Ficha nº3

1

1\. a) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} (2x-y^2) = 2\times 2 - 3^2 = 4-9 = -5$

b) $\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{3},2)} y \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 2\times\frac{1}{2} = 1$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0+0 = 0$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y-3x}{x} = \frac{1-0}{0} = \infty$

2\. a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y}{x+3y} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

Limites iterados:

- $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{2x-y}{x+3y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{-y}{3y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

- $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{2x-y}{x+3y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{2x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} 2 = 2$

Como os limites iterados são diferentes, então

não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y}{x+3y}$

Ficha nº3

2.b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

Limites iterados

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2+y^2}{y} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{y^2}{y} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}} y = 0$

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2+y^2}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2}{0} = \infty$

Logo, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$.

2.c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

Limites iterados

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{-y^2}{y^2} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}} -1 = -1$.

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} 1 = 1$.

Ficha nº3

2.d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

Limites iterados

- $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{0}{y^2} = 0$

- $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{0}{x^4} = 0$. Nada se pode concluir.

- Calcular o limite pelas rectas $y=mx$, $m\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2x^2 \cdot mx}{x^4+(mx)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\ y=mx}} \frac{2mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{\substack{x\to0\\ y=mx}} \frac{2mx^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(x^2+m^2)} = \lim_{\substack{x\to0\\ y=mx}} \frac{2mx}{x^2+m^2}$$

$$= \frac{0}{m^2} = 0$$ Nada se ~~pode~~ concluir.

- calcular o limite pelas parábolas $y=mx^2$, $m\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} \frac{2x^2(mx^2)}{x^4+(mx^2)^2} = \lim_{x\to0} \frac{2mx^4}{x^4+m^2x^4} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

Como o limite depende do valor de m, então não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$.

Ficha nº 3

3\. a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{5x^2-y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - y^2 \neq 0\} \cup \{(0,0)\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm\sqrt{5}\,x\} \cup \{(0,0)\}.$

Estudar a continuidade de f em $(0,0)$:

- $f(0,0) = 1$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{5x^2-y^2} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação).

Pelos limites iterados dá zero, por isso nada se pode concluir.

Pelas rectas $y = mx$, $m \neq \sqrt{5}, -\sqrt{5}$ ($y = \sqrt{5}\,x$ e $y = -\sqrt{5}\,x$ não fazem parte do domínio).

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \dfrac{2xy}{5x^2-y^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \dfrac{2x(mx)}{5x^2-(mx)^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \dfrac{2mx^2}{5x^2-m^2x^2} =$

$= \dfrac{2m}{5-m^2}$. Como depende do valor de m, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Logo f não é contínua em $(0,0)$.

Ficha nº3

Estudar a continuidade de f para $(x,y) \neq (0,0)$:

Como f está definida por $\frac{2xy}{5x^2-y^2}$, um quociente de polinómios no D_f, onde o denominador não se anula, f é contínua para $(x,y) \neq (0,0)$.

Assim, f é contínua em $D_f \setminus \{(0,0)\} =$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm\sqrt{5}\,x\}.$$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{5x-y} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x-y \neq 0\} \cup \{(0,0)\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 5x\} \cup \{(0,0)\}.$

Estudar a continuidade em $(0,0)$

- $f(0,0) = 0$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{5x-y}$ não existe $\to$ calcular pelos limites iterados que dão valores diferentes.

Assim, f não é contínua em $(0,0)$.

Estudar a continuidade para $(x,y) \neq (0,0)$

Como f está definida por um quociente de polinómios, ~~logo~~ em D_f, onde o denominador não se anula então f é contínua em $(x,y) \neq (0,0)$.

Conclusão: f é contínua em $D_f \setminus \{(0,0)\} =$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 5x\}.$$

4. $f(2,2) = k$

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{(x-y)}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} (x+y) = 4.$$

Para que f seja contínua em $(2,2)$, $k = 4$.