

El problema de la mochila

David Mallasén Quintana

Resumen

Implementación y comparación de diferentes algoritmos para resolver el problema de la mochila en sus distintas variantes. Se incluye una introducción al problema y el código de las resoluciones en C++.

Índice

1. Introducción	2
1.1. Descripción del problema y variantes	2
1.1.1. Definición formal del problema	2
1.2. Desarrollo de los casos de prueba	3
2. Implementación de los algoritmos	3
2.1. Método voraz	3
2.1.1. Descripción de la solución	3
2.1.2. Demostración de optimalidad	3
2.1.3. Código	4
2.1.4. Análisis de costes	5
2.2. Programación dinámica	5
2.2.1. Descripción de la solución	6
2.2.2. Código	6
2.2.3. Análisis de costes	7
2.3. Ramificación y poda	8
2.3.1. Descripción de la solución	8
2.3.2. Código	9
2.3.3. Análisis de costes	11
2.4. Algoritmo genético	11
2.4.1. Descripción de la solución y código de las funciones . .	11
2.4.2. Código	17
2.4.3. Análisis de costes	17
3. Comparación	18

1. Introducción

1.1. Descripción del problema y variantes

El problema de la mochila es un problema de optimización combinatoria, es decir, que busca la mejor solución entre un conjunto finito de posibles soluciones. Supondremos que tenemos una mochila con un peso limitado y que queremos llenarla con una serie de objetos dados por su peso y su valor. El objetivo del problema será maximizar el valor total de los objetos que metamos en la mochila sin exceder el peso máximo.

El problema de la mochila es uno de los 21 problemas NP-completos de Richard Karp, lista elaborada en 1972 y perteneciente a su trabajo *Reducibility Among Combinatorial Problems*. Esto surgió como profundización del trabajo de Stephen Cook, quien en 1971 había demostrado uno de los resultados más importantes y pioneros de la complejidad computacional: la NP-completitud del Problema de satisfacibilidad booleana (SAT). El descubrimiento de Karp de que todos estos importantes problemas eran NP-completos motivó el estudio de la NP-completitud y de la indagación en la famosa pregunta de si $P = NP$.

1.1.1. Definición formal del problema

Supongamos que tenemos n objetos numerados del 1 al n , cada uno con un peso $p_i > 0$ y un valor $v_i > 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Tendremos también una mochila que soporta un peso máximo $M > 0$.

Definimos la función indicadora $x_i \in \{0, 1\}$ que representará si se ha cogido el objeto i ($x_i = 1$) o no ($x_i = 0$). El problema consiste en maximizar

$$\sum_{i=1}^n v_i x_i$$

con la restricción de $\sum_{i=1}^n p_i x_i < M$. La solución del problema vendrá dada por el conjunto de las x_i .

El caso en el que todos los objetos caben juntos en la mochila no tiene mucho interés ya que la solución consistiría en añadirlos todos. Por tanto consideraremos el caso en el que $\sum_{i=1}^n p_i > M$.

Para el método voraz que veremos en la sección 2.1 tomaremos la variante en que los objetos se pueden fraccionar, es decir, $x_i \in [0, 1]$. En este caso

siempre obtendremos una solución óptima, lo demostraremos en 2.1.2, en la que $\sum_{i=1}^n p_i x_i = M$.

1.2. Desarrollo de los casos de prueba

Incluir breve explicación sobre cómo se desarrollarán los casos de prueba. Inicialización de los valores, tamaño de los casos, cómputo de los tiempos y código de las llamadas.

2. Implementación de los algoritmos

2.1. Método voraz

En este apartado implementaremos una solución voraz al problema de la mochila. En el caso del método voraz obtendremos una solución muy eficiente ($O(n \log n)$). Sin embargo tendremos que imponer la restricción de que los objetos sean fraccionables para que podamos asegurar una solución óptima.

2.1.1. Descripción de la solución

Primero ordenaremos los objetos según su densidad $d_i = \frac{v_i}{p_i}$. A la hora de construir la solución iremos cogiendo los objetos enteros en orden decreciente de densidad mientras quepan. Finalmente, si sobra hueco, fraccionaremos el objeto de mayor densidad que nos quede para terminar de rellenar toda la mochila.

2.1.2. Demostración de optimalidad

Sea $X = (x_1, \dots, x_n)$ la solución construida por el algoritmo voraz como hemos indicado anteriormente. Como hemos supuesto al principio que $\sum_{i=1}^n p_i > M$, $\exists j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j < 1$. Por la forma en la que construimos la solución sabemos que $0 \leq x_j < 1$ y $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$. Supongamos que la solución X no es óptima y procedamos mediante el método de reducción de diferencias. Comparamos con una solución óptima $Y = (y_1, \dots, y_n)$.

Sea $k = \min\{i : y_i \neq x_i\}$. Por como funciona el algoritmo se debe cumplir que $k \leq j$, veamos que $y_k < x_k$:

- Si $k < j$: $x_k = 1$ y, por tanto, $y_k < x_k$.

- Si $k = j$: $y_i = 1$ para $1 \leq i < k$ por lo que $y_k > x_k$ implicaría $\sum_{i=1}^n p_i y_i > M$, cosa que no puede suceder. Por como hemos elegido k , $y_k \neq x_k$, luego debe ser $y_k < x_k$.
- Si $k > j$: Por como hemos construido la solución voraz, $\sum_{i=1}^n p_i y_i > M$, luego este caso no se puede dar.

Modificamos la solución óptima aumentando y_k hasta que $y_k = x_k$ y decrementando los y_{k+1}, \dots, y_n de forma que el peso de la mochila siga siendo M . Obtenemos así $Z = (z_1, \dots, z_n)$ que cumplirá $z_i = x_i$ para $1 \leq i \leq k$. También tendremos, por como hemos modificado Y para conseguir Z , que:

$$\sum_{i=k+1}^n p_i (y_i - z_i) = p_k (z_k - y_k) \quad (*)$$

Finalmente veamos que Z también es óptima. Para ello, como Y lo era, basta ver que no hemos empeorado la situación, es decir, que $\sum_{i=1}^n v_i z_i \geq \sum_{i=1}^n v_i y_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i z_i &= \sum_{i=1}^n v_i y_i + v_k (z_k - y_k) - \sum_{i=k+1}^n v_i (y_i - z_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n v_i y_i + \frac{v_k}{p_k} p_k (z_k - y_k) - \sum_{i=k+1}^n \frac{v_i}{p_i} p_i (y_i - z_i) \stackrel{\frac{v_k}{p_k} \geq \frac{v_i}{p_i} \implies -\frac{v_i}{p_i} \geq -\frac{v_k}{p_k}}{\geq} \\ &\geq \sum_{i=1}^n v_i y_i + (p_k (z_k - y_k) - \sum_{i=k+1}^n p_i (y_i - z_i)) \frac{v_k}{p_k} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i y_i \end{aligned}$$

2.1.3. Código

```

1  /**
2   * Resuelve el problema de la mochila con objetos fraccionables mediante un
3   * algoritmo voraz. Presuponemos que la suma de los pesos de todos los
4   * objetos > M.
5   *
6   * Coste en tiempo: O(n log n), n = numero de objetos.
7   *
8   * @param objetos Conjunto de objetos que tenemos disponibles.
9   * @param M Peso maximo que soporta la mochila.
10  * @param solucion Indica cuanto se debe coger de cada objeto [0, 1].
11  * @param valorSol Valor de la mochila con los objetos dados por solucion.
12  */
13 void mochilaVoraz(std::vector<ObjetoReal> const &objetos, double M,
14                  std::vector<double> &solucion, double &valorSol) {

```

```

15     const size_t n = objetos.size();
16
17     //Calculamos las densidades de cada objeto
18     std::vector<Densidad> d(n);
19     for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
20         d[i].densidad = objetos[i].valor / objetos[i].peso;
21         d[i].obj = i;    //Para saber a que objeto corresponde
22     }
23
24     //Ordenamos de mayor a menor las densidades
25     std::sort(d.begin(), d.end(), std::greater<Densidad>());
26
27     //Cogemos los objetos mientras quepan enteros
28     size_t i;
29     for (i = 0; i < n && M - objetos[d[i].obj].peso >= 0; ++i) {
30         valorSol += objetos[d[i].obj].valor;
31         M -= objetos[d[i].obj].peso;
32         solucion[d[i].obj] = 1;
33     }
34
35     //Si aun no se ha llenado la mochila completamos partiendo el objeto
36     if (M > 0) {
37         solucion[d[i].obj] = M / objetos[d[i].obj].peso;
38         valorSol += objetos[d[i].obj].valor * solucion[d[i].obj];
39     }
40 }

```

2.1.4. Análisis de costes

Analizaremos ahora los costes en tiempo y memoria del algoritmo. En cuanto al tiempo tenemos un coste medio $O(n \log n)$, donde n es el número de objetos, que viene dado por la ordenación de las densidades. Los dos bucles son de coste lineal y el resto de operaciones son constantes. En cuanto al espacio usamos un vector de tamaño n para almacenar las densidades pero como es del orden del tamaño de los datos obtenemos un coste en memoria de $O(1)$.

2.2. Programación dinámica

En este apartado implementaremos un algoritmo de programación dinámica para el problema de la mochila en su versión 0-1. Tendremos que tener la restricción de que los pesos de los objetos y el peso total de la mochila sean números enteros. Sin embargo esto no supone una restricción real para el algoritmo ya que, siempre que los pesos sean números racionales, podremos multiplicar todos los pesos por una constante para que resulten en números enteros (por ejemplo, suponiendo los pesos escritos como fracciones, por el mínimo común múltiplo de los denominadores). Con este algoritmo obtendremos una solución exponencial con respecto al tamaño de los datos de entrada.

2.2.1. Descripción de la solución

Veamos la forma de abordar el problema desde el punto de vista de la programación dinámica. Primero definimos la función:

$mochila(i, j)$ = máximo valor que podemos poner en la mochila de peso máximo j considerando los objetos del 1 al i .

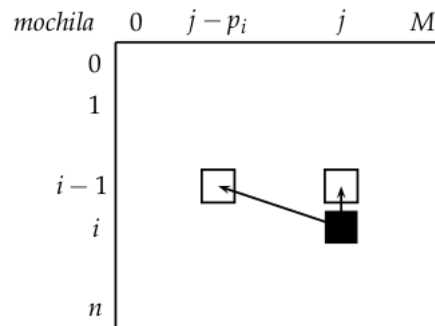
Tomamos como casos base:

$$\begin{aligned} mochila(0, j) &= 0 & 0 \leq j \leq M \\ mochila(i, 0) &= 0 & 0 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Y como función recursiva:

$$mochila(i, j) = \begin{cases} mochila(i-1, j) & \text{si } p_i > j \\ \max\{mochila(i-1, j), mochila(i-1, j-p_i) + v_i\} & \text{si } p_i \leq j \end{cases}$$

Así pues vamos probando cada objeto y si no cabe no lo cogemos, pero si cabe tomamos el máximo entre cogerlo y no cogerlo. Para ello recorreremos la tabla por filas de forma ascendente (cada vez el intervalo $[0, i]$ es más grande) y cada fila la recorreremos también de forma ascendente (cada vez la mochila soporta un peso mayor j hasta llegar a M). De esta forma el valor que buscamos lo tendremos en la posición (n, M) .



Para calcular qué objetos hemos cogido una vez que hemos obtenido la solución haremos el proceso inverso. Recorreremos las filas de forma descendente y para cada objeto comprobaremos si lo hemos cogido o no.

2.2.2. Código

```

1  /**
2  * Resuelve el problema de la mochila 0-1 mediante un algoritmo de
3  * programación dinámica. El peso de cada objeto y el peso máximo de la

```

```

4  * mochila deben ser enteros positivos.
5  *
6  * Coste:  $O(nM)$  en tiempo y espacio,  $n$  = numero de objetos,  $M$  = peso que
7  * soporta la mochila.
8  *
9  * @param objetos Conjunto de objetos que tenemos disponibles.
10 * @param M Peso maximo que soporta la mochila.
11 * @param solucion Indica si se coge el objeto o no.
12 * @param valorSol Valor de la mochila con los objetos dados por solucion.
13 */
14 void mochilaProgDin(std::vector<ObjetoInt> const &objetos, int M,
15                   std::vector<bool> &solucion, double &valorSol) {
16     const size_t n = objetos.size();
17
18     //Creamos e inicializamos a 0 la tabla con la que resolvemos el problema
19     std::vector<std::vector<double>> mochila(n + 1, std::vector<double>
20         (M + 1, 0));
21
22     //Rellenamos la tabla
23     //objetos[i - 1] ya que mochila va de [1..n] y objetos va de [0, n)
24     for (size_t i = 1; i <= n; ++i) {
25         for (int j = 1; j <= M; ++j) {
26             if (objetos[i - 1].peso > j) //Si no cabe no lo cogemos
27                 mochila[i][j] = mochila[i - 1][j];
28             else //Si cabe tomamos el maximo entre cogerlo y no cogerlo
29                 mochila[i][j] =
30                     std::max(mochila[i - 1][j],
31                             mochila[i - 1][j - objetos[i - 1].peso] +
32                             objetos[i - 1].valor);
33         }
34     }
35     valorSol = mochila[n][M];
36
37     //Calculamos que objetos hemos cogido
38     for (size_t i = n; i >= 1; --i) {
39         if (mochila[i][M] == mochila[i - 1][M]) //No cogido el objeto i
40             solucion[i - 1] = false;
41         else { //Cogido el objeto i
42             solucion[i - 1] = true;
43             M -= objetos[i - 1].peso;
44         }
45     }
46 }

```

2.2.3. Análisis de costes

Vemos los costes en tiempo y memoria del algoritmo. En cuanto al tiempo tenemos un coste $O(nM)$, donde n es el numero de objetos. Esto lo obtenemos al recorrer la tabla (de tamaño $n \times M$) realizando operaciones constantes en cada posición. El coste de recuperar los objetos seleccionados será lineal en n así que no empeora el orden que ya tenemos. En cuanto a la memoria tenemos un coste $O(nM)$ dado también por la tabla. Aunque pueda parecer que estamos ante un algoritmo polinómico, en realidad tenemos un coste exponencial con respecto al tamaño de los datos de entrada. Esto se debe a que M es un número que representaremos en una cierta base d y esta

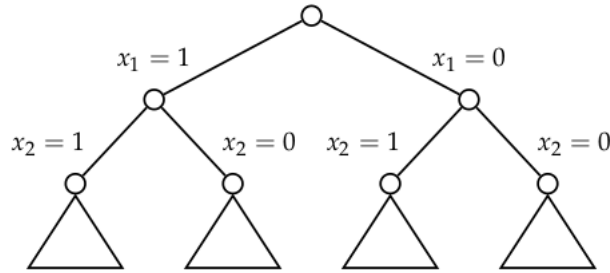
representación, $\log_d(M)$, es exponencial frente a M .

2.3. Ramificación y poda

En este apartado implementaremos un algoritmo de ramificación y poda para resolver el problema de la mochila en la versión 0-1. Al igual que en programación dinámica, obtendremos un coste exponencial ($O(n2^n)$).

2.3.1. Descripción de la solución

A la hora de resolver el problema desde el punto de vista de la programación dinámica, tomaremos un árbol de decisiones binario que represente si se coge o no cada objeto.



A partir de esto seguiremos el esquema optimista/pesimista. La cola de prioridad donde iremos introduciendo los nodos será de máximos y tomaremos como prioridad el valor óptimo que calculemos. Así, la estructura de cada nodo será la siguiente:

```

1 struct Nodo {
2     std::vector<bool> sol;
3     int k;
4     double pesoAc, valorAc;
5     double valorOpt;    //Prioridad
6 };
7
8 bool operator<(Nodo const &n1, Nodo const &n2) {
9     return n1.valorOpt < n2.valorOpt;
10 }

```

Para el nodo X se cumplirá:

$$valorOpt(X) \geq valorFinal(X) \geq valorPes(X)$$

donde $valorFinal(X)$ será el valor que tendrá la mochila en la mejor solución alcanzable desde X . Además, para cualquier solución Y a la que podamos llegar desde X se cumple que:

$$valorOpt(X) \geq valorFinal(X) \geq valor(Y)$$

A la hora de calcular $valorOpt(X)$, como el problema es de maximización, tendremos que calcular una cota superior de la mejor solución alcanzable. Para ello utilizaremos el algoritmo voraz que resuelve el problema cuando los objetos se pueden partir. Como esa solución es óptima y tiene menos restricciones que la solución 0-1, no puede haber ninguna solución sin fraccionar objetos que sea mejor.

Para $valorPes(X)$ completaremos una posible solución. Incorporaremos a la mochila todos los objetos que se pueda sobre los que todavía no hayamos decidido. Para ello los tomaremos en el orden del algoritmo voraz.

2.3.2. Código

```

1  /**
2  * Calcula las estimaciones optimista y pesimista segun el estado en el que
3  * nos encontremos. Presupone que los objetos estan ordenados en orden
4  * decreciente de su densidad (valor/peso).
5  *
6  * Coste: O(n-k), n = numero de objetos, k = indice por el que vamos.
7  *
8  * @param objetos Conjunto de objetos que tenemos disponibles.
9  * @param d Vector ordenado en orden creciente de las densidades.
10 * @param M Peso maximo que soporta la mochila.
11 * @param k Indice del objeto por el que vamos.
12 * @param pesoAc Peso acumulado en la mochila.
13 * @param valorAc Valor acumulado en la mochila.
14 * @param opt Cota optimista.
15 * @param pes Cota pesimista.
16 */
17 void calculoEst(std::vector<ObjetoReal> const &objetos, std::vector<Densidad>
18 const &d, double M, int k, double pesoAc, double valorAc, double &opt,
19 double &pes) {
20     double hueco = M - pesoAc;
21     const size_t n = objetos.size();
22     pes = opt = valorAc;
23     k++;
24     for (k; k < n && objetos[d[k].obj].peso <= hueco; ++k) {
25         //Cogemos el objeto k entero
26         hueco -= objetos[d[k].obj].peso;
27         opt += objetos[d[k].obj].valor;
28         pes += objetos[d[k].obj].valor;
29     }
30     if (k < n) { //Quedan objetos por probar y objetos[k].peso > hueco
31         //Fraccionamos el objeto k (solucion voraz)
32         opt += (hueco / objetos[d[k].obj].peso) * objetos[d[k].obj].valor;
33         //Extendemos a una solucion en la version 0-1
34         k++;
35         for (k; k < n && hueco > 0; ++k) {
36             if (objetos[d[k].obj].peso <= hueco) {
37                 hueco -= objetos[d[k].obj].peso;
38                 pes += objetos[d[k].obj].valor;
39             }
40         }
41     }
42 }

```

```

43
44 /**
45  * Resuelve el problema de la mochila 0-1 mediante un algoritmo de
46  * ramifiacion y poda.
47  *
48  * Coste:  $O(n \cdot 2^n)$  en tiempo y espacio,  $n$  = numero de objetos.
49  *
50  * @param objetos Conjunto de objetos que tenemos disponibles.
51  * @param M Peso maximo que soporta la mochila.
52  * @param solMejor Indica si se coge el objeto o no.
53  * @param valorMejor Valor de la mochila con los objetos dados por solMejor.
54  */
55 void mochilaRamPoda(std::vector<ObjetoReal> const &objetos, double M,
56                   std::vector<bool> &solMejor, double &valorMejor) {
57     Nodo X, Y;
58     std::priority_queue<Nodo> C;
59     const size_t n = objetos.size();
60     double pes;
61
62     //Calculamos las densidades de cada objeto
63     std::vector<Densidad> d(n);
64     for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
65         d[i].densidad = objetos[i].valor / objetos[i].peso;
66         d[i].obj = i; //Para saber a que objeto corresponde
67     }
68
69     //Ordenamos de mayor a menor las densidades
70     std::sort(d.begin(), d.end(), std::greater<Densidad>());
71
72     //Generamos la raiz
73     Y.k = -1; //Empezamos en -1 para que vaya de [0, n)
74     Y.pesoAc = 0;
75     Y.valorAc = 0;
76     Y.sol.resize(n, false);
77     calculoEst(objetos, d, M, Y.k, Y.pesoAc, Y.valorAc, Y.valorOpt,
78               valorMejor);
79
80     C.push(Y);
81     while (!C.empty() && C.top().valorOpt >= valorMejor) {
82         Y = C.top();
83         C.pop();
84         X.k = Y.k + 1;
85         X.sol = Y.sol;
86
87         //Si cabe probamos a meter el objeto en la mochila
88         if (Y.pesoAc + objetos[d[X.k].obj].peso <= M) {
89             X.sol[d[X.k].obj] = true;
90             X.pesoAc = Y.pesoAc + objetos[d[X.k].obj].peso;
91             X.valorAc = Y.valorAc + objetos[d[X.k].obj].valor;
92             X.valorOpt = Y.valorOpt;
93             if (X.k == n) {
94                 solMejor = X.sol;
95                 valorMejor = X.valorAc;
96             } else {
97                 C.push(X);
98             }
99         }
100
101         //Probamos a no meter el objeto en la mochila
102         calculoEst(objetos, d, M, X.k, Y.pesoAc, Y.valorAc, X.valorOpt, pes);
103         if (X.valorOpt >= valorMejor) {
104             X.sol[d[X.k].obj] = false;

```

```

105         X.pesoAc = Y.pesoAc;
106         X.valorAc = Y.valorAc;
107         if (X.k == n) {
108             solMejor = X.sol;
109             valorMejor = X.valorAc;
110         } else {
111             C.push(X);
112             valorMejor = std::max(valorMejor, pes);
113         }
114     }
115 }
116 }

```

2.3.3. Análisis de costes

Analizaremos ahora los costes en tiempo y memoria del algoritmo. En cuanto al tiempo tendremos un coste en el caso peor $O(n2^n)$, donde n es el número de objetos. Cada iteración del bucle tendrá un coste lineal en n y el bucle se realizará en el caso peor 2^n veces. Esto lo podemos razonar desde la estructura de árbol binario que se va generando. En cuanto al coste en espacio tenemos un coste lineal en n por cada nodo y a lo sumo 2^{n-1} nodos ya que cada vez vamos sacando uno de la cola de prioridad y hay como mucho 2^{n-1} hojas. Luego el coste en memoria es también de $O(n2^n)$.

2.4. Algoritmo genético

En este apartado implementaremos un algoritmo genético para resolver el problema de la mochila 0-1. Al tratarse de un algoritmo heurístico no se asegura una solución óptima aunque generalmente obtendremos una buena solución en un tiempo razonable.

2.4.1. Descripción de la solución y código de las funciones

Veamos las estructuras y las funciones que hemos utilizado a la hora de implementar el algoritmo genético. Representaremos cada solución como un cromosoma que contendrá el vector de soluciones y su valor asociado. Como estamos tratando de maximizar el valor de la mochila, un cromosoma será mejor que otro si su valor es mayor. Más adelante necesitaremos también ordenar toda la población y lo haremos mediante un vector auxiliar de índices así que implementamos también una estructura comparadora.

```

1 struct Cromosoma {
2     std::vector<bool> crom;
3     double valor;
4 };
5
6 bool operator<(Cromosoma const &c1, Cromosoma const &c2) {

```

```

7         return c1.valor < c2.valor;
8     }
9
10    struct IndCompValor {
11        std::vector<Cromosoma> *poblacion;
12
13        IndCompValor(std::vector<Cromosoma> *poblacion) {
14            this->poblacion = poblacion;
15        }
16
17        bool operator()(int i1, int i2) {
18            return poblacion->at(i1).valor > poblacion->at(i2).valor;
19        }
20    };

```

A la hora de calcular la aptitud de un cromosoma calcularemos el valor total de los objetos que tiene. Como tenemos que tener en cuenta la restricción de que el total de los pesos de la mochila no puede superar el peso máximo M , será aquí donde impongamos esto. Si una solución de las que hemos obtenido al inicio o después de un cruce o mutación supera en peso a M , iremos quitando objetos de manera aleatoria hasta que cumplamos dicha condición. Para inicializar la población lo haremos de manera aleatoria.

```

1  /**
2   * Calcula la aptitud de un cromosoma. Tomamos la aptitud de cada cromosoma
3   * como el valor de los objetos que tiene. Si sobrepasa el limite de peso
4   * se quitan objetos aleatoriamente hasta que el cromosoma sea valido.
5   *
6   * Coste: O(n), n = numero de objetos.
7   *
8   * @param c Cromosoma a evaluar.
9   * @param objetos Conjunto de objetos que tenemos disponibles.
10  * @param M Peso maximo que soporta la mochila.
11  */
12  void funcAptitud(Cromosoma &c, std::vector<ObjetoReal> const &objetos,
13                  double M) {
14      double pesoAc, valorAc;
15      pesoAc = valorAc = 0;
16
17      //Calculamos lo que tenemos en la mochila
18      for (int i = 0; i < c.crom.size(); ++i) {
19          if (c.crom[i]) {
20              pesoAc += objetos[i].peso;
21              valorAc += objetos[i].valor;
22          }
23      }
24
25      //Si no cabe en la mochila, descartamos aleatoriamente hasta que quepa
26      size_t r = rand() % c.crom.size();
27      while (pesoAc > M) {
28          if (c.crom[r]) {
29              c.crom[r] = false;
30              pesoAc -= objetos[r].peso;
31              valorAc -= objetos[r].valor;
32          }
33          r = (r + 1) % c.crom.size();
34      }
35
36      c.valor = valorAc;

```

```

37 }
38
39 /**
40  * Inicializa la poblacion de forma aleatoria.
41  *
42  * Coste:  $O(mn)$ ,  $n$  = numero de objetos,  $m$  = tamanyo de la poblacion.
43  *
44  * @param poblacion Conjunto de cromosomas.
45  * @param nObjetos Numero de objetos que tenemos disponibles.
46  */
47 void iniPoblacion(std::vector<Cromosoma> &poblacion,
48                  size_t nObjetos) {
49     for (Cromosoma &c : poblacion)
50         for (int i = 0; i < nObjetos; ++i)
51             c.crom.push_back(rand() % 2);
52 }

```

Estudiemos la elección de los cromosomas a cruzarse para obtener la siguiente generación. La idea básica detrás de lo que vamos a hacer es escoger con una probabilidad mayor los mejores cromosomas (para que el algoritmo converja más rápido), pero sin dejar de lado los menos aptos (para evitar converger en un mínimo local). Además utilizaremos elitismo, es decir, un porcentaje de los mejores cromosomas se cruzarán siempre. De esta forma nos aseguramos de que no perdemos los mejores candidatos que tenemos por el momento.

Así, primero ordenaremos la población, luego aplicaremos elitismo y finalmente completaremos el conjunto de los cromosomas seleccionando de forma aleatoria. Para elegir con mayor probabilidad los mejores candidatos dividiremos la población en cuatro intervalos y seleccionaremos de forma ponderada individuos de cada intervalo. Cabe destacar que se puede seleccionar un cromosoma más de una vez.

```

1 /**
2  * Selecciona los individuos que formaran parte de la siguiente generacion.
3  * Escoge un porcentaje (PROBELITISMO) de los mejores cromosomas de la
4  * generacion anterior y los mantiene. El resto se seleccionan segun su
5  * aptitud dando mas posibilidades (PROBxCUARTIL) a los mejores cromosomas.
6  *
7  * Coste:  $O(n \log n)$ ,  $n$  = numero de objetos.
8  *
9  * @param poblacion Conjunto de cromosomas con las aptitudes ya calculadas.
10  * @param seleccionados Vector donde almacenaremos los individuos
11  * seleccionados a formar parte de la siguiente generacion. Presuponemos que
12  * ya esta creado con el mismo tamanyo que poblacion.
13  */
14 void funcSeleccion(std::vector<Cromosoma> &poblacion,
15                   std::vector<Cromosoma> &seleccionados) {
16     std::vector<int> ind(poblacion.size());
17     IndCompValor comp(&poblacion);
18     const size_t n = seleccionados.size();
19
20     //Ordena la poblacion usando una estructura de indices auxiliar
21     sort(ind.begin(), ind.end(), comp);

```

```

22
23 //Selecciona primero a los mejores para preservarlos (elitismo)
24 int nElit = (int) ceil(PROB_ELITISMO * n);
25 int i = 0;
26 for (i; i < nElit; ++i)
27     seleccionados[i] = poblacion[ind[i]];
28
29 //Completa seleccionando con mayor probabilidad los cromosomas mas aptos
30 for (i; i < n; ++i) {
31     double r = (double) rand() / (double) RANDMAX; //Entre 0 y 1
32     size_t j = rand() % n / 4; //Posicion inferior al primer cuartil
33     if (r > PROB_3CUARTIL) { //Desplazamos la posicion a entre el
34         j += (3 * n) / 4; //tercer cuartil y el final
35     } else if (r > PROB_2CUARTIL) { //Entre el 2 y el 3
36         j += n / 2;
37     } else if (r > PROB_1CUARTIL) { //Entre el 1 y el 2
38         j += n / 4;
39     }
40     seleccionados[i] = poblacion[ind[j]];
41 }
42 }

```

Veamos como haremos los cruces y las mutaciones de los individuos seleccionados. Sólo se cruzarán un porcentaje, que tomaremos alto, de los cromosomas, y de esta manera algunos se transmitirán intactos a la siguiente generación. Para cruzar los cromosomas los iremos cogiendo por parejas, escogeremos un punto aleatorio de la cadena del cromosoma e intercambiaremos la información a partir de dicho punto. Las mutaciones se harán sólo en un porcentaje muy bajo de los individuos. Si un cromosoma debe mutarse, invertiremos de forma aleatoria de 1 a 3 elementos (si antes un objeto se cogía ahora no y viceversa).

```

1 /**
2  * Cruza los elementos de la poblacion usando cruce simple. Solo cruza un
3  * porcentaje de los elementos (PROB_CRUCE), el resto no los modifica.
4  *
5  * Coste: O(nm), n = numero de objetos, m = tamanyo de la poblacion.
6  *
7  * @param seleccionados Cromosomas seleccionados para cruzarse.
8  */
9 void funcCruce(std::vector<Cromosoma> &seleccionados) {
10     //Cogemos los elementos de dos en dos
11     for (size_t i = 1; i < seleccionados.size(); i += 2) {
12
13         double r = (double) rand() / (double) RANDMAX;
14         if (r <= PROB_CRUCE) { //Si se deben cruzar
15
16             //Elegimos el punto de cruce simple
17             size_t k = rand() % seleccionados[i].crom.size();
18
19             bool aux;
20             for (int j = 0; j < k; ++j) { //Cruzamos el intervalo
21                 aux = seleccionados[i].crom[j];
22                 seleccionados[i].crom[j] = seleccionados[i - 1].crom[j];
23                 seleccionados[i - 1].crom[j] = aux;
24             }
25         }
26     }
27 }

```

```

27 }
28
29 /**
30  * Muta de 1 a 3 elementos de cada cromosoma con probabilidad PROB.MUTACION.
31  *
32  * Coste: O(n), n = numero de objetos.
33  *
34  * @param seleccionados Cromosomas seleccionados para mutar.
35  */
36 void funcMutacion(std::vector<Cromosoma> &seleccionados) {
37     for (Cromosoma &c : seleccionados) {
38         double r = (double) rand() / (double) RAND_MAX;
39         if (r <= PROB.MUTACION) { //Si se debe mutar
40
41             int numMut = (rand() % 3) + 1;
42             for (int i = 0; i < numMut; ++i) { //Mutamos de 1 a 3 elementos
43                 size_t j = rand() % c.crom.size();
44                 c.crom[j] = !c.crom[j];
45             }
46         }
47     }
48 }

```

Como condición de terminación iremos comprobando si se ha mejorado la mejor solución que teníamos hasta el momento o la media de la población en alguna de las últimas generaciones. Si se ha mejorado alguna de ambas se seguirá con la ejecución y sino terminará. Añadiremos también un máximo de generaciones tras las cuales el algoritmo se detendrá aunque no se cumpla la condición anterior.

```

1 /**
2  * Comprueba si se cumple alguna condicion de terminacion. Si se ha superado
3  * el maximo de generaciones o si no se ha mejorado ni la media ni la mejor
4  * solucion en las ultimas TAMULT generaciones devuelve true.
5  *
6  * Coste: O(1).
7  *
8  * @param ultMedias Vector que contiene las ultimas TAMULT mejores medias.
9  * @param ultMejores Vector que contiene los ultimos TAMULT mejores valores.
10  * @param generacionAct Generacion por la que vamos.
11  * @return True si se cumple alguna condicion de terminacion, false en caso
12  * contrario.
13  */
14 bool condTerminacion(std::vector<double> &ultMedias,
15                     std::vector<double> &ultMejores, int generacionAct) {
16     //Nunca terminamos en las primeras generaciones
17     if (generacionAct < TAMULT)
18         return false;
19
20     //Si se ha superado el maximo de generaciones
21     if (generacionAct >= MAX.GENERACIONES)
22         return true;
23
24     //Comprobamos si se ha mejorado la media o el valor mejor ultimamente
25     bool mejora = false;
26     double mediaAnt = ultMedias[0], mejorAnt = ultMejores[0];
27
28     for (int i = 1; i < TAMULT && !mejora; ++i) {
29         if (ultMedias[i] > mediaAnt || ultMejores[i] > mejorAnt)

```

```

30         mejora = true;
31     }
32
33     return !mejora;
34 }

```

Utilizaremos una función auxiliar para actualizar los valores de la mejor solución que tenemos y las medias que usamos en la condición de parada.

```

1  /**
2   * Calcula el mejor valor, junto con su solución, y la media de esta
3   * generación. Actualiza los valores de las últimas generaciones y los
4   * valores mejores hasta el momento.
5   *
6   * Coste: O(n), n = número de objetos.
7   *
8   * @param poblacion Conjunto de cromosomas con las aptitudes ya calculadas.
9   * @param ultMedias Vector con las TAMULT últimas medias.
10  * @param ultMejores Vector con los TAMULT últimos mejores valores.
11  * @param solMejor Solución mejor hasta el momento.
12  * @param valorMejor Valor de la solución mejor hasta el momento.
13  */
14 void calcMejores(std::vector<Cromosoma> const &poblacion, std::vector<double>
15 &ultMedias, std::vector<double> &ultMejores, std::vector<bool> &solMejor,
16 double &valorMejor) {
17     //Desplazamos los últimos valores para actualizar
18     for (int i = TAMULT - 1; i > 0; --i) {
19         ultMedias[i] = ultMedias[i - 1];
20         ultMejores[i] = ultMejores[i - 1];
21     }
22
23     //Calculamos los parámetros de esta generación
24     double sumaVal = 0, mejor = -1;
25     std::vector<bool> solMejorAux(solMejor.size());
26     for (Cromosoma const &c : poblacion) {
27         sumaVal += c.valor;
28         if (c.valor > mejor) {
29             mejor = c.valor;
30             solMejorAux = c.crom;
31         }
32     }
33
34     //Actualizamos
35     ultMejores[0] = mejor;
36     ultMedias[0] = sumaVal / poblacion.size();
37     if (mejor > valorMejor) {
38         valorMejor = mejor;
39         solMejor = solMejorAux;
40     }
41 }

```

Finalmente nuestro programa principal será el encargado de inicializar la población e ir evolucionando las sucesivas generaciones hasta que se cumpla la condición de terminación. Devolverá como parámetro el mejor valor que hayamos encontrado en todas las generaciones y los objetos que componían la mochila para ese valor.

2.4.2. Código

```
1  /**
2   * Resuelve el problema de la mochila O-1 mediante un algoritmo genetico. No
3   * se asegura la solucion optima. Se suele obtener una solucion buena en un
4   * tiempo razonable.
5   *
6   * Coste tiempo: O(nm * MAX.GENERACIONES), n = numero de objetos, m = tamanyo
7   *               de la poblacion.
8   * Coste espacio: O(m)
9   *
10  * @param objetos Conjunto de objetos que tenemos disponibles.
11  * @param M Peso maximo que soporta la mochila.
12  * @param solMejor Indica si se coge el objeto o no.
13  * @param valorMejor Valor de la mochila con los objetos dados por solMejor.
14  */
15 void mochilaGenetico(std::vector<ObjetoReal> const &objetos, double M,
16                     std::vector<bool> &solMejor, double &valorMejor) {
17     const size_t n = objetos.size();
18
19     //Inicializamos las estructuras
20     std::vector<Cromosoma> poblacion(n);
21     std::vector<Cromosoma> seleccionados(n);
22     std::vector<double> ultMedias(TAM.ULT);
23     std::vector<double> ultMejores(TAM.ULT);
24     valorMejor = -1;
25     for (Cromosoma &c : seleccionados)
26         c.crom.resize(n);
27
28     //Generamos la poblacion inicial y calculamos sus aptitudes
29     iniPoblacion(poblacion, n);
30     for (Cromosoma &c : poblacion)
31         funcAptitud(c, objetos, M);
32     calcMejores(poblacion, ultMedias, ultMejores, solMejor, valorMejor);
33
34     //Mientras que no se cumpla la condicion de terminacion vamos
35     // evolucionando las sucesivas generaciones
36     for (int generacionAct = 0;
37          !condTerminacion(ultMedias, ultMejores, generacionAct);
38          generacionAct++) {
39
40         funcSeleccion(poblacion, seleccionados);
41         funcCruce(seleccionados);
42         funcMutacion(seleccionados);
43         poblacion = seleccionados;
44         for (Cromosoma &c : poblacion)
45             funcAptitud(c, objetos, M);
46         calcMejores(poblacion, ultMedias, ultMejores, solMejor, valorMejor);
47     }
48 }
```

2.4.3. Análisis de costes

Analizaremos ahora los costes en tiempo y memoria del algoritmo. Veamos primero el coste en espacio: Guardaremos la población actual y los cromosomas seleccionados para formar parte de la siguiente, luego tendremos un coste $O(m)$ respecto a los datos de entrada (tenemos un vector de n objetos),

siendo m el tamaño de la población que elijamos.

En cuanto al coste en tiempo, se trata de un algoritmo heurístico que en el caso peor terminará cuando complete el máximo de generaciones. Luego llamando n al número de objetos, m al tamaño que elijamos de la población y g al número máximo de generaciones, obtendremos un coste $O(g \max\{nm, n \log n\})$. Justificamos el coste viendo que el bucle se ejecutará un máximo de g veces y cada iteración tiene un coste $\max\{nm, n \log n\}$ dado por las funciones de cruce y selección respectivamente.

3. Comparación

Comparativa de tiempos en las ejecuciones de los distintos algoritmos. Analizar diferencias entre programación dinámica y ramificación y poda. Ver que el voraz es mucho más rápido y justificar lo bueno, o no, que puede llegar a ser el algoritmo genético según los resultados.

Referencias

- [1] E. Horowitz, S. Sahni y S. Rajasekaran. *Computer Algorithms*. Tercera edición. Computer Science Press, 1998. Capítulos 4, 5 y 8.
- [2] Hristakeva-Shrestha. *Solving the 0-1 Knapsack Problem with Genetic Algorithms*. Simpson College. http://www.micsymposium.org/mics_2004/Hristake.pdf
- [3] N. Martí Oliet, Y. Ortega Mallén y J. A. Verdejo López. *Estructuras de datos y métodos algorítmicos: ejercicios resueltos*. Colección Prentice Practica, Pearson/Prentice Hall, 2003. Capítulo 13.
- [4] N. Martí Oliet, Y. Ortega Mallén y A. Verdejo. *Estructuras de datos y métodos algorítmicos: 213 ejercicios resueltos*. Segunda edición. Garceta, 2013. Capítulos 12 y 15.
- [5] Z. Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Third, revised and extended edition. Springer, 1995.
- [6] M. Mitchell. *An Introduction to Genetic Algorithms*. Fifth printing. The MIT Press, 1999.
- [7] R. Neapolitan. *Foundations of Algorithms*. Quinta edición. Jones and Barlett, 2015. Capítulos 4 y 10.

- [8] R. Neapolitan y K. Naimipour. *Foundations of Algorithms using C++ pseudocode*. Jones and Barlett Publishers, 2004. Capítulos 3 y 6.
- [9] Artículos de la enciclopedia libre Wikipedia:
- Problema de la mochila:
https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_la_mochila
 - Lista de 21 problemas NP-completos de Karp:
https://es.wikipedia.org/wiki/Lista_de_21_problemas_NP-completos_de_Karp
 - Algoritmos genéticos:
https://en.wikipedia.org/wiki/Genetic_algorithm