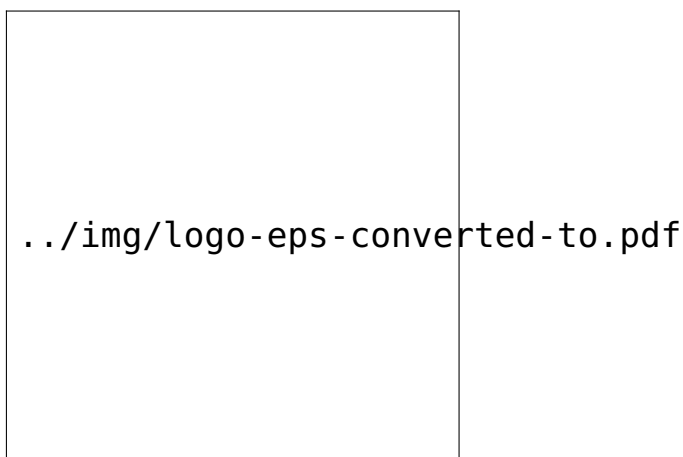


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



David Marek

## Implementace aproximativních bayesovských metod pro odhad stavu v dialogových systémech

Ústav formální a aplikované lingvistiky

Vedoucí diplomové práce: Ing. Mgr. Filip Jurčíček, Ph.D.

Studijní program: Informatika

Studijní obor: Teoretická Informatika

2013

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu Ing. Mgr. Filipovi Jurčíčkovi, Ph.D. za cenné rady a čas, který mi věnoval. Dále bych chtěl poděkovat svým kolegům Lukáši Žilkovi, Matěji Korvasovi, Ondřeji Plátkovi a Ondřeji Duškovi, s kterými jsem mohl spolupracovat na projektu Vystadial. Nakonec bych chtěl poděkovat svým nejbližším za podporu, kterou mi poskytli po celou dobu studia.

Tato práce byla částečně financována z grantu Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy pod identifikačním kódem LK11221, Vystadial – Vývoj metod pro návrh statistických mluvených dialogových systémů.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

**Název práce:** Implementace aproximativních bayesovských metod pro odhad stavu v dialogových systémech

**Autor:** David Marek

**Ústav:** Ústav formální a aplikované lingvistiky

**Vedoucí diplomové práce:** Ing. Mgr. Filip Jurčíček, Ph.D., Ústav formální a aplikované lingvistiky

**Abstrakt:** Každý dialogový systém obsahuje komponentu řízení dialogu, která vykonává akce dialogového systému na základě dialogového stavu. Dialogový stav reprezentuje všechny dostupné informace. Systém pro odhad stavu slouží k udržování stavu dialogu a integraci nových informací ze systému porozumění. Pro efektivní práci komponenty řízení dialogu je důležité co nejpřesněji modelovat pravděpodobnostní rozdělení definované nad všemi stavy dialogu. Těchto stavů může být velké množství, proto se většinou používají aproximativní techniky. V této práci se budeme zabývat implementací aproximativních metod pro odhad stavu dialogu pomocí inference v bayesovských sítích. Výsledkem je knihovna použitelná v systému pro odhad stavu reálného dialogového systému.

**Klíčová slova:** dialogový systém, odhad dialogového stavu, aproximativní bayesovské metody

**Title:** Approximative Bayes methods for belief monitoring in spoken dialogue systems

**Author:** David Marek

**Department:** Institute of Formal and Applied Linguistics

**Supervisor:** Ing. Mgr. Filip Jurčíček, Ph.D., Institute of Formal and Applied Linguistics

**Abstract:** The most important component of virtually any dialog system is a dialogue manager. The aim of the dialog manager is to propose an action (a continuation of the dialogue) given the last dialog state. The dialog state summarises all the past user input and the system input and ideally it includes all information necessary for natural progress in the dialog. For the dialog manager to work efficiently, it is important to model the probability distribution over all dialog states as precisely as possible. It is possible that the set of dialog states will be very large, so approximative methods usually must be used. In this thesis we will discuss an implementation of approximate Bayes methods for belief state monitoring. The result is a library for dialog state monitoring in real dialog systems.

**Keywords:** dialog system, belief state monitoring, approximative Bayes methods

# Obsah

# Úvod

Dialog je přirozený způsob dorozumívání a sdělování informací mezi lidmi. Počítač, který by dokázal vést dialog s uživatelem, byl vždy snem nejen příznivců vědecko-fantastické literatury. Už pro první počítače ~~vnikaly~~ vznikaly programy, které se snažily využívat přirozenou řeč pro interakci s uživatelem. Jedním z takových programů byla například Eliza [?], program, který předstíral, že je psychiatrem. Fungoval na principu rozpoznání textu pomocí gramatiky a následné transformace textu do promluv dle pravidel. Avšak gramatiky a pravidlové systémy se ukázaly nedostačné pro praktické aplikace a tak se vývoj přesunul do statistických metod.

Z počátku byla výkonost a úspěšnost systémů pracujících s přirozeným jazykem nízká a tak bylo jejich přijetí rozpačité. Asi téměř všichni si pamatují první pokusy o diktování textu v kancelářských aplikacích. Systémy pro rozpoznání přirozeného jazyka se však stále zlepšovaly a dostaly se do fáze, kdy už je možné využít hlas jako vstup pro komplexní systémy.

Tato práce se zabývá doménově omezenými statistickými dialogovými systémy. Dialogové systémy mohou vyhledávat spojení v městské dopravě, hledat turistické informace, ovládat navigaci v automobilu, atd. Nabízejí spoustu výhod, jsou dostupné pro ~~slepé~~ nevidomé, mohou pracovat 24 hodin denně a mohou nahradit lidské operátory, což ~~vede~~ může potenciálně vést k úsporám.

Dialogové systémy ~~jsou však mají~~ stále daleko ~~od dokonalosti. Musí se k dokonalosti. Neumí se dobře~~ vyrovnat se špatně rozpoznávanými vstupy, šumem a nejasnostmi. Na rozdíl od živých operátorů nedokáží improvizovat. V některých případech není uživatel spokojený s dialogovým systémem jen proto, že nepochopil otázku a dialogový systém není schopen se zeptat jinak.

První problém se snaží řešit statistické dialogové systémy. Pokud si nejsme jisti cílem uživatele, nabízí se řešení v modelování uživatele pomocí statistického modelu. Díky němu se pak můžeme vyrovnat s chybami zapříčiněnými špatně rozpoznávanými vstupy. Tato práce se bude zabývat metodami pro efektivní výpočty ~~nad statistickými modely~~ ve statistických modelech aplikovatelných v dialogových systémech.

## Rozdělení práce

Nejprve v kapitole 1 popíšeme ~~blíže~~ dialogové systémy a jednotlivé jejich součásti. ~~Také~~ Blíže se budeme zabývat dialogovým stavem a jeho reprezentací pomocí bayesovského přístupu.

Jako vhodnou strukturu pro reprezentaci dialogového stavu si představíme Bayesovské sítě v kapitole 2. Představíme několik metod pro inferenci v Bayesovských sítích, začneme jednoduchou, ale pomalou exaktní inferencí a přesuneme se až k efektivní aproximativní inferenci pomocí algoritmu Loopy Belief Propagation. Nakonec ukážeme metodu Expectation Propagation pro inferenci v grafickém modelu s aproximovanými faktory, která je zobecněním předchozích metod.

Pro využití v dialogových systémech je možné buď nastavit pevné parametry (ať už ručně nastavené nebo naučené z dat), anebo zvolit bayesovský přístup i pro parametry. Parametry pocházející z Dirichletovského rozdělení jsou prezentovány v kapitole ??.

V kapitole ?? jsou popsány všechny implementované části a také příklady jejich použití. V této kapitole je také popsána soutěž Dialog State Tracking Challenge, do které byl přihlášen generativní systém pro odhad dialogového stavu používající popsanou knihovnu. Tato soutěž testovala systémy pro odhad dialogového stavu na datech z reálného dialogového systému.

## Cíle

1. Dialogové systémy často využívají pouze nejlepší hypotézu ze systému porozumění přirozené řeči. Většina ovšem umí vytvořit seznam  $n$  nejlepších hypotéz. Tato práce si klade za cíl představit metody pro inferenci dialogového stavu v dialogovém systému s využitím více hypotéz. Představené metody budou založeny na reprezentaci dialogového stavu pomocí dynamických bayesovských sítí.
2. Bude představen algoritmus Loopy Belief Propagation, který bude implementován pro využití v reálných systémech pro odhad dialogového stavu.
3. Algoritmus bude otestován na datech z reálného dialogového systému Let's Go a porovnán s dalšími systémy, které se účastnily soutěže Dialog State Tracking Challenge.
4. Důležitou částí algoritmů pro inferenci je určení pořadí, v jakém má inference probíhat. Práce bude obsahovat implementaci několika strategií pro inferenci, které budou umožňovat efektivní inferenci pro různé druhy bayesovských sítí (stromy, dynamické sítě, obecné grafy).
5. Nakonec se práce bude zabývat učením parametrů sítí a představí algoritmus Expectation Propagation, který umožňuje inferenci v bayesovských sítích se spojitými náhodnými proměnnými.

6. Při většině reálných použití dochází k aproximacím a úpravám modelu v závislosti na problému tak, aby bylo možné inferenci provádět v reálném čase. Práce bude obsahovat implementaci frameworku, do kterého je možné jednoduše zasadit vlastní moduly pro aproximaci pravděpodobnostních rozdělení, které bude algoritmus Expectation Propagation používat. Jako příklad bude ukázán systém pro učení parametrů ~~pravděpodobnostního rozložení pro pozorování~~ pravděpodobnostní distribuce v generickém modelu pro reprezentaci dialogového stavu.



# 1. Teorie dialogových systémů

{ch:kap1}

## 1.1 Dialogový systém

Dialogový systém je počítačový systém, který umožňuje uživatelům komunikovat s počítačem ve formě, která je přirozená a efektivní pro použití. Vývoj dialogových systémů má před sebou ještě spoustu problémů k překonání a pro praktické použití je třeba se uchýlit k ~~několika~~mnoha předpokladům a zjednodušením. Prvním zjednodušením je doménová specializace, v současné době není možné vytvořit dialogový systém, který by se dokázal s uživatelem bavit o libovolném tématu. Z toho plyne i nutnost ontologie, systém potřebuje databázi popisující všechny informace, které může poskytnout a jejich strukturu. Systém má definované fráze a věty, které může použít, na rozdíl od živého operátora, který dokáže improvizovat.

Další zjednodušení se týkají přímo dialogu. ~~Předpokládá se~~Většinou se předpokládá, že dialog probíhá ~~vždy~~ mezi systémem a jedním uživatelem. Navíc se pravidelně střídají v obrátcích. Jedna obrátka dialogu je složená z jedné promluvy systému a jedné promluvy uživatele.

Příkladem dialogového systému může být systém pro nalezení spojení pomocí městské dopravy. Příkaz od uživatele může vypadat např. takto: „Chci jet z Malostranského náměstí na Anděl“. Dialogový systém z této věty odvodí, že uživatel hledá spojení, výchozí stanice je Malostranské náměstí a cílová stanice je Anděl. Nyní záleží na chování dialogového systému, může například předpokládat, že uživatel chce vždy najít nejdřívější spojení, pokud neřekne jinak. V takovém případě už systém ~~může rovnou najít~~najde v databázi nejbližší spojení a uživateli jej ~~sdělit~~sdělí.

Důležitou vlastností dialogového systému je robustnost. Pokud budeme používat dialogový systém v přirozeném prostředí, musíme se vyrovnat s tím, že často nebude uživateli rozumět. Systém může informaci přeslechnout, anebo si nemusí být jistý tím, co slyšel. Dialogový systém se proto musí umět uživatele doptat na chybějící informace a musí umět pracovat s nejistotou.

## 1.2 Součásti dialogového systému

Dialogový systém se skládá z několika částí, které spolu komunikují. Na vstupu je zvukový záznam uživatele, o jeho převedení do textu se stará systém rozpoznávání řeči (ASR). Z textu je potřeba získat sémantické informace pomocí systému porozumění mluvené řeči (SLU). Nad sémanticky anotovanými informacemi už

může pracovat dialogový manager (DM), který zvolí patřičnou odpověď. Výstupem dialogového manageru jsou informace, které se mají předat uživateli. O jejich převedení do textu se stará systém generování přirozené řeči (NLG). Do zvukového záznamu převede text syntetizér řeči (TTS).

### 1.2.1 Systém rozpoznávání řeči (ASR)

Systém rozpoznávání řeči slouží k převedení mluveného projevu do textové podoby. Až po získání textové podoby je možné se zabývat významem textu. Aktuálně nejlepší systémy jsou založené na pravděpodobnostním modelu a využívají Skryté Markovské modely (HMM) k určení nejpravděpodobnější sekvence slov pro daný zvukový záznam [?]. Pro tuto část dialogového systému existuje řada dostupných otevřených toolkitů, např. systém HTK [?], Kaldi [?] nebo SPHINX [?]. Existuje i celá řada komerčního software od firem jako IBM nebo Nuance.

Úspěšnost systému rozpoznávání řeči je závislá na obtížnosti úlohy a na počtu trénovacích dat, pocházejících ze stejné domény. Pro obecnou doménu se problém stává mnohem těžší a je třeba velké množství dat. Pro měření výkonu ASR systému se používá metrika Word Error Rate (WER). Pro spočítání WER je třeba nejprve provést zarovnání rozpoznávaného a originálního textu. WER je pak počet slov, která jsou změněná, smazaná, anebo přidaná, vydělený počtem slov v originálním textu. Dialogový systém Let's Go! [?] například dosahuje průměrné WER 64.3%.

Systém rozpoznávání řeči může produkovat více hypotéz pro jeden vstup. Často existuje pro jeden zvukový záznam více možných slovních sekvencí, z kterých by mohl pocházet. Reprezentace možných hypotéz může být seznam slovních sekvencí s jejich věrohodnostmi. Věrohodnosti jsou skóre přiřazené hypotézám, které určují jakou důvěru má systém rozpoznávání řeči ve správnost dané slovní sekvence. Příklad možného seznamu hypotéz je v tabulce 1.1.

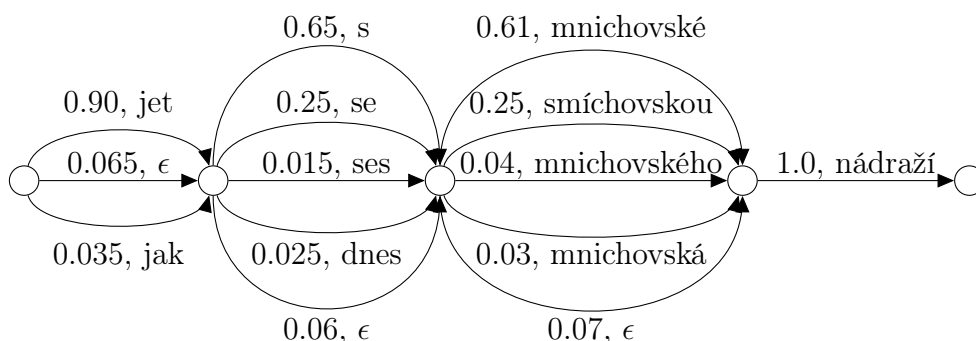
Pro práci s hypotézami je vhodné, aby věrohodnost odpovídala aposteriorní pravděpodobnosti sekvence slov, dáno vstupní zvuk.

Další možností jak reprezentovat výstup je použití konfúzní sítě [?]. Konfúzní síť je vážený orientovaný graf, obsahující startovní a konečný vrchol a hrany označené slovy. Každá cesta ze startovního do konečného vrcholu vede přes všechny ostatní vrcholy. Váhy hran jsou pravděpodobnosti slova přiřazeného dané hraně. Hrany mohou obsahovat i prázdné slovo  $\epsilon$ . Pravděpodobnost sekvence slov je součinem vah po cestě ze startovního do konečného uzlu. Výhodou konfúzní sítě je, že umožňuje v komprimované podobě uložit mnohem více hypotéz. Příklad konfúzní sítě je na obrázku 1.1.

Věrohodnost	Hypotéza
0.676	poliklinika modřany
0.072	poliklinika
0.063	cheb poliklinika modřany
0.054	poliklinika bory
0.045	poliklinika modřany i
0.036	polikliniky
0.027	cheb poliklinika
0.018	cheb poliklinika bory
0.009	poliklinika i

Tabulka 1.1: Příklad seznamu hypotéz ze systému pro rozpoznávání přirozené řeči. Uživatel by rád jel do zastávky Poliklinika Modřany.

{tab:sezhy



Obrázek 1.1: Příklad konfúzní sítě.

{fig:konne

### 1.2.2 Porozumění mluvené řeči (SLU)

Po získání hypotéz o promluvě uživatele se musí dialogový systém pokusit porozumět, co se uživatel snažil sdělit. Dialogový systém nepotřebuje vědět, co přesně uživatel řekl, důležité je pouze zjistit význam sdělení. Pokud například uživatel řekne ~~"Chtěl bych nalézt spojení z Malostranského náměstí na Anděl", anebo "Jak se dostanu na Anděl ze zastávky Malostranské náměstí?"~~, „Chtěl bych nalézt spojení z Malostranského náměstí na Anděl“, anebo „Jak se dostanu na Anděl ze zastávky Malostranské náměstí?“, tak pro dialogový systém jsou obě tvrzení ekvivalentní, uživatel požaduje informace o spojení mezi dvěma zastávkami, i když v jednom případě jde o větu oznamovací a v druhém případě o otázku.

První rozdělení mezi přesným významem sdělení a jeho účelem se objevilo ve formě tzv. speech aktů [?]. Následně byla idea speech aktů rozšířena pro potřeby dialogových systémů [?] a výsledek byl nazván dialogovým aktem.

V této práci používáme definici dialogového aktu, která byla použita v soutěži Dialog State Tracking Challenge [?]. Semantická reprezentace sdělení uživatele se tedy nazývá dialogový akt (DA), skládá se z jedné nebo více položek dialogového

Typ dialogového aktu
hello
bye
goback
restart
null
repeat
nextbus
prevbus
tellchoices
affirm
negate
deny
inform

Tabulka 1.2: Typy dialogových aktů, které může říct použít uživatel v systému Let's Go!

{tab:dstcd

aktu (DAI), které jsou spojené v konjunkci. Každá DAI se skládá z typu, názvu slotu a jeho hodnoty. Typy jsou doménově nezávislé, sloty a jejich hodnoty reprezentují koncepty ontologie. Příklad dialogového aktu ze systému pro hledání spojení v městské dopravě:

`hello(), inform(route="61a").`

Zde se dialogový akt skládá ze dvou položek, první položka má pouze typ *hello*, značící pozdrav. Druhá položka má typ *inform*, tzn. uživatel nás informuje o svém požadavku. Název slotu je *route* a hodnota je „61a“, tedy uživatel nám říká, že hledá spojení linkou 61a.

Typů může být libovolné množství, ale existuje několik základních, jejichž použití je ustálené.

- *inform* — sdělujeme informaci, doplňujeme hodnotu do slotu,
- *request* — požadujeme od protějšku doplnění hodnoty pro dotazovaný slot,
- *confirm* — chceme potvrdit hodnotu slotu, potvrzení může být implicitní, anebo explicitní. Při explicitním potvrzení očekáváme odpověď „Ano“ nebo „Ne“, U implicitního, pokud se nám nedostane odpovědi, předpokládáme, že protějšek souhlasí.

V tabulce 1.2 jsou ukázány všechny typy dialogových aktů, které může uživatel říct v dialogovém systému Let's Go! [?].

Existuje široké množství technik, které lze použít pro porozumění mluvené řeči. Unifikace pomocí šablon anebo gramatiky jsou příklady ručně psaných metod. Metody založené na datech jsou například Hidden Vector State model [?], techniky strojového překladu [?], Combinatory Categorical Grammars [?] nebo Support Vector Machines [?].

### 1.2.3 ~~Dialogový manager~~ Komponenta řízení dialogu (DM)

Pokud už jsou pravděpodobné dialogové akty dekodovány, je třeba rozhodnout, jak bude systém reagovat. Komponenta tvořící rozhodnutí o dalším kroku systému se nazývá ~~dialogový manager~~komponenta řízení dialogu. Odpověď systému je zakódována do formy dialogových aktů a nazývá se systémová akce.

Zvolená systémová akce je vybrána z množiny možných akcí  $a \in \mathcal{A}$  a závisí na vstupu, který systém obdržel z SLU. Tento vstup se nazývá pozorování  $o \in \mathcal{O}$ , protože obsahuje vše, co systém pozoroval o uživateli.

Zvolení správné akce potřebuje více znalostí než jen poslední pozorování. Celá historie dialogu a také kontext hrají důležitou roli. Dialogový manager bere na vše ohled pomocí udržování interní reprezentace celého ~~pozorovaného dialogu~~. Tato reprezentace se nazývá dialogový stav, nebo také dialogu. Všechny informace o historii dialogu a uživatelských cílech nazýváme stavem dialogu.

Cíle uživatele ovšem neznáme a tedy musíme nějak uvažovat nad jejich možnými hodnotami. Pro vyrovnání se s tímto problémem se dialog považuje za částečně pozorovatelný Markovský rozhodovací proces (POMDP) a cíle uživatele za skryté proměnné [?]. Pravděpodobnostní rozdělení nad možnými dialogovými stavy nazýváme stav důvěry, značí se  $b \in \mathcal{B}$ . Aktuální ~~dialogový stav~~stav důvěry závisí na přechodové funkci, která ~~dialogový stav~~stav důvěry aktualizuje pro každé nové pozorování a systémovou akci. Přechodová funkce je tedy mapování  $\mathcal{T} : \mathcal{B} \times \mathcal{A} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}$ . V této práci se budeme věnovat právě metodám ~~aktualizace dialogového pro odhad~~ stavu.

Chování ~~dialogového stavu~~systému definuje dialogová strategie  $\pi$ . Strategie určuje co má systém provést v závislosti na aktuálním dialogovém stavu. Obecně strategie vytvoří pravděpodobnostní rozložení přes možné akce. Pokud  $\prod(\mathcal{A})$  značí množinu těchto distribucí, pak dialogová strategie bude zobrazení ~~z dialogového stavu~~ze stavu důvěry do této množiny,  $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \prod(\mathcal{A})$ .

Pozorování, ~~dialogový stav~~stav důvěry a akce jsou číslovány podle obrátky. Pokud je časový okamžik důležitý, jsou pozorování, dialogový stav a akce z obrátky číslo  $t$  označeny  $o_t$ ,  $b_t$  a  $a_t$ .

### 1.2.4 Generování přirozené řeči (NLG a TTS)

Posledním krokem dialogového systému je vytvoření odpovědi pro uživatele. Nejprve systém generování přirozené řeči (NLG) převede dialogové akty na text. Následně je text převeden na zvuk pomocí textového syntetizéru řeči (TTS).

Nejjednodušším přístupem ke generování přirozeného jazyka z dialogových aktů je použití šablon. Například pro dialogový akt `inform(from.stop="x")` bude vytvořena šablona „Pojedete ze zastávky x“, kde „x“ bude nahrazeno například za „Malostranská“, „Letňany“, atd. Šablony jsou jednoduché a často efektivní řešení, protože počet možných frází je většinou ~~dostatečně~~ malý.

Při syntéze řeči existuje mnoho alternativ. Je možné použít segmenty řeči z databáze pro vygenerování zvuků tvořících dohromady celou sekvenci slov. Příkladem těchto systémů je Festival [?] nebo jeho odnož FLite [?].

Alternativní metodou syntézy je použití Skrytých Markovských modelů pro generování zvuku, příkladem je HTS systém [?].

Pro syntézu řeči existují také komerční systémy, například systém SpeechTech TTS [?].

## 1.3 Dialogový stav

Dialogový stav je reprezentace všech informací, které lze o aktuálním dialogu získat. To znamená všechno co uživatel a systém řekl. Ovšem nejistota v tom, co vlastně uživatel řekl a jaké jsou jeho cíle, je základním problémem, s kterým se dialogový systém musí vypořádat. Systémy pro rozpoznávání i porozumění řeči často chybují a tuto možnost musí brát dialogový manager také v potaz. Vypořádat se s nejistotou lze pomocí jejího zakomponování do modelu pro odhad dialogového stavu.

Cíle uživatele a další vlastnosti prostředí lze považovat za náhodné částečně pozorovatelné proměnné a je možné je odvodit z pozorování. Pravděpodobnostní rozložení těchto náhodných proměnných dává dobře definovanou reprezentaci nejistoty, navíc je možné je reprezentovat pomocí Bayesovské sítě.

Jedním z možných modelů dialogového stavu je generativní model. Definujeme množinu dialogových stavů,  $s \in \mathcal{S}$ . Předpokládáme, že pozorování závisí podmíněně pouze na stavu prostředí a definujeme pravděpodobnostní rozdělení pro pozorování,  $p(o | s)$ . Dále předpokládáme, že ~~cíle uživatele se nemění v čase~~ a stav prostředí je ~~tedy~~ závislý pouze na stavu v předchozí obrátce a na poslední akci systému. Tato závislost je zachycena v přechodové pravděpodobnosti  $p(s_{t+1} | s_t, a_t)$ . Předpoklad, že dialogový stav závisí pouze na minulé hodnotě se nazývá Markovská vlastnost.

Pokud vezmeme předchozí předpoklady, tak lze využít bayesovský přístup pro počítání s nejistotou. Stav v čase  $t$  označíme  $s_t$ . Podle Bayesova vzorce můžeme spočítat pravděpodobnost stavu v čase  $t+1$  po přijetí nového pozorování  $o_{t+1} = o'$ .

$$p(s_{t+1} = s') \propto \underbrace{p(o_{t+1} = o' \mid s_{t+1} = s')} \sum_{s \in \mathcal{S}} p(s_t = s) p(s_{t+1} = s' \mid s_t = s, a_t = a) \underbrace{p(o_{t+1} = o' \mid s_{t+1} = s')} \quad (1.1) \quad \{\text{eq:belief}\}$$

Nyní můžeme definovat stav důvěry v čase  $t$ ,  $b_t$ , jako pravděpodobnost přes stavy dáno všechna pozorování až do času  $t$ . Množina všech možných stavů důvěry je pravděpodobnost přes všechny možné dialogové stavy  $\mathcal{B} = \prod(\mathcal{S})$ .

Můžeme přepsat rovnici (1.1) s pomocí stavů důvěry.

$$b(s_{t+1}) \propto \sum_{s \in \mathcal{S}} b(s_t) p(s_{t+1} \mid s_t, a_t) p(o_{t+1} \mid s_{t+1}) \quad (1.2) \quad \{\text{eq:belief}\}$$

Rovnice (1.2) nám dává předpis pro přechodovou funkci  $\mathcal{T}$ . V praxi ovšem bude množina možných hodnot pro stav  $s_t$  příliš velká, protože stav musí obsahovat všechny informace potřebné pro rozhodování, to znamená celou historii dialogu a cíle uživatele. Pokud systém obsahuje sloty, tak každá kombinace hodnot slotu je jedním možným cílem uživatele. Tedy velikost stavového prostoru roste exponenciálně.

### 1.3.1 Aktualizace stavu

Efektivní metodou pro aktualizaci dialogového stavu je použití dynamických bayesovských sítí [?]. Bayesovské sítě umožňují efektivní výpočet využitím podmíněných nezávislostí mezi sloty. Stále ovšem zůstává problém s výpočtem, pokud i jednotlivé sloty obsahují příliš mnoho hodnot. Lze použít aproximace a počítat jen s  $k$  nejpravděpodobnějšími hodnotami [?].

Alternativním zjednodušením je rozdělit stav prostředí do skupin. Tento přístup se nazývá Hidden Information State (HIS) [?]. Základním předpokladem zde musí být, že uživatel nezmění svůj cíl v průběhu dialogu. Pak lze efektivně provádět aktualizaci, protože rovnice pro aktualizace pravděpodobnosti se nemění mezi jednotlivými skupinami.

V této práci se budeme zabývat prvním přístupem, tedy použitím Bayesovských sítí. Pro inferenci použijeme Loopy Belief Propagation (LBP) algoritmus, který je aproximativní metodou pro sítě s diskrétními náhodnými proměnnými. Pro učení parametrů představíme Expectation Propagation (EP) algoritmus. EP je zobecněním LBP na libovolné pravděpodobnostní rozložení.

## 2. Bayesovské sítě a inference

{ch:kap2}

V této kapitole představíme Bayesovské sítě, grafický model pro efektivní reprezentaci pravděpodobnostních rozdělání a nezávislostí mezi náhodnými proměnnými. Bayesovská síť zároveň vytváří koncept pro inferenci, tedy zodpovídání dotazů nad proměnnými v síti. Ukážeme si několik přístupů k inferenci, nejprve naivní výpočet vycházející přímo z definice. Následně využijeme vlastností sítě a konceptů dynamického programování pro jeho zlepšení. Analýzou složitosti exaktní inference dojdeme k závěru, že pro větší a komplexnější modely bude třeba se uchýlit k aproximacím.

Nejprve aproximujeme sdruženou pravděpodobnostní distribuci součinem marginálních distribucí a představíme Loopy Belief Propagation algoritmus. Stále můžeme použít pouze diskrétní pravděpodobnostní distribuce se známými parametry. Pro učení parametrů lze použít Expectation Maximization metodu, pro dialogové systémy je ovšem těžké získat dostatek učících dat. Dostaneme se k metodě Expectation Propagation, která je zobecněním LBP a je možné ji použít pro libovolné rozdělání. Díky ní budeme schopni vytvořit generativní model pro aktualizaci dialogového stavu, který bude pracovat stejně jako LBP, ale bude schopen adaptace za běhu dialogového systému.

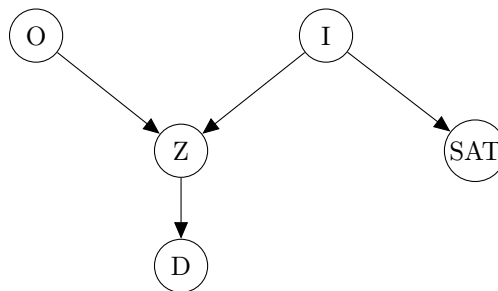
### 2.1 Bayesovské sítě

{sec:bn}

Bayesovské sítě jsou pravděpodobnostní grafický model, který využívá podmíněných nezávislostí pro úspornou reprezentaci sdružené pravděpodobnosti. Bayesovská síť je orientovaný acyklický graf, jeho vrcholy jsou náhodné proměnné a hrany odpovídají přímé závislosti jednoho uzlu na druhý. Pro každou náhodnou proměnnou v síti platí, že její pravděpodobnost je jednoznačně určena jejími rodiči v grafu. Podmíněná pravděpodobnostní distribuce (CPD) proměnné  $X$  popisuje pravděpodobnost proměnné  $X$  dáno jejími rodiči,  $P(X \mid \text{parents}(X))$ . Pokud proměnná nemá žádné rodiče, pak její podmíněná pravděpodobnostní distribuce je ekvivalentní marginální pravděpodobnostní distribuci.

Příklad Student [?]: firma zvažuje, zda-li přijme studenta. Firma chce přijímat chytré studenty, ale nesmí je testovat na inteligenci (I) přímo. Má však výsledek studentových SAT testů, které ovšem nemusí stačit pro správné zhodnocení inteligence. Požadují tak tedy i doporučení (D) od jednoho z učitelů. Učitel studentovi napíše doporučující dopis na základě známky (Z), kterou student získal v jeho předmětu. Předměty se ovšem liší v obtížnosti (O) a tak je studentova známka v předmětu závislá nejen na jeho inteligenci, ale také na obtížnosti předmětu.





{fig:stude

Obrázek 2.1: Bayesovská síť pro příklad se studentem.

Grafický model reprezentující tento problém je vyobrazen na obrázku 2.1.

V tomto modelu je několik nezávislostí. Obtížnost předmětu a inteligence studenta jsou zjevně nezávislé. Studentova známka z předmětu je závislá na obtížnosti předmětu a inteligenci studenta, ale je podmíněně nezávislá na jeho výsledku ze SAT, dáno ~~studentova inteligence~~studentovou inteligencí. Konečně doporučení, které student obdrží, je podmíněně nezávislé na všech ostatních proměnných, dáno ~~studentova~~studentovou známka.

Sdruženou nezávislost tohoto modelu lze zapsat ve formě podmíněných pravděpodobnostních distribucí s pomocí řetízkového pravidla.

$$P(O, I, Z, S, D) = P(D | Z)P(Z | O, I)P(SAT | I)P(O)P(I) \quad (2.1)$$

Předpokládejme, že obtížnost předmětu, inteligence studenta, doporučující dopis a výsledek SAT jsou binární proměnné. Známka z předmětu pak je ternární proměnná. Pokud bychom zapsali sdruženou pravděpodobnost ve formě tabulky, tak se dostaneme k 48 položkám. Díky rozdělení do podmíněných pravděpodobnostních rozložení, které nám bayesovská síť poskytuje, se dostáváme k  $2 + 2 + 12 + 4 + 6 = 26$  položkám. Tedy i v tomto jednoduchém modelu dochází k značné úspoře.

## 2.2 Inference v Bayesovských sítích

Bayesovské sítě reprezentují pravděpodobnostní model a umožňují nám nad ním provádět dotazy. Můžeme se například ptát na marginální pravděpodobnost jednotlivých proměnných. Tu získáme marginalizací sdružené pravděpodobnosti, pokud vezmeme příklad se studentem a budeme chtít znát marginální pravděpodobnost známek, musíme vysčítat všechny ostatní proměnné.

$$P(Z) = \sum_{O, I, S, D} P(D | Z)P(Z | O, I)P(SAT | I)P(O)P(I) \quad (2.2)$$

Další a asi nejčastější dotaz nastává, pokud některé náhodné proměnné pozorujeme. Pak chceme znát pravděpodobnost jiných proměnných dáno ~~naše pozorování~~ naším pozorováním,  $P(\mathbf{X} \mid \mathbf{E} = \mathbf{e})$ , kde  $\mathbf{X}$  jsou dotazované proměnné,  $\mathbf{E}$  jsou pozorované proměnné a  $\mathbf{e}$  jsou pozorované hodnoty. Z definice podmíněné pravděpodobnosti dostáváme

$$P(\mathbf{X} \mid \mathbf{E} = \mathbf{e}) = \frac{P(\mathbf{X}, \mathbf{E} = \mathbf{e})}{P(\mathbf{E} = \mathbf{e})} \quad (2.3)$$

Každou instanci jmenovatele  $P(\mathbf{X}, \mathbf{E} = \mathbf{e})$  jde spočítat sumou sdružených pravděpodobností s ohodnoceními proměnných, které jsou kompatibilní s pozorováním a aktuální instancí. Pokud počítáme instanci  $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}, \mathbf{E} = \mathbf{e})$ , pak získáme výsledek marginalizací všech proměnných, kromě  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{E}$ , které jsou fixovány. Pokud tedy množinu všech proměnných bez  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{E}$  označíme  $\mathcal{W} = \mathcal{X} - \mathbf{X} - \mathbf{E}$ , pak pravděpodobnost dané instance je

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}, \mathbf{E} = \mathbf{e}) = \sum_{\mathbf{w}} P(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{w}) \quad (2.4)$$

Pro výpočet normalizační konstanty  $P(\mathbf{E})$  musíme opět marginalizovat sdruženou pravděpodobnost, anebo si můžeme povšimnout, že platí

$$P(\mathbf{E} = \mathbf{e}) = \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \quad (2.5)$$

a tedy můžeme použít už vypočítané hodnoty.

### 2.2.1 Exaktní inference

V předchozí části jsme viděli, že pomocí definice podmíněné pravděpodobnosti a marginalizace sdružené pravděpodobnosti lze najít odpověď na libovolný dotaz. Nyní si ukážeme algoritmus, který využívá struktury Bayesovské sítě pro inferenci a navíc díky metodám dynamického programování umožňuje samotný výpočet urychlit. Nakonec ovšem zjistíme, že pro velké sítě, které nás většinou zajímají nejvíce, nám přesná inference nebude stačit a musíme se uchýlit k aproximacím.

Začneme s inferencí v jednoduchém modelu  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ . Sdružená pravděpodobnost  $P(A, B, C, D)$  je součinem jednotlivých podmíněných pravděpodobnostních distribucí

$$P(A, B, C, D) = P(D \mid C)P(C \mid B)P(B \mid A)P(A) \quad (2.6)$$

Pokud nyní budeme chtít spočítat marginální distribuci  $D$ , tak musíme mar-

ginalizovat všechny ostatní proměnné

$$P(D) = \sum_{A,B,C} P(D | C)P(C | B)P(B | A)P(A) \quad (2.7)$$

Můžeme si povšimnout, že spousta členů se bude počítat vícekrát. Využitím metod dynamického programování a přeuspořádáním sum si můžeme mezivýsledky uložit a použít vícekrát.

$$P(D) = \sum_C P(D | C) \sum_B P(C | B) \sum_A P(B | A)P(A) \quad (2.8)$$

Při výpočtu pak nejprve spočítáme  $\psi_1(A, B) = P(B | A)P(A)$ , pak vysčítáme proměnnou  $A$  a získáme  $\tau_1(B) = \sum_A \psi_1(A, B)$ . Pokračujeme obdobně

$$\psi_2(B, C) = P(C | B)\tau_1(B) \quad (2.9)$$

$$\tau_2(C) = \sum_B \psi_2(B, C) \quad (2.10)$$

A nakonec spočítáme finální marginální pravděpodobnost

$$\psi_3(D, C) = P(D | C)\tau_2(C) \quad (2.11)$$

$$P(D) = \sum_C \psi_3(D, C) \quad (2.12)$$

Nechť  $\mathcal{X}$  je množina náhodných proměnných.  $Val(\mathcal{X})$  definujeme jako množinu možných ohodnocení proměnných  $\mathcal{X}$ . Potom definujeme faktor  $\phi$  jako zobrazení z  $Val(\mathcal{X})$  do  $\mathbb{R}$ . Faktor je nezáporný, pokud všechny jeho obrazy jsou nezáporné. Množina proměnných  $\mathcal{X}$  je doménou faktoru a značíme ji jako  $Dom(\phi)$ .

Faktor, jehož doménu tvoří diskrétní proměnné, si můžeme představit jako tabulku, která obsahuje jednu hodnotu pro každé možné ohodnocení proměnných z domény.

Nechť  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  jsou tři disjunktní množiny náhodných proměnných. Nechť  $\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  a  $\phi_2(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  jsou faktory. Definujeme součin faktorů  $\phi_1 \times \phi_2$  jako faktor  $\psi : Val(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  následovně:

$$\psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \phi_2(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$$

Násobíme prvky, které mají stejné ohodnocení společných proměnných  $\mathbf{Y}$ . Stejný princip použijeme pro všechny matematické operace.

Nechť  $\mathbf{X}$  je množina náhodných proměnných a  $Y \notin \mathbf{X}$  náhodná proměnná. Nechť  $\phi(\mathbf{X}, Y)$  je faktor. Definujeme marginalizaci  $Y$  v  $\phi$ , značenou  $\sum_Y \phi$ , jako

faktor  $\psi$  s doménou  $\mathbf{X}$  takový, že

$$\psi(\mathbf{X}) = \sum_Y \phi(\mathbf{X}, Y)$$

Této operaci také říkáme vysčítání  $Y$  ve  $\phi$ .

Faktory se při počítání chovají jako čísla, všechny operace probíhají po prvcích, pro které je ohodnocení náhodných proměnných z průniku domén faktorů stejné. Proto platí komutativita  $\phi_1 \cdot \phi_2 = \phi_2 \cdot \phi_1$  a  $\sum_X \sum_Y \phi = \sum_Y \sum_X \phi$ . Dále platí asociativita součinu  $(\phi_1 \cdot \phi_2) \cdot \phi_3 = \phi_1 \cdot (\phi_2 \cdot \phi_3)$ . Nakonec můžeme vyměnit sumu a součin, pokud  $X \notin \text{Dom}(\phi_1)$ , potom  $\sum_X (\phi_1 \cdot \phi_2) = \phi_1 \sum_X \phi_2$ .

Sdruženou pravděpodobnost z minulého příkladu tedy můžeme přepsat do formy faktorů.

$$P(A, B, C, D) = \phi_A \cdot \phi_B \cdot \phi_C \cdot \phi_D \quad (2.13)$$

Opět se pokusíme spočítat marginální pravděpodobnost proměnné  $D$ .

$$P(D) = \sum_C \sum_B \sum_A \phi_A \phi_B \phi_C \quad (2.14)$$

$$= \sum_C \phi_D \cdot \left( \sum_B \phi_C \cdot \left( \sum_A \phi_A \cdot \phi_B \right) \right) \quad (2.15)$$

Přesuny sum můžeme provést díky doméně jednotlivých faktorů. Faktory  $\phi_C$  a  $\phi_D$  neobsahují proměnnou  $A$  a tedy je můžeme vytknout před sumu přes  $A$ . Stejně tak faktor  $\phi_D$  neobsahuje proměnnou  $B$  a opět jej můžeme vytknout před sumu přes  $B$ . Tyto úpravy můžeme provádět v libovolném pořadí, pokud vždy platí, že vysčítáme proměnnou  $X$  až poté, co spolu vynásobíme všechny faktory, které ji obsahují.

V obecnosti vždy počítáme výraz, který je ve tvaru

$$\sum_X \prod_{\phi \in \Phi} \phi.$$

Z tohoto také vychází název pro tuto metodu: sum-product. Jednoduchý algoritmus pro exaktní inferenci využívající tuto metodu se nazývá eliminace proměnných. Základní myšlenka je, že máme dán seznam náhodných proměnných v pořadí, v jakém se mají eliminovat. Pro eliminaci proměnné je třeba nejprve vynásobit všechny faktory, které ji obsahují a následně ji vysčítat. Tak získáme faktor, který už tuto proměnnou neobsahuje, tedy jsme ji eliminovali. Eliminace proměnných je popsána v algoritmu 1.

---

**Algoritmus 1** Eliminace proměnných

---

{alg:ve}

**function** SUM-PRODUCT-VE( $\Phi, \mathbf{X}, \prec$ ) $\Phi$  množina všech faktorů. $\mathbf{X}$  množina náhodných proměnných, které mají být eliminovány. $\prec$  pořadí proměnných, v jakém mají být eliminovány.Nechť  $X_1, \dots, X_k$  je seřazení proměnných z  $\mathbf{X}$ , t.ž.  $X_i \prec X_j \Leftrightarrow i < j$ .**for**  $i = 1 \dots k$  **do** $\Phi \leftarrow \text{Sum-Product-Eliminate-Var}(\Phi, X_i)$ **end for** $\phi^* \leftarrow \prod_{\phi \in \Phi} \phi$ **return**  $\phi^*$ **end function****function** SUM-PRODUCT-ELIMINATE-VAR( $\Phi, X$ ) $\Phi$  množina všech faktorů. $X$ , proměnná, která má být eliminována. $\Phi' \leftarrow \{\phi \in \Phi : X \in \text{Dom}(\phi)\}$  $\Phi'' \leftarrow \Phi - \Phi'$  $\psi \leftarrow \prod_{\phi \in \Phi'} \phi$  $\tau \leftarrow \sum_X \psi$ **return**  $\Phi'' \cup \{\tau\}$ **end function**

---

Nechť  $\mathbf{X}$  je množina náhodných proměnných, nechť  $\Phi$  je množina faktorů, t.ž. pro každé  $\phi \in \Phi$ ,  $\text{Dom}(\phi) \subseteq \mathbf{X}$ . Nechť  $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$  je množina dotazovaných náhodných proměnných a nechť  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ . Pak pro každé seřazení  $\prec$  nad  $\mathbf{Z}$ ,  $\text{Sum-Product-VE}(\Phi, \mathbf{Z}, \prec)$  vrátí faktor  $\phi^*(\mathbf{Y})$  takový, že

$$\phi^*(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{Z}} \prod_{\phi \in \Phi} \phi$$

Nyní provedeme analýzu algoritmu eliminace proměnných. Předpokládejme, že na vstupu je  $n$  proměnných. Bayesovská síť obsahuje pro každou proměnnou jeden faktor. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že algoritmus bude eliminovat všechny proměnné. Běh algoritmu se skládá z jednotlivých eliminačních kroků, při kterých je vždy eliminována jedna proměnná.

Při jednom eliminačním kroku je vybrána proměnná  $X_i$ , všechny faktory, které ji obsahují jsou vynásobeny a vytvoří jeden velký faktor  $\psi_i$ . Proměnná  $X_i$  je pak vysčítána z tohoto faktoru. Počet operací pro jeden eliminační krok tedy závisí na velikosti faktoru  $\psi_i$ , označme ji  $N_i$ . Maximum z velikostí faktorů označme  $N_{\max} = \max_i N_i$ .

Nyní se zaměříme na počet násobení. Celkem vznikne  $n + m$  faktorů, kde

$m$  je počet faktorů, které vznikly vysčítáním proměnné. Každý z těchto faktorů je zahrnut do součinu pouze jednou, pokud je eliminována nějaká proměnná, kterou obsahuje. Cena násobení faktorů pro vznik  $\psi_i$  je nejvýše  $N_i$ . Celkový počet násobení tedy bude nejvýše  $(n + m)N_{max}$  což je  $\mathcal{O}(nN_{max})$ .

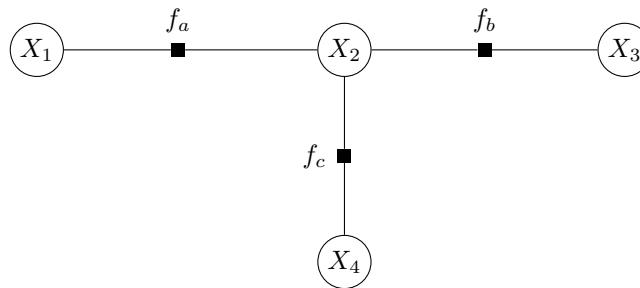
Pokud  $k$  je maximum z velikostí domén proměnných, pak velikost faktoru obsahujícího  $n$  proměnných může být až  $k^n$ . Složitost eliminace proměnných je tedy dominována velikostí faktorů, které vznikají při výpočtu a je exponenciální. Navíc bylo dokázáno, že výběr nejlepšího pořadí proměnných pro eliminaci je NP těžký [?].

### 2.2.2 Posílání zpráv ve faktor grafu

Algoritmy exaktní inference naráží při reálném použití na příliš velkou složitost násobení faktorů. Hlavním problémem je velikost sdružené pravděpodobnosti, která roste exponenciálně s počtem náhodných proměnných. Většinou nás ovšem zajímá marginální pravděpodobnost jedné nebo jen mála proměnných. Je tedy zbytečné počítat celou sdruženou pravděpodobnost, abychom z ní pak vysčítali většinu proměnných. Řešení se nabízí ve formě aproximace faktorizací sdružené pravděpodobnosti.

$$P(X_1, \dots, X_n) = \prod_i P(X_i)$$

Pro výpočet s faktorizovanou distribucí si zavedeme novou datovou strukturu, tzv. faktor graf. Faktor graf je bipartitní graf, kde jednu partitu tvoří faktory a druhou partitu tvoří náhodné proměnné. Hrany ve faktor grafu vedou vždy mezi proměnnou a faktorem, který ji obsahuje.



Obrázek 2.2: Příklad faktor grafu se třemi náhodnými proměnnými  $X_1, X_2, X_3$  a třemi faktory  $f_a, f_b, f_c$ .

Nejprve začneme s inferencí na stromech. Pokud zafixujeme jednu náhodnou proměnnou  $X$  ve faktor grafu, pak sdruženou pravděpodobnost můžeme spočítat

jako

$$P(\mathbf{X}) = \prod_{s \in ne(X)} F_s(X, \mathbf{X}_s), \quad (2.16) \quad \{\text{eq:fs}\}$$

kde  $ne(X)$  jsou faktory obsahující proměnnou  $X$  (tedy sousedi ve faktor grafu),  $F_s$  je součin všech faktorů v podstromu určeném faktorem  $f_s$  a  $\mathbf{X}_s$  je množina všech proměnných v daném podstromu.

Pro výpočet marginální pravděpodobnosti  $X$  substituujeme (2.16) do výpočtu marginální pravděpodobnosti ze sdružené a po výměně sumy a produktu dostaneme

$$P(X) = \prod_{s \in ne(X)} \sum_{\mathbf{X}_s} F_s(X, \mathbf{X}_s) \quad (2.17)$$

$$= \prod_{s \in ne(X)} \mu_{f_s \rightarrow X}(X) \quad (2.18) \quad \{\text{eq:margx}\}$$

Zavedli jsme funkce

$$\mu_{f_s \rightarrow X} \equiv \sum_{\mathbf{X}_s} F_s(X, \mathbf{X}_s), \quad (2.19) \quad \{\text{eq:dfmsg}\}$$

které můžeme nazývat zprávami z faktoru  $f_s$  do proměnné  $X$ .

Každé  $F_s(X, \mathbf{X}_s)$  je popsáno podgrafem faktor grafu a tedy může být znova faktorizováno. Namísto proměnné  $X$  nyní vezmeme faktor  $f_s$ . Náhodné proměnné sousedící s faktorem  $f_s$  bez  $X$  si označíme  $X_1, \dots, X_M$ . Součin faktorů v podstro-  
mech určených těmito proměnnými označíme  $G_i(X_i, \mathbf{X}_{si})$ . Faktor  $F_s(X, \mathbf{X}_s)$  tedy můžeme přepsat jako

$$F_s(X, \mathbf{X}_s) = f_s(X, X_1, \dots, X_M) G_1(X_1, \mathbf{X}_{s1}), \dots, G_M(X_M, \mathbf{X}_{sM}) \quad (2.20)$$

Pokud substituujeme přepsaný faktor  $F_s(X, \mathbf{X}_s)$  do definice zprávy z faktoru, dostaneme

$$\mu_{f_s \rightarrow X}(X) = \sum_{X_1} \cdots \sum_{X_M} f_s(X, X_1, \dots, X_M) \prod_{m \in ne(f_s) \setminus X} \sum_{\mathbf{X}_{sm}} G_m(X_m, \mathbf{X}_{sm}) \quad (2.21)$$

$$= \sum_{X_1} \cdots \sum_{X_M} f_s(X, X_1, \dots, X_M) \prod_{m \in ne(f_s) \setminus X} \mu_{X_m \rightarrow f_s}(X_m) \quad (2.22) \quad \{\text{eq:mfsx}\}$$

Zavedli jsme další funkce

$$\mu_{X_m \rightarrow f_s}(X_m) \equiv \sum_{\mathbf{X}_{sm}} G_m(X_m, \mathbf{X}_{sm}), \quad (2.23) \quad \{\text{eq:dfmsg}\}$$

které budeme nazývat zprávami z proměnné  $X_m$  do faktoru  $f_s$ .

Z rovnice 2.18 vidíme, že marginální pravděpodobnost proměnné vypočítá-

me jako součin zpráv ze všech okolních faktorů. Každou z těchto zpráv můžeme spočítat jako součin faktoru a zpráv přicházejících z proměnných, které s tímto faktorem sousedí, kromě proměnné, které chceme zprávu posílat. Zbývá nám tedy zjistit v jakém tvaru jsou zprávy z proměnných do faktoru.

Stejně jako u  $F_s(X, \mathbf{X}_s)$  nám tady  $G_m(X_m, \mathbf{X}_{sm})$  definuje podgraf faktor grafu. V kořeni tohoto podgrafu leží proměnná  $X_m$  a tím se dostáváme na už známý případ. Budeme ignorovat faktor  $f_s$ , protože neleží v podgrafu určeném  $G_m(X_m, \mathbf{X}_{sm})$ , a pak

$$G_m(X_m, \mathbf{X}_{sm}) = \prod_{l \in ne(X_m) \setminus f_s} F_l(X_m, \mathbf{X}_{ml}) \quad (2.24)$$

Přepsáno ve formě zpráv

$$\mu_{X_m \rightarrow f_s}(X_m) = \prod_{l \in ne(X_m) \setminus f_s} \sum_{\mathbf{X}_{ml}} F_l(X_m, \mathbf{X}_{ml}) \quad (2.25)$$

$$= \prod_{l \in ne(X_m) \setminus f_s} \mu_{f_l \rightarrow X_m}(X_m) \quad (2.26)$$

Zpráva z náhodné proměnné je tedy součinem zpráv ze všech ostatních faktorů.

Zprávy tedy dokážeme počítat rekurzivně, chybí nám ovšem pravidla pro zprávy z uzlů, které jsou listy. V případě faktoru je odchozí zpráva ekvivalentní faktoru.

$$\mu_{f \rightarrow X}(X) = f(X) \quad (2.27)$$

V případě náhodné proměnné je odchozí zpráva

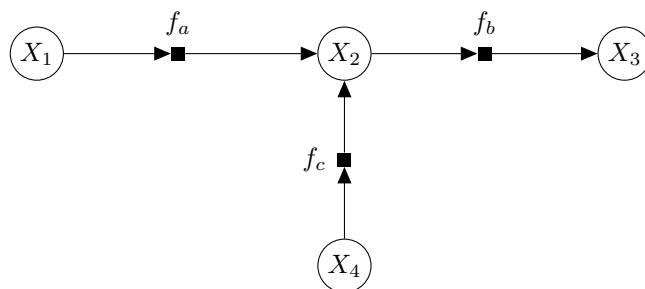
$$\mu_{X \rightarrow f}(X) = 1 \quad (2.28)$$

Pro pozorovanou proměnnou je zpráva vždy rovna pozorované hodnotě, bez ohledu na sousední faktory.

### 2.2.3 Belief Propagation

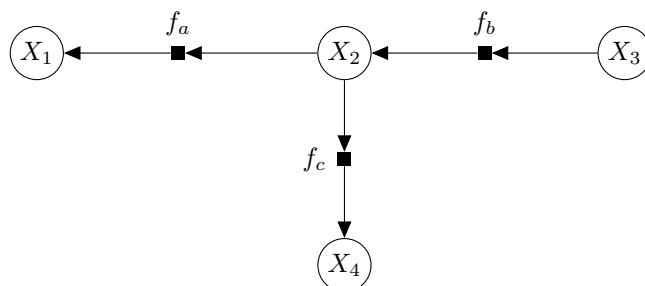
Algoritmus exaktní inference na stromech s pomocí posílání zpráv se nazývá belief propagation [?]. Zpráva z vrcholu faktor grafu může být poslána do jiného vrcholu, až když byly obdrženy zprávy ze všech ostatních vrcholů. Jakmile vrchol obdržel zprávy ze všech vrcholů, lze spočítat jeho marginální pravděpodobnost. Strom můžeme zakořenit v libovolné náhodné proměnné a posílat zprávy z listů do kořene. Kořen pak obdrží všechny zprávy ze všech sousedních faktorů a tedy je možné spočítat jeho marginální pravděpodobnost. Tomuto se říká dopředný krok propagace.





Obrázek 2.3: Směr posílání zpráv pro strom zakořeněný ve vrcholu  $X_3$  v dopředném kroce.

Belief propagation algoritmus tedy umožňuje na stromech spočítat marginální pravděpodobnost jedné proměnné s lineárním počtem poslaných zpráv. Při rozšíření na spočítání marginální pravděpodobnosti všech proměnných není třeba algoritmus pouštět  $n$ -krát. Stačí si uvědomit, že všem vrcholům chybí pouze zpráva od faktoru na cestě ke kořenu. A my můžeme z kořene poslat zprávy zpět k listům hned, jak obdržíme všechny příchozí zprávy. Této části se říká zpětný krok propagace.



Obrázek 2.4: Směr posílání zpráv pro strom zakořeněný ve vrcholu  $X_3$  ve zpětném kroce.

Po propagaci všech zpráv až k listům už každá proměnná získala zprávy od všech sousedních faktorů a tedy je možné spočítat marginální pravděpodobnost všech proměnných.

## 2.2.4 Loopy Belief Propagation

{sec:lbp}

Algoritmus Belief Propagation funguje pro inferenci na stromech. Hlavní důvod proč nelze použít Belief Propagation na obecných grafech je, že můžeme narazit na cyklus v grafu, což znamená, že žádný z vrcholů v tomto cyklu nebude nikdy mít dostatek příchozích zpráv, aby mohl nějakou zprávu odeslat.

Algoritmus Loopy Belief Propagation řeší tento problém relaxací podmínky na příchozí zprávy. Pro odeslání zprávy do uzlu není třeba znát zprávy ze všech ostatních sousedních vrcholů. Chybějící zprávy jsou nastaveny na jedničku. Loopy Belief Propagation je iterativní algoritmus. V grafu nemusí existovat vrchol, který může posílat zprávu k nějakému ze svých sousedů. Je tedy třeba vybrat vrchol podle nějaké strategie a z něj poslat zprávy do všech sousedních vrcholů. V další iteraci je pak vybrán zase jiný vrchol, který bude posílat zprávy. Iterace končí ve chvíli, kdy se už nemění marginální pravděpodobnosti proměnných.

Vzhledem k tomu, že posílané zprávy už neodpovídají skutečným faktorům, je důležitá otázka, zda-li Loopy Belief Propagation vůbec nalezne správné marginální pravděpodobnosti. Existují podmínky za kterých algoritmus bude konvergovat [?]. V obecném případě ovšem může algoritmus konvergovat ke špatným pravděpodobnostem, anebo nemusí konvergovat vůbec a pak dochází k oscilacím. Pokud algoritmus nekonverguje ke správným pravděpodobnostem, tak není ani možné se k nim přiblížit nebo je odvodit z oscilací [?]. V praxi ovšem k problémům většinou nedochází a inference konverguje v rozumném čase.

## Popis LBP

Popis Loopy Belief Propagation je v algoritmu 2. Při inferenci ve faktor grafu je nejprve třeba inicializovat všechny zprávy. Posílání zpráv budeme iterovat dokud zprávy nedokonvergují, anebo můžeme nastavit pevný počet iterací. Pak vybíráme vrcholy a z každého pošleme zprávu do všech okolních. Způsobem výběru vrcholů se budeme zabývat později. I náhodný výběr vrcholů povede k výsledku, dodání externí informace či chytřejší heuristiky ovšem může výpočet výrazně urychlit.

Poslání zprávy se liší podle toho, zda-li posíláme z proměnné do faktoru, anebo naopak. V obou případech vynásobíme příchozí zprávy ze všech sousedních vrcholů, kromě toho, do kterého zprávu posíláme. Při posílání zprávy z ~~vecholu pro faktor~~ faktoru  $f$  do proměnné musíme navíc vynásobit příchozí zprávy ~~vynásobíme faktorem a marginalizujeme~~ hodnotou  $f$ , následně vysčítat všechny proměnné, kromě té, které zprávu posíláme.

Ve faktor grafu se tedy zprávy šíří pouze přes pravděpodobnostní rozdělení jedné proměnné. To právě může vést k oscilacím anebo konvergenci ke špatným hodnotám. Příkladem je například skrytý markovský model se dvěma skrytými binárními proměnnými a pozorováním pro každou skrytou proměnnou. Pokud je mezi proměnnými závislost XOR, pak nikdy nebudeme pozorovat  $(1, 1)$ , ale přesto bude každá proměnná konvergovat k rovnoměrnému rozdělení. A tedy sdružená pravděpodobnost pro pozorování  $(1, 1)$  dostane nenulovou pravděpodobnost.

Při počítání zpráv často musíme pronásobit spoustu zpráv z okolních vrcholů.

---

**Algoritmus 2** Loopy Belief Propagation

---

{alg:lbp}

```
function LBP( $F, S$ )  
   $F$  – faktor graf  
   $S$  – strategie  
  
  INIT-FACTOR-GRAPH( $F$ )  
  repeat  
    for vrchol  $v \in F$  vybraný podle strategie  $S$  do  
      for soused  $n$  vrcholu  $v$  do  
        if  $v$  je faktor then  
           $\mu_{v \rightarrow n}(n) \leftarrow \text{MESSAGE-TO-VAR}(v, n)$   
        else  
           $\mu_{v \rightarrow n}(v) \leftarrow \text{MESSAGE-TO-FACTOR}(v, n)$   
        end if  
      end for  
    end for  
  until konvergence  
  for každá proměnná  $X$  do  
     $P(X) = \prod_{f \in ne(X)} \mu_{f \rightarrow X}(X)$   
  end for  
end function  
  
function INIT-FACTOR-GRAPH( $F$ )  
   $F$  – faktor graf  
  
  for každou proměnnou  $X \in F$  do  
    for sousední faktor  $f$  do  
       $\mu_{X \rightarrow f}(X) \leftarrow 1$   
       $\mu_{f \rightarrow X}(X) \leftarrow 1$   
    end for  
  end for  
end function  
  
function MESSAGE-TO-VAR( $f, v$ )  
   $f$  – zdrojový faktor  
   $v$  – cílová proměnná  
  
   $\mathbf{X} \leftarrow \text{Dom}(f)$   
   $\mu_{f \rightarrow v}(v) \leftarrow \sum_{\mathbf{X} \setminus v} f(\mathbf{X}) \prod_{u \in ne(f) \setminus v} \mu_{u \rightarrow f}(u)$   
end function  
  
function MESSAGE-TO-FACTOR( $v, f$ )  
   $v$  – zdrojová proměnná  
   $f$  – cílový faktor  
  
   $\mu_{v \rightarrow f}(v) \leftarrow \prod_{g \in ne(v) \setminus f} \mu_{g \rightarrow v}(v)$   
end function
```

---

Přitom se zprávy zas tak často nemění. Častou optimalizací je pro každý vrchol si pamatovat součin všech jeho zpráv

$$b(v) = \begin{cases} \prod_{u \in ne(v)} \mu_{u \rightarrow v}(v) & v \text{ je proměnná} \\ f_v(\mathbf{X}) \prod_{u \in ne(v)} \mu_{u \rightarrow v}(u) & v \text{ je faktor} \end{cases} \quad (2.29)$$

Pak můžeme při odesílání zprávy z vrcholu  $v$  do vrcholu  $u$  pouze  $b(v)$  vydělit zprávou  $\mu_{u \rightarrow v}$ , pro faktory marginalizovat, a zpráva je připravena k odeslání.  $b(v)$  můžeme aktualizovat po výběru vrcholu  $v$  pro posílání zpráv, anebo po každém přijetí zprávy.

Pro pozorované proměnné je třeba metodu MESSAGE-TO-FACTOR upravit tak, aby pouze posílala pozorovanou hodnotu.

Implementace Loopy Belief Algoritmu i se strategiemi pro výběr vrcholů bude popsána v kapitole ??.

## 2.3 Propagace s aproximovanými zprávami

V předchozí sekci byla faktorizována sdružená pravděpodobnost a tak došlo k zjednodušení inference. Mezi jednotlivými vrcholy byly stále posílány exaktní zprávy. V této sekci se zaměříme na inferenci v modelech, kde není možné spočítat zprávy exaktně a je třeba je aproximovat. Tento problém nastává u některých modelů se spojitými náhodnými proměnnými.

Předpokládáme, že máme pravděpodobnostní grafický model, reprezentující sdruženou pravděpodobnost dat a pozorování pomocí součinu faktorů.

$$P(\mathbf{X}, \mathbf{E}) = \prod_i f_i(\mathbf{X}) \quad (2.30)$$

Nás zajímá aposteriorní distribuce  $P(\mathbf{X} \mid \mathbf{E})$  pro zjištění stavu, stejně tak jako pravděpodobnost pozorování  $P(\mathbf{E})$  pro normalizaci. Aposteriorní distribuci vyjádříme ze sdružené.

$$P(\mathbf{X} \mid \mathbf{E}) = \frac{1}{P(\mathbf{E})} \prod_i f_i(\mathbf{X}) \quad (2.31)$$

a pravděpodobnost pozorování je dána

$$P(\mathbf{E}) = \int \prod_i f_i(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (2.32)$$

Pro aproximativní inferenci ukážeme algoritmus Expectation propagation (EP) [?]. Vytvoříme aproximaci aposteriorní distribuce, která je také dána součinem fak-

torů

$$q(\mathbf{X}) = \frac{1}{Z} \prod_i \tilde{f}_i(\mathbf{X}), \quad (2.33)$$

kde každý faktor  $\tilde{f}_i$  je aproximace odpovídající skutečnému faktoru  $f_i$  a faktor  $\frac{1}{Z}$  je normalizační konstanta. Aproximované faktory musíme zkonstruovat tak, abychom byli schopni provádět inferenci.

Pro měření vzdálenosti aproximovaného rozdělení od skutečného používáme Kullback-Leiblerovu divergenci (KL) [?]. KL divergence, také známá jako relativní entropie, mezi dvěma pravděpodobnostními rozděleními  $p(x)$  a  $q(x)$  je

$$KL(p||q) = \int p(x) \log \left( \frac{p(x)}{q(x)} \right) dx. \quad (2.34)$$

Divergence splňuje tři vlastnosti:

1.  $KL(p||p) = 0$ ,
2.  $KL(p||q) = 0$  právě tehdy když  $p = q$ ,
3.  $KL(p||q) > 0$  pro všechna  $p, q$ .

### 2.3.1 Rodina exponenciálních rozdělení

{sec:expfa}

Rodina exponenciálních rozdělení [?] přes  $\mathbf{X}$ , dáno parametry  $\boldsymbol{\eta}$  je definována jako množina distribucí ve tvaru

$$P(\mathbf{X} | \boldsymbol{\eta}) = h(\mathbf{X})g(\boldsymbol{\eta}) \exp(\boldsymbol{\eta}^T u(\mathbf{X})), \quad (2.35) \quad \{\text{eq:gj}\}$$

kde  $\mathbf{X}$  jsou náhodné proměnné, které mohou být diskrétní nebo spojitě,  $\boldsymbol{\eta}$  jsou nazývány přirozené parametry rozdělení,  $u(\mathbf{X})$  je funkce  $\mathbf{X}$ . Funkce  $g(\boldsymbol{\eta})$  může být interpretována jako koeficient, který zajišťuje, že je distribuce normalizována a tedy splňuje

$$g(\boldsymbol{\eta}) \int h(\mathbf{X}) \exp(\boldsymbol{\eta}^T u(\mathbf{X})) d\mathbf{X} = 1 \quad (2.36) \quad \{\text{eq:g1}\}$$

Výhody distribucí z exponenciální rodiny si ukážeme na KL divergenci. Necht počítáme divergenci  $KL(p||q)$ , kde  $p(\mathbf{X})$  je zafixovaná distribuce a  $q(\mathbf{X})$  je distribuce z exponenciální rodiny. Pokud zapíšeme KL divergenci jako funkci  $\boldsymbol{\eta}$ , tak dostaneme

$$KL(p||q) = -\log g(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\eta}^T \mathbb{E}_{p(\mathbf{X})}[u(\mathbf{X})] + \text{const}. \quad (2.37)$$

KL divergenci můžeme minimalizovat tak, že nastavíme první derivaci podle  $\boldsymbol{\eta}$  rovnou nule, z čehož dostaneme

$$-\nabla \log g(\boldsymbol{\eta}) = \mathbb{E}_{p(\mathbf{X})}[u(\mathbf{X})]. \quad (2.38) \quad \{\text{eq:kl}\}$$

Nyní se musíme podívat na  $-\nabla \log g(\boldsymbol{\eta})$ . Vezmeme derivaci obou stran (2.36) podle  $\boldsymbol{\eta}$ . Získáme

$$\begin{aligned} \nabla g(\boldsymbol{\eta}) \int h(\mathbf{X}) \exp(\boldsymbol{\eta}^T u(\mathbf{X})) d\mathbf{X} \\ + g(\boldsymbol{\eta}) \int h(\mathbf{X}) \exp(\boldsymbol{\eta}^T u(\mathbf{X})) u(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Přeuspořádáním a znova použitím (2.35) a (2.36) získáme

$$-\frac{1}{g(\boldsymbol{\eta})} \nabla g(\boldsymbol{\eta}) = \int h(\mathbf{X}) \exp(\boldsymbol{\eta}^T u(\mathbf{X})) u(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \mathbb{E}[u(\mathbf{X})]. \quad (2.40)$$

Ve výsledku získáváme

$$-\nabla \log g(\boldsymbol{\eta}) = \mathbb{E}[u(\mathbf{X})] \quad (2.41) \quad \{\text{eq:ge}\}$$

Nový poznatek o funkci  $g(\boldsymbol{\eta})$  z (2.41) můžeme substituovat do (2.38) a získáme

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{X})}[u(\mathbf{X})] = \mathbb{E}_{p(\mathbf{X})}[u(\mathbf{X})], \quad (2.42) \quad \{\text{eq:ee}\}$$

z čehož vidíme, že pro minimalizaci KL divergence nám stačí najít parametry rozdělení  $q(\mathbf{X})$  tak, aby mělo stejné očekávané statistiky jako  $p(\mathbf{X})$ .

### 2.3.2 Expectation Propagation

{sec:ep}

Expectation propagation je algoritmus založený na aproximaci aposteriorní distribuce součinem aproximovaných faktorů

$$q(\mathbf{X}) = \frac{1}{Z} \prod_i \tilde{f}_i(\mathbf{X}). \quad (2.43)$$

Z praktických důvodů uvedených v předchozí sekci jsou aproximované faktory z exponenciální rodiny. Díky tomu bude jejich součin také z exponenciální rodiny.

Aproximující distribuci bychom chtěli nalézt pomocí minimalizace KL divergence mezi skutečnou a aproximovanou distribucí.

$$KL(p||q) = KL\left(\frac{1}{p(\mathbf{E})} \prod_i f_i(\mathbf{X}) \left\| \frac{1}{Z} \prod_i \tilde{f}_i(\mathbf{X})\right.\right) \quad (2.44)$$

Pro počítání KL divergence ovšem potřebujeme umět počítat se skutečnou pravděpodobností a když už s ní umíme efektivně počítat, proč ztrácet čas s aproximací.

Další možností je aproximovat jednotlivé faktory, díky tomu bychom v jednom kroku našli aproximace pro všechny faktory a měli bychom hotovo. Naším cílem

je ale nalézt nejlepší aproximaci celé aposteriorní pravděpodobnosti a to není v tomto případě zaručeno.

Expectation propagation sice aproximuje jednotlivé faktory, ale vždy v kontextu všech ostatních [?]. Nejprve jsou všechny inicializovány a pak jsou procházeny jeden po druhém a každý je aktualizován. Tento přístup je podobný metodám, které byly ukázány v předešlých sekcích. Předpokládejme, že chceme aktualizovat faktor  $\tilde{f}_j(\mathbf{X})$ . Nejprve odstraníme faktor z produktu  $\prod_{i \neq j} \tilde{f}_i(\mathbf{X})$ . Následně nalezneme novou hodnotu pro faktor  $\tilde{f}_j$  tak, aby pravděpodobnostní rozložení

$$q^{new}(\mathbf{X}) \propto \tilde{f}_j(\mathbf{X}) \prod_{i \neq j} \tilde{f}_i(\mathbf{X}) \quad (2.45) \quad \{\text{eq:qnew}\}$$

bylo co nejbližší

$$f_j(\mathbf{X}) \prod_{i \neq j} \tilde{f}_i(\mathbf{X}). \quad (2.46)$$

Všechny faktory  $i \neq j$  necháváme zafixované. Díky tomu zajistíme, že nová aproximace faktoru je nejpřesnější v oblastech, které mají největší aposteriorní pravděpodobnost definovanou zbývajících faktory.

Odstranění faktoru  $\tilde{f}_j(\mathbf{X})$  z aktuální aproximace aposteriorní distribuce provedeme vytvořením nenormalizované distribuce

$$q^{\setminus j}(\mathbf{X}) = \frac{q(\mathbf{X})}{\tilde{f}_j(\mathbf{X})} \quad (2.47)$$

Mohli bychom počítat  $q^{\setminus j}(\mathbf{X})$  jako součin všech faktorů kromě  $j$ , ale v praxi je dělení rychlejší. Této nenormalizované distribuci se říká cavity distribuce. Její kombinací se skutečným faktorem  $f_j(\mathbf{X})$  dostaneme distribuci

$$\frac{1}{Z_j} f_j(\mathbf{X}) q^{\setminus j}(\mathbf{X}), \quad (2.48) \quad \{\text{eq:aprox}\}$$

kde  $Z_j$  je normalizační konstanta, dána

$$Z_j = \int f_j(\mathbf{X}) q^{\setminus j}(\mathbf{X}) d\mathbf{X}. \quad (2.49) \quad \{\text{eq:zj}\}$$

Nyní můžeme nalézt novou hodnotu pro faktor  $\tilde{f}_j$  minimalizací KL divergence

$$KL\left(\frac{f_j(\mathbf{X}) q^{\setminus j}(\mathbf{X})}{Z_j} \parallel q^{new}(\mathbf{X})\right). \quad (2.50)$$

To uděláme jednoduše použitím poznatku z (2.42), který říká, že nám stačí najít parametry  $q^{new}$  tak, aby postačující statistiky odpovídali momentům aproximovaného rozdělení (2.48).

Z nalezené aproximace  $q^{new}$  pak získáme novou hodnotu faktoru  $\tilde{f}_j$  z (2.45) vydělením zbývajících faktorů

$$\tilde{f}_j(\mathbf{X}) = K \frac{q^{new}(\mathbf{X})}{q^{\setminus j}(\mathbf{X})} \quad (2.51) \quad \{\text{eq:newfj}\}$$

Koeficient  $K$  získáme tak, že obě strany (??) vynásobíme  $q^{\setminus j}(\mathbf{X})$  a zintegrováním, čímž získáme

$$K = \int \tilde{f}_j(\mathbf{X}) q^{\setminus j}(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (2.52)$$

použili jsme navíc toho, že  $q^{new}(\mathbf{X})$  je normalizovaná distribuce. ~~Hodnota Pro nalezení hodnoty  $K$  pak může být nalezena srovnáním opět použijeme srovnání momentů, v tomto případě nultých momentů:~~

$$\int \tilde{f}_j(\mathbf{X}) q^{\setminus j}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \int f_j(\mathbf{X}) q^{\setminus j}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (2.53)$$

~~Z čehož zjistíme Vidíme, že  $K = Z_j$  a tedy může být nalezeno pravá strana je rovna  $Z_j$  a tedy platí rovnost  $K = Z_j$ . Díky tomu můžeme  $K$  nalézt přímo z výpočtem integrálu (2.49). Bez tohoto poznatku bychom se dostali do problému, protože pro výpočet  $K$  by bylo potřeba  $\tilde{f}_j$ , které ale bez  $K$  neznáme.~~

Expectation Propagation je popsán v algoritmu ???. Dokud aproximované rozdělení nekonverguje, vybíráme jednotlivé faktory a aktualizujeme je podle popsaného postupu.

V praxi je třeba provést několik iterací, a v každé aktualizovat všechny faktory. Stejně jako u LBP zde nemáme žádnou garanci, že bude algoritmus konvergovat. Pro aproximace  $q(\mathbf{X})$  v exponenciální rodině, pokud iterace konverguje, pak nalezené řešení je stacionární bod specifické potenciální energie [?].



---

**Algoritmus 3** Expectation propagation

---

{alg:ep}

Inicializujeme všechny aproximativní faktory  $\tilde{f}_i(\mathbf{X})$  na neinformativní.  
Inicializujeme aposteriorní aproximace nastavením:

$$q(\mathbf{X}) \propto \prod_i \tilde{f}_i(\mathbf{X})$$

**repeat**

Vyber faktor  $\tilde{f}_j(\mathbf{X})$ , který bude aktualizován.

Odeber  $\tilde{f}_j(\mathbf{X})$  z aposteriorní distribuce vydělením:

$$q^{\setminus j}(\mathbf{X}) = \frac{q(\mathbf{X})}{\tilde{f}_j(\mathbf{X})}$$

Vypočítej novou aposteriorní distribuci nastavením momentů  $q^{new}$  na hodnotu momentů  $q^{\setminus j}(\mathbf{X})\tilde{f}_j(\mathbf{X})$ , včetně vyhodnocení normalizační konstanty

$$Z_j = \int q^{\setminus j}(\mathbf{X})\tilde{f}_j(\mathbf{X})d\mathbf{X}$$

Nastav novou hodnotu faktoru:

$$\tilde{f}_j(\mathbf{X}) = Z_j \frac{q^{new}(\mathbf{X})}{q^{\setminus j}(\mathbf{X})}$$

**until** konvergence

Spočítej aproximaci pozorování:

$$p(\mathbf{E}) \simeq \int \prod_i \tilde{f}_i(\mathbf{X})d\mathbf{X}$$

---

### 3. Učení parametrů

{ch:ep}

Představené metody v minulé kapitole fungují pro modely, kde máme nastavené parametry faktorů. V této kapitole si představíme grafický model pro diskrétní proměnné, u kterého jsou i parametry faktorů proměnné a je možné pro ně použít inferenci. Díky tomu bude možné nalézt aposteriorní distribuci pro tyto parametry a tedy je naučit podle dat.

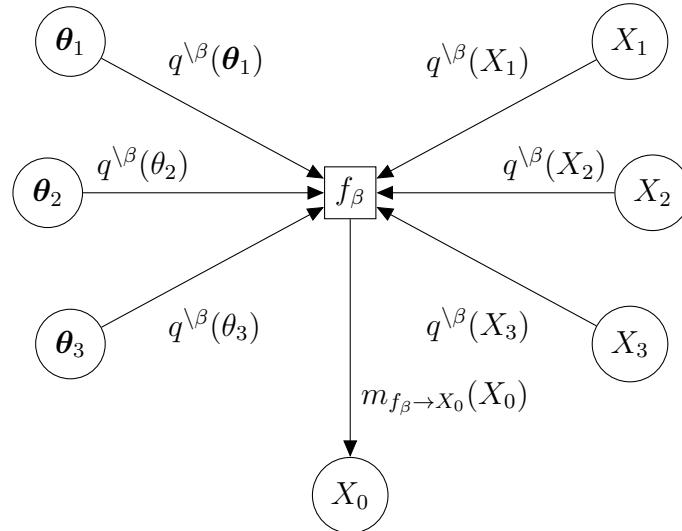
#### 3.1 Grafický model

Model se skládá z faktorů a proměnných. Nechť máme vybraný faktor  $f_\beta$ , tento faktor je spojený s několika proměnnými  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N_x})$  a množinami parametrů  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{N_\theta})$ . Tento faktor reprezentuje podmíněnou pravděpodobnost:

$$f_\beta(\mathbf{x}, \Theta) = p(x_0 | x_1, \dots, x_{N_x}; \Theta)$$

Rodičovské proměnné  $x_1, \dots, x_{N_x}$  označujeme jako  $\mathbf{x}'$ . Vektor  $\mathbf{x}'$  určuje, která množina parametrů bude použita. Protože množiny parametrů jsou číslovány  $1, \dots, N_\theta$  a rodičovské proměnné  $1, \dots, N_x$ , musí být pro vybrání správné množiny parametrů použito mapování  $\rho(\mathbf{x}')$ . Faktor pak může být zapsán zkráceně:

$$f_\beta(\mathbf{x}, \Theta) = p(x_0 | x_1, \dots, x_{N_x}; \Theta) = \theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0}$$



Obrázek 3.1: Vybraný faktor  $f_\beta$  pro aktualizaci při učení parametrů.

## 3.2 Výpočet marginálních pravděpodobností

Pro výpočet sdružené pravděpodobnosti používáme plně faktorizovanou distribuci. Pro každou proměnnou anebo množinu parametrů je její marginální pravděpodobnost rovna součinu zpráv přicházejících z faktorů, které jsou s danou proměnnou nebo množinou parametrů propojeny. Pro daný faktor  $f_\beta$  je neúplná distribuce  $q^{\setminus\beta}(x_i)$ , popř.  $q^{\setminus\beta}(\theta_i)$  rovna součinu zpráv ze všech ostatních faktorů do  $x_i$ , popř.  $\theta_i$ . Aproximovaná marginální pravděpodobnost proměnné je pak součinem cavity distribuce a zprávy z faktoru:

$$q(x_i) = q^{\setminus\beta}(x_i)m_{f_\beta \rightarrow x_i}(x_i)$$

$$q(\theta_i) = q^{\setminus\beta}(\theta_i)m_{f_\beta \rightarrow \theta}(\theta_i)$$

Tyto neúplné distribuce jsou právě zprávy z proměnné, popř. množiny parametrů do faktoru.

$$m_{x_i \rightarrow f_\beta} = q^{\setminus\beta}(x_i)$$

$$m_{\theta_i \rightarrow f_\beta} = q^{\setminus\beta}(\theta_i)$$

### 3.2.1 Marginální pravděpodobnost proměnných

Pokud chceme aktualizovat hodnotu naší aproximace marginální pravděpodobnosti, je třeba minimalizovat její vzdálenost od skutečné marginální pravděpodobnosti:

$$p^*(\tilde{x}_j) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x_j} \int_{\Theta} \prod_i q^{\setminus\beta}(x_i) \prod_l q^{\setminus\beta}(\theta_l) f_\beta(\mathbf{x}; \Theta) \quad (3.1) \quad \{\text{eq:1}\}$$

$$= \sum_{\mathbf{x} \setminus x_j} \prod_i q^{\setminus\beta}(x_i) \int_{\theta_{\rho(\mathbf{x}')}} q^{\setminus\beta}(\theta_{\rho(\mathbf{x}')} ) \theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0} \quad (3.2) \quad \{\text{eq:2}\}$$

$$= \sum_{\mathbf{x} \setminus x_j} \prod_i q^{\setminus\beta}(x_i) \mathbb{E}_{q^{\setminus\beta}}(\theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0}) \quad (3.3) \quad \{\text{eq:3}\}$$

Rovnost (??) vychází z definice výpočtu marginální pravděpodobnosti ze sdružené pravděpodobnosti. V (??) byla použita definice faktoru, z integrálu byly vytaženy členy, které neobsahují  $\Theta$  a nakonec bylo využito toho, že pro množiny parametrů, které nejsou spojeny s faktorem  $f_\beta$ , je jejich jejich cavity distribuce rovná marginální distribuci a tedy  $\int_{\theta_i} q(\theta_i) = 1$ . V (??) byla použita definice očekávané hodnoty.

Marginální pravděpodobnost proměnné  $x_i$  tedy je

$$p^*(\tilde{x}) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x_j} \prod_i q^{\setminus \beta}(x_i) \mathbb{E}_{q^{\setminus \beta}}(\theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0}) \quad (3.4)$$

Tady docházíme k výsledku, který je velmi podobný výpočtu marginální pravděpodobnosti v Loopy Belief Propagation algoritmu.

Zprávu z faktoru  $f_\beta$  do vrcholu  $x_j$  pak získáme vydělením zprávy z  $x_j$  z marginální pravděpodobnosti.

$$m_{f_\beta \rightarrow x_j}(x_j) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x_j} \prod_{i \neq j} q^{\setminus \beta}(x_i) \mathbb{E}_{q^{\setminus \beta}}(\theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0}) \quad (3.5) \quad \{\text{eq:msgfro}\}$$

### 3.2.2 Marginální pravděpodobnost parametrů

Pro množiny parametrů se jejich marginální pravděpodobnost spočítá podobně jako pro proměnné.

$$p^*(\tilde{\theta}_j) = \sum_{\mathbf{x}} \int_{\Theta: \theta_j = \tilde{\theta}_j} \prod_i q^{\setminus \beta}(x_i) \prod_l q^{\setminus \beta}(\theta_l) f_\beta(\mathbf{x}; \Theta) \quad (3.6) \quad \{\text{eq:ep:the}\}$$

$$= \sum_{l \neq j} \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = l} \prod_i q^{\setminus \beta}(x_i) \int_{\Theta: \theta_j = \tilde{\theta}_j} \prod_k q^{\setminus \beta}(\theta_k) \theta_{l, x_0} + \quad (3.7) \quad \{\text{eq:ep:the}\}$$

$$+ \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = j} \prod_i q^{\setminus \beta}(x_i) \int_{\Theta: \theta_j = \tilde{\theta}_j} \prod_k q^{\setminus \beta}(\theta_k) \tilde{\theta}_{j, x_0} \\ = \left[ \sum_{l \neq j} \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = l} \prod_i q^{\setminus \beta}(x_i) \mathbb{E}_{q^{\setminus \beta}(\theta_l)}(\theta_{l, x_0}) \right] q^{\setminus \beta}(\tilde{\theta}_j) + \quad (3.8) \quad \{\text{eq:ep:the}\}$$

$$+ \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = j} \prod_i q^{\setminus \beta}(x_i) \tilde{\theta}_{j, x_0} q^{\setminus \beta}(\tilde{\theta}_j) \\ = w_0 q^{\setminus \beta}(\tilde{\theta}_j) + \sum_k w_k \tilde{\theta}_{j, k} q^{\setminus \beta}(\tilde{\theta}_j), \quad (3.9) \quad \{\text{eq:ep:the}\}$$

kde

$$w_0 = \sum_{l \neq j} \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = l} \prod_i q^{\setminus \beta}(x_i) \mathbb{E}_{q^{\setminus \beta}(\theta_l)}(\theta_{l, x_0}) \quad (3.10)$$

$$w_k = \sum_{\mathbf{x}: \rho(\mathbf{x}') = j, x_0 = k} \prod_i q^{\setminus \beta}(x_i) \quad (3.11)$$

Opět vycházíme z výpočtu marginální pravděpodobnosti podle definice. V rovnici (??) jsme rozdělili sumu přes  $\mathbf{x}$  na ty, pro které se ve faktoru použije množina parametrů  $\tilde{\theta}_j$  a na ty ostatní. Také jsme z integrálu vytknuli součin cavity

distribucí pro proměnné. V dalším kroku (??) jsme opět použili toho, že integrál přes  $\Theta$  je ve skutečnosti několik integrálů přes jednotlivé množiny parametrů. A tedy je můžeme vložit mezi jednotlivé členy produktu cavity distribucí pro množiny parametrů. Ve výsledku získáme  $q^{\setminus\beta}(\tilde{\theta}_j) \int_{\theta_l} q^{\setminus\beta}(\theta_l) \theta_{l,x_0}$  a pak zbylé členy, které zmizí.

Docházíme k vyjádření skutečné marginální pravděpodobnosti, ve které není třeba integrovat přes všechny množiny parametrů, ale stačí jen očekávaná hodnota těchto parametrů.

### 3.3 Aproximace marginálních pravděpodobností

~~Stále tu ovšem zůstává problém, že spočítat~~ Při výpočtu ~~distribuei~~ ~~distribuce~~  $q(\theta_j)$  ~~se může být příliš složité, protože stát, že~~ skutečná marginální distribuce je ~~v komplikovaném tvaru a pak je aproximace složitá na výpočet a může se odchýlovat od skutečné distribuce. Například se jedná o směs několika distribucí a ta nemusí být v obecném případě vyjádřitelná. Je tedy třeba model dále aproximovat.~~ Ideální případ je takový, kdy aproximace je stejného typu jako skutečná distribuce.

Pro zjednodušení ~~výpočtu jsou výpočtů, jak se dále ukáže, zvolíme~~ zprávy z faktoru do množiny parametrů,  $m_{f \rightarrow \theta_i}(\theta_i)$ , ve tvaru ~~Dirichletovského rozdělení~~ Dirichletovské distribuce s parametry  $\alpha_{f \rightarrow \theta_i}$ :

$$m_{f \rightarrow \theta_i}(\theta_i) = \text{Dir}(\theta_i; \alpha_{f \rightarrow \theta_i}) = \frac{\Gamma(\sum_j \alpha_{f \rightarrow \theta_i, j})}{\prod_j \Gamma(\alpha_{f \rightarrow \theta_i, j})} \prod_j \theta_{i,j}^{\alpha_{f \rightarrow \theta_i, j} - 1} \quad (3.12)$$

kde  $\Gamma$  je Gamma funkce (zobecnění faktoriálu):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (3.13)$$

~~Dirichletovské rozdělení bylo zvoleno~~ Dirichletovská distribuce byla zvolena, protože má důležité vlastnosti pro součin, které budou využity dále pro výpočet ~~cavity-neúplné~~ distribuce a celkové aproximace. Pokud označíme aproximované faktory indexem  $\beta$  a každý bude mít vlastní parametry  $\alpha_{f\beta \rightarrow \theta_i}$ , tak výsledná

aproximace bude tvaru:

$$q(\boldsymbol{\theta}_i) \propto \prod_{\beta} m_{f_{\beta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_i}(\boldsymbol{\theta}_i) \quad (3.14)$$

$$\propto \prod_{\beta} \prod_j \theta_{i,j}^{\alpha_{f_{\beta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_i, j} - 1} \quad (3.15)$$

$$\propto \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}_i; \sum_{\beta} \boldsymbol{\alpha}_{f_{\beta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_i} - (|\beta| - 1)\mathbf{1}) \quad (3.16)$$

$$= \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}_i; \boldsymbol{\alpha}_i) \quad (3.17) \quad \{\text{eq:ep:ap}$$

kde  $\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{\beta} \boldsymbol{\alpha}_{f_{\beta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_i} - (|\beta| - 1)\mathbf{1}$ .

Při aktualizaci faktoru  $\tilde{\beta}$  tedy cavity distribuce bude:

$$q^{\setminus \tilde{\beta}}(\boldsymbol{\theta}_i) \propto \prod_{\beta \neq \tilde{\beta}} m_{f_{\beta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_i}(\boldsymbol{\theta}_i) \quad (3.18)$$

$$\propto \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}_i; \boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_{f_{\tilde{\beta}} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_i} + \mathbf{1}) \quad (3.19)$$

Naším cílem je nalézt parametry  $\boldsymbol{\alpha}^*$  aproximované marginální pravděpodobnosti (??), které minimalizují vzdálenost od skutečné marginální pravděpodobnosti (??). Pro měření vzdálenosti mezi dvěma pravděpodobnostními rozloženími se používá Kullback-Leiblerova divergence:

$$KL(p||q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \left( \frac{p(x)}{q(x)} \right) dx \quad (3.20)$$

Pro nalezení minima použijeme algoritmus ~~Expectation-Propagation~~ srovnání momentů a budeme minimalizovat  $KL(p^*||q)$ .

Pokud se podíváme na skutečnou marginální pravděpodobnost  $p^*(\boldsymbol{\theta}_i)$ , zjistíme, že můžeme některé její členy upravit. Využijeme také vlastnosti gamma funkce  $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ .

$$w_j \theta_j \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha}) \propto w_j \theta_j \frac{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \prod_i \theta_i^{\alpha_i-1} \quad (3.21) \quad \{\text{eq:4}\}$$

$$\propto w_j \frac{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \theta_j^{\alpha_j} \prod_{i \neq j} \theta_i^{\alpha_i-1} \quad (3.22)$$

$$\propto w_j \frac{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \frac{\Gamma(\alpha_j + 1) \prod_{i \neq j} \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(1 + \sum_i \alpha_i)} \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}_j) \quad (3.23)$$

$$\propto w_j \frac{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \frac{\alpha_j \Gamma(\alpha_j) \prod_{i \neq j} \Gamma(\alpha_i)}{(\sum_i \alpha_i) \Gamma(\sum_i \alpha_i)} \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}_j) \quad (3.24)$$

$$\propto w_j \frac{\alpha_j}{\sum_i \alpha_i} \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}_j) \quad (3.25)$$

$$(3.26)$$

Díky této úpravě lze  $p^*$  vyjádřit jako směs Dirichletovských rozdělení.

$$p^*(\boldsymbol{\theta}) = w_0^* \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha}) + \sum_j w_j^* \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}_j) \quad (3.27) \quad \{\text{eq:margin}\}$$

kde

$$w_0^* \propto w_0 \quad (3.28)$$

$$w_j^* \propto w_j \frac{\alpha_j}{\sum_i \alpha_i} \quad (3.29)$$

$$\sum_{i=0}^k w_i^* = 1 \quad (3.30)$$

Jak bylo ukázáno v sekci 2.3.1, pro minimalizaci KL divergence mezi dvěma rozděleními z exponenciální rodiny stačí, pokud se budou rovnat jejich postačující statistiky. Dokážeme jednoduše spočítat první dva momenty Dirichletovského rozdělení a tedy použijeme aproximaci a budeme počítat pouze s nimi a zbylé momenty zanedbáme. Je tedy třeba nalézt střední hodnotu a rozptyl proměnných z  $p^*(\boldsymbol{\theta})$ .

$$\mathbb{E}_{p^*}[\boldsymbol{\theta}] = \int \boldsymbol{\theta} p^*(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (3.31)$$

$$= \int \boldsymbol{\theta} (w_0^* \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha}) + \sum_j w_j^* \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}_j)) d\boldsymbol{\theta} \quad (3.32)$$

$$= w_0^* \int \boldsymbol{\theta} \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\theta} + \sum_j w_j^* \int \boldsymbol{\theta} \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}_j) d\boldsymbol{\theta} \quad (3.33)$$

$$= w_0^* \mathbb{E}_{\text{Dir}(\boldsymbol{\alpha})}[\boldsymbol{\theta}] + \sum_j w_j^* \mathbb{E}_{\text{Dir}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}_j)}[\boldsymbol{\theta}] \quad (3.34)$$

Střední hodnotu proměnných  $\boldsymbol{\theta}$  podle rozdělení  $p^*$  lze tedy spočítat jako vážený součet středních hodnot  $\boldsymbol{\theta}$  podle jednotlivých Dirichletovských distribucí, z kterých se  $p^*$  skládá.

První moment tedy máme spočítaný, pro výpočet rozptylu můžeme využít definici:

$$\text{Var}[\boldsymbol{\theta}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}^2] - \mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}]^2 \quad (3.35)$$

Chybí nám tedy ještě výpočet střední hodnoty druhé mocniny proměnné  $\boldsymbol{\theta}$  podle  $p^*$ . Můžeme ji vyjádřit z definice střední hodnoty.

$$\mathbb{E}_{p^*}[\boldsymbol{\theta}^2] = \int \boldsymbol{\theta}^2 p^*(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (3.36)$$

$$= w_0^* \int \boldsymbol{\theta}^2 \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\theta} + \sum_j w_j^* \int \boldsymbol{\theta}^2 \text{Dir}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}_j) d\boldsymbol{\theta} \quad (3.37)$$

$$= w_0^* \mathbb{E}_{\text{Dir}(\boldsymbol{\alpha})}[\boldsymbol{\theta}^2] + \sum_j w_j^* \mathbb{E}_{\text{Dir}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}_j)}[\boldsymbol{\theta}^2] \quad (3.38)$$

Opět získáváme vážený součet středních hodnot podle Dirichletovských rozdělení. Střední hodnotu druhé mocniny proměnné podle Dirichletovského rozdělení lze opět jednoduše odvodit z definice.

$$\mathbb{E}_{\text{Dir}(\boldsymbol{\alpha})}[x_i^2] = \int x_i^2 \text{Dir}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{x} \quad (3.39)$$

$$= \int x_i^2 \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\prod_{j=1}^N \Gamma(\alpha_j)} \prod_{j=1}^N x_j^{\alpha_j-1} d\mathbf{x} \quad (3.40)$$

Nyní jsme v podobné situaci jako v (??). Budeme postupovat stejně, vyjádříme nové Dirichletovské rozdělení.



$$\mathbb{E}_{Dir(\boldsymbol{\alpha})}[x_i^2] = \int \frac{\Gamma(\alpha_0 + 2)\alpha_i(\alpha_i + 1)}{\alpha_0(\alpha_0 + 1)\Gamma(\alpha_i + 2) \prod_{j \neq i} \Gamma(\alpha_j)} x_i^{\alpha_i+1} \prod_{j \neq i} x_j^{\alpha_j-1} d\mathbf{x} \quad (3.41)$$

$$= \frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)}{\alpha_0(\alpha_0 + 1)} \int \frac{\Gamma(\beta_0)}{\prod_i \Gamma(\beta_i)} \prod_i x_i^{\beta_i-1} d\mathbf{x} \quad (3.42)$$

$$= \frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)}{\alpha_0(\alpha_0 + 1)} \int Dir(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}) d\mathbf{x} \quad (3.43)$$

$$= \frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)}{\alpha_0(\alpha_0 + 1)} \quad (3.44)$$

Vyjádřili jsme  $\Gamma(\alpha_0)$  a  $\Gamma(\alpha_i)$  s pomocí  $\Gamma(\alpha_0 + 2)$  a  $\Gamma(\alpha_i + 2)$

$$\Gamma(\alpha_0) = \frac{\Gamma(\alpha_0 + 2)}{\alpha_0(\alpha_0 + 1)} \quad (3.45)$$

$$\Gamma(\alpha_i) = \frac{\Gamma(\alpha_i + 2)}{\alpha_i(\alpha_i + 1)} \quad (3.46)$$

Následně jsme vytvořili nové parametry  $\boldsymbol{\beta}$ :

$$\beta_i = \alpha_i + 2 \quad (3.47)$$

$$\beta_{j \neq i} = \alpha_j \quad (3.48)$$

$$\beta_0 = \sum_i \beta_i \quad (3.49)$$

Nyní tedy dokážeme spočítat  $\mathbb{E}_{p^*}[\boldsymbol{\theta}]$  a  $\mathbb{E}_{p^*}[\boldsymbol{\theta}^2]$ . Parametry aproximovaného rozdělení nalezneme následovně

$$\frac{\mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}[X_1^2]}{\mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2} = \frac{\frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{\alpha_0(\alpha_0+1)}}{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{\alpha_0(\alpha_0+1)} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2}} \quad (3.50) \quad \{\text{eq:5}\}$$

$$= \frac{\frac{\alpha_1(\alpha_0+1) - \alpha_1(\alpha_1+1)}{\alpha_0(\alpha_0+1)}}{\frac{\alpha_0\alpha_1(\alpha_1+1) - \alpha_1^2(\alpha_0+1)}{\alpha_0^2(\alpha_0+1)}} \quad (3.51)$$

$$= \frac{\alpha_0\alpha_1(\alpha_0 - \alpha_1)}{\alpha_1(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0 - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_1)} \quad (3.52)$$

$$= \alpha_0 \quad (3.53)$$

$$\alpha_i = \mathbb{E}[X_i]\alpha_0 \quad (3.54) \quad \{\text{eq:6}\}$$

Z rovnice (??) vypočítáme sumu všech parametrů  $\alpha_0$ . Protože střední hodnota proměnné z Dirichletovského rozdělení je právě  $\frac{\alpha_i}{\alpha_0}$ , tak jednotlivé parametry získáme z rovnice (??).

### 3.4 Algoritmus

V algoritmu ?? je předveden algoritmus Expectation Propagation upravený pro potřeby učení parametrů.

---

**Algoritmus 4** Expectation Propagation pro učení parametrů

---

{alg:ep}

Parametry zpráv z faktoru  $\beta$  do množiny parametrů  $\theta_i$  označíme  $\alpha_{f_\beta \rightarrow \theta_i}$ .

Parametry zpráv z množiny parametrů  $\theta_i$  do faktoru  $\beta$  označíme  $\alpha_{\theta_i \rightarrow f_\beta}$ .

Parametry marginální distribuce množiny parametrů  $\theta_i$  označíme  $\alpha_i$ .

**init**

Nastav zprávy mezi faktory a proměnnými na 1.

Nastav parametry  $\alpha_{f_\beta \rightarrow \theta_i}$  na 1.

Nastav parametry  $\alpha_i$  na apriorní hodnotu.

**end init**

**repeat**

Vyber faktor  $f_{\tilde{\beta}}$ , který se bude aktualizovat.

Spočítej všechny zprávy z parametrů:

**for** každý parametr  $\theta_i$  spojený s faktorem  $f_{\tilde{\beta}}$  **do**

Parametry zprávy z  $\theta_i$  do  $f_{\tilde{\beta}}$ :  $\alpha_{\theta_i \rightarrow f_{\tilde{\beta}}} = \alpha_i - \alpha_{f_{\tilde{\beta}} \rightarrow \theta_i} + 1$ .

**end for**

Aktualizuj zprávy z faktoru do proměnných:

**for** každou proměnnou  $X_i$ , spojenou s faktorem  $f_{\tilde{\beta}}$  **do**

Zpráva z  $f_{\tilde{\beta}}$  do  $X_i$  podle (??):

$$m_{f_{\tilde{\beta}} \rightarrow x_j} = \sum_{\mathbf{x}: x_j = \tilde{x}_j} \mathbb{E}_{q^{\setminus}(\theta_{\rho(\mathbf{x}'), x_0})} \prod_{i \neq j} q^{\setminus}(x_i)$$

**end for**

Aktualizuj marginální pravděpodobnost parametrů:

**for** každý parametr  $\theta_i$  spojený s faktorem  $f_{\tilde{\beta}}$  **do**

Spočítej parametry  $\alpha_i^*$  pro Dirichletovské rozdělení, které nejlépe aproximuje cílovou marginální distribuci (??). Metoda popsána v předchozí sekci.

Parametry zprávy z  $f_{\tilde{\beta}}$  do  $\theta_i$ :

$$\alpha_{f_{\tilde{\beta}} \rightarrow \theta_i} = \alpha_i^* - \alpha_{\theta_i \rightarrow f_{\tilde{\beta}}} + 1$$

Aktualizuj parametry marginální distribuce  $q(\theta_i)$

$$\alpha_i = \alpha_i^* = \alpha_{f_{\tilde{\beta}} \rightarrow \theta_i} + \alpha_{\theta_i \rightarrow f_{\tilde{\beta}}}$$

**end for**

**for** každou proměnnou  $X_i$ , spojenou s faktorem  $f_{\tilde{\beta}}$  **do**

Aktualizuj zprávy z proměnných do faktoru:

$$q^{\setminus}(x_i) = \prod_{\beta \neq \tilde{\beta}} m_{f_\beta \rightarrow x_i}(x_i)$$

**end for**

**until** konvergence

---

## 4. Implementace

{ch:kap4}

V předchozích kapitolách byly popsány teoretické základy nutné pro implementaci inference v bayesovských sítích. V této kapitole bude popsána vytvořená knihovna pro dialogové systémy. Celá knihovna se skládá z několika vrstev, každá z nich stojí na předchozí. Nejnižší vrstva implementuje efektivní počítání s faktory. Nad ní stojí vrstva reprezentující jednotlivé vrcholy ve faktor grafu. Tato vrstva také obsahuje funkcionalitu pro počítání zpráv. Nejvyšší vrstva se zaměřuje na samotnou propagaci zpráv.

### 4.1 Diskrétní faktor

Faktor je základním stavebním kamenem. Operace s faktory musí být efektivní, pro výpočet jedné zprávy je potřeba několik násobení faktorů, následně je třeba je marginalizovat atd. Faktory je třeba úsporně reprezentovat, každá zpráva, každé pravděpodobnostní rozdělení je samo o sobě faktor. Faktory jsou reprezentovány třídou **Factor** v modulu **bn/factor.py**, která podporuje všechny základní matematické operace a také řadu specifických operací jako je marginalizace, normalizace, nastavení faktoru na pozorovanou hodnotu, vybrání nejpravděpodobnějšího přiřazení, atd.

#### 4.1.1 Reprezentace faktorů

{sec:repfa}

Každý diskretní faktor má seznam diskretních proměnných, které tvoří jeho doménu. Každá z těchto proměnných může mít jinou kardinalitu, některé proměnné jsou binární, jiné mají mnohem více hodnot. Faktor je tedy ve své podstatě multidimenzionální tabulka. Pro implementaci je tato tabulka zploštěná do jednoduchého pole.

Knihovna je napsaná v Pythonu a pro matematické operace používá knihovnu Numpy [?]. Pole pak využívají implementaci z knihovny Numpy, díky které jsou matematické operace napsané v rychlejším jazyku (C, Fortran) než je Python a jsou navíc vektorizované.

Jak je tedy možné reprezentovat multidimenzionální tabulku jednodimenzionálním polem? Proměnné jsou seřazené a pro zjednodušení můžeme předpokládat, že hodnoty proměnných jsou čísla z  $\{0, \dots, n - 1\}$ , kde  $n$  je kardinalita proměnné. Každá hodnota v poli je pak hodnotou faktoru pro nějaké přiřazení hodnot proměnným, např.  $(0, 1, 0)$ . Jednotlivé hodnoty jsou v poli seřazeny lexikograficky. Pro každou proměnnou si pamatujeme její kardinalitu a také tzv. krok. Krok určuje pro každou proměnnou o kolik hodnot v tabulce se musíme posunout,

$X$	$Y$	Hodnota
0	0	0.2
0	1	0.3
1	0	0.1
1	1	0.4

Tabulka 4.1: Příklad faktoru s dvěma proměnnými  $X$  a  $Y$ .

{tab:strip

abychom se dostali na další hodnotu této proměnné se zachováním hodnot všech následujících proměnných.

Příklad faktoru je v tabulce ?? . Doménu faktoru tvoří dvě binární proměnné  $X$  a  $Y$ , jejich kardinalita je tedy 2. Pro proměnnou  $X$  je krok 2, pro proměnnou  $Y$  je krok 1.

### 4.1.2 Operace s faktory

Implementace diskrétního faktoru obsahuje všechny základní matematické operace, ale také speciální operace, které jsou využity specificky pro pravděpodobnostní rozložení, např. marginalizace anebo normalizace. Operace jako násobení a marginalizace jsou používány při každém výpočtu zprávy a tedy je třeba je napsat tak, aby fungovaly co nejefektivněji.

Matematické operace s faktory musí fungovat ve třech různých situacích, příklady uvedeme na násobení.

1. Násobení faktoru s faktorem, oba se stejnou doménou,
2. násobení dvou faktorů, které sdílejí jen některé proměnné,
3. násobení faktoru konstantou.

Násobení faktoru konstantou je triviální, každá položka faktoru bude vynásobena konstantou. Tato operace může být jednoduše vektorizována.

Při násobení dvou faktorů se stejnou doménou je třeba pronásobit prvky se stejným přiřazením proměnných. Což znamená pronásobit hodnoty na stejných místech v poli. Opět se tedy jedná o operaci, která je jednoduše vektorizovatelná.

### Operace s různými doménami

Poslední možnost je, že se snažíme provést matematickou operaci s dvěma faktory, které ovšem nemají stejnou doménu. Pak musí výsledkem být nový faktor, jehož doména je sjednocením domén vstupních faktorů. Jednotlivé prvky nového faktoru jsou pak výsledkem aplikace operace na prvky ze vstupních faktorů, které

sdílí ohodnocení společných proměnných. Příklad s násobením:

$f_1$				$f_2$				$f_r$			
$X$	$Y$	$Hodnota$		$Y$	$Z$	$Hodnota$		$X$	$Y$	$Z$	$Hodnota$
0	0	0.2	×	0	0	0.2	=	0	0	0	0.04
0	1	0.3		0	1	0.2		0	0	1	0.04
1	0	0.1		1	0	0.2		0	1	0	0.06
1	1	0.4		1	1	0.4		0	1	1	0.12
								1	0	0	0.02
								1	0	1	0.02
								1	1	0	0.08
								1	1	1	0.16

Výsledek násobení faktorů  $f_1$  a  $f_2$  je ve faktoru  $f_r$ . Faktory sdílí pouze proměnnou  $Y$ , takže je potřeba pronásobit všechny přiřazení z  $f_1$  se všemi přiřazeními z  $f_2$ , které mají stejnou hodnotu  $Y$ . Příkladem je například přiřazení  $(0, 1)$  s hodnotou 0.3 vynásobené s hodnotou  $(1, 1)$  s hodnotou 0.4. Výsledek je uložen ve faktoru  $f_r$  s přiřazením  $(0, 1, 1)$  a správnou hodnotou  $0.3 \cdot 0.4 = 0.12$ .

### 4.1.3 Algoritmus pro operace s různými doménami

Předvedli jsme možné případy operací s faktory a ukázali, že dva ze tří jsou triviální na implementaci. Nyní představíme efektivní implementaci třetí možnosti, tedy aplikace operace na dva faktory s různými doménami (algoritmus ??).

Ze vstupních faktorů vytvoříme prázdný faktor pro výsledek. Jeho doména je sjednocením domén vstupních faktorů. Kardinalita proměnných zůstává stejná. Krok jednotlivých proměnných je třeba přepočítat. Spočítáme jej jako součin kardinalit proměnných, které následují po té aktuální. Velikost pole pro všechny hodnoty je rovna součin všech kardinalit.

Následně přistoupíme k vyplňování tabulky. Pro oba vstupní faktory si budeme udržovat index na pozici s ohodnocením proměnných, které odpovídá aktuálně vyplňovanému ohodnocení ve výsledném faktoru. Po provedení operace tyto indexy aktualizujeme.

Pokud reprezentujeme ohodnocení proměnných jako číslo (kde každá cifra může mít jinou kardinalitu), pak se přesuneme k dalšímu ohodnocení v řadě tak, že zvýšíme nejméně signifikantní cifru (proměnnou) o jedna. Může se stát, že jsme dosáhli kardinality dané proměnné a pak se musíme vrátit na ohodnocení 0 a aplikovat přesun na vyšší cifru. Opakovanou aplikací přesunu můžeme upravit všechny proměnné, příkladem je přechod z ohodnocení  $(0, 1, 1)$  na  $(1, 0, 0)$ , všechny proměnné binární. Při každé úpravě proměnné také aktualizujeme indexy ve

vstupních faktorech.

Pokud se přesunujeme na další hodnotu proměnné, tak stačí k indexu pro faktor přičíst krok upravené proměnné. Pokud je třeba se vrátit na ohodnocení 0, pak od indexu pro vstupní faktor odečteme  $(c_v - 1) \cdot s_v$ , kde  $c_v$  je kardinalita proměnné  $v$  a  $s_v$  je krok proměnné  $v$ . Pokud proměnná není obsažena v doméně faktoru, pak její krok je roven 0. Celá metoda pro aplikaci matematické operace je v algoritmu ??.

---

**Algoritmus 5** Aplikace operace na faktory s různými doménami

---

**function** APPLY-OP( $f_1, f_2, op$ )

$f_1, f_2$  – vstupní faktory

$op$  – operace

$f_r \leftarrow$  nový faktor pro výsledek operace na  $f_1$  a  $f_2$  s prázdným polem

index[ $f_1$ ]  $\leftarrow$  0

index[ $f_2$ ]  $\leftarrow$  0

přiřazení[ $v$ ]  $\leftarrow$  0 pro každou proměnnou  $v \in$  proměnné[ $f_r$ ]

**for**  $i \in \{0, \dots, \text{LENGTH}(\text{pole}[f_r]) - 1\}$  **do**

    pole[ $f_r$ ][ $i$ ] = op(pole[ $f_1$ ][index[ $f_1$ ]], pole[ $f_2$ ][index[ $f_2$ ]])

**for**  $v \in \text{REVERSED}(\text{proměnné}[f_r])$  **do**

        přiřazení[ $v$ ] += 1

**if** přiřazení[ $v$ ] = kardinalita[ $v$ ] **then**

            přiřazení[ $v$ ]  $\leftarrow$  0

            index[ $f_1$ ] -= (kardinalita[ $v$ ] - 1) · krok[ $f_1$ ][ $v$ ]

            index[ $f_2$ ] -= (kardinalita[ $v$ ] - 1) · krok[ $f_2$ ][ $v$ ]

**else**

            index[ $f_1$ ] += krok[ $f_1$ ][ $v$ ]

            index[ $f_2$ ] += krok[ $f_2$ ][ $v$ ]

**break**

**end if**

**end for**

**end for**

**return**  $f_r$

**end function**

---

{alg:apop}

Tento algoritmus pracuje přímo nad polem a jeho výhodou je, že nepotřebuje ke svému výpočtu znát jednotlivé hodnoty proměnných. Na rozdíl třeba od algoritmu, který by generoval všechny možné kombinace přiřazení a pak pomocí nich přistupoval k odpovídajícím hodnotám ve faktorech, zde pracujeme pouze s indexy do polí a používáme jednoduché matematické operace.

#### 4.1.4 Marginalizace proměnných

Další důležitou operací často používanou při počítání s faktory je marginalizace. Na vstupu je faktor a podmnožina proměnných z domény faktoru, které mají zůstat pro vysčítání zbytku. Algoritmus je podobný aplikaci matematické operace z předchozí sekce. V tomto případě procházíme původní faktor a každou hodnotu přičteme na správnou pozici v novém faktoru. Pro aktualizaci indexu v tomto případě musíme projít všechny proměnné, které mají zůstat a u každé zkontrolovat, zda-li se v následujícím kroku změní. Postup marginalizace je zapsán v algoritmus ??.

---

**Algoritmus 6** Marginalizace faktoru

---

**function** MARGINALIZE( $f, vars$ )

$f$  – vstupní faktor

$vars$  – seznam proměnných, které mají zůstat

$f_r \leftarrow$  nový faktor, obsahující pouze proměnné z  $vars$

přiřazení[ $v$ ]  $\leftarrow 0$  pro každou proměnnou  $v \in vars$

$index \leftarrow 0$

▷ Index do nového faktoru

**for**  $i \in \{0, \dots, \text{LENGTH}(\text{pole}[f]) - 1\}$  **do**

$\text{pole}[f_r][index] += \text{pole}[f][i]$

**for**  $v \in vars$  **do**

**if**  $(i + 1) \bmod \text{krok}[f][v] = 0$  **then**

            přiřazení[ $v$ ]  $+= 1$

$index += \text{krok}[f_r][v]$

**end if**

**if** přiřazení[ $v$ ] = kardinalita[ $v$ ] **then**

        přiřazení[ $v$ ]  $\leftarrow 0$

$index -= \text{kardinalita}[v] \cdot \text{krok}[f_r][v]$

**end if**

**end for**

**end for**

**return**  $f_r$

**end function**

---

{alg:marg}

## 4.2 Vrcholy faktor grafu

Předchozí sekce hovořila o práci s faktory, tato sekce se bude zabývat implementací jednotlivých vrcholů ve faktor grafu. Vrcholy se dělí na vrcholy s proměnnými a vrcholy pro faktory. Zde může být názvosloví matoucí, protože implementace faktorů z předchozí sekce se používá pro oboje. Vrchol pro proměnnou reprezentuje

marginální distribuci proměnné. Vrcholy pro faktory reprezentují pouze samotné faktory, z kterých se skládá sdružená distribuce. Vrcholy slouží k vytvoření reprezentace grafického modelu a obsahují metody pro výpočet a posílání zpráv. Implementace vrcholů je v modulu `bn/node.py`.

### 4.2.1 Rozhraní vrcholů

Základní funkcionalita vrcholů je popsána v abstraktní třídě **Node**. Vlastností všech vrcholů je jejich sdružování do sítě. K tomu slouží metoda `connect`, kterou musí obsahovat každá implementace vrcholu a ta informuje oba vrcholy, že spolu sousedí. Většina vrcholů si pamatuje své sousedy pro počítání zpráv. Při připojování proměnných k faktorům je také možné označit proměnnou za rodiče v daném faktoru. Tato informace je důležitá při normalizaci a učení parametrů.

Dále třída obsahuje metody sloužící pro posílání zpráv. Nejdůležitější jsou metody `message_to` a `message_from`. Vrchol spočítá v metodě `message_to` zprávu pro svého souseda. Má přístup ke všem ostatním vrcholům a tak pro něj není problém zprávu spočítat. Sousední vrchol zprávu přijme tak, že bude zavolána jeho metoda `message_from` a v ní mu bude zpráva předána. Díky tomu, že na posílání zpráv se podílí odesílatel i příjemce, můžeme kombinovat různé vrcholy, stačí pokud se dohodnou na stejném formátu zprávy. Dochází tak k oddělení odesílatele od příjemce.

Další metodou, kterou obsahuje každý vrchol je metoda pro inicializaci zpráv `init_messages`. Pro stávající implementace vrcholů není třeba ji volat před posíláním zpráv, protože zprávy mezi sousedními vrcholy jsou inicializovány vždy při zavolání metody `connect` pro jejich propojení. Pokud ovšem budeme provádět více výpočtů nad jedním grafickým modelem, je třeba zprávy nastavit na původní hodnoty před dalším výpočtem, jinak by hodnota zpráv z minulého výpočtu ovlivnila ten následující.

Z optimalizačních důvodů se při odesílání zpráv nepočítá součin všech příchodů vždy znovu, ale je předpočítán a pouze se aktualizuje před odesláním zpráv. Pro aktualizaci slouží metoda `update`. Vzhledem k tomu, že při inferenci je každý faktor vybrán jen jednou a pak jsou z něj odeslány zprávy do všech ostatních vrcholů, stačí metodu `update` volat pro každý faktor v každé iteraci jen jednou. Pro odeslání zpráv do všech vrcholů slouží jako zkratka metoda `send_messages`.

Třída **DiscreteVariableNode** implementuje funkcionalitu vrcholů pro diskrétní proměnné. Implementace vrcholů pro faktory s diskrétními proměnnými je ve třídě **DiscreteFactorNode**.



### 4.2.2 Rozhraní vrcholů pro proměnné

Smyslem vrcholů pro proměnné je reprezentovat aposteriorní marginální pravděpodobnost proměnných. Mají navíc několik metod, které jsou potřeba pro výpočty. Nejprve je třeba mít možnost nastavit pozorované proměnné, k tomu slouží metoda **observed**. Tato metoda může být zavolána se slovníkem, kde klíčem jsou pozorovaná přiřazení a hodnotou je pravděpodobnost pozorování. S tímto pozorováním se pak počítá při posílání zpráv.

Po ukončení výpočtu je třeba zjistit, která hodnota nebo více hodnot patří mezi nejpravděpodobnější. Některé dialogové strategie totiž potřebují jen jednu nejpravděpodobnější hodnotu, ale jiné mohou počítat se seznamem nejpravděpodobnějších možností. K tomu slouží metoda **most\_probable**. Vrátil seznam nejpravděpodobnějších přiřazení a jejich pravděpodobností.

## 4.3 Vrcholy pro Dirichletovské parametry

{sec:vrdir

V kapitole ?? jsme ukázali jakým způsobem je možné pro diskrétní proměnné učit parametry. V modulu **bn/node.py** jsou implementované vrcholy pro práci s dirichletovskými parametry. Jedná se o třídy **DirichletParameterNode** a **DirichletFactorNode**. V rozhraní se neliší od standardních implementací vrcholů.

Vrchol **DirichletParameterNode** musí být vždy spojen pouze s vrcholem **DirichletFactorNode**, který už ale může být dále propojen s vrcholy pro diskrétní proměnné. Díky tomu, že tyto vrcholy o své existenci navzájem ví, tak je možné použít standardní rozhraní pro posílání zpráv. Při připojení vrcholu pro parametr k vrcholu pro faktor tento pozná, že se k němu připojil speciální vrchol a bude se tak k němu chovat. Zprávy od něj bude interpretovat jako parametry pro distribuci zbytku proměnných. Pro zprávu z faktoru do parametru je třeba provést aproximaci pravděpodobnostní distribuce proměnných a z ní odvodit nové parametry.

## 4.4 Inferenční algoritmus

V této sekci si popíšeme poslední vrstvu implementovanou v knihovně a to vrstvu starající se o inferenci v grafických modelech. Předpokládáme, že již máme vytvořený graf z vrcholů, které byly představeny v předchozí sekci. V modulu **bn/lbp.py** je implementována třída **LBP**, která implementuje iterativní algoritmus pro aktualizaci grafického modelu a také obsahuje několik implementací strategií pro různé typy grafů.

Pro výpočet v grafickém modelu je nejprve třeba zaregistrovat všechny vrcholy z grafu. K tomu existuje několik metod, odlišujících se podle typu grafu. Pro dynamické bayesovské sítě je možné přidávat vrcholy po vrstvách. K tomu slouží metody `add_layer` a `add_layers`, první metoda přidá jednu vrstvu na konec sítě. Druhá metoda umožňuje přidat více vrstev naráz. Pro obecné grafy slouží metoda `add_nodes`, která umožňuje přidat vrcholy bez informace o jejich organizaci uvnitř sítě.

K mazání vrcholů ze sítě slouží metody `clear_nodes` a `clear_layers`.

Typ inference je možné zadat při vytváření třídy, příslušná strategie je pak použita při samotném výpočtu uvnitř metody `run`. Tato metoda pak provádí samotnou inferenci, je možné zadat počet iterací, v případě inference v dynamickém modelu i zadat od které vrstvy se má inference provádět.

Pro více výpočtů nad jedním grafickým modelem je možné místo inicializace zpráv pro každý vrchol zvlášť použít metodu `init_messages`, která tuto inicializaci provede u všech vrcholů.

#### 4.4.1 Strategie výběru vrcholu v LBP algoritmu

{sec:noch}

Inference v grafu se může lišit podle typu faktor grafu, ale také podle nároků, které na výsledek máme. Nejjednodušší metodou pro výběr je nechat pořadí na uživateli algoritmu. Pro stromy máme speciální strategii, která zaručí konvergenci po jednom dopředném a jednom zpětném kroku propagace. V dialogových systémech je často používána dynamická bayesovská síť a nás zajímá pravděpodobnost proměnných v poslední vrstvě sítě. V takovém případě můžeme některé zprávy zanedbat, protože už příliš neovlivní proměnné, které nás zajímají.

##### Inference na stromě

Pro efektivní inferenci je třeba si pro každý vrchol pamatovat, kolik mu chybí zpráv, aby mohl jednu sám odeslat. Pro každý vrchol  $v$  s  $k$  sousedy je na začátku počet chybějících zpráv  $k - 1$ . Strom na alespoň dvou vrcholech obsahuje alespoň dva listy. Budeme tedy postupně odebírat vrcholy, jejichž počet chybějících zpráv je nulový. Rozešleme z nich zprávu do souseda, z kterého ještě zpráva nepřišla a snížíme jeho počet chybějících zpráv. Odebráním listu ze stromu vždy dostaneme opět strom. Postupně tak zmenšujeme strom, až dostaneme právě jeden vrchol, který získal všechny zprávy.

Po vypočtení marginální pravděpodobnosti ve stromě o jednom vrcholu můžeme zase přidávat vrcholy v obráceném pořadí než v jakém jsme je odebírali. Do každého přidaného vrcholu pak můžeme poslat zprávu a spočítat jeho marginální pravděpodobnost.

## Inference v dynamické bayesovské síti

Dynamická bayesovská síť je nejčastější reprezentace dialogového stavu. V jedné vrstvě sítě je popsána jedna obrátka dialogu. Vrcholy v jedné vrstvě většinou závisí pouze na vrcholech ve stejné nebo předchozí vrstvě. Po každé obrátce nás pro účely dialogového manageru zajímají hlavně pravděpodobnosti proměnných v poslední vrstvě, tedy po aktuální obrátce.

Inferenci provádíme způsobem podobným indukci. Pro první vrstvu provedeme inferenci libovolným způsobem, může dokonce platit, že v rámci jedné vrstvy se jedná o strom. Po přidání  $k$ -té vrstvy předpokládáme, že byla provedena inference na předchozích  $k - 1$  vrstvách a tedy zprávy v této části grafu jsou správné. Zprávy ve směru k nové vrstvě jsou stále správné, neznáme ovšem hodnotu zpráv z předposlední vrstvy do nové vrstvy a hodnotu zpráv v nové vrstvě. Pošleme tedy zprávy z předposlední vrstvy a provedeme inferenci v nové vrstvě.

Stále ještě zbývají zprávy z nové vrstvy zpět v síti. Čím dál do historie ovšem jdeme, tím menší vliv naše nová pozorování budou mít na vrcholy v dané vrstvě. Proto se většinou omezíme jen na posledních několik vrstev (1 až 3).

## 4.5 Příklady

Po popisu jednotlivých vrstev v předchozí sekci nyní přejdeme k příkladům použití knihovny. Nejprve ukážeme použití jednotlivých tříd a metod. Nakonec bude představen příklad systému použitého v Dialog State Tracking Challenge (DSTC) 2013 [?].

### 4.5.1 Použití jednotlivých komponent

{sec:usage

Představíme příklady vytvoření a používání jednotlivých komponent, od implementace faktorů až po inferenci v grafickém modelu.

#### Faktor

Třída **Faktor** je popsána v sekci ???. Vytvoření faktoru je ukázáno v příkladu ??, zde máme jednoduchý generativní model pro výběr restaurace podle typu jídla. Vytvořený faktor obsahuje dvě proměnné, první je požadovaný typ jídla, druhá je pozorovaný požadovaný typ. Faktor může pocházet z generativního modelu, kde pravděpodobnost pozorování závisí na skutečné hodnotě. Zde vidíme, že je větší pravděpodobnost pozorování typu jídla, které uživatel opravdu chce. Pro indické jídlo je zde pravděpodobnost větší než pro čínské, v reálném dialogovém systému na tyto pravděpodobnosti může mít vliv například jazykový model, anebo

podobnost slov.

---

### Příklad 1 Vytvoření faktoru

---

```
from factor import Factor
```

```
factor = Factor(  
    ['food', 'food_obs'],  
    {  
        'food': ['chinese', 'indian'],  
        'food_obs': ['obs_chinese', 'obs_indian'],  
    },  
    {  
        ('indian', 'obs_indian'): 0.9,  
        ('indian', 'obs_chinese'): 0.1,  
        ('chinese', 'obs_indian'): 0.2,  
        ('chinese', 'obs_chinese'): 0.8,  
    })
```

{lst:crfac

Vytvořený faktor můžeme zobrazit (příklad ??), stačí použít příkaz `print`, popřípadě je možné použít metodu `pretty_print`, která vrátí řetězec s formátovaným výpisem faktoru. Nabízí možnost nastavení šířky tabulky a počtu desetinných míst.

---

### Příklad 2 Zobrazení faktorů

---

```
>>> print factor
```

<i>food</i>	<i>food_obs</i>	<i>Value</i>
<i>chinese</i>	<i>obs_chinese</i>	<i>0.8000000119</i>
<i>chinese</i>	<i>obs_indian</i>	<i>0.1999999881</i>
<i>indian</i>	<i>obs_chinese</i>	<i>0.09999999404</i>
<i>indian</i>	<i>obs_indian</i>	<i>0.8999999762</i>

```
>>> print factor.pretty_print(width=40, precision=2)
```

<i>food</i>	<i>food_obs</i>	<i>Value</i>
<i>chinese</i>	<i>obs_chinese</i>	<i>0.8</i>
<i>chinese</i>	<i>obs_indian</i>	<i>0.2</i>
<i>indian</i>	<i>obs_chinese</i>	<i>0.1</i>
<i>indian</i>	<i>obs_indian</i>	<i>0.9</i>

{lst:facpr

Dále obsahuje faktor implementaci matematických operací, je možné používat standardní operátory. V příkladu ?? je ukázáno násobení dvou faktorů, již vytvořený faktor s faktorem, který reprezentuje přechodovou pravděpodobnost. Operace fungují i s konstantami (příklad ??).

---

### Příklad 3 Násobení faktorů

---

```
>>> factor_trans = Factor(  
...     ['food', 'food_next'],  
...     {  
...         'food': ['chinese', 'indian'],  
...         'food_next': ['chinese', 'indian'],  
...     },  
...     {  
...         ('indian', 'indian'): 0.9,  
...         ('indian', 'chinese'): 0.1,  
...         ('chinese', 'indian'): 0.1,  
...         ('chinese', 'chinese'): 0.9,  
...     })  
>>> result = factor * factor_trans  
>>> print result.pretty_print(50, 2)
```

-----			
<i>food</i>	<i>food_next</i>	<i>food_obs</i>	<i>Value</i>
-----			
<i>chinese</i>	<i>chinese</i>	<i>obs_chinese</i>	<i>0.72</i>
<i>chinese</i>	<i>chinese</i>	<i>obs_indian</i>	<i>0.18</i>
<i>chinese</i>	<i>indian</i>	<i>obs_chinese</i>	<i>0.08</i>
<i>chinese</i>	<i>indian</i>	<i>obs_indian</i>	<i>0.02</i>
<i>indian</i>	<i>chinese</i>	<i>obs_chinese</i>	<i>0.01</i>
<i>indian</i>	<i>chinese</i>	<i>obs_indian</i>	<i>0.09</i>
<i>indian</i>	<i>indian</i>	<i>obs_chinese</i>	<i>0.09</i>
<i>indian</i>	<i>indian</i>	<i>obs_indian</i>	<i>0.81</i>
-----			

{lst:facmu

---

### Příklad 4 Násobení faktorů konstantou

---

```
>>> result = factor * 0.5  
>>> print result.pretty_print(50, 2)
```

-----		
<i>food</i>	<i>food_obs</i>	<i>Value</i>
-----		
<i>chinese</i>	<i>obs_chinese</i>	<i>0.4</i>
<i>chinese</i>	<i>obs_indian</i>	<i>0.1</i>
<i>indian</i>	<i>obs_chinese</i>	<i>0.05</i>
<i>indian</i>	<i>obs_indian</i>	<i>0.45</i>
-----		

{lst:facmu

Další důležitou metodou, kterou faktory nabízí, je marginalizace proměnných. Předvedeme si ji na faktoru pro pozorování (příklad ??), z kterého chceme získat pouze marginální pravděpodobnosti pozorování.

---

#### Příklad 5 Marginalizace faktoru

---

```
>>> marginalized = factor.marginalize(['food_obs'])
>>> print marginalized.pretty_print(50, 2)
```

```
-----
```

<i>food_obs</i>	<i>Value</i>
<i>obs_chinese</i>	<i>0.9</i>
<i>obs_indian</i>	<i>1.1</i>

```
-----
```

{lst: facma

Pokud je faktor použit pro reprezentaci pravděpodobnostního rozdělení, pak je možné, že při některých úkonech bude výsledkem nenormalizované pravděpodobnostní rozdělení. Faktor nabízí metodu pro normalizaci hodnot, která navíc bere v úvahu i podmíněné pravděpodobnosti (příklad ??).

---

#### Příklad 6 Normalizace faktoru

---

```
>>> uniform = Factor(
...     ['food', 'food_next'],
...     {
...         'food': ['chinese', 'indian'],
...         'food_next': ['chinese', 'indian'],
...     },
...     {
...         ('indian', 'indian'): 1,
...         ('indian', 'chinese'): 1,
...         ('chinese', 'indian'): 2,
...         ('chinese', 'chinese'): 2,
...     })
>>> uniform.normalize(parents=['food'])
>>> print uniform.pretty_print(50, 2)
```

```
-----
```

<i>food</i>	<i>food_next</i>	<i>Value</i>
<i>chinese</i>	<i>chinese</i>	<i>0.5</i>
<i>chinese</i>	<i>indian</i>	<i>0.5</i>
<i>indian</i>	<i>chinese</i>	<i>0.5</i>
<i>indian</i>	<i>indian</i>	<i>0.5</i>

```
-----
```

{lst: facno

Nakonec faktor nabízí možnost zjistit, které ohodnocení jsou nejpravděpodobnější (příklad ??).

---

**Příklad 7** Nejpravděpodobnější hodnoty

---

```
>>> food = Factor(  
...     ['food'],  
...     {  
...         'food': ['chinese', 'indian', 'french'],  
...     },  
...     {  
...         ('chinese',): 0.3,  
...         ('indian',): 0.6,  
...         ('french',): 0.1,  
...     })  
>>> food.most_probable(n=2)  
[(('indian', 0.6), ('chinese', 0.3))]
```

{lst: facmo

## Vrcholy

V této sekci ukážeme vytváření jednoduchého grafického modelu a následně posílání zpráv z jednoho vrcholu do druhého. V příkladu ?? vytvoříme jednoduchý skrytý markovský model pro výběr typu jídla. Model bude mít 2 obrátky, v každé bude jedna skrytá a jedna pozorovaná proměnná. Tento model bude generativní, bude obsahovat faktor pro generování pozorování na základě skutečné hodnoty a také faktor pro přechodovou pravděpodobnost z jedné obrátky do druhé.

Po vytvoření grafického modelu je dalším krokem nastavení pozorovaných hodnoty proměnných (příklad ??). Předpokládejme, že v první obrátce bylo pozorováno čínské jídlo s pravděpodobností 0.6 a indické s pravděpodobností 0.4. V druhé obrátce bylo pozorováno čínské jídlo s pravděpodobností 0.5 a indické s pravděpodobností 0.5. Tedy, v první obrátce si myslíme, že uživatel spíše preferuje čínské jídlo, ale z druhé obrátky už nevíme nic. Podíváme se, co z těchto informací zjistí náš grafický model.

Strom zakořeníme ve vrcholu `trans_factor` a začneme posílat zprávy od listů ke kořeni a pak zpět (příklad ??). Naším cílem je zjistit aposteriorní marginální pravděpodobnosti skrytých proměnných. Před odesláním je vždy třeba aktualizovat vnitřní reprezentaci vrcholů. Nakonec musíme normalizovat vrcholy s proměnnými.

Ve výsledku (příklad ??) tedy vidíme, že v druhé obrátce z pozorování sice nezískáme žádnou informaci, ale díky vysoké pravděpodobnosti přechodu zůstala pravděpodobnost čínského jídla stále vysoká. Toto pozorování zároveň snížilo pravděpodobnost v první obrátce.

---

## Příklad 8 Jednoduchý generativní model

---

```
from alex.ml.bn.node import DiscreteVariableNode, DiscreteFactorNode
from alex.ml.bn.factor import Factor

hid_1 = DiscreteVariableNode('food_1', ['chinese', 'indian'])
obs_1 = DiscreteVariableNode('food_obs_1', ['chinese', 'indian'])
obs_factor_1 = DiscreteFactorNode('food_obs_factor_1', Factor(
    ['food_1', 'food_obs_1'],
    {
        'food_1': ['chinese', 'indian'],
        'food_obs_1': ['chinese', 'indian'],
    },
    {
        ('chinese', 'chinese'): 0.9,
        ('chinese', 'indian'): 0.1,
        ('indian', 'chinese'): 0.1,
        ('indian', 'indian'): 0.9,
    }
)))

hid_2 = DiscreteVariableNode('food_2', ['chinese', 'indian'])
obs_2 = DiscreteVariableNode('food_obs_2', ['chinese', 'indian'])
obs_factor_2 = DiscreteFactorNode('food_obs_factor_2', Factor(
    ['food_2', 'food_obs_2'],
    {
        'food_2': ['chinese', 'indian'],
        'food_obs_2': ['chinese', 'indian'],
    },
    {
        ('chinese', 'chinese'): 0.9,
        ('chinese', 'indian'): 0.1,
        ('indian', 'chinese'): 0.1,
        ('indian', 'indian'): 0.9,
    }
)))

trans_factor = DiscreteFactorNode('food_trans_factor', Factor(
    ['food_1', 'food_2'],
    {
        'food_1': ['chinese', 'indian'],
        'food_2': ['chinese', 'indian'],
    },
    {
        ('chinese', 'chinese'): 0.99,
        ('chinese', 'indian'): 0.01,
        ('indian', 'chinese'): 0.01,
        ('indian', 'indian'): 0.99,
    }
)))

obs_factor_1.connect(hid_1, parent=True)
obs_factor_1.connect(obs_1, parent=False)

obs_factor_2.connect(hid_2, parent=True)
obs_factor_2.connect(obs_2, parent=False)

trans_factor.connect(hid_1, parent=True)
trans_factor.connect(hid_2, parent=False)
```

{lst:nodex



---

**Příklad 9** Nastavení pozorovaných hodnot

---

```
obs_1.assigned({
    ('chinese',): 0.6,
    ('indian',): 0.4,
})

obs_2.assigned({
    ('chinese',): 0.5,
    ('indian',): 0.5,
})
```

---

{lst: facob

---

**Příklad 10** Posílání zpráv

---

```
obs_1.message_to(obs_factor_1)
obs_2.message_to(obs_factor_2)

obs_factor_1.update()
obs_factor_1.message_to(hid_1)

obs_factor_2.update()
obs_factor_2.message_to(hid_2)

hid_1.update()
hid_1.message_to(trans_factor)

hid_2.update()
hid_2.message_to(trans_factor)

trans_factor.update()
trans_factor.send_messages()

hid_1.update()
hid_1.normalize()

hid_2.update()
hid_2.normalize()
```

---

{lst: facms

---

**Příklad 11** Výsledek inference

---

```
>>> print hid_1.belief.pretty_print(50, 2)
```

<i>food_1</i>	<i>Value</i>
<i>chinese</i>	0.58
<i>indian</i>	0.42

```
>>> print hid_2.belief.pretty_print(50, 2)
```

<i>food_2</i>	<i>Value</i>
<i>chinese</i>	0.58
<i>indian</i>	0.42

---

{lst:facre

**Inference**

Nyní se zbavíme manuálního posílání zpráv z příkladu ?? a nahradíme jej použitím třídy pro Loopy Belief Propagation (příklad ??). Zvolíme strategii pro stromy a výsledek bude stejný jako v případě s manuálním posíláním zpráv.

---

**Příklad 12** Inference s pomocí LBP

---

```
from alex.ml.bn.lbp import LBP
```

```
lbp = LBP(strategy='tree')
```

```
lbp.add_nodes([obs_1, obs_2, hid_1, hid_2, obs_factor_1, obs_factor_2,  
               trans_factor])
```

```
lbp.run()
```

---

{lst:lbpe

**4.5.2 Učení dirichletovských parametrů**

Nyní grafický model z minulé sekce upravíme tak, aby parametry přechodové pravděpodobnosti pocházely z dirichletovského rozdělení. Vše zůstane stejné, pouze faktor pro přechodovou pravděpodobnost nahradíme **DirichletFactorNode** a k němu připojíme nový vrchol **DirichletParameterNode**, který bude reprezentovat parametry. Vytvoření grafického modelu je v příkladu ??.

Druhý parametr konstruktoru **DirichletParameterNode** nyní neurčuje pravděpodobnosti, ale parametry  $\alpha$  dirichletovských rozdělení. Pro každou kombinaci hodnot rodičů existuje jedno dirichletovské rozdělení popisující apriorní rozdělení nad pravděpodobnostmi proměnné, která je potomkem faktoru. V tomto případě je to skrytá proměnná v druhé obrátce. Parametry můžou být buď nastaveny bez

apriorní znalosti, pak jsou všechny rovny 1, anebo můžeme nějakou naši apriorní znalost přidat. V tomto případě budeme předpokládat, že se spíše cíl nemění.

Tentokrát budou pozorování nastavena tak, že je zřejmé, který typ jídla uživatel požaduje. Inferenci provedeme naprosto stejně jako v předchozím případě (příklad ??). Zajímavý je výsledek inference, protože se nezměnily pouze hodnoty skrytých proměnných, ale také dirichletovský parametr. V příkladu ?? je vidět, že vypočítané hodnoty skrytých proměnných jsou blízké pozorovaným hodnotám v každé obrátce, to je způsobeno tím, že parametry pro přechodovou pravděpodobnost jsme nenastavili příliš informativně. Zároveň je vidět, že byly parametry modifikovány, pokud uživatel v první obrátce chce čínské jídlo, pak je větší pravděpodobnost, že v druhé obrátce jej bude chtít také.

Nyní ještě ukážeme jak je možné použít stejný model vícekrát, s různými pozorováními. Představme si, že nyní máme další hovor o dvou obrátcích, avšak s jinými pozorovanými hodnotami. Stačí nastavit nová pozorování, znovu inicializovat zprávy a spustit inferenci. Výhodou je, že není třeba znovu vytvářet síť, navíc počítáme už s upraveným dirichletovským parametrem pro přechodovou pravděpodobnost. Výsledek je v příkladu ??.

## 4.6 Dialog State Tracking Challenge

{sec:dstc}

Knihovna pro inferenci byla použita v Dialog State Tracking Challenge (DSTC) 2013 [?]. Nejprve popíšeme problém, následně představíme použitý model a na konec porovnáme výsledky modelu s ostatními systémy.

Cílem DSTC bylo vytvořit prostředky pro porovnání různých přístupů k inferenci dialogového stavu a vyhodnotit jejich úspěšnost pomocí společné množiny metrik. Organizátoři poskytli několik anotovaných množin dat, které pocházejí z reálného použití tří různých dialogových systémů pro úlohu Let's Go! [?]. Zároveň poskytli i baseline dialogový systém. Cílem účastníků soutěže bylo vytvořit systém pro odhad dialového stavu, který správně predikuje dialogový stav na základě vstupu od uživatele a minulé akce systému.

### 4.6.1 Let's Go

Úlohou dialogového systému Let's Go! je poskytnout telefonní službu pro zjišťování autobusového spojení v Pittsburghu. Systém rozpoznává 9 různých slotů, některé z nich sestávající z podslotů. Tyto sloty jsou

- *route* – linka,
- *time* – čas odjezdu nebo příjezdu,

---

### Příklad 13 Vytvoření grafického modelu s dirichletovskými parametry

---

{lst:crtep

```
from alex.ml.bn.node import (DiscreteVariableNode, DiscreteFactorNode,
                             DirichletParameterNode,
                             DirichletFactorNode)
from alex.ml.bn.factor import Factor
from alex.ml.bn.lbp import LBP

obs_probability = {
    ('chinese', 'chinese'): 0.9,
    ('chinese', 'indian'): 0.1,
    ('indian', 'chinese'): 0.1,
    ('indian', 'indian'): 0.9,
}

hid_1 = DiscreteVariableNode('food_1', ['chinese', 'indian'])
obs_1 = DiscreteVariableNode('food_obs_1', ['chinese', 'indian'])
obs_factor_1 = DiscreteFactorNode('food_obs_factor_1', Factor(
    ['food_1', 'food_obs_1'],
    {
        'food_1': ['chinese', 'indian'],
        'food_obs_1': ['chinese', 'indian'],
    },
    obs_probability))

hid_2 = DiscreteVariableNode('food_2', ['chinese', 'indian'])
obs_2 = DiscreteVariableNode('food_obs_2', ['chinese', 'indian'])
obs_factor_2 = DiscreteFactorNode('food_obs_factor_2', Factor(
    ['food_2', 'food_obs_2'],
    {
        'food_2': ['chinese', 'indian'],
        'food_obs_2': ['chinese', 'indian'],
    },
    obs_probability))

trans_factor = DirichletFactorNode('food_trans_factor')
trans_param = DirichletParameterNode('food_trans_param', Factor(
    ['food_1', 'food_2'],
    {
        'food_1': ['chinese', 'indian'],
        'food_2': ['chinese', 'indian'],
    },
    {
        ('chinese', 'chinese'): 2,
        ('chinese', 'indian'): 1,
        ('indian', 'chinese'): 1,
        ('indian', 'indian'): 2,
    }
)))

obs_factor_1.connect(hid_1, parent=True)
obs_factor_1.connect(obs_1, parent=False)

obs_factor_2.connect(hid_2, parent=True)
obs_factor_2.connect(obs_2, parent=False)

trans_factor.connect(hid_1, parent=True)
trans_factor.connect(hid_2, parent=False)
trans_factor.connect(trans_param)
```

---

---

**Příklad 14** Nastavení pozorovaných proměnných a inference

---

{lst:lbpep

```
obs_1.assigned({
    ('chinese',): 0.9,
    ('indian',): 0.1,
})

obs_2.assigned({
    ('chinese',): 0.8,
    ('indian',): 0.2,
})

lbp = LBP(strategy='tree')
lbp.add_nodes([obs_1, obs_2, hid_1, hid_2, obs_factor_1, obs_factor_2,
               trans_factor, trans_param])
lbp.run()
```

---

---

**Příklad 15** Vypočtené hodnoty skrytých proměnných

---

{lst:epres

```
>>> print hid_1.belief.pretty_print(50, 2)
```

```
-----
              food_1              Value
-----
              chinese              0.86
              indian              0.14
-----
```

```
>>> print hid_2.belief.pretty_print(50, 2)
```

```
-----
              food_2              Value
-----
              chinese              0.81
              indian              0.19
-----
```

```
>>> print trans_param.alpha.pretty_print(50, 2)
```

```
-----
              food_1      food_2      Value
-----
              chinese      chinese      2.3
              chinese      indian      0.96
              indian      chinese      1.0
              indian      indian      2.0
-----
```

---

---

**Příklad 16** Využití modelu pro nová pozorování

---

{lst:epint

```
>>> obs_1.assigned({
...     ('chinese',): 0.1,
...     ('indian',): 0.9,
... })
>>> obs_2.assigned({
...     ('chinese',): 0.2,
...     ('indian',): 0.8,
... })
>>> lbp.init_messages()
>>> lbp.run()
>>> print trans_param.alpha.pretty_print(50, 2)
```

---

<i>food_1</i>	<i>food_2</i>	<i>Value</i>
<i>chinese</i>	<i>chinese</i>	2.3
<i>chinese</i>	<i>indian</i>	0.97
<i>indian</i>	<i>chinese</i>	0.97
<i>indian</i>	<i>indian</i>	2.3

---

- *date* – datum odjezdu,
- *from.description* – popis místa odjezdu,
- *to.description* – popis místa příjezdu,
- *from.monument* – významný monument v místě odjezdu,
- *to.monument* – významný monument v místě příjezdu,
- *from.neighborhood* – část města (sousedství) z které chce uživatel jet,
- *to.neighborhood* – část města (sousedství) kam chce uživatel jet.

Navíc se sloty *time* a *date* skládají z dalších 5, respektive 4 slotů (např. *time.hour*, *time.minute*). Systém Let's Go celkem rozpoznával více než 5000 míst a zhruba 150 různých linek.

Jednotlivé dialogy se skládají z obrátek, ve kterých se střídá uživatel a systém. Příklad rozhovoru je v tabulce ???. Uživatel může informovat systém o hodnotě libovolného slotu. Systém může uživatele požádat o hodnotu libovolného slotu, popř. o potvrzení hodnoty slotu. Vstup a výstup je reprezentován dialogovými akty. Používány jsou pouze dialogové akty *inform*, *deny*, *affirm* a *negate*. Zbytek dialogových aktů je ignorován, protože nemění cíle uživatele.

Organizátoři poskytli 4 datové sady, které pocházely ze 3 různých dialogových systémů. Každá datová sada obsahovala hypotézy z živého běhu dialogového

Obrátka	Aktér	Přepis
1	Systém dact	<i>Welcome to the Lets Go! bus information system for Pittsburgh. Where would you like to leave from?</i> hello()&request(from.desc)
	Uživatel dact	<i>The South Side.</i> inform(from.desc=„the south side“)
2	Systém dact	<i>Leaving from the south side neighborhood. Did I get that right?</i> confirm(from.desc=„the south side“)
	Uživatel dact	<i>Correct.</i> affirm()
3	Systém dact	<i>Where do you wanna go?</i> request(to.desc)
	Uživatel dact	<i>Oakland.</i> inform(to.desc=„Oakland“)
4	Systém dact	<i>When do you wanna travel?</i> request(time)
	Uživatel dact	<i>Next.</i> inform(time=next)
5	Systém       dact	<i>The next bus is the 54C, leaving from south eighteen-th street at east Carson in the south side at 10:25pm. It arrives at fifth avenue at Bigelow in Oakland at 10:35pm. You may now say. next bus, previous bus, re-start, or goodbye.</i> ...

Tabulka 4.2: Příklad dialogu mezi uživatelem a dialogovým systémem Let's Go!  
*dact* znamená dialogový akt.

{tab:examp

systému (live data). Dva dialogové systémy produkovaly seznam  $n$  nejlepších hypotéz. Jeden systém produkoval pouze první nejlepší hypotézu, záznamy hovorů byly zpracovány zpětně pro vygenerování seznamů  $n$  nejlepších hypotéz (batch data). Vygenerované hypotézy ovšem obsahovaly pouze skóre, které muselo být přepočítáno pro získání pravděpodobností. Organizátoři nevydali žádné informace o povaze skóre.

Data obsahovala zjevně chybné hypotézy, např. v jedné hypotéze se objevily dvě různé hodnoty pro jeden slot. Tyto hypotézy byly z dat odstraněny ještě před samotnou inferencí.

#### 4.6.2 Popis systému

Dialogový stav byl v použitém systému modelován jednoduchým generativním modelem, kde pro každý slot v jedné obrátce existují dva vrcholy, skutečná hodnota slotu  $s_t$  a pozorovaná hodnota  $o_t$ . Stav důvěry skutečné hodnoty slotu  $b(s_t)$  závisí pouze na hodnotě v minulé obrátce  $s_{t-1}$  a na poslední systémové akci  $a_{t-1}$ . Pozorovaná hodnota  $o_t$  závisí pouze na skutečné hodnotě.

Stav důvěry můžeme vyjádřit ze sdružené pravděpodobnosti generativního modelu:

$$b(s_t) = \sum_{s_{t-1}, o_t} p(s_t | a_{t-1}, s_{t-1}) p(o_t | s_t) b(s_{t-1}) \quad (4.1)$$

Pro zrychlení výpočtu bylo využito stažených parametrů s manuálně nastavenými hodnotami [?]:

$$p(s_t | a_{t-1}, s_{t-1}) = \begin{cases} \theta_t & \text{pokud } s_t = s_{t-1} \\ \frac{1-\theta_t}{|hodnoty|-1} & \text{jinak} \end{cases}, \quad (4.2)$$

kde  $\theta_t$  je pravděpodobnost, že hodnota slotu se nemění a  $|hodnoty|$  je počet hodnot pro slot.

Pro model pozorování byly také použity stažené pravděpodobnosti:

$$p(o_t | s_t) = \begin{cases} \theta_o & \text{pokud } o_t = s_t \\ \frac{1-\theta_o}{|hodnoty|-1} & \text{jinak} \end{cases}, \quad (4.3)$$

kde  $\theta_o$  je pravděpodobnost, že pozorování bude odpovídat skutečné hodnotě slotu.

Parametr  $\theta_t$  určuje jak moc bude systém zapomínat, v případě hodnoty blízké 1 systém téměř nezapomíná a jakmile nějakou hodnotu pozoruje, bude jej těžké přesvědčit o čemkoliv jiném, v opačném případě naopak systém zapomíná a i z téměř jisté důvěry v hodnotu stavu může během pár obrátek dojít do stavu, kdy mají všechny možné hodnoty stejnou pravděpodobnost. Parametr  $\theta_o$  vyjadřuje



důvěru systému v SLU. Pokud je jeho hodnota vysoká, předpokládáme, že SLU téměř nedělá chyby. V opačném případě je systém tolerantní k chybám SLU. Na základě výsledků dialogového systému na trénovacích dat byly manuálně zvoleny vhodné hodnoty parametrů:  $\theta_t = 0.8$  a  $\theta_o = 0.8$

Představený model pro pozorování platí pro *inform* dialogové akty, dialogové sloty *affirm* a *negate* byly převedeny na *inform*.

Pro inferenci bylo použito LBP a protože možných hodnot slotů bylo v řádu stovek, všechny nepozorované hodnoty byly staženy do jedné speciální hodnoty a jejich pravděpodobnost byla počítána pouze dohromady.

### 4.6.3 Evaluce

Použitý model byl testován na 4 testovacích datových sadách s live daty a na dvou testovacích datových sadách s batch daty. Výsledky byly porovnány s baseline dialogovým systémem vytvořeným organizátory. Použité metriky byly přesnost (accuracy) dialogového systému a Brier score. Přesnost je podíl obrátek, ve kterých byla nejlepší hypotéza systému pro odhad stavu správná, oproti celkovému počtu obrátek. Brier score měří přesnost prediktivní pravděpodobnostní distribuce systému pro odhad stavu [?] (čím menší, tím lepší).

Výsledky ukazují (viz tabulka ??), že generativní model překonává baseline na všech datových sadách, kromě batch dat. Manuální inspekci bylo zjištěno, že generativní model je velmi citlivý na vstupní pravděpodobnosti. Pravděpodobnosti hypotéz z batch dat, zřejmě kvůli způsobu přepočítání skóre na pravděpodobnosti, jsou velmi blízko sebe a tedy nedávají dostatek informací pro pravděpodobnostní model.

Generativní systém byl také porovnán s ostatními dialogovými systémy přihlášenými do DSTC. Zde byl rovnocenným soupeřem většině ostatních týmů (viz tabulka ??). Ve výsledcích bude generativní systém veden jako 2. systém týmu číslo 3.

Tabulky výsledků a příklad dialogu byly převzaty z článku popisujícího přihlášené systémy do DSTC a porovnávajícího generativní model s jednoduchým diskriminativním modelem [?].

Popis jednotlivých součástí systému a jeho používání je v příloze ??.

live data	metric	BT	GT
test1	přesnost	0.77	0.88
	Brier score	0.29	0.21
test2	přesnost	0.79	0.85
	Brier score	0.27	0.23
test3	přesnost	0.92	0.93
	Brier score	0.14	0.16
test4	přesnost	0.82	0.87
	Brier score	0.24	0.20
ALL	přesnost	0.83	0.88
	Brier score	0.24	0.20
batch data	metric	BT	GT
test1	přesnost	0.75	0.74
	Brier score	0.35	0.39
test2	přesnost	0.79	0.77
	Brier score	0.30	0.33
ALL	přesnost	0.77	0.76
	Brier score	0.32	0.36

Tabulka 4.3: Přesnost systému pro odhad stavu na live a batch testovacích datech, kde BS je baseline systém a GS je generativní systém. ALL značí průměrné skóre přes všechny testovací sady.

{t:all:dat

tým / systém	přesnost	Brier score
BT - C	0.81	0.27
BT	0.83	0.24
GT	0.88	0.20
team1	0.88	0.23
team2	0.88	0.21
team4	0.81	0.28
team5	0.88	0.21
team6	<b>0.91</b>	<b>0.18</b>
team7	0.85	0.23
team8	0.83	0.24
team9	0.89	0.20

Tabulka 4.4: Přesnost systémů přihlášených do DSTC. BT - C značí baseline systém bez mazání chybných hypotéz, BT je baseline systém, GT je generativní systém a dále následují systémy ostatních týmů. Skóre jsou zprůměrována přes všechny 4 testovací sady dat.

{t:DSTC:ra

# Závěr

Práce splnila všechny vytyčené cíle. Výsledkem je implementace metod pro odhad stavu a parametrů v dialogových systémech. Byly představeny metody pro inferenci v grafických modelech založené na posílání zpráv, navíc byl odvozen algoritmus pro inferenci parametrů dirichletovského rozdělení srovnáním momentů. Práce obsahuje příklady použití vytvořené knihovny a otestování na reálných datech v rámci soutěže Dialog State Tracking Challenge, kde generativní systém pro odhad stavu používající implementovanou knihovnu dosáhl výsledků srovnatelných s ostatními přihlášenými týmy. Bližší detaily podle cílů vytyčených v úvodu práce:

1. V kapitole 1 byly představeny dialogové systémy a jejich jednotlivé součásti. V sekci 2.1 pak byly představeny bayesovské sítě, které se nabízejí jako ideální model pro reprezentaci dialogového stavu.
2. V kapitole 2 jsou prezentovány možné inferenční algoritmy pro odhad stavu v bayesovských sítích. V sekci 2.2.4 je představen algoritmus Loopy Belief Propagation. Jeho použití je ukázáno v sekci ??.
3. Implementace LBP byla použita pro DSTC a popis celé soutěže i s výsledky je v sekci ??. Implementovaný systém pro odhad stavu byl lepší než baseline systém poskytnutý organizátory (tabulka ??) a systém se navíc umístil příznivě i vzhledem k ostatním přihlášeným týmům (tabulka ??).
4. Implementované strategie pro výběr vrcholu v LBP algoritmu jsou popsány v sekci ??.
5. Algoritmus Expectation Propagation pro inferenci v obecných grafických modelech je představen v sekci 2.3.2.
6. Knihovna a jednotlivé její součásti jsou popsány v kapitole ??. Příklad vrcholů vytvořených speciálně pro použití v EP je v sekci ??. Učení parametrů pro odhad stavu v dialogových systémech je odvozeno v kapitole ??.

# A. Zpracování dialogů z DSTC

{ap:dstc}

## A.1 Soubory

Předvedeme použití vytvořené knihovny na data z Dialog State Tracking Challenge. Všechny potřebné data a zdrojové kódy jsou na přiloženém cd. V adresáři `src/dstc` je velké množství modulů a dalších adresářů:

- `common.py`, `dstcutils.py`, `jsonpath.py`, `ontology.py`, `pddiscrete.py`, `preprocessing.py` – pomocné moduly pro práci s daty, vytvořené členy výzkumné skupiny pracující na projektu Vystadial,
- `loader.py` – modul pro načítání dat z formátu JSON [?] do interní reprezentace,
- `system_dm.py` – skript pro zpracování dat používající vytvořenou knihovnu pro odhad stavu v jednotlivých dialogích. Použitá datová sada, vstupní a výstupní soubory, parametry grafického modelu a další parametry nutné pro výpočet je možné skriptu zadat buď pomocí přepínačů na příkazové řádce, anebo v konfiguračním souboru.
- `test_run.sh` – bashový skript pro spuštění celé pipeline od zpracování dat až po zobrazení výsledků,
- `test1.conf`, `test2.conf`, `test3.conf`, `test4.conf` – konfigurační soubory pro spuštění skriptu `system_dm.py` na testovací datové sady ze všech čtyř dialogových systémů.
- V adresáři `src/dstc/bin/` je baseline dialogový systém a skripty pro zpracování výsledků od organizátorů soutěže:
  - `baseline` – baseline dialogový systém,
  - `score` – skript pro vyhodnocení výstupu soutěžního systému,
  - `report` – skript pro zobrazení výsledků soutěžního systému v čitelné podobě,
  - `validate` – skript pro validaci korektního výstupu soutěžního systému,
  - Pomocné moduly pro tyto skripty jsou v adresáři `src/dstc/lib`.
- V adresáři `src/dstc/data/` jsou všechny 4 testovací datové sady, každá ve vlastním adresáři (`test1/`, `test2/`, `test3/`, `test4/`). Každá datová sada

se pak skládá z podadresářů pro jednotlivé hovory. Každý hovor se skládá ze dvou souborů:

- **dstc.log.json** – záznam z dialogového systému obsahující všechny informace o dialogu ve formátu JSON,
  - **dstc.labels.json** – soubor obsahující správné hypotézy, tedy řešení úlohy, tento soubor samozřejmě před skončením soutěže v datech chyběl.
- V adresáři **src/dstc/config/** jsou soubory obsahující cesty k jednotlivým dialogům pro každou testovací sadu.

## A.2 Konfigurace

Skript **system\_dm.py** očekává řadu parametrů pro správné fungování. Parametry je možné zadat na příkazové řádce, například:

```
$ python system_dm.py \  
  --dataroot=data/ \  
  --dataset=config/test1.sessions \  
  --scorefile=track_test1.json
```

Popřípadě je možné vytvořit konfigurační soubor obsahující pouze parametry:

```
--dataroot=data/  
--dataset=config/test1.sessions  
--scorefile=track_test1.json
```

a tento soubor pak předat jako jediný parametr:

```
$ python system_dm.py --flagfile test1.conf
```

Většina vlastností systému pro odhad stavu je konfigurovatelná, ale jen malý počet parametrů je povinný. Představíme si ty nejdůležitější parametry:

- *dataroot* – povinný, adresář obsahující datové sady,
- *dataset* – povinný, konfigurační soubor obsahující seznam cest k jednotlivým dialogům,
- *scorefile* – povinný, název souboru, do kterého má být zapsán výsledek zpracování dialogů,
- *slu* (live / batch) – přepínač, zda-li pracovat s hypotézami z live nebo batch dat,

- *remove\_inconsistent* – mazat nekonzistentní hypotézy (např. v jedné hypotéze více hodnot pro jeden slot),
- *processes* – systém podporuje zpracování na více jádrech, pomocí tohoto přepínače je možné nastavit počet jader, pro jedno jádro systém přepne do ladícího módu, kdy si udržuje v paměti všechny dialogy; nehodí se pro velké datové sady,
- *prob\_same* – hodnota parametru  $\theta_o$ , tedy pravděpodobnost, že pozorování odpovídá skryté proměnné,
- *prob\_trans* – hodnota parametru  $\theta_t$ , tedy pravděpodobnost, že se hodnota skryté proměnné nezmění v další obrátce.

## A.3 Výpočet

V předchozí sekci bylo ukázáno jakým způsobem lze nastavit a spustit skript `system_dm.py`, který provede odhad dialogového stavu. Výsledkem je soubor ve formátu JSON, kde pro každý dialog a každou jeho obrátku jsou vyznačeny hypotézy pro každý slot. V příkladu ?? je ukázáno jak vypadá výstup pro jeden slot, v tomto případě se jedná o počáteční zastávku, kde hodnota „shadyside“ má pravděpodobnost přibližně 0.56.

---

**Příklad 17** Část výsledku systému pro odhad stavu.

---

```
"from.neighborhood": {
  "hyps": [
    {
      "score": 0.5637651968841264,
      "slots": {
        "from.neighborhood": "shadyside"
      }
    }
  ]
},
```

{ex:res}

---

Nyní by bylo třeba výsledky zpracovat a následně zobrazit. Všechny tři kroky je možné provést naráz použitím skriptu `test_run.sh`:

```
$ ./test_run.sh test1.conf
```

Ukázka výsledků je v příklad ?? a ??. Ve výsledku jsou zobrazeny tři tabulky s výsledky. V první tabulce („schedule1“) jsou statistiky počítány po každé obrátce. V druhé tabulce („schedule2“) jsou statistiky počítány pro slot pouze pokud se o

něm v dané obrátce mluvílo. Nakonec ve třetí tabulce („schedule3“) jsou statistiky počítány pouze na konci dialogu.

Jednotlivé sloupce reprezentují různé sloty, navíc je zde sloupec *joint*, který hodnotí sdruženou informaci o všech slotech v dané obrátce, a sloupec *all*, který obsahuje průměrné skóre.

Jednotlivé řádky obsahují statistiky o slotech, zvlášť zajímavé jsou:

- accuracy – přesnost,
- avgp – ~~průměrná skóre~~ průměrné skóre přiřazené správné hypotéze,
- l2 – Brier skóre.

Nakonec jsou zobrazeny i základní informace o celém výpočtu, například jaká datová sada byla zpracována, počet hovorů, počet obrátek, celkový čas a průměrný čas na jednu obrátku.

**Příklad 18** Výsledek systému pro odhad stavu podle prvních dvou typů hodnocení.

-----									
schedule1									
-----									
	route	from.d	from.m	from.n	to.des	to.mon	to.nei	joint	all
N	10085	10085	10085	10085	10085	10085	10085	10085	90765
accuracy	0.8817	0.6969	0.9841	0.7771	0.8256	0.9845	0.7327	0.2642	0.8534
avgp	0.8794	0.6779	0.9811	0.6765	0.8235	0.9828	0.7185	0.2465	0.8370
hypcount	0.0773	0.2038	0.0103	0.2442	0.0435	0.0045	0.0353	0.4943	0.0729
l2	0.1703	0.4542	0.0268	0.4575	0.2495	0.0243	0.3981	1.0655	0.2304
mrr	0.8977	0.7239	0.9850	0.7838	0.8329	0.9846	0.7333	0.2888	0.8606
nonempty	0.0682	0.1660	0.0103	0.2442	0.0367	0.0045	0.0348	0.4943	0.0669
roc.v1_ca05	0.0000	0.0000	0.9841	0.0000	0.0000	0.9845	0.0000	0.0000	0.0000
roc.v1_ca10	0.8617	0.0000	0.9841	0.0000	0.0000	0.9845	0.0000	0.0000	0.0000
roc.v1_ca20	0.8817	0.0000	0.9841	0.0000	0.8256	0.9845	0.0000	0.0000	0.8534
roc.v1_eer	0.8817	0.6969	0.9841	0.4288	0.8256	0.9845	0.7327	0.2642	0.8534
roc.v2_ca05	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
roc.v2_ca10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
roc.v2_ca20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-----									
schedule2									
-----									
	route	from.d	from.m	from.n	to.des	to.mon	to.nei	joint	all
N	6100	4837	926	2706	4070	904	2283	9974	27536
accuracy	0.8590	0.6729	0.9471	0.6936	0.6784	0.9436	0.4717	0.2669	0.7309
avgp	0.8589	0.6685	0.9449	0.6414	0.6773	0.9351	0.4496	0.2490	0.7212
hypcount	0.0807	0.1784	0.0248	0.1778	0.0744	0.0243	0.0604	0.4927	0.0934
l2	0.1994	0.4670	0.0780	0.5071	0.4562	0.0918	0.7784	1.0621	0.3939
mrr	0.8769	0.6997	0.9514	0.7051	0.6907	0.9441	0.4733	0.2916	0.7443
nonempty	0.0723	0.1333	0.0248	0.1778	0.0585	0.0243	0.0600	0.4927	0.0812
roc.v1_ca05	0.0000	0.0000	0.9471	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
roc.v1_ca10	0.0000	0.0000	0.9471	0.0000	0.0000	0.9436	0.0000	0.0000	0.0000
roc.v1_ca20	0.8590	0.0000	0.9471	0.0000	0.0000	0.9436	0.0000	0.0000	0.0000
roc.v1_eer	0.8590	0.6729	0.9471	0.6936	0.6784	0.9436	0.4717	0.2669	0.7309
roc.v2_ca05	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
roc.v2_ca10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
roc.v2_ca20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

{ex:res1}



**Příklad 19** Výsledek systému pro odhad stavu podle třetího typu hodnocení a základní statistiky.

```
-----
                                schedule3
-----
      route from.d from.m from.n to.des to.mon to.nei joint  all
      N      897   874   422   767   767   354   620   901  5784
accuracy 0.8863 0.6739 0.9645 0.7471 0.7249 0.9520 0.4048 0.1576 0.7076
avgp     0.8827 0.6368 0.9496 0.5949 0.7159 0.9426 0.3581 0.1526 0.6692
hypcount 0.0836 0.2574 0.0355 0.3494 0.0704 0.0198 0.1145 0.6071 0.1376
l2       0.1656 0.5109 0.0713 0.5730 0.4012 0.0811 0.9077 1.1984 0.4673
mrr      0.9036 0.7008 0.9656 0.7562 0.7347 0.9520 0.4073 0.1770 0.7184
nonempty 0.0758 0.2082 0.0355 0.3494 0.0600 0.0198 0.1129 0.6071 0.1272
roc.v1_ca05 0.0000 0.0000 0.9645 0.0000 0.0000 0.9520 0.0000 0.0000 0.0000
roc.v1_ca10 0.8740 0.0000 0.9645 0.0000 0.0000 0.9520 0.0000 0.0000 0.0000
roc.v1_ca20 0.8863 0.0000 0.9645 0.0000 0.0000 0.9520 0.0000 0.0000 0.0000
roc.v1_eer  0.8863 0.6739 0.0664 0.5176 0.7249 0.9520 0.4048 0.1576 0.7076
roc.v2_ca05 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
roc.v2_ca10 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
roc.v2_ca20 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

-----
                                basic stats
-----
      dataset : config/test1.sessions
      scorer_version : 1.7
      sessions : 715
      total_wall_time : 114.580698967
      turns : 10085
      wall_time_per_turn : 0.0113614971707
```

{ex:res2}

# Přílohy