Ficha nº4

1\. a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,-1) - f(2,-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2+h+1}{2+h-1} - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h+3}{h+1} - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+3-3(h+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-3h}{h(h+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}(h+1)} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2,-1+h) - f(2,-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2-h+1}{2+h-1} - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h+3}{h+1} - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-3h}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-4\cancel{h}}{\cancel{h}(h+1)} = -4$$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1.$$

2\. a) $f(x,y) = 3x - 5y$

$f'_x = 3 \longrightarrow f''_{x^2} = 0 \quad e \quad f''_{xy} = 0$

$f'_y = -5 \longrightarrow f''_{yx} = 0 \quad e \quad f''_{y^2} = 0$

b) $f(x,y) = x^3y + 7x^2 - 2y^3 - 1$

$f'_x = 3x^2y + 14x$

$f''_{x^2} = 6xy + 14$

$f''_{xy} = 3x^2$

Ficha nº 4

2.b) $f'_y = x^3 - 6y^2$

$$f''_{yx} = 3x^2 \quad \wedge \quad f''_{y^2} = -12y$$

c) $g(x,y) = \dfrac{3x+y^2}{7x+y}$

$$g'_x = \frac{3(7x+y) - 7(3x+y^2)}{(7x+y)^2} = \frac{3y-7y^2}{(7x+y)^2}$$

$$g'_y = \frac{2y(3x+y^2) - (3x+y^2)}{(7x+y)^2} = \frac{2y^3+6xy-3x-y^2}{(7x+y)^2}$$

$$g''_{x^2} = \frac{-2\times 7(7x+y)}{(7x+y)^4} = \frac{-14}{(7x+y)^3}$$

$$g''_{xy} = g''_{yx} = \frac{(3-14y)(7x+y)^2 - 14(7x+y)(3y-7y^2)}{(7x+y)^4}$$

$$= \frac{(3-14y)(7x+y) - 14(3y-7y^2)}{(7x+y)^3}$$

$$g''_{y^2} = \frac{(6y^2+6x-2y)(7x+y)^2 - 2(7x+y)(2y^3+6xy-3x-y^2)}{(7x+y)^4}$$

$$= \frac{(6y^2-2y+6x)(7x+y) - 2(2y^3+6xy-3x-y^2)}{(7x+y)^3}$$

d) $g(s,t) = \exp(2s-t)$

$$g'_s = 2e^{2s-t} \longrightarrow g''_{s^2} = 4e^{2s-t}$$

$$g''_{st} = -2e^{2s-t}$$

$$g'_t = -e^{2s-t} \longrightarrow g''_{ts} = -2e^{2s-t}$$

$$\longrightarrow g''_{t^2} = e^{2s-t}$$

Ficha nº5

e) $h(u,v) = \text{sen}(u^2+4v)$

$h'_u = 2u\cos(u^2+4v) \longrightarrow h''_{u^2} = 2\cos(u^2+4v) - 4u^2\,\text{sen}(u^2+4v)$

$\hookrightarrow h''_{uv} = -8u\,\text{sen}(u^2+4v)$

$h'_v = 4\cos(u^2+4v) \longrightarrow h''_{vu} = -8u\,\text{sen}(u^2+4v)$

$\hookrightarrow h''_{v^2} = -16\,\text{sen}(u^2+4v)$

f) $u(x,y) = \cos(1+e^{xy})$

$\rightarrow u'_x(x,y) = -y\,e^{xy}.\text{sen}(1+e^{xy})$

$\hookrightarrow u''_{x^2}(x,y) = -y\left[y\,e^{xy}.\text{sen}(1+e^{xy}) + y e^{2xy}.\cos(1+e^{xy})\right]$

$u''_{xy}(x,y) = -e^{xy}.\text{sen}(1+e^{xy}) - yx\,e^{xy}.\text{sen}(1+e^{xy}) - xy\,e^{2xy}.\cos(1+e^{xy})$

$\rightarrow u'_y(x,y) = -x\,e^{xy}.\text{sen}(1+e^{xy})$

$u''_{yx} = u''_{xy}$

$u''_{y^2}(x,y) = -x\left[x\,e^{xy}.\text{sen}(1+e^{xy}) + x\,e^{2xy}.\cos(1+e^{xy})\right]$

g) $g(v,w) = v.\ln w$

$g'_v(v,w) = \ln w \longrightarrow g'_{v^2}(v,w) = 0$

$\hookrightarrow g'_{vw}(v,w) = \frac{1}{w}$

$g'_w(v,w) = \frac{v}{w} \longrightarrow g'_{wv}(v,w) = \frac{1}{w}$

$\hookrightarrow g''_{w^2}(v,w) = \frac{-v}{w^2}$.

Ficha nº4

h) $h(x,y) = e^x \ln(y^2+3x)$

$\longrightarrow h'_x(x,y) = e^x . \ln(y^2+3x) + \dfrac{e^x . 3}{y^2+3x}$

$h''_{x^2}(x,y) = e^x \ln(y^2+3x) + \dfrac{e^x . 3}{y^2+3x} + \dfrac{3e^x(y^2+3x) - 9e^x}{(y^2+3x)^2}$.

$h''_{xy}(x,y) = \dfrac{2ye^x}{y^2+3x} - \dfrac{6ye^x}{(y^2+3x)^2} = h''_{yx}(x,y)$

$\longrightarrow h'_y(x,y) = \dfrac{2ye^x}{y^2+3x}$

$h''_{y^2}(x,y) = \dfrac{2e^x(y^2+3x) - 4y^2e^x}{(y^2+3x)^2}$

i) $h(x,y) = \operatorname{arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\longrightarrow h'_x(x,y) = \dfrac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$h''_{x^2}(x,y) = \dfrac{2yx}{(x^2+y^2)^2} \quad \wedge \quad h''_{xy}(x,y) = \dfrac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = h''_{yx}$

$\longrightarrow h'_y(x,y) = \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \dfrac{1}{x+\frac{y^2}{x}} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

$h''_{y^2}(x,y) = \dfrac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}$

j) $p(x,y,z) = \int_0^{y . \operatorname{sen} z} x . 4^{2t} dt = x \int_0^{y \operatorname{sen} z} 4^{2t} . dt$

$p'_x = \int_0^{y \operatorname{sen} z} 4^{2t} . dt \longrightarrow p''_{x^2} = 0$

$\longrightarrow p''_{xy} = \operatorname{sen} z . 4^{2y \operatorname{sen} z}$

$\longrightarrow p''_{xz} = y \cos z . 4^{2y \operatorname{sen} z}$.

$$p'_y = x \operatorname{sen} z \, 4^{2y \operatorname{sen} z} \longrightarrow p''_{yx} = \operatorname{sen} z \cdot 4^{2y \operatorname{sen} z} = p''_{xy}$$

$$\longrightarrow p''_{yz} = x \left[\cos z \, 4^{2y \operatorname{sen} z} + 2y (\cos z) \operatorname{sen} z \cdot 4^{2y \operatorname{sen} z} \cdot \ln 4 \right]$$

$$\longrightarrow p''_{y2} = x \operatorname{sen} z \left[2 \operatorname{sen} z \, 4^{2y \operatorname{sen} z} \cdot \ln 4 \right].$$

$$p'_z = x y \cos z \, 4^{2y \operatorname{sen} z}$$

$$\longrightarrow p''_{zy} = p''_{yz}$$

$$\longrightarrow p''_{zx} = p''_{xz}$$

$$\longrightarrow p''_{z2} = xy \left[-\operatorname{sen} z \cdot 4^{2y \operatorname{sen} z} + (\cos z)^2 2y \cdot 4^{2y \operatorname{sen} z} \cdot \ln 4 \right]$$

3. $z = (x^2+y^2)^{1/3}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cdot \frac{1}{3} (x^2+y^2)^{-2/3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} + \frac{2y}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(2y)(x^2+y^2)^{-5/3}$$

$$= \frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} - \frac{8}{9} y^2 (x^2+y^2)^{-5/3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{8}{9} xy (x^2+y^2)^{-5/3}$$

Verificar a igualdade

$$3x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \iff$$

$$3x\left[-\frac{8}{9} xy (x^2+y^2)^{-5/3}\right] + 3y\left[\frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} - \frac{8}{9} y^2 (x^2+y^2)^{-5/3}\right] + \frac{2y}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} =$$

$$= \underbrace{-\frac{8}{3} y x^2 (x^2+y^2)^{-5/3}} + 2y (x^2+y^2)^{-2/3} \underbrace{- \frac{8}{3} y^3 (x^2+y^2)^{-5/3}} + \frac{2y}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} =$$

$$= -\frac{8}{3} y \left[x^2+y^2\right] (x^2+y^2)^{-5/3} + \frac{8y}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} =$$

$$= -\frac{8}{3} y (x^2+y^2)^{-2/3} + \frac{8y}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} = 0 \qquad \text{c.q.p.}$$

4\. a) $z = e^{kx} \cdot \cos(ky)$

$z'_x = k\, e^{kx} \cdot \cos(ky) \longrightarrow z''_{xy} = -k^2 e^{kx} \cdot \operatorname{sen}(ky)$

$\hookrightarrow z''_{x^2} = k^2 e^{kx} \cdot \cos(ky)$

$z'_y = -k\, e^{kx} \cdot \operatorname{sen}(ky) \longrightarrow z''_{y^2} = -k^2 \cdot e^{kx} \cdot \cos(ky)$

Todas estas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e

$z''_{x^2} + z''_{y^2} = k^2 e^{kx} \cdot \cos(ky) - k^2 e^{kx} \cdot \cos(ky) = 0.$

Logo $z = e^{kx} \cdot \cos(ky)$ é uma função harmónica.

b) $z = 3x^2y - y^3$

$z'_x = 6xy \longrightarrow z''_{x^2} = 6y$

$\hookrightarrow z''_{xy} = z''_{yx} = 6x$

$z'_y = 3x^2 - 3y^2 \longrightarrow z''_{y^2} = -6y$

Todas são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$ e

$z''_{x^2} + z''_{y^2} = 6y - 6y = 0$ logo $z = 3x^2y - y^3$ é uma função harmónica.

5\. Como $\underline{u}$ e $\underline{v}$ têm derivadas parciais de 2ª ordem contínuas, basta mostrar que $u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$ e $v''_{x^2} + v''_{y^2} = 0$.

Tem-se que $u''_{x^2} + u''_{y^2} = v''_{yx} - v''_{xy} = 0$

pela igualdade $u'_x = v'_y$ e $v'_x = -u'_y$

pelo Teor. de Schwarz.

Tem-se

$$v''_{x^2} + v''_{y^2} = -u''_{yx} + u''_{xy} = 0$$

pela igualdade
$u'_x = v'_y$
$v'_x = -u'_y$

pelo Teor. de Schwarz.

7. Seja $u(x,t) = t^{-1/2} e^{-x^2/4t}$. Mostrar que u satisfaz a equação do calor $u'_t = u''_{x^2}$.

Tem-se

$$u'_t = -\frac{t^{-3/2}}{2} \cdot e^{-x^2/4t} + \frac{x^2}{4} t^{-5/2} \cdot e^{-x^2/4t}$$

e $$u'_x = -\frac{x}{2} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \Longrightarrow u''_{x^2} = -\frac{t^{-3/2}}{2} e^{-x^2/4t} + \frac{x^2 t^{-5/2}}{4} e^{-x^2/4t}$$

e verifica-se que $u'_t = u''_{x^2}$.

8. $V(T,P) = 0{,}08 \times T \times \frac{1}{P}$

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -0{,}08 \times \frac{T}{P^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{0{,}08}{P}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P}(150,20) = -0{,}03 \qquad \frac{\partial V}{\partial T}(150,20) = 0{,}004.$$

Como $\frac{\partial V}{\partial T}(150,20) = 0{,}004 = \lim_{h\to 0} \frac{V(150+h,20) - V(150,20)}{h}$,

significa que, nas condições $T = 150$ e $P = 20$, se tem, para valores de h suficientemente pequenos:

$$V(150+h,20) - V(150,20) \approx 0{,}004h$$

Se houver uma alteração h no valor da pressão, então o volume sofrerá uma alteração de aproximadamente $0{,}004h$.

Como $\frac{\partial V}{\partial P}(150,20) = -0{,}03$, significa que

$$V(150, 20+h) - V(150,20) \approx -0{,}03h$$

Se houver uma alteração h no valor da pressão, então o volume sofrerá uma alteração de aproximadamente $-0{,}03h$.

9. $x \longrightarrow$ preço de cada televisão

$y \longrightarrow$ gasto semanal em publicidade

$f(x,y) \longrightarrow$ nº de televisões vendidos.

a) $x = 400$ e $y = 2000$, como será $\frac{\partial f}{\partial x}(400, 2000)$?

Tem-se

$$f(400+h, 2000) - f(400, 2000) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(400, 2000) \cdot h$$

Se houver uma alteração h no preço de cada TV, mantendo o gasto em publicidade, como ficará a diferença

$$f(400+h, 2000) - f(400, 2000) \; ?$$

Isto é, como será a alteração do nº de televisões vendidos?

— Se houver um aumento do preço da TV ($h>0$) então o nº de televisões diminuirá, isto é, $\underline{f(400+h, 2000) - f(400, 2000) < 0}$

Como $f(400+h, 2000) - f(400,2000) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(400, 2000) \cdot h$

tem-se que, neste caso, como $h > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(400, 2000) < 0.$$

b) Com um raciocínio análogo, se aumentarmos o gasto em publicidade, logo o nº de TV vendidos aumentará e $\frac{\partial f}{\partial y}(400,2000) > 0$.

10. $A = 92000 \rightarrow$ valor da hipoteca

$R\% = 9\% \rightarrow$ taxa de juro

$f(92000, 9) = 740{,}25 \longrightarrow$ valor mensal da prestação quando o valor da hipoteca é 92000 e a taxa de juro é 9%.

$\frac{\partial f}{\partial R}(92000, 9) = 66{,}2 \longrightarrow$ taxa de variação instantânea do valor da prestação mensal, relativamente à taxa de juro, isto é,

$$f(92000, 9+h) - f(92000, 9) \simeq 66{,}2 \cdot h$$

Se, nas condições $A = 92000$, $R\% = 9\%$ houver uma alteração h na taxa de juro, então o valor da prestação mensal ~~terá~~ uma alteração de 66,2h.

11. t - temperatura (em graus Celsius)

w - velocidade do vento (em m/seg.)

$H(t,w)$ - taxa da perda de calor (kcal/m²/h)

a) $H(0,4) = (10{,}45 + 10\sqrt{4} - 4)(33 - 0) = 26{,}45 \times 33 = 872{,}85$ kcal/m²/h

b) $\frac{\partial H}{\partial w}(t,w) = \left(\frac{5}{\sqrt{w}} - 1\right)(33 - t) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial w}(0,4) = 49{,}5.$

Nas condições $t = 0°C$ e $w = 4$ m/s, a taxa de variação instantânea da taxa perda de calor H, relativamente à velocidade do vento é $\frac{\partial H}{\partial w}(0,4) = 49{,}5$.

Se houver uma alteração h na velocidade do vento, a taxa perda de calor terá uma alteração de, aproximadamente, 49,5h.

$$H(0, 4+h) - H(0,4) \simeq 49{,}5h.$$

11.b) $\frac{\partial H}{\partial t}(t,w) = w - 10\sqrt{w} - 10.45 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t}(0,4) = -26,45.$

Nas mesmas condições $t = 0°C$ e $w = 4\,m/s$, a taxa de variação instantânea da taxa de perda de calor relativamente à temperatura é $\frac{\partial H}{\partial t}(0,4) = -26,45.$

Se houver uma alteração h na temperatura, a taxa de perda de calor terá uma alteração de, aproximadamente, $-26,45h$.

12. E – estatuto das habilitações literárias

G – estatuto da remuneração

S(E,G) – estatuto social.

$\frac{\partial S}{\partial E}(E,G) = \frac{7\sqrt{G}}{3\sqrt[3]{E^2}} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial E}(125,100) = \frac{14}{15}$ → taxa de variação instantânea de S relativamente a E.

Quando $E = 125$ e $G = 100$, se houver uma alteração h no estatuto das habilitações literárias, então o estatuto social sofrerá uma alteração $\frac{14}{15} \cdot h$.

$\frac{\partial S}{\partial G}(E,G) = \frac{7}{2}\frac{\sqrt[3]{E}}{\sqrt{G}} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial G}(125,100) = \frac{7}{4}$ → taxa de variação instantânea de S relativamente a G.

Quando $E = 125$ e $G = 100$, se houver uma alteração h no estatuto da remuneração então o estatuto social sofrerá uma alteração de $\frac{7}{4} \cdot h$.

13. $w \to$ nº médio de palavras em cada frase
s – nº " de sílabas

$R=f(w,s) \to$ legibilidade do texto com w médio palavras em cada frase e s médio de sílabas.

a) $\frac{\partial R}{\partial w} = -1{,}015$ $\qquad \frac{\partial R}{\partial s} = -0{,}846$.

Qual é mais fácil de ler? A legibilidade de um texto com $w=w_0$ e $s=s_0$ é $f(w_0,s_0)$
a legibilidade de um texto com $w=w_0+1$ e $s=s_0$ é $f(w_0+1,s_0)$.

Será que $R(w_0+1,s_0)-R(w_0,s_0)$ é positivo ou negativo?

$$R(w_0+1,s_0)-R(w_0,s_0) \simeq \frac{\partial R}{\partial w}(w_0,s_0)\cdot 1 \simeq -1{,}015.$$

Então $R(w_0+1,s_0)-R(w_0,s_0)<0 \Leftrightarrow R(w_0+1,s_0)<R(w_0,s_0)$

Logo um texto nas condições (w_0+1,s_0) é menos legível que um texto nas condições (w_0,s_0).

14. a) p_1 – preço do bilhete de autocarro
p_2 – " " de comboio
$f(p_1,p_2)$ – nº de pessoas que escolhem o autocarro.

Sabemos que, se o preço do autocarro (p_1) aumentar, então o nº de pessoas ~~f~~ que escolhem o autocarro diminui.
Isto é, para $h>0$,

$$f(p_1+h, p_2) - f(p_1,p_2) < 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} \cdot h < 0, \text{ com } h>0$$

Logo $\frac{\partial f}{\partial p_1} < 0$.

Raciocínio semelhante para justificar $\frac{\partial f}{\partial p_2} > 0$.

b) $g(p_1,p_2) \rightarrow$ nº de pessoas que escolhem o comboio.

Se o preço do autocarro aumentar $p_1 \longrightarrow p_1+h$ com $h>0$, então haverá um aumento do nº pessoas no comboio:

$$g(p_1+h, p_2) > g(p_1,p_2)$$

$$g(p_1+h,p_2) - g(p_1,p_2) > 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial p_1} \cdot h > 0 \quad \text{com } h>0$$

Logo $\frac{\partial g}{\partial p_1} > 0$.

E do mesmo modo, se mostra que $\frac{\partial g}{\partial p_2} < 0$.

15.

p_1 – preço de cada carro

p_2 – " do combustível por litro.

$f(p_1, p_2) \rightarrow$ nº de pessoas que compram o carro.

$\frac{\partial f}{\partial p_1} < 0$ → pois crescimento da variável p_1 $\left(p_1 \xrightarrow[\text{com } h>0]{} p_1+h\right)$ provocará diminuição da função f.

$$f(p_1+h, p_2) - f(p_1, p_2) \approx \frac{\partial f}{\partial p_1} \cdot h$$

$\frac{\partial f}{\partial p_2} < 0$ → porque aumento da variável p_2 $\left(p_2 \xrightarrow[\text{com } h>0]{} p_2+h\right)$ provocará uma diminuição da função f.

16.

m – salário real de uma pessoa

p – preço médio dos alimentos.

R – " de outros bens e serviços.

$f(m, p, R)$ – consumo anual de alimentos.

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0,6 \times 2,186 \times m^{-0,4}\, p^{-0,5}\, R^{0,9}$$

$\frac{\partial f}{\partial m} > 0$, pois se o salário aumentar $(m \longrightarrow m+h,\ \text{com } h>0)$ então o consumo anual de comida também aumenta

$$f(m+h, p, R) > f(m, p, R)$$

$\cancel{\frac{\partial f}{\partial p} < 0}$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -0,5 \times 2,186 \times m^{0,6}\, p^{-1,5}\, R^{0,9}$$

$\frac{\partial f}{\partial p} < 0$ → se o preço da comida aumentar, o consumo de comida diminuirá

$$f(m, p+h, R) < f(m, p, R) \quad \text{para } h>0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 0,9 \times 2,186\, m^{0,6}\, p^{-0,5}\, R^{-0,1}$$

$\frac{\partial f}{\partial R} > 0 \rightarrow$ se os preços de outros bens e serviços aumentarem, o consumo de comida aumenta.

17. $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 5y$

a) $$f(1+h,4) = 3(1+h)^2 + 2(1+h)\times 4 + 5\times 4$$
$$= 3h^2 + 14h + 31$$

$$f(1,4) = 3 + 8 + 20 = 31$$

$$f(1+h,4) - f(1,4) = 3h^2 + 14h$$

b) Para $h = 0,01$

se usar a aproximação dada de $14h$

$$f(1{,}01,4) - f(1,4) \approx 0,14$$

isto é $f(1.01,4) \approx f(1.4) + 0,14$

E o erro é $3\times h^2 \underset{h=0,01}{=} 3\times(0,01)^2 = 0,0003$