

INFOTEC - MCDI

Materia: Matemáticas para la Ciencia de Datos
Profesor: Dra. Briceyda B. Delgado
Alumno: David Rodriguez Gutierrez

Optimización de modelos discretos

Abstracto

El presente trabajo aborda el diseño e implementación de un modelo de optimización para una empresa de Monterrey dedicada a la producción de solenoides, cuya capacidad de producción actual es insuficiente para satisfacer la demanda mensual proyectada para los próximos seis meses. A través de la formulación de un modelo de programación lineal, se busca minimizar los costos totales asociados a la producción regular, tiempo extra y almacenamiento de inventario, mientras se cumple con la demanda de cada mes.

El análisis incluye la investigación de métodos comunes de optimización, conceptos básicos de programación lineal y la construcción de un grafo que modela la relación entre los periodos de producción y los meses de demanda. Se elaboró una matriz de costos que incorpora los costos regulares y adicionales de producción, incluyendo el impacto del tiempo extra y el almacenamiento. Además, se definieron restricciones, incluyendo las relacionadas con la capacidad de producción regular y extra, así como las restricciones de demanda.

El modelo se resolvió utilizando software especializado, mostrando cómo los datos fueron integrados en las restricciones y la función objetivo. Los resultados obtenidos permitieron determinar un plan de producción óptimo que satisface la demanda mensual, minimizando los costos mediante un balance entre la producción regular, el uso estratégico de tiempo extra y el almacenamiento de inventarios. Finalmente, se presentan conclusiones generales que destacan la eficiencia del modelo y su aplicabilidad en contextos similares de la industria manufacturera.

Introducción

La optimización en los procesos de producción es un aspecto crítico para las empresas industriales, especialmente en zonas altamente competitivas como Monterrey, donde la demanda y las capacidades deben gestionarse de manera eficiente para garantizar la sostenibilidad y la rentabilidad. Este trabajo se centra en el caso de una empresa dedicada a la fabricación de solenoides, que enfrenta el desafío de satisfacer la demanda mensual proyectada para los próximos seis meses, considerando las limitaciones de su capacidad de producción y los costos asociados.

La problemática radica en que la capacidad regular de producción mensual no es suficiente para cumplir con los requerimientos de sus clientes. Sin embargo, la empresa dispone de opciones como el uso de tiempo extra y la acumulación de inventario, cada una con costos específicos que influyen en la estrategia óptima de producción. Esto plantea la necesidad de formular un modelo matemático que permita tomar decisiones informadas y minimizar los costos totales mientras se cumplen todas las restricciones.

Para abordar esta situación, se desarrolla un modelo de programación lineal que integra los costos regulares de producción, los costos adicionales por tiempo extra y los costos de almacenamiento de inventario. Además, se incorporan restricciones de capacidad y demanda para cada mes. Este enfoque no solo permite optimizar la producción, sino que también proporciona una base metodológica para resolver problemas similares en otros contextos industriales.

En las siguientes secciones, se presenta la investigación realizada sobre los métodos de optimización y programación lineal, el desarrollo del modelo matemático, la resolución del problema mediante herramientas computacionales, y un análisis detallado de los resultados obtenidos. Este análisis tiene como objetivo no solo resolver la problemática planteada, sino también evidenciar la importancia de la optimización en la toma de decisiones industriales.

Estado del Arte

La optimización en procesos de producción es una disciplina ampliamente estudiada dentro de la investigación operativa, dado su impacto directo en la eficiencia y competitividad de las empresas. En este contexto, los modelos de **programación lineal** han sido fundamentales para abordar problemas de asignación de recursos, planificación de la producción y minimización de costos.

Programación Lineal

La programación lineal (PL) es una técnica matemática que busca optimizar una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones lineales. Desde su desarrollo inicial en los años 40, con aplicaciones pioneras en logística y manufactura, la PL se ha consolidado como una herramienta esencial en la industria. Casos prácticos incluyen la optimización de la cadena de suministro, la planificación de la producción y la distribución de recursos limitados. Métodos clásicos como el **Simplex** y más recientemente los enfoques basados en **solvers computacionales** han facilitado su implementación en problemas de gran escala.

Métodos de Optimización

Además de la programación lineal, se han explorado técnicas como la programación lineal entera, heurísticas y metaheurísticas (como algoritmos genéticos y optimización por colonia de hormigas) para problemas que involucran restricciones más complejas o no lineales. En la planificación de la producción, estos métodos permiten manejar demandas estacionales, incertidumbre y múltiples objetivos, aunque con un costo computacional mayor.

Los métodos de optimización más comunes incluyen diversas técnicas que abordan problemas de optimización con características específicas, dependiendo de la naturaleza de las funciones objetivo y las restricciones involucradas. La **programación lineal (PL)** es una herramienta matemática que se utiliza para maximizar o minimizar una función objetivo lineal, sujeto a restricciones también lineales. Esta técnica es ampliamente empleada en áreas como producción, logística y asignación de recursos, utilizando métodos como el Simplex o el de los Puntos Interiores. Por ejemplo, se puede maximizar las ganancias de dos productos (x) e (y) con una función objetivo ($Z = 3x + 2y$), considerando restricciones como la disponibilidad de materia prima ($2x + y \leq 100$) y la capacidad de producción ($x + 3y \leq 90$).

Por otro lado, la **programación entera (PE)** es una extensión de la programación lineal en la que las variables de decisión deben ser enteras, lo que la hace esencial para problemas con unidades indivisibles, como empleados, vehículos o paquetes. Se clasifica en programación entera mixta, donde algunas variables son continuas y otras enteras, y programación entera pura, en la que todas las variables son enteras. Un ejemplo de su aplicación es asignar un número entero de empleados a turnos laborales para maximizar la productividad.

En casos donde la función objetivo o las restricciones son no lineales, se recurre a la **programación no lineal (PNL)**, que permite modelar relaciones más complejas como costos crecientes o rendimientos decrecientes. Métodos como el Gradiente Descendente y los Métodos de Newton son comunes en esta área. Por ejemplo, se puede maximizar el rendimiento de una inversión en un mercado con retornos no lineales o minimizar las pérdidas de energía en una red eléctrica.

La **programación dinámica** es particularmente útil en problemas complejos que pueden dividirse en subproblemas más pequeños. Este enfoque se caracteriza por el principio de optimalidad, donde la solución de un subproblema contribuye a la solución global. Es aplicable en cadenas de suministro, optimización de rutas como el algoritmo de Bellman-Ford y problemas de inventarios. Un ejemplo típico es determinar la política óptima de almacenamiento para minimizar costos a lo largo de un horizonte temporal.

Los **algoritmos genéticos** son métodos de optimización inspirados en procesos de evolución natural como la selección, recombinación y mutación. Estos algoritmos son útiles para problemas complejos donde es difícil formular una función objetivo explícita. Sus aplicaciones incluyen diseño de circuitos, optimización de rutas y problemas de empaquetamiento. Por ejemplo, pueden emplearse para diseñar rutas óptimas para un servicio de entrega de paquetes.

Finalmente, la **optimización estocástica** aborda problemas con incertidumbre en los datos, utilizando modelos probabilísticos para encontrar soluciones robustas frente a variaciones o ruido. Métodos como el Simulated Annealing y la Optimización Bayesiana son ampliamente usados. Por ejemplo, se puede aplicar esta técnica en la planificación de inversiones en mercados financieros donde los retornos son inciertos y presentan alta variabilidad.

Estos métodos, con sus características y aplicaciones específicas, ofrecen un amplio abanico de soluciones para problemas de optimización en diversos contextos.

Aplicaciones en Planificación de la Producción

En la literatura, el problema de planificación de la producción bajo restricciones de capacidad y costos variables ha sido extensamente estudiado. Investigaciones han demostrado que el uso de tiempo extra y la acumulación de inventarios pueden ser estrategias efectivas para satisfacer la demanda, siempre que sean gestionadas adecuadamente. Modelos similares al planteado en este trabajo han utilizado herramientas computacionales como **Excel Solver**, **Lingo**, **Gurobi** y **CPLEX** para encontrar soluciones óptimas.

Grafos en Optimización

El uso de grafos en optimización ha cobrado relevancia en problemas de asignación y flujo, ya que permiten representar relaciones entre periodos de producción y meses de demanda de manera visual y analítica. Los grafos ofrecen ventajas al facilitar la identificación de cuellos de botella y la comprensión de las interacciones entre restricciones.

Herramientas Computacionales

El desarrollo de software especializado para la resolución de problemas de optimización ha transformado la forma en que se abordan estos desafíos. Herramientas como **Excel Solver**, **MATLAB**, y lenguajes como **Python** con bibliotecas como **PuLP** y **Pyomo** han democratizado el acceso a métodos avanzados, permitiendo a empresas de todos los tamaños aprovechar los beneficios de la optimización.

En resumen, el estado del arte respalda la viabilidad y relevancia de aplicar programación lineal y herramientas computacionales en la planificación de la producción. Este trabajo se alinea con las tendencias actuales al desarrollar un modelo matemático para minimizar costos, utilizando un enfoque práctico y herramientas accesibles para resolver problemas reales en la industria.

Conceptos Básicos de la Programación Lineal

1. Función Objetivo La **función objetivo** es una expresión matemática lineal que define lo que se busca optimizar. Puede ser:

- **Maximizar:** Por ejemplo, las ganancias en un negocio.
- **Minimizar:** Por ejemplo, los costos de producción.

Se representa típicamente como:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

donde Z es el valor a optimizar, x_1, x_2, \dots, x_n son las variables de decisión, y c_1, c_2, \dots, c_n son los coeficientes que reflejan su contribución al objetivo.

2. Variables de Decisión Las **variables de decisión** son los elementos que se pueden controlar y ajustar para influir en el resultado de la función objetivo. Estas variables representan cantidades desconocidas, como:

- La cantidad de productos a fabricar.
- Los recursos a asignar.

Ejemplo: En un problema de producción, las variables de decisión pueden ser:

- x_1 : cantidad de producto A a fabricar.
- x_2 : cantidad de producto B a fabricar.

3. Restricciones Las **restricciones** son las condiciones que deben cumplirse debido a limitaciones reales como:

- Recursos disponibles (tiempo, dinero, materias primas).
- Capacidades de producción.

Cada restricción se expresa como una ecuación o desigualdad lineal, por ejemplo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

donde a_1 y a_2 son coeficientes que reflejan la relación entre las variables, y b es el límite permitido.

4. Región Factible La **región factible** es el conjunto de todas las soluciones que cumplen con las restricciones.

- Se representa gráficamente como un área (en problemas de dos variables) o un volumen (en problemas de tres o más variables).
- Es crucial que esta región sea **convexa**, lo que significa que cualquier combinación lineal de soluciones dentro de la región sigue siendo válida.

Ejemplo: Si las restricciones son $x_1 + x_2 \leq 10$ y $x_1, x_2 \geq 0$, la región factible sería un triángulo delimitado por estas líneas y los ejes x_1 y x_2 .

5. Solución Óptima La **solución óptima** es el punto dentro de la región factible donde la función objetivo alcanza su valor máximo o mínimo. Este punto generalmente se encuentra en uno de los **vértices** de la región factible, ya que la función objetivo es lineal.

Grafos

Un **grafo** es una estructura matemática utilizada para representar **relaciones** o **interacciones** entre un conjunto de elementos. Es ampliamente utilizado en disciplinas como matemáticas, informática, ingeniería, y ciencias sociales, ya que permite modelar sistemas complejos y analizar sus propiedades.

Componentes principales de un grafo:

1. Vértices (nodos):

- Son los puntos o entidades que componen el grafo.
- Representan los **objetos** o **elementos** del sistema que se está modelando.
- Ejemplo: En una red social, los vértices pueden ser personas.

2. Aristas (enlaces o bordes):

- Son las conexiones entre pares de vértices.
- Representan las **relaciones**, **interacciones** o **asociaciones** entre los objetos.
- Ejemplo: En una red social, las aristas pueden representar amistad o seguimiento entre personas.

Tipos de grafos:

1. Según las aristas:

- **Grafo dirigido (dígrafo):** Las aristas tienen dirección (por ejemplo, relaciones de "sigue a" en Twitter).
- **Grafo no dirigido:** Las aristas no tienen dirección (por ejemplo, relaciones de amistad mutua en Facebook).

2. Según el peso de las aristas:

- **Grafo ponderado:** Las aristas tienen un valor asociado (por ejemplo, la distancia entre ciudades en una red de transporte).
- **Grafo no ponderado:** Las aristas solo indican conexión, sin valores asociados.

3. Otros tipos:

- **Grafo conexo:** Hay un camino entre cualquier par de vértices.
- **Grafo no conexo:** Algunos vértices no están conectados entre sí.
- **Árbol:** Un grafo acíclico conexo.

Aplicaciones de los grafos:

- **Redes de transporte:** Modelan rutas y conexiones entre ciudades.
- **Redes sociales:** Representan interacciones entre usuarios.
- **Flujos de producción y demanda:** Representan la relación entre periodos de producción (vértices) y meses de demanda (aristas).

- **Sistemas computacionales:** Representan interconexiones entre dispositivos o nodos en una red.

Problema

Monterrey, al ser una zona industrial, requiere de diversos proveedores que satisfagan la demanda de ciertos productos. Tal es el caso de una empresa que produce solenoides. Se ha recibido una orden de compra cuya demanda para los próximos seis meses es de **250, 280, 300, 270, 270 y 320 unidades**.

La capacidad de producción de la planta no es capaz de satisfacer la demanda mensual de este solenoide debido a que debe satisfacer a otros clientes, teniendo una capacidad actual de unidades por mes de **220, 300, 220, 350, 290 y 230**.

No se permite satisfacer la demanda de un mes en un periodo posterior al suyo, pero se puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda inmediata. La capacidad de tiempo extra en cada periodo es la mitad de la capacidad regular. El costo de producción unitario por cada mes es de **105.00, 113.00, 99.00, 126.00, 119.00 y 93.00 respectivamente**. El tiempo extra tiene un costo de **40% más que el costo normal en ese periodo por unidad producida**.

La empresa permite inventariar producto que puede ser utilizado para satisfacer una demanda posterior, con un costo de almacenamiento de **5 por unidad/mes**.

Formule un modelo de producción que permita a la empresa cumplir con la demanda de cada mes minimizando los costos incurridos en el cumplimiento.

Tabla de costos y grafo

Los valores de la tabla que te proporcioné se calcularon utilizando las siguientes fórmulas y datos:

1. **Costos normales:** Los costos normales por unidad de producción en cada periodo (i) ya están dados directamente como:

$$c_{\text{normal}} = [105, 113, 99, 126, 119, 93]$$

Estos costos se replican para cada periodo y mes que ese periodo puede satisfacer, respetando la restricción de que $i \leq j$.

2. **Costos con tiempo extra:** Los costos de producción en tiempo extra son (40%) más altos que los costos normales. Esto se calcula como:

$$c_{\text{extra}} = 1.4 \times c_{\text{normal}}$$

Entonces:

$$c_{\text{extra}} = [105 \times 1.4, 113 \times 1.4, 99 \times 1.4, 126 \times 1.4, 119 \times 1.4, 93 \times 1.4]$$

Al realizar los cálculos:

$$c_{\text{extra}} = [147.00, 158.20, 138.60, 176.40, 166.60, 130.20]$$

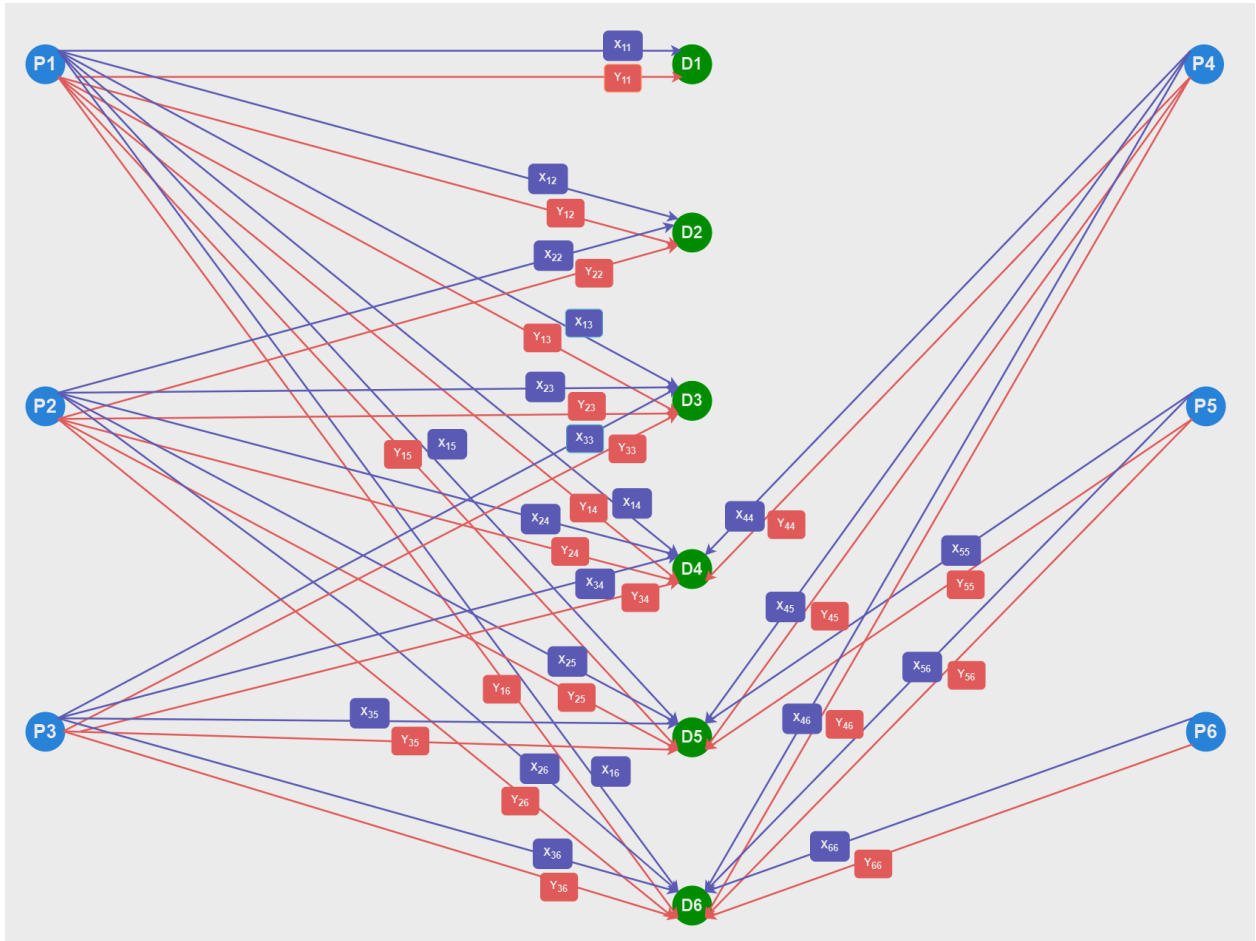
3. **Distribución en la tabla:**

- Para cada periodo de producción i , el costo c_{normal} y c_{extra} se asignan a los meses j donde $j \geq i$.
- Si $j < i$, el costo es — (no aplicable).
- Por ejemplo, para el periodo $i = 1$:
 - Puede satisfacer $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, por lo que todos los costos normales y extra se repiten para estos meses.
- Para el periodo $i = 2$:
 - Puede satisfacer $j = 2, 3, 4, 5, 6$, y así sucesivamente.

La tabla incluye los costos normales y con tiempo extra. El costo de tiempo extra es $1.4 \times$ el costo normal.

Periodo Producción/ Mes Demanda	1	2	3	4	5	6
1	105.00	105.00	105.00	105.00	105.00	105.00
1 (extra)	147.00	147.00	147.00	147.00	147.00	147.00
2	-	113.00	113.00	113.00	113.00	113.00
2 (extra)	-	158.20	158.20	158.20	158.20	158.20
3	-	-	99.00	99.00	99.00	99.00
3 (extra)	-	-	138.60	138.60	138.60	138.60
4	-	-	-	126.00	126.00	126.00
4 (extra)	-	-	-	176.40	176.40	176.40
5	-	-	-	-	119.00	119.00
5 (extra)	-	-	-	-	166.60	166.60

Periodo Producción/ Mes Demanda	1	2	3	4	5	6
6	-	-	-	-	-	93.00
6 (extra)	-	-	-	-	-	130.20



Restricciones

Restricciones de capacidad

Para cada período i :

- **Producción normal:** $\sum_{j=1}^6 x_{ij} \leq \text{capacidad normal}$.
- **Producción tiempo extra:** $\sum_{j=1}^6 y_{ij} \leq \text{capacidad extra}$.

Por ejemplo, para $i = 1$:

$$\sum_{j=1}^6 x_{1j} \leq 220, \quad \sum_{j=1}^6 y_{1j} \leq 110$$

Restricciones de demanda

Para cada mes j :

$$\sum_{i=1}^6 x_{ij} + \sum_{i=1}^6 y_{ij} \geq \text{demanda en mes } j$$

Por ejemplo, para $j = 1$:

$$x_{11} + y_{11} \geq 250$$

Función objetivo

Minimizar el costo total de producción:

$$Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 (c_{ij} \cdot x_{ij} + c_{ij}^{\text{extra}} \cdot y_{ij})$$

Expansión completa:

$$Z = 105x_{11} + 105x_{12} + \dots + 93x_{66} + 147y_{11} + 147y_{12} + \dots + 130.2y_{66}$$

Representación completa del modelo de producción

1. Variables de decisión

- x_{ij} : Unidades producidas en el periodo i para satisfacer la demanda del mes j (producción normal).
- y_{ij} : Unidades producidas en el periodo i para satisfacer la demanda del mes j (tiempo extra).

2. Parámetros

- **Demanda mensual:** $d = [250, 280, 300, 270, 270, 320]$.
- **Capacidades normales:** $c_{\text{normal}} = [220, 300, 220, 350, 290, 230]$.
- **Capacidades extra:** $c_{\text{extra}} = [110, 150, 110, 175, 145, 115]$.
- **Costos normales:** $c_{\text{costos normales}} = [105, 113, 99, 126, 119, 93]$.
- **Costos extra:** $c_{\text{costos extra}} = [147, 158.2, 138.6, 176.4, 166.6, 130.2]$.

3. Función objetivo

Minimizar los costos totales de producción:

$$Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 (c_{ij} \cdot x_{ij} + c_{ij}^{\text{extra}} \cdot y_{ij})$$

Expansión:

$$\begin{aligned} Z = & 105x_{11} + 105x_{12} + 105x_{13} + 105x_{14} + 105x_{15} + 105x_{16} + 147y_{11} + 147y_{12} + 147y_{13} + 147y_{14} + 147y_{15} + 147y_{16} + \\ & 113x_{22} + 113x_{23} + 113x_{24} + 113x_{25} + 113x_{26} + 158.2y_{22} + 158.2y_{23} + 158.2y_{24} + 158.2y_{25} + 158.2y_{26} + \\ & 99x_{33} + 99x_{34} + 99x_{35} + 99x_{36} + 138.6y_{33} + 138.6y_{34} + 138.6y_{35} + 138.6y_{36} + \\ & 126x_{44} + 126x_{45} + 126x_{46} + 176.4y_{44} + 176.4y_{45} + 176.4y_{46} + \\ & 119x_{55} + 119x_{56} + 166.6y_{55} + 166.6y_{56} + \\ & 93x_{66} + 130.2y_{66} \end{aligned}$$

4. Restricciones de capacidad

Producción normal:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 x_{1j} &\leq 220, & \sum_{j=2}^6 x_{2j} &\leq 300, & \sum_{j=3}^6 x_{3j} &\leq 220, & \sum_{j=4}^6 x_{4j} &\leq 350, \\ & & \sum_{j=5}^6 x_{5j} &\leq 290, & x_{66} &\leq 230 \end{aligned}$$

Producción extra:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 y_{1j} &\leq 110, & \sum_{j=2}^6 y_{2j} &\leq 150, & \sum_{j=3}^6 y_{3j} &\leq 110, & \sum_{j=4}^6 y_{4j} &\leq 175, \\ & & \sum_{j=5}^6 y_{5j} &\leq 145, & y_{66} &\leq 115 \end{aligned}$$

5. Restricciones de demanda

Para cada mes j :

$$\sum_{i=1}^j x_{ij} + \sum_{i=1}^j y_{ij} \geq d_j$$

Expansión:

$$\begin{aligned} x_{11} + y_{11} &\geq 250, & x_{12} + x_{22} + y_{12} + y_{22} &\geq 280, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + y_{13} + y_{23} + y_{33} &\geq 300, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + y_{14} + y_{24} + y_{34} + y_{44} &\geq 270, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + y_{15} + y_{25} + y_{35} + y_{45} + y_{55} &\geq 270, \end{aligned}$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} + y_{16} + y_{26} + y_{36} + y_{46} + y_{56} + y_{66} \geq 320$$

6. Restricciones de flujo

Cada periodo de producción i solo puede satisfacer demandas $j \geq i$:

$$x_{ij} = 0 \quad \text{si } j < i, \quad y_{ij} = 0 \quad \text{si } j < i$$

Implementacion en Python

```
In [1]: from pulp import LpProblem, LpMinimize, LpVariable, lpSum, value
from IPython.display import HTML

# Datos del problema
demanda = [250, 280, 300, 270, 270, 320]
capacidad_normal = [220, 300, 220, 350, 290, 230]
capacidad_extra = [110, 150, 110, 175, 145, 115]
costo_normal = [105, 113, 99, 126, 119, 93]
costo_extra = [147, 158.2, 138.6, 176.4, 166.6, 130.2]
periodos = range(6)

# Modelo de optimización
modelo = LpProblem("Planificacion_de_Produccion", LpMinimize)

# Variables de decisión
produccion_normal = [[LpVariable(f"produccion_normal_{i+1}_{j+1}", lowBound=0) for j in periodos] for i in periodos]
produccion_extra = [[LpVariable(f"produccion_extra_{i+1}_{j+1}", lowBound=0) for j in periodos] for i in periodos]

# Función objetivo: minimizar los costos totales
modelo += lpSum(
    costo_normal[i] * produccion_normal[i][j] + costo_extra[i] * produccion_extra[i][j]
    for i in periodos for j in periodos if j >= i
)

# Restricciones de capacidad
for i in periodos:
    modelo += lpSum(produccion_normal[i][j] for j in periodos if j >= i) <= capacidad_normal[i], f"Capacidad_Normal_{i+1}"
    modelo += lpSum(produccion_extra[i][j] for j in periodos if j >= i) <= capacidad_extra[i], f"Capacidad_Extra_{i+1}"

# Restricciones de demanda
for j in periodos:
    modelo += lpSum(produccion_normal[i][j] + produccion_extra[i][j] for i in periodos if i <= j) >= demanda[j], f"Demanda_{j+1}"

# Restricciones de flujo (no se puede satisfacer demanda previa)
for i in periodos:
    for j in periodos:
        if j < i:
            modelo += produccion_normal[i][j] == 0, f"No_Backlog_Normal_{i+1}_{j+1}"
            modelo += produccion_extra[i][j] == 0, f"No_Backlog_Extra_{i+1}_{j+1}"

# Resolver el modelo
modelo.solve()

# Mostrar resultados
print("Estado del modelo:", modelo.status)

costo_total = value(modelo.objective)
display(HTML(f"<h3>Costo total mínimo: {costo_total:.2f}</h3>"))
display(HTML(f"<h3>Variables de decisión:</h3>"))
for i in periodos:
    for j in periodos:
        if j >= i:
            print(f"produccion_normal_{i+1}_{j+1} = {value(produccion_normal[i][j])}")
            print(f"produccion_extra_{i+1}_{j+1} = {value(produccion_extra[i][j])}")

# Análisis de satisfacción de la demanda
display(HTML(f"<br><h3>Satisfacción de demanda por mes:</h3>"))
for j in periodos:
    print(f"Mes {j+1} (Demanda: {demanda[j]} unidades):")
    for i in periodos:
        if i <= j:
            cantidad_normal = value(produccion_normal[i][j]) or 0
            cantidad_extra = value(produccion_extra[i][j]) or 0
            if cantidad_normal > 0 or cantidad_extra > 0:
                print(f" - {cantidad_normal:.2f} unidades producidas en normal del periodo {i+1}")
                print(f" - {cantidad_extra:.2f} unidades producidas en extra del periodo {i+1}")
    print()
```

Estado del modelo: 1

Costo total mínimo: 190246.00

Variables de decisión:

```
produccion_normal_1_1 = 220.0
produccion_extra_1_1 = 30.0
produccion_normal_1_2 = 0.0
produccion_extra_1_2 = 0.0
produccion_normal_1_3 = 0.0
produccion_extra_1_3 = 0.0
produccion_normal_1_4 = 0.0
produccion_extra_1_4 = 0.0
produccion_normal_1_5 = 0.0
produccion_extra_1_5 = 0.0
produccion_normal_1_6 = 0.0
produccion_extra_1_6 = 0.0
produccion_normal_2_2 = 280.0
produccion_extra_2_2 = 0.0
produccion_normal_2_3 = 20.0
produccion_extra_2_3 = 0.0
produccion_normal_2_4 = 0.0
produccion_extra_2_4 = 0.0
produccion_normal_2_5 = 0.0
produccion_extra_2_5 = 0.0
produccion_normal_2_6 = 0.0
produccion_extra_2_6 = 0.0
produccion_normal_3_3 = 220.0
produccion_extra_3_3 = 60.0
produccion_normal_3_4 = 0.0
produccion_extra_3_4 = 0.0
produccion_normal_3_5 = 0.0
produccion_extra_3_5 = 0.0
produccion_normal_3_6 = 0.0
produccion_extra_3_6 = 0.0
produccion_normal_4_4 = 270.0
produccion_extra_4_4 = 0.0
produccion_normal_4_5 = 70.0
produccion_extra_4_5 = 0.0
produccion_normal_4_6 = 0.0
produccion_extra_4_6 = 0.0
produccion_normal_5_5 = 200.0
produccion_extra_5_5 = 0.0
produccion_normal_5_6 = 90.0
produccion_extra_5_6 = 0.0
produccion_normal_6_6 = 230.0
produccion_extra_6_6 = 0.0
```

Satisfacción de demanda por mes:

Mes 1 (Demanda: 250 unidades):

- 220.00 unidades producidas en normal del periodo 1
- 30.00 unidades producidas en extra del periodo 1

Mes 2 (Demanda: 280 unidades):

- 280.00 unidades producidas en normal del periodo 2
- 0.00 unidades producidas en extra del periodo 2

Mes 3 (Demanda: 300 unidades):

- 20.00 unidades producidas en normal del periodo 2
- 0.00 unidades producidas en extra del periodo 2
- 220.00 unidades producidas en normal del periodo 3
- 60.00 unidades producidas en extra del periodo 3

Mes 4 (Demanda: 270 unidades):

- 270.00 unidades producidas en normal del periodo 4
- 0.00 unidades producidas en extra del periodo 4

Mes 5 (Demanda: 270 unidades):

- 70.00 unidades producidas en normal del periodo 4
- 0.00 unidades producidas en extra del periodo 4
- 200.00 unidades producidas en normal del periodo 5
- 0.00 unidades producidas en extra del periodo 5

Mes 6 (Demanda: 320 unidades):

- 90.00 unidades producidas en normal del periodo 5
- 0.00 unidades producidas en extra del periodo 5
- 230.00 unidades producidas en normal del periodo 6
- 0.00 unidades producidas en extra del periodo 6

Relación entre los datos obtenidos y utilizados

Los datos obtenidos se derivan directamente de la descripción de la problemática empresarial, que incluye:

- **Demanda mensual:** [250, 280, 300, 270, 270, 320], que representa la cantidad de solenoides requeridos para satisfacer las necesidades de cada mes.
- **Capacidades de producción normal y extra:** Los valores [220, 300, 220, 350, 290, 230] para la capacidad normal, y la mitad de estos para la capacidad extra ([110, 150, 110, 175, 145, 115]).
- **Costos de producción:** Los costos de producción normal [105, 113, 99, 126, 119, 93] y extra, que son un 40% mayores que los costos normales.

Estos datos son los **parámetros del modelo matemático**, utilizados como entradas en el sistema para formular las restricciones y la función objetivo.

¿Cómo se manejaron los datos en los modelos matemáticos?

Datos de entrada como parámetros Los datos obtenidos se clasificaron y estructuraron como constantes del modelo:

- **Demanda (d_j):** Usada para las restricciones de demanda, asegurando que se cumpla en cada mes.
- **Capacidades (c_{normal} , c_{extra}):** Utilizadas para limitar la cantidad de producción normal y extra en cada período.
- **Costos ($c_{\text{costos normales}}$, $c_{\text{costos extra}}$):** Incorporados en la función objetivo para calcular el costo total.

Variables de decisión Las variables del modelo matemático representan las decisiones que deben tomarse:

- $\text{produccion_normal}_{ij}$: Cantidad producida de forma normal en el período i para satisfacer la demanda del mes j .
- $\text{produccion_extra}_{ij}$: Cantidad producida en tiempo extra en el período i para satisfacer la demanda del mes j .

Estas variables se manejaron dentro de un marco matemático donde:

- Se minimizó el costo total.
- Se respetaron las restricciones de capacidad y demanda.

Restricciones Los datos se integraron en las restricciones como sigue:

- **Capacidad:** Se aseguró que la producción normal y extra no superara las capacidades máximas de cada período.
- **Demanda:** Se garantizó que la suma de las producciones normal y extra satisfaga las necesidades mensuales.
- **Flujo:** Se prohibió que un período de producción i satisfaga demandas de meses anteriores ($j < i$).

Función objetivo La minimización del costo total se formuló como una suma ponderada:

$$Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 \left(c_{\text{normal}_i} \cdot \text{produccion_normal}_{ij} + c_{\text{extra}_i} \cdot \text{produccion_extra}_{ij} \right)$$

Donde:

- c_{normal_i} y c_{extra_i} son los costos unitarios por período.
- $\text{produccion_normal}_{ij}$ y $\text{produccion_extra}_{ij}$ son las cantidades a optimizar.

Relación con la situación analizada

Problema empresarial La situación analizada describe un problema real en una empresa que debe satisfacer una demanda de solenoides mientras enfrenta limitaciones de capacidad y costos adicionales por tiempo extra. Este tipo de problemas es típico en la planificación de la producción en industrias con recursos limitados.

Modelo matemático como representación El modelo matemático es una abstracción de esta problemática. Cada aspecto del problema real (capacidad, costos, demanda) fue traducido a ecuaciones matemáticas:

- Las **restricciones** reflejan las limitaciones físicas y operativas.
- La **función objetivo** encapsula el objetivo de la empresa: minimizar costos.

Resultados obtenidos Los resultados proporcionan una guía para:

- **Asignar recursos:** Determinar cuánto producir en modo normal y extra en cada período.
- **Cumplir con la demanda:** Garantizar que se satisfaga cada mes sin incumplimientos.
- **Optimizar costos:** Reducir los gastos generales al mínimo posible.

Conclusiones

La relación entre los datos obtenidos, los datos utilizados, el modelo matemático y la situación analizada es esencial para resolver problemas de optimización como el planteado. A continuación, se detalla cómo estos elementos interactúan:

1. Traducción de la situación real al modelo matemático:

La problemática empresarial se tradujo en un modelo matemático estructurado, donde:

- **Los datos de entrada (demanda, capacidad y costos)** fueron directamente incorporados como **parámetros** del modelo.
- **Las decisiones operativas (producción normal y extra)** se representaron mediante **variables de decisión**, las cuales capturan la cantidad óptima a producir para satisfacer la demanda de cada mes.

2. **Restricciones como reflejo de las limitaciones reales:**

El modelo respetó las limitaciones operativas impuestas por la capacidad de producción y las necesidades de cada mes:

- **Restricciones de capacidad** garantizaron que no se produjera más de lo permitido en cada período.
- **Restricciones de demanda** aseguraron que cada mes se cumplieran las necesidades de los clientes.
- **Restricciones de flujo** representaron la realidad de que la producción de un período solo puede satisfacer demandas futuras o del mismo mes, pero no del pasado.

3. **Optimización de costos como objetivo principal:**

La empresa busca minimizar los costos, y el modelo matemático lo logró al incorporar los costos unitarios de producción normal y extra en la **función objetivo**. Esto permitió identificar no solo cómo satisfacer la demanda, sino también hacerlo de la manera más económica posible.

4. **Resultados prácticos y su relación con el negocio:**

Los resultados del modelo indican:

- **Cuánto producir en cada período**, tanto en modo normal como extra, para satisfacer la demanda de manera óptima.
- **El costo mínimo total**, que ayuda a la empresa a planificar sus operaciones financieras y evaluar la viabilidad de las decisiones de producción.

5. **Impacto en la toma de decisiones:**

El modelo traduce un problema complejo en un conjunto de decisiones claras y cuantitativamente justificadas. Esto ayuda a la empresa a operar de manera eficiente, minimizar desperdicios y garantizar que las necesidades de los clientes se cumplan sin exceder las capacidades de producción.

En resumen, el modelo matemático no solo organiza y procesa los datos, sino que también conecta las restricciones del mundo real con el objetivo empresarial, ofreciendo una solución óptima y accionable. Este enfoque asegura que la empresa pueda gestionar recursos limitados de manera eficiente mientras cumple con sus metas operativas y financieras.

Bibliografía

Taha, H. A. (2011). Investigación de operaciones. México: Pearson Educación.

Sandblom, C., & Eiselt, H. A. (2010). Operations Research: A Model-Based Approach. Germany: Springer Berlin Heidelberg.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). Introducción a la Investigación de Operaciones. McGraw-Hill.

Winston, W. L. (2004). Operations Research: Applications and Algorithms. Cengage Learning.

URL al repositorio de código de este documento (Github):

https://github.com/davidlobolobo/data_science/blob/main/Math/MCDI_MAT_David_Rodriguez_Tarea_9.ipynb
