

## Übung 4: Teil 1: Nichtlineare Optimierung

①

### Aufgabe 2 - Zusätzliche Gaslieferungen aus Russland

- kurzfristig an EU, Menge  $q_1$  (in bcm)  $\rightarrow$  EU zahlt  $(70 - 4q_1)$  Mio \$/bcm
- kurzfristig an Asien,  $\rightarrow$  bereit  $(150 - 15q_2)$  Mio \$/bcm zu zahlen.

Der Lieferant muss berücksichtigen:

- für  $q > 0$  ( $q = q_1 + q_2$ ), Produktionskosten:  $(100 + 15q)$  Mio \$
- $q_1 + q_2 \leq 20$  bcm

Fragen: • Wieviel Erdgas soll EU v. Asien für Gewinnmaximierung angeboten werden (Menge)

• Wie hoch ist der Gewinn im Maximum?

Zielfunktion:  $\max_{(q_1, q_2)} f(q_1, q_2) = q_1(70 - 4q_1) + q_2(150 - 15q_2) - (100 + 15q)$

$$\max f(x) = \min -f(x)$$

$\downarrow$

$$\min f(q_1, q_2) = -q_1(70 - 4q_1) - q_2(150 - 15q_2) + (100 + 15q)$$

Nebenbedingung:  $g(q) : q_1 + q_2 \leq 20 \rightarrow g(q) = q_1 + q_2 - 20 \leq 0$

1. Lagrange Fkt:  $L(q_1, q_2, \lambda) =$

$$\begin{aligned} &= -q_1(70 - 4q_1) - q_2(150 - 15q_2) + (100 + 15q) + \lambda(q_1 + q_2 - 20) \\ &= -70q_1 + 4q_1^2 - 150q_2 + 15q_2^2 + 100 + 15q_1 + 15q_2 + \lambda q_1 + \lambda q_2 - 20\lambda \end{aligned}$$

2. Regularitätsbedingung:

$$\frac{\partial g(q)}{\partial q_1} = 1 \neq 0 \quad \frac{\partial g(q)}{\partial q_2} = 1 \neq 0 \quad \dots \text{erfüllt!}$$

### 3. KKT-Bedingungen:

(1)

$$\frac{\partial L(q, \lambda)}{\partial q_1} = -70 + 8q_1 + 15 + \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L(q, \lambda)}{\partial q_2} = -150 + 30q_2 + 15 + \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

### 4. Komplementaritätsbedingungen

$$\lambda(q_1 + q_2 - 20) = 0 \quad \lambda \geq 0 \quad g(q) = q_1 + q_2 - 20 \leq 0$$

$\lambda = 0$  : folgt aus  $\frac{\partial L(q, \lambda)}{\partial q_1} : q_1 = \frac{55}{8}$  und aus

$$\frac{\partial L(q, \lambda)}{\partial q_2} : q_2 = \frac{135}{30}$$

Weiters folgt aus  $g(q) \leq 0$

$$g(q) = q_1 + q_2 - 20 \leq 0$$

$$\frac{55}{8} + \frac{135}{30} - 20 \leq 0$$

$$-8,625 \leq 0 \quad \dots \text{erfüllt!}$$

$\lambda > 0$  :  $\lambda(q_1 + q_2 - 20) = 0$

$$q_1 + q_2 - 20 = 0$$

$$q_1 = 20 - q_2$$

Einsetzen in  $\frac{\partial L(q, \lambda)}{\partial q_1}$ ,  $\frac{\partial L(q, \lambda)}{\partial q_2}$  ergibt:

$$-70 + 8(20 - q_2) + 15 + \lambda = 0$$

$$-150 + 30q_2 + 15 + \lambda = 0$$

$$80 + 160 - 8q_2 - 30q_2 = 0$$

$$q_2 = \frac{240}{38}$$

$$30 \cdot \frac{240}{38} - 135 + \lambda = 0$$

$$\Downarrow \\ \lambda < 0 \quad \swarrow \text{Widerspruch!}$$

③

- Nach der Analyse der Ergebnisse, sollte Gazprom den Europäern jeweils eine Menge von  $q_1 = \frac{55}{8} \approx 6,875$  bcm und ~~Asien~~ den zentralasiatischen Staaten eine Menge von  $q_2 = \frac{135}{30} = 4,5$  bcm liefern, um den Gewinn zu maximieren.
- Der Gewinn beträgt laut ZF: 392,813 Mio \$