

Propuesta de investigación: Simulación y Estudio de la Inestabilidad Rotacional del Rattleback usando Impresión 3D y Análisis Lagrangiano

Santiago Correa, Laura Corzo, Deivy Olago

¹Universidad Industrial de Santander

27 de marzo de 2025

Resumen

Este documento propone la investigación del comportamiento dinámico del Rattleback, un cuerpo rígido que tiene una inestabilidad rotacional poco común. Para modelar este fenómeno, se propone la utilización de un modelo tridimensional impreso en 3D, permitiendo una representación precisa de su superficie y estructura volumétrica.

Con base en el método propuesto por Brian Mirtich en su trabajo "Fast and Accurate Computation of Polyhedral Mass Properties", se calculará el tensor de inercia del Rattleback a partir de integrales de volumen transformadas en integrales de superficie, aprovechando la eficiencia numérica del algoritmo. Este cálculo es fundamental para comprender la distribución de masa y sus efectos en la dinámica rotacional del sistema.

A partir del análisis lagrangiano, se derivarán las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento del Rattleback, este enfoque permitirá identificar las causas de su inestabilidad y validar la predicción teórica con experimentos. Para ello, se empleará el software Tracker, que permitirá registrar y analizar de manera detallada la dinámica del sistema, contrastando los resultados teóricos con datos experimentales.

El propósito de este estudio es generar un modelo matemático que describa con precisión el comportamiento del Rattleback, proporcionando una comprensión más profunda de los mecanismos que rigen su inestabilidad rotacional. Los resultados podrán ser aplicados en el diseño y análisis de sistemas mecánicos donde la distribución de masa y las propiedades de inercia juegan un papel crucial en su estabilidad dinámica.

dinámicas. Cuando se le aplica una rotación, este objeto asimétrico no sigue un movimiento rotacional estable, sino que comienza a girar en sentido contrario, lo que lo convierte en un fenómeno poco comprendido en la física, y a su vez, en un objeto de interés debido a la información teórica aplicable a otros cuerpos rígidos con la misma asimetría.

El presente trabajo explora la relación entre la forma geométrica, la distribución de masa y el comportamiento rotacional de un sistema físico a través de un enfoque combinado de simulación computacional y experimentación. En particular, se empleará el método propuesto por Brian Mirtich en Fast and Accurate Computation of Polyhedral Mass Properties, el cual permite determinar el tensor de inercia del Rattleback mediante la conversión de integrales de volumen en integrales de superficie. Este procedimiento no solo mejora la precisión del cálculo, sino que también optimiza su eficiencia numérica, proporcionando una descripción detallada de la distribución de masa y su impacto en la dinámica del objeto.

Con el tensor de inercia obtenido, se formularán las ecuaciones de movimiento mediante el enfoque lagrangiano, lo que permitirá modelar la evolución temporal del Rattleback y comprender el origen de su comportamiento asimétrico. Para validar estos resultados teóricos, se llevarán a cabo experimentos utilizando el software Tracker, una herramienta que posibilita el análisis detallado del movimiento a partir de datos experimentales. De esta manera, se compararán las predicciones del modelo con observaciones reales, evaluando la capacidad del enfoque propuesto para describir con precisión la dinámica del sistema.

1. Introducción

El Rattleback, conocido por su comportamiento inestable y precesión inversa, es un dispositivo que genera interés por sus inusuales propiedades

A partir de este análisis, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo influye la distribución de masa del Rattleback en su comportamiento rotacional y en la aparición de su movimiento asimétrico?

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Comprender la dinámica del Rattleback en función de su distribución de masa y las condiciones iniciales, mediante simulaciones 3D y análisis experimental, con el propósito de identificar los factores que generan el acoplamiento entre sus movimientos y su comportamiento asimétrico.

2.2. Objetivos específicos

- Determinar la asimetría en la distribución de masa del Rattleback mediante el cálculo de su tensor de inercia y la relación entre sus ejes principales y su geometría.
- Derivar las ecuaciones de movimiento del rattleback en rodadura sin deslizamiento, considerando solo la interacción con la superficie a través de la fuerza normal y la gravedad, para explicar la inversión espontánea del giro.
- Identificar las condiciones geométricas y dinámicas que favorecen la inversión del giro, evaluando la influencia de la orientación inicial y la distribución de masa en la generación de torque.
- Desarrollar simulaciones numéricas del rattleback con un modelo poligonal 3D para estudiar su evolución y la inversión del giro, comparando los resultados con un análisis experimental.

3. Marco Teórico

3.1. Cuerpos Rígidos

Un **cuerpo rígido** se define como un sistema de partículas cuyas distancias mutuas no cambian con el tiempo, es decir, las partículas que componen el cuerpo se mantienen a una distancia constante entre sí. Esto implica que el cuerpo no se deforma bajo la acción de fuerzas, lo cual es una idealización común en física. Los cuerpos rígidos son fundamentales para el estudio de la mecánica clásica. Ejemplos de cuerpos rígidos incluyen estructuras como edificios, vehículos, monedas y, en este caso, el Rattleback, un objeto que exhibe un comportamiento rotacional que no es muy trivial.

El movimiento de un cuerpo rígido se puede descomponer en dos componentes principales: **traslación** del centro de masa y **rotación** alrededor del centro de masa.

Consideremos el movimiento de un punto P de un cuerpo rígido. La posición de este punto se puede escribir como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{cm} + \mathbf{r}$$

Donde: \mathbf{R} es la posición del punto P en el sistema de referencia inercial (laboratorio), \mathbf{R}_{cm} es la posición del centro de masa del cuerpo, \mathbf{r} es la posición del punto P con respecto al centro de masa del cuerpo.

Esta ecuación refleja que la posición de cualquier punto P del cuerpo es el resultado de dos componentes: 1. **traslación** de su centro de masa \mathbf{R}_{cm} , 2. **La rotación** alrededor del centro de masa, dada por \mathbf{r} , que es la distancia de P al centro de masa.

Ahora, para obtener la velocidad del punto P , derivamos la posición \mathbf{R} con respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{cm}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Lo cual se puede expresar como:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

Donde: - \mathbf{v}_{cm} es la velocidad del centro de masa, responsable del movimiento de traslación, - $\boldsymbol{\Omega}$ representa la velocidad angular instantánea del cuerpo, asociada a la rotación, - \mathbf{r} es el vector de posición del punto P respecto al centro de masa, y \times indica el producto cruz o producto vectorial, encargado de calcular la contribución de la rotación a la velocidad del punto.

La energía cinética total de un cuerpo rígido es la suma de las energías cinéticas de la **traslación** y la **rotación**:

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

Este resultado muestra cómo el movimiento de un cuerpo rígido se puede tratar como un movimiento de traslación del centro de masa combinado con un movimiento de rotación alrededor de ese centro. La descomposición en estos dos tipos de movimiento es válida para cualquier cuerpo rígido y simplifica el análisis dinámico al tratar separadamente la traslación y la rotación del sistema.

Este comportamiento es fundamental para estudiar el Rattleback, ya que su dinámica está determinada por cómo se distribuye la masa dentro de su geometría asimétrica y cómo se interactúan las fuerzas internas y externas durante la rotación.

3.2. El Tensor de Inercia

El **tensor de inercia** es una propiedad matemática de un cuerpo rígido que describe la distribución de su masa en relación con su eje de rotación. Esta cantidad es fundamental para el estudio de la dinámica de rotación, ya que permite predecir cómo un cuerpo reaccionará a la aplicación de un momento de fuerza o torque.

El tensor de inercia I para un cuerpo rígido se puede calcular a partir de su masa distribuida en

su volumen. Matemáticamente, el tensor de inercia es una matriz de componentes I_{ij} , donde cada componente está relacionado con la masa m y las distancias de las partículas del cuerpo al eje de rotación:

$$I_{ij} = \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$$

donde: - m_k es la masa de la partícula k , - r_k es la distancia de la partícula k al centro de masa, - x_i y x_j son las coordenadas de la partícula en relación con los ejes i y j , - δ_{ij} es el delta de Kronecker, que se utiliza para representar la diagonalización del tensor.

En el caso del Rattleback, dado que este cuerpo tiene una geometría asimétrica, el tensor de inercia no será diagonal, lo que implica que las interacciones entre las rotaciones alrededor de los distintos ejes deben ser consideradas en su análisis.

3.3. La Rotación de un Cuerpo Rígido

La **rotación** de un cuerpo rígido alrededor de un eje se puede describir mediante la **velocidad angular** Ω , que indica cómo varía la orientación del cuerpo con respecto al tiempo. Para un cuerpo que rota en torno a un eje fijo, cada punto en el cuerpo se mueve a lo largo de una trayectoria circular. La **velocidad angular instantánea** Ω es la misma para todos los puntos del cuerpo en un instante dado, lo que significa que todos los puntos giran a la misma velocidad angular, pero con diferentes velocidades lineales dependiendo de su distancia al eje de rotación.

La relación entre la velocidad lineal \mathbf{v}_j de una partícula j y la velocidad angular es:

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{cm} + \Omega \times \mathbf{r}_j$$

donde \mathbf{v}_{cm} es la velocidad del centro de masa y \mathbf{r}_j es la posición de la partícula j con respecto al centro de masa. Este desplazamiento contribuye tanto a la **traslación** como a la **rotación** del cuerpo.

La energía cinética de un cuerpo rígido que tiene una velocidad angular Ω se calcula sumando la energía cinética de todas sus partículas. La expresión general es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{v}_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{v}_{cm} + \Omega \times \mathbf{r}_j)^2$$

Esto refleja cómo tanto la traslación del cuerpo como su rotación contribuyen a la energía cinética total.

3.4. Análisis Lagrangiano y Ecuaciones de Movimiento

El **análisis lagrangiano** es un método poderoso para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema físico. En este enfoque, la dinámica de un sistema se describe en términos de las **energías cinética y potencial** del sistema. Para un cuerpo rígido, la energía cinética es la suma de la translación y la rotación, mientras que la energía potencial está asociada con las fuerzas conservativas (por ejemplo, la gravedad).

El Lagrangiano L se define como la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V :

$$L = T - V$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen mediante el principio de **Hamilton-Euler**, que establece que el tiempo de acción en un sistema debe ser mínimo. Aplicando este principio y las ecuaciones de Euler-Lagrange, se pueden derivar las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del Rattleback. Estas ecuaciones permiten predecir cómo se comportará el Rattleback bajo condiciones de rotación y cómo sus interacciones internas (por ejemplo, el arrastre debido a su forma asimétrica) afectan su movimiento.

En particular, la inestabilidad que presenta el Rattleback, al iniciar un giro en una dirección y luego invertirlo, puede ser explicada mediante el estudio de sus ecuaciones de movimiento derivadas del análisis lagrangiano, considerando la rotación no simétrica del cuerpo.

3.5. Modelo de Mirtich

El trabajo de Brian Mirtich, "Fast and Accurate Computation of Polyhedral Mass Properties" presenta un enfoque eficiente para calcular propiedades de inercia en cuerpos rígidos. Su modelo se basa en descomponer el volumen del objeto en un conjunto de tetraedros con respecto a un punto de referencia y luego calcular las integrales necesarias.

En su metodología, Mirtich plantea que la masa, el centro de masa y el tensor de inercia de un poliedro pueden determinarse a partir de una reformulación de las ecuaciones de volumen en términos de sus caras y bordes. El procedimiento consta de los siguientes pasos clave:

- Descomposición del poliedro en tetraedros tomando un punto de referencia fijo.
- Cálculo de integrales básicas sobre cada una de las caras del poliedro.
- Uso de relaciones recursivas para obtener el momento de inercia a partir de las integrales de menor orden.

El resultado final es una técnica computacional eficiente que reduce el tiempo de cálculo en comparación con métodos tradicionales basados en integración numérica directa.

4. Metodología

Para alcanzar los objetivos planteados, se llevará a cabo la siguiente metodología dividida en cinco etapas fundamentales.

4.1. Etapa 1: Obtención del Modelo 3D del Rattleback

El primer paso en el proceso experimental es la obtención del modelo 3D del Rattleback. Se partirá de un diseño geométrico disponible en formato **STL** (Stereolithography), el cual será validado para garantizar que sus propiedades geométricas coincidan con las observaciones experimentales.

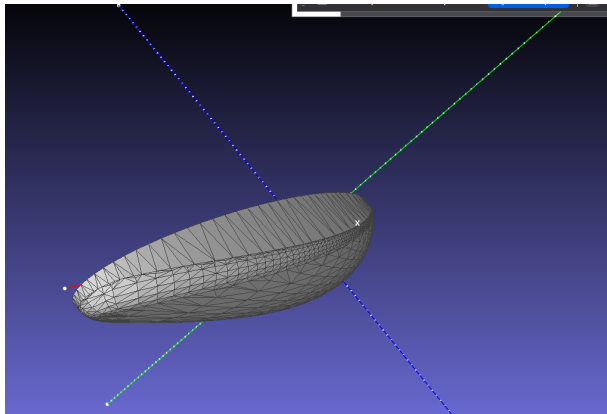


Figura 1: Representación del archivo STL del Rattleback

El archivo **STL** contiene una malla de triángulos que representa la superficie del Rattleback. Esta representación permitirá la extracción de puntos geométricos para su posterior análisis y simulación.

4.2. Etapa 2: Modelado y Cálculo del Tensor de Inercia

- Se realizará un análisis del modelo 3D para determinar sus dimensiones y propiedades geométricas.
- Se calculará el tensor de inercia mediante el método de Mirtich, considerando la distribución de masa.
- Se identificarán los ejes principales de inercia y su relación con la geometría del Rattleback.

4.3. Etapa 3: Derivación de las Ecuaciones de Movimiento

- Se aplicará el formalismo lagrangiano para derivar las ecuaciones de movimiento del Rattleback, considerando rodadura sin deslizamiento.
- Se incluirán las fuerzas de contacto con la superficie, tales como la normal y la gravedad, para analizar los términos responsables de la inversión de giro.
- Se analizará la influencia de la geometría en la estabilidad y la dinámica de rotación.

4.4. Etapa 4: Simulación Numérica y Análisis Dinámico

- Se implementará una simulación numérica basada en la integración de las ecuaciones de movimiento para estudiar el comportamiento del Rattleback.
- Se analizará la influencia de las condiciones iniciales sobre el acoplamiento de movimientos rotacionales.
- Se validarán los resultados simulados con mediciones experimentales para evaluar la precisión del modelo.

4.5. Etapa 5: Validación Experimental y Aplicación de Fuerzas Controladas

4.5.1. Configuración del Experimento

Entorno Controlado

- Realizar los experimentos en una superficie plana y nivelada para minimizar interferencias externas, asegurando que el coeficiente de fricción de la superficie sea conocido.
- Mantener el ambiente libre de corrientes de aire y vibraciones que puedan afectar la medición del movimiento del Rattleback.

4.5.2. Instrumentación

- Utilizar una cámara de alta velocidad (al menos 60 fps) para registrar con precisión el movimiento del Rattleback.
- Colocar marcadores en el Rattleback para facilitar el seguimiento de su movimiento mediante software de análisis de video (Tracker, Python o MATLAB).

- Implementar un servomotor para aplicar una fuerza controlada y evaluar la respuesta dinámica del Rattleback ante distintas perturbaciones.
- Emplear un sensor de ángulo o giroscopio para medir la velocidad angular y la dirección de rotación.

4.5.3. Protocolo Experimental

Pruebas de Rotación

1. Colocar el Rattleback sobre la superficie plana y aplicar una rotación inicial en sentido antihorario.
2. Registrar el tiempo que tarda en detenerse, cambiar de dirección o estabilizarse.
3. Repetir el proceso con una rotación inicial en sentido antihorario.
4. Variar la velocidad angular inicial para estudiar su efecto en el comportamiento.

Pruebas de Aplicación de Fuerza Controlada

1. Programar el servomotor para aplicar impulsos de diferente magnitud sobre el Rattleback.
2. Registrar la respuesta dinámica del sistema ante cada aplicación de fuerza.
3. Analizar la influencia de las perturbaciones externas en la inversión de giro y la estabilidad rotacional.

Pruebas de Repetición

- Realizar cada experimento al menos 5 veces para garantizar la reproducibilidad de los resultados.
- Documentar las condiciones iniciales (velocidad, posición del centro de masa) en cada prueba.

4.5.4. Adquisición y Procesamiento de Datos

Captura de Datos

- Usar la cámara de alta velocidad para grabar cada experimento.
- Extraer datos de posición, velocidad y ángulo utilizando software de análisis de video.

Análisis de Datos

- Comparar los datos experimentales con las predicciones teóricas obtenidas del análisis lagrangiano.
- Comparar los datos experimentales con los resultados computacionales obtenidos a partir de la simulación numérica.
- Calcular parámetros como la frecuencia de oscilación, el tiempo de estabilización y la dirección de rotación preferente.

Validación

- Verificar que los resultados experimentales coincidan con los estudios teóricos, computacionales y bibliográficos previos.
- Identificar y cuantificar posibles fuentes de error, como fricción, imprecisiones en la aplicación de fuerza y variaciones en la geometría del modelo.

4.5.5. Análisis de Resultados

Comparación Teórico-Experimental

- Generar gráficos comparativos entre los datos teóricos, computacionales y experimentales.
- Evaluar las discrepancias y proponer ajustes al modelo teórico en caso de ser necesario.

Identificación de Patrones

- Estudiar la variación del comportamiento del Rattleback en función de distintos parámetros, como la velocidad inicial, la magnitud de la fuerza aplicada y la distribución de masa.

Conclusiones Preliminares

- Evaluar si el prototipo cumple con las expectativas teóricas y computacionales.
- Proponer mejoras en el diseño del experimento o en el protocolo de aplicación de fuerzas.

4.5.6. Propuestas de Mejora

Optimización del Diseño

- Modificar la geometría del Rattleback para evaluar su efecto en la estabilidad rotacional.
- Probar distintas superficies y coeficientes de fricción para analizar su influencia en el comportamiento dinámico.

Ampliación del Estudio

- Realizar experimentos en condiciones no ideales, como superficies inclinadas o con presencia de fluidos.
- Estudiar el efecto de la fricción y la resistencia del aire en la dinámica del Rattleback.

Referencias

- [1] Cosenza, M. (2015). *Mecánica Clásica*. Universidad de los Andes (ULA). Facultad de Ciencias. Departamento de Física. Mérida-Venezuela (Publicación Electrónica), pp. 133-141.
- [2] Arnold, V.I. (2010). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York, 2nd Edition, ISBN 978-1-4419-5677-5.
- [3] Mirtich, B. (1996). Fast and accurate computation of polyhedral mass properties. University of California, Berkeley