מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

פקולטה: מדעים

מחלקה : מתמטיקה שימושית

שם הקורס : מתמטיקה בדידה למדעי המחשב 2

קוד הקורס: **20068 - 31**

שם המרצה : פרופי"ח א. מנדרסקו

תאריך הבחינה : 16.04.2023 , משעה 11.00

משך הבחינה : 50 דקות

חומר עזר: סגור – יש דפי נוסחאות

שימוש במחשבון כן -- סוג : פשוט

פירוט ניקוד לכל שאלה : יש

הוראות כלליות :

- כל חומר עזר אסור. דפי נוסחאות מצורפים.
- הקפידו על **כתב ברור**; במקרה של כתב לא קריא התשובה תפסל.
- הקפידו על שמירת **סדר תשובות זהה לסדר השאלות בתופס הבחינה**.
- **עליכם לנמק את תשובתכם.**
- יש לכתוב כל תשובה בעמוד נפרד ולציין בכותרת בולטת בראש העמוד את מספר השאלה.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 5810201
טלפקס: 03-5026560
52 Golomb St., Holon 5810201 Israel
www.hit.ac.il Tel/Fax: 972-3-502-6560

הפקולטה למדעים
המחלקה למתמטיקה שימושית
Faculty of Sciences
Department of Applied Mathematics

שאלה מס 1 (40 נק.)

א. (15 נק.) הגדירו את המונחים: תמורה ותמורה אי-סדר מלא.
====== לפי ההרצאה

(10 נק.) תנו דוגמה של תמורה לא אי-סדר מלא ותמורה אי-סדר מלא
של הקבוצה $A = \{1,2,3,4,5\}$.

== **פתרון:** תמורה לא אי-סדר מלא 1,2,4,3,5 ; תמורה אי-סדר מלא 2,5,4,3,1

ב. (15 נק.) הוכיחו או הפריכו: הפונקציה φ של EULER היא חסומה.

== **פתרון:** לפי ההגדרה : $\varphi(1) = 1 \le \varphi(n)$ לכל $n \in N^*$.

נניח, בשלילה, שקיים $M \in R$ כך ש: $\varphi(n) \le M$ לכל $n \in N^*$.

מכיוון שיש אינסוף מספרים ראשוניים וסידרת המספרים הראשוניים עולה ממש,

קיים p מספר ראשוני כך ש: $M + 1 < p$.

לכן נקבל $\varphi(p) = p - 1 > M$ --- בסתירה להנחה !

מסקנה : הפונקציה φ של EULER אינה חסומה.

או

== לפי ההגדרה : $\varphi(1) = 1 \le \varphi(n)$ לכל $n \in N^*$
נניח, בשלילה, שקיים $M \in R$ כך ש: $\varphi(n) \le M$ לכל $n \in N^*$.
מכיוון שיש אינסוף מספרים ראשוניים וסידרת המספרים הראשוניים עולה ממש,
קיימים q, p מספרי ראשונים כך ש: $M < q < p$.
לכן נקבל $\varphi(p) = p - 1 \ge q > M$ --- בסתירה להנחה !
מסקנה : הפונקציה φ של EULER אינה חסומה.

או

== לפי ההגדרה : $\varphi(1) = 1 \le \varphi(n)$ לכל $n \in N^*$**.**

סדרת המספרים הראשונים היא אינסופית ועולה ממש ולכן לא חסומה:

$$2 = p_1 < 3 = p_2 < p_3 < p_4 < \ldots. < p_n < \ldots.$$

אז גם הסדרה $\varphi(2) = 1 < \varphi(3) = 2 < \varphi(p_3) = p_3 - 1 < \ldots < \varphi(p_n) = p_n - 1 < \ldots.$

אינה חסומה . מסקנה : הפונקציה φ של EULER אינה חסומה.

שאלה מס 2 (30 נק.)

יהי $5 < n \in N$. כמה מחלקים זוגיים יש למספר

$$m = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\bullet 3^{n-k}\right)\bullet\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\bullet 8^{k}\right)$$

== פתרון: לפי נוסחת הבינום של NEWTON נקבל

$$m = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\bullet 3^{n-k}\right)\bullet\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\bullet 8^{k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{k}\bullet 3^{n-k}\right)\bullet\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\bullet 8^{k}\right) =$$

$$= (1+3)^n(8+1)^n = 4^n \bullet 9^n = 2^{2n}\bullet 3^{2n}$$

אז $d|m$ וגם d זוגי $\Leftrightarrow$ $d = 2^{\alpha}3^{\beta}$ כך ש: $\alpha\in\{1,2,\ldots,2n\}$ וגם $\beta\in\{0,1,2,\ldots,2n\}$

מסקנה: מספר מחלקים זוגיים יש למספר שווה ל: $2n(2n+1)$.

שאלה מס 3 (30 נק.)

תהי הקבוצה **$U = \{1,2,\ldots,250\}$**. כמה מבין המספרים מ-**U**

לא מתחלקים ב-**3** וגם **לא** מתחלקים ב-**4** וגם **לא** מתחלקים ב-**5**?

== פתרון: נסמן ב: $A_1 = \{n : n \in U \wedge 3|n\}$,

$A_2 = \{n : n \in U \wedge 4|n\}$,

$A_3 = \{n : n \in U \wedge 5|n\}$.

אז יש לחשב את

$$m = |U - A_1\cup A_2\cup A_3| = |U| - S_1 + S_2 - S_3$$

כאשר

$$S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \lfloor 250/3\rfloor + \lfloor 250/4\rfloor + \lfloor 250/5\rfloor = 83 + 62 + 50 = 195$$

$$S_2 = |A_1\cap A_2|+|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_3| = \lfloor 250/12\rfloor+\lfloor 250/20\rfloor+\lfloor 250/15\rfloor=20+12+16 = 48$$

$$S_3 = |A_1\cap A_2\cap A_3| = \lfloor 250/60\rfloor = 4$$

מסקנה:

$$m = |U - A_1\cup A_2\cup A_3| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 = 250 - 195 + 48 - 4 = 99$$