1) comprobar que el producto interno

a) Verificando las propiedades del producto interno para espacios euclidianos

① $\langle v_i | v_i \rangle = \| |v_i\rangle \|^2$

Dada una matriz compleja 2x2 que pertenece al $\in V$ dado

$$|M_1\rangle = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & h+ji \end{pmatrix} \Rightarrow \langle M_1 | M_1 \rangle = Tr((M^1)^{\dagger} M^1) \quad ①$$

$$((M^1)^t)^* = \begin{pmatrix} a+bi & e+fi \\ c+di & h+ji \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a-bi & e-fi \\ c-di & h-ji \end{pmatrix}$$

Volviendo a ①

$$Tr\left(\begin{pmatrix} a-bi & e-fi \\ c-di & h-ji \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+bi & e+fi \\ c+di & h+ji \end{pmatrix}\right) = a^2+b^2 - \cancel{icf} + df + ce + \cancel{ide}$$
$$+ \cancel{icf} + df + h^2 + j^2 ce - \cancel{ide}$$

$$\circ = a^2 + b^2 + 2df + 2ce + h^2 + j^2$$

Por lo cual, dado que la cantidad "$2df + 2ce$" pese a ser real, puede ser negativa por lo cual, dado que la cantidad $2a_f+2ce$ pese a ser real, puede ser negativa haciendo que el resultado de la norma sea menor a 0. como este producto interno para las matrices complejas 2x2 no garantiza que la norma sea mayor a cero, decimos que no es una buena definición de producto interno

b) Dados las matrices de pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para verificar la ortogonalidad de estos vectores, bajo el PI dado debemos mostrar

$$\langle \sigma_i | \sigma_j \rangle = 0 \quad \Rightarrow \langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Dado que las matrices de pauli son hermíticos $A^{\dagger} = A$

$$= 0$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_4 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} 0 & +i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_4 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle \sigma_3 | \sigma_4 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

por lo cual, son ortogonales entre sí bajo el PI dado

b) A partir de esta definición de producto interno construya la definición de norma asociada.

→ Norma de Frobenious

$$A_2^2 \rightarrow M = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+hi & j+ki \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M^+ = \begin{pmatrix} a-bi & e-hi \\ c-di & j-ki \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\langle A|A\rangle = \| A\rangle\|^2 \rightarrow Tr(A^+A) \equiv (A^+)^i_j A^j_i \equiv (A^*)^j_i A^j_i$$

$$Tr(M^+M) = a^2+b^2+h^2+e^2+c^2+d^2+j^2+k^2$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+h^2+e^2+c^2+d^2+j^2+k^2}$$

c) Distancia 2 matrices 2x2

$\|A-B\|^2$

Considerar 2 matrices 2x2.

$$M = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+hi & j+ki \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} l+mi & n+zi \\ o+pi & q+ri \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \|M-B\|^2 = A = \begin{pmatrix} a-l+(b-m)i & (c-n)+(d-z)i \\ a+ib-l-mi & c+di-n-iz \\ hi-o-pi+e & j+ik-q-ir \\ e-o+(h-p)i & j-q+(k-r)i \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} a-l-bi+im & e-o-hi+pi \\ c-n-di+zi & j-q-ki+ri \end{pmatrix} \text{ y } Tr(A^+A)$$

$$Tr(A^{\dagger}A) = 2^2 + b^2 + h^2 + l - 2al + m^2 - 2bm + o^2 + p^2 - \\ + e^2 - 2oe + c^2 + d^2 + j + c^2 + n^2 - 2cm + q^2 \\ - 2jq + r^2 - 2kr + z^2 - 2dz$$

e) Distancia matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Distancia y norma:

$$\| |v_i\rangle \| = \sqrt{\langle v_i | v_i \rangle} \quad y \quad d(|v_i\rangle, |v_j\rangle) \equiv \| |v_i\rangle - |v_j\rangle$$

$$= \sqrt{\langle v_i - v_j | v_i - v_j \rangle} \quad y \quad \langle a | b \rangle = Tr(A^{\dagger} B)$$

$$d(\sigma_1, \sigma_2) = Tr\left((\sigma_1 - \sigma_2)^{\dagger} (\sigma_1 - \sigma_2)\right)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\sqrt{\langle \sigma_1 - \sigma_2 | \sigma_1 - \sigma_2 \rangle} = \sqrt{Tr\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{4} = 2$$

$\rightarrow d(\sigma_1 ; \sigma_3)$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad (\sigma_1 - \sigma_3)^{\dagger} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Tr\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$Tr \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad d(\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{4} = 2$$

$\rightarrow d(\sigma_1 - \sigma_0)$

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (\sigma_1 - \sigma_0)^{\dagger}$$

$$y \quad Tr\left((\sigma_1 - \sigma_0)^{\dagger} (\sigma_1 - \sigma_0)\right)$$

$$d = \sqrt{Tr \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{4} = 2.$$

c) muestre que son base

⇒ para esto, verificamos la independencia lineal de este conjunto

suponemos α, β, ϕ y θ escalares $\in \mathbb{K}$

$$\alpha\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \phi\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & -\beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -\phi\\ \phi & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\theta & 0\\ 0 & \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \beta + \theta = 0 \Rightarrow \qquad \Rightarrow \alpha + \phi = 0$

$\Rightarrow \alpha - \phi = 0 \Rightarrow \qquad \Rightarrow -\beta + \theta = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{array}\right) \Rightarrow 2\theta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \alpha = 0,\ \phi = 0$$

⇒ Dado que los únicos valores de α, ϕ, β y θ son 0, el conjunto de

⇒ 2) los matrices de pauli son base de las matrices complejas 2x2

2 Considere dos espacios vectoriales de polinomios de grado ≤ 2 $P_2(x)$ y $G(y)$. Construyendo un espacio tensorial con el siguiente producto exterior

$T_2(xy) = P_2(x) \otimes G_2(y)$ de tal manera que cualquier polinomio en dos variables puede ser escrito como $T_2(xy) = c^{ij} | e_i^P e_j^G \rangle$ corresponden a bases ortogonales para los espacios vectoriales $P_2(x)$ y $G_2(y)$

a) Considere el polinomio $p^P(x) = x^2 + x + 3$ y expréselo en términos de la base de polinomios de Legendre

$$\{ | e_i^P \rangle \} \longleftrightarrow \{ | P_i(x) \rangle \}$$

Legendre

0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

Sea $x^2 + x + 3 = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + C_3 P_3(x)$

donde $P_i(x)$ son los polinomios de Legendre

$$x^2 + x + 3 =$$

$$C_0 + C_1 x + C_2 \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$C_0 + C_1 x - \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{2} 3x^2 C_2 = x^2 + x + 3$$

$$C_0 - \frac{1}{2}C_2 = 3 \Rightarrow C_0 - \frac{1}{2}\frac{2}{3} = 3 \Rightarrow \boxed{C_0 = \frac{10}{3}}$$

$$C_1 x = x \Rightarrow \boxed{C_1 = 1}$$

$$\frac{1}{2}(3x^2 C_2) = x^2 \Rightarrow \frac{1}{2} 3 C_2 = 1 \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{2}{3}}$$

$$\frac{10}{3} + x + \frac{1}{3}(3x^2 - 1)$$

b) Seleccione ahora dos polinomios $p^{P}(x) = x^2 + x + 3$ y

$p^{G}(y) = y + 1$

Construya el tensor $p^{P\otimes G}(x,y)$ mediante el producto exterior $p^{P}(x) \otimes p^{G}(y)$

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x^2 1 \\ x y \\ x 1 \\ 3 y \\ 3 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x^2 \\ xy \\ x \\ 3y \\ 3 \end{pmatrix} = x^2y + x^2 + x + 3y + 3$$

c) Elija las bases de monomios $\{1, x, x^2\}$ y $\{1, y, y^2\}$ e identifique c^{ij} del tensor $p^{P\otimes G}(x,y)$ al expandir ese tensor a estas bases en el espacio tensorial $T_2(xy) = P_2(x) \otimes G_2(y)$

Sea $T_2(xy) = c^{ij} |e_i^{P}, e_j^{G}\rangle = x^2y + x^2 + x + 3y + 3$

Sea entonces $C_k |e_k^{P\otimes G}\rangle \Rightarrow$

$C_k = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 e_3 + C_n e_n$

expandiendo con $x^2y + x^2 + x + 3y + 3$

$C_1(1) + C_2(y) + C_3(y^2) + C_4(x) + C_5(xy) + \ldots$

$\ldots + C_6(xy^2) + C_7(x^2) + C_8(x^2y) + C_9(x^2y^2)$

Igualando $= x^2y + x^2 + x + 3y + 3$

$C_1 = 3 \rightarrow C_1 = 3$

$C_2 y = 3y \rightarrow C_2 = 3$

$C_3 y^2 = 0 \rightarrow C_3 = 0$

$C_4 x = x \rightarrow C_4 = 1$

$C_5 xy = 0 \rightarrow C_5 = 0$

$C_6 xy^2 = 0 \rightarrow C_6 = 0$

$C_7 x^2 = x^2 \rightarrow C_7 = 1$

$C_8 x^2y = x^2y \rightarrow C_8 = 1$

$C_9 x^2y^2 = 0 \rightarrow C_9 = 0$

$|e_i^{P}\rangle = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \quad |e_j^{G}\rangle = \begin{pmatrix} y^2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Sabemos que $|e_i^{P} e_j^{G}\rangle = |e_i^{P}\rangle \otimes |e_j^{G}\rangle$

$$|e_i^{P} e_j^{G}\rangle = \begin{bmatrix} x^2y^2 \\ x^2y \\ x^2 1 \\ xy^2 \\ xy \\ x1 \\ 1y^2 \\ 1y \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} x^2y^2 \\ x^2y \\ x^2 \\ xy^2 \\ xy \\ x \\ y^2 \\ y \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}$$

$|e_i^{P} e_j^{G}\rangle = |e_k^{P\otimes G}\rangle$

Expandido queda tal que

$3 + 3y + x + x^2 + x^2y$

(d) Ahora suponga las bases de polinomios de legendre $\{|e_i^P\rangle\} \leftrightarrow \{|P_i(x)\rangle\}$

para $P_2(x)$ y $g_2(y)$. Calcule las componentes $\tilde{c}^{ij}$ $\{|e_j^g\rangle\} \leftrightarrow \{|P_j(y)\rangle\}$

del tensor $P^{P\otimes g}(x,y)$ respecto a estas bases en el espacio tensorial

$$\Upsilon_2(xy) = P_2(x) \otimes g_2(y).$$

Sea entonces $\tilde{C}^{ij}|P_i(x), P_j(y)\rangle$

Sea entonces

$$|P_i(x), P_j(y)\rangle = |P_i(x)\rangle \otimes |P_j(y)\rangle$$

$|P_i(x)\rangle = [1, x, \frac{1}{2}(3x^2-1), \dots]$

$|P_i(y)\rangle = [1, y, \frac{1}{2}(3y^2-1), \dots]$

$$\tilde{C}^{ij}|P_i(x), P_j(y)\rangle = x^2y + x^2 + x + 3y + 3$$

Entonces

$$\tilde{C}^{11}|P_1(x), P_1(y)\rangle = C_1(1\cdot 1) \rightarrow C_1 - C_7 - C_8 = 3$$

$$\tilde{C}^{12}|P_1(x), P_2(y)\rangle = C_2(1\cdot y) \rightarrow C_2 y = 3y$$

$$\tilde{C}^{13}|P_1(x), P_3(y)\rangle = C_3(1\cdot\tfrac{1}{2}(3y^2-1)) \rightarrow C_3(\tfrac{1}{2}(3y^2-1)) = 0$$

$$\tilde{C}^{21}|P_2(x), P_1(y)\rangle = C_4(x\cdot 1) \rightarrow C_4 x = x$$

$$\tilde{C}^{22}|P_2(x), P_2(y)\rangle = C_5(xy) \rightarrow C_5 xy = 0$$

$$\tilde{C}^{23}|P_2(x), P_3(y)\rangle = C_6(x\cdot\tfrac{1}{2}(3y^2-1)) \rightarrow C_6\tfrac{x}{2}(3y^2-1) = 0$$

$$\tilde{C}^{31}|P_3(x), P_1(y)\rangle = C_7(\tfrac{1}{2}(3x^2-1)\cdot 1) \rightarrow C_7(\tfrac{1}{2}(3x^2-1)) = x^2 \rightarrow 3x^2C_7 - C_7 = 2x^2$$

$$\tilde{C}^{32}|P_3(x), P_2(y)\rangle = C_8(\tfrac{1}{2}(3x^2-1)\cdot y) \rightarrow C_8(\tfrac{y}{2}(3x^2-1)) = x^2y \rightarrow 3x^2C_8 - C_8 = 2x^2$$

$$\tilde{C}^{33}|P_3(x), P_3(y)\rangle = C_9(\tfrac{1}{2}(3x^2-1)\cdot\tfrac{1}{2}(3y^2-1)) \rightarrow C_9(\tfrac{1}{2}(9x^2y^2-3x^2-3y^2+1)) = 0$$

$C_1 = \frac{13}{3}$ $\quad C_6 = 0$

$C_2 = 3$ $\quad C_7 = \frac{2}{3}$

$C_3 = 0$ $\quad C_8 = \frac{2}{3}$

$C_4 = 1$ $\quad C_9 = 0$

$C_5 = 0$

$C_7 = 2x^2/3x^2$ $\qquad C_8 = 2x^2/3x^2$

$C_7 = \frac{2}{3}$ $\qquad C_8 = \frac{2}{3}$

$C_1 = 3 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$

$C_1 = \frac{13}{3}$