TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH **Đề 1**	**ĐỀ THI CUỐI HỌC KỲ I (2022-2023)** **MÔN: CS112 - PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN** *Thời gian: 90 phút*

(Sinh viên được sử dụng tài liệu giấy)

HỌ VÀ TÊN SV: .... **MSSV:** .... **STT:** .... **PHÒNG THI:**..	**CÁN BỘ COI THI**

CÂU HỎI TỰ LUẬN

Câu 1 (2.5 điểm) (G1.) **Ký hiệu tiệm cận**

a. Chứng minh:

- Nếu $\mathbf{T(n) = a_k n^k + ... + a_1 n + a_0}$ thì $\mathbf{T(n) = O(n^k)}$, $a_i \in \mathbb{R}\ (0 \le i \le k)$ là các hằng số thực (0.5 điểm)
- $\mathbf{O(n^2) \neq O(n)}$ (0.5 điểm)

b. Với mỗi nhóm hàm bên dưới, hãy sắp xếp các hàm số theo thứ tự tăng dần của "order of growth", và có giải thích ngắn gọn cách thực hiện. Ký hiệu: log là log cơ số 2, $\binom{n}{k}$ là tổ hợp chập k của n. (1.5 điểm)

Group 1:	**Group 2:**
$f_1(n) = n^2\binom{n}{3}$	$f_6(n) = 2^{\log n}$
$f_2(n) = 1.00001^n$	$f_7(n) = 3^{n^{1/5}}$
$f_3(n) = \sqrt{n} * (\log n)^4$	$f_8(n) = n^{4(\log n)^2}$
$f_4(n) = n^{0.999}\log n$	$f_9(n) = \sqrt{n} * 2^{n/2}$
$f_5(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)$	$f_{10}(n) = \sqrt{2^{\sqrt{n}}}$

Câu 2 (1.5 điểm) (G2.) **Phân tích thuật toán**

Mô tả bài toán: Có 3 cột được đặt tên là A,B,C. Cột A hiện đang gắn n đĩa có kích thước khác nhau, đĩa nhỏ ở trên đĩa lớn hơn ở dưới. Hãy chuyển chồng đĩa từ cột A sang cột C (xem cột B là cột trung gian) với điều kiện mỗi lần chỉ dời 1 đĩa, đĩa đặt trên bao giờ cũng nhỏ hơn đĩa đặt dưới.

Cho mã giả thuật toán giải bài toán Tháp Hà Nội như sau:

$(n^2 - n)(n-2)$

$= n^3 - 3n^2 + 2n$

```
hanoi (n, A, B, C)
{  if (n==1) transfer (A, C);
   else
   {     hanoi(n-1, A, C, B);
         transfer(A, C);   // chuyển 1 đĩa từ cột A sang cột C
         hanoi(n-1, B, A, C);
   }
}
```

Giả sử ta chỉ quan tâm đến thao tác chuyển đĩa (transfer) vì đây là tác vụ căn bản của thuật toán. Khi đó, thời gian thực hiện của thuật toán **T(n) được xác định bởi số lần chuyển n đĩa** từ cột này sang cột kia và hiển nhiên T(0) = 0.

Yêu cầu:

a. Thành lập phương trình đệ quy (kèm giải thích ngắn gọn cách thành lập) về số lần tác vụ căn bản (tức thao tác chuyển đĩa) được thực thi trong thuật toán.

b. Giải phương trình đệ quy để xác định độ phức tạp của thuật toán trên dùng **phương pháp truy hồi, còn gọi là thay thế (Backward substitution).**

Câu 3 (2 điểm) (G3.) **Thiết kế thuật toán**

Một mảng được gọi là "weakly unimodal" nếu nó có thể được tách thành 2 mảng con bao gồm một mảng con không giảm được theo sau bởi một mảng con không tăng. Ví dụ: mảng a với các phần tử sau: 1 3 4 5 7 8 10 10 13 14 10 9 9 6 2 2 được xem là một mảng thỏa tính chất trên. Bài toán đặt ra là: Cho một mảng số nguyên a gồm n phần tử thỏa tính chất "weakly unimodal", tìm giá trị lớn nhất trong mảng?

Yêu cầu:

a. Hãy thiết kế một thuật toán theo chiến lược "**Chia để trị (Divide and Conquer)**" để giải bài toán trên. Thuật toán phải được trình bày dưới dạng mã giả, có chú thích và minh hoạ qua ví dụ cho người đọc dễ hiểu.

b. Hãy đánh giá độ phức tạp của thuật toán đã đề xuất (dùng phương pháp nào cũng được nhưng phải có giải thích cách đưa ra được kết quả)

Câu 4 (1.5 điểm) (G 3.) **Thiết kế thuật toán**

Cho một danh sách gồm n số nguyên dương đầu tiên (các số từ 1 đến n). Nhiệm vụ của bạn là tìm tất cả các hoán vị của danh sách các số sao cho không có hai số nào cạnh nhau trong hoán vị đó có hiệu số là 1. Ví dụ, xem xét danh sách số {1, 2, 3, 4}, một hoán vị thỏa mãn yêu cầu là [3, 1, 4, 2], trong hoán vị này, không có hai số nào cạnh nhau có hiệu số là 1.

Yêu cầu : Hãy thiết kế một thuật toán theo chiến lược **"Quay lui (Backtracking)"** để giải bài toán trên (trình bày dưới dạng mã giả, có chú thích cho người đọc dễ hiểu).

Câu 5 (2.5 điểm) (G 3.) **Thiết kế thuật toán**

Một dãy số $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ được gọi là một dãy "gợn sóng" nếu mọi bộ ba liền kề y_i, y_{i+1}, y_{i+2} có trong dãy thỏa $y_i < y_{i+1} > y_{i+2}$ hoặc $y_i > y_{i+1} < y_{i+2}$.

Cho một dãy số nguyên dương có n phần tử x=$(x_1, x_2, \dots, x_n)$, nhiệm vụ của bạn là tìm một dãy con "gợn sóng" dài nhất của x, với thêm một điều kiện bổ sung là: "dãy con dài nhất có kết thúc bởi cặp số đang giảm hoặc bởi cặp số đang tăng".

Ý tưởng giải bài toán trên theo phương pháp **"Quy hoạch động (Dynamic Programming)"** như sau: Gọi DP(i, b) là độ dài của dãy con gợn sóng dài nhất kết thúc bởi x_i, khi b là TRUE thì dãy con này có kết thúc bởi một cặp số đang tăng, ngược lại khi b là FALSE thì cặp số cuối cùng đang giảm. Theo đó, chúng ta cũng sẽ quy ước: một dãy con có độ dài bằng một là vừa tăng vừa giảm dần về cuối.

Ví dụ, cho dãy x gồm 6 phần tử:

$x_1 = 13,\ x_2 = 93,\ x_3 = 86,\ x_4 = 50,\ x_5 = 63,\ x_6 = 4$

thì DB(5, TRUE) = 4 bởi vì dãy con gợn sóng dài nhất có kết thúc là x_5 với trạng thái tăng ở cuối là (x_1, x_2, x_4, x_5). Tuy nhiên, DB(5, FALSE) = 3 vì dãy con giảm ở cuối thì x_4 không được chọn.

Yêu cầu:

a. Tính tất cả các giá trị của DP(i, b) cho dãy số trên. Điền câu trả lời của bạn trong bảng sau:

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6
b = TRUE						
b = FALSE						

b. Cho biết quy luật đệ quy hay còn gọi là quan hệ đệ quy, quan hệ truy hồi (recurrence relation) để tính giá trị DP(i,b)

c. Cho biết rõ các trường hợp cơ sở (base case) của đệ quy, tức là các giá trị mà chúng ta biết trước và không phụ thuộc vào việc tính toán từ các giá trị khác.

d. Cho biết thứ tự giải của các bài toán con theo tiếp cận từ dưới lên (bottom-up).

e. Nếu bạn được cho các giá trị của DP(i, b) với mọi $1 \le i \le n$ và mọi b ∈{TRUE, FALSE}, làm cách nào bạn có thể sử dụng các giá trị đó để kết luận độ dài của dãy con kết quả cũng như cho biết dãy con đó gồm những phần tử nào?

f. Khi các phần tử (b) đến (e) được kết hợp với nhau có thể tạo thành một thuật toán như bên dưới. Phân tích độ phức tạp về thời gian của thuật toán này, và nhớ đưa ra câu trả lời đầy đủ của bạn cho các câu hỏi ở trên.

```
longestsubsequence (x_1, x_2, ..., x_n)
{
 1. Khởi tại bảng T
 2. for each subproblem (i,b), xét các bài toán theo thứ tự được chỉ ra trong câu (d)
 3.     if (i,b) là trường hợp cơ sở
 4.         dùng (c) để xác định DB(i,b)
 5.     else
 6.         dùng (b) để tính DB(i,b)
 7.     Lưu giá trị đã tính của DB(i,b) vào trong bảng T
 8. Dùng (e) để truy xuất lời giải của bài toán
}
```

----------HẾT---------