado en función de las correlaciones de los procesos reales:

$$R_X(t + \tau, t) = E[X(t + \tau)X^*(t)] =$$

$$E[(X_R(t + \tau) + jX_I(t + \tau))(X_R(t) - jX_I(t))] =$$

$$R_{X_R}(t + \tau, t) + R_{X_I}(t + \tau, t) + j(-R_{X_R X_I}(t + \tau, t) + R_{X_I X_R}(t + \tau, t))$$

En el resto del capítulo se trata indistintamente con procesos complejos o estrictamente reales, entendiendo que se generalizan o particularizan las expresiones cuando sea conveniente.

2.1.3. Procesos aleatorios conjuntos: estadísticamente independientes / incorrelados

En este apartado se revisan dos propiedades que afectan a los procesos aleatorios conjuntos: $X(t), Y(t)$.

La propiedad de independencia estadística con procesos aleatorios es análoga a la misma propiedad con variables aleatorias conjuntas.

Dos procesos estadísticamente independientes cumplen la siguiente propiedad:

$$f_{X(t+\tau)Y(t)}(x, y) = f_{X(t+\tau)}(x)f_{Y(t)}(y)$$

Es decir, para un instante de tiempo dado t la variable aleatoria $X(t)$, es independiente de la estadística de la variable aleatoria $X(t+\tau)$, para cualquier valor de τ distinto de cero.

La propiedad de incorrelación es una propiedad menos restrictiva que la anterior. Consiste en aplicar la definición de independencia estadística únicamente a los momentos de segundo orden:

$$C_{XY}(t+\tau, t) = R_{XY}(t+\tau, t) - M_X(t+\tau)M_Y(t) = 0$$

$$R_{XY}(t+\tau, t) = E[X(t+\tau)Y(t)] = E[X(t+\tau)]E[Y(t)] = M_X(t+\tau)M_Y(t)$$

Es obvio verificar que dos procesos estadísticamente independientes se hallan incorrelados, pero lo contrario no es cierto en general.

2.1.4. Estacionariedad

La propiedad de estacionariedad, se define a dos niveles:

En sentido estricto: Un proceso aleatorio es estacionario en sentido estricto si la estadística no depende del origen de tiempos:

$$f_{X(t_1) \dots X(t_N)}(x_1, \dots, x_N) = f_{X(t_1+t) \dots X(t_N+t)}(x_1, \dots, x_N)$$

En sentido amplio: Un proceso aleatorio es estacionario en sentido amplio si los momentos de primer y segundo orden no dependen del origen de tiempos. Esta propiedad es menos restrictiva que la anterior. La estacionariedad se exige únicamente hasta los momentos de segundo orden. En general, en los temas de comunicaciones que siguen, al presentar procesos estacionarios, por defecto lo son en sentido amplio y no se especifica si también lo son en sentido estricto o no.

$$\text{Media Estadística:} \quad M_X(t) = M_X$$

$$\text{Correlación:} \quad R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = R_X(t_1 - t_2)$$

$$R_X(t+\tau, t) = E[X(t+\tau)X(t)] = R_X(\tau)$$

Obviamente todos los procesos estacionarios en sentido estricto lo son también en sentido amplio pero lo contrario no es cierto en general.

2.1.5. Cicloestacionariedad

Únicamente se presenta la propiedad de cicloestacionariedad en sentido amplio, aunque puede generalizarse el concepto para sentido estricto, tal como se ha presentado la característica de estacionariedad.

La estadística depende del origen de tiempos y dicha dependencia es periódica. Para los Momentos de primer y segundo orden esto se traduce en:

Media Estadística: $M_X(t) = M_X(t + nT_m)$

Correlación: $R_X(t + \tau, t) = R_X(t + nT_c + \tau, t + nT_c)$

Los mínimos valores obtenidos para T_m, T_c corresponden al cicloperiodo en media y cicloperiodo en correlación respectivamente. En general, existe una relación de multiplicidad entre ambos.

2.1.6. Cálculo de correlación para los ejemplos.

Para los procesos presentados en los ejemplos anteriores, se revisa a continuación si cumplen las propiedades de estacionariedad y de cicloestacionariedad.

Ejemplo 1: El proceso del ejemplo 1 resulta estacionario. En la figura que representa la función de autocorrelación bidimensional respecto a los ejes temporales (t, τ) , se observa que es una función constante respecto al eje temporal t que representa el origen de tiempo.

$$M_X(t) = 0 \quad R_X(t + \tau, t) = \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_p(\tau))$$

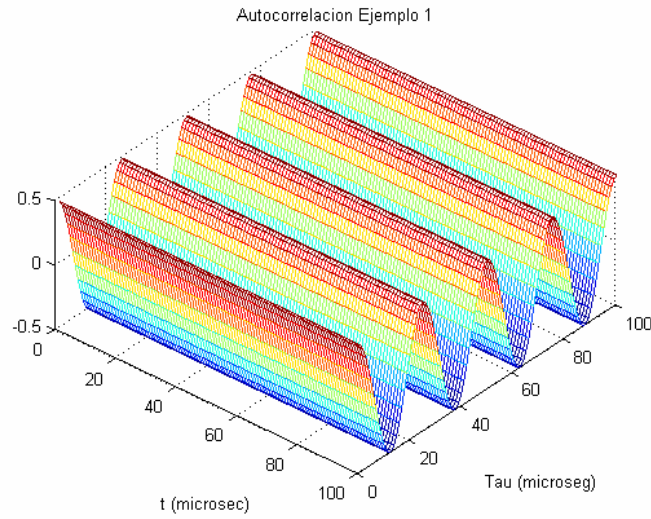


Figura 4. Función de autocorrelación para el proceso del ejemplo 1. Expresión Teórica.

Ejemplo 2: El proceso del ejemplo 2 resulta cicloestacionario. En la figura que representa la función de autocorrelación bidimensional respecto a los ejes temporales (t, τ) , se observa que es una función periódica respecto al eje temporal t que representa el origen de tiempo. Las imperfecciones en el gráfico son debidas a que la figura se ha obtenido mediante simulación al correlar diferentes funciones muestra de la señal de audio representada dentro del ejemplo 2.

$$M_X(t) = M_A \cos(2\pi f_p t) \quad R_X(t + \tau, t) = R_A(\tau) \frac{1}{2} (\cos(2\pi f_p (2t + \tau)) + \cos(2\pi f_p \tau))$$

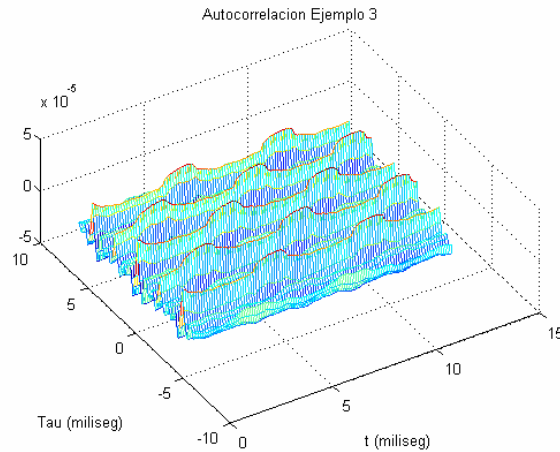


Figura 5. Función de autocorrelación para el proceso del ejemplo 2, Señal de Audio. Función obtenida mediante simulación.

Ejemplo 3: El proceso del ejemplo 3 es Ruido Blanco Estacionario y por tanto es estacionario por definición. Más adelante, en este tema se completa y justifica esta definición, por ser el modelo de ruido ampliamente utilizado en el análisis de los sistemas de comunicaciones.

$$M_x(t) = 0 \quad R_x(t + \tau, t) = cte. \delta(\tau)$$

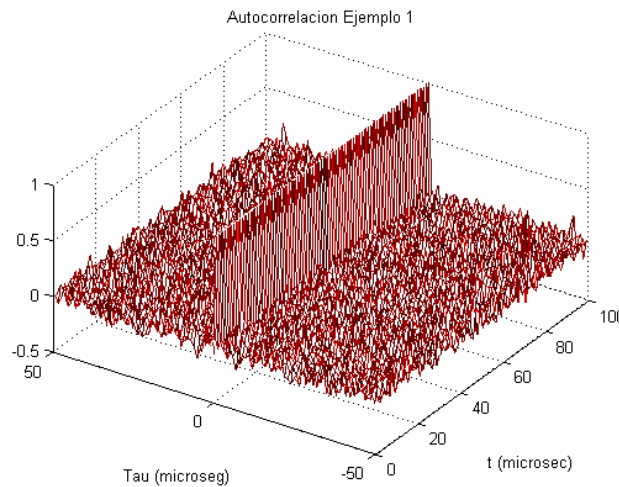


Figura 6. Función de autocorrelación para el proceso del ejemplo 3, Ruido Blanco estacionario. Función obtenida mediante simulación.

2.1.7. Ergodicidad

La propiedad de ergodicidad solo tiene sentido para procesos estacionarios y es útil cuando se dispone de pocas funciones muestra para estimar los momentos de correlación y media del proceso, o incluso cuando se dispone de una única función muestra. Cuando se cumple la propiedad de ergodicidad, se pueden intercambiar los promediados estadísticos por los promediados temporales.

Al hacer promedios temporales sobre las diferentes funciones muestra de un proceso se tiene:

$$m_{x_n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x_n(t) dt \quad r_{x_n}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x_n(t + \tau) x_n(t) dt$$

Para procesos estacionarios ergódicos se cumple que los momentos anteriores no dependen de la función muestra representante del proceso y que además coinciden con los momentos estadísticos.

$$M_X = m_{x_n} \qquad R_X(\tau) = r_{x_n}(\tau)$$

Es decir, cada una de las funciones muestra del proceso aleatorio es en sí misma suficiente para calcular tanto la media como la función de autocorrelación.

En la práctica, es difícil obtener procesos que cumplan enteramente la propiedad de ergodicidad. De forma subjetiva se puede hablar de proceso más o menos ergódico y se entiende que cuanto más ergódico sea el proceso, menos funciones muestra se requerirá promediar para obtener buenas estimaciones de sus momentos de primer y segundo orden.

Ejercicio: Suponemos que de un proceso únicamente podemos observar una función muestra durante T seg. Es decir, conocemos $x(t)$ en $t = -T/2 \dots +T/2$: $x_n(t) \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$. Se propone realizar estimaciones de la media y de la correlación según m_{x_n} y $r_{x_n}(\tau)$. Evalúe la esperanza estadística de dichas estimaciones.

Solución:

Estimación en media:

$$E[m_{x_n}] = E\left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_n(t) dt\right] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} E[x_n(t)] dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} M_X(t) dt$$

Casos Particulares:

$$E[m_{x_n}] = \begin{cases} M_X & p.a. \text{estacionario} \\ \frac{1}{T_m} \int_{T_m} M_X(t) dt & p.a. \text{cicloestacionario} \end{cases}$$

Estimación en Correlación:

$$E[r_{x_n}(\tau)] = E\left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_n(t+\tau) \Pi\left(\frac{t+\tau}{T}\right) x_n(t) \Pi\left(\frac{t}{T}\right) dt\right] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} E[x_n(t+\tau) x_n(t)] \Pi\left(\frac{t+\tau}{T}\right) \Pi\left(\frac{t}{T}\right) dt$$

P.a. estacionarios:

$$E[r_{x_n}(\tau)] = R_X(\tau) \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right) * \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

Ejercicio Propuesto: Demuestre que el proceso aleatorio del ejemplo 1, es un proceso ergódico.

2.2. Densidad espectral: Wiener-Khinchin.

2.2.1. Definición de densidad espectral: Teorema de Wiener Khinchin.

Mediante el teorema de Wiener Khinchin se resuelve el cálculo de la densidad espectral de potencia de modo lo suficientemente general para ser aplicada tanto a procesos aleatorios estacionarios como a procesos aleatorios cicloestacionarios. Además, es aplicable también a señales deterministas de potencia media finita, en cuyo caso coincide con las definiciones de correlación y de densidad espectral estudiadas en la asignatura de “Señales y Sistemas I”.

Aspectos interesantes:

Si se aborda la caracterización frecuencial de cada una de las funciones muestra tomadas como señales de potencia media finita, el resultado es a su vez un proceso aleatorio, de variable frecuencia en lugar de variable temporal.

La Densidad espectral se define como esperanza estadística de las funciones de correlación resultantes de tratar cada una de las funciones muestra del proceso como si fueran señales deterministas de potencia media finita y la función obtenida se relaciona con la correlación de un proceso con una Función de Densidad Espectral (DE).



A continuación se presenta de forma pautada la obtención de la función de densidad espectral, calculándola a partir de diferentes funciones muestra del proceso.

Para una función muestra en particular se tiene una señal determinista de potencia media finita. Considerada como tal se obtiene su función de autocorrelación.

Correlación:

$$r_{x_n}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x_n(t + \tau) x_n^*(t) dt$$

Y su función de densidad espectral.

Densidad Espectral:

$$S_{x_n}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_{nT}(f)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{x_n}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} df$$

Para el proceso aleatorio $X(t)$ se define la densidad espectral, aplicando el teorema de Wiener Khinchin:

$$E[r_{x_n}(\tau)] \Rightarrow TF \Rightarrow E[S_{x_n}(f)]$$

Al último miembro de la ecuación anterior es a lo que se denomina Densidad Espectral de Potencia de un proceso:

$$S_X(f) = E[S_{x_n}(f)] = E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}\right] = TF\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} R_X(t + \tau, t) dt\right)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
S_X(f) &= E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X_T(f) X_T^*(f)\right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E\left[\int_{\langle T \rangle} x(\lambda) e^{-j2\pi f \lambda} d\lambda \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{+j2\pi f t} dt\right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \int_{\langle T \rangle} R_X(\lambda, t) e^{+j2\pi f(t-\lambda)} d\lambda dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \int_{\langle T \rangle} \Pi\left(\frac{\lambda}{T}\right) R_X(\lambda, t) e^{+j2\pi f(t-\lambda)} d\lambda dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t+\tau}{T}\right) R_X(t+\tau, t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau dt \\
&= (*) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} TF[R_X(t+\tau, t)] dt = TF\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} R_X(t+\tau, t) dt\right]
\end{aligned}$$

Una condición que debe cumplirse en la anterior demostración (*), es que la función de autocorrelación

sea de integral acotada: $\left| \int_{\langle |\tau| \rangle} R_X(t+\tau, t) dt \right| < \infty$. Ver [Proakis, 2nd ed] Teorema 4.3.1 para una

demostración más detallada del teorema.

2.2.2. Potencia media

Al interpretar la función anterior como densidad espectral de potencia, de modo inmediato la potencia media de un proceso queda definida como:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} R_X(t, t) dt = \int S_x(f) df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} E[|x(t)|^2] dt$$

2.2.3. Casos particulares:

Lo interesante de la definición anterior se obtiene al aplicarla a los diferentes casos particulares:

P. A. Estacionario:

Para un proceso aleatorio estacionario, la función de correlación no depende del origen de tiempo por lo que se puede prescindir del límite temporal y las expresiones generales halladas para la potencia y la densidad espectral se simplifican:

$$\begin{aligned}
P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} R_X(\tau) dt = R_X(0) \\
S_X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} R_X(t+\tau, t) dt e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau
\end{aligned}$$

Se obtiene la interesante conclusión de que la densidad espectral de un proceso aleatorio estacionario coincide con la transformada de Fourier de la Función de Autocorrelación y que la Potencia media del proceso es la función de correlación evaluada en $\tau = 0$.

Ejemplo 1: Coseno de Fase Aleatorio.

Al analizar la correlación y la media del proceso resulta estacionario según lo presentado en el apartado 2.1.6, por lo que su potencia y su función de densidad espectral resultan:

$$P_x = \frac{a^2}{2} \quad S_x(f) = \frac{a^2}{4} (\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p))$$

P. A. Cicloestacionario:

Para un proceso aleatorio cicloestacionario, el límite temporal se reduce al promedio temporal en un periodo, por lo que las expresiones generales halladas para la potencia y la densidad espectral se simplifican:

$$P_x = \frac{1}{T_c} \int_{\langle T_c \rangle} R_x(t, t) dt$$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} R_x(t + \tau, t) dt e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

Resulta que la densidad espectral de un proceso aleatorio ciclo-estacionario coincide con la transformada de Fourier del promedio temporal en un cicloperiodo de la Función de Autocorrelación y que la Potencia media del proceso es el promedio temporal en un cicloperiodo de la función de correlación evaluada en $\tau = 0$.

Ejemplo 2: Coseno determinista de amplitud estacionaria.

Al analizar la correlación y la media del proceso resulta cicloestacionario según lo presentado en el apartado 2.1.6, por lo que su potencia y su función de densidad espectral resultan:

$$P_x = \frac{P_A}{2} \quad S_x(f) = \frac{1}{4} (S_A(f - f_p) + S_A(f + f_p))$$

Señal Determinista de Pot. Media Finita.

La definición dada para la densidad espectral se puede aplicar a señales deterministas de potencia media finita, interpretando que corresponden a procesos aleatorios con una única función muestra.

Para una señal determinista no tiene sentido realizar la esperanza estadística, por lo que las expresiones generales halladas para la potencia y la densidad espectral se simplifican:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} R_x(t, t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} E[|x(t)|^2] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt$$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t + \tau) x(t) dt e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

Se obtiene la interesante conclusión de que la densidad espectral y la potencia media de una señal determinista de potencia media finita interpretada como un proceso aleatorio de una única función muestra, coinciden con las definiciones vistas en cursos anteriores.

Ejemplo: Función determinista de potencia media finita. Se toma en este caso como ejemplo un coseno completamente determinista de amplitud, frecuencia y fase dadas.

$$x(t) = a \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) \quad R_x(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_p(\tau))$$

$$P_x = \frac{a^2}{2} \quad S_x(f) = \frac{a^2}{4} (\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p))$$

Ejemplo 3: Ruido Blanco Estacionario

El proceso es por definición estacionario según lo presentado en el apartado 2.1.6, por lo que su función de densidad espectral resulta:

$$S_w(f) = cte$$

2.2.4. Propiedades correlación y densidad espectral

En este apartado se presentan de forma muy breve algunas propiedades interesantes de las funciones de correlación y de densidad espectral.

- 1) Propiedad de Simetría

$$R_x(t + \tau, t) = E[x(t + \tau)x^*(t)] = E^*[x^*(t + \tau)x(t)] = R_x^*(t, t + \tau)$$

Caso particular de p.a. estacionarios: $R_x(t + \tau, t) = R_x^*(t - \tau, t) \quad R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$

- 2) Máximo de la correlación para p.a. estacionarios reales:

$$|R_x(\tau)| \leq |R_x(0)|$$

$$E\left[|x(t + \tau) \pm x(t)|^2\right] \geq 0$$

$$E\left[|x(t + \tau)|^2\right] + E\left[|x(t)|^2\right] \pm E[x(t + \tau)x(t)] \pm E[x(t + \tau)x(t)] \geq 0$$

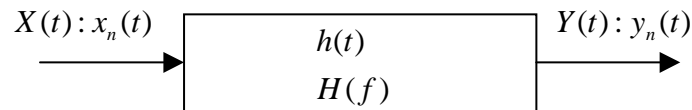
$$2R_x(0) \pm R_x(\tau) \pm R_x^*(\tau) \geq 0$$

- 3) La densidad espectral de un proceso aleatorio es siempre real y positiva.

$$S_x(f) \in \mathfrak{R}^+$$

2.3. Procesos Aleatorios a través de Sistemas Lineales e invariantes en tiempo

En general, los procesos aleatorios, a través de sistemas lineales e invariantes en tiempo, producen a la salida un nuevo proceso aleatorio $Y(t)$, en el que cada una de las funciones muestra resultantes $y_n(t)$ se corresponde con una función muestra del proceso aleatorio de entrada $x_n(t)$ convolucionada con la respuesta impulsional del sistema $h(t)$.



$$y_n(t) = x_n(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \lambda)h(\lambda)d\lambda$$

El objetivo de este apartado consiste en caracterizar la densidad espectral de potencia del proceso de salida en función de la densidad espectral de potencia del proceso de entrada y de la función de transferencia del sistema. Esta caracterización es muy importante en sistemas de comunicaciones, en los que las señales transmitidas y el ruido inherente al receptor son procesos aleatorios. Ambos procesos son filtrados en recepción y por ello deben caracterizarse frecuencialmente.

Especialmente en el caso de la señal transmitida, la densidad espectral de potencia es la función necesaria para determinar el ancho de banda que ocupa. Este parámetro se utiliza por un lado para diseñar los filtros necesarios en recepción y por otro para una asignación o reparto frecuencial en sistemas donde el canal se comparte entre diferentes usuarios. Sirva como ejemplo los sistemas de radiodifusión. El reparto de ancho de banda se halla totalmente estandarizado y regularizado en cada área.

Formalizando el objetivo de este apartado consiste en determinar las siguientes funciones:

Autocorrelación del proceso de salida: $R_y(t + \tau, t)$

Densidad espectral de potencia del proceso de salida: $S_y(f)$

A partir de:

Autocorrelación del proceso de entrada: $R_x(t + \tau, t)$

Densidad espectral de potencia del proceso de entrada: $S_x(f)$

Y respuesta impulsional y función de transferencia del sistema: $h(t), H(f)$

Como funciones intermedias también se calculan las funciones de correlación cruzadas y funciones de densidad espectral de potencia cruzadas entre los procesos entrada – salida.

2.3.1. Procesos estacionarios

En el caso de tratar con procesos aleatorios estacionarios, es sencillo relacionar los momentos de primer y segundo orden del proceso aleatorio de salida $Y(t)$ con los del proceso aleatorio de entrada $X(t)$. Al plantear el cálculo de media y correlación para el proceso de salida, éste resulta estacionario para el caso de que el proceso de entrada también lo sea.

Media: $M_Y(t) = E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t-\lambda)]h(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} M_X(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda = M_X(t) * h(t)$

Para un p.a.estacionario: $M_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} M_X h(\lambda)d\lambda = M_X \cdot H(0)$

Inicialmente se calculan las dos funciones de correlación cruzada entre los procesos de entrada y de salida, así como la autocorrelación del proceso de salida. Se observa que todas las tres funciones dependen únicamente de la diferencia de tiempos τ de las dos variables que se comparan, por lo que los dos procesos resultan conjuntamente estacionarios.

Correlación cruzada entrada salida:

$$R_{XY}(t+\tau, t) = R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h^*(-\tau)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} R_{XY}(t+\tau, t) &= E[X(t+\tau)Y^*(t)] = E\left[X(t+\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t-\lambda)h^*(\lambda)d\lambda\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t+\tau)X^*(t-\lambda)]h^*(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t+\tau, t-\lambda)h^*(\lambda)d\lambda = \left\{ \begin{array}{l} \text{estacionariedad} \\ \text{proceso} \\ \text{entrada} \end{array} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau+\lambda)h^*(\lambda)d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-\alpha)h^*(-\alpha)d\alpha = R_X(\tau) * h^*(-\tau) \end{aligned}$$

Correlación cruzada Salida - Entrada:

$$R_{YX}(t+\tau, t) = R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} R_{YX}(t+\tau, t) &= E[Y(t+\tau)X^*(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda X^*(t)\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t+\tau-\lambda)X^*(t)]h(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t+\tau-\lambda, t)h(\lambda)d\lambda = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{estacionariedad} \\ \text{proceso} \\ \text{entrada} \end{array} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda = R_X(\tau) * h(\tau) \end{aligned}$$

Autocorrelación proceso Salida: $R_{YY}(t+\tau, t) = R_{YY}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$

Demostración:

$$\begin{aligned}
R_{YY}(t+\tau, t) &= E[Y(t+\tau)Y^*(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda Y^*(t)\right] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t+\tau-\lambda)Y^*(t)]h(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t+\tau-\lambda, t)h(\lambda)d\lambda = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{estacionariedad} \\ \text{proceso} \\ \text{entrada} \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda = \\
&= R_{XY}(\tau) * h(\tau) = R_X(\tau) * h^*(-\tau) * h(\tau)
\end{aligned}$$

En el dominio de la frecuencia las tres funciones de densidad espectral de potencia se obtienen como las transformadas de Fourier de las tres relaciones anteriores:

$$\begin{aligned}
S_{XY}(f) &= TF[R_{XY}(\tau)] = S_X(f)H^*(f) \\
S_{YX}(f) &= TF[R_{YX}(\tau)] = S_X(f)H(f) \\
S_Y(f) &= TF[R_Y(\tau)] = S_X(f)|H(f)|^2
\end{aligned}$$

Es de destacar, la última de ellas por relacionar directamente la densidad espectral de potencia del proceso de salida con la densidad espectral de potencia del proceso de entrada y la función de transferencia del sistema lineal.

2.3.2. Procesos ciclo-estacionarios

Cuando el proceso de entrada es cicloestacionario las relaciones anteriores no se cumplen. En este caso la caracterización del proceso viene dada por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= M_X(t+T_m) \\
R_X(t+\tau, t) &= R_X(t+T_r+\tau, t+T_r)
\end{aligned}$$

La media estadística del proceso de salida se relaciona con la media estadística del proceso de entrada según la siguiente relación.

$$M_Y(t) = E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t-\lambda)]h(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} M_X(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda = M_X(t) * h(t)$$

Se cumplen las mismas condiciones para el proceso de salida, y por tanto, éste también resulta cicloestacionario en media y con el mismo cicloperiodo que el proceso de entrada.

$$M_Y(t) = M_Y(t+T_m)$$

En cuanto a la autocorrelación del proceso de salida a continuación se realizan las siguientes demostraciones:

1. La autocorrelación del proceso de salida es periódica y tiene el mismo periodo que la autocorrelación que el proceso de entrada. El proceso de salida resulta por tanto cicloestacionario.

2. La relación entre la correlación promedio del proceso de salida y la correlación promedio temporal del proceso de entrada se obtiene mediante la doble convolución con la respuesta impulsional del sistema.

Demostración de 1.

$$\begin{aligned}
 R_{YY}(t+\tau, t) &= E[Y(t+\tau)Y^*(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t-\alpha)h^*(\alpha)d\alpha\right] = \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t+\tau-\lambda, t-\alpha)h^*(\alpha)d\alpha d\lambda = \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t+T_r+\tau-\lambda, t+T_r-\alpha)h^*(\alpha)d\alpha d\lambda = \\
 &R_{YY}(t+T_r+\tau, t+T_r)
 \end{aligned}$$

Demostración de 2.

Considerando la expresión de la función correlación promediada temporalmente como:

$$\hat{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_r} \int_{\langle T_r \rangle} R_X(t+\tau, t) dt$$

Se obtienen las siguientes relaciones para procesos cicloestacionarios:

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_{XY}(\tau) &= \hat{R}_X(\tau) * h^*(-\tau) \\
 \hat{R}_{YX}(\tau) &= \hat{R}_X(\tau) * h(\tau) \\
 \hat{R}_{YY}(\tau) &= \hat{R}_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)
 \end{aligned}$$

Se demuestra a continuación la última de las 3 afirmaciones. La demostración para las dos primeras puede realizarse de forma análoga.

$$\begin{aligned}
\hat{R}_Y(\tau) &= \frac{1}{T_r} \int_{\langle T_r \rangle} R_Y(t+\tau, t) dt \\
&= \frac{1}{T_r} \int_{\langle T_r \rangle} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t+\tau-\lambda, t-\alpha) h^*(\alpha) d\alpha d\lambda dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_r} \int_0^{T_r} R_{XX}(t+\tau-\lambda, t-\alpha) dt h^*(\alpha) d\alpha d\lambda \\
&\quad \left\{ \text{cambio de variable } \gamma = t - \alpha \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_r} \int_{-\alpha}^{T_r-\alpha} R_{XX}(\gamma + \alpha + \tau - \lambda, \gamma) d\gamma h^*(\alpha) d\alpha d\lambda = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{CICLOestacionariedad} \\ \text{proceso} \\ \text{entrada} \end{array} \right\} = \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_r} \int_0^{T_r} R_{XX}(\gamma + \alpha + \tau - \lambda, \gamma) d\gamma h^*(\alpha) d\alpha d\lambda = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_X(\alpha + \tau - \lambda) h^*(\alpha) d\alpha d\lambda \\
&= \hat{R}_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)
\end{aligned}$$

En el dominio de la frecuencia se cumplen las mismas relaciones que con procesos estacionarios, pues para este tipo de procesos la densidad espectral de potencia es directamente la transformada de Fourier del promedio temporal de la correlación.

$$\begin{aligned}
S_{XY}(f) &= S_X(f) H^*(f) \\
S_{YX}(f) &= S_X(f) H(f) \\
S_Y(f) &= S_X(f) |H(f)|^2
\end{aligned}$$

Al igual que con procesos estacionarios, es de destacar la última de ellas, por relacionar directamente la densidad espectral de potencia del proceso de salida con la densidad espectral de potencia del proceso de entrada y la función de transferencia del sistema lineal.

2.4. Caracterización de ruido

En este apartado se comenta el modelo asumido para el ruido de canal, el cual se suma a la señal útil a la entrada del receptor. El modelo ampliamente aceptado consiste en un proceso aleatorio estacionario, de media nula, estadísticamente independiente de la señal útil y de densidad espectral plana y función de densidad de probabilidad gaussiana.

Comúnmente se le denomina ruido blanco gaussiano. Cada uno de los dos calificativos hacen por tanto, referencia a una característica diferente:

- Caracterización estadística: Ruido gaussiano.
- Caracterización frecuencial: Ruido blanco.

La siguiente figura esquematiza el filtrado de ruido de canal $W(t)$, sumado a la señal útil representada por el proceso $S(t)$, a través de un filtro receptor de función de transferencia $H_R(f)$.

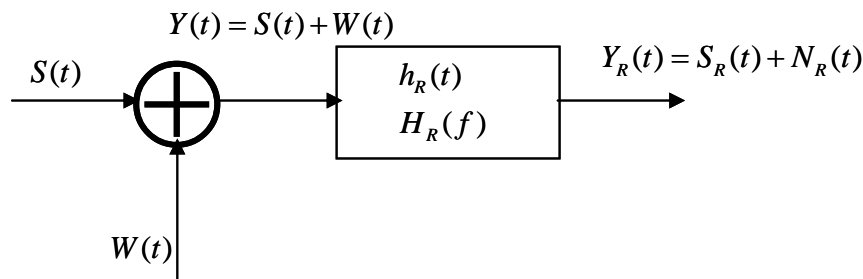


Figura 7. Filtro Receptor de Comunicaciones

2.4.1. Ruido gaussiano.

En este sub-apartado se justifica y analiza la característica de gaussianidad en el modelo adoptado para el ruido de canal.

El ruido a la entrada del receptor $W(t)$, en general, se halla provocado por pequeños movimientos erráticos de los electrones. Por el Teorema central del límite, a la suma de todos los movimientos se la modela estadísticamente como proceso aleatorio gaussiano y estacionario.

Es estacionario: $f_{W(t)}(w) = f_W(w)$

$$M_W(t) = M_W$$

$$R_W(t + \tau, t) = R_W(\tau)$$

Es Gaussiano: $f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_W^2}} e^{-\frac{(w-M_W)^2}{2\sigma_W^2}}$ $W : N(M_W, \sigma_W^2)$

En general se tiene: $W(t) : N(0, \sigma_W^2)$

Propiedades interesantes de los procesos gaussianos:

- 1) Los momentos de primer y segundo orden caracterizan completamente a un proceso gaussiano estacionario.
- 2) La Gaussianidad se conserva a través de Sistemas Lineales. Por tanto cuando a la entrada de un sistema lineal se presenta un proceso aleatorio gaussiano, el proceso de salida sigue siendo gaussiano.
- 3) Si dos procesos aleatorios son incorrelados, son también estadísticamente independientes.

A continuación se demuestra la propiedad 3:

Sea:

$$X(t) : N(0, \sigma_X^2)$$

$$Y(t) : N(0, \sigma_Y^2)$$

$$E[X(t+\tau)Y(t)] = C_{XY}(\tau)$$

Se obtiene la f.d.p conjunta de ambos procesos:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\begin{vmatrix} \sigma_X^2 & C_{XY}(\tau) \\ C_{XY}(\tau) & \sigma_Y^2 \end{vmatrix}}} e^{-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & C_{XY}(\tau) \\ C_{XY}(\tau) & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Si los procesos son incorrelados: $C_{XY}(\tau) = M_X M_Y = 0$

Y por tanto

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\begin{vmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{vmatrix}}} e^{-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma_X^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma_Y^2}} = f_X(x) f_Y(y)$$

por lo que resultan estadísticamente independientes.

2.4.2. Ruido gaussiano complejo:

Cuando el proceso de ruido es complejo, en muchas aplicaciones de comunicaciones es interesante conocer la distribución de probabilidad del módulo o valor absoluto de las variables aleatorias complejas implicadas. En este apartado se desarrolla la obtención de dicha función de densidad de probabilidad en determinadas condiciones.

Función de densidad de Probabilidad del módulo y de la fase de una v.a. compleja en función de las f.d.p de las v.a. parte real y v.a. parte imaginaria.

Sean x, y dos variables aleatorias reales estadísticamente independientes entre sí.

La f.d.p. es por tanto, el producto de f.d.p. de cada una de las dos variables.

$$f_{x,y}(x, y) = f_x(x) f_y(y)$$

Al formar la variable compleja $v = x + jy = r \exp(j\theta)$, es de utilidad obtener la f.d.p de su fase y de su módulo:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) & \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \\ y &= r \sin(\theta) & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Para ello previamente se requiere la función de distribución conjunta para las dos nuevas variables aleatorias.

$$f_{r,\theta}(r, \theta) = \frac{1}{J \begin{pmatrix} r & \theta \\ x & y \end{pmatrix}} f_{x,y}(x, y)$$

donde el Jacobiano se define y calcula en este caso como:

$$J \begin{pmatrix} r & \theta \\ x & y \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$$

Por lo que:

$$f_{r,\theta}(r, \theta) = r f_{x,y}(x, y) = r f_x(x) f_y(y) \quad (1)$$

Para obtener cada una de las dos f.d.p. marginales de la fase y/o del módulo se ha de integrar:

$$\begin{aligned} f_r(r) &= \int f_{r,\theta}(r, \theta) d\theta \\ f_\theta(\theta) &= \int f_{r,\theta}(r, \theta) dr \end{aligned} \quad (2)$$

Función de densidad de Probabilidad Rayleigh

Sean x, y dos variables aleatorias reales con f.d.p. Gaussiana y estadísticamente independientes entre sí.

Ambas f.d.p. presentan media nula y varianza σ^2 :

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}\right) \\ f_y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Al formar la variable compleja $v = x + jy = r \exp(j\theta)$, y aplicando (1) y (2) se obtiene:

$$\begin{aligned} f_{r,\theta}(r, \theta) &= r \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2}\right) = \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad \begin{aligned} 0 \leq r \leq +\infty \\ -\pi \leq \theta \leq +\pi \end{aligned}$$

Distribución uniforme para la fase

$$f_\theta(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) dr = \frac{1}{2\pi}$$

Distribución Rayleigh de parámetro σ^2 para el módulo

$$\begin{aligned} f_r(r) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) d\theta = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \\ \Rightarrow \\ f_{r-Rayleigh}(r, \sigma^2) &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

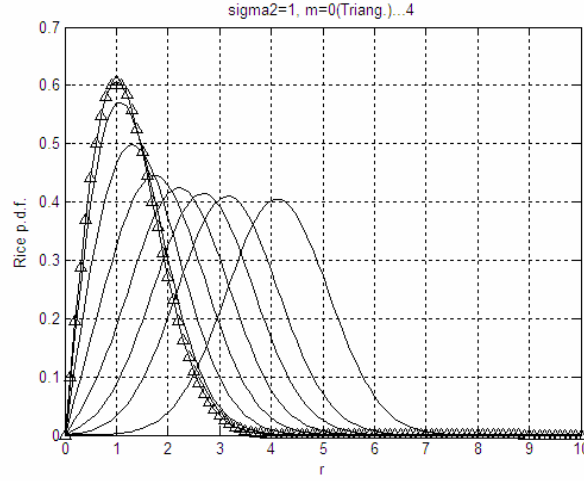


Figura 8. Distribución de Rayleigh

Función de densidad de Probabilidad Rice

Sean x, y dos variables aleatorias reales con f.d.p. Gaussiana y estadísticamente independientes entre sí.

Ambas f.d.p. varianza σ^2 y medias diferentes:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2}\right)$$

Al formar la variable compleja $v = x + jy = r \exp(j\theta)$, y aplicando (1) y (2) se obtiene:

$$\begin{aligned} f_{r,\theta}(r, \theta) &= r \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2}\right) = \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2+y^2-2mx+m^2}{\sigma^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m^2}{\sigma^2}\right) \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(+\frac{mr\cos\theta}{\sigma^2}\right) \\ & \quad 0 \leq r \leq +\infty \\ & \quad -\pi \leq \theta \leq +\pi \end{aligned}$$

Distribución Rice de parámetros σ^2, m para el módulo

$$\begin{aligned} f_r(r) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m^2}{\sigma^2}\right) \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(+\frac{mr\cos\theta}{\sigma^2}\right) d\theta = \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m^2+r^2}{\sigma^2}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left(+\frac{mr\cos\theta}{\sigma^2}\right) d\theta = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m^2+r^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{mr}{\sigma^2}\right) \\ &\Rightarrow \\ f_{r-Rice}(r, \sigma^2, m) &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m^2+r^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{mr}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

con $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(x \cos \theta) d\theta$ igual a la función de Bessel modificada de primera clase y orden 0.

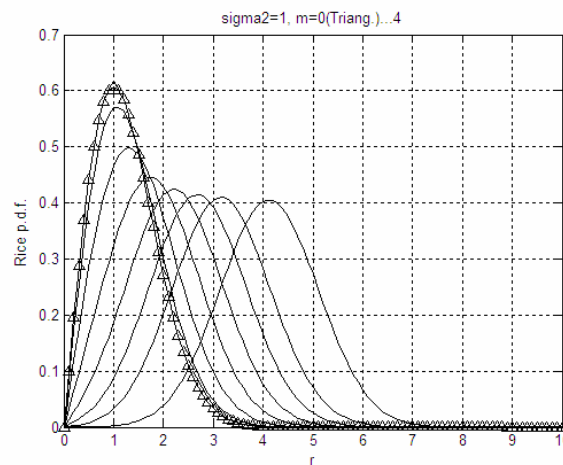


Figura 9. Distribución de Rice

Al comparar ambas gráficas entre sí puede observarse que para $m=0$, la distribución de Rice coincide con la de Rayleigh. Es decir:

$$f_{r-Rice}(r, \sigma^2, m) \Big|_{m=0} = f_{r-Rayleigh}(r, \sigma^2)$$

La función de densidad de probabilidad de la fase $f_{\theta}(\theta)$ no es uniforme ni de media nula para este caso.

Aplicaciones:

En Proakis, página 681: Fading Channels

En Carlson página 634 Detección no coherente de sistemas binarios FSK,OOK, etc..).

2.4.3. Ruido blanco

En este sub-apartado se justifica y analiza la característica espectral en el modelo adoptado para el ruido de canal.

Proceso Real: En la práctica se presenta como resultado de análisis del ruido térmico la siguiente densidad espectral para el ruido real:

$$S_w(f) = \frac{\hbar f}{2 \left(e^{\frac{\hbar f}{kT}} - 1 \right)}$$

\hbar Constante de Plank, k Constante de Boltzman y T Temperatura en ° Kelvin.

Es plano (paso-bajo) hasta la frecuencia de corte aproximada de 2000 GHz.

Modelo Matemático: (No es un proceso físico real).

$$S_W(f) = \frac{N_0}{2}$$

$$R_W(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

A la salida del filtro receptor se tendrá el mismo proceso para las dos funciones de densidad de probabilidad: la del proceso real y la del modelo matemático, por ello para analizar el comportamiento y calidad de los sistemas de comunicaciones se trabajará con el modelo matemático.

A partir de este punto, a un canal con este tipo de ruido se le denominará: (Canal AWGN: Additive White Gaussian Noise).

2.4.4. Ancho de banda equivalente de ruido.

En este apartado se caracteriza la estadística y la densidad espectral de potencia media de la señal de ruido a la salida del filtro receptor de la figura 7.

Canal AWGN y Ruido filtrado:

$$N(t) = W(t) * h_R(t)$$

$W(t)$ es ruido aditivo estacionario blanco y gaussiano: $N(0, \infty)$ $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$

$N(t)$ es ruido estacionario gaussiano no blanco (coloreado):

Densidad espectral: $S_N(f) = S_W(f) |H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2$

f.d.p: $N(0, \sigma_n^2)$ $f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \frac{n^2}{\sigma_n^2}}$

Cálculo de la Potencia:

$$\sigma_n^2 = \int S_N(f) df = \int S_W(f) |H_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int |H_R(f)|^2 df$$

Si $H_R(f) = H_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_N}\right)$ fuera filtro paso bajo ideal, se tendría:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} 2B_N H_0^2 = N_0 B_N H_0^2$$

Ancho de banda equivalente de ruido.

Dado un filtro paso bajo de función de transferencia no ideal, en general $H_R(f)$, el ancho de banda equivalente de ruido se define como el ancho de banda B_N que debería tener un filtro paso bajo ideal de función de transferencia $H_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_N}\right)$ ($H_0 = H_{\max}$, máximo del valor absoluto de la función de transferencia $H_R(f)$), para obtener a la salida la misma potencia σ_n^2 , cuando a la entrada se tiene ruido blanco:

Por tanto igualando la potencia a la salida del filtro en cuestión con la de un filtro paso bajo ideal se obtiene:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int |H_R(f)|^2 df = N_0 B_N H_{\max}^2$$

$$B_N = \frac{\int |H_R(f)|^2 df}{2H_{\max}^2}$$

Ejemplo:

Se calcula en este ejemplo el ancho de banda equivalente de ruido de un filtro paso bajo RC de orden 1:

$$H_R(f) = \frac{1}{1 + j2\pi RCf} = \frac{1}{1 + j2\pi f / \alpha} \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

La densidad espectral a la salida del filtro, cuando a la entrada se presenta ruido blanco es:

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right)^2}$$

Igualando la correspondiente potencia a la potencia que se obtendría a la salida de un filtro paso bajo ideal de módulo para la función de transferencia $H_0 = H_{\max} = 1$:

$$\sigma_n^2 = \int S_N(f) df = N_0 B_N$$

resulta:

$$B_N = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right)^2} df = \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4RC}$$

2.5. Sistema de Comunicaciones analógico en banda base

En este apartado se introduce el sistema de comunicaciones en banda base, mediante el cual la señal de interés se transmite por el canal de comunicaciones sin realizar un traslado frecuencial de la misma. Los objetivos principales del apartado son:

- Presentar los elementos básicos de un sistema de comunicaciones.
- Fijar un criterio de calidad en cuanto a Relación de Potencia de la Señal Útil respecto a Potencia de la Señal de Ruido. La medida que se define al respecto, se utiliza en el resto de los sistemas de modulación analógicos para medir la calidad del sistema (SNR: Signal to Noise Ratio).

2.5.1. Diagrama de bloques.

A continuación se presenta un diagrama de bloques funcional con los elementos más básicos que intervienen en un sistema de comunicaciones analógico en banda base y se comenta con detalle cada uno de los subsistemas y señales que intervienen en él.

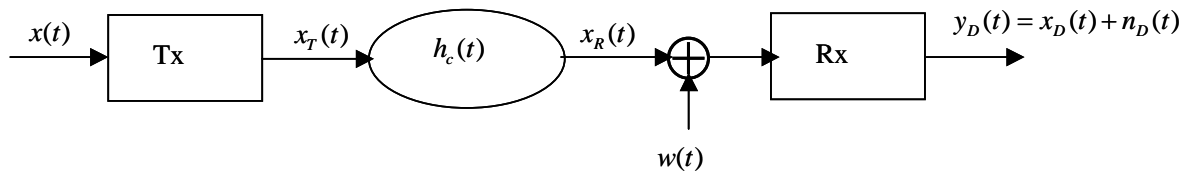


Figura 10. Diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones analógico en banda base.

Mensaje: $x(t)$ En general se modela como un proceso aleatorio estacionario de potencia $P_x = E[x^2(t)]$ y ancho de banda B_x Hz. Es el que da origen a la señal útil a través de todo el sistema de comunicaciones. Por tanto, se tiene que $x_T(t)$ es la señal útil transmitida, $x_R(t)$ es la señal útil resultante a la salida del canal y $x_D(t)$ es la señal útil en destino.

Transmisor: Su misión consiste en amplificar la señal a transmitir hasta obtener la potencia transmitida $S_T = E[x_T^2(t)]$. Para ello, la señal que se transmite es $x_T(t) = \sqrt{\frac{S_T}{P_x}} x(t) = G_T x(t)$ y el comportamiento del amplificador se mide mediante su ganancia $(G_T)_{dB} = 10 \log\left(\frac{S_T}{P_x}\right) = 20 \log(G_T)$. En determinados sistemas el transmisor se halla también formado por un filtro o sistema lineal invariante.

Canal: Atenúa, Retarda y en el caso de canal no ideal Distorsiona la señal transmitida.

Para un canal ideal se tiene:

Respuesta Impulsional: $h_c(t) = \alpha \delta(t - t_d)$

Función de Transferencia: $H_c(f) = \alpha e^{-j2\pi f t_d}$

Señal Resultante o Recibida a la salida del canal:

$$x_R(t) = x_T(t) * h_c(t) = \alpha x_T(t - t_d)$$

$$X_R(f) = \alpha X_T(f) e^{-j2\pi f t_d}$$

Por tanto, la función de transferencia se caracteriza por tener módulo constante y fase lineal. Estas dos características deben cumplirse al menos en el ancho de banda que ocupa la señal útil transmitida. Así para banda base deben cumplirse para el margen de frecuencias $|f| \leq B_x$

Para un canal no ideal se dice que el canal cambia la forma de la señal transmitida, es decir introduce distorsión.

Un factor importante en la transmisión por un canal ideal consiste en la medida de la atenuación introducida por el canal como pérdida de potencia.

$$L = \frac{S_T}{S_R} = \frac{1}{\alpha^2} > 1 \quad L_{dB} = 10 \log(S_T) - 10 \log(S_R) > 0$$

Ejemplos:

Para un canal alámbrico la pérdida de potencia suele darse a partir del coeficiente de atenuación α en dB/Km que además aumenta con la frecuencia. Por tanto si d representa la longitud del canal en Km, se tiene:

$$\alpha_0 d = 10 \log\left(\frac{S_T}{S_R}\right) \quad S_R = S_T 10^{-\alpha_0 d} \quad L = 10^{+\alpha_0 d}$$

En el espacio libre y propagación libre de obstáculos (canal ideal) se tiene la siguiente relación entre las potencias transmitida y recibida:

$$S_R = S_T \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2$$

con lo que la atenuación queda:

$$(L)_{dB} = 20 \log\left(\frac{4\pi}{c}\right) + 20 \log(df)$$

Donde $c = 3 \cdot 10^8$ mts/seg, f es la frecuencia en Hz y d la distancia entre el Tx y el Rx en mts.

Ruido $w(t)$: El ruido de canal, tal como se presenta en el apartado 2.4, en general se puede modelar como un proceso aleatorio estacionario blanco y gaussiano, de media nula e incorrelado con la señal útil transmitida. Todas estas características quedan resumidas mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} E[W(t)] &= M_w = 0 \\ R_w(\tau) &= \frac{N_0}{2} \delta(\tau); \quad S_w(f) = \frac{N_0}{2} \\ f_{w(t)}(w) &: N(0, \sigma_w^2) \\ R_{xw}(\tau) &= 0 \end{aligned}$$

Receptor: Para un canal ideal de ruido aditivo blanco y gaussiano (AWGN) el receptor únicamente filtra ruido fuera de la banda de la señal útil, por lo tanto, en un sistema en banda base será un filtro paso bajo.

$$|H_R(f)| = H_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$$

Señal en Destino: $y_D(t) = x_D(t) + n_D(t)$

Señal útil detectada: $x_D(t) = x_R(t) * h_R(t) = \alpha H_0 x_T(t - t_d - t_R)$

Ruido Filtrado: $n_D(t) = w(t) * h_R(t) \quad S_{n_D}(f) = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 \quad R_{n_D x_D}(\tau) = 0$

2.5.2. Medida de SNR en un canal ideal AWGN

Se define la *Signal to Noise Rate* (SNR) como la relación o cociente de potencias señal útil a ruido en el punto D final del sistema, entre señal útil y ruido:

$$SNR_D = \frac{S_D}{N_D} = \left(\frac{S}{N} \right)_D = \frac{P_{sD}}{P_{nD}} = \frac{E[|x_D(t)|^2]}{E[|n_D(t)|^2]}$$

Esta figura solo tiene sentido cuando la señal útil en destino se halla libre de distorsión, ya que en caso contrario la SNR no es una figura significativa de la calidad del sistema.

Para el canal AWGN descrito en este apartado resulta:

$$S_D = \frac{H_0^2 S_T}{L} \quad N_D = H_0^2 N_0 B_x \quad SNR_D = \frac{S_R}{N_0 B_x} = \frac{S_T}{LN_0 B_x}$$

Debido a que el parámetro H_0 no influye en la SNR, ya que amplifica por igual la señal útil y la señal de ruido, a partir de este punto y mientras no se explicite lo contrario se considerará igual a 1.

2.5.3. Distorsión lineal y Ecualización

En este apartado se va a tratar la distorsión introducida por el canal cuando la función de transferencia que presenta no es ideal. Las condiciones de canal ideal, dejan de cumplirse y por tanto:

Respuesta Impulsional: $h_c(t) \neq \alpha \delta(t - t_d)$

Función de Transferencia: $H_c(f) \neq \alpha e^{-j2\pi f t_d}$

Se cumple que $x_R(t) = x_T(t) * h_c(t)$ $X_R(f) = X_T(f) H_c(f)$

donde: $x_R(t) \neq \alpha x_T(t - t_d)$ $X_R(f) \neq \alpha X_T(f) e^{-j2\pi f t_d}$

La señal a la salida del canal $x_R(t)$ en esta situación no es una réplica atenuada y retardada de la señal transmitida $x_T(t)$. Se dice que la señal se ha distorsionado al pasar por el canal (Sistema Lineal) de ahí el nombre de distorsión lineal.

Una ecualización ideal, consiste en eliminar la distorsión lineal introducida por el canal. Para ello se diseña un sistema lineal ecualizador que idealmente debe presentar la siguiente función de transferencia:

$$H_Q(f) = \frac{1}{H_c(f)} e^{-j2\pi f t_d} \quad |f| \leq B_x$$

es decir:

$$x_T(t) * h_c(t) * h_Q(t) = x_T(t) * \delta(t - t_d) = x_T(t - t_d)$$

2.5.4. Ecualización ideal en recepción

Una alternativa de ecualización ideal consiste en ecualizar en recepción.

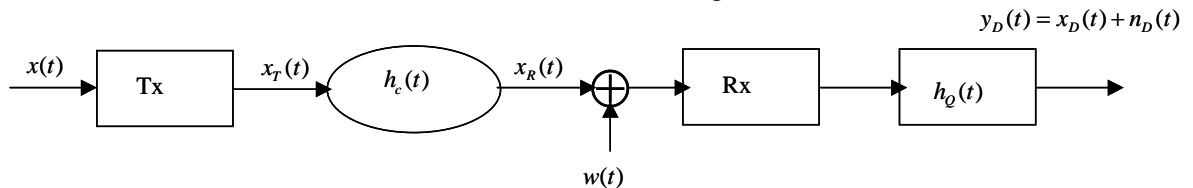


Figura 11. Ecualización ideal en recepción.

En este apartado se considera $x_T(t) = G_T x(t)$ y $H_R(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$

Análisis de la SNR:

Respecto a la señal útil se tiene: $x_D(t) = x_T(t) * h_c(t) * h_R(t) * h_Q(t) = x_T(t - t_d)$

y por tanto en cuanto a la relación de potencias: $S_D = S_T$

Respecto a la señal de ruido, veamos primero la Densidad Espectral:

$$S_{n_D}(f) = S_W(f) |H_R(f)|^2 |H_Q(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right) \left| \frac{1}{H_C(f)} \right|^2$$

Por tanto la potencia de ruido a la salida del filtro receptor es:

$$N_D = \int S_{n_D}(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-B_x}^{+B_x} \frac{1}{|H_C(f)|^2} df = N_0 \int_0^{+B_x} \frac{1}{|H_C(f)|^2} df$$

Finalmente la SNR en detección para una potencia transmitida dada queda:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_T}{N_0 \int_0^{+B_x} \frac{1}{|H_C(f)|^2} df}$$

En la expresión anterior, puede observarse como caso particular, que si el canal es ideal: $|H_C(f)| = \frac{1}{\sqrt{L}}$,

se cumple que $\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_T}{LN_0 B_x}$, relación idéntica a la obtenida para canal ideal y sin ecualización.

2.5.5. Ecualización ideal en transmisión.

Una alternativa de ecualización ideal consiste en ecualizar en transmisión.

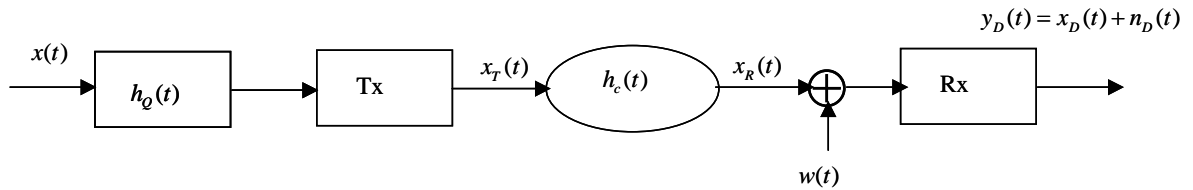


Figura 12. Ecualización ideal en transmisión.

En este apartado se considerará $x_T(t) = G_T(x(t) * h_Q(t))$ y $H_R(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$

Análisis de la SNR:

Respecto a la señal útil se tiene:

$$x_D(t) = x_T(t) * h_c(t) * h_R(t) = G_T x(t) * h_Q(t) * h_c(t) * h_R(t) = G_T x(t - t_d)$$

Y por tanto en cuanto a la relación de potencias: $S_D = G_T^2 P_x$

Interesa expresar la potencia anterior respecto a la potencia transmitida S_T :

$$S_T = \int S_{x_T}(f)df = G_T^2 \int S_x(f) |H_Q(f)|^2 df = G_T^2 \int S_x(f) \frac{1}{|H_C(f)|^2} df$$

Sustituyendo la constante $G_T^2 = \frac{S_T}{\int S_x(f) \frac{1}{|H_C(f)|^2} df}$ en la expresión de la potencia útil en destino se obtiene:

$$S_D = \frac{S_T P_x}{\int S_x(f) \frac{1}{|H_C(f)|^2} df}$$

Respecto a la señal de ruido, veamos primero la Densidad Espectral:

$$S_{n_D}(f) = S_W(f) |H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$$

Por tanto la potencia de ruido a la salida del filtro receptor es

$$N_D = \int S_{n_D}(f)df = N_0 B_x$$

Finalmente la SNR en detección queda:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_T P_x}{N_0 B_x \int_{-B_x}^{+B_x} S_x(f) \frac{1}{|H_C(f)|^2} df}$$

En la expresión anterior para obtener la misma relación que con canal ideal se deben cumplir dos condiciones:

$$|H_C(f)| = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

$$S_x(f) = \frac{P_x}{2B_x} \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$$

2.5.6. Filtros terminales óptimos.

En este apartado se plantea la solución óptima en cuanto a maximizar la SNR en detección. Para ello se va a diseñar o calcular tanto la función de transferencia del filtro transmisor como la función de transferencia del filtro receptor, respectivamente: $H_T(f), H_R(f)$.

Como condiciones de diseño en dicha optimización, se va a imponer, que la señal útil en detección $x_D(t)$, se halle libre de distorsión y que la potencia transmitida sea prefijada a S_T .

La Figura 13 muestra un diagrama de bloques funcional del sistema completo y a continuación se resume tanto las dos condiciones de diseño, como el cociente a maximizar.

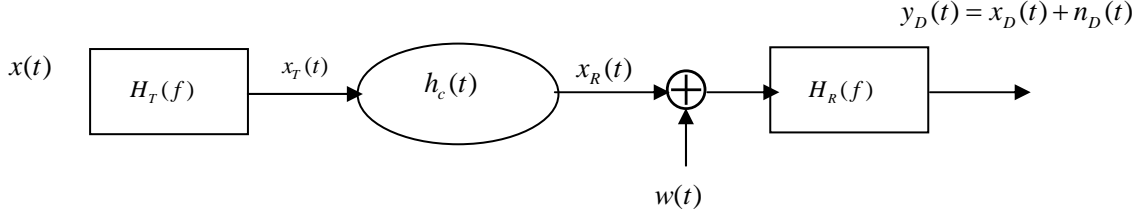


Figura 13. Filtros Terminales óptimos.

Condición de Ecualización Ideal: $x_D(t) = x_T(t) * h_T(t) * h_c(t) * h_R(t) = Gx(t - t_d)$

Por tanto: $|H_T(f)H_c(f)H_R(f)| = G$ en $|f| \leq B_x$

La potencia transmitida es fija: $S_T = \int S_x(f) |H_T(f)|^2 df = G^2 \int \frac{S_x(f)}{|H_c(f)H_R(f)|^2} df$

Se maximiza la SNR en Detección.

Potencia de la señal útil en detección: $S_D = G^2 P_x = \frac{S_T P_x}{\int \frac{S_x(f)}{|H_c(f)H_R(f)|^2} df}$

Potencia de la señal de ruido en detección: $N_D = \int S_w(f) |H_R(f)|^2 df$

La relación de potencias a maximizar en destino queda:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_T P_x}{\int \frac{S_x(f)}{|H_c(f)H_R(f)|^2} df \int S_w(f) |H_R(f)|^2 df}$$

Para maximizar la relación anterior se aplicará la desigualdad de Swartz:

$$\int |u|^2 \int |v|^2 \geq \left| \int uv \right|^2$$

Y se cumple con igualdad cuando los dos integrandos son proporcionales:

$$u = \lambda v^*$$

que aplicado a nuestro caso ($u = \sqrt{\frac{S_x(f)}{|H_c(f)H_R(f)|^2}}$; $v = \sqrt{S_w(f) |H_R(f)|^2}$) da como resultado una relación SNR en detección máxima:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_T P_x}{\left| \int \frac{\sqrt{S_x(f)S_w(f)}}{|H_c(f)|} df \right|^2}$$

y las siguientes expresiones para el valor absoluto de las funciones de transferencia de los filtros receptor y transmisor:

$$|H_R(f)|^2 = \lambda \frac{\sqrt{S_x(f)}}{\sqrt{S_w(f) |H_c(f)|}} \quad |f| \leq B_x$$

$$|H_R(f)|^2 = 0 \quad |f| > B_x$$

$$|H_T(f)|^2 = \frac{G^2}{\lambda} \frac{\sqrt{S_w(f)}}{\sqrt{S_x(f)} |H_c(f)|} \quad |f| \leq B_x$$

Se destacan los siguientes comentarios de interés:

- En el transmisor se pre-enfatiza el ruido y en el receptor se des-enfatiza el ruido. Esta condición queda reflejada por la presencia de $\sqrt{S_w(f)}$ en el denominador de $|H_R(f)|^2$. Con lo cual, en recepción las frecuencias para las que el ruido presenta mayor potencia, resultaran más atenuadas que aquellas para las que el ruido presenta menor potencia (a igualdad de condiciones en cuanto al resto de las funciones que intervienen en las expresiones correspondientes).
- Las condiciones de diseño para los dos filtros no afectan a la fase de los sistemas, sin embargo la fase debe cumplir la ecuación de ecualización. Por tanto:

$$\varphi_{H_T}(f) + \varphi_{H_c}(f) + \varphi_{H_R}(f) = -2\pi f t_d$$

- En la expresión $\left(\frac{S}{N}\right)_D$ obtenida para obtener la misma relación que con canal ideal se deben cumplir dos condiciones:

$$|H_c(f)| = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

$$S_x(f) = \frac{P_x}{2B_x} \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$$

- Las constantes G, λ son irrelevantes para la optimización de la SNR en detección y para el cumplimiento de la ecuación de ecualización, sin embargo en la práctica influyen del siguiente modo. A partir de la función de transferencia obtenida para el filtro receptor, la constante λ influye directamente sobre el nivel “de volumen”, es decir, de amplificación en detección. El destinatario puede controlar directamente el nivel de esta constante, sin embargo no afecta a la relación de potencias SNR.

$$S_T = \int S_x(f) |H_T(f)|^2 df = \frac{G^2}{\lambda} \int \frac{\sqrt{S_x(f)} \sqrt{S_w(f)}}{|H_c(f)|} df$$

Dadas las funciones $S_x(f), S_w(f), H_c(f)$, la potencia a transmitir S_T determina directamente la constante $\frac{G^2}{\lambda}$.

2.5.7. Ejemplo de Canal con distorsión

En este apartado se desarrolla un sencillo ejemplo de aplicación de la teoría presentada en 2.5.4, 2.5.5 y 2.5.6.

En un sistema de comunicaciones analógicas, se transmite el mensaje $x(t)$. Dicha señal corresponde a un proceso aleatorio estacionario y su densidad espectral se distribuye de forma uniforme en su ancho de banda: $S_x(f) = \frac{P_x}{2B_x} \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$. Dicha Señal se transmite por un canal de comunicaciones, no ideal y de ruido aditivo blanco Gaussiano $w(t)$ de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$. La función de transferencia del canal $H_c(f)$ se muestra en la figura siguiente, en valor absoluto. Su fase es $-2\pi f t_d$.

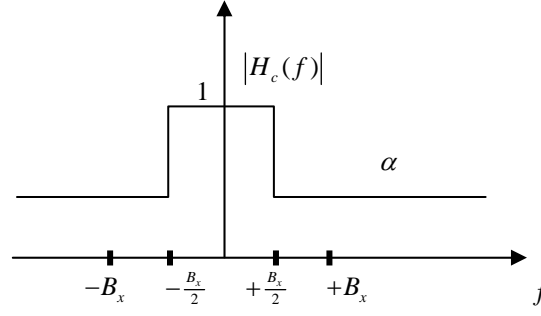


Figura 14. Función de transferencia de canal no ideal.

Para eliminar la distorsión producida por el canal se va a analizar la calidad a través de la relación señal a ruido mediante 3 esquemas: ecualización ideal en transmisión, ecualización ideal en recepción y filtros terminales óptimos.

Ecualización Ideal en Recepción (EQRx).

Siguiendo el esquema de la Figura 11, se obtiene la función de transferencia del ecualizador ideal y la relación de potencias en destino.

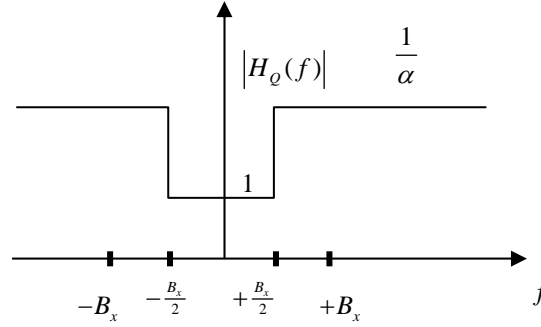


Figura 15. Función de transferencia para el filtro ecualizador.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_T}{N_0 \int_{-B_x/2}^{+B_x/2} \frac{1}{|H_c(f)|^2} df} = \frac{S_T}{N_0 \left(\int_{-B_x/2}^{+B_x/2} 1 df + \int_{-B_x/2}^{+B_x/2} \frac{1}{\alpha^2} df \right)} = \frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} \frac{S_T}{N_0 B_x}$$

Respecto a la situación estudiada anteriormente en el apartado 2.5.2, de canal ideal de atenuación 0 dB, correspondiente a la situación $\alpha = 1$ de este ejemplo, la pérdida en dB de la relación obtenida se mide del siguiente modo.

$$G_{dB} = 10 \log \left(\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{D-\text{Canal NO Ideal}}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{D-\text{Canal Ideal}}} \right) = 10 \log \left(\frac{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} \frac{S_T}{N_0 B_x}}{\frac{S_T}{N_0 B_x}} \right) = 10 \log \left(\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} \right)$$

La anterior ganancia se muestra para valores $0 < \alpha < 1$ en la siguiente gráfica.

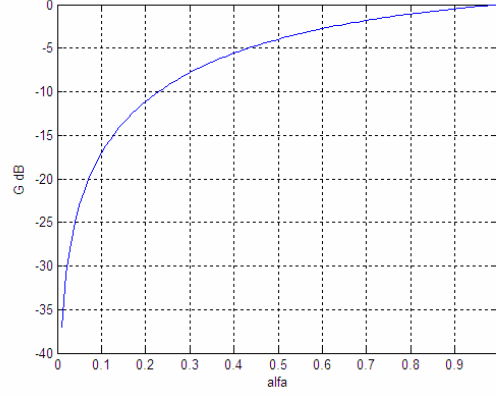


Figura 16. Pérdida en dB para el caso de ecualización en recepción respecto a la situación de canal ideal.

Finalmente, para este caso se muestra en la siguiente figura la densidad espectral del ruido resultante en el destino (D).

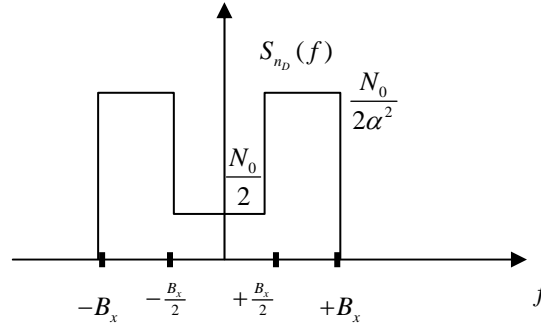


Figura 17. Densidad espectral de ruido en detección mediante la solución EQRx

Ecualización Ideal en Transmisión (EQTx).

Siguiendo el esquema de la Figura 12, se obtiene la función de transferencia del ecualizador ideal mostrada en la Figura 15 y la relación de potencias en destino.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_T P_x}{N_0 B_x \int_{-B_x}^{+B_x} S_x(f) \frac{1}{|H_C(f)|^2} df} = \frac{S_T}{N_0 \left(\int_0^{+B_x/2} 1 df + \int_{+B_x/2}^{+B_x} \frac{1}{\alpha^2} df \right)} = \frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} \frac{S_T}{N_0 B_x}$$

La relación anterior coincide con la obtenida al ecualizar en recepción. Ello es debido a que $S_x(f) = \frac{P_x}{2B_x} \Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right)$, es decir, la densidad espectral de la señal mensaje y la densidad espectral del ruido son ambas planas en frecuencia y por tanto proporcionales entre sí.

Finalmente, para este caso se muestra en la siguiente figura la densidad espectral del ruido resultante en el destino (D).

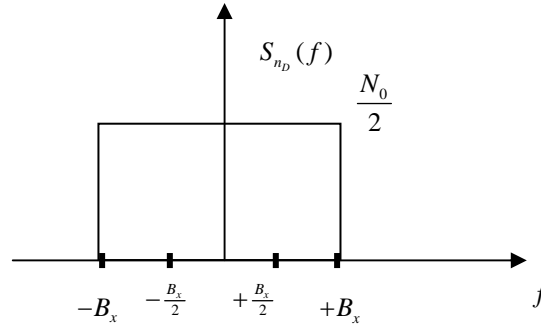
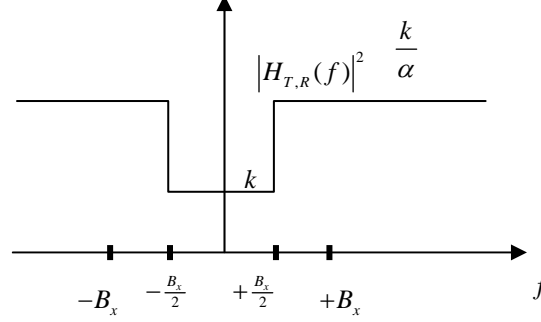


Figura 18. Densidad espectral de ruido en detección mediante la solución EQTx**Filtros Terminales Óptimos (FTO).**

Siguiendo el esquema de la 3), se obtiene la función de transferencia que salvo constantes es válida para ambos filtros.

**Figura 19.** Función de transferencia para ambos FTO.

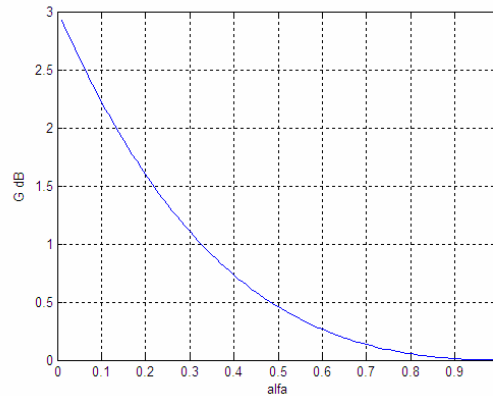
La relación de potencias en destino es:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_T P_x}{\left| \int \frac{\sqrt{S_x(f)S_w(f)}}{|H_c(f)|} df \right|^2} = \frac{S_T}{\frac{N_0}{4B_x} \left(2 \int_0^{+B_x} \frac{1}{|H_c(f)|} df \right)^2} = \frac{S_T}{\frac{N_0}{B_x} \left(\int_0^{+B_x/2} 1 df + \int_{+B_x/2}^{+B_x} \frac{1}{\alpha} df \right)^2} = \frac{4\alpha^2}{(1+\alpha)^2} \frac{S_T}{N_0 B_x}$$

Para el margen de valores $0 < \alpha < 1$, la relación anterior siempre es máxima. Al comparar con los casos de ecualización se obtiene:

$$G_{dB} = 10 \log \left(\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{D-FTO}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{D-Eq-Rx-Tx}} \right) = 10 \log \left(\frac{\frac{4\alpha^2}{(1+\alpha)^2} \frac{S_T}{N_0 B_x}}{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} \frac{S_T}{N_0 B_x}} \right) = 10 \log \left(\frac{2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^2} \right)$$

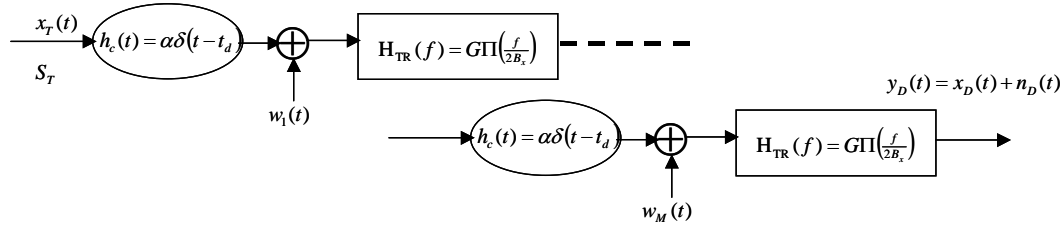
La anterior ganancia se muestra para valores $0 < \alpha < 1$ en la siguiente gráfica.

**Figura 20.** Ganancia en dB para el caso de FTO respecto a ecualización en recepción o en transmisión.

2.5.8.Repetidores.

Un sistema repetidor consiste en la recepción y posterior transmisión de la señal. En un sistema en banda base y canal AWGN, simplemente se amplificará la señal recibida, en general compensando la atenuación del canal y se filtrará paso bajo al ancho de banda de la señal útil.

Mediante sistema repetidores intercalados en el canal puede controlarse que la potencia transmitida inicialmente no sea demasiado elevada, sin embargo en cada uno de los sistemas se añade ruido proveniente del correspondiente tramo de canal, por lo que en general no es aconsejable intercalar un gran número de repetidores.



En la figura anterior se muestra un esquema en el que se ha intercalado un sistema repetidor. Para el análisis general supondremos que se han intercalado “M-1” sistemas repetidores, con lo que disponemos de M sistemas receptores en total, M tramos de canal y M señales de ruido. Nótese que con M=1 resulta el sistema de comunicaciones sin ninguna estación repetidora.

Propiedades del sistema:

En cada repetidor la ganancia del amplificador es: $G = \frac{1}{\alpha}$

La densidad espectral de cada señal de ruido coincide: $S_{w_1}(f) = \dots = S_{w_M}(f) = \frac{N_0}{2}$

Las diferentes señales de ruido son estadísticamente independientes entre sí: $S_{w_m w_n}(f) = 0$

A continuación se analiza la SNR en detección:

$$x_D(t) = x_T(t) * \alpha \delta(t - t_d) G * \dots * \alpha \delta(t - t_d) G = x_T(t - Mt_d) \quad S_D = S_T$$

$$n_D(t) = \sum_{m=1}^M w_m(t) * G^2 TF^{-1} \left(\Pi \left(\frac{f}{2B_x} \right) \right) \quad N_D = MG^2 N_0 B_x = \frac{M}{\alpha^2} N_0 B_x = ML_i N_0 B_x.$$

Y por tanto $\left(\frac{S}{N} \right)_D = \frac{S_T}{ML_i N_0 B_x}$

Donde L_i es la atenuación que presenta cada tramo.

Para **canal formado por cable o por fibra óptica** en general la atenuación de cada tramo se halla relacionada con la atenuación que presentaría el tramo completo sin repetidores mediante la siguiente expresión:

$$L = (L_i)^M \quad \text{o bien} \quad L_i = (L)^{\frac{1}{M}} \quad \text{con la que la potencia de ruido en detección queda ahora:}$$

$$N_D = M (L)^{\frac{1}{M}} N_0 B_x$$

Y por tanto $\left(\frac{S}{N} \right)_D = \frac{S_T}{M (L)^{\frac{1}{M}} N_0 B_x}$

Con lo que, derivando la expresión anterior respecto al número de repetidores M , el número de repetidores que maximiza la anterior SNR_D es: $M_{opt} = \lceil \ln L \rceil$.

Para **canal radioelctrico** en general, la atenuación de cada tramo se halla relacionada con la atenuación que presentaría el tramo completo sin repetidores mediante la siguiente expresión:

$$L = M^2 L_i \quad \text{con la que la potencia de ruido en detección queda ahora: } N_D = \frac{L}{M} N_0 B_x$$

$$\text{Y por tanto} \quad \left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{MS_T}{LN_0 B_x}$$

Con lo que el número de repetidores que maximiza la anterior SNR_D no se halla limitado, sin embargo, incluir repetidores es costoso por sí mismo.

2.6. Ejercicios de Aplicación

- 1) Se define el proceso: $X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta)$, donde la amplitud es una variable aleatoria de distribución de probabilidad: $f_A(a) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|a|}{\sigma}\right)$ y la fase es una variable aleatoria distribuida uniformemente en $[0, 2\pi) \text{ rad}$. Ambas variables son estadísticamente independientes entre sí.
 - Calcule los momentos de primer y segundo orden del proceso y comente si éste es estacionario, cicloestacionario,...
 - Calcule su densidad espectral
- 2) Se define el proceso: $X(t) = \cos(2\pi f_c t + \Theta)$, donde la fase es una variable aleatoria distribuida uniformemente en $\left[-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}\right) \text{ rad}$.
 - Calcule los momentos de primer y segundo orden del proceso y comente si éste es estacionario, cicloestacionario,...
 - Calcule su densidad espectral