

Geometría, cosmología y nucleosíntesis primordial

Trabajo de Fin de Grado - Doble Grado en Física y Matemáticas

David Jesús Árbol Guerrero

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

3 de julio de 2023



UNIVERSIDAD DE GRANADA

- 1 Geometría del universo
- 2 Parámetros cosmológicos. El universo en el que vivimos
- 3 Cosmología. Evolución del universo hasta la recombinación
- 4 La nucleosíntesis primordial
- 5 Conclusiones

Objetivos

- 1 Geometría de nuestro universo.
- 2 Termodinámica en la época dominada por la radiación.
- 3 Hitos más relevantes en la historia térmica del universo.
- 4 Análisis teórico y computacional de la nucleosíntesis con PRIMAT.

Sección 1

Geometría del universo

1.1 Hipótesis y argumentos observacionales

Principio Cosmológico “En cualquier instante, el universo es homogéneo e isótropo a escalas suficientemente grandes.”

Postulado de Weyl “A escalas cosmológicas, la materia se comporta como un fluido perfecto.”

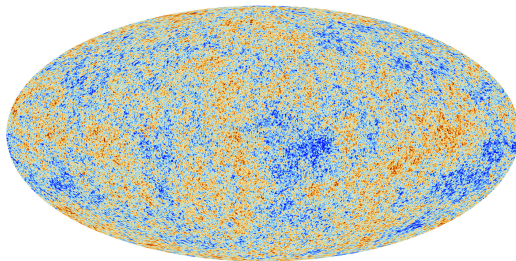


Figura: Inhomogeneidades de la CMBR. Medido por Planck (2013) [ESA Multimedia].

Definición (Fluido perfecto)

Fluido completamente caracterizado por su densidad de masa ρ y su presión isotrópica P . Caracterizado por su tensor energía-impulso:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^{\mu}u^{\nu} - Pg^{\mu\nu}$$

Definición (Observador comóvil)

Único observador que percibirá el universo como homogéneo e isótropo.

Definición (Unidades naturales)

$$c = \hbar = \kappa_B = 1$$

1.2 Fundamentos matemáticos

Espacio-tiempo (\mathbb{R}^4): **variedad pseudo-riemanniana**.

Definición (Métrica. Símbolos de Christoffel. Tensores de curvatura)

$$g_{\mu\nu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$$

$$R_{\mu\nu\rho}^{\lambda}$$

$$R_{\mu\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

- $g_{\mu\nu}$: Igual *signatura* en todos los espacios tangentes.
- Localmente plano y con la **métrica de Minkowski**:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G\mathcal{T}_{\mu\nu}$$

1.3 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

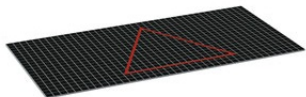
Proposición

Los espacios homogéneos e isótropos tienen curvatura constante (R) y:

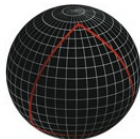
$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = K(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) \quad R_{\mu\nu} = -(N-1)Kg_{\mu\nu}.$$

Métrica de FLRW:

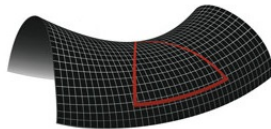
$$k \in \{0, \pm 1\} \quad ds^2 = dt^2 - a^2(t) \overbrace{\left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]}^{\tilde{g}_{ij}}$$



$k = 0$



$k = 1$



$k = -1$

1.4 Ecuaciones de Friedmann

Por el *Postulado de Weyl*:

$$\mathcal{T}_{00} = \rho$$

$$\mathcal{T}_{ij} = a^2(t)\tilde{g}_{ij}P$$

Ecuaciones de Friedmann ($\kappa = 8\pi G$)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= -\frac{\kappa}{2}P - \frac{k}{2a^2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P)\end{aligned}$$

Definición (Constante de Hubble. Ley de Hubble)

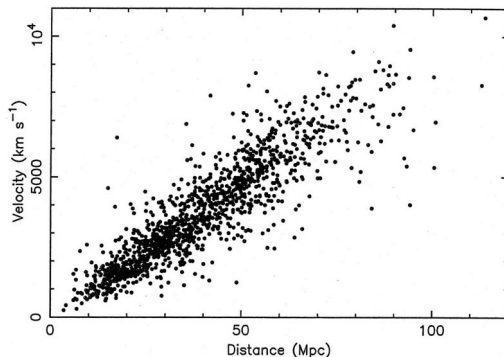
$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

$$v(t) = H(t)D(t)$$

Definición (Redshift cosmológico)

$$z = \frac{\lambda_d - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\nu_e - \nu_d}{\nu_d}$$

$$1 + z = \frac{\lambda_d}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_d} = \frac{a(t_d)}{a(t_e)}$$



Sección 2

Parámetros cosmológicos. El universo en el que vivimos

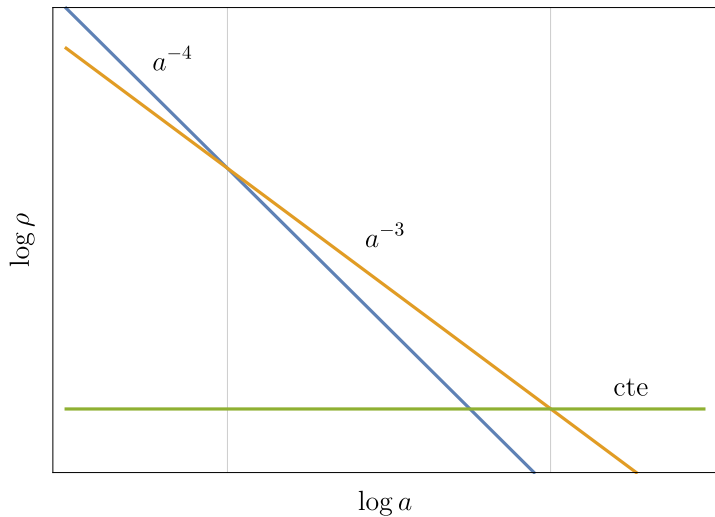
2.1 Relación entre ρ y a . Tipos de materia/energía

$$\nabla_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0 \qquad P = w\rho \qquad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0$$

$$\rho_\alpha(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3(w_\alpha+1)}$$

Definición (Tipos de materia/energía)

- **Materia fría** ($w_m = 0$): $\rho \sim a^{-3}$
- **Materia relativista** ($w_r = 1/3$): $\rho \sim a^{-4}$
- **Energía oscura** ($w_\Lambda = -1$): $\rho \sim \text{cte}$

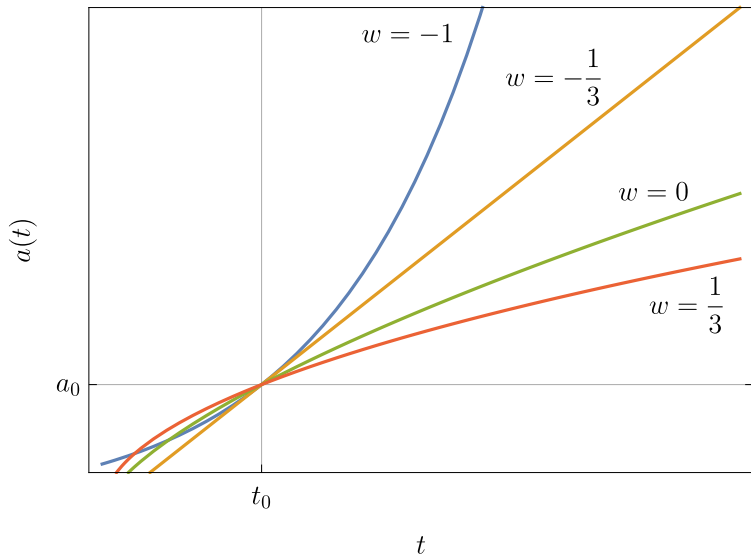


Introducimos $\rho(a)$ en la *Ec. de Friedmann*, $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$.

w_m	$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$	$\rho(t) = \rho_0 t^{-2}$	$H(t) = \frac{2}{3}t^{-1}$	$z + 1 = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2/3}$
w_r	$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$	$\rho(t) = \rho_0 t^{-2}$	$H(t) = \frac{1}{2}t^{-1}$	$z + 1 = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/2}$
w_Λ	$a(t) = a_0 e^{H(t_0)t}$	$\rho(t) = \rho_0$	$H(t) = H_0$	$z + 1 = e^{-H_0 t}$

Introducimos $P = w\rho$ en la *Ec. de aceleración* $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P)$.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(1 + 3w)\rho$$



2.2 Parámetros cosmológicos

Definición (Densidad crítica ρ_c . Parámetros de densidad Ω_α)

$$\rho_c = \frac{3}{\kappa} H^2$$

$$\Omega_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho_c}.$$

$$\text{Ec. de Friedmann } H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho - \frac{k}{a^2}$$

Constante de Hubble	$H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Materia	$\Omega_m = 0.3111 \pm 0.0056$
Radiación	$\Omega_r = 9.13871 \cdot 10^{-5}$
Energía oscura	$\Omega_\Lambda = 0.6889 \pm 0.0056$
Energía total	$\Omega_{tot} = 1.0007 \pm 0.0019$
Edad del universo	$t_0 = 13.787 \pm 0.020 \text{ Ga}$

Sección 3

Cosmología. Evolución del universo hasta la recombinación

3.1 Termodinámica y física estadística de la cosmología

Variables termodinámicas: n, ρ, P, s (*Plasma primigenio*)

$$\rho = \sum_i \rho_i = g_{*\epsilon}(T) \frac{\pi^2}{30} T^4$$

Relaciones $H(T)$ y $T(t)$: *Ec. Friedmann* $H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho - \frac{k}{a^2}$

$$H = \frac{\pi}{3} \left(\frac{g_{*\epsilon}}{10} \right)^{1/2} \frac{T^2}{M_{Pl}} \quad \frac{T}{1 \text{ MeV}} = 1.549 g_{*\epsilon}^{-1/4} \left(\frac{1 \text{ s}}{t} \right)^{1/2}$$

Aniquilación y desacoplamiento de partículas:

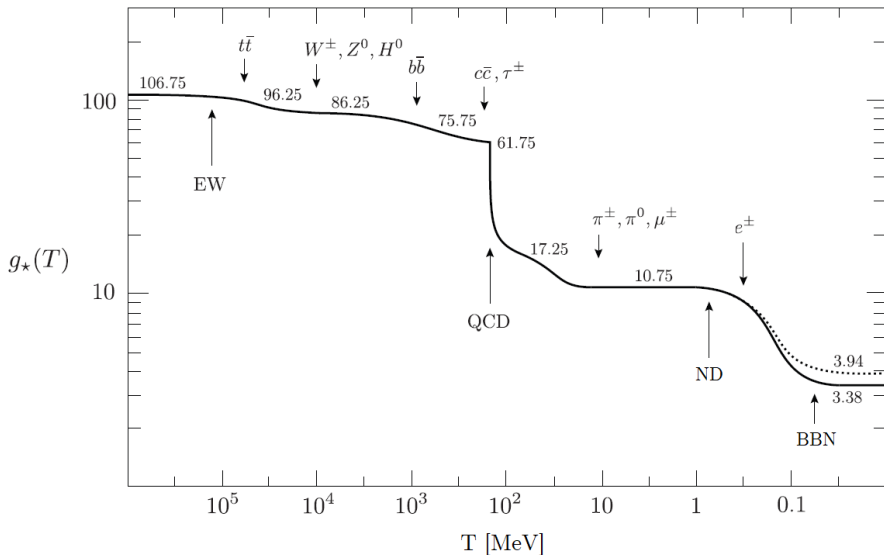
Definición (Tasa de colisión)

$$\Gamma = n\sigma v$$

Propiedad

$$\Gamma \gg H \Rightarrow \text{equilibrio térmico local}$$

3.2 Hitos más relevantes



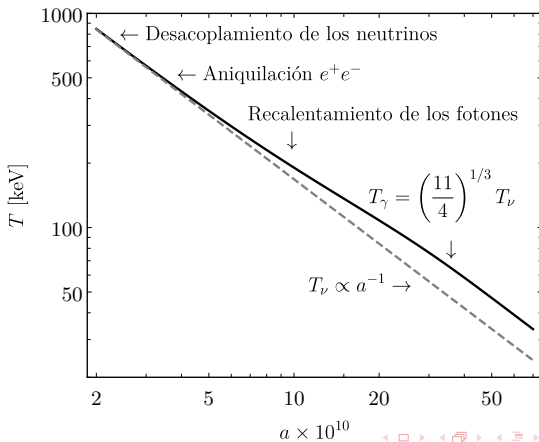
3.2 Desacoplamiento de neutrinos y aniquilación e^+e^-

$$sa^3 = \text{cte}$$

$$Ta = \text{cte}$$

$$T_\nu = \left(\frac{g_{*s,1}}{g_{*s,2}} \right)^{1/3} T_\gamma$$

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} T_\gamma = 1.945 \text{ K}$$



Sección 4

La nucleosíntesis primordial

4.1 Proceso de la nucleosíntesis

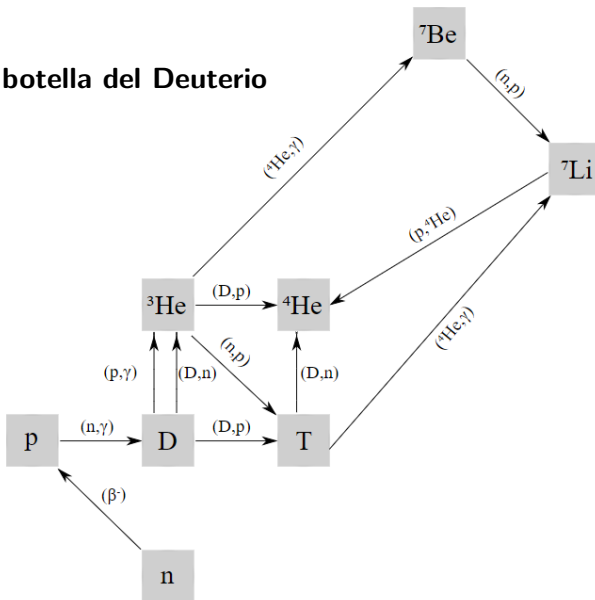
Definición

$$X_n^{eq}(T) = \frac{n_n}{n_b} \quad Y_i = \frac{n_i}{n_b} \quad X_i = A_i Y_i \quad Y_P = \frac{4n_{\text{He}}}{n_b} \quad i/\text{H} \equiv \frac{n_i}{n_p}$$

Definición (Fracción barión-fotón)

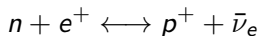
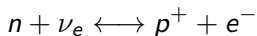
$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} \Leftrightarrow \Omega_b h^2$$

Cuello de botella del Deuterio



-Paso 0: Abundancias en equilibrio

$$n(T) = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T}$$



$$X_n^{\text{eq}} = \frac{n_n}{n_n + n_p} = \frac{n_n/n_p}{1 + n_n/n_p} \approx \frac{e^{-Q/T}}{1 + e^{-Q/T}}$$

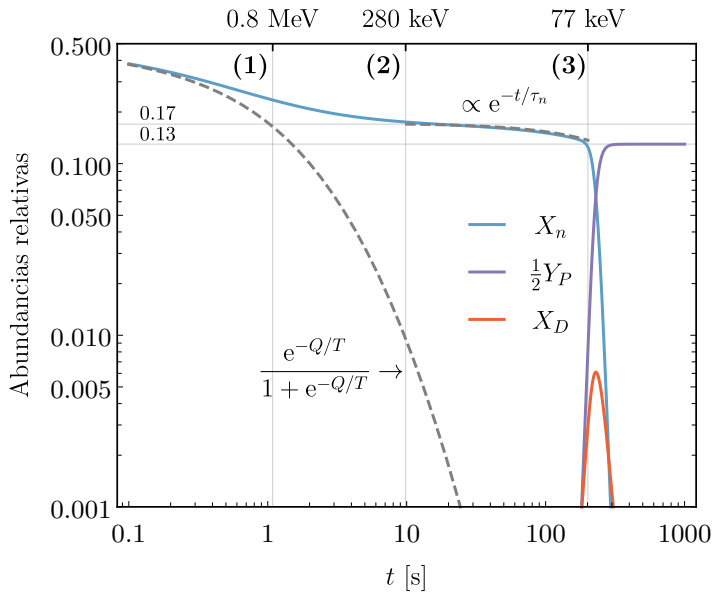
$$(Q = m_n - m_p = 1.29 \text{ MeV})$$

-Paso 1: Neutron Freeze-Out

$$T_{fo} \approx 0.86 - 0.28 \text{ MeV}$$

¡Casualidad! $T_{fo} \sim Q$

Si $T_{fo} \ll Q \Rightarrow$ Sin neutrones para formar núcleos



-Paso 2: Desintegración de los neutrones

$$X_n(t) = \frac{n_n}{n_n + n_p} \approx X_n^\infty e^{-t/\tau_n}$$

-Paso 3: Fusión del ^4He η debe ser suficientemente alta

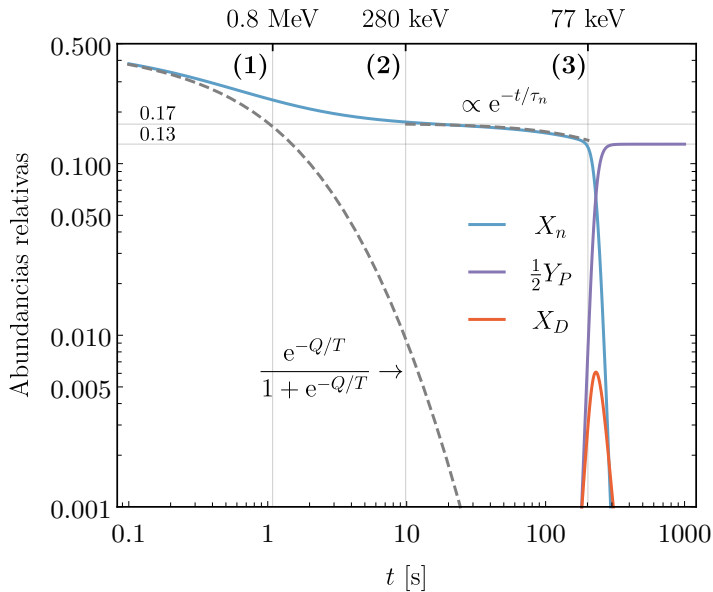
$$\left(\frac{n_D}{n_n}\right)_{eq} = \frac{3}{4}\eta n_\gamma \left(\frac{4\pi}{m_p T}\right)^{3/2} e^{B_D/T} \sim 1$$

Resultados:

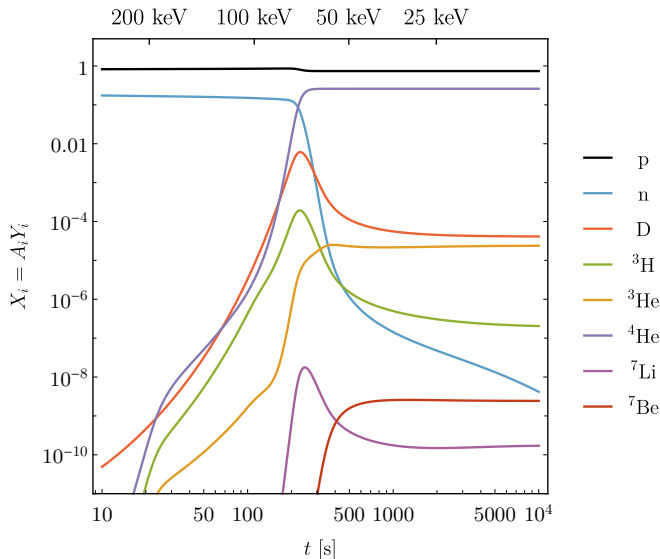
$$T_{nuc} \approx 70 \text{ keV}, \quad t_{nuc} \approx 200 \text{ s}$$

$$Y_P = 23.43 \%, \quad X_H = 76.57 \%$$

(No es la proporción final)

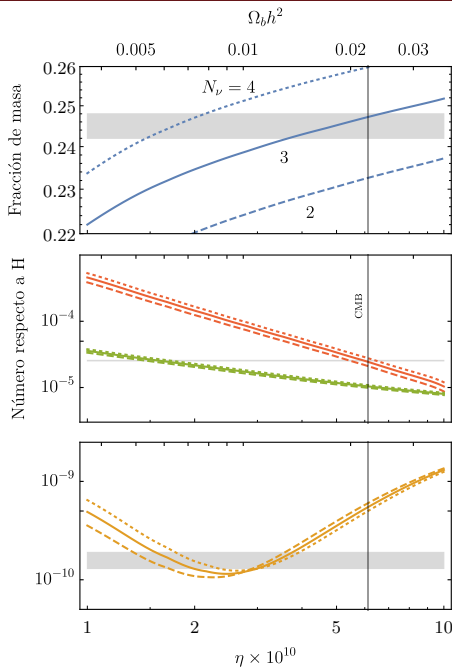


4.2 Evolución temporal de las abundancias



4.3 Abundancias relativas finales

Núcleo	Observaciones	Resultados
Y_P	0.2449 ± 0.0040	0.24709 ± 0.00017
$D/H (\times 10^5)$	2.527 ± 0.030	2.459 ± 0.036
${}^3\text{He}/H (\times 10^5)$	$< 1.1 \pm 0.2$	1.074 ± 0.026
${}^7\text{Li}/H (\times 10^{10})$	$1.58^{+0.35}_{-0.28}$	5.623 ± 0.247



-Parámetros libres: η , N_ν

— ^4He

- η compatible para ^4He y D

- η coincide con datos $\Omega_b h^2$

— D

— ^3He

- $N_\nu=3$

-*Problema del Litio*

— ^7Li

Sección 5

Conclusiones

Conclusions

- ✓ Geometry of our universe.
- ✓ Thermodynamics in the radiation-dominated era.
- ✓ The most relevant milestones of the thermal history of the universe.
- ✓ Theoretical and computational analysis of nucleosynthesis with PRIMAT.

Muchas gracias