



David Ivaniš, Lara Ujčić

KLASIFIKACIJA POMOĆU TENZORSKE DEKOMPOZICIJE MREŽA EHO STANJA

Seminarski rad iz kolegija
Napredne linearne i nelinearne numeričke metode u analizi
podataka

Zagreb, svibanj, 2023.

Sadržaj

Sadržaj	ii
Uvod	1
1 Teorijski izvodi	2
1.1 Neuronske mreže	2
1.2 Tenzorska dekompozicija	3
1.3 Mreže eho stanja	5
1.4 Tenzorska dekompozicija stanja rezervoara	7
2 Primjena algoritma i rezultati	9
2.1 Rukom pisane znamenke	9
2.2 EKG srca	11
2.3 Zaključak	14
Bibliografija	15

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se problemom klasifikacije korištenjem neuronskih mreža. Preciznije, koristit ćemo mreže eho stanja - posebnu vrstu rekurentnih neuronskih mreža, i predstaviti dvije metode za klasifikaciju bazirane na rezultatima neuronskih mreža. Klasičnom pristupu treniranjem izlaznih težina neuronske mreže suprostavit ćemo tenzorski pristup u kojem se stanja rezervoara posmatraju u svom tenzorskom obliku, a klasifikacija se vrši analiziranjem tenzorske dekompozicije. Ovaj rad se zasniva na radu ugledne znanstvenice Ashley Prater.

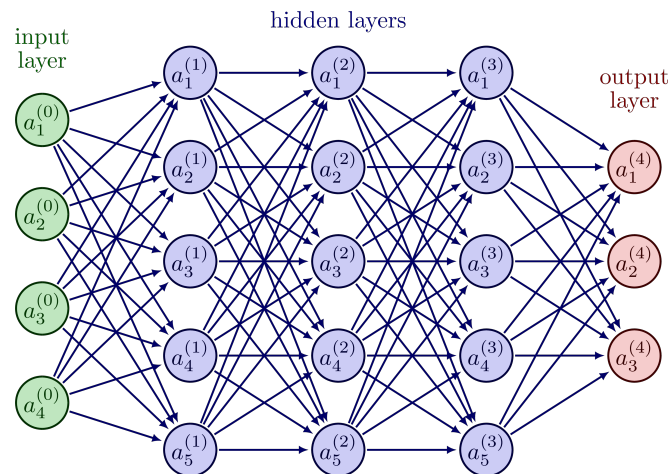
Algoritme ćemo testirati na dva primjera - na MNIST podacima rukom pisanih znamenki i na primjeru signala elektrokardiograma. Usporedit ćemo rezultate dobivene objema metodama i iznijeti neke prijedloge o daljnjem unaprijeđenju metoda.

Poglavlje 1

Teorijski izvodi

1.1 Neuronske mreže

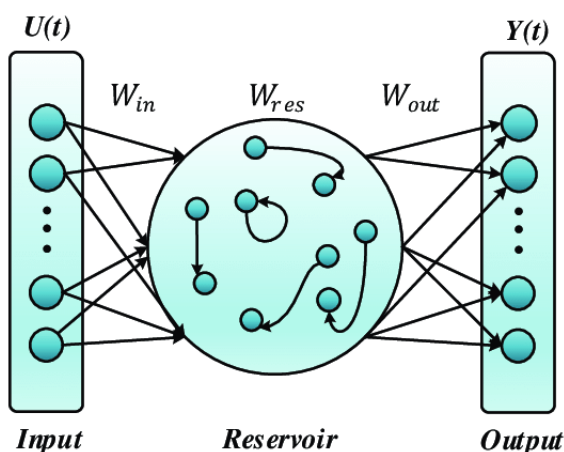
Umjetne neuronske mreže su računalni modeli za rješavanje raznovrsnih problema koji nastoje imitirati funkcionalnosti ljudskog mozga odnosno bioloških neuronskih mreža te tako simulirati proces učenja. Sastoje se od niza čvorova koji imitiraju neurone, a koji su međusobno povezani vezama (sinapsama). U procesu učenja, svaki čvor prima "signal" (realni broj) te emitira novi signal koji se računa unaprijed određenom funkcijom. Taj signal se modificira korištenjem tzv. težina koje ga pojačavaju ili smanjuju, a koje se određuju u procesu učenja. Naime, mreži se zadaju ulazi sa unaprijed poznatim rješenjima, računa se pogreška u rezultatima a težine se mijenjaju u skladu s pogreškom. Za to se najčešće koristi tzv. backpropagation algoritam.



Slika 1.1: Neuronska mreža

Posebna vrsta neuronskih mreža su rekurentne neuronske mreže u kojima veze između neurona mogu činiti petlje tj. izlazni signali iz čvorova mogu utjecati na ulazne signale u istim tim čvorovima. Čvorovi (osim početnih i izlaznih) tvore skriveni sloj (rezervoar) u kojem postoje veze između svaka dva čvora. Te veze, intuitivno, predstavljaju veze između vremenskih trenutaka. Ovo svojstvo rekurentnosti omogućuje "pamćenje" prošlosti niza, pa su izrazito korisne u rješavanju problema vezanim za vremenske nizove, signale itd.

Mreže eho stanja posebna su vrsta rekurentnih neuronskih mreža koje se ističu brzinom treniranja. Naime, umjesto korištenja vremenski i računski zahtjevnog backpropagation algoritma, težine u mreži su slučajno zadane, a treniraju se samo izlazne težine.



Slika 1.2: Mreža eho stanja - ESN

1.2 Tenzorska dekompozicija

Red tenzora $\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ je N . Svaki indeks u tenzoru nazivamo mod, a dimenzija pripadnog moda označava broj različitih vrijednosti koje taj indeks može poprimiti.

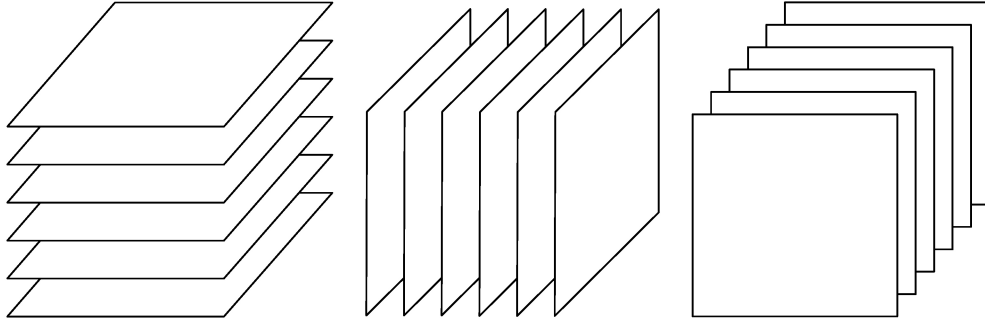
Za tenzor $\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ reda 3, fiksiranjem indeksa u modu 1, 2 ili 3 dobivamo podtenzore reda 2 (matrice):

$$\mathcal{A}_{i_1=i} = \mathcal{A}(i, :, :)$$

$$\mathcal{A}_{i_2=i} = \mathcal{A}(:, i, :)$$

$$\mathcal{A}_{i_3=i} = \mathcal{A}(:, :, i)$$

Te podtenzore još nazivamo i horizontalnim, lateralnim i frontalnim odsječcima.



Slika 1.3: Horizontalni, lateralni i frontalni odsječci tenzora reda 3

Tenzor možemo prikazati u obliku matrice koristeći **matricizaciju** (unfolding) tenzora. Na primjer, matricizacija tenzora \mathcal{A} po modu 3 je matrica $\mathcal{A}_{(3)} \in \mathbf{R}^{I_1 \times (I_2 I_3)}$, dobivena konkatencijom podtenzora po modu 3:

$$\mathcal{A}_{(3)} = [\mathcal{A}(:, :, 1) | \mathcal{A}(:, :, 2) | \cdots | \mathcal{A}(:, :, I_3)].$$

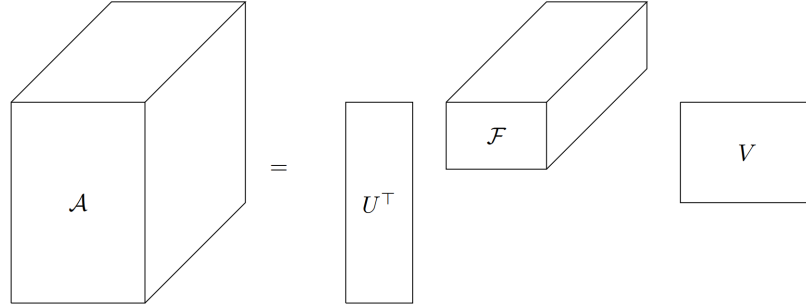
Tenzorski produkt u modu n od $\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$ s matricom $B \in \mathbf{R}^{J_n \times I_n}$, u oznaci $\mathcal{A} \times_n B \in \mathbf{R}^{I_1 \times \cdots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \cdots \times I_N}$, po elementima je dan s:

$$(\mathcal{A} \times_n B)(i_1, \dots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \dots, i_N) = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathcal{A}(i_1, \dots, i_N) B(j_n, i_n).$$

U ovom radu koristiti ćemo varijantu Tuckerove dekompozicije, zvanu **Tucker-2 dekompozicija**, u kojoj tenzor $\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ zapisujemo kao:

$$\mathcal{A} = \mathcal{F} \times_1 U \times_2 V,$$

za $U \in \mathbf{R}^{J_1 \times I_1}$, $V \in \mathbf{R}^{J_2 \times I_2}$ ortogonalne matrice takve da $J_n \ll I_n$, te $\mathcal{F} \in \mathbf{R}^{J_1 \times J_2 \times I_3}$ jezgreni tenzor.

Slika 1.4: Tucker-2 dekompozicija tenzora \mathcal{A}

1.3 Mreže eho stanja

U ovom odjeljku opisati ćemo kako se prostorno-vremenski podaci obrađuju pomoću mreže eho stanja. Neka je $A \in \mathbf{R}^{L \times T}$ ulazni podatak prostorne dimenzije L i vremenske dimenzije T . Vrijednosti stanja rezervoara od A , označenih s $X \in \mathbf{R}^{N \times T}$, su zadane sljedećom rekurzijom:

$$X(:, t+1) = (1 - \alpha)X(:, t) + \alpha f(W_{in}A(:, t) + W_{res}X(:, t) + \beta). \quad (1.1)$$

U gornjoj jednadžbi, f predstavlja nelinearnu aktivacijsku funkciju, $W_{in} \in \mathbf{R}^{N \times L}$ fiksne ulazne težine, $W_{res} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ fiksne, slučajno odabrane težine rezervoara, β je vrijednost pristranosti, i $\alpha \in [0, 1]$ je brzina propuštanja.

Za rješavanje problema klasifikacije, najprije je potrebno istrenirati mrežu nad podacima za treniranje. Označimo skup ulaznih podataka za treniranje s

$$Tr = \{A^1, A^2, \dots, A^I\}.$$

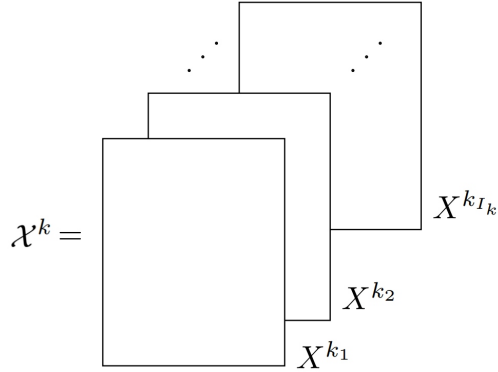
Neka su ti podaci particionirani na K klasa, koje ćemo označiti s

$$Tr_k = \{A^{k_1}, A^{k_2}, \dots, A^{k_{I_k}}\}, k = 1, \dots, K.$$

Sve podatke za treniranje procesiramo kroz ESN s istim parametrima i težinama. Za svaki ulazni podatak A^{k_j} , označimo pripadna stanja rezervoara s $X^{k_j} \in \mathbf{R}^{N \times T}$. Nadalje, definiramo tenzor $\mathcal{X}^k \in \mathbf{R}^{N \times T \times I_k}$ s

$$\mathcal{X}^k(:, :, j) = X^{k_j}.$$

Uočimo, frontalni odsjeci tenzora \mathcal{X}^k su upravo kolekcije stanja rezervoara od podataka iz Tr_k .

Slika 1.5: Tenzor \mathcal{X}^k

Na sličan način spojimo stanja rezervoara ukupnih podataka u jedan tenzor $\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{N \times T \times I}$.

Navesti ćemo kako se dalje uobičajeno rješava problem klasifikacije, a u idućem odjeljku predstaviti ćemo novi pristup.

Najprije matriciziramo \mathcal{X} po modu 3, i time dobijemo matricu $X \in \mathbf{R}^{N \times TI}$, danu s

$$X_{(3)} = [\mathcal{X}(:, :, 1) | \mathcal{X}(:, :, 2) | \dots | \mathcal{X}(:, :, I)].$$

Neka je $y \in \mathbf{R}^{K \times TI}$ matrica koja označava pripadnost klasi. Na primjer, za podatak A^{k_j} iz klase Tr_k vrijedi:

$$y(:, (j-1)T + t) = e_k.$$

Želimo pronaći izlazne težine $W_{out} \in \mathbf{R}^{K \times N}$ takve da vrijedi

$$X_{(3)} W_{out} \approx y.$$

Po metodi najmanjih kvadrata, potrebno je minimizirati $\|W X_{(3)} - y\|_2^2$, po $W \in \mathbf{R}^{K \times N}$.

Koristiti ćemo metodu regularizacije zvanu ridge regresija, koja se koristi za procjenu koeficijenata modela višetrake regresije u slučajevima gdje su nezavisne varijable jako korelirane. Po ovoj metodi, tražimo $W \in \mathbf{R}^{K \times N}$ koji minimizira sljedeći izraz:

$$\|W X_{(3)} - y\|_2^2 + \lambda \|W\|_2^2. \quad (1.2)$$

Traženo rješenje je dano s $W_{out} = y X_{(3)}^T (X_{(3)} X_{(3)}^T + \lambda I_N)^{-1}$.

Novi ulazni podatak A s pripadnim stanjima rezervoara X će pripadati skupu Tr_k ako se u vektoru

$$\sum_t W_{out} X(:, t)$$

maksimalni element nalazi na k -tom mjestu.

1.4 Tenzorska dekompozicija stanja rezervoara

Sada ćemo predstaviti klasifikaciju na temelju tenzorske dekompozicije stanja rezervoara.

Neka je aproksimacija Tucker-2 dekompozicije od tenzora \mathcal{X} dana s

$$\mathcal{X} \approx \mathcal{F} \times_1 U \times_2 V,$$

za $U \in \mathbf{R}^{N \times J_1}$, $V \in \mathbf{R}^{T \times J_2}$ ortogonalne matrice takve da $J_1 \ll N$ i $J_2 \ll T$, te $\mathcal{F} \in \mathbf{R}^{J_1 \times J_2 \times I}$ jezgreni tenzor.

Za izračun aproksimacija koristiti ćemo algoritam ortogonalnih iteracija višeg reda (eng. *Higher Order Orthogonal Iteration* - *HOOI*), čiji pseudokod navodimo u nastavku:

Neka je A novi ulazni podatak s pripadnim stanjima rezervoara X . X je matrica, odnosno tenzor drugog reda, pa možemo napraviti Tucker-2 dekompoziciju:

$$X = G \times_1 U \times_2 V,$$

za U i V dobivene preko HOOI algoritma za podatke za treniranje. Budući da su U i V ortogonalne, a X je matrica, vrijedi:

$$G = X \times_1 U^T \times_2 V^T = U^T X V. \quad (1.3)$$

Uočimo, svaki frontalni odsječak od \mathcal{F} je također oblika (1.3), uz prikladno definirana stanja rezervoara umjesto X . Stoga, zaključujemo da podaci iz iste klase imaju slična stanja rezervoara, pa time proizvoide i slične frontalne odsječke od jezgrenog vektora \mathcal{F} . Zaključujemo, A pripada Tr_k ako za

$$j = \operatorname{argmin} ||G - \mathcal{F}(:, :, j)||$$

vrijedi da pripadni podatak za treniranje A^j pripada Tr_k .

Algoritam 1 HOOI

Ulaz Tenzor stanja rezervoara \mathcal{X} od podataka za treniranje; dimenzije J_1, J_2 ; $tol > 0$.

Izlaz Matrice U i V ; jezgri tenzor \mathcal{F} .

```

1: Neka je  $n = 0$ , Slučajno odaberi početne matrice  $U^0$  i  $V^0$ .
2: while  $\max\{\|S_1^n - S_1^{n+1}\|, \|S_2^n - S_2^{n+1}\|\} \geq tol$  do
3:   #Nova iteracija mod 1 matrice  $U$ 
4:    $\mathcal{B} = \mathcal{X} \times_2 (V^n)^T$ 
5:    $[u, s, v] = \text{svd}(\mathcal{B}_{(1)})$ 
6:    $U^{n+1} = u(:, 1 : J_1)$ 
7:    $S_1^{n+1} = \text{diag}(s)$ 
8:
9:   #Nova iteracija mod 2 matrice  $V$ 
10:   $\mathcal{B} = \mathcal{X} \times_1 (U^{n+1})^T$ 
11:   $[u, s, v] = \text{svd}(\mathcal{B}_{(2)})$ 
12:   $V^{n+1} = v(:, 1 : J_2)$ 
13:   $S_2^{n+1} = \text{diag}(s)$ 
14: end while
15:  $U = U^{end}$ ,  $U = U^{end}$ 
16:  $\mathcal{F} = \mathcal{X} \times_1 U^T \times_2 V^T$ 

```

Poglavlje 2

Primjena algoritma i rezultati

U ovom poglavlju, usporediti ćemo točnost klasifikacije koristeći pristup s linearnim izlaznim težinama W_{out} dan s (1.2), i pristup s tenzorskom dekompozicijom naveden u prethodnom odjeljku.

2.1 Rukom pisane znamenke

Provodimo klasifikaciju na slikama rukom pisanih znamenki dimenzija 16×16 .



Slika 2.1: Slike rukom pisanih znamenki

Podaci za treniranje sadrže 1707 slika, a podaci za testiranje 2007 slika. Za svaku sliku $A^j \in R^{16 \times 16}$, pripadna oznaka y_j poprima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, \dots, 9\}$.

Kako bi sliku, odnosno matricu, koristili u ESN-u, potrebno ju je pretvoriti u vremenski signal. Stoga ćemo pretvoriti jednu od njene dvije prostorne dimenzije u vremensku dimenziju, i slati sliku stupac po stupac u ESN.

Nadalje, pripadnu oznaku y_j za znamenku transformirati ćemo u matricu $\in \mathbf{R}^{10 \times 16}$ tako da vrijedi, ako na primjer A^j pripada Tr_k ,

$$\begin{aligned} y_j(k, :) &= [1, \dots, 1] \\ y_j(i, :) &= [0, \dots, 0], i = \{0, \dots, 9\} \setminus k. \end{aligned}$$

Korišteni ESN parametri su: $N \in \{10, 25, 50, 100, 200\}$, $f = \tanh$, te dimenzije za tenzorsku dekompoziciju $J_1 = 5$ i $J_2 = 4$.

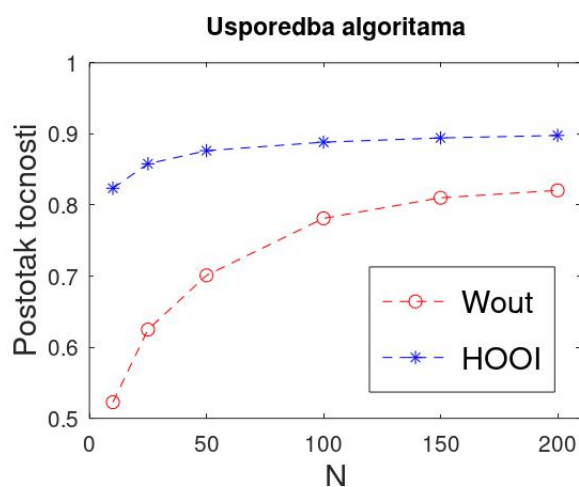
Osim parametara veličine rezervoara i matrica u Tuckerovoj dekompoziciji tenzora, u obzir možemo uzeti još neke parametre. Naprimjer, važnim se pokazalo da rezervoar zadovoljava svojstvo eho stanja - naime, da utjecaj prijašnjih stanja i unosa s vremenom postupno jenjava, a ne da se povećava. Da bi to bilo zadovoljeno, u praksi se korisnim (iako ne nužnim i dovoljnim) pokazalo da je spektralni radijus matrice težina u rezervoaru manji od 1. Zato slučajnu matricu težina skaliramo kako bismo postigli željeni spektralni radijus.

Neki rezultati govore da je učinkovito spektralni radijus držati što bliže jedinici, takozvanoj "granici kaosa". Ipak, u našem slučaju spektralni radijus nije igrao veliku ulogu, i rezultati su bili podjednaki za različite odabire spektralnog radijusa (0.3, 0.5, 0.7, 0.999) uz držanje ostalih parametara fiksnim. Razlog iza toga je potencijalno to što je vremenska dimenzija naših uzoraka malena, pa mreži nije potrebno "dugo pamćenje" kojeg omogućuje velik spektralni radijus.

Za svaki izbor parametara, treniramo ESN 15 puta i računamo prosječnu točnost klasifikacije. Pri svakom treniranju ESN-a, koristimo iste matrice težina za obje metode.

Korišteni parametri pri treniranju mreže su $\alpha = 0.3$ i $\rho = 0.7$.

Kao što se da vidjeti na slici, točnost raste povećanjem rezervoara, pri čemu je točnost tenzorskog pristupa konstantno bolja od točnosti klasičnog pristupa. Točnost klasičnog pristupa kreće se od 52.27% za 10 stanja rezervoara do 82.06% za 200 stanja, a za tenzorski pristup od 82.36% do 89.79%.

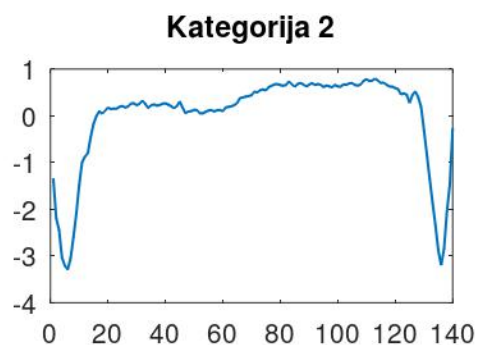
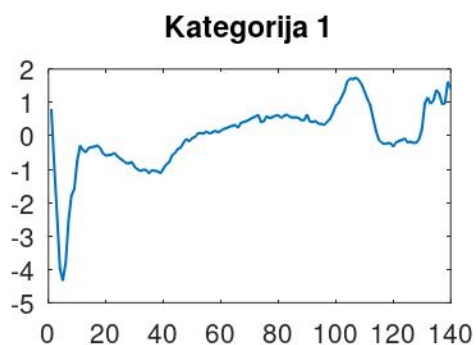


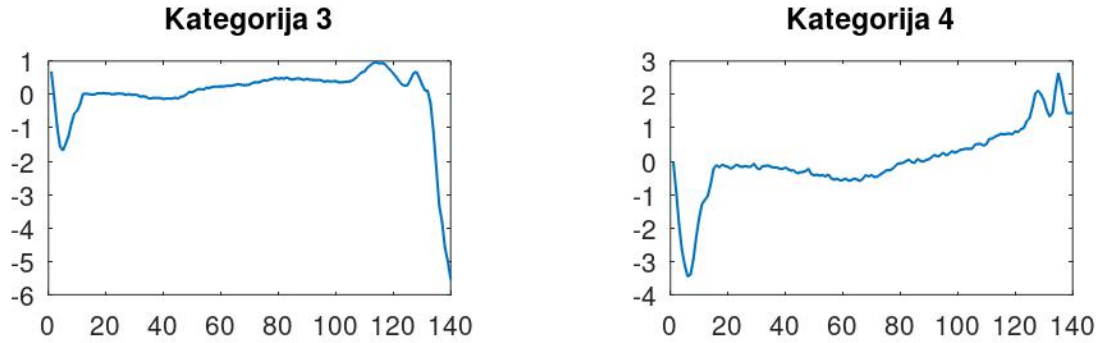
Slika 2.2: Rezultati klasifikacije za znamenke

2.2 EKG srca

Provodimo klasifikaciju na podacima o signalima srca zabilježenim elektrokardiogramom (EKG). Podaci koje ćemo obraditi u ovom radu pripadaju pacijentu kojem je dijagnosticirano teško kongestivno zatajanje srca.

Signali srca su vremenski nizovi duljine 140, a dijele se na 4 različite kategorije. Primjer izgleda signala iz svake kategorije prikazani su u nastavku





U tablicama (2.1) i (2.2) prikazana je raspodjela signala po kategorijama u podacima za treniranje i podacima za testiranje.

Tablica 2.1: Podaci za treniranje

Kategorije	Frekvencije
1	100
2	100
3	10
4	19
Ukupno	229

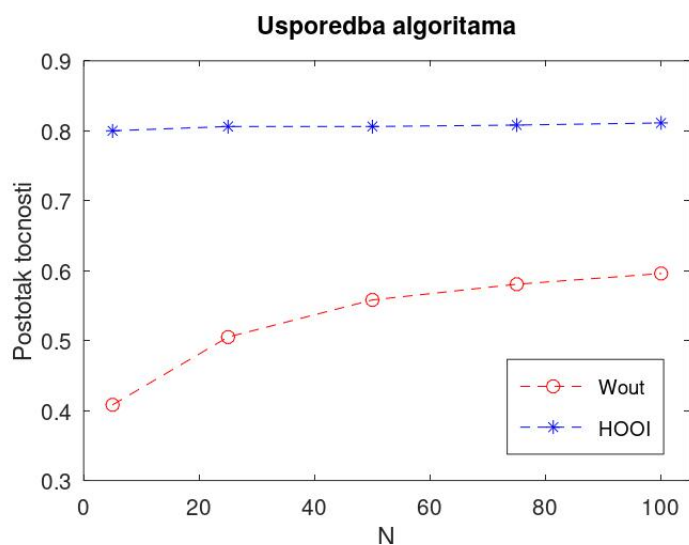
Tablica 2.2: Podaci za testiranje

Kategorije	Frekvencije
1	400
2	400
3	80
4	100
Ukupno	980

Uočavamo da podataka iz prve dvije kategorije ima značajno više nego podataka iz zadnje dvije. Budući da varijacije u količini podataka za treniranje mogu utjecati na rezultate klasifikacije, provesti ćemo klasifikaciju nad svim podacima, a zatim i samo nad podacima iz prve dvije kategorije, koje su jednakih veličina.

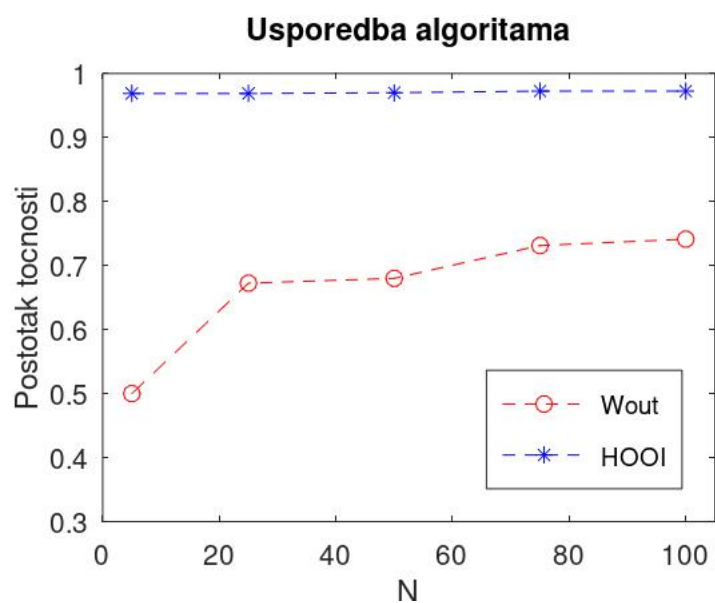
Fiksirali smo sljedeće ESN parametre: $f = \tanh$, $\beta = \pi/4$, te dimenzije za tenzorsku dekompoziciju $J_1 = 5$ i $J_2 = 10$.

Promotrimo najprije podatke iz sve četiri kategorije. Na slici (2.3) možemo vidjeti točnost klasifikacije za sve podatke u ovisnosti o broju stanja rezervoara N . Uočavamo da je HOOI pristup bolji, no i da se ne poboljšava značajno porastom broja N . Pristup s težinama W_{out} sveukupno daje slabije rezultate, no poboljšava se porastom broja N .



Slika 2.3: Rezultati klasifikacije za sve podatke

Sada ćemo provesti klasifikaciju nad prve dvije kategorije signala, koje imaju jednak broj podataka za treniranje i testiranje. Rezultati su prikazani na slici (2.4).



Slika 2.4: Rezultati klasifikacije za prve dvije kategorije

2.3 Zaključak

Iz navedenih primjera možemo zaključiti da tenzorski pristup, osim što u obzir uzima prirodnu tenzorsku strukturu stanja u mreži, daje i bolje rezultate od klasičnog pristupa u kojem se skup stanja matricizira. Iako rezultati koje smo postigli nisu konkurentni najsuvremenijim metodama klasifikacije, pogotovo u slučaju znamenki, daljnjim modifikacijama potencijalno bi se došlo do boljih rezultata. Naprimjer, osim klasičnih rekurentnih neuronskih mreža mogu se koristiti duboke neuronske mreže, sa više slojevima, a u slučaju kompleksnijih podataka (sa više vremenskih trenutaka) bolji rezultati bi se mogli postići pažljivim odabirom parametara koji figuriraju u algoritmima.

Bibliografija

- [1] Prater A., *Classification via Tensor Decompositions of Echo State Networks*, Air Force Research Laboratory, Rome, NY (2017).
- [2] Monrad ES Smith HS Wright RF Lanoue A Gauthier DF Ransil BJ Grossman W Braunwald E. Baim DS, Colucci WS, *Survival of patients with severe congestive heart failure treated with oral milrinone*, J American College of Cardiology (1986).
- [3] Šnajder J. Dalbelo Bašić B., Čupić M., *Umjetne neuronske mreže*, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, (2008).
- [4] Li Deng, *The mnist database of handwritten digit images for machine learning research*, IEEE Signal Processing Magazine **29** (2012), br. 6, 141–142.
- [5] Pešut L., *Rekurentne neuronske mreže*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb (2019).
- [6] Couturier R. Schaetti N., Salomon M., *Echo State Networks-Based Reservoir Computing for MNIST Handwritten Digits Recognition*, IEEE Intl Conference on Computational Science and Engineering (CSE) and IEEE Intl Conference on Embedded and Ubiquitous Computing (EUC) and 15th Intl Symposium on Distributed Computing and Applications for Business Engineering (DCABES) (2016).