TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN
HOMEWORK #01: ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUẬT TOÁN SƠ CẤP

Mã lớp : CS112.N23.KHCL

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương
Nhóm thực hiện: Nhóm 2

Họ và tên	MSSV
Trần Xuân Thành	21520456
Nguyễn Hà Anh Vũ	21520531
Đỗ Minh Khôi	21521007
Nguyễn Nguyên Khôi	21521009

TP.HCM, ngày 26 tháng 3 năm 2023

Bài 1: Tính tổng hữu hạn

a) 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999
Cấp số cộng có: $a_1 = 1, a_n = 999, d = 1$
$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{999-1}{2} + 1 = 500$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{500(1+999)}{2} = 250000$$

b) 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 1024
Cấp số nhân có a = 2 và q = 2
Số hạng cuối: $a_n = aq^{n-1} = 1024 \Leftrightarrow 2.2^{n-1} = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 1024$
Vậy có $n = \log_2 1024 = 10$ số hạng

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 2046$$

c) $\sum_{i=3}^{n+1} 1 = n + 1 - 3 + 1 = n - 1$

d) $\sum_{i=3}^{n+1} i = \frac{(n+1-3+1)(n+1+3)}{2} = \frac{(n-1)(n+4)}{2} = \frac{n^2+3n-4}{2}$

e) $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i = 0 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}(\frac{2n-1}{3} + 1) = \frac{n^3-n}{3}$

f) $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1} = 3(3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^n)$
Cấp số nhân có a = 3 và q = 3
$S_n = 3\frac{a(1-q^n)}{1-q} = 3\frac{3(1-3^n)}{1-3} = \frac{9}{2}(3^n - 1)$

g) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

h) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \approx \ln(n) - [\ln(n) - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}] \approx \frac{1-n}{2(1+n)}$

i) $\sum_{j\in\{2,3,5\}} (j^2 + j) = 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + 5^2 + 5 = 48$

j) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{100} (i+j)$
$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} 101(i+j) = 101\sum_{i=1}^{m}[(n+1)i + \frac{n(n+1)}{2}] = 101[(n+1)\frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(n^2+n)}{2}]$

$= \frac{101}{2}(m^2n + m^2 + mn + m + mn^2 + mn) = \frac{101}{2}(m^2n + mn^2 + 2mn + m^2 + m)$

Bài 2

```
s = 0;                          {1 g}
i = 1;                          {1 g}
while (i ≤ n) do                {n+1 ss}
    j = 1;                      {n g}
    while (j ≤ i²) do           {α+1 ss}
        s = s + 1;              {α g}
        j = j + 1;              {α g}
    end do;
    i = i + 1;                  {n g}
end do;
```

Bài giải

Gọi P_i là vòng while trong
P_i được thực hiện khi và chỉ khi $j \le i^2 \Leftrightarrow 1 \le i^2 \Leftrightarrow i \ge 1$ (do $\{i \in N | 1 \le i \le n\}$)
mà $1 \le i \le n \Rightarrow$ vòng while trong P_i luôn xảy ra
Gọi α_i là số vòng lặp của vòng while trong P_i(xét độc lập với while ngoài) là số con j với j chạy từ 1 đến i^2, bước tăng của j là 1
$\Rightarrow \alpha_i = i^2 - 1 + 1 = i^2$

$$\text{Gán(n)} = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n}(2\alpha_i) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n}(2i^2) = 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \boxed{= \frac{2n^3+3n^2+7n+6}{3}}$$

$$\text{So sánh(n)} = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(i^2) = 2n + 1 + \frac{2n^3+3n^2+n}{6} \boxed{= \frac{2n^3+3n^2+13n+6}{6}}$$

Bài 3

```
sum = 0;                        {1 g}
i = 1;                          {1 g}
while (i ≤ n) do                {n+1 ss}
    j = n − i*i;                {n g}
    while (j ≤ i*i) do          {α+1 ss}
        sum = sum + i*j;        {α g}
        j = j + 1;              {α g}
    endw;
    i = i + 1;                  {n g}
endw;
```

Bài giải

Gọi P_i là vòng lặp while trong, xét độc lập với while ngoài
Gọi α_i là số lần lặp của P_i
P_i chỉ thực hiện khi và chỉ khi $(j \le i^2) \Leftrightarrow n - i^2 \le i^2 \Leftrightarrow 2i^2 \ge n \Leftrightarrow i \ge \left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil$

α_i là số con j với j chạy từ $n-i^2$ đến i^2, bước tăng là 1: $\alpha_i = i^2-(n-i^2)+1 = 2i^2-n+1$

Vậy: $\boxed{\alpha_i = \begin{cases} 2i^2-n+1 & \text{nếu } i \geq \left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil \\ 0 & \text{nếu } i < \left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil \end{cases}}$

$$\text{Gán(n)} = 2+2n+\sum_{i=\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil}^{n}(2\alpha_i) = 2+2n+2\sum_{i=\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil}^{n}(2i^2-n+1)$$

$$= 2+2n+2(n-\left\lceil\sqrt{\tfrac{n}{2}}\right\rceil+1)(1-n)+4\Big(\sum_{i=1}^{n}i^2-\sum_{i=1}^{\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil-1}i^2\Big)$$

$$= 2+2n+2(n-\left\lceil\sqrt{\tfrac{n}{2}}\right\rceil+1)(1-n)+4\Big(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil-1)\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil(2\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil-1)}{6}\Big)$$

$$\text{So sánh(n)} = n+1+\sum_{i=\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil}^{n}(\alpha_i+1) = n+1+\sum_{i=\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil}^{n}(2i^2-n+1+1)$$

$$= n+1+2\Big(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil-1)\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil(2\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil-1)}{6}\Big)+(n-\left\lceil\sqrt{\tfrac{n}{2}}\right\rceil+1)(2-n)$$

Bài 4

```
float Alpha ( float x, long n )
{
    long i = 1; float z = 0;            {2g}
    while (i ≤ n)                       {n+1 ss}
    {
        long j = 1 ; float t =1;        {2n g}
        while (j ≤ i)                   {α + 1 ss}
        {
            t = t*x;                    {α g}
            j = 2*j;                    {α g}
        }
        z = z + i*t;                    {n g}
        i = i + 1;                      {n g}
    }
    return z;
}
```

Bài giải

Gọi α_i là số vòng lặp của vòng while trong (xét độc lập với while ngoài) là số con j với j chạy từ 1 đến i, bước tăng của j theo hệ số j = 2*j

Các giá trị có thể có của j: { 1;2;4;8;...i } = { $2^0;2^1;2^2;2^3;...i$ }

$\Rightarrow \alpha_i$ là số con k, { $k \in N \mid 2^k \leq i$ } $\Rightarrow 2^k \leq i \Leftrightarrow k \leq \lfloor \log_2 i \rfloor$

mà $k \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq \lfloor \log_2 i \rfloor$

Vậy $\boxed{\alpha_i = \text{số con k} = \lfloor \log_2 i \rfloor - 0 + 1 = \lfloor \log_2 i \rfloor + 1}$

Gán (n) = $2+2n+2n+\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2+4n+\sum_{i=1}^{n} 2\ (\ \lfloor \log_2 i \rfloor + 1\ ) = 2+4n+2\sum_{i=1}^{n} \lfloor \log_2 i \rfloor + 2\sum_{i=1}^{n} 1$

$$\approx 2+4n+2n\log_2 n+2n = 2n\log_2 n+6n+2$$

So Sánh (n) = $n+1+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+1) = n+1+\sum_{i=1}^{n}[(\lfloor \log_2 i \rfloor+1)+1] = n+1+\sum_{i=1}^{n} \lfloor \log_2 i \rfloor + 2\sum_{i=1}^{n} 1$

$$\approx n+1+n\log_2 n+2n = n\log_2 n+3n+1$$

Bài 5

```
sum = 0; i = 1;                    {2 g}
while (i <= n )                    {n+1 ss}
{
    j = n - i;                     {n g}
    while (i <= 2*i)               {α_i+1 ss}
    {
        sum = sum + i*j;           {α_i g}
        j = j + 2;                 {α_i g}
    }
    k = i;                         {n g}
    while (k > 0)                  {β_i+1 ss}
    {
        sum = sum + 1;             {β_i g}
        k = k / 2;                 {β_i g}
    }
    i = i + 1;                     {n g}
}
```

Bài giải

Gọi α_i, β_i là số vòng lặp của đoạn P_i, Q_i (xét độc lập với while ngoài)

Vòng while P_i chỉ được thực hiện khi $j \le 2i \Leftrightarrow n-i \le 2i \Leftrightarrow i \ge \frac{n}{3}$

Số vòng lặp của P_i là: $\frac{2i-(n-i)+1}{2} = \frac{3i-n+1}{2}$

Vậy:

$$\boxed{\alpha_i = \begin{cases} \frac{3i-n+1}{2} & \text{nếu } i \ge \frac{n}{3} \\ 0 & \text{nếu } i < \frac{n}{3} \end{cases}}$$

Tính β_i :

β_i là số con k với k chạy từ i đến khi k>0, bước giảm của k theo hệ số k = k/2

Các giá trị có thể có của k: { $i; \lfloor \frac{i}{2} \rfloor; \lfloor \frac{i}{4} \rfloor; \lfloor \frac{i}{8} \rfloor; \ldots > 0$} = { $\lfloor \frac{i}{2^0} \rfloor; \lfloor \frac{i}{2^1} \rfloor; \lfloor \frac{i}{2^2} \rfloor; \lfloor \frac{i}{2^3} \rfloor; \ldots \ge 1$ }

$\Rightarrow \beta_i$ là số con m, { $m \in N \mid \lfloor \frac{i}{2^m} \rfloor \ge 1$ } $\Rightarrow \lfloor \frac{i}{2^m} \rfloor \ge 1 \Leftrightarrow m \le \lfloor \log_2 i \rfloor$ mà $m \ge 0 \Rightarrow 0 \le m \le \lfloor \log_2 i \rfloor$

Vậy $\boxed{\beta_i = \text{số con m} = \lfloor \log_2 i \rfloor - 0 + 1 = \lfloor \log_2 i \rfloor + 1}$

Gán (n) $= 2+3n+\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} 2\beta_i$

$$= 2+3n+2\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} \frac{3i-n+1}{2} + 2\sum_{i=1}^{n}[\lfloor \log_2 i \rfloor + 1]$$

$$= 2+3n+3\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} i + \sum_{i=\frac{n}{3}}^{n}(1-n) + 2\sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor + 2\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\approx 2+3n+\frac{3}{2}(\frac{n}{3}+n)(n-\frac{n}{3}+1)+(1-n)(n-\frac{n}{3}+1)+2n\log_2 n+2n$$

$$= \frac{2}{3}n^2+\frac{20}{3}n+2n\log_2 n+3$$

So Sánh (n) $= n+1+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+1)+\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+1)$

$$= n+1+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}1+\sum_{i=1}^{n}\beta_i+\sum_{i=1}^{n}1$$

$$= n+1+\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n}\frac{3i-n+1}{2}+\sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor+1)+2\sum_{i=1}^{n}1$$

$$= n+1+\frac{3\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} i+\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n}(1-n)}{2}+\sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor+3\sum_{i=1}^{n}1$$

$$\approx n+1+\frac{\frac{3}{2}(\frac{n}{3}+n)(n-\frac{n}{3}+1)+(1-n)(n-\frac{n}{3}+1)}{2}+n\log_2 n+3n$$

$$= \frac{n^2}{3}+\frac{29}{6}n+n\log_2 n+\frac{3}{2}$$

Bài 6

```
i = 1; count = 0                {2 g}
while (i ≤ 4n)                  {4n+1 ss}
{
    x = (n−i)(i−3n);            {4n g}
    y = i −2n;                  {4n g}
    j = 1;                      {4n g}
    while (j ≤ x)               {α_i +1 ss}
    {
        count = count − 2;      {α_i g}
        j = j + 2;              {α_i g}
    }
    if (x > 0)                  {4n ss}
        if (y > 0)              {2n−1 ss}
            count = count + 1;  {n−1 g}
    i = i + 1;                  {4n g}
}
```

Bài giải

Gọi P_i là vòng while trong, xét độc lập với while ngoài

α_i là số lần lặp của P_i

Bảng xét dấu:

i	1		n		$2n$		$3n$		$4n$
x = (n - i)(i - 3n)		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|
y = i - 2n		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|

Câu lệnh if(y > 0) chỉ thực hiện khi và chỉ khỉ x>0.

Số lần thực hiện so sánh y > 0 = số con i thoả điều kiện x>0 = (3n-1) - (n+1) + 1 = 2n -1

Câu lệnh count = count + 1 chỉ thực hiện khi x>0 và y>0.

Số lần thực hiện phép gán count = count + 1 = số con i thoả cả 2 điều kiện x>0 và y>0

= (3n-1) - (2n+1) + 1 = n - 1

Vòng lặp while trong chỉ thực hiện khi $x \ge j \Leftrightarrow x \ge 1 \ hay \ x > 0$

Số lần lặp của while trong α_i = số con j với j chạy từ 1 đến x, bước tăng của j là 2.

$$\boxed{\alpha_i = \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{-i^2+4ni-3n^2}{2} & \text{nếu } x > 0 \Leftrightarrow n < i < 3n \\ 0 & \text{nếu } i \notin (n;3n) \end{cases}}$$

Gán (n) = $2 + 16n + n - 1 + \sum_{i=1}^{4n} 2\alpha_i = 17n + 1 + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1} \frac{-i^2+4ni-3n^2}{2}$

$$= 17n + 1 - \sum_{i=n+1}^{3n-1} i^2 + 4n\sum_{i=n+1}^{3n-1} i - 3\sum_{i=n+1}^{3n-1} n^2$$

$$= 17n + 1 - \left(\frac{(3n-1)3n(6n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 4n\frac{4n(2n-1)}{2} - 3n^2(2n-1)$$

$$= 17n + 1 - \frac{26}{3}n^3 + 5n^2 - \frac{1}{3}n + 16n^3 - 8n^2 - 6n^3 + 3n^2 \boxed{= \frac{4}{3}n^3 + \frac{50}{3}n + 1}$$

So sánh (n) = $4n+1+4n+2n-1+\sum_{i=1}^{4n}(\alpha_i+1) = 10n+\sum_{i=n+1}^{3n-1}\frac{-i^2+4ni-3n^2}{2}+\sum_{i=1}^{4n}1$

$= 10n+\frac{-\sum_{i=n+1}^{3n-1}i^2+4n\sum_{i=n+1}^{3n-1}i-\ 3\sum_{i=n+1}^{3n-1}n^2}{2}+4n$

$= 14n-\frac{26}{6}n^3+\frac{5}{2}n^2-\frac{1}{6}n+8n^3-4n^2-3n^3+\frac{3}{2}n^2$

$\boxed{= \frac{2}{3}n^3+\frac{83}{6}n}$

Bài 7

```
i = 1;                                  {1g}
count = 0;                              {1g}
while (i <= 4n)                        {4n+1 ss}
{
    x = (n - i)(i - 3n)                 {4ng}
    y = i - 2n                          {4ng}
    j = 1                               {4ng}
    while(j <= x)                      {α_i+1 ss}
    {
        if(i >= 2y)                     {α_i ss}
            count = count - 2           {α_i g}
        j = j + 1                       {α_i g}
    }
    i = i + 1                           {4ng}
}
```

Bài giải

Gọi α_i là số vòng lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)
Vòng lặp while trong chỉ thực hiện khi $j \le x$ hay $j \le (n-i)(i-3n)$
Xét $x = (n-i)(i-3n)$:

i	1		n		$3n$		$4n$
x		$-$	0	+	0	$-$	

$\begin{cases} j \le (n-i)(i-3n) \\ 1 \le j \end{cases} \Rightarrow 1 \le (n-i)(i-3n) \Leftrightarrow 0 \le (n-i)(i-3n) \Leftrightarrow i \in (n;3n)$

Số lần lặp của while trong α_i = số con j với j chạy từ 1->x, bước tăng là 1:

$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \in [1;n] \cup [3n;4n] \\ (n-1)(i-3n) & \text{khi } i \in (n;3n) \end{cases}$

Lệnh count = count - 2 chỉ thực hiện khi $\begin{cases} j \le x \\ i \ge 2y \end{cases}$ *(0)*

Biết $i \geq 2y \Leftrightarrow i \geq 2(i-2n) \Leftrightarrow i \leq 4n$

Như vậy: $(0) \Leftrightarrow \begin{cases} i \in (3n;4n) \\ i \leq 4n \end{cases} \Leftrightarrow i \in (n;3n)$

$\Rightarrow$ Số lần thực hiện phép gán $count = count - 2$ là α_i
Số lần thực hiện phép so sánh $i \geq 2y$ là α_i

- Vậy số phép gán là:

$$\text{Gán}(n) = 2 + 16n + 2\sum_{i=1}^{4n}\alpha_i = 2 + 16n + 2\times\sum_{i=n+1}^{3n-1}(n-i)(i-3n)$$
$$= 2 + 16n + 2\times\sum_{i=n+1}^{3n-1}(-i^2 + 4ni - 3n^2) = 2 + 16n + 2\left(\frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n\right)$$
$$= \frac{8}{3}n^3 + \frac{46}{3}n + 2$$

- Số phép so sánh là:

$$\text{So sánh}(n) = (4n+1) + \sum_{i=1}^{4n}(\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{4n}\alpha_i = 4n + 1 + \sum_{i=1}^{4n}1 + \sum_{i=1}^{4n}\alpha_i$$
$$= 4n + 1 + 4n + \sum_{i=n+1}^{3n-1}(n-i)(i-3n) = 8n + 1 + 2\left(\frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n\right)$$
$$= \frac{8}{3}n^3 + \frac{22}{3}n + 1$$

Bài 8

```
i = 0; count = 0;                      {2g}
while(i ≤ 3n)                         {3n+2 ss}
{
    x = 2n − i;                       {3n+1 g}
    y = i − n;                        {3n+1 g}
    j = 1;                            {3n+1 g}
    while(j ≤ x)                      {αi+1 ss}
    {
        if(j ≥ n)                      {αi ss}
            count = count − 1;         {λi g}
        j = j + 1;                     {αi g}
    }
    if(y > 0)                         {3n+1 ss}
        if(x > 0)                      {λ2 ss}
            count = count + 1;         {λ3 g}
    i = i + 1;                         {3n+1 g}
}
```

Bài giải

Gọi α_i là số vòng lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)
Gọi λ_i là số lần thực hiện lệnh count = count - 1 (xét độc lập với while ngoài)
Gọi λ_2 là số lần thực hiện lệnh if(x > 0)
Gọi λ_3 là số lần thực hiện lệnh count = count + 1
Vòng lặp while trong chỉ thực hiện khi $j \le x$ hay $j \le 2n - i$: $j \le 2n - i \Rightarrow 2n - i \ge 1$ hay $2n - i > 0$
Số lần lặp của while trong α_i = số con j với j chạy từ 1->x, bước tăng 1:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \ge 2n \\ 2n - i & \text{khi } i < 2n \end{cases}$$

Câu lệnh count = count - 1 chỉ thực hiện khi: $\begin{cases} j \le x \\ j \ge n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i < 2n \\ n \le j \le 2n - i \end{cases} \Leftrightarrow i \le n$

$\Rightarrow \lambda_i$ = số con j với j chạy từ n đến 2n - i, bước tăng là 1 = $\begin{cases} 0 & \text{nếu } i > n \\ n - i + 1 & \text{nếu } i \le n \end{cases}$

Xét lệnh if(x > 0), lệnh này chỉ thực hiện khi y > 0 ($n < i \le 3n$):
$\Rightarrow \lambda_2 =$ số con i thỏa $y > 0 = 3n - (n+1) + 1 = 2n$
Câu lệnh count = count + 1 chỉ thực hiện khi y > 0 ($n < i \le 3n$) và x > 0 ($0 \le i < 2n$):
$\Rightarrow \lambda_3 = (2n-1) - (n+1) + 1 = n - 1$
- Vậy số phép gán là:

$$\begin{aligned} \text{Gán}(n) &= 2 + 4(3n+1) + \sum_{i=0}^{3n} (\alpha_i + \lambda_i) + \lambda_3 \\ &= 6 + 12n + \sum_{i=0}^{3n} \alpha_i + \sum_{i=0}^{n} (n - i + 1) + n - 1 = 5 + 13n + \sum_{i=0}^{2n-1} (2n - i) + \sum_{i=0}^{n} (n - i + 1) \\ &= 5 + 13n + 2n \times 2n - \sum_{i=0}^{2n-1} i + (n+1)(n+1) - \sum_{i=0}^{n} i = 6 + 5n^2 + 15n - \frac{(2n-1)(2n)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{5}{2}n^2 + \frac{31}{2}n + 6 \end{aligned}$$

- Số phép so sánh là:

$$\begin{aligned} \text{So sánh}(n) &= (3n+2) + \sum_{i=0}^{3n} (2\alpha_i + 1) + (3n+1) + \lambda_2 = (3n+2) + 2\sum_{i=0}^{3n} \alpha_i + \sum_{i=0}^{3n} 1 + (3n+1) + 2n \\ &= 8n + 3 + 2\sum_{i=0}^{2n-1} (2n - i) + (3n+1) = 11n + 4 + (2 \times 2n \times 2n) - 2\sum_{i=0}^{2n-1} i \\ &= 8n^2 + 11n + 4 - 2\frac{1}{2}(2n-1)2n = 4n^2 + 13n + 4 \end{aligned}$$

Bài 9

```
i = 1;                          {1g}
res = 0;                        {1g}
while i ≤ n do:               {n+1 ss}
    j = 1;                      {ng}
    k = 1;                      {ng}
```

```
        while j ≤ i do:              {αi+1 ss}
            res = res + i*j;          {αig}
            k = k + 2;                {αig}
            j = j + k;                {αig}
        endw
        i = i + 1;                    {ng}
    endw
```

Bài giải

Gọi α_i là số vòng lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)
Vòng lặp while trong chỉ thực hiện khi $j \le i$ hay $1 \le j \le i \Rightarrow 1 \le i$ (luôn thỏa)
Số lần lặp của while trong α_i = số con j với j chạy từ 1->i, bước tăng là k, mà k có bước tăng là 2.
Với mỗi giá trị i thì $j \in \{1, 1+3, 1+3+5, ..., \sum\limits_{l=1}^{x}(2l-1) \le i\}$
Xét: $\sum\limits_{l=1}^{x}(2l-1) \le i \Leftrightarrow \frac{1}{2}2x^2 \le i \Leftrightarrow x^2 \le i \Leftrightarrow 1 \le x \le \lfloor\sqrt{i}\rfloor$
Suy ra: $\alpha_i = \lfloor\sqrt{i}\rfloor$

- Vậy số phép gán là:

$$\text{Gán}(n) = 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\sqrt{i}\right\rfloor$$

- Số phép so sánh là:

$$\begin{aligned}\text{So sánh}(n) &= (n+1) + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}1 \\ &= 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\sqrt{i}\right\rfloor\end{aligned}$$

Bài 10

```
    sum = 0; i = 1; idx = -1                          {3g}
    while(i ≤ n)                                     {n+1 ss}
    {
        j = 1;                                        {ng}
        while(j ≤ n)                                 {n+1 ss}
        {
            if((i == j) && (i + j == n + 1))
                idx = i;
            sum = sum + a[i][j];
            j++;
        }
        i++;                                          {ng}
    }
    if(idx != -1)                                     {1ss}
        sum = sum - a[idx][idx];
```

Bài giải

Quy ước 1: xét lệnh if(a && b)

- Nếu biểu thức a đúng thì cả 2 biểu thức a và b đều được thực hiện
- Nếu biểu thức a sai thì biểu thức b sẽ không được thực hiện

Quy ước 2: ta xem lệnh a++ (với a là biến) cũng là 1 phép gán
Gọi λ là số lần thực hiện lệnh gán idx = i
Biết $\forall i \in [1;n], \exists! j_1 \in [1;n] : i == j_1$ và $\forall i \in [1;n], \exists! j_2 \in [1;n] : i + j == n + 1$
Trong đó, j_1 có thể có cùng giá trị với j_2
Suy ra: Với mỗi giá trị của i, tồn tại 1 lần duy nhất lệnh if((i == j) && (i+j == n+1)) thực hiện cả 2 phép so sánh (i == j) và (i+j == n+1) - đó là khi i = j
⇒ Số phép so sánh được thực hiện bởi lệnh if((i == j) && (i+j == n+1)) là: n + 1 (xét độc lập với while ngoài)

Mặt khác, điều kiện để lệnh gán idx = i được thực hiện là: $\begin{cases} i = j \\ i + j = n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = j \\ 2i = n + 1 \end{cases}$

mà $j, i \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ Lệnh gán idx = i chỉ được thực hiện nếu n+1 là số chẵn hay n là số lẻ

Vậy $\begin{cases} \text{Với n chẵn, } \lambda = 0 \\ \text{Với n lẻ, } \lambda = 1 \text{ tại i = } \frac{n+1}{2} \end{cases}$

Lệnh gán sum = sum - a[idx][idx]; được thực hiện chỉ với n lẻ.

- Vậy số phép gán:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Gán}(n) = 3 + 2n + 2n^2 + \lambda + 1 & \text{trong đó } \lambda = 1\text{, nếu n lẻ} \\ \text{Gán}(n) = 3 + 2n + 2n^2 + \lambda & \text{trong đó } \lambda = 0\text{, nếu n chẵn} \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Gán}(n) = 3 + 2n + 2n^2 + 2(n\%2)$$

- Số phép so sánh:

So sánh$(n) = (n+1) + n(n+1) + n(n+1) + 1 = 2n^2 + 3n + 2$

Bài 11

```
i = 1; ret = 0; s = 0;                 {3g}
while(i ≤ n)                          {n+1 ss}
{
    j = 1;                             {ng}
    s = s + 1/i;                       {ng}        //{real number}
    while(j ≤ s)                      {α_i+1 ss}
    {
        ret = ret + i*j;               {α_i g}
        j = j + 1;                     {α_i g}
    }
    i = i + 1;                         {ng}
}
```

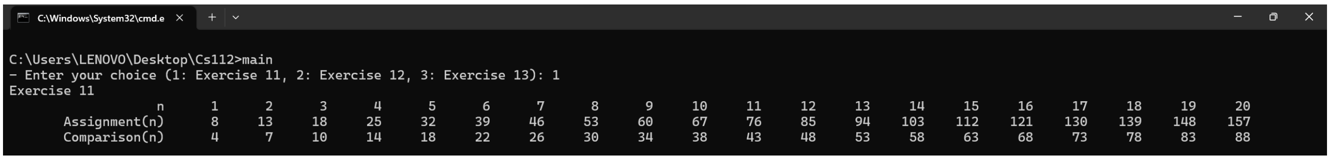
Bài giải

Gọi α_i là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)
Vòng lặp while trong chỉ thực hiện khi $j \le s$ mà $s_{min} = 1, j_{min} = 1 \Rightarrow$ luôn thỏa với mọi i
Số lần lặp của while trong α_i = số con j với j chạy từ 1->s
Biết $s \in \{1, \lfloor 1 + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \rfloor ..., \left\lfloor \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right\rfloor\} \Leftrightarrow s = \left\lfloor \sum_{l=1}^{i} \frac{1}{l} \right\rfloor$
Suy ra: $\alpha_i = \left\lfloor \sum_{l=1}^{i} \frac{1}{l} \right\rfloor$

- Vậy số phép gán là: Gán$(n) = 3 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n}(\left\lfloor \sum_{l=1}^{i} \frac{1}{l} \right\rfloor)$
- Số phép so sánh là: So sánh$(n) = (n+1) + \sum_{i=1}^{n}(\left\lfloor \sum_{l=1}^{i} \frac{1}{l} \right\rfloor + 1) = 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\left\lfloor \sum_{l=1}^{i} \frac{1}{l} \right\rfloor)$

Bảng 1: Gán(n) và So sánh(n) theo công thức đếm thủ công (**Bài 11**)

n	Gán$(n) = 3 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n}(\left\lfloor \sum_{l=1}^{i} \frac{1}{l} \right\rfloor)$	So sánh(n) = $2n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\left\lfloor \sum_{l=1}^{i} \frac{1}{l} \right\rfloor)$
1	8	4
2	13	7
3	18	10
4	25	14
5	32	18
6	39	22
7	46	26
8	53	30
9	60	34
10	67	38
11	76	43
12	85	48
13	94	53
14	103	58
15	112	63
16	121	68
17	130	73
18	139	78
19	148	83
20	157	88



```
C:\Users\LENOVO\Desktop\Cs112>main
- Enter your choice (1: Exercise 11, 2: Exercise 12, 3: Exercise 13): 1
Exercise 11
              n     1    2    3    4    5    6    7    8    9   10   11   12   13   14   15   16   17   18   19   20
  Assignment(n)     8   13   18   25   32   39   46   53   60   67   76   85   94  103  112  121  130  139  148  157
  Comparison(n)     4    7   10   14   18   22   26   30   34   38   43   48   53   58   63   68   73   78   83   88
```

Hình 1: Gán(n) và So sánh(n) theo kết quả khi chạy chương trình (**Bài 11**)

Bài 12

```
i = 1; res = 0;                      {2g}
while(i ≤ n) do:                     {λ+1 ss}
    j = 1;                           {λg}
    while(j ≤ i) do:                 {α_i+1 ss}
        res = res + i*j;             {α_i g}
        j = j + 1;                   {α_i g}
    end do;
    i = i + STT;                     {λg}
end do;
```

Bài giải

STT = 2

Gọi α_i là số vòng lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)

Gọi λ là số vòng lặp của while ngoài

Số lần lặp của vòng lặp while ngoài = số con i với i chạy từ 1->n, bước tăng là 2.

$\Rightarrow \lambda = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$

Vòng lặp while trong chỉ thực hiện khi $i \leq j$ hay $i \geq 1$ (luôn thỏa)

Số lần lặp của vòng lặp while trong α_i = số con j với j chạy từ 1->i, bước tăng là 1 $= i$

Mà $i \in \{1,3,5,7,...\} \Rightarrow$ Ta có thể viết $i = 2d-1$ với d chạy từ 1-> $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$

- Vậy số phép gán là:

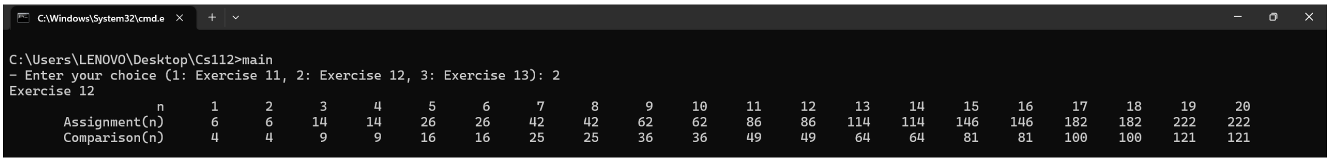
$$\text{Gán}(n) = 2 + 2\lambda + 2\sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \alpha_{2d-1} = 2 + 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 2\sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (2d-1)$$
$$= 2 + 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor (2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor) = 2 + 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 2(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor)^2$$

- Số phép so sánh là:

$$\text{So sánh}(n) = (\lambda + 1) + \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (\alpha_{2d-1} + 1) = (\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1) + \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \alpha_{2d-1} + \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} 1$$
$$= (\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1) + \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor (2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor) + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = 1 + (\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor)^2 + 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

Bảng 2: Gán(n) và So sánh(n) theo công thức đếm thủ công (**Bài 12**)

n	Gán(n) = $2+2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor+2(\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor)^2$	So sánh(n) = $1+(\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor)^2+2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$
1	6	4
2	6	4
3	14	9
4	14	9
5	26	16
6	26	16
7	42	25
8	42	25
9	62	36
10	62	36
11	86	49
12	86	49
13	114	64
14	114	64
15	146	81
16	146	81
17	182	100
18	182	100
19	222	121
20	222	121


```
C:\Users\LENOVO\Desktop\Cs112>main
- Enter your choice (1: Exercise 11, 2: Exercise 12, 3: Exercise 13): 2
Exercise 12
             n    1    2    3    4    5    6    7    8    9   10   11   12   13   14   15   16   17   18   19   20
 Assignment(n)    6    6   14   14   26   26   42   42   62   62   86   86  114  114  146  146  182  182  222  222
 Comparison(n)    4    4    9    9   16   16   25   25   36   36   49   49   64   64   81   81  100  100  121  121
```

Hình 2: Gán(n) và So sánh(n) theo kết quả khi chạy chương trình (**Bài 12**)

Bài 13

```
sum := 0;                          {1g}
i := n;                            {1g}
while(i > 0) do:                   {α+1 ss}
    j := i;                        {αg}
    while(j > 0) do:               {β_i+1 ss}
        sum := sum + 1;            {β_i g}
        j := j - 1;                {β_i g}
    endw;
    i = i div 2;                   {αg}
```

```
endw;
```

Bài giải

Gọi α là số lần lặp của while ngoài

Gọi β_i là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)

Vòng lặp while ngoài có số lần lặp là α = số con i với i chạy từ n->1, bước giảm $\frac{i}{2}$

$i \in \{n, \lfloor\frac{n}{2}\rfloor, \lfloor\frac{n}{4}\rfloor, ..., \lfloor\frac{n}{2^x}\rfloor\}$. Như vậy, $\frac{n}{2^x} \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 2^x \Leftrightarrow x \leq \log_2 n$ với $x \in \mathbb{Z}^+$

Suy ra $\alpha = x_{max} + 1 = \lfloor\log_2 n\rfloor + 1$

Số lần lặp của while trong là β_i = số con j với j chạy từ i->1, bước giảm $1 = i$

Biết rằng ta có thể biểu thị i dưới dạng: $i = \left\lfloor\frac{n}{2^d}\right\rfloor$ với d chạy từ 0->$\lfloor\log_2 n\rfloor$

- Vậy số phép gán là:

$$\begin{aligned}\text{Gán}(n) &= 2 + 2\alpha + 2\sum_{d=0}^{\lfloor\log_2 n\rfloor} \beta_{\left\lfloor\frac{n}{2^d}\right\rfloor} = 2 + 2(\lfloor\log_2 n\rfloor + 1) + 2\sum_{d=0}^{\lfloor\log_2 n\rfloor}\left\lfloor\frac{n}{2^d}\right\rfloor \\ &= 4 + 2\lfloor\log_2 n\rfloor + 2\sum_{d=0}^{\lfloor\log_2 n\rfloor}\left\lfloor\frac{n}{2^d}\right\rfloor\end{aligned}$$

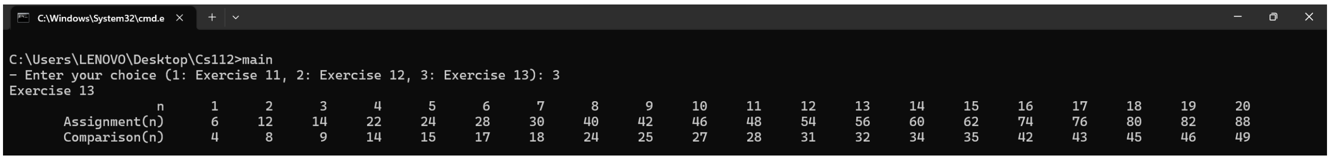
- Số phép so sánh là:

$$\begin{aligned}\text{So sánh}(n) &= (\alpha + 1) + \sum_{d=0}^{\lfloor\log_2 n\rfloor + 1}(\beta_{\left\lfloor\frac{n}{2^d}\right\rfloor} + 1) = (\lfloor\log_2 n\rfloor + 2) + \sum_{d=0}^{\lfloor\log_2 n\rfloor}\beta_{\left\lfloor\frac{n}{2^d}\right\rfloor} + \sum_{d=0}^{\lfloor\log_2 n\rfloor} 1 \\ &= 2\lfloor\log_2 n\rfloor + 3 + \sum_{d=0}^{\lfloor\log_2 n\rfloor}\left\lfloor\frac{n}{2^d}\right\rfloor\end{aligned}$$

Bảng 3: Gán(n) và So sánh(n) theo công thức đếm thủ công (**Bài 13**)

n	Gán(n) = $4 + 2\lfloor\log_2 n\rfloor + 2\sum_{d=0}^{\lfloor\log_2 n\rfloor}\left\lfloor\frac{n}{2^d}\right\rfloor$	So sánh(n) = $2\lfloor\log_2 n\rfloor + 3 + \sum_{d=0}^{\lfloor\log_2 n\rfloor}\left\lfloor\frac{n}{2^d}\right\rfloor$
1	6	4
2	12	8
3	14	9
4	22	14
5	24	15
6	28	17
7	30	18
8	40	24
9	42	25
10	46	27
11	48	28
12	54	31

13	56	32
14	60	34
15	62	35
16	74	42
17	76	43
18	80	45
19	82	46
20	88	49



Hình 3: Gán(n) và So sánh(n) theo kết quả khi chạy chương trình (**Bài 13**)