Asignación 3

Juan D. Vega, Ciro Gélvez, Deivy Olago[*]
Universidad Industrial de Santander
Calle 9 Número 27

4 de julio de 2024

Índice

[*]e-mail:

1. Ejercicio 1

1.1. a)

1.1.1. Momento de Orden cero, la masa total

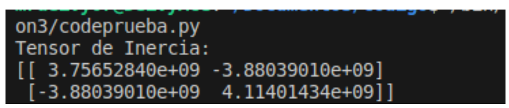
Utilizando los datos proporcionados y sumando cada una de las masas en un programa de Python, se obtiene que la masa total del sistema es de 4627.0 unidades de masa.

1.1.2. Momento de orden uno, el centro de masa del sistema

Mediante un programa en Python se halla que el momento de inercia 1 del sistema es igual a 7870542743.0 unidades de masa por unidades de distancia al cuadrado y el centro de masa es $X : 825{,}8152150421439, Y : 776{,}9185217203371$

1.1.3. Momento de orden dos, el tensor momento de inercia del sistema

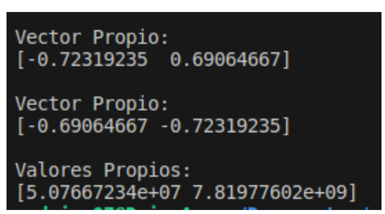
Calculando los segundos momentos de inercia (xx, xy y yy) en un programa de Python se obtiene el siguiente tensor de inercia:



```
on3/codeprueba.py
Tensor de Inercia:
[[ 3.75652840e+09 -3.88039010e+09]
 [-3.88039010e+09  4.11401434e+09]]
```

Figura 1: Tensor de inercia para el conjunto de partículas

El cual, tiene 2 autovalores y 2 autovectores de la forma:



```
Vector Propio:
[-0.72319235  0.69064667]

Vector Propio:
[-0.69064667 -0.72319235]

Valores Propios:
[5.07667234e+07 7.81977602e+09]
```

Figura 2: Autovectores del tensor de inercia.

1.1.4. ¿Los vectores base del sistema cartesiano constituyen una base propia para esta distribución de masa? Esto es: ¿Los vectores cartesianos son autovectores del tensor momento de inercia?

No, los vectores cartesianos son diferentes a los autovectores resultantes del tensor de la inercia.

1.1.5. Encuentre los ejes principales de inercia para esta distribución de masas. Esto es aquellos vectores propios del tensor de inercia, que forma una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma mas simple.

Los ejes principales de inercia para esta distribución de partículas son los autovectores del tensor de inercia, como sé índica en el enunciado. Estos son:

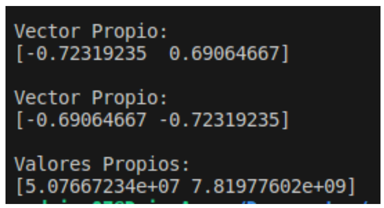


Figura 3: Autovectores del tensor de inercia.

Dado que son autovectores distintos, son linealmente independientes, y de igual modo, su ortogonalidad se aprecia a simple vista, por lo cual, sí pueden conformar una base ortogonal.

Por otro lado, graficando cada partícula y escalando los autovectores del tensor de inercia se obtiene lo siguiente:

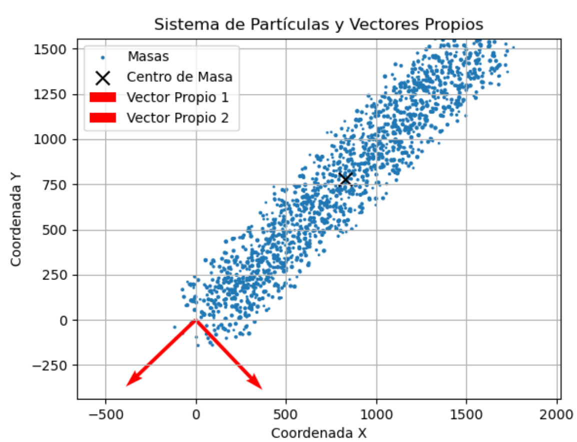


Figura 4: Gráfica del sistema de partículas y los autovectores asociados a su tensor de inercia.

Lo cual nos hace ver, que tomando el sistema de referencia que nos ofrecen los autovectores del tensor de inercia, vamos a tener una vista más "simple"de nuestro conjunto de partículas.

1.1.6. Encuentre la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores conformada por los ejes principales.

La matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores, es decir,a la base que contiene los ejes principales de inercia, se obtiene mediante la disposición en forma de columnas de los coeficientes que permiten describir a los autovectores como combinación lineal de la base cartesiana, esto es:

$$\begin{pmatrix} -0{,}72319235 \\ 0{,}69064667 \end{pmatrix} = -0{,}72319235 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}69064667 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}69064667 \\ -0{,}72319235 \end{pmatrix} = -0{,}69064667 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + -0{,}72319235 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de transformación de la base cartesiana a la base formada por los vectores propios es:

$$P = \begin{pmatrix} -0{,}72319235 & -0{,}69064667 \\ 0{,}69064667 & -0{,}72319235 \end{pmatrix}$$

1.2. b)

1.2.1. Momento de Orden cero, la masa total

Ahora haremos el mismo procedimiento que hicimos en el punto 1.1, pero para un caso 3D. Para el momento de orden 0 tenemos la misma masa que para el caso 2D, es decir de 4627.0 unidades de masa.

1.2.2. Momento de orden uno, el centro de masa del sistema

Usando la formula() se encontró que el centro de masa se encuentra en las siguientes coordenadas Coordenadas del centro de masa:

$$[825{,}8152150421439, 776{,}9185217203371, 15{,}503349902744759]$$

1.2.3. Momento de orden dos, el tensor momento de inercia del sistema

Calculando los segundos momentos de inercia (xx, xy y yy) en un programa de Python se obtiene el siguiente tensor de inercia: Tensor de inercia:

$$\begin{bmatrix} 3{,}85948384e+09 & -3{,}88039010e+09 & -5{,}20969800e+07 \\ -3{,}88039010e+09 & 4{,}21696978e+09 & -5{,}38018760e+07 \\ -5{,}20969800e+07 & -5{,}38018760e+07 & 7{,}87054274e+09 \end{bmatrix}.$$

El cual, tiene 3 autovalores y 3 autovectores de la forma:

Valores propios:

Valor propio 1:	152996521,19075555
Valor propio 2:	7871102288,966754
Valor propio 3:	7922897551,842488

Vectores propios:

Vector propio 1:	$[0{,}72315583, 0{,}69061685, 0{,}00969618]$
Vector propio 2:	$[0{,}046111112, -0{,}03426699, -0{,}9983484]$
Vector propio 3:	$[-0{,}68914397, 0{,}72240857, -0{,}05662549]$

1.2.4. ¿Los vectores base del sistema cartesiano constituyen una base propia para esta distribución de masa? Esto es: ¿Los vectores cartesianos son autovectores del tensor momento de inercia?

No, los vectores cartesianos son diferentes a los autovectores resultantes del tensor de la inercia.

1.2.5. Encuentre los ejes principales de inercia para esta distribución de masas. Esto es aquellos vectores propios del tensor de inercia, que forma una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma mas simple.

Los ejes principales de inercia para esta distribución de partículas son los autovectores del tensor de inercia, como sé índica en el enunciado. Estos son:

Dado que son autovectores distintos, son linealmente independientes, y de igual modo, su ortogonalidad se puede comprobar haciendo el producto punto entre cada uno de los vectores, por lo cual, sí pueden conformar una base ortogonal.

1.2.6. Encuentre la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores conformada por los ejes principales.

2. Ejercicio 2

El Banco Mundial https://data.worldbank.org mantiene una estadística de los datos económicos de casi todos los países. En particular, se requerirá la información de: Defensa, Salud, Educación, Ciencia y Tecnología.

2.1. Punto A.

Calcule la matriz de covarianza y la matriz de correlación entre estos parámetros.

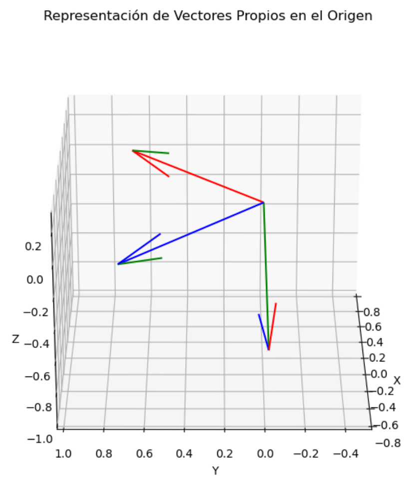


Figura 5: Gráfica de los autovectores asociados a su tensor de inercia para el caso de 3 dimensiones.

El primer paso para resolver este ejercicio es obtener los datos, y expresarlos de forma individual en forma vectorial, para ello, es posible utilizar la librería de $Numpy$.

$$C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

En este caso, sabemos que las componentes $\delta_i^j C_i^j$ serán la varianza y los elementos restantes serán la covarianza respectivamente. Se debe tener en cuenta que la matriz de covarianza es una matriz simétrica, por lo tanto, nos enfocaremos en encontrar las componentes de la diagonal y las componentes superiores.

La matriz de varianza-covarianza para cuatro vectores específicos, $ijkt$ se puede representar como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{VAR}(x_i) & \mathrm{COV}(x_i, x_j) & \mathrm{COV}(x_i, x_k) & \mathrm{COV}(x_i, x_t) \\ \mathrm{COV}(x_j, x_i) & \mathrm{VAR}(x_j) & \mathrm{COV}(x_j, x_k) & \mathrm{COV}(x_j, x_t) \\ \mathrm{COV}(x_k, x_i) & \mathrm{COV}(x_k, x_j) & \mathrm{VAR}(x_k) & \mathrm{COV}(x_k, x_t) \\ \mathrm{COV}(x_t, x_i) & \mathrm{COV}(x_t, x_j) & \mathrm{COV}(x_t, x_k) & \mathrm{VAR}(x_t) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Y la ecuación en notación de índices

$$C_{ij} = \delta_{ij}\mathrm{VAR}(x_i) + (1 - \delta_{ij})\mathrm{COV}(x_i, x_j) \tag{3}$$

La expresión de la covarianza es:

$$\mathrm{COV}(x_i, x_j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_{ik} - \mu_i)(x_{jk} - \mu_j) \tag{4}$$

Y la expresión de la varianza es:

$$\mathrm{VAR}(x_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_{ik} - \mu_i)^2 \tag{5}$$

Y la expresión para μ_i:

$$\mu_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_{ik} \tag{6}$$

Para este caso, en particular, tenemos 4 vectores cuyas entradas(x_1, x_2, x_3, x_4) que corresponden a los gastos e inversión pública de Colombia del año $2000 - 2020$. La siguiente tabla muestra los primeros 5 datos de cada uno:

Data_Defensa x_1	Data_Health x_2	Data_Education x_3	Data_Tech x_4
3027922793	134.2853699	62.75518671	5695900.024
3264438192	138.0442352	63.12793039	3183080.017
3347522602	131.783844	63.5182468	5101630.615
3278369503	129.3348694	63.9223608	7557583.13
4056896991	159.1937103	64.34171087	8725411.621

Cuadro 1: Datos de los cuatro vectores

Ahora, la matriz de correlación se utiliza para medir la relación lineal entre un conjunto de vectores. Si por ejemplo tenemos n vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde cada vector tiene m elementos. La matriz de correlación R se calcula de la siguiente manera:

Para cada par de vectores x_i y x_j, se calcula la correlación entre ellos. La correlación entre x_i y x_j se calcula como el coeficiente de correlación de Pearson y se define como:

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik} - \bar{x}_i)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{jk} - \bar{x}_j)^2}}$$

Donde $\bar{x}_i$ y $\bar{x}_j$ son las medias de x_i y x_j, respectivamente.

Luego de eso se colocan los coeficientes de correlación calculados en una matriz R de tamaño $n \times n$, donde la entrada (i, j)-ésima representa la correlación entre los vectores x_i y x_j.

La matriz resultante R es la matriz de correlación para el conjunto de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La matriz de correlación R se puede representar como:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Donde r_{ij} representa el coeficiente de correlación entre los vectores x_i y x_j.

Entonces, obtenemos la matriz de Covarianza:

$$\begin{bmatrix} 1{,}02171066 \times 10^{19} & 5{,}22684940 \times 10^{11} & 6{,}27112497 \times 10^{09} & 1{,}57676979 \times 10^{17} \\ 5{,}22684940 \times 10^{11} & 2{,}74625687 \times 10^{04} & 3{,}42799184 \times 10^{02} & 8{,}52517591 \times 10^{09} \\ 6{,}27112497 \times 10^{09} & 3{,}42799184 \times 10^{02} & 4{,}97109827 \times 10 & 1{,}13322128 \times 10^{08} \\ 1{,}57676979 \times 10^{17} & 8{,}52517591 \times 10^{09} & 1{,}13322128 \times 10^{08} & 2{,}94353634 \times 10^{15} \end{bmatrix}$$

Y la matriz de Correlación:

$$\begin{bmatrix} 1{,}000 & 0{,}987 & 0{,}880 & 0{,}909 \\ 0{,}987 & 1{,}000 & 0{,}928 & 0{,}948 \\ 0{,}880 & 0{,}928 & 1{,}000 & 0{,}937 \\ 0{,}909 & 0{,}948 & 0{,}937 & 1{,}000 \end{bmatrix}$$

2.2. Punto B

Ahora, para hallar los autovalores de una matriz A_{ij}, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se define la matriz A_{ij} como una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ donde n es el número de filas (y columnas) de la matriz.

2. Se utiliza la siguiente ecuación característica para encontrar los autovalores λ:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Donde A es la matriz A_{ij}, λ es el autovalor que estamos buscando, y I es la matriz identidad del mismo tamaño que A.

3. Se resuelve la ecuación característica para encontrar los valores de λ. Estos valores son los autovalores de la matriz A_{ij}.

Una vez que se han encontrado los autovalores λ de una matriz A_{ij}, los autovectores correspondientes se calculan utilizando la siguiente ecuación:

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Donde A es la matriz A_{ij}, λ es uno de los autovalores previamente calculados, I es la matriz identidad y $\mathbf{x}$ es un autovector correspondiente a λ. El autovector $\mathbf{x}$ se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones lineales resultante.

Es importante tener en cuenta que para cada autovalor λ puede haber varios autovectores correspondientes, y se pueden expresar como combinaciones lineales de vectores independientes.

Ya con estos datos, hallamos los autovectores

La matriz de autovectores es:

$$\begin{bmatrix} 1{,}02195401 \times 10^{19} & 5{,}10042021 \times 10^{14} & 3{,}10762979 \times 10^{02} & 4{,}22764379 \times 10^{-01} \\ -9{,}99880926 \times 10^{-01} & 1{,}54315777 \times 10^{-02} & 3{,}72728254 \times 10^{-08} & 7{,}40560934 \times 10^{-10} \\ -5{,}11524248 \times 10^{-08} & -8{,}98568181 \times 10^{-07} & -9{,}99737637 \times 10^{-01} & -2{,}29053996 \times 10^{-02} \\ -6{,}13738670 \times 10^{-10} & -3{,}24194504 \times 10^{-08} & -2{,}29053996 \times 10^{-02} & 9{,}99737637 \times 10^{-01} \end{bmatrix}$$

Y los autovalores calculados con *Numpy* son:

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}02195401 \times 10^{19} & 5{,}10042021 \times 10^{14} & 3{,}10762979 \times 10^{02} & 0{,}422764379 \end{bmatrix}$$