UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

VIGILADA MINEDUCACIÓN

CURSO ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS

Programa de Ingeniería Civil
Facultad de Ingenierías

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Básicamente los métodos matriciales consisten en remplazar la estructura continua real por un modelo matemático de elementos estructurales finitos, cuyas propiedades pueden expresarse en forma matricial.

Al igual que en los métodos tradicionales, el modelo idealizado se configura de manera un poco arbitraria por el analista. A continuación se calculan las propiedades elásticas de cada elemento mediante la teoría de un medio elástico continuo, se efectúa el ensamblaje de las propiedades estructurales del conjunto y se procede entonces a resolver la estructura. Naturalmente, al disminuir el tamaño de los elementos se incrementa la convergencia entre el comportamiento del modelo y el de la estructura continua original.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

El proceso de análisis se puede considerar como el estudio de cuatro etapas bien definidas, a saber:

1. Acción sobre la estructura
2. Acción sobre los elementos
3. Respuesta de los elementos
4. Respuesta de la estructura

Por acción se puede entender una fuerza o un desplazamiento impuestos sobre la estructura. A su vez, ésta responde con desplazamientos o fuerzas respectivamente.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

El primer caso se puede ilustrar fácilmente con el análisis de la cercha de la figura 11.1, sometida a las cargas P_1 y P_2, que constituyen la *acción* sobre ella (figura a).

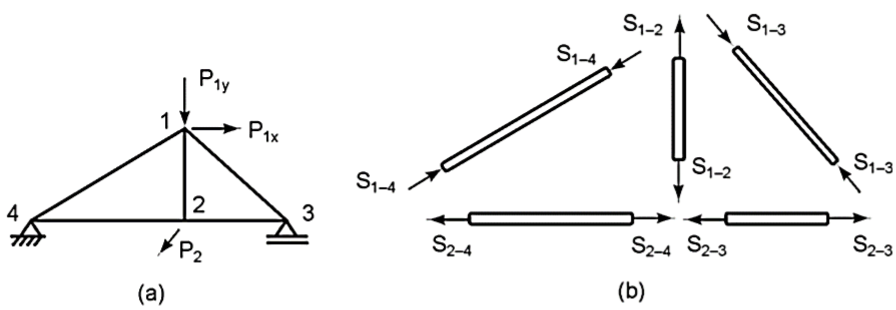


Figura 11.1 Etapas del proceso de análisis estructural.

Como resultado de dicha acción sobre la estructura, los elementos se ven sometidos a fuerzas axiales (S_{ij})de tensión o compresión (figura b).

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

La respuesta de cada uno de los elementos a las fuerzas axiales anteriores es un alargamiento o acortamiento como los $s_{1\text{-}4}$ y $s_{2\text{-}4}$ mostrados en la figura c.

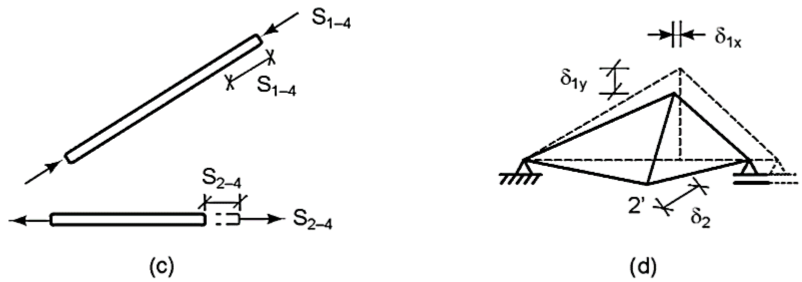


Figura 11.1 Etapas del proceso de análisis estructural.

Como todos los elementos están conectados e integran un conjunto, el resultado final será un desplazamiento de los nudos libres de la estructura, δ_{1x}, δ_{1y} y δ_2, que constituye su *respuesta* (figura d).

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

La relación existente entre acción y respuesta se puede representar matricialmente en la forma

$$[\delta] = [C][F] \tag{11.1}$$

o

$$[F] = [K][\delta] \tag{11.2}$$

en donde $[C]$ recibe el nombre de *matriz de flexibilidad* de la estructura y $[K]$ el de *matriz de rigidez* de la misma. La ecuación (11.1) corresponde a la modalidad de método de las fuerzas, mientras que la ecuación (11.2) sirve de base al método de los desplazamientos.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

La matriz de flexibilidad es muy útil en el estudio de la respuesta dinámica de la estructura; de ahí su importancia. Despejando el vector de fuerzas $[F]$ en la ecuación (11.1), se obtiene:

$$[F] = [C]^{-1}[\delta] \qquad (11.2a)$$

y si se compara esta ecuación con la ecuación (11.2) es evidente que:

$$[C]^{-1} = [K] \qquad (11.4)$$

y por consiguiente:

$$[K]^{-1} = [C] \qquad (11.5)$$

o sea que la matriz de rigidez es el inverso de la matriz de flexibilidad y viceversa.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Si se expande la ecuación (11.2), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & . & . & . & . & . & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & . & . & . & . & . & k_{2n} \\ . & . & & & & & & . \\ . & . & & & & & & . \\ . & . & & & & & & . \\ . & . & & & & & & . \\ . & . & & & & & & . \\ k_{n1} & k_{n2} & . & . & . & . & . & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \delta_n \end{bmatrix} \qquad (11.2a)$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

y suponiendo que se obliga a la estructura a adquirir una posición deformada tal que $\delta_1 = 1$ mientras que $\delta_2 = \delta_3 = \ldots \delta_n = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_{11} \\ F_2 &= k_{21} \\ &\vdots \\ F_n &= k_{n1} \end{aligned}$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

o sea que la primera columna representa las fuerzas necesarias para producir una deflexión unitaria en el nudo 1, sin que se muevan los otros nudos. Similarmente, la columna 2 representa las fuerzas necesarias para que el nudo 2 tenga una deflexión unitaria y todos los demás permanezcan en su sitio, y así sucesivamente.

Como en cada caso la estructura debe permanecer en equilibrio, es de esperar que la suma de los términos de cada columna sea igual a cero, condición útil para verificar la formulación de la matriz de rigidez. Por otra parte, entender el significado físico de los términos de la matriz de rigidez puede facilitar considerablemente su deducción.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Matriz de Rigidez de un Resorte Elástico

En la figura 11.2 se presenta un resorte elástico sometido a fuerzas F_1 y F_2 que siguen la dirección de su eje.

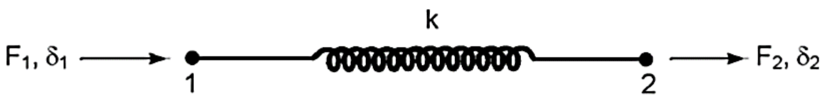


Figura 11.2 Resorte elástico.

δ_1 y δ_2 representan los desplazamientos nodales en la dirección de dichas fuerzas y la k es la constante del resorte.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Por definición, la matriz de rigidez será del tipo mostrado en la expresión siguiente:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \qquad (11.8)$$

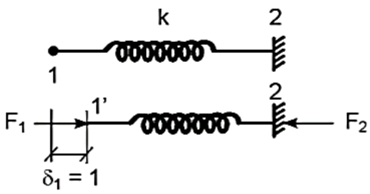
y para encontrar los valores de los diferentes términos se puede utilizar el concepto físico visto atrás:

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Caso a

Para $\delta_1 = 1$ y $\delta_2 = 0$, de la ecuación (11.8) se obtiene:



$$F_1 = k_{11}\,\delta_1 + k_{12}\,\delta_2 = k_{11} \qquad \text{(a)}$$

$$F_2 = k_{21}\,\delta_1 + k_{22}\,\delta_2 = k_{21} \qquad \text{(b)}$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Pero por la física se sabe que:

$$F_1 = k\,\delta_1 = k \qquad \text{(c)}$$

$$F_2 = -F_1 = -k \qquad \text{(d)}$$

De ahí que al igualar las expresiones (a) y (c), y (b) y (d), respectivamente, queda:

$$k_{11} = k$$

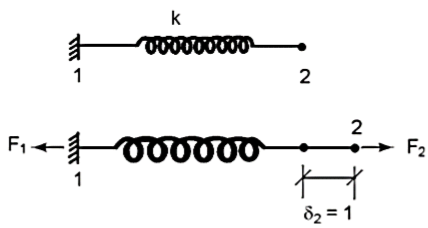
$$k_{21} = -k$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Caso b

Para obtener la segunda columna se hace $\delta_2 = 1$ y $\delta_1 = 0$



De la ecuación (11.8)

$$F_1 = k_{11}\,\delta_1 + k_{12}\,\delta_2 = k_{12} \qquad \text{(e)}$$

$$F_2 = k_{21}\,\delta_1 + k_{22}\,\delta_2 = k_{22} \qquad \text{(f)}$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Por otra parte:

$$F_2 = k \times 1 = k \qquad \text{(g)}$$

$$F_1 = -F_2 = -k \qquad \text{(h)}$$

Comparando (e) con (h) y (f) con (g), resulta:

$$k_{12} = -k, \qquad k_{22} = k$$

Por consiguiente, la matriz de rigidez del resorte será:

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11.9)$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

ENSAMBLAJE DE RESORTES

Considerando ahora los dos resortes de la figura 11.3, con constantes k_a y k_b, se tiene:

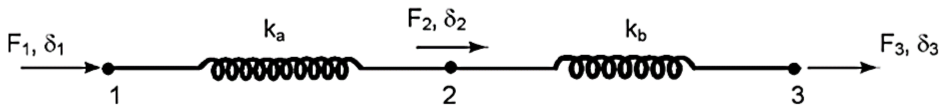


Figura 11.3 Resortes ensamblados en serie.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \qquad (11.10)$$

al desarrollarla, se obtiene

$$F_1 = k_{11}\,\delta_1 + k_{12}\,\delta_2 + k_{13}\,\delta_3 \qquad (a)$$

$$F_2 = k_{21}\,\delta_1 + k_{22}\,\delta_2 + k_{23}\,\delta_3 \qquad (b)$$

$$F_3 = k_{31}\,\delta_1 + k_{32}\,\delta_2 + k_{33}\,\delta_3 \qquad (c)$$

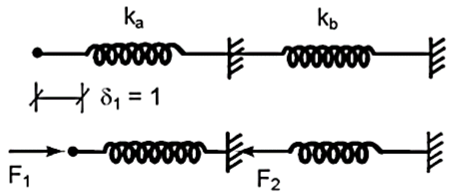
y procediendo de modo análogo al anterior:

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Caso a

Haciendo $\delta_1 = 1,\ \delta_2 = \delta_3 = 0$



Por las ecuaciones (a), (b) y (c):

$$F_1 = k_{11} \times 1 = k_{11}$$

$$F_2 = k_{21} \times 1 = k_{21}$$

$$F_3 = k_{31} \times 1 = k_{31}$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Pero:

$$F_1 = k_a\ \delta_1 = k_a$$

$$F_2 = -F_1 = -k_a$$

$$F_3 = 0$$

pues el resorte (b) no sufre deformación.

De ahí que al comparar estas ecuaciones con las anteriores:

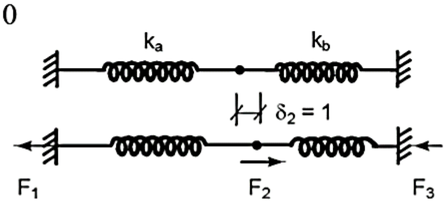
$$k_{11} = k_a, \quad k_{21} = -k_a, \quad k_{31} = 0 \qquad \text{(d)}$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Caso b

Se tiene $\delta_2 = 1$, $\delta_1 = \delta_3 = 0$



Ahora, de (a), (b) y (c):

$$F_1 = k_{12}\,\delta_2 = k_{12}$$

$$F_2 = k_{22}\,\delta_2 = k_{22}$$

$$F_3 = k_{32}\,\delta_2 = k_{32}$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Pero, por otra parte:

$$F_2 = (k_a + k_b)\,\delta_2 = (k_a + k_b)$$

$$F_1 = -k_a\,\delta_2 = -k_a$$

$$F_3 = -k_b\,\delta_2 = -k_b$$

Por consiguiente:

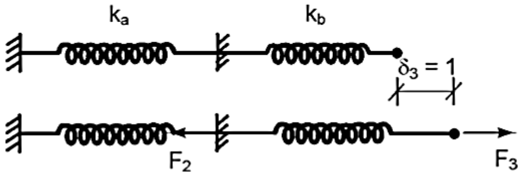
$$k_{12} = -k_a, \quad k_{22} = k_a + k_b, \quad k_{32} = -k_b \tag{e}$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Caso c

Considerando $\delta_3 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$, finalmente para este caso:



$$F_1 = k_{13} \times \delta_3 = k_{13}$$

$$F_2 = k_{23} \times \delta_3 = k_{23}$$

$$F_3 = k_{33} \times \delta_3 = k_{33}$$

Pero de física:

$$F_1 = 0$$

$$F_2 = -F_3 = -k_b\,\delta_3 = -k_b$$

$$F_3 = k_b$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

De ahí se obtiene:

$$k_{13} = 0\,, \qquad k_{23} = -k_b\,, \qquad k_{33} = k_b \qquad \text{(f)}$$

y reemplazando los valores de (d), (c) y (f) en la ecuación (11.10) se logra la matriz de rigidez $[K]_{a+b}$ del conjunto:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{array} \\ [K]_{a+b} = & \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \end{array} \qquad (11.11)$$

Obsérvese que de nuevo la suma de los términos de cada columna da cero y que la matriz es simétrica, como era de esperar.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ POR SUPERPOSICIÓN

La ecuación (11.11) se puede obtener también por superposición de las matrices de rigidez originales, como se demuestra a continuación.

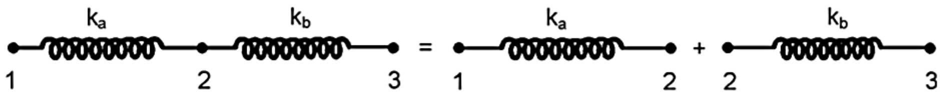


Figura 11.4 Ensamblaje por superposición.

Aplicando la ecuación (11.9) a los resortes (a) y (b) de la figura 11.4 se obtiene:

$$[K]_a = \begin{array}{c} \begin{matrix} \delta_1 & \quad\delta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \end{array} \qquad [K]_b = \begin{array}{c} \begin{matrix} \delta_2 & \quad\delta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \end{array}$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

estas matrices no se podrían sumar directamente por no ser compatibles, pero este problema se soluciona fácilmente mediante la adición adecuada de columnas y filas de ceros, como se muestra en seguida.

$$[K]_a = \begin{array}{c} \begin{matrix} \delta_1 & \quad\delta_2 & \quad\delta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[K]_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Sumando ahora las dos matrices término por término, se obtiene:

$$[K]_a + [K]_b = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \end{array} = [K]_{a+b}$$

Como se ve, este proceso es mucho más fácil y rápido que el del artículo anterior, y el ser válido en todos los casos lo hace muy apropiado para mecanización. Por eso es el utilizado en la mayoría de los programas comerciales de uso común. En algunos textos se le denomina *Método de la rigidez directa*.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

MATRIZ DE FUERZAS INTERNAS

Se denomina así la matriz que proporciona directamente las fuerzas internas en cada uno de los elementos del sistema, a partir de los desplazamientos nodales. Modificándola de manera adecuada se puede lograr una *Matriz de esfuerzos unitarios*, o simplemente *Matriz de esfuerzos*.

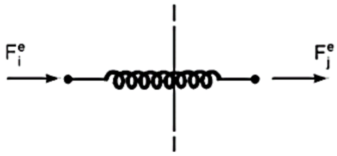
Una vez encontrados los desplazamientos de los nudos, se puede averiguar la deformación que experimenta cada miembro. Éstas se pueden suponer como causadas por un sistema de fuerzas nodales equivalentes.

$$[F_e] = [K]\,[\delta] \qquad (11.12)$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Para el resorte se tendría:



$$\begin{bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix}$$

$$F_i^e = k\,\delta_i - k\delta_j \qquad \text{(a)}$$

$$F_j^e = -k\delta_i + k\delta_j \qquad \text{(b)}$$

Considerando ahora los diagramas de cuerpo libre correspondientes,

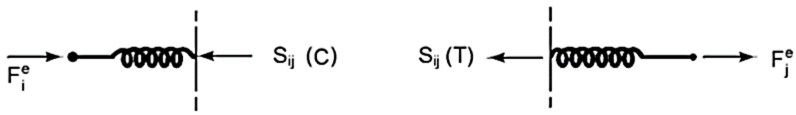


Figura 11.5 Fuerzas nodales equivalentes y fuerzas internas.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

se observa que a una fuerza F_i^e positiva corresponde una fuerza interna S_{ij} de compresión, mientras que a una fuerza F_j^e positiva corresponde una fuerza interna S_{ij}, en el resorte, de tensión.

En consecuencia, para ser compatibles con la convención de considerar las tensiones positivas y las compresiones negativas, se define:

$$S_{ij} = F_j^e \qquad (11.13)$$

y por la ecuación (b) anterior:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} -k & k \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} \qquad (11.13a)$$

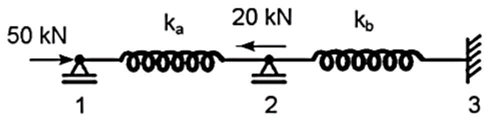
que es la matriz de fuerzas internas buscada.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Ejemplo

Resuelva la estructura mostrada, esto es, encuentre reacciones, desplazamientos y fuerzas internas.



$k_a = 600$ kN/m

$k_b = 200$ kN/m

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Solución

El planteamiento matricial queda así: $[F] = [K]\,[\delta]$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 800 & -200 \\ 0 & -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Obsérvese que si no se estableciese ninguna restricción en los apoyos, no podría invertirse la matriz $[K]$, pues su determinante vale cero. Evidentemente el problema no tendría solución, pues la estructura sería estáticamente inestable.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Al separar en la ecuación (a) las fuerzas conocidas de las desconocidas y partiendo en forma apropiada la matriz $[K]$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \hline F_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 800 & -200 \\ \hline 0 & -200 & 200 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \hline \delta_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

De tal manera que:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & -600 \\ -600 & 800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -200 \end{bmatrix} [\delta_3 = 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 600 & -600 \\ -600 & 800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

y despejando los desplazamientos:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & -600 \\ -600 & 800 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)}$$

Por consiguiente, para cualquier hipótesis de carga:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/150 & 1/200 \\ 1/200 & 1/200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(e)}$$

y para la hipótesis dada:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/150 & 1/200 \\ 1/200 & 1/200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2333\ \text{m} \\ 0.1500\ \text{m} \end{bmatrix}$$

o sea que el nudo 1 se ha desplazado 0.2333 m hacia la derecha (sentido positivo de las x) y el nudo 2, 0.1500 m en la misma dirección.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Para encontrar la reacción, F_3, se utiliza la parte inferior de la ecuación (b):

$$[F_3] = [0 \quad -200] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + 200\ [\delta_3 \ = 0]$$

$$= [0 - 200] \begin{bmatrix} 0.2333 \\ 0.1500 \end{bmatrix} = -30\text{kN}$$

en que el signo negativo indica que la fuerza es hacia la izquierda. Aplicando ahora a cada resorte las ecuaciones (11.13), se obtendrán las fuerzas internas en los mismos:

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

$$S_{ij} = [-k \qquad k]_{ij} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix}$$

$$S_{1-2} = [-600 \quad 600] \begin{bmatrix} 0.2333 \\ 0.1500 \end{bmatrix} = -50\text{kN} \qquad \text{(c)}$$

$$S_{2-3} = [-200 \quad 200] \begin{bmatrix} 0.1500 \\ 0 \end{bmatrix} = -30\text{kN} \qquad \text{(c)}$$

Como ambas fuerzas dan negativas, se sabe que ambos resortes están sometidos a compresión.

Una comprobación estática del problema indica que efectivamente los valores encontrados son las respuestas buscadas.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

SOLUCIÓN GENERAL POR EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Pasando ahora al caso general de cualquier estructura, el planteamiento matricial de la misma por el método de los desplazamientos:

$$[F] = [K]\,[\delta]$$

conduce después de una reordenación adecuada a una expresión de la forma siguiente:

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA 37

37

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

$$\left[\begin{array}{c} F_n \\ \hline F_a \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} K_{nn} & K_{na} \\ \hline K_{an} & K_{aa} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \delta_n \\ \hline \delta_a \end{array}\right] \qquad (11.14)$$

en donde:

$[F_n]$ es el vector de cargas aplicadas (conocidas)

$[F_a]$ son las reacciones de los apoyos (desconocidas)

$[\delta_n]$ el vector de desplazamientos de los nudos libres (desconocidos) y

$[\delta_a]$ los desplazamientos de los apoyos (conocidos y generalmente iguales a cero)

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA 38

38

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

Expandiendo entonces la ecuación (11.14), se obtiene:

$$[F_n] = [K_{nn}]\,[\delta_n] + [K_{na}]\,[\delta_a] \qquad \text{(a)}$$

$$[F_a] = [K_{an}]\,[\delta_n] + [K_{aa}]\,[\delta_a] \qquad \text{(b)}$$

y despejando de la primera el vector $[\delta_n]$

$$[\delta_n] = [K_{nn}]^{-1}\,[F_n] - [K_{nn}]^{-1}\,[K_{na}]\,[\delta_a] \qquad (11.15)$$

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

reemplazando este valor en la ecuación (b)

$$[F_a] = [K_{an}]\,[K_{nn}]^{-1}\,[F_n] - [K_{an}]\,[K_{nn}]^{-1}\,[K_{na}]\,[\delta_a] + [K_{aa}]\,[\delta_a]$$

y factorizando por $[\delta_a]$:

$$[F_a] = [K_{an}]\,[K_{nn}]^{-1}\,[F_n] + \left[[K_{aa}] - [K_{an}]\,[K_{nn}]^{-1}\,[K_{na}]\right]\,[\delta_a] \qquad (11.16)$$

Las ecuaciones (11.15) y (11.16) constituyen la base de la solución matricial de una estructura por el método de los desplazamientos.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

En el caso muy común de desplazamientos nulos en los apoyos, en la dirección de las reacciones, el vector $[\delta_a]$ resulta igual a cero y las ecuaciones (11.15) y (11.16) se reducen a:

$$[\delta_n] = [K_{nn}]^{-1} [F_n] \quad (11.17)$$

$$[F_a] = [K_{an}] [K_{nn}]^{-1} [F_n] \quad (11.18)$$

Una vez averiguados los desplazamientos mediante las ecuaciones (11.15) o (11.17) se pueden conocer las fuerzas internas mediante la *Matriz de fuerzas internas* correspondiente al tipo de elementos de la estructura que se verán más adelante, con lo cual queda completo el análisis.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

En resumen, el calculista deberá efectuar los siguientes pasos:

1. Identificar la estructura, numerar los nudos y determinar la orientación de los elementos.
2. Calcular los términos de las matrices de rigidez de los miembros, referidas a coordenadas generales.
3. Ensamblar la matriz de rigidez de la estructura, reordenándola para que queden separadas de una vez las fuerzas en los nudos libres y las reacciones de los apoyos.

Método de la Rigidez

GENERALIDADES

4. Partir la matriz ensamblada y calcular los desplazamientos desconocidos.

5. Calcular las reacciones y verificar el equilibrio general de la estructura.

6. Calcular las fuerzas internas utilizando las matrices individuales y verificar, finalmente, el equilibrio de los nudos.

Conviene ahora desarrollar las matrices de rigidez de las diversas clases de miembros que componen las estructuras reticulares.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA PRISMÁTICA SOMETIDA A TENSIÓN O COMPRESIÓN SIMPLE

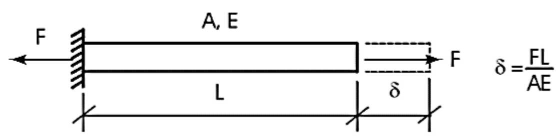


Figura 11.9 Barra prismática sometida a tensión simple.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

En la figura 11.9 se presenta una barra prismática sometida a tensión simple. En Resistencia de materiales se vio que dicha barra experimenta una elongación δ dada por:

$$\delta = \frac{FL}{AE}$$

despejando se obtiene: $$F = \frac{AE}{L}\delta$$

completamente análoga a la obtenida para el resorte elástico si considera una *constante del resorte equivalente*:

$$k_e = \frac{AE}{L} \qquad (11.19)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

En consecuencia, se puede escribir que la matriz de rigidez de una barra sometida a tensión o compresión simple, está dada por:

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \delta_i & \delta_j \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \end{array} = \frac{AE}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \delta_i & \delta_j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (11.20)$$

Como es bien sabido, la mayor aplicación de tales barras se encuentra en las armaduras o cerchas, bien sea planas o espaciales. Al ensamblarlas en dichas estructuras quedan orientadas de modo diferente y para poder efectuar el ensamblaje de la matriz de rigidez por el método de superposición visto en el numeral 11.5, es necesario modificar la ecuación (11.20) para referir todas las fuerzas y desplazamientos a un sistema común de ejes, que se denominan *ejes de la estructura* o *ejes generales*.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO DE CERCHA PLANA

En general, los elementos de cercha plana son elementos arbitrariamente orientados, que se consideran sometidos únicamente a tensión o compresión simple. En la figura 11.10 se presenta un elemento tal, cuyo eje principal $\overline{X}$ forma un ángulo φ con el eje X de un sistema de referencia, que se llamará *sistema de ejes generales* (o de la estructura). La barra servirá para distinguir los términos relacionados con el *sistema de ejes locales* (o ejes del elemento).

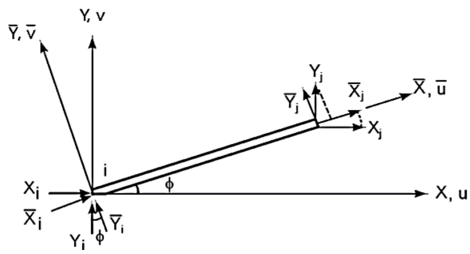


Figura 11.10 Elemento de cercha arbitrariamente orientado en un plano.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

En términos de coordenadas locales se tenía:

$$\begin{bmatrix} \overline{X}_i \\ \overline{X}_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{bmatrix}$$

Como en coordenadas generales existen cuatro componentes de deflexión, se empieza por expandir la ecuación anterior a:

$$\begin{bmatrix} \overline{X}_i \\ \overline{Y}_i \\ \overline{X}_j \\ \overline{Y}_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \end{bmatrix} \qquad (11.21)$$

que se puede escribir en forma compacta como:

$$\left[\overline{F}\right] = \left[\overline{K}\right]\left[\overline{\delta}\right] \qquad (11.21a)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

De la figura se observa que:

$$\begin{aligned}\overline{X}_i &= X_i \cos\varphi + Y_i \operatorname{sen}\varphi \\ \overline{Y}_i &= -X_i \operatorname{sen}\varphi + Y_i \cos\varphi \\ \overline{X}_j &= X_j \cos\varphi + Y_j \operatorname{sen}\varphi \\ \overline{Y}_j &= -X_j \operatorname{sen}\varphi + Y_j \cos\varphi\end{aligned} \qquad (11.22)$$

que se puede expresar en forma matricial, así:

$$\begin{bmatrix}\overline{X}_i \\ \overline{Y}_i \\ \overline{X}_j \\ \overline{Y}_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j\end{bmatrix} \qquad (11.23)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

en donde $c = \cos\varphi$ y $s = \operatorname{sen}\varphi$, o en forma compacta:

$$[\overline{F}] = [T][F] \qquad (11.23a)$$

De ahí que la ecuación (11.23) nos define una matriz de transformación $[T]$. Despejando el vector $[F]$ se obtiene:

$$[F] = [T]^{-1}[\overline{F}] \qquad (11.24)$$

En álgebra lineal se demuestra que para sistemas de coordenadas ortogonales la matriz de transformación $[T]$ resulta ortogonal y como consecuencia:

$$[T]^{-1} = [T]^{T} \qquad (11.25)$$

con lo cual se simplifica mucho el proceso.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

La misma relación que existe entre las fuerzas $\overline{F}$ y F se presenta entre los desplazamientos respectivos $\overline{\delta}$ y δ. Por tanto, se puede escribir:

$$\left[\overline{\delta}\right] = [T][\delta] \tag{11.26}$$

en donde $[T]$ es la misma matriz de transformación definida en la ecuación (11.23).

Reemplazando ahora las ecuaciones (11.25) y (11.21a) en la ecuación (11.24), se llega a:

$$[F] = [T]^T \left[\overline{F}\right] = [T]^T \left[\overline{K}\right]\left[\overline{\delta}\right]$$

y reemplazando en la última expresión el valor dado por la ecuación (11.26), resulta:

$$[F] = [T]^T \left[\overline{K}\right][T][\delta] \tag{11.27}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Si se compara esta expresión con la ecuación (11.2), $\left[\overline{F}\right] = \left[\overline{K}\right]\left[\overline{\delta}\right]$, inmediatamente se concluye que:

$$[K] = [T]^T \left[\overline{K}\right][T] \tag{11.28}$$

expresión completamente general para sistemas de ejes ortogonales. Para elementos estructurales distintos de los utilizados en cerchas, los valores de $\left[\overline{K}\right]$ y $[T]$ serán diferentes; por lo demás, el desarrollo conduce a la misma ecuación (11.28).

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Reemplazando ahora las matrices definidas en las ecuaciones (11.23) y (11.21) en la expresión (11.28) y efectuando las operaciones matriciales indicadas, resulta finalmente la matriz de rigidez de un elemento de cercha, arbitrariamente orientado, en coordenadas generales:

$$[K] = \frac{AE}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_i & v_i & u_j & v_j \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ \hline -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{array}\right] \end{array} \qquad (11.29)$$

en donde:

$$c^2 = \cos^2\varphi, \quad s^2 = \text{sen}^2\varphi \quad y \quad cs = (\cos\varphi)\ (\text{sen}\ \varphi)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Al analista se le presenta entonces la alternativa de plantear directamente la matriz de rigidez del elemento, referida a coordenadas generales, mediante la ecuación (11.29), o de plantearla referida a coordenadas locales, ecuación (11.20), y transformarla a coordenadas generales utilizando para esto la ecuación (11.28) y la matriz de transformación (ecuación 11.23) correspondiente. Para sistematizar el proceso se empieza por definir el orden de la matriz de la estructura total, dándole a cada término valor cero.

A medida que se calculan los $[K]_{ij}$ de los diferentes elementos, se van superponiendo a dicha matriz inicial, de tal manera que al cubrirlos todos queda automáticamente ensamblada la matriz de rigidez $[K]$ de la estructura total.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Se procede entonces a analizar las condiciones de los apoyos y a reordenar según ellas la matriz $[K]$ obtenida anteriormente para que quede en forma acorde con la ecuación (11.14), y se resuelve el problema mediante la aplicación directa de las ecuaciones (11.15) y (11.16).

En ocasiones es posible evitar, o al menos minimizar, el reordenamiento de la matriz $[K]$ mediante una numeración adecuada de los nudos; por ejemplo, dejando los apoyos de últimos.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Matriz de Fuerzas Internas de un Elemento de Cercha Plana

Suponiendo de nuevo que las deformaciones del elemento ij, arbitrariamente orientado en el plano, son producidas por unas fuerzas nodales equivalentes, y de acuerdo con lo discutido en el numeral 11.6, se tiene, según las ecuaciones (11.13) y (11.19), que:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{bmatrix} \qquad (11.30)$$

que se puede expandir a la forma siguiente:

$$S_{ij} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix} \qquad (11.31)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

pero según la ecuación (11.26):

$$[\bar{\delta}] = [T][\delta]$$

De ahí que reemplazando esta expresión y la ecuación (11.23) en la ecuación (11.31), se obtiene:

$$S_{ij} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

$$S_{ij} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}_{ij}\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \qquad (11.32)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

que constituye la matriz de fuerzas internas del elemento de cercha plana. Una forma alterna de escribir la ecuación (11.32) es la siguiente:

$$S_{ij} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c & s \end{bmatrix}_{ij}\begin{bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{bmatrix} \qquad (11.33)$$

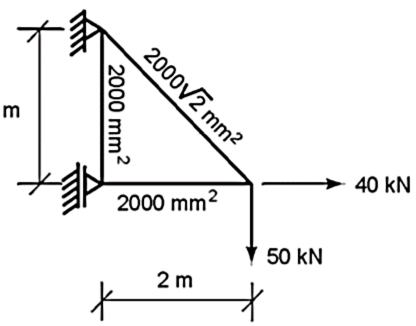
en donde el último vector corresponde a los desplazamientos relativos de los extremos del elemento en consideración.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Ejemplo

Se pide resolver por completo la estructura mostrada en la figura para cualquier hipótesis de carga, en particular para las cargas mostradas. Todos los elementos están hechos del mismo material.

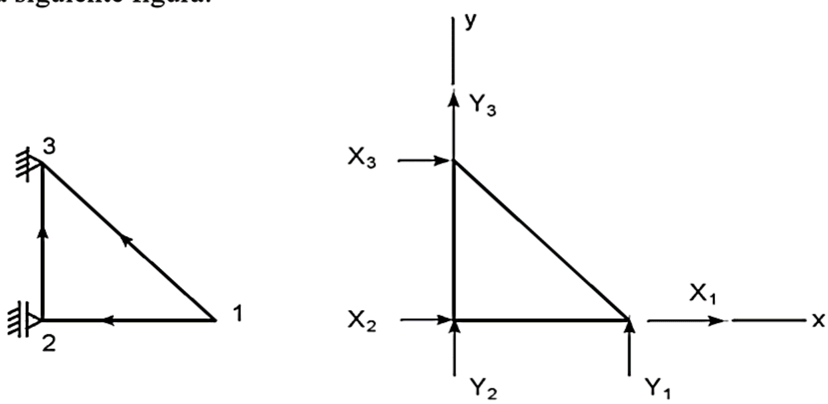


Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Solución

Se comienza por numerar los nudos y asignar a los elementos un sentido positivo arbitrario, pero sobrentendiendo que el sentido positivo va del nudo i al nudo j. Esto se ha hecho en la siguiente figura:



Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Obsérvese que el nudo libre se ha dejado de primero, seguido del apoyo inferior que ofrece una restricción, y de último se ha dejado el apoyo superior que está restringido en ambos sentidos.
La formulación matricial queda así:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix}_{6x6} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad (a)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Para determinar fácilmente las matrices de rigidez de los elementos, conviene elaborar el siguiente cuadro:

Elemento	φ	cos φ	sen φ	$\cos^2\varphi$	$\text{sen}^2\varphi$	cos φ sen φ	A/L (mm)
1 – 2	180°	–1	0	1	0	0	1
1 – 3	135°	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	1/2	–1/2	1
2 – 3	90°	0	1	0	1	0	1

y de ahí y la ecuación (11.29):

$$[K]_{1-2} = E \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{array} \qquad (b)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

$$[K]_{1-3} = E \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \qquad (c)$$

$$[K]_{2-3} = E \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \qquad (d)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Ensamblando ahora la matriz $[K]$ por superposición:

$$[K] = [K]_{1-2} + [K]_{1-3} + [K]_{2-3}$$

se expande cada una de las matrices (b), (c) y (d) y luego se suman, o simplemente se van sumando los términos respectivos en las casillas correspondientes, como se muestra acá:

$$K = E \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1+1/2 & -1/2 & -1 & & -1/2 & 1/2 \\ \hline -1/2 & 1/2 & & & 1/2 & -1/2 \\ \hline -1 & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & -1 \\ \hline -1/2 & 1/2 & & & 1/2 & -1/2 \\ \hline 1/2 & -1/2 & & -1 & -1/2 & 1+1/2 \end{array}\right] \end{array}$$

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Nótese que en este caso particular, AE/L resulta constante para todos los elementos, lo cual facilita la superposición. Efectuando las operaciones indicadas en la ecuación (e) y reemplazando la expresión resultante en la ecuación (a), queda:

$$
\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{bmatrix}
= E
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
3/2 & -1/2 & -1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\
-1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
-1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\
1/2 & -1/2 & 0 & -1 & -1/2 & 3/2
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}
\qquad (f)
$$

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA 65

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Considerando ahora las condiciones de los apoyos, se procede a reordenar la expresión anterior intercambiando la tercera fila con la cuarta, y por consiguiente las columnas respectivas. Resulta entonces:

$$
\left[\begin{array}{c} X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \hline X_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{array}\right]
= E
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & v_2 & u_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
3/2 & -1/2 & 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \\
-1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\
1/2 & -1/2 & -1 & 0 & -1/2 & 3/2
\end{array}\right]
\end{array}
\left[\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ \hline u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}\right]
\qquad (g)
$$

en donde la partición se ha hecho conforme a las definiciones de la ecuación (11.14).

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA 66

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

La ecuación (g) sirve de base para resolver el caso general, pues basta aplicarle las ecuaciones (11.15) y (11.16). Para el caso particular en consideración, procediendo directamente:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + E\begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10/E \\ -110/E \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(h)}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Para obtener las reacciones, a partir de (g):

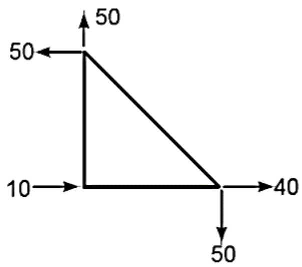
$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + E\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= E\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10/E \\ -110/E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\text{kN} \rightarrow \\ -50\text{kN} \leftarrow \\ 50\text{kN} \uparrow \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Colocando estos valores en un diagrama de cuerpo libre de la estructura total, se comprueba que la estructura está en equilibrio.



$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M = 0$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Para calcular las fuerzas internas en las barras se acude al cuadro base, a la ecuación (11.33) y a los resultados obtenidos en (h), llegándose a:

$$S_{1-2} = E\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0+10/E\\0+110/E\end{bmatrix} = -10\text{kN} \qquad \text{(C)}$$

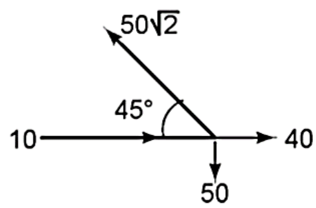
$$S_{1-3} = E\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & + & 10/E\\0 & + & 110/E\end{bmatrix} = 50\sqrt{2}\ \text{kN} \qquad \text{(T)}$$

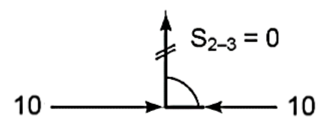
$$S_{2-3} = E\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & - & 0\\0 & - & 0\end{bmatrix} = 0$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

De los diagramas de cuerpo libre adjuntos se ve fácilmente que dichos valores son correctos.



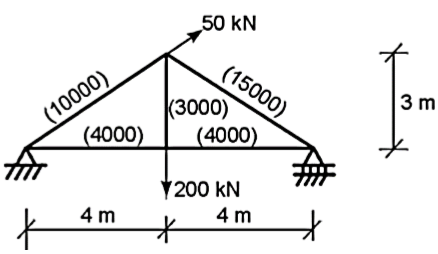


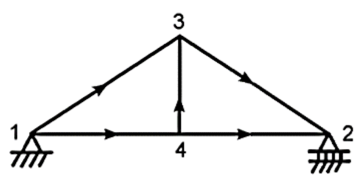
Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Ejemplo

Resuelva completamente la estructura mostrada. El material es acero estructural con E = 200 kN/mm^2. Las áreas están dadas entre paréntesis en mm^2.





Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Solución

Se empieza por numerar los nudos y asignarles un sentido a las barras (figura superior derecha). Obsérvese que se han numerado de últimos los nudos libres para minimizar el reordenamiento de la matriz de rigidez. A continuación se elabora el cuadro de funciones trigonométricas:

Elemento	φ	cos φ	sen φ	$\cos^2 \varphi$	$\text{sen}^2 \varphi$	cos φsen φ	A / L (mm)
1 – 3	36.87°	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48	2
1 – 4	0°	1	0	1	0	0	1
3 – 2	–36.87°	0.8	– 0.6	0.64	0.36	– 0.48	3
4 – 2	0°	1	0	1	0	0	1
4 – 3	90°	0	1	0	1	0	1

utilizando este cuadro y la ecuación (11.29):

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

$$K_{1-3} = E \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.28 & 0.96 & -1.28 & -0.96 \\ 0.96 & 0.72 & -0.96 & -0.72 \\ -1.28 & -0.96 & 1.28 & 0.96 \\ -0.96 & -0.72 & 0.96 & 0.72 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}$$

$$K_{1-4} = E \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

$$K_{3-2} = E \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \end{array}$$

$$K_{3-2} = E\begin{bmatrix} 1.92 & -1.44 & -1.92 & 1.44 \\ -1.44 & 1.08 & 1.44 & -1.08 \\ -1.92 & 1.44 & 1.92 & -1.44 \\ 1.44 & -1.08 & -1.44 & 1.08 \end{bmatrix}\begin{array}{c} u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_2 & v_2 \end{array}$$

$$K_{4-2} = E\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{array}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

$$\begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \end{array}$$

$$K_{4-3} = E\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{c} u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}$$

y ensamblando por superposición, teniendo cuidado de hacerlo de una vez en el orden apropiado:

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

K = E

	u_2	u_3	v_3	u_4	v_4	u_1	v_1	v_2
u_2	1.92 1	–1.92	1.44	–1				–1.44
u_3	–1.92	1.28 1.92	0.96 –1.44			–1.28	–0.96	1.44
v_3	1.44	0.96 –1.44	0.72 1.08 1		–1	–0.96	–0.72	–1.08
u_4	–1			1 1		–1		
v_4			–1		1			
u_1		–1.28	–0.96	–1		1.28 1	0.96	
v_1		–0.96	–0.72			0.96	0.72	
v_2	–1.44	1.44	–1.08					1.08

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

de manera que la ecuación matricial con el orden correcto queda así:

$$
\begin{bmatrix} X_2 = 0 \\ X_3 = 40 \\ Y_3 = 30 \\ X_4 = 0 \\ Y_4 = -200 \\ \hline X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = E \left[\begin{array}{rrrrr|rrr} 2.92 & -1.92 & 1.44 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1.44 \\ -1.92 & 3.20 & -0.48 & 0 & 0 & -1.28 & -0.96 & 1.44 \\ 1.44 & -0.48 & 2.80 & 0 & -1 & -0.96 & -0.72 & -1.08 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1.28 & -0.96 & -1 & 0 & 2.28 & 0.96 & 0 \\ 0 & -0.96 & -0.72 & 0 & 0 & 0.96 & 0.72 & 0 \\ -1.44 & 1.44 & -1.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.08 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \hline u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{bmatrix}
$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Efectuando la partición en la forma establecida e invirtiendo

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 2.92 & -1.92 & 1.44 & -1 & 0 \\ -1.92 & 3.20 & -0.48 & 0 & 0 \\ 1.44 & -0.48 & 2.80 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \\ 0 \\ -200 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1.333 & 1 & -1.333 \\ 1 & 0.826 & -0.580 & 0.580 & -0.580 \\ -1.333 & -0.580 & 1.468 & -0.667 & 1.468 \\ 1 & 0.500 & -0.667 & 1 & -0.667 \\ -1.333 & -0.580 & 1.468 & -0.667 & 2.468 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \\ 0 \\ -200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.333 & \rightarrow \\ 0.658 & \rightarrow \\ -1.364 & \downarrow \\ 0.667 & \rightarrow \\ -2.363 & \downarrow \end{bmatrix}_{mm}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Ahora se pueden calcular las reacciones:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 200\begin{bmatrix} 0 & -1.28 & -0.96 & -1 & 0 \\ 0 & -0.96 & -0.72 & 0 & 0 \\ -1.44 & 1.44 & -1.08 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.333 \\ 0.658 \\ -1.364 \\ 0.667 \\ -2.363 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40.0 \\ 70.1 \\ 100.2 \end{bmatrix}_{kN}$$

Finalmente, se calculan las fuerzas internas:

$$S_{1-3} = 200\,[1.6 \quad 1.2]\begin{bmatrix} 0.658-0 \\ -1.364-0 \end{bmatrix} = -116.8 \text{ kN} \qquad \text{(C)}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

$$S_{1-4} = 200\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.667-0\\ -2.363-0\end{bmatrix} = 133.4\ \text{kN} \quad (\text{T})$$

$$S_{3-2} = 200\begin{bmatrix}2.4 & -1.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.333-0.658\\ 0+1.364\end{bmatrix} = -167.0\ \text{kN} \quad (\text{C})$$

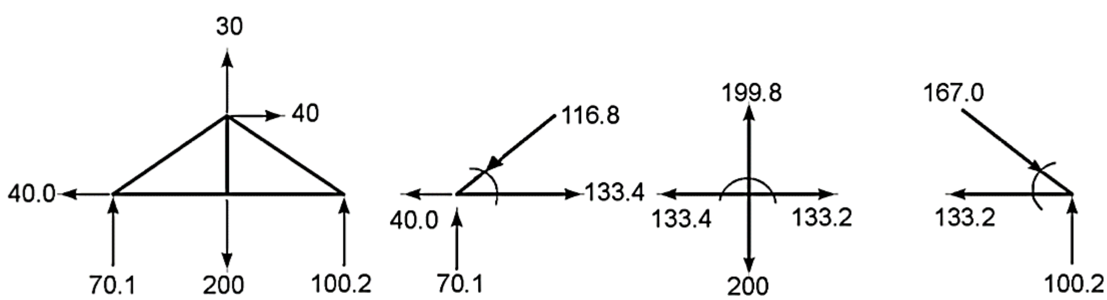
$$S_{4-2} = 200\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.333-0.667\\ 0+2.363\end{bmatrix} = 133.2\ \text{kN} \quad (\text{T})$$

$$S_{4-3} = 200\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.658-0.667\\ -1.364+2.363\end{bmatrix} = 199.8\ \text{kN} \quad (\text{T})$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

Los siguientes diagramas prueban la bondad de estas respuestas:



$\sum F_x = 0$ $\quad$ $\sum F_y = 0.3$ kN ↑ $\quad$ $\sum M_1 = 1.6$ kN·m

$\sum F_x = 0$ $\quad$ $\sum F_y = 0$

$\sum F_x = 0.2$ kN □ $\quad$ $\sum F_y = 0.2$ kN ↓

$\sum F_x = 0.4$ kN → $\quad$ $\sum F_y = 0$

Método de la Rigidez

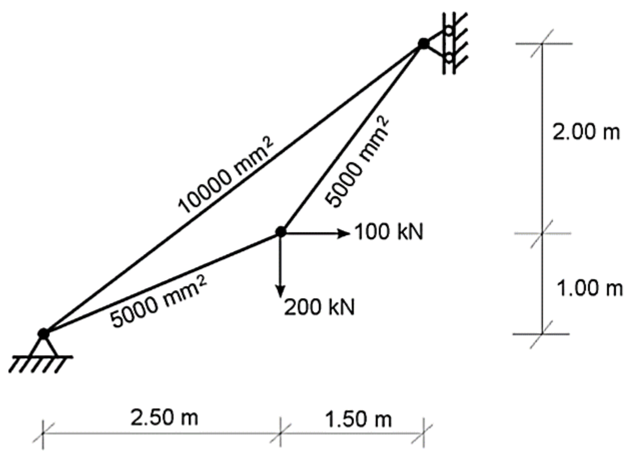
ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL

EJERCICIOS

Calcule los desplazamientos de los nudos, las reacciones y las fuerzas internas en todas las barras de las cerchas siguientes, por el método que utiliza la matriz de rigidez. El material es acero estructural con $E = 200\ kN/mm^2$.

Método de la Rigidez

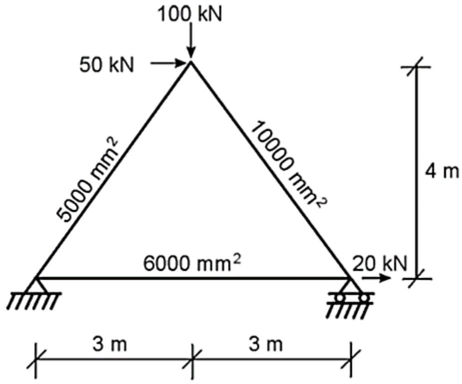
ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL



(a)

Método de la Rigidez

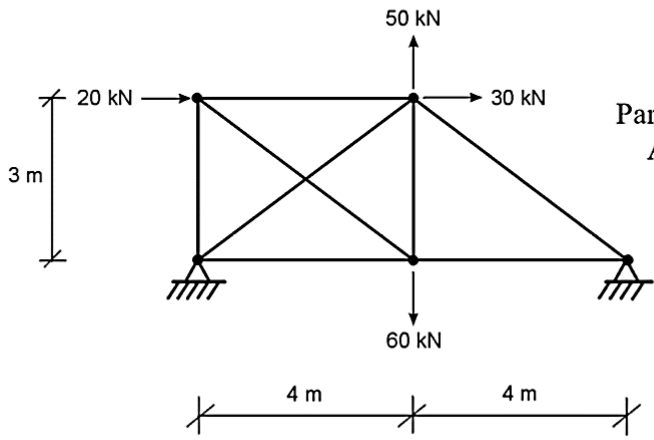
ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL



(b)

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FUERZA AXIAL



Para todas las barras:
$A = 10000\ mm^2$

(c)

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO PRISMÁTICO SOMETIDO EN SUS EXTREMOS A FLEXIÓN Y CORTE

El estudio de las vigas se iniciará con el de un elemento prismático sometido en sus extremos a flexión y corte. Posteriormente se incluirá el efecto de cargas axiales y el de cargas repartidas, actuando entre los extremos del mismo en uno de los planos principales y perpendicularmente a su eje longitudinal.
En la figura 11.13 está representado un elemento tal, con las fuerzas que actúan sobre él y su sistema de coordenadas locales.

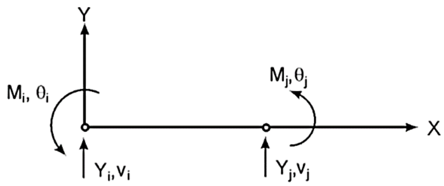


Figura 11.13 Elemento sometido a flexión y corte en sus extremos.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

El planteamiento matricial del problema resulta en:

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ M_i \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \qquad (11.43)$$

Recordando el significado físico de los términos de cada columna de la matriz de rigidez, se determinan las fuerzas que mantienen la estructura en equilibrio en cada una de las situaciones de la figura 11.14. Para ello resulta muy útil el método de la viga conjugada, como se recordará de lo visto en la deducción del método de Cross

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

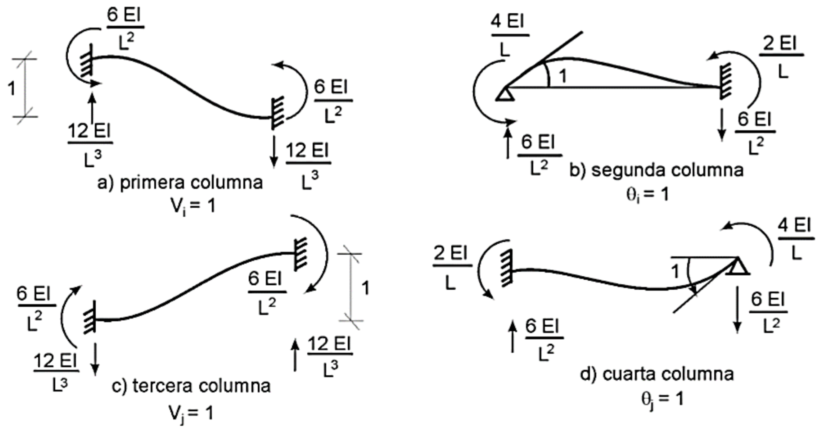


Figura 11.14 Significado físico de los términos de la matriz de rigidez de un elemento prismático sometido a flexión y corte. En todos los casos los desplazamientos nodales no indicados explícitamente son cero.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ensamblando los términos correspondientes a las cuatro columnas, con debida consideración a la convención de signos adoptada (fuerzas hacia arriba y momentos antihorarios son positivos), se obtiene la matriz de rigidez del elemento:

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_i & \theta_i & v_j & \theta_j \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{matrix} \qquad (11.44)$$

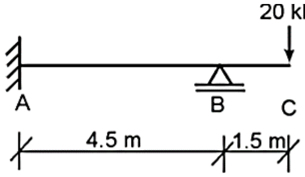
De nuevo se observa que la matriz $[K]$ es simétrica y que la suma de los términos Y correspondientes a cualquier columna da cero. No ocurre lo mismo con los términos M, puesto que en el equilibrio de momentos entran también las fuerzas de corte.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ejemplo

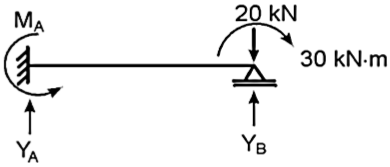
Encuentre para la estructura mostrada: a) las reacciones; b) la rotación en el apoyo B.



$$EI = 7290 \text{ kN·m}^2$$

Solución

Como no piden el desplazamiento en C, se puede reemplazar la viga dada por la siguiente viga equivalente:



$$EI / L = 7290 / 4.5 = 1620 \text{ kN·m}$$
$$EI / L^2 = 7290 / (4.5)^2 = 360 \text{ kN}$$
$$EI / L^3 = 7290 / (4.5)^3 = 80 \text{ kN/m}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

y aplicando la ecuación (11.44):

$$\begin{bmatrix} -30 \\ \hline Y_A \\ M_A \\ Y_B - 20 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 6480 & 2160 & 3240 & -2160 \\ \hline 2160 & 960 & 2160 & -960 \\ 3240 & 2160 & 6480 & -2160 \\ -2160 & -960 & -2160 & 960 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \theta_B \\ \hline v_A = 0 \\ \theta_A = 0 \\ v_B = 0 \end{bmatrix}$$

expandiendo el primer renglón:

$$[-30] = [2160 \quad 3240 \quad -2160] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 6480\,[\theta_B]$$

$$\rightarrow \qquad \theta_B = -30 / 6480 = -0.00463 \text{ rad}$$

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

y reemplazando este valor en los tres últimos:

$$\begin{bmatrix} Y_A \\ M_A \\ Y_B - 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2160 \\ 3240 \\ -2160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.00463 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.0 \\ -15.0 \\ 10.0 \end{bmatrix} \text{kN}$$

o sea

$Y_A = -10.0\ \text{kN}\ \downarrow$

$M_A = -15.0\ \text{kN·m}$

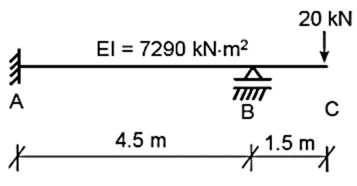
$Y_B = 30\ \text{kN}\ \uparrow$

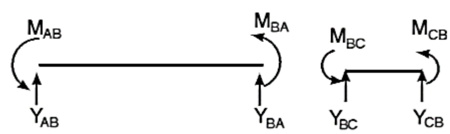
con lo cual queda resuelto totalmente el problema.

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ejemplo

En el problema anterior, encuentre la deflexión y rotación del punto C.





Solución

En este caso es necesario trabajar con la viga original y considerar dos elementos: AB y BC. Como no piden averiguar las reacciones, se pueden eliminar los términos correspondientes a desplazamientos nulos; queda entonces:

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Para el tramo AB:

$$\left[M_{BA}\right] = \left[6480\right]\left[\theta_B\right]$$

Para el tramo BC:

$$EI / L \;=\; 7290 / 1.5 \;= 4860 \;\; kN \cdot m$$

$$EI / L^2 \;=\; 7290 / (1.5)^2 \;= 3240 \; kN$$

$$EI / L^3 \;=\; 7290 / (1.5)^3 = 2160 \; kN/m$$

y por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} M_{BC} \\ Y_C \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19440 & -19440 & 9720 \\ -19440 & 25920 & -19440 \\ 9720 & -19440 & 19440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ v_c \\ \theta_c \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Superponiendo ahora y teniendo en cuenta que en B no se ha aplicado ningún momento externo y por consiguiente $M_{BA} + M_{BC} \;=\; 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25920 & -19440 & 9720 \\ -19440 & 25920 & -19440 \\ 9720 & -19440 & 19440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ v_c \\ \theta_c \end{bmatrix}$$

y despejando los desplazamientos desconocidos:

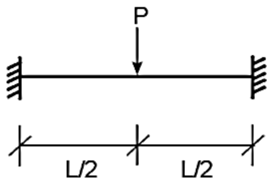
$$\begin{bmatrix} \theta_B \\ v_c \\ \theta_c \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1.543 & 2.315 & 1.543 \\ 2.315 & 5.015 & 3.858 \\ 1.543 & 3.858 & 3.601 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00463 \text{ rad} \circlearrowright \\ -0.01003 \text{ m} \downarrow \\ -0.00772 \text{ rad} \circlearrowright \end{bmatrix}$$

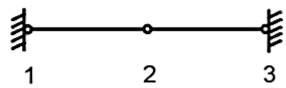
Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ejemplo

Resuelva la viga mostrada y halle su flecha máxima. EI es constante.





Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Solución

Al aplicar la ecuación (11.44) a los elementos de la figura derecha, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 96/L^3 & 24/L^2 & -96/L^3 & 24/L^2 \\ 24/L^2 & 8/L & -24/L^2 & 4/L \\ -96/L^3 & -24/L^2 & 96/L^3 & -24/L^2 \\ 24/L^2 & 4/L & -24/L^2 & 8/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 96/L^3 & 24/L^2 & -96/L^3 & 24/L^2 \\ 24/L^2 & 8/L & -24/L^2 & 4/L \\ -96/L^3 & -24/L^2 & 96/L^3 & -24/L^2 \\ 24/L^2 & 4/L & -24/L^2 & 8/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

en donde se ha tenido en cuenta la simetría para establecer que $\theta_2 = 0$. Ensamblando ahora en el orden apropiado para obtener la matriz de rigidez de la estructura y sabiendo que:

$$Y_{21} + Y_{23} = P$$

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

se llega a la siguiente expresión:

$$\left[\begin{array}{c} -P \\ \hline Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{array}\right] = EI \left[\begin{array}{c|cccc} 192/L^3 & -96/L^3 & -24/L^2 & -96/L^3 & 24/L^2 \\ \hline -96/L^3 & 96/L^3 & 24/L^2 & 0 & 0 \\ -24/L^2 & 24/L^2 & 8/L & 0 & 0 \\ -96/L^3 & 0 & 0 & 96/L^3 & -24/L^2 \\ 24/L^2 & 0 & 0 & -24/L^2 & 8/L \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} v_2 \\ \hline v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{array}\right]$$

en donde se han eliminado la fila y la columna correspondiente a θ_2 por resultar inoficiosa.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Expandiendo la primera fila:

$$[-P] = EI\,[192/L^3]\,[v_2]$$

$$\rightarrow \qquad v_2 = -\frac{PL^3}{192\,EI} \downarrow$$

y reemplazando este valor en la segunda parte:

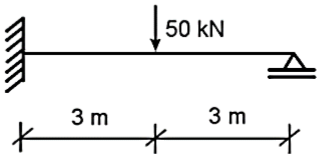
$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -96/L^3 \\ -24/L^2 \\ -96/L^3 \\ 24/L^2 \end{bmatrix} \left[-\frac{PL^3}{192EI}\right] = \begin{bmatrix} P/2 \\ PL/8 \\ P/2 \\ -PL/8 \end{bmatrix}$$

obviamente estos valores no son otros que las reacciones y momentos de empotramiento.

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ejemplo

Resuelva completamente la viga mostrada.

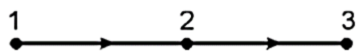


Dimensiones (b × h): 300 × 400 mm

Módulo de elasticidad: 19 kN/mm^2

Solución

Se empieza por numerar los nudos y orientar los miembros:



$$EI = 19 \times 10^6 \times \frac{0.3 \times (0.4)^3}{12} = 30400 \ \text{kN}\cdot\text{m}^2$$

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Luego se evalúan las matrices de rigidez individuales; como $v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$, no es necesario escribir las columnas correspondientes a dichos desplazamientos. La ecuación $[F] = [K]\,[\delta]$ queda entonces, para cada elemento, así:

$$\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} | & | & -13510 & 20270 \\ | & | & -20270 & 20270 \\ | & | & 13510 & -20270 \\ | & | & -20270 & 40530 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

$$
\begin{array}{c}
\\
\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{cccc}
v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\
\left[\begin{array}{cccc} 13510 & 20270 & | & 20270 \\ 20270 & 40530 & | & 20270 \\ -13510 & -20270 & | & -20270 \\ 20270 & 20270 & | & 40530 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
\\
\begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Obsérvese de nuevo que no se han calculado algunas columnas por cuanto dicho cálculo resulta inoficioso, ya que corresponden a desplazamientos nulos.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ensamblando ahora con un ordenamiento apropiado:

$$
\left[\begin{array}{l} Y_2 = Y_{21} + Y_{23} \\ \\ M_2 = M_{21} + M_{23} \\ \\ \hline M_3 = M_{32} \\ Y_1 = Y_{12} \\ M_1 = M_{12} \\ Y_3 = Y_{32} \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{ccc|c|c|} 13510 & -20270 & 20270 & & \\ 13510 & 20270 & & & \\ \hline -20270 & 40530 & 20270 & & \\ 20270 & 40530 & & & \\ \hline 20270 & 20270 & 40530 & & \\ -13510 & 20270 & & & \\ -20270 & 20270 & & & \\ -13510 & -20270 & -20270 & & \end{array}\right]
\left[\begin{array}{l} v_2 \\ \\ \theta_2 \\ \\ \theta_3 \\ v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_3 = 0 \end{array}\right]
$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

que al efectuar las sumas y reemplazar por los valores conocidos se convierte en:

$$\left[\begin{array}{c} -50 \\ 0 \\ 0 \\ \hline Y_1 \\ M_1 \\ Y_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 20270 & 0 & 20270 \\ 0 & 81060 & 20270 \\ 20270 & 20270 & 40530 \\ \hline -13510 & 20270 & 0 \\ -20270 & 20270 & 0 \\ -13510 & -20270 & -20270 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \hline v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_3 = 0 \end{array}\right]$$

y de ahí se pueden despejar los desplazamientos, bien sea por inversión o por eliminación:

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27020 & 0 & 20270 \\ 0 & 81060 & 20270 \\ 20270 & 20270 & 40530 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.240 \times 10^{-3}\ \text{m} \downarrow \\ -4.631 \times 10^{-4}\ \text{rad} \\ 1.8519 \times 10^{-3}\ \text{rad} \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Reemplazando ahora estos valores en las matrices individuales, se obtiene:

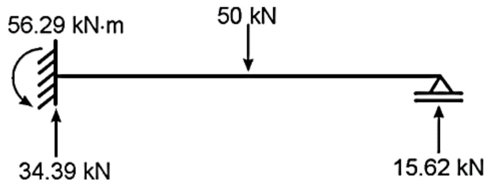
$$\begin{bmatrix} Y_{12} = Y_1 \\ M_{12} = M_1 \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.49\ \text{kN} \uparrow \\ 56.29\ \text{kN}\cdot\text{m} \\ -34.39\ \text{kN} \downarrow \\ 46.90\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} = Y_3 \\ M_{32} = M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.62\ \text{kN} \downarrow \\ -46.91\ \text{kN}\cdot\text{m} \\ 15.62\ \text{kN} \uparrow \\ 0\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

verificándose el equilibrio del nudo 2 y el momento nulo en el apoyo 3. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de toda la estructura para comprobar el equilibrio general:



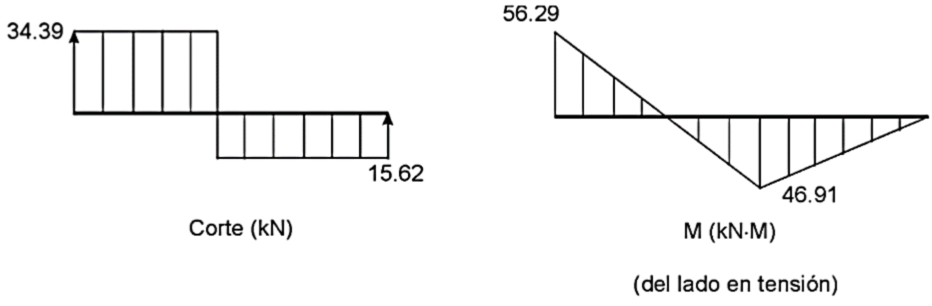
$$\Sigma\ F_y = 0.01\ \ \text{kN}$$

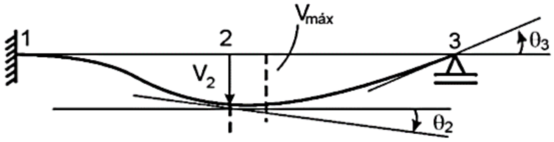
$$\Sigma\ M_1 = 0.01\ \ \text{kN·m}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Para terminar, se dibujan los diagramas de corte y momento y la elástica aproximada de la viga:

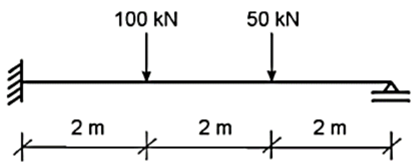




ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ejemplo

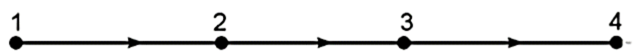
Resuelva la misma viga del ejemplo anterior, pero con las siguientes cargas:



$$EI = 30400 \ \ kN{\cdot}m^2$$

Solución

Como hay dos cargas puntuales, es necesario considerar tres tramos. Numerando los nudos de izquierda a derecha y dándoles a los miembros la misma orientación:



Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \vert & \vert & -45600 & 45600 \\ \vert & \vert & -45600 & 30400 \\ \vert & \vert & 45600 & -45600 \\ \vert & \vert & -45600 & 60800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 45600 & 45600 & -45600 & 45600 \\ 45600 & 60800 & -45600 & 30400 \\ -45600 & -45600 & 45600 & -45600 \\ 45600 & 30400 & -45600 & 60800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} v_3 & \theta_3 & v_4 & \theta_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{34} \\ M_{34} \\ Y_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 45600 & 45600 & \vert & 45600 \\ 45600 & 60800 & \vert & 30400 \\ -45600 & -45600 & \vert & -45600 \\ 45600 & 30400 & \vert & 60800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ensamblando con un ordenamiento adecuado, la parte $[F_n]=[K_{nn}][\delta_n]$ queda así:

$$\begin{bmatrix} Y_2 = Y_{21} + Y_{23} \\ M_2 = M_{21} + M_{23} \\ Y_3 = Y_{32} + Y_{34} \\ M_3 = M_{32} + M_{34} \\ M_4 = M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \substack{45600 \\ 45600} & \substack{-45600 \\ 45600} & \substack{ \\ -45600} & \substack{ \\ 45600} & \\ \substack{-45600 \\ 45600} & \substack{60800 \\ 60800} & \substack{ \\ -45600} & \substack{ \\ 30400} & \\ -45600 & -45600 & \substack{45600 \\ 45600} & \substack{-45600 \\ 45600} & \substack{ \\ 45600} \\ 45600 & 30400 & \substack{-45600 \\ 45600} & \substack{60800 \\ 60800} & \substack{ \\ 30400} \\ & & 45600 & 30400 & 60800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Efectuando las sumas y reemplazando los valores conocidos:

$$\begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91200 & 0 & -45600 & 45600 & 0 \\ 0 & 121600 & -45600 & 30400 & 0 \\ -45600 & -45600 & 91200 & 0 & 45600 \\ 45600 & 30400 & 0 & 121600 & 30400 \\ 0 & 0 & 45600 & 30400 & 60800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

Y resolviendo este sistema para hallar los desplazamientos, se obtiene:

$$v_2 = -5.442 \times 10^{-3}\ \text{m} \downarrow$$

$$\theta_2 = -3.046 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$v_3 = -6.985 \times 10^{-3}\ \text{m} \downarrow$$

$$\theta_3 = 1.706 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$\theta_4 = 4.386 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

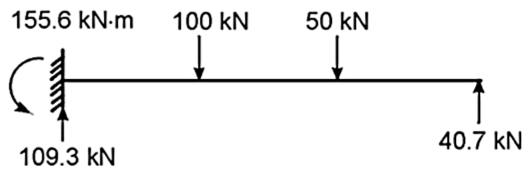
Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Reemplazando estos valores en las matrices individuales y efectuando las multiplicaciones respectivas, se obtienen las fuerzas internas en cada tramo:

$$
\begin{array}{lll}
Y_{12} = 109.3\ \text{kN} \uparrow & Y_{23} = 9.3\ \text{kN} \uparrow & Y_{34} = -40.7\ \text{kN} \downarrow \\
M_{12} = 155.6\ \text{kN·m} & M_{23} = -63.0\ \text{kN·m} & M_{34} = -81.5\ \text{kN·m} \\
Y_{21} = -109.3\ \text{kN} \downarrow & Y_{32} = -9.3\ \text{kN} \downarrow & Y_{43} = 40.7\ \text{kN} \uparrow \\
M_{21} = 63.0\ \text{kN·m} & M_{32} = 81.5\ \text{kN·m} & M_{43} = 0\ \text{kN·m}
\end{array}
$$

comprobándose el equilibrio en los nudos 2 y 3 y el momento nulo en el nudo 4. Verificando ahora el equilibrio general:



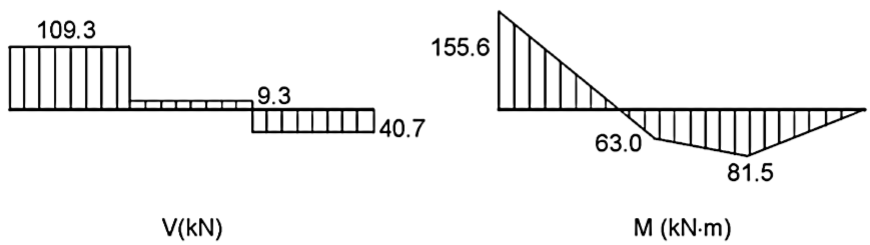
$$\Sigma F_y = 0.0\ \text{kN}$$

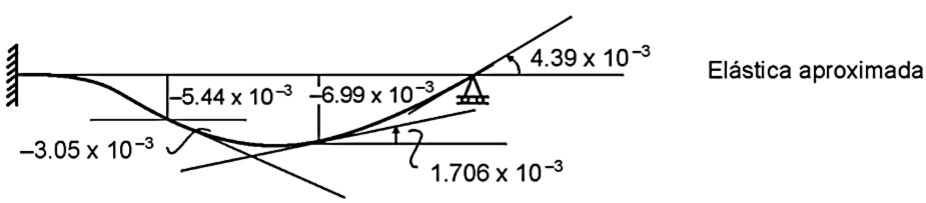
$$\Sigma M_1 = -0.2\ \text{kN·m}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Finalmente se dibujan los diagramas de corte y de momento, y la elástica aproximada:





Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

VIGAS CON CARGAS REPARTIDAS

El procedimiento empleado en los ejemplos anteriores sirve para resolver vigas con cargas concentradas, pues los tramos de viga comprendidos entre los puntos de aplicación de las cargas están sometidos únicamente a flexión y corte en sus extremos. No sucede así cuando la carga es repartida, ya que entonces el corte varía continuamente dentro del tramo y la relación entre fuerzas y desplazamientos no es la indicada por la ecuación (11.44). Sin embargo, el problema se podría resolver en forma aproximada, reemplazando la carga repartida por varias cargas concentradas, equivalentes en magnitud. Naturalmente, el error disminuye en la medida en que se emplee un mayor número de cargas, pero esto requiere a su vez que se aumente el número de tramos y, en consecuencia, la magnitud del problema, ya que cada tramo introduce dos grados adicionales de libertad. Esto hace que para una estructura grande tal aproximación no tenga importancia práctica, pues consume demasiada memoria de la computadora.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Afortunadamente, el problema de las cargas repartidas se puede tratar en forma similar a la utilizada en armaduras, para el caso de efectos de temperatura o errores de fabricación. En efecto, al considerar la viga de la figura 11.15a, sometida a las cargas repartidas mostradas, es evidente que cada tramo, si estuviera solo, se deformaría como se indica en la figura (b) y su ensamblaje sería imposible, puesto que la continuidad de la viga exige que las rotaciones de todos ellos sean iguales en los nudos comunes.

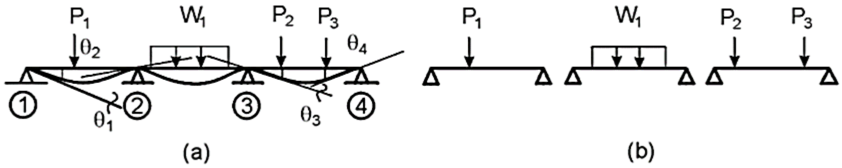
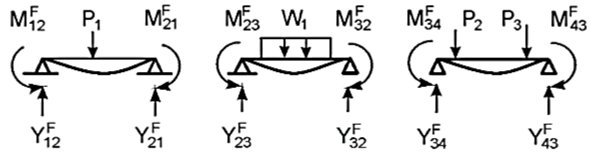
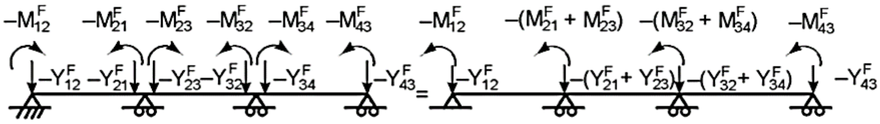


Figura 11.15 Reemplazo de una viga continua con cargas sobre los tramos por un sistema equivalente con cargas concentradas en los apoyos.

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE



(c)

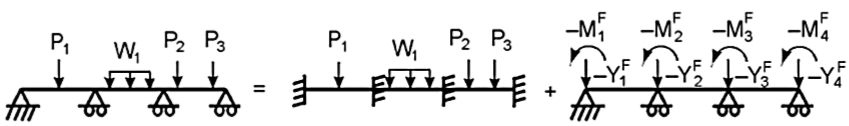


(d)

Es evidente que si a cada tramo cargado se le aplican las reacciones de empotramiento, como se muestra en (c), ya no habrá problema para efectuar el ensamblaje; no obstante, será necesario aplicar a la estructura ensamblada en estas condiciones unas fuerzas iguales en magnitud y de sentido opuesto a las de empotramiento, con el fin de lograr, al efectuar la superposición, la equivalencia de los dos sistemas. Esto se ilustra en la sección

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

(e) de la misma figura. Como la última viga quedó sometida únicamente a cargas en los apoyos, es posible resolverla con el procedimiento visto anteriormente para tramos sometidos sólo a flexión y corte en sus extremos.



(e)

Matemáticamente, la superposición se puede expresar así:

$$[F] = [F]^F + [K]\,[\delta] \tag{11.45}$$

que una vez ordenada permite partirla y escribir:

$$[F]_n = [F]_n^F + \left[K_{nn} \;\middle|\; K_{na}\right] \left[\begin{array}{c} \delta_n \\ \hline \delta_a \end{array}\right] \tag{11.46}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Cuando los desplazamientos de los apoyos son cero, la ecuación anterior se reduce a:

$$[F]_n = [F]_n^F + [K_{nn}]\,[\delta_n] \qquad (11.47)$$

y despejando los desplazamientos libres:

$$[\delta_n] = [K_{nn}]^{-1}\,[F - F^F]_n \qquad (11.48)$$

Como los desplazamientos de la primera etapa, o sea la de la estructura con nudos fijos, son nulos, los desplazamientos encontrados con la ecuación (11.48) resultan idénticos a los de la estructura original.

Después de hallar $[\delta_n]$, las reacciones de los apoyos se calculan así:

$$[F]_a = [F]_a^F + [K_{an}][\delta_n] \qquad (11.49)$$

y finalmente se encuentran las fuerzas internas en cada tramo mediante la ecuación:

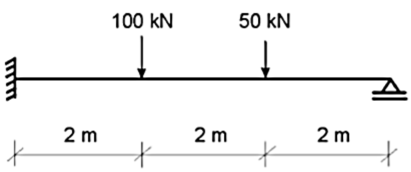
$$[F]_{ij} = [F]_{ij}^F + [K]_{ij}\,[\delta]_{ij} \qquad (11.50)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ejemplo

Resuelva la viga mostrada, utilizando un solo tramo y el procedimiento indicado en el artículo anterior.



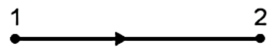
$EI = 30400 \ kN{\cdot}m^2$

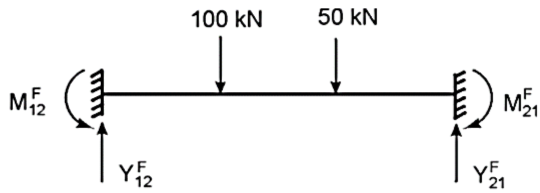
Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Solución

En primer lugar se numeran los nudos y se asigna una orientación al tramo. Luego se calculan las reacciones de empotramiento, que para una viga con esas cargas son:





$$M^F_{12} = \frac{100\times16\times2+50\times4\times4}{36} = 111.1 \ \ \text{kN·m}$$

$$M^F_{21} = -\frac{100\times4\times4+50\times16\times2}{36} = -88.9 \ \ \text{kN·m}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

$$Y^F_{12} = \frac{100\times4+5\times2+(111.1-88.9)}{6} = 87.0 \ \ \text{kN}$$

$$Y^F_{21} = \frac{100\times2+50\times4-(111.1-88.9)}{6} = 63.0 \ \ \text{kN}$$

y empleando la ecuación (11.44) para evaluar la matriz de rigidez, el planteamiento matricial queda así:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ \hline M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & 5067 \\ | & | & | & 10133 \\ | & | & | & -5067 \\ \hline | & | & | & 20267 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \hline \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 87.0 \\ 111.1 \\ 63.0 \\ \hline -88.9 \end{bmatrix}$$

en que se ha omitido el cálculo de las columnas 1, 2 y 3 por ser innecesario para la solución del problema. Despejando θ_2 o empleando la ecuación (11.48):

$$[\theta_2] = [20267]^{-1} \ [88.9] = 88.9/20267 = 4.3864\times10^{-3} \text{ rad} \circlearrowleft$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

El vector de reacciones será entonces:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5067 \\ 10133 \\ -5067 \end{bmatrix} \left[4.3864 \times 10^{-3}\right] + \begin{bmatrix} 87.0 \\ 111.1 \\ 63.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 109.2 \text{ kN} \uparrow \\ 155.6 \text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowleft \\ 40.8 \text{ kN} \uparrow \end{bmatrix}$$

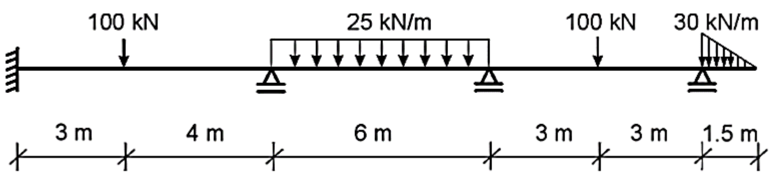
que de nuevo coincide, desde el punto de vista práctico, con el encontrado anteriormente. Con esto queda terminada la solución, ya que la estructura consta de un solo miembro y, por tanto, sus fuerzas internas coinciden con las reacciones.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ejemplo

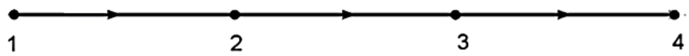
Resuelva completamente la viga indicada, cuya sección mide 300 × 350 mm. $E = 19 \text{ kN/mm}^2$.

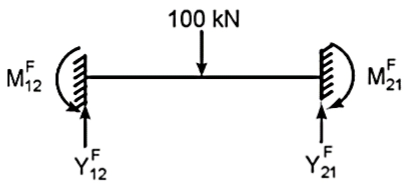


ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Solución

Se empieza por numerar los nudos y se les asigna a los miembros sentido positivo de izquierda a derecha. Luego se calculan las reacciones de empotramiento y las cargas que actúan sobre el nudo 4 por efecto del voladizo:



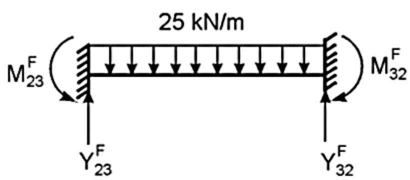


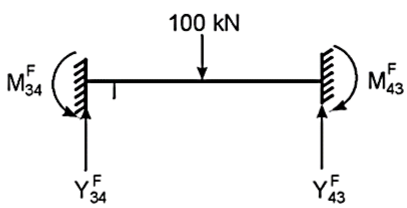
$$M^F_{12} = \frac{100 \times 16 \times 3}{49} = 98.0 \ \text{kN·m}$$

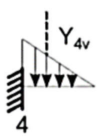
$$M^F_{21} = -\frac{100 \times 9 \times 4}{49} = -73.5 \ \text{kN·m}$$

$$Y^F_{12} = \frac{100 \times 4 + (98.0 - 73.5)}{7} = 60.6 \ \text{kN}$$

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE







$$Y^F_{21} = 100 - 60.6 = 39.4 \ \text{kN}$$

$$M^F_{23} = -M^F_{32} = \frac{25 \times 36}{12} = 75.0 \ \text{kN·m}$$

$$Y^F_{23} = Y^F_{32} = 25 \times 3 = 75.0 \ \text{kN}$$

$$M^F_{34} = -M^F_{43} = \frac{100 \times 6}{8} = 75.0 \ \text{kN·m}$$

$$Y^F_{34} = Y^F_{43} = 100/2 = 50.0 \ \text{kN}$$

$$Y_{4v} = -0.5 \times 30 \times 1.5 = -22.5 \ \text{kN}$$

$$M_{4v} = -22.5 \times 0.5 = -11.25 \ \text{kN·m}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ahora se utiliza la ecuación (11.44) para evaluar la matriz de rigidez de cada elemento.

$$EI = 19 \times 10^6 \times 0.3 \times (0.35)^3 / 12 = 20370 \quad kN{\cdot}m^2$$

El planteamiento básico para cada uno queda entonces así:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} | & | & | & 2494 \\ | & | & | & 5820 \\ | & | & | & -2494 \\ | & | & | & 11640 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60.6 \\ 98.0 \\ 39.4 \\ -73.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} | & 3395 & | & 3395 \\ | & 13580 & | & 6790 \\ | & -3395 & | & -3395 \\ | & 6790 & | & 13580 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75.0 \\ 75.0 \\ 75.0 \\ -75.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_3 & \theta_3 & v_4 & \theta_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{34} \\ M_{34} \\ Y_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} | & 3395 & | & 3395 \\ | & 13580 & | & 6790 \\ | & -3395 & | & -3395 \\ | & 6790 & | & 13580 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 = 0 \\ \theta_3 \\ v_4 = 0 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50.0 \\ 75.0 \\ 50.0 \\ -75.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

A continuación se ensamblan los tres elementos en tal forma que la matriz $[K]$ quede de una vez ordenada, como se muestra en seguida.

En ella se tuvo en cuenta que:

$Y_1 = Y_{12}$ $\quad Y_2 = Y_{21} + Y_{23}$ $\quad Y_3 = Y_{32} + Y_{34}$

$Y_4 = Y_{43} + Y_{4v}$

$M_1 = M_{12}$ $\quad M_2 = M_{21} + M_{23}$ $\quad M_3 = M_{32} + M_{34}$

$M_4 = M_{43} + M_{4v}$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

y por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} M_2 = 0 \\ M_3 = 0 \\ M_4 = -11.25 \\ \hline Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 - 22.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25220 & 6790 & 0 \\ 6790 & 27160 & 6790 \\ 0 & 6790 & 13580 \\ \hline 2494 & 0 & 0 \\ 5820 & 0 & 0 \\ 901 & 3395 & 0 \\ -3395 & 0 & 3395 \\ 0 & -3395 & -3395 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -75.0 \\ \hline 60.6 \\ 98.0 \\ 114.4 \\ 125.0 \\ 50.0 \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Despejando los desplazamientos desconocidos:

$$\begin{bmatrix}\theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25220 & 6790 & 0\\ 6790 & 27160 & 6790\\ 0 & 6790 & 13580\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1.5\\ 0\\ 63.8\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}4.296 & -1.227 & 0.614\\ -1.227 & 4.559 & -2.279\\ 0.614 & -2.279 & 8.503\end{bmatrix}\times 10^{-5}\times\begin{bmatrix}-1.5\\ 0\\ 63.8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3.271\times 10^{-4}\\ -1.436\times 10^{-3}\\ 5.416\times 10^{-3}\end{bmatrix}$$

radianes

Método de la Rigidez

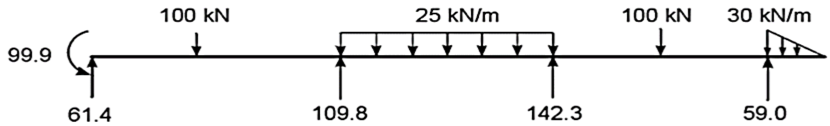
ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Substituyendo estos valores en la parte inferior de la ecuación anterior, se obtienen las reacciones:

$Y_1 = 61.4$ kN ↑ $\quad M_1 = 99.9$ kN·m

$Y_2 = 109.8$ kN ↑ $\quad Y_3 = 142.3$ kN ↑ $\quad Y_4 = 59.0$ kN ↑

Con estos valores se puede comprobar el equilibrio general de la estructura:



$$\Sigma F_y = 61.4 + 109.8 + 142.3 + 59.0 - 100 - 25\times 6 - 100 + $$
$$-0.5\times 1.5\times 30 = 0.0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 59.0\times 19 + 142.3\times 13 + 109.8\times 7 + 99.9 + $$
$$-22.5\times 19.5 - 100\times 16 - 150\times 10 - 100\times 3 = 0.6 \text{ kN·m}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Finalmente, se utilizan las ecuaciones básicas de los elementos para encontrar sus fuerzas internas:

$$\begin{bmatrix} Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2494 \\ 11640 \end{bmatrix} \left[3.271\times10^{-4} \right] + \begin{bmatrix} 39.4 \\ -73.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38.6 \text{ kN} \uparrow \\ -69.7 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3395 & 3395 \\ 13580 & 6790 \\ -3395 & -3395 \\ 6790 & 13580 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.271\times10^{-4} \\ -1.436\times10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75.0 \\ 75.0 \\ 75.0 \\ -75.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71.2 \text{ kN} \uparrow \\ 69.7 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ 78.8 \text{ kN} \uparrow \\ -92.3 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{34} \\ M_{34} \\ Y_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3395 & 3395 \\ 13580 & 6790 \\ -3395 & -3395 \\ 6790 & 13580 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.436\times10^{-3} \\ 5.416\times10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50.0 \\ 75.0 \\ 50.0 \\ 75.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63.5 \text{ kN} \uparrow \\ 92.3 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ 36.5 \text{ kN} \uparrow \\ -11.2 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

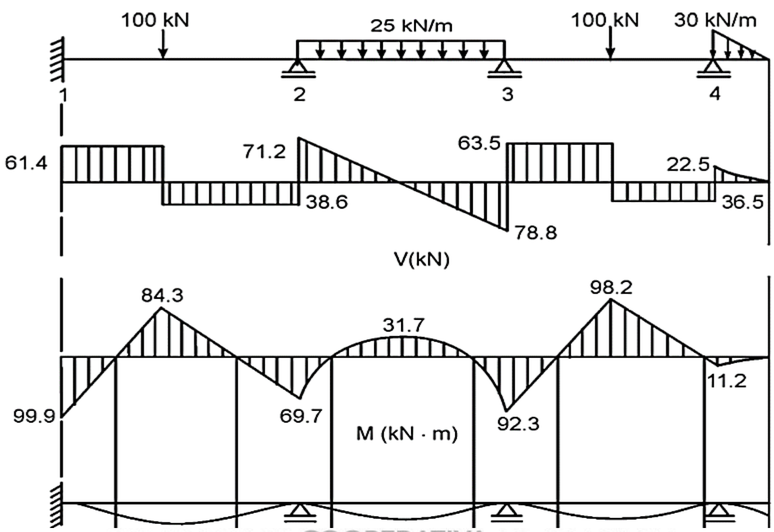
133

133

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

En consecuencia, los diagramas de fuerzas internas y la elástica aproximada quedan así:



134

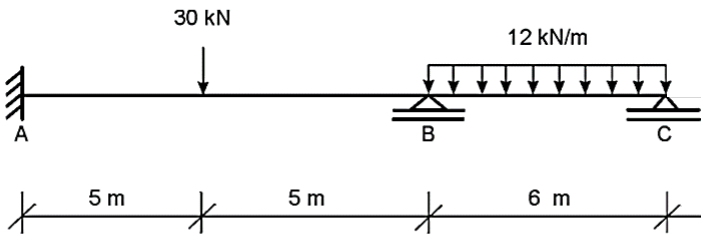
134

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN Y CORTE

Ejercicios:

Analice la viga mostrada empleando el método de la rigidez (sección 0,30 x 0,40 m; $E_c = 4700.\sqrt{f´c}$; f´c = 28 MPa).



Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO PRISMÁTICO SOMETIDO EN SUS EXTREMOS A FUERZA AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Si se incluye ahora una fuerza axial, se tendrá el caso de una viga prismática de un pórtico plano, cuya representación esquemática se puede ver en la figura 11.16.

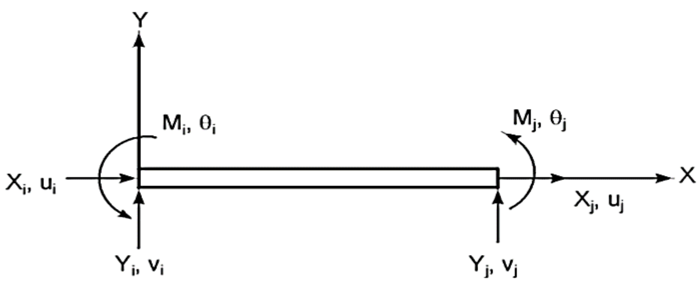


Figura 11.16 Elemento sometido en sus extremos a fuerza axial, flexión y corte (viga típica de un pórtico plano).

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Su planteamiento matricial está dado por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (11.51)$$

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Para averiguar los términos de la matriz de rigidez correspondiente se puede utilizar la definición del significado físico de cada columna o, si se desprecian los efectos de segundo orden, superponer los dos casos ya vistos, como se indica en la figura 11.17.

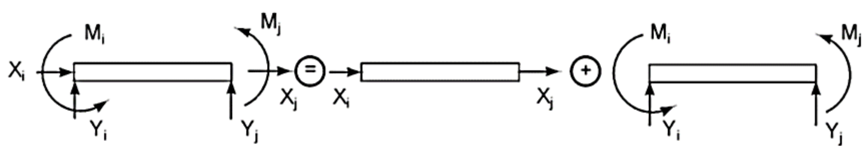


Figura 11.17 Equivalencia por superposición de una viga sometida a fuerza axial, flexión y corte.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Siguiendo este último procedimiento, se empieza por expandir los planteamientos fundamentales, con base en las ecuaciones (11.20) y (11.44), para que sean compatibles. El correspondiente a fuerza axial queda entonces así:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

y el de corte y flexión:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Ahora sí se puede efectuar su superposición, obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (11.52)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Y si se compara esta ecuación con la (11.51) se ve que la matriz de rigidez buscada es:

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array} \quad (11.53)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Esta matriz se puede aplicar directamente a cualquier viga horizontal de un pórtico plano.

Constituye, además, para cualquier viga con orientación diferente, la matriz de rigidez básica referida al sistema de ejes locales, que se emplea en el triple producto de transformación al sistema de ejes generales explicado más adelante.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

EVALUACIÓN DIRECTA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA COLUMNA PRISMÁTICA, VERTICAL, REFERIDA AL SISTEMA DE EJES GENERALES O DE LA ESTRUCTURA

Cuando el elemento prismático del artículo anterior está orientado verticalmente, constituye la columna típica de un pórtico plano. Para poder resolver pórticos ortogonales, sin utilizar matrices de transformación, conviene entonces deducir la matriz de rigidez de las columnas, refiriéndola directamente al sistema de coordenadas generales. Esto se logra fácilmente utilizando el significado físico de los términos de cada columna, como se ilustra en la figura 11.18. Tomando de ella las fu erzas respectivas, resulta:

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

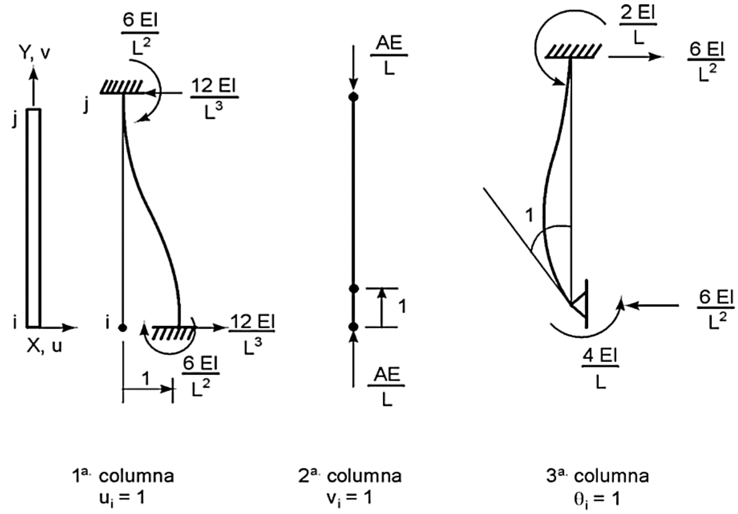


Figura 11.18 Fuerzas correspondientes a cada columna de la matriz de rigidez de un elemento vertical de pórtico plano.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

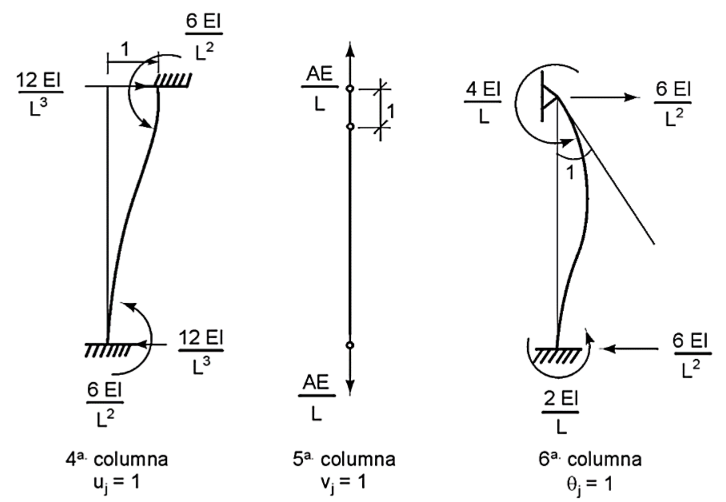


Figura 11.18 Fuerzas correspondientes a cada columna de la matriz de rigidez de un elemento vertical de pórtico plano.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \qquad (11.54)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

o sea que la matriz de rigidez de una columna vertical de un pórtico plano es:

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{array} \qquad (11.55)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

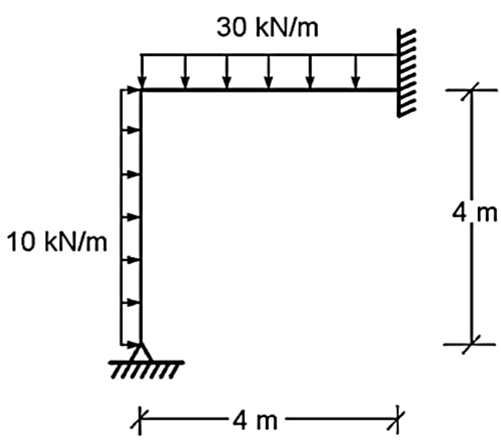
Usando las ecuaciones (11.52) y (11.54) se puede resolver cualquier pórtico plano ortogonal. Tanto las cargas nodales originales como las correspondientes a fuerzas de empotramiento equivalentes, si hay cargas sobre los miembros, deberán referirse también al sistema de ejes generales. Todo esto se ilustra con los ejemplos siguientes.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Ejemplo

Resuelva el pórtico siguiente:



Viga: 300 × 350 mm

Columna: 300 × 400 mm

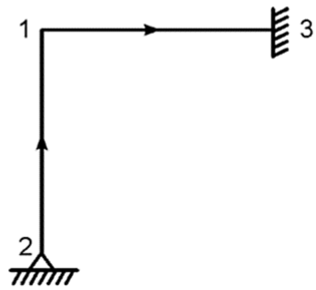
E : 19 kN/mm^2

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Solución

Se numeran los nudos, comenzando por el nudo libre para facilitar el ordenamiento, y se orientan los elementos en forma compatible con las figuras 11.16 y 11.18, así:



Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Para evaluar la matriz de rigidez de cada elemento conviene elaborar el siguiente cuadro (kilonewtons y metros):

Elemento	AE/L	EI	2 EI/L	4 EI/L	6 EI/L^2	12 EI/L^3
1 – 3	498750	20360	10180	20360	7640	3820
2 – 1	570000	30400	15200	30400	11400	5700

Las reacciones de empotramiento son:

$$Y_{13}^F = Y_{31}^F = (30 \times 4)/2 = 60.0 \text{ kN} \uparrow$$

$$M_{13}^F = -M_{31}^F = (30 \times 16)/12 = 40.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowleft$$

$$X_{21}^F = X_{12}^F = -(10 \times 4)/2 = -20.0 \text{ kN} \leftarrow$$

$$M_{21}^F = -M_{12}^F = (10 \times 16)/12 = (40/3) \text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowleft$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Conocidos estos valores, se aplican las ecuaciones (11.50), (11.53) y (11.55), obteniéndose entonces para la viga:

$$\begin{bmatrix} X_{13} \\ Y_{13} \\ M_{13} \\ X_{31} \\ Y_{31} \\ M_{31} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \quad u_1 & \quad v_1 & \quad \theta_1 & u_3 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 498750 & 0 & 0 & | & | & | \\ 0 & 3820 & 7640 & | & | & | \\ 0 & 7640 & 20360 & | & | & | \\ -498750 & 0 & 0 & | & | & | \\ 0 & -3820 & -7640 & | & | & | \\ 0 & 7640 & 10180 & | & | & | \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 40.0 \\ 0 \\ 60.0 \\ -40.0 \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

y para la columna:

$$\begin{bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \\ X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_2 & v_2 & \quad \theta_2 & \quad u_1 & \quad v_1 & \quad \theta_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} | & | & -11400 & -5700 & 0 & -11400 \\ | & | & 0 & 0 & -570000 & 0 \\ | & | & 30400 & 11400 & 0 & 15200 \\ | & | & 11400 & 5700 & 0 & 11400 \\ | & | & 0 & 0 & 570000 & 0 \\ | & | & 15200 & 11400 & 0 & 30400 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20.0 \\ 0 \\ 40/3 \\ -20.0 \\ 0 \\ -40/3 \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Como las reacciones son iguales a las fuerzas internas en uno de los extremos de las barras respectivas, basta con ensamblar la parte correspondiente a los desplazamientos desconocidos. Al hacerlo, se llega a:

$$\begin{bmatrix} X_1 = X_{13} + X_{12} = 0 \\ Y_1 = Y_{13} + Y_{12} = 0 \\ M_1 = M_{13} + M_{12} = 0 \\ M_2 = M_{21} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 504450 & 0 & 11400 & 11400 \\ 0 & 573820 & 7640 & 0 \\ 11400 & 7640 & 50760 & 15200 \\ 11400 & 0 & 15200 & 30400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.0 \\ 60.0 \\ 80/3 \\ 40/3 \end{bmatrix}$$

Y de ahí se despeja el siguiente sistema que se puede resolver por inversión o por eliminación gaussiana.

$$\begin{bmatrix} 504450 & 0 & 11400 & 11400 \\ 0 & 573820 & 7640 & 0 \\ 11400 & 7640 & 50760 & 15200 \\ 11400 & 0 & 15200 & 30400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.0 \\ -60.0 \\ -80/3 \\ -40/3 \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Utilizando este último procedimiento, se obtiene:

$$u_1 = 5.515 \times 10^{-5} \text{ m} \rightarrow$$
$$v_1 = -9.853 \times 10^{-5} \text{ m} \downarrow$$
$$\theta_1 = -4.532 \times 10^{-4} \text{ rad}$$
$$\theta_2 = -2.327 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

Las fuerzas internas y reacciones se calculan reemplazando estos valores en las ecuaciones de los miembros individuales

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

$$\begin{bmatrix} X_{13} \\ Y_{13} \\ M_{13} \\ X_{31} \\ Y_{31} \\ M_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 498750 & 0 & 0 \\ 0 & 3820 & 7640 \\ 0 & 7640 & 20360 \\ -498750 & 0 & 0 \\ 0 & -3820 & -7640 \\ 0 & 7640 & 10180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.515\times10^{-5} \\ -9.853\times10^{-5} \\ -4.532\times10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 40.0 \\ 0 \\ 60.0 \\ -40.0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 27.51 \\ -3.84 \\ -9.98 \\ -27.51 \\ 3.84 \\ -5.37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 40.0 \\ 0 \\ 60.0 \\ -40.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27.51\ \text{kN} \rightarrow \\ 56.16\ \text{kN} \uparrow \\ 30.02\ \text{kN}\cdot\text{m} \\ -27.51\ \text{kN} \leftarrow \\ 63.84\ \text{kN} \uparrow \\ -45.37\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

157

157

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

$$\begin{bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \\ X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11400 & -5700 & 0 & -11400 \\ 0 & 0 & -570000 & 0 \\ 30400 & 11400 & 0 & 15200 \\ 11400 & 5700 & 0 & 11400 \\ 0 & 0 & 570000 & 0 \\ 15200 & 11400 & 0 & 30400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.327\times10^{-4} \\ 5.515\times10^{-5} \\ -9.853\times10^{-5} \\ -4.532\times10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20.0 \\ 0 \\ 40/3 \\ -20.0 \\ 0 \\ 40/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7.50 \\ 56.16 \\ -13.33 \\ -7.50 \\ -56.16 \\ -16.69 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20.0 \\ 0 \\ 40/3 \\ -20.0 \\ 0 \\ -40/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.50\ \text{kN} \leftarrow \\ 56.16\ \text{kN} \uparrow \\ 0\ \ \text{kN}\cdot\text{m} \\ -27.50\ \text{kN} \leftarrow \\ -56.16\ \text{kN} \downarrow \\ -30.02\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

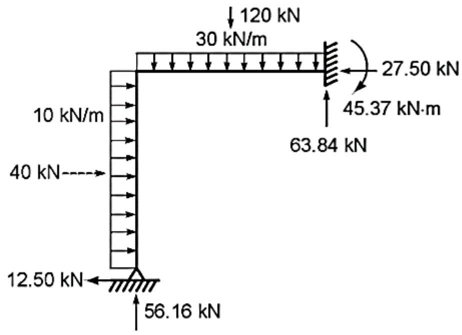
158

158

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Con estos valores se puede verificar el equilibrio general:



$\Sigma F_x = -0.01$ kN ←

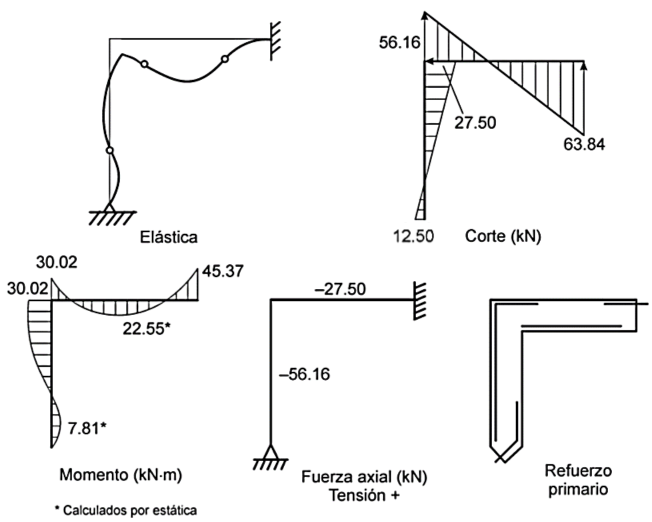
$\Sigma F_y = 0.00$ kN

$\Sigma M_2 = 0.03$ kN·m

Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Finalmente se dibujan los diagramas:

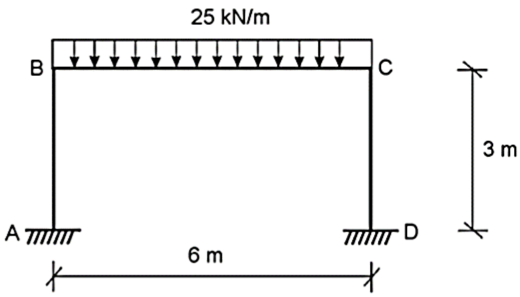


Método de la Rigidez

ELEMENTOS SOMETIDOS A FZA. AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Ejercicios:

Analice el pórtico de la figura por el método matricial de los desplazamientos.



Dimensiones b × h (mm)

Viga:	300 × 500
Columnas:	300 × 300
E :	19 kN/mm^2

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO, ARBITRARIAMENTE ORIENTADO

En el caso general, un elemento de pórtico plano está sometido en sus extremos a fuerza axial, corte y flexión y se encuentra arbitrariamente orientado con respecto al eje X de la estructura, como se ilustra en la figura 11.19. En ella los ejes con barra son particulares, locales o de miembro, mientras que los ejes sin barra corresponden a los globales, generales o de la estructura.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

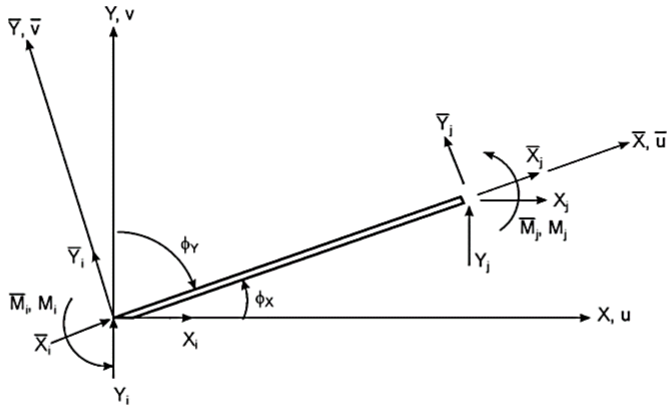


Figura 11.19 Caso general del elemento de pórtico plano, arbitrariamente orientado.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

En la figura se observa que la relación entre las fuerzas axiales y cortantes de los dos sistemas es idéntica a la que existe entre las fuerzas correspondientes de una armadura plana [véanse la figura 11.10 y las ecuaciones (11.22)]; por otra parte, los momentos son idénticos en ambos sistemas por ser vectores libres o, lo que es lo mismo, porque los ejes Z y $\overline{Z}$, a los cuales están referidos, coinciden. En consecuencia, la matriz de transformación $[T]$ definida por la ecuación (11.23a):

$$\left[\overline{F}\right] = [T]\,[F]$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

queda así:

$$\begin{bmatrix} \overline{X}_i \\ \overline{Y}_i \\ \overline{M}_i \\ \overline{X}_j \\ \overline{Y}_j \\ \overline{M}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_x & \operatorname{sen}\varphi_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi_x & \cos\varphi_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_x & \operatorname{sen}\varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\varphi_x & \cos\varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} \quad (11.56)$$

Para simplificar la escritura se aprovecha la igualdad de las cofunciones de ángulos complementarios y se definen, como antes:

$$\lambda = \cos\ \varphi_x$$

$$(11.57)$$

$$\mu = \cos\varphi_y = \operatorname{sen}\varphi_x$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Con lo cual, la matriz [T] se reduce a:

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.58)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Como la ecuación (11.28):

$$[K] = [T]^T [\overline{K}] [T]$$

vista ya, es completamente general y la matriz $[\overline{K}]$ en este caso está dada por la ecuación (11.53); basta con transponer la ecuación (11.58) y efectuar el triple producto indicado en la ecuación (11.28) para obtener la matriz de rigidez del elemento, referida a coordenadas generales. Siguiendo este procedimiento se obtienen finalmente las ecuaciones (11.59) y (11.60). Puede verificarse fácilmente que para una columna orientada de abajo hacia arriba $\phi_x = 90°$, $\phi_y = 0°$; de ahí que $\lambda = 0$ y $\mu = 1$ y al reemplazar estos valores en esta última ecuación, se obtiene exactamente la ecuación (11.55), como era de esperarse.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Cuando los miembros tienen cargas intermedias el vector de fuerzas de empotramiento debe transformarse, lógicamente, a coordenadas generales. Esto puede hacerse por trigonometría o, si se prefiere, despejando el vector [F] de la ecuación (11.23a), que resulta:

$$[F^F] = [T]^T [\overline{F}^F] \qquad (11.23b)$$

en donde:

$[F^F]$ = El vector de fuerzas de empotramiento referido a coordenadas generales.

$[T]$ = La matriz de transformación definida por la ecuación (11.58).

$[\overline{F}^F]$ = El vector de fuerzas de empotramiento referido a coordenadas locales.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Una vez se haya planteado la ecuación:

$$[F]_{ij} = [K]_{ij}\,[\delta]_{ij} + [F^F]_{ij}$$

para cada miembro se puede proceder a ensamblar, por superposición directa, la ecuación general de todo el sistema y a obtener los desplazamientos nodales en la forma ya estudiada.

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2 & \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\frac{6EI}{L^2}\mu & -\left[\frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2\right] & -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\frac{6EI}{L^2}\mu \\ \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2 & \frac{6EI}{L^2}\lambda & -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\left[\frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2\right] & \frac{6EI}{L^2}\lambda \\ -\frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\mu & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{2EI}{L} \\ -\left[\frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2\right] & -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2 & \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{6EI}{L^2}\mu \\ -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\left[\frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2\right] & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2 & -\frac{6EI}{L^2}\lambda \\ -\frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\mu & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \tag{11.59}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

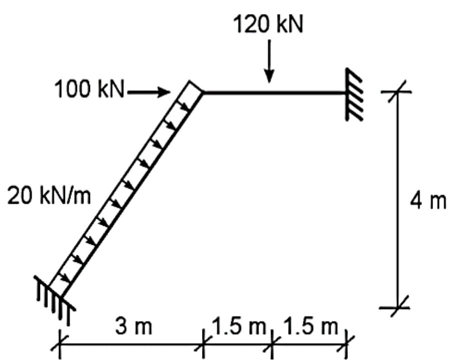
$$
[K]=\begin{bmatrix}
\frac{AE}{L}\lambda^2+\frac{12EI}{L^3}\mu^2 & \left[\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\frac{6EI}{L^2}\mu & -\left[\frac{AE}{L}\lambda^2+\frac{12EI}{L^3}\mu^2\right] & -\left[\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\frac{6EI}{L^2}\mu \\
\left[\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{AE}{L}\mu^2+\frac{12EI}{L^3}\lambda^2 & \frac{6EI}{L^2}\lambda & -\left[\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\left[\frac{AE}{L}\mu^2+\frac{12EI}{L^3}\lambda^2\right] & \frac{6EI}{L^2}\lambda \\
-\frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\mu & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{2EI}{L} \\
-\left[\frac{AE}{L}\lambda^2+\frac{12EI}{L^3}\mu^2\right] & -\left[\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{AE}{L}\lambda^2+\frac{12EI}{L^3}\mu^2 & \left[\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{6EI}{L^2}\mu \\
-\left[\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\left[\frac{AE}{L}\mu^2+\frac{12EI}{L^3}\lambda^2\right] & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \left[\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{AE}{L}\mu^2+\frac{12EI}{L^3}\lambda^2 & -\frac{6EI}{L^2}\lambda \\
-\frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\mu & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\quad (11.60)
$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Ejemplo

Resuelva por análisis matricial el siguiente pórtico. La viga tiene una sección transversal de 300 mm × 300 mm y el elemento inclinado una de 300 mm × 400 mm.



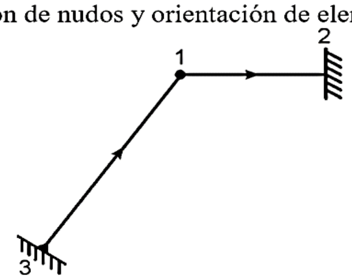
$E = 19\ kN/mm^2$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Solución

Se escoge la siguiente numeración de nudos y orientación de elementos:



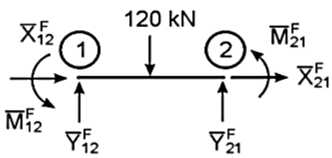
Se utilizarán las ecuaciones (11.23), (11.58) y (11.59), que son fáciles de recordar, para ilustrar su aplicación. El cuadro auxiliar de propiedades de los miembros, en kilonewtons y metros, resulta así:

Elemento	φ	λ	μ	AE/L	EI	2EI/L	4EI/L	$6EI/L^2$	$12EI/L^3$
1 – 2	0°	1	0	570000	12820	8550	17100	8550	5700
3 – 1	53.13°	0.6	0.8	456000	30400	12160	24320	7300	2920

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

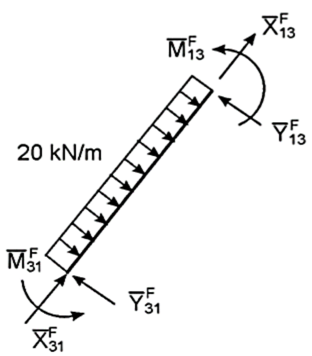
Las fuerzas de empotramiento, referidas a coordenadas locales, se calculan como sigue:



$$\overline{X}^F_{12} = \overline{X}^F_{21} = 0$$

$$\overline{Y}^F_{12} = \overline{Y}^F_{21} = 120/2 = 60.0 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$\overline{M}^F_{12} = -\overline{M}^F_{21} = 120 \times 3/8 = 45.0 \text{ kN·m}$$



$$\overline{X}^F_{31} = \overline{X}^F_{13} = 0$$

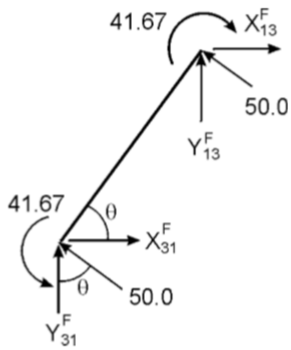
$$\overline{Y}^F_{31} = \overline{Y}^F_{13} = 20 \times 5/2 = 50.0 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$\overline{M}^F_{31} = -\overline{M}^F_{13} = 20 \times 5^2/12 = 41.67 \text{ kN·m}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Las fuerzas de empotramiento de la viga permanecen idénticas cuando se refieren a coordenadas generales, pues ambos sistemas coinciden. Las del elemento inclinado, en cambio, deben transformarse en un sistema equivalente. Esto puede hacerse aplicando simplemente trigonometría:



$$X^F_{31} = X^F_{13} = -50.0 \times \operatorname{sen}\varphi = -40.0 \text{ kN} \ \square$$

$$Y^F_{31} = Y^F_{13} = 50.0 \times \cos\varphi = 30.0 \text{ kN} \ \uparrow$$

Los momentos coinciden en ambos sentidos:

$$M^F_{31} = -M^F_{13} = 41.67 \text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowleft$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

El mismo resultado se obtiene al aplicar las ecuaciones (11.23a), (11.56) y (11.58), que definen la matriz de transformación:

$$\left[\overline{F}^F\right] = [T]\left[F^F\right]$$

$$\begin{bmatrix} \overline{X}^F_{31} = 0 \\ \overline{Y}^F_{31} = 50.0 \\ \overline{M}^F_{31} = 41.67 \\ \overline{X}^F_{13} = 0 \\ \overline{Y}^F_{13} = 50.0 \\ \overline{M}^F_{13} = -41.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^F_{31} \\ Y^F_{31} \\ M^F_{31} \\ X^F_{13} \\ Y^F_{13} \\ M^F_{13} \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Despejando:

$$\left[F^F\right] = [T]^{-1}\left[\overline{F}^F\right] = [T]^T\left[\overline{F}^F\right] \qquad (11.23b)$$

y reemplazando:

$$\begin{bmatrix} X_{31}^F \\ Y_{31}^F \\ M_{31}^F \\ X_{13}^F \\ Y_{13}^F \\ M_{13}^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 50.0 \\ 41.67 \\ 0 \\ 50.0 \\ -41.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40.0 \\ 30.0 \\ 41.67 \\ -40.0 \\ 30.0 \\ -41.67 \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Por medio de las ecuaciones (11.50) y (11.53) se calculan las ecuaciones fundamentales de ambos miembros, referidas a coordenadas locales, recordando que para la viga este sistema coincide con el de coordenadas generales:

$$\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 570000 & 0 & 0 & | & | & | \\ 0 & 5700 & 8550 & | & | & | \\ 0 & 8550 & 17100 & | & | & | \\ -570000 & 0 & 0 & | & | & | \\ 0 & -5700 & -8550 & | & | & | \\ 0 & 8550 & 8550 & | & | & | \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 45.0 \\ 0 \\ 60.0 \\ -45.0 \end{bmatrix} \qquad (a)$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Para el elemento inclinado:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix} \overline{X}_{31} \\ \overline{Y}_{31} \\ \overline{M}_{31} \\ \overline{X}_{13} \\ \overline{Y}_{13} \\ \overline{M}_{13} \end{bmatrix} =
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \overline{u}_3 & \overline{v}_3 & \overline{\theta}_3 & \overline{u}_1 & \overline{v}_1 & \overline{\theta}_1 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 456000 & 0 & 0 & -456000 & 0 & 0 \\ 0 & 2920 & 7300 & 0 & -2920 & 7300 \\ 0 & 7300 & 24320 & 0 & -7300 & 12160 \\ -456000 & 0 & 0 & 456000 & 0 & 0 \\ 0 & -2920 & -7300 & 0 & 2920 & -7300 \\ 0 & 7300 & 12160 & 0 & -7300 & 24320 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} \overline{u}_3 = 0 \\ \overline{v}_3 = 0 \\ \overline{\theta}_3 = 0 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 50.0 \\ 41.67 \\ 0 \\ 50.0 \\ -41.67 \end{bmatrix}$$

(b)

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Efectuando ahora $[T]^T [\overline{K}]$, resulta la matriz:

$$\begin{bmatrix} 273600 & -2340 & -5840 & -273600 & 2340 & -5840 \\ 364800 & 1750 & 4380 & -364800 & -1750 & 4380 \\ 0 & 7300 & 24320 & 0 & -7300 & 12160 \\ -273600 & 2340 & 5840 & 273600 & -2340 & 5840 \\ -364800 & -1750 & -4380 & 364800 & 1750 & -4380 \\ 0 & 7300 & 12160 & 0 & -7300 & 24320 \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

y multiplicándola por la matriz $[T]$ se obtiene la matriz de rigidez referida a coordenadas generales $[K] = [T]^T [\overline{K}][T] =$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \quad u_3 \quad & \quad v_3 \quad & \quad \theta_3 \quad & \quad u_1 \quad & \quad v_1 \quad & \quad \theta_1 \quad \end{array} \\
\begin{bmatrix}
166030 & 217480 & -5840 & -166030 & -217480 & -5840 \\
217480 & 292890 & 4380 & -217480 & -292890 & 4380 \\
-5840 & 4380 & 24320 & 5840 & -4380 & 12160 \\
-166030 & -217480 & 5840 & 166030 & 217480 & 5840 \\
-217480 & -292890 & -4380 & 217480 & 292890 & -4380 \\
-5840 & 4380 & 12160 & 5840 & -4380 & 24320
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{array}
$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Por lo tanto, la ecuación básica queda así:

$$
\begin{bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ M_{31} \\ X_{13} \\ Y_{13} \\ M_{13} \end{bmatrix}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_3 & v_3 & \theta_3 & \quad u_1 \quad & \quad v_1 \quad & \quad \theta_1 \quad \end{array} \\
\begin{bmatrix}
| & | & | & -166030 & -217480 & -5840 \\
| & | & | & -217480 & -292890 & 4380 \\
| & | & | & 5840 & -4380 & 12160 \\
| & | & | & 166030 & 217480 & 5840 \\
| & | & | & 217480 & 292890 & -4380 \\
| & | & | & 5840 & -4380 & 24320
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} -40.0 \\ 30.0 \\ 41.67 \\ -40.0 \\ 30.0 \\ -41.67 \end{bmatrix}
\qquad \text{(c)}
$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Vale la pena señalar que como sólo interesan las tres últimas columnas de la matriz de rigidez, se podía haber trabajado únicamente la parte correspondiente de la referida a coordenadas locales. Ensamblando ahora la parte correspondiente al nudo libre:

$$\begin{bmatrix} X_1 = X_{12} + X_{13} = 100 \\ Y_1 = Y_{12} + Y_{13} = 0 \\ M_1 = M_{12} + M_{13} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 736030 & 217480 & 5840 \\ 217480 & 298590 & 4170 \\ 5840 & 4170 & 41420 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40.0 \\ 90.0 \\ 3.3 \end{bmatrix}$$

y efectuando:

$$\begin{bmatrix} 736030 & 217480 & 5840 \\ 217480 & 298590 & 4170 \\ 5840 & 4170 & 41420 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140.0 \\ -90.0 \\ -3.3 \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$u_1 = 0.356 \times 10^{-3} \quad \text{m} \quad \rightarrow$$
$$v_1 = -0.560 \times 10^{-3} \quad \text{m} \quad \downarrow$$
$$\theta_1 = -0.736 \times 10^{-4} \quad \text{rad} \quad \circlearrowright$$

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

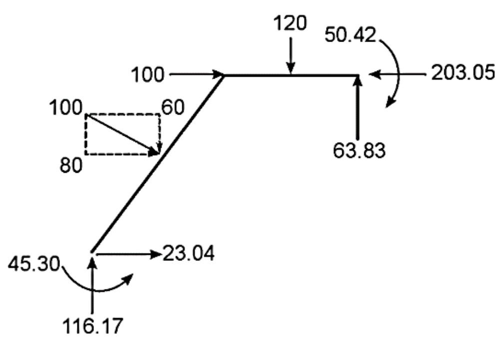
Las reacciones se calculan reemplazando estos valores en la parte inferior de la ecuación (a) y en la superior de la (c):

$$\begin{bmatrix} X_2 = X_{21} \\ Y_2 = Y_{21} \\ M_2 = M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -570000 & 0 & 0 \\ 0 & -5700 & -8550 \\ 0 & 8550 & 8550 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000356 \\ -0.000560 \\ -0.0000736 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ -45.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -203.05\ \text{kN}\ \square \\ 63.83\ \text{kN}\ \uparrow \\ -50.42\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_3 = X_{31} \\ Y_3 = Y_{31} \\ M_3 = M_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -166030 & -217480 & -5840 \\ -217480 & -292890 & 4380 \\ 5840 & -4380 & 12160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000356 \\ -0.000560 \\ -0.0000736 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40.00 \\ 30.0 \\ 41.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.04\ \text{kN} \rightarrow \\ 116.17\ \text{kN} \uparrow \\ 45.30\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Verificación del equilibrio general:



$\sum F_X = -0.01$ kN

$\sum F_y = 0.00$ kN

$\sum M_3 = 0.06$ kN·m

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Finalmente se averiguan las fuerzas internas en los miembros. En la viga sólo faltan las correspondientes al nudo 1, que se calculan con la parte superior de la ecuación (a):

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 570000 & 0 & 0 \\ 0 & 5700 & 8550 \\ 0 & 8550 & 17100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000356 \\ -0.000560 \\ -0.0000736 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 45.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 203.05 \text{ kN} & \rightarrow \\ 56.18 \text{ kN} & \uparrow \\ 38.95 \text{ kN}\cdot\text{m} & \end{bmatrix}$$

Para el elemento inclinado hay dos alternativas: una es calcular las fuerzas nodales en coordenadas generales mediante la ecuación (c) para transformarlas luego a coordenadas locales. La otra consiste en transformar primero los desplazamientos a coordenadas locales para aplicar entonces la ecuación (b). Siguiendo esta última:

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000356 \\ -0.000560 \\ -0.0000736 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000234 \text{ m} & \swarrow \\ -0.000621 \text{ m} & \searrow \\ -0.0000736 \text{ rad} & \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

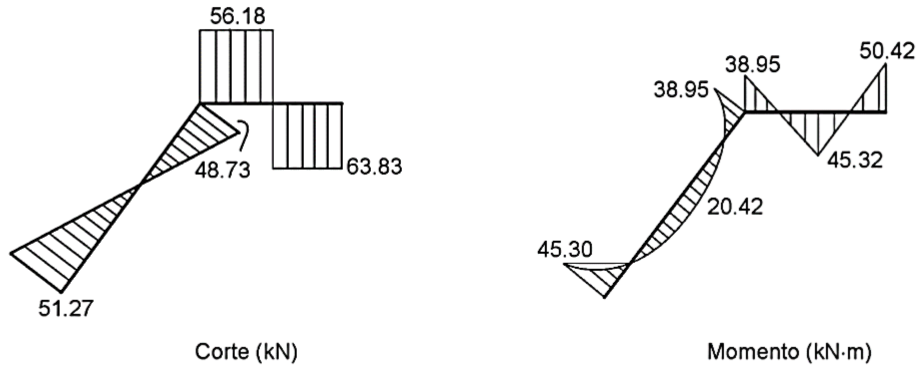
y reemplazando en (b) estos valores, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \overline{X}_{31} \\ \overline{Y}_{31} \\ \overline{M}_{31} \\ \overline{X}_{13} \\ \overline{Y}_{13} \\ \overline{M}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.76 \text{ kN} & \nearrow \\ 51.27 \text{ kN} & \nwarrow \\ 45.30 \text{ kN}\cdot\text{m} & \\ -106.76 \text{ kN} & \swarrow \\ 48.73 \text{ kN} & \nwarrow \\ -38.95 \text{ kN}\cdot\text{m} & \end{bmatrix}$$

Método de la Rigidez

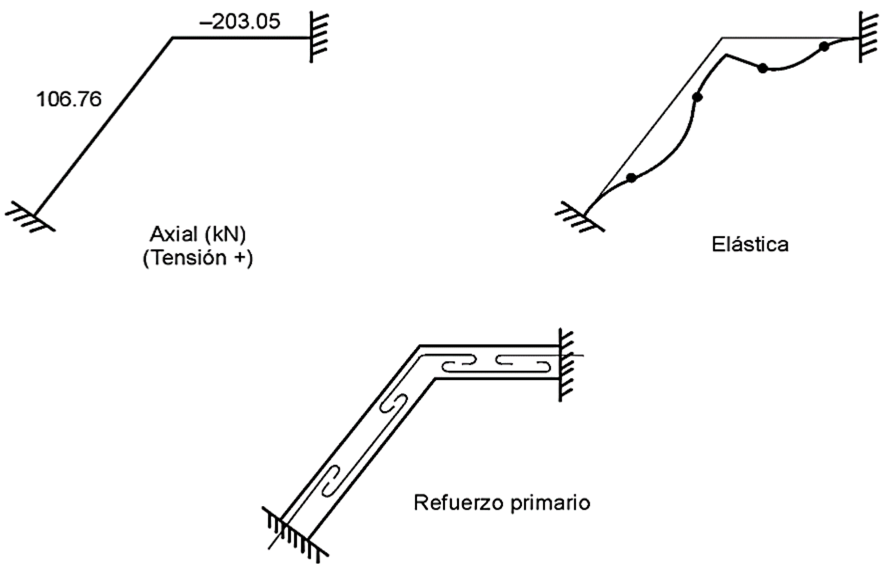
ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS

Por último se dibujan los diagramas:



Método de la Rigidez

ELEMENTOS DE PÓRTICO ARBITRARIAMENTE ORIENTADOS



UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

VIGILADA MINEDUCACIÓN

Gracias

Pedro Gutiérrez Aguilera
pedro.gutierrez@campusucc.edu.co

ucc.edu.co ucooperativadecolombia @ucooperativacol 191

191