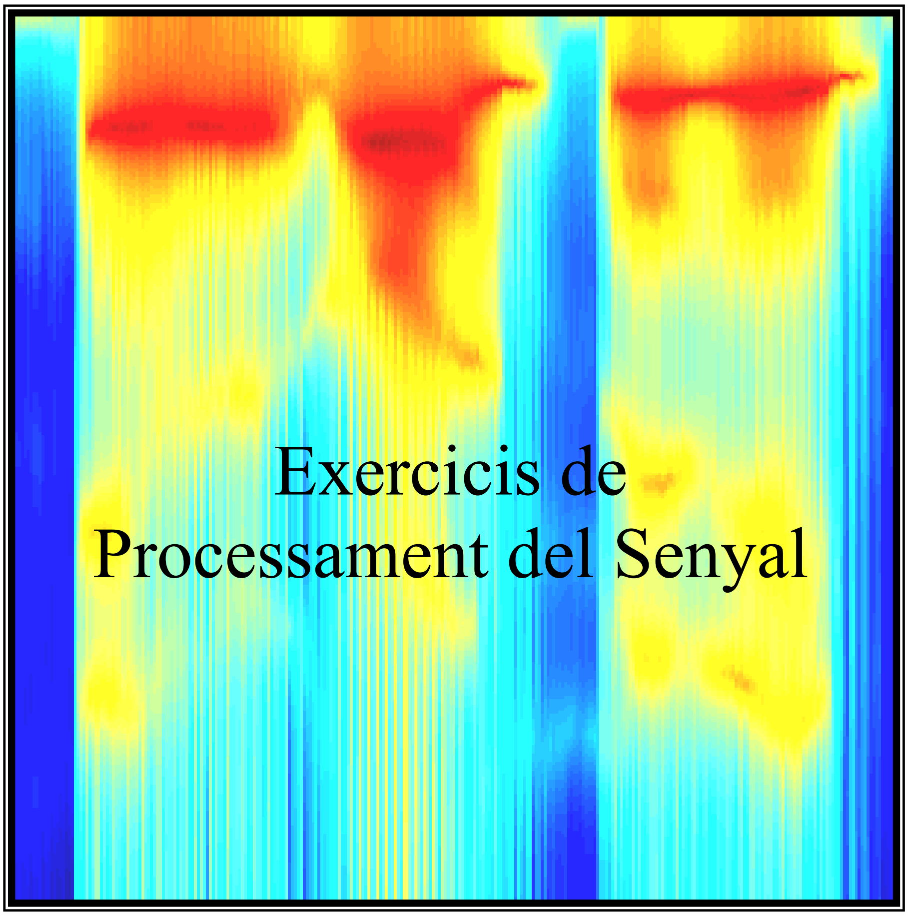
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ



Exercicis de Processament del Senyal

Javier Hernando, Miguel A. Lagunas, Meritxell Lamarca, Ferran Marqués,
José B. Mariño, Enric Monte, Climent Nadeu, Montserrat Nájar, Albert Oliveras,
Ana I. Pérez, Jaume Riba, Javier Rodríguez, Luis Torres, Gregori Vázquez, Josep Vidal

Dep. Teoria del Senyal i Comunicacions

Feb 2009

1. PROCESSOS ALEATORIS I ESTIMACIO DE PARAMETRES

1.1 Per modelar els efectes d'arrodoniment i de truncament d'una seqüència $x(n)$, la seqüència quantificada $y(n)$ es pot representar com

$$y(n) = \mathrm{Q}[x(n)] = x(n) + e(n)$$

on Q[.] denota l'arrodoniment o el truncament i $e(n)$ és l'error de quantificació. Fent les hipòtesis adequades, es pot suposar que la seqüència $e(n)$ és soroll blanc, és a dir

$$\mathrm{E}[(\mathrm{e}(n+m)-m_e)(e(n)-m_e)] = \sigma_e^2\delta(m)$$

on m_e és la seva mitjana i σ_e^2 la variància. A la figura es mostren les funcions de densitat de probabilitat de l'error d'arrodoniment (figura 1) i de truncament (figura 2).

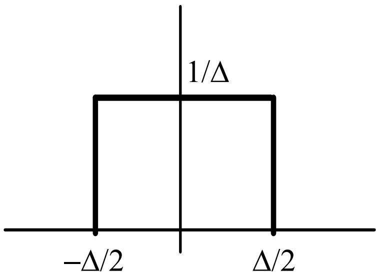


Figura 1

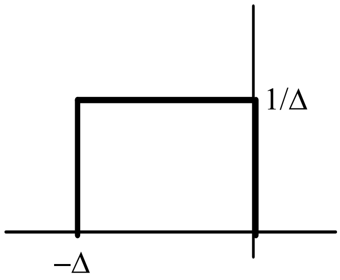


Figura 2

Es demana trobar la mitjana i la potència tant de l'error d'arrodoniment com del de truncament.

1.2 Sigui el procés

$$x(n) = \sum_{l=1}^{L} A_l sin(2\pi f_l n + \theta_l) + w(n)$$

on les fases inicials són variables aleatòries independents uniformement distribuïdes a l'interval de 0 a 2π i $w(n)$ és soroll blanc independent amb potència σ_w^2. Calcular la seva seqüència d'autocorrelació.

1.3 Sigui $x(n)$ un procés estocàstic discret (complex) estacionari de mitjana m_x i seqüència d'autocorrelació $R_{xx}(m)$. Sigui $y(n)$ la resposta a $x(n)$ d'un sistema discret, lineal i invariant amb el temps, amb resposta impulsional $h(n)$.
Es demana:

a) Justificar raonadament que $y(n)$ és un procés estocàstic discret estacionari.
b) Trobar l'expressió de la mitjana m_y del procés $y(n)$ en termes de m_x i $h(n)$.
c) Trobar les expressions de les seqüències d'autocorrelació creuades dels processos $x(n)$ i $y(n)$, és a dir, $R_{xy}(m)$ i $R_{yx}(m)$, en termes de $R_{xx}(m)$ i $h(n)$.

d) Trobar l'expressió de la seqüència d'autocorrelació del procés $y(n)$, $R_{yy}(m)$, en termes d'$R_{yx}(m)$ i $h(n)$. Substituint $R_{yx}(m)$ per l'expressió obtinguda a la qüestió (c), expressar $R_{yy}(m)$ en termes de $R_{xx}(m)$ i $h(n)$.

e) Aplicant la transformació de Fourier a l'expressió obtinguda a l'apartat anterior, trobar la densitat espectral de potència del procés $y(n)$, $S_{yy}(\omega)$, en termes de la densitat espectral de potència del procés $x(n)$, $S_{xx}(\omega)$, i de la resposta freqüencial del sistema $H(e^{j\omega})$.

1.4 Donat que, en moltes aplicacions, les seqüències aleatòries discretes provenen d'un mostratge periòdic de senyals aleatoris analògics, en aquest problema es tractarà el teorema de mostratge de senyals aleatoris. Consideri's un procés estocàstic analògic definit per les variables aleatòries $\{x_a(t)\}$, on t és una variable real. La funció d'autocorrelació es defineix com

$$R_{xx}(\tau) = \mathrm{E}[x_a(t+\tau)\, x_a(t)]$$

i la densitat espectral de potència és

$$S_{xx}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

Un procés estocástic discret obtingut per mostratge periòdic es defineix pel conjunt de variables aleatòries $\{x(n)\}$, on $x(n)=x_a(nT)$ i T és el periode de mostratge.

Es demana:

a) Quina és la relació entre l'autocorrelació del procés discret $R_{xx}(m)$ i $R_{xx}(\tau)$?

b) Expressar la densitat espectral de potència del procés discret $S_{xx}(\omega)$ en termes d'$S_{xx}(\Omega)$.

c) Sota quina condició és $R_{xx}(m)$ una representació útil de $S_{xx}(\Omega)$?

1.5 Sigui el sistema lineal caracteritzat per l'equació de recurrència

$$y(n)=0.8\, y(n-1) + x(n) + x(n-1)$$

on x(n) és un procés aleatori estacionari en sentit ampli de mitjana zero i autocorrelació

$$R_{xx}(m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}$$

Es demana calcular:

a) La densitat espectral de potència de la sortida y(n).

b) L'autocorrelació $R_{yy}(m)$ de la sortida.

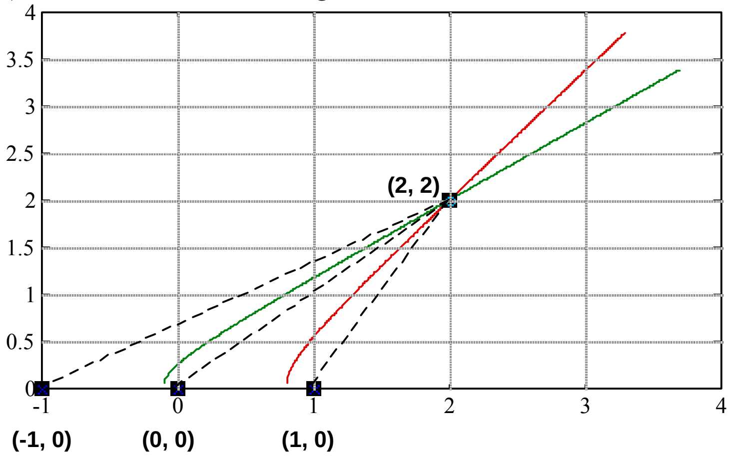
c) La potència σ_y^2 de la sortida.

1.6 S'ha observat que un procés aleatori consta de la suma del procés AR

$$s(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k s(n-k) + v(n)$$

i d'un procés soroll blanc w(n) independent de v(n) i amb potència σ_w^2. El procés aleatori v(n) també és blanc i té potència σ_v^2. Les seqüències w(n) i v(n) són incorrelades. Demostreu que el procés observat x(n)=s(n)+w(n) és ARMA d'ordre p, tant de numerador com de denominador.

1.7 A sistemes RADAR passius s´utilitza la estimació de diferència de temps d´arribada (TDOA) i freqüència d´arribada (FDOA) per determinar la posició i velocitat de fonts mòbils. Suposem una font mòbil que transmet un senyal s(n) desde una posició (2, 2). Aquest senyal és captat per tres sensors situats a les posicions (-1, 0), (0, 0) i (1, 0) tal com s´indica a la figura.



La diferència de temps d´arribada dels senyals rebuts pels sensors (0, 0) i (1, 0) es correspon amb el retard equivalent a una distància $\sqrt{8}-\sqrt{5}$, mentre que entre els sensors (0, 0) y (-1, 0) és negatiu i correspon a una distància $\sqrt{13}-\sqrt{8}$. Les corbes corresponents als punts que satisfan aquesta diferència de temps d´arribada només intersequen a la posició correcta del mòbil. Un cop determinada la posició del mòbil, el seu vector de velocitat por calcular-se a partir de la corresponent diferència de freqüències d´arribada considerant l'efecte Doppler. Es demana:

a) Indiqueu les equacions que faríeu servir per determinar el vector de velocitat del mòbil partint de la mesura de diferència de freqüències d´arribada entre els sensors (0, 0) i (1,0), f_{d1}, i els sensors (0, 0) i (-1, 0), f_{d2}

A continuació veurem com poden fer-se servir mesures de correlació per a l´estimació de TDOA i FDOA. Disposem dels senyals rebuts pels sensors:

$$x_1(n) = s(n) + w_1(n)$$
$$x_2(n) = s(n+m)\exp(-j2\pi f_d n) + w_2(n)$$

on s(n) és el senyal d´interès, i $w_1(n)$ i $w_2(n)$ són sorolls independents de s(n) i amb certa correlació entre els . Els senyals s(n), $w_1(n)$ i $w_2(n)$ son processos ergòdics de mitjana zero. El nostre objectiu és estimar el TDOA i la FDOA, és a dir *m* i f_d respectivament. Es demana:

b) Expresseu l´autocorrelació de $x_1(n)$, l´autocorrelació de $x_2(n)$ i la correlació encreuada entre $x_1(n)$ i $x_2(n)$ en funció de les autocorrelacions de s(n), $w_1(n)$ i $w_2(n)$ i de les seves correlacions encreuades.
c) Expresseu la densitat espectral de potència de $x_1(n)$ i la densitat espectral de potència de $x_2(n)$ en funció de les densitats espectrals de potència de s(n), $w_1(n)$ i $w_2(n)$
d) Són els processos $x_1(n)$ i $x_2(n)$ estacionaris en sentit ampli? Són conjuntament estacionaris en sentit ampli?
e) Es pretén estimar el TDOA i FDOA (és a dir m i f_d) mitjançant la funció $\rho(k,\beta)$,

$$\rho(k,\beta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x_1(n+k)x_2^*(n)\exp(-j2\pi\beta n)$$

Per estudiar la seva aplicació:
  e.1) Calculeu $E\{\rho(k,\beta)\}$
  e.2) Considereu $w_1(n)$ independent de $w_2(n)$. Calculeu el màxim de $E\{\rho(k,\beta)\}$.
  e.3) Què succeeix si $w_1(n)$ està correlat amb $w_2(n)$?

1.8 Se dispone de N muestras incorreladas de un proceso estacionario x(n), a partir de las cuales se estima la media m_x y la varianza σ_x^2 mediante las expresiones:

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x(n)-\hat{m}_x\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\left(x(n)-m_x\right)-\left(\hat{m}_x-m_x\right)\right\}^2$$

Se pide:
a) El sesgo del estimador $\hat{\sigma}_x^2$.
b) Un estimador insesgado para σ_x^2.

1.9 De una magnitud x se han realizado dos medidas z_i (i=1,2) por 2 procedimientos distintos, cada uno de los cuales introduce un error v_i (i=1,2):

$$z_i = x + v_i$$

Supuesto que los errores son gausianos, de media nula, con varianza σ_i^2 (i=1,2) e independientes entre sí, determine el estimador de máxima verosimilitud para x en función de z_1 y z_2. Generalice este estimador para el caso de disponer de N medidas independientes de x. Calcule su sesgo.

1.10 Si **x**(n) és un procés no-estacionari, cada mostra x(n) d'una realització té, en general, una mitjana E{**x**(n)} diferent. Per tant, si es vol estimar E{**x**(n)} per a $n=n_1$ a partir d'una sola realització, només es disposa de la mostra $x(n_1)$. Quina és l'estimació de màxima versemblança (ML) d' E{**x**(n_1)} a partir de la mostra x(n_1) si el procés és gaussià?

1.11 Per tal de calcular l'àrea *A* d'un rectangle es medeix la longitud dels seus costats *a* i *b*. La mesura i-èsima es pot expressar en funció de l'error com

$$x_i = a + \varepsilon_i$$
$$y_i = b + \nu_i$$

Suposant que els error són independents, de mitja nul.la i de variància σ^2, determini el biaix i la variància en l'estimació de l'àrea

$$A_i = x_i\, y_i$$

Per tal de disminuir la variància de l'estimació es fa un promig de N mesures. Es proposen les següents alternatives:

$$\hat{A}_1 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_i\right)$$
$$\hat{A}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i$$

Quina de les dues recomanaria? Perquè?

1.12 Para determinar una magnitud *b* de una muestra B se dispone de un dispositivo **D** cuya medida produce un error *e* con media *m* no nula y varianza σ^2 (ambas desconocidas). Para calibrar el dispositivo se posee una muestra A cuya magnitud *a* se conoce con una precisión superior a la que se puede obtener mediante el dispositivo **D**. El proceso de medida es el siguiente:

a) se mide la muestra A de calibrado N veces y se estima el sesgo del dispositivo mediante la expresión

$$\hat{m} = \tfrac{1}{N}\sum_i x_i^A - a$$

b) se mide M veces la muestra B cuya magnitud *b* se desea establecer y se estima su magnitud mediante

$$\hat{x} = \tfrac{1}{M}\sum_j x_j^B - \hat{m}$$

Suponiendo los errores de todas las medidas independientes entre sí, se pide:
1.- El sesgo de la estimación $\hat{x}$.
2.- La varianza de la estimación $\hat{x}$ en función de *M*, *N* y σ^2 (la varianza del error del dispositivo **D** de medida).
3.- Para un total de medidas dado $N_T = N+M$, la relación entre *M* y *N* para que la varianza de $\hat{x}$ sea mínima.

1.13 Para estimar la media de un proceso estacionario con muestras incorreladas *x*(*n*) se usa la salida *y*(*n*) del filtro IIR causal

$$y(n) = a\, y(n-1) + b\, x(n)$$

donde $0 < a < 1$. Se desea analizar las propiedades de este estimador para n suficientemente grande, de modo que $y(n)$ pueda considerarse un proceso estacionario. Se pide:

a) La relación entre las constantes a y b para que el estimador sea insesgado.
b) La varianza de la estimación insesgada en función de la varianza de $x(n)$.

1.14 Sea $y(n) = ax(n) + e(n)$, donde a es un parámetro desconocido, $x(n)$ es una secuencia determinista y $e(n)$ es ruido blanco gaussiano de media nula y varianza σ_e^2.

1.- Razónese que la función de densidad de probablidad de $\mathbf{y} = \{y(0),...,y(N-1)\}$ es

$$f_{\mathrm{y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_e^2\right)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\sum_{n=0}^{N-1}[y(n) - ax(n)]^2\right\}$$

2.- A partir de N muestras de $y(n)$ y $x(n)$, $n = 0,1,...,N-1$, se estima a como:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n)}{\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)}$$

¿Es un estimador eficiente?

NOTA: Condición de CR para estimador eficiente: $\frac{\partial}{\partial a}\ln f_{\mathrm{y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\mathrm{var}(\hat{a})}(\hat{a} - a)$

1.15. Es vol determinar l'amplitud d'unes exponencials observades en condicions sorolloses. Per això es desposa de N mostres d'una realització d'aquest senyal, que corresponen al següent model:

$$x(n) = \sum_{k=1}^{p} a_k s_k^n + v(n) \qquad\qquad n = 0,1,...,N-1$$

on $v(n)$ és un procés blanc, de mitjana nul·la i potència σ_v^2. Es demana:

1) Escriviu en detall les components de l'equació matricial corresponent al model: $\underline{x} = \underline{\underline{S}}\,\underline{a} + \underline{v}$
2) Si el soroll és Gaussià, quin és l'estimador de màxima versemblança $\underline{\hat{a}}_{ML}$ del vector $\underline{a}$?
3) Quina condició ha de cumplir la matriu $\underline{\underline{S}}^H \underline{\underline{S}}$ perquè l'estimador $\underline{\hat{a}}_{ML}$ no tingui biaix?
4) Calculeu la matriu de covariancia de $\underline{\hat{a}}_{ML}$.

5) Sabent que la matriu de covariància de $\underline{\hat{a}}_{ML}$ ve donada per $\underline{\underline{C}}_{\underline{a}} = \sigma_v^2 \left(\underline{\underline{S}}^H \underline{\underline{S}} \right)^{-1}$, determineu si l'estimador és consistent per al cas $p = 2$, i $s_1 = 1$, $s_2 = -1$.

1.16. Se van a comparar dos estimaciones del parámetro autorregresivo a de un proceso x(n) real, de media nula, AR de orden 1 a partir de N muestras del mismo, desde x(0) a x(N-1). La primera estimación supondrá gaussianidad y maximizará la verosimilitud de observar el proceso.

a) Demuestre que la función de verosimilitud se puede escribir como

$$f\left(x(0),\ldots,x(N-1)/a\right) = K \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{N-1} \left(x(n) - ax(n-1) \right)^2 / 2\sigma^2 \right\}$$

donde σ es la desviación típica del ruido excitador $e(n)$ del modelo AR(1) y K es una constante.

b) Compruebe que maximizar la verosimilitud es equivalente a minimizar $\sum_{n=1}^{N-1} \left(x(n) - ax(n-1) \right)^2$
c) Escribir la estimación de máxima verosimilitud a_{ML} en términos de las muestras de x(n), n = 0,…, N-1.

La segunda estimación proviene de aplicar las ecuaciones de Yule-Walker (ecuaciones normales) para el modelo AR(1), sobre el estimador sesgado de la correlación. En este caso:

d) Escriba el parámetro a en términos de la autocorrelación $r_x(m) = E\{x(n)x(n+m)\}$ del proceso AR.
e) Escriba su estimación a_{YW} en términos de las muestras de x(n), n = 0,…, N-1, usando el estimador sesgado de la autocorrelación

A la vista de las expresiones obtenidas para a_{ML} y a_{YW} en (c) y (e),

f) ¿Cuál de las dos estimaciones garantiza la estabilidad del filtro del modelo?
g) A partir de las ecuaciones del modelo AR de orden 1 extrapole un estimador para $r_x(2)$.

1.17 Sea e(n) la secuencia de errores cometidos en las N sucesivas medidas x(n) (n = 0, 1, ... N-1) de una magnitud de valor **M**. Se ha comprobado que el error e(n) puede considerarse un proceso estacionario con media nula y cuyas muestras están correladas de modo que

$$r_e(m) = \sigma^2 a^{|m|}$$

es decir, e(n) es un proceso AR de orden 1. A partir de las muestras x(n) se genera, mediante filtrado por un sistema FIR de orden 1 con función de transferencia

$$H(z) = h(0) + h(1)\, z^{-1} = K\,(1 + b\, z^{-1})$$

una nueva secuencia de medidas y(n) (n = 1, 2, ... N-1). Finalmente, se estima el valor de **M** promediando las muestras de y(n). Se pide:

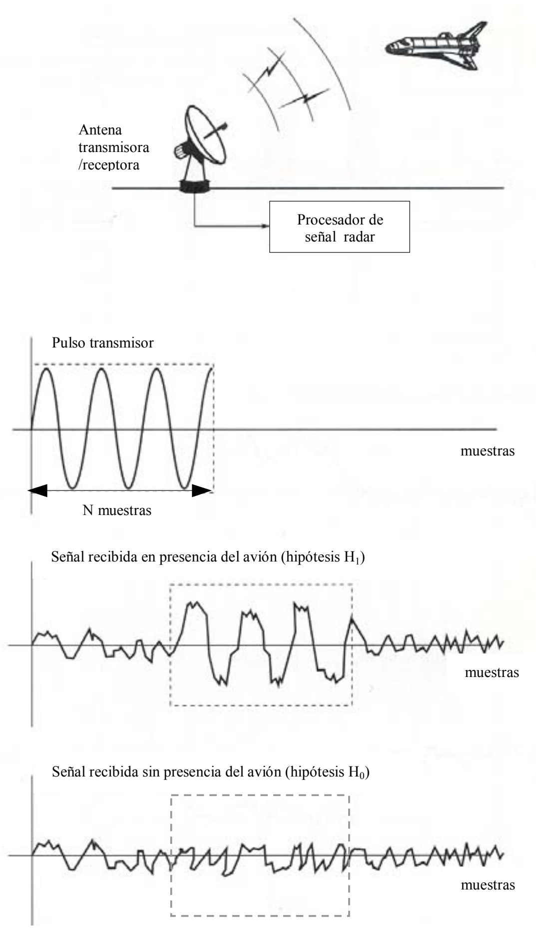
a) La condición que ha de satisfacer la respuesta impulsional del filtro H(z) para que las medidas y(n) no estén sesgadas:

$$E\{y(n)\} = \mathbf{M}$$

b) Bajo la condición anterior, expresar en función de e(n) y h(n) el error v(n) en la medida y(n).

c) Partiendo del modelo AR del error e(n), determinar en función de H(z) la transformada z de la correlación de v(n). Obtener H(z) para que las muestras de v(n) estén incorreladas. Obtener la potencia de v(n) en función de los parámetros σ^2 y **a** del modelo AR de e(n), y de la respuesta impulsional de H(z).

d) Si se hace uso del filtro H(z) obtenido en el apartado anterior, determinar el sesgo y la varianza de la estimación de **M** obtenida promediando las N-1 muestras y(n).



1.18 En un sistema de radar el transmisor emite una señal radioeléctrica cuya forma de onda es conocida. Cuando esa señal encuentra un objeto en su camino, se refleja y vuelve al transmisor atenuada y enmascarada por el ruido. En el caso de que no exista un objeto reflector, el receptor observa únicamente ruido (véase la figura). De esta forma, el detector trabaja con dos hipótesis que debe verificar sobre *N* muestras de la señal recibida: la presencia de señal reflejada *s*(*n*) más ruido *w*(*n*) (hipótesis H_1) o la sola presencia del ruido *w*(*n*) (hipótesis H_0). Matemáticamente:

$$H_0 : \underline{x} = \underline{w}$$
$$H_1 : \underline{x} = \underline{s} + \underline{w}$$

donde cada uno de los vectores contiene *N* muestras de señal, y el ruido es de media nula y covarianza $\underline{\underline{C}}_w$.

El detector óptimo se define de la siguiente forma: se decide la hipótesis H_1 cuando

$$L(\underline{x}) = \frac{f(\underline{x};H_1)}{f(\underline{x};H_0)} > \gamma \qquad (1)$$

donde $f(\underline{x};H_i)$ es la función de densidad de probabilidad de $\underline{x}$ cuando se cumple la hipótesis H_i. El umbral γ determina la probabilidad de falsa alarma (P_{FA}): probabilidad de decidir H_1 cuando en realidad sólo se ha recibido ruido. Si el umbral γ es demasiado pequeño el detector decidirá con alta probabilidad, y a causa del ruido, la presencia de objetos reflectores que en realidad no están presentes.

En este problema se pretende estudiar cuál es el mejor diseño para la señal a transmitir, suponiendo que el ruido es gausiano[1] y se conoce su matriz de covarianza $\underline{\underline{C}}_w$. Se pide:

a) Demuestre que el criterio de detección dado por la ecuación (1) puede transformarse en la siguiente operación sobre el vector de datos recibido:

$$z = \underline{x}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1} \underline{s} > \gamma' \qquad (2)$$

donde γ' es un nuevo umbral que depende de γ. Determine la expresión de γ'.

b) ¿Podemos decir que la función de densidad de probabilidad de z es gausiana en cada una de las hipótesis? ¿Por qué?

En el caso gausiano, la maximización del cociente $\frac{\left|E\{z;H_1\}\right|^2}{E\{z^2;H_0\}}$ minimiza la probabilidad de falsa alarma P_{FA}. A partir de esta observación, se pretende determinar el vector de señal $\underline{s}$ óptimo a transmitir con la restricción de que la energía del vector de señal tenga un valor E preestablecido. Se pide:

c) Calcule la media de la variable de decisión z para la hipótesis H_1 ($E\{z;H_1\}$) y la varianza para la hipótesis H_0 ($E\{z^2; H_o\}$).

d) Formule mediante multiplicadores de Lagrange la función cuya optimización proporciona el vector $\underline{s}$ que maximiza $\underline{s}^T\underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s}$ y satisface la restricción de energía. ¿Cuál es el $\underline{s}$ óptimo?

1.18 La estimación $\hat{\theta}_u$ de un parámetro escalar θ a partir de un conjunto de datos $\{x_i\}_{1\le i\le N}$ es no sesgada y de varianza $\mathrm{var}(\hat{\theta}_u)$ mínima (por tanto es el estimador denominado *MVU* o estimador "*Minimum-Variance and Unbiased*"). Así pues, el *error cuadrático medio* (*MSE*) es tal que:

$$MSE\left(\hat{\theta}_u\right) = E\left[\left|\theta - \hat{\theta}_u\right|^2\right] = \left|\theta - E\left[\hat{\theta}_u\right]\right|^2 + \mathrm{var}\left(\hat{\theta}_u\right) = \mathrm{var}\left(\hat{\theta}_u\right)$$

En este ejercicio, comprobaremos que la solución anterior no es la que proporciona un *MSE* mínimo y que *existen estimaciones* <u>*sesgadas*</u> *que mejoran la varianza y el MSE del estimador*.

Considere que el estimador sesgado es de la forma siguiente:

$$\hat{\theta}_b = (1+m)\hat{\theta}_u$$

donde 'm' es una constante:

a. Obtenga el valor del sesgo cuadrático $bias^2\left(\hat{\theta}_b\right) = \left|\theta - E\left[\hat{\theta}_b\right]\right|^2$.

b. Obtenga el valor de la varianza $\mathrm{var}(\hat{\theta}_b)$ del nuevo estimador.

---

[1] La función de densidad de probabilidad gausiana para un vector $\underline{x}$ de variables aleatorias reales es:

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\underline{\underline{C}}_x)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m}_x)^T \underline{\underline{C}}_x^{-1}(\underline{x}-\underline{m}_x)\right)$$

c. A partir de (a.) y (b.), indique el valor de 'm' que hace mínimo el $MSE(\hat{\theta}_b)$ en función del cociente $\rho = \theta^2 / \mathrm{var}(\hat{\theta}_u)$. Compruebe que $-1 \leq m \leq 0$.

d. Dibuje cualitativamente los términos $bias^2(\hat{\theta}_b)$, $\mathrm{var}(\hat{\theta}_b)$ y $MSE(\hat{\theta}_b)$ en función de la constante 'm' y justifique gráficamente la existencia de dicho mínimo.

Un ejemplo en el que el cociente $\rho = \theta^2 / \mathrm{var}(\hat{\theta}_u)$ es constante, es el siguiente. Consideramos la siguiente función densidad de probabilidad exponencial:

$$f_x(x) = \begin{cases} (1/\theta)\exp(-x/\theta) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

La estimación *MVU* de θ y la varianza asociada para este caso vienen dadas por:

$$\hat{\theta}_u = (1/N)\sum_{i=1}^{N} x_i$$
$$\mathrm{var}(\hat{\theta}_u) = \theta^2 / N$$

e. A partir del resultado obtenido en (c.), obtenga la expresión del estimador sesgado $\hat{\theta}_b$ de mínimo MSE para la distribución exponencial anterior y demuestre que $MSE(\hat{\theta}_b) < MSE(\hat{\theta}_u)$.

Lamentablemente, no siempre el cociente $\rho = \theta^2 / \mathrm{var}(\hat{\theta}_u)$ es constante, de modo que la constante 'm' pasaría a depender del parámetro θ y no sería posible aplicar la técnica anterior para reducir el *MSE*. Consideramos ahora el caso en que $\mathrm{var}(\hat{\theta}_u) = V$ es constante y nos planteamos hacer máxima la diferencia entre el $MSE(\hat{\theta}_b)$ y $MSE(\hat{\theta}_u)$ en un intervalo del parámetro a estimar, es decir, en el rango $|\theta| \leq \theta_o$.

f. Obtenga el margen de valores de $(1+m)$ que verifican $MSE(\hat{\theta}_u) - MSE(\hat{\theta}_b) > 0$ en el rango $|\theta| \leq \theta_o$.

g. Indique la solución sesgada $\hat{\theta}_b$ en función de la $\hat{\theta}_u$ que maximiza la diferencia $MSE(\hat{\theta}_u) - MSE(\hat{\theta}_b) > 0$ en el rango $|\theta| \leq \theta_o$.

h. ¿Qué ocurre con la solución en (g.) si $\theta_o \to \infty$?

1.19 Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ dos estimadores no sesgados de θ cuyas varianzas son $\mathrm{var}\{\hat{\theta}_1\} = \sigma_1^2$ y $\mathrm{var}\{\hat{\theta}_2\} = \sigma_2^2$ respectivamente, y cuya covarianza es $E\{(\hat{\theta}_1 - \theta)(\hat{\theta}_2 - \theta)\} = \rho\sigma_1\sigma_2$, con $|\rho| \leq 1$. Vamos a determinar la forma óptima de combinarlos linealmente para obtener otro estimador

$$\hat{\theta}_3 = \begin{bmatrix} h_1^* & h_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{h}^H \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

insesgado tal que la varianza sea mínima. Se pide:

1. ¿Qué condición ha de cumplir **h** para que $\hat{\theta}_3$ sea insesgado?
2. Calcule **h** para que $\hat{\theta}_3$ sea insesgado y de varianza mínima.
3. ¿Cual es esa varianza mínima?
4. ¿Qué es más conveniente: que $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ estén correlados o incorrelados?

Nota: $\begin{bmatrix} x^2 & rxy \\ r^*xy & y^2 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{1-|r|^2} \begin{bmatrix} 1/x^2 & -r/xy \\ -r^*/xy & 1/y^2 \end{bmatrix}$

1.20 Suponga que se dispone de una realización de una variable aleatoria vectorial **x**. Las d componentes del vector toman valores binarios 0 ó 1 con probabilidad 1-p y p respectivamente, esto es $\mathbf{x} \in \{0,1\}^{d\times 1}$, o también $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_d]^T \quad x_k \in \{0,1\}$. Si la función de densidad de probabilidad del elemento k del vector **x** es

$$f_{x_k}(x_k) = p^{x_k}(1-p)^{1-x_k}$$

1. ¿Cual es la función de densidad de probabilidad conjunta $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ si las componentes del vector son independientes entre si?
2. Obtenga la estimación ML de p.
3. ¿Es un estimador sesgado?
4. Demuestre que coincide con el estimador eficiente y determine su varianza.

Qüestions

Q.1.1 Si les variables aleatòries x_1 i x_2 són de mitjana zero i igualment distribuïdes, raoneu en quines condicions es compleix que $\mathrm{var}\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) = \mathrm{var}(x_1)$.

Sol.lucions

1.1 Mitja arrodoniment = 0 Variància arrodoniment = $\Delta^2/12$
Mitja truncament = $-\Delta/2$ Potència truncament = $\Delta^2/12+\Delta^2/4$

1.2 $r_{xx}(m) = \sum_{l=1}^{L} \frac{A_l^2}{2}\cos(2\pi f_l m) + \sigma_w^2 \delta(m)$ És estacionari i ergòdic.

1.5 a) $S_{yy}(\omega) = \frac{1+\cos\omega}{0.82-0.8\cos\omega} \cdot \frac{3}{5-4\cos\omega}$

b,c) $r_{yy}(m) = 37.5(0.8)^{|m|} - 12.5(0.5)^{|m|}$

$\sigma_y^2 = 25$

1.7 a)

$$(v_x, v_y)\left(\frac{1}{\sqrt{8}}(2{,}2) - \frac{1}{\sqrt{5}}(1{,}2)\right)\frac{f_c}{c} = f_{d1}$$

$$(v_x, v_y)\left(\frac{1}{\sqrt{8}}(2{,}2) - \frac{1}{\sqrt{13}}(3{,}2)\right)\frac{f_c}{c} = f_{d2}$$

b) Si els sorolls són conjuntament estacionaris en sentit ampli:

$$r_{x_1}(n,m) = E\left\{x_1(n+m)x_1^*(n)\right\} = r_s(m) + r_{n_1}(m) = r_{x_1}(m)$$

$$r_{x_2}(n,m) = E\left\{x_2(n+m)x_2^*(n)\right\} = r_s(m)\exp(-j2\pi f_d m) + r_{n_2}(m) = r_{x_2}(m)$$

$$r_{x_1x_2}(n,m) = E\left\{x_1(n+m)x_2^*(n)\right\} = r_s(m-a)\exp(-j2\pi f_d n) + r_{n_1n_2}(m)$$

c)

$$S_{x_1}(f) = \sum_m r_{x_1}(m)\exp(-j2\pi mf) = S_s(f) + S_{n_1}(f)$$

$$S_{x_2}(f) = \sum_m r_{x_2}(m)\exp(-j2\pi mf) = S_s(f+d) + S_{n_2}(f)$$

e.1) Per a β, $f_d < 0.5$ $E\left\{\rho(m,\beta)\right\} = r_s(m-a)\delta(\beta - f_d) + r_{n_1n_2}(m)\delta(\beta)$

e.2) $E\left\{\rho(m,\beta)\right\} = r_s(m-a)\delta(\beta - f_d)$ Màxim per a $m=a, \beta=f_d$ de valor $r_s(0)$

1.18 a) *Sustituyamos en la ecuación (1) las expresiones de la función de densidad de probabilidad gausiana, para cada una de las hipótesis:*

$$f(\underline{x};H_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det\left(\underline{\underline{C}}_w\right)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{x}\right)$$

$$f(\underline{x};H_1) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det\left(\underline{\underline{C}}_w\right)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right)$$

$$L(\underline{x}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{x}\right)} > \gamma$$

Si operamos sobre esta expresión (extrayendo logaritmos y reagrupando términos hacia la derecha):

$$\ln L(\underline{x}) = -\tfrac{1}{2}(\underline{x}-\underline{s})^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}(\underline{x}-\underline{s}) + \tfrac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{x} > \ln\gamma$$
$$\ln L(\underline{x}) = \underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{x} - \tfrac{1}{2}\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s} > \ln\gamma$$
$$z = \underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{x} > \ln\gamma + \tfrac{1}{2}\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s} = \gamma'$$

b) *Sí es gausiana porque la expresión* $\underline{x}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s}$ *es un producto escalar del vector de señal observado* $\underline{x}$ *con el vector* $\underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s}$. *La gausianidad proviene del hecho de que una combinación lineal de variables aleatorias gausianas también es una variable aleatoria gausiana, independientemente de si la media es o no nula.*

c)

$$E\{z;H_0\} = E\left\{\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{w}\right\} = 0$$
$$E\{z;H_1\} = E\left\{\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}(\underline{s}+\underline{w})\right\} = \underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s}$$
$$\operatorname{var}\{z;H_0\} = \operatorname{var}\left\{\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{w}\right\} = E\left\{\left(\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{w}\right)^2\right\} = E\left\{\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{w}\,\underline{w}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s}\right\} = \underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s}$$
$$\operatorname{var}\{z;H_1\} = E\left\{\left(\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{x} - E\left\{\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{x}\right\}\right)^2\right\} = E\left\{\left(\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\left(\underline{x}-E\{\underline{x}\}\right)\right)^2\right\}$$
$$= E\left\{\left(\underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s}\right)^2\right\} = \operatorname{var}\{z;H_0\}$$

d) *Maximicemos la expresión* $\dfrac{\left|E\{z;H_1\}\right|^2}{E\{z^2;H_0\}} = \underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s}$, *con la restricción sobre la energía* $\underline{s}^T\underline{s} = N$. *El funcional a minimizar viene dado por:* $F(\underline{s}) = \underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s} + \lambda\left(N - \underline{s}^T\underline{s}\right)$. *Su minimización (igualando el gradiente a* $\underline{0}$*):*

$$\nabla_{\underline{s}} F(\underline{s}) = \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s} - \lambda\underline{s} = \underline{0}$$

nos dice que el vector $\underline{s}$ *debe ser un autovector de* $\underline{\underline{C}}_w^{-1}$. *Sustituyendo la solución* $\underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s} = \lambda\underline{s}$ *en* $\dfrac{\left|E\{z;H_1\}\right|^2}{E\{z^2;H_0\}} = \underline{s}^T \underline{\underline{C}}_w^{-1}\underline{s} = \lambda\underline{s}^T\underline{s} = \lambda E$, *expresión que se maximiza cuando* λ *es al autovalor máximo de* $\underline{\underline{C}}_w^{-1}$, *y por tanto* $\underline{s}$ *es su autovector asociado.*

2. ESTIMACIO ESPECTRAL

2.1 Demostrar que el periodograma

$$S(\omega) = \frac{1}{L}\left|\sum_{n=0}^{L-1} x(n)\exp(-j\omega n)\right|^2$$

coincideix amb la transformada de Fourier de l'estimador esbiaixat de l'autocorrelació

$$R(m) = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-m-1} x(n+m)x(n) \qquad m \geq 0$$

2.2 Demostrar que el valor esperat de l'estimador de Welch $E\left\{S_w(\omega)\right\}$ és proporcional a $S(\omega)*\left|W(e^{j\omega})\right|^2$ on $S(\omega)$ es el valor exacte de la densitat espectral de potència del procés i $W(e^{j\omega})$ és la transformada de Fourier de la finestra *w(n)* aplicada sobre les dades.

2.3 Suposi's que l'espectre de potència d'un senyal x(n) consisteix en un únic pic de posició desconeguda i ample de banda entre zeros de 0.01 cicles per mostra. Si s'utilitza el mètode de Barlett (cas particular del mètode de Welch quan no hi ha ensolapament entre segments i s'utilitza finestra rectangular) per estimar l'espectre de x(n), es demana:

a) Suposant que el nombre de mostres N és gran, determinar la longitud de cada segment per tal que la finestra espectral sigui més estreta que el pic.

b) Explicar per què no és convenient prendre més llargs aquests segments.

2.4 Suposi's un estimador espectral de Bartlett, que parteix el segment donat de senyal x(n), $0 \leq n \leq N-1$, en P subsegments consecutius i a continuació promitja els periodogrames resultants de cada subsegment. Es demana:

a) Mostrar que el seu espectre estimat es pot expressar amb

$$\hat{S}_{xx}(\omega) = \frac{1}{PN}\sum_{k=1}^{P}\left|X_k(\omega)\right|^2 = \frac{1}{PN}\sum_{k=1}^{P}\left|\sum_{n=0}^{N-1} w_k(n)x(n)e^{-j\omega n}\right|^2 \qquad (1)$$

indicant com són les finestres $w_k(n)$.

Anem ara a considerar una alternativa a l'estimador de Bartlett que anomenarem estimador multifinestra (MF), el qual es basa en la mateixa expressió (1), però usant $v_k(n)$, $1 \leq k \leq P$, en lloc de $w_k(n)$, on les seqüències $v_k(n)$ són ortonormals i verifiquen que les seves transformades de Fourier $V_k(\omega)$ tenen pràcticament tota l'energia a dins d'una banda d'amplada $B\omega$ centrada entorn de l'origen. Es demana:

b) Suposant que l'estimador MF s'implementa amb un banc de filtres, dibuixar i comentar l'esquema de la part que permet estimar la densitat espectral de potència de la banda centrada entorn de la freqüència $\omega=\omega_0$.

c) Suposant que el procés és soroll blanc de mitjana nul.la, trobar l'expressió de la correlació creuada:

$$E\left\{X_k(\omega)X_i^*(\omega)\right\} \tag{2}$$

Raonar l'interès que té per a la variància de l'estimador MF l'expressió trobada.

d) Sabent que el nombre P de seqüències $v_k(n)$ és proporcional a $B\omega$, mostrar raonadament com $B\omega$ controla el compromís entre la variància i la resolució freqüencial de l'estimador MF.

Anem ara a considerar unes possibles sequencies $v_k(n)$ que presenten propietats d'optimalitat. Suposi's que les sequencies $v_k(n)$, $0 \le n \le N-1$, estan formades pels N elements del vector k-èssim de la transformada de Karhunen-Loéve (KL) del procés y(n) que té per espectre la funció pols

$$S_{yy}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \Delta\omega / 2 \\ 0 & |\omega| > \Delta\omega / 2 \end{cases} \tag{3}$$

Es demana:

e) Escriure el sistema d'equacions que permet trobar $v_k(n)$, indicant l'expressió dels elements de la matriu del sistema.

f) Trobar l'expressió dels autovalors λ_k de la transformació KL de y(n), que són les energies dels coeficients transformats Y(k), $0 \le k \le N-1$, en funció de $V_k(w)$, transformada de Fourier de $v_k(n)$.

g) A la vista del resultat anterior i de la propietat de concentració d'energia de la transformació KL, assenyalar la propietat de les seqüències $v_k(n)$ obtingudes amb el sistema d'equacions de l'apartat (e) que les fa interessants en el problema d'estimació espectral.

2.5 Siguin els dos primers valors de la seqüència autocorrelació d'un procés r(0)=1 i r(1)=0.8. Es volen extrapolar suposant model AR d'ordre 1. Es demana:

a) Calcular r(2) extrapolat.

b) Comprovar que r(2) surt també de maximitzar el determinant de la matriu d'autocorrelació de dimensions 3x3. (De fet, maximitzar aquest determinant equival a maximitzar l'entropia del procés).

c) Calcular els valors de r(2) que anul.len el determinant i observar que la seva mitjana aritmètica és igual al valor de r(2) trobat a b).

d) Tenint en compte que els resultats obtinguts per a r(2) són generalitzables a qualsevol índex m>2, interpretar el resultat de c) a partir del fet que el determinant d'una matriu d'autocorrelació no pot ser negatiu (la matriu és semidefinida positiva).

2.6 Se desea estimar con una resolución de al menos 50 Hz (medida a 3 dB en potencia) la densidad espectral de potencia de un proceso muestreado a 8 kHz de modo que la varianza de la estimación no supere el 10% de la varianza del periodograma. ¿Cuál es el número de muestras necesarias para realizar esta estimación mediante el método de:

a) Barlett (B),

b) Blackman-Tuckey (BT), con la ventana triangular para la correlación?

Indique la expresión completa de ambos estimadores.

DATOS:

a) Anchura del lóbulo principal Bf de la transformada de Fourier de las ventanas rectangular (R) y triangular (T) para dos relaciones (V_{max}/V) entre el valor máximo (V_{max}) y el valor (V) para el que se calcula la anchura del lóbulo:

20 log V_{max}/V	3 dB	6 dB
ΔB_R	$\frac{0.89}{L_v}$	$\frac{1.2}{L_v}$
ΔB_T	$2\frac{0.64}{L_v+1}$	$2\frac{0.89}{L_v+1}$

b) Varianza de los estimadores:

$$\text{var}\{\hat{S}_B\} = \frac{1}{P}\text{var}\{\hat{S}_P\}$$

$$\text{var}\{\hat{S}_{BT}\} = \frac{E_w}{N}\text{var}\{\hat{S}_P\}$$

donde P es el número de tramos promediados, E_w es la energía de la ventana aplicada a la correlación, N es el número de datos utilizados en la estimación de la correlación y var{$\hat{S}_P$} es la varianza del periodograma.

c) Energía de la ventana triangular: $E_w = L_w/3$, donde L_w es la longitud de la ventana.

2.7 És un fet conegut dins l'anàlisi espectral que si el senyal es filtra de manera que el seu espectre sigui més pla, és a dir, més semblant al del soroll blanc, en pot resultar una estimació amb millors propietats estadístiques. D'aquest filtratge se'n diu *preemblanquiment*. Per analitzar aquest fet, es demana:

a) Demostrar que si el procés és soroll blanc de potència σ^2, el periodograma no presenta biaix, és a dir,

$$E\{S(\omega)\} = \sigma^2 \qquad \forall \omega$$

per a qualsevol longitud L de la finestra rectangular.

b) Partint d'aquesta propietat, explicar l'interès del preemblanquiment per a un procés que no sigui soroll blanc.

Se sap que un senyal biològic discretitzat $x(n)$, mostrejat a 500 Hz, correspon a un procés estocàstic l'espectre del qual presenta una component AR d'ordre 1 i una component MA d'ordre 1. Suposarem que coneixem 100 mostres d'aquest senyal ($0 \le n \le 99$). En primer lloc, estimarem el filtre emblanquidor $A(z)$ corresponent amb modelatge autoregressiu i després farem l'estimació espectral del senyal resultant de filtrar $x(n)$ amb $A(z)$, que anomenarem $y(n)$. Per això, es demana:

c) Donar les expressions de l'estimador esbiaixat de l'autocorrelació $R(m)$ del senyal $x(n)$ per a m=0,1, deixant-les en funció de les mostres de $x(n)$ disponibles.

d) Determinar $A(z)$ amb les equacions de Yule-Walker si $r(0)$=2, $r(1)$=1.6 i $r(2)$=0.5.

e) Suposant que l'estimació espectral del senyal preemblanquit $y(n)$ es du a terme amb l'estimador de Welch amb un encavalcament entre finestres d'un 50%, trobar els valors del nombre de segments P i de la longitud de cada un L que permeten:
   1) minimitzar la variància de l'estimació i, al mateix temps,
   2) garantir una resolució mínima; per a això es requereix que l'amplada del lòbul principal de la finestra $w(n)$ no superi els 10 Hz (suposi's que l'amplada del lòbul principal és (en cicles/mostra) aproximadament igual a l'invers de la longitud de la finestra).

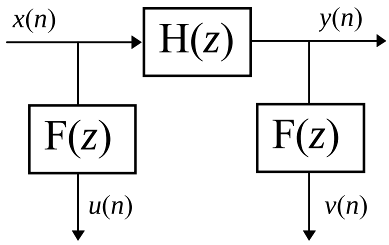
f) Donar l'expressió de l'estimació espectral del senyal filtrat $y(n)$, deixant-la en funció de $y(n)$ i de la finestra $w(n)$.

g) Donar l'expressió de l'estimació espectral de $x(n)$.

2.8 Es vol estimar la resposta freqüencial $H(\omega)$ d'un sistema lineal a partir de la correlació creuada dels seus senyals de entrada $x(n)$ i sortida $y(n)$ sabent que

$$S_{YX}(\omega)=H(\omega)\, S_{XX}(\omega) \tag{1}$$

Amb (1) veiem que l'obtenció d'$H(\omega)$ serà problemàtica quan l'estimació de $S_{XX}(\omega)$ presenti valors propers a zero. A fi i efecte d'evitar aquest problema, ens proposem utilitzar un filtre $F(z)$ que aplicat a $x(n)$ obtingui a la sortida soroll blanc $u(n)$, de manera que $S_{UU}(\omega)=1$ per a tot ω.



Tal i com s'indica a la figura, $y(n)$ serà filtrat també amb $F(z)$, donant lloc a un altre senyal $v(n)$. D'aquesta manera serà possible obtenir una estimació d'H(ω) sense necessitat de dividir dues funcions d'ω. En efecte:

a) Demostrar que $H(\omega)=S_{VU}(\omega)$.

Si $F(z)=(1+a_1\, z^{-1})/A$, on A és una constant, es demana:

b) Calcular els valors d'a_1 i d'A, sabent que $R_{xx}(m)=0.9^{|m|}$ per a tot m.
c) Donar l'expressió detallada de l'estimador esbiaixat $\hat{R}_{vu}(m)$ de la correlació creuada entre $v(n)$ i $u(n)$ a partir de les mostres d'aquests senyals entre 0 i N-1. Indicar l'equació de recurrència que permet calcular $v(n)$ i $u(n)$ a partir dels senyals de partida $y(n)$ i $x(n)$.
d) Trobar el nombre de mostres N mínim per estimar H(ω) amb la tècnica de Blackman-Tukey de manera que presenti una resolució de 100 Hz, per a freqüència de mostreig de 8 kHz, i una variància 10 vegades inferior a la del periodograma creuat.
e) Escriure l'expressió de l'$H(\omega)$ estimada amb el mètode anterior en termes de $\hat{R}_{vu}(m)$. Raonar l'interès addicional que presenta el filtratge amb el $F(z)$ utilitzat en l'apartat b) quan, com en el nostre cas, l'estimació es fa amb un mètode de model MA.

Nota: Suposi's que, si la finestra $w(m)$ que s'aplica a l'autocorrelació va de -M a M, la seva resolució (ample de banda efectiu) és 2/M (en cicles/mostra) i la variància de l'estimador corresponent de Blackman-Tukey és aproximadament M/2N vegades el quadrat de l'espectre correcte.

2.9 Sigui un sistema com el de la figura 1, del que només observem els processos $x(n)$ i $y(n)$, i desconeixem la naturalesa de la capsa negra. Per tal de descobrir la naturalesa del sistema definim la funció de coherencia entre $x(n)$ i $y(n)$ com

$$\Phi_{xy}(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}}.$$

a) Quin valor pren $\Phi_{xy}(\omega)$ si la capsa conté un sistema lineal $H(z)$?

b) Suposem que la capsa negra consisteix en un filtre lineal, a la sortida del qual s'afegeix un soroll blanc $w(n)$ del que en desconeixem la potència N_o (figura 2). Tots el processos són de mitja zero. Es pot estimar el sistema lineal a partir de la correlació creuada entre $x(n)$ i $y(n)$?

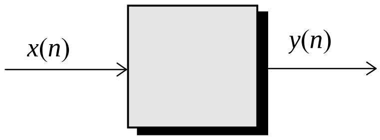


Figura 1

c) Per tal de conèixer quan soroll es troba present en $y(n)$, avalueu $\Phi_{xy}(\omega)$ suponant incorrelació entre $x(n)$ i $w(n)$ i determineu quins valors pren per a $N_0 \rightarrow 0 \quad i \quad N_0 \rightarrow \infty$.

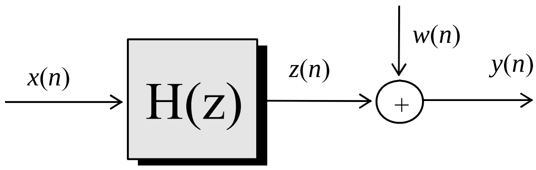


Figura 2.

2.10 Se ha estimado las dos primeras muestras de la autocorrelación de un proceso x(n) AR de orden desconocido, a partir de N muestras de una realización, obteniéndose los siguientes valores: $r_x(0) = 1$, $r_x(1) = 0.8$.

1.- Determina los parámetros del modelo AR(1) (coeficientes y potencia del proceso blanco excitador) que estima la densidad espectral del proceso $S_x(\omega)$ y escribid la expresión de $\hat{S}_{AR}(\omega)$.

2.- Estimad el valor de la autocorrelación $r_x(2)$ a partir del modelo AR anterior, suponiendo que el proceso x(n) se ajusta exactamente al modelo AR calculado.

3.- Las tres muestras estimadas de la autocorrelación, $r_x(0)$, $r_x(1)$ y $r_x(2)$ se utilizan ahora para estimar un modelo AR(2) para la densidad espectral del proceso. Determinad los parámetros y justificad el resultado.

4.- La muestra de la autocorrelación $r_x(2)$ se calcula ahora con el mismo estimador con el que se calculó inicialmente $r_x(0)$ y $r_x(1)$. Este estimador da como resultado $r_x(2) = 0{,}631$. Calculad de nuevo el modelo AR(2) que mejor estima la densidad espectral del proceso $S_x(\omega)$ y razonad el resultado.

5.- Dado que la varianza de un estimador AR(p) se puede aproximar por

$$\mathrm{var}[\,\hat{S}_{AR}(\omega)\,] = \frac{2p}{N} S_x^2(\omega)$$

siendo p el orden del modelo, ¿qué orden utilizaríais para estimar la densidad espectral del proceso anterior?

2.11 La técnica de estimación espectral más utilizada en reconocimiento del habla calcula una estimación $P(i)$ de la potencia de la señal en una banda frecuencial centrada en $\frac{2\pi}{N}i$ mediante un promedio de los valores del periodograma en frecuencias discretas $S(i) = \hat{S}_P(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}i}$, ponderados mediante $w(k)$, es decir,

$$P(i) = \sum_{k=-M}^{M} w(k) S(i+k)$$

Supondremos que:

- Dentro de cada banda $\left[\frac{2\pi}{N}(i-M), \frac{2\pi}{N}(i+M)\right]$ la densidad espectral de potencia es plana y de valor A_i.
- Las muestras del periodograma están insesgadas y son incorreladas.

Se pide:

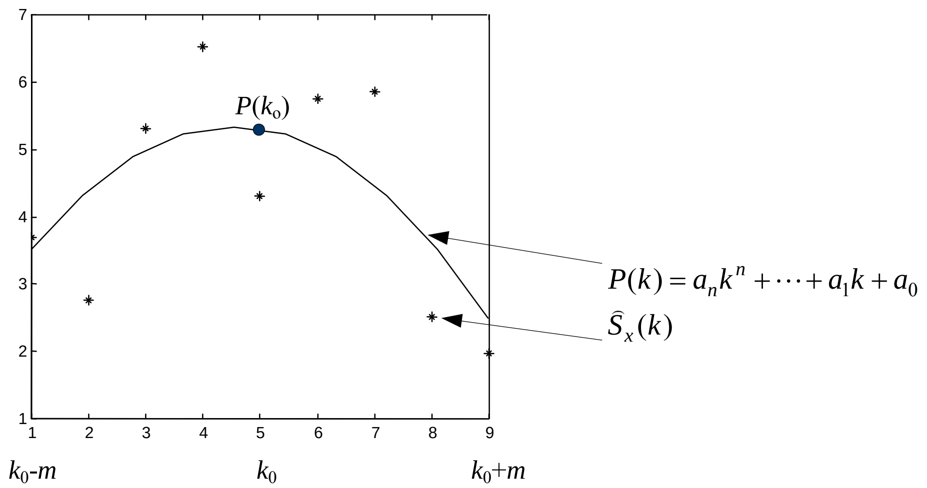
1.- ¿Qué condición ha de cumplir la ventana $w(k)$ para que el estimador sea insesgado?
2.- Calcúlese la varianza de $P(i)$ en función de la varianza del periodograma.

2.12 El objetivo de este problema es estudiar un método de alisado de espectros (Savitzky-Golay) que permite remediar el problema de la variancia en la estimación del periodograma.
Partiendo de N puntos equiespaciados del periodograma $\hat{S}_x(k)$ (con k=[0,…, N-1]), se calcula una nueva estimación $P(k)$ para cada valor de k consistente en una interpolación polinómica de grado n usando los valores (ver la figura):

$$\hat{S}_x(k-m), \ldots, \hat{S}_x(k), \ldots, \hat{S}_x(k+m)$$

Obsérvese que obtendremos un polinomio $P(k)$ distinto para cada valor de k del que retendremos el valor central $P(k_o)$. El conjunto de valores centrales de los N polinomios calculados constituyen la nueva estimación de la densidad espectral de potencia.

$\hat{S}_x(k)$



1) Justifique la elección del grado adecuado del polinomio para los espectros siguientes:

Paso bajo suave
Paso bajo con picos

2) Queremos hacer una estimación de los coeficientes del interpolador

$$P(k) = a_2 k^2 + a_1 k + a_0$$

siguiendo el criterio de error cuadrático mínimo. Plantee las ecuaciones para encontrar $[a_2, a_1, a_0]$ si se usan los valores del espectro: $\hat{S}_x(k_0 - m), \cdots, \hat{S}_x(k_0), \cdots, \hat{S}_x(k_0 + m)$

En los siguientes apartados considere que $P(k) = a_0$.

3) Calcule la resolución del estimador, como separación mínima de dos picos espectrales para que éstos puedan identificarse.

4) Calcule la varianza del estimador suponiendo que la covarianza entre muestras del periodograma es cero.

5) Comente el compromiso que se ha de tomar en la elección de *m*.

2.13 Considere el problema de localizar una sinusoide, de frecuencia desconocida, en presencia de ruido blanco. El problema que se trata de abordar es la presencia adicional de una señal de muy baja frecuencia. Dicha presencia hace que los segmentos de M muestras, utilizados para análisis espectral no-paramétrico, agrupados en el vector $\underline{X}(n)$, presenten un nivel apreciable de continua.

a) Justifique el siguiente modelo para $\underline{X}_n$

$$\underline{X}(n) = \alpha\, \underline{1} + a\, \underline{S}\, e^{j\omega_o n} + \underline{w}(n)$$

Siendo $\underline{1}^H = (1,1,...,1)$ $\quad$ $\underline{S}^H = (1, e^{j\omega_o}, ..., e^{j\omega_o (M-1)})$

$\underline{w}(n)$: vector de muestras de ruido blanco gaussiano de media nula y matriz de covarianza $\sigma^2 \underline{\underline{I}}$, independiente tanto de α como de *a*

b) ¿Cuál es la media y la matriz de covarianza de $\underline{X}(n)$ considerando que tanto α como *a* son variables aleatorias independientes y de media nula?
c) Discuta si las técnicas clásicas basadas en el periodograma son adecuadas para la estimación de la potencia de la sinusoide a ω_o.

Con el fin de reducir el problema al caso de una sola sinusoide en ruido, se recurre a modificar los segmentos del siguiente modo: $\underline{X}'(n)=\underline{\underline{Q}}\,\underline{X}(n)$

Siendo (considere el caso de M=4)

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{matriz de (M-1)×M}$$

Siendo $\underline{X}'(n) = a'\underline{S}'e^{j\,\omega o\, n} + \underline{w}'(n)$ y $\underline{S}'^{H}=(1,e^{j\,\omega o},....,e^{j\,\omega o\,(M-2)})$

d) Calcule las expresiones de a', $\underline{S}'$ y la covarianza de $\underline{w}'(n)$ en función de sus valores anteriores.
e) Discuta ahora, para $\underline{X}'(n)$, la conveniencia de emplear técnicas clásicas. Para ello, esboce la densidad espectral de potencia de $\underline{X}'(n)$, suponiendo que $\omega_o \ll \pi$

2.14. El objetivo de este ejercicio es el de analizar dos procedimientos para reducir la variancia de la estimación del periodograma. Se supondrá que la serie temporal es estacionaria, de media cero y densidad espectral de potencia $S(f_k)$, y que el periodograma de N muestras de la serie temporal es $\hat{S}(f_k)$ a la frecuencia discreta de $f_k = k/N$; además, la variancia del periodograma a una frecuencia determinada es $\sigma^2_{\hat{S}(f_k)}$ y su valor esperado a la misma frecuencia es $m_{\hat{S}(f_k)}$.

En la primera parte del ejercicio se estudiara un suavizado mediante un filtrado paso bajo. La estimación de la densidad espectral suavizada es

$$\tilde{S}(f_k) = \underline{g}^T \underline{\hat{S}}(f_k)$$

con

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} g_{-M} & \cdots & g_0 & \cdots & g_M \end{bmatrix}^T \text{ y } \underline{\hat{S}}(f_k) = \begin{bmatrix} \hat{S}(f_{k-M}) & \cdots & \hat{S}(f_k) & \cdots & \hat{S}(f_{k+M}) \end{bmatrix}^T$$

y el filtro paso bajo $\underline{g}$ es tal que

$$\underline{g}^T \underline{1} = 1, \text{ con } \underline{1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Se aplicara este filtro a las frecuencias: $f_{k-M} > 0$ y $f_{k+M} < 1/2$. Además, se asumirá que $\hat{S}(f_{k-j})$ y $\hat{S}(f_{k-i})$ están incorrelados para $f_{k-j} \neq f_{k-i}$.

a) Calcule el valor esperado y variancia de la estimación $\tilde{S}(f_k)$, en función del valor esperado $m_{\hat{S}(f_k)}$ y la variancia del periodograma $\sigma^2_{\hat{S}(f_k)}$, considere, para el filtro paso bajo, un pulso rectangular $\underline{g} = \frac{1}{2M+1}\underline{1}$. Tome como margen de frecuencias $f_{k-M} > 0$ y $f_{k+M} < 1/2$.

La segunda parte del ejercicio consiste en estudiar un suavizado del espectro mediante el promedio con una ventana exponencial de periodogramas obtenidos en tramas de datos que no se superponen. Al igual que el caso anterior, se supone que el resultado de hacer el periodograma sobre la trama n-esima es $\hat{S}_n(f_k)$.

La estimación de la densidad espectral suavizada es

$$\tilde{S}_n(f_k) = \alpha\tilde{S}_{n-1}(f_k) + (1-\alpha)\hat{S}_n(f_k), \text{ con } 0 < \alpha < 1$$

siendo $\tilde{S}_0(f_k) = 0$. También, se asumirá que $\hat{S}_n(f_k)$ y $\hat{S}_m(f_k)$ están incorreladas para $m \neq n$.

b) Calcule el valor esperado de $\tilde{S}_n(f_k)$ para un "n" arbitrario en función de un vector de memoria $\underline{\alpha} = \left[\alpha^n \quad \alpha^{n-1} \cdots \quad \alpha^1 \quad \alpha^0\right]^T$ y el valor asintótico de $E\left\{\tilde{S}_n(f_k)\right\}$ cuando $n \to \infty$.

c) Calcule la variancia de $E\left\{\tilde{S}_n(f_k)\right\}$ para un "n" arbitrario, y el valor asintótico cuando $n \to \infty$.

2.15. Concentrémonos en la estimación de los parámetros de una sinusoide compleja (amplitud y frecuencia) en presencia de ruido blanco gausiano. Se dispone para ello de *N* muestras de señal que responden al modelo siguiente:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega} \\ \vdots \\ e^{j\omega(N-1)} \end{bmatrix} + \mathbf{w} = A\mathbf{s}(\omega) + \mathbf{w} \qquad A \in \mathbb{C}$$

$$E\{\mathbf{w}\} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{R}_w = E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^H\} = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{N-1}^2 \end{pmatrix}$$

Percátese de que la incorrelación entre las muestras de ruido viene dada por el carácter diagonal de la matriz $\mathbf{R}_w$. En todos los apartados siguientes se considerará que la matriz de correlación es conocida.

a) Escriba la expresión de la función de verosimilitud $L(A,\omega)$[3].

[3] La función de densidad de probabilidad gausiana para un vector de variablea aleatorias complejas es:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^N \det(\mathbf{C}_x)} \exp\left(-(\mathbf{x}-\mathbf{m}_x)^H \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_x)\right)$$

b) Determine una expresión cerrada para $\hat{A}$ a partir de la optimización de $L(A,\omega)$ respecto a A (suponiendo ω conocida).
c) Reemplace la expresión de $\hat{A}$ en $L(A,\omega)$ y determine la nueva función de verosimilitud cuya optimización nos da lugar a la estimación de ω (que ya dependerá únicamente de ω).
d) Para el caso en que $\sigma_0^2 = \sigma_2^2 = \cdots \sigma_{N-1}^2$, relacione la nueva función de verosimilitud encontrada en c) con el periodograma de **x**.
e) Si todas las varianzas son distintas, justifique que los elementos de la diagonal de $\mathbf{R}_w$ representan una ventana a aplicar sobre las muestras de señal.
f) Teniendo en cuenta que la varianza de la muestra $\mathbf{x}(n)$ representa una medida de la fiabilidad de dicha muestra, ¿qué interpretación puede darse al uso de ventanas cuyo máximo está en $N/2$?

2.16. El siguiente ejercicio plantea la estimación de Máxima Verosimilitud (ML) de los parámetros de un tono $s(n)$, inmerso en ruido gaussiano y blanco (AWGN) $w(n)$. Así pues, el modelo de señal de los datos observados $x(n)$ es el siguiente:

$$x(n) = s(n) + w(n) = A\cos(2\pi f_o n + \phi) + w(n)$$

Los parámetros que queremos estimar son la fase ϕ, la frecuencia f_o y la amplitud A. La función densidad de probabilidad del ruido $w(n)$ es de la forma:

$$f_w(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}w^2} \qquad \text{con: } \sigma^2 = E\left[w^2(n)\right]$$

Para la estimación de los tres parámetros, se dispone del conocimiento de un conjunto de observaciones $\{x(n)\}_{0 \le n \le N-1} = \{x(0), x(1), x(2), ..., x(N-1)\}$ que indicamos vectorialmente como:

$$\underline{x}(n) = \left[x(0) \quad x(1) \quad ... \quad x(N-1)\right]^T$$

a. Demuestre que la función densidad de probabilidad conjunta del vector de observaciones $\underline{x}(n)$ para una fase ϕ, una frecuencia f_o y una amplitud A viene dada por:

$$f\left(\underline{x}(n)/\phi, f_o, A\right) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x(n) - A\cos(2\pi f_o n + \phi)\right)^2}$$

b. Demuestre que la estimación de los tres parámetros indicados bajo un criterio ML implica la minimización de la siguiente función de coste:

$$\xi^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) - 2A\,\mathrm{Re}\left[e^{-j\phi}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f_o n}\right] + \frac{A^2 N}{2}$$

Considere que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos^2\left(2\pi f_o n + \phi\right) \approx \frac{N}{2} \text{ para } N \text{ suficientemente grande.}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\left(2\pi f_o n + \phi\right) = \operatorname{Re}\left[e^{-j\phi} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f_o n} \right]$$

c. A partir del apartado (b.), demuestre que la estimación ML de la fase ϕ viene dada por:

$$\hat{\phi}_{ML} = argumento\left[X\left(f\right) \right]_{f=f_o} \qquad \text{con: } X\left(f\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi fn}$$

donde hemos asumido que se conoce el valor f_o de la frecuencia de la señal.

NOTA: Tenga en cuenta que:

$$\max_{\phi} \quad \operatorname{Re}\left[e^{-j\phi}\left(A + jB\right)\right] \Rightarrow \operatorname{Im}\left[e^{-j\phi}\left(A + jB\right)\right] = 0$$

d. De nuevo, sustituya la solución ML de la fase ϕ del apartado (c.) en la función ML del apartado (b.) y demuestre que la estimación de la amplitud A viene dada por:

$$\hat{A}_{ML} = \frac{2}{N} \left| X\left(f\right) \right|_{f=f_o}$$

donde, de nuevo, asumimos el conocimiento de la frecuencia f_o.

e. Como hemos visto en los apartados (c.) y (d.), las estimaciones de fase y amplitud están condicionadas al conocimiento de la frecuencia f_o. Para completar el estudio, demuestre que la estimación ML de la frecuencia f_o se obtiene a partir del valor de frecuencia en el que $\left| X(f) \right|^2$ es máximo, es decir:

$$\hat{f}_o^{ML} = \arg\, max_f \quad \left| X(f) \right|^2$$

f. Basándose en los apartados anteriores, indique la secuencia natural de estimación ML de los tres parámetros para el problema propuesto.

2.17. Los parametros de un proceso *x*(*n*) que tiene una densidad espectral de potencia de tipo AR de orden 1, AR(1), se pueden estimar en máxima verosimilitud (o ML) usando el siguiente modelo para los datos observados:

$$x(n) = -ax(n-1) + e(n) \qquad n = 1,2,\ldots,N$$

o en forma vectorial:

$$\underline{x}(n) = -a\underline{x}(n-1) + \underline{e}(n) \qquad \text{donde} \qquad \begin{aligned} \underline{x}(n)^T &= \left[x(1), x(2), ..., x(N)\right] \\ \underline{x}(n-1)^T &= \left[x(0), x(1), ..., x(N-1)\right] \\ \underline{e}(n)^T &= \left[e(1), e(2), ..., e(N)\right] \end{aligned}$$

Si el proceso $e(n)$ se supone gausiano, blanco, de media nula y potencia σ^2, la función de densidad de probabilidad puede escribirse como:

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \sigma^{2N}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\underline{x}(n) + a\underline{x}(n-1))^T (\underline{x}(n) + a\underline{x}(n-1)) \right)$$

1) Determine el estimador de máxima verosimilitud (ML) de a en funcion de los vectores $\underline{x}(n)$ y $\underline{x}(n-1)$.
2) Relacione las ecuaciones encontradas con las de Yule-Walker para el modelo AR(1). Razone si hay que usar el estimador de la funcion de la correlación sesgado (*esbiaixat*) o el no sesgado para obtener la misma estimación de a con ML y Yule-Walker.
3) Determinad una expresión para $r_x(2)$ en funcion de a y $\underline{x}(n)$, si efectivamente $x(n)$ es un proceso AR(1).

2.18.

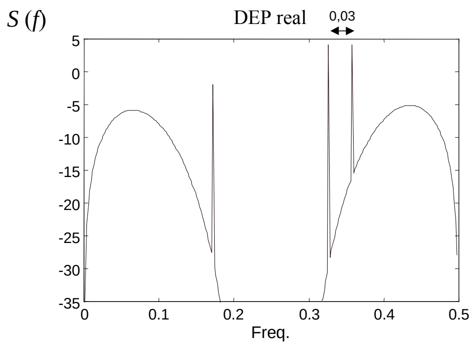


Figura (a)

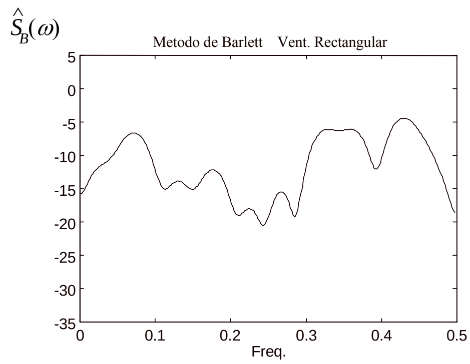


Figura (b)

La estimación de la Figura (b) corresponde a la realizada mediante el método de Barlett sobre 128 muestras de una realización de un proceso cuya verdadera DEP es la de la Figura (a).

1. Indique razonadamente en cuantos segmentos pueden haberse dividido las 128 muestras, realizando cálculos aproximados a partir de los datos de las figuras (a) y (b). ¿Por qué no podemos decir que ese valor sea el exacto?
2. Dé una cota de la varianza que tendrá la estimación de la figura b) respecto a la del periodograma.
3. Indique el número de términos de la autocorrelación (contando índices positivos y negativos) que habría que usar para obtener la misma resolución utilizando el método de Blackman-Tuckey. Suponer ventana triangular sobre la correlación. ¿Cual seria la varianza en este caso?

Use de los siguientes datos aquéllos que necesite:

Ancho de banda a 3 dB (definido como $10\log\left|\frac{V_{\max}}{V_{-3dB}}\right|$):

- Ventana rectangular de longitud L: 0.89/L
- Ventana triangular de longitud L: 1.78/(L+1)

Varianza del método de Blackman-Tuckey para ventana triangular:

$$\operatorname{var}\left\{\hat{S}_{BT}(\omega)\right\} = \frac{L}{3N}\operatorname{var}\left\{\hat{S}_{P}(\omega)\right\}$$

2.19. En una transmisión de espectro ensanchado, las N muestras de señal recibidas en el tiempo de duración de un símbolo a(n) pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\underline{r}(n) = \sqrt{P_c}\,a(n)\underline{c} + \underline{i}(n) + \underline{w}(n)$$

donde

P_c es la potencia de la señal deseada a recuperar (los símbolos a(n) son de potencia unidad).
$\underline{c}$ es el código de la señal deseada (se considera conocido, determinista y de norma unidad $\underline{c}^H\underline{c} = 1$),
$\underline{i}$(n) es una señal interferente incorrelada con la señal deseada
$\underline{w}$(n) es un vector de ruido Gaussiano estacionario de media nula y potencia σ_w^2.

La matriz de correlación de $\underline{r}$(n) viene dada por la expresión $\underline{\underline{R}} = E\left\{\underline{r}(n)\underline{r}(n)^H\right\} = P_c\underline{c}\,\underline{c}^H + \underline{\underline{R}}_i + \sigma_w^2\underline{\underline{I}}$.

A fin de recuperar la señal deseada, se diseña un filtro FIR $\underline{h}_{opt}$ tal que

$$\min_{\underline{h}} \underline{h}^H\underline{\underline{R}}\underline{h} \qquad \textit{sujeto a} \qquad \underline{h}^H\underline{c} = 1$$

a) Obtenga el filtro óptimo $\underline{h}_{opt}$.
b) Demuestre que el filtro óptimo puede escribirse en función de $\underline{\underline{R}}_n = \underline{\underline{R}}_i + \sigma_w^2\underline{\underline{I}}$. Utilícese el lema de inversión de matrices, en virtud del cual si $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{B}} + \underline{g}\underline{g}^H$, entonces:

$$\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} - \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{g}\left(1 + \underline{g}^H\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{g}\right)^{-1}\underline{g}^H\underline{\underline{B}}^{-1}$$

c) Si se define la SINR a la salida del filtro como $SINR \triangleq \frac{P_c}{\underline{h}^H\underline{\underline{R}}_n\underline{h}}$, demuestre que a la salida del filtro óptimo $SINR = P_c\underline{c}^H\left(\underline{\underline{R}}_i + \sigma_w^2\underline{\underline{I}}\right)^{-1}\underline{c}$

Considere que la interferencia es otra señal de espectro ensanchado $\underline{i}(n) = \sqrt{P_i}\,b(n)\underline{i}$ donde
P_i es la potencia de la señal interferente.
b(n) es el símbolo transmitido por la fuente interferente durante el periodo n (que se considera independiente del símbolo a(n) transmitido por la señal útil que se desea recuperar). Tambien son de potencia unidad.
$\underline{i}$ es el código de la señal interferente (determinista y de norma unidad $\underline{i}^H\underline{i} = 1$)

en cuyo caso $\underline{\underline{R}}_i = P_i \underline{i}\,\underline{i}^H$.

d) Halle la SINR en función de $\underline{c}^H\,\underline{i}$.
e) Particularice la expresión para los dos casos siguientes:

$\underline{c}^H\,\underline{i}$ = 1 (señal util e interferente usando el mismo código de espectro ensanchado),
$\underline{c}^H\,\underline{i}$ = 0 (códigos de espectro ensanchado ortogonales),

y comente la capacidad de cancelación de la interferencia que presenta el filtro en función de su orden *N*.

NOTA: $\nabla_{\underline{z}^*}\left(\underline{z}^H \underline{\underline{R}}\,\underline{z}\right) = \underline{\underline{R}}\,\underline{z}$ si $\underline{\underline{R}}$ es hermítica.

2.20. Considere el siguiente proceso:

$$x(n) = Ae^{j\omega_1 n} + z(n)$$

donde $\omega_1 \neq 0$, A es una variable aleatoria de media nula y varianza σ_A^2, y $z(n)$ es ruido Gausiano de media nula y densidad espectral de potencia $S_z(\omega) = \sigma_z^2$, con σ_z^2 desconocido. A y $z(n)$ son estadísticamente independientes. El objetivo es diseñar un estimador espectral de $S_x(0) = S_z(0) = \sigma_z^2$, mediante un filtro FIR **h** de 3 coeficientes, y un procesado por bloques de x(n).

a.- Determine los vectores **u** y **z** en el siguiente modelo vectorial:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x(3k) \\ x(3k+1) \\ x(3k+2) \end{bmatrix} = Ae^{j3\omega_1 k}\mathbf{u} + \mathbf{z} \qquad k = 0, 1, \ldots, K-1$$

b.- Halle la matriz de autocorrelación del proceso: $\mathbf{R} = E\left\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)\right\}$
El estimador espectral de $S_z(0)$ propuesto es:

$$\hat{S}_z(0) = \frac{\mathbf{h}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|^2} \qquad\qquad \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)$$

c.- Indique cuál es el vector **h** = $\mathbf{h}_p$ en el caso del estimador periodograma promedio (Barlett).

d.- Halle el sesgo del estimador en función de los vectores $\mathbf{h}$ y $\mathbf{u}$.

e.- Indique la expresión de la ventana $v(m)$ y dé la expresión de cómo calcular la función $\hat{r}(m)$ (sesgada o insesgada) para que el estimador periodograma promedio propuesto pueda expresarse del siguiente modo:

$$\hat{S}_z(0) = \sum_{m=-2}^{2} v(m)\hat{r}(m)$$

Interprete gráficamente el sesgo obtenido en base a la ventana espectral que actúa sobre la densidad espectral de potencia.

f.- ¿Qué valores de ω_1 no producen sesgo en el estimador anterior? Dé también una interpretación gráfica en el dominio frecuencial.

g.- Con el objetivo de obtener un estimador espectral insesgado, diseñe un vector $\mathbf{h} = \mathbf{h}_c$ tal que minimize $\left\|\mathbf{h}_c - \mathbf{h}_p\right\|^2$ con la restricción $\mathbf{h}_c^H \mathbf{u} = 0$. Sugerencia: Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange.

i.- Calcule la ventana sobre la correlación $v(m)$ en el caso de que $\omega_1 = \pi$.

Qüestions

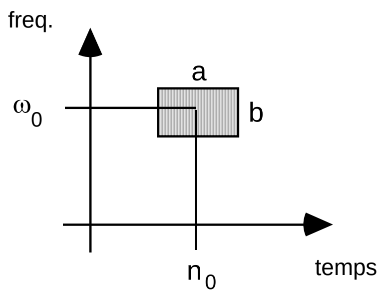
Q.2.1 Se desea estimar la densidad espectral de potencia (DEP) de un proceso $x(n)$, con una componente frecuencial acusada en baja frecuencia. Previamente, se filtran las N muestras disponibles de una realización de ese proceso de la siguiente forma: $y(n)= x(n) - x(n-1)$. Explíquese porqué será más fácil estimar $S_{yy}(\omega)$ que $S_{xx}(\omega)$.

Q.2.2 Se dispone de un proceso $x(n)$ de 10 kHz de ancho de banda. Su densidad espectral de potencia (DEP) tiene dos rayas espectrales en la zona 0-5 khz cuya posición se desea estimar. Como sólo nos interesa la parte baja del espectro nos aconsejan que, en lugar de muestrear a 20 kHz, se realice un filtrado paso bajo con ancho de banda 5 kHz y posteriormente el muestreo a 10 kHz. ¿La estrategia propuesta facilita la estimación de las rayas espectrales? ¿Por qué?

Q.2.3 ¿Cuál es la suposición más importante sobre la función de autocorrelación que limita severamente la definición espectral en las técnicas no paramétricas?

Q.2.4 Disposem de N mostres d'una realització d'un procés amb les que estimem l'autocorrelació no esbiaixada.
a) Si la fem servir per a estimar la densitat espectral de potència fent una transformació de Fourier, podem dir que el biaix de la DEP estimada es zero?Perquè?
b) Què podem dir de la resolució respecte a la de l'estimador que fa servir la correlació biaixada? I de la variància?

Q.2.5 Per tal d'obtenir en l'instant n_O i a la freqüència ω_O una estimació espectral suficientment fiable, s'integra la potència espectral dintre el rectangle temps-freqüència indicat en la figura:



Quant valen els costats *a* i *b* del rectangle en el periodograma? Com s'haurien de modificar *a* i *b* per augmentar la resolució freqüencial tot conservant la variància? Què perdríem amb aquest canvi? Com es modifica la variància relativa de l'estimació si els costats del rectangle es multipliquen per 3?

Q.2.6 Quina característica espectral del senyal de veu s'utilitza en el reconeixement de la parla?. Explicar com la tècnica de banc de filtres aconsegueix estimar fiablement aquesta característica i, al mateix temps, deixar de banda la resta de l'espectre. Dibuixar els rectangles temps-freqüència que s'utilitzen en aquesta estimació, explicitant la seva distribució entre 0 i 4000 Hz. Quin significat físic tenen els paràmetres que es passen al reconeixedor? Donar raonadament una xifra estimativa del nombre de paràmetres que es passen cada segon al reconeixedor.

Q.2.7 Indiqueu l'expressió de la densitat espectral de potència d'un procés $y(n)$ si és produït a partir d'un procés blanc $x(n)$ de mitja zero i potència unitat mitjançant l'expressió $y(n)=0.95y(n-1)+2x(n)$. Dibuixa un esbós de la forma de $S_{yy}(\omega)$. ¿Obtindriem una estimació no paramètrica (basada en el periodograma) més acurada si apliquéssim prèviament la transformació $z(n)=y(n)-0.98\ y(n-1)$ abans? Perquè?

Sol.lucions

2. ESTIMACIÓ ESPECTRAL

2.3 a) Com a mínim la finestra rectangular hauria de tenir 201 mostres.
b) Com mes segments s'agafin, mes petita serà la variància de l'estimació. Això implica que no es convenient prendre més llargs aquest segments.

2.4 c) $E\left\{X_k(\omega)X_j^*(\omega)\right\} = \sigma^2\delta(k-j)$

2.5 a) $r(2) = 0.64$

2.6 a) L = 1430
b) L= 950

2.9 a) $\Phi_{xy}(\omega) = \dfrac{S_{xx}(\omega)H(\omega)}{\sqrt{S_{xx}^2(\omega)\left|H(\omega)\right|^2}} = \exp\left(j\varphi_H(\omega)\right)$ $\left|\Phi_{xy}(\omega)\right| = 1$

$$\Phi_{xy}(\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)H(\omega)}{\sqrt{S_{xx}(\omega)\left(S_{ww}(\omega)+S_{zz}(\omega)\right)}} = \frac{S_{xx}(\omega)H(\omega)}{\sqrt{S_{xx}^2(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 + S_{xx}(\omega)N_0}}$$

c) $\lim\limits_{N_0\to 0}\Phi_{xy}(\omega) = \exp(j\varphi_H(\omega))$

$\lim\limits_{N_0\to\infty}\Phi_{xy}(\omega) = 0$

2.20.

a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_1} \\ e^{j2\omega_1} \end{bmatrix}$ $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z(3k) \\ z(3k+1) \\ z(3k+2) \end{bmatrix}$

b) *Por ser A y z(n) independientes* $\mathbf{R} = \sigma_A^2\mathbf{u}\mathbf{u}^H + \sigma_z^2\mathbf{I}$

c) $\hat{S}_z(0) = \dfrac{\mathbf{h}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{h}}{\left\|\mathbf{h}\right\|^2} = \dfrac{1}{\left\|\mathbf{h}\right\|^2}\mathbf{h}^H\left(\dfrac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)\right)\mathbf{h} = \dfrac{1}{\left\|\mathbf{h}\right\|^2}\left(\dfrac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\left|\mathbf{h}^H\mathbf{x}(k)\right|^2\right)$

Comparando con la expresión del periodograma de Barlett a $\omega_1 = 0$:

$$\hat{S}_{z,B}(0) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\left|\mathbf{s}^H(\omega)\mathbf{x}(k)\right|^2\right)\Bigg|_{\omega=0} \qquad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega} \\ e^{j2\omega} \end{bmatrix}$$

Resulta que $\mathbf{h} = \mathbf{1}$.

d) *Usando el resultado del apartado b*:

$$\mathbf{E}\left\{\hat{S}_z(0)\right\} = \mathbf{E}\left\{\frac{\mathbf{h}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|^2}\right\} = \frac{\mathbf{h}^H E\left\{\hat{\mathbf{R}}\right\}\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|^2} = \sigma_A^2\frac{\left|\mathbf{h}^H\mathbf{u}\right|^2}{\|\mathbf{h}\|^2} + \sigma_z^2$$

$$B = \mathbf{E}\left\{\hat{S}_z(0)\right\} - \sigma_z^2 = \sigma_A^2\frac{\left|\mathbf{h}^H\mathbf{u}\right|^2}{\|\mathbf{h}\|^2}$$

d) *La ventana sobre la correlación es la correlación de la ventana sobre los datos. Si* $\hat{r}(m)$ *es la correlación insesgada,* $v(m) = \sum_{k=-2}^{2} h^*(k)h(m+k)$

f) $$\left|\mathbf{h}^H\mathbf{u}\right|^2 = \sum_{n=0}^{2} e^{j\omega_1 n} = \frac{1-e^{j3\omega_1}}{1-e^{j\omega_1}} = 0$$

No hay sesgo a aquellas frecuencias en las que $e^{j3\omega_1} = 1$ $\quad e^{j\omega_1} \neq 1$, *es decir:*

$$\omega_1 = \pm\frac{2\pi}{3}$$

g)

$$J(\mathbf{h}_c) = \|\mathbf{h}_c - \mathbf{1}\|^2 + \lambda\mathbf{h}_c^H\mathbf{u}$$

$$\nabla_{\mathbf{h}_c^*} J(\mathbf{h}_c) = \nabla_{\mathbf{h}_c^*}\left[(\mathbf{h}_c - \mathbf{1})^H(\mathbf{h}_c - \mathbf{1}) + \lambda\mathbf{h}_c^H\mathbf{u}\right] = \mathbf{h}_c - \mathbf{1} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\nabla_\lambda J(\mathbf{h}_c) = \lambda\mathbf{h}_c^H\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{u}^H\mathbf{1}}{\mathbf{u}^H\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{h}_c = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{u}^H\mathbf{1}}{\mathbf{u}^H\mathbf{u}}\mathbf{u} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^H}{\mathbf{u}^H\mathbf{u}}\right)\mathbf{1}$$

i) *Particularizando para* $\omega_1 = \pi$ *obtenemos* $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{h} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$,

$$v(m) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2/3 & |m| = 1 \\ 1/6 & |m| = 2 \\ 0 & |m| > 2 \end{cases}$$

3. FILTRATGE DE WIENER I FILTRATGE ADAPTATIU

3.1 Sigui un senyal x(n)=s(n)+w(n), on s(n) és un procés AR que satisfà l'equació de recurrència

$$s(n) = 0.8\, s(n\text{-}1) + v(n),$$

on v(n) i w(n) corresponen a processos soroll blanc incorrelats amb potència σ_v^2=0.49 i σ_w^2=1, respectivament. Es demana:

a) Determinar les seqüències autocorrelació de s(n) i de x(n).
b) Dissenyar un filtre de Wiener de longitud M=2 per a estimar s(n).
c) Calcular l'error quadràtic mitjà mínim per a M=2.

3.2 Un micròfon situat a la cabina d'un helicòpter capta la veu del pilot contaminada pel soroll de l'hèlice. Per cancel.lar aquest soroll es disposa d'un altre senyal provenint d'un micròfon situat a prop de l'hèlice. Es demana:

a) Dibuixar un esquema de filtratge per recuperar la veu del pilot amb error quadràtic mitjà mínim.
b) Trobar el sistema d'equacions que permet calcular els coeficients del filtre FIR d'ordre M.
c) Mostrar que el senyal de veu es podria recuperar totalment si els sorolls captats pels dos micròfons fossin senyals purament sinusoïdals. Quant valdria en aquest cas l'ordre M?

3.3 Utilitzar el principi d'ortogonalitat per a determinar el sistema d'equacions i la potència de l'error de predicció lineal quadràtico-mitjana de x(n+m) en termes de x(n), x(n-1),..., x(n-M), essent m>1 (predictor endavant de m passos). Esbossar l'estructura del filtre predictor causal.

3.4 Demostrar que, per a un model AR d'ordre M,

$$r(m) = -\sum_{k=1}^{M} a_k r(m-k) \qquad \textit{per a tot } m > 0$$

Trobar $r(m)$, per a tot m, d'un model AR d'ordre 1 si $r(0)$=1 i $r(1)$=0.8.

3.5 Si l'autocorrelació d'un procés aleatori estacionari és

$$r(m) = \begin{cases} 3-|m| & |m| \le 3 \\ 0 & |m| \ge 3 \end{cases}$$

calcular els coeficients dels predictors d'ordres 1, 2 i 3.

3.6 Sigui un senyal que té per espectre (discret i periòdic de periode N)

$$S(k) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \delta(k \pm K_i)$$

on els números enters K_i corresponen a pulsacions ω_i. Es demana:

a) Indicar l'expressió de la funció de transferència del predictor lineal d'ordre M que minimitza la potència P_M de l'error de predicció. Dibuixar la situació dels seus pols i zeros. Quant valdrà P_M ?.

b) Suposant ara que al senyal se li ha afegit soroll blanc de potència α_0, formular un mètode de determinació de α_0 a partir dels valors de l'autocorrelació entre 0 i M.

3.7 Considerant el procés AR generat per l'equació de recurrència

$$x(n) = \frac{14}{24}x(n-1) + \frac{9}{24}x(n-2) - \frac{1}{24}x(n-3) + w(n)$$

on w(n) és un procés soroll blanc estacionari amb potència σ_w^2, es demana:

a) Indicar els coeficients dels predictors lineals òptims d'ordres 3 i 4.

b) Determinar la seqüència autocorrelació R(m) per a $0 \leq m \leq 5$.

c) Calcular els coeficients de reflexió i la potència de l'error corresponents al predictor lineal d'ordre 3.

3.8 Considerem un procés estocàstic consistent en la sinusoide $x(n) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \Phi\right)$ on el terme de fase Φ és una variable aleatòria uniformement distribuïda en $[-\pi,\pi)$. Es demana:

a) Indicar l'expressió de l'autocorrelació $r(m)$ del procés. Partint del principi d'ortogonalitat, deduir les equacions del predictor lineal òptim d'ordre 2 i resoldre-les per trobar els coeficients del predictor.

A continuació, considerarem la realització x(n) del procés que correspon a fase Φ=0.

b) Prenent N=8, dibuixar x(n) entre n=0 i n=N-1. A partir de l'observació d'aquesta realització del procés, raonar el sentit dels valors dels coeficients obtinguts a l'apartat anterior.

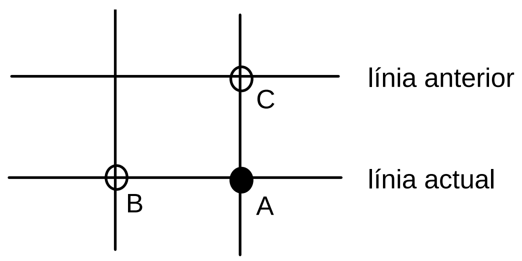
c) Determinar els coeficients del predictor amb el mètode d'autocorrelació (el que usa l'estimador esbiaixat de l'autocorrelació). Comparar raonadament els resultats per a N=8 i N=4 amb els coeficients obtinguts a l'apartat (a). Què passaria si $N \to \infty$? Per què?

d) Repetir l'apartat anterior amb N=8 per al mètode de covariància (el que fa servir l'estimació a partir de la matriu que conté les observacions), tot deduint les equacions corresponents i indicant clarament l'expressió de la potència de l'error que es minimitza. Comparar els coeficients resultants amb els del mètode d'autocorrelació i amb els òptims. Per què el mètode d'autocorrelació funciona pitjor?

3.9 Suposant un senyal x(n) format per una sinusoide de potència P, freqüència ω_1 i fase aleatòria uniformement distribuïda entre 0 i 2π, la qual està immersa en soroll blanc de potència σ_w^2, es demana:

a) Trobar l'expressió de l'autocorrelació exacta de x(n).
b) Determinar els coeficients del predictor òptim d'ordre 2 en funció de ω_1 i σ_w^2.
c) Suposant absència de soroll, determinar els valors dels coeficients i de la potència de l'error de predicció.
d) Demostreu que la potencia de soroll σ_w^2 és el menor dels autovalors de la matriu de correlació de tamany igual o superior a 3×3.

3.10 Un predictor lineal de segon ordre d'una imatge fixa usa els pícsels B i C per a obtenir la predicció del valor x_A del pícsel A:



Es considera la imatge com la realització d'un procés aleatori estacionari on les correlacions entre pícsels consecutius en horitzontal i vertical són iguals de valor ρ i la correlació en diagonal és ρ^2. Aquests valors estan normalitzats respecte la potència del procés σ^2. Es demana:

1) Indicar l'expressió del predictor i de l'error de predicció.
2) Trobar les equacions que permeten calcular els coeficients del predictor òptim i resoldre-les per determinar aquests coeficients.
3) Calcular el guany de predicció G_2 si es defineix com a quocient entre la potència del senyal i la potència de l'error de predicció.
4) Calcular el guany G_1 d'un predictor òptim de primer ordre que prediu x_A a partir de x_B o x_C, comprovant que $G_1<G_2$.
5) Calcular el guany de predicció G_2' del predictor de segon ordre quan els coeficients valen 0.5. Comprovar que, quan $\rho<1/3$, $G_1>G_2'$.

3.11 Per a un filtre de Wiener FIR de N coeficients, es vol estudiar l'efecte produït per un desajust δ en l'obtenció de los coeficients $\mathbf{h}_{opt}$ òptims del filtre de predicció endavant (forward). δ pot ésser un error d'implementació o el resultat d'intentar l'adaptació per a diferents estadístiques. Per a això es demana:

1) Demostrar que la potencia de l'error de predicció ve donada per:

$$J= r_x(0)- 2\mathbf{h}^T\mathbf{r_x} + \mathbf{h}^T\mathbf{R_{xx}}\,\mathbf{h}$$

on x(n) es l'entrada al filtre, $\mathbf{R_{xx}}$ es la matriu d'autocorrelació de l'entrada $\mathbf{x}$(n) al predictor i $\mathbf{r_x} = [R_{xx}(i)]$ i =1,...,N

2) Si hi ha un desajust $\mathbf{h} = \mathbf{h}_{opt} + \delta$ demostreu que

$$J_d = J + \delta^T \mathbf{R}_{xx}\, \delta$$

3) Calculeu J_d per al cas de predicció d'ordre 1 si existeix un desajust $h_1 = h_{opt} + \delta$
4) Per al cas particular d'un senyal de veu amb coeficient de correlació entre mostres $\rho = r(1)/r(0) = 0.7$ i es tria $h_1 = 0.825$, calculeu el guany de predicció resultant. Calculeu la pèrdua que es produeix respecte al cas òptim $h_1 = h_{opt}$.
5) Considereu un predictor al qual se li poden aplicar indiferentment dues entrades u(n), v(n). Per a un predictor donat $\mathbf{h}$, suposeu que les respectives variances d'error de predicció són J_u, J_v. Si es considera la suma

$$J_p = \lambda J_u + (1-\lambda) J_v$$

on λ ($0<\lambda<1$) és un paràmetre de ponderació, demostreu que J_p és mínim per a $\mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}$ si els elements de $\mathbf{R}$ i $\mathbf{r}$ s'obtenen de $r(i) = \lambda r_{uu}(i) + (1-\lambda) r_{vv}(i)$ on $r(i)$ representa el coeficient de correlació. Aquest tipus de predictor s'anomena "predictor de compromís" i es fa servir per a triar els $\mathbf{h}_{opt}$ en el cas de fer-lo treballar amb dos senyals d'entrada diferents. Noteu que aquest cas és un clar exemple de desajust δ en l'obtenció dels coeficients $\mathbf{h}_{opt}$ òptims del filtre per a cada senyal u(n), v(n).

3.12 L'eco que apareix en les comunicacions telefòniques a llarga distància pot arribar a ser audible depenent del retard amb el que arribi a l'oïda. El llindar de percepció és d'uns 10 ms. per sobre dels quals l'efecte de l'eco pot arribar a ser molt molest. El mecanisme de producció és el següent: les línies d'abonat, que van des de l'aparell telefònic fins a la central acostumen a ser de dos fils. A la central, aquestes línies es converteixen a 4 fils a fi de poder regenerar el senyal amb amplificadors en les transmissions a llarga distància. Quan arriben a la central remota, la comunicació a 4 fils es converteix a 2 fils, que són els que es connecten a l'abonat llunyà (fig.1).

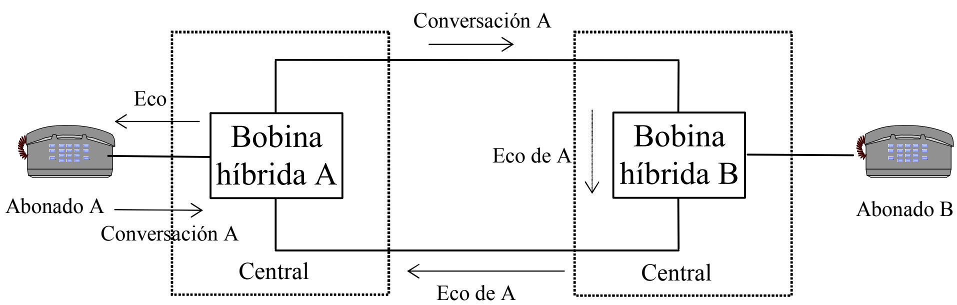


Figura 1

Els dispositius que fan la conversió són bobines híbrides situades a les centrals. Aquests dispositius de tres terminals han d'estar ben adaptats, o en cas contrari, trobarem pèrdues des d'el port d'entrada a la central al port de sortida cap a la central llunyana, produint-se l'eco. Els efectes són més sensibles quant més llargs siguin els enllaços entre abonats. Per tal de compensar aquest efecte es proposa l'esquema de la figura 2 amb un filtre FIR de M coeficients. El propòsit d'aquest filtre és el de sintetitzar una rèplica de l'eco per tal de restar-la prop del lloc en que es produeix, que és la bobina de la central llunyana:

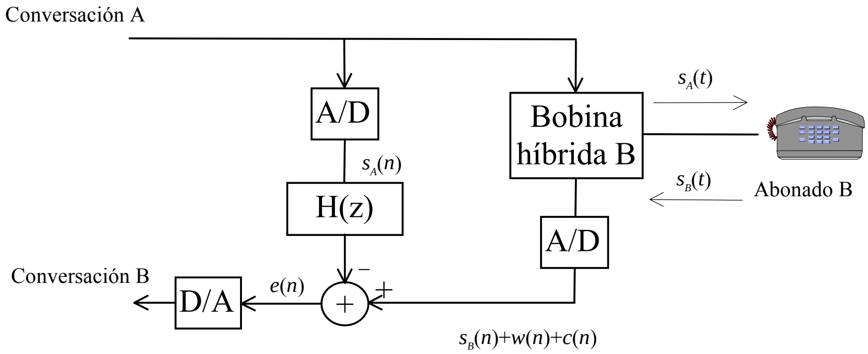
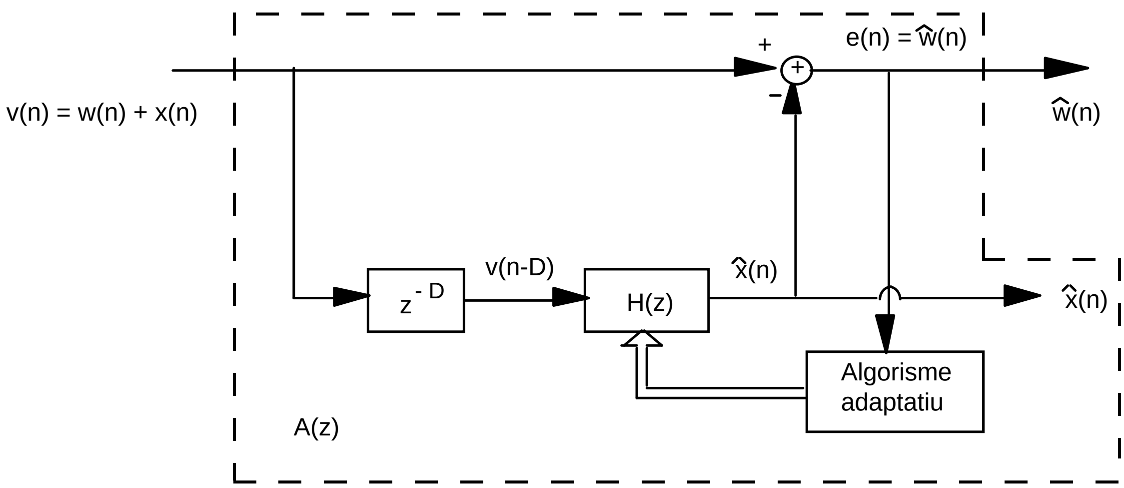


Figura 2

on $w(n)$ és soroll blanc generat en la bobina híbrida, incorrelat amb els senyals de veu, $c(n)$ és el eco de la conversa A, en el seu camí de tornada al abonat A i $s_B(n)$ és el senyal de veu emesa per l'abonat B. Es demana:

a) En quines condicions la minimització de $E\{e(n)^2\}$ ens permet atenuar l'eco produït en la bobina híbrida B?
b) Trobeu les equacions que permeten calcular els coeficients del filtre $H(z)$.
c) És possible amb aquesta configuració atenuar con esta configuració atenuar el soroll $w(n)$ generat a la bobina híbrida?
d) Per tal que el sistema funcioni correctament, la durada de la resposta impulsional del filtre ha de ser més gran que el més gran retard introduït per la bobina híbrida B. Sabent que els senyals de veu es mostregen a 8 kHz, calculeu quants coeficients són necessaris per a cancelar retards de fins a 5 ms.

3.13 El senyal discret v(n) consta de dues components additives i incorrelades, w(n) de banda ampla, i x(n) de banda estreta, que es volen separar. Com que la banda ocupada per x(n) és desconeguda i pot variar amb el temps, es necessari realitzar un filtratge adaptatiu.



És ben conegut que l'autocorrelació d'un senyal de banda ampla té menor longitud efectiva que la d'un senyal de banda estreta. Fent servir aquesta propietat, l'esquema de la figura permet separar dos senyals d'aquestes característiques, sempre que el retard D sigui prou gran que w(n) i w(n-D) es puguin suposar incorrelats, però prou petit com per a que x(n) i x(n-D) siguin correlats. En la pràctica, farem servir el menor valor de D que compleixi aquesta restricció, per tal d'obtenir bones estimacions dels coeficients del filtre H(z).Si H(z) és un filtre FIR de longitud M

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k}$$

es demana:

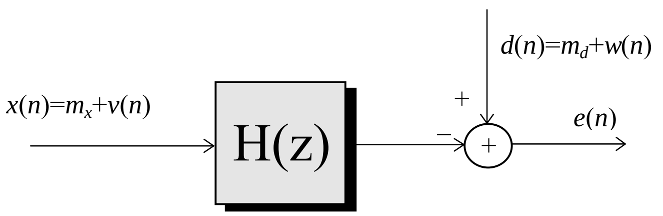
a) Demostrar que minimitzar $E\{e^2(n)\}$ és equivalent a minimitzar $E\left\{\left(x(n) - \hat{x}(n)\right)^2\right\}$ i per tant, l'esquema de la figura ens permet de separar els components w(n) y x(n).
b) Trobar les equacions normals per a l'obtenció dels coeficients del filtre H(z).

Si x(n) és una sinusoide de pulsació ω i w(n) soroll blanc de potència σ^2, es demana:
c) Prenent els valors de D i M adients, escriure els coeficients del filtre global emmarcat en línia discontínua A(z) en funció dels coeficients del filtre H(z).
d) Si la potència de la sinusoide és constant, raonar justificadament com varia la velocitat de convergència i l'error de desajustament en augmentar la potència del soroll.
e) Indicar raonadament els valors de la potència d'e(n) i dels coeficients del filtre A(z) quan la potència del soroll blanc tendeix a zero.

Es pot observar com en el processament unidimensional són necessàries p+1 mostres de la seqüència d'autocorrelació per a obtenir els p coeficients de predicció d'ordre p i la potència de l'error de predicció, es a dir, p+1 paràmetres.

f) És també necessari el mateix nombre de mostres de l'autocorrelació que de paràmetres en el cas de senyals bidimensionals? Raonar la resposta de forma gràfica per a un predictor d'ordre 2×3.

3.14 Es pretén estimar el valor mig d'un senyal $d(n)$ que conté una interferència $w(n)$. Per tal de fer-ho disposem d'un altre senyal $x(n)$, correlat amb la interferència, que té també un cert valor mig i construïm el filtre de Wiener discret de la figura, del qual trobarem els coeficients a base de minimitzar la potència de $e(n)$.



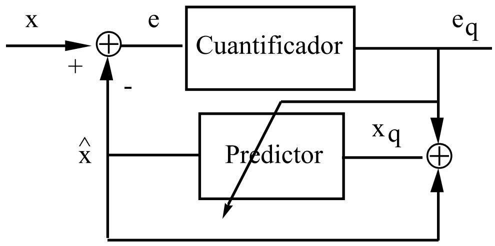
Noteu però, que com que volem conservar el valor mig de $d(n)$ el filtre H(z) hauria de bloquejar el pas de m_x, cosa que no aconseguim amb un filtre de Wiener normal, que tendiria a fer zero el valor mig de l'error. Per tal d'aconseguir el nostre propòsit, intentarem minimitzar la potència de $e(n)$ tot posant la restricció per als coeficients del filtre:

$$\mathbf{1}^T\mathbf{h} = 0 \qquad \text{amb} \quad \mathbf{1}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \cdots & h(M) \end{bmatrix}^T$$

Els coeficients de H(z) els trobarem optimitzant la funció $J(\mathbf{h}) = E\{e(n)^2\} + \lambda \mathbf{1}^T\mathbf{h}$ respecte de cadascuna de les components de **h** i respecte a λ (variable que sovint s'anomena multiplicador de Lagrange, i que és independent de **h**). Es demana:

a) Perquè la restricció imposada ens permet resoldre el problema?
b) Trobeu les equacions normals derivant *J*(**h**) respecte a **h** i a λ.
c) Raoneu qualitativament perquè *J*(**h**) és una bona funció per a aquest problema particular.
d) Fent servir les equacions trobades a l'apartat b, trobar l'expressió per als coeficients del filtre en funció només de la matriu de correlació de *x*(*n*) i del vector de correlació creuada entre *x*(*n*) i *d*(*n*).
e) Raonar qualitativament si la potència de l'error *e*(*n*) és més gran o més petita pel fet d'introduir la restricció.

3.15 La figura muestra el esquema de codificación DPCM en el que el predictor se ha hecho adaptativo. Como se indica en la figura la predicción se realiza a partir de la señal codificada $x_q(n)$ y la adaptación mediante el error de predicción cuantificado $e_q(n)$.



a) Demuestre que el error en la codificación

$$\varepsilon(n) = x(n) - x_q(n)$$

es igual al error en la cuantificación

$$\varepsilon_q(n) = e(n) - e_q(n)$$

Exprese la relación señal a ruido S/N de codificación en función de la ganancia de predicción G_p y la relación señal a ruido S/N_q de cuantificación.

b) Escriba la relación entrada-salida del predictor y la ecuación de adaptación de su respuesta impulsional.

En la situación de la figura el predictor puede interpretarse como un filtro de Wiener que minimiza $e_q(n)$ con $x_q(n)$ como dato.

c) Exprese $e_q(n)$ en función de x(n), la respuesta del predictor y el error de cuantificación $\varepsilon_q(n)$. Compruebe que $e_q(n)$ puede interpretarse como el error de predicción de $x_q(n)$ a partir de muestras anteriores.

d) Suponiendo que $\varepsilon_q(n)$ es blanco con potencia σ_q^2 e incorrelado con x(n), obtenga la correlación de $x_q(n)$. Deduzca las ecuaciones que permiten obtener el predictor con el error cuadrático medio mínimo.
e) Obtenga el predictor óptimo de orden 1 y la potencia del error de predicción. Determine la relación señal a ruido de codificación, cuando $r_x(0) >> \sigma_q^2$ (relación señal a ruido alta), en función de la ganancia de predicción del predictor óptimo de x(n) a partir de muestras anteriores de la propia x(n) y la relación señal a ruido de cuantificación.

3.16 Dadas las señales x(n) y d(n), se ha de diseñar un filtro de Wiener considerando a d(n) como señal de referencia.

a) Demuestre que el filtro de Wiener óptimo (sin suposiciones sobre su carácter FIR o su causalidad) es $H(\omega)=S_{xd}(\omega)/S_{xx}(\omega)$ cuando todas las señales son reales.
b) Al diseñarlo como un FIR de Q coeficientes, indique las razones por las que es de esperar que el error cuadrático medio mínimo resultante sera mayor que el que se obtendría de la solución anterior.
c) Si ambas densidades espectrales se estiman por el metodo WOSA (método de Welch), indique los pros y contras del filtro obtenido frente al diseño tradicional a partir de la matriz de correlación de los datos y el vector de correlación cruzada de referencia y datos.

Si se pretende calcular adaptativamente los coeficientes del filtro $\underline{h}$ de Q coeficientes mediante el algoritmo LMS, siendo 10 dB la potencia de x(n), se pregunta:

d) ¿Cuál es el μ adecuado para un desajuste del 1%?
e) Si la señal x(n) es blanca, ¿cuál es el número de adaptaciones necesario para que los coeficientes del filtro difieran del óptimo (en valor medio) el 1% de la diferencia inicial?
f) Si la regla de adaptacion es $\underline{h}_n=\underline{h}_{n-1}+\mu\varepsilon(n)\underline{x}(n)$ (con $\varepsilon(n)=d(n)-\underline{h}^T_{n-1}\underline{x}(n)$), calcule el error $\varepsilon_o(n)$ que se comete al usar $\underline{h}_n^T\underline{x}(n)$ como salida del filtro de Wiener y cual es la cota de μ para que $|\varepsilon_o(n)|^2$ sea menor que $|\varepsilon(n)|^2$.

3.17 Quan es pretén predir un senyal correlat de mitjana no nul·la $E\{x(n)\}=m$ (per exemple, una imatge) el predictor afí és una millor alternativa que el predictor lineal, ja que dóna lloc a una potència de l'error de predicció menor. En el cas d'ordre 1, les seves equacions respectives són:

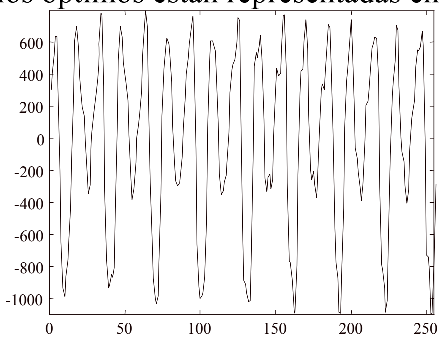
$$\hat{x}_p(n) = h_p\, x(n-1) \qquad \text{Predictor lineal}$$

$$\hat{x}_a(n) = h_a\, x(n-1) + b = \begin{bmatrix} h_a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-1) \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Predictor afí}$$

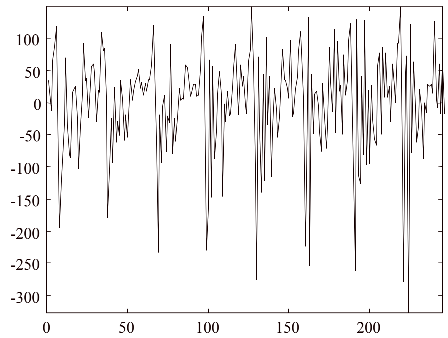
a) Quina equació ens permet obtenir el coeficient del predictor lineal d'ordre 1?
b) Obteniu les equacions que permeten calcular h_a i b, a partir de la minimització de $E\{|e(n)|^2\} = E\{|x(n) - x_a(n)|^2\}$.
c) Quant val en aquest cas la potència mínima de l'error de predicció?

d) Suposant que es desitja implementar el predictor afí d'ordre 1 de forma adaptativa, deduïu les equacions del LMS a partir de l'estimació instantània (aproximació estocàstica) del gradient.
e) Quina és l'expressió de la matriu els autovalors de la qual influeixen en la velocitat de convergència?
f) Quin marge de valors de μ ens assegura la convergència?

3.18 Se pretende construir un codificador de voz basado en la predicción "a corto plazo" de la señal, es decir usando un predictor de 10 coeficientes. La señal de entrada (voz) y salida (error de predicción) cuando los coeficientes del predictor son los óptimos están representadas en la figura:

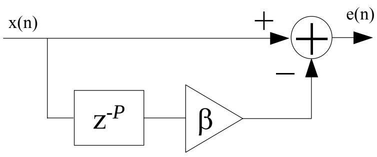


Señal de voz



Error de predicción

a) Explique brevemente porqué en la señal de error de predicción $x(n)$ aparece una periodicidad y esboce la densidad espectral de potencia del error de predicción.
Se propone que, antes de cuantificar el error de predicción, se utilice otro predictor "a largo plazo" que aproveche la correlación temporal de $x(n)$ y blanquee la señal completamente. El predictor será de un solo coeficiente y los parámetros a determinar son el valor del coeficiente β y el del retardo P (ver figura siguiente).



Se pide que:
b) Encuentre el valor de β (en función de P) que minimiza la potencia de $e(n)$.
c) Sustituyendo el valor anterior, obtenga una expresión para $J = E\{e^2(n)\}$. En vista de la expresión, indique un método para encontrar el valor óptimo de P.
d) Esboce $|H(\omega)|^2$ con $H(\omega) = \frac{E(\omega)}{X(\omega)}$ para β = 1 y un valor genérico de P.
e) A partir de $|H(\omega)|^2$ y de la densidad espectral de potencia de $x(n)$ encontrada en el apartado a), razone por qué la densidad espectral de potencia de $e(n)$ es plana.

3.19 Definido un filtro FIR según la ecuacion y(n)=$\underline{A}_n^T . \underline{X}_n$ siendo:

$$\underline{A}_n^T = [a(0), a(1), \ldots\ldots, a(Q-1)] \qquad \underline{X}_n^T = [x(n), x(n-1), \ldots\ldots\ldots, x(n-Q+1)]$$

donde el superíndice (T) indica traspuesto, se pretende analizar el comportamiento de éste cuando se desea obtener una salida y(n) lo mas proxima a una señal de referencia d(n) en sentido de mínimo error cuadratico medio ξ. El metodo de diseño es adaptativo usando el algoritmo LMS.

Responda a las siguientes preguntas:

1) Considerando que en el instante n el filtro implementado es $\underline{A}_n$, demuestre que el error cuadrático medio (MSE) ξ vendría dado por la expresión:

$$\xi_n = \xi_{min} + \underline{a}_n^T \underline{\underline{R}}\, \underline{a}_n$$

donde $\underline{a}_n = \underline{A}_n - \underline{A}_{opt}$, $\underline{A}_{opt}$ es la solución de Wiener, $\underline{\underline{R}}$ es la matriz de autocorrelación de la señal de entrada $x(n)$ de orden Q, y ξ_{min} es la potencia del error para la solución óptima de Wiener.

2) Dado que $\underline{A}_n$, en un algoritmo estocástico como el LMS, pasa a ser un vector de variables aleatorias, entonces también ξ_n será una variable aleatoria. Demuestre que el valor esperado de ξ_n viene dado por

$$E\{\xi_n\} = \xi_{min} + traza(\underline{\underline{\Delta}}_n \underline{\underline{R}})$$

donde *traza*(.) indica la suma de los elementos de la diagonal y $\underline{\underline{\Delta}}_n$ es la matriz de correlación $\underline{\underline{\Delta}}_n = E\{\underline{a}_n . \underline{a}_n^T\}$

(NOTA: Úsese la relación general $\underline{b}^T \underline{\underline{R}}\, \underline{b} = \sum_i \sum_j r_{i,j} b_i b_j$).

Considere a partir de ahora que la regla de adaptación de los coeficientes es $\underline{A}_{n+1} = \underline{A}_n + \mu . \underline{X}_n .(d(n) - y(n))$ y que se encuentra en la zona donde el algoritmo ha convergido, es decir,

$$E\{\underline{a}_{n+1} . \underline{a}_{n+1}^T\} = E\{\underline{a}_n . \underline{a}_n^T\} = \underline{\underline{\Delta}}$$

Además, considere para resolver el próximo apartado que $E\{\varepsilon(n) \underline{X}_n \underline{a}_n^T\} = -\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{\Delta}}$ siendo $\varepsilon(n) = d(n) - y(n)$.

3) Demuestre que $traza(\underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{R}}) = \frac{\mu}{2} E\{\xi\} traza(\underline{\underline{R}})$ en la convergencia a partir del cálculo de $E\{\underline{a}_{n+1} . \underline{a}_{n+1}^T\}$ y suponiendo independencia estadística entre $\varepsilon(n)$ y x(n). Usando la expresión encontrada demuestre que el desajuste del algoritmo LMS viene dado por:

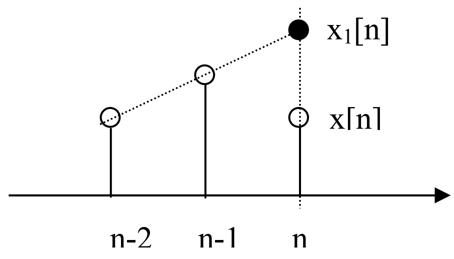
$$M = \frac{E(\xi) - \xi_{min}}{\xi_{min}} = \left(\frac{\mu}{2}\right) . traza(\underline{\underline{R}})$$

4) Calcule cómo se incrementa el desajuste del algoritmo si los coeficientes del filtro, comprendidos entre +1 y –1, se cuantifican con *b* bits y cómo ha de modificarse el parámetro de adaptación μ para hacer que el desajuste se mantenga igual que sin cuantificación de coeficientes. Modele el cuantificador como una fuente de ruido sobre cada coeficiente, siendo estos ruidos independientes entre si.

5) Demuestre que el desajuste permite conocer la relación señal ($d(n)$) a ruido ($\varepsilon(n)$) SNR a la salida del filtro adaptativo en comparación a la optima según la siguiente relación:

$$M = \left(\frac{SNR_{opt}}{SNR}\right) - 1$$

3.20 Per tal d'obtenir un estalvi en la representació del filtre predictor, es vol aconseguir un filtre d'error de predicció d'ordre 2M usant només M parametres. Suposarem que M=1 per simplicitat. La tècnica consisteix en el següent (veure la figura):



a) *Extrapolació*: tal com indica la figura, les dues mostres consecutives anteriors a l'instant *n* s'uneixen amb una línia recta i es calcula $x_1[n]$, valor de la recta a l'instant n, amb

$$x_1[n] = 2(x[n-1] - x[n-2]) + x[n-2]$$

b) *Predicció*: es construeix un valor predit de x[n] amb $\hat{x}[n] = -a_1 x_1[n]$

Es demana:

a) Trobar l'equació lineal que permet calcular, a partir de $r_{xx}[m]$, l'a_1 òptim que minimitza l'error quadràtic mitjà de la predicció.
b) Trobar la funció de transferència del filtre d'error de predicció A(z).
c) Establir l'equació d'adaptació del coeficient a_1 amb l'algorisme LMS.
d) Obtenir la condició de convergència per a μ, deixant-la en funció de l'autocorrelació de $x[n]$.

3.21 En telefonía de larga distancia aparecen ecos en los puntos de conversión de 2 a 4 hilos (bobinas híbridas).

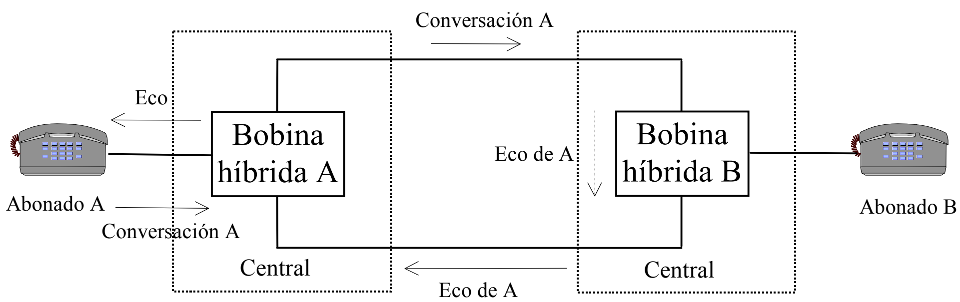


Figura 1

El funcionamiento normal de estos puntos (véase la Figura 2.a) consiste en que la señal procedente del locutor distante ($x_1(n)$) pasa al punto B, cancelándose totalmente su presencia en el punto C y evitando así su retorno al locutor distante. Así, en el punto C, únicamente debería estar presente la señal del locutor próximo ($x_2(n)$). De hecho, la cancelación de la señal $x_1(n)$ en el punto C no se consigue totalmente, siendo un modelo correcto del comportamiento de la bobina híbrida, respecto al paso de la señal hacia el punto C, el que se refleja en la Figura 2.b. Para solventar este problema es necesaria la utilización de canceladores adaptativos de eco, los cuales se insertan en el esquema anterior para anular la presencia de la señal del locutor distante en la señal en el punto C (y(n)). En este ejercicio se va a estudiar el diseño de dichos canceladores adaptativos de eco. Para su estudio, en una primera aproximación, se va a considerar que no hay presencia de ruido y que las señales de ambos locutores son incorreladas y de media nula.

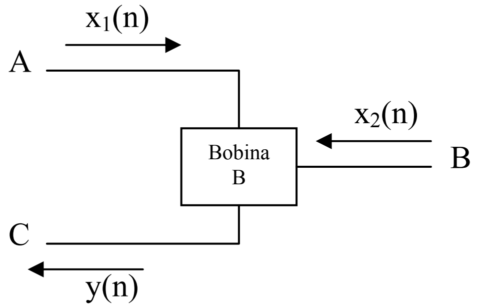


Figura 2.a

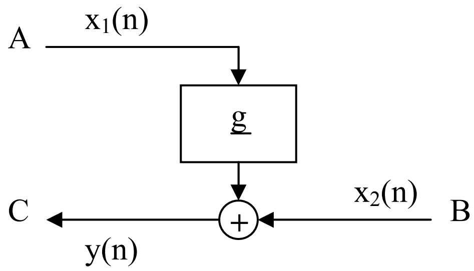


Figura 2.b

1. Proponed una configuración del sistema anterior (Figura 2.b) más un filtro adaptativo que actúe como cancelador adaptativo de ecos.
2. Expresad cada una de las señales presentes en el modelo general de la Figura 3 en función de las señales del problema de cancelación adaptativa de ecos (Figura 2.b) y de los dos filtros $\underline{g}$ y $\underline{h}$.

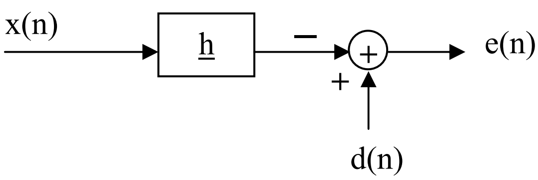


Figura 3

3. Hallad la expresión de la superficie de error en función de las correlaciones de las señales en la Figura 2.b y de los filtros $\underline{g}$ y $\underline{h}$.
4. Demostrad que la expresión anterior se corresponde con la solución general:

$$E\left\{e^2(n)\right\} = r_d(0) - 2\underline{h}^T \underline{r}_{xd}(n) + \underline{h}^T \underline{\underline{R}}_x \underline{h}$$

   donde los subíndices hacen referencia a las señales en la Figura 3. Para ello utilizad las relaciones halladas en el Apt. 2.

5. Hallad los coeficientes del cancelador de ecos óptimo.

En el caso de telefonía, el funcionamiento del algoritmo de adaptación depende del comportamiento de los dos locutores. Suponiendo que la adaptación se realiza mediante el algoritmo LMS, discutid los siguientes casos:

6. Ambos locutores están hablando al mismo tiempo y el locutor próximo deja de hablar ¿Cómo varía el valor óptimo de los coeficientes? ¿Y la superficie de error? ¿Cuáles son las variaciones del comportamiento del algoritmo LMS (convergencia, rapidez y desajuste)?
7. Únicamente está hablando el locutor distante y su potencia disminuye sustancialmente ¿Cómo varía el valor óptimo de los coeficientes? ¿Y la superficie de error? ¿Cuáles son las variaciones del comportamiento del algoritmo LMS? ¿Cómo elegiría el valor de μ_{max} para esta aplicación?
8. Únicamente está hablando el locutor próximo ¿Cómo varía el valor óptimo de los coeficientes? ¿Y la superficie de error? ¿Cuáles son las variaciones del comportamiento del algoritmo LMS? Dado que en un caso real las señales presentan ruido, ¿cómo se debería actuar ante la ausencia de señal del locutor distante?

3.22. En el filtrado de mínimo error cuadrático medio de datos $\left\{\underline{x}(n)\right\}$, cuando estos se encuentran altamente correlados, la matriz de correlación $\underline{\underline{R}} = E\left\{\underline{x}(n)\underline{x}^H(n)\right\}$ puede ser singular y carecer de inversa $\underline{\underline{R}}^{-1}$. Para solventar el problema del diseño del filtro transversal o FIR de vector de coeficientes $\underline{w}$, a partir de los datos mencionados y de una secuencia de entrenamiento o referencia $\{d(n)\}$, se minimiza la siguiente función de coste:

$$\underline{w} = \arg\min_{\underline{w}} \left\{ \xi\left(\underline{w}\right) = E\left(\left|e(n)\right|^2\right) + \alpha \left\|\underline{w}\right\|^2 \right\}$$

siendo α un escalar real y constante con el índice n, $\left\|\underline{w}\right\|^2 = \underline{w}^H \underline{w}$ y $e(n) = d(n) - \underline{w}^H \underline{x}(n)$ el error de filtrado.

Responda a las siguientes cuestiones.

a.- Obtenga la expresión del filtro óptimo que minimiza la función $\xi\left(\underline{w}\right)$ en condiciones estacionarias

b.- Describa el papel que desempeña la constante α en la solución encontrada en el apartado anterior. ¿Bajo que condiciones adoptaría un valor positivo, nulo o negativo dicha constante?

c.- Obtenga la ecuación de un filtro adaptativo basado en el gradiente estocástico (instantáneo o LMS) de la función $\xi\left(\underline{w}\right)$.

d.- Demuestre que el filtro adaptativo del apartado anterior converge en media a la solución obtenida en el primer apartado, es decir, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\underline{w}(n)\right) = \underline{w}_{optimo}$$

e.- Encuentre los limites del paso de adaptación o "step-size" μ en los que el filtro adaptativo converge a la solución deseada.

f.- Indique una cota superior para el tiempo de convergencia del algoritmo adaptativo anterior.

3.23. Vamos a estudiar las alternativas en la estimación de canal para un entorno de comunicaciones multiusuario. Supongamos que dos terminales de comunicaciones móviles pretenden transmitir a un receptor situado en la estación base. A fin de poder construir un receptor coherente, cada usuario transmite periodicamente y de manera síncrona con el otro usuario, una secuencia de *N* símbolos (secuencia piloto) que se usará para estimar el canal de propagación en el receptor usando los principios del filtro de Wiener. Supondremos en todo el ejercicio que el canal de propagación *h* es de un solo coeficiente (es decir, el canal no presenta selectividad en frecuencia).

Bajo estas hipótesis, podemos escribir la señal recibida durante el periodo de transmision de la secuencia piloto como la suma de las señales transmitidas por ambos usuarios $s_1(n)$ y $s_2(n)$ alteradas por los respectivos canales más un ruido blanco de media cero $w(n)$ y potencia σ_w^2:

$$y(n) = h_1 s_1(n) + h_2 s_2(n) + w(n) \qquad n = 0,...,N-1 \tag{1}$$

Estimación monousuario

En este caso la estimación del canal del usuario 1 se efectúa suponiendo desconocida la secuencia piloto del usuario 2. Supongamos que la correlación cruzada entre secuencias piloto es

$$r_{s_1,s_2} = \mathbf{s}_1^T(n)\mathbf{s}_2(n) = \rho\sqrt{r_{s_1,s_1} r_{s_2,s_2}} = N\rho \qquad |\rho| < 1$$

donde se ha supuesto que los símbolos que se transmiten son de módulo unidad.

a) Escriba la ecuación del filtro de Wiener que permite estimar el canal del usuario 1, mediante la minimización de la función:
b)

$$h_1 = \arg\min_{h_1} \mathbf{e}^T\mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{s}_1 h_1 \qquad \mathbf{y} = \left[y(0)\cdots y(N-1)\right]^T \qquad \mathbf{s}_1 = \left[s_1(0)\cdots s_1(N-1)\right]^T$$

c) Calcule el sesgo $E_w\left\{\hat{h}_1\right\} - h_1$.

d) Calcule la varianza de $\hat{h}_1$.

Estimación multiusuario

Una alternativa que nos permitiría eliminar el problema del sesgo consiste en realizar una estimación conjunta de los dos canales h_1 y h_2, para lo cual se reescribe la ecuación (1) en forma vectorial:

$$y(n) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + w(n) = \mathbf{h}^T \mathbf{s}(n) + w(n)$$

e) Escriba la ecuación que permite estimar los canales de ambos usuarios en funcion de la matriz de secuencias piloto y la señal recibida, a partir del problema de optimización:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg\min_{\mathbf{h}} \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{S}\mathbf{h} \qquad \mathbf{y} = \left[y(0) \cdots y(N-1) \right]^T \qquad \mathbf{S} = \left[\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \right] \qquad \mathbf{s}_i = \left[s_i(0) \cdots s_i(N-1) \right]^T$$

f) Calcule el sesgo de la estimación $E_w\left\{\hat{\mathbf{h}}\right\} - \mathbf{h}$. ¿Es necesario que se cumpla $\rho = 0$ para que el estimador sea no sesgado?

g) Calcule la varianza de los canales estimados como la diagonal de $E_w\left\{\hat{\mathbf{h}}\hat{\mathbf{h}}^T\right\}$ y su dependencia de ρ.

h) Como conclusión, suponga que se existe un desajuste en las potencias recibidas de cada usuario tal que $h_2 = 100h_1$ y que $\rho = 0.1$. Compare los sesgos y varianzas para cada una de las estrategias de estimación y valore cual es más conveniente.

3.24. Suponga que una señal x(n) (representada mediante un vector $\underline{x}$ = [x(n), …, x(n+M-1)]^T de media cero y matriz de correlación $\underline{\underline{R}}_x = E\{\underline{x}\underline{x}^H\}$) se transmite a través de un canal ruidoso de forma que la señal recibida viene dada por la expresión:

$$\underline{r}_1 = \underline{x} + \underline{v}$$

donde $\underline{\underline{R}}_v = E\{\underline{v}\underline{v}^H\} = \sigma_v^2 \underline{\underline{I}}$. El error cuadrático observado sobre el vector $\underline{x}$ recepción es por tanto:

$$e^2 = E\{(\underline{r}_1 - \underline{x})^H(\underline{r}_1 - \underline{x})\} = \text{traza}(E\{(\underline{r}_1 - \underline{x})(\underline{r}_1 - \underline{x})^H\}) = M\sigma_v^2$$

De forma alternativa, puede transmitirse una parte de la señal transformada:

$$\underline{y}_2 = \underline{\underline{U}}_P^H \underline{x}$$

ecuación en la que $\underline{\underline{U}}_P = [\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_P]$ contiene P (<M) autovectores de $\underline{\underline{R}}_x$. En el receptor, la señal recibida:

$$\underline{r}_2 = \underline{y}_2 + \underline{v}$$

se procesa de forma lineal para obtener una aproximación de $\underline{x}$ en la siguiente forma:

$$\hat{\underline{x}} = \underline{\underline{U}}_P \underline{r}_2$$

Se pide:

a) Calcule el error cuadrático cometido en el segundo receptor: $e^2=E\{(\underline{\hat{x}}-\underline{x})^H(\underline{\hat{x}}-\underline{x})\}=\text{traza}(E\{(\underline{\hat{x}}-\underline{x})(\underline{\hat{x}}-\underline{x})^H\})$ en funcion de los autovalores de $\underline{\underline{R}}_x$ y la potencia de ruido.

b) ¿Cuál es el sesgo cometido en esta estimacion de $\underline{x}$?

c) Suponga que los autovalores de $\underline{\underline{R}}_x$ decrecen monótonamente. Razone gráficamente que existen valores de P para los cuales el error cometido con este segundo esquema de transmision/recepcion es inferior al cometido con el primero.

El esquema propuesto intercambia sesgo por varianza del ruido en el receptor. Para eliminar el sesgo, se propone transmitir la señal (de igual potencia) $\underline{y}_3 = K\,\underline{\underline{\Lambda}}^{-1/2}\,\underline{\underline{U}}^H\,\underline{x}$, donde la matriz $\underline{\underline{U}}$ contiene todos los autovectores de $\underline{\underline{R}}_x$, $\underline{\underline{\Lambda}}$ es una matriz diagonal que contiene sus autovalores y $K=\sqrt{r_x(0)}$. La señal recibida es

$$\underline{r}_3 = \underline{y}_3 + \underline{v}$$

y el receptor propuesto será de la forma:

$$\underline{\hat{x}} = (1/K)\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}^{1/2}\,\underline{r}_3$$

d) Demuestre que en este caso no se obtiene ninguna ganancia (en términos de $SNR = r_x(0)/(e^2/M)$) respecto a la transmisión directa comentada en el primer párrafo del ejercicio.

3.25. El proceso x(n) de media cero y varianza 22, está formado por la suma de una componente de señal y otra de ruido de acuerdo a la siguiente expresión:

$$x(n) = y(n) + w(n) = \sum_{q=0}^{\infty} b^q\, d(n-q) + w(n)$$

Donde $|b|<1$ y tanto d(n) como w(n) son ruido blanco de media nula e independientes entre si. La relación señal a ruido $\frac{E\{y^2(n)\}}{E\{w^2(n)\}} = \frac{P_y}{P_w}$ es de 10 dB.

Se pretende diseñar un filtro de Wiener para, a partir de x(n) y con dos coeficientes $\underline{A} = [a(0) \quad a(1)]^T$, obtener una señal filtrada lo más parecida a d(n).

a) Demuestre que la potencia de ruido P_w es igual a 2.
b) Demuestre que el filtro optimo, en el caso de ausencia de ruido, viene dado por $\underline{A}_{opt} = [-b \quad 1]/(1-b)$.

Asumiendo que el autovalor mínimo de la matriz de autocorrelación de x(n), $\underline{\underline{R}}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix}$ es igual a 5.

c) Calcule el paso de adaptación μ para un algoritmo LMS de forma que el desajuste sea de un 10% (el desajuste puede calcularse como $M = \frac{\mu}{2}\,\text{traza}\left(\underline{\underline{R}}\right)$).

La ecuación que describe la evolución del vector de coeficientes en cada muestra $\underline{A}_n$ viene dada por:

$$\underline{A}_n = \left(\underline{\underline{I}} - \mu \underline{\underline{R}}\right)^n \left(\underline{A}_0 - \underline{A}_{opt}\right) + \underline{A}_{opt}$$

d) ¿Cuál es el número de muestras necesario para que la componente transitoria de la ecuación anterior se reduzca a 1/10 del valor inicial (*Ln*(10)= 2.3 y *Ln*(1-x) $\approx$ -*x*) para x<<1)?

A fin de mejorar la velocidad de convergencia se propone derivar una expresion para el LMS a partir de la función de error (que tiene el mismo mínimo):

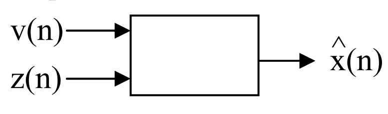
$$J = J_{\min} + \left(\underline{A} - \underline{A}_{opt}\right)^H \underline{\underline{R}}^p \left(\underline{A} - \underline{A}_{opt}\right)$$

e) ¿Cuál es la relación entre el vector gradiente de J para un *p* arbitrario y para *p* = 1? Escriba la ecuación de adaptación de los coeficientes en este caso.
f) ¿Qué valor de *p* acelera más la convergencia?
g) ¿Cuál sería la respuesta al apartado (d) en este caso?

NOTA: $\nabla_{\underline{z}^*}\left(\underline{z}^H \underline{\underline{R}}\underline{z}\right) = \underline{\underline{R}}\underline{z}$ si $\underline{\underline{R}}$ es hermítica.

3.26. Se tienen dos versiones ruidosas de un proceso *x*(*n*) de media nula: *v*(*n*) = *x*(*n*) + w_1(*n*) y *z*(*n*) = *x*(*n*) + w_2(*n*). Los ruidos w_1(*n*) y w_2(*n*) son independientes de x(*n*), blancos, de media nula, incorrelados entre sí y de potencias σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente.

Se pretende obtener una estimación $\hat{x}$(*n*) de la señal *x*(*n*) mediante un filtro de Wiener, utilizando uno de los procesos como referencia y el otro como dato. En este ejercicio se va a analizar el diseño del sistema; es decir, qué proceso se debe tomar como dato y cuál como referencia en el esquema de Wiener.



Considere inicialmente la configuración donde *v*(n) se toma como dato y *z*(n) como referencia.

a) Identifique las distintas señales presentes en el diagrama con el esquema de Wiener.

b) Halle la ecuación del filtro óptimo $\underline{h}_1$ en función de las autocorrelaciones de las señales *x*(n), w_1(n) y w_2(n). Determine si la presencia de los ruidos w_1(n) y w_2(n) afecta a la expresión de los coeficientes del filtro.

c) Halle la potencia mínima (ε_1) del error de la estimación de Wiener, diferencia entre la referencia y la salida del filtro de Wiener.

Determine cómo afecta la presencia de los ruidos w_1(n) y w_2(n) al valor de dicha potencia.

d) En este problema interesa que el error entre la salida de filtro de Wiener y el proceso que realmente se desea estimar ($x(n)$ en este caso) sea de potencia mínima. Demuestre que el filtro que minimiza la potencia de este error es el mismo que el obtenido en el apartado ***b)***, y que el valor mínimo de este error es ε_1' $= r_x(0) - \underline{h}_1^T\, \underline{r}_x$.

e) Para el caso de un filtro de un único coeficiente (h_1), halle el valor del coeficiente y expréselo en función de la relación señal a ruido $(S/N)_1$ de la señal $v(n)$. Calcule el valor de la potencia mínima (ε_1') del error entre la señal x(n) y la salida del filtro de Wiener para este caso.

Considere ahora el diseño alternativo; es decir, la configuración que emplea $z(n)$ como dato y $v(n)$ como referencia:

f) ¿Cuál sería la ecuación de diseño del nuevo filtro óptimo $\underline{h}_2$?
¿Cuál es el valor mínimo de la potencia (ε_2') del error entre el proceso x(n) y la salida del filtro de Wiener?
Para el caso de un filtro de un único coeficiente (h_2), halle el valor del coeficiente y expréselo en función de la relación señal a ruido $(S/N)_2$ de la señal $z(n)$. Calcule el valor de la potencia mínima (ε_2') del error entre la señal x(n) y la salida del filtro de Wiener para este caso.

g) Razone cuál de las dos configuraciones analizadas le parece más adecuada para la estimación de x(n) basándose en los resultados obtenidos para el caso de un filtro de un único coeficiente.

3.27. Dado un proceso gaussiano y estacionario{x(n)}, cuyos tres primeros valores de su autocorrelación son r0, r1 y r2, se desea realizar un predictor de orden uno, es decir, $\hat{x}(n) = a.x(n-1)$

a) Encuentre la expresión del coeficiente y el error de predicción correspondiente.

b) Considerando que |r2|<|r1| muestre que el predictor $\hat{x}(n) = c.x(n-2)$ sería de peor calidad.

c) Calcule la expresión, en general de un predictor a partir del diseño de un FIR de Q + 1 coeficientes que minimiza la potencia de salida cuando a la entrada se aplica x(n), con la restricción de que su primer coeficiente es la unidad.

d) Repita el apartado (a), es decir calcule los coeficientes y la potencia del error de predicción, para el caso de un predictor de orden dos (Q=2), es decir:

$$\hat{x}(n) = a.x(n-1) + b.x(n-2)$$

Use la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} r0 & r1 & r2 \\ r1 & r0 & r1 \\ r2 & r2 & r0 \end{bmatrix}^{-1} = \left(\frac{1}{\Delta}\right).\begin{bmatrix} r0^2 - r1^2 & -(r1.r0 - r1.r2) & r1^2 - r0.r2 \\ -(r1.r0 - r1.r2) & r0^2 - r2^2 & -(r1.r0 - r1.r2) \\ r1^2 - r0.r2 & -(r1.r0 - r1.r2) & r0^2 - r1^2 \end{bmatrix}$$

donde Δ es el determinante de la matriz de autocorrelación.

(NOTA: Deje el error en función del determinante sin sustituirlo por su valor en función de los valores r0,r1 y r2).

e) Calcule ahora los coeficientes de un interpolador, $\hat{x}(n) = a.x(n-1) + b.x(n+1)$ y muestre que, con menos operaciones que el predictor del apartado (d), consigue un error de interpolación menor que el del apartado mencionado, siempre y cuando |r2| sea mayor que |r1|.

f) Usando el algoritmo de Levinson, calcule los dos coeficientes de reflexión (parcors) k_1 y k_2 y dibuje la implementación de la red en celosía correspondiente.

g) Demuestre que el algoritmo de actualización de cualquiera de los dos coeficientes sería: $k_q(n+1) = k_q(n) + \mu.e_f^{q+1}(n).e_b^q(n-1); q = 1,2$, donde $e_f^q(n)\ y\ e_b^q(n)$ son los errores "forward" y "backward", de orden q en el instante n.

h) Calcule el valor de μ_q para convergencia con un desajuste del 10%, y el número de muestras para convergencia.

i) Comente ventajas y/o desventajas de emplear un algoritmo de gradiente sobre los coeficientes de reflexión en lugar de hacerlo directamente sobre los coeficientes del predictor, en términos de muestras para convergencia y desajuste.

3.28 En este problema definiremos un filtro predictor con componentes *forward* y *backward*: supondremos que disponemos de las muestras

$$\mathbf{x}_1(n) = \begin{bmatrix} x(n+1) \\ x(n+2) \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2(n) = \begin{bmatrix} x(n-1) \\ x(n-2) \end{bmatrix}$$

y queremos estimar $x(n)$ a partir de una combinación lineal de ellas:

$$\hat{x}(n) = \mathbf{h}_1^H \mathbf{x}_1 + \mathbf{h}_2^H \mathbf{x}_2$$

A partir de la minimización del error cuadrático medio:

$$\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\} = \arg\min_{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2} E\left\{|x(n) - \hat{x}(n)|^2\right\}$$

Se pide:

1) Encuentre las expresiones para los coeficientes del filtro, en función de las matrices de correlación y los vectores de correlación adecuados.

2) Demuestre que $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^*$ a partir de las expresiones anteriores.

3) Determinar la potencia mínima del error.
4) ¿Cuál sería la mejor estimación de $x(n)$ si el proceso fuera blanco?
5) Escriba las expresiones de una solución adaptativa basada en el gradiente estocástico (LMS) para un vector **h** que contenga $\mathbf{h}_1$ y $\mathbf{h}_2$:

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^H & \mathbf{h}_2^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = x(n) - \mathbf{h}^H \mathbf{x}(n)$$

6) Razone cuales son las cotas del paso de adaptación que garantizan la convergencia del algoritmo.

Qüestions

Q.3.1 Pretenem predir dos processos $x(n)$ i $y(n)$ amb l'algorisme LMS, amb matrius de correlació $\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{R}_{yy} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$. Doneu un valor del paràmetre d'adaptació μ en els dos casos. Què podem dir de la velocitat de convergència en cada cas?

Q.3.2 ¿Cómo afecta un mal diseño del predictor en el sistema DPCM?

Q.3.3 Es pretén construir un array d'antenes receptores amb coeficients fixos que permeti obtenir un diagrama de radiació de valor zero en les direccions de 30º i –45º. Suposi's que la separació entre sensors és d=λ/2.

a) Quin nombre mínim d'elements de l'array necessitem?
b) Dibuixeu el diagrama de radiació.
c) Si, mantenint la posició dels sensors i els coeficients seleccionats, el sistema passa a funcionar a una freqüència doble, en quines direccions tindrem els nuls?

Sol·lucions

3. ESTIMACIÓ i PREDICCIÓ LINEAL DE SENYALS. FILTRATGE ADAPTATIU

3.1 a) $r_{xx}(m) = r_{ss}(m) + \delta(m),\ \ r_{ss}(m) = \frac{49}{36}(0.8)^{|m|}$

b) $\hat{s}(n) = 0.462x(n) + 0.248x(n-1)$

c) $E = 0.462$

3.5 $\mathbf{h_1} = \frac{2}{3}$ $\quad\quad \mathbf{h_2} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \end{bmatrix}$ $\quad\quad \mathbf{h_3} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.0 & -0.25 \end{bmatrix}$

3.7 a) Ordres 3 i 4: $\hat{x}(n) = \frac{14}{24}x(n-1) + \frac{9}{24}x(n-2) - \frac{1}{24}x(n-3)$

b) $r(0) = 4.94\sigma_w^2,\ \ r(1) = 4.33\sigma_w^2,\ \ r(2) = 4.2\sigma_w^2,$

$r(3) = 3.86\sigma_w^2,\ \ r(4) = 3.65\sigma_w^2,\ \ r(5) = 3.4\sigma_w^2$

c) $k_1 = -0.88,\ \ k_2 = -0.351,\ \ k_3 = 1/24,\ \ E = \sigma_w^2$

3.8 a) $a_1 = 0,\ \ a_2 = 1$

c) $N = 4$: $\ a_1 = 0,\ \ a_2 = 1/2$

$N = 8$: $\ a_1 = 0,\ \ a_2 = 3/4$

$N \to \infty$: $\ a_1 = 0,\ \ a_2 = 1$

d) $a_1 = 0,\ \ a_2 = 1$

3.9 a) $r_{xx}(m) = P\cos\omega_1 m + \sigma_w^2\delta(m)$

b) $a_1 = \dfrac{P\cos\omega_1\left(P\cos 2\omega_1 - \left(P + \sigma_w^2\right)\right)}{\left(P + \sigma_w^2\right)^2 - \left(P\cos\omega_1\right)^2}$

$a_2 = \dfrac{\left(P\cos\omega_1\right)^2 - P\cos 2\omega_1\left(P + \sigma_w^2\right)}{\left(P + \sigma_w^2\right)^2 - \left(P\cos\omega_1\right)^2}$

c) $a_1 = -2\cos\omega_1,\ \ a_2 = 1,\ \ E = 0$.

3.10 2) Coeficients: $w_1 = w_2 = \dfrac{\rho}{1+\rho^2}$

3) $G_2 = \dfrac{1+\rho^2}{1-\rho^2}$

4) $G_1 = \dfrac{1}{1-\rho^2}$

5) $G_2^{'} = \dfrac{1}{1{,}5 - 2\rho + 0{,}5\rho^2}$

3.11 1) Es demostra de forma immediata plantejant $e(n) = x(n) - \mathbf{h}^T\mathbf{x}(n)$ i buscant $E\left[e^2(n)\right]$

3) $\sigma_d^2 = (1-\rho_1^2+\delta_1^2)\sigma_x^2$

4) Aplicant que $\sigma_d^2 = (1-2h_1\rho_1+h_1^2)\sigma_x^2$ I sabent que el guany del predictor es defineix com $G_p = \dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_d^2}$, ens dona $G_p = 2.8dB$. En el cas òptim, $G_p = 2.9dB$.

5) Només cal suposar que las variàncies son les mateixes, $\sigma_u^2 = \sigma_v^2$ i plantejar

$$\sigma_d^2 = \lambda\sigma_{du}^2 + (1-\lambda)\sigma_{dv}^2$$

3.14 b)

$$\nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}}\left[E\left\{2e(n)(d(n)-\mathbf{x}^T(n)\mathbf{h})\right\} + \lambda\mathbf{1}^T\mathbf{h}\right] = -2E\left\{e(n)\mathbf{x}^T(n)\right\} + \lambda\mathbf{1}^T = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}J(\mathbf{h}) = \mathbf{1}^T\mathbf{h} = 0 \quad (2)$$

c) Fem servir les equacions (1) i (2) per a obtenir **h** i eliminar λ*:*

$$-2E\left\{\left(d(n)-\mathbf{h}^T\mathbf{x}(n)\right)\mathbf{x}^T(n)\right\} + \lambda\mathbf{1}^T = 0$$

$$-2\mathbf{r}_{xd}^T + 2\mathbf{h}^T\mathbf{R}_{xx} + \lambda\mathbf{1}^T = 0$$ i substituint a (2) s'obté λ:

$$\mathbf{h}^T = \left(\mathbf{r}_{xd}^T - \frac{\lambda}{2}\mathbf{1}^T\right)\mathbf{R}_{xx}^{-1}$$

$$\mathbf{1}^T\mathbf{h} = \mathbf{h}^T\mathbf{1} = \mathbf{r}_{xd}^T\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{1} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{1}^T\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{1} = 0$$

$$\lambda = 2\frac{\mathbf{r}_{xd}^T\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{1}}$$

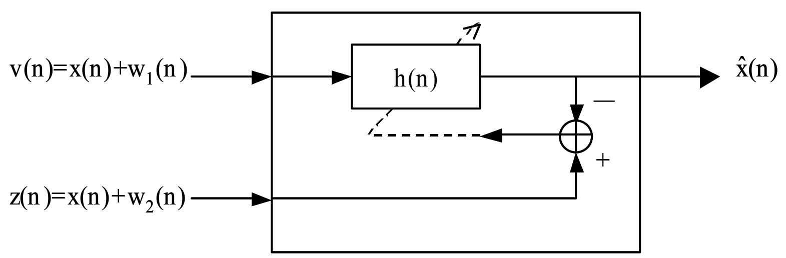
fent servir les dues expressions*:* $\mathbf{h} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\left(\mathbf{r}_{xd} - \dfrac{\mathbf{r}_{xd}^T\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{1}}\mathbf{1}\right)$

3.15 b) $S/N = G_p\, S/N_q$

e) $S/N = G_p\,(S/N_q - 2)$

3.26

a)



b) *El filtro óptimo viene dado por* $\underline{h}_1 = \underline{\underline{R}}_v^{-1}\underline{r}_{zv}$, *siendo*

$$\underline{\underline{R}}_v = E\left\{\left(\underline{x}(n)+\underline{w}_1(n)\right)\left(\underline{x}(n)+\underline{w}_1(n)\right)^T\right\} = \underline{\underline{R}}_x + \underline{\underline{R}}_{w_1} = \underline{\underline{R}}_x + \sigma_1^2\underline{\underline{I}}$$

$$\underline{r}_{zv} = E\left\{z(n)\underline{v}(n)\right\} = E\left\{\left(x(n)+w_2(n)\right)\left(\underline{x}(n)+\underline{w}_1(n)\right)^T\right\} = \underline{r}_x$$

Por lo tanto

$$\underline{h}_1 = \left(\underline{\underline{R}}_x + \sigma_1^2 \underline{\underline{I}}\right)^{-1} \underline{r}_x$$

La solución óptima de Wiener sólo depende del ruido w_1, no de w_2.

c) *La potencia mínima del error es la obtenida cuando se emplea el filtro óptimo y viene dada por:*

$$\varepsilon_1 = E\left\{e_1^2(n)\right\} = r_d(0) - \underline{h}_{opt}^T \underline{r}_{dx} \quad siendo \quad d(n) = z(n) = x(n) + w_2(n)$$

Dando valores:

$$r_d(0) = E\left\{z^2(n)\right\} = E\left\{(x(n) + w_2(n))^2\right\} = r_x(0) + \sigma_2^2$$

$$\underline{r}_{dx} = \underline{r}_{zv} = \underline{r}_x$$

por lo tanto

$$\varepsilon_1 = r_x(0) + \sigma_2^2 - \underline{h}_1^T \underline{r}_x = r_x(0) + \sigma_2^2 - \underline{r}_x^T \left(\underline{\underline{R}}_x + \sigma_1^2 \underline{\underline{I}}\right)^{-1} \underline{r}_x$$

En esta ecuación se aprecia la influencia directa de w_1 y la influencia indirecta de w_2 sobre ε_1.

d) *Ahora se debe minimizar la potencia del error e_1'(n) definido como*

$$e'(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \underline{h}^T \underline{v}(n)$$

Igualando el gradiente de la potencia de este error a cero se hallan los coeficientes óptimos del filtro:

$$\frac{\partial E\left\{\left(e_1'(n)\right)^2\right\}}{\partial \underline{h}} = \underline{0} \Rightarrow 2E\left\{\left(x(n) - \underline{h}_1'^T \underline{v}(n)\right)\underline{v}(n)\right\} = \underline{0}$$

$$\left.\begin{array}{r} E\{x(n)\underline{v}(n)\} - E\left\{\underline{v}(n)\underline{v}^T(n)\right\}\underline{h}_1' = \underline{0} \\ v(n) = x(n) + w_1(n) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\underline{\underline{R}}_x + \sigma_1^2\right)\underline{h}_1' = \underline{r}_x$$

de forma que el filtro que minimiza la varianza de $e_1(n)$ ε_1 también minimiza la varianza de $e'_1(n)$ ε'_1. Ahora ε'_1 es igual a ε_1 pero sin la potencia del error $w_2(n)$:

$$\varepsilon_1' = r_x(0) - \underline{h}_1^T \underline{r}_x = r_x(0) - \underline{r}_x^T \left(\underline{\underline{R}}_x + \sigma_1^2 \underline{\underline{I}}\right)^{-1} \underline{r}_x$$

e) *Particularizamos la expresión de $\underline{h}_1$ y de ε'_1 para el caso de 1 coeficiente*

$$h_1 = \frac{r_x(0)}{r_x(0) + \sigma_1^2} = \frac{(S/N)_1}{1 + (S/N)_1} \quad siendo \quad (S/N)_1 = \frac{r_x(0)}{\sigma_1^2}$$

$$\varepsilon_1' = r_x(0) - h_1 r_x(0) = r_x(0)\frac{1}{1 + (S/N)_1}$$

f) *Análogamente a los apartados anteriores:*

$$\underline{h}_2 = \left(\underline{\underline{R}}_x + \sigma_2^2 \underline{\underline{I}}\right)^{-1} \underline{r}_x$$

$$\varepsilon_2' = r_x(0) - \underline{h}_2^T \underline{r}_x$$

y en el caso de un coeficiente:

$$h_2 = \frac{r_x(0)}{r_x(0)+\sigma_2^2} = \frac{(S/N)_2}{1+(S/N)_2} \quad \textit{siendo} \ \ (S/N)_2 = \frac{r_x(0)}{\sigma_2^2}$$

$$\varepsilon_2' = r_x(0)\frac{1}{1+(S/N)_2}$$

g) *Siguiendo un criterio de mínimo error cuadrático elegiremos como dato la señal que tenga la mejor relación señal a ruido.*

4. CODIFICACIÓ DE FONT AMB MÈTODES TRANSFORMATS

4.1 Demostrar que si es representa la seqüència real x(n), n=0,1,...,N-1, com a combinació lineal dels M (M<N) primers autovectors de la seva matriu d'autocorrelació $\underline{\underline{R}}_X$ (representació amb DKLT), es verifica que l'error quadràtic mitjà de la representació és

$$E = \sum_{i=M+1}^{N} E\left\{\left|a_i\right|^2\right\} = \sum_{i=M+1}^{N} \lambda_i$$

on a_i són els coeficients de la combinació lineal i λ_i els autovalors de $\underline{\underline{R}}_X$.

4.2 Determinar la matriu de la transformació discreta de Karhunen-Loéve de primer ordre d'un procés estacionari amb $r_x(0)=1$ i $r_x(1)=\rho$.

4.3 Siguin $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{N-1}$ els vectors de la transformació Karhunen-Loéve discreta (DKLT), o transf. de Hottelin, d'un procés aleatori x(n) que presenta matriu d'autocorrelació $\underline{\underline{R}}$. Primer de tot es demana:

a) Demostrar que les matrius $\underline{\underline{R}}$ i $\underline{\underline{R}}^{-1}$ presenten els mateixos autovectors i que els autovalors d'una són els inversos dels de l'altra.

Suposarem ara que x(n) és un procés AR d'ordre 1 de la forma $x(n)=\rho x(n-1)+w(n)$, on w(n) és soroll blanc. Volem comprovar que la DCT coincideix amb la DKLT en aquest tipus de procés, sempre que $\rho \to 1$. Per això, prenent N=3, es demana:

b) Escriure la matriu d'autocorrelació 3x3 de x(n) en funció de ρ i r(0). Coneixent que $\underline{\underline{R}}^{-1}$ és proporcional a la matriu $\underline{\underline{B}}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-\rho\alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 1-\rho\alpha \end{pmatrix}$$

calcular el valor de α en funció de ρ.

c) Si els coeficients transformats amb DCT són

$$C(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a_k(n) x(n)$$

on

$$a_k(n) = \frac{c}{\sqrt{N}} \cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N}, \quad 0 \le n,k \le N-1,$$

$$c = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \sqrt{2}, & k \ne 0, \end{cases}$$

trobar els vectors $\underline{c}_i$ de la transformació per a N=3, comprovant que són ortonormals.

d) Fent $\rho \to 1$, i deixant $\underline{\underline{B}}$ en funció de α, verificar que els vectors $\underline{c}_i$ de la DCT són els autovectors de la matriu $\underline{\underline{B}}$ i demostrar així, amb l'ajuda de l'apartat (a), que aquests vectors $\underline{c}_i$ són idèntics als vectors $\underline{a}_i$ de la DKLT.

4.4 La transformada de Hadamard bidimensional d'ordre 2 es defineix de la forma següent:

$$\underline{\underline{H}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

i la transformada d'ordre superior es defineix a partir de la d'ordre 2 amb

$$\underline{\underline{H}}^{(2N)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}^{(N)} & \underline{\underline{H}}^{(N)} \\ \underline{\underline{H}}^{(N)} & -\underline{\underline{H}}^{(N)} \end{bmatrix}$$

Considerem la imatge de 2×2

35	30
25	15

Si s'aplica la transformada $\underline{\underline{H}}$ a aquesta imatge i es realitza una codificació per zones de manera que es descarta la segona columna de coeficients transformats i es manté la primera, es demana:

1) Indicar la matriu de Hadamard d'ordre 4 i ordenar-la en ordre creixent de *seqüències* (s'anomena *seqüència* d'una columna de la matriu el nombre de canvis de signe al llarg de la columna).
2) Determinar la imatge reconstruïda i el seu error quadràtic mitjà.
3) Calcular també l'error en el domini transformat. Per què coincideix amb el calculat a 2)?

4.5 Un sistema de codificació BTC (Block Truncation Coding) divideix la imatge en blocs de 4×4 pícsels. Per a cada un dels blocs es dissenya un quantitzador de dos nivells, fixant el llindar del quantitzador i els corresponents nivells de quantització segons el contingut de cada bloc (quantitzador adaptatiu). D'aquesta manera, cada bloc queda representat per: 1) un mapa d'uns i zeros, 16 bits en total, que indica el nivell associat a cada pícsel, i 2) la informació lateral que especifica els valors dels dos nivells de quantització. El descodificador consisteix en un simple procés d'assignar a cada pícsel el valor corresponent al nivell indicat en el seu bit.
Suposi's el següent bloc de 4×4:

146	149	152	156
97	122	144	147
89	90	135	145
85	92	99	120

Es demana:

1) Determinar el bloc reconstruït si s'escull com a llindar de quantització la mitjana de tot el bloc i els dos nivells de quantització es defineixen, respectivament, com a valors mitjans dels pícsels que queden per sota i per sobre del llindar, arrodonint a l'enter més proper.
2) Si els nivells de quantització es representen amb 8 bits cadascun, determinar la compressió aconseguida en bits per pícsel respecte de la codificació de cada pícsel amb 8 bits i suposant que no s'utilitza cap sistema de compressió addicional per codificar el mapa.
3) Comentar els possibles avantatges i inconvenients d'aquest sistema de codificació.

4.6 Un vector de dimensió 2 i mitjana nul.la es transforma mitjançant una transformada unitària $\underline{\underline{A}}\underline{u}=\underline{v}$ definida de la següent manera: $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\underline{u} = \underline{v}$. Sigui $\underline{\underline{R}}_u$ la matriu de covariancia del vector $\underline{u}$ definida per $\underline{\underline{R}}_u = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$.

1) Es demana, en primer lloc:
   a) Calcular l'expressió general de la matriu de covariància $\underline{\underline{R}}_u$ del vector $\underline{v}$ en funció d'$\underline{\underline{A}}$ i $\underline{\underline{R}}_u$. A continuació, a partir d'aquesta expressió i prenent $\rho = 0.95$, es demana:
   b) Calcular el percentatge de la potència total que s'ha concentrat en la primera mostra del vector transformat $\underline{v}$. Comparar-ho amb la distribució de potència entre les dues components del vector $\underline{u}$.
   c) Indicar la correlació entre les mostres del vector transformat. Comparar-ho amb la mateixa correlació del vector $\underline{u}$.

2) Es demana també:
   a) Trobar la matriu de transformació de Karhunen-Loeve d'$\underline{u}$ en funció de ρ.
   b) Calcular, per al cas de la KLT, la matriu de covariancia $\underline{\underline{R}}_v$ del vector $\underline{v}$ en funció de ρ. Comparar-ho amb la transformació utilitzada a l'apartat 1).

4.7 L'equip d'enginyers d'un hospital vol dissenyar un sistema de transmissió de radiografies per a fer diagnòstic remot. Les imatges generades són de NxN pícsels quantificades amb 8 bits, i es volen transmetre per una línia telefònica a 28800 bps. El codificador de canal afegeix per picsel 3 bits de control (bits start, paritat i stop), per la qual cosa, si N=1024, la quantitat total de bits a transmetre és aproximadament 11,5 Mbits o l'equivalent a uns 400 segons de transmissió.
Els metges usuaris del sistema estimen que el temps d'espera de la imatge és massa llarg en el receptor per la qual cosa s'ha pensat en fer un sistema de transmissió més

atractiu. Els metges descarten la possibilitat de comprimir amb pèrdues la imatge, ja que es podrien perdre detalls que indiquessin la presència d'una patologia.
La solució pensada és un sistema de transmissió progressiva, amb la qual obtindríem la imatge completa sense error després de quatre transmissions (o refinaments) successius. El primer refinament seria el que reduiria de forma més important l'error en la imatge reconstruïda i el darrer el que ho faria de forma menys significativa. A l'hora de dissenyar el sistema es presenta l'alternativa de fer servir la DCT sobre blocs de grandària MxM o bé un sistema basat en el Bit Plane Encoding (és a dir, la transmissió progressiva de plans de bit: en primer lloc els 2 bits mes significatius per cada picsel, desprès els 2 següents i així successivament), i ens decidirem per aquell que doni lloc a una imatge reconstruïda en el primer refinament que presenti més potència.
Per tal d'analitzar el problema, suposarem el següent model per a les imatges típiques a transmetre:

1. els pícsels x(m,n) (0≤m,n≤N-1) són variables aleatòries uniformement distribuïdes que prenen valors discrets entre 0 i 255.
2. la transformada s'aplica als blocs d'imatge i, en conseqüència, cadascun dels coeficients de la DCT X(k,l) (0≤k,l≤M-1) és també una variable aleatòria per a la que suposem una potència promig de:

$$E\left\{\left|X(k,l)\right|^2\right\} = R\exp(-\alpha(k+l)) \qquad amb\ \alpha > 0$$

   Amb aquest model representem adequadament la menor magnitud dels coeficients associats a freqüències espacials elevades.

Es demana:

a) Quin es el valor d'R (depenent d'α) per a blocs de tamany 2x2 (M=2)? Justifiqueu cada afirmació.

$$\text{(Feu servir la relació: } 1+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{)}$$

b) Quina és la potència esperada del senyal reconstruït en el primer refinament per a l'esquema basat en la DCT, per a un valor típic α=3? Negligiu l'error de quantificació.
c) Per al Bit Plane Encoding, quins són els plans de bit que s'envien en el primer refinament? De quina forma queda quantificada la imatge original?
d) Quina és la potència esperada del senyal reconstruït en el primer refinament del Bit Plane Encoding?

Un cop triat l'esquema basat en la DCT es demana:

e) Suposant que M=2, descriu en detall quines són les operacions que s'efectuen en el transmissor i en el receptor.

<u>Nota</u>: Les funcions base de la transformació cosinus són

$$a_k(m) = \sqrt{\frac{s}{M}}\cos\left(\frac{(2m+1)k\pi}{2M}\right) \qquad s = \begin{cases} 2 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

4.8 L'objectiu d'aquest exercici es realitzar una comparació entre sistemes de codificació *zonal* temporal i freqüencial. Amb aquest fi, suposem que una sèrie de mostres consecutives unidimensionals es divideix en vectors de 2 components $x(0)$ i $x(1)$.

1) La codificació zonal temporal es defineix en la seva versió a) de la següent forma: les mostres originals $x(0)$ i $x(1)$ es reconstrueixen al receptor com $y(0)=x(0)$, $y(1)=0$. En la versió b) les mostres $x(0)$, $x(1)$ es reconstrueixen en el receptor com a $y(0)=x(0)$ i $y(1)=x(0)$. Calculeu les variàncies de l'error de reconstrucció σ^2_r en els dos casos. Suposeu coneguda la potència del senyal a comprimir $r_{xx}(0)$ i la correlació $r_{xx}(1)$. Per a quins valors de $\rho = \dfrac{r_{xx}(1)}{r_{xx}(0)}$ és l'opció b) millor que l'opció a)?
2) De forma similar, per a una certa transformació $\underline{\underline{A}}\underline{x}=\underline{z}$, es defineix la quantificació zonal freqüencial en la seva versió c) com la que fixa en l'emissor $z(0)=z(0)$, $z(1)=0$ i en la seva versió d) com la que fixa $z(0)=z(0)$, $z(1)=z(0)$. En el receptor es reconstrueix el senyal a partir de la corresponent transformació inversa. Per a $\underline{\underline{A}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, calculeu les variàncies de l'error de reconstrucció en els dos casos.
3) Si es defineix la relació senyal-soroll com $SNR = 10\log_{10}\left(\dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_r^2}\right)$, calculeu les SNR dels casos a), b), c) i d). Basant-nos en aquest criteri, quin és el millor sistema de compressió?

4.9 Se desea codificar una señal x(n) que responde a un modelo AR de orden 1:

$$x(n) = \rho\, x(n-1) + w(n)$$

Para ello, la señal se segmenta en tramos de longitud L muestras y se codifica independientemente cada uno de estos tramos. Se desea comparar dos posibles opciones para la codificación:

Opción 1
Sea $\underline{x} = [x_1, x_2, ..., x_L]$ el vector formado por las muestras correspondientes a un tramo. La primera muestra se cuantifica directamente y las demás se cuantifican diferencialmente, es decir, se predice su valor a partir de la muestra anterior y se cuantifica el error de predicción.

Opción 2
El vector $\underline{x}$ es transformado mediante la transformada coseno y se cuantifican las componentes del vector transformado.

En ambas opciones, se asigna a cada cuantificador un número de bits tal que la potencia del error de cuantificación sea aproximadamente igualen todos ellos. Se admite que la potencia del error de cuantificación viene dada por la expresión

$$E\{\varepsilon^2\} = \sigma^2\, 2^{-2B}$$

donde σ^2 es la potencia del parámetro a cuantificar y B el número de bits del cuantificador.

Bajo el supuesto de que la longitud de los segmentos de señal sean de L=2, se pide:

a) ¿Cuál es la potencia de las cantidades a cuantificar en la primera opción en función de la potencia de la señal y ρ?
b) Si N es el total de bits a utilizar en la codificación de un vector, determine las ecuaciones que permiten calcular B_1 y B_2 (número de bits a asignar a cada uno de los cuantificadores) bajo la condición de que las potencias del error de cuantificación sean iguales en todos los cuantificadores.
c) Calcule la suma de las potencias de los errores de codificación de los componentes del vector $\underline{x}$.
d) Sabiendo que la matriz correspondiente a la transformación coseno de orden L=2 es

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

¿cuál es la potencia de los dos coeficientes de la transformación en función de la potencia de la señal y ρ?
e) Si N es el total de bits a utilizar en la codificación de un vector transformado, determine las ecuaciones que permiten calcular B_1 y B_2, número de bits a asignar a cada uno de los cuantificadores.
f) Calcule la suma de los errores de codificación de los componentes del vector $\underline{x}$.
g) Si N = 8 y ρ = 0.95, determine el número de bits a asignar a los cuantificadores y la suma de las potencias de los errores de codificación de los componentes del vector $\underline{x}$ para ambas opciones de codificación. Discuta el resultado obtenido.

NOTA.- Tenga en cuenta que $\log_2(s) = 1.443 \ln(s)$.

4.10 Una secuencia de vídeo puede considerarse como una señal tridimensional $x(m, n, j)$, muestreada en las dos dimensiones espaciales (m, n) y en el tiempo (j), como se indica en la figura 1.

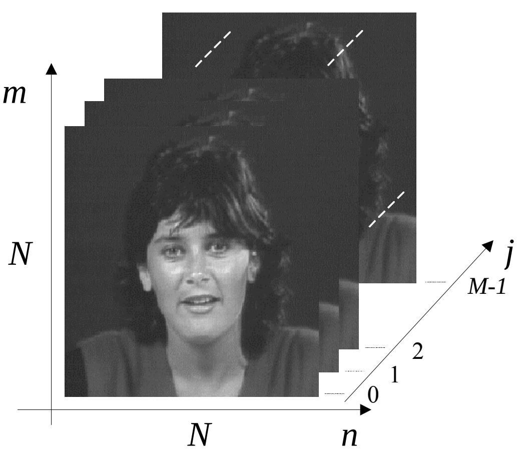


Figura 1

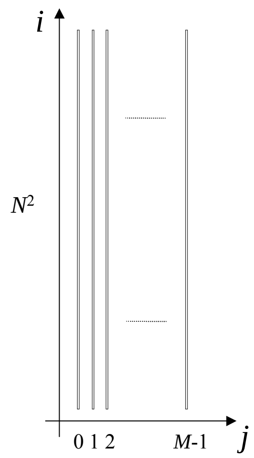


Figura 2

Algunos codificadores de vídeo usan una codificación híbrida: transformada en las dos dimensiones espaciales y diferencial en la dimensión temporal. Se va a analizar el comportamiento de uno de estos sistemas basado en la transformada de Karhunen-Loeve (KLT), para lo cual cada una de las M imágenes (de tamaño $N\times N$ pixeles) de la secuencia de vídeo se reordena en un vector columna de N^2 componentes (como ilustra la figura 2):

$$\underline{x}_j=[x(0,j)\ \ x(1,j)\ \ x(2,j)\ \ \ldots\ \ x(N^2\text{-}1,j)]^T$$

donde $$x(i,j)=x(m,n,j) \qquad \text{para } i=m+n\,N$$

El método de codificación es el siguiente: se transforman mediante la KLT cada uno de los vectores $\underline{x}_j$ $0 \le j \le M\text{-}1$ y se codifican diferencialmente entre imágenes (columnas), es decir, en la dimensión temporal, los coeficientes transformados. Se pide:

1) Suponiendo estacionariedad temporal, proponga un estimador de la matriz de correlación del vector $\underline{x}_j$, $\underline{\underline{R}}_x = E\{\underline{x}_j\underline{x}_j^T\}$, a partir de los M vectores de la secuencia $\underline{x}_j$ $0 \le j \le M\text{-}1$.

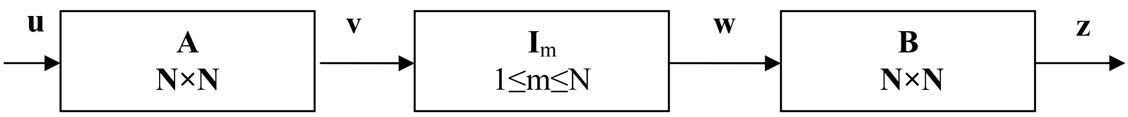
Si la función de correlación entre dos elementos de distintos vectores columna sigue el siguiente modelo aproximado: $r(u,v)=E\{x(i,j)x(i+u,j+v)\}=C\rho^{|u|+|v|}$,

2) Obtenga la expresión de $\underline{\underline{R}}_x = E\{\underline{x}_j\underline{x}_j^T\}$.
3) Demuestre que $\underline{\underline{R}}_x(v)=E\{\underline{x}_j\underline{x}_{j+v}^T\}$ responde a la expresión $\underline{\underline{R}}_x(v)=\underline{\underline{R}}_x(0)\ \rho^{|v|}$ con $\underline{\underline{R}}_x(0)=\underline{\underline{R}}_x$.
4) Se usa la matriz $\underline{\underline{R}}_x(0)$ para calcular las bases $\underline{a}_k$ de la KLT, obteniéndose los coeficientes transformados para cada vector de la secuencia mediante $y_j(k)=\underline{a}_k^T\,\underline{x}_j$, $0 \le k \le N^2\text{-}1$. Teniendo en cuenta la expresión de $\underline{\underline{R}}_x(v)$ del apartado anterior, ¿cuál es la autocorrelación temporal $r_{y(k)}(v)=E\{y_j(k)y_{j+v}^T(k)\}$ de cada uno de estos coeficientes?
5) Cada uno de los coeficientes transformados $y_j(k)$ $0 \le k \le N^2\text{-}1$ se cuantifica diferencialmente en el dominio temporal j. A partir de la expresión de la autocorrelación $r_{y(k)}(v)$ obtenida en el apartado anterior razone cuál es el orden óptimo para el predictor y el valor de sus coeficientes.
6) ¿Cuál es la potencia del error de predicción para cada uno de los coeficientes $y_k(j)$?
7) Si se codifican únicamente los P coeficientes de mayor potencia con Q bits y se desprecian los demás, ¿cuál es la potencia del error cometido en la secuencia recuperada?

4.11 Sea **u** un vector aleatorio de dimensión Nx1 con media nula y matriz de covarianza **R**. El vector **u** se transforma con una transformación lineal unitaria definida por la matriz compleja **A** de dimensión N×N. Esta transformación da lugar al vector complejo **v=A^H^u**. A continuación se define el vector **w** tal que:

$$w(k)=\begin{cases} v(k) & 0\le k\le m-1 \\ 0 & k\ge m \end{cases}$$

El vector **w** se transforma linealmente con la matriz **B** dando lugar al vector $\mathbf{z}=\mathbf{B}^{H}\mathbf{w}$.



El objetivo es encontrar las matrices de transformación **A** y **B** que minimizan la distorsión para cualquier valor de m, definida como el error cuadrático medio entre los vectores **u** y **z**.

$$J_m=\frac{1}{N}E\left\{Tr\left[(\mathbf{u}-\mathbf{z})(\mathbf{u}-\mathbf{z})^{H}\right]\right\}$$

a) Defina el error cuadrático medio J_m en función de la matriz de correlación **R** y de las matrices de transformación **A,** $\mathbf{I}_m$ y **B.**

b) Para una matriz de transformación **A** dada, demuestre que el error cuadrático medio J_m <u>mínimo</u> puede expresarse como:

$$J_m=\frac{1}{N}Tr\left[\mathbf{R}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\mathbf{I}_m\mathbf{B}\right)\right]$$

y encuentre la relación entre las matrices de transformación **A** y **B** que garantizan que $J_N=0$.

Nota: $Tr[\mathbf{XY}]=Tr[\mathbf{YX}]$ $\qquad \dfrac{\partial\left[Tr[\mathbf{XY}]\right]}{\partial\mathbf{X}}=\mathbf{Y}^{T}$

c) Demuestre que la minimización de J_m es equivalente a la máxima concentración de la energía en m coeficientes transformados v(k) que puede definirse como:

$$\tilde{J}_m=\sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{a}_k^{H}\mathbf{R}\mathbf{a}_k$$

donde $\mathbf{a}_k$ se define como la columna k de la matriz **A**.

d) Obtenga los vectores $\mathbf{a}_k$ que minimizan J_m y defina el valor mínimo de J_m

Considere la cuantificación de los coeficientes w(k) con un número total de bits igual a M y con una distorsión de cuantificación para cada coeficiente definida como:

$$\varepsilon_k^2=cte\frac{\sigma_k^2}{2^{2M_k}}$$

donde σ_k^2 es la varianza del coeficiente transformado w(k) y M_k es el número de bits asignado a su cuantificación.

e) Obtenga el valor de M_k en función de M, σ_k^2 y m.

f) Asumiendo que $M_k>0$ para todo k menor o igual que m-1, obtenga el error total de cuantificación $\left(\varepsilon_T^2\right)$del vector **w**, en función de la potencia de los coeficientes transformados.

g) Demuestre el error ε_T^2 es mínimo cuando la transformación **A** utilizada es la obtenida en el apartado d)

Nota: $\det(\mathbf{X}) \leq \prod_{k=1}^{N} x(k,k)$, donde $x(k,k)$ es el elemento de la fila k y columna k de la matriz **X.**

4.12 Va a evaluarse la ganancia obtenida en compresión de señales correladas gracias al uso de transformadas unitarias, respecto a la asignación de bits muestra a muestra (esquema PCM). Para el caso de codificación mediante métodos transformados, supondremos que se asignarán bits a cada uno de los coeficientes obtenidos mediante transformación de bloques de señal **x**. El vector de coeficientes transformados se calcula como $\mathbf{y} = \mathbf{A}^H \mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^H \\ \mathbf{a}_2^H \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^H \end{bmatrix}$$

1. ¿Cuál deber ser la relación entre las filas de $\mathbf{A}^H$ para que la transformación sea unitaria?
2. Si el coeficiente transformado $y(k)$ se cuantifica con n_k bits, la potencia del error de cuantificación en ese coeficiente viene dada por

$$E\left\{\left|y_k - \hat{y}_k\right|^2\right\} = \frac{\sigma_{y_k}^2}{2^{2n_k}}, \text{ donde } \sigma_{y_k}^2 = E\left\{\left|y_k\right|^2\right\} \tag{0.1}$$

¿Cuál es la potencia media del error en la señal decodificada a partir de los coeficientes cuantificados, suponiendo que la transformación es unitaria?

Fijada una potencia del error en la señal decodificada, se desea minimizar la tasa promedio de bits por muestra de señal, que viene dada por $r = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k$.

3. Determine cual es el número de bits a asignar por coeficiente transformado, minimizando r para un valor fijo D:

$$D = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E\left\{\left|y_k - \hat{y}_k\right|^2\right\}$$

de la potencia media del error calculada en el apartado 2. Use el método de los multiplicadores de Lagrange. Al realizar la derivada, asuma que n_k puede tomar valores no enteros.

4. Asuma que el valor de D es suficientemente pequeño como para $n_k \geq 0 \;\; \forall k$. ¿Cuál es el valor óptimo de la tasa promedio de bits por muestra r, en función de la potencia media del error D? Si la transformada utilizada es la KLT, demuestre que $r_{KLT} = \frac{1}{2N}\log_2\frac{|\mathbf{R}_x|}{D^N}$, donde el determinante de la matriz de correlación $|\mathbf{R}_x|$ puede indicarse como el producto de sus autovalores.

Para comparar las prestaciones de este esquema con una cuantificación muestra a muestra (PCM), se asumirá que el proceso $x(n)$ es AR(1), con función de correlación $r_x(k) = \sigma_x^2 \rho^{|k|}$.

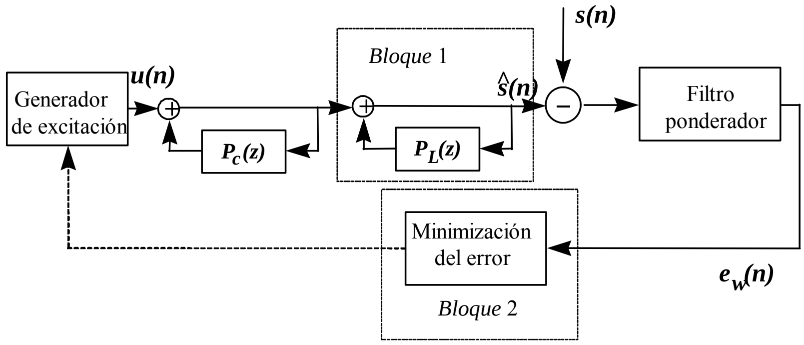
5. Determine el valor de r_{KLT} en función de D y de ρ, para la codificación de x(n) en bloques de N=2.
6. Usando la expresión (0.1), y asumiendo que el error es estacionario ¿cual es la potencia media del error de cuantificación cuando se cuantifica muestra a muestra de $x(n)$? Determine el valor de r_{PCM} necesario en este caso, en función de D.
7. ¿Qué esquema de codificación es más efectivo? Compare r_{KLT} y r_{PCM} en función de ρ, para $\rho = 0$ y $\rho \to 1$

NOTA: $\frac{d\left(2^x\right)}{dx} = 2^x \ln 2$

Qüestions

Q.4.1 En un cert sistema de quantificació, la imatge a comprimir es divideix en subimatges de NxN. A continuació, cada bloc es compara amb un conjunt de M subimatges de tamany NxN (anomenades vectors codi) que s'han definit prèviament en l'emissor i en el receptor. El símbol que representa el vector codi de menor distorsió s'envia al receptor. El receptor disposa dels M vectors codi i selecciona el corresponent al símbol enviat en el lloc de la subimatge que s'està codificant. Aquest sistema s'anomena quantificació vectorial. Per al cas de N=4, M=256 i per a pícsels originalment quantificats amb 8 bits, quin és el factor de compressió assolit?

Q.4.2 A partir del esquema del codificador de voz de análisis por síntesis de la figura comente muy brevemente cual es el papel que juegan los bloques 1 y 2 y el filtro ponderador.



Q.4.3 Diseñamos un sistema de compresión de imágenes de 256x256 basado en la transformada KL sobre bloques de 8x8. Nos planteamos la posibilidad de cuantificar los coeficientes transformados (calculados como $X_i^j = \underline{a}_i^T \underline{x}_j \quad i = 1,...,64$ para cada uno de los bloques $\mathbf{x}_j$ de la imagen j =1,…,32^2) de forma diferencial dentro de cada bloque, es decir, $\hat{X}_1^j = Q[X_1^j] \quad \hat{X}_i^j = Q[X_i^j - \alpha\, X_{i-1}^j] \quad i = 2,...,64 \quad \forall j$

a) ¿Podemos ganar algo en compresión? Demuéstrelo.
b) ¿Ganaríamos en compresión si cuantificáramos cada uno de los coeficientes diferencialmente entre bloques, es decir, $\hat{X}_i^1 = Q[X_i^1] \quad \hat{X}_i^j = Q[X_i^j - \beta\, X_i^{j-1}] \quad j = 2,...,32^2 \quad \forall i$? Razónese.

Q.4.4 En el estándar de codificación de imagen fija JPEG se hace uso de la transformada coseno. Se pregunta:

a) ¿Cuál es la función que realiza la transformada en la codificación? En otras palabras, ¿para qué se usa la transformada?

b) ¿Por qué la transformada coseno? ¿Podría dar dos razones?

c) Si la imagen estuviese constituida por píxeles incorrelados, ¿cuál sería el beneficio que aportaría el uso de la transformada?

Sol·lucions

4. CODIFICACIÓ AMB MÈTODES TRANSFORMATS

4.2 La matriu d'autocorrelació és $\underline{\underline{R}}_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{bmatrix}$, llavors buscant els autovalors i autovectors resulta

$$\underline{\underline{T}}_{KL} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.4 2) Imatge reconstruïda: $\begin{bmatrix} 32.5 & 32.5 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$

Error: 15.625

4.5 1) $\begin{bmatrix} 147 & 147 & 147 & 147 \\ 99 & 99 & 147 & 147 \\ 99 & 99 & 147 & 147 \\ 99 & 99 & 99 & 99 \end{bmatrix}$ 2) 2 bits/pícsel

4.6 1.a) A partir de la definició de $\underline{\underline{R}}_v$ es troba fàcilment que $\underline{\underline{R}}_v = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}_u \underline{\underline{A}}^T$

1.b) El percentatge de potencia a la primera mostra del vector transformat es del 91%. A les dues mostres del vector original, hi ha una potencia del 50% a cadascuna.

1.c) La correlació entre les mostres del vector transformat es 0.475. La correlació entre les mostres del vector original es 0.95, es a dir, el doble.

2.a) La matriu es la mateixa que el problema 4.3, es a dir $\underline{\underline{T}}_{KL} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2.b) $\underline{\underline{R}}_V = \begin{pmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{pmatrix}$ Observem que la correlació entre els coeficients del vector transformat.

4.7 a) $R = \dfrac{86870}{\left[1+\exp(-\alpha)\right]^2}$

b) 95% del total

c) Nivells quantificats: 0, 2^6, 2^7, 2^6+2^7,

d) 66% del total

4.8 1). Codificació zonal temporal.

a) y(0) = x(0), y(1) = 0

La potència del error de reconstrucció és:

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma_x^2}{2}$$

b) y(0) = x(0), y(1) = x(0)

La potència del error de reconstrucció és

$$\sigma_r^2 = \sigma_x^2(1-\rho)$$

Per el cas b), per que existeixi una millora es necessita un valor ρ > 0. L´opció b) és millor que la a) si ρ > 0.5

2) Codificació zonal freqüencial

c) Donada una transformada $\underline{\underline{A}}$, que transforma els vectors $\underline{x}$ de la manera $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{z}$, definim l'opció c) com z(0) = z(0), z(1) = 0. La potència del error de reconstrucció es:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{2}E\left[(x(0)-y(0))^2 + (x(1)-y(1))^2\right]$$

Si busquem la transformada tenim:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(0) \\ z(1) \end{pmatrix}$$

$$z(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x(0)+x(1)\right) \quad z(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x(0)-x(1)\right)$$

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z(0)+z(1)\right) \quad y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z(0)-z(1)\right)$$

Substituint i imposant la condició z(0) = z(0), z(1) = 0, obtenim:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{2}E\left[(x(0)-y(0))^2 + (x(1)-y(1))^2\right] \quad \Rightarrow \quad \sigma_r^2 = \frac{1}{2}\sigma_x^2(1-\rho)$$

d) Definim l'opció d) com z(0) = z(0), z(1) = z(0). De la mateixa manera trobem

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{2}E\left[(x(0)-y(0))^2 + (x(1)-y(1))^2\right] \Rightarrow \quad \sigma_r^2 = \sigma_x^2$$

La potència de l'error de reconstrucció és la mateixa que la del senyal!!! La mateixa solució (dolenta) es troba si es fes y(0) = y(1) = 0

3) La relació senyal-soroll es per cada cas:

a) SNR = 10log2 = 3 dB

b) SNR = $10\log(1-\rho)^{-1}$ dB

c) SNR = $10\log((1-\rho)/2)^{-1}$ dB

d) SNR = 10log1 = 0 dB

L'opció c) dóna sempre la millor SNR si ρ > 0. Això és lògic tenint en compte les propietats de compactació de les transformades unitàries.