1. Cierto sistema binario secuencial emite un símbolo binario, '0' o '1', en cada ciclo de reloj. La probabilidad de cada símbolo depende del estado, A o B, en el que se encuentre el sistema. Concretamente, la probabilidad de emitir '1' en el estado A es $p_A = 2/3$, mientras que en el estado B es $p_B = 1/3$. El sistema inicialmente está en estado A, y permanece en dicho estado durante los primeros N ciclos, donde N es una variable aleatoria geométrica de parámetro $p = 1/4$. A partir del ciclo $N + 1$ inclusive, el sistema permanece en estado B.

   (a) Calcular la probabilidad de que $N = 2$ sabiendo que la secuencia empieza por '101...'.

Solución: Usando la fórmula de Bayes para la partición del espacio muestral inducida por N,

$$\mathsf{Prob}[N = 2 \mid 101\ldots] = \frac{\mathsf{Prob}[101\ldots \mid N = 2]\mathsf{Prob}[N = 2]}{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{Prob}[101\ldots \mid N = k]\mathsf{Prob}[N = k]}$$

Además,

$$\mathsf{Prob}[101\ldots \mid N = 1]\mathsf{Prob}[N = 1] = p_A q_B p_B p = \frac{1}{27} \simeq 0.037$$

$$\mathsf{Prob}[101\ldots \mid N = 2]\mathsf{Prob}[N = 2] = p_A q_A p_B q p = \frac{1}{72} \simeq 0.014$$

$$\mathsf{Prob}[101\ldots \mid N = k]\mathsf{Prob}[N = k] = p_A q_A p_A q^{k-1} p = \frac{1}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-3} \qquad k \geq 3$$

Por tanto, el denominador vale

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{Prob}[101\ldots \mid N = k]\mathsf{Prob}[N = k] = \frac{1}{27}+\frac{1}{72}+\frac{1}{48}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-3} = \frac{29}{216} \simeq 0.134$$

y finalmente

$$\mathsf{Prob}[N = 2 \mid 101\ldots] = \frac{3}{29} \simeq 0.103$$

   (b) ¿Cuál es el valor de N más probable en la situación del apartado anterior?

Solución: Como en el apartado anterior, para todo $n \geq 1$

$$\mathsf{Prob}[N = n \mid 101\ldots] = \frac{\mathsf{Prob}[101\ldots \mid N = n]\mathsf{Prob}[N = n]}{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{Prob}[101\ldots \mid N = k]\mathsf{Prob}[N = k]}$$

y el valor más probable será el que maximice el numerador (dado que el denominador no depende de n). Según los cálculos del apartado anterior, $N = 1$ es el valor más probable, ya que a partir de $n \geq 3$ los valores decrecen y $\mathsf{Prob}[101\ldots \mid N = 3]\mathsf{Prob}[N = 3] \simeq 0.021$.

   (c) Calcular la probabilidad de que al emitirse el primer '0', el sistema se halle todavía en estado A.

Solución:

Sea X la posición en la que aparece el primer '0'. Si $k \leq n$, entonces

$$\mathsf{Prob}[X = k \cap N = n] = \mathsf{Prob}[X = k \mid N = n]\mathsf{Prob}[N = n] = p_A^{k-1} q_A q^{n-1} p = \frac{2^{k-1}}{3^k} \cdot \frac{3^{n-1}}{4^n}$$

El primer '0' ocurrirá en estado A si y sólo si $X \leq N$. Por tanto,

$$\mathsf{Prob}[X \leq N] = \sum_{k \leq n} \mathsf{Prob}[X = k \cap N = n] = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} \cdot \frac{3^{n-1}}{4^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} \cdot \frac{3^{k-1}}{4^{k-1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2}{3}$$

Alternativamente, se puede considerar el suceso complementario "El primer '0' ocurre en estado B" que equivale a que durante los ciclos en estado A solamente se emite '1'. Así,

$$\mathsf{Prob}[X \leq N] = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{Prob}[`\underbrace{1 \ldots 1}_{k} \ldots' \mid N = k]\mathsf{Prob}[N = k] = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p_A^k p q^{k-1} = 1 - \frac{p p_A}{1 - q p_A} = \frac{2}{3}$$

2 En un ordinador, un procés comença en l'instant X i acaba en l'instant Y de manera que (X,Y) constitueix una variable aleatòria bidimensional amb funció de densitat conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Kxy & \text{si } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

(a) Calculeu el valor de la constant K, i les densitats marginals de X i de Y.

(b) Calculeu la covariància de X i Y. En podem concloure alguna cosa sobre la indepèndencia de X i Y?

(c) Definim les noves variables: $\begin{cases} U = X \\ V = Y - X \end{cases}$ Calculeu la densitat conjunta de (U,V).

(d) El temps de processat es la variable $Y - X$. Calculeu la seva densitat i la seva esperança, utilitzant els resultats dels apartats anteriors.

Resolució:

(a)

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_x^1 Kxydxdy = K\int_0^1 x(\int_x^1 ydy)dx \\ &= K\int_0^1 x\frac{1-x^2}{2}dx = \frac{K}{2}\int_0^1 (x-x^3)dx = \frac{K}{8} \end{aligned}$$

d'on $K = 8$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^1 8xydy = 8x\int_x^1 ydy = 4(x-x^3), \qquad 0 < x < 1.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y 8xydx = 8y\int_0^y xdx = 4y^3, \qquad 0 < y < 1.$$

(b)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 x\cdot 4(x-x^3) = \frac{8}{15}.$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^1 y\cdot 4y^3 = \frac{4}{5}.$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy == \int_0^1\int_x^1 xy\cdot 8xydxdy = 8\int_0^1 x^2(\int_x^1 y^2dy)dx \\ &= 8\int_0^1 x^2\frac{1-x^3}{3}dx = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$$C[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{4}{225}.$$

Donat que $C[X,Y] \neq 0$, X i Y no són independents.

(c) Invertint la relació, trobem $X = U, Y = U + V$. El jacobià és $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$. Llavors,

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(u,u+v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 8u(u+v) = 8(u^2+uv)$$

en la regió $u > 0, v > 0, u + v < 1$.

(d) Com $V = Y - X$ és una de les noves variables de l'apartat anterior, calculem la marginal:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)du = 8\int_0^{1-v}(u^2+uv)du = 8(\frac{(1-v)^3}{3} + v\frac{(1-v)^2}{2})$$

$$= \frac{4}{3}(1-v)^2(2+v), \qquad 0 < v < 1.$$

$$E[V] = E[Y-X] = E[Y] - E[X] = \frac{4}{5} - \frac{8}{15} = \frac{4}{15}.$$