

Retos Científicos

Simulación y Estudio de la
Inestabilidad Rotacional del
Rattleback usando Impresión 3D y
Análisis Lagrangiano

Presentado por:

Laura Corzo

Deivy Olago

Santiago Correa

Pregrado en Física

Presentado a:

Luis Alberto Nuñez de Villavicencio Martínez

27 de mayo de 2025

images/logouis.jpg

Índice

Abstract	3
Introducción	3
Marco Teórico	5
El Rattleback y su Inestabilidad Rotacional	5
Análisis Lagrangiano y Tensor de Inercia	5
Dinámica No Lineal	6
Impresión 3D como Validación Experimental	6
Pregunta de investigación	6
Objetivo general	6
Objetivos específicos	7
Metodología	7
Desarrollo matemático	7
Simulación Numérica y Extracción de Parámetros	11
Montaje experimental y análisis cualitativo	14
Resultados Obtenidos	16
Propiedades Geométricas e Inerciales del Modelo STL	16
Determinación de Parámetros de Superficie según Bondi	18
Parámetros Inerciales Adimensionales y Análisis de Estabilidad de Giro	20
Análisis de resultados	21
Análisis de los Resultados Experimentales Cualitativos	21
Análisis de los Resultados Numéricos de Simulación	21

Conclusiones	23
------------------------	----

Abstract

El siguiente trabajo tiene como objetivo principal corroborar los mecanismos de inestabilidad rotacional del rattleback mediante un enfoque que combina el modelado teórico basado en la mecánica Lagrangiana, la simulación numérica de las ecuaciones de movimiento resultantes y la validación experimental utilizando la incorporación de la visualización tridimensional (3D) mediante modelos STL (STereoLithography) como herramienta central para el análisis comparativo. Se derivaron las ecuaciones de movimiento y se lograron caracterizar las condiciones de estabilidad e inestabilidad, y comparar las predicciones teóricas, como los tiempos de inversión del giro, con los datos experimentales. La capacidad de fabricar prototipos con geometrías personalizadas mediante impresión 3D ofrece una ventaja metodológica para investigar sistemáticamente la influencia de parámetros geométricos e inerciales específicos en la dinámica del sistema. Este trabajo busca contribuir a una comprensión más profunda de la dinámica del rattleback

Introducción

Los antecedentes de estudio de la dinámica del rattleback poseen una considerable relevancia científica, ya que permiten profundizar en la comprensión de la mecánica de cuerpos rígidos, particularmente en aquellos sistemas que involucran restricciones no holonómicas. Además, el rattleback sirve como un modelo excelente para analizar la transferencia de energía entre distintos modos de movimiento, en este caso entre la energía de rotación y la energía asociada a las oscilaciones de balanceo. La complejidad de su dinámica radica en que al girar en una dirección, se detiene espontáneamente y comienza a girar en sentido contrario; sin embargo, no se limita a la inversión del giro; el rattleback también es un sistema con comportamientos no lineales, incluyendo la aparición de dinámicas caóticas bajo ciertas condiciones de parámetros iniciales. En este trabajo no se realiza el análisis de condiciones caóticas debido a la aproximación de pequeños ángulos. Asimismo, el rattleback

se ha utilizado como un sistema modelo para investigar el concepto de quiralidad dinámica, donde la asimetría en el comportamiento surge de asimetrías intrínsecas en la geometría del objeto o en su distribución de masa. La ligera desalineación entre los ejes principales de inercia y los ejes principales de curvatura de su base es fundamental para su funcionamiento característico. El presente trabajo emplea un marco de simulación numérica diseñado para investigar la dinámica tridimensional de un cuerpo rígido, específicamente el rattleback. Este enfoque se fundamenta en la integración numérica de las ecuaciones diferenciales de movimiento que rigen el sistema. Una característica central de esta metodología es que los parámetros geométricos e inerciales del rattleback, que son entradas cruciales para el modelo dinámico, se derivan directamente a partir de un archivo de definición geométrica en formato STL. Este procedimiento permite una representación de la forma del objeto, superando las limitaciones de los modelos basados en geometrías. El análisis teórico mostró buena concordancia con los resultados experimentales al considerar la desalineación de los ejes principales. Esta desalineación se debe a una distribución de masa no uniforme o a que el centro de masa no coincide con el centro geométrico de la base. El trabajo se realizó bajo la condición de rodadura sin deslizamiento, lo cual impone restricciones cinemáticas al movimiento. Como consecuencia, las fuerzas de contacto generan torques que se acoplan a los distintos modos dinámicos del sistema, facilitando fenómenos como la reversión del giro. A lo largo del informe se presenta la derivación de las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica del sistema, aplicando los principios de la mecánica lagrangiana. Para capturar adecuadamente el comportamiento del rattleback, se introduce un ángulo de desalineación que da lugar a las ecuaciones asociadas a la inversión del giro. Los resultados obtenidos a partir del modelo teórico y de las simulaciones numéricas se comparan y validan con mediciones experimentales realizadas sobre rattlebacks reales. Esta comparación confirma que las condiciones de acoplamiento identificadas en el análisis son responsables de los fenómenos de inversión rotacional observados.

Marco Teórico

El Rattleback y su Inestabilidad Rotacional

El *rattleback*, también conocido como *celtic stone* o *anagyre*, es un objeto rígido con forma elipsoidal asimétrica que presenta un comportamiento rotacional contraintuitivo: gira de forma estable en un sentido, pero al ser impulsado en el sentido opuesto, desacelera, oscila y eventualmente invierte su dirección de giro. Este fenómeno ha sido motivo de estudio en la física clásica debido a su naturaleza no intuitiva y a la complejidad de su dinámica rotacional.

En la literatura, se indica que la inestabilidad rotacional del rattleback se debe a una combinación de **asimetría geométrica**, **desplazamiento del centro de masa** y **acoplamiento entre traslación y rotación**, los cuales generan términos cruzados en el tensor de inercia que producen una transferencia de energía entre diferentes modos de movimiento.

Análisis Lagrangiano y Tensor de Inercia

El **análisis lagrangiano** es un método formal para describir la dinámica de sistemas físicos mediante coordenadas generalizadas. El Lagrangiano L se define como:

$$L = T - V \quad (1)$$

donde T es la energía cinética y V la energía potencial. A partir de L , las ecuaciones de movimiento se obtienen mediante:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2)$$

Para el rattleback, se requiere considerar la rotación del cuerpo rígido en tres dimensiones, lo cual implica calcular el **tensor de inercia** del objeto. En este trabajo, dicho tensor se obtuvo utilizando Python, mediante la integración numérica sobre la geometría del modelo 3D.

El tensor de inercia permite representar la distribución de masa respecto a un sistema de coordenadas, y es crucial para el estudio de la dinámica del rattleback, ya que contiene la información que determina la estabilidad o inestabilidad de su rotación.

Dinámica No Lineal

El rattleback representa un sistema físico **no lineal**, altamente sensible a las condiciones iniciales. Su comportamiento incluye inversión espontánea del sentido de giro, oscilaciones y, en algunos casos, características propias del caos determinista.

Impresión 3D como Validación Experimental

La fabricación del rattleback se realizó mediante **impresión 3D**, lo cual permitió validar experimentalmente su comportamiento.

La integración entre la formulación teórica, el modelado computacional (Python) y la validación experimental (impresión 3D) ofrece una visión completa del fenómeno físico, y permite comprender con mayor profundidad la naturaleza de la inestabilidad rotacional en sistemas reales.

Pregunta de investigación

¿Qué condiciones geométricas y dinámicas son necesarias para que ocurra la inversión de giro en un rattleback, y cómo varía este fenómeno según el diseño del cuerpo?

Objetivo general

Determinar la influencia de diferentes condiciones iniciales en la dinámica del rattleback mediante simulación 3D, con el propósito de identificar los factores responsables del acoplamiento entre la rotación y las oscilaciones transversales.

Objetivos específicos

- Calcular la asimetría en la distribución de masa del *rattleback* mediante el tensor de inercia y analizar la relación entre sus ejes principales y su geometría.
- Derivar las ecuaciones de movimiento del *rattleback* en rodadura sin deslizamiento, considerando solo la interacción con la superficie a través de la fuerza normal y la gravedad, para explicar la inversión espontánea del giro.
- Identificar y evaluar las condiciones geométricas y dinámicas que han sido descritas en la literatura como las culpables de la inversión del giro.
- Desarrollar simulaciones numéricas del *rattleback* con un modelo poligonal 3D para estudiar su evolución y la inversión del giro, comparando los resultados con un análisis experimental.

Metodología

La metodología de esta investigación se divide en tres componentes principales: el desarrollo matemático basado en la mecánica Lagrangiana, la simulación numérica y extracción de parámetros a partir de un modelo STL para la verificación de propiedades geométricas y rotacionales, y el montaje experimental para la validación cualitativa.

Desarrollo matemático

La mecánica Lagrangiana según (Cosenza, 2016) ofrece un formalismo poderoso y elegante para describir el movimiento de sistemas mecánicos. En lugar de centrarse en las fuerzas y aceleraciones vectoriales como en la mecánica Newtoniana, se basa en cantidades escalares: la energía cinética y la energía potencial del sistema.

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(\dot{q}_i, t) - V(q_i, t) \quad (3)$$

Para describir la dinámica del rattleback, se definirán los siguientes marcos de referencia:

1. Sistema Inercial (Laboratorio): Este es un marco de referencia fijo. Se considera que el rattleback se mueve sobre un plano horizontal, que se tomará como el plano XY , y Z que es perpendicular a este plano y apunta verticalmente hacia arriba.
2. Sistema respecto al centro de masa: Este marco tiene su origen en el centro de masa del rattleback. Sus ejes, representados por los vectores unitarios (x_1, x_2, x_3) , que rotan junto con él.

La orientación del sistema respecto al centro de masa con respecto al sistema laboratorio se describirá mediante un conjunto de tres ángulos de Euler (θ, Φ, Ψ) . Con estos ángulos de Euler se describe la velocidad angular respecto al sistema de centro de masa. Es importante notar que Z, la altura, está determinada por la orientación del cuerpo y la condición de contacto con el plano. La energía cinética rotacional $1/2(I_{ii}(\omega_i)^2)$ y la energía potencial, siendo que la única fuerza conservativa externa que se considerará actuando sobre el Rattleback es la gravedad, Para determinar la altura Z . Se modela al Rattleback como un sólido rígido con simetría elipsoidal, con su parte inferior descrita por la superficie:

$$z = a \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{b^2} \frac{1}{2} \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] \quad (4)$$

donde a es la distancia desde el centro de masa a la parte inferior, y b es un parámetro de forma. El punto de contacto con la superficie se localiza en $r = (x, y, z(x, y))$.

Se consideran tres ejes principales de inercia (x', y', z') con momentos de inercia I_1, I_2, I_3 alrededor de cada eje. La velocidad angular $\vec{\omega}$ del cuerpo se expresa como: Respecto al sistema centro de masa, es $\tilde{\omega}_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i$, $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned} \quad (5)$$

La aceleración del centro de masa es:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (6)$$

La energía cinética total se compone de la traslacional y rotacional:

$$T = T_{\text{tras}} + T_{\text{rot}} \quad (7)$$

$$T_{\text{tras}} = \frac{1}{2} m \vec{V} \cdot \vec{V} \quad (8)$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \mathbb{I} \omega_i^2 \quad (9)$$

donde \mathbb{I} es el tensor de inercia en el sistema corporal. La energía potencial es simplemente gravitatoria:

$$V = mgz(x, y)$$

$$T_{\text{rot}} + T_{\text{tras}} = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{I\omega^2}{2} \quad (10)$$

El teorema de Steiner nos permite pasar del tensor de inercia calculado en el centro de masa a otro punto arbitrario. Esto es muy útil cuando se quiere calcular el movimiento rotacional de un cuerpo respecto a un eje que no pasa por su centro de masa

$$\begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy} & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Aplicando el formalismo lagrangiano:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Para x y y , se tiene acoplamiento con los términos rotacionales vía \vec{V} , produciendo efectos de Coriolis y aceleraciones acopladas, lo cual es responsable del comportamiento asimétrico del rattleback.

En primera orden, el cambio en el momento angular vertical es despreciable según (Case, 2014), debido a que para intervalos de tiempo cortos, donde el acoplamiento con otras componentes del movimiento no ha tenido un efecto significativo sobre L_z :

$$\frac{dL_z}{dt} \approx 0$$

Para entender cómo surge el comportamiento de reversión de giro, se considera el movimiento del centro de masa perturbado ligeramente en las direcciones X y Y. Se hace una expansión de las ecuaciones de movimiento alrededor del equilibrio en $x=y=0$, y se retienen solo los términos lineales.

$$\ddot{x} = \omega_3^2(\beta - \gamma)x \quad (12)$$

$$\ddot{y} = \omega_3^2(\alpha - \beta)y \quad (13)$$

Aquí, ω representa la velocidad angular alrededor del eje vertical. Los coeficientes α , β y γ están definidos en función de los momentos de inercia y la geometría del rattleback, según Case y Jalal:

$$\alpha = \frac{I_1}{ma^2} + 1 \quad (14)$$

$$\beta = \frac{I_2}{ma^2} + 1 \quad (15)$$

$$\gamma = \frac{I_3}{ma^2} \quad (16)$$

donde:

- I_1, I_2, I_3 son los momentos de inercia respecto a los ejes principales del cuerpo.
- m es la masa del rattleback.
- a es la distancia desde el centro de masa al punto de contacto.

La ecuación para \ddot{y} es crítica para el fenómeno de reversión del giro. Si se cumple que:

$$\alpha > \beta \quad \Rightarrow \quad (\alpha - \beta) > 0$$

entonces la solución para $y(t)$ puede crecer exponencialmente cuando $\omega^2 > 0$, lo cual implica una **inestabilidad** en la rotación.

Este crecimiento de y genera torques que acoplan con el momento angular vertical, frenando la rotación original e induciendo una reversión del giro.

Simulación Numérica y Extracción de Parámetros

Se implementó un enfoque computacional para extraer los parámetros físicos del rattleback directamente de su representación geométrica y analizar su estabilidad dinámica. Esta fase se basó en el trabajo de Sir Hermann Bondi[cite: 1], que proporciona un análisis detallado de la dinámica de cuerpos rígidos con espín unidireccional.

El proceso computacional se desarrolló en Python y comprendió los siguientes pasos:

1. **Carga y Preprocesamiento del Modelo STL:** Se utilizó un archivo STL ('RATTLEBACKCORREGIDOOrientadoCCW.stl') que define la geometría tridimensional del rattleback. A este modelo se le aplicó un factor de escala de 0,1 (asumiendo unidades originales en mm para trabajar en cm). A una densidad de $1,24 \text{ g/cm}^3$ (Densidad registrada para el material con el que fue impresa la pieza experimental).
2. **Cálculo de Propiedades Másicas e Inerciales:** A partir de la malla de triángulos del STL, se calcularon el volumen, la masa total, la posición del centro de masa (CoM) global y el tensor de inercia respecto al CoM. Diagonalizando este tensor, se obtuvieron los momentos principales de inercia A, B, C (con la convención $A > B$, y C asociado al eje predominantemente vertical en reposo)[cite: 1].
3. **Establecimiento del Sistema de Referencia del CoM para el Ajuste de Superficie:** Siguiendo la formulación de Bondi[cite: 1], se estableció un sistema de coordenadas con origen en el CoM calculado, y con el eje Z positivo apuntando verticalmente hacia abajo. Todos los vértices de la superficie del rattleback se transformaron a este sistema.
4. **Identificación del Punto de Contacto y el Parámetro 'a':** En el sistema de referencia del CoM (con Z hacia abajo), el punto de la superficie con la máxima coordenada Z se identificó como el punto de contacto en reposo. La coordenada Z de este punto, denotada como a_{eff} , corresponde al parámetro 'a' en la teoría de Bondi (distancia del CoM al punto de contacto)[cite: 1]. Las coordenadas X e Y de este punto en el plano XY del CoM se definieron como (x_c, y_c) . Cabe recalcar que esta aproximación fue realizada debido a que cuando se simuló el comportamiento rotacional en un software CAD (Fusion 360), el área de contacto se mantuvo bastante cercana a ese punto.
5. **Ajuste de la Superficie de Contacto:** Se seleccionaron los vértices de la superficie cercanos al punto de contacto (x_c, y_c, a_{eff}) . Específicamente, aquellos dentro de un radio $FIT_REGION_XY_RADIUS_CoM_WU = 5,0 \text{ cm}$ en el plano XY del CoM (centra-

do en (x_c, y_c)) y con una desviación en Z menor a $FIT_REGION_Z_DEVIATION_CoM_WU = 0,5$ cm respecto a a_{eff} . A estos puntos seleccionados, se les aplicó una traslación en el plano XY para centrar el origen del ajuste en (x_c, y_c) . A partir de ellos se determinaron los coeficientes de 17, utilizando un ajuste por el método de mínimos cuadrados,

$$Z_{CoM}(x', y') = C_0 + C_1x' + C_2y' + C_3x'^2 + C_4y'^2 + C_5x'y' \quad (17)$$

donde $x' = X_{CoM} - x_c$ e $y' = Y_{CoM} - y_c$, y Z_{CoM} son las coordenadas Z de los puntos de la superficie aproximada en el sistema CoM (Z hacia abajo). Se esperaba que $C_0 \approx a_{eff}$ y $C_1, C_2 \approx 0$.

6. Extracción de los Parámetros Geométricos de Bondi p, s, q : A partir de los coeficientes del polinomio ajustado (Ec. 17) y el parámetro a_{eff} , se calcularon los parámetros adimensionales de la superficie de Bondi p, s, q mediante las relaciones[cite: 1]:

$$p = -2 \cdot a_{eff} \cdot C_3 \quad (18)$$

$$s = -2 \cdot a_{eff} \cdot C_4 \quad (19)$$

$$q = -a_{eff} \cdot C_5 \quad (20)$$

Estos parámetros describen la curvatura y asimetría de la base del rattleback. Se verificaron las condiciones de convexidad ($p > 0, s > 0, ps > q^2$) y estabilidad en reposo ($1 > p, 1 > s, (1 - p)(1 - s) > q^2$) propuestas por Bondi[cite: 1].

7. Cálculo de Parámetros Inerciales Adimensionales de Bondi α, β, γ : Utilizando los momentos de inercia A, B, C , la masa M y el parámetro a_{eff} , se calcularon los

parámetros inerciales adimensionales[cite: 1]:

$$\alpha_B = (A + Ma_{eff}^2)/(Ma_{eff}^2) \quad (21)$$

$$\beta_B = (B + Ma_{eff}^2)/(Ma_{eff}^2) \quad (22)$$

$$\gamma_B = C/(Ma_{eff}^2) \quad (23)$$

(Nótese que en el artículo de Bondi se usan $\alpha Ma^2, \beta Ma^2, \gamma Ma^2$ como notación para $A + Ma^2, B + Ma^2, C$ respectivamente, por lo que $\alpha_B, \beta_B, \gamma_B$ aquí corresponden a los α, β, γ del texto de Bondi).

8. **Análisis de Estabilidad Rotacional:** Finalmente, se utilizó la ecuación característica derivada por Bondi (Ec. (20) en [cite: 1]) para analizar la estabilidad del espín. Esta ecuación es una cuártica en σ (la tasa de crecimiento/decaimiento y frecuencia de las oscilaciones), cuyos coeficientes dependen de $p, s, q, \alpha_B, \beta_B, \gamma_B, a_{eff}$ y la velocidad de giro n . Se resolvieron numéricamente las raíces σ para un rango de velocidades de giro n , y se analizó el signo de sus partes reales para determinar la estabilidad y la posible "concordancia" (estabilidad en una dirección de giro e inestabilidad en la opuesta)[cite: 1].

Montaje experimental y análisis cualitativo

Para la tercera fase de esta metodología se realizó el montaje experimental para la reversión de giro del Rattleback mediante el seguimiento del centro de masa y su acoplamiento con las oscilaciones transversales, utilizando el software de análisis de video Tracker. Se grabó en video el movimiento de un *rattleback* colocado sobre una superficie plana, en dos configuraciones de cámara:

- **Vista superior (plano XY):** permite observar directamente las trayectorias del centro de masa en las direcciones horizontal y vertical.

- **Vista lateral (perfil del objeto):** permite apreciar la forma asimétrica del objeto, especialmente en la curvatura de la base, que es clave para entender la inversión del giro.

Para el análisis cuantitativo, se marcaron dos puntos en el cuerpo del rattleback en Tracker:

- Uno en el centro de masa.
- Otro en un punto de referencia del cuerpo en un extremo visible marcado con rosado para asegurar que el Tracker no perdiera datos, se pudo observar la orientación angular y la rotación relativa.

Tracker permitió:

- Obtener gráficas de desplazamiento $x(t)$ y $y(t)$.
- Medir velocidades y aceleraciones.
- Visualizar la trayectoria completa del centro de masa.
- Detectar cambios en la amplitud de oscilación.

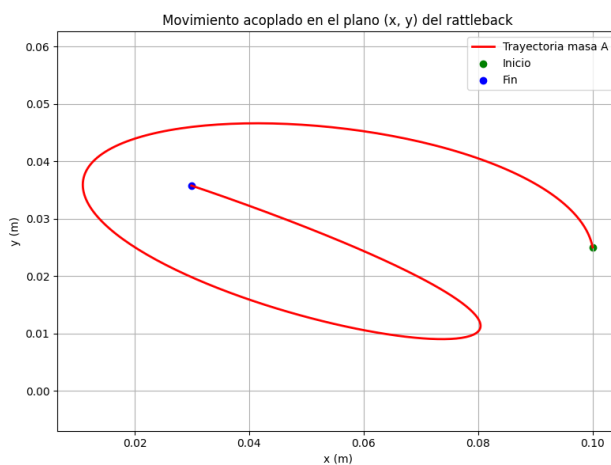


Figura 1: Ejemplo de gráficas de acoplamiento en X e Y obtenidas con Tracker.

Las observaciones cualitativas del montaje experimental incluyeron:

1. Oscilaciones acopladas en $x(t)$ y $y(t)$: Se observa que el centro de masa realiza un movimiento no uniforme, con oscilaciones laterales cuya amplitud varía con el tiempo.
2. Crecimiento y decrecimiento de la amplitud: Este comportamiento sugiere una transferencia de energía entre la rotación del cuerpo y las oscilaciones transversales, característica del fenómeno del rattleback.
3. Diferencias en las curvas $x(t)$ vs. $y(t)$: Las gráficas tienen diferentes formas, indicando que la trayectoria del centro de masa no es circular, sino más bien elíptica o irregular, consistente con la asimetría geométrica del objeto.

Resultados Obtenidos

A partir de la metodología computacional descrita, se obtuvieron los siguientes resultados para el modelo de rattleback analizado.

Propiedades Geométricas e Inerciales del Modelo STL

El procesamiento del archivo STL ('RATTLEBACKCORREGIDOOrientadoCCW.stl') con una densidad de $1,24 \text{ g/cm}^3$ y un factor de escala de 0,1 (unidades en cm) arrojó las siguientes propiedades:

- **Volumen Total:** $10,7202 \text{ cm}^3$.
- **Masa Total (M):** $13,2931 \text{ g}$.
- **Centro de Masa Global ($\text{CoM}_{\text{global}}$):** $(-1,663 \times 10^{-4} \text{ cm}, -3,517 \times 10^{-5} \text{ cm}, 1,6240 \text{ cm})$.

Este valor de Z incluye la traslación inicial de 1,0 cm.

- **Tensor de Inercia (respecto al $\text{CoM}_{\text{global}}$), en $\text{g} \cdot \text{cm}^2$:**

$$\mathbb{I}_{\text{CoM}} = \begin{pmatrix} 3,57335703 & -1,52444531 & 0,00021796 \\ -1,52444531 & 53,9837801 & -0,00003822 \\ 0,00021796 & -0,00003822 & 56,1479905 \end{pmatrix}$$

- **Momentos Principales de Inercia (respecto al $\text{CoM}_{\text{global}}$), en $\text{g} \cdot \text{cm}^2$:** Siguiendo la convención $A > B$ para los momentos horizontales y C para el momento alrededor del eje predominantemente vertical:

- $A = 54,0298 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$
- $B = 3,5273 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$
- $C = 56,1480 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$

La Figura 2 muestra una representación visual del modelo STL utilizado para el rattleback, junto con los ejes principales de inercia calculados (I_1, I_2, I_3 , correspondientes a los momentos $A/B, B/A, C$ respectivamente). Se puede apreciar la forma alargada y la base curva del objeto. La orientación de estos ejes respecto a la geometría global del cuerpo es fundamental para determinar los parámetros A, B y C utilizados en el análisis.

La Figura 3 ilustra el resultado del ajuste cuadrático realizado sobre los puntos de la superficie del rattleback, en el sistema de coordenadas centrado en el CoM y con el eje Z apuntando hacia abajo (como se describe en la Metodología). Los puntos rojos representan los datos extraídos del modelo STL que fueron seleccionados para el ajuste, mientras que la superficie cian representa el polinomio cuadrático (Ec. 17) ajustado a estos datos. El origen $(0,0)$ de esta gráfica local corresponde a la proyección del punto de contacto (x_c, y_c) en el plano XY del CoM . El valor Z_{CoM} en el origen del ajuste ($C_0 = 0.6469 \text{ cm}$) es una aproximación de a_{eff} (la distancia real del CoM al vértice de contacto, 0.6240 cm). La curvatura y la asimetría (término xy) de esta superficie ajustada son las que determinan los parámetros p, s, q de Bondi, cruciales para la dinámica de inversión del giro.

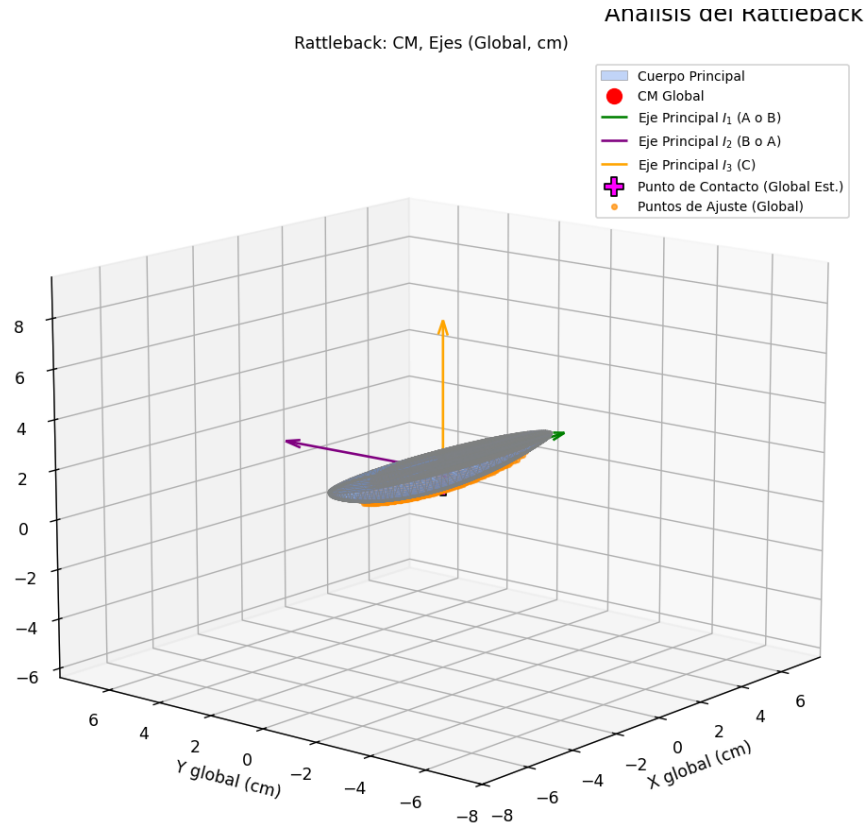


Figura 2: Representación del modelo STL del rattleback y sus ejes principales de inercia. El eje para I3 (asociado a C) es aproximadamente vertical, mientras que los ejes para I1 e I2 (asociados a A y B) definen el plano horizontal de asimetría inercial.

Determinación de Parámetros de Superficie según Bondi

El análisis de la superficie en el sistema de referencia del CoM (con Z positivo hacia abajo) proporcionó:

- **Coordenadas del Punto de Contacto en el plano XY del CoM (x_c, y_c):** (0,0002 cm, 0,0000 cm)

Esto indica una excelente alineación del punto de contacto con el eje Z que pasa por el CoM.

- **Distancia 'a' de Bondi (a_{eff}):** 0,6240 cm. Esta es la distancia vertical desde el CoM al punto de contacto.

- **Ajuste Polinomial:** Para el ajuste de la superficie (Ec. 17) se utilizaron 905 puntos.

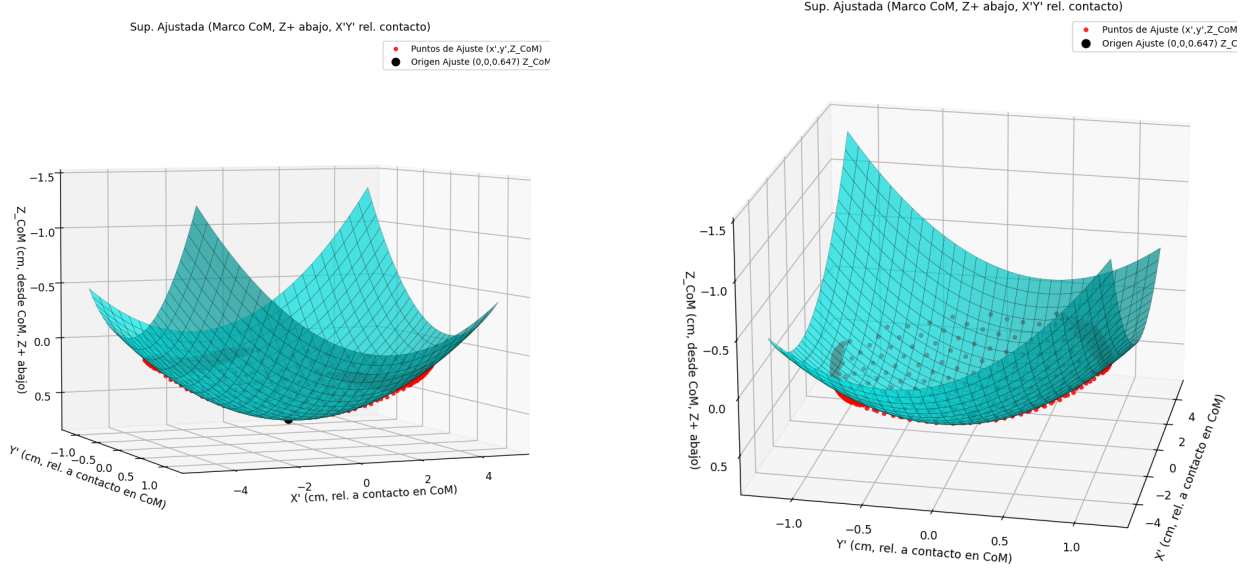


Figura 3: Ajuste de la superficie de contacto del rattleback. Puntos rojos: datos del STL en el sistema de referencia del CoM (Z hacia abajo, x,y relativos al contacto). Superficie cian: polinomio cuadrático ajustado $Z_{CoM}(x,y)$. El origen (0,0) en el plano xy corresponde al punto de contacto (x_c, y_c) en el CoM.

El polinomio resultante fue: $Z_{CoM}(x', y') = 0,6469 + (6,47 \times 10^{-6})x' + (4,92 \times 10^{-4})y' - 0,03336x'^2 - 0,5154y'^2 + 0,07464x'y'$.

- El coeficiente $C_0 = 0,6469$ cm es comparable al valor directo de $a_{eff} = 0,6240$ cm.
- Los coeficientes lineales $C_1 \approx 6,47 \times 10^{-6}$ y $C_2 \approx 4,92 \times 10^{-4}$ son muy pequeños, como se esperaba.

■ **Parámetros Geométricos de Bondi p, s, q (calculados con $a_{eff} = 0,6240$ cm):**

- $p = 0,0416$ (derivado de $C_3 = -0,03336$)
- $s = 0,6432$ (derivado de $C_4 = -0,5154$)
- $q = -0,0466$ (derivado de $C_5 = 0,07464$)

■ **Verificación de Condiciones Geométricas de Bondi[cite: 1]:**

- Condición de Convexidad ($p > 0, s > 0, ps > q^2$): CUMPLIDA. ($0,0416 > 0, 0,6432 > 0$, y $0,0416 \cdot 0,6432 \approx 0,02676 > (-0,0466)^2 \approx 0,00217$).

- Condición de Estabilidad en Reposo ($1 > p, 1 > s, (1-p)(1-s) > q^2$): CUMPLIDA. ($1 > 0,0416, 1 > 0,6432$, y $(1 - 0,0416)(1 - 0,6432) \approx 0,3419 > 0,00217$).

Parámetros Inerciales Adimensionales y Análisis de Estabilidad de Giro

■ **Parámetros Inerciales Adimensionales de Bondi $\alpha_B, \beta_B, \gamma_B$:**

- $\alpha_B = 11,4390$
- $\beta_B = 1,6815$
- $\gamma_B = 10,8483$

■ **Análisis de Estabilidad (Resumen):** Se analizó la ecuación característica de Bondi (Ec. (20) en [cite: 1]) para un rango de velocidades de giro n desde 0,5 rad/s hasta 100,0 rad/s.

- Para velocidades de giro n aproximadamente menores a 63,5 rad/s, el sistema es inestable para el giro en la dirección $+n$ (al menos una raíz σ con parte real positiva). No se observa 'concordancia' en este rango, lo que implica que ambas direcciones de giro podrían ser inestables o que la estabilidad preferida no se manifiesta claramente.
- Para velocidades de giro n aproximadamente mayores o iguales a 65,5 rad/s, se observa 'concordancia'. Específicamente, el giro en la dirección $+n$ sigue siendo inestable (al menos una $\text{Re}(\sigma) > 0$), mientras que el giro en la dirección $-n$ se vuelve estable (todas las $\text{Re}(\sigma) \leq 0$ para las raíces transformadas $-\sigma$).
- La máxima parte real positiva de σ para el giro $+n$ varía entre $\approx 2,59 \times 10^1$ a $n = 0,5$ rad/s y $\approx 4,80 \times 10^1$ a $n = 100,0$ rad/s.
- El análisis predice que, para velocidades de giro suficientemente altas ($n \gtrsim 65,5$ rad/s), el rattleback tenderá a invertir su giro si se le impulsa en la dirección $+n$, estabilizándose en la dirección $-n$.

Análisis de resultados

Análisis de los Resultados Experimentales Cualitativos

Los datos experimentales cualitativos obtenidos mediante el software Tracker, representados en la Figura 1, muestran un comportamiento consistente con las **ecuaciones de movimiento linealizadas** del análisis de Case y Jalal (2014), en particular:

$$\ddot{x} = \Omega^2(\beta - \gamma)x, \quad \ddot{y} = \Omega^2(\alpha - \beta)y$$

La forma elíptica y la modulación de amplitudes observadas en las gráficas obtenidas con Tracker indican que el sistema entra en un régimen de **inestabilidad dinámica**, donde la energía se redistribuye entre los modos de rotación y vibración, desencadenando eventualmente la **reversión del giro**.

La evolución de las gráficas sugiere que el sistema se encuentra lejos del equilibrio estable y que existe un mecanismo interno que permite la inversión del sentido de rotación. Esto es consistente con la predicción teórica de que ciertas oscilaciones transversales pueden desestabilizar la rotación original.

Análisis de los Resultados Numéricos de Simulación

Los resultados numéricos obtenidos a partir del modelo STL y el análisis basado en la teoría de Bondi [cite: 1] proporcionan una caracterización cuantitativa detallada de las propiedades del rattleback y su comportamiento dinámico esperado.

Propiedades Físicas y Geométricas: El cálculo del centro de masa y los momentos principales de inercia ($A = 54,0298$, $B = 3,5273$, $C = 56,1480 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$) confirma la asimetría inercial del objeto ($A \neq B$), condición fundamental para el fenómeno[cite: 1]. La distancia $a_{eff} = 0,6240 \text{ cm}$ desde el CoM al punto de contacto es un parámetro geométrico clave que influye directamente en los parámetros adimensionales.

El ajuste de la superficie de contacto en el sistema de referencia del CoM resultó en un polinomio cuadrático (Ec. 17) donde el término constante $C_0 = 0,6469$ cm es razonablemente cercano a a_{eff} , con una diferencia de aproximadamente 3,7%. Esta pequeña discrepancia puede atribuirse a la naturaleza discreta del modelo STL y al proceso de ajuste numérico sobre un conjunto finito de puntos. Los coeficientes lineales C_1 y C_2 son prácticamente nulos, lo que valida que el punto (x_c, y_c) en el CoM, alrededor del cual se centró el ajuste, corresponde a un extremo local de la superficie (el punto de contacto).

A partir de estos coeficientes, se obtuvieron los parámetros de Bondi $p = 0,0416$, $s = 0,6432$ y $q = -0,0466$. El hecho de que $p > 0$ y $s > 0$ (ya que los coeficientes $C_3 = -0,03336$ y $C_4 = -0,5154$ del ajuste son negativos) indica que la superficie es convexa vista desde el CoM, como se espera para la base de un rattleback[cite: 1]. El valor no nulo de $q = -0,0466$ cuantifica la asimetría o "sesgo" de la base, que es crucial para el acoplamiento de los modos de oscilación y la preferencia direccional del espín[cite: 1]. Ambas condiciones geométricas de Bondi (convexidad y estabilidad en reposo) se cumplieron, sugiriendo que los parámetros extraídos describen una forma físicamente viable para un rattleback funcional.

Estabilidad del Espín: Los parámetros inerciales adimensionales calculados ($\alpha_B = 11,4390$, $\beta_B = 1,6815$, $\gamma_B = 10,8483$) junto con p , s , q y a_{eff} fueron utilizados para resolver la ecuación característica de Bondi[cite: 1]. El análisis de las raíces σ revela un comportamiento dinámico complejo dependiente de la velocidad de giro n . De particular importancia es el término $(\alpha_B - \beta_B)q_B n \sigma$ en la ecuación característica (implícito en el coeficiente $K_3 = (\alpha_B - \beta_B)q_B n_{spin}$ para σ^3 , y en K_1 para σ), que introduce la asimetría direccional si $q \neq 0$ y $\alpha_B \neq \beta_B$ (o $A \neq B$)[cite: 1]. En este caso, $\alpha_B - \beta_B \approx 9,7575$ y $q = -0,0466$.

El resultado clave del análisis de estabilidad es la predicción de "concordancia" para $n \gtrsim 65,5$ rad/s, donde el giro en la dirección $-n$ es estable, mientras que en la dirección $+n$ es inestable. Esto significa que si el rattleback se hace girar en la dirección $+n$ (por ejemplo, antihorario) con suficiente velocidad, las inestabilidades harán que su energía de rotación se transfiera a modos oscilatorios, frenando el giro inicial y eventualmente provocando un giro

en la dirección opuesta $-n$ (horario), donde puede girar de forma estable[cite: 1]. Este umbral de $\approx 65,5$ rad/s (aproximadamente 10,4 revoluciones/s) es una predicción cuantitativa del modelo. Si el rattleback físico invierte su giro a velocidades significativamente menores, podría indicar la necesidad de refinar los parámetros del modelo, la precisión del STL, o considerar efectos no incluidos en el modelo de Bondi, como la fricción de rodadura o el deslizamiento. No obstante, la predicción cualitativa de una dirección de espín preferente es un éxito del modelo.

La magnitud de las partes reales positivas de σ en el régimen inestable indica la rapidez con la que crecen las perturbaciones. El hecho de que estas partes reales sean grandes (> 20) sugiere que la inestabilidad puede desarrollarse rápidamente.

En resumen, los resultados numéricos no solo validan la consistencia interna del modelo geométrico e inercial del rattleback, sino que también predicen el comportamiento dinámico característico de inversión de espín, identificando un rango de velocidades y una dirección preferente, todo ello fundamentado en el análisis teórico de Bondi.

Conclusiones