

UNIK 4490 - Obligatorisk oppgave 1

David Kolden, davidko

5. oktober 2017

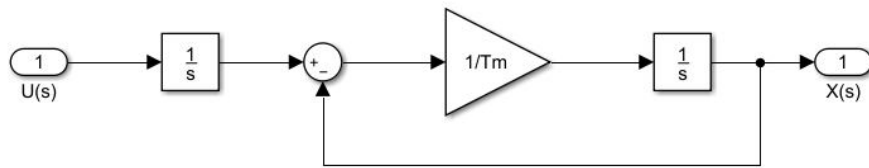
1

1.a

Finner poler ved å løse $s(1 + T_M s) = 0$ som gir polene $s = 0$ og $s = -\frac{1}{T_M}$. Systemet er stabilt for alle positive verdier av T_M .

1.b

Figur 1 viser blokkskjema for $\frac{X(s)}{U(s)} = H(s) = \frac{1}{s(1+T_M s)}$



Figur 1: Blokkskjema for $H(s)$

1.c

$H(s)$ har to poler og er derfor et andreordens system.

Setter $U(s) = K(1 + T_D s)E(s)$, $E(s) = R(s) - X(s)$, $U(s) = K(1 + T_D s)(R(s) - X(s))$ sammen med $H(s)$:

$$X(s) = H(s)U(s) = H(s)K(1 + T_D s)(R(s) - X(s))$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= H(s)K(1 + T_D s)R(s) - H(s)K(1 + T_D s)X(s) \\
X(s)(1 + H(s)K(1 + T_D s)) &= H(s)K(1 + T_D s)R(s) \\
\frac{X(s)}{R(s)} = H_C(s) &= \frac{H(s)K(1 + T_D s)}{1 + H(s)K(1 + T_D s)} \\
H_C(s) &= \frac{K(1 + T_D s)}{\frac{1}{H(s)} + K(1 + T_D s)}
\end{aligned}$$

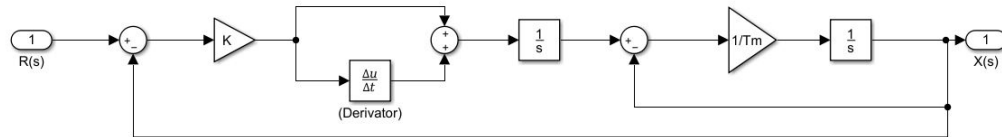
Setter inn for $H(s)$:

$$\begin{aligned}
H_C(s) &= \frac{K(1 + T_D s)}{s(1 + T_M s) + K(1 + T_D s)} \\
H_C(s) &= \frac{K(1 + T_D s)}{s^2 T_M + s + K T_D s + K} \\
H_C(s) &= \frac{(1 + T_D s)}{s^2 \frac{T_M}{K} + s(\frac{1}{K} + T_D) + 1}
\end{aligned}$$

Ser at systemet med kontroller fortsatt er et andreordens system.

1.d

Figur to viser blokkskjema for systemet med kontroller ($H_C(s)$)



Figur 2: Blokkskjema for $H_C(s)$

1.e

$H_C(s)$ har ett nullpunkt og to poler. Nullpunktet finnes ved å sette telleren i $H_C(s)$ til null, mens man finner polene ved å sette nevneren til null. Polene kan dermed finnes med uttrykket

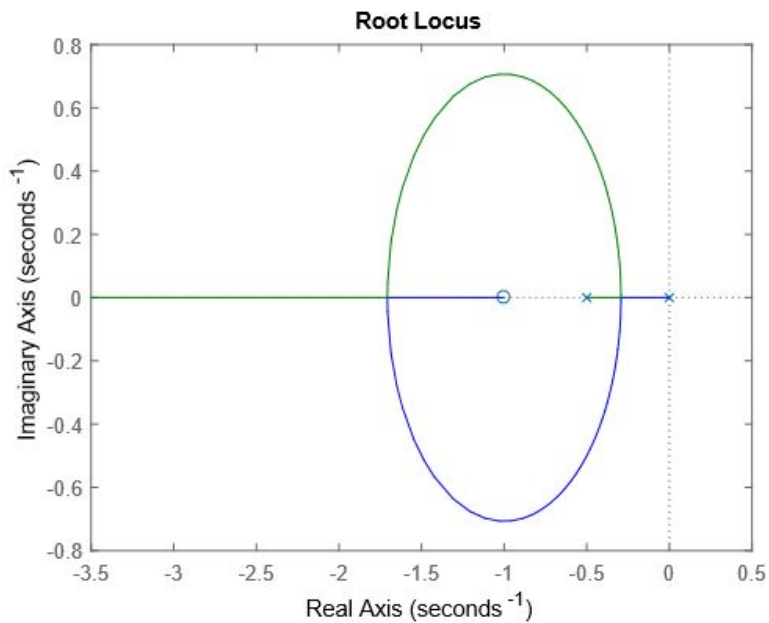
$$s = \frac{-(\frac{1}{K} + T_D) \pm \sqrt{(\frac{1}{K} + T_D)^2 - 4\frac{T_M}{K}}}{2\frac{T_M}{K}}$$

mens nullpunktene finnes med uttrykket

$$s = -\frac{1}{T_D}$$

Ved å sette inn for $T_M = 2$ og $T_D = 1$ får vi til slutt et nullpunkt i $s = -1$ og to poler i

$$s = \frac{-(\frac{1}{K} + 1) \pm \sqrt{(\frac{1}{K} + 1)^2 - 4\frac{2}{K}}}{2\frac{2}{K}}$$



Figur 3: Locusplot av H_C

Med $K \approx 0.17$, så er systemet

2

Et system kan verifiseres som stabilt for en kandidatfunksjon $V(x, y)$ hvis

- $V(x, y) > 0 \quad \forall x \neq 0, y \neq 0$

- $V(x, y) = 0 \quad x = y = 0$
- $V(x, y) \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$
- $\dot{V}(x, y) < 0$

Med en kandidatfunksjon

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

ser vi at kravene fra første, andre og tredje punkt er godkjente ettersom begge uttrykkene er kvadratiske.

Med systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x^3 \\ \dot{y} &= x - y^3\end{aligned}$$

kan systemet verifiseres ved å finne $\dot{V}(x, y)$.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ \dot{V}(x, y) &= 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) \\ \dot{V}(x, y) &= -2xy - 2x^4 + 2xy - 2y^4 \\ \dot{V}(x, y) &= -x^4 - y^4\end{aligned}$$

Vi ser at $\dot{V}(x, y)$ er godkjent i forhold til det siste kravet ettersom x^4 og y^4 ikke kan bli negative.

3

3.a

En PD-kontroller med gravitasjonskompensasjon består av et proporsjonalledd, et derivatledd og et ledd som kompenserer for gravitasjonskreftene på manipulatoren. Proporsjonalleddet forsterker avviket mellom ønsket leddposisjon q_d og faktisk leddposisjon q . Derivatleddet forsterker leddhastighetene til manipulatoren og trekker det fra pådraget. Gravitasjonskreftene forandrer seg som funksjon av leddposisjonene. Det fulle uttrykket for kontrolleren er

$$u = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} + g(q)$$

hvor

$$\begin{aligned}\bullet \quad K_P &= \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{p2} \end{bmatrix} \\ \bullet \quad K_D &= \begin{bmatrix} k_{d1} & 0 \\ 0 & k_{d2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- $q_d = \begin{bmatrix} \vartheta_{d1} \\ \vartheta_{d2} \end{bmatrix}$
- $q = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$
- $\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$
- $g(q) = \begin{bmatrix} (m_{l1}l_1 + m_{m2}a_1 + m_{l2}a_1)g\cos(\vartheta_1) + m_{l2}l_2g\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ m_{l2}l_2g\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$

hvor

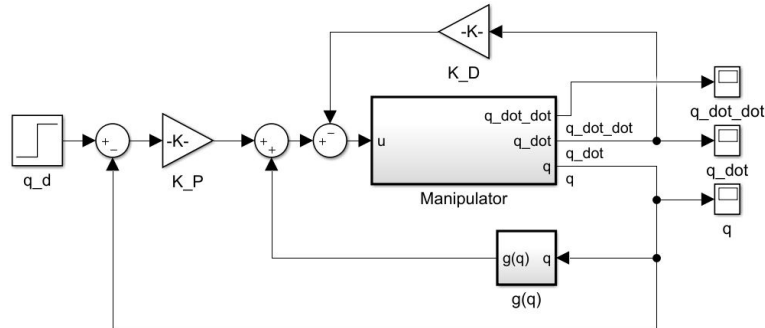
- $m_{l1} = 50$ kg og er massen til *link*₁.
- $m_{l2} = 50$ kg og er massen til *link*₂.
- $m_{m2} = 5$ kg og er massen til *motor*₂.
- $l_1 = 0.5$ m og er avstanden fra starten av *link*₁ til *link*₁s tyngdepunkt.
- $l_2 = 0.5$ m og er avstanden fra starten av *link*₂ til *link*₂s tyngdepunkt.
- $a_1 = 1$ m og er lengden til *link*₁.
- $a_2 = 1$ m og er lengden til *link*₂.
- ϑ_1 er vinkelen til *ledd*₁.
- ϑ_2 er vinkelen til *ledd*₂.
- $g = 9.81$ m/s².

Dette gir følgende uttrykk for pådraget u :

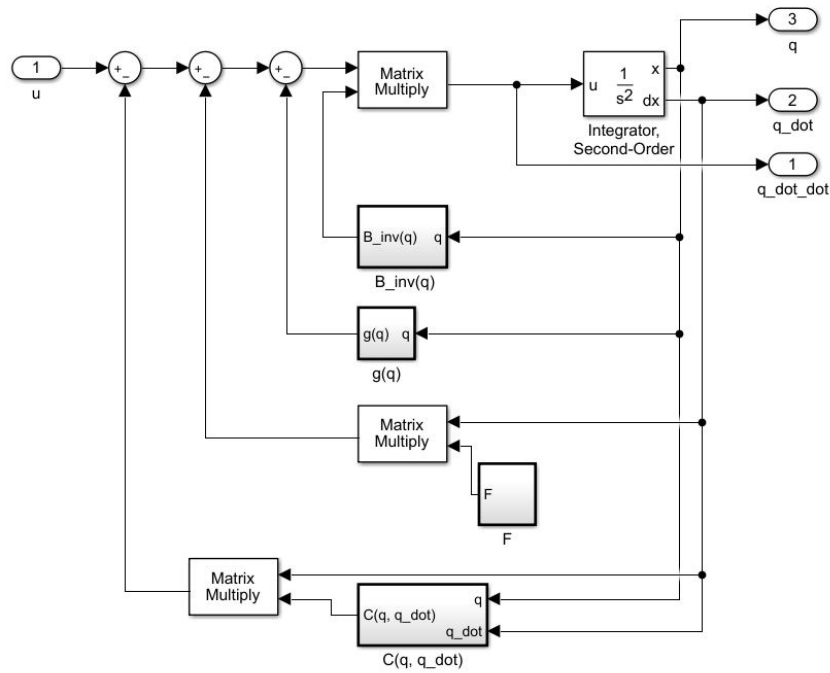
$$u = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{d1} - \vartheta_1 \\ \vartheta_{d2} - \vartheta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{d1} & 0 \\ 0 & k_{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_{l1}l_1 + m_{m2}a_1 + m_{l2}a_1)g\cos(\vartheta_1) + m_{l2}l_2g\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ m_{l2}l_2g\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$$

3.b

Blokkskjema for kontroller og manipulator gis i figur 4 og figur 5.



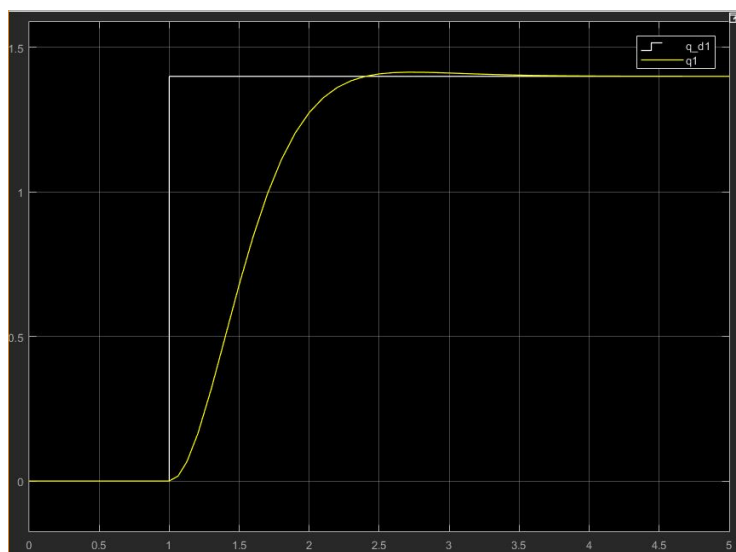
Figur 4: Blokkskjema for PD-kontroller med gravitasjonskompensasjon



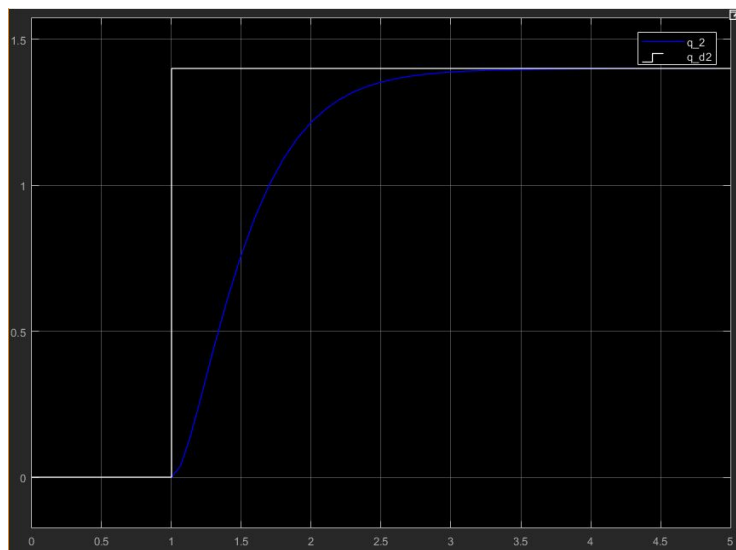
Figur 5: Blokkskjema for manipulator. Matrisen B er funksjon av q , C er funksjon av q og \dot{q} , mens vektoren g er funksjon av q .

3.c

K_P og K_D ble satt til $2400I$ og $1300I$. Figur 6 viser sprangrespons for ϑ_1 , $ledd_1$, figur 7 viser sprangrespons for ϑ_2 , $ledd_2$.



Figur 6: Plot av ϑ_{1s} (gult) respons på spranget i ϑ_{d1} (hvitt).



Figur 7: Plot av ϑ_{2s} (blått) respons på spranget i ϑ_{d2} (hvitt).

3.d

Med invers dynamikkontroll vil vi ha et pådrag u slik at

$$u = B(q)y + n(q, \dot{q})$$

hvor $n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q)$. Målet er å ende opp med $y = \ddot{q}$.

Representerer y med

$$y = -K_P q - K_D \dot{q} + r$$

og setter

$$r = \ddot{q}_d + K_D \dot{q}_d + K_P q_d$$

Setter representasjonen av r inn i y og får

$$y = \ddot{q}_d + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q}$$

hvor $\tilde{q} = q_d - q$.

Setter y inn i uttrykket for u og får

$$u = B(q)(\ddot{q}_d + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q}) + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q)$$

3.e

3.f

3.g

3.h