VU Energiemodelle und Analysen (373.011)

Protokoll Übung 2

April 2020

Autoren: Ivan Grubesic (01425089), Michael Kern (0935115), David Pribic (01428675), Ermin Sefer (01525021)

Betreuer: Ao.Univ.Prof. Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Haas, Privatdoz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Auer, Univ.Ass. Dipl.-Ing. Perger

TU Wien

Institut für Energiesysteme und elektrische Antriebe

Energy Economics Group

Inhaltsverzeichnis

2.1. Gewinnmaximierung einer Raffinerie

Eine Raffinerie stellt 2 Produkte her: Benzin und Diesel. Dieser Raffinerie stehen folgende Ressourcen zur Verfügung:

1. Arbeitsdauer der Maschinen: max. 1200h
2. Menge an Rohöl: max. 3000 Mengeneinheiten (ME)
3. Arbeitsdauer der Arbeiter: 125h

Zur Herstellung der jeweiligen Produkte sind folgende Ressource erforderlich:

	Benzin	Diesel
Arbeitsdauer Maschine	3h	2h
Menge an Rohöl	5 ME	10 ME
Arbeitsdauer der Arbeiter	0h	0.5h

Tabelle 1: Ressourcen je Produkt pro Mengeneinheit (ME)

Die damit erzielbaren Gewinne in Geldeinheiten (GE) sind:

	Benzin	Diesel
Gewinn	3 GE	2 GE

Tabelle 2: Gewinn je Produkt pro Mengeneinheit (ME)

a. Optimierungsmodell

Als ersten Schritt stellen wir die Zielfunktion auf. Das ist jene Größe, in unserem Fall der Gewinn, den es hier zu maximieren gilt. Hierbei steht z für den erzielten Gewinn, x_1 für die Menge an hergestellten Benzin und x_2 für die Menge an hergestellten Diesel.

$$\max_{x_1,x_2} z = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \tag{1}$$

Die Nebenbedingungen für das Optimierungsmodell lassen sich aus den zur Verfügung stehenden Ressourcen (Maschine, Rohöl, Arbeiter) der Raffinerie und dem Ressourcen je Produkt 1 aufstellen.

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 1200 \tag{2}$$

$$5 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \leq 3000 \tag{3}$$

$$0 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 = 125 \tag{4}$$

Nun ergibt sich gleich aus Gleichung 4 sehr einfach die zu herstellende Menge an Diesel:

$$x_2 = 250 \tag{5}$$

Daraus ergibt sich für die beiden anderen Nebenbedingungen:

$$3 \cdot x_1 + 500 \leq 1200 \tag{6}$$

$$5 \cdot x_1 + 2500 \leq 3000 \tag{7}$$

Woraus sich folgende Bedingungen für die zu herstellende Menge an Benzin ergeben:

$$x_1 \leq 233,33 \tag{8}$$

$$x_1 \leq 100 \tag{9}$$

Da Gleichung 9 eine stärkere Einschränkung ist und dadurch Gleichung 8 bereits erfüllt wird gilt letzendlich die Bedingung 9.

Daraus ergibt sich ein maximal erzielbarer Gewinn in Geldeinheiten von:

$$z = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 3 \cdot 100 + 4 \cdot 250 = 1300 \tag{10}$$

b. Lösung mittels Simplex-Algorithmus

Um das Optimierunsproblem mit Hilfe des Simplex-Algorithmus lösen müssen die Simplex-Tableaus angeschrieben werden. Das sieht wie folgt aus:

	x1	x2	x3	x4	x5	b
	3	2	1	0	0	1200
	5	10	0	1	0	3000
	0	1/2	0	0	1	125
cT	3	4	0	0	0	

Abbildung 1: Simplex-Tableau 1

Anschließend suchen wir in der letzten Zeile (cT) den größten Wert. Jene Spalte des Wertes ist die sogennante Pivot-Spalte (grün markiert).

	x1	x2	x3	x4	x5	b	
	3	2	1	0	0	1200	:(2) = 600
	5	10	0	1	0	3000	:(10) = 300
	0	1/2	0	0	1	125	:(1/2) = 250
cT	3	4	0	0	0		

Abbildung 2: Simplex-Tableau 2

Anschließend suchen wir die Pivot-Zeile. Das ist jene Zeile mit dem niedrigsten Quotienten aus dem Wert b und dem dazugehörigen Wert aus der Pivot-Spalte. In diesem Fall ist die Zeile 3 die Pivot-Zeile (grün markiert). Das gemeinsame Element von Pivot-Spalte und Pivot-Zeile ist das sogennante Pivot-Element (rot markiert).

	x1	x2	x3	x4	x5	b	
	3	2	1	0	0	1200	
	5	10	0	1	0	3000	
	0	1/2	0	0	1	125	:(1/2)
cT	3	4	0	0	0		

Abbildung 3: Simplex-Tableau 3

Nun wird die Pivot-Zeile normiert. Dazu dividiert man diese Zeile durch das Pivot-Element. In diesem Fall dividiert man durch $\frac{1}{2}$.

	x1	x2	x3	x4	x5	b	
	3	2	1	0	0	1200	-2 (iii)
	5	10	0	1	0	3000	-10 (iii)
	0	1	0	0	2	250	
cT	3	4	0	0	0	-1000	-4 (iii)

Abbildung 4: Simplex-Tableau 4

Anschließend gilt es die anderen Einträge der Pivot-Spalte auf 0 zu transformieren. Dies gelingt uns indem wir die Pivot-Zeile um ein Viefaches von der anderen Zeile abziehen.

	x1	x2	x3	x4	x5	b
	3	0	1	0	-4	700
	5	0	0	1	-20	500
	0	1	0	0	2	250
cT	3	0	0	0	-8	-1000

Abbildung 5: Simplex-Tableau 5

Da noch nicht alle Koeffizienten der Zielfunktion Null sind (die ersten beiden Koeffizienten von cT) muss dieser Vorgang wiederholt werden. Im folgenden sind nur die Schritte ohne textueller Beschreibung:

	x1	x2	x3	x4	x5	b	
	3	0	1	0	-4	700	:(3) = 233.33
	5	0	0	1	-20	500	:(5) = 100
	0	1	0	0	2	250	
cT	3	0	0	0	-8	-1000	

Abbildung 6: Simplex-Tableau 6

Hinweis: Falls bei der Bestimmung der Pivot-Zeile ein Koeffizient der Pivot-Spalte 0 ist wird dieser bei der Division nicht berücksichtig!

	x1	x2	x3	x4	x5	b	
	3	0	1	0	-4	700	
	5	0	0	1	-20	500	:(5)
	0	1	0	0	2	250	
cT	3	0	0	0	-8	-1000	

Abbildung 7: Simplex-Tableau 7

	x1	x2	x3	x4	x5	b	
	3	0	1	0	-4	700	-3 (ii)
	1	0	0	1/5	-4	100	
	0	1	0	0	2	250	
cT	3	0	0	0	-8	-1000	-3 (ii)

Abbildung 8: Simplex-Tableau 8

	x1	x2	x3	x4	x5	b
	0	0	1	-3/5	-8	400
	1	0	0	1/5	-4	100
	0	1	0	0	2	250
cT	0	0	0	-3/5	4	-1300

Abbildung 9: Simplex-Tableau 9

Da nun, die beiden Koeffizienten in der Zeile cT nicht positiv sind ist der Vorgang abgeschlossen und wir können in der folgenden Abbildung unsere Ergebnisse auslesen.

	x1	x2	x3	x4	x5	b
	0	0	1	-3/5	-8	400
	1	0	0	1/5	-4	100
	0	1	0	0	2	250
cT	0	0	0	-3/5	4	-1300

Abbildung 10: Simplex-Tableau 10

Wie auch bereits im vorherigen Abschnitt, ist die optimale Lösung $x_1 = 100$ und $x_2 = 250$! Das rot markierte Feld gibt uns hierbei den negativen Wert der Zielfunktion an. Die Ergebnisse stimmen mit denen aus 2.1)a) überein!

2.2. Optimierung eines Kraftwerkparks

Gegeben ist ein Wärmesystem, wobei die Nachfrage bei einer gewissen Stunde 125MW beträgt. Zur Deckung der Nachfrage stehen folgende Kraftwerke zur Verfügung:

1. Steinkohle mit 30MW
2. Gasturbine mit 60MW
3. Biomasse mit 40MW

Weiter Parameter der Kraftwerke sind:

Technologie	Var.Wartungskosten[€/MWh$_{therm}$]	η	Emissionsfaktor[t$_{CO2}$/MWh$_{prim}$]
Steinkohle	2.5	0.36	0.34
Gasturbine	1.7	0.46	0.2
Biomasse	2.9	0.80	0

Tabelle 3: Parameter

Die Brennstoffkosten von Steinkohle betragen 8[€/MWh$_{prim}$],die von Gas 30[€/MWh$_{prim}$] und die von Biomasse 60 [€/MWh$_{prim}$].

a. Optimierungsmodell

i): Formulierung des kostenminimalen Optimierungsmodells

Zunächst wird die Zielfunktion formuliert:

$$\min_x \ z = (K_{v,Ko} + \frac{K_{Brenn,Ko}}{\eta_{Ko}}) \cdot L_{Ko} + (K_{v,Gas} + \frac{K_{Bren.,Gas}}{\eta_{Gas}}) \cdot L_{Gas} + (K_{v,Bio} + \frac{K_{Brenn,Bio}}{\eta_{Bio}}) \cdot L_{Bio} \tag{11}$$

Somit entsprechen:

$$c^T = \Big[(K_{v,Ko} + \tfrac{K_{Brenn,Ko}}{\eta_{Ko}}) \quad (K_{v,Gas} + \tfrac{K_{Brenn,Gas}}{\eta_{Gas}}) \quad (K_{v,Bio} + \tfrac{K_{Brenn,Bio}}{\eta_{Bio}})\Big] = \begin{bmatrix}24.722 & 66.917 & 77.9\end{bmatrix}$$

und $x = \begin{bmatrix} L_{Kohle} \\ L_{Gas} \\ L_{Bio} \end{bmatrix}$ den Vektoren der allgemeinen Formulierung.

Um dieses Minimierungsproblem mittels Tabular-Methode zu lösen, wandeln wir die Zielfunktion mittels Dualitätssatz:

$$\max_x \; f(x) = \min_x \; -f(x) \tag{12}$$

in ein Maximierungsproblem um.
Zusammen mit den Nebenbediengungen:

$$L_{Kohle} \leq 30MW \tag{13}$$

$$L_{Gasturbine} \leq 60MW \tag{14}$$

$$L_{Biomasse} \leq 40MW \tag{15}$$

$$L_{Kohle} + L_{Gasturbine} + L_{Biomasse} \geq 125MW \tag{16}$$

und der Bedingung dass alle Basisvariablen positive Werte annehmen müssen:

$$L_{Kohle}, L_{Gasturbine}, L_{Biomasse} \geq 0MW \tag{17}$$

kann das lineare Optimierungsmodell formuliert werden.

Aus den Nebenbedingungen lässt sich die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 40 \\ 125 \end{bmatrix}$ direkt ablesen.

ii): Formulierung des emissionsminimalen Optimierungsmodells

Wiederrum zunächst die Formulierung der Zielfunktion:

$$\min_x \; z = E_{Kohle} \cdot \frac{L_{Kohle}}{\eta_{Ko}} + E_{Gas} \cdot \frac{L_{Gas}}{\eta_{Gas}} \tag{18}$$

Da das Biomasse-Kraftwerk einen Emissionsfaktor von 0 hat verschwindet die Abhängigkeit in der Zielfunktion.

Somit entsprechen $c^T = \begin{bmatrix} \frac{E_{Kohle}}{\eta_{Ko}} & \frac{E_{Gas}}{\eta_{Gas}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.944 & 0.435 \end{bmatrix}$ und $x = \begin{bmatrix} L_{Kohle} \\ L_{Gas} \end{bmatrix}$

den Vektoren der allgemeinen Formulierung.

Um dieses Minimierungsproblem mittels Tabular-Methode zu lösen, wandeln wir die Zielfunktion mittels Dualitätssatz:

$$\max_{x} \; f(x) = \min_{x} \; -f(x) \tag{19}$$

in ein Maximierungsproblem um.

Zusammen mit den Nebenbediengungen:

$$L_{Kohle} \leq 30MW \tag{20}$$

$$L_{Gasturbine} \leq 60MW \tag{21}$$

$$L_{Biomasse} \leq 40MW \tag{22}$$

$$L_{Kohle} + L_{Gasturbine} + L_{Biomasse} \geq 125MW \tag{23}$$

und der Bedingung dass alle Basisvariablen positive Werte annehmen müssen:

$$L_{Kohle}, L_{Gasturbine}, L_{Biomasse} \geq 0MW \tag{24}$$

kann das lineare Optimierungsmodell formuliert werden.

Aus den Nebenbedingungen lässt sich die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 40 \\ 125 \end{bmatrix}$ direkt ablesen.

b. Lösung mittels 2-Phasen-Simplexalgorithmus

Nun wird das lineare Optimierungsproblems mittels Simplex-Methode gelöst.

Hierfür werden die Nebenbedingungen um den Schlupfvektor $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$

erweitert

Daraus ergeben sich folgende Nebenbedingungen:

$$L_{Kohle} + u_1 = 30 \tag{25}$$

$$L_{Gasturbine} + u_2 = 60 \tag{26}$$

$$L_{Biomasse} + u_3 = 40 \tag{27}$$

$$L_{Kohle} + L_{Gasturbine} + L_{Biomasse} - u_4 = 125 \tag{28}$$

	Lkohle	Lgas	Lbio	u1	u2	u3	u4	b
	1	0	0	1	0	0	0	30
	0	1	0	0	1	0	0	60
	0	0	1	0	0	1	0	40
	1	1	1	0	0	0	-1	125
cT	-24.722	-66.917	-77.9	0	0	0	0	0

Abbildung 11: Start-Simplex-Tableau

Nun sehen wir dass in der Zielfunktionszeile lediglich negative Werte vorkommen. Dies stellt eine nicht zulässige Basislösung dar. Durch Addition einer Hilfsvariablen a_i zu jeder Zeile, in der eine Schlupfvariable subtrahiert wird erhalten wir eine zulässige Basislösung. Die neue Zielfunktion besteht aus der Summe aller a_i.

	Lkohle	Lgas	Lbio	u1	u2	u3	u4	a1	b
	1	0	0	1	0	0	0	0	30
	0	1	0	0	1	0	0	0	60
	0	0	1	0	0	1	0	0	40
	1	1	1	0	0	0	-1	1	125
cT*	0	0	0	0	0	0	0	-1	0

Abbildung 12: Neue Zielfunktion

Durch Addition aller Zeilen, die eine Hilfsvariable enthalten, zur Zielfunktionszeile werden alle Einträge der Hilfsvariablen a_i in der Zielfunktionszeile auf Null gebracht.In diesem Fall wird die letzte Zeile zur Zielfunktionszeile addiert.

	Lkohle	Lgas	Lbio	u1	u2	u3	u4	a1	b
	1	0	0	1	0	0	0	0	30
	0	1	0	0	1	0	0	0	60
	0	0	1	0	0	1	0	0	40
	1	1	1	0	0	0	-1	1	125
cT*	1	1	1	0	0	0	-1	0	125

Abbildung 13: Nullsetzen der a_i

Als nächstes wird die Hilfszielfunktion mit dem Simplex-Standardverfahren minimiert.

Zur Auswahl der Pivotspalte suchen wir in der Zielfunktionszeile den höchsten Wert, wofür die ersten drei Spalten in Frage kommen. Die Pivotzeile ist diejenige, in der sich der kleinste Wert der Division von b mit der Pivot-Spalte befindet.

	Lkohle	Lgas	Lbio	u1	u2	u3	u4	a1	b
	1	0	0	1	0	0	0	0	30
	0	1	0	0	1	0	0	0	60
	0	0	1	0	0	1	0	0	40
	1	1	1	0	0	0	-1	1	125
cT*	1	1	1	0	0	0	-1	0	125

Abbildung 14: Auswahl der Pivotspalte-und-zeile

Da das Pivotelement bereits normiert ist müssen nur noch die anderen Elemente der Pivotspalte durch Elimination auf null gebracht werden.

Für die beiden anderen Spalten erfolgt die Vorgehensweise analog.

	Lkohle	Lgas	Lbio	u1	u2	u3	u4	a1	b
	1	0	0	1	0	0	0	0	30
	0	1	0	0	1	0	0	0	60
	0	0	1	0	0	1	0	0	40
	0	1	1	-1	0	0	-1	1	95
cT*	0	1	1	-1	0	0	-1	0	95

Abbildung 15: Nullsetzen der restlichen Elemente

	Lkohle	Lgas	Lbio	u1	u2	u3	u4	a1	b
	1	0	0	1	0	0	0	0	30
	0	1	0	0	1	0	0	0	60
	0	0	1	0	0	1	0	0	40
	0	1	1	-1	0	0	-1	1	95
cT*	0	1	1	-1	0	0	-1	0	95

Abbildung 16: Auswahl der Pivotspalte-und-zeile

	Lkohle	Lgas	Lbio	u1	u2	u3	u4	a1	b
	1	0	0	1	0	0	0	0	30
	0	1	0	0	1	0	0	0	60
	0	0	1	0	0	1	0	0	40
	0	0	1	-1	-1	0	-1	1	35
cT*	0	0	1	-1	-1	0	-1	0	35

Abbildung 17: Nullsetzen der restlichen Elemente

	Lkohle	Lgas	Lbio	u1	u2	u3	u4	a1	b
	1	0	0	1	0	0	0	0	30
	0	1	0	0	1	0	0	0	60
	0	0	1	0	0	1	0	0	40
	0	0	1	-1	-1	0	-1	1	35
cT*	0	0	1	-1	-1	0	-1	0	35

Abbildung 18: Auswahl der Pivotspalte-und-zeile

	Lkohle	Lgas	Lbio	u1	u2	u3	u4	a1	b
	1	0	0	1	0	0	0	0	30
	0	1	0	0	1	0	0	0	60
	0	0	0	1	1	1	1	-1	5
	0	0	1	-1	-1	0	-1	1	35
cT*	0	0	0	0	0	0	0	-1	0

Abbildung 19: Nullsetzen der restlichen Elemente

Nachdem die Hilfszielfunktion null erreicht hat, ist die Hilfsvariable a_1 keine Basisvariable mehr und wir ersetzen die Hilfszielfunktion durch die originale Zielfunktion.

Schlussendlich wird die angepasste Zielfunktion c^T' berechnet.

$$c^{T'} = c^T + 24.722 \cdot Zeile1 + 66.917 \cdot Zeile2 + 77.9 \cdot Zeile4 \tag{29}$$

	Lkohle	Lgas	Lbio	u1	u2	u3	u4	b
	1	0	0	1	0	0	0	30
	0	1	0	0	1	0	0	60
	0	0	0	1	1	1	1	5
	0	0	1	-1	-1	0	-1	35
cT	-24.722	-66.917	-77.9	0	0	0	0	0
cT'	0	0	0	-53.178	-10.983	0	-77.9	7483.18

Abbildung 20: Berechnung der angepassten Zielfunktion

Aus dieser Tabelle sind nun die einzelnen Leistungen der kostenminimalen Optimierung entnehmbar. Das Steinkohlekraftwerk und das Gasturbinenkraftwerk wird vollastig mit jeweils **30MW** und **60MW** betrieben. Das Biomassekraftwerk mit **35MW**. Die Gesamtkosten des Kraftwerkparks ergeben sich zu **7483.18 EUR/h** für eine Erzeugung von **125MW.**

2.3. Schadstoffreduzierung eines Kraftwerks

a. mathematisches Modell

Unser mathematisches Modell, welches die Kostenreduziert und gleichzeitig die gewünschten Emissionsreduktionen einhält, sieht wie folgt aus:

$$\min_{\mathbf{x}} \; z = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \tag{30}$$

Wobei die Variablen wie folgt definiert sind:

z ... die Zielfunktion (die Gesamtkosten in Millionen €)
$\mathbf{c}$ ... Gewichtungskonstanten (Kosten pro Maßnahmentyp in Millionen €)

$$\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 7 & 6 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}$ ... Entscheidungsvariablen-Vektor (Werte zwischen 0 und 1)

x_1 ... Schornstein Typ 1
x_2 ... Schornstein Typ 2
x_3 ... Filter Typ 1
x_4 ... Filter Typ 2
x_5 ... Brennstoff Typ 1
x_6 ... Brennstoff Typ 2

Die Nebenbedingungen sind die Emissionsreduktionsbedingungen (in Tonnen):

$$12 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 25 \cdot x_3 + 20 \cdot x_4 + 17 \cdot x_5 + 13 \cdot x_6 \geq 60 \tag{31}$$
$$35 \cdot x_1 + 42 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 + 31 \cdot x_4 + 56 \cdot x_5 + 49 \cdot x_6 \geq 150 \tag{32}$$
$$37 \cdot x_1 + 53 \cdot x_2 + 28 \cdot x_3 + 24 \cdot x_4 + 29 \cdot x_5 + 20 \cdot x_6 \geq 125 \tag{33}$$

Wobei sich die Nebenbedingungsgleichung 31 auf die Staub und Ruß-, 32 auf die Schwefeloxid- und 32 auf die Kohlenwasserstoffe-Emissionsreduktion bezieht.

b. Lösung mittels MATLAB

Das Optimierungsproblem wurde mittels MATLAB mit Hilfe von yalmip und als Löser "Gurobi" gelöst.

Anbei findet man die kostenoptimale Umsetzung der verschiedenen Maßnahmen.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 100\% \\
x_2 &= 62.27\% \\
x_3 &= 34.35\% \\
x_4 &= 100.00\% \\
x_5 &= 4.76\% \\
x_6 &= 100.00\%
\end{aligned}
$$

Die daraus resultierenden Optimierungskosten betragen 32.155 Millionen €.

c. Lösung des MILP

Da die Maßnahmen nicht zu einem beliebigen Grad umgesetzt werden können, soll nun ein MILP (Mixed Integer Linear Problem) die Realität besser abbilden.

Die folgenden Werte wurden wieder mittels MATLAB berechnet.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 100\% \\
x_2 &= 100\% \\
x_3 &= 100\% \\
x_4 &= 0\% \\
x_5 &= 100\% \\
x_6 &= 0\%
\end{aligned}
$$

Die daraus resultierenden Optimierungskosten betragen 36 Millionen €.

d. Erweiterung des MILP

Die zusätzliche entweder/oder-Bedingung wurde in MATLAB berücksichtigt und zu 0 berechnet.

Wie aus der Tabellenangabe erkennbar, reichen 3 der ursprünglichen 6 Maßnahmen nicht aus um die Emissionsreduktionsbedingungen zu erfüllen.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis