Phân tích & Thiết kế thuật toán (Algorithms Design & Analysis)

L/O/G/O

GV: HUỲNH THỊ THANH THƯƠNG
Email: thuonghtt@uit.edu.vn

PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN

CHƯƠNG 2

L/O/G/O

www.themegallery.com

Đánh giá tính hiệu quả về thời gian

THUẬT TOÁN

KHÔNG ĐỆ QUY

- Kỹ thuật sơ cấp: phép đếm, tổng hữu hạn, xét dấu hàm
- Phụ thuộc tính chất dữ liệu vào: xấu nhất, tốt nhất, trung bình
- Ước lượng nhanh Big-O

ĐỆ QUY

- Tìm phương trình đệ quy
- Khử đệ quy

Một số thuật toán thông dụng

Phân tích thuật toán đệ quy
(Analysis of Recursive Algorithms)

- Cách 1:
  - Thành lập phương trình đệ quy
  - Giải phương trình đệ quy
    - Thời gian thực hiện chương trình = nghiệm của phương trình đệ quy
- Cách 2:
  - Khử đệ quy, phân tích Thuật toán không đệ quy

Thành lập phương trình đệ quy
(Recurrence relation)

- Dạng tổng quát của phương trình đệ qui

$$T(n) = \begin{cases} C(n) \\ g(T(k)) + f(n) \end{cases}$$

- C(n): thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng
- g(T(k)) là đa thức của T(k)
- f(n) là thời gian phân chia/kết hợp các kết quả

Thành lập phương trình đệ quy (Recurrence relation)

- Vi trùng cứ 1 giờ lại nhân đôi. Vậy sau 5 giờ sẽ có mấy con vi trùng nếu ban đầu có 2 con?

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & khi\ n = 0 \\ T(n-1) + C_2 & khi\ n > 0 \end{cases}$$

```
int  vitrung(int n)
{
    if (n == 0)
        return 2;
    return 2*vitrung(n-1);
}
```

Phương pháp Truy hồi/Thay thế (Backward Substitution)

- Dùng đệ quy để thay thế T(k) (k < n) vào phía phải của phương trình
- Lặp lại cho đến khi tất cả T(k) được thay thế bởi các biểu thức T(1) hoặc T(0).
- T(1) và T(0) luôn là hằng số

→ công thức T(n) chứa các số hạng chỉ liên quan tới n và hằng số.

Giải phương trình đệ quy (Solve the recurrence relation)

- Giải bằng Thay thế:

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & khi\ n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + nC_2 & khi\ n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + nC_2$$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}C_2\right] + nC_2 = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2nC_2$$

$$= 4\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}C_2\right] + 2nC_2 = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 3nC_2$$

.....

$$= 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + inC_2$$

Giải phương trình đệ quy
(Solve the recurrence relation)

- Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i} = 1 \rightarrow i = \log n$

- Khi đó: $$T(n) = 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + inC_2$$

$$= 2^{\log n} T\left(\frac{n}{2^{\log n}}\right) + (\log n) nC_2$$

$$= nT(1) + n(\log n)C_2$$

$$T(n) = nC_1 + n(\log n)C_2$$

Phương pháp Truy hồi/Thay thế (Backward Substitution)

Bài tập trên lớp: Lấy điểm quá trình (Đã sửa tại lớp)

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & khi\ n = 0 \\ T(n-1) + n + c_2 & khi\ n > 0 \end{cases}$$

Phân tích thuật toán đệ quy – Giải phương trình đệ quy

- Truy hồi/Thay thế
- Phương trình đặc trưng
- Phương pháp hàm sinh
- Định lý Master
- Đoán nghiệm và quy nạp
- Khác

- Backward substitution
- Characteristic equation
- Generating function
- Master theorem
- Guessing and Induction

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

- Xét phương trình dạng:

$$a_0T(n) + a_1T(n-1)+...+a_kT(n-k) = 0 \qquad (1)$$

- Đặt $T(n) = X^n$, đưa (1) về dạng phương trình ẩn X:

$$a_0X^n + a_1X^{n-1}+...+a_kX^{n-k} = 0$$

$$X^{n-k} (a_0X^k + a_1X^{k-1}+...+a_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad X^{n-k} = 0 \text{ hoặc}$$

$$a_0X^k + a_1X^{k-1}+...+a_k = 0 \qquad (2)$$

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

- Xét phương trình dạng:

$$a_0T(n) + a_1T(n-1)+...+a_kT(n-k) = 0 \qquad (1)$$

- Đặt $T(n) = X^n$, đưa (1) về dạng phương trình ẩn X:

Tìm nghiệm của pt đặc trưng:

$$a_0X^k + a_1X^{k-1}+...+a_k = 0 \qquad (2)$$

(2) là phương trình đặc trưng bậc k của phương trình truy hồi (1)

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

- Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng

- TH1: (2) có nghiệm đơn
  - Giả sử X_1, X_2 là các nghiệm đơn của (2) thì
  - $T(n) = c_1X_1^n + c_2X_2^n + \ldots$ với c_i là các hằng

- TH2: (2) có nghiệm bội
  - Giả sử u là nghiệm bội m của (2) thì
  - $T(n) = c_1u^n + c_2nu^n + c_3n^2u^n \ldots + c_mn^{m-1}u^n + \ldots$

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

- Ví dụ:
  - $T(n) = 5T(n-1) – 8T(n-2) + 4T(n-3)$ và
  - $T(0) = 0$, $T(1) = 1$, $T(2) = 2$

Giải:

- Bước 1: Tìm phương trình đặc trưng

Xét phương trình: $T(n) - 5T(n-1) + 8T(n-2) - 4T(n-3) = 0$

Đặt $X^n = T(n)$

Ta có: $X^n - 5X^{n-1} + 8X^{n-2} – 4X^{n-3} = 0$

Phương trình đặc trưng : $X^3 – 5X^2 + 8X - 4 = 0$ (*)

$(X-1)(X-2)^2 = 0$

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

- Bước 2: Giải phương trình đặc trưng:

Phương trình đặc trưng : $X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2)^2 = 0$

có 1 nghiệm đơn $X_1 = 1$ và nghiệm kép $X_2 = 2$

$T(n) = c_1 X^n_1 + c_2 X_2^n + c_3 n X_2^n$

$T(n) = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$

--> dựa vào T(0), T(1), T(2) để tìm các tham số

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

$T(n) = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n2^n$

❖ Bước 3: Tìm các tham số

Ta có

- $T(0) = 0 \quad \rightarrow c_1 + c_2 = 0$
- $T(1) = 1 \quad \rightarrow c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1$
- $T(2) = 2 \quad \rightarrow c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 2$

Giải hệ phương trình: $c_1 = -2$, $c_2 = 2$, $c_3 = -1/2$

Kết luận: $T(n) = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2$

Phân tích thuật toán đệ quy – Giải phương trình đệ quy

- Truy hồi/Thay thế
- Phương trình đặc trưng
- Phương pháp hàm sinh
- Định lý Master
- Đoán nghiệm và quy nạp
- Khác

- Backward substitution
- Characteristic equation
- Generating function
- Master theorem
- Guessing and Induction