# INFOTEC - MCDI

Materia: Matemáticas para la Ciencia de Datos
Profesor: Dra. Briceyda B. Delgado
Alumno: David Rodriguez Gutierrez

### Tarea 8: Optimización de modelos discretos

---

> ## Optimización
>
> Monterrey, al ser una zona industrial, requiere de diversos proveedores que satisfagan la demanda de ciertos productos. Tal es el caso de una empresa que produce solenoides. Se ha recibido una orden de compra cuya demanda para los próximos seis meses es de **250, 280, 300, 270, 270 y 320 unidades**.
>
> La capacidad de producción de la planta no es capaz de satisfacer la demanda mensual de este solenoide debido a que debe satisfacer a otros clientes, teniendo una capacidad actual de unidades por mes de **220, 300, 220, 350, 290 y 230**.
>
> No se permite satisfacer la demanda de un mes en un periodo posterior al suyo, pero se puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda inmediata. La capacidad de tiempo extra en cada periodo es la mitad de la capacidad regular. El costo de producción unitario por cada mes es de **105.00, 113.00, 99.00, 126.00, 119.00 y 93.00 respectivamente**. El tiempo extra tiene un costo de **40% más que el costo normal en ese periodo por unidad producida**.
>
> La empresa permite inventariar producto que puede ser utilizado para satisfacer una demanda posterior, con un costo de almacenamiento de **5 por unidad/mes**.
>
> Formule un modelo de producción que permita a la empresa cumplir con la demanda de cada mes minimizando los costos incurridos en el cumplimiento.
>
> ---
>
> ### Primera etapa del reporte
>
> Incluya los siguientes puntos en formato libre, con un máximo de 8 páginas:
>
> 1. **Investigar los métodos más comunes de optimización.**
> 2. **Investigar los conceptos básicos de la programación lineal.**
> 3. **Investigar qué es un grafo.**
> 4. **Desarrollar un grafo que relacione el periodo de producción con el mes de demanda probado en la situación problema.**
> 5. **Elaborar una tabla de costos**, incluidos los costos extras por mes, como una matriz de tamaño $12 \times 6$.
> 6. **Definir las doce restricciones de capacidad para cada periodo:**
>    - 6 para la producción normal.
>    - 6 para la producción con tiempo extra.
> 7. **Definir las seis restricciones de demanda para cada mes.**
> 8. **Definir la función objetivo** para minimizar los costos de producción.

---

## 1. **Métodos de Optimización Más Comunes.**

---

### Programación Lineal (PL)

La Programación Lineal se utiliza para resolver problemas donde se busca maximizar o minimizar una función objetivo lineal, sujeto a restricciones que también son lineales. Este tipo de optimización es ampliamente aplicado en problemas de asignación de recursos, como maximizar ganancias o minimizar costos en procesos de producción, logística y planificación. Los métodos más comunes incluyen el **Método Simplex** y el **Método de los Puntos Interiores**.

**Ejemplo:**

- Maximizar las ganancias ((Z = 3x + 2y)) de dos productos ((x) e (y)), sujeto a restricciones como la disponibilidad de materias primas ((2x + y \leq 100)) y capacidad de producción ((x + 3y \leq 90)).

### Programación Entera (PE)

La Programación Entera es una variante de la Programación Lineal, donde las variables de decisión deben tomar valores enteros. Esto es importante en problemas que involucran unidades indivisibles, como cantidad de personas, vehículos o paquetes.

Se divide en dos categorías principales:

1. **Programación Entera Mixta (MIP):** Algunas variables son enteras y otras continuas.
2. **Programación Entera Pura (IP):** Todas las variables deben ser enteras.

**Ejemplo:**

- Determinar cuántos empleados (enteros) asignar a diferentes turnos para maximizar la productividad.

### Programación No Lineal (PNL)

La Programación No Lineal se aplica cuando la función objetivo o alguna restricción es no lineal. Este tipo de problema surge en situaciones donde los costos, beneficios o restricciones tienen relaciones más complejas que no pueden representarse con ecuaciones lineales.

**Métodos comunes:**

- Gradiente Descendente
- Métodos de Newton

**Ejemplo:**

- Maximizar el rendimiento de una inversión con retornos no lineales o minimizar costos en una red eléctrica con pérdidas cuadráticas.

### Programación Dinámica

La Programación Dinámica divide problemas complejos en una serie de subproblemas más pequeños y los resuelve de forma recursiva. Es especialmente útil en problemas de decisiones secuenciales, donde una decisión en un momento afecta las opciones futuras.

**Características clave:**

- Principio de optimalidad: La solución de un subproblema óptimo contribuye a la solución global.
- Aplicación en cadenas de suministro, rutas óptimas (algoritmo de Bellman-Ford), y problemas de inventarios.

**Ejemplo:**

- Determinar la política óptima de almacenamiento para minimizar costos en un horizonte temporal dado.

### Algoritmos Genéticos

Estos algoritmos se inspiran en el proceso de evolución natural, como la selección natural, el cruce (recombinación) y la mutación. Los algoritmos genéticos son útiles para problemas complejos de optimización donde las funciones objetivo son difíciles de modelar matemáticamente.

**Aplicaciones:**

- Diseño de circuitos, optimización de rutas, y problemas de empaquetamiento.

**Ejemplo:**

- Encontrar la configuración óptima de rutas para un servicio de entrega de paquetes.

### Optimización Estocástica

En esta técnica, se considera que los datos del problema tienen un grado de incertidumbre. Se utilizan modelos probabilísticos para encontrar soluciones óptimas que sean robustas frente a variaciones en los datos.

**Métodos comunes:**

- Simulated Annealing
- Optimización Bayesiana

**Ejemplo:**

- Planificación de inversiones en mercados financieros donde los retornos tienen incertidumbre o ruido.

---

## 2. Conceptos Básicos de la Programación Lineal

---

### 1. **Función Objetivo**

La **función objetivo** es una expresión matemática lineal que define lo que se busca optimizar. Puede ser:

- **Maximizar**: Por ejemplo, las ganancias en un negocio.
- **Minimizar**: Por ejemplo, los costos de producción.

Se representa típicamente como:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

donde $Z$ es el valor a optimizar, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables de decisión, y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los coeficientes que reflejan su contribución al objetivo.

### 2. **Variables de Decisión**

Las **variables de decisión** son los elementos que se pueden controlar y ajustar para influir en el resultado de la función objetivo. Estas variables representan cantidades desconocidas, como:

- La cantidad de productos a fabricar.
- Los recursos a asignar.

**Ejemplo**: En un problema de producción, las variables de decisión pueden ser:

- $x_1$: cantidad de producto A a fabricar.
- $x_2$: cantidad de producto B a fabricar.

### 3. **Restricciones**

Las **restricciones** son las condiciones que deben cumplirse debido a limitaciones reales como:

- Recursos disponibles (tiempo, dinero, materias primas).
- Capacidades de producción.

Cada restricción se expresa como una ecuación o desigualdad lineal, por ejemplo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

donde $a_1$ y $a_2$ son coeficientes que reflejan la relación entre las variables, y $b$ es el límite permitido.

### 4. **Región Factible**

La **región factible** es el conjunto de todas las soluciones que cumplen con las restricciones.

- Se representa gráficamente como un área (en problemas de dos variables) o un volumen (en problemas de tres o más variables).
- Es crucial que esta región sea **convexa**, lo que significa que cualquier combinación lineal de soluciones dentro de la región sigue siendo válida.

**Ejemplo**: Si las restricciones son $x_1 + x_2 \leq 10$ y $x_1, x_2 \geq 0$, la región factible sería un triángulo delimitado por estas líneas y los ejes $x_1$ y $x_2$.

### 5. **Solución Óptima**

La **solución óptima** es el punto dentro de la región factible donde la función objetivo alcanza su valor máximo o mínimo. Este punto generalmente se encuentra en uno de los **vértices** de la región factible, ya que la función objetivo es lineal.

---

## 3. Grafos

Un **grafo** es una estructura matemática utilizada para representar **relaciones** o **interacciones** entre un conjunto de elementos. Es ampliamente utilizado en disciplinas como matemáticas, informática, ingeniería, y ciencias sociales, ya que permite modelar sistemas complejos y analizar sus propiedades.

### Componentes principales de un grafo:

1. **Vértices (nodos)**:
    - Son los puntos o entidades que componen el grafo.
    - Representan los **objetos** o **elementos** del sistema que se está modelando.
    - Ejemplo: En una red social, los vértices pueden ser personas.
2. **Aristas (enlaces o bordes)**:
    - Son las conexiones entre pares de vértices.
    - Representan las **relaciones**, **interacciones** o **asociaciones** entre los objetos.
    - Ejemplo: En una red social, las aristas pueden representar amistad o seguimiento entre personas.

## Tipos de grafos:

1. **Según las aristas**:
   - **Grafo dirigido (dígrafo)**: Las aristas tienen dirección (por ejemplo, relaciones de "sigue a" en Twitter).
   - **Grafo no dirigido**: Las aristas no tienen dirección (por ejemplo, relaciones de amistad mutua en Facebook).
2. **Según el peso de las aristas**:
   - **Grafo ponderado**: Las aristas tienen un valor asociado (por ejemplo, la distancia entre ciudades en una red de transporte).
   - **Grafo no ponderado**: Las aristas solo indican conexión, sin valores asociados.
3. **Otros tipos**:
   - **Grafo conexo**: Hay un camino entre cualquier par de vértices.
   - **Grafo no conexo**: Algunos vértices no están conectados entre sí.
   - **Árbol**: Un grafo acíclico conexo.

## Aplicaciones de los grafos:

- **Redes de transporte**: Modelan rutas y conexiones entre ciudades.
- **Redes sociales**: Representan interacciones entre usuarios.
- **Flujos de producción y demanda**: Representan la relación entre periodos de producción (vértices) y meses de demanda (aristas).
- **Sistemas computacionales**: Representan interconexiones entre dispositivos o nodos en una red.

---

# 4. Grafo que relaciona el periodo de producción con el mes de demanda probado en la situación problema

---

## 1. **Definición de los vértices del grafo**:

- **Vértices de Producción ($P_1$, $P_2$, ..., $P_6$):** Representan los periodos de producción en los meses 1 a 6, con sus respectivas capacidades regulares y de tiempo extra.
- **Vértices de Demanda ($D_1$, $D_2$, ..., $D_6$):** Representan las demandas de cada mes.

## 2. **Definición de las aristas**:

- Una arista conecta un vértice de producción $P_i$ con un vértice de demanda $D_j$ si se puede satisfacer la demanda del mes $D_j$ con la producción del periodo $P_i$.
- Las aristas tienen **restricciones**:
  - Se permite inventario, pero con un costo.
  - No se permite satisfacer la demanda de un mes en un periodo posterior.

## 3. **Costos asociados a las aristas**:

- **Producción regular:** Tiene un costo fijo dependiendo del mes de producción.
- **Tiempo extra:** Se calcula como un 40% más del costo normal.
- **Inventario:** Se añade un costo de 5 por unidad almacenada por mes.

## 4. **Construcción del grafo**:

El grafo es **dirigido** y sus aristas incluyen:

- **De $P_i \to D_i$:** Representan la capacidad regular y/o de tiempo extra usada directamente para cumplir la demanda del mes.
- **De $P_i \to D_{i+1}, D_{i+2}, \ldots$:** Representan unidades almacenadas para cubrir demandas futuras, con el costo asociado de almacenamiento.

## Representación:

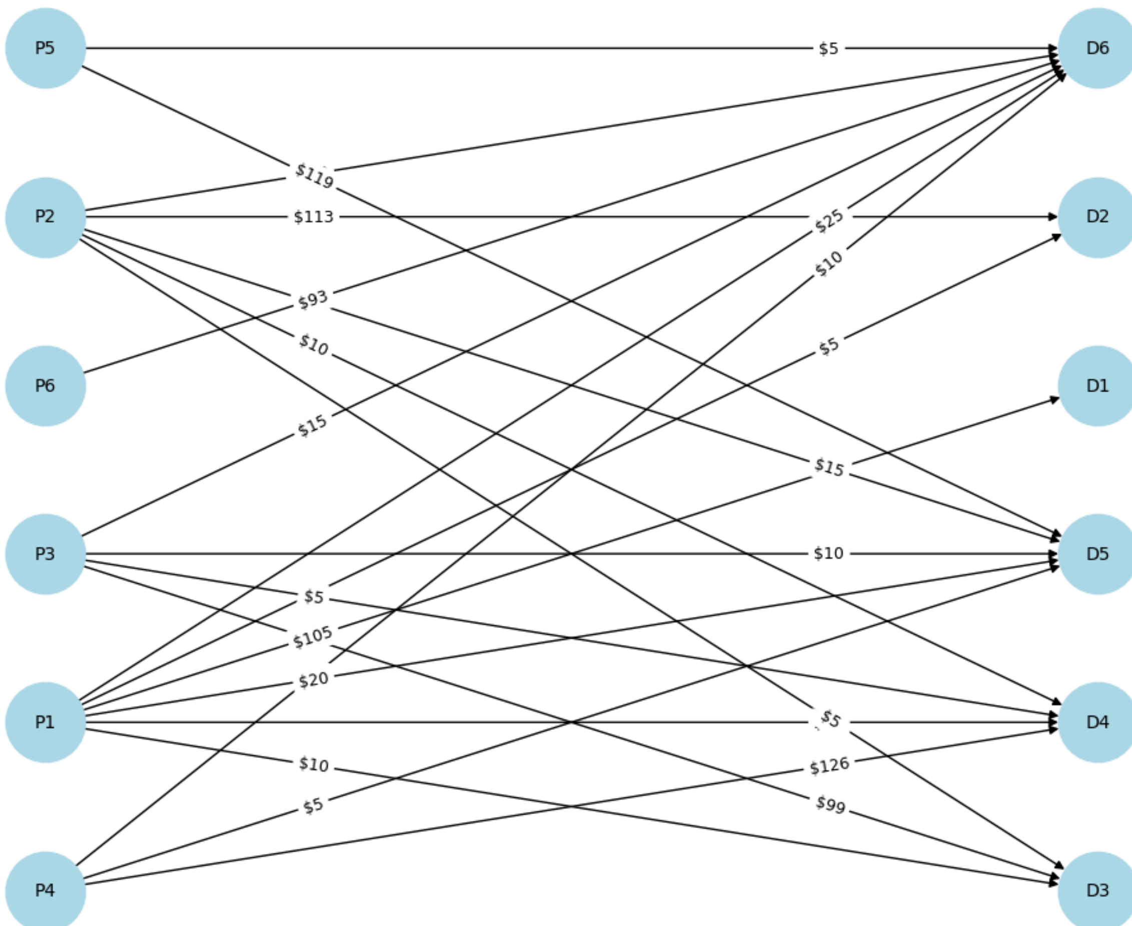
- Los vértices $P_1, P_2, \ldots, P_6$ tienen capacidades de producción regular $[220, 300, 220, 350, 290, 230]$.
- Los vértices $D_1, D_2, \ldots, D_6$ tienen demandas $[250, 280, 300, 270, 270, 320]$.
- Las aristas incluyen información del costo (producción regular, tiempo extra, almacenamiento).

Aquí tenemos el grafo que relaciona los periodos de producción $(P_1, P_2, \ldots, P_6)$ con los meses de demanda $(D_1, D_2, \ldots, D_6)$. Cada arista representa una posible transferencia de producción para satisfacer la demanda o inventariar producto para periodos futuros, con los costos asociados etiquetados en las conexiones.

In [1]:
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

# Crear el grafo
G = nx.DiGraph()
```

```python
# Vértices de Producción y Demanda
production = [f"P{i+1}" for i in range(6)]
demand = [f"D{i+1}" for i in range(6)]

# Agregar los vértices al grafo
G.add_nodes_from(production, subset=0)  # Producción en nivel 0
G.add_nodes_from(demand, subset=1)     # Demanda en nivel 1

# Datos de capacidades de producción, demandas y costos
capacities = [220, 300, 220, 350, 290, 230]
demands = [250, 280, 300, 270, 270, 320]
regular_costs = [105, 113, 99, 126, 119, 93]

# Agregar aristas de producción a demanda directa (P_i -> D_i)
for i in range(6):
    G.add_edge(production[i], demand[i], capacity=capacities[i], demand=demands[i], cost=regular_costs[i])

# Agregar aristas para inventarios (P_i -> D_{i+1}, D_{i+2}, ...)
for i in range(6):
    for j in range(i+1, 6):
        inventory_cost = 5 * (j - i)  # Costo de inventario
        G.add_edge(production[i], demand[j], cost=inventory_cost)

# Dibujar el grafo
pos = nx.multipartite_layout(G, subset_key="subset")

# Ajustar las etiquetas para que estén alternadas correctamente
plt.figure(figsize=(10, 8))
nx.draw(G, pos, with_labels=True, node_size=2000, node_color="lightblue", font_size=10)

# Configurar etiquetas alternadas izquierda y derecha
edge_labels = nx.get_edge_attributes(G, 'cost')
adjusted_edge_labels = {}

# Alternar las posiciones de las etiquetas a la izquierda y derecha
for idx, (u, v, d) in enumerate(G.edges(data=True)):
    label_position = 0.25 if idx % 2 == 0 else 0.75  # Alternar posición
    nx.draw_networkx_edge_labels(
        G,
        pos,
        edge_labels={(u, v): f"${d['cost']}"},
        font_size=9,
        label_pos=label_position
    )


plt.title("Grafo de Periodos de Producción y Meses de Demanda")
plt.show()
```

Grafo de Periodos de Producción y Meses de Demanda




## Matriz de Costos

Para resolver el problema planteado y formular un modelo de producción, utilizaremos programación lineal. El objetivo es minimizar los costos totales, incluidos los costos de producción regular, tiempo extra y almacenamiento, mientras se satisface la demanda mensual.

### Variables

1. $x_{i,j}$: Número de unidades producidas regularmente en el mes $i$ para satisfacer la demanda del mes $j$.
2. $y_i$: Número de unidades producidas en tiempo extra en el mes $i$.
3. $s_i$: Inventario al final del mes $i$.

### Restricciones

1. **Demanda**: Cada mes $j$ debe satisfacer su demanda, ya sea mediante producción regular, tiempo extra o inventario.

$$\sum_{i=1}^{j} x_{i,j} + y_j + s_{j-1} = \text{Demanda}_j, \quad \forall j$$

2. **Capacidades**:
   - Producción regular:

$$\sum_{j=i}^{6} x_{i,j} \leq \text{Capacidad regular}_i, \quad \forall i$$

   - Producción en tiempo extra:

$$y_i \leq 0.5 \times \text{Capacidad regular}_i, \quad \forall i$$

3. **Inventario**: El inventario de un mes está limitado por el excedente del mes anterior:

$$s_i = s_{i-1} + \sum_{j=i+1}^{6} x_{i,j} + y_i - \text{Demanda}_i, \quad s_0 = 0$$

### Función Objetivo

Minimizar los costos totales:

$$\text{Costo total} = \sum_{i=1}^{6} \left( C_{reg,i} \cdot \sum_{j=i}^{6} x_{i,j} + C_{extra,i} \cdot y_i + C_{alm} \cdot s_i \right)$$

donde:

- $C_{reg,i}$: Costo de producción regular en el mes $i$.
- $C_{extra,i} = 1.4 \cdot C_{reg,i}$: Costo de tiempo extra en el mes $i$.
- $C_{alm} = 5$: Costo de almacenamiento por unidad.

### Datos

| Mes | Demanda ($d_j$) | Capacidad regular ($c_{reg,i}$) | Costo regular ($C_{reg,i}$) | Capacidad extra ($c_{extra,i}$) | Costo extra ($C_{extra,i}$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 250 | 220 | 105.00 | 110 | 147.00 |
| 2 | 280 | 300 | 113.00 | 150 | 158.20 |
| 3 | 300 | 220 | 99.00 | 110 | 138.60 |
| 4 | 270 | 350 | 126.00 | 175 | 176.40 |
| 5 | 270 | 290 | 119.00 | 145 | 166.60 |
| 6 | 320 | 230 | 93.00 | 115 | 130.20 |

## 6. Restricciones de Capacidad para Cada Periodo

### Producción Normal

- Mes 1: $x_{1N} \leq 220$
- Mes 2: $x_{2N} \leq 300$
- Mes 3: $x_{3N} \leq 220$
- Mes 4: $x_{4N} \leq 350$
- Mes 5: $x_{5N} \leq 290$
- Mes 6: $x_{6N} \leq 230$

### Producción con Tiempo Extra

- Mes 1: $x_{1E} \leq 110$
- Mes 2: $x_{2E} \leq 150$
- Mes 3: $x_{3E} \leq 110$
- Mes 4: $x_{4E} \leq 175$
- Mes 5: $x_{5E} \leq 145$
- Mes 6: $x_{6E} \leq 115$

## 7. Restricciones de Demanda para Cada Mes

Las restricciones aseguran que la demanda de cada mes sea satisfecha sin retrasos:

- Mes 1: $x_{1N} + x_{1E} + I_0 - I_1 = 250$
- Mes 2: $x_{2N} + x_{2E} + I_1 - I_2 = 280$
- Mes 3: $x_{3N} + x_{3E} + I_2 - I_3 = 300$
- Mes 4: $x_{4N} + x_{4E} + I_3 - I_4 = 270$

- Mes 5: $x_{5N} + x_{5E} + I_4 - I_5 = 270$
- Mes 6: $x_{6N} + x_{6E} + I_5 - I_6 = 320$

### Donde:

- $I_i$: Inventario al final del mes $i$.
- $I_0$: Inventario inicial (asumimos $I_0 = 0$ si no se indica lo contrario).

### Restricciones de Inventario:

- $I_i \geq 0$ para todo $i$ (no se permite inventario negativo).
- No se permite satisfacer la demanda de un mes en periodos posteriores.

## 8. Función Objetivo

Minimizar el costo total de producción y almacenamiento:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=i}^{6} \left[ c_i \, x_{ij} + c_i^{TE} \, y_{ij} + h \times (j - i) \times (x_{ij} + y_{ij}) \right]$$

### Donde:

- $c_i$: Costo de producción en tiempo regular en el mes $i$.
- $c_i^{TE}$: Costo de producción en tiempo extra en el mes $i$.
- $h \times (j - i)$: Costo de almacenamiento desde el mes $i$ hasta el mes $j$.

---

### Restricciones

### Restricciones de Capacidad en Tiempo Regular

Para cada mes $i$:

$$\sum_{j=i}^{6} x_{ij} \leq CR_i$$

### Restricciones de Capacidad en Tiempo Extra

Para cada mes $i$:

$$\sum_{j=i}^{6} y_{ij} \leq CE_i$$

### Restricciones de Demanda

Para cada mes $j$:

$$\sum_{i=1}^{j} (x_{ij} + y_{ij}) = D_j$$

### No Negatividad

$$x_{ij} \geq 0, \, y_{ij} \geq 0 \quad \text{para todos } i, j \text{ con } i \leq j$$

## Referencias bibliográficas


Taha, H. A. (2011). Investigación de operaciones. México: Pearson Educación.

Sandblom, C., & Eiselt, H. A. (2010). Operations Research: A Model-Based Approach. Germany: Springer Berlin Heidelberg.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). Introducción a la Investigación de Operaciones. McGraw-Hill.

Winston, W. L. (2004). Operations Research: Applications and Algorithms. Cengage Learning.

---

URL al repositorio de codigo de este documento (Github):

https://github.com/davidlobolobo/data_science/blob/main/Math/MCDI_MAT_David_Rodriguez_Tarea_8.ipynb

---