(3)

$$L = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

donde a, b y c son constantes, sujetas a $b^2 - ac \neq 0$

a) Ec de movimiento

Ec de Euler lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(a\dot{x} + b\dot{y}), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(b\dot{x} + c\dot{y})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k(ax + by), \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -k(bx + cy)$$

=> para la coordenada x y y tenemos la siguiente Ec

$$x \quad (1) \quad m(a\ddot{x} + b\ddot{y}) + k(ax + by) = 0$$

$$y \quad (2) \quad m(b\ddot{x} + c\ddot{y}) + k(bx + cy) = 0$$

} Ec de movimiento del sistema

b) Cantidades conservadas

(1) dado que $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la energía total del sistema se conserva y es $E = T - V$

considerando la T de coordenada $x' = x + \delta x$ con δx cte

(1) Verificamos si la transformación de coordenadas deja invariante al lagrangiano

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cancel{\delta \dot{x}}^{\,0} + \frac{\partial L}{\partial x}\delta x = -(kax + 2by)\delta x$$

$$\delta L = \frac{\partial f}{\partial t} = -(kax + 2by)\delta x \Rightarrow$$

$$f = -(kax + 2by)\delta x\, t$$

Por lo cual, la corriente conservada de Noether es:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \partial x - F = m(a\dot{x} + b\dot{y})\delta x + (kax + 2by)\delta x t$$

$$m(a\dot{x} \pm b\dot{y}) + (kax + 2by)t = cte$$

C) integrabilidad

Cuando un sistema posee tantas cantidades conservadas como grados de libertad

tenemos 2 grado de libertad, y encontramos 2 cantidades conservados