Tarea 5: Herramientas matemáticas con aplicaciones en Física (6%)

Marlon Brenes*

La tarea está diseñada para practicar los conceptos de matemáticas aplicadas vistos en clase. Usted debe entregar un `jupyter-notebook` que contiene la solución a los dos problemas que se enuncian en este documento:

1. A entregar: `tarea5.ipynb`

PARTE I: ESPECTRO Y RECONSTRUCCIÓN USANDO FFT (3%)

Estudiemos la transformada de Fourier de una onda sinusoidal **cuadrada**. La onda está definida por

$$g(t) = \mathrm{sgn}[\sin(2\pi f t)], \tag{1}$$

donde la función sgn[] significa la **positividad de la función**. Es decir, si la función $s(x) = \sin(2\pi f t)$ es positiva para cierto valor de x, entonces $g(x) = 1$. De lo contrario, si la función $s(t) = \sin(2\pi f t)$ es negativa para cierto valor de x, entonces $g(x) = -1$. De esta forma obtenemos una oscilación cuadrada con frecuencia f.

Sus tareas son las siguientes:

1. Realice un gráfico de solamente un periodo de la función cuadrada (0.25%)
2. Utilizando solamente un periodo de la función $g(t)$ y $N = 1000$ puntos de muestreo, evalúe la FFT (0.25%)
3. Realice un gráfico del espectro de $g(t)$ (0.5%)
4. Que conclusiones obtiene del espectro de la función $g(t)$, a nivel intuitivo con respecto a los modos de oscilación? (0.5%)
5. Reconstruya la señal original $g(t)$. Para esto, utilice solamente la mitad del espectro (ya sea el espectro negativo o positivo de frecuencias). (0.5%)
6. Realice un gráfico de la reconstrucción de la señal. Para esto se requiere la DFT inversa, usando la Ecuación (28) del `jupyter-notebook` llamado **DFT.ipynb** ubicado en el Tema_12 del repositorio del curso. En el gráfico, utilice distintas aproximaciones en las cuales el parámetro k regular el orden de la aproximación. Utilice $k = 2, 4, 8, 60$ y en el mismo gráfico muestre estas cuatro curvas junto con la señal original. Con respecto a su intuición del punto 4), que conclusiones obtiene con respecto a los modos de oscilación de la señal original? (1.0%)

PARTE II: ECUACIONES ELÍPTICAS (3%)

Resuelva la ecuación de Laplace en dos dimensiones para el potencial electrostático $\phi = \phi(x, y)$

$$\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

para una placa cuadrada de 10cm $\times$ 10cm como se muestra en la Fig. 1. El problema modela de forma ideal un capacitor electrónico.

- Utilice el método de relajación de Jacobi hasta converger con una tolerancia de 10^{-5}, con la tolerancia definida como lo hicimos en clase (i.e., hasta que el valor máximo de la diferencia entre cada valor de ϕ en la grilla con respecto a la iteración anterior sea menor que 10^{-5}). Este problema se resuelve de la misma forma en que lo hicimos en clase, con la diferencia de la distinta condición de frontera como se muestra en la figura. Resuelva el problema en una grilla 100×100 (i.e., la distancia entre cada punto en la grilla es de 0.1cm) (2%).
- El resultado es un gráfico de ϕ en dos dimensiones como lo hicimos en clase (1%).

* marlon.brenes@ucr.ac.cr

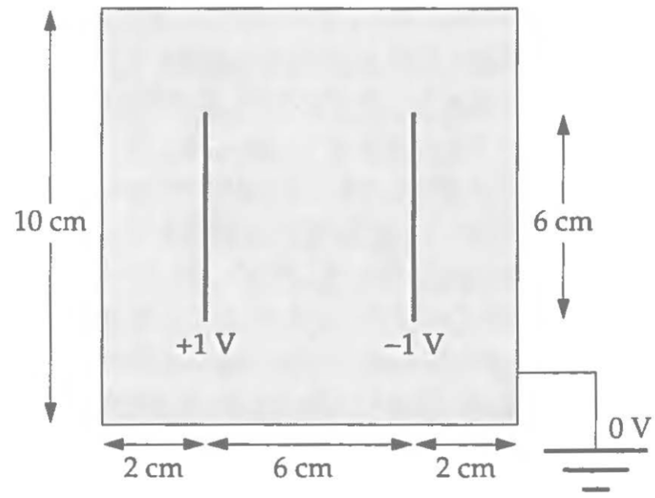

FIG. 1. Modelo de capacitor