# ETS d'Enginyeria de Telecomunicació
## Probabilitat i Processos Estocàstics

**6 de novembre de 2006** **Control grup 20** **Temps: 1h 45m**

---

**1.** Un sistema de comunicació transmet un a un i de forma independent símbols de l'alfabet $\{a, b, c\}$ amb probabilitats $p_a$, $p_b$ i $p_c$ respectivament.

(a) Calculeu la probabilitat que en les $n$ primeres transmissions encara no s'hagi transmès el símbol $a$.

(b) Calculeu la probabilitat que el primer símbol transmès hagi estat $a$ si han calgut $n$ transmissions fins que el símbol $c$ ha estat transmès per primer cop.

(c) En aquest apartat suposeu els tres símbols equiprobables. Sigui $N$ la variable aleatòria que dóna el nombre de transmissions que han calgut fins que cada un dels tres símbols ha estat transmès almenys una vegada. Calculeu $\mathrm{P}(N > n)$ i $\mathrm{P}(N = n)$ (*Indicació:* Podeu calcular $\mathrm{P}(N > n)$ considerant la unió d'esdeveniments com el considerat al primer apartat.)

---

*Resolució:*

(a)

$$\mathrm{P}(\text{en les } n \text{ primeres transmissions encara no s'hagi transmès } a)$$
$$= \mathrm{P}(\text{en les } n \text{ primeres transmissions s'ha transmès } b \text{ o } c) = (p_b + p_c)^n.$$

(b)

$$\mathrm{P}(a | n \text{ transmissions fins que es transmet } c)$$
$$= \frac{\mathrm{P}(a, n \text{ transmissions fins que es transmet } c)}{\mathrm{P}(n \text{ transmissions fins que es transmet } c)} = \frac{p_a\ (p_a + p_b)^{n-2}\ p_c}{(p_a + p_b)^{n-1}\ p_c} = \frac{p_a}{p_a + p_b}$$

(c) Sigui $S_x$ l'esdeveniment "en les $n$ primeres transmissions encara no s'ha transmès el símbol $x$", $x \in \{a, b, c\}$. Aleshores,

$$\mathrm{P}(N > n) = \mathrm{P}(S_a \cup S_b \cup S_c)$$
$$= \mathrm{P}(S_a) + \mathrm{P}(S_b) + \mathrm{P}(S_c) - \mathrm{P}(S_a \cap S_b) - \mathrm{P}(S_a \cap S_c) - \mathrm{P}(S_b \cap S_c) + \mathrm{P}(S_a \cap S_b \cap S_c)$$
$$= 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$P(N = n) = \mathrm{P}(N > n - 1) - \mathrm{P}(N > n) = \frac{2^{n-1} - 1}{3^{n-2}} - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} = \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

**2.** La sortida d'un quantificador de tres nivells quan l'entrada és $x$ ve donada per la funció

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < -a \\ 0, & -a \leq x \leq a \\ 1, & x > a \end{cases}$$

(a) Si l'entrada del quantificador és una variable aleatòria $X$ amb funció de distribució de probabilitat $F_X$, doneu la funció de probabilitat de la variable aleatòria $Y$ corresponent a la sortida del quantificador.

(b) Determineu l'esperança i la variància de la sortida $Y$ si l'entrada $X$ és una variable aleatòria uniforme en $[-2a, 3a]$.

---

*Resolució:*

(a) Hem de calcular $\mathrm{P}(Y=-1)$, $\mathrm{P}(Y=0)$ i $\mathrm{P}(Y=1)$.

$$\mathrm{P}(Y=-1) = \mathrm{P}(X<-a) = F_X(-a) - \mathrm{P}(X=-a)$$

$$\mathrm{P}(Y=0) = \mathrm{P}(-a \le X \le a) = F_X(a) - F_X(-a) + \mathrm{P}(X=-a)$$

$$\mathrm{P}(Y=1) = \mathrm{P}(X>a) = 1 - F_X(a)$$

(b) Podem usar el teorema de l'esperança:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = \int_{-2a}^{-a} (-1)\, \frac{1}{5a}\, dx + \int_{a}^{3a} \frac{1}{5a}\, dx = \frac{1}{5}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - m_Y^2 = \mathrm{E}(Y^2) - \frac{1}{25}$$

$$\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{E}\left((g(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (g(x))^2\, f_X(x)\, dx = \int_{-2a}^{-a} \frac{1}{5a}\, dx + \int_{a}^{3a} \frac{1}{5a}\, dx = \frac{3}{5}$$

Per tant,

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{3}{5} - \frac{1}{25} = \frac{14}{25}$$

També podem obtenir aquests resultats usant els de l'apartat anterior, i que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2a \\ (x+2a)/(5a), & -2a < x \le 3a \\ 1, & x > 3a \end{cases}$$

Així (tenin en compte que $\mathrm{P}(X=-a)=0$):

$$\mathrm{P}(Y=-1) = F_X(-a) = \frac{1}{5}$$

$$\mathrm{P}(Y=0) = F_X(a) - F_X(-a) = \frac{2}{5}$$

$$\mathrm{P}(Y=1) = 1 - F_X(a) = \frac{2}{5}$$

d'on

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_k k\, \mathrm{P}(Y=k) = \frac{1}{5}, \qquad \mathrm{E}(Y^2) = \sum_k k^2\, \mathrm{P}(Y=k) = \frac{3}{5}$$

---

**3.** Enuncieu i discutiu les propietats que conegueu de les funcions de distribució de probabilitat.