1.)

a). $\mathcal{L} = \frac{1}{2} a(\dot{x}^2 \sin^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$

para x

$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\mathcal{L}) = a\dot{x}\sin^2 y + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})\cos y$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = a\ddot{x}\sin^2 y + (b\ddot{x}\cos y + \ddot{z})\cos y$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$

$0 = a\ddot{x}\sin^2 y + b(\ddot{x}\cos y + \ddot{z})\cos y$ *

para y

$\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\mathcal{L} = a\dot{y}$ $\qquad$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = a\dot{x}^2 \sin y \cos y - b(\dot{x}\cos y + \dot{z})\dot{x}\sin y$

$\frac{d}{dt}\frac{d}{d\dot{y}} = a\ddot{y}$

$a\ddot{y} = a\dot{x}^2 \sin y \cos y - b(\dot{x}\cos y + \dot{z})\dot{x}\sin y$ *

analogamente para z

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = b(\dot{x}\cos y + \dot{z})$

$b(\ddot{x}\cos y + \ddot{z}) = 0$ *)

b.) La energía del sistema

$$\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = E$$

$$E = \frac{1}{2}a(\dot{x}^2 \sin^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

Y que el lagrangiano no depende del tiempo la energía se conserva

tambien ya que no aparece x ni z explita en el Lagrangiano sus momentos canonicos se conservan

$$p_x = a\dot{x}\sin^2 y + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})\cos y$$

$$p_z = b(\dot{x}\cos y + \dot{z})$$

d.) si $y(t) = cte$ $\quad \dot{y} = 0 \quad \ddot{y} = 0$

$$0 = a\ddot{x}\sin^2 y_0 + b(\ddot{x}\cos y_0 + \ddot{z})\cos y_0 \qquad (1)$$

$$b(\ddot{x}\cos y_0 + \ddot{z}) = 0 \qquad (2)$$

inyectando (2) − (1)

$$a\ddot{x}\sin^2 y_0 = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0 \qquad (3)$$

$\dot{x} = cte$

$x(t) = \dot{x}t + x_0$

inyectamos (3) → (2)

$b\ddot{z} = 0 \rightarrow \ddot{z} = 0 \rightarrow \dot{z} = cte$

$z(t) = \dot{z}t + z_0$

2.) $V(x) = \frac{-V_0}{\cosh^2 \alpha x}$

a.) $\mathcal{L} = T - V(x)$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$ ✱

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{2V_0\alpha \tanh(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x)}$

$m\ddot{x} = \frac{2V_0\alpha \tanh(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x)}$ → ec de movimiento ✱

b.) Se conserva la energía ya que $\mathcal{L}$ no depende del tiempo

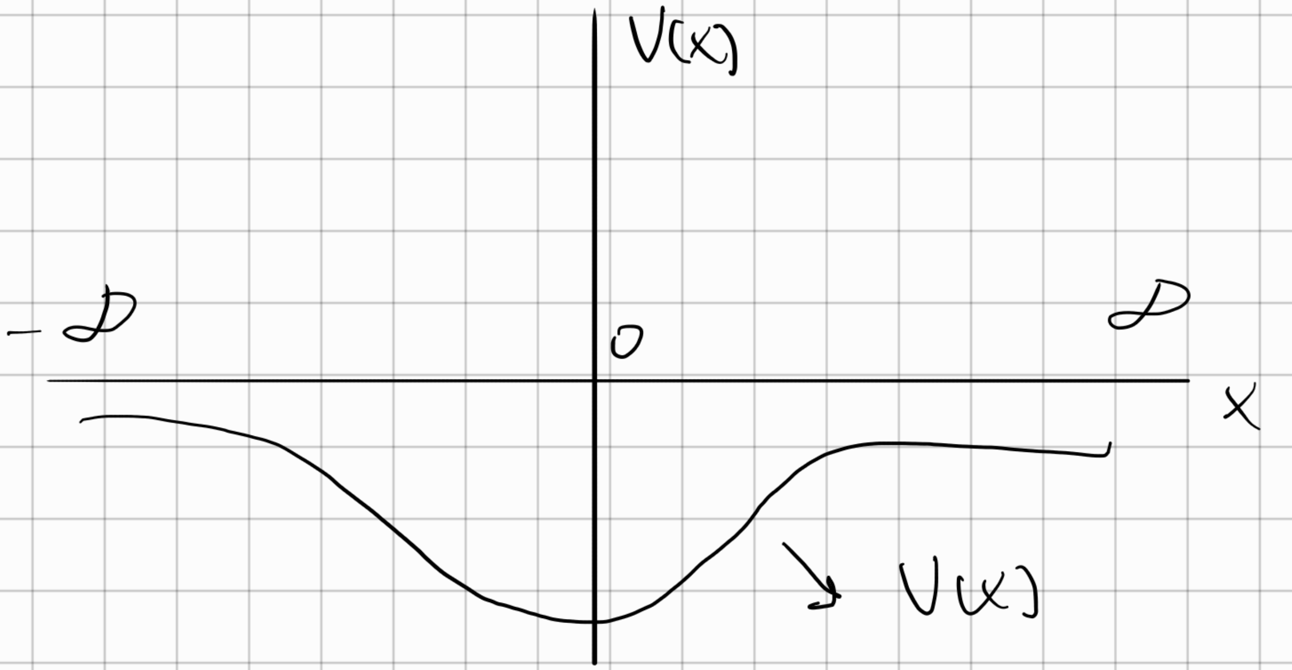
$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} - \mathcal{L}$$

$$E = m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

c.)

si $E \geq 0 \rightarrow V(x) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \pm\infty$



el movimiento se hace infinito ya que la partícula sale del pozo del potencial si $E < 0$ $\quad V(x) \to \min \quad x \to 0$

el movimiento se vuelve finito ya que la partícula entra al pozo de potencial

d.) los puntos de retorno se encuentran cuando $\dot{x} = 0$

$$E = \frac{-U_0}{\cosh^2 \alpha x} \to x_1 = \pm \frac{1}{\alpha} \cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{V_0}{-E}}\right)$$

el mínimo valor de E es cuando

$x = 0$

e.) $$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(V(x) - E\right)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(V(x)-E)}} \, dx = t$$

$$T = 2\int_0^{x_1} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(V(x) - E)}}\,dx \quad *$$