

Mecánica de Medios Continuos

Practica 0

Álgebra y cálculo vectorial y tensorial

Universidad de Cuenca

12 de abril de 2023

1. Como vimos en clase, un tensor puede ser representado como la suma de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico. Esta descomposición es útil para calcular propiedades de los tensores, ya que cada componente contiene distinta información como veremos en los siguientes ejercicios.
 - a) Demostrar que la traza de un tensor es igual a la traza de su componente simétrica.
 - b) Demostrar que la determinante de un tensor antisimétrico de tamaño impar es igual a 0.
 - c) Calcular la matriz de componentes del tensor definido por la rotación de vectores en 3 dimensiones en un ángulo θ en torno al eje \mathbf{e}_1 .
2. Dados los tensores de orden 1 \mathbf{u}, \mathbf{v} y \mathbf{w} , y el tensor de orden 2 \mathbf{A} , escriba en notación inicial las siguientes expresiones:
 - a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
 - b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
 - c) $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$
 - d) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
 - e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
 - f) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$
 - g) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}$
 - h) $\mathbf{A}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$
 - i) $tr(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$
 - j) $tr(\mathbf{A})$
 - k) $Det(\mathbf{A})$

Ayuda: Para el determinante emplear el símbolo de Levi-Civita.

3. Dado un vector arbitrario \mathbf{v} y un vector unitario \mathbf{n} , demostrar:

- a) $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$

4. Un tensor \mathbf{P} de orden 2 es una **Proyección ortogonal** si es simétrico y $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$. Dados dos vectores unitarios arbitrarios \mathbf{n} y \mathbf{m} , determine cuáles de los siguientes tensores es una proyección perpendicular.

- a) $\mathbf{P} = \mathbf{I}$
- b) $\mathbf{P} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$
- c) $\mathbf{P} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$
- d) $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$
- e) $\mathbf{P} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}$

5. Dados el campo vectorial $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2x_1\mathbf{e}_2 + x_3x_1\mathbf{e}_3$ y el campo tensorial $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = x_2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + x_1x_3\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ Calcular:

- a) $\nabla \cdot \mathbf{v}$
- b) $\nabla \times \mathbf{v}$
- c) $\nabla \cdot \mathbf{S}$

6. Dados el campo escalar $\phi(\mathbf{x})$, el campo vectorial \mathbf{v} escriba en notación indicial las expresiones a y b, y demostrar las demás:

- a) $\nabla \cdot \mathbf{v}$
- b) $\nabla \phi$
- c) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{v} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{v})$
- d) $\nabla(\phi \mathbf{v}) = \phi \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla \phi$
- e) $\nabla \times (\phi \mathbf{v}) = \phi \nabla \times \mathbf{v} + (\nabla \phi) \times \mathbf{v}$

7. Dado el campo escalar $\phi(\mathbf{x})$, el campo vectorial \mathbf{v} y el tensor de orden 2 \mathbf{S} , demostrar:

- a) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{S}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{S}) + \mathbf{S} \nabla \phi$
- b) $\nabla \cdot (\mathbf{S}^T \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} : \nabla \mathbf{v}$
- c) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{S} \mathbf{v}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{v} + \nabla \phi \cdot (\mathbf{S} \mathbf{v}) + \phi \mathbf{S} : (\nabla \mathbf{v})^T$
- d) $\nabla \cdot (\mathbf{S} \mathbf{v}) = \mathbf{S}^T : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{S})$