Propuesta de investigación: Simulación y Estudio de la Inestabilidad Rotacional del Rattleback usando Impresión 3D y Análisis Lagrangiano

David Santiago, Laura Corzo, Deivy Olago

[1]Universidad Industrial de Santander

6 de marzo de 2025

Resumen

Este documento propone la investigación del comportamiento dinámico del Rattleback, un cuerpo rígido que tiene una inestabilidad rotacional poco común. Para modelar este fenómeno, se propone la utilización de un modelo tridimensional impreso en 3D, permitiendo una representación precisa de su superficie y estructura volumétrica.

Con base en el método propuesto por Brian Mirtich en su trabajo "Fast and Accurate Computation of Polyhedral Mass Properties, se calculará el tensor de inercia del Rattleback a partir de integrales de volumen transformadas en integrales de superficie, aprovechando la eficiencia numérica del algoritmo. Este cálculo es fundamental para comprender la distribución de masa y sus efectos en la dinámica rotacional del sistema.

A partir del análisis lagrangiano, se derivarán las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento del Rattleback, este enfoque permitirá identificar las causas de su inestabilidad y validar la predicción teórica con experimentos. Para ello, se empleará el software Tracker, que permitirá registrar y analizar de manera detallada la dinámica del sistema, contrastando los resultados teóricos con datos experimentales.

El propósito de este estudio es generar un modelo matemático que describa con precisión el comportamiento del Rattleback, proporcionando una comprensión más profunda de los mecanismos que rigen su inestabilidad rotacional. Los resultados podrán ser aplicados en el diseño y análisis de sistemas mecánicos donde la distribución de masa y las propiedades de inercia juegan un papel crucial en su estabilidad dinámica.

1. Introducción

El Rattleback, conocido por su comportamiento inestable y precesión inversa, es un dispositivo que genera interés por sus inusuales propiedades dinámicas. Cuando se le aplica una rotación, este objeto asimétrico no sigue un movimiento rotacional estable, sino que comienza a girar en sentido contrario, lo que lo convierte en un fenómeno poco comprendido en la física, y a su vez, en un objeto de interés debido a la información teórica aplicable a otros cuerpos rígidos con la misma asimetría.

A través de un modelo computacional y físico, se estudiará con mayor precisión la relación entre la forma del objeto, su distribución de masa y el comportamiento rotacional observado. Esta propuesta se centra en el método realizado por Brian Mirtich en su trabajo *Fast and Accurate Computation of Polyhedral Mass Properties*, calculando el tensor de inercia del Rattleback a partir de integrales de volumen transformadas en integrales de superficie, aprovechando la eficiencia numérica del algoritmo. Este cálculo es fundamental para comprender la distribución de masa y sus efectos en la dinámica rotacional del sistema.

A partir del análisis lagrangiano, logrado con la elaboración del tensor de inercia, se derivarán las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento del Rattleback. Este enfoque permitirá identificar las causas de su inestabilidad y validar la predicción teórica con experimentos. Para ello, se empleará el software Tracker, que permitirá registrar y analizar de manera detallada la dinámica del sistema, contrastando los resultados teóricos con datos experimentales.

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Estudiar la influencia de diferentes condiciones iniciales en la dinámica del rattleback mediante una simulación 3D, con el fin de determinar los factores que producen el acoplamiento entre sus movimientos.

2.2. Objetivos específicos

- Analizar la asimetría en la distribución de masa del rattleback mediante el cálculo de su tensor de inercia y la relación entre sus ejes principales y su geometría.
- Derivar las ecuaciones de movimiento del rattleback en rodadura sin deslizamiento, considerando solo la interacción con la superficie a través de la fuerza normal y la gravedad, para explicar la inversión espontánea del giro.
- Identificar las condiciones geométricas y dinámicas que favorecen la inversión del giro, evaluando la influencia de la orientación inicial y la distribución de masa en la generación de torque.
- Desarrollar simulaciones numéricas del rattleback con un modelo poligonal 3D para estudiar su evolución y la inversión del giro, comparando los resultados con un análisis experimental.

3. Marco Teórico

3.1. Cuerpos Rígidos

Un **cuerpo rígido** se define como un sistema de partículas cuyas distancias mutuas no cambian con el tiempo, es decir, las partículas que componen el cuerpo se mantienen a una distancia constante entre sí. Esto implica que el cuerpo no se deforma bajo la acción de fuerzas, lo cual es una idealización común en física. Los cuerpos rígidos son fundamentales para el estudio de la mecánica clásica. Ejemplos de cuerpos rígidos incluyen estructuras como edificios, vehículos, monedas y, en este caso, el Rattleback, un objeto que exhibe un comportamiento rotacional que no es muy trivial.
El movimiento de un cuerpo rígido se puede descomponer en dos componentes principales: **traslación** del centro de masa y **rotación** alrededor del centro de masa.
Consideremos el movimiento de un punto P de un cuerpo rígido. La posición de este punto se puede escribir como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{cm} + \mathbf{r}$$

Donde: $\mathbf{R}$ es la posición del punto P en el sistema de referencia inercial (laboratorio), $\mathbf{R}_{cm}$ es la posición del centro de masa del cuerpo, $\mathbf{r}$ es la posición del punto P con respecto al centro de masa del cuerpo.
Esta ecuación refleja que la posición de cualquier punto P del cuerpo es el resultado de dos componentes: 1. **translación** de su centro de masa $\mathbf{R}_{cm}$, 2. **La rotación** alrededor del centro de masa, dada por $\mathbf{r}$, que es la distancia de P al centro de masa.

Ahora, para obtener la velocidad del punto P, derivamos la posición $\mathbf{R}$ con respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{cm}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Lo cual se puede expresar como:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$$

Donde: - $\mathbf{v}_{cm}$ es la velocidad del centro de masa, que representa la **traslación**, - $\mathbf{\Omega}$ es la velocidad angular instantánea del cuerpo, que describe la **rotación**, - $\mathbf{r}$ es el vector de posición del punto P con respecto al centro de masa, y $\times$ denota el producto cruzado, que calcula la velocidad debida a la rotación.

La energía cinética total de un cuerpo rígido es la suma de las energías cinéticas de la **translación** y la **rotación**:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

Este resultado muestra cómo el movimiento de un cuerpo rígido se puede tratar como un movimiento de traslación del centro de masa combinado con un movimiento de rotación alrededor de ese centro. La descomposición en estos dos tipos de movimiento es válida para cualquier cuerpo rígido y simplifica el análisis dinámico al tratar separadamente la translación y la rotación del sistema.

Este comportamiento es fundamental para estudiar el Rattleback, ya que su dinámica está determinada por cómo se distribuye la masa dentro de su geometría asimétrica y cómo se interactúan las fuerzas internas y externas durante la rotación.

3.2. El Tensor de Inercia

El **tensor de inercia** es una propiedad matemática de un cuerpo rígido que describe la distribución de su masa en relación con su eje de rotación. Esta cantidad es fundamental para el estudio de la dinámica de rotación, ya que permite predecir cómo un cuerpo reaccionará a la aplicación de un momento de fuerza o torque.

El tensor de inercia I para un cuerpo rígido se puede calcular a partir de su masa distribuida en su volumen. Matemáticamente, el tensor de inercia es una matriz de componentes I_{ij}, donde cada componente está relacionado con la masa m y las distancias de las partículas del cuerpo al eje de rotación:

$$I_{ij} = \sum_k m_k(r_k^2\delta_{ij} - x_i x_j)$$

donde: - m_k es la masa de la partícula k, - r_k es la distancia de la partícula k al centro de masa, - x_i y x_j son las coordenadas de la partícula en relación con los ejes i y j, - δ_{ij} es el delta de Kronecker, que se utiliza para representar la diagonalización del tensor.

En el caso del Rattleback, dado que este cuerpo tiene una geometría asimétrica, el tensor de inercia no será diagonal, lo que implica que las interacciones entre las rotaciones alrededor de los distintos ejes deben ser consideradas en su análisis.

3.3. La Rotación de un Cuerpo Rígido

La **rotación** de un cuerpo rígido alrededor de un eje se puede describir mediante la **velocidad angular** Ω, que indica cómo varía la orientación del cuerpo con respecto al tiempo. Para un cuerpo que rota en torno a un eje fijo, cada punto en el cuerpo se mueve a lo largo de una trayectoria circular. La **velocidad angular instantánea** Ω es la misma para todos los puntos del cuerpo en un instante dado, lo que significa que todos los puntos giran a la misma velocidad angular, pero con diferentes velocidades lineales dependiendo de su distancia al eje de rotación.

La relación entre la velocidad lineal $\mathbf{v}_j$ de una partícula j y la velocidad angular es:

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{cm} + \Omega \times \mathbf{r}_j$$

donde $\mathbf{v}_{cm}$ es la velocidad del centro de masa y $\mathbf{r}_j$ es la posición de la partícula j con respecto al centro de masa. Este desplazamiento contribuye tanto a la **traslación** como a la **rotación** del cuerpo.

La energía cinética de un cuerpo rígido que tiene una velocidad angular Ω se calcula sumando la energía cinética de todas sus partículas. La expresión general es:

$$T = \frac{1}{2}\sum_j m_j(\mathbf{v}_j)^2 = \frac{1}{2}\sum_j m_j\left(\mathbf{v}_{cm} + \Omega \times \mathbf{r}_j\right)^2$$

Esto refleja cómo tanto la traslación del cuerpo como su rotación contribuyen a la energía cinética total.

3.4. Análisis Lagrangiano y Ecuaciones de Movimiento

El **análisis lagrangiano** es un método poderoso para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema físico. En este enfoque, la dinámica de un sistema se describe en términos de las **energías cinética** y **potencial** del sistema. Para un cuerpo rígido, la energía cinética es la suma de la translación y la rotación, mientras que la energía potencial está asociada con las fuerzas conservativas (por ejemplo, la gravedad).

El Lagrangiano L se define como la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V:

$$L = T - V$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen mediante el principio de **Hamilton-Euler**, que establece que el tiempo de acción en un sistema debe ser mínimo. Aplicando este principio y las ecuaciones de Euler-Lagrange, se pueden derivar las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del Rattleback. Estas ecuaciones permiten predecir cómo se comportará el Rattleback bajo condiciones de rotación y cómo sus interacciones internas (por ejemplo, el arrastre debido a su forma asimétrica) afectan su movimiento.

En particular, la inestabilidad que presenta el Rattleback, al iniciar un giro en una dirección y luego invertirlo, puede ser explicada mediante el estudio de sus ecuaciones de movimiento derivadas del análisis lagrangiano, considerando la rotación no simétrica del cuerpo.

3.5. Modelo de Mirtich

El trabajo de Brian Mirtich, "Fast and Accurate Computation of Polyhedral Mass Properties" presenta un enfoque eficiente para calcular propiedades de inercia en cuerpos rígidos. Su modelo se basa en descomponer el volumen del objeto en un conjunto de tetraedros con respecto a un punto de referencia y luego calcular las integrales necesarias.

En su metodología, Mirtich plantea que la masa, el centro de masa y el tensor de inercia de un poliedro pueden determinarse a partir de una reformulación de las ecuaciones de volumen en términos de sus caras y bordes. El procedimiento consta de los siguientes pasos clave:

- Descomposición del poliedro en tetraedros tomando un punto de referencia fijo.
- Cálculo de integrales básicas sobre cada una de las caras del poliedro.
- Uso de relaciones recursivas para obtener el momento de inercia a partir de las integrales de menor orden.

El resultado final es una técnica computacional eficiente que reduce el tiempo de cálculo en comparación con métodos tradicionales basados en integración numérica directa.

4. Metodología

Para alcanzar los objetivos planteados, se llevará a cabo la siguiente metodología dividida en cuatro etapas fundamentales

4.1. Etapa 1: Obtención del Modelo 3D del Rattleback

El primer paso en el proceso de simulación es la obtención del modelo 3D del Rattleback, que fue tomado de una fuente pública de modelos 3D en internet. Este modelo ya está disponible en formato **STL** (Stereolithography), que es un formato estándar utilizado en impresión 3D para representar superficies geométricas. Aunque no se creó el modelo desde cero, se verificó que el comportamiento dinámico del Rattleback descrito en el modelo coincida con las observaciones experimentales conocidas

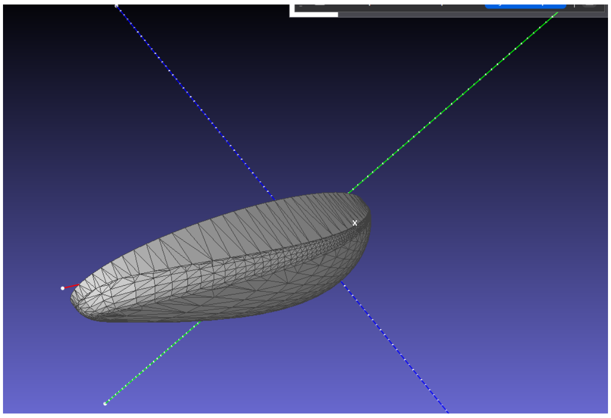

Figura 1: Representación del archivo STL del Rattleback

El archivo **STL** contiene una malla de triángulos que representa la superficie del Rattleback. Esta representación es ideal para la simulación, ya que facilita la extracción de los puntos geométricos (vertices) que se utilizarán en los siguientes pasos del cálculo.

4.2. Modelado y Cálculo del Tensor de Inercia

- Se diseñará un modelo 3D del Rattleback utilizando software de modelado paramétrico, asegurando una representación fiel de su geometría.
- A partir de la geometría digitalizada, se calculará el tensor de inercia aplicando el método de Mirtich para cuerpos poligonales.
- Se analizará la distribución de masa y la relación entre los ejes principales de inercia y la geometría del Rattleback.

4.3. Derivación de las Ecuaciones de Movimiento

- Se aplicará el formalismo lagrangiano para derivar las ecuaciones de movimiento del Rattleback bajo la suposición de rodadura sin deslizamiento.
- Se considerarán las fuerzas de contacto con la superficie, limitándose a la normal y la gravedad, para determinar los términos que explican la inversión de giro.

4.4. Simulación Numérica y Análisis Dinámico

- Se implementará una simulación numérica basada en la integración de las ecuaciones de movimiento para comprender el Rattleback.
- Se analizará la influencia de las condiciones iniciales sobre el acoplamiento de movimientos rotacionales.
- Se validarán los resultados de la simulación con el modelo físico impreso en 3D.

4.5. Validación Experimental

- Se utilizará el software Tracker para registrar y analizar el movimiento del Rattleback en condiciones controladas.
- Se compararán los resultados experimentales con los modelos teóricos y simulaciones numéricas.
- Se evaluará la precisión del modelo propuesto y su capacidad para predecir la inversión de giro.

Referencias

[1] Cosenza, M. (2015). *Mecánica Clásica*. Universidad de los Andes (ULA). Facultad de Ciencias. Departamento de Física. Mérida-Venezuela (Publicación Electrónica), pp. 133-141.

[2] Arnold, V.I. (2010). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York, 2nd Edition, ISBN 978-1-4419-5677-5.

[3] Mirtich, B. (1996). Fast and accurate computation of polyhedral mass properties. University of California, Berkeley