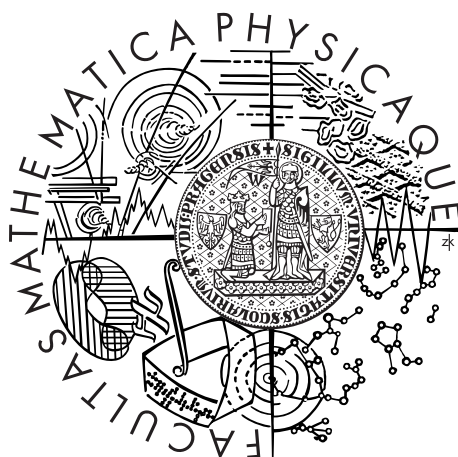


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



David Marek

Implementace aproximativních bayesovských metod pro odhad stavu v dialogových systémech

Ústav formální a aplikované lingvistiky

Vedoucí diplomové práce: Ing. Mgr. Filip Jurčíček, Ph.D.

Studijní program: program

Studijní obor: obor

Praha 2013

Poděkování.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Implementace aproximativních bayesovských metod pro odhad stavu v dialogových systémech

Autor: David Marek

Katedra: Ústav formální a aplikované lingvistiky

Vedoucí diplomové práce: Ing. Mgr. Filip Jurčíček, Ph.D., Ústav formální a aplikované lingvistiky

Abstrakt:

Klíčová slova:

Title:

Author: David Marek

Department: Institute of Formal and Applied Linguistics

Supervisor: Ing. Mgr. Filip Jurčíček, Ph.D., Institute of Formal and Applied Linguistics

Abstract:

Keywords:

Obsah

Úvod	2
1 Teorie	3
1.1 Dialogový systém	3
1.1.1 Typy dialogových systémů	3
2 Učení parametrů	5
2.1 Grafický model	5
2.2 Výpočet marginálních pravděpodobností	5
2.2.1 Marginální pravděpodobnost proměnných	5
2.2.2 Marginální pravděpodobnost parametrů	6
2.3 Aproximace marginálních pravděpodobností	7
2.4 Algoritmus	10
Závěr	12
Seznam použité literatury	13
Seznam tabulek	14
Seznam použitých zkratk	15
Přílohy	16

Úvod

Dialog je přirozený způsob dorozumívání a sdělování informací mezi lidmi. Počítač, který by dokázal vést dialog s uživatelem, byl vždy snem nejen příznivců vědecko-fantastické literatury. Už pro první počítače vnikaly programy, které se snažily využívat přirozenou řeč pro interakci s uživatelem. Jedním z takových programů byl například Eliza, program, který předstíral, že jej zajímá, co mu uživatel říká. Fungoval na principu rozpoznání textu pomocí gramatiky a následné transformace textu do promluv dle pravidel. Avšak gramatiky a pravidlové systémy se ukázaly nedostačné pro praktické aplikace a tak se vývoj přesunul do statistických metod. S využitím statistickým metod a metod strojového učení bylo možné začít s porozumíváním mluveného slova. Přijetí bylo zpočátku chladné a veřejnost byla

1. Teorie

1.1 Dialogový systém

Dialogový systém je počítačový systém, který umožňuje uživatelům používat hlasových pokynů pro ovládání počítačů a získávání informací. Dialogové systémy nejsou pouhým hlasovým ovládáním počítače. Obsahují strategii řízení dialogu a navíc obsahují interní stav dialogu, díky kterému jsou schopny vést dialog s uživatelem. Dialog pak umožňuje využít složitějších příkazů, pokládat dotazy nad strukturovanými daty a upřesňovat dotaz.

Příkladem dialogového systému může být systém pro nalezení spojení pomocí městské dopravy. Příkladem příkazu od uživatele pak může být např. „Chci jet z Malostranského náměstí na Anděl“. Dialogový systém se nyní může rozhodnout, zda-li mu zadané informace stačí pro nalezení spojení. V tomto případě systém stále neví, kdy chce uživatel jet. Může předpokládat, že uživatel už na zastávce stojí a tak tedy uživateli nalezne nejbližší spojení.

Důležitou vlastností dialogového systému je robustnost. Pokud budeme používat dialogový systém v přirozeném prostředí, tak se musíme vyrovnat s tím, že často nebude uživateli rozumět. Uživatel může chtít jet stejně jako v minulém případě, ale nyní dialogový systém přeslechne zastávku Anděl. Pro nalezení spojení už nemá dost informací, může si pořád domyslet, že uživatel chce jet nyní, ale je mnohem více možností, kterým směrem se vůbec chce uživatel vydat. Dialogový systém se proto uživatele zeptá na chybějící informace a zároveň může i implicitně potvrdit, že rozuměl alespoň odchozí zastávku: „Dobře, jedete ze zastávky Malostranské náměstí, můžete říct na jakou zastávku chcete jet?“.

1.1.1 Typy dialogových systémů

Dialogové systémy můžeme dělit podle několika kritérií. Podle toho, která strana dialog vede anebo třeba jakým způsobem funguje strategie dialogového systému.

Dělení podle iniciativy

Nejjednodušší dialogové systémy fungují na stejném principu jako automatické telefonní systémy. Systém je ten, kdo vede dialog, a uživatel pouze odpovídá na dotazy nebo vybírá z nabídnutých možností. Tento systém je velmi jednoduchý na implementaci, pokud nutíme uživatele, aby vždy pouze odpověděl na položený dotaz, tak velmi omezíme jeho vyjadřovací možnosti a díky tomu bude mnohem jednodušší rozpoznat co řekl. Například pokud se uživatele ptáme jestli musí nalezené spojení obsahovat pouze bezbariérové dopravní prostředky, tak můžeme očekávat pouze „Ano“ nebo „Ne“ a jejich synonyma. Tento přístup ovšem nebude velmi populární mezi častými uživateli systému, kteří by rádi zrychlili postup dialogem.

Další možností je tedy povolit uživateli sdělit informace i tehdy, kdy se ho systém ptá na něco jiného. Systém se tedy stále ptá na informace, které mu chybějí, ale může dialog začít obecnější otázkou: "Jaké spojení chcete nalézt?" oproti "Z jaké zastávky chcete jet?". V prvním případě dává systém pokročilému uživateli možnost popsat celou cestu a velmi rychle se tak dostat ke kýžené informaci. Pro

nové uživatele, ale může být takováto obecně položená otázka matoucí a tak je většinou třeba přidat i příklad.

Posledním typem je takový, kde uživateli přenecháme iniciativu, příkladem může být například systém „How may I help you?“ od společnosti AT&T. Ten slouží pro klasifikaci požadavků od uživatele a jejich přepojení k patřičnému operátorovi.

Dělení podle strategie řízení

Důležité rozdělení dialogových systémů je podle způsobu, jakým funguje jejich strategie řízení. Systém většinou předpokládá, že se v dialogu střídá s uživatelem. Vždy, když na systém přijde řada, tak se musí rozhodnout, zda-li už má dost informací k zodpovězení dotazu uživatele, případně zda-li se musí dotázat na další informace, nechat si nějakou informaci potvrdit od uživatele, anebo nechat uživatele vybrat si z nabízených možností.

Systém může mít přístup do databáze s informacemi a musí se tedy umět rozhodnout, zda-li je třeba v ní hledat. Pak musí samozřejmě na nalezená data reagovat. Může se stát, že je informací, které odpovídají zadání uživatele příliš velké množství a tak je třeba zpřísnit zadání, anebo naopak nebyla žádná informace nalezena a tedy je potřeba uživatele o tomto informovat.

Strategii, podle které se systém bude v těchto případech řídit lze implementovat několika způsoby. Přímým řešením je napsat ji ručně. Pak se rozhodnutí systému skládá z procházení série podmínek až do nalezení podmínky odpovídající aktuálnímu stavu a následné provedení akce specifikované touto podmínkou. Tento způsob může fungovat pro jednoduché systémy a pokud je vhodně napsaný, tak může fungovat velmi dobře. Dost čast ale tento způsob selhává pokud je dialogový systém příliš složitý, když se stávají podmínky neudržitelné, anebo v případě, kdy se nemůžeme spolehnout na rozpoznanou řeč.

Další možností jak vytvořit strategii řízení je použít učení s učitelem. Předpokládáme, že máme databázi hovorů mezi uživatelem a živým operátorem, z kterých se dialogový systém může naučit, jak v dialogu postupovat. Tento přístup se zdá jako dobrý nápad, ovšem naučíme se pouze napodobit operátora, což nemusí být ten nejlepší způsob jak vést dialog. Navíc je nepřehledné množství směrů, kterým se může dialog vyvíjet a jakmile se v jedné akci odchýlíme, tak dostáváme úplně jiný dialog a tedy je velmi těžké z pozorovaných dialogů zobecňovat. Proto se tento způsob téměř nevyužívá, existují ovšem pokusy jak jej skloubit s následující metodou učení .

Odkaz
na
článek
o
HMI-
HY

citovat
pier-
ac-
cini
2000

2. Učení parametrů

2.1 Grafický model

Máme vybraný faktor f , tento faktor je spojený s několika proměnnými $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N_x})$ a množinami parametrů $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{N_\theta})$. Tento faktor reprezentuje podmíněnou pravděpodobnost:

$$f(\mathbf{x}, \Theta) = p(x_0 | x_1, \dots, x_{N_x}; \Theta)$$

Rodičovské proměnné x_1, \dots, x_{N_x} označujeme jako \mathbf{x}' . Vektor \mathbf{x}' určuje, která množina parametrů bude použita. Protože množiny parametrů jsou číslovány $1, \dots, N_\theta$ a rodičovské proměnné $1, \dots, N_x$, musí být pro vybrání správné množiny parametrů použito mapování $\rho(\mathbf{x}')$. Faktor pak může být zapsán zkráceně:

$$f(\mathbf{x}, \Theta) = p(x_0 | x_1, \dots, x_{N_x}; \Theta) = \theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0}$$

2.2 Výpočet marginálních pravděpodobností

Pro výpočet sdružené pravděpodobnosti používáme plně faktorizovanou distribuci. Pro každou proměnnou, anebo množinu parametrů je její marginální pravděpodobnost rovna součinu zpráv přicházejících z faktorů, které jsou s danou proměnnou nebo množinu parametrů propojeny. Pro daný faktor je cavity distribuce $q^{\setminus}(x_i)$, popř. $q^{\setminus}(\theta_i)$ rovna součinu všech ostatních faktorů. Aproximovaná marginální pravděpodobnost proměnné je pak součinem cavity distribuce a zprávy z faktoru:

$$q(x_i) = q^{\setminus}(x_i) m_{f \rightarrow x_i}(x_i)$$

$$q(\theta_i) = q^{\setminus}(\theta_i) m_{f \rightarrow \theta_i}(\theta_i)$$

2.2.1 Marginální pravděpodobnost proměnných

Pokud chceme aktualizovat hodnotu naší aproximace marginální pravděpodobnosti, tak je třeba minimalizovat její vzdálenost od skutečné marginální pravděpodobnosti:

$$p^*(\tilde{x}_j) = \sum_{\mathbf{x}: x_j = \tilde{x}_j} \int_{\Theta} \prod_i q^{\setminus}(x_i) \prod_l q^{\setminus}(\theta_l) f(\mathbf{x}; \Theta) \quad (2.1)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}: x_j = \tilde{x}_j} \prod_i q^{\setminus}(x_i) \int_{\theta_{\rho(\mathbf{x}')}} q^{\setminus}(\theta_{\rho(\mathbf{x}')}) \theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0} \quad (2.2)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}: x_j = \tilde{x}_j} \prod_i q^{\setminus}(x_i) \mathbb{E}_{q^{\setminus}}(\theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0}) \quad (2.3)$$

Rovnost (2.1) vychází z definice výpočtu marginální pravděpodobnosti ze sdružené pravděpodobnosti. V (2.2) byla použita definice faktoru, z integrálu byly vytaženy členy, které neobsahují Θ a nakonec bylo využito toho, že pro množiny parametrů, které nejsou spojeny s faktorem f , je jejich jejich cavity distribuce

rovná marginální distribuci a tedy $\int_{\theta_i} q(\theta_i) = 1$. V (2.3) byla použita definice očekávané hodnoty.

Marginální pravděpodobnost proměnné x_i tedy je

$$p^*(\tilde{x}) = \sum_{\mathbf{x}: x_j = \tilde{x}_j} \prod_i q^\backslash(x_i) \mathbb{E}_{q^\backslash}(\theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0}) \quad (2.4)$$

Tady docházíme k výsledku, který je velmi podobný výpočtu marginální pravděpodobnosti v Loopy Belief Propagation algoritmu, střední hodnota $\mathbb{E}_{q^\backslash}(\theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0})$ zde reprezentuje zprávu z vrcholu θ_{ρ_x} .

Zprávu z faktoru f do vrcholu x_j pak získáme vydělením zprávy z x_j z marginální pravděpodobnosti.

$$m_{f \rightarrow x_j}(x_j) = \sum_{\mathbf{x}: x_j = \tilde{x}_j} \prod_{i \neq j} q^\backslash(x_i) \mathbb{E}_{q^\backslash}(\theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0}) \quad (2.5)$$

2.2.2 Marginální pravděpodobnost parametrů

Pro množiny parametrů se jejich marginální pravděpodobnost spočítá podobně jako pro proměnné.

$$p^*(\tilde{\theta}_j) = \sum_{\mathbf{x}} \int_{\Theta: \theta_j = \tilde{\theta}_j} \prod_i q^\backslash(x_i) \prod_l q^\backslash(\theta_l) f(\mathbf{x}; \Theta) \quad (2.6)$$

$$= \sum_{l \neq j} \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = l} \prod_i q^\backslash(x_i) \int_{\Theta: \theta_j = \tilde{\theta}_j} \prod_k q^\backslash(\theta_k) \theta_{l, x_0} + \quad (2.7)$$

$$+ \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = j} \prod_i q^\backslash(x_i) \int_{\Theta: \theta_j = \tilde{\theta}_j} \prod_k q^\backslash(\theta_k) \tilde{\theta}_{j, x_0}$$

$$= \left[\sum_{l \neq j} \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = l} \prod_i q^\backslash(x_i) \mathbb{E}_{q^\backslash(\theta_l)}(\theta_{l, x_0}) \right] q^\backslash(\tilde{\theta}_j) + \quad (2.8)$$

$$+ \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = j} \prod_i q^\backslash(x_i) \tilde{\theta}_{j, x_0} q^\backslash(\tilde{\theta}_j)$$

$$= w_0 q^\backslash(\tilde{\theta}_j) + \sum_k w_k \tilde{\theta}_{j, k} q^\backslash(\tilde{\theta}_j), \quad (2.9)$$

kde

$$w_0 = \sum_{l \neq j} \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = l} \prod_i q^\backslash(x_i) \mathbb{E}_{q^\backslash(\theta_l)}(\theta_{l, x_0}) \quad (2.10)$$

$$w_k = \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = j, x_0 = k} \prod_i q^\backslash(x_i) \quad (2.11)$$

Opět vycházíme z výpočtu marginální pravděpodobnosti ze sdružené pravděpodobnosti. V rovnici (2.7) jsme rozdělili sumu přes \mathbf{x} na ty, pro které se ve faktoru použije množina parametrů $\tilde{\theta}_j$ a na ty ostatní. Také jsme z integrálu vytknuli součin cavity distribucí pro proměnné. V dalším kroku (2.8) jsme opět použili toho, že integrál přes Θ je ve skutečnosti několik integrálů přes jednotlivé

množiny parametrů. A tedy je můžeme vložit mezi jednotlivé členy produktu cavity distribucí pro množiny parametrů. Ve výsledku získáme $q^{\setminus}(\tilde{\theta}_j) \int_{\theta_l} q^{\setminus}(\theta_l) \theta_{l,x_0}$ a pak zbylé členy, které zmizí.

Docházíme k vyjádření skutečné marginální pravděpodobnosti, ve které není třeba integrovat přes všechny množiny parametrů, ale stačí jen očekávaná hodnota těchto parametrů.

2.3 Aproximace marginálních pravděpodobností

Stále tu ovšem zůstává problém, že spočítat aproximující distribuci $q(\theta_j)$ může být příliš složité, protože skutečná marginální distribuce je směs několika distribucí a ta nemusí být v obecném případě vyjádřitelná. Je tedy třeba model dále aproximovat. Pro zjednodušení výpočtu jsou zprávy z faktoru do množiny parametrů, $m_{f \rightarrow \theta_i}(\theta_i)$, ve tvaru Dirichletovského rozdělení s parametry $\hat{\alpha}_i$:

$$m_{f \rightarrow \theta_i}(\theta_i) = \text{Dir}(\theta_i; \hat{\alpha}_i) = \frac{\Gamma(\sum_j \hat{\alpha}_{i,j})}{\prod_j \Gamma(\hat{\alpha}_{i,j})} \prod_j \theta_{i,j}^{\hat{\alpha}_{i,j}-1} \quad (2.12)$$

kde Γ je Gamma funkce (zobecnění faktoriálu):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (2.13)$$

Dirichletovské rozdělení bylo zvoleno, protože má důležité vlastnosti pro součin, které budou využity dále pro výpočet cavity distribuce a celkové aproximace. Pokud označíme aproximované faktory indexem β a každý bude mít vlastní parametry $\hat{\alpha}_{\beta,i}$, tak výsledná aproximace bude tvaru:

$$q(\theta_i) \propto \prod_{\beta} m_{f_{\beta} \rightarrow \theta_i}(\theta_i) \quad (2.14)$$

$$\propto \prod_{\beta} \prod_j \theta_{i,j}^{\hat{\alpha}_{\beta,i,j}-1} \quad (2.15)$$

$$\propto \text{Dir}(\theta_i; \sum_{\beta} \hat{\alpha}_{\beta,i} - (|\beta| - 1)\mathbf{1}) \quad (2.16)$$

$$= \text{Dir}(\theta_i; \alpha_i) \quad (2.17)$$

kde $\alpha_i = \sum_{\beta} \hat{\alpha}_{\beta,i} - (|\beta| - 1)\mathbf{1}$.

Při aktualizaci faktoru $\tilde{\beta}$ tedy cavity distribuce bude:

$$q^{\setminus \tilde{\beta}}(\theta_i) \propto \prod_{\beta \neq \tilde{\beta}} m_{f_{\beta} \rightarrow \theta_i}(\theta_i) \quad (2.18)$$

$$\propto \text{Dir}(\theta_i; \alpha_i - \hat{\alpha}_{\tilde{\beta},i} + \mathbf{1}) \quad (2.19)$$

Naším cílem je nalézt parametry α^* aproximované marginální pravděpodobnosti (2.17), které minimalizují vzdálenost od skutečné marginální pravděpodobnosti (2.9). Pro měření vzdálenosti mezi dvěma pravděpodobnostními rozloženími se používá Kullback-Leiblerova divergence:

$$KL(p||q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) dx \quad (2.20)$$

Pro nalezení minima použijeme algoritmus Expectation Propagation a budeme tedy minimalizovat $KL(p^*||q)$.

Pokud se podíváme na skutečnou marginální pravděpodobnost $p^*(\theta_i)$, zjistíme, že můžeme některé její členy upravit. Využijeme také vlastnosti gamma funkce $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$.

$$w_j \theta_j \text{Dir}(\theta; \alpha) \propto w_j \theta_j \frac{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \prod_i \theta_i^{\alpha_i-1} \quad (2.21)$$

$$\propto w_j \frac{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \theta_j^{\alpha_j} \prod_{i \neq j} \theta_i^{\alpha_i-1} \quad (2.22)$$

$$\propto w_j \frac{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \frac{\Gamma(\alpha_j + 1) \prod_{i \neq j} \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(1 + \sum_i \alpha_i)} \text{Dir}(\theta; \alpha + \delta_j) \quad (2.23)$$

$$\propto w_j \frac{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \frac{\alpha_j \Gamma(\alpha_j) \prod_{i \neq j} \Gamma(\alpha_i)}{(\sum_i \alpha_i) \Gamma(\sum_i \alpha_i)} \text{Dir}(\theta; \alpha + \delta_j) \quad (2.24)$$

$$\propto w_j \frac{\alpha_j}{\sum_i \alpha_i} \text{Dir}(\theta; \alpha + \delta_j) \quad (2.25)$$

$$(2.26)$$

Díky této úpravě lze p^* vyjádřit jako směs Dirichletovských rozdělení.

$$p^*(\theta) = w_0^* \text{Dir}(\theta; \alpha) + \sum_j w_j^* \text{Dir}(\theta; \alpha + \delta_j) \quad (2.27)$$

kde

$$w_0^* \propto w_0 \quad (2.28)$$

$$w_j^* \propto w_j \frac{\alpha_j}{\sum_i \alpha_i} \quad (2.29)$$

$$\sum_{i=0}^k w_i^* = 1 \quad (2.30)$$

Pro minimalizaci KL divergence mezi dvěma rozděleními z exponenciální rozdělení stačí, pokud se budou rovnat jejich postačující statistiky. Dokážeme jednoduše spočítat první dva momenty Dirichletovského rozdělení a tedy použijeme aproximaci a budeme počítat pouze s nimi a zbylé momenty zanedbáme. Je tedy třeba nalézt střední hodnotu a rozptyl proměnných z $p^*(\theta)$.

$$\mathbb{E}_{p^*}[\theta] = \int \theta p^*(\theta) d\theta \quad (2.31)$$

$$= \int \theta (w_0^* \text{Dir}(\theta; \alpha) + \sum_j w_j^* \text{Dir}(\theta; \alpha + \delta_j)) d\theta \quad (2.32)$$

$$= w_0^* \int \theta \text{Dir}(\theta; \alpha) d\theta + \sum_j w_j^* \int \theta \text{Dir}(\theta; \alpha + \delta_j) d\theta \quad (2.33)$$

$$= w_0^* \mathbb{E}_{\text{Dir}(\alpha)}[\theta] + \sum_j w_j^* \mathbb{E}_{\text{Dir}(\alpha + \delta_j)}[\theta] \quad (2.34)$$

Střední hodnotu proměnných $\boldsymbol{\theta}$ podle rozdělení p^* lze tedy spočítat jako vážený součet středních hodnot $\boldsymbol{\theta}$ podle jednotlivých Dirichletovských distribucí, z kterých se p^* skládá. Střední hodnota proměnné X_i podle Dirichletovského rozdělení je

První moment tedy máme spočítaný, pro výpočet rozptylu můžeme využít přímo definici:

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \quad (2.35)$$

Chybí nám tedy ještě výpočet střední hodnoty druhé mocniny proměnné $\boldsymbol{\theta}$ podle p^* . Můžeme ji vyjádřit z definice střední hodnoty.

$$\mathbb{E}_{p^*}[\boldsymbol{\theta}^2] = \int \boldsymbol{\theta}^2 p^*(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (2.36)$$

$$= w_0^* \int \boldsymbol{\theta}^2 Dir(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\theta} + \sum_j w_j^* \int \boldsymbol{\theta}^2 Dir(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}_j) d\boldsymbol{\theta} \quad (2.37)$$

$$= w_0^* \mathbb{E}_{Dir(\boldsymbol{\alpha})}[\boldsymbol{\theta}^2] + \sum_j w_j^* \mathbb{E}_{Dir(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}_j)}[\boldsymbol{\theta}^2] \quad (2.38)$$

Opět získáváme vážený součet středních hodnot podle Dirichletovských rozdělení. Střední hodnotu druhé mocniny proměnné podle Dirichletovského rozdělení lze opět jednoduše odvodit z definice.

$$\mathbb{E}_{Dir(\boldsymbol{\alpha})}[x_i^2] = \int x_i^2 Dir(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{x} \quad (2.39)$$

$$= \int x_i^2 \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\prod_{j=1}^N \Gamma(\alpha_j)} \prod_{j=1}^N x_j^{\alpha_j-1} d\mathbf{x} \quad (2.40)$$

Nyní jsme ve stejné situaci jako v (2.21). Budeme postupovat stejně, vyjádříme nové Dirichletovské rozdělení.

$$\mathbb{E}_{Dir(\boldsymbol{\alpha})}[x_i^2] = \int \frac{\Gamma(\alpha_0 + 2)\alpha_i(\alpha_i + 1)}{\alpha_0(\alpha_0 + 1)\Gamma(\alpha_i + 2) \prod_{j \neq i} \Gamma(\alpha_j)} x_i^{\alpha_i+1} \prod_{j \neq i} x_j^{\alpha_j-1} d\mathbf{x} \quad (2.41)$$

$$= \frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)}{\alpha_0(\alpha_0 + 1)} \int \frac{\Gamma(\beta_0)}{\prod_i \Gamma(\beta_i)} \prod_i x_i^{\beta_i-1} d\mathbf{x} \quad (2.42)$$

$$= \frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)}{\alpha_0(\alpha_0 + 1)} \int Dir(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}) d\mathbf{x} \quad (2.43)$$

$$= \frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)}{\alpha_0(\alpha_0 + 1)} \quad (2.44)$$

Vyjádřili jsme $\Gamma(\alpha_0)$ a $\Gamma(\alpha_i)$ s pomocí $\Gamma(\alpha_0 + 2)$ a $\Gamma(\alpha_i + 2)$

$$\Gamma(\alpha_0) = \frac{\Gamma(\alpha_0 + 2)}{\alpha_0(\alpha_0 + 1)} \quad (2.45)$$

$$\Gamma(\alpha_i) = \frac{\Gamma(\alpha_i + 2)}{\alpha_i(\alpha_i + 1)} \quad (2.46)$$

Následně jsme vytvořili nové parametry β :

$$\beta_i = \alpha_i + 2 \quad (2.47)$$

$$\beta_{j \neq i} = \alpha_j \quad (2.48)$$

$$\beta_0 = \sum_i \beta_i \quad (2.49)$$

Nyní tedy dokážeme spočítat $\mathbb{E}_{p^*}[\theta]$ a $\mathbb{E}_{p^*}[\theta^2]$. Parametry aproximovaného rozdělení nalezneme následovně

$$\frac{\mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}[X_1^2]}{\mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2} = \frac{\frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{\alpha_0(\alpha_0+1)}}{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{\alpha_0(\alpha_0+1)} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2}} \quad (2.50)$$

$$= \frac{\frac{\alpha_1(\alpha_0+1) - \alpha_1(\alpha_1+1)}{\alpha_0(\alpha_0+1)}}{\frac{\alpha_0\alpha_1(\alpha_1+1) - \alpha_1^2(\alpha_0+1)}{\alpha_0^2(\alpha_0+1)}} \quad (2.51)$$

$$= \frac{\alpha_0\alpha_1(\alpha_0 - \alpha_1)}{\alpha_1(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0 - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_1)} \quad (2.52)$$

$$= \alpha_0 \quad (2.53)$$

$$\alpha_i = \mathbb{E}[X_i]\alpha_0 \quad (2.54)$$

Z rovnice (2.50) vypočítáme sumu všech parametrů α_0 , protože střední hodnota proměnné z Dirichletovského rozdělení je právě $\frac{\alpha_i}{\alpha_0}$, tak jednotlivé parametry získáme z rovnice (2.54).

2.4 Algoritmus

Algoritmus 1 Expectation Propagation pro učení parametrů

Parametry zpráv z faktoru β do množiny parametrů θ_i označíme $\hat{\alpha}_{\beta,i}$.

Parametry zpráv z množiny parametrů θ_i do faktoru β označíme α_i^β .

Parametry marginální distribuce množiny parametrů θ_i označíme α_i .

init

Nastav zprávy mezi faktory a proměnnými na 1.

Nastav parametry $\hat{\alpha}_{\beta,i}$ na 1.

Nastav parametry α_i na apriorní hodnotu.

end init

repeat

Vyber faktor $f_{\tilde{\beta}}$, který se bude aktualizovat.

Spočítej všechny zprávy z parametrů:

for každý parametr θ_i spojený s faktorem $f_{\tilde{\beta}}$ **do**

Parametry zprávy z θ_i do $f_{\tilde{\beta}}$: $\alpha_i^{\tilde{\beta}} = \alpha_i - \hat{\alpha}_{\tilde{\beta},i} + 1$.

end for

Aktualizuj zprávy z faktoru do proměnných:

for každou proměnnou X_i , spojenou s faktorem $f_{\tilde{\beta}}$ **do**

Zpráva z $f_{\tilde{\beta}}$ do X_i podle (2.5):

$$\hat{f}(x_j) = \sum_{\mathbf{x}: x_j = \tilde{x}_j} \mathbb{E}_{q \setminus (\theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0})} \prod_{i \neq j} q \setminus (x_i)$$

end for

Aktualizuj marginální pravděpodobnost parametrů:

for každý parametr θ_i spojený s faktorem $f_{\tilde{\beta}}$ **do**

Spočítej parametry α_i^* pro Dirichletovské rozdělení, které nejlépe aproximuje cílovou marginální distribuci (2.27). Metoda popsána v sekci ??

Parametry zprávy z $f_{\tilde{\beta}}$ do θ_i :

$$\hat{\alpha}_{\beta,i} = \alpha_i^* - \alpha_i^{\setminus \tilde{\beta}} + 1$$

Aktualizuj parametry marginální distribuce $q(\theta_i)$

$$\alpha_i = \alpha_i^* = \hat{\alpha}_{\tilde{\beta},i} + \alpha_i^{\setminus \beta}.$$

end for

for každou proměnnou X_i , spojenou s faktorem $f_{\tilde{\beta}}$ **do**

Aktualizuj zprávy z proměnných do faktoru:

$$q^{\setminus \beta}(x_i) = \prod_{\beta \neq \tilde{\beta}} \hat{f}_{\beta}(x_i)$$

end for

until konvergence

Závěr

Seznam použité literatury

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

Přílohy