圖解 Yoneda Lemma

本文將會以初等的角度來圖解 Hom functor、Natural transform、證明 Yoneda lemma 並舉例。

本人是範疇論的初學者，若有錯誤請不吝指正。主要參考的書是 *《The Joy of Cats, Abstract and Concrete Categories》*，其他的參考書目附錄在文末。

Notations

範疇：

- $\mathcal C, \mathcal D, ...$: 某些不特定的範疇.
- $\mathbf {Set}$: the category of sets.
- $\mathbf {Grp}$: the category of groups. 這並不是 a group as a category.

記號：

- $\operatorname{Ob}(\mathcal C)$: the collection of objects in a category $\mathcal C$. 其中的物件以明體字 $A,B,...$ 表示.
- $\operatorname{Hom}(A,B)$: the collection of morphisms from A to B.

在此我們忽略某些範疇「過大」的問題，例如 $\operatorname{Ob}(\mathbf{Set})$ 並不構成一個集合。目前這不是討論的重點，因此遇到這類問題我會含糊其詞。

在範疇 $\mathbf{Set}$ 中，$\operatorname{Hom}(A,B)$ 總是一個集合，這是沒問題的。

Functors

為了統一風格，先來看 functor 的記號。

Covarent functor

一個 functor $F:\mathcal C\to\mathcal D$ 能將範疇 $\mathcal C$ 中的 diagram $$A\overset{f}{\longrightarrow} B$$ 變成 $\mathcal D$ 中的 diagram $$F(A)\overset{F(f)}{\longrightarrow}\mathcal F(B).$$ 畫起來就是從 $\mathcal C$ 拉一張窗簾到 $\mathcal D$：

?

並且 preserve composition：

?

也 preserve Id_A：

?

Contravarient functor

另一種 functor 能夠讓箭頭變方向，要取另外一個名字，稱之為 contravarient functor：

?

而之前保持讓箭頭同方向的 functor 也相對地稱為 covarient functor。

The Hom Functor

Hom functor 是數學上常見的 functor，用來製造 dual space 或是 cohomology 等結構。

Hom functor

給定一個範疇 $\mathcal C$ 與 $A\in\operatorname{Ob}\mathcal (C)$，我們可以構造 covarient Hom functor 以及 contravarient Hom functor。

Covarient Hom functor $$\operatorname{Hom}(A,-):\mathcal C\to\mathbf{Set}$$ 會將範疇 $\mathcal C$ 中的任何物件 B 送到 $$\{f:\textrm{morphism from }A \textrm{ to } B\}$$ 這個集合，也就是 $\operatorname{Hom}(A,B)$ 這個集合。

?