Semana 3, ejercicios Clásica. Deivy Olago, Luis Zambrano

El oscilador armónico bidimensional anisótropo es un sistema superintegrable. Consiste en una masa m que se mueve libremente en el plano xy. Está conectada a las paredes rígidas por dos resortes sin masa de constantes de resorte, k_1 en el eje x y k_2 en el eje y. La longitud natural de cada resorte es a.

1. Encuentre las ecuaciones de movimiento
2. Encuentre las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones
3. ¿Qué diferencias puede apreciar entre el caso isótropo $k_1 = k_2$ y el anisótropo $k_1 \neq k_2$?
4. Encuentre las cuatro constantes de movimiento: las energías en x y y (E_x y E_y, respectivamente), la cantidad de movimiento angular L_z y la correlacional K. Esto es $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2}$, $E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k_2 x^2}{2}$, $L_z = yp_x - xp_y$ y $K = \omega_1 x \, \omega_2 y + p_x p_y$, con $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$, e $i = 1, 2$
5. Muestre que esas cantidades conservadas no son independientes ya que se cumple que $L^2 + K^2 = 4E_x E_y$
6. Otra vez, ¿Qué diferencias puede apreciar entre el caso isótropo $k_1 = k_2$ y el anisótropo $k_1 \neq k_2$,

11 de marzo de 2025

Para encontrar las EC de movimiento las coordenadas y velocidades generalizadas de nuestro sistema, estamos sobre el plano xy y se eligió utilizar coordenadas polares:

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t), y(t) = r(t)\sin\theta(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{r}(t)\cos\theta(t) - r(t)\dot{\theta}(t)\sin\theta(t), \dot{y}(t) = \dot{r}(t)\sin\theta(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$$

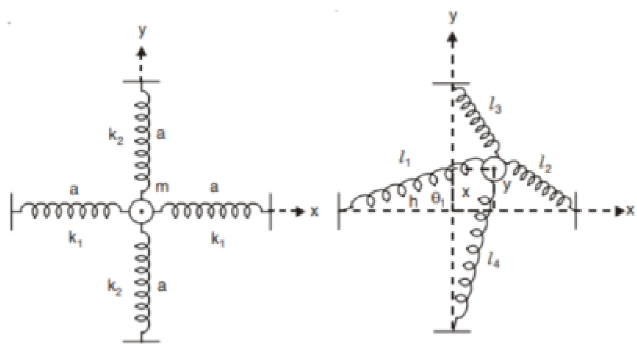

Figura 1:

Necesitamos analizar las elongaciones de cada uno de los resortes, para esto, analizamos los triángulos que se generan al mover la masa y utilizamos el teorema de Pitágoras para encontrar las longitudes correspondientes, que terminan siendo iguales a:

$$\ell_1 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2} = \sqrt{r^2 + 2ar\cos\theta + a^2}$$

$$\ell_2 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = \sqrt{r^2 - 2ar\cos\theta + a^2}$$

$$\ell_3 = \sqrt{(a+y)^2 + x^2} = \sqrt{r^2 + 2ar\sin\theta + a^2}$$

$$\ell_4 = \sqrt{(a-y)^2 + x^2} = \sqrt{r^2 - 2ar\sin\theta + a^2}$$

Posterior a ello, planteando el potencial tomando la contribución gravitacional y la elástica obtenemos los siguiente:

$$V_{\text{total}} = -mgr\sin\theta + \frac{1}{2}k_1\left(\sqrt{r^2 + 2ar\cos\theta + a^2} - a\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\sqrt{r^2 - 2ar\sin\theta + a^2} - a\right)^2$$

Procedemos a plaantear el lagrangiano del sistema:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \left[mgr\sin\theta + \frac{1}{2}k_1\left[4a^2 + 2r^2 - 2a\sqrt{a^2 + 2ra\cos\theta + r^2}\right.\right.$$

- 2a$\sqrt{a^2 - ra\cos\theta + r^2} + \frac{1}{2}k_2\left[4a^2 + 2r^2 - 2a\sqrt{a^2 - 2ar\sin\theta + r^2} - 2a\sqrt{a^2 + 2ar\sin\theta + r^2}\right]$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange en sympy se obtienen las siguientes ecuaciones para R y θ, respectivamente

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta + \frac{k_1 a\left((a + r\cos\theta)\sqrt{a^2 - ar\cos\theta + r^2} - (a - r\cos\theta)\sqrt{a^2 + 2ar\cos\theta + r^2}\right)}{\sqrt{a^2 + 2ar\cos\theta + r^2}\cdot\sqrt{a^2 - ar\cos\theta + r^2}}$$

$+$

$\mathrm{k}_2 a\left((a - r\sin\theta)\sqrt{a^2 + 2ar\sin\theta + r^2} - (a + r\sin\theta)\sqrt{a^2 - 2ar\sin\theta + r^2}\right)\frac{}{\sqrt{a^2-2ar\sin\theta+r^2}\cdot\sqrt{a^2+2ar\sin\theta+r^2}}(1)$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = -mgr\cos\theta + \frac{k_1 ar\sin\theta\left(\sqrt{a^2 - ar\cos\theta + r^2} - \sqrt{a^2 + 2ar\cos\theta + r^2}\right)}{\sqrt{a^2 + 2ar\cos\theta + r^2}\cdot\sqrt{a^2 - ar\cos\theta + r^2}}$$

$+\ \mathrm{k}_2 ar\cos\theta\left(\sqrt{a^2 + 2ar\sin\theta + r^2} - \sqrt{a^2 - 2ar\sin\theta + r^2}\right)\frac{}{\sqrt{a^2-2ar\sin\theta+r^2}\cdot\sqrt{a^2+2ar\sin\theta+r^2}}(2)$

Ahora las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones. Para esto, utilizamos el primer termino de la expansión en serie de Taylor de Seno y Coseno. Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento obtenemos:

$$\boxed{m\ddot{r} = -mg\theta + \frac{k_1 a(a+r)}{a+r} + \frac{k_2 a(a - r\theta)}{a+r} \quad\Rightarrow\quad m\ddot{r} = -mg\theta + k_1 a + k_2 a\left(1 - \frac{r\theta}{a}\right)} \tag{3}$$

Ecuación para $\theta(t)$ (coordenada angular)

$$\boxed{mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = -mgr + \frac{k_1 ar\theta}{\sqrt{a^2+2ar+r^2}} + \frac{k_2 ar}{\sqrt{a^2-2ar\theta+r^2}}}$$

¿Qué diferencias puede apreciar entre el caso isótropo k1 = k2 y el anisótropo k1 = k2?
Para el caso isótropo (simétrico) se puede observar simetría rotacional, se conserva el momento angular en la componente z. Hay otras cuantas, pero no se abordaron
Encuentre las cuatro constantes de movimiento: las energías en x y y (E_x y E_y, respectivamente), la cantidad de movimiento angular L_z y la correlacional K. Esto es $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2}$, $E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k_2 x^2}{2}$, $L_z = yp_x - xp_y$ y $K = \omega_1 x\, \omega_2 y + p_x p_y$, con $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$, e $i = 1, 2$
1. El lagrangiano no depende explicitamente del tiempo, por lo cual, la energía tanto para x, como para y se conservan,
2. Conservacion del momento angular
Definido como:

$$L_z = yp_x - xp_y = m(y\dot{x} - x\dot{y}).$$

Demostración de conservación:

$$\frac{dL_z}{dt} = m(\dot{y}\dot{x} + y\ddot{x} - \dot{x}\dot{y} - x\ddot{y}) = m(y\ddot{x} - x\ddot{y}).$$

Usando las ecuaciones de movimiento:

$$m\ddot{x} = -k_1 x, \quad m\ddot{y} = -k_2 y,$$

sustituimos:

$$\frac{dL_z}{dt} = m\left(y(-\frac{k_1}{m}x) - x(-\frac{k_2}{m}y)\right) = (k_2 - k_1)xy.$$

L_z se conserva solo si $k_1 = k_2$.
Correlacional K Definida como:

$$K = \omega_1 x\, \omega_2 y + p_x p_y, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}.$$

Demostración de conservación:

$$\frac{dK}{dt} = \omega_1\omega_2(\dot{x}y + x\dot{y}) + \dot{p}_x p_y + p_x\dot{p}_y.$$

Usando $\dot{p}_x = -k_1 x$, $\dot{p}_y = -k_2 y$:

$$\frac{dK}{dt} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m^2}}(m\dot{x}y + m\dot{y}x) - k_1 x(m\dot{y}) - k_2 y(m\dot{x}).$$

Simplificando:

$$\frac{dK}{dt} = \sqrt{k_1 k_2}(\dot{x}y + \dot{y}x) - m(k_1 x\dot{y} + k_2 y\dot{x}).$$

Factor común $\dot{x}y$ y $\dot{y}x$:

$$\frac{dK}{dt} = \dot{x}y\left(\sqrt{k_1 k_2} - mk_2\right) + \dot{y}x\left(\sqrt{k_1 k_2} - mk_1\right).$$

Para que $\frac{dK}{dt} = 0$, se requiere $k_1 = k_2$.