

El Método de los Elementos Finitos para problemas unidimensionales

Obtención del problema unidimensional elástico a partir del problema tridimensional

Ecuaciones de Gobierno en 3D

Ecuación de Equilibrio:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

Ecuación Constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

Ecuación de compatibilidad geométrica:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u}$$

Problema 1D

Hipótesis

Se supondrá que el material es isótropo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

Ya que el problema es unidimensional, $\nu = 0$. Luego,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = 0$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{E}{2}$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{\sigma} = E \boldsymbol{\varepsilon}$$

Se tiene, también por unidimensionalidad, que

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Entonces,

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $\varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dx_1}$ y

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$

De lo anterior, se obtiene

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_i = \sigma_{ij,j} = \begin{cases} \frac{d\sigma_{11}}{dx_1} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

Ecuaciones de gobierno del problema 1D

Notación: $u = u_1$, $\sigma = \sigma_{11}$, $\varepsilon = \varepsilon_{11}$, $b = b_1$.

Ecuación de equilibrio:

$$\frac{d\sigma}{dx} + b = 0$$

Ecuación de constitutiva:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Ecuación de compatibilidad geométrica:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Condiciones de contorno

Para un dominio $(0, l)$, se considerarán tres posibilidades:

Dirichlet-Dirichlet: $u(0) = u^*$ $u(l) = u^{**}$.

Dirichlet-Neumann: $u(0) = u^*$ $\sigma(l) = \sigma^*$.

Neumann-Dirichlet: $\sigma(0) = \sigma^*$ $u(l) = u^{**}$.

Forma fuerte del problema de valores de contorno

RESOLVER

$$E \frac{d^2 u}{dx^2} + b = 0 \quad \text{en } (0, l)$$

SUJETA A

Condiciones en $\{0, l\}$

Forma débil

Considérese una función de ponderación w . Entonces,

$$w \left(E \frac{d^2 u}{dx^2} + b \right) = 0 \quad \forall w$$

$$\int_0^l w \left(E \frac{d^2 u}{dx^2} + b \right) dx = 0 \quad \forall w$$

Integrando por partes

$$\int_0^l w E \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \left[w E \frac{du}{dx} \right]_0^l - \int_0^l \frac{dw}{dx} E \frac{du}{dx} dx$$

Por tanto,

$$\int_0^l \frac{dw}{dx} E \frac{du}{dx} dx - \int_0^l w b dx - \left[w E \frac{du}{dx} \right]_0^l = 0 \quad \forall w$$

Debe tenerse en cuenta que, para que w sea admisible, debe ser igual a cero en el contorno tipo Dirichlet. Esto se entiende mejor en la interpretación que sigue.

Interpretación: Principio de los Trabajos Virtuales

Si se hace $w = \delta u$, donde δu es un desplazamiento virtual, entonces la forma débil se puede escribir así:

$$\int_0^l \frac{d\delta u}{dx} E \frac{du}{dx} dx - \int_0^l \delta u b dx - \left[\delta u E \frac{du}{dx} \right]_0^l = 0 \quad \forall \delta u$$

En este caso queda claro que, por admisibilidad cinemática, el desplazamiento virtual debe ser cero en los contornos donde se prescriben desplazamientos, esto es, en los contornos tipo Dirichlet.

Considerando

$$\delta \varepsilon = \frac{d\delta u}{dx}$$

y suponiendo que se tienen condiciones tipo Neumann en l

$$\sigma^* = E\varepsilon = E \frac{du}{dx} \quad \text{en } x = l$$

resulta

$$\int_0^l \delta\varepsilon \sigma dx - \int_0^l \delta u b dx - [\delta u \sigma^*]_l = 0 \quad \forall \delta u$$

En la expresión anterior se ha utilizado el hecho de que, para el problema Dirichlet-Neumann, $\delta u(0) = 0$. Esta expresión es el principio de los trabajos virtuales para medios elásticos lineales unidimensionales en equilibrio. El primer término es el trabajo virtual interno, mientras que los dos últimos constituyen el trabajo virtual externo.

Minimización de la energía

La forma débil del problema elástico lineal está relacionada con el principio de minimización de la energía. A continuación se explica esta relación.

La densidad de energía elástica en el caso unidimensional es

$$\frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2$$

Defínase

$$W(u) = \int_0^l \frac{1}{2} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$$

Esta es la energía elástica interna. Por otro lado, la energía externa para el caso Dirichlet-Neumann tiene la forma

$$L(u) = \int_0^l b u dx + [u \sigma^*]_l$$

Considérese el problema de minimización de la energía siguiente:

$$\min\{W(u) - L(u); \text{ para } u \text{ tal que } u(0) = u^*\}$$

Ya que el material considerado es elástico lineal, este problema nos proporcionará los estados de equilibrio del medio estudiado.

A continuación se establecerá una condición necesaria que debe cumplir cualquier mínimo de este problema.

Considérese una función w tal que $w(0) = 0$. Defínase, entonces,

$$f(h) = W(u + hw) - L(u + hw)$$

(véase la figura (1))

Esto es,

$$f(h) = \int_0^l \frac{1}{2} E \left(\frac{d(u + hw)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l b(u + hw) dx - [(u + hw) \sigma^*]_l$$

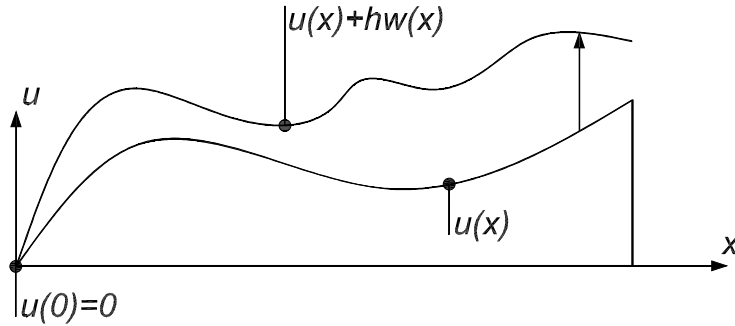


Figura 1: Variaciones de u

donde $h \in \mathbb{R}$. Si u es un mínimo de la energía, entonces, para todo w , debe cumplirse $f'(0) = 0$. Esta condición conduce a la forma débil del problema elástico lineal para medios unidimensionales.

Aproximación del problema unidimensional mediante el MEF

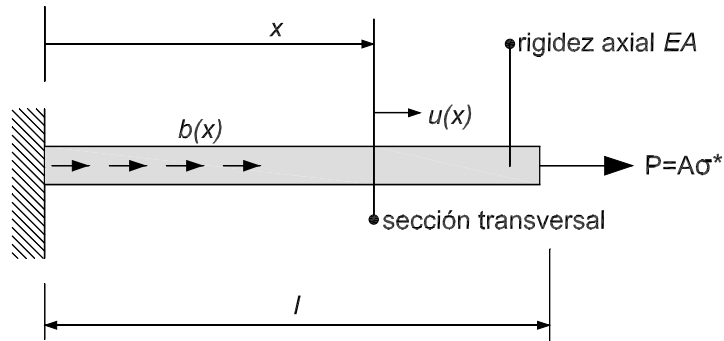


Figura 2: Barra

Uno de los métodos mas poderosos para encontrar soluciones aproximadas de problemas de valores de contorno es el Método de los Elementos Finitos (MEF). Este método parte de la forma débil de dichos problemas. Como se ha visto en la sección anterior, la forma débil puede interpretarse mecánicamente como el principio de los trabajos virtuales. Se considerará para su discretización mediante el MEF, el principio de los trabajos virtuales para barras (véase la

figura (2)):

$$\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx} dx - \int_0^l w b dx - [w A \sigma^*]_l = 0 \quad \forall w$$

donde se ha considerado el caso Dirichlet-Neumann y w es un desplazamiento virtual admisible, esto es $w(0) = 0$. La letra b denota una fuerza distribuida por unidad de longitud.

Se puede entonces construir el siguiente problema aproximado:

$$\int_0^l \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx - \int_0^l w^h b dx - [w^h A \sigma^*]_l = 0 \quad \forall w^h$$

Las aproximaciones que se considerarán son del siguiente tipo:

$$w^h(x) = w_1 N_1(x) + \dots + w_n N_n(x) = \sum_{i=1}^n w_i N_i(x)$$

$$u^h(x) = u_1 N_1(x) + \dots + u_n N_n(x) = \sum_{j=1}^n u_j N_j(x)$$

El uso del mismo tipo de aproximación tanto para u como para w , como en el caso anterior, se conoce como método de Galerkin. Se tiene que

$$\int_0^l \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \int_0^l \frac{d(\sum_{i=1}^n w_i N_i(x))}{dx} EA \frac{d(\sum_{j=1}^n u_j N_j(x))}{dx} dx$$

Por tanto,

$$\int_0^l \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \int_0^l \left(\sum_{i=1}^n w_i \frac{dN_i(x)}{dx} \right) EA \left(\sum_{j=1}^n u_j \frac{dN_j(x)}{dx} \right) dx$$

Definiendo

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dN_n(x)}{dx} \end{Bmatrix}$$

Entonces,

$$\int_0^l \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \int_0^l \mathbf{w}^T \mathbf{B} E A \mathbf{B}^T \mathbf{u} dx$$

Defínase la *matriz de rigidez* del sistema como

$$\mathbf{K} = \int_0^l \mathbf{B} E A \mathbf{B}^T dx$$

De lo anterior se deduce que

$$\int_0^l \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \mathbf{w}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$$

De manera parecida, se puede escribir

$$\int_0^l w^h b dx = \int_0^l \mathbf{w}^T \mathbf{N} b dx$$

donde

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ \vdots \\ N_n(x) \end{Bmatrix}$$

Definiendo el *vector de fuerzas volumétricas* como

$$\mathbf{f}_v = \int_0^l \mathbf{N} b dx$$

Resulta que

$$\int_0^l w^h b dx = \mathbf{w}^T \mathbf{f}_v$$

Por otro lado,

$$[w^h A \sigma^*]_l = [\mathbf{w}^T \mathbf{N} A \sigma^*]_l$$

Definiendo el *vector de fuerzas superficiales* como

$$\mathbf{f}_s = [\mathbf{N} A \sigma^*]_l$$

Se obtiene que

$$[w^h A \sigma^*]_l = \mathbf{w}^T \mathbf{f}_s$$

Finalmente es conveniente definir el *vector de fuerzas*:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_s$$

Se tiene, por tanto, que

$$\mathbf{w}^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \text{ admisible}$$

Un espacio de aproximación

A continuación se presentará un ejemplo de construcción de las funciones de aproximación u^h y w^h . Dicha construcción se basa en la elección de ciertas funciones N_i . El espacio de funciones generado es el espacio de elementos finitos más simple (espacio de funciones continuas afines a trozos).

Considérese una discretización del intervalo $(0, l)$ definida por un conjunto de n puntos x_i que cumplen

$$0 \leq x_i \leq l$$

y

$$x_1 = 0, \quad x_n = l, \quad x_{i-1} < x_i$$

A los puntos x_i se los denomina *nodos* de la discretización.

A cada nodo x_i con $0 < i < n$ de la discretización se asocia una función N_i definida de la siguiente manera:

$$N_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{|x_i-x_{i-1}|} & \forall x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{|x_{i+1}-x_i|} & \forall x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \forall x \in [0, l] - (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

La función asociada al nodo x_1 es

$$N_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2-x}{|x_2-x_1|} & \forall x \in [x_1, x_2) \\ 0 & \forall x \in [0, l] - [x_1, x_2) \end{cases}$$

Y la función asociada al nodo x_n es

$$N_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{|x_n-x_{n-1}|} & \forall x \in (x_{n-1}, x_n] \\ 0 & \forall x \in [0, l] - (x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Ejemplo

Considérese una barra de longitud l (véase la figura 3). Se discretiza en dos subintervalos. El primer subintervalo tiene longitud l_1 y el segundo, l_2 . Esta discretización genera tres nodos, $x_1 = 0$, $x_2 = l_1$ y $x_3 = l$. Se pide encontrar la matriz de rigidez del sistema.

Se tiene que

$$u^h(x) = u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x) + u_3 N_3(x)$$

y

$$w^h(x) = w_1 N_1(x) + w_2 N_2(x) + w_3 N_3(x)$$

Por tanto,

$$\frac{du^h(x)}{dx} = u_1 \frac{dN_1(x)}{dx} + u_2 \frac{dN_2(x)}{dx} + u_3 \frac{dN_3(x)}{dx}$$

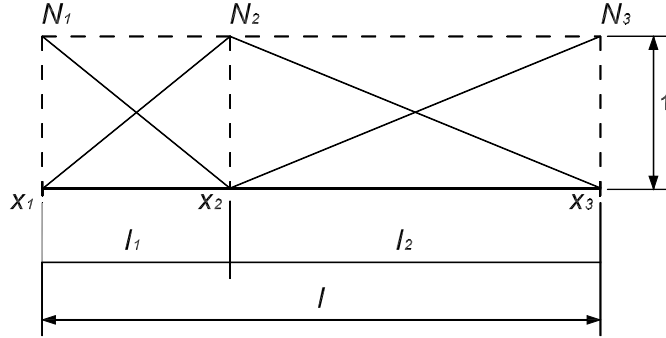


Figura 3: Ejemplo

y

$$\frac{dw^h(x)}{dx} = w_1 \frac{dN_1(x)}{dx} + w_2 \frac{dN_2(x)}{dx} + w_3 \frac{dN_3(x)}{dx}$$

Es fácil comprobar que

$$\frac{dN_1(x)}{dx} = \begin{cases} -\frac{1}{l_1} & \forall x \in [x_1, x_2) \\ 0 & \forall x \in [0, l] - [x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\frac{dN_2(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{l_1} & \forall x \in (x_1, x_2) \\ -\frac{1}{l_2} & \forall x \in (x_2, x_3) \end{cases}$$

y

$$\frac{dN_3(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{l_2} & \forall x \in (x_2, x_3] \\ 0 & \forall x \in [0, l] - (x_2, x_3] \end{cases}$$

Se tiene que

$$\int_0^l \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \int_0^{l_1} \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx + \int_{l_1}^l \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx$$

Entonces,

$$\int_0^{l_1} \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \mathbf{w}^T \int_0^{l_1} \mathbf{B}_1 EA \mathbf{B}_1^T dx \mathbf{u}$$

con

$$\mathbf{B}_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l_1} \\ \frac{1}{l_1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Definiendo

$$\mathbf{K}_1 = \int_0^{l_1} \mathbf{B}_1 EA \mathbf{B}_1^T dx$$

se obtiene,

$$\int_0^{l_1} \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \mathbf{w}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{u}$$

De forma análoga

$$\int_{l_1}^l \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \mathbf{w}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{u}$$

donde

$$\mathbf{K}_2 = \int_0^{l_1} \mathbf{B}_2 EA \mathbf{B}_2^T dx$$

con

$$\mathbf{B}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l_2} \\ \frac{1}{l_2} \end{Bmatrix}$$

Se tiene, entonces, que

$$\int_0^l \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \mathbf{w}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{u} + \mathbf{w}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{u}$$

Por tanto,

$$\int_0^l \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \mathbf{w}^T (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{u}$$

La matriz de rigidez del sistema es

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$$

Elementos finitos unidimensionales

En el ejemplo realizado en la sección anterior se puede observar la conveniencia de realizar el estudio del problema aproximado a nivel de cada uno de los subintervalos. Luego de lo cual, se puede pasar al nivel global del sistema añadiendo las contribuciones de cada uno de los intervalos. En esta sección se revisará esta perspectiva. Se empezará estudiando el concepto de elemento finito. Se considerará usando este concepto la aproximación expuesta en la sección anterior. Para pasar al nivel global se usará el concepto de *ensamblaje*.

Definición de elemento finito

Un elemento finito está definido por la siguiente tríada de objetos

1. Un subdominio del dominio de estudio.
2. Unas funciones base definidas en este subdominio, llamadas funciones de forma.
3. Los grados de libertad asociados al elemento.

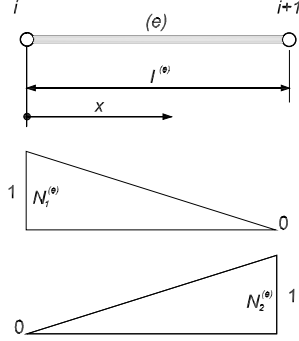


Figura 4: Elemento finito de dos nodos

Elemento finito de dos nodos

Se considerará el elemento finito de dos nodos (véase la figura 4). En este caso, la tríada de objetos resulta ser, para el elemento (e) ,

1. El intervalo $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)})$.
2. Dos funciones $N_1^{(e)}(x)$, $N_2^{(e)}(x)$.
3. Los grados de libertad $u_1^{(e)}$, $u_2^{(e)}$.

Matriz elemental

Es fácil ver que

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} (\mathbf{w}^{(e)})^T \mathbf{B}^{(e)} EA (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{u}^{(e)} dx$$

donde

$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l^{(e)}} \\ \frac{1}{l^{(e)}} \end{Bmatrix}$$

Defínase

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} EA (\mathbf{B}^{(e)})^T dx = \frac{EA}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \frac{dw^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = (\mathbf{w}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}$$

Por otro lado se puede aproximar

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} w^h b dx = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \mathbf{w}^T \mathbf{N}^{(e)} b dx$$

con

$$\mathbf{N}^{(e)} = \begin{Bmatrix} N_1^{(e)}(x) \\ N_2^{(e)}(x) \end{Bmatrix}$$

Definiendo

$$\mathbf{f}_v^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)} b dx$$

Se obtiene, por tanto,

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} w^h b dx = \mathbf{w}^T \mathbf{f}_v^{(e)}$$

Ensamblaje

Una vez que se han encontrado la matriz de rigidez y el vector de fuerzas a nivel del elemento, se debe proceder a un proceso de ensamblaje de las contribuciones elementales para obtener un sistema global. Para esto es necesario tener una tabla de localización que permita obtener los índices que tiene un objeto en el sistema global a partir de los índices de ese objeto a nivel de un elemento.

La tabla de localización define la siguiente aplicación:

$$\left((e), i^{(e)} \right) \mapsto i = TL \left((e), i^{(e)} \right)$$

Esto es, dados el índice de un elemento, (e) , y el índice local de un nodo en el elemento (e) , $i^{(e)}$, la aplicación TL proporciona el índice de dicho nodo en el sistema global, $i = TL \left((e), i^{(e)} \right)$. En términos prácticos esta aplicación se construye mediante un arreglo de $2 \times n$ elementos. Una forma de construir este arreglo es leyendo la tabla de localización de un archivo con el siguiente formato:

<i>Elemento</i>	<i>Nodo . 1</i>	<i>...</i>	<i>Nodo . i^(e)</i>	<i>...</i>	<i>Nodo . n^(e)</i>
1	1	<i>n^(e)</i>
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
(e)	<i>i</i>
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Ejemplo

Considérese un dominio unidimensional discretizado en dos elementos de dos nodos. En ese caso la tabla de localización tiene la siguiente forma:

<i>Elemento</i>	<i>Nodo . 1</i>	<i>Nodo . 2</i>
1	1	2
2	2	3

La ampliación TL está definida por

$$\begin{aligned} TL(1, 1) &= 1 \\ TL(1, 2) &= 2 \\ TL(2, 1) &= 2 \\ TL(2, 2) &= 3 \end{aligned}$$

Del nivel elemental al global

Las contribuciones elementales se pueden pasar al nivel global con la ayuda de la aplicación TL . La contribución de la matriz de rigidez elemental $\mathbf{K}^{(e)}$ a la matriz global, \mathbf{K} , se puede determinar de la siguiente manera. Si se tiene que

$$\begin{aligned} TL(e, i) &= m \\ TL(e, j) &= p \end{aligned}$$

entonces,

$$\mathbf{K}_{mp} \leftarrow \mathbf{K}_{mp} + \mathbf{K}_{ij}^{(e)}$$

De manera parecida el vector de fuerzas elemental puede ensamblarse usando

$$\mathbf{f}_m \leftarrow \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_i^{(e)}$$

Es importante anotar que \mathbf{K} y \mathbf{f} deben inicializarse de tal manera que todos sus elementos sean cero al inicio del proceso de ensamblaje.

Resolución del sistema de ecuaciones

Se ha obtenido arriba que

$$\mathbf{w}^T(\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \text{ admisible}$$

La admisibilidad de \mathbf{w} en el caso de que la ecuación anterior provenga del método de los elementos finitos implica que, si en el nodo x_i se impone una condición del tipo Dirichlet, entonces $w_i = 0$. Supóngase, por ejemplo, que en el nodo x_1 se impone una condición de este tipo y, por tanto, $w_1 = 0$. Defínase, además,

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}$$

Entonces,

$$\mathbf{w}^T(\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) = \mathbf{w}^T\mathbf{r} = 0 \quad \forall \mathbf{w} \text{ admisible}$$

Ya que $w_1 = 0$,

$$\mathbf{w}^T\mathbf{r} = (w_2 \dots w_n) \begin{Bmatrix} r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix} = 0 \quad \forall \mathbf{w}$$

Lo cual implica que

$$\begin{Bmatrix} r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esta condición y el hecho de que por definición

$$r_1 = (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f})_1$$

Se pueden expresar mediante

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \overline{\mathbf{f}}$$

donde

$$\overline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} f_1 + r_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Se puede interpretar a r_1 como la *reacción* en el nodo x_1 . La resolución del sistema de ecuaciones anterior debe hacerse luego de eliminar las filas y las columnas cuyo índice coincide con los índices de los nodos en los que se han impuesto condiciones tipo Dirichlet. Los términos de las columnas eliminadas pasan al lado derecho de la ecuación en forma de correcciones al vector de fuerzas.

Encontrados los desplazamientos nodales, se procede entonces a encontrar las reacciones.