Propuesta de investigación: Simulación y Estudio de la Inestabilidad Rotacional del Rattleback usando Impresión 3D y Análisis Lagrangiano

David Santiago, Laura Corzo, Deivy Olago

[1]Universidad Industrial de Santander

20 de febrero de 2025

Resumen

En este proyecto se propone investigar el comportamiento dinámico del Rattleback, un cuerpo rígido que muestra una inestabilidad rotacional poco común. El objetivo es modelar este fenómeno utilizando un modelo tridimensional impreso en 3D y calcular su tensor de inercia a partir de la representación de su superficie y estructura volumétrica. A través del análisis lagrangiano, se derivarán las ecuaciones de movimiento que describen su comportamiento en condiciones rotacionales. Este estudio tiene como propósito generar un modelo matemático que permita predecir el comportamiento Rattleback.

1. Introducción

El Rattleback, conocido por su comportamiento de precesión inversa, es un dispositivo que genera interés por sus inusuales propiedades dinámicas. Cuando se le aplica una rotación, este objeto asimétrico no sigue un movimiento rotacional estable, sino que comienza a girar en sentido contrario, lo que lo convierte en un fenómeno poco comprendido en la física del movimiento. A pesar de los avances en la modelización de cuerpos rígidos, el estudio completo del comportamiento de este objeto aún presenta retos significativos.

El estudio del Rattleback tiene importancia en el campo de la física de cuerpos rígidos, ya que permite investigar cómo las fuerzas internas y externas influyen en la rotación de un cuerpo asimétrico. A través de un modelo computacional y físico, se puede estudiar con mayor precisión la relación entre la forma del objeto, su distribución de masa y el comportamiento rotacional observado.

Este trabajo busca aprovechar un modelo tridimensional impreso para obtener una representación precisa de la geometría del Rattleback. A partir de esta representación, se calculará el tensor de inercia y se utilizará el análisis lagrangiano para obtener las ecuaciones de movimiento que describen su comportamiento. Este enfoque permitirá comprender más profundamente la dinámica del Rattleback, a la vez que proporciona una metodología innovadora para analizar fenómenos complejos en cuerpos rotacionales.

2. Marco Teórico

2.1. Cuerpos Rígidos

Un **cuerpo rígido** se define como un sistema de partículas cuyas distancias mutuas no cambian con el tiempo, es decir, las partículas que componen el cuerpo se mantienen a una distancia constante entre sí. Esto implica que el cuerpo no se deforma bajo la acción de fuerzas, lo cual es una idealización común en física. Los cuerpos rígidos son fundamentales para el estudio de la mecánica clásica. Ejemplos de cuerpos rígidos incluyen estructuras como edificios, vehículos, monedas y, en este caso, el Rattleback, un objeto que exhibe un comportamiento rotacional que no es muy trivial.

El movimiento de un cuerpo rígido se puede descomponer en dos componentes principales: **translación** del centro de masa y **rotación** alrededor del centro de masa.

Consideremos el movimiento de un punto P de un cuerpo rígido. La posición de este punto se puede escribir como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{cm} + \mathbf{r}$$

Donde: $\mathbf{R}$ es la posición del punto P en el sistema de referencia inercial (laboratorio), $\mathbf{R}_{cm}$ es la posición del centro de masa del cuerpo, $\mathbf{r}$ es la posición del punto P con respecto al centro de masa del cuerpo.

Esta ecuación refleja que la posición de cualquier punto P del cuerpo es el resultado de dos componentes: 1. **translación** de su centro de masa $\mathbf{R}_{cm}$, 2. **La rotación** alrededor del centro de masa, dada por $\mathbf{r}$, que es la distancia de P al centro de masa.

Ahora, para obtener la velocidad del punto P, derivamos la posición $\mathbf{R}$ con respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{cm}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Lo cual se puede expresar como:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

Donde: - $\mathbf{v}_{cm}$ es la velocidad del centro de masa, que representa la **traslación**, - $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular instantánea del cuerpo, que describe la **rotación**, - $\mathbf{r}$ es el vector de posición del punto P con respecto al centro de masa, y $\times$ denota el producto cruzado, que calcula la velocidad debida a la rotación.

La energía cinética total de un cuerpo rígido es la suma de las energías cinéticas de la **translación** y la **rotación**:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

Este resultado muestra cómo el movimiento de un cuerpo rígido se puede tratar como un movimiento de traslación del centro de masa combinado con un movimiento de rotación alrededor de ese centro. La descomposición en estos dos tipos de movimiento es válida para cualquier cuerpo rígido y simplifica el análisis dinámico al tratar separadamente la translación y la rotación del sistema.

Este comportamiento es fundamental para estudiar el Rattleback, ya que su dinámica está determinada por cómo se distribuye la masa dentro de su geometría asimétrica y cómo se interactúan las fuerzas internas y externas durante la rotación.

2.2. El Tensor de Inercia

El **tensor de inercia** es una propiedad matemática de un cuerpo rígido que describe la distribución de su masa en relación con su eje de rotación. Esta cantidad es fundamental para el estudio de la dinámica de rotación, ya que permite predecir cómo un cuerpo reaccionará a la aplicación de un momento de fuerza o torque.

El tensor de inercia I para un cuerpo rígido se puede calcular a partir de su masa distribuida en su volumen. Matemáticamente, el tensor de inercia es una matriz de componentes I_{ij}, donde cada componente está relacionado con la masa m y las distancias de las partículas del cuerpo al eje de rotación:

$$I_{ij} = \sum_k m_k(r_k^2\delta_{ij} - x_i x_j)$$

donde: - m_k es la masa de la partícula k, - r_k es la distancia de la partícula k al centro de masa, - x_i y x_j son las coordenadas de la partícula en relación con los ejes i y j, - δ_{ij} es el delta de Kronecker, que se utiliza para representar la diagonalización del tensor.

En el caso del Rattleback, dado que este cuerpo tiene una geometría asimétrica, el tensor de inercia no será diagonal, lo que implica que las interacciones entre las rotaciones alrededor de los distintos ejes deben ser consideradas en su análisis.

2.3. La Rotación de un Cuerpo Rígido

La **rotación** de un cuerpo rígido alrededor de un eje se puede describir mediante la **velocidad angular** Ω, que indica cómo varía la orientación del cuerpo con respecto al tiempo. Para un cuerpo que rota en torno a un eje fijo, cada punto en el cuerpo se mueve a lo largo de una trayectoria circular. La **velocidad angular instantánea** Ω es la misma para todos los puntos del cuerpo en un instante dado, lo que significa que todos los puntos giran a la misma velocidad angular, pero con diferentes velocidades lineales dependiendo de su distancia al eje de rotación.

La relación entre la velocidad lineal $\mathbf{v}_j$ de una partícula j y la velocidad angular es:

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{cm} + \Omega \times \mathbf{r}_j$$

donde $\mathbf{v}_{cm}$ es la velocidad del centro de masa y $\mathbf{r}_j$ es la posición de la partícula j con respecto al centro de masa. Este desplazamiento contribuye tanto a la **traslación** como a la **rotación** del cuerpo.

La energía cinética de un cuerpo rígido que tiene una velocidad angular Ω se calcula sumando la energía cinética de todas sus partículas. La expresión general es:

$$T = \frac{1}{2}\sum_j m_j(\mathbf{v}_j)^2 = \frac{1}{2}\sum_j m_j\left(\mathbf{v}_{cm} + \Omega \times \mathbf{r}_j\right)^2$$

Esto refleja cómo tanto la traslación del cuerpo como su rotación contribuyen a la energía cinética total.

2.4. Análisis Lagrangiano y Ecuaciones de Movimiento

El **análisis lagrangiano** es un método poderoso para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema físico. En este enfoque, la dinámica de un sistema se describe en términos de las **energías cinética** y **potencial** del sistema. Para un cuerpo rígido, la energía cinética es la suma de la translación y la rotación, mientras que la energía potencial está asociada con las fuerzas conservativas (por ejemplo, la gravedad).

El Lagrangiano L se define como la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V:

$$L = T - V$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen mediante el principio de **Hamilton-Euler**, que establece que el tiempo de acción en un sistema debe ser mínimo. Aplicando este principio y las ecuaciones de Euler-Lagrange, se pueden derivar las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del Rattleback. Estas ecuaciones permiten predecir cómo se comportará el Rattleback bajo condiciones de rotación y cómo sus interacciones internas (por ejemplo, el arrastre debido a su forma asimétrica) afectan su movimiento.

En particular, la inestabilidad que presenta el Rattleback, al iniciar un giro en una dirección y luego invertirlo, puede ser explicada mediante el estudio de sus ecuaciones de movimiento derivadas del análisis lagrangiano, considerando la rotación no simétrica del cuerpo.

3. Metodología

La metodología para estudiar el comportamiento dinámico del Rattleback se basa en un enfoque de simulación numérica utilizando un modelo 3D extraído de internet. A partir de este modelo, se lleva a cabo el cálculo del tensor de inercia y el análisis lagrangiano para derivar las ecuaciones de movimiento del cuerpo. Esta metodología se estructura en varios pasos interrelacionados que permiten obtener una representación precisa del comportamiento rotacional del Rattleback.

3.1. Paso 1: Obtención del Modelo 3D del Rattleback

El primer paso en el proceso de simulación es la obtención del modelo 3D del Rattleback, que fue tomado de una fuente pública de modelos 3D en internet. Este modelo ya está disponible en formato **STL** (Stereolithography), que es un formato estándar utilizado en impresión 3D para representar superficies geométricas. Aunque no se creó el modelo desde cero, se verificó que el comportamiento dinámico del Rattleback descrito en el modelo coincida con las observaciones experimentales conocidas

El archivo **STL** contiene una malla de triángulos que representa la superficie del Rattleback. Esta representación es ideal para la simulación, ya que facilita la extracción de los puntos geométricos (vertices) que se utilizarán en los siguientes pasos del cálculo.

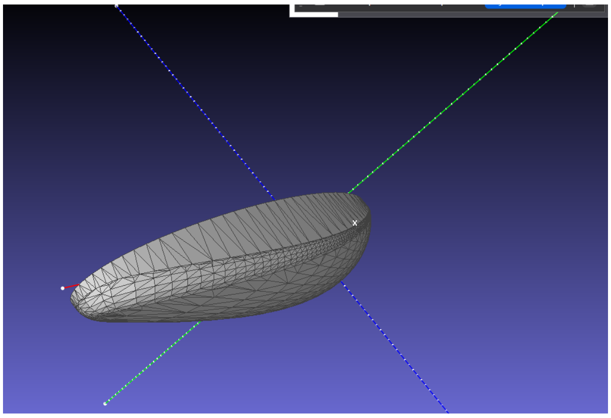

Figura 1: Representación del archivo STL del Rattleback

3.2. Paso 2: Extracción de Puntos Geométricos del Modelo 3D

Una vez que se ha obtenido el modelo **STL**, se procede a la extracción de los puntos geométricos que componen la superficie del Rattleback. Para cada triángulo que forma la malla del modelo, se calcula su centroide, que servirá como un punto representativo para la masa asociada a ese triángulo. Estos puntos centroidales son cruciales para aproximar la distribución de masa del objeto y, posteriormente, para calcular el tensor de inercia.

El proceso de extracción se realiza utilizando la libreria Numpy en python, que permite acceder a las coordenadas de los puntos en la malla y almacenarlas para el siguiente paso.

3.3. Paso 3: Aproximación de la Distribución de Masa

- Sujeto a modificaciones

  El siguiente paso es la aproximación de la distribución de masa sobre el Rattleback. A cada triángulo de la malla extraída del archivo **STL** se le asigna una masa proporcional al área de dicho triángulo. La masa total del cuerpo M es la suma de las masas de todos los triángulos en la malla, y se calcula utilizando la siguiente expresión:

$$M = \sum_k m_k$$

  donde m_k es la masa asignada al triángulo k. Esta asignación de masa es crucial para la aproximación de la distribución de masa en el cuerpo, y aunque no es exacta, es suficientemente precisa para los fines de simulación.

3.4. Paso 4: Cálculo del Tensor de Inercia

Con la distribución de masa aproximada, el siguiente paso es calcular el tensor de inercia del Rattleback. El tensor de inercia describe cómo la masa del cuerpo está distribuida en relación con sus ejes de rotación, y es esencial para entender cómo el cuerpo responde a un momento de fuerza.

El tensor de inercia I se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$I_{ij} = \sum_k m_k \left(r_k^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right)$$

donde: - m_k es la masa del triángulo k, - r_k es la distancia del triángulo k al eje de rotación, - x_i y x_j son las coordenadas de los puntos respecto a los ejes i y j, - δ_{ij} es el delta de Kronecker, utilizado para representar la diagonalización del tensor.

Dado que el modelo 3D está discretizado en una malla de triángulos, este cálculo se realiza de forma aproximada, sumando los momentos de inercia de cada triángulo. Esta es una aproximación que, aunque no exacta, proporciona una estimación suficientemente precisa para el análisis dinámico del Rattleback.

3.5. Paso 5: Derivación de las Ecuaciones de Movimiento mediante el Análisis Lagrangiano

Una vez obtenido el tensor de inercia, se procede a utilizar análisis lagrangiano para derivar las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento dinámico del Rattleback. El lagrangiano L se define como la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V:

$$L = T - V$$

La energía cinética total del cuerpo se descompone en dos componentes: la translación del centro de masa y la rotación alrededor del centro de masa. La energía cinética rotacional está relacionada con el tensor de inercia y la velocidad angular Ω, mientras que la energía translacional está asociada con la velocidad del centro de masa $\mathbf{v}_{cm}$.

Las ecuaciones de movimiento se derivan a partir del lagrangiano mediante el principio de **Hamilton-Euler**, que establece que la trayectoria que describe el movimiento de un sistema minimiza la acción. Estas ecuaciones permiten predecir el comportamiento rotacional del Rattleback, considerando su forma asimétrica y la distribución de masa.

3.6. Paso 6: Análisis y Validación de Resultados

Finalmente, las ecuaciones de movimiento derivadas se analizan y validan mediante comparaciones con resultados experimentales o simulaciones previas. Este análisis permite verificar la precisión de los resultados obtenidos y ajustar las aproximaciones realizadas durante las etapas anteriores.

El modelo generado a partir del archivo **STL** y el cálculo del tensor de inercia proporcionan una representación detallada y precisa del comportamiento dinámico del Rattleback. Con esta metodología, es posible estudiar fenómenos como la precesión inversa y otros aspectos de la rotación del cuerpo.

4. Conclusiones

Referencias

[1] Cosenza, M. (2015). *Mecánica Clásica.* Universidad de los Andes (ULA). Facultad de Ciencias. Departamento de Física. Mérida-Venezuela (Publicación Electrónica), pp. 133-141.

[2] Arnold, V.I. (2010). *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer, New York, 2nd Edition, ISBN 978-1-4419-5677-5.