

PUC-Rio  
Departamento de Informática  
Prof. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão  
Período: 2014.1  
19 de março de 2014  
Horário: 2as-feiras e 4as-feiras de 11 às 13 horas

## Estruturas Discretas (INF 1631)

### 1º Trabalho de Implementação

**Data de Entrega: 23 de abril de 2014**

#### Descrição

Este trabalho prático consiste em desenvolver códigos para diferentes algoritmos e estruturas de dados para resolver os problemas descritos abaixo e, principalmente, analisar o desempenho das implementações destes algoritmos com respeito ao tempo de CPU. O desenvolvimento destes códigos e a análise devem seguir os seguintes roteiros:

- Descrever os algoritmos informalmente.
- Demonstrar o entendimento do algoritmo explicando, em detalhe, o resultado que o algoritmo deve obter e justificá-lo.
- Explicar a fundamentação do algoritmo e justificar a sua corretude apresentando a prova por indução matemática que leva ao algoritmo.
- Apresentar as tabelas dos tempos de execução obtidos pelos algoritmos sobre as instâncias testadas.
- Documente o arquivo contendo o código fonte de modo que cada passo do algoritmo esteja devidamente identificado e deixe claro como este passo é executado.
- Para a medida de tempo de CPU das execuções utilize as funções disponíveis no link correspondente na página do curso, um exemplo de utilização é apresentado. Quando o tempo de CPU for inferior à 5 segundos, faça uma repetição da execução tantas vezes quantas forem necessárias para que o tempo ultrapasse 5 s (faça um while), conte quantas foram as execuções e reporte a média.

A corretude código deverá ser testada sobre um conjunto de instâncias. O trabalho entregue deve conter:

- Um documento contendo o roteiro de desenvolvimento dos algoritmos (e dos códigos), os itens pedidos acima, comentários e análises sobre a implementação e os testes realizados (papel).
- A impressão (somente) dos trechos relevantes dos códigos fonte (papel).
- Um e-mail para [poggi@inf.puc-rio.br](mailto:poggi@inf.puc-rio.br) (é obrigatório o uso do ASSUNTO (ou SUBJECT) ED141T1 deve ser enviado contendo os arquivos correspondentes ao trabalho. O NÃO ENVIO DESTE E-MAIL IMPLICA QUE O TRABALHO NÃO SERÁ CONSIDERADO).
- O trabalho pode ser feito em grupo de até 3 alunos.

1. Considere o teorema abaixo e a sua prova.

**Teorema 1** :  $x^n - y^n$  é divisível por  $x - y$  para quaisquer  $x$  e  $y$  inteiros e todos os valores de  $n$  inteiros e maiores que zero.

**Prova 1** A prova é feita por indução matemática utilizando  $k$  como parâmetro de indução. O teorema 1 pode ser enunciado:

**Teorema 1** ( $k$ ):  $x^k - y^k$  é divisível por  $x - y$  para quaisquer  $x$  e  $y$  inteiros e todos os valores de  $k$  inteiros e maiores que zero.

**Teorema do Caso Base: 1** Seja  $k = 1$  (o menor valor para o qual  $k$  tem que ser verdade). Nesse caso temos que provar que  $x - y$  é divisível por  $x - y$  para qualquer valor de  $x$  e  $y$ . O que é trivialmente verdade, sendo o quociente,  $q_1$ , igual a 1.

**Teorema do Passo Indutivo: 1** Desejamos provar que se o teorema 1 é verdade para um  $k$  fixo, isto é, podemos assumir que:

$$x^k - y^k = q_k \cdot (x - y)$$

onde  $q_k$  é um inteiro, então é possível mostrar que

$$x^{k+1} - y^{k+1} = q_{k+1} \cdot (x - y)$$

para  $q_{k+1}$  inteiro. Ou seja, temos que mostrar é verdade também para  $k + 1$ . Isto é, que podemos obter  $q_{k+1}$  inteiro a partir de  $q_k$  se o teorema 1 é verdade para  $k$ .

Como:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x^{k+1} - x^k \cdot y + x^k \cdot y - y^{k+1} = x^k(x - y) + y(x^k - y^k)$$

Como, pela hipótese indutiva, temos que  $x^k - y^k = q_k \cdot (x - y)$ , podemos escrever:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x^k(x - y) + y(x^k - y^k) = x^k(x - y) + y \cdot q_k \cdot (x - y) = (x^k + y \cdot q_k)(x - y)$$

Como  $x$  é inteiro,  $x^k$  é inteiro. Como  $y$  e  $q_k$  são inteiros seu produto também é inteiro. Portanto  $(x^k + y \cdot q_k)$  é inteiro e  $q_{k+1} = (x^k + y \cdot q_k)$  é inteiro, ou seja:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = (x^k + y \cdot q_k)(x - y) = q_{k+1} \cdot (x - y)$$

O teorema acima resolve o problema de determinar o quociente entre  $x^k - y^k$  e  $x - y$ . Assim deseja-se um algoritmo que dados  $x$ ,  $y$ , e  $k$  inteiros determine esse quociente.

- (a) Escreva o algoritmo resultante da prova acima.
- (b) Implemente este algoritmo e teste para vários valores de  $x$ ,  $y$ , e  $k$ .

2. Considere o teorema abaixo:

**Teorema 2** *o número de números inteiros cujos dígitos pertencem ao conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  de  $K$  dígitos diferentes é dado pelo produto  $m.(m-1)\dots(m-k+1)$ .*

- (a) Enuncie o teorema de que sabe-se enumerar todos estes números especificando seu parâmetro indutivo e prove-o por indução matemática (simples).
  - (b) Apresente o algoritmo resultante da sua prova, que enumera todos os  $m.(m-1)\dots(m-k+1)$  números (o que permite contá-los).
  - (c) Implemente este algoritmo e apresente os números inteiros (a sequência de dígitos, em especial para quando  $m$  é maior que nove) impressos para pequenos valores de  $m$  e  $k$ . Para valores maiores apresente o tempo de CPU e indique até que valores de  $m$  e  $k$  sua implementação (e computador) foi capaz de fazer a enumeração.
3. Seja um conjunto de  $n$  de equipes  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Deseja-se construir as  $n - 1$  rodadas de um campeonato onde todos jogam contra todos. Assuma que  $n = 2^k$  para algum  $k$ . Enuncia-se abaixo o teorema de que sabe-se construir as  $n - 1$  rodadas de  $n/2$  jogos cada.

**Teorema 3** *( $k$ ): Sabe-se construir  $2^k - 1$  rodadas de  $2^{k-1}$  jogos onde cada equipe enfrenta uma equipe diferente em cada rodada.*

- (a) Apresente a prova por indução matemática no parâmetro  $k$  do Teorema 3;
- (b) Apresente o algoritmo correspondente à prova do Teorema 3 apresentada e a sua respectiva implementação.
- (c) Teste o algoritmo para valores de  $k$ . Qual o maior valor para o qual o seu algoritmo gera as rodadas?