

Simulación y Estudio de la Inestabilidad Rotacional del Rattleback

Esta presentación explora la inestabilidad rotacional del rattleback, un objeto asimétrico con un comportamiento contraintuitivo. Combinamos modelado teórico, simulación numérica y validación experimental para comprender este fascinante fenómeno físico. Nuestro objetivo es profundizar en la mecánica de cuerpos rígidos y la transferencia de energía en sistemas no holonómicos.

Deivy Olago, Laura Corzo, Santiago



Introducción: El Enigma del Rattleback

El rattleback, también conocido como piedra celta, es un objeto rígido que, al girar en una dirección, se detiene espontáneamente y revierte su sentido de giro. Su dinámica es compleja, incluyendo comportamientos no lineales y la aparición de dinámicas caóticas bajo ciertas condiciones. Sirve como modelo para investigar la quiralidad dinámica, donde la asimetría surge de su geometría o distribución de masa.

Este trabajo emplea un marco de simulación numérica para investigar la dinámica tridimensional del rattleback. Los parámetros geométricos e inerciales se derivan directamente de un archivo STL, permitiendo una representación precisa de la forma del objeto. El análisis teórico mostró buena concordancia con los resultados experimentales, confirmando que el acoplamiento de fuerzas de contacto facilita la reversión del giro.

Marco Teórico: Fundamentos de la Dinámica del Rattleback

El Rattleback y su Inestabilidad Rotacional

El rattleback es un objeto elipsoidal asimétrico que gira de forma estable en un sentido, pero al ser impulsado en el opuesto, desacelera, oscila y eventualmente invierte su dirección. Esta inestabilidad se debe a la asimetría geométrica, el desplazamiento del centro de masa y el acoplamiento entre traslación y rotación, generando términos cruzados en el tensor de inercia.

Análisis Lagrangiano y Tensor de Inercia

El análisis lagrangiano describe la dinámica de sistemas físicos mediante coordenadas generalizadas, usando la energía cinética (T) y potencial (V). Para el rattleback, el tensor de inercia, crucial para su dinámica, se calculó numéricamente desde el modelo 3D. Este tensor representa la distribución de masa y determina la estabilidad de su rotación.

Dinámica No Lineal y Validación Experimental

El rattleback es un sistema físico no lineal, sensible a las condiciones iniciales, mostrando inversión de giro y oscilaciones. La fabricación mediante impresión 3D permitió validar experimentalmente su comportamiento. La integración de teoría, modelado computacional y experimentación ofrece una visión completa del fenómeno.

Pregunta de Investigación y Objetivos

1 Pregunta de Investigación

¿Qué condiciones geométricas y dinámicas son necesarias para la inversión de giro en un rattleback, y cómo varía este fenómeno según el diseño del cuerpo?

2 Objetivo General

Determinar la influencia de diferentes condiciones iniciales en la dinámica del rattleback mediante simulación 3D, identificando los factores responsables del acoplamiento entre rotación y oscilaciones transversales.

3 Objetivos Específicos

Calcular la asimetría de masa, derivar ecuaciones de movimiento, identificar condiciones de inversión de giro y desarrollar simulaciones numéricas para comparar con el análisis experimental.

Metodología: Un Enfoque Integral



Desarrollo Matemático

Se aplicó la mecánica Lagrangiana para describir el movimiento del rattleback, definiendo sistemas de referencia inercial y de centro de masa. Se consideró la energía cinética rotacional y potencial gravitatoria, modelando el rattleback como un sólido rígido con simetría elipsoidal. El tensor de inercia se calculó para entender la distribución de masa.



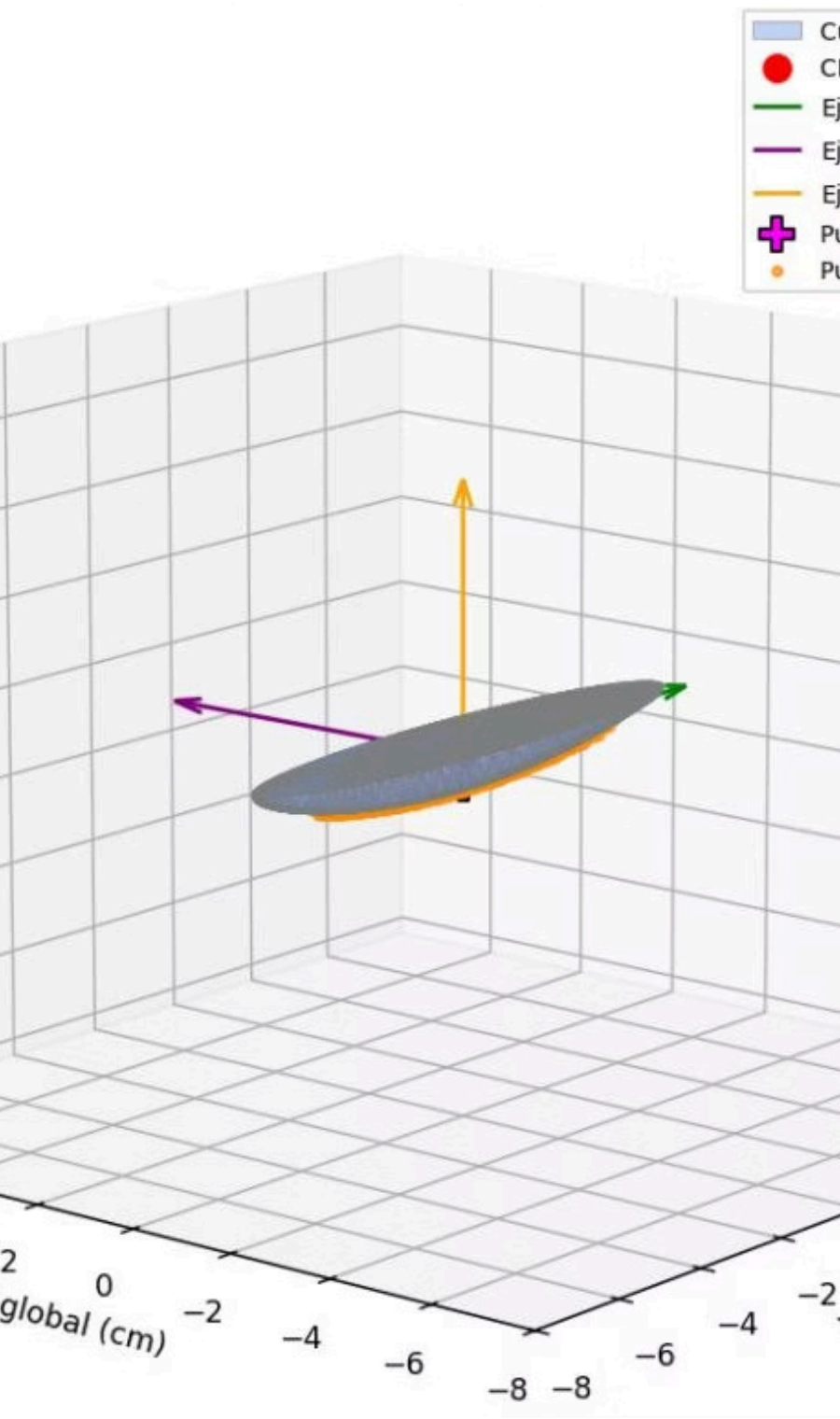
Simulación Numérica y Extracción de Parámetros

Se implementó un enfoque computacional en Python para extraer parámetros físicos del rattleback directamente de su modelo STL. Esto incluyó el cálculo de volumen, masa, centro de masa y tensor de inercia. Se realizó un ajuste de la superficie de contacto para determinar parámetros geométricos de Bondi, cruciales para la dinámica de inversión del giro.



Montaje Experimental y Análisis Cualitativo

Se grabó el movimiento del rattleback con el software Tracker desde vistas superior y lateral. Se marcaron puntos en el centro de masa y un punto de referencia para obtener gráficas de desplazamiento, velocidad y aceleración. Las observaciones cualitativas incluyeron oscilaciones acopladas y trayectorias elípticas, consistentes con la asimetría del objeto.



Resultados: Propiedades Geométricas e Inerciales

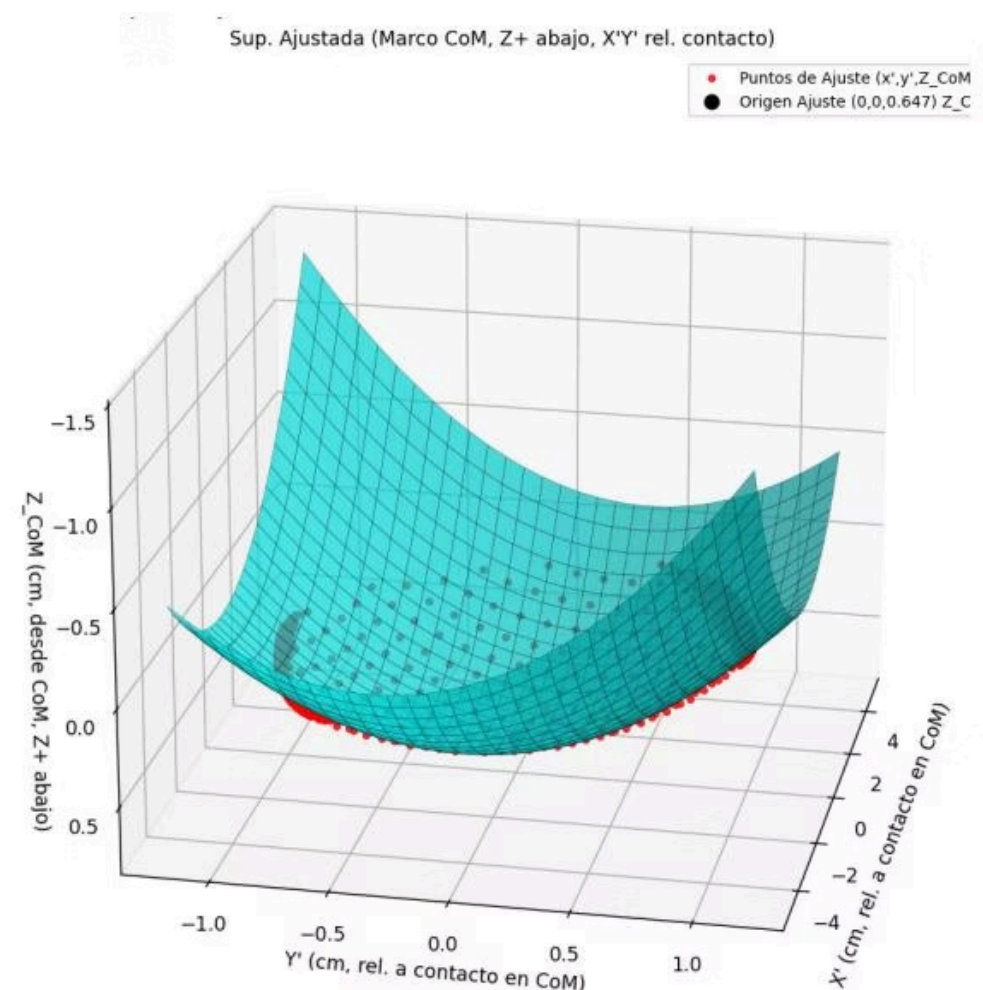
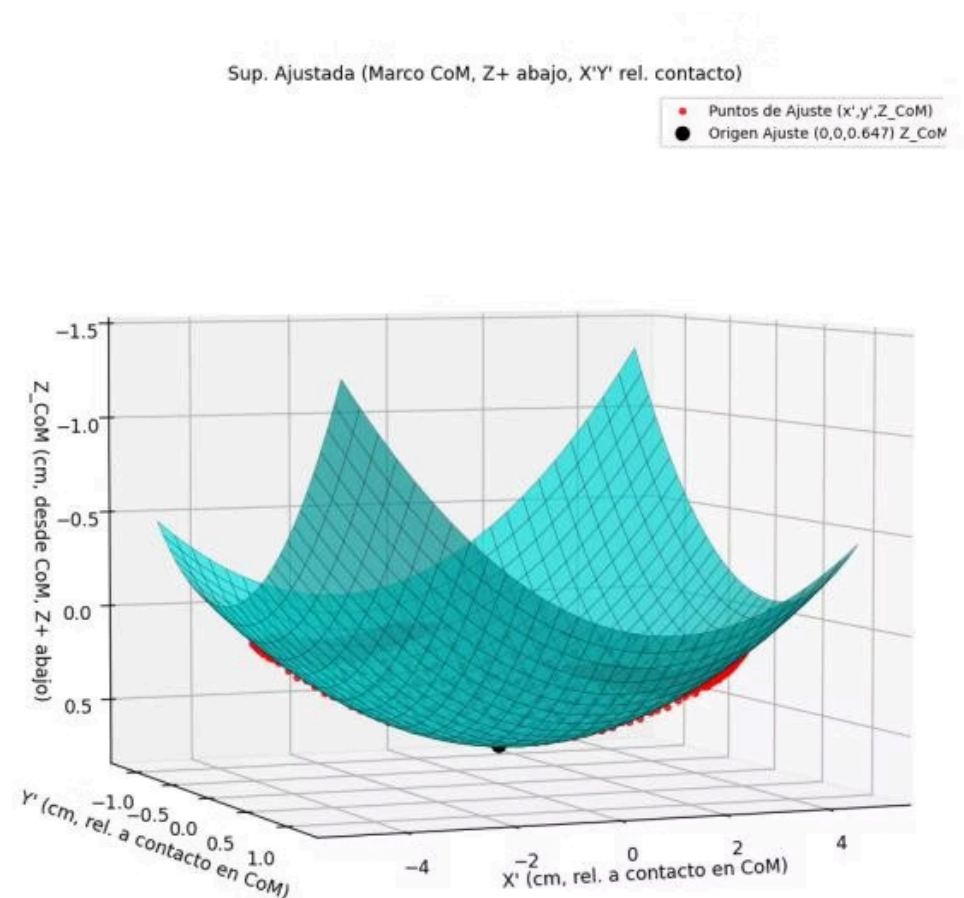
| | |
|---------------------|---------------------------|
| Volumen Total | 10.7202 cm ³ |
| Masa Total (M) | 13.2931 g |
| CoM Global (Z) | 1.6240 cm |
| Momento Principal A | 54.0298 g·cm ² |
| Momento Principal B | 3.5273 g·cm ² |
| Momento Principal C | 56.1480 g·cm ² |

El procesamiento del archivo STL del rattleback arrojó propiedades clave como el volumen, la masa y el centro de masa global. Los momentos principales de inercia (A, B, C) confirman la asimetría inercial del objeto, una condición fundamental para su comportamiento. La figura muestra la representación visual del modelo STL con sus ejes principales de inercia, revelando la forma alargada y la base curva del objeto.

Resultados: Parámetros de Superficie y Ajuste

El análisis de la superficie en el sistema de referencia del CoM reveló una excelente alineación del punto de contacto con el eje Z que pasa por el CoM. La distancia 'a' de Bondi (aeff) fue de 0.6240 cm, representando la distancia vertical desde el CoM al punto de contacto. Se utilizaron 905 puntos para el ajuste polinomial de la superficie, resultando en un polinomio cuadrático que describe la curvatura y asimetría de la base del rattleback.

Los parámetros geométricos de Bondi (p, s, q) se calcularon a partir de este ajuste. Se verificaron las condiciones de convexidad y estabilidad en reposo propuestas por Bondi, confirmando que los parámetros extraídos describen una forma físicamente viable para un rattleback funcional. La figura ilustra el ajuste cuadrático realizado sobre los puntos de la superficie del rattleback, mostrando la precisión del modelo.



Resultados: Parámetros Inerciales y Estabilidad

11.4390

α_B

Parámetro inercial adimensional

1.6815

β_B

Parámetro inercial adimensional

10.8483

γ_B

Parámetro inercial adimensional

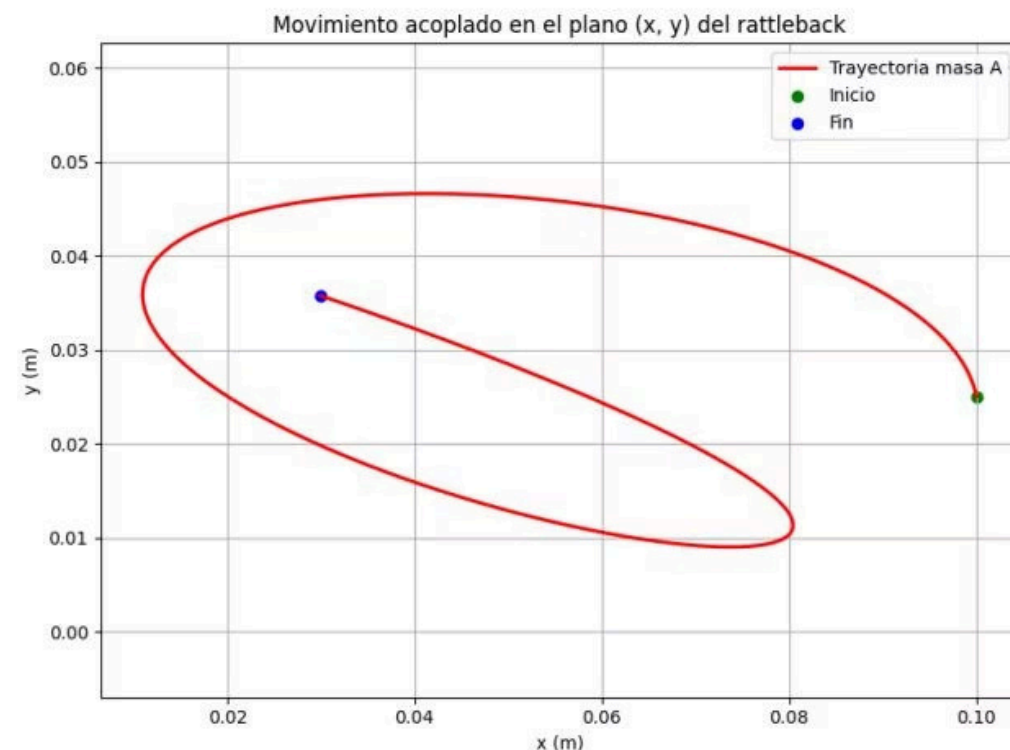
Los parámetros inerciales adimensionales de Bondi (α_B , β_B , γ_B) se calcularon utilizando los momentos de inercia, la masa y la distancia 'a_{eff}'. El análisis de estabilidad rotacional, basado en la ecuación característica de Bondi, reveló un comportamiento dinámico complejo dependiente de la velocidad de giro (n).

Para velocidades de giro superiores a 65.5 rad/s, se observa "concordancia": el giro en una dirección es inestable, mientras que en la opuesta es estable. Esto predice que el rattleback invertirá su giro si se le impulsa en la dirección inestable, estabilizándose en la dirección preferida. La magnitud de las partes reales positivas de σ indica la rapidez con que se desarrollan las inestabilidades.

Análisis de Resultados: Cualitativos y Numéricos

Análisis Experimental Cualitativo

Los datos experimentales de Tracker mostraron un comportamiento consistente con las ecuaciones de movimiento linealizadas. Las oscilaciones acopladas y la modulación de amplitudes en las gráficas indican una inestabilidad dinámica, donde la energía se redistribuye entre la rotación y la vibración, llevando a la reversión del giro. La trayectoria elíptica del centro de masa es consistente con la asimetría del objeto.



Análisis Numérico de Simulación

Los resultados numéricos del modelo STL y la teoría de Bondi proporcionaron una caracterización cuantitativa detallada. La asimetría inercial ($A \neq B$) y la distancia a_{eff} son fundamentales. El ajuste de la superficie de contacto validó la forma del rattleback. La predicción de "concordancia" para velocidades de giro altas ($n \gtrsim 65.5 \text{ rad/s}$) es un éxito del modelo, indicando una dirección de giro preferente.

La magnitud de las partes reales positivas de σ sugiere un rápido desarrollo de la inestabilidad. En resumen, los resultados numéricos validan la consistencia del modelo y predicen el comportamiento característico de inversión de espín, fundamentado en el análisis teórico de Bondi.

Conclusiones y Próximos Pasos

1.

El estudio corroboró los mecanismos de inestabilidad rotacional del rattleback, combinando modelado teórico, simulación numérica y validación experimental. La impresión 3D permitió investigar sistemáticamente la influencia de parámetros geométricos e inerciales.

2.

La asimetría en la distribución de masa y la desalineación de los ejes principales son cruciales para la inversión de giro. Las ecuaciones de movimiento derivadas y las simulaciones numéricas explican este fenómeno, con predicciones teóricas comparables a los datos experimentales.

3.

Este trabajo contribuye a una comprensión más profunda de la dinámica del rattleback, destacando la importancia de la interacción entre la geometría, la distribución de masa y las condiciones de rodadura sin deslizamiento en sistemas complejos.