UNIK 4490 - Obligatorisk oppgave 1

David Kolden, davidko

10. oktober 2017

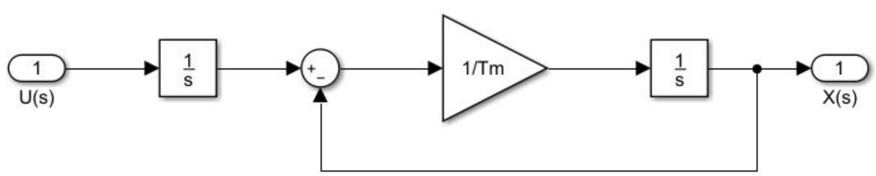
1

1.a

Finner poler ved å løse $s(1 + T_M s) = 0$ som gir polene $s = 0$ og $s = -\frac{1}{T_M}$. Systemet er stabilt for alle positive verdier av T_M.

1.b

Figur 1 viser blokkskjema for $\frac{X(s)}{U(s)} = H(s) = \frac{1}{s(1+T_M s)}$



Figur 1: Blokkskjema for $H(s)$

1.c

$H(s)$ har to poler og er derfor et andreordens system.

Setter $U(s) = K(1+T_D s)E(s)$, $E(s) = R(s)-X(s)$, $U(s) = K(1+T_D s)(R(s)-X(s))$ sammen med $H(s)$:

$$X(s) = H(s)U(s) = H(s)K(1 + T_D s)(R(s) - X(s))$$

$$X(s) = H(s)K(1+T_D s)R(s) - H(s)K(1+T_D s)X(s)$$
$$X(s)(1 + H(s)K(1+T_D s)) = H(s)K(1+T_D s)R(s)$$
$$\frac{X(s)}{R(s)} = H_C(s) = \frac{H(s)K(1+T_D s)}{1 + H(s)K(1+T_D s)}$$
$$H_C(s) = \frac{K(1+T_D s)}{\frac{1}{H(s)} + K(1+T_D s)}$$

Setter inn for $H(s)$:

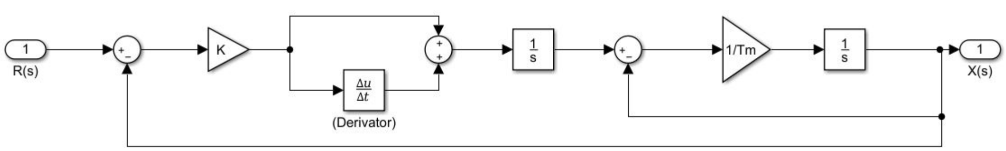
$$H_C(s) = \frac{K(1+T_D s)}{s(1+T_M s) + K(1+T_D s)}$$

$$H_C(s) = \frac{K(1+T_D s)}{s^2 T_M + s + KT_D s + K}$$
$$H_C(s) = \frac{(1+T_D s)}{s^2 \frac{T_M}{K} + s(\frac{1}{K} + T_D) + 1}$$

Ser at systemet med kontroller fortsatt er et andreordens system.

1.d

Figur to viser blokkskjema for systemet med kontroller ($H_C(s)$)



Figur 2: Blokkskjema for $H_C(s)$

1.e

$H_C(s)$ har ett nullpunkt og to poler. Nullpunktet finnes ved å sette telleren i $H_C(s)$ til null, mens man finner polene ved å sette nevneren til null. Polene kan dermed finnes med uttrykket

$$s = \frac{-(\frac{1}{K} + T_D) \pm \sqrt{(\frac{1}{K} + T_D)^2 - 4\frac{T_M}{K}}}{2\frac{T_M}{K}}$$

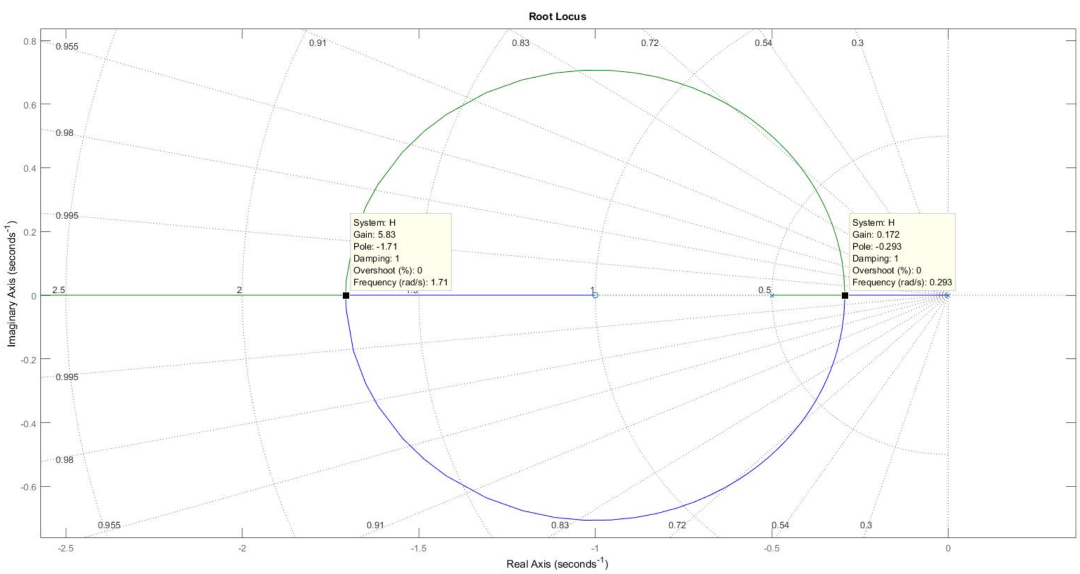
mens nullpunktene finnes med uttrykket

$$s = -\frac{1}{T_D}$$

Ved å sette inn for $T_M = 2$ og $T_D = 1$ får vi til slutt et nullpunkt i $s = -1$ og to poler i

$$s = \frac{-(\frac{1}{K}+1) \pm \sqrt{(\frac{1}{K}+1)^2 - 4\frac{2}{K}}}{2\frac{2}{K}} = \frac{-(1+K)}{4} \pm \frac{\sqrt{(1+K)^2 - 8K}}{4}$$

Realdelen til polene vil være negative for alle $K > 0$. Systemet er derfor asymptotisk stabilt for alle $K > 0$. Polene vil ha en imaginærdel for $5.83 > K > 0.17$. Da er systemet underdempet ettersom $0 < \zeta < 1$, og vil derfor overskyte og svinge seg inn mot settpunkt. Dempningsfaktoren ζ gis som $\frac{1+KT_D}{2\sqrt{TMK}} = \frac{1+K}{2\sqrt{2K}}$, og den udempede resonansfrekvensen gis av $\sqrt{\frac{K}{T_M}} = \sqrt{\frac{K}{2}}$.



Figur 3: Locusplot av H_C

2

Et system kan verifiseres som stabilt for en kandidatfunksjon $V(x, y)$ hvis

- $V(x,y) > 0 \qquad \forall x \neq 0, y \neq 0$
- $V(x,y) = 0 \qquad x = y = 0$
- $V(x,y) \rightarrow \infty \qquad x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$
- $\dot{V}(x,y) < 0$

Med en kandidatfunksjon

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

ser vi at kravene fra første, andre og tredje punkt er godkjente ettersom begge uttrykkene er kvadratiske.

Med systemet

$$\dot{x} = -y - x^3$$
$$\dot{y} = x - y^3$$

kan systemet verifiseres ved å finne $\dot{V}(x,y)$.

$$\dot{V}(x,y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$$
$$\dot{V}(x,y) = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3)$$
$$\dot{V}(x,y) = -2xy - 2x^4 + 2xy - 2y^4$$
$$\dot{V}(x,y) = -x^4 - y^4$$

Vi ser at $\dot{V}(x,y)$ er godkjent i forhold til det siste kravet ettersom x^4 og y^4 ikke kan bli negative.

3

3.a

En PD-kontroller med gravitasjonskompensasjon består av et proporsjonalledd, et derivatledd og et ledd som kompenserer for gravitasjonskreftene på manipulatoren. Proporsjonalleddet forsterker avviket mellom ønsket leddposisjon q_d og faktisk leddposisjon q. Derivatleddet forsterker leddhastighetene til manipulatoren og trekker det fra pådraget. Gravitasjonskreftene forandrer seg som funksjon av leddposisjonene. Det fulle uttrykket for kontrolleren er

$$u = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} + g(q)$$

hvor

- $K_P = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{p2} \end{bmatrix}$

- $K_D = \begin{bmatrix} k_{d1} & 0 \\ 0 & k_{d2} \end{bmatrix}$
- $q_d = \begin{bmatrix} \vartheta_{d1} \\ \vartheta_{d2} \end{bmatrix}$
- $q = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$
- $\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$
- $g(q) = \begin{bmatrix} (m_{l1}l_1 + m_{m2}a_1 + m_{l2}a_1)gcos(\vartheta_1) + m_{l2}l_2gcos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ m_{l2}l_2gcos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$

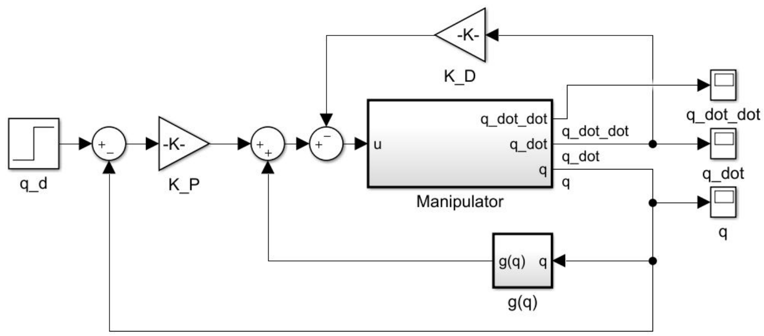
  hvor
  - $m_{l1} = 50$ kg og er massen til $link_1$.
  - $m_{l2} = 50$ kg og er massen til $link_2$.
  - $m_{m2} = 5$ kg og er massen til $motor_2$.
  - $l_1 = 0.5$ m og er avstanden fra starten av $link_1$ til $link_1$s tyngdepunkt.
  - $l_2 = 0.5$ m og er avstanden fra starten av $link_2$ til $link_2$s tyngdepunkt.
  - $a_1 = 1$ m og er lengden til $link_1$.
  - $a_2 = 1$ m og er lengden til $link_2$.
  - ϑ_1 er vinkelen til $ledd_1$.
  - ϑ_2 er vinkelen til $ledd_2$.
  - $g = 9.81\ m/s^2$.

Dette gir følgende uttrykk for pådraget u:

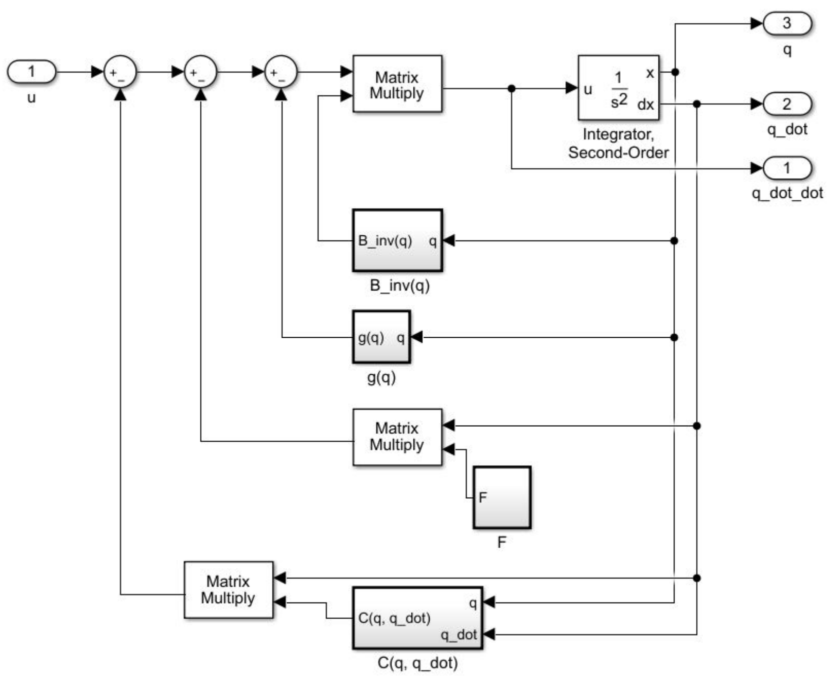
$$u = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{d1} - \vartheta_1 \\ \vartheta_{d2} - \vartheta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{d1} & 0 \\ 0 & k_{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_{l1}l_1 + m_{m2}a_1 + m_{l2}a_1)gcos(\vartheta_1) + m_{l2}l_2gcos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ m_{l2}l_2gcos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$$

3.b

Blokkskjema for kontroller og manipulator gis i figur 4 og figur 5.



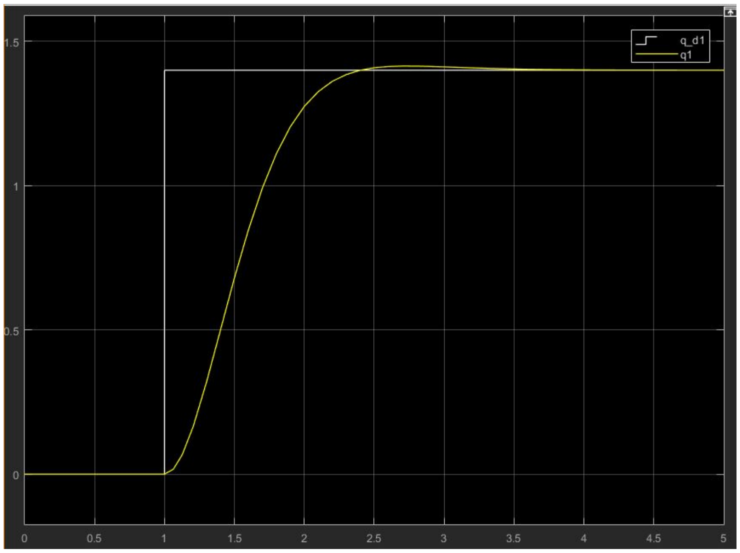
Figur 4: Blokkskjema for PD-kontroller med gravitasjonskompensasjon



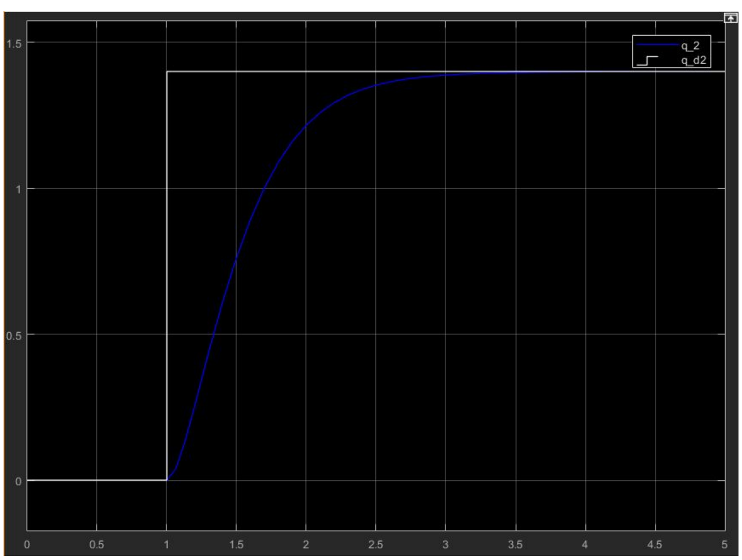
Figur 5: Blokkskjema for maniplator. Matrisen B er funksjon av q, C er funksjon av q og $\dot{q}$, mens vektoren g er funksjon av q.

3.c

K_P og K_D ble satt til $2400I$ og $1300I$. Figur 6 viser sprangrespons for ϑ_1, $ledd_1$, figur 7 viser sprangrespons for ϑ_2, $ledd_2$.



Figur 6: Plot av ϑ_1s (gult) respons på spranget i ϑ_{d1} (hvitt).



Figur 7: Plot av ϑ_2s (blått) respons på spranget i ϑ_{d2} (hvitt).

3.d

Med invers dynamikkontroll vil vi ha et pådrag u slik at

$$u = B(q)y + n(q, \dot{q})$$

hvor $n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q)$. Målet er å ende opp med $y = \ddot{q}$.

Representerer y med

$$y = -K_P q - K_D\dot{q} + r$$

og setter

$$r = \ddot{q}_d + K_D\dot{q}_d + K_P q_d$$

Setter representasjonen av r inn i y og får

$$y = \ddot{q}_d + K_D\dot{\tilde{q}} + K_P\tilde{q}$$

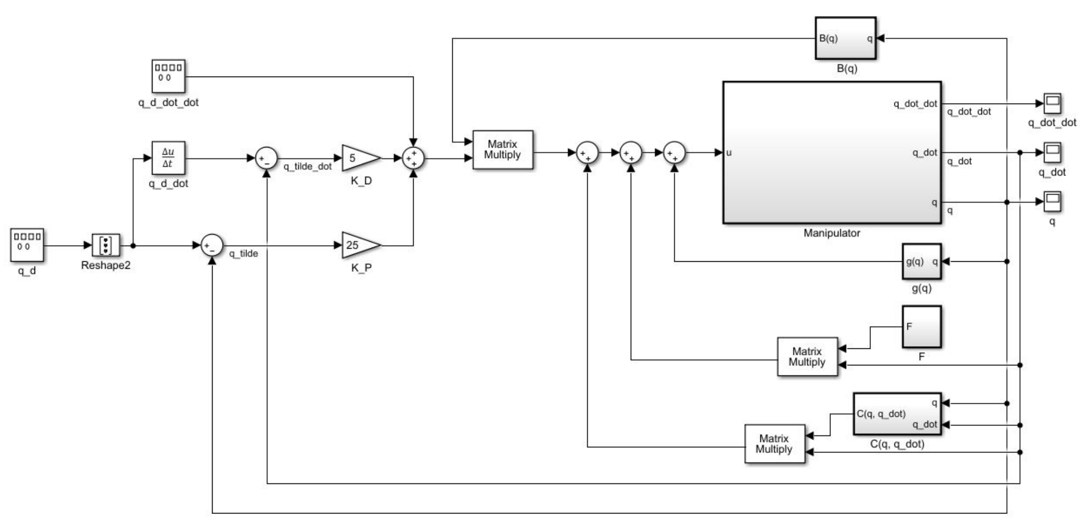
hvor $\tilde{q} = q_d - q$.

Setter y inn i uttrykket for u og får

$$u = B(q)(\ddot{q}_d + K_D\dot{\tilde{q}} + K_P\tilde{q}) + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q)$$

3.e

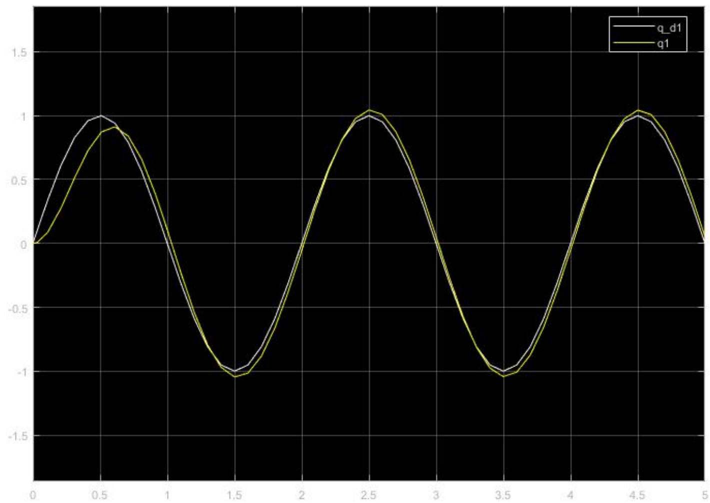
Blokkskjema for invers dynamikkontroller gis i figur 8.



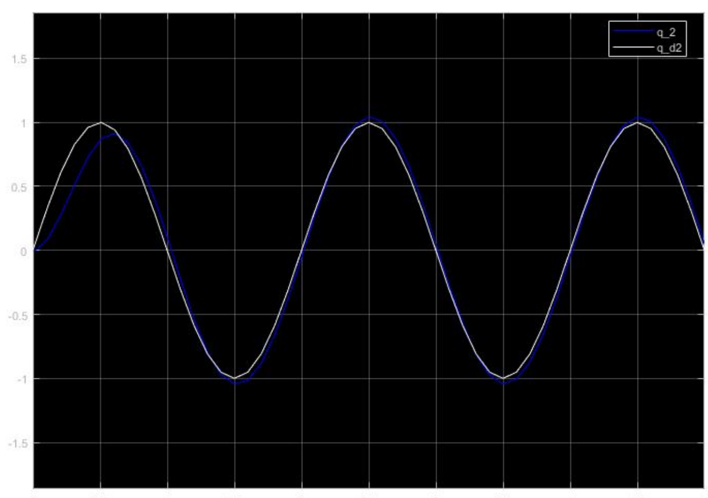
Figur 8: Blokkskjema for invers dynamikkontroller. q_d ble generert som et sinus-signal, mens $\dot{q}_d$ ble generert som den deriverte av sinus-signalet. $\ddot{q}_d$ ble generert som eget signal på samme måte som q_d.

3.f

- For $f = 0.5$ Hz:

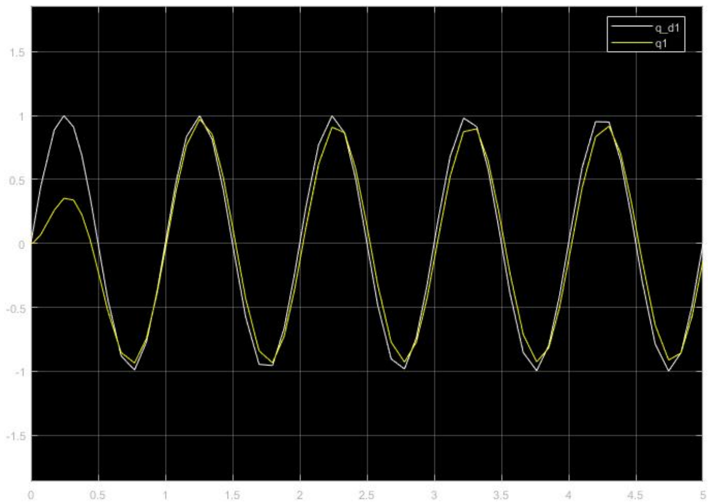


Figur 9: q_1 følger pådraget relativt godt. Det er et lite avvik i oppstarten på ca 0.1.

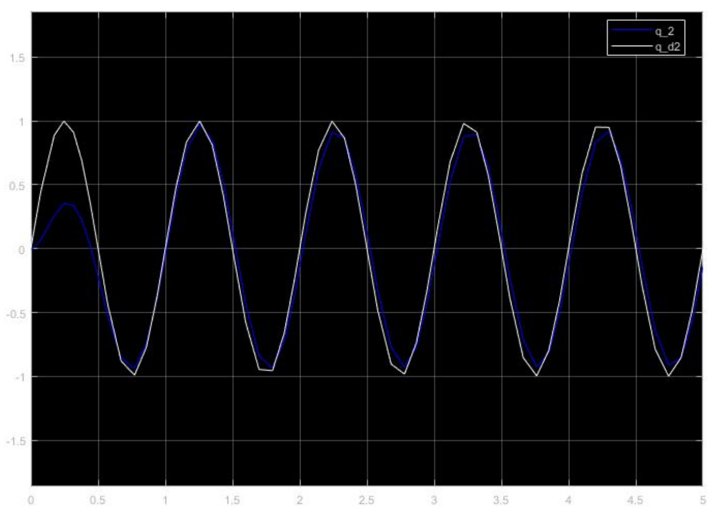


Figur 10: q_2 følger pådraget på samme måte som q_1.

- For $f = 1.0$ Hz:

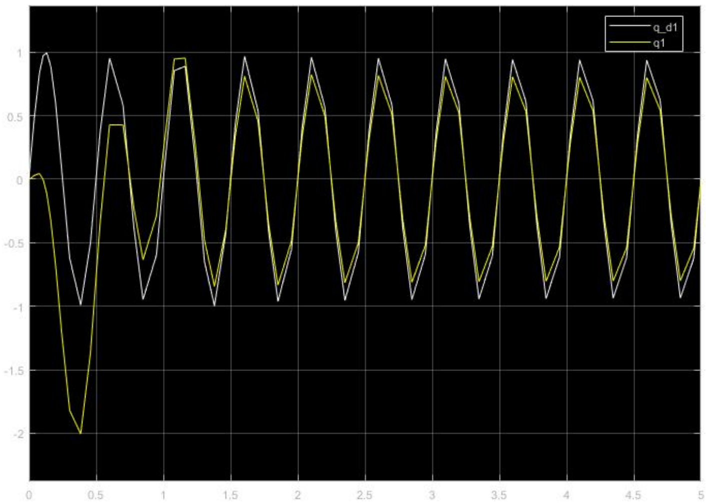


Figur 11: Ved 1,0 Hz ses det et tydeligere avvik i oppstarten. Avviket i amplituden er på ca 0.6.

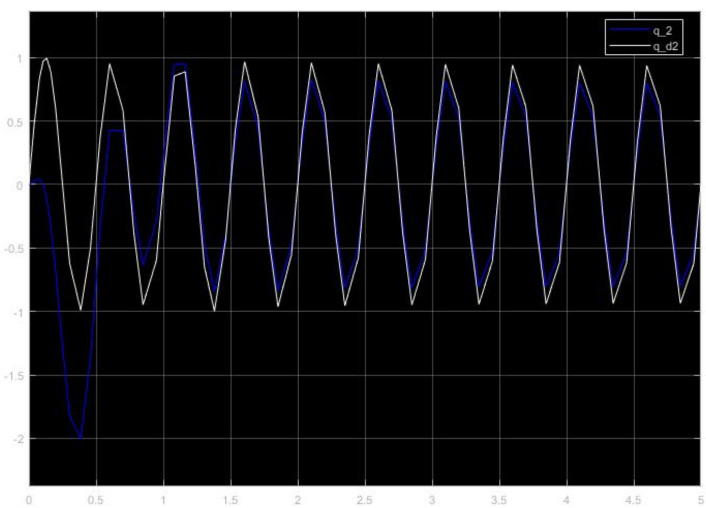


Figur 12: q_2 følger pådraget på samme måte som q_1.

- For $f = 2.0$ Hz:



Figur 13: Systemet får større og større avvik i oppstarten av systemet. Avviket er på ca 1.



Figur 14: q_2 følger pådraget på samme måte som q_1.

Det ses at avviket øker med frekvensen i pådraget. Dempningen ζ og den udempede resonansfrekvensen ω_n gis av K_P og K_D:

$$K_P = \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{bmatrix}$$

$$K_D = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\zeta_1\omega_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

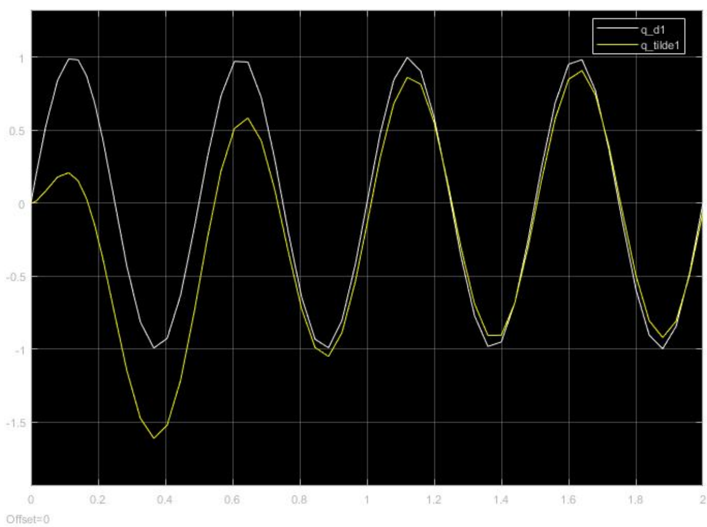
Dette gir $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.5$. Et system er underdempet når $0 < \zeta < 1$. Derfor er dette systemet underdempet.

3.g

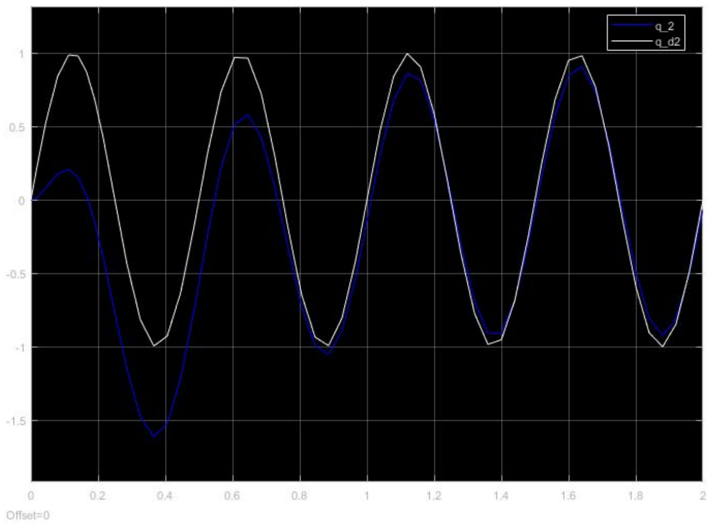
Et kritisk dempet system har $\zeta = 1$. Da må K_D justeres:

$$K_D = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\zeta_1\omega_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \cdot 5 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 1 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Figur 15 og figur 16 viser plot av simulering med nye verdier for K_D.



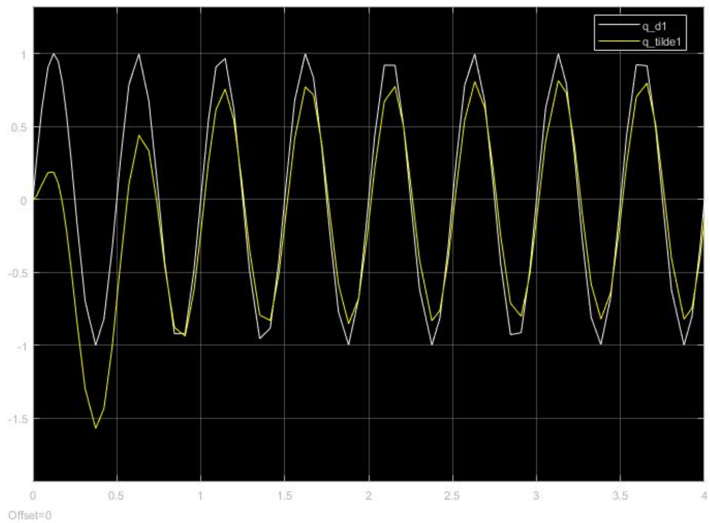
Figur 15: Responsen til q_1. Responsen er forbedret.



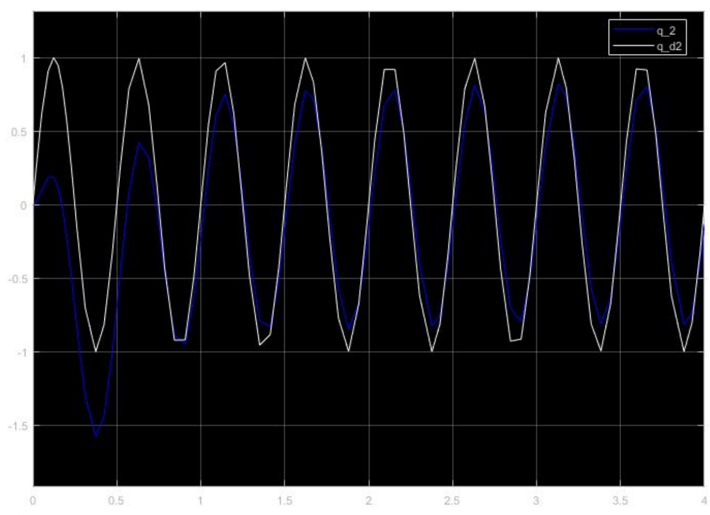
Figur 16: Viser samme resultat som for q_1.

3.h

Har at $\tilde{B} = \hat{B} - B$ og $\tilde{n} = \hat{n} - n$. Som sagt i oppgave 3d, så er målet med kontrolleren å få $\ddot{q} = y$, men siden vi har unøyaktigheter i den matematiske modellen av robotarmen i kontrolleren, så får vi en feil η som legges til, og vi ender opp med $\ddot{q} = y + \eta$. I vårt eksempel er $\hat{B} = 0.90B$ og $\hat{n} = 0.95n$. Dette gjør at signalet aldri når opp til settpunkt, og differansen blir større jo mindre $\hat{B}$ er i forhold til B.



Figur 17: .



Figur 18: Viser samme resultat som for q_1.