

# UNIK 4490 - Obligatorisk oppgave 1

David Kolden, davidko

7. oktober 2017

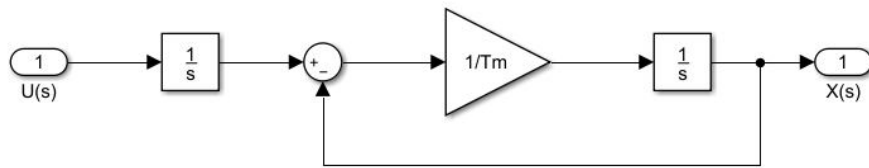
## 1

### 1.a

Finner poler ved å løse  $s(1 + T_M s) = 0$  som gir polene  $s = 0$  og  $s = -\frac{1}{T_M}$ . Systemet er stabilt for alle positive verdier av  $T_M$ .

### 1.b

Figur 1 viser blokkskjema for  $\frac{X(s)}{U(s)} = H(s) = \frac{1}{s(1+T_M s)}$



Figur 1: Blokkskjema for  $H(s)$

### 1.c

$H(s)$  har to poler og er derfor et andreordens system.

Setter  $U(s) = K(1 + T_D s)E(s)$ ,  $E(s) = R(s) - X(s)$ ,  $U(s) = K(1 + T_D s)(R(s) - X(s))$  sammen med  $H(s)$ :

$$X(s) = H(s)U(s) = H(s)K(1 + T_D s)(R(s) - X(s))$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= H(s)K(1 + T_D s)R(s) - H(s)K(1 + T_D s)X(s) \\
X(s)(1 + H(s)K(1 + T_D s)) &= H(s)K(1 + T_D s)R(s) \\
\frac{X(s)}{R(s)} = H_C(s) &= \frac{H(s)K(1 + T_D s)}{1 + H(s)K(1 + T_D s)} \\
H_C(s) &= \frac{K(1 + T_D s)}{\frac{1}{H(s)} + K(1 + T_D s)}
\end{aligned}$$

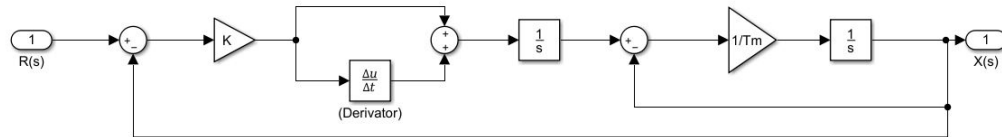
Setter inn for  $H(s)$ :

$$\begin{aligned}
H_C(s) &= \frac{K(1 + T_D s)}{s(1 + T_M s) + K(1 + T_D s)} \\
H_C(s) &= \frac{K(1 + T_D s)}{s^2 T_M + s + K T_D s + K} \\
H_C(s) &= \frac{(1 + T_D s)}{s^2 \frac{T_M}{K} + s(\frac{1}{K} + T_D) + 1}
\end{aligned}$$

Ser at systemet med kontroller fortsatt er et andreordens system.

### 1.d

Figur to viser blokkskjema for systemet med kontroller ( $H_C(s)$ )



Figur 2: Blokkskjema for  $H_C(s)$

### 1.e

$H_C(s)$  har ett nullpunkt og to poler. Nullpunktet finnes ved å sette telleren i  $H_C(s)$  til null, mens man finner polene ved å sette nevneren til null. Polene kan dermed finnes med uttrykket

$$s = \frac{-(\frac{1}{K} + T_D) \pm \sqrt{(\frac{1}{K} + T_D)^2 - 4\frac{T_M}{K}}}{2\frac{T_M}{K}}$$

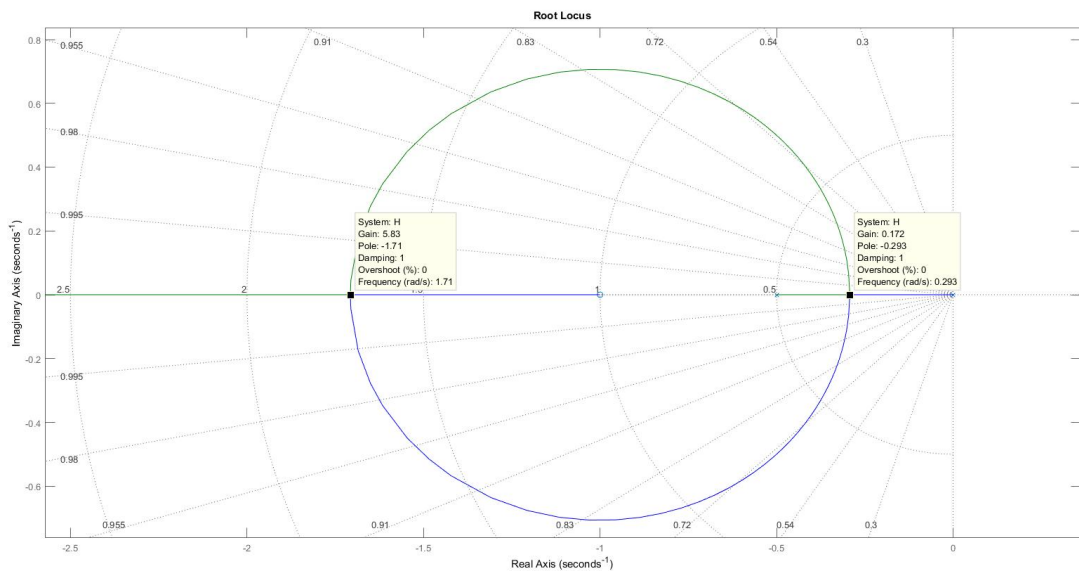
mens nullpunktene finnes med uttrykket

$$s = -\frac{1}{T_D}$$

Ved å sette inn for  $T_M = 2$  og  $T_D = 1$  får vi til slutt et nullpunkt i  $s = -1$  og to poler i

$$s = \frac{-(\frac{1}{K} + 1) \pm \sqrt{(\frac{1}{K} + 1)^2 - 4\frac{2}{K}}}{2\frac{2}{K}} = \frac{-(1 + K)}{4} \pm \frac{\sqrt{(1 + K)^2 - 8K}}{4}$$

Realdelen til polene vil være negative for alle  $K > 0$ . Systemet er derfor asymptotisk stabilt for alle  $K > 0$ . Polene vil ha en imaginær del for  $5.83 > K > 0.17$ . Da er systemet underdempet ettersom  $0 < \zeta < 1$ . Dempningsfaktoren  $\zeta$  gis som  $\frac{1+KT_D}{2\sqrt{T_M K}} = \frac{1+K}{2\sqrt{2K}}$ , og den udepede resonansfrekvensen gis av  $\sqrt{\frac{K}{T_M}} = \sqrt{\frac{K}{2}}$ .



Figur 3: Locusplot av  $H_C$

## 2

Et system kan verifiseres som stabilt for en kandidatfunksjon  $V(x, y)$  hvis

- $V(x, y) > 0 \quad \forall x \neq 0, y \neq 0$

- $V(x, y) = 0 \quad x = y = 0$
- $V(x, y) \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$
- $\dot{V}(x, y) < 0$

Med en kandidatfunksjon

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

ser vi at kravene fra første, andre og tredje punkt er godkjente ettersom begge uttrykkene er kvadratiske.

Med systemet

$$\dot{x} = -y - x^3$$

$$\dot{y} = x - y^3$$

kan systemet verifiseres ved å finne  $\dot{V}(x, y)$ .

$$\dot{V}(x, y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$$

$$\dot{V}(x, y) = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3)$$

$$\dot{V}(x, y) = -2xy - 2x^4 + 2xy - 2y^4$$

$$\dot{V}(x, y) = -x^4 - y^4$$

Vi ser at  $\dot{V}(x, y)$  er godkjent i forhold til det siste kravet ettersom  $x^4$  og  $y^4$  ikke kan bli negative.

### 3

#### 3.a

En PD-kontroller med gravitasjonskompensasjon består av et proporsjonalledd, et derivatledd og et ledd som kompenserer for gravitasjonskreftene på manipulatoren. Proporsjonalleddet forsterker avviket mellom ønsket leddposisjon  $q_d$  og faktisk leddposisjon  $q$ . Derivatleddet forsterker leddhastighetene til manipulatoren og trekker det fra pådraget. Gravitasjonskreftene forandrer seg som funksjon av leddposisjonene. Det fulle uttrykket for kontrolleren er

$$u = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} + g(q)$$

hvor

$$\bullet K_P = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{p2} \end{bmatrix}$$

$$\bullet K_D = \begin{bmatrix} k_{d1} & 0 \\ 0 & k_{d2} \end{bmatrix}$$

- $q_d = \begin{bmatrix} \vartheta_{d1} \\ \vartheta_{d2} \end{bmatrix}$
- $q = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$
- $\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$
- $g(q) = \begin{bmatrix} (m_{l1}l_1 + m_{m2}a_1 + m_{l2}a_1)g\cos(\vartheta_1) + m_{l2}l_2g\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ m_{l2}l_2g\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$

hvor

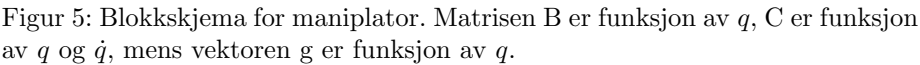
- $m_{l1} = 50$  kg og er massen til *link*<sub>1</sub>.
- $m_{l2} = 50$  kg og er massen til *link*<sub>2</sub>.
- $m_{m2} = 5$  kg og er massen til *motor*<sub>2</sub>.
- $l_1 = 0.5$  m og er avstanden fra starten av *link*<sub>1</sub> til *link*<sub>1</sub>s tyngdepunkt.
- $l_2 = 0.5$  m og er avstanden fra starten av *link*<sub>2</sub> til *link*<sub>2</sub>s tyngdepunkt.
- $a_1 = 1$  m og er lengden til *link*<sub>1</sub>.
- $a_2 = 1$  m og er lengden til *link*<sub>2</sub>.
- $\vartheta_1$  er vinkelen til *ledd*<sub>1</sub>.
- $\vartheta_2$  er vinkelen til *ledd*<sub>2</sub>.
- $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>.

Dette gir følgende uttrykk for pådraget  $u$ :

$$u = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{d1} - \vartheta_1 \\ \vartheta_{d2} - \vartheta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{d1} & 0 \\ 0 & k_{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_{l1}l_1 + m_{m2}a_1 + m_{l2}a_1)g\cos(\vartheta_1) + m_{l2}l_2g\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ m_{l2}l_2g\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$$

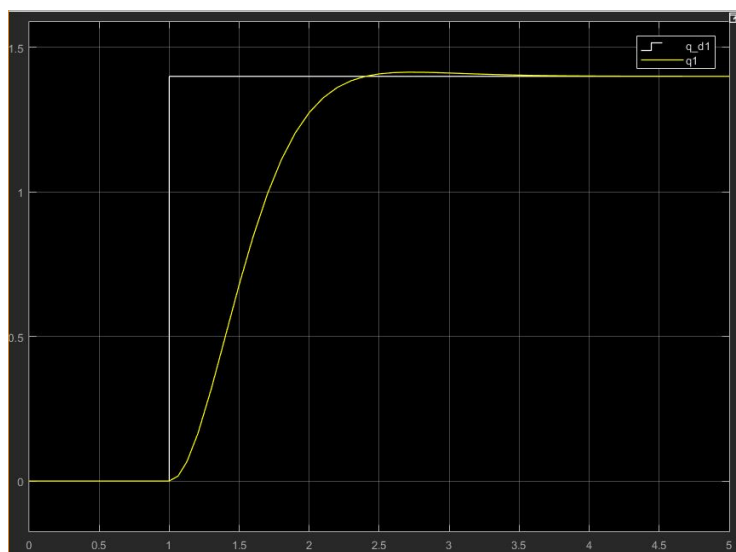
### 3.b

Blokkskjema for kontroller og manipulator gis i figur 4 og figur 5.

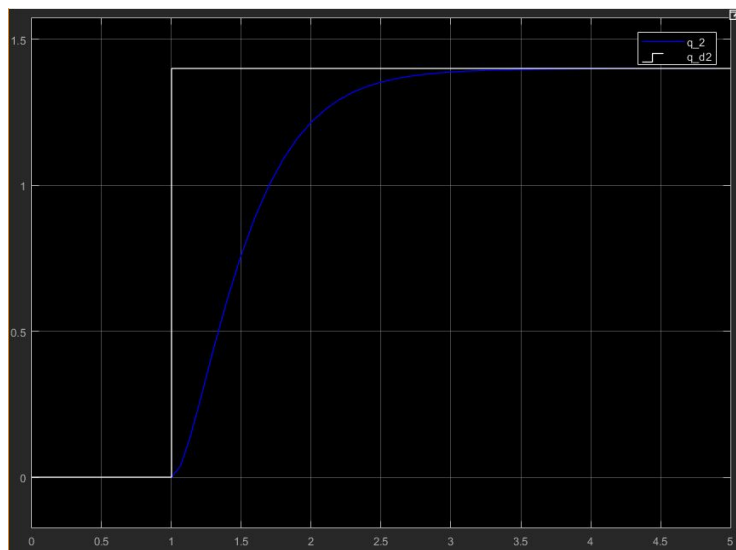


### 3.c

$K_P$  og  $K_D$  ble satt til  $2400I$  og  $1300I$ . Figur 6 viser sprangrespons for  $\vartheta_1$ ,  $ledd_1$ , figur 7 viser sprangrespons for  $\vartheta_2$ ,  $ledd_2$ .



Figur 6: Plot av  $\vartheta_1$ s (gult) respons på spranget i  $\vartheta_{d1}$  (hvitt).



Figur 7: Plot av  $\vartheta_2$ s (blått) respons på spranget i  $\vartheta_{d2}$  (hvitt).

### 3.d

Med invers dynamikkontroll vil vi ha et pådrag  $u$  slik at

$$u = B(q)y + n(q, \dot{q})$$

hvor  $n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q)$ . Målet er å ende opp med  $y = \ddot{q}$ .

Representerer  $y$  med

$$y = -K_P q - K_D \dot{q} + r$$

og setter

$$r = \ddot{q}_d + K_D \dot{q}_d + K_P q_d$$

Setter representasjonen av  $r$  inn i  $y$  og får

$$y = \ddot{q}_d + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q}$$

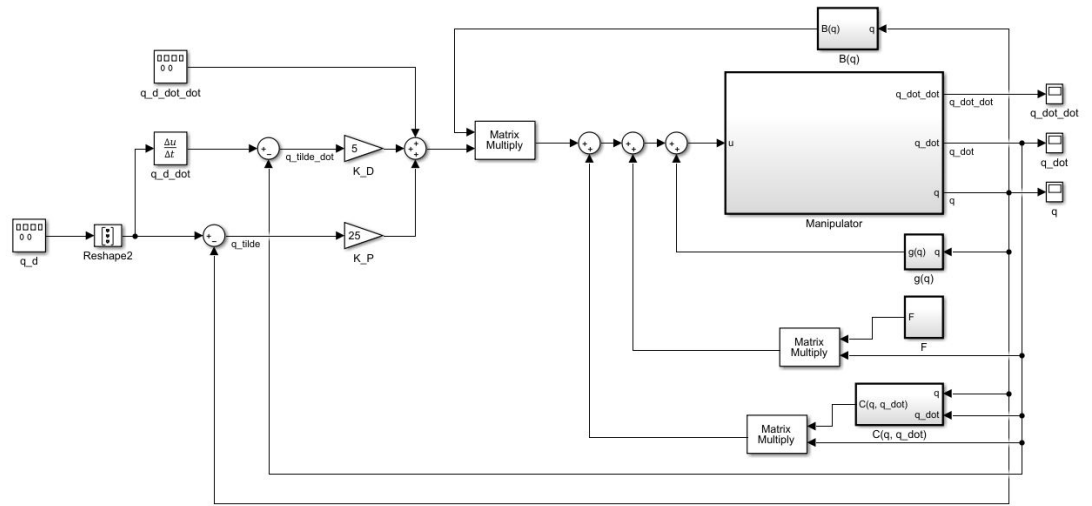
hvor  $\tilde{q} = q_d - q$ .

Setter  $y$  inn i uttrykket for  $u$  og får

$$u = B(q)(\ddot{q}_d + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q}) + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q)$$

### 3.e

Blokkskjema for invers dynamikkontroller gis i figur 8.

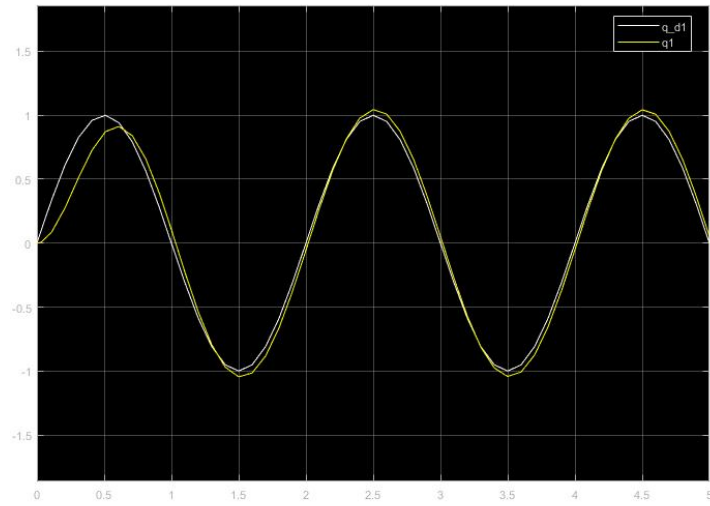


Figur 8: Blokkskjema for invers dynamikkontroller.  $q_d$  ble generert som et sinus-signal, mens  $\dot{q}_d$  ble generert som den deriverte av sinus-signalet.  $\ddot{q}_d$  ble generert som eget signal på samme måte som  $q_d$ .

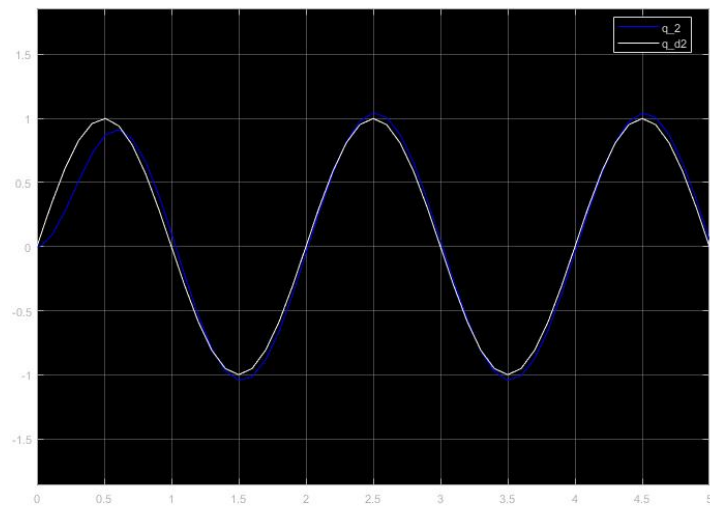


### 3.f

- For  $f = 0.5$  Hz:

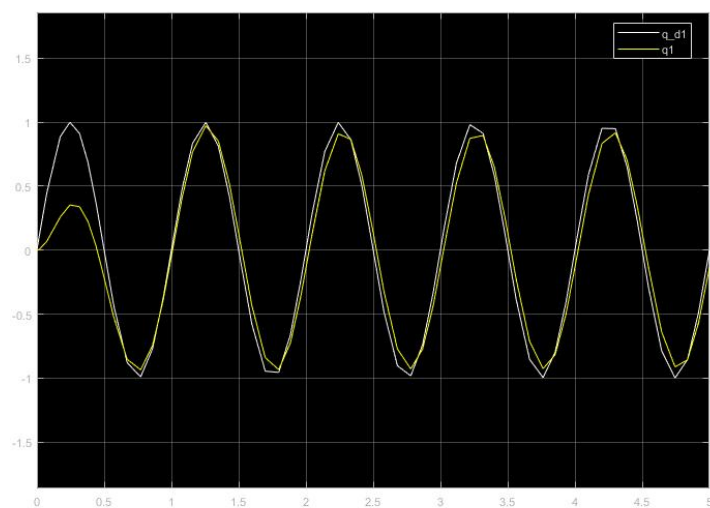


Figur 9:  $q_1$  følger pådraget relativt godt. Det er et lite avvik i oppstarten på ca 0.1.

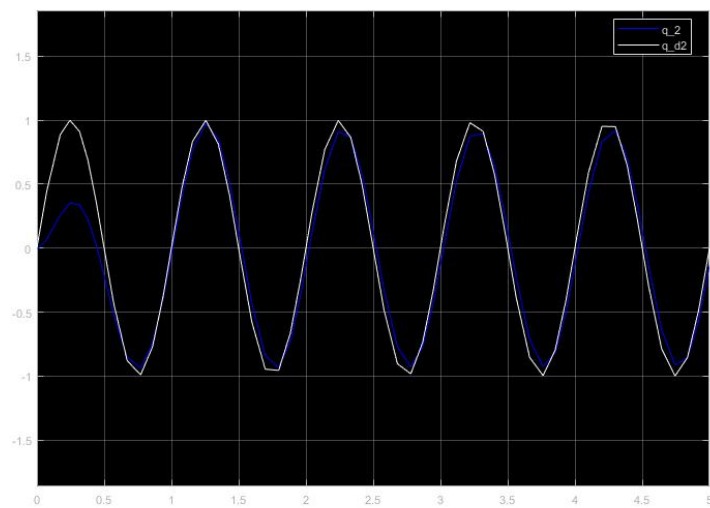


Figur 10:  $q_2$  følger pådraget på samme måte som  $q_1$ .

- For  $f = 1.0$  Hz:

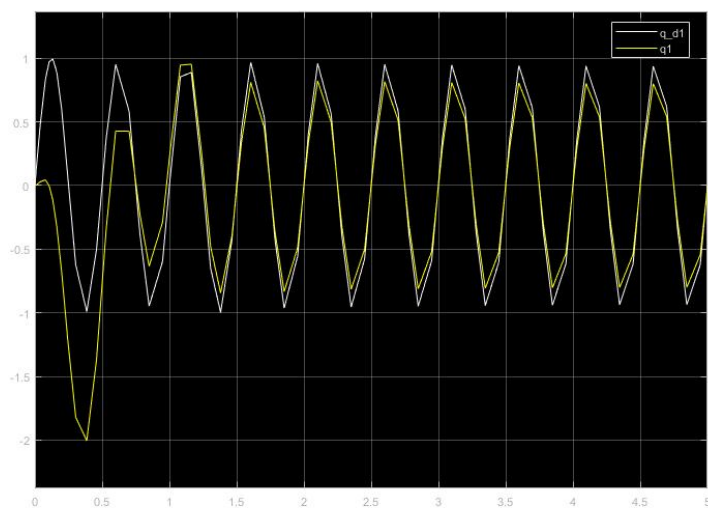


Figur 11: Ved 1,0 Hz ses det et tydeligere avvik i oppstarten. Avviket i amplituden er på ca 0.6.

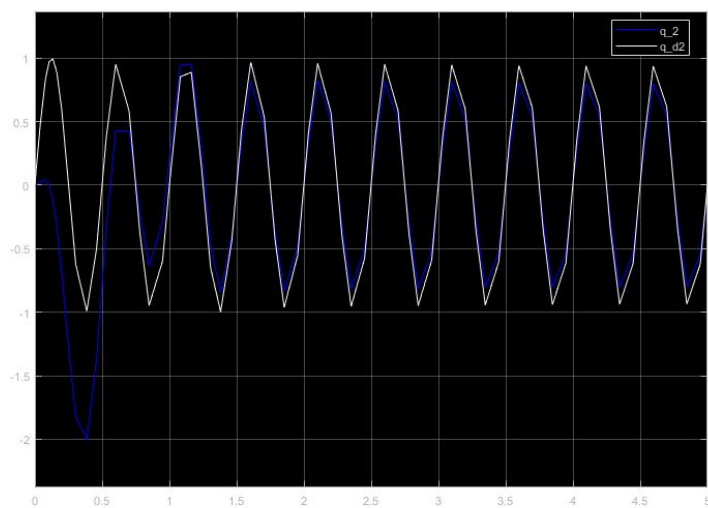


Figur 12:  $q_2$  følger pådraget på samme måte som  $q_1$ .

- For  $f = 2.0$  Hz:



Figur 13: Systemet får større og større avvik i oppstarten av systemet. Avviket er på ca 1.



Figur 14:  $q_2$  følger pådraget på samme måte som  $q_1$ .

Det ses at avviket øker med frekvensen i pådraget. Dempningen  $\zeta$  og den udempede resonansfrekvensen  $\omega_n$  gis av  $K_P$  og  $K_D$ :

$$K_P = \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{bmatrix}$$

$$K_D = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\zeta_1\omega_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

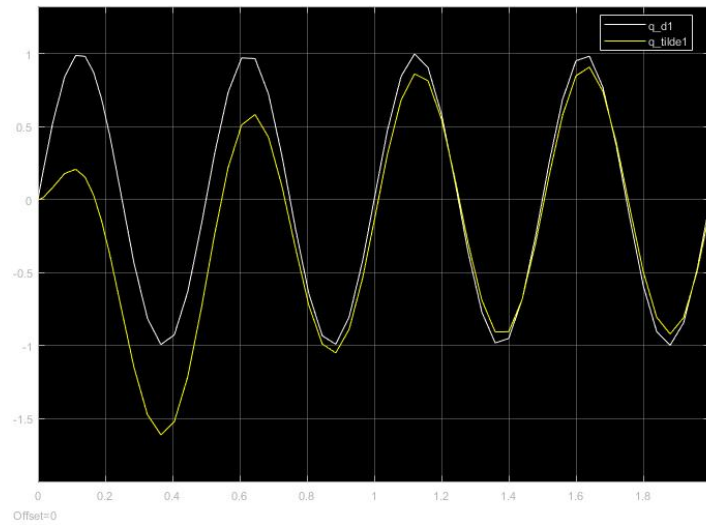
Dette gir  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.5$ . Et system er underdempet når  $0 < \zeta < 1$ . Derfor er dette systemet underdempet.

### 3.g

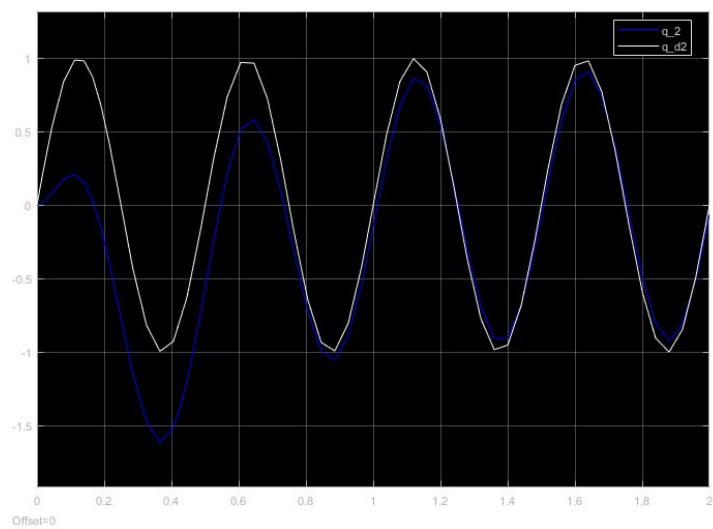
Et kritisk dempet system har  $\zeta = 1$ . Da må  $K_D$  justeres:

$$K_D = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\zeta_1\omega_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \cdot 5 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 1 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Figur 15 og figur 16 viser plot av simulering med nye verdier for  $K_D$ .

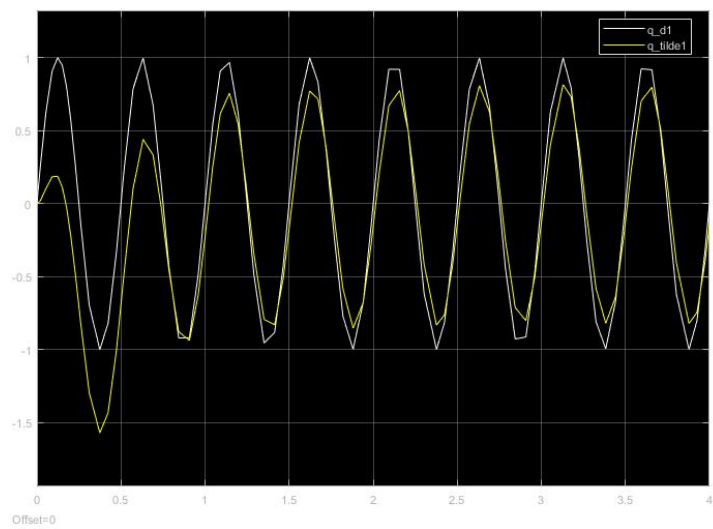


Figur 15: Responsen til  $q_1$ . Responsen er forbedret.

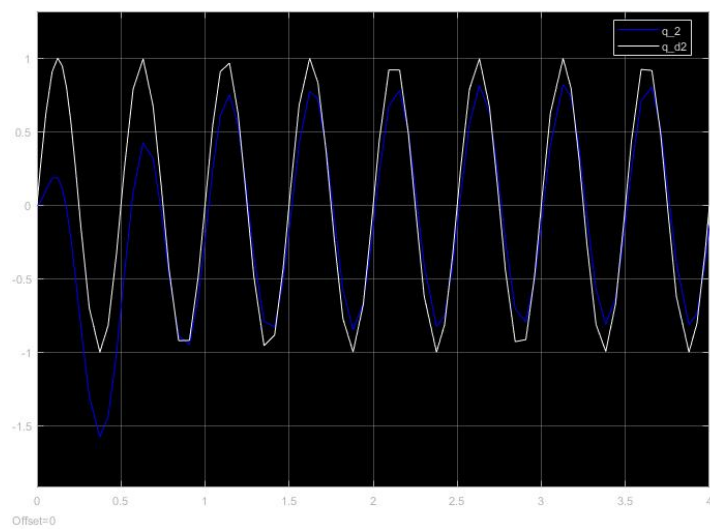


Figur 16: Viser samme resultat som for  $q_1$ .

### 3.h



Figur 17: .



Figur 18: Viser samme resultat som for  $q_1$ .