

Cuestiones y Problemas de
MECÁNICA DE
MEDIOS CONTINUOS

X. Oliver
C. Agelet de Saracibar

Cuestiones y Problemas de MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

X. Oliver

C. Agelet de Saracibar

X. Oliver y C. Agelet de Saracibar
Cuestiones y Problemas de Mecánica de Medios Continuos

Compilado por J. Martínez Parejo

Julio 2002

© 2002-2017

1 Descripción del movimiento

CUESTIONES RESUELTAS

CR 1-1 Justificar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Si el campo de velocidades es estacionario, el campo de aceleraciones también lo es.
- b) Si el campo de velocidades es uniforme, el campo de aceleraciones es siempre nulo.
- c) Si el campo de velocidades es estacionario y el medio es incompresible el campo de aceleraciones es siempre nulo. (\Rightarrow Tema 5)

Resolución:

- a) Que el campo de velocidades sea estacionario significa lo siguiente:

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

La derivada material de la velocidad da la aceleración y por tanto:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

La expresión que queda no depende del tiempo. Así se concluye que *la afirmación del enunciado es cierta*.

- b) Si el campo de velocidades es uniforme implica que no depende de la coordenada espacial y por tanto:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \mathbf{v}(t)$$

Derivando la velocidad queda:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(t)}{\partial t}$$

ya que el gradiente de la velocidad es:

$$[\nabla \mathbf{v}(t)]_{ij} = \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} = 0$$

Por lo tanto, *la afirmación es falsa* ya que $\frac{\partial \mathbf{v}(t)}{\partial t}$ no tiene porqué ser nulo.

- c) Como en el apartado a), la velocidad es del tipo:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

Medio incompresible significa, matemáticamente, que la divergencia de la velocidad es nula:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$$

Pero esto no implica necesariamente que el gradiente de la velocidad también lo sea, es decir, la aceleración no tiene porqué ser cero:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

Se concluye que *la afirmación es falsa*.

CR 1-2 Determinar en qué condiciones las siguientes ecuaciones pueden ser las trayectorias de un medio continuo:

$$\begin{cases} x = Xt + Z(e^2 - 1)(1 - t) \\ y = Yt + Z(e^2 - e^{-2})(1 - t) \\ z = e^2 Z(1 - t) + Zt \end{cases}$$

Resolución:

$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ es el tensor *Gradiente Material de la Deformación*, definido de la siguiente manera:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

Se debe cumplir:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}| &> 0 \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} t & 0 & (e^2 - 1)(1 - t) \\ 0 & t & (e^2 - e^{-2})(1 - t) \\ 0 & 0 & t + e^2(1 - t) \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{F}| = t^2(t + e^2(1 - t)) > 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ t + e^2(1 - t) = -t(e^2 - 1) + e^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t \neq 0 \\ t < \frac{e^2}{e^2 - 1} \approx 1.157 \end{cases}$$

GENERALIZACIÓN:

Para un caso más general, donde se tenga la *Forma Canónica de las Ecuaciones del Movimiento*:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(C_1, C_2, C_3, t) \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 t + C_3(e^2 - 1) \\ y = C_2 t + C_3(e^2 - e^{-2}) \\ z = e^2 C_3(1 - t) \end{cases}$$

se deberá cumplir la misma condición $|\mathbf{F}| > 0$. Pero ahora las expresiones son diferentes a las anteriores.

Tomando como instante inicial un tiempo t^* :

$$\begin{cases} X = C_1 t^* + C_3 (e^2 - 1) \\ Y = C_2 t^* + C_3 (e^2 - e^{-2}) \\ Z = e^2 C_3 (1 - t^*) \end{cases}$$

y despejando C_i , $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{t^*} [X - \frac{Z}{1-t^*} (1 - e^{-2})] \\ C_2 = \frac{1}{t^*} [Y - \frac{Z}{1-t^*} (1 - e^{-4})] \\ C_3 = \frac{Z}{e^2 (1 - t^*)} \end{cases}$$

Estas ecuaciones están definidas para $\begin{cases} t^* \neq 0 \\ t^* \neq 1 \end{cases}$. Sustituyendo en las ecuaciones de las trayectorias del medio continuo resulta:

$$\begin{cases} x = \frac{t}{t^*} X - \frac{t}{t^*} \frac{Z}{1-t^*} (1 - e^{-2}) + \frac{Z}{1-t^*} (1 - e^{-2}) \\ y = \frac{t}{t^*} Y - \frac{t}{t^*} \frac{Z}{1-t^*} (1 - e^{-4}) + \frac{Z}{1-t^*} (1 - e^{-4}) \\ z = \frac{1-t}{1-t^*} Z \end{cases}$$

De esto se deduce que $\begin{cases} t \neq 0 \\ t^* \neq 0 \\ t^* \neq 1 \end{cases}$.

Si ahora se calcula $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ y su determinante, queda la condición:

$$|\mathbf{F}| = \frac{t^2}{t^{*2}} \frac{1-t}{1-t^*} > 0$$

O lo que es lo mismo:

$t \neq 0$
$t^* \neq 0$
$t^* < 1 \quad , \quad t < 1$
$t^* > 1 \quad , \quad t > 1$

CR 1-3 Calcular la aceleración en el instante $t = 2$ y en el punto $(1, 1, 1)$ del siguiente campo de velocidades : $\mathbf{v} = [x - z, \quad z(e^t + e^{-t}), \quad 0]^T$.

Resolución:

Como se da la expresión espacial de la velocidad y se pide el valor de la aceleración en un punto $\mathbf{x}^* = (1, 1, 1)^T$ del espacio, no hace falta encontrar las *Ecuaciones de Movimiento*. Únicamente hay que aplicar:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= [0, z(e^t - e^{-t}), 0]^T \\ \nabla \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} [x - z, z(e^t + e^{-t}), 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & (e^t + e^{-t}) & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= [x - z, 0, 0]^T \\ \Rightarrow \mathbf{a} &= [x - z, z(e^t - e^{-t}), 0]^T \\ \boxed{\mathbf{a}(\mathbf{x} = \mathbf{x}^*, t = 2) = [0, e^2 - e^{-2}, 0]^T} \end{aligned}$$

CR 1-4 Las ecuaciones de un cierto movimiento son:

$$x = X, \quad y = \frac{1}{2}[(Y + Z)e^t + (Y - Z)e^{-t}], \quad z = \frac{1}{2}[(Y + Z)e^t - (Y - Z)e^{-t}]$$

Calcular las aceleraciones que observaría a lo largo del tiempo:

- Un observador situado en el punto fijo (1,1,1).
- Un observador que viajara con la partícula que en $t = 0$ ocupaba el punto (1,1,1).
- Un observador situado en el punto (1,1,1) que midiese las aceleraciones como diferencia de las velocidades en dicho punto por unidad de tiempo.

Resolución:

Primero se calculan las *Ecuaciones de Movimiento Inversas*:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} y + z &= (Y + Z)e^t \\ y - z &= (Y - Z)e^{-t} \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} Y + Z &= (y + z)e^{-t} \\ Y - Z &= (y - z)e^t \end{aligned} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} X &= x \\ Y &= \frac{1}{2}(y + z)e^{-t} + \frac{1}{2}(y - z)e^t \\ Z &= \frac{1}{2}(y + z)e^{-t} - \frac{1}{2}(y - z)e^t \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

y ahora la velocidad:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(Y + Z)e^{-t} - \frac{1}{2}(Y - Z)e^{-t} \\ \frac{1}{2}(Y + Z)e^{-t} + \frac{1}{2}(Y - Z)e^{-t} \end{bmatrix}$$

Utilizando las *Ecuaciones de Movimiento Inversas* se obtiene la descripción espacial de la velocidad:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ y \end{bmatrix} \quad (1)$$

Para calcular la aceleración se procede de la misma manera:

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(Y+Z)e^t + \frac{1}{2}(Y-Z)e^{-t} \\ \frac{1}{2}(Y+Z)e^t - \frac{1}{2}(Y-Z)e^{-t} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Y con las *Ecuaciones de Movimiento Inversas* se deduce la descripción espacial de la aceleración:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3)$$

- a) Se tiene que utilizar la expresión (3) para $\mathbf{x}^* = (1, 1, 1)^T$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x} = \mathbf{x}^*, t) = [0, 1, 1]^T$$

- b) Se tiene que utilizar la expresión (2) para $\mathbf{X}^* = (1, 1, 1)^T$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x} = \mathbf{X}^*, t) = [0, e^t, e^t]^T$$

- c) Se tiene que calcular la derivada local de (1), y como no depende de t explícitamente, ésta será nula. No dependerá ni de t ni de \mathbf{x} :

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = [0, 0, 0]^T$$

CR 1-5 Dado el campo de velocidades $\mathbf{v} = [at, y, 0]^T$:

- a) Determinar las ecuaciones de las líneas de corriente y trayectorias.
 b) Determinar los posibles valores de los parámetros β y α , para los cuales la función $f(x, y, z, t) = e^{\beta t} y^\alpha - C$, donde $C \neq 0$ es una constante, define una superficie material.

Resolución:

- a) Las trayectorias cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= at \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + C_1 \\ \frac{dy}{dt} &= y \Rightarrow y = C_2 e^t \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \Rightarrow z = C_3 \end{aligned}$$

e imponiendo la condición $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ para $t=0$, se obtiene la *Forma Canónica de las Ecuaciones de Movimiento*:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 + X \\ y &= Ye^t \\ z &= Z \end{aligned}$$

Las líneas de corriente cumplirán:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\lambda} &= at \Rightarrow x = at\lambda + C_1 \\ \frac{dy}{d\lambda} &= y \Rightarrow y = C_2 e^\lambda \\ \frac{dz}{d\lambda} &= 0 \Rightarrow z = C_3 \end{aligned}$$

- b) $f(x, y, z, t)$ define la superficie material $\Sigma_t := \{\mathbf{x} \mid f(x, y, z, t) = 0\}$, y por lo tanto deberá cumplir:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_t \quad \forall t$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta e^{\beta t} y^\alpha$$

$$\nabla f = (0, \alpha e^{\beta t} y^{\alpha-1}, 0)^T$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f = \alpha e^{\beta t} y^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \beta e^{\beta t} y^\alpha + \alpha e^{\beta t} y^\alpha = (\beta + \alpha) e^{\beta t} y^\alpha = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_t \quad \forall t$$

$$\mathbf{x} \in \Sigma_t \Rightarrow f(x, y, z, t) \equiv e^{\beta t} y^\alpha - C = 0 \Rightarrow e^{\beta t} y^\alpha = C \Rightarrow (\beta + \alpha) e^{\beta t} y^\alpha = C(\beta + \alpha)$$

$$(\beta + \alpha) e^{\beta t} y^\alpha = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_t \quad \forall t \Rightarrow C(\beta + \alpha) = 0 \quad \forall t \Rightarrow$$

$$\boxed{\beta + \alpha = 0}$$

CR 1-6 Dado el siguiente campo de velocidades (descripción espacial) en coordenadas cartesianas: $\mathbf{v} = [x, y, z\varphi(t)]^T$, y la superficie:

$$\Sigma_t := \left\{ \mathbf{x} \mid F(x, y, z, t) = e^{-2t}(x^2 + y^2) + z^2 e^{-t^2} - C = 0 \right\}$$

donde $C \neq 0$ es una constante, determinar $\varphi(t)$ sabiendo que las partículas que están sobre dicha superficie son siempre las mismas.

Resolución:

F define la superficie material $\Sigma_t := \{\mathbf{x} \mid F(x, y, z, t) = 0\}$, y por tanto deberá cumplir:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla F = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_t \quad \forall t$$

donde

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2e^{-2t}(x^2 + y^2) - 2tz^2e^{-t^2}$$

$$\nabla F = \begin{bmatrix} 2xe^{-2t} \\ 2ye^{-2t} \\ 2ze^{-t^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla F = (x, y, z\varphi(t)) \cdot \nabla F = 2x^2e^{-2t} + 2y^2e^{-2t} + 2z^2e^{-t^2}\varphi(t)$$

resultando finalmente: $2z^2(\varphi(t) - t)e^{-t^2} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_t \quad \forall t$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Sigma_t &\Rightarrow F(x, y, z, t) \equiv e^{-2t}(x^2 + y^2) + z^2e^{-t^2} - C = 0 \Rightarrow z^2 = [C - e^{-2t}(x^2 + y^2)]e^{+t^2} \\ &\Rightarrow 2z^2(\varphi(t) - t)e^{-t^2} = 2[C - e^{-2t}(x^2 + y^2)](\varphi(t) - t) = 0 \quad \forall x, y \quad \forall t \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(t) = t}$$

CR 1-7

- a) Obtener la divergencia en el punto $(0,0,0)^T$ del campo vectorial definido en coordenadas esféricas por $\mathbf{v} = ar\hat{\mathbf{e}}_r$.
- b) Justificar que, en el caso más general, para cualquier campo vectorial como el de la Fig.1 (convergente hacia el punto A) o el de la Fig.2 (divergente desde el punto A), el valor de la divergencia en A es negativo y positivo, respectivamente.

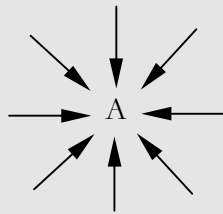


Fig.1

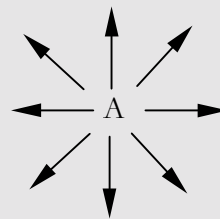


Fig.2

Resolución:

- a) El campo de velocidades en coordenadas esféricas es el siguiente:

$$\begin{cases} v_r = ar \\ v_\theta = 0 \\ v_\phi = 0 \end{cases}$$

La definición de divergencia en coordenadas esféricas es:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

En este caso particular queda así:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (ar^3) = \frac{3ar^2}{r^2} = 3a}$$

Para el caso de la Figura 1 resulta $a < 0$ ya que el vector velocidad tiene diferente sentido que las r crecientes, y por tanto, la divergencia es negativa.

Para el caso de la Figura 2 resulta $a > 0$ ya que el vector velocidad tiene el mismo sentido que las r crecientes, y por tanto, la divergencia es positiva.

- b) Para demostrarlo, se toma un volumen diferencial que envuelva el punto A y se razona sobre él:

FIGURA 1:

Los vectores \mathbf{n} y \mathbf{v} tienen diferente sentido, ya que \mathbf{n} es el vector unitario exterior del volumen dV y \mathbf{v} va hacia dentro. Por tanto su producto será negativo.

$$\left. \begin{aligned} \int_{dV} \nabla \cdot \mathbf{v} dV &= (\nabla \cdot \mathbf{v})|_A dV \\ \int_{dV} \nabla \cdot \mathbf{v} dV &= \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\nabla \cdot \mathbf{v})|_A < 0$$

FIGURA 2:

En este caso, ocurre todo lo contrario, \mathbf{v} y \mathbf{n} tienen el mismo sentido y, por tanto, su producto será positivo.

$$\left. \begin{aligned} \int_{dV} \nabla \cdot \mathbf{v} dV &= (\nabla \cdot \mathbf{v})|_A dV \\ \int_{dV} \nabla \cdot \mathbf{v} dV &= \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\nabla \cdot \mathbf{v})|_A > 0$$

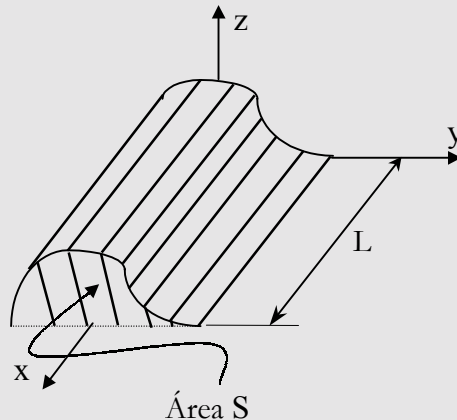
PROBLEMAS RESUELTOS

PR 1-1 Para el siguiente campo de velocidades:

$$v_x = 0 \quad , \quad v_y = 0 \quad , \quad v_z = f(x, y) \cdot z$$

Se pide:

- Hallar las trayectorias y las líneas de corriente indicando cómo son.
- Dada la función $g(x, y, z, t) = \ln(xyz) - \frac{\partial f}{\partial x} t$, determinar el valor de $f(x, y)$ para que $g(x, y, z, t) = 0$ sea una superficie material.
- Determinar la densidad sabiendo que en $t = 0$, $\rho = f(x, y)$.
- En el instante $t = 1$, y en los puntos de una superficie esférica de centro $(0, 0, 0)$ y radio R , se vierte un colorante. Obtener la ecuación de la mancha a lo largo del tiempo.
- Para el caso particular $f(x, y) = A$, calcular la cantidad de masa por unidad de tiempo que atraviesa la superficie cilíndrica de la figura cuya directriz tiene longitud “L” y está contenida en el plano xy . (\Rightarrow Tema 5)



Resolución:

- Para hallar las trayectorias se debe integrar la descripción espacial de la velocidad ya que:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

Se puede aplicar la igualdad componente a componente, y al particularizarla para este problema resulta:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = 0 \Rightarrow x(t) = C_1$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = 0 \Rightarrow y(t) = C_2$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z = f(x, y) \cdot z \Rightarrow \frac{dz}{dt} = f(C_1, C_2) \cdot z \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int f(C_1, C_2) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(z) = f(C_1, C_2) \cdot t + k \Rightarrow z(t) = C_3 \cdot e^{f(C_1, C_2)t}$$

Para obtener la expresión en forma canónica se impone que:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}$$

$$x(0) = C_1 = X$$

$$y(0) = C_2 = Y$$

$$z(0) = C_3 = Z$$

La ecuación de las trayectorias es:

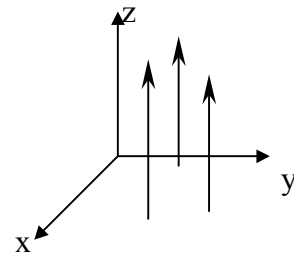
$$\begin{cases} x = X \\ y = Y \\ z = Z \cdot e^{f(X,Y) \cdot t} \end{cases} \quad (1)$$

Para hallar las líneas de corriente, se tendría que integrar el campo de velocidades respecto λ , pero en el problema el campo de velocidades en descripción espacial no depende explícitamente del tiempo, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, es decir, el campo de velocidades es estacionario y, por

tanto, las líneas de corriente coinciden con las trayectorias. La ecuación de las líneas de corriente será entonces:

$$\begin{cases} x = C_1 \\ y = C_2 \\ z = C_3 X \cdot e^{f(C_1, C_2) \lambda} \end{cases}$$

Las trayectorias (y las líneas de corriente) son verticales ya que sólo varía la componente z , debido a que el campo de velocidades es vertical. Como las líneas de corriente son sus envolventes también deben ser verticales.



b) Recordar que $\phi(\mathbf{x}, t)$ es superficie material si, y sólo si, su derivada material es nula:

$$\frac{d\phi(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) = 0$$

Se tiene la superficie definida por:

$$g(x, y, z, t) = \ln(xyz) - \frac{\partial f}{\partial x} t = 0$$

Se calcula su derivada material y se iguala a cero.

$$\frac{\partial g}{\partial t} = - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla g = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix} = v_z \frac{\partial g}{\partial z} = f(x, y) \cdot z \frac{1}{xyz} \quad xy = f(x, y)$$

La derivada material resulta:

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + f(x, y) = 0$$

Si se toma $f(x, y) \neq 0$:

$$-\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + f(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f(x, y) \Rightarrow \frac{1}{f(x, y)} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [\ln(f(x, y))] = 1 \Rightarrow \ln(f(x, y)) = x + \varphi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x, y) = e^{x+\varphi(y)} = \Psi(y) \cdot e^x$$

Por tanto, g es material si, y sólo si,

$$f(x, y) = \Psi(y) \cdot e^x$$

Para el caso $f(x, y) = 0$ se tiene que $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$, es decir, el medio continuo está en reposo y, por tanto, toda superficie es material.

c) La densidad verifica la siguiente ecuación de continuidad:

$$\rho = \frac{\rho_0}{|\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)|}, \text{ siendo } \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}.$$

Expresada en componentes resulta:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de movimiento (1), se pueden calcular las componentes de \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & e^{f(X, Y) \cdot t} \end{bmatrix}$$

Los valores $*$ no se necesitan y por ello no se explicitan.

El determinante de $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ es:

$$|\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)| = e^{f(X, Y) \cdot t}$$

En el enunciado se dice que en $t=0$, $\rho = f(x, y)$, es decir, según las expresiones (1), $\rho_0 = f(X, Y)$.

$$\rho(t) = \frac{f(X, Y)}{e^{f(X, Y) \cdot t}}$$

- d) Se pide hallar la ecuación de la mancha a lo largo del tiempo, es decir, la descripción espacial de la superficie material de las partículas que en $t=1$ estaban sobre la esfera de centro el origen de coordenadas y de radio R .

En $t=1$ la mancha es una esfera pero no se sabe las partículas que la constituyen:

$$(x^*)^2 + (y^*)^2 + (z^*)^2 - R^2 = 0$$

Introduciendo las ecuaciones del movimiento (1) particularizadas en $t=1$, se averigua la posición inicial de las partículas que forman parte de la esfera en $t=1$. Como es una superficie material, éstas formarán la mancha para todos los tiempos (identificación de las partículas):

$$x^* = X$$

$$y^* = Y$$

$$z^* = Z e^{f(X,Y) \cdot 1}$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 e^{2f(X,Y)} - R^2 = 0$$

que es la expresión material de la superficie material. Se busca la descripción espacial, por lo que se debe sustituir en la expresión anterior las ecuaciones inversas del movimiento:

$$X = x$$

$$Y = y$$

$$Z = z e^{-f(x,y) \cdot t}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \cdot e^{-2f(x,y) \cdot t} \cdot e^{2f(x,y)} - R^2 = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 e^{2(1-t)f(x,y)} - R^2 = 0}$$

- e) La cantidad de masa por unidad de tiempo que atraviesa una superficie se define de la siguiente forma:

$$\phi_S = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2)$$

Para este problema y según el apartado c), la densidad tiene la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{A}{e^{At}}$$

Se observa que la densidad no depende de los puntos del espacio, sino que únicamente lo hace del tiempo, por lo tanto puede salir fuera de la integral.

Y si la superficie encierra un volumen V y aplicamos el *Teorema de la Divergencia* queda:

$$\phi_S = \rho \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \rho \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV \quad (3)$$

Se calcula ahora el flujo de masa a través de cada superficie utilizando la expresión (2) y luego el flujo total mediante la (3). Así se despeja el resultado final.

Vamos a denominar a las diferentes superficies de la siguiente manera:

Sup. 1: la contenida en el plano $y-z$ y con $x=0$.

Sup. 2: la contenida en un plano paralelo al $y-z$ y con $x=L$.

Sup. 3: la contenida en el plano $x - y$ y con $z = 0$.

Sup. 4: la superficie irregular que cierra finalmente el volumen V .

Flujo de masa a través de la superficie 1:

$$\phi_{S_1} = \int_{S_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \rho \int_{S_1} \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{e}_1) dS = \rho \int_{S_1} 0 dS = 0$$

Flujo de masa a través de la superficie 2:

$$\phi_{S_2} = \int_{S_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \rho \int_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 dS = \rho \int_{S_2} 0 dS = 0$$

Flujo de masa a través de la superficie 3:

$$\phi_{S_3} = \int_{S_3} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \rho \int_{S_3} \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{e}_3) dS = \rho \int_{S_3} -A z dS = -A \rho \int_{S_3} z dS = -A \rho \int_{S_3} 0 dS = 0$$

Flujo de masa a través de todas las superficies:

$$\phi_S = \rho \int_V \nabla \cdot \mathbf{n} dV = \rho \int_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = \rho \int_V (0 + 0 + A) dV = \rho A V = \rho A L S$$

Por lo tanto, se puede encontrar ϕ_{S_4} de la siguiente manera:

$$\phi_S = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} + \phi_{S_3} + \phi_{S_4}$$

$$\phi_{S_4} = \phi_S - \phi_{S_1} - \phi_{S_2} - \phi_{S_3}$$

$$\phi_{S_4} = \rho A L S - 0 - 0 - 0 = \rho A L S$$

Y finalmente, el flujo a través de la superficie cilíndrica, formada por las superficies 3 y 4, es:

$$\phi_{S_3} + \phi_{S_4} = 0 + \rho A L S$$

$$\boxed{\phi_S = \rho A L S}$$

PR 1-2 La descripción espacial del campo de velocidades de un fluido perfecto es:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left[z e^t, \frac{y}{1+t}, v_z \right]^T$$

La descripción material del campo de presiones es $p(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \rho_0 Z^2 \frac{e^{-t}}{1+t}$, siendo $\rho_0 = \text{cte}$.

Se sabe también que la superficie $\phi(\mathbf{x}, t) = x - z(1+t)e^t + k = 0$ es una superficie material. Se pide:

- Ecuación de las trayectorias y de las líneas de corriente.
- Las fuerzas de volumen que originan el movimiento. (\Rightarrow Tema 4)
- En el punto \mathbf{x}^* se produce un vertido en el intervalo $t \in [t_1, t_2]$. Obtener la ecuación de la línea de traza y la posición de sus puntos inicial y final.
- Calcular el flujo de masa que atraviesa la superficie de la esfera de centro en $(1, 1, 1)$ y radio R . (\Rightarrow Tema 5)

Resolución:

- a) En primer lugar, hay que utilizar la información sobre la superficie ϕ para poder completar el campo de velocidades espacial, ya que el enunciado no da explícitamente la componente v_z . Que dicha superficie sea material significa que todas las partículas que la componen son siempre las mismas, y expresado matemáticamente queda:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} &= -z(e^t + e^t(1+t)) \\ \nabla\phi &= (1, 0, -(1+t)e^t)^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow -z(e^t + e^t(1+t)) + ze^t - (1+t)e^t v_z = 0, \forall t$$

$$\Rightarrow v_z = -z$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left[ze^t, \frac{y}{1+t}, -z \right]^T$$

Ahora ya se puede calcular las trayectorias según la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

de la que resultan 3 ecuaciones diferenciales ordinarias de 1^{er} orden:

$$\frac{dz}{dt} = -z \Rightarrow z = Ze^{-t}$$

$$\frac{dx}{dt} = ze^t = Ze^{-t}e^t = Z \Rightarrow x = X + Zt$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+t} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dt}{1+t} \Rightarrow \ln y = \ln(1+t) + k \Rightarrow y = Y(1+t)$$

Las ecuaciones de las trayectorias son:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= X + Zt \\ y &= Y(1+t) \\ z &= Ze^{-t} \end{aligned}} \quad (1)$$

Para las líneas de corriente se debe cumplir:

$$\frac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\lambda), t) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(C_1, C_2, C_3, \lambda, t)$$

donde t es fijo al integrar.

$$\frac{dz}{d\lambda} = -z \Rightarrow \frac{dz}{z} = -d\lambda \Rightarrow \ln z = -\lambda + k \Rightarrow z = C_3 e^{-\lambda}$$

$$\frac{dx}{d\lambda} = ze^t = C_3 e^{-\lambda} e^t \Rightarrow x = -C_3 e^{t-\lambda} + C_1$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{y}{1+t} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{d\lambda}{1+t} \Rightarrow \ln y = \frac{\lambda}{1+t} + k \Rightarrow y = C_2 e^{\frac{\lambda}{1+t}}$$

Las ecuaciones de las líneas de corriente son:

$$\begin{cases} x = -C_3 e^{\lambda - t} + C_1 \\ y = C_2 e^{\frac{\lambda}{1+t}} \\ z = C_3 e^{-\lambda} \end{cases}$$

b) En el caso de un fluido perfecto se tiene que su tensor de tensiones es esférico:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$$

Y por lo tanto, sustituyéndolo en la *Ecuación de Cauchy* nos queda lo siguiente:

$$-\nabla p + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (2)$$

Para calcular la aceleración \mathbf{a} partiendo de la velocidad únicamente se ha de calcular la derivada material respecto del tiempo. Si se toma la expresión espacial de la velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ se tiene que:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

Pero si se trabaja con la expresión material $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{dt}$$

Se operará con esta segunda expresión utilizando las ecuaciones (1):

$$\begin{aligned} v_x(\mathbf{x}, t) = ze^t &\Rightarrow v_x(\mathbf{X}, t) = Ze^{-t} e^t = Z \\ v_y(\mathbf{x}, t) = \frac{y}{1+t} &\Rightarrow v_y(\mathbf{X}, t) = \frac{Y(1+t)}{1+t} = Y \\ v_z(\mathbf{x}, t) = -z &\Rightarrow v_z(\mathbf{X}, t) = -Ze^{-t} \end{aligned}$$

Derivando se obtiene la aceleración:

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{dt} = [0, 0, Ze^{-t}]^T$$

e invirtiendo las ecuaciones (1), se obtiene la expresión espacial:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = [0, 0, z]^T$$

La expresión de la presión p viene en el enunciado de forma material, pero con las inversas de las fórmulas (1) se puede calcular la expresión espacial. El gradiente se calcula de la siguiente forma:

$$\nabla p = \left[\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial x}, \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial y}, \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right]^T = \left[0, 0, \frac{\rho_0 z e^t}{1+t} \right]^T$$

Para calcular la densidad ρ se utiliza la fórmula:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{X}, 0)}{|\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)|}$$

donde $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ es el *Tensor Gradiente de la Deformación* $\left(F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right)$ y la densidad inicial $\rho(\mathbf{X}, 0) = \rho_0$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1+t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{F}| = (1+t)e^{-t}$$

$$\rho = \frac{\rho_0 e^t}{1+t} \quad (3)$$

Únicamente falta sustituir estos resultados en la ecuación (2) y despejar \mathbf{b} :

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = [0, 0, 2z]^T$$

- c) Las partículas que pasan por el punto \mathbf{x}^* durante el intervalo de tiempo $\tau \in [t_1, t_2]$ quedarían manchadas por el vertido si éste fuese un colorante (es una manera de visualizar el problema). Para detectar estas partículas (línea de traza) basta imponer:

$$\left. \begin{aligned} x^* &= X + Z\tau \\ y^* &= Y(1 + \tau) \\ z^* &= Ze^{-\tau} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} X &= x^* - Z\tau = x^* - z^* \tau e^{\tau} \\ Y &= \frac{y^*}{1 + \tau} \\ Z &= z^* e^{\tau} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Sustituyendo estas partículas X, Y, Z (4) en las ecuaciones (1), se obtiene la descripción del movimiento de la línea de traza:

$$\begin{aligned} x &= X + Zt = x^* - z^* \tau e^{\tau} + z^* e^{\tau} t = x^* - z^* e^{\tau} (\tau - t) \\ y &= Y(1 + t) = y^* \frac{1+t}{1+\tau} \\ z &= Ze^{-t} = z^* e^{\tau-t} \end{aligned}$$

Para cada instante t , se puede visualizar la línea de traza según el parámetro τ , que da la situación espacial de las partículas tintadas.

Se puede comprobar que para $t = \tau$ se debe cumplir:

$$\begin{cases} x = x^* \\ y = y^* \\ z = z^* \end{cases}$$

ya que lo que indica es que la línea de traza está pasando por el punto de vertido. Ahora hay que delimitar esta línea para cada tiempo t :

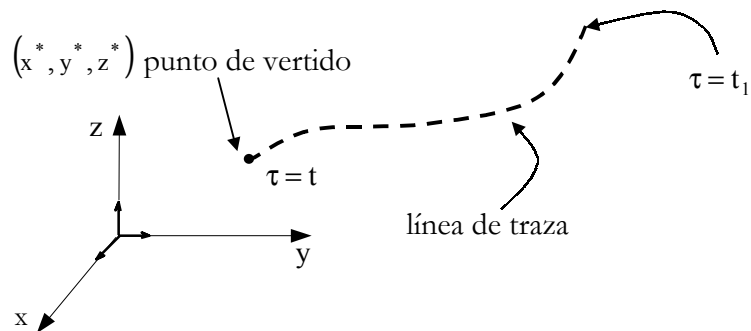
En este caso, el primer punto que se tinta es el que pasa por el punto de vertido para $\tau = t_1$, mientras que el último estará pasando, en el instante $\tau = t$, por el punto de vertido.

Un extremo es $\tau = t \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{x}^*}$

El otro extremo es $\tau = t_1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = x^* - z^* e^{t_1} (t_1 - t) \\ y = y^* \frac{1+t}{1+t_1} \\ z = z^* e^{t_1-t} \end{cases}$$

$$\boxed{t_1 < t < t_2}$$

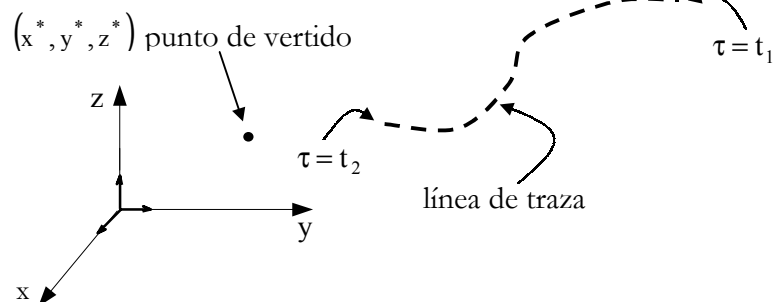


Para $t > t_2$ los extremos son los correspondientes a:

$$\tau = t_1 \Rightarrow \begin{cases} x = x^* - z^* e^{t_1} (t_1 - t) \\ y = y^* \frac{1+t}{1+t_1} \\ z = z^* e^{t_1-t} \end{cases}$$

$$\tau = t_2 \Rightarrow \begin{cases} x = x^* - z^* e^{t_2} (t_2 - t) \\ y = y^* \frac{1+t}{1+t_2} \\ z = z^* e^{t_2-t} \end{cases}$$

$$\boxed{t > t_2}$$



- d) El flujo de masa Φ que atraviesa cualquier superficie $\partial\Omega$ se define de la siguiente manera:

$$\Phi = \int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$$

Y si se trata de una superficie cerrada que encierra un volumen Ω , se puede aplicar el *Teorema de la Divergencia*:

$$\Phi = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$$

Por otra parte, según la *Ecuación de Continuidad* (local, espacial):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

y como se ha obtenido la expresión de la densidad en (3), se puede calcular su derivada local:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 t e^t}{(1+t)^2}$$

Hay que darse cuenta que dicha derivada es constante en el espacio. Así, únicamente hay que sustituir:

$$\Phi = \int_{\Omega} -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\frac{\partial \rho}{\partial t} V \Rightarrow$$

$$\Phi = -\frac{\rho_0 t e^t}{(1+t)^2} \frac{4}{3} \pi R^3$$

CUESTIONES PROPUESTAS

CP 1-1 Definir descripción material y espacial de un movimiento.

CP 1-2 Enunciar e interpretar físicamente las condiciones que debe verificar la forma canónica de la ecuación de movimiento: $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t)$

CP 1-3 Definir y escribir las ecuaciones de:

- a) Línea de corriente.
 - b) Trayectoria.
 - c) Línea de traza.
-

CP 1-4 Razonar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Dos líneas de corriente, correspondientes a un mismo instante de tiempo, no pueden cortarse nunca, salvo que la velocidad en el punto de corte sea nula.
 - b) Dos trayectorias distintas no pueden cortarse nunca.
 - c) Dos líneas de traza, correspondientes a dos puntos de vertido con el mismo periodo de vertido, pueden cortarse en uno o más puntos.
-

CP 1-5 Justificar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) En régimen estacionario, las trayectorias y líneas de corriente coinciden.
 - b) Si un cierto flujo tiene como trayectorias y líneas de corriente rectas paralelas al eje x , dicho flujo es estacionario.
-

CP 1-6 Dado el siguiente campo de velocidades (descripción material):

$$\mathbf{v} = [Ae^{At}X_1, BtX_1, CX_3]^T$$

con A , B y C constantes, obtener su descripción espacial y las condiciones que deben cumplir A , B , C para que el movimiento sea factible para $0 < t < \infty$.

CP 1-7 Dadas las ecuaciones del movimiento:

$$x = X + Yt + Zt^2, \quad y = Y + Zt, \quad z = Yt^2 + Z$$

- a) Justificar cual es el intervalo de tiempo para el que describen un movimiento físicamente posible.
 - b) Obtener la evolución de la densidad a lo largo del tiempo.
-

CP 1-8 Dadas las ecuaciones de movimiento $x = X$, $y = Y$, $z = Ze^t$ y la distribución de densidades en el instante de referencia $\rho_0(X, Y, Z) = aZ$, obtener la variación de la densidad por unidad de tiempo observada por:

- a) Un observador situado en el punto del espacio $(1,1,1)$ que midiera la densidad de las partículas que van pasando por dicho punto.
- b) Un observador que viajara con una partícula que en el instante $t=1$ ocupaba la posición $(1,1,1)$, midiendo su densidad.

CP 1-9 Dado el campo de velocidades de un medio continuo (descripción material) :

$$v_x = X \frac{d\phi(t)}{dt} = X\phi'(t) \quad , \quad v_y = Y e^t \quad , \quad v_z = 0$$

obtener la expresión más general de la función $\phi(t)$ sabiendo que el movimiento es estacionario (la configuración de referencia se considera en $t=0$).

CP 1-10 Justificar si es cierta o falsa la siguiente afirmación: “Las trayectorias y líneas de corriente asociadas al campo de velocidades $v_i(\mathbf{X}, t) = X_i e^t$, $i \in \{1,2,3\}$ coinciden.”

CP 1-11 Calcular las trayectorias y líneas de corriente asociadas al campo de velocidades:

$$v_i = \frac{X_i}{(1+t)} \quad , i \in \{1,2,3\} \text{ y comprobar si coinciden o no. Razonar el resultado.}$$

CP 1-12 En un fluido, con el siguiente campo de velocidades:

$$\mathbf{v} = [y^2 e^{-2t}, \quad y, \quad 0]^T$$

se vierte un colorante desde el instante $t=1$ hasta el instante $t=2$ en el punto $(1,1,1)$. Obtener la ecuación de la línea de traza en el instante $t=5$ y las coordenadas de sus puntos inicial y final.

CP 1-13 En el punto $(1,1,1)$ del interior de un fluido, se vierte un colorante desde el instante $t=1$ hasta el instante $t=2$. Si la ecuación de las líneas de corriente es :

$$x = C_1 e^{\lambda t} \quad , \quad y = C_2 e^{\lambda t} \quad , \quad z = C_3 e^{2\lambda t}$$

determinar la ecuación de la línea de traza, indicando los puntos inicial y final de la misma para $t=5$.

CP 1-14 La descripción espacial del campo de velocidades de un fluido es:

$$\mathbf{v} = [y e^{-t}, \quad z e^t, \quad 0]^T$$

En el instante $t=1$ se vierte un colorante en el plano $y=0$. Obtener la ecuación espacial de la mancha a lo largo del tiempo.

CP 1-15 Un movimiento viene definido por el campo de velocidades:

$$\mathbf{v} = \left[\frac{x}{1+t}, \quad \frac{y}{1+t}, \quad \frac{z}{1+t} \right]^T$$

Razonar si la superficie $\Sigma_t := \{ \mathbf{x} \mid 3xt + y + z = 0 \}$ es material.

CP 1-16 Dado el campo de velocidades: $\mathbf{v} = \left[\frac{x}{2t}, \frac{y}{2t}, \frac{z}{2t} \right]^T$, demostrar que cualquiera de las superficies $\Sigma_t := \{ \mathbf{x} \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2 t \}$, donde R es una constante, es una superficie material.

CP 1-17 Dado el campo de velocidades: $\mathbf{v} = \left[\frac{x}{2t}, \frac{y}{2t}, \frac{z}{2t} \right]^T$, y sabiendo que la superficie $\Sigma_t := \{ \mathbf{x} \mid x^2 + y^2 + z^2 = \alpha t + \beta \}$ es material, encontrar todos los posibles valores de α y β .

CP 1-18 Dado el campo de velocidades: $\mathbf{v} = [x\phi(t), y, z]^T$, y la superficie definida por la función $F(x, y, z, t) \equiv x^2 e^{-t^2} + e^{-2t}(y^2 + z^2)$, determinar $\phi(t)$ sabiendo que las partículas que están sobre dicha superficie son siempre las mismas. Obtener las trayectorias y líneas de corriente justificando si coinciden o no.

CP 1-19 Sea un movimiento definido por la siguiente ecuación de sus líneas de corriente:

$$x = C_1 + C_2 f(t) e^{\lambda + t}, \quad y = C_2 e^{\lambda}, \quad z = C_3$$

y sea la superficie material $\Sigma_t := \{ \mathbf{x} \mid z = x - y t e^{-t} \}$. Obtener la ecuación de las trayectorias en forma canónica del movimiento así definido

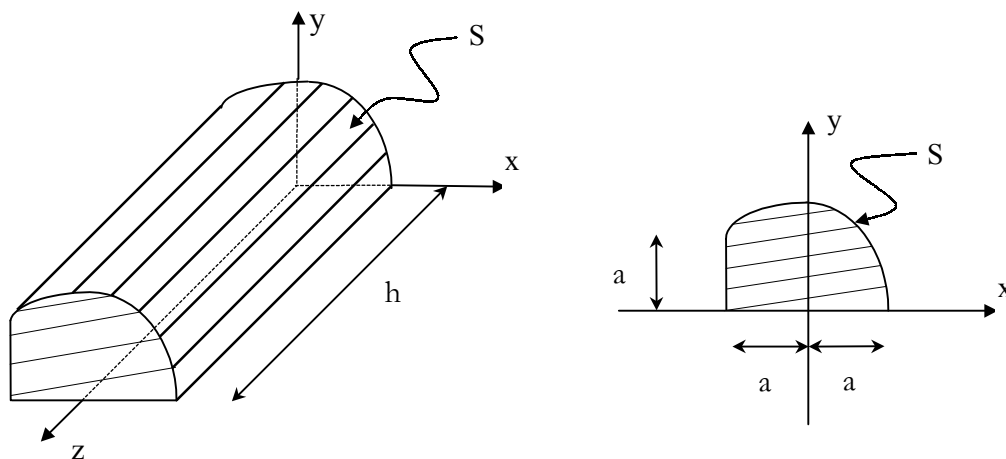
PROBLEMAS PROPUESTOS

PP 1-1 Para el movimiento definido por el campo de velocidades:

$$v_x = ye^{-t} \quad ; \quad v_y = y \quad ; \quad v_z = 0$$

Se pide:

- Hallar las trayectorias en forma canónica y las líneas de corriente.
- Obtener la expresión de la densidad sabiendo que su valor en el instante $t=0$ es ρ_0 .
- Calcular la cantidad de masa que por unidad de tiempo atraviesa la superficie cilíndrica S de la figura. (\Rightarrow Tema 5)
- Obtener la ecuación espacial de la superficie material que, en el instante $t=1$, era una esfera de centro $(0,0,0)$ y de radio R .
- Calcular el volumen encerrado por dicha superficie material en el instante $t=2$. (\Rightarrow Tema 2)

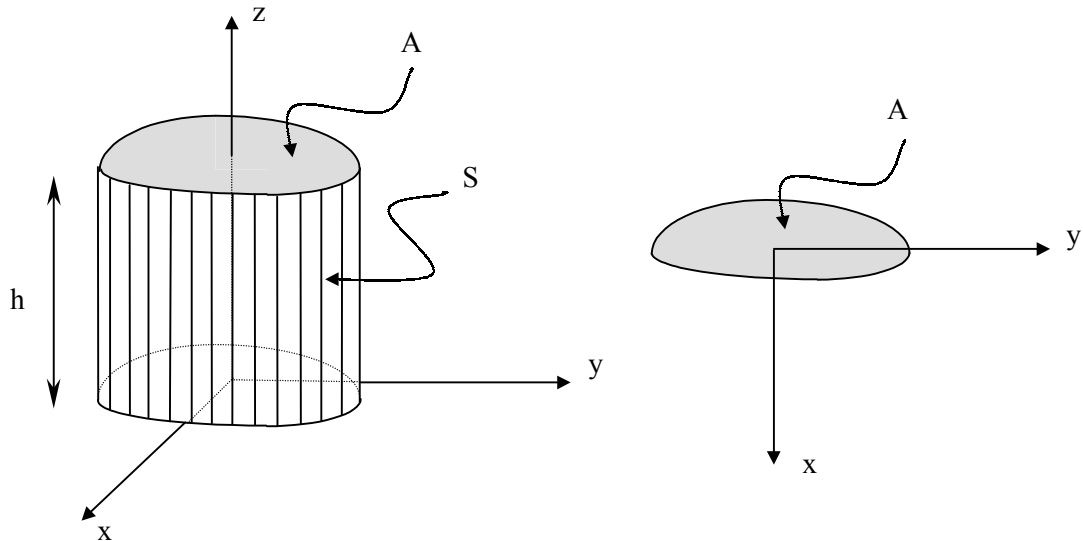


PP 1-2 Para el movimiento definido por el campo de velocidades:

$$v_x = 2ax \quad ; \quad v_y = -by \quad ; \quad v_z = -\frac{z}{t+c}$$

Se pide:

- Hallar la ecuaciones de las trayectorias en forma canónica y la ecuación de las líneas de corriente.
- Determinar los posibles valores de a , b y c para que el movimiento tenga sentido físico para $t \in [0, \infty)$. (Para el resto del problema considerar $a=b=c=1$)
- Obtener la expresión de la densidad sabiendo que su valor en el instante de referencia ($t=0$) es $\rho_0 = \text{cte}$.
- Calcular el flujo de masa que atraviesa la superficie cilíndrica S de la figura. (\Rightarrow Tema 5)
- Obtener la descripción espacial de la superficie material que en el instante $t=1$ era una esfera de radio R y centro en $(0,0,0)$.
- Calcular el volumen encerrado por dicha superficie en el instante $t=2$. (\Rightarrow Tema 2)



PP 1-3 Un medio continuo tiene el siguiente campo de velocidades, en descripción espacial:

$$\mathbf{v} = [z^2 e^{-2t}, 0, z]^T$$

Se pide:

- La ecuación en forma canónica de las trayectorias y líneas de corriente, tomando como instante de referencia $t=0$.
- La ecuación espacial a lo largo del tiempo de una superficie material que en el instante $t=1$ es una superficie esférica de centro en $(0,0,0)$ y radio R . Obtener el volumen encerrado por dicha superficie en el instante $t=0$. (\Rightarrow Tema2)
- La longitud, en el instante $t=2$, de un segmento que en el instante $t=1$ es recto y une los puntos $(0,0,0)$ y $(0,0,1)$. (\Rightarrow Tema2)
- Suponiendo que se admite una ecuación constitutiva elástica-lineal entre las tensiones de Cauchy y las deformaciones de Green-Lagrange respecto a la configuración $t=0$, obtener la expresión de las fuerzas de volumen necesarias para mantener el movimiento. (\Rightarrow Tema 4)

NOTA:

$$\int \sqrt{a+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a+x^2} + \frac{a}{2} \ln(x + \sqrt{a+x^2})$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{II} + 2\mu E_{ij} \quad \lambda, \mu \text{ cttes}$$

2 Descripción de la deformación

CUESTIONES RESUELTAS

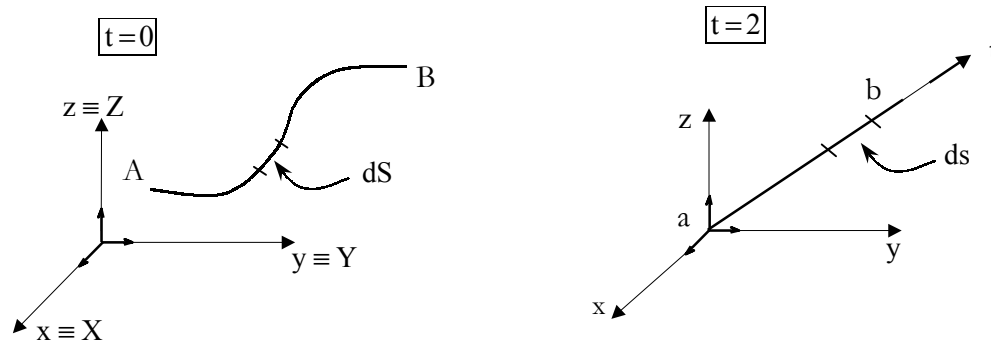
CR 2-1 Se tiene el siguiente tensor espacial de deformación para el movimiento de un medio continuo:

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -te^{tz} \\ 0 & 0 & 0 \\ -te^{tz} & 0 & t(2e^{tz} - e^t) \end{bmatrix}$$

Calcular la longitud, en el instante $t=0$ del segmento que en el instante $t=2$ es rectilíneo y une los puntos $a(0,0,0)$ y $b(1,1,1)$.

Resolución:

Se dan las condiciones existentes en $t=2$ y el *Tensor Espacial de Deformación* y esto permitirá retroceder en el tiempo y calcular las condiciones iniciales para $t=0$.



En la deformación de un segmento se define el estiramiento en la dirección \mathbf{t} como:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}}} = \frac{ds}{dS}$$

En este caso el vector unitario \mathbf{t} vale:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \ 1 \ 1)^T$$

Operando resulta lo siguiente:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -te^{tz} \\ 0 & 0 & 0 \\ -te^{tz} & 0 & t(2e^{tz} - e^t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3} te^t$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{3} te^t}} \Rightarrow \lambda|_{t=2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{3} e^2}}$$

$$l_{AB} = \int_A^B dS = \int_a^b \frac{1}{\lambda} ds = \frac{1}{\lambda} \int_a^b ds = \frac{1}{\lambda} \sqrt{3}$$

$$l_{AB} = \sqrt{3 + 4e^2}$$

CR 2-2 En un cierto instante el movimiento de un medio continuo viene definido por:

$$x_1 = X_1 + AX_3, \quad x_2 = X_2 - AX_3, \quad x_3 = X_3 - AX_1 + AX_2$$

Hallar el tensor material de deformación. Demostrar que si A es pequeño, el movimiento puede entenderse como una rotación de sólido rígido y calcular el vector de rotación.

Resolución:

El *Tensor Material de Deformación* (\mathbf{E}) se relaciona con el *Tensor Gradiente de la Deformación* (\mathbf{F}) según la expresión:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})$$

por lo tanto, se debe encontrar el valor de \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & -A \\ -A & A & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & A \\ A & -A & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1+A^2 & -A^2 & 0 \\ -A^2 & 1+A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2A^2 \end{bmatrix}$$

El tensor \mathbf{E} resulta finalmente:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} A^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Según la teoría general, se define el *Tensor Gradiente Material de Desplazamientos* como:

$$\mathbf{J} = \mathbf{F} - \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & -A \\ A & A & 0 \end{bmatrix}$$

En el caso de \mathbf{A} pequeño se cumplen las condiciones de deformaciones infinitesimales, por lo tanto, el *Tensor Infinitesimal de Rotación* valdrá:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & -A \\ -A & A & 0 \end{bmatrix}$$

y el *Vector Infinitesimal de Rotación*:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} -\Omega_{23} \\ -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A \\ 0 \end{bmatrix}$$

El movimiento de las partículas puede definirse como:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

donde

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\Omega}$$

y además, en pequeñas deformaciones se cumple que:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^T + \mathbf{J}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto indica que no existen deformaciones, por lo tanto habrá un giro infinitesimal de sólido rígido:

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\Omega})d\mathbf{X}$$

CR 2-3 En un cierto instante, el campo de desplazamientos de un medio continuo es:

$$u_X = (a_1 - 1)X \quad ; \quad u_Y = (a_2 - 1)Y + a_1\alpha X \quad ; \quad u_Z = (a_3 - 1)Z.$$

Determinar a_1 , a_2 y a_3 sabiendo que el sólido es incompresible, que un segmento paralelo al eje Z no se alarga y que el área de un elemento situado en el plano XZ no se ha modificado.

Resolución:

A partir del campo de desplazamientos se pueden encontrar las ecuaciones del movimiento según:

$$\begin{cases} x = X + u_X = a_1 X \\ y = Y + u_Y = a_2 Y + a_1 \alpha X \\ z = Z + u_Z = a_3 Z \end{cases}$$

Obtenidas éstas, se calcula el *Tensor Gradiente de la Deformación* y su determinante:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_1\alpha & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{F}| = a_1 a_2 a_3$$

Que el sólido sea incompresible implica que no se modifica su volumen, y por lo tanto:

$$dV = dV_0 |\mathbf{F}| \Rightarrow |\mathbf{F}| = a_1 a_2 a_3 = 1$$

Que un segmento paralelo al eje Z no se alargue conlleva que:

$$ds = \lambda dS \Rightarrow \lambda = \sqrt{1 + 2\mathbf{T}_z \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}_z} = \sqrt{1 + 2E_{zz}} = 1$$

donde el *Tensor Material de Deformación* vale:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_1(1+\alpha^2) - 1 & a_1 a_2 \alpha & 0 \\ a_1 a_2 \alpha & a_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 - 1 \end{bmatrix}$$

así se concluye lo siguiente:

$$1 + 2E_{zz} = 1 \Rightarrow E_{zz} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 1 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

Por último se estudia la condición de que el área de un elemento situado en el plano XZ no se ha modificado.

Si se define un área en el plano XZ según los vectores $d\mathbf{X}_1$ y $d\mathbf{X}_2$ y les aplicamos la deformación correspondiente :

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dS_1 \Rightarrow d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \alpha \\ 0 \end{bmatrix} dS_1 \\ d\mathbf{X}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dS_2 \Rightarrow d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix} dS_2 \end{aligned}$$

El área resultante será:

$$d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_1 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_3 \alpha \\ -a_1 a_3 \\ 0 \end{bmatrix} dS_1 dS_2$$

Al igualar las áreas inicial y final resulta:

$$\text{Área inicial} = dS_1 dS_2$$

$$\text{Área final} = \sqrt{(a_1 a_3 \alpha)^2 + (-a_1 a_3)^2} dS_1 dS_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a_1 a_3 \alpha)^2 + (a_1 a_3)^2} = 1 \Rightarrow a_1^2 a_3^2 \alpha^2 + a_1^2 a_3^2 = 1$$

Si se tiene en cuenta que $a_3^2 = 1$ queda lo siguiente:

$$a_1^2(1 + \alpha^2) = 1 \Rightarrow a_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \end{cases}$$

Finalmente se obtienen las posibles soluciones:

Solución 1: $a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $a_2 = \sqrt{1+\alpha^2}$, $a_3 = 1$
Solución 2: $a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $a_2 = -\sqrt{1+\alpha^2}$, $a_3 = -1$
Solución 3: $a_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $a_2 = -\sqrt{1+\alpha^2}$, $a_3 = 1$
Solución 4: $a_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $a_2 = \sqrt{1+\alpha^2}$, $a_3 = -1$

CR 2-4 Para la deformación definida por:

$$x = X + mZ \quad , \quad y = Y \quad , \quad z = Z - mX$$

donde m es una constante, hallar el volumen de la deformada de una esfera de centro $A(0,0,0)$ y radio R .

Resolución:

En primer lugar, se debe calcular el *Tensor Gradiente de la Deformación* y su determinante:

$$\mathbf{F} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{F}| = 1 + m^2$$

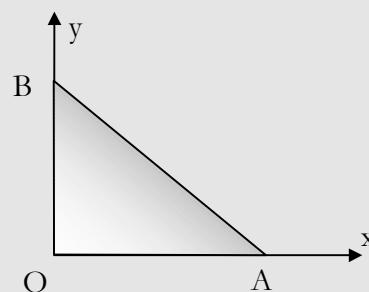
Teniendo en cuenta que $|\mathbf{F}|$ no depende del espacio, la relación existente entre volumen inicial y final queda de la siguiente manera:

$$dV = |\mathbf{F}| dV_0 \Rightarrow \int dV = |\mathbf{F}| \int dV_0 \Rightarrow V = |\mathbf{F}| V_0 \Rightarrow$$

$$V = (1 + m^2) \frac{4}{3} \pi R^3$$

CR 2-5 En un medio continuo se produce una deformación con las siguientes consecuencias sobre el triángulo de la figura:

- El segmento \overline{OA} pasa a medir $(1+p)$ veces su longitud inicial.
- El ángulo AOB disminuye en q radianes su valor inicial.
- El área pasa a ser $(1+r)$ veces la inicial.
- $p, q, r, s \ll 1$



Sabiendo que la deformación es uniforme, que el eje z es una dirección principal del tensor gradiente de la deformación, que éste es simétrico y que el estiramiento en dicha dirección es $\lambda_z = 1 + s$, obtener el tensor de pequeñas deformaciones.

Resolución:

Como la deformación es uniforme entonces el *Tensor Gradiente de la Deformación* (**F**) no dependerá de las variables espaciales. Consecuentemente, el *Tensor de Deformación* (**E**) y los estiramientos (λ) tampoco.

Recordar que se está bajo condiciones de deformaciones infinitesimales.

Se tendrá que relacionar la longitud inicial y final de un segmento paralelo al eje x :

$$\left. \begin{aligned} \overline{OA}_{\text{final}} &= \int_0^A \lambda_x dX = \lambda_x \int_0^A dX = \lambda_x \overline{OA}_{\text{inicial}} \\ \overline{OA}_{\text{final}} &= (1+p)\overline{OA}_{\text{inicial}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_x = 1+p$$

$$\lambda_x = 1 + \epsilon_{xx} = 1+p \Rightarrow \epsilon_{xx} = p$$

Aquí relacionaremos un ángulo recto (entre los ejes x e y) inicial con el que queda después de la deformación:

$$\left. \begin{aligned} \text{Ángulo inicial} &= \frac{\pi}{2} \\ \text{Ángulo final} &= \frac{\pi}{2} + \Delta\Phi_{xy} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta\Phi_{xy} = -\gamma_{xy} = -2\epsilon_{xy} = -q \Rightarrow \epsilon_{xy} = \frac{q}{2}$$

F es simétrico y el eje z es dirección principal:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{1} + \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{cases} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \Rightarrow u_z(z) \end{cases}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \epsilon_{xz} = 0$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow \epsilon_{yz} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = \lambda_z - 1 \\ \lambda_z &= 1 + s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \epsilon_{zz} = s$$

Además, según la expresión:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\Omega}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}_{33} = 0$ ya que es un tensor antisimétrico, por lo tanto, se puede obtener F_{zz} :

$$F_{zz} = 1 + \epsilon_{zz} \Rightarrow F_{zz} = 1 + s$$

La relación existente entre las áreas es:

$$d\mathbf{A} = |\mathbf{F}| d\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

Para calcular la inversa de **F**, se utiliza la siguiente notación:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1+s \end{bmatrix}$$

donde se calcula la inversa de \mathbf{B} y así se obtiene la inversa de \mathbf{F} :

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+s} \end{bmatrix}$$

Si definimos el vector área:

$$d\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dA_0 \end{bmatrix} \Rightarrow d\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{1+s} dA_0 \end{bmatrix}$$

y teniendo en cuenta que:

$$|\mathbf{F}| = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + 1$$

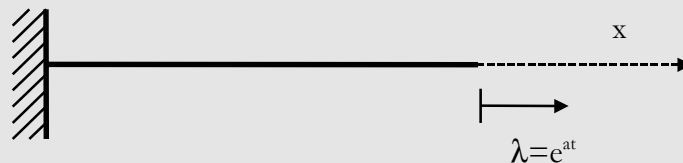
Despreciando los términos de segundo orden resulta:

$$\left. \begin{aligned} dA &= (1+r)dA_0 \\ dA &= (1+p+s+\epsilon_{yy})\frac{1}{1+s}dA_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \epsilon_{yy} = r - p$$

Y finalmente, teniendo en cuenta que el *Tensor de Deformación* es simétrico:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} p & \frac{q}{2} & 0 \\ \frac{q}{2} & r-p & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

CR 2-6 Una barra (considerada como un sólido de una dimensión) sufre un estiramiento uniforme en todos sus puntos dado por $\lambda = e^{at}$ ($a = \text{cte}$). Obtener el tensor velocidad de deformación y las ecuaciones del movimiento.



Resolución:

Como la barra únicamente sufre un estiramiento en la dirección x se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{ds}{dX} = \frac{dx}{dX} = e^{at} \Rightarrow dx = e^{at} dX \Rightarrow x = e^{at} X + C$$

Para hallar la *Forma Canónica de las Ecuaciones de Movimiento* imponemos $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ en $t=0$ y queda:

$$\begin{cases} x = e^{at} X \\ y = Y \\ z = Z \end{cases}$$

para encontrar la velocidad únicamente se tiene que derivar:

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = aXe^{at} = ax \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

El *Tensor Velocidad de Deformación*: se obtiene de la siguiente forma:

$$(\mathbf{d})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CR 2-7 Demostrar que para todo proceso de deformación en el que los desplazamientos evolucionan linealmente con el tiempo ($\mathbf{u} = (\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \cdot t$), el tensor de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\epsilon}$ puede obtenerse mediante la linealización en $t=0$ del tensor material de deformaciones, de la forma $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, 0) \cdot t$.

(Utilizar la expresión $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}$)

Resolución:

Para el tiempo $t=0$ se cumple que el *Tensor Gradiente de la Deformación* se convierte en la identidad ($\mathbf{F} = \mathbf{1}$), y teniendo en cuenta la expresión del enunciado, queda:

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0), 0) = \mathbf{D}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0), 0)$$

donde \mathbf{D} es el *Tensor Velocidad de Deformación*. Para el instante $t=0$, se tiene además que $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ y entonces:

$$d_{ij}(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{d}{dt} \epsilon_{ij}$$

para $t=0 \Rightarrow d_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$

por lo tanto, resulta:

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{X}, 0)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la expresión de los desplazamientos \mathbf{u} :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} + \frac{\partial f_j}{\partial X_i} \right) t$$

y definiendo un tensor **A** como $A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} + \frac{\partial f_j}{\partial X_i} \right)$, queda una expresión lineal en t :

$$\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}t$$

que al desarrollar resulta:

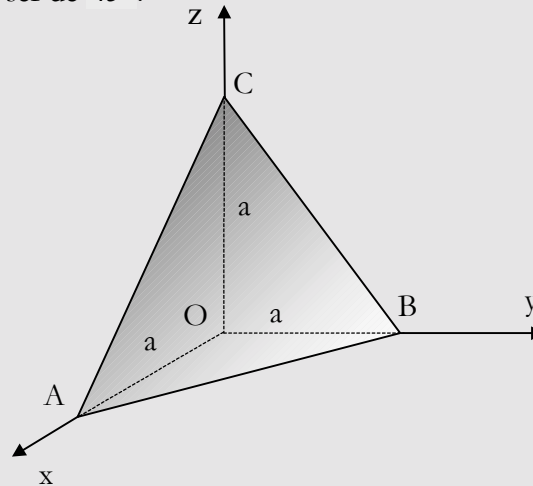
$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t) &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, 0) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{X}, 0)t \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, 0) &= \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{X}, 0) &= \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, 0) t}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PR 2-1 Sobre el tetraedro de la figura se produce una deformación uniforme ($\mathbf{F} = \text{cte}$) con las siguientes consecuencias:

1. Los puntos O, A y B no se mueven.
2. El volumen del sólido pasa a ser "p" veces el inicial.
3. La longitud del segmento \overline{AC} pasa a ser $p/\sqrt{2}$ veces la inicial.
4. El ángulo AOC pasa a ser de 45° .



Se pide:

- a) Justificar por qué no puede utilizarse la teoría de la deformación infinitesimal.
- b) Obtener el tensor gradiente de la deformación, los posibles valores de "p" y el campo de desplazamientos en sus formas material y espacial.
- c) Dibujar el sólido deformado.

Resolución:

- a) El ángulo AOC pasa de 90° a 45° por lo que, evidentemente, no se trata de una pequeña deformación. Además en pequeñas deformaciones se cumple que $\Delta\Phi \ll 1$, y en este problema $\Delta\Phi = \pi/4 \approx 0,7854$.

Observación: las deformaciones no tienen dimensiones; en ingeniería se acostumbra a considerar como pequeñas deformaciones cuando son del orden de 10^{-3} - 10^{-4} .

- b) Impondremos una por una las condiciones del enunciado

1. Partiendo de que $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \text{cte}$ y sabiendo que $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$, se puede integrar esta última expresión y se obtiene:

$$\mathbf{x} = \int d\mathbf{x} = \int \mathbf{F} d\mathbf{X} = \mathbf{F} \int d\mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{C}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

con lo que resultan 12 incógnitas.

Se imponen ahora las condiciones del enunciado:

El punto O no se mueve:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El punto A no se mueve:

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \cdot \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot F_{11} \\ a \cdot F_{21} \\ a \cdot F_{31} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} F_{11} &= 1 \\ F_{21} &= 0 \\ F_{31} &= 0 \end{aligned}$$

El punto B no se mueve:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot F_{12} \\ a \cdot F_{22} \\ a \cdot F_{32} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} F_{12} &= 0 \\ F_{22} &= 1 \\ F_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Agrupando toda la información resulta:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & F_{13} \\ 0 & 1 & F_{23} \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix}$$

2. $V_{\text{final}} = p \cdot V_{\text{inicial}}$

La igualdad $dV_f = |\mathbf{F}| dV_0$ permite relacionar localmente volúmenes diferenciales en diferentes instantes de tiempo. En este caso \mathbf{F} es constante para cada t fijado, por lo que se puede integrar la expresión y sacar el determinante de \mathbf{F} fuera de la integral:

$$V_f = \int_V dV_f = \int_{V_0} |\mathbf{F}| dV_0 = |\mathbf{F}| \int_{V_0} dV_0 = |\mathbf{F}| \cdot V_0$$

Por lo que se debe de imponer

$$|\mathbf{F}| = F_{33} = p$$

3. $l_{AC, \text{final}} = \frac{p}{\sqrt{2}} l_{AC, \text{inicial}}$

Como \mathbf{F} es constante la transformación es lineal, es decir, transforma rectas en rectas, por lo que \overline{AC} en la configuración deformada también será un segmento rectilíneo. Así:

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & F_{13} \\ 0 & 1 & F_{23} \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aF_{13} \\ aF_{23} \\ ap \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} l_{AC, \text{final}} &= l_{A'C'} = |(aF_{13}, aF_{23}, ap) - (a, 0, 0)| = |(a(F_{13} - 1), aF_{23}, ap)| = \\ &= \sqrt{(a(F_{13} - 1))^2 + (aF_{23})^2 + (ap)^2} = a\sqrt{(F_{13} - 1)^2 + F_{23}^2 + p^2} = \frac{p}{\sqrt{2}} l_{AC} = \frac{p}{\sqrt{2}} \sqrt{2} a = p \cdot a \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{(F_{13} - 1)^2 + F_{23}^2 + p^2} = p \Rightarrow (F_{13} - 1)^2 + F_{23}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{13} = 1 \quad ; \quad F_{23} = 0$$

Se tiene ahora:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

por lo que falta encontrar el valor de p .

$$4. \quad \text{AOC}_{\text{final}} = 45^\circ = \pi/4$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}^{(1)} = (1,0,0) &\Rightarrow d\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ d\mathbf{X}^{(2)} = (0,0,1) &\Rightarrow d\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Seguidamente se imponemos que:

$$\cos(\text{AOC}_{\text{final}}) = \cos 45^\circ = \frac{d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)}}{|d\mathbf{x}^{(1)}| \cdot |d\mathbf{x}^{(2)}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|d\mathbf{x}^{(1)}| = 1 \quad , \quad |d\mathbf{x}^{(2)}| = \sqrt{1+p^2} \quad , \quad d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow p = \pm 1.$$

Pero $|\mathbf{F}| = p > 0$, y por tanto $p = 1$.

El *Tensor Gradiente de la Deformación* es, por tanto:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones del movimiento son $\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X+Z \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

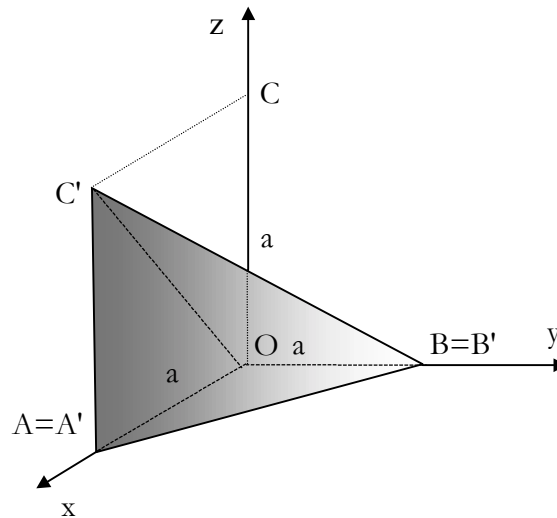
El campo de desplazamientos en descripción material es:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \begin{bmatrix} Z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y en descripción espacial es:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Representación gráfica del tetraedro deformado:



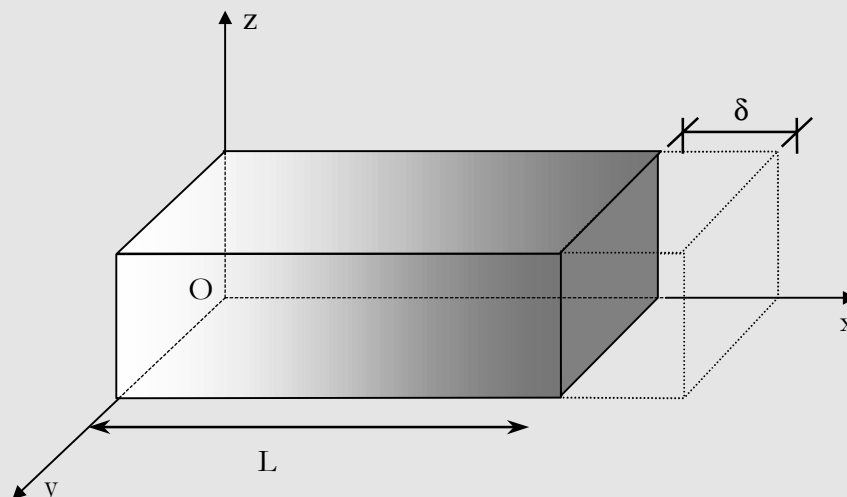
PR 2-2 El sólido de la figura sufre una deformación uniforme.

Se pide:

- Obtener la expresión general de la descripción material del campo de desplazamientos $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ en función del tensor gradiente material de los desplazamientos \mathbf{J} .
- Obtener dicha expresión sabiendo que, además, se cumplen las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} U_Y = U_Z = 0 & \quad , \quad \forall X, Y, Z \\ U_X|_{X=0} = 0 & \quad , \quad \forall Y, Z \\ U_X|_{X=L} = \delta & \end{aligned}$$

- Justificar los valores posibles (positivos y negativos) que puede tomar δ .
- Calcular los tensores material y espacial de deformaciones y el de deformaciones infinitesimales.
- Dibujar los gráficos $E_{xx} - \frac{\delta}{L}; e_{xx} - \frac{\delta}{L}; \epsilon_x - \frac{\delta}{L}$ para todos los posibles valores de δ acotando los valores significativos.



Resolución:

a) Una deformación uniforme implica:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(t) \quad , \forall t, \mathbf{X}$$

Se quiere obtener la expresión general de la descripción material del campo de desplazamientos $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ en función del tensor *Gradiente Material de los Desplazamientos* \mathbf{J} . Por definición se tiene que:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{J}$$

Por lo tanto, si \mathbf{F} es constante según la posición, \mathbf{J} también lo será. Teniendo en cuenta la definición de \mathbf{J} e integrando su expresión quedará lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \Rightarrow d\mathbf{U} = \mathbf{J} d\mathbf{X} \Rightarrow \int d\mathbf{U} = \int \mathbf{J} d\mathbf{X} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int d\mathbf{U} = \mathbf{J} \int d\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{C} \end{aligned}$$

donde \mathbf{C} es una constante de integración. Por lo tanto resulta:

$$\boxed{\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{C}}$$

b) Partiendo del resultado anterior y aplicando las condiciones de contorno del problema, se obtendrá el valor de \mathbf{J} y \mathbf{C} .

Condiciones de contorno:

$U_Y = U_Z = 0, \forall X, Y, Z \Rightarrow$ Los puntos únicamente se desplazan en la dirección X.

$U_X|_{X=0} = 0, \forall Y, Z \Rightarrow$ El plano YZ en el origen es fijo.

$U_X|_{X=L} = \delta, \forall Y, Z \Rightarrow$ Este plano se mueve en la dirección X uniformemente.

Escribiendo en componentes el resultado del apartado a), se verán mejor las ecuaciones y las conclusiones a las que se puede llegar:

$$U_X = J_{11}X + J_{12}Y + J_{13}Z + C_1$$

$$U_Y = J_{21}X + J_{22}Y + J_{23}Z + C_2$$

$$U_Z = J_{31}X + J_{32}Y + J_{33}Z + C_3$$

De la condición de contorno 1:

$$U_Y = 0, \forall X, Y, Z \Rightarrow J_{21} = J_{22} = J_{23} = C_2 = 0$$

$$U_Z = 0, \forall X, Y, Z \Rightarrow J_{31} = J_{32} = J_{33} = C_3 = 0$$

De la condición de contorno 2:

$$U_X|_{X=0} = 0, \forall Y, Z \Rightarrow J_{12} = J_{13} = C_1 = 0$$

De la condición de contorno 3:

$$U_X|_{X=L} = \delta, \forall Y, Z \Rightarrow J_{11}L = \delta \Rightarrow J_{11} = \frac{\delta}{L}$$

Finalmente queda:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{L} X \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- c) Para justificar los posibles valores positivos y negativos que puede tomar δ la condición a imponer es la siguiente:

$$|\mathbf{F}| > 0$$

Por lo tanto, se debe calcular el determinante de \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\delta}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{F}| = 1 + \frac{\delta}{L} > 0 \Rightarrow$$

$$\delta > -L$$

- d) Para calcular los tensores espacial y material de las deformaciones, así como el tensor de deformaciones infinitesimales, se parte de sus respectivas definiciones:

$$\text{Tensor espacial de deformaciones:} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})$$

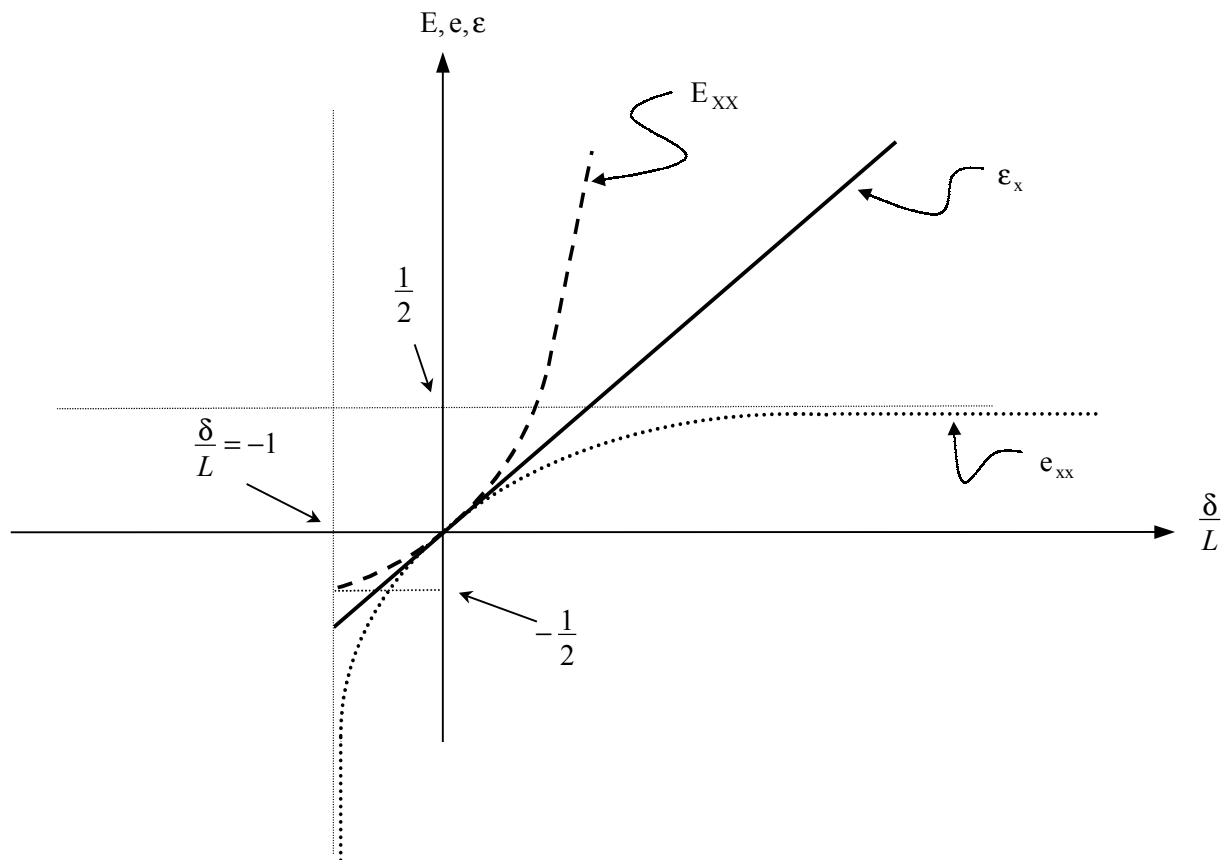
$$\text{Tensor material de deformaciones:} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})$$

$$\text{Tensor de deformaciones infinitesimales:} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^T + \mathbf{J})$$

Aplicando estas definiciones y con los valores de \mathbf{F} y \mathbf{J} encontrados en el apartado b) y c), se obtienen las expresiones correspondientes:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\delta}{L} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{L^2} \right) / \left(1 + \frac{\delta}{L} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{L} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e) Gráficos $E_{xx} - \frac{\delta}{L}$; $e_{xx} - \frac{\delta}{L}$; $\epsilon_x - \frac{\delta}{L}$:



E_{xx} es una parábola de 2º grado que pasa por el origen, con un mínimo en:

$$\delta/L = -1 \Rightarrow E_{xx} = -1/2$$

ϵ_x es la recta identidad (pendiente 45º y pasa por el origen).

e_{xx} tiene dos asíntotas, una vertical en $\delta/L = -1$ y una horizontal en $e_{xx} = 1/2$.

Se concluye, por tanto, que para deformaciones δ/L pequeñas las tres funciones tienen un comportamiento muy similar y tienen la misma pendiente en el origen. Es decir, se obtendría el mismo resultado con cualquiera de las definiciones de tensor de deformaciones.

Sin embargo, fuera de este dominio (grandes deformaciones) se ve que las tres curvas son claramente diferentes.

CUESTIONES PROPUESTAS

CP 2-1 Justificar la siguiente afirmación: “ Sólo son físicamente posibles los movimientos de medios continuos en los que el determinante del tensor gradiente de la deformación es positivo.”

CP 2-2 A partir de la definición de los tensores material y espacial de deformación deducir, justificando todos los pasos, las expresiones que relacionan los alargamientos unitarios con dichos tensores.

CP 2-3 Definir estiramiento en un punto según una dirección y deducir su expresión matemática en función de:

- a) El tensor material de deformación.
 - b) El tensor espacial de deformación.
 - c) Verificar que, para el caso de pequeñas deformaciones, ambas expresiones coinciden.
-

CP 2-4 Deducir en función del tensor espacial de deformaciones la expresión del ángulo que forman en la configuración material dos segmentos diferenciales que en la configuración espacial están orientados según dos ejes coordenados cartesianos (deformación finita).

CP 2-5 Demostrar la igualdad: $dV = \det(\mathbf{F}) dV_0$.

CP 2-6 Interpretar físicamente el significado de las componentes del tensor de deformaciones material mediante el análisis de la deformación de un paralelepípedo elemental. Particularizarlo al caso de pequeñas deformaciones.

CP 2-7 Escribir la expresión de la descomposición polar del tensor gradiente de la deformación para el caso de deformación finita y de deformaciones infinitesimales, indicando el significado de cada término e interpretándolo de forma gráfica.

CP 2-8 A partir de la descomposición polar en pequeñas deformaciones, justificar el movimiento alrededor de una partícula como una deformación más una rotación.

CP 2-9 Deducir la expresión de la deformación volumétrica para los casos de deformación finita y deformación infinitesimal.

CP 2-10 Deducir las expresiones de la derivada material de tensor gradiente de la deformación y del tensor material de deformación.

CP 2-11 Justificar en qué condiciones el tensor “velocidad de deformación” coincide con la tasa de variación (derivada material) del tensor material de deformación.

CP 2-12 Para el campo de velocidades $\mathbf{v} = [ax, -by, x]^T$ se pide:

- Obtener las ecuaciones del movimiento en forma canónica tomando como configuración de referencia la correspondiente a $t=1$.
- Las ecuaciones de las líneas de corriente.
- La evolución de la densidad a lo largo del tiempo en función de su valor en el instante de referencia.

CP 2-13 Una deformación viene dada por las ecuaciones:

$$x = X + 4Z, \quad y = Y - 2Z, \quad z = Z - X$$

Hallar los tensores espacial y material de deformación.

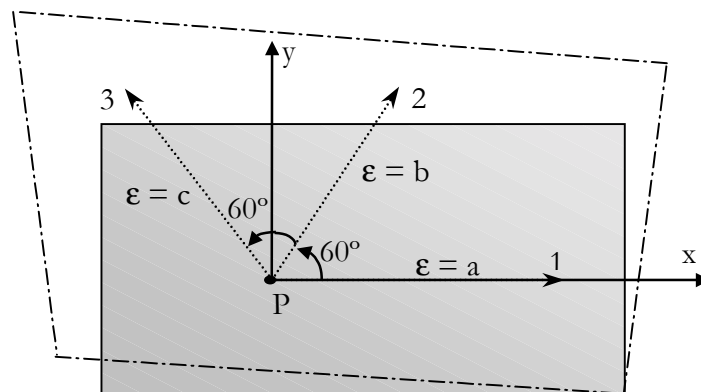
CP 2-14 Para los siguientes campos de velocidad:

$$\mathbf{v}_1 = \left[\frac{x}{1+t}, \frac{2y}{1+t}, \frac{3z}{1+t} \right]^T \quad \mathbf{v}_2 = \left[\frac{X}{1+t}, \frac{2Y}{1+t}, \frac{3Z}{1+t} \right]^T$$

Se pide:

- Obtener la descripción material de \mathbf{v}_1 y la descripción espacial de \mathbf{v}_2 (configuración de referencia $t=0$).
- La distribución de densidades en ambos casos (densidad inicial ρ_0).
- Para el campo de velocidades \mathbf{v}_1 , obtener las descripciones material y espacial del campo de desplazamientos, así como de los tensores de deformación material (Green - Lagrange) y espacial (Almansi).
- Repetir c) para configuraciones muy próximas a las de referencia ($t \rightarrow 0$).
- Demostrar que en este caso los dos tensores de deformación coinciden

CP 2-15 Mediante tres extensómetros se miden los alargamientos unitarios en un punto P de una pieza sometida a tensión plana en tres direcciones, formando ángulos de 60° (ver figura). Sean dichos alargamientos a , b y c . Determinar el tensor de deformaciones en el punto P.



CP 2-16 Sean las ecuaciones del movimiento:

$$x = X \quad , \quad y = Y + Z^2 t \quad , \quad z = Z + Y^2 t$$

Hallar la longitud, en el instante $t=1$, del segmento que en la configuración de referencia $t=0$ es recto y une los puntos $A(0,0,0)$ y $B(0,1,1)$.

CP 2-17 Sean las ecuaciones de movimiento de un medio continuo:

$$x = X + Yt \quad , \quad y = Y \quad , \quad z = Z$$

Obtener para $t=2$ la longitud del segmento de línea material que en el instante $t=1$ venía definido en forma paramétrica por:

$$x(\alpha) = 0 \quad , \quad y(\alpha) = \alpha^2 \quad , \quad z(\alpha) = \alpha \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

CP 2-18 Sea el tensor material de deformación:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & te^{tX} & 0 \\ te^{tX} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & te^{tY} \end{bmatrix}$$

Obtener la longitud en el instante $t=1$ del segmento que en el instante $t=0$ (configuración de referencia) es recto y une los puntos $(1,1,1)$ y $(2,2,2)$.

CP 2-19 Sean las ecuaciones de movimiento de un medio continuo:

$$x = X + \alpha Y^2 t \quad , \quad y = Y \quad , \quad z = \beta Z$$

- Determinar el valor de α y β para que no haya cambios en la densidad de las partículas.
- Obtener la expresión de la longitud en el instante genérico t del segmento que en el instante $t=2$ era recto y unía los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,0)$.

CP 2-20 Las ecuaciones de movimiento de un cierto medio continuo vienen dadas por:

$$x = X \quad , \quad y = Y \quad , \quad z = Z - Xt$$

Calcular el ángulo que formaban en el instante $t=0$ los segmentos diferenciales que en el instante $t=t$ son paralelos a los ejes x , z .

CP 2-21 Sea el movimiento :

$$x = X + te^{tX} \quad , \quad y = Y \quad , \quad z = Z$$

Estudiar cómo varía a lo largo del tiempo un elemento diferencial de área que en $t=0$ toma el valor de dS_0 y su vector normal es $\mathbf{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

CP 2-22 Calcular el tensor de pequeñas deformaciones en un punto, sabiendo que un triángulo rectángulo de lados $3ds$, $4ds$ y $5ds$ situado en dicho punto sufre un alargamiento

de un 3% de la hipotenusa, una disminución de un 6% en el ángulo recto y un aumento del 4% en su área.

CP 2-23 En un cierto instante de un proceso de deformación, el tensor de deformaciones infinitesimales tiene el siguiente valor:

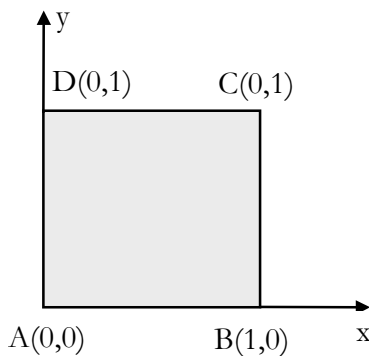
$$\mathbf{\epsilon} = \begin{bmatrix} e^x & y & 0 \\ y & x & z \\ 0 & z & y \end{bmatrix}$$

Obtener el vector de desplazamientos y el tensor de rotación sabiendo que ambos se anulan en el punto $(0, 0, 0)$.

CP 2-24 El medio continuo de la figura está sometido a un estado de deformación plana uniforme:

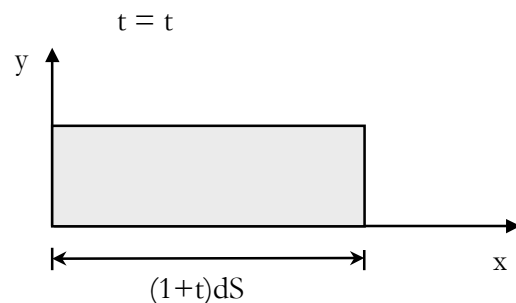
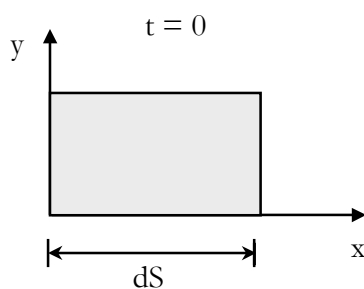
$$u_x = u_x(x, y) \quad , \quad u_y = u_y(x, y) \quad , \quad u_z = 0, \forall x, y, z.$$

Determinar el tensor de pequeñas deformaciones sabiendo que:



- 1) El área pasa a ser $1+p$ veces su valor inicial.
- 2) El segmento \overline{AB} pasa a tener una longitud $1+q$ veces la inicial.
- 3) El segmento \overline{AC} no se deforma.

CP 2-25 El elemento diferencial de la figura, se estira en la dirección del eje x una cantidad $\delta = t dS$, $(0 < t < \infty)$. Dibujar los gráficos $E_{xx} - t$, $e_{xx} - t$ y $\epsilon_{xx} - t$, donde E_{xx} , e_{xx} y ϵ_{xx} son las componentes xx de los tensores material de deformaciones, espacial de deformaciones y de pequeñas deformaciones, respectivamente (Acotar los valores significativos).



CP 2-26 Sean las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} x = X - Z \frac{\partial \varphi}{\partial X}(X, t) \\ y = Y \\ z = Z + \varphi(X, t) \end{cases}$$

Justificar que todos los planos, perpendiculares al eje X antes de la deformación, permanecen planos después de la misma (Hipótesis de Navier-Bernoulli para flexión de vigas).

CP 2-27 Dados dos campos de desplazamientos $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{X}, t)$; $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{X}, t)$ y un tercero de la forma $\mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}^{(1)} + k(t)\mathbf{U}^{(2)}$, demostrar que sus respectivos tensores materiales de deformación finita ($\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{E}^{(3)}$) e infinitesimal ($\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(2)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(3)}$) cumplen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^{(3)} &= \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} + k\boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \\ \mathbf{E}^{(3)} &\neq \mathbf{E}^{(1)} + k\mathbf{E}^{(2)}. \end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

PP 2-1 Se consideran los siguientes campos de velocidades en un medio continuo:

$$\mathbf{v}^I = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^{II} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Se pide:

- Calcular los correspondientes tensores materiales y espaciales de deformación $(\mathbf{E}^I, \mathbf{E}^{II})$ y $\mathbf{e}^I, \mathbf{e}^{II}$.
- Demostrar que en un cierto entorno muy próximo a la configuración de referencia ($t \rightarrow 0, t \neq 0$), los cuatro tensores de deformación del apartado a) coinciden y calcular su valor. Justificar esta coincidencia.
- Obtener los correspondientes tensores Velocidad de Deformación $(\mathbf{D}^I, \mathbf{D}^{II})$ y las derivadas materiales de los tensores de deformación $(\dot{\mathbf{E}}^I, \dot{\mathbf{E}}^{II}, \dot{\mathbf{e}}^I, \dot{\mathbf{e}}^{II})$.
- Calcular el valor de los seis tensores del apartado c) en un entorno muy próximo a la configuración de referencia ($t \rightarrow 0, t \neq 0$) y para la propia configuración de referencia ($t = 0$). Justificar los casos en que coinciden.

PP 2-2 Un medio continuo se mueve manteniendo un estado de deformación uniforme de tal modo que los tres ejes coordenados son líneas materiales.

Se pide:

- La expresión más general de las ecuaciones de movimiento bajo estas condiciones.
- Sabiendo ahora que los estiramientos según las tres direcciones coordenadas son iguales y que la densidad evoluciona de la forma $\rho = \rho_0 e^{-3at}$, obtener la descripción espacial del campo de velocidades y del tensor Gradiente de la Deformación.
- Suponiendo que el tensor de tensiones de Cauchy es de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \rho K(t)x & g(x, z, t) & 0 \\ h(y) & -\rho k(t)z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y que el vector de tracciones actuante en el punto (1,1,1) sobre un plano de normal

$$\mathbf{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T \text{ tiene la dirección del eje } x \text{ y módulo unidad para todo instante}$$

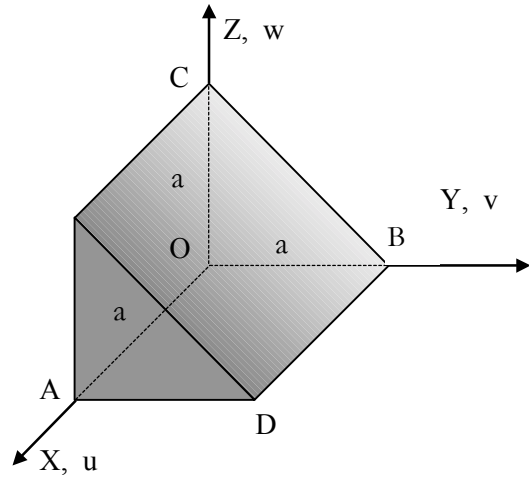
de tiempo, obtener las funciones g y h y el parámetro $K \geq 0$, así como las fuerzas de volumen (descripción espacial) que generan el movimiento. (\Rightarrow Tema 4)

PP 2-3 Sobre la descripción material de un cierto campo de desplazamientos $\mathbf{U}(X, Y, Z)$ se tiene la siguiente información:

- 1) Es lineal en X, Y, Z .
- 2) Es antisimétrico respecto al plano $Y=0$, es decir, se cumple que:

$$\mathbf{U}(X, Y, Z) = -\mathbf{U}(X, -Y, Z), \forall X, Y, Z.$$

- 3) Bajo dicho campo de desplazamientos el elemento de la figura no cambia de volumen, el ángulo OAB permanece constante, el segmento $\overline{\text{OB}}$ pasa a medir $\sqrt{2}$ veces su longitud inicial y la componente vertical del desplazamiento del punto B es positiva ($w_B > 0$).



Se pide :

- a) Determinar la expresión más general de dicho campo para que se cumplan las condiciones 1) y 2).
- b) Determinar la expresión del campo \mathbf{U} cuando, además, se cumple la condición 3). Obtener el tensor gradiente de la deformación y el tensor material de deformación. Dibujar la deformada del elemento de la figura, acotando los valores significativos.
- c) Determinar las direcciones (definidas por sus vectores unitarios \mathbf{T}) para los cuales la deformación se reduce a un estiramiento (no hay rotación).

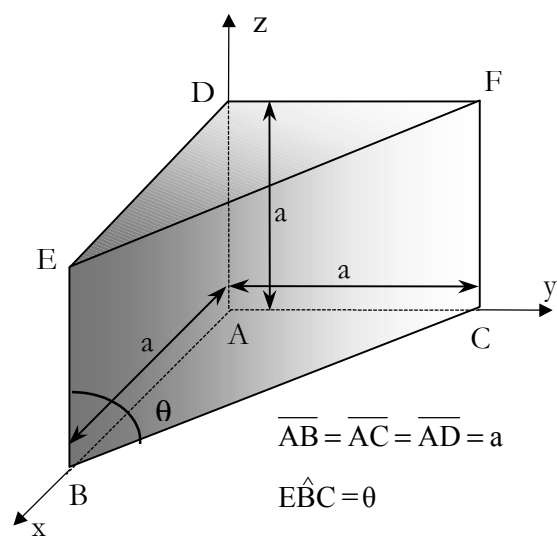
NOTA : Se considerarán deformaciones finitas (no infinitesimales).

PP 2-4 Sobre el sólido de la figura se produce una deformación uniforme tal que los puntos A, B y C no se mueven. Suponiendo deformación infinitesimal, se pide :

- a) Expresar el campo de desplazamientos en función de valores “genéricos” de las deformaciones y de las rotaciones.
- b) Identificar las componentes nulas del tensor de deformaciones y expresar el vector de rotaciones en función de las deformaciones.

Se sabe además que:

- 1) El segmento $\overline{\text{AE}}$ pasa a medir $(1+p)$ veces su longitud inicial.
- 2) El volumen del sólido pasa a ser $(1+q)$ veces su valor inicial.
- 3) El ángulo θ se incrementa en un valor r (en radianes).



Bajo estas condiciones se pide:

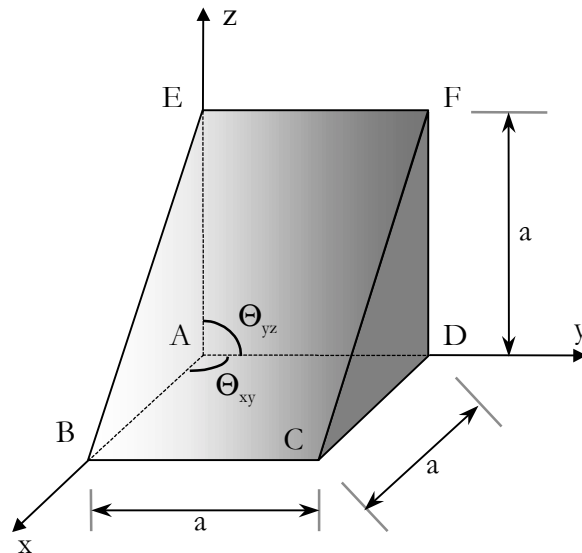
- c) Obtener el tensor de deformaciones, el vector de rotación y el campo de desplazamientos en función de p , q y r .

NOTA : Los valores de p , q y r son pequeños y pueden despreciarse infinitésimos de segundo orden.

PP 2-5 Sobre el sólido de la figura se produce una deformación uniforme con las siguientes consecuencias:

- 1) Los ejes x , z son dos líneas materiales. El punto A no se mueve.
- 2) El volumen del sólido no varía.
- 3) El ángulo θ_{xy} no varía.
- 4) El ángulo θ_{yz} se incrementa en r radianes.
- 5) El segmento \overline{AF} pasa a medir $1+p$ veces su longitud inicial.
- 6) El área del triángulo ABE pasa a ser $1+q$ veces su valor inicial.

Se pide:

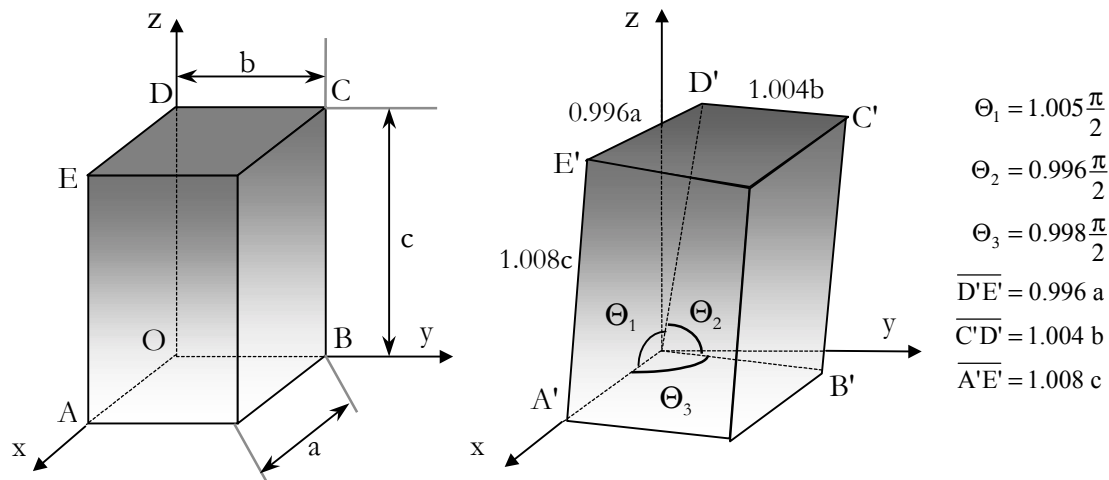


- a) Expresar el campo de desplazamientos en función de valores “genéricos” de las deformaciones y rotaciones.
- b) Identificar las componentes nulas del tensor de deformaciones y expresar el vector de rotaciones en función de las componentes del tensor de deformaciones.
- c) Obtener el tensor de deformaciones, el vector de rotación y el campo de desplazamientos en función de p , q y r .

NOTA: Los valores de p , q y r son pequeños y pueden despreciarse los infinitésimos de segundo orden.

PP 2-6 Sobre el paralelepípedo de la figura se produce una deformación uniforme que lo lleva a deformarse como se indica. Se pide:

- a) Obtener el tensor material de deformación y el tensor de deformación infinitesimal (redondear la 4ª cifra decimal en ambos casos).
- b) Observando los valores obtenidos para los dos tensores de deformación, analizar y justificar si la hipótesis de pequeñas deformaciones sería adecuada para este caso. Esta hipótesis se supondrá cierta para los siguientes apartados c) y d).
- c) Obtener el campo de desplazamientos y el vector de rotación sabiendo que el punto O permanece fijo, el punto A' está sobre el eje x , y el punto B' está sobre el plano xy .
- d) Obtener el volumen del sólido deformado.

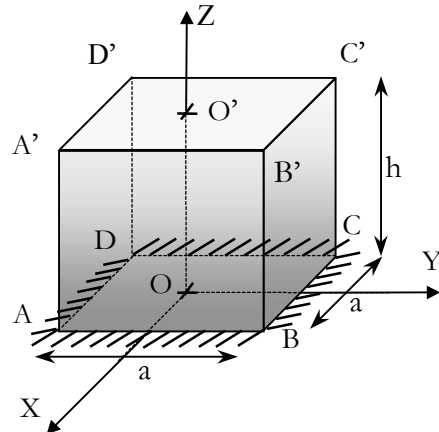


PP 2-7 En el paralelepípedo de la figura, el plano $A'B'C'D'$ sufre un desplazamiento de valor:

$$U_x = \delta(t) - \theta(t)Y \quad ; \quad U_y = \theta(t)X \quad ; \quad U_z = 0,$$

Todos los puntos del plano inferior se mantienen fijos. Sabiendo que la recta $O-O'$ se deforma manteniéndose recta, se pide:

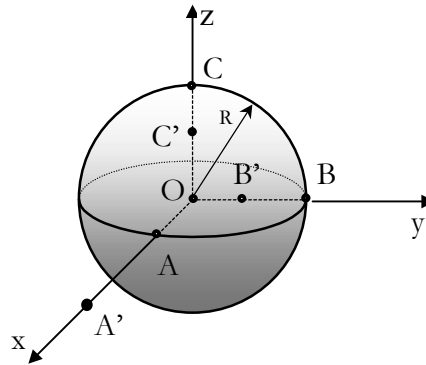
- Qué condición deben cumplir δ y θ si la descripción material del campo de desplazamientos es lineal en X, Y, Z (polinomio de 1er. grado). Obtener dicho campo.
- Obtener el campo de desplazamientos para cualquier valor de δ y θ (suponer polinomios de segundo grado).
- Obtener el correspondiente tensor material de deformaciones para los casos de deformación finita e infinitesimal. Demostrar que cuando δ y θ son pequeños ambos coinciden. Interpretar en dicho caso los desplazamientos del plano $A'B'C'D'$.
- Obtener el tensor gradiente de la deformación y el volumen del sólido deformado para los casos de deformación finita e infinitesimal.
- Calcular el área de la superficie deformada de un plano horizontal genérico del paralelepípedo, para los casos de deformación finita e infinitesimal.



PP 2-8 La esfera de la figura sufre una deformación uniforme ($F = cte$) de tal forma que los puntos A, B, C pasan a las posiciones A', B', C' y el punto O no se mueve. Se pide:

- Obtener el tensor gradiente de la deformación en función de p y q .
- Obtener la ecuación de la deformada de la superficie exterior de la esfera, indicando qué tipo de superficie es y dibujarla.
- Obtener los tensores material y espacial de deformación. Obtener el valor de p en función de q si el material es incompresible.

- d) Repetir el apartado c) utilizando la teoría de deformación infinitesimal. Demostrar que cuando p y q son pequeños, los resultados de los apartados c) y d) coinciden.



$$\overline{AA'} = p$$

$$\overline{BB'} = q$$

$$\overline{CC'} = q$$

$$p > 0$$

$$q > 0$$

3 Ecuaciones de compatibilidad

CUESTIONES RESUELTAS

CR 3-1 En un cierto instante de un proceso de deformación, el tensor de pequeñas deformaciones tiene el siguiente valor:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 8x & -\frac{y}{2} & \frac{3}{2}x^2z \\ -\frac{y}{2} & x & 0 \\ \frac{3}{2}x^2z & 0 & x^3 \end{bmatrix}$$

Obtener el vector de desplazamientos y el tensor de rotación sabiendo que ambos se anulan en el punto (0,0,0).

Resolución:

Únicamente se han de utilizar las ecuaciones del *Formulario Básico* e integrarlas, teniendo en cuenta que se está bajo condiciones de deformación infinitesimal.

El tensor de pequeñas deformaciones viene particularizado para un instante determinado de tiempo, es decir:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t^*) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 8x & -\frac{y}{2} & \frac{3}{2}x^2z \\ -\frac{y}{2} & x & 0 \\ \frac{3}{2}x^2z & 0 & x^3 \end{bmatrix}$$

VECTOR DE ROTACIÓN:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = 0 & \Rightarrow \theta_1 = C_1(t) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = -3xz \quad ; \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial z} = -\frac{3}{2}x^2 & \Rightarrow \theta_2 = C_2(t) - \frac{3}{2}x^2z \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial y} = \frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial z} = 0 & \Rightarrow \theta_3 = C_3(t) + \frac{3}{2}y \end{aligned}$$

Se ha de imponer ahora que se anula en el punto $(0,0,0)$, obteniendo fácilmente que las constantes (C_i) son nulas:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}x^2z \\ \frac{3}{2}y \end{bmatrix}$$

VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} = 8x \quad ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = -2y \quad ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 &\Rightarrow u_1 = 4x^2 - y^2 + C'_1(t) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} = y \quad ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = x \quad ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0 &\Rightarrow u_2 = xy + C'_2(t) \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} = 3x^2z \quad ; \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_3}{\partial z} = x^3 &\Rightarrow u_3 = x^3z + C'_3(t) \end{aligned}$$

Se ha de imponer ahora que el punto origen no se desplaza. Así se obtiene también fácilmente que las constantes (C'_i) son nulas:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4x^2 - y^2 \\ xy \\ x^3z \end{bmatrix}$$

TENSOR DE ROTACIÓN:

Lo obtenemos a partir del vector de rotación según la expresión:

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2}y & -\frac{3}{2}x^2z \\ \frac{3}{2}y & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}x^2z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CR 3-2 Determinar la descripción espacial del campo de velocidades correspondiente al siguiente tensor velocidad de deformación:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} te^{tx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & te^y + 1 \\ 0 & te^y + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sabiendo que para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se cumple: $\mathbf{w}_0 = [t-1, 0, 0]^T$ y $\mathbf{v}_0 = [t, 0, t]^T, \forall t$.

Resolución:

El método de resolución es ir integrando las ecuaciones diferenciales correspondientes teniendo en cuenta el paralelismo existente entre las variables:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\theta} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\omega} \end{array} \right\}$$

VELOCIDAD DE ROTACIÓN:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = te^y \quad ; \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = 0 &\Rightarrow \omega_1 = C_1(t) + te^y \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial z} = 0 &\Rightarrow \omega_2 = C_2(t) \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0 &\Rightarrow \omega_3 = C_3(t) \end{aligned}$$

Se imponen ahora las condiciones de contorno:

$$\text{para } \mathbf{x} = \mathbf{0}: \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \begin{bmatrix} t-1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \end{cases}$$

El resultado final es:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} te^y - 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

VECTOR VELOCIDAD:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} = te^{tx} \quad ; \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0 &\Rightarrow v_1 = C'_1(t) + e^{tx} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = 2 &\Rightarrow v_2 = C'_2(t) + 2z \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v_3}{\partial y} = 2te^y \quad ; \quad \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 &\Rightarrow v_3 = C'_3(t) + 2te^y \end{aligned}$$

Se imponen a continuación las condiciones de contorno:

$$\text{para } \mathbf{x} = \mathbf{0}: \quad \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+C'_1 \\ C'_2 \\ 2t+C'_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C'_1 = t-1 \\ C'_2 = 0 \\ C'_3 = -t \end{cases}$$

La descripción espacial del campo de velocidades queda finalmente:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} e^{tx} + t - 1 \\ 2z \\ 2te^y - t \end{bmatrix}$$

CUESTIONES PROPUESTAS

CP 3-1 Indicar el papel que juegan las ecuaciones de compatibilidad de un campo de deformaciones en la Mecánica de Medios Continuos, y explicar esquemáticamente el proceso de obtención de dichas ecuaciones para el caso de deformación infinitesimal.

CP 3-2 Hallar el campo de velocidades en un instante sabiendo que, en dicho instante t , el tensor velocidad de deformación es:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} e^x + xe^x & y & x \\ y & 0 & 3y \\ x & 3y & 0 \end{bmatrix}$$

CP 3-3 Deducir el campo de velocidades correspondiente al tensor velocidad de deformación:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & te^{ty} & 0 \\ te^{ty} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & te^{tz} \end{bmatrix}$$

Se sabe que en el punto $(1,1,1)$ se verifica:

$$\mathbf{v} = [2e^t, e^t, e^t]^T, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = [0, 0, -te^t]^T$$

CP 3-4 Determinar la descripción espacial del campo de velocidades correspondiente al tensor velocidad de deformación siguiente:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & te^{tz} \\ 0 & te^{ty} & 0 \\ te^{tz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se sabe que: $\begin{cases} \text{para } z=0: & v_x = v_z = 0, \forall t, \forall x, y \\ \text{para } y=1: & v_y = 0, \forall t, \forall x, z \end{cases}$

CP 3-5 Se tiene el tensor velocidad de deformación siguiente:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & y & 0 \\ y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Obtener la forma canónica de las ecuaciones del movimiento sabiendo que en el punto $(0,0,0)$ el campo de velocidades, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, y el tensor velocidad de rotación, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, se anulan en todo instante.

4 Tensiones

CUESTIONES RESUELTAS

CR 4-1 Un medio continuo se mueve con un campo de velocidades cuya descripción espacial es: $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = [z, x, y]^T$. El tensor de tensiones de Cauchy es de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} y & g(x, z, t) & 0 \\ h(y) & z(1+t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar las funciones g , h y la descripción espacial de las fuerzas de volumen, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, que generan el movimiento.

Resolución:

El Tensor de Tensiones es simétrico y por lo tanto:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \Rightarrow h(y) = g(x, z, t) \Rightarrow \begin{cases} h(y) = C \\ g(x, z, t) = C \end{cases}$$

donde C es una constante.

Además la divergencia del tensor es nula:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & C & 0 \\ C & z(1+t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La Ecuación de Cauchy queda de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} &= \rho \mathbf{a} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{a}$$

Y si se aplica la fórmula de la derivada material sobre la velocidad:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = [z \quad x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [y \quad z \quad x]$$

Las fuerzas de volumen son por tanto:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = [y \quad z \quad x]^T$$

CR 4-2 Las tensiones principales en un punto son:

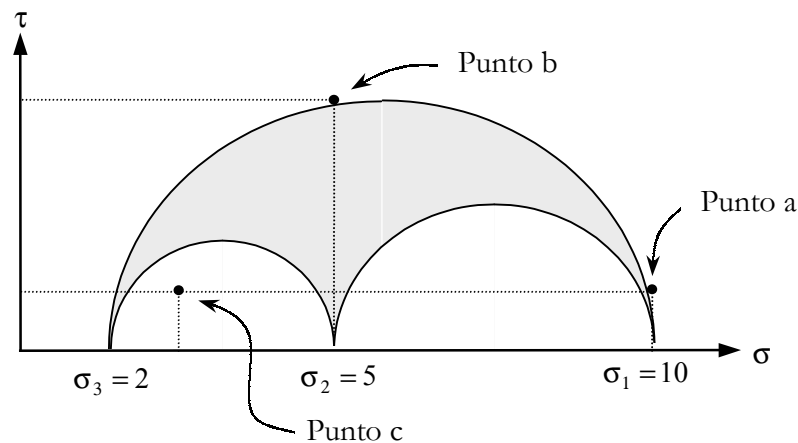
$$\sigma_1 = 10 \quad , \quad \sigma_2 = 5 \quad , \quad \sigma_3 = 2$$

En un cierto plano que pasa por dicho punto las tensiones normal y tangencial son σ y τ , respectivamente. Razonar si son posibles los siguientes valores de σ y τ :

- a) $\sigma = 10 \quad , \quad \tau = 1.$
- b) $\sigma = 5 \quad , \quad \tau = 4.$
- c) $\sigma = 3 \quad , \quad \tau = -1.$

Resolución:

Se dibujará el Círculo de Mohr en 3-D para el estado tensional que se define y para los puntos pedidos:



La zona sombreada es la zona donde es posible encontrar puntos que representen estados tensionales. Únicamente hay que representar cada punto (estado tensional) y ver si cae en dicha zona.

Se concluye que ningún estado tensional es posible.

Nota: en el caso c) el signo negativo de las tensiones tangenciales no se tiene en cuenta porque cuando se representa en el Círculo de Mohr en 3-D se considera el valor absoluto. Cosa que no sucede con las tensiones normales (tracción = positiva).

CR 4-3 De un estado tensional se sabe:

- 1) La dirección z es principal y $\sigma_{zz} = a$.
- 2) La tensión media es $\sigma_m = a > 0$.
- 3) La tensión tangencial máxima en planos paralelos al eje z es $\tau_{\max} = b > 0$.

Dibujar, acotando los valores significativos, los Círculos de Mohr en tres dimensiones del tensor de tensiones y de su desviador.

Resolución:

Se debe tener en cuenta primero que la única diferencia que existirá entre las dos circunferencias es que estarán desplazadas un valor σ_m .

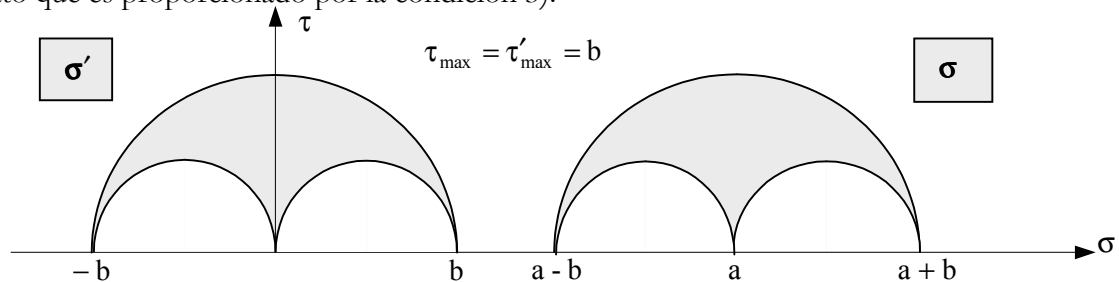
Según la definición del Tensor de Tensiones Desviador se llega a la siguiente conclusión:

$$\sigma' = \sigma - \sigma_m \mathbf{1} \Rightarrow \sigma'_{zz} = \sigma_{zz} - \sigma_m = a - a = 0 \Rightarrow \sigma'_{zz} = 0$$

Teniendo en cuenta que la traza es un invariante y que $\text{Tr}(\sigma') = 0$, entonces se cumple:

$$\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma'_{zz} = \sigma'_2 = 0 \\ \sigma'_1 + \sigma'_3 = 0 \end{cases}$$

Únicamente nos queda por determinar el radio de la circunferencia mayor (entre σ'_1 y σ'_3), dato que es proporcionado por la condición 3):



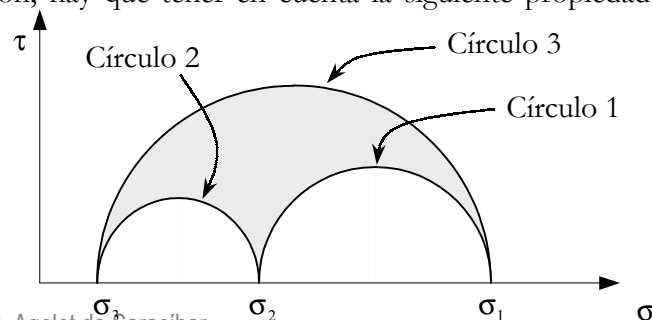
CR 4-4 Del estado tensional en un punto se sabe lo siguiente:

- 1) $\sigma_x = 1$ (donde el eje x es una dirección principal).
- 2) La tensión tangencial máxima en planos paralelos el eje x es igual a 3.
- 3) La tensión tangencial máxima en planos paralelos a la tensión principal menor es 2.

Obtener todos los posibles círculos de Mohr correspondientes a dicho estado, acotando los valores de las tensiones principales.

Resolución:

Para resolver esta cuestión, hay que tener en cuenta la siguiente propiedad del *Círculo de Mohr en 3-D*:

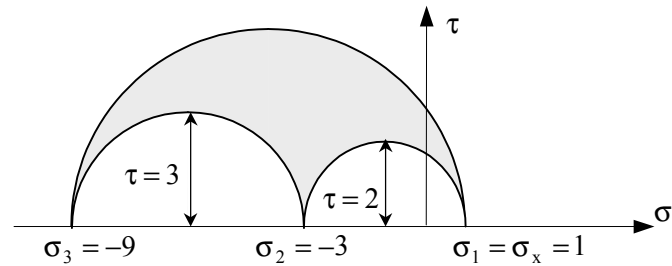


El círculo número:

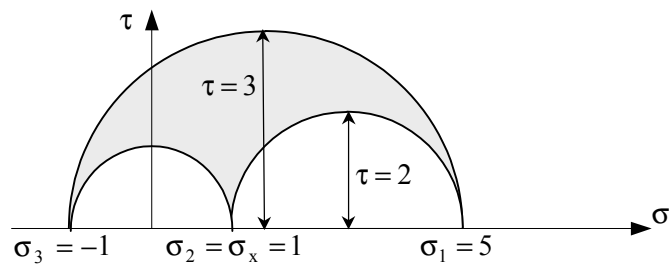
- 1 : Corresponde a planos paralelos a σ_3 .
- 2 : Corresponde a planos paralelos a σ_1 .
- 3 : Corresponde a planos paralelos a σ_2 .

Se tienen en cuenta ahora las siguientes consideraciones:

1. σ_x es la tensión principal mayor:



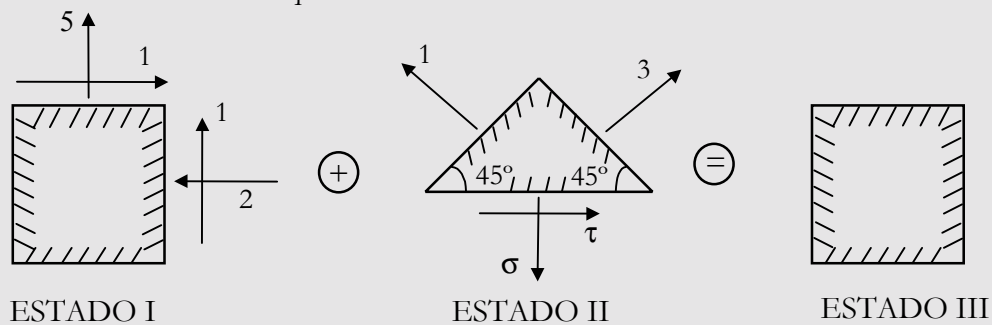
2. σ_x es la tensión principal intermedia:



3. σ_x es la tensión principal menor:

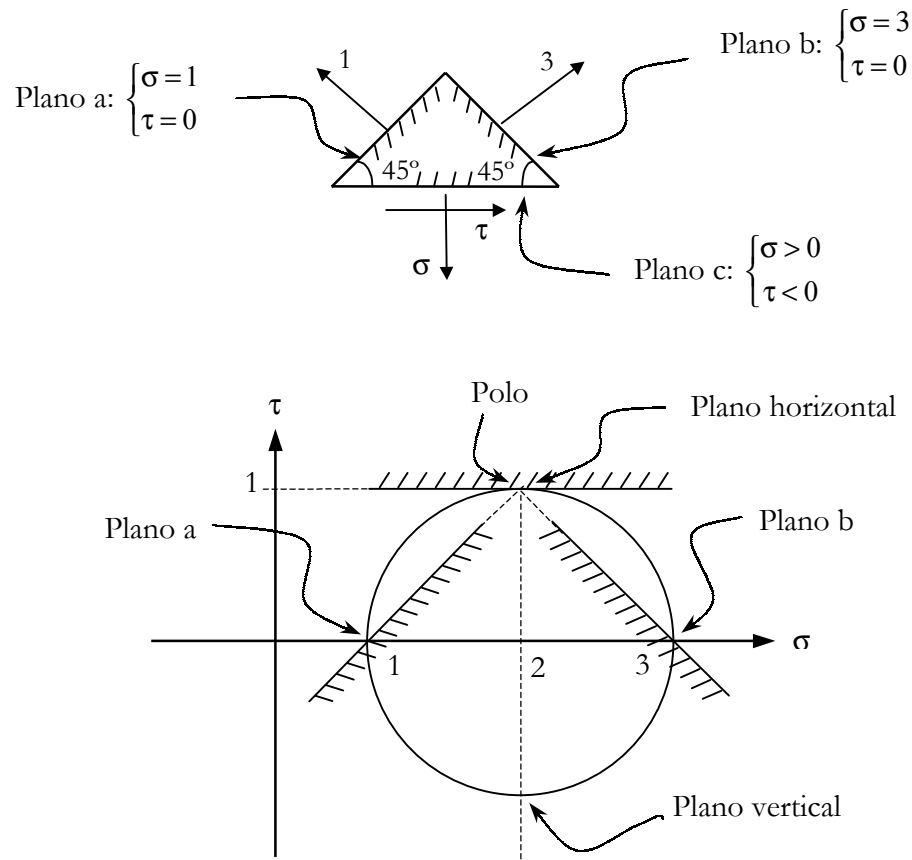
Es imposible pues las condiciones 2) y 3) son incongruentes ya que hablan de tensiones tangenciales máximas sobre el mismo plano.

CR 4-5 Calcular las tensiones que actúan en el estado III = I + II.



Resolución:

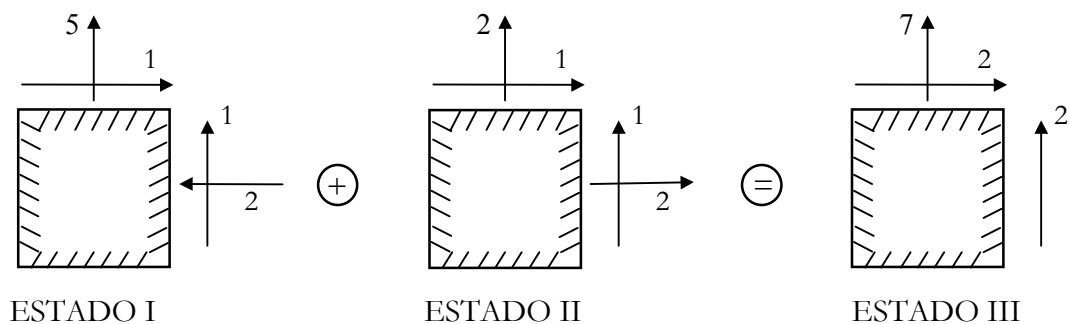
Para poder sumar los dos estados, las tensiones deben actuar sobre los mismos planos. Como los dos estados presentan orientaciones diferentes, deberemos buscar las tensiones del estado II existentes sobre los planos del estado I. Para ello, representaremos el Círculo de Mohr del estado II:



Para realizar el círculo, se representan los planos a y b, ya que conocemos todas sus coordenadas. Además, como pertenecen al eje de abscisas, definen el diámetro del círculo, por lo tanto, queda determinado.

El polo se encuentra como intersección de líneas paralelas a los planos por los puntos que los representan. Una vez obtenido, se pasa una línea vertical, para un plano vertical, y una horizontal, para un plano horizontal, por el polo, encontrando así sus representaciones.

Finalmente queda:



CR 4-6 En el medio continuo de la figura (a) se produce un estado tensional uniforme cuyo valor sobre dos determinados planos es el indicado en la figura (b). Considerando planos tangentes a los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, determinar dónde se producen:

- Las mayores tensiones tangenciales, en valor absoluto.
- Las mayores tensiones normales.
- Las menores tensiones normales.
- La mayor tensión resultante, en valor absoluto.

Indicar además el correspondiente valor.

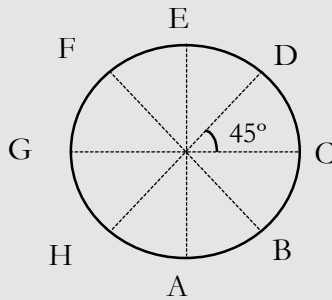


figura a

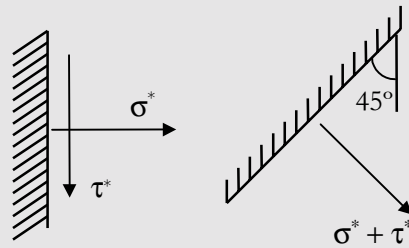


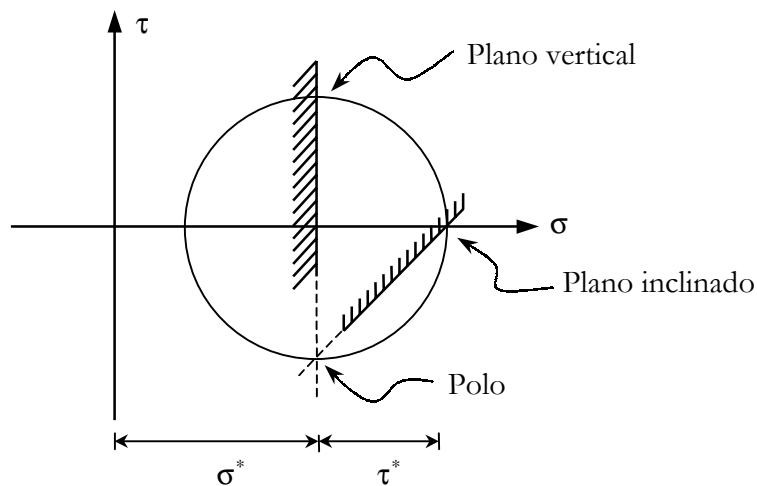
figura b

Resolución:

Primero se tiene que representar el círculo del estado tensional:

$$\text{Plano vertical: } \begin{cases} \sigma = \sigma^* > 0 \\ \tau = \tau^* > 0 \end{cases}$$

$$\text{Plano inclinado: } \begin{cases} \sigma = \sigma^* + \tau^* \\ \tau = 0 \end{cases}$$



Ahora tan sólo hay que fijarse en los planos que, pasando por el polo, cumplen la condición pedida:

$$|\tau_{max}| \Rightarrow \text{planos horizontales y verticales} \Rightarrow A - C - E - G: |\tau_{max}| = \tau^*$$

$$\sigma_{max} \Rightarrow \text{planos inclinados } 45^\circ \text{ positivos con la horizontal} \Rightarrow B - F: \sigma_{max} = \sigma^* + \tau^*$$

$$\sigma_{min} \Rightarrow \text{planos inclinados } 135^\circ \text{ positivos con la horizontal} \Rightarrow D - H: \sigma_{min} = \sigma^* - \tau^*$$

El caso que provoca máximas tensiones coincide con el apartado b), ya que corresponde al caso de tensión principal σ_1 .

CUESTIONES PROPUESTAS

CP 4-1 Enunciar los siguientes postulados de la Mecánica de Medios Continuos:

- a) Postulado de Cauchy.
- b) Principio de acción y reacción.

CP 4-2 Deducir la ecuación de Cauchy a partir del principio de conservación de la cantidad de movimiento.

CP 4-3 Definir el tensor de tensiones esférico, la tensión media y el tensor desviador y escribir las relaciones entre ellos.

CP 4-4 Justificar la relación entre las direcciones y las tensiones principales de un tensor de tensiones y de su parte desviadora.

CP 4-5 Hallar la relación entre el Círculo de Mohr correspondiente a un estado tensional plano y el de su tensor desviador.

CP 4-6 Las componentes cartesianas del tensor de tensiones de Cauchy en un punto son:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & b & 0 \end{bmatrix}$$

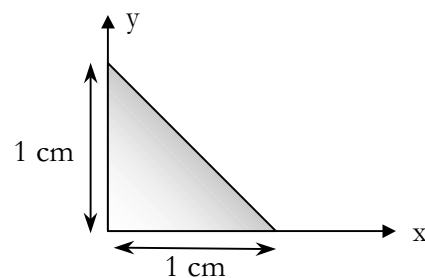
Determinar los posibles valores de a y b , sabiendo que el módulo de la tensión tangencial al plano cuya normal es $\mathbf{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T$ toma el valor $|\tau| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

CP 4-7 El sólido de la figura está sometido al siguiente estado tensional en equilibrio:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} xy & 5y \\ 5y & 4x \end{bmatrix} \quad (\text{en MPa})$$

Se pide:

- a) Obtener la expresión de las fuerzas por unidad de masa sobre el mismo.
- b) Obtener la expresión de las componentes normal y tangencial de la fuerza actuantes en el contorno (indicando su signo de acuerdo con el criterio del Círculo de Mohr).



CP 4-8 Se conoce la descripción espacial del tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ de un medio continuo y su densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$. Sabiendo que no hay fuerzas de volumen, y que la velocidad en el instante inicial es nula para todas las partículas, indicar detalladamente los pasos necesarios y las ecuaciones a utilizar para obtener la descripción espacial del correspondiente campo de velocidades.

CP 4-9 Un medio continuo está sometido a la acción de unas fuerzas másicas de la forma:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = [a, x + at^2, m]^T, \quad (a, m \text{ cttes.})$$

El correspondiente tensor de tensiones de Cauchy tiene una descripción espacial uniforme ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t)$). Sabiendo que en el instante de referencia ($t=0$) el campo de velocidades es nulo, obtener la descripción espacial de dicho campo de velocidades y la ecuación de las líneas de corriente.

CP 4-10 Una probeta cúbica, inicialmente descargada, se somete a los siguientes estados de tensiones. (cada uno se superpone al anterior):

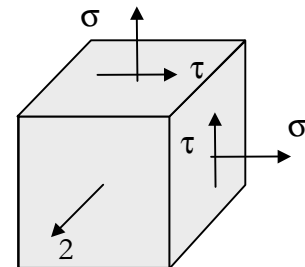
- 1) $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = \Delta\sigma_z = 2$
- 2) $\Delta\tau_{xy} = 2$
- 3) $\Delta\sigma_z = 1$

Dibujar los círculos de Mohr correspondientes a cada una de las fases del ensayo.

CP 4-11 En un punto de un sólido rígido, dos de las tensiones principales son $\sigma = -5$ y $\sigma = 3$. Sabiendo que el módulo de la máxima tensión tangencial que se produce en el punto es $|\tau| = 6$, determinar en qué circunstancias son posibles los siguientes estados tensionales:

- a) $\sigma = 3, \tau = 1$
- b) $\sigma = -5, \tau = 1$
- c) $\sigma = -2, \tau = 1$

CP 4-12 Determinar todos los posibles valores de σ ($\sigma > 0$) y τ ($\tau > 0$), de la figura sabiendo que la máxima tensión tangencial sobre cualquier plano en el punto es $\tau_{\max} = 1$.



CP 4-13 El estado tensional en un punto de un medio continuo es tal que $\sigma_x = -1$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{xy} = 0$ y $\sigma_y \geq \sigma_z$. Se sabe además que la tensión tangencial, sobre los planos paralelos al eje x , toma un valor máximo $\tau^* = 4$. Si τ_{\max} es la máxima tensión tangencial actuante sobre cualquier plano obtener todas las posibles combinaciones de σ_y y σ_z para que:

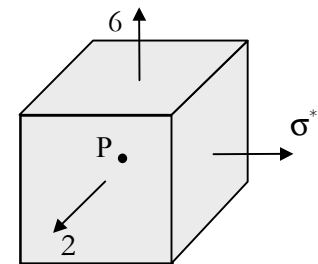
- a) $\tau_{\max} = 6$
 b) $\tau_{\max} = 4$

CP 4-14 Del estado tensional en un punto de un medio continuo se sabe que la máxima tensión tangencial en planos paralelos a σ_1 es $\tau_1^{\max} = 2$. Obtener todos los valores de σ_1 , σ_2 y σ_3 que hacen posible el estado tensional $\sigma = 2$, $\tau = 2$ sobre un cierto plano, en los siguientes casos (independientes entre sí):

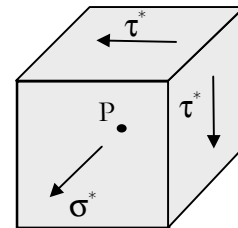
- a) La máxima tensión tangencial en planos paralelos a σ_2 es $\tau_2^{\max} = 2$.
 b) La máxima tensión tangencial en planos paralelos a σ_3 es $\tau_3^{\max} = 0$.
 c) La máxima tensión tangencial en planos paralelos a σ_2 es $\tau_2^{\max} = 4$.

CP 4-15 Determinar para qué valores de σ^* son posibles los siguientes estados tensionales en planos que pasen por P:

- a) $\sigma = 4$, $\tau = 2$
 b) $\sigma = 4$, $\tau = 1$
 c) $\sigma = 7$, $\tau = 0$

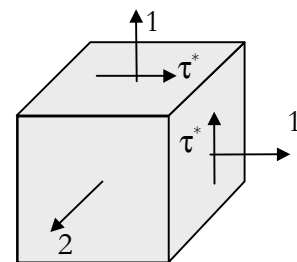


CP 4-16 Determinar para qué valores de σ^* es posible encontrar un plano que pase por P cuyas tensiones normal y tangencial sean $\sigma = 2\tau^*$ y $\tau = \tau^*$.

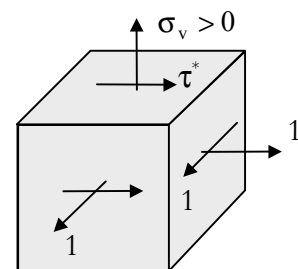


CP 4-17 Determinar de forma gráfica todos los posibles valores de τ^* sabiendo que en un cierto plano las tensiones normal (σ) y tangencial (τ) son:

- a) $\sigma = 3$, $\tau = 1$
 b) $\sigma = 1$, $\tau = 1$



CP 4-18 La figura representa el estado tensional en un punto del que se sabe que la tensión tangencial máxima sobre cualquier plano es $\tau_{\max} = 2$. Dibujar los correspondientes Círculos de Mohr en 3D. A dicho estado se le añade un estado tensional hidrostático ($\sigma = \sigma^* \mathbf{1}$). Determinar todos los posibles valores de σ^* para que sea posible, en un cierto plano, el estado tensional $\sigma = 6$, $\tau = 0$.



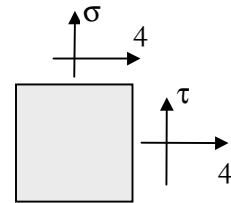
CP 4-19 Del estado tensional en un punto se sabe lo siguiente:

- 1) La máxima tensión tangencial en planos paralelos a σ_2 (tensión principal intermedia) es igual a 3.
- 2) La máxima tensión tangencial en planos paralelos a σ_1 (tensión principal mayor) es igual a 2.
- 3) $\sigma_3 = 0$.

A este estado tensional se le suma un estado hidrostático de tensiones de valor $\sigma = -p\mathbf{1}$ ($p \geq 0$). Obtener todos los posibles valores de p para los que es posible encontrar algún plano para el cual el estado final de tensiones sea $\sigma = 3, |\tau| = 1$.

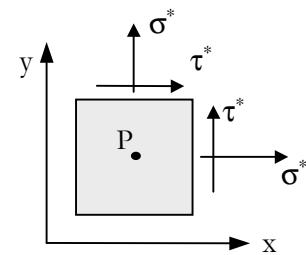
CP 4-20 Determinar todos los posibles valores de σ para que:

- a) Exista un solo plano en el punto con tensión normal nula.
- b) El estado tensional en el punto sea de cortante puro.



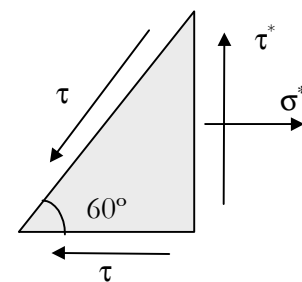
CP 4-21 Determinar todos los posibles valores de σ^* y τ^* en los siguientes casos:

- a) El estado tensional es el mismo sobre cualquier plano que pasa por P.
- b) La tensión normal a cualquier plano es de tracción.
- c) La máxima tensión principal es negativa y forma un ángulo de 30° con la horizontal.
- d) La máxima y la mínima tensión principal toman el mismo valor.

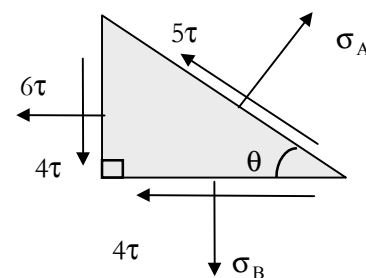


NOTA : Se considerará la posibilidad de valores negativos de σ^* y τ^* .

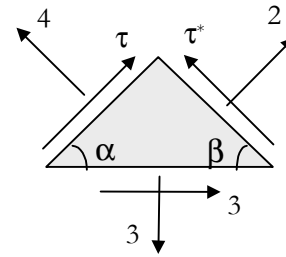
CP 4-22 Determinar el valor de σ^* y τ^* en función de τ .



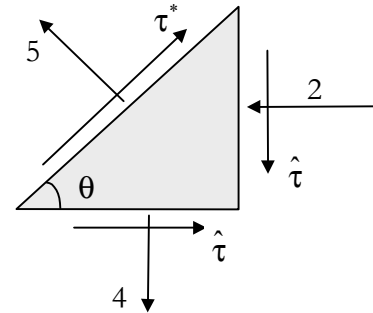
CP 4-23 Determinar los posibles valores de σ_A , σ_B y θ , sabiendo que la máxima tensión tangencial en el punto es 5τ .



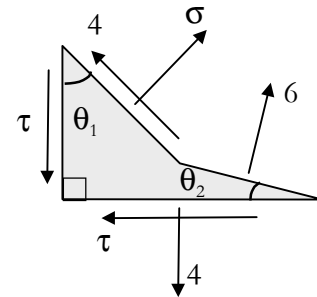
CP 4-24 El estado tensional en un punto es el de la figura. Determinar todos los posibles valores de α , β , τ y τ^* sabiendo que $|\tau_{\max}| = 5$.



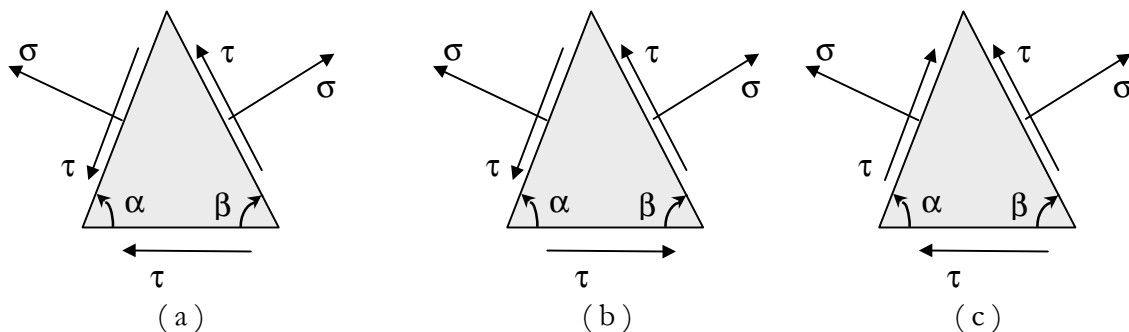
CP 4-25 Obtener todos los valores posibles de $\hat{\tau}$, τ^* y θ , sabiendo que en un cierto plano el estado tensional es $\tau = -3$ y $\sigma = -3$.



CP 4-26 En la figura se representan los estados tensionales sobre cuatro planos que pasan por un punto. Determinar los posibles valores de σ , τ , θ_1 y θ_2 y dibujar los correspondientes estados tensionales.

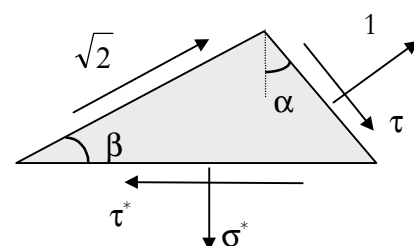


CP 4-27 Determinar los valores de α y β para los que son posibles los siguientes estados tensionales, siendo $\sigma > 0$ y $\tau = 0.5\sigma$:



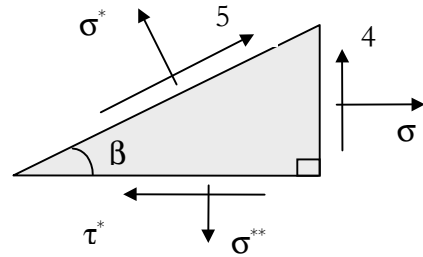
CP 4-28 Obtener todos los posibles valores de τ , τ^* , σ^* y β para el estado tensional de la figura sabiendo que $|\tau_{\max}| = \sqrt{2}$.

a) $\alpha = 0^\circ$

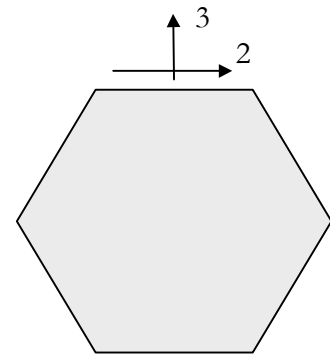


b) $\alpha = 45^\circ$

CP 4-29 Determinar todos los posibles valores de σ , σ^* , σ^{**} , τ^* y β , sabiendo que el estado tensional en un punto es el de la figura y que $|\sigma_{\max}| = 9$ y $|\tau_{\max}| = 5$.



CP 4-30 Sabiendo que la máxima tensión principal es de 0,5 MPa, dibujar los estados tensionales en todos los lados del siguiente hexágono regular:



CP 4-31 Un estado tensional plano es tal que, en el plano donde la tensión tangencial es máxima positiva (criterio del Círculo de Mohr), la tensión normal viene dada por:

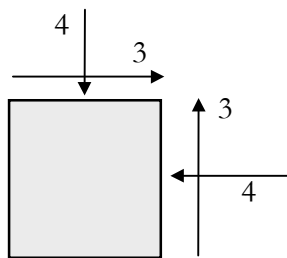
$$\sigma^* = 10 - \frac{5}{3}\tau^* \quad , \quad \tau^* \geq 0$$

Se pide:

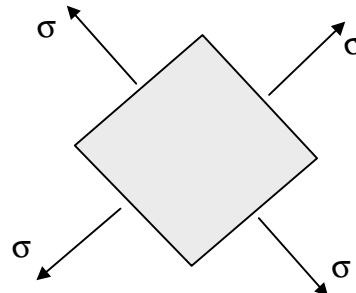
- Obtener el valor de las tensiones principales en función de σ^* y τ^* .
- Obtener el máximo valor que puede tomar una tensión principal en estas condiciones.

CP 4-32 Dados los estados tensionales planos I y II, determinar el valor de σ para que en el estado III = I + II, ocurra que:

- No haya compresiones en ningún plano.
- No haya tracciones en ningún plano.
- Sea un estado de cortante puro.



ESTADO I

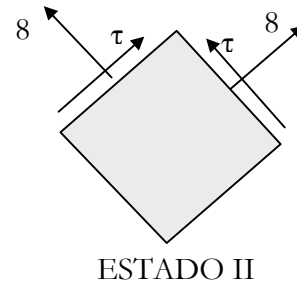
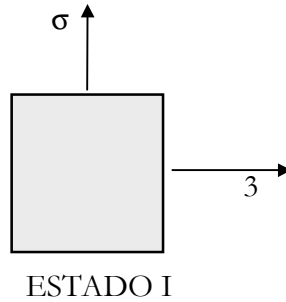


ESTADO II

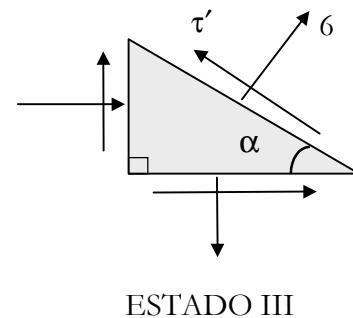
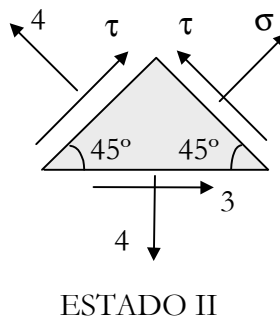
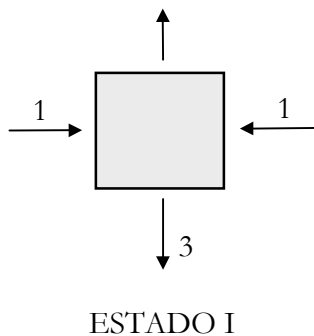
CP 4-33 Calcular el valor de σ para que:

- La máxima tensión tangencial en el estado I sea mayor que la máxima tensión tangencial en el estado II.
- La máxima tensión normal en el estado I sea mayor que la máxima tensión normal en el estado II
- La máxima tensión normal en el estado I sea menor que la mínima tensión normal en el estado II.

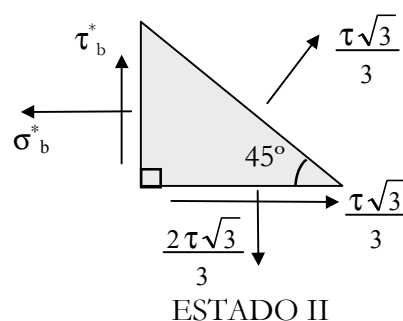
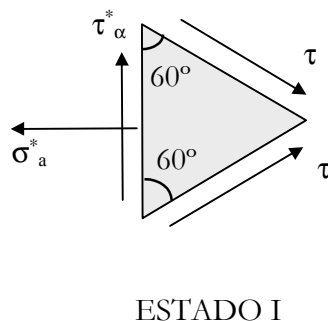
Dibujar los círculos de Mohr de los tres casos.



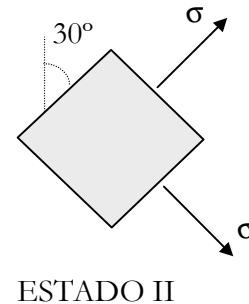
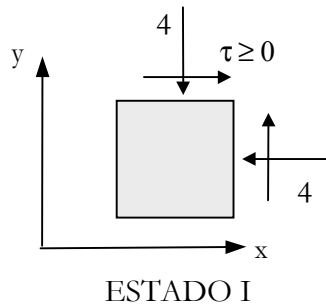
CP 4-34 Calcular los posibles valores de σ , τ , τ' y α para que el estado tensional III sea la suma de I y II. ($\tau \geq 0$)



CP 4-35 Obtener, en función de τ , las tensiones principales y el valor de la máxima tensión cortante del estado suma de los estados I y II.

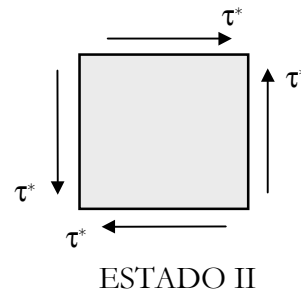
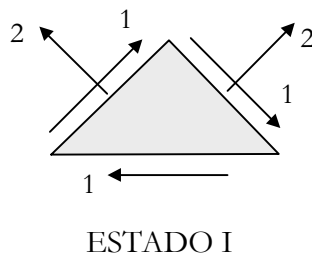


CP 4-36 Dados los estados tensionales I y II, determinar los posibles valores de σ y de τ para que en el estado III = I + II se verifique que la tensión principal σ_2 sea positiva y forme un ángulo de 30° con el eje y .



CP 4-37 Determinar todos los posibles valores de τ^* para que en el estado tensional suma de I y II se verifique:

- No existan tracciones en ningún plano.
- No existan compresiones en ningún plano.
- La máxima tensión tangencial, (τ_{\max}), sea menor que 2.
- Sea un estado de corte puro.
- Sea un estado de tensión hidrostático.



5 Ecuaciones de conservación-balance

CUESTIONES RESUELTAS

CR 5-1 Justificar si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

- a) El flujo de masa a través de una superficie material cerrada sólo es nulo si el movimiento es estacionario.
- b) El flujo de masa a través de una superficie de control cerrada es nulo si este flujo es estacionario.

Resolución:

- a) La afirmación es falsa porque una superficie material siempre está formada por las mismas partículas, y por tanto, no puede ser atravesada por ninguna partícula a lo largo del movimiento. Por este motivo, el flujo de masa a través de una superficie material es siempre nulo, independientemente de si el movimiento es estacionario o no.
- b) La afirmación es cierta ya que la *Ecuación de Continuidad* aplicada a un flujo estacionario implica lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ec. de continuidad} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \text{Flujo estacionario} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Resultando, así, lo que se quería demostrar:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

CR 5-2 Justificar si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

- a) El flujo convectivo de una propiedad a través de una superficie material es siempre nulo.
- b) El caudal neto (saliente menos entrante) a través de una superficie de control cerrada es siempre nulo.

Resolución:

- a) La afirmación es cierta ya que una superficie material siempre está formada por las mismas partículas, y un flujo convectivo implicaría que alguna debería atravesar la superficie.
- b) La afirmación es falsa. Sería cierta si el material fuese incompresible, pero no se cumple en general:

$$\rho = \text{cte} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

CR 5-3 Para un cierto movimiento estacionario de un fluido se verifica que el caudal a través de cualquier superficie de control cerrada es nulo. Obtener la expresión de la ecuación diferencial que se debe cumplir y que relaciona la velocidad y la densidad.

Resolución:

Al cumplirse que el caudal a través de cualquier superficie de control cerrada es nulo, se verifica que:

$$\int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0, \forall V \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

Si se tiene en cuenta la *Ecuación de Continuidad*: se puede escribir:

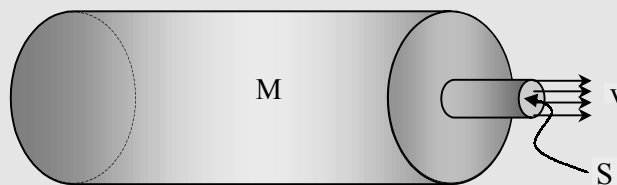
$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{el fluido es incompresible})$$

Finalmente, según la definición de derivada material y sabiendo que el flujo es estacionario, se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0}$$

CR 5-4 Un gas a presión en un recipiente de masa M sale del mismo a una velocidad estacionaria \mathbf{v} por un conducto de sección S . Justificar hacia dónde tenderá a moverse el conjunto y con qué aceleración lo hará.



Resolución:

Suponemos por hipótesis que el peso del gas es despreciable frente al del recipiente, y que la presión atmosférica también lo es frente a la presión interior.

La fuerza que actuará sobre el gas tendrá la siguiente expresión si se tiene en cuenta la 2ª *Expresión del Teorema del Transporte de Reynolds*:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS = \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} dS = \rho \mathbf{v}^2 S \mathbf{e}$$

donde:

\mathbf{n} es la normal unitaria exterior a la superficie que encierra al gas.

\mathbf{e} es el vector unitario en la dirección de la velocidad.

Por otro lado, la fuerza que actúa sobre el gas es:

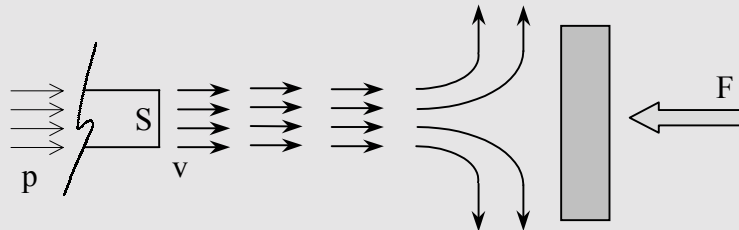
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{d/g} + \mathbf{F}_{\text{presión atm}} = \mathbf{F}_{d/g}$$

Según el *Principio de Acción y Reacción* la fuerza que realiza el gas sobre el depósito será:

$$\mathbf{F}_{g/d} = -\mathbf{F}_{d/g} = -\rho \mathbf{v}^2 S \mathbf{e} = M \mathbf{a}_{g/d} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{a}_{g/d} = -\frac{\rho \mathbf{v}^2 S}{M} \mathbf{e}}$$

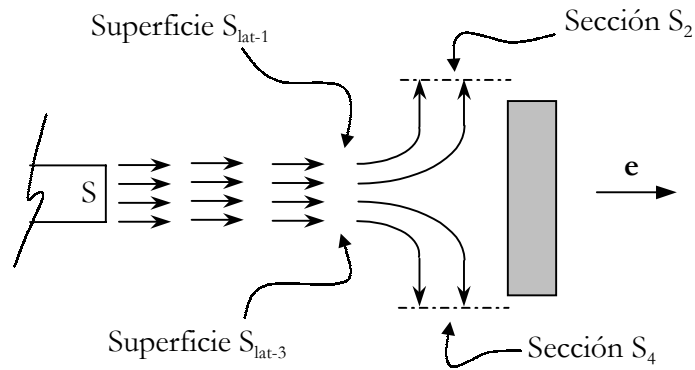
CR 5-5 Un chorro de agua de sección S , presión p y velocidad v , incide perpendicularmente sobre un disco tal y como se indica en la figura. Calcular la fuerza \mathbf{F} a ejercer sobre el disco en régimen estacionario para que éste no se mueva (p_{atm} despreciable).



Resolución:

Si se tiene en cuenta la 2ª *Expresión del Teorema del Transporte de Reynolds* y que el régimen es estacionario, las fuerzas que actúan sobre el fluido tienen la siguiente expresión:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext/f}} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS = \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS$$



En primer lugar, hay que notar que el vector velocidad del fluido a lo largo de las superficies S_{lat-1} y S_{lat-3} es perpendicular a la normal unitaria exterior al volumen que encierra al fluido:

$$\left. \begin{array}{l} S_{lat-1} \\ S_{lat-3} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$$

Lo mismo ocurre en la pared del disco.

En las secciones S_2 y S_4 los vectores \mathbf{v} y \mathbf{n} no son perpendiculares, pero como existe simetría y \mathbf{v} es perpendicular a \mathbf{F} , no aportan componentes de fuerza horizontales.

Así que únicamente quedará:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_{ext/f} &= \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS = \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{e} (-\mathbf{e} \cdot \mathbf{v} \mathbf{e}) dS = -\rho v^2 S \mathbf{e} \\ \sum \mathbf{F}_{ext/f} &= -F \mathbf{e} + \text{fuerzas de presión atmosférica} + p S \mathbf{e} = -F \mathbf{e} + p S \mathbf{e} \end{aligned}$$

Y ahora tan sólo hay que despejar el valor del módulo de la fuerza \mathbf{F} :

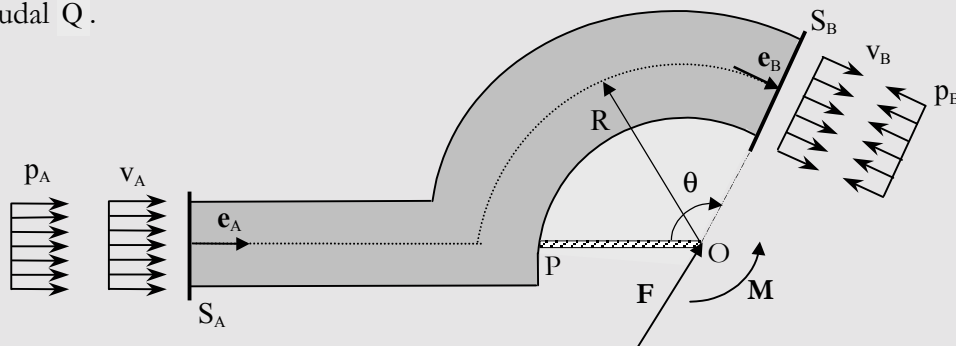
$$\boxed{F = \rho v^2 S + p S}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PR 5-1 Por la tubería de la figura circula, en régimen estacionario, un caudal de agua Q desde el extremo A (de sección S_A) al extremo B (de sección $S_B < S_A$). La tubería está sustentada en el punto O mediante el elemento rígido P-O.

Se pide:

- Determinar las velocidades de entrada y salida v_A y v_B en función del caudal.
- Determinar los valores del ángulo θ que hacen máximo y mínimo el módulo de la reacción F en O, y los correspondientes valores de dicha reacción.
- Lo mismo que en el apartado b) pero respecto al momento M en O.
- Determinar la potencia W de la bomba necesaria en cada caso para proporcionar el caudal Q .



HIPÓTESIS:

- El agua es un fluido perfecto ($\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$) e incompresible.
- Se desprecia el peso de la tubería y del agua.

Resolución:

- Que el agua sea un fluido incompresible significa lo siguiente:

$$\rho = \text{cte para una misma partícula} \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0$$

La ecuación de *Conservación de la Masa* en forma local establece esta relación:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

De aquí se llega a deducir que :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0, \forall V \quad (1)$$

Se debe ahora establecer el volumen adecuado de integración. Para ello hay que buscar un volumen de control tal que su contorno sea una superficie cerrada ($S = \partial V$), para poder aplicar el *Teorema de la Divergencia*:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS, \forall V \quad (2)$$

donde \mathbf{n} es la normal exterior unitaria en el contorno del volumen V .

Así, por las ecuaciones (1) y (2), se llega a la conclusión que el flujo de volumen saliente neto, a través del contorno de un volumen de control, es nulo:

$$\int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = 0, \forall V$$

Considerando como volumen de control el definido por el agua comprendida en la tubería entre las secciones S_A y S_B , y los vectores unitarios \mathbf{e}_A y \mathbf{e}_B perpendiculares a dichas secciones, respectivamente, y en el sentido del flujo de agua, se llega a la siguiente expresión (hay que mencionar que la integral extendida sobre el contorno ∂V , únicamente la aplicamos sobre las secciones S_A y S_B , ya que en las paredes de la tubería se cumple $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, es decir, son perpendiculares):

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS &= \int_{S_A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{S_B} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS = \\ &= \int_{S_A} (-\mathbf{e}_A) \cdot v_A \mathbf{e}_A \, dS + \int_{S_B} \mathbf{e}_B \cdot v_B \mathbf{e}_B \, dS = \\ &= -v_A S_A + v_B S_B = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_A S_A = v_B S_B = Q \end{aligned}$$

Se comprueba, por tanto, que el caudal de entrada y el de salida son iguales::

$$\boxed{\begin{aligned} v_A &= \frac{Q}{S_A} \\ v_B &= \frac{Q}{S_B} \end{aligned}} \quad (3)$$

- b) Para encontrar el valor de la fuerza \mathbf{F} hay que aplicar la ecuación de *Balance de la Cantidad de Movimiento* :

$$\mathbf{R} = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} \, dS = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV \quad (4)$$

donde \mathbf{R} es la resultante total de las fuerzas que actúan sobre el fluido.

Por otro lado, desarrollando el término de la derecha mediante la segunda expresión del *Teorema del Transporte de Reynolds*, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dS \quad (5)$$

En este caso, se está en régimen estacionario, es decir, la derivada local de cualquier propiedad es nula, y además, se sabe que existe únicamente flujo a través de las secciones S_A y S_B , ya que se cumple que \mathbf{n} y \mathbf{v} son perpendiculares en las paredes de la tubería. Por lo tanto, según las expresiones (4) y (5), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \int_{S_A} \rho \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dS + \int_{S_B} \rho \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dS = \\ &= \int_{S_A} \rho v_A \mathbf{e}_A (-\mathbf{e}_A \cdot v_A \mathbf{e}_A) \, dS + \int_{S_B} \rho v_B \mathbf{e}_B (\mathbf{e}_B \cdot v_B \mathbf{e}_B) \, dS \\ \mathbf{R} &= -\rho v_A^2 S_A \mathbf{e}_A + \rho v_B^2 S_B \mathbf{e}_B \end{aligned} \quad (6)$$

Si se expresa en función de Q , según la expresión (3), resulta:

$$\mathbf{R} = \rho Q^2 \left(-\frac{1}{S_A} \mathbf{e}_A + \frac{1}{S_B} \mathbf{e}_B \right)$$

Se han de analizar ahora las diferentes fuerzas que forman parte de \mathbf{R} . Al despreciar las fuerzas másicas ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), sólo se tienen en cuenta las fuerzas superficiales, es decir, las aplicadas en el contorno del volumen de control (S_A , S_B y S_{lat} , ésta última, superficie lateral de las paredes):

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} dS = \int_{\partial V} \mathbf{t} dS \\ &= \int_{S_A} \mathbf{t} dS + \int_{S_B} \mathbf{t} dS + \int_{S_{lat}} \mathbf{t} dS = \\ &= \int_{S_A} p_A \mathbf{e}_A dS + \int_{S_B} p_B (-\mathbf{e}_B) dS + \mathbf{R}_{vf}\end{aligned}$$

Aquí \mathbf{R}_{vf} representa las fuerzas ejercidas sobre el fluido por las paredes de la tubería, que en principio desconocemos, pero que utilizando la expresión (6) pueden obtenerse:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{vf} &= \mathbf{R} - \int_{S_A} p_A \mathbf{e}_A dS - \int_{S_B} p_B (-\mathbf{e}_B) dS \\ \mathbf{R}_{vf} &= -\rho v_A^2 S_A \mathbf{e}_A + \rho v_B^2 S_B \mathbf{e}_B - p_A S_A \mathbf{e}_A + p_B S_B \mathbf{e}_B \\ \mathbf{R}_{vf} &= -(\rho v_A^2 + p_A) S_A \mathbf{e}_A + (\rho v_B^2 + p_B) S_B \mathbf{e}_B\end{aligned}\quad (7)$$

Expresándolo todo en función de Q según la expresión (3), resulta:

$$\mathbf{R}_{vf} = -\left(\rho \frac{Q^2}{S_A} + p_A S_A\right) \mathbf{e}_A + \left(\rho \frac{Q^2}{S_B} + p_B S_B\right) \mathbf{e}_B$$

Ahora habrá que pensar qué relación tiene \mathbf{R}_{vf} con nuestra incógnita \mathbf{F} . Para ello hay que tener en cuenta el *Principio de Acción y Reacción*, y considerar la tubería y el elemento rígido P-O como un sólido único. En estas condiciones, la fuerza que ejerce el fluido sobre la tubería es:

$$\mathbf{R}_{ft} = -\mathbf{R}_{vf}$$

Como es la única acción que actúa sobre el sólido, y teniendo en cuenta que el peso de la tubería es despreciable, esta fuerza deberá ser compensada por la acción exterior \mathbf{F} para llegar al equilibrio:

$$\mathbf{R}_{ft} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F} = -\mathbf{R}_{ft} = \mathbf{R}_{vf}$$

Y por tanto, se obtiene finalmente el valor de \mathbf{F} según (7):

$$\mathbf{F} = -(\rho v_A^2 + p_A) S_A \mathbf{e}_A + (\rho v_B^2 + p_B) S_B \mathbf{e}_B$$

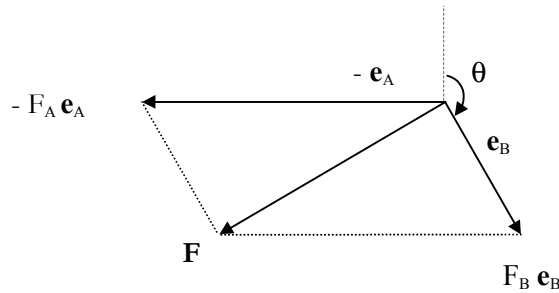
Expresándola en función de Q , según la expresión (3), resulta:

$$\mathbf{F} = -\left(\rho \frac{Q^2}{S_A} + p_A S_A\right) \mathbf{e}_A + \left(\rho \frac{Q^2}{S_B} + p_B S_B\right) \mathbf{e}_B\quad (8)$$

Para encontrar los valores máximo y mínimo de $|\mathbf{F}|$ en función de θ , hay dos posibilidades:

1. Encontrar la expresión de $|\mathbf{F}|$ y buscar los extremos igualando a cero su derivada. (Opción no recomendable).
2. Método directo: donde nos fijamos en los dos vectores actuantes en el valor de \mathbf{F} . (Opción que se desarrolla a continuación).

El valor de \mathbf{F} , según (7), depende de unos valores positivos, F_A y F_B , que acompañan a los vectores $(-\mathbf{e}_A)$ y \mathbf{e}_B , respectivamente.



El vector $(-\mathbf{e}_A)$ es fijo, no depende de θ , mientras que \mathbf{e}_B varía con esta variable. Además, F_A y F_B son valores también constantes. Por lo tanto, los valores máximo y mínimo se obtendrán cuando F_A y F_B se sumen o se resten, respectivamente. Es decir, cuando los vectores $(-\mathbf{e}_A)$ y \mathbf{e}_B sean paralelos.

Teniendo en cuenta las expresiones (3 y 8):

Valor mínimo de \mathbf{F} :

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$|\mathbf{F}|_{\text{mínima}} = \rho Q^2 \left(\frac{1}{S_B} - \frac{1}{S_A} \right) + p_B S_B - p_A S_A$$

Valor máximo de \mathbf{F} :

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$|\mathbf{F}|_{\text{máxima}} = \rho Q^2 \left(\frac{1}{S_B} - \frac{1}{S_A} \right) + p_B S_B + p_A S_A$$

- c) Para encontrar el valor del momento \mathbf{M} , respecto del punto O , hay que aplicar la ecuación de *Balance del Momento de la Cantidad de Movimiento*:

$$\mathbf{M}_{\text{liq}} = \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS = \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \quad (9)$$

donde \mathbf{M}_{liq} es el momento resultante de los momentos que actúan sobre el fluido.

Por otro lado, desarrollando el término de la derecha según la segunda expresión del *Teorema del Transporte de Reynolds*, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS \quad (10)$$

Igual que en el apartado b), se tiene un régimen estacionario, y por tanto, la derivada local es nula. También aquí, hay que tener en cuenta que \mathbf{n} y \mathbf{v} son perpendiculares en las paredes de la tubería. De esta forma, según las expresiones (9) y (10), se obtiene:

$$\mathbf{M}_{\text{liq}} = \int_{S_A} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS + \int_{S_B} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS \quad (11)$$

donde hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1. La solución de cada integral se puede realizar considerando la resultante de las velocidades en el punto medio de cada sección, ya que las distribuciones en cada caso son uniformes y paralelas.
2. En el caso de la sección S_A , se comprueba que el vector velocidad resultante aplicado en el centro de la sección, pasa por el punto O , y por tanto no provocará momento ya que el producto vectorial del vector posición del centro de S_A y el de velocidad será nulo.
3. En el caso de la sección S_B , los vectores \mathbf{r} y \mathbf{v} pertenecen al plano del papel, y por tanto su producto vectorial tiene la dirección y sentido del vector $(-\mathbf{e}_Z)$. Además son vectores perpendiculares, por lo que el módulo del producto es el producto de módulos.

Aplicando estas consideraciones en (11) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{liq}} &= \int_{S_B} R \rho v_B (-\mathbf{e}_Z)(\mathbf{e}_B \cdot v_B \mathbf{e}_B) dS \\ \mathbf{M}_{\text{liq}} &= -\rho v_B^2 R S_B \mathbf{e}_Z = -\rho \frac{Q^2}{S_B} R \mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (12)$$

El siguiente paso consiste en valorar las contribuciones de las fuerzas másicas, que en este caso son nulas ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), y de las fuerzas superficiales:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{liq}} &= \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS = \int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS = \\ &= \int_{S_A} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS + \int_{S_B} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS + \int_{S_{\text{lat}}} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS = \\ &= \mathbf{0} + \int_{S_B} R p_B \mathbf{e}_Z dS + \mathbf{M}_{t/f} = \\ &= R p_B S_B \mathbf{e}_Z + \mathbf{M}_{t/f} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{M}_{t/f}$ es el momento que ejerce la tubería sobre el fluido. Para hallar su valor se utilizará la expresión (12):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{t/f} &= \mathbf{M}_{\text{liq}} - R p_B S_B \mathbf{e}_Z = \\ &= -\rho v_B^2 R S_B \mathbf{e}_Z - R p_B S_B \mathbf{e}_Z \\ \mathbf{M}_{t/f} &= -R S_B (\rho v_B^2 + p_B) \mathbf{e}_Z = -R \left(\rho \frac{Q^2}{S_B} + p_B S_B \right) \mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (13)$$

Aplicando el *Principio de Acción y Reacción*, se averiguará el momento que ejerce el fluido sobre la tubería:

$$\mathbf{M}_{f/t} = -\mathbf{M}_{t/f}$$

Y aplicando equilibrio sobre la tubería y el soporte $P-O$, como un cuerpo conjunto y teniendo en cuenta que el peso de la tubería es despreciable:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{f/t} + \mathbf{M} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M} &= -\mathbf{M}_{f/t} = \mathbf{M}_{t/f} \end{aligned}$$

Finalmente, se encuentra el valor del momento \mathbf{M} , según (13):

$$\mathbf{M} = -RS_B(\rho v_B^2 + p_B)\mathbf{e}_z = -R\left(\rho \frac{Q^2}{S_B} + p_B S_B\right)\mathbf{e}_z$$

Se puede comprobar que este resultado no depende del ángulo θ , y por tanto, su módulo tendrá un valor constante.

- d) Para determinar la potencia W necesaria para proporcionar el caudal Q , se debe utilizar el *Teorema de las Fuerzas Vivas*:

$$W = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV \quad (14)$$

En un medio perfecto e incompresible la potencia tensional es cero, es decir:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV = 0$$

Esto se comprueba de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} &= -p \mathbf{1} : \mathbf{d} = -p \text{Tr}(\mathbf{d}) = -p \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)\right) = \\ &= -p \text{Tr}(\mathbf{l}) = -p \text{Tr} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \\ &= -p \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la expresión (1), referente a la incompresibilidad, para concluir que se anula la divergencia de la velocidad.

Aplicando al término de la derivada material (derivada material de la energía cinética de las partículas que constituyen V) la segunda expresión del *Teorema del Transporte de Reynolds* se obtiene:

$$W = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int_{\partial V} \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS$$

Y si se vuelve a considerar que se está en régimen estacionario y que \mathbf{n} y \mathbf{v} son perpendiculares en las paredes de la tubería, la expresión de la potencia entrante W , queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W &= \int_{S_A} \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS + \int_{S_B} \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS = \\ &= \int_{S_A} \frac{1}{2} \rho v_A^2 (-v_A) dS + \int_{S_B} \frac{1}{2} \rho v_B^2 (v_B) dS = \end{aligned}$$

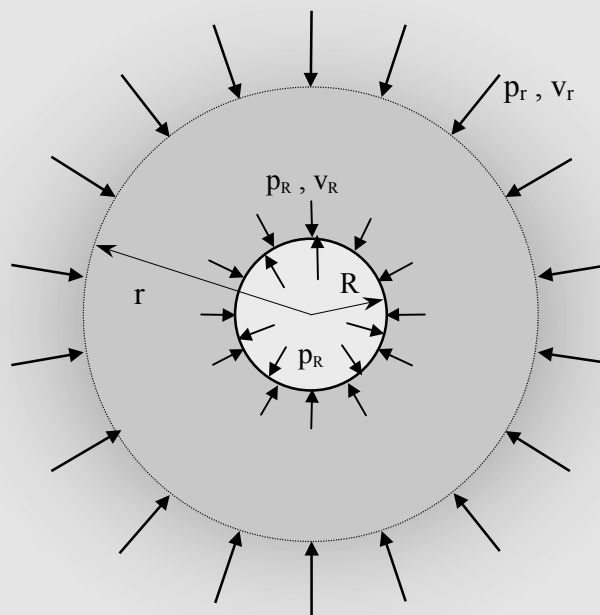
$$= -\frac{1}{2}\rho v_A^3 S_A + \frac{1}{2}\rho v_B^3 S_B$$

Utilizando la expresión (3), se obtiene el resultado final:

$$W = \frac{1}{2}\rho Q^3 \left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right)$$

PR 5-2 Una burbuja esférica producida por fenómenos de cavitación en el seno de un fluido incompresible (que se considera de dimensión infinita) tiene un radio $R(t)$ que disminuye a una velocidad $\dot{R} \leq 0$. Sean $R_0 = R(0)$ y $\dot{R}(0) = 0$ el radio y su tasa de variación, respectivamente, en el instante de formación de la burbuja, supuesta constante a lo largo del tiempo. Se pide:

- La velocidad del fluido a una distancia r del centro de la burbuja (en función de R y \dot{R}).
- La energía cinética K del dominio infinito de fluido.
- Si $p_\infty = \text{cte}$ es el valor de la presión en el fluido para $r = \infty$, calcular al valor de $p_R(t)$.
- Suponiendo que $p_R(t) = 0$, obtener la ecuación diferencial que describe la evolución del radio de la burbuja. Indicar como se calcularía el instante en que desaparece la burbuja.



HIPÓTESIS:

- Fluido perfecto: $\sigma = -p\mathbf{1}$
- Suponer una distribución radial de velocidades ($\mathbf{v} = -v_r \mathbf{e}_r$).
- Densidad del fluido: $\rho = \text{cte}$.
- Fuerzas másicas despreciables.
- El problema debe resolverse utilizando exclusivamente formas globales (integrales) de las ecuaciones de conservación-balance.

Resolución:

- a) Para encontrar la velocidad hay que utilizar el *Principio de Conservación de la Masa*, que en forma global tiene la siguiente expresión:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

Además se tendrá en cuenta el *Teorema del Transporte de Reynolds*:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Al tratarse de un fluido con $\rho = \text{cte}$ resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0$$

Si se aplican estas fórmulas a un volumen de control con un radio genérico r y limitado por la burbuja de radio R y, se llega a la siguiente expresión:

$$\int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Si se desarrolla, sabiendo que el contorno de V se descompone en dos partes —una la superficie de la burbuja Γ_R y la otra una superficie esférica Γ_r de radio arbitrario—, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Gamma_R} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \\ &= \int_{\Gamma_R} (-v_R \mathbf{e}_R) \cdot (-\mathbf{e}_R) dS + \int_{\Gamma_r} (-v_r \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_r dS = 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que \mathbf{n} es la normal exterior unitaria y que $v_R = -\dot{R}(t) \geq 0$, quedará:

$$-\dot{R}(t) 4\pi R^2(t) - v_r 4\pi r^2 = 0$$

$$\boxed{v_r = -\dot{R}(t) \frac{R^2(t)}{r^2}}$$

- b) La energía cinética K de un volumen V de un fluido es:

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV$$

donde v es el módulo del campo de velocidades.

En este caso se tiene simetría esférica, por lo que habrá que integrar respecto de la variable radio, desde $R(t)$ hasta el infinito. El volumen diferencial de una esfera es:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones:

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho v_r^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{R}^2(t) \frac{R^4(t)}{r^4} dV =$$

$$= \frac{1}{2} \dot{R}^2(t) \rho R^4(t) 4\pi \int_{R(t)}^{\infty} \frac{r^2}{r^4} dr$$

$$\boxed{K = 2\pi\rho\dot{R}^2(t)R^3(t)}$$

c) Se debe considerar ahora el *Teorema de las Fuerzas Vivas*:

$$P_e = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV$$

donde P_e es la potencia mecánica entrante. En este caso $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ por hipótesis. Además $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0$, en el caso de fluido perfecto e incompresible. (\Rightarrow ver el problema anterior). Así queda:

$$P_e = \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \dot{K}$$

Sabiendo que los fluidos únicamente sufren tensiones de compresión y que p_∞ es una constante por hipótesis, se desarrolla el primer término:

$$P_e = \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \int_{\Gamma_R} (p_R \mathbf{e}_R) \cdot (\dot{R}(t) \mathbf{e}_R) dS + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} (p_r (-\mathbf{e}_r)) \cdot (-v_r \mathbf{e}_r) dS =$$

$$= p_R \dot{R}(t) 4\pi R^2(t) + \lim_{r \rightarrow \infty} \{p_r v_r 4\pi r^2\} = p_R \dot{R}(t) 4\pi R^2(t) + \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ -p_r \dot{R}(t) \frac{R^2(t)}{r^2} 4\pi r^2 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_e = p_R \dot{R}(t) 4\pi R^2(t) - p_\infty \dot{R}(t) R^2(t) 4\pi$$

El segundo término se obtiene del apartado b):

$$\dot{K} = \frac{dK}{dt} = 2\pi\rho \frac{d}{dt} (\dot{R}^2(t) R^3(t))$$

Sustituyendo los valores obtenidos se tiene que:

$$p_R(t) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho \frac{\frac{d}{dt} (\dot{R}^2(t) R^3(t))}{\dot{R}(t) R^2(t)}$$

Por último se desarrolla el valor de la derivada y se sustituye en la expresión:

$$\frac{d}{dt} (\dot{R}^2(t) R^3(t)) = R^2(t) \dot{R}(t) [2R(t) \ddot{R}(t) + 3\dot{R}^2(t)]$$

$$\boxed{p_R(t) = p_\infty + \rho \left[R(t) \ddot{R}(t) + \frac{3}{2} \dot{R}^2(t) \right]}$$

d) Si $p_R(t) = 0$ entonces de c) se obtiene:

$$p_{\infty} = -\rho \left[R(t)\ddot{R}(t) + \frac{3}{2} \dot{R}^2(t) \right]$$

donde

$$\frac{d}{dt} R^3(t) = 3R^2(t)\dot{R}(t)$$

Entonces se tiene:

$$p_{\infty} \frac{d}{dt} R^3(t) = -\frac{3}{2} \rho \frac{d}{dt} (\dot{R}^2(t) R^3(t))$$

donde ρ y p_{∞} son constantes. Si se integra entre $t=0$ y un tiempo genérico t la anterior expresión y se impone que $\dot{R}(t=0)=0$ y $R(t=0)=R_0$, quedará la EDO buscada :

$$\begin{aligned} (p_{\infty} R^3(t))_0^t &= -\frac{3}{2} \rho (\dot{R}^2(t) R^3(t))_0^t \Rightarrow \\ \Rightarrow p_{\infty} (R^3(t) - R_0^3) &= -\frac{3}{2} \rho R^3(t) \dot{R}^2(t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\dot{R}(t) = \sqrt{\frac{2p_{\infty}}{3\rho} \frac{R_0^3 - R^3(t)}{R^3(t)}}$$

Para encontrar el instante en el que desaparece la burbuja, únicamente hay que hallar $R(t)$ e imponer $R(t=t_{\text{final}})=0$.

CUESTIONES PROPUESTAS

CP 5-1 Dada la descripción espacial de una cierta propiedad Ψ por unidad de volumen de las partículas, interpretar físicamente el valor de:

a) $\frac{d\Psi}{dt}$ b) $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ c) $\frac{d}{dt} \int_V \Psi dV$ d) $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Psi dV$

CP 5-2 Indicar e interpretar físicamente el significado de las siguientes expresiones en la Mecánica de Medios Continuos:

a) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Psi(\mathbf{x}(X, t + \Delta t), t + \Delta t) - \Psi(\mathbf{x}(X, t), t)}{\Delta t}$ c) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_{t+\Delta t}} \Psi(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V_t} \Psi(\mathbf{x}, t) dV}{\Delta t}$

b) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Psi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \Psi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}$ d) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_t} \Psi(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V_t} \Psi(\mathbf{x}, t) dV}{\Delta t}$

CP 5-3 Interpretar físicamente los siguientes conceptos:

- a) Derivada material y local de una propiedad.
 b) Derivada material y local de una integral de volumen.
 c) Justificar por qué motivos podría interpretarse que $\int_{\partial V} \rho \Psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ es la “derivada convectiva” de la integral de volumen $\int_V \rho \Psi dV$.

CP 5-4 Deducir las relaciones entre:

- a) La derivada local y la derivada material de una magnitud Ψ .
 b) La derivada local y material de una integral $\int_V \rho \Psi dV$, cuando todo el flujo de la magnitud Ψ está asociado al transporte de masa.

CP 5-5 Deducir la ecuación de la continuidad en sus formas material (o Lagrangiana) y espacial (o Euleriana).

CP 5-6 Deducir la expresión de la forma local espacial de la ecuación de conservación de una propiedad de un medio continuo para el caso más general.

CP 5-7 Obtener la expresión del teorema del transporte de Reynolds interpretando físicamente cada término.

CP 5-8 Justificar las siguientes afirmaciones:

- “ En un flujo incompresible, el caudal a través de una superficie de control cerrada es nulo.”
 - “ En un flujo estacionario el flujo de masa a través de una superficie de control cerrada es nulo.”
-

CP 5-9 Justificar cuando es válida la siguiente afirmación:

“ Para un fluido incompresible en régimen estacionario, la densidad es uniforme”.

- Siempre.
 - Nunca.
 - Sólo cuando la densidad en el instante inicial es uniforme.
-

CP 5-10 Justificar si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

- El flujo convectivo de una propiedad a través de una superficie material es siempre nulo.
 - El caudal neto (saliente menos entrante) a través de una superficie de control cerrada es siempre nulo.
-

CP 5-11 Para un cierto movimiento estacionario de un fluido se verifica que el caudal a través de cualquier superficie de control cerrada es nulo. Obtener la expresión de la ecuación diferencial, relacionando la velocidad y la densidad, que debe cumplirse.

CP 5-12 Deducir la forma espacial de la ecuación de Cauchy a partir del balance de la cantidad de movimiento.

CP 5-13 Demostrar la simetría del tensor de tensiones de Cauchy a partir de la ecuación de conservación del momento angular. (Aplicar la fórmula $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$)

CP 5-14 Desarrollar los conceptos:

- Potencia mecánica.
 - Teorema de las fuerzas vivas.
 - Potencia tensional.
-

CP 5-15 Deducir la expresión espacial de la potencia mecánica en un medio continuo deformable.

CP 5-16 Deducir el Teorema de las fuerzas vivas en Mecánica de Medios Continuos (utilizar la expresión $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v}$).

CP 5-17 Obtener la expresión de la potencia calorífica entrante en un medio continuo, indicando el significado de cada término.

CP 5-18 Enunciar los postulados que se establecen en el primer principio de la Termodinámica y obtener la forma local Euleriana de la ecuación de conservación de la energía, indicando el significado de los términos que intervienen.

CP 5-19 Significado del término $\sigma_{ij} d_{ij}$ de la ecuación de conservación de la energía, siendo:

σ_{ij} : Tensor de Tensiones de Cauchy.

d_{ij} : Tensor Velocidad de Deformación.

E_{ij} : Tensor Deformación.

CP 5-20 Definir:

- a) Variables termodinámicas
- b) Variables de estado
- c) Procesos termodinámicos reversibles e irreversibles.

Indicar la utilidad del 2º principio de la termodinámica en la Mecánica de Medios Continuos.

CP 5-21 Para un estado tensional de “presión hidrostática” ($\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$):

- a) Demostrar que la potencia tensional es $\int_V \frac{p}{\rho} \frac{dp}{dt} dV$.
 - b) Expresar la ecuación de la energía, en procesos termodinámicamente reversibles, en función de la temperatura, entropía, presión, energía interna, densidad y tiempo.
-

CP 5-22 Formular en forma Euleriana, indicando el significado de cada símbolo, los siguientes principios tal y como se usan en Mecánica de Medios Continuos y en su forma local:

- 1) Conservación de la Masa (Ecuación de Continuidad).
 - 2) Conservación de la Cantidad de Movimiento (Ecuación de Cauchy).
 - 3) Conservación del Momento Angular.
 - 4) Conservación de la Energía (Ecuación de la Energía).
-

CP 5-23 Enunciar y escribir las ecuaciones necesarias para resolver un problema mecánico-térmico en Mecánica de Medios Continuos. Indicar cuales son las incógnitas del problema y su tipo (mecánico o térmico). Explicar cuando puede decirse que el problema está desacoplado, y establecer las expresiones para este caso.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PP 5-1 El campo de velocidades de un fluido incompresible en régimen estacionario es:

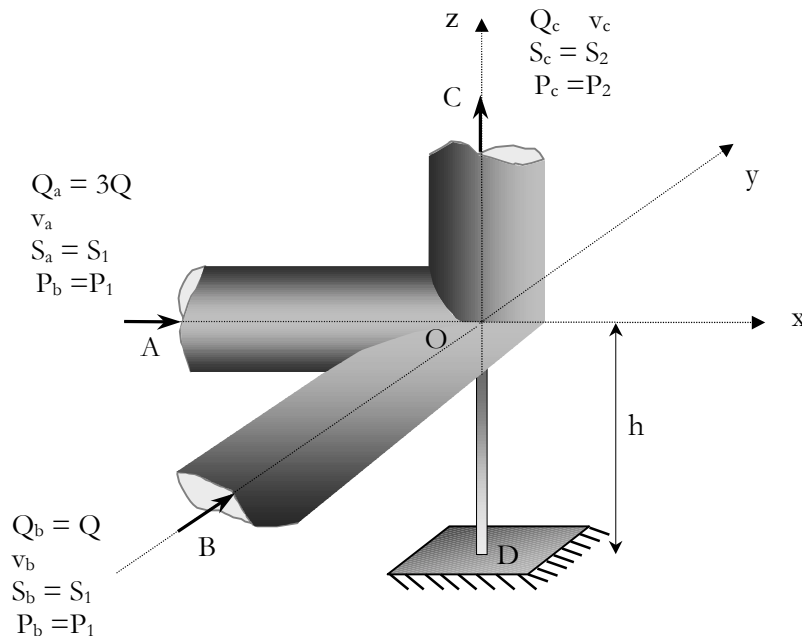
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = [-x - y; \quad x - y; \quad f(z)]^T$$

Se pide:

- Determinar $f(z)$, sabiendo que la velocidad en $(0,0,0)$ es nula.
- Obtener las ecuaciones de las trayectorias y líneas de corriente.
- Calcular el tensor velocidad de deformación y el vector vorticidad.
- Calcular las fuerzas de volumen necesarias para mantener este movimiento en un medio ilimitado siendo constante la presión.
- Entre los tiempos $t = \frac{\pi}{2}$ y $t = \pi$ se inyecta colorante en el punto $(1,0,0)$. Calcular las correspondientes líneas de traza a lo largo del tiempo.

PP 5-2 Por el nudo de tuberías de la figura circula en régimen estacionario un fluido perfecto e incompresible. El nudo está sustentado por un elemento rígido O - D . Se pide:

- Determinar, justificando las fórmulas empleadas, las velocidades de entrada (v_A y v_B) y de salida (v_C) en función del caudal Q .
- Calcular la resultante (fuerza y momento en el punto O) de las acciones sobre el fluido del interior del nudo.
- Calcular las reacciones (fuerza y momento) en el punto D del soporte.
- Determinar la potencia W de la bomba necesaria para proporcionar los caudales indicados.



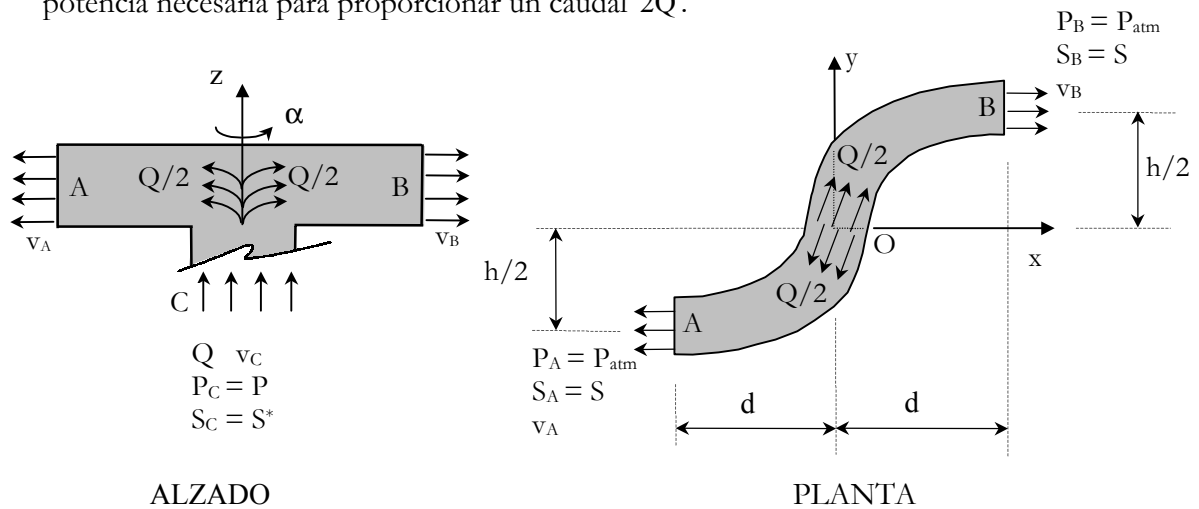
HIPÓTESIS:

- Peso del fluido y de la tubería despreciables.

PP 5-3 En el aspersor para riego cuya planta y alzado se presentan en la figura entra a través de la sección C un caudal de agua Q a una presión P y sale por los extremos A y B a la presión atmosférica P_{atm} . El flujo se supone estacionario.

Se pide:

- Las velocidades de entrada y de salida. (Justificar la fórmula empleada).
- La resultante en el punto O de las fuerzas ejercidas sobre el fluido del interior del aspersor (fuerzas y momentos).
- Las reacciones a ejercer sobre dicho punto O, para evitar que el aspersor se desplace verticalmente.
- Suponiendo que I_0 e I_1 son, respectivamente, los momentos centrales de inercia del aspersor en vacío y del aspersor lleno de agua, respecto del punto O, calcular la aceleración angular de giro del aspersor α .
- Si W^* es la potencia de la bomba necesaria para proporcionar el caudal Q , calcular la potencia necesaria para proporcionar un caudal $2Q$.



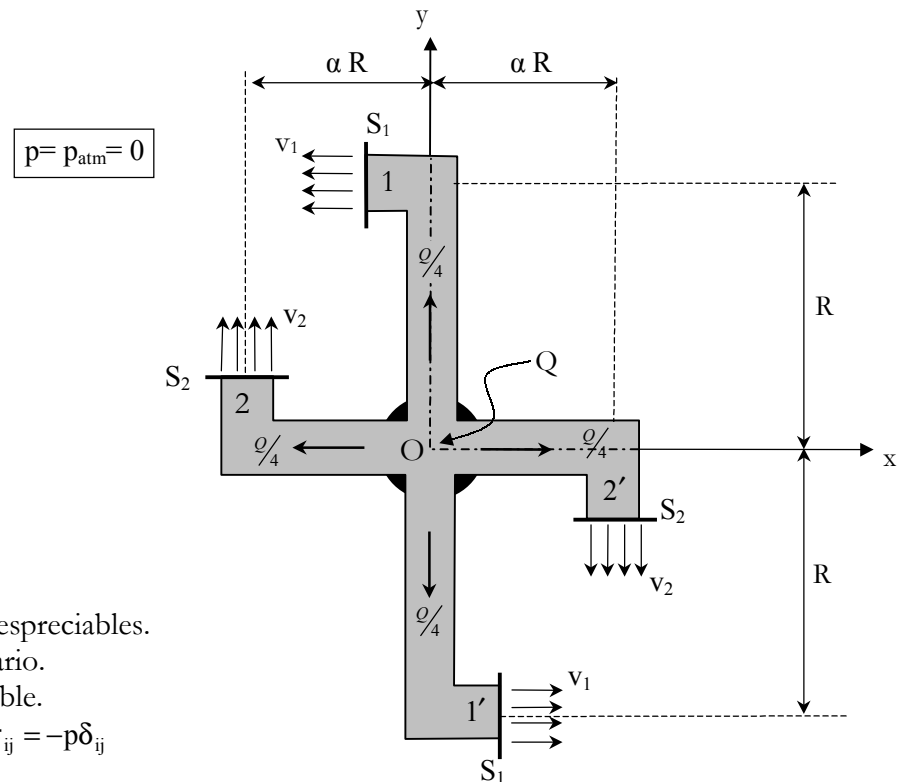
HIPÓTESIS:

- Fluido incompresible
- Fluido perfecto: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$
- Se desprecia el peso del aspersor y del agua de su interior.
- $S_A = S_B = S$
- $S_C = S^*$
- $m = I\alpha$

PP 5-4 En el dibujo se esquematiza la planta de una turbina en la que entra un caudal Q de agua por la sección O que sale repartido a partes iguales por las toberas 1-1' y 2-2' a las velocidades v_1 y v_2 , respectivamente. Las secciones de salida de las toberas son S_1 y S_2 , y sus excentricidades respecto al eje de la turbina son R y αR (ver figura). Se pide:

- Las velocidades v_1 y v_2 en función del caudal Q (justificar las fórmulas empleadas).
- El momento respecto al eje O ejercido sobre la turbina por el fluido de su interior.

- c) La relación entre S_1 y S_2 (en función del parámetro α) necesaria para que la turbina no gire.

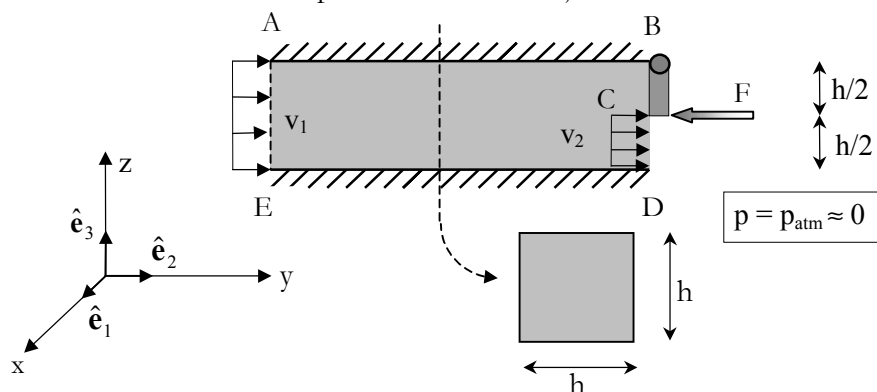


HIPÓTESIS:

- 1) Fuerzas másicas despreciables.
- 2) Régimen estacionario.
- 3) Fluido incompresible.
- 4) Fluido perfecto: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$

PP 5-5 En la figura se presenta la sección longitudinal de una tubería de sección transversal cuadrada por la que circula agua que entra por la sección AE y sale por la sección CD. En la sección de salida se dispone una compuerta BC que puede bascular alrededor de la rótula B, y que se mantiene en posición vertical mediante la acción de la fuerza F. Se pide:

- a) La velocidad de salida v_2 en función de la de entrada v_1 (justificar la fórmula empleada).
- b) La resultante en el punto B (fuerzas y momentos) de las acciones ejercidas sobre el fluido del interior de la tubería.
- c) La resultante en el punto B (fuerzas y momentos) de las acciones ejercidas por el fluido sobre la compuerta BC.
- d) El valor de la fuerza F y de las reacciones que ejerce la tubería sobre la compuerta en B.
- e) La potencia de la bomba necesaria para mantener el flujo.

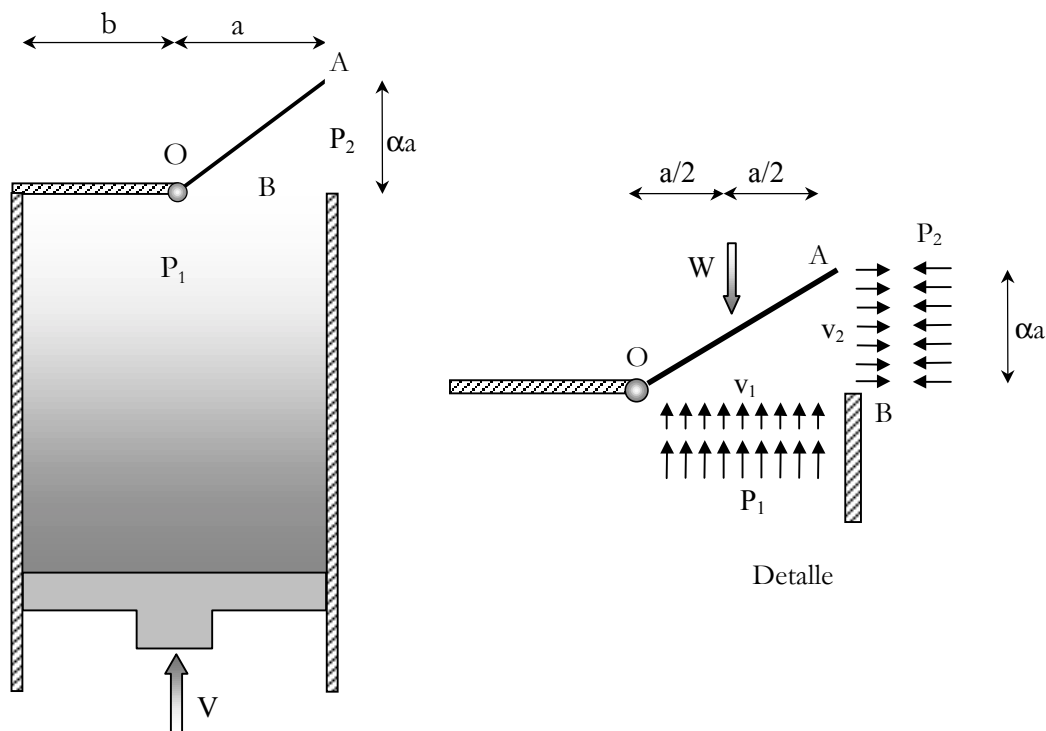


HIPÓTESIS:

- 1) Régimen estacionario
- 2) Fluido incompresible
- 3) Las presiones sobre las paredes laterales de la tubería se suponen constantes e iguales a la presión de entrada p .
- 4) Fluido perfecto: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$
- 5) Se desprecia el peso del fluido y de la compuerta.

PP 5-6 En la figura se esquematiza un bomba para inyección de un fluido incompresible provista de una válvula de retención OA cuyo peso, por unidad de anchura, es W . Se considera un cierto proceso de inyección en régimen estacionario definido por la velocidad del émbolo V y las presiones P_1 (en el interior de la cámara de presión) y P_2 (en el exterior). Determinar:

- a) Las velocidades v_1 y v_2 en función de V (justificar la fórmula empleada).
- b) Las fuerzas, por unidad de anchura, ejercidas por el fluido sobre la válvula OA.
- c) El momento, por unidad de anchura, en O ejercido por fluido sobre la válvula.
- d) El valor de W para que la válvula OA se mantenga en la posición de la figura durante el proceso de inyección.



HIPÓTESIS:

- 1) Se desprecian las fuerzas másicas en el fluido.
- 2) Fluido perfecto: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$.

Considere el análisis por metro lineal.

6 Elasticidad lineal

CUESTIONES RESUELTAS

CR 6-1 Justificar si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

- a) En un material termoelástico, los términos isentrópico y adiabático son equivalentes.
- b) Para materiales termoelásticos lineales, la segunda analogía térmica es aplicable siempre.

Resolución:

- a) Según el 2º Principio de la Termodinámica, tenemos la siguiente expresión:

$$\rho_0 \theta \dot{s}_{loc}^i = \rho_0 \theta \dot{s} - (\rho_0 r - \nabla \cdot \mathbf{q}) \geq 0$$

Para un material termoelástico siempre tendremos procesos reversibles y por tanto esta desigualdad se convierte en igualdad:

$$\rho_0 \theta \dot{s}_{loc}^i = \rho_0 \theta \dot{s} - (\rho_0 r - \nabla \cdot \mathbf{q}) = 0 \quad (1)$$

La definición de un proceso isentrópico (se mantiene la entropía constante) es:

$$\dot{s} = 0$$

La definición de un proceso adiabático (la variación de calor es nula) es:

$$\rho_0 r - \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$$

Por lo tanto, si se supone un proceso isentrópico, y se introduce su expresión matemática en la ecuación (1), quedará la definición de proceso adiabático:

$$\rho_0 r - \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$$

Y al revés, si se supone un proceso adiabático, y se introduce su expresión matemática en la ecuación (1), quedará la definición de proceso isentrópico:

$$\dot{s} = 0$$

En conclusión, la afirmación es cierta.

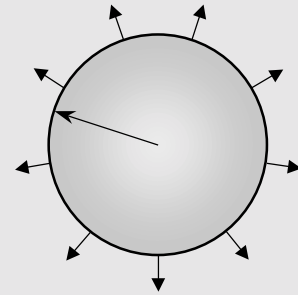
- b) La 2ª analogía térmica no es aplicable siempre. Se tiene que verificar la condición que el campo de deformaciones térmicas sea integrable, es decir, tiene que verificar las *Condiciones de Compatibilidad*. Puesto que las condiciones de compatibilidad involucran derivadas segundas de las componentes del tensor de deformaciones respecto x, y, z , se verificará automáticamente si $\alpha = \text{cte.}$ y $\Delta\theta = \text{cte.}$, o bien, si $\alpha\Delta\theta$ es lineal en x, y, z .

CR 6-2 El cilindro indefinido de la figura, constituido por un material elástico lineal isótropo, está sometido al siguiente estado de deformación (en coordenadas cilíndricas):

$$E_{rr} = E_{\theta\theta} = a \sin \theta \quad ; \quad E_{r\theta} = \frac{a \cos \theta}{2} \quad ;$$

$$E_{zz} = E_{\theta z} = E_{rz} = 0 \quad ; \quad a \ll 1$$

Calcular el vector de tracciones \mathbf{t} , en el contorno, en componentes cilíndricas



HIPÓTESIS:

1) λ , μ son las constantes de Lamé.

Resolución:

El *Tensor de Deformación* coincidirá con el *Tensor de Deformación Infinitesimal* y tendrá la siguiente expresión en coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{E}(r, \theta, z) = \boldsymbol{\epsilon}(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} a \sin \theta & \frac{a \cos \theta}{2} & 0 \\ \frac{a \cos \theta}{2} & a \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando la *Ecuación Constitutiva* de un material elástico lineal e isótropo se puede obtener el *Tensor de Tensiones* en coordenadas cilíndricas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\mathbf{E}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{E}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = a \begin{bmatrix} 2(\lambda + \mu) \sin \theta & \mu \cos \theta & 0 \\ \mu \cos \theta & 2(\lambda + \mu) \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \sin \theta \end{bmatrix}$$

El vector normal y exterior al cilindro tendrá la siguiente expresión en cilíndricas:

$$\mathbf{n} = (1, 0, 0)^T$$

Utilizando la definición del vector de tracciones se obtiene la siguiente expresión en coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = a \begin{bmatrix} 2(\lambda + \mu) \sin \theta \\ \mu \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

CR 6-3 Un sólido sin fuerzas de volumen ni coacciones exteriores, cuyo material es isótropo, está sometido a un incremento de temperatura $\Delta\theta$ igual en todos sus puntos. Encontrar su campo de desplazamientos, tensiones y deformaciones en coordenadas cartesianas.

Resolución:

Para resolver este problema se aplicará la 2ª *Analogía Térmica*. Se tiene un problema I que se descompondrá en suma de dos problemas: II y III.

PROBLEMA I:

$$\text{Acciones: } \begin{cases} \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^* = \mathbf{0} \quad , \text{ en } \Gamma_\sigma \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^t \quad , \text{ en } \Gamma_u \\ \Delta\theta_I = \Delta\theta \end{cases} \quad \text{Respuesta: } \mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$$

PROBLEMA II:

$$\text{Acciones: } \begin{cases} \mathbf{b}_{II} = \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_{II}^* = \mathbf{t}^* = \mathbf{0} \quad , \text{ en } \Gamma_\sigma \\ \mathbf{u}_{II}^* = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}_{III}^* = \mathbf{0} \quad , \text{ en } \Gamma_u \\ \Delta\theta_{II} = 0 \end{cases} \quad \text{Respuesta: } \mathbf{u}_{II} = \mathbf{0} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{II} = \mathbf{0} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}_{II} = \mathbf{0}$$

PROBLEMA III:

$$\text{Acciones: } \begin{cases} \mathbf{b}_{III} = \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_{III}^* = \mathbf{0} \quad , \text{ en } \Gamma_\sigma \\ \mathbf{u}_{III}^* = \mathbf{u}^t \quad , \text{ en } \Gamma_u \\ \Delta\theta_{III} = \Delta\theta \end{cases} \quad \text{Respuesta: } \mathbf{u}_{III} = \mathbf{u}^t, \boldsymbol{\varepsilon}_{III} = \boldsymbol{\varepsilon}^t, \boldsymbol{\sigma}_{III} = \mathbf{0}$$

Si el material es homogéneo e isótropo y tiene $\Delta\theta$ uniforme, entonces $\boldsymbol{\varepsilon}^t$ tendrá la siguiente expresión:

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^t = \alpha \Delta\theta \mathbf{1} \quad (\text{cte.})}$$

Teniendo en cuenta que se está con deformaciones infinitesimales, se deduce:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^t + \boldsymbol{\Omega} \Rightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^t + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{u}^t = (\boldsymbol{\varepsilon}^t + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{C}$$

Resulta, por tanto, que el campo de desplazamientos es:

$$\boxed{\mathbf{u}^t(x, y, z) = \begin{bmatrix} \alpha\Delta\theta x + \Omega_{12}y + \Omega_{13}z + C_1 \\ \alpha\Delta\theta y + \Omega_{21}x + \Omega_{23}z + C_2 \\ \alpha\Delta\theta z + \Omega_{31}x + \Omega_{32}y + C_3 \end{bmatrix}}$$

La solución final será:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{II} + \mathbf{u}_{III} = \mathbf{u}^t \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{II} + \boldsymbol{\varepsilon}_{III} = \boldsymbol{\varepsilon}^t \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_{II} + \boldsymbol{\sigma}_{III} = \mathbf{0} \end{aligned}}$$

CR 6-4 Un sólido elástico, lineal e isótropo, está sometido en todo su contorno exterior a una presión constante, de valor $\Delta\theta$, junto con un incremento de temperatura en su interior de valor $\Delta\theta = \theta(x, y, z)$. Ambas acciones se compensan de forma que no se producen desplazamientos. Obtener el valor de $\Delta\theta$ en cada punto del sólido.

Resolución:

Se aplicará la 1ª *Analogía Térmica*. Para ello el problema original I se descompondrá en suma de dos problemas: II y III.

PROBLEMA I:

$$\text{Acciones: } \begin{cases} \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^* = -p\mathbf{n}, \text{ en } \Gamma_\sigma \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{0}, \text{ en } \Gamma_u \\ \Delta\theta = \Delta\theta \end{cases} \quad \text{Respuesta: } \mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$$

PROBLEMA III:

Se resuelve primero el problema III, cuya solución es trivial:

$$\text{Acciones: } \begin{cases} \mathbf{b}_{\text{III}} = \frac{1}{\rho} \beta \nabla(\Delta\theta) \\ \mathbf{t}_{\text{III}}^* = -\beta \Delta\theta \mathbf{n}, \text{ en } \Gamma_\sigma \\ \mathbf{u}_{\text{III}}^* = \mathbf{0}, \text{ en } \Gamma_u \\ \Delta\theta_{\text{III}} = \Delta\theta \end{cases} \quad \text{Respuesta: } \mathbf{u}_{\text{III}} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{III}} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\text{III}} = -\beta \Delta\theta \mathbf{1}$$

PROBLEMA II:

$$\text{Acciones: } \begin{cases} \mathbf{b}_{\text{II}} = -\frac{1}{\rho} \beta \nabla(\Delta\theta) \\ \mathbf{t}_{\text{II}}^* = (-p + \beta \Delta\theta) \mathbf{n}, \text{ en } \Gamma_\sigma \\ \mathbf{u}_{\text{II}}^* = \mathbf{u}^* = \mathbf{0}, \text{ en } \Gamma_u \\ \Delta\theta_{\text{II}} = 0 \end{cases}$$

Para resolver el problema II se tendrá en cuenta la *Ecuación de Navier* y que $\mathbf{u}_{\text{II}} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{II}}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}_{\text{II}} + \rho \mathbf{b}_{\text{II}} &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{b}_{\text{II}} = \mathbf{0} \Rightarrow \beta \nabla(\Delta\theta) &= \mathbf{0} \Rightarrow \Delta\theta \text{ es uniforme} \end{aligned}$$

Además se tiene que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{II}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{\text{II}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}_{\text{II}}) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}_{\text{II}} &= \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{1} + \mu (\mathbf{u}_{\text{II}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}_{\text{II}}) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}_{\text{II}} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_{\text{II}}^* = (-p + \beta \Delta\theta) \mathbf{n} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -p + \beta \Delta\theta = 0 \end{aligned}$$

De esta forma se obtiene el valor del incremento de temperatura pedido:

$$\Delta\theta = \frac{p}{\beta}$$

CR 6-5 Se conocen las respuestas de un sólido termoelástico lineal en equilibrio a un sistema de acciones I ($\mathbf{b}^{(I)}, \mathbf{t}^{*(I)}$ en Γ_σ ; $\mathbf{u}^{*(I)}$ en Γ_u ; $\Delta\theta^{(I)}$) y a otro sistema de acciones II ($\mathbf{b}^{(II)}, \mathbf{t}^{*(II)}$ en Γ_σ ; $\mathbf{u}^{*(II)}$ en Γ_u ; $\Delta\theta^{(II)}$). Justificar cuál sería la respuesta al sistema I + II.

Resolución:

Las acciones resultantes serían las siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \mathbf{b}^{(I)} + \mathbf{b}^{(II)} \\ \Delta\theta &= \Delta\theta^{(I)} + \Delta\theta^{(II)} \\ \mathbf{t}^* &= \mathbf{t}^{*(I)} + \mathbf{t}^{*(II)} \quad \text{en } \Gamma_\sigma \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}^{*(I)} + \mathbf{u}^{*(II)} \quad \text{en } \Gamma_u\end{aligned}$$

Por hipótesis, se supondrá que la solución es la suma de las soluciones de los dos sistemas:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}^{(I)} + \mathbf{u}^{(II)} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^{(I)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(II)} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^{(I)} + \boldsymbol{\sigma}^{(II)}\end{aligned}$$

Se tendrá que comprobar si se cumplen las ecuaciones de *Equilibrio* (o *Cauchy*), *Geométricas* y *Constitutivas*. Se sabe que la solución es única y, por tanto, si se encuentra una que cumpla las *Ecuaciones de Gobierno* en el dominio y las *Condiciones de Contorno* en los límites del dominio (La solución propuesta cumple las condiciones de contorno, por definición), dicha solución será la correcta.

ECUACIÓN DE EQUILIBRIO:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{(I)} + \boldsymbol{\sigma}^{(II)}) + \rho (\mathbf{b}^{(I)} + \mathbf{b}^{(II)}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(I)} + \rho \mathbf{b}^{(I)}) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(II)} + \rho \mathbf{b}^{(II)}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

ECUACIONES GEOMÉTRICAS:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(I)} + \varepsilon_{ij}^{(II)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(I)} + u_{j,i}^{(I)}) + \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(II)} + u_{j,i}^{(II)}) = \frac{1}{2} [(u_{i,j}^{(I)} + u_{i,j}^{(II)}) + (u_{j,i}^{(I)} + u_{j,i}^{(II)})] = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}]$$

ECUACIONES CONSTITUTIVAS:

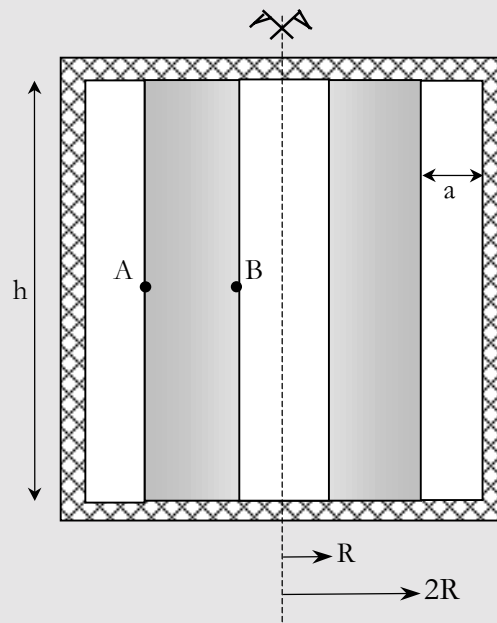
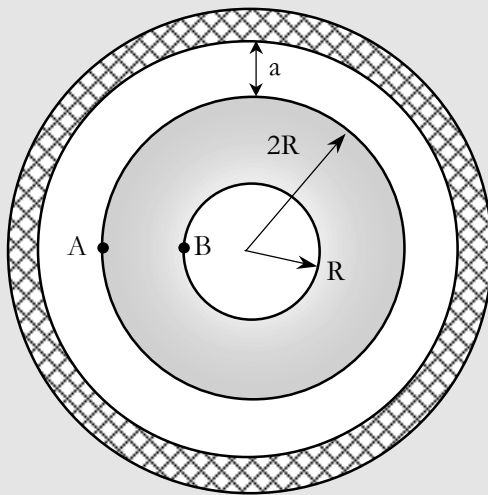
$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} = [C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(I)} + \beta_{ij} \Delta\theta^{(I)}] + [C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(II)} + \beta_{ij} \Delta\theta^{(II)}] = \\ &= C_{ijkl} [\varepsilon_{kl}^{(I)} + \varepsilon_{kl}^{(II)}] + \beta_{ij} [\Delta\theta^{(I)} + \Delta\theta^{(II)}] = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \Delta\theta\end{aligned}$$

Se comprueba, por tanto, que se cumplen todas las condiciones y que esta es, entonces, la solución del problema. Se concluye que el principio de superposición también funciona en termoelasticidad.

PROBLEMAS RESUELTOS

PR 6-1 Una corona cilíndrica de altura h , radio interior R y radio exterior $2R$, se encuentra en el interior de un cilindro de rigidez infinita de altura h y radio $2R + a$, con $a \ll R$. Se somete la corona a un campo uniforme de temperatura $\Delta\theta$. Determinar:

- El valor de $\Delta\theta$ para el que las paredes laterales de la corona y el cilindro entran en contacto.
- Dibujar, acotando los valores significativos, la curva $\delta - \Delta\theta$, siendo δ el alargamiento del radio interior de la corona. Determinar el valor de $\Delta\theta$ para el cual dicho radio recupera su valor original.
- Dibujar, acotando valores significativos, las curvas $\sigma_{rr} - \Delta\theta$, $\sigma_{\theta\theta} - \Delta\theta$, $\sigma_{zz} - \Delta\theta$, en los puntos A y B.



HIPÓTESIS:

- Módulo de Elasticidad: E
- Coefficiente de Poisson: $\nu = 0$
- Coefficiente de dilatación térmica: α
- Material elástico lineal e isótropo.
- No se considera el peso propio.
- No se considera el rozamiento entre paredes.

Resolución:

En el problema se pueden distinguir dos fases distintas:

1ª Fase

Se considera que la corona cilíndrica no ha entrado en contacto con el cilindro rígido. La condición de contorno en las paredes laterales, tanto interna como externa, será que la tensión radial sea nula.

Por tanto, se deberá controlar el momento en que se toquen, es decir, cuando se cumpla:

$$u_r(r = 2R) = a$$

2ª Fase

Se considera que existe contacto, y por tanto, la condición de contorno en la pared lateral externa es distinta que la de la primera fase. En este caso, se impondrá que el desplazamiento radial sea nulo. Sin embargo, en la pared interna la condición de contorno es la misma que en el otro apartado.

Al aplicar un $\Delta\theta$ positivo, el radio interior disminuirá, pues el radio exterior no puede aumentar más, al estar limitado por el cilindro infinitamente rígido. Así, la única posibilidad es que la corona se siga dilatando hacia dentro. Llegará un momento en que el radio interior, que en la 1ª fase había aumentado, volverá a recuperar su valor inicial.

Se aplicará la primera analogía térmica y el principio de superposición. Para ello se descompondrá el problema original (problema I) en la suma de dos: problema II y problema III.

En el caso del problema III, llamado problema trivial, las acciones actuantes son:

$$\mathbf{b}_{III} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\beta \Delta\theta)$$

Pero en este caso se tiene $\Delta\theta$ uniforme y β es un tensor esférico y constante ($\beta = \beta \mathbf{1}$) por tanto resulta:

$$\mathbf{b}_{III} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\beta \Delta\theta) = \mathbf{0}$$

Las condiciones de contorno son las siguientes:

1. En el contorno están los movimientos prescritos Γ_u : $\mathbf{u}_{III} = \mathbf{0}$
2. En el contorno están las tensiones prescritas Γ_σ : $\mathbf{t} = -\beta \Delta\theta \mathbf{n} = -\beta \Delta\theta \mathbf{n}$

La solución de este problema ya se conoce:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{III} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{III} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}_{III} &= -\beta \Delta\theta \mathbf{1} \end{aligned} \quad (1)$$

En el problema III no se considera el incremento térmico.

En el caso del problema II, llamado problema análogo, las acciones actuantes son:

$$\mathbf{b}_{II} = \mathbf{b} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\beta \Delta\theta)$$

En esta expresión $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ es un dato y el otro término también se anula como antes se ha visto. Por tanto se tiene:

$$\mathbf{b}_{II} = \mathbf{0}$$

Las condiciones de contorno para el problema II son:

1. En el contorno están los movimiento prescritos según Γ_u : $\mathbf{u}_{II} = \mathbf{u}^*$, siendo \mathbf{u}^* el movimiento impuesto del problema I.
2. En el contorno con tensiones prescritas en Γ_σ : $\mathbf{t}_{II} = \boldsymbol{\sigma}_{II} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* + \beta \Delta\theta \mathbf{n} = \mathbf{t}^* + \beta \Delta\theta \mathbf{n}$, siendo \mathbf{t}^* el vector de tracciones impuesto del problema I.

Se va a resolver el problema análogo, y a continuación se le sumará la solución del problema trivial y así se llegará a la solución final. (En este apartado no se añade el subíndice II, pero hay que considerar que se está trabajando con los movimientos, deformaciones y tensiones del problema II).

Por simetría cilíndrica, se sabe que el vector de desplazamientos \mathbf{u} tendrá estos valores:

$$\mathbf{u}(r, z) = [u_r(r) \quad 0 \quad u_z(z)]$$

Además, se impondrá que $u_z(z) = 0$ en todos los puntos, ya que no se dispone de ningún dato sobre S_{superior} y S_{inferior} de la corona. Para estas caras no se puede plantear ninguna condición de contorno en desplazamientos y de aquí no se pueden determinar las constantes de integración de u_z en caso de suponer $u_z \neq 0$. Así que finalmente se adopta:

$$\mathbf{u}(r) = [u_r(r) \quad 0 \quad 0]$$

Con la *Ecuación de Navier-Stokes* se podrá solucionar este problema:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

Hay que tener en cuenta que se está trabajando en coordenadas cilíndricas y por tanto la ecuación anterior hay que adaptarla a este sistema de coordenadas. Previamente, y partir de los datos, hay que establecer el valor de los parámetros que intervienen en el problema ($E, \alpha, \nu = 0$):

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Rightarrow \lambda = 0 \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \Rightarrow \mu = G = \frac{E}{2} \\ \beta &= \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha \Rightarrow \beta = E\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

Introduciendo los datos del problema se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \omega_\theta = \omega_z = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow e &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \Rightarrow \\ \Rightarrow E \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Si se integra esta última ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) &= 2A \\ \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) &= 2Ar \\ ru_r &= Ar^2 + B \\ u_r &= Ar + \frac{B}{r} \\ \mathbf{u}(r) &= \left[Ar + \frac{B}{r} \quad 0 \quad 0 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Con estos desplazamientos se pueden obtener fácilmente las correspondientes deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(r) = \begin{bmatrix} A - \frac{B}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & A + \frac{B}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Por último, para obtener las tensiones se usa la ecuación constitutiva de un material elástico lineal isótropo, particularizado con las expresiones (2):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \lambda(\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma} &= E\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5)$$

1ª Fase

Se tienen dos incógnitas a determinar (A y B) y por ello se deben establecer dos condiciones de contorno. Se pueden imponer en el problema las tensiones en las dos paredes laterales de la corona:

CONDICIÓN DE CONTORNO EN $r = 2R$

Si $r = 2R$ se tiene, según las condiciones de contorno Γ_σ en el problema análogo:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* + \beta\Delta\theta\mathbf{n} = \mathbf{t}^* + \beta\Delta\theta\mathbf{n}$$

De aquí se conocen los siguientes datos:

$\mathbf{n} = [1 \ 0 \ 0]$: normal unitaria exterior.

$\mathbf{t}^* = \mathbf{0}$: ya que en el problema I y en esta fase, las paredes laterales no tienen cargas.

$\boldsymbol{\sigma}$: viene dado por las expresiones (4) y (5).

Por tanto, queda la siguiente condición:

$$\sigma_{rr}(r = 2R) = \beta\Delta\theta$$

Y sustituyendo el valor de la tensión radial y teniendo en cuenta (2) resulta:

$$A - \frac{B}{4R^2} = \alpha\Delta\theta \quad (6)$$

CONDICIÓN DE CONTORNO EN $r = R$

Si $r = R$ y según las condiciones de contorno Γ_σ en el problema análogo se tiene que:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* + \beta\Delta\theta\mathbf{n} = \mathbf{t}^* + \beta\Delta\theta\mathbf{n}$$

De aquí se conocen los siguientes datos:

$\mathbf{n} = [-1 \ 0 \ 0]$: normal unitaria exterior.

$\mathbf{t}^* = \mathbf{0}$: ya que en el problema I y en esta fase, las paredes laterales no tienen cargas.

$\boldsymbol{\sigma}$: viene dado por las expresiones (4) y (5).

Por tanto, queda la siguiente condición:

$$\sigma_{rr}(r = R) = \beta\Delta\theta$$

Y sustituyendo el valor de la tensión radial y teniendo en cuenta (2) resulta:

$$A - \frac{B}{R^2} = \alpha \Delta \theta \quad (7)$$

Teniendo en cuenta (6) y (7):

$$\begin{aligned} A &= \alpha \Delta \theta \\ B &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (3), (4) y (5) se obtendrán los desplazamientos, las deformaciones y las tensiones del problema análogo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{II} &= [\alpha \Delta \theta r \quad 0 \quad 0] \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{II} &= \begin{bmatrix} \alpha \Delta \theta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \Delta \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}_{II} &= \begin{bmatrix} E \alpha \Delta \theta & 0 & 0 \\ 0 & E \alpha \Delta \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Teniendo en cuenta el principio de superposición, (1), (2) y (9), se resuelve el problema original en la primera fase:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [\alpha \Delta \theta r \quad 0 \quad 0] \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \alpha \Delta \theta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \Delta \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E \alpha \Delta \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Para obtener el valor de $\Delta \theta^*$ para el cual las paredes laterales del cilindro y la corona entran en contacto, basta imponer:

$$\begin{aligned} u_r(r=2R) &= a \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha \Delta \theta 2R &= a \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta \theta^* = \frac{a}{2\alpha R}} \quad (11)$$

b) Primero se determinará $\Delta \theta^{**}$, para el que se cumple que el radio interior recupera su posición inicial.

2ª Fase

Se volverá a usar la misma geometría que en el problema inicial, pero ahora existe contacto entre la corona y el cilindro. Es como resolver un problema aparte, con la misma geometría pero con diferentes condiciones de contorno.

En este apartado se prescindirá de la primera fase, pero recordando que el sólido parte de un estado que es el resultado de la anterior fase, es decir, ha tenido unos desplazamientos, deformaciones, tensiones e incrementos de temperatura. Se utilizará la variable $\overline{\Delta\theta}$.

Se aplica la analogía térmica, igual que en el apartado anterior. El problema III queda igual y por tanto también su resultado (1). Por tanto hay que resolver el problema II con las mismas expresiones (3), (4) y (5):

(Aquí también se omiten los subíndices II, aunque hay que volver a remarcar que todo está referido al problema II y no al original)

Se tienen dos incógnitas a determinar: A, B. Por ello se deben establecer dos condiciones de contorno. Se pueden imponer las tensiones en la pared lateral interna de la corona y los desplazamientos de la exterior:

CONDICIÓN DE CONTORNO EN $r = 2R$

Si $r=2R$ y según las condiciones de contorno Γ_u en el problema análogo se tiene:

$$u_r(r = 2R) = 0$$

Por tanto, queda la siguiente condición:

$$A2R + \frac{B}{2R} = 0 \quad (12)$$

CONDICIÓN DE CONTORNO EN $r = R$

Si $r=R$ se tiene según las condiciones de contorno Γ_σ en el problema análogo:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* + \beta \overline{\Delta\theta} \mathbf{n} = \mathbf{t}^* + \beta \overline{\Delta\theta} \mathbf{n}$$

De aquí se conocen los siguientes datos:

$\mathbf{n} = [-1 \ 0 \ 0]$: normal unitaria exterior.

$\mathbf{t}^* = \mathbf{0}$: ya que en el problema I y en esta fase, la pared lateral interna no tiene cargas.

$\boldsymbol{\sigma}$: viene dado por las expresiones (3) y (4).

Por tanto, queda la siguiente condición:

$$\sigma_{rr}(r = R) = \beta \overline{\Delta\theta}$$

Y sustituyendo el valor de la tensión radial y teniendo en cuenta (2) resulta:

$$A - \frac{B}{R^2} = \alpha \overline{\Delta\theta} \quad (13)$$

Teniendo en cuenta (12) y (13):

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{5} \alpha \overline{\Delta\theta} \\ B &= -\frac{4}{5} \alpha \overline{\Delta\theta} R^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (3), (4) y (5) se obtienen los desplazamientos, las deformaciones y las tensiones del problema análogo:

$$\mathbf{u}_{III} = \left[\frac{1}{5} \alpha \overline{\Delta\theta} \left(r - \frac{4R^2}{r} \right) \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{III} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\alpha\overline{\Delta\theta}(1 + \frac{4R^2}{r^2}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}\alpha\overline{\Delta\theta}(1 - \frac{4R^2}{r^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}_{III} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5}E\alpha\overline{\Delta\theta}(1 + \frac{4R^2}{r^2}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}E\alpha\overline{\Delta\theta}(1 - \frac{4R^2}{r^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el principio de superposición, (1), (2) y (15), se resuelve el problema original en la segunda fase:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\alpha\overline{\Delta\theta}(r - \frac{4R^2}{r}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\alpha\overline{\Delta\theta}(1 + \frac{4R^2}{r^2}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}\alpha\overline{\Delta\theta}(1 - \frac{4R^2}{r^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \frac{4}{5}E\alpha\overline{\Delta\theta}(-1 + \frac{R^2}{r^2}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5}E\alpha\overline{\Delta\theta}(-1 - \frac{R^2}{r^2}) & 0 \\ 0 & 0 & -E\alpha\overline{\Delta\theta} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta que no se ha considerado para nada que se ha partido del estado final de la fase 1ª y no de un estado neutro como se ha supuesto en este apartado.

En realidad se parte del estado con movimientos, deformaciones, tensiones e incremento de temperatura correspondientes a $\Delta\theta = \Delta\theta^*$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{inicial} &= \mathbf{u}_{1^a \text{ Fase}}(\Delta\theta = \Delta\theta^*) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{inicial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{1^a \text{ Fase}}(\Delta\theta = \Delta\theta^*) \\ \boldsymbol{\sigma}_{inicial} &= \boldsymbol{\sigma}_{1^a \text{ Fase}}(\Delta\theta = \Delta\theta^*)\end{aligned} \quad (17)$$

Y, en realidad, la variable $\overline{\Delta\theta}$ en las expresiones (16) no es el incremento de temperatura total, sino que es la diferencia de temperatura del momento con $\Delta\theta^*$. Es decir:

$$\overline{\Delta\theta} = \Delta\theta - \Delta\theta^* \quad (18)$$

Así teniendo en cuenta (16), (17) y (18) se obtienen los movimientos, deformaciones y tensiones durante la fase 2ª:

$$\mathbf{u}_{2^a \text{ Fase}} = \mathbf{u}_{\text{inicial}} + \mathbf{u}(\overline{\Delta\theta})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{2^a \text{ Fase}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{inicial}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\overline{\Delta\theta})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{2^a \text{ Fase}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{inicial}} + \boldsymbol{\sigma}(\overline{\Delta\theta})$$

Por lo tanto, para determinar $\Delta\theta^{**}$, bastará con imponer que el movimiento del radio interior, según la 1ª fase, sea igual pero de signo contrario al de la 2ª fase, para que así el movimiento total sea nulo.

1ª fase: desplazamiento para $r = R$ y $\Delta\theta = \Delta\theta^*$. Según (10) y (11) se obtiene:

$$\delta_1 = u_r(r = R, \Delta\theta = \Delta\theta^*) = \alpha\Delta\theta^* R = \frac{a}{2} \quad (19)$$

2ª fase: desplazamiento para $r = R$ y $\overline{\Delta\theta} = \overline{\Delta\theta}^{**}$. Según (16) se obtiene:

$$\delta_2 = u_r(r = R, \overline{\Delta\theta} = \overline{\Delta\theta}^{**}) = -\frac{3}{5}\alpha\overline{\Delta\theta}^{**} R$$

$$\delta_1 = -\delta_2 \Rightarrow \overline{\Delta\theta}^{**} = \frac{5a}{6\alpha R} \quad (20)$$

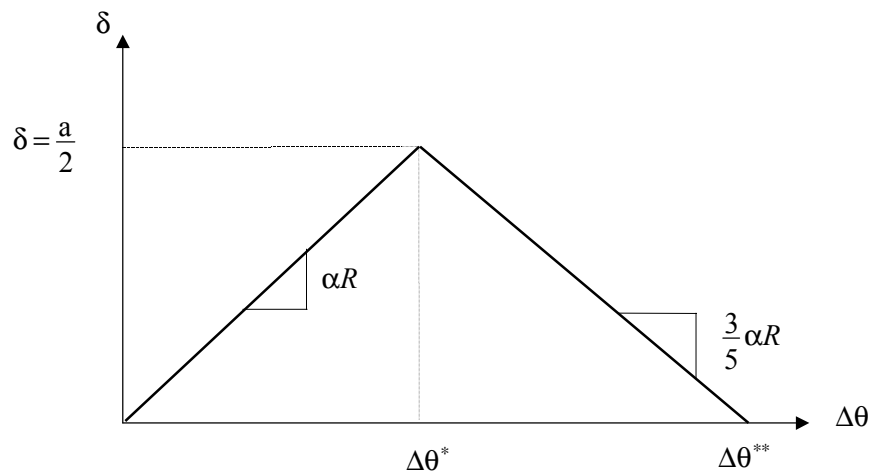
Finalmente, según (18) se encuentra el incremento de temperatura total:

$$\Delta\theta^{**} = \overline{\Delta\theta}^{**} + \Delta\theta^*$$

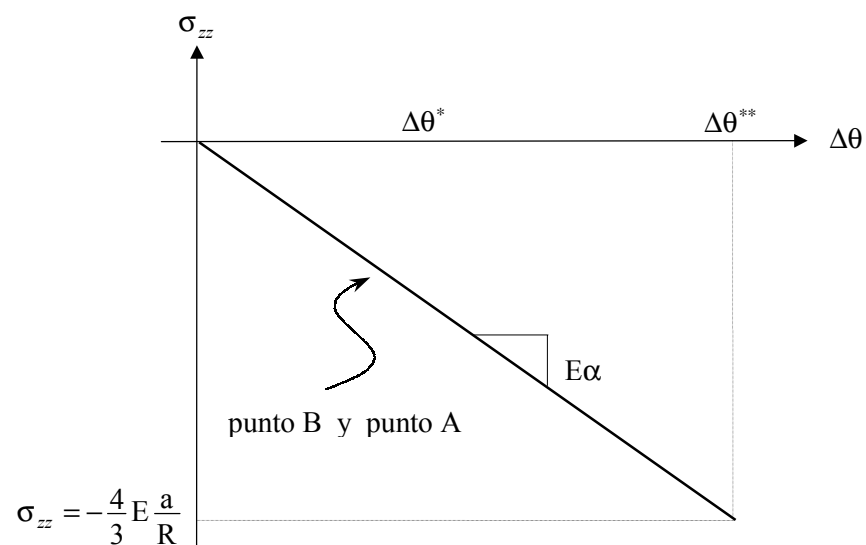
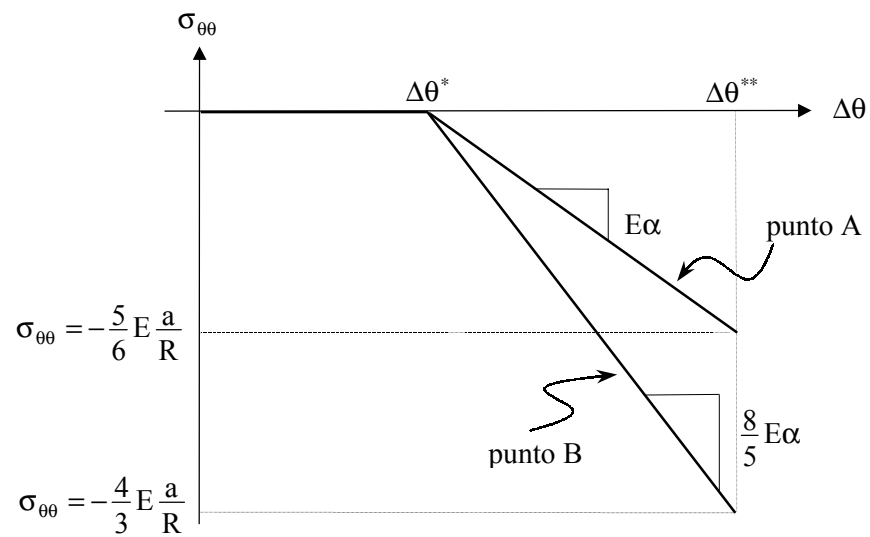
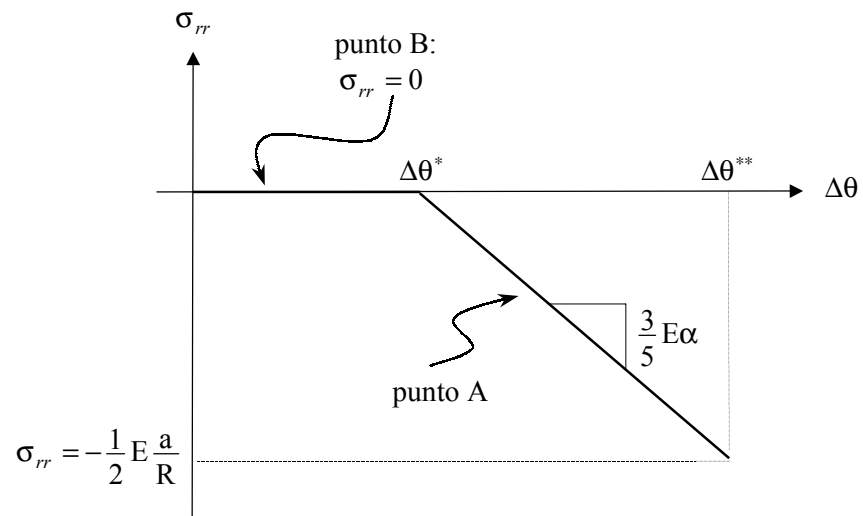
$$\Delta\theta^{**} = \frac{5a}{6\alpha R} + \frac{a}{2\alpha R}$$

$$\boxed{\Delta\theta^{**} = \frac{4a}{3\alpha R}}$$

Ahora se dibujará el gráfico δ (desplazamiento del radio interior de la corona) - $\Delta\theta$:



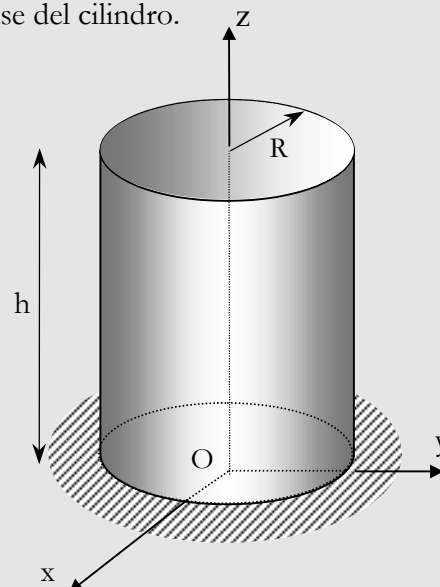
c) Para dibujar las gráficas $\sigma_{rr} - \Delta\theta$, $\sigma_{\theta\theta} - \Delta\theta$, $\sigma_{zz} - \Delta\theta$ para los puntos B ($r = R$) y A ($r = 2R$), se deben tener en cuenta las expresiones (10) y (16):



PR 6-2 El cilindro macizo de la figura tiene impedido el movimiento de su base inferior y está sometido al siguiente campo de deformaciones infinitesimales:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{xz} = -\frac{\varphi y}{2} \quad ; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\varphi x}{2}$$

- Obtener el campo de desplazamientos.
- Demostrar que dichos desplazamientos pueden interpretarse como un giro rígido, alrededor del eje z , de cada sección horizontal del cilindro respecto a la base. Interpretar el valor de φ en ese contexto.
- A la luz de lo indicado en el apartado anterior, obtener el campo de desplazamientos y de deformaciones en coordenadas cilíndricas.
- Suponiendo que el material sigue la Ley de Hooke, obtener las componentes en cilíndricas del tensor de tensiones y dibujar la distribución de tensiones sobre la sección lateral del cilindro y sobre una sección horizontal cualquiera del mismo. Obtener la reacción, fuerza y momento en O , sobre la base del cilindro.



HIPÓTESIS:

- Propiedades del material: E , G .

COMENTARIO:

Se va a demostrar que la solución de Coulomb en el caso de una pieza empotrada con un momento torsor en el otro extremo no es una solución simplificada como la mayoría de las de Resistencia de Materiales, sino que se trata de una solución exacta.

Resolución:

- Para obtener el campo de desplazamientos debemos integrar el campo de deformaciones dado en el problema.

Primero se encuentra el *Vector de Rotación* θ :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \frac{\partial E_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial E_{xy}}{\partial z} = -\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \frac{\partial E_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial E_{xy}}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \theta_1 \text{ no depende de } y \quad (\theta_1 \neq \theta_1(y))$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \frac{\partial E_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial E_{yz}}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \theta_1 \text{ no depende de } z \quad (\theta_1 \neq \theta_1(z))$$

$$\Rightarrow \theta_1 = -\frac{\varphi}{2}x + C_1$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \frac{\partial E_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial E_{xz}}{\partial x} = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \theta_2 \neq \theta_2(x)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial y} = \frac{\partial E_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial E_{yz}}{\partial x} = 0 - \frac{\varphi}{2} = -\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial z} = \frac{\partial E_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial E_{zz}}{\partial x} = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \theta_2 \neq \theta_2(z)$$

$$\Rightarrow \theta_2 = -\frac{\varphi}{2}y + C_2$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial x} = \frac{\partial E_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial E_{xx}}{\partial y} = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \theta_3 \neq \theta_3(x)$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial y} = \frac{\partial E_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial E_{xy}}{\partial y} = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \theta_3 \neq \theta_3(y)$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial z} = \frac{\partial E_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial E_{xz}}{\partial y} = \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \varphi$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \varphi z + C_3$$

Posteriormente se busca el *Vector de Desplazamientos* \mathbf{u} :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = E_{xx} = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = E_{xy} - \theta_3 = -\varphi z - C_3 \Rightarrow u_x = -\varphi zy - C_3 y + \psi_1(z)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = E_{xz} + \theta_2 = -\frac{\varphi}{2}y - \frac{\varphi}{2}y + C_2 = -\varphi y + \frac{d\psi_1(z)}{dz} = -\varphi y + C_2$$

$$\Rightarrow u_x = -\varphi zy - C_3 y + C_2 z + C_1'$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = E_{xy} + \theta_3 = \varphi z + C_3 \Rightarrow u_y = \varphi zx + C_3 x + \psi_2(z)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = E_{yy} = 0$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = E_{yz} - \theta_1 = \frac{\varphi}{2}x + \frac{\varphi}{2}x - C_1 = \varphi x + \frac{d\psi_2(z)}{dz} = \varphi x - C_1$$

$$\Rightarrow u_y = \varphi zx + C_3 x - C_1 z + C_2'$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = E_{xz} - \theta_2 = -\frac{\varphi}{2}y + \frac{\varphi}{2}y - C_2 = -C_2 \Rightarrow u_z = -C_2 x + \psi_3(y)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = E_{yz} + \theta_1 = \frac{\varphi}{2}x - \frac{\varphi}{2}x + C_1 = C_1 = \frac{d\psi_3(y)}{dy}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = E_{zz} = 0$$

$$\Rightarrow u_z = -C_2 x + C_1 y + C_3$$

Para obtener las constantes se impondrán las condiciones de contorno, es decir, se impondrá que el cilindro está empotrado en la base:

$$u_x|_{z=0} = 0, \forall x, y \Rightarrow -C_3 y + C_1' = 0, \forall x, y \Rightarrow C_1' = C_3 = 0$$

$$u_y|_{z=0} = 0, \forall x, y \Rightarrow C_3 x + C_2' = 0, \forall x, y \Rightarrow C_2' = 0$$

$$u_z|_{z=0} = 0, \forall x, y \Rightarrow -C_2 x + C_1 y + C_3' = 0, \forall x, y \Rightarrow C_3' = C_1 = C_2 = 0$$

Finalmente queda:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\phi zy \\ \phi zx \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Si $x = y = 0$ entonces $\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{0}$, luego el eje z del cilindro no se mueve.

Considérese una sección transversal del cilindro de cota $z = k = \text{cte}$. Supóngase ahora que toda la sección gira un ángulo ϕ pequeño, ya que se están considerando pequeñas deformaciones ($\tan \phi \approx \phi$). Entonces se puede interpretar el desplazamiento de un punto P como ϕr , siendo r la distancia del punto en cuestión al eje z . Así, si toda la sección tiene un movimiento de giro de sólido rígido de ángulo ϕ , el campo de desplazamientos se escribe como:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\phi y \\ \phi x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y comparándolo con el resultado del apartado a) se puede concluir lo siguiente:

$$\phi|_{z=k} = \phi k$$

Es decir, $\phi = \frac{\phi}{k}$ es el giro por unidad de altura z .

c) Se obtiene ahora el valor del desplazamiento en la dirección radial:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = [-\phi zy \quad \phi zx \quad 0]$$

$$|\mathbf{u}|^2 = \phi^2 z^2 (y^2 + x^2) = \phi^2 z^2 r^2 \Rightarrow |\mathbf{u}| = \phi z r$$

Además $u_r = u_z = 0$, es decir, no hay desplazamiento ni en la dirección del eje z ni radialmente. Así que el campo desplazamientos en cilíndricas queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ r\varphi z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para hallar $\boldsymbol{\varepsilon}(r, \theta, z)$ a partir de $\mathbf{u}(r, \theta, z)$ se usarán las ecuaciones que relacionan desplazamientos y deformaciones en coordenadas cilíndricas. El campo de deformaciones resultante en cilíndricas es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r\varphi}{2} \\ 0 & \frac{r\varphi}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

d) Suponiendo que el material cumple la Ley de Hooke, el campo de tensiones se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$

Que en este caso queda como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}$$

El campo de tensiones resultante es:

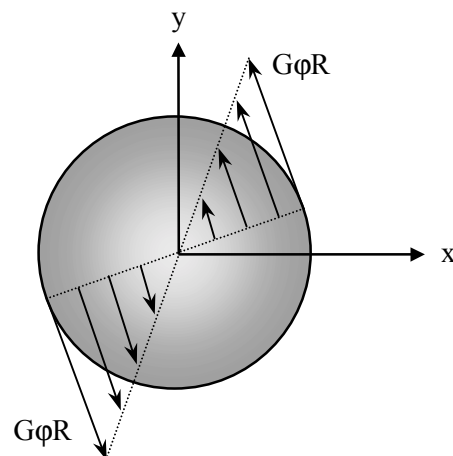
$$\boldsymbol{\sigma}(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\varphi r \\ 0 & G\varphi r & 0 \end{bmatrix}$$

Las tensiones en la superficie lateral son, por tanto:

$$\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0$$

Y las tensiones sobre una sección horizontal cualquiera son:

$$\tau_{zr} = 0 \quad , \quad \tau_{z\theta} = r\varphi G \quad , \quad \sigma_{zz} = 0$$



REACCIÓN EN LA BASE DEL CILINDRO:

Se pueden calcular las reacciones según las siguientes fórmulas, aplicadas a la sección $z = 0$:

$$\mathbf{R} = \int_S \mathbf{t} dS, \quad \mathbf{M} = \int_S \mathbf{r} \wedge \mathbf{t} dS$$

donde \mathbf{r} es el vector posición y $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$.

Otra manera es basarse en el dibujo de las tensiones en dicha sección:

\mathbf{R} se calcula como la suma de las tensiones tangenciales en la sección empotrada. Por simetría, en cada diámetro de la sección la suma es nula, por lo tanto, la suma total (de todos los diámetros) es nula también.

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{0}}$$

Para calcular el momento se aplica la fórmula inicial:

$$\mathbf{M} = \left(\int_S \tau r dS \right) \mathbf{e}_z = \left(\int_S G r \phi r dS \right) \mathbf{e}_z = G \phi \left(\int_S r^2 dS \right) \mathbf{e}_z = G \phi I_0 \mathbf{e}_z$$

$$\boxed{M = G I_0 \phi}$$

Donde I_0 es el momento de inercia polar de la sección respecto del eje z .

Así que la fórmula que se usa en Resistencia de Materiales $\left(\phi = \frac{M_T}{G I_0} \right)$ no es ninguna aproximación, sino que es exacta.

CUESTIONES PROPUESTAS

CP 6-1 Obtener la ecuación constitutiva de un material elástico lineal a partir del potencial elástico.

CP 6-2 Justificar si es cierta o no la siguiente afirmación: “En un material termoeelástico, la potencia tensional es una diferencial exacta.”

CP 6-3 Sea la expresión del potencial elástico:

$$\hat{u}(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} K e^2 + G \epsilon'_{ij} \epsilon'_{ij} \quad \left(K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$$

Determinar, justificándolo, el rango de valores posibles de E y ν .

CP 6-4 Obtención de la ley de Hooke en función de la parte esférica y desviadora de los tensores de tensión y deformación.

CP 6-5 Definir un problema cuasiestático:

- a) Ecuaciones e incógnitas en el problema cuasiestático.
 - b) Condiciones de contorno.
-

CP 6-6 Definir qué es un problema elástico cuasiestático en relación con el caso general del problema elástico dinámico (qué lo caracteriza en cuanto a las acciones, las fuerzas de inercia y las condiciones iniciales). Partiendo de las ecuaciones de gobierno del problema dinámico, escribir las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno que gobiernan el caso cuasiestático.

CP 6-7 Condiciones de contorno e iniciales del problema elástico lineal.

CP 6-8 Explicar de forma esquemática (no hace falta escribir las ecuaciones en forma explícita) el esquema de resolución (obtención de $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, \mathbf{u}) de un problema estático, elástico-lineal, planteado en tensiones, indicando cuándo se utilizan las diversas condiciones de contorno.

CP 6-9 Explicar de forma esquemática (no hace falta escribir las ecuaciones en forma explícita) el esquema de resolución (obtención de $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, \mathbf{u}) de un problema estático, elástico-lineal, planteado en desplazamientos, indicando cuándo se utilizan las diversas condiciones de contorno.

CP 6-10 Analizar el concepto de reversibilidad en los materiales elásticos y matizar la afirmación: “ Para un material elástico, las relaciones tensión-deformación son únicas e independientes del proceso de carga.”

CP 6-11 Desarrollar los siguientes conceptos en termoelasticidad lineal para materiales anisótropos:

- a) Hipótesis.
 - b) Ecuaciones de Lamé.
-

CP 6-12 Definir brevemente e indicar el campo de validez de los siguientes principios de la Mecánica de Sólidos:

- a) Principio de la unicidad de la solución.
 - b) Principio de superposición.
 - c) Principio de Saint-Venant.
-

CP 6-13 Enunciar el principio de superposición, establecer su campo de validez y demostrarlo.

CP 6-14 Explicar gráficamente y escribir las ecuaciones y condiciones de contorno necesarias para resolver un problema termoelástico lineal aplicando:

- a) La primera analogía térmica.
 - b) La segunda analogía térmica.
-

CP 6-15 A partir de la descomposición de las tensiones en su parte térmica y no-térmica, justificar la primera analogía térmica.

CP 6-16 Definir las hipótesis básicas, estados a considerar y condiciones de contorno en la aplicación de la segunda analogía térmica para la resolución de un problema termoelástico lineal. Justificar en qué situaciones será o no aplicable.

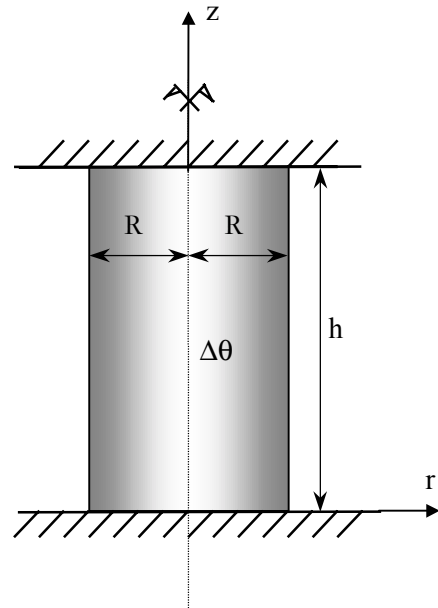
PROBLEMAS PROPUESTOS

PP 6-1 Un cilindro macizo de radio R y altura h está situado entre dos paredes infinitamente rígidas, encajando perfectamente entre ellas sin producirse ninguna tensión. Se somete al cilindro a un incremento de temperatura $\Delta\theta$. Se pide:

- Obtener el campo de desplazamientos en función de las correspondientes constantes de integración.
- Determinar las constantes de integración.
- Determinar el estado tensional y dibujar su variación a lo largo del radio.

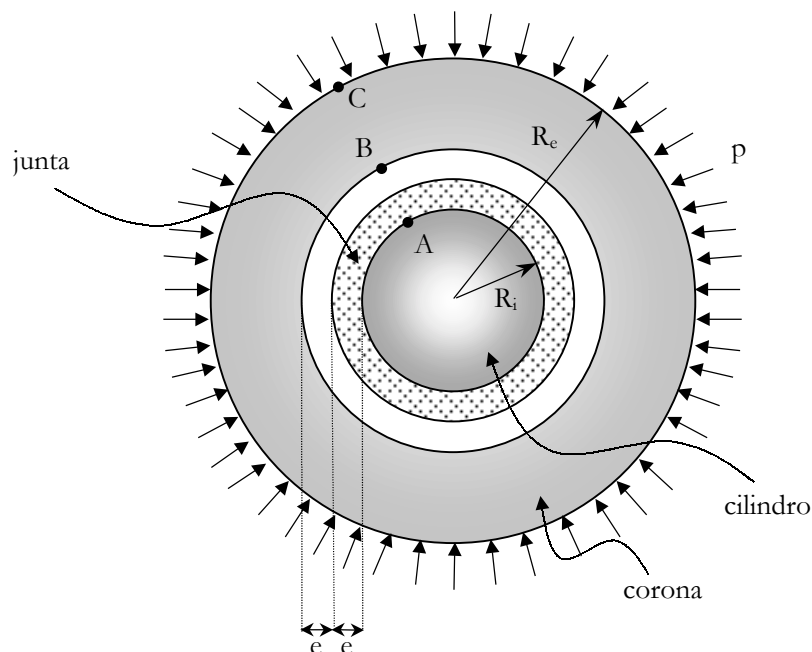
HIPÓTESIS:

- Propiedades del material: $\lambda = \mu$
 $\alpha = \alpha(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r$
- Se supone rozamiento nulo entre paredes.



PP 6-2 Un cilindro de radio R_i está situado en el interior de una corona cilíndrica de radio interior $R_i + 2e$ y radio exterior R_e . Entre el cilindro y la corona se encuentra una junta elástica de radio interior R_i y cuyo espesor es “e”. Se somete a la corona a una presión exterior p . Se pide:

- Obtener el campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones en el cilindro y la corona.
- Dibujar los gráficos $U_r - p$, donde U_r es el desplazamiento radial, y $\sigma_r - p$, donde σ_r es la tensión radial para los puntos A, B y C de la figura.



DATOS:

- $R_i = 1$
- $R_e = 2$
- $\nu = 0$

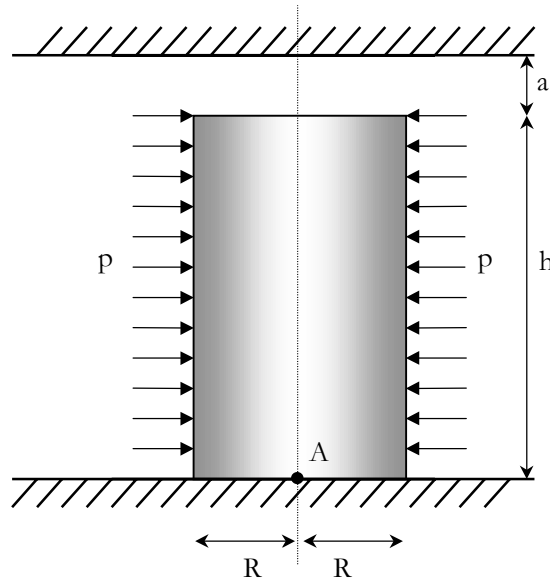
4) E (Módulo de Young)

HIPÓTESIS:

- 1) Ley constitutiva de la junta elástica: $p^* = K \delta^*$, donde p^* es la presión que actúa sobre la junta, δ^* es el acortamiento de su espesor y K es su módulo de deformación.
- 2) $e \ll R_i$.
- 3) Se admite un comportamiento de deformación plana en pequeñas deformaciones.

PP 6-3 Un cilindro de material isotrópico, elástico y lineal, se encuentra apoyado sobre una base rígida. A una distancia “a” muy pequeña ($a \ll h$) de su cara superior se encuentra otra superficie rígida. Sobre el cilindro actúa una presión uniforme p en toda la superficie lateral. Dibujar, acotando los valores significativos, las siguientes curvas:

- a) Curva $p - \delta$, donde δ es el acortamiento del radio R del cilindro.
- b) Curva $p - \sigma_A$, donde σ_A es la tensión normal a la superficie de contacto inferior en el punto A.



HIPÓTESIS:

- 1) No se considerará la acción del peso propio.
- 2) Coeficientes de Lamé: $\lambda = \mu$
- 3) Se considera el problema cuasiestático.

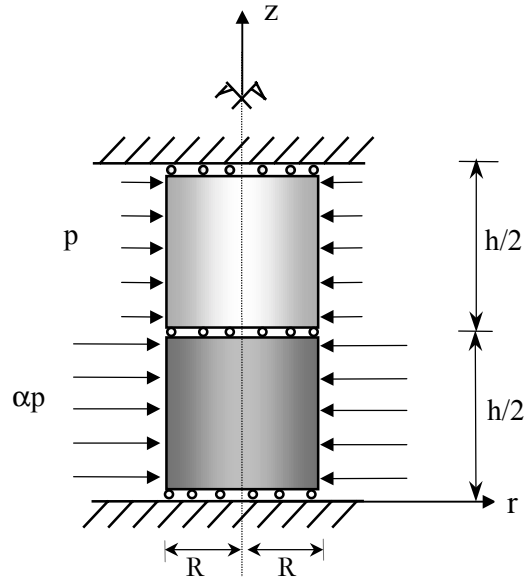
PP 6-4 Dos cilindros macizos constituidos por materiales elásticos distintos se encuentran superpuestos verticalmente y confinados entre dos paredes infinitamente rígidas. Los cilindros se hallan sometidos a la acción de las presiones exteriores p y αp ($p > 0, \alpha > 0$) tal como se indica en la figura. Se pide:

- a) Obtener el campo de desplazamientos para los dos cilindros en función de las constantes de integración (a partir de hipótesis razonadas).

- b) Indicar todas las condiciones de contorno a aplicar para los distintos contornos del problema.
- c) Suponiendo que el valor de la constante α es tal que la sección de contacto de los dos cilindros no tiene desplazamiento vertical, calcular las constantes de integración y el valor de α .

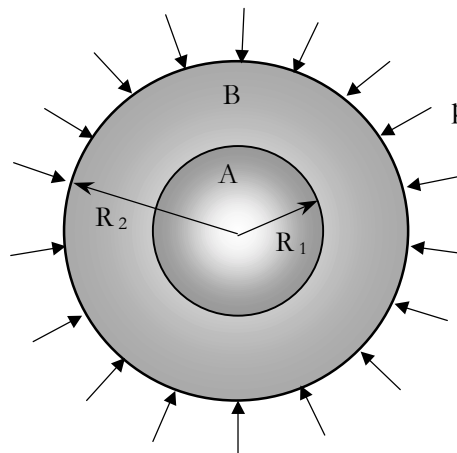
HIPÓTESIS:

- 1) Cilindro superior: $\lambda_1 = \mu_1$
- 2) Cilindro inferior: $\lambda_2 = \mu_2$
- 3) Se supone rozamiento nulo entre cilindro-cilindro y cilindro-pared.
- 4) Se desprecia el peso propio.



PP 6-5 La esfera maciza A de radio exterior R_1 y la corona esférica maciza B, de radio exterior R_2 son del mismo material. La superficie exterior de A y la interior de B se encuentran separadas una distancia muy pequeña “a” ($a \ll R_1$ y $a \ll R_2$). Se pide:

- a) Para qué valor de la presión normal uniforme p las dos superficies estarán en contacto.
- b) Dibujar, acotando los valores significativos, la curva $p - \delta$, donde δ es el acortamiento de R_2 .



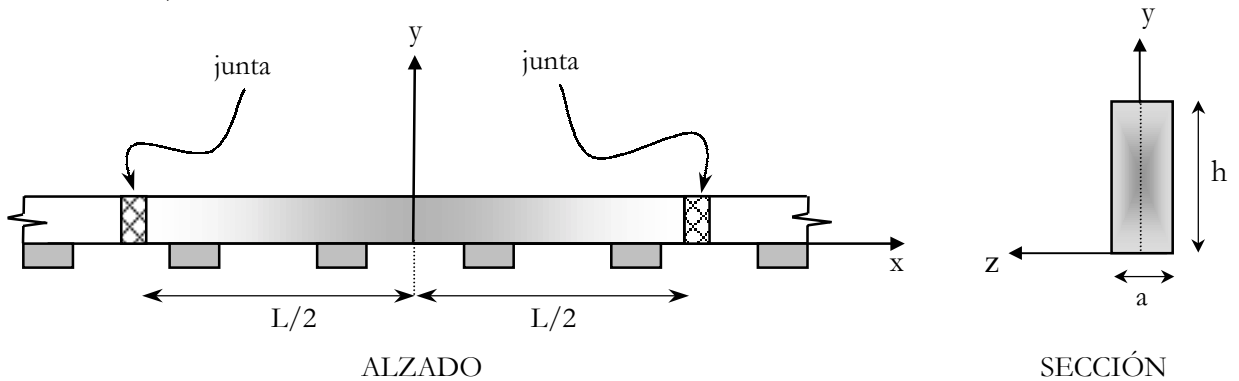
HIPÓTESIS:

- 1) Módulo de elasticidad: E
- 2) Coeficiente de Poisson: $\nu = 0$
- 3) $R_1 = R$
- 4) $R_2 = 2R$

PP 6-6 En la figura se esquematiza la disposición de un carril de ferrocarril constituido por raíles rectos de longitud “L” entre los cuales se coloca una junta elástica de constante K. Por consideraciones de simetría y constructivas puede suponerse que la sección $x = 0$ no se

desplaza longitudinalmente y que la parte inferior del raíl no se desplaza verticalmente. Se considera un incremento de temperatura constante $\Delta\theta$ en todos los puntos. Se pide:

- Obtener la ecuación de los desplazamientos, deformaciones y tensiones en función de las correspondientes constantes de integración.
- Indicar claramente cuáles serían las condiciones de contorno a aplicar para determinar las constantes de integración.
- Determinar dichas constantes y obtener los correspondientes campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones.
- Particularizar dichos resultados para los casos $K=0$ (junta abierta) y $K \rightarrow \infty$ (carril continuo).



HIPÓTESIS:

- Suponer desplazamientos de la forma: $\mathbf{u} = [u(x), v(y), w(z)]^T$
- Material elástico lineal.
- $\lambda = \mu$.
- $\beta = \text{cte}$.
- Peso del raíl despreciable.

7 Elasticidad plana

CUESTIONES RESUELTAS

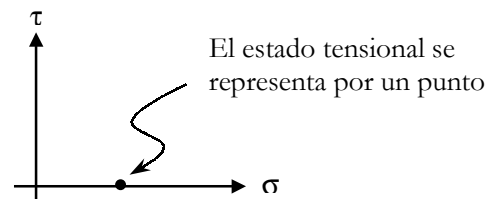
CR 7-1 Justificar si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

- Si un estado tensional bidimensional tiene un punto singular, todas las isoclinas pasan por dicho punto.
- Si un estado tensional bidimensional es uniforme, todas las líneas de máxima tensión tangencial son paralelas entre sí.

Resolución:

- Un punto singular se define de la siguiente manera:

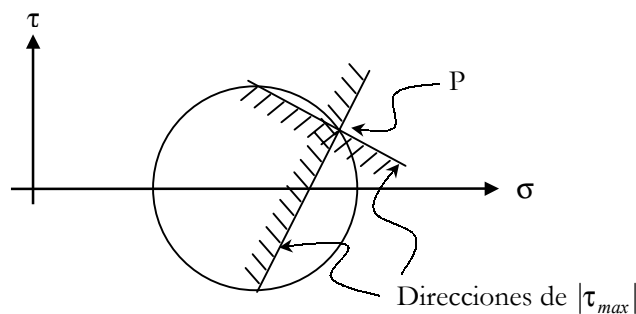
$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 \\ \tau = 0 \end{cases}$$



Por lo tanto, todas las direcciones son principales y dado un ángulo θ cualquiera, la tensión principal formará un ángulo θ con el eje x . Por dicho punto pasará entonces una isoclina de ángulo θ , y como esto se cumple para cualquier θ , todas las isoclinas pasarán por dicho punto.

La afirmación es cierta.

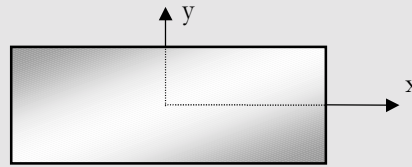
- Al tener un estado uniforme de tensiones, esto implica que el Círculo de Mohr sea igual en todos los puntos, y por tanto, los planos de máxima tensión cortante serán los mismos en todos los puntos, así que las líneas de máxima tensión cortante serán rectas paralelas entre sí.



La afirmación es cierta.

CR 7-2 La placa rectangular de la figura está sometida a los siguientes estados de tensión plana:

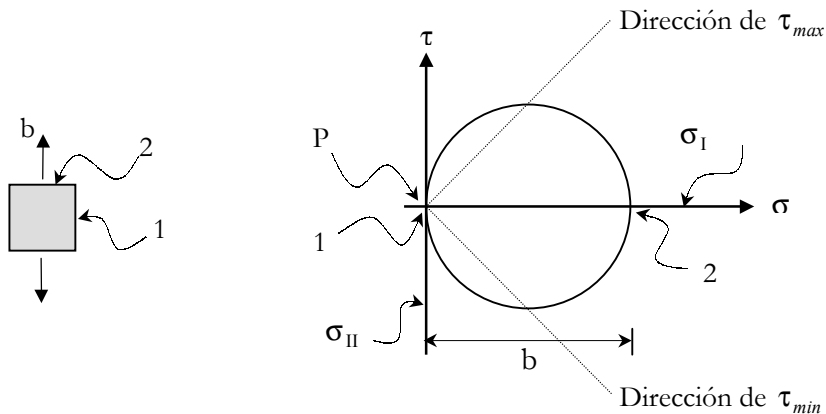
- 1) $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = b > 0$; $\tau_{xy} = 0$
- 2) $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = my$, $m > 0$



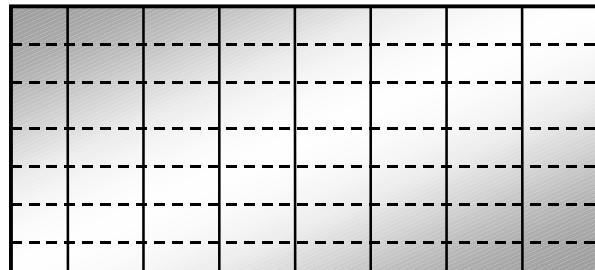
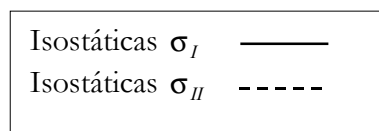
Dibujar para cada estado las líneas isostáticas, las líneas de máxima y mínima tensión tangencial e indicar los puntos singulares.

Resolución:

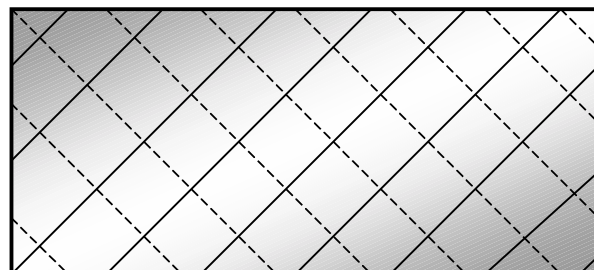
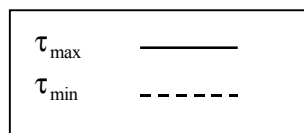
ESTADO TENSIONAL I:



Líneas isostáticas:

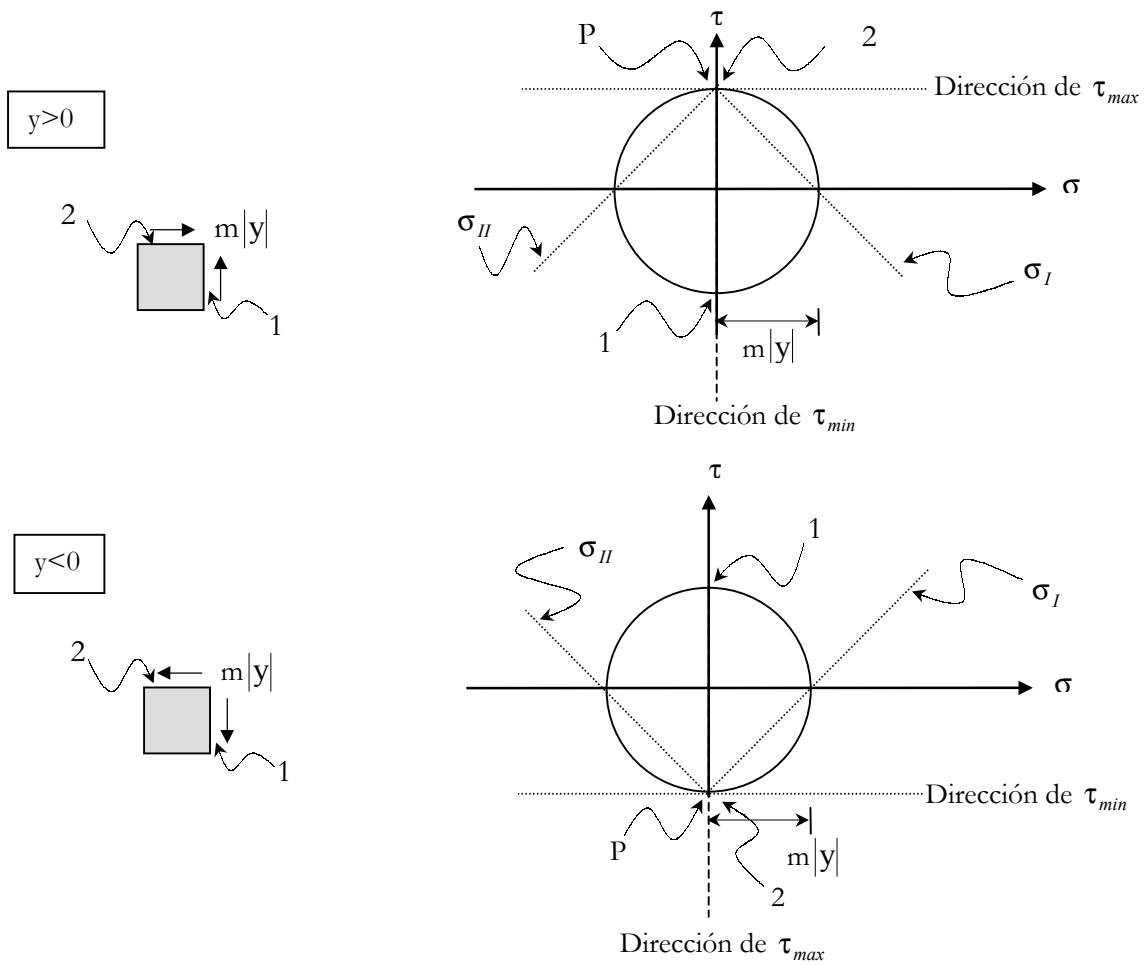


Líneas de máxima y mínima tensión tangencial:

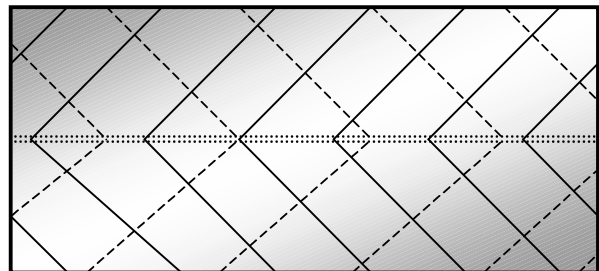


No existen puntos singulares.

ESTADO TENSIONAL II:

*Líneas isostáticas:*

Isostáticas σ_I	—
Isostáticas σ_{II}	- - -
Puntos singulares

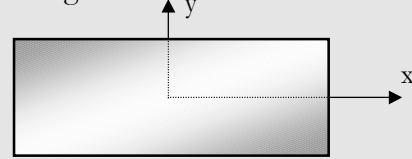
*Líneas de máxima y mínima tensión tangencial:*

τ_{\max}	—
τ_{\min}	- - -
Puntos singulares



CR 7-3 La placa rectangular de la figura está sometida al siguiente estado de deformación plana:

$$\sigma_x = \sigma_y \quad ; \quad \tau_{xy} = ax \quad ; \quad \sigma_z = b \quad (a > 0, b > 0)$$



Dibujar en el plano de la figura las líneas isostáticas, las líneas de máxima y mínima tensión tangencial e indicar los puntos singulares.

Resolución:

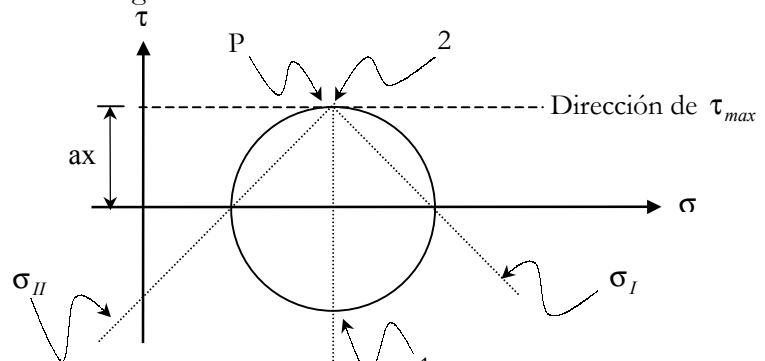
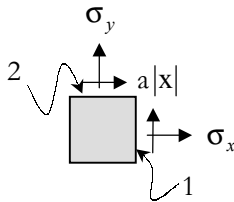
Puntos singulares:

$$\tau = ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

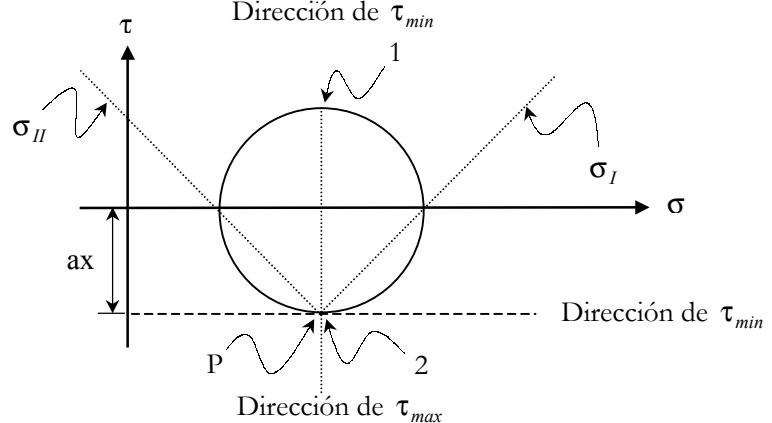
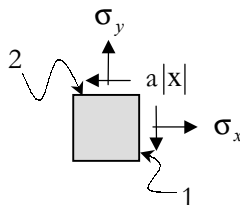
Las tensiones normales ya cumplen que son iguales.

Isostáticas y líneas de máxima y mínima tensión tangencial:

$$x > 0$$

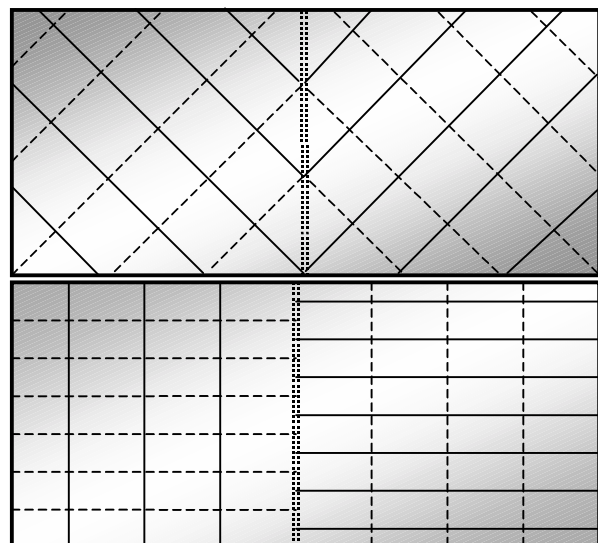


$$x < 0$$



$x < 0$	
Isostáticas σ_I	—————
Isostáticas σ_{II}	- - - - -
Puntos singulares

$x < 0$	
τ_{max}	—————
τ_{min}	- - - - -
Puntos singulares



CR 7-4 Una placa está sometida al siguiente estado tensional:

$$\sigma_x = -x^3 \quad ; \quad \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 \quad ; \quad \tau_{xy} = 3x^2y \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$$

Obtener y dibujar los puntos singulares y las redes de isostáticas para cada tensión principal.

Resolución:

Los puntos singulares se definen según:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y \\ \tau = 0 \end{cases}$$

Se impondrá la definición para obtener la condición que han de verificar los puntos singulares:

$$\tau = 3x^2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -x^3 = 0 \\ \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 = 0 \end{cases} \\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -x^3 \\ \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 = 2x^3 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Se concluye que los puntos singulares son los que cumplen:

$$\boxed{x = 0}$$

Las líneas isostáticas cumplirán la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2 + 1}$$

En este problema resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = C_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \Rightarrow \boxed{xy = C_2}$$

Por tanto, las isostáticas son dos familias de hipérbolas equiláteras ortogonales entre sí.

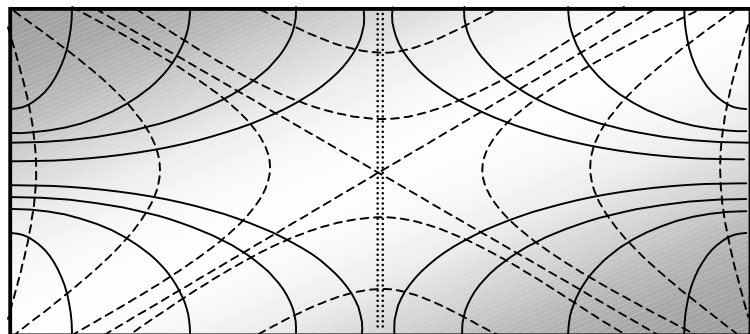
La recta singular $x = 0$ divide a la placa en dos regiones. Para identificar la familia de las σ_1 se tendrá que tomar un punto en cada región:

$$\text{Punto } (1,0): \sigma_x = -1 \quad ; \quad \sigma_y = \sigma_1 = 2 \quad ; \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\text{Punto } (-1,0): \sigma_x = \sigma_1 = 1 \quad ; \quad \sigma_y = -2 \quad ; \quad \tau_{xy} = 0$$

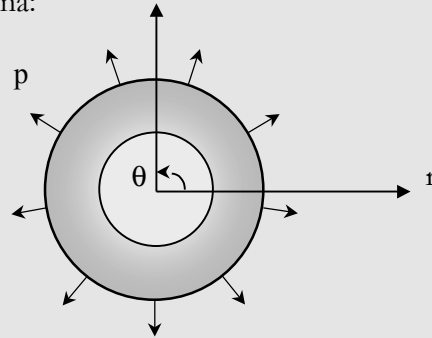
Por tanto, la red de las isostáticas es la siguiente:

$x < 0$	
Isostáticas σ_I	_____
Isostáticas σ_{II}	-----
Puntos singulares
$x > 0$	
Isostáticas σ_I	-----
Isostáticas σ_{II}	_____
Puntos singulares



CR 7-5 Dibujar las líneas isostáticas en la sección transversal del cilindro de la figura. Suponer un campo de desplazamientos de la forma:

$$\begin{cases} u_r = Ar + \frac{B}{r} & ; \quad A > 0 \quad ; \quad B > 0 \\ u_\theta = 0 \\ u_z = 0 \end{cases}$$



Resolución:

Se va a considerar la siguiente notación:

$$f = f(r) = u_r(r)$$

Por lo tanto, se tiene un campo de desplazamientos con la siguiente expresión:

$$\mathbf{u} = [f, 0, 0]^T$$

El *Tensor de Deformación* tendrá entonces la siguiente expresión en coordenadas cilíndricas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Éste se podrá relacionar con el *Tensor de Tensiones* según la ecuación:

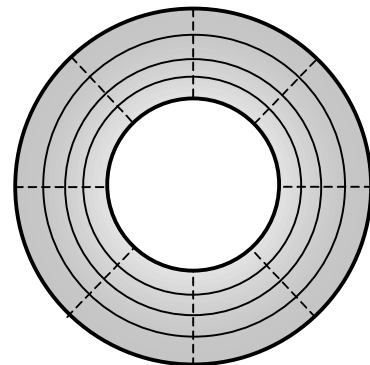
$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda \left(f + \frac{f}{r} \right) + 2\mu f = 2(\lambda + \mu)A - 2\mu \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda \left(f + \frac{f}{r} \right) + 2\mu \frac{f}{r} = 2(\lambda + \mu)A + 2\mu \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = \lambda \left(f + \frac{f}{r} \right) = 2\lambda A \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \end{cases}$$

En estas expresiones todos los parámetros (λ, μ, A, B) son positivos:

$$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{II} = \sigma_{rr} \end{cases}$$

Isostáticas σ_I	_____
Isostáticas σ_{II}	-----



CR 7-6 Se tiene una tubería circular de radio interior $r_1 = 100 \text{ mm}$ y exterior $r_2 = 250 \text{ mm}$, suficientemente larga para suponer un estado de deformación plana, sometida a una presión interior de 1 MPa . Para una sección normal del tubo se pide:

- Calcular y dibujar las leyes de variación de las tensiones principales sobre el espesor.
- Dibujar las isostáticas diferenciando las dos familias

Resolución:

Se utilizarán coordenadas cilíndricas. Considerando un campo de desplazamientos, por simetría, uno factible sería:

$$\mathbf{u} = [u_r(r), 0, 0]$$

Si se aplica la *Ecuación de Navier* en coordenadas cilíndricas y con simetría radial, la expresión que queda es:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \left[A r + \frac{B}{r}, 0, 0 \right]^T$$

El *Tensor de Deformación* tendrá entonces la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} A - \frac{B}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & A + \frac{B}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede ahora relacionar con el *Tensor de Tensiones* según la ecuación:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} = 2(\lambda + \mu)A - 2\mu \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = 2(\lambda + \mu)A + 2\mu \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = 2\lambda A \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de contorno resulta:

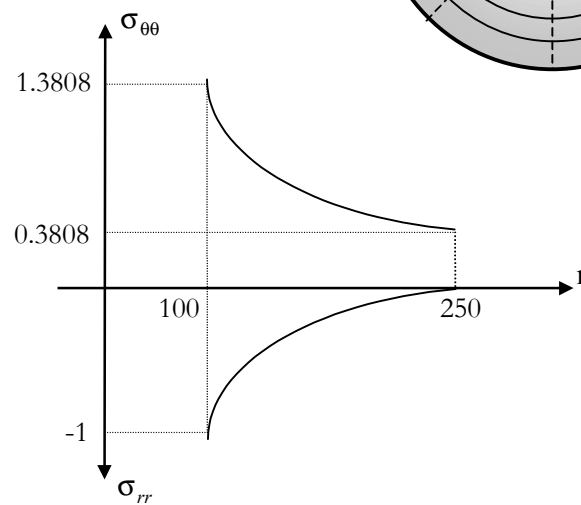
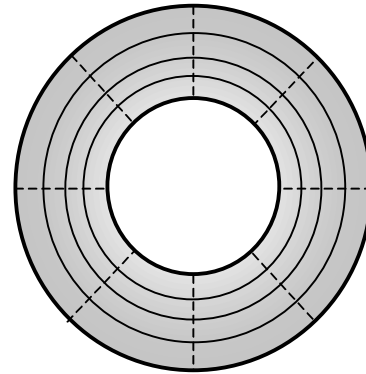
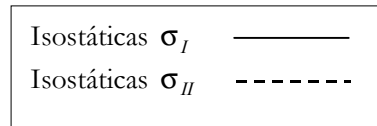
$$\begin{cases} r = r_1 \Rightarrow \sigma_{rr} = -p \\ r = r_2 \Rightarrow \sigma_{rr} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} p \\ B = \frac{1}{2\mu} \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} p \end{cases}$$

Y sustituyendo estos valores en las expresiones de las tensiones se obtienen los resultados finales:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) p = 0.1904 - \frac{119.047}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) p = 0.1904 + \frac{119.047}{r^2} \\ \sigma_{zz} &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} p = 2\nu \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} p = 0.3808\nu \end{aligned}$$

Además se tiene que:

$$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{II} = \sigma_{rr} \end{cases}$$



CUESTIONES PROPUESTAS

CP 7-1 Definir cuáles son las hipótesis básicas que se realizan en los estados de tensión plana y deformación plana, y cuáles son sus consecuencias. Citar, para cada caso, un ejemplo en el que se puedan aplicar dichas hipótesis.

CP 7-2 Describir el problema tipo de deformación plana: Geometría, cargas y coacciones actuantes, hipótesis, campo de desplazamientos, deformaciones, tensiones y relaciones tensión-deformación.

CP 7-3 Describir el problema tipo de tensión plana: Geometría, cargas y acciones actuantes, campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones. Poner un ejemplo de aplicación en Ingeniería Civil.

CP 7-4 Definir líneas isostáticas y líneas de máxima tensión cortante. Deducir su ecuación diferencial y justificar el ángulo que forman entre sí.

CP 7-5 Definir: Isoclinas, isobaras, isostáticas, líneas de máxima tensión cortante, puntos singulares y puntos neutros.

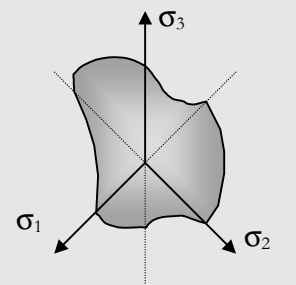
CP 7-6 Definir y esquematizar gráficamente los siguientes conceptos en estados planos de tensión-deformación: líneas isostáticas, líneas isoclinas, líneas isobaras, puntos singulares y puntos neutros.

8 Plasticidad

CUESTIONES RESUELTAS

CR 8-1 Justificar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

- El punto $(0,0,0)$ del espacio de tensiones principales debe estar en el interior de cualquier superficie de fluencia plástica.
- La superficie de fluencia, cuya intersección con un cierto plano octaédrico del espacio de tensiones principales viene dada en la figura, es factible.



Resolución:

- La afirmación es cierta ya que el origen representa el estado neutro y no puede estar en estado de plastificación, sino que está en el interior de la superficie de fluencia, lugar geométrico del campo elástico.
- La afirmación es falsa pues los tres ejes han de ser de simetría, y en la figura no lo son.

CR 8-2 Para cada uno de los siguientes casos, justificar la forma de la superficie de fluencia en el espacio de tensiones principales:

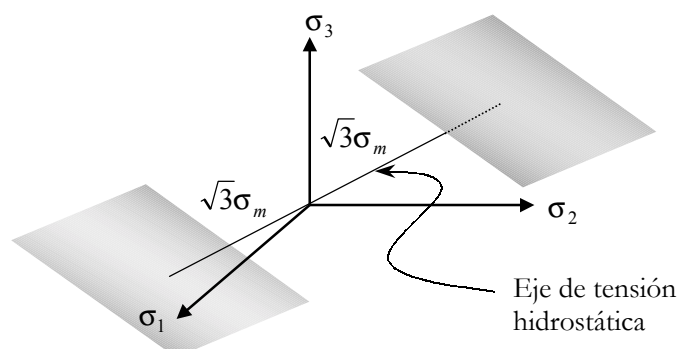
- $f(I_1^2) = 0$.
- $f(J_2') = 0$.
- $aI_1^2 + b\tau_{oct}^2 = c$, a, b, c estrictamente positivos.

Resolución:

- En este primer caso se tiene una condición sobre la tensión media ya que se cumple:

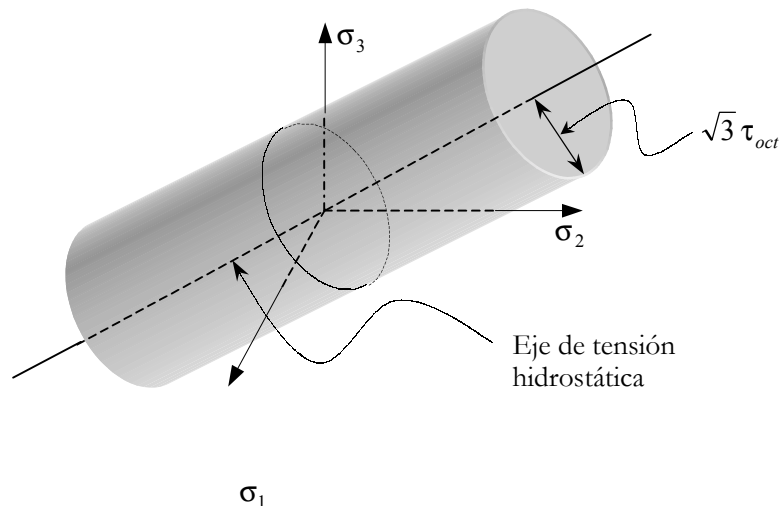
$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_m$$

Como el primer invariante está elevado al cuadrado, esto impone la distancia a planos octaédricos, tanto en un sentido como en el otro.

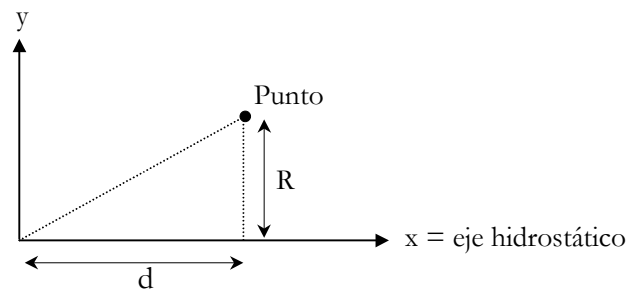


- b) Aquí, lo que está impuesto es la distancia entre un estado tensional y un estado hidrostático de tensiones, por lo tanto el resultado es un cilindro de sección circular en los planos octaédricos:

$$J_2' = \frac{3}{2} \tau_{oct}^2 \Rightarrow \text{distancia} = \sqrt{3} \tau_{oct}$$



- c) Si se representa el plano definido por un punto cualquiera de la superficie de fluencia y el eje de tensiones hidrostático, queda la siguiente figura:



De donde se deducen las siguientes relaciones:

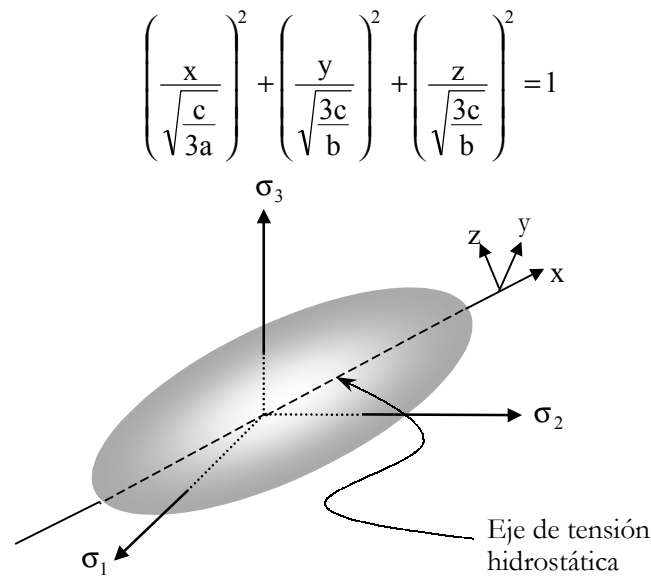
$$\left. \begin{aligned} d = x = \sqrt{3} \sigma_{oct} = \frac{\sqrt{3}}{3} I_1 \\ R = y = \sqrt{3} \tau_{oct} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \sqrt{3} x \\ \tau_{oct} = \frac{R}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Así, si se sustituyen estos valores en la expresión de la superficie de fluencia queda:

$$a I_1^2 + b \tau_{oct}^2 = c \Rightarrow 3 a x^2 + \frac{b y^2}{3} = c \Rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{c}{3a}}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{3c}{b}}} \right)^2 = 1$$

Esta es la expresión de una elipse en ese plano $x-y$. Además, como no interviene el 3^{er} invariante en la definición de la superficie de fluencia, habrá simetría de revolución alrededor del eje hidrostático y, por lo tanto, la rotación de la elipse alrededor del eje x (\equiv eje hidrostático) acotará la superficie definitiva.

En conclusión, si se toman unos ejes x (\equiv hidrostático), y , z la superficie de fluencia tendrá la siguiente expresión:



CR 8-3 Justificar cuáles de los criterios de fluencia plástica, Von-Mises, Tresca, Drucker-Prager y Möhr-Coulomb, podrían ser adecuados para modelizar un material en cada uno de los siguientes casos.

- La plastificación del material sólo depende de J'_2 .
- La plastificación del material depende de I_1 y J'_2 .
- La plastificación del material depende de I_1 , J'_2 y J'_3 .
- La plastificación del material depende de J'_2 y J'_3 .

Resolución:

- Que la plastificación dependa de J'_2 , es decir, que dependa de τ_{oct} , significa que depende únicamente de la distancia del estado tensional al eje hidrostático. Por lo tanto, la superficie de fluencia será un cilindro de directriz el eje de tensiones hidrostáticas. El único criterio con esta forma es el de Von-Mises.
- Aquí no hay dependencia de la variable J'_3 , esto implica que existe simetría respecto al eje de tensiones hidrostático, cosa que cumplen los criterios de Von-Mises y Drucker-Prager. Pero como la superficie de fluencia depende de I_1 , es decir, de la distancia al estado neutro ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$), Von-Mises se descarta. Queda, finalmente, el criterio de Drucker-Prager.
- Al depender de I_1 , no cumplirán esta condición ni Von-Mises ni Tresca. Al depender de J'_3 , tampoco lo hará Drucker-Prager. Por lo tanto, únicamente queda el criterio de Möhr-Coulomb.
- Al no depender de I_1 , aceptaremos Von-Mises y Tresca. Como depende de J'_3 descartaremos Von-Mises, y por lo tanto, quedará el criterio de Tresca.

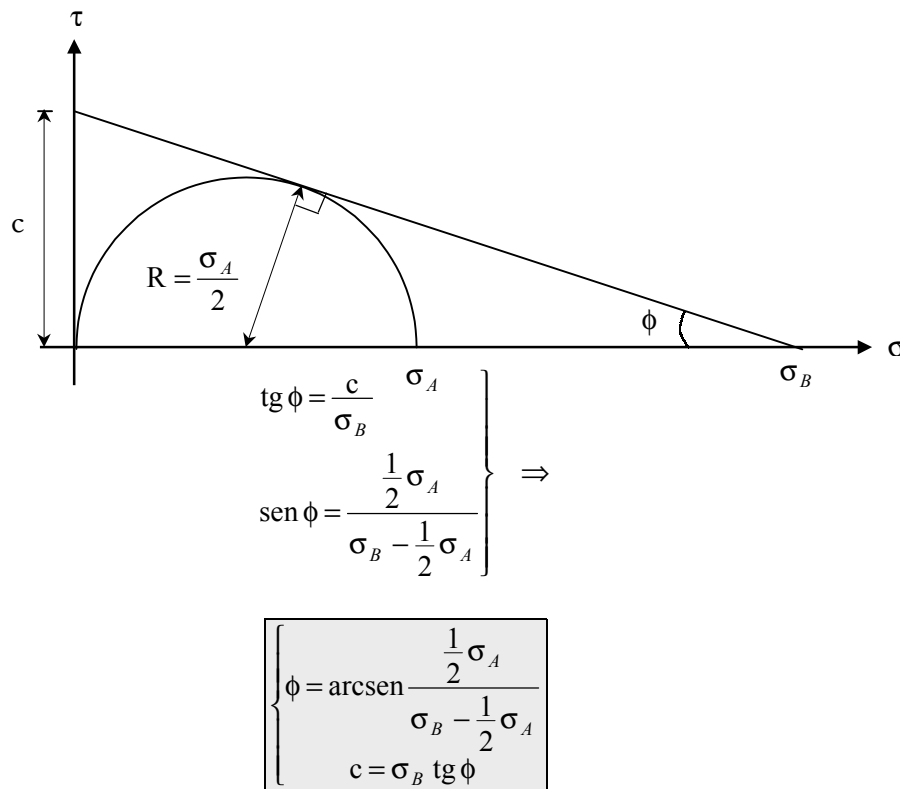
CR 8-4 Obtener gráficamente, y acotando los valores significativos, la cohesión y el ángulo de rozamiento interno de un material elastoplástico, que sigue el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb, a partir de los siguientes datos:

- 1) En un estado de tracción uniaxial ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), el material plastifica para $\sigma = \sigma_A$.
- 2) En un ensayo de isotracción triaxial del mismo material ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$), éste plastifica para $\sigma = \sigma_B$.

Resolución:

En el estado de tracción uniaxial se tendrá un círculo de Mohr que pasará por el origen y por $\sigma = \sigma_A$ en el eje de las abscisas.

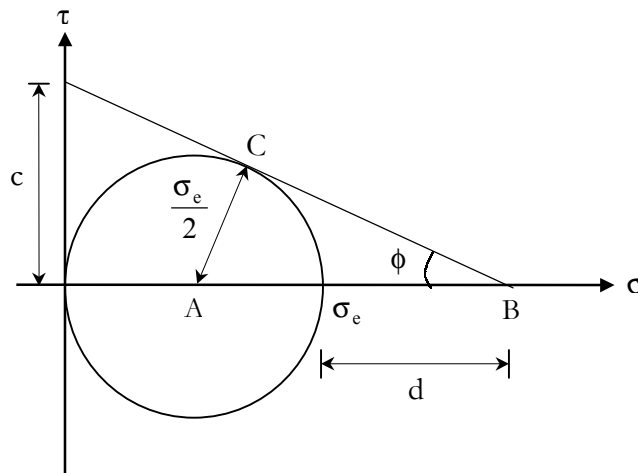
Sin embargo, para la isotracción triaxial, el círculo de Mohr degenerará en un punto del eje de las abscisas $\sigma = \sigma_B$.



CR 8-5 Un material plástico perfecto se somete a un ensayo de tracción uniaxial ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) y empieza a plastificar para un valor de la tracción σ_e . Si su cohesión es de c MPa, determinar el ángulo de rozamiento interno que hay que considerar para aplicar al material el criterio de Mohr-Coulomb. (Basta con obtener la correspondiente ecuación trascendente).

Resolución:

Se va a representar el estado tensional en el *Círculo de Mohr* cuando empieza la plastificación (círculo tangente a la superficie de fluencia):



A partir del triángulo rectángulo ABC se puede deducir la relación buscada:

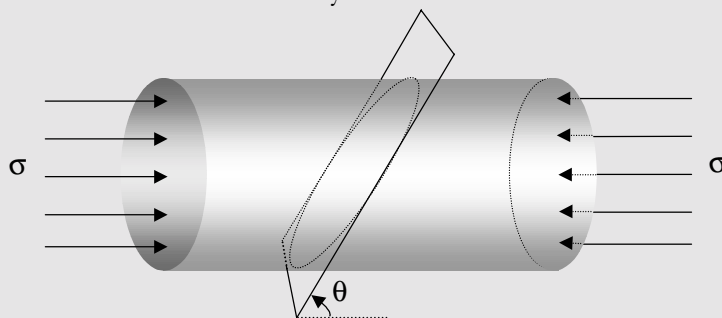
$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \phi = \frac{c}{\sigma_e + d} \Rightarrow d = \frac{c}{\operatorname{tg} \phi} - \sigma_e \\ \operatorname{sen} \phi = \frac{\frac{\sigma_e}{2}}{\frac{\sigma_e}{2} + d} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_e}{\operatorname{sen} \phi} - \sigma_e \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{c}{\operatorname{tg} \phi} - \sigma_e = \frac{1}{2} \sigma_e \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \phi} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{\sigma_e}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \phi} + 1 \right)$$

Y operando se obtiene la ecuación trascendente definitiva:

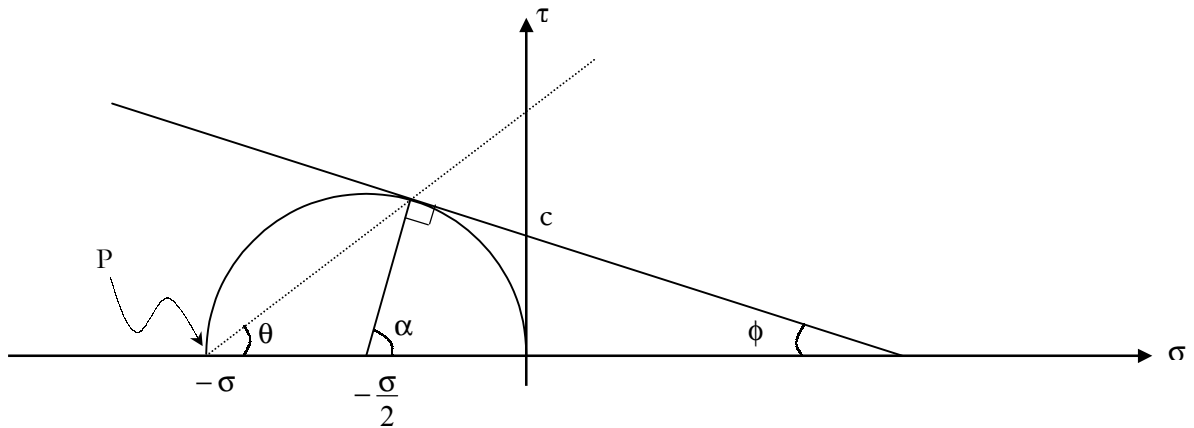
$$\sigma_e + \sigma_e \operatorname{sen} \phi - 2c \cos \phi = 0$$

CR 8-6 Una probeta de hormigón sometida a compresión uniaxial uniforme rompe según un plano inclinado que forma un ángulo θ con el de carga. Determinar dicho ángulo en función del ángulo de rozamiento interno y de la cohesión del material.



Resolución:

En el plano de tensiones de Mohr se representará la rotura de la siguiente manera:



A partir del triángulo rectángulo que se forma se puede obtener el valor de α :

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \phi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$$

Fijándose en los ángulos inscritos en la circunferencia, se concluye:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{\pi - \phi}{2}$$

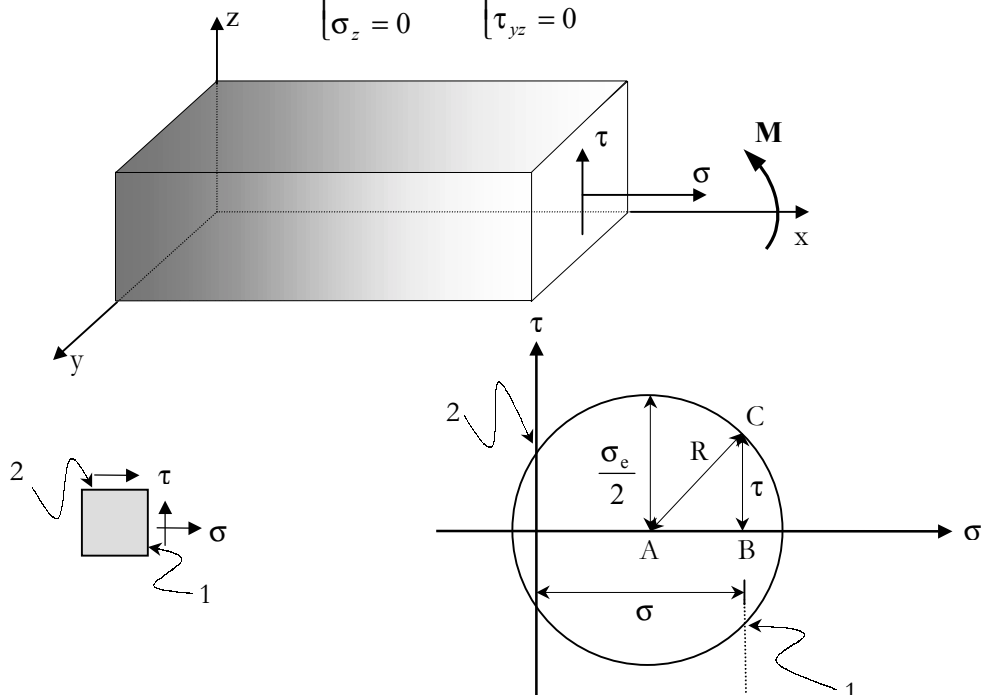
Como se puede comprobar, el valor de la cohesión c no influye.

CR 8-7 Expresar el criterio de plastificación de Tresca en función de la tensión normal y la tensión tangencial a una sección transversal de una viga trabajando a flexión compuesta.

Resolución:

El estado tensional es el siguiente:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma \\ \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \tau_{xy} = \tau \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$



Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ABC:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

Y la condición a imponer es:

$$R \leq \frac{\sigma_e}{2}$$

El criterio de plastificación de Tresca resulta ser, por tanto:

$$\boxed{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_e}$$

CR 8-8 Se considera un material isotrópico elastoplástico perfecto que sigue el criterio de fluencia de Von-Mises, cuyo límite elástico en un ensayo uniaxial es σ_e . Determinar los valores de τ_e y γ_e (ver Figura 1) que se obtendrían en el ensayo de corte esquematizado en la Figura 2.

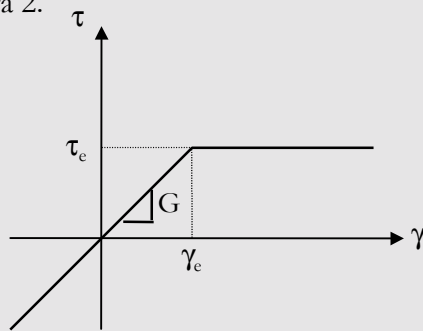


Figura 1

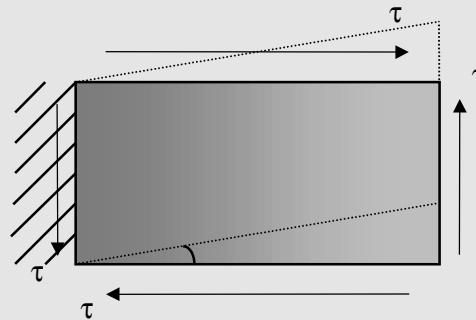


Figura 2

Resolución:

El *Tensor de Tensiones* para el ensayo de la figura 2 tendrá la expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}$$

Se define la tensión efectiva como:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J'_2}$$

donde:

$$J'_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}') = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}) = \tau^2$$

El criterio de Von-Mises es:

$$\bar{\sigma} - \sigma_e = 0$$

La plastificación empieza para $\tau = \tau_e$ y por tanto, según la figura 1, resulta:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3}\tau_e = \sigma_e \Rightarrow$$

$$\boxed{\tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \gamma_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}G}}$$

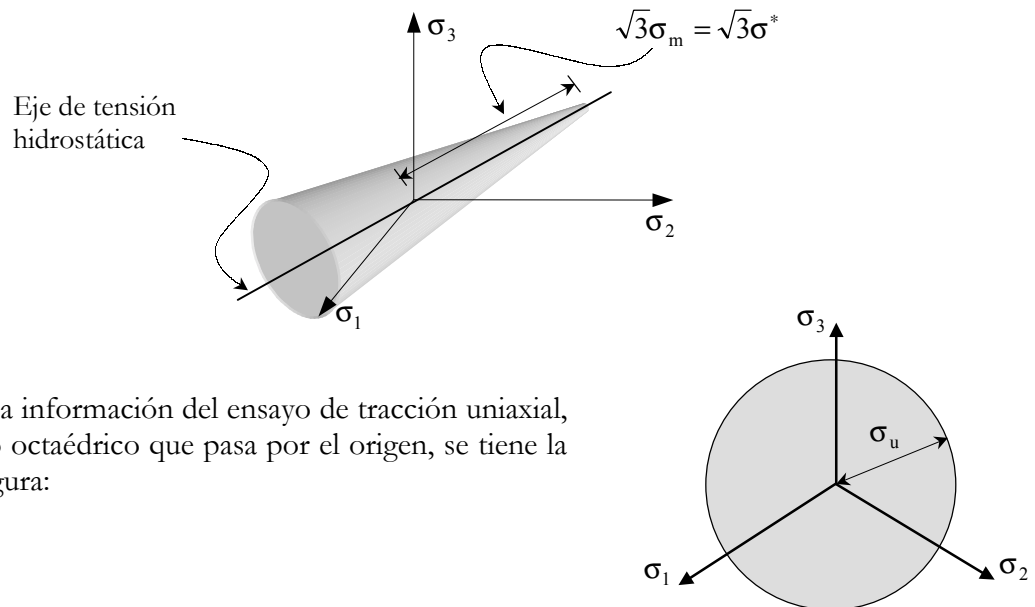
CR 8-9 De un cierto material se han determinado experimentalmente las siguientes propiedades:

- 1) En régimen de compresión hidrostática el material no plastifica nunca.
- 2) En régimen de tracción hidrostática el material virgen plastifica para un valor de la tensión media $\sigma_m = \sigma^*$
- 3) En régimen de tracción uniaxial el material virgen plastifica a tensión σ_u .
- 4) En otros casos la plastificación se alcanza cuando la norma de las tensiones desviadoras varía linealmente con la tensión media ($|\sigma'| = \sqrt{\sigma' : \sigma'} = a\sigma_m + b$).

Dibujar la superficie de fluencia, acotando los valores significativos, y calcular los valores de a y b en función de σ^* y σ_u .

Resolución:

La forma aproximada de la superficie de fluencia es la siguiente (cono recto):



Utilizando la información del ensayo de tracción uniaxial, en el plano octaédrico que pasa por el origen, se tiene la siguiente figura:

En el vértice del cono se aplica el criterio de plastificación $|\sigma'| = \sqrt{\sigma' : \sigma'} = a\sigma_m + b$:

$$|\sigma'| = 0 \Rightarrow a\sigma_m|_{\sigma_m=\sigma^*} + b = 0 \Rightarrow a\sigma^* + b = 0$$

Y se hace lo mismo para los puntos de interacción con los ejes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma' = \frac{\sigma_u}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\sigma'| = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_u \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_u = a\left(\frac{1}{3}\sigma_u\right) + b$$

Con estas dos ecuaciones se pueden encontrar los valores buscados:

$$a = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_u}{\frac{\sigma_u}{3} - \sigma^*}$$

$$b = -\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_u\sigma^*}{\frac{\sigma_u}{3} - \sigma^*}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PR 8-1 La pieza metálica PQRS tiene un espesor “e” y está constituida por materiales distintos, (1) y (2), considerados elastoplásticos perfectos. Se somete la pieza a un ensayo de corte puro en la máquina de la Figura 1 de tal forma que se produce un estado de tensiones y deformaciones uniforme dado por:

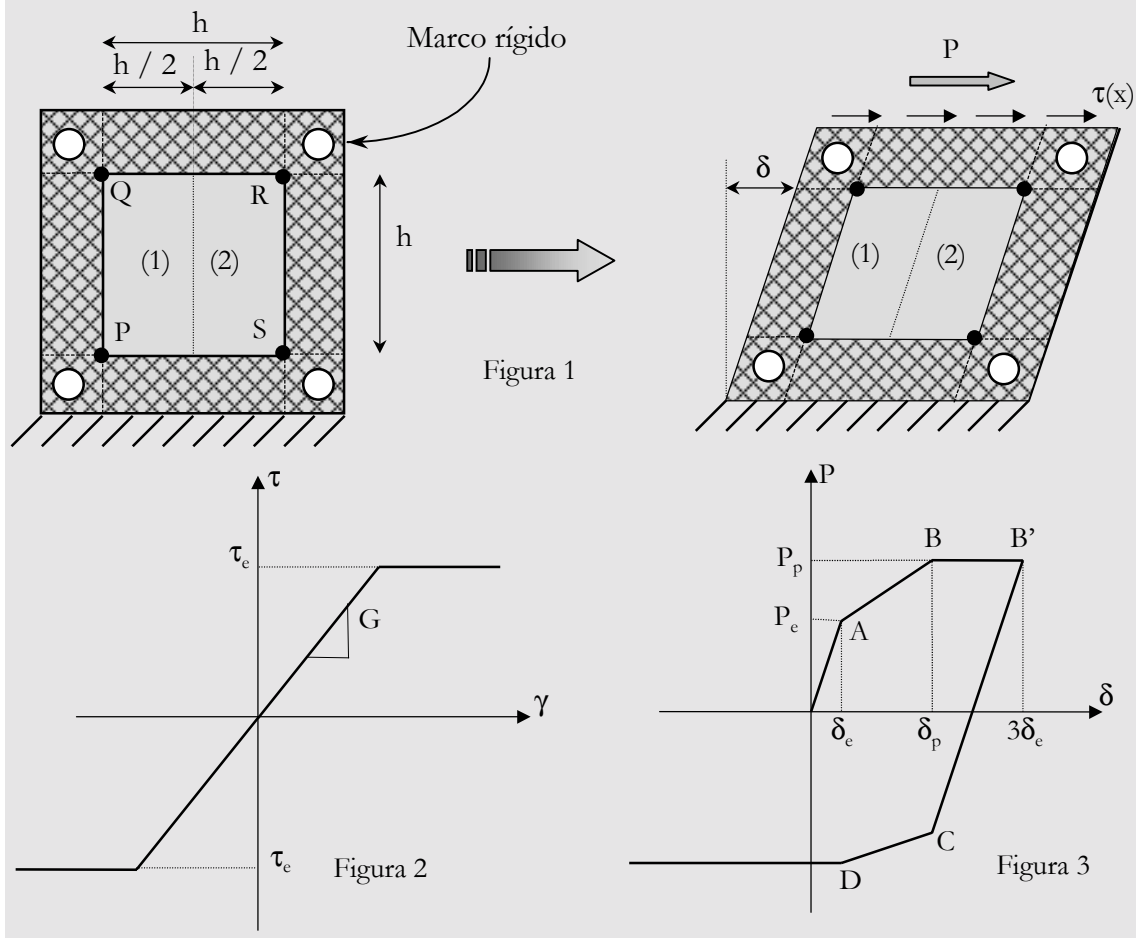
$$\begin{aligned} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0 \quad ; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad ; \quad \gamma_{xy} = \gamma = \frac{\delta}{h} \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = \tau \neq 0 \end{aligned}$$

Cuando se ensaya por separado una pieza de cada uno de los materiales se obtiene una curva $\tau - \gamma$ como la de la Figura 2. Se pide:

- a) El límite elástico que se obtendría en un ensayo de tensión uniaxial de cada material por separado, suponiendo que obedecen al criterio de Von-Mises.

Cuando se ensaya la pieza constituida por los dos materiales se obtiene la curva $P - \delta$ de la Figura 3. Se pide:

- b) El valor de la carga y del desplazamiento elástico P_e y δ_e .
 c) Ídem para los valores plásticos P_p y δ_p .
 d) Las coordenadas $P - \delta$ de los puntos C y D de la Figura 3.



HIPÓTESIS:

Material (1): $G = G$; $\tau_e = \tau^*$

Material (2): $G = G$; $\tau_e = 2\tau^*$

Resolución:

- a) Con los datos anteriores se quiere obtener el límite elástico que se obtendría en un ensayo de tensión uniaxial de cada uno de los materiales por separado, suponiendo que obedecen el *Criterio de Von-Mises*. Así se sabe que la plastificación empieza cuando:

$$\bar{\sigma} = \sigma_e$$

Siendo $\bar{\sigma}$ la tensión efectiva y σ_e el límite elástico. Se tienen las relaciones vistas en teoría para el caso de un estado tensional dado por un tensor de tensiones σ :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= (3J'_2)^{\frac{1}{2}} \\ J'_2 &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma'^2) \\ \sigma' &= \sigma - \sigma_{\text{esf}} \\ \sigma_{\text{esf}} &= \sigma_m \mathbf{1} \\ \sigma_m &= \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma)\end{aligned}$$

Para este problema resulta:

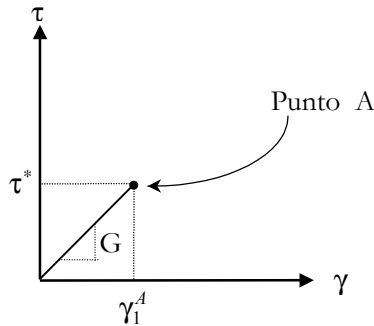
$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma' = \sigma \Rightarrow \sigma'^2 = \begin{bmatrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J'_2 = \tau^2 \Rightarrow \bar{\sigma} = \sqrt{3}\tau$$

Si se tiene en cuenta que el material (1) plastifica con $\tau_e = \tau^*$ y el (2) con $\tau_e = 2\tau^*$, entonces:

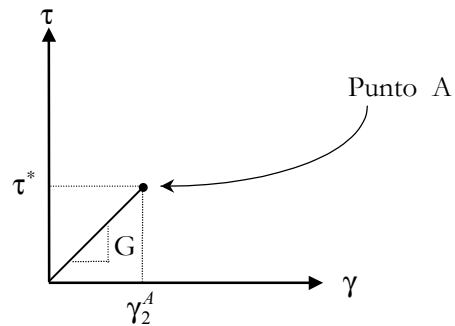
Material 1 $\Rightarrow \sigma_e = \sqrt{3}\tau^*$
Material 2 $\Rightarrow \sigma_e = 2\sqrt{3}\tau^*$

- b) Al ensayar la pieza constituida por los dos materiales se obtiene un gráfico como el de la Figura 3. Se quiere hallar el valor de la carga P_e y desplazamiento elástico δ_e , que marcan el final de la fase de comportamiento elástico de la pieza. En el enunciado se dice que al ensayar por separado cada material, el gráfico resultante es el de la Figura 2, siendo $\tau_e = \tau^*$ para (1) y $\tau_e = 2\tau^*$ para (2). Además, se dice que G es común a los dos materiales, es decir, tienen la misma pendiente en la gráfica $\tau - \gamma$.

Ahora bien, se busca saber el comportamiento conjunto de la pieza. Es de suponer que el comportamiento de ésta será elástico mientras los dos materiales estén en su dominio elástico correspondiente. Por lo tanto, como el intervalo elástico del material (1) es menor, será este material el que defina el dominio elástico del conjunto, (hasta el punto A de la Figura 3).



MATERIAL (1)



MATERIAL (2)

Si se aplica equilibrio entre la fuerza P y las tensiones que tiene cada material en el punto A resulta:

(hay que igualar fuerzas, por tanto se multiplican las tensiones por la superficie en la que actúan, considerando la unidad como magnitud perpendicular al papel)

$$P_e = \frac{h}{2} \tau_1^A + \frac{h}{2} \tau_2^A = \frac{h}{2} \tau^* + \frac{h}{2} \tau^* = h\tau^*$$

Para calcular el desplazamiento se aplica compatibilidad de movimientos entre los dos materiales:

$$\delta = \gamma h$$

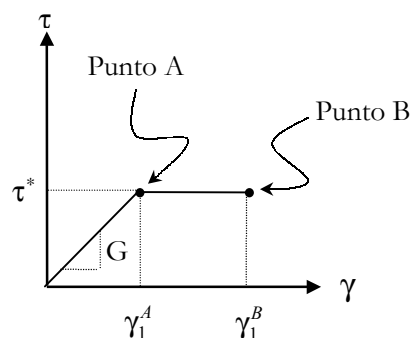
$$\delta_e = \gamma_1^A h = \gamma_2^A h = \frac{\tau^*}{G} h$$

Resumiendo:

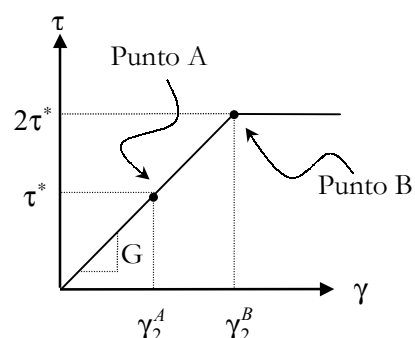
$P_e = h\tau^*$ $\delta_e = \frac{\tau^*}{G} h$

- c) Se busca ahora los valores plásticos P_p y δ_p . Lo que ocurre es que en el punto A empieza a plastificar el material (1), mientras que en el punto B empieza a plastificar el material (2), de modo que a partir del punto B el comportamiento de la pieza es plástico y entre A y B es elastoplástico.

Para buscar las coordenadas de B se procede como en el apartado anterior, dibujando los gráficos tensión-deformación de ambos materiales, ensayados por separado. La diferencia es que ahora se analizará dónde está el punto B para cada material.



MATERIAL (1)



MATERIAL (2)

Imponiendo las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad se obtiene el resultado buscado::

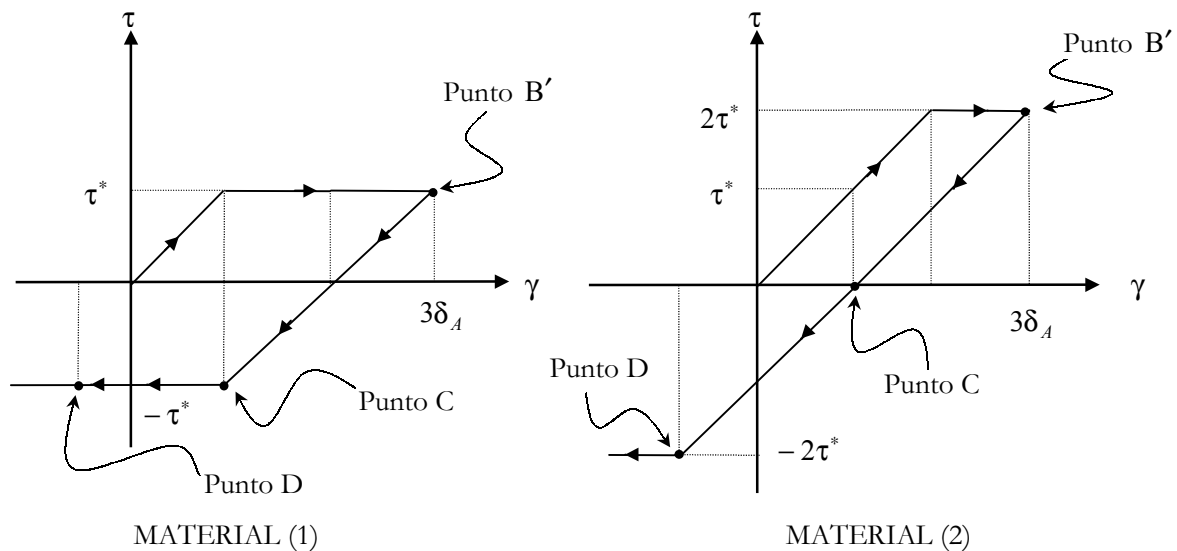
$$\left. \begin{aligned} P_p &= \frac{h}{2} \tau_1^B + \frac{h}{2} \tau_2^B = \frac{h}{2} \tau^* + \frac{h}{2} 2\tau^* \\ \delta_p &= \gamma_1^B h = \gamma_2^B h = \frac{2\tau^*}{G} h \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{3}{2} \tau^* h \\ \delta_p &= 2 \frac{\tau^* h}{G} = 2\delta_e \end{aligned}$$

- d) Se buscan las coordenadas de los puntos C y D de la Figura 3. Ya se han obtenido las coordenadas de A y B. Se da como dato un punto B', en el cual, manteniendo constante la carga P_p y dentro del estado plástico, la deformación es $3\delta_e$.

Se va a considerar primero el material (1): se descarga a partir de B' y, según los datos, este material plastifica cuando llega al valor $-\tau^*$. La pendiente de esta recta seguirá siendo el parámetro G del material, ya que éste es independiente de si se carga o se descarga. Así, para llegar al punto C basta trazar por B' la paralela a OA, hasta llegar al valor $-\tau^*$.

En el caso del material (2) ocurre lo mismo que en el caso anterior, únicamente que al trazar la paralela a OA por B' se puede llegar hasta $-2\tau^*$ (será el punto D).



$$\delta_B' = 3\delta_A = \frac{3\tau^* h}{G} = 3\delta_e$$

$$P_{B'} = P_B = \frac{3}{2} \tau^* h$$

Analíticamente, las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad para el punto C son:

$$\left. \begin{aligned} P_C &= \frac{h}{2} \tau_1^C + \frac{h}{2} \tau_2^C = \frac{h}{2} (-\tau^*) + \frac{h}{2} 0 = -\frac{\tau^* h}{2} \\ \delta_C &= \gamma_1^C h = \frac{\tau^* h}{G} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_C &= -\frac{\tau^* h}{2} \\ \delta_C &= \frac{\tau^* h}{G} = \delta_e \end{aligned}}$$

Y para el punto D:

$$\left. \begin{aligned} P_D &= \frac{h}{2} \tau_1^D + \frac{h}{2} \tau_2^D = \frac{h}{2} (-\tau^*) + \frac{h}{2} (-2\tau^*) = -\frac{3\tau^* h}{2} \\ \delta_D &= \gamma_2^D h = -\frac{\tau^* h}{G} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_D &= -\frac{3\tau^* h}{2} \\ \delta_D &= -\frac{\tau^* h}{G} = -\delta_e \end{aligned}}$$

PR 8-2 Se considera el cilindro macizo empotrado en la base de la Figura 1, al que se le aplica un momento torsor M en su extremo superior. Dicho cilindro está constituido por dos materiales (1) y (2), con un comportamiento tensión-deformación tangencial del tipo elastoplástico definido por la Figura 2. Se considera el siguiente campo de desplazamientos en coordenadas cilíndricas (torsión de Coulomb):

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = [u_r \quad u_\theta \quad u_z]^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\varphi}{h} r z & 0 \end{bmatrix}^T$$

donde φ es el giro de la sección del extremo libre de la pieza. Suponiendo pequeñas deformaciones, se pide:

- Los tensores de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ y de tensión $\boldsymbol{\sigma}$ en coordenadas cilíndricas y en régimen elástico. Dibujar, acotando los valores significativos, las curvas $\sigma_{rr} - r$ y $\tau_{\theta z} - r$ para una sección transversal del cilindro a altura z . Representar esquemáticamente la distribución de tensiones $\tau_{\theta z}$ sobre dicha sección transversal.
- Determinar el valor de φ ($\varphi = \varphi_e$) (ver Figura 3) para el cual empieza la plastificación en algún punto del cilindro, indicando dónde se produce y el correspondiente valor del momento $M = M_e$ ($M = \int_S r \tau_{\theta z} dS$).
- Calcular el valor mínimo de φ ($\varphi = \varphi_1$) para el cual se ha producido la total plastificación del material (1) y el correspondiente valor de M ($M = M_1$) (ver Figura 3). Dibujar esquemáticamente el estado tensional sobre una sección transversal en dicho instante.
- Ídem para los valores $\varphi = \varphi_2$ y $M = M_2$ correspondientes al inicio de la plastificación del material (2).

- e) Calcular el valor asintótico de M ($M = M_p$ = Momento plástico) correspondiente a la plastificación de toda la sección transversal. Dibujar el estado tensional de la sección transversal en dicho caso.

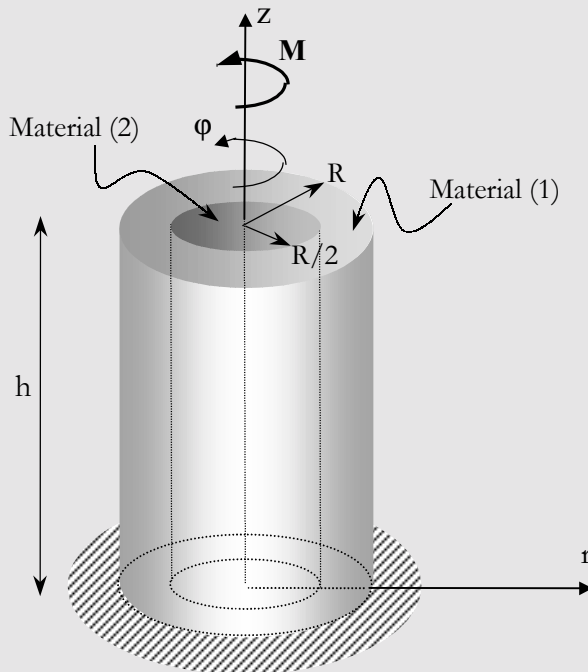


Figura 1

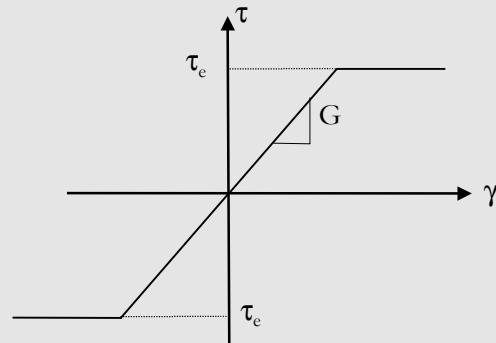


Figura 2

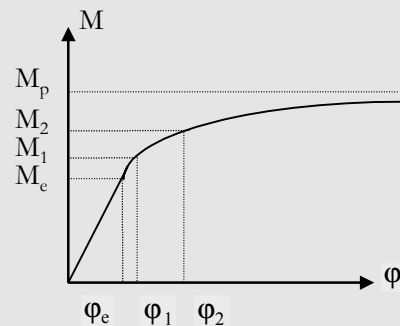


Figura 3

HIPÓTESIS:

Material (1): $G = G$; $\tau_e = \tau^*$

Material (2): $G = G$; $\tau_e = 2\tau^*$

Resolución:

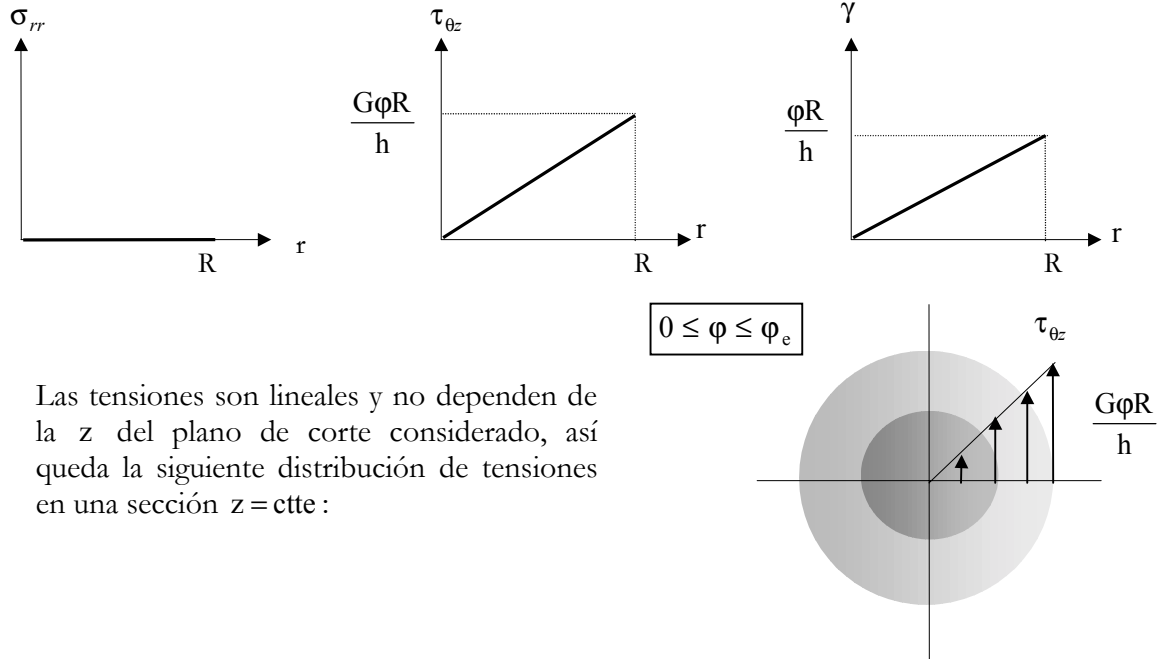
- a) Se buscará primero el tensor de deformaciones en cilíndricas (pequeñas deformaciones) a partir del campo de desplazamientos. Así se obtiene el siguiente resultado:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\phi r}{2h} \\ 0 & \frac{\phi r}{2h} & 0 \end{bmatrix}$$

Para encontrar el tensor de tensiones únicamente se debe tener en cuenta la ecuación constitutiva de un material elástico e isótropo (nótese que los dos materiales que componen el cilindro tienen el mismo parámetro G):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \lambda(\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}))\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon} \\ \left. \begin{aligned} \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) &= 0 \\ \mu &= G \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = 2G\boldsymbol{\epsilon} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G\phi r}{h} \\ 0 & \frac{G\phi r}{h} & 0 \end{bmatrix}$$



Las tensiones son lineales y no dependen de la z del plano de corte considerado, así queda la siguiente distribución de tensiones en una sección $z = \text{cte}$:

$$0 \leq \phi \leq \phi_e$$

- b) Dada la distribución de tensiones $\tau = \frac{G\phi r}{h}$ $0 \leq \phi \leq \phi_e$ el momento actuante vale:

$$M = \int_S r\tau(r)dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \left(\frac{G\phi r}{h} \right) r dr d\theta = 2\pi \int_0^R \frac{G\phi r^3}{h} dr = \frac{\pi G R^4}{2h} \phi \quad (1)$$

Esta es la relación existente entre el momento y el ángulo de giro en el extremo libre ($M - \phi$) cuando los dos materiales se comportan elásticamente.

El material (1) empieza a plastificar antes ya que lo hace para $\tau_e = \tau^*$, mientras que el material (2) lo hace para una tensión mayor $\tau_e = 2\tau^*$. Además los puntos que tienen mayor tensión son los de la superficie exterior del cilindro ($r = R$) y que pertenecen al material (1). Por lo tanto, el inicio de la plastificación se dará cuando se cumpla la siguiente condición:

$$\tau|_{r=R; \phi=\phi_e} = \tau^*$$

$$\frac{G\phi_e R}{h} = \tau^* \Rightarrow$$

$$\phi_e = \frac{\tau^* h}{GR}$$

Este es el valor del ángulo de giro del extremo libre del cilindro para el que empieza la plastificación en los puntos exteriores de la pieza (material (1)). El momento correspondiente se hallará sustituyendo φ_e en la relación (1):

$$M_e = M(\varphi_e) = \frac{\pi G R^4}{2h} \varphi_e \Rightarrow$$

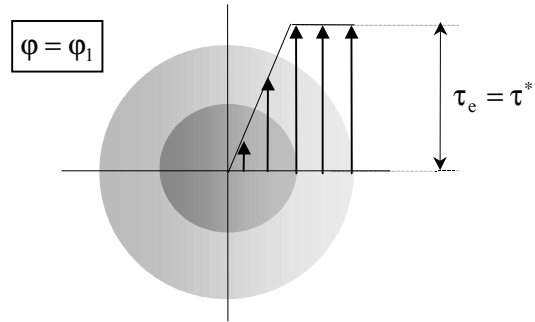
$$M_e = \frac{\pi \tau^* R^3}{2}$$

- c) Si el material fuese elástico al aumentar φ iría aumentando la pendiente de las tensiones τ (aunque aumenten, siguen siendo lineales con r), pero como el material es elastoplástico las tensiones no pueden superar el valor τ_e , que marca el inicio de la plasticidad. Así, el valor límite se da en $\tau_e = \tau^*$ cuando $\varphi = \varphi_1$ para $\frac{R}{2} \leq r \leq R$. Es decir, el material (1) tendrá una distribución de tensiones plástica, mientras que en el (2) será elástica.

Para calcular este giro φ_1 se debe imponer la siguiente condición:

$$\begin{aligned} \tau|_{r=\frac{R}{2}; \varphi=\varphi_1} &= \tau^* \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{G \varphi_1 R}{2h} &= \tau^* \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = \frac{2\tau^* h}{GR}$$



Este es el valor mínimo de giro para el que el material (1) se encuentra plastificado en su totalidad.

La relación (1) entre M y φ aquí no es válida ya que el material (1) se comporta elastoplásticamente y el (2) lo hace todavía elásticamente. La relación en este apartado es la siguiente:

$$M_1 = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{R}{2}}^R r \tau^* r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{2}} r \left(\frac{G \varphi_1 r}{h} \right) r dr d\theta = 2\pi \tau^* \int_{\frac{R}{2}}^R r^2 dr + 2\pi G \frac{\varphi_1}{h} \int_0^{\frac{R}{2}} r^3 dr$$

$$M_1 = \frac{31}{48} \pi \tau^* R^3$$

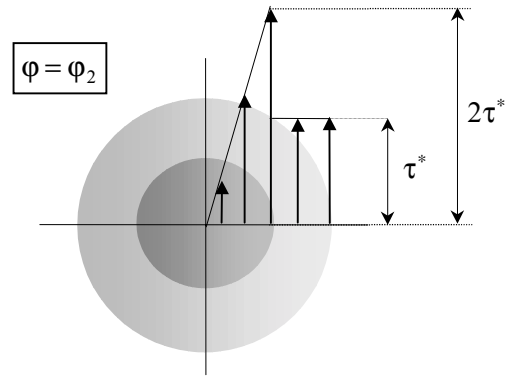
- d) El inicio de la plastificación del material (2), para $\tau_e = 2\tau^*$, no se corresponde con el final de la plastificación del material (1), para $\tau_e = \tau^*$. La distribución de tensiones para $\varphi = \varphi_2$ (inicio de la plastificación del material (2)) es la siguiente:

Por lo tanto se deberá imponer la siguiente condición:

$$\tau|_{r=\frac{R}{2}; \varphi=\varphi_2} = 2\tau^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{G\varphi_2 R}{2h} = 2\tau^* \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{4\tau^* h}{GR}}$$

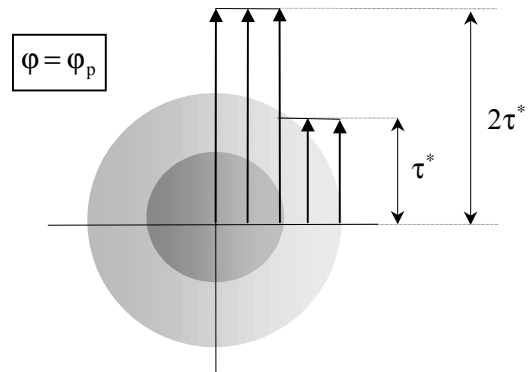


Y el momento correspondiente será:

$$M_2 = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{R}{2}}^R r\tau^* r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{2}} r \left(G \frac{\varphi_2}{h} r \right) r dr d\theta$$

$$\boxed{M_2 = \frac{17}{24} \pi \tau^* R^3}$$

- e) Se busca el valor asintótico de M (M_p) correspondiente a la plastificación de la totalidad del material que compone el cilindro. La distribución de tensiones será la siguiente:



Integrando se encontrará el momento correspondiente:

$$M_p = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{R}{2}}^R r\tau^* r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{2}} r 2\tau^* r dr d\theta$$

$$\boxed{M_p = \frac{3}{4} \pi \tau^* R^3}$$

CUESTIONES PROPUESTAS

CP 8-1 Explicar los conceptos de plano octaédrico, σ_{oct} y τ_{oct} . Obtener las expresiones de σ_{oct} y τ_{oct} en función de las tensiones principales.

CP 8-2 Justificar por qué las superficies de fluencia para materiales isotrópicos son simétricas respecto a tres planos en el espacio de tensiones principales.

CP 8-3 Justificar la siguiente afirmación: “Para una superficie de fluencia plástica de la forma $f(J_2) = 0$, un estado de tensiones hidrostático nunca produce plastificación.”. ¿A qué superficie de fluencia conocida sería aplicable dicha afirmación?

CP 8-4 Demostrar que si la superficie de fluencia plástica no depende del primer invariante del tensor de tensiones, la deformación plástica es incompresible.

CP 8-5 Indicar de forma concisa cuáles son las hipótesis fundamentales de la teoría matemática de la plasticidad.

CP 8-6 Enunciar las hipótesis fundamentales de la teoría matemática incremental de la plasticidad en tres dimensiones.

CP 8-7 Interpretación de la condición de consistencia en la teoría de la plasticidad.

CP 8-8 Criterio de plastificación de Tresca: definición, expresión en función de las tensiones principales, justificación de su forma en el espacio de tensiones y particularizar al caso de una dimensión.

CP 8-9 Justificar los motivos por los que el criterio de Tresca ($F \equiv \sigma_1 - \sigma_3 - K$), recibe el nombre de “criterio de máxima tensión cortante”.

CP 8-10 Demostrar que la superficie de fluencia de Von-Mises puede expresarse en función de las tensiones principales como:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \sigma_u = 0$$

CP 8-11 Justificar si llegará a plastificar según los criterios de Von-Mises, Möhr-Coulomb y Drucker-Prager, un material sometido a un estado de:

- a) Compresión hidrostática creciente.
- b) Tracción hidrostática creciente.

CP 8-12 Obtener y justificar en función de los invariantes tensionales (I_1 , J'_2 , J'_3) la expresión matemática más general de la superficie de fluencia correspondiente a cada una de las siguientes condiciones:

- a) La superficie de fluencia tiene simetría de revolución respecto al eje de presiones hidrostáticas.
- b) Todo estado de tensión hidrostática es elástico.
- c) La plastificación sólo depende del valor de la parte esférica del tensor de tensiones.

CP 8-13 Justificar cuál o cuáles de los criterios de fluencia plástica, Von-Mises, Tresca, Möhr-Coulomb y Drucker-Prager, podrían ser adecuados para modelizar un material en cada uno de los siguientes casos:

- a) El material no plastifica bajo estados de tensión hidrostática por grandes que estos sean.
- b) El material sólo plastifica cuando la máxima tensión tangencial alcanza un cierto valor.
- c) El material se comporta de forma sensiblemente distinta a tracción y compresión.

CP 8-14 Determinar la forma de una superficie de fluencia que en el espacio de Haigh-Westergard (espacio de tensiones principales) viene dada por:

$$f(J'_2) = 0 \quad \text{y} \quad |\sigma_m| \leq \frac{a}{\sqrt{3}}$$

CP 8-15 Indicar la forma que tendrían las siguientes superficies en el espacio tridimensional de tensiones principales:

- a) $\sigma_m = \text{cte}$
- b) $\tau_{\text{oct}} = \text{cte}$
- c) $\frac{\sigma_m}{\tau_{\text{oct}}} = \text{cte}$

CP 8-16 Obtener en función de σ_{oct} y τ_{oct} la expresión de la superficie de fluencia que en el espacio de las tensiones principales viene representada por un cono circular de vértice (1,1,1) y cuya generatriz forma un ángulo de 30° con la bisectriz del 1^{er} octante.

CP 8-17 Justificar, indicando sus valores característicos, la forma de la superficie de fluencia que en el espacio de tensiones principales cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \sigma_m - \beta \sqrt{J'_2} = \gamma \\ f(J'_2) = 0 \end{array} \right\} \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ estrictamente positivos})$$

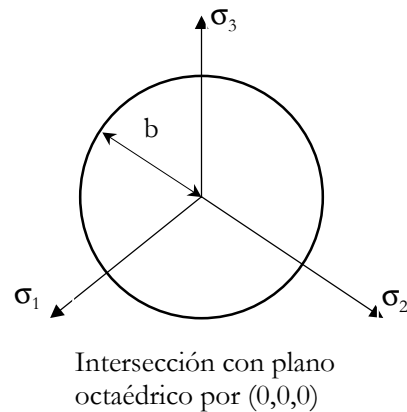
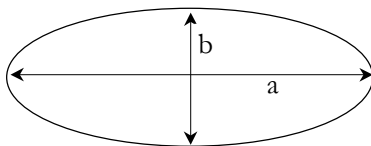
CP 8-18 Dibujar esquemáticamente y acotando los valores significativos, el lugar geométrico en el espacio de tensiones principales de los estados tensionales elásticos definidos por $\sigma_{\text{oct}} + \tau_{\text{oct}}^2 - C \leq 0$, donde C es una constante ($C \geq 0$).

CP 8-19 Un determinado criterio de fluencia plástica define el régimen elástico por las siguientes condiciones, que cumple simultáneamente:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - m^2 &< 0 \\ \frac{\tau_{\text{oct}}}{\sigma_m} - K^2 &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (K, m \text{ cttes.})$$

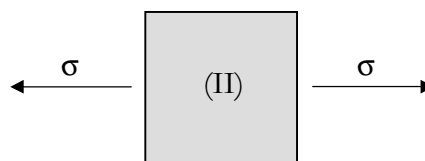
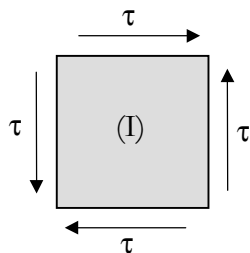
Describir la correspondiente superficie de fluencia en el espacio de tensiones principales.

CP 8-20 Formular en términos de los invariantes I_1 , J'_2 y J'_3 la ecuación de una superficie de fluencia plástica que en el espacio de tensiones principales es un elipsoide de revolución de semiejes a y b , según se indica en las figuras.

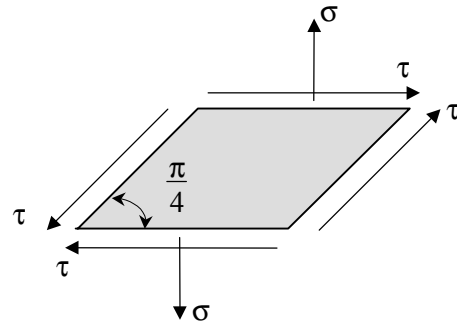


CP 8-21 Un material plástico perfecto se somete a un ensayo de tracción uniaxial ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) y empieza a plastificar para un valor de la tensión $\sigma = \sigma_e$. Si su ángulo de rozamiento interno es de 30° , determinar el valor de la cohesión que habría que asignar al material para poder aplicarle el criterio de Mohr-Coulomb.

CP 8-22 Un material elastoplástico se somete a un ensayo de corte puro (I) y a un ensayo de tracción uniaxial (II). La plastificación se produce, respectivamente, para $\tau = a$ y $\sigma = b$. Determinar los valores de la cohesión y del ángulo de rozamiento interno suponiendo un modelo de Mohr-Coulomb.



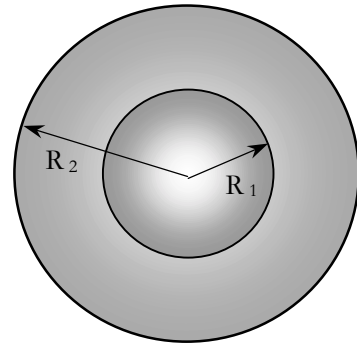
CP 8-23 El estado tensional en un punto de un sólido en tensión plana viene esquematizado en la figura. Determinar los valores de σ y τ para los cuales el punto empieza a plastificar (suponer un criterio de fluencia de Von-Mises y un límite elástico uniaxial σ_e).



PROBLEMAS PROPUESTOS

PP 8-1 Se considera una esfera maciza de radio R_1 rodeada de una corona esférica de radio interior R_1 y radio exterior R_2 . La esfera y la corona son del mismo material y están inicialmente en contacto sin ejercerse ninguna presión. En un cierto instante se empieza a calentar la esfera interior hasta un incremento de temperatura $\Delta\theta$. Se pide:

- Determinar el valor de la presión exterior que sería necesaria aplicar a la corona para que ésta no sufra cambio de volumen (hipótesis de pequeñas deformaciones).
- Determinar los campos de desplazamientos, de deformaciones y de tensiones, en la esfera y la corona en estas condiciones.
- Obtener el menor valor de $\Delta\theta$ para el cual se inicia la plastificación en algún punto, suponiendo las anteriores condiciones y considerando el criterio de Von-Mises.



HIPÓTESIS:

- Propiedades del material: E , $\nu = 0$, α , σ_f , $R_1 = 1$, $R_2 = 3$.
- Se supondrán despreciables las fuerzas másicas.
- Se conoce la solución en desplazamientos y tensiones para una corona esférica de radio interior R_i y exterior R_e sometida a una presión interior P_i y exterior P_e es, para $\nu = 0$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r(r) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_r = Cr + \frac{C_1}{r^2} \quad C = \frac{P_i R_i^3 - P_e R_e^3}{E(R_e^3 - R_i^3)} \quad C_1 = \frac{P_i - P_e}{2E} \frac{R_i^3 R_e^3}{R_e^3 - R_i^3}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad \sigma_{rr} = E \left(C - \frac{2C_1}{r^3} \right) \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = E \left(C + \frac{C_1}{r^3} \right)$$

PP 8-2

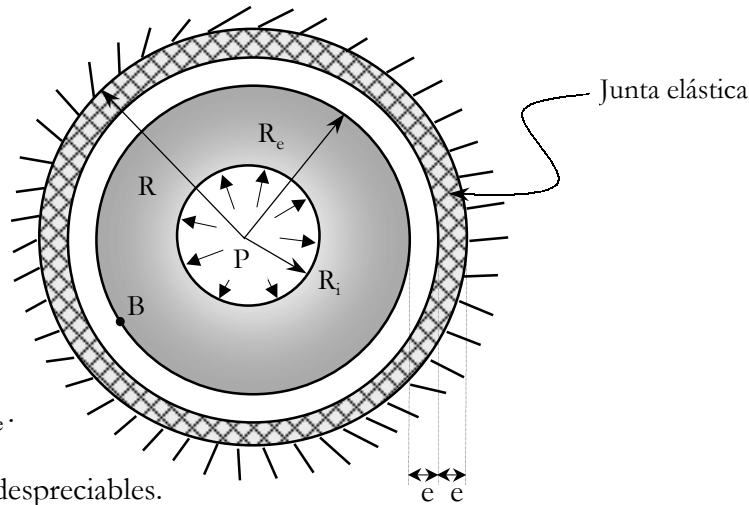
- Obtener la expresión de los criterios de fluencia de Von-Mises y Tresca en función de las tensiones principales y el límite elástico σ_e para estados tensionales de la forma:

$$\sigma_1 > 0 \quad , \quad \sigma_2 > 0 \quad , \quad \sigma_3 = 0$$

- Obtener el campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones de una corona esférica de radios interior y exterior R_i y R_e , respectivamente, sometida a una presión interior y exterior P_i y P_e , respectivamente.
- Aplicar los resultados obtenidos al estudio de la corona esférica de la figura de radios $R_i = 1$ y $R_e = 2$, situada en el interior de una esfera infinitamente rígida de radio $R = 2 + 2e$, donde $e \ll 1$. Entre ambas se sitúa una junta elástica de espesor e . La

corona está sometida a una presión interior de valor P . Obtener la curva $\delta - P$, donde δ es el desplazamiento radial del punto B de la corona.

- d) Calcular los valores de e que garantizan que la plastificación de la corona empieza después del aplastamiento total de la junta. Considerar el criterio de Tresca.



HIPÓTESIS:

- 1) Corona: E , $\nu = 0$, σ_e .
- 2) Junta: $P = K \delta$.
- 3) Fuerzas de volumen despreciables.

PP 8-3 Se considera una esfera maciza de radio R_1 y material (1) rodeada de una corona esférica de radio exterior R_2 y material (2). Ambas esferas están inicialmente en contacto sin ejercerse ninguna presión. Se somete al conjunto a una presión exterior P y a un incremento de temperatura $\Delta\theta$. Se pide:

- a) Determinar los valores posibles de $\Delta\theta$ y P (positivos o negativos) para que no se pierda el contacto entre la esfera y la corona. Representarlos gráficamente en un diagrama $P - \Delta\theta$.
- b) Obtener el estado tensional de la corona y de la esfera para dichos valores.
- c) En estas condiciones, obtener para cada valor de la presión P el valor de $\Delta\theta^*$ para el que se inicia la plastificación en algún punto del conjunto según los criterios de Von-Mises y Möhr-Coulomb. Dibujar las correspondientes gráficas $P - \Delta\theta^*$ (gráficos de interacción).

HIPÓTESIS:

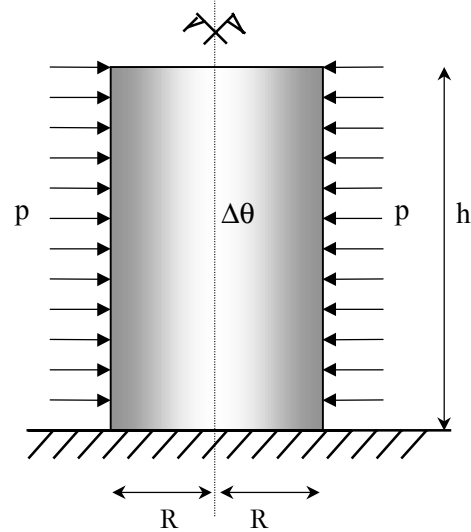
- 1) Material (1): E , $\nu = 0$, 2α , σ_f , C , $\phi = 30^\circ$, $R_1 = 1$
- 2) Material (2): E , $\nu = 0$, α , σ_f , C , $\phi = 30^\circ$, $R_2 = 2$
- 3) Se conoce la solución en desplazamientos y tensiones para una corona esférica de radio interior R_i y exterior R_e sometida a una presión interior P_i y exterior P_e es, para $\nu = 0$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r(r) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_r = Cr + \frac{C_1}{r^2} \quad C = \frac{P_i R_i^3 - P_e R_e^3}{E(R_e^3 - R_i^3)} \quad C_1 = \frac{P_i - P_e}{2E} \frac{R_i^3 R_e^3}{R_e^3 - R_i^3}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad \sigma_{rr} = E \left(C - \frac{2C_1}{r^3} \right) \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = E \left(C + \frac{C_1}{r^3} \right)$$

PP 8-4 Un cilindro de radio R y altura h está sometido a una carga P y a un incremento de temperatura $\Delta\theta$ uniforme tal y como se indica en la figura. Se pide:

- Determinar el campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones en función de las constantes de integración.
- Determinar las constantes de integración y los correspondientes campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones.
- Dado $p = p^* > 0$ determinar el correspondiente valor de $\Delta\theta^*$ para que no existan desplazamientos horizontales.
- En las condiciones del apartado c), determinar el valor de p^* para el cual el cilindro empieza a plastificar de acuerdo con el criterio de Möhr-Coulomb.



HIPÓTESIS:

- Propiedades del material:
 - cohesión: C
 - ángulo de rozamiento interno: $\phi = 30^\circ$.
 - constante térmica: β
 - Constantes de Lamé: $\lambda = \mu$
- No se considerará el peso propio.
- Rozamiento cilindro-suelo nulo.

PP 8-5 Para el cilindro apoyado de la Figura 1 se propone la siguiente solución en desplazamientos y tensiones en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
 u_r &= Ar \quad , \quad A = \frac{(1-\nu)p - \nu q}{E} \quad , \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = p \\
 u_\theta &= 0 \quad , \quad \sigma_{zz} = q \\
 u_z &= Bz \quad , \quad B = \frac{-2\nu p + q}{E} \quad , \quad \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0
 \end{aligned}$$

- Demstrar que la solución propuesta cumple todos los requisitos necesarios para ser solución del problema elástico lineal de la Figura 1.
- Se consideran ahora los dos cilindros de la Figura 2, separados por una distancia muy pequeña $e \ll H$. Se somete el cilindro inferior a un incremento de temperatura creciente $\Delta\theta \geq 0$. Se considera el material de los dos cilindros elastoplástico con un diagrama tensión-deformación uniaxial como el de la Figura 3. Dibujar, acotando los valores significativos, las curvas $\delta - \Delta\theta$ y $\sigma_{zz} - \Delta\theta$ en el punto C del cilindro inferior:
 - Antes del contacto entre los dos cilindros.
 - Después del contacto y hasta el inicio de la plastificación.

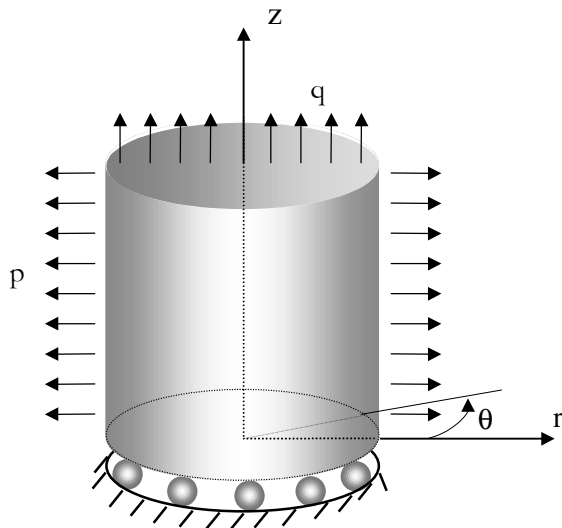


Figura 1

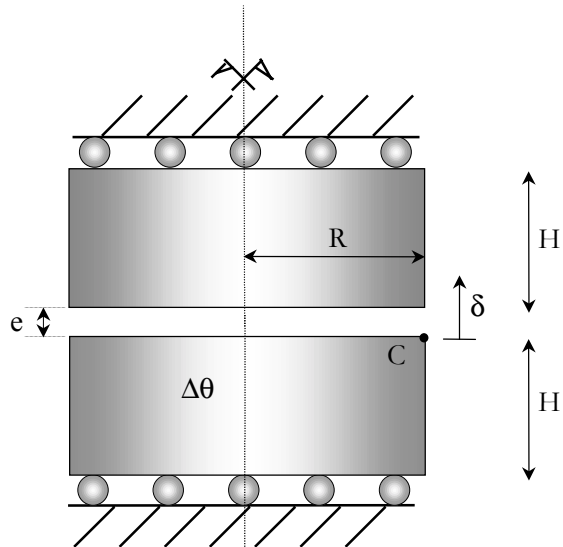


Figura 2

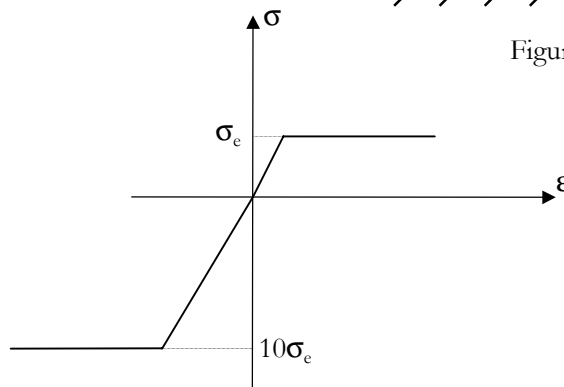


Figura 3

HIPÓTESIS:

- 1) Se despreciarán el rozamiento, las fuerzas másicas y las de inercia.

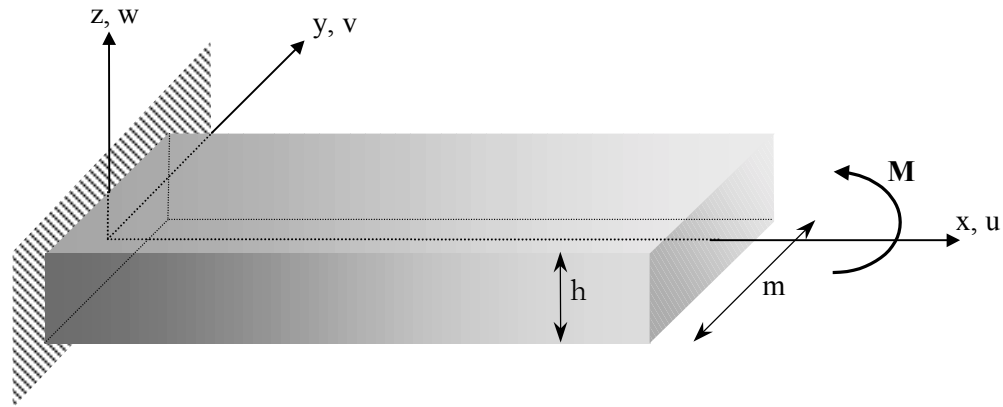
PP 8-6 Se considera la viga de sección rectangular de la figura, empotrada en un extremo y sometida a un momento flector M en el otro. El material es elastoplástico perfecto de límite elástico σ_e . Se considera el siguiente campo de desplazamientos:

$$\begin{cases} u = -z\varphi'(x) = -z\frac{d\varphi(x)}{dx} \\ v = 0 \\ w = \varphi(x) \end{cases}$$

Se pide:

- a) Justificar que cualquier sección normal al eje x permanece, después de la deformación, plana y normal a la deformada del eje x (Hipótesis de Bernouilli).
- b) Justificar que, si se desprecia el coeficiente de Poisson, $v=0$, el campo de desplazamientos dado es solución del problema elástico. Obtener el valor de $\varphi(x)$ y los correspondientes campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones.
- c) Obtener el máximo valor del momento M (M_e) para el cual todos los puntos de la viga están en régimen elástico y el correspondiente valor de la flecha (desplazamiento w) δ en el extremo libre de la viga.

- d) Para $M > M_e$ obtener el valor de M en función del tamaño de la zona plastificada dentro de una sección transversal de la viga.
- e) Obtener el valor del máximo momento alcanzable (M_p) y el cociente entre M_p y M_e .
Dibujar, acotando los valores significativos, el diagrama $M - \delta$ para $0 < \delta < \infty$.



HIPÓTESIS:

- 1) No se considera el peso propio.
- 2) Se considerarán pequeñas deformaciones.
- 3) Momento de inercia de la sección respecto al eje y : $I = \frac{1}{12}mh^3$

PP 8-7 Una pieza ABCD de un material elastoplástico perfecto se ensaya en la máquina esquematizada en la Figura 1. La curva acción-respuesta ($P - \delta$) viene indicada en la Figura 2. Se supone un estado tensión-deformación uniaxial en la pieza tal que:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\delta}{hL} y & \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0 \\ \sigma_x &\neq 0 & \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Se piden los siguientes valores que acotan el gráfico de la Figura 2:

- a) El valor de la carga elástica P_e y el correspondiente desplazamiento δ_e .
- b) El valor de las cargas últimas plásticas a tracción P_p y a compresión P_q .
- c) El valor de las ordenadas y abscisas correspondientes a los puntos (1) y (2) del gráfico de la Figura 2.

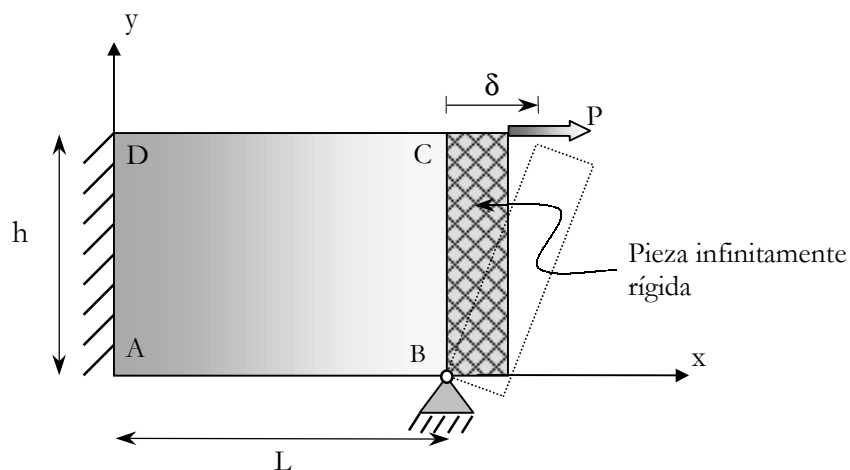


Figura 1

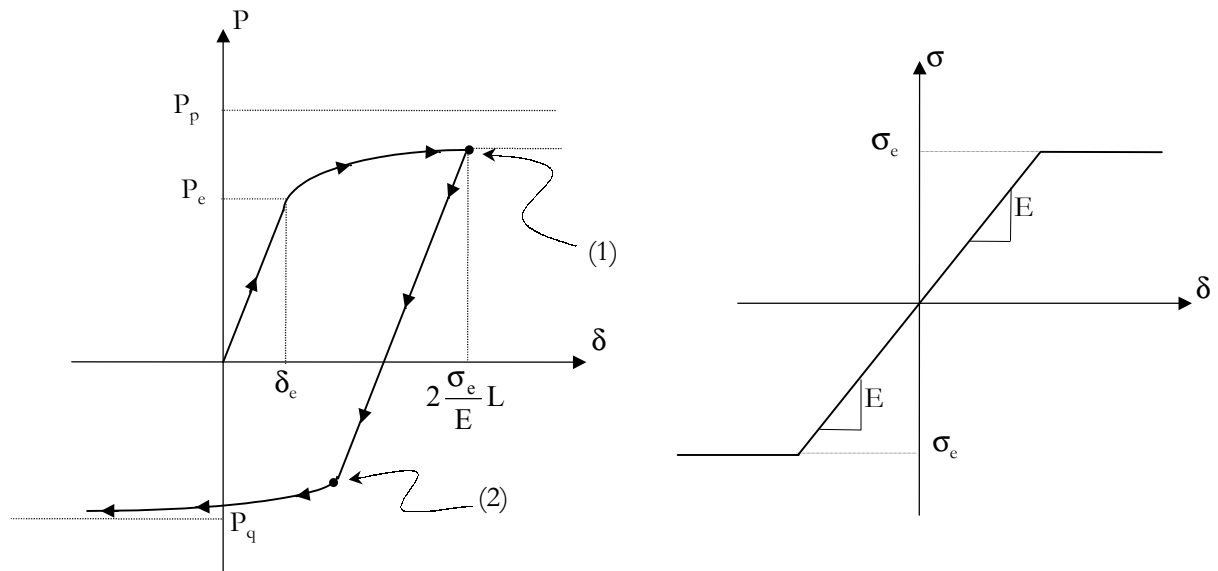


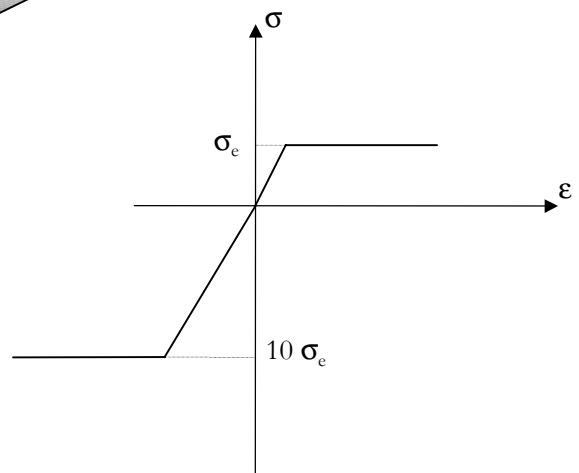
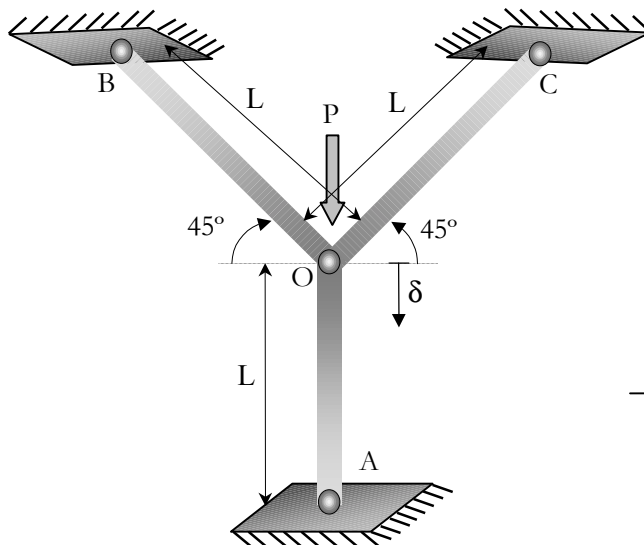
Figura 2

HIPÓTESIS:

- 1) Módulo de Young: E
- 2) Coeficiente de Poisson: $\nu = 0$
- 3) Límite elástico: σ_e
- 4) Espesor de la pieza: b

PP 8-8 Las barras articuladas OA , OB y OC de la figura son de hormigón al que se le supone un comportamiento elastoplástico perfecto con un límite elástico a tracción σ_e y un límite elástico a compresión $10\sigma_e$. Se aplica una carga vertical P en el punto O , creciente desde $P=0$, hasta que se alcanza un desplazamiento vertical en dicho punto de valor $\delta = 20 \frac{\sigma_e}{E} L$. Posteriormente se descarga nuevamente hasta $P=0$. Se pide:

- a) Dibujar el diagrama $P-\delta$ durante el proceso, acotando los valores significativos e indicando el estado de plastificación de las barras en cada instante.
- b) Calcular el valor del desplazamiento del punto O una vez terminado el proceso.



9 Ecuaciones constitutivas en fluidos

CUESTIONES PROPUESTAS

CP 9-1 Definir los siguientes conceptos:

- a) Presión hidrostática.
- b) Presión media.
- c) Presión termodinámica.

Justificar en qué casos serán iguales la presión media y la presión termodinámica y cuándo lo serán las tres.

CP 9-2 Definir los siguientes conceptos:

- a) Fluido de Stokes.
 - b) Fluido Newtoniano.
 - c) Fluido perfecto.
 - d) Fluido incompresible.
 - e) Flujo barotrópico.
-

CP 9-3 A partir de la fórmula general de la ecuación constitutiva para fluidos viscosos, deducir la ecuación constitutiva para un fluido Newtoniano isótropo en componentes esféricas y desviadoras.

NOTA: Utilizar la expresión: $\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$.

CP 9-4 Obtener la ecuación constitutiva de un fluido Newtoniano, barotrópico e isótropo en componentes desviadoras y esféricas.

CP 9-5 Definir presión hidrostática, presión media y presión termodinámica para un fluido Newtoniano y obtener las relaciones entre ellas.

CP 9-6 A partir de la ecuación constitutiva de un fluido Newtoniano isótropo, obtener la expresión de la potencia tensional, indicando su parte recuperable y su parte disipativa. Obtener la expresión de la potencia disipativa en función de las componentes esféricas y desviadoras del tensor velocidad de deformación y deducir las limitaciones impuestas a los coeficientes de viscosidad.

CP 9-7 Justificar las limitaciones que el segundo principio de la termodinámica impone sobre los coeficientes de viscosidad para los fluidos Newtonianos isótropos.

10 Mecánica de fluidos

CUESTIONES RESUELTAS

CR 10-1 Un fluido perfecto y barotrópico tiene una ecuación cinética de estado definida por $\rho = \rho_0 + \frac{p}{k}$, donde k es constante. Obtener la distribución de presiones en régimen cuasiestático (aceleración nula) bajo la acción del campo gravitatorio ($\mathbf{b} = [0 \ 0 \ -g]^T$).

Resolución:

La *Ecuación Constitutiva* de un fluido perfecto es:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$$

La *Ecuación de Conservación de la Cantidad de Movimiento* para el caso cuasiestático es:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow -\nabla p + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

El hecho de que sea fluido barotrópico implica que la densidad es una función de la presión. Esta relación es, precisamente, la *Ecuación Cinética* del enunciado:

$$\rho = \rho(p) \Rightarrow \rho = \rho_0 + \frac{p}{k}$$

Utilizando estas tres expresiones y la definición de \mathbf{b} se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = p(z)$$

$$-\frac{dp}{dz} - \left(\rho_0 + \frac{p}{k} \right) g = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dz} + \frac{g}{k} p = -\rho_0 g$$

La solución de esta ecuación diferencial es la suma de la solución homogénea y una particular:

$$\text{Solución homogénea : } \frac{dp}{dz} + \frac{g}{k} p = 0 \Rightarrow p = C e^{-\frac{g}{k} z}$$

$$\text{Solución particular : } p = -k\rho_0$$

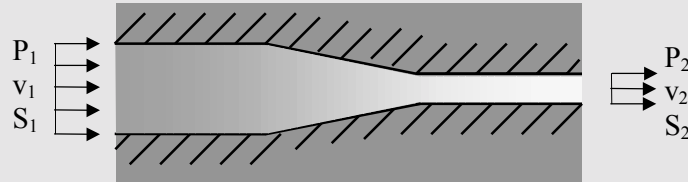
Por lo tanto resulta:

$$p = -k\rho_0 + C e^{-\frac{g}{k} z}$$

CR 10-2 El fluido barotrópico del interior de la tubería de la figura tiene por ecuación cinética de estado:

$$p = \beta \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad (\beta \text{ y } \rho_0 \text{ ctes.})$$

Calcular en régimen estacionario la presión de salida P_2 en función de las demás variables de la figura. Justificar la fórmula empleada.



Resolución:

Según la *Ecuación de Continuidad* (global, espacial) se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

Utilizando la 2ª expresión del *Teorema del Transporte de Reynolds* se puede obtener:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Además, si se consideran condiciones de régimen estacionario resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0 \Rightarrow \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Aplicando esta última expresión a nuestro problema, queda:

$$-\rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2 = 0 \Rightarrow \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$

Introduciendo la *Ecuación Cinética de Estado* se obtiene la siguiente expresión:

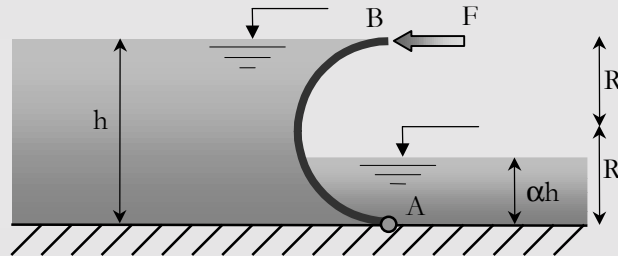
$$p = \beta \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{\frac{p}{\beta}}$$

Ahora tan sólo hay que sustituir esta expresión en la anterior para encontrar el resultado que se pide:

$$\rho_0 e^{\frac{p_1}{\beta}} v_1 S_1 = \rho_0 e^{\frac{p_2}{\beta}} v_2 S_2 \Rightarrow e^{\frac{p_2 - p_1}{\beta}} = \frac{v_1 S_1}{v_2 S_2} \Rightarrow$$

$$\boxed{p_2 = p_1 + \beta \ln\left(\frac{v_1 S_1}{v_2 S_2}\right)}$$

CR 10-3 Calcular el valor por unidad de espesor de la fuerza horizontal F que hay que aplicar en el punto B de la compuerta semicircular de la figura, que puede girar alrededor de la rótula A , para que la recta AB sea vertical. La compuerta separa dos niveles distintos de cotas h y αh , de un mismo fluido.



Hipótesis:

- 1) Se desprecia el peso de la compuerta y la presión atmosférica.

Resolución:

Las únicas fuerzas que actúan sobre la compuerta son las fuerzas de presión de los fluidos, la fuerza F y la reacción en A (componente horizontal H y componente vertical V).

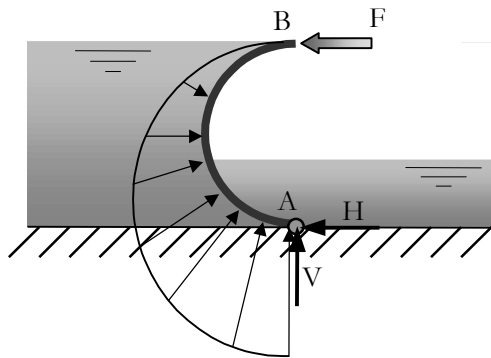


Figura 1

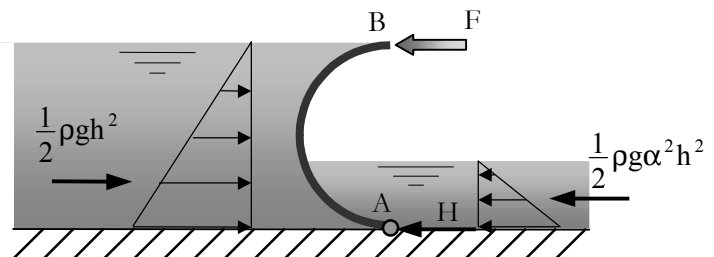


Figura 2

Como los fluidos ejercen una presión perpendicular a la superficie de la compuerta y ésta es circular, la resultante de integrar las presiones sobre la superficie pasará por el centro de la circunferencia que define la compuerta. Así, si se plantea el equilibrio de momentos respecto del centro de la circunferencia (ver Figura 1) resulta:

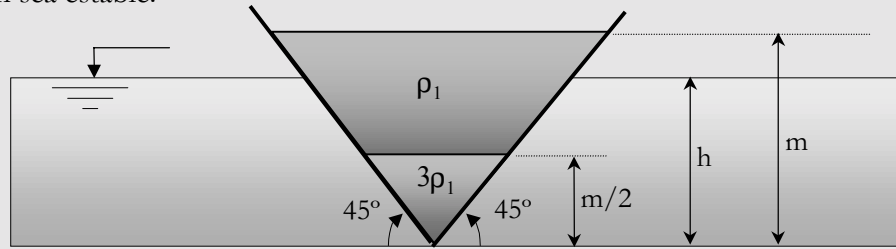
$$FR = HR \Rightarrow H = F$$

Y si ahora se impone equilibrio de fuerzas horizontales, sabiendo que los fluidos ejercen una presión horizontal con una distribución triangular (ver Figura 2), se tiene:

$$2F + \frac{1}{2}(\rho g \alpha h)(\alpha h) = \frac{1}{2}(\rho g h)h \Rightarrow$$

$$\boxed{F = \frac{1}{4} \rho g h^2 (1 - \alpha^2)}$$

CR 10-4 Un cajón triangular, compuesto por dos materiales de densidades ρ_1 y $3\rho_1$, flota en el agua (de densidad ρ_0). Calcular el calado h y la relación entre ρ_0 y ρ_1 para que la flotación sea estable.



Resolución:

Si se consideran unos ejes cartesianos en el vértice del cajón, se puede calcular su centro de masas:

Consideramos que todo el cajón tiene densidad ρ_1 resulta:

$$\text{Peso: } W_1 = \frac{1}{2} m(2m)\rho_1 = \rho_1 m^2 \quad \text{Centro de gravedad: } y_{G_1} = \frac{2}{3} m$$

Como se ha considerado que la punta del cajón tenía densidad ρ_1 , ahora se deberá considerar que tiene densidad $3\rho_1 - \rho_1 = 2\rho_1$:

$$\text{Peso: } W_2 = \frac{1}{2} \frac{m}{2} m(2\rho_1) = \frac{1}{2} \rho_1 m^2 \quad \text{Centro de gravedad: } y_{G_2} = \frac{2}{3} \frac{m}{2} = \frac{m}{3}$$

Por lo tanto, el centro de gravedad del conjunto será:

$$y_G = \frac{W_1 y_{G_1} + W_2 y_{G_2}}{W_1 + W_2} = \frac{5}{9} m$$

El empuje del fluido será equivalente al volumen de fluido desplazado y, por estar en equilibrio, deberá ser igual al peso del cajón:

$$\left. \begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2} h(2h)\rho_0 = h^2 \rho_0 \\ W_1 + W_2 &= \frac{3}{2} m^2 \rho_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h = m \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0}}$$

El centro de gravedad donde se aplica esta fuerza es el centro geométrico del volumen de fluido desplazado, es decir:

$$y_g = \frac{2}{3} h = m \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\rho_1}{\rho_0}}$$

Para que el equilibrio sea estable es necesario que el centro geométrico del fluido sea superior al del cajón:

$$y_g > y_G \Rightarrow \rho_1 > \frac{25}{54} \rho_0$$

Además, por condiciones de flotabilidad, deberá imponerse que $h < m$:

$$\frac{h}{m} < 1 \Rightarrow \rho_1 < \frac{2}{3} \rho_0$$

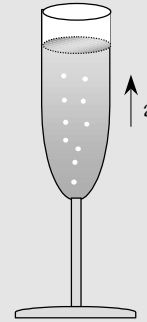
Finalmente, queda la condición siguiente:

$$\boxed{\frac{25}{54} \rho_0 < \rho_1 < \frac{2}{3} \rho_0}$$

CR 10-5 Admitiendo que el contenido de una “copa de cava” es un fluido perfecto y que la presión termodinámica es igual a la hidrostática, calcular la aceleración con que suben las burbujas de gas de la copa desde el fondo de la misma.

Hipótesis:

- 1) Densidad del gas: ρ_a
- 2) Densidad del fluido: ρ_c
- 3) $\rho_c = \alpha \rho_a$



Resolución:

Si se admite que el contenido es un fluido perfecto, entonces se cumple que:

$$\sigma = -p\mathbf{1}$$

Aquí p es la presión termodinámica, pero por hipótesis se admite que es igual a la hidrostática. En estas condiciones se puede escribir:

$$p = p_0 \Rightarrow \sigma = -p\mathbf{1}$$

Según el *Teorema de Arquímedes* se puede evaluar el empuje ascendente que ejerce el cava sobre la burbuja como:

$$E = \rho_c Vg$$

En esta ecuación V es el volumen de la burbuja.

El peso de la burbuja, que tira de ella hacia abajo, se puede expresar de la siguiente manera:

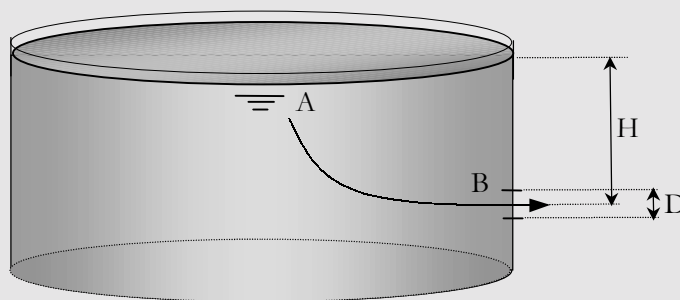
$$W = \rho_a Vg$$

Por lo tanto, la diferencia entre estas dos fuerzas será la resultante que actúe sobre la burbuja:

$$\left. \begin{array}{l} F = ma = \rho_a Va \\ F = E - W \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_a Va = (\rho_c - \rho_a)Vg \Rightarrow a = \frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_a} g \Rightarrow$$

$$\boxed{a = (\alpha - 1)g}$$

CR 10-6 Un depósito circular de gran diámetro que está lleno de agua vierte por un pequeño orificio lateral situado a una altura H por debajo del nivel del agua en el depósito. Si el caudal vertido es Q , obtener el diámetro D del orificio.



Resolución:

Como el depósito es de gran diámetro, se puede suponer que la diferencia de cotas H se mantiene constante con el tiempo, por lo que se tendrá régimen estacionario.

Por otro lado, como se está tratando con agua, se está ante un fluido perfecto e incompresible.

Así, se concluye que se puede aplicar la *Ecuación de Bernoulli*:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{cte.}, \text{ en una línea de corriente}$$

Al aplicar la *Ecuación de Bernoulli* a los puntos A y B pertenecientes a la misma línea de corriente se obtiene:

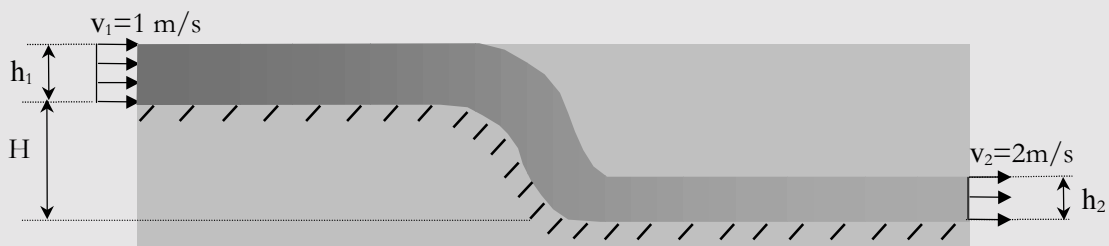
$$\left. \begin{array}{l} \text{A: } H + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + 0 \\ \text{B: } 0 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \end{array} \right\} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gH}$$

Finalmente se tiene:

$$Q = v_B S_B = \sqrt{2gH} \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow$$

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi \sqrt{2gH}}}$$

CR 10-7 Se considera un fluido perfecto e incompresible que circula por el canal de la figura en régimen estacionario. Determinar el valor de H .



Hipótesis:

- 1) Se desprecia la presión atmosférica.

Resolución:

Teniendo en cuenta la *Ecuación de Continuidad* se puede establecer la siguiente relación en el volumen de control que definen las secciones consideradas:

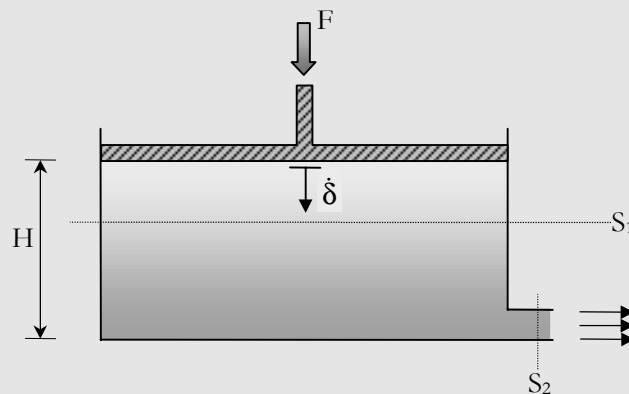
$$v_1 h_1 = v_2 h_2 \Rightarrow h_2 = h_1 \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow h_2 = \frac{1}{2} h_1$$

Aplicando ahora la *Ecuación de Bernoulli* en los puntos extremos de dicho volumen de control, resulta:

$$\left. \begin{array}{l} 1: (H + h_1) + 0 + \frac{v_1^2}{2g} \\ 2: h_2 + 0 + \frac{v_2^2}{2g} \end{array} \right\} \Rightarrow H = h_2 - h_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \Rightarrow$$

$$H = -h_1 + \frac{3}{2g}$$

CR 10-8 Calcular la relación entre la fuerza F aplicada al émbolo de la figura y su velocidad de descenso $\dot{\delta}$.



Hipótesis:

- 1) Suponer que el fluido es perfecto, incompresible y que el régimen es estacionario.
- 2) Se desprecia la presión atmosférica.
- 3) S_1 y S_2 son secciones transversales.
- 4) La densidad del fluido es ρ .

Resolución:

Como es un fluido perfecto el estado tensional será de la forma:

$$\sigma = -p\mathbf{1}$$

Si se aplica la ecuación continuidad se obtiene la siguiente relación entre velocidades del fluido:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = \frac{S_1}{S_2} \dot{\delta}$$

Si se tiene en cuenta la *Ecuación de Bernoulli* entre un punto arbitrario en contacto con el émbolo y otro en la salida, pertenecientes a la misma línea de corriente, resulta:

$$H + \frac{p}{\rho g} + \frac{\dot{\delta}^2}{2g} = 0 + 0 + \left(\frac{S_1}{S_2} \dot{\delta} \right)^2 \frac{1}{2g} \Rightarrow p = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] \dot{\delta}^2 - \rho g H$$

De aquí se deduce que p ha de ser constante para cualquier punto en contacto con el émbolo ($x = H$). Entonces se obtiene que:

$$p = \text{cte.}, \forall x = H \Rightarrow F = p S_1$$

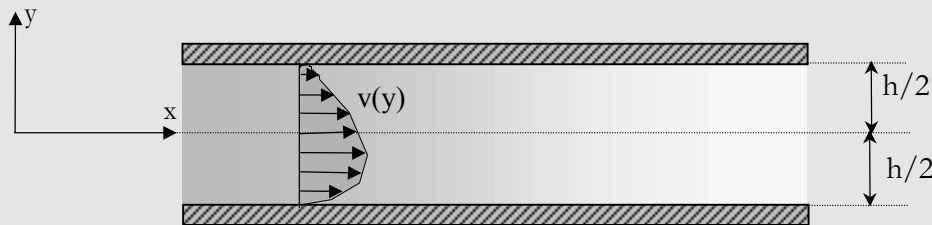
Finalmente, la fuerza F se relaciona con $\dot{\delta}$ según:

$$F = \frac{\rho}{2} S_1 \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] \dot{\delta}^2 - \rho g H S_1$$

CR 10-9 Un fluido Newtoniano incompresible de viscosidad μ , fluye en la dirección del eje de coordenadas x entre dos placas paralelas ($v_x = v(y), v_y = v_z = 0$). Se sabe que el gradiente de presiones es constante y que tiene la siguiente expresión:

$$\nabla p = [a, 0, 0]^T$$

Calcular y dibujar sobre una sección transversal la distribución de velocidades (flujo de Poiseuille).



Hipótesis:

- 1) Se desprecian las fuerzas másicas.
- 2) Flujo estacionario.

Resolución:

La *Ecuación de Navier-Stokes* tiene la siguiente expresión:

$$-\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu\nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Si se desprecian las fuerzas másicas queda:

$$-\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu\nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Si se tiene en cuenta que el fluido es incompresible ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$):

$$-\nabla p + \mu\nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

El término de la derivada material se puede escribir de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= [v(y) \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v(y)}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}$$

Finalmente, queda:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow -a + \mu \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} = \frac{a}{\mu}$$

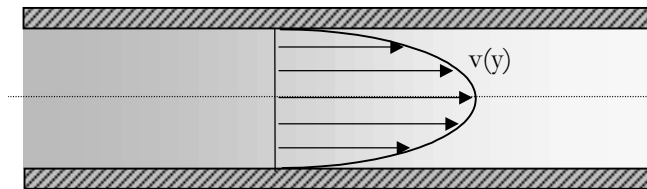
$$\frac{\partial v(y)}{\partial y} = \frac{a}{\mu} y + C_1 \Rightarrow v(y) = \frac{a}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

Imponiendo las condiciones de contorno se obtendrán los valores de las constantes:

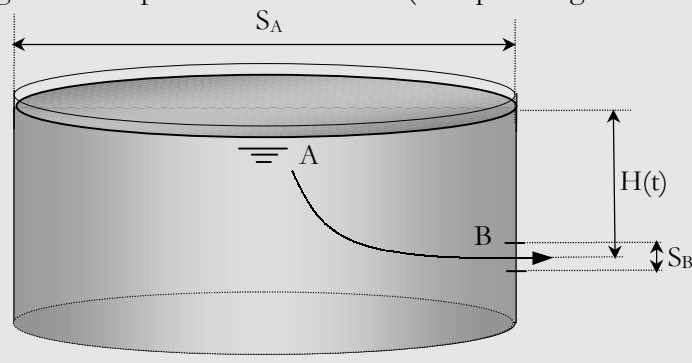
$$\left. \begin{aligned} v(y)\Big|_{y=\frac{h}{2}} = v(y)\Big|_{y=-\frac{h}{2}} &= 0 \\ \frac{a}{2\mu} \left(\frac{h}{2}\right)^2 + C_1 \frac{h}{2} + C_2 &= 0 \\ \frac{a}{2\mu} \left(-\frac{h}{2}\right)^2 - C_1 \frac{h}{2} + C_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{ah^2}{8\mu} \end{cases}$$

Finalmente se obtiene:

$$v(y) = \frac{a}{2\mu} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right)$$



CR 10-10 Un depósito circular de gran diámetro y sección S_A está lleno de agua. Este depósito vierte por un pequeño orificio lateral de sección S_B situado a una distancia $H(t)$ por debajo del nivel del agua en el depósito. Obtener la ecuación diferencial ($f(H, \dot{H}, S_A, S_B) = 0$) que gobierna el problema de vaciado (se supone régimen estacionario).



Resolución:

Según el *Teorema de Bernoulli* se verifica esta expresión para una línea de corriente:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{cte.}$$

Por lo tanto, aplicando esta propiedad a los puntos A y B se obtiene:

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(t) + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = 0 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \Rightarrow$$

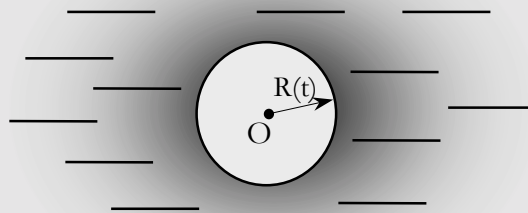
$$\Rightarrow 2gH(t) + v_A^2 - v_B^2 = 0$$

Basta plantear, por último, las siguientes consideraciones sobre velocidades del fluido en las secciones consideradas:

$$\left. \begin{aligned} v_A &= \frac{Q}{S_A} = -\dot{H} \\ v_B &= \frac{Q}{S_B} = -\frac{S_A \dot{H}}{S_B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{2gH + \dot{H}^2 \left(1 - \frac{S_A^2}{S_B^2} \right) = 0}$$

CR 10-11 En el seno de un fluido Newtoniano, incompresible y de dimensión infinita, existe una burbuja esférica de gas cuyo radio $R(t)$ varía con el tiempo. Determinar en función de $R(t)$ y $R'(t)$ el campo de velocidades en el fluido. No se consideran las fuerzas másicas y se supone inmóvil el punto O .



Resolución:

Como se tiene simetría esférica, se va a considerar la velocidad en coordenadas esféricas. Se hará la hipótesis de que este campo de velocidades es de la forma:

$$\mathbf{v} = (v_r(r), 0, 0)^T$$

Al tratarse de un fluido incompresible se deduce:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) = 0 \Rightarrow r^2 v_r = A \Rightarrow v_r = \frac{A}{r^2}$$

Como la posición del contorno viene definida por: $r = R(t)$ resulta:

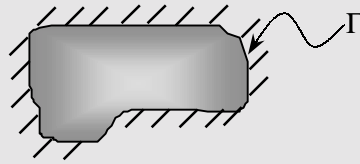
$$v_r|_{r=R} = \frac{dR(t)}{dt} = R'(t) \Rightarrow \frac{A}{R^2} = R' \Rightarrow A = R^2 R'$$

Finalmente queda:

$$\boxed{v_r = \frac{R^2(t) R'(t)}{r^2}}$$

CR 10-12 A partir del teorema de las fuerzas vivas demostrar que para un fluido Newtoniano incompresible que se mueve en el interior de un recipiente rígido, inmóvil y cerrado y despreciando las fuerzas másicas, se cumple:

$$\frac{dv^2}{dt} = -\frac{4\mu}{\rho} \mathbf{d} : \mathbf{d}$$



Hipótesis:

1) Condición de adherencia: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, en Γ

Resolución:

El *Teorema de las Fuerzas Vivas* tiene la siguiente expresión:

$$P_e = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV$$

Como no se consideran fuerzas másicas ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) y como el recipiente está inmóvil, cosa que implica por adherencia que la velocidad del fluido en el contorno es nula, entonces se puede concluir:

$$P_e = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV$$

A partir del *Teorema del Transporte de Reynolds* se puede reescribir la expresión anterior como:

$$\int_V \frac{1}{2} \rho \frac{dv^2}{dt} dV = - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV, \forall V \Rightarrow \frac{1}{2} \rho \frac{dv^2}{dt} = - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$$

Por otra parte, en un fluido incompresible se cumple:

$$\text{tr}(\mathbf{d}) = 0$$

Por lo tanto, su ecuación constitutiva será:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + \lambda \text{tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d} = -p \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d}$$

En estas condiciones, la expresión $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$ queda de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = -p \text{tr}(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d} : \mathbf{d} = 2\mu \mathbf{d} : \mathbf{d}$$

Finalmente, se concluye:

$$\frac{dv^2}{dt} = -\frac{4\mu}{\rho} \mathbf{d} : \mathbf{d}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

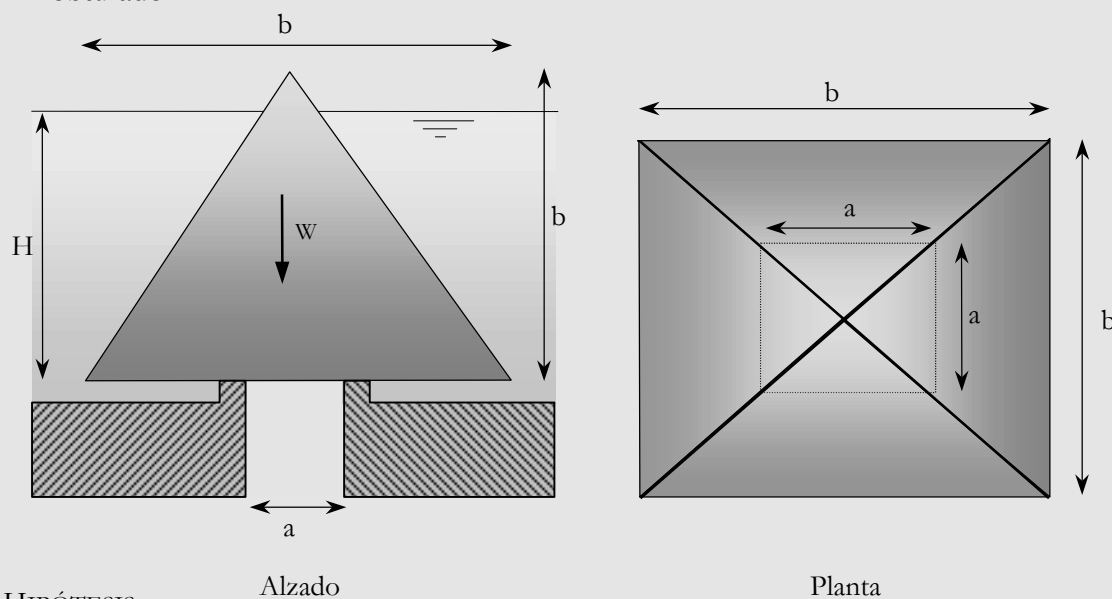
PR 10-1 Un flotador en forma de pirámide y de base cuadrada es utilizado para obturar el orificio (cuadrado) de desagüe de un depósito que contiene agua. Se pide:

- a) Obtener la resultante del empuje hidrostático F ejercido sobre el flotador para todos los posibles niveles de agua H del depósito, es decir:

$$0 < H \leq b$$

$$H \geq b$$

- b) Dibujar el gráfico $F - H$, acotando los valores significativos.
c) A la vista del gráfico anterior, y siendo W el peso del flotador, razonar e indicar en qué condiciones y para qué valores de W y H el flotador actuará realmente como un obturador.



HIPÓTESIS:

- 1) Se desprecia la presión atmosférica.

Resolución:

- a) El empuje hidrostático se puede calcular como el empuje que sufriría la pirámide sin tener en cuenta la presencia del orificio y, posteriormente, restarle la fuerza correspondiente al empuje del agua del agujero, ya que en el problema ésta no existe.

Caso $0 < H \leq b$

El volumen sumergido en este caso es :

$$V_{\text{sumergido}} = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}(b-H)^3$$

Por lo tanto, el empuje hidrostático considerándolo sin agujero es:

$$F_{\text{total}} = \rho g V_{\text{sumergido}} = \rho g \left[\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}(b-H)^3 \right]$$

El contacto entre el agujero y la pirámide se produce a una profundidad constante H . Por lo tanto, el agua que estaría en el orificio provocaría un empuje:

$$F_{\text{agujero}} = \text{presión} \cdot \text{superficie} = \rho g H \cdot a^2$$

Pero como el agujero está vacío, esta fuerza deberá ser restada a la total ya que en la realidad no actúa:

$$F_{\text{resultante}} = F_{\text{total}} - F_{\text{agujero}}$$

$$F_{\text{resultante}} = \rho g \frac{1}{3} [b^3 - (b-H)^3] - \rho g H a^2$$

Caso $H \geq b$

En este caso el volumen sumergido es:

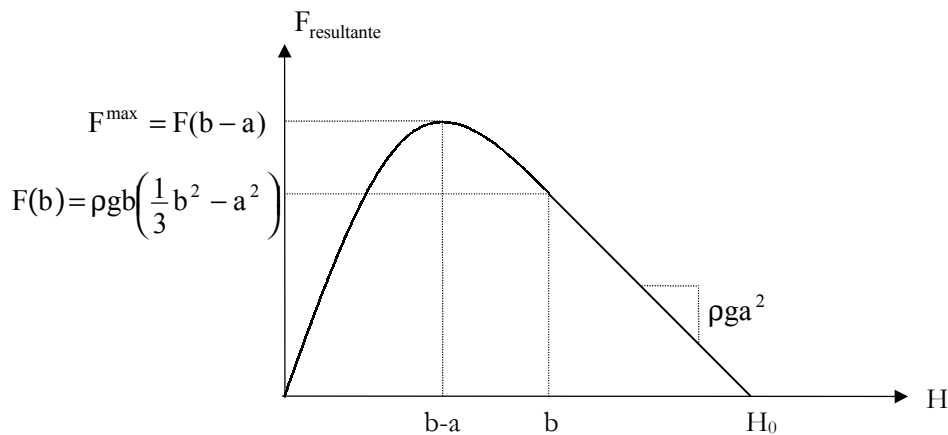
$$V_{\text{sumergido}} = \frac{1}{3} b^3$$

El resto del razonamiento será igual que antes:

$$\left. \begin{array}{l} F_{\text{total}} = \rho g V_{\text{sumergido}} \\ F_{\text{agujero}} = \rho g H a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow F_{\text{resultante}} = F_{\text{total}} - F_{\text{agujero}}$$

$$F_{\text{resultante}} = \frac{1}{3} \rho g b^3 - \rho g H a^2$$

- b) $F_{\text{resultante}}(H)$ es un polinomio cúbico, en el primer caso, mientras que es una recta en el segundo caso:



Donde el valor de H para F^{\max} se obtiene derivando $F(H)$, del primer caso, respecto de H e igualando a cero:

$$F^{\max} = F(b-a) = \rho g \left(\frac{1}{3} b^3 + \frac{2}{3} a^3 - b a^2 \right)$$

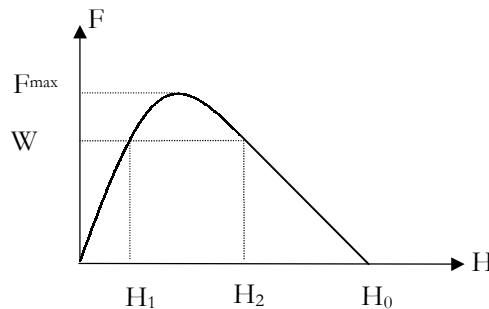
Y el valor del calado H_0 para el que la fuerza ejercida por el agua sobre el flotador vale cero:

$$H_0 = \frac{b^3}{3a^2}$$

c) Se va a discutir en qué casos el flotador actuará como un obturador:

Si $W > F^{\max}$: el agujero estará siempre obturado.

Si $W < F^{\max}$: hay dos posibilidades:



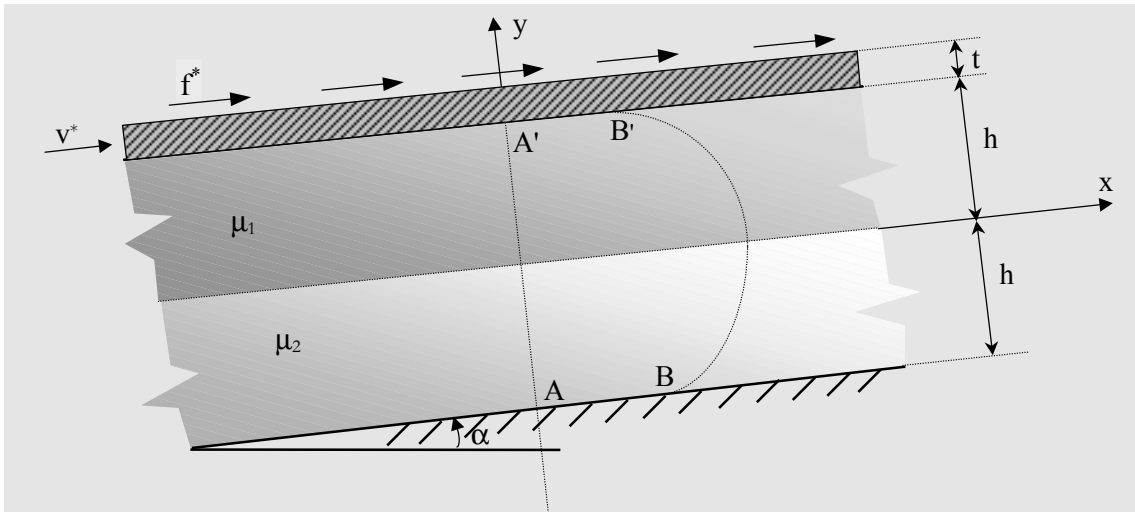
Si $H \in \{[0, H_1] \cup [H_2, H_0]\} \Rightarrow$ hay obturación ya que $W > F$.

Si $H \in [H_1, H_2] \Rightarrow$ no hay obturación, pues aquí $W < F$

Si $H \geq H_0 \Rightarrow$ siempre hay obturación, pues aquí F tendrá el mismo sentido (hacia abajo) que W , por lo tanto el líquido ayuda a cerrar el agujero.

PR 10-2 Sobre una placa rígida indefinida, de densidad ρ^* y espesor t , actúa una fuerza tangencial f^* por unidad de superficie. La placa desliza a una velocidad v^* sobre un plano inclinado con un ángulo α . Entre la placa y el plano inclinado hay dos fluidos Newtonianos, distintos e inmiscibles, de viscosidades μ_1 y μ_2 , que se distribuyen en dos capas del mismo espesor h . Se pide:

- Establecer y razonar las hipótesis correspondientes a los campos de presión y de velocidad.
- Integrar las correspondientes ecuaciones diferenciales y obtener, salvo las constantes de integración, la distribución de velocidades y presiones en cada fluido.
- Indicar y justificar las condiciones de contorno que hay que aplicar para determinar dichas constantes de integración.
- Determinar completamente los campos de velocidades y de presión, así como las tensiones en cada fluido. Dibujar la distribución de cada variable (velocidades, presión y tensiones) sobre una sección transversal como la $A-A'$, acotando los valores significativos.
- Obtener el valor de v^* en función de f^* y el caudal q que pasa por una sección semicircular como la $B-B'$.



HIPÓTESIS:

- 1) Fluidos incompresibles.
- 2) Régimen estacionario.
- 3) Fuerzas de masa despreciables en los fluidos.
- 4) Presión atmosférica despreciable.

Resolución:

- a) Comentar primero que la dimensión z perpendicular al papel no interviene.

Se supondrán una presión y una velocidad del tipo:

$$p = p(x, y)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = [v_x(x, y) \quad 0 \quad 0]^T$$

De hecho, la velocidad no dependerá de x , pues será la misma en todas las secciones transversales tipo $A - A'$. Si no se ve esto a priori, se puede obtener al imponer la *Ecuación de Continuidad*, teniendo en cuenta que se tienen fluidos incompresibles:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \text{ pero } v_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_x &= v_x(y) \Rightarrow \mathbf{v} = [v_x(y) \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned}$$

Por lo tanto, los campos de presiones y velocidades tendrán esta forma:

$$\boxed{\begin{aligned} p &= p(x, y) \\ \mathbf{v} &= [v_x(y) \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned}}$$

- b) Se van a integrar las ecuaciones diferenciales de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas para obtener las expresiones de \mathbf{v} y p salvo constantes:

$$\text{componente } x \Rightarrow 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\text{componente } y \Rightarrow 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow p = p(x)$$

La presión p sólo depende de x y la componente v_x de \mathbf{v} sólo depende de y , por lo tanto, según la ecuación en la componente x , se pueden sustituir las derivadas parciales por derivadas totales. De esta forma se tiene una igualdad de funciones en la que el término de las presiones depende únicamente de x , mientras que el término de la velocidad depende de y , debiendo entonces las presiones ser constantes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} \\ f(x) &= f(y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = k = \text{cte.}$$

$$\frac{dp}{dx} = k \Rightarrow \boxed{p(x) = kx + A}$$

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{k}{\mu} \Rightarrow \boxed{v_x(y) = \frac{k}{2\mu} y^2 + By + C}$$

Para obtener las tensiones, se utilizarán las correspondientes fórmulas en coordenadas cartesianas:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z &= -p(x) \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \frac{\partial v_x(y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} -kx - A & \mu \left(\frac{k}{\mu} y + B \right) & 0 \\ \mu \left(\frac{k}{\mu} y + B \right) & -kx - A & 0 \\ 0 & 0 & -kx - A \end{bmatrix}$$

Donde las constantes de estas expresiones (k , A , B , C) serán diferentes para cada fluido.

c) Las condiciones de contorno a aplicar en el problema serán::

CONDICIONES DE CONTORNO PARA LA VELOCIDAD

1. $v_x^1(y)|_{y=h} = v^*$, pues la placa se mueve con velocidad v^* y $\mu > 0$.
2. $v_x^2(y)|_{y=-h} = 0$, puesto que el plano inclinado no se mueve y $\mu > 0$.
3. $v_x^1(y)|_{y=0} = v_x^2(y)|_{y=0}$, condición de continuidad para \mathbf{v} en el límite entre los dos fluidos.

CONDICIONES DE CONTORNO PARA LAS PRESIONES

Para el fluido de densidad μ_1 está prescrita la presión para $y = h$ o, directamente, como p no depende de y (ya que no se considera el peso propio del fluido), está prescrita toda la presión p^1 . El valor de p^1 es el correspondiente a la presión que ejerce la placa sobre el fluido de densidad μ_1 , que es la proyección según el eje y del peso de la placa.

1. $W = \rho^* g t$, peso de un trozo de placa de largo la unidad, según eje x y eje z . Se ha considerado aquí $p_{atm} = 0$.

2. $p^1 = \rho^* g t \cos \alpha, \forall x$, proyección sobre el eje y . Como se ha considerado un trozo de placa con área unidad, el peso es directamente la presión ejercida.
3. $p^1|_{y=0} = p^2|_{y=0}, \forall x$, condición de continuidad para la presión en la zona entre ambos fluidos.

CONDICIONES DE CONTORNO PARA LAS TENSIONES

La condición de continuidad en tensiones que hay que imponer en la interfase de los dos líquidos no afecta a todo el tensor σ , sino sólo al vector de tracciones \mathbf{t} . Deberá verificarse:

$$\mathbf{t}^1|_{y=0} = -\mathbf{t}^2|_{y=0}$$

Teniendo en cuenta que la normal \mathbf{n} es la normal exterior: $\begin{cases} \mathbf{n}^1 = [0 & -1 & 0]^T \\ \mathbf{n}^2 = [0 & 1 & 0]^T \end{cases}$

Para este problema se tiene:

$$\tau_{xy}^1|_{y=0} = \tau_{xy}^2|_{y=0}$$

- d) Se dispone de 6 condiciones de contorno y hay que determinar 8 constantes, pero es suficiente, pues hay ecuaciones que dan dos constantes a la vez. Sustituyendo las expresiones de p , v y σ en las condiciones de contorno se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{2\mu_1} h^2 + B_1 h + C_1 &= v^* \\ \frac{k_2}{2\mu_2} h^2 - B_2 h + C_2 &= 0 \\ C_1 &= C_2 \\ k_1 x + A_1 &= \rho^* g t \cos \alpha, \forall x \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ A_1 = \rho^* g t \cos \alpha \end{cases} \\ k_1 x + A_1 &= k_2 x + A_2, \forall x \Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 = 0 \\ A_1 = A_2 = \rho^* g t \cos \alpha \end{cases} \\ \left. \begin{array}{l} y=0 \\ k_1 = k_2 = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow \mu_1 B_1 = \mu_2 B_2 \end{aligned}$$

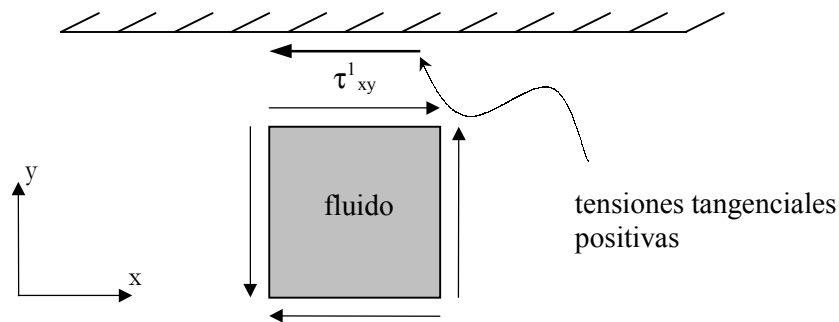
Resolviendo y sustituyendo estos valores resulta:

$$\begin{aligned} v_x^1(y) &= \frac{v^*}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}} \left(\frac{y}{h} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \\ v_x^2(y) &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{v^*}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}} \left(\frac{y}{h} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^1 &= p^2 = \rho^* g t \cos \alpha = \text{cte.} \\ \tau_{xy}^1 &= \tau_{xy}^2 = \mu_1 \frac{v^*}{h \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)} = \text{cte} \end{aligned}$$

- e) Para determinar la relación $f^* - v^*$ se plantea el equilibrio de fuerzas sobre un elemento de placa de longitud unidad. Las fuerzas que actúan son tres:
1. La fuerza f^* que empuja la placa en el sentido positivo de x .
 2. La proyección sobre el eje x del peso propio de la placa. Esta fuerza tira hacia la dirección negativa del eje x .
 3. Las fuerzas tangenciales del fluido sobre la placa, que intentan oponerse al movimiento de la placa, por lo que van en el sentido negativo de las x .

Para saber el criterio de signos de éstas últimas basta dibujar las tensiones que actúan sobre un elemento de fluido.



Planteando el equilibrio resulta:

$$f^* = \rho^* g t \sin \alpha + \mu_1 \frac{v^*}{\left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) h}$$

$$v^* = \frac{h}{\mu_1} \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) (f^* - \rho^* g t \sin \alpha)$$

Para calcular el caudal que atraviesa la superficie $B - B'$, basta con tener en cuenta que los fluidos son incompresibles y por tanto el caudal que pasa es el mismo si consideramos el segmento recto que une B y B' :

$$q = \int_{BB' \text{ curva}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{BB' \text{ recta}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{-h}^h v_x(y) dy$$

$$q = v^* h \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \right)$$

PR 10-3 En la Figura 1 se presenta la sección transversal de un amortiguador de longitud indefinida constituido por el émbolo $ABA'B'$ que desliza dentro de un recipiente lleno de un fluido Newtoniano incompresible de viscosidad μ . El descenso del émbolo, a velocidad $\dot{\delta}(t)$, produce un flujo de fluido entre las paredes laterales y el émbolo (ver Figura 2). Se pide:

- Determinar los campos de velocidad y presión en la zona del fluido de la Figura 2 (zona ABCD), salvo las constantes de integración.
- Indicar y justificar las condiciones de contorno necesarias para determinar el valor de las constantes de integración.
- Obtener dichas constantes y las correspondientes expresiones de los campos de velocidad y presión.
- Obtener la expresión de las tensiones en la zona ABCD del fluido.
- Suponiendo que el campo de tensiones σ_y en la superficie A - A' es uniforme e igual al del punto A, demostrar que existe una relación entre la fuerza por unidad de longitud F, aplicada sobre el émbolo, y la velocidad de descenso del mismo, $\dot{\delta}(t)$, de la forma $F = \eta \dot{\delta}(t)$. Obtener el valor de η .

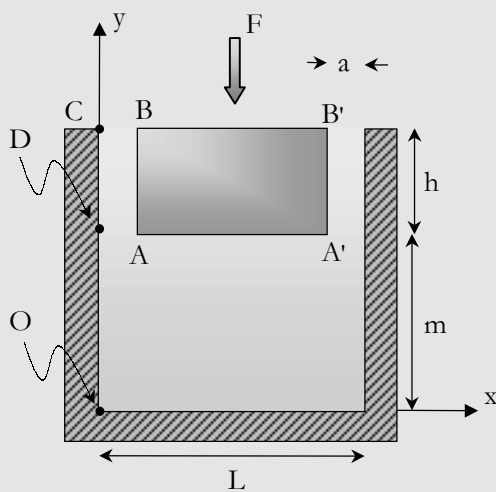


Figura 1

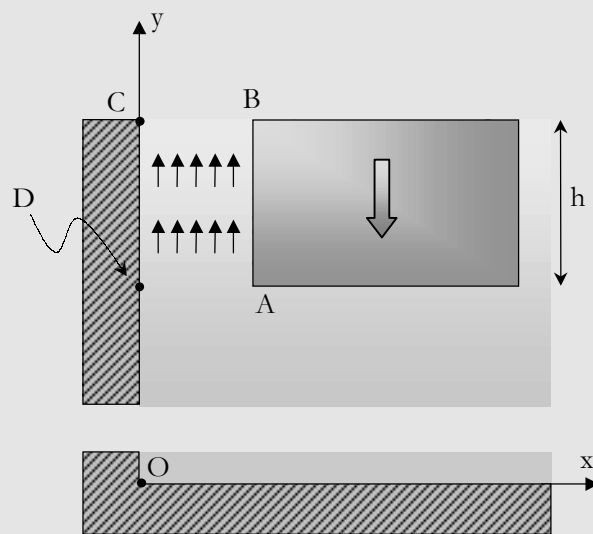


Figura 2 (detalle)

HIPÓTESIS:

- Fuerzas de masa despreciable en el fluido.
- Peso del émbolo despreciable.
- Flujo estacionario.
- Presión atmosférica despreciable.

Resolución:

- HIPÓTESIS AÑADIDAS:

Nada depende de la dirección z perpendicular al papel, pues el problema está indefinido en esta dirección. Considérese una situación bidimensional, siendo, en principio por hipótesis:

$$\mathbf{v} = [v_x(x, y) \quad v_y(x, y) \quad 0]^T$$

Por otro lado, sobre las paredes AB y CD, debe cumplirse: $v_x = 0$, por condición de impenetrabilidad (un fluido no puede penetrar en un sólido).

Sin embargo, es conveniente introducir otra hipótesis más para simplificar el problema. Se trata de una hipótesis aproximada, no exacta. Se supondrá que $v_x = 0$ en toda la zona

ABCD. En realidad las líneas de corriente del fluido tienen aproximadamente la siguiente forma:

Incluso es posible que se formen vórtices en esta región si la velocidad es muy elevada. En definitiva, se supondrá un campo de velocidades del tipo:

$$\mathbf{v}(x, y) = [0 \quad v_y(x, y) \quad 0]^T$$

Para la presión, en principio, se supondrá que:

$$p = p(x, y)$$

Se impone la *Ecuación de Continuidad*. Como el fluido es incompresible ($\rho = \text{cte.}$) quedará:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Si se aplica a este problema se obtiene:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow v_y = v_y(x)$$

Así para una misma vertical, la velocidad es la misma, ya que la descripción espacial de la velocidad no depende de y .

Se imponen las *Ecuaciones de Navier-Stokes* en coordenadas cartesianas, teniendo en cuenta las hipótesis del enunciado y las añadidas. Como el problema es bidimensional, la ecuación para la componente z no aporta información:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow p = p(y) \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

De esta ecuación se sabe que el término de la derecha depende de x , mientras que el de la izquierda lo hace respecto de y . Así se concluye, que ambas expresiones son constantes:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = K \Rightarrow$$

$$p = Ky + C_1$$

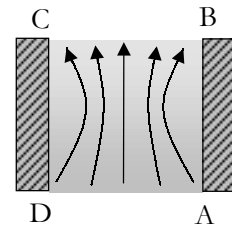
$$\mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = K \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{K}{\mu} x + C_2 \Rightarrow$$

$$v_y(x) = \frac{1}{2} \frac{K}{\mu} x^2 + C_2 x + C_3$$

CONDICIONES DE CONTORNO PARA LA VELOCIDAD

$v_y(x)|_{x=0} = 0, \forall y$: no existe deslizamiento relativo del fluido respecto de la pared.

$v_y(x)|_{x=a} = -\dot{\delta}, \forall y$: igual que antes, no existe desplazamiento relativo.



CONDICIONES DE CONTORNO PARA LAS PRESIONES

$$p(y)|_{y=m+h} = p_{\text{atm}} = 0$$

CONDICIONES DE CONTORNO PARA EL CAUDAL

Para un fluido incompresible se verifica $Q_{\text{entrante}} = Q_{\text{saliente}}$, donde :

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

El émbolo baja a una velocidad $\dot{\delta}$ y, por tanto, el émbolo se introduce en el fluido ganándole espacio a éste. Es decir, es como si entrase una sección (la del émbolo) a cierta velocidad, empujando al fluido hacia fuera. Por esta razón se puede definir como un caudal entrante (velocidad · superficie):

$$Q_{\text{entrante}} = \dot{\delta} \cdot L$$

En cambio, el caudal saliente de fluido a través de los espacios entre el émbolo y las paredes laterales se puede calcular según la definición general de caudal:

$$Q_{\text{saliente}} = 2 \int_{S_a} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 2 \int_0^a v_y(x) dx$$

Igualando los caudales, queda:

$$2 \int_0^a v_y(x) dx = \dot{\delta} L$$

Determinación de las constantes:

$$v_y(x)|_{x=0} = 0 \Rightarrow v_y(0) = C_3 \Rightarrow$$

$$\boxed{C_3 = 0}$$

$$v_y(x)|_{x=a} = -\dot{\delta} \Rightarrow v_y(a) = \frac{1}{2} \frac{K}{\mu} a^2 + C_2 a \Rightarrow C_2 = -\frac{\dot{\delta}}{a} - \frac{K}{2\mu} a$$

$$2 \int_0^a v_y(x) dx = 2 \int_0^a \left(\frac{K}{2\mu} x^2 + C_2 x \right) dx = 2 \left(\frac{K}{2\mu} \frac{a^3}{3} + C_2 \frac{a^2}{2} \right) = \dot{\delta} L \Rightarrow$$

$$\boxed{K = -\frac{6\mu}{a^3} \dot{\delta} (a + L)}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{\dot{\delta}}{a} \left(2 + 3 \frac{L}{a} \right)}$$

$$p(y)|_{y=m+h} = 0 \Rightarrow K(m+h) + C_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{C_1 = \frac{6\mu}{a^3} \dot{\delta} (a + L)(m + h)}$$

Así, finalmente se obtienen las siguientes expresiones:

$$p = p(y) = \frac{6\mu}{a^3} \dot{\delta} (a+L)(m+h-y)$$

$$v_y(x) = -\frac{3}{a^3} (a+L) \dot{\delta} x^2 + \frac{\dot{\delta}}{a} \left(2 + 3 \frac{L}{a} \right) x$$

- d) Para obtener las tensiones en la zona ABCD del fluido, basta con utilizar las expresiones correspondientes a las *Componentes del Tensor de Tensiones para Fluidos Newtonianos en Coordenadas Cartesianas*. Utilizando las expresiones del apartado c) de la velocidad y la presión se obtiene lo siguiente:

$$\sigma_x = -p \quad ; \quad \sigma_y = -p \quad ; \quad \sigma_z = -p$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

El Tensor de Tensiones es por tanto:

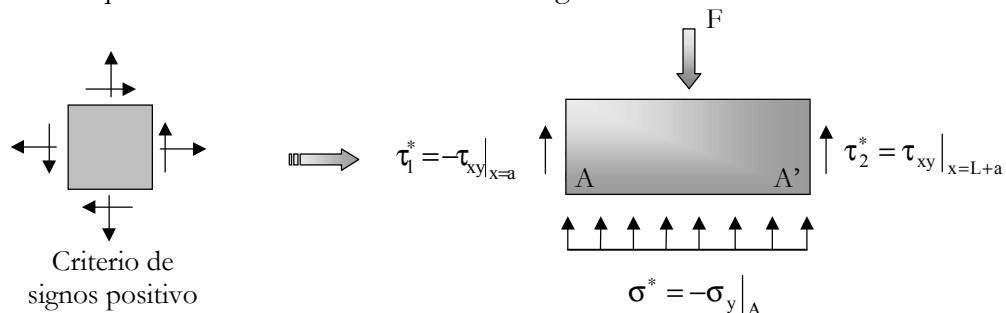
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial v_y}{\partial x} & 0 \\ \mu \frac{\partial v_y}{\partial x} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

donde $\mu \frac{\partial v_y}{\partial x} = \mu \dot{\delta} \left[-6 \frac{x}{a^3} (a+L) + 3 \frac{L}{a^2} + \frac{2}{a} \right]$

COMENTARIO:

De hecho, la hipótesis de flujo estacionario, mientras el émbolo baja, es una hipótesis excesiva y no rigurosa, pues en algún instante el émbolo llegará hasta el punto más bajo y el flujo variará. Para poder aplicar ésta hipótesis, $m+h$ debería ser una longitud muy grande o $\dot{\delta}$ una velocidad muy baja.

- e) Las tensiones que actúan sobre el émbolo son las siguientes:



Se van a calcular las tensiones correspondientes para obtener las fuerzas resultantes y aplicar equilibrio.

En la superficie inferior del émbolo:

$$\sigma^* = -\sigma_y|_A = p(y)|_{y=m} = Km + C_1 \Rightarrow \sigma^* = \frac{6\mu}{a^3}(a+L)h\dot{\delta}$$

En las superficies laterales, por simetría se tiene que $\tau_1^* = \tau_2^*$, por lo tanto sólo se calculará τ_1^* :

$$\tau_1^* = \tau_2^* = -\tau_{xy}|_{x=a} = -\mu\dot{\delta}\left[-6\frac{a}{a^3}(a+L) + 3\frac{L}{a^2} + \frac{2}{a}\right] \Rightarrow \tau_1^* = \tau_2^* = \frac{\mu\dot{\delta}}{a}\left(3\frac{L}{a} + 4\right)$$

Aplicando equilibrio de fuerzas (ya que $\dot{\delta}$ es una velocidad constante):

$$F = L\sigma^* + h\tau_1^* + h\tau_2^* \Rightarrow$$

$F = \eta\dot{\delta}$ $\eta = \frac{2\mu h}{a}\left(3\frac{L^2}{a^2} + 6\frac{L}{a} + 4\right)$
--

CUESTIONES PROPUESTAS

CP 10-1 Escribir las ecuaciones de gobierno del problema general de Mecánica de Fluidos, enunciando cada ecuación y caracterizando el número de ecuaciones y de incógnitas. Particularizar para las ecuaciones del problema mecánico cuando éste está desacoplado del problema térmico.

CP 10-2 Escribir las ecuaciones de gobierno de un problema de Mecánica de fluidos señalando el número de ecuaciones disponibles y las incógnitas del problema. Hacer lo mismo para el caso particular en que el fluido sea Newtoniano, indicando cuándo los problemas mecánico y térmico están desacoplados.

CP 10-3 Deducir las siguientes ecuaciones:

- a) Ecuación fundamental de la hidrostática (equilibrio).
 - b) Ecuación de equilibrio de un fluido perfecto (ecuación de Euler).
-

CP 10-4 Demostrar el teorema de Arquímedes.

CP 10-5 Deducir la expresión del Teorema de Bernoulli para un fluido perfecto, incompresible y en régimen estacionario, bajo fuerzas gravitatorias. Interpretar gráficamente el resultado.

CP 10-6 Deducir la ecuación de Bernoulli para un fluido perfecto, incompresible y en régimen estacionario, indicando el significado de cada término y el significado de cada término.

NOTA: Utilizar la igualdad: $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$

CP 10-7 Justificar en qué condiciones la ecuación de Bernoulli se cumple para cualquier punto de un fluido perfecto en movimiento.

CP 10-8 Sea la ecuación de movimiento de un fluido perfecto barotrópico:

$$-\nabla \left(P + \Phi + \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} \quad \text{donde} \quad P = \int_0^p \frac{1}{\rho(\hat{p})} d\hat{p} \quad \Phi = gz$$

Integrar dicha ecuación en los siguientes casos:

- a) Flujo potencial.

- b) Flujo potencial estacionario.
c) Flujo potencial estacionario e incompresible.

CP 10-9 Demostrar que para un flujo potencial de un fluido incompresible se cumple la siguiente ecuación, donde χ es el potencial de velocidades:

$$\nabla \cdot \nabla \chi = \nabla^2 \chi = 0$$

Demostrar que $\chi = A(x^2 - y^2)$ puede ser la función potencial de un flujo de estas características y obtener el correspondiente campo de velocidades.

CP 10-10 Deducir las ecuaciones de Navier-Stokes indicando el significado físico de cada término.

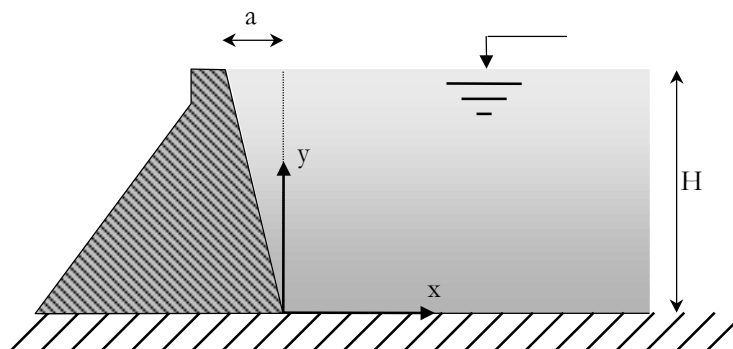
CP 10-11 Interpretar físicamente cada uno de los términos que aparecen en las ecuaciones de Navier-Stokes y de la energía, para un fluido Newtoniano isótropo.

CP 10-12 Dar la interpretación física de los distintos términos de las ecuaciones de Navier-Stokes. Particularizar dichas ecuaciones en los casos de:

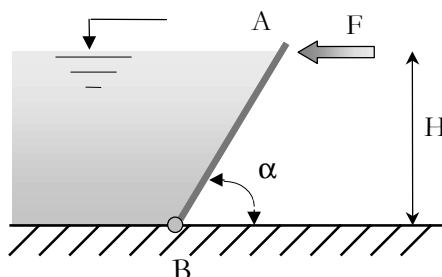
- a) Fluido incompresible.
b) Fluidos con viscosidad volumétrica nula.
c) Fluidos perfectos.
d) Hidrostática.

CP 10-13 Indicar y razonar los distintos tipos de condiciones de contorno, en velocidades y presiones, a considerar en la mecánica de fluidos viscosos y no viscosos.

CP 10-14 Obtener las componentes horizontal y vertical de la resultante de las acciones que ejerce el agua de un embalse sobre la presa de gravedad de la figura, por unidad de anchura de la misma.



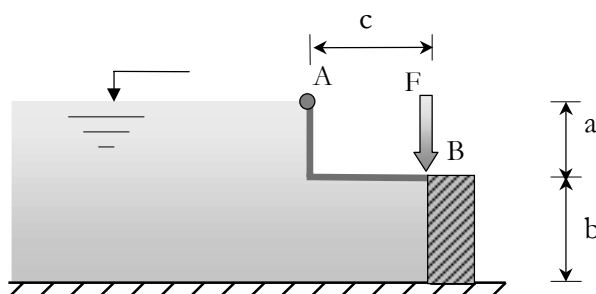
CP 10-15 Calcular la fuerza F , por unidad de espesor, que hay que ejercer en el punto A de la compuerta de la figura, para mantenerla en equilibrio bajo el empuje del agua embalsada.



HIPÓTESIS:

- 1) Se desprecia el peso de la compuerta

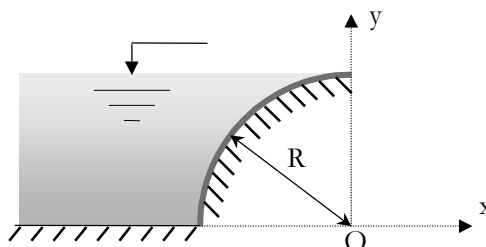
CP 10-16 Determinar el valor mínimo de la fuerza F que hay que hacer en el punto B de la compuerta AB de la figura articulada en el punto A , para que no se produzca pérdida de agua.



HIPÓTESIS:

- 1) Se desprecia el peso de la compuerta.

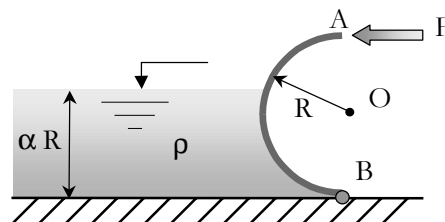
CP 10-17 Calcular la resultante en el punto O de las acciones, por unidad de espesor, (fuerzas y momento) que el agua en reposo ejerce sobre la compuerta de la figura.



HIPÓTESIS:

- 1) Se desprecia el peso de la compuerta.

CP 10-18 Calcular el valor de la fuerza F que hay que ejercer sobre el punto A de la compuerta circular de la figura, articulada en el punto B , para que se mantenga en la posición indicada.



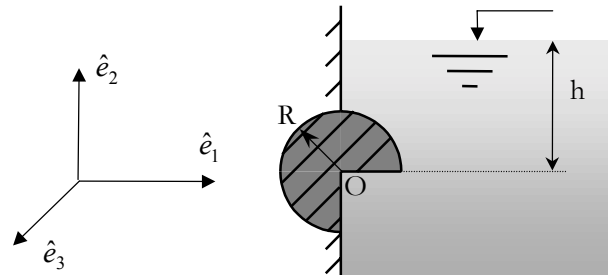
HIPÓTESIS:

- 1) Se desprecia el peso de la compuerta.

CP 10-19 En la pared de un depósito existe una llave de cierre que gira alrededor del punto O de la figura. Calcular las fuerzas y el momento resultante, por unidad de espesor, que el fluido ejerce sobre la llave.

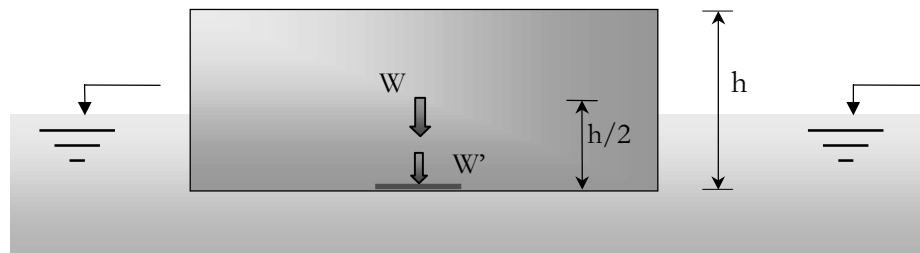
HIPÓTESIS:

- 1) Se desprecia el peso de la compuerta.



CP 10-20 Calcular el peso del lastre W' que hay que poner en el fondo del cajón de la figura, de peso W , para que éste flote en equilibrio estable.

NOTA: Los pesos son por unidad de espesor.



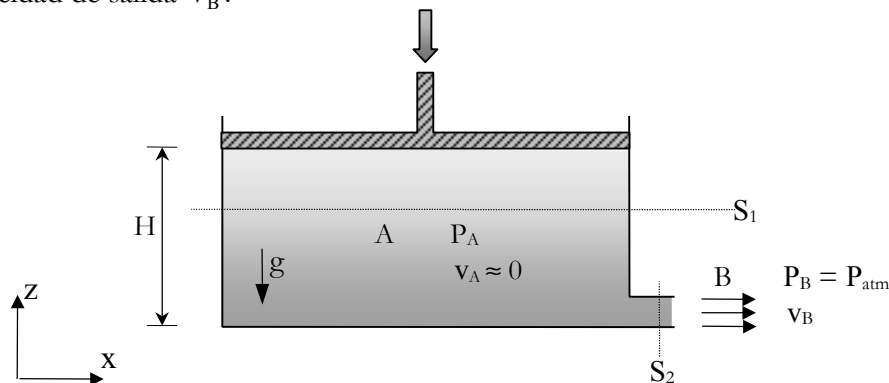
HIPÓTESIS:

- 1) La densidad del agua es ρ .

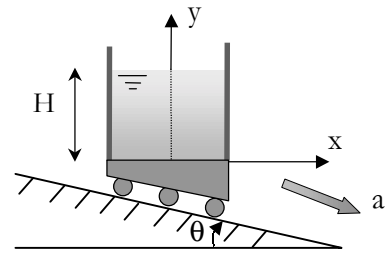
CP 10-21 Un gran depósito de sección S_1 contiene un fluido perfecto, barotrópico y compresible, que sale en régimen estacionario por el orificio B, de sección S_2 , debido al movimiento muy lento del émbolo en A. Se sabe que la ecuación cinética de estado del fluido es:

$$p = k\rho, \quad k = \text{cte.}$$

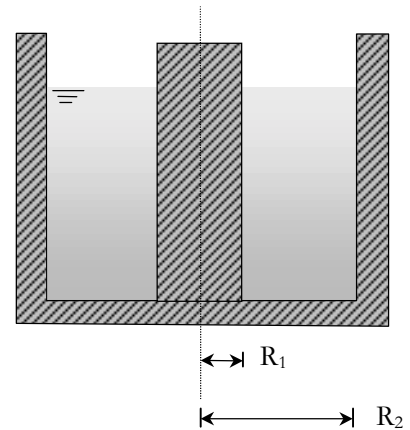
Calcular la velocidad de salida v_B .



CP 10-22 Un depósito que contiene una altura H de agua, se deja caer por un plano inclinado un ángulo θ , con una aceleración constante de valor a . Obtener la distribución de presiones y la ecuación de la superficie libre en función de a , H , θ y la presión atmosférica p_a .



CP 10-23 Calcular la forma que tomará la superficie libre del agua contenida entre dos cilindros de radios R_1 y R_2 que giran solidariamente sobre su eje a velocidad angular constante ω .

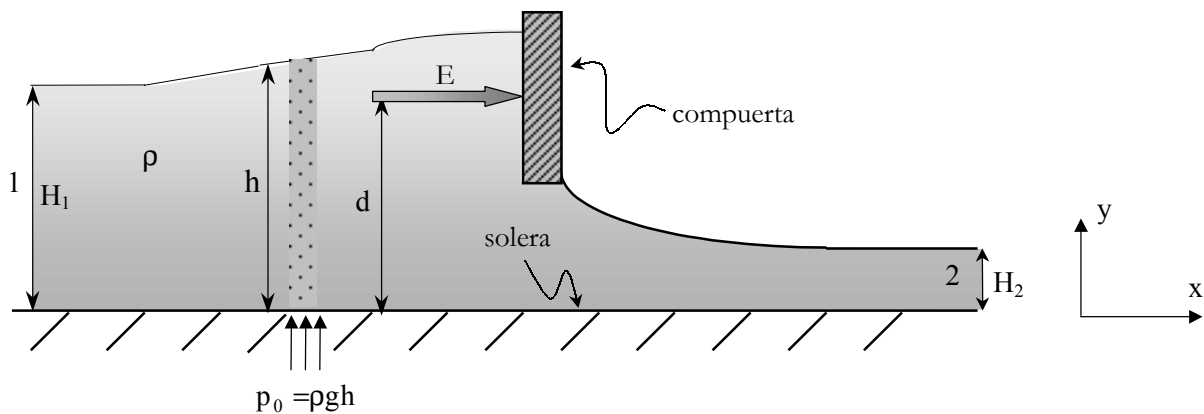


PROBLEMAS PROPUESTOS

PP 10-1 La figura muestra la sección longitudinal de una canal con una compuerta por el que circula agua en régimen estacionario. Para secciones transversales suficientemente alejadas de la compuerta como la 1, aguas arriba, y la 2, aguas abajo, puede considerarse un campo de velocidades horizontal y uniforme y una distribución de presiones hidrostática. Se pide:

- Obtener los valores de la velocidad en las secciones 1 y 2.
- Calcular el valor del empuje E que ejerce el agua sobre la compuerta (por unidad de anchura del canal).
- Admitiendo que la distribución de presiones p_0 sobre cada punto de la solera del canal es igual al peso de la columna de agua por encima de la misma ($p_0 = \rho gh$), obtener la distancia d a la solera del punto de aplicación de dicho empuje.

NOTA: Todos los resultados deben darse en función de H_1 , H_2 y la densidad del agua exclusivamente.



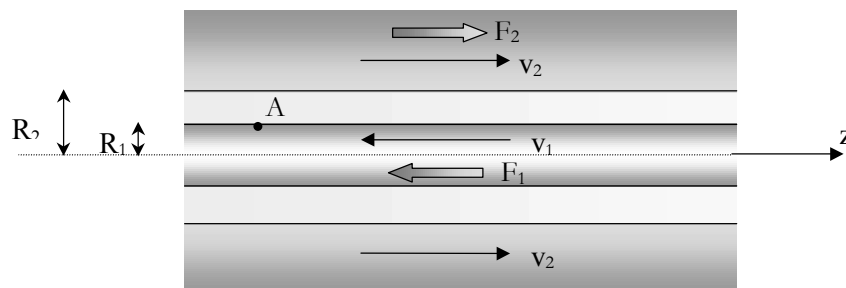
HIPÓTESIS:

- Se considera al agua como un fluido perfecto incompresible.
- Presión atmosférica despreciable.
- Fuerzas de rozamiento agua-solera y agua-compuerta despreciables.
- No se considera el peso propio de la compuerta.

- PP 10-2** Un cilindro macizo de longitud indefinida se mueve a velocidad v_1 en el interior de otro cilindro hueco que se mueve a velocidad v_2 en sentido opuesto al anterior. Entre ambos cilindros hay un fluido Newtoniano incompresible de viscosidad μ . En el punto A la presión es P_A . Calcular:

- Los campos de velocidades, presiones y tensiones (en función de las constantes de integración)
- Las constantes de integración, aplicando las condiciones de contorno pertinentes.

- c) Las fuerzas, por unidad de longitud, F_1 y F_2 ejercidas sobre cada cilindro para que se produzca el movimiento descrito.
- d) La energía disipada, por unidad de tiempo y de longitud, debida a los efectos viscosos (en función de las constantes de integración).

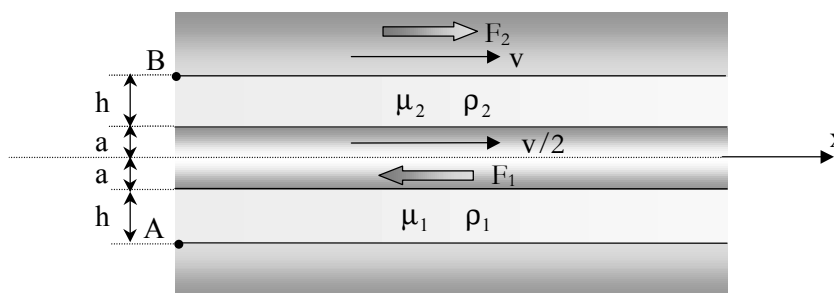


HIPÓTESIS:

1. Régimen estacionario.
2. Se desprecian las fuerzas de masa y las de inercia.
3. Debido al carácter indefinido de la longitud se considerará que el flujo (y sus propiedades) no varían en dirección longitudinal.

PP 10-3 Una placa de longitud indefinida y espesor $2a$ separa dos fluidos newtonianos incompresibles que se mueven entre dos contornos de longitud indefinida situados a una distancia h de la placa (ver figura). La placa y el contorno superior se mueven a velocidades $v/2$ y v , respectivamente. Se pide:

- a) Los campos de velocidades, presiones y tensiones (en función de las constantes de integración).
- b) Las constantes de integración, aplicando las condiciones de contorno pertinentes.
- c) Las fuerzas por unidad de superficie F_1 y F_2 ejercidas sobre la placa y el contorno superior necesarias para que se produzca el movimiento descrito.
- d) La energía disipada, por unidad de tiempo y de superficie perpendicular al plano del dibujo, debida a los efectos viscosos.

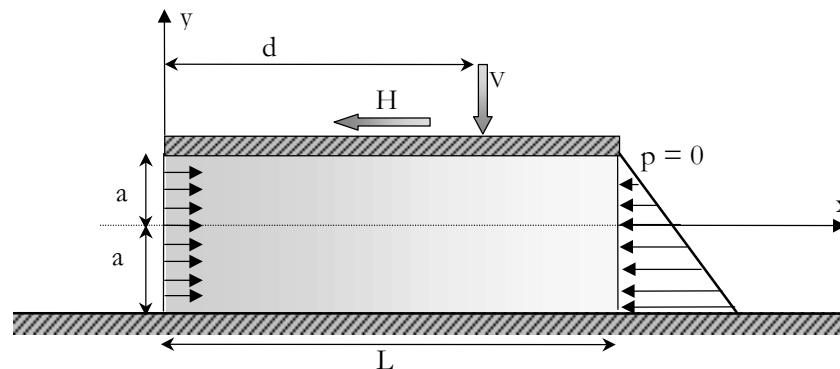


HIPÓTESIS:

- 1) Las presiones en los puntos A y B son p_A y p_B , respectivamente.
- 2) Régimen estacionario.
- 3) Debido al carácter indefinido de la dirección x se considerará que el flujo, y sus propiedades, no varían en esta dirección.

PP 10-4 Entre la placa y la superficie horizontal circula un caudal Q de un fluido Newtoniano, incompresible e isótropo en régimen estacionario. La placa se mantiene horizontal e inmóvil mediante la aplicación de una fuerza puntual de componentes H y V actuando en un punto apropiado de la misma. Se pide:

- El campo de velocidades.
- El campo de presiones.
- El valor de la componente vertical de la fuerza y distancia d al origen de su punto de aplicación para que la placa no gire.
- El valor de la componente horizontal de la fuerza.



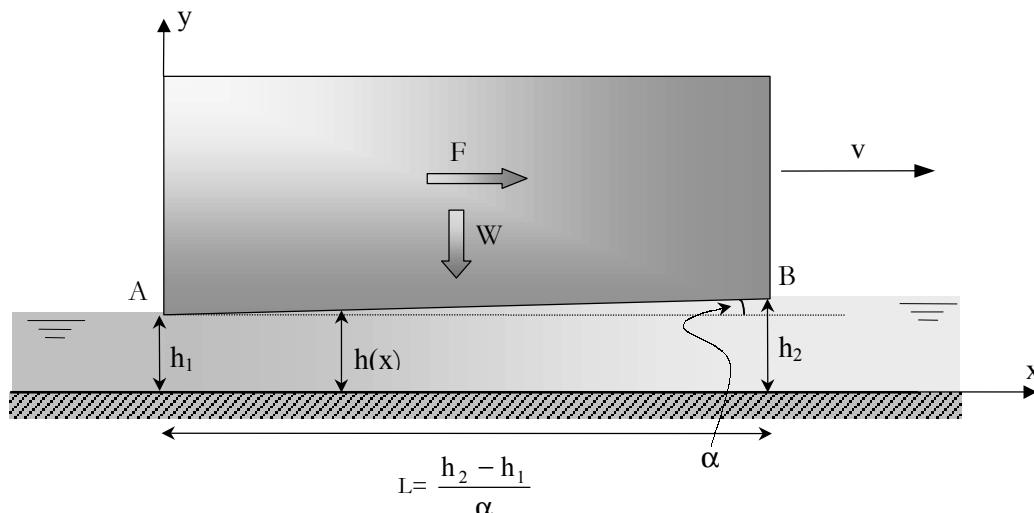
HIPÓTESIS:

- El flujo se supone paralelo al plano $x - y$.
- Se desprecian las fuerzas de inercia.
- Se consideran Q , V y H por unidad de longitud en dirección z .
- El peso de la placa y la presión atmosférica son despreciables.

PP 10-5 Un sólido de peso W desliza con una velocidad v sobre una superficie horizontal lubricada mediante un fluido Newtoniano de viscosidad μ . La superficie inferior del sólido está inclinada, con una pendiente muy pequeña α , respecto a la horizontal. Se pide:

- Obtener el campo de velocidades en el fluido en función de v , $h(x)$ y q , donde q es el caudal de fluido que fluye por unidad de anchura a través de una superficie vertical entre el suelo y el sólido.
- Obtener la distribución de presiones en el fluido en función de μ , α , q , v , $h(x)$, h_1 y P_0 , sabiendo que en el punto A la presión es la atmosférica P_0 .
- Obtener el caudal q en función de v , h_1 y h_2 sabiendo que la presión en el punto B es P_0 .
- Obtener la nueva expresión de la presión en función de μ , α , v , $h(x)$, h_1 , h_2 y P_0 .
- Obtener las componentes del tensor de tensiones en función de μ , α , v , $h(x)$, h_1 , h_2 y P_0 .

- f) Obtener la expresión del peso del sólido W y de la fuerza horizontal F , necesaria para moverlo en función de μ , α , v , $h(x)$, h_1 y h_2 .
- g) Obtener el cociente $\lambda = F/W$ (coeficiente de rozamiento efectivo).



HIPÓTESIS:

- 1) Fluido incompresible en régimen estacionario.
- 2) Peso del fluido despreciable.
- 3) Flujo muy lento (fuerzas de inercia despreciables).
- 4) La pendiente α es suficientemente pequeña y se considera: $v_y = 0$, $v_x = v_x(x, y)$, $\frac{\partial v_x}{\partial x} \approx 0$

PP 10-6 Un fluido Newtoniano incompresible de viscosidad μ , se mueve en régimen transitorio con el siguiente campo de velocidades:

$$\mathbf{v}(y, z, t) = [y - at \quad -y \quad \mathbf{g}(z)]^T, \quad a > 0$$

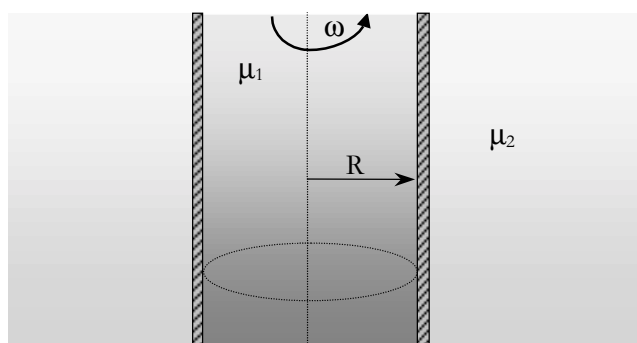
Se pide:

- a) Determinar $\mathbf{g}(z)$ sabiendo que la velocidad \mathbf{v}_3 en $(0, 0, 0)$ es nula en todo instante t .
- b) Obtener las ecuaciones de las trayectorias y las líneas de corriente.
- c) Calcular el tensor velocidad de deformación y el vector vorticidad.
- d) Calcular las fuerzas de volumen necesarias para mantener el movimiento sabiendo que la distribución de presiones es uniforme.
- e) Entre los instantes $t=1$ y $t=2$ se inyecta colorante en el punto $(0, 0, 0)$. Calcular la ecuación de la línea de traza a lo largo del tiempo y dibujarla para los instantes $t=1$, $t=2$, $t=3$.

PP 10-7 Un cilindro hueco, indefinido y de radio R , gira en régimen estacionario con velocidad angular ω en el interior de un dominio infinito ocupado por un fluido Newtoniano

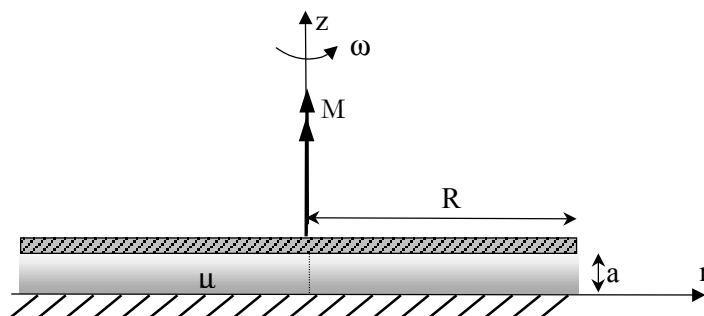
incompresible de viscosidad μ_2 . En el interior del cilindro existe otro fluido Newtoniano incompresible de viscosidad μ_1 . Se pide:

- Obtener el campo de velocidades y presiones en el fluido interior.
- Obtener el campo de velocidades y presiones en el fluido exterior.
- Calcular el momento que hay que aplicar al cilindro para mantener su velocidad.



PP 10-8 Un disco de radio R gira con velocidad angular constante ω a una distancia a de una superficie horizontal. Entre el disco y dicha superficie se encuentra un fluido de comportamiento Newtoniano con viscosidad μ . Se pide:

- La expresión del campo de velocidades en el fluido antes de aplicar las condiciones de contorno.
- Dicha expresión después de aplicar las condiciones de contorno.
- La expresión de la presión y de la tensión tangencial $\tau_{z\theta}$.
- El valor del momento M que se ha de aplicar en el eje del disco para mantener el movimiento.



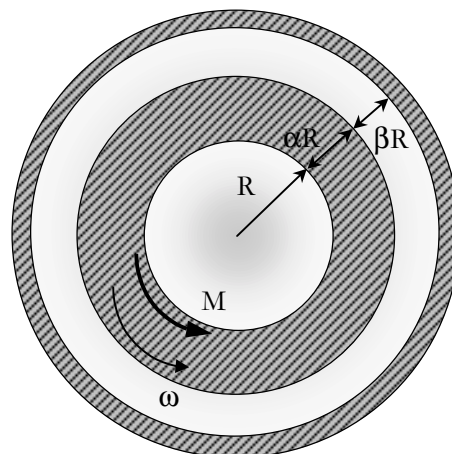
HIPÓTESIS:

- Pueden despreciarse las fuerzas de inercia por ser el movimiento suficientemente lento.
- Fluido incompresible.
- No se considera el efecto de las paredes laterales (se desprecian los efectos del rozamiento fluido-pared lateral).
- Se considerará que el campo de velocidades varía linealmente con la distancia a la superficie inferior.

5) Flujo en régimen estacionario.

PP 10-9 Una corona cilíndrica de radio interior R y espesor αR , se sitúa en el interior de un cilindro hueco lleno de un fluido Newtoniano de viscosidad μ , tal y como se indica en la figura. Se supone que tanto el cilindro como la corona son de longitud indefinida. Mediante la aplicación de un momento por unidad de longitud constante M , se proporciona a la corona una velocidad angular de rotación ω . Se pide:

- Obtener, salvo constantes de integración, los campos de velocidades y de presiones en el interior y exterior de la corona.
- Plantear y justificar las condiciones de contorno necesarias para determinar las constantes de integración y obtener dichas constantes.
- Obtener μ en función de M y ω . Particularizar para el caso $\alpha \ll 1$ y $\beta \ll 1$.

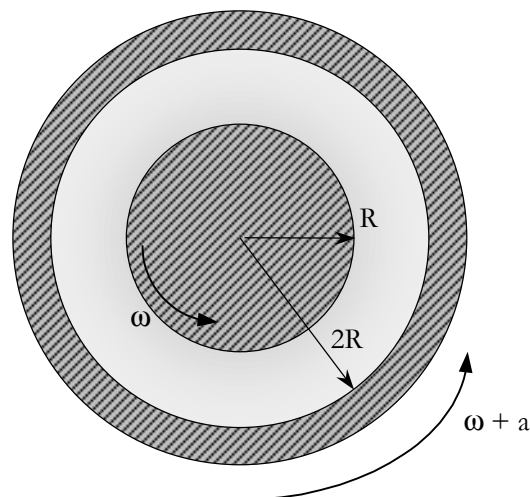


HIPÓTESIS:

- Fluido incompresible.
- No se consideran las fuerzas de volumen.
- Régimen estacionario.

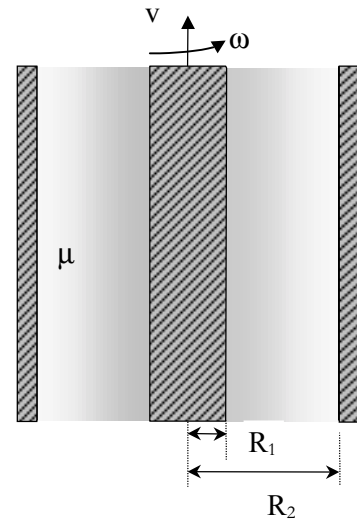
PP 10-10 Un cilindro macizo de longitud indefinida y radio R gira con una velocidad ω constante, concéntricamente con otro cilindro hueco de radio interior $2R$ que a su vez gira a velocidad angular constante $\omega + a$. En el espacio entre ambos cilindros hay un líquido Newtoniano incompresible de viscosidad μ . Se pide:

- Determinar el campo de velocidades del fluido en régimen estacionario.
- Determinar los momentos que hay que aplicar sobre ambos cilindros para mantenerlos a las velocidades indicadas (indicando los sentidos).
- Determinar el valor de la presión termodinámica en las siguientes condiciones:
 - Los dos cilindros giran a la misma velocidad.
 - El cilindro interior no se mueve.
 - El cilindro exterior no se mueve.



PP 10-11 En el interior de un cilindro hueco de longitud indefinida se encuentra otro cilindro macizo que se desliza verticalmente a velocidad constante v y gira con velocidad angular ω . Entre ambos cilindros se encuentra un fluido Newtoniano con viscosidad μ . Se pide:

- Determinar el campo de velocidades del fluido.
- Determinar el campo de tensiones en el fluido.
- Determinar el momento y la fuerza vertical que hay que aplicar sobre el cilindro exterior por unidad de longitud del mismo para que no se mueva.



HIPÓTESIS:

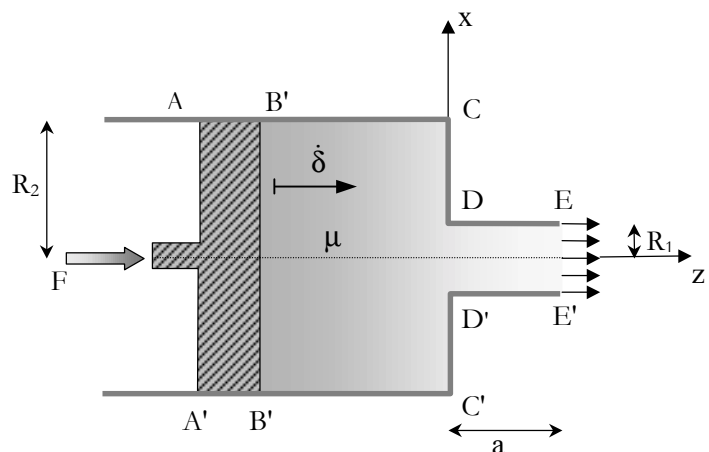
- Movimiento estacionario.
- Movimiento suficientemente lento para despreciar las fuerzas de inercia.
- Flujo incompresible.

PP 10-12 En la figura se presenta la sección transversal de un pistón cilíndrico constituido por el émbolo $ABA'B'$, que desliza dentro de un recipiente lleno de un fluido Newtoniano incompresible de viscosidad μ . El movimiento del émbolo a una velocidad $\dot{\delta}$ produce el flujo del fluido a través del conducto $DED'E'$. Se pide:

- Determinar, salvo las constantes de integración, los campos de velocidad y presión en la zona $DED'E'$ del fluido.
- Indicar y justificar las condiciones de contorno necesarias para determinar el valor de las constantes de integración.
- Obtener dichas constantes y las expresiones de los campos de velocidad y presión.
- Obtener la expresión de las tensiones en la zona $DED'E'$ del fluido.
- Suponiendo que la tensión normal a la superficie BB' en el fluido es constante e igual a la presión en los puntos D y D' , demostrar que existe una relación entre la fuerza F aplicada sobre el émbolo y su velocidad de avance $\dot{\delta}$ de la forma $F = \eta \dot{\delta}$. Obtener el valor de η .

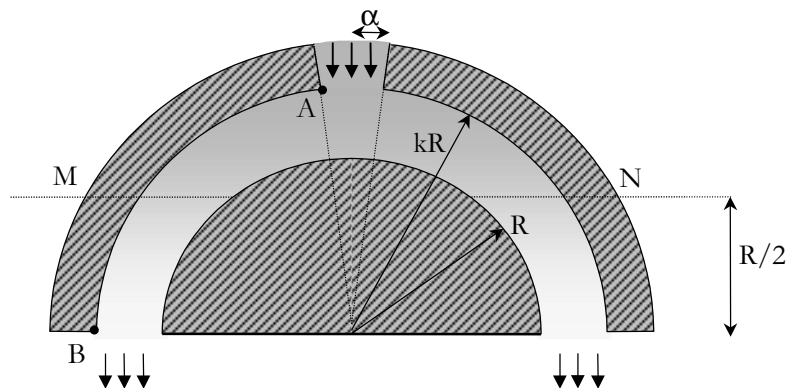
HIPÓTESIS:

- Fuerzas másicas despreciables en el fluido.
- Peso del émbolo despreciable.
- Flujo estacionario.
- Presión atmosférica despreciable



PP 10-13 Un fluido Newtoniano incompresible fluye por el espacio entre dos esferas, concéntricas y muy cercanas, al ser introducido por un pequeño orificio en la parte superior de la esfera exterior. Sea $\Delta P = P_A - P_B$ la diferencia de presión entre los puntos A y B de la figura y P_B la presión atmosférica. Se pide:

- Plantear el campo de velocidades y presiones y las correspondientes ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno.
- Obtener el campo de velocidades y presiones en función de ΔP .
- Calcular el caudal que atraviesa la superficie horizontal M - N en función de ΔP .



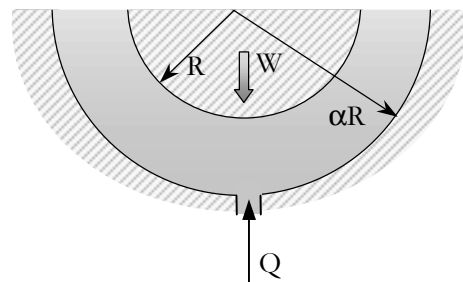
OBSERVACIÓN:

$$\int \frac{1}{\sin \theta} d\theta = \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)$$

HIPÓTESIS:

- Movimiento muy lento (fuerzas de inercia despreciables).
- Fuerzas de volumen despreciables.
- No se considera la perturbación del flujo producida por el orificio de entrada.
- El ángulo α es muy pequeño (puede tomarse $\tan \alpha = \alpha$).
- Régimen estacionario.

PP 10-14 Un semicilindro de radio R y longitud indefinida está colocado en el interior de otro semicilindro indefinido de radio αR tal como se muestra en la figura. Entre ambos se inyecta un caudal por unidad de longitud $Q = \text{cte.}$ de un fluido viscoso, Newtoniano e incompresible. Se pide:

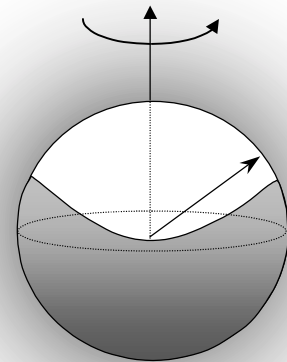


- Plantear las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema.
- Obtener las expresiones de la velocidad y la presión en función de las correspondientes constantes de integración.
- Plantear analíticamente las ecuaciones necesarias para la determinación de las constantes de integración (no hace falta resolverlas).
- Plantear analíticamente la ecuación necesaria para obtener el peso W del cilindro interior (no es necesario resolverla).

HIPÓTESIS:

- La presión en el punto A es la atmosférica.
- El movimiento es muy lento (pueden despreciarse las fuerzas de inercia).
- La entrada de caudal Q no perturba el flujo entre ambos cilindros.
- No son despreciables las fuerzas gravitatorias.

PP 10-15 Una esfera hueca de radio R gira con velocidad angular constante ω alrededor de su eje vertical en el interior de un dominio infinito ocupado por un fluido Newtoniano incompresible de densidad y viscosidad ρ_2 y μ_2 , respectivamente. El interior de la esfera está parcialmente ocupado por otro fluido Newtoniano incompresible, de densidad y viscosidad ρ_1 y μ_1 , siendo el resto aire. Sabiendo que el régimen del movimiento es estacionario se pide:



- El campo de velocidades y presiones para el fluido interior de la esfera.
- El campo de velocidades y presiones para el fluido exterior de la esfera.
- Obtener la ecuación de la superficie libre del fluido interior. Demostrar que es un paraboloide de revolución y expresar su ecuación en función de las coordenadas cilíndricas r y z .

HIPÓTESIS:

- Presión atmosférica despreciable.
- Se sugiere considerar campos de velocidades para los fluidos de la forma:

$$\mathbf{v}(r, \theta, \phi) = [v_r \quad v_\theta \quad v_\phi]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \sin \theta \end{bmatrix}^T$$

debiendo justificarse que se cumplen todas las ecuaciones de gobierno del problema.

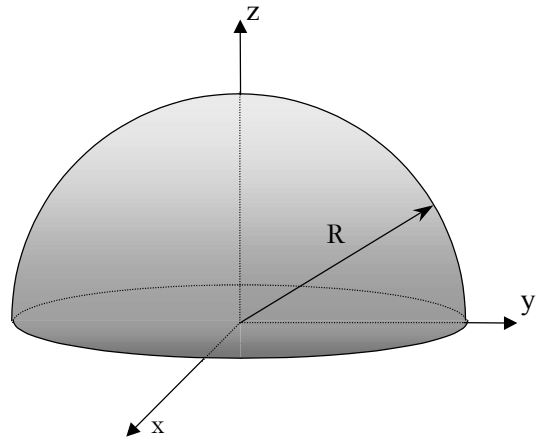
- Despreciar las fuerzas de inercia y de masa en el exterior de la esfera, pero no en el interior.

PP 10-16 Sobre un fluido perfecto que está en reposo en el instante $t=0$ actúan unas fuerzas por unidad de masa $\mathbf{b}=[\alpha y \ 0 \ 0]^T$ (descripción espacial). La distribución (espacial) de presiones es $p(\mathbf{x},t)=\alpha(t)ze^{-t}$ y la distribución espacial de la densidad es $\rho(\mathbf{x},t)=\phi(t)$. Se pide:

- Las descripciones espaciales del campo de aceleraciones y del campo de velocidades y las ecuaciones de las trayectorias (en forma canónica) y de las líneas de corriente.
- Determinar la función $\phi(t)$ sabiendo que en el instante inicial $\phi(0)=\phi_0$.
- Determinar el valor del parámetro α para que el flujo sea irrotacional. Para dicho caso determinar los potenciales de fuerzas másicas Φ ($\mathbf{b}=-\nabla\Phi$) y de velocidades χ ($\mathbf{v}=\nabla\chi$). Demostrar que en estas condiciones se cumple la ecuación:

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \Phi + \frac{1}{2}v^2 + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x}, t$$

- Calcular el caudal que atraviesa la superficie (abierta) de la semiesfera de la figura.



11 Principios variacionales

CUESTIONES RESUELTAS

CR 11-1 A partir de la expresión del principio de los trabajos virtuales:

$$\int_{V_0} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0 = \int_{V_0} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad \forall \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Gamma_u$$

demostrar el principio de minimización de la energía potencial para un material elástico lineal en régimen de pequeñas deformaciones.

Resolución:

Al ser el material elástico lineal, entonces será un material hiperelástico, y por lo tanto existirá un potencial elástico:

$$\exists \mathbb{W}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mid \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \Rightarrow \delta \mathbb{W} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

Además, si las fuerzas exteriores son conservativas se cumple:

$$\begin{aligned} \exists \mathbb{G}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{t}^* &= -\frac{\partial \mathbb{G}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Rightarrow \delta \mathbb{G} = -\mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \\ \exists \Phi(\mathbf{u}) \mid \rho \mathbf{b} &= -\frac{\partial \Phi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Rightarrow \delta \Phi = -\rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \end{aligned}$$

Ahora se puede reescribir la expresión del principio de los trabajos virtuales como:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \delta \mathbb{W} dV_0 + \int_{V_0} \delta \Phi dV_0 + \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbb{G} d\Gamma &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Gamma_u \\ \delta \left(\int_{V_0} \mathbb{W} dV_0 + \int_{V_0} \Phi dV_0 + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbb{G} d\Gamma \right) &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Gamma_u \end{aligned}$$

Si se define la *Energía Potencial Total* como:

$$\mathbb{U}(\mathbf{u}) = \int_{V_0} \mathbb{W} dV_0 + \int_{V_0} \Phi dV_0 + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbb{G} d\Gamma$$

se puede concluir:

$$\delta \mathbb{U} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Gamma_u$$

que es lo mismo que decir que \mathbb{U} tiene un extremo en \mathbf{u} .

Teniendo en cuenta que:

$$\mathbb{W}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

donde:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \frac{\partial^2 \mathbb{W}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

Si se calcula:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) &= \int_{V_0} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) dV_0 - \int_{V_0} \rho \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) dV_0 - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) d\Gamma \\ \mathbb{U}(\mathbf{u}) &= \int_{V_0} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV_0 - \int_{V_0} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV_0 - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u})$$

resulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - \mathbb{U}(\mathbf{u}) &= \int_{V_0} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dV_0 + \int_{V_0} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV_0 + \\ &+ \int_{V_0} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dV_0 - \int_{V_0} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned}$$

y utilizando:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbb{U}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - \mathbb{U}(\mathbf{u}) = \int_{V_0} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0 + \int_{V_0} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dV_0 - \int_{V_0} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma$$

Teniendo en cuenta que:

$$\delta \mathbb{U} = \int_{V_0} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0 - \int_{V_0} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma$$

se tiene que:

$$\mathbb{U}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - \mathbb{U}(\mathbf{u}) = \int_{V_0} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dV_0$$

Y considerando que el tensor $\mathbb{C}_{ijkl} = \frac{\partial^2 \mathbb{W}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$ es definido positivo:

$$\boxed{\mathbb{U}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - \mathbb{U}(\delta \mathbf{u}) \geq 0}$$

Por lo que se ve que la energía potencial tiene un *mínimo* en el estado de equilibrio.

CR 11-2 Justificar qué términos de la siguiente expresión del trabajo virtual interno, en notación ingenieril:

$$\delta \mathbb{W}^{\text{int}} = \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) d\Omega$$

son intrínsecamente nulos para cada uno de los siguientes casos:

- a) Tensión plana.
- b) Deformación plana.

Resolución:

En tensión plana se cumple:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\delta \mathbb{W}^{\text{int}} = \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) d\Omega$$

En deformación plana se cumple:

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \delta \epsilon_z = \delta \gamma_{xz} = \delta \gamma_{yz} = 0$$

Por tanto resulta:

$$\delta \mathbb{W}^{\text{int}} = \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) d\Omega$$

CUESTIONES PROPUESTAS

CP 11-1 Indicar y justificar cuál es el ámbito de validez y aplicación en Mecánica de Sólidos de los siguientes principios variacionales:

- a) Principio de los Trabajos Virtuales
 - b) Principio de la Energía Potencial mínima.
-

CP 11-2 Enunciar el principio de minimización de la energía potencial, indicar su campo de validez y deducirlo a partir de la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales.

CP 11-3 Demostrar que el principio de los trabajos virtuales es una condición necesaria para el equilibrio de un medio continuo.

CP 11-4 Demostrar que el Principio de los Trabajos Virtuales es condición suficiente para que un sistema de tensiones y desplazamientos sea solución de las ecuaciones de equilibrio.

Formulario básico

Tema 2. Deformación

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2 dX_i E_{ij} dX_j = 2 dx_i e_{ij} dx_j$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T + \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J})$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right]$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{j} + \mathbf{j}^T - \mathbf{j}^T \cdot \mathbf{j})$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right]$$

$$\lambda = \sqrt{1 + 2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}}} \quad \lambda = 1 + \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}$$

$$ds = \lambda dS \quad \varepsilon = \lambda - 1 \quad ds - dS = \varepsilon dS$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{T}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\sqrt{1 + 2 \mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(1)}} \sqrt{1 + 2 \mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}}$$

$$\cos \Theta = \frac{\mathbf{t}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} - 2\mathbf{e}) \cdot \mathbf{t}^{(2)}}{\sqrt{1 - 2 \mathbf{t}^{(1)} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}^{(1)}} \sqrt{1 - 2 \mathbf{t}^{(2)} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}^{(2)}}}$$

$$\Delta \theta = - \frac{2 \mathbf{t}^{(1)} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}^{(2)}}{\sin \theta}$$

$$\theta_{xy} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2E_{xy}}{\sqrt{1 + 2E_{xx}} \sqrt{1 + 2E_{yy}}} \quad \Theta_{xy} = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2e_{xy}}{\sqrt{1 - 2e_{xx}} \sqrt{1 - 2e_{yy}}}$$

$$\Delta \theta_{xy} = -2 \varepsilon_{xy} = -\gamma_{xy}$$

$$\lambda_x = \sqrt{1 + 2E_{xx}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e_{xx}}}$$

$$\lambda_x = 1 + \varepsilon_x$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q} \quad \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}} \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

$$dV_t = |\mathbf{F}|_t dV_0 \quad dV = (1 + \text{Tr } \mathbf{e}) dV_0 \quad d\mathbf{a} = |\mathbf{F}| d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

$$d\mathbf{a} = |\mathbf{U}| (\mathbf{N} \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{N})^{1/2} d\mathbf{A} \quad \rho = \frac{1}{|\mathbf{F}|} \rho_0 \quad \frac{d|\mathbf{A}|}{d\mathbf{A}} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-T}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} -\Omega_{23} \\ -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} \end{Bmatrix} \quad \frac{d}{dt} ds^2 = 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{d} \cdot d\mathbf{x} \quad \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{F} \quad \frac{d(\mathbf{F}^{-1})}{dt} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} \quad \frac{d}{dt} (d\mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{a} - d\mathbf{a} \cdot \mathbf{l} \quad \frac{d}{dt} (dV) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV \quad \frac{d|\mathbf{F}|}{dt} = |\mathbf{F}| \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Tema 3. Condiciones de compatibilidad

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 & S_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \\ S_{yy} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 & S_{xz} &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \\ S_{zz} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 & S_{yz} &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla) = 0 \quad e_{mjq} e_{nir} \varepsilon_{ij,qr} = 0 \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} & \frac{\partial \theta_3}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial \theta_3}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \varepsilon_{xx} & \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \varepsilon_{xy} - \theta_3 & \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \varepsilon_{xz} + \theta_2 \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \varepsilon_{xy} + \theta_3 & \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \varepsilon_{yy} & \frac{\partial u_y}{\partial z} &= \varepsilon_{yz} - \theta_1 \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \varepsilon_{xz} - \theta_2 & \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \varepsilon_{yz} + \theta_1 & \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \varepsilon_{zz} \end{aligned}$$

Tema 4. Tensiones

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad \tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) - \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

Tema 5. Ecuaciones de conservación-balance

$$\frac{d}{dt} \int_{V_i} \mu \, dV = \int_{V_i} \left(\frac{d\mu}{dt} + \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \psi \, dV = \int_V \rho k_A \, dV - \int_{\partial V} \rho \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\partial V} \mathbf{j}_A \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\rho \frac{d\psi}{dt} = \rho k_A - \nabla \cdot \mathbf{j}_A \quad \rho \frac{du}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho \mathbf{r} \cdot \nabla \cdot \mathbf{q}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s \, dV \geq \int_V \rho \frac{r}{\theta} \, dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad \rho \frac{ds}{dt} - \rho \frac{r}{\theta} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \geq 0$$

$$\dot{s}_{local}^{(i)} = \dot{s} - \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\rho \theta} \nabla \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad \dot{s}_{cond}^{(i)} = -\frac{1}{\rho \theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0$$

$$\rho \theta \dot{s} - \rho \dot{u} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \quad -\rho \dot{\psi} - \rho s \dot{\theta} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \quad \psi = u - s \theta$$

Tema 6. Elasticidad lineal

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \delta_{ij} (\theta - \theta_0) & \varepsilon_{ij} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{ll} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} + \alpha \delta_{ij} (\theta - \theta_0) \\ p &= -Ke + 3K\alpha (\theta - \theta_0) & \sigma'_{ij} &= 2G\varepsilon'_{ij}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} & \beta &= \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha & K &= \frac{E}{3(1-2\nu)} & G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} & \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} & \alpha &= \frac{\beta}{3\lambda+2\mu} & K &= \frac{3\lambda+2\mu}{3} & \mu &= G\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{b} &= \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \\ \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} + \mu(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}^* \quad \text{en } \Gamma_\sigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{t}_i^* &= t_i + \beta_{ij} (\theta - \theta_0) n_j & \hat{b}_i &= b_i - \frac{1}{\rho_0} (\beta_{ij} (\theta - \theta_0))_{,j} \\ \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{ll,ij} - \frac{\nu}{\nu+1} \delta_{ij} \nabla^2 \sigma_{ll} &= -(\rho_0 b_i)_{,j} - (\rho_0 b_j)_{,i} \\ \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{ll,ij} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} (\rho_0 b_l)_{,l} - (\rho_0 b_i)_{,j} - (\rho_0 b_j)_{,i}\end{aligned}$$

Tema 7. Elasticidad plana

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} & \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}\end{aligned}$$

$$\text{Deformación plana} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \\ \sigma_z &= \nu (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \right.$$

$$\text{Tensión plana} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{aligned} \right.$$

Tema 8. Plasticidad

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_{kk} & J_2' &= \frac{1}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}' & \bar{\sigma} &= \sqrt{3J_2'} \\
 \sigma_{oct} = \sigma_m &= \frac{I_1}{3} & \tau_{oct} &= \sqrt{\frac{2}{3}} [J_2']^{1/2} & E^{ep} &= E \frac{H'}{E + H'} \\
 \sqrt{3J_2'} - \sigma_f &= 0 & \sigma_1 - \sigma_3 &= \sigma_f & 3\alpha\sigma_m + \sqrt{J_2'} &= \beta \\
 \tau_n &= c - \sigma_n \tan \phi & \sigma_1 - \sigma_3 - 2c \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi &= 0 \\
 \alpha &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} & \beta &= \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}
 \end{aligned}$$

Tema 9. Ecuaciones constitutivas de fluidos

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda d_{ll}\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} & p &= \bar{p} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) Tr(\mathbf{d}) & p &= \bar{p} - \mathcal{K} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \\
 2W_D &= \mathcal{K} Tr^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}':\mathbf{d}' & -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} &= \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\
 C_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) & H &= z + \frac{p}{\rho_0 g} + \frac{v^2}{2g} = cte
 \end{aligned}$$

Tema 10. Mecánica de fluidos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(p) &= \int_0^p \frac{1}{\rho(p)} dp & \nabla \mathbb{P} &= \frac{1}{\rho} \nabla p & \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= 2\omega \times \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \\
 \rho \frac{du}{dt} &= -p Tr(\mathbf{d}) + \mathcal{K} Tr^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}':\mathbf{d}' + \rho \mathbf{r} + \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla \theta)
 \end{aligned}$$

Tema 11. Principios variacionales

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial V_i} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS$$

Tensor infinitesimal de deformación

Coordenadas cilíndricas

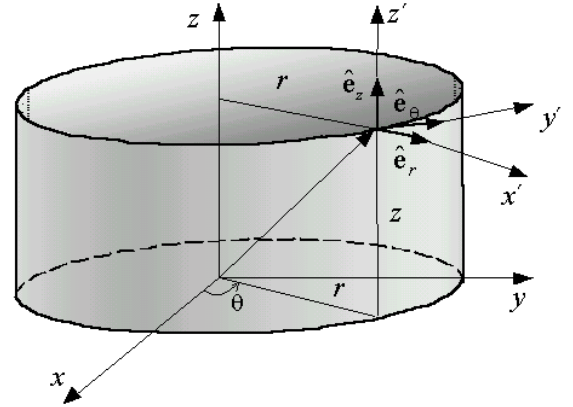
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right]$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)$$



$$\mathbf{x}(r, \theta, z) \equiv \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Coordenadas esféricas

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{r\phi} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta\phi} \\ \varepsilon_{r\phi} & \varepsilon_{\theta\phi} & \varepsilon_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

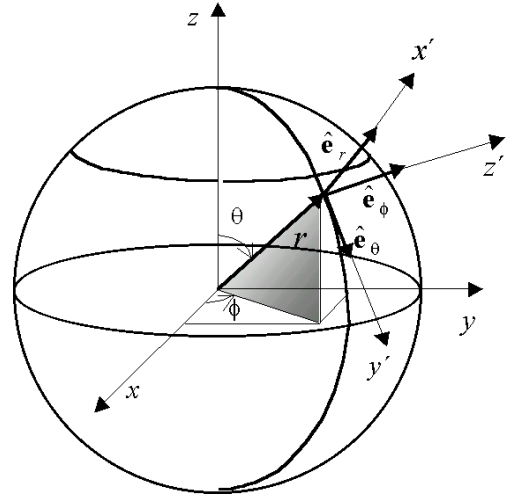
$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right]$$

$$\varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right]$$

$$\varepsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_\phi}{r} \cot \theta \right]$$



$$\mathbf{x}(r, \theta, \phi) \equiv \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Tensor velocidad de deformación

Coordenadas cilíndricas

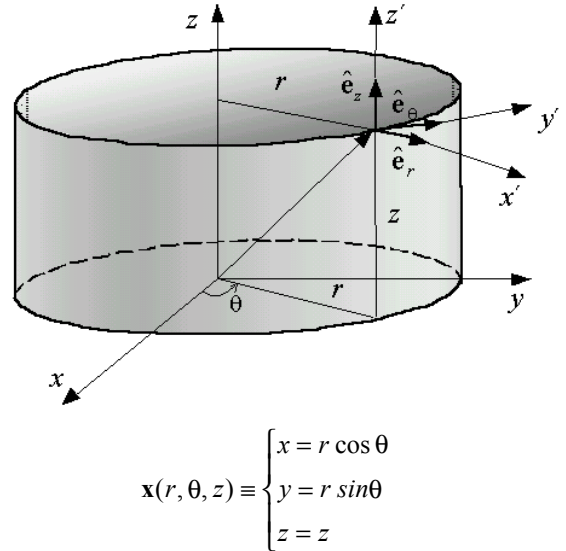
$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{rr} & d_{r\theta} & d_{rz} \\ d_{r\theta} & d_{\theta\theta} & d_{\theta z} \\ d_{rz} & d_{\theta z} & d_{zz} \end{bmatrix}$$

$$d_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \quad d_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right]$$

$$d_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

$$d_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$$



Coordenadas esféricas

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{rr} & d_{r\theta} & d_{r\phi} \\ d_{r\theta} & d_{\theta\theta} & d_{\theta\phi} \\ d_{r\phi} & d_{\theta\phi} & d_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

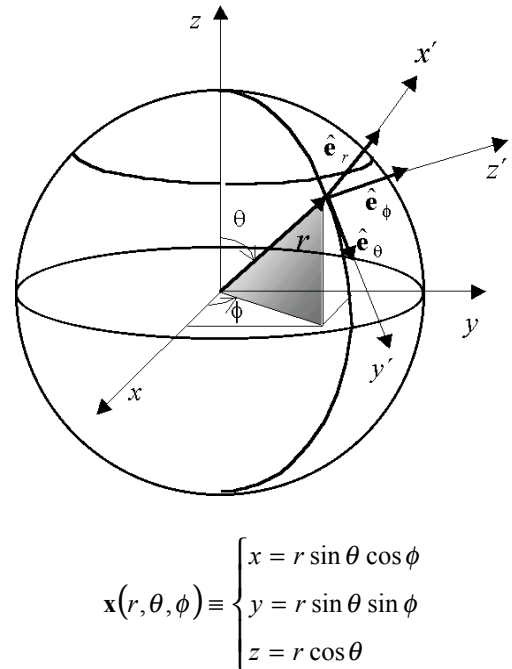
$$d_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$d_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r} \cot \phi + \frac{v_r}{r}$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right]$$

$$d_{r\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right]$$

$$d_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi}{r} \cot \phi \right]$$



Ecuaciones de Navier

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2G}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} + 2G \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} + \rho b_r &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\
 (\lambda + 2G) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} - 2G \frac{\partial \omega_r}{\partial z} + 2G \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + \rho b_\theta &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\
 (\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\theta) + \frac{2G}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} + \rho b_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

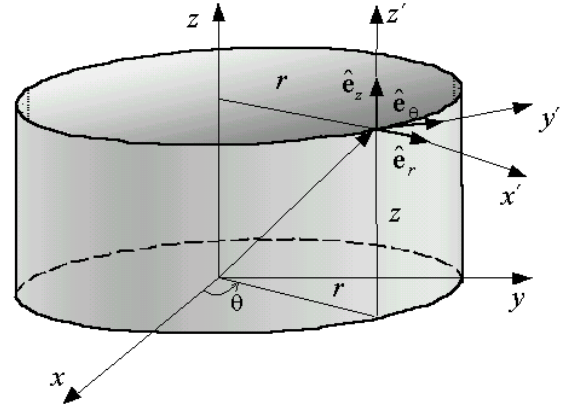
donde

$$\omega_r = -\Omega_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)$$

$$\omega_\theta = -\Omega_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$\omega_z = -\Omega_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$$

$$e = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$



$$\mathbf{x}(r, \theta, z) \equiv \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2G}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega_\phi \sin \theta) + \frac{2G}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \phi} + \rho b_r &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\
 (\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial \theta} - \frac{2G}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} + \frac{2G}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\phi \sin \theta) + \rho b_\theta &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\
 (\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial \phi} - \frac{2G}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\theta) + \frac{2G}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} + \rho b_\phi &= \rho \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

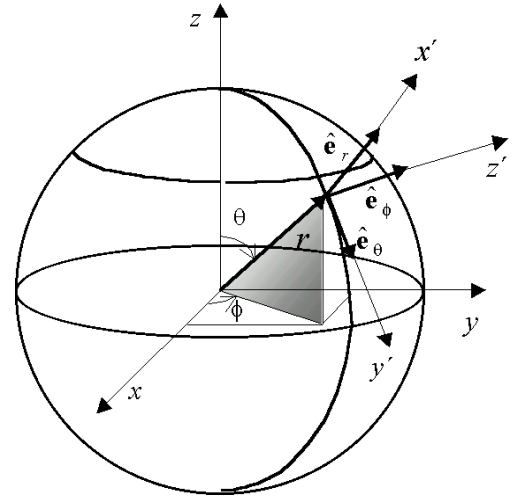
donde

$$\omega_r = -\Omega_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\phi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right]$$

$$\omega_\theta = -\Omega_{\phi r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\phi)}{\partial r} \right]$$

$$\omega_\phi = -\Omega_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

$$e = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r u_\theta \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r u_\phi) \right]$$



$$\mathbf{x}(r, \theta, \phi) \equiv \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Tensor de tensiones para fluidos newtonianos

$$\left(\mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \right)$$

Coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - p + \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \\ \sigma_y &= \mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - p + \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \\ \sigma_z &= \mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - p + \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - p + \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} & \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ \sigma_\theta &= \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - p + \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} & \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = \mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \\ \sigma_z &= \mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - p + \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} & \tau_{zr} &= \tau_{rz} = \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - p + \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} & \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ \sigma_\theta &= \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - p + \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} & \tau_{\theta\phi} &= \tau_{\phi\theta} = \mu \left[\frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin\theta} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \\ \sigma_\phi &= \mu \left[2 \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - p + \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} & \tau_{\phi r} &= \tau_{r\phi} = \mu \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Ecuaciones de continuidad

Coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Coordenadas esféricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0$$

Ecuaciones de Navier - Stokes

Fluido incompresible; ρ, μ constantes

Coordenadas cartesianas

Componente x

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho b_x$$

Componente y

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho b_y$$

Componente z

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho b_z$$

Coordenadas cilíndricas

Componente r

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + \rho b_r$$

Componente θ

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + \rho b_\theta$$

Componente z

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho b_z$$

Coordenadas esféricas

Componente r

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho b_r$$

Componente θ

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho b_\theta$$

Componente ϕ

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cot \theta \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) + \rho b_\phi$$