TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #02:
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐỆ QUY BẰNG NHIỀU PHƯƠNG PHÁP
Mã lớp : CS112.N23.KHCL

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương
Nhóm thực hiện: Nhóm 2

Họ và tên	MSSV
Trần Xuân Thành	21520456
Nguyễn Hà Anh Vũ	21520531
Đỗ Minh Khôi	21521007
Nguyễn Nguyên Khôi	21521009

TP.HCM, ngày 9 tháng 4 năm 2023

Bài tập 1: Thành lập phương trình đệ quy

a) Gửi ngân hàng 1000 USD, lãi suất 12%/năm. Số tiền có được sau 30 năm là bao nhiêu?

Bài giải

Gọi f(n) là số tiền có được sau n năm. Như vậy, ta có phương trình đệ quy như sau:

$$f(n) = \begin{cases} 1000 & \text{khi } n = 0 \\ 1.12f(n-1) & \text{khi } n \geq 1 \end{cases}$$

Để xác định số tiền có được sau 30 năm, ta cần giải phương trình đệ quy trên:

$f(n) = 1.12f(n-1) = 1.12^2 f(n-2) = 1.12^3 f(n-3) = ...$

$\Rightarrow f(n) = 1.12^i f(n-i)$

Quá trình kết thúc khi: $n - i = 0 \Leftrightarrow i = n$. Khi đó:

$f(n) = 1.12^n f(0) = 1.12^n \times 1000$

Vậy số tiền có được sau 30 năm là: $f(30) = 1.12^{30} \times 1000 \approx 29960$ (USD)

b)

```
long Fibo(int n)
{
    if (n == 0 || n == 1)
        return 1;
    return Fibo(n-1) + Fibo(n-2);
}
```

Bài giải

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{khi } n \leq 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + c_2 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

c)

```
public int g(int n)
{
    if (n == 1)
        return 2;
    else
        return 3 * g(n/2) + g(n/2) +5;
}
```

Bài giải

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{khi } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c_2 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

d)

```
long xn(int n)
{
    if (n == 0)
        return 1;
    long s = 0;
    for (int i = 1; i<=n; i++)
        s = s + i*i*xn(n-i)
    return s;
}
```

Bài giải

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{khi } n = 0 \\ T(n-1) + T(n-2) + \ldots + T(0) + c_2 & \text{khi } n \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c_1 & \text{khi } n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} T(n-i) + c_2 & \text{khi } n \geq 1 \end{cases}$$

e)

```
int f(int n)
{
    if (n == 1)
        return 2;
    return 3^{f(n/2)} + 2 * log(f(n/2)) - f(n/2) + 1;
}
```

Bài giải

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{khi } n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{2}\right) + c_2 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

f)

```
waste(n)
{
    if (n == 0)
        return 0;
    for (i = 1 to n)
        for(j = 1 to i)
            print i,j,n;
    for (i = 1 to 3)
        waste(n/2);
}
```

Bài giải

Cách 1:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{khi } n = 0 \\ 3T(\frac{n}{2}) + c_2n^2 + c_3n + c_4 & \text{khi } n > 0 \end{cases}$$

Cách 2:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 0 \\ 3T(\frac{n}{2}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 & \text{khi } n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 0 \\ 3T(\frac{n}{2}) + \dfrac{n^2+n}{2} & \text{khi } n > 0 \end{cases}$$

g)

```
Draw(n)
{
    if (n < 1)
        return 0;
    for (i = 1; i <= n; i++)
        for (j = 1; j <= n; i++)
            print("*");
    Draw(n-3);
}
```

Bài giải

Cách 1:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{khi } n < 1 \\ T(n-3) + c_2n^2 + c_3n + c_4 & \text{khi } n \ge 1 \end{cases}$$

Cách 2:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n < 1 \\ T(n-3) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 & \text{khi } n \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n < 1 \\ T(n-3) + n^2 & \text{khi } n \ge 1 \end{cases}$$

h)

Gọi T(n) là số phép cộng cần thực hiện khi gọi Zeta(k). Hãy thiết lập công thức truy hồi cho T(n)

```
Zeta(n)
{
    if (n == 0)
        Zeta = 6;
    else
    {
        k = 0;
        Ret = 0;
        while (k <= n-1)
        {
            Ret = Ret + Zeta(k);
            k = k + 1;
        }
        Zeta = Ret;
    }
}
```

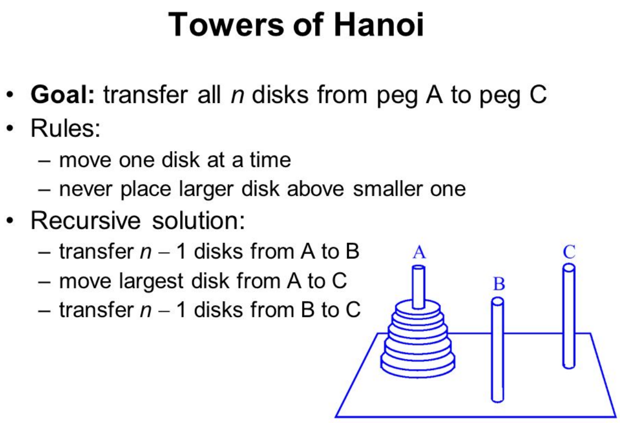
Bài giải

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = 0 \\ T(n-1) + \ldots + T(1) + T(0) + 2n & \text{khi } n > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow T(n) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} T(i) + 2n & \text{khi } n > 0 \end{cases}$$

i)

Xét bài toán tháp Hà Nội như sau:



Hình 1: Bài toán tháp Hà Nội

Giả sử ta chỉ quan tâm đến thao tác chuyển đĩa (transfer) vì đây là tác vụ căn bản của thuật toán. Khi đó, thời gian thực hiện của thuật toán **T(n) được xác định bởi số lần chuyển n đĩa** từ cột này sang cột kia và hiển nhiên T(0) = 0.

Yêu cầu:

- Viết mã giả thuật toán giải bài toán Tháp Hà Nội.
- Thành lập phương trình đệ quy về số lần tác vụ căn bản được thực thi trong thuật toán.
- Đếm chính xác số thao tác chuyển đĩa (không dùng tham số c1, c2)

Bài giải

- Mã giả thuật toán giải bài toán Tháp Hà Nội:

```
towerOfHanoi(disk, src, dst, aux)
{
    if disk == 1:
        move disk from src to dst;
    else
    {
        towerOfHanoi(disk - 1, src, aux, dst);
        move disk from src to dst;
        towerOfHanoi(disk - 1, aux, dst, src);
    }
}
```

- Phương trình đệ quy về số lần tác vụ căn bản được thực thi trong thuật toán:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 1 \\ 2T(n-1)+1 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

- Để đếm chính xác số thao tác chuyển đĩa, ta giải phương trình đệ quy trên bằng phương pháp truy hồi:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n-1)+1 \\ &= 2[2T(n-2)+1]+1 = 4T(n-2)+3 \\ &= 4[2T(n-3)+1]+3 = 8T(n-3)+7 \\ &= 8[2T(n-4)+1]+7 = 16T(n-4)+15 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(n) = 2^i T(n-i) + (2^i - 1)$$

Quá trình kết thúc khi: $n - i = 1 \Leftrightarrow i = n - 1$

Khi đó: $T(n) = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1$

Vậy cần $2^n - 1$ (với n là số đĩa) thao tác chuyển đĩa để giải bài toán tháp Hà Nội.

j)

Xét bài toán "Nhân 2 số nguyên dương lớn có n chữ số", áp dụng kỹ thuật chia để trị ta có một cách giải như sau:
- Chia 2 số nguyên X, Y (có n chữ số) thành các số nguyên lớn có $\frac{n}{2}$ chữ số: $X = A \times 10^{\frac{n}{2}} + B$ và $Y = C \times 10^{\frac{n}{2}} + D$
- Khi đó, $XY = AC \times 10^n + [(A-B)(C-D) + AC + BD] \times 10^{\frac{n}{2}} + BD$ (*)
- Với mỗi số có $\frac{n}{2}$ chữ số, chúng ta lại tiếp tục phân tích theo cách trên, quá trình phân tích sẽ dẫn đến bài toán cơ sở là nhân các số nguyên chỉ gồm 1 chữ số. Việc tổng hợp kết quả chính là thực hiện các phép toán theo công thức (*).
Yêu cầu: Thành lập phương trình đệ quy (kèm giải thích ngắn gọn cách thành lập)

Bài giải

- Theo công thức (*): $XY = AC \times 10^n + [(A-B)(C-D) + AC + BD] \times 10^{\frac{n}{2}} + BD$, việc nhân 2 số nguyên lớn X, Y có n chữ số được phân tích thành:
- **3 phép nhân** các số nguyên có $\frac{n}{2}$ chữ số ($AC, (A-B)(C-D)$ và BD)
- **6 phép cộng, trừ** giữa các số nguyên (giữa các số có $\frac{n}{2}$ chữ số và giữa các số có nhiều hơn n chữ số)
- **2 phép nhân** lần lượt với 10^n và $10^{\frac{n}{2}}$

- Trong đó, phép cộng trừ các số có n chữ số và phép nhân với 10^n (phép dịch trái n lần) tốn **O(n)**.
- Các phép nhân giữa các số nguyên có $\frac{n}{2}$ chữ số tiếp tục được phân tích để dẫn đến bài toán cơ sở là nhân các số nguyên có 1 chữ số.
- Như vậy phương trình đệ quy là:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{khi } n = 1 \\ 3T(\frac{n}{2}) + c_2 n + c_3 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

Bài tập 2: Giải các phương trình đệ quy sau bằng phương pháp truy hồi

1) $T(n) = T(n-1) + 5$
$T(1) = 0$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: $T(n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 1 \\ T(n-1)+5 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

Ta có: $\begin{aligned} T(n) &= T(n-1)+5 \\ &= [T(n-2)+5]+5 = T(n-2)+10 \\ &= [T(n-3)+5]+10 = T(n-3)+15 \\ &= T(n-i)+5i \end{aligned}$

Quá trình kết thúc khi $n-i=1 \Leftrightarrow i=n-1$

Khi đó: $T(n) = T(n-i)+5i = T(1)+5(n-1) = 5(n-1)$ $\boxed{\Rightarrow T(n) = 5n-5 = O(n)}$

2) $T(n) = T(n-1)+n$

$T(1) = 1$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ T(n-1)+n & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

Ta có: $\begin{aligned} T(n) &= T(n-1)+n \\ &= [T(n-2)+(n-1)]+n = T(n-2)+2n-1 \\ &= [T(n-3)+(n-2)]+2n-1 = T(n-3)+3n-1-2 \\ &= T(n-i)+in-\sum_{k=0}^{i-1} k \end{aligned}$

Quá trình kết thúc khi $n-i=1 \Leftrightarrow i=n-1$

Khi đó: $T(n) = T(n-i)+in-\sum_{k=0}^{i-1} k = T(n-i)+in-\frac{(i-1)i}{2} = T(1)+(n-1)n-\frac{(n-1-1)(n-1)}{2}$

$= 1+n^2-n-\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ $\boxed{\Rightarrow T(n) = \frac{n^2+n}{2} = O(n^2)}$

3) $T(n) = 3T(n-1)+1$

$T(1) = 4$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: $T(n) = \begin{cases} 4 & \text{nếu } n = 1 \\ T(n) = 3T(n-1)+1 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

Ta có: $T(n) = 3T(n-1)+1$

$= 3[3T(n-2)+1]+1 = 3^2T(n-2)+1+3$

$= 3^2[3T(n-3)+1]+1+3 = 3^3T(n-3)+3^0+3^1+3^2$

$= 3^iT(n-i)+\sum_{k=0}^{i-1} 3^k$

Quá trình kết thúc khi $n-i=1 \Leftrightarrow i = n-1$

Khi đó, $T(n) = 3^iT(n-i)+\sum_{k=0}^{i-1} 3^k = 3^{(n-1)}T(1)+\sum_{k=0}^{n-1-1} 3^k = 4(3^{n-1})+\dfrac{3^{[(n-2)+1]}-1}{3-1}$

$$\boxed{\Rightarrow T(n) = 4(3^{n-1})+\frac{3^{(n-1)}-1}{2} = O(3^n)}$$

4) $T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right)+1$

$T(1) = 1$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right)+1 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

Ta có: $T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right)+1$

$= 2\left[2T\left(\dfrac{n}{4}\right)+1\right]+1 = 2^2T\left(\dfrac{n}{2^2}\right)+1+2$

$= 2^2\left[2T\left(\dfrac{n}{8}\right)+1\right]+1+2 = 2^3T\left(\dfrac{n}{2^3}\right)+2^0+2^1+2^2$

$= 2^iT\left(\dfrac{n}{2^i}\right)+\sum_{k=0}^{i-1} 2^k$

Quá trình kết thúc khi $\dfrac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow i = log_2(n)$

Khi đó, $T(n) = 2^iT\left(\dfrac{n}{2^i}\right)+\sum_{k=0}^{i-1} 2^k = 2^{log_2(n)}T\left(\dfrac{n}{2^{log_2(n)}}\right)+\sum_{k=0}^{log_2(n)-1} 2^k = nT(1)+\dfrac{2^{[log_2(n)-1+1]}-1}{2-1}$

$= n+2^{log_2(n)}-1 = n+n-1 \boxed{\Rightarrow T(n) = 2n-1 = O(n)}$

5) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$T(1) = 1$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: T(n) = $\begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

Ta có: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right] + n = 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n$$

$$= 2^2\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\right] + 2n = 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3n$$

$$= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + in$$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow i = log_2(n)$

Khi đó, $T(n) = 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + in = 2^{log_2(n)}T\left(\frac{n}{2^{log_2(n)}}\right) + (log_2 n)n = nT(1) + nlog_2(n)$

$$\boxed{\Rightarrow T(n) = n + nlog_2(n) = O(nlog_2(n))}$$

6) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

$T(1) = 1$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

Ta có: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + n^2 = 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + n^2 + \frac{n^2}{2}$$

$$= 2^2\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right] + n^2 + \frac{n^2}{2} = 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{2^k}$$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow i = log_2(n)$

Khi đó, $T(n) = 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{2^k} = 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0\left[\left(\frac{1}{2}\right)^i - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\left(-2\left(\frac{1}{2}\right)^i + 2\right)$

$$= 2^{log_2(n)} T\left(\frac{n}{2^{log_2(n)}}\right) + n^2\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^{log_2(n)} + 2\right] = nT(1) + n^2\left(\frac{-2}{n} + 2\right) = n - 2n + 2n^2$$

$\boxed{\Rightarrow T(n) = 2n^2 - n = O\left(n^2\right)}$

7) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \log n$

$T(1) = 1$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2 n & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

Ta có: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2 n$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \log_2\frac{n}{2}\right] + \log_2 n = 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \log_2 n + 2\log_2 n - (2^1 \times 1)$$

$$= 2^2\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \log_2\frac{n}{4}\right] + \log_2 n + 2\log_2 n - (2^1 \times 1)$$

$$= 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \log_2 n + 2\log_2 n + 4\log_2 n + -(2^1 \times 1) - (2^2 \times 2)$$

$$= 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \log_2 n \sum_{k=0}^{i-1} 2^k - \sum_{k=0}^{i-1} [2^k \times k]$$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow i = log_2(n)$

Khi đó, $T(n) = 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \log_2 n \sum_{k=0}^{i-1} 2^k - \sum_{k=0}^{i-1}(2^k \times k) = 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + log_2 n\left[\frac{2^{i-1+1} - 1}{2-1}\right] - [(i-2) \times 2^i + 2]$

$$= 2^{log_2(n)} T\left(\frac{n}{2^{log_2(n)}}\right) + log_2 n\left[2^{log_2(n)} - 1\right] - [(log_2(n) - 2) \times 2^{log_2(n)} + 2]$$

$$= nT(1) + nlog_2(n) - log_2(n) - nlog_2(n) + 2n - 2$$

$\boxed{\Rightarrow T(n) = 3n - log_2(n) - 2 = O(n)}$

Bài tập 3: Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp truy hồi

1) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

$T(1) = 1$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \\
&= 3\left[3T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + n^2 = 3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + n^2 + \frac{3}{4}n^2 \\
&= 3^2\left[3T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right] + n^2 + \frac{3}{4}n^2 = 3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^0 n^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 n^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n^2 \\
&= 3^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k
\end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow i = log_2(n)$

Khi đó, $T(n) = 3^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k = 3^{log_2(n)}T\left(\frac{n}{2^{log_2(n)}}\right) + n^2\sum_{k=0}^{log_2(n)-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

$$= n^{log_2(3)}T(1) + n^2\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{[log_2(n)-1+1]} - 1}{\left(\frac{3}{4}\right) - 1} = n^{log_2(3)} - 4n^2\left(n^{log_2\left(\frac{3}{4}\right)} - 1\right) = n^{log_2(3)} - 4n^2\left(\frac{n^{log_2 3}}{n^{log_2 4}} - 1\right)$$

$= n^{log_2(3)} - 4n^{log_2(3)} + 4n^2$ $\boxed{\Rightarrow T(n) = -3n^{log_2 3} + 4n^2 = O(n^2)}$

2) $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

$T(1) = 1$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } T(n) &= 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \\
&= 8\left[8T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^3\right] + n^3 = 8^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n^3 \\
&= 8^2\left[8T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right] + 2n^3 = 8^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3n^2 \\
&= 8^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + in^3
\end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow i = log_2(n)$

Khi đó, $T(n) = 8^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + in^3 = 8^{log_2(n)}T\left(\frac{n}{2^{log_2(n)}}\right) + log_2(n)n^3 = n^3T(1) + n^3log_2(n)$

$\boxed{\Rightarrow T(n) = n^3log_2(n) + n^3 = O(n^3log_2(n))}$

3) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$T(1) = 1$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

Ta có: $T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$$= 4\left[4T\left(\frac{n}{9}\right) + \frac{n}{3}\right] + n = 4^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + n + \frac{4}{3}n$$

$$= 4^2\left[4T\left(\frac{n}{27}\right) + \frac{n}{9}\right] + n + \frac{4}{3}n = 4^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right)^0 n + \left(\frac{4}{3}\right)^1 n + \left(\frac{4}{3}\right)^2 n$$

$$= 4^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + n\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{4}{3}\right)^k$$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{3^i} = 1 \Leftrightarrow i = log_3(n)$

Khi đó, $T(n) = 4^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + n\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{4}{3}\right)^k = 4^{log_3(n)}T\left(\frac{n}{3^{log_3(n)}}\right) + n\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{[log_3(n)-1+1]} - 1}{\left(\frac{4}{3}\right) - 1}\right]$

$= n^{log_3 4}T(1) + 3n\left(\frac{n^{log_3 4}}{n^{log_3 3}} - 1\right) = n^{log_3(4)} + 3n^{log_3(4)} - 3n$ $\boxed{\Rightarrow T(n) = -3n + 4n^{log_3(4)} = O\left(n^{log_3 4}\right)}$

4) $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

$T(1) = 1$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$

Ta có: $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

$$= 9\left[9T\left(\frac{n}{9}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)^2\right] + n^2 = 9^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 2n^2$$

$$= 9^2\left[9T\left(\frac{n}{27}\right) + \left(\frac{n}{9}\right)^2\right] + 2n^2 = 9^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + 3n^2$$

$$= 9^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + in^2$$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{3^i} = 1 \Leftrightarrow i = log_3(n)$

Khi đó, $T(n) = 9^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + in^2 = 9^{log_3(n)}T\left(\frac{n}{3^{log_3(n)}}\right) + log_3(n)n^2 = n^2T(1) + n^2log_3(n)$

$\boxed{\Rightarrow T(n) = n^2log_3(n) + n^2 = O(n^2log_3(n))}$

5) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$

$T(2) = 0$

Bài giải

Từ đề bài, suy ra: $T(n) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } n = 2 \\ 2T(\sqrt{n}) + 1 \text{ nếu } n > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T(n) &= 2T\left(\sqrt{n}\right) + 1 = 2T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1 \\ &= 2[2T\left(n^{\frac{1}{4}} + 1\right)] + 1 = 2^2T\left(n^{\frac{1}{2^2}}\right) + 2^0 + 2^1 \\ &= 2^2[T\left(n^{\frac{1}{8}} + 1\right)] + 2^0 + 2^1 = 2^3T\left(n^{\frac{1}{8}}\right) + 2^0 + 2^1 + 2^2 \\ &= 2^iT\left(n^{\frac{1}{2^i}}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k \end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi $n^{\frac{1}{2^i}} = 2 \Leftrightarrow log_n 2 = \dfrac{1}{2^i} \Leftrightarrow 2^i = \dfrac{1}{log_n 2} \Leftrightarrow 2^i = log_2 n \Leftrightarrow i = log_2(log_2 n)$

Khi đó, $T(n) = 2^iT\left(n^{\frac{1}{2^i}}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k = 2^{log_2(log_2 n)}T\left(n^{\dfrac{1}{2^{log_2(log_2 n)}}}\right) + \sum_{k=0}^{log_2(log_2 n)-1} 2^k$

$= log_2 nT(2) + 2^{log_2(log_2 n)-1+1} - 1 = log_2 nT(2) + log_2 n - 1$ $\boxed{\Rightarrow T(n) = log_2 n - 1 = O(log_2 n)}$

Bài tập 4

Giải phương trình đệ quy sau dùng phương trình đặc trưng:

a. $T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)$

$T(0) = 1$

$T(1) = 2$

Bài giải

Xét phương trình: $T(n) - 4T(n-1) + 3T(n-2) = 0$

Đặt $X^n = T(n)$, ta có: $X^n - 4X^{n-1} + 3X^{n-2} = 0$

Phương trình đặc trưng: $X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow (X-3)(X-1) = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình đặc trưng $X^2 - 4X + 3 = 0$ có 2 nghiệm đơn $X_1 = 3$ và $X_2 = 1$

$T(n) = c_1X_1^n + c_2X_2^n = c_1 3^n + c_2 1^n = c_1 3^n + c_2$

Ta có: $\begin{cases} T(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ T(1) = 3c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2} \\ c_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy: $T(n) = \dfrac{1}{2}3^n + \dfrac{1}{2}$

b. $T(n) = 4T(n-1) - 5T(n-2) + 2T(n-3)$

$T(0) = 0$

$T(1) = 1$

$T(2) = 2$

Bài giải

Xét phương trình: $T(n) - 4T(n-1) + 5T(n-2) - 2T(n-3) = 0$
Đặt $X^n = T(n)$, ta có: $X^n - 4X^{n-1} + 5X^{n-2} - 2X^{n-3} = 0$
Phương trình đặc trưng: $X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)^2(X-2) = 0$
Phương trình đặc trưng $X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = 0$ có 1 nghiệm đơn: $X_1 = 2$ và 1 nghiệm kép: $X_2 = 1$
$T(n) = c_1X_1^n + c_2X_2^n + c_3nX_2^n = c_12^n + c_21^n + c_3n1^n = c_12^n + c_2 + c_3n$

Ta có: $\begin{cases} T(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ T(1) = 2c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ T(2) = 4c_1 + c_2 + 2c_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_3 = 1 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases}$

Vậy: $T(n) = n$

c. $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$

$T(0) = 1$

$T(1) = 1$

Bài giải

Xét phương trình: $T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$
Đặt $X^n = T(n)$, ta có: $X^n - X^{n-1} - X^{n-2} = 0$

Phương trình đặc trưng: $X^2 - X - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \\ X - \frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{5}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow X = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Phương trình đặc trưng: $X^2 - X - 1 = 0$ có 2 nghiệm đơn: $X_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$T(n) = c_1X_1^n + c_2X_2^n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Ta có:

$$\begin{cases} T(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ T(1) = \dfrac{c_1(1+\sqrt{5}) + c_2(1-\sqrt{5})}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ (c_1 + c_2) + \sqrt{5}(c_1 - c_2) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ \sqrt{5}(1 - 2c_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{10} \\ c_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

Vậy $T(n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Bài tập 5: Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp hàm sinh

a) $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 0 \\ 2T(n-1)+7 & \text{khi } n > 0 \end{cases}$

Bài giải

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \qquad (*)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1)+7]x^n + T(0) = 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n}_{\mathbf{A}} + 7\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} x^n}_{\mathbf{B}} + 1$$

• $\mathrm{A} = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{(n-1)} = x\left[T(0)+T(1)x+T(2)x^2+...\right]$

mà $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = T(0)+T(1)x+T(2)x^2+...$

$\Rightarrow \mathrm{A} = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = xf(x)$

• $\mathrm{B} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1$ mà $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$

Thay A, B vào $f(x)$ ta được: $f(x) = 2xf(x) + 7\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) + 1$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1+6x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-7}{1-x} + \frac{8}{1-2x} = -7\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 8\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-7+8\times 2^n)x^n \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow T(n) = 8\times 2^n - 7 = 2^{n+3} - 7$

b) $T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2)$ nếu $n \geq 2$

$T(0) = 1$

$T(1) = 2$

Bài giải

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \quad (*)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} [7T(n-1) - 12T(n-2)]x^n + T(1)x + T(0) = 7\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n}_{\mathbf{A}} - 12\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n}_{\mathbf{B}} + 2x + 1$$

• $\text{A} = \sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n = x\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = x\left[T(1)x + T(2)x^2 + \ldots\right]$

mà $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + \ldots$

$\Rightarrow$ $\text{A} = x[f(x) - T(0)] = x[f(x) - 1]$

• $\text{B} = \sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n = x^2\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^{n-2} = x^2\left[T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + \ldots\right]$

mà $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + \ldots$

$\Rightarrow$ $\text{B} = x^2 f(x)$

Thay A, B vào $f(x)$ ta được:

$f(x) = 7x[f(x) - 1] - 12x^2 f(x) + 2x + 1 \Leftrightarrow (12x^2 - 7x + 1)f(x) = -5x + 1$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1-5x}{12x^2 - 7x + 1} = \frac{1-5x}{(4x-1)(3x-1)} = \frac{-2(4x-1) + (3x-1)}{(4x-1)(3x-1)} = \frac{2}{1-3x} - \frac{1}{1-4x}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2\times 3^n - 4^n)x^n \quad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow T(n) = 2\times 3^n - 4^n$

c) $T(n+1) = T(n) + 2(n+2)$ nếu $n \geq 1$

$T(0) = 3$

Bài giải

Ta có: $\begin{cases} T(n+1) = T(n) + 2(n+2) & \text{nếu } n \geq 1 \\ T(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(n) = T(n-1) + 2(n+1) & \text{nếu } n \geq 2 \\ T(0) = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Giá trị của $T(1)$ không tồn tại $\Rightarrow$ Phương trình đệ quy không thể giải được.

Sửa đề

$T(n+1) = T(n) + 2(n+2)$ nếu $n \geq 0$

$T(0) = 3$

Bài giải

Ta có: $\begin{cases} T(n+1) = T(n) + 2(n+2) & \text{nếu } n \geq 0 \\ T(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(n) = T(n-1) + 2(n+1) & \text{nếu } n \geq 1 \\ T(0) = 3 \end{cases}$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \qquad (*)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [T(n-1) + 2(n+1)]x^n + T(0) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n}_{\mathbf{A}} + 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n}_{\mathbf{B}} + 3$$

• A $= \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = x\left[T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + \ldots\right]$

mà $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + \ldots$

$\Rightarrow A = xf(x)$

• B $= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - 1 = \dfrac{1}{(1-x)^2} - 1$

Thay A, B vào $f(x)$ ta được:

$f(x) = xf(x) + 2\left[\dfrac{1}{(1-x)^2} - 1\right] + 3 \Leftrightarrow (1-x)f(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2} + 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3} + \dfrac{1}{1-x}$

Mặt khác, ta đã biết: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Từ đây có thể suy ra:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = -\frac{2(x-1)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad (0)$$

Áp dụng (0) vào $f(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3} + \dfrac{1}{1-x}$, ta có:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) + 1]x^n \qquad \left(\text{vì} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 + 3n + 3\right)x^n \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow T(n) = n^2 + 3n + 3$

Bài tập 6

Cho phương trình đệ quy: $\begin{cases} T(1) = c_1 \\ T(n) = 4T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n \text{ nếu } n \geq 2 \end{cases}$

Một người dùng phương pháp đoán nghiệm để giải phương trình đệ quy trên. Giả sử anh ta lần lượt đoán 3 nghiệm như sau:

i) $f(n) = an^3$

ii) $f(n) = an^2$

iii) $f(n) = an^2 - bn$

Theo bạn, lần nào đoán là thành công, thất bại và vì sao? (Gợi ý: thử đoán như anh ta)

Bài giải

i) Giả sử, ta đoán $f(n) = an^3$.
Dùng quy nạp để chứng minh: $T(n) \le f(n)\ \forall\ n$
Bước 1: Ta cần chứng minh $T(1) \le f(1) \Leftrightarrow c_1 \le a \Rightarrow$ Nếu chọn $a \ge c_1$ thì ta có điều cần chứng minh.
Bước 2: Giả sử $T(k) \le f(k) \forall k < n$
Bước 3: Cần chứng minh $T(n) \le f(n), \forall n$

$$\begin{aligned} T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \le 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= 4a\frac{n^3}{8} + n = \frac{an^3}{2} + n \\ &= an^3 - \left(\frac{an^3}{2} - n\right) = f(n) - \left(\frac{an^3}{2} - n\right) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ta cần chứng minh: } T(n) \le f(n) \\ \text{Mà ta có: } T(n) \le f(n) - \left(\dfrac{an^3}{2} - n\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Cần chứng minh: } f(n) - \left(\frac{an^3}{2} - n\right) \le f(n) \Leftrightarrow \frac{an^3}{2} - n \ge 0$$

Biết $\dfrac{an^3}{2} \ge 0, \forall n \ge 1, a \ge 2$
$\Rightarrow$ Chọn $a \ge max\{c_1, 2\}$ thì $T(n) \le f(n), \forall n$

Vậy ta chọn $a = c_1 + 2$, thì: $T(n) \le (c_1 + n)n^3 = O(n^3)$. Lần đoán nghiệm $f(n) = an^3$ là thành công.

ii) Giả sử, ta đoán $f(n) = an^2$
Dùng quy nạp để chứng minh: $T(n) \le f(n), \forall n$
Bước 1: Ta cần chứng minh $T(1) \le f(1) \Leftrightarrow c_1 \le a \Rightarrow$ Nếu chọn $a \ge c_1$ thì ta có điều cần chứng minh.
Bước 2: Giả sử $T(k) \le f(k), \forall k < n$
Bước 3: Cần chứng minh $T(n) \le f(n), \forall n$

$$\begin{aligned} T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n &\le 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= 4\left(\frac{an^2}{4}\right) + n = an^2 + n = f(n) + n \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ta cần chứng minh: } T(n) \le f(n) \\ \text{Mà ta có: } T(n) \le f(n) + n \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Cần chứng minh: } f(n) + n \le f(n) \Leftrightarrow n \le 0 \text{ (mâu thuẫn)}$$

Không tồn tại trường hợp $n \le 0$ vì $n \ge 1$. Như vậy nghiệm dự đoán $f(n) = an^2$ là chưa chính xác.

iii) Giả sử, ta đoán $f(n) = an^2 - bn$
Dùng quy nạp để chứng minh: $T(n) \le f(n), \forall n$
Bước 1: Ta cần chứng minh $T(1) \le f(1) \Leftrightarrow c_1 \le (a-b) \Rightarrow$ Nếu chọn a, b sao cho $(a-b) \ge c_1$ thì ta có điều cần chứng minh.
Bước 2: Giả sử $T(k) \le f(k), \forall k < n$
Bước 3: Chứng minh $T(n) \le f(n), \forall n$

$$\begin{aligned} T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n &\le 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= 4\left(\frac{an^2}{4} - \frac{bn}{2}\right) + n = an^2 - 2bn + n \\ &= (an^2 - bn) + n(1-b) = f(n) + n(1-b) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ta cần chứng minh: } T(n) \le f(n) \\ \text{Mà ta có: } T(n) \le f(n) + n(1-b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Cần chứng minh: } f(n) + n(1-b) \le f(n)$$

$\Leftrightarrow n(1-b) \le 0 \Rightarrow (1-b) \le 0$ (vì $n \ge 1$) $\Leftrightarrow b \ge 1$
Vậy nếu $b \ge 1$ thì: $T(n) \le f(n) + n(1-b) \le f(n)$ (đccm)

Tóm lại, ta chọn: $\begin{cases} b \ge 1 \\ (a-b) \ge c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 1 \\ a \ge c_1 + 1 \end{cases}$ thì $T(n) \le f(n), \forall n$

Chọn $a = c_1 + 1, b = 1 : T(n) \le (c_1+1)n^2 - n = O(n^2)$. Lần đoán nghiệm $f(n) = an^2 - b$ là thành công.

Bài tập 7

Giải phương trình sau bằng phương pháp đoán nghiệm:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$T(n) = 1 \text{ với } n \le 5$$

Gợi ý đoán: $T(n) = O(n)$

Bài giải

Giả sử, ta đoán: $f(n) = an + b$

Dùng quy nạp để chứng minh $T(n) \le f(n), \forall n \ge 1$

Bước 1: Ta cần chứng minh $T(n) \le f(n), \forall n \in [1,5] \Leftrightarrow 1 \le (an+b), \forall n \in [1,5]$

$\Rightarrow$ Với $n \in \mathbb{N}$, ta chọn: $\begin{cases} a+b \ge 1 \\ a > 0 \end{cases}$

Bước 2: Giả sử $T(k) \le f(k), \forall k \in [1,n)$

Bước 3: Cần chứng minh $T(n) \le f(n), \forall n$

$$\begin{aligned} T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n &\le \left(\frac{an}{2} + b\right) + \left(\frac{an}{4} + b\right) + n \\ &= (an+b) - \frac{an}{4} + b + n = f(n) + n\left(1 - \frac{a}{4}\right) + b \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ta cần chứng minh: } T(n) \le f(n) \\ \text{Mà ta có: } T(n) \le f(n) + n\left(1 - \frac{a}{4}\right) + b \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Cần chứng minh: } f(n) + n\left(1 - \frac{a}{4}\right) + b \le f(n)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{a}{4} \le 0 \\ b \le 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 4 \\ b \le 0 \end{cases}$$

Để tìm a, b, ta giải hệ: $\begin{cases} a \ge 4 \\ b \le 0 \\ a + b \ge 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Chọn $a = 4, b = 0$. Khi đó: $T(n) \le 4n, \forall n \ge 1$. Vậy $T(n) = O(n)$

Bài tập 8

Giải phương trình đệ quy thành lập được từ câu **1h**:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + 2n & \text{khi } n > 0 \end{cases}$$

Bài giải

Xét:

$T(1) = T(0) + 2$

$T(2) = T(0) + T(1) + 4 = \underbrace{[T(0) + 2]}_{T(1)} + T(1) + 2 = 2T(1) + 2$

$T(3) = T(0) + T(1) + T(2) + 6 = \underbrace{[T(0) + T(1) + 4]}_{T(2)} + T(2) + 2 = 2T(2) + 2$

$T(4) = T(0) + T(1) + T(2) + T(3) + 8 = \underbrace{[T(0) + T(1) + T(2) + 6]}_{T(3)} + T(3) + 2 = 2T(3) + 2$

...

$$\Rightarrow T(n) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = 0 \\ 2T(n-1) + 2 & \text{khi } n \geq 1 \end{cases}$$

Ta có: $T(n) = 2T(n-1) + 2$

$= 2[2T(n-2) + 2] + 2 = 4T(n-2) + 2 + 4$

$= 4[2T(n-3) + 2] + 2 + 4 = 8T(n-3) + 2 + 4 + 8 = 2^i T(n-i) + \sum_{i=1}^{n} 2^i$

$= 2^i T(n-i) + 2(2^i - 1)$

Quá trình kết thúc khi $n - i = 0 \Leftrightarrow i = n$

Khi đó, $T(n) = 2^n T(0) + 2(2^n - 1) = 2(2^n - 1)$

$\boxed{\Rightarrow T(n) = 2(2^n - 1)}$