TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #03:
ĐỘ PHỨC TẠP VÀ CÁC KÝ HIỆU TIỆM CẬN
Mã lớp : CS112.N23.KHCL

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương
Nhóm thực hiện: Nhóm 2

Họ và tên	MSSV
Trần Xuân Thành	21520456
Nguyễn Hà Anh Vũ	21520531
Đỗ Minh Khôi	21521007
Nguyễn Nguyên Khôi	21521009

TP.HCM, ngày 27 tháng 4 năm 2023

Bài tập 1:

a) Hãy cho biết ý nghĩa của "Độ phức tạp" khi đề cập đến thuật toán?

- "Độ phức tạp" không phải là một khái niệm toán học. Khi nhắc đến "độ phức tạp" là ta nhắc đến bộ ký pháp, ký hiệu tiệm cận, mà phổ biến nhất là O, Ω, Θ, nó là một công cụ đánh giá sự tối ưu của một thuật toán về mặt không gian và thời gian. "Độ phức tạp" phân lớp "cấp độ lớn" của hàm $T(n)$ khi n đủ lớn. Giải thuật nào có độ phức tạp ở phân lớp thấp hơn thì hiệu quả hơn.

b) Hãy cho biết ý kiến của bạn về nhận định dưới đây và giải thích vì sao?
"Khi nghiên cứu về các thuật toán, người ta quan tâm đặc biệt đến tính hiệu quả về thời gian của chúng nhưng thường là quan tâm đến bậc tăng trưởng (order of growth) của hàm thời gian thực hiện của thuật toán, chứ không phải là bản thân thời gian thực hiện $T(n)$".

- Nhận định trên là đúng, vì mặc dù cách tốt nhất là xác định chính xác thời gian thực hiện – $T(n)$ của giải thuật, nhưng trong thực tế để xác định được $T(n)$ chính xác rất khó vì ảnh hưởng bởi nhiều yếu tố khách quan bên ngoài như công cụ, cấu hình của thiết bị lập trình, thiết bị đo,... ; và cho dù nếu tính được thì khi ta muốn so sánh 2 giải thuật với nhau cũng sẽ gặp khó khăn. Do thế người ta đã dùng bậc tăng trưởng để xác định tương đối thời gian thực hiện của $T(n)$ và thuận tiện hơn trong việc đánh giá các giải thuật

c) Nói về độ phức tạp tức là đề cập tới các ký hiệu tiệm cận, mà có nhiều ký hiệu khác nhau.Vậy khi nào (trong trường hợp nào) thì nên dùng ký hiệu nào?

- Có 3 loại ký pháp/ký hiệu tiệm cận phổ biến nhất mà ta hay thường gặp, đó là:
- Chúng ta dùng ký hiệu $Big-O$ khi muốn tìm hàm chặn trên của $T(n)$. Big-O được định nghĩa là giới hạn trên và giới hạn trên của một thuật toán.

Định nghĩa: $\boxed{O(f(n)) = \{t : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* | \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, t(n) \leq cf(n)\}}$

- Chúng ta dùng ký hiệu $Big-\Omega$ khi muốn tìm hàm chặn dưới của $T(n)$. $Big-\Omega$ được định nghĩa là giới hạn dưới và giới hạn dưới của một thuật toán.

Định nghĩa: $\boxed{\Omega(f(n)) = \{t : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* | \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, t(n) \geq cf(n)\}}$

- Chúng ta dùng ký hiệu $Big-\Theta$ khi muốn tìm hàm chặn dưới và chặn trên của $T(n)$. $Big-\Theta$ được định nghĩa là ràng buộc chặt chẽ nhất và ràng buộc chặt chẽ nhất là thời điểm tốt nhất trong tất cả các trường hợp xấu nhất mà thuật toán có thể thực hiện.

Định nghĩa: $\boxed{\Theta(f(n)) = \{t : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* | \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, c_1 f(n) \leq t(n) \leq c_2 f(n)\}}$

Bài tập 2:

Comparision of running times

For each function $f(n)$ and time t in the following table, determine the largest size n of a problem that can be solved in time t, assuming that the algorithm to solve the problem takes $f(n)$ microseconds

Bài giải

	1 second = $10^6\mu s$	1 minute = $6.10^7\mu s$	1 hour = $3,6.10^9\mu s$	1 day = $8,64.10^{10}\mu s$
$\lg n$	2^{10^6}	$2^{6.10^7}$	$2^{36.10^8}$	$2^{864.10^8}$
$\sqrt{n}$	10^{12}	36.10^{14}	1296.10^{16}	746496.10^{16}
n	10^6	6.10^7	36.10^8	864.10^8
$n\lg n$	62746	2801417	133378058	2755147513
n^2	10^3	7745	60000	293938
n^3	10^2	391	1532	4420
2^n	20	25	31	36
$n!$	(9;10)	(11;12)	(12;13)	(13;14)

	1 month = $2,592.10^{12}\mu s$	1 year = $3,1536.10^{13}\mu s$	1 century ≈ $3,1557.10^{15}\mu s$
$\lg n$	$2^{25920.10^8}$	$2^{315360.10^8}$	$2^{31556736.10^8}$
$\sqrt{n}$	6718464.10^{18}	994519296.10^{18}	996827586973696.10^{16}
n	2592.10^9	31536.10^9	31556736.10^8
$n\lg n$	71870856404	797633893349	68654697441062
n^2	1609968	5615692	56175382
n^3	13736	31593	146677
2^n	41	44	51
$n!$	(15;16)	(16;17)	(17;18)

Bảng 1: Comparison of running times

Điền cột 1 sec:

$\lg n = 1sec = 10^6\mu s \Rightarrow n = 2^{10^6}$

$\sqrt{n} = 1sec = 10^6\mu s \Rightarrow n = \left(10^6\right)^2 = 10^{12}$

$n = 1sec = 10^6\mu s \Rightarrow n = 10^6$

$n\log n = 1sec = 10^6\mu s \Rightarrow n \approx 62746$

$n^2 = 1sec = 10^6\mu s \Rightarrow n = \sqrt{10^6} = 10^3$

$n^3 = 1sec = 10^6\mu s \Rightarrow n = \sqrt[3]{10^6} = 10^2$

$n^2 = 1sec = 10^6\mu s \Rightarrow n = \sqrt{10^6} = 10^3$

$2^n = 1sec = 10^6\mu s \Rightarrow n = \log_2 10^6 = 6\log_2 10 \approx 20$

$n! = 1sec = 10^6\mu s \Rightarrow$ Vì $9! < n! < 10!$ nên $n \in (9;10)$

Bài tập 3:

a) Phép suy ra bên dưới là đúng hay sai và vì sao?

$$\frac{1}{2}n^2 = O(n^2) \tag{1}$$
$$n^2 + 1 = O(n^2) \tag{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}n^2 = n^2 + 1 \tag{3}$$

Bài giải

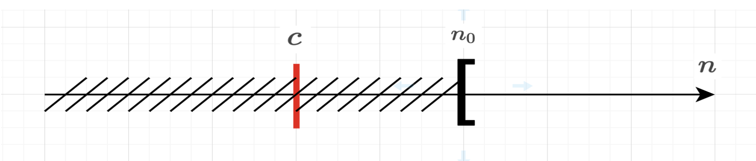
Phép suy ra ở bên trên là sai.
Dấu "=" ở dòng (1) và (2) có thể được hiểu như là kí hiệu "$\in$" $\left(\frac{1}{2}n^2 \in O(n^2); n^2 + 1 \in O(n^2)\right)$
Còn dấu "=" ở dòng (3) là của một đẳng thức.
Vậy phép suy ra là sai vì có cùng độ phức tạp không có nghĩa là 2 đẳng thức của chúng bằng nhau.

b) Chứng minh:

1) $n^3 \notin O(n^2)$
2) $n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$
3) $O(n^2) \neq O(n)$

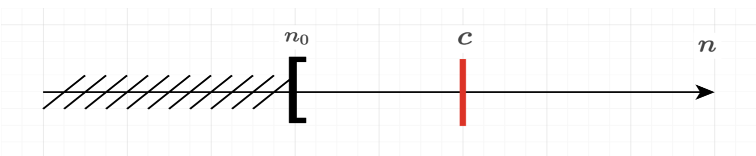
Bài giải

1) Chứng minh $n^3 \notin O(n^2)$
Giả sử $n^3 \in O(n^2) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n^3 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$
Suy ra $\forall n \geq n_0 : n^3 - cn^2 \leq 0 \Leftrightarrow n^2(n-c) \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{c \geq n}$
Trường hợp 1: $n_0 > c$



Suy ra: $n^3 \in O(n^2)$ là vô lý vì n không thể thoả cả 2 điều kiện: $n \geq n_0$ và $c \geq n$

Trường hợp 2: $n_0 \leq c$



Suy ra: $n^3 \in O(n^2)$ là vô lý vì n chỉ thoả cả 2 điều kiện $n \geq n_0$ và $n \leq c$ trong khoảng hữu hạn $[n_0, c]$, nhưng không thoả khi $n \to +\infty$

$\boxed{\text{Vậy } n^3 \notin O(n^2)}$

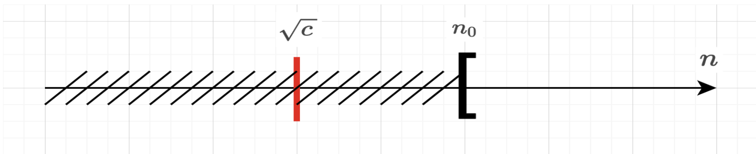
2) Chứng minh $n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$

Giả sử $n^4 + n + 1 \in O(n^2)$.$\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n^4 + n + 1 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$

Suy ra $\forall n \geq n_0$:

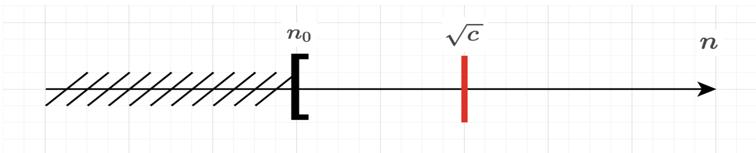
$n^4 - cn^2 + n + 1 \leq 0 \Leftrightarrow n^4\left(1 - \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{c}{n^2} \geq 1 \Leftrightarrow n \leq \sqrt{c}$

<u>Trường hợp 1: $n_0 > \sqrt{c}$</u>



Suy ra: $n^4 + n + 1 \in O(n^2)$ là vô lý vì n không thể thoả cả 2 điều kiện: $n \geq n_0$ và $n \leq \sqrt{c}$

<u>Trường hợp 2: $n_0 \leq \sqrt{c}$</u>



Suy ra: $n^4 + n + 1 \in O(n^2)$ là vô lý vì n chỉ thoả cả 2 điều kiện $n \geq n_0$ và $n \leq \sqrt{c}$ trong $[n_0, c]$, nhưng không thoả trong khoảng $(\sqrt{c}; +\infty)$

$\boxed{\text{Vậy } n^4 + n + 1 \notin O(n^2)}$

3) Chứng minh $O(n^2) \neq O(n)$

Giả sử: $O(n^2) = O(n) \Leftrightarrow \begin{cases} O(n^2) \subset O(n) & \textbf{(1)} \\ O(n) \subset O(n^2) & \textbf{(2)} \end{cases}$

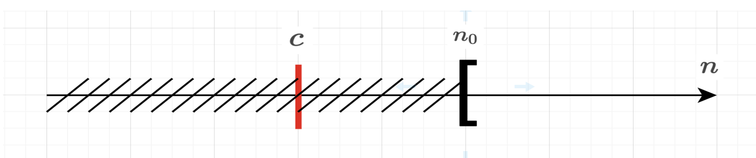
Xét **(1)**:

Chọn hàm $t(n) = n^2$. Dễ thấy $t(n) \in O(n^2)$

Theo **(1)**, $t(n) \in O(n^2)$ $\exists c \in R^+, n_0 \in N$ sao cho: $n^2 \leq cn, \forall n \geq n_0$

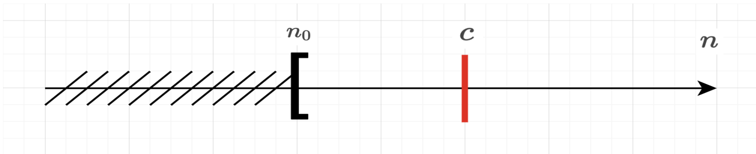
Suy ra $\forall n \geq n_0$: $n^2 - cn \leq 0 \Leftrightarrow n^2\left(1 - \frac{c}{n}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{c \geq n}$

<u>Trường hợp 1: $n_0 > c$</u>



Suy ra: $O(n^2) \subset O(n)$ là vô lý vì n không thể thoả cả 2 điều kiện: $n \geq n_0$ và $c \geq n$

Trường hợp 2: $n_0 \leq c$



Suy ra: $O(n^2) \subset O(n)$ là vô lý vì trong khoảng $(c; +\infty)$, n không thể thoả $n \leq c$
$\Rightarrow t(n) = n^2 \notin O(n) \Rightarrow O(n^2) \not\subseteq O(n)$
Vậy: $\boxed{O(n^2) \neq O(n)}$

c) Chứng minh: Nếu $T(n) = a_k n^k + ... + a_1 n + a_0$ thì $T(n) = O(n^k)$
trong đó,các a_i với $i = 0, 1, ..., k$ là các hằng số thực

Ta có: $\forall i \in [0;k], \forall a_i \in R$ thì $a_i n^i \leq a_i n^k$ (vì $n^i \leq n^k$)
$T(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i = c, n_0 = 1$
Ta có: $T(n) \leq cn^k, \forall n \geq n_0$
Theo định nghĩa Big-O notation, ta suy ra $T(n) = O(n^k)$

Bài tập 4:

Với mỗi nhóm hàm bên dưới, hãy sắp xếp tăng dần "theo Big-O nhỏ nhất", có giải thích ngắn gọn cách so sánh

Group 1:

$$f_1(n) = \binom{n}{100}$$
$$f_2(n) = n^{100}$$
$$f_3(n) = \frac{1}{n}$$
$$f_4(n) = 10^{1000} n$$
$$f_5(n) = n \log n$$

Bài giải

$$f_1(n) = \binom{n}{100} = C_n^{100} = \frac{n!}{(n-100)!100!} = O\left(n^{100}\right) \qquad \left(\textit{chính xác hơn là } \frac{O\left(n^{100}\right)}{100!}\right)$$

$$f_2(n) = n^{100} = O\left(n^{100}\right)$$

$$f_3(n) = \frac{1}{n} = O\left(n^{-1}\right)$$

$f_4(n) = 10^{1000}n = O(n)$

$f_5(n) = n\log n = O\left(n^{1+c}\right)$ với c rất nhỏ, $c \approx 0,00...01$

$\Rightarrow \boxed{f_3(n) < f_4(n) < f_5(n) < f_1(n) < f_2(n)}$

Group 2:

$$f_1(n) = 2^{2^{1000000}}$$
$$f_2(n) = 2^{100000n}$$
$$f_3(n) = \binom{n}{2}$$
$$f_4(n) = n\sqrt{n}$$

Bài giải

$f_1(n) = 2^{2^{1000000}} = O(c)$

$f_2(n) = 2^{100000n} = O(2^{100000n})$

$f_3(n) = \binom{n}{2} = C_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = \dfrac{(n-1)n}{2!} = O(n^2)$

$f_4(n) = n\sqrt{n} = O(n^{\frac{3}{2}})$

$\Rightarrow \boxed{f_1(n) < f_4(n) < f_3(n) < f_2(n)}$

Group 3:

$$f_1(n) = n^{\sqrt{n}}$$
$$f_2(n) = 2^n$$
$$f_3(n) = n^{10}.2^{\frac{n}{2}}$$
$$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)$$

$f_1(n) = n^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}\log n} = 2^{O(n^{\frac{1}{2}+c})}$ với c rất nhỏ, $c \approx 0,00...01$

$f_2(n) = 2^n = 2^{O(n)}$

$f_3(n) = n^{10}.2^{\frac{n}{2}} = 2^{\log(n^{10})+\frac{n}{2}} = 2^{O(n^{10c}+\frac{n}{2})}$ với c rất nhỏ, $c \approx 0,00...01$

$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1) = \dfrac{n^2+3n}{2} = 2^{\log\frac{n^2+3n}{2}} = 2^{\log(n^2+3n)-1} = 2^{O((n^2+3n)^c)} = 2^{O(n^{2c})}$ với c rất nhỏ, $c \approx 0,00...01$

$\Rightarrow \boxed{f_4(n) < f_1(n) < f_3(n) < f_2(n)}$

Group 4:

$$f_1(n) = n^4 \binom{n}{2}$$
$$f_2(n) = \sqrt{n}(\log n)^4$$
$$f_3(n) = n^{5\log n}$$
$$f_4(n) = 4\log n + \log\log n$$
$$f_5(n) = \sum_{i=1}^{n} i$$

Bài giải

$f_1(n) = n^4\binom{n}{2} = n^4\dfrac{n!}{2!(n-2)!} = n^4\dfrac{n(n-1)}{2!} = \dfrac{n^6 - n^5}{2} = O(n^6)$

$f_2(n) = \sqrt{n}\log^4 n = O\left(n^{\frac{1}{2}}n^{4c}\right) = O(n^{\frac{1}{2}+4c})$ với c rất nhỏ, $c \approx 0{,}00...01$

$f_3(n) = n^{5\log n} = O\left(n^{5n^c}\right)$ với c rất nhỏ, $c \approx 0{,}00...01$

$f_4(n) = 4\log n + \log\log n = O\left(4n^c + n^{c^2}\right) = O(n^c)$ với c rất nhỏ, $c \approx 0{,}00...01$

$f_5(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$

$\Rightarrow \boxed{f_4(n) < f_3(n) < f_2(n) < f_5(n) < f_1(n)}$

Group 5:

$$f_6(n) = n^{\sqrt{n}}$$
$$f_7(n) = n^{\log n}$$
$$f_8(n) = 2^{\frac{n}{2}}$$
$$f_9(n) = 3^{\sqrt{n}}$$
$$f_{10}(n) = 4^{n^{\frac{1}{4}}}$$

Bài giải

$f_6(n) = n^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}\log n} = 2^{O(n^{\frac{1}{2}+c})}$ với c rất nhỏ, $c \approx 0{,}00...001$

$f_7(n) = n^{\log n} = 2^{\log^2 n} = 2^{O(n^{2c})}$ với c rất nhỏ, $c \approx 0{,}00...001$

$f_8(n) = 2^{\frac{n}{2}} = 2^{O(\frac{n}{2})}$

$f_9(n) = 3^{\sqrt{n}} = 2^{\log 3n^{\frac{1}{2}}} = 2^{O\left(\log 3n^{\frac{1}{2}}\right)}$

$f_{10}(n) = 4^{n^{\frac{1}{4}}} = 2^{2n^{\frac{1}{4}}} = 2^{O\left(2n^{\frac{1}{4}}\right)}$

$\Rightarrow \boxed{f_7(n) < f_{10}(n) < f_9(n) < f_6(n) < f_8(n)}$

Group 6:

$$f_1(n) = n^{0.999999}\log n$$
$$f_2(n) = 10000000n$$
$$f_3(n) = 1.000001^n$$
$$f_4(n) = n^2$$

Bài giải

$f_1(n) = n^{0.999999}\log n = O(n^{0.999999+c})$ với c rất nhỏ, $c \approx 0,00...001$

$f_2(n) = 10000000n = O(n)$

$f_3(n) = 1.000001^n = O(1.000001^n)$

$f_4(n) = n^2 = O(n^2)$

$\Rightarrow \boxed{f_1(n) < f_2(n) < f_4(n) < f_3(n)}$ (vì $0.999999 + c < 1$)

Group 7:

$$f_1(n) = (n-2)!$$
$$f_2(n) = 5\lg(n+100)^{10}$$
$$f_3(n) = 2^{2n}$$
$$f_4(n) = 0.001n^4 + 3n^3 + 1$$
$$f_5(n) = \ln^2 n$$
$$f_6(n) = \sqrt[3]{n}$$
$$f_7(n) = 3^n$$

Bài giải

$f_1(n) = (n-2)! = O((n-2)!)$

$f_2(n) = 5\lg(n+100)^{10} = O(\lg n)$

$f_3(n) = 2^{2n} = 4^n = O(4^n)$

$f_4(n) = 0.001n^4 + 3n^3 + 1 = O(n^4)$

$f_5(n) = \ln^2 n = O(\ln^2 n)$

$f_6(n) = \sqrt[3]{n} = O(n^{\frac{1}{3}})$

$f_7(n) = 3^n = O(3^n)$

$\Rightarrow \boxed{f_2(n) < f_5(n) < f_6(n) < f_4(n) < f_7(n) < f_3(n) < f_1(n)}$

Bài tập 5:

Chứng minh:

a) $O(C) = O(1)$ với C là hằng số

Bài giải

Bước 1: Chứng minh $O(C) \subset O(1)$

Xét một hàm bất kì $f(n) \in O(C)$:

$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \le d \cdot C, \forall n \ge n_1$

Chọn $a = C \cdot d$, ta có: $f(n) \le a \cdot 1, \forall n \ge n_1$

$\Rightarrow f(n) \in O(1) \Rightarrow O(C) \subset O(1)$ (1)

Bước 2: Chứng minh $O(1) \subset O(C)$

Xét một hàm bất kì $g(n) \in O(1)$:

$\Rightarrow \exists e \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \le e, \forall n \ge n_2$

Chọn $k = \dfrac{e}{C}$, ta có: $g(n) \le k \cdot C, \forall n \ge n_2$

$\Rightarrow g(n) \in O(C) \Rightarrow O(1) \subset O(C)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $O(1) = O(C)$ (điều cần chứng minh)

b) Nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O(h(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$

Bài giải

Ta có: $\begin{cases} f(n) \in O(g(n)) \\ g(n) \in O(h(n)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}, \text{ sao cho: } f(n) \le c_1 g(n), \forall n \ge n_1 \\ \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}, \text{ sao cho: } g(n) \le c_2 h(n), \forall n \ge n_2 \end{cases}$

$\Rightarrow f(n) \le c_1 g(n) \le c_1 c_2 h(n), \forall n \ge \max\{n_1, n_2\}$

$\Rightarrow$ Chọn $c = c_1 c_2$, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ thì: $f(n) \le c \cdot h(n), \forall n \ge n_0$

Vậy nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O(h(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$

c) $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$

Bài giải

Ta có: $\dfrac{f(n) + g(n)}{2} \le \max\{f(n), g(n)\} \le f(n) + g(n)$

$\Rightarrow$ Chọn $c_1 = \dfrac{1}{2}, c_2 = 1, n_0 = 0$: $c_1[f(n) + g(n)] \le \max\{f(n), g(n)\} \le c_2[f(n) + g(n)], \forall n \ge n_0$

Vậy $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$ (điều cần chứng minh)

d) If $t(n) \in O(g(n))$, then $g(n) \in \Omega(t(n))$

Bài giải

Ta có: $t(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+$, $n_0 \in \mathbb{N}$, sao cho: $t(n) \le cg(n)$, $\forall n \ge n_0$

$\Leftrightarrow g(n) \ge \dfrac{1}{c}t(n), \forall n \ge n_0$ $(c \in \mathbb{R}^+)$

Ta chọn $c_1 = \dfrac{1}{c} \in \mathbb{R}^+$: $g(n) \le c_1 t(n)$, $\forall n \ge n_0$

Vậy $g(n) \in \Omega(t(n))$ (điều cần chứng minh)

e) $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$, where $\alpha > 0$

Bài giải

Bước 1: Chứng minh $\Theta(\alpha g(n)) \subset \Theta(g(n))$

Xét một hàm bất kì $f(n) \in \Theta(\alpha g(n))$:

$\Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $c_1 \alpha g(n) \le f(n) \le c_2 \alpha g(n), \forall n \ge n_1$

Chọn $c_3 = c_1\alpha, c_4 = c_2\alpha$, ta có: $c_3 g(n) \le f(n) \le c_4 g(n), \forall n \ge n_1$

$\Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow \Theta(\alpha g(n)) \subset \Theta(g(n))$ (1)

Bước 2: Chứng minh $\Theta(g(n)) \subset \Theta(\alpha g(n))$

Xét một hàm bất kì $h(n) \in \Theta(g(n))$:

$\Rightarrow \exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $d_1 g(n) \le h(n) \le d_2 g(n), \forall n \ge n_2$

Chọn $d_3 = \dfrac{d_1}{\alpha}, d_4 = \dfrac{d_2}{\alpha}$, ta có: $d_3 \alpha g(n) \le h(n) \le d_4 \alpha g(n), \forall n \ge n_2$

$\Rightarrow h(n) \in \Theta(\alpha g(n)) \Rightarrow \Theta(g(n)) \subset \Theta(\alpha g(n))$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$ (điều cần chứng minh)

f) $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Bài giải

Bước 1: Chứng minh $\Theta(g(n)) \subset [O(g(n)) \cap \Omega(g(n))]$

Xét một hàm bất kì $f(n) \in \Theta(g(n))$:

$\Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n), \forall n \ge n_1$

$$\Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}: \begin{cases} f(n) \le c_2 g(n), \forall n \ge n_1 \\ f(n) \ge c_1 g(n), \forall n \ge n_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(n) \in O(g(n)), \forall n \ge n_1 \\ f(n) \in \Omega(g(n)), \forall n \ge n_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(n) \in [O(g(n)) \cap \Omega(g(n))] \Rightarrow \Theta(g(n)) \subset [O(g(n)) \cap \Omega(g(n))]$ (1)

Bước 2: Chứng minh $[O(g(n)) \cap \Omega(g(n))] \subset \Theta(g(n))$

Xét một hàm bất kì $h(n) \in [O(g(n)) \cap \Omega(g(n))]$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(n) \in O(g(n)) \\ h(n) \in \Omega(g(n)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists d_1 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N} \text{ sao cho: } h(n) \le d_1 g(n), \forall n \ge n_2 \\ \exists d_2 \in \mathbb{R}^+, n_3 \in \mathbb{N} \text{ sao cho: } h(n) \ge d_2 g(n), \forall n \ge n_3 \end{cases}$$

Chọn $n_0 = \max\{n_2, n_3\} \Rightarrow \exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $d_1 g(n) \le h(n) \le d_2 g(n), \forall n \ge n_0$

$$\Rightarrow h(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow [O(g(n)) \cap \Omega(g(n))] \subset \Theta(g(n)) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\Theta(g(n)) = [O(g(n)) \cap \Omega(g(n))]$ (điều cần chứng minh)

Bài tập 6:

Các khẳng định bên dưới là đúng hay sai? Vì sao?

a) Nếu $f(n) = \Theta(g(n))$ và $g(n) = \Theta(h(n))$, thì $h(n) = \Theta(f(n))$

Bài giải

Ta có:

•$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$, sao cho: $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n), \forall n \ge n_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(n) \le \frac{1}{c_1} f(n) \\ g(n) \ge \frac{1}{c_2} f(n) \end{cases} \quad (1)$$

•$g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow \exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$, sao cho: $d_1 h(n) \le g(n) \le d_2 h(n), \forall n \ge n_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} h(n) \le \frac{1}{d_1} g(n) \\ h(n) \ge \frac{1}{d_2} g(n) \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\dfrac{1}{d_2}\dfrac{1}{c_2} f(n) \le \dfrac{1}{d_2} g(n) \le \mathbf{h(n)} \le \dfrac{1}{d_1} g(n) \le \dfrac{1}{d_1}\dfrac{1}{c_1} f(n)$, $\forall n \ge \max\{n_0, n_1\}$

$$\Rightarrow \frac{1}{c_2 d_2} f(n) \le \mathbf{h(n)} \le \frac{1}{c_1 d_1} f(n),\ \forall n \ge \max\{n_0, n_1\}$$

Chọn $e_1 = \dfrac{1}{c_1 d_1}, e_2 = \dfrac{1}{c_2 d_2} \in \mathbb{R}^+, n_2 = \max\{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$, thì: $e_2 f(n) \le h(n) \le e_1 f(n)$, $\forall n \ge n_2$

Vậy có thể kết luận: $h(n) = \Theta(f(n))$ (khẳng định trên là đúng)

b) Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(h(n))$, thì $h(n) = \Omega(f(n))$

Bài giải

Ta có:

$\bullet f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$, sao cho: $f(n) \le c_1 g(n), \forall n \ge n_1$

$$\Leftrightarrow g(n) \ge \frac{1}{c_1} f(n), \forall n \ge n_1 \quad (1)$$

$\bullet g(n) = O(h(n)) \Rightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$, sao cho: $g(n) \le c_2 h(n), \forall n \ge n_2$

$$\Leftrightarrow h(n) \ge \frac{1}{c_2} g(n), \forall n \ge n_2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $h(n) \ge \frac{1}{c_1}\frac{1}{c_2} f(n), \forall n \ge \max\{n_1, n_2\}$

$\Rightarrow$ Chọn $c = \frac{1}{c_1 c_2}, n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ thì: $h(n) \ge c f(n), \forall n \ge n_0$

Vậy $h(n) = \Omega(f(n))$ (khẳng định trên là đúng)

c) Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(f(n))$, thì $f(n) = g(n)$

Bài giải

Cách 1:

Ta có:

- $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$, sao cho: $f(n) \le c_1 g(n), \forall n \ge n_1$ (1)
- $g(n) = O(f(n)) \Rightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$, sao cho: $g(n) \le c_2 f(n), \forall n \ge n_2$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{1}{c_1} f(n) \le g(n) \le c_2 f(n)$.

$f(n) = g(n)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{1}{c_1} = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 1$

$\Rightarrow$ Như vậy khẳng định trên là sai.

Cách 2: Sử dụng phản chứng

Giả sử $f(n) = n, g(n) = 2n$, ta có: $\begin{cases} f(n) = O(g(n)) \\ g(n) = O(f(n)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = O(2n) & \text{(đúng)} \\ 2n = O(n) & \text{(đúng)} \end{cases}$

Tuy nhiên $n \ne 2n$. Vậy khẳng định trên là sai.

d) $\frac{n}{100} = \Omega(n)$

Bài giải

Biết $\frac{n}{100} = \Omega(n)$ nếu và chỉ nếu $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$, sao cho: $\frac{n}{100} \ge cn, \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow$ Nếu chọn $c = \frac{1}{101}$ và $n_0 = 0$ thì: $\frac{n}{100} \ge cn, \forall n \ge n_0$.

Vậy $\frac{n}{100} = \Omega(n)$ (khẳng định trên là đúng)

e) $f(n)+O(f(n))=\Theta(f(n))$

Bài giải

Xét 1 hàm bất kì $g(n)\in O(f(n))\Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}^+, n_0\in\mathbb{N}$, sao cho: $g(n)\le cf(n), \forall n\ge n_0$
$\Rightarrow$ Khẳng định ở đề bài tương đương: $f(n)+g(n)=\Theta(f(n))$
Biết $f(n)+g(n)=\Theta(f(n))$ nếu và chỉ nếu $\exists c_1,c_2\in\mathbb{R}^+, n_1\in\mathbb{N}$, sao cho:
$c_1f(n)\le f(n)+g(n)\le c_2f(n)$
Mà ta có: $g(n)\le cf(n), \forall n\ge n_0 \Rightarrow f(n)\le f(n)+g(n)\le(1+c)f(n)$.
$\Rightarrow$ Ta chọn $c_1=1, c_2=1+c, n_1=n_0$ thì: $c_1f(n)\le f(n)+O(f(n))\le c_2f(n)$ (điều cần chứng minh)
Vậy khẳng định trên là đúng.

f) $2^{10n}=O(2^n)$

Bài giải

Biết $2^{10n}=O(2^n)$ nếu và chỉ nếu $\exists c\in\mathbb{R}^+, n_0\in\mathbb{N}$, sao cho: $2^{10n}\le c2^n, \forall n\ge n_0$
Xét $2^{10n}\le c2^n$, lấy log cơ số 2 cho cả hai vế, có:

$10n\le\log(c)+n \Leftrightarrow 9n\le\log(c)\Leftrightarrow n\le\dfrac{\log(c)}{9}$

$\Rightarrow 2^{10n}\le c2^n$ không đúng $\forall n\ge n_0$ (vì đồng thời $n\le\dfrac{\log(c)}{9}$)
Vậy khẳng định trên là sai.

g) $2^{n+10}=O(2^n)$

Bài giải

Biết $2^{n+10}=O(2^n)$ nếu và chỉ nếu $\exists c\in\mathbb{R}^+, n\in\mathbb{N}$ sao cho: $2^{n+10}\le c2^n, \forall n\ge n_0$
$\Rightarrow$ Nếu chọn $c=2^{11}, n_0=0$ thì: $2^{n+10}\le c2^n, \forall n\ge n_0$ ($\Leftrightarrow 2^{n+10}\le 2^{n+11}, \forall n\ge 0$ - điều này đúng).
Vậy khẳng định trên là đúng.

h) $\log_{10}n=\Theta(\log_2 n)$

Bài giải

Biết $\log_{10}n=\Theta(\log_2 n)$ nếu và chỉ nếu:
$\exists c_1,c_2\in\mathbb{R}^+, n_0\in\mathbb{N}$ sao cho: $c_1\log_2 n\le\log_{10}n\le c_2\log_2 n, \forall n\ge n_0$
Xét:

$$c_1\log_2 n\le\log_{10}n\le c_2\log_2 n, \forall n\ge n_0 \Leftrightarrow c_1\frac{\log_{10}n}{\log_{10}2}\le\log_{10}n\le c_2\frac{\log_{10}n}{\log_{10}2}, \forall n\ge n_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_1}{\log_{10}2}\log_{10}n\le\log_{10}n\le\frac{c_2}{\log_{10}2}\log_{10}n, \forall n\ge n_0$$

Biết $\log_{10} 2 \approx 0.30103 \Rightarrow$ Ta chọn $c_1 = 0.3, c_2 = 0.4$, khi đó: $\begin{cases} \dfrac{c_1}{\log_{10} 2} < 1 \\ \dfrac{c_2}{\log_{10} 2} > 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Với $c_1 = 0.3, c_2 = 0.4, n_0 = 1$: $c_1 \log_2 n \le \log_{10} n \le c_2 \log_2 n, \forall n \ge n_0$. Vậy khẳng định trên là đúng.

Bài tập 7:

Ước lượng nhanh độ phức tạp của giải thuật đệ quy dùng Định lý Master

Master theorem:

1. **Simple form:** $\begin{cases} T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n) \\ T(1) = c \end{cases}$

   where $a \ge 1, b \ge 2, c > 0$. If $f(n) \in \Theta(n^d)$ where $d \ge 0$, then:

   $$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{if } a < b^d \\ \Theta(n^d \log n) & \text{if } a = b^d \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{if } a > b^d \end{cases}$$

2. **Generic form:** $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$, where $a \ge 1$ and $b > 1$ are constants

   (a) $f(n)$ is an asymptotically positive function.

   (b) There are 3 cases:

      i. If $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ for some constant $\epsilon > 0$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

      ii. If $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$ with $k \ge 0$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$

      iii. If $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ with $\epsilon > 0$
      and $f(n)$ sastisfies the regularity condition, then $T(n) = \Theta(f(n))$

   (c) Regularity condition:
   $af(\frac{n}{b}) \le cf(n)$ for some constant $c < 1$ and all sufficiently large n.

Từ câu 1 - 14 áp dụng định lý Master dạng đơn giản (Simple form) - 1

1. $T(n) = 3T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^2$

Bài giải

$a = 3, b = 2, d = 2$

$\Rightarrow$ Vì $3 < 2^2$ $(a < b^d)$ nên áp dụng *Case 1 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^2)$

2. $T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

Bài giải

$a = 7, b = 3, d = 2$
$\Rightarrow$ Vì $7 < 3^2$ ($a < b^d$) nên áp dụng *Case 1 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^2)$

3. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{n}{2}$

Bài giải

$a = 3, b = 3, d = 1$
$\Rightarrow$ Vì $3 = 3^1$ ($a = b^d$) nên áp dụng *Case 2 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^d \log n) = \Theta(n \log n)$

4. $T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

Bài giải

$a = 16, b = 4, d = 1$
$\Rightarrow$ Vì $16 > 4^1$ ($a > b^d$) nên áp dụng *Case 3 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{log_4 16}) = \Theta(n^2)$

5. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n^{0.51}$

Bài giải

$a = 2, b = 4, d = 0.51$
$\Rightarrow$ Vì $2 < 4^{0.51}$ ($a < b^d$) nên áp dụng *Case 1 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^{0.51})$

6. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Bài giải

$a = 3, b = 2, d = 1$
$\Rightarrow$ Vì $3 > 2^1$ ($a > b^d$) nên áp dụng *Case 3 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{log_2 3})$

7. $T(n) = 3\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{(n)}$

Bài giải

$a = 3, b = 3, d = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ Vì $3 > 3^{\frac{1}{2}}$ ($a > b^d$) nên áp dụng *Case 3 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{log_3 3}) = \Theta(n)$

8. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + cn$

Bài giải

$a = 4, b = 2, d = 1$
$\Rightarrow$ Vì $4 > 2^1$ ($a > b^d$) nên áp dụng *Case 3 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$

9. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 5n$

Bài giải

$a = 4, b = 4, d = 1$
$\Rightarrow$ Vì $4 = 4^1$ ($a = b^d$) nên áp dụng *Case 2 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^d \log n) = \Theta(n \log n)$

10. $T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + 4n$

Bài giải

$a = 5, b = 4, d = 1$
$\Rightarrow$ Vì $5 > 4^1$ ($a > b^d$) nên áp dụng *Case 3 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{log_4 5})$

11. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + 5n$

Bài giải

$a = 4, b = 5, d = 1$
$\Rightarrow$ Vì $4 < 5^1$ ($a < b^d$) nên áp dụng *Case 1 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n)$

12. $T(n) = 25T\left(\frac{n}{5}\right) + n^2$

Bài giải

$a = 25, b = 5, d = 2$
$\Rightarrow$ Vì $25 = 5^2$ ($a = b^d$) nên áp dụng *Case 2 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^d \log n) = \Theta(n^2 \log n)$

13. $T(n) = 10T\left(\frac{n}{3}\right) + 17n^{1.2}$

Bài giải

$a = 10, b = 3, d = 1.2$

$\Rightarrow$ Vì $10 > 3^{1.2}$ ($a > b^d$) nên áp dụng *Case 3 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{log_3 10})$

14. $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

Bài giải

$a = 7, b = 2, d = 3$

$\Rightarrow$ Vì $7 < 2^3$ ($a < b^d$) nên áp dụng *Case 1 - Dạng đơn giản (1)*: $T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^3)$

Từ câu 15 - 28 áp dụng định lý Master dạng tổng quát (Generic form) - 2.

15. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \log n$

Bài giải

$a = 4, b = 2$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$

Ta thấy: $f(n) = \log n \in O(n^{2-\epsilon}), \epsilon = 1$

$\Rightarrow$ Áp dụng *Case 1 - Dạng tổng quát (2)*, ta được: $T(n) = \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(n^2)$

16. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + \log n$

Bài giải

$a = 4, b = 5$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_5 4}$

Ta thấy: $f(n) = \log n \in O(n^{\log_5 4-\epsilon}), 0 < \epsilon < \log_5 4$

$\Rightarrow$ Áp dụng *Case 1 - Dạng tổng quát (2)*, ta được: $T(n) = \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(n^{\log_5 4})$

17. $T(n) = \sqrt{2}T\left(\frac{n}{2}\right) + \log n$

Bài giải

$a = \sqrt{2}, b = 2$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_2 \sqrt{2}} = n^{\frac{1}{2}}$

Ta thấy: $f(n) = \log n \in O(n^{\frac{1}{2}-\epsilon}), 0 < \epsilon < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Áp dụng *Case 1 - Dạng tổng quát (2)*, ta được: $T(n) = \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(n^{\frac{1}{2}})$

18. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n\log n$

Bài giải

$a = 2, b = 3$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_3 2}$
Ta thấy: $f(n) = n\log n \in \Omega(n^{\log_3 2+\epsilon}), 0 < \epsilon < \log_3 \frac{3}{2}$
và $af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n)$ (Vì $\frac{2n}{3}\log\frac{n}{3} \le cn\log n,\ c = \frac{2}{3}$)
$\Rightarrow$ Áp dụng *Case 3 - Dạng tổng quát (2)*, ta được: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\log n)$

19. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n$

Bài giải

$a = 3, b = 4$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$
Ta thấy: $f(n) = n\log n \in \Omega(n^{\log_4 3+\epsilon}), 0 < \epsilon < \log_4 \frac{4}{3}$
và $af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n)$ (Vì $\frac{3n}{4}\log\frac{n}{4} \le cn\log n,\ c = \frac{3}{4}$)
$\Rightarrow$ Áp dụng *Case 3 - Dạng tổng quát (2)*, ta được: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\log n)$

20. $T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2\log n$

Bài giải

$a = 6, b = 3$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_3 6}$
Ta thấy: $f(n) = n^2\log n \in \Omega(n^{\log_3 6+\epsilon}), 0 < \epsilon < \log_3 \frac{3}{2}$
và $af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n)$ (Vì $6\left(\frac{n^2}{9}\log\frac{n}{3}\right) = \frac{2n^2}{3}\log\frac{n}{3} \le cn^2\log n,\ c = \frac{2}{3}$)
$\Rightarrow$ Áp dụng *Case 3 - Dạng tổng quát (2)*, ta được: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2\log n)$

21. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{5}\right) + \log^2 n$

Bài giải

$a = 3, b = 5$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_5 3}$
Ta thấy: $f(n) = \log^2 n \in O(n^{\log_5 3-\epsilon}), 0 < \epsilon < \log_5 3$
$\Rightarrow$ Áp dụng *Case 1 - Dạng tổng quát (2)*, ta được: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_5 3})$

22. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n}$

Bài giải

Không thể giải phương trình đệ quy trên bằng định lý Master vì hàm $f(n) = \frac{n}{\log n}$ không là hàm đa thức hay logarit.
Thử kiểm tra qua các trường hợp (cases) của định lý Master - Dạng tổng quát (2):
Ta có: $a = 2, b = 2, n^{\log_b a} = n$

- Trường hợp 1: $f(n) = \frac{n}{\log n} = O(n^{log_b a - \epsilon}) = O(n^{1-\epsilon})$ với $\epsilon > 0$. Khẳng định này sai vì cận trên của $\frac{n}{\log n}$ là strict upperbound. $\log n = O(n^c)$ với c rất nhỏ nên ta có thể suy ra $\frac{n}{\log n} = O(n)$. Tuy nhiên ta không thể khẳng định $\frac{n}{\log n} = O(n^{1-\epsilon})$ với $\epsilon > 0$ hay $\frac{n}{\log n} = O(0.99999)$.

- Trường hợp 2: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n) = \Theta(n \log^k n)$ với $k > 0$. Khẳng định này sai vì $\frac{n}{\log n} = n^{-1} \log n \neq \Theta(nlog^k n)$ với k dương.

- Trường hợp 3: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) = \Omega(n^{1+\epsilon})$ với $\epsilon > 0$. Khẳng định này sai vì $\frac{n}{\log n}$ bị chặn trên bởi n.

$\Rightarrow$ Phương trình đệ quy không thể giải bằng định lý Master vì không có trường hợp nào thỏa mãn.

23. $T(n) = 2^n T\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$

Bài giải

Không thể giải phương trình đệ quy trên bằng định lý Master vì $a = 2^n$ không là hằng số.

24. $T(n) = 0.5T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Bài giải

Không thể giải phương trình đệ quy trên bằng định lý Master vì $a = 0.5 < 1$. Giá trị của a phải là hằng số ≥ 1.

25. $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n(2 - \cos n)$

Bài giải

$a = 1, b = 2$ và $n^{log_b a} = n^0$

Ta có: $|\cos n| \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 2 - \cos n \le 3 \Rightarrow n(2-\cos n) = \Omega(n^{0+\epsilon}), 0 < \epsilon < 1$

Xét: $af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n)$ (c là hằng số < 1)

$\Leftrightarrow \frac{n}{2}\left(2 - \cos\frac{n}{2}\right) \le cn(2-\cos n) \Leftrightarrow c \ge \frac{2-\cos\frac{n}{2}}{2(2-\cos n)} = \frac{2-\cos\frac{n}{2}}{6-4\cos^2\frac{n}{2}}$

$\Rightarrow$ Ta cần tìm $c < 1$ để $c \ge \frac{2-\cos\frac{n}{2}}{6-4\cos^2\frac{n}{2}}, \forall n$ đủ lớn. (*)

Xét hàm số: $g(n) = \frac{2-\cos\frac{n}{2}}{6-4\cos^2\frac{n}{2}}$. Đặt $t = \cos\frac{n}{2}, t \in [-1;1]$, ta có: $g(n) = h(t) = \frac{2-t}{6-4t^2}$

$\Rightarrow h'(t) = \frac{-2t^2+8t-3}{2(3-2t^2)^2} \Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4-\sqrt{10}}{2} & \text{(nhận)} \\ t = \frac{4+\sqrt{10}}{2} & \text{(loại)} \end{cases}$

t	-1		$\frac{4-\sqrt{10}}{2}$		1
$h'(t)$	$\frac{-13}{2}$	$-$	0	$+$	$\frac{3}{2}$
$h(t)$	$\frac{3}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{4+\sqrt{10}}{24}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \max g(n) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2-\cos\frac{n}{2}}{6-4\cos^2\frac{n}{2}} \le \frac{3}{2}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n) \Leftrightarrow c \ge \frac{3}{2}$ mà c là hằng số $< 1 \Rightarrow$ Không tồn tại hằng số c thỏa mãn.

Vậy phương trình đệ quy không thể giải được vì vi phạm **regularity condition** của *Case 3 - Dạng tổng quát (2)*

26. $T(n) = 64T\left(\frac{n}{8}\right) - n^2 \log n$

Bài giải

Không thể giải phương trình đệ quy trên bằng định lý Master vì hàm $f(n) = -n^2 \log n \le 0$ (theo Định lý Master - Dạng tổng quát (2) được đề cập ở trên: $f(n)$ *is an asymptotically* ***positive*** *funcion*).

27. $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 2^n$

Bài giải

$a = 1, b = 2, n^{log_b a} = n^0$

Ta có: $f(n) = 2^n = \Omega(n^{0+\epsilon}), \epsilon > 0$

$\left.\begin{array}{l} af\left(\frac{n}{b}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \\ \text{Thử } c = \frac{1}{2} \Rightarrow cf(n) = c2^n = 2^{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n)$ (Vì $2^{\frac{n}{2}} \le n^{n-1}$ đúng $\forall n \ge 0$)

$\Rightarrow$ Áp dụng *Case 3 - Dạng tổng quát (2)*, ta được: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(2^n)$

28. $T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n!$

Bài giải

$a = 16, b = 4, n^{log_b a} = n^2$
Ta có: $f(n) = n! = \Omega(n^{2+\epsilon}), \epsilon > 0$

$$\left.\begin{array}{l} af\left(\frac{n}{b}\right) = 16\left(\frac{n}{4}\right)! \\ \text{Thử } c = \frac{1}{2} \Rightarrow cf(n) = \frac{1}{2}n! \end{array}\right\} \Rightarrow af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n) \text{ (Vì } 16\left(\frac{n}{4}\right)! \le \frac{1}{2}n! \text{ đúng } \forall n > 4)$$

$\Rightarrow$ Áp dụng *Case 3 - Dạng tổng quát (2)*, ta được: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n!)$

Bài tập 8 (bonus):

Chứng minh các tính chất sau:

$\bullet n + n^2 O(\ln n) = O(n^2 \ln n)$

Bài giải

Xét 1 hàm bất kì $f(n) \in O(\ln n) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$, sao cho: $f(n) \le c \ln n, \forall n \ge n_0$

$$\begin{aligned} n + n^2 O(\ln n) = n + n^2 f(n) &\le n + n^2(c \ln n), \forall n \ge n_0 \\ &\le n^2 \ln n + n^2(c \ln n), \forall n \ge n_0 && (n \in \mathbb{N}) \\ &= (1+c)n^2 \ln n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Chọn $c_1 = 1 + c, n_1 = n_0$ thì: $n + n^2 f(n) \le c_1 n^2 \ln n \Leftrightarrow n + n^2 O(\ln n) \le c_1 n^2 \ln n, \forall n \ge n_1$
Vậy $n + n^2 O(\ln n) = O(n^2 \ln n)$ (điều cần chứng minh)

$\bullet g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))$

Bài giải

$g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$, sao cho: $g(n) \le c_1 h(n), \forall n \ge n_1$
- Xét 1 hàm bất kì $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$, sao cho: $f(n) \le c_2 g(n), \forall n \ge n_2$

$$\begin{cases} g(n) \le c_1 h(n), \forall n \ge n_1 \\ f(n) \le c_2 g(n), \forall n \ge n_2 \end{cases} \Rightarrow f(n) \le c_1 c_2 h(n), \forall n \ge \max\{n_1, n_2\}$$

Chọn $c = c_1 c_2, n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ thì: $f(n) \le ch(n), \forall n \ge n_0 \Rightarrow f(n) \in O(h(n))$
Vậy nếu $g(n) \in O(h(n))$ thì $\forall f(n) \in O(g(n)) \rightarrow f(n) \in O(h(n))$.
Điều này tương đương $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))$
- Tương tự, vậy nếu $h(n) \in O(g(n))$ thì $O(h(n)) \subseteq O(g(n))$. Khi này $O(g(n)) = O(h(n))$

$\Rightarrow O(g(n)) = O(h(n))$ chỉ khi $h(n) \in O(g(n))$
Vậy $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))$ (điều cần chứng minh). Dấu "=" xảy ra khi $h(n) \in O(g(n))$

$\bullet O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$

Bài giải

Ở bài này, ta sẽ sử dụng lại tính chất: $\mathbf{g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))}$ đã được chứng minh ở trên.

Chứng minh: $O(f(n)) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$

$$O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} O(f(n)) \subseteq O(g(n)) \\ O(g(n)) \subseteq O(f(n)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall h(n) \in O(f(n)) \rightarrow h(n) \in O(g(n)) \\ \forall k(n) \in O(g(n)) \rightarrow k(n) \in O(f(n)) \end{cases}$$

$\bullet \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{f(n)} = 1 < \infty \Rightarrow \mathbf{f(n) \in O(f(n))}$ (reflexivity property)

Như vậy, ta có: $\begin{cases} f(n) \in O(f(n)) \\ g(n) \in O(g(n)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(n) \in O(g(n)) \\ g(n) \in O(f(n)) \end{cases}$ (Vì $O(f(n)) = O(g(n))$)

Chứng minh: $g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) = O(g(n))$

Ta có: $\begin{cases} g(n) \in O(f(n)) \\ f(n) \in O(g(n)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O(g(n)) \subseteq O(f(n)) \\ O(f(n)) \subseteq O(g(n)) \end{cases} \Leftrightarrow O(f(n)) = O(g(n))$

Vậy $O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$ (điều cần chứng minh)

$\bullet O(f(n)) \subset O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$

Bài giải

Ở bài này, ta sẽ sử dụng lại tính chất: $\mathbf{f(n) \in O(f(n))}$ và $\mathbf{g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))}$ đã được chứng minh ở trên.

Chứng minh: $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$

$O(f(n)) \subset O(g(n)) \Leftrightarrow \forall h(n) \in O(f(n))$ thì $h(n) \in O(g(n))$
Mà ta có: $f(n) \in O(f(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ (1)

$O(f(n)) \neq O(g(n)) \Rightarrow O(g(n)) \not\subset O(f(n)) \Leftrightarrow \exists k(n) \in O(g(n))$ và $k(n) \notin O(f(n))$

Xét hàm bất kì $k(n) \in O(g(n))$ và $k(n) \notin O(f(n))$, có:

$$\begin{cases} \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}, \text{ sao cho: } k(n) \le c_1 g(n), \forall n \ge n_1 \\ \forall c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}, \exists n \ge n_2, \text{ sao cho: } k(n) > c_2 f(n) \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall c = \dfrac{c_2}{c_1} \in \mathbb{R}^+, n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0$, sao cho: $g(n) > cf(n)$

Vậy $g(n) \notin O(f(n))$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$ (3)

Chứng minh: $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n)) \Rightarrow O(f(n)) \subset O(g(n))$

Ta có: $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) \subseteq O(g(n))$. Dấu "=" xảy ra khi $g(n) \in O(f(n))$.
Nhưng $g(n) \notin O(f(n)) \Rightarrow O(f(n)) = O(g(n))$ không xảy ra
Như vậy, $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n)) \Rightarrow O(f(n)) \subset O(g(n))$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$ (điều cần chứng minh)

$\bullet f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$

Bài giải

$f(n) \in O(n) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$, sao cho: $f(n) \leq cn, \forall n \geq n_0$
$f(n) \leq cn, \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow 2^{f(n)} \leq 2^{cn}, \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow 2^{f(n)} \leq (2^c)^n, \forall n \geq n_0$
Khi $c > 0$ thì $(2^c)^n$ sẽ không thể biểu diễn dưới dạng hữu hạn lần 2^n. Vì vậy **tính chất trên sai**. Ta có thể lấy 1 phản chứng như sau:
Giả sử $f(n) = 2n$ thì $f(n) = 2n = O(n)$. Tuy nhiên $2^{2n} \notin O(2^n)$.
Để $2^{2n} \in O(2^n)$ thì $\exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$, sao cho: $2^{2n} \leq c_1 2^n, \forall n \geq n_1$.
$2^2 n \leq c_1 2^n \Leftrightarrow 2n \leq \lg 2 + n \Leftrightarrow n \leq \lg 2$ (*sai vì không tồn tại hằng số c_1 thỏa mãn BĐT này*).
$\Rightarrow 2^{2n} \notin O(2^n)$
Vậy tính chất: $f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$ sai.

Bài tập 9 (bonus):

Chứng minh theo 2 cách là dùng **giới hạn** và **định nghĩa**:

Cho $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ và $g(n) = n^2$. Chứng minh $f(n) = \Theta(g(n))$

Bài giải

1. **Chứng minh sử dụng định nghĩa**

   Xét $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   Theo định nghĩa:

   $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$, sao cho: $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0$

   $$\Leftrightarrow c_1 n^2 \leq \frac{n^2+1}{2} \leq c_2 n^2, \forall n \geq n_0$$

Thử $c_1 = \dfrac{1}{2}, c_2 = 1$, có: $\begin{cases} \frac{n^2+1}{2} \geq \frac{n^2}{2}, \forall n \\ \frac{n^2+1}{2} \leq n^2, \forall n \geq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Chọn $c_1 = \dfrac{1}{2}, c_2 = 1, n_0 = 1$ thì: $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0$

Vậy $f(n) = \Theta(g(n))$ (điều cần chứng minh)

2. **Chứng minh sử dụng giới hạn**

   Xét: $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{f(n)}{g(n)}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2+1}{2n^2}\right] = \dfrac{1}{2}$

   $\Rightarrow 0 < \lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{f(n)}{g(n)}\right] < \infty \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$ (điều cần chứng minh)

Chứng minh: $\dfrac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

Bài giải

1. **Chứng minh sử dụng định nghĩa**

   Theo định nghĩa:

   $\dfrac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$, sao cho: $c_1 n^2 \leq \dfrac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, \forall n \geq n_0$

   • Xét $c_1 n^2 \leq \dfrac{1}{2}n^2 - 3n$. Thử $c_1 = \dfrac{1}{4}(< \dfrac{1}{2})$

   Với $c_1 = \dfrac{1}{4}$, cần tìm n_0 sao cho: $\dfrac{1}{4}n^2 \leq \dfrac{1}{2}n^2 - 3n, \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}n^2 - 3n \geq 0, \forall n \geq n_0$

   $\Rightarrow n \geq 12, \forall n \geq n_0 \Rightarrow n_0 = 12$ thỏa (1)

   • Xét $\dfrac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2$. Thử $c_2 = \dfrac{1}{2}$

   Với $c_2 = \dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{2}n^2 - 3n \leq \dfrac{1}{2}n^2$ (đúng $\forall n \geq 0$) $\Rightarrow n_0 = 0$ thỏa (2)

   Từ (1) và (2) suy ra: chọn $c_1 = \dfrac{1}{4}, c_2 = \dfrac{1}{2}, n_0 = 12$ thì $c_1 n^2 \leq \dfrac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, \forall n \geq n_0$

   Vậy $\dfrac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ (điều cần chứng minh)

2. **Chứng minh sử dụng giới hạn**

   Xét: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}n^2 - 3n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$

   $\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}n^2 - 3n}{n^2} \leq \infty \Rightarrow \dfrac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ (điều cần chứng minh)

Chứng minh: $n\log n - 2n + 13 = \Omega(n\log n)$

Bài giải

1. **Chứng minh sử dụng định nghĩa**

Theo định nghĩa:
$n\log n - 2n + 13 = \Omega(n\log n) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$, sao cho: $n\log n - 2n + 13 \ge cn\log n, \forall n \ge n_0$

Thử $c = \dfrac{1}{2}$, cần tìm n_0 sao cho:

$n\log n - 2n + 13 \ge \dfrac{1}{2}n\log n, \forall n \ge n_0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}n\log n \ge 2n - 13, \forall n \ge n_0$

Mà ta có: $2n \ge 2n - 13, \forall n$

$\Rightarrow$ Tìm n_0 sao cho: $\dfrac{1}{2}n\log n \ge 2n, \forall n \ge n_0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log n \ge 2, \forall n \ge n_0$ *(n ≥ 0)* $\Leftrightarrow n \ge 4, \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow n_0 = 4$ thỏa

$\Rightarrow$ Ta chọn $c = \dfrac{1}{2}, n_0 = 4$ thì: $n\log n - 2n + 13 \ge cn\log n, \forall n \ge n_0$

Vậy $n\log n - 2n + 13 = \Omega(n\log n)$ (điều cần chứng minh)

2. **Chứng minh sử dụng giới hạn**

Xét: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\log n - 2n + 13}{n\log n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\log n - 2n}{n\log n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n - 2}{\log n} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\log n - 2n + 13}{n\log n} \ge 0 \Rightarrow n\log n - 2n + 13 = \Omega(n\log n)$ (điều cần chứng minh)

Chứng minh: $\log_3 n^2 = \Theta(\log_2(n^3))$

Bài giải

1. **Chứng minh sử dụng định nghĩa**

Theo định nghĩa:
$\log_3 n^2 = \Theta(\log_2 n^3) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$, sao cho: $c_1\log_2 n^3 \le \log_3 n^2 \le c_2\log_2 n^3, \forall n \ge n_0$

Thử $\forall n \ge 1$, tìm c_1, c_2 sao cho: $\begin{cases} c_1 \le \dfrac{\log_3 n^2}{\log_2 n^3} \\ c_2 \ge \dfrac{\log_3 n^2}{\log_2 n^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \le \dfrac{2\log_3 n}{3\log_2 n} \\ c_2 \ge \dfrac{2\log_3 n}{3\log_2 n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \le \dfrac{2\log_n 2}{3\log_n 3} \\ c_2 \le \dfrac{2\log_n 3}{3\log_n 2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \le \dfrac{2}{3}\log_3 2 \\ c_2 \ge \dfrac{2}{3}\log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \le \log_{27} 4 \\ c_2 \ge \log_{27} 4 \end{cases}$$

Biết $\log_{27} 4 \approx 0.4206$

$\Rightarrow$ Chọn $c_1 = 0.4, c_2 = 0.5, n_0 = 1$ thì: $c_1\log_2 n^3 \le \log_3 n^2 \le c_2\log_2 n^3, \forall n \ge n_0$

Vậy $\log_3 n^2 = \Theta(\log_2 n^3)$ (điều cần chứng minh)

2. **Chứng minh sử dụng giới hạn**

Xét: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_3 n^2}{\log_2 n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\log_n 2}{3\log_n 3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\log_3 2\right) = \dfrac{2}{3}\log_3 2 = \log_{27} 4$

$\Rightarrow 0 \le \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_3 n^2}{\log_2 n^3} \le \infty \Rightarrow \log_3 n^2 = \Theta(\log_2 n^3)$ (điều cần chứng minh)

Chứng minh: $n^{\lg 4} \in \omega(3^{\lg n})$

Bài giải

1. **Chứng minh sử dụng định nghĩa**

Cho c là hằng số thực dương bất kỳ, $c \in \mathbb{R}^+$.
Để $n^{\lg 4} \in \omega(3^{\lg n})$, cần tìm n_0 sao cho: $0 \le c3^{\lg n} < n^{\lg 4}, \forall n \ge n_0$.
Ta có:
- $n^{\lg 4} \ge 0$ (đúng $\forall n$)
- $c3^{\lg n} < n^{\lg 4} \Leftrightarrow cn^{\lg 3} < n^{\lg 4} \Leftrightarrow c < n^{\lg 4 - \lg 3} \Leftrightarrow c < n^{\lg\frac{4}{3}} \Leftrightarrow n > \sqrt[\lg\frac{4}{3}]{c} \Leftrightarrow n > c^{\frac{1}{\lg\frac{4}{3}}}$

$\Rightarrow$ Với hằng số $c > 0$ bất kì, tồn tại $n_0 = c^{\frac{1}{\lg\frac{4}{3}}} > 0$ sao cho $0 \le c3^{\lg n} < n^{\lg 4}, \forall n > n_0$
Vậy $n^{\lg 4} \in \omega(3^{\lg n})$ (điều cần chứng minh)

2. **Chứng minh sử dụng giới hạn**

Xét: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\lg 4}}{3^{\lg n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\lg 4}}{n^{\lg 3}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\lg\frac{4}{3}} = \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\lg 4}}{3^{\lg n}} = \infty \Rightarrow n^{\lg 4} \in \omega(3^{\lg n})$ (điều cần chứng minh)

Chứng minh: $\lg^2 n \in o(n^{\frac{1}{2}})$

Bài giải

1. **Chứng minh sử dụng định nghĩa**

Cho c là hằng số thực dương bất kỳ, $c \in \mathbb{R}^+$.
Để $\lg^2 n \in o(n^{\frac{1}{2}})$, cần tìm n_0 sao cho: $0 \le \lg^2 n < cn^{\frac{1}{2}}, \forall n \ge n_0$.
Ta có:

- $\lg^2 n \ge 0$ (đúng $\forall n$)
- $\lg^2 n < cn^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg n < \sqrt{c}n^{\frac{1}{4}} & (1) \\ \lg n > -\sqrt{c}n^{\frac{1}{4}} & (2) \end{cases}$

- Xét BĐT (1): $\lg n < \sqrt{c}n^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \dfrac{\lg n}{\sqrt{c}} < n^{\frac{1}{4}}$ (đúng $\forall n > 0$)

- Xét BĐT (2): $\lg(n) > -\sqrt{c}n^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)} > -\sqrt{c}n^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow n^{\frac{-1}{4}} \ln n > -\sqrt{c}\ln(2)$

$$\Leftrightarrow n^{\frac{-1}{4}} \ln n^{\frac{-1}{4}} < \frac{\sqrt{c}\ln(2)}{4} \Leftrightarrow e^{\ln n^{\frac{-1}{4}}} \ln n^{\frac{-1}{4}} < \frac{\sqrt{c}\ln(2)}{4}$$

$$\Leftrightarrow W\left(e^{\ln n^{\frac{-1}{4}}} \ln n^{\frac{-1}{4}}\right) < W\left(\frac{\sqrt{c}\ln(2)}{4}\right) \qquad \text{(Lambert W function)}$$

$$\Leftrightarrow \ln n^{\frac{-1}{4}} < W\left(\frac{\sqrt{c}\ln(2)}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > e^{-4W\left(\frac{\sqrt{c}\ln(2)}{4}\right)}$$

$\Rightarrow$ Với hằng số $c > 0$ bất kì, tồn tại $n_0 = e^{-4W\left(\frac{\sqrt{c}\ln(2)}{4}\right)} > 0$ sao cho $0 \le \lg^2 n < cn^{\frac{1}{2}}, \forall n > n_0$

Vậy $\lg^2 n \in o(n^{\frac{1}{2}})$ (điều cần chứng minh)

2. **Chứng minh sử dụng giới hạn**

   Xét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg^2 n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\lg n}{n\ln(2)}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\lg n}{\sqrt{n}\ln(2)} \qquad \text{(L'Hospital rule)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n\ln(2)}}{\frac{\ln(2)}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{(\ln^2 2)\sqrt{n}} \qquad \text{(L'Hospital rule)}$$

$$=0$$

   Vậy $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lg^2 n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0 \Rightarrow \lg^2 n \in o(n^{\frac{1}{2}})$ (điều cần chứng minh)

Chứng minh: $\dfrac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

Bài giải

1. **Chứng minh sử dụng định nghĩa**

   Cho c là hằng số thực dương bất kỳ, $c \in \mathbb{R}^+$.

   Để $\dfrac{n^2}{2} \in \omega(n^2)$, cần tìm n_0 sao cho: $0 \le cn^2 \le \dfrac{n^2}{2}, \forall n \ge n_0$.

   Ta có:

   - $cn^2 \ge 0$ (đúng $\forall n$ vì $c > 0$)
   - $cn^2 \le \dfrac{n^2}{2} \Leftrightarrow c \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow c$ bị chặn trên bởi giá trị $\dfrac{1}{2}$.

Như vậy $\forall c \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ thì $cn^2 \leq \frac{n^2}{2}$ đúng $\forall n$.

Trong khi đó, với $n > \frac{1}{2}$ thì không tồn tại giá trị n_0 thỏa: $cn^2 \leq \frac{n^2}{2}, \forall n \geq n_0$.

Suy ra, với mỗi hằng số dương c bất kỳ, không đảm bảo tìm được số nguyên $n_0 > 0$ thỏa bất đẳng thức $0 \leq cn^2 < \frac{n^2}{2}, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$ (điều cần chứng minh).

2. **Chứng minh sử dụng giới hạn**

   Xét: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{2}}{n^2} = \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$

   $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{2}}{n^2} \neq \infty \Rightarrow \frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$ (điều cần chứng minh).