Phân tích & Thiết kế thuật toán (Algorithms Design & Analysis)

L/O/G/O

GV: HUỲNH THỊ THANH THƯƠNG

Email: thuonghtt@uit.edu.vn

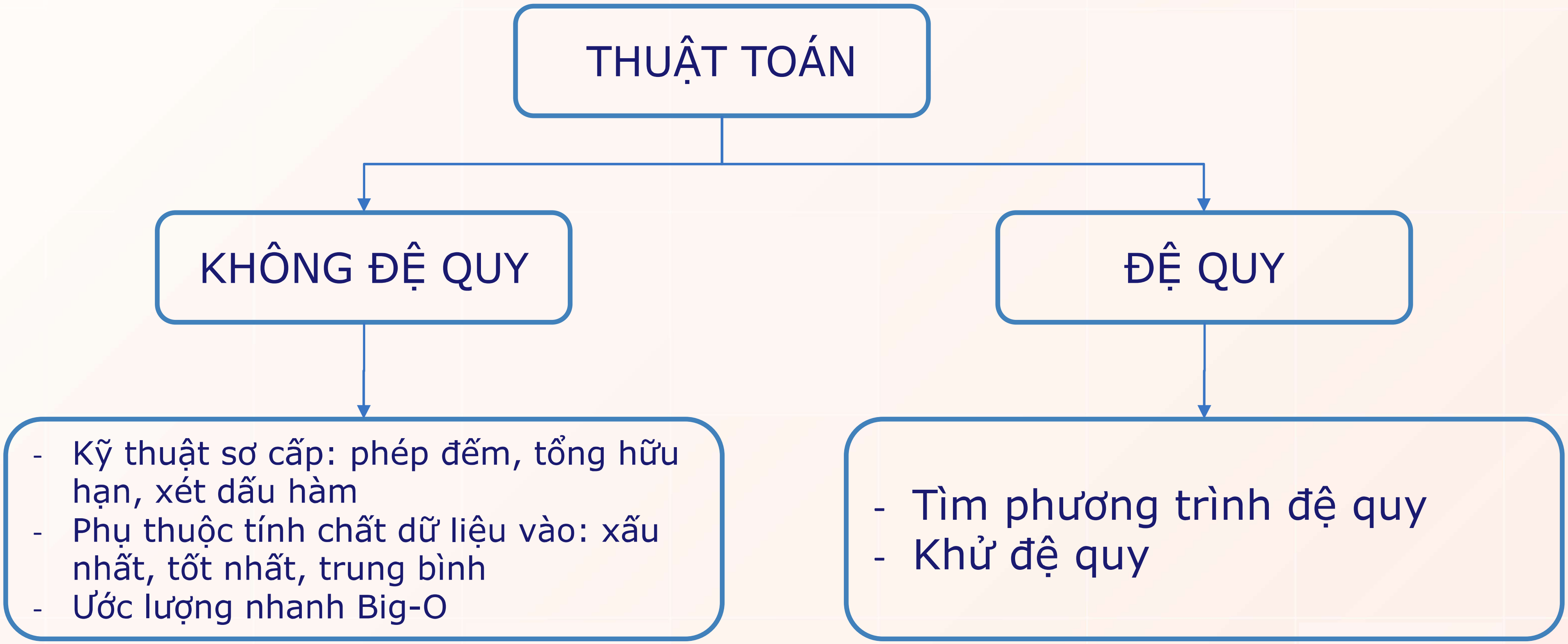
PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN

CHƯƠNG 2

L/O/G/O

www.themegallery.com

Đánh giá tính hiệu quả về thời gian



Một số thuật toán thông dụng

Phân tích thuật toán đệ quy (Analysis of Recursive Algorithms)

- Cách 1:
  - Thành lập phương trình đệ quy
  - Giải phương trình đệ quy
    - Thời gian thực hiện chương trình = nghiệm của phương trình đệ quy
- Cách 2:
  - Khử đệ quy, phân tích Thuật toán không đệ quy

Phân tích thuật toán đệ quy – Giải phương trình đệ quy

- Truy hồi/Thay thế
- Phương trình đặc trưng
- Phương pháp hàm sinh
- Định lý Master
- Đoán nghiệm và quy nạp
- Khác

- Backward substitution
- Characteristic equation
- Generating function
- Master theorem
- Guessing and Induction

Hàm sinh (Generating function)

❖Định nghĩa:

- Hàm sinh của dãy vô hạn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ là tổng hình thức

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- Hàm sinh có dạng biểu diễn là 1 chuỗi lũy thừa
- Ký hiệu: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}=\langle a_0,a_1,a_2,\ldots\rangle$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

trong đó a_0, a_1, ...là các hằng số thực

Hàm sinh (Generating function)

❖Một số hàm sinh cơ bản và dãy số tương ứng

$$\langle 0,0,0,\ldots\rangle \quad \leftrightarrow \quad f(x)=0+0.x+0.x^2+\ldots=0$$

$$\langle 1,0,0,\ldots\rangle \quad \leftrightarrow \quad f(x)=1+0.x+0.x^2+\ldots=1$$

$$a_n=1 \quad \leftrightarrow \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$$

$$a_n=-1 \quad \leftrightarrow \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)x^n=\frac{1}{(1+x)}$$

Hàm sinh (Generating function)

Một số hàm sinh cơ bản và dãy số tương ứng

$$a_n = n \quad \leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n) x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$a_n = n+1 \quad \leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Phương pháp Hàm sinh (Generating function)

- Giải phương trình đệ quy

$$T(n) = \begin{cases} T(0) = 0, \quad T(1) = 1 \\ \quad 2T(n-1) + 1 \qquad khi\ n > 1 \end{cases}$$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^\infty$ là:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} [2T(n-1) + 1]\, x^n \quad + T(1)x^1 + T(0)x^0$$

$$f(x) = 2\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n + x \qquad (*)$$

Phương pháp Hàm sinh (Generating function)

Thế vào (*) $$f(x) = 2\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n + x$$

$$f(x) = 2xf(x) + \frac{1}{1-x} - x - 1 + x$$

Rút gọn $$f(x) = 2xf(x) + \frac{1}{1-x} - 1$$

Chuyển vế $$(1-2x)f(x) = \frac{x}{1-x}$$

Chia $$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

Phương pháp Hàm sinh (Generating function)

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

Tìm cách đưa về dạng $f(x) = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$

Những công thức đáng nhớ: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$f(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n$ mà $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$ $\boldsymbol{T(n) = 2^n - 1}$

Phương pháp Hàm sinh (Generating function)

❖Sử dụng hàm sinh để giải phương trình đệ quy

$$T(n) = \begin{cases} T(0) = 1, T(1) = 9 \\ 6T(n-1) - 9T(n-2) & n \geq 2 \end{cases}$$

GV đã sửa hoàn chỉnh trên lớp

Đáp án: $T(n) = (2n+1)3^n$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1+3x}{9x^2-6x+1}=\frac{1+3x}{(1-3x)^2}=\frac{1}{(1-3x)^2}+\frac{3x}{(1-3x)^2}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(3x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n)(3x)^n$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(3^n)(x)^n$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)3^n x^n$$

Bài tập trên lớp – lấy điểm quá trình

❖Cho phương trình sau:

$$T(n) = \begin{cases} T(0) = 1 \\ T(n) = T(n-1) + 7 & n \geq 1 \end{cases}$$

Y/c: Sử dụng hàm sinh để giải pt trên

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n) x^n$$

Đáp án: $T(n) = (7n+1) = O(n)$

Phương pháp Đoán nghiệm (The most general method)

1. ***Guess*** the form of the solution.
2. ***Verify*** by induction.
3. ***Solve*** for constants.

Phương pháp Đoán nghiệm (Guessing and Induction)

- Ta đoán 1 nghiệm f(n) và dùng chứng minh quy nạp để chứng tỏ rằng $T(n) \le f(n)$, với mọi n
- f(n) thường là một trong các hàm quen thuộc như logn, n, n^2, n^3, 2^n, n!, n^n
- Đôi khi ta chỉ đoán dạng của f(n) trong đó có vài tham số chưa xác định và trong quá trình quy nạp, ta sẽ tìm ra giá trị thích hợp cho các tham số.

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & khi\ n = 0 \\ T(n-1) + C_2 & khi\ n > 0 \end{cases}$$

Ta đoán f(n) = a*n + b

- B1: Với n = 0, T(0) = C_1 và f(0) = b,

  Để có T(0) ≤ f(0) thì Chọn $C_1 \leq b$

- B2: Giả sử T(k) ≤ f(k), ∀k < n.

- B3: Ta cm T(n) ≤ f(n), ∀n

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & khi\ n = 0 \\ T(n-1) + C_2 & khi\ n > 0 \end{cases}$$

Ta đoán f(n) = a*n + b

- B3: Cần cm T(n) ≤ f(n), ∀n
  - Áp dụng giả thiết quy nạp với k = n-1 < n (n > 0)
  - Ta có T(n-1) ≤ f(n-1) = a*(n-1)+b

$$T(n) = T(n-1) + C_2 \qquad \leq a(n-1) + b + C_2$$

$$T(n) \leq an + b + C_2 - a$$

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & khi\ n = 0 \\ T(n-1) + C_2 & khi\ n > 0 \end{cases}$$

Ta đoán f(n) = a*n + b

B3: Cần cm T(n) ≤ f(n), ∀n

$$T(n) \le an + b + C_2 - a$$

Nếu: $C_2 - a \le 0$

Thì: $T(n) \le an + b = f(n)$

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & khi\ n = 0 \\ T(n-1) + C_2 & khi\ n > 0 \end{cases}$$

- Để tìm a, b, ta giải hệ: $\begin{cases} b \geq C_1 \\ a \geq C_2 \end{cases}$
- Suy ra: $b = C_1$, $a = C_2$
- Ta có: $T(n) \leq C_1 + C_2 n \ \forall n$
- $T(n) = O(n)$

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & khi\ n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + nC_2 & khi\ n > 1 \end{cases}$$

Đoán: $f(n) = anlogn + b$