Mécanica de Medios Continuos
Practica 0
Álgebra y cálculo vectorial y tensorial

Universidad de Cuenca

11 de abril de 2023

1. Como vimos en clase, un tensor puede ser representado como la suma de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico. Esta descomposición es útil para calcular propiedades de los tensores ya que cada componente contiene distinta información como veremos en los siguientes ejercicios.

   a) Demostrar que la traza de un tensor es igual a la traza de su componente simétrica.

   b) Demostrar que la determinante de un tensor antisimétrico de tamaño impar es igual a 0.

   c) Calcular la matriz de componentes del tensor definido por la rotación de vectores en 3 dimensiones en un ángulo θ en torno al eje $\mathbf{e}_1$.

2. Dados los tensores de orden 1 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, y el tensor de orden 2 $\mathbf{A}$, escriba en notación inicial las siguientes expresiones:

   a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

   b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

   c) $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$

   d) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

   e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

   f) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$

   g) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}$

   h) $\mathbf{A}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$

   i) $tr(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$

   j) $tr(\mathbf{A})$

   k) $Det(\mathbf{A})$

   Ayuda: Para el determinante emplear el símbolo de Levi-Civita.

3. Dado un vector arbitrario $\mathbf{v}$ y un vector unitario $\mathbf{n}$, demostrar:

   a) $\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$

4. Un tensor $\mathbf{P}$ de orden 2 es una **Proyección ortogonal** si es simétrico y $\mathbf{P} = \mathbf{P^2}$. Dados dos vectores unitarios arbitrarios $\mathbf{n}$ y $\mathbf{m}$, determine cuáles de los siguientes tensores es una proyección perpendicular.

   a) $\mathbf{P} = \mathbf{I}$
   b) $\mathbf{P} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$
   c) $\mathbf{P} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$
   d) $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$
   e) $\mathbf{P} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}$

5. Dados el campo vectorial $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2x_1\mathbf{e}_2 + x_3x_1\mathbf{e}_3$ y el campo tensorial $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = x_2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + x_1x_3\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ Calcular:

   a) $\nabla \cdot \mathbf{v}$
   b) $\nabla \times \mathbf{v}$
   c) $\nabla \cdot \mathbf{S}$

6. Dados el campo escalar $\phi(\mathbf{x})$, el campo vectorial $\mathbf{v}$ escriba en notación indicial las expresiones a y b, y demostrar las demás:

   a) $\nabla \cdot \mathbf{v}$
   b) $\nabla\phi$
   c) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{v}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{v} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{v})$
   d) $\nabla(\phi\mathbf{v}) = \phi\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla\phi$
   e) $\nabla \times (\phi\mathbf{v}) = \phi\nabla \times \mathbf{v} + (\nabla\phi) \times \mathbf{v}$

7. Dado el campo escalar $\phi(\mathbf{x})$, el campo vectorial $\mathbf{v}$ y el tensor de orden 2 $\mathbf{S}$, demostrar:

   a) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{S}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{S}) + \mathbf{S}\nabla\phi$
   b) $\nabla \cdot (\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} : \nabla\mathbf{v}$
   c) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{S}\mathbf{v}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{v} + \nabla\phi \cdot (\mathbf{S}\mathbf{v}) + \phi\mathbf{S} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{T}}$
   d) $\nabla \cdot (\mathbf{S}\mathbf{v}) = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} : \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{S})$