



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Facultad de Ciencias

DOBLE GRADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

**GEOMETRÍA, COSMOLOGÍA Y
NUCLEOSÍNTESIS PRIMORDIAL**

Presentado por:

D. David Jesús Árbol Guerrero

Curso Académico 2022-2023

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D. David Jesús Árbol Guerrero

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2022-2023, es original, en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 23 de junio de 2023

Fdo: David Jesús Árbol Guerrero

Summary

In this work, the Standard Model of Cosmology is developed, obtaining the geometry of a homogeneous and isotropic universe and the equations derived from it. Additionally, the expressions for the evolution and current values of certain fundamental cosmological quantities are determined. The thermodynamics governing its evolution is also studied. To this end, the most relevant milestones are detailed, and its physical mechanisms, explained. For each one, it is included the physics that determines their beginning, in most cases along with the required calculations. All of this is presented with the aim of providing a detailed explanation of the process of primordial nucleosynthesis. First, this is achieved by means of approximate analytical calculations that provide a simple qualitative description, and later, computationally using the program PRIMAT, which obtains the abundances of the resulting light elements. Furthermore, the number of neutrinos is varied to check whether this cosmological model supports the number of neutrino families given in the Standard Model of Particle Physics.

As a preface, the first chapter synthesizes the mathematical foundations of Pseudo-Euclidean Spaces and Pseudo-Riemannian Manifolds, which provide the framework for the mathematical formulation of General Relativity. After that, the theoretical study of the physics involved follows.

Firstly, the geometry of the universe, given by the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric, is obtained from the postulates of homogeneity, isotropy, and perfect fluid. The Friedmann Equations are derived, including the evolution equation and the acceleration equation. We determine the possible types of universes based on their density and curvature parameters, as well as different concepts about cosmological distances and horizons. For a flat universe (with zero curvature), several analytical expressions are obtained as a function of time: the scale factor, the dominant energy density, the Hubble constant and the redshift for a single-component universe.

Next, the values of the cosmological parameters given by recent measurements are presented, and the type of universe we inhabit is deduced. We derive an analytical expression for the scale factor as a function of time for a universe currently dominated by cold matter and dark energy. By introducing the density parameters for these types of energy, a very precise theoretical approximation of the age of the universe is calculated: $t_0 = 13.785$ Ga. The time and redshift at the moment of cold matter-radiation equality are also obtained, resulting in 69 912 years and $z = 3\,404.2$.

Then, we develop the Statistical Physics and Thermodynamics which are used to describe the evolution of the universe. The concept of effective degrees of freedom is introduced and applied to the thermodynamic variables

of energy density, number density of particles, and entropy, obtaining their analytical expressions as a function of temperature in the ultra-relativistic and non-relativistic limits. Furthermore, we deduce the expression for the Hubble constant as a function of temperature from the conservation of entropy in a comoving volume, and the temperature as a function of time during the radiation-dominated epoch.

Later, the most relevant phases of the evolution of the early universe are described: inflation, baryogenesis, the electroweak era, the electroweak and QCD transitions, neutrino decoupling, positron annihilation, primordial nucleosynthesis, and recombination. They are qualitatively explained with some calculations that support the fundamental ideas of each milestone. For the neutrino decoupling and positron annihilation, and especially for nucleosynthesis, we provide an approximate analytical description of the process in detail.

For the first process, it is calculated the decoupling temperature and the relationship between the temperature of neutrinos and the CMB. From the measures of the CMB temperature we obtain the temperature of the cosmic neutrino background, and the energy density and number density of photons and neutrinos. We conclude that neutrinos cannot be cold dark matter. Finally, the density parameters of photons, neutrinos, and total radiation are calculated.

For the second process, it is derived the approximate temperature of neutron freeze-out, the baryon-to-photon ratio, the temperature and time scale of nucleosynthesis, and the abundances of ^4He and ^1H . The abundances are $X_{\text{H}} = 0.7657$ and $Y_{\text{P}} = 0.2343$, and despite being approximate calculations that do not consider non-equilibrium thermodynamic effects, the helium abundance differs from measurements by only 4.5 %. A figure is presented showing the evolution of neutron, deuterium, and ^4He abundances, computed with the program PRIMAT, that confirms the behaviours theoretically deduced before. We conclude that the theoretical argument given for the nucleosynthesis process is valid as a very good first approximation. Finally, the most relevant reactions in primordial nucleosynthesis are described.

Lastly, the time evolution of the the most relevant light element abundances is presented using PRIMAT, which can be satisfactorily explained in a qualitative way. The prior theoretical findings are consistent with these results. The dependence of the abundances with the baryon-to-photon ratio is studied and its observed value at the CMB together with the observed abundances of ^4He and deuterium are shown to be consistent with the predictions of primordial nucleosynthesis. Finally, the dependence with the number of neutrino families is analysed, confirming that nucleosynthesis supports th-

ree neutrino families as in the Standard Model of Particle Physics.

As a conclusion, we highlight the importance of exploring primordial nucleosynthesis, within the standard cosmological model (Λ CDM) or in possible extensions, which may elucidate the origin of the 1.8-sigma tension in deuterium abundance and perhaps check whether the Lithium Problem is due to data misinterpretation or, conversely, a flaw in the theoretical model. Given the high precision of current observations, these studies can lay the foundations for significant advances not only in cosmology but also in particle physics.

Índice

1	Introducción y motivación	8
1.1	Introducción histórica	8
1.2	Objetivos	9
2	Geometría del universo. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	11
2.1	Hipótesis del Modelo Estándar y argumentos observacionales	11
2.2	Fundamentos matemáticos de la relatividad general	12
2.3	Cálculo de la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	16
2.3.1	Forma general de la métrica	16
2.3.2	Forma de la métrica espacial	16
2.3.3	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	18
2.4	Ecuaciones de Friedmann	19
2.5	Tipos de universo. Distancias, horizontes y desplazamiento al rojo	20
2.5.1	Definiciones de distancias en cosmología	20
2.5.2	Concepto de horizonte. Tipos de horizontes	21
2.5.3	Desplazamiento al rojo	22
3	Parámetros cosmológicos. El universo en el que vivimos	23
3.1	Tipos de materia, densidad crítica y parámetros de densidad	23
3.2	Valor de los parámetros cosmológicos. Nuestro universo	26
3.3	Cálculo de la edad del universo	27
4	Cosmología. Evolución del universo hasta la recombinación	29
4.1	Tiempo de expansión y tiempo medio de interacción	29
4.2	La física estadística de la cosmología	30
4.3	Evolución de la entropía, el factor de escala y la constante de Hubble	34
4.4	Hitos más relevantes de la evolución del universo temprano	36
4.5	Inflación	36
4.6	Bariogénesis	36
4.7	La época electrodébil	37
4.8	La transición electrodébil y la transición de QCD	37
4.9	Desacoplamiento de los neutrinos. Aniquilación de positrones	39
4.9.1	Proceso de desacoplamiento genérico	39
4.9.2	Desacoplamiento de neutrinos	40
4.9.3	Aniquilación de electrones y positrones	40
4.10	Nucleosíntesis	42
4.10.1	Paso 0: Abundancias en equilibrio térmico	43
4.10.2	Paso 1: Congelación (freeze-out) de los neutrones	44
4.10.3	Paso 2: Desintegración de los neutrones	46

4.10.4 Paso 3: Fusión del ^4He	46
4.11 Recombinación	48
5 Análisis computacional del proceso de la nucleosíntesis	48
5.1 Evolución temporal de las abundancias	49
5.2 Abundancias relativas finales en función de la densidad bariónica	49
5.3 Predicción del número de familias de neutrinos	51
6 Resumen y conclusiones	53
Referencias	55

1 Introducción y motivación

1.1 Introducción histórica

La comprensión de nuestro entorno ha sido la principal fuente de inspiración para nuestra especie. Ya sea por el placer de entender o para dar sentido a nuestra existencia, desde las más antiguas civilizaciones se han elaborado “historias” que intentan explicar de formas variopintas el inicio del tiempo y el espacio. En cualquier caso, el deseo de descripciones más objetivas y satisfactorias del universo ha impulsado el estudio del cosmos de modos cada vez más precisos.

A mediados de los años 1920, como resultado de los grandes avances teóricos y técnicos, se comenzaron a sentar las bases de lo que hoy conocemos como el Modelo Estándar de la Cosmología. Los diferentes hallazgos que condujeron a su formulación se sustentaron en una fuerte colaboración entre Físicos Experimentales y Teóricos e Ingenieros, que desembocó en el desarrollo de instrumentos capaces de apoyar o falsar las teorías. Uno de los ejemplos más famosos es el descubrimiento en 1965 por A. Penzias y R. Wilson de la *Cosmic Microwave Background Radiation* (CMBR) o *Radiación Cósmica de Fondo de Microondas* que había sido teorizada por G. Gamow en 1946. Esta fue la primera detección de un fenómeno físico tan antiguo como 13 400 millones de años, asociado al universo primigenio.

Las principales observaciones que apoyan el modelo cosmológico actual son [1, 2, 3]:

- La expansión del universo, que se manifiesta en que las demás galaxias se alejan de la nuestra a una velocidad proporcional a la distancia a la que se encuentran. Esta es la *ley de Hubble*, que había sido propuesta por G. Lemaître en 1927 [4] pero fue establecida con mayor precisión por E. Hubble en 1929 [5].
- La existencia de la radiación cósmica de fondo de microondas, vestigio emitido por el universo temprano tras hacerse transparente a los fotones [6, 7].
- Las abundancias relativas de los elementos ligeros en el universo, que coinciden de forma muy precisa con las que se predicen aplicando la termodinámica y la física de partículas que conocemos a un universo caliente y en expansión tras la gran explosión inicial, la *Big Bang Nucleosynthesis* (BBN) o *nucleosíntesis primordial*, propuesta en 1948 por Alpher-Beta-Gamow [8]. Su estudio es el objetivo principal del presente trabajo.
- Los objetos más antiguos encontrados (cúmulos globulares de estrellas) no exceden una edad de alrededor de 13 000 millones de años. Esta es una de las grandes predicciones del Modelo Estándar de la Cosmología (Λ CDM), que con los datos más recientes de la misión Planck (julio de 2020) establece una *edad del universo* de $13\,787 \pm 20$ millones de años [9].

A pesar de que en sus inicios la Cosmología se consideraba una disciplina inexacta y difícil de falsar, en la actualidad es un útil recurso para la Física Teórica y la Astrofísica. La física sobre la que se construye depende de sorprendentemente pocos parámetros libres, que describen satisfactoriamente el universo hasta un nivel muy profundo. Es tal su relevancia que se pueden derivar conclusiones extraordinarias sobre Física de Partículas

como, por ejemplo, cuál es el número de familias de neutrinos, que resulta ser consistente con el que requiere el Modelo Estándar de las Partículas, como veremos.

Entonces, ¿qué dice la cosmología actual sobre el tipo de universo que habitamos? ¿Tiene un principio y un final? ¿Se expande, se contrae o es estático? Mostraremos que todas estas opciones son posibles en universos con distintos parámetros libres, y veremos cuál de ellos es el nuestro.

Una vez expuesta la importancia científica y cultural de la Cosmología, nos proponemos condensar en el formato de un Trabajo de Fin de Grado los eventos más relevantes de la historia del universo temprano. Se hará hincapié primero en el aspecto más formal, la Geometría del universo en el contexto de la Relatividad General. Después se estudiará la física y las distintas etapas de su evolución térmica, con énfasis en el desacoplamiento de los neutrinos, la aniquilación de (casi todos) los electrones con los positrones y finalmente la nucleosíntesis de los elementos más ligeros.

1.2 Objetivos

En vista del gran interés que presenta el trabajo, se presentan los objetivos que se proponen inicialmente:

1. Describir la geometría del nuestro universo según el Modelo Estándar Cosmológico obteniendo la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Derivar las Ecuaciones de Friedmann y, con ellas, estudiar la evolución temporal del factor de escala en las eras de dominación de distintos tipos de energía. Definir la edad del universo, desplazamiento al rojo, conceptos de distancia en cosmología y los parámetros cosmológicos.
2. Desarrollar la termodinámica del universo en expansión durante la época dominada por la radiación. Esto es, hasta la recombinación, cuando el universo se hizo transparente a los fotones.
3. Enumerar y explicar los hitos más relevantes en la historia térmica del universo durante la época dominada por la radiación. Deducir el momento en que ocurre la nucleosíntesis primordial de forma detallada y los parámetros de los que depende.
4. Utilizando el programa PRIMAT [10], calcular computacionalmente: la evolución de las abundancias de los elementos ligeros producidos durante la nucleosíntesis y las abundancias relativas finales como función de la densidad bariónica. Alterar el número efectivo de familias de neutrinos y discutir los resultados. Comparar los resultados con las observaciones y discutir el problema del Litio.

Todos los objetivos fueron cumplidos satisfactoriamente y se han presentado de forma coherente y ordenada a lo largo de este trabajo. Para realizarlo, se ha recurrido a una bibliografía extensa en física y matemáticas. Las principales fuentes utilizadas fueron:

[1] L. Bergström, A. Goobar, *Cosmology and Particle Astrophysics*, 2nd Edition, Springer-Praxis (2004)

[2] B. Janssen, *Gravitación y Geometría*, Editorial Universidad de Granada (2022)

[3] D. Baumann, *Cosmology*, Cambridge University Press (2022)

[9] Planck Collaboration, *Planck 2018 results. VI. Cosmological Parameters*, Astron. Astrophys. **641** (2020), A6 [erratum: Astron. Astrophys. **652** (2021), C4]

[10] C. Pitrou, A. Coc, J. Uzan, E. Vangioni, *Precision Big Bang Nucleosynthesis with the New Code PRIMAT*, JPS Conf. Proc. **31** (2020), 011034

Código PRIMAT: <http://www2.iap.fr/users/pitrou/primat.htm>

[11] C. Pitrou, A. Coc, J. Uzan, E. Vangioni, *Precision big bang nucleosynthesis with improved Helium-4 predictions*, Phys. Rept. **754** (2018), 1-66

[12] L. Husdal, *On Effective Degrees of Freedom in the Early Universe*, Galaxies **4** (2016) no.4. 78

2 Geometría del universo

Se darán por conocidos ciertos conceptos básicos sobre variedades diferenciables como la definición de variedad regular, variedad diferenciable, derivada covariante o tensor.

2.1 Hipótesis del Modelo Estándar y argumentos observacionales

El objetivo de esta sección es obtener la métrica que describe la geometría del universo, la *Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*. Con ella deduciremos las *Ecuaciones de Friedmann* y la *Ecuación de aceleración*, que describen la dinámica del cosmos. Para ello partiremos de ciertas hipótesis y planteamientos muy generales y de la Teoría de la Relatividad General, basada en observaciones de galaxias de inicios del siglo XX.

Las hipótesis base del Modelo Estándar de la cosmología son [1, 2, 3]:

Principio Cosmológico: "En cualquier instante, el universo es homogéneo e isótropo a escalas suficientemente grandes." Fue formulado por primera vez por Einstein en sus ecuaciones de 1915.

Postulado de Weyl: "A escalas cosmológicas, la materia se comporta como un fluido perfecto, cuyas componentes se mueven a lo largo de geodésicas temporales, que no se intersecan, salvo (posiblemente) en un punto singular del pasado."

En su momento, estos postulados se propusieron con argumentos filosóficos sólidos y ciertamente profundos, contradiciendo análisis estadísticos de observaciones que sugerían un universo en forma de disco achatado (porque sólo se conseguían estudiar objetos de nuestra galaxia). En cambio, actualmente existen muchas observaciones que lo sustentan:

- La Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), sonda de la NASA, y el satélite Planck de la ESA han comprobado una gran homogeneidad de la CMBR con fluctuaciones de sólo una parte por millón [9, 13].
- Al analizar muchos mapas de galaxias, como el de Sloan Digital Sky Survey (SDSS), se obtienen distribuciones similares en lugares distintos del cosmos [14].
- La isotropía se deduce de las observaciones de que la velocidad de alejamiento de las galaxias es proporcional a la distancia, independientemente de la dirección (ley de Hubble).

Observación 1. *Es importante recalcar que las observaciones se realizan desde nuestro sistema solar y nuestro planeta. Todos estos fenómenos astrofísicos presentan homogeneidad e isotropía y, supuesto que no ocupamos un lugar privilegiado en el universo, deberá ser igual en otras galaxias.*

De la observación anterior se deduce que la materia se distribuye por igual en el universo a escala cosmológica. Se formula la hipótesis de que la geometría del universo se asemeja a la de un *fluido cósmico* que, como veremos, se encuentra en expansión acelerada. Así, las galaxias estarían aproximadamente en reposo respecto a este fluido que se expande y de ahí su movimiento relativo. Surgen entonces dos nuevos conceptos fundamentales:

El comportamiento del espacio-tiempo y la geometría del universo se pueden aproximar a los de un *fluido perfecto*.

Definición 1. Un *fluido perfecto* es un fluido completamente caracterizado por su densidad de masa ρ_m y su presión isotrópica P . Es un modelo ideal que no conduce el calor y carece de viscosidad o fuerzas de cizalla.

En notación tensorial y unidades naturales, su tensor de energía-impulso puede escribirse como:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

donde u es la cuadrivelocidad del fluido y g el tensor métrico, que derivaremos en detalle en § 2.2.

Ahora se podrá definir el concepto de *observador comóvil*.

Definición 2. Un *observador comóvil* es el único observador que percibirá el universo, incluyendo la CMBR, como homogéneo e isótropo. Es un sistema de referencia en reposo respecto al fluido cósmico del universo.

Definición 3. El *tiempo cosmológico* es el tiempo propio de un observador comóvil.

Observación 2. Tras estas definiciones podemos entender que los dos postulados anteriores se cumplen respecto a un sistema comóvil. Un observador, sea o no inercial, en movimiento relativo respecto de otro comóvil observaría la CMBR anisótropa debido al efecto Doppler relativista (longitud de onda mayor en la dirección en que se aleja).

Una vez nos convencemos de adoptar estas hipótesis, aparentemente simplistas pero fundamentadas, desarrollemos la teoría.

2.2 Fundamentos matemáticos de la relatividad general

Las definiciones y resultados matemáticos sobre espacios pseudo-euclídeos y variedades pseudo-riemannianas fueron consultadas en [15, 16].

Definición 4. Se considera el subespacio vectorial *espacio* de \mathbb{R}^3 , de coordenadas (x, y, z) , embebido dentro del espacio vectorial *espacio-tiempo* \mathbb{R}^4 , de coordenadas (ct, x, y, z) . Estos, dotados de una estructura de variedad diferenciable (concretamente, de variedad regular), describirán las coordenadas en el universo vistas por un observador determinado.

Físicamente, cada *foliación* de \mathbb{R}^4 para ct constante describirá el espacio del universo en un instante de tiempo dado en dimensiones de longitud.

Para preservar la coherencia de las dimensiones del espacio vectorial, definimos como t el tiempo del observador, c la velocidad de la luz (una constante universal) y ct la distancia que recorre la luz en un tiempo t , que tiene dimensiones de longitud.

Definición 5. Para facilitar la lectura, en muchas ocasiones se utilizarán las *unidades naturales*, que son aquellas en las que $c = \hbar = 1$.

Definición 6 (Transformaciones de Lorentz). Conjunto de aplicaciones $\Lambda : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que definen la relación entre las coordenadas del espacio-tiempo de dos observadores inerciales. Dos observadores se dicen inerciales si sus sistemas de referencia se relacionan por una composición de un movimiento rectilíneo uniforme con una rotación de coordenadas espaciales.

En el caso en que no hay rotación, el movimiento se denomina *boost*. Si ocurre en dirección del eje x se define:

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (2.3)$$

Las rotaciones espaciales son las habituales dadas por el grupo $\mathcal{SO}(3)$.

Proposición 1. (i) Las transformaciones de Lorentz son ortonormales.

(ii) El conjunto de transformaciones de Lorentz tiene estructura de grupo (**grupo de Lorentz**).

Definición 7 (Intervalo relativista e invariante Lorentz). Las Transformaciones de Lorentz están construidas de forma que la velocidad de la luz es constante para todo observador. Es decir, el **intervalo relativista**:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad (2.4)$$

es **invariante Lorentz** (invariante bajo transformaciones de Lorentz).

Tras esta introducción física a conceptos de relatividad especial, se presenta el entorno matemático de trabajo: el de las *variedades diferenciables pseudo-riemannianas* (definición 12), su espacio dual y su espacio tensorial asociado.

Definición 8 (Espacio pseudo-euclídeo). Dados un espacio afín \mathcal{A} sobre un cuerpo \mathbb{K} y un espacio vectorial V de dimensión finita n , se llama **espacio pseudo-euclídeo** al par $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ está dotado de un **pseudo producto escalar** interno $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ cumpliendo:

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es hermitico.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es sesquilineal.
- Existen n vectores \mathbf{a}_i , con $i \in \{1, \dots, n\}$, tales que:

$$\langle \mathbf{a}_c, \mathbf{a}_c \rangle > 0, \forall c \leq \ell \quad \langle \mathbf{a}_d, \mathbf{a}_d \rangle < 0, \forall d > \ell \quad \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 0, \forall i \neq j. \quad (2.5)$$

Se dice que la dimensión del espacio pseudo-euclídeo es n . Se llama **índice** a ℓ y **signatura** a (ℓ, p) , con $p = n - \ell$. Se suele denotar el espacio como $\mathcal{A}_{(\ell, p)}$.

Observación 3. La definición de espacio pseudo-euclídeo implica que este tiene la misma dimensión que el espacio vectorial V , por la definición del producto escalar, ya que los n vectores \mathbf{a}_i anteriores serán linealmente independientes.

Proposición 2 (Ley de inercia de una forma cuadrática). Dado un conjunto de vectores $\{\mathbf{b}_i \in \mathcal{E}_{(\ell, p)} : \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle \neq 0, \forall i; \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = 0, \forall i \neq j\}$ en un espacio pseudo-euclídeo, el número de vectores cumpliendo $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle > 0$ es ℓ y cumpliendo $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle < 0$ es p .

Definición 9 (Tensor métrico). Se define **tensor métrico** como un tensor de rango 2 covariante $g: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Dado un espacio pseudo-euclídeo, se le puede asociar un tensor métrico que defina el producto escalar como

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x^i g_{ij} y^j \quad (2.6)$$

con la convención de Einstein (se suma sobre índices repetidos), donde x^i son las componentes de \mathbf{x} en una base ortonormal de $\mathcal{E}_{(\ell, p)}$, que cumple $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$.

El tensor métrico, dotará a la variedad pseudo-riemanniana de propiedades en geometría diferencial, como veremos enseguida.

Una vez tenemos la principal estructura matemática que se usa en Relatividad, se identifican $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathbb{R}^4$, $V = \mathbb{R}^4$ y $\langle x, y \rangle = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu$ ($g_{\mu\nu}$ es simétrico), donde $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ siendo 0 el índice temporal y el resto índices espaciales. En adelante reservaremos las letras latinas i, j, \dots para referirnos a los índices espaciales (1,2,3) y letras griegas para todos los índices espacio-temporales (0,1,2,3). La norma inducida por la métrica es la habitual: $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$.

Proposición 3. *El producto escalar y la norma así definidos son invariantes bajo cambios generales de coordenadas, en los que la métrica varía de punto a punto en el espacio-tiempo.*

Definición 10 (Métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$). *Es la del espacio-tiempo en ausencia de gravedad (espacio-tiempo plano). Es la métrica más sencilla:*

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2.7)$$

Definición 11 (Vectores covariantes y contravariantes). *Habitualmente se dice que x^μ es un vector contravariante y se introduce el vector covariante $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$, de modo que el producto escalar de dos vectores se expresa mediante $x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu$, que es una cantidad invariante bajo cambios generales de coordenadas. En particular, es invariante Lorentz. También se pueden ‘subir y bajar índices’ a la métrica, tal que $x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x_\alpha g^{\alpha\beta} x_\beta$ y $g^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$.*

Los vectores covariantes son en realidad vectores del espacio dual, aplicaciones lineales del espacio vectorial en el mismo espacio. Están conectados con este mediante el Teorema de Representación de Riesz por el producto escalar, en definitiva por la métrica, y por eso vienen definidos de esta forma. Esta es la naturaleza de ‘subir y bajar’ los índices.

Observación 4. *Las transformaciones de Lorentz se definen con toda generalidad como el conjunto de transformaciones lineales y homogéneas que dejan invariante la norma de los vectores en el espacio-tiempo plano o, equivalentemente, dejan invariante la métrica de Minkowski:*

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (2.8)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\lambda_\nu \eta_{\rho\lambda}, \quad (2.9)$$

expresables como tensores de rango (1,1). Todas ellas forman un grupo, pero solo nos interesa el subgrupo llamado **grupo propio y ortocrono de Lorentz** (\mathcal{L}^\uparrow_+), que son las que tienen determinante positivo ($\det \Lambda = +1$) y preservan la dirección temporal ($\Lambda^0_0 \geq 1$). A partir de ahora llamaremos simplemente **grupo de Lorentz** (\mathcal{L}) a este subgrupo.

Finalmente, se introduce el contexto de trabajo en un sistema físico de curvatura no nula, es decir, en presencia de gravedad, o lo que es lo mismo según el **principio de equivalencia**, bajo un cambio general de coordenadas: un cambio de observador no inercial.

La presencia de un potencial gravitatorio no nulo equivale al cambio de la geometría del espacio a través del tensor métrico de forma continua en todo el espacio. Pero cumplirá que localmente (para cada punto) el espacio es localmente plano (existe un cambio general de coordenadas para el que en dicho punto la métrica es la de Minkowski). Es por ello que el espacio-tiempo puede describirse como una variedad diferenciable con una métrica asociada apropiada.

Definición 12. Una *variedad diferenciable pseudo-riemanniana* es un par (\mathcal{M}, g) , formado por una variedad diferenciable (\mathcal{M}) y un tensor métrico (g) asociado que es diferenciable en todo punto y no degenerado, es decir, $g \in \mathcal{C}^\infty$ y $\ker g = 0$. De esta forma, el espacio tangente en cada punto será un espacio pseudo-euclídeo.

Proposición 4.

- (i) En una variedad diferenciable pseudo-riemanniana, al ser el tensor métrico no degenerado, la signatura de todos los espacios tangentes es idéntica.
- (ii) Ya que el tensor métrico en cada punto es simétrico, puede diagonalizarse obteniéndose $g = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$, ℓ y p veces respectivamente.
- (iii) Las métricas que describen el espacio-tiempo en Relatividad General son las de signatura $(1, 3)$ y, por ello, será localmente plano y con la métrica de Minkowski.

Observación 5. Físicamente, que las variedades diferenciables describan el espacio-tiempo parece natural llegados a este punto. Además, no tiene sentido físico que dos vectores linealmente independientes tengan producto escalar 0 (paralelos), pues esto ocurriría sólo en límites asociados a singularidades en agujeros negros, que escapa del paradigma actual. Así, la signatura se conserva, como físicamente se intuye, siempre que localmente el espacio sea el de Minkowski.

Por medio del estudio teórico de geometría diferencial y las propiedades físicas expuestas, se pueden obtener las ecuaciones de Einstein, que relacionan los tensores de curvatura (geometría de la variedad) con el tensor de energía-impulso (energía en el espacio). Finalicemos la sección presentando estos conceptos.

Definición 13 (Símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$). Son un conjunto de 12 números reales, cada uno asociado a un conjunto de 4 coordenadas espacio-temporales que describen la geometría de la variedad:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (2.10)$$

Definición 14 (Tensor de curvatura de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$). Es un tensor de rango $(1, 3)$ que describe la geometría de la variedad y se define por:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma. \quad (2.11)$$

Definición 15 (Tensor de curvatura de Ricci $R_{\mu\nu}$). Es un tensor simétrico $(0, 2)$ que se define como:

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\lambda} R_{\mu\rho\nu\lambda}. \quad (2.12)$$

Definición 16 (Escalar de curvatura o escalar de Ricci R). Es una función escalar de la variedad en el cuerpo (en nuestro caso, \mathbb{R}) definida como:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G\mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

con G la constante de gravitación universal y $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ el tensor de energía-impulso, que describe la distribución de energía y materia en el espacio-tiempo. Sustituiremos $\kappa = 8\pi G$ para que las ecuaciones sean más sencillas.

Las ecuaciones de Einstein relacionan la distribución de energía y materia con la curvatura en cada lugar e instante del espacio-tiempo. Son 10 ecuaciones diferenciales parciales, no lineales, acopladas, de segundo orden para la métrica $g_{\mu\nu}$. Dada la dificultad de su resolución, se utilizan métricas de prueba suficientemente sencillas para poder resolver el problema analíticamente, pero suficientemente generales para que describan una situación físicamente relevante.

2.3 Cálculo de la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

2.3.1 Forma general de la métrica

Debido al principio cosmológico, las soluciones cosmológicas cuadridimensionales son variedades que pueden entenderse como una foliación en hipersuperficies tridimensionales espaciales para cada instante de tiempo. Estas hipersuperficies (espacio), al ser homogéneas e isótropas, cumplirán las siguientes propiedades [2]:

Proposición 5. (i) *Los espacios homogéneos e isótropos son máximamente simétricos.*

(ii) *Los espacios máximamente simétricos tienen curvatura constante (R) y cumplen:*

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = K(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) \quad R_{\mu\nu} = -(N-1)Kg_{\mu\nu} \quad R = -N(N-1)K \quad (2.15)$$

de donde $K = R/(N(N-1)) = \text{cte.}$

Para facilitar el cálculo y mejorar la intuición se trabaja en el sistema de referencia de un observador comóvil, pues se tienen el máximo número de simetrías.

Notación 1. Denotaremos el tensor métrico y los tensores de curvatura de la foliación tridimensional espacial como \bar{g}_{ij} , \bar{R}_{ijkl} , \bar{R}_{ij} , \bar{R} , que sólo dependen de las coordenadas espaciales. Obsérvese que \bar{g}_{ij} , \bar{R}_{ijkl} cumplirán la relación (2.15).

Proposición 6. *El tensor métrico del universo es de la forma:*

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t)\bar{g}_{ij}(x)dx^i dx^j. \quad (2.16)$$

Demostración. Como se trata de una foliación en hipersuperficies espaciales, la parte espacial ($dx^i dx^j$) de la métrica debe ser idéntica a la de un espacio 3D: $\bar{g}_{ij}(x)dx^i dx^j$ o, como mucho, multiplicarse por una función dependiente del tiempo. La métrica debe tener una signatura (1,3) en cada punto, coincidiendo el subespacio en que es definida negativa con la hipersuperficie espacial. Como $\bar{g}_{ij}(x)dx^i dx^j$ es definida positiva, pues conocemos la métrica del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , se tiene la forma $-S^2(t)\bar{g}_{ij}(x)dx^i dx^j$, que corresponde a una métrica espacial homogénea, isótropa y definida negativa. Podríamos plantearnos que la parte temporal fuese más general $f^2(t) + A_i(t)dtdx^i$ y seguir siendo espacialmente isótropa (pueden existir A_i así), pero bajo un cambio de coordenadas se puede recuperar la forma anterior. \square

2.3.2 Forma de la métrica espacial

Estudiamos ahora los distintos tipos de métricas 3D homogéneas e isótropas.

Proposición 7. *La forma más general de la métrica de un espacio 3D homogéneo e isótropo es:*

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{1 - kr^2} dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.17)$$

Demostración. La métrica tiene simetría esférica, es decir, tiene simetría $SO(3)$, y por ello es invariante bajo rotaciones. Por tanto, salvo redefinición de la coordenada radial, tiene la forma:

$$d\bar{s}^2 = e^{2B(\bar{r})} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.18)$$

Ahora se pueden calcular los símbolos de Christoffel utilizando las ecuaciones de las geodésicas. Para ello calculamos las ecuaciones de las trayectorias que minimizan la distancia entre dos puntos dados. Recordando la ecuación (2.4),

$$S = \int_{\gamma} ds = \int_p^q \sqrt{g_{\mu\nu}(x(\tau)) \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau)} d\tau = \int_p^q L(g_{\mu\nu}, \dot{x}^\mu) d\tau. \quad (2.19)$$

La trayectoria será la misma que minimiza $L^2(\dot{x}^i, \dot{x}^i) = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$. Aplicando la teoría de cálculo de variaciones, la trayectoria $x(\tau)$ mínima es la solución de la ecuación de *Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^i} = 0 \quad (2.20)$$

donde podemos escribir

$$L^2 = e^{B(\bar{r})} \dot{\bar{r}}^2 + \bar{r}^2 \dot{\theta}^2 + \bar{r}^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2. \quad (2.21)$$

Así se obtienen las ecuaciones de las geodésicas, que definen la trayectoria de una partícula libre en el espacio-tiempo curvo:

$$\ddot{x}^\sigma + \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0. \quad (2.22)$$

Comparando, se obtienen los siguientes símbolos de Christoffel no nulos:

$$\bar{\Gamma}_{\bar{r}\bar{r}}^{\bar{r}} = B'(\bar{r}) \quad \bar{\Gamma}_{\bar{r}\theta}^\theta = \bar{r}^{-1} \quad \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta \quad (2.23)$$

$$\bar{\Gamma}_{\theta\theta}^{\bar{r}} = -\bar{r}e^{-2B} \quad \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^{\bar{r}} = -\bar{r}\sin^2\theta e^{-2B} \quad \bar{\Gamma}_{\theta\varphi}^\varphi = \cot\theta. \quad (2.24)$$

Usando la definición del tensor de Ricci (2.12), los términos no nulos son:

$$\bar{R}_{\bar{r}\bar{r}} = -\frac{2B'(\bar{r})}{\bar{r}} \quad \bar{R}_{\theta\theta} = -1 + e^{2B} - \bar{r}B'(\bar{r})e^{-2B} \quad \bar{R}_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}. \quad (2.25)$$

Por otra parte, al ser el espacio máximamente simétrico, según (2.15) el tensor de Ricci es:

$$\bar{R}_{ij} = -2K\bar{g}_{ij}. \quad (2.26)$$

Finalmente, comparando el tensor de Ricci de (2.25) y (2.26) se obtienen 2 ecuaciones diferenciales acopladas, cada una asociada a las componentes $\bar{r}\bar{r}$ y $\theta\theta$, pues la tercera ecuación $\varphi\varphi$ es redundante:

$$B'(\bar{r}) = K\bar{r}e^{2B} \quad (2.27)$$

$$2K\bar{r}^2 = 1 - e^{-2B(\bar{r})}(1 - \bar{r}B'(\bar{r})). \quad (2.28)$$

Sustituyendo la primera en la segunda se tiene

$$e^{2B} = \frac{1}{1 - K\bar{r}^2} \quad (2.29)$$

y la métrica queda como se pretendía demostrar. \square

Ya podemos escribir la métrica de FLRW que se se suele encontrar en la literatura,

$$\text{Para } K = 0 \quad d\bar{s}^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.30)$$

mientras que si $K \neq 0$ se reparametriza la coordenada radial para escribir

$$r = \bar{r}\sqrt{|K|} \quad k = \frac{K}{|K|} = \pm 1 \quad (2.31)$$

y entonces

$$\text{Para } K \neq 0 \quad d\bar{s}^2 = |K|^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right\}. \quad (2.32)$$

Interpretación:

- Para $k = 0$ se tiene la métrica de \mathbb{R}^3 en coordenadas esféricas.
- Para $k = 1$, como $r \in]-1, 1[$, si se hace el cambio de coordenadas

$$r = \sin \chi \quad d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} \quad (2.33)$$

se tiene la métrica de la esfera \mathbb{S}^3 .

- Para $k = -1$, análogamente, con el cambio

$$r = \sinh \chi \quad d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 + r^2}} \quad (2.34)$$

se tiene la métrica del hiperboloide \mathbb{H}^3 .

2.3.3 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Ya que tenemos la forma de la métrica en la parte espacial (2.30) y (2.32), basta sustituirla en el ansatz (2.16). La **métrica de FLRW**, correspondiente a un universo homogéneo e isótropo, es entonces:

$$k \in \{0, \pm 1\} \quad ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]. \quad (2.35)$$

Notación 2.

- (i) Se ha tomado $a^2(t) = S^2(t)/|K|$. $a(t)$ es positivo y tendrá dimensiones de longitud si $k = \pm 1$ o será adimensional si $k = 0$. Esto se debe a que r se toma adimensional, K tiene unidades del inverso de la longitud al cuadrado y $S(t)$ es adimensional.
- (ii) A partir de ahora se usará:

$$\tilde{g}_{ij} = |K|\bar{g}_{ij} = \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.36)$$

$$\tilde{R}_{ijkl} = k(\tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl}) \quad \tilde{R}_{ij} = -2k\tilde{g}_{ij} \quad R = -6k. \quad (2.37)$$

Por la definición 13 de símbolos de Christoffel, la multiplicación de la métrica por un escalar, no los cambia. Por tanto, es fácil ver que los tensores de curvatura respecto de la nueva métrica \tilde{g} quedan así. Esto se hace para que en la métrica de FLRW no aparezca la dependencia con el escalar de curvatura por mediación de K , sino que sólo se muestre el tipo de geometría espacial definido por k .

Observación 6. Es fácil comprobar que las métricas de \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 y \mathbb{H}^3 localmente tienen signatura $(3,0)$, es decir, son localmente planas. Por ello, al extender a la métrica de FLRW se obtiene en los 3 casos signatura $(1,3)$ localmente, i.e. localmente Minkowski. Esto era un requisito indispensable para nuestra métrica y se ha obtenido únicamente imponiendo el Principio Cosmológico y el Postulado de Weyl.

2.4 Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de Friedmann son las ecuaciones de Einstein aplicadas a la métrica de FLRW. Necesitaremos calcular el tensor de Ricci y escalar de curvatura de la métrica. Para ello obtenemos primero los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i \quad \Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k. \quad (2.38)$$

Las componentes no nulas de los tensores de curvatura son:

$$R_{0i0j} = -a\ddot{a}\tilde{g}_{ij} \quad R_{ijkl} = -a^2(k + \dot{a}^2)(\tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl}) \quad (2.39)$$

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \quad R_{ij} = -(2k + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\tilde{g}_{ij} \quad R = 6\left(\frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right). \quad (2.40)$$

Finalmente, se introducen la métrica y los tensores de curvatura en las ecuaciones de Einstein para encontrar las relaciones que determinan el factor de escala $a(t)$. Para ello, suponiendo un universo que se comporta como un fluido perfecto por el Postulado de Weyl, su tensor de energía-impulso en el sistema de referencia comóvil será, según la definición 1 y la métrica de FLRW (2.35):

$$\mathcal{T}_{00} = \rho \quad \mathcal{T}_{ij} = a^2(t)\tilde{g}_{ij}P \quad (2.41)$$

siendo $\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}$ y $P = \sum_{\alpha} P_{\alpha}$ la densidad de energía y presión totales; y ρ_{α} , P_{α} cada tipo de densidad de energía y presión, i.e. asociados a materia fría, relativista, materia oscura, etc.

Tras sustituir en las ecuaciones de Einstein (2.14), las únicas dos ecuaciones no triviales son las asociadas a G_{00} y G_{ij} , las **ecuaciones de Friedmann**. Además, pueden combinarse obteniendo una tercera, la **ecuación de aceleración**. En orden son:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (2.42)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{\kappa}{2}P - \frac{k}{2a^2} \quad (2.43)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P). \quad (2.44)$$

La primera (2.42) es una ecuación de ligadura y no es dinámica. A esta se la llama **ecuación de Friedmann**. La segunda (2.43), en cambio, sí es dinámica (de segundo orden) y se la llama **ecuación de evolución**.

2.5 Tipos de universo. Distancias, horizontes y desplazamiento al rojo

2.5.1 Definiciones de distancias en cosmología

Hay diferentes tipos de distancia habituales en la literatura pero no equivalentes [2]:

Definición 17 (Distancia comóvil). *Separación de dos puntos (distancia mínima según geodésicas) en la métrica espacial \tilde{g}_{ij} . Ya que las coordenadas en este sistema se expanden o contraen según el factor de escala, la distancia será independiente de este: no es física.*

$$d = \int d\tilde{s} = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - kr'^2}} dr' = \int_0^\chi d\chi' = \chi \quad (2.45)$$

siendo $r = \sin \chi$, $d\chi = dr / \sqrt{1 - kr^2}$ las **coordenadas conformes**.

Definición 18 (Distancia instantánea). *Es la distancia entre dos puntos en un sistema de referencia comóvil. Será dependiente del factor de escala $a(t)$, aumentando o disminuyendo en el tiempo con $a(t)$. Esta es la distancia que medimos como observadores comóviles en movimiento con nuestra galaxia en un instante t ,*

$$D(t) = \int ds = \int_0^r \frac{a(t)}{\sqrt{1 - kr'^2}} dr' = a(t)\chi. \quad (2.46)$$

Definición 19 (Distancia de cono de luz). *Distancia en coordenadas conformes que recorre la luz entre emisión y detección. La luz se mueve en geodésicas nulas y, supuesto movimiento radial, tenemos $ds = 0 = dt^2 - a^2(t)d\chi$. Por tanto definimos*

$$l(t) = \int_0^\chi d\chi' = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt'}{a(t')} \quad (2.47)$$

con t_1 y t_2 el instante de emisión y de detección, respectivamente.

Nótese que para un observador local la velocidad de la luz es 1 pero en el sistema comóvil no ocurre esto porque se ralentiza debido a la expansión del universo y será $a^{-1}(t) = \frac{d\chi}{dt}$. Esto no es una contradicción porque el segundo postulado de relatividad afirma que la velocidad de la luz es constante para cualquier observador **local**.

De estas definiciones podemos averiguar propiedades importantes del universo:

Proposición 8 (Ley de Hubble). *Las galaxias se alejan unas de otras con una velocidad proporcional a la distancia que las separa.*

$$v(t) = H(t)D(t). \quad (2.48)$$

Demostración. Dado un instante de tiempo cosmológico t :

$$v(t) = \dot{D}(t) = \dot{a}\chi = \frac{\dot{a}}{a}D(t) = H(t)D(t). \quad (2.49)$$

□

Definición 20 (Constante o Parámetro de Hubble $H(t)$). *Es la constante de proporcionalidad que relaciona la velocidad de receso de las galaxias y su distancia. No es realmente una constante, pues cambia con $a(t)$. Sin embargo, a escala humana, cambia actualmente tan lentamente que*

parece constante. Tiene dimensiones de inversa de tiempo e indica la velocidad de expansión del universo, pues es la derivada logarítmica del factor de escala:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.50)$$

El valor de la constante de Hubble actual se denota $H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [17], indicando la velocidad de expansión por cada unidad de longitud. El universo se encuentra en **expansión** si $H > 0$, en **contracción** si $H < 0$ y **estático** si $H = 0$.

Notación 3. Es común encontrar la constante de Hubble como $h = H/H_{100}$, con $H_{100} = 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ porque algunos parámetros cosmológicos se suelen medir como función de h .

Definición 21 (Radio de Hubble R_H). En unidades naturales ($c = 1$), según la Ley de Hubble (proposición 8), $R_H = H^{-1}$ es la distancia a la que la velocidad de receso de las galaxias es igual a la de la luz.

Observación 7. Si $D > R_H$, $v_{\text{rec}} > 1$, i.e., las galaxias más allá del radio de Hubble tienen velocidades de receso superlumínicas. Esto no es una contradicción porque v_{rec} mide el cambio en la distancia geométrica debido a la expansión, y no el cambio en posición que describe la velocidad cinemática dx/dt . Localmente un objeto puede estar en reposo respecto al sistema comóvil y distanciándose de una galaxia lejana más rápido que c por la expansión del universo.

Definición 22 (Parámetro de deceleración $q(t)$). Parámetro cosmológico adimensional que mide la deceleración en la expansión del universo:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\left(1 + \frac{\ddot{H}}{H^2}\right). \quad (2.51)$$

Indica si la expansión del universo es **decelerada** ($q > 0$), **acelerada** ($q < 0$) o **constante** ($q = 0$).

2.5.2 Concepto de horizonte. Tipos de horizontes

Con las definiciones de distancias anteriores se puede definir el concepto de *horizonte* en un universo:

- Propiedad 1.** (i) Dado un objeto astronómico distante, en un instante determinado: si $D > l$ el universo está en **expansión**, si $D = l$ es **estático** y si $D < l$, está en **contracción**. Esto está estrechamente relacionado con el signo de H .
- (ii) $D < \infty$ pero existe la posibilidad de $l = \infty$. Si $l = \infty$ la luz de objetos distantes procede de distancias arbitrariamente lejanas: es un **universo sin horizontes**. Si $l < \infty$ el universo contiene **horizontes**.

En un universo con horizontes se definen dos tipos de horizontes:

Definición 23 (Horizonte de partículas l_{HP} [2]). Un universo tiene un horizonte de partículas si la distancia de cono de luz entre el inicio del universo y la actualidad es finita. Nota: El inicio puede existir o no y se denotará $t_0 = 0, -\infty$ en cada caso. Un observador local no puede ver objetos más lejanos que l_{HP} porque la luz no lo ha alcanzado y no existen influencias causales entre ellos. l_{HP} también se denomina **frontera del universo visible**.

Definición 24 (Horizonte cósmico de eventos l_{HE} [2]). *Describe la distancia máxima que puede alcanzar la luz que se emite en un instante dado y viene dada por la distancia al cono de luz entre el instante actual t y el instante final del universo $t = t_{final}, \infty$. Si $l_{HE} = \infty$ las influencias causales actuales pueden llegar arbitrariamente lejos; pero si $l_{HE} < \infty$, no se puede influenciar más allá de este horizonte.*

2.5.3 Desplazamiento al rojo

Finalmente, se define un concepto muy útil para estudiar observacionalmente el universo, el desplazamiento al rojo de la longitud de onda de un rayo de luz o *redshift*.

Definición 25 (Redshift cosmológico z). *Efecto Doppler que sufre un rayo de luz y que aumenta su longitud de onda como consecuencia de la expansión del universo. Se expresa como:*

$$z = \frac{\lambda_d - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\nu_e - \nu_d}{\nu_d} \quad 1 + z = \frac{\lambda_d}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_d} \quad (2.52)$$

siendo λ_e la longitud de onda de emisión y λ_d , la de detección. Análogamente con la frecuencia ν .

Proposición 9. *El redshift cosmológico de un rayo de luz viene determinado por la relación:*

$$1 + z = \frac{\lambda_d}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_d} = \frac{a(t_d)}{a(t_e)}. \quad (2.53)$$

Demostración. Sean dos observadores comóviles en dos puntos distintos del espacio-tiempo x_e y x_d . El emisor, denotado con el subíndice “e”, emite una señal de luz de periodo T_e . El detector, denotado con el subíndice “d”, detecta la señal con periodo T_d . La luz sigue geodésicas nulas, es decir, $ds^2 = 0$, por lo que para cada observador:

$$dt_e^2 = a^2(t_e) \tilde{g}_{ij}(x_e) dx_e^i dx_e^j \quad dt_d^2 = a^2(t_d) \tilde{g}_{ij}(x_d) dx_d^i dx_d^j. \quad (2.54)$$

Como el universo es homogéneo e isótropo $\tilde{g}_{ij}(x_e) = \tilde{g}_{ij}(x_d)$ y $dx_e^i \equiv dx_d^i$, despejando este término se tiene:

$$\frac{dt_e}{a(t_e)} = \frac{dt_d}{a(t_d)} \quad (2.55)$$

e integrando entre periodos para cada observador:

$$\frac{T_e}{T_d} = \frac{a(t_e)}{a(t_d)} = \frac{\nu_d}{\nu_e} = \frac{\lambda_e}{\lambda_d}. \quad (2.56)$$

□

Una vez obtenida la dependencia temporal del factor de escala $a(t)$, se puede calcular la de z con la relación (2.53).

Esta es una importante propiedad que, haciendo uso de la ley de Hubble, permite conocer la distancia a la que está una galaxia muy lejana, resultando muy eficaz cuando otros métodos muy precisos que requieren distancias menores ya no son aplicables.

3 Parámetros cosmológicos. El universo en el que vivimos

A partir de ahora se considerará que el universo es plano ($k = 0$) salvo cuando se indique otra cosa, porque, como se verá en el apartado § 3.2, las observaciones actuales apoyan tajantemente este hecho. Se utilizará la notación de subíndice 0 que indica el valor de una magnitud en la actualidad. Por ejemplo: t_0 es la edad del universo hoy y $a_0 \equiv a(t_0)$ es el valor actual del factor de escala.

3.1 Tipos de materia, densidad crítica y parámetros de densidad

Según se ha concluido anteriormente, la geometría del universo depende de la densidad de energía ρ y la presión P del universo a través del tensor de energía-impulso $\mathcal{T}^{\mu\nu}$, que es el de un fluido perfecto. Utilizaremos las expresiones y propiedades obtenidas para encontrar la relación entre el factor de escala y la densidad de materia. Conociendo el valor de los parámetros cosmológicos se puede deducir el tipo de universo que habitamos.

Utilizando la ley de conservación de energía

$$\nabla_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.1)$$

junto con los símbolos de Christoffel de la métrica de FLRW de la ecuación (2.38) y el tensor energía impulso para un fluido perfecto (2.41), la única ecuación que da información no trivial es la de $\nu = 0$:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \quad (3.2)$$

Esta ecuación es la que indica la relación entre el factor de escala y la energía. Puede deducirse directamente a partir de las ecuaciones de Friedmann. Además, multiplicando por a^3 se obtiene:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -P \frac{d}{dt}a^3 \quad (3.3)$$

que se reconoce como la **primera ley de la Termodinámica**, entendiendo a^3 como el volumen del sistema:

$$dE = -PdV. \quad (3.4)$$

Para resolver la ecuación (3.2) se debe utilizar la **ecuación de estado del fluido**, que relaciona la densidad de energía y la presión,

$$P = w\rho \quad (3.5)$$

con w constante en todas direcciones debido a la isotropía y homogeneidad del espacio.

El universo se podría tratar como un fluido con w variable en el tiempo, pero como la evolución de aquel está dominado por distintos tipos de energía/materia para cada época, aproximaremos a w constante en cada una de ellas.

Sustituyendo la ecuación de estado (3.5) en la ecuación (3.2):

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + w)\rho = 0. \quad (3.6)$$

Aquí se distinguen dos casos:

1. $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\rho(t_0) = 0$. Introduciendo la ecuación de Friedmann (2.42) para $k = 0$ en (3.6) se tiene

$$\dot{\rho} + 3\sqrt{\frac{\kappa}{3}}(1+w)\rho^{3/2} = 0. \quad (3.7)$$

Como $\rho(t) = 0$ es una solución, por el Teorema de Cauchy-Picard, es la única solución y así $H = 0$ y $a(t) = a_0 = \text{cte}$. El universo es estático y no tiene inicio ni fin ($t \in \mathbb{R}$). Este caso no tiene mucho interés.

2. $\rho(t) > 0 \forall t$ en el dominio de definición de la solución. Aquí de nuevo se tienen dos casos:

- $w = -1$. Se tiene que $\dot{\rho} = 0$. Por tanto, el intervalo de definición es $t \in \mathbb{R}$ y

$$\rho(t) = \rho_0 = \text{cte}. \quad (3.8)$$

- $w \neq -1$. Se puede integrar (3.6) utilizando $(\ln x)' = \dot{x}/x$:

$$\rho_\alpha(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3(w_\alpha+1)}. \quad (3.9)$$

Así pues, se pueden definir distintos tipos de materia o energía:

Definición 26 (Tipos de materia o energía). (i) **Materia fría** ($w = 0$) ($\rho \sim a^{-3}$): *Materia no relativista que apenas ejerce presión. Su densidad se diluye como el inverso del volumen.*

(ii) **Materia relativista o radiación** ($w = 1/3$) ($\rho \sim a^{-4}$): *Materia muy caliente moviéndose a velocidades relativistas respecto del sistema comóvil y que añade grandes presiones al sistema. Su densidad se diluye con la expansión más rápido que el inverso del volumen porque pierde un factor a^{-1} extra por el corrimiento al rojo.*

(iii) **Constante cosmológica** ($w = -1$) ($\rho \sim \text{cte}$): *Densidad del vacío que añade una presión negativa. Atribuida a la energía oscura, proporciona una densidad de energía constante.*

Observación 8. Es importante advertir que en un universo sin constante cosmológica (formado sólo por radiación y materia fría) la constante k determina la evolución del universo. Se debe a que $\rho_r \propto a^{-4}$, $\rho_m \propto a^{-3}$ y llegará un momento en que k/a^2 en la ecuación de Friedmann domine el comportamiento del factor de escala. Pero si $\Lambda \neq 0$, dependerá de la composición del universo.

Una vez se tienen los distintos tipos de materia y su dependencia con el factor de escala (y, como veremos, del tiempo y la temperatura) se puede deducir qué tipo debe dominar en un universo en aceleración o deceleración. Introduciendo la ecuación de estado (3.5) en la ecuación de aceleración (2.44),

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(1+3w)\rho. \quad (3.10)$$

Se concluye que un universo en aceleración debe estar dominado por un tipo de energía con $w < -1/3$. Un universo dominado por la materia, ya sea fría o radiación, sufre una deceleración como causa de la gravedad y uno dominado por energía oscura, aceleración.

Se presenta ahora una densidad crítica que indica el tipo de universo según: espacialmente plano si $k = 0$, cerrado si $k = +1$ o abierto si $k = -1$. Tomando $k = 0$ en la ecuación de Friedmann (2.42) se tiene la densidad crítica:

Definición 27 (Densidad crítica ρ_c). *Es la densidad para la cual las secciones espaciales son planas ($k = 0$):*

$$\rho_c = \frac{3}{\kappa} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{3}{\kappa} H^2 \quad (3.11)$$

Notación 4. *Es útil definir, por su extendido uso: $\rho_{c,100} = 3/\kappa H_{100}^2$.*

Con la ecuación de Friedmann (2.42) se concluye que:

- $\rho = \rho_c$. Las secciones espaciales son planas $k = 0$. El universo es plano.
- $\rho > \rho_c$. Las secciones espaciales tienen curvatura positiva $k = +1$. El universo es cerrado.
- $\rho < \rho_c$. Las secciones espaciales tienen curvatura negativa $k = -1$. El universo es abierto.

De forma natural surgen las magnitudes que se miden e indican las características de nuestro universo.

Definición 28 (Parámetro de densidad total). *Indica la fracción de densidad de energía total del universo respecto de la crítica:*

$$\Omega_{tot} = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (3.12)$$

Definición 29 (Parámetros de densidad parciales). *Indican la fracción de densidad de energía del universo de un tipo específico respecto de la crítica:*

$$\Omega_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho_c}. \quad (3.13)$$

Por último, se puede obtener la dependencia del factor de escala con el tiempo de forma analítica si suponemos un universo cuya energía consiste únicamente en materia fría, materia relativista o una constante cosmológica (energía oscura). Ya que vimos que ρ tiene diferente dependencia con a para cada tipo de materia, es aceptable pensar que hay épocas en las que domina un tipo u otro. Se discuten los dos casos en que $\rho > 0$ anteriormente descritos.

- Si $w = -1$: Se introduce la expresión de la densidad de energía (3.8) en la ecuación de Friedmann (2.42) con $k = 0$ y se resuelve la ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes teniendo en cuenta que $H_0 = \kappa/3\rho_0$. También puede calcularse la de H y z si estos resultados se introducen en la definición de $H = \dot{a}/a$ y la relación (2.53), respectivamente.

$$a(t) = a_0 e^{H_0 t} \quad \rho(t) = \rho_0 \quad H(t) = H_0 \quad z + 1 = e^{-H_0 t}. \quad (3.14)$$

Se tiene un universo en expansión acelerada sin inicio ni fin ($t \in \mathbb{R}$).

- Si $w \neq -1$: Se introduce la ecuación (3.2) en la ecuación de Friedmann (2.42) para un universo plano $k = 0$ y se obtiene:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\kappa}{3} \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(w+1)}. \quad (3.15)$$

Tabla 1: Dependencia temporal de a , ρ , H y z en universos dominados por distintos tipos de materia/energía.

Materia fría	$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\rho(t) = \rho_0 t^{-2}$	$H(t) = \frac{2}{3} t^{-1}$	$z + 1 = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{2}{3}}$
Materia relativista	$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\rho(t) = \rho_0 t^{-2}$	$H(t) = \frac{1}{2} t^{-1}$	$z + 1 = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{2}}$
Const. cosmológica	$a(t) = a_0 e^{H(t_0)t}$	$\rho(t) = \rho_0$	$H(t) = H(t_0)$	$z + 1 = e^{-H(t_0)t}$

Tabla 2: Constante de Hubble, parámetros de densidad y edad del universo medidos por la Colaboración Planck [17]. Ω_r se deduce de la temperatura del CMB, $T_0 = 2.72548 \pm 0.00057$ K [18]. Se calcula en (4.65) con las densidades de energía actuales de fotones (4.63) y neutrinos (4.64) usando la termodinámica que se verá en la siguiente sección.

Constante de Hubble	$H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Materia	$\Omega_m = 0.3111 \pm 0.0056$
Radiación	$\Omega_r = 9.13871 \cdot 10^{-5}$
Energía oscura	$\Omega_\Lambda = 0.6889 \pm 0.0056$
Energía total	$\Omega_{tot} = 1.0007 \pm 0.0019$
Edad del universo	$t_0 = 13.787 \pm 0.020 \text{ Ga}$

Si se resuelve la ecuación diferencial con $a > 0$ se obtiene su dependencia temporal. Esto se debe hacer en el marco de los *Problemas de Valores de Límite* o *Boundary Value Problem* (BVP) con condición límite $a(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, pues así se define el inicio del universo dado que $a > 0$, $\dot{a} > 0$. Se calculan H y z como antes, y ρ introduciendo la solución en (3.9):

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(w+1)}} \quad \rho(t) = \rho_0 t^{-2} \quad H(t) = \frac{2}{3(w+1)} t^{-1} \quad z + 1 = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{2}{3(w+1)}}. \quad (3.16)$$

Para el caso de materia fría y radiación ($w \in \{0, 1/3\}$) se tienen universos en expansión decelerada, que tienen inicio pero no fin ($t \in \mathbb{R}^+$).

En la tabla 1 se resume cuál es la dependencia con el tiempo del factor de escala, la densidad de energía, el parámetro de Hubble y el desplazamiento al rojo que hemos deducido.

3.2 Valor de los parámetros cosmológicos. Nuestro universo

En el artículo más reciente de la Colaboración Planck [17] se miden experimentalmente los parámetros definidos en la sección anterior, entre otros muchos. Se obtienen utilizando diferentes métodos muy precisos basados en modelos como los de supernovas tipo Ia o anisotropías en la CMBR. Sus valores se muestran en la tabla 2.

Por otro lado, parametrizando las fluctuaciones de temperatura del CMB en términos de armónicos esféricos, según un modelo que escapa a la finalidad de este trabajo, se deduce que *el universo es espacialmente plano* ($k = 0$). Esto se obtiene midiendo el

primer máximo en los coeficientes del desarrollo en armónicos esféricos de la fluctuación del CMB y mirando si es mayor o menor que lo esperado teóricamente en un universo plano.

Se observa que $H_0 > 0$, por lo que el universo está en *expansión*. De hecho, está en *expansión acelerada* porque el parámetro de densidad de energía dominante es el de la energía oscura que, con su presión negativa ($w = -1 < -\frac{1}{3}$) supera la contribución atractiva de la gravedad al introducirlo en la ecuación (3.10).

También se tiene que el parámetro de densidad de energía de radiación (Ω_r) es despreciable frente a la materia. En realidad, que la materia domina sobre la radiación es bien conocido y puede explicarse satisfactoriamente porque esta última se diluye como a^{-4} , mientras que la materia lo hace como a^{-3} . Es importante destacar que en Ω_m entran tanto la materia ordinaria como la materia oscura, estimándose respectivamente $\Omega_{mord} \approx 0.048$ y $\Omega_{mo} \approx 0.264$.

Así, hubo una época en la que la radiación dominaba. Cuando se diluyó suficientemente, comenzó a dominar la materia, formándose las agrupaciones actuales a partir de las pequeñas fluctuaciones del plasma primigenio de cuando la radiación se desacopló de la materia (*recombinación*). Ya que Ω_Λ es constante, llegará un momento en que la energía oscura dominará sobre la materia. Ahora nos encontramos en el momento en que la densidad de energía oscura es algo mayor que la de materia, que aún no es despreciable (véase la tabla 2).

¿Es el universo plano un problema de ajuste fino?

El hecho de que $\Omega_{tot} = 1$, que es consistente con que $k = 0$ usando la ecuación de Friedmann (2.42), supone un ajuste muy fino de los parámetros que requiere una explicación. Una forma muy elegante de justificarlo es teorizar un periodo de expansión acelerada muy rápida llamada *inflación*, que describiremos brevemente en la sección § 4.5.

3.3 Cálculo de la edad del universo

Conocido que nuestro universo es plano ($k = 0$) y multiplicando y dividiendo por la densidad crítica 27 en el término derecho de la ecuación de Friedmann (2.42), esta se puede expresar en términos de los parámetros de densidad como:

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \Omega_{m,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} \right] \quad (3.17)$$

habiendo sustituido $\Omega_{i,0} = \rho_{i,0}/\rho_{c,0}$ y la dependencia funcional de ρ con a según (3.9).

Para el cálculo aproximado de la edad del universo se tomará como valor actual del factor de escala $a_0 = 1$, lo que se entiende como una normalización. Matemáticamente esta es la condición inicial. Ya que $\Omega_{r,0} \ll \Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}$, se despreciará este término. Se podría pensar que no es adecuada esta aproximación pues la radiación domina cuando el universo era muy joven pero, como se calculará en la siguiente sección, la igualdad de densidades de energía de materia fría y radiación ocurre a una escala de tiempo tras el comienzo del universo de tan solo unos 70 000 años (expresión 4.44). Respecto de la edad total, del orden de miles de millones de años, este intervalo es despreciable. Se tiene entonces que:

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}] \quad (3.18)$$

o sustituyendo $H = \dot{a}/a$,

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 \right]. \quad (3.19)$$

A continuación, se resuelve la ecuación diferencial (3.19). Recordando que $a, \dot{a} > 0$ el dominio de la ecuación es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. A la hora de elegir los valores iniciales existe un problema matemático debido a las limitaciones de la física conocida. Actualmente no podemos saber qué ocurrió en $t = 0$, $a(t = 0) = 0$ pues en realidad hay una singularidad en la métrica de FLRW y $a = 0$ se escapa del dominio de definición. Sabemos que en un universo compuesto únicamente por radiación, que es la densidad de energía dominante al inicio, sigue una relación $a(t) \sim t^{2/3}$ según la tabla 1. Por ello, definiremos la resolución de la ecuación diferencial anterior dentro del marco de los *Problemas de Valores de Límite* o *Boundary Value Problem* (BVP), con condición límite $a(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

Con un cambio de variable $x^2 = a^3$:

$$a = x^{2/3} \quad \dot{a} = \frac{2}{3} \frac{\dot{x}}{x^{1/3}} \quad (3.20)$$

$$\dot{x}^2 = \left(\frac{3}{2} H_0 \right)^2 \Omega_{m,0} \left(1 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} x^2 \right). \quad (3.21)$$

Con otro cambio de variable más:

$$y = \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}} x \quad \dot{y} = \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}} \dot{x} \quad (3.22)$$

$$\dot{y}^2 = \left(\frac{3}{2} H_0 \right)^2 \Omega_{\Lambda,0} (1 + y^2). \quad (3.23)$$

Mirando atrás, se comprueba que $y, \dot{y} > 0$, por lo que no hay problema con el dominio de definición, y se puede resolver esta ecuación diferencial por variables separadas, teniendo en cuenta que:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \operatorname{arcsinh} y \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} \quad (3.24)$$

$$\int_{\tilde{t}}^t \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+y^2}} dt = \int_{y(\tilde{t})}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int_{\tilde{t}}^t \frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} \quad (3.25)$$

$$\operatorname{arcsinh} y(t) - \operatorname{arcsinh} y(\tilde{t}) = \frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} (t - \tilde{t}). \quad (3.26)$$

Tomando la condición límite $a(\tilde{t}) \xrightarrow{\tilde{t} \rightarrow 0} 0$:

$$\operatorname{arcsinh} y(t) = \frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} t. \quad (3.27)$$

Deshaciendo los cambios, se obtiene la solución:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \left[\sinh \left(\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} t \right) \right]^{2/3}. \quad (3.28)$$

Se puede comprobar que para $H_0 t \ll 1$ (en el universo temprano) se recupera la dependencia $a \sim t^{2/3}$ de la dominación de la materia, porque se aproximó $\Omega_{r,0} \approx 0$, y para $H_0 t \gg 1$, se recupera la exponencial.

Finalmente, sustituyendo $a(t_0) = 1$, y los parámetros de densidad de la tabla 2 se obtiene una aproximación fiable de la edad del universo:

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_{\Lambda,0}^{-1/2} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}} \right) = 13.785 \text{ Ga}, \quad (3.29)$$

que solo se diferencia del valor experimental de la tabla 2 en un 0.015 %.

4 Cosmología. Evolución del universo hasta la recombinación

Esta sección es una recopilación de los hitos más relevantes de la historia térmica del universo desde el origen hasta la recombinación, es decir, en la era dominada por la radiación. Está consultada de diferentes fuentes y las principales fueron [3, 12, 19].

4.1 Tiempo de expansión y tiempo medio de interacción

Así como el lenguaje del espacio-tiempo es el de la Relatividad General, el de la evolución de la termodinámica y la composición del universo es el de la Física Estadística. A continuación se presenta una sección con los conceptos y parámetros que describen las distintas fases cosmológicas.

Definición 30 (Tasa de interacción Γ). *Dado un sistema físico con dos especies distintas de partículas, la **tasa de interacción** (Γ) es una magnitud física que indica el número de interacciones que sufre una partícula con las del otro tipo por unidad de tiempo. Tiene unidades de inverso de tiempo y se define como:*

$$\Gamma = n\sigma v \quad (4.1)$$

siendo n la densidad de número de partículas del segundo tipo, σ la sección eficaz de la interacción y v la velocidad media relativa entre las dos especies.

Definición 31 (Tiempo medio de interacción t_c). *Dada una interacción entre partículas, el **tiempo medio de interacción** viene dado por $t_c = \Gamma^{-1}$ e indica la escala de tiempo en que ocurre la interacción en media.*

Definición 32 (Tiempo de expansión característico t_H). *Dado un instante de tiempo, el **tiempo de expansión característico** es el tiempo que habrían tardado dos objetos en separarse hasta su distancia actual D si el parámetro de Hubble (H) (definición 20) fuese constante, los cuales, por efecto de la ley de Hubble (proposición 8), se mueven a una velocidad relativa de $v = H_0 D$. Así, hace referencia a un tiempo de expansión instantáneo.*

$$t_H = H^{-1}. \quad (4.2)$$

Se introducen dos propiedades físicas de un sistema formado por partículas en equilibrio que intuitivamente parece razonable de aceptar:

Propiedad 2. *Dado un sistema de partículas en equilibrio térmico local, con interacciones dadas por Γ_i para cada especie de partículas:*

- (i) Si $t_c \ll t_H$, el equilibrio térmico local se alcanza antes que el efecto de expansión sea relevante.

- (ii) Γ se hace menor que H cuando el universo se enfría y se expande.
- (iii) Ya que inicialmente $t_c < t_H$ ($\Gamma > H$), llegará un momento en que $t_c \sim t_H$ ($\Gamma \sim H$) y lo supere. Es entonces cuando las partículas de la especie en cuestión se desacoplan del baño térmico, lo que se conoce como freeze-out.

4.2 La física estadística de la cosmología

En esta subsección se recopilan las herramientas de Física Estadística que se necesitarán. Se pretende describir un sistema de partículas en un baño térmico, del cual se pueden desacoplar en determinadas circunstancias antes descritas. Por tanto, pueden intercambiar calor y el número de partículas es variable. Así, el paradigma apropiado en este caso es el de la *colectividad macrocanónica*. Se utilizarán los modelos de gas cuántico fermiónico y bosónico.

Definición 33 (Función de partición macrocanónica de un gas cuántico).

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_{\vec{k}} \left(1 - \theta e^{(\mu - E(\vec{k}))/T} \right)^{-\theta} \quad (4.3)$$

siendo $\theta = \pm 1$ según si es bosónico o fermiónico, μ el potencial químico, $E(\vec{k})$ la energía en el espacio de fases discretizado y T la temperatura. Se toma el sistema unidades naturales, en el que la constante de Boltzmann $k_B = 1$.

Haciendo uso del potencial macrocanónico $J = PV = -\theta T \sum_{\vec{k}} \ln \left(1 - \theta e^{(\mu - E(\vec{k}))/T} \right)$ se obtiene el número de ocupación medio en un estado \vec{k} de energía $E(\vec{k})$ para el sistema en equilibrio térmico:

Definición 34 (Número de ocupación medio de un estado). Es el número medio de partículas en un estado \vec{k} del espacio de fases por unidad de volumen para un gas cuántico a una temperatura dada T :

$$\langle n(\vec{k}, T) \rangle = \frac{1}{e^{(E(\vec{k}) - \mu)/T} \pm 1} \quad (4.4)$$

con ± 1 según sea un gas fermiónico o bosónico.

De esta manera la densidad de número de partículas por volumen total es:

$$n = \sum_{\vec{k}} \langle n(\vec{k}, T) \rangle = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{(E(\vec{k}) - \mu)/T} \pm 1}. \quad (4.5)$$

Para facilitar los cálculos se puede hacer un paso al continuo. Es fácil demostrar que, tras el paso al continuo, para partículas de un sistema cuántico en una caja infinita su densidad de número queda:

Definición 35 (Densidad de número de partículas total por unidad de volumen).

$$n(T) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{(E(\vec{p}) - \mu)/T} \pm 1} d^3 p \quad (4.6)$$

donde g es un **factor de degeneración** que da cuenta de la posible existencia de varios estados cuánticos con igual energía que no se hayan contado solo con el espacio de fases, i.e., espín, sabor, color, antipartícula, etc.

Para ahorrar notación se define:

Definición 36 (Estadística de Fermi-Dirac y estadística de Bose-Einstein). *Densidad de partículas en el espacio de momentos por unidad de volumen. Dividido entre $(2\pi)^3 n(T)/g$, es una densidad de probabilidad de encontrar una partícula con momento \vec{p} en una unidad de volumen. Se define:*

$$f(\vec{p}, T) = \frac{1}{e^{(E(\vec{p}) - \mu)/T} \pm 1} \quad (4.7)$$

con $E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + p^2}$ la energía asociada a cada estado y se considera ± 1 según si es para fermiones (Fermi-Dirac) o bosones (Bose-Einstein). Cada partícula tendrá una distribución distinta por tener distinta masa m_i , potencial químico μ_i y temperatura T_i .

Se puede definir así para cada especie de partícula:

Definición 37 (Densidad de energía por unidad de volumen).

$$\rho(T) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p}) f(\vec{p}) d^3 p. \quad (4.8)$$

Definición 38 (Presión del sistema).

$$P(T) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{\vec{p}^2}{3E(\vec{p})} f(\vec{p}) d^3 p. \quad (4.9)$$

Definición 39 (Densidad de entropía del sistema por unidad de volumen $s = S/V$).

$$s(T) = \frac{\rho + P - \mu n}{T}. \quad (4.10)$$

Se obtiene de la ecuación fundamental de la termodinámica, $TdS = dU + PdV - \mu dN$. Por brevedad, no se incluye la demostración [3].

Ahora el objetivo es calcular expresiones analíticas más manejables de las magnitudes antes definidas. Obteniendo los límites relativista y no relativista de las mismas podremos, más adelante, aplicarlos a nuestro modelo cosmológico de forma simple.

Proposición 10. *En el universo primigenio el potencial químico era despreciable para todas las partículas, aunque no nula en general, ya que $\mu_i/T \ll 1$ [3].*

Esto es muy ventajoso para el cálculo. Para aproximaciones ultrarrelativistas ($T \gg m$) o no relativistas ($T \ll m$) y partículas fermiónicas (f) o bosónicas (b):

■ **Límite ultrarrelativista:**

$$n_b(T) = g_b \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad \rho_b(T) = g_b \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad P_b = \frac{\rho_b}{3} \quad s_b = \frac{4}{3T} \rho_b \quad (4.11)$$

$$n_f(T) = g_f \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad \rho_f(T) = g_f \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad P_f = \frac{\rho_f}{3} \quad s_f = \frac{4}{3T} \rho_f. \quad (4.12)$$

■ **Límite no relativista:** Igual para fermiones y bosones,

$$n(T) = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T} \quad \rho = mn \quad P = nT \quad s = \frac{\rho}{T}. \quad (4.13)$$

Se concluye que a bajas temperaturas las partículas masivas son exponencialmente raras pues su probabilidad decae como $e^{-m/T}$. Además, la contribución a n , ρ y P de las partículas no relativistas es despreciable respecto a las relativistas debido al factor exponencial anterior. Por ello solo tendremos en cuenta las partículas relativistas en cálculos futuros.

Ya que es engorroso tener en cuenta dos expresiones distintas, para especies bariónicas y fermiónicas, se puede definir una función *número de grados de libertad efectivos* que tenga en cuenta ambos tipos de partículas.

Definición 40 (Número de grados de libertad efectivos asociados a la densidad de energía). *Función que, aplicada a la densidad de energía devuelve la densidad de energía total del sistema. Se define:*

$$g_{*\epsilon}(T) = g_{*\epsilon}^{th}(T) + g_{*\epsilon}^{dec}(T) \quad (4.14)$$

$$g_{*\epsilon}^{th}(T) = \sum_{bosón} g_i + \frac{7}{8} \sum_{fermión} g_i \quad (4.15)$$

$$g_{*\epsilon}^{dec}(T) = \sum_{bosón} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{fermión} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4. \quad (4.16)$$

- g_*^{th} es la suma de los grados de libertad efectivos de las partículas relativistas en equilibrio térmico con el plasma primigenio o, digamos, con los fotones.
- g_*^{dec} aplica a las partículas relativistas que se han desacoplado del plasma. Tendrán una temperatura T_i y al multiplicar por T^4 se obtiene su contribución a ρ .

La densidad de energía total queda:

$$\rho = \sum_i \rho_i = g_{*\epsilon}(T) \frac{\pi^2}{30} T^4. \quad (4.17)$$

Observación 9. Este número de grados de libertad efectivo también se puede aplicar a la presión de igual forma porque también depende de la temperatura como T^4 .

Igualmente se puede definir para la entropía y la densidad de número de partículas:

Definición 41 (Número de grados de libertad efectivos asociados a la entropía).

$$g_{*s}(T) = g_{*s}^{th}(T) + g_{*s}^{dec}(T) \quad (4.18)$$

$$g_{*s}^{th}(T) = \sum_{bosón} g_i + \frac{7}{8} \sum_{fermión} g_i \quad (4.19)$$

$$g_{*s}^{dec}(T) = \sum_{bosón} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{fermión} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3. \quad (4.20)$$

La densidad de entropía total queda:

$$s = \sum_i s_i = \frac{4}{3T} \rho = g_{*s}(T) \frac{2\pi^2}{45} T^3. \quad (4.21)$$

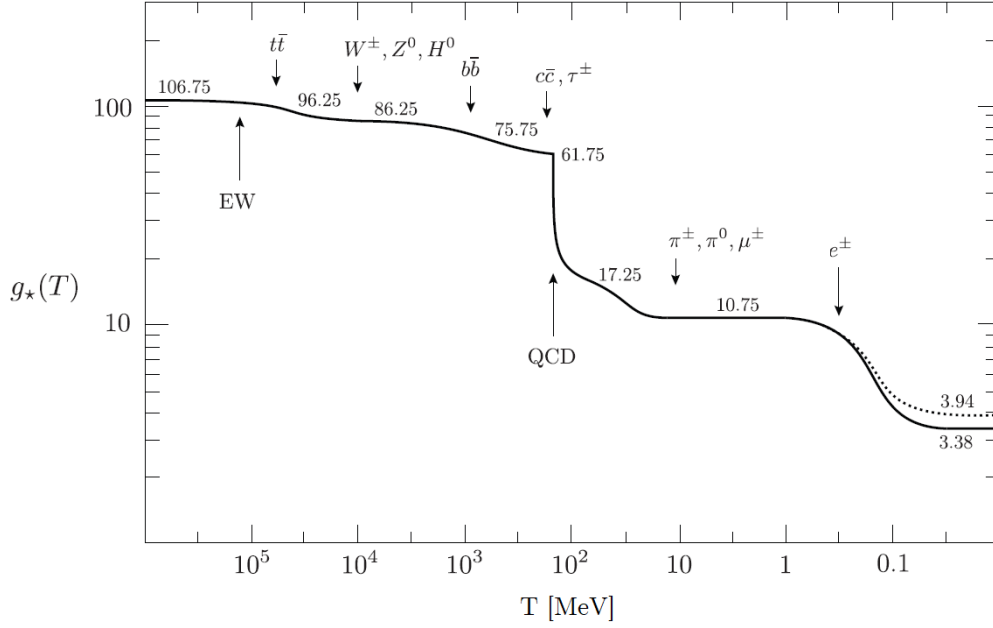


Figura 1: Evolución de los grados de libertad asociados a la energía (línea continua) y a la entropía (línea discontinua) respecto de la temperatura desde la época electrodébil (EW) hasta la aniquilación e^+e^- , pasando por la transición de QCD [3].

Definición 42 (Número de grados de libertad efectivos asociados a la densidad de número de partículas).

$$g_{*n}(T) = g_{*n}^{th}(T) + g_{*n}^{dec}(T) \quad (4.22)$$

$$g_{*n}^{th}(T) = \sum_{bosón} g_i + \frac{3}{4} \sum_{fermión} g_i \quad (4.23)$$

$$g_{*n}^{dec}(T) = \sum_{bosón} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{3}{4} \sum_{fermión} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 \quad (4.24)$$

La densidad de número de partículas total queda:

$$n = \sum_i n_i = g_{*n} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (4.25)$$

Propiedad 3. (i) g_* evoluciona con la temperatura porque conforme se va expandiendo el universo y enfriándose el plasma primigenio las partículas se van aniquilando o desacoplando del mismo.

(ii) Se podría pensar que g_* evoluciona de forma brusca en el instante en que cada especie de partícula se hace no relativista, se aniquila o se desacopla, pero estos procesos no ocurren instantáneamente. Se deben tener en cuenta también otros efectos: hubo periodos sin equilibrio térmico, con efectos de viscosidad apreciables.

En la figura 1 se muestra la evolución de grados de libertad desde las primeras aniquilaciones de partículas hasta la aniquilación de electrones y positrones.

4.3 Evolución de la entropía, el factor de escala y la constante de Hubble

El punto de partida es la **ecuación fundamental de la Termodinámica**:

$$TdS = dU + PdV - \mu dN. \quad (4.26)$$

Identificaremos $V = a^3$, $U = \rho V$ y $N = nV$, y supondremos que $\mu = 0$, lo que, como se argumentaba antes, ocurre en el universo primigenio. Según la segunda ley de la termodinámica, la entropía del universo solo puede aumentar o permanecer constante, pero es posible mostrar, usando (4.26) y las ecuaciones de Friedmann (3.2), que la entropía se conserva en el equilibrio.

Proposición 11. *La entropía total en un volumen comóvil $S \equiv sa^3$ se conserva [3]:*

$$s = \frac{\rho + P}{T}, \quad \frac{d(sa^3)}{dt} = 0. \quad (4.27)$$

Así que, en equilibrio, la densidad de entropía evoluciona como:

$$s \propto a^{-3}. \quad (4.28)$$

Como hay muchos más fotones que bariones, la entropía del universo está dominada por la de los fotones. Así que la expansión del universo es adiabática (isoentrópica) y la entropía total de un volumen comóvil es constante incluso más allá del equilibrio.

Observación 10. *Se puede demostrar [3] que si μ es no nulo:*

$$s = \frac{\rho + P - \mu n}{T}, \quad \frac{d(sa^3)}{dt} = -\frac{\mu}{T} \frac{d(na^3)}{dt} \quad (4.29)$$

lo que es consistente con el resultado anterior cuando $\mu \ll T$.

De lo anterior se obtienen algunas propiedades interesantes:

Propiedad 4. (i) *En un volumen comóvil se cumple*

$$N_i \propto \frac{n_i}{s} \quad (4.30)$$

porque $n_i \equiv N_i/a^3 \propto N_i s$. Durante periodos en lo que no se crean ni destruyen partículas (entre periodos de aniquilación), $N_i = \text{cte}$ y por tanto

$$n_i \propto a^{-3}. \quad (4.31)$$

(ii) *Como $sa^3 = \text{cte}$, de la ecuación (4.21) se deduce que*

$$T \propto g_{*s}^{-1/3}(T)a^{-1}. \quad (4.32)$$

*En periodos donde $g_{*s} = \text{cte}$, cuando no se aniquilan o desacoplan partículas:*

$$T \propto a^{-1}. \quad (4.33)$$

La evolución de la constante de Hubble (H) con la temperatura del plasma se obtiene introduciendo el resultado (4.17) en la ecuación de Friedmann (2.42) para un universo plano ($k = 0$). Se obtiene así:

Proposición 12.

$$H = \frac{\pi}{3} \left(\frac{g_{*c}}{10} \right)^{1/2} \frac{T^2}{M_{Pl}} \quad (4.34)$$

con $M_{Pl} = \kappa^{-1/2}$ la masa de Planck en unidades naturales.

Además, sustituyendo el valor de $H(t) = \frac{1}{2}t^{-1}$ según la tabla 1 para un universo dominado por la radiación se obtiene:

Proposición 13.

$$\frac{T}{1 \text{ MeV}} = 1.549 g_{*c}^{-1/4} \left(\frac{1 \text{ s}}{t} \right)^{1/2}. \quad (4.35)$$

Así hemos obtenido la relación entre la temperatura del universo y el tiempo en la época dominada por la radiación. Esta relación deja de ser cierta cuando las densidades de materia fría y radiación se igualan. De la tabla 1 obtenemos que

$$\rho_r = \rho_{0,r} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-4} \quad (4.36)$$

$$\rho_m = \rho_{0,m} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3} \quad (4.37)$$

donde se pueden tomar las variables con subíndice cero como las actuales y $a_0 = 1$. Además, sustituyendo de la definición 25:

$$\rho_r = \rho_{0,r}(z+1)^4 \quad (4.38)$$

$$\rho_m = \rho_{0,m}(z+1)^3 \quad (4.39)$$

y dividiendo entre la densidad crítica tenemos

$$\Omega_r = \Omega_{0,r}(z+1)^4 \quad (4.40)$$

$$\Omega_m = \Omega_{0,m}(z+1)^3. \quad (4.41)$$

Dividiendo ambas expresiones y considerando que la igualdad materia fría-radiación se produce cuando $\Omega_r/\Omega_m = 1$:

$$z = \frac{\Omega_{0,m}}{\Omega_{0,r}} - 1 \quad (4.42)$$

Sustituyendo los valores de la tabla 2:

$$z = 3\,404.2 \quad (4.43)$$

Con la expresión de la tabla 1 que indica la relación entre el tiempo cosmológico y el redshift para un universo dominado por la radiación y utilizando la edad del universo de la tabla 2, se calcula cuándo ocurre la igualdad radiación-materia:

$$t \approx (z+1)^{-3/2} t_0 = 69\,912 \text{ a.} \quad (4.44)$$

Teniendo en cuenta que las últimas medidas sitúan el redshift en $3\,387 \pm 21$ [9], se tiene un error relativo de 0.5%.

Tabla 3: Eventos cosmológicos más importantes hasta la recombinación.

Evento	Tiempo	Temperatura
Inflación	10^{-34} s (?)	—
Bariogénesis	?	?
Transición electrodébil	20 ps	100 GeV
Transición de QCD	20 μ s	150 MeV
Desacoplamiento de neutrinos	1 s	1 MeV
Aniquilación de positrones	6 s	500 keV
Nucleosíntesis	3 min	100 keV
Igualdad materia-radiación	70 ka	0.75 eV
Recombinación	260 – 380 ka	0.26 – 0.33 eV

4.4 Hitos más relevantes de la evolución del universo temprano

Los eventos más relevantes de la cosmología [3] antes de la recombinación se muestran en la tabla 3 y se describen brevemente a continuación, con mayor detenimiento en la nucleosíntesis.

4.5 Inflación

En los años 70 se pusieron de relieve ciertos problemas de ajuste fino en el modelo estándar cosmológico, como el *problema de la planitud* o el *problema del horizonte*. Para resolverlos, se teorizó un periodo de expansión acelerada extremadamente rápida que podría terminar alrededor de $t \sim 10^{-34}$ s [2]. Se hipotetiza la existencia de un campo escalar, el campo del *inflatón*, que causa este fenómeno. Al minimizar la acción de Hilbert-Einstein acoplada al campo del inflatón se obtiene una expansión exponencial que resuelve de forma satisfactoria, entre otros, ambos problemas:

- **El problema del horizonte:** Puntos distantes del universo y aparentemente sin influencia causal en el espacio tienen CMB a igual temperatura (homogéneo e isótropo). Antes de la expansión de la inflación estos puntos sí podrían haber estado en contacto causal, lo que resuelve el problema.
- **El problema de la planitud:** Para que, sin inflación, hoy el universo fuese tan plano como se observa, en un tiempo de Planck $t = t_{Pl} \approx 5.4 \cdot 10^{-34}$ s debía ocurrir $|\Omega_{tot} - 1| < 10^{-60}$. Esto se deduce dividiendo la *ecuación de Friedmann* (2.42) por ρ_c , lo que conduce a:

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (4.45)$$

El enorme crecimiento del factor de escala en este periodo explica entonces que $\Omega_{tot} \rightarrow 1$ ($\rho_{tot} \rightarrow \rho_c$), lo que justifica que el universo, dentro del horizonte observable, sea plano.

4.6 Bariogénesis

El universo que observamos está compuesto completamente por materia (la mayor parte de la masa es bariónica). La antimateria solo se produce en colisiones de alta energía y

se aniquila poco después con la materia circundante. Puesto que suponemos un estado inicial con la misma cantidad de materia y antimateria, deben existir procesos físicos que rompan la simetría materia-antimateria. La *bariogénesis* es un hipotético conjunto de procesos físicos que produjeron esta asimetría en los primeros instantes del universo, que requieren violación de la simetría CP y del número bariónico, además de ausencia de equilibrio termodinámico (condiciones de Sakharov) [3].

4.7 La época electrodébil

A temperaturas $T \gg 100$ GeV los bosones de gauge, mediadores de las interacciones, no tienen masa. Cuando la temperatura era tan alta, el potencial de Higgs efectivo tiene un único mínimo. Sin embargo por debajo de este umbral de temperatura se produce un cambio de fase, que se manifiesta en que el potencial adquiere forma de sombrero mexicano, apareciendo un mínimo degenerado. La elección de uno cualquiera de esos mínimos rompe espontáneamente la simetría electrodébil $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$, con lo que los bosones débiles (W^\pm y Z) adquieren masa, mientras que el fotón preserva su masa nula.

En esta época en la que los bosones de gauge no tienen masa y las secciones eficaces de las interacciones fuertes y electrodébiles tienen una dependencia similar, se puede demostrar que las secciones eficaces son del orden de

$$\sigma \sim \frac{\alpha^2}{T^2} \quad (4.46)$$

con α una constante de acoplamiento generalizada asociada al bosón gauge responsable de la interacción, del orden de la constante de estructura fina $\alpha \approx 1/137$. Teniendo en cuenta que $n \sim T^3$ por (4.25) y que todas las partículas son relativistas ($v \approx 1$), de la definición 30 se obtiene

$$\Gamma \sim \alpha^2 T. \quad (4.47)$$

Considerando la relación (4.34) y que en esta época $g_{*e} = 106.75$ (tabla 4), se deduce que

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{10^{16} \text{ GeV}}{T}. \quad (4.48)$$

Para $T \in [100 \text{ GeV}, 10^{16} \text{ GeV}]$ se da la condición de equilibrio térmico de la propiedad 2. Esta es la llamada *época electrodébil*. Para $T \gtrsim 10^{16} \text{ GeV}$ no hay equilibrio térmico, lo que permite la bariogénesis, fenómeno que necesita una situación de no equilibrio.

4.8 La transición electrodébil y la transición de QCD

Tras la *transición electrodébil*, los bosones débiles W^\pm y Z adquieren masas $M_W \approx 80.4 \text{ GeV}$, $M_Z \approx 91.2 \text{ GeV}$. Los procesos débiles que median tienen una sección eficaz del orden de

$$\sigma \sim G_F^2 T^2 \quad (4.49)$$

con $G_F \approx \alpha/M_W^2$ la constante de Fermi (parámetro que determina la intensidad de la interacción débil en la teoría de Fermi de la desintegración beta). Con (4.25) y la definición 30 se tiene:

$$\Gamma = 1.6 \cdot 10^{-11} \text{ GeV}^{-4} g_{*n} T^5. \quad (4.50)$$

Tabla 4: Grados de libertad efectivos del plasma primordial entre aniquilaciones o desacoplamientos de partículas [12].

Evento	Temperatura	g_{*n}	$g_{*\epsilon}$	g_{*p}	g_{*s}
Antes de aniq. $t\bar{t}$	$> 173.3 \text{ GeV}$	95.5	106.75	106.75	106.75
Aniquilación $t\bar{t}$	$< 173.3 \text{ GeV}$	86.5	96.25	96.25	96.25
Aniquilación Higgs	$< 125.6 \text{ GeV}$	85.5	95.25	95.25	95.25
Aniquilación Z^0	$< 91.2 \text{ GeV}$	82.5	92.25	92.25	92.25
Aniquilación W^+W^-	$< 80.4 \text{ GeV}$	76.5	86.25	86.25	86.25
Aniquilación $b\bar{b}$	$< 4.190 \text{ GeV}$	67.5	75.75	75.75	75.75
Aniquilación $\tau^+\tau^-$	$< 1.777 \text{ GeV}$	64.5	72.25	72.25	72.25
Aniquilación $c\bar{c}$	$< 1.290 \text{ GeV}$	55.5	61.75	61.75	61.75
Transición QCD	$150 - 214 \text{ MeV}$	15.5	17.25	17.25	17.25
Aniquilación $\pi^+\pi^-$	$< 139.6 \text{ MeV}$	13.5	15.25	15.25	15.25
Aniquilación π^0	$< 135.0 \text{ MeV}$	13.5	14.25	14.25	14.25
Aniquilación $\mu^+\mu^-$	$< 105.7 \text{ MeV}$	9.5	10.75	10.75	10.75
Desacoplamiento ν	$< 800 \text{ keV}$	6.636	6.863	6.863	7.409
Aniquilación e^+e^-	$< 511 \text{ keV}$	3.636	3.363	3.363	3.909

Combinando lo anterior con el resultado (4.34), para un universo dominado por la radiación, tras la transición electrodébil y hasta que la materia comenzó a dominar, se obtiene

$$\frac{\Gamma}{H} = 0.5 g_{*n} g_{*\epsilon}^{-1/2} \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^3. \quad (4.51)$$

Un poco antes de la transición electrodébil la temperatura del plasma primordial es suficientemente baja y comienzan a aniquilarse partículas cuando $T \approx m$, por lo que se aniquilan primero las más pesadas.

Observación 11. *En realidad el proceso de aniquilación y de paso de relativista a no relativista no es instantáneo. Por ejemplo, para la especie más pesada, el quark t , aunque su masa es $m_t = 173.3 \text{ GeV}$, la temperatura debe bajar hasta $T \approx 60 \text{ MeV}$ para que se haya aniquilado el 80 % de esta especie. Por ello se puede considerar que la aniquilación de partículas ocurre tras la transición electrodébil.*

En la tabla 4 se observa la temperatura por debajo de la cual cada especie comienza a aniquilarse con su antipartícula o bien se desacopla al hacerse no relativista (excepto los neutrinos), que viene dada por su masa. También se muestra cómo cambian los grados de libertad tras cada aniquilación o desacoplamiento según las definiciones 40, 41, 42 y la observación 9. El número de grados de libertad efectivos se puede calcular a partir de la tabla 5.

De esta forma, se comienza con $g_{*n} = 95.5$ y $g_{*\epsilon} = 106.75$ y al aniquilarse los quarks $t\bar{t}$ (cada quark tiene 12 grados de libertad) se reducen a $g_{*n} = 95.5 - \frac{3}{4} \cdot 12 = 86.5$ y $g_{*\epsilon} = g_{*p} = g_{*s} = 106.75 - \frac{7}{8} \cdot 12 = 96.25$.

Tras la aniquilación $c\bar{c}$ y antes de la $s\bar{s}$ se produce la *transición de fase QCD (cromodinámica cuántica)*. A partir de $T = 150 - 214 \text{ MeV}$ la interacción fuerte, mediada por gluones, es la dominante entre los quarks. La interacción fuerte hace que quarks

Tabla 5: Grados de libertad de cada familia de partículas elementales [3].

Familia	Sabor	Antip.	Color	Espín	Total
Quarks	6	2	3	2	72
e, μ, τ	3	2	1	2	12
Neutrinos	3	2	1	1	6
Gluones	1	1	8	2	16
Fotones	1	1	1	2	2
W^\pm, Z^0	2	2,1	1	3	9
Higgs	1	1	1	1	1
Total	17	—	—	—	118

y antiquarks se combinen para formar *hadrones*: *bariones* (tres quarks) y *mesones* (quark-antiquark). Los últimos hadrones en aniquilarse y desacoplarse son los piones π^\pm y π^0 y tras ellos lo hacen μ^\pm , los neutrinos y e^\pm . En el caso de los neutrinos el desacoplamiento se produce porque dejan de estar en equilibrio con el plasma, siguiendo su evolución térmica como especie relativista sin interaccionar con el resto.

4.9 Desacoplamiento de los neutrinos. Aniquilación de positrones

4.9.1 Proceso de desacoplamiento genérico

Se puede deducir la evolución térmica del plasma cuando una especie se desacopla del baño térmico. Por la conservación de la entropía total del plasma en un volumen comóvil (ecuación 4.27) y con la definición de densidad de entropía (4.21) se concluye que en cualquier instante $g_{*s} T^3 a^3 = \text{cte}$.

Se deduce que en cualquier proceso en que disminuyan los grados de libertad, por aniquilación o desacoplamiento, la evolución de la temperatura cambia ligeramente:

- **Aniquilación:** Las partículas aniquiladas transfieren su masa en forma de energía cinética al plasma, cuya temperatura, en definitiva, disminuirá más lentamente.
- **Desacoplamiento:** Las partículas desacopladas transfieren energía cinética al plasma por la conservación de la entropía. Igualmente, su temperatura disminuye más lentamente.

En particular, dada la conservación de la entropía, el plasma con temperatura $T_{c,1}$ antes y $T_{c,2}$ después de que una especie esté desacoplada cumple

$$g_{*s,1} T_{c,1}^3 a_1^3 = g_{*s,2} T_{c,2}^3 a_2^3 \quad (4.52)$$

donde $g_{*s,1} \neq g_{*s,2}$ si entre ambos instantes cambia el número efectivo de grados de libertad g_{*s} . Sin embargo, la especie que se desacopla tiene inicialmente la misma temperatura que el plasma, $T_{d,1} = T_{c,1}$, pero esta se diluye uniformemente como el inverso del factor de escala una vez que se desacopla, mientras sea una especie relativista,

$$T_{d,1}^3 a_1^3 = T_{d,2}^3 a_2^3. \quad (4.53)$$

Dividiendo las dos expresiones anteriores tenemos que

$$T_{c,2} = \left(\frac{g_{s,1}^*}{g_{s,2}^*} \right)^{1/3} T_{d,2}. \quad (4.54)$$

Observación 12. *La conservación de la entropía se cumple para cualquier sistema termodinámico. Al desacoplarse una especie se tienen dos sistemas termodinámicos bien diferenciados y puede aplicarse esta propiedad a ambos.*

4.9.2 Desacoplamiento de neutrinos

Una vez la temperatura ha descendido lo suficiente como para que tanto piones como muones se aniquilen, se llega al desacoplamiento de los neutrinos, acontecimiento muy cercano al de la aniquilación e^+e^- . En ese momento las únicas partículas relativistas restantes son *electrones*, *neutrinos* y *fotones*. También quedan bariones, que son no relativistas. La densidad de energía relativista aún es dominante sobre la de materia fría.

Las interacciones de los neutrinos con el baño térmico estaban dominadas por las reacciones débiles

$$\nu_e + \bar{\nu}_e \longleftrightarrow e^+ + e^- \quad (4.55)$$

$$e^- + \bar{\nu}_e \longleftrightarrow e^- + \bar{\nu}_e. \quad (4.56)$$

Se puede estimar entonces su temperatura de desacoplamiento del plasma con la expresión (4.51) introduciendo los grados de libertad efectivos de la tabla 4,

$$\frac{\Gamma}{H} = \left(\frac{T}{0.86 \text{ MeV}} \right)^3. \quad (4.57)$$

Por tanto, los neutrinos se desacoplan a $T = 0.86 \text{ MeV}$, lo que aplicando la ecuación (4.35) corresponde a un tiempo $t \approx 1 \text{ s}$ (tabla 3).

Tras el desacoplamiento, los neutrinos dejan de estar en equilibrio térmico con el plasma, por lo que podrán tener temperaturas diferentes ya que la evolución termodinámica de ambos sistemas será distinta. Según (4.54) la relación de la temperatura de los fotones $T \equiv T_\gamma = T_{c,2}$ con la de los neutrinos $T_\nu = T_{d,2}$ tras su desacoplamiento es:

$$T_\nu = \left(\frac{g_{s,1}^*}{g_{s,2}^*} \right)^{1/3} T_\gamma. \quad (4.58)$$

4.9.3 Aniquilación de electrones y positrones

Tras el comienzo del desacoplamiento de los neutrinos (y antes de su fin) comienza la aniquilación e^+e^- al alcanzarse la temperatura $T \approx m_e = 0.511 \text{ MeV}$. La energía de la aniquilación se transfiere al plasma, ya mayoritariamente formado solo por fotones, calentándolos y haciendo que su temperatura descienda más lentamente. Esto es lo que se conoce como *photon reheating* o *recalentamiento de los fotones*.

Podemos ahora calcular la relación entre la temperatura final de los fotones y los neutrinos considerando que los grados de libertad antes del fin del desacoplamiento de los neutrinos y tras la aniquilación e^+e^- son respectivamente:

$$g_{s,1} = 2 + (2 \cdot 2) \frac{7}{8} = \frac{11}{2} \quad (4.59)$$

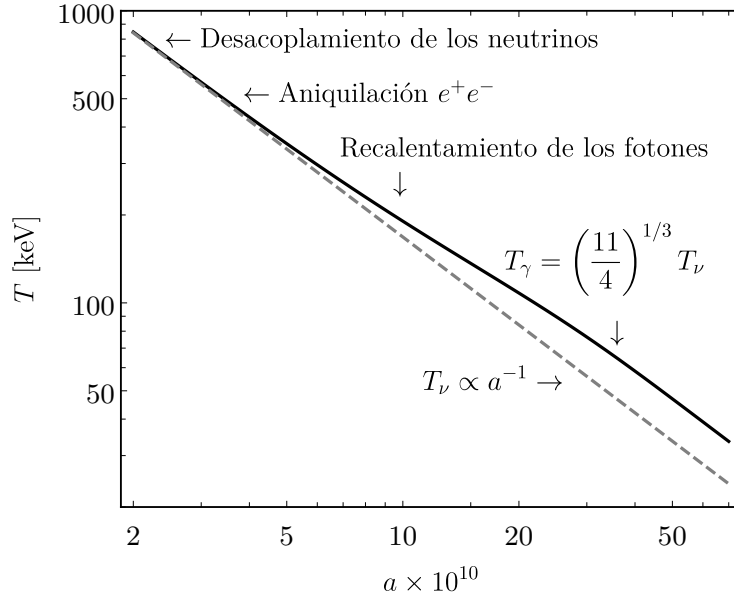


Figura 2: Temperatura de fotones y neutrinos en función del factor de escala obtenida con el programa PRIMAT [10]. Se observa el recalentamiento de los fotones tras la aniquilación e^+e^- mientras que los neutrinos se siguen enfriando uniformemente como el inverso del factor de escala tras su desacoplamiento.

$$g_{s,2} = 2. \quad (4.60)$$

Por tanto, tras el desacoplamiento de los neutrinos y el posterior recalentamiento de los fotones por la aniquilación de electrones y positrones, que se muestra gráficamente en la figura 2, tenemos

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma. \quad (4.61)$$

Así que, si se consigue detectar el *fondo de radiación cósmica de neutrinos* su temperatura actual deberá ser $T_\nu \approx 1.9$ K, pues la de los fotones del CMB es $T_0 = 2.72548 \pm 0.00057$ K [18].

Para calcular la densidad de número de fotones y neutrinos actual basta con introducir estas temperaturas en las ecuaciones (4.11) y (4.12). Pero para ser exactos hay que tener en cuenta el efecto de que el desacoplamiento de los neutrinos no fue instantáneo y sufrieron cierto calentamiento al aniquilarse los positrones. Por ello, se define una magnitud relacionada con los grados de libertad de los neutrinos:

Definición 43 (Número efectivo de neutrinos). *En el número de grados de libertad de los neutrinos antes del desacoplamiento $g_\nu = 2 \cdot 3$, el 2 viene de considerar partícula-antipartícula y el 3, de $N_\nu = 3$ sabores, uno por cada familia. Tras la aniquilación de los positrones g_ν crece un poco por el calentamiento de los neutrinos, lo que se expresa como $g_\nu = 2 \cdot N_{\text{eff}}$ con $N_{\text{eff}} = 3.046$ el número efectivo de neutrinos [20].*

Así se deduce que:

$$n_\nu = \frac{3}{4} N_{\text{eff}} \frac{4}{11} n_\gamma \quad \rho_\nu = \frac{7}{8} N_{\text{eff}} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \rho_\gamma \quad (4.62)$$

$$T_\gamma = 2.725 \text{ K} \quad n_\gamma = 410.72 \text{ cm}^{-3} \quad \rho_\gamma = 0.261 \text{ eV cm}^{-3} \quad (4.63)$$

$$T_\nu = 1.945 \text{ K} \quad n_\nu = 341.19 \text{ cm}^{-3} \quad \rho_\nu = 0.180 \text{ eV cm}^{-3}. \quad (4.64)$$

Observación 13. Las medidas actuales indican que la densidad de la materia oscura fría es $\rho_{mo} = 1257 \text{ eV/cm}^3$. Esto se obtiene de $\Omega_{mo}h^2 = 0.11933 \pm 0.00091$ [17]. Dividiendo entre n_ν se tiene que si los neutrinos fuesen materia oscura, deberían tener una energía de 3.67 eV por partícula. Considerando que se conoce un límite superior para la suma de las masas de los neutrinos $\sum_\nu m_\nu < 0.9 \text{ eV}$ [21], los neutrinos no pueden ser la materia oscura fría.

Es importante destacar que con la temperatura del CMB se puede obtener únicamente el parámetro de densidad de radiación total, suma de fotones y neutrinos, $\Omega_r = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$. Con los valores calculados en (4.63) y (4.64) se tiene:

$$\Omega_\gamma = 5.4 \cdot 10^{-5} \quad \Omega_\nu = 3.7 \cdot 10^{-5} \quad \Omega_r = 9.1 \cdot 10^{-5}. \quad (4.65)$$

4.10 Nucleosíntesis

Tras el evento anterior la única especie relativista en equilibrio son los fotones. También queda materia no relativista debido a la asimetría materia-antimateria ya mencionada. La densidad de energía relativista sigue dominando el universo. En este punto, la materia dominante es bariónica y está principalmente compuesta por protones (p) y neutrones (n) ya que son los bariones más estables y ligeros.

La *nucleosíntesis primordial* es el proceso por el que se formaron los primeros núcleos atómicos, a saber: ^1H , ^2H , ^3H , ^4He , ^3He y ^7Li y algunos otros aunque en menor proporción. A continuación, se introducen varias definiciones que ayudarán a describir la nucleosíntesis en este apartado y en un análisis computacional posterior en la sección § 5.

Definición 44 (Fracción de neutrones). *Cociente entre el número de neutrones y el número total de bariones (suma de neutrones y protones) $n_b = n_n + n_p$,*

$$X_n^{eq}(T) = \frac{n_n}{n_b}. \quad (4.66)$$

Definición 45 (Abundancia de un núcleo). *Cociente entre el número de núcleos de un cierto tipo y el número total de bariones,*

$$Y_i = \frac{n_i}{n_b}. \quad (4.67)$$

Definición 46 (Fracción de masa de un núcleo). *Cociente entre la densidad de masa de un núcleo y la densidad de masa bariónica, despreciando el exceso de masa perdido al formar núcleos atómicos,*

$$X_i = \frac{A_i n_i}{n_b} = A_i Y_i \quad (4.68)$$

siendo A_i el número (entero) másico del isótopo.

Definición 47 (Fracción en masa de ^4He). *Se suele definir*

$$Y_P = \frac{4n_{^4\text{He}}}{n_b} \quad (4.69)$$

donde se aproxima la masa del ^4He por 4 veces la del ^1H . Nótese que $Y_P = X_{^4\text{He}} = 4Y_{^4\text{He}}$.

Definición 48 (Abundancia respecto del número de protones). *Abundancia de núcleos de un tipo dado en relación con la de protones, que son núcleos de hidrógeno H,*

$$i/H \equiv \frac{n_i}{n_p} = \frac{Y_i}{Y_p}. \quad (4.70)$$

Nota 1. De las definiciones anteriores se deduce: $\sum_i X_i = \sum_i A_i Y_i = 1$.

Definición 49 (Fracción barión-fotón). *Número de bariones por cada fotón en el universo,*

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma}. \quad (4.71)$$

Su valor actual es $\eta = (6.14 \pm 0.04) \cdot 10^{-10}$ se puede calcular a partir de $\Omega_b h^2 = 0.02242 \pm 0.00014$ de [17] según se muestra en la siguiente propiedad.

Propiedad 5. Usando que

$$\Omega_b = \frac{\rho_b}{\rho_c} = \frac{m_b n_b}{\rho_{c,100} h^2} \quad (4.72)$$

es posible escribir

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} = \frac{\rho_{c,100}/m_b}{n_\gamma} \Omega_b h^2 = (279.3 \pm 3) \cdot 10^{-10} \Omega_b h^2 \quad (4.73)$$

donde se toma la masa bariónica media en el final de la nucleosíntesis (que será igual que la actual) $m_b = 937.12$ MeV y la temperatura de los fotones del CMB, $T_0 = 2.72548 \pm 0.00057$ K [18]. Así se obtiene el valor de n_γ de (4.63) y el valor de η anterior, recogido en [22].

Propiedad 6. El valor de η apenas ha variado desde el final de la nucleosíntesis. Esto se debe a que los procesos físicos que ocurren desde entonces conservan el número de fotones y a que el número bariónico es una carga conservada del modelo estándar de partículas.

La nucleosíntesis está definida por un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas muy complicado que sólo se puede resolver numéricamente (véase sección § 5). Para obtener resultados analíticos intuitivos y entender bien el proceso en la primera fase de la nucleosíntesis (hasta que la temperatura baja a $T \approx 0.1$ MeV) se pueden asumir dos hipótesis:

- (i) Se consideran solo los elementos hidrógeno ($H \equiv {}^1H$) y helio ($He \equiv {}^4He$), y sus isótopos: $D \equiv {}^2H$ (deuterio), $T \equiv {}^3H$ (tritio) y 3He .
- (ii) Por encima de $T \approx 0.1$ MeV la materia bariónica consiste solo en protones y neutrones libres.

4.10.1 Paso 0: Abundancias en equilibrio térmico

Las interacciones débiles entre protones y neutrones dominaban entre los bariones para $T \gtrsim 0.1$ MeV [3] cuando los neutrinos aún no se habían aniquilado. Esto puede verse calculando las tasas de interacción posibles en esta época. Concretamente las interacciones más importantes eran:

$$n + \nu_e \longleftrightarrow p^+ + e^- \quad (4.74)$$

$$n + e^+ \longleftrightarrow p^+ + \bar{\nu}_e. \quad (4.75)$$

Abundancias relativas de neutrones y protones. Como $T \gtrsim 0.1$ MeV y las masas del protón y neutrón son $m_p \sim m_n \sim 1$ GeV, estos son no relativistas. En este momento se puede considerar aún que las especies ligeras e y ν cumplen $\mu_\nu = \mu_e = 0$, por lo que $\mu_n = \mu_p$ para que haya equilibrio químico.

El equilibrio termodinámico entre protones, neutrones, neutrinos y electrones se mantiene hasta que se desacoplan los neutrinos a $T_{dec,\nu} = 0.86$ MeV, cuando las tasas de las reacciones (4.74) y (4.74) se hacen menores que el ritmo de expansión del universo. Hasta ese momento, todas estas especies están en equilibrio termodinámico con el plasma primordial. Con la expresión (4.13) se puede calcular la fracción de neutrones de este sistema en equilibrio:

$$\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_{eq} = \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} e^{-(m_n-m_p)/T} \approx e^{-Q/T}, \quad (4.76)$$

donde $Q = m_n - m_p \approx 939.56 - 938.27 = 1.29$ MeV (**diferencia de masas** o calor de reacción), se ha tomado $g_n = g_p = 2$ pues ambos tienen el mismo espín y se ha aproximando $(m_n/m_p)^{3/2} \approx 1$. Se concluye entonces que:

- Si $T \gg 1$ MeV : $n_n \approx n_p$ Las interacciones débiles mantienen a los neutrones y protones en equilibrio.
- Si $T \lesssim 1$ MeV : $n_n < n_p$ Ya que las interacciones débiles anteriores no son suficientemente eficientes, se favorece la abundancia de protones respecto de neutrones. Aun así, la abundancia de neutrones no cae a cero inmediatamente y poco después de este umbral se produce el deuterio.

Producción de deuterio. El deuterio ($D = {}^2_1\text{H}$) es un reactivo indispensable para fabricar núcleos compuestos. Su mecanimo de producción es:

$$n + p^+ \longleftrightarrow D + \gamma. \quad (4.77)$$

Recordando que $\mu_\gamma = 0$, para que se cumpla el equilibrio químico se necesita que $\mu_n + \mu_p = \mu_D$. Se define $B_D = m_n + m_p - m_D \approx 2.2245$ MeV la **energía de ligadura del deuterio** y el espín del deuterio implica $g_D = 3$. Aproximando $m_D \approx 2m_p \approx 2m_n$ y usando la expresión (4.13):

$$\left(\frac{n_D}{n_p n_n}\right)_{eq} = \frac{3}{4} \left(\frac{m_D}{m_n m_p} \frac{2\pi}{T}\right)^{3/2} e^{B_D/T}. \quad (4.78)$$

Así, la disminución de temperatura favorece la formación de deuterio.

4.10.2 Paso 1: Congelación (freeze-out) de los neutrones

Hasta el desacoplamiento de los neutrinos, protones y neutrones están en equilibrio termodinámico, por lo que según (4.76) y la definición 44 la fracción de neutrones es:

$$X_n^{eq} = \frac{(m_n/m_p)^{3/2} e^{-Q/T}}{1 + (m_n/m_p)^{3/2} e^{-Q/T}} \approx \frac{e^{-Q/T}}{1 + e^{-Q/T}}. \quad (4.79)$$

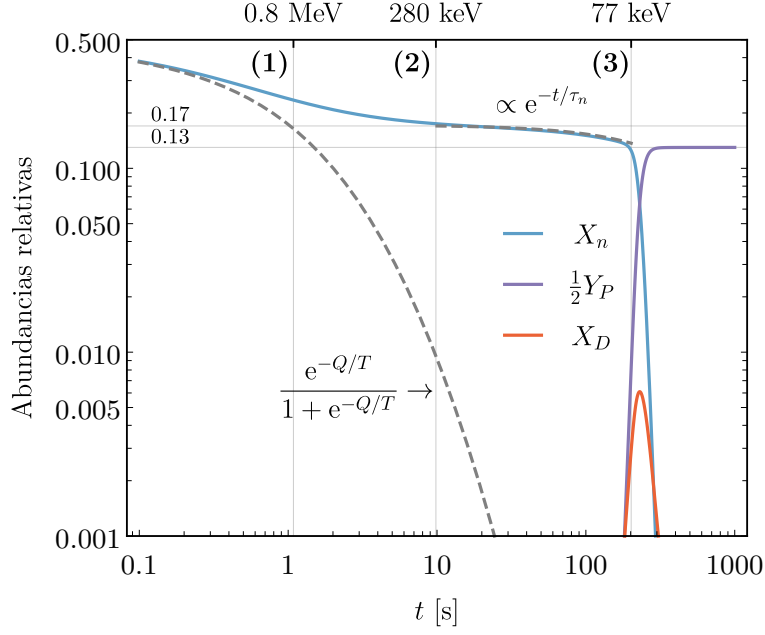


Figura 3: Evolución de abundancias relativas de neutrones, helio y deuterio calculadas con el programa PRIMAT [10], donde se observan las fases de la nucleosíntesis: freeze-out de los neutrones (1) que inicialmente estaban en equilibrio térmico con el plasma; desintegración β^- de los neutrones (2); y formación de deuterio y helio-4 (3).

Cuando ocurre el desacoplamiento de los neutrinos, neutrones y protones dejan de interactuar débilmente de forma eficiente y se produce el **neutron freeze-out**, fenómeno por el cual los neutrones se desacoplan del sistema termodinámico de los bariones y su abundancia se ‘congela’, permaneciendo constante. Esto sucede a una temperatura T_{fo} del orden de $T_{dec,\nu} \approx 0.86$ MeV, que corresponde a un tiempo $t_{fo} \approx 1$ s. Así que la abundancia de neutrones a partir de entonces (si fueran estables) quedaría

$$\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_\infty \approx \left(\frac{n_n}{n_p}\right)_{eq}(0.86 \text{ MeV}) \approx 0.20 \approx \frac{1}{5} \quad (4.80)$$

$$X_n^\infty \approx X_n^{eq}(0.86 \text{ MeV}) \approx 0.17 \approx \frac{1}{6}. \quad (4.81)$$

Este comportamiento se ajusta bien al cálculo preciso de la figura 3. Las aproximaciones $1/5$ y $1/6$ son los valores que típicamente se encuentran en la literatura para entender intuitivamente las proporciones.

Observación 14. Es una afortunada casualidad que $T_{fo} \sim Q$. Si $T_{fo} \ll Q$ no se podrían haber formado núcleos atómicos porque habría habido muy pocos neutrones disponibles para ello, ya que en tal caso $(n_n/n_p) \approx 0$.

Observación 15. En realidad el freeze-out de los neutrones no ocurre instantáneamente y se produce mientras parte de los neutrones ya se están desintegrando, por lo que la estimación anterior es solo una buena aproximación.

4.10.3 Paso 2: Desintegración de los neutrones

Los neutrones no son estables si no que se desintegran (emisión β^-) en un tiempo del orden de su vida media $\tau_n = 886.7 \pm 0.8 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$. Según la *ley de desintegración radiactiva* la disminución de neutrones es apreciable para $t \gtrsim 10 \text{ s}$ ($T \lesssim 0.2 \text{ MeV}$),

$$X_n(t) = \frac{n_n}{n_n + n_p} = \frac{n_n/n_p}{1 + n_n/n_p} = \frac{\left(\frac{n_n}{n_p}\right)^\infty e^{-(t-t_{fo})/\tau_n}}{1 + \left(\frac{n_n}{n_p}\right)^\infty e^{-(t-t_{fo})/\tau_n}} \approx X_n^\infty e^{-t/\tau_n}. \quad (4.82)$$

Este comportamiento se ajusta bien al cálculo exacto de la evolución en la figura 3.

4.10.4 Paso 3: Fusión del ^4He

En este momento en el universo hay cada vez menos neutrones por cada protón. En principio sería posible formar helio mediante $2n + 2p \rightarrow ^4\text{He}$, pero se trata de una reacción con más de dos reactivos en el estado inicial, por lo que el ritmo de interacción es demasiado lento. Es más fácil formar primero deuterio, que intervendrá después en el estado inicial de las reacciones que formarán el helio. Esto es lo que se llama **cuello de botella del deuterio**: no se pueden formar núcleos pesados hasta que hay suficiente deuterio, que actuará como catalizador. Esto es porque las energías de ligadura de los núcleos más pesados son demasiado altas como para formarse con n y p .

- **Formación de deuterio:**



- **Formación de helio:** Se da en dos pasos,



En el equilibrio, la relación entre deuterio, protones y neutrones viene dada por la ecuación (4.78). Tomando $m_D \sim 2m_n \sim 2m_p$ y escribiendo $n_p \sim n_b = \eta n_\gamma$ tenemos

$$\left(\frac{n_D}{n_n}\right)_{eq} = \frac{3}{4} \eta n_\gamma \left(\frac{4\pi}{m_p T}\right)^{3/2} e^{B_D/T}. \quad (4.86)$$

Recordando que $n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3$ y $\eta \approx 6 \times 10^{-10}$ (definición 49) podemos estimar a qué temperatura se produce la nucleosíntesis, como aquella a la que se iguala en el equilibrio el número de núcleos de deuterio al número de neutrones disponibles. Se puede usar también la relación entre el tiempo y la temperatura para la época dominada por la radiación (4.35) con $g_{*e} = 3.363$ (ver tabla 4) para conocer cuándo tiene lugar,

$$T_{nuc} \approx 70 \text{ keV}, \quad t_{nuc} \approx 200 \text{ s}. \quad (4.87)$$

La fracción de neutrones en este momento es, según (4.82):

$$X_n(t_{nuc}) \approx 0.13 \approx \frac{1}{8}. \quad (4.88)$$

Finalmente, se calcula la abundancia de helio producido. Una vez hay suficiente deuterio pueden darse las reacciones (4.84) y (4.85). Como la energía de ligadura del ${}^4\text{He}$ ($B_{\text{He}} = 28.296 \text{ MeV}$) es mayor que la del deuterio, se favorece la creación del helio sobre el deuterio. Los núcleos están en equilibrio termodinámico y aplicando la expresión (4.13) a $n_{\text{He}}/n_{\text{D}}$, se tiene un decaimiento exponencial de la densidad de núcleos de deuterio en relación con el helio. La abundancia de deuterio baja drásticamente en favor de la del helio.

Tras la síntesis del ${}^4\text{He}$ prácticamente todos los neutrones estarán en los núcleos de helio y, como cada núcleo tiene 2 neutrones:

$$\text{He}/\text{H} = \frac{n_{\text{He}}}{n_p} = \frac{\frac{1}{2}X_n(t_{\text{nuc}})}{1 - X_n(t_{\text{nuc}})} \approx 0.075. \quad (4.89)$$

La fracción en masa del ${}^4\text{He}$ (respecto de los bariones totales) es:

$$Y_{\text{P}} = \frac{4n_{\text{He}}}{n_b} = 0.2343. \quad (4.90)$$

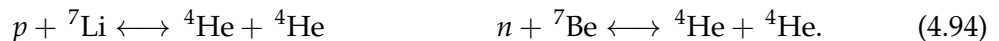
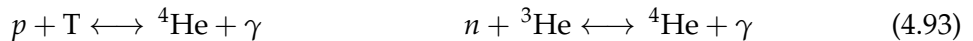
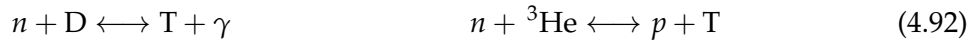
Considerando la aproximación de que, prácticamente, los únicos núcleos son los de hidrógeno y helio:

$$Y_{\text{P}} = 23.43 \% \quad X_{\text{H}} = 76.57 \% \quad (4.91)$$

lo que concuerda bastante bien con la observaciones: $Y_{\text{P}} = 0.245 \pm 0.003$ [23]. Es decir, en el universo hay aproximadamente 1 gramo de helio por cada gramo de hidrógeno.

Este tercer paso de la nucleosíntesis (la formación del deuterio y helio) también se observa con claridad en la figura 3. Esta gráfica se ha obtenido con el programa PRIMAT [10], que considera todos los efectos físicos graduales de viscosidad y termodinámica del no equilibrio en la nucleosíntesis. En esta figura se ha señalado: (1) cuando comienza el proceso de *neutron freeze-out* dejando atrás la relación exponencial en equilibrio de X_n^{eq} (4.79); (2) el momento en que termina el *freeze-out* de forma efectiva y la abundancia de neutrones cae conforme a la *ley de desintegración radiactiva* (4.81); y (3) el instante en que comienza a ser notable la producción de deuterio, lo que marca el inicio de la nucleosíntesis. Nótese que, aunque son una muy buena aproximación, nuestros resultados obtenidos analíticamente no coinciden exactamente con la simulación detallada de PRIMAT, pues en particular hemos supuesto que los neutrinos se desacoplan y los neutrones se congelan instantáneamente.

Conviene mencionar que además de las reacciones anteriores (4.83, 4.84 y 4.85) se dan otros procesos por los que se forman además, en pequeñas cantidades, tritio (T) y ${}^3\text{He}$, e incluso ${}^7\text{Li}$ y ${}^7\text{Be}$,



El tritio es inestable y se desintegra en ${}^3\text{He}$ por emisión beta, o se combina con un protón para formar ${}^4\text{He}$. Además el tritio tiene una baja energía de ligadura comparada con ${}^4\text{He}$ y se produce en muy pequeña cantidad. El ${}^3\text{He}$ tiene también muy baja energía de ligadura y se produce muy poco. El ${}^7\text{Be}$ es inestable y se desintegra en ${}^7\text{Li}$. Un esquema de todas estas reacciones puede verse en la figura 4.

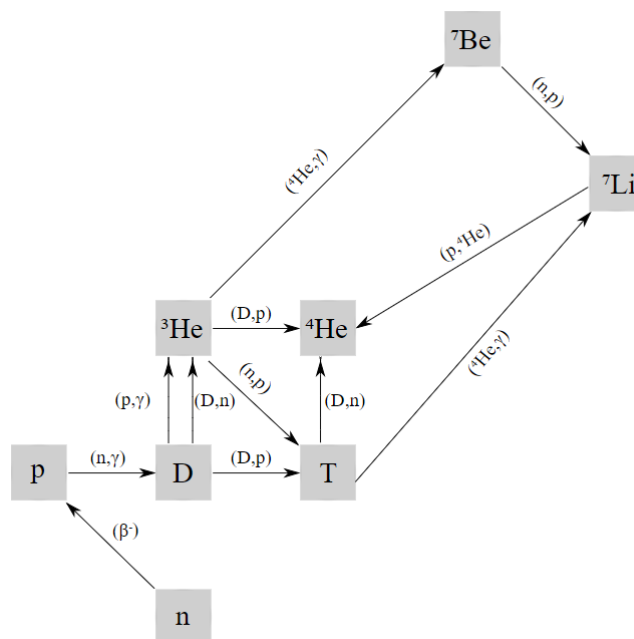


Figura 4: Reacciones nucleares de la nucleosíntesis primordial [Wikimedia Commons].

4.11 Recombinación

Tras la nucleosíntesis, las especies que quedan libres en el universo son: fotones, neutrinos, electrones y núcleos atómicos ligeros. Los únicos acoplados a los fotones son los electrones, vía scattering Compton. El anterior evento cosmológico, la nucleosíntesis, ocurre solo unos minutos tras el comienzo del universo y no es hasta mucho tiempo después, tras centenares de miles de años, que se produce la *recombinación*.

La recombinación es el proceso por el que, por primera vez, los núcleos y electrones se enlazan para formar átomos neutros, disminuyendo drásticamente la densidad de número de electrones libres. Comienza cuando la temperatura es suficientemente baja como para que la energía de los electrones sea menor que la de ligadura de estos con los núcleos libres, alrededor de $t \approx 290\,000$ a. Al final de este proceso que dura unos $70\,000$ a, los fotones se desacoplan de la materia y el universo se hace transparente a la radiación. Los fotones que son libres desde este momento constituyen la CMBR que hoy detectamos, pero se desacoplaron en $t \approx 360\,000$ a. Esto ocurrió a una temperatura $T \approx 3000$ K a $z \approx 1100$. Por eso hoy esos fotones tienen una temperatura $T_0 \approx 2.7$ K.

5 Análisis computacional del proceso de la nucleosíntesis

En esta última sección se obtienen resultados numéricos rigurosos del proceso de la nucleosíntesis con el programa PRIMAT [10] y se presentan gráficamente. Este programa fue desarrollado en *Mathematica* y resuelve un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas para obtener las abundancias de núcleos ligeros formados en la nucleosíntesis primordial.

Los cálculos se realizan fijando previamente el valor de los parámetros libres. Los

más relevantes son la razón barión-fotón η o equivalentemente el parámetro de densidad de bariones $\Omega_b h^2$ (para lo que se necesita la temperatura T_0 del CMB) y el número de especies de neutrinos N_ν , así como un amplio catálogo de tasas de reacciones nucleares. El parámetro de Hubble h y el parámetro de densidad de materia oscura también se necesitan, pero tienen un impacto menor en la nucleosíntesis. Además, PRIMAT tiene en cuenta las incertidumbres teóricas de las tasas de interacción débiles que caracterizan las reacciones que procesan protones en neutrones y viceversa, y calcula las correcciones pertinentes para que el programa sea consistente.

Se presentan a continuación los resultados y conclusiones obtenidos analizando las simulaciones ejecutadas con PRIMAT.

5.1 Evolución temporal de las abundancias

La figura 5 es una versión de la figura 3 extendida a más isótopos nucleares y sobre un rango mayor de tiempos y abundancias. Se observa el freeze-out de los neutrones, el cuello de botella del deuterio, que propicia la formación mayoritaria de ^4He consumiendo deuterio y neutrones, la rápida desaparición de los neutrones, pues además se desintegran, la existencia de un remanente final de varios núcleos que incluye una pequeña fracción de deuterio y trazas aún menores de ^3He , tritio y proporciones muy pequeñas de ^7Li y ^7Be , que decaerá finalmente en litio.

Esto es consistente con la explicación cualitativa dada en § 4.10.4: primero se forma deuterio que inmediatamente actúa como reactivo para formar núcleos más pesados. El ^4He es el núcleo ligero con mayor energía de ligadura, $B_{^4\text{He}} = 28.295$ MeV, por lo que se favorece su abundancia respecto de los otros según la expresión (4.13) y es, con diferencia, el núcleo compuesto más abundante tras la nucleosíntesis. Le siguen el tritio, $B_{^3\text{H}} = 8.481$ MeV, y el ^3He , $B_{^3\text{He}} = 7.717$ MeV. Aunque ^7Li y ^7Be tengan una energía de ligadura mayor, $B_{^7\text{Li}} = 39.244$ MeV y $B_{^7\text{Be}} = 37.600$ MeV, no pueden formarse por la reacción (4.94) hasta que haya suficiente ^4He . Por eso son los últimos en formarse y los menos abundantes. Es importante destacar que los neutrones siguen desintegrándose durante la nucleosíntesis y llega un momento en que no quedan suficientes para seguir formando deuterio por lo que la abundancia del ^4He se estabiliza y las del resto alcanzan un pico y decaen hasta estabilizarse también. Por debajo de una temperatura de unos 20 keV, al cabo de poco menos de una hora, ya tenemos las abundancias finales: los puntos de equilibrio estables del sistema de ecuaciones.

5.2 Abundancias relativas finales en función de la densidad bariónica

En la figura 6 se muestra el resultado de correr PRIMAT para distintos valores de η o equivalentemente la densidad bariónica $\Omega_b h^2$ (4.73). Como los órdenes de magnitud son muy diferentes, se presentan en tres paneles la fracción de masa de ^4He , y las abundancias de deuterio, ^3He , y ^7Li respecto a H. Esto se conoce como *Schramm plot*. La gráfica incluye el valor e incertidumbre de η medida en el CMB y de las abundancias de ^4He , D y ^7Li medidas en objetos astronómicos de baja metalicidad, lo que en principio permite descartar que su origen sea la nucleosíntesis estelar. Las medidas de ^3He no se incluyen, pues no se conocen bien.

En primer lugar, se discute la consistencia del proceso de la nucleosíntesis primordial del Modelo Estándar Cosmológico. En las gráficas primera y segunda, para un número

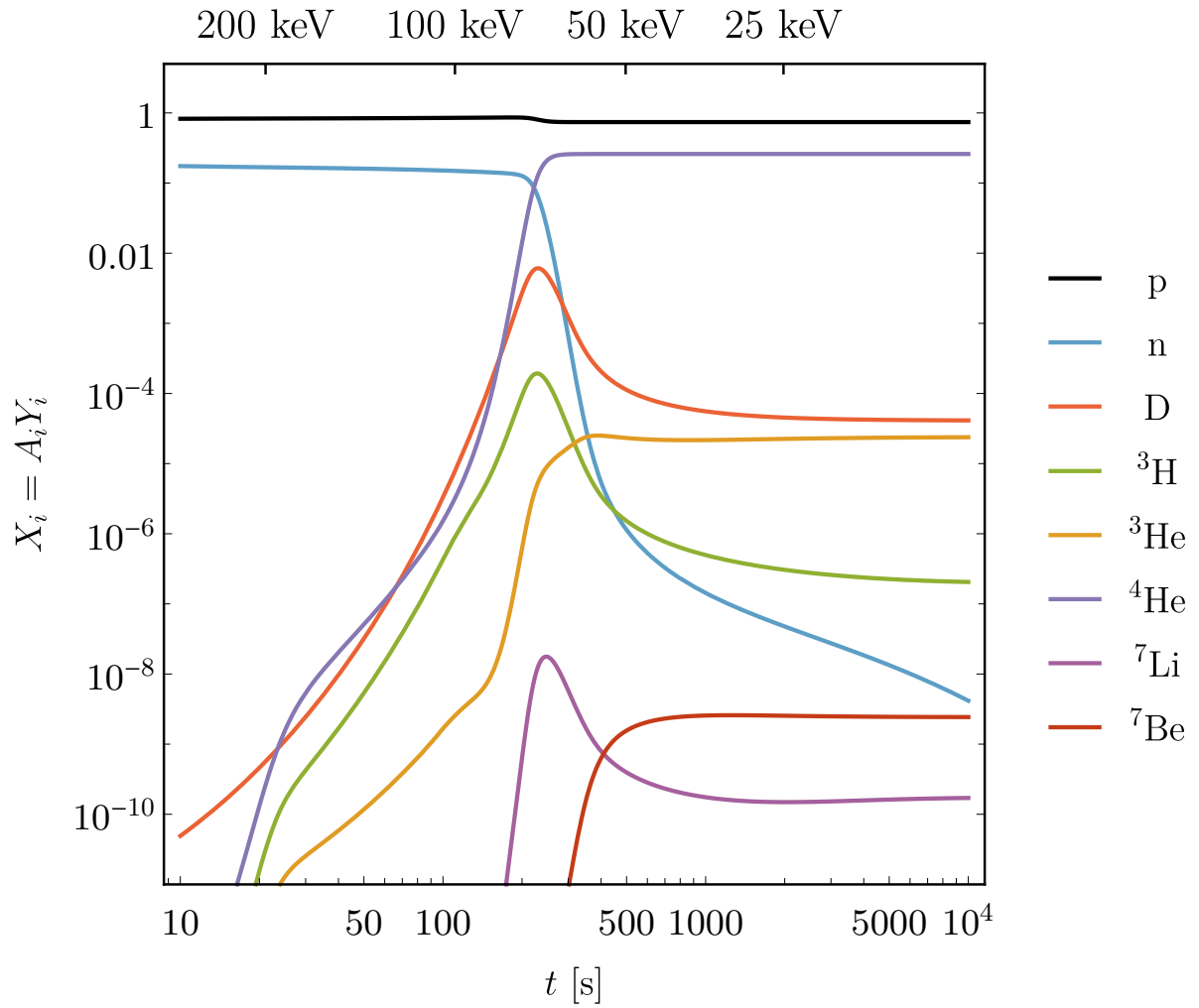


Figura 5: Abundancias de protones, neutrones y núcleos ligeros producidos en la nucleosíntesis primordial: $p \equiv {}^1\text{H}$, n , $\text{D} \equiv {}^2\text{H}$, $\text{T} \equiv {}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^7\text{Li}$ y ${}^7\text{Be}$. Como el ${}^7\text{Be}$ es inestable y se desintegra en ${}^7\text{Li}$, la abundancia primordial de ${}^7\text{Li}$ es la suma de ambas.

Tabla 6: Abundancias medidas frente a las obtenidas con el programa PRIMAT [11].

Núcleo	Observaciones	Resultados
Y_p	0.2449 ± 0.0040	0.24709 ± 0.00017
$D/H (\times 10^5)$	2.527 ± 0.030	2.459 ± 0.036
${}^3\text{He}/H (\times 10^5)$	$< 1.1 \pm 0.2$	1.074 ± 0.026
${}^7\text{Li}/H (\times 10^{10})$	$1.58^{+0.35}_{-0.28}$	5.623 ± 0.247

de neutrinos $N_\nu = 3$, se comprueba que para el valor de η medido con mucha precisión en el CMB, las abundancias de ${}^4\text{He}$ y D predichas por el modelo teórico coinciden de forma muy exacta con las observaciones, hallándose dentro del intervalo de incertidumbre. Esto apoya el modelo estándar tajantemente. En cambio, la abundancia del ${}^7\text{Li}$ en la tercera gráfica está muy lejos del intervalo medido. Esto es lo que se denomina *Problema Cosmológico del Litio*. De todas formas no es descartable que se trate de una incorrecta interpretación de los datos observacionales [24].

La abundancia del helio es difícil de medir; se deben tomar objetos muy lejanos y fríos y que hayan interactuado poco con el entorno porque este elemento es producto de muchas reacciones posibles. De ahí su gran incertidumbre. En cambio, la del deuterio es bien conocida y con pequeña incertidumbre, porque se determina de observaciones de objetos muy concretos: algunas nubes cercanas a cuásares, de los cuales se obtienen datos fiables y con poca incertidumbre. Esto es porque el deuterio no se puede producir, únicamente es destruido tras la nucleosíntesis primordial, y por eso se necesitan objetos muy antiguos que no hayan interactuado con otros.

Los valores que se obtuvieron y presentaron en [11] se calculan aquí y se presentan en la tabla 6 comparándolos con las observaciones más actuales.

Nota 2. Aunque no se aprecie en la figura 6, la abundancia de deuterio predicha no coincide exactamente con la observada, sino que existe una tensión de 1.8 sigmas [11]. Esta es una cuestión que se sigue estudiando, entre otras formas, modificando el modelo cosmológico.

5.3 Predicción del número de familias de neutrinos

También hemos estudiado el resultado de variar el número de familias (sabores) de neutrinos, $N_\nu \in \{2, 3, 4\}$ (ver definición 43), para verificar cuál de ellos está de acuerdo con la predicción del Modelo Estándar de Partículas, $N_\nu = 3$.

En realidad el programa usa un número efectivo de neutrinos $N_{\text{eff}} = N_\nu + 0.046$ pues tiene en cuenta el recalentamiento de los neutrinos debido a la aniquilación de los positrones durante su desacoplamiento, que no es instantáneo.

En la figura 6 se observa una gran desviación de los valores predichos respecto de los observados para ${}^4\text{He}$ y deuterio, que caen claramente fuera del intervalo de incertidumbre de las medidas. Esto puede explicarse siguiendo los razonamientos de § 4.10:

Si el número efectivo de neutrinos aumenta, también lo hace $g_{*\epsilon}$ y con ello ρ (4.17) y el parámetro de Hubble H según la ecuación de Friedmann (2.42). Esto significa que los eventos detallados en la sección § 4.4 ocurren más deprisa, aunque a las mismas temperaturas prácticamente. Esto puede asimilarse observando en la ecuación (4.35) que ahora la temperatura baja más rápido en el mismo tiempo. Tras el *freeze-out* de los neutrones a $T = 0.86$ MeV se desintegran por emisión β^- pero ahora la temperatura de nucleosíntesis

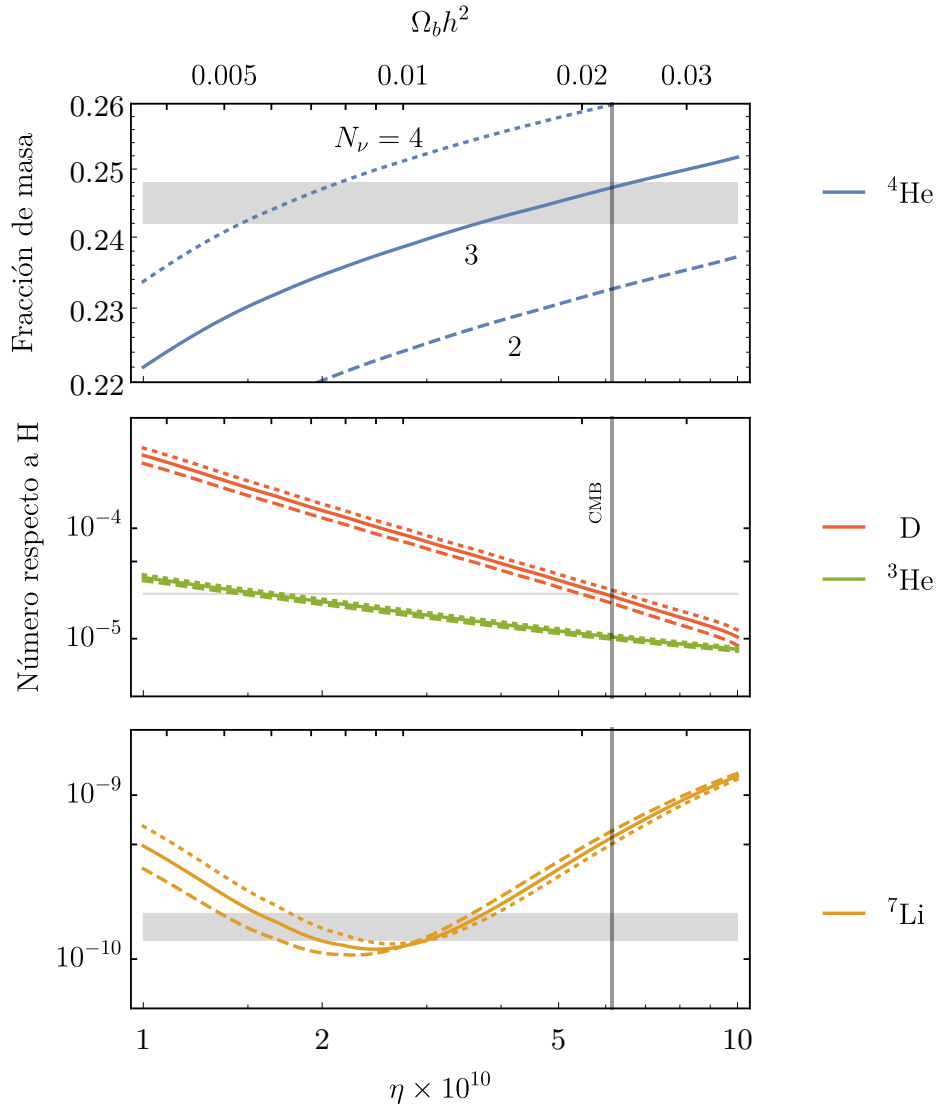


Figura 6: Schramm plot para distintos números de neutrinos $N_\nu \in \{2, 3, 4\}$.

se alcanza antes, por lo que se habrán desintegrado menos neutrones cuando los núcleos se forman. Así, habrá más neutrones disponibles para formar más deuterio y el resto de núcleos.

Por tanto, se concluye que el modelo estándar cosmológico es consistente con el número de familias de neutrinos fijado por el modelo estándar de partículas, $N_\nu = 3$.

6 Resumen y conclusiones

En este trabajo se desarrolla el Modelo Estándar de la Cosmología, obteniendo la geometría de un universo homogéneo e isótropo y las ecuaciones que se derivan de ella. Además, se determinan las expresiones de evolución y valores actuales de ciertas magnitudes cosmológicas fundamentales. Se estudia también la termodinámica que rige la evolución de este. Para ello se detallan los hitos más relevantes explicando los mecanismos físicos que los gobiernan. Para cada uno, se incluye la física que determina su inicio y final; con los cálculos oportunos. Todo esto se plantea con el objetivo de explicar de forma detallada el proceso de la nucleosíntesis primordial. Primero, se hace por medio de cálculos analíticos aproximados para aportar una descripción cualitativa sencilla, y luego computacionalmente con el programa PRIMAT, con el que se obtienen las abundancias de los elementos ligeros productos. Además, se altera el número de neutrinos para comprobar si el modelo cosmológico apoya que el número de familias de neutrinos es el del Modelo Estándar de Partículas.

En forma de prólogo se sintetizan en el primer capítulo los fundamentos matemáticos sobre Espacios Pseudo-Euclídeos y Variedades Pseudo-Riemannianas que son marco de trabajo en la formulación matemática de la Relatividad General. Tras esto, comienza el estudio teórico de la física presentada.

En primer lugar, se obtiene la geometría del universo dada por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker a partir de los postulados de homogeneidad, isotropía y fluido perfecto. Se derivan las Ecuaciones de Friedmann, que incluyen la ecuación de evolución y la de aceleración. Se determinan los tipos de universo posibles en función de sus parámetros de densidad y curvatura y diferentes conceptos de distancias cosmológicas y horizontes. Para un universo plano (con curvatura nula) se obtienen expresiones analíticas en función del tiempo, del factor de escala, la densidad de energía predominante, la constante de Hubble y el redshift en los casos de un universo unicomponente.

Luego, se presentan los valores de los parámetros cosmológicos dados por las últimas observaciones y se deduce el tipo de universo que habitamos. Se deduce una expresión analítica para el factor de escala en función del tiempo en un universo actualmente dominado por materia fría y energía oscura. Introduciendo los parámetros de densidad de estos tipos de energía se obtiene una aproximación teórica muy exacta de la edad del universo: $t_0 = 13.785$ Ga. Se calcula también el tiempo y el redshift en el momento de la igualdad materia fría-radiación obteniéndose 69 912 a y $z = 3\,404.2$.

Después, se desarrolla la Física Estadística y la Termodinámica que se utiliza para describir la evolución del universo. Se introduce el concepto de grados de libertad efectivos y se aplica a las variables termodinámicas de la densidad de energía, la densidad de número de partículas y la entropía y se obtienen sus expresiones analíticas en función de la temperatura en el límite ultrarrelativista y no relativista. Asimismo, se deduce la expresión de la constante de Hubble en función de la temperatura a partir de la conservación de la entropía en un volumen comóvil y se obtiene la temperatura como función del tiempo en la época dominada por la radiación.

A continuación, se describen las fases más relevantes de la evolución del universo temprano: la inflación, la bariogénesis, la época electrodébil, la transición electrodébil y transición QCD, el desacoplamiento de los neutrinos, la aniquilación de los positrones, la nucleosíntesis primordial y la recombinación. Se explican de forma cualitativa con algu-

nos cálculos que apoyan las ideas fundamentales de cada hito. Para el desacoplamiento de los neutrinos y aniquilación de positrones, y sobre todo para la nucleosíntesis, se hace una descripción aproximada analítica del proceso de forma muy detallada.

Para el primer proceso, se calcula la temperatura de desacoplamiento y la relación de la temperatura de los neutrinos con la de los fotones del CMB. A partir de los valores observacionales de la temperatura del CMB se obtiene la temperatura del fondo cósmico de neutrinos y la densidad de energía y densidad de número de fotones y neutrinos. Se concluye que los neutrinos no pueden ser la materia oscura fría. Finalmente, se obtiene el parámetro de densidad de los fotones, de neutrinos y de radiación total.

Para el segundo, se obtiene la temperatura aproximada del neutron freeze-out, la fracción barión-fotón, la temperatura y tiempo de nucleosíntesis y las abundancias de ^4He e ^1H . Las abundancias calculadas son $X_{\text{H}} = 0.7657$ y $Y_{\text{P}} = 0.2343$ y, a pesar de ser cálculos aproximados que no tienen en cuenta efectos de termodinámica del no equilibrio, la del helio se diferencia en sólo un 4.5 % con las mediciones. Se muestra una figura con la evolución de abundancias de neutrones, deuterio y ^4He que se obtuvo computacionalmente con PRIMAT, observándose los comportamientos deducidos teóricamente. Se concluye que el argumento teórico dado del proceso de nucleosíntesis es válido en una muy buena primera aproximación. Finalmente, se describen las reacciones más relevantes en la nucleosíntesis primordial.

For último, se presenta la evolución femporal de las abundancias de los elementos ligeros más relevantes usando PRIMAT, que previamente se ha podido explicar satisfactoriamente de forma cualitativa. También, se estudia la dependencia de las abundancias con el valor de la densidad bariónica y se comprueba que el valor medido en el CMB es consistente y las abundancias observadas para ^4He y deuterio son consistentes con las predicciones de la nucleosíntesis primordial. Y finalmente es estudia la dependencia de las predicciones con el número de familias de neutrinos para comprobar que el valor óptimo es el que predice el modelo estándar de las partículas.

Se concluye la importancia de investigar la nucleosíntesis, tanto en el Modelo Cosmológico actual (ΛCDM) como en modificaciones al mismo que pudiesen aportar soluciones a la la tensión de 1.8 sigmas entre los valores observados y predichos para la abundancia del deuterio y verificar si el problema del litio se debe a una incorrecta interpretación de los datos o por el contrario está señalando la necesidad de modificar la teoría. Dada la gran precisión de las observaciones actuales, estos estudios podrán suponer la base de grandes avances no sólo en Cosmología, sino también en Física de Partículas.

Referencias

- [1] L. Bergström, A. Goobar,
Cosmology and Particle Astrophysics, 2nd Edition,
Springer-Praxis (2004)
- [2] B. Janssen,
Gravitación y Geometría,
Editorial Universidad de Granada (2022)
- [3] D. Baumann,
Cosmology,
Cambridge University Press (2022)
- [4] G. Lemaître,
*A Homogeneous Universe of Constant Mass and Growing Radius Accounting for the
Radial Velocity of Extragalactic Nebulae*,
Annales Soc. Sci. Bruxelles A **47** (1927), 49-59
- [5] E. Hubble,
A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae,
Proc. Natl. Acad. Sci. USA **15**(1929), 168–173
- [6] G. Gamow,
Expanding universe and the origin of elements,
Phys. Rev. **70** (1946), 572-573
- [7] A. A. Penzias and R. W. Wilson,
A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s,
Astrophys. J. **142** (1965), 419-421
- [8] R. A. Alpher, H. Bethe and G. Gamow,
The origin of chemical elements,
Phys. Rev. **73** (1948), 803-804
- [9] Planck Collaboration,
Planck 2018 results. I. Overview, and the cosmological legacy of Planck,
Astron. Astrophys. **641** (2020), A1
[arXiv:1807.06205 [astro-ph.CO]]
- [10] C. Pitrou, A. Coc, J. Uzan, E. Vangioni,
Precision Big Bang Nucleosynthesis with the New Code PRIMAT,
JPS Conf. Proc. **31** (2020), 011034
[arXiv:1909.12046 [astro-ph.CO]]
Código PRIMAT: <http://www2.iap.fr/users/pitrou/primat.htm>
- [11] C. Pitrou, A. Coc, J. Uzan, E. Vangioni,
Precision big bang nucleosynthesis with improved Helium-4 predictions,
Phys. Rept. **754** (2018), 1-66
[arXiv:1801.08023 [astro-ph.CO]]

- [12] L. Husdal,
On Effective Degrees of Freedom in the Early Universe,
Galaxies **4** (2016) no.4. 78
[arXiv:1609.04979 [astro-ph.CO]]
- [13] Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP),
Fluctuations in the Cosmic Microwave Background,
https://wmap.gsfc.nasa.gov/universe/bb_cosmo_fluct.html
- [14] P. Sarkar, J. Yadav, B. Pandey, S. Bharadwaj,
The scale of homogeneity of the galaxy distribution in SDSS DR6,
Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **399** (2009), L128-L131
[arXiv:0906.3431 [astro-ph.CO]]
- [15] D. D. Sokolov,
Pseudo-Euclidean space,
Springer Encyclopedia of Mathematics, Volume 10 (1994), ed. M. Hazewinkel.
- [16] B.-Y. Chen,
Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds,
World Scientific (2017).
- [17] Planck Collaboration,
Planck 2018 results. VI. Cosmological Parameters,
Astron. Astrophys. **641** (2020), A6 [erratum: *Astron. Astrophys.* **652** (2021), C4]
[arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO]]
- [18] D. J. Fixsen
The Temperature of the Cosmic Microwave Background,
Astrophys. J. **707** (2009), 916-920
[arXiv:0911.1955 [astro-ph.CO]]
- [19] S. Weinberg,
Los Tres Primeros Minutos del Universo,
Alianza Editorial (2016)
- [20] G. Mangano, G. Miele, S. Pastor, T. Pinto, O. Pisanti, P. D. Serpico,
Relic neutrino decoupling including flavour oscillations,
Nucl. Phys. B **729** (2005), 221-234
[arXiv:hep-ph/0506164]
- [21] The KATRIN Collaboration,
Direct neutrino-mass measurement with sub-electronvolt sensitivity,
Nature Phys. **18** (2022) no.2. 160-166
[arXiv:2105.08533 [hep-ex]]
- [22] G. Steigman,
The Cosmological Evolution of the Average Mass Per Baryon,
JCAP **10** (2006), 016
[arXiv:astro-ph/0606206]

- [23] R. L. Workman *et al.* [Particle Data Group],
Review of Particle Physics,
PTEP **2022**, 083C01 (2022).
- [24] B. D. Fields and K. A. Olive,
Implications of the non-observation of ${}^6\text{Li}$ in halo stars for the primordial ${}^7\text{Li}$ problem,
JCAP **10** (2022), 078
[[arXiv:2204.03167 \[astro-ph.GA\]](#)]



Propuesta de Trabajo Fin de Grado del Doble Grado en Física y Matemáticas (curso 2022-2023)

Responsable de tutorización: José Ignacio Illana Calero

Correo electrónico: jillana@ugr.es

Departamento: Física Teórica y del Cosmos

Área de conocimiento: Física Teórica

Responsable de cotutorización:

Correo electrónico:

Departamento:

Área de conocimiento:

(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante)

Estudiante que propone el trabajo: David Jesús Árbol Guerrero

Título: Geometría, cosmología y nucleosíntesis primordial

Número de créditos: ☐ 6 ECTS ☒ 12 ECTS

Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):

- ☐ 1. Revisiones y/o trabajos bibliográficos sobre el estado actual de aspectos específicos relacionados con la titulación
- ☒ 2. Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática de la titulación, a partir del material disponible en los centros
- ☐ 3. Trabajos experimentales, de toma de datos de campo, de laboratorio, etc.
- ☐ 4. Elaboración de nuevas prácticas de laboratorio
- ☐ 5. Elaboración de un informe o un proyecto en el ámbito del grado de naturaleza profesional
- ☐ 6. Trabajos relacionados con las prácticas externas

Descripción y resumen de contenidos:

El Modelo Estándar de la Cosmología establece que el universo comenzó con el *Big Bang*. Aparte de la expansión del universo y la existencia de la radiación de fondo de microondas, una de las principales pruebas que validan este modelo es la *nucleosíntesis primordial* (BBN), que predice las abundancias relativas de los núcleos más ligeros (deuterio, helio-3, helio-4 y litio-7), sintetizados en los tres primeros minutos conforme el universo se va enfriando [1]. Es impresionante que las observaciones confirman en general con gran precisión las predicciones [2], a pesar de que las abundancias relativas abarcan nueve órdenes de magnitud y solo existe un parámetro libre: la proporción entre bariones y fotones, o equivalentemente la densidad bariónica del universo. El resto está fijado por el Modelo Estándar de la Física de Partículas y por la Relatividad General, lo que supone un importante test de consistencia de nuestras teorías fundamentales. En la actualidad solo existe una discordancia en la abundancia del litio [2,3].

En este trabajo se estudiará la nucleosíntesis primordial. Se introducirá previamente el marco teórico en el que se desarrolla [4,5,6], se explicará en qué consiste y finalmente se derivarán sus predicciones tanto cualitativamente como también de forma más precisa con ayuda de un programa que implementa todas las reacciones nucleares necesarias [7]. El trabajo permitirá al alumno aplicar conocimientos adquiridos en diversas asignaturas de Física y Matemáticas.

Actividades a desarrollar:

1. Describir la *geometría* de nuestro modelo de universo (homogéneo e isotrópico, según el principio cosmológico) basada en la métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Estudiar la evolución temporal del factor de escala en distintas épocas y definir la edad del universo, el desplazamiento al rojo, el concepto de distancia y los parámetros cosmológicos.
2. Estudiar la *termodinámica* del universo en expansión en la época dominada por la radiación (los primeros cientos de miles de años, hasta el momento de la recombinación cuando el universo se hizo transparente a los fotones) usando las partículas del Modelo Estándar que se encuentran en equilibrio y son relativistas a una temperatura dada.
3. Describir la *historia térmica* del universo, identificando los sucesos más destacados (la desaparición de especies masivas, el desacoplamiento de los neutrinos, la recombinación, etc.).
4. Deducir en qué momento se produce la *nucleosíntesis*, cómo se desarrolla y de qué parámetros depende [2].
5. Utilizar el programa *PRIMAT* [7] para encontrar (i) la evolución de las abundancias con el tiempo, y (ii) las abundancias relativas finales como función de la densidad bariónica. Alterar el número efectivo de familias de neutrinos y discutir sus consecuencias.
6. Comparar los resultados con las observaciones. Discutir el *problema del litio*.

Objetivos planteados

Obtener las ecuaciones de Einstein para la métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Comprender la termodinámica del universo en expansión

Localizar en el tiempo los hitos que han dado lugar al universo que hoy conocemos

Reproducir las abundancias de los núcleos primordiales y discutir la tensión con las observaciones

Bibliografía

- [1] S. Weinberg, *The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe*, Basic Books, 1977.
- [2] B.D. Fields, P. Molaro, S. Sarkar, *Big Bang Nucleosynthesis*, in *Review of Particle Physics*, Prog. Theor. Exp. Phys. **2020** (2020) 083C01.
- [3] B.D. Fields, K.A. Olive, T.H. Yeh, C. Young, *Big-Bang Nucleosynthesis after Planck*, JCAP **03** (2020) 010.
- [4] L. Bergström, A. Goobar, *Cosmology and Particle Astrophysics*, 2nd edition, Springer, 2004.
- [5] E.W. Kolb, M.S. Turner, *The Early Universe*, Addison Wesley, 1990.
- [6] G. Steigman, *Primordial Nucleosynthesis in the Precision Cosmology Era*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **57** (2007) 463.
- [7] C. Pitrou *et al.*, *Precision big bang nucleosynthesis with improved Helium-4 predictions*, Phys. Rep. **04** (2018) 005; Mathematica code *PRIMAT* [<http://www2.iap.fr/users/pitrou/primat.htm>].

ARBOL
GUERRERO
DAVID JESUS
- 54179116V

Firmado digitalmente
por ARBOL
GUERRERO DAVID
JESUS - 54179116V
Fecha: 2023.06.23
09:14:52 +02'00'

ILLANA
CALERO JOSE
IGNACIO -
25996097W

Digitally signed by
ILLANA CALERO JOSE
IGNACIO - 25996097W
Date: 2023.06.23
07:37:59 +02'00'

Firma del estudiante
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

Firma del responsable de tutorización
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

Firma del responsable de cotutorización (*en su caso*)
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

En Granada, a 17 de mayo de 2022